Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications

Céline Lacombe

▶ **To cite this version:**

Céline Lacombe. Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications. Géophysique [physics.geo-ph]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2001. Français. NNT : . tel-00759982

HAL Id: tel-00759982
https://theses.hal.science/tel-00759982

Submitted on 3 Dec 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TS 01/GRE1/0239/D
double
548

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Céline LACOMBE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : **Sciences de la Terre et de l'Univers**

Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications

Date de soutenance : 21 décembre 2001

Composition du jury :

M. B. Chouet	Rapporteur	USGS, San Francisco
M. B. Feignier	Examinateur	LDG, Bruyères-Le-Châtel
M. R. Maynard	Président	UJF, Grenoble
Mme A. Paul	Directeur de thèse	LGIT, Grenoble
M. P. Roux	Rapporteur	ESPCI, Paris
M. J. Virieux	Examinateur	Géoscience Azur, Nice

Thèse de Doctorat de l'Université
Joseph Fourier - Grenoble I

Titre de l'ouvrage :

Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications

Auteur :

Céline LACOMBE

Etablissement :

Observatoire de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne
et Tectonophysique

Résumé : Cette thèse a pour but d'évaluer l'hétérogénéité crustale et de comprendre son effet sur la propagation des ondes sismiques. Nous étudions l'énergie de la coda de sismogrammes courte période. Pour cela, nous simulons la propagation des ondes en milieu hétérogène en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR) par des méthodes Monte Carlo. La première partie de cette thèse est effectuée dans l'approximation acoustique. Nous résolvons l'ETR dans un milieu composé d'un guide d'ondes hétérogène (la croûte) et d'un demi espace transparent (le manteau). Ces simulations sont comparées aux observations de la coda de séismes régionaux français. Cette étude nous permet de définir un modèle simple pouvant expliquer l'atténuation des ondes Lg directes et de leur coda en temps et en distance. Nous montrons qu'en France l'atténuation produite par les diffracteurs est de l'ordre de l'absorption anélastique. Dans un deuxième temps, nous étudions la possibilité d'imager un contraste latéral d'hétérogénéité dans les volcans. Avec des simulations numériques, des analyses de données et des expériences en laboratoire, nous montrons qu'un contraste latéral d'hétérogénéité influence fortement la répartition spatio-temporelle de l'énergie de la coda. La seconde partie est consacrée à la diffusion multiple des ondes élastiques dans un milieu stratifié composé d'un guide d'onde hétérogène d'épaisseur H (croûte) et d'un demi espace homogène (manteau). Une étude de coda-Q montre que la fuite vers le manteau est gouvernée par le libre parcours moyen de transport l^*, et cela même si $l^* >> H$. Nous montrons également que les valeurs de coda-Q obtenues sont, pour un l^* donné, identiques à celles mesurées en acoustique. Enfin, nous étudions le phénomène d'équipartition (stabilisation du rapport entre l'énergie des ondes S et P). Nous montrons que la valeur de stabilisation du rapport dépend de l'anisotropie de scattering et de l^*.

Mots Clefs : Sismologie, Coda, Diffusion multiple, Transfert radiatif, Monte Carlo, Elasticité, Lithosphère francaise, Volcans.

TS 01/GRE1/0239
DOUBLE

OBSERVATOIRE DE GRENOBLE
et
LABORATOIRE DE GÉOPHYSIQUE INTERNE ET TECTONOPHYSIQUE

Thèse

présentée par

Céline LACOMBE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I

Spécialité : **Sciences de la Terre et de l'Univers**

Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications

Date de soutenance : 21 décembre 2001

BIBLIOTHÈQUE SCIENCES GRENOBLE UNIVERSITAIRE

Composition du jury :

M. B. Chouet	Rapporteur	USGS, San Francisco
M. B. Feignier	Examinateur	LDG, Bruyères-Le-Châtel
M. R. Maynard	Président	UJF, Grenoble
Mme A. Paul	Directeur de thèse	LGIT, Grenoble
M. P. Roux	Rapporteur	ESPCI, Paris
M. J. Virieux	Examinateur	Géoscience Azur, Nice

ppn 068697139

Avant propos

Devines si tu peux, choisis si tu l'oses
Corneille, Héraclius, IV,4

Les rites étant un bien nécessaire, il est temps de remercier tous ceux qui ont participé de près ou de loin à cette belle thèse.
Je tiens tout d'abord à remercier Anne et Michel. Depuis la maitrise et mes premiers pas en sismologie, ils ont toujours su me conseiller, me diriger et mes donner les élans de motivations nécessaires à l'aboutissement de cette thèse.
Un grand merci aux deux rapporteurs (Bernard Chouet et Philippe Roux), pour avoir jugé ce travail ainsi qu'à Jean Virieux, Roger Maynard et Bruno Feignier d'avoir accepté de faire partie du jury de thèse.
Merci à "l'équipe coda" (la fine appellation): Ludovic Margerin, Bart van Tiggelen, Nicolas Trégourès et Renaud Hennino. Les réunions quasi-hebdomadaires m'ont initiée à la diffusion multiple (et c'était long comme lacune). Merci à tous pour votre clarté, votre bonne humeur. Un merci particulier à Ludo qui m'a précédée dans ce travail et qui a toujours été là.
Merci à Arnaud Derode et Arnaud Tourin de nous avoir apporté une collaboration précieuse lors des manips des volcans réalisées au laboratoire de Mathias Fink. Merci également à Bruno Feignier (LDG/CEA) et à Bernard Chouet (USGS) de nous avoir fourni les données françaises et Hawaiiennes.
Je remercie également Catherine de nous avoir épargné de nombreuses pannes de micro. Merci à Jocelyne, Martine et France pour leur efficacité.
Un merci tout spécial aux membres du "jeudi de la gastronomie": Anne, Michel, Nathalie, Martine et Cécile. Que de découvertes culinaires: patia, lotte épicée, flan anglais, hachis parmentier et pâte à choux. Sans oublier le vin d'Alsace.
Merci à tous les membres du labo, permanents, étudiants et ex-étudiants que j'ai appris à connaître tout au long de ces trois ans et qui m'ont soutenue jusqu'à aujourd'hui. Merci à tous ceux qui m'ont logée pendant ma période SDF. Un merci particulier à ceux qui ont partagé mon bureau et qui sans fin ni cesse ont eu le courage de me supporter. Merci à ceux qui m'ont fait découvrir de nouveaux horizons, qu'ils soient géographiques (ah, revoir ce vieux Lycée Ampère), littéraires ou artistiques (je suis devenue une as en peinture sur porcelaine).
Enfin, un grand merci à ma famille et à mes amis, qui ont été présents pendant ces trois ans.

Table des matières

1 Introduction 7

I Propagation des ondes acoustiques en milieu hétérogène 17

1 L'équation de transfert radiatif acoustique 19

1.1 Approche phénoménologique du transfert radiatif 20

1.1.1 L'équation de transfert radiatif 20

1.1.2 De l'équation de transfert à l'équation de diffusion 22

1.2 De l'équation des ondes à l'équation de transfert radiatif 24

1.2.1 Théorie des perturbations 24

1.2.2 Equation du champ moyen: équation de Dyson 25

1.2.3 Interprétation de la solution de l'équation de Dyson: champ moyen dans un milieu infini 26

1.2.4 Equation de la corrélation du champ: équation de Bethe-Salpeter . 27

1.3 Résolution de l'équation de transfert radiatif 28

1.3.1 Résolution d'intégrales multidimensionnelles par Monte Carlo . . . 28

1.3.2 Schéma de la simulation Monte Carlo 30

1.3.3 Marche aléatoire 31

1.3.4 Probabilité de retour au récepteur 34

1.3.5 Stabilité de la méthode Monte Carlo. Temps de calcul. 35

1.4 Bibliographie 37

2 Atténuation intrinsèque et atténuation due au scattering de la lithosphere française 39

2.1 Introduction 40
2.2 Observations 42
2.3 Data processing 44
2.4 Inversion 46
2.4.1 Direct problem: numerical simulations 46
2.4.2 Comparison window and misfit function 47
2.4.3 Grid search 48
2.5 Results of the inversion for models with a transparent mantle 49
2.5.1 Whole *Lg* coda 49
2.5.2 Early Lg coda 52
2.5.3 Attenuation of the direct *Lg* wavetrain 52
2.5.4 Discussion 54
2.6 Discussion 56
2.6.1 Results at other frequencies 56
2.6.2 Influence of mantle heterogeneity 56
2.7 Conclusion 56
2.8 Acknowledgments 59
2.9 Bibliography 59

3 Propagation des ondes dans les volcans. 65
3.1 Variation spatiale de l'amplitude de la coda dans les volcans 66
3.1.1 Facteur d'amplification de la coda au Piton de la Fournaise 66
3.1.2 Facteur d'amplification de la coda au Kilauea 69
3.1.3 Discussion et Conclusion 71
3.2 Etude numérique 73
3.2.1 Modèle et hypothèses de travail 73
3.2.2 Simulation Monte Carlo de la propagation des ondes 74
3.2.3 Principe de la mesure de l'effet du volume hétérogène 77
3.2.4 Mesure de l'amplification de la coda: effet du cube hétérogène . . . 77
3.2.5 Influence de la profondeur de la source 83
3.2.6 Discussion et conclusions 85
3.3 Etude expérimentale 85
3.3.1 Dispositif expérimental 86
3.3.2 Effet du cube sur la propagation des ondes 87
3.3.3 Comparaison avec les simulations 88

3.3.4 Conclusion 93
3.4 Conclusion 94
3.5 Bibliographie 94

II Propagation des ondes élastiques en milieu hétérogène 97

1 Propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène 99
1.1 L'équation de transfert radiatif élastique 100
1.1.1 Description de la polarisation: Les vecteurs de Stokes 100
1.1.2 Propriétés des vecteurs de Stokes 101
1.1.3 L'équation de transfert 102
1.2 Diffraction par une sphère 103
1.2.1 Deux régimes de scattering 104
1.2.2 Propagation du vecteur de Stokes: Matrice de scattering et matrice de Mueller 104
1.2.3 Dépendance angulaire de l'onde diffractée: Sections efficaces de scattering 108
1.3 Approximation de diffusion et équipartition 109
1.3.1 L'équation de diffusion 109
1.3.2 Equipartition 110
1.4 Caractéristiques des régimes de Rayleigh et de Rayleigh-Gans 111
1.4.1 Scattering de Rayleigh 112
1.4.2 Scattering de Rayleigh-Gans 112
1.5 Principes de la méthode Monte Carlo élastique 114
1.5.1 Modèle 114
1.5.2 Principe de la simulation 115
1.5.3 Marche aléatoire 115
1.5.4 Contribution énergétique des particules 120
1.6 Bibliographie 122

2 Propagation of elastic wave in a heterogeneous and stratified medium using Radiative transfer theory. 127
2.1 Introduction 127
2.2 Elastic wave propagation in a heterogeneous medium 128
2.2.1 Scattering by a spherical inclusion 129

2.2.2 Elastic radiative transfer theory 130
2.2.3 Quasi-2D approximation 131
2.2.4 Generalized diffusion equation 132
2.3 Numerical model of the lithosphere 134
2.4 Synthetic coda analysis 136
2.4.1 Rayleigh regime 137
2.4.2 Effect of the anisotropy on energy densities 140
2.5 Coda-Q in a stratified model. Comparison with the generalized diffusion approximation and with the quasi 2D approximation. 142
2.5.1 Q_c measurement in Monte Carlo simulations 142
2.5.2 Q_c vs l^* 142
2.6 Conclusion 146
2.7 Bibliography 146

3 Transfert radiatif des ondes élastiques dans un milieu stratifié. II. Equipartition des ondes de volume 151
3.1 Introduction 151
3.2 Effet de la stratification sur la valeur d'équipartition 152
3.2.1 Cas du demi espace (modèle A) 153
3.2.2 Cas d'un contraste de libre parcours moyen (modèle B) 154
3.2.3 Cas d'un contraste de libre parcours moyen et de vitesse (modèle C) 156
3.3 Equipartition en fonction de la distance 158
3.4 Conclusion 159
3.5 Bibliographie 160

4 Conclusion générale et perspectives 163

Chapitre 1

Introduction

Jusqu'au début des années 1970, la coda des sismogrammes enregistrés à distance locale ou régionale (figure 1.1) a été négligée au profit de l'étude et de la compréhension des ondes directes. Pourtant, cette partie du sismogramme peut s'étendre sur plusieurs minutes et représente la majorité d'un enregistrement sismique. Aki [1969] est le premier à s'être intéressé à ce train d'onde qui compose la fin du sismogramme et à voir en lui un marqueur direct de l'hétérogénéité de la lithosphère. Il interprète alors les ondes de la coda comme des ondes diffractées par des hétérogénéités réparties aléatoirement dans la lithosphère, ces hétérogénéités pouvant être dues à des contraste de vitesse et de densité du milieu (Wu et Aki [1988b]).

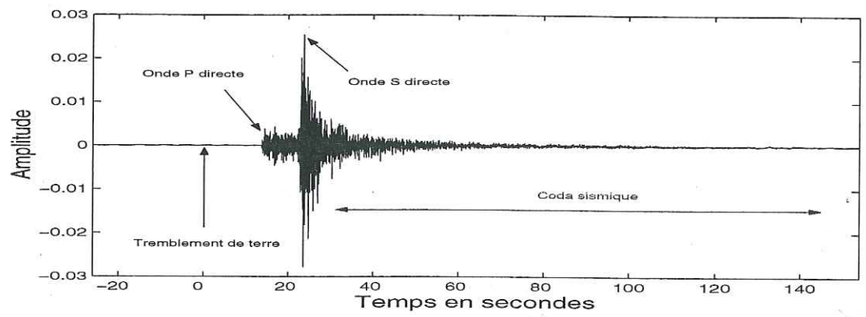

FIG. 1.1 – *Sismogramme enregistré au Mexique pour une distance épicentrale de 30 km lors d'un événement de magnitude 4.3. Après l'arrivée des ondes directes P et S, on voit nettement la coda sismique qui s'étend sur 120 s environ.*

Aki et Chouet [1975] ont étudié la coda des séismes locaux courtes périodes (< 1s) et ont montré qu'elle possède des propriétés étonnantes: la décroissance temporelle de l'énergie de la coda est en effet indépendante de la magnitude du séisme et de la position relative source-récepteur. Ces auteurs ont proposé deux modèles pour expliquer la coda, tous deux considérant le milieu de propagation comme un demi espace, c'est à dire sans prendre en compte la séparation croûte-manteau. Suivant le taux d'hétérogénéité du mi-

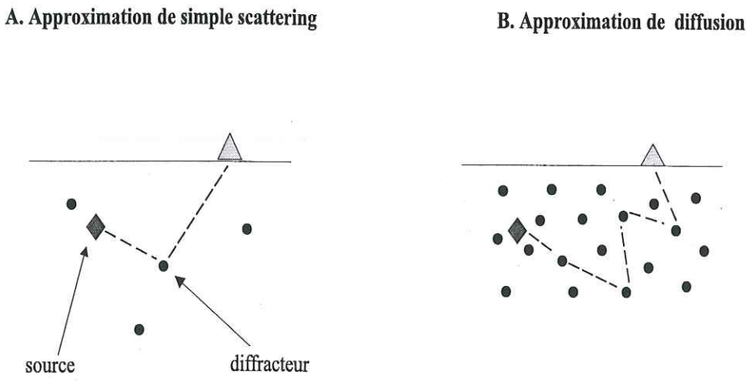

FIG. 1.2 – *Deux régimes pour expliquer la coda:* **A.** *Régime de simple scattering: entre la source et le récepteur, l'onde ne rencontre qu'un diffracteur;* **B.** *Régime de diffusion: entre la source et le récepteur, l'onde rencontre un grand nombre de diffracteurs.*

lieu, l'approximation de simple scattering (figure 1.2, A) ou l'approximation de diffusion (figure 1.2, B) peut expliquer la coda. Le modèle de la simple scattering dans un milieu infini a, de par sa simplicité séduit de nombreux sismologues (voir Herraiz et Espinoza [1987] pour une review). Il est toutefois légitime de se demander si le régime de simple scattering est le bon modèle pour expliquer la coda.
Aki et Chouet [1975] ont également défini le paramètre coda-Q (Q_c) mesurant la décroissance temporelle de l'énergie de la coda:

$$E(t)\alpha\frac{1}{t^\gamma}\exp(-\frac{2\pi ft}{Q_c}) \tag{1.1}$$

où f est la fréquence et γ un paramètre variant entre 1 et 2. Obtenir Q_c à partir de cette équation est relativement simple. Cette mesure a donc été réalisée dans de nombreuses régions et comparée au contexte sismo-tectonique (voir Herraiz et Espinoza [1987] et Sato et Fehler [1998] pour une review). Il a été montré (Singh et Herrmann [1983], Jin et Aki [1988]) que, à 1 Hz, Q_c varie selon les régions considérées: Q_c est plus faible pour les régions tectoniquement actives que pour les autres régions. Q_c augmente avec la fréquence

avec un taux d'autant plus important que la valeur de Q_0 (Q_c à 1 Hz) est faible, c'est à dire dans les régions tectoniquement actives (Singh et Herrmann [1983]). En 1979, Chouet est le premier à observer un changement temporel de la valeur de Q_c. Par la suite, il a été observé que la valeur de Q_c peut changer après un grand tremblement de terre (Jin et Aki [1986]) ou après un éruption volcanique (Fehler et al [1988], Londoño [1996], Londoño et al [1998]). Ce paramètre semble donc refléter les propriétés du milieu dans lequel se propagent les ondes.

Deux problèmes se posent alors aux sismologues. D'une part, la signification physique de Q_c n'est pas réellement comprise. D'autre part, il est légitime de se demander si le régime de simple scattering dans un espace infini est le bon modèle pour expliquer la coda.

Pour mieux comprendre la propagation des ondes dans la croûte et répondre à ces questions, la sismologie a fait appel aux techniques développées dans d'autres domaines de la physique. En effet, de nombreux autres domaines sont concernés par la diffusion multiple. Entre autres, nous pouvons citer l'astrophysique, l'optique, l'acoustique ou l'imagerie médicale. Des théories et des formalismes communs à tous ces domaines ont été développés, en dépit des différences entres les types d'ondes concernées (acoustiques, électromagnétiques ou élastiques) et des différentes échelles de longueur d'onde (de l'Angström pour l'optique au kilomètre pour les ondes sismiques). C'est en 1985 qu'a été introduite en sismologie l'équation de transfert radiatif acoustique par Wu [1985] et Wu et Aki [1988a]. Cette théorie, qui exprime la conservation de l'énergie a été développée par les astrophysiciens (Chandrasekhar [1960]) pour décrire la propagation de la lumière dans l'atmosphère. Cette théorie décrit tous les ordres de scattering, de la diffusion simple à l'approximation de diffusion en passant par la diffusion multiple. Elle est donc beaucoup plus générale que les deux modèles introduits par Aki et Chouet [1975] (voir figure 1.2). En appliquant cette théorie du transport dans un milieu semi-infini, ces auteurs ont montré qu'il était possible de séparer l'absorption intrinsèque de l'atténuation due au scattering. Cette méthode, appelée *Multiple Lapse Time Window Analysis* a évolué avec le temps (Toksöz et al. [1988], Mayeda et al. [1991], Fehler et al. [1992], Hoshiba [1993]) et a été appliquée dans de nombreuses régions du globe en gardant toujours l'hypothèse du demi espace uniforme. Elle a permis de montrer l'importance relative de la diffraction par rapport à l'atténuation intrinsèque selon les régions et que l'absorption augmente fortement avec le fréquence.

Toutefois, il est illusoire de considérer le modèle de demi espace comme réaliste. En effet, le contraste de vitesse au Moho et donc le rôle de guide d'ondes de la croûte est bien connu. De plus, de nombreuses études de sismique réflexion (Enderle et al. [1997], Fuchs et al. [1987], Bois et al. [1988]) montrent que la croûte est caractérisée par une hétérogénéité importante comparée à celle du manteau. Hoshiba [1994,1997] est le premier a avoir modélisé la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié en résolvant l'équation de transfert radiatif acoustique par des simulations Monte Carlo. Récemment, Margerin et al [1998a,1999] ont proposé un nouveau modèle pour expliquer la coda à partir d'un milieu stratifé, plus proche de la réalité qu'un demi espace. Le modèle proposé par Margerin et al [1998a] est reproduit sur la figure 1.3. Il se compose d'une croûte hétérogène et d'un manteau transparent. Dans ce modèle, la coda est due à la diffusion multiple des ondes dans la croûte. La décroissance exponentielle (Q_c) peut être interprétée par la fuite des ondes dans le manteau (le manteau étant transparent, les ondes y accédant sont perdues) et par une faible atténuation intrinsèque. Toutefois, ce modèle est toujours sujet à controverse (Hoshiba [2001]).

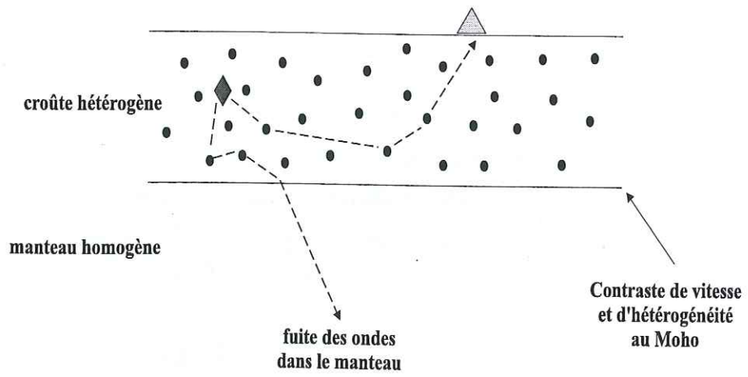

FIG. 1.3 – *Modèle proposé par Margerin et al. [1998a] pour expliquer la coda. Dans ce cas, la coda est due à la diffusion multiple des ondes dans la croûte.*

Toutes les études présentées jusqu'ici ont été réalisées dans l'hypothèse que les ondes sismiques sont des ondes scalaires. Quelques efforts théoriques ont été effectués pour introduire les couplages entre les ondes P et S (Zeng [1993], Sato [1994]) mais tous reposent sur des hypothèses trop simples pour être réalistes (Turner [1998]). Après l'obtention de l'équation de transfert radiatif élastique par Weaver [1990] et Ryzhik et al. [1996], des

simulations Monte Carlo de propagation d'ondes élastiques ont été effectuées dans un espace infini par Margerin et al. [2001] et dans un demi espace par Margerin [1998b]. Ces simulations ont permis de mieux comprendre le phénomène d'équipartition (stabilisation des rapports d'énergie P et S) déjà observé par Shapiro et al. [2000].

Dans cette thèse, nous nous focaliserons sur la propagation des ondes acoustiques et élastiques dans des milieux hétérogènes réaliste: c'est à dire présentant des contrastes d'hétérogénéité et de vitesse. Ce travail de thèse se décompose en deux parties:

- La première partie est consacrée à l'étude de **la propagation des ondes acoustiques dans un milieu hétérogène**. Nous supposons que les ondes sismiques peuvent être approximées par des ondes acoustiques. Cette approximation est une approche classiquement utilisée en sismologie et justifiée par le fait que la coda des sismogrammes est majoritairement composée d'ondes S (Aki [1992], Papanicolaou et al. [1996a,b]). Nous nous intéresserons à l'effet de la variation de l'hétérogénéité (variation avec la profondeur dans le chapitre 2 ou variation latérale dans le chapitre 3) sur l'énergie de la coda.

  - Dans le premier chapitre, nous rappellerons la théorie du transfert radiatif acoustique que nous utiliserons dans la suite de cette thèse. Nous montrerons le lien entre l'équation des ondes et l'équation du transfert radiatif. Enfin, nous présenterons la méthode Monte Carlo que nous utiliserons pour résoudre cette équation.

  - Le second chapitre étudie la coda des phases régionales (Lg). Des simulations numériques de propagation d'ondes dans un milieu stratifié sont comparées à des données régionales enregistrées par le réseau LDG (distance épicentrale > 100 km). Cette comparaison permet de caractériser la croûte française en terme d'atténuation intrinsèque et d'hétérogénéité. En ajoutant à ce résultat les mesures d'atténuation des ondes directes en France, un modèle de croûte expliquant l'atténuation des ondes directes et de la coda en temps et en espace peut être obtenu.

  - Le troisième chapitre traite de la propagation des ondes dans un milieu présentant un contraste d'hétérogénéité. Cette étude est appliquée au cas des

volcans. Nous essayerons de valider l'hypothèse de Aki et Ferrazzini [2001] selon laquelle des effets de piégeage de l'énergie de la coda peuvent être associés à des contrastes d'hétérogénéité du milieu, contraste lié à la présence de zone magmatique. Pour valider cette hypothèse, nous étudierons des données enregistrées au Kilauea (Hawaii) puis des simulations numériques et des expériences en laboratoire.

- La seconde partie de cette thèse est consacrée à l'étude de **la propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène**. Le milieu présente un contraste de vitesse et d'hétérogénéité avec la profondeur. Dans cette partie, nous supposerons que les hétérogénéités sont matérialisées par des inclusions sphériques présentant un faible contraste de vitesse et de densité avec le milieu homogène.

  - Le premier chapitre est consacré à l'équation de transfert radiatif élastique. Nous expliciterons également les caractéristiques du scattering des ondes élastiques par une inclusion sphérique. Enfin, nous nous intéresserons à la résolution de l'équation de transfert élastique par des méthodes Monte Carlo.

  - Dans un second chapitre, nous nous focaliserons sur la propagation des ondes élastiques dans un milieu stratifié. Nous étudierons l'évolution de Q_c en fonction de l'hétérogénéité dans la croûte. Cette évolution sera comparée à celle obtenue pour le cas acoustique (Margerin et al [1999]).

  - Enfin, le dernier chapitre sera consacré à l'étude qualitative du phénomène d'équipartition. Nous montrerons que le rapport entre l'énergie des modes S et P se stabilise avec le temps. Nous nous focaliserons sur la valeur de cette stabilisation et sur le temps nécessaire pour atteindre le régime d'équipartition dans le cas d'un milieu stratifié.

Bibliographie

Aki, K., Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, **74**, 615-631, 1969.

Aki, K., Scattering conversions P to S versus S to P, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **82**, 1969-1972, 1992.

Aki, K. et B. Chouet, Origin of coda waves: source, attenuation and scattering effects, *J. Geophys. Res.*, **80**, 3322-3342, 1975.

Aki, K. et V. Ferrazzini, Seismic monitoring and modeling of an active volcano for prediction, *J. Geophys. Res.*, **105**, 16 617 - 16 640, 2001.

Bois, C., M. Cazes, A. Hirn, A. Mascle, P. Matte, L. Montadert and B. Pinet, Contribution of deep seismic profiling to the knowledge of the lower crust in France and neighbouring area, *Tectonophysics*, **145**, 253-275, 1988.

Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover, New York, 1960.

Chouet, B., *Geophys. Res. Letter*, **6**, 143-146, 1979.

Enderle, U., M. Tittgemeyer, M. Itzin, C. Prodehl, K. Fuchs, Scales of structure in the lithosphere-images of processes, *Tectonophysics*, **275**, 165-198, 1997.

Fehler M., P. Roberts and T. Fairbanks, A temporal change in coda wave attenuation observed during an eruption of Mount St Helens, *J. Geophys. Res.*, **93**, 4367-4373, 1988.

Fehler M., M. Hoshiba, H. Sato and K. Obara, Separation of scattering and intrinsic attenuation for the Kanto-Tokai region, Japan, using measurement of S-wave energy versus hypocentral distance, *Geophys. J. Int.*, **108**, 787-800, 1992.

Fuchs, K., K.P. Bonjer, D. Gajewski, E. Lüschen, C. Prodehl, K.J. Sandmeier, F. Wenzel and H. Wilhelm, Crustal evolution of the Rhinegraben area. 1. Exploring the lower crust in the Rhinegraben rift by unified geophysical experiments, *Tectonophysics*, **141**,

261-275, 1987.

Gusev, A., Vertical profile of turbidity and coda Q, *Geophys. J. Int.*, **123**, 665 -672, 1995.

Herraiz, M., et A.F. Espinoza, Coda waves: a review, *Pure appl. geophys.*, **125**, 499-577, 1987.

Hoshiba, M., Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using the multiple lapse time window analysis of full seismogram envelope, *J. Geophys. Res.*, **98**, 15809-15824, 1993.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geoph. Res. Lett.*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth dependent S-wave velocity structure, *Phys. Earth and Planet. Inter.*, **104**, 15-22, 1997.

Hoshiba, M., R. Rietbrock, F. Scherbaum, H. Nakahara and C. Haberland, Scattering attenuation and intrinsic absorption using uniform and depth dependent model - Application to full seismogram envelope recorded in Northern Chile, *Journal of Seismology*, **5**, 157-179, 2001.

Jin A. et K. Aki, Temporal change in coda Q before the Tangshan earthquake of 1976 and the Haicheng earthquake of 1975, *J. Geophys. Res.*, **91**, 665-673, 1986.

Jin A. et K. Aki, Spatial and temporal correlation between coda Q and seismicity in China, *Bull. Seismol. soc. Am.*, **78**, 741-769, 1988.

Londoño J.M., Temporal change in coda Q at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *J. volcanol. geotherm. res.*, **73**, 129-139, 1996.

Londoño J.M., A.J.J. Sanchez, E.L.E. Toro, F. Gil Cruz and O.P. Bohorquez, Coda Q before and after the eruptions of 13 November 1985, and 1 September 1989, at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *Bull. Volcanol.*, **59**, 556-561, 1998.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. Van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q, *Geophys. J. Int.*, **134**, 596-612, 1998a.

Margerin, L., *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*, Université Joseph Fourier, 1998b.

Margerin, L., M. Campillo, N.M. Shapiro and B.A. Van Tiggelen, Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q: application to seismograms recorded in Mexico, *Geophys. J. Int.*, **138**, 343-352, 1999.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. van Tiggelen, Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves, *J. Geophys. Res.*, **105**, 7873-7892, 2001.

Mayeda, K, F. Su and K. Aki, Seismic albedo from the total seismic energy dependence on hypocentral distanec in southern California, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **67**, 104-114, 1991.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1107-1115, 1996a.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, Erratum, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1996b.

Ryzhik, L., G.C. Papanicolaou and J.B. Keller, Transport equations for elastic and other waves in random media, *Wave motion*, **24**, 327-370, 1996.

Sato, H., Multiple isotropic scattering model including P-S conversions for the seismogram envelope formation, *Geophys. J. Int.*, **117**, 487-494, 1994.

Sato, H. and M. Fehler, Wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth, Springer Verlag, New York, 1998.

Shapiro, N.M., M. Campillo, L. Margerin, S.K. Singh, V. Kostoglodov and J. Pacheco, The energy partitioning and the diffusive character of the seismic coda, *Bull. Seims. Soc.*

Am., **90**, 655-665, 2000.

Singh S. et R.B. Herrmann, Regionalization of crustal coda Q in the continental United States, *J. Geophys. Res.*, **88**, 527-538, 1983.

Turner, J.A., Scattering and diffusion of seismic waves, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **88**, 276-283, 1998.

Toksöz, M.N., A.M. Dainty, E. Reiter and R.S. Wu, A model for attenuation and scattering in the Earth's crust, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 81-100, 1988.

Weaver, R.L., Diffusivity of ultrasound in polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, **38**, 55-86, 1990.

Wu, R.S., Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation- I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 57-80, 1985.

Wu, R.S. et K. Aki, Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - Separation of scattering effect from intrinsic attenuation II. Application of the theory to Hindu Kush region, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 49-80, 1988a.

Wu, R.S. et K. Aki, Introduction of seismic wave scattering in three-dimensionally heterogeneous Earth, *Pure appl. geophys.*, **128**, 1-6, 1988b.

Zeng Y., 1993, Theory of scattered P and S-wave energy in a random isotropic scattering medium, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **83**, 1264-1276.

Première partie

Propagation des ondes acoustiques en milieu hétérogène

Chapitre 1

L'équation de transfert radiatif acoustique

L'hétérogénéité crustale existe sur un grand nombre d'échelles (Wu et Aki [1988], Sato et Fehler [1998]). La croûte est donc un milieu complexe pour lequel on ne peut pas utiliser les méthodes classiques de propagation des ondes qui nécessitent la connaissance des paramètres élastiques en chaque point du milieu. Pour résoudre ce problème de propagation d'ondes en milieu hétérogène et essayer de se ramener à un petit nombre de paramètres, Wu [1985] et Wu et Aki [1985] ont, les premiers en sismologie, introduit la notion de *théorie du transfert radiatif* ou *théorie du transport*. Cette théorie a été développée, en autres, par Chandrasekhar [1960] afin de modéliser la propagation des ondes électromagnétiques dans l'atmosphère. Dans cette théorie, le caractère aléatoire des signaux est utilisé pour caractériser le milieu et l'énergie du champ par leur valeur moyenne. L'intensité moyenne dans un milieu aléatoire est alors décrite par une équation de transport. Initialement, la théorie du transfert radiatif est une théorie phénoménologique qui traite de la conservation de l'énergie, sans tenir compte de la phase. L'énoncé de cette théorie sera exposé dans le premier paragraphe de ce chapitre. Dans une deuxième partie, nous montrerons que la théorie du transfert radiatif est une conséquence rigoureuse de l'équation des ondes. Enfin, le dernier paragraphe de ce chapitre sera consacré à la résolution numérique de l'équation de transfert radiatif.

1.1 Approche phénoménologique du transfert radiatif

Dans cette première partie, nous allons énoncer l'équation de transfert radiatif acoustique phénoménologique telle qu'elle a été développée par Chandrasekhar en 1960. La phase n'intervient pas dans cette théorie, basée sur la propagation de l'énergie. Le transfert radiatif phénoménologique ne peut donc expliquer des phénomènes liés aux interférences tels que le cône de rétrodiffusion cohérente. Pour de plus amples détails, le lecteur pourra se référer aux ouvrages de Kourganoff [1963]; Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989]; Ishimaru [1978] ou Apresyan et Kravtsov [1996].

1.1.1 L'équation de transfert radiatif

Soit I_k *l'intensité spécifique*. Elle représente la quantité d'énergie traversant une surface dans une direction $\mathbf{k}$ donnée par unité de temps, d'angle solide et de surface. Nous allons expliciter la propagation de cette intensité I_k dans un milieu hétérogène statistiquement isotrope (i.e. ses caractéristiques statistiques sont invariantes par rotation), parfaitement élastique et contenant des diffracteurs de section efficace σ_s. La densité des diffracteurs dans le milieu sera notée η. On définit alors le *libre parcours moyen* du milieu l par $l = \frac{1}{\sigma_s \eta}$.

Bilan énergétique

L'équation de transfert radiatif s'obtient en écrivant le bilan énergétique d'un volume infinitésimal contenu dans le milieu hétérogène. Considérons un parallélépipède de surface unitaire et de longueur dz (Figure 1.1). Le nombre de diffracteurs dans ce volume est alors donné par ηdz.
Si l'on suppose que la boîte se propage avec l'onde, on peut mesurer l'énergie qui entre et sort de celle ci. La variation de l'intensité spécifique peut alors être due à trois phénomènes (Figure 1.1):

- Une partie de l'énergie se propageant dans la direction $\mathbf{k}$ est perdue par diffraction dans une autre direction $\mathbf{k}'$ (Figure 1.1, A). Cette perte peut s'exprimer par:

$$dI_k = -I_k \eta dz \sigma_s$$

- Le faisceau peut également gagner de l'énergie. Un faisceau se propageant dans la direction $\mathbf{k}'$ peut être diffracté dans la direction $\mathbf{k}$ et donc venir renforcer le faisceau

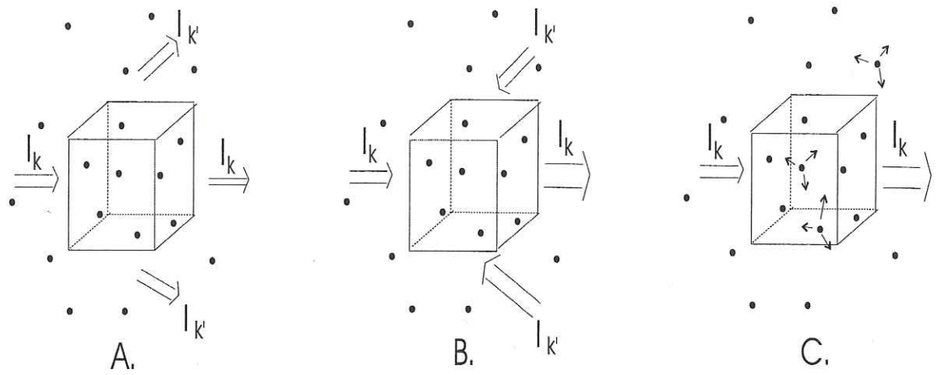

FIG. 1.1 – *Différents processus pouvant affecter le faisceau se propageant dans la direction* $\mathbf{k}$. *A: perte par diffraction, B: gain par diffraction et C: gain par des sources intérieures.*

incident I_k (Figure 1.1, B).
Ce gain peut être exprimé par:

$$dI_k = +\eta dz \int \frac{d\sigma_s(\mathbf{k}' \to \mathbf{k})}{d\Omega} I_{k'} d\mathbf{k}'$$

où $\frac{d\sigma_s(\mathbf{k}' \to \mathbf{k})}{d\Omega}$ donne la probabilité pour un faisceau se propageant dans la direction $\mathbf{k}'$ d'être diffracté dans la direction $\mathbf{k}$.

- Enfin, s'il existe des sources émettrices d'énergie dans la boîte (rôle que peut jouer par exemple la fusion nucléaire dans le soleil) on a un apport d'énergie dans la direction $\mathbf{k}$ et par unité de dz (Figure 1.1, C) donné par:

$$dI_k = e(\mathbf{x}, \mathbf{k}, t)$$

L'équation de transfert radiatif

La variation de l'intensité spécifique est de la forme (dérivée particulière):

$$\frac{dI_k}{dt} = \partial_t I_k + v\mathbf{k}.\nabla I_k$$

On peut alors faire le bilan énergétique de la boîte, sachant que I_k dépend de la position $\mathbf{x}$ dans le milieu, du temps t et bien évidemment de la direction de propagation $\mathbf{k}$:

$$\frac{1}{v}\frac{\partial I(\mathbf{x},\mathbf{k},t)}{\partial t} + \mathbf{k}.\nabla I(\mathbf{x},\mathbf{k},t) = -\frac{I(\mathbf{x},\mathbf{k},t)}{l} + \frac{1}{4\pi l}\int_{4\pi} d\mathbf{k} p(\mathbf{k},\mathbf{k}') I(\mathbf{x},\mathbf{k}',t) + e(\mathbf{x},\mathbf{k},t) \quad (1.1)$$

où $\int_{4\pi}$ indique une intégrale sur tout l'espace et où le terme normalisé $p(\mathbf{k},\mathbf{k}') = \dfrac{d\sigma_s(\mathbf{k}' \to \mathbf{k})}{d\Omega}$ est appelé *fonction de phase.*

Cette équation est *l'équation de transfert radiatif acoustique.* C'est une équation phénoménologique décrivant la propagation de l'énergie dans le milieu, sans tenir compte de la phase. Elle exprime la conservation locale de l'énergie.

Le terme de gauche de l'équation (1.1) exprime la variation de l'intensité d'un faisceau d'énergie se propageant dans la direction $\mathbf{k}$. Le premier terme de droite exprime la perte d'énergie due au scattering du faisceau incident dans toutes les directions. Le second terme rend compte du renforcement de ce faisceau dû à de la diffraction de $\mathbf{k}'$ vers $\mathbf{k}$. Enfin, le dernier terme tient compte des éventuelles sources présentes dans le milieu. Il est important de noter que l'équation de transfert radiatif décrit tous les ordres de scattering: le régime de simple scattering, le régime de multiple scattering et, comme nous le verrons par la suite, le régime de diffusion.

A ce stade de l'étude, il convient d'introduire deux paramètres dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse:

- En sismologie, la quantité observable est la *densité d'énergie* à la surface de la Terre. Dépendante du temps, elle est donnée par:

$$\rho(\mathbf{x},t) = \frac{1}{v}\int_{4\pi} I_k(\mathbf{x},\mathbf{k},t)dk$$

- On peut également définir le *temps libre moyen* $\tau = \dfrac{l}{v}$ qui exprime le temps moyen entre 2 collisions.

1.1.2 De l'équation de transfert à l'équation de diffusion

Le processus de multiple scattering tend à uniformiser la dépendance angulaire de l'intensité, chaque collision distribuant l'énergie dans toutes les directions de l'espace. Ainsi, après un nombre de diffractions suffisamment grand, la répartition de l'énergie devient quasi-isotrope. On parle alors de *régime de diffusion.* On peut montrer que l'équation régissant le processus de diffusion peut être obtenue à partir de l'équation de transfert radiatif acoustique (Kourganoff [1963], Margerin et al. [1998a,b]). Pour cela, il convient d'introduire le vecteur courant $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ donné par:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},\mathbf{k},t) = \int_{4\pi} I(\mathbf{x},\mathbf{k},t)\mathbf{k}d\mathbf{k} \tag{1.2}$$

Pour écrire l'approximation de diffusion, on décompose l'intensité en deux termes: le premier terme décrit sa valeur angulaire moyenne et le second prend en compte les fluctuations

par rapport à cette moyenne. En chaque point $\mathbf{x}$ du milieu, l'intensité est uniquement fonction du cosinus de l'angle ($\mathbf{J}$,$\mathbf{k}$). En terme de $\mathbf{J}$ et ρ, l'intensité peut ainsi s'écrire comme (Kourganoff [1963], Margerin et al. [1998a,b]):

$$I(\mathbf{x},\mathbf{k},t) = \frac{v}{4\pi}\rho(\mathbf{x},t) + \frac{3}{4\pi}\mathbf{J}(\mathbf{x},t).\mathbf{k} + ... \tag{1.3}$$

Cette équation est une expansion de l'intensité en série de Legendre. L'approximation de diffusion ignore les termes d'ordre supérieur de cette expansion.

Nous allons maintenant démontrer deux équations en intégrant l'équation de transfert radiatif sur tout l'angle solide. En appliquant l'opérateur $\int_{4\pi} d\mathbf{k}$ avec une source isotrope et ponctuelle, on obtient *l'équation de continuité* donnée par Kourganoff [1963]:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \nabla.\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})\delta(t) \tag{1.4}$$

En appliquant ensuite l'opérateur $\int_{4\pi} \mathbf{k}d\mathbf{k}$ et en utilisant l'équation (1.3), on obtient:

$$\frac{v}{3}\nabla\rho(\mathbf{x},t) + \frac{1}{v}\frac{\partial\mathbf{J}(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\frac{\mathbf{J}(\mathbf{x},t)}{l}(1- < \cos\theta >) \tag{1.5}$$

avec $< \cos\theta >= \frac{1}{4\pi}\int_{4\pi} p(\cos\theta)\cos\theta d\Omega$. En négligeant la dérivée du vecteur courant avec le temps, on obtient *la loi de Fick*:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x},t) = -\frac{vl^*}{3}\nabla\rho(\mathbf{x},t) \tag{1.6}$$

avec

$$l^* = \frac{l}{1- < \cos\theta >} \tag{1.7}$$

L'équation (1.6) nous permet d'introduire une constante l^* appelée *libre parcours moyen de transport.* l^* peut être interprété comme la distance que doit parcourir l'onde pour perdre la mémoire de sa direction initiale. Lorsque le scattering est isotrope, $l = l^*$ car l'angle de l'onde diffractée est aléatoire et donc indépendante de la direction initiale. Lorsque l'on a du *forward scattering* ou *scattering vers l'avant*, $< \cos\theta >$ tend vers 1 et on a donc $l^* > l$.

Si maintenant on remplace le terme $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ présent dans l'équation (1.3) par son expression dans (1.6), on obtient *l'équation de diffusion* donnée par:

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t} - D\nabla^2\rho(\mathbf{x},t) = \delta(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x_0}) \tag{1.8}$$

avec $D = \dfrac{vl^*}{3}$ est appelée *constante de diffusion* du milieu.

1.2 De l'équation des ondes à l'équation de transfert radiatif

Nous allons, dans cette partie, entrer plus en détail dans la théorie en montrant que l'équation de transfert radiatif phénoménologique est une conséquence de l'équation des ondes. Néanmoins, nous ne rentrerons pas dans les détails du calcul qui peuvent se trouver dans Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989], Sheng [1995], Ishimaru [1978] ou Apreysan et Kravtsov[1996]. Ce paragraphe reprend le cheminement réalisé par Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989] (Tome III Chapitre 4, Tome IV Chapitre 4).

1.2.1 Théorie des perturbations

Plaçons-nous dans un milieu infini inhomogène en supposant un régime permanent. L'équation de Helmoltz scalaire est donnée par:

$$\triangle u(\mathbf{r}) + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) = 0 \tag{1.9}$$

où k est le nombre d'onde du milieu homogène et ϵ traduit l'indice de réfraction du milieu. $\epsilon\,(\mathbf{r})$ peut se décomposer en la somme de sa valeur moyenne $<\epsilon(\mathbf{r})>$ et de sa fluctuation $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$. On a donc:

$$\epsilon(\mathbf{r}) =< \epsilon(\mathbf{r}) > +\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) \tag{1.10}$$

L'équation (1.9) peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \triangle u(\mathbf{r}) + k^2(< \epsilon(\mathbf{r}) > +\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}))u(\mathbf{r}) &= 0 \\ \triangle u(\mathbf{r}) + k^2 < \epsilon(\mathbf{r}) > u(\mathbf{r}) &= -k_0^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r}) \end{aligned} \tag{1.11}$$

L'équation (1.11) est l'équation de Helmoltz dans le milieu en l'absence de fluctuation et contenant la source $S(\mathbf{r}) = -k_0^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}) u(\mathbf{r})$. La solution d'une telle équation est donnée par:

$$u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r}) + \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) S(\mathbf{r_0}) d^3 r_0 = u_0(\mathbf{r}) - k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) u(\mathbf{r_0}) d^3 r_0 \tag{1.12}$$

où $G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0})$ est la fonction de Green du milieu définit par:

$$\triangle G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) + k^2 \epsilon(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \tag{1.13}$$

En résolvant de façon itérative l'équation précédente, on peut avoir une solution pour $u(\mathbf{r_0})$:

$$u(\mathbf{r_0}) = u_0(\mathbf{r_0}) - k^2 \int G(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_1}) u(\mathbf{r_1}) d^3 r_1 \tag{1.14}$$

En mettant (1.14) dans (1.12) et en itérant l'opération, on obtient une série perturbative de Neuman valable pour $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r})$ petit:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}) = u_0(\mathbf{r_0}) &- k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) u_0(\mathbf{r_0}) d^3 r_0 \\ &+ k^4 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) G(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) u_0(\mathbf{r_1}) d^3 r_0 d^3 r_1 \\ &- k^6 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) G(\mathbf{r_0}, \mathbf{r_1}) G(\mathbf{r_1}, \mathbf{r_2}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_2}) u(\mathbf{r_2}) d^3 r_0 d^3 r_1 d^3 r_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

L'interprétation physique de cette série est très simple. Le premier terme $u_o(\mathbf{r_0})$ correspond au champ dans le milieu en l'absence de fluctuation. Le second terme $u_1(\mathbf{r}) = -k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) u_0(\mathbf{r_0}) d^3 r_0$ correspond au champ diffusé une seule fois: le champ primaire u_0 est diffusé par l'hétérogénéité $\tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0})$ puis se propage jusqu'au récepteur par l'intermédiaire de G. En réécrivant le troisième terme comme $u_2(\mathbf{r}) = -k^2 \int G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_0}) u_1(\mathbf{r_0}) d^3 r_0$, on peut l'interpréter comme le champ diffusé au second ordre. La série perturbative (1.15) énoncée précédemment contient donc tous les ordres de la diffusion multiple.

1.2.2 Equation du champ moyen: équation de Dyson

Nous allons maintenant faire l'hypothèse que la perturbation est gaussienne. On connait donc tous les moments si l'on connait ceux d'ordre deux. On a:

$$\begin{aligned} < \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_2}) \dots \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_{2n+1}}) > &= 0 \\ < \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_1}) \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_2}) \cdots \tilde{\epsilon}(\mathbf{r_{2n}}) > &= \sum_{p.p.} \psi_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r_i}, \mathbf{r_j}) \cdots \psi_{\tilde{\epsilon}}(\mathbf{r_k}, \mathbf{r_l}) \end{aligned} \tag{1.16}$$

où $\sum_{p.p.}$ exprime la somme sur toutes les paires (i,j) distinctes possibles et ψ une fonction de corrélation.

Considérons un milieu hétérogène d'indice de réfraction $\epsilon(r) =< \epsilon(r) > +\tilde{\epsilon}(r) = 1 + \tilde{\epsilon}(r)$. Les fonctions de Green du milieu hétérogène G et du milieu homogène G_0 sont solutions des équations suivantes:

$$\begin{aligned} \triangle G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) + k^2(1 + \tilde{\epsilon}(\mathbf{r})) G(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \\ \triangle G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) + k^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r_0}) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r_0}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

En utilisant les résultats de la théorie des perturbations énoncée précédemment (équ. 1.15) et les propriétés des variables gaussiennes (équ. 1.16), on a pour la fonction de

Green moyenne:

$$\begin{aligned} < G(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) > &= G_0(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) + k^4 \int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r_1}) G_0(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) G_0(\mathbf{r_2},\mathbf{r_0}) \psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) d^3r_1 d^3r_2 \\ &+ k^8 \int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r_1}) G_0(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) G_0(\mathbf{r_2},\mathbf{r_3}) G_0(\mathbf{r_3},\mathbf{r_4}) G_0(\mathbf{r_4},\mathbf{r_0}) . [\psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) \psi_\epsilon(\mathbf{r_3},\mathbf{r_4}) \\ &+ \psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_3}) \psi_\epsilon(\mathbf{r_2},\mathbf{r_4}) + \psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_4}) \psi_\epsilon(\mathbf{r_2},\mathbf{r_3})] d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3 d^3r_4 + \cdots \end{aligned} \tag{1.18}$$

Cette équation peut se réécrire comme (Rytov, Kravtsov and Tatarskii [1989]):

$$< G(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) > = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r_0}) + \int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r_1}) Q(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2}) < G(\mathbf{r_2},\mathbf{r_0}) > d^3r_1 d^3r_2 \tag{1.19}$$

L'équation (1.19) sur la fonction de Green moyenne est appelée *équation de Dyson*. La résolution de cette équation nécessite l'évaluation de la série infinie Q. En général, ce calcul est impossible et il faut avoir recours à des approximations.

1.2.3 Interprétation de la solution de l'équation de Dyson: champ moyen dans un milieu infini

Plaçons-nous dans un milieu infini statistiquement homogène. Afin de résoudre l'équation de Dyson (1.19), nous allons utiliser *l'approximation de Bourret* qui garde seulement le premier ordre de Q:

$$Q = k^4 G_0(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') \psi_\epsilon(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$$

Cette approximation n'est valable que dans le cas de faibles perturbations, i.e. $(ka)^2\sigma^2 << 1$ avec a, taille moyenne des hétérogénéités et σ, intensité des fluctuations. On peut alors montrer que la solution de l'équation de Dyson donne un champ moyen de la forme (Rytov, Kravtsov and Tatarskii [1989] pp.131-141):

$$< G(|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|) > = -\frac{\exp(i\kappa_1|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|} \tag{1.20}$$

On peut rappeler que la fonction de Green dans un milieu infini homogène est donnée par:

$$G_0(|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|) = -\frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r_0}|} \tag{1.21}$$

La solution G obtenue dans le milieu hétérogène diffère de celle obtenue pour G_0 uniquement par le terme de nombre d'onde κ_1. Au lieu d'avoir un nombre d'onde k réel comme

dans l'expression de G_0 on a ici κ_1 complexe avec $\Im(\kappa_1) > 0$ et $\Re(\kappa_1) > k$.
Le sens physique de ces deux résultats peut s'interpréter de la façon suivante:

- La rencontre avec les inhomogénéités du milieu implique un allongement du trajet de l'onde, ce qui augmente la partie réelle du nombre d'onde par rapport au cas homogène.
- $\Im(\kappa_1) > 0$ implique que le champ moyen décroit exponentiellement à cause de la diffusion. L'énergie, initialement émise dans une direction donnée est diffractée dans toutes les directions de l'espace, ce qui cause la décroissance exponentielle de la fonction de Green.

On peut également montrer que la partie imaginaire du nombre d'onde peut s'écrire:

$$\Im(\kappa_1) = \frac{\pi^2 k}{2} \int_0^{2k} \Psi_{\tilde{\epsilon}}(\kappa)\kappa d\kappa \tag{1.22}$$

où $\Psi_{\tilde{\epsilon}}$ est relié à ϕ_ϵ par la relation:

$$\phi_\epsilon(r) = \frac{2\pi}{r} \int_0^\infty \psi_{\tilde{\epsilon}}(\kappa') \sin(\kappa' r)\kappa' d\kappa' \tag{1.23}$$

$\Psi_{\tilde{\epsilon}}$ représente donc le spectre des inhomogénéités du milieu. Il est également possible de montrer que $\Im(\kappa_1) = \frac{1}{2l}$ où l est le *libre parcours moyen du milieu.*

1.2.4 Equation de la corrélation du champ: équation de Bethe-Salpeter

Nous allons maintenant nous intéresser au moment d'ordre deux du champ, c'est à dire à la *fonction de corrélation* qui est définie par:

$$\Gamma(\mathbf{r}',\mathbf{r}'';\mathbf{r_0}',\mathbf{r_0}'') = < G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') G^*(\mathbf{r_0}',\mathbf{r_0}'') > \tag{1.24}$$

C'est en calculant ce moment d'ordre deux que nous allons pouvoir obtenir des informations sur la partie incohérente du champ. Pour obtenir Γ, il faut multiplier deux expansions de la forme (1.15) et moyenner le résultat.
Nous n'allons pas développer les calculs. Le détail peut être trouvé dans Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989]. L'équation obtenue pour $< G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') G^*(\mathbf{r_0}',\mathbf{r_0}'') >$ est donnée par:

$$\begin{aligned} &< G(\mathbf{r}',\mathbf{r}'') G^*(\mathbf{r_0}',\mathbf{r_0}'') > = < G(\mathbf{r}',\mathbf{r_0}') >< G^*(\mathbf{r}'',\mathbf{r_0}'') > \\ &+ \int < G(\mathbf{r}',\mathbf{r_1}) >< G^*(\mathbf{r}'',\mathbf{r_2}) > K(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2};\mathbf{r_3},\mathbf{r_4}) < G(\mathbf{r_3},\mathbf{r_4}) G^*(\mathbf{r_0}',\mathbf{r_0}'') > d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3 d^3r_4 \end{aligned} \tag{1.25}$$

avec

$$\begin{aligned} K(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2},\mathbf{r_3},\mathbf{r_4}) &= k^4\psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_2})\delta(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_3})\delta(\mathbf{r_2}-\mathbf{r_4}) \\ &+ \int k^8\psi_\epsilon(\mathbf{r_1},\mathbf{r_5})\psi\epsilon(\mathbf{r_2},\mathbf{r_4})G_0^*(\mathbf{r_2},\mathbf{r_5})G_0^*(\mathbf{r_5},\mathbf{r_4})\delta(\mathbf{r_1}-\mathbf{r_3})d^3r_5 \\ &+ \cdots \end{aligned} \tag{1.26}$$

Cette équation s'appelle *l'équation de Bethe Salpeter*. C'est l'équation de transport la plus générale mais elle est malheureusement difficilement résolvable.
Le lien entre l'équation de Bethe Salpeter et l'équation de transfert radiatif est loin d'être évident. Il peut être retrouvé dans la littérature, et plus particulièrement dans Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989].

1.3 Résolution de l'équation de transfert radiatif

La forme générale de l'équation de transfert radiatif (équation 1.1) n'a, en général, pas de solution analytique. Zeng et al. [1991] et Sato [1995] ont, entre autres, résolu l'équation de transfert radiatif acoustique de façon analytique dans le cas d'un espace infini. Toutefois, lorsque le milieu se complexifie, l'utilisation de techniques numériques s'avère nécessaire (Apresyan et Kravtsov [1996]). Entre autres, nous pouvons citer la méthode des ordonnées discrètes (Chandrasekhar [1960], Ishimaru [1978]), le développement en harmoniques sphériques (Kourganoff [1963]) et la méthode Monte Carlo (Spanier et Gelbard [1969]). C'est cette dernière technique que nous utiliserons dans la suite de cette thèse. Le choix de cette méthode a été fait car elle se montre très efficace pour résoudre le calcul d'intégrales multidimensionnelles pour un milieu complexe (Spanier et Gelbard [1969]). En effet, plus le problème comporte de degrés de liberté, plus les algorithmes de Monte Carlo sont efficaces par rapport aux autres méthodes. Notre problème, en sismologie, étant tridimensionnel et dépendant du temps, les autres méthodes se révèlent extrêmement complexes à mettre en oeuvre.

1.3.1 Résolution d'intégrales multidimensionnelles par Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo permet de résoudre des intégrales multidimensionnelles. Cette technique de résolution est exposée dans Lux et Koblinger [1991] pp 82-83 et reprise par Margerin [1998a].

On aimerait calculer l'intégrale I de f:

$$I = \int_\Gamma f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.27}$$

où $\mathbf{x}$ est un vecteur multidimensionnel et Γ le domaine d'intégration. L'intégrale I peut alors s'écrire:

$$I = \int_\Gamma h(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{1.28}$$

avec $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ et $\int_\Gamma \phi(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$. Si N échantillons indépendants x_i sont tirés aléatoirement dans le domaine D selon leur distribution de probabilité $\phi(\mathbf{x})$, on peut alors définir

$$< \tilde{I} >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} < h(x_i) > \tag{1.29}$$

On peut alors montrer que (Lux et Koblinger p.83) $\tilde{I}$ est une estimation non biaisée de I. Ce théorème est la base de la résolution d'intégrales multidimensionnelles.
Pour appliquer les techniques Monte Carlo à l'équation de transfert radiatif, il faut transformer cette équation en équation intégrale (Margerin [1998a], Spanier et Gelbard [1969]). Dans le cas simple d'un milieu infini uniforme contenant des diffracteurs isotropes et une source ponctuelle, on a pour l'équation de transfert radiatif en régime indépendant du temps:

$$I(\mathbf{r}) = \frac{S_0\exp(\frac{-|\mathbf{r}|}{l})}{4\pi\mathbf{r}^2} + \frac{1}{l}\int I(\mathbf{r}')\frac{\exp(\frac{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{l})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}d^3r' \tag{1.30}$$

où I est la solution de l'équation de transfert radiatif, l le libre parcours moyen et S_0 l'énergie libérée par la source (on supposera $S_0 = 1$).
Le premier terme de droite de l'équation (1.30) représente l'énergie provenant directement de la source et le second terme l'énergie des ondes diffusées.
Pour résoudre cette équation, on développe $I(r)$ en série de Neumann:

$$I = I^0 + I^1 + I^2 + \cdots + I^i + \cdots \tag{1.31}$$

où I^0 est l'énergie provenant directement de la source, I^1 est la solution de l'équation obtenue en supposant $I = I^0$ dans l'intégrale et donc I^i est la solution de l'équation obtenue en supposant $I = I^{i-1}$ dans l'intégrale. Comme pour l'équation (1.15), chaque terme corrèspond à un ordre de scattering.
Ainsi par exemple, le terme de deuxième ordre peut s'écrire:

$$I^2(\mathbf{r}) = \int\int \frac{\exp(\frac{-|\mathbf{r}'|}{l})}{4\pi r^2 l}d^3r' \frac{\exp(\frac{-|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|}{l})}{4\pi|\mathbf{r}''-\mathbf{r}'|^2 l}d^3r'' \frac{\exp(\frac{-|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}{l})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|^2 l} \tag{1.32}$$

En posant $\mathbf{r_1} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'$ et $\mathbf{r_2} = \mathbf{r}'' - \mathbf{r}'$ et en utilisant les coordonnées sphériques, on obtient:

$$I^2(\mathbf{r}) = \int\int \frac{\exp(-\frac{r_1}{l})}{l} \frac{\sin\theta_1}{4\pi} \frac{\exp(-\frac{r_2}{l})}{l} \frac{\sin\theta_2}{4\pi} \frac{\exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|}{l})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^2} d\theta_1 d\phi_1 dr_1 d\theta_2 d\phi_2 dr_2 \quad (1.33)$$

avec $r_i \in [0;\infty[$, $\theta_i \in [0;\pi]$ et $\phi_i \in [0;2\pi]$. En posant $g = \frac{\exp(-\frac{r_1}{l})}{l} \frac{\sin\theta_1}{4\pi} \frac{\exp(-\frac{r_2}{l})}{l} \frac{\sin\theta_2}{4\pi}$ et $h = \frac{\exp(-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|}{l})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r_1}-\mathbf{r_2}|^2} d\theta_1 d\phi_1 dr_1 d\theta_2$, on se retrouve dans le cas des équations multidimensionnelles décrites précédemment. On peut également retrouver l'image de la marche aléatoire: tirer la variable $\mathbf{r_1}$ selon une loi exponentielle simule un pas de la marche aléatoire. Tirer θ_1 et ϕ_1 selon la loi $\frac{\sin(\theta_1)}{4\pi}$ revient à simuler une source aléatoire. De plus, la fonction h représente le flux d'énergie arrivant au récepteur lors de la diffusion d'ordre 2. Ainsi, la correspondance entre le processus de transport et la simulation Monte Carlo est directe.

1.3.2 Schéma de la simulation Monte Carlo

Lors de la simulation de l'équation de transfert radiatif acoustique discrétisée, l'énergie de l'onde est "portée" par une particule. Cette particule se propage alors dans un milieu de libre parcours moyen l. La simulation de cette propagation par des méthodes de Monte Carlo se fait alors en trois temps (Lux et Koblinger [1991], Hoshiba [1991] et Margerin et al. [1998a,b]):

- Marche aléatoire de la particule (et donc de l'énergie de l'onde) dans un milieu donné. La particule part d'un point source et change de direction à chaque rencontre avec un diffracteur ou une interface.
- Détection de la particule: On définit une fenêtre d'observation comprise entre 0 et T secondes dont le début coïncide avec le départ de la particule. La valeur choisie pour T doit être adaptée à chaque milieu. Cette fenêtre est divisée en intervalles de durée Δt, Δt étant très inférieur au temps libre moyen du problème. Typiquement, on prendre $\Delta t = \frac{\tau}{10}$.
  Pour chaque diffracteur i rencontré au cours de la marche aléatoire, on calcule la probabilité ρ_i qu'a la particule de retourner au récepteur sans subir d'autres diffusions ainsi que le temps d'arrivée t_i de l'onde au récepteur. La probabilité ρ_i prend en compte tous les chemins possibles entre le diffuseur et le récepteur, y compris les réflexions multiples sur les interfaces. Quand le temps de parcours de la particule est supérieur au temps d'observation T, la propagation s'arrête et une nouvelle particule part de la source.

- Le processus est répété afin d'explorer toutes les réalisations possibles. Enfin, la valeur moyenne est calculée afin d'obtenir la densité d'énergie. La densité d'énergie reçue sur l'intervalle de temps n est alors donnée par:

$$\rho(n) = \frac{1}{Nv_1\Delta t} \sum_i \rho_i(n)$$

  où v_1 est la vitesse des ondes dans la couche supérieure et N, le nombre total de particules injectées dans le milieu.

Nous allons maintenant expliciter plus en détails les deux premiers points de la simulation Monte Carlo.

1.3.3 Marche aléatoire

La marche aléatoire de la particule est représentée sur la Figure 1.2. La particule part de la source R_0 dans une direction aléatoire (représentée par les angles θ_1 et ϕ_1) et parcourt une distance $|\mathbf{r_1}|$ appelée Free Path Length (FPL) avant de rencontrer le premier diffuseur en R_1. Sa rencontre avec le diffracteur lui impose un changement de direction de propagation (θ et ϕ). La particule parcourt alors une distance $|\mathbf{r_2}|$ aléatoire avant de rencontrer R_2. Les principales hypothèses utilisées au cours de la première partie de cette thèse (propagation des ondes acoustiques) sont que la source et le scattering sont isotropes. Ainsi, la direction dans laquelle une particule est diffractée est aléatoire et indépendante de sa direction initiale.

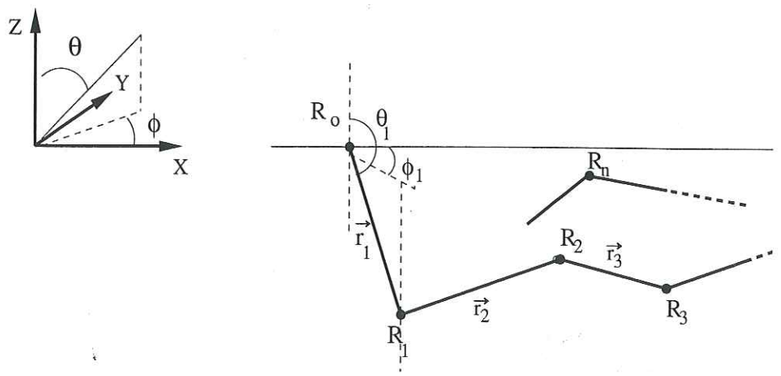

FIG. 1.2 – *Marche aléatoire de la particule dans un demi espace.*

Comment choisir des directions de propagation aléatoires?

La direction de propagation de la particule est définie par θ et ϕ. Plutôt que de tirer les angles eux mêmes, on préfère déterminer leur cosinus et sinus. Ainsi par exemple, pour déterminer la valeur de $\cos\theta$, on tire une variable aléatoire $\epsilon \in]0;1[$ et on détermine $\cos\theta$ en utilisant:

$$\cos\theta = 2\epsilon - 1$$

Cette équation assure que l'énergie est bien uniformément distribuée sur tout l'angle solide.

Comment traiter les interfaces?

Nous allons exposer la méthode pour un milieu stratifié composé d'une couche et d'un demi espace (Fig 1.3). La couche (milieu 1) et le demi espace (milieu 2) présentent un contraste de libre parcours moyen, de vitesse et de densité. Les résultats peuvent être sans problème extrapolés à un milieu stratifié plus complexe.
Quand une onde se propageant dans le milieu 1 arrive avec une incidence θ_1 à l'interface entre les milieux 1 et 2, elle peut être réfléchie ou transmise avec un angle θ_2. On définit alors les coefficients de réflexion et de transmission en énergie:

$$R_{12} = \left(\frac{\rho_1 v_1 \cos\theta_1 - \rho_2 v_2 \cos\theta_2}{\rho_1 v_1 \cos\theta_1 + \rho_2 v_2 \cos\theta_2}\right)^2 \quad (1.34)$$

$$T_{12} = 1 - R_{12} \quad (1.35)$$

La particule est interprétée comme un flux et a alors la probabilité R_{12} d'être réfléchie et donc de rester dans le milieu 1 et une probabilité T_{12} d'être transmise dans le deuxième milieu. Pratiquement, on tire une variable aléatoire ϵ et si $\epsilon < R_{12}$ alors l'onde est réfléchie dans le milieu 1, sinon elle est transmise dans le milieu 2.
La nouvelle direction de propagation après le passage de l'interface est alors déterminée par la loi de Snell Descartes.
Il est important de noter que:

- On ne se préoccupe pas du changement de phase de l'onde réfléchie. En effet, l'intensité est définie comme $< GG^* >$ et donc la phase n'intervient pas, en tout cas pour l'approximation acoustique.
- La surface libre est traitée comme une interface avec $R = 1$.

Quelle est la distance entre deux diffusions?

Le Free Path Length (FPL) représente la distance parcourue par la particule entre deux diffusions. On peut facilement appréhender que ce FPL est fonction du libre parcours moyen du milieu.

- Cas d'un espace infini
  Dans le cas d'un espace infini pour lequel de libre parcours moyen l est constant, la distance s parcourue entre deux diffusions est donnée par (Lux et Koblinger [1991]):

$$s = -l.\ln\epsilon \quad (1.36)$$

  où ϵ est une variable aléatoire comprise dans l'intervalle $]0;1[$. Cette formule peut être démontrée facilement à partir de la densité de probabilité de parcourir une distance s entre deux diffusions qui est proportionnelle à $\exp(-\frac{s}{l})$.

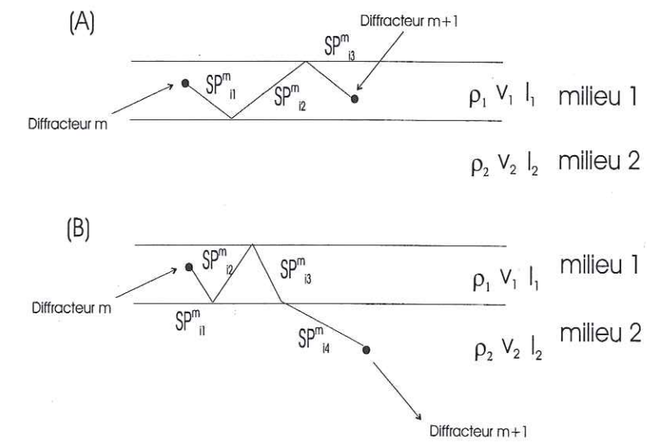

FIG. 1.3 – *Chemin parcouru entre deux diffracteurs pour le cas du milieu stratifié:* **cas a.** *La particule reste dans la couche* **cas b.** *La particule est transmise dans le demi espace.*

- Cas d'un milieu stratifié
  Le cas de l'espace stratifié a été étudié par Margerin et al [1998a,b] et Hoshiba [1994,1997]. Définissons comme $SP^m_{i_1}, SP^m_{i_2}, \cdots, SP^m_{i_k}, \cdots$ la longueur des rais (i.e. chemin parcouru avec une direction de propagation constante) de la particule i dans le milieu stratifié entre le $m^{ième}$ et le $(m+1)^{ème}$ scattering (Figure 1.3).

On définit un nombre aléatoire $\epsilon \in]0;1[$ et on détermine l'entier q tel que:

$$\sum_{k=0}^{k=q} \frac{SP_{i_k}^m}{l_{i_k}^m} = -\ln \epsilon \tag{1.37}$$

où $l_{i_k}^m$ est la valeur du libre parcours moyen le long du $k^{ième}$ rai. La longueur que parcourt la particule entre deux événements consécutifs peut alors s'exprimer comme:

$$FPL = \sum_{k=0}^{k=q} SP_{i_k}^m \tag{1.38}$$

1.3.4 Probabilité de retour au récepteur

Le deuxième pas de la simulation Monte Carlo consiste à calculer la probabilité qu'a la particule de remonter au récepteur. Ce calcul est effectué à chaque fois que celle ci rencontre un diffracteur.

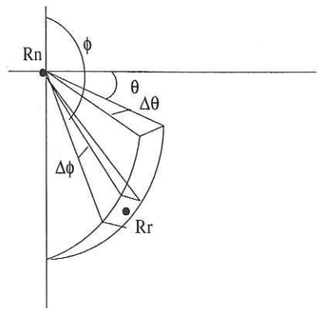

FIG. 1.4 – *Principe de la détection dans le cas d'un espace infini entre le diffracteur R_n et le récepteur R_r. On définit une surface unitaire autour du récepteur R_r.*

- Cas d'un espace infini (Hoshiba [1991]) Il nous faut calculer la probabilité qu'a une particule située en R_n de traverser une surface unitaire située autour du récepteur R_r perpendiculairement eu vecteur $\mathbf{R_r} - \mathbf{R_n}$ (Figure 1.4) et sans rencontrer de diffuseurs.
  Dans le cas d'un demi espace, il n'y a qu'un seul chemin possible entre le diffracteur et le récepteur. La probabilité d'atteindre le récepteur est alors donnée par :

$$\begin{aligned} P(s \geq |\mathbf{R_n} - \mathbf{R_r}|, \theta_0 \geq \theta \geq \theta_0 + \Delta\theta_0, \phi_0 &\geq \phi \geq \phi_0 + \Delta\phi) \\ &= \frac{\Delta\theta}{2\pi}\frac{\sin\phi}{2}\Delta\phi(1 - (1 - \exp(-\frac{|\mathbf{R_r} - \mathbf{R_n}|}{l}))) \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{R_r} - \mathbf{R_n}|^2}\exp(-\frac{|\mathbf{R_r} - \mathbf{R_n}|}{l}) \end{aligned} \tag{1.39}$$

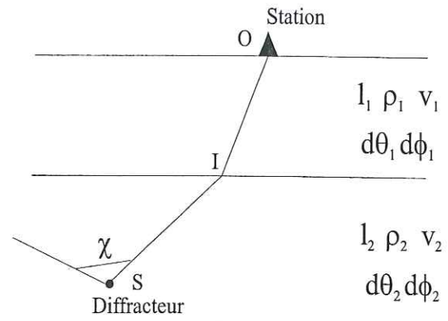

FIG. 1.5 – *Chemin possible pour remonter au récepteur*

avec $1 = |\mathbf{R_r} - \mathbf{R_n}|^2 \sin\phi\Delta\theta\Delta\phi$ car on considère une surface unitaire.

- Cas d'un milieu stratifié à deux couches (Hoshiba [1997], Margerin et al. [1998a,b])
  Il faut prendre en compte tous les chemins possibles (directs et réfléchis dans la croûte) entre le diffuseur et le récepteur.
  Pour fixer les idées, considérons un chemin particulier représenté sur la Figure 1.5. La probabilité pour cette onde d'atteindre le récepteur est donnée par (Margerin et al.[1998]):

$$\rho = \frac{p(\cos\theta)T_{21}(\theta_2)exp(-\frac{SI}{l_2} - \frac{IO}{l_1})}{(SI\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_2} + IO\frac{v_1\cos\theta_2}{v_2\cos\theta_1})(SI + IO\frac{v_1}{v_2})4\pi} \tag{1.40}$$

avec $p(\cos\theta)$ est la probablité de repartir vers le récepteur avec un angle θ, $T_{21}(\theta_2)$ est le probabilité de transmission de l'onde du milieu 2 (demi espace) vers le milieu 1 (couche). La probabilité de ne pas rencontrer de diffracteur lors de la remontée est donnée par: $exp(-\frac{SI}{l_2} - \frac{IO}{l_1})$. Ce calcul prend en compte le changement d'angle solide à l'interface dû au contraste de vitesse présent dans le milieu.
Le calcul de probabilité effectué à deux couches peut facilement être généralisé à un milieu stratifié plus complexe, mais contenant un nombre fini de couches.

1.3.5 Stabilité de la méthode Monte Carlo. Temps de calcul.

La méthode de résolution Monte Carlo est basée sur une approche statistique. Afin de parcourir toutes les réalisations possibles, le moyennage (voir section 1.3.2) doit être effectué sur un grand nombre de réalisations et donc de particules. La stabilité de la méthode et le temps de calcul nécessaire dépendent fortement du milieu considéré.

Ainsi, plus le libre parcours moyen est grand, plus le nombre de particules nécessaires à la stabilisation du résultat est important. Par contre, dans ce cas précis, la propagation dans le milieu se fera sur un temps de calcul relativement faible car la particule ne rencontre que peu d'hétérogénéité. D'autre part, si le milieu présente un contraste de vitesse, il faut prendre en compte toutes les réflexions possibles pour remonter au récepteur; le temps de calcul s'en trouve donc allongé.
Pour fixer les idées, un modèle stratifié avec un contraste de vitesse, composé d'une croûte hétérogène (l plus petit que l'épaisseur de la croûte) et d'un manteau transparent nécessite de 5 à 10 millions de particules pour obtenir un résultat stable. Le temps de calcul correspondant est de l'ordre de quelques jours.

Nous allons maintenant utiliser l'équation de transfert radiatif et sa résolution par Monte Carlo pour étudier deux exemples de propagation des ondes acoustiques: l'étude des phases régionales et celle de la propagation des ondes dans les volcans.

1.4 Bibliographie

Apresyan, L.A. and Y.A. Kravtsov, *Radiative transfer: Statistical and wave aspects*, Gordon and Breach Publications, 1996.

Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover, New York, 1960.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geoph. Res. Lett.*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth-dependent S-wave velocity structure, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **104**, 15-22, 1997.

Ishimaru, A., *Wave Propagation and Scattering in Random Media, Vols 1* et *2*, Academic Press, New York, 1978.

Kourganoff, V., *Basic Methods in Transfer Problems: Radiative equilibrum and neutron diffusion*, Dover, New York, 1963.

Lux I. and L. Koblinger, *Monte Carlo Particule Transport Methods: Neutron and Photon Calculations*, CRC Press, 1991.

Margerin L., *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*, Thèse de l'université Joseph Fourier, 1998a.

Margerin L., M. Campillo and B.A.van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into Coda Q, *Geophys. J. Int.*, **134**, 596-612, 1998b.

Rytov, S.M., Y.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, "4.Wave Propagation Through Random Media", in *Principle of Statistical Radiophysics*, Springer - Verlag, 1989.

Sato, H., Formulation of the multiple non isotropic scattering process in 3D space on the basis of energy transport theory, *Geophys. J. Int.*, **121**, 523-531, 1995.

Sato, H. and M. Fehler, *Wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Sheng, P., *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Academic Press, San Diego, 1995.

Spanier, J. and E.M. Gelbard, *Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

Wu, R.S., Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation- I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 57-80, 1985.

Wu, R.S. and K. Aki, Introduction to the wave scattering in three-dimensionnally heterogeneous earth, *Pure appl. Geophys.*, 128, 1-6, 1988.

Zeng, Y., F. Su and K. Aki, Scattering wave energy propagation in a random isotropic scattering medium 1.Theory, *J. Geophys. Res.*, **96**, 607-619, 1991.

Chapitre 2

Atténuation intrinsèque et atténuation due au scattering de la lithosphere française

Separation of intrinsic absorption and scattering attenuation from Lg coda decay in central France.

C. Lacombe, M. Campillo, L. Margerin and A. Paul

Article soumis à *GJI*

Résumé: Le transfert radiatif est appliqué à la mesure de l^* et de Q_{int} (absorption) de la lithosphère française. Les événements utilisés ont été enregistrés par le LDG-CEA (distances épicentrales < 860 km). La décroissance de la coda des Lg avec le temps et la distance est comparée au résultat de simulations numériques. La lithosphère est modélisée par une couche (la croûte) et un demi espace (le manteau), vitesse et hétérogénéité dépendant de la profondeur. Les simulations ont été faites pour différentes valeurs de Q_{int}, l_c^* (l^* de la croûte) et l_m^* (l^* du manteau). En notant que pour des temps longs ($t > 300$ s) la décroissance de la coda est indépendante de la distance, on définit deux fenêtres: la coda proche ($v_g < 2.6$ km/s et $t < 300$ s) et la coda entière ($v_g < 2.6$ km/s). Dans la coda proche, la comparison permet d'obtenir un unique modèle expliquant les observations. Un grand nombre de modèles peuvent les expliquer en s'intéressant à toute la coda car la décroissance est indépendante de la distance. En ajoutant à ces modèles ceux expliquant l'atténuation des ondes directes (Campillo et al.[1985]), on peut trouver une configuration ($l_c^* \simeq 200 \pm 50$ km et $Q_{int} \simeq 1000 \pm 200$ à 3 Hz) qui explique l'atténuation en distance

et en temps des ondes directes et de la coda proche et lointaine.

2.1 Introduction

Following the work of Aki [1969] and Aki and Chouet [1975], the idea of considering the coda as scattered waves on randomly distributed inhomogeneities in the lithosphere has become widely accepted. To understand wave propagation and attenuation in the lithosphere, seismologists have tried to determine the relative amount of attenuation caused by scattering and intrinsic absorption. The goal is to evaluate statistical properties of heterogeneity in the lithosphere using the quality factor associated with scattering.
In the crust, heterogeneity can be observed on many scales (Sato and Fehler [1998],Wu and Aki [1988]). It is thus a complex medium where deterministic analysis of wave propagation cannot be applied. Considering the lithosphere as a random medium, the average intensity of scattered waves is governed by a transport equation (Chandrasekhar [1960]) which was rigorously derived from the acoustic wave equation by Ryzhik et al. [1996]. The scalar radiative transfer equation has been applied to describe wave propagation in the lithosphere by *e.g.* Wu [1985], Wu and Aki [1985], Hoshiba [1991,1994,1997], Margerin et al [1998], Zeng et al [1991]. The heterogeneity of a multiple scattering medium is described by two parameters: l is the scattering mean free path, and l^* the transport mean free path. l is the characteristic length of extinction and l^* is defined as the propagation distance above which the wavefront loses memory of its initial propagation direction. In this paper and for the sake of simplicity, we will assume that scattering is isotropic and thus that $l = l^*$. We can also define a Q-factor associated with scattering (Q_{scat}) as $Q_{scat} = \frac{2\pi f l^*}{v}$, where f denotes the frequency and v the group velocity. A Q-factor associated with intrinsic attenuation (Q_{int}) can also be connected to an absorption length l_a defined as $l_a = \frac{Q_{int} v}{2\pi f}$.
Wu [1985] was the first to introduce a method including multiple scattering to measure the relative contributions of scattering and intrinsic absorption to total attenuation. His method is based on the radiative transfer theory which gives a theoretical model of energy propagation in a randomly heterogeneous elastic medium. The main assumption of Wu's method is that there is no depth-variation of heterogeneity and wave velocity in the lithosphere (uniform half space assumption). Fehler et al. [1992] adopted a revised method of Wu's technique still assuming a uniform half space, which is called the "Multiple Lapse Time Window Analysis (MLTWA)". Many studies have been carried out in different regions using this method (see for exemple Mayeda et al. [1992] for Q_{int} and Q_{scat} separation in Hawaii, Long Valley and Central California, Hoshiba [1993] in Japan, Mayeda et al. [1991] and Jin et al. [1994] in Southern California or Ugalde et al. [1998] for Northern Venezuela).

The assumption of a uniform distribution of scatterers in the lithosphere is probably unrealistic, as emphasized for example by Abubakirov and Gusev [1990], Hoshiba [1994] and Gusev [1995]. First, the velocity contrast at the crust-mantle transition must be taken into account. Moreover, deep seismic soundings (which give a description of the heterogeneity of the lithosphere) often reveal strong variations of the seismic reflectivity (see for exemple Bois et al. [1988] for seismic soundings in France or Fuchs et al. [1987] for deep reflection experiments in Germany). Thus, both depth-dependent velocity and scattering properties must be included in models of the lithosphere.
Margerin et al. [1999] used such models to evaluate the crustal mean free path and the intrinsic Q factor in Mexico. Using records of local earthquakes at epicentral distances smaller than 50 km, they showed that a model consisting of a highly heterogeneous crust overlying a transparent mantle gives a good description of the observed coda Q (Q_c). They also concluded that a large Q_{int}^{-1} (strong intrinsic absorption) is not required to explain the observed Q_c in Mexico. More recently, Hoshiba et al. [2001] measured intrinsic absorption and scattering attenuation in northern Chile using the multiple lapse time window analysis and assuming both a depth- dependent velocity structure and heterogeneity scattering properties varying with depth. Using events recorded at hypocentral distances smaller than 160 km, they concluded that the crustal mean free path is about 300 km and the absorption length about 100 km at 3 Hz. Note that Margerin et al. [1999] and Hoshiba et al. [2001] did not use the same part of the coda time window. Margerin et al. [1999] used the late coda when all signals exhibit a steady decay independently of epicentral distance, whereas Hoshiba et al. [2001] used the first part of the coda when the coda energy decay depends on distance.
In this paper, we study both parts of the coda in order to find a model explaining the energy decay with time and distance of the whole *Lg* coda. The model must also predict the attenuation properties of direct waves. We use events recorded in France at epicentral distances ranging from 100 to 900 km. This distance range is much broader than the one used by Margerin et al. [1999] or Hoshiba et al. [2001]. For these regional events, a clear *Lg* wavetrain can be observed. *Lg* waves consist of the superposition of *S* waves supercritically reflected and trapped in the crust. Since *Lg* waves sample the entire crust, medium properties (for exemple Q_{int} and l^*) deduced from this phase can be regarded as average

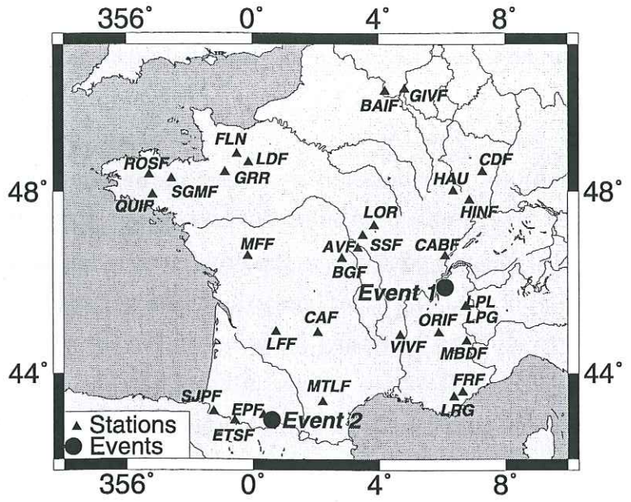

FIG. 2.1 – *Location map of earthquakes and stations used in this study.*

values for the whole crust. To obtain average values of transport mean free path and intrinsic Q in the lithosphere, we compare here the decay rate of *Lg* coda with both time and distance to the results of numerical simulations computed in different models with depth-dependent scattering properties and velocity. A model is set by minimizing a misfit function between modelled and observed *Lg* coda energy envelopes. The attenuation of the direct *Lg* wave is already known in the same region (Campillo et al. [1985], Campillo and Plantet [1991]).

2.2 Observations

Our data set is made of the records of two regional earthquakes that are the two largest-magnitude events (m_b = 5.3 for Annecy and 5.1 for St Gaudens) recorded in France in the last 6 years. The first one occurred on July 15th, 1996 in Annecy (45.93°N - 6.09°E) at 2 km depth. The second one was located near Saint Gaudens (42.92°N - 0.60°E) at 10 km depth on October 4th, 1999. Both event locations are shown as circles in Figure 2.1. Seismograms were recorded by the LDG/CEA network which covers most of the country. This network consists of short-period one-component seismometers with a natural frequency of 1 Hz (Nicolas et al. [1982]). The locations of the 30 stations which recorded at least one of the two events are shown as triangles in Figure 2.1. Epicentral

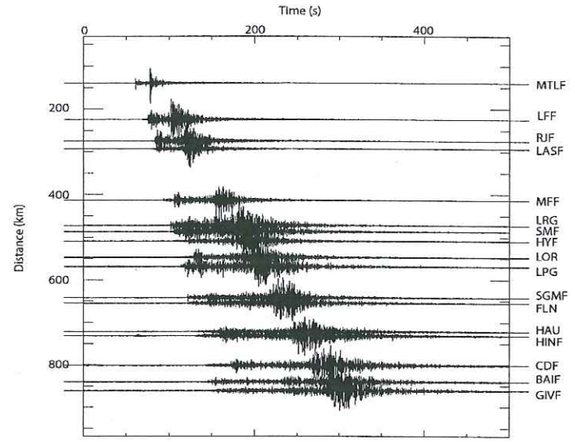

FIG. 2.2 – *Vertical-component seismograms recorded for the Saint Gaudens earthquake at different epicentral distances, and filtered between 1 and 5 Hz.*

distances range from 139 to 860 km.

Figure 2.2 shows an example of vertical-component seismograms (filtered between 1 and 5 Hz) of the Saint Gaudens earthquake for epicentral distances between 139 and 860 km. In this distance range, the *Lg* wavetrain is clearly the dominant phase of the seismograms. For such epicentral distances, the waves travel across different geological structures. However, they do not cross the Alpine et Pyrenean recent mountain ranges where *Lg* extinction can be observed (see Campillo et al. [1993] for the Ivrea body extinction in the Alps, and Chazalon et al. [1993] for the Western Pyrenean extinction). Apart from these two mountain belts, the Variscan platform crust of central France is fairly laterally homogeneous and in the following, we can reliably assume that regional phases travel through a one-dimensional lithosphere with laterally homogeneous statistical properties.

Energy envelopes recorded at all stations for the Saint Gaudens earthquake, and band-pass filtered around 3 Hz are plotted in Figure 2.3. In this figure, we can distinguish three different regimes on the temporal behaviour of energy. Direct wave arrivals can first be observed. Then, for t < 300 s, the energy curves display different decay rates at different epicentral distances. This is the multiple scattering regime which can be explained with the radiative transfer theory (Rytov, Kravtsov and Tatarskii [1989]). Finally, all energy curves merge in the 300 - 500 s time window, exhibiting a steady decay independently of distance. The waves are in the so-called diffusion regime. Diffusion occurs after a sufficiently large number of scattering events. As each scattering event distributes energy in

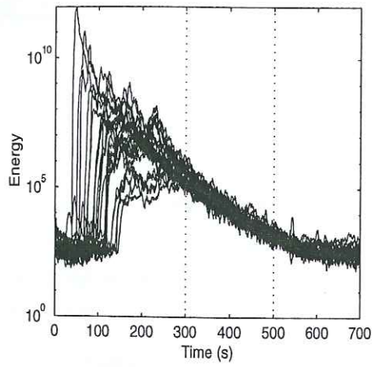

FIG. 2.3 – *Envelopes of all seismograms recorded for the Saint Gaudens earthquake after filtering around 3 Hz. The vertical dotted lines delimit the time interval when all decay curves merge independently of epicentral distance.*

all directions of space, the energy distribution will only slightly differ from isotropy after a large number of scattering events (Kourganoff [1963]). In this regime, the wave energy is governed by a diffusion equation. For large time, its solution exhibits an asymptotic behaviour in which energy is independent of distance.

2.3 Data processing

Seismograms were filtered in three narrow frequency bands centred on 2, 3 and 5 Hz, with bandwidths of 0.66, 1 and 1.65 Hz respectively. Amplitudes were then squared to obtain the coda energy envelope. The background noise preceding the first arrivals was processed in a similar manner to determine the time when signal-to-noise ratio becomes smaller than 4.

The energy of the coda recorded at a given station is affected by the local site amplification in addition to the influence of the propagation medium. All measured energies have thus to be normalized to remove site and source effects.

The normalization is based on the separability of source, site and path effects (Aki [1980]). The main assumption is that, at large time and if there is no site effect, the recorded energy level is the same at all stations. This is true if we assume that, at large lapse times waves propagate in the diffusion regime, when energy is uniformly distributed in space. The validity of the diffusion assumption will be discussed later.

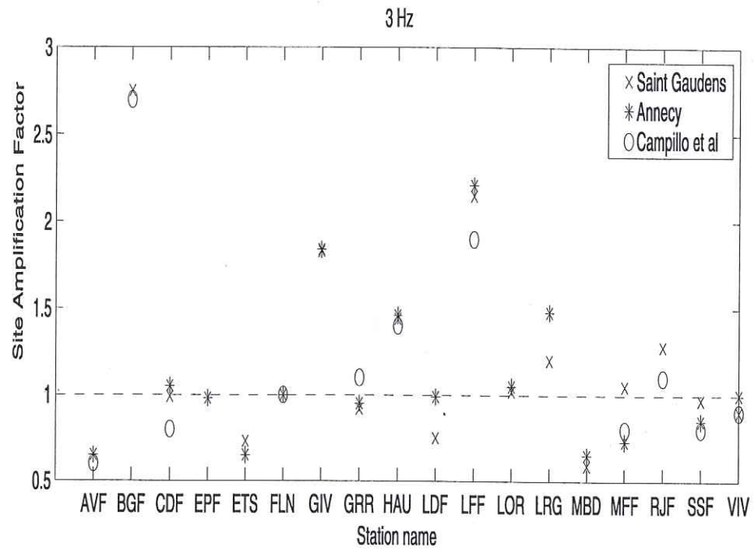

FIG. 2.4 – *Comparison between the site amplification factors measured by Campillo et al. [1985] (∘) and the ones obtained with the Saint Gaudens (×) and Annecy events (∗).*

Using the assumption of Campillo et al. [1985], we consider station FLN as the reference site, assuming that its site effect is equal to 1. Since path and source terms become independent of the station when t is large, the energy ratio between two seismograms at a given frequency in a given time window equals the ratio between the local site amplifications at those stations. We can thus determine the site amplification of each site relative to FLN. Practically, we use 50s-wide time windows centered at a lapse time of 450s. Figure 2.4 shows the values of site amplification factors measured at 3 Hz for 17 stations using the records of both Annecy (stars) and Saint Gaudens earthquakes (crosses). They are compared to values obtained at the same stations by Campillo et al. [1985] from an inversion of Lg amplitude decay with distance for source, site, and path effects (circles in Figure 2.4). The two methods give very similar results, showing the validity of both the simple normalization method used here and the diffusion assumption.

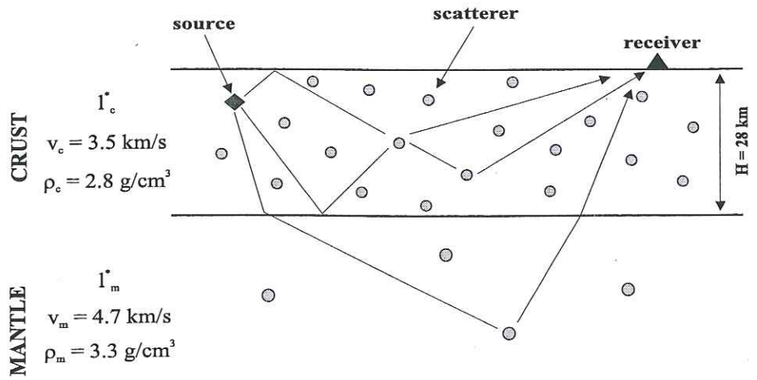

FIG. 2.5 – *Model used in the simulations.*

2.4 Inversion

To quantify crust and mantle heterogeneity and intrinsic absorption in France, we compare observed *Lg* coda energy with the results of numerical simulations.

2.4.1 Direct problem: numerical simulations

For the comparison with observations, we consider a simple model consisting of a flat layer representing the crust overlying a half space representing the mantle (Figure 2.5). The Moho is at 28 km depth (Perrier and Ruegg [1973]). The average values of velocities and densities estimated from refraction experiments by Perrier and Ruegg [1973] in central France are shown in Table 2.1. The main assumptions of this model are that the crust has laterally constant properties and that the intrinsic Q is constant in the whole medium (crust and mantle). The three free parameters of our model are thus the absorption length l_a and the transport mean free paths of the crust, l^*_c, and mantle l^*_m.
In the simulations, we assume that the source is isotropic and we consider 37 receivers located at the free surface and at epicentral distances corresponding to our dataset.
Wave propagation in the lithosphere is modelled using the radiative transfer equation. We assume that no mode conversion occurs (acoustic wave propagation) and that scattering is isotropic. The acoustic radiative transfer equation can be solved with Monte Carlo simulations. The simulation procedure has been described in Lux and Koblinger [1991] and in a number of papers such as Hoshiba [1991] for wave propagation in an infinite space, Hoshiba [1994,1997] and Margerin et al. [1998] for propagation in a layered medium.

	S-wave velocity $km.s^{-1}$	density $g.cm^{-3}$	Q_{int}	mean free path km
CRUST	3.5	2.8	200 - 1500	30 - 1000
MANTLE	4.7	3.3	200 - 1500	250 - 100000

TAB. 2.1 – *Parameters of the model used in the simulations*

2.4.2 Comparison window and misfit function

Figure 2.2 shows that seismograms recorded at regional distance have a long *Lg* coda. As our models only include scattered waves, we compare our results with seismograms in time windows when direct waves are negligible. Campillo and Paul [1992] showed that, in an 1D-stratified model with alternating high and low-velocity layers in the lower crust, the *Lg* phase cannot be observed for group velocities smaller than 2.3 km/s. On the other hand, using a f-k analysis, Dainty and Toksöz [1990] showed that the long duration of *Lg* coda requires a 3D scattering process.
Accordingly with these results, we chose to start the comparison between data and simulations when the group velocity becomes smaller than 2.6 km/s, and to stop it when the signal-to-noise ratio becomes smaller than 4.
For each station, we normalize both observed and simulated energy curves by the average of energy values in the time-window $[t_0; t_0 + 50s]$ (with t_0 large). We have tested that a 50s-wide normalization window is large enough to smooth high frequency fluctuations in both the data and the Monte Carlo simulations. The influence of the time t_0 will be discussed in the following section.
For a given model, a misfit function ϵ is then calculated in half-overlapping moving time windows of duration 40-seconds using the formula:

$$\epsilon = \frac{1}{N.M} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{M} \frac{(< E^{norm}_{obs_i} >_j - < E^{norm}_{simul_i} >_j)^2}{min(< E^{norm}_{simul_i} >^2_j, < E^{norm}_{obs_i} >^2_j)} \tag{2.1}$$

where N and M are the number of stations and the number of moving time windows respectively. $< E^{norm}_{obs_i} >_j$ and $< E^{norm}_{simul_i} >_j$ denote averages of normalized energy for observations and simulations respectively, at station i and in the jth moving time window. $min(x, y)$ is the minimum of x and y. Other misfit functions have also been tested which give very similar results. We choose this one to overweight large values of $(< E^{norm}_{obs_i} >_j - < E^{norm}_{simul_i} >_j)$.

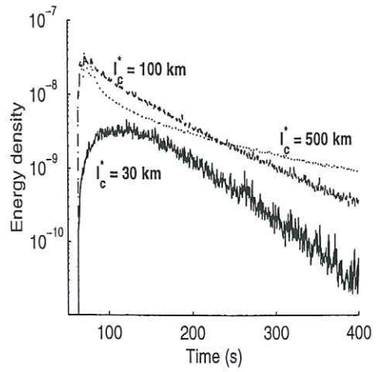

FIG. 2.6 – *Synthetic coda envelope curves obtained with Monte Carlo simulations for different values of mean free path contrast between crust and mantle. The station is located 220 km away from the source. The mantle transport mean free path is 100 000 km and the crustal transport mean free path is 30 km (solid line), 100 km (dashed line) or 500 km (dotted line).*

2.4.3 Grid search

Data and simulations have been compared for 882 different models. In those models, velocities, densities and crustal thickness are held constant whereas heterogeneity in the crust (l_c^*) and mantle (l_m^*) as well as intrinsic attenuation vary.
We consider values of Q_{int} between 200 and 1500 (the corresponding absorption length l_a thus varies between 37 and 278 km at 3 Hz). The crustal transport mean free path (l_c^*) ranges from 30 to 1000 km, and the mantle transport mean free path (l_m^*) varies from 250 to 100 000 km (Table 2.2). An example of the decay of energy density with time, simulated at an epicentral distance of 220 km, is shown in Figure 2.6 for different crustal mean free paths and for a perfectly elastic and transparent mantle ($l_m = \infty$). This figure illustrates how strongly the energy decay depends on the scattering properties of the crust.
Q_{int}, l_c^*, and l_m^* value are then obtained by comparing data with the 882 models using a grid search method.

2.5 Results of the inversion for models with a transparent mantle

In this section, we only consider models with a transparent mantle ($l_m^* = 100\ 000$ km). The only two free parameters are the absorption length in the crust, l_a, and the crustal mean free path, l_c^*. The comparison between data and synthetics is focussed on the frequency band 2-4 Hz which corresponds to the best signal-to-noise ratio.

2.5.1 Whole *Lg* coda

We first consider a time window including the whole *Lg* coda wavetrain. Figure 2.7 shows maps of the natural logarithm of the misfit values obtained for the two events considered separately (top: Saint Gaudens, middle: Annecy) and together (bottom). In Figure 2.8, we compare maps computed using records of both earthquakes for three different normalization windows (top: 300 - 350 s, middle: 325 - 375 s and bottom: 350 - 400 s). In both figures, the gray scale of the map on the left hand side covers the entire amplitude range while, on the right hand side, the gray scale zooms in the amplitude range [minimum;minimum+3%]. The locations of the absolute minima (white crosses in the left hand side maps of Figures 2.7 and 2.8) are not well defined, and they change with changing normalization window and event. The location of the absolute minimum is thus not robust and cannot be used to discriminate between the models.
The main conclusion that can be drawn from the misfit maps of Figure 2.7 and 2.8 is that many very different models equally fit the observations. As an example, models with $l_c^* <$ 100 km and $l_a >$ 200 km ($Q_{int} > 1200$) or with $l_c^* >$ 500 km and $l_a \simeq$ 150 km ($Q_{int} \simeq$800-900) can explain equally well the observations, although they are very different. In the first one, intrinsic attenuation is negligible and all the observed attenuation can be explained by scattering. For the second model, on the contrary, scattering attenuation is weak and most of the observed attenuation can be explained by anelastic absorption. The difference in misift values obtained for those very different models are not strong enough to conclude that a single model fits observations better than another one, showing that there is a trade-off between l_a and l_c^*, even considering a large distance range. Nevertheless, limit values for l_a and l_c^* can be measured: $l_c^* >$ 50 km and $l_a >$ 150 km. The trade-off between l_a and l_c^* is due to the common decay rate shown in Figure 2.3 in most of the considered time window. In order to better fit the data, we will now focus on the early *Lg*-coda, where energy depends on distance.

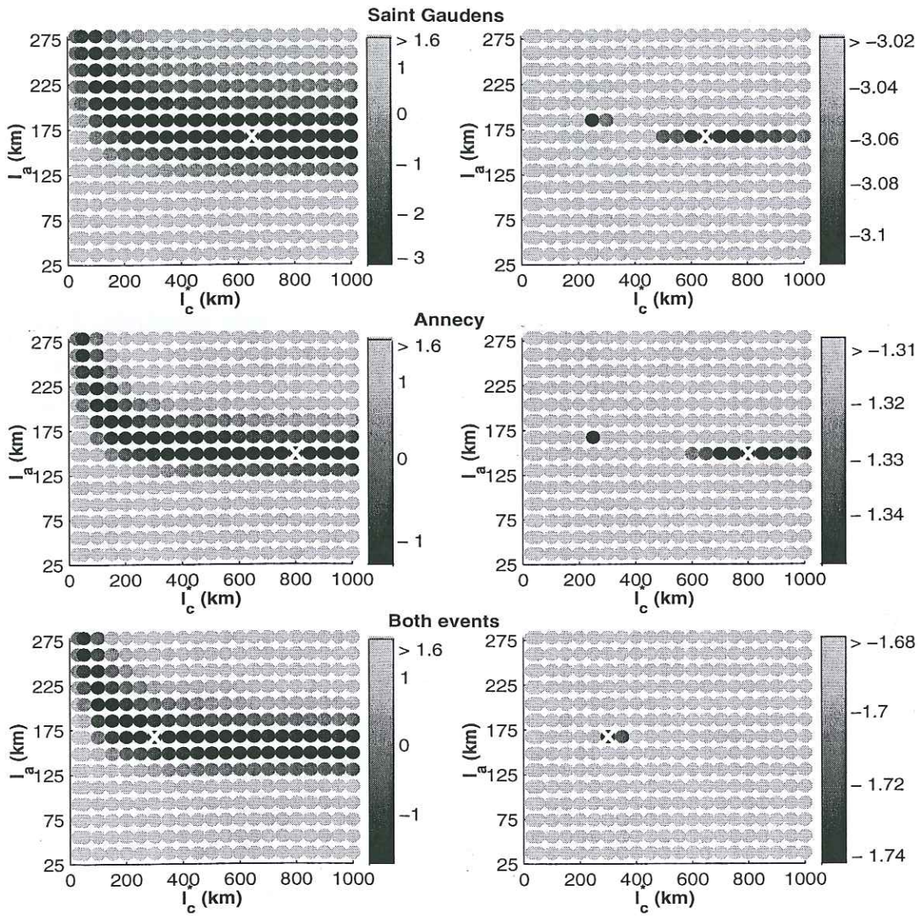

FIG. 2.7 – *Maps of the natural logarithm of the misfit values calculated for the whole Lg coda time window at 3 Hz for the Saint Gaudens event (top), the Annecy event (middle) and both earthquakes simultaneously (bottom). The normalization window is 350-400 s. In the left hand side, the gray scale covers the whole amplitude range, while, in the right hand side, the gray scale is zoomed on the amplitude range* $[minimum; minimum + 3\%]$. *White crosses indicate locations of the absolute minimum misfit.*

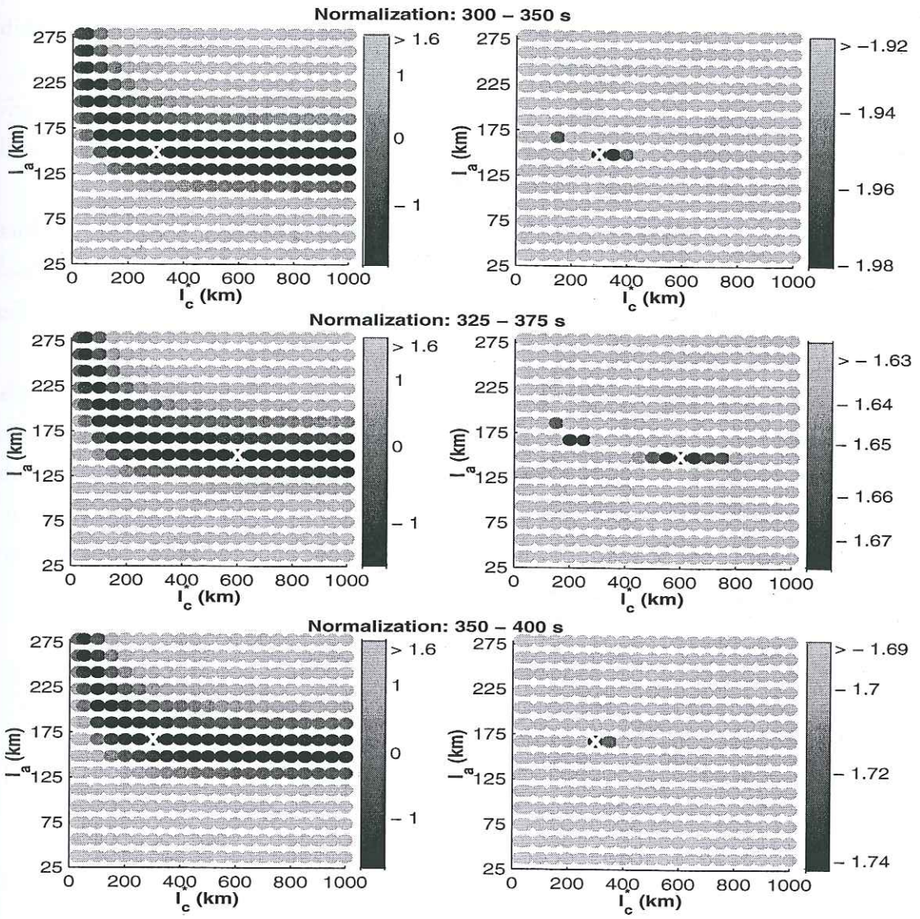

FIG. 2.8 – *Maps of the natural logarithm of the misfit values for the whole Lg coda time window at 3 Hz for both earthquakes simultaneously and for 3 different normalization windows (top: 300-350 s; middle: 325-375 s; bottom: 350-400 s). Same legend as Figure 2.7.*

2.5.2 Early Lg coda

The comparison is now made on the early *Lg* coda wavetrain, when the energy depends on both time and epicentral distance. The comparison time window starts when the group velocity becomes smaller than 2.6 and ends when all energy curves exhibit a steady decay (t = 300 s in Figure 2.3).

Figure 2.9 shows maps of the natural logarithm of the misfit values for the two events considered simultaneously and for three normalization windows (top: 300-350s, middle: 325-375s and bottom: 350-400s).

In the left hand side of Figure 2.9, we observe that a limited number of models produce an acceptable fit for the early *Lg* coda (darkest dots). Moreover, the location of the absolute minimum misfit (right hand side) is very well defined and remains stable for different normalization windows.

This means that we can find a single model which explains both the space and time attenuation characteristics of the early *Lg* coda energy in France. This model is characterized by a crustal mean free path of about 200 $\pm$ 50 km and an absorption length of about 180 $\pm$ 30 km. Moreover, we can note that the model which fits the observations in the early *Lg* coda time window is also an acceptable model for explaining the attenuation characteristics of the whole *Lg* coda attenuation.

2.5.3 Attenuation of the direct *Lg* wavetrain

We now compare our results with those of Campillo et al. [1985] and Campillo and Plantet [1991] who measured the quality factor for the direct *Lg* waves in France. They found that this quality factor varies with frequency as:

$$Q_{Lg}(f) = Q_0 * f^{0.52\pm0.1} \tag{2.2}$$

with $Q_0 = 290 \pm 80$.

Assuming that this wavetrain is composed of coherent waves, its attenuation is the attenuation of the mean field. It can thus be expressed as:

$$\frac{1}{Q_{Lg}} = \frac{1}{Q_{int}} + \frac{1}{Q_{scat}} \tag{2.3}$$

At 3 Hz, equations 2.2 and 2.3 provide us with a relationship between l_c^* and l_a that can be plotted on our misfit maps of Figure 2.9 (solid curve). Thus, models located along this curve explain the measured attenuation of direct waves, whereas models with low misfit values (dark dots) explain the measured attenuation of *Lg* coda. Models at the

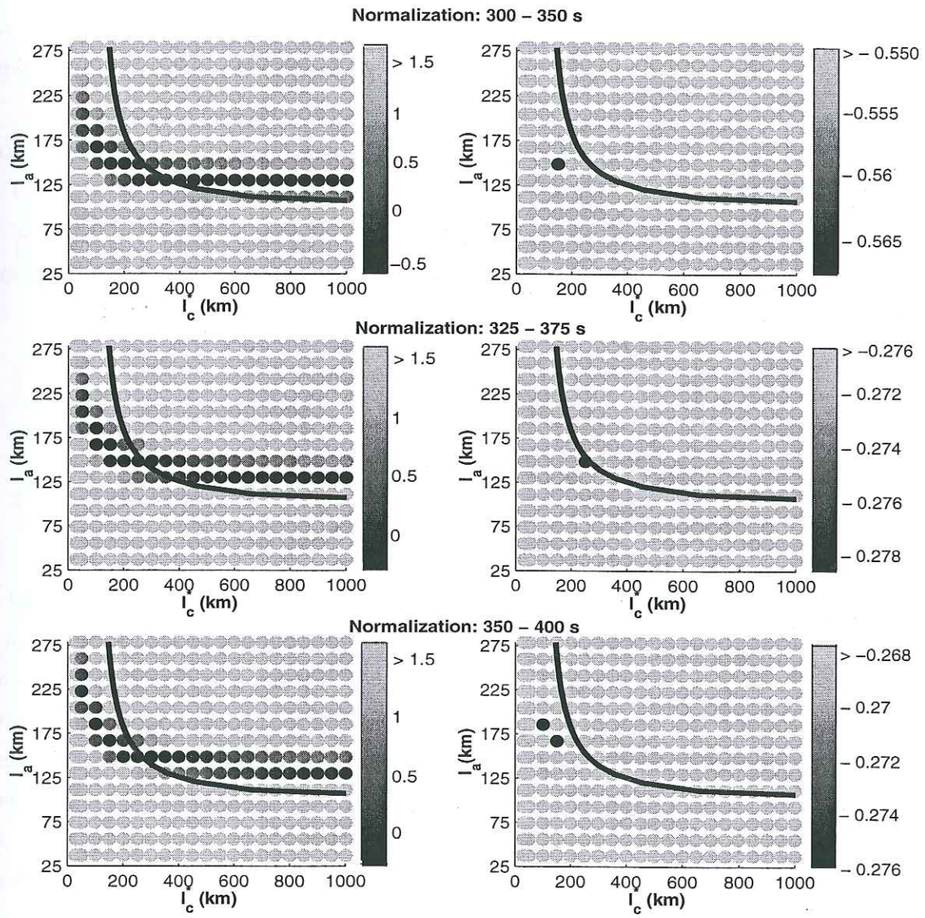

FIG. 2.9 – *Maps of the natural logarithm of the misfit values for the early Lg coda time window at 3 Hz for both earthquakes considered simultaneously, and for 3 different normalization windows (top: 300-350 s; middle: 325-375 s; bottom: 350-400s). In the left hand side, the gray scale covers the whole amplitude range, while, in the right hand side, it is zoomed on the amplitude range [minimum; minimum + 3%]. Solid curves are solutions of equation (2.3) and represent models which explain Lg attenuation as measured by Campillo et al. [1985].*

intersection of the two curves explain simultaneously the measured attenuations of the direct waves and early Lg coda at 3 Hz in France. There is however an uncertainty on the measurement of Q_0 as indicated by its standard deviation ($Q_0 = 290 \pm 80$). For the sake of simplicity, and because 290 is the most probable value, uncertainties are not shown in Figure 2.9.

Using the results of the early coda study and direct Lg analysis, we find that a model with absorption length of 180 ± 30 km and crustal mean free path of 250 ± 150 km at 3 Hz explains simultaneously the attenuation characteristics of those two parts of the seismogram. We can note that this model also explains the feature of amplitude decay in the whole coda time window.

2.5.4 Discussion

We have shown that a simple model with only two free parameters ($l_a \simeq 180 \pm 30$ km i.e. $Q_a \simeq 1000$ and $l_c^* \simeq 250 \pm 150$ km) explains the attenuation of the direct Lg wave and of the early and late Lg coda with both time and distance. A coda-Q study has also been conducted, showing that Q_c is about 795 ± 25 at 3 Hz. In this model, l_c^* is much larger than the crustal thickness ($H = 28$ km). As Q_c measures the leakage of the energy to the mantle (as shown by Margerin et al. [1998].), we observe that this leakage is weak in France. However, because of the uncertainties, we cannot tell which attenuation process is dominant: intrinsic absorption and scattering attenuation have the same order of magnitude. Campillo and Plantet [1991] measured Q_{scat} in France for Lg waves, assuming that Q_{int} is about 1500 and is frequency independent. They showed that Q_{scat} is about 1000 at 3 Hz, which gives a crustal mean free path l_c^* of about 180 km. This result agrees with the measurement made in this study.

To prove the quality of the fit between synthetics and observations, Figure 2.10 compares, for the Saint Gaudens event, observed (solid lines) and modelled (dashed lines) coda envelope amplitude decay curves for the model with $l_a = 180$ km ($Q_{int} \sim 1000$) and $l_c^* = 200$ km. This model correctly agrees with observations in the considered time window (vertical dotted lines) at most stations for early as well as for late Lg coda. As numerical simulations do not include the direct wavetrain, the comparison between data and observations cannot be done for this part of the signal.

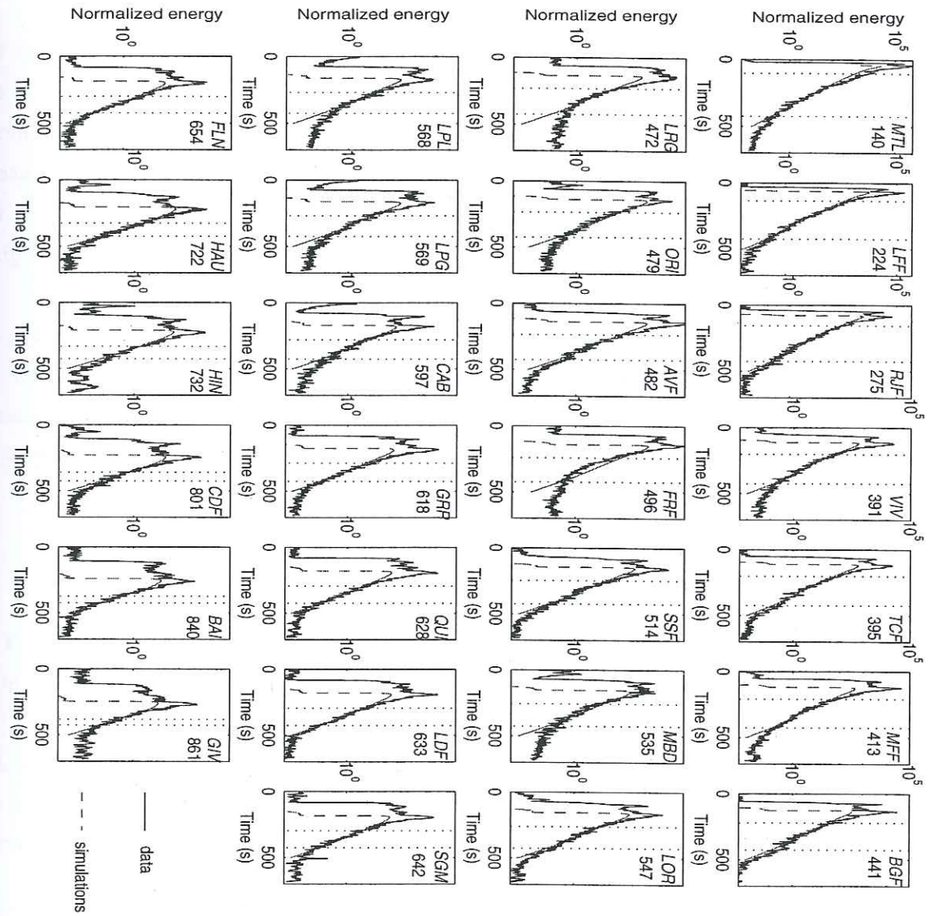

FIG. 2.10 – *Comparison at 3 Hz between observations and simulations for the Saint Gaudens earthquake. Solid lines are observed normalized energy curves and dashed lines are synthetic normalized energy curves computed with $l_c^* = 200$ km, $l_m^* = 100000$ km and $l_a = 180$ km ($Q_{int} \sim 1000$). The vertical dotted lines mark the comparison time windows. Station name and epicentral distance are given in each panel.*

2.6 Discussion

2.6.1 Results at other frequencies

Figure 2.11 shows maps of the natural logarithm of the misfit value obtained for the two earthquakes considered simultaneously, in the early Lg coda time window, and in the frequency bands centered on 2 Hz (left), 3 Hz (middle) and 5 Hz (right). This figure shows that l_c^* is about 300 km at 2 Hz, 200 at 3 Hz and 200 at 5 Hz. To first order and because of the uncertainties, l_c^* appears to be weakly dependent or independent of frequency in the frequency band 1.5-6.5 Hz. This means that the waves are in the high frequency regime (*i.e.* the wavelength is smaller than the correlation length).
We can also evaluate the variations of l_a as a function of frequency: $l_a \sim 170$ km ($Q_{int} \sim 600$) at 2 Hz, $l_a \sim 160$ km ($Q_{int} \sim 900$) at 3 Hz and $l_a \sim 140$ km ($Q_{int} \sim 1200$) at 5 Hz. The uncertainties on l_a do not allow us to have a precise idea of the dependence of the absorption length with frequency. Nevertheless, l_a seems to decrease weakly with frequency.

2.6.2 Influence of mantle heterogeneity

In the previous sections we only considered models with a transparent mantle. This section is devoted to the study of the influence of mantle heterogeneity on *Lg*-coda attenuation. We focus on the early *Lg* coda time window.
Three different levels of mantle heterogeneity are investigated: $l_m^* = 250$, 1000 and 100 000 km. The misfit function is again computed at 3 Hz, but results and conclusions are the same for other frequency bands. Maps of the misfit values are presented in Figure 2.12.
We can observe that the heterogeneity level of the mantle has a negligible effect on the measurement of l_a (and thus Q_{int}) and l_c^* . We thus cannot give any information about mantle heterogeneity using only these data.

2.7 Conclusion

We have shown that a simple stratified model with only two free parameters, the absorption length l_a, and the crustal transport mean free path l_c^* explains the attenuation characteristics of the complete seismogram with both time and distance, from the direct *Lg* waves to the early and late *Lg* coda. It has been shown that the early coda analysis

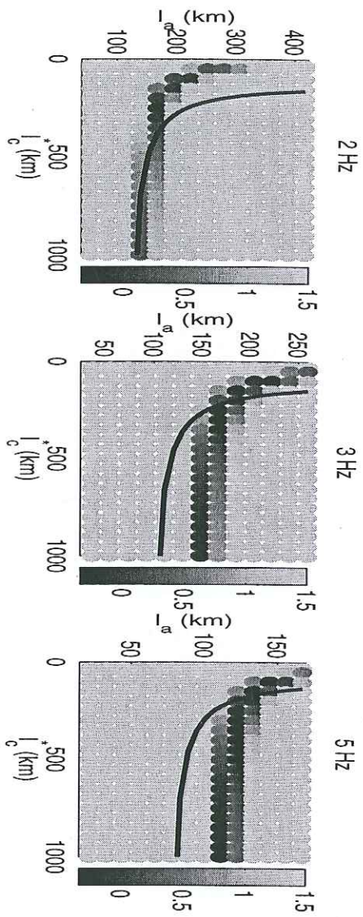

FIG. 2.11 – *Maps of the natural logarithm of the misfit values calculated for the early Lg coda time window in different frequency bands (left: 2 Hz, middle: 3 Hz, right:5 Hz). The gray scale covers the entire amplitude range. Black curves are the same as in Figure 2.9.*

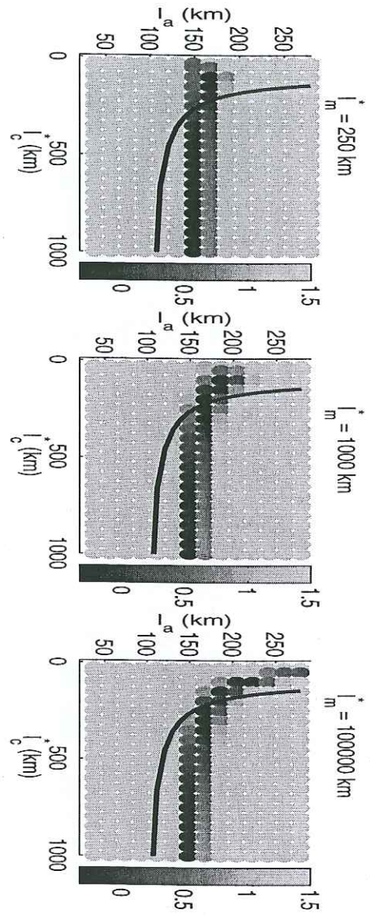

FIG. 2.12 – *Maps of the natural logarithm of the misfit values calculated for the early Lg coda time window for different levels of mantle heterogeneity (left: l^*_m = 250 km, middle: l^*_m =1000 km, right: l^*_m = 100 000 km). Black curves are the same as in Figure 2.9.*

allows us to reduce the number of acceptable models obtained using the whole coda analysis (or coda-Q analysis).
The model which correctly fits the data is characterized by $l^*_c \simeq 200 \pm 50$ km and $l_a \simeq 180 \pm 30$ km with a weak frequency dependence in the 1.5 - 6 Hz range. This result shows that scattering attenuation and intrinsic absorption have approximatively the same strength in central France. We have also shown the weak influence of the mantle heterogeneity.

2.8 Acknowledgments

The authors would like to thank N. Trégourès, B.A. van Tiggelen and R. Hennino for many helpful discussions. We are grateful to B. Feignier and the Laboratoire de Géophysique (LDG/CEA) for providing data. All the computations presented in this paper were performed on the Service Commun de Calcul Intensif de l'Observatoire de Grenoble (SCCI).

2.9 Bibliography

Abubakirov, I.R. and A.A. Gusev, Estimation of scattering properties of lithosphere of Kamchatka based on Monte Carlo simulation of record envelope of a near earthquake, *Phys. Earth planet. Inter.*, **64**, 52-67, 1990.

Aki, K., Analysis of the seismic coda of local earthquake as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, **74**, 615-631, 1969.

Aki, K. and B. Chouet, Origin of coda waves: source, attenuation and scattering effects, *J. Geophys. Res.*, **80**, 3322-3342, 1975.

Aki, K., Attenuation of shear-waves in the lithosphere for frequencies from 0.05 to 25 Hz, *Phys. Earth planet. Inter.*, **21**, 50-60, 1982.

Bois, C., M. Cazes, A. Hirn, A. Mascle, P. Matte, L. Montadert and B. Pinet, Contribution of deep seismic profiling to the knowledge of the lower crust in France and neighbouring area, *Tectonophysics*, **145**, 253-275, 1988.

Campillo, M., Lg wave propagation in a laterally varying crust and the distribution of the apparent quality factor in central France, *J. Geophys. Res.*, **92**, 12,604 - 12,614, 1987.

Campillo, M., J.-L. Plantet and M. Bouchon, Frequency dependent attenuation in the crust neneath central France from Lg waves: data analysis and numerical modeling, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1395-1411, 1985.

Campillo, M. and J.-L. Plantet, Frequency dependence and spatial distribution of seismic attenuation in France: experimental results and possible interpretations, *Phys. Earth planet. Inter.*, **67**, 48-64, 1991.

Campillo, M. and A. Paul, Influence of the lower crustal structure on the early coda of regional seismograms, *J. Geophys. Res.*, **97**, 3405-3416, 1992.

Campillo, M., B. Feignier, M. Bouchon, and N. Bethoux, Attenuation of crustal waves across the Alpine range, *J. Geophys. Res.*, **98**, 1987-1996, 1993.

Chazalon, A., M. Campillo, R. Gibson and E. Carreno, Crustal wave propagation anomaly across the Pyrenean Range.Comparison between observations and numerical simulations, *Geophys. J. Int.*, **115**, 829-838, 1993.

Dainty, A.M.. and M.N. Toksöz, Array analysis of seismic scattering, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **80**, 2242-2260, 1990.

Fehler, M., M. Hoshiba, H. Sato and K. Obara, Separation of scattering and intrinsic attenuation for the Kanto-Tokai region, Japan, using measurement of S-wave energy versus hypocentral distance, *Geophys. J. Int.*, **108**, 787-800, 1992.

Fuchs, K., K.P. Bonjer, D. Gajewski, E. Lüschen, C. Prodehl, K.J. Sandmeier, F. Wenzel and H. Wilhelm, Crustal evolution of the Rhinegraben area. 1. Exploring the lower crust in the Rhinegraben rift by unified geophysical experiments, *Tectonophysics* **141**, 261-275, 1987.

Gusev, A., Vertical profile of turbidity and coda Q, *Geophys. J. Int.*, **123**, 665 -672, 1995.

Hasegawa, H.S., Attenuation of *Lg* waves in the canadian shield, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **75**, 1569 - 1582, 1985.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth planet. Inter.* **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using the multiple lapse time window analysis of full seismogram envelope, *J. Geophys. Res.*, **98**, 15,809-15,824, 1993.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geoph. Res. Lett.*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth dependent S-wave velocity structure, *Phys. Earth planet. Inter.*, **104**, 15-22, 1997.

Hoshiba, M., R. Rietbrock, F. Scherbaum, H. Nakahara and C. Haberland, Scattering attenuation and intrinsic absorption using unifrom and depth dependent model - Application to full seismogram envelope recorded in Northern Chile, *Journal of Seismology*, **5**, 157-179, 2001.

Jin, A., K. Mayeda, D. Adams and K. Aki, Separation of intrinsic and scattering attenuation in southern California using TERRAscope data, *J. Geophys. Res.*, **99**, 17,835-17,848, 1994.

Kourganoff, V., 1963, *Basic Methods in Transfer Problems: Radiative equilibrum and neutron diffusion*, Dover, New York.

Lux, I. and L. Koblinger, *Monte Carlo particule transport methods: Neutron and photon calculations*, CRC Press, 1991.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. Van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q, *Geophys. J. Int.*, **134**, 596-612, 1998.

Margerin, L., M. Campillo, N.M. Shapiro and B.A. Van Tiggelen, Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q: application to seismograms recorded in Mexico, *Geophys. J. Int.*, **138**, 343-352, 1999.

Mayeda, K., F. Su and K. Aki , Seismic albedo from the total seismic energy dependence on hypocentral distance in southern California, *Phys. Earth planet. Inter.*, **67**, 104-114, 1991.

Mayeda, K., S. Koyanagi, M. Hoshiba, K. Aki and Y. Zeng, A comparative study of scattering, intrinsic and coda Q^{-1} for Hawaii, Long Valley and Central California between 1.5 and 15 Hz, *J. Geophys. Res.*, **97**, 6643-6659, 1992.

Nicolas, M., B. Massinon, P. Mechler and M. Bouchon, Attenuation of regional phases in Western Europe, *Bull. Seismol. Soc. Am.*, **72**, 2089-2106, 1982.

Perrier, G. and J.C Ruegg., Structure profonde du Massif Central Français, *Ann. Geophys.*, **29**, 435-502, 1973.

Rytov, S.M., Y.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, "4.Wave Propagation Through Random Media", in *Principle of Statistical Radiophysics*, Springer - Verlag, 1989.

Ryzhik, L., G. Papanicolaou and J.B. Keller, Transport equations for elastic and other waves in random media, *Wave motion*, **24**, 327-370, 1996.

Sato, H. and M. Fehler, Wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth, Springer Verlag, New York, 1998.

Sato, H., H. Nakahara and M. Ohtake, Synthesis of scattered energy density for nonspherical radiation from a point shear-dislocation source based on the radiative transfer theory, *Phys. Earth planet. Inter.*, **104**, 1-13, 1997.

Shing, S. and H.B. Hermann, Regionalization of crustal coda Q in the continenetal United States, *J. Geophys. Res.*, **88**, 527-538, 1983.

Ugalde, A., L.G. Pujades, J.A. Canas and A. Villaseñor, Estimation of the intrinsic

absorption and scattering attenuation in Northeastern Venezuela (Southeastern Caribbean) using coda waves, *Pure appl. Geophys.*, **153**, 685-702, 1998.

Wu, R.S., Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation -I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 57-80,1985.

Wu, R.S. and K. Aki, Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - Separation of scattering effect from intrinsic attenuation II. Application of the theory to Hindu Kush Region, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 49-80, 1988.

Wu, R.S. and K. Aki, Introduction to the wave scattering in three-dimensionnally heterogeneous Earth, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 1-6, 1988.

Zeng, Y., F. Su and K. Aki, Scattering wave energy propagation in a random isotropic scattering medium 1.Theory, *J. Geophys. Res.*, **96**, 607-619, 1991.

Chapitre 3

Propagation des ondes dans les volcans.

La tomographie par analyse des temps d'arrivées a été couramment appliquée aux zones volcaniques. Cette méthode a permis de mettre en évidence des contrastes de vitesse dans les volcans qui ont été reliés à la structure 3D des volcans (chambre magmatique, inclusions de magma solidifiées ...) (Laigle et al. [2000]). L'étude de la coda des simogrammes a également été largement appliquée à ces régions, les volcans étant des milieux extrêmement hétérogènes. Parmi les méthodes "classiques", nous pouvons citer: l'étude de la séparation de Q_{int} et Q_{scat} (Del Pezzo et al. [1995] à l'Etna, Wegler et Lühr [2001] au Mérapi, Mayeda et al. [1992] à Hawaii), la mesure de coda Q et de son évolution temporelle (Del Pezzo et al. [1983] aux îles Eoliennes, Zúñiga et al. [1994] à El Chichòn (Chiapas), Fehler et al. [1988] au St Helens, Londoño [1996] et Londoño et al. [1998] au Nevado del Ruiz) ou l'utilisation de la coda pour le calcul de l'effet de site (Koyanagi et al. [1992] à Hawaii). Une méthode d'imagerie des volcans utilisant ces ondes pourrait être complémentaire aux techniques classiques d'inversion et permettre d'accéder directement aux caractéristiques du milieu en terme d'hétérogénéité.

Récemment, Aki et Ferrazzini [2001] ont montré l'intérêt de la coda pour imager les volcans et plus précisemment pour caractériser des zones fortement hétérogènes dans les volcans. Pour cela, ils ont observé la dépendance spatiale de l'amplitude de la coda, la répartition non isotrope de cette amplification traduisant des effets de "localisation d'énergie". Aki et Ferrazzini ont associé ces effets de localisation à des contrastes du taux d'hétérogénéité en profondeur: des inclusions fluides (comme le magma) peuvent se comporter comme des

pièges à énergie.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à l'étude de la dépendance spatiale de l'amplitude de la coda. Dans un premier temps, nous expliciterons la mesure effectuée par Aki et Ferrazzini [2001] au Piton de la Fournaise puis nous ferons des mesures similaires au Kilauea dans le but de vérifier que ce phénomène de dépendance spatiale n'est pas une caractéristique propre au Piton de la Fournaise. Dans un second temps, nous essayerons de valider l'hypothèse de contraste d'hétérogénéité formulée par Aki et Ferrazzini [2001] en montrant l'effet d'une zone hétérogène sur cette répartition spatiale. Cette étude sera effectuée numériquement (paragraphe 2) grâce à des simulations de propagation d'onde en milieu hétérogène puis grâce à des expériences de propagation d'ondes acoustiques en laboratoire (paragraphe 3).

3.1 Variation spatiale de l'amplitude de la coda dans les volcans

Dans ce premier paragraphe, nous allons reprendre les mesures d'amplitude de la coda effectuées par Aki et Ferrazzini [2001]. Nous expliciterons également les hypothèses apportées par ces auteurs pour expliquer la variation spatiale observée de l'amplitude de la coda. Enfin, nous appliquerons la méthode d'Aki et Ferrazzini au Kilauea (Hawaii) afin de vérifier que le phénomène observé par ces auteurs n'est pas une caractéristique propre au Piton de la Fournaise.

3.1.1 Facteur d'amplification de la coda au Piton de la Fournaise

Pour leur étude, Aki et Ferrazzini ont utilisé 5 événements de magnitude supérieure à 2. Ces évenements se sont produits entre 1996 et 1998, période ponctuée de diverses crises sismiques et éruptives. Les stations utilisées par ces auteurs sont représentées sur la figure 3.1.

Les figures 3.2 et 3.3 représentent l'amplitude de la coda pour les 5 événements (représentés par une étoile sur les figures 3.2 et 3.3) dans la bande de fréquence 1 - 3 Hz et pour un fenêtre temporelle comprise entre 25 et 35 secondes. Les amplitudes ont été corrigées de l'effet de site et normalisées par rapport à une station située à 15 kilomètres de l'Enclos Fouqué. Ces amplitudes corrigées et normalisées sont appelées *facteur d'amplification de la coda*. Ces figures montrent que la distribution spatiale du facteur d'amplification de la coda n'est pas homogène.

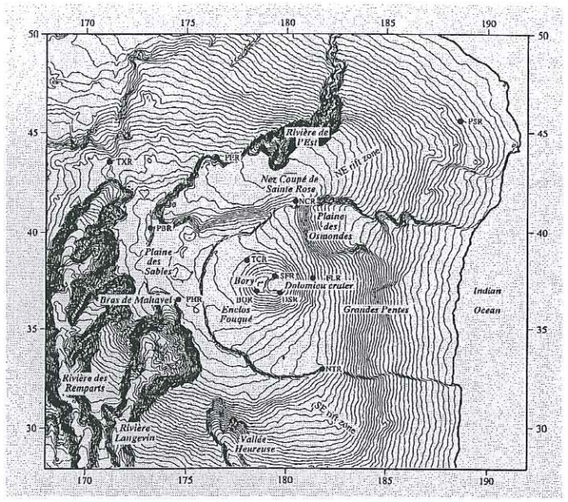

FIG. 3.1 – *Stations utilisées au Piton de la Fournaise. (d'après Aki et Ferrazzini [2001])*

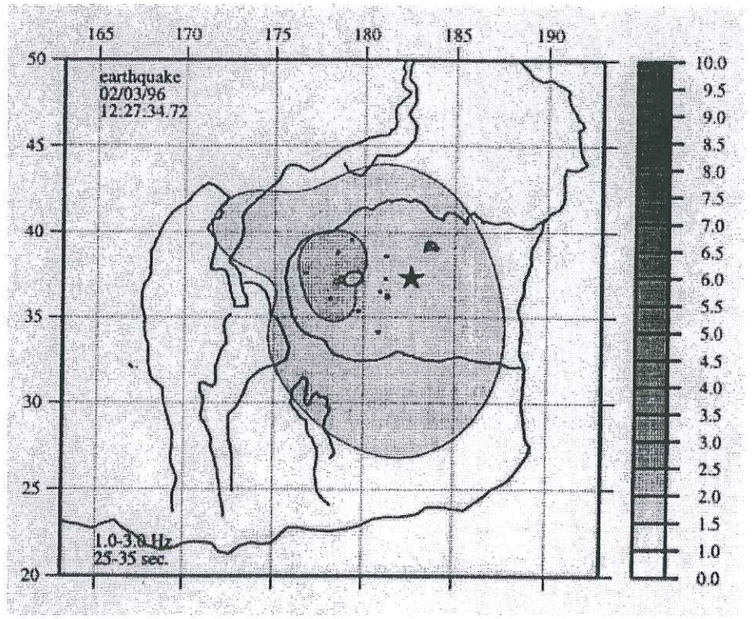

FIG. 3.2 – *Facteur d'amplification obtenu par Aki et Ferrazzini [2001] au Piton de la Fournaise pour l'événement du 02/03/1996 (Echelle en kilomètres). (d'après Aki et Ferrazzini [2001])*

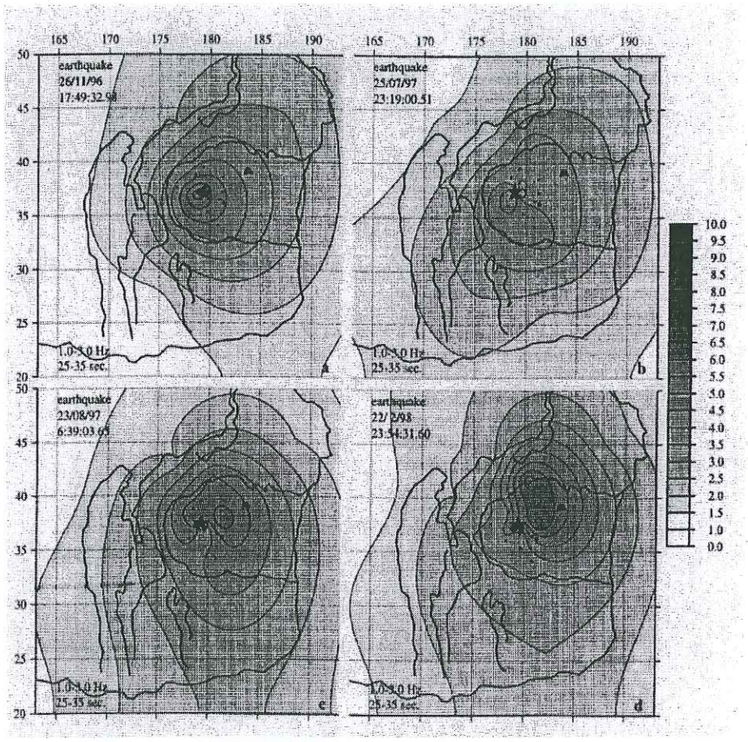

FIG. 3.3 – *Même figure que la figure 3.2 pour 4 autres événements. (d'après Aki et Ferrazzini [2001])*

Aki et Ferrazzini expliquent ce phénomène en émettant l'hypothèse que le surplus d'énergie reçu aux stations montrant un facteur d'amplification important provient d'ondes diffractées dans un volume très hétérogène. Cette "localisation" de la coda serait alors due à la présence d'ondes à faible vitesse piégées dans le système fluide-solide du volcan. Pour ces longueurs d'onde, le système fluide-solide apparait donc comme fortement hétérogène, plaçant la propagation des ondes dans un régime de diffusion multiple.
On observe également que la zone de "localisation" (zone où la facteur d'amplification est le plus grand) migre systématiquement avec le temps pendant les deux ans précédents l'éruption de 1998. Ce changement est attribué par Aki et Ferrazzini au remplissage des réservoirs magmatiques, l'éruption intervenant quand les réservoirs sont pleins.

3.1.2 Facteur d'amplification de la coda au Kilauea

Nous allons appliquer l'étude du facteur d'amplification de la coda au Kilauea (Hawaii). Cette étude est une étude préliminaire du facteur d'amplification de la coda qui va nous permettre de vérifier si l'effet observé par Aki et Ferrazzini est une caractéristique propre au Piton de la Fournaise ou s'il peut être observé sur d'autres volcans.
Le choix de la zone d'étude s'est porté sur le Kilauea pour plusieurs raisons. Le Kilauea (Hawaii) fait partie des volcans les plus actifs et est certainement un des volcans les plus étudiés (Tilling et Dvorak [1993]). De plus, ce volcan est extrêment bien instrumenté puisqu'en plus du réseau permanent HVO (Hawaiian Volcano Observatory) de nombreux réseaux temporaires y sont régulièrement installés.
Le réseau utilisé pour notre étude est composé de 10 stations large-bande temporaires de l'USGS distribuées dans la caldera et aux alentours de celle-ci (figure 3.4). Ce réseau a été choisi en raison de sa densité de station autour de la caldera. Nous avons utilisé trois événements localisés autour de la caldera (figure 3.4) qui se sont produits entre juin et septembre 1998 et de magnitude supérieure à 2. Notre ensemble de données est donc relativement restreint (3 événements, 10 stations) mais il s'avère suffisant pour une étude préliminaire qualitative. Dans toute cette étude, nous travaillerons à 2 Hz, fréquence montrant sur nos données le meilleur rapport signal sur bruit.

Calcul de l'effet de site

La première étape de la mesure du facteur d'amplification de la coda consiste à calculer l'effet de site à chacune des stations. Ce calcul, basé sur la méthode de renormalisation de

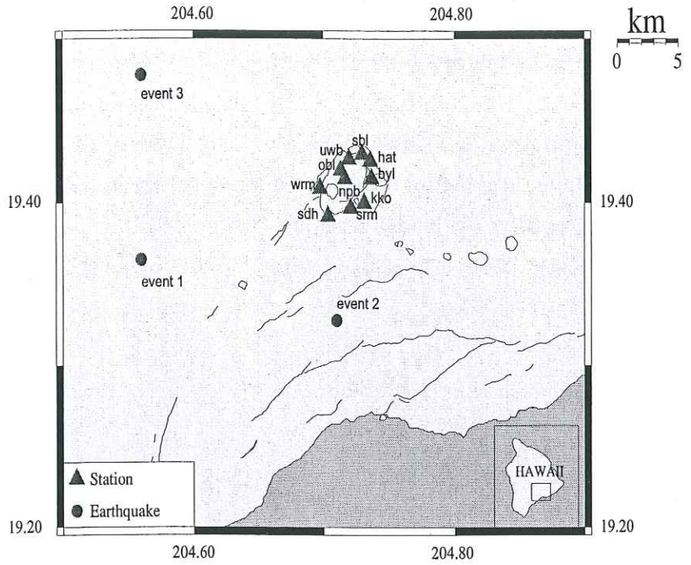

FIG. 3.4 – *Carte des stations et des événements utilisés pour l'étude du Kilauea.*

la coda (Aki [1980]) se fait de manière similaire à celle explicitée pour l'étude des phases régionales. En choisissant une station de référence, il est alors possible d'obtenir les effets de site aux autres stations relativement à cette station de référence.

Seul l'événement 3 a été utilisé pour déterminer l'effet de site. Cet événement est celui ayant la plus forte magnitude et donc le meilleur rapport signal sur bruit pour des temps longs. L'intervalle 60 - 70s a été pris comme fenêtre temporelle pour le calcul de l'effet de site, le temps t=70s correspondant à un rapport signal sur bruit de l'ordre de 2. Enfin, nous avons choisi la station kko (figure 3.4) comme station de référence pour ce calcul. Le choix de cette station sera justifié dans le paragraphe suivant.

Il est important de noter qu'un problème potentiel peut se poser dans la sélection de la fenêtre temporelle de correction de l'effet de site. Si l'amplitude de la coda est liée à un effet de piégeage, ce que l'on interprète comme un effet de site peut également être dû à ce piégeage. Si l'étude est purement qualitative, cette remarque ne pose pas de problème. Par contre, pour une étude quantitative en vue d'une comparaison avec les simulations, ce phénomène peut entrainer un biais. Pour s'affranchir de ce problème, il est nécessaire d'avoir des données ayant un très bon rapport signal sur bruit pour faire la mesure de l'effet de site le plus tard possible dans la coda.

Calcul du facteur d'amplification

Après avoir calculé l'effet de site à chaque station, il est possible d'obtenir le facteur d'amplification de la coda. Nous définirons ici le facteur d'amplification de la coda comme la rapport d'énergie à un temps donné (et non pas d'amplitude comme dans Aki et Ferrazzini [2001]) entre les stations et la station de référence (station kko). Cette station a été choisie car elle présente un très bon rapport signal sur bruit pour les trois événements. C'est dans un souci de cohérence que cette station a également été choisie pour le calcul de l'effet de site.

Pour calculer le facteur d'amplification de la coda, nous avons utilisé une fenêtre glissante de largeur 10 secondes décalée de 10 s à chaque itération. L'évolution du facteur d'amplification au cours du temps pour les trois événements est représentée sur la figure 3.5. Quelque soit l'événement considéré, on observe une faible dépendence spatiale du facteur d'amplification de la coda, les valeurs de ce facteur dépendant de l'événement considéré. Les zones mises en évidence par une ellipse pointillée sont celles présentant la plus forte amplification. A l'inverse des observations de Aki et Ferrazzini, la localisation de la zone d'amplification est indépendante de l'événement considéré. Ces événements s'étant déroulés entre juin et août 1998, on peut penser que cet intervalle de temps est trop court pour avoir la possibilité d'observer une éventuelle migration de la zone d'amplification de la coda.

Notre étude a également permis de caractériser le comportement de l'amplitude de la coda en fonction du temps pour un événement donné. Il est utile de rappeler que l'intervalle en temps 60-70 s a servi à la correction de l'effet de site et donc que les valeurs du facteur d'amplification sur cet intervalle ont été fixées à 1. On remarque que la distribution du facteur d'amplification de la coda à tendance à devenir, pour l'événement 3, isotrope au cours du temps (les valeurs du facteur d'amplification se rapprochent de 1).

3.1.3 Discussion et Conclusion

On observe bien, au Kilauea comme au Piton de la Fournaise, une amplification de la coda pour certaines stations du réseau, et cela quelque soit la position de la source. On ne peut toutefois pas comparer les valeurs du facteur d'amplification obtenues à ces deux volcans. En effet, les valeurs dépendent de la station de normalisation choisie et alors que dans le cas du Kilauea cette station se trouve dans le réseau (à 3 km au maximum des autres stations du réseau), elle en est à plus de 15 km dans le cas du Piton de la Fournaise. L'étude effectuée au Kilauea a également permis d'étudier le comportement du facteur

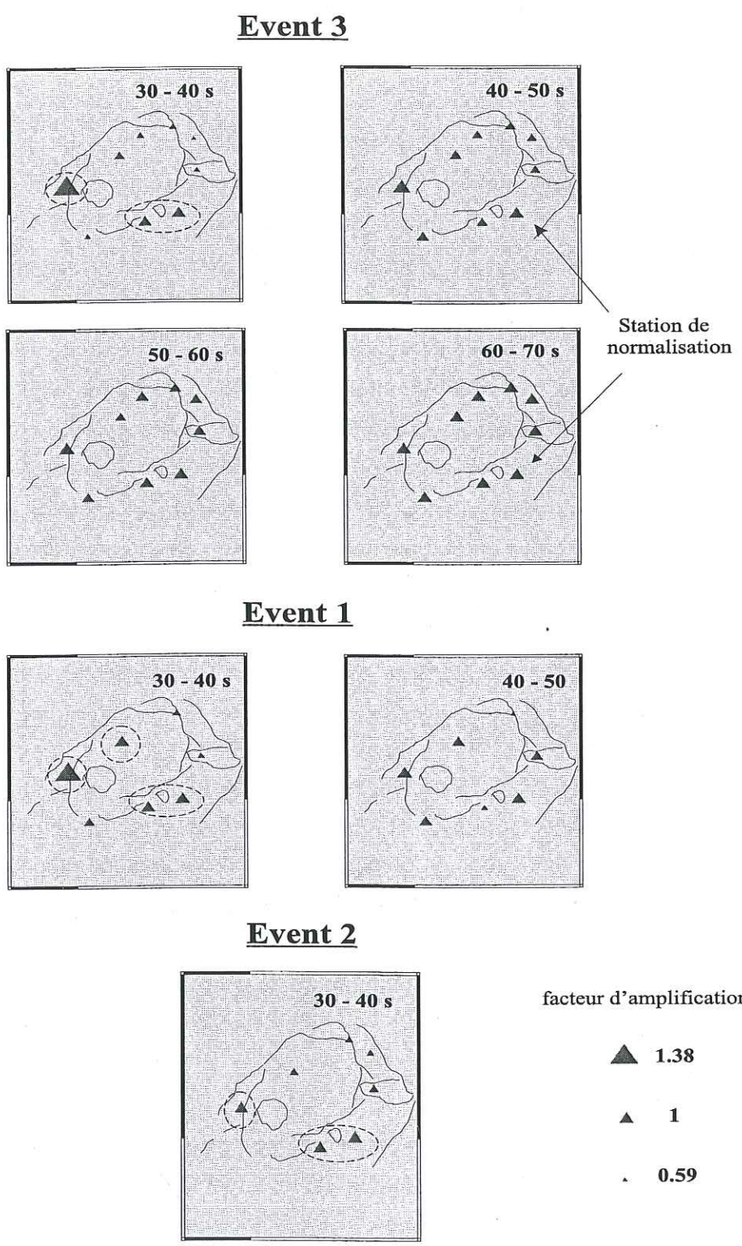

FIG. 3.5 – *Facteur d'amplification de la coda au Kilauea pour différentes fenêtres temporelles et trois événements.*

d'amplification de la coda au cours du temps. Il semble que plus le temps augmente, plus la dépendance spatiale du facteur diminue: il n'y a plus d'amplification de la coda, l'énergie est alors répartie de façon isotrope. On entre dans le régime de la diffusion.
Enfin, Aki et Ferrazzini [2001] ont émis l'hypothèse que cette amplification soit liée à la présence d'une zone hétérogène (système fluide solide tel que la présence de magma) sous les stations présentant une forte amplification de la coda. Au Kilauea, Dawson et al. [1999] ont observé, au Sud et à l'Est de la caldera, des zones où la vitesse des ondes S est anormalement faible. Cette anomalie serait liée, selon ces auteurs, à la présence de zones fortement fracturées ou de fluide. Il est possible que leur observation et la nôtre soient liées. Toutefois, même si ces deux zones se trouvent proches des stations montrant un effet d'amplification, il semble prématuré de vouloir relier ces deux observations, compte tenu du faible nombre de stations et d'événements utilisés pour notre étude.

En conclusion et malgré la "faiblesse" de l'ensemble de données utilisé, nous pouvons conclure que l'on observe une amplification de la coda ailleurs qu'au Piton de la Fournaise. Cette amplification semble être liée, au moins pour le Piton de la Fournaise, à la présence d'une zone plus hétérogène que le reste du volcan à proximité des stations présentant une forte amplification. C'est cette hypothèse que nous tenterons de valider ou d'infirmer dans la suite de ce chapitre.

3.2 Etude numérique

Dans ce paragraphe, nous allons utiliser des simulations numériques de propagation d'ondes en milieux hétérogènes pour essayer de valider l'hypothèse émise par Aki & Ferrazzini [2001]: nous allons étudier l'effet d'un contraste d'hétérogénéité (zone hétérogène dans un milieu plus homogène) sur le facteur d'amplification de la coda.

3.2.1 Modèle et hypothèses de travail

Le modèle utilisé pour cette étude est composé d'un demi espace faiblement hétérogène (caractérisé par un libre parcours moyen dit extérieur l_{ext}) contenant un volume (ici un cube de $H = 5$ km de côté) fortement hétérogène de libre parcours moyen dit intérieur l_{int} (on a donc $l_{int} < l_{ext}$). Ce modèle est représenté sur la figure 3.6. On se placera à une fréquence de 1 Hz.
La forme cubique de la zone hétérogène, bien qu'éloignée de la réalité, a été adoptée dans

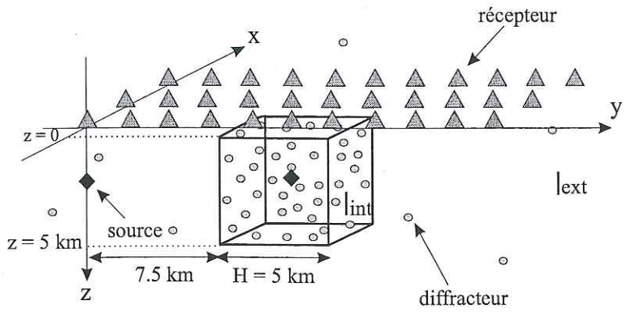

FIG. 3.6 – *Modèle utilisé pour la simulation numérique.*

un but de simplification des simulations. La taille du cube est de l'ordre de grandeur de la zone d'amplification observée au Piton de la Fournaise.

Lors de cette étude, on adoptera les hypothèses suivantes:

- Il n'y a pas de contraste de vitesse et de densité dans le volcan. On supposera que $\beta = 2$ km/s.
- Le scattering est isotrope et il n'y a pas d'atténuation intrinsèque.
- La source est supposée isotrope. Elle peut être située au centre du cube hétérogène ou à l'extérieur de celui-ci (figure 3.6). Dans les deux cas, elle est située à 2.5 km de profondeur.
- 121 récepteurs sont placés à la surface libre. Ces récepteurs sont disposés en grille régulière, tous les deux kilomètres. Ils peuvent ainsi être (ou non) à l'aplomb du cube hétérogène.

Plusieurs modèles seront étudiés. Ils sont caractérisés par différents rapports $\frac{H}{l_{int}}$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$. Selon les modèles, $\frac{H}{l_{int}}$ varie entre 0.33 et 5 et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$ entre 1 et 30. Le premier de ces rapports exprime le degré d'hétérogénéité du cube et le second, le contraste d'hétérogénéité du modèle.

3.2.2 Simulation Monte Carlo de la propagation des ondes

La simulation de la propagation des ondes se fait en résolvant l'équation de transfert radiatif par des méthodes Monte Carlo. La technique est identique à celle explicitée pour un milieu stratifié (voir paragraphe 1.3, Hoshiba [1994,1997] et Margerin et al. [1998]).

L'énergie reçue à chaque récepteur dépend des positions de la source et du récepteur et des libres parcours moyens du modèle. Il est intéressant de comprendre le rôle de ces

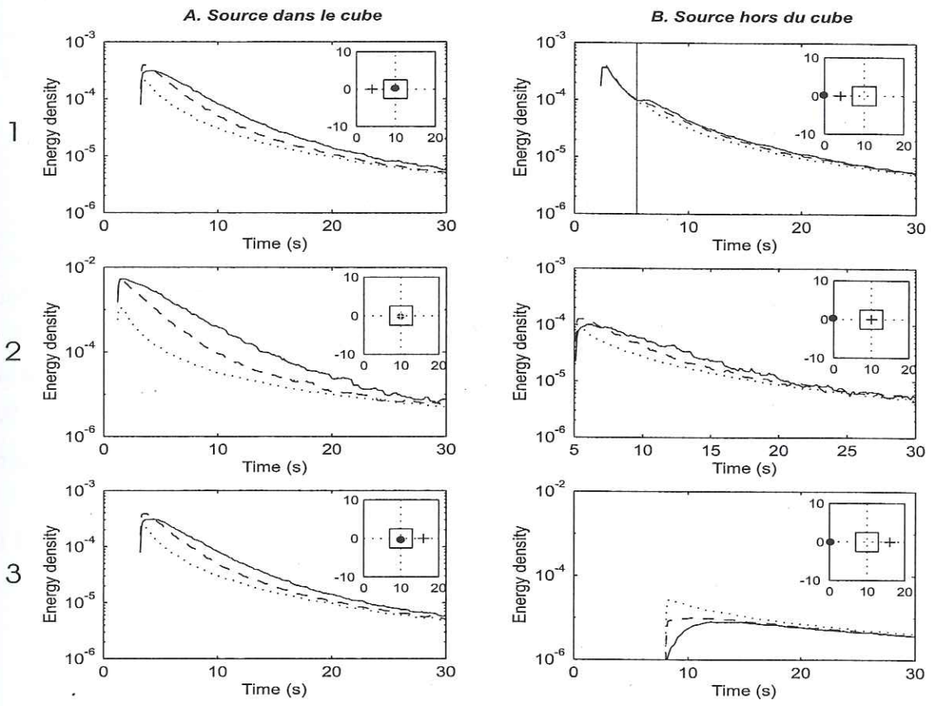

FIG. 3.7 – *Energie reçue en fonction du temps pour les deux positions de la source (à gauche: la source est dans le cube, à droite: elle est à l'extérieur) et pour trois récepteurs différents. Les traits pleins correspondent au modèle* $\frac{H}{l_{int}} = 5$ *et* $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$*=15 (*$l_{int} = 1$ *km et* $l_{ext} = 15$ *km), les tirets* $\frac{H}{l_{int}} = 2.5$ *et* $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$*=7.5 (*$l_{int} = 2$ *km et* $l_{ext} = 15$ *km) et les pointillés* $\frac{H}{l_{int}} = 0.33$ *et* $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$*=1 (*$l_{int} = 15$ *km et* $l_{ext} = 15$ *km). Sur chaque figure, le dessin de droite représente la position du récepteur (+) sur la surface libre (les unités sont en km). Le carré est la projection du cube sur cette surface. La position de la source (•) est également représentée.*

différents facteurs sur le comportement de l'énergie en fonction du temps. La figure 3.7 représente l'énergie reçue en fonction du temps pour les deux positions de la source et pour trois récepteurs différents. Les positions des récepteurs (+) et de la source (•) par rapport au cube hétérogène sont représentées sur chaque graphique. Trois modèles sont considérés: en traits pleins: $\frac{H}{l_{int}} = 5$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$=15 ($l_{int} = 1$ km et $l_{ext} = 15$ km), en tirets: $\frac{H}{l_{int}} = 2.5$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$=7.5 ($l_{int} = 2$ km et $l_{ext} = 15$ km) et en pointillés $\frac{H}{l_{int}} = 0.33$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$=1 (l_{int}

= 15 km et l_{ext} = 15 km). Le niveau d'hétérogénéité du cube diminue donc du trait plein au trait pointillé. Ce dernier cas représente le cas limite où le modèle ne présente pas de contraste d'hétérogénéité.

Cas où la source est à l'intérieur du cube (figure 3.7 A)

Les positions des récepteurs 1 et 3 sont symétriques par rapport à la source. Les courbes de décroissance temporelle de l'énergie sont donc identiques pour ces deux récepteurs. Cette observation est un bon test du programme.
Pour un récepteur donné, on constate que, pour des temps courts, l'énergie décroit plus rapidement pour le modèle l_{int} = 15 km (en pointillés) que pour les autres modèles. Pour ce modèle, la constante de diffusion du cube $D = \frac{\beta l_{int}}{3}$ est plus grande que pour les autres cas: la fuite vers l'extérieur du cube est donc facilitée.
Enfin, on peut constater que pour des temps longs, toutes les courbes tendent vers une même asymptote: le cube hétérogène n'a plus d'influence et seule la valeur de l_{ext} gouverne le comportement de l'énergie.

Cas où la source est hors du cube (figure 3.7 B)

Le récepteur 1 est situé entre la source et le cube hétérogène. On observe que, pour ce récepteur, les courbes correspondant aux deux modèles ayant un contraste d'hétérogénéité (traits pleins et tiretés) ne présentent pas une décroissance régulière de l'énergie avec le temps (figure 3.7, B1). Le ralentissement de la décroissance vers 6 s est lié à la faible diffusivité du cube hétérogène. Pour des temps courts, la courbe de densité d'énergie suit celle que l'on obtiendrait pour un demi espace infini avec $l_{ext} = l_{int}$ = 15 km (en pointillés sur 3.7 B1). Durant cet intervalle de temps, les ondes n'ont pas encore atteint le cube hétérogène. On note une séparation de ces courbes pour un temps $t \simeq 6$ s correspondant au temps nécessaire pour faire le chemin source-cube et cube-récepteur. Ce saut est donc dû aux ondes rétrodiffusées par le cube hétérogène. Pour des temps plus grands, toutes les courbes convergent vers la même asymptote: le cube hétérogène a de moins en moins d'influence et seul le libre parcours moyen l_{ext} intervient dans la forme de l'enveloppe de l'énergie.
De plus, pour le récepteur situé à l'arrière du cube (3.7, B3) et pour le milieu caractérisé par l_{int} = 1 km, on remarque que l'enveloppe de l'énergie prend la forme caractéristique d'un front de diffusion, ce qui n'est pas le cas pour les autres modèles.

Le cube hétérogène produit donc un effet visible sur la distribution spatio-temporelle de l'énergie. Nous avons également mis en évidence l'importance de la position de la source sur cette distribution. Ce sont deux points que nous allons étudier plus en détail grâce au facteur d'amplification de la coda.

3.2.3 Principe de la mesure de l'effet du volume hétérogène

Aki & Ferrazzini [2001] ont obtenu le facteur d'amplification de la coda en faisant le rapport d'amplitude entre la station étudiée et une station de référence. La valeur de l'amplification obtenue varie donc selon la station de normalisation choisie. Pour s'affranchir de ce problème, nous ne normalisons pas l'énergie reçue par rapport à une station de référence mais par rapport à l'énergie que recevrait la même station s'il n'y avait pas de cube.
La mesure d'amplification se fait alors en deux parties:

- La première partie consiste à simuler la propagation des ondes dans le milieu représenté sur la figure 3.6 avec l'équation de transfert radiatif. Cette approche a été explicitée dans le paragraphe précédent.
- La deuxième partie consiste à calculer l'énergie reçue aux différentes stations dans le cas d'un milieu homogène. Le milieu considéré (appelé milieu de référence) est alors un demi-espace de libre parcours moyen l_{ext}. Pour économiser du temps de calcul, nous avons choisi de ne pas résoudre numériquement l'équation de transfert radiatif dans ce demi-espace, mais de calculer analytiquement les solutions de l'équation de diffusion dans un tel milieu; l'équation de diffusion étant une approximation de l'équation de transfert radiatif pour les temps longs. Nous montrerons par la suite que cette approximation est satisfaisante.

Le rapport des énergies obtenues à un temps donné pour chaque station par les deux méthodes nous permet alors d'obtenir *le facteur d'amplification de la coda*. En utilisant cette méthode, nous mesurons réellement l'effet du cube, sans introduire de complexité supplémentaire liée au choix d'une station de normalisation.

3.2.4 Mesure de l'amplification de la coda: effet du cube hétérogène

Nous allons maintenant présenter des cartes du facteur d'amplification de la coda pour différents modèles et pour les deux positions de la source. Nous discuterons l'influence des

rapports $\frac{H}{l_{int}}$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$ sur la valeur du facteur d'amplification de la coda.

Cas où la source est à l'intérieur du cube

La source se trouve au centre du cube, à 2.5 km de profondeur. Les figures 3.8 et 3.9 représentent les cartes du facteur d'amplification de la coda au cours du temps pour différents modèles. Sur chacune de ces figures, la position du cube hétérogène est indiquée.

Les modèles de la Figure 3.8 ont tous un libre parcours moyen extérieur l_{ext} de 15

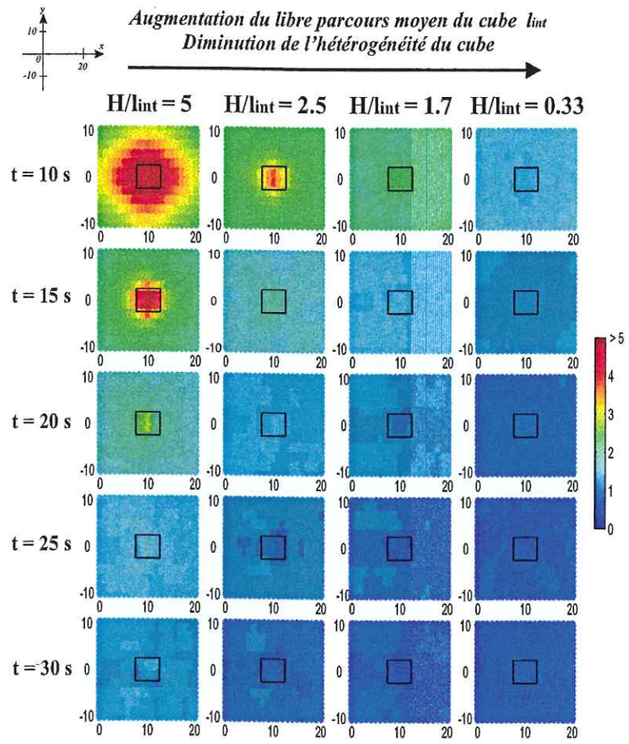

FIG. 3.8 – *Carte du facteur d'amplification de la coda au cours du temps (les axes x et y des différentes cartes sont graduées en km). Les modèles sont caractérisés par l_{ext} = 15 km et par différentes valeurs de $\frac{H}{l_{int}}$. La source est au centre du cube hétérogène. La position du cube est reportée sur chaque graphique.*

km, seul le libre parcours moyen du cube varie. Dans ce cas, les valeurs d'amplification sont calculées en divisant l'énergie obtenue par l'équation de transfert radiatif dans le

milieu avec contraste d'hétérogénéité, par l'énergie issue de l'équation de diffusion dans le milieu de référence (demi espace avec l_{ext} = 15 km). Afin de faciliter la lecture de cette figure, l'échelle de couleur a été saturée. La valeur maximale du facteur d'amplification est de 18. Les modèles de la figure 3.9 ont tous un libre parcours moyen l_{int} de 1 km: seul le libre parcours moyen extérieur change. L'échelle de couleur de cette figure a également été saturée: la valeur maximale du facteur d'amplification est de 48. Puisque dans ce cas le libre parcours moyen extérieur varie, chaque modèle a une normalisation différente.

Les figures 3.8 et 3.9 montrent bien une variation spatiale du facteur d'amplification, les

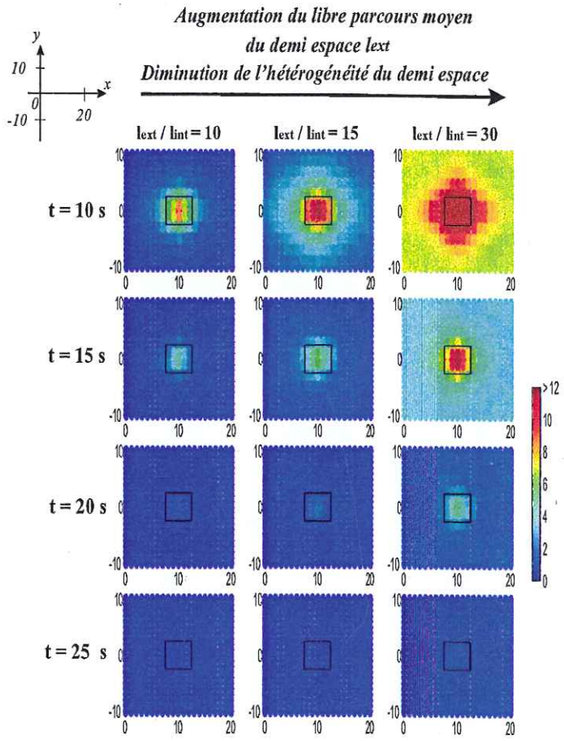

FIG. 3.9 – *Même figure que la figure 3.8 pour des modèles caractérisés par l_{int} = 1 km et différentes valeurs du rapport $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$.*

valeurs maximales de ce facteur étant centrées sur le cube. Lorsque l'on a un contraste d'hétérogénéité tel que $l_{int} < l_{ext}$, l'énergie reste piégée autour de la source et donc dans le cube hétérogène. Un récepteur à l'aplomb du cube reçoit donc plus d'énergie que s'il se trouvait dans un demi espace avec l_{ext} = 15 km. Dans le cas où la source est à l'intérieur

du cube, on peut donc bien expliquer l'amplification observée par Aki & Ferrazzini [2001] par un contraste d'hétérogénéité dans le milieu.

Quand le temps augmente, la valeur du facteur d'amplification de la coda tend à diminuer jusqu'à devenir constante et égale à 1. Au cours du temps, l'effet dû à la présence du cube diminue et on tend vers une répartition isotrope de l'énergie. On est alors en régime de diffusion avec, pour constante de diffusion, $D = \frac{v l_{ext}}{3}$. Le temps nécessaire pour atteindre le régime de diffusion dépend des libres parcours moyens du milieu. Plus le cube est hétérogène (c'est à dire, plus $\frac{H}{l_{int}}$ est grand), plus il faut de temps à l'énergie pour sortir du cube et donc pour que la répartition de l'énergie devienne isotrope dans tout l'espace.

Quand on augmente le libre parcours moyen du cube ($\frac{H}{l_{int}}$ diminue, figure 3.8), la valeur du facteur d'amplification de la coda pour un temps donné tend également à se rapprocher de 1. Plus le libre parcours moyen du cube est grand, plus l'effet de piégeage autour de la source est faible: on se rapproche du cas du demi espace.

On remarque également sur la figure 3.9 que la valeur du facteur d'amplification aug-

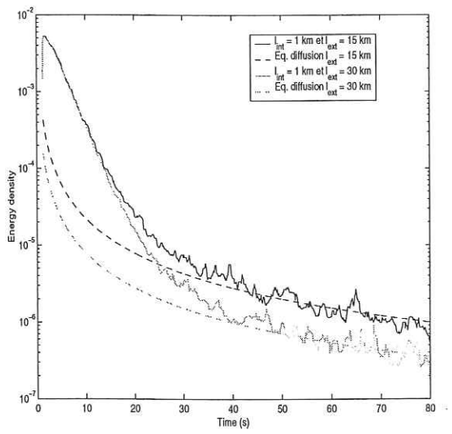

FIG. 3.10 – *Densité d'énergie reçue au cours du temps à un récepteur situé à l'aplomb du cube pour deux valeurs différentes du rapport* $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$. *Les courbes en traits pleins sont obtenues par simulations dans un milieu présentant un contraste d'hétérogénéité (en noir:* $\frac{l_{ext}}{l_{int}} = 15$, *en gris* $\frac{l_{ext}}{l_{int}} = 10$*). Celles en pointillés correspondent à l'approximation de diffusion dans le demi-espace.*

mente avec le rapport $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$ (c'est à dire avec l_{ext} si l_{int} est constant). Ce résultat n'est pas intuitif car pour des temps courts, l'énergie reste piégée dans le cube, sans contact avec le milieu extérieur. La valeur de l'amplification devrait donc être la même pour tous les

modèles. La figure 3.10 représente l'énergie reçue en fonction du temps pour deux valeurs différentes du rapport $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$ (15 et 30), en comparaison avec l'énergie calculée par l'équation de diffusion pour un milieu homogène de libre parcours moyen l_{ext}. Le récepteur considéré se trouve à l'aplomb du cube. On voit très bien que pour des temps courts l'énergie reçue est la même quelque soit le libre parcours moyen extérieur (traits pleins). Seule la courbe de normalisation dépend de ce libre parcours moyen extérieur, ce qui explique la dépendance de la valeur du facteur d'amplification avec l_{ext}.

Enfin, intéressons-nous au cas où il n'y a pas de contraste d'hétérogénéité dans le milieu ($\frac{H}{l_{int}} = 0.33$ sur la figure 3.8). Dans ce cas, les valeurs d'amplification sont obtenues en normalisant l'énergie obtenue avec l'équation de transfert radiatif dans un demi espace par celle obtenue avec l'équation de diffusion dans ce même demi espace. On ne mesure donc pas ici l'effet du cube hétérogène (puisqu'il n'y en a pas) mais plutôt la différence entre l'équation de transfert radiatif et l'équation de diffusion. Si les solutions des deux équations étaient parfaitement équivalentes, le facteur d'amplification serait égal à 1 quelque soit le temps considéré. On remarque que pour des temps courts, il y a une légère différence entre les solutions de ces deux équations mais que rapidement, celle-ci disparait. Il est donc presque similaire de normaliser par l'équation de diffusion ou par l'équation de transfert radiatif, ce qui légitime notre choix simplificateur de l'équation de diffusion pour la normalisation.

Cas où la source est à l'extérieur du cube

Plaçons nous maintenant dans la cas où la source est située à l'extérieur du cube, à 7.5 km de celui ci et à 2.5 km de profondeur (voir figure 3.6). Les figures 3.11 et 3.12 sont identiques aux figures 3.8 et 3.9 mais pour une source extérieure au cube. Toutefois, les échelles de couleur ne sont pas saturées sur ces figures.

On observe bien une amplification de la coda due à la présence du cube. Toutefois, dans le cas d'une source extérieure, l'amplification n'est pas centrée sur le cube hétérogène: la zone d'amplification est décalée en direction de la source. Ce déplacement peut être relié au saut observé dans la décroissance temporelle de l'énergie, et qui est lié aux ondes rétrodiffusées par le cube hétérogène (figure 3.7, B1). Sur une fenêtre de temps correspondant aux ondes rétrodiffusées, les récepteurs situés entre la source et le cube hétérogène reçoivent plus d'énergie que s'il n'y avait pas de cube.

De plus, de par la faible diffusivité du cube hétérogène, les récepteurs situés derrière le

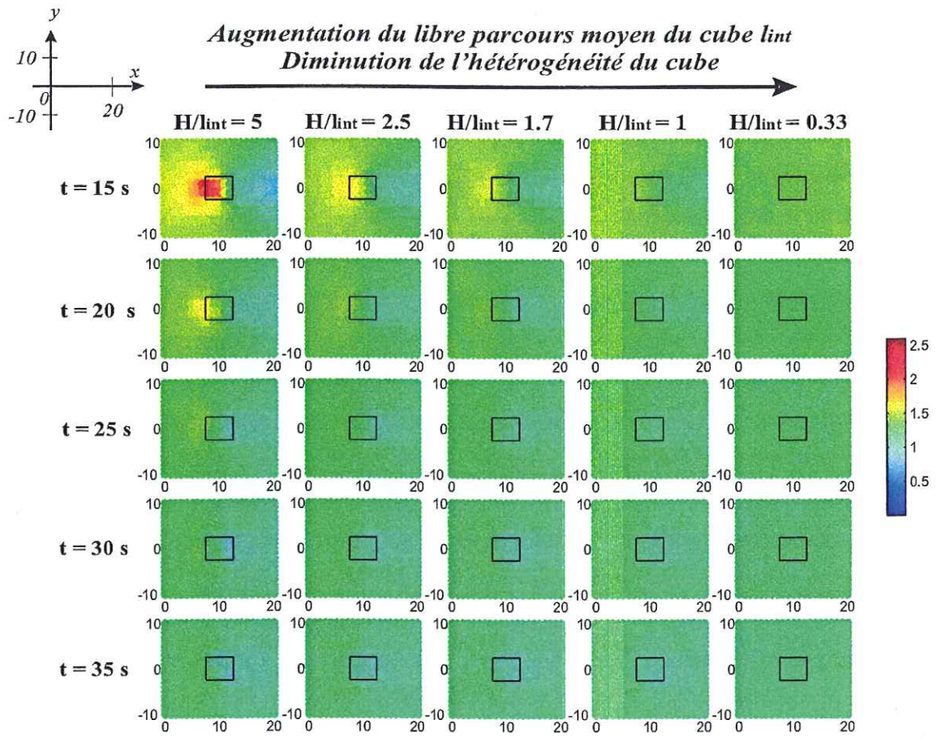

FIG. 3.11 – *Carte du facteur d'amplification de la coda au cours du temps (les axes x et y des différentes cartes sont graduées en km). Les modèles sont caractérisés par l_{ext} = 15 km et par différentes valeurs de $\frac{H}{l_{int}}$. La source est à l'extérieur du cube hétérogène (à 7.5 km de celui-ci). La position du cube est reportée sur chaque graphique.*

cube (ou sur le cube mais du côté opposé à la source) reçoivent moins d'énergie que s'il n'y avait pas de cube. On observe donc "une zone d'ombre" pour les récepteurs situés derrière la zone hétérogène.
Lorsque l'on augmente le libre parcours moyen du cube, ou que l'on diminue le libre parcours moyen du demi espace extérieur, la valeur du facteur d'amplification diminue. Dans les deux cas, le contraste entre l_{int} et l_{ext} diminue et il y a moins d'ondes rétrodiffusées par le cube.
Enfin, le comportement du facteur d'amplification avec le temps est le même que dans le cas d'une source à l'intérieur du cube.

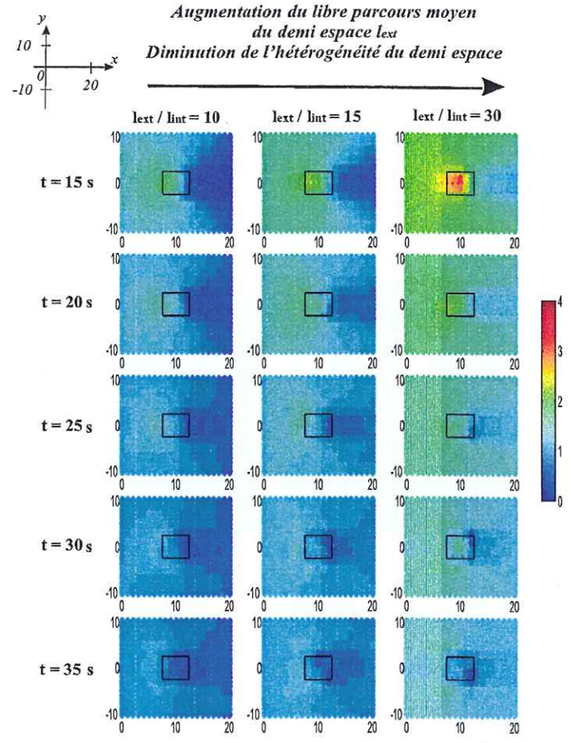

FIG. 3.12 – *Même figure que la figure 3.11 pour des modèles caractérisés par l_{int} = 1 km et différentes valeurs du rapport $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$*

En conclusion, quelque soit la position de la source, on observe bien une amplification de la coda, mais sur une fenêtre relativement courte. Un contraste d'hétérogénéité peut donc expliquer qualitativement les observations au Piton de la Fournaise et au Kilauea. Lorsque la source est à l'intérieur du cube, l'amplification est centrée sur le cube alors qu'elle est décalée en direction de la source lorsque celle-ci est à l'extérieur du cube. Dans ce dernier cas, l'amplification est associée à une zone d'ombre localisée à l'arrière du cube.

3.2.5 Influence de la profondeur de la source

Tous les résultats présentés précédemment ont été obtenus pour une source située à 2.5 km de profondeur. Nous allons maintenant nous intéresser à l'influence de la profondeur de la source sur les valeurs du facteur d'amplification.

Dans ce paragraphe, la source peut être à 2.5 km (même profondeur que le centre du cube) ou 5.0 km (profondeur du bas du cube) de profondeur. Nous considérerons un modèle pour lequel $l_{int} = 1$ km et $l_{ext} = 15$ km. Les cartes du facteur d'amplification de la coda pour une source située à l'intérieur ou à l'extérieur du cube sont représentées sur les figures 3.13 et 3.14 respectivement.

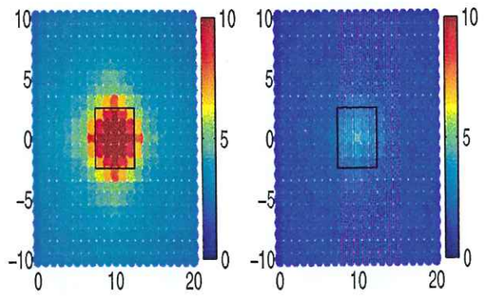

FIG. 3.13 – *Carte du facteur d'amplification de la coda (les axes sont en km) pour une source située à l'intérieur du cube. Dans ce modèle, $l_{int} = 1$ km et $l_{ext} = 15$ km. La source est située à 2.5 km de profondeur (à gauche) ou à 5.0 km (à droite)*

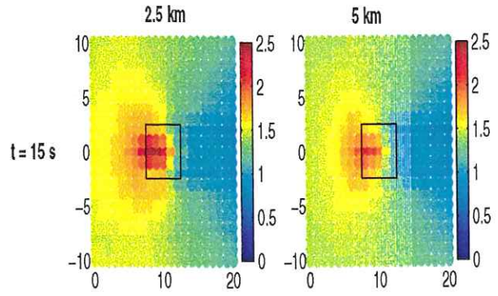

FIG. 3.14 – *Même figure que la figure 3.13 pour une source située à l'extérieur du cube hétérogène*

Quelque soit la position de la source, l'augmentation de la profondeur de la source entraîne une baisse de la valeur de l'amplification de la coda. On remarque que cette baisse est plus importante dans le cas où la source est à l'intérieur du cube. Dans ce cas, plus la source est profonde, plus la traversée du cube hétérogène pour rejoindre le

récepteur est longue et donc plus l'onde est atténuée. De plus, la source se rapprochant du bord inférieur du cube, la fuite de l'énergie vers le milieu extérieur est plus importante.

3.2.6 Discussion et conclusions

Avec des simulations de propagation d'ondes, nous avons montré qu'un contraste d'hétérogénéité peut expliquer qualitativement les variations spatiales du facteur d'amplification de la coda observées au Piton de la Fournaise (Aki et Ferrazzini [2001]) et au Kilauea. Nous avons également montré que l'effet d'amplification de la coda ne peut être observé que sur une fenêtre temporelle relativement courte. En effet, la répartition de l'énergie tend à devenir isotrope au cours du temps, ce qui fait disparaitre l'effet d'amplification: on tend vers le régime de diffusion. La dépendence temporelle observée dans nos simulations est en accord qualitatif avec celle observée au Kilauea (figure 3.5).
Toutefois, une comparaison plus quantitative entre simulations et observations dans le but de déterminer l_{int} et l_{ext} à partir des données réelles est loin d'être simple. En effet, nous avons montré que la valeur du facteur d'amplification de la coda dépend de nombreux paramètres tels que les valeurs des rapports $\frac{H}{l_{int}}$ et $\frac{l_{ext}}{l_{int}}$ ou la position de la source par rapport à la zone hétérogène. Il parait donc extrêment difficile de vouloir comparer directement les simulations aux observations effectuées au paragraphe précédent compte tenu du grand nombre de paramètres libres dans le modèle et du peu de données utilisées. Le problème de la détection de la zone hétérogène dans les données pose également problème. Nous avons vu que la localisation de la zone d'amplification dépend de la position de la source par rapport à la zone hétérogène. Cette observation complique le problème de détection de la zone hétérogène puisque lorsque la source est à l'extérieur du cube, la zone d'amplification n'est plus centrée sur le cube, mais déplacée en direction de la source. Il parait donc illusoire à ce stade de l'étude de vouloir obtenir des informations pertinentes sur les propriétés physiques du milieu en comparant les observations aux simulations.

3.3 Etude expérimentale

L'étape intermédiaire entre les simulations numériques et l'étude des données réelles mesurées sur un volcan consiste à faire des expériences en laboratoire. Ces dernières permettent en effet de contrôler certains paramètres du milieu tels que les dimensions de l'échantillon et les positions de la source et des récepteurs.
Des expériences de propagation d'ondes acoustiques ont donc été réalisées au LOA (*Labo-*

ratoire Ondes et Acoustique, Paris) afin de tester l'effet d'un contraste d'hétérogénéité dans un milieu. Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux des simulations et essayerons de quantifier les valeurs de l_{int}, l_{ext} et de l'atténuation intrinsèque de l'échantillon. Enfin, les valeurs mesurées de l'amplification de la coda seront comparées avec celles prédites par les simulations.

3.3.1 Dispositif expérimental

L'étude de la propagation d'ondes acoustiques à travers un milieu hétérogène est réalisée en transmettant un signal acoustique à travers un échantillon hétérogène immergé dans une cuve remplie d'eau (figure 3.15). L'expérience est réalisée à 1.5 MHz ($\lambda_{eau} = 1$ mm).

Une barrette de 128 capteurs piezoélectriques (transducteurs) de largeur $\frac{\lambda_{eau}}{2}$ est placée

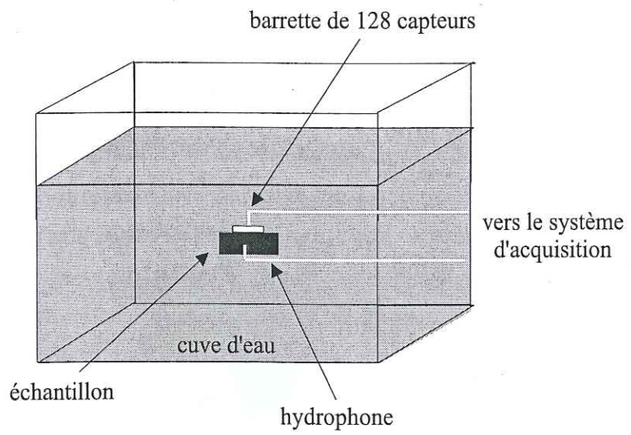

FIG. 3.15 – *Montage expérimental de propagation d'ondes acoustiques réalisé au LOA.*

à la surface de l'échantillon. Un hydrophone (capteur de pression de 1 mm de diamètre), monté sur une aiguille, est placé au centre de l'échantillon. Chaque élément de la barrette peut servir de source: il y a donc 128 positions de source possibles. Chacun des 128 transducteurs peut émettre successivement un pulse ultrasonic (5 demi-arches d'une sinusoide à 1.5 MHz) qui se propage à travers le milieu et qui est réceptionné par l'hydrophone. Celui-ci réceptionne donc 128 séries temporelles, chacune d'elle correspondant à une position de source différente.

Le principe de réciprocité (Rytov, Kravtsov et Tatarskii [1989]) permet alors d'inverser les

positions de la source et du récepteur afin de se retrouver dans une configuration similaire à celle des simulations: la source (l'hydrophone) se trouve donc dans l'échantillon et les signaux sont réceptionnés par un réseau de 128 capteurs (la barrette) à la surface libre de l'échantillon.

L'échantillon utilisé est un cylindre de 6 cm de diamètre et de 5 cm de haut. Ce cylindre est composé de billes de verre de 4 mm de diamètre solidarisées entre elles par un gel. Les billes sont suffisamment solidarisées entre elles pour ne pas nécessiter une paroi extérieure. Le gel utilisé a la même impédance que l'eau. Le libre parcours moyen du cylindre n'est pas connu: il sera appelé l_{int}.

Dans ces expériences, le cylindre de billes joue le même rôle que le cube hétérogène dans nos simulations. L'eau de la cuve, supposée parfaitement homogène (i.e. $l_{ext} = \infty$) joue le même rôle que le demi espace faiblement hétérogène de nos simulations.

3.3.2 Effet du cube sur la propagation des ondes

La figure 3.16 représente la variation en temps et en espace de l'énergie, filtrée entre 1.4 et 1.6 MHz, et reçue aux 128 récepteurs. La figure de gauche (A) correspond au cas où la propagation se fait uniquement dans l'eau, la figure (B) en présence du cylindre hétérogène avec une source à l'intérieur de celui ci (B) ou à l'extérieur (C). Sur chaque graphique, la flèche verticale indique la position de la source. L'échelle de couleur des graphiques A et C a été fortement saturée pour observer les détails des signaux.

Ces mesurent correspondent à une seule réalisation du désordre. Mais pour améliorer le rapport signal sur bruit, la même mesure a été réalisée 100 fois et les signaux sommés.

Lorsque les ondes se propagent dans l'eau uniquement (figure 3.16 A), on observe un front cylindrique se propageant à la vitesse des ondes dans l'eau. La durée du signal est très courte et correspond à la durée de la source ($< 5\ \mu s$). On peut remarquer que, quelques micro-secondes après l'arrivée de ce front, un front identique est enregistré. Ce front "image" est dû à la réflexion du front initial sur la surface libre de l'eau de la cuve. Pour des temps plus longs, on peut également observer des réflexions (elles aussi doublées) au fond de la cuve.

La figure 3.16 B correspond à l'énergie reçue en présence de la zone hétérogène et pour une source située à l'intérieur du cylindre. La source se trouve à environ 3 cm de profondeur. L'onde directe a disparu et des contributions dues au multiple scattering peuvent être observées. La durée du signal a considérablement augmenté (100 μs).

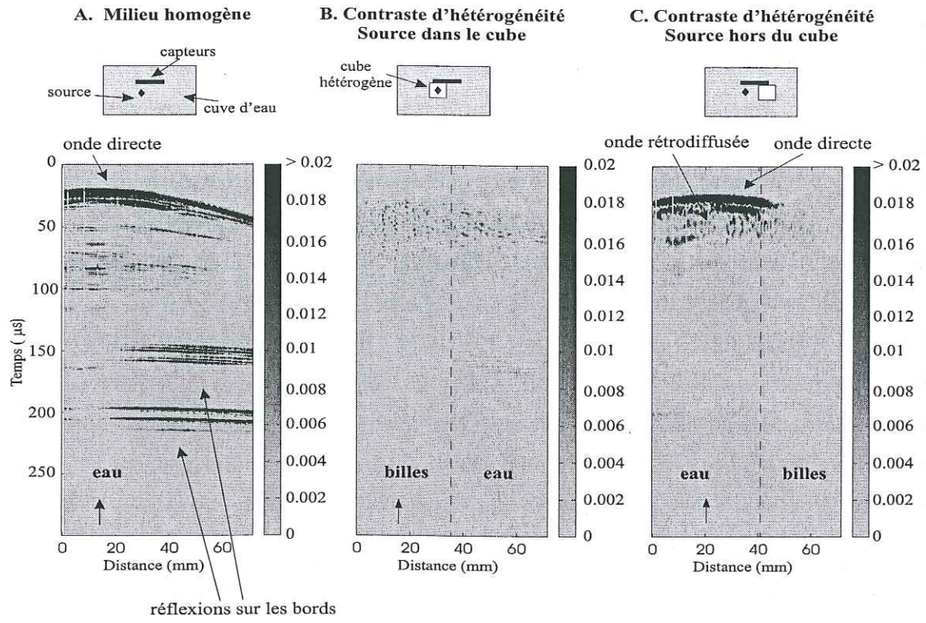

FIG. 3.16 – *Energie reçue au cours du temps pour les 128 capteurs:* **A.** *propagation sans échantillon (dans l'eau uniquement),* **B.** *propagation en présenace de l'échantillon et source à l'intérieur de celui-ci* **C.** *propagation en présence de l'échantillon et source à l'extérieur de celui-ci. Les signaux sont filtrés entre 1.4 et 1.6 MHz. Les flèches indiquent la position de la source. Les échelles de couleur de* **A.** *et* **C.** *sont saturées.*

Enfin, lorsque la source est située à l'extérieur du cube, on observe bien l'onde directe qui se propage dans l'eau pour les récepteurs situés dans l'eau. Lors de son passage dans le cylindre hétérogène, cette onde est atténuée. On observe également, mais faiblement, une onde rétrodiffusée par la zone hétérogène.

3.3.3 Comparaison avec les simulations

Nous allons maintenant comparer les résultats obtenus dans les expériences avec ceux obtenus par les simulations numériques développées au paragraphe précédent. Cette comparaison nous permettra de déterminer les valeurs des paramètres l_{int} et Q_{int} pour expliquer les résultats des expériences.

L'échantillon utilisé lors des expériences n'est pas parfaitement identique au modèle utilisé pour les simulations. Les caractéristiques de chacun de ces modèles sont regroupées dans

	Expériences	Simulations
Forme de la zone hétérogène	cylindre	cube
taille de la zone hétérogène	5*6 cm	H = 5.5 cm
contraste vitesse	oui	non (1.5 mm/μs)
prof. source	3 cm	3 cm
source ponctuelle	non	oui
récepteur ponctuel	non	oui
l_{int}	?	?
l_{ext}	∞	∞
Q_{int}	?	?
Q_{ext}	∞	$Q_{ext} = Q_{int}$

TAB. 3.1 – *Paramètres utilisés pour comparer les expériences avec les simulations.*

le tableau 3.1. Les principales différences entre les expériences en cuve et les simulations sont liées à la forme de la zone hétérogène et à la présence d'un contraste d'impédance entre les billes et la matrice homogène dans les expériences. De plus, dans nos simulations, nous n'avons pas pris en compte un éventuel contraste d'atténuation intrinsèque (on aura donc $Q_{int} = Q_{ext}$).

Les résultats de plusieurs modèles numériques ont été comparés aux données expérimentales. Il apparait qu'un modèle satisfaisant est caractérisé par $l_{ext} \to \infty$, $l_{int} = 4$ mm et $Q = 250$. Nous allons comparer les résultats des simulations avec ceux obtenus lors des expériences.

Source dans la zone hétérogène

Nous allons dans un premier temps nous intéresser au cas où la source est à l'intérieur de la zone hétérogène, à 3 cm de profondeur. Dans cette configuration, la majeure partie du trajet des ondes se déroule dans cette zone hétérogène. On peut donc penser que l'hypothèse $Q_{int} = Q_{ext}$ est valable.

La figure 3.17 représente l'énergie reçue aux 128 capteurs lors des expériences (à gauche) et dans les simulations (à droite). Afin de nous affranchir de l'effet de la source, les deux graphiques ont été normalisés par rapport à l'énergie reçue par le capteur 0 (trace enregistrée à 0 mm du début de la barrette) entre 80 et 130 μs. On constate que les simulations

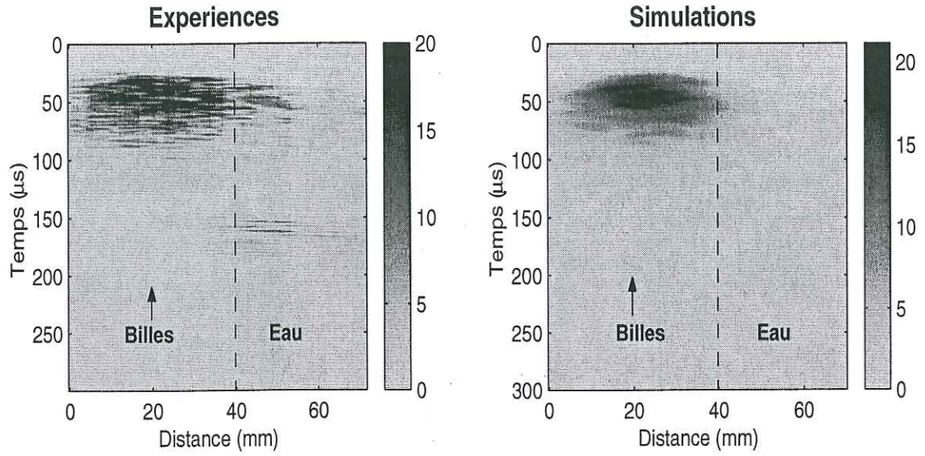

FIG. 3.17 – *Comparaison entre les expériences (à gauche) et les simulations (à droite). Les énergies sont normalisées par rapport à l'énergie enregistrée par la trace 0 dans l'intervalle de temps 80-130 µs.*

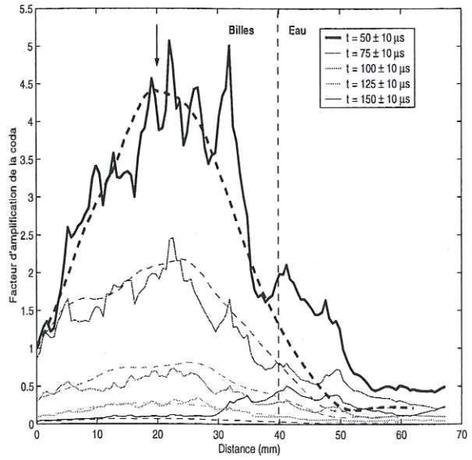

FIG. 3.18 – *Facteur d'amplification de la coda pour les 128 récepteurs et pour différentes fenêtres temporelles (en µs). Ce facteur a été calculé pour les expériences (traits pleins) et pour les simulations (traits pointillés). La flèche indique la position de la source.*

expliquent très bien les observations en temps et en espace. Toutefois, les arrivées énergétiques enregistrées à 50 μs et à 175 μs pour les récepteurs situés dans l'eau ne sont

pas expliquées par les simulations. Les arrivées à 175 μs sont dues à la réflexion d'ondes sur les bords de la cuve. Le milieu considéré lors des simulations étant infini, on ne peut modéliser ce type d'arrivées. Les arrivées à 50 μs paraissent avoir une explication plus complexe. Elles pourraient être liées à un défaut de l'échantillon.

La figure 3.18 représente le facteur d'amplification de la coda au cours du temps pour les expériences (traits pleins) et les simulations (pointillés). Les valeurs de ce facteur d'amplification ont été calculées en normalisant l'énergie de chaque capteur par celle enregistrée au récepteur 0 et au temps $t = 55 \pm 10$ μs. Pour se rapprocher des simulations développées précedemment, l'énergie devrait être normalisée par rapport à un milieu ne contenant pas de zone hétérogène plutôt que par une station de référence. Mais cette approche expérimentale se voulant un premier pas vers les données, il est nécessaire d'introduire cette complexification. En effet, lors d'études de terrain, il s'averrera impossible de normaliser par rapport à un cas où la zone hétérogène serait absente.

Les pics observés sur les courbes expériementales sont liés au fait qu'une seule réalisation a été effectuée lors des expériences. Si l'expérience était réitérée en tournant l'échantillon ou en le changeant, une moyenne pourrait être faite sur toutes les réalisations et ces pics disparaitraient.

Les simulations expliquent bien les variations du facteur d'amplification observées au cours du temps. Dans les expériences comme dans les simulations, on observe bien une baisse de l'amplification de la coda avec le temps. Sur cette figure, on observe une "bosse" liée aux arrivées des ondes non expliquées à 50 μs, et dans la fenêtre 150 ± 10 μs, on voit apparaitre les ondes réfléchies sur au fond de la cuve. Ces deux points mis à part, la correspondance entre les simulations et les données est très bonne.

Source hors de la zone hétérogène

Intéressons-nous maintenant au cas où la source est située à l'extérieur de la zone hétérogène, à 3 cm de profondeur. Dans ce cas, la majeure partie du trajet se déroule dans l'eau (qui représente le milieu extérieur faiblement hétérogène).

Ce cas est, pour la comparaison avec les simulations, un cas plus critique que lorsque la source est à l'intérieur du milieu hétérogène. En effet, nous supposons dans nos simulations que l'atténuation intrinsèque est constante dans tout le milieu (eau et billes), ce qui n'est pas réaliste puisque l'atténuation des ondes dans l'eau est nulle, ce qui n'est pas le cas du milieu hétérogène formé de billes et de gel. Prendre $Q_{int} = Q_{ext} = 250$ nous conduirait

donc à surestimer l'atténuation réellement subie par l'onde. Pour se rapprocher du cas des expériences, nous faisons, pour chaque trace une estimation du temps que l'onde a passé dans le cylindre hétérogène afin d'évaluer grossièrement l'atténuation subie par chaque trace.

La figure 3.19 représente l'énergie reçue par les 128 récepteurs en fonction du temps lors des expériences (à gauche) et lors des simulations (à droite). Les deux graphiques ont été normalisés par rapport à l'énergie reçue dans l'intervalle 80 - 130 μs pour la trace 55 (trace enregistrée à 55 mm du début de la barrette). La ressemblance entre les deux graphiques n'est pas aussi évidente que pour le cas précédent (figure 3.18). D'une part, l'onde directe observée dans l'eau n'est pas modélisée par nos simulations. D'autre part, on remarque que dans les expériences, l'onde rétrodiffusée par le cylindre hétérogène est absente sur un certain nombre de récepteurs. Il conviendrait de refaire d'autres expériences en laboratoire afin de pouvoir obtenir un résulat moyenné et donc plus "propre".

La figure 3.20 représente le facteur d'amplification de la coda pour diverses fenêtres

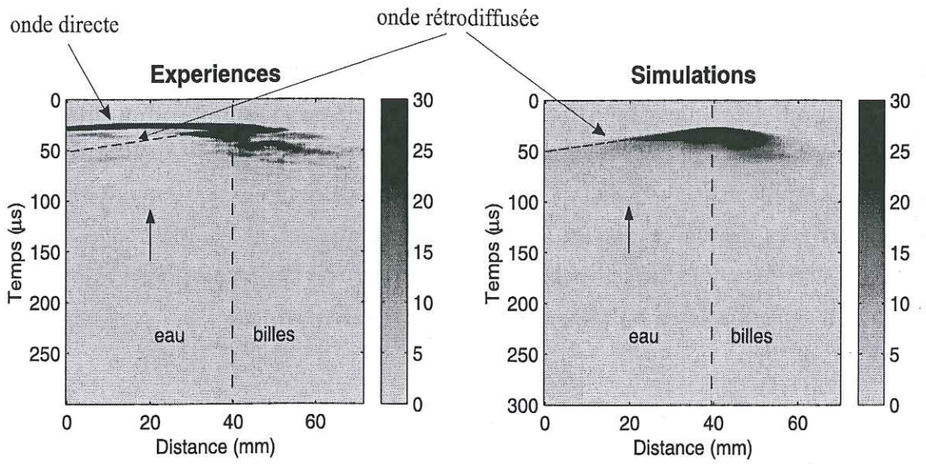

FIG. 3.19 – *Comparaison entre les expériences (à gauche) et les simulations (à droite). Les énergies sont normalisées par rapport à l'énergie enregistrée par la trace 55 dans l'intervalle de temps 80-130 μs.*

temporelles pour les expériences (en traits pleins) et pour les simulations (pointillés). Les valeurs du facteur d'amplification de la coda ont été calculées en normalisant les énergies par rapport à celle mesurée au récepteur 55 et pour l'intervalle de temps t = 55 $\pm$ 10 μs. La correspondance entre les simulations et les expériences est plutôt bonne, excepté pour

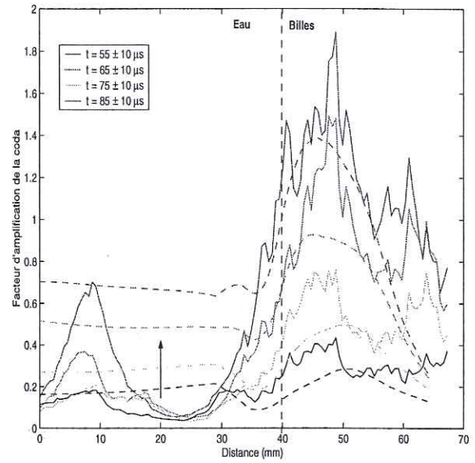

FIG. 3.20 – *Facteur d'amplification de la coda pour les 128 récepteurs et pour différentes fenêtres temporelles. Ce facteur a été calculé pour les expériences (traits pleins) et pour les simulations (traits pointillés). La flèche indique la position de la source.*

les récepteurs (entre 10 et 35 mm) ne recevant pas l'onde rétrodiffusée par le cube.

3.3.4 Conclusion

En diminuant le nombre de paramètres libres du milieu, un modèle caractérisé par $l_{ext} \to \infty$, $l_{int} = 4$ mm et $Q = 250$ a permis de reproduire convenablement les signaux enregistrés lors des expériences en laboratoire. Compte tenu des hypothèses utilisées pour les simulations (et entre autres que $Q_{int} = Q_{ext}$), la correspondance entre les simulations et les données est meilleure lorsque la source se trouve à l'intérieur de la zone hétérogène que lorsqu'elle se trouve à l'extérieur.

Comme pour le cas de l'étude numérique, la zone d'amplification se trouve à l'aplomb de la source lorsque celle-ci est à l'intérieur du volume hétérogène ou à l'interface eau/billes (côté source) lorsque celle-ci est à l'extérieur du volume hétérogène.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié numériquement l'effet d'un milieu présentant un contraste d'hétérogénéité sur la distribution de l'amplitude de la coda. Nous avons montré que ce type de milieu peut expliquer la dépendance spatiale de l'amplitude de la coda observée au Piton de la Fournaise (Aki et Ferrazzini [2001]) et au Kilauea. Le dépendance temporelle (l'énergie devient isotrope avec le temps) observée au Kilauea est également expliquée par ce type de modèle. Un premier pas vers l'étude de données a été franchi grâce aux expériences acoustiques en laboratoire. La comparaison entre les observations et les simulations nous a permis d'obtenir un jeu de paramètre (l_{int}, l_{ext},Q) satisfaisant pour expliquer les résultats obtenus lors des expériences.
Toutefois, un pas encore plus grand reste à franchir si l'on veut obtenir des informations plus quantitatives que celles obtenues dans cette thèse sur le caractère hétérogène des volcans. En effet, l'étude de données met en jeu un nombre de paramètres libres plus important que pour les expériences en laboratoire. Il parait donc nécessaire de renouveler des expériences sur le terrain. La résolution spatiale de la localisation dépendant directement du nombre de points d'acquisition, il est indispensable d'utiliser des réseaux de station plus denses que ceux utilisés au Piton de la Fournaise et au Kilauea. De plus, ce type de réseau pourrait permettre de suivre l'évolution de la position de la zone hétérogène au cours du temps (avant, pendant et après un éruption par exemple), évolution liée à la migration du magma (Aki et Ferrazzini [2001]).
Ce type de réseau, composé de 350 canaux sera bientôt disponible grâce à l'Action Concertée Incitative "prévention des risques naturels" et au projet "Instrumentation et méthodologie pour l'imagerie haute résolution des structures géologiques à risque par utilisation de sources sismiques naturelles ou artificielles" développé par O. Coutant et M. Dietrich (LGIT). Un projet de mesure fine des effets de localisation de la coda au Piton de la Fournaise pourrait être réalisée en 2002.

3.5 Bibliographie

Aki, K., Attenuation of shear-waves in the lithosphere for frequencies from 0.05 to 25 Hz, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *21,* 50-60, 1980.

Aki, K. et V. Ferrazzini, Seismic monitoring and modeling of an active volcano for prediction, *Journal of Geophysical Research*, **105**, 16 617 - 16 640, 2001.

Dawson, P.B., B.A. Chouet, P.B. Okubo, A. Villaseñor et H.M. Benz, Three-dimensional velocity structure of the Kilauea caldera, Hawaii, *Geophysical Research Letters*, **26**, 2805-2808, 1999.

Del Pezzo, E., F. Ferulano, A. Gharrusso and M. Martini, Seismic coda Q and scaling law of the source spectra at the Aeollian islands, southern Italy, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **73**, 97 - 108, 1983.

Del Pezzo, E., J.I. Morales, A. Akinci et R. Maresca, Measurements of intrinsic and scattering attenuation in the crust, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **85**, 1373-1380, 1995.

Fehler, M., P. Roberts et T. Fairbanks, A temporal change in coda wave attenuation observed during an eruption of Mount St Helens, *Journal of Geophysical Research*, **93**, 4367 - 4373, 1988.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geophysical Research Letters Earth and Planetary Interiors*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth-dependent S-wave velocity structure, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **104**, 15-22, 1997.

Koyanagi, S., K. Mayeda et K. Aki, Frequency dependent site amplification factors using the S wave coda for the island of Hawaii, *Bulletin of the Seismological Society of America*, **82**, 1151-1185, 1992.

Laigle, M., A. Hirn, M. Sapin, J.C. Lépine, J. Diaz, J. Gallart et R. Nicolich, Mount Etna dense array local earthquake P and S tomography and implications for volcanic plumbing, *Journal of Geophysical Research*, **105**, 21633-21646, 2000.

Londoño, J.M., Temporal change in coda Q at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *Journal of volcanology and geothermal research*, **73**, 129-139, 1996.

Londoño, J.M., A.J. Sanchez, E.L. Toro, F.G. Cruz et O.P. Bohorquez, Coda Q before and after the eruptions of 13 November 1985, and 1 September 1989, at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *Bulletin of Volcanology*, **59**, 556-561, 1998.

Margerin L., M. Campillo and B.A.van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into Coda Q, *Geophys. I. Int.*, **134**, 596-612, 1998.

Mayeda, K., S. Koyanagi, M. Hoshiba, K. Aki and Y. Zeng, A comparative study of scattering, intrinsic, and coda Q^{-1} for Hawaii, Long Valley and Central California between 1.5 and 15.0 Hz, *Journal of Geophysical Research*, **97**, 6643-6659, 1992.

Rytov, S.M., Y.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, "4.Wave Propagation Through Random Media", in *Principle of Statistical Radiophysics*, Springer - Verlag, 1989.

Tilling R.I. et J.J. Dvorak, Anatomy of a basaltic volcano, *Nature*, 125-133, 1993.

Wegler, U. et B.G. Lühr, Scattering behaviour at Merapi volcano (Java) revealed from an active seismic experiment, *Geophysical Journal International*, **145**, 579-592, 2001.

Zúñiga, F.R. and L.E. Dïaz, Coda attenuation in the area of El Chichón volcano, Chiapas, Mexico, Tectonophysics, **234**, 247-258, 1994.

Deuxième partie

Propagation des ondes élastiques en milieu hétérogène

Chapitre 1

Propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène

Dans la première partie de cette thèse, nous avons utilisé l'équation de transfert radiatif acoustique pour modéliser la coda des sismogrammes. Cette approximation peut se justifier par le fait que la coda est essentiellement composée d'ondes S (Aki [1992], Dainty et Toksöz [1990], Shapiro et al.[2000]).

Même si les ondes S sont majoritaires dans la coda, le phénomène d'équipartition (stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ où E_P et E_S sont les énergies des ondes de compression et de cisaillement respectivement) prédit théoriquement par Weaver [1982,1990] et Ryzhik et al. [1996] peut s'observer dans cette partie du sismogramme (Shapiro et al. [2000], Hennino et al. [2001]). De plus, Turner [1998] a montré que la solution de l'équation de diffusion élastique est significativement différente de celle de l'équation de diffusion acoustique. Il semble donc intéressant de prendre en compte les deux modes de propagation et les conversions entre ces modes afin de faire une description physique complète du système et de modéliser de nouvelles observables telles que l'équipartition.

Zeng [1993] et Sato [1994] ont fait cette démarche dans un espace infini en émettant l'hypothèse que le scattering est isotrope. Mais comme l'ont démontré, entre autres, Ryzhik et al. [1996] et Turner [1998], le scattering n'est jamais isotrope et cela quelque soit la taille des hétérogénéités et la longueur d'onde. Cette anisotropie se doit d'être prise en compte. Pour cela, un traitement rigoureux de la propagation des ondes élastiques dans un milieu hétérogène infini a été effectué par Margerin et al. [2001].

Dans la première partie de ce chapitre, nous développerons quelques aspects théoriques

052 174470 5

BIBLIOTHÈQUE SCIENCES GRENOBLE UNIVERSITAIRE

liés à la l'équation de transfert radiatif élastique et à la diffraction des ondes élastiques par une hétérogénéité supposée sphérique. Nous expliciterons la technique Monte Carlo utilisée pour modéliser la propagation des ondes élastiques dans un milieu stratifié composé d'une croûte hétérogène et d'un manteau homogène.

1.1 L'équation de transfert radiatif élastique

L'équation de transfert radiatif élastique, décrivant la distribution spatio-temporelle de la densité d'énergie et de la polarisation, a été obtenue par Weaver [1990] et plus récemment par Ryhzik et al. [1996] en effectuant un traitement statistique rigoureux de l'équation des ondes élastiques. Elle a le même contenu physique que l'équation de transfer radiatif acoustique (équation 1.1), mais inclut à la fois la conversion de mode P-S et les deux polarisations transverses, aspects manquant à l'équation de transfert radiatif acoustique (équation 1.1).

1.1.1 Description de la polarisation: Les vecteurs de Stokes

En optique, la lumière polarisée est décrite complètement par un vecteur appelé *vecteur de Stokes*. Ce vecteur à quatre composantes décrit l'intensité des ondes, mais également leur polarisation. Des descriptions détaillées du vecteur de Stokes en optique ont été effectuées par Ishimaru [1978], Van de Hulst [1981], Apresyan et Kravtsov [1996] ou Chandrasekhar [1960]. De part la similarité entre les ondes électromagnétiques et les ondes sismiques transverses, le vecteur de Stokes peut aisément se transposer de l'optique à l'élasticité. Toutefois, il doit être modifié afin de prendre en compte les ondes longitudinales. Cette modification a été réalisée par Turner [1994], Turner et Weaver [1994a,b,c] et Margerin et al. [2001]. Nous nous contenterons ici de rappeler brièvement les définitions et les caractéristiques de ce vecteur en suivant ces auteurs.

Si l'on considère une onde élastique de fréquence ω se propageant dans la direction **z** positive, on a pour composentes du déplacement:

$$\begin{aligned} P(t) &= A_P(t)\exp(i\omega t - ik_P z + i\nu(t)) \\ S_x(t) &= A_{S_x}(t)\exp(i\omega t - ik_S z + i\phi_x(t)) \\ S_y(t) &= A_{S_y}(t)\exp(i\omega t - ik_S z + i\phi_y(t)) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où A_p, A_{S_x} et A_{S_y} sont les amplitudes du déplacement, k_P et k_S les nombres d'onde des ondes P et S et ν, ϕ_x et ϕ_y les phases des différentes composantes. Le vecteur de Stokes élastique d'une onde plane est alors donné par (Ishimaru [1978], Van de Hulst [1981], Apresyan et Kravtsov [1996], Chandrasekhar [1960]):

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} I_P \\ I_{S_x} \\ I_{S_y} \\ U \\ V \end{pmatrix} = \frac{\rho\omega^2}{2} \begin{pmatrix} <\alpha A_P^2> \\ <\beta A_{S_x}^2> \\ <\beta A_{S_y}^2> \\ <\beta A_{S_x} A_{S_y}\cos(\phi_x - \phi_y)> \\ <\beta A_{S_x} A_{S_y}\sin(\phi_x - \phi_y)> \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

où ρ est la densité du milieu, α et β les vitesses des ondes P et S respectivement et enfin $\delta = \phi_x - \phi_y$ représente la différence de phase entre les composantes x et y de l'onde S.

Les trois premiers paramètres du vecteur de Stokes élastique ont une interprétation évidente. Ils représentent simplement l'énergie transportée par l'onde le long de trois axes d'un repère de référence. Les deux autres paramètres mesurent la polarisation de l'onde S (pour plus de détails, on se rapportera à Kliger, Lewis et Randal [1990]).

Il est important de noter que I_P décrit complètement l'intensité de l'onde P et que les quatre paramètres de Stokes (I_{S_x}, I_{S_y}, U, V) sont, comme en optique, suffisant pour caractériser complètement (c'est à dire en terme d'intensité et de polarisation) les ondes transverses. En particulier et par définition, lorsque l'onde S est dépolarisée, on a $U = V = 0$ et $I_{S_x} = I_{S_y}$. Il faut noter que même si l'onde est dépolarisée, l'intensité est distribuée sur les deux états de polarisation S_x et S_y (*i.e.* SV et SH).

1.1.2 Propriétés des vecteurs de Stokes

- Les paramètres de Stokes se soumettent à l'inégalité:

$$(I_{S_x} + I_{S_y})^2 \geq (I_{S_x} - I_{S_y})^2 + U^2 + V^2 \tag{1.3}$$

  L'égalité s'applique lorsque l'onde a une polarisation elliptique. Dans ce cas particulier, trois paramètres de Stokes seulement sont suffisants pour caractériser complètement les ondes transverses.
- Chandrashekar [1960], Turner [1998] et Turner et Weaver [1994a], ont également exprimé la transformation des paramètres de Stokes lorsque le système de coordonnées tourne d'un angle ϕ autour de l'axe des **z**. Ils ont montré que le vecteur de

Stokes $S = (I_P, I_{S_x}, I_{S_y}, U, V)$ dans le nouveau repère est lié au vecteur de Stokes dans l'ancien repère $S_0 = (I_P^0, I_{S_x}^0, I_{S_y}^0, U^0, V^0)$ par la relation matricielle:

$$S = LS_0 \tag{1.4}$$

où L est une matrice 5 x 5 donnée par:

$$L(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(\phi) & \sin^2(\phi) & \frac{1}{2}\sin(2\phi) & 0 \\ 0 & \sin^2(\phi) & \cos^2(\phi) & -\frac{1}{2}\sin(2\phi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\phi) & \sin(2\phi) & \cos(2\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Il est important de noter que I_P et $I_S = (I_{S_x} + I_{S_y})$ sont invariants par rotation, ainsi que V qui est relié au degré de polarisation circulaire des ondes transverses.

- Principe d'additivité (Ishimaru [1978]): Lorsque qu'un faisceau est composé de plusieurs ondes indépendantes (c'est à dire que leurs phases sont indépendantes les unes des autres), les paramètres de Stokes de la combinaison d'ondes sont donnés par la somme des vecteurs de Stokes de ces ondes.

1.1.3 L'équation de transfert

L'équation de transfert radiatif élastique décrit l'évolution du vecteur de Stokes en temps et en espace. Les conditions de validité de cette équation ont été rappelées par Papanicolaou [1998], Papanicolaou et al. [1996a,b] et Turner [1998]. La condition principale à la validité de cette équation est que les libre parcours moyens doivent être beaucoup plus grands que la longueur d'onde, ce qui permet de négliger les effets d'interférence.
Pour une bande de fréquence donnée, l'équation de transfert radiatif élastique vectorielle peut alors s'écrire (Turner et Weaver [1994a,b,c]):

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{p}}\underline{S}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}}) + \underline{\underline{c}}^{-1}\frac{\partial \underline{S}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})}{\partial t} = -\underline{S}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})\underline{\underline{l}}^{-1} + \frac{\underline{\underline{l}}^{-1}}{4\pi}\int_{4\pi} P(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}')\underline{S}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}}')d^2\vec{\mathbf{p}}' \tag{1.6}$$

où $\underline{S}$ est le vecteur de Stokes. Le vecteur de Stokes dépend de la position dans l'espace $\mathbf{r}$, du temps t et de la direction de propagation $\hat{\mathbf{p}}$. Les matrices diagonales $\underline{\underline{c}}$ et $\underline{\underline{l}}$ définissent respectivement la vitesse de l'onde et son libre parcours moyen. Elles sont données par:

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

$$\underline{\underline{l}} = \begin{pmatrix} l_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_S \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

où l_P et l_S sont les libres parcours moyen des ondes P et S respectivement.
Le terme de gauche de l'équation 2.2 traduit l'évolution du vecteur de Stokes dans la direction $\hat{\mathbf{p}}$. Le premier terme de droite représente la perte due au scattering dans toutes les directions de l'espace. Le second terme est un gain d'énergie de la direction $\hat{\mathbf{p}}'$ vers la direction $\hat{\mathbf{p}}$. La matrice P, contenue dans ce terme est appelée *matrice de Mueller*. Elle est déterminée en étudiant la diffraction par une seule particule. Cette étude sera réalisée dans le paragraphe suivant.

1.2 Diffraction par une sphère

La modélisation de la diffusion multiple des ondes élastiques se fera dans l'hypothèse que les hétérogénéités sont des inclusions sphériques réparties aléatoirement dans une matrice homogène. Ces inclusions sont de rayon a et présentent un léger contraste de vitesse et de densité par rapport à la matrice homogène. L'hypothèse des inclusions sphériques a été faite dans un soucis de simplification. Tout d'abord, la forme des diffracteurs implique des relations de symétrie qui simplifient le problème (Van de Hulst [1981]). De plus, le scattering par une sphère a été beaucoup étudié et de nombreuses références peuvent se trouver dans la littérature (Ying et Truell [1956], Einspruch et al. [1960], Wu et Aki [1985 a,b]) et plus particulièrement dans Korneev et Johnson [1993 a,b][1996] et Margerin et al. [2001].
Dans ce paragraphe, nous reprendrons les résultats des deux auteurs précédents pour rappeler les quantités physiques décrivant le scattering par une seule sphère. Ces résultats seront ensuite utilisés pour le multiple scattering.

1.2.1 Deux régimes de scattering

Avant de s'intéresser concrètement à la diffraction par une sphère, il convient de définir deux types de régimes, en fonction de la taille du diffracteur par rapport à la longueur d'onde. On peut alors définir le paramètre $k_P a$ (avec k_P est le nombre d'onde de l'onde P et a le rayon de la sphère):

- Lorsque $k_P a << 1$, c'est à dire quand le diffracteur est plus petit que la longueur d'onde, on parle de *régime de Rayleigh.*
- On parle du *régime de Rayleigh-Gans* quand les diffracteurs ont une taille comparable à la longueur d'onde. On a alors $k_P a \sim 1$.

Les caractéristiques du scattering dépendent fortement du régime dans lequel on se place. Nous énoncerons les particularités de chacun des régimes dans le paragraphe 1.4.

1.2.2 Propagation du vecteur de Stokes: Matrice de scattering et matrice de Mueller

Pour connaître l'intensité et la polarisation d'une onde diffractée par une hétérogénéité sphérique connaissant l'intensité et la polarisation de l'onde incidente, il suffit de savoir comment agit l'inclusion sphérique sur le vecteur de Stokes incident.
Considérons une onde plane se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{z}}$ (figure 1.1). Cette onde rencontre une hétérogénéité localisée à l'origine d'un repère cartésien local $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ qui lui est associé.

L'onde diffractée par l'hétérogénéité part dans la direction $\hat{\mathbf{Z}}$, direction faisant un angle θ avec la direction de propagation initiale $\hat{\mathbf{z}}$. Les directions $\hat{\mathbf{z}}$ et $\hat{\mathbf{Z}}$ définissent *le plan de scattering* (en grisé sur la figure 1.1).
Pour définir le vecteur de Stokes, les conventions suivantes sont utilisées (Margerin et al. [2001]): le vecteur de Stokes sera exprimé dans le repère $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{l}}, \hat{\mathbf{p}})$ où $\hat{\mathbf{p}}$ est la direction de propagation et $\hat{\mathbf{l}}$ et $\hat{\mathbf{r}}$ définissent respectivement les directions parallèles et perpendiculaires au plan de scattering. De la même manière, le vecteur de Stokes de l'onde diffractée sera exprimé dans le repère $(\hat{\mathbf{r}}', \hat{\mathbf{l}}', \hat{\mathbf{p}}')$

La matrice de scattering

Dans le repère lié au diffracteur, le vecteur de Stokes diffracté S_{SCAT} peut être relié au vecteur de Stokes incident S_{INC} par l'intermédiaire de la *matrice de scattering* (Ishimaru

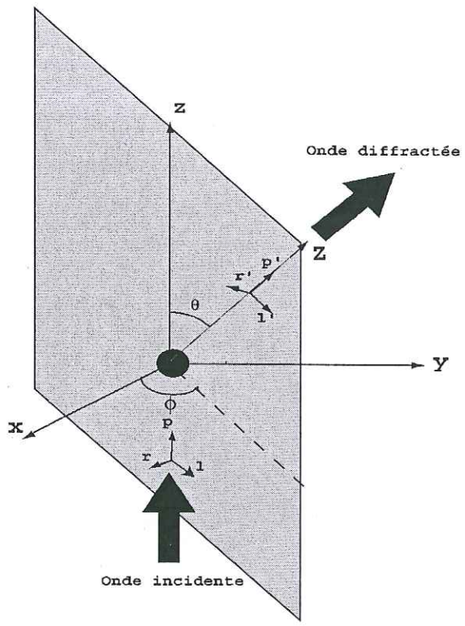

FIG. 1.1 – *Conventions utilisées pour le simple scattering dans le repère local lié à l'hétérogénéité.*

[1978], Turner et Weaver [1994a]):

$$S_{SCAT} = \frac{1}{R^2} F S_{INC} \tag{1.9}$$

où R est la distance entre le centre de l'hétérogénéité et l'observateur et F est la matrice de scattering.

Cette matrice de scattering est donnée par [Margerin et al., 2001]:

$$\frac{1}{16\pi^2}\begin{pmatrix} k_P^4\gamma_1^2(\theta)f_{PP}^2(\theta) & 0 & \frac{\alpha}{\beta}k_P^4\gamma_3^2(\theta)f_{SP}^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & k_S^4\gamma_4^2(\theta)f_{SS_r}^2(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha}k_S^4\gamma_2^2(\theta)f_{PS}^2(l) & 0 & k_S^4\gamma_4^2(\theta)f_{SS_r}^2(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_S^4\gamma_4^2(\theta)f_{SS_l}(\theta)f_{SS_r}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_S^4\gamma_4^2(\theta)f_{SS_l}(\theta)f_{SS_r}(\theta) \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

où k_P et k_S sont le nombres d'onde des ondes P et S respectivement.
Les fonctions f et γ présentes dans la matrice de scattering ont été obtenues par Wu et Aki [1985 a,b]. Ces auteurs ont calculé le champ diffracté par une sphère en utilisant l'approximation de Born. Nous nous contenterons ici de rappeler ces fonctions. Pour les

détails du calcul, on se rapportera aux papiers de Wu et Aki [1985 a,b].
Ils ont montré que les fonctions f présentes dans la matrice de scattering décrivent la dépendence angulaire du champ diffracté dans le régime du scattering de Rayleigh. Ces fonctions sont données par:

$$f_{PP}(\theta) = -\frac{\delta\lambda}{\lambda+2\mu} + \frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta - \frac{2\delta\mu}{\lambda+2\mu}\cos^2\theta \quad (1.11)$$

$$f_{PS}(\theta) = \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)\frac{\delta\mu}{\mu}\sin\theta\cos\theta - \frac{\delta\rho}{\rho}\sin\theta \quad (1.12)$$

$$f_{SP}(\theta) = \frac{\delta\rho}{\rho}\sin\theta - \left(\frac{2\beta}{\alpha}\right)\frac{\delta\mu}{\mu}\sin\theta\cos\theta \quad (1.13)$$

$$f_{SS_i}(\theta) = \frac{\delta\rho}{\rho}\cos\theta + \frac{\delta\mu}{\mu}(1-2\cos^2\theta) \quad (1.14)$$

$$f_{SS_r}(\theta) = -\frac{\delta\rho}{\rho} + \frac{\delta\mu}{\mu}\cos\theta \quad (1.15)$$

où l'on note par $\delta\mu$, $\delta\lambda$ et $\delta\rho$ les perturbations des paramètres de Lamé et de la densité du diffracteur par rapport à la matrice homogène.
Dans le régime de Rayleigh-Gans, l'inclusion élastique est décomposée en volumes infinitésimaux qui sont considérés comme des diffracteurs de Rayleigh indépendants. Le champ total diffracté est alors décrit comme une superposition d'ondes diffractées par chaque fraction de l'hétérogénéité. Dans ce cas, pour exprimer la dépendence angulaire de l'onde diffractée, de nouvelles fonctions γ appelées *fonction de forme* sont introduites. Pour des inclusions sphériques de rayon a homogènes, on a:

$$\gamma_n(\theta) = \frac{4\pi a^3}{(\omega S_n a)^2}\left[\frac{\sin\omega S_n a}{\omega S_n a} - \cos\omega S_n a\right] \quad (1.16)$$

$$S_1(\theta) = \frac{1}{\alpha}2\sin\frac{\theta}{2} \quad (1.17)$$

$$S_2(\theta) = \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2 - \frac{2}{\alpha\beta}\cos\theta} \quad (1.18)$$

$$S_3 = S_2 \quad (1.19)$$

$$S_4(\theta) = \frac{1}{\alpha}2\sin\frac{\theta}{2} \quad (1.20)$$

Il est intéressant de noter que la matrice F ne dépend que de θ, ce qui est expliqué par la symétrie de rotation due à la forme sphérique des inclusions (Van de Hulst [1981], Ishimaru [1978]).

La matrice de Mueller

La matrice de scattering est définie dans un repère local lié au diffracteur. Lorsque l'on s'intéresse à la diffusion multiple, il est nécessaire d'exprimer cette matrice en coordonnées polaires (θ,ϕ) dans un repère global (O,x,y,z). Cette matrice, exprimée dans le repère global, sera appelée *matrice de Mueller*. C'est cette matrice P qui intervient dans l'équation de transfert élastique (équation 2.2)

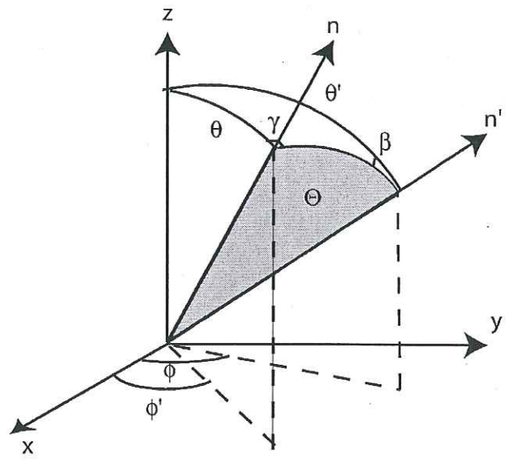

FIG. 1.2 – *Géométrie utilisée pour le scattering dans le système de coordonnées globales.*

Considérons un diffracteur localisé au centre du repère global $(O,\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{y}},\hat{\mathbf{z}})$ (figure 1.2). Une onde incidente à ce diffracteur se propage dans la direction $\hat{\mathbf{n}}'$ (définie par $\mu' = \cos\theta'$). Cette onde est diffractée dans la direction $\hat{\mathbf{n}}$ (définie par $\mu = \cos\theta$). Les directions $\hat{\mathbf{n}}'$ et $\hat{\mathbf{n}}$ définissent le plan de scattering défini préalablement (en grisé sur la figure 1.2) et forment un angle Θ. Une direction arbitraire doit être choisie pour exprimer la polarisation des ondes transverses. En suivant la convention décrite par Turner [1994], Turner et Weaver [1994a] et Margerin et al. [2001], les vecteurs de Stokes seront exprimés dans une base $(\hat{\mathbf{u}}_\theta,\hat{\mathbf{u}}_\phi,\hat{\mathbf{p}})$ composée de trois vecteurs unitaires choisis de telle sorte qu'ils soient dans la direction de θ et ϕ croissants. On peut alors montrer que, dans le repère global:

$$S_{SCAT} = PS_{INC} \quad (1.21)$$

où P est la matrice de Mueller. Cette matrice peut s'obtenir à partir de la matrice de

scattering, en lui appliquant les rotations nécessaires. Cette opération a été réalisée par Chandrasekhar [1960], Turner [1994] et Turner et Weaver [1994a].
En introduisant les angles γ et β (figure 1.2), ces auteurs montrent que:

$$P = L(\gamma - \frac{3\pi}{2})FL(\beta + \frac{\pi}{2}) \tag{1.22}$$

où L est la matrice de rotation définie par l'équation (1.5).
La rotation autour de γ permet de passer de la base incidente au plan de scattering, ce qui permet d'utiliser la relation (1.9). La rotation autour de β permet d'exprimer le vecteur de Stokes dans le repère global ($\hat{\mathbf{u}}_\theta$,$\hat{\mathbf{u}}_\phi$,$\hat{\mathbf{p}}$). Nous ne développerons pas cette matrice de Mueller ici, elle peut s'obtenir facilement à partir des rotations. De plus, elle est explicitée en détail dans Margerin [1998] et Margerin et al. [2001].

1.2.3 Dépendance angulaire de l'onde diffractée: Sections efficaces de scattering

Afin de décrire le processus de scattering, il nous faut préciser la dépendance angulaire de l'onde diffractée. Cette dépendance est exprimée à travers les sections efficaces différentielles. Elles sont définies comme le rapport entre l'énergie diffractée par unité de temps et d'angle solide dans une direction (θ, ϕ) donnée et l'énergie incidente par unité de surface et de temps (Sato et Fehler [1998], Turner [1998]).
L'expression de ces sections efficaces de scattering pour des diffuseurs sphériques de Rayleigh ou de Rayleigh-Gans peut se trouver dans la littérature (Korneev et Johnson [1993 a,b][1996], Margerin et al. [2001]). Nous reprendrons ici les résultats de ces auteurs. Pour une onde polarisée linéairement, les sections efficaces différentielles sont données par:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_{PP}}{d\Omega} &= \frac{k_P^4}{16\pi^2}\gamma_1^2(\theta)f_{PP}^2(\theta) \\
\frac{d\sigma_{PS}}{d\Omega} &= \frac{k_S^4\beta}{16\pi^2\alpha}\gamma_2^2(\theta)f_{PS}^2(\theta) \\
\frac{d\sigma_{SP}}{d\Omega} &= \frac{k_S^4\alpha}{16\pi^2\beta}\gamma_3^2(\theta)f_{SP}^2(\theta)\cos^2\phi \\
\frac{d\sigma_{SS}}{d\Omega} &= \frac{k_S^4}{16\pi^2}\gamma_4^2(\theta)(f_{SS_l}^2(\theta)\cos^2\phi + f_{SS_r}^2(\theta)\sin^2\phi)
\end{aligned} \tag{1.23}$$

où θ est l'angle entre les directions incidentes et diffractées. ϕ est l'angle entre le plan de scattering et le plan de polarisation des ondes S.

En intégrant les sections efficaces différentielles sur tout l'angle solide, on obtient les sections efficaces intégrées. Ainsi par exemple, pour un scattering PP, la section efficace intégrée est donnée par:

$$\Sigma_{PP} = \int (\frac{d\sigma_{PP}}{d\Omega})d\Omega \tag{1.24}$$

Pour les ondes S, les sections efficaces intégrées sont indépendantes de la polarisation de part la symétrie des diffracteurs (Van de Hulst [1981]).
Ces sections efficaces permettent de relier les libres parcours moyens des ondes S et des ondes P:

$$l_P = l_S\frac{\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP}}{\Sigma_{PS} + \Sigma_{PP}} \tag{1.25}$$

Il est important de noter la relation existant entre les sections efficaces Σ_{PS} et Σ_{SP} (Papanicolaou et al. [1996a,b], Aki [1992]):

$$\Sigma_{PS} = 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\Sigma_{SP} \tag{1.26}$$

Ce résultat est indépendant du processus de scattering et est une conséquence de la réciprocité des fonctions de Green (Aki [1992]). On peut constater que $\Sigma_{PS} > \Sigma_{SP}$ et que les conversions de P vers S se font plus facilement que les conversions de S vers P.

1.3 Approximation de diffusion et équipartition

1.3.1 L'équation de diffusion

Pour des temps longs, l'équation de transfert radiatif élastique peut être approximée par une équation de diffusion. Cette équation décrit l'évolution temporelle et spatiale de l'énergie totale ($E_{tot} = E_P + E_S$) des modes P et S (Weaver [1990], Turner [1998], Ryzhik et al. [1996], Papanicolaou et al. [1996a,b]). Elle ne donne pas d'informations sur la distribution de l'energie dans les deux typre d'ondes. Pour des temps longs, l'équation de transfert radiatif vectorielle peut donc être approximée par un équation de diffusion scalaire, ce qui peut permettre de simplifier les simulations numériques. Cette équation est donnée par:

$$\partial_t E_{tot}(\mathbf{r},t) - D_{Elast}\Delta E_{tot}(\mathbf{r},t) = 0 \tag{1.27}$$

D_{Elast} est la constante de diffusion élastique donnée par (Turner [1998], Papanicolaou et al. [1996a,b], Weaver [1990], Ryzhik et al [1996]):

$$D_{Elast} = \frac{1}{1 + 2(\frac{\alpha}{\beta})^3}(\frac{\alpha l_P^*}{3} + 2(\frac{\alpha}{\beta})^3\frac{\beta l_S^*}{3}) \tag{1.28}$$

Dans l'expression de D_{elast}, les libres parcours moyen de transport l_S^* et l_P^* interviennent. Ils sont définis par:

$$l_P^* = \frac{1}{n} \frac{\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP} - \Sigma_{SS}^* + \Sigma_{PS}^*}{(\Sigma_{PP} + \Sigma_{PS} - \Sigma_{PP}^*)(\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP} - \Sigma_{SS}^*) - \Sigma_{PS}^* \Sigma_{SP}^*} \tag{1.29}$$

$$l_S^* = \frac{1}{n} \frac{\Sigma_{PP} + \Sigma_{PS} - \Sigma_{PP}^* + \Sigma_{SP}^*}{(\Sigma_{PP} + \Sigma_{PS} - \Sigma_{PP}^*)(\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP} - \Sigma_{SS}^*) - \Sigma_{PS}^* \Sigma_{SP}^*} \tag{1.30}$$

Dans ces expressions, on trouve Σ^* définie par:

$$\Sigma_{ij}^* = \int (\frac{d\sigma_{ij}}{d\Omega}) \cos(\theta) d\Omega \tag{1.31}$$

Σ_{ij}^* représente la moyenne du cosinus de l'angle de scattering, moyenne pondérée par la section efficace différentielle. Cette variable est une mesure de la tendance au scattering vers l'avant (Turner [1998]). Si $\Sigma_{ij}^* > 0$, le scattering a une tendance au forward scattering et si $\Sigma_{ij}^* < 0$, le scattering a une tendance à la rétrodiffusion.
La constante de diffusion élastique (équation 1.28) est une moyenne pondérée des constantes de diffusion des composentes P et S. Le poids de chacune des deux contributions est gouverné par la loi d'équipartition donnée par $E_S = 2(\frac{\alpha}{\beta})^3 E_P$ et détaillée dans la suite de ce paragraphe.

1.3.2 Equipartition

Weaver [1982], [1990] et Ryzhik et al. [1996] ont montré que le rapport entre les énergies S et P devient constant lorsque l'on se place dans le régime de la diffusion. Ainsi, dans un espace infini et quelque soit la nature de la source et du processus de scattering, le rapport entre l'énergie des modes de cisaillement et des modes de compression se stabilise selon l'expression:

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{2\alpha^3}{\beta^3} \tag{1.32}$$

Ce phénomène de stabilisation est appelé *équipartition.*

Obtenir le rapport entre l'énergie potentielle de cisaillement et l'énergie de compression revient à compter le nombre de modes de cisaillement et le nombre de modes de compression. Si l'on considère un cube de taille L avec des conditions aux limites périodiques, la densité des modes de compression est donnée par (Kittel [1988], p132):

$$\mathcal{D}_P(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2\alpha^3} \tag{1.33}$$

	$\frac{l_P}{l_S}$	$\frac{l_P^*}{l_P}$	$\frac{l_S^*}{l_S}$	$\frac{\Sigma_{PP}}{\Sigma_{PS}}$	$\frac{\Sigma_{SS}}{\Sigma_{SP}}$	$\frac{\Sigma_{PP}^*}{\Sigma_{PP}}$	$\frac{\Sigma_{PS}^*}{\Sigma_{PS}}$	$\frac{\Sigma_{SS}^*}{\Sigma_{SS}}$
Rayleigh	2.6	0.8	0.7	0.3	19.6	-0.4	-0.4	-0.3
Rayleigh-Gans $k_P a = 1.2$	1.51	0.91	1.67	0.67	14.1	-0.14	-0.06	0.43
Rayleigh-Gans $k_P a = 1.6$	1.67	1.54	3.11	1.21	21.2	0.17	0.46	0.69
Rayleigh-Gans $k_P a = 2.0$	2.00	2.45	4.61	1.44	28.4	0.56	0.67	0.78

TAB. 1.1 - *Caractéristiques des différents régimes*

Les ondes de cisaillement ayant deux états de polarisation, leur densité de mode est donnée par:

$$\mathcal{D}_S(\omega) = 2\mathcal{D}_P(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2\beta^3} \tag{1.34}$$

Ainsi, le rapport entre lénergie potentielle de cisaillement et de compression est donnée par:

$$\frac{E_S}{E_P} = \frac{2\alpha^3}{\beta^3} \sim 10.4 \qquad \text{pour un solide poissonnien} \tag{1.35}$$

Cette relation d'équipartition a été introduite en sismologie par Papanicolaou et al. [1996 a,b] et explique bien la domination des ondes S dans la coda tardive (Aki [1992]).
Il a néanmoins fallu attendre Shapiro et al. [2000] pour que la première mesure d'équipartition soit effectuée au Mexique. Ils ont effectivement constaté une stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$. Cependant, la valeur de stabilisation obtenue est de l'ordre 7 (alors que la valeur théorique est de l'ordre de 10). Hennino et al. [2001] ont montré qu'une telle valeur peut être obtenue en prenant en compte les ondes de surface et plus particulièrement les ondes de Rayleigh.

1.4 Caractéristiques des régimes de Rayleigh et de Rayleigh-Gans

Les caractéristiques de scattering dépendent fortement du régime considéré. Dans la suite de cette thèse, nous étudierons le régime de Rayleigh ($k_P a << 1$) et le régime de Rayleigh-Gans avec $k_P a = 1.2$, 1.6 et 2.0.

1.4.1 Scattering de Rayleigh

Les grandeurs caractéristiques du scattering de Rayleigh (l^*, Σ et Σ^*) sont regroupées dans le Tableau 2.1. Dans le cas particulier du régime de Rayleigh, ces grandeurs peuvent être obtenues analytiquement (voir Margerin et al. [2001], Appendice 4). Les sections efficaces différentielles sont représentées sur la figure 1.3.

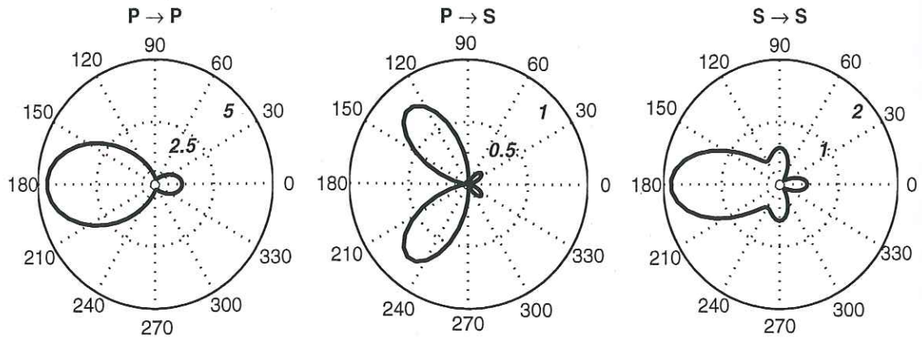

FIG. 1.3 – *Sections efficaces différentielles pour le régime de Rayleigh.*

Comme l'avaient fait remarquer Papanicolaou [1996a,b], Turner [1998] et Margerin et al. [2001], la figure 1.3 montre que la distribution angulaire de l'énergie diffractée n'est pas isotrope. En outre, on remarque que la plupart de l'énergie est rétrodiffusée. Dans ce cas, l_P^* et l_S^* sont donc inférieurs à l_P et l_S. De plus, on remarque que $\frac{l_P}{l_S} >> 1$. Le scattering est donc plus important en S qu'en P.
On remarque également (Tableau 2.1), que $\frac{\Sigma_{PP}}{\Sigma_{PS}} < 1$ et que $\frac{\Sigma_{SS}}{\Sigma_{SP}} >> 1$. Cela signifie que les ondes P se convertissent majoritairement en ondes S. Au contraire, lors de la rencontre avec une hétérogénéité, la majorité des ondes S restent en S.

1.4.2 Scattering de Rayleigh-Gans

La figure 1.4 représente les sections efficaces différentielles pour les différentes valeurs de $k_P a$. Comme pour le régime de Rayleigh, les caractéristiques du régime de Rayleigh-Gans sont regroupées dans le Tableau 2.1.
Comme dans le cas du régime de Rayleigh, le scattering est anisotrope quelque soit la valeur de $k_P a$. On remarque que plus $k_P a$ augmente, plus l'anisotropie est forte: les sec-

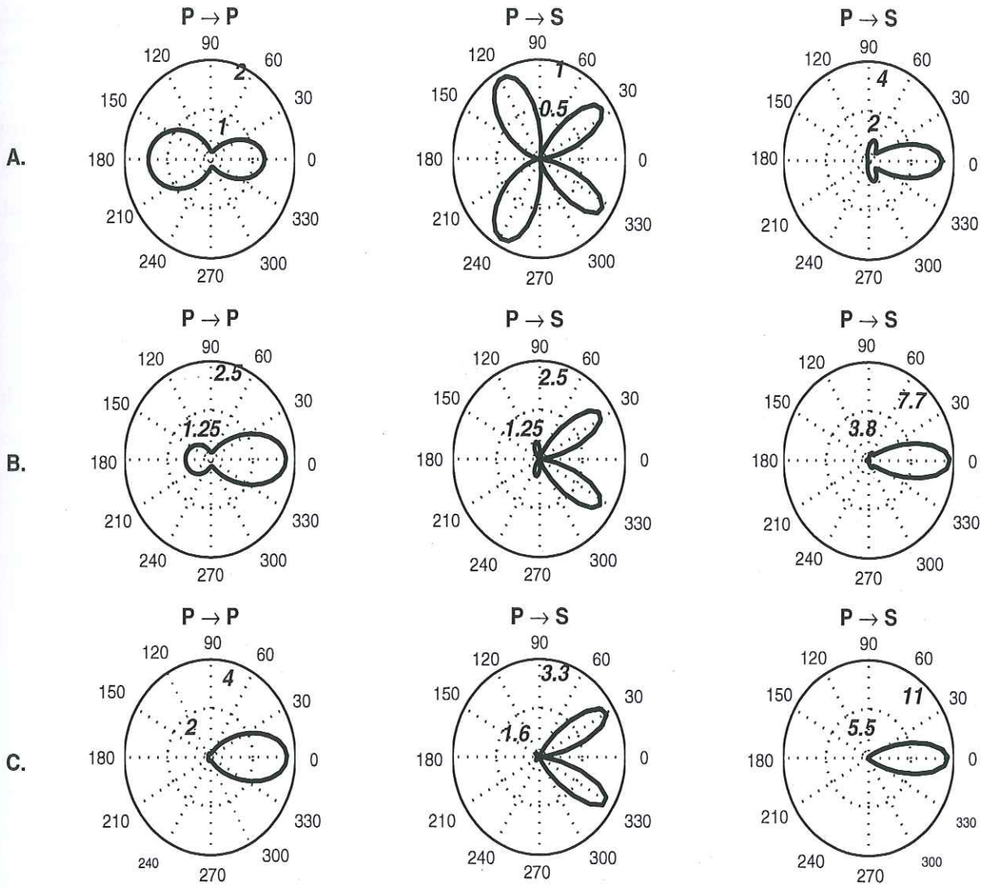

FIG. 1.4 – *Sections efficaces différentielles pour le régime de Rayleigh-Gans avec* **A.** $k_P a = 1.2$, **B.** $k_P a = 1.6$ *et* **C.** $k_P a = 2.0$

tions efficaces différentielles PP et SS sont de plus en plus piquées vers l'avant. Cette caractéristique des sections efficaces différentielles implique que les libre parcours moyens de transport l_P^* et l_S^* sont plus grands que l_P et l_S.

Nous avons montré que les conversions de mode et toutes les caractéristiques du scattering sont fortement dépendante du régime de scattering. Cette dépendance aura donc un effet sur le comportement temporel de l'énergie.

1.5 Principes de la méthode Monte Carlo élastique

Comme pour le cas acoustique, nous allons résoudre l'équation de transfert radiatif par des méthodes Monte Carlo. Les techniques Monte Carlo sont utilisées depuis 1960 (Collins et al. [1960]) pour simuler la propagation de la lumière polarisée dans une atmosphère. Elles ont été adaptées à la sismologie et à l'étude des ondes élastiques par Margerin et al. [2001].

1.5.1 Modèle

Margerin et al. [2001] et Margerin [1998] ont explicité les simulations Monte Carlo de propagation d'ondes élastiques dans un espace infini et dans un demi espace respectivement. Nous allons nous intéresser à un milieu composé d'une couche (épaisseur H) et d'un demi espace. Ce modèle est représenté sur la figure 1.5.

Dans ce modèle, la croûte est hétérogène (libre parcours moyen $l_{c_{P,S}}$), alors que le manteau est supposé transparent ($l_{m_{P,S}} \to \infty$). De plus, un contraste de vitesse entre la croûte et le manteau peut être pris en compte dans nos simulations.

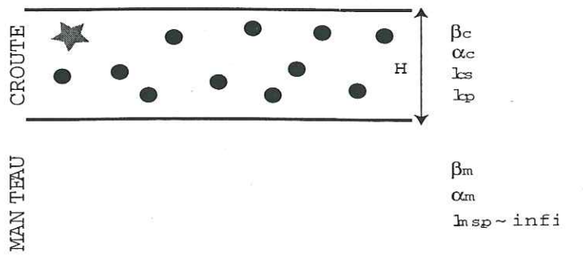

FIG. 1.5 – *Modèle utilisé pour la propagation des ondes élastiques.*

Comme nous l'avons précisé précédemment, nous allons considérer des inclusions sphériques de rayon a. Nous étudierons le régime de Rayleigh ($k_P a << 1$) et de Rayleigh-Gans ($k_P a = 1.2$, 1.6 ou 2.0). Nous allons supposer que ces inclusions sphériques sont de même nature que la matrice homogène, mais qu'elles présentent un faible contraste de vitesse et de densité par rapport à celle-ci.

Nous allons supposer que la source est isotrope et polarisée P ou S.

Nous supposerons également que les ondes S sont initialement dépolarisées. Dans ce cas, on a toujours pour les composantes du vecteur de Stokes des ondes S: $I_{SV} = I_{SH} = 0.5$ et $U = V = 0$, ce qui simplifie la simulation de la propagation. Cette hypothèse ne permet pas de traiter l'effet de "re-polarisation" qui est susceptible de se produire lors d'une rencontre avec les interfaces.

1.5.2 Principe de la simulation

Tout comme dans le cas de la propagation d'ondes acoustiques (voir section 1.3), le principe de la simulation Monte Carlo est de matérialiser les ondes par des particules. La simulation Monte Carlo se décompose alors en trois étapes:

- La marche aléatoire de la particule. La particule part de la source et rencontre diffracteurs et interfaces. Lors de ces rencontres, elle peut changer de direction et de mode de propagation. Cette marche aléatoire est décrite dans le paragraphe 1.5.3.
- A chaque rencontre avec un diffracteur, la contribution énergétique apportée par la particule est calculée en terme de probabilité de retour au récepteur. Cette contribution sera explicitée dans le paragraphe 1.5.4.
- Les deux étapes précédentes sont répétées pour de nombreuses particules. Le résultat obtenu pour toutes les marches aléatoires est moyenné de façon à obtenir l'évolution temporelle de l'énergie reçue à chaque récepteur. Le lecteur pourra se référer à Hoshiba [1991] pour obtenir plus de détails sur cette étape.

La technique que nous reprenons ici a été développée par Collins et al. [1972] pour la propagation de la lumière dans l'atmosphère et par Margerin et al. [2001] pour la propagation des ondes sismiques. Toutes ces études ont été effectuées en considérant un espace infini et une polarisation complète des ondes S. Margerin [1998] a introduit une surface libre dans son milieu. Il nous faut donc modifier ces techniques Monte Carlo afin de simuler la propagation des ondes sismiques dans un milieu stratifié.

1.5.3 Marche aléatoire

Pendant sa marche aléatoire, la particule part d'une source isotrope polarisée P ou S et se propage dans le milieu représenté sur la figure 1.5. A chaque diffraction ou à chaque rencontre avec une interface, la particule peut changer de direction et de mode de propagation. Nous ne nous préoccuperons pas de la propagation du vecteur de Stokes (i.e. de la polarisation) puisque nous sommes dans le cas d'ondes dépolarisées.

Nous présenterons dans un premier temps la marche aléatoire dans un espace infini, puis nous apporterons les modifications nécessaire à la prise en compte de la surface libre et du Moho.

Cas d'un espace infini (Margerin et al. [2001])

Considérons dans un premier temps une onde se propageant dans un milieu infini de libre parcours moyen $l_{S,P}$.

Distance entre deux diffractions

Entre deux collisions, la particule P ou S se propage de façon ballistique sur une longueur L. Cette distance est déterminée en utilisant la probabilité de distribution exponentielle $\frac{1}{l_{S,P}} \exp(-\frac{L}{l_{S,P}})$. Le tirage de cette longueur se fait de façon identique au cas acoustique.

Caractéristiques de l'onde après la diffraction

Lors de sa rencontre avec l'hétérogénéité, l'onde peut changer de polarisation et de direction de propagation (θ,ϕ). Les angles (θ,ϕ) seront tirés dans le repère local lié à l'hétérogénéité puis subiront les rotations nécessaires pour être exprimés dans le repère global.
La probabilité d'avoir une onde diffractée de mode M_{scat} (avec $M_{scat} = P$ ou S) et se propageant dans la direction (θ,ϕ) sachant que l'onde incidente est de mode M_{inc} est donnée par (Heiderich et al. [1997], Margerin et al. [2001]):

$$Proba(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi) = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi)}{\Sigma_{M_{scat}} \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi) d\cos\theta d\phi} \tag{1.36}$$

La barre verticale sépare les paramètres connus de ceux, inconnus, qui doivent être déterminés aléatoirement.
On voit clairement dans cette expression que les angles θ et ϕ ne sont pas indépendants. En décomposant en probabilité conditionnelles, on peut alors réécrire (1.36) comme:

$$Proba(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi) = Proba(M_{inc}|M_{scat}).Proba(M_{inc},M_{scat}|\theta).Proba(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi) \tag{1.37}$$

- $Proba(M_{inc}|M_{scat})$ est la probabilité d'avoir une onde diffractée M_{scat} sachant que l'onde incidente est M_{inc}. Elle est donnée par:

$$Proba(M_{inc}|M_{scat}) = \frac{\int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi) d\phi d\cos\theta}{\Sigma_{M_{scat}} \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi) d\cos\theta d\phi} \tag{1.38}$$

Ainsi par exemple, pour une onde S incidente sur l'hétérogénéité, la probabilité qu'a cette onde d'être convertie en P est donnée par

$$Proba(S|P) = \frac{\Sigma_{SP}}{\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP}}$$

et la probabilité qu'a l'onde de rester en S est donnée par

$$Proba(S|S) = 1 - Proba(S|P) = \frac{\Sigma_{SS}}{\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP}}$$

Pour déterminer le mode de l'onde diffractée, on tire une variable aléatoire ϵ uniformément distribuée entre 0 et 1. Si $\epsilon < Proba(S|P)$ l'onde est convertie en P, sinon elle reste en S.

- $Proba(M_{inc},M_{scat}|\theta)$ donne la probabilité de repartir avec un angle θ sachant que l'onde incidente est de mode M_{inc} et que l'onde diffractée est de mode M_{scat}. Cette probabilité est donnée par:

$$Proba(M_{inc},M_{scat}|\theta) = \frac{\int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc},M_{scat}|\theta,\phi) d\phi}{\int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc},M_{scat}|\theta,\phi) d\cos\theta d\phi} \tag{1.39}$$

Pour déterminer $\cos\theta$, on divise l'intervalle [-1,1] en N intervalles équiprobables donnés par:

$$\int_{\cos\theta_{i-1}}^{\cos\theta_i} Proba(M_{inc},M_{scat}|\theta,\phi) = \frac{1}{N} \tag{1.40}$$

où $i \in$ [0;N]. Ces valeurs sont stockées dans un tableau dans lequel $\cos\theta$ est déterminé aléatoirement.

- $Proba(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi)$ donne la probabilité qu'a l'onde de repartir avec un angle ϕ connaissant les modes des ondes incidentes (M_{inc}) et diffractées (M_{scat}) ainsi que l'angle θ de départ. Cette probabilité est donnée par:

$$Proba(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi) = \frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi)}{\int_{4\pi} \frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi) d\phi} \tag{1.41}$$

L'angle ϕ est alors sélectionné en utilisant une variable aléatoire ϵ telle que (Lux et Koblinger [1991]):

$$\epsilon_3 = \int_0^{\phi} Proba(M_{inc},M_{scat},\theta|\phi') d\phi' \tag{1.42}$$

Il est important de noter que pour une onde P incidente ou pour une onde S dépolarisée, l'angle ϕ est équidistribué sur l'intervalle [0;2π].

Prise en compte de la surface libre

Lorsque l'on introduit une surface libre dans notre milieu, le changement de mode et de direction de propagation dû à la rencontre avec cette interface doit être intégré à notre marche aléatoire. C'est le seul changement qui intervient dans la marche aléatoire, les caractéristiques du scattering n'étant pas influencées par les interfaces.

Probabilité de réflexion

Lorsqu'une onde (P ou S) arrive sur la surface libre, elle peut se convertir. Les probabilités de conversions sont données par:

$$\begin{aligned} Proba(P \rightarrow P) &= R^E_{PP} \\ Proba(P \rightarrow S) &= R^E_{PS} \end{aligned}$$

pour une onde P incidente, et par:

$$\begin{aligned} Proba(S \rightarrow S) &= \frac{1}{2}(1 + R^E_{SVSV}) \\ Proba(S \rightarrow P) &= \frac{1}{2}R^E_{SVP} \end{aligned}$$

pour une onde S incidente. Les coefficients R^E_* sont les coefficients de réflexions en énergie (Ben Menahem [1981],pp 89-103). Il est important de noter que les ondes inhomogènes et les ondes de surface ne sont pas prises en compte. Pour les ondes S, la probabilité de conversion $S \rightarrow P$ tient compte du fait que seule la partie SV interagit avec l'onde P. Pour le probabilité de conversion $S \rightarrow S$, le 1 exprime la réflexion totale des ondes SH. Le facteur $\frac{1}{2}$ tient compte du fait que pour une onde S dépolarisée l'énergie est répartie de façon égale entre les ondes SV et les ondes SH.
Par exemple, pour une onde P incidente sur la surface libre, une variable aléatoire ϵ est tirée. Si $\epsilon < Proba(P \rightarrow P)$, l'onde se réfléchie en P, sinon, elle se convertit en S.
Les angles de l'onde diffractés sont déterminés grâce aux lois de Snell-Descartes.

Distance entre deux diffractions

Considérons une onde S se propageant vers la surface libre selon la direction $\hat{\mathbf{p}}$. Si la distance entre deux collisions est donnée par L, la loi de distribution de L est donnée par:

$$-\ln\epsilon = \frac{L}{l_S} \qquad \text{Si } SO > L$$

$$\begin{aligned} -\ln\epsilon &= \frac{L}{l_S} && \text{Si } SO < L \text{ et réflexion } S \rightarrow S \\ -\ln\epsilon &= \frac{SO}{l_S} + \frac{L - SO}{l_P} && \text{Si } SO < L \text{ et réflexion } S \rightarrow P \end{aligned}$$

où SO est la distance entre le diffracteur et la surface libre selon la direction $\hat{\mathbf{p}}$ et ϵ une variable aléatoire équidistribuée entre 0 et 1.

Prise en compte du Moho

Le même calcul peut être effectué lorsque la particule rencontre le Moho. Toutefois, à la différence de la surface libre pûrement réfléchissante, la particule peut être transmise dans le manteau. Lorsque cette transmission intervient, la marche aléatoire s'arrête: le manteau étant homogène, la particule ne peut pas être diffractée et ne peut revenir vers le récepteur.

Probabilité de réflexion et de transmission

Lorsqu'une onde P ou S arrive sur la Moho, elle peut se convertir, être réfléchie ou transmise. Les probabilités de conversions et de réflexion/transmission sont données par:

$$\begin{aligned} Proba(R_{P\rightarrow P}) &= R^E_{PP} \\ Proba(R_{P\rightarrow S}) &= R^E_{PS} \\ Proba(T_{P\rightarrow P}) &= T^E_{PP} \\ Proba(T_{P\rightarrow S}) &= T^E_{PS} \end{aligned}$$

pour une onde P incidente, et par:

$$\begin{aligned} Proba(R_{S\rightarrow S}) &= \frac{1}{2}(R^E_{SHSH} + R^E_{SVSV}) \\ Proba(R_{S\rightarrow P}) &= \frac{1}{2}R^E_{SVP} \\ Proba(T_{S\rightarrow S}) &= \frac{1}{2}(T^E_{SHSH} + R^E_{SVSV}) \\ Proba(T_{S\rightarrow P}) &= \frac{1}{2}T^E_{SVP} \end{aligned}$$

pour une onde S incidente. Les coefficients R^E_* et T^E_* sont les coefficients de réflexions en énergie (Ben Menahem [1981],pp 89-103). Les tirages des probabilités de réflexion, transmission et conversion se font de manière similaire à celle décrite pour la surface libre.

Distance entre deux diffractions

La loi de distribution de L est la même que celle utilisée pour la surface libre. Toutefois, dans le cas du Moho, si une onde est transmise dans le manteau, sa propagation s'arrête.

1.5.4 Contribution énergétique des particules

A chaque rencontre avec une hétérogénéité, il faut calculer la contribution énergétique d'une particule en terme de probabilité. Cette démarche est analogue à celle développée au paragraphe 1.3 dans le cas de la propagation des ondes acoustiques dans un milieu stratifié. Toutefois, il faut tenir compte dans le cas élastique des deux modes de propagation et des conversions possibles entre ceux-ci.
Une partie des chemins de l'énergie entre la dernière diffusion et le diffracteur (chemins directs et chemins à une seule réflexion) sont représentés schématiquement sur la figure 1.6. On voit que la présence des deux polarisations et de la couche guide d'onde multiplie le nombre de rais possibles à prendre en compte.

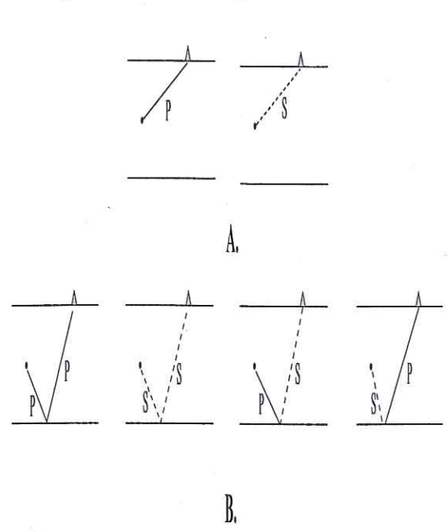

FIG. 1.6 – *Quelques chemins possibles entre le diffracteur et le récepteur (A. Chemins directs B. Chemins ayant subi une réflexion). Les traits pleins représentent le trajet des ondes P et les trais pointillés ceux des ondes S.*

Remontée des chemins directs

La contribution énergétique des chemins directs (figure 1.6,A.) a été énoncée par Margerin et al. [2001]. Elle est donnée par:

$$E_{M_{scat}} = \frac{P(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi)\exp(-\frac{R}{l_{M_{scat}}})}{4\pi R^2 v_{M_{scat}} dt} \tag{1.43}$$

où $l_{M_{scat}}$ est le libre parcours moyen du mode M_{scat} et $v_{M_{scat}}$ sa vitesse. dt est le pas de discrétisation en temps et R la distance entre le diffuseur et le récepteur.

Remontée des chemins réfléchis une fois

Pour obtenir la contribution de ce type de chemin, il faut tenir compte des probabilités de réflexion en énergie à l'interface ainsi que du changement d'expansion géométrique du faisceau après réflexion. Cette démarche est analogue à celle développée par Hoshiba [1997] dans le cas des ondes acoustiques. Margerin [1998] l'a utilisé dans le cas des ondes élastiques.
Sans aucune perte de généralité, pour une onde M_{inc} diffractée par une hétérogénéité en mode M_{scat} et qui va être réfléchie en mode M à la surface libre ou sur le Moho, la probablilité de parvenir au récepteur est donnée par:

$$E_M = \frac{P(M_{inc}|M_{scat},\theta,\phi)R^E_{M_{scat}\to M}(\theta_{M_{scat}})\exp(-\frac{R_{M_{scat}}}{l_{M_{scat}}} - \frac{R_M}{l_M})}{v_M dt GEO} \tag{1.44}$$

où $\theta_{M_{scat}}$ est l'angle entre la direction de propagation de l'onde M_{scat} et la normale à l'interface, $R^E_{M_{scat}\to M}$ est le coefficient en énergie du mode M_{scat} au mode M. $R_{M_{scat}}$ et R_M sont les distances parcourues par les modes M_{scat} et M respectivement. GEO est le terme complexe d'expansion géométrique que nous ne détaillerons pas ici et qui peut être obtenu par la théorie des rais.

Pour clarifier, considérons le cas où une onde S qui, une fois diffractée, est convertie en P (figure 1.7). Au contact de la surface libre, cette onde P sera de nouveau convertie en S.
La probabilité qu'a cette onde d'atteindre le diffracteur est donnée par:

$$E_S = \frac{P(S|P,\theta,\phi)R^E_{P\to SV}(\theta_P)\exp(-\frac{R_P}{l_P} - \frac{R_S}{l_S})}{\beta dt(R_P\frac{\cos\theta_P}{\cos\theta_{SV}} + R_S\frac{\alpha}{\beta}\frac{\cos\theta_{SV}}{\cos\theta_P})(R_P + R_S\frac{\alpha}{\beta})} \tag{1.45}$$

où $P(S|P,\theta,\phi)$ est la probabilité d'avoir une onde diffractée P dans la direction (θ,ϕ) souhaitée, $R^E_{P\to SV}$ est le coefficient de réflexion en énergie, R_P et R_S sont les distances

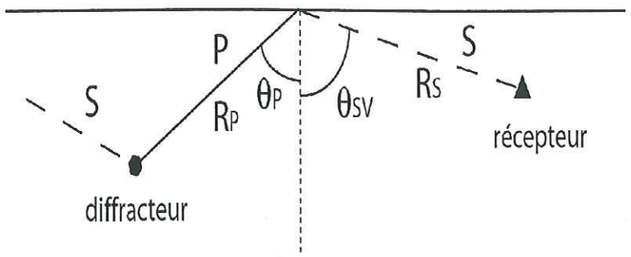

FIG. 1.7 – *Un cas de retour au récepteur.*

parcourues en P et S respectivement. Le terme $(R_P \frac{\cos\theta_P}{\cos\theta_{SV}} + R_S \frac{\alpha}{\beta}\frac{\cos\theta_{SV}}{\cos\theta_P})(R_P + R_S\frac{\alpha}{\beta})$ est le terme d'expansion géométrique donné par Hoshiba [1997].

Cas général

La probabilité d'atteindre le récepteur dans le cas général peut s'obtenir à partir de l'équation 1.45. Si l'onde subit N réflexions, sa probabilité est donnée par:

$$E_M N + 1 = \frac{P(M_{inc}|M_1,\theta,\phi)(\Pi_{i=1}^{N} R^E_{M_i \to M_{i+1}}(\theta_{M_i}))\exp(-\Sigma_{i=1}^{N}\frac{R_{M_i}}{l_{M_i}})}{v_{M+1}dtGEO} \tag{1.46}$$

où l'on considère que lors de la $i^{ème}$ réflexion l'onde passe du mode M_i au mode M_{i+1}.

En pratique, pour chaque diffracteur, toutes les réflexions et les changements de mode doivent être pris en compte. Pour des raisons évidentes de programmation et de temps de calcul, le nombre de réflexions maximal pris en compte est de 12. En effet, la décroissance exponentielle présente dans l'équation 1.46 permet de négliger les rais ayant subi un nombre supérieur de réflexions. Nous avons vérifié que pour des libres parcours moyens inférieurs à 150 km (ceux utilisés dans la suite de cette thèse) la prise en compte des rais ayant subi au maximum 8 réflexions est suffisante.

1.6 Bibliographie

Apresyan, L.A. and Y.A. Kravtsov, *Radiative transfer: Statistical and wave aspects*, Gordon and Breach Publications, 1996.

Aki, K., Scattering conversions P to S versus S to P, *Bull. Seims. Soc. Am.*, 1969-1972, 1992.

Ben-Menahem, A. et S.J. Singh, *Seismic waves and sources*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover, New York, 1960.

Collins, D.G., W.G. Blättner, M.B. Wells and H.G. Horak, Backward Monte Carlo calculations of the polarization chracteristics of the radiation emerginig from spherical-shell atmospheres, *Appl. Opt.*, **11**, 2684-2696, 1972.

Dainty, A.M. and N.M. Toksöz, Array analysis of seismic scattering, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **80**, 2248-2260, 1990.

Einspruch, N.G., E.J. Witterholt and R. Truell, Scatteing of a plane transverse wave ny a spherical obstacle in an elastic medium, *J. Appl. Phys.*, **31**, 806-818, 1960.

Heiderich, A., R. Maynard and B.A. van Tiggelen, Multiple light scattering in ordered nematic liquid crystals, *J. Phys. II France*, **7**, 765-792, 1997.

Hennino, R., N. Trégourès, N.M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B.A. van Tiggelen and R.L. Weaver, Observation of equipartition of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3447-3351, 2001.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Plan. Int.*, **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth-dependent S-wave velocity structure, *Phys. of the Earth Plan. Int.*, **104**, 15-22, 1997.

Ishimaru, A., *Wave propagation and scattering in random media*, Vols 1 et 2, Academic Press, New York, 1978.

Kittel, C., *Physique de l'état solide*, Dunod, 1988.

Kliger, D.S., J.W. Lewis et C.E. Randall, *Polarized light in optics and spectroscopy*, Academic Press, 1990.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion -I. Theory and numerical results, *Geophys. J. Int.*, **115**, 230-250, 1993a.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion -II. Limitations of asymptotic solutions, *Geophys. J. Int.*, **115**, 251-263, 1993b.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion, *Pure Appl. Geophys.*, **147**, 675-718, 1996.

Lux I. and L. Koblinger, *Monte Carlo Particule Transport Methods: Neutron and Photon Calculations*, CRC Press, 1991.

Margerin, L., *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*, Thèse de l'université Joseph Fourier, 1998.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. van Tiggelen, Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves, *Jour. Geophys. Res.*, **105**, 7873-7892, 2001.

Papanicolaou, G.C., Mathematical problems in geophysical wave propagation, in *Proceeding of the internal congress of mathematicians*, in *Documenta mathematica*, **extra volume ICM 98**, 241 - 265, 1998.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1107-1115, 1996a.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, Erratum, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1996b.

Ryzhik, L., G.C. Papanicolaou and J.B. Keller, Transport equations for elastic and other waves in random media, *Wave motion*,**24**, 327-370, 1996.

Sato, H., Multiple isotropic scattering model including *P-S* conversions for the seismogram envelope formation, *Geophys. J. Int.*, **117**, 487-494, 1994.

Sato, H. and M. Fehler, *Wave propagation and scattering in heterogeneous Earth*, Springer-Verlag, New York, 1998.

Shapiro, N.M., M. Campillo, L. Margerin, S.K.Singh, V. Kostoglodov and J. Pacheco, The enregy partitioning and the diffusive character of the seismic coda, *Bull. Seims. Soc. Am.*,**90**, 655-665, 2000.

Turner, J., *Radiative transfer of ultrasound*, PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 1994.

Turner, J.A., Scattering and diffusion of seismic waves ,*Bull. Seims. Soc. Am.*,**88**, 276-283, 1998.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer of ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3654 - 3674, 1994a.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media , *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3675 - 3683, 1994b.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Time dependence of multiply scattered diffuse ultrasound in polycrystalline media, *J. Acoust. Soc. Am.*,**97**, 2639 - 2644, 1994c.

Van de Hulst, H.C., *Light Scattering by Small Particules*, Dover, New York, 1981.

Weaver, R.L., On diffuse waves in solid media,*J. Acoust. Soc. Am.* ,**71**, 1608-1609, 1982.

Weaver, R.L., Diffusivity of ultrasound in polycrystals,*J. Mech. Phys. Solids*,**38**, 55-86, 1990.

Wu, R. et K. Aki, Scattering characteristics of elastic waves by an ealstic heterogeneity, *Geophysics*, **50**, 582-595, 1985a.

Wu, R. et K. Aki, Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the Lithosphere, *J.Geophys. Res.*, **90**, 10261-10273, 1985b.

Ying, C.F. et R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.*, **27**, 1086-1097, 1956.

Zeng Y., Theory of scattered P and S-wave energy in a random isotropic scattering medium, *Bull. Seims. Soc. Am.*,**83**, 1264-1276, 1993.

Chapitre 2

Propagation of elastic wave in a heterogeneous and stratified medium using Radiative transfer theory.

Ce chapitre est une version préliminaire d'un article en préparation.

2.1 Introduction

Seismic energy propagates either in the P-mode or in the S-mode. Mode conversions occur at velocity discontinuities or when the wave encounters a scatterer. Because of the existence of different and coupled modes, the coda remains poorly understood.
Fortunately, observational and theoretical results (Aki [1992], Papanicolaou et al [1996a,b], Dainty et Toksöz [1990], Shapiro et al. [2000], Margerin et al. [2001]) have shown that the coda is rapidly dominated by the shear mode, which suggests that the coda may be modeled with the acoustic approximation. This approximation greatly simplifies the problem since mode conversion and polarization are not taken into account. Since 1985, the acoustic radiative transfer equation is widely used to model the coda envelope in complex media (Wu [1985], Zeng et al. [1991], Hoshiba [1991,1994,1997], Sato [1995], Margerin et al. [1998,1999]).
Recently, Turner [1998] has shown that taking into account the complete elastic wave polarization and mode conversions strongly affects scalar variables. Indeed, the elastic diffusion equation is very different from its acoustic counterpart. Moreover, the complete

elastic theory is able to describe variables (such as the $\frac{E_S}{E_P}$ ratio) which cannot be studied using only the acoustic theory and which can give complementary informations about the crustal heterogeneity. Therefore, studying the complete polarization of elastic waves and mode conversions is an important subject.

A lot of theoretical efforts have been invested to include P-S conversions in the coda modeling (Zeng [1993] and Sato [1994]) relying on some assumptions which are never fulfilled in practice (Turner [1998]). Recently, Margerin et al [2001] solved the elastic radiative transfer theory in an infinite space. Using Monte Carlo simulations, they have simulated elastic wave propagation taking complete polarization and mode conversions into account.

Nevertheless, the assumption that the Earth is homogeneous with regard to wave speed and mean free path is known to be inaccurate. Moreover, the heterogeneous character of the crust is known from geological observations, as well as deep seismic soundings (Bois et al. [1988], Fuchs et al. [1987]).

In this paper, we focus on elastic wave propagation in a layered medium: a heterogeneous wave-guide represents the crust and a homogeneous half-space, the mantle. We assume that heterogeneities are spherical scatterers. Wave propagation in such a medium is studied by solving the elastic radiative transfer equation with Monte Carlo simulations. We investigate the classical parameter coda-Q (Q_c) which expresses the energy leakage into the mantle. For large time, results are compared to results obtained with the generalized diffusion approximation (Trégourès and van Tiggelen [2002a]), and for a weakly heterogeneous crust (crustal mean free path is much higher than crustal thickness) to the quasi 2D approximation developped by Trégourès and van Tiggelen [2002b].

2.2 Elastic wave propagation in a heterogeneous medium

In this paper, we assume that elastic waves propagate in a medium which contains spherical scatterers. They exhibit small velocity and density contrasts with the matrix. Scattering of elastic waves by a spherical inclusion implies symmetry relations which greatly simplify the problem (Van de Hulst [1981]). This problem has thus been frequently studied (Ying and Truell [1956], Einspruch et al [1960], Korneev and Johnson [1993a,b][1996], Wu and Aki [1985a,b] and Margerin et al [2001]).

In this first section, we present some known results that form the theoretical basis of

scattering by a sphere and of elastic wave propagation in a heterogeneous medium.

2.2.1 Scattering by a spherical inclusion

Two different scattering regimes can be distinguished, depending on the size of the scatterers relative to the wavelength. We thus define the scattering parameter $k_P a$ where k_P is the P wave number and a the radius of the sphere (Van de Hulst [1981]):

- When $k_P a << 1$, that is when the scatterer is much smaller than the wavelength, scattering is in the Rayleigh regime.
- When the wavelength is similar to the scatterer radius a, the scattering is in the Rayleigh-Gans regime ($k_P a \simeq 1$). In the following, we will study 3 different values of $k_P a$ for the Rayleigh Gans case: $k_P a = 1.2$, 1.6 or 2.0.

All the informations about the angular dependence of the scattered flux are contained in the differential scattering cross sections $\frac{d\sigma}{d\Omega}(M_{Inc}, M_{Scat}, \theta, \phi)$ (with M_{Inc},M_{Scat}=P,S and M_{Inc},M_{Scat} are modes of the incident and scattered waves respectively). Following Sato and Fehler [1998], they are defined as the ratio of the energy scattered by the spherical inclusion in a direction (θ, ϕ) per unit time and per unit solid angle to the energy per unit time and per unit area carried by the incident wave. Their detailed expressions can be found in Margerin et al [2001], Wu and Aki [1985a] or Korneev and Johnson [1993a,b]. In particular, these authors have observed that scattering is never isotropic.

The integral of the differential scattering cross section over all angles defines the total amount of energy loses from the propagation beam into all directions. Therefore, the integrated cross sections (Σ_{IJ}) are defined as:

$$\Sigma_{M_{Inc}M_{Scat}} = \int_{4\pi} \frac{d\sigma_{M_{Inc}M_{Scat}}}{d\Omega} d\Omega \tag{2.1}$$

where $\int_{4\pi} d\Omega$ denotes integration over all space directions. We can also defined Σ^*_{MN} as

$$\Sigma^*_{MN} = \int_{4\pi} \frac{d\sigma_{MN}(\cos\Theta)}{d\Omega} \cos\Theta d\cos\Theta d\phi$$

. It expresses the scattering anisotropy. Indeed, Σ^*_{MN} is positive or negative for forward or backward scattering respectively.

Using these physical quantities, scattering characteristics for the two different regimes can be studied. These characteristics are shown in Table 2.1.

	$\frac{l_P}{l_S}$	$\frac{l_P^*}{l_P}$	$\frac{l_S^*}{l_S}$	$\frac{\Sigma_{PP}}{\Sigma_{PS}}$	$\frac{\Sigma_{SS}}{\Sigma_{SP}}$	$\frac{\Sigma_{PP}^*}{\Sigma_{PP}}$	$\frac{\Sigma_{PS}^*}{\Sigma_{PS}}$	$\frac{\Sigma_{SS}^*}{\Sigma_{SS}}$
Rayleigh	2.6	0.8	0.7	0.3	19.6	-0.4	-0.4	-0.3
Rayleigh-Gans $k_P a = 1.2$	1.51	0.91	1.67	0.67	14.1	-0.14	-0.06	0.43
Rayleigh-Gans $k_P a = 1.6$	1.67	1.54	3.11	1.21	21.2	0.17	0.46	0.69
Rayleigh-Gans $k_P a = 2.0$	2.00	2.45	4.61	1.44	28.4	0.56	0.67	0.78

TAB. 2.1 – *Caractéristiques des différents régimes*

Rayleigh regime

For the Rayleigh regime, we can observe in Table 2.1 that l_P^* and l_S^* are smaller than l_P and l_S, showing that most of the energy is backscattered. Moreover, $\frac{l_P}{l_S} > 1$, showing that scattering is stronger for S waves than for P waves. Finally, we can observe that $\frac{\Sigma_{PP}}{\Sigma_{PS}} < 1$ and that $\frac{\Sigma_{SS}}{\Sigma_{SP}} >> 1$. This means that most of P waves are converted to S waves when encountering a heterogeneity, whereas only a few S waves are converted to P waves. It is important to note that $\Sigma_{PS} = 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\Sigma_{SP}$, independently of the scattering mechanism. This relation finds its origin in the reciprocity of the Green functions (Aki [1992], Papanicolaou et al. [1996a,b]).

Rayleigh-Gans regime

In the Rayleigh-Gans regime, l_P^* and l_S^* are generally larger than l_P and l_S showing that scattering is in the forward direction. When $k_P a$ increases, l_P^* and l_S^* also increase which means that the scattering is more and more concentrated in the forward direction.

We can thus observe that the scattering properties strongly depends on the size of the sphere as compared to the wavelength. In the following, we will examine the impact of multiple scattering on the wave propagation in different regimes.

2.2.2 Elastic radiative transfer theory

As in optics, polarized elastic waves can be represented by the Stokes vector (Van de Hulst [1981], Ishimaru [1978], Turner and Weaver [1994a,b,c], Margerin et al. [2001]). They contain all the information about P and S-intensities and S-polarization (see previous chapter).
The space and time evolution of the Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})$ is described by the elastic

radiative transfer equation (Weaver [1990], Ryzhik et al. [1996]):

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{p}}\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}}) + \underline{\underline{c}}^{-1}\frac{\partial \underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})}{\partial t} = -\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})\underline{\underline{l}}^{-1} + \frac{\underline{\underline{l}}^{-1}}{4\pi}\int_{4\pi}\underline{\underline{P}}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}')\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}}')d^2\hat{\mathbf{p}}' \quad (2.2)$$

The Stokes vector depends on time t, position $\mathbf{r}$ and propagation direction $\hat{\mathbf{p}}$. If l_P and l_S are P and S mean free paths, $\underline{\underline{c}}$ and $\underline{\underline{l}}$ denote velocity and mean free path matrices respectively:

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

$$\underline{\underline{l}} = \begin{pmatrix} l_P & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & l_S \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

The left hand side of equation 2.2 describes the evolution of the Stokes vector. The first term on the right hand side represents the energy loss due to scattering from direction $\hat{\mathbf{p}}$ to all other directions. The second term is a gain term for the Stokes vector $\underline{I}(\mathbf{r}, t, \hat{\mathbf{p}})$. In this term, the Mueller matrix $\underline{\underline{P}}$ governs the scattering from directions $\hat{\mathbf{p}}'$ to the direction $\hat{\mathbf{p}}$. It is related to the differential cross section of a single scatter. Refer to Margerin et al. [2001] or Turner [1994a,b,c] for a detailed explanation.
Classicaly, we solve the leastic raditaive transfer equation using Monte Carlo methods. This method is described the previous chapter.

2.2.3 Quasi-2D approximation

If the crustal thickness is smaller than the mean free path of the waves ($H < l$), the elastic radiative transfer equation can be simplified to a quasi-2D radiative transfer equation. Recently, Trégourès and van Tiggelen [2002a] derived this equation for a bounded medium with two ideal surfaces. This equation describes the time evolution of the ensemble-averaged energy-contents of all individual eigen-modes of the layer. Transport equation for the mode-energy ϵ_i is expressed as:

$$\partial_t \epsilon_i = -\frac{\epsilon_i}{\tau_i} + \sum_j n_i W_{ij} \epsilon_j \quad (2.5)$$

where $n_i = \frac{k_i}{v_i}$ The first term on the right hand side expresses the loss of the mode i in all the modes j due to the disorder (τ_i is the finite life time of the mode i). The second term represents the reinforcement of the mode i: the presence of disorder in the plate implies mode conversions from all modes j to the mode i. This conversion can be related to the mode scattering cross section W_{ij} (see Trégourès and van Tiggelen [2002a]). It is also important to note that the life time τ_i can be related to W_{ij} following $\frac{1}{\tau_i} = \sum_j W_{ij} n_j$

To be realistic, energy leakage into the mantle must be taken into account. Transport equation 2.5 must thus be modified:

$$\partial_t \epsilon_i = -\frac{\epsilon_i}{\tau_i} + \sum_j n_i W_{ij} \epsilon_j - \frac{\epsilon_i}{\tau_i^L} \tag{2.6}$$

where τ_i^L is the leakage time of the mode i.
To solve this equation, we assume that the mode scattering cross section W_{ij} is independent of the modes, that is $W_{ij} = W$. In this case, the life time τ_i is thus independent of i and is called the mean free path τ. Moreover, introducing $\xi = \frac{n_i}{\sum_i n_i}$ which defines the relative occupation number and $T \equiv \frac{t}{\tau}$, the equation 2.6 can be rewritten as:

$$\partial_T \epsilon_i = -\epsilon_i + \xi_i \sum_j \epsilon_j - \frac{\tau}{\tau_i^L} \xi_i \tag{2.7}$$

This equation is only valid in the Quasi 2D approximation, that is when $\tau, \tau^L > \frac{H}{v}$.
The coda-Q value can be determined by the smallest eigenvalue λ_0:

$$\frac{\omega}{Q_c} = \lambda_0 \left(\frac{\tau}{\tau_i^L} \right) \frac{1}{\tau} \tag{2.8}$$

2.2.4 Generalized diffusion equation

For large time, the complexity of the radiative transfer equation can be greatly reduced by the use of the diffusion approximation (Weaver [1990], Ryzhik et al. [1996], Turner [1998]). This classical diffusion equation describes the space and time evolution of the total energy density and thus this equation is unable to predict how the energy will be distributed among compressional and shear modes. Moreover, in this approximation, mode conversions at the boundaries cannot be treated.

Recently, Trégourès and van Tiggelen [2002b] developed the so-called "generalized diffusion equation". This equation keeps track of the two elastic wave-types as well as of mode conversions and allows to take mode conversions at the boundaries into account.

Trégourès and van Tiggelen [2001] have derived the generalized diffusion equation from the elastic radiative transfer equation and have shown it can be expressed as:

$$\partial_t \begin{pmatrix} E_P(\mathbf{r},t) \\ E_S(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} - \underline{\underline{D}} \begin{pmatrix} E_P(\mathbf{r},t) \\ E_S\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = -\underline{\underline{J}} \begin{pmatrix} E_P(\mathbf{r},t) \\ E_S\mathbf{r},t) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

where

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{3\eta[(\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP} - \Sigma^*_{SS})(\Sigma_{PP} + \Sigma_{PS} - \Sigma^*_{PP}) - \Sigma^*_{SP}\Sigma^*_{PS}]} \\ &* \begin{pmatrix} \alpha(\Sigma_{SS} + \Sigma_{SP} - \Sigma^*_{SS}) & \beta\Sigma^*_{SP} \\ \alpha\Sigma^*_{PS} & \beta(\Sigma_{PP} + \Sigma_{PS} - \Sigma^*_{PP}) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.10}$$

is the diffusion matrix. η is the density of scatterers. This matrix can be linked to the S and P transport mean free path (l^*_S, l^*_P).

In equation (2.9), $\underline{\underline{J}}$ is the collision matrix which represents mode conversions due to scattering in the medium. It is given by:

$$\underline{\underline{J}} = \frac{\eta}{\alpha^2} \Sigma_{PS} \begin{pmatrix} \alpha^3 & -\frac{1}{2}\beta^3 \\ -\alpha^3 & \frac{1}{2}\beta^3 \end{pmatrix}$$

The generalized diffusion equation (2.9) describes the time evolution of the energy among P-mode (E_P) and S-mode (E_S). It is important to note that $\underline{\underline{D}}$ and $\underline{\underline{J}}$ do not commute and cannot be simultaneously diagonalized. It is thus impossible to decouple equation (2.9) into two independent scalar diffusion equation for E_P and E_S.

Trégourès and van Tiggelen [2002b] have solved the generalized diffusion equation for a slab, that is for a heterogeneous layer of thickness H bounded by a free surface and a solid-solid interface at the Moho. This model is a quite realistic model for the lithosphere. To solve the generalized diffusion equation in such a model, boundary conditions must be added to this equation. These authors have thus solved the set of equation:

$$\partial_t \underline{E}(z,t) - \underline{\underline{D}}.\nabla \underline{E}(z,t) = -\underline{\underline{J}}.\underline{E}(z,t) \tag{2.11}$$

$$\underline{\underline{C_1}}\underline{E}(0,t) - \underline{\underline{D}}.\underline{E'}(0,t) = \underline{0} \tag{2.12}$$

$$\underline{\underline{C_2}}\underline{E}(H,t) + \underline{\underline{D}}.\underline{E'}(H,t) = \underline{0} \tag{2.13}$$

Equation (2.11) is obtained by integrating equation (2.9) over the radial component. Equations (2.12) and (2.13) are boundary conditions at the free surface and at the Moho

respectively.

Equation (2.12) is associated to the traction free boundary condition at the free surface. In the acoustic wave approximation, this boundary condition implies the abscence of leakage. In this study, due to the existence of two modes, mode conversions at the free surface must be taken into account. $\underline{\underline{C_1}}$ is then associated to these mode conversions. Equation (2.13) is obtained by studying the flux and energy conservation at the Moho. The matrix $\underline{\underline{C_2}}$ is calculated from the reflection coefficient at the lower boundary.

We do not detail these matrices which depend on the reflection coefficients, they can be found in Trégourès and van Tiggelen [2002b].

These authors have seeked for an asymptotic solution of the form

$$\underline{E}(z,t) = \exp(-\gamma t)\underline{E}_0(z) \tag{2.14}$$

This solution satifies both the generalized diffusion equation (equation 2.11) and the boundary conditions (eq. 2.12 and 2.13). The exponential time decay describes the leaking of energy at the lower boundary and thus coda-Q. $\underline{E}_0(z)$ is the depth-dependent equipartitionned vector.

2.3 Numerical model of the lithosphere

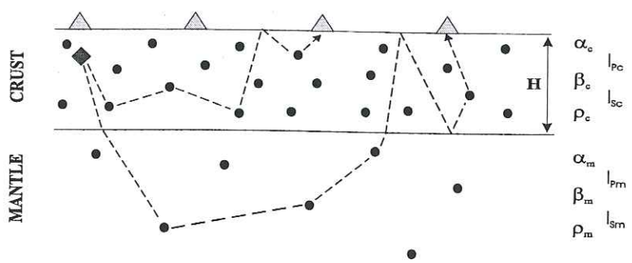

FIG. 2.1 – *Geometry and parameters of the model used for the simulations.*

In this paper, we focus on the problem of a flat layer representing the crust overlying a half space representing the mantle. This model is shown in Figure 2.1. S and P-wave velocities and S and P-mean free paths are given by $\beta_{c,m}$, $\alpha_{c,m}$, $l_{S_{c,m}}$ and $l_{P_{c,m}}$ for the crust and mantle respectively.

We distinguish 3 different types of models which differ in their velocity and mean free

path contrasts (Table 2.2). The first two models are not realistic but are very simple cases for the simulations.

- Model A has neither velocity or density contrasts nor depth-dependent mean free path. It is a half-space and is thus the simplest model.
- Model B has no velocity or density contrast but has a depth-dependent mean free path. Scattering only occurs in the crustal layer of thickness H. The mantle mean free path tends to infinity ($l_{S_m}, l_{P_m} \to \infty$) which means that the mantle is homogeneous. For the sake of simplicity (computation time), the case of a heterogeneous mantle has not been investigated.
- Model C has velocity, density and mean free path contrasts. Here again, the mantle is homogeneous ($l_{S_m}, l_{P_m} \to \infty$). This is the most realistic case: reflection and transmission of waves at the Moho are taken into account and therefore, part of the energy can be trapped in the crust or transmitted in the mantle.

An important assumption is used in this paper. Indeed, since equation 2.2 is very difficult to solve, we assume that S-waves are depolarized in our model. This approximation is quite realistic because Turner [1998] and Turner and Weaver [1994a,b,c] have shown that S-wave depolarization occurs rapidly after only a few mean free paths. Moreover, it greatly simplifies the problem because it allows to neglect polarization effects when a wave encounters a scatterer or an interface. However, it is important to note that the scattering anisotropy is still taken into account in this approximation.

In this case, S-energy is equally distributed among SV and SH-energies. Since cross-correlation between the two shear components are disregarded (U=V=0), the Stokes vector for the S-wave is written as:

$$I = \begin{pmatrix} I_P \\ I_{S_x} \\ I_{S_y} \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

In these models, source is isotropic. Four receivers are located at different epicentral distances R (R = 0, H, $2H$ or $4H$ with H = 30 km). Both receivers and source are located at 1 km depth.

For each model A,B,C (Table 2.2), we study wave propagation at 1 Hz for different scattering regimes (Rayleigh or Rayleigh-Gans with $k_P a$ = 1.2, 1.6 or 2.0), for two different source types (P or S) and for different crustal mean free paths (l_{S_c} = 1, 5, 10, 30 or 70

	Model A	Model B	Model C
Velocity	no	no	yes
contrast	β_c=β_m=3.5 km/s	β_c=β_m=3.5 km/s	β_c=3.5km/s
Density			β_m=4.7km/s
contrast	α_c=α_m=$\sqrt{3}\beta_c$	α_c=α_m=$\sqrt{3}\beta_c$	α_c=$\sqrt{3}\beta_c$
			α_m=$\sqrt{3}\beta_m$
	ρ_c=ρ_m=2.9 g/cm^3	ρ_c=ρ_m=2.9 g/cm^3	ρ_c=2.9 g/cm^3
			ρ_m=3.3 g/cm^3
Mfp	no	yes	yes
contrast	l_{S_c}=l_{S_m}=1,5,10,30,70 km	l_{S_c}=1,5,10,30,70 km	l_{S_c}=1,5,10,30,70 km
		$l_{S_m} \to \infty$	$l_{S_m} \to \infty$
	$k_P a << 1$ $l_{P_c} = l_{P_m} = 2.6 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 2.6 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 2.6 l_{S_c}$
	$k_P a = 1.2$ $l_{P_c} = l_{P_m} = 1.51 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 1.51 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 1.51 l_{S_c}$
	$k_P a = 1.6$ $l_{P_c} = l_{P_m} = 1.67 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 1.67 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 1.67 l_{S_c}$
	$k_P a = 2.0$ $l_{P_c} = l_{P_m} = 2.0 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 2.0 l_{S_c}$	$l_{P_c} = 2.0 l_{S_c}$
		$l_{P_m} \to \infty$	$l_{P_m} \to \infty$

TAB. 2.2 – *Physical properties of the 3 types of models.*

km), which makes a total of 72 different models. As an example, Figure 2.2 represents the total energy density considering Rayleigh Gans scatterers ($k_P a = 1.2$). We observe that our numerical simulation (solid line) lies between the single scattering approximation (dashed line) and the diffusion approximation (dotted line). It is important to note that our simulation describes the single scattering and the diffusion approximation and an intermediate multiple scattering regime.

2.4 Synthetic coda analysis

In this section, we analyze the results obtained from numerical simulations of the elastic radiative transfer theory in the three models defined previously. We investigate the effects of the scattering regime (Rayleigh or Rayleigh Gans), of the mean free path and of the source-type.

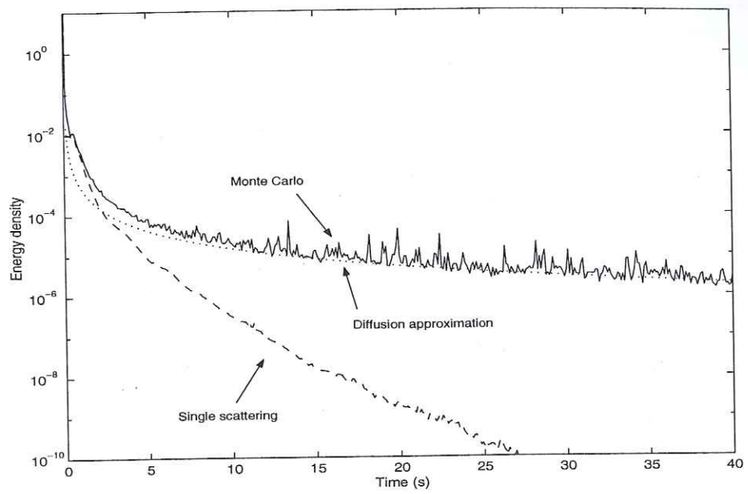

FIG. 2.2 – *Comparison of the Monte Carlo simulations (solid line) with the single scattering (dashed line) and diffusion approximation (dotted line).*

2.4.1 Rayleigh regime

In Figure 2.3, we present results of our numerical simulations in the Rayleigh regime for a P-source and for three different values of the crustal mean free path of S waves (l_{S_c}): l_{S_c} = 10 km (top), 30 km (middle) and 70 km (bottom). The curves show the variations with time of energy density at 4 receivers with epicentral distances between 0 and 120 km for P (dotted lines) and S (solid lines). The time is expressed as a function of the shear mean free time ($\tau_S = \frac{l_{S_c}}{\beta_c}$). The light gray curves, gray curves and black curves are the results for model A, B and C respectively. On each plot, vertical dashed lines indicate arrival times of ballistic P and S waves. Energy envelope curves exhibit ripples characteristic of the Monte Carlo simulations. The ripples are very important for large l ($l >> H$): in these cases, Monte Carlo methods have a low convergence.
We can first observe that P and S energy density envelopes become parallel for large lapse times for all the models and epicentral distances. This observation can be explained by the equipartition theory (Weaver [1990], Ryzhik et al. [1996], Papanicolaou et al. [1996a,b], Shapiro et al. [2000], Hennino et al. [2001]). In this theory, the ratio between S and P energy becomes constant at large lapse times. This observation will be discussed in the next chapter.

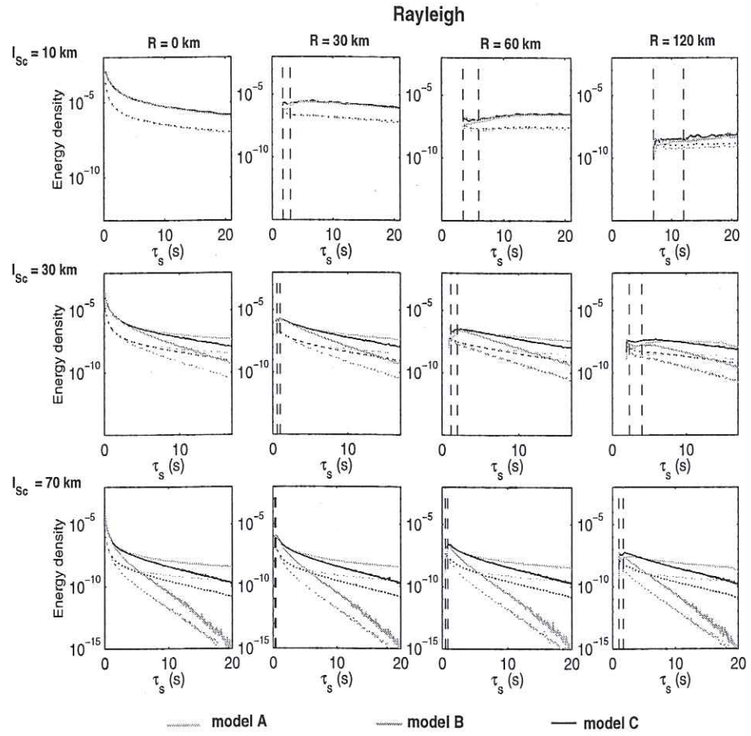

FIG. 2.3 – *Results of the Monte Carlo simulations in the Rayleigh regime for a P-source and for 3 different values of the crustal mean free path of S-waves: l_{S_c} = 10 km (top), 30 km (middle) and 70 km (bottom). Each column shows the energy curves computed at four receivers with different epicentral distance R. Dotted and solid lines represent P and S energy densities respectively. Along each horizontal axis, the travel time is expressed as a function of the shear mean free time ($\tau_s = \frac{l_{S_c}}{\beta_c}$). Vertical dashed lines indicate arrival times of ballistic P and S-waves. The light gray curves corresponds to model A (half space), gray curves to model B (depth-dependent mean free path with constant velocity and density) and black curves to for model C (depth-dependent density, velocity and mean free path).*

Influence of the mean free path

We first focus on the first column of Figure 2.3, that is when the epicentral distance is equal to 0.

Let us focus on the case of a small mean free path (l_{S_c} = 10 km, $l^*_{S_c}$=7.54 km, Figure 2.3, top). Changing the density, mean free path and velocity contrasts at the crust-mantle boundary has no effect on the recorded energy densities which are very similar for the three models. Since $l^*_{S_c}$ is much smaller than the crustal thickness, the crust is very heterogeneous and energy is trapped in the crust for low time.

When l_{S_c} increases, the layering has a more and more important influence. For times smaller than the ballistic reflection time, coda energies are the same for the three models because waves have only propagated inside the crust. When time increases, envelopes split because a part of the wavefield waves goes into the mantle for models B and C. We then observe that the energy decay strongly depends on the group of model (A,B,C). Decay rates of the envelopes for strong mean free path contrast (model B and C) are much bigger than the one in the uniform model. This is a direct consequence of the energy loss at the crust-mantle boundary in models B and C. When scattering in the mantle is negligible and l_{S_c} is of the order or larger than the crust thickness, most energy escaped from the crust and leaks into the mantle after a few scattering. The discrepency between the decay rate of envelopes in model B and C is due to the difference in the velocity contrast.

Influence of the epicentral distance

When the epicentral distance increases ($R \geq 30$ km, Figure 2.3), S-energy density can be computed for times smaller than the ballistic S-wave arrival time. This corresponds to waves which have propagated in the P-mode and have been converted to the S-mode just before reaching to the receivers.

We also observe that the envelope shape changes with distance. For large epicentral distance and small mean free path ($l^* < H$), it takes the typical shape of a diffusion front. This diffusion front is not only a theoretical view. Such envelope curves can be observed in the moon (Dainty and Toksoz [1981]) or in volcanoes (Wegler and Lühr [2001]).

Effect of the source type

Changing the source type (Figure 2.4) does not change the general observations made for a P-source. Nevertheless, it changes the envelope behaviour for very small times.

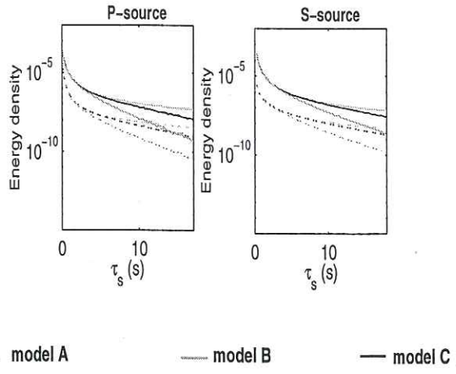

FIG. 2.4 – *Results of the Monte Carlo simulations in the Rayleigh regime for the P-source (left) and the S-source (right). In this case, $l_{S_c} = 10$ km and $R = 0$. Along each horizontal axis, the travel time is expressed as a function of the shear mean free time ($\tau_s = \frac{l_{S_c}}{\beta_c}$). The light gray curves corresponds to mo del A (half space), gray curves to model B (depth-dependent mean free path with constant velocity and density) and black curves to for model C (depth-dependent density, velocity and mean free path).*

2.4.2 Effect of the anisotropy on energy densities

The effect of the anisotropy on energy densities is represented in Figure 2.5. It shows the results of the Monte Carlo simulations for a P-source and for different values of $l^*_{S_c}$ at $R = 0$. Each column shows the energy curves computed for a given scattering anisotropy. For the case $l_{S_c} = 10$ km, we observe that when $k_P a$ increases, the curves corresponding to the three models separate at earlier times, showing that the influence of the crust-mantle boundary becomes stronger. This happens because for large values of $k_P a$, $l^*_{S_c}$ becomes rapidly closer or larger than the crustal thickness due to the anisotropic scattering.
For large values of l_{S_c}, $k_P a$ increasing does not modify significantly the curve shapes. It only alters the energy decay with time.

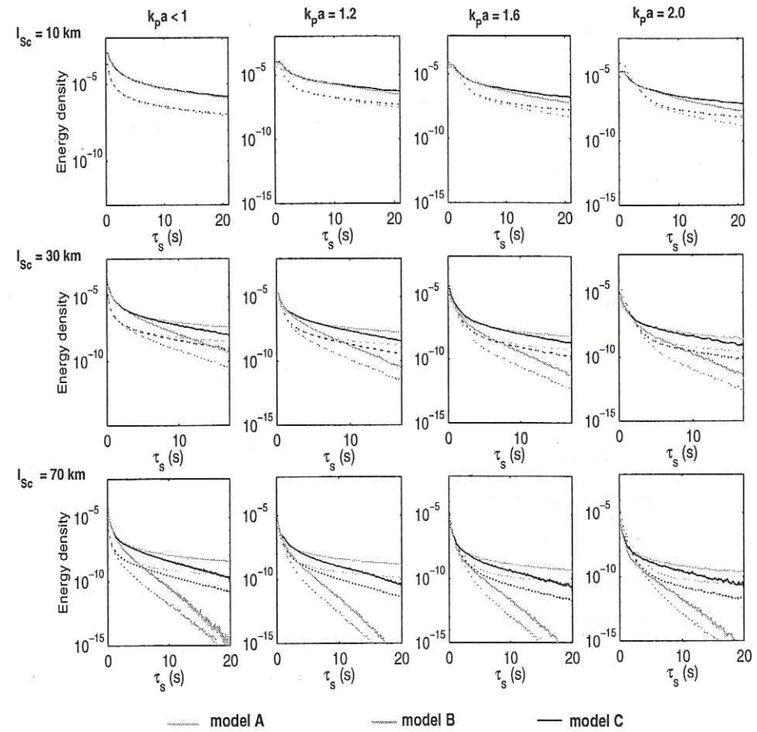

FIG. 2.5 – *Results of the Monte Carlo simulations for a P-source and for 3 different values of the crustal mean free path of S-waves $l^*_{S_c}$ (top: 10km, middle: 30 km and bottom: 70 km). The energy curves have been computed at an epicentral distance R=0. Each column shows the results obtained for a given anisotropy.*

2.5 Coda-Q in a stratified model. Comparison with the generalized diffusion approximation and with the quasi 2D approximation.

In this section, we focus on the results obtained for model C which is the more realistic model. Time decay curves of coda energy (Q_c) computed with Monte Carlo simulations of the radiative transfer theory are compared to the decays obtained numerically with the generalized diffusion equation and with the Quasi 2D Approximation.

2.5.1 Q_c measurement in Monte Carlo simulations

From the results of the numerical simulations, Q_c is obtained by fitting the coda energy decay curve to the following equation:

$$E(t) = \frac{1}{t}\exp(-\frac{2\pi f t}{Q_c}) \tag{2.16}$$

Figure 2.6 shows the energy of S-waves recorded at R=0 for the Rayleigh Gans scattering ($k_P a$ = 2.0) and l_S = 30 km. This figure shows that much care has to be taken when measuring coda-Q because the estimation of Q_c^{-1} in different time windows only leads to a stable value at large lapse times. Therefore, the measurement must be made at large lapse times, when waves have reached the diffusive regime.
To be realistic, in the case represented in Figure 2.6, Q_c^{-1} value remains stable for time greater than 25 mean free time, that is about 250 s. Before 250 s, Q_c^{-1} value varies and the comparison between models and data must be done very carefully.

2.5.2 Q_c vs l^*

Figure 2.7 shows Q_c^{-1} values obtained from the simulations of the elastic radiative transfer equation (filled symbols) and with the generalized diffusion equation derived by Trégourès and van Tiggelen [2002b] (empty symbols) as a function of the transport mean free path of S-waves l_S^*. Comparison is made for the different scattering regimes (diamonds for Rayleigh scatterers, triangles for Rayleigh-Gans scatterers ($k_P a$ = 1.2), circles for $k_P a$ = 1.6 and squares for $k_P a$ = 2.0). The solid line represents Q_c values measured in the acoustic case and assuming isotropic scattering by Margerin et al [1999]. The dashed line represents Q_c^{-1} values obtained numerically with the Quasi 2D Approximation (Trégourès and van Tiggelen [2002a]).

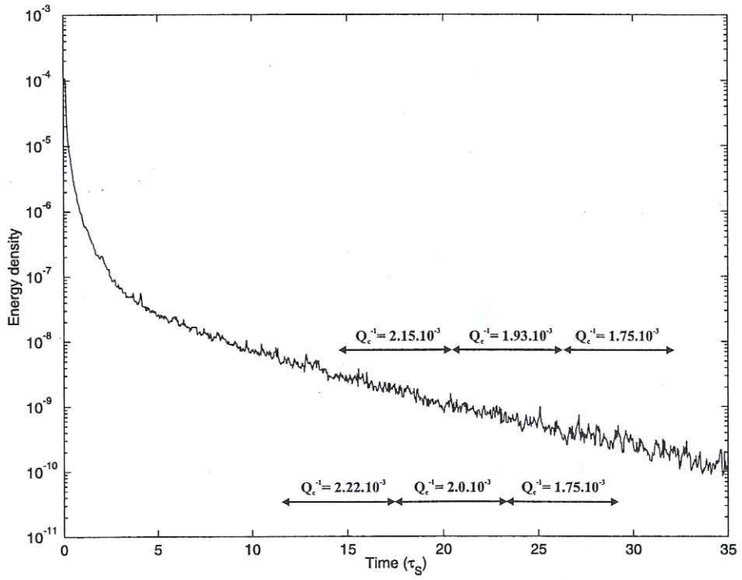

FIG. 2.6 – *Energy density received at R = 0 km for the Rayleigh Gans regime ($k_P a$ = 2.0) and l_S = 30 km. Only S-waves are generated by the source. Values of Q_c^{-1} measured in different time windows are showed.*

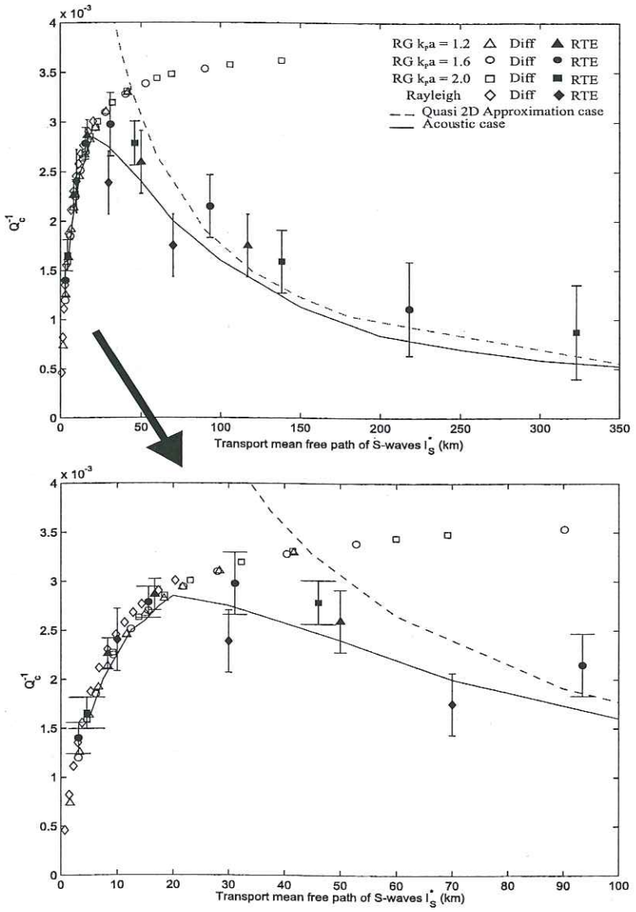

FIG. 2.7 – Q_c^{-1} *as a function of the transport mean free path* $l^*_{S_c}$ *at 1 Hz (A.* $l^*_{S_c} < 350$ *km and B.* $l^*_{S_c} < 100$ *km). Filled symbols are solutions of the elastic radiative transfer equation (RTE) and empty symbols solutions of the diffusion approximation (Diff) obtained by Trégourès and van Tiggelen [2002b]. Triangles correspond to Rayleigh Gans scatterers with* $k_P a = 1.2$*, circles to* $k_P a = 1.6$*, squares to* $k_P a = 2.0$ *and diamonds to Rayleigh scatterers. The solid line shows* Q_c^{-1} *values obtained by Margerin et al. [1999] in the acoustic case. Dashed line shows values obtained with the Quasi 2D approximation (Trégourès and van Tiggelen [2002a])*

Figure 2.7 shows that two regimes can be distinguished. If l^*_S is smaller than about H, Q_c^{-1} increases with l^*, whereas if l^* is of the order or larger than H, Q_c^{-1} decreases with increasing l^*.

- If $l^* < H$, diffusion approximation and radiative transfer theory give identical results, showing the validity of our Monte Carlo simulations. In this case, the larger the diffusion constant, the faster the diffuse energy leaks into the mantle (Q_c^{-1} increases). Therefore, Q_c^{-1} depends on the diffusion constant and thus on the mean free path l^*.

- If $l^* > H$, diffusion approximation and radiative transfer theory give very different results. This discrepancy is due to the fact that the diffusion approximation is not valid for $l^* > H$. Nevertheless, for large l^* ($l^* >> H$), the quasi 2D approximation is valid.
  It can be observed that Q_c^{-1} depends on the mean free path l^* and does not depend on the crustal mean free path l_S. In this case, a part of the energy is trapped in the crust (post-critical reflexions at the Moho). The coda decay is thus due to the leakage of energy to the mantle which is limited by the rate of the conversion of crustal guided modes into leaky modes. These two modes are coupled by wave scattering on crustal heterogeneities. Figure 2.7 shows that this coupling seems to be controlled by parameter l^*, even if there are large uncertainties on Q_c^{-1} measurements. To be converted into a leaky mode, a guided mode must change its propagation direction. As scattering is strongly anisotropic (forward scattering), as single collision is not sufficient to change the direction of propagation significantly. By definition of l^*, the propagation direction is very different from the initial one after the wave has travelled a distance larger than l^*. When l^* increases, conversion of crustal guided modes into leaky modes is weak and then the leakage into the mantle falls off (Q_c^{-1} decreases).

Figure 2.7 also shows that values of Q_c^{-1} measured with the elastic theory are not very different from those of the acoustic theory. The explanation for this observation was predictible because for large lapse times the wavefiled is equipartitionned (Weaver [1990], Ryzhik et al. [1996], Shapiro et al. [2000], Hennino et al. [2001]) and therefore, S-waves energy is about ten times that as P-waves energy (Figures 2.3-2.5). For large times, elastic case is very close to the acoustic approximation.

2.6 Conclusion

In this paper, we have used Monte Carlo simulations of the elastic radiative transfer theory to model multiply scattering of elastic waves in a layered medium. Q_c^{-1} and equipartition values obtained with this method have been compared with results of the generalized diffusion equation (Trégourès and van Tiggelen [2002b]) and with the quasi 2D approximation (Trégourès and van Tiggelen [2002a]).

The Q_c^{-1} study shows that for small transport mean free path l_S^* (that is when $l_S^* < H$), the diffusion approximation applies and Q_C^{-1} increases with increasing transport mean free path. In this case, the quasi 2D approximation applies. For large l_S^*, the opposite occurs: Q_c^{-1} decreases with the transport mean free path. In this regime, the leakage into the mantle is limited by the rate of conversion of crustal guided waves to leaky waves. We have shown that this rate is governed by l_S^*.
The comparison between Q_c^{-1} obtained with the elastic theory and values measured in the acoustic case (Margerin et al. [1999]) shows that the elastic case is very close to the acoustic approximation.
We have shown that the Q_c^{-1} values strongly depends on the time window used to make the measurement. This observation makes difficult the comparison between data and simulations as well as the estimation of l_S^* from Q_c^{-1}. Indeed, if earthquakes are not recorded for long enough lapse times, the values of measured Q_c^{-1} can be wrong, leading to distorded estimates of the crustal transport mean free path.

At least, a qualitative study of the equipartition is done. It shows that the equipartition value is strongly affected by the leakage into the mantle and that it depends on the scattering regime and mean free path.

2.7 Bibliography

Abubakirov, I.R. and A.A. Gusev, Estimation of scattering properties of lithosphere of Kamchatka based on Monte Carlo simulation of record envelope of a near earthquake, *Phys. Earth Plan. Int.*, **64**, 52-67, 1990.

Aki, K., Scattering conversions P to S versus S to P, *Bull. Seims. Soc. Am.*, 1969-1972, 1992.

Ben-Menahem, A. et S.J. Singh, *Seismic waves and sources*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Cerveny, V., I.A. Molotkov and I.Psencik, *Ray method in seismology*, Praha University, 1977.

Dainty, A.M. and M.N. Toksöz, Seismic codas on the Earth and the Moon: a comparison, *Phys. Earth Plan. Int.*, **26**, 250-260, 1981.

Einspruch, N.G., E.J. Witterholt and R. Truell, Scatteing of a plane transverse wave ny a spherical obstacle in an elastic medium, *J. Appl. Phys.*, **31**, 806-818, 1960.

Heiderich, A., R. Maynard and B.A. van Tiggelen, Multiple light scattering in ordered nematic liquid crystals, *J. Phys. II France*, **7**, 765-792, 1997.

Hennino, R., N. Trégourès, N.M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B.A. van Tiggelen and R.L. Weaver, Observation of equipartition of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3447-3351, 2001.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Plan. Int.*, **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geophysical Research Letters Earth and Planetary Interiors*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Estimation of nonisotropic scattering in western Japan using coda waves envelopes: Application of a miltiple nonisotropic scattering model, *Jour. Geophys. Res.*, **100**, 645-657, 1995.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth-dependent S-wave velocity structure, *Phys. of the Earth Plan. Int.*, **104**, 15-22, 1997.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion

-I. Theory and numerical results, *Geophys. J. Int.*, **115**, 230-250, 1993a.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion -II. Limitations of asymptotic solutions, *Geophys. J. Int.*, **115**, 251-263, 1993b.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion, *Pure Appl. Geophys.*, **147**, 675-718, 1996.

Margerin L., M. Campillo and B.A.van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into Coda Q, *Geophys. I. Int.*, **134**, 596-612, 1998.

Margerin, L., M. Campillo, N.M. Shapiro and B.A. Van Tiggelen, Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q: application to seismograms recorded in Mexico, *Geophys. I. Int.*, **138**, 343-352, 1999.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. van Tiggelen, Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves, *Jour. Geophys. Res.*, **105**, 7873-7892, 2001.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1107-1115, 1996a.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, Erratum, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1996b.

Ryzhik, L., G.C. Papanicolaou and J.B. Keller, Transport equations for elastic and other waves in random media,*Wave motion*, **24**, 327-370, 1996.

Sato, H., Multiple isotropic scattering model including *P-S* conversions for the seismogram envelope formation, *Geophys. J. Int.*, **117**, 487-494, 1994.

Sato, H., Formulation of the miltiple non isotropic scattering process in 3D space on the basis of energy transport theory, *Gephysical Journal International*, **121**, 523-531, 1995.

Shapiro, N.M., M. Campillo, L. Margerin, S.K.Singh, V. Kostoglodov and J. Pacheco, The energy partitioning and the diffusive character of the seismic coda, *Bull. Seims. Soc.*

Am.,**90**, 655-665, 2000.

Trégourès N. and B.A. van Tiggelen, Quasi two-dimentionnal transfer of elasric waves, submitted in *Physical Review E*, 2002a.

Trégourès N. and B.A. van Tiggelen, Generalized diffusion equation for multiply scattered elastic waves, submitted in *Wave motions*, 2002b.

Turner, J.A., Scattering and diffusion of seismic waves ,*Bull. Seims. Soc. Am.*,**88**, 276-283, 1998.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer of ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3654 - 3674, 1994a.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media , *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3675 - 3683, 1994b.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Time dependence of multiply scattered diffuse ultrasound in polycrystalline media, *J. Acoust. Soc. Am.*,**97**, 2639 - 2644, 1994c.

Van de Hulst, H.C., *Light Scattering by Small Particules*, Dover, New York, 1981.

Weaver, R.L., On diffuse waves in solid media,*J. Acoust. Soc. Am.* ,**71**, 1608-1609, 1982.

Weaver, R.L., Diffusivity of ultrasound in polycrystals,*J. Mech. Phys. Solids*,**38**, 55-86, 1990.

Wegler, F.R. and B.G. Lühr, Scattering behaviour at Merapi Volcano(Java) revealed from an active seismic experiment, *Gephysical Journal International*, **145**, 579-592, 2001.

Wu, R.S., Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation -I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. astr. Soc.* **82**, 57-80, 1985.

Wu, R. et K. Aki, Scattering characteristics of elastic waves by an ealstic heterogeneity, *Geophysics*, **50**, 582-595, 1985a.

Wu, R. et K. Aki, Elastic wave scattering by a random medium and the small-scale inhomogeneities in the Lithosphere, *J.Geophys. Res.*, **90**, 10261-10273, 1985b.

Ying, C.F. et R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.*, **27**, 1086-1097, 1956.

Zeng, Y., F.Su and K. Aki, Scattering wave energy propagation in a random isotropic scattering medium 1.Theory, *Journal of Geophysical Research*, **96**, 607-619, 1991.

Zeng Y., Theory of scattered P and S-wave energy in a random isotropic scattering medium, *Bull. Seims. Soc. Am.*,**83**, 1264-1276, 1993.

Chapitre 3

Transfert radiatif des ondes élastiques dans un milieu stratifié. II. Equipartition des ondes de volume

3.1 Introduction

Ce chapitre présente une étude exploratrice de l'équipartition dans un milieu stratifié grâce aux simulations numériques développées dans les chapitres précédents.
Nous avons vu que l'étude numérique de la propagation d'ondes élastiques permet d'obtenir, pour un récepteur donné, la densité d'énergie des ondes S et celle des ondes P. Il est alors possible d'étudier l'évolution temporelle du rapport R défini par:

$$R(t) = \frac{E_S(t)}{E_P(t)} \tag{3.1}$$

Récemment, Weaver [1990] et Ryzhik et al. [1996] ont montré que, dans l'approximation de diffusion (c'est à dire pour des temps longs), ce rapport devient constant. Ce phénomène est appelé *équipartition*. Pour un espace infini, ils ont montré que l'asymptote horizontale de $R(t)$, appelée valeur d'équipartition, est donnée par:

$$R(t) = \frac{E_S(t)}{E_P(t)} = 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \tag{3.2}$$

$$= 10.4 \qquad \text{Pour un solide poissonien} \tag{3.3}$$

Ce phénomène peut s'expliquer par le fait que la diffusion multiple rend homogène la distribution du champ dans l'espace des phases.

Shapiro et al. [2000], ont étudié l'évolution du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ au Mexique. Pour cela, ces auteurs ont présenté une nouvelle approche pour séparer l'énergie P de l'énergie S. Cette technique est basée sur l'ananlyse de données enregistrées par un réseau de faible ouverture. Ce réseau est composé de quatre stations disposées en carré de 50 m de côté et permet la mesure des dérivées spatiales du déplacement. Par l'intermédiaire du calcul de rotationnel et de la divergence du déplacement, les énergies P et S peuvent être évaluées. Shapiro et al [2000] ont montré que le rapport $\frac{E_S}{E_P}$ se stabilise au cours du temps. L'équipartition est donc observable en sismologie, ce qui prouve que la coda peut être expliquée par un precessus de diffusion multiple. Toutefois, ces auteurs ont montré que la valeur d'équipartition n'est pas de 10.4 comme le prévoit la théorie dans un espace infini, mais de l'ordre de 7. Hennino et al. [2001] ont montré que la prise en compte, dans le calcul de R, des ondes de Rayleigh, permet d'expliquer cette valeur.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser, de façon purement qualitative à un milieu plus réaliste qu'un demi espace, en prenant en compte la dépendance de la vitesse et de l'hétérogénéité avec la profondeur. Nous nous limiterons à l'étude de l'équipartition des ondes de volume car les ondes de surface ne sont pas prises en compte dans nos simulations Monte Carlo.

3.2 Effet de la stratification sur la valeur d'équipartition

Nous allons reprendre les trois groupes de modèle, de plus en plus complexes et réalistes, décrits dans le chapitre précédent (Tableau 2.1). Nous rappelons que le premier groupe (modèle A) est un demi espace. Le modèle B est caractérisé par un contraste d'hétérogénéité (couche hétérogène et manteau transparent). Le modèle C présente à la fois un contraste d'hétérogénéité et de vitesse.
Dans cette première partie, nous allons vérifier que le phénomène d'équipartition peut s'observer dans un milieu stratifié. Nous allons également nous intéresser à l'influence de la stratification sur les valeurs d'équipartition en fonction du régime de scattering (Rayleigh ou Rayleigh-Gans) considéré. Pour cela, nous allons étudier l'évolution temporelle du rapport $R(t) = \dfrac{E_S(t)}{E_P(t)}$ enregistré à une distance épicentrale nulle (récepteur et source confondus).

3.2.1 Cas du demi espace (modèle A)

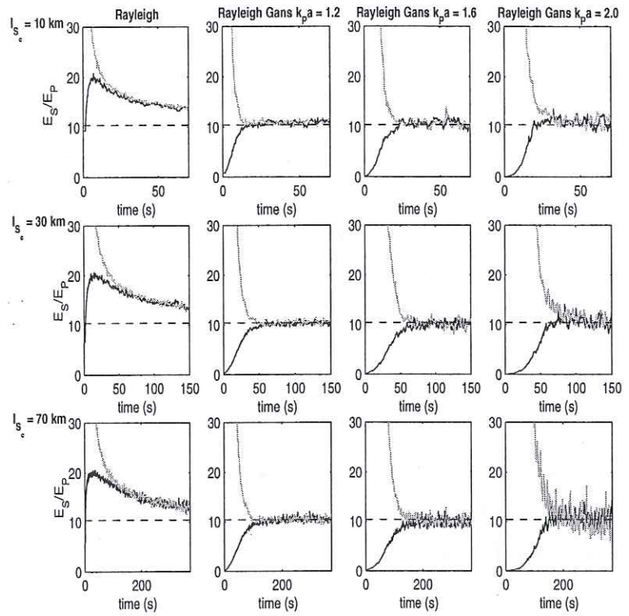

FIG. 3.1 – *Evolution temporelle du rapport énergétique* $R(t) = \dfrac{E_S(t)}{E_P(t)}$ *pour une source d'onde P (courbes noires) ou une source d'ondes S (courbes grises). Source et récepteur sont confondus. Cette évolution est présentée pour différents régimes et différents libre parcours moyens. Le trait horizontal représente la valeur d'équipartition théorique obtenue pour l'espace infini* ($\dfrac{E_S}{E_P} = 10.4$).

La Figure 3.1 représente l'évolution temporelle de R pour différents régimes de scattering et les 3 libres parcours moyens. Sur cette figure, la source et le récepteur sont confondus. Le trait horizontal représente la valeur d'équipartition théorique obtenue pour l'espace infini ($\dfrac{E_S(t \to \infty)}{E_P(t \to \infty)} = 10.4$).

On observe que quelque soit le régime de scattering ou le libre parcours moyen considérés, le rapport $\frac{E_S}{E_P}$ se stabilise autour de 10.4 dans le cas de diffracteurs de Rayleigh Gans ou tend verd cette valeur dans le cas de diffracteurs de Rayleigh. La surface libre et les changements de mode qu'elle implique ne détruit donc pas l'équipartition et ne modifie pas sa valeur.

La nature de la source n'a d'effet que pour des temps courts et n'influence pas la valeur d'équipartition. Pour des temps courts, le rapport $\frac{E_S}{E_P}$ tend vers 0 lorsque la source est composée d'ondes P: dans ce cas, $E_S = 0$ à $t = 0$. Le même raisonnement peut être effectué pour comprendre le comportement de $\frac{E_S}{E_P}$ pour une source d'ondes S.

On constate que le temps nécessaire pour observer l'équipartition dépend fortement du régime de scattering considéré et du libre parcours moyen.
Pour un régime de scattering donné, le temps d'équipartition augmente avec le libre parcours moyen. Ce résultat est intuitif car pour de grands libres parcours moyen, le temps nécessaire pour atteindre le régime de diffusion est retardé.
Pour un libre parcours moyen donné, l'équipartition est atteinte plus rapidement pour les diffracteurs de Rayleigh-Gans que pour les diffracteurs de Rayleigh. Cette observation est liée à l'augmentation du rapport $\frac{l_P}{l_S}$ entre ces deux régimes, ce qui tend à retarder l'isotropisation des ondes P (Turner [1998]). En effet, quand l_P est beaucoup plus grand que l_S, l'énergie des ondes P se propage sur de grandes distances sans rencontrer d'hétérogénéités.
Enfin, pour les diffracteurs de Rayleigh-Gans, le temps d'équipartition augmente avec la valeur de $k_P a$ (et donc avec l'anisotropie). Cette observation peut s'expliquer par l'augmentation du rapport $\frac{l_P}{l_S}$ et par la forte anisotropie du scattering. Le scattering étant de plus en plus anisotrope, les libre parcours moyens de transport sont beaucoup plus grands que le libre parcours moyen, ce qui tend à retarder l'isotropisation du champ et donc le temps nécessaire pour atteindre l'équipartition l'équipartition.

3.2.2 Cas d'un contraste de libre parcours moyen (modèle B)

La Figure 3.2 représente l'évolution temporelle du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ pour différents régimes de scattering, les trois libres parcours moyen et pour une distance épicentrale nulle. Le milieu (modèle B) présente uniquement un contraste de libre parcours moyen. Le trait horizontal représente la valeur d'équipartition calculée par Trégourès et van Tiggelen [2002] en utilisant l'équation de diffusion généralisée (voir section 2.2.4). Dans leur approximation, le rapport R est obtenu grâce au vecteur

$$\underline{E_0}(z) = \begin{pmatrix} E_{0_S}(z) \\ E_{0_P}(z) \end{pmatrix}$$

	No velocity contrast			Velocity contrast		
l_c (km)	**10**	**30**	**70**	**10**	**30**	**70**
Rayleigh	12.95	14.76	15.56	12.08	12.80	13.07
R.-Gans $k_P a = 1.2$	11.26	12.88	14.25	11.09	12.07	12.66
R.-Gans $k_P a = 1.6$	11.98	13.83	14.97	11.47	12.41	12.86
R.-Gans $k_P a = 2.0$	13.38	15.0	15.67	12.05	12.72	13.1

TAB. 3.1 – *Valeurs de l'équipartition pour les différents modèles*

(équation 2.14) qui décrit l'évolution temporelle de E_S et E_P en fonction de la profondeur quand le temps tend vers l'infini. Avec ce vecteur, ces auteurs peuvent décrire l'évolution de l'équipartition avec la profondeur, mais nous nous limiterons ici à l'étude de l'équipartition à proximité de la surface libre. Les valeurs d'équipartition obtenues par ces auteurs sont regroupées dans le tableau 3.1.

On peut remarquer que les courbes d'équipartition, tout comme les courbes de densités d'énergie présentées au chapitre précédent, ont de fortes fluctuations. Elles sont dues à une faible convergence du Monte Carlo pour les grands libre parcours moyens, et cela malgré la forte statistique utilisée.

On observe bien une stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ avec le temps. Il faut néanmoins émettre des réserves pour les cas $k_P a$=1.6, $l_{S_c} = 70$ km et $k_P a$=2.0, $l_{S_c} = 70$ km qui présentent de trop fortes fluctuations pour observer une éventuelle stabilisation.
On note que les valeurs d'équipartition obtenues avec l'équation de diffusion correspondent à celles obtenues avec l'équation de transfert radiatif, au moins dans le domaine de validité de cette approximation ($l^* < H$). Cette observation confirme la validité de notre simulation Monte Carlo.
Les valeurs d'équipartition mesurées dans ce modèle sont très différentes de celle obtenue dans le demi espace: la fuite dans le manteau influence donc fortement l'équipartition Même s'il est difficile d'expliquer qualitativement ces valeurs du fait du grand nombre de paramètres mis en jeu, on peut observer qu'elles dépendent de l'anisotropie, du libre parcours moyen et très certainement de l'épaisseur de la croûte.

Les observations effectuées sur le temps d'équipartition pour le modèle A sont également valables pour ce modèle. Compte tenu des fluctuations observées sur la figure 3.2, il est difficile de quantifier l'effet du contraste de libre parcours moyen sur le temps

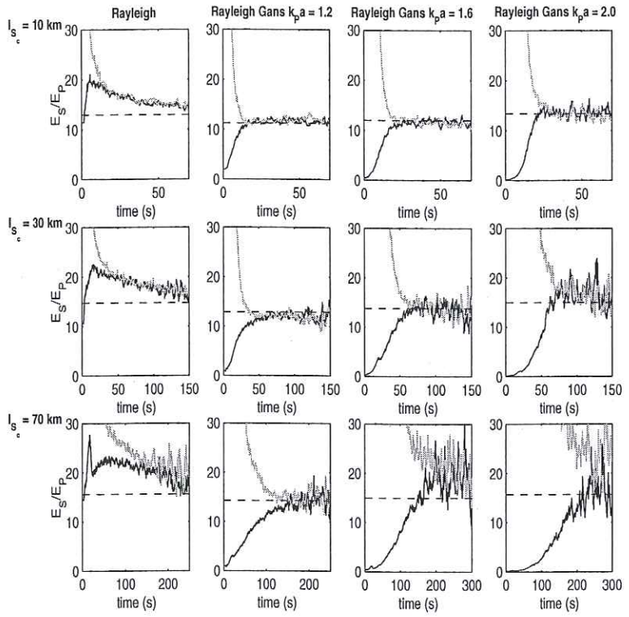

FIG. 3.2 – *Evolution de l'équipartition avec le temps pour différents régimes, différents libre parcours moyens et différentes sources. Le trait horizontal représente les valeurs d'équipartition obtenues avec l'équation de diffusion généralisée (Trégourès et al. [2002]).*

d'équipartition.

3.2.3 Cas d'un contraste de libre parcours moyen et de vitesse (modèle C)

La figure 3.3 est identique à la figure 3.1 pour le modèle ayant un contraste de vitesse et de libre parcours moyen (modèle C). Comme précédemment, le trait horizontal représente la valeur d'équipartition obtenue par Trégourès et al. [2002] (Tableau 3.1).

On observe bien une stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ pour des temps longs. Les valeurs d'équipartition mesurées avec l'équation de transfert radiatif sont en bon accord avec celle obtenues par Trégourès et al. [2002] avec l'équation de diffusion généralisée.

Pour un régime de scattering et un libre parcours moyen donné, les valeurs d'équipar-

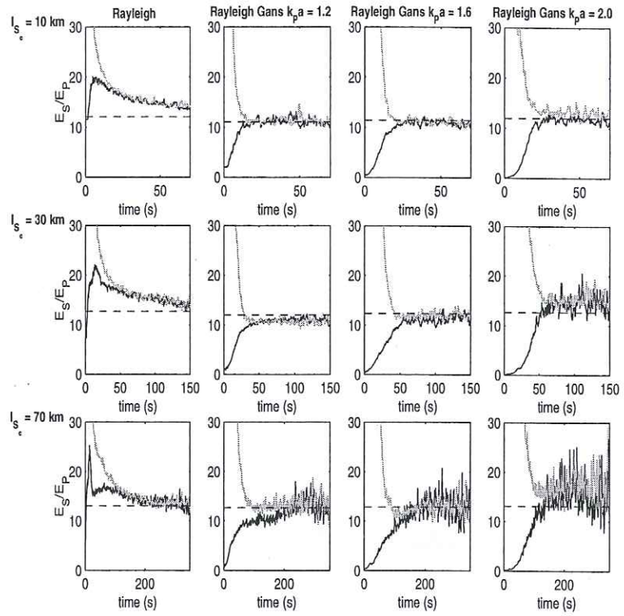

FIG. 3.3 – *Evolution de l'équipartition dans le modèle C (contraste de libre parcours moyen et de vitesse) avec le temps pour différents régimes, différents libre parcours moyens et différentes sources. Le trait horizontal représente les valeurs d'équipartition obtenues avec l'équation de diffusion généralisée (Trégourès et al. [2002]).*

tition obtenues dans le modèle C (contrastes de vitesse et de libre parcours moyen) sont inférieures à celles obtenues pour le modèle présentant simplement un contraste de libre parcours moyen (modèle B). On peut également montrer que plus le contraste de vitesse est important, plus cette valeur baisse et tend à se rapprocher de celle obtenue pour le demi espace (10.4). Le contraste de vitesse implique un piégeage des ondes dans la croûte. Plus ce contraste est grand, plus le rôle de guide d'onde de la croûte est important. La fuite vers le manteau joue donc un rôle de plus en plus faible et tout se passe comme si la propagation était faite dans un demi espace (conversions aux bords exceptées). Il est toutefois extrêmement complexe d'expliquer plus quantitativement les valeurs d'équipartition mesurée.

3.3 Equipartition en fonction de la distance

La figure 3.4 représente l'évolution temporelle du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ pour différentes distance épicentrales ($R = 0$, 30 et 60 km). Nous nous sommes placés dans le cas de diffracteurs de Rayleigh-Gans avec $k_p a = 1.2$. Les libres parcours moyens ($l^*_{S_c}$) sont de 10 km (première ligne) et de 30 km (seconde ligne). Sur cette figure, les traits verticaux correspondent aux temps d'arrivées des ondes P et S balistiques.

Quelque soit la distance épicentrale, on observe bien une stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$

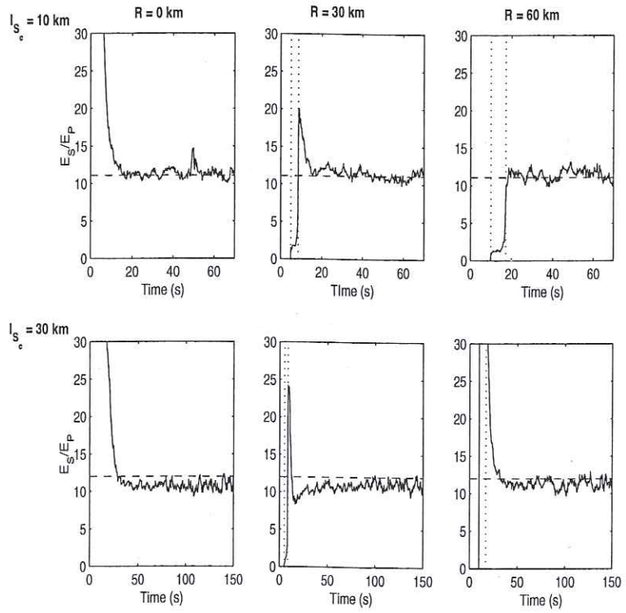

FIG. 3.4 – *Evolution temporelle de l'équipartition pour le régime de Rayleigh-Gans ($k_P a$ = 1.2), pour différents libres parcours moyens et différentes distances. La source est composée d'ondes S. Les traits verticaux correspondent aux temps d'arrivées des ondes P et S balistiques. Le trait horizontal représente les valeurs d'équipartition obtenues avec l'équation de diffusion généralisée (Trégourès et al. [2002]).*

pour des temps longs.

Pour une distance épicentrale nulle, l'équipartition intervient à un temps beaucoup plus grand que le temps d'arrivée des ondes balistiques. Par exemple, pour $l^*_{S_c} = 10$ km, le

rapport R se stabilise environ 20 s après les premières arrivées. Lorsque la distance source récepteur augmente, le temps d'équipartition diminue: le champ devient de plus en plus rapidement diffus après l'arrivée des ondes S balistiques. Pour une distance épicentrale de 60 km, les premières arrivées sont déjà équipartitionnées et donc diffusées. On est donc en présence d'un front de diffusion.

Lorsque le libre parcours moyen augmente (ou l'anisotropie), le même comportement peut être observé. Le comportement diffusif de l'équipartition est toutefois retardé par rapport au cas exposé précédemment.

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué une étude préliminaire de l'équipartition dans un milieu stratifié.

En utilisant à la fois des simulations Monte Carlo de l'équation de transfert radiatif élastique et l'approximation de diffusion généralisée, nous avons montré que la valeur de stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$, c'est à dire la valeur d'équipartition dépend du libre parcours moyen, du régime de scattering et donc de l'anisotropie. Le temps nécessaire pour atteindre l'équipartition dépend des même paramètres.

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que la décroissance temporelle de l'énergie de la coda (Q^*_c) est liée au libre parcours moyen de transport des onde S de la croûte (l^*_S). Cette étude ne permet pas l'accès à l'anisotropie du scattering. Par contre, l'étude de l'équipartition montre que ce phénomène est régi entre autre par l'anisotropie. Ces deux études peuvent donc se révéler complémentaires pour caractériser l'hétérogénéité de la lithosphère.

Toutefois, l'étude présentée ici est préliminaire. De nombreuses questions restent en suspens, telles que la forme des courbes d'équipartition observées. Il serait également intéressant de faire une étude fine du temps d'équipartition. Nos simulations étant trop bruitées pour une telle étude, un retour à la théorie s'averre nécessaire. De plus, il sera nécessaire de prendre en compte les ondes de surface dans le calcul de l'équipartition afin de se rapprocher des observations.

3.5 Bibliographie

Abubakirov, I.R. and A.A. Gusev, Estimation of scattering properties of lithosphere of Kamchatka based on Monte C arlo simulation of record envelope of a near earthquake, *Phys. Earth planet. Inter.*, **64**, 52-67, 1990.

Hennino, R., N. Trégourès, N.M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B.A. van Tiggelen and R.L. Weaver, Observation of equipartition of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3447-3351, 2001.

Herraiz, M. et A.F. Espinoza, Coda waves: a review, *Pure appl. geophys.*, **125**, 499-577, 1987.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth planet. Inter.* **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using the multiple lapse time window analysis of full seismogram envelope, *J. Geophys. Res.*, **98**, 15,809-15,824, 1993 .

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geoph. Res. Lett.*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth dependent S-wave velocity structure, *Phys. Earth planet. Inter.*, **104**, 15-22, 1997.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. Van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q, *Geophys. J. Int.*, **134**, 596-612, 1998.

Margerin, L., M. Campillo, N.M. Shapiro and B.A. Van Tiggelen, Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q: application to seismograms recorded in Mexico, *Geophys. J. Int.*, **138**, 343-352, 1999.

Ryzhik, L., G.C. Papanicolaou and J.B. Keller, 1996, Transport equations for elastic and other waves in random media, *Wave motion*, **24**, 327-370.

Shapiro, N.M., M. Campillo, L. Margerin, S.K.Singh, V. Kostoglodov and J. Pachec o, 2000, The energy partitioning and the diffusive character of the seismic coda , *Bull. Seims. Soc. Am.*,**90**, 655-665.

Trégourès N. and B.A. van Tiggelen, 2002, Generalized diffusion equation for multiply scattered elastic waves, submitted in *Wave motions.*

Weaver, R.L., 1990, Diffusivity of ultrasound in polycrystals,*J. Mech. Phys. Solids*,**38**, 55-86.

Chapitre 4

Conclusion générale et perspectives

Depuis les travaux d'Aki et Chouet [1975], des modèles de plus en plus complexes ont été développés pour mieux comprendre les ondes de la coda des sismogrammes enregistrés à distance locale et régionale. Dans cette thèse, nous faisons un pas de plus dans la compréhension de la coda en développant des modèles "réalistes", c'est à dire présentant des contrastes de vitesse et d'hétérogénéité. Cette propagation est simulée en résolvant l'équation de transfert radiatif acoustique ou élastique par des méthodes Monte Carlo.

Dans la première partie, nous avons fait l'hypothèse que les ondes sismiques sont expliquées de façon satisfaisante par une **approche acoustique**.

Ceci étant, l'aspect modélisation de la propagation des ondes dans un milieu stratifié avait déjà été largement développé, notamment au sein du LGIT lors de la thèse de Margerin [1998]. Pour appliquer ces méthodes, nous nous sommes intéréssés aux sismogrammes régionaux, et plus précisemment aux Lg et à leur coda. Les modèles utilisés classiquement pour modéliser la coda des Lg sont des modèles à fine stratification, même si l'on peut légitimement penser que l'hétérogénéité 3D joue un rôle important dans la formation de cette coda.
Dans cette thèse, nous avons montré que la coda des Lg peut être expliquée par des modèles hétérogènes. Il a également été observé qu'un milieu relativement simple (composé d'une croûte hétérogène et d'un manteau transparent) peut expliquer l'atténuation des ondes directes et de la coda (lointaine et proche) en temps et en distance.
Notre méthode a également permis de séparer l'atténuation intrinsèque de l'atténuation

due au scattering dans un milieu stratifié. Cette étude est nouvelle puisque toutes les études faites précedemment (Fehler et al. [1992], Mayeda et al. [1992], Hoshiba [1993] entre autres) ont été réalisées sur des événements locaux et en supposant un milieu infini, exception faite de Hoshiba et al. [2001] qui ont supposé un milieu stratifié. Grâce à cette étude, nous avons pu montrer qu'en France, l'atténuation intrinsèque et l'atténuation due au scattering sont du même ordre de grandeur ($l_c^* \simeq 200$ km et $l_a \simeq 180$ km à 3 Hz).

Le deuxième domaine d'application que nous avons abordé concerne la propagation des ondes dans les volcans. L'imagerie des volcans "classique" est complexe de part les faibles différences de vitesse observées et des effets de diffraction importants qui altèrent le champ d'onde direct. Les volcans étant des milieux extrêmement hétérogènes, ils sont des régions idéales pour l'étude de la coda. Et cela d'autant plus que la coda peut apporter de nouvelles méthodes pour leur imagerie, et en particulier pour imager des contrastes d'hétérogénéités liés à la présence de fluide. En effet, Aki et Ferrazzini [2000] ont observé, au Piton de la Fournaise (Réunion), des effets de piégeage de l'énergie de la coda. Ces auteurs les ont interprétés comme des contrastes du taux d'hétérogénéité du milieu en profondeur.
Au cours de cette thèse, nous nous sommes attachés à valider cette interprétation. Cette étude a tout d'abord comporté un versant méthodologique qui nous a permis de résoudre l'équation de transfert radiatif dans un milieu présentant un contraste latéral du taux d' hétérogénéité. Ces simulations ont effectivement validé l'hypothèse de Aki et Ferrazzini [2000], et ont montré la complexité des effets observés, liés entre autres à la position de la source par rapport à la zone hétérogène et au contraste de libre parcours moyen. Une étude de données au Kilauea (Hawaii) a également été effectuée mais le piégeage d'énergie que l'on a pu y observer est extrêmement faible. Des expériences en laboratoire ont été réalisées. Puisque certains paramètres du milieu sont controlables dans laboratoire, la comparaison entre ces expériences et les simulations, nous a permis de trouver un modèle satisfaisant pour expliquer le piégeage observé: un premier pas vers l'étude des données, et donc vers l'imagerie de l'hétérogénéité des volcans, a donc été franchi.
Dans l'avenir, il serait intéressant de tester plus en détail l'applicabilité de ce type de technique à l'imagerie. Ce travail nécessite une nouvelle analyse de données. Pour cela, il est nécessaire de mettre en place une campagne d'acquisition de données dédiée spécifiquement à une mesure fine de l'amplitude de la coda. La résolution finale des mesures dépendant directement du nombre de points d'acquisition (voir chapitre 3), un très grand réseau de capteurs est nécessaire. Ce type de réseau (350 canaux) sera disponible prochainement grâce à l'ACI "Prévention des risques naturels". Une expérience de ce type pourrait être réalisée courant 2002 au Piton de la Fournaise (Ile de la Réunion).

Les ondes sismiques ne sont pas des ondes acoustiques, mais élastiques. Ce fait complexifie le problème, puisque le couplage entre les modes P et S doit être pris en compte, ainsi que la polarisation. Mais, cette complexification donne également la possibilité de s'intéresser à de nouveux observables tels que l'équipartition. Jusqu'à présent, peu d'études élastiques ont été effectuées et celle réalisées l'ont été dans des milieux simples (espace infini, Margerin et al. [2001]). Dans la deuxième partie de cette thèse, purement méthodologique, nous avons développé des méthodes MonteCarlo de **propagation d'ondes élastiques** en milieu stratifié, un guide d'onde hétérogène représentant la croûte et un demi espace transparent représentant le manteau.

L'étude de la décroissance temporelle de l'énergie de la coda dans ce milieu (Q_c) a permis de distinguer deux régimes. Si le libre parcours moyen de transport de la croûte est inférieur à son épaisseur ($l_S^* < H$), on est dans le régime de diffusion. Dans ce cas Q_c^{-1} augmente avec le libre parcours moyen de transport des ondes S, l_S^*. Si $l_S^* > H$, la coda est due à la conversion des ondes guidées dans la croûte en ondes de fuite. Cette conversion est liée aux hétérogénéités du milieu et à leur capacité à modifier significativement la direction de propagation des ondes, qui est directement associée à l_S^*. Plus l_S^* est grand, moins la conversion entre les ondes guidées et les ondes de fuite se fait facilement, et donc Q_c^{-1} diminue avec l_S^*.
Cette étude a également montré que, pour un l_S^* donné, les simulations élastiques et acoustiques donnent la même valeur de Q_c^{-1}. Cette observation confirme le fait que l'approximation des ondes élastiques par des ondes acoustiques est valable.
Nous avons donc observé une correspondance univoque entre Q_c^{-1} et l_S^*. Néanmoins, nous avons vu que la mesure du paramètre Q_c doit être faite avec précaution, puisque sa valeur dépend fortement de la fenêtre temporelle analysée. Nous pensons que cette variation peut être liée à l'anisotropie. Il serait alors intéressant de regarder plus en détail l'évolution temporelle de Q_c afin de voir si celle ci peut être effectivement liée à l'anisotropie. La comparaison avec les données doit également être envisagée. Si l'évolution temporelle de Q_c dépend de l'anisotropie, il serait alors possible, avec le seul paramètre Q_c d'obtenir l^* (relié à Q_c quand sa valeur devient stable avec le temps) et l'anisotropie avec l'évolution temporelle de celui ci.
Nous avons de plus remarqué les limites des simulations Monte Carlo dans le cas où le libre

parcours moyen est beaucoup plus grand que l'épaisseur de la croûte. La faible convergence des simulations Monte Carlo entraine en effet de grandes fluctuations dans les courbes d'énergie et donc une forte incertitude sur la mesure de Q_c, et cela malgré la grande statistique utilisée. Pour des raisons évidentes de temps de calcul, il parait nécessaire d'utiliser d'autres méthodes pour ces simulations. Il peut être intéressant de développer la méthodes des ordonnées discrètes (voir Chandrasekhar [1960], Ishimaru [1978]). Même si la prise en compte des conditions de bord innérantes à la sismologie (surface libre réfléchissante et saut de vitesse au Moho) peut s'averrer complexe, cette méthode permettrait la mesure exacte de Q_c et de vérifier la dépendence de Q_c avec l^*.

Enfin, la théorie élastique nous a permis de commencer à explorer l'effet de la stratification du milieu sur l'équipartition. Dans notre étude qualitative, nous avons montré que cette observable encore peu utilisée en sismologie peut nous apporter des informations sur l'hétérogénéité du milieu.
Nous avons en effet montré la valeur de stabilisation du rapport $\frac{E_S}{E_P}$ dans le temps (valeur d'équipartition) dépend du régime de scattering considéré ($k_P a$) et du libre parcours moyen du milieu. Cette observation pourrait donc nous apporter des informations sur le scattering de la lithosphère complémentaires à celles obtenues par des méthodes plus classiques, telles que Coda-Q. Toutefois, l'étude présentée ici est préliminaire et une étude plus fine, peut être basée sur un développement théorique, doit être effectuée pour comprendre plus en détails nos simulations.
L'équipartition des ondes sismiques n'a été observée qu'au Mexique (Shapiro et al. [2000]). Il serait intéressant de réitérer ce type de mesure dans différentes régions afin de voir les variations de l'équipartition. En particulier, la mesure en France serait intéressante car dans ce cas, l'hétérogénéité est plus faible qu'au Mexique, avec un libre parcours moyen de transport des ondes S plus grand que l'épaisseur de la croûte.

Bibliographie Générale

Abubakirov, I.R. and A.A. Gusev, Estimation of scattering properties of lithosphere of Kamchatka based on Monte Carlo simulation of record envelope of a near earthquake, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *64,* 52-67, 1990.

Aki, K., Analysis of the seismic coda of local earthquakes as scattered waves, *J. Geophys. Res.*, **74**, 615-631, 1969.

Aki, K., Attenuation of shear-waves in the lithosphere for frequencies from 0.05 to 25 Hz, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *21,* 50-60, 1980.

Aki, K., Scattering conversions P to S versus S to P, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **82**, 1969-1972, 1992.

Aki, K. et B. Chouet, Origin of coda waves: source, attenuation and scattering effects, *J. Geophys. Res.*, **80**, 3322-3342, 1975.

Aki, K. et V. Ferrazzini, Seismic monitoring and modeling of an active volcano for prediction, *J. Geophys. Res.*, **105**, 16 617 - 16 640, 2001.

Apresyan, L.A. and Y.A. Kravtsov, *Radiative transfer: Statistical and wave aspects*, Gordon and Breach Publications, 1996.

Ben-Menahem, A. et S.J. Singh, *Seismic waves and sources*, Springer-Verlag, New York, 1981.

Bois, C., M. Cazes, A. Hirn, A. Mascle, P. Matte, L. Montadert and B. Pinet, Contribution of deep seismic profiling to the knowledge of the lower crust in France and neigh-

bouring area, *Tectonophysics*, **145**, 253-275, 1988.

Campillo, M., Lg wave propagation in a laterally varying crust and the distribution of the apparent quality factor in central France, *J. Geophys. Res.*, *92,* 12,604 - 12,614, 1987.

Campillo, M., J.-L. Plantet and M. Bouchon, Frequency dependent attenuation in the crust neneath central France from Lg waves: data analysis and numerical modeling, *Bull. Seims. Soc. Am.*, *75,* 1395-1411, 1985.

Campillo, M. and J.-L. Plantet, Frequency dependence and spatial distribution of seismic attenuation in France: experimental results and possible interpretations, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *67,* 48-64, 1991.

Campillo, M. and A. Paul, Influence of the lower crustal structure on the early coda of regional seismograms, *J. Geophys. Res.*, *97,* 3405-3416, 1992.

Campillo, M., B. Feignier, M. Bouchon, and N. Bethoux, Attenuation of crustal waves across the Alpine range, *J. Geophys. Res.*, *98,* 1987-1996, 1993.

Cerveny, V., I.A. Molotkov and I.Psencik, *Ray method in seismology*, Praha University, 1977.

Chandrasekhar, S., *Radiative Transfer*, Dover, New York, 1960.

Chazalon, A., M. Campillo, R. Gibson and E. Carreno, Crustal wave propagation anomaly across the Pyrenean Range.Comparison between observations and numerical simulations, *Geophys. J. Int.*, *115,* 829-838, 1993.

Collins, D.G., W.G. Blättner, M.B. Wells and H.G. Horak, Backward Monte Carlo calculations of the polarization chracteristics of the radiation emerginig from spherical-shell atmospheres, *Appl. Opt.*, **11**, 2684-2696, 1972.

Dainty, A.M.. and M.N. Toksöz, Array analysis of seismic scattering, *Bull. Seims. Soc. Am.*, *80,* 2242-2260, 1990.

Dawson, P.B., B.A. Chouet, P.B. Okubo, A. Villaseñor et H.M. Benz, Three-dimensional velocity structure of the Kilauea caldera, Hawaii, *Geoph. Res. Lett.*, **26**, 2805-2808, 1999.

Del Pezzo, E., F. Ferulano, A. Gharrusso and M. Martini, Seismic coda Q and scaling law of the source spectra at the Aeollian islands, southern Italy, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **73**, 97 - 108, 1983.

Del Pezzo, E., J.I. Morales, A. Akinci et R. Maresca, Measurements of intrinsic and scattering attenuation in the crust,*Bull. Seims. Soc. Am.*, **85**, 1373-1380, 1995.

Einspruch, N.G., E.J. Witterholt and R. Truell, Scatteing of a plane transverse wave ny a spherical obstacle in an elastic medium, *J. Appl. Phys.*, **31**, 806-818, 1960.

Enderle, U., M. Tittgemeyer, M. Itzin, C. Prodehl, K. Fuchs, Scales of structure in the lithosphere-images of processes, *Tectonophysics*, **275**, 165-198, 1997.

Fehler M., P. Roberts and T. Fairbanks, A temporal change in coda wave attenuation observed during an eruption of Mount St Helens, *J. Geophys. Res.*, **93**, 4367-4373, 1988.

Fehler M., M. Hoshiba, H. Sato and K. Obara, Separation of scattering and intrinsic attenuation for the Kanto-Tokai region, Japan, using measurement of S-wave energy versus hypocentral distance, *Geophys. J. Int.*, **108**, 787-800, 1992.

Fuchs, K., K.P. Bonjer, D. Gajewski, E. Lüschen, C. Prodehl, K.J. Sandmeier, F. Wenzel and H. Wilhelm, Crustal evolution of the Rhinegraben area. 1. Exploring the lower crust in the Rhinegraben rift by unified geophysical experiments, *Tectonophysics*, **141**, 261-275, 1987.

Gusev, A., Vertical profile of turbidity and coda Q, *Geophys. J. Int.*, **123**, 665 -672, 1995.

Hasegawa, H.S., Attenuation of *Lg* waves in the canadian shield, *Bull. Seims. Soc. Am.*, *75,* 1569 - 1582, 1985.

Heiderich, A., R. Maynard and B.A. van Tiggelen, Multiple light scattering in ordered

nematic liquid crystals, *J. Phys. II France*, **7**, 765-792, 1997.

Hennino, R., N. Trégourès, N.M. Shapiro, L. Margerin, M. Campillo, B.A. van Tiggelen and R.L. Weaver, Observation of equipartition of seismic waves, *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3447-3351, 2001.

Herraiz, M., et A.F. Espinoza, Coda waves: a review, *Pure appl. geophys.*, **125**, 499-577, 1987.

Hoshiba, M., Simulation of multiple scattered coda wave excitation based on the energy conservation law, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **67**, 123-136, 1991.

Hoshiba, M., Separation of scattering attenuation and intrinsic absorption in Japan using the multiple lapse time window analysis of full seismogram envelope, *J. Geophys. Res.*, **98**, 15809-15824, 1993.

Hoshiba, M., Simulation of coda wave envelope in depth dependent scattering and absorption structure, *Geoph. Res. Lett.*, **21**, 2853-2856, 1994.

Hoshiba, M., Seismic coda wave envelope in depth dependent S-wave velocity structure, *Phys. Earth and Planet. Inter.*, **104**, 15-22, 1997.

Hoshiba, M., R. Rietbrock, F. Scherbaum, H. Nakahara and C. Haberland, Scattering attenuation and intrinsic absorption using uniform and depth dependent model - Application to full seismogram envelope recorded in Northern Chile, *Journal of Seismology*, **5**, 157-179, 2001.

Ishimaru, A., *Wave Propagation and Scattering in Random Media, Vols 1* et *2*, Academic Press, New York, 1978.

Jin, A., K. Mayeda, D. Adams and K. Aki, Separation of intrinsic and scattering attenuation in southern California using TERRAscope data, *J. Geophys. Res.*, *99,* 17,835-17,848, 1994.

Kittel, C., *Physique de l'état solide*, Dunod, 1988.

Kliger, D.S., J.W. Lewis et C.E. Randall, *Polarized light in optics and spectroscopy*, Academic Press, 1990.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion -I. Theory and numerical results, *Geophys. J. Int.*, **115**, 230-250, 1993a.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of elastic waves by a spherical inclusion -II. Limitations of asymptotic solutions, *Geophys. J. Int.*, **115**, 251-263, 1993b.

Korneev, V.A. and L.R. Johnson, Scattering of P and S waves by a spherically symmetric inclusion, *Pure Appl. Geophys.*, **147**, 675-718, 1996.

Kourganoff, V., *Basic Methods in Transfer Problems: Radiative equilibrum and neutron diffusion*, Dover, New York, 1963.

Koyanagi, S., K. Mayeda et K. Aki, Frequency dependent site amplification factors using the S wave coda for the island of Hawaii *Bull. Seims. Soc. Am.*, **82**, 1151-1185, 1992.

Laigle, M., A. Hirn, M. Sapin, J.C. Lépine, J. Diaz, J. Gallart et R. Nicolich, Mount Etna dense array local earthquake P and S tomography and implications for volcanic plumbing, *J. Geophys. Res.*, **105**, 21633-21646, 2000.

Londoño J.M., Temporal change in coda Q at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *J. volcanol. geotherm. res.*, **73**, 129-139, 1996.

Londoño J.M., A.J.J. Sanchez, E.L.E. Toro, F. Gil Cruz and O.P. Bohorquez, Coda Q before and after the eruptions of 13 November 1985, and 1 September 1989, at Nevado del Ruiz volcano, Colombia, *Bull. Volcanol.*, **59**, 556-561, 1998.

Lux I. and L. Koblinger, *Monte Carlo Particule Transport Methods: Neutron and Photon Calculations*, CRC Press, 1991.

Margerin L., *Diffusion multiple des ondes élastiques dans la lithosphère*, Thèse de l'université Joseph Fourier, 1998b.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. Van Tiggelen, Radiative transfer and diffusion of waves in a layered medium: new insight into coda Q, *Geophys. J. Int.*, **134**, 596-612, 1998a.

Margerin, L., M. Campillo, N.M. Shapiro and B.A. Van Tiggelen, Residence time of diffuse waves in the crust as a physical interpretation of coda Q: application to seismograms recorded in Mexico, *Geophys. J. Int.*, **138**, 343-352, 1999.

Margerin, L., M. Campillo and B.A. van Tiggelen, Monte-Carlo simulation of multiple scattering of elastic waves, *J. Geophys. Res.*, **105**, 7873-7892, 2001.

Mayeda, K, F. Su and K. Aki, Seismic albedo from the total seismic energy dependence on hypocentral distanec in southern California, *Phys. Earth Planet. Inter.*, **67**, 104-114, 1991.

Mayeda, K., S. Koyanagi, M. Hoshiba, K. Aki and Y. Zeng, A comparative study of scattering, intrinsic and coda Q^{-1} for Hawaii, Long Valley and Central California between 1.5 and 15 Hz, *J. Geophys. Res.*, *97,* 6643-6659, 1992.

Nicolas, M., B. Massinon, P. Mechler and M. Bouchon, Attenuation of regional phases in Western Europe, *Bull. Seims. Soc. Am.*, *72,* 2089-2106, 1982.

Papanicolaou, G.C., Mathematical problems in geophysical wave propagation, in *Proceeding of the internal congress of mathematicians*, in *Documenta mathematica*, **extra volume ICM 98**, 241 - 265, 1998.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1107-1115, 1996a.

Papanicolaou, G.C., L.V. Ryzhik and J.B. Keller, Stability of the P-to-S energy ratio in the diffusive regime, Erratum, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **86**, 1996a.

Perrier, G. and J.C Ruegg., Structure profonde du Massif Central Français, *Ann. Geophys.*, *29*, 435-502, 1973.

Rytov, S.M., Y.A. Kravtsov and V.I. Tatarskii, "4.Wave Propagation Through Random Media", in *Principle of Statistical Radiophysics*, Springer - Verlag, 1989.

Ryzhik, L., G.C. Papanicolaou and J.B. Keller, Transport equations for elastic and other waves in random media, *Wave motion*, **24**, 327-370, 1996.

Sato, H., Multiple isotropic scattering model including *P-S* conversions for the seismogram envelope formation, *Geophys. J. Int.*, **117**, 487-494, 1994.

Sato, H., Formulation of the multiple non isotropic scattering process in 3D space on the basis of energy transport theory, *Geophys. J. Int.*, **121**, 523-531, 1995.

Sato, H., H. Nakahara and M. Ohtake, Synthesis of scattered energy density for nonspherical radiation from a point shear-dislocation source based on the radiative transfer theory, *Phys. Earth Planet. Inter.*, *104*, 1-13, 1997.

Sato, H. and M. Fehler, Wave propagation and scattering in the heterogeneous Earth, Springer Verlag, New York, 1998.

Shapiro, N.M., M. Campillo, L. Margerin, S.K. Singh, V. Kostoglodov and J. Pacheco, The energy partitioning and the diffusive character of the seismic coda, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **90**, 655-665, 2000.

Sheng, P., *Introduction to Wave Scattering, Localization and Mesoscopic Phenomena*, Academic Press, San Diego, 1995.

Singh S. et R.B. Herrmann, Regionalization of crustal coda Q in the continental United States, *J. Geophys. Res.*, **88**, 527-538, 1983.

Spanier, J. and E.M. Gelbard, *Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems*, Addison-Wesley, Reading, 1969.

Tilling R.I. et J.J. Dvorak, Anatomy of a basaltic volcano, *Nature*, 125-133, 1993.

Toksöz, M.N., A.M. Dainty, E. Reiter and R.S. Wu, A model for attenuation and scat-

tering in the Earth's crust, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 81-100, 1988.

Trégourès N. and B.A. van Tiggelen, Generalized diffusion equation for multiply scattered elastic waves, submitted in *Wave in random media*, 2002a.

Trégourès N. and B.A. van Tiggelen, Quasi-2 dimensional transfer of elastic waves, *soumis à Physical Review E*, 2002b

Turner, J., 1994, *Radiative transfer of ultrasound*, PhD Thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Turner, J.A., Scattering and diffusion of seismic waves, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **88**, 276-283, 1998.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer of ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3654 - 3674, 1994a.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Radiative transfer and multiple scattering of diffuse ultrasound in polycrystalline media , *J. Acoust. Soc. Am.*,**96**, 3675 - 3683, 1994b.

Turner, J.A. and R.L. Weaver, Time dependence of multiply scattered diffuse ultrasound in polycrystalline media, *J. Acoust. Soc. Am.*,**97**, 2639 - 2644, 1994c.

Ugalde, A., L.G. Pujades, J.A. Canas and A. Villaseñor, Estimation of the intrinsic absorption and scattering attenuation in Northeastern Venezuela (Southeastern Caribbean) using coda waves, *Pure appl. geophys., 153,* 685-702, 1998.

Van de Hulst, H.C., *Light Scattering by Small Particules*, Dover, New York, 1981.

Weaver, R.L., On diffuse waves in solid media,*J. Acoust. Soc. Am.* ,**71**, 1608-1609, 1982.

Weaver, R.L., Diffusivity of ultrasound in polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, **38**, 55-86, 1990.

Wegler, U. et B.G. Lühr, Scattering behaviour at Merapi volcano (Java) revealed from an active seismic experiment, *Geophys. J. Int.*, **145**, 579-592, 2001.

Wu, R.S., Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - separation of scattering effect from intrinsic attenuation- I. Theoretical modelling, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, **82**, 57-80, 1985.

Wu, R.S. et K. Aki, Multiple scattering and energy transfer of seismic waves - Separation of scattering effect from intrinsic attenuation II. Application of the theory to Hindu Kush region, *Pure appl. Geophys.*, **128**, 49-80, 1988a.

Wu, R.S. et K. Aki, Introduction of seismic wave scattering in three-dimensionally heterogeneous Earth, *Pure appl. geophys.*, **128**, 1-6, 1988b.

Ying, C.F. et R. Truell, Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid, *J. Appl. Phys.*, **27**, 1086-1097, 1956.

Zeng, Y., F. Su and K. Aki, Scattering wave energy propagation in a random isotropic scattering medium 1.Theory, *J. Geophys. Res.*, **96**, 607-619, 1991.

Zeng Y., Theory of scattered P and S-wave energy in a random isotropic scattering medium, *Bull. Seims. Soc. Am.*, **83**, 1264-1276, 1993.

Zúñiga, F.R. and L.E. Dïaz, Coda attenuation in the area of El Chichón volcano, Chiapas, Mexico, *Tectonophysics*, **234**, 247-258, 1994.

BIBLIOTHÈQUE SCIENCES GRENOBLE UNIVERSITAIRE

MIT LIBRARIES
SCIENCE
ARCHIVE

Thèse de Doctorat de l'Université
Joseph Fourier - Grenoble I

Titre de l'ouvrage :

Propagation des ondes élastiques dans la lithosphère hétérogène: Modélisations et Applications

Auteur :

Céline LACOMBE

Etablissement :

Observatoire de Grenoble
Laboratoire de Géophysique Interne
et Tectonophysique

Résumé : Cette thèse a pour but d'évaluer l'hétérogénéité crustale et de comprendre son effet sur la propagation des ondes sismiques. Nous étudions l'énergie de la coda de sismogrammes courte période. Pour cela, nous simulons la propagation des ondes en milieu hétérogène en résolvant l'équation de transfert radiatif (ETR) par des méthodes Monte Carlo. La première partie de cette thèse est effectuée dans l'approximation acoustique. Nous résolvons l'ETR dans un milieu composé d'un guide d'ondes hétérogène (la croûte) et d'un demi espace transparent (le manteau). Ces simulations sont comparées aux observations de la coda de séismes régionaux français. Cette étude nous permet de définir un modèle simple pouvant expliquer l'atténuation des ondes Lg directes et de leur coda en temps et en distance. Nous montrons qu'en France l'atténuation produite par les diffracteurs est de l'ordre de l'absorption anélastique. Dans un deuxième temps, nous étudions la possibilité d'imager un contraste latéral d'hétérogénéité dans les volcans. Avec des simulations numériques, des analyses de données et des expériences en laboratoire, nous montrons qu'un contraste latéral d'hétérogénéité influence fortement la répartition spatio-temporelle de l'énergie de la coda. La seconde partie est consacrée à la diffusion multiple des ondes élastiques dans un milieu stratifié composé d'un guide d'onde hétérogène d'épaisseur H (croûte) et d'un demi espace homogène (manteau). Une étude de coda-Q montre que la fuite vers le manteau est gouvernée par le libre parcours moyen de transport l^*, et cela même si $l^* >> H$. Nous montrons également que les valeurs de coda-Q obtenues sont, pour un l^* donné, identiques à celles mesurées en acoustique. Enfin, nous étudions le phénomène d'équipartition (stabilisation du rapport entre l'énergie des ondes S et P). Nous montrons que la valeur de stabilisation du rapport dépend de l'anisotropie de scattering et de l^*.

Mots Clefs : Sismologie, Coda, Diffusion multiple, Transfert radiatif, Monte Carlo, Elasticité, Lithosphère francaise, Volcans.