



**HAL**  
open science

## Traitement d'image à voisinages adaptatifs généraux.

Johan Debayle

► **To cite this version:**

Johan Debayle. Traitement d'image à voisinages adaptatifs généraux.. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, 2005. Français. NNT : 383IVS . tel-00749859

**HAL Id: tel-00749859**

**<https://theses.hal.science/tel-00749859>**

Submitted on 8 Nov 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE SAINT-ETIENNE

UNIVERSITE JEAN MONNET  
DE SAINT-ETIENNE

N°ordre : 383IVS

# THESE

Présentée par

**Johan DEBAYLE**

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR

DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Dans la spécialité : **Image, Vision, Signal**

# TRAITEMENT D'IMAGE A VOISINAGES ADAPTATIFS GENERAUX

Soutenue à Saint-Etienne le 30 Novembre 2005

### *Composition du Jury :*

Jean-Michel JOLION	Président	Professeur, LIRIS-INSA (Lyon)
Jean-Marc CHASSERY	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, LIS-INPG (Grenoble)
Peter HAWKES	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, nMat-CEMES (Toulouse)
Yannick ANGUY	Examineur	Chargé de Recherche CNRS, TREFLE-ENSAM (Bordeaux)
Michel JOURLIN	Examineur	Professeur, TSI-UJM (Saint-Etienne)
Jean-Charles PINOLI	Directeur	Professeur, CIS-ENSMSE (Saint-Etienne)

Thèse préparée au Centre Ingénierie et Santé (CIS)  
de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne



ECOLE NATIONALE SUPERIEURE  
DES MINES DE SAINT-ETIENNE

UNIVERSITE JEAN MONNET  
DE SAINT-ETIENNE

N°ordre : 383IVS

# THESE

Présentée par

**Johan DEBAYLE**

Pour obtenir le grade de

## DOCTEUR

DE L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE SAINT-ETIENNE

Dans la spécialité : **Image, Vision, Signal**

<h1>TRAITEMENT D'IMAGE</h1> <h2>A VOISINAGES ADAPTATIFS GENERAUX</h2>
---

Soutenue à Saint-Etienne le 30 Novembre 2005

*Composition du Jury :*

Jean-Michel JOLION	Président	Professeur, LIRIS-INSA (Lyon)
Jean-Marc CHASSERY	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, LIS-INPG (Grenoble)
Peter HAWKES	Rapporteur	Directeur de Recherche CNRS, nMat-CEMES (Toulouse)
Yannick ANGUY	Examineur	Chargé de Recherche CNRS, TREFLE-ENSAM (Bordeaux)
Michel JOURLIN	Examineur	Professeur, TSI-UJM (Saint-Etienne)
Jean-Charles PINOLI	Directeur	Professeur, CIS-ENSMSE (Saint-Etienne)

Thèse préparée au Centre Ingénierie et Santé (CIS)  
de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne



A **mes parents**,  
pour leur indéfectible soutien.

A **Séverine**,  
avec tout mon amour.

A **Eva**,  
parce que c'est mon petit bisounours.



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le directeur de cette thèse, M. Jean-Charles Pinoli, pour m'avoir fait confiance en me proposant ce sujet, malgré les connaissances plutôt légères que j'avais en octobre 2002 sur le traitement d'image. Tout au long de ces trois années, il a su orienter mes recherches en me guidant, m'encourageant, m'inspirant, me conseillant, tout en me laissant une grande liberté et en me faisant l'honneur de me déléguer plusieurs responsabilités dont j'espère avoir été à la hauteur.

Mes remerciements vont également à M. Michel Jourlin, pour la gentillesse, la confiance et l'hospitalité dont il a fait preuve envers moi lors du DEA Image et de ma recherche de thèse, et aussi pour m'avoir fait l'honneur de participer au Jury de soutenance et d'examiner ce travail.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude à ces deux personnes autrement qu'en leur promettant d'agir comme eux avec des étudiants/chercheurs dans ma situation, si un jour l'occasion m'en est donnée.

MM. Jean-Marc Chassery et Peter Hawkes ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie profondément. Ils ont contribué par leurs jugements, analyses, remarques et suggestions à enrichir et ouvrir de nombreuses perspectives sur ces travaux de thèse. Je leur en suis très reconnaissant.

Merci également à M. Jean-Michel Jolion pour m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de soutenance et d'examiner ce travail. Je le remercie aussi pour ses discussions constructives qui alimentent des perspectives prometteuses.

Mes remerciements vont également à Yannick Anguy pour avoir jugé (à plusieurs reprises) ce travail et m'avoir fait l'honneur de participer au Jury. Je le remercie très profondément.

Je remercie également M. Dominique Jeulin pour l'aide qu'il a pu m'apporter lors de mon travail bibliographique.

En ce qui concerne la partie informatique de ce travail, je remercie M. Yann Gavet pour ses suggestions et sa participation à l'implémentation des algorithmes. Je le remercie aussi pour son inspiration, ses conseils, ses suggestions, ses remarques pertinentes et les lectures de ce manuscrit

## REMERCIEMENTS

---

de thèse.

Je remercie également M. Laurent Navarro pour sa disponibilité, ses encouragements, ses suggestions sur le concept d'"énergie" et son assistance morale qui m'ont aidé à finaliser cette thèse dans de bonnes conditions.

Merci également à MM. Fabien Bernard et Sylvain Gras pour leurs encouragements et les discussions que j'ai eues avec eux.

Je remercie aussi M. Fernando Aguiar, M. Xavier Trouillot et Mlle Emilie Roueche de m'avoir supporté en tant que compagnon de bureau, pour mes nombreuses questions et sollicitations.

Je leur souhaite à tous bonne chance pour la suite.

Je dois aussi une grande reconnaissance à toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de côtoyer quotidiennement au café, au repas, ... durant cette thèse, à savoir les personnes de l'espace Fauriel : Marie Line, Amélie, Fabien, Emilie, Mihaela, Liliane, Annabelle, sana, Antoine, Xavier, Guillaume, Gregory, Marc, Philippe, Annie, Jean-François et celles du 158 : Daria, Josy, Stéphanie, Marie-Claude, Virginie, Solange, Françoise, Stéphanie, Marilyne, Elodie, Caroline, Joëlle, Henry, Fred, Alex, Jérémie, Vincent, Guillaume, Jérôme et Marc. Je les remercie pour leur sympathie et leur bonne humeur.

Merci également à Max, Xavier et Guillaume pour les moments de détente autour de la table de ping-pong.

Je tiens aussi à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du centre SIMMO (nouvellement G2I), SPIN ou CIS de l'EMSE, et j'en remercie ici tous les membres.

Pour leurs encouragements, leur confiance et leur assistance aussi bien matérielle que morale, je remercie tout spécialement mes parents et le reste de ma famille qui m'ont permis de faire cette thèse. Merci également à ma belle-famille pour leur soutien.

Je remercie chaleureusement mes amis qui m'ont accompagné et soutenu tout au long de cette thèse : David, Claire, Barbouze, Karim, Véro, Ludo, Flo, Delphine, Stéphane, Lydie, Greg, Alain, Eliane, Bénédicte, Julien, ...

Enfin ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner ma fiancée Séverine et Eva notre petite fille. Je les remercie pour la patience, le soutien et les encouragements qu'elles ont pu m'offrir en leur promettant que le meilleur reste à venir.

# Table des matières

<b>0</b>	<b>Avant-propos</b>	<b>1</b>
0.1	Introduction générale au traitement d'image . . . . .	1
0.2	Organisation du manuscrit . . . . .	4
<b>I</b>	<b>CONTEXTE</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Problématique et contributions</b>	<b>11</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	12
1.2	Contributions . . . . .	13
1.2.1	Etat de l'art . . . . .	13
1.2.2	Solution à la problématique . . . . .	13
1.2.3	Voisinages adaptatifs généraux (VAG) . . . . .	14
1.2.4	Transformations à VAG . . . . .	14
1.2.5	Applications . . . . .	14
1.2.6	Publications . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Images tests</b>	<b>17</b>
2.1	Divers . . . . .	17
2.2	Matériaux . . . . .	19
2.3	Bio-médical . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Etude bibliographique</b>	<b>23</b>
3.1	Approches multi-échelles . . . . .	23
3.1.1	Pyramides . . . . .	25
3.1.2	Ondelettes . . . . .	31
3.1.3	Scale-spaces . . . . .	34
3.2	Transformations spatialement adaptatives . . . . .	39
3.2.1	Filtrage à voisinages variables . . . . .	41
3.2.2	Filtrage à voisinages adaptatifs . . . . .	42
3.2.3	Filtrage géodésique . . . . .	44
3.3	Structures d'images adaptées aux intensités . . . . .	45
3.3.1	Modèles vectoriels GLIP . . . . .	46
3.3.2	Modèles vectoriels plus spécifiques . . . . .	46

3.4 Synthèse bibliographique . . . . .	47
<b>II CONCEPTS NECESSAIRES</b>	<b>51</b>
<b>4 Modèles vectoriels généralisés</b>	<b>55</b>
4.1 Espaces vectoriels ordonnés GLIP . . . . .	55
4.2 Les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP . . . . .	56
4.2.1 Motivation initiale . . . . .	57
4.2.2 Structure vectorielle . . . . .	57
4.2.3 Importance d'une relation d'ordre . . . . .	58
4.2.4 Tableau récapitulatif des modèles . . . . .	58
4.2.5 Comparaisons théoriques et intérêts pratiques . . . . .	58
4.2.6 Exemple d'application en rehaussement d'image . . . . .	58
<b>5 Morphologie mathématique</b>	<b>61</b>
5.1 Représentation des images . . . . .	62
5.2 Morphologie binaire . . . . .	62
5.2.1 Opérations ensemblistes de Minkowski . . . . .	62
5.2.2 Opérateurs binaires élémentaires . . . . .	63
5.3 Morphologie plate . . . . .	66
5.3.1 Représentation d'une image par sections binaires . . . . .	66
5.3.2 Opérateurs plats élémentaires . . . . .	66
5.4 Morphologie à tons de gris . . . . .	68
5.4.1 Opérations numériques de Minkowski . . . . .	68
5.4.2 Opérateurs à tons de gris élémentaires . . . . .	68
<b>III DEVELOPPEMENT</b>	<b>71</b>
<b>6 Voisinages adaptatifs généraux (VAG)</b>	<b>75</b>
6.1 Structures GLIP . . . . .	75
6.2 Première définition des VAG . . . . .	76
6.3 Seconde définition des VAG . . . . .	77
6.4 Propriétés . . . . .	78
6.5 Discussion . . . . .	82
<b>7 Morphologie mathématique à VAG</b>	<b>85</b>
7.1 Eléments structurants adaptatifs (ESA) . . . . .	85
7.2 Morphologie mathématique adaptative plate . . . . .	89
7.2.1 Dilatation morphologique adaptative plate . . . . .	89
7.2.2 Erosion morphologique adaptative plate . . . . .	90
7.2.3 Fermeture, ouverture morphologique adaptative plate . . . . .	91
7.2.4 Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs plats . . . . .	91

7.2.5	Illustrations de traitements morphologiques adaptatifs plats . . . . .	94
7.3	Morphologie mathématique adaptative à tons de gris . . . . .	97
7.3.1	Dilatation morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	97
7.3.2	Erosion morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.3	Fermeture, ouverture morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.4	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs à tons de gris . . . . .	99
7.4	Filtrage morphologiques adaptatif plat . . . . .	100
7.4.1	Filtres morphologiques adaptatifs alternés plats . . . . .	101
7.4.2	Filtres morphologiques adaptatifs séquentiels plats . . . . .	103
7.4.3	Filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats . . . . .	110
7.5	Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs plats . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Filtrage de Choquet à VAG</b>	<b>115</b>
8.1	Rappels sur le filtrage de Choquet . . . . .	115
8.1.1	Intégrale floue de Choquet . . . . .	115
8.1.2	Filtres de Choquet . . . . .	116
8.1.3	Filtres de convolution de Choquet . . . . .	118
8.2	Filtres de Choquet adaptatifs . . . . .	119
8.2.1	Filtres adaptatifs et mesures floues cardinales . . . . .	119
8.2.2	Illustrations de filtres de Choquet adaptatifs . . . . .	123
<b>9</b>	<b>Critères d'analyse à VAG</b>	<b>127</b>
9.1	Catégories des critères d'analyse à VAG . . . . .	128
9.2	Critères d'orientation . . . . .	128
9.2.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG . . . . .	128
9.2.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG . . . . .	131
9.2.3	Aspect multi-échelle . . . . .	134
9.2.4	Conclusions et perspectives . . . . .	135
9.3	Critère d'épaisseur . . . . .	136
9.3.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG . . . . .	136
9.3.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG . . . . .	136
9.3.3	Conclusions et perspectives . . . . .	138
9.4	Autres critères d'analyse à VAG . . . . .	139
<b>IV</b>	<b>APPLICATIONS ET COMPARAISONS</b>	<b>141</b>
<b>10</b>	<b>Restauration d'image</b>	<b>145</b>
10.1	Filtrage de Choquet à VAG . . . . .	145
10.2	Construction de nouveaux VAG . . . . .	147

<b>11 Rehaussement d'image</b>	<b>149</b>
11.1 Par contraste morphologique adaptatif . . . . .	149
11.2 Par égalisation d'histogramme adaptative . . . . .	153
<b>12 Décomposition multi-échelle</b>	<b>157</b>
12.1 Par filtrage morphologique alterné séquentiel . . . . .	158
12.2 Par ouvertures/fermetures morphologiques . . . . .	158
<b>13 Segmentation d'image</b>	<b>163</b>
13.1 Par morphologie mathématique adaptative . . . . .	163
13.1.1 Rappels sur la ligne de partage des eaux (LPE) . . . . .	163
13.1.2 Segmentation pyramidale . . . . .	164
13.1.3 Segmentation hiérarchique . . . . .	167
13.1.4 Segmentation 'joints de grains' . . . . .	168
13.1.5 Segmentation 'joints de grains' dans des conditions d'illumination inégale . . . . .	171
13.1.6 Segmentation de cellules endothéliales cornéennes . . . . .	173
13.2 Par seuillage de fonctions critère à VAG . . . . .	175
<b>14 Représentation locale d'information</b>	<b>177</b>
14.1 Cartographie d'orientation . . . . .	177
14.1.1 Sur une image d'empreintes digitales . . . . .	177
14.1.2 Sur une image de gel de collagène . . . . .	178
14.2 Cartographie d'épaisseur . . . . .	179
14.2.1 Sur une image de la rétine . . . . .	179
<b>V CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES</b>	<b>181</b>
<b>Conclusions</b>	<b>183</b>
<b>Perspectives</b>	<b>187</b>
<b>LISTES ET NOMENCLATURE DES SYMBOLES</b>	<b>189</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>191</b>
<b>Liste des tables</b>	<b>193</b>
<b>Liste des exemples</b>	<b>195</b>
<b>Nomenclature des symboles</b>	<b>197</b>

<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>201</b>
<b>INDEX</b>	<b>219</b>



# CHAPITRE 0

## Avant-propos

---

Confucius

*Une image vaut mille mots.*

(proverbe chinois)

---

### SOMMAIRE

---

<b>0.1</b>	<b>Introduction générale au traitement d'image</b>	<b>1</b>
<b>0.2</b>	<b>Organisation du manuscrit</b>	<b>4</b>

---

### 0.1 Introduction générale au traitement d'image

Théoriquement, le traitement d'image numérique est un ensemble d'approches, de méthodes, de techniques et d'outils dont l'ambition est de résoudre la majorité des problèmes qui peuvent se présenter lorsqu'il est nécessaire d'extraire et d'analyser de façon automatique les informations présentes dans une image.

Différentes approches ont alors été empruntées ou développées pour traiter ces images. La liste qui suit donne un aperçu de leur diversité :

- la morphologie mathématique (filtrages morphologiques, squelettisation, ligne de partage des eaux, ...),
- l'approche variationnelle (EDP non linéaires, théorie d'échelle, équation eikonale, flot de courbure moyenne, contours actifs, ...),
- l'approche statistique (modèles Bayésien, Markovien, Evidentiel, théorie de l'information, ...),
- les approches géométriques (géométrie projective, géométrie intégrale, calibration, synthèse d'image, ...),
- l'analyse fonctionnelle (décomposition atomique, ondelettes, analyse multi-échelle, fractales, ...),
- la théorie des graphes (appariement de graphes, graphes minimaux, ...),
- les problèmes inverses (régularisations quadratique et semi-quadratique, maximum d'entropie, ...),

- la reconnaissance des formes et des déformations (théorie des groupes, courbures, ...),
- les théories psycho-visuelles et psychophysiques (Gestalt, computational theory, ...).

Les cloisons entre ces différentes approches sont perméables et des liens nombreux ont été établis entre, par exemple, la morphologie mathématique et les approches EDP, la théorie des problèmes inverses et les approches variationnelles et statistiques, donnant parfois des schémas numériques très semblables.

Si les philosophes et les scientifiques des siècles précédents s'intéressaient à la relation entre les mathématiques et la physique, l'informatique a introduit un nouvel outil qui se situe à la frontière entre la théorie et la pratique. Il a été créé par l'homme dans un but pratique : celui de faire des tâches systématiques plus rapidement que l'homme et à la place de celui-ci.

Le traitement d'image désigne donc en informatique un ensemble d'algorithmes permettant, à partir d'images numérisées, de produire d'autres images numériques ou d'en extraire de l'information.

En pratique, le traiteur d'image dispose d'images numériques, donc échantillonnées, acquises par des caméras vidéo, appareils photos numériques, imageurs IRM (imagerie à résonance magnétique), TEP (tomographie à émission de positons), scanner X, échographie, scintigraphie, EEG (électro-encéphalographie), MEG (magnéto-encéphalographie), ...

Le mode et les conditions d'acquisition et de numérisation des images conditionnent largement les opérations qu'il faudra réaliser pour extraire de l'information. En effet, de nombreux paramètres entrent en compte, les principaux étant :

- la résolution d'acquisition et le mode de codage utilisé lors de la numérisation, qui déterminent le degré de précision des éventuelles mesures de dimensions,
- la mise au point, qui détermine la netteté de l'image,
- les conditions d'éclairage, qui déterminent une partie de la variabilité des images traitées,
- le bruit de la chaîne de transmission d'image.

Dans le contexte de la vision artificielle, le traitement d'image se place après les étapes d'acquisition et de numérisation, assurant les transformations d'images et la partie de calcul permettant d'aller vers une interprétation des images traitées. Cette phase d'interprétation est d'ailleurs de plus en plus intégrée dans le traitement d'image, en faisant appel notamment à l'intelligence artificielle pour manipuler des connaissances, principalement sur les informations dont on dispose à propos de ce que représentent les images traitées (connaissance du domaine).

Cependant, une constatation assez courante est la difficulté de remplacer l'analyse experte de l'oeil humain par celle d'un programme informatique, comme le traduit cette phrase souvent citée de David Marr :

---

*The common almost despairing feeling of the early investigators (...) was that practically anything could happen in an image and furthermore that practically everything did.*

[Marr, 1982]

---

Une meilleure connaissance des mécanismes de perception visuelle humaine est encore nécessaire

et devrait avoir un impact sur la conception d'algorithmes de vision artificielle.

La télédétection ayant franchi un pas important en permettant d'avoir des images à très haute résolution (inférieure à 10 m pour les images satellites et inférieure à 1 m pour les images aériennes), a nécessité de nouvelles techniques de traitement d'image dans un but de compression et d'extraction d'information. De très nombreuses applications découlent de ces images satellites, dans des domaines variés : météorologie, climatologie, gestion de ressources environnementales, agriculture, suivi de catastrophes naturelles, ...

La recherche médicale est devenue elle aussi un très gros demandeur en traitement d'image pour améliorer les diagnostics effectués à partir des nombreuses techniques d'imagerie (analyse d'image HMPAO-SPECT du cerveau pour le diagnostic de la maladie d'Alzheimer, détection de tumeurs dans des images MIBI-TEMP, détection de lésions évolutives de sclérose en plaques dans l'imagerie IRM, ...). Ces diagnostics assistés par ordinateur basés sur l'image peuvent réduire la charge de travail en situation clinique tout en améliorant les performances.

En vision industrielle, l'exploitation de savoir-faire en algorithmie et traitement d'image, issue de développements de plusieurs années par de nombreux spécialistes, a permis d'atteindre des performances de traitement automatique (précision et cadence) très difficilement envisageables autrement, rendant ainsi certaines applications viables, ou améliorant la valeur de celles existantes (tri, contrôle qualité, réglage, ...).

Accompagnant le développement des moyens de calcul, les applications du traitement d'image sont de plus en plus nombreuses dans des secteurs clefs de l'activité économique : imageries aéroportée et spatiale, imagerie médicale, robotique, senseurs civils et militaires, systèmes de sécurité et d'identification, échange et commerce de données fixes ou animées sur internet. Cette liste non exhaustive souligne simplement la place de l'image dans nos sociétés et l'utilité culturelle et socio-économique du développement d'outils puissants et rapides pour son traitement.

Néanmoins, de nombreuses difficultés font encore l'objet d'une recherche approfondie en traitement et analyse d'image.

#### **DIFFICULTES ACTUELLES :**

<p><b>Beaucoup de problèmes de traitement d'image ne sont à ce jour que partiellement résolus. Tel est le cas de la reconnaissance de formes qui reste un sujet récurrent et difficile. Par exemple, des méthodes partielles de reconnaissance automatique, permettant de décrire le contenu des images, basées sur les statistiques, la géométrie, la physique, ou l'apparence ont été développées mais restent insuffisantes. D'autres domaines comme la vision artificielle ou la caractérisation multi-échelle sont des sujets difficiles qui restent d'actualité en analyse d'image.</b></p>
---

Après cette brève introduction au traitement d'image, l'organisation de cette thèse qui s'inscrit dans cette spécialité, est exposée dans la section suivante.

## 0.2 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est composé de cinq parties.

### Première partie : CONTEXTE

Le contexte de cette thèse est tout d'abord présenté en affichant la *problématique* et les *contributions apportées*.

Ensuite, différentes images adaptées au sujet sont exposées. Elles ont été sélectionnées afin de servir d'images expérimentales aux opérations et opérateurs mis en place dans cette thèse. Le lecteur reconnaîtra aisément certaines d'entre elles puisqu'elles sont régulièrement soumises à des traitements pragmatiques, alors que d'autres, toutes autant adaptées à la problématique, sont issues de problèmes applicatifs plus concrets.

En dernier lieu, une étude bibliographique est exposée à travers une recherche sur les approches, méthodes et concepts en rapport avec le traitement multi-échelle, le filtrage spatialement adaptatif et les structures d'images adaptées aux intensités. Ces recherches ont permis de mieux appréhender la problématique, tout en enrichissant les connaissances dans ces domaines. La synthèse et critique de ce travail bibliographique a conduit à l'identification précise du sujet de cette thèse.

### Deuxième partie : CONCEPTS NECESSAIRES

La deuxième partie de ce manuscrit est consacrée à différents concepts nécessaires au développement de ces travaux de recherche.

Le premier chapitre est consacré aux *modèles vectoriels généralisés d'espaces images*. Ces espaces vectoriels de représentation permettent notamment de prendre en compte, dans un cadre mathématique rigoureux, la nature physique des images. En effet, elles ne sont pas toutes basées sur les mêmes principes de formation : images obtenues en lumière transmise, images obtenues en lumière réfléchie, images issues du système visuel humain, ... Ces structures permettront de développer une approche adaptative par rapport aux informations (radiométriques, morphologiques, géométriques, fréquentielles, texturales, ...) à traiter ; ces données étant dépendantes des intensités de l'image d'analyse.

Un second chapitre récapitule les notions de base de la morphologie mathématique, cadre puissant et souvent indispensable pour l'analyse des structures spatiales de l'image.

### Troisième partie : DEVELOPPEMENT

La troisième partie porte sur le développement de l'approche proposée : *TIVAG - Traitement d'Image à Voisinages Adaptatifs Généraux* (ou GANIP - General Adaptive Neighborhood Image Processing).

Le premier chapitre introduit la notion de *voisinages adaptatifs généraux (VAG)*. Ces voisinages locaux sont définis pour chaque point de l'image étudiée. Ils sont de nature adaptative, d'une part par leur *forme spatiale* dépendante des caractéristiques radiométriques, morphologiques, ... à étudier, c'est-à-dire suivant un "critère d'analyse" sélectionné, et d'autre part par leur *propriété physique* puisqu'ils sont structurés suivant un modèle vectoriel compatible avec la nature physique

et/ou psychophysique de l'image à analyser. Plus particulièrement, quatre structures vectorielles seront exposées : le Classical Linear Image Processing (CLIP), le Multiplicative Homomorphic Image Processing (MHIP), le Log-Ratio Image Processing (LRIP), et le Logarithmic Image Processing (LIP). Ces voisinages adaptatifs généraux sont aussi de nature multi-échelle, puisqu'à chaque point de l'image est associée une famille croissante de VAG. Ils forment alors des fenêtres (ou masques) d'analyse propices aux opérateurs et opérations définies dans la suite de cette partie. Plus particulièrement, le second chapitre traite de la *morphologie mathématique à VAG* en considérant des éléments structurants adaptatifs basés sur ces voisinages. Ces nouveaux opérateurs satisfont naturellement les propriétés des opérateurs morphologiques classiques et de surcroît en vérifient de nouvelles telle que la connexité des opérateurs adaptatifs élémentaires, qui constitue un avantage remarquable.

Le troisième chapitre est consacré à un autre type de transformations ou opérateurs étendus à l'aide des voisinages adaptatifs généraux : les *filtres de Choquet à VAG*. Ils permettent par exemple de définir des filtres de rang et des filtres de convolution adaptatifs.

Enfin, le dernier chapitre a pour objet de définir des *critères d'analyse à VAG*, basées sur des paramètres locaux morphologiques, géométriques ou topologiques sur des images en tons de gris. A chaque point de l'image sera attribué une valeur dépendante du paramètre d'analyse et de son voisinage adaptatif considérés. Par exemple, cela permettra de définir des cartographies d'orientation ou d'épaisseur locale d'une image en tons de gris, pouvant pour des problèmes adaptés permettre un traitement plus significatif.

#### **Quatrième partie : APPLICATIONS ET COMPARAISONS**

La quatrième partie de ce manuscrit est orientée vers des applications directes des opérateurs à voisinages adaptatifs généraux dans différents domaines du traitement d'image.

Le premier chapitre est dédié à la *restauration d'image* par filtrage adaptatif.

Le second chapitre traite du *rehaussement d'image* à travers les transformations de contraste morphologique et d'égalisation d'histogramme.

Deux *décompositions multi-échelle* sont exposées dans le chapitre suivant par le biais de filtres alternés séquentiels et d'ouverture/fermetures adaptatives.

Le dernier chapitre est consacré à la *segmentation d'image* par morphologie mathématique ou par seuillage de cartes paramétriques.

Une comparaison qualitative sera, dans la mesure du possible, effectuée et discutée entre les différents résultats obtenus par l'approche à voisinages adaptatifs généraux et ceux obtenus par les méthodes usuelles correspondantes.

#### **Cinquième partie : CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

Enfin, la dernière partie de ce manuscrit présente tout d'abord une *conclusion* générale de l'approche TIVAG en affichant ses avantages.

Par la suite, les *perspectives* restent nombreuses et pouvant initier de futurs sujets de thèse dans différents axes de recherche.

La prétopologie à voisinages adaptatifs généraux devrait permettre d'aborder des notions de pré-

connexité et pré-continuité, présageant de nombreux enrichissements en traitement d'image. Notamment, des espaces "pré-métriques" semblent prometteurs et adaptés à différents problèmes. Une autre perspective de recherche concerne la théorie de la mesure combinée (initialement par le filtrage de Choquet) au traitement d'image à voisinages adaptatifs généraux.

Première partie

**CONTEXTE**



# SOMMAIRE [Première partie]

---

<b>1</b>	<b>Problématique et contributions</b>	<b>11</b>
1.1	Présentation du problème . . . . .	12
1.2	Contributions . . . . .	13
1.2.1	Etat de l'art . . . . .	13
1.2.2	Solution à la problématique . . . . .	13
1.2.3	Voisinages adaptatifs généraux (VAG) . . . . .	14
1.2.4	Transformations à VAG . . . . .	14
1.2.5	Applications . . . . .	14
1.2.6	Publications . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Images tests</b>	<b>17</b>
2.1	Divers . . . . .	17
2.2	Matériaux . . . . .	19
2.3	Bio-médical . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Etude bibliographique</b>	<b>23</b>
3.1	Approches multi-échelles . . . . .	23
3.1.1	Pyramides . . . . .	25
	Pyramides linéaires . . . . .	26
	Pyramides morphologiques . . . . .	27
	Pyramides géométriques . . . . .	28
	Pyramides de graphes . . . . .	29
3.1.2	Ondelettes . . . . .	31
3.1.3	Scale-spaces . . . . .	34
	Scale-spaces linéaires . . . . .	35
	Scale-spaces morphologiques . . . . .	35
	Scale-spaces par diffusion anisotrope . . . . .	37
3.2	Transformations spatialement adaptatives . . . . .	39
3.2.1	Filtrage à voisinages variables . . . . .	41
3.2.2	Filtrage à voisinages adaptatifs . . . . .	42
3.2.3	Filtrage géodésique . . . . .	44
3.3	Structures d'images adaptées aux intensités . . . . .	45
3.3.1	Modèles vectoriels GLIP . . . . .	46
3.3.2	Modèles vectoriels plus spécifiques . . . . .	46

3.4 Synthèse bibliographique . . . . . 47

---

# CHAPITRE 1

## Problématique et contributions

---

Arthur Koestler

*La meilleure façon d'apprendre est de résoudre des problèmes.*

(Le cri d'Archimède, Calmann-Lévy)

---

### SOMMAIRE

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation du problème</b>	<b>12</b>
<b>1.2</b>	<b>Contributions</b>	<b>13</b>
1.2.1	Etat de l'art	13
1.2.2	Solution à la problématique	13
1.2.3	Voisinages adaptatifs généraux (VAG)	14
1.2.4	Transformations à VAG	14
1.2.5	Applications	14
1.2.6	Publications	15

---

La distinction entre la recherche appliquée et la recherche théorique est un sujet d'actualité, avec la spécialisation accrue et la pluridisciplinarité renforcée des chercheurs.

Dans son livre intitulé "Pour l'honneur de l'esprit humain" [Dieudonné, 1987], Jean Dieudonné conçoit les mathématiques comme un art qui n'a pas besoin de l'expérience ou de la pratique pour justifier son existence. Il cite :

---

*...M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.*

C.G.J. Jacobi, lettre à Legendre, 2 juillet 1830

---

Le problème de la relation entre la théorie et l'application est une question d'ordre épistémologique. La théorie se nourrit de la pratique tout autant que la pratique de la théorie, et les deux sont indissociables.

Ce travail de thèse a initialement été motivé par une problématique aussi bien théorique que pratique. L'approche proposée a alimenté diverses applications réelles en confirmant l'intérêt pratique des méthodes offertes.

## 1.1 Présentation du problème

En traitement d'image, pour décrire une scène et les objets qui la constituent, une solution consiste à produire des versions simplifiées de l'image (induites par un paramètre d'échelle) et à étudier la perte d'information consécutive aux simplifications. Selon le critère de simplification, différentes informations peuvent être extraites : radiométriques, fréquentielles, morphologiques, texturales . . . en mesurant des distributions, c'est à dire une quantité d'information éliminée à chaque échelle de simplification. Les opérateurs réalisant cette simplification seront nommés *opérateurs multi-échelles*. Ils induisent alors une *représentation, décomposition, ou simplification multi-échelle*, dont la notion est liée à un concept physique :

---

*Effectuer une observation physique signifie qu'une quantité physique est mesurée à l'aide d'un système d'acquisition et avec certaines ouvertures . . . Ce concept d'avoir une série de mesures en utilisant des ouvertures de tailles physiques différentes correspondant à des échelles différentes est appelé une mesure multi-échelle des données.*

---

[Ter Haar Romeny, 1994]

---

Dans ce contexte, les structures à une échelle grossière (basse résolution) doivent constituer une simplification des structures à une échelle fine (haute résolution). L'image numérique originale constitue donc l'image à la résolution la plus haute. L'*analyse multi-échelle* correspond à l'identification et à la localisation des caractéristiques qui peuvent en être extraites.

Les représentations multi-échelles les plus classiques sont obtenues par les opérateurs de convolution avec des gaussiennes, où la résolution est une fonction monotone de l'écart-type, donc de la taille de la fenêtre d'analyse. Ils satisfont des propriétés multi-échelles importantes, mais présentent certains défauts : ils dégradent les transitions et peuvent générer l'apparition de structures nouvelles à des échelles basse résolution. Il devient dès lors impossible de mettre en relation les structures présentes à différentes échelles de représentation et de les localiser précisément. Cette remarque vaut pour tous les opérateurs linéaires. A contrario, des représentations multi-échelles intéressantes sont offertes par certains opérateurs non-linéaires, plus particulièrement les opérateurs basées sur un processus de diffusion anisotrope.

Cependant, il subsiste certains inconvénients à la plupart de ces approches multi-échelles, exposés dans la problématique suivante qui a fait l'objet de cette thèse :

### PROBLEMATIQUE :

Les représentations multi-échelles usuelles (pyramides, ondelettes, ...) possèdent plusieurs inconvénients. D'une part, la taille et/ou la forme des fenêtres d'analyse sont généralement, pour une échelle donnée, déterminées et fixées *a priori* pour tous les points de l'image. Par conséquent, la majorité des opérateurs multi-échelles ne sont pas satisfaisants puisque les échelles restent *extrinsèques* (indépendantes) aux structures locales de l'image, relatives aux informations radiométriques, fréquentielles, morphologiques ou texturales que l'on cherche à extraire. Une décomposition multi-échelle basée sur de tels opérateurs conduit à une identification et une localisation souvent insuffisantes des différentes structures présentes dans l'image. Des approches plus *intrinsèques* ont été introduites (diffusion anisotrope) mais elles comportent encore des *a priori* (fonction de diffusion).

D'autre part, les opérateurs multi-échelles sont généralement indépendants des propriétés physiques (principe de formation d'image, ...) et/ou psychophysiques de l'image (perception visuelle humaine, ...), liées aux intensités de l'image, induisant un manque de pertinence des représentations multi-échelles induites.

L'objet de cette thèse est donc la mise en place d'un cadre analytique multi-échelle intrinsèque et adaptatif en espace et en intensité pour le traitement d'image.

## 1.2 Contributions

### 1.2.1 Etat de l'art

Face à cette problématique, une recherche bibliographique (Chap. 3) a initialement été effectuée et naturellement orientée selon trois axes principaux :

- les approches multi-échelles,
- les transformations spatialement adaptatives,
- les structures d'images adaptées aux intensités.

Cette étude a contribué à la présentation d'un état de l'art concernant ces trois approches, favorisant l'appréhension de la problématique.

### 1.2.2 Solution à la problématique

Pour répondre à la problématique posée, une représentation multi-échelle devrait être basée sur des opérateurs dont le contexte local du voisinage de chaque point de l'image détermine lui-même ses fenêtres d'analyse adéquates à utiliser. C'est à dire que les échelles soient *intrinsèques* aux fenêtres d'analyse. Ainsi, les structures de l'image devraient déterminer localement les bonnes échelles à utiliser.

Les fenêtres d'analyse résultantes doivent s'adapter d'une part *spatialement* par leur "forme", dépendante des caractéristiques radiométriques, morphologiques, géométriques ou texturales que l'on cherche à extraire ; et d'autre part *en intensité*, par leur propriété "physique" liée à la nature des images ou à la perception visuelle humaine.

Des opérateurs adéquats admettant de telles fenêtres d'analyse (intrinsèques) répondraient alors à la problématique et permettraient une représentation et une analyse multi-échelle pertinente.

La synthèse et critique du travail bibliographique, avec l'ambition de ce concept d'opérateurs multi-échelles intrinsèques, a conduit à conceptualiser cette approche et identifier précisément le sujet de cette thèse : **TIVAG - Traitement d'Image à Voisinages Adaptatifs Généraux** ou GANIP - General Adaptive Neighborhood Image Processing.

### 1.2.3 Voisinages adaptatifs généraux (VAG)

Suivant l'approche évoquée dans la sous-section précédente et répondant à la problématique, des fenêtres d'analyse originales, nommées Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG), sont mathématiquement définies et étudiées. A chaque point de l'image est associée une famille croissante de VAG permettant une analyse multi-échelle des différentes caractéristiques de l'image. Ces VAG sont adaptatifs dans le sens où chaque voisinage coïncide spatialement avec la structure locale du point considéré, suivant les informations radiométriques, morphologiques, géométriques, ou texturales étudiées. De plus, les VAG sont physiquement cohérents puisque leur modélisation dépend de la nature physique et/ou psychophysique de l'image à analyser. Par conséquent, les VAG sont adaptés aux images ou systèmes d'imagerie linéaires, mais aussi non linéaires et/ou bornés, tels que les images acquises en lumière transmise, en lumière réfléchie (modèle multiplicatif) ou le système humain de perception visuelle.

Ces VAG sont au coeur de ce travail de thèse. En effet, toutes les transformations définies après l'introduction de ces VAG sont basées sur ces nouvelles fenêtres d'analyse.

### 1.2.4 Transformations à VAG

Les transformations résultantes (c'est à dire à VAG) permettent une analyse multi-échelle spatialement plus significative et pertinente par rapport aux propriétés physiques et psychophysiques de l'image à étudier.

Divers opérateurs ou opérations ont été définis et étudiés :

- opérateurs morphologiques à VAG,
- filtres de Choquet à VAG,
- égalisation d'histogramme à VAG,
- critères d'analyse à VAG.

### 1.2.5 Applications

Ces transformations ont été appliquées pour la résolution de divers problèmes rencontrés en traitement d'image, tant sur des images types ('Lena', ...) que sur des images issues de problèmes applicatifs concrets :

- restauration d'image,
- rehaussement d'image,
- décomposition d'image multi-échelle,
- segmentation d'image,
- représentation locale d'information.

### 1.2.6 Publications

Au cours de cette thèse, l'approche TIVAG a conduit aux publications suivantes :

- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology and its Applications to Image Filtering and Segmentation. *Proceedings of the 9th European Congress on Stereology and Image Analysis*. Vol. II, pp. 123-130. Zakopane, Poland. May 10-13, 2005. [[Debayle and Pinoli, 2005a](#)]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Multiscale Image Filtering and Segmentation by means of Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology. *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*. Vol. III, pp. 537-540. Genova, Italy. September 11-14, 2005. [[Debayle and Pinoli, 2005d](#)]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Spatially Adaptive Morphological Image Filtering using Intrinsic Structuring Elements. *Image Analysis and Stereology*. Vol. 24, No. 3, pp. 145-158, 2005. [[Debayle and Pinoli, 2005e](#)]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part I : Introduction and Theoretical Aspects. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Article under second revision. [[Debayle and Pinoli, 2005b](#)]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part II : Practical Application Examples. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Article under second revision. [[Debayle and Pinoli, 2005c](#)]

---

Ci-après sont présentées quelques images qui ont alimenté les opérateurs et opérations de traitement à voisinages adaptatifs généraux.



# CHAPITRE 2

## Images tests

Pierre Corneille

*Il faut des images.*

### SOMMAIRE

<b>2.1 Divers</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.2 Matériaux</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.3 Bio-médical</b> . . . . .	<b>20</b>

Voici quelques images qui ont été soumises aux opérateurs à VAG mis en place.

Ces images présentent généralement des variations d'échelle par rapport à un certain critère : luminance, orientation, ...

Les traitements de certaines d'entre-elles seront exposés dans ce manuscrit, dans un but d'illustration, de restauration, de rehaussement, de décomposition multi-échelle ou de segmentation.

### 2.1 Divers



(a) 'Lena'



(b) 'chalet'



(c) 'fifre'



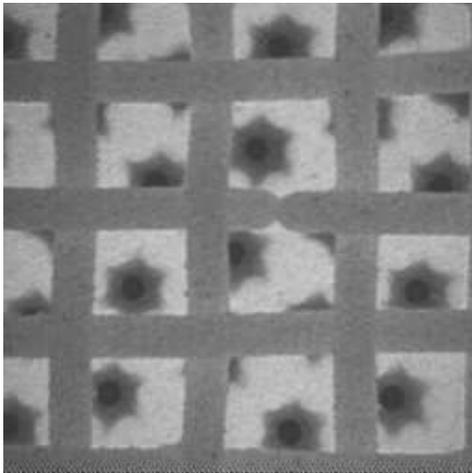
(d) 'goldhill'



(e) 'tools'



(f) Lune



(g) 'burner' (Micromorph®)



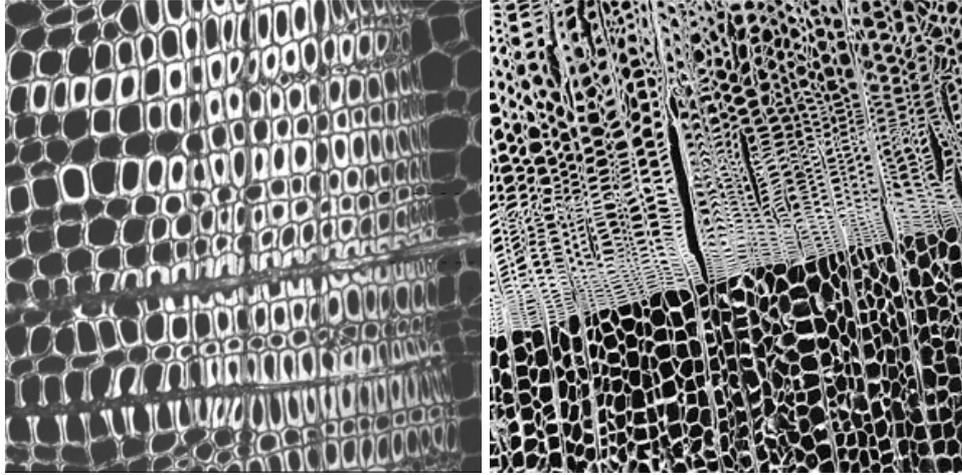
(h) 'cameraman'



(i) 'bridge'

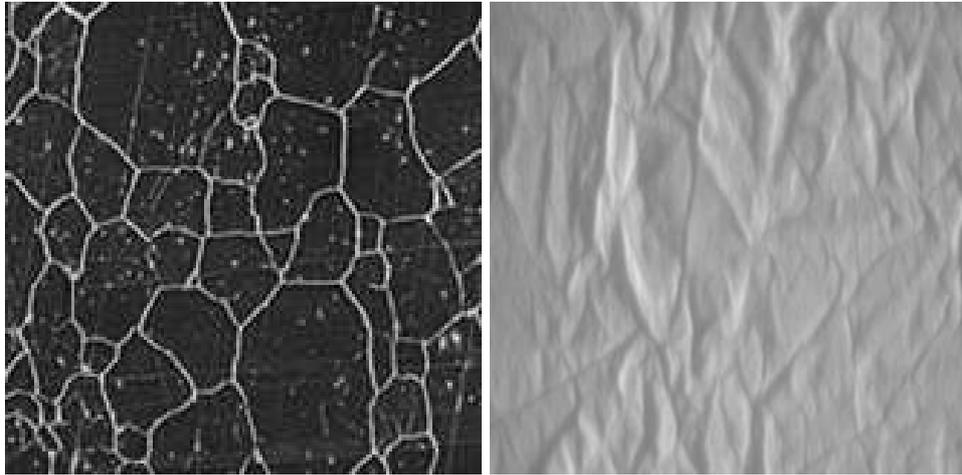
**FIGURE 2.1** – Images diverses.

## 2.2 Matériaux



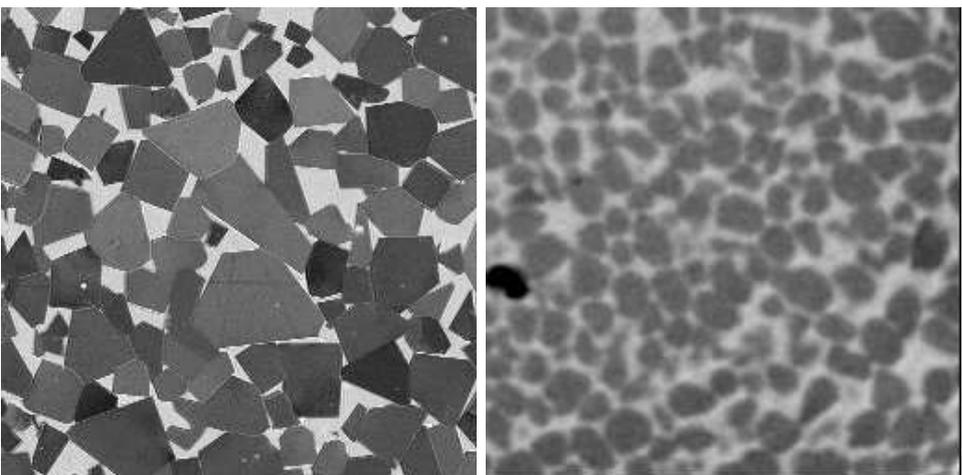
(a) Pin (ENSM.SE/SPIN)

(b) Douglas (ENSM.SE/SPIN)



(c) Joints de grains métallurgiques

(d) Textile (IFTH)

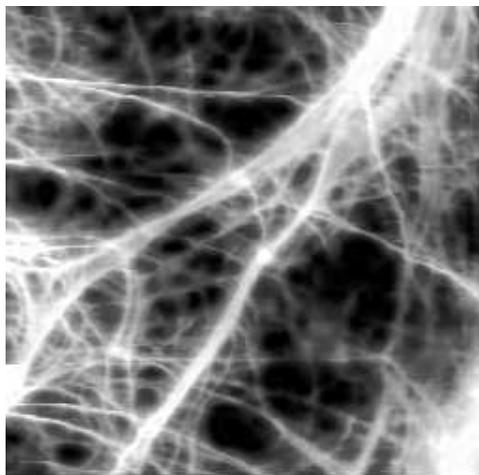


(e) Carbure Tungstène/Cobalt (Aphelion™)

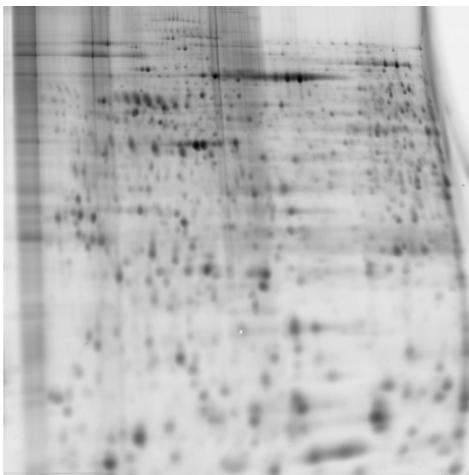
(f) Sable (ENSM.SE/SPIN)

**FIGURE 2.2** – Images issues du génie des matériaux.

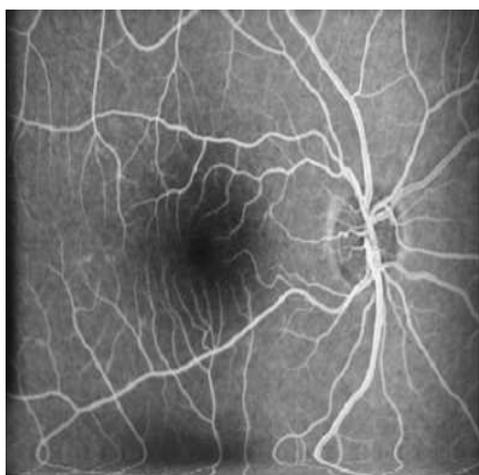
## 2.3 Bio-médical



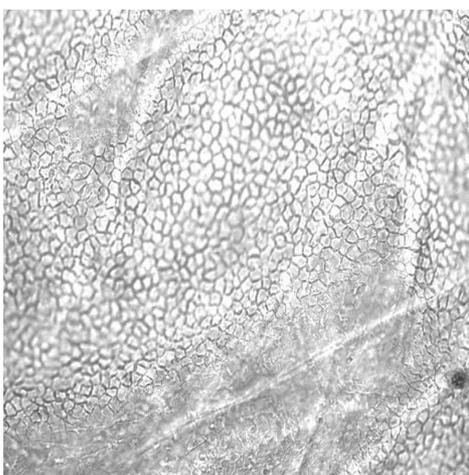
(a) Gel de collagène (CHU.SE/LBTO)



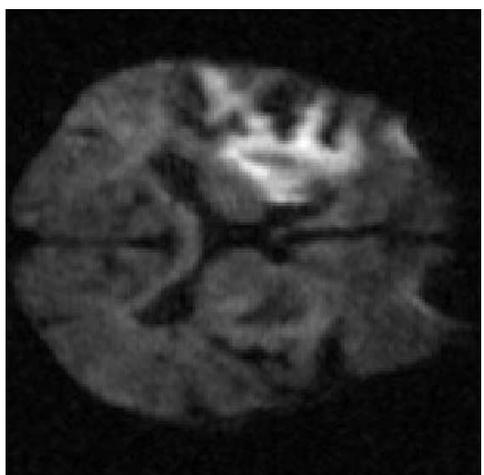
(b) Gel d'électrophorèse (Biomérieux)



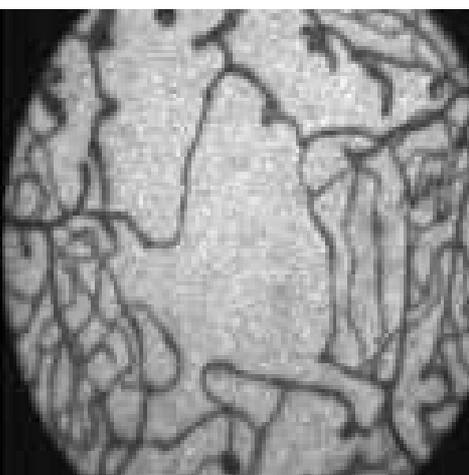
(c) Vaisseaux rétiniens



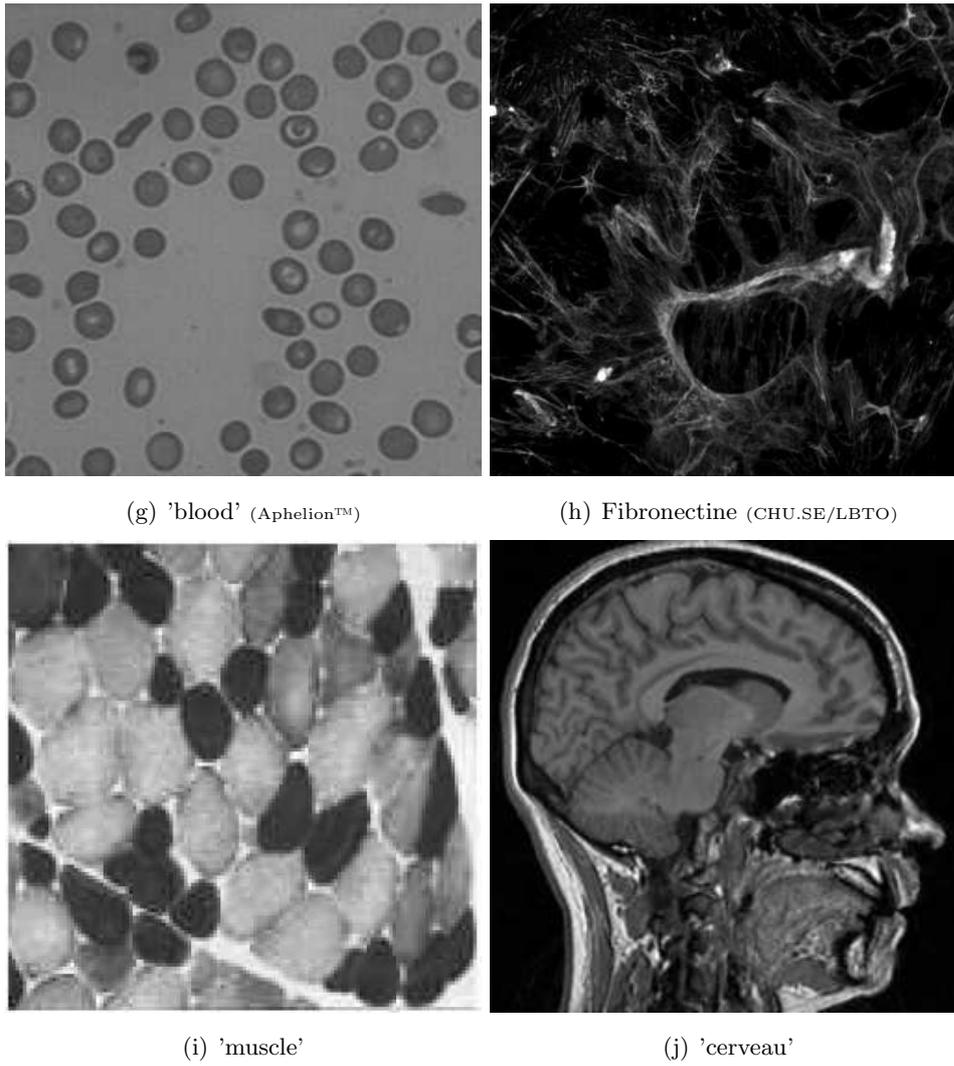
(d) Cellules cornéennes (CHU.SE/SCACG)



(e) Cerveau (CHU.SE/NID)



(f) 'macula' (Micromorph®)



**FIGURE 2.3** – Images issues du génie bio-médical.

---

Le chapitre suivant expose l'étude bibliographique.



# CHAPITRE 3

## Etude bibliographique

---

**HP. Lovecraft**

*La chose la plus miséricordieuse ... c'est l'incapacité de l'esprit humain à mettre en corrélation tous les éléments qu'il contient.*

(L'appel de Cthulhu)

---

### SOMMAIRE

---

<b>3.1</b>	<b>Approches multi-échelles</b>	<b>23</b>
3.1.1	Pyramides	25
3.1.2	Ondelettes	31
3.1.3	Scale-spaces	34
<b>3.2</b>	<b>Transformations spatialement adaptatives</b>	<b>39</b>
3.2.1	Filtrage à voisinages variables	41
3.2.2	Filtrage à voisinages adaptatifs	42
3.2.3	Filtrage géodésique	44
<b>3.3</b>	<b>Structures d'images adaptées aux intensités</b>	<b>45</b>
3.3.1	Modèles vectoriels GLIP	46
3.3.2	Modèles vectoriels plus spécifiques	46
<b>3.4</b>	<b>Synthèse bibliographique</b>	<b>47</b>

---

Ce chapitre expose quelques éléments d'un état de l'art sur les approches multi-échelles, les transformations spatialement adaptatives et les structures d'images adaptées aux intensités. La conclusion de ce chapitre synthétise ce travail bibliographique.

### 3.1 Approches multi-échelles

L'analyse multi-échelle est devenue un domaine à part entière et incontournable en traitement d'image. Il existe plusieurs ouvrages [Lindeberg, 1994b; Ter Haar Romeny, 1994; Weickert, 1998]. Depuis les années 1970, de nombreux domaines du traitement d'image bénéficient de travaux utilisant l'analyse multi-échelle. Dans cette section, quelques notions générales sur l'analyse multi-

échelle sont introduites, puis différentes représentations multi-échelles des images (pyramides, ondelettes, scale-spaces) sont présentées en exposant quelques algorithmes existants.

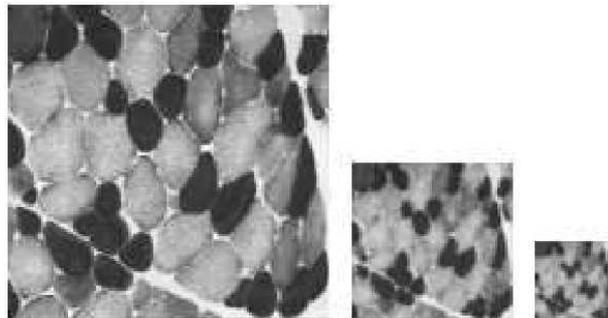
Intuitivement, la notion multi-échelle peut apparaître au système visuel humain de différentes manières :

- réduction de la taille de la scène observée (éloignement),
- diminution de la netteté,
- simplification du contenu.

Sous l'aspect structural, la représentation (analyse, simplification ou décomposition) multi-échelle d'une image résulte d'un traitement approprié permettant d'obtenir une série d'images dérivées qui contiennent (par l'un des procédés énoncés ci-dessus) de moins en moins d'information.

Différentes représentations multi-échelles ont ainsi été proposées. Elles se distinguent selon deux grandes classes :

- représentation multi-échelle par réduction (résolution spatiale) :  
la taille de l'image diminue et provoque une diminution de la résolution (Fig. 3.1). Ce procédé fait intervenir un traitement par sous-échantillonnage, accompagné d'un filtrage qui permet de conserver un maximum d'information malgré la perte provoquée par le sous échantillonnage. Ces méthodes qui mettent en jeu la résolution spatiale d'une image ne procurent pas de réels procédés de segmentation en raison de l'échantillonnage, mais elles permettent généralement de segmenter des images à une résolution plus faible. Ensuite, le résultat obtenu est converti à la taille de l'image originale, avec prise en compte des détails perdus lors de la baisse de résolution.



**FIGURE 3.1** – Image 'muscle' à résolutions spatiales décroissantes [Bertolino, 1995].

- représentation multi-échelle par simplification (résolution de détails) :  
les images décomposées aux différentes résolutions ont toutes la taille de l'image originale (Fig. 3.2). Seul le degré de détail décroît avec la résolution. Certaines de ces méthodes sont des techniques de segmentation multirésolution car chacune des images qu'elles génèrent est une segmentation à part entière. Un niveau est alors un ensemble de régions dont la forme est souvent liée à la méthode, et la taille est liée au niveau de résolution.

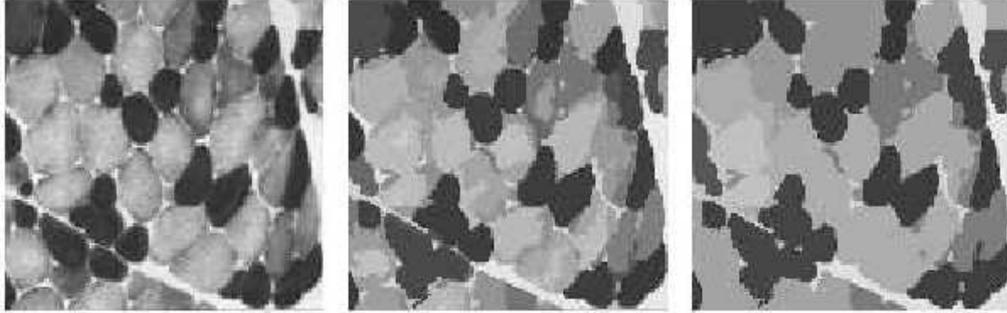


FIGURE 3.2 – Image ‘muscle’ à différentes résolutions de détails [Bertolino, 1995].

Les différentes représentations multi-échelles sont généralement construites à partir de l’un ou l’autre des processus suivants : celui pour lesquelles la décomposition est itérative (pyramides, ondelettes) et celui pour lesquelles la décomposition à un niveau spécifique est obtenue à partir de l’image originale (scale-spaces).

Une distinction peut aussi être faite entre ces diverses approches multi-échelles en considérant le type du paramètre d’échelle : continu ou discret.

Ces approches multi-échelles font appel à différentes notions employées en traitement d’image :

- convolution linéaire [Witkin, 1983; Lindeberg, 1990],
- morphologie mathématique [Bangham et al., 1996c; Jackway and Deriche, 1996], [Kyeong-Ryeol and Chung-Nim, 1996; Bangham et al., 1996b,a],
- transformée en ondelettes [Mallat, 1989a; Bakshi, 1999],
- diffusion anisotrope [Perona and Malik, 1990; Mecke, 1996; Weickert, 1998].

Cette section propose maintenant d’établir quelques éléments d’un état de l’art des représentations multi-échelles couramment utilisées : les pyramides, les décompositions par ondelettes et les scale-spaces.

### 3.1.1 Pyramides

Les premières pyramides ont été proposées en 1971 [Kelly, 1971], l’application principale consistait à extraire et à transmettre rapidement l’information contenue dans une image. Ensuite les pyramides ont été exploitées dans un but de compression de données [Jolion, 1990]. Actuellement, les applications sont plus diversifiées [Laporterie, 2002].

Le principe des algorithmes pyramidaux est de décomposer une image en images de différentes résolutions (spatiales ou de détails) puis éventuellement de la recomposer. Dans ce cadre, un algorithme pyramidal se définit comme la décomposition d’une image sous forme d’arbre, de sorte que l’étage supérieur puisse être restitué à partir de l’étage inférieur.

De façon générale, plusieurs types de pyramides se dégagent :

- pyramides linéaires,
- pyramides morphologiques,
- pyramides géométriques,
- pyramides de graphes.

### Pyramides linéaires

Les pyramides linéaires sont basées sur l'itération d'un filtrage linéaire et d'un échantillonnage. Ce sont donc des représentations multi-échelles par réduction. Le plus connu de ces algorithmes pyramidaux (Ex. 3.1.1) a été proposé par **Burt and Adelson** [1983]. A l'origine cet algorithme a été développé pour réaliser un codage le moins redondant possible, tout en transmettant progressivement les niveaux successifs de la pyramide.

---

**EXEMPLE 3.1** – Pyramides Gaussienne et Laplacienne [Burt and Adelson, 1983]

---

Cet algorithme combine le calcul de deux pyramides.

La première est appelée pyramide Gaussienne (Fig. 3.3.a) et réalise un filtrage (convolution avec une Gaussienne) et un échantillonnage en un seul processus itéré à chaque niveau :

$$\begin{aligned}
 g_0 &= \text{image initiale} \\
 g_k &= \text{REDUCE}(g_{k-1}) \\
 g_k(i, j) &= \sum_{m=-2}^{m=2} \sum_{n=-2}^{n=2} w(m, n) g_{k-1}(2i + m, 2j + n)
 \end{aligned}$$

Le filtre de taille  $5 \times 5$  est une moyenne pondérée par les coefficients du noyau Gaussien  $w$ . La deuxième pyramide, la pyramide Laplacienne (Fig. 3.3.b), est construite comme la différence entre deux niveaux de la pyramide gaussienne. Elle se calcule par :

$$\begin{aligned}
 l_N &= g_N \\
 l_k &= g_k - \text{EXPAND}(g_{k+1}) \\
 l_k(i, j) &= g_k(i, j) - 4 \sum_{m=-2}^{m=2} \sum_{n=-2}^{n=2} w(m, n) g_{k+1}(2i + m, 2j + n)
 \end{aligned}$$



(a) Pyramide Gaussienne

(b) Pyramide Laplacienne

**FIGURE 3.3** – Pyramides Gaussienne et Laplacienne réalisées sur l'image 'cameraman'.

Les premiers modèles de pyramides linéaires [Tanimoto and Pavlidis, 1975; Tanimoto, 1979] proposent des algorithmes plus simples que celui de Burt and Adelson [1983], consistant par exemple à prendre la moyenne, ou même la somme des pixels, afin de calculer la valeur du pixel au niveau supérieur ; l'échantillonnage et le filtrage étant toujours réalisés en une seule et même étape.

### Pyramides morphologiques

Les pyramides morphologiques sont fondées, comme leur nom l'indique, sur un filtrage morphologique suivi d'un éventuel échantillonnage, engendrant des représentations multi-échelles par simplification ou réduction.

Trois notions différentes de pyramides morphologiques coexistent [Laporterie, 2002] :

1. *Pyramides basées sur l'itération d'un filtrage morphologique et d'un échantillonnage*

Dans ces représentations multi-échelles (par réduction), il y a toujours un opérateur de réduction d'information et un opérateur d'expansion d'information.

Pour Toët [1989], l'opérateur de réduction d'information est composé d'un filtre (ouverture puis fermeture) suivi d'un échantillonnage (dyadique). Une pyramide d'erreur est ensuite calculée par l'opérateur d'expansion et permet une reconstruction exacte.

Pour Sun and Maragos [1989], la pyramide se construit par itérations d'une ouverture par un élément structurant fixé et d'une décimation. Deux opérateurs d'expansion sont envisagés : le premier calcule la différence entre l'image avant et l'image après ouverture. Dans ce cas, la reconstruction n'est pas exacte. La deuxième calcule la différence entre l'image avant ouverture et celle après interpolation de l'image décimée. La reconstruction est alors exacte. Deux types d'interpolation sont testés (moyenne par une fenêtre  $3 \times 3$  et dilatation par un élément structurant  $3 \times 3$ ).

2. *Pyramides construites uniquement par itérations d'opérations morphologiques*

Cette approche génère des représentations multi-échelles par simplification.

Eichmann et al. [1988] proposent d'itérer des opérateurs morphologiques (dilatation, érosion, ouverture et fermeture) par des éléments structurants identiques (pour des dilatations et des érosions) ou grossissants. La reconstruction est réalisée par application de la transformée duale ; elle n'est donc pas exacte. Ensuite la différence entre deux étages est calculée.

Maragos [1988] itère  $n$  érosions suivies de  $n$  dilatations (ou vice-versa) pour définir des ouvertures (resp. des fermetures) multi-échelles.

Morales [1995] utilise des filtres alternés séquentiels.

3. *Pyramides construites par filtrage morphologique suivi d'une étape supplémentaire*

De manière générale, une étape supplémentaire aux décompositions pyramidales précédentes, telle qu'une extraction d'information ou un calcul de gradient, est réalisée à chaque niveau de la pyramide.

Un récapitulatif des différentes pyramides linéaires et morphologiques est donnée par Goutsias and Heijmans [2000].

## Pyramides géométriques

Ce paragraphe est inspiré du travail de Bertolino [1995].

Ces représentations multi-échelles par simplification sont basées sur des partitionnements géométriques récursifs qui sont utilisés en traitement d'image pour résoudre de façon rapide des problèmes de codage, de compression et de segmentation. Les pyramides associées sont déduites de la représentation arborescente du partitionnement récursif.

Différents types de partitionnements géométriques se distinguent :

### 1. Quad-trees ou arbres quaternaires

Le principe de représentation par quad-tree (Fig. 3.4, 3.5.b) ou arbre quaternaire [Samet, 1980] est liée à la propriété de récursivité du maillage carré. L'image à traiter doit être de dimension  $N \times N (N = 2^m)$ . Le quad-tree est une structure de représentation des images binaires permettant la recherche de composantes connexes. C'est également une structure utilisée pour la segmentation d'image en niveaux de gris [Horowitz and Pavlidis, 1974]. La segmentation s'opère en deux phases, une de division (Fig. 3.4) dont le principe consiste à diviser récursivement tout bloc non homogène selon un prédicat, et une autre de fusion nécessaire pour regrouper les blocs adjacents représentant des régions homogènes selon le prédicat utilisé, mais qui ont été divisées par le partitionnement régulier quaternaire. Cette phase de reconnexion s'apparente à un étiquetage en composantes connexes [Chassery and Montanvert, 1991].

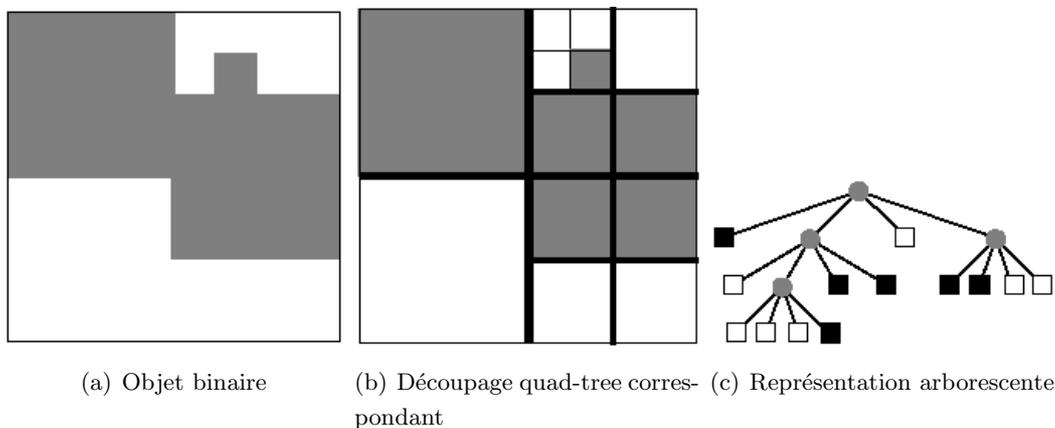


FIGURE 3.4 – Principe de découpage récursif du quad-tree [Bertolino, 1995].

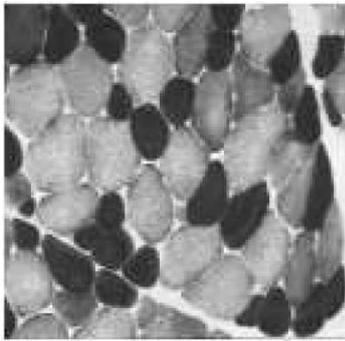
### 2. Polygonisation de Voronoï [Voronoi, 1908]

La polygonisation de Voronoï (Fig. 3.5.c) est une partition naturelle de l'espace qu'on retrouve dans la nature : alvéoles d'abeilles, bulles de savon, molécules chimiques. Cette structure a tout d'abord été utilisée pour la modélisation de populations (astronomie, biologie) puis pour résoudre des problèmes complexes de partitionnement posés par l'urbanisation. Ses propriétés mathématiques [Preparata and Shamos, 1985; Okabe et al., 2000] sont très

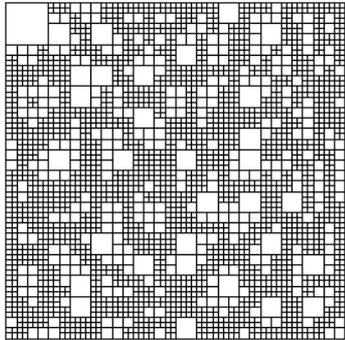
intéressantes et permettent une exploitation informatique [Klee, 1980] puissante en analyse d'image, notamment pour la segmentation.

### 3. *Triangulation de Delaunay* [Delaunay, 1934]

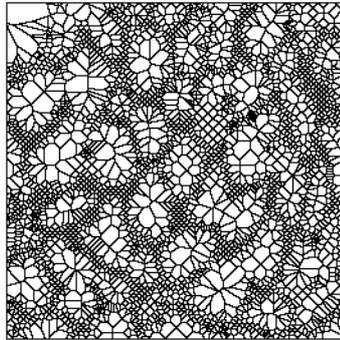
La structure de Delaunay (Fig 3.5.d) est duale de celle de Voronoï. Néanmoins, ses contraintes géométriques sont plus fortes car les régions de base sont des triangles et non plus des polygones convexes. Les arêtes de Delaunay représentent les relations d'adjacence entre les polygones de Voronoï [Preparata and Shamos, 1985]. L'algorithme pyramidal [Lee and Schachter, 1980] permettant la construction des triangulations de Delaunay successives est identique à celui utilisé pour la polygonisation de Voronoï. Cette structure représente une étape intermédiaire (en ce qui concerne des critères de contraintes géométriques) entre la structure très stricte du quad-tree et la structure pseudo-adaptative des polygones de Voronoï.



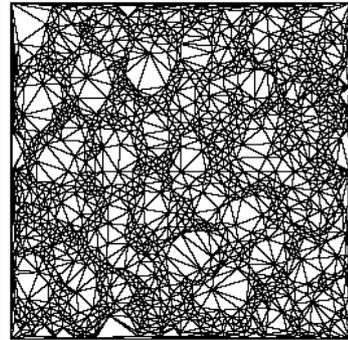
(a) image originale



(b) découpage par quad-tree



(c) polygonisation de Voronoï



(d) triangulation de Delaunay

**FIGURE 3.5** – Différents partitionnements géométriques de l'image 'muscle' [Bertolino, 1995].

### Pyramides de graphes

Les pyramides de graphes sont également appelées pyramides irrégulières. Elles doivent leur nom au type de voisinage particulier des régions qui la composent : le nombre de voisins de chaque région n'est pas fixe, dépend de chaque région elle-même et est donc non régulier [Montanvert et al., 1991; Bertolino, 1995; Bertolino and Montanvert, 1996]. Dans ce type de représentation multi-échelle par simplification (Fig. 3.7), la notion de graphe intervient pour modéliser une relation entre les différentes régions du partitionnement. Chaque région est un sommet du graphe, et

la relation représentée par les arêtes est généralement l'adjacence entre les régions. Le graphe d'adjacence est la structure à partir de laquelle vont être extraits des sous-graphes, sur des critères qualitatifs (graphe de similarité, arbres couvrants) et quantitatifs (réduction du graphe) lors de la construction des niveaux successifs de la pyramide. Ces structures enlèvent la contrainte liée aux différentes structures géométriques de base : carré, triangle, ... (Fig. 3.6).

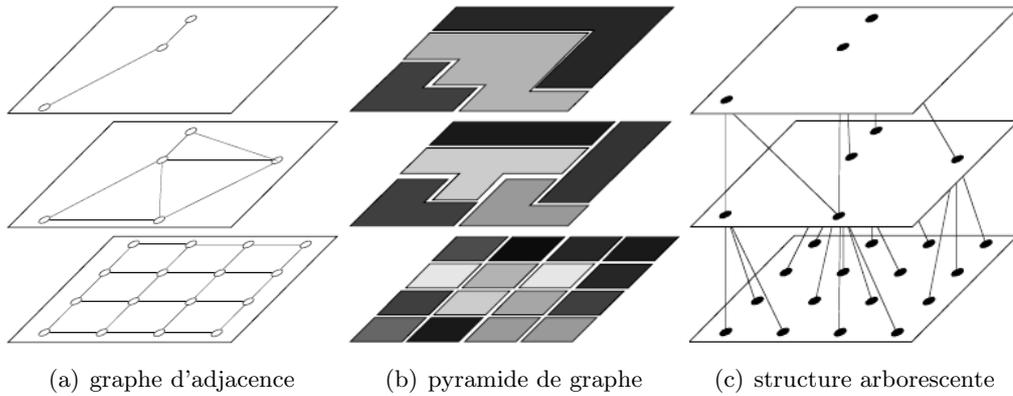


FIGURE 3.6 – Pyramide de graphe [Bertolino, 1995].

Différents types de pyramides de graphes ont ainsi été développés :

- pyramides stochastiques [Meer, 1989; Montanvert et al., 1991],
- pyramides adaptatives [Jolion and Montanvert, 1992],
- pyramides à base arborescente [Meyer, 1994, 2000],
- pyramides floues [Braviano, 1995],
- pyramides de graphes duaux [Willersinn, 1995; Kropatsch and Macho, 1995].

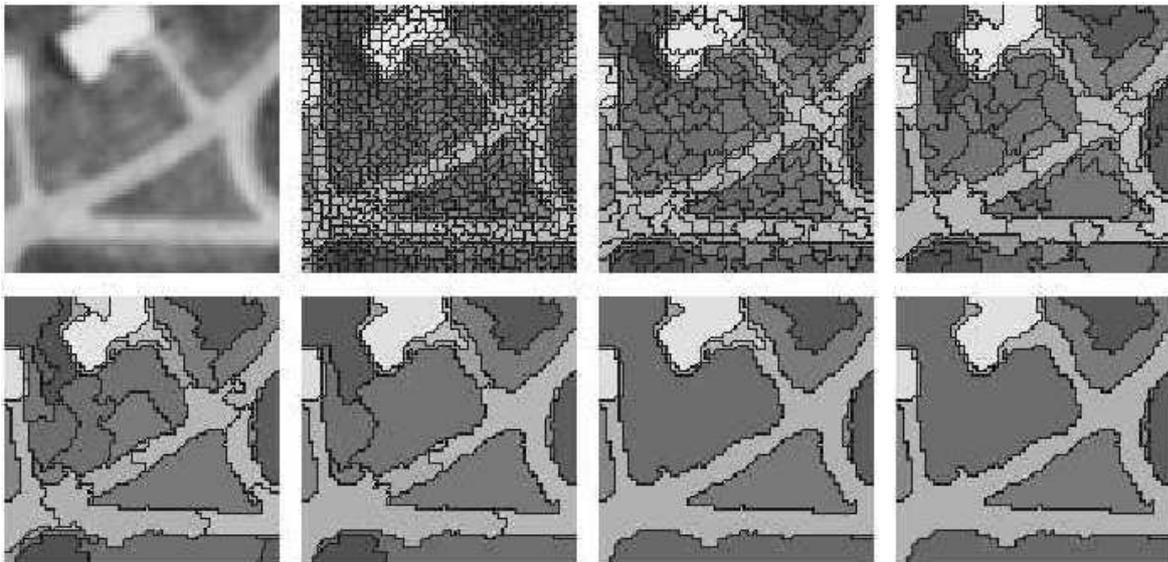


FIGURE 3.7 – Pyramide de graphe (stochastique) où les simplifications successives provoquent des regroupements entre régions [Bertolino, 1995].

En pratique, diverses applications découlent de ces structures pyramidales (linéaires, morphologiques, géométriques, ou de graphe) [Segall et al., 1996; Wright and Acton, 1997], dont l'approche morphologique a récemment été investiguée dans le domaine de la télédétection [Flouzat et al., 2001; Laporterie et al., 2002; Laporterie, 2002].

### 3.1.2 Ondelettes

Historiquement, la transformée en ondelettes est apparue en géophysique, au début des années 1980, pour l'analyse des signaux sismiques [Morlet et al., 1982a,b], et a été formalisée quelques années plus tard par Grossman and Morlet [1984] et Goupillaud et al. [1984]. Les ondelettes ont trouvé là une impulsion initiale fulgurante puis un terrain propice à un remarquable essor dans les communautés du traitement du signal et des mathématiques. C'est au sein de ces communautés que des développements théoriques et appliqués majeurs ont eu lieu ces vingt dernières années. Des avancées significatives ont notamment été faites par Daubechies [1988, 1992], Mallat [1989b,c], Meyer [1990, 1992], Chui [1992b,a] et Holscheinder [1995]. Par la diversité de leurs potentialités, les transformées en ondelettes séduisent scientifiques, ingénieurs et mathématiciens.

Le "besoin" des ondelettes s'est fait ressentir en remarquant que la transformée de Fourier perd, lors de la projection sur les sinusoides, la notion de localisation en temps.

Une première étape fut réalisée par Gabor [1946], qui eut l'idée de décomposer le signal d'une durée  $T$  en sections de temps  $t$  et ensuite d'y appliquer la transformée de Fourier. Mais le temps  $t$  étant fixé, on ne pouvait pas étudier des phénomènes ayant des échelles de temps différents.

La dernière étape fut la création des ondelettes.

L'ondelette est une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  (ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$  de carré intégrable) qui répond à une condition d'*admissibilité*. Cela permet respectivement qu'elle soit localisée aussi bien en temps qu'en fréquence (ou en échelle, la fréquence de l'ondelette étant liée à l'échelle). Cette condition d'admissibilité étant relativement souple, un grand nombre de fonctions peuvent être utilisées. Aussi impose-t-on souvent des contraintes supplémentaires de régularité, de décroissance rapide ou de compacité suivant les besoins [Meyer, 1990].

La transformée en ondelettes remplace alors les sinusoides de la transformée de Fourier par une famille (formant une base de  $L^2(\mathbb{R})$ ) de translations (liées au temps) et dilatations (liées à l'échelle) d'une même fonction analysante, l'ondelette (dite mère).

Explicitement, la transformée en ondelettes  $TO$  d'une fonction  $f$  est définie de la manière suivante :

$$TO(f)(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left( \frac{x-b}{a} \right) dx \quad (3.1)$$

Cette transformation est vue comme une projection de la fonction  $f$  sur une *base* (de  $L^2(\mathbb{R})$ ) de fonctions analysantes  $\psi_{a,b}$  comme suit :

$$TO(f)(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_{a,b}^*(x) dx \quad \text{avec} \quad \psi_{a,b}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left( \frac{x-b}{a} \right) \quad (3.2)$$

La formule (3.1) dépend des réels  $a$  (facteur d'échelle) et  $b$  (facteur temporel) qu'on peut faire varier continûment : on parle alors de transformée en ondelettes continue. De par cet aspect, la transformée en ondelettes continue telle qu'elle est définie est redondante, c'est à dire que l'on obtient plus de coefficients d'ondelettes ( $TO(f)(a, b)$ ) qu'il n'en est nécessaire pour décrire le signal de manière exhaustive. Ceci résulte du fait que la base d'ondelettes n'est pas orthogonale. Cette redondance d'informations n'est pas toujours adaptée, notamment pour des problèmes tels que la compression, mais peut être fondamentale dans certains domaines [Coulibaly, 1992]. L'intérêt est alors de discrétiser ces paramètres  $a$  et  $b$ . En posant  $a = a_0^m$  et  $b = nb_0a_0^m$ , avec  $a_0, b_0, m, n \in \mathbb{Z}$ , on obtient une transformée en ondelettes discrète :

$$TO(f)(m, n) = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^* \left( \frac{x}{a_0^m} - nb_0 \right) dx \quad (3.3)$$

Pour ce type de transformée discrète, les familles d'ondelettes (généralement normalisées dans  $L^2(\mathbb{R})$ ) peuvent être redondantes [Daubechies, 1988] ou non [Meyer, 1987; Mallat, 1989d,b], c'est-à-dire formant une base orthonormale ou non.

En choisissant  $a_0 = 2$  et  $b_0 = 1$ , on parle de transformée dyadique (Ex. 3.1.2). Pour cette transformée, Mallat [1989a] a introduit un algorithme de calcul récursif très rapide et bien adapté pour l'ordinateur, à l'aide de bancs de filtres.

Le choix de l'ondelette adaptée n'est pas aisé. Il convient de bien cerner le problème à étudier et d'identifier le type de transformée à utiliser (continue ou discrète). On ne peut donc pas parler d'ondelette "idéale" adaptée à tous les cas. A chaque cas particulier correspond une ondelette particulière à déterminer.

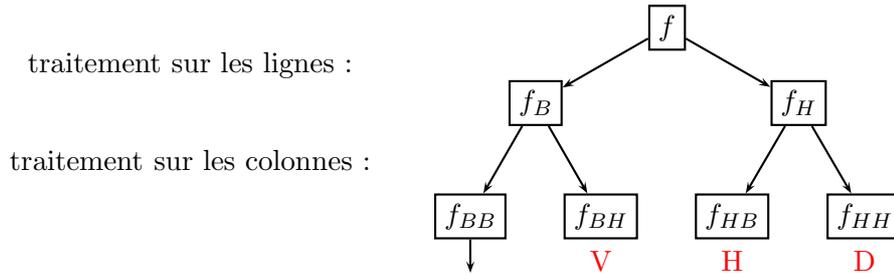
Certaines ondelettes sont cependant particulièrement populaires :

- ondelettes continues :
  - ondelette de Morlet [Morlet et al., 1982b] (régulière avec un caractère directionnel)
  - ondelette Sombrero ou "chapeau mexicain" (issue de la dérivée seconde de la gaussienne, donc adaptée à la détection de discontinuités)
- ondelettes discrètes :
  - Haar (à support compact et facile à implémenter)
  - Meyer [Meyer, 1990] (régulière)
  - Battle-Lemarié [Lemarié, 1988] (à localisation exponentielle)
  - Daubechies [Daubechies, 1988, 1992] (à support compact avec choix de la régularité voulue)
  - Cohen [Cohen et al., 1992] (bi-orthogonale, permettant une reconstruction à partir d'une seconde base d'ondelettes)

**EXEMPLE 3.2** – Transformée dyadique par ondelettes

[Mallat, 1989a]

La transformée en ondelettes dyadique peut être implémentée par un banc de filtres comprenant un filtre passe-bas 1D (B) et un filtre passe-haut 1D (H), et un sous-échantillonnage. Les filtres étant associés à une ondelette mère. Dans le cas des images, le filtrage est réalisé itérativement sur les lignes et colonnes de l'image, afin d'extraire les détails horizontaux **H**, verticaux **V**, diagonaux **D** ainsi que l'image "approximée". Cette transformée dyadique est alors réitérée sur cette dernière image (algorithme pyramidal), jusqu'à la résolution souhaitée (Fig. 3.8).



**FIGURE 3.8** – Transformées dyadiques par ondelettes de Haar réalisées sur l'image 'Lena'. Deux itérations successives sont représentées, révélant les images de détails horizontaux, verticaux, diagonaux et l'image simplifiée, aux résolutions correspondantes.

Il existe de nombreuses méthodes permettant d'effectuer la transformée en ondelettes, chacune se différenciant des autres soit par le type de l'ondelette mère employée, soit par la méthode d'implémentation de la transformée, suivant le type de traitement effectué.

La liste suivante expose quelques variantes de type d'ondelettes :

- les ondelettes orthogonales et bi-orthogonales : ce sont les ondelettes classiques. Elles s'implémentent par des filtres miroirs conjugués ou à reconstruction parfaite.
- les paquets d'ondelettes : les paquets d'ondelettes permettent de décomposer le signal sur un grand nombre de bases et de choisir au sens d'un certain critère, celle qui représente au mieux le signal.
- ondelettes directionnelles [Murenzi, 1990; Antoine et al., 1993] : elles permettent d'analyser les caractéristiques d'une fonction dans une direction donnée.

- les bases de cosinus locaux [Malvar, 1990; Coifman and Meyer, 1991] : elles permettent une analyse fréquentielle précise sur de fenêtres adaptées à la fréquence en conservant les avantages de la transformée discrète.
- les ondelettes multiples [Goodman et al., 1993; Chui and Lian, 1996] : l'idée n'est plus d'utiliser une fonction fixe que l'on va translater et dilater, mais plutôt un nombre fini de fonctions. Cette méthode permet d'obtenir des combinaisons de propriétés utiles qui seraient impossibles avec les ondelettes classiques.
- le 'lifting scheme' [Sweldens, 1999] : on abandonne ici complètement l'idée de translation et de dilatation. Cela fournit une grande flexibilité pour le développement d'ondelettes non linéaires.
- 'ridgelets' [Candes, 1999] : adaptées aux contours de l'image.
- 'curvelets' [Candes and Donoho, 1999] : représentation adaptée aux fonctions régulières par morceaux.
- ondelettes morphologiques [Heijmans and Goutsias, 2000b,a] : on utilise ici la morphologie mathématique dans le but de développer des ondelettes basées sur des filtres non-linéaires.
- ondelettes géométriques ('bandelettes') : décomposition dans une base d'ondelettes anisotropes adaptée à la géométrie [Le Pennec and Mallat, 2004].

Les applications de cette théorie ont largement été étudiées pour la résolution de nombreux problèmes d'imagerie : déconvolution, codage, compression, extraction de structures, détection de contours, fusion, débruitage [Bakshi, 1999].

Dans la prochaine sous-section, un troisième type de représentation multi-échelle est exposé : les scale-spaces.

### 3.1.3 Scale-spaces

Witkin [1983] a introduit le terme de filtrage multi-échelle et proposé une méthode d'analyse de l'image dans ce contexte. Il a ainsi initié les représentations multi-échelles de type scale-space en constatant une ambiguïté introduite par la notion d'échelle : le processus physique de génération des signaux ou des images agit sur une multitude d'échelles, dont aucune n'est intrinsèquement plus intéressante ou plus importante. Witkin propose donc de faire varier le paramètre d'échelle de manière continue, de suivre les extrema locaux, et d'identifier les points singuliers pour lesquels de nouveaux extrema apparaissent. Le suivi multi-échelle des extrema peut s'effectuer des échelles élevées vers les échelles faibles (coarse-to-fine tracking). Cette proposition est justifiée par deux propriétés de l'évolution multi-échelle de l'image : simplification de l'image et délocalisation des extrema.

Par suite, Koenderink [1984] a introduit la notion de causalité qui stipule que les caractéristiques de l'image à une échelle grossière sont toujours issues de ces caractéristiques à une échelle plus fine. Koenderink applique ce concept aux extrema de l'image pour en déduire l'unicité du noyau Gaussien pour une représentation multi-échelle linéaire des images, sous certaines conditions.

Ce principe de causalité est aussi étudié et formalisé dans [Lindeberg, 1990, 1994a, 1996].

Les idées directrices des travaux de Witkin et Koenderink sont à la base de ce type d'approche multi-échelle. La construction de ces 'scale-spaces' (représentations multi-échelles par simplification) peut-être basée sur différents types d'opérateurs :

- les filtres gaussiens [Witkin, 1983; Koenderink, 1984; Lindeberg and Garding, 1994],
- les filtres morphologiques élémentaires [Jackway, 1992a; Kyeong-Ryeol and Chung-Nim, 1996],
- les tamis [Bangham et al., 1996c; Hendriks and Vliet, 2000],
- les nivellements [Meyer and Maragos, 1999],
- les filtres par diffusion anisotrope [Perona and Malik, 1990; Florack et al., 1995],
- les courbes de niveaux [Sethian, 1996].

Les scale-spaces ont par ailleurs été étudiés d'un point de vue algébrique [Boomgaard and Heijmans, 2000; Heijmans and Boomgaard, 2000], topologique [Florack and Kuijper, 2000] et géométrique [Romeny, 1999].

Ci-après quelques types de scale-spaces, linéaires ou non linéaires, sont présentés.

### Scale-spaces linéaires

L'analyse multi-échelle proposée par Witkin [1983] est de considérer un paramètre d'échelle continu puis d'utiliser les échelles élevées pour identifier les structures afin de les suivre jusqu'aux échelles fines pour obtenir leurs localisations précises. Une représentation arborescente de l'analyse multi-échelle permet ensuite d'identifier et de suivre les structures intéressantes.

L'exemple 3.3 expose l'étape de filtrage multi-échelle fournissant la représentation d'une image à différentes résolutions.

---

#### EXEMPLE 3.3 – Linear Gaussian Scale-Space

[Witkin, 1983]

Cet algorithme est basé sur des convolutions par des gaussiennes de noyau de taille croissante :

$$G(x, s) = f(x) * g(x, s) \quad (3.4)$$

où  $g$  est une gaussienne d'écart-type  $\sigma = \sqrt{s}$  paramétré par  $s$  représentant l'échelle d'analyse.

Une illustration de cette représentation par scale-space est donnée et comparée à un autre type de scale-space (non-linéaire) dans la figure 3.10.

---

### Scale-spaces morphologiques

Les scale-spaces morphologiques, de type non linéaire, sont réalisées à l'aide d'opérateurs morphologiques tels que les couples dilatation/érosion (Ex. 3.4), les couples fermeture/ouverture (Ex. 3.5), les nivellements [Meyer and Maragos, 1999], ... respectant bien les axiomes de simplification et de causalité.

**EXEMPLE 3.4** – Scale-space par dilatation/érosion

[Jackway and Deriche, 1996]

Le filtrage réalisé est de type érosion/dilatation ( $\ominus/\oplus$ ) avec des fonctions structurantes dont le support spatial est fonction de l'échelle :

$$F(x, s) = \begin{cases} (f \oplus g_s)(x) & \text{si } s > 0 \\ f(x) & \text{si } s = 0 \\ (f \ominus g_s)(x) & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $g_s(x) = \|x\|^2 s^{-2}$ .

**EXEMPLE 3.5** – Scale-space par fermeture/ouverture

[Jackway, 1992b]

Même procédure que l'exemple 3.4 mais avec le couple d'opérateurs fermeture/ouverture ( $\bullet/\circ$ ) :

$$H(x, s) = \begin{cases} (f \bullet g_s)(x) & \text{si } s > 0 \\ f(x) & \text{si } s = 0 \\ (f \circ g_s)(x) & \text{si } s < 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Une illustration de ce scale-space est exposée dans la figure 3.9.



**FIGURE 3.9** – Scale-space morphologique par fermetures (ligne du haut)/ouvertures (ligne du bas) de l'image 'chalet' (image centrale).

Les différents scale-spaces morphologiques se différencient selon la propriété de connexité des opérateurs multi-échelles, induisant la délocalisation ou non des contours de l'image. Cette propriété est fondamentale pour une identification précise des différentes structures.

### Scale-spaces par diffusion anisotrope

La famille des scale-spaces linéaires peut, de manière équivalente, être définie [Koenderink, 1984] comme la solution de l'équation de diffusion isotrope de la chaleur :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u \quad (3.8)$$

où  $\operatorname{div}$  et  $\nabla$  indiquent respectivement les opérateurs divergence et gradient par rapport à la variable  $x$ .

Cette équation aux dérivées partielles (EDP) est équivalente au produit de convolution de l'image avec une fonction Gaussienne d'écart-type  $\sigma = \sqrt{2s}$  (Ex. 3.3).

La diffusion anisotrope s'inspire de la diffusion isotrope en introduisant a priori une *fonction de diffusion*  $c$  :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(c\nabla u) = c\Delta u + \nabla c \cdot \nabla u \quad (3.10)$$

L'addition de ce paramètre permet alors, à l'inverse de la diffusion isotrope, de lisser l'image de manière non uniforme. Si  $c$  est une fonction constante, cette équation se réduit alors au processus de diffusion isotrope.

Ces équations de diffusion anisotrope décrivent alors toute une famille de scale-spaces non linéaires, suivant le choix de la fonction de diffusion.

Dans ce cadre là, Perona and Malik [1990] proposent d'utiliser une fonction de diffusion  $c$  dépendante de la norme du gradient de l'image, choisie de manière à mieux préserver le contraste de l'image (Ex. 3.6).

---

**EXEMPLE 3.6** – Scale-space par diffusion anisotrope

[Perona and Malik, 1990]

---

La diffusion anisotrope d'une image  $f$  est représentée par l'EDP suivante :

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(g|\nabla u|\nabla u) \quad (3.12)$$

où  $g$  est une fonction positive, décroissante avec  $g(0) = 1$ .

Cette fonction  $g$  permet de limiter la diffusion dans les zones à fort gradient (Fig. 3.10).

---

Cependant, cette méthode de diffusion anisotrope [Perona and Malik, 1990] possède l'inconvénient majeur du choix extrinsèque de la fonction de diffusion. En outre, pour certaines fonctions  $g$  il n'existe pas de solution unique à l'équation aux dérivées partielles correspondante, rendant le problème mal posé et les solutions instables.

Différents auteurs [Nitzberg and Shiota, 1992; Catte et al., 1992; Whitaker and Pizer, 1993] se sont attachés à résoudre ce problème d'instabilité, en *régularisant* l'équation de diffusion anisotrope. Le principe (Ex. 3.7) est d'appliquer la fonction de diffusion non pas sur la norme du

gradient, mais plutôt sur la norme du gradient de l'image lissée.

---

**EXEMPLE 3.7** – Scale-space par diffusion anisotrope régularisée [Catté et al., 1992]

---

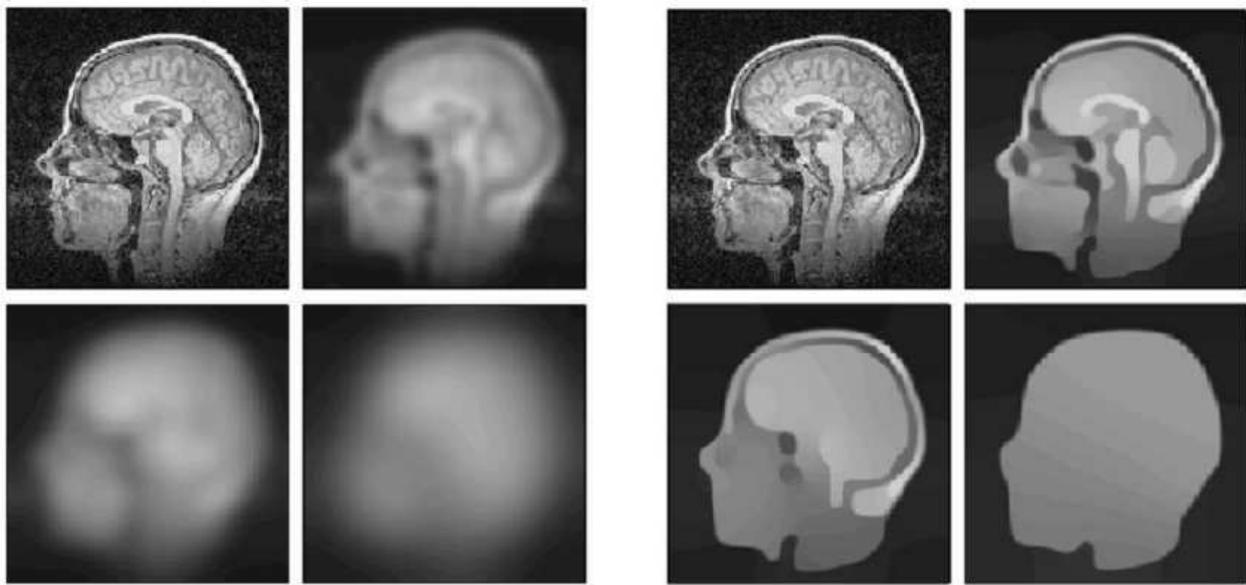
La diffusion anisotrope régularisée est représentée par l'EDP suivante :

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(g|\nabla G_\sigma * u|) \tag{3.14}$$

où  $G_\sigma$  dénote une Gaussienne d'écart-type  $\sigma$ .

---



(a) scale-space linéaire

(b) scale-space non-linéaire

**FIGURE 3.10** – Scale-spaces linéaire (a) et par diffusion anisotrope (b).

Alvarez et al. [1992] ont quant à eux étudié une classe d'EDP paraboliques (Ex. 3.8) qui généralise l'idée de diffusion anisotrope régularisée.

---

**EXEMPLE 3.8** – Scale-space par diffusion anisotrope généralisée [Alvarez et al., 1992]

---

La diffusion anisotrope généralisée est représentée par l'EDP parabolique suivante :

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(g|\nabla G_\sigma * u|)|\nabla u| \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \tag{3.16}$$

où  $G_\sigma$  dénote une Gaussienne d'écart-type  $\sigma$ .

---

Dans cette pensée de généralisation de la diffusion anisotrope, [Cottet and Germain \[1993\]](#) et [Weickert \[1994\]](#) proposent une approche par diffusion matricielle. Ce type d'approche requiert une matrice comme fonction de diffusion (Ex. 3.9), permettant de réorienter le champ de vecteurs issu du gradient.

---

**EXEMPLE 3.9** – Scale-space par diffusion anisotrope matricielle [\[Weickert, 1994\]](#)

---

Weickert propose d'utiliser une matrice  $D$  de diffusion possédant les mêmes vecteurs propres que le *tenseur de diffusion*, employé pour extraire l'orientation locale d'une image.

$$u(x, 0) = f(x) \tag{3.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \operatorname{div}(D\nabla u) \tag{3.18}$$

---

De nombreuses fonctions de diffusion (scalaires ou matricielles) ont été introduites et répertoriées dans [\[Weickert, 1994; Krissian, 2000\]](#).

Outre la diffusion anisotrope matricielle, [Weickert \[1998\]](#) s'est aussi intéressé aux schémas numériques associés aux EDP, jouant un rôle essentiel pour obtenir la solution recherchée. Pour cela, des modèles continu, semi-discret et discret sont introduits, et les propriétés d'existence, d'unicité et de régularité sont étudiées. Le but étant de passer du modèle continu au modèle discret, tout en maîtrisant les propriétés du processus de diffusion.

---

Après ces quelques éléments d'un état de l'art sur les représentations multi-échelles par pyramide, transformée en ondelettes et scale-space, la section suivante se propose de présenter une recherche bibliographique sur les transformations spatialement adaptatives.

## 3.2 Transformations spatialement adaptatives

Ce travail bibliographique est plus particulièrement focalisé sur les opérateurs de *filtrage*.

Dès le début du traitement d'image, le filtrage a constitué une activité de recherche importante. En général, toute étape de segmentation et d'analyse d'image nécessite un prétraitement de l'image, étape qui consiste, dans la majorité des cas, en un filtrage de l'image. Les propriétés demandées à un filtre d'image sont en général [\[Bolon, 1992\]](#) :

- réduction de bruit : effet de lissage destiné à renforcer l'homogénéité des pixels appartenant à la même région,
- préservation et bonne localisation des contours,
- rapidité de traitement.

Le plus souvent, les opérateurs utilisés pour filtrer l'image sont locaux [\[Jain, 1989\]](#). La caractéristique d'un opérateur local est que la valeur d'un pixel après filtrage est calculée en fonction des

valeurs des pixels qui se trouvent dans un voisinage spatial du pixel traité. Les premiers opérateurs locaux utilisés ont été les filtres linéaires [Jain, 1989; Pratt, 1991; Gonzalez and Woods, 1992] dont l'action revient à calculer la valeur finale  $g(i, j)$  de chaque pixel  $(i, j)$  de l'image  $f$  comme une combinaison linéaire des valeurs des pixels situés dans un voisinage spatial  $W$  spécifié et en général symétrique par rapport à son origine. Le calcul dans un cadre discret est le suivant :

$$g(i, j) = \sum_{(k, l) \in W} w_{kl} * f(i - k, j - l) \quad (3.19)$$

Les poids de la combinaison linéaire  $w_{kl}$ , appelés coefficients de filtre, ont des valeurs fixées a priori en fonction du but de l'opération (filtre passe-bas, passe-haut). Dans la plupart des cas, les résultats obtenus par de tels filtres ne sont pas satisfaisants à cause de leur caractère global et non-adaptatif. La réduction par filtrage est bonne dans les zones homogènes, où les variations de l'image sont dues principalement au bruit. Par contre, dans les zones caractérisées par des non stationnarités de l'image d'intérêt (zones de frontières entre régions), le fait de mélanger deux populations différentes de pixels donne un effet de flou qui est très dérangeant pour l'oeil humain.

Les chercheurs ont donc concentré leurs efforts vers le développement de nouvelles techniques de filtrage, non linéaires, qui répondent mieux aux besoins des applications. Dans le vaste domaine des filtres non linéaires, deux approches ont été particulièrement étudiées : les filtres d'ordre et les filtres adaptatifs. Les filtres d'ordre sont basés sur le calcul des statistiques d'ordre. Ils résultent de l'opération de tri sur les valeurs des pixels situés toujours dans un voisinage fixe du pixel traité. Pour en calculer la valeur filtrée, les statistiques d'ordre sont utilisées soit par elles-même (le cas le plus connu étant le filtre médian, qui ressort la valeur localisée au milieu de la suite des valeurs triées des pixels) soit dans des combinaisons linéaires avec des coefficients à valeur fixe (L-filtres [Pitas and Venetsanopoulos, 1990]), soit éventuellement par des traitements plus complexes [Tabiza, 1998]. Quant aux filtres adaptatifs, ils peuvent eux aussi être classifiés dans deux catégories :

- les filtres à poids adaptatifs : le caractère adaptatif provient de l'adaptation des poids,
- les filtres à voisinages variables ou adaptatifs : le caractère adaptatif vient de l'adaptation de la fenêtre d'analyse.

Les filtres à poids adaptatifs sont basés sur une combinaison linéaire des pixels voisins (Eq. 3.19), mais dont les poids  $w_{kl}$  ne sont plus constants; ils sont ajustés en fonction des valeurs des pixels localisés dans la fenêtre d'analyse, d'où le caractère non linéaire des filtres. Le plus cité de ces filtres à poids adaptatifs est le LLMMSEE (Locally Linear Minimum Mean-Squared Error Estimator - Estimateur Localement Linéaire au sens de l'Erreur Quadratique Moyenne) de Lee [1981] qui calcule la valeur filtrée d'un pixel comme une combinaison linéaire entre la moyenne des pixels dans le voisinage considéré et la valeur bruitée du pixel même. Les poids sont calculés adaptativement, en fonction des statistiques locales (moyenne, variance) de l'image bruitée et du bruit de façon à préserver les frontières tout en réduisant le bruit dans les zones uniformes. Il existe de nombreux ouvrages [Jain, 1989; Pitas and Venetsanopoulos, 1990; Cocquerez and Philipp, 1995] qui traitent le problème du calcul des poids des filtres adaptatifs en fonction des hypothèses que l'on fait sur le bruit qui perturbe l'image. Le principe général est de donner des poids faibles aux pixels qui

appartiennent à une population (au sens statistique) différente de celle du pixel courant, et de donner des poids importants aux pixels qui appartiennent à la même population (proviennent du même objet). L'idée sous-jacente est d'éviter le lissage des détails du filtre linéaire, en d'autres termes, de respecter la deuxième requête imposée aux filtres d'image.

Le caractère adaptatif peut aussi provenir de l'adaptation de la fenêtre de traitement, qui donnent naissance à deux classes de filtres (spatialement) adaptatifs qui sont particulièrement intéressants : les *filtres à voisinages variables* et les *filtres à voisinages adaptatifs*.

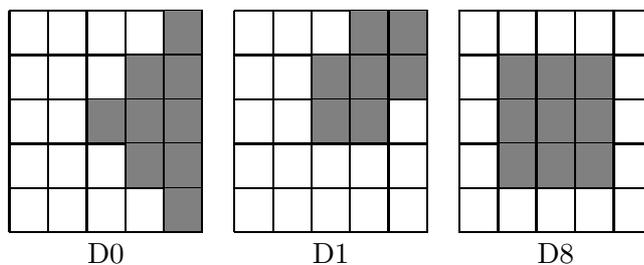
### 3.2.1 Filtrage à voisinages variables

L'adaptation se fait au niveau du voisinage pris en compte pour calculer la valeur d'un pixel. Le but est d'assurer la stationnarité des pixels, c'est-à-dire de ne sélectionner que les pixels qui appartiennent à la même population que le pixel traité; afin d'éviter le lissage des données utiles. L'exemple classique (Ex. 3.10) de filtre à voisinages variables est celui proposé par Nagao and Matsuyama [1979].

**EXEMPLE 3.10** – Filtre de Nagao

[Nagao and Matsuyama, 1979]

Le principe du filtre est de diviser la fenêtre d'analyse de dimension  $5 \times 5$  en neuf sous-masques.



D2, D4, D6 (resp. D3, D5, D7) sont déduits de D0 (resp. D1) par rotations de  $\frac{\pi}{2}$ .

Parmi ceux-ci, on choisit celui qui est le plus uniforme (l'uniformité étant évaluée à l'aide de la variance locale) et seuls les pixels du sous-masque détecté contribuent au calcul de la valeur filtrée du pixel central (en l'occurrence la moyenne) :

$$k|Var(k) = \min_i \{Var(i)\} \rightarrow G = Moy(k) \quad (3.20)$$

Un autre exemple (Ex. 3.11) de filtre à fenêtre variable, qui est basé sur le même principe que le filtre de Nagao, est le filtre de Lee amélioré [Lee, 1981].

**EXEMPLE 3.11** – Filtre de Lee amélioré

[Lee, 1981]

L'auteur propose une adaptation de la forme de la fenêtre de filtrage (initialement prévue de taille  $7 \times 7$ ) lorsqu'on détecte que celle-ci englobe une frontière. Dans ce but, la direction de la frontière est cherchée en calculant le gradient selon les huit directions principales et seuls les pixels de la demi-fenêtre délimitée par la frontière et comprenant le pixel courant sont utilisés pour le calcul de la valeur filtrée (en utilisant la formule LLMMSEE) de celui-ci.

---

Le principe du filtre à fenêtre rectangulaire adaptative (FFRA) de Song and Pearlman [1986], repris ensuite en d'autres contextes [Mahesh et al., 1990; Park et al., 1999], est d'utiliser comme voisinage d'un pixel un fenêtre rectangulaire de taille aussi grande que possible, tant que la zone d'image recouverte reste uniforme (Ex. 3.12).

**EXEMPLE 3.12** – Filtre à fenêtre rectangulaire adaptative

[Song and Pearlman, 1986]

Le principe du filtre est d'utiliser comme voisinage d'un pixel une fenêtre rectangulaire de taille aussi grande que possible. Initialisé à une dimension  $3 \times 3$ , le voisinage du pixel est augmenté itérativement dans les deux directions tant que la zone d'image recouverte reste uniforme. Au moment où un contour est détecté dans la fenêtre (c'est-à-dire que l'on décide que la zone n'est plus uniforme), on revient à la fenêtre antérieure (celle de plus grande taille pour laquelle on avait décidé que les données sont uniformes) et on l'utilise pour calculer des statistiques qui serviront à déduire la valeur filtrée du pixel central.

---

D'autres filtres entrant dans la catégorie des filtres à voisinages variables ont été développés [Lee, 1983; Lee and Kassam, 1985; Wu and Maître, 1992].

Pour tous ces filtres, il existe des contraintes imposées à la forme et/ou à la taille du voisinage utilisé [Gordon and Rangayyan, 1984; Salembier, 1992; Verly and Delanoy, 1993; Fejes and Vajda, 1994a,b; Vogt, 1994; Cheng and Venetsanopoulos, 2000]. Par opposition, ces contraintes n'existent plus avec les filtres à voisinages adaptatifs.

### 3.2.2 Filtrage à voisinages adaptatifs

Le principe du filtrage à voisinages adaptatifs (VA) a été énoncé par Paranjape et al. [1994b]. L'idée est de déterminer, pour chaque pixel de l'image, un voisinage adapté à son contexte local, de forme et de taille quelconques, la seule contrainte imposée étant celle de connexité. Puis, seule la valeur du pixel central, c'est-à-dire du pixel pour lequel on a déterminé le voisinage respectif, est modifié en fonction des valeurs des pixels à l'intérieur du voisinage.

Idéalement, le voisinage adaptatif d'un pixel devrait regrouper les pixels provenant uniquement de la même distribution, c'est-à-dire appartenant à la même région d'image, au même objet physique, que le pixel considéré. La détermination du voisinage adaptatif d'un pixel se fait à l'aide d'une procédure de croissance de région classique, utilisée en segmentation d'images [Whal, 1987]. De là provient l'appellation de *germe* utilisée pour le pixel courant. Il s'agit d'une procédure itérative, qui consiste à inspecter, dans un premier temps, les huit voisins directs  $s$  du germe  $p$ . Tous les voisins  $s$  qui respectent un certain critère d'uniformité par rapport au germe  $p$  sont agrégés au

voisinage adaptatif du germe. Puis tous les 8-voisins  $s$  des pixels déjà agrégés sont inspectés de la même manière et ainsi de suite. La procédure de croissance de région prend fin quand il n'y a plus de pixel connexe à la région qui respecte le critère d'agrégation. Quant au critère d'uniformité, son choix reste à faire en fonction de l'application envisagée. Lorsque le voisinage adaptatif d'un pixel a été déterminé, seules les valeurs des pixels agrégées seront utilisées pour déduire la valeur finale du germe. Plusieurs filtres ont ainsi été développés : filtre moyen à VA (Ex. 3.13), filtres alternés séquentiels à VA (Ex. 3.14), ...

---

**EXEMPLE 3.13** – Filtre moyen à voisinages adaptatifs [Paranjape et al., 1994b]

---

Pour chaque pixel  $x$ , on construit par croissance de région sur l'image  $f$  son voisinage adaptatif,  $R_f(x)$  dépendant d'un paramètre d'homogénéité  $m$  :

$$R_f(x) = \{y; x \overset{m}{\leftrightarrow}_f y\} \quad (3.21)$$

où  $x \overset{m}{\leftrightarrow}_f y \Leftrightarrow \exists$  un chemin  $P_L(x_0, x_L)$  avec  $x_0 = x$  et  $x_L = y$   
 tel que  $|f(x_i) - f(x_0)| \leq m$  pour  $i = 1, \dots, L$

La nouvelle valeur  $g(x)$  du pixel  $x$  est alors la valeur moyenne des pixels appartenant à  $R_f(x)$  :

$$g(x) = \frac{1}{\#R_f(x)} \sum_{y \in R_f(x)} f(y) \quad (3.22)$$


---

**EXEMPLE 3.14** – Filtres alternés séquentiels à voisinages adaptatifs [Braga Neto, 1996]

---

L'idée est de construire des filtres alternés séquentiels prenant en compte des voisinages adaptatifs comme éléments structurants. Pour chaque pixel  $x$ , on construit par croissance de région sur l'image  $f$  un système de voisinages adaptatifs :

$$\left\{ R_f^m(x) = \{y; x \overset{m}{\leftrightarrow}_f y\} \right\}_{m>0} \quad (3.23)$$

où  $x \overset{m}{\leftrightarrow}_f y \Leftrightarrow \exists$  un chemin  $P_L(x_0, x_L)$  avec  $x_0 = x$  et  $x_L = y$   
 tel que  $|f(x_i) - f(x_0)| \leq m$  pour  $i = 1, \dots, L$

Pour chaque pixel  $x$ , on définit une famille d'éléments structurants adaptatifs :  $\{V_i(x)\}_{i \geq 0}$  :

$$\begin{cases} V_0(x) &= B + x \\ V_i(x) &= R_f^{t_i}(x) \cup (B + x) \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $(t_i)_{i>0}$  est une suite croissante d'entiers naturels et  $B$  une boule prédéterminée.

On peut alors construire des filtres alternés séquentiels à voisinages adaptatifs :

$$\begin{cases} OC_n^a &= OC_{V_n} OC_{V_{n-1}} \dots OC_{V_1} \\ CO_n^a &= CO_{V_n} CO_{V_{n-1}} \dots CO_{V_1} \end{cases} \quad (3.25)$$

où l'opérateur morphologique  $OC_X$  (resp.  $CO_X$ ) représente un open-close (resp. un close-open) avec l'élément structurant  $X$ .

---

Le principe des voisinages adaptatifs a été appliqué pour des tâches de filtrage de bruit [Paranjape et al., 1994b,a; Dias and Rangayyan, 1997; Rangayyan et al., 1998; Rangayyan and Das, 1998; Ciuc et al., 2000], restauration [Rabie et al., 1994], et amélioration d'image [Gordon and Rangayyan, 1984; Paranjape et al., 1992][Rangayyan et al., 1997; Buzuloiu et al., 2001].

Certains auteurs [Ritter et al., 1990; Ritter, 1991] ont introduit un cadre mathématique spécifique (image algebra) qui permet la définition de filtres spatialement adaptatifs basés sur des opérations utilisant des structures algébriques [Ritter and Wilson, 1996; Hawkes, 1997].

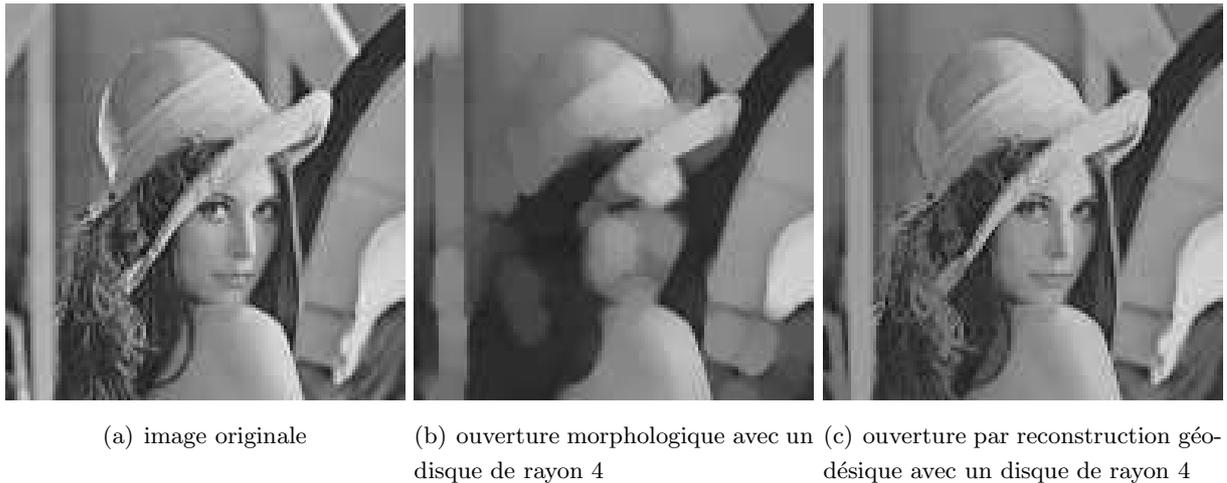
L'adaptation de la fenêtre d'analyse d'un filtre spatialement adaptatif peut aussi être considérée en limitant l'opérateur à une région d'intérêt, faisant intervenir la notion de géodésie.

### 3.2.3 Filtrage géodésique

Pour certaines applications de traitement d'image, il est intéressant de restreindre le champ d'action d'une transformation à des régions d'intérêt. En morphologie mathématique, cette notion intuitive a entraîné la création d'une nouvelle classe de transformations : les transformations géodésiques.

La géodésie a vu le jour pour le traitement des images binaires, en utilisant le concept de distance géodésique [Lantuéjoul and Beucher, 1980, 1981], et s'est étendu sur des images en tons de gris [Beucher, 1990; Grimaud, 1991].

Contrairement aux transformations euclidiennes qui agissent sur l'ensemble de l'image, les transformations géodésiques ne s'appliquent qu'à l'intérieur de zones prédéterminées dont l'ensemble est appelé : masque géodésique. Le fait d'utiliser un tel masque implique un certain affranchissement de la morphologie de l'élément structurant. En effet, les opérateurs géodésiques présentent l'avantage de s'adapter spatialement aux structures de l'image. Par exemple (Fig. 3.11), l'ouverture classique filtre en général l'image de manière inadaptée (les contours sont souvent fortement altérés), alors que l'ouverture géodésique (par reconstruction) préserve les contours exacts de l'image dont on a au moins gardé une partie.



**FIGURE 3.11** – Ouverture vs. ouverture géodésique (par reconstruction) de l'image 'Lena'.

Les transformations de morphologie mathématique les plus évoluées font presque toutes appel à la géodésie.

### 3.3 Structures d'images adaptées aux intensités

Pour traiter de manière efficace des images d'intensité, il est nécessaire de représenter les images dans des structures mathématiques (généralement de nature vectorielle) rigoureuses et physiquement pertinentes. En développant des techniques de traitement d'image, [Stockham \[1972\]](#), [Jain \[1981\]](#), [Granrath \[1981\]](#) et [Marr \[1982\]](#) ont reconnu qu'un modèle de traitement d'image devait satisfaire aux conditions suivantes :

- il doit être basé sur un modèle de formation d'image physiquement et/ou psychophysiquement pertinent. En effet, les images ne sont pas toutes basées sur les mêmes principes de formation. Il existe plusieurs types d'images parmi lesquelles : les images obtenues en lumière transmise, les images obtenues en lumière réfléchie, les images issues du système visuel humain plus simplement appelées images visuelles , ...
- ses structures et opérations mathématiques doivent être cohérentes avec la nature physique des images, c'est-à-dire avec les lois de formation d'image auxquelles le modèle physique obéit,
- ses opérations doivent être informatiquement simulables,
- il doit être pratiquement efficace dans le sens où il doit permettre de développer des applications répondant à des problèmes concrets.

En étudiant les images ou les systèmes d'imagerie non-linéaires, tels que les images acquises en lumière transmise [[Dainty and Shaw, 1974](#)] ou le système humain de la perception visuelle [[Cornsweet, 1970](#)], il n'est pas rigoureux [[Jourlin and Pinoli, 1987](#)] d'utiliser la définition usuelle de la linéarité, et par conséquent de l'addition usuelle  $+$  et de la multiplication scalaire  $\times$ . En effet, l'addition classique  $+$  n'est pas une solution satisfaisante pour des processus de formation d'image multiplicatif ou convolutif [[Oppenheim, 1968](#)]. Les raisons sont que les opérations

usuelles d'addition et de multiplication scalaire ne sont pas compatibles avec les lois de combinaison et d'amplification auxquelles obéissent les modèles physiques et/ou psychophysiques de formation d'image [Stockham, 1972; Jourlin and Pinoli, 1987]. Au regard des images numériques, le problème réside dans le fait que l'addition usuelle directe de deux valeurs d'intensité peut se retrouver en dehors de l'intervalle borné d'échelle de gris des images, induit par la numérisation, alors qu'elle devrait être à l'intérieur pour des raisons physiques ou pratiques [Rosenfeld, 1969]. Par conséquent, bien que le modèle classique de traitement d'image - *Classical Linear Image Processing (CLIP)* framework [Lim, 1990] ait joué un rôle fondamental en traitement d'image, ce n'est pas nécessairement le bon choix [Marr and Hildreth, 1980; Deng et al., 1995].

### 3.3.1 Modèles vectoriels GLIP

De telles considérations ont été prises en compte indirectement [Oppenheim, 1965, 1967, 1968; Stockham, 1968] sur les systèmes non-linéaires, en utilisant la notion d'homomorphie. Le principe est de ne pas étudier directement les images non-linéaires mais de les transposer dans un cadre algébrique classique par l'intermédiaire d'un homomorphisme. Ces notions ont mené Oppenheim [1967] à introduire des modèles linéaires généralisés de traitement d'image - *General Linear Image Processing (GLIP)* frameworks, en utilisant des concepts et structures provenant de l'*algèbre linéaire abstraite* [Lang, 1966; Hafstrom, 1967; Strang, 1976]. Ces modèles sont représentés par un espace vectoriel avec ses lois d'addition vectorielle généralisée  $\oplus$  et de multiplication scalaire généralisée  $\otimes$ . Les structures GLIP offrent la possibilité d'explorer des opérations autres que l'addition usuelle et la multiplication scalaire, avec parfois une formulation directe (sans homomorphisme) de ces lois vectorielles.

En accord avec ces concepts d'algèbre abstraite, trois modèles GLIP ont particulièrement été étudiés et comparés :

- le modèle multiplicatif - *Multiplicative Homomorphic Image Processing (MHIP)* framework [Oppenheim, 1968],
- le modèle log-ratio - *Log-Ratio Image Processing (LRIP)* framework [Shvayster and Peleg, 1983, 1987],
- le modèle logarithmique - *Logarithmic Image Processing (LIP)* framework [Jourlin and Pinoli, 1987, 1988].

Initialement, le modèle MHIP a été conçu pour le traitement d'images multipliées, tandis que le modèle LRIP a été introduit pour résoudre le problème des dépassements des valeurs limites, associé à beaucoup de méthodes de traitement d'image, alors que l'approche LIP a été développée pour traiter des images prenant des valeurs d'intensité bornées. Ces trois modèles, ainsi que le modèle CLIP seront exposés dans le chapitre suivant.

### 3.3.2 Modèles vectoriels plus spécifiques

Néanmoins, l'espace vectoriel représentant un modèle GLIP est une structure mathématique assez pauvre puisqu'elle ne permet seulement que de décrire la manière dont les images se combinent et s'amplifient. En addition à l'algèbre abstraite, il est donc nécessaire de prendre en compte d'autres champs mathématiques tels que la topologie [Kelley, 1955; Choquet, 1966; Jänich, 1983] (pour

les notions de voisinage, limite, continuité, ...), l'analyse fonctionnelle [Kantorovitch and Akilov, 1981; Dunford and Schwartz, 1988] (pour des opérations de différentiation, intégration, convolution, corrélation, ...), la théorie des ensembles ordonnés [Luxemburg and Zaanen, 1971], [Kantorovitch and Akilov, 1981] (pour les notions de positivité, monotonie, module, ...) ... Ces structures induisent différents concepts, relation d'ordre, module, métrique, norme, produit interne [Pinoli, 1991, 1992a], qui doivent être rigoureusement définis et en adéquation avec le modèle vectoriel considéré.

### 3.4 Synthèse bibliographique

Suite à ce travail bibliographique sur les approches multi-échelles, les transformations spatialement adaptatives et les structures d'images adaptées aux intensités, un bilan est établi en présentant les avantages et inconvénients de ces concepts.

#### Approches multi-échelles

Les pyramides linéaires, morphologiques et géométriques (dites pyramides régulières) présentent l'avantage de réduire l'influence du bruit, de rendre les traitements indépendants de la résolution (invariance par changement d'échelle) et de réduire les coûts de calcul (facteur d'échantillonnage constant). Cependant ces représentations pyramidales sont sensibles aux translations et rotations, sont peu adaptées aux formes des objets (fenêtre d'analyse fixée à chaque niveau d'échelle) et ne garantissent pas la préservation de la connexité. À l'inverse, les pyramides de graphe simple (stochastiques, adaptatives, à base arborescente et floues) ont une plus grande capacité d'adaptation aux structures de l'image mais possède une description des relations entre les régions assez pauvre (l'utilisation d'un graphe simple oblige à coder un ensemble déconnecté de frontières entre les régions par une seule arête). Ce dernier inconvénient est résolu par l'intermédiaire des pyramides de graphes duaux qui permettent de coder les propriétés des noeuds et des faces de l'arbre pyramidal. Cette approche nécessite néanmoins le stockage et la mise à jour de deux structures de données. Les transformées en ondelettes permettent une représentation multi-échelle dans un cadre mathématique rigoureux et dont certaines techniques sont adaptées à un traitement informatique (ondelettes dyadiques, paquets d'ondelettes, lifting scheme). De manière générale, la transformée en ondelettes n'est pas liée à une fonction prédéfinie comme l'est la transformée de Fourier qui utilise les fonctions sinus et cosinus exclusivement. Ainsi, le choix de l'ondelette (ou des ondelettes) utilisée(s) pour l'analyse pourra dépendre de l'application envisagée. Cependant, ce choix peut être vu comme un inconvénient majeur de l'approche dans le sens où il nécessite une connaissance a priori des informations radiométriques, morphologiques, texturales, ... des structures de l'image. De plus la construction d'une ondelette particulière, adaptée à l'application envisagée, reste une exigence parfois contraignante, par rapport à la rigueur mathématique de l'approche, et par conséquent à son implémentation informatique.

Quant aux scale-spaces, ils présentent l'avantage d'utiliser un paramètre d'échelle continu permettant théoriquement une analyse multi-échelle plus adaptée. Cependant, les approches linéaires et

morphologiques sont généralement indépendantes du contexte local de l'image : le même élément structurant est utilisé globalement à chaque échelle d'analyse. Ce choix nécessite donc un a priori sur l'image à traiter. Les approches par diffusion anisotrope et courbes d'évolution pallient à ce problème mais nécessitent la construction parfois difficile de schémas numériques (associés aux EDP) vérifiant certaines propriétés utiles pour l'obtention de la solution recherchée. De plus, le choix de la fonction de diffusion reste extrinsèque à l'application envisagée.

### **Transformations spatialement adaptatives**

Les filtres à voisinages variables s'adaptent assez bien au contexte local de l'image avec certaines contraintes de forme ou de taille imposées à la fenêtre d'analyse. Ces conditions permettent une implémentation informatique plus aisée mais limitent le potentiel adaptatif de tels opérateurs.

A l'inverse, les filtres spatialement adaptatifs n'ont aucune contrainte imposée si ce n'est celle de connexité. Ainsi les fenêtres d'analyse coïncident localement aux structures de l'image et procurent un filtrage efficace, au prix d'un temps de calcul plus onéreux.

Quant aux filtres géodésiques, ils ont l'avantage de s'adapter au contexte de l'image, mais ils nécessitent le choix d'un masque géodésique qui demande généralement une connaissance a priori de l'image.

### **Structures d'images adaptées aux intensités**

Les structures GLIP offrent l'avantage de prendre en considération la nature physique et/ou psychophysique de l'image. Cela permet d'avoir une certaine adaptation des opérateurs aux intensités de l'image étudiée.

Les modèles purement homomorphiques (sans formulation directe des opérations vectorielles) permettent d'avoir un espace de représentation algébriquement équivalent tout en utilisant les lois usuelles. Cependant, ces approches présentent l'inconvénient au niveau théorique de ne pas favoriser, voire d'inhiber, l'émergence ou la compréhension de concepts spécifiques, et d'obliger en pratique le double changement d'espace de représentation par l'intermédiaire de l'homomorphisme (direct et inverse).

A l'inverse, les modèles possédant une formulation directe de leurs opérations vectorielles sont beaucoup plus avantageux informatiquement. Cependant, la définition d'opérateurs avancés demande une spécification de la structure considérée qui n'est pas toujours aisée mathématiquement.

Ces critiques (positives et négatives) spécifiques, sur les approches multi-échelles, les transformations spatialement adaptatives et les structures d'images adaptées aux intensités conduisent à une synthèse bibliographique générale résumant les limites des approches existantes :

**SYNTHESE BIBLIOGRAPHIQUE GENERALE :**

Face à la problématique posée, ce travail bibliographique a révélé les limites des représentations multi-échelles usuelles (pyramides, ondelettes, ...). D'une part, la taille et/ou la forme des fenêtres d'analyse sont généralement, pour une échelle donnée, déterminées et fixées *a priori* pour tous les points de l'image. Par conséquent, la majorité des opérateurs multi-échelles ne sont pas satisfaisants puisque les échelles restent *extrinsèques* (indépendantes) aux structures locales de l'image, relatives aux informations radiométriques, fréquentielles, morphologiques ou texturales que l'on cherche à extraire. Une décomposition multi-échelle basée sur de tels opérateurs conduit à une identification et une localisation souvent insuffisantes des différentes structures présentes dans l'image. Des approches spatialement adaptatives et plus *intrinsèques* ont été introduites (diffusion anisotrope) mais elles comportent encore des *a priori* (fonction de diffusion).

D'autre part, les opérateurs multi-échelles sont généralement indépendants des propriétés physiques (principe de formation d'image, ...) et/ou psychophysiques de l'image (perception visuelle humaine, ...), liées aux intensités de l'image, induisant un manque de pertinence des représentations multi-échelles induites.

Cette synthèse bibliographique a permis la définition précise du sujet de thèse : Traitement d'Image à Voisinages Adaptatifs Généraux (TIVAG).

La partie suivante expose certains concepts introduits dans l'approche TIVAG proposée.



Deuxième partie

## **CONCEPTS NECESSAIRES**



## SOMMAIRE [Deuxième partie]

---

<b>4</b>	<b>Modèles vectoriels généralisés</b>	<b>55</b>
4.1	Espaces vectoriels ordonnés GLIP . . . . .	55
4.2	Les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP . . . . .	56
4.2.1	Motivation initiale . . . . .	57
4.2.2	Structure vectorielle . . . . .	57
4.2.3	Importance d'une relation d'ordre . . . . .	58
4.2.4	Tableau récapitulatif des modèles . . . . .	58
4.2.5	Comparaisons théoriques et intérêts pratiques . . . . .	58
4.2.6	Exemple d'application en rehaussement d'image . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Morphologie mathématique</b>	<b>61</b>
5.1	Représentation des images . . . . .	62
5.2	Morphologie binaire . . . . .	62
5.2.1	Opérations ensemblistes de Minkowski . . . . .	62
5.2.2	Opérateurs binaires élémentaires . . . . .	63
5.3	Morphologie plate . . . . .	66
5.3.1	Représentation d'une image par sections binaires . . . . .	66
5.3.2	Opérateurs plats élémentaires . . . . .	66
5.4	Morphologie à tons de gris . . . . .	68
5.4.1	Opérations numériques de Minkowski . . . . .	68
5.4.2	Opérateurs à tons de gris élémentaires . . . . .	68

---



# CHAPITRE 4

## Modèles vectoriels généralisés

\_\_\_\_\_ Oliver Wendell Holmes Jr.

*Aucune généralisation n'est totalement vraie, même pas celle-ci.*

\_\_\_\_\_

### SOMMAIRE

---

<b>4.1</b>	<b>Espaces vectoriels ordonnés GLIP</b>	<b>55</b>
<b>4.2</b>	<b>Les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP</b>	<b>56</b>
4.2.1	Motivation initiale	57
4.2.2	Structure vectorielle	57
4.2.3	Importance d'une relation d'ordre	58
4.2.4	Tableau récapitulatif des modèles	58
4.2.5	Comparaisons théoriques et intérêts pratiques	58
4.2.6	Exemple d'application en rehaussement d'image	58

---

Ce chapitre introduit la notion d'espace vectoriel ordonné GLIP qui est au coeur de la définition des voisinages adaptatifs généraux (VAG) (Chap. 6).

### 4.1 Espaces vectoriels ordonnés GLIP

Un modèle GLIP (General Linear Image Processing) est un espace vectoriel avec ses lois d'addition vectorielle généralisée  $\oplus$  et de multiplication scalaire généralisée  $\otimes$ . Néanmoins, une telle structure est trop pauvre mathématiquement et nécessite, en plus de l'algèbre abstraite, d'autres concepts mathématiques (topologie, analyse fonctionnelle, ...). Particulièrement, la théorie des ensembles ordonnés [Luxemburg and Zaanen, 1971; Kantorovitch and Akilov, 1981] offre la notion de *positivité* qui est fondamentale en traitement d'image du fait des valeurs d'intensité prises par les images. Ceci mène alors à introduire une *relation d'ordre* dans les structures vectorielles GLIP.

Un *espace vectoriel ordonné*  $S$  est un espace vectoriel structuré par ses opérations vectorielles  $\oplus$ ,  $\ominus$  et  $\otimes$ , et une relation d'ordre  $\succ$  (qui obéit aux lois de réflexivité, d'anti-symétrie et de

transitivité) compatible avec la structure vectorielle.

Un vecteur  $s$  de  $S$  peut alors être exprimé par :

$$s = s_{\oplus} \oplus s_{\ominus} \quad (4.1)$$

où  $s_{\oplus}$  et  $s_{\ominus}$  sont respectivement la *partie positive* et la *partie négative* de  $s$  définies de la manière suivante.

**DÉFINITION 4.1** [*Partie positive et négative d'un vecteur*]

$\forall s \in (S, \oplus, \otimes, \succ)$

$$s_{\oplus} = \max_{\succ}(s, 0_{\diamond}) \quad (4.2)$$

$$s_{\ominus} = \max_{\succ}(\ominus s, 0_{\diamond}) \quad (4.3)$$

$$\quad \quad \quad (4.4)$$

où  $\max_{\succ}(\cdot, \cdot)$  dénote le maximum au sens de la relation d'ordre  $\succ$ , et  $0_{\diamond}$  l'élément neutre pour l'addition vectorielle.

Ces notions permettent de définir le *module* d'un vecteur  $s$  :

**DÉFINITION 4.2** [*Module d'un vecteur*]

$\forall s \in (S, \oplus, \otimes, \succ)$

$$|s|_{\diamond} = s_{\oplus} \oplus s_{\ominus} \quad (4.5)$$

**REMARQUE 4.1** La partie positive, la partie négative et le module d'un vecteur  $s$  sont des éléments positifs de l'espace vectoriel ordonné  $S$  :

$$s_{\oplus} \succ 0_{\diamond} \quad (4.6)$$

$$s_{\ominus} \succ 0_{\diamond} \quad (4.7)$$

$$|s|_{\diamond} \succ 0_{\diamond} \quad (4.8)$$

La théorie des ensembles ordonnés a joué un rôle fondamental dans les approches GLIP et a permis le développement de nouvelles techniques de traitement d'image mathématiquement justifiées [Pinoli, 1987; Jourlin et al., 1988]. A partir de ce point et jusqu'à la fin de ce manuscrit, un modèle GLIP sera, au minimum, représenté par un espace vectoriel ordonné.

## 4.2 Les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP

Cette section expose les différences de principe, les structures et propriétés pour la représentation et le traitement des images du modèle CLIP (Classical Linear Image Processing) et des trois structures GLIP suivantes :

- le modèle MHIP - Multiplicative Homomorphic Image Processing [Oppenheim, 1967, 1968],
- le modèle LRIP - Log-Ratio Image Processing [Shvayster and Peleg, 1983, 1987],

- le modèle LIP - Logarithmic Image Processing [Jourlin and Pinoli, 1987, 1988; Pinoli, 1987, 1997b; Jourlin and Pinoli, 2001].

Ces trois approches GLIP de traitement d'images sont basées sur les mathématiques linéaires abstraites et fournissent des opérations et structures spécifiques qui ont ouvert de nouvelles directions de développement en traitement d'image.

### 4.2.1 Motivation initiale

Le modèle MHIP a été introduit pour définir homomorphiquement une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des images à valeurs dans l'intervalle réel non borné  $(0, +\infty)$ , cohérente avec les lois physiques des images multiplicatives. L'approche LRIP a été développée dans le but de définir un espace vectoriel topologique sur l'espace des images à valeurs dans l'intervalle borné  $(0, M)$ , où  $M$  est un réel positif dépendant de la numérisation des images. Cet espace LRIP est créé par un homomorphisme entre l'intervalle  $(0, M)$  et l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . Quant au modèle LIP, il a été introduit dans le but de définir une opération d'addition stable sur l'intervalle réel borné  $(0, M)$ , qui soit mathématiquement bien définie et physiquement et/ou psychophysiquement compatible avec la nature des images.

### 4.2.2 Structure vectorielle

Une image est complètement modélisée par sa fonction en *tons de gris*. Une telle fonction est définie sur un ensemble non vide  $D$  du plan  $\mathbb{R}^2$ , appelé le *support spatial*, et prend ses valeurs dans l'intervalle positif réel  $(0, M)$ , appelé *intervalle des tons de gris* ("tonal range" dans la littérature de langue anglaise [Billingsley, 1970]), où  $M$  est un réel positif étendu (appartenant à  $(0, +\infty]$ ). Concernant les approches CLIP et LIP, l'espace linéaire représentant les images est un *cône vectoriel positif* [Dunford and Schwartz, 1988; Valentine, 1964] constitué par l'ensemble de ces images en tons de gris structuré par une addition vectorielle (respectivement notée  $+$  et  $\triangle$ ) et d'une multiplication scalaire positive (respectivement notée  $\times$  et  $\triangle$ ). Cependant, dans le but d'élargir ce cône vectoriel positif en espace vectoriel, il est nécessaire de donner un sens mathématique à l'opération d'*opposé* (respectivement noté  $-$  et  $\triangle$ ), et d'étendre la multiplication scalaire à tout nombre réel (toujours noté  $\times$  et  $\triangle$  respectivement). Puisque ces opérations peuvent être à valeurs réelles (positives ou négatives), l'ensemble des images définies sur le support spatial  $D$  et à valeurs dans un *intervalle étendu de tons de gris* est introduit. Structuré par les opérations d'addition vectorielle et de multiplication scalaire, cet ensemble d'image devient un espace vectoriel.

Quant aux espaces MHIP et LRIP, l'espace linéaire représentant les images est un espace vectoriel structuré par une addition vectorielle (respectivement notée  $\boxplus$  et  $\diamond$ ) et une multiplication scalaire (respectivement notée  $\boxtimes$  et  $\diamond$ ). Ces opérations sont définies homomorphiquement (respectivement par Oppenheim [1965]; Stockham [1968] et Shvayster and Peleg [1983, 1987]). Cependant, les expressions directes des opérations MHIP et LRIP ont été facilement formulées (respectivement par Pinoli [1997a] et Deng et al. [1994]). A l'inverse, les opérations structurant le modèle LIP ont directement été introduites [Jourlin and Pinoli, 1987; Pinoli, 1987; Jourlin and Pinoli, 1988], et il a été montré par les mêmes auteurs que l'espace vectoriel LIP est isomorphe à l'espace vectoriel CLIP (c'est-à-dire l'espace représentant l'ensemble des images définies sur  $D$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ).

Finalement, les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP possèdent des expressions directes de leurs opérations vectorielles (addition vectorielle, multiplication scalaire, opposé et soustraction vectorielle) et ils sont homomorphiques au modèle CLIP (Tab. 4.1).

### 4.2.3 Importance d'une relation d'ordre

Par la suite, les espaces vectoriels représentant les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP sont structurés en espaces vectoriels ordonnés en utilisant la relation d'ordre classique  $\geq$ . Ceci permet de définir la notion de module au sens CLIP, MHIP, LRIP ou LIP. Un tel opérateur est largement utilisé dans des applications pratiques de traitement d'image, telle que la détection d'arêtes basée sur la différentiation pour le calcul de l'amplitude du vecteur gradient [Deng and Pinoli, 1998]. De plus, le module permet l'introduction de notions physiques et/ou psychophysiques mathématiquement bien définies, tel que le contraste [Jourlin et al., 1988].

### 4.2.4 Tableau récapitulatif des modèles

La table 4.1 rappelle les structures et opérations de ces quatre modèles de traitement d'image. Pour chacun sont résumés son intervalle de tons de gris, son intervalle de tons de gris étendu (définissant l'espace vectoriel), son homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP, ses opérations (addition vectorielle, multiplication scalaire, opposé et soustraction vectorielle), son élément neutre pour l'addition, son intervalle de tons de gris positif (définissant le cône vectoriel positif), et son module.

### 4.2.5 Comparaisons théoriques et intérêts pratiques

Le modèle CLIP possède trop de désavantages (Sec. 3.3). Quant à l'approche LRIP, elle n'a pas encore été rigoureusement connectée à des propriétés physiques de l'image. Elle ne satisfait donc pas une des exigences requises pour un modèle robuste de traitement d'image (Sec. 3.3). Au contraire, les modèles MHIP et LIP satisfont aux exigences physique, mathématique, informatique et pratique [Pinoli, 1997a,b]. Cependant, le modèle MHIP est surpassé pour des raisons physiques, physiologiques, ... [Pinoli, 1997a]. Les avantages théoriques de l'approche LIP [Pinoli, 1997a,b; Deng and Pinoli, 1998; Jourlin and Pinoli, 2001] ont été pratiquement confirmés et illustrés à travers divers exemples d'application tel que l'extraction de fond [Mayet et al., 1996], la correction d'illumination [Mayet et al., 1996], l'interpolation d'image [Gremillet et al., 1994], le rehaussement d'image [Deng and Cahill, 1993; Deng et al., 1995; Jourlin and Pinoli, 1995; Mayet et al., 1996], la reconstruction 3D [Gremillet et al., 1994], l'estimation de contraste [Jourlin et al., 1988; Brailean et al., 1991], la restauration d'image [Brailean et al., 1991], la détection d'arêtes [Jourlin et al., 1988; Deng and Pinoli, 1998], le filtrage d'image [Deng et al., 1995].

### 4.2.6 Exemple d'application en rehaussement d'image

Le rehaussement d'image est une branche importante du traitement d'image. Sa définition selon Pratt [1991] peut se formuler de la manière suivante : "les procédés de rehaussement d'image consistent en un ensemble de techniques destinées à améliorer l'apparence visuelle d'une image,

ou à la convertir sous une forme mieux adaptée à l'analyse par un homme ou une machine". La diversité des méthodes de rehaussement d'image s'expliquent par le fait que chaque application est spécifique et nécessite une méthode particulière.

Le fait que les intervalles positifs des tons de gris des modèles CLIP et MHIP soient non bornés empêche l'introduction d'une technique mathématiquement rigoureuse de rehaussement d'image qui utilisent seulement les opérations vectorielles [Pinoli, 1997a]. Au contraire, les approches LRIP et LIP permettent de rehausser de manière optimale la plage dynamique d'une image. Néanmoins, le rehaussement LIP fournit de meilleurs résultats qu'avec le procédé LRIP correspondant. Cela confirme d'une part les connections physiques et physiologiques de l'approche LIP et d'autre part, le manque de base physique de la structure LRIP [Pinoli, 1997a].

L'exemple 4.1 illustre une technique de rehaussement d'image avec le modèle LIP.

---

**EXEMPLE 4.1** – Maximisation de la plage dynamique [Jourlin and Pinoli, 1995]

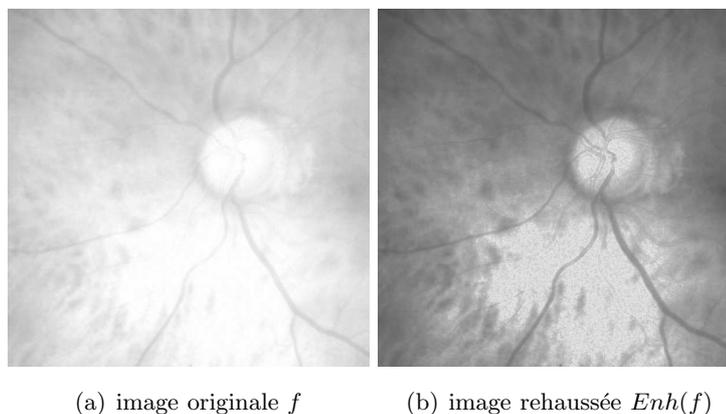
---

Le modèle LIP permet de définir une transformation d'image qui rehausse de manière optimale la dynamique d'une image  $f$  tout en préservant un sens physique ou visuel. Il a été prouvé [Jourlin and Pinoli, 1995; Mayet et al., 1996] qu'il existe un nombre réel positif, noté  $\lambda_0(f)$  et appelé gain logarithmique optimal, dont la multiplication scalaire LIP fournit une nouvelle image  $\lambda_0(f) \triangle f$  qui possède la plage dynamique maximale de la famille  $(\lambda \triangle f)_{\lambda > 0}$ . Le rehaussement est alors donné par la transformation suivante :

$$Enh(f) = \lambda_0(f) \triangle f \tag{4.9}$$

La figure 4.1 montre une application de cette transformation.

---



**FIGURE 4.1** – Maximisation de la plage dynamique de l'image rétinienne de l'oeil humain. (a) dynamique : [151, 254] - (b) dynamique : [75, 225]. L'image rehaussée (b) permet de mieux distinguer la macula et certains vaisseaux sanguins que sur l'image originale (a).

---

Le prochain chapitre récapitule quelques définitions et propriétés issues de la morphologie mathématique.

CLIP	MHIP	LRIP	LIP
intervalle initial des tons de gris			
$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, M)$	$(0, M)$
intervalle étendu des tons de gris (définissant l'espace vectoriel)			
$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(0, M)$	$(-\infty, M)$
homomorphisme avec l'espace vectoriel CLIP			
$f \mapsto f$	$f \mapsto \ln(f)$	$f \mapsto \ln(f/(M-f))$	$-M \times \ln(1-f/M)$
addition vectorielle			
usuel +	$f \boxplus g = fg$	$f \diamond g = \frac{M}{(1-f/M)(1-g/M)+1}$	$f \triangle g = f + g - \frac{fg}{M}$
multiplication scalaire			
usuel $\times$	$\alpha \boxtimes f = \exp(\alpha \times \ln(f))$	$\alpha \diamond f = \frac{M}{(M/f-1)^\alpha + 1}$	$\alpha \triangle f = M - M(1-f/M)^\alpha$
opposé			
usuel -	$\boxminus f = 1/f$	$\diamond f = M - f$	$\triangle f = -Mf/(M-f)$
soustraction vectorielle			
usuel -	$f \boxminus g = f/g$	$f \diamond g = \frac{M}{(M/f-1)(g/(M-g))+1}$	$f \triangle g = M \left( \frac{f-g}{M-g} \right)$
élément neutre de l'addition vectorielle			
usuel 0	$0_{\boxplus} \equiv 1$	$0_{\diamond} \equiv M/2$	$0_{\triangle} \equiv 0$
intervalle positif des tons de gris (définissant le cône vectoriel positif)			
$(0, +\infty)$	$(1, +\infty)$	$(M/2, M)$	$(0, M)$
module vectoriel			
usuel $ \cdot $	$ f _{\boxplus} = \max_{\geq}(f, 1) \boxplus \max_{\geq}(1/f, 1)$	$ f _{\diamond} = \max_{\geq}(f, M/2) \diamond \max_{\geq}(M-f, M/2)$	$ f _{\triangle} = \max_{\geq}(f, 0) \triangle \max_{\geq}(-Mf/(M-f), 0)$

**TABLE 4.1** – Structures et opérations des modèles d'images vectorielles CLIP, MHIP, LRIP, et LIP [Pinoli, 1997a].

# CHAPITRE 5

## Morphologie mathématique

---

**Saint-Augustine**

*Nec ipsa tamen intrant (in memoriam), sed rerum sensarum imagines, illic praesto sunt cogitationi reminiscenti eas. Quae, quomodo fabricatae sint? Quis dicit?*

*Therefore, what enters our memory is not the world itself, but images of this sensible world, in such a way that we can recognize them rapidly. How, in which way is this made? Who will tell it?*

**(Conf X-8)**

---

### SOMMAIRE

---

<b>5.1</b>	<b>Représentation des images</b> . . . . .	<b>62</b>
<b>5.2</b>	<b>Morphologie binaire</b> . . . . .	<b>62</b>
5.2.1	Opérations ensemblistes de Minkowski . . . . .	62
5.2.2	Opérateurs binaires élémentaires . . . . .	63
<b>5.3</b>	<b>Morphologie plate</b> . . . . .	<b>66</b>
5.3.1	Représentation d'une image par sections binaires . . . . .	66
5.3.2	Opérateurs plats élémentaires . . . . .	66
<b>5.4</b>	<b>Morphologie à tons de gris</b> . . . . .	<b>68</b>
5.4.1	Opérations numériques de Minkowski . . . . .	68
5.4.2	Opérateurs à tons de gris élémentaires . . . . .	68

---

Dans ce chapitre, les éléments du langage de base de la *Morphologie Mathématique* (MM) sont rassemblés afin de mieux appréhender son extension aux voisinages adaptatifs généraux (VAG) (Chap. 7).

La morphologie mathématique, initiée par l'étude de Matheron [1967] sur la géométrie des milieux poreux, est à présent une théorie traditionnelle pour le traitement d'image. Elle a conduit à de

nombreux outils pour le filtrage d'image, la segmentation d'image, la reconnaissance de formes, l'analyse de texture, ...

De nombreux ouvrages sont spécifiquement dédiés à la MM [Serra, 1982a; Coster and Chermant, 1985; Serra, 1988a; Schmitt and Mattioli, 1994; Soille, 2003a].

## 5.1 Représentation des images

Les images binaires, dont l'ensemble est noté  $I_B$ , sont considérées comme des parties de l'espace  $D = \mathbb{R}^2$ . Quant aux images à tons de gris, dont l'ensemble est noté  $I_N$ , elles sont définies sur  $D$  et à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ . Ces deux ensembles  $I_B$  et  $I_N$  avec les relations d'ordre usuelles respectives  $\cup$  et  $\geq$  forment un treillis complet [Serra, 1988a] (Déf. 5.1), permettant la définition des opérateurs morphologiques.

### DÉFINITION 5.1 [Treillis complet]

Une ensemble  $\mathcal{T}$  est un treillis complet (ou ensemble ordonné complètement réticulé) si :

1. l'ensemble  $\mathcal{T}$  est ordonné,
2. pour toute famille  $(t_i)$  finie ou non de  $\mathcal{T}$ , il existe :
  - un plus petit majorant  $\forall t_i \in \mathcal{T}$  appelé sup (pour supremum)
  - un plus grand minorant  $\wedge t_i \in \mathcal{T}$  appelé inf (pour infimum)

## 5.2 Morphologie binaire

### 5.2.1 Opérations ensemblistes de Minkowski

L'addition et la soustraction de Minkowski [1903] sont respectivement les deux opérations  $\oplus$  et  $\ominus$ , duales par complémentarité et définies sur les parties de  $D$  comme suit :

### DÉFINITION 5.2 [Addition de Minkowski]

$$\forall (X, B) \in \mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D)$$

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b \tag{5.1}$$

où  $X_b$  est le translaté de  $X$  par  $b$  :  $X_b = \{x + b; x \in X\}$ .

### DÉFINITION 5.3 [Soustraction de Minkowski]

$$\forall (X, B) \in \mathcal{P}(D) \times \mathcal{P}(D)$$

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_b \tag{5.2}$$

Les opérations élémentaires de morphologie binaire (érosion, dilatation, ouverture, fermeture) peuvent s'exprimer directement en fonction de  $\oplus$  et  $\ominus$ .

### 5.2.2 Opérateurs binaires élémentaires

Un opérateur morphologique nécessitent le choix d'un élément  $B \in \mathcal{P}(D)$  avec une origine, appelé *élément structurant*, afin de le comparer avec les structures spatiales de l'image à étudier. L'érosion d'une image binaire est définie comme le lieu des points  $x \in D$  tel que l'élément structurant, dont l'origine est placée en  $x$ , soit inclus dans l'image :

**DÉFINITION 5.4** [*Erosion morphologique binaire*]

$$\forall X \in I_B \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$E_B(X) = \{x \in D; B_x \subseteq X\} \quad (5.3)$$

$$= \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (5.4)$$

$$= X \ominus \check{B} \quad (5.5)$$

où  $\check{B} = \{-b; b \in B\}$  dénote le transposé de  $B$ .

Par la suite, la dilatation est définie de manière duale par rapport à l'érosion.

Deux dualités sont généralement utilisées :

- par adjonction [Serra, 1988a] : l'opérateur  $\dot{\phi}$ , dual de  $\phi$  par adjonction, est tel que :

$$\forall (X, Y) \subseteq D^2 \quad \phi(X) \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq \dot{\phi}(Y) \quad (5.6)$$

- par complémentarité [Schmitt and Mattioli, 1994; Soille, 2003a] : l'opérateur  $\phi^-$ , dual de  $\phi$  par complémentarité, est tel que :

$$\forall X \subseteq D \quad D \setminus \phi(X) = \phi^-(D \setminus X) \quad (5.7)$$

Ces opérateurs d'adjonction  $\dot{\phi}$  et de complémentarité  $\phi^-$  sont reliés à celui de transposition  $\check{\phi}$  :  $X \mapsto \check{X}$  :

$$(\check{\phi})^- = \dot{\phi} \quad (5.8)$$

La dualité adoptée, ici et dans la suite de ce manuscrit, est la dualité par adjonction. la dilatation binaire est donc explicitée de la manière suivante :

**DÉFINITION 5.5** [*Dilatation morphologique binaire*]

$$\forall X \in I_B \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$D_B(X) = \{x \in D; (\check{B})_x \cap X \neq \emptyset\} \quad (5.9)$$

$$= \bigcup_{b \in B} X_b \quad (5.10)$$

$$= X \oplus B \quad (5.11)$$

La composition de ces deux transformations définit les opérateurs de fermeture et d'ouverture, qui sont des filtres morphologiques [Serra, 1988b] (c'est-à-dire des applications croissantes et idempotentes) :

**DÉFINITION 5.6** [*Ouverture morphologique binaire*]

$$\forall X \in I_B \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$O_B(X) = D_B \circ E_B(X) \tag{5.12}$$

$$= (X \ominus \check{B}) \oplus B \tag{5.13}$$

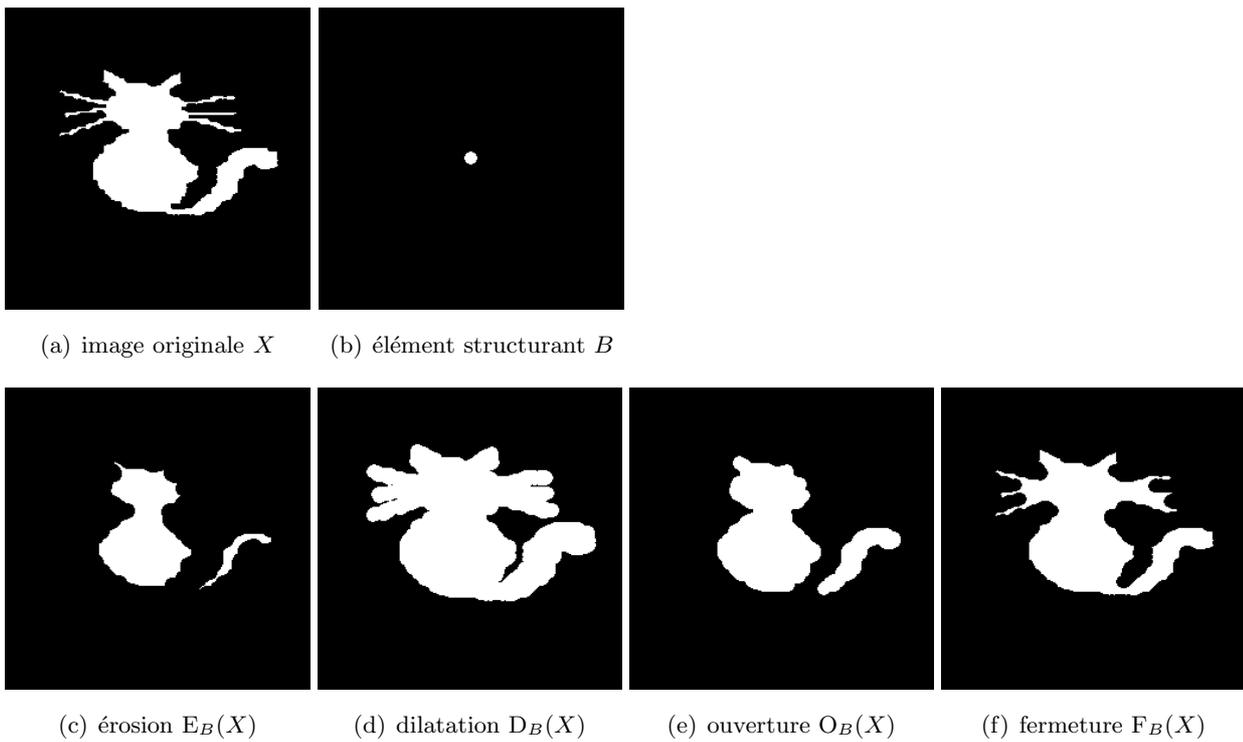
**DÉFINITION 5.7** [*Fermeture morphologique binaire*]

$$\forall X \in I_B \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$F_B(X) = E_B \circ D_B(X) \tag{5.14}$$

$$= (X \oplus B) \ominus \check{B} \tag{5.15}$$

La figure 5.1 illustre l'application de ces transformation morphologiques élémentaires avec un disque de rayon 5 centré à l'origine comme élément structurant  $B$  sur l'image binaire 'cat' (Micromorph).



**FIGURE 5.1** – Opérations morphologiques binaires.

Ces quatre opérateurs (érosion, dilatation, ouverture, fermeture) satisfont diverses propriétés (Prop. 5.1).

**PROPRIÉTÉ 5.1** [*Propriétés des opérateurs morphologiques binaires*]

$$\forall (X, X_1, X_2, x) \in I_B^3 \times D \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

1. *invariance par translation* :

$$E_B(X_x) = (E_B(X))_x \quad (5.16)$$

$$D_B(X_x) = (D_B(X))_x \quad (5.17)$$

$$O_B(X_x) = (O_B(X))_x \quad (5.18)$$

$$F_B(X_x) = (F_B(X))_x \quad (5.19)$$

2. *croissance* :

$$X \subseteq Y \Rightarrow \begin{cases} E_B(X_1) \subseteq E_B(X_2) \\ D_B(X_1) \subseteq D_B(X_2) \\ O_B(X_1) \subseteq O_B(X_2) \\ F_B(X_1) \subseteq F_B(X_2) \end{cases} \quad (5.20)$$

3. *dualité par adjonction* :

$$D_B(X_1) \leq X_2 \Leftrightarrow X_1 \leq E_B(X_2) \quad (5.21)$$

4. *relations d'ordre, extensivité, anti-extensivité* :

$$E_B(X) \leq O_B(X) \leq X \leq F_B(X) \leq D_B(X) \quad (5.22)$$

5. *commutativité* :

$$\forall (X_i) \in I_B^K \quad \begin{cases} \bigcup_{i \in K} D_B(X_i) = D_B\left(\bigcup_{i \in K} X_i\right) \\ \bigcap_{i \in K} E_B(X_i) = E_B\left(\bigcap_{i \in K} X_i\right) \end{cases} \quad (5.23)$$

où  $K$  est un ensemble dénombrable.

6. *dualité par complémentarité* :

$$\begin{cases} D \setminus D_B(X) = E_{\check{B}}(D \setminus X) \\ D \setminus F_B(X) = O_{\check{B}}(D \setminus X) \end{cases} \quad (5.24)$$

7. *idempotence* :

$$\begin{cases} F_B(F_B(X)) = F_B(X) \\ O_B(O_B(X)) = O_B(X) \end{cases} \quad (5.25)$$

## 5.3 Morphologie plate

### 5.3.1 Représentation d'une image par sections binaires

Les images en tons de gris peuvent être décrites à l'aide de la notion de section (ou niveau) :

**DÉFINITION 5.8** [*Section d'une image à tons de gris*]

$$\forall (f, t) \in I_N \times \overline{\mathbb{R}}$$

$$X_t(f) = \{x \in D; f(x) \geq t\} \quad (5.26)$$

Ainsi toute image  $f \in I_N$  est caractérisée par l'ensemble de ses sections :

$$\forall x \in D \quad f(x) = \sup\{t \in \overline{\mathbb{R}}; x \in X_t(f)\} \quad (5.27)$$

### 5.3.2 Opérateurs plats élémentaires

Soit  $\phi : I_B \rightarrow I_B$  une transformation croissante d'image binaire. Cette application peut être dérivée en une transformation croissante d'image en tons de gris  $\Phi : I_N \rightarrow I_N$  :

$$\forall (x, f) \in D \times I_N \quad \Phi(f)(x) = \sup\{t \in \overline{\mathbb{R}}; x \in \phi(X_t(f))\} \quad (5.28)$$

$\Phi$  est appelé opérateur plat associé à  $\phi$ .

En termes intuitifs,  $f$  est découpée en "tranches"  $\{X_t(f)\}_t$  puis l'opérateur  $\phi$  est appliqué à chacune de ces tranches et finalement l'"empilement" des tranches  $\{\phi(X_t(f))\}_t$  fournit l'image  $\Phi(f)$ .

Lorsque  $\phi$  est l'érosion binaire (resp. sa dilatation binaire adjointe) par un élément structurant  $B \subseteq D$ , l'opérateur  $\Phi$  dérivé définit respectivement l'érosion plate (resp. ou sa dilatation plate) comme suit :

**DÉFINITION 5.9** [*Erosion morphologique plate*]

$$\forall (f, x) \in I_N \times x \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$E_B(f)(x) = \sup\{t \in \overline{\mathbb{R}}; x \in E_B(X_t(f))\} \quad (5.29)$$

$$= \inf_{b \in B} f_{-b}(x) \quad (5.30)$$

$$= \inf_{b \in B} f(x + b) \quad (5.31)$$

$$= \inf_{b \in B_x} f(b) \quad (5.32)$$

**DÉFINITION 5.10** [*Dilatation morphologique plate*]

$$\forall (f, x) \in I_N \times x \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$D_B(f)(x) = \sup\{t \in \overline{\mathbb{R}}; x \in D_B(X_t(f))\} \quad (5.33)$$

$$= \sup_{b \in B} f_b(x) \quad (5.34)$$

$$= \sup_{b \in B} f(x - b) \quad (5.35)$$

$$= \sup_{b \in (\hat{B})_x} f(b) \quad (5.36)$$

Comme pour la morphologie binaire, les opérateurs d'ouverture (plate) et de fermeture (plate) sont obtenus par composition de ces deux transformations plates :

**DÉFINITION 5.11** [*Ouverture morphologique plate*]

$$\forall f \in I_N \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$O_B(f) = D_B \circ E_B(f) \quad (5.37)$$

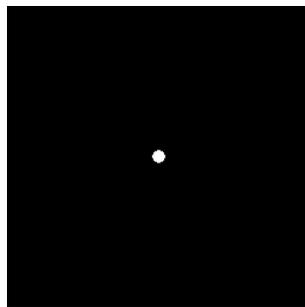
**DÉFINITION 5.12** [*Fermeture morphologique plate*]

$$\forall f \in I_N \quad \forall B \in \mathcal{P}(D)$$

$$F_B(f)(x) = E_B \circ D_B(f) \quad (5.38)$$

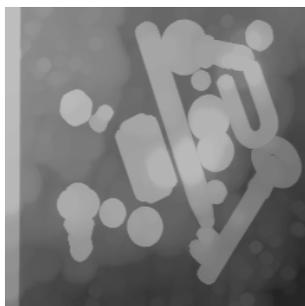
Les propriétés de ces opérateurs plats sont analogues à celles des opérateurs morphologiques binaires (Prop. 5.1).

La figure 5.2 illustre l'application de ces transformation morphologiques élémentaires avec un disque de rayon 5 centré à l'origine comme élément structurant  $B$  sur l'image à tons de gris 'tools'.



(a) image originale  $f$

(b) élément structurant  $B$



(c) érosion  $E_B(f)$

(d) dilatation  $D_B(f)$

(e) ouverture  $O_B(f)$

(f) fermeture  $F_B(f)$

**FIGURE 5.2** – Opérations morphologiques plates sur l'image 'tools'.

## 5.4 Morphologie à tons de gris

### 5.4.1 Opérations numériques de Minkowski

Le sous-graphe (ou l'ombre) d'une fonction  $f : D = \mathbb{R}^2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 5.13** [*Sous-graphe*]

$$\forall f \in \overline{\mathbb{R}}^D$$

$$SG(f) = \{(x, t) \in D \times \mathbb{R}; t \leq f(x)\} \quad (5.39)$$

Cela permet de définir la somme et la différence de Minkowski, notées respectivement  $\oplus$  et  $\ominus$ , de deux fonctions appartenant à  $\overline{\mathbb{R}}^D$  :

**DÉFINITION 5.14** [*Somme de Minkowski*]

$$\forall (f, g) \in \overline{\mathbb{R}}^D \times \overline{\mathbb{R}}^D$$

$$f \oplus g = \sup_{(x,t) \in SG(g)} f_{(x,t)} \quad (5.40)$$

où  $f_{(x,t)}$  dénote le translaté de  $f : f_{(x,t)}(p) = f(p - x) + t$ , pour tout point  $p$  de  $D$ .

**DÉFINITION 5.15** [*Différence de Minkowski*]

$$\forall (f, g) \in \overline{\mathbb{R}}^D \times \overline{\mathbb{R}}^D$$

$$f \ominus g = \inf_{(x,t) \in SG(g)} f_{(x,t)} \quad (5.41)$$

### 5.4.2 Opérateurs à tons de gris élémentaires

Ces opérations numériques de Minkowski permettent de définir, de la même manière que la morphologie binaire, l'érosion et la dilatation à tons de gris :

**DÉFINITION 5.16** [*Erosion morphologique à tons de gris*]

$$\forall (f, g, p) \in I_N^2 \times D$$

$$E(f, g)(p) = \inf_{(x,t) \in SG(g)} f_{(-x,-t)}(p) \quad (5.42)$$

$$= f \ominus \check{g}(p) \quad (5.43)$$

$$= \inf_{h \in D} f(p + h) - g(h) \quad (5.44)$$

$$= \inf_{h \in \text{supp}(g)} f(p + h) - g(h) \quad (5.45)$$

où  $\check{g}(p) = g(-p)$  et  $\text{supp}(g) = \{x \in D; g(x) > -\infty\}$ .

**DÉFINITION 5.17** [*Dilatation morphologique à tons de gris*]

$$\forall (f, g, p) \in I_N^2 \times D$$

$$D(f, g)(p) = \sup_{(x,t) \in \text{SG}(g)} f_{(x,t)}(p) \quad (5.46)$$

$$= f \oplus g(p) \quad (5.47)$$

$$= \sup_{h \in D} f(p - h) + g(h) \quad (5.48)$$

$$= \sup_{h \in \text{supp}(g)} f(p - h) + g(h) \quad (5.49)$$

**REMARQUE 5.1** A tout élément structurant  $B \in \mathcal{P}(E)$  correspond la fonction  $g_B$  définie comme suit :

$$g_B : \begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ x & \mapsto 0 \quad \text{si } x \in B \\ x & \mapsto -\infty \quad \text{sinon} \end{cases} \quad (5.50)$$

Ainsi, pour toute fonction  $f \in I_N$ ,  $D_B(f) = D(f, g_B)$  et  $E_B(f) = E(f, g_B)$ . Par conséquent, la morphologie plate s'intègre dans la morphologie à tons de gris.

Les opérateurs d'ouverture et de fermeture à tons de gris sont obtenus par composition de ces deux transformations :

**DÉFINITION 5.18** [*Ouverture morphologique à tons de gris*]

$$\forall (f, g, p) \in I_N^2 \times D$$

$$O(f, g)(p) = D(E(f, g), g) \quad (5.51)$$

**DÉFINITION 5.19** [*Fermeture morphologique à tons de gris*]

$$\forall (f, g, p) \in I_N^2 \times D$$

$$F(f, g)(p) = E(D(f, g), g) \quad (5.52)$$

En pratique, ces opérateurs à tons de gris sont moins utilisés que les opérateurs plats.

Deux notions issues de la MM, qui seront largement utilisées dans ce manuscrit, sont rappelées ci-dessous :

**DÉFINITION 5.20** [*Filtre morphologique*]

Un opérateur  $\phi$  est un filtre morphologique si :

- $\phi$  est croissant ( $f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$ ),
- $\phi$  est idempotent ( $f \circ \phi = f$ ).

**DÉFINITION 5.21** [*Opérateur connexe*]

Un opérateur  $\phi$  est connexe si :

pour tout  $f \in I_B$  ou  $I_N$ , pour tous  $(x, y) \in D^2$  voisins au sens de la topologie euclidienne usuelle sur  $D$

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \phi(f)(x) = \phi(f)(y) \tag{5.53}$$

---

Suite au rappel de ces concepts (modèles vectoriels généralisés et morphologie mathématique), la partie suivante expose l'approche TIVAG.

Troisième partie

# **DEVELOPPEMENT**



## SOMMAIRE [Troisième partie]

---

<b>6</b>	<b>Voisinages adaptatifs généraux (VAG)</b>	<b>75</b>
6.1	Structures GLIP . . . . .	75
6.2	Première définition des VAG . . . . .	76
6.3	Seconde définition des VAG . . . . .	77
6.4	Propriétés . . . . .	78
6.5	Discussion . . . . .	82
<b>7</b>	<b>Morphologie mathématique à VAG</b>	<b>85</b>
7.1	Éléments structurants adaptatifs (ESA) . . . . .	85
7.2	Morphologie mathématique adaptative plate . . . . .	89
7.2.1	Dilatation morphologique adaptative plate . . . . .	89
7.2.2	Erosion morphologique adaptative plate . . . . .	90
7.2.3	Fermeture, ouverture morphologique adaptative plate . . . . .	91
7.2.4	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs plats . . . . .	91
7.2.5	Illustrations de traitements morphologiques adaptatifs plats . . . . .	94
7.3	Morphologie mathématique adaptative à tons de gris . . . . .	97
7.3.1	Dilatation morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	97
7.3.2	Erosion morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.3	Fermeture, ouverture morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.4	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs à tons de gris . . . . .	99
7.4	Filtrage morphologiques adaptatif plat . . . . .	100
7.4.1	Filtres morphologiques adaptatifs alternés plats . . . . .	101
7.4.2	Filtres morphologiques adaptatifs séquentiels plats . . . . .	103
	Dilatation, érosion morphologique adaptative séquentielle plate . . . . .	105
	Fermeture, ouverture morphologique adaptative séquentielle plate . . . . .	106
	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats . . . . .	107
	Illustration de traitements morphologiques adaptatifs séquentiels plats . . . . .	108
7.4.3	Filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats . . . . .	110
	Filtres FAS. $OF_{m_{\square},n}^h$ et FAS. $FO_{m_{\square},n}^h$ . . . . .	110
	Illustration de filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats . . . . .	110
7.5	Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs plats . . . . .	112
<b>8</b>	<b>Filtrage de Choquet à VAG</b>	<b>115</b>
8.1	Rappels sur le filtrage de Choquet . . . . .	115

---

8.1.1	Intégrale floue de Choquet . . . . .	115
8.1.2	Filtres de Choquet . . . . .	116
8.1.3	Filtres de convolution de Choquet . . . . .	118
8.2	Filtres de Choquet adaptatifs . . . . .	119
8.2.1	Filtres adaptatifs et mesures floues cardinales . . . . .	119
8.2.2	Illustrations de filtres de Choquet adaptatifs . . . . .	123
<b>9</b>	<b>Critères d'analyse à VAG</b>	<b>127</b>
9.1	Catégories des critères d'analyse à VAG . . . . .	128
9.2	Critères d'orientation . . . . .	128
9.2.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG . . . . .	128
9.2.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG . . . . .	131
9.2.3	Aspect multi-échelle . . . . .	134
9.2.4	Conclusions et perspectives . . . . .	135
9.3	Critère d'épaisseur . . . . .	136
9.3.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG . . . . .	136
9.3.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG . . . . .	136
9.3.3	Conclusions et perspectives . . . . .	138
9.4	Autres critères d'analyse à VAG . . . . .	139

---

# CHAPITRE 6

## Voisinages adaptatifs généraux (VAG)

### SOMMAIRE

---

6.1 Structures GLIP . . . . .	75
6.2 Première définition des VAG . . . . .	76
6.3 Seconde définition des VAG . . . . .	77
6.4 Propriétés . . . . .	78
6.5 Discussion . . . . .	82

---

Ce chapitre introduit la notion de voisinages adaptatifs généraux (VAG) d'une image. Ces voisinages locaux sont définis pour chaque point de l'image étudiée. Ils doivent être de nature adaptative, d'une part par leur *forme spatiale* intrinsèquement dépendante des caractéristiques radiométriques, morphologiques, géométriques, texturales . . . à étudier, c'est-à-dire suivant un ou plusieurs "critères d'analyse" sélectionnés, et d'autre part par leur *propriété "physique"* dépendante de la nature physique et/ou psychophysique de l'image analysée (liée aux intensités de l'image).

### 6.1 Structures GLIP

Soit  $D$  une partie non vide de l'espace Euclidien  $\mathbb{R}^2$  ou plus généralement  $\mathbb{R}^n$ . Les images à tons de gris sont définies sur le support spatial  $D$  et à valeurs dans un intervalle de nombre réels  $\tilde{E}$ . L'ensemble de ces applications, noté  $\mathcal{I}$ , est structuré de manière formelle en espace vectoriel GLIP (Chap. 4) avec l'addition  $\tilde{\oplus}$ , la multiplication par un scalaire  $\tilde{\otimes}$  et la relation d'ordre usuelle  $\geq$  issue de celle des nombres réels :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad f \geq g \Leftrightarrow (\forall x \in D \quad f(x) \geq g(x)) \quad (6.1)$$

Pour chaque point  $x \in D$  d'une image  $f \in \mathcal{I}$ , les voisinages adaptatifs généraux (VAG), notés  $V_{m_{\square}}^h(x)$ , sont des parties du support spatial  $D$ . Ils sont calculés en rapport avec :

- un *critère d'analyse* basé sur une mesure locale évaluée sur l'image  $f$ , telle que la luminance (Ex. 6.1), le contraste, l'épaisseur, la courbure, . . . Ce critère est naturellement représenté par une application  $h$  définie sur  $D$  et à valeurs dans un ensemble de nombres réels  $E$ . L'ensemble de ces applications critères est, comme pour celui des images, structuré en espace vectoriel GLIP

formel avec l'addition  $\oplus$ , la multiplication par un scalaire  $\otimes$  et la relation d'ordre usuelle  $\geq$ . Cet espace est noté  $\mathcal{C}$ .

- un réel  $m_{\square}$ , appelé *tolérance d'homogénéité*, appartenant à l'intervalle positif des tons de gris  $E^{\oplus} = \{t \in E; t \geq 0_{\square}\}$ , où  $0_{\square}$  est le réel désignant l'élément neutre pour l'addition vectorielle  $\oplus$ . Par nécessité d'homogénéité entre les différents modèles GLIP, il est imposé que  $m_{\square}$  corresponde à un paramètre  $m \in \mathbb{R}^+$  auquel est additionné l'élément neutre (pour l'addition) du modèle GLIP considéré :

$$m_{\square} = 0_{\square} + m \quad (6.2)$$

---

**EXEMPLE 6.1** – Critère de luminance

Si le critère considéré est celui de la luminance, alors  $\mathcal{C} = \mathcal{I}$  et l'application  $h$  est par conséquent définie de la manière suivante :

$$h : \begin{cases} D & \rightarrow & E = \tilde{E} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$$


---

Deux structures GLIP sont donc définies afin de représenter :

- l'espace des images  $\mathcal{I} = (\tilde{E}^D, \tilde{\oplus}, \tilde{\otimes}, \geq)$ ,
- l'espace des critères  $\mathcal{C} = (E^D, \oplus, \otimes, \geq)$ .

## 6.2 Première définition des VAG

Pour chaque point  $x$  du support spatial  $D$ , le VAG  $V_{m_{\square}}^h(x)$  doit satisfaire les deux conditions suivantes :

- ses points doivent être homogènes à  $x$ , par rapport au critère  $h$ , avec la tolérance d'homogénéité  $m_{\square}$  :

$$\forall y \in V_{m_{\square}}^h(x) \quad |h(y) \ominus h(x)|_{\square} \leq m_{\square} \quad (6.3)$$

- il doit être connexe par arcs, avec la topologie usuelle Euclidienne sur  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

La connexité choisie pour les VAG est la connexité par arcs [Choquet, 2000] qui conduira à une définition (Déf. 6.3) équivalente et pratique de ces voisinages.

Explicitement, les voisinages adaptatifs généraux sont ainsi définis :

**DÉFINITION 6.1** [*Voisinages adaptatifs généraux*]

$$\forall (m_{\square}, h, x) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times D$$

$$V_{m_{\square}}^h(x) = C_{h^{-1}([h(x) \ominus m_{\square}, h(x) \oplus m_{\square}])}(x) \quad (6.4)$$

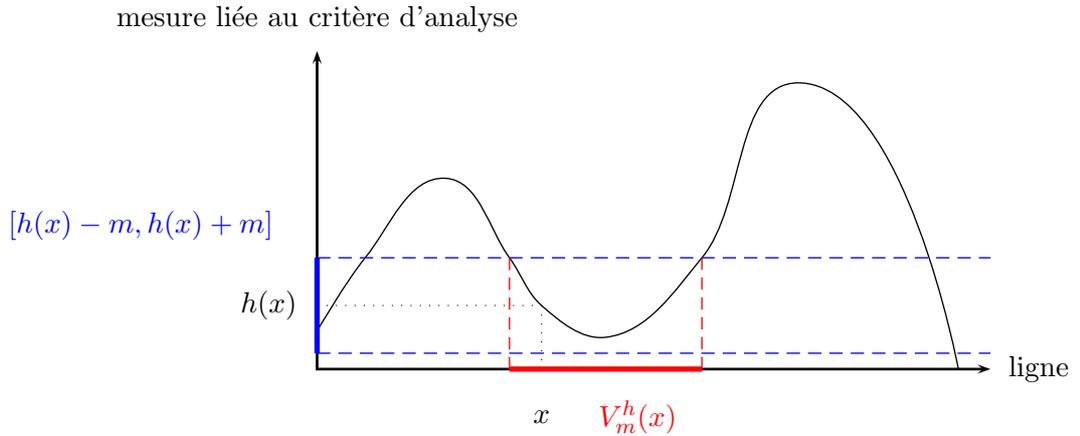
où  $C_X(x)$  représente la composante connexe par arcs [Choquet, 2000] (avec la topologie usuelle Euclidienne sur  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ) de  $X \subseteq D$  contenant  $x \in D$ .

**REMARQUE 6.1** *D'autres voisinages adaptatifs généraux peuvent être introduits, en utilisant une condition d'homogénéité plus générale. En voici un exemple :*

$$V_{m_{\ominus}^1, m_{\ominus}^2}^h(x) = C_{h^{-1}([h(x) \ominus m_{\ominus}^1, h(x) \oplus m_{\ominus}^2])}(x) \quad (6.5)$$

Afin d'offrir une impression visuelle de la construction de ces voisinages adaptatifs généraux, une représentation en dimension 1 ( $D \subseteq \mathbb{R}$ ) avec les opérations du modèle CLIP ( $\oplus = +$ ,  $\otimes = \times$ ,  $\ominus = -$ ), est donnée dans l'exemple 6.2.

**EXEMPLE 6.2** – Voisinages adaptatifs généraux  $V_m^h$



Pratiquement, la figure 6.1 illustre le VAG d'un point  $x$  calculé avec le critère de luminance (avec le modèle CLIP) et le critère de contraste (avec le modèle LIP) [Jourlin et al., 1988; Pinoli, 1991, 1992b], sur une image de gel d'électrophorèse (Micromorph®).

Cela montre que les VAG sont, suivant le critère d'analyse et la tolérance d'homogénéité considérés, intrinsèquement définis par rapport aux structures locales de l'image.

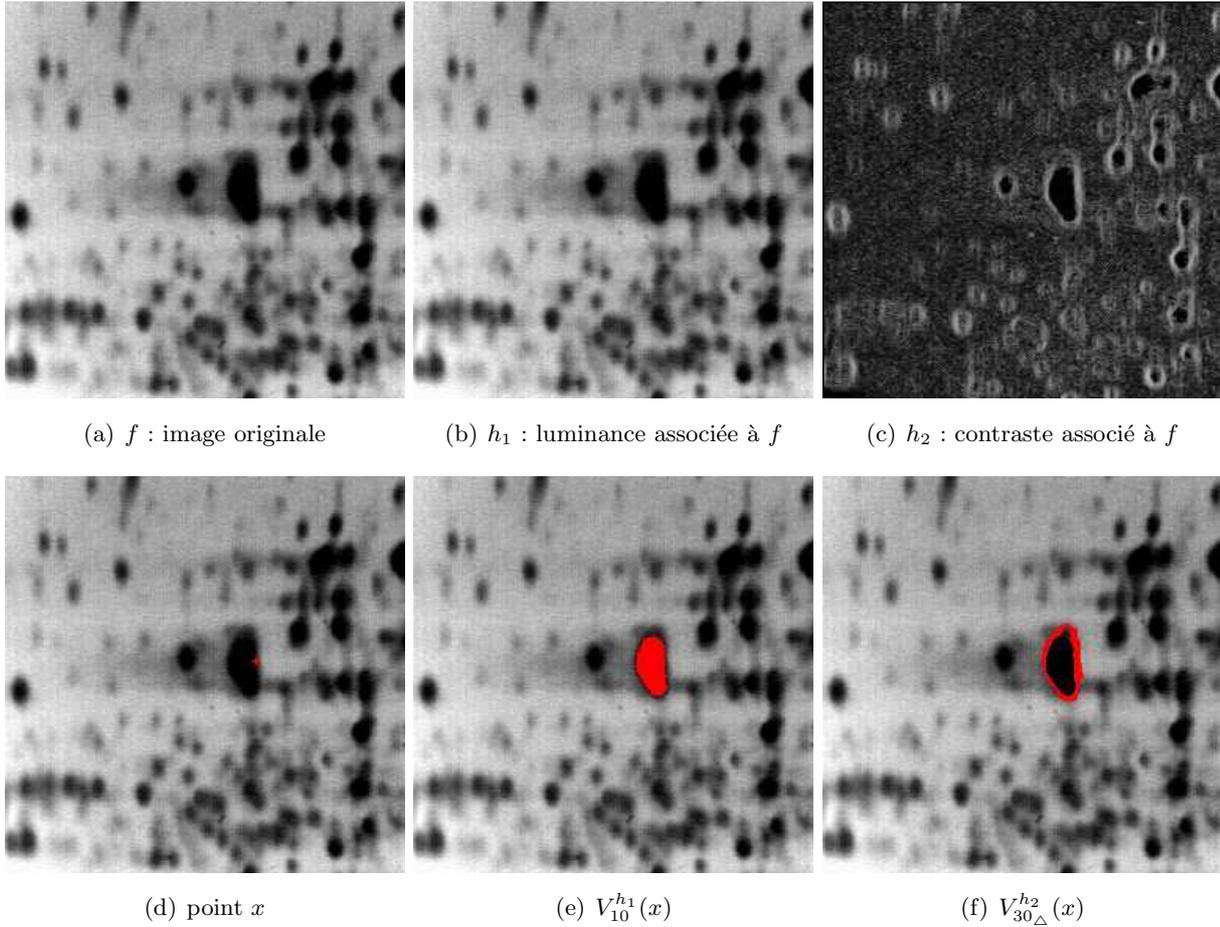
### 6.3 Seconde définition des VAG

Dans la suite, la notion de *chemin* [Choquet, 2000] entre deux points du support spatial est rappelé. Cette notion, nécessaire à une définition équivalente (Déf. 6.3) des voisinages adaptatifs généraux, sera notamment utilisé dans certaines démonstrations.

**DÉFINITION 6.2** [*Chemin*]

Un chemin  $P_x^y$  d'extrémités  $x \in D$  et  $y \in D$  respectivement est une application continue de  $[0, 1]$  dans  $D$  (avec leurs topologies Euclidiennes usuelles) tel que :

$$P_x^y : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow D \\ 0 & \mapsto x \\ 1 & \mapsto y \end{cases} \quad (6.6)$$



**FIGURE 6.1** – Le VAG du point  $x$  (d) de l’image originale (a) est respectivement homogène (e,f), avec la tolérance  $m = 10$  et  $m_\Delta = 30_\Delta = 30$ , par rapport au critère de luminance (b) et au critère de contraste LIP (c).

**DÉFINITION 6.3** [*Voisinages adaptatifs généraux (définition équivalente)*]

$$\forall (m_\square, h, x) \in E^\oplus \times \mathcal{C} \times D$$

$$V_{m_\square}^h(x) = \{y \in D; y \xrightarrow{h, m_\square} x\} \tag{6.7}$$

où :

$$y \xrightarrow{h, m_\square} x \Leftrightarrow \exists P_x^y \forall z \in P_x^y([0, 1]) \quad |h(z) \ominus h(x)|_\square \leq m_\square \tag{6.8}$$

La démonstration de l’équivalence entre cette seconde définition des VAG et la première (Déf. 6.1) est aisée.

## 6.4 Propriétés

Ces voisinages adaptatifs généraux  $V_{m_\square}^h$  satisfont diverses propriétés (Prop. 6.1).

**PROPRIÉTÉ 6.1** [*Propriétés des voisinages adaptatifs généraux*]

Soient  $(m_{\square}, h, x) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times D$

1. réflexivité :

$$x \in V_{m_{\square}}^h(x) \quad (6.9)$$

2. croissance par rapport à  $m_{\square}$  :

$$\left( \begin{array}{l} (m_{\square}^1, m_{\square}^2) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \\ m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \end{array} \right) \Rightarrow V_{m_{\square}^1}^h(x) \subseteq V_{m_{\square}^2}^h(x) \quad (6.10)$$

3. égalité entre points voisins de même ton de gris :

$$\left( \begin{array}{l} (x, y) \in D^2 \\ x \in V_{m_{\square}}^h(y) \\ h(x) = h(y) \end{array} \right) \Rightarrow V_{m_{\square}}^h(x) = V_{m_{\square}}^h(y) \quad (6.11)$$

4. invariance par  $\oplus$ -translation :

$$c \in E \Rightarrow V_{m_{\square}}^{h \oplus c}(x) = V_{m_{\square}}^h(x) \quad (6.12)$$

5. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow V_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(x) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(x) \quad (6.13)$$

**REMARQUE 6.2** Il n'existe pas de relation générale entre  $V_{m_{\square}^3}^h$  et le couple  $(V_{m_{\square}^1}^h, V_{m_{\square}^2}^h)$  pour  $m_{\square}^3 = m_{\square}^1 + m_{\square}^2$ . Ce comportement non-linéaire est important et nécessaire afin de s'adapter à la nature elle-même non-linéaire de la plupart des images à traiter.

**DÉMONSTRATION :**

1. réflexivité :

$$x \xrightarrow{h, m_{\square}} x, \text{ donc } x \in V_{m_{\square}}^h(x).$$

2. croissance par rapport à  $m$  :

$$\begin{aligned} m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 &\Rightarrow [h(x) \ominus m_{\square}^1, h(x) \oplus m_{\square}^1] \subseteq [h(x) \ominus m_{\square}^1, h(x) \oplus m_{\square}^2] \\ &\Rightarrow C_{h^{-1}([h(x) \ominus m_{\square}^1, h(x) \oplus m_{\square}^1])}(x) \subseteq C_{h^{-1}([h(x) \ominus m_{\square}^2, h(x) \oplus m_{\square}^2])}(x) \\ &\Rightarrow V_{m_{\square}^1}^h(x) \subseteq V_{m_{\square}^2}^h(x) \end{aligned}$$

3. égalité entre points voisins de même ton de gris :

Soit  $z$  un point dans  $V_{m_{\square}}^h(x)$ .

Il existe alors un chemin  $P_x^z$  tel que  $\forall w \in P_x^z([0, 1]) \mid |h(w) \ominus h(x)|_{\square} \leq m_{\square}$ .

De plus,  $x \in V_{m_{\square}}^h(y)$  c'est-à-dire  $\exists P_y^x \mid \forall u \in P_y^x([0, 1]) \mid |h(u) \ominus h(y)|_{\square} \leq m_{\square}$ .

Ainsi, Il existe un chemin  $P_y^z$  tel que  $P_y^z([0, 1]) = P_y^x([0, 1]) \cup P_x^z([0, 1])$ .

Par conséquent, pour tout  $t \in P_y^z([0, 1])$ , si  $t \in P_y^x([0, 1])$  alors  $|h(t) \ominus h(y)|_{\square} \leq m_{\square}$ , sinon  $t \in P_x^z([0, 1])$  et  $|h(t) \ominus h(y)|_{\square} = |h(t) \ominus h(x)|_{\square} \leq m_{\square}$ .

Donc,  $\forall t \in P_y^z([0, 1]) |h(t) \ominus h(y)|_{\square} \leq m_{\square}$  et ainsi  $z \in V_{m_{\square}}^h(y)$ .

Reciproquement, si  $z \in V_{m_{\square}}^h(y)$  il existe un chemin  $P_y^z$  tel que  $\forall w \in P_y^z([0, 1]) |h(w) \ominus h(y)|_{\square} \leq m_{\square}$ . Puisque  $x \in V_{m_{\square}}^h(y)$  et  $h(y) = h(x)$ ,  $y \in V_{m_{\square}}^h(x)$  (en prenant le chemin inverse  $P_x^y(\cdot) = \check{P}_y^x(\cdot) = P_y^x(1 - \cdot)$ ). Ainsi, il existe un chemin  $P_x^z$  tel que  $P_x^z([0, 1]) = P_x^y([0, 1]) \cup P_y^z([0, 1])$ .

Un raisonnement similaire au précédent mène au résultat escompté, à savoir  $z \in V_{m_{\square}}^h(x)$ .

4. invariance par  $\oplus$ -translation :

$$\begin{aligned} & (h \oplus c)^{-1}([(h \oplus c)(x) \ominus m_{\square}, (h \oplus c)(x) \oplus m_{\square}]) \\ &= \{y \in D | (h \oplus c)(y) \in [(h \oplus c)(x) \ominus m_{\square}, (h \oplus c)(x) \oplus m_{\square}]\} \\ &= \{y \in D | h(y) \in [h(x) \ominus m_{\square}, h(x) \oplus m_{\square}]\} \\ &= h^{-1}([h(x) \ominus m_{\square}, h(x) \oplus m_{\square}]) \end{aligned}$$

5. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\begin{aligned} & (\alpha \otimes h)^{-1}([\alpha \otimes h(x) \ominus m_{\square}, \alpha \otimes h(x) \oplus m_{\square}]) \\ &= \{y \in D | (\alpha \otimes h)(y) \in [\alpha \otimes h(x) \ominus m_{\square}, \alpha \otimes h(x) \oplus m_{\square}]\} \\ &= \{y \in D | h(y) \in [h(x) \ominus \frac{1}{\alpha} m_{\square}, h(x) \oplus \frac{1}{\alpha} m_{\square}]\} \\ &= h^{-1}([h(x) \ominus \frac{1}{\alpha} m_{\square}, h(x) \oplus \frac{1}{\alpha} m_{\square}]) \end{aligned}$$

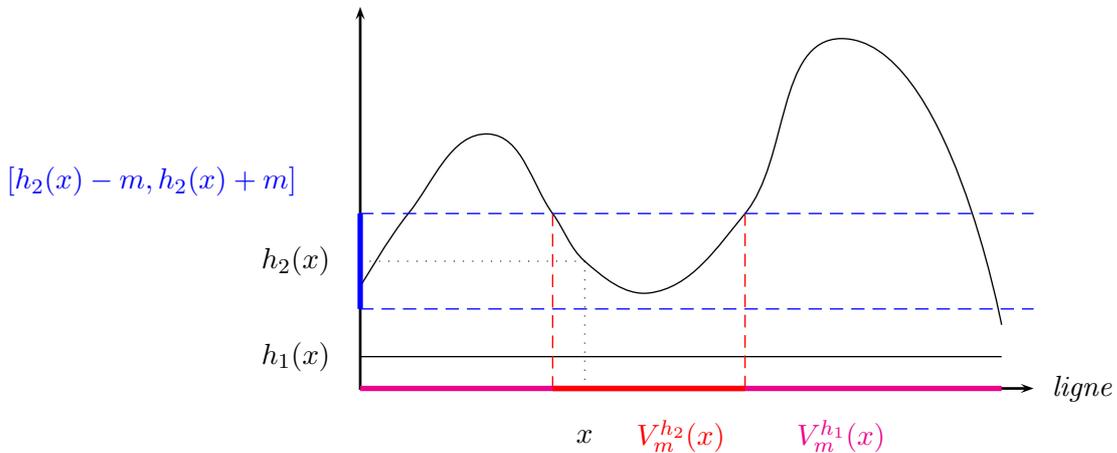
■

**REMARQUE 6.3** Les VAG ne sont pas croissants par rapport à  $h$  :

$$\forall (m_{\square}, x) \in E^{\oplus} \times D \quad \left( \begin{array}{l} (h_1, h_2) \in \mathcal{C}^2 \\ h_1 \leq h_2 \end{array} \right) \not\Rightarrow V_{m_{\square}}^{h_1}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{h_2}(x) \quad (6.14)$$

Voici un contre-exemple en 1D avec le modèle CLIP ( $h_1$  est une fonction constante) :  $h_1 \leq h_2$  et il existe  $x$  tel que  $V_{m_{\square}}^{h_2}(x) \subseteq V_{m_{\square}}^{h_1}(x)$ .

mesure liée au critère d'analyse

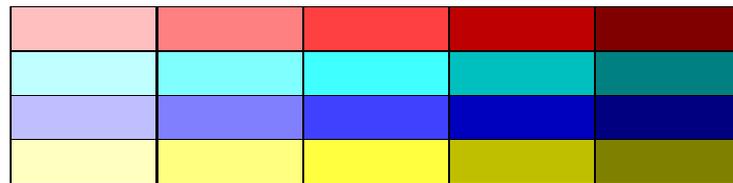


Pour illustrer la propriété de croissance par rapport à  $m_{\square}$  (Eq. 6.10), les VAG de quatre points spécifiques de l'image 'Lena' (Fig. 6.2) sont calculés selon le modèle CLIP avec la luminance comme critère d'analyse.



(a) critère : luminance

(b) VAG




---

 $m = 5$ 


---

 $m = 10$ 


---

 $m = 15$ 


---

 $m = 20$ 


---

 $m = 25$ 

(c) table des couleurs

**FIGURE 6.2** – Emboîtement des VAG de 4 points spécifiques (b) de l'image 'Lena' en utilisant le critère de luminance (a) et différentes tolérances d'homogénéité (au sens CLIP) :  $m = 5, 10, 15, 20, 25$  liées à la table des couleurs (c). Pour une tolérance d'homogénéité donnée, le VAG d'un point peut contenir différentes teintes de sa couleur associée.

La figure. 6.2 illustre le fait que les VAG sont spatialement adaptés aux structures locales de l'image, par rapport au critère de luminance.

Encore plus généralement, soit  $\mathcal{Q}(E)$  l'ensemble des intervalles fermés de  $E$  contenant  $0_{\square} \in E$ , un système de voisinages connexes analogue peut être envisagé :

**DÉFINITION 6.4** [*Voisinages adaptatifs généraux (définition plus générale)*]

$$\forall (J_{\circlearrowleft}, h, x) \in \mathcal{Q}(E) \times \mathcal{C} \times D$$

$$V_{J_{\circlearrowleft}}^h(x) = C_{h^{-1}(J_{\circlearrowleft} \oplus h(x))}(x) \quad (6.15)$$

**REMARQUE 6.4** Si  $J_{\circlearrowleft} = [\ominus m_{\circlearrowleft}, m_{\circlearrowleft}]$  alors  $\forall (h, x) \in \mathcal{C} \times D \quad V_{J_{\circlearrowleft}}^h(x) = V_{m_{\circlearrowleft}}^h(x)$ . De plus, le fait que  $J$  contienne  $0_{\circlearrowleft}$  implique l'appartenance de  $h(x)$  à l'intervalle  $J_{\circlearrowleft} \oplus h(x)$ .

**PROPRIÉTÉ 6.2** [*Propriétés des voisinages adaptatifs généraux (définition plus générale)*]

Les mêmes propriétés sont vérifiées :

1. réflexivité :
 
$$\forall (J_{\circlearrowleft}, h, x) \in \mathcal{Q}(E) \times \mathcal{C} \times D \quad x \in V_{J_{\circlearrowleft}}^h(x) \quad (6.16)$$
2. croissance par rapport à  $J_{\circlearrowleft}$  :
 
$$\forall (h, x) \in \mathcal{C} \times D \quad \left( \begin{array}{l} (J_{\circlearrowleft}^1, J_{\circlearrowleft}^2) \in \mathcal{Q}(E)^2 \\ J_{\circlearrowleft}^1 \subseteq J_{\circlearrowleft}^2 \end{array} \right) \Rightarrow V_{J_{\circlearrowleft}^1}^h(x) \subseteq V_{J_{\circlearrowleft}^2}^h(x) \quad (6.17)$$
3. égalité entre points voisins de même ton de gris :
 
$$\forall (h, J_{\circlearrowleft}) \in \mathcal{C} \times \mathcal{Q}(E) \quad \left( \begin{array}{l} (x, y) \in D^2 \\ x \in V_{J_{\circlearrowleft}}^h(y) \\ h(x) = h(y) \end{array} \right) \Rightarrow V_{J_{\circlearrowleft}}^h(x) = V_{J_{\circlearrowleft}}^h(y) \quad (6.18)$$
4. invariance par  $\oplus$ -translation :
 
$$\forall (J_{\circlearrowleft}, h, x) \in \mathcal{Q}(E) \times \mathcal{C} \times D \quad c \in E \Rightarrow V_{J_{\circlearrowleft}}^{h \oplus c}(x) = V_{J_{\circlearrowleft}}^h(x) \quad (6.19)$$
5. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :
 
$$\forall (J_{\circlearrowleft}, h, x) \in \mathcal{Q}(E) \times \mathcal{C} \times D \quad \alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow V_{J_{\circlearrowleft}}^{\alpha \otimes h}(x) = V_{\frac{1}{\alpha} \otimes J_{\circlearrowleft}}^h(x) \quad (6.20)$$

**DÉMONSTRATION :**

Les démonstrations de ces propriétés sont similaires à celles des  $V_{m_{\circlearrowleft}}^h$  (Prop. 6.1). ■

**REMARQUE 6.5** Une étude spécifique pourrait être menée sur la construction de semi-VAG (sup ou inf) avec des intervalles particuliers ( $J_{\circlearrowleft}^s = [0_{\circlearrowleft}, m_{\circlearrowleft}]$ ,  $J_{\circlearrowleft}^i = [-m_{\circlearrowleft}, 0_{\circlearrowleft}]$ ).

## 6.5 Discussion

Ces voisinages adaptatifs généraux (VAG), notés  $V_{m_{\circlearrowleft}}^h(x)$  et définis pour chaque point  $x$  de l'image sont d'une part spatialement intrinsèques. En effet, ce sont les structures locales de l'image (via le critère d'analyse choisi) qui déterminent elles-mêmes la taille et la forme de ces VAG. La seule

contrainte imposée, et qui semble naturelle, est celle de connexité. D'autre part, les VAG sont définis suivant une structure GLIP en cohérence avec les intensités de l'image, ce qui confère à ces voisinages une propriété physique dépendante de la nature de l'image. Par exemple, la détermination des VAG au sens LIP sera certainement plus adéquate pour des images obtenues par transmission ou pour des images visuelles (logarithmiques).

---

Le chapitre suivant est consacré à une extension de la morphologie mathématique à l'aide de ces VAG.



# CHAPITRE 7

## Morphologie mathématique à VAG

### SOMMAIRE

---

<b>7.1</b>	<b>Eléments structurants adaptatifs (ESA)</b> . . . . .	<b>85</b>
<b>7.2</b>	<b>Morphologie mathématique adaptative plate</b> . . . . .	<b>89</b>
7.2.1	Dilatation morphologique adaptative plate . . . . .	89
7.2.2	Erosion morphologique adaptative plate . . . . .	90
7.2.3	Fermeture, ouverture morphologique adaptative plate . . . . .	91
7.2.4	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs plats . . . . .	91
7.2.5	Illustrations de traitements morphologiques adaptatifs plats . . . . .	94
<b>7.3</b>	<b>Morphologie mathématique adaptative à tons de gris</b> . . . . .	<b>97</b>
7.3.1	Dilatation morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	97
7.3.2	Erosion morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.3	Fermeture, ouverture morphologique adaptative à tons de gris . . . . .	98
7.3.4	Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs à tons de gris . . . . .	99
<b>7.4</b>	<b>Filtrage morphologiques adaptatif plat</b> . . . . .	<b>100</b>
7.4.1	Filtres morphologiques adaptatifs alternés plats . . . . .	101
7.4.2	Filtres morphologiques adaptatifs séquentiels plats . . . . .	103
7.4.3	Filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats . . . . .	110
<b>7.5</b>	<b>Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs plats</b> . . . . .	<b>112</b>

---

L'idée de base de la morphologie mathématique à VAG est d'utiliser les voisinages  $\{V_{m\ominus}^h(x)\}_{x\in D}$  préalablement définis comme fenêtres d'analyse adaptatives des nouveaux opérateurs morphologiques (adaptatifs). Ainsi, un *élément structurant adaptatif* (ESA) sera attribué à chaque point de l'image. Dans ce chapitre, uniquement les images à tons de gris sont traitées. Elles composent l'espace GLIP  $\mathcal{I} = (\tilde{E}^D, \tilde{\oplus}, \tilde{\otimes}, \geq)$  qui forme un treillis complet.

### 7.1 Eléments structurants adaptatifs (ESA)

A chaque dilatation morphologique usuelle (avec un élément structurant (ES)  $B$ ) il existe un et un seul opérateur morphologique, construit à l'aide de l'ES réflexif (ou transposé)  $\tilde{B}$ , qui lui est adjoint (Déf. 7.1) et qu'on nomme érosion morphologique.

**DÉFINITION 7.1** [*Opérateurs adjoints*]

Deux opérateurs  $\phi$  et  $\psi$  sont adjoints si :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad \phi(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq \psi(g) \quad (7.1)$$

Selon l'approche proposée, à chaque point de l'image correspond un élément structurant adaptatif (ESA), de taille et de forme différentes, définie intrinsèquement par le contexte local du point considéré. Cette correspondance peut-être représentée par une application appelée *fonction structurante plate* [Serra, 1988c] :

**DÉFINITION 7.2** [*Fonction structurante plate*]

Une fonction structurante plate sur  $D$  est une application :

$$\psi : \begin{cases} D & \rightarrow \mathcal{P}(D) \\ x & \mapsto \psi(x) \end{cases} \quad (7.2)$$

où  $\psi(x)$  dénote l'ES associé à  $x$ .

**REMARQUE 7.1** Concernant la morphologie mathématique usuelle, cette application est constante ( $\psi : x \mapsto B$ ).

Par conséquent, la notion de transposition des ESA (nécessaire à la définition des opérateurs morphologiques) doit être définie (Déf. 7.3) à partir de leurs fonctions structurantes.

**DÉFINITION 7.3** [*Opérateur transposé*]

Le transposé de l'opérateur  $\psi : D \rightarrow \mathcal{P}(D)$  est défini de la manière suivante :

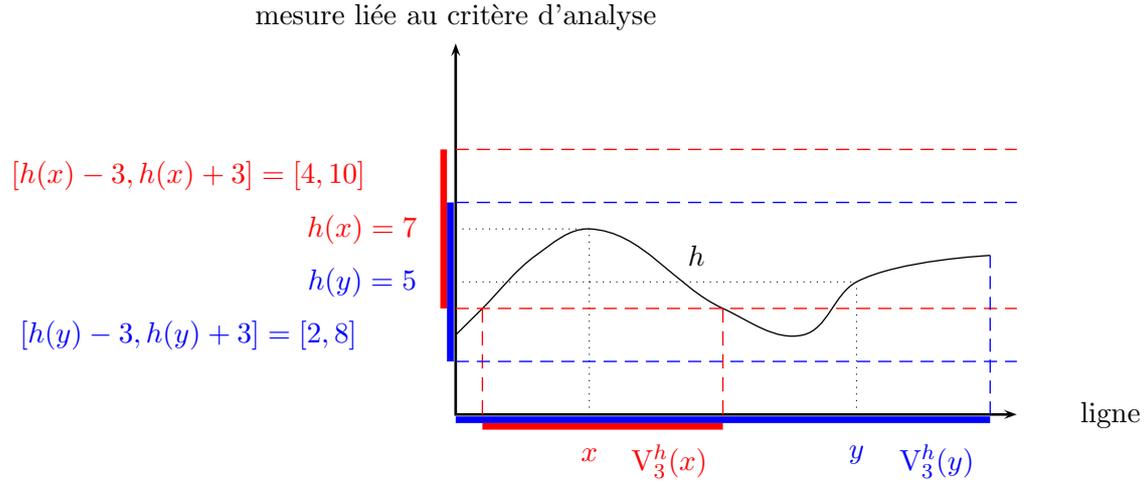
$$\check{\psi} : \begin{cases} D & \rightarrow \mathcal{P}(D) \\ x & \mapsto \{y \in D; \psi(y) \cap x \neq \emptyset\} = \{y \in D; x \in \psi(y)\} \end{cases} \quad (7.3)$$

En utilisant directement les VAG pour ESA, la fonction structurante associée  $\psi = V_{m\ominus}^h : x \mapsto V_{m\ominus}^h(x)$  ne serait généralement pas auto-transposée (Déf. 7.4) comme le montre le contre-exemple (1D, CLIP) illustré par la figure 7.1.

**DÉFINITION 7.4** [*Opérateur auto-transposé*]

L'opérateur  $\psi : D \rightarrow \mathcal{P}(D)$  est auto-transposé si  $\psi = \check{\psi}$ . Autrement dit, si la condition de symétrie suivante est respectée :

$$\forall (x, y) \in D^2 \quad x \in \psi(y) \Leftrightarrow y \in \psi(x) \quad (7.4)$$



**FIGURE 7.1** – Les VAG  $\{V_m^h(z)\}_{z \in D}$  ne sont pas symétriques :  $x \in V_3^h(y)$  et  $y \notin V_3^h(x)$ . Par conséquent  $(\check{V}_3^h) \neq V_3^h$ .

Or, cette notion de symétrie semble nécessaire pour trois raisons principales :

- elle est plus adaptée à l'analyse d'image pour des raisons topologiques et visuelles,
- elle permet d'obtenir les deux dualités (par adjonction et par opposé) des opérateurs de dilatation et d'érosion morphologiques,
- elle simplifie les expressions mathématiques et les algorithmes informatiques des opérateurs morphologiques.

Par conséquent, une fonction structurante plate satisfaisant l'auto-transposition est préférable bien que la morphologie mathématique avec des éléments structurants adaptatifs non symétriques soit bien définie mathématiquement [Charif-Chefchaoui and Schonfeld, 1994; Cuisenaire, 2005; Lerallut et al., 2005].

Ainsi, les éléments structurants adaptatifs, notés  $\{R_{m_\square}^h(x)\}_{x \in D}$ , définis ci-après sont choisis symétriques (c'est-à-dire associés à une fonction structurante auto-transposée) tout en respectant le paradigme des voisinages adaptatifs généraux.

**DÉFINITION 7.5** [*Éléments structurants adaptatifs*]

$$\forall (m_\square, h, x) \in E^\oplus \times \mathcal{C} \times D$$

$$R_{m_\square}^h(x) = \bigcup_{z \in D} \{V_{m_\square}^h(z) \mid x \in V_{m_\square}^h(z)\} \quad (7.5)$$

**REMARQUE 7.2** Plus généralement, des éléments structurants adaptatifs  $R_{J_\square}^h(x)$  pourraient être définis de la même manière, à partir des  $V_{J_\square}^h(x)$  (Déf. 6.4).

Ces éléments structurants adaptatifs satisfont diverses propriétés (Prop. 7.1) et respectent le paradigme des VAG à travers leur propriété d'emboîtement géométrique (Eq. 7.6).

**PROPRIÉTÉ 7.1** [*Propriétés des éléments structurants adaptatifs*]

$\forall (m_{\square}, h, x, y) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times D^2$	
1. emboîtement géométrique :	
$V_{m_{\square}}^h(x) \subseteq R_{m_{\square}}^h(x) \subseteq V_{2^h \otimes m_{\square}}^h(x) \quad (7.6)$	(7.6)
2. réflexivité :	
$x \in R_{m_{\square}}^h(x) \quad (7.7)$	(7.7)
3. symétrie :	
$x \in R_{m_{\square}}^h(y) \Leftrightarrow y \in R_{m_{\square}}^h(x) \quad (7.8)$	(7.8)
4. croissance par rapport à $m_{\square}$ :	
$\left( \begin{array}{l} (m_{\square}^1, m_{\square}^2) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \\ m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \end{array} \right) \Rightarrow R_{m_{\square}^1}^h(x) \subseteq R_{m_{\square}^2}^h(x) \quad (7.9)$	(7.9)
5. invariance par $\oplus$ -addition :	
$c \in E \Rightarrow R_{m_{\square}}^{h \oplus c}(x) = R_{m_{\square}}^h(x) \quad (7.10)$	(7.10)
6. compatibilité avec la $\otimes$ -multiplication scalaire :	
$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow R_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(x) = R_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(x) \quad (7.11)$	(7.11)

**REMARQUE 7.3** La propriété concernant l'égalité des VAG entre points de même ton de gris ne se prolonge pas aux éléments structurants adaptatifs.

**DÉMONSTRATION :**

1. emboîtement géométrique :

$$x \in V_{m_{\square}}^h(x), \text{ donc } V_{m_{\square}}^h(x) \subseteq R_{m_{\square}}^h(x).$$

Soit  $y$  un point dans  $R_{m_{\square}}^h(x)$ . Il existe  $z \in D$  tel que  $y \in V_{m_{\square}}^h(z)$  (avec le chemin  $P_z^y$ ) et  $x \in V_{m_{\square}}^h(z)$  (avec le chemin  $P_z^x$ ). Ainsi, le chemin  $P_x^y$  tel que  $P_x^y([0, 1]) = \check{P}_z^x([0, 1]) \cup P_z^y([0, 1])$  existe et est bien défini.

Soit  $w \in P_x^y([0, 1])$ . Si  $w \in P_z^y([0, 1])$  alors  $|h(w) \ominus h(x)|_{\square} \leq |h(w) \ominus h(z)|_{\square} \oplus |h(z) \ominus h(x)|_{\square} \leq m_{\square} \oplus m_{\square} = 2 \otimes m_{\square}$ , sinon  $w \in \check{P}_z^x([0, 1]) = P_x^z([0, 1])$  et puisque  $\check{P}_z^x$  et  $P_x^z$  ont même image alors  $|h(w) \ominus h(x)|_{\square} \leq |h(w) \ominus h(z)|_{\square} \oplus |h(z) \ominus h(x)|_{\square} \leq m_{\square} \oplus m_{\square} = 2 \otimes m_{\square}$ . Par conséquent,  $y \in V_{2^h \otimes m_{\square}}^h(x)$ .

2. réflexivité :

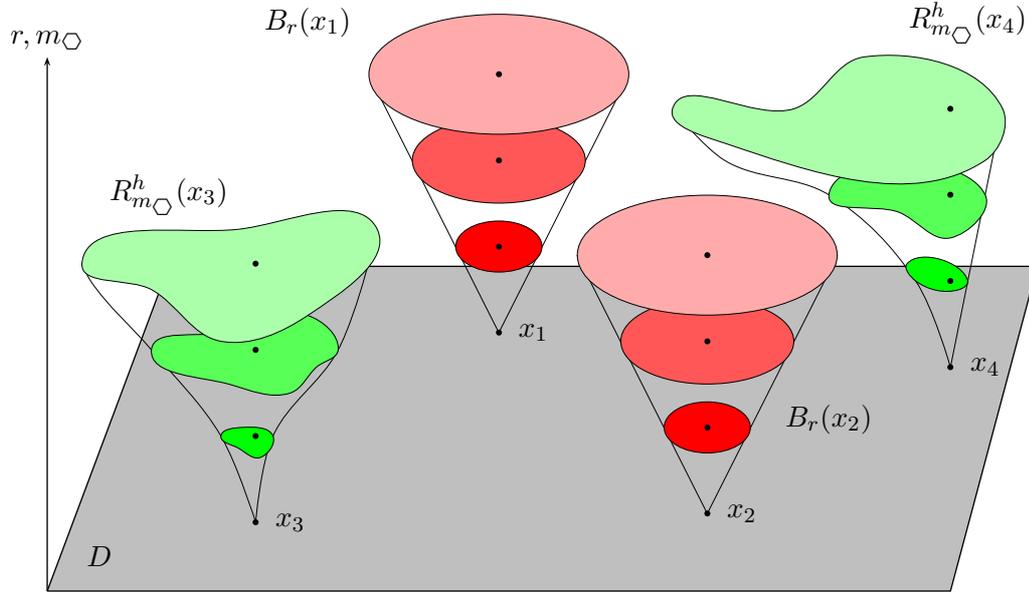
$$x \in V_{m_{\square}}^h(x) \subseteq R_{m_{\square}}^h(x).$$

3. symétrie :

Si  $y \in R_{m_{\square}}^h(x)$ , il existe  $z \in D$  tel que  $y \in V_{m_{\square}}^h(z)$  et  $x \in V_{m_{\square}}^h(z)$ . Donc,  $x \in R_{m_{\square}}^h(y)$ .

4-6 les démonstrations sont directement déduites des propriétés 6.1-(2,4,5). ■

La figure 7.2 compare la forme des éléments structurants usuels  $B_r(x)$  (disques de rayon  $r$  centrés en  $x$ ) à celle des éléments structurants adaptatifs  $R_{m_\square}^h(x)$  (parties spatialement adaptées par rapport au critère  $h$  avec la tolérance d'homogénéité  $m_\square$ ).



**FIGURE 7.2** – Exemple d'éléments structurants adaptatifs  $R_{m_\square}^h$  et usuels  $B_r$  pour trois valeurs des paramètres  $r$  et  $m_\square$ .  $B_r(x_1)$  et  $B_r(x_2)$  ont même forme et  $\{B_r(x)\}_r$  est une famille de parties homothétique de centre  $x \in D$ . A l'inverse, les formes de  $R_{m_\square}^h(x_3)$  et  $R_{m_\square}^h(x_4)$  sont différentes et  $\{R_{m_\square}^h(x)\}_{m_\square}$  n'est pas une famille homothétique.

## 7.2 Morphologie mathématique adaptative plate

Les opérateurs morphologiques adaptatifs plats sont construits à partir des ESA ou de leur *fonction structurante adaptative plate*, notée  $R_{m_\square}^h$ , associée :

**DÉFINITION 7.6** [*Fonction structurante adaptative plate*]

$$\forall (m_\square, h) \in E^\oplus \times \mathcal{C} \quad R_{m_\square}^h : \begin{cases} D & \rightarrow \mathcal{P}(D) \\ x & \mapsto R_{m_\square}^h(x) \end{cases} \quad (7.12)$$

### 7.2.1 Dilatation morphologique adaptative plate

La dilatation morphologique adaptative plate d'une image  $f$  est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 7.7** [*Dilatation morphologique adaptative plate*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$$D_{m_{\square}}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto D_{m_{\square}}^h(f) \end{cases} \quad (7.13)$$

où :

$$D_{m_{\square}}^h(f) : \begin{cases} D & \rightarrow \tilde{E} \\ x & \mapsto \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} f(w) \end{cases} \quad (7.14)$$

**PROPRIÉTÉ 7.2** [*Dilatation morphologique adaptative plate*]

Cet opérateur  $D_{m_{\square}}^h$  définit bien une dilatation morphologique.

**DÉMONSTRATION :**

$$\begin{aligned} \forall x \in D \quad (\sup_i [D_{m_{\square}}^h(f_i)])(x) &= \sup_i [D_{m_{\square}}^h(f_i)(x)] \\ &= \sup_i [\sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [f_i(w)]] \\ &= \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [\sup_i [f_i(w)]] \\ &= \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [(\sup_i [f_i])(w)] \\ &= D_{m_{\square}}^h(\sup_i [f_i])(x) \end{aligned}$$

Cette commutativité avec le sup assure que  $D_{m_{\square}}^h$  soit une dilatation algébrique [Serra, 1988a] (par définition). De plus, ce nouvel opérateur est invariant par translation. Ces deux propriétés assurent alors que  $D_{m_{\square}}^h$  soit une dilatation morphologique [Serra, 1988d]. ■

**7.2.2 Erosion morphologique adaptative plate**

L'érosion morphologique adaptative plate, est l'opérateur dual (par adjonction) du précédent. Elle est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 7.8** [*Erosion morphologique adaptative plate*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$$E_{m_{\square}}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto E_{m_{\square}}^h(f) \end{cases} \quad (7.15)$$

où :

$$E_{m_{\square}}^h(f) : \begin{cases} D & \rightarrow \tilde{E} \\ x & \mapsto \inf_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} f(w) \end{cases} \quad (7.16)$$

**PROPRIÉTÉ 7.3** [*Adjonction des opérateurs morphologiques adaptatifs plats*]

 $E_{m_{\square}}^h$  définit bien l'unique érosion morphologique adjointe à la dilatation morphologique  $D_{m_{\square}}^h$ .

**DÉMONSTRATION :**

$$\forall w \in R_{m_{\square}}^h(x) \quad D_{m_{\square}}^h(f)(w) = \sup_{y \in R_{m_{\square}}^h(w)} f(y) \geq f(x) \text{ puisque : } w \in R_{m_{\square}}^h(x) \Rightarrow x \in R_{m_{\square}}^h(w).$$

Donc  $\inf_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} D_{m_{\square}}^h(f)(w) \geq f(x)$ , c'est-à-dire  $E_{m_{\square}}^h(D_{m_{\square}}^h(f))(x) \geq f(x)$ .

$$\text{Ainsi } D_{m_{\square}}^h(f) \leq g \xrightarrow{E_{m_{\square}}^h} E_{m_{\square}}^h(D_{m_{\square}}^h(f)) \leq E_{m_{\square}}^h(g) \Rightarrow f \leq E_{m_{\square}}^h(g).$$

La réciproque est obtenue par le même type de démonstration. Par conséquent,  $D_{m_{\square}}^h(f) \leq g \Leftrightarrow f \leq E_{m_{\square}}^h(g)$ . Cette dualité suffit à prouver l'unicité de l'érosion  $E_{m_{\square}}^h$  associé à  $D_{m_{\square}}^h$ . ■

**7.2.3 Fermeture, ouverture morphologique adaptative plate**

Les opérateurs de fermeture et d'ouverture morphologiques adaptatives plates, définissant les filtres morphologiques (c'est-à-dire des opérateurs croissants et idempotents) les plus élémentaires, sont obtenus par composition des deux précédents.

**DÉFINITION 7.9** [*Fermeture morphologique adaptative plate*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$$F_{m_{\square}}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto F_{m_{\square}}^h(f) = E_{m_{\square}}^h \circ D_{m_{\square}}^h(f) \end{cases} \quad (7.17)$$

**DÉFINITION 7.10** [*Ouverture morphologique adaptative plate*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$$O_{m_{\square}}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto O_{m_{\square}}^h(f) = D_{m_{\square}}^h \circ E_{m_{\square}}^h(f) \end{cases} \quad (7.18)$$

**7.2.4 Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs plats**

Ces opérateurs morphologiques adaptatifs plats élémentaires (dilatation, érosion, fermeture, ouverture) présentent les propriétés suivantes :

**PROPRIÉTÉ 7.4** [*Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs plats*]

$$\forall (m_{\square}, h, f, f_1, f_2) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}^3$$

1. commutativité avec le sup et l'inf :

$$\forall (f_i) \in \tilde{E}^K \quad \begin{cases} \sup_{i \in K} [D_{m_{\square}}^h(f_K)] = D_{m_{\square}}^h(\sup_{i \in K} [f_i]) \\ \inf_{i \in K} [E_{m_{\square}}^h(f_K)] = E_{m_{\square}}^h(\inf_{i \in K} [f_i]) \end{cases} \quad (7.19)$$

où  $K$  est un ensemble dénombrable.

2. adjonction (dualité morphologique) :

$$D_{m_{\square}}^h(f_1) \leq f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq E_{m_{\square}}^h(f_2) \quad (7.20)$$

3. commutativité avec la  $\tilde{\oplus}$ -addition :

$$c \in \tilde{E} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c) = D_{m_{\square}}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ E_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c) = E_{m_{\square}}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ F_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c) = F_{m_{\square}}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ O_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c) = O_{m_{\square}}^h(f) \tilde{\oplus} c \end{cases} \quad (7.21)$$

4. croissance :

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(f_1) \leq D_{m_{\square}}^h(f_2) \\ E_{m_{\square}}^h(f_1) \leq E_{m_{\square}}^h(f_2) \\ F_{m_{\square}}^h(f_1) \leq F_{m_{\square}}^h(f_2) \\ O_{m_{\square}}^h(f_1) \leq O_{m_{\square}}^h(f_2) \end{cases} \quad (7.22)$$

5. relations d'ordre :

$$E_{m_{\square}}^h(f) \leq O_{m_{\square}}^h(f) \leq f \leq F_{m_{\square}}^h(f) \leq D_{m_{\square}}^h(f) \quad (7.23)$$

6. dualité par rapport à l'opposé  $\tilde{\ominus}$  :

$$\begin{cases} \tilde{\ominus} D_{m_{\square}}^h(f) = E_{m_{\square}}^h(\tilde{\ominus} f) \\ \tilde{\ominus} F_{m_{\square}}^h(f) = O_{m_{\square}}^h(\tilde{\ominus} f) \end{cases} \quad (7.24)$$

7. idempotence :

$$\begin{cases} F_{m_{\square}}^h(F_{m_{\square}}^h(f)) = F_{m_{\square}}^h(f) \\ O_{m_{\square}}^h(O_{m_{\square}}^h(f)) = O_{m_{\square}}^h(f) \end{cases} \quad (7.25)$$

*suite page suivante ...*

... suite

8. commutativité avec la  $\tilde{\otimes}$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} D_{m_\square}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} D_{m_\square}^h(f) \\ E_{m_\square}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} E_{m_\square}^h(f) \\ F_{m_\square}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} F_{m_\square}^h(f) \\ O_{m_\square}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} O_{m_\square}^h(f) \end{cases} \quad (7.26)$$

9. croissance, décroissance par rapport à  $m_\square$  :

$$\left( \begin{array}{l} (m_\square^1, m_\square^2) \in E^\oplus \times E^\oplus \\ m_\square^1 \leq m_\square^2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_{m_\square^1}^h(f) \leq D_{m_\square^2}^h(f) \\ E_{m_\square^1}^h(f) \geq E_{m_\square^2}^h(f) \end{cases} \quad (7.27)$$

10. invariance par  $\oplus$ -addition :

$$c \in E \Rightarrow \begin{cases} D_{m_\square}^{h \oplus c}(f) = D_{m_\square}^h(f) \\ E_{m_\square}^{h \oplus c}(f) = E_{m_\square}^h(f) \\ F_{m_\square}^{h \oplus c}(f) = F_{m_\square}^h(f) \\ O_{m_\square}^{h \oplus c}(f) = O_{m_\square}^h(f) \end{cases} \quad (7.28)$$

11. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_\square}^{\alpha \otimes h}(f) = D_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^h(f) \\ E_{m_\square}^{\alpha \otimes h}(f) = E_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^h(f) \\ F_{m_\square}^{\alpha \otimes h}(f) = F_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^h(f) \\ O_{m_\square}^{\alpha \otimes h}(f) = O_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_\square}^h(f) \end{cases} \quad (7.29)$$

12. connexité des opérateurs :

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{I} = \mathcal{C} \\ f \in \mathcal{I} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} f \mapsto D_{m_\square}^f(f) \\ f \mapsto E_{m_\square}^f(f) \\ f \mapsto F_{m_\square}^f(f) \\ f \mapsto O_{m_\square}^f(f) \end{cases} \text{ sont des opérateurs connexes.} \quad (7.30)$$

**DÉMONSTRATION :**

1-7 les propriétés 7.2 et 7.3 ainsi que la théorie sur le treillis des opérateurs croissants suffisent à prouver ces assertions.

8. la preuve est triviale.

9-11. les démonstrations sont directement déduites des propriétés 7.1-(4,5,6) sur les ESA.

12. connexité des opérateurs :

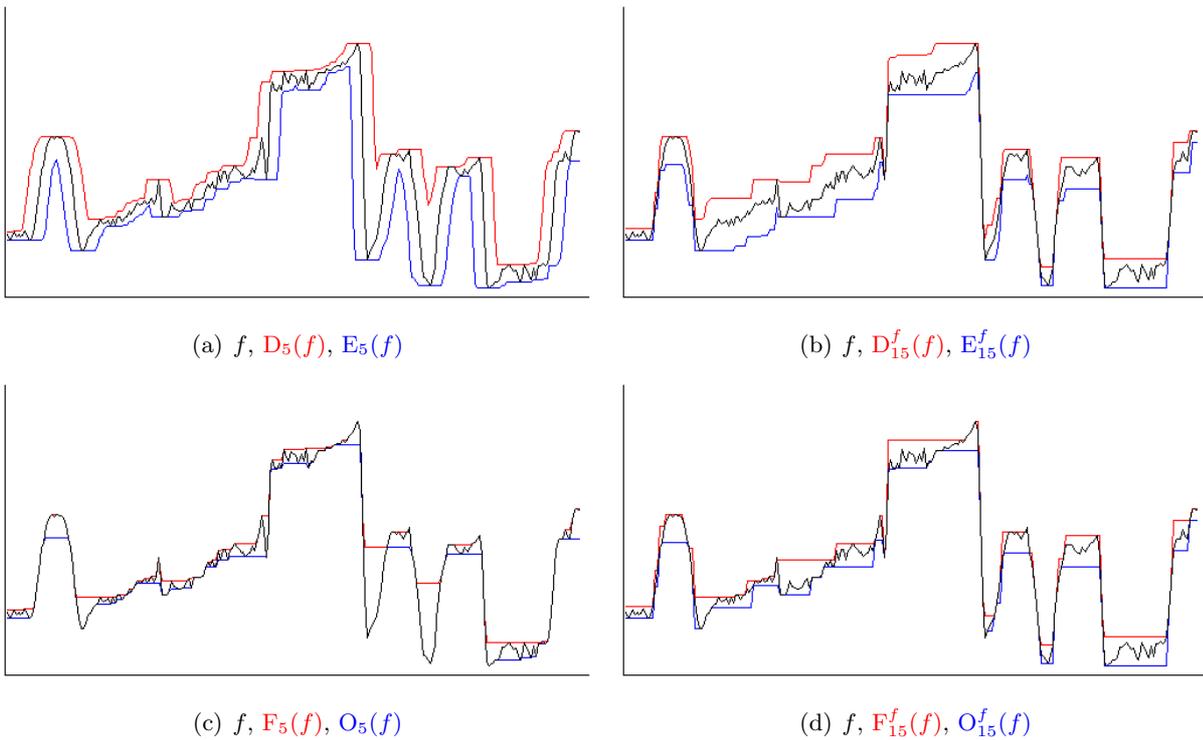
Soit  $g \in \mathcal{I} = \mathcal{C}$ . Pour tous points voisins  $(x, y)$  (avec la topologie Euclidienne usuelle sur  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ), si  $g(x) = g(y)$  alors  $R_{m_\square}^g(x) = R_{m_\square}^g(y)$  et donc  $D_{m_\square}^g(g)(x) = D_{m_\square}^g(g)(y)$  et  $E_{m_\square}^g(g)(x) = E_{m_\square}^g(g)(y)$ . La fermeture et l'ouverture morphologique adaptative sont des opérateurs connexes

par composition d'opérateurs connexes. ■

### 7.2.5 Illustrations de traitements morphologiques adaptatifs plats

#### Exemple 1D

La figure 7.3 illustre les opérations 1D de morphologie mathématique adaptative (avec le critère de luminance et le modèle CLIP) tout en les confrontant avec l'approche classique.  $D_r(f)$ ,  $E_r(f)$ ,  $F_r(f)$  et  $O_r(f)$  représente respectivement la dilatation, l'érosion, la fermeture et l'ouverture avec une boule centrée de rayon  $r$  pour ES.

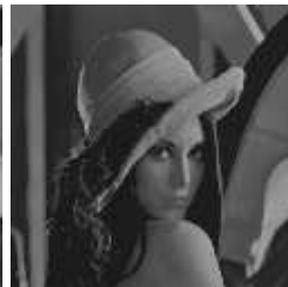
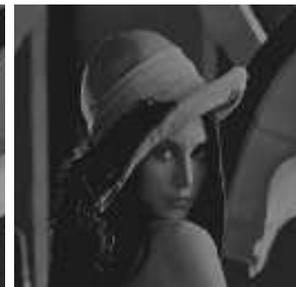
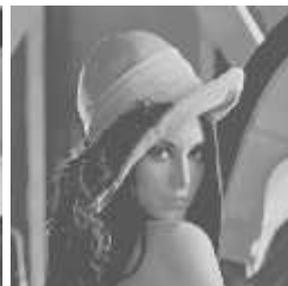
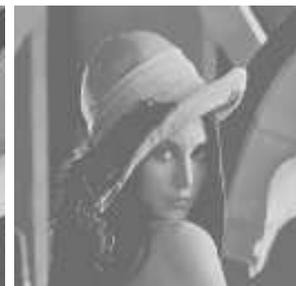


**FIGURE 7.3** – Morphologie mathématique 1D plate : (a,c) classique, (b,d) adaptative

Les transformations usuelles ont tendance à supprimer les détails importants. Par exemple, la dilatation et la fermeture bouchent les "vallées" présentant des "diamètres" plus petit que celui de l'ES, indépendamment de leur "profondeur". Cela a donc pour effet de supprimer des petits détails (c'est-à-dire des vallées de "diamètre" faible) qui peuvent être importants (c'est-à-dire des vallées de "profondeur" élevée, donc de contraste élevé par rapport à leur voisinage). Ces remarques sont, de manière analogue, valables pour les "pics" du profil 1D.

#### Exemple 2D

Ces mêmes opérations sont, dans cet exemple 2D, appliquées à l'image 'Lena' (Fig. 7.4), avec le critère de luminance et le modèle CLIP. Une analogie est aussi effectuée avec les opérateurs usuels (Fig. 7.5).

(a)  $f$ (b)  $D_{10}^f(f)$ (c)  $D_{20}^f(f)$ (d)  $D_{30}^f(f)$ (e)  $D_{40}^f(f)$ (f)  $E_{10}^f(f)$ (g)  $E_{20}^f(f)$ (h)  $E_{30}^f(f)$ (i)  $E_{40}^f(f)$ (j)  $F_{10}^f(f)$ (k)  $F_{20}^f(f)$ (l)  $F_{30}^f(f)$ (m)  $F_{40}^f(f)$ (n)  $O_{10}^f(f)$ (o)  $O_{20}^f(f)$ (p)  $O_{30}^f(f)$ (q)  $O_{40}^f(f)$ 

**FIGURE 7.4** – Opérateurs morphologiques adaptatifs plats avec des ESA au sens CLIP. Le critère d'analyse est la luminance et les tolérances d'homogénéité utilisées sont : 10, 20, 30 ou 40.



FIGURE 7.5 – Opérateurs morphologiques classiques plats avec une boule de rayon 1, 2, 3 ou 4 pour ES.

Cet exemple 2D illustre les mêmes inconvénients des opérateurs morphologiques plats usuels, que ceux observés sur le cas 1D. A l'inverse, les transformations adaptatives ne suppriment pas les petits détails importants du fait du caractère spatialement intrinsèque de leurs ESA.

### 7.3 Morphologie mathématique adaptative à tons de gris

Dans cette section, une image à tons de gris  $g \in \mathcal{I}$  est ajoutée comme paramètre supplémentaire aux opérateurs préalablement définis afin d'introduire la *morphologie mathématique adaptative à tons de gris*.

#### 7.3.1 Dilatation morphologique adaptative à tons de gris

La dilatation morphologique adaptative à tons de gris est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 7.11** [*Dilatation morphologique adaptative à tons de gris*]

$$\forall (m_{\square}, h, g) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}$$

$$D_{m_{\square}}^h(\cdot, g) : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto D_{m_{\square}}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.31)$$

où :

$$D_{m_{\square}}^h(f, g) : \begin{cases} D & \rightarrow \tilde{E} \\ x & \mapsto \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [f(w) \tilde{\otimes} g(x - w)] \end{cases} \quad (7.32)$$

**PROPRIÉTÉ 7.5** [*Dilatation morphologique adaptative à tons de gris*]

Cet opérateur  $D_{m_{\square}}^h(\cdot, g)$  définit bien une dilatation morphologique.

**DÉMONSTRATION :**

$$\begin{aligned} \forall x \in D \quad (\sup_i [D_{m_{\square}}^h(f_i, g)])(x) &= \sup_i [D_{m_{\square}}^h(f_i, g)(x)] \\ &= \sup_i [\sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [f_i(w) \tilde{\otimes} g(x - w)]] \\ &= \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [\sup_i [f_i(w) \tilde{\otimes} g(x - w)]] \\ &= \sup_{w \in R_{m_{\square}}^h(x)} [(\sup_i [f_i])(w) \tilde{\otimes} g(x - w)] \\ &= D_{m_{\square}}^h(\sup_i [f_i], g)(x) \end{aligned}$$

Cette commutativité avec le sup assure que  $D_{m_{\square}}^h(\cdot, g)$  soit une dilatation algébrique [Serra, 1988a] (par définition). De plus, ce nouvel opérateur est invariant par translation. Ces deux propriétés assurent alors que  $D_{m_{\square}}^h(\cdot, g)$  soit une dilatation morphologique [Serra, 1988d]. ■

### 7.3.2 Erosion morphologique adaptative à tons de gris

L'érosion morphologique adaptative à tons de gris est définie de la manière suivante :

**DÉFINITION 7.12** [*Erosion morphologique adaptative à tons de gris*]

$$\forall (m, h, g) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}$$

$$E_{m\ominus}^h(\cdot, g) : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto E_{m\ominus}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.33)$$

où :

$$E_m^h(f, g) : \begin{cases} D & \rightarrow \tilde{E} \\ x & \mapsto \inf_{w \in R_{m\ominus}^h(x)} [f(w) \tilde{\ominus} g(w-x)] \end{cases} \quad (7.34)$$

**PROPRIÉTÉ 7.6** [*Adjonction  $D_{m\ominus}^h(\cdot, g) - E_{m\ominus}^h(\cdot, g)$* ]

Cet opérateur  $E_{m\ominus}^h(\cdot, g)$  définit bien l'unique érosion morphologique associée à la dilatation morphologique  $D_{m\ominus}^h(\cdot, g)$ .

**DÉMONSTRATION :**

$$\forall w \in R_{m\ominus}^h(x) \quad D_{m\ominus}^h(f, g)(w) \tilde{\ominus} g(w-x) = \sup_{y \in R_{m\ominus}^h(w)} [f(y) \tilde{\ominus} g(w-y)] \tilde{\ominus} g(w-x) \geq f(x) \text{ puisque :}$$

$$w \in R_{m\ominus}^h(x) \Rightarrow x \in R_{m\ominus}^h(w).$$

$$\text{Donc } \inf_{w \in R_{m\ominus}^h(x)} [D_{m\ominus}^h(f, g)(w) \tilde{\ominus} g(w-x)] \geq f(x), \text{ c'est-à-dire } E_{m\ominus}^h(D_{m\ominus}^h(f, g), g)(x) \geq f(x).$$

$$\text{Ainsi } D_{m\ominus}^h(f_1, g) \leq f_2 \xrightarrow{E_{m\ominus}^h(\cdot, g)} E_{m\ominus}^h(D_{m\ominus}^h(f_1, g), g) \leq E_{m\ominus}^h(f_2, g) \Rightarrow f_1 \leq E_{m\ominus}^h(f_2, g).$$

La réciproque est obtenue par le même type de démonstration.

Par conséquent :  $D_{m\ominus}^h(f_1, g) \leq f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq E_{m\ominus}^h(f_2, g)$ . Cette dualité suffit à prouver l'unicité de l'opérateur érosion associé à la dilatation vue auparavant. ■

### 7.3.3 Fermeture, ouverture morphologique adaptative à tons de gris

Ces opérateurs sont obtenus par composition des deux précédents :

**DÉFINITION 7.13** [*Fermeture morphologique adaptative à tons de gris*]

$$\forall (m, h, g) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}$$

$$F_{m\ominus}^h(\cdot, g) : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto F_{m\ominus}^h(f, g) = E_m^h(\cdot, g) \circ D_m^h(\cdot, g)(f) \end{cases} \quad (7.35)$$

**DÉFINITION 7.14** [*Ouverture morphologique adaptative à tons de gris*]

$$\forall (m, h, g) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}$$

$$O_{m\ominus}^h(\cdot, g) : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto O_{m\ominus}^h(f, g) = D_m^h(\cdot, g) \circ E_m^h(\cdot, g)(f) \end{cases} \quad (7.36)$$

### 7.3.4 Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs à tons de gris

Ces opérateurs de base vérifient les mêmes propriétés que celles des opérateurs morphologiques adaptatifs plats.

**PROPRIÉTÉ 7.7** [*Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs à tons de gris*]

$\forall (m, h, f, f_1, f_2, g) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}^4$

1. *croissance* :

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(f_1, g) \leq D_{m_{\square}}^h(f_2, g) \\ E_{m_{\square}}^h(f_1, g) \leq E_{m_{\square}}^h(f_2, g) \\ F_{m_{\square}}^h(f_1, g) \leq F_{m_{\square}}^h(f_2, g) \\ O_{m_{\square}}^h(f_1, g) \leq O_{m_{\square}}^h(f_2, g) \end{cases} \quad (7.37)$$

2. *adjonction (dualité morphologique)* :

$$D_{m_{\square}}^h(f_1, g) \leq f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq E_{m_{\square}}^h(f_2, g) \quad (7.38)$$

3. *relations d'ordre* :

$$E_{m_{\square}}^h(f, g) \leq O_{m_{\square}}^h(f, g) \leq f \leq F_{m_{\square}}^h(f, g) \leq D_{m_{\square}}^h(f, g) \quad (7.39)$$

4. *commutativité avec le sup et l'inf* :

$$\forall (f_i) \in \mathcal{I}^K \quad \begin{cases} \sup_{i \in K} [D_{m_{\square}}^h(f_i, g)] = D_{m_{\square}}^h(\sup_{i \in K} [f_i], g) \\ \inf_{i \in K} [E_{m_{\square}}^h(f_i, g)] = E_{m_{\square}}^h(\inf_{i \in K} [f_i], g) \end{cases} \quad (7.40)$$

où  $K$  est un ensemble dénombrable.

5. *dualité par rapport à l'opposé  $\tilde{\square}$*  :

$$\begin{cases} \tilde{\square} D_{m_{\square}}^h(f, g) = E_{m_{\square}}^h(\tilde{\square} f, \tilde{\square} g) \\ \tilde{\square} F_{m_{\square}}^h(f, g) = O_{m_{\square}}^h(\tilde{\square} f, \tilde{\square} g) \end{cases} \quad (7.41)$$

6. *idempotence* :

$$\begin{cases} F_{m_{\square}}^h(F_{m_{\square}}^h(f, g), g) = F_{m_{\square}}^h(f, g) \\ O_{m_{\square}}^h(O_{m_{\square}}^h(f, g), g) = O_{m_{\square}}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.42)$$

7. *croissance, décroissance par rapport à  $m_{\square}$*  :

$$\left( \begin{array}{l} (m_{\square}^1, m_{\square}^2) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \\ m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}^1}^h(f, g) \leq D_{m_{\square}^2}^h(f, g) \\ E_{m_{\square}^1}^h(f, g) \geq E_{m_{\square}^2}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.43)$$

*suite page suivante ...*

... suite

8. invariance par  $\oplus$ -addition :

$$c \in E \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h \oplus^c(f, g) = D_{m_{\square}}^h(f, g) \\ E_{m_{\square}}^h \oplus^c(f, g) = E_{m_{\square}}^h(f, g) \\ F_{m_{\square}}^h \oplus^c(f, g) = F_{m_{\square}}^h(f, g) \\ O_{m_{\square}}^h \oplus^c(f, g) = O_{m_{\square}}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.44)$$

9. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(f, g) = D_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(f, g) \\ E_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(f, g) = E_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(f, g) \\ F_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(f, g) = F_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(f, g) \\ O_{m_{\square}}^{\alpha \otimes h}(f, g) = O_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square}}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.45)$$

10. commutativité avec la  $\tilde{\oplus}$ -addition :

$$c \in \tilde{E} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c, g) = D_{m_{\square}}^h(f, g) \tilde{\oplus} c \\ E_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c, g) = E_{m_{\square}}^h(f, g) \tilde{\oplus} c \\ F_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c, g) = F_{m_{\square}}^h(f, g) \tilde{\oplus} c \\ O_{m_{\square}}^h(f \tilde{\oplus} c, g) = O_{m_{\square}}^h(f, g) \tilde{\oplus} c \end{cases} \quad (7.46)$$

11. commutativité avec la  $\tilde{\otimes}$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(\alpha \tilde{\otimes} f, \alpha \tilde{\otimes} g) = \alpha \tilde{\otimes} D_{m_{\square}}^h(f, g) \\ E_{m_{\square}}^h(\alpha \tilde{\otimes} f, \alpha \tilde{\otimes} g) = \alpha \tilde{\otimes} E_{m_{\square}}^h(f, g) \\ F_{m_{\square}}^h(\alpha \tilde{\otimes} f, \alpha \tilde{\otimes} g) = \alpha \tilde{\otimes} F_{m_{\square}}^h(f, g) \\ O_{m_{\square}}^h(\alpha \tilde{\otimes} f, \alpha \tilde{\otimes} g) = \alpha \tilde{\otimes} O_{m_{\square}}^h(f, g) \end{cases} \quad (7.47)$$

**DÉMONSTRATION :**

Les démonstrations sont similaires à celles des opérateurs morphologiques adaptatifs plats (Dém. 7.2.4). ■

**REMARQUE 7.4** *La morphologie mathématique adaptative à tons de gris est un sous-ensemble de la morphologie mathématique adaptative plate :*

$$\forall (m_{\square}, h, f) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I} \quad \begin{cases} D_{m_{\square}}^h(f) = D_{m_{\square}}^h(f, 0_{\tilde{\square}}) \\ E_{m_{\square}}^h(f) = E_{m_{\square}}^h(f, 0_{\tilde{\square}}) \end{cases}$$

où  $0_{\tilde{\square}}$  est la fonction 'nulle' :  $x \in D \mapsto 0_{\tilde{\square}}$ .

## 7.4 Filtrage morphologiques adaptatif plat

Cette section expose le filtrage morphologique adaptatif à VAG en se limitant aux opérateurs plats, mais il est possible d'étendre les définitions, propriétés et remarques au filtrage morphologique

adaptatif à tons de gris.

**DÉFINITION 7.15** [*Filtres morphologiques adaptatifs élémentaires plats*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$F_{m_{\square}}^h$  et  $O_{m_{\square}}^h$  définissent des filtres morphologiques.

Ce sont bien des filtres morphologiques puisqu'ils vérifient la croissance et l'idempotence [Serra, 1988b].

#### 7.4.1 Filtres morphologiques adaptatifs alternés plats

**DÉFINITION 7.16** [*Filtres morphologiques adaptatifs alternés plats*]

$$\forall (m_{\square}^1, m_{\square}^2, h) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h, O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h, F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h$  et  $O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h$  définissent des filtres morphologiques.

La théorie des filtres morphologiques [Serra, 1988e] assure que ces opérateurs alternés adaptatifs soient des filtres morphologiques, vérifiant les propriétés suivantes :

**PROPRIÉTÉ 7.8** [*Propriétés des filtres morphologiques adaptatifs alternés plats*]

$$\forall (m_{\square}^1, m_{\square}^2, h) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

$$O_{m_{\square}^2}^h \leq O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \quad (7.48)$$

$$\leq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \wedge O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h$$

$$\leq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \vee O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h$$

$$\leq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h$$

$$\leq F_{m_{\square}^1}^h$$

$$F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h = \inf \left\{ g \text{ filtre} \mid g \geq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \vee O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \right\} \quad (7.49)$$

$$O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h = \sup \left\{ g \text{ filtre} \mid g \leq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \wedge O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \right\} \quad (7.50)$$

$$(F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h = O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h) \Leftrightarrow (O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h = F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h) \quad (7.51)$$

$$\Leftrightarrow (O_{m_{\square}^2}^h \circ F_{m_{\square}^1}^h \geq F_{m_{\square}^1}^h \circ O_{m_{\square}^2}^h)$$

**DÉMONSTRATION :**

Les démonstrations sont issues de la théorie des filtres [Serra, 1988e]. ■

**REMARQUE 7.5** Lorsque  $m_{\square}^1 = m_{\square}^2 = m_{\square}$ , nous utiliserons les notations suivantes :

$$FO_{m_{\square}}^h = F_{m_{\square}}^h \circ O_{m_{\square}}^h \quad (7.52)$$

$$OF_{m_{\square}}^h = O_{m_{\square}}^h \circ F_{m_{\square}}^h \quad (7.53)$$

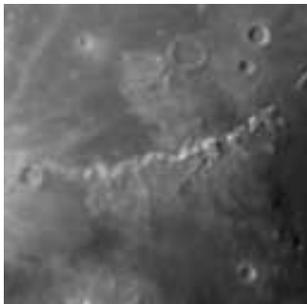
$$FOF_{m_{\square}}^h = F_{m_{\square}}^h \circ O_{m_{\square}}^h \circ F_{m_{\square}}^h \quad (7.54)$$

$$OFO_{m_{\square}}^h = O_{m_{\square}}^h \circ F_{m_{\square}}^h \circ O_{m_{\square}}^h \quad (7.55)$$

La figure 7.6 illustre le filtrage adaptatif alterné plat  $OF_{m\Diamond}^h$  avec le critère  $h$  de luminance. L'opérateur est appliqué suivant les modèles CLIP, MHIP, LRIP et LIP, avec deux tolérances d'homogénéité :  $1\Diamond$  et  $20\Diamond$ .



(a) image originale  $f$



(b)  $OF_{1\Diamond}^f(f)$



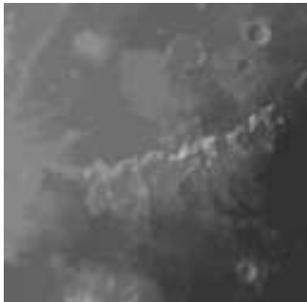
(c)  $OF_{1\Box}^f(f)$



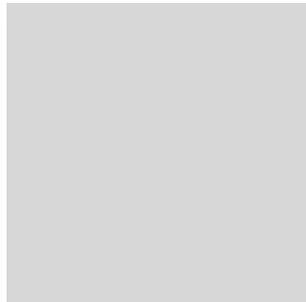
(d)  $OF_{1\Diamond}^f(f)$



(e)  $OF_{1\Delta}^f(f)$



(f)  $OF_{20\Diamond}^f(f)$



(g)  $OF_{20\Box}^f(f)$



(h)  $OF_{20\Diamond}^f(f)$



(i)  $OF_{20\Diamond}^f(f)$

**FIGURE 7.6** – Filtrage adaptatif alterné plat  $OF_m^f$  de l'image (a) 'moon'  $f$ . Le traitement est illustré selon les modèles CLIP (première colonne sauf (a)), MHIP (seconde colonne), LRIP (troisième colonne) et LIP (quatrième colonne). Deux valeurs (dans leur structure respective) de la tolérance d'homogénéité sont utilisées :  $1\Diamond$  (seconde ligne) et  $20\Diamond$  (troisième ligne).

Le modèle MHIP est clairement inadapté pour cette image et ce processus de filtrage. Avec les structures CLIP et LRIP, certains détails (comme le cratère situé à gauche de l'image) sont altérés, alors que le lissage n'est pas encore très "fort". Le filtrage adaptatif au sens LIP semble donc, pour cette application particulière, le mieux adapté : plusieurs zones sont uniformisées sans perte des détails significatifs.

### 7.4.2 Filtres morphologiques adaptatifs séquentiels plats

La famille des ouvertures morphologiques adaptatives plates  $\{O_{m\ominus}^h\}_{m\ominus}$  et la famille des fermetures morphologiques adaptatives plates  $\{F_{m\ominus}^h\}_{m\ominus}$  ne définissent généralement pas une granulométrie [Serra, 1988a] (Déf. 7.17) et anti-granulométrie [Serra, 1988a] (Déf. 7.18), respectivement.

#### DÉFINITION 7.17 [Granulométrie]

Une granulométrie est une famille d'ouvertures algébriques  $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda>0}$  telle que :

$$\forall(\lambda, \mu) \quad \lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \gamma_\lambda < \gamma_\mu \quad (7.56)$$

#### DÉFINITION 7.18 [Anti-granulométrie]

Une granulométrie est une famille de fermetures algébriques  $\{\phi_\lambda\}_{\lambda>0}$  telle que :

$$\forall(\lambda, \mu) \quad \lambda \geq \mu > 0 \Rightarrow \phi_\lambda > \phi_\mu \quad (7.57)$$

L'exemple 7.1 présente l'étude granulométrique réalisée avec des ouvertures morphologiques adaptatives plates  $\{O_m^f\}_{m>0}$  (au sens CLIP avec le critère de luminance) sur une image de vaisseaux rétiniens  $f$ .

#### EXEMPLE 7.1 – Etude granulométrique adaptative de l'image 'vaisseaux'

Cette étude granulométrique de l'image 'vaisseaux'  $f$  (Fig. 7.7 (a)) est établie à l'aide de :

- la famille des ouvertures morphologiques adaptatives plates  $\{O_m^f\}_{m>0}$  avec le critère de luminance et le modèle CLIP,
- la mesure de volume :  $Vol(f) = \int_D f(x)dx$

La fonction de distribution granulométrique [Serra, 1982b] FD est alors définie comme :

$$FD(m) = 1 - Vol(O_m^f)/Vol(f) \quad (7.58)$$

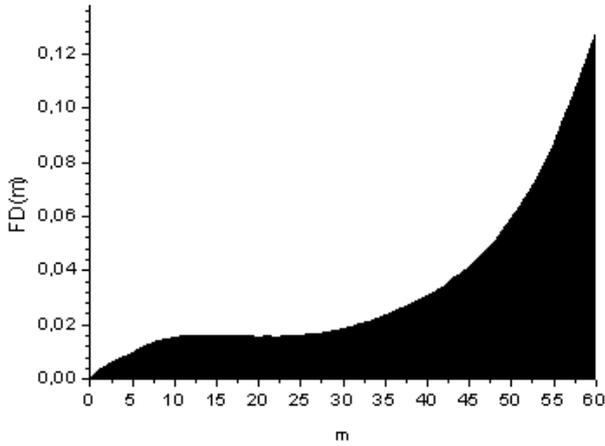
Le spectre granulométrique [Serra, 1982b] S est déterminé par la dérivée de la fonction FD :

$$S(m) = (1 - Vol(O_m^f)/Vol(f))' \quad (7.59)$$

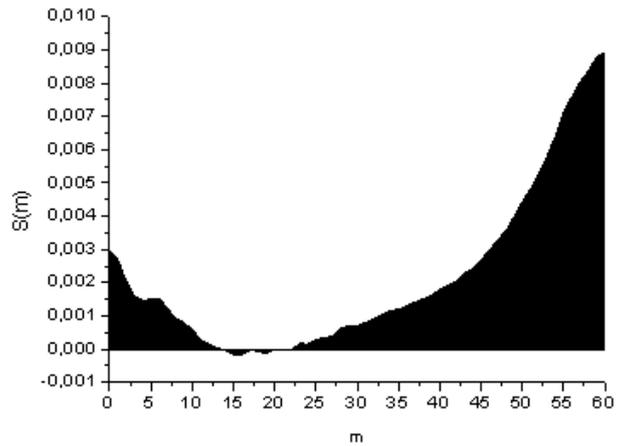
Les graphes de la fonction de distribution granulométrique  $FD$  et du spectre granulométrique  $S$  sont représentés dans la figure 7.7. Il existe des valeurs de  $m$  pour lesquelles  $S(m) < 0$ , prouvant que la famille des ouvertures morphologiques adaptatives n'est pas ordonnée : ce n'est donc pas une granulométrie au sens de la définition 7.17.



(a) image originale



(b) fonction de distribution granulométrique



(c) spectre granulométrique

**FIGURE 7.7** – Etude granulométrique adaptative de l'image 'vaisseaux' (a) avec des ouvertures morphologiques adaptatives plates et une mesure de volume.

Ces notions de granulométrie et d'anti-granulométrie sont néanmoins nécessaires à la construction de *filtres alternés séquentiels* (FAS) au sens de Serra [1988f].

**REMARQUE 7.6** *Cependant, il conviendrait d'effectuer une étude spécifique sur ces familles d'ouvertures (resp. fermetures) morphologiques adaptatives plates  $\{m_{\square}^h\}_{m_{\square}}$  (resp.  $\{F_{m_{\square}}^h\}_{m_{\square}}$ ). Cette non-monotonie des filtres morphologiques adaptatifs plats pourrait en fait révéler des changements de 'comportement spatial' à certaines échelles.*

Dans le but de définir de tels filtres, des opérateurs de dilatation morphologique adaptative séquentielle plate  $D_{m_{\square},p}^h$  et d'érosion morphologique adaptative séquentielle plate  $E_{m_{\square},p}^h$  vont être introduits en composant  $p$  fois la dilatation  $D_{m_{\square}}^h$  et l'érosion  $E_{m_{\square}}^h$ . Ainsi les ouvertures et fermetures construites à partir de ces opérateurs séquentiels constitueront naturellement des granulométries et anti-granulométries.

**Dilatation, érosion morphologique adaptative séquentielle plate**
**DÉFINITION 7.19** [*Dilatation morphologique adaptative séquentielle plate*]

$$\forall (m_{\square}, p, h) \in E^{\oplus} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathcal{C}$$

$$D_{m_{\square}, p}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto \underbrace{D_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ D_{m_{\square}}^h}_{p \text{ fois}}(f) \end{cases} \quad (7.60)$$

**PROPRIÉTÉ 7.9** [*Dilatation morphologique adaptative séquentielle plate*]

 Cet opérateur  $D_{m_{\square}, p}^h$  définit bien une dilatation morphologique.

**DÉMONSTRATION :**

D'une part  $D_{m_{\square}, p}^h$  est une dilatation algébrique puisqu'elle commute avec le sup. ( $D_{m_{\square}}^h$  commute lui-même avec le sup (Prop. 7.4). D'autre part, cet opérateur est évidemment invariant par translation. Ces deux propriétés suffisent alors à prouver que  $D_{m_{\square}, p}^h$  est bien une dilatation morphologique. ■

Son érosion adjointe est explicitée comme suit :

**DÉFINITION 7.20** [*Erosion morphologique adaptative séquentielle plate*]

$$\forall (m_{\square}, p, h) \in E^{\oplus} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathcal{C}$$

$$E_{m_{\square}, p}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto \underbrace{E_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ E_{m_{\square}}^h}_{p \text{ fois}}(f) \end{cases} \quad (7.61)$$

**PROPRIÉTÉ 7.10** [*Adjonction des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats*]

 $E_{m_{\square}, p}^h$  définit bien l'unique érosion adjointe à l'opérateur de dilatation  $D_{m_{\square}, p}^h$ .

**DÉMONSTRATION :**

L'érosion morphologique adaptative séquentielle plate et la dilatation morphologique adaptative séquentielle plate sont bien des opérateurs adjoints :

$$\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad D_{m_{\square}, p}^h(f) \leq g \Rightarrow E_{m_{\square}, p}^h \circ D_{m_{\square}, p}^h(f) \leq E_{m_{\square}, p}^h(g). \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} E_{m_{\square}, p}^h \circ D_{m_{\square}, p}^h(f) &= \underbrace{E_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ E_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}} \circ E_{m_{\square}}^h \circ D_{m_{\square}}^h \circ \underbrace{D_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ D_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}}(f) \\ &= \underbrace{E_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ E_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}} \circ E_{m_{\square}}^h \circ \underbrace{D_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ D_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}}(f) \\ &\geq \underbrace{E_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ E_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}} \circ \underbrace{D_{m_{\square}}^h \circ \dots \circ D_{m_{\square}}^h}_{p-1 \text{ fois}}(f) \\ &\geq \dots \geq E_{m_{\square}}^h \circ D_{m_{\square}}^h(f) \geq f \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } f \leq E_{m_{\square}, p}^h \circ D_{m_{\square}, p}^h(f) \leq E_{m_{\square}, p}^h(g). \quad \blacksquare$$

**Fermeture, ouverture morphologique adaptative séquentielle plate**

Les opérateurs suivants, obtenus par composition des deux transformations adjointes précédentes, sont des filtres morphologiques.

**DÉFINITION 7.21** [*Fermeture morphologique adaptative séquentielle plate*]

$$\forall (m_{\square}, p, h) \in E^{\oplus} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathcal{C}$$

$$F_{m_{\square}, p}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto E_{m_{\square}, p}^h \circ D_{m_{\square}, p}^h(f) \end{cases} \quad (7.62)$$

**DÉFINITION 7.22** [*Ouverture morphologique adaptative séquentielle plate*]

$$\forall (m, p, h) \in E^{\oplus} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathcal{C}$$

$$O_{m_{\square}, p}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto D_{m_{\square}, p}^h \circ E_{m_{\square}, p}^h(f) \end{cases} \quad (7.63)$$

**Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats**

Les opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats présentent des propriétés analogues à celles des opérateurs morphologiques adaptatifs plats :

**PROPRIÉTÉ 7.11** [*Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats*]

 $\forall (m_{\square}, p, h, f, f_1, f_2) \in E^{\oplus} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}^3$ 

1. *croissance* :

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}, p}^h(f_1) \leq D_{m_{\square}, p}^h(f_2) \\ E_{m_{\square}, p}^h(f_1) \leq E_{m_{\square}, p}^h(f_2) \\ F_{m_{\square}, p}^h(f_1) \leq F_{m_{\square}, p}^h(f_2) \\ O_{m_{\square}, p}^h(f_1) \leq O_{m_{\square}, p}^h(f_2) \end{cases} \quad (7.64)$$

2. *adjonction (dualité morphologique)* :

$$D_{m_{\square}, p}^h(f_1) \leq f_2 \Leftrightarrow f_1 \leq E_{m_{\square}, p}^h(f_2) \quad (7.65)$$

3. *extensivité, anti-extensivité* :

$$O_{m_{\square}, p}^h(f) \leq f \leq F_{m_{\square}, p}^h(f) \quad (7.66)$$

4. *commutativité avec le sup et l'inf* :

$$\forall (f_i) \in \mathcal{I}^K \quad \begin{cases} \sup_{i \in K} [D_{m_{\square}, p}^h(f_i)] = D_{m_{\square}, p}^h(\sup_{i \in K} [f_i]) \\ \inf_{i \in K} [E_{m_{\square}, p}^h(f_i)] = E_{m_{\square}, p}^h(\inf_{i \in K} [f_i]) \end{cases} \quad (7.67)$$

où  $K$  est un ensemble dénombrable.

5. *dualité par rapport à l'opposé  $\tilde{\square}$*  :

$$\begin{cases} \tilde{\square} D_{m_{\square}, p}^h(f) = E_{m_{\square}, p}^h(\tilde{\square} f) \\ \tilde{\square} F_{m_{\square}, p}^h(f) = O_{m_{\square}, p}^h(\tilde{\square} f) \end{cases} \quad (7.68)$$

6. *idempotence* :

$$\begin{cases} F_{m_{\square}, p}^h(F_{m_{\square}, p}^h(f)) = F_{m_{\square}, p}^h(f) \\ O_{m_{\square}, p}^h(O_{m_{\square}, p}^h(f)) = O_{m_{\square}, p}^h(f) \end{cases} \quad (7.69)$$

7. *croissance, décroissance par rapport à  $m_{\square}$*  :

$$\left( \begin{array}{l} (m_{\square}^1, m_{\square}^2) \in E^{\oplus} \times E^{\oplus} \\ m_{\square}^1 \leq m_{\square}^2 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square}^1, p}^h(f) \leq D_{m_{\square}^2, p}^h(f) \\ E_{m_{\square}^1, p}^h(f) \geq E_{m_{\square}^2, p}^h(f) \end{cases} \quad (7.70)$$

*suite page suivante ...*

... suite

8. invariance par  $\oplus$ -translation :

$$c \in \tilde{E} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square},p}^h \oplus^c(f) = D_{m_{\square},p}^h(f) \\ E_{m_{\square},p}^h \oplus^c(f) = E_{m_{\square},p}^h(f) \\ F_{m_{\square},p}^h \oplus^c(f) = F_{m_{\square},p}^h(f) \\ O_{m_{\square},p}^h \oplus^c(f) = O_{m_{\square},p}^h(f) \end{cases} \quad (7.71)$$

9. compatibilité avec la  $\otimes$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square},p}^{\alpha \otimes h}(f) = D_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^h(f) \\ E_{m_{\square},p}^{\alpha \otimes h}(f) = E_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^h(f) \\ F_{m_{\square},p}^{\alpha \otimes h}(f) = F_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^h(f) \\ O_{m_{\square},p}^{\alpha \otimes h}(f) = O_{\frac{1}{\alpha} \otimes m_{\square},p}^h(f) \end{cases} \quad (7.72)$$

10. commutativité avec la  $\tilde{\oplus}$ -addition :

$$c \in \tilde{E} \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square},p}^h(f \tilde{\oplus} c) = D_{m_{\square},p}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ E_{m_{\square},p}^h(f \tilde{\oplus} c) = E_{m_{\square},p}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ F_{m_{\square},p}^h(f \tilde{\oplus} c) = F_{m_{\square},p}^h(f) \tilde{\oplus} c \\ O_{m_{\square},p}^h(f \tilde{\oplus} c) = O_{m_{\square},p}^h(f) \tilde{\oplus} c \end{cases} \quad (7.73)$$

11. commutativité avec la  $\tilde{\otimes}$ -multiplication scalaire :

$$\alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \begin{cases} D_{m_{\square},p}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} D_{m_{\square},p}^h(f) \\ E_{m_{\square},p}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} E_{m_{\square},p}^h(f) \\ F_{m_{\square},p}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} F_{m_{\square},p}^h(f) \\ O_{m_{\square},p}^h(\alpha \tilde{\otimes} f) = \alpha \tilde{\otimes} O_{m_{\square},p}^h(f) \end{cases} \quad (7.74)$$

12. connexité des opérateurs :

$$\left( \begin{array}{l} \mathcal{I} = \mathcal{C} \\ f \in \mathcal{I} \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} f \mapsto D_{m_{\square},p}^f(f) \\ f \mapsto E_{m_{\square},p}^f(f) \\ f \mapsto F_{m_{\square},p}^f(f) \\ f \mapsto O_{m_{\square},p}^f(f) \end{cases} \text{ sont des opérateurs connexes.} \quad (7.75)$$

**DÉMONSTRATION :**

Les démonstrations sont similaires à celles des opérateurs morphologiques adaptatifs plats (Dém. 7.2.4). ■

### Illustration de traitements morphologiques adaptatifs séquentiels plats

La figure 7.8 illustre l'application des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats avec le critère de luminance et le modèle CLIP, sur l'image 'Lena'.

(a) image originale  $f$ (b)  $D_{10,1}^f(f)$ (c)  $D_{10,2}^f(f)$ (d)  $D_{10,3}^f(f)$ (e)  $D_{10,4}^f(f)$ (f)  $E_{10,1}^f(f)$ (g)  $E_{10,2}^f(f)$ (h)  $E_{10,3}^f(f)$ (i)  $E_{10,4}^f(f)$ (j)  $F_{10,1}^f(f)$ (k)  $F_{10,2}^f(f)$ (l)  $F_{10,3}^f(f)$ (m)  $F_{10,4}^f(f)$ (n)  $O_{10,1}^f(f)$ (o)  $O_{10,2}^f(f)$ (p)  $O_{10,3}^f(f)$ (q)  $O_{10,4}^f(f)$ **FIGURE 7.8** – Opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats appliqués sur l'image 'Lena'

### 7.4.3 Filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats

Les filtres morphologiques adaptatifs séquentiels plats engendrent des granulométries et anti-granulométries :

**PROPRIÉTÉ 7.12** [*Granulométries, anti-granulométries adaptatives*]

$$\forall (m_{\square}, h) \in E^{\oplus} \times \mathcal{C}$$

1.  $\{O_{m_{\square}, p}^h\}_{p \geq 0}$  engendre une granulométrie,
2.  $\{F_{m_{\square}, p}^h\}_{p \geq 0}$  engendre une anti-granulométrie.

**DÉMONSTRATION :**

Soient  $(p, q) \in \overline{\mathbb{N}}^2$  tel que  $p \geq q$ .

$$\begin{aligned} O_{m_{\square}, p}^h &= D_{m_{\square}, q}^h \circ D_{m_{\square}, p-q}^h \circ E_{m_{\square}, p-q}^h \circ E_{m_{\square}, q}^h = D_{m_{\square}, q}^h \circ O_{m_{\square}, p-q}^h \circ E_{m_{\square}, q}^h \leq D_{m_{\square}, q}^h \circ E_{m_{\square}, q}^h = \\ &O_{m_{\square}, q}^h \\ F_{m_{\square}, p}^h &= E_{m_{\square}, q}^h \circ E_{m_{\square}, p-q}^h \circ D_{m_{\square}, p-q}^h \circ D_{m_{\square}, q}^h = E_{m_{\square}, q}^h \circ F_{m_{\square}, p-q}^h \circ D_{m_{\square}, q}^h \geq E_{m_{\square}, q}^h \circ D_{m_{\square}, q}^h = \\ &F_{m_{\square}, q}^h \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ceci permet de définir une nouvelle classe de filtres morphologiques adaptatifs : les filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats.

**Filtres FAS.**  $OF_{m_{\square}, n}^h$  **et**  $FO_{m_{\square}, n}^h$

Les filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats sont définis de la manière suivante :

**DÉFINITION 7.23** [*Filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats*]

$$\forall (m_{\square}, n, h) \in E^{\oplus} \times \mathbb{N} \times \mathcal{C} \quad \forall (p_i) \in \overline{\mathbb{N}}^{[1, n]} \text{ suite } \nearrow$$

$$\text{FAS. } OF_{m_{\square}, n}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto (O_{m_{\square}, p_n}^h \circ F_{m_{\square}, p_n}^h) \circ \dots \circ (O_{m_{\square}, p_1}^h \circ F_{m_{\square}, p_1}^h)(f) \end{cases} \quad (7.76)$$

$$\text{FAS. } FO_{m_{\square}, n}^h : \begin{cases} \mathcal{I} & \rightarrow \mathcal{I} \\ f & \mapsto (F_{m_{\square}, p_n}^h \circ O_{m_{\square}, p_n}^h) \circ \dots \circ (F_{m_{\square}, p_1}^h \circ O_{m_{\square}, p_1}^h)(f) \end{cases} \quad (7.77)$$

La théorie des filtres morphologiques [Serra, 1988e] assure que ces opérateurs alternés séquentiels soient des filtres morphologiques.

#### Illustration de filtres morphologiques adaptatifs alternés séquentiels plats

La figure 7.9 compare le filtrage alterné séquentiel (FAS) plat et adaptatif appliqué sur l'image 'Lena'. Les notations des FAS usuels sont analogues à celles des FAS adaptatifs. Ces derniers sont déterminés avec le critère de luminance et le modèle CLIP.



(a)  $f$



(b) FAS.FO $_{10,1}^h(f)$



(c) FAS.FO $_{10,2}^h(f)$



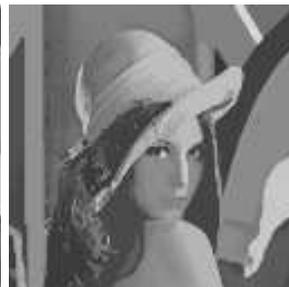
(d) FAS.FO $_{10,3}^h(f)$



(e) FAS.FO $_{10,4}^h(f)$



(f) FAS.OF $_{10,1}^h(f)$



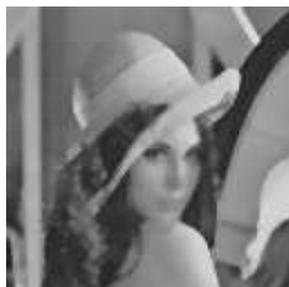
(g) FAS.OF $_{10,2}^h(f)$



(h) FAS.OF $_{10,3}^h(f)$



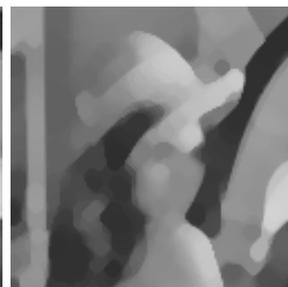
(i) FAS.OF $_{10,4}^h(f)$



(j) FAS.FO $_{1,1}(f)$



(k) FAS.FO $_{1,2}(f)$



(l) FAS.FO $_{1,3}(f)$



(m) FAS.FO $_{1,4}(f)$



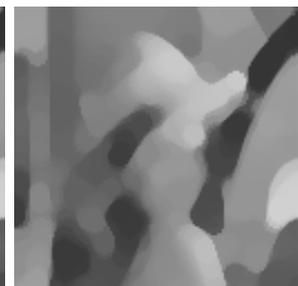
(n) FAS.OF $_{1,1}(f)$



(o) FAS.OF $_{1,2}(f)$



(p) FAS.OF $_{1,3}(f)$



(q) FAS.OF $_{1,4}(f)$

**FIGURE 7.9** – FAS : adaptatifs (2<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> lignes) vs classiques (4<sup>o</sup> et 5<sup>o</sup> lignes), appliqués sur 'Lena' (1<sup>o</sup> ligne).

Comme précédemment observé, les filtres usuels dégradent les transitions (dû à l'indépendance des ES par rapport à l'image) à l'inverse des filtres à VAG qui utilisent des ESA s'"auto-adaptant" aux structures spatiales de l'image.

### 7.5 Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs plats

Tous ces opérateurs morphologiques adaptatifs plats (élémentaires, alternés, séquentiels, alternés séquentiels) sont des opérateurs croissants qui peuvent être classifiés en différentes catégories (Déf. 7.24) [Serra, 1988b,e].

Le tableau 7.1 résume l'appartenance des différents opérateurs morphologiques adaptatifs plats à ces classes, pour tous  $(m_{\ominus}^1, m_{\ominus}^2, h, p, n)$  appartenant à  $E^{\oplus} \times E^{\oplus} \times \mathcal{C} \times \overline{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}$ .

Opérateur \ Catégorie	sous-filtre	sur-filtre	V-sous-filtre	^sur-filtre	filtre	V-filtre	^filtre	◇-filtre
$D_{m_{\ominus}^1, p}^h$	•		•					
$E_{m_{\ominus}^2, p}^h$		•		•				
$F_{m_{\ominus}^1, p}^h$	•	•	•	•	•	•	•	•
$O_{m_{\ominus}^2, p}^h$	•	•	•	•	•	•	•	•
$F_{m_{\ominus}^1, p}^h \circ O_{m_{\ominus}^2, p}^h$	•	•		•	•		•	
$O_{m_{\ominus}^2, p}^h \circ F_{m_{\ominus}^1, p}^h$	•	•	•		•	•		
$O_{m_{\ominus}^2, p}^h \circ F_{m_{\ominus}^1, p}^h \circ O_{m_{\ominus}^2, p}^h$	•	•		•	•		•	
$F_{m_{\ominus}^1, p}^h \circ O_{m_{\ominus}^2, p}^h \circ F_{m_{\ominus}^1, p}^h$	•	•	•		•	•		
FAS. $FO_{m_{\ominus}^1, n}^h$	•	•	•	•	•	•	•	•
FAS. $OF_{m_{\ominus}^2, n}^h$	•	•	•	•	•	•	•	•

TABLE 7.1 – Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs alternés plats

**DÉFINITION 7.24** [*Catégorie des opérateurs morphologiques*]

- *sous-filtre* :

$$\begin{aligned} \psi \text{ sous-filtre} &\Leftrightarrow \psi = (Id \vee \psi) \circ \psi & (7.78) \\ &\Leftrightarrow \psi \circ \psi \leq \psi \end{aligned}$$

- *sur-filtre* :

$$\begin{aligned} \psi \text{ sur-filtre} &\Leftrightarrow \psi = (Id \wedge \psi) \circ \psi & (7.79) \\ &\Leftrightarrow \psi \circ \psi \geq \psi \end{aligned}$$

- *filtre* :

$$\psi\text{-filtre} \Leftrightarrow \psi \text{ sous-filtre et } \psi \text{ sur-filtre}$$

- *sous-filtre sup ou  $\vee$ -sous-filtre* :

$$\psi \vee\text{-sous-filtre} \Leftrightarrow \psi = \psi \circ (Id \vee \psi) \quad (7.80)$$

- *sur-filtre inf ou  $\wedge$ -sur-filtre* :

$$\psi \wedge\text{-sur-filtre} \Leftrightarrow \psi = \psi \circ (Id \wedge \psi) \quad (7.81)$$

- *filtre sup ou  $\vee$ -filtre* :

$$\begin{aligned} \psi \vee\text{-filtre} &\Leftrightarrow \psi \vee\text{-sous-filtre et } \psi \text{ sur-filtre} & (7.82) \\ &\Leftrightarrow \psi = \psi \circ (Id \vee \psi) = (Id \wedge \psi) \circ \psi \\ &\Leftrightarrow (\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad (f \leq g \leq f \vee \psi(f)) \Rightarrow (\psi(g) = \psi(f))) \end{aligned}$$

- *filtre inf ou  $\wedge$ -filtre* :

$$\begin{aligned} \psi \wedge\text{-filtre} &\Leftrightarrow \psi \wedge\text{-sur-filtre et } \psi \text{ sous-filtre} & (7.83) \\ &\Leftrightarrow \psi = \psi \circ (Id \wedge \psi) = (Id \vee \psi) \circ \psi \\ &\Leftrightarrow (\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad (f \wedge \psi(f) \leq g \leq f) \Rightarrow (\psi(g) = \psi(f))) \end{aligned}$$

- *filtre fort ou  $\diamond$ -filtre* :

$$\begin{aligned} \psi \diamond\text{-filtre} &\Leftrightarrow \psi \wedge\text{-sur-filtre et } \psi \vee\text{-sous-filtre} & (7.84) \\ &\Leftrightarrow \psi = \psi \circ (Id \wedge \psi) = \psi \circ (Id \vee \psi) \\ &\Leftrightarrow (\forall (f, g) \in \mathcal{I}^2 \quad (f \wedge \psi(f) \leq g \leq f \vee \psi(f)) \Rightarrow (\psi(g) = \psi(f))) \end{aligned}$$

Le chapitre suivant introduit un autre type de transformations à VAG.



# CHAPITRE 8

## Filtrage de Choquet à VAG

### SOMMAIRE

---

<b>8.1 Rappels sur le filtrage de Choquet</b> . . . . .	<b>115</b>
8.1.1 Intégrale floue de Choquet . . . . .	115
8.1.2 Filtres de Choquet . . . . .	116
8.1.3 Filtres de convolution de Choquet . . . . .	118
<b>8.2 Filtres de Choquet adaptatifs</b> . . . . .	<b>119</b>
8.2.1 Filtres adaptatifs et mesures floues cardinales . . . . .	119
8.2.2 Illustrations de filtres de Choquet adaptatifs . . . . .	123

---

Les intégrales floues [Choquet, 1953; Sugeno, 1974] fournissent une forme générale de représentation des filtres d'images. Elles généralisent une large classe d'opérateurs : filtres linéaires, filtres morphologiques, filtres de rang (rank filters), filtres d'ordre (order statistic filters), filtres d'empilement (stack filters), . . .

Le but de ce chapitre est donc de construire de nouveaux filtres adaptatifs, en prolongeant ces filtres par intégrale floue aux VAG.

### 8.1 Rappels sur le filtrage de Choquet

#### 8.1.1 Intégrale floue de Choquet

Les intégrales floues sont des intégrales d'une fonction réelle par rapport à une mesure floue (Déf. 8.1) [Sugeno, 1974]. Les plus communément utilisées sont l'intégrale de Sugeno [Sugeno, 1974] et l'intégrale de Choquet (Déf. 8.2) [Choquet, 1953].

#### DÉFINITION 8.1 [Mesure floue]

Une mesure floue définie sur un espace  $X$  est une fonction  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, 1]$  vérifiant les conditions suivantes :

- $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(X) = 1$
- $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \quad A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

Les mesures floues sont plus générales que les mesures (additives) ordinaires [Halmos, 1950; Ash and Doleans-Dade, 2000] puisque  $\mu(A \cup B)$  n'est pas nécessairement égal à  $\mu(A) + \mu(B)$  pour des ensembles  $A$  et  $B$  disjoints.

**DÉFINITION 8.2** [*Intégrale floue de Choquet continue*]

Soit  $\mu$  une mesure floue définie sur un ensemble  $X$  et  $f$  une fonction sur  $X$  à valeurs dans  $[r_1, r_2]$ . L'intégrale floue de Choquet est définie de la manière suivante :

$$\text{IC}_\mu(f) = \int_{r_1}^{r_2} \mu(\{x; f(x) > \alpha\}) d\alpha \quad (8.1)$$

Si  $f$  est à valeurs discrètes dans  $\{0, 1, \dots, M - 1\}$ , l'intégrale devient :

$$\text{IC}_\mu(f) = \sum_{i=0}^{i=M-1} \mu(\{x; f(x) > i\}) \quad (8.2)$$

Si  $f$  est définie sur un ensemble fini  $X = \{x_0, x_1, \dots, x_{K-1}\}$  de points, on parle d'intégrale floue discrète :

**DÉFINITION 8.3** [*Intégrale floue de Choquet discrète*]

$$\text{IC}_\mu(\{f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{K-1})\}) = \sum_{i=0}^{K-1} (f(x_{(i)}) - f(x_{(i-1)})) \mu(A_i) \quad (8.3)$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} (\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})) f(x_{(i)}) \quad (8.4)$$

où

- $K$  est le nombre de points de l'ensemble mesurable,
- $x_{(0)}, x_{(1)}, \dots, x_{(K-1)}$  est une permutation de  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  satisfaisant :  
 $f(x_{(0)}) \leq f(x_{(1)}) \leq \dots, f(x_{(K-1)})$ ,
- $A_{(i)} = \{x_{(i)}, x_{(i+1)}, \dots, x_{(K-1)}\}$ ,
- $f(x_{(-1)}) = 0$ ,
- $A_{(K)} = \emptyset$ .

Lorsque la mesure floue est additive, l'intégrale de Choquet coïncide avec l'intégrale de Lebesgue.

### 8.1.2 Filtres de Choquet

Soient  $f$  une image à tons de gris définie sur un ensemble fini  $X$  de points,  $W$  une fenêtre de taille  $K$ , et  $\mu$  une mesure floue sur  $W$ . Cette mesure peut-être étendue à toute fenêtre translattée  $W_y$  par  $y \in X$  :

$$\forall A \subseteq W_y \quad \mu(A) = \mu(A_{-y}), A_{-y} \subseteq W \quad (8.5)$$

Alors, le filtre de Choquet est défini par :

**DÉFINITION 8.4** [*Filtre de Choquet*]

$$\forall y \in X \quad \text{FIC}_\mu^W(f)(y) = \text{IC}_\mu(\{f(x_i); x_i \in W_y\}) \quad (8.6)$$

$$= \sum_{x_i \in W_y} (\mu(A_{(i)}) - \mu(A_{(i+1)})) f(x_{(i)}) \quad (8.7)$$

Les filtres de Choquet généralisent [Grabisch, 1994] :

- les filtres linéaires (moyen, ...) :

$$\text{FL}_W^\alpha(f)(y) = \sum_{x_i \in W_y} \alpha_i f(x_i), \quad \alpha \in [0, 1]^K, \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i = 1 \quad (8.8)$$

en prenant la mesure additive sur  $W$  telle que  $\mu(A_i) - \mu(A_{i+1}) = \mu(\{x_i\}) := \alpha_i$

- les filtres de rang (médian, min, max, ...) :

$$\text{FR}_W^d(f)(y) = f(x_{(d)}), \quad d \in [0, K-1] \cap \mathbb{N} \quad (8.9)$$

en prenant la mesure floue :

$$\forall A \subseteq W \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq K-d \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.10)$$

où  $|A|$  désigne le cardinal de  $A$ .

- les filtres d'ordre ( $\alpha$ -trimmed mean, quasi midrange, ...) :

$$\text{FO}_W^\alpha(f)(y) = \sum_{x_i \in W_y} \alpha_i f(x_{(i)}) \quad , \alpha \in [0, 1]^K, \sum_{i=0}^{K-1} \alpha_i = 1 \quad (8.11)$$

en prenant la mesure floue :

$$\forall A \subseteq W \quad \mu(A) = \sum_{j=0}^{|A|-1} \alpha_{K-j} \quad (8.12)$$

Les filtres d'ordre (englobant les filtres de rang) sont obtenus par des filtres de Choquet utilisant une mesure cardinale (Déf. 8.5).

**DÉFINITION 8.5** [*Mesure cardinale*]

Une mesure cardinale sur  $W$  est une mesure floue sur  $W$  vérifiant :

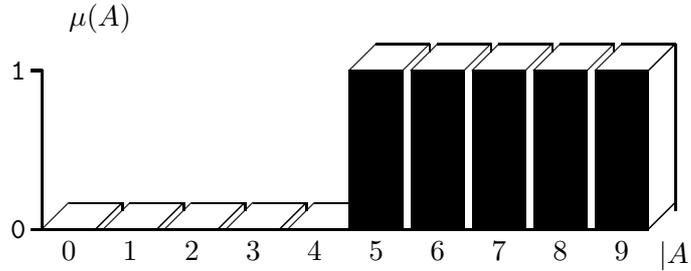
$$\forall A, B \subseteq W \quad |A| = |B| \Rightarrow \mu(A) = \mu(B) \quad (8.13)$$

Ainsi tout filtre d'ordre (avec une fenêtre d'analyse glissante  $W$ ) peut-être caractérisé par l'application  $|A| \mapsto \mu(A)$ , où  $A \subseteq W$  (Ex. 8.1).

**EXEMPLE 8.1** – Représentation de la mesure floue associée au filtre médian  $3 \times 3$

Le filtre médian sur une fenêtre  $W$  ( $3 \times 3$ ) est représenté (Eq. 8.10) par la mesure cardinale  $\mu$  suivante :

$$\forall A \subseteq W \quad \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \lfloor \frac{W}{2} \rfloor \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (8.14)$$



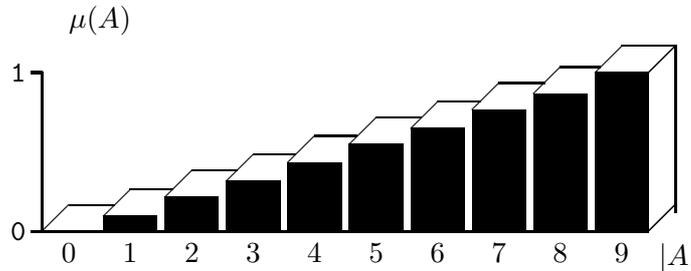

---

**REMARQUE 8.1** *Le filtre moyen (8.2) peut être représenté par une mesure cardinale, mais ce n'est pas vrai pour tous les autres filtres linéaires.*

**EXEMPLE 8.2** – Représentation de la mesure floue associée au filtre moyen  $3 \times 3$

Le filtre moyen sur une fenêtre  $W$  ( $3 \times 3$ ) est représenté par la mesure cardinale  $\mu$  suivante :

$$\forall A \subseteq W \quad \mu(A) = \frac{|A|}{|W|} \quad (8.15)$$




---

### 8.1.3 Filtres de convolution de Choquet

Soit  $f$  une image à tons de gris,  $g$  un noyau sur la fenêtre  $W = \{x_0, x_1, \dots, x_{K-1}\}$  et  $\mu$  une mesure floue sur  $W$ . Le filtre de convolution de Choquet de  $f$  par  $g$  est définie comme suit :

**DÉFINITION 8.6** [*Filtre de convolution de Choquet*]

$$\text{FCIC}_\mu^W(f, g)(y) = \text{IC}_\mu(\{f(x_i)g(y - x_i); y - x_i \in W\}) \quad (8.16)$$

$$= \text{IC}_\mu(\{f(y + z_i)g(-z_i); z_i \in -W\}) \quad (8.17)$$

où  $-W = \{x; -x \in W\}$

Si la mesure est additive, cette convolution coïncide avec la convolution conventionnelle.

Ainsi, les filtres de convolution par intégrale floue de Choquet généralisent (entre autres) les filtres linéaires et les filtres dérivateurs (Prewitt, Sobel, Laplacien, ...).

## 8.2 Filtres de Choquet adaptatifs

Pour étendre les filtres de Choquet aux VAG, les voisinages adaptatifs généraux  $V_{m_\square}^h(y)$  sont utilisés comme fenêtres  $W$ . Cependant, la variabilité de la forme et de la taille des VAG impose la détermination d'une famille de mesures (du même type)  $\{\mu_y : V_{m_\square}^h(y) \rightarrow [0, 1]\}_{y \in D}$ .

En supposant que le support spatial des images  $D$  soit dans  $\mathbb{Z}^2$ , le filtre de Choquet adaptatif et le filtre de convolution de Choquet adaptatif sont définis de la manière suivante :

**DÉFINITION 8.7** [*Filtre de Choquet adaptatif*]

$\forall (m_\square, h, f, y) \in E^\oplus \times \mathcal{C} \times \mathcal{I} \times D$

$$\text{FIC}_{m_\square}^h(f)(y) = \text{IC}_{\mu_y}(\{f(x_i); x_i \in V_{m_\square}^h(y)\}) \quad (8.18)$$

$$= \sum_{x_i \in V_{m_\square}^h(y)} (\mu_y(A_{(i)}) - \mu_y(A_{(i+1)})) f(x_{(i)}) \quad (8.19)$$

**DÉFINITION 8.8** [*Filtre de convolution de Choquet adaptatif*]

$\forall (m_\square, h, f, g, y) \in E^\oplus \times \mathcal{C} \times \mathcal{I}^2 \times D$

$$\text{FCIC}_{m_\square}^h(f, g)(y) = \text{IC}_{\mu_y}(\{f(x_i) \tilde{\otimes} g(y - x_i); x_i \in (V_{m_\square}^h)(y)\}) \quad (8.20)$$

Dans la section suivante, différents types de filtres de Choquet adaptatifs, basés sur les mesures cardinales, sont définis.

### 8.2.1 Filtres adaptatifs et mesures floues cardinales

Les mesures cardinales permettent de construire, indépendamment de la forme spatiale du VAG, une famille  $\{\mu_y\}_{y \in D}$  cohérente (c'est-à-dire de mesures du même type, dépendantes uniquement du cardinal du VAG). Les filtres de Choquet adaptatifs utilisant les mesures cardinales floues suivantes (Ex. 8.4, 8.3, 8.5, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, 8.10 définissent différents filtres de Choquet adaptatifs [Amattouch, 2005] :

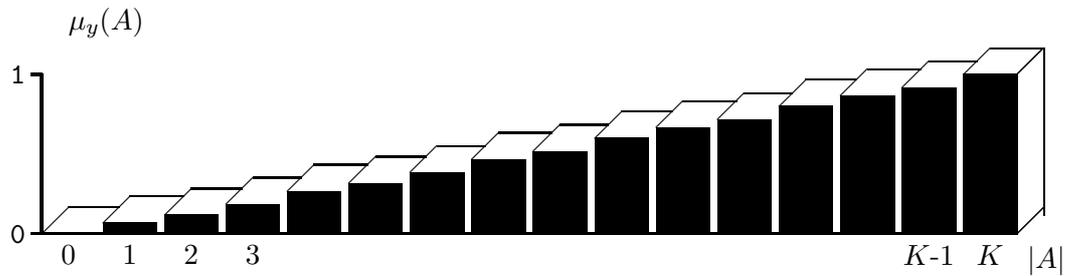
- filtre moyen adaptatif :  $\text{Moy}_{m_{\square}}^h$ ,
- filtre médian adaptatif :  $\text{Med}_{m_{\square}}^h$ ,
- filtre min adaptatif :  $\text{Min}_{m_{\square}}^h$ ,
- filtre max adaptatif :  $\text{Max}_{m_{\square}}^h$ ,
- filtre  $\alpha$ -trimmed mean adaptatif :  $\text{TMoy}_{m_{\square}}^h(\cdot, \alpha)$ ,
- filtre  $n$ -puissance adaptatif :  $\text{Puiss}_{m_{\square}}^h(\cdot, n)$ ,
- filtre  $n$ -puissance inverse adaptatif :  $\text{PuissInv}_{m_{\square}}^h(\cdot, n)$ ,
- filtre  $\alpha$ -quasi midrange adaptatif :  $\text{QM}_{m_{\square}}^h(\cdot, \alpha)$ .

---

**EXEMPLE 8.3** – Filtre moyen adaptatif

---

$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y) \quad \mu_y(A) = \frac{|A|}{K}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.21)$$

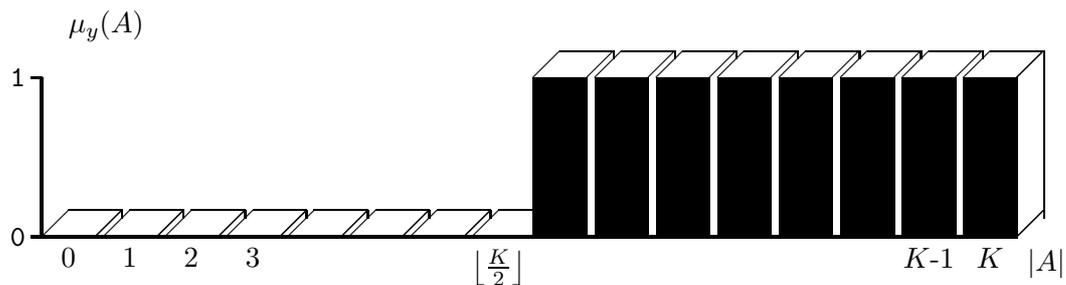



---

**EXEMPLE 8.4** – Filtre médian adaptatif

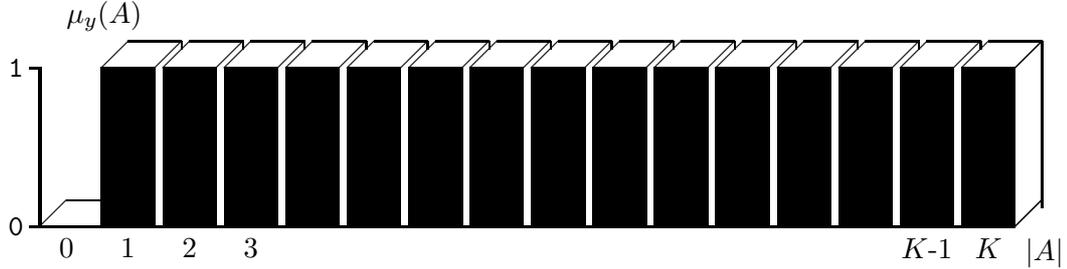
---

$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y) \quad \mu_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \lfloor \frac{K}{2} \rfloor \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.22)$$



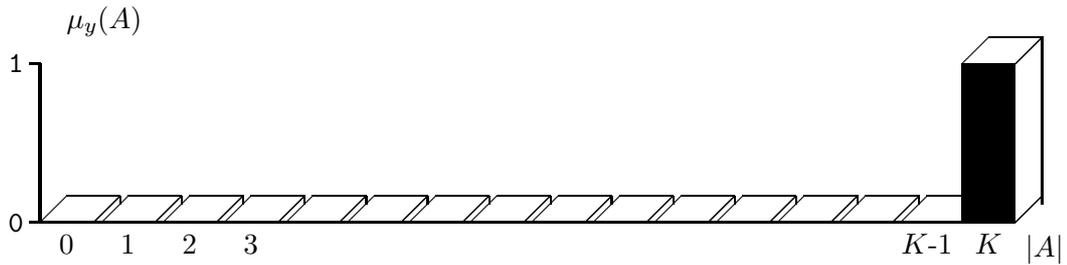
**EXEMPLE 8.5** – Filtre min adaptatif

$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y) \quad \mu_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| = 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}, \quad K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.23)$$



**EXEMPLE 8.6** – Filtre max adaptatif

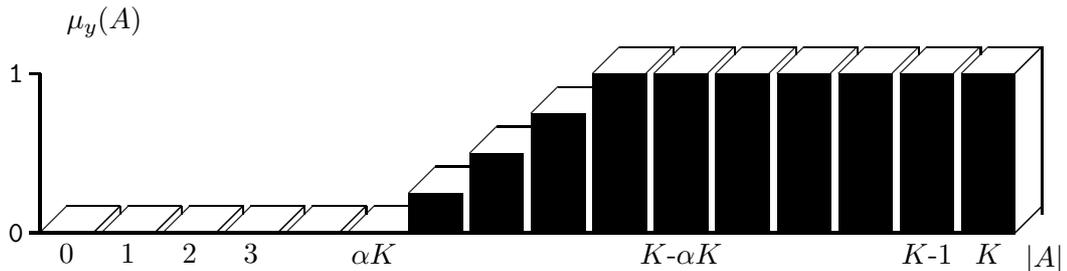
$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y) \quad \mu_y(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } |A| = K \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.24)$$



**EXEMPLE 8.7** – Filtre  $\alpha$ -trimmed mean adaptatif

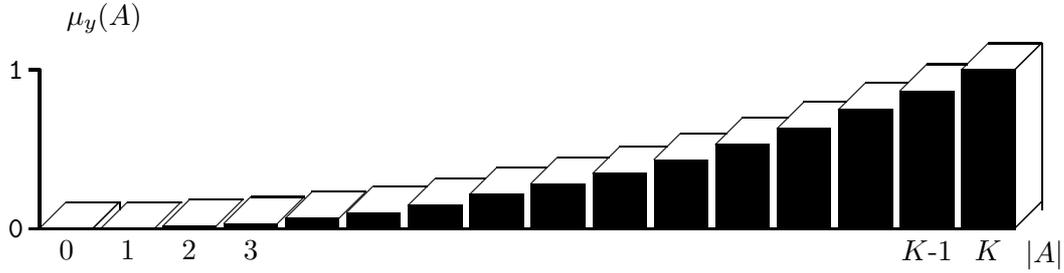
$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y), \forall \alpha \in [0, 0.5]$

$$\mu_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \alpha K \\ \frac{|A| - \alpha K + 1}{K(1 - 2\alpha)} & \text{si } \alpha K < |A| < K - \alpha K \\ 1 & \text{si } |A| \geq K - \alpha K \end{cases}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.25)$$



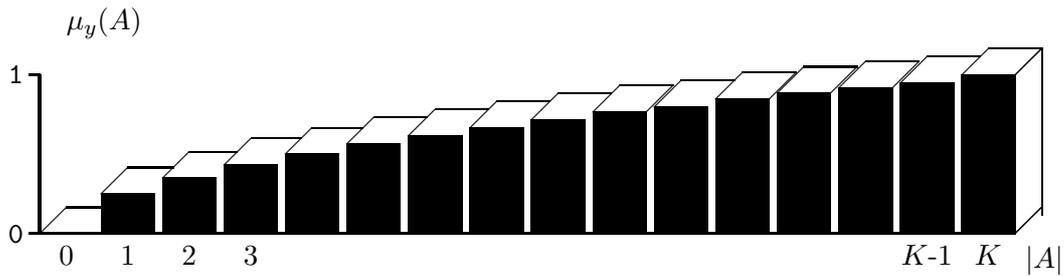
**EXEMPLE 8.8** – Filtre  $n$ -puissance adaptatif

$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y), \forall n \in [1, +\infty[ \quad \mu_y(A) = \left(\frac{|A|}{K}\right)^n, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.26)$$



**EXEMPLE 8.9** – Filtre  $n$ -puissance inverse adaptatif

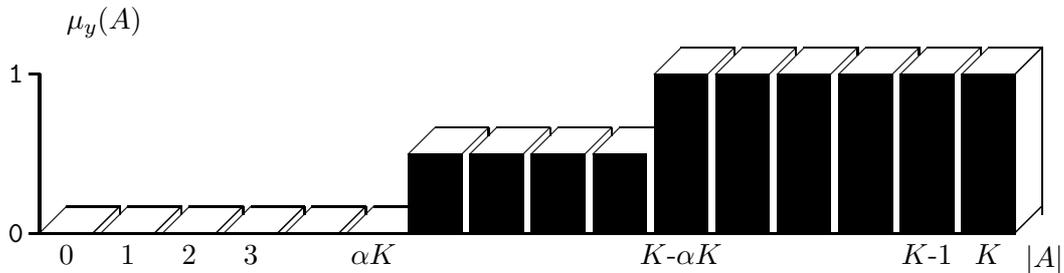
$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y), \forall n \in [1, +\infty[ \quad \mu_y(A) = \left(\frac{|A|}{K}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.27)$$



**EXEMPLE 8.10** – Filtre  $\alpha$ -quasi-midrange adaptatif

$$\forall A \subseteq V_{m_{\square}}^h(y), \forall \alpha \in [0, 0.5]$$

$$\mu_y(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } |A| \leq \alpha K \\ 0.5 & \text{si } \alpha K < |A| < K - \alpha K \\ 1 & \text{si } |A| \geq K - \alpha K \end{cases}, \quad \text{où } K = |V_{m_{\square}}^h(y)| \quad (8.28)$$



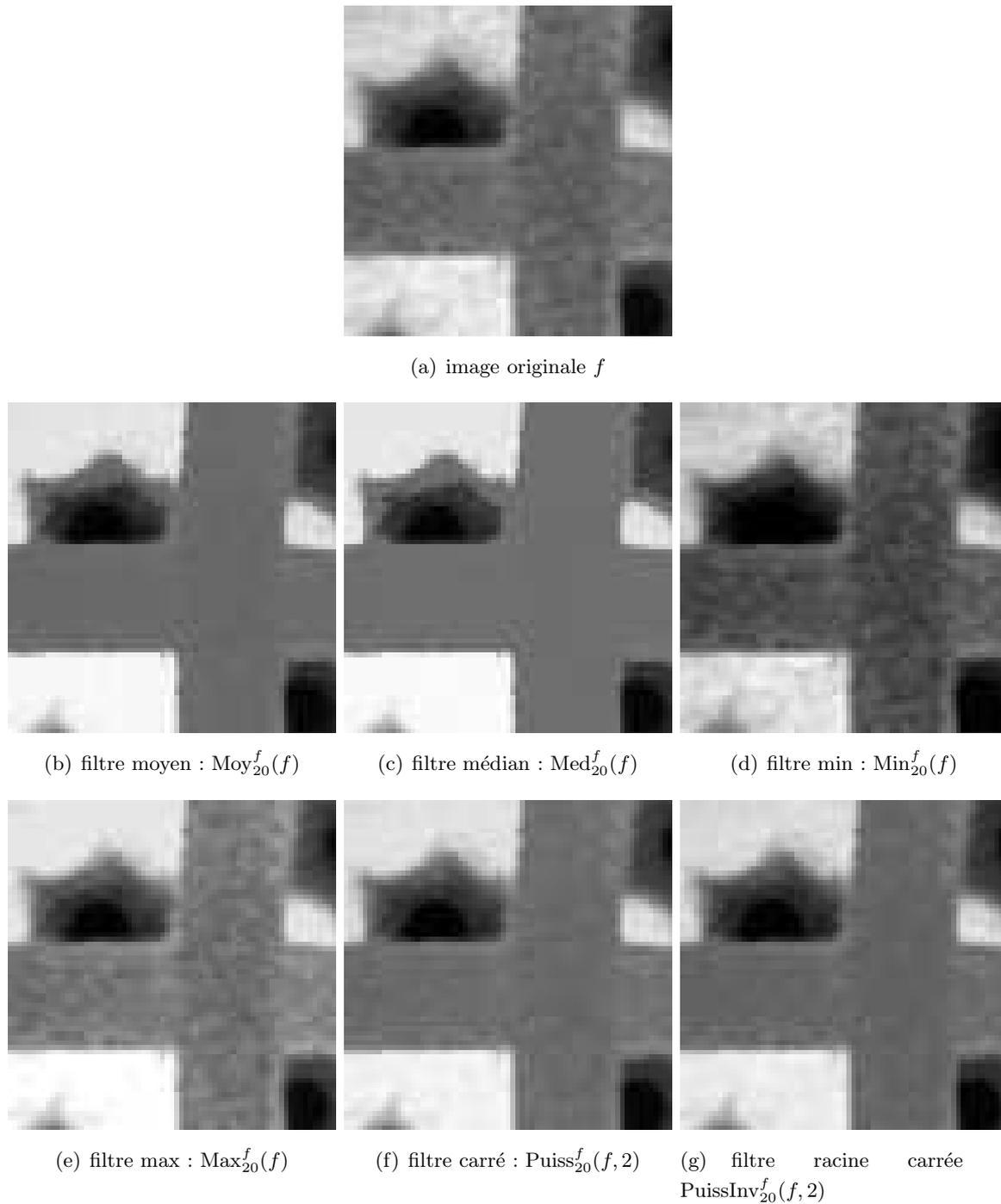
**REMARQUE 8.2** *Il existe certaines correspondances entre ces divers filtres :*

- $\text{Puiss}_{m_{\square}}^h(\cdot, n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Max}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{PuissInv}_{m_{\square}}^h(\cdot, n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{Min}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{Puiss}_{m_{\square}}^h(\cdot, 1) = \text{Moy}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{PuissInv}_{m_{\square}}^h(\cdot, 1) = \text{Moy}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{Puiss}_{m_{\square}}^h(\cdot, n) = \text{PuissInv}_{m_{\square}}^h(\cdot, \frac{1}{n})$ ,
- $\text{TMoy}_{m_{\square}}^h(\cdot, 0) = \text{Moy}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{TMoy}_{m_{\square}}^h(\cdot, 0.5) = \text{Med}_{m_{\square}}^h$
- $\text{QM}_{m_{\square}}^h(\cdot, 0) = \text{Min}_{m_{\square}}^h$ ,
- $\text{QM}_{m_{\square}}^h(\cdot, 0.5) = \text{Med}_{m_{\square}}^h$ .

### 8.2.2 Illustrations de filtres de Choquet adaptatifs

La figure 8.1 illustre l'application de certains filtres de Choquet à VAG sur une portion de l'image 'burner', avec le critère de luminance et le modèle CLIP. Voici la liste des filtres utilisés :

- filtre moyen à VAG,
- filtre médian à VAG,
- filtre min à VAG,
- filtre max à VAG,
- filtre 2-puissance à VAG,
- filtre 2-puissance inverse à VAG.

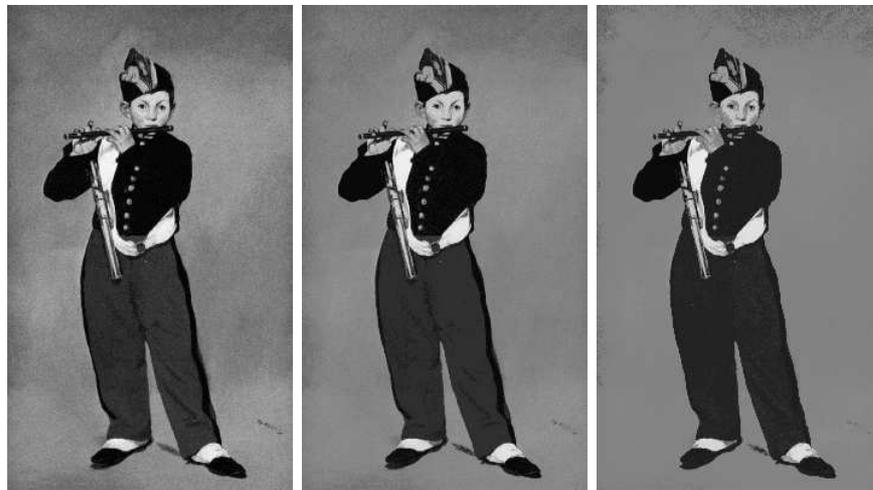


**FIGURE 8.1** – Illustration de quelques filtres de Choquet adaptatifs (b-g) appliqués sur une partie de l'image 'burner' (a). Les images (b,c,f,g) présentent une homogénéité plus importante des structures composant l'image (a) que sur les images (e,d).

La figure 8.2 compare le filtrage 'moyen' de Choquet usuel et à VAG sur l'image 'fifre' avec le critère de luminance et le modèle LIP. Plusieurs tolérances d'homogénéité  $m_{\Delta}$  et rayons de disque  $r$  sont utilisés.



(a) image originale  $f$  (b) filtre moyen :  $\text{Moy}_1(f)$  (c) filtre moyen :  $\text{Moy}_2(f)$  (d) filtre moyen :  $\text{Moy}_3(f)$



(e) filtre moyen :  $\text{Moy}_{10\Delta}^f(f)$  (f) filtre moyen :  $\text{Moy}_{30\Delta}^f(f)$  (g) filtre moyen :  $\text{Moy}_{50\Delta}^f(f)$

**FIGURE 8.2** – Illustration du filtrage de Choquet usuel (b-d) et à VAG (e-g) appliqué sur l'image 'fifre' (a). Concernant les VAG, le critère d'analyse utilisé est celui de la luminance au sens LIP.  $\text{Moy}_r$  (resp.  $\text{Moy}_{m\Delta}^f$ ) désigne le filtre 'moyen' utilisant la boule centrée  $B_r$  de rayon  $r$  (resp. le VAG  $V_{m\Delta}^f$ ) pour fenêtre d'analyse. Les filtres adaptatifs ne dégradent pas les transitions à l'inverse des filtres usuels qui laissent apparaître un flou.

Sur cette dernière figure, les filtres de Choquet à VAG montrent un avantage pratique, face aux filtres de Choquet usuels, dû au caractère spatialement adaptatif et intrinsèque de leurs fenêtres d'analyse (VAG).

---

Le chapitre suivant introduit des critères d'analyse intrinsèques basés sur les VAG.



# CHAPITRE 9

## Critères d'analyse à VAG

### SOMMAIRE

---

<b>9.1</b>	<b>Catégories des critères d'analyse à VAG</b>	<b>128</b>
<b>9.2</b>	<b>Critères d'orientation</b>	<b>128</b>
9.2.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG	128
9.2.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG	131
9.2.3	Aspect multi-échelle	134
9.2.4	Conclusions et perspectives	135
<b>9.3</b>	<b>Critère d'épaisseur</b>	<b>136</b>
9.3.1	Prise en compte de la structure spatiale du VAG	136
9.3.2	Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG	136
9.3.3	Conclusions et perspectives	138
<b>9.4</b>	<b>Autres critères d'analyse à VAG</b>	<b>139</b>

---

Outre la définition de nombreux opérateurs de traitement d'image à VAG issus de la morphologie mathématique ou des mesures floues, les VAG permettent aussi de quantifier une image de manière adaptative.

Les VAG sont construits sur un critère d'analyse  $h$ . Cette application  $h$  est définie à l'aide d'un *opérateur de mesure*, noté  $M$ , appliqué sur l'image étudiée  $f : h = M(f)$ .

Cet opérateur  $M$  peut être :

- ponctuel :  $h(x)$  dépend uniquement du point  $x$  et par conséquent de sa valeur  $f(x)$  ; c'est le cas du critère de luminance où  $M$  est l'opérateur 'identité' :  $h(x) = f(x)$ ,
- local :  $h(x)$  dépend de la position spatiale des points  $y$  appartenant au voisinage  $V(x)$  de  $x$ , et éventuellement de leurs valeurs  $f(y) : h(x) = M_{V(x)}(f)(x)$ .

Si le voisinage  $V(x)$  est de taille et de forme fixées pour tous les points de l'image, l'opérateur local  $M$  dépend uniquement des tons de gris des points inclus dans  $V(x)$ , sans tenir compte de la structure spatiale du voisinage  $V(x)$  qui est globale à l'image.

A l'inverse, si le voisinage  $V(x)$  est adaptatif, c'est-à-dire qu'il varie spatialement pour chaque point de l'image, des opérateurs locaux adaptatifs de mesure  $M_V$  ( $V$  représentant la fonction structurante associée aux  $V(x) : V : x \mapsto V(x)$ ) peuvent être définis en dépendant de la géométrie,

de la forme ou de la topologie des voisinages. Ces derniers opérateurs peuvent évidemment, en outre, dépendre des tons de gris des points inclus dans le voisinage adaptatif.

Pour un opérateur local adaptatif de mesure, le voisinage  $V(x)$  de chaque point de l'image analysée  $f$  peut être choisi de manière extrinsèque (c'est-à-dire avec des connaissances a priori sur l'image) ou intrinsèque (c'est le contexte local de l'image qui permet de définir le voisinage), tel que le VAG de luminance  $V_{m_{\diamond}}^f(x)$ .

L'objectif de ce chapitre est donc de présenter différents opérateurs locaux adaptatifs  $M$  de mesure, calculés en chaque point  $x$  de l'image  $f$  à l'aide des VAG de luminance,  $V_{m_{\diamond}}^f(x)$ , définissant des *critères d'analyse à VAG* pour un  $m_{\diamond}$  donné,  $h_{\diamond}^f : x \mapsto M_{V_{m_{\diamond}}^f(x)}(f)(x)$ <sup>1</sup>. Ils pourront être utilisés pour une représentation locale d'information (cartographie d'orientation, d'épaisseur, ...), pour la construction de nouveaux VAG :  $V_{m_{\diamond}}^{h_{\diamond}^f}(x)$ , ou pour une segmentation par seuillage.

## 9.1 Catégories des critères d'analyse à VAG

Après la détermination des VAG de luminance d'une image, il est donc possible de définir de nouveaux critères d'analyse liés aux caractéristiques géométriques, morphologiques, topologiques, radiométriques de ces VAG :

- critères géométriques (diamètre, surface, périmètre, orientation, ...)
- critères morphologiques (compacité, circularité, allongement, épaisseur, dissymétrie, ...)
- critères topologiques (nombre de trous, nombre de concavités, nombre de connexités, nombre d'Euler, ...)
- critères radiométriques (ton de gris maximum, moyenne, variance, ...)

La figure 9.1 expose les cartographies (représentées sous forme d'images) associées à quelques critères d'analyse à VAG. L'image originale (a) est une portion de l'image 'tools'.

**REMARQUE 9.1** *Ces critères d'analyse à VAG  $h_{m_{\diamond}}^f$  sont de nature multi-échelle via le paramètre  $m_{\diamond}$  (les VAG sont emboîtés).*

Dans les deux sections suivantes, les critères d'orientation et d'épaisseur à VAG sont étudiés. En chaque point  $x$  d'une image  $f$  à tons de gris sera associé une valeur réelle  $OR_{V_{m_{\diamond}}^f}(f)(x)$  (resp.  $Epais_{V_{m_{\diamond}}^f}(f)(x)$ ) représentant son orientation locale (resp. son épaisseur locale), liée au VAG de luminance  $V_{m_{\diamond}}^f(x)$ . Plusieurs définitions seront proposées et illustrées pour chacun de ces critères.

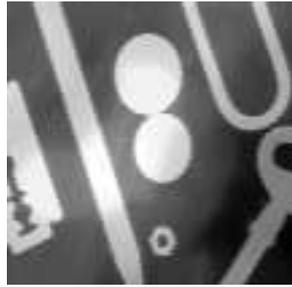
## 9.2 Critères d'orientation

### 9.2.1 Prise en compte de la structure spatiale du VAG

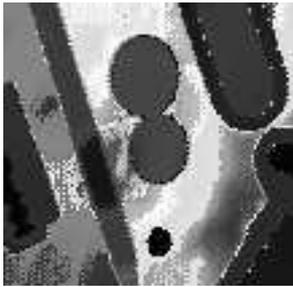
Deux définitions de l'orientation à VAG sont ci-dessous proposées, en prenant en compte uniquement la structure spatiale des VAG.

---

<sup>1</sup>La notation  $h_{\diamond}^f$  ou  $h_{m_{\diamond}}^f$  sera utilisée dans la suite de ce manuscrit



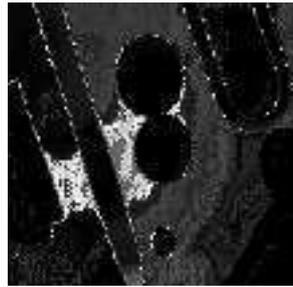
(a) image originale



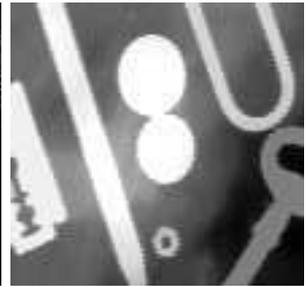
(b) critère : surface



(c) critère : circularité



(d) critère : nombre de trous



(e) critère : ton de gris maximum

**FIGURE 9.1** – Fonctions critères de l'image originale (a) avec les VAG calculés dans le modèle CLIP avec la tolérance d'homogénéité  $m = 20$  : cartographie de surface (b), cartographie du nombre de trous (c), cartographie de circularité (d) et cartographie du ton de gris maximum (e). Sur les cartographies (b-e), le ton de gris de chaque point représente la valeur de mesure de l'opérateur à VAG.

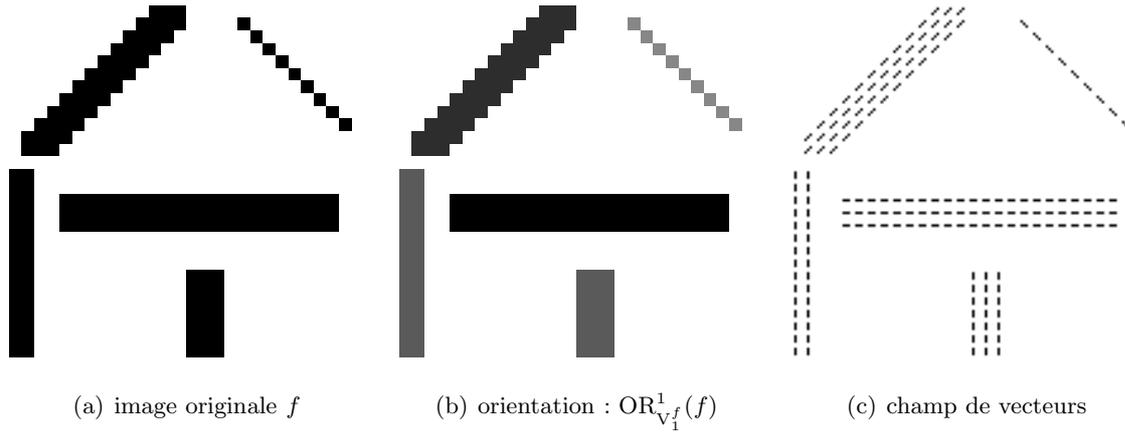
**DÉFINITION 9.1** [*Orientation à VAG (définition 1)*]

$OR_{V_m^f}^1(f)$  : orientation donnée par l'angle direct minimum entre l'axe des abscisses et le diamètre de Feret moyen [Coster and Chermant, 1985] du VAG.

**DÉFINITION 9.2** [*Orientation à VAG (définition 2)*]

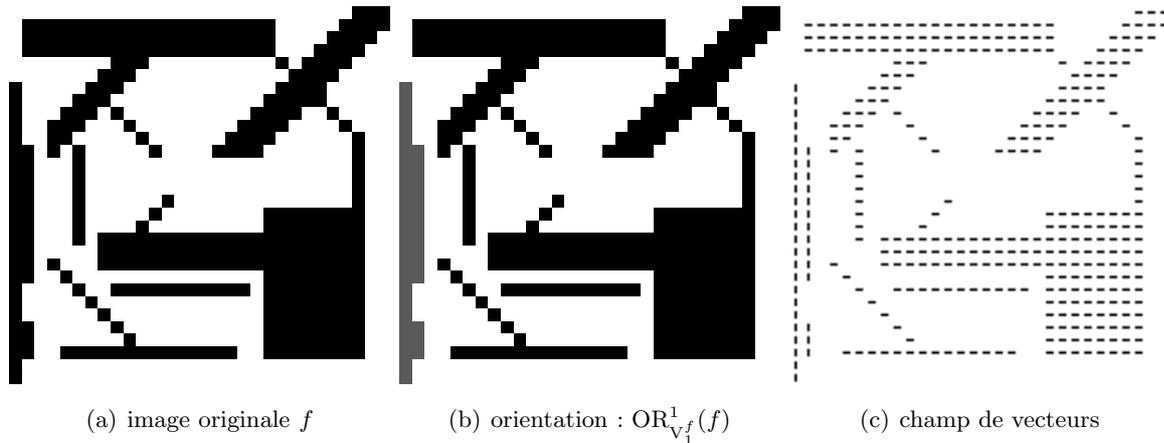
$OR_{V_m^f}^2(f)$  : orientation donnée par l'angle direct entre l'axe des abscisses et le plus grand axe d'inertie du VAG.

La figure 9.2 expose le critère d'orientation  $OR_{V_1^f}^1(f)$  d'une image binaire  $f$ , calculée avec ses VAG de luminance dans le modèle CLIP. L'image  $f$  est considérée comme une image à tons de gris où les objets sont représentés par les points (noirs) de tons de gris égal à 0 et son complémentaire par les points (blancs) de tons de gris égal à 255. L'orientation est dans cet exemple calculée seulement pour les points noirs (de tons de gris égal à 0).



**FIGURE 9.2** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_1^f}^1(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et sa représentation par champ de vecteurs (c). Sur la cartographie d'orientation (b)  $OR_{V_1^f}^1(f)$ , le ton de gris de chaque point, représentant son orientation locale (en degrés), est associée à un vecteur (c). Les VAG sont calculés selon le modèle CLIP. L'icône ■ représente un pixel.

Ce critère d'orientation fournit donc sur cet exemple le résultat espéré, mais ce n'est pas le cas sur l'exemple suivant (Fig. 9.3) où l'orientation n'est pas dépendante de la position spatiale du point  $x$  appartenant au VAG  $V_1^f(x)$  :



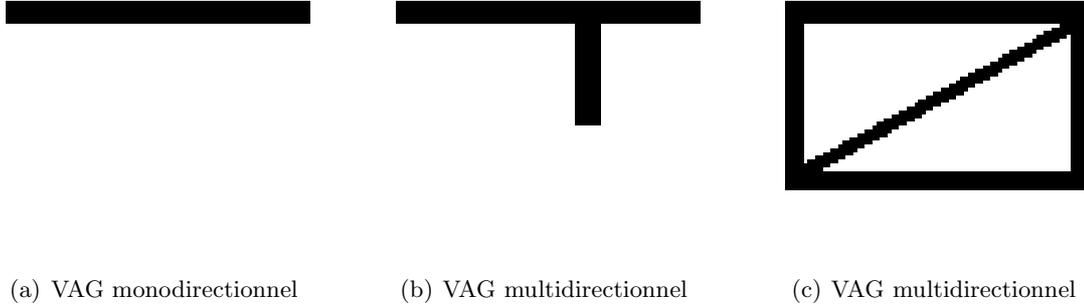
**FIGURE 9.3** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_1^f}^1(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et sa représentation par champ de vecteurs (c). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) représente son orientation locale. ■  $\equiv$  1 pixel.

Cet exemple montre les erreurs induites par un tel opérateur : le VAG étant identique pour plusieurs points, ces derniers possèdent ainsi tous la même orientation locale.

**REMARQUE 9.2** Cette mauvaise caractérisation vient du fait que l'opérateur local de mesure d'orientation  $OR_{V_{m\ominus}^f}^1$  est uniquement basé sur la structure spatiale de chaque VAG,  $V_{m\ominus}^f(x)$ , sans tenir compte de la position du point  $x$  qu'il contient. Par conséquent :

$$\forall (x, y) \in D^2 \quad (V_{m\ominus}^f(x) = V_{m\ominus}^f(y)) \Rightarrow (OR_{V_{m\ominus}^f}^1(f)(x) = OR_{V_{m\ominus}^f}^1(f)(y)) \quad (9.1)$$

Ce type de définition ne convient donc pas pour des VAG "multidirectionnels", c'est à dire des VAG qui comportent plusieurs orientations locales différentes (Fig. 9.4).



**FIGURE 9.4** – VAG monodirectionnel (a) : tous ses points possèdent la même orientation locale. VAG multidirectionnels (b,c) : ils comportent plusieurs orientations locales, 2 pour (b) et 3 pour (c).

**REMARQUE 9.3** L'orientation définie par l'opérateur  $OR_{V_{m\Box}^f}^2$  présente le même inconvénient.

### 9.2.2 Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG

Par conséquent, une nouvelle caractérisation de l'orientation à VAG est nécessaire. Celle-ci requiert l'introduction de plusieurs notations :

- $s_{m\Box}^f(\theta)(x)$  désigne le plus grand segment d'orientation  $\theta$  inclus dans  $V_{m\Box}^f(x)$  et passant par  $x$ . Il est unique.
- $S_{m\Box}^f(x) = \{s_{m\Box}^f(\theta)(x); \theta \in [0, \pi[ \}$  : ensemble des plus grands segments .
- $SM_{m\Box}^f(x) = \{s \in S_{m\Box}^f(x); \forall t \in S_{m\Box}^f(x) \quad |s| \geq |t|\}$  : ensemble des plus grands segments maximaux ( $|s|$  désigne la longueur de  $s$ ). Les segments de cet ensemble ont même longueur.

L'orientation locale  $OR_{V_{m\Box}^f}(f)(x)$  du point  $x$  de l'image  $f$  est définie par un ensemble d'angles :

$$OR_{V_{m\Box}^f}(f)(x) = \{\theta; s_{m\Box}^f(\theta)(x) \in SM_{m\Box}^f(x)\} \quad (9.2)$$

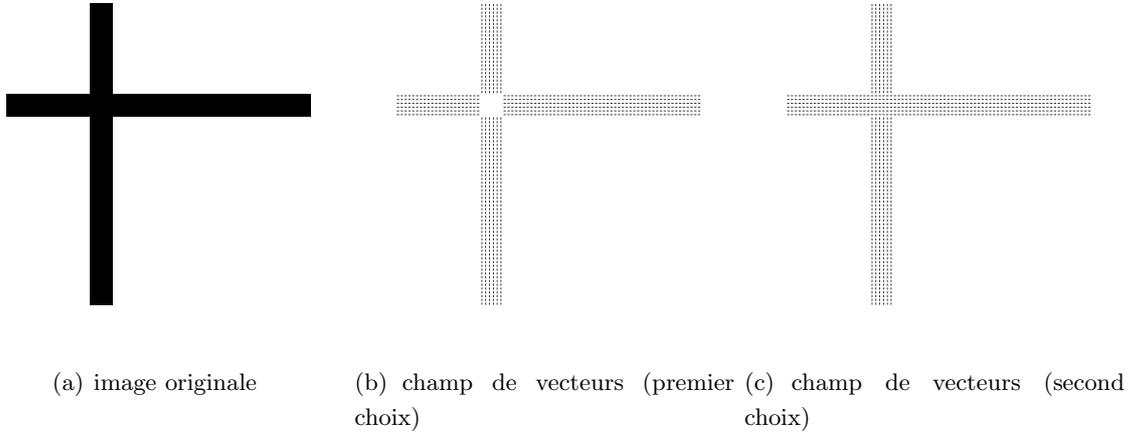
Plusieurs angles peuvent donc être représentatifs de l'orientation d'un point  $x$  d'une image  $f$ . En effet, le cardinal de  $SM_{m\Box}^f(x)$  n'est pas nécessairement égal à 1.

Ceci génère un problème de représentation graphique du champ de vecteurs de l'image.

Dans cette perspective, plusieurs choix sont alors possibles pour un point dont l'orientation est caractérisé par plusieurs angles :

- premier choix : le point n'est pas pris en compte, considérant qu'il ne possède pas d'orientation "principale",
- second choix : l'orientation est donnée par l'angle  $\theta$  minimum,
- troisième choix : l'orientation est donnée par l'angle  $\theta$  maximum,
- ...

La figure 9.5 illustre les cartographies d'orientation réalisées suivant les deux premiers choix.



**FIGURE 9.5** – Critère d'orientation à VAG de l'image originale (a). En ne considérant que les points possédant une orientation principale, des discontinuités sont générées sur la représentation (b) à l'inverse de la représentation (c).

Considérant le premier choix, certaines discontinuités peuvent apparaître dans la cartographie d'orientation dû à des points qui ne sont pas pris en compte.

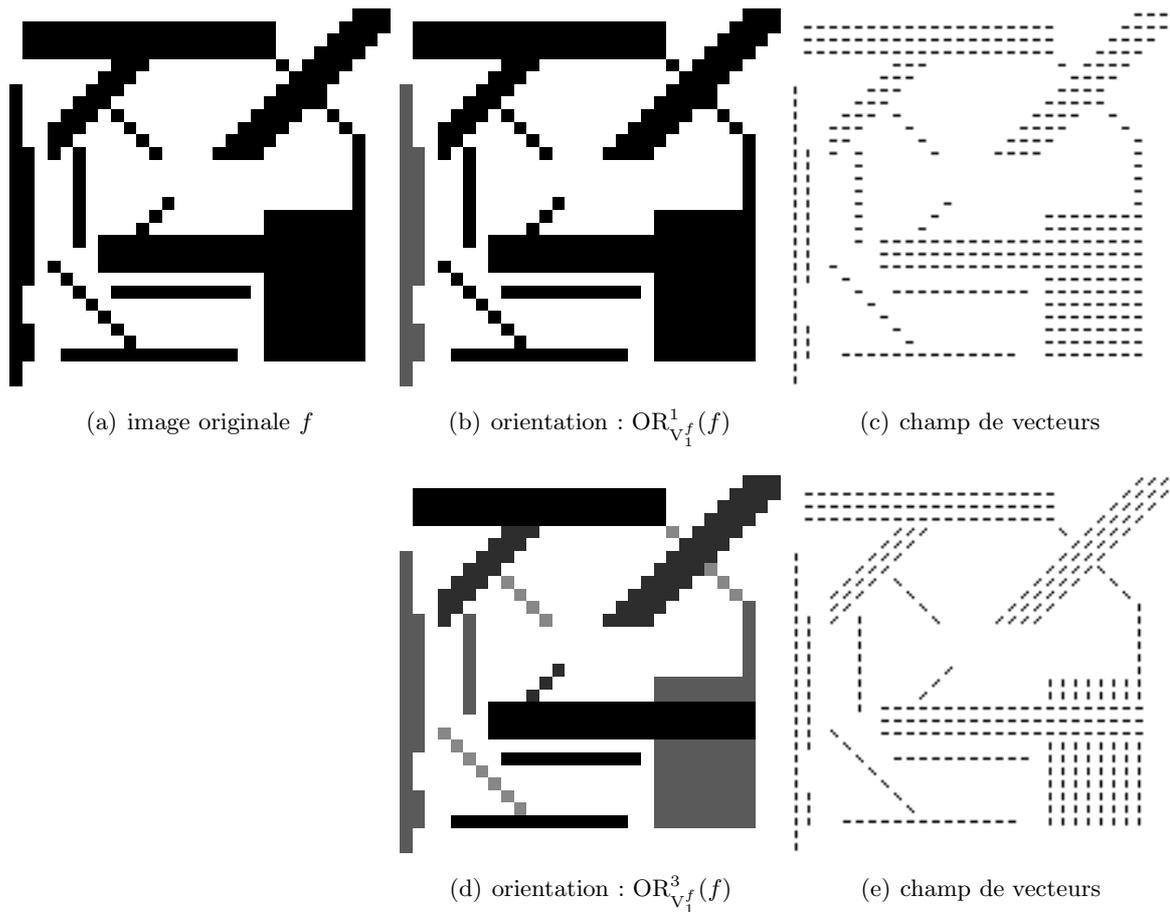
Le critère d'orientation à VAG proposé ci-après (Déf. 9.3) est basé sur le second choix, qui reste néanmoins arbitraire.

**DÉFINITION 9.3** [*Orientation à VAG (définition 3)*]

L'orientation locale  $OR_{V_{m\ominus}^f}^3(f)(x)$  du point  $x$  de l'image  $f$  est définie par l'angle minimum des segments maximaux inclus dans  $V_{m\ominus}^f(x)$  et contenant  $x$ .

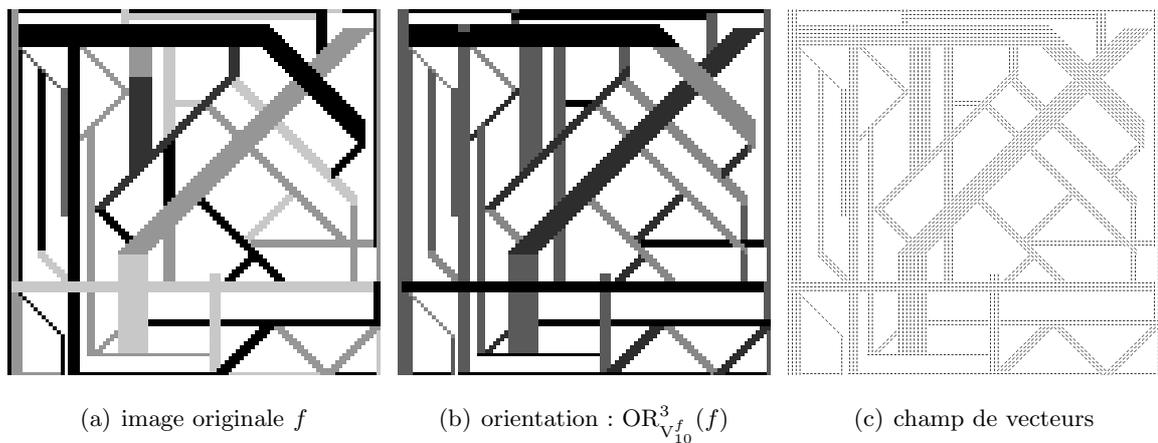
$$OR_{V_{m\ominus}^f}^3(f)(x) = \inf_{\theta; s_{m\ominus}^f(\theta)(x) \in SM_{m\ominus}^f(x)} \theta \tag{9.3}$$

L'exemple suivant (Fig. 9.6) illustre l'application de ce nouvel opérateur  $OR_{V_{m\ominus}^f}^3$  sur l'image originale de la figure 9.3, que le lecteur pourra comparer avec le résultat obtenu par l'opérateur  $OR_{V_{m\ominus}^f}^1$ .



**FIGURE 9.6** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_1}^3(f)$  (d) (resp.  $OR_{V_1}^1(f)$  (b)) de l'image originale  $f$  (a) et sa représentation par champ de vecteurs (e) (resp. (c)). Le ton de gris de chaque point  $x$  des cartographies (b,d) représente son orientation locale.  $\blacksquare \equiv 1$  pixel.

Cette représentation de l'orientation semble mieux adaptée au VAG multidirectionnels. Voici un autre exemple (Fig. 9.7) sur une image à tons de gris.

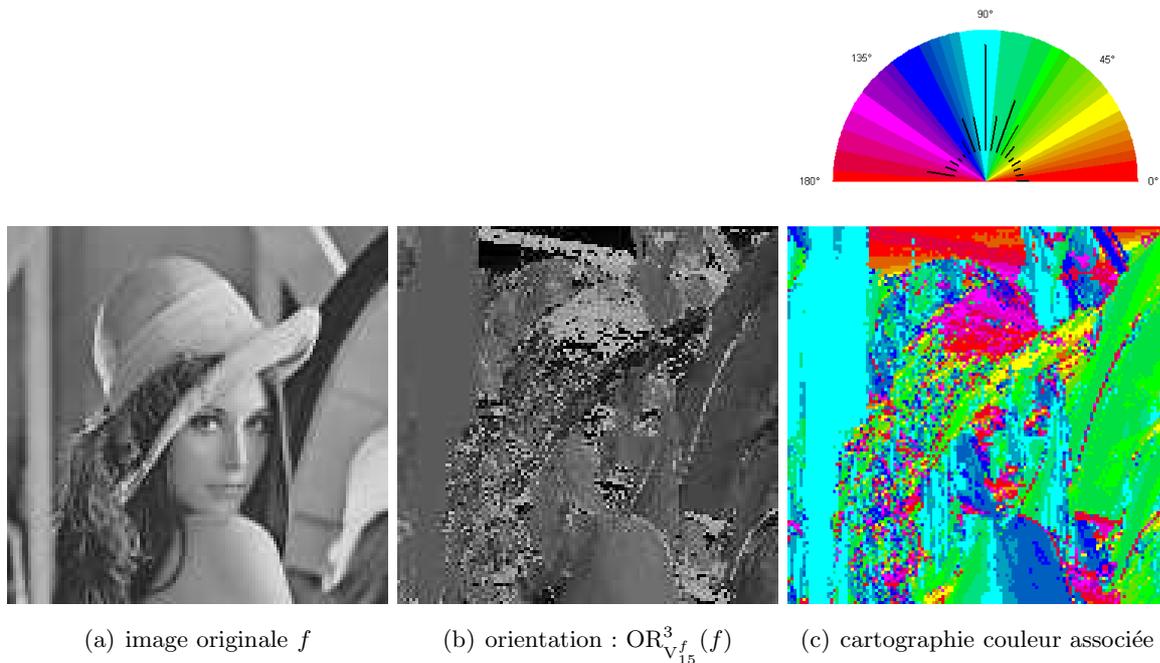


**FIGURE 9.7** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_{10}}^3(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et son champ de vecteurs (c). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) représente son orientation locale.  $\blacksquare \equiv 1$  pixel.

Tous les critères d'orientation précédemment illustrés ont été calculés avec un paramètre  $\theta \in [0, \pi[$  qui a naturellement été discrétisé, avec un pas de  $\pi/4$  radians qui suffisait à leur caractérisation. Ainsi,  $S_{m_{\square}}^f(x) = \{s_{m_{\square}}^f(0)(x), s_{m_{\square}}^f(\pi/4)(x), s_{m_{\square}}^f(\pi/2)(x), s_{m_{\square}}^f(3\pi/4)(x)\}$ .

Sur l'exemple suivant (Fig. 9.8), le pas de discrétisation a été fixé à  $\pi/18$  radians.

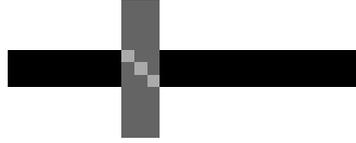
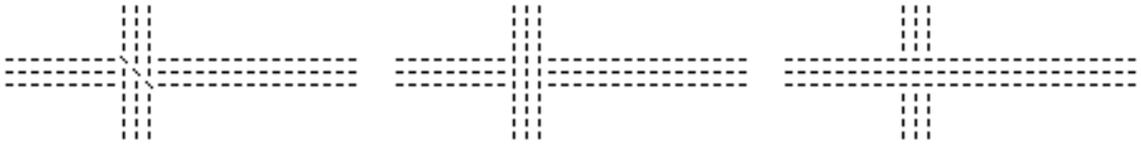
**REMARQUE 9.4** *Un pas de discrétisation faible induit un grand nombre d'angles possibles et par conséquent génère des difficultés de représentation par champ de vecteurs. Dans ce cas là, une cartographie de l'orientation par une palette couleur des différents angles  $\theta$  sera proposée en révélant l'histogramme des orientations (les angles en degrés sont modulo 180 :  $0^\circ = 180^\circ$ ).*



**FIGURE 9.8** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_{15}^f}^3(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et sa cartographie associée (c). L'histogramme d'orientation est représenté au dessus de l'image (c).

### 9.2.3 Aspect multi-échelle

L'opérateur de mesure d'orientation  $OR_{V_{m_{\square}}^f}^3$  possède aussi, par l'intermédiaire de son paramètre  $m_{\square}$ , l'avantage de fournir une caractérisation multi-échelle de l'orientation. Cette notion d'échelle est souvent nécessaire comme le montre l'exemple illustré par la figure 9.9.

(a) image originale  $f$ (b) champ de vecteurs associé au critère d'orientation  $OR_{V_0^f}^3(f)$  (c) champ de vecteurs associé au critère d'orientation  $OR_{V_{70}^f}^3(f)$  (d) champ de vecteurs associé au critère d'orientation  $OR_{V_{200}^f}^3(f)$ 

**FIGURE 9.9** – Caractérisation multi-échelle de l'orientation locale de l'image originale  $f$  par ses champs de vecteurs. (b) :  $OR_{V_0^f}^3(f)$ , (c) :  $OR_{V_{70}^f}^3(f)$ , (d) :  $OR_{V_{200}^f}^3(f)$ . Le ton de gris de chaque point  $x$  des cartographies (b,c,d) représente son orientation locale.  $\blacksquare \equiv 1$  pixel.

L'orientation du point "central" de l'image (Fig. 9.9-(a)) est visuellement dépendante du "niveau de détail" qu'on lui accorde.

#### 9.2.4 Conclusions et perspectives

Ce critère d'orientation  $OR_{V_{m\ominus}^f}^3(f)$  est plus robuste que  $OR_{V_{m\ominus}^f}^1(f)$  et  $OR_{V_{m\ominus}^f}^1(f)$ . De plus, il est de nature multi-échelle. Cependant, il présente quelques défauts :

- la discrétisation de  $\theta$  induit certains problèmes en pratique puisque certaines directions sont de ce fait omises. L'algorithme mis en place demande donc à être modifié, en échange d'un temps de calcul certainement plus long.
- pour des VAG isotropes ou presque isotropes (c'est-à-dire sans aucune direction privilégiée), un choix reste à faire : donner une valeur  $\theta_0$  sélectionnée a priori ou ne pas attribuer de valeur en effectuant un test sur la circularité du VAG par exemple. Chaque solution possède des avantages et des inconvénients pour l'exécution de post-traitements.

## 9.3 Critère d'épaisseur

### 9.3.1 Prise en compte de la structure spatiale du VAG

Deux définitions de l'épaisseur à VAG sont ci-dessous proposées, en prenant en compte uniquement la structure spatiale des VAG.

**DÉFINITION 9.4** [*Epaisseur à VAG (définition 1)*]

$\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^1(f)$  : épaisseur donnée par la longueur de la plus grande corde perpendiculaire au diamètre de Feret du VAG.

**DÉFINITION 9.5** [*Epaisseur à VAG (définition 2)*]

$\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^2(f)$  : épaisseur donnée par le rapport de l'aire du VAG et le diamètre géodésique de l'axe médian.

Dans cette sous-section, une nouvelle définition de l'épaisseur à VAG est proposée puisque la caractérisation par l'opérateur  $\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^1$  ou  $\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^2$  est insatisfaisante pour les mêmes raisons évoquées pour le critère d'orientation : les mesures sont indépendantes de la position spatiale du point  $x$  à l'intérieur du VAG  $V_{m\Box}^f(x)$ .

### 9.3.2 Prise en compte de la position du point à l'intérieur de son VAG

Pour remédier à cet inconvénient, une définition classique de l'épaisseur locale d'un point  $x$  à l'intérieur d'une forme binaire  $X$  a été proposé :

$$\text{Epais}_X(x) = 2 \times \max\{r \in \mathbb{R}^+; x \in B_r(p) \subseteq X; p \in X\} \quad (9.4)$$

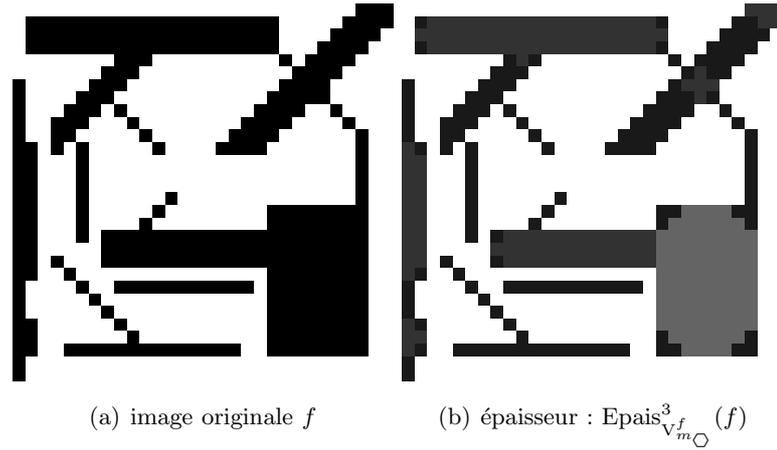
où  $B_r(p)$  désigne la boule de centre  $p$  et de rayon  $r$ .

Une nouvelle caractérisation de l'épaisseur à VAG, basée sur cette mesure, est donc proposée :

**DÉFINITION 9.6** [*Epaisseur à VAG (définition 3)*]

$\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^3(f)$  :  $x \mapsto 2 \times \max\{r \in \mathbb{R}^+; x \in B_r(p) \subseteq V_{m\Box}^f(x); p \in V_{m\Box}^f(x)\}$

Ainsi  $\text{Epais}_{V_{m\Box}^f}^3((f)x)$  représente le diamètre maximum des boules incluses dans  $V_{m\Box}^f(x)$  et contenant  $x$ . Cette définition, bien que liée à la position spatiale du point  $x \in X$ , est toutefois inadaptée puisque l'épaisseur est dépendante de la forme choisie (a priori) de la boule, comme illustré sur la figure 9.10.



**FIGURE 9.10** – Image originale binaire  $f$  (a) et son critère d'épaisseur  $\text{Epais}_{V_{m\ominus}^f}^3(f)$  (b). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) représente son épaisseur locale.  $\blacksquare \equiv 1$  pixel.

Cette figure montre des artefacts liés à la forme de la boule  $B_r(p)$  : les coins de l'image possèdent une épaisseur très faible, ce qui n'est pas convenable. L'inconvénient d'un tel opérateur d'orientation à VAG, s'appuyant sur cette notion, est donc sa dépendance à la forme de la boule.

La définition suivante est alors proposée.

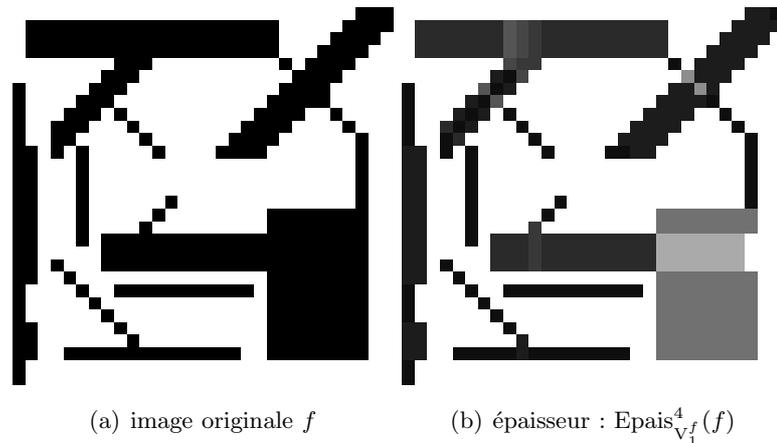
**DÉFINITION 9.7** [*Épaisseur à VAG (définition 4)*]

Le critère d'épaisseur à VAG est fonction de l'orientation à VAG (Déf. 9.3) :

$$\text{Epais}_{V_{m\ominus}^f}^4(f)(x) = \max\{|u|; u \perp s, x \in u \subseteq V_{m\ominus}^f(x)\} \quad (9.5)$$

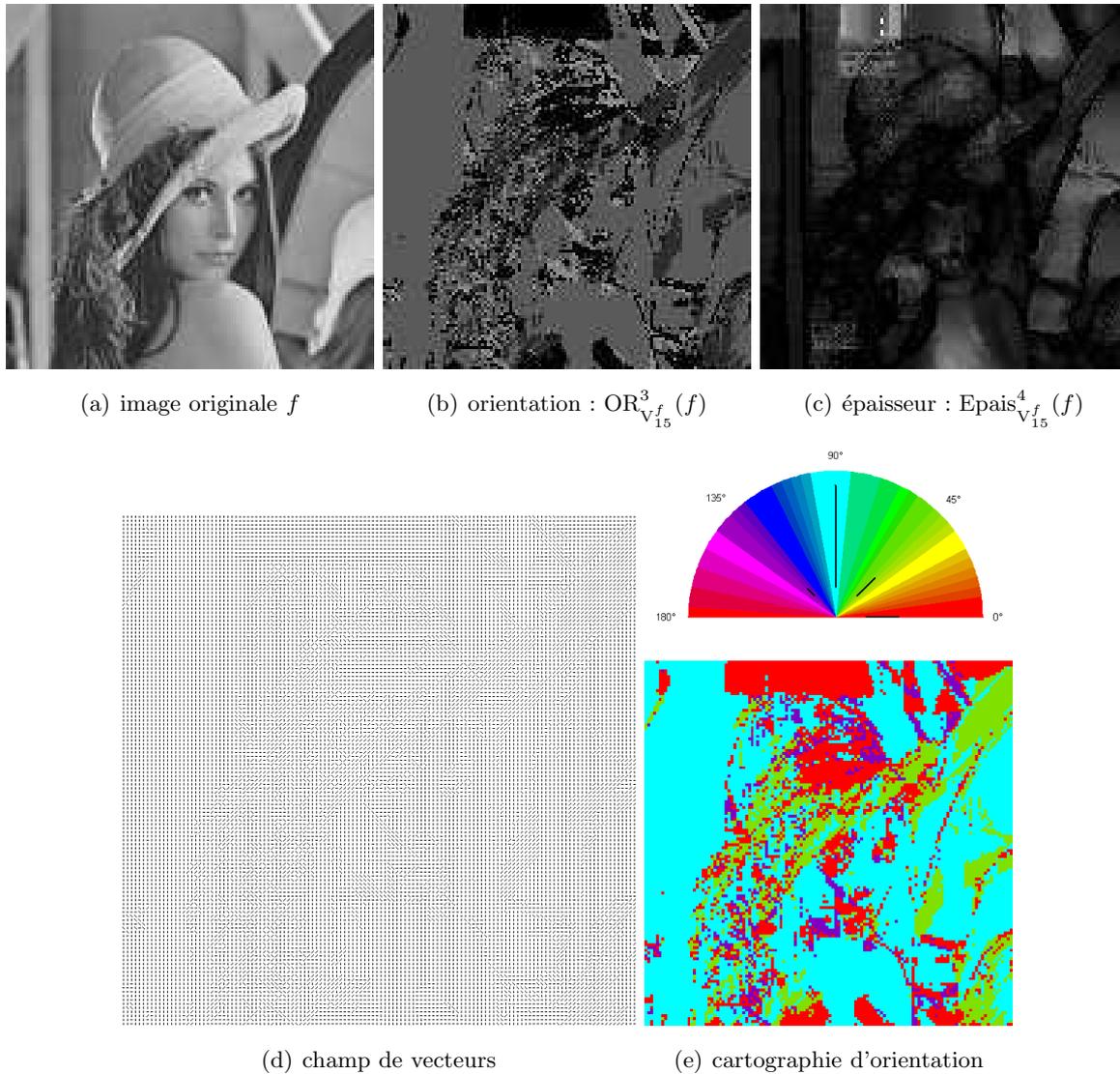
où  $s$  est le segment dont l'orientation est précisément  $\text{OR}_{V_{m\ominus}^f}^3(f)(x)$ .

La figure 9.11 illustre l'application de cette nouvelle fonction critère à VAG sur l'image précédente.



**FIGURE 9.11** – Image originale  $f$  (a) et son critère d'épaisseur à VAG  $\text{Epais}_{V_1^f}^4(f)$  (b). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) représente son épaisseur locale.  $\blacksquare \equiv 1$  pixel.

Cet autre exemple (Fig. 9.12) illustre l'application de l'opérateur de critère d'épaisseur à VAG sur l'image 'Lena'. Les VAG sont calculés selon le modèle CLIP et le pas de discrétisation angulaire est fixé à  $\pi/4$ .



**FIGURE 9.12** – Image originale  $f$  (a) et ses cartographies d'orientation à VAG  $OR_{V_{15}^f}^3(f)$  (b) et d'épaisseur à VAG  $Epais_{V_{15}^f}^4(f)$  (c). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) (resp. (c)) représente son orientation (resp. épaisseur locale). L'orientation à VAG est aussi représentée par l'intermédiaire d'un champ de vecteurs (d) ou d'une palette de couleurs (e). La cartographie (d) est affichée à une taille supérieure aux autres images permettant une meilleure lisibilité.

### 9.3.3 Conclusions et perspectives

Ce nouveau critère d'épaisseur  $Epais_{V_{m\bigcirc}^f}^4$ , s'appliquant sur des images à tons de gris (et par conséquent sur des image binaires), est avantageusement intrinsèque aux structures de l'image : aucune connaissance a priori de l'image est nécessaire. Néanmoins, basé sur l'orientation à VAG  $OR_{V_{m\bigcirc}^f}^3$ , il possède indirectement ses inconvénients.

**REMARQUE 9.5** *Les critères d'analyse à VAG pourraient s'appliquer sur des VAG construits avec un autre critère  $g$  que celui de la luminance :*

$$h_{m_{\square}}^f = \mu_{V_{m_{\square}}^g}(f) \quad (9.6)$$

## 9.4 Autres critères d'analyse à VAG

D'autres critères d'analyse à VAG pourraient être définis en considérant un opérateur de mesure autre que l'orientation ou l'épaisseur. Ceux-ci seraient liés aux caractéristiques géométriques, morphologiques, topologiques, texturales ou intensitométriques des VAG. Voici quelques critères qui mériteraient une étude spécifique :

- courbure,
- contraste,
- allongement,
- fractalité,
- compacité,
- ...

---

La partie suivante illustre diverses applications traitées par des transformations à VAG. Notamment, des cartographies d'orientation et d'épaisseur à VAG seront exposées sur des images issues d'applications réelles (Chap. 14).



Quatrième partie

**APPLICATIONS ET  
COMPARAISONS**



## SOMMAIRE [Quatrième partie]

---

<b>10 Restauration d'image</b>	<b>145</b>
10.1 Filtrage de Choquet à VAG . . . . .	145
10.2 Construction de nouveaux VAG . . . . .	147
<b>11 Rehaussement d'image</b>	<b>149</b>
11.1 Par contraste morphologique adaptatif . . . . .	149
11.2 Par égalisation d'histogramme adaptative . . . . .	153
<b>12 Décomposition multi-échelle</b>	<b>157</b>
12.1 Par filtrage morphologique alterné séquentiel . . . . .	158
12.2 Par ouvertures/fermetures morphologiques . . . . .	158
<b>13 Segmentation d'image</b>	<b>163</b>
13.1 Par morphologie mathématique adaptative . . . . .	163
13.1.1 Rappels sur la ligne de partage des eaux (LPE) . . . . .	163
13.1.2 Segmentation pyramidale . . . . .	164
13.1.3 Segmentation hiérarchique . . . . .	167
13.1.4 Segmentation 'joints de grains' . . . . .	168
13.1.5 Segmentation 'joints de grains' dans des conditions d'illumination inégale . . . . .	171
13.1.6 Segmentation de cellules endothéliales cornéennes . . . . .	173
13.2 Par seuillage de fonctions critère à VAG . . . . .	175
<b>14 Représentation locale d'information</b>	<b>177</b>
14.1 Cartographie d'orientation . . . . .	177
14.1.1 Sur une image d'empreintes digitales . . . . .	177
14.1.2 Sur une image de gel de collagène . . . . .	178
14.2 Cartographie d'épaisseur . . . . .	179
14.2.1 Sur une image de la rétine . . . . .	179

---



# CHAPITRE 10

## Restauration d'image

### SOMMAIRE

---

<a href="#">10.1 Filtrage de Choquet à VAG</a> . . . . .	145
<a href="#">10.2 Construction de nouveaux VAG</a> . . . . .	147

---

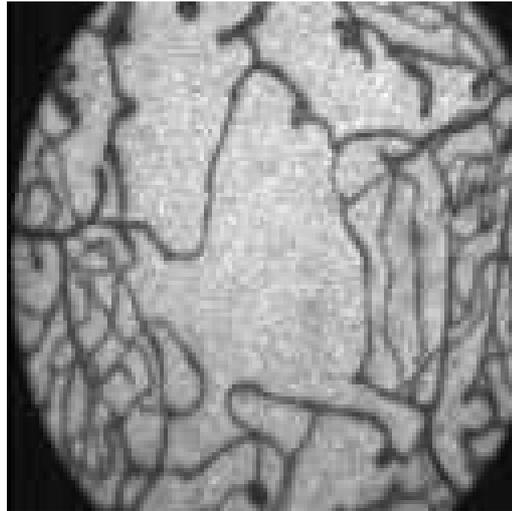
L'objectif de la restauration d'image est de réduire les effets des dégradations des images. Ces dégradations peuvent venir d'un flou de déplacement, de la présence de bruit, d'une mauvaise mise au point, des perturbations atmosphériques . . .

Le type de dégradation sur les images peut être connu ou inconnu. Dans le second cas, les dégradations sont modélisées et la restauration permet de supprimer en plus ou moins grande partie les effets des dégradations. Dans ce chapitre, quelques filtres à VAG sont illustrés pour la restauration d'images bruitées.

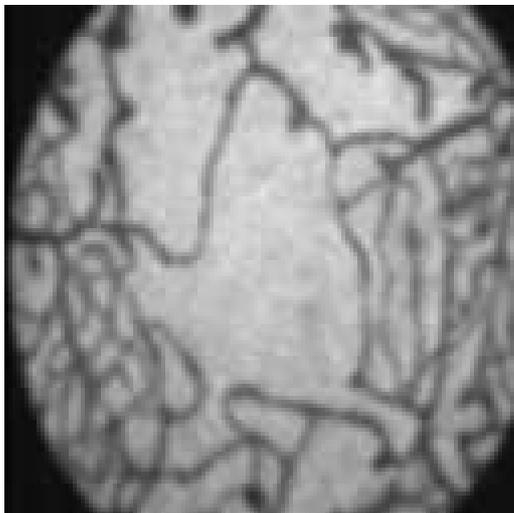
### 10.1 Filtrage de Choquet à VAG

Cette section illustre (Fig. 10.1) l'application de certains filtres de Choquet (usuels et adaptatifs) sur l'image 'macula' dont aucune caractéristique de son bruit n'est connue. Les filtres utilisés sont :

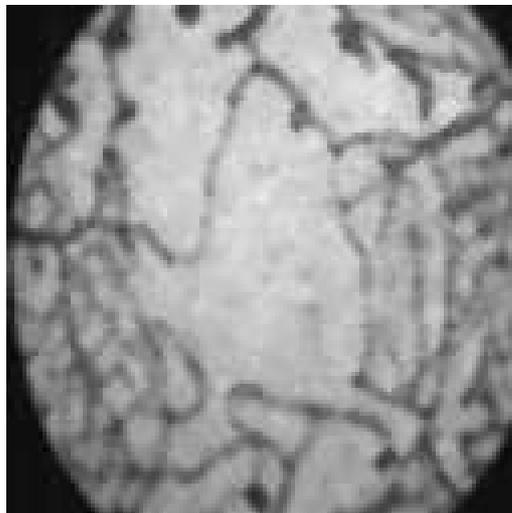
- le filtre de Choquet moyen :
  - usuel  $\text{Moy}_r$ , où  $r$  représente le rayon de la boule utilisée comme fenêtre d'analyse
  - adaptatif  $\text{Moy}_m^f$  calculé avec les VAG  $V_m^f$  dans le modèle CLIP avec le critère de luminance
- le filtre de Choquet médian :
  - usuel  $\text{Med}_r$ , où  $r$  représente le rayon de la boule utilisée comme fenêtre d'analyse
  - adaptatif  $\text{Med}_m^f$  calculé avec les VAG  $V_m^f$  dans le modèle CLIP avec le critère de luminance



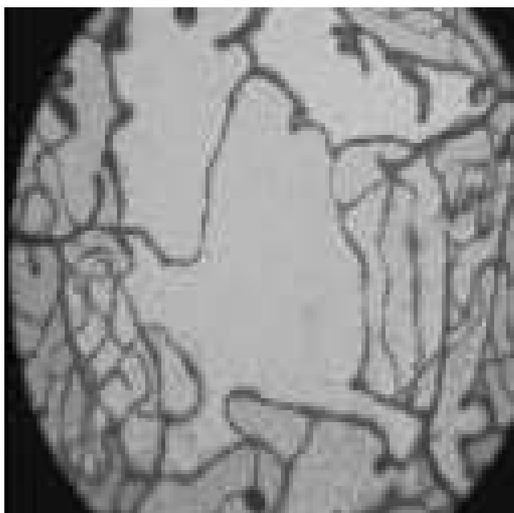
(a) image originale  $f$



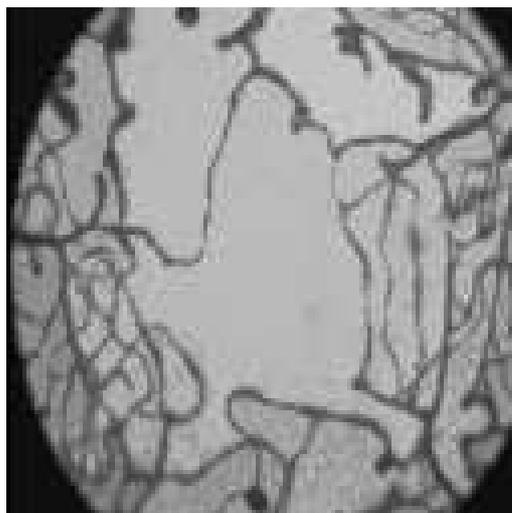
(b)  $\text{Moy}_1(f)$



(c)  $\text{Med}_1(f)$



(d)  $\text{Moy}_{30}^f(f)$



(e)  $\text{Med}_{30}^f(f)$

**FIGURE 10.1** – Restauration de l'image bruitée (a) par des filtres de Choquet usuels (b-c) et adaptatifs (d-e).

## 10.2 Construction de nouveaux VAG

En présence de bruit impulsionnel (support spatial ponctuel) de type poivre et sel, les filtres de Choquet (moyen, médian, ...) à VAG ne restaurent pas convenablement les images affectées par une telle dégradation (Fig.10.2). En effet, le VAG d'un point bruité n'est généralement pas représentatif de la région à laquelle il appartient, quelque soit la tolérance d'homogénéité choisie.

Par conséquent, de nouveaux voisinages adaptatifs généraux, notés  $W_{m\ominus}^f(x)$  sont introduits dans le but de restaurer une image  $f$  dégradée par un tel bruit, par combinaison des VAG de luminance  $\{V_{m\ominus}^f(y)\}_{y \in D}$  :

$$W_{m\ominus}^f(x) = \begin{cases} \bigcup_{y \in B_1(x)} \{V_{m\ominus}^f(y)\} & \text{si } \#V_{m\ominus}^f(x) \leq 5 \\ V_{m\ominus}^f(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $B_1(x)$  désigne une boule centrée en  $x$  de rayon 1.

Le paramètre 5 a été choisi empiriquement. Une étude spécifique pourrait être menée afin de détecter de manière automatique ce seuil (vraisemblablement lié au pourcentage de points affectés dans l'image).

Ces nouveaux VAG permettent de détecter le voisinage adéquat d'un point bruité  $x$ , à l'aide du cardinal de son VAG  $V_{m\ominus}^f(x)$ . Par conséquent, le débruitage devient pertinent à l'aide de filtres de Choquet utilisant ces VAG (Fig. 10.2).

Les résultats montrent la nécessité de la construction des nouveaux VAG pour un filtrage adéquat. De plus, le filtre médian à VAG fournit un meilleur résultat que le filtre médian usuel puisque les transitions sont moins dégradées (flou au niveau des cheveux et des yeux).



(a) image originale 'Lena'



(b) image bruitée



(c) filtrage médian usuel



(d) filtrage médian à VAG  $V_{20}^f(x)$



(e) filtrage médian à VAG  $W_{20}^f(x)$

**FIGURE 10.2** – Restauration de l'image (b) dégradée à partir de (a) par un bruit poivre et sel de 10%, par filtrage médian de différentes sortes (c-e).

# CHAPITRE 11

## Rehaussement d'image

### SOMMAIRE

---

11.1 Par contraste morphologique adaptatif . . . . .	149
11.2 Par égalisation d'histogramme adaptative . . . . .	153

---

Le rehaussement d'image est l'amélioration de la qualité de l'image, souhaité par exemple pour un contrôle visuel ou automatique par une machine dans des applications industrielles. Deux techniques sont assez communes :

- l'accentuation de certaines caractéristiques (image sharpening), par exemple les arêtes (edge sharpening),
- l'égalisation d'histogramme.

### 11.1 Par contraste morphologique adaptatif

Dans cette section, l'approche considérée pour rehausser l'image est un processus d'accentuation des arêtes réalisé par l'intermédiaire d'un opérateur  $\kappa_r$  : le *contraste morphologique* (toggle contrast) [Soille, 2003b].

**DÉFINITION 11.1** [*Contraste morphologique*]

$$\forall (f, x, r) \in \mathcal{I} \times D \times \mathbb{R}^+$$
$$\kappa_r(f)(x) = \begin{cases} D_{B_r}(f)(x) & \text{si } D_{B_r}(f)(x) - f(x) < f(x) - E_{B_r}(f)(x) \\ E_{B_r}(f)(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.1)$$

où  $D_{B_r}$  and  $E_{B_r}$  désignent respectivement la dilatation usuelle et l'érosion usuelle, avec une boule  $B_r$  centrée de rayon  $r$  pour  $ES$ .

Cette définition est étendue aux VAG (Déf. 11.3) par l'intermédiaire des dilatations et érosions morphologiques adaptatives plates utilisant un critère  $h$  de contraste. Ce type de critère semble adapté au problème puisque la technique utilisée doit permettre d'accentuer les arêtes, or ces dernières sont naturellement détectées par un opérateur de contraste local. Précisément, le contraste

utilisé (Déf 11.2) est celui introduit par Jourlin et al. [1988] de manière discrète dans le modèle LIP (voir [Pinoli, 1991, 1992b] pour le cas continu).

**DÉFINITION 11.2** [*Contraste LIP*]

Le contraste LIP au point  $x \in D(\subseteq \mathbb{Z}^2)$  d'une image  $f \in \mathcal{I}$ , noté  $C_r(f)(x)$ , est défini à l'aide de ses voisins inclus dans la boule centrée en  $x$  et de rayon  $r$ ,  $B_r(x)$  :

$$C_r(f)(x) = \frac{1}{\#B_r(x)} \triangle \sum_{y \in B_r(x)} (\max(f(x), f(y)) \triangle \min(f(x), f(y))) \quad (11.2)$$

où  $\sum^\triangle$  et  $\#$  désignent respectivement la somme au sens LIP et le cardinal.

Ainsi, le *contraste morphologique adaptatif* est la transformation  $\kappa_{m_\Delta}^{C_1(f)}$  où  $C_1(f)$  et  $m_\Delta$  représentent respectivement la fonction critère et la tolérance d'homogénéité au sens LIP, requis pour la définition des ESA.

**DÉFINITION 11.3** [*Contraste morphologique adaptatif*]

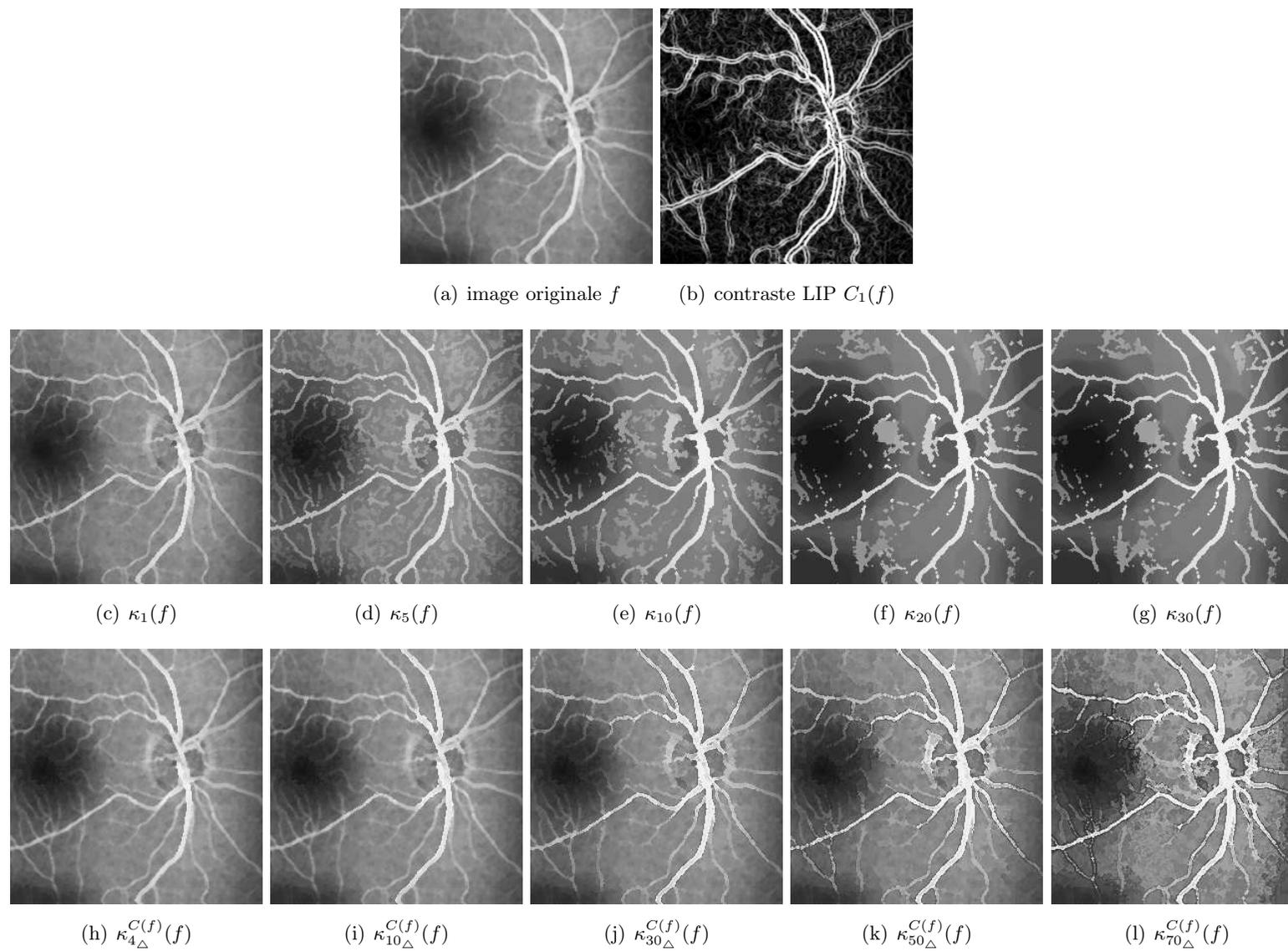
$\forall (f, x, m_\Delta) \in \mathcal{I} \times D \times E^\triangle$

$$\kappa_{m_\Delta}^{C_1(f)}(f)(x) = \begin{cases} D_{m_\Delta}^{C_1(f)}(f)(x) & \text{si } D_{m_\Delta}^{C_1(f)}(f)(x) \triangle f(x) < f(x) \triangle E_{m_\Delta}^{C_1(f)}(f)(x) \\ E_{m_\Delta}^{C_1(f)}(f)(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.3)$$

Les figures 11.1 et 11.2 illustrent deux exemples de rehaussement d'image appliqués respectivement sur l'image 'Lena' et sur une image réelle de vaisseaux de la rétine d'un oeil humain. Les deux transformations, contraste morphologique usuel et adaptatif, sont exposées afin d'évaluer l'approche à VAG.



**FIGURE 11.1** – Rehaussement de l'image 'Lena' (a) par contraste morphologique usuel (c-g) et contraste morphologique adaptatif (h-l) en utilisant un critère de contraste (b).



**FIGURE 11.2** – Rehaussement de l'image 'vaisseaux' (a) par contraste morphologique usuel (c-g) et contraste morphologique adaptatif (h-l) en utilisant un critère de contraste (b).

Ces deux exemples de rehaussement d'image par contraste morphologique montrent que les transformations adaptatives agissent de manière plus locale. En effet, seulement les transitions sont accentuées tout en préservant les zones uniformes. A l'inverse, le contraste morphologique semble rehausser les images de manière plus uniforme, plus globale : les zones spatiales autour des transitions sont rapidement endommagées dès que le filtre devient trop "fort".

## 11.2 Par égalisation d'histogramme adaptative

Une seconde technique de rehaussement d'image est l'égalisation d'histogramme. Le but de cette transformation globale est de distribuer uniformément les tons de gris sur la plage dynamique de l'image, afin d'accroître son contraste.

[Paranjape et al. \[1992\]](#) ont proposé un opérateur de rehaussement d'image basé sur deux niveaux hiérarchiques d'égalisation d'histogramme : global et local. Le principe est constitué de trois étapes :

1. calcul de l'histogramme global  $H_f$  de l'image  $f$  :

$$\forall i = 0, \dots, 255 \quad H_f(i) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(f(m, n) - i) \quad (11.4)$$

où  $M$  et  $N$  désignent le nombre de lignes et de colonnes de l'image et

$$\delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (11.5)$$

2. calcul de la fonction d'égalisation  $F_f$  d'histogramme globale :

$$\forall i = 0, \dots, 255 \quad F_f(i) = 255 * \sum_{j=0}^i H_f(j) \quad (11.6)$$

3. pour chaque point  $x$  de l'image :

- détermination d'un voisinage local  $V(x)$
- calcul de sa moyenne  $\mu_x = \mu(V(x))$  et de son écart-type  $\sigma_x = \sigma(V(x))$
- calcul de l'intervalle  $[min_x, max_x]$  où les intensités de la région  $V(x)$  seront étirées :

$$min_x = H_f(\mu_x) - \kappa\sigma_x \quad (11.7)$$

$$max_x = H_f(\mu_x) + \kappa\sigma_x \quad (11.8)$$

où  $\kappa$  est une constante réelle positive (globale pour tous les points de l'image)

- calcul de la fonction d'égalisation d'histogramme locale  $F_{V(x)}$  (déterminé à partir de l'histogramme local du voisinage  $V(x)$ )
- calcul de la nouvelle valeur  $EHL(f)(x)$  du pixel :

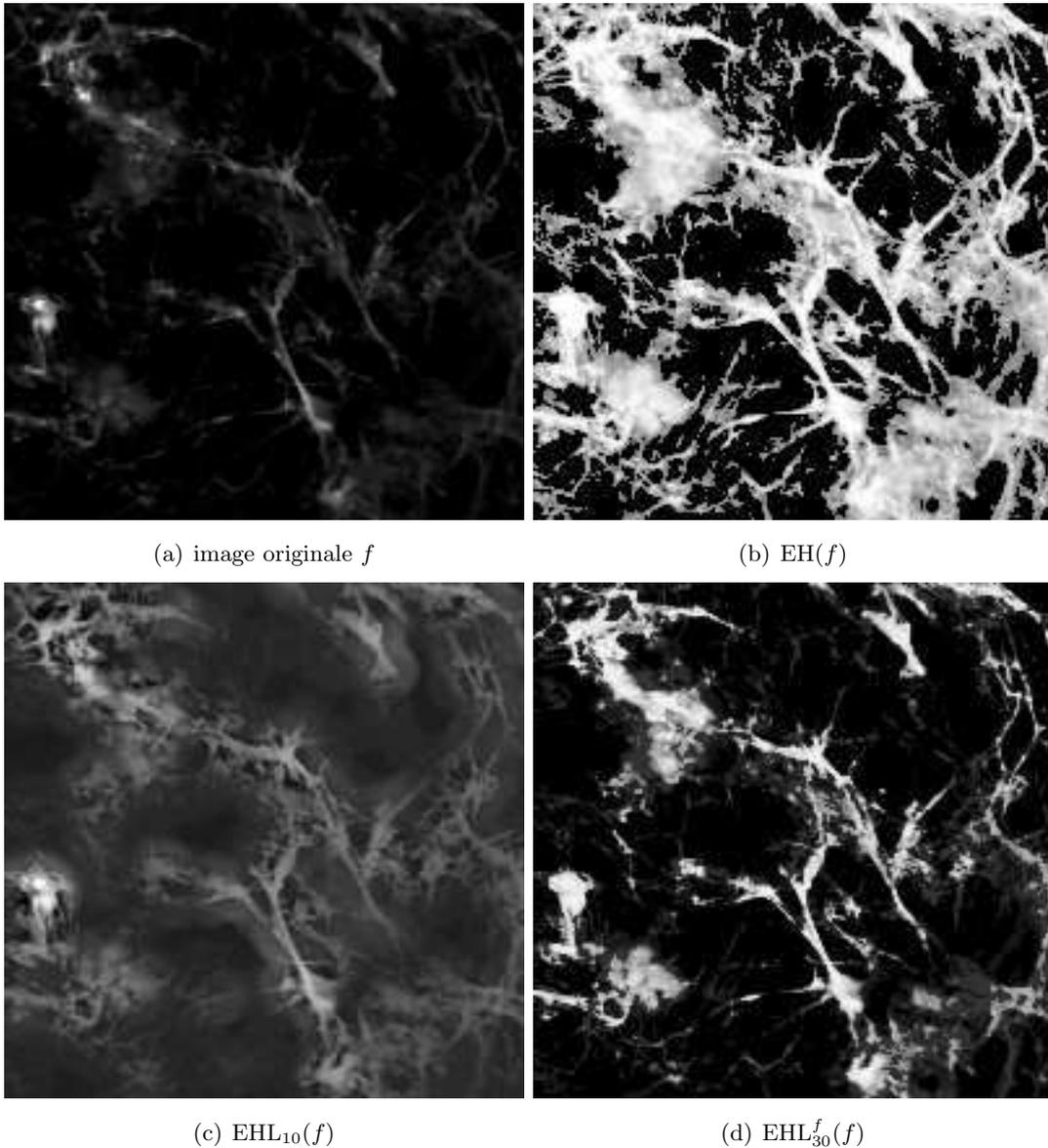
$$EHL(f)(x) = min_x + (max_x - min_x) * F_{V(x)}(f(x)) \quad (11.9)$$

Pour de plus amples détails sur la technique, le lecteur se reportera à [\[Paranjape et al., 1992\]](#) ou [\[Buzuloiu et al., 2001\]](#).

L'égalisation d'histogramme adaptative est donc construite avec les VAG pour voisinages  $V(x)$  de cette transformation. La figure 11.3 expose différentes égalisations d'histogramme appliquées sur une portion de l'image 'fibronectine' :

- EH représentant l'opérateur d'égalisation d'histogramme globale,
- $EHL_r$  représentant l'opérateur d'égalisation d'histogramme locale avec les boules  $B_r(x)$  centrées en  $x$  de rayon  $r$  pour voisinages,
- $EHL_m^f$  représentant l'opérateur d'égalisation d'histogramme locale avec les VAG  $V_m^f(x)$  (critère de luminance et modèle CLIP) pour voisinages.

Quant au paramètre  $\kappa$  défini dans l'égalisation d'histogramme locale, il est choisi égal à 5.



**FIGURE 11.3** – Egalisation d'histogramme (EH) d'une image (a) de fibronectine. (b) : EH globale, (c) : EH locale avec des boules centrées de rayon  $r = 10$ , (d) : EH locale avec des VAG construits dans le modèle CLIP, avec le critère de luminance et la tolérance d'homogénéité  $m = 30$ .

L'égalisation d'histogramme locale (dans le cas discret) présente l'inconvénient de ne pas augmenter le nombre des tons de gris, induisant des problèmes de quantification. Ainsi, certains détails sont accentués mais se noient dans des zones rehaussées plus grossières si bien qu'ils ne sont plus distinguables. A l'inverse, l'égalisation d'histogramme locale permet d'augmenter le nombre de tons de gris de l'image et ainsi d'accentuer localement les caractéristiques significatives de l'image. Cependant, en utilisant des boules isotropes, les voisinages ne sont pas représentatifs des différents objets de l'image. Par conséquent, certains caractéristiques ne sont pas rehaussés alors qu'elles devraient l'être et inversement. Avec les VAG, ce problème est résolu et permet ainsi un traitement postérieur de l'image plus pertinent.



# CHAPITRE 12

## Décomposition multi-échelle

### SOMMAIRE

---

12.1 Par filtrage morphologique alterné séquentiel . . . . .	158
12.2 Par ouvertures/fermetures morphologiques . . . . .	158

---

Ce chapitre expose différentes décompositions multi-échelles réalisées avec des filtres morphologiques forts constituant une *pyramide d'opérateurs* [Serra and Salembier, 1993]. Ce prétraitement est une étape déterminante pour une analyse multi-échelle robuste et pertinente.

#### DÉFINITION 12.1 [*Pyramide d'opérateurs*]

Une pyramide d'opérateurs  $\{\psi_{\lambda \in \mathbb{N}}\}$  de  $\mathcal{I}$  dans  $\mathcal{I}$  est une famille dépendante d'un paramètre positif  $\lambda \in \mathbb{N}$ , appelé le niveau, telle que :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2 \quad (\lambda \geq \mu \geq 0) \Rightarrow (\exists \nu \in \mathbb{N}, \nu \geq \mu | \psi_\nu \psi_\mu = \psi_\lambda) \quad (12.1)$$

Une pyramide d'opérateurs génère une *décomposition pyramidale* (Déf. 12.1) de toute image  $f \in \mathcal{I}$ .

#### DÉFINITION 12.2 [*Décomposition pyramidale*]

Une décomposition pyramidale d'une image  $f \in \mathcal{I}$  consiste en une collection d'images  $\{\psi_{\lambda \in \mathbb{N}}\}$  appartenant à  $\mathcal{I}$ , décomposées à différents niveaux de résolution  $\lambda \in \mathbb{N}$  avec une pyramide d'opérateurs  $\{\psi_{\lambda \in \mathbb{N}}\}$ .

Une telle décomposition est généralement réalisée à l'aide d'une famille d'opérateurs  $\{\psi_{\lambda \in \mathbb{N}}\}$  vérifiant la condition suivante :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{N}^2 \quad (\lambda \geq \mu \geq 0) \Rightarrow (\psi_\lambda \psi_\mu = \psi_\lambda) \quad (12.2)$$

En effet, une famille d'opérateurs satisfaisant cette condition (Eq. 12.2) est une pyramide d'opérateurs (Eq. 12.1).

## 12.1 Par filtrage morphologique alterné séquentiel

Cette section expose une représentation multi-échelle réalisée avec des filtres alternés séquentiels (FAS) sur deux images : 'cameraman' (Fig. 12.1) et 'bridge' (Fig. 12.2). Ces filtres morphologiques forts constituent bien une pyramide d'opérateurs puisqu'ils vérifient la condition de l'équation 12.2. Afin d'évaluer notre approche adaptative à VAG, trois types de FAS sont comparés et discutés :

- FAS usuels FAS.  $FO_{r,n}$  où :
  - $r$  désigne le rayon de la boule utilisée pour ES ( $r = 1$  dans les exemples),
  - $n$  est l'ordre du filtre.
- FAS par reconstruction FASR.  $FO_{r,n}$  où :
  - les ouvertures et les fermetures sont définies par reconstruction,
  - $r$  désigne le rayon de la boule utilisée pour ES ( $r = 1$  dans les exemples),
  - $n$  est l'ordre du filtre,
- FAS adaptatifs plats FAS.  $FO_{m,n}^h$  où :
  - $m$  désigne le paramètre d'homogénéité (CLIP) utilisée pour les ESA ( $m = 5$  dans les exemples),
  - $h$  représente la luminance de l'image décomposée,
  - $n$  est l'ordre du filtre.

Ces résultats, exposés dans les figures 12.1 et 12.2, montre que la connexité des ASF adaptatifs plats et des ASF par reconstruction est un avantage considérable. En effet, les transitions (contours) sont rapidement endommagées avec les ASF usuels, contrairement aux opérateurs connexes. Cependant les FAS par reconstruction ont tendance à supprimer des détails fins trop rapidement, tels que l'oeil du cameraman ou la "texture" des arbustes situés en bas à droite de l'image 'bridge'.

## 12.2 Avec des ouvertures/fermetures morphologiques adaptatives séquentielles plates

Ce second exemple (Fig. 12.3) de décomposition multi-échelle utilise les familles d'ouvertures morphologiques adaptatives séquentielles plates  $\{O_{m\ominus,p}^h\}_p$  et de fermetures adaptatives séquentielles plates  $\{F_{m\ominus,p}^h\}_p$ . Ces deux familles sont des granulométries et anti-granulométries, c'est-à-dire des opérateurs ordonnées à l'inverse des FAS. Ainsi, elles vérifient bien la condition de l'équation 12.2 et constituent par conséquent des pyramides d'opérateurs. L'image décomposée est 'goldhill', avec le critère de luminance, le modèle CLIP et la tolérance d'homogénéité  $m = 10$ .

La figure 12.3 souligne à la fois la connexité et le caractère intrinsèque des échelles d'analyse ( $p$  dans cet exemple) des opérateurs morphologiques adaptatifs.



(a) image originale  $f$



(b) FAS.  $FO_{1,4}(f)$



(c) FAS.  $FO_{1,7}(f)$



(d) FAS.  $FO_{1,10}(f)$



(e) FASR.  $FO_{1,4}(f)$



(f) FASR.  $FO_{1,7}(f)$



(g) FASR.  $FO_{1,10}(f)$



(h) FAS.  $FO_{5,4}^f(f)$

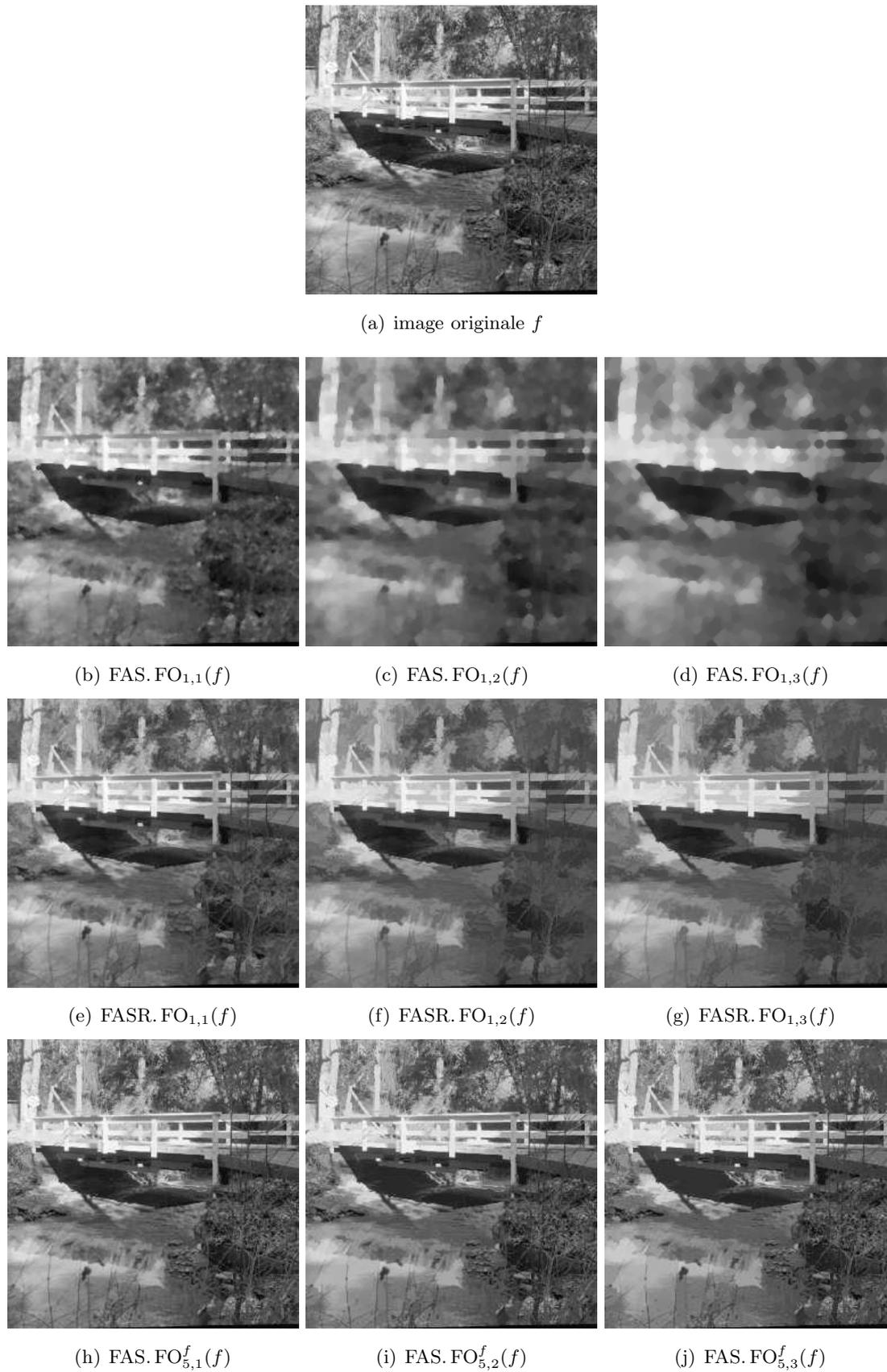


(i) FAS.  $FO_{5,7}^f(f)$

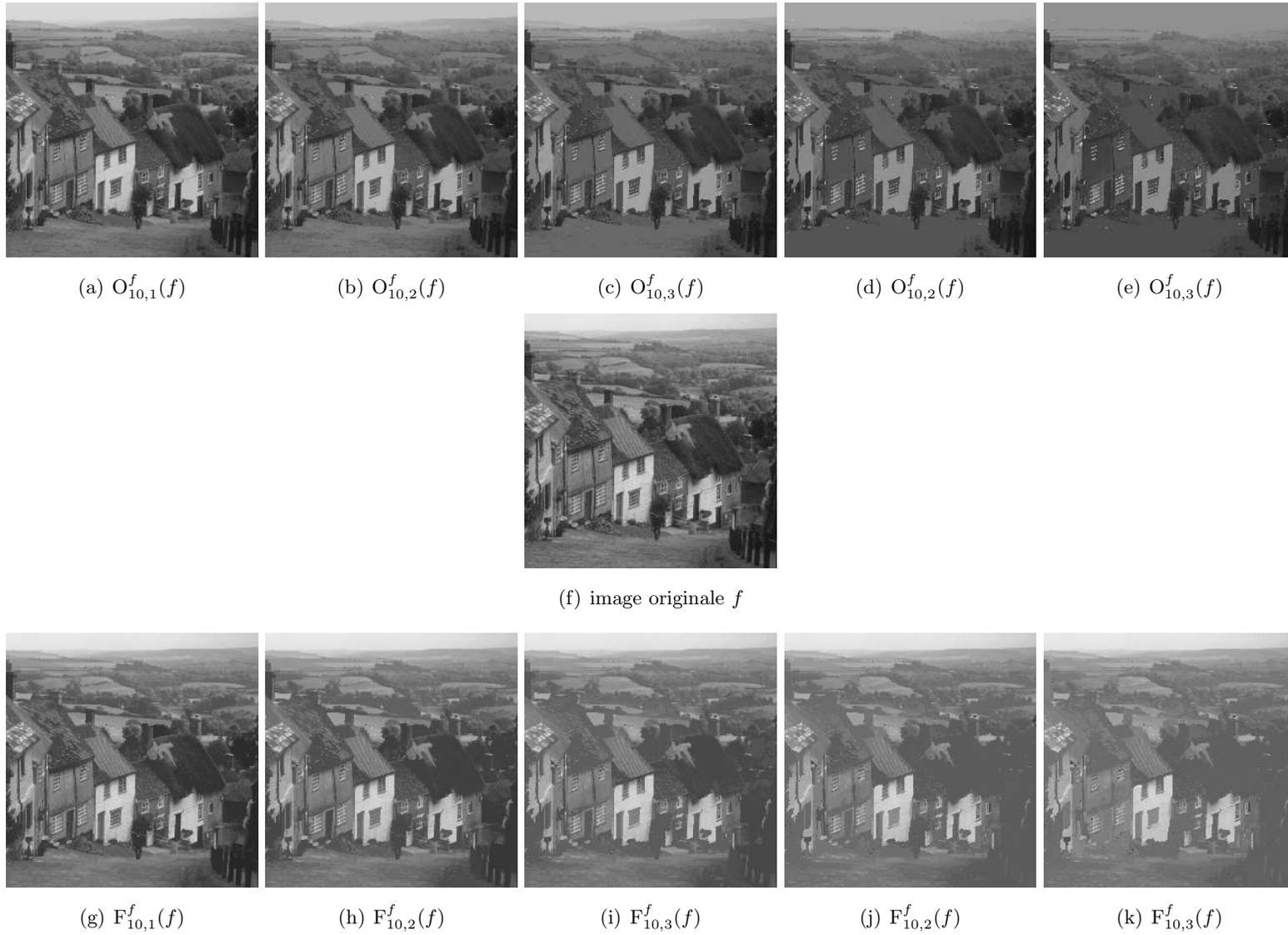


(j) FAS.  $FO_{5,10}^f(f)$

**FIGURE 12.1** – Décomposition multi-échelle avec des FAS : usuels (b-d), par reconstruction (e-g), et adaptatifs (h-j) de l'image originale (a).



**FIGURE 12.2** – Décomposition multi-échelle avec des FAS : usuels (b-d), par reconstruction (e-g), et adaptatifs (h-j) de l'image originale (a).



**FIGURE 12.3** – Décomposition multi-échelle avec des ouvertures (resp. fermetures) morphologiques adaptatives séquentielles plates (a-e) (resp. (g-k)) de l'image originale (a).



# CHAPITRE 13

## Segmentation d'image

### SOMMAIRE

---

<b>13.1 Par morphologie mathématique adaptative</b> . . . . .	<b>163</b>
13.1.1 Rappels sur la ligne de partage des eaux (LPE) . . . . .	163
13.1.2 Segmentation pyramidale . . . . .	164
13.1.3 Segmentation hiérarchique . . . . .	167
13.1.4 Segmentation 'joints de grains' . . . . .	168
13.1.5 Segmentation 'joints de grains' dans des conditions d'illumination inégale . . . . .	171
13.1.6 Segmentation de cellules endothéliales cornéennes . . . . .	173
<b>13.2 Par seuillage de fonctions critère à VAG</b> . . . . .	<b>175</b>

---

Segmenter une image d'intensité signifie la décomposer en différentes zones d'intérêt, homogènes au sens d'un certain critère. Ces régions représentent généralement les différents objets que l'on veut extraire. D'un point de vue mathématique, la segmentation est définie comme suit :

**DÉFINITION 13.1** [*Segmentation d'une image*]

La segmentation d'une image  $f \in \mathcal{I}$  est une partition de son domaine de définition  $D$  en  $n$  parties non-vides disjointes  $R_1, \dots, R_n$ , appelées régions, telle que leur union égale à  $D$  :

$$(D = \bigcup_{i=1}^n R_i) \quad \text{and} \quad (\forall i \neq j \ R_i \cap R_j = \emptyset) \quad (13.1)$$

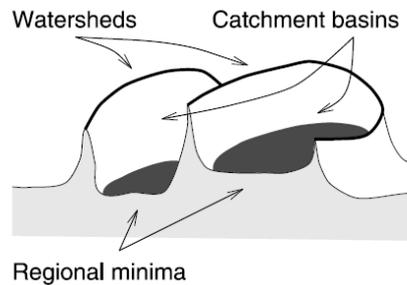
Dans la première section, le processus de segmentation est basé sur une transformation morphologique appelée *ligne de partage des eaux (watershed)* [Beucher and Lantuejoul, 1979] et une décomposition (multi-échelle) réalisée par morphologie mathématique adaptative.

### 13.1 Par morphologie mathématique adaptative

#### 13.1.1 Rappels sur la ligne de partage des eaux (LPE)

La transformation par ligne de partage des eaux (LPE) est reconnue comme étant une étape fondamentale dans les processus de segmentation morphologique [Meyer and Beucher, 1990],

[Beucher and Meyer, 1993]. Elle est de plus informatiquement pratique grâce à une technique rapide mise au point par Vincent and Soille [1991]. L'opérateur de LPE subdivise l'image en zones possédant chacune un faible gradient, appelées *bassins versants* (catchment bassins), entourés par des lignes de crête à fort gradient : les lignes de partage des eaux (watersheds). Un bassin versant est une région homogène de points connectés par un chemin au même point ou région d'altitude minimum (regional minimum). Les LPEs sont localisées sur les maxima régionaux de l'image (Fig. 13.1).



**FIGURE 13.1** – Segmentation par LPE : considérant l'image comme une surface topographique, l'immersion de ses minima régionaux, tout en empêchant la fusion des eaux provenant de différentes sources, partitionne l'image en deux ensembles distincts : les bassins versants (catchment bassins) et les lignes de partage des eaux (watersheds).

Afin de réaliser une segmentation en régions pertinentes, l'image originale est généralement transformée en une *fonction de segmentation*, sur laquelle la LPE est appliquée. En pratique, l'image gradient est souvent utilisée comme fonction de segmentation, puisque les bassins versants doivent théoriquement correspondre aux régions de tons de gris homogènes, et les lignes de partage des eaux à ses discontinuités.

### 13.1.2 Segmentation pyramidale

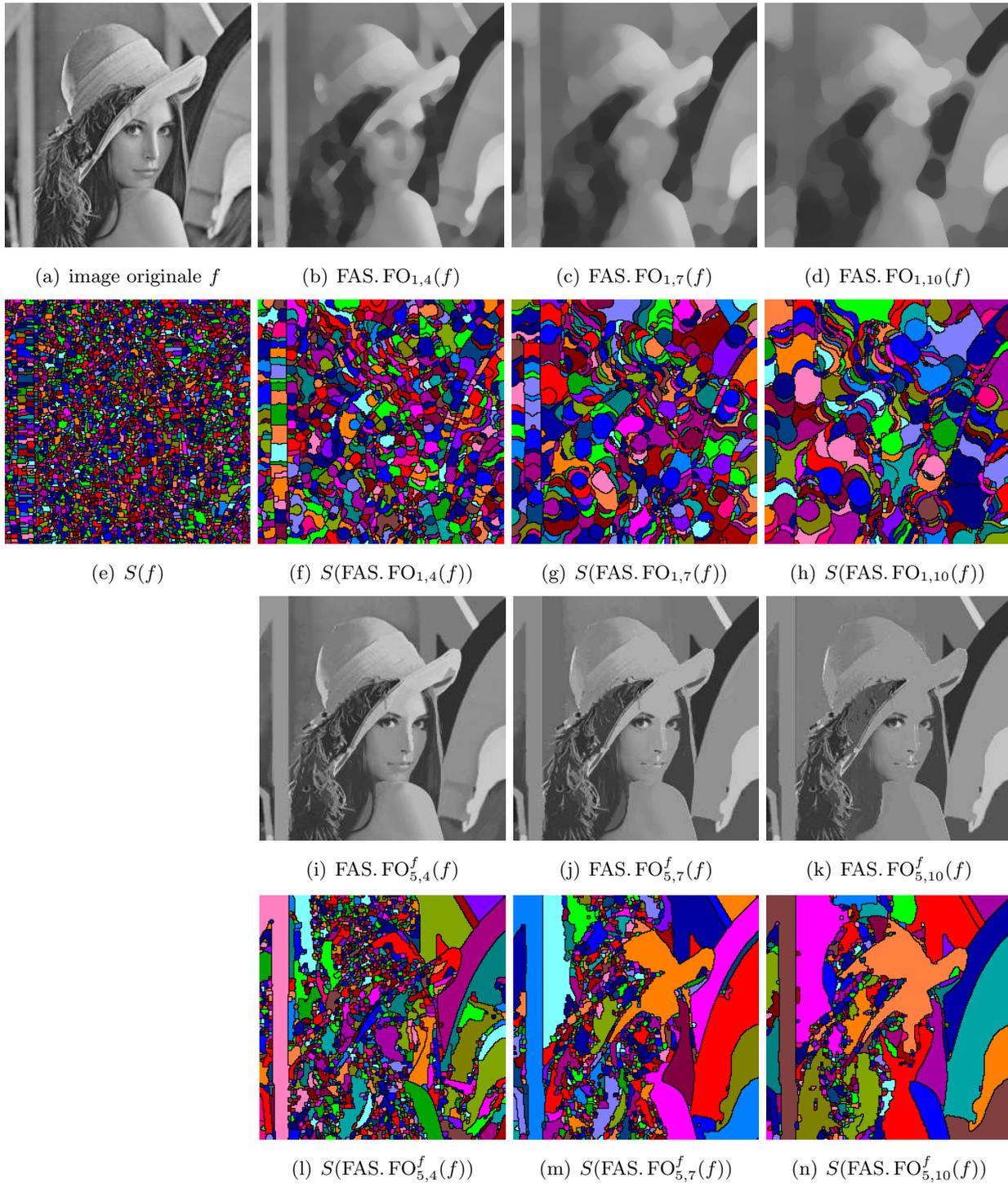
Malgré tout, un calcul direct de la LPE sur l'image gradient fournit généralement une sur-segmentation due à la présence de minima superflus. Ce problème peut être surmonté par un processus de décomposition pyramidale (Déf. 12.2) visant à faire décroître le nombre de minima, et par conséquent le nombre de régions segmentées.

Sur la figure 13.2, la pyramide d'opérateurs considérée, appliquée sur l'image 'Lena', est une famille de filtres alternés séquentiels (FAS), qui respectent la propriété liée à l'équation 12.1. Ces opérateurs génèrent une décomposition pyramidale, lissant l'image originale afin d'éviter une sur-segmentation.

A chaque niveau  $\lambda \in \mathbb{N}$ , le processus de segmentation pyramidale considéré est réalisé en trois étapes consécutives :

1. l'image originale  $f$  est filtrée morphologiquement par un ASF d'ordre  $\lambda$ ,
2. le gradient morphologique,  $GM$ , est calculé sur l'image filtrée résultante,
3. finalement, la transformation par ligne de partage des eaux,  $LPE$ , est effectuée sur cette fonction de segmentation.

L'opérateur  $S$  désigne les deux dernières étapes de ce processus de segmentation :  $S = LPE \circ GM$ . Dans cet exemple, la segmentation pyramidale est réalisée et comparée à travers les FAS usuels  $FAS.FO_{r,n}$  d'ordre  $n$  utilisant un disque centré de rayon  $r$  pour ES et les FAS adaptatifs  $FAS.FO_{m,n}^f$  d'ordre  $n$ , dont les ESA sont calculés avec le critère de luminance et la tolérance d'homogénéité  $m$ , selon le modèle CLIP . Concernant le paramètre spatial  $r$  et le paramètre d'intensité  $m$ , ils sont respectivement fixés à 1 et 5. Quant à  $n$ , trois ordres sont communément utilisés pour les FAS usuels et adaptatifs :  $n = 4, 7, 10$ , afin de montrer différents niveaux de la segmentation pyramidale.



**FIGURE 13.2** – Segmentation pyramidale de l'image 'Lena' (a). Tout d'abord, l'image originale est décomposée avec des FAS usuels (b-d) et adaptatifs (i-k). Ensuite, le gradient morphologique suivi de la LPE, transformation notée  $S$ , est calculée sur les images décomposées prises comme fonctions de segmentation, fournissant respectivement les images (f-h) et (l-n), pour l'approche usuelle et adaptative. L'image originale est décomposée afin d'éviter une sur-segmentation (e).

La figure 13.2 montre que l'approche adaptative surpasse l'approche classique. En effet 'Lena' est d'autant plus discernable, avec la segmentation réalisée par la décomposition pyramidale adaptative, que l'ordre du filtre croît, alors que c'est totalement impossible avec la décomposition pyramidale classique correspondante. Ainsi, ces résultats soulignent à la fois la prise en compte des structures spatiales de l'image et la connexité des opérateurs adaptatifs. L'image est simplifiée tout en préservant l'information de contour, et chaque niveau de la pyramide est intrinsèquement dépendant du contexte local de l'image.

### 13.1.3 Segmentation hiérarchique

Pratiquement (Fig. 13.2), les filtres morphologiques adaptatifs (connexes) permettent une décomposition pyramidale tout en préservant les structures de l'image. Plus précisément, une pyramide d'opérateurs (Déf. 12.1) connexes segmente hiérarchiquement l'image, donnant plus de cohérence qu'une segmentation pyramidale classique (réalisée par une pyramide d'opérateurs non connexes). En effet, une famille d'opérateurs connexes  $\{\psi_\lambda\}$  crée une décomposition pyramidale hiérarchique [Serra and Salembier, 1993] (Déf. 13.2), où les zones plates  $ZP$  de  $\psi_\lambda$  croient suivant le paramètre  $\lambda$ , c'est-à-dire que les zones plates fusionnent :

$$\forall \lambda, \mu \geq 0 \quad \lambda \geq \mu \Rightarrow ZP(\psi_\mu) \subseteq ZP(\psi_\lambda) \quad (13.2)$$

Cela permet aux structures de l'image d'être plus convenablement analysées et liées à travers les niveaux de la pyramide d'images.

#### DÉFINITION 13.2 [*Décomposition pyramidale hiérarchique*]

Une décomposition pyramidale hiérarchique d'une image  $f \in \mathcal{I}$  est constituée d'une famille  $\{\psi_\lambda(f)\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$  d'images appartenant à  $\mathcal{I}$ , décomposées à différents niveaux de résolution  $\lambda \in \mathbb{N}$  par l'intermédiaire d'une pyramide d'opérateurs connexes  $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}}$

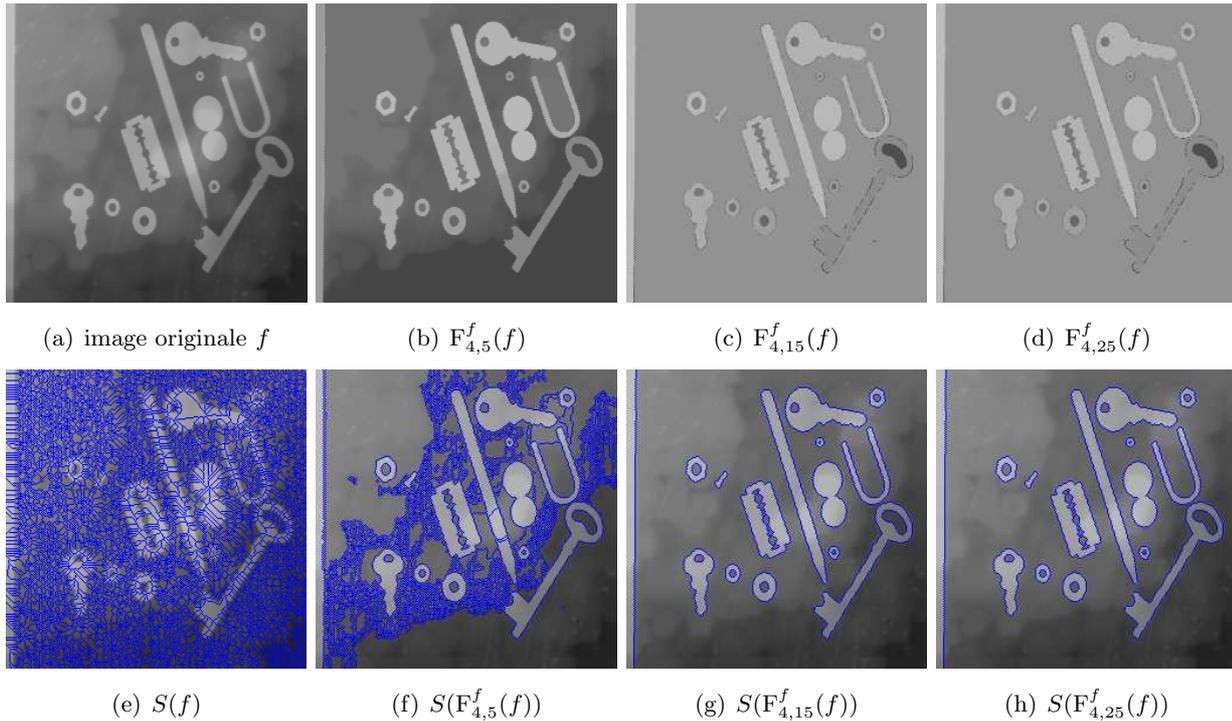
Dans l'exemple suivant (Fig. 13.3), la pyramide est générée à l'aide d'une famille de filtres morphologiques adaptatifs : les fermetures adaptatives séquentielles plates  $\{F_{m,p}^f\}_p$  utilisant des ESA calculés avec le critère de luminance dans le modèle CLIP. Ces filtres sont connexes et respectent la propriété liée à l'équation 12.1 (c'est une anti-granulométrie) définissant une pyramide d'opérateurs. Par conséquent,  $\{F_{m,p}^f\}_p$  génère une décomposition pyramidale hiérarchique.

En ce sens, à chaque niveau  $p$  de la pyramide, le processus de segmentation appliqué sur l'image 'tools' est réalisé en trois étapes consécutives :

- l'image originale  $f$  est filtrée avec une fermeture adaptative séquentielle plate d'ordre  $p$ ,
- le gradient morphologique  $GM$  est calculé sur l'image filtrée résultante,
- finalement, la transformation par LPE est établie sur cette fonction de segmentation.

L'opérateur  $S$  désigne les deux dernières étapes de ce processus de segmentation :  $S = LPE \circ GM$ .

Dans cet exemple, trois ordres de filtrage ont été utilisés :  $p = 5, 15, 25$  afin de montrer différents niveaux de la pyramide hiérarchique. Le paramètre  $m$  a quant à lui été sélectionné empiriquement pour produire visuellement la segmentation multi-échelle la plus satisfaisante possible.



**FIGURE 13.3** – Segmentation hiérarchique de l'image 'tools' (a). Tout d'abord, l'image originale est décomposée en utilisant des fermetures adaptatives séquentielles plates (b-d). Ensuite, le gradient morphologique suivi de la transformation par LPE, notée  $S$ , est calculée sur les images décomposées comme fonctions de segmentation, fournissant les images (f-h). L'image originale est décomposée afin d'éviter une sur-segmentation (e).

La segmentation hiérarchique résultante fournit des partitions emboîtées de l'image originale, induisant une représentation par graphe [Serra and Salembier, 1993; Vachier, 2001]. Par suite, le processus  $\{F_{4,n}^f\}$  fournit le résultat escompté pour  $n = 15$  ou  $n > 15$ . En effet, l'opérateur est saturé à partir de la valeur  $n = 15$  :  $\forall n \geq 15 \quad F_{4,n}^f = F_{4,15}^f$ . Cette caractéristique nécessiterait une étude spécifique. De plus, cette segmentation hiérarchique est réalisée sans aucun opérateur par reconstruction [Crespo et al., 1995]. Les filtres par reconstruction nécessitent des transformations géodésiques, afin de définir des opérateurs connexes généralement requis pour ce type de segmentation multi-échelle [Salembier and Serra, 1995; Serra and Salembier, 1993; Vachier, 2001]. Cette connexité des opérateurs morphologiques adaptatifs élémentaires (dilatation, érosion) est un fort avantage par rapport aux opérateurs classiques qui ne satisfont pas cette propriété : tous les opérateurs construits par composition ou combinaison avec le supremum ou l'infimum des dilatations et érosions adaptatives définissent des opérateurs connexes [Serra and Salembier, 1993].

**REMARQUE 13.1** La segmentation précédente (Fig. 13.2) de l'image 'Lena' fournissait donc elle aussi une segmentation hiérarchique : les FAS adaptatifs (avec le critère de luminance) sont des opérateurs connexes.

#### 13.1.4 Segmentation de joints de grains métallurgiques

La segmentation est ici réalisée sur un exemple concret d'image de grains métallurgiques. Le but de cette application est de détecter les joints de grains. Plusieurs méthodes, abordant ce problème,

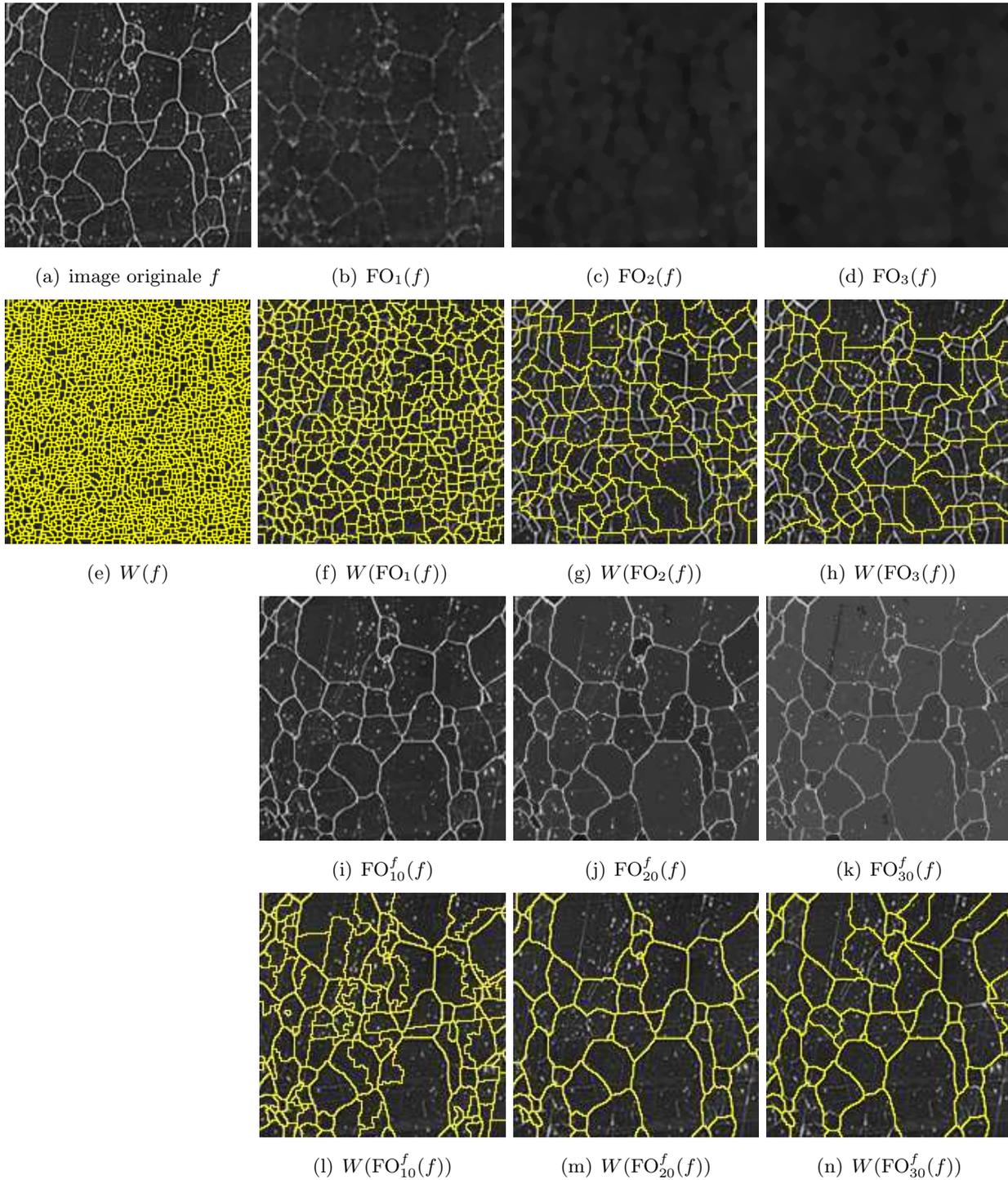
ont déjà été exposés. Par exemple, [Chazallon and Pinoli \[1997\]](#) ont proposé une approche efficace basée sur les résidus d'un filtrage alterné séquentiel. Néanmoins, la méthode possède quelques inconvénients : son incapacité à supprimer certains artefacts et sa déficience à préserver la connexité des joints de grains. De manière générale, les méthodes publiées emploient pour la plupart du temps des processus avancés et 'métallurgiquement' pertinents nécessitant des connaissances a priori, et par conséquent l'intervention d'un expert.

Dans cet exemple, le processus de segmentation est réalisé en deux étapes consécutives :

- un processus de décomposition, basé sur des filtres morphologiques alternés usuels  $FO_r$  ou adaptatifs  $FO_m^f$ , est appliqué sur l'image originale,
- la transformation par LPE, notée  $W$ , est ensuite calculé sur ces fonctions de segmentation.

Cette approche ne nécessite pas l'application d'un opérateur gradient. En effet, les lignes de crête de l'image originale coïncident avec les "étroits" joints de grains. Ainsi, la LPE est directement calculée sur les images filtrées, définissant les fonctions de segmentation. Une comparaison est effectuée entre l'approche classique et l'approche adaptative, à travers le processus de décomposition. L'opérateur  $FO_r$  utilise le disque centré de rayon  $r$  comme ES alors que  $FO_m^f$  est défini avec des ESA calculés avec le critère de luminance et la tolérance d'homogénéité  $m$  selon le modèle CLIP. Pour chaque approche, trois paramètres ont été fixés :  $r = 1, 2, 3$  pour le paramètre spatial des ES et  $m = 10, 20, 30$  pour le paramètre d'intensité des ESA.

L'approche adaptative fournit, à l'inverse de l'approche classique, la segmentation escomptée (avec le paramètre  $m = 20$ ). Les filtres adaptatifs, connexes et dont les ESA coïncident avec les structures locales de l'image, lisse l'intérieur des grains et ne dégradent pas les joints. Par conséquent, les minima des image filtrées résultantes fournissent des marqueurs significatifs pour la ligne de partage des eaux.



**FIGURE 13.4** – Segmentation d’une image de grains métallurgiques (a). Tout d’abord, l’image originale est décomposée à l’aide d’un filtrage morphologique alterné usuel (b-d) et adaptatif (i-k). Ensuite, la transformation par ligne de partage des eaux, notée  $W$ , est calculée sur les images décomposées définissant les fonctions de segmentation, produisant respectivement les images (f-h) and (l-n). L’image originale est décomposée afin d’éviter une sur-segmentation (e). L’approche adaptative fournit la segmentation souhaitée pour la tolérance d’homogénéité  $m = 20$ .

### 13.1.5 Segmentation de joints de grains métallurgiques dans des conditions d'illumination inégale

Le but de cette sous-section est de montrer expérimentalement l'impertinence physique du modèle CLIP. Ceci est illustré sur l'image métallurgique précédente où la segmentation CLIP dans des conditions d'illumination inégale ne peut être réalisée. A l'inverse, la segmentation d'image en présence d'un petit changement local de l'illumination de la scène peut être accomplie avec le modèle LIP (Fig. 13.6).

Pour simuler ce changement d'illumination local, l'image originale  $f$  est modifiée en trois étapes, pour produire  $\hat{f}$  (Fig. 13.5) :

1.  $g_1 = 255 - f$ ,
2.  $g_1$  est modifiée progressivement de gauche à droite par une fonction d'illumination multiplicative  $I_{il}$  [Deng and Pinoli, 1998] :

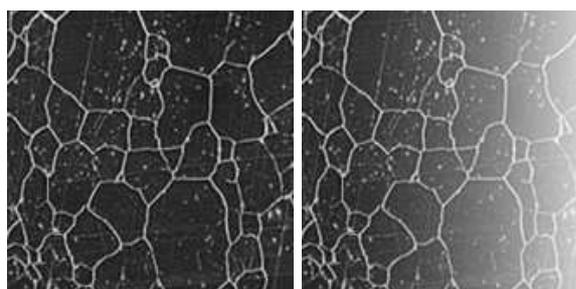
$$\forall (x, y) \in D \quad I_{il}(x, y) = \left( 1 - 0.8 \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} \times \frac{x}{256} \right) \right) \right) \quad (13.3)$$

où  $(x, y)$  désigne les coordonnées du point considéré.

Ainsi,  $g_2 = I_{il} \times g_1$ .

3.  $\hat{f} = 255 - g_2$ .

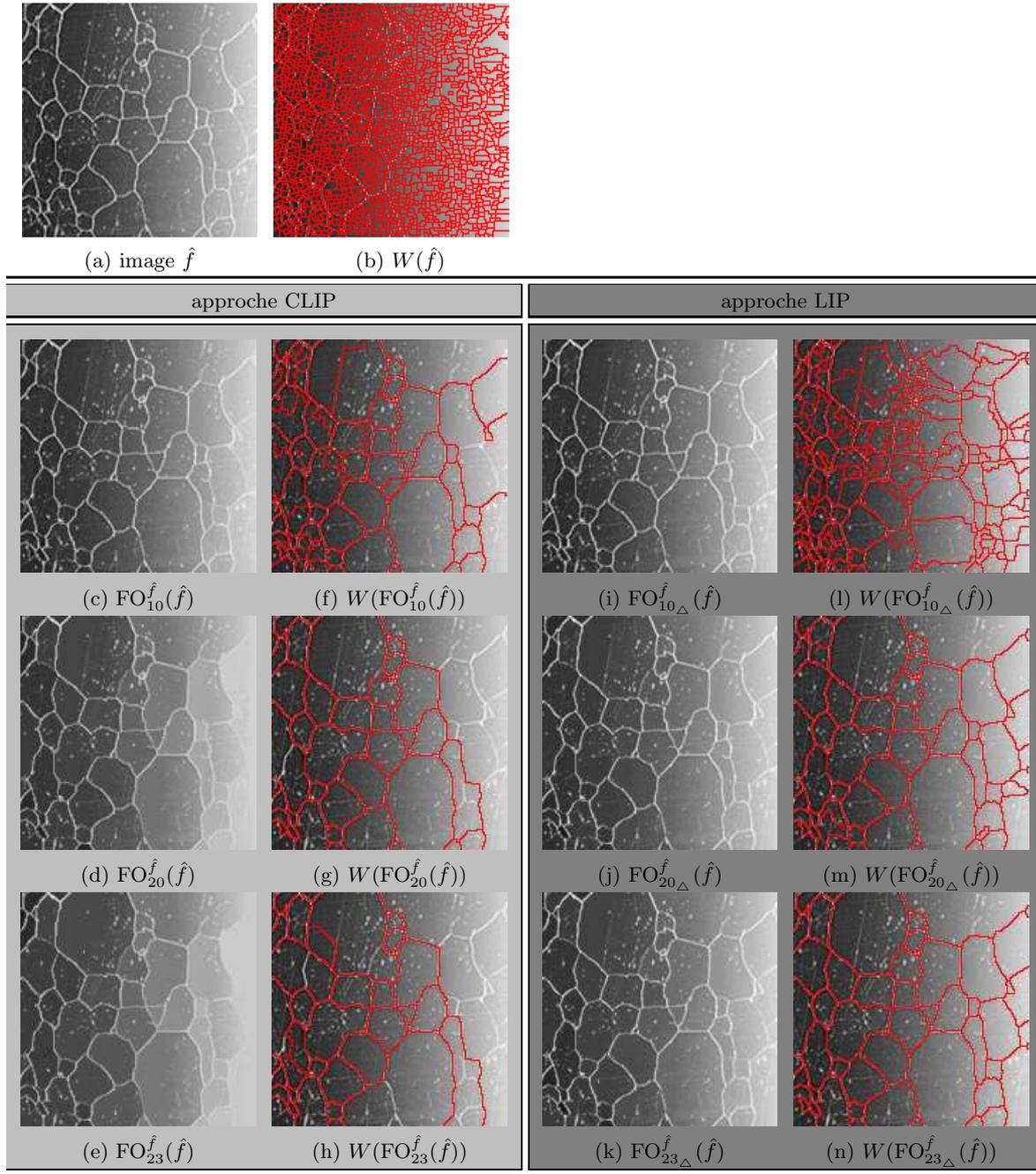
La transformation  $g_2 = I_{il} \times g_1$  est conforme avec les modèles de formation d'image par réflexion multiplicative ou transmission [Pinoli, 1997a; Jourlin and Pinoli, 2001].



(a) image originale  $f$       (b) image illuminée non uniformément ( $\hat{f}$ )

**FIGURE 13.5** – Simulation d'un changement local de l'illumination de la scène : image originale (a) et image modifiée (b).

La segmentation (le même processus que celui appliqué dans la sous-section précédente) de l'image  $\hat{f}$  est comparée entre les opérateurs morphologiques adaptatifs dont les ESA sont construits selon le modèle CLIP ou LIP.



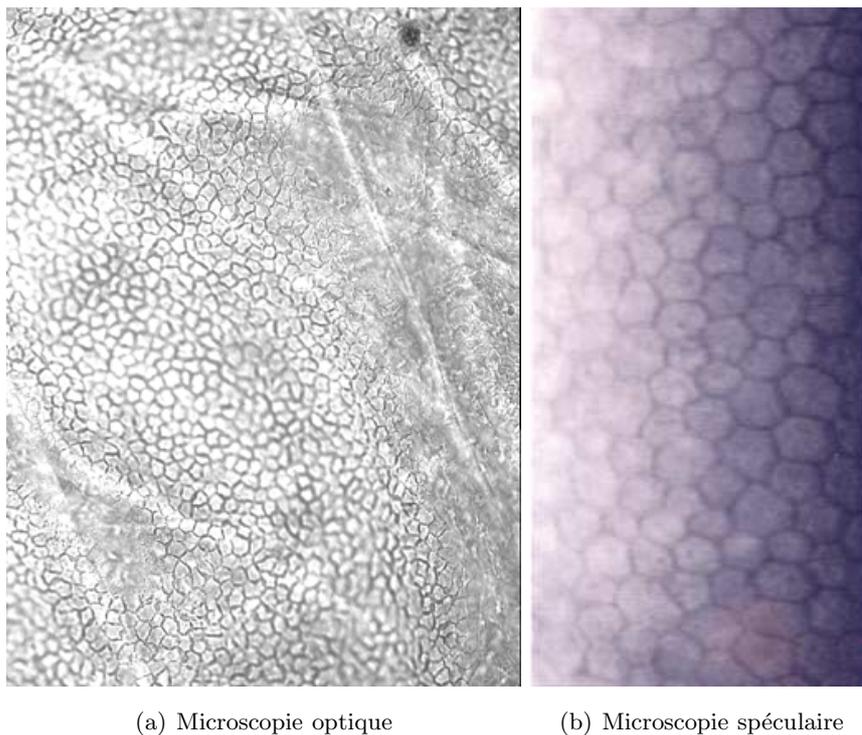
**FIGURE 13.6** – Segmentation d’une image de grains métallurgiques (a) dans des conditions d’illumination inégale. L’image originale est tout d’abord décomposée à l’aide de filtres morphologiques adaptatifs alternés plats dont les ESA sont calculés dans le modèle CLIP (c-e) et LIP (i-k) sélectionnés pour l’espace des fonctions critères. Finalement, la transformation par LPE, notée  $W$ , est calculée sur ces fonctions de segmentation, produisant respectivement les images (f-h) et (l-n). Le modèle LIP fournit une segmentation robuste, dans le sens où le processus  $W(\text{FO}_{23\Delta}^{\hat{f}}(\hat{f}))$  génère pratiquement la même partition que  $W(\text{FO}_{20}^f(f))$  dans des conditions d’illumination standard (Fig. 13.4).

La segmentation résultante générée dans le modèle LIP est plus performante que l’approche correspondante CLIP. En effet, les joints ne sont pas détectés dans les zones sur-illuminées de l’image avec le modèle CLIP. A l’inverse, le processus  $W(\text{FO}_{23\Delta}^{\hat{f}}(\hat{f}))$  construit suivant le modèle LIP fournit la segmentation espérée.

Ces résultats expérimentaux soulignent le fait que l'approche LIP soit physiquement et psychophysiquement connecté au système visuel humain et ses notions de contraste [Jourlin and Pinoli, 1988; Pinoli, 1997b].

### 13.1.6 Segmentation de cellules endothéliales cornéennes

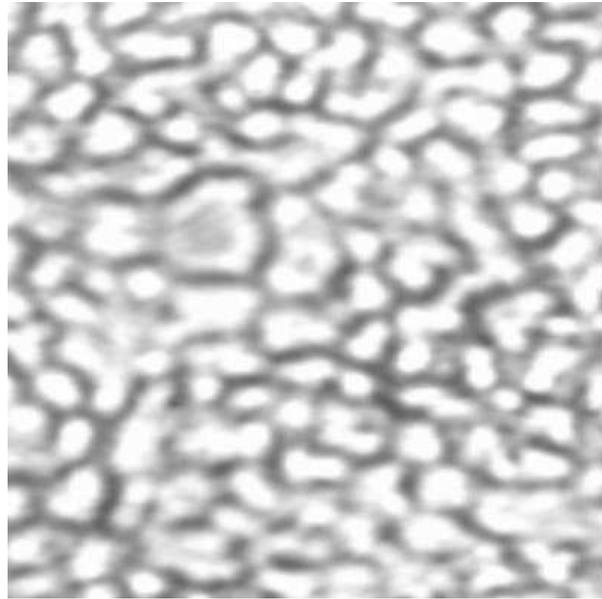
L'endothélium cornéen humain constitue une mono-couche de cellules de formes relativement hexagonales et de surfaces régulières, situées à la face interne de la cornée. Ces cellules sont primordiales car elles maintiennent la transparence de la cornée. La densité des cellules et leurs caractéristiques morphométriques (polymégéthisme et pléomorphisme) reflètent la bonne santé de la cornée, d'où la nécessité de contrôle. Ce dernier peut être réalisé in vivo par microscopie spéculaire (par exemple pour détecter certaines pathologies susceptibles d'altérer l'endothélium cornéen) ou ex vivo par microscopie optique avant l'opération chirurgicale de greffe (Fig. 13.7). Ces techniques de microscopie fournissent différents types d'images en tons de gris. La segmentation des régions représentant les cellules et les mesures de leurs caractéristiques fondamentales, souhaitées par l'ophtalmologiste, sont réalisées à l'aide d'un logiciel spécialisé tel que SAMBA, utilisant des techniques de traitement et d'analyse d'image.



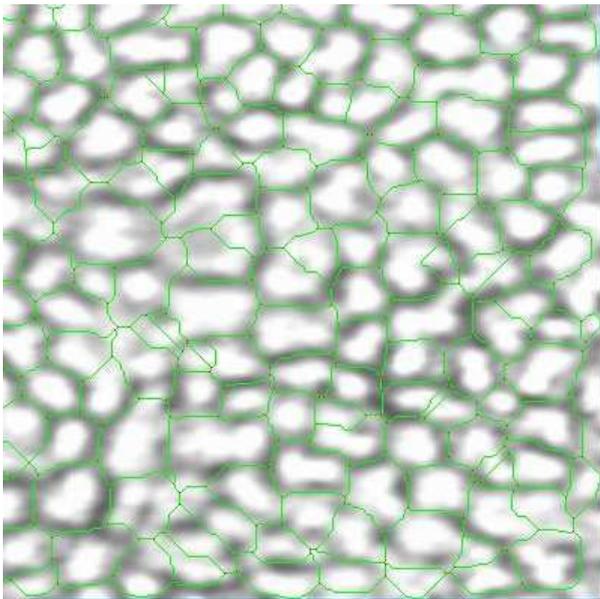
**FIGURE 13.7** – Cellules endothéliales cornéennes.

Cette sous-section expose une détection des cellules sur une image acquise par microscopie optique. Une comparaison avec le résultat fourni par SAMBA est exposée dans la figure 13.8. Le processus de segmentation est le même que celui utilisé pour la détection des joints de grains : un filtrage morphologique adaptatif alterné  $FO_m^f$  (avec le critère de luminance dans le modèle CLIP) suivi

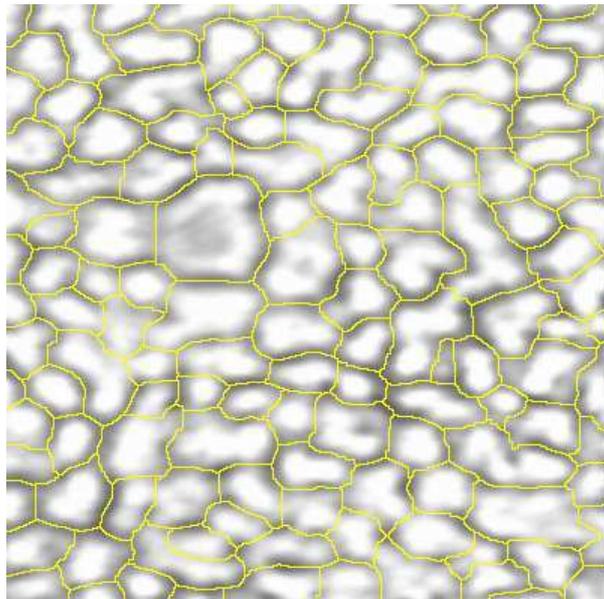
d'une transformation par LPE,  $W$ . Le paramètre  $m$  du filtre adaptatif a été choisi de manière à réaliser la meilleure segmentation possible pour l'expert.



(a) image originale  $f$



(b) Segmentation par SAMBA



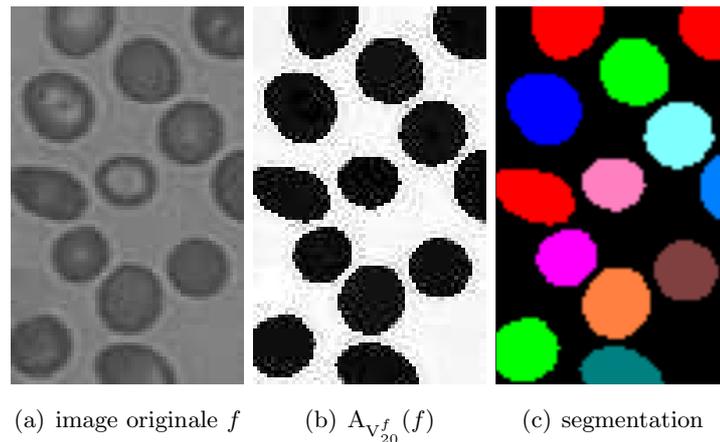
(c)  $W(\text{FO}_{10}^f(f))$

**FIGURE 13.8** – Segmentation d'une image (a) de cellules endothéliales cornéennes acquise par microscopie optique. L'image traitée par morphologie mathématique adaptative (c) semble (pour l'expert et sans aucune généralité) préférable à l'image traitée par le logiciel SAMBA (b).

Ce résultat souligne une nouvelle fois la pertinence du filtrage morphologique adaptatif comme pré-traitement à une segmentation par ligne de partage des eaux.

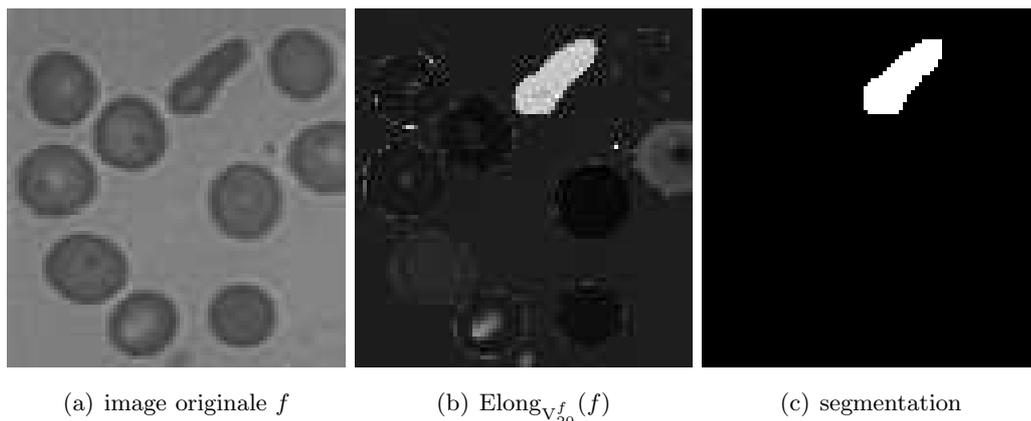
## 13.2 Par seuillage de fonctions critère à VAG

Les fonctions critères à VAG précédemment définies ont un intérêt (entre autres) pour des applications de segmentation. Un simple seuillage sur une fonction appropriée permet d'identifier les objets que l'on souhaite extraire. Par exemple, l'extraction des cellules sanguines d'une portion  $f$  de l'image 'blood' peut se réaliser en seuillant la fonction critère de surface à VAG  $A_{V_{m\ominus}^f}(f)$  (Fig. 13.9). Celles-ci ne peuvent être segmentées par seuillage direct sur la fonction  $f$ . Cependant, elles pourraient être extraites par différentes techniques (notamment par morphologie mathématique), une méthode simple est ici proposée à l'aide des VAG.



**FIGURE 13.9** – Segmentation (c) des cellules sanguines de l'image (a) réalisée par seuillage de la fonction critère à VAG de surface (b).

Sur l'exemple suivant (Fig. 13.10), toujours issu de l'image 'blood', les cellules "allongées" sont extraites par simple seuillage de la fonction critère d'élongation à VAG  $\text{Elong}_{V_{20}^f}(f)$ .



**FIGURE 13.10** – Segmentation (c) des cellules sanguines de l'image (a) réalisée par seuillage de la fonction critère à VAG d'élongation (b).

Ces méthodes de segmentation évitent la binarisation des images à tons de gris qui est généralement utilisée pour l'extraction d'objets possédant des caractéristiques spécifiques.



# CHAPITRE 14

## Représentation locale d'information

### SOMMAIRE

---

<b>14.1 Cartographie d'orientation</b> . . . . .	<b>177</b>
14.1.1 Sur une image d'empreintes digitales . . . . .	177
14.1.2 Sur une image de gel de collagène . . . . .	178
<b>14.2 Cartographie d'épaisseur</b> . . . . .	<b>179</b>
14.2.1 Sur une image de la rétine . . . . .	179

---

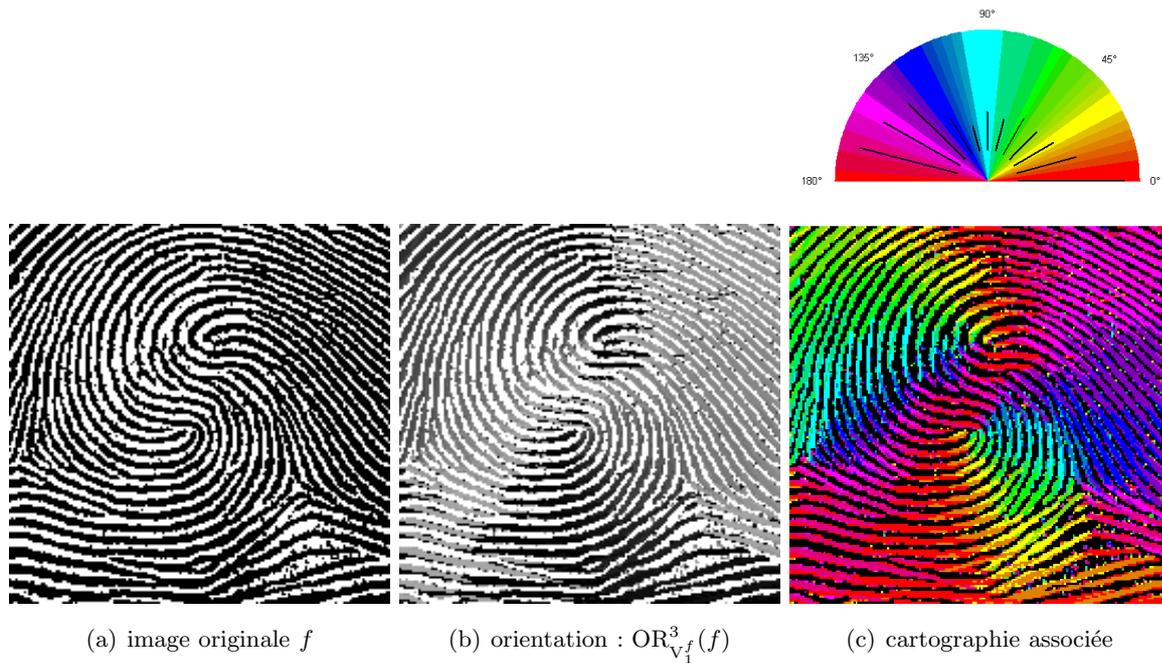
### 14.1 Cartographie d'orientation

Dans cette section, le critère d'orientation à VAG  $OR_{V_m \square}^3$  préalablement défini est utilisé pour la résolution de problèmes applicatifs concrets.

#### 14.1.1 Sur une image d'empreintes digitales

L'exemple suivant illustre l'analyse d'une image d'empreintes digitales. La première étape en vue de l'amélioration de l'image de l'empreinte digitale est le calcul de la cartographie d'orientation. L'objectif de ce traitement est d'obtenir une image de l'orientation des sillons de l'empreinte. Autrement dit, il est attribué à chacun des pixels de l'image l'orientation du sillon auquel il appartient.

Le critère d'orientation  $OR_{V_m \square}^3$  est alors tout à fait adapté à cette problématique. La figure 14.1 illustre la cartographie d'orientation d'une image binaire (vue comme une image à tons de gris) d'empreintes digitales, le pas de discrétisation a respectivement été fixé à  $\pi/12$  radians. Seuls les points noirs sont traités, c'est-à-dire les points qui caractérisent l'empreinte digitale.



**FIGURE 14.1** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_1^f}^3(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et sa cartographie associée (c). L'histogramme d'orientation est représenté au dessus de l'image (c).

Cette figure montre la continuité de l'orientation locale le long des sillons.

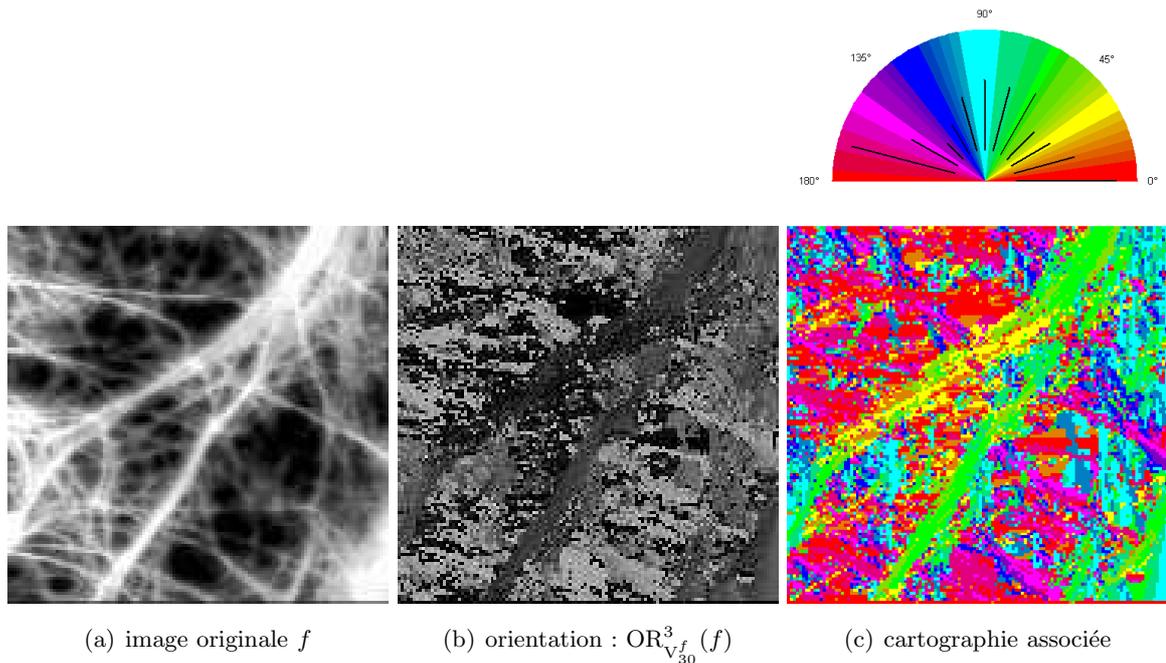
La cartographie d'orientation peut alors être utilisée, avec des traitements particuliers, pour l'amélioration ou la segmentation de l'image originale, dans un but de reconnaissance d'empreintes digitales pour des systèmes d'identification automatique.

### 14.1.2 Sur une image de gel de collagène

La figure 14.2 illustre ce même opérateur d'orientation à VAG  $OR_{V_{m\ominus}^f}^3$  appliquée sur une image de gel de collagène.

Le collagène est la phase organique du tissu osseux dont l'agencement des fibres fournit des informations sur les propriétés mécaniques du tissu. Plusieurs paramètres sont donc nécessaire à l'analyse de cet agencement de fibres (orientation, distance entre les fibres, épaisseur, noeuds, ...). Ce paragraphe adresse plus particulièrement le critère d'épaisseur.

L'opérateur  $OR_{V_{m\ominus}^f}^3$  est donc appliqué à l'image originale afin d'obtenir une cartographie de l'orientation locale de chaque point. Le pas de discrétisation de l'angle est fixé à  $\pi/12$  radians.



**FIGURE 14.2** – Critère d'orientation à VAG  $OR_{V_{30}^f}^3(f)$  (b) de l'image originale  $f$  (a) et sa cartographie couleur associée (c). L'histogramme d'orientation est représenté au dessus de l'image (c).

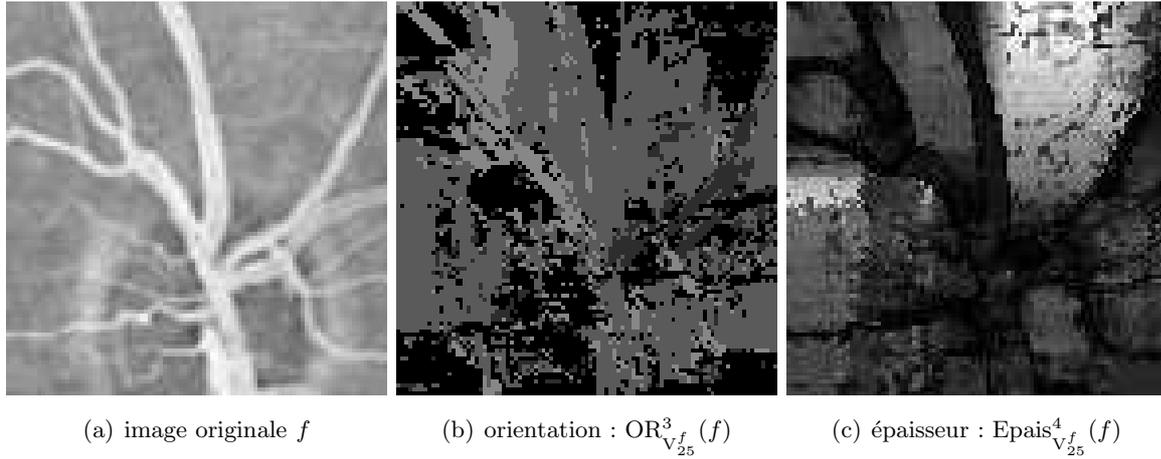
Cet exemple montre un des intérêts pratiques de ce critère d'orientation à VAG. Il ne nécessite pas la binarisation de l'image originale, qui est souvent difficile, et fournit néanmoins des informations d'orientation des fibres principales, secondaires, ...

## 14.2 Cartographie d'épaisseur

### 14.2.1 Sur une image de la rétine

Il existe un nombre important de situations ou de maladies pouvant être suivies d'une modification de forme (tortuosité) des vaisseaux de la rétine. On peut citer l'artériosclérose, le diabète et la forme SC de la drépanocytose. La détection des rétinopathies vasculaires nécessite la classification des vaisseaux (artère/veine ou artériole/veinule) et par suite la quantification de la modification de leur tortuosité.

Cette section adresse donc l'analyse de l'épaisseur locale des vaisseaux sur une image de rétine, par l'opérateur  $Epais_{V_{m\ominus}^f}^3$ , qui pourrait permettre leur classification. Le pas de discrétisation de l'angle est fixé à  $\pi/4$  radians.



**FIGURE 14.3** – Image originale  $f$  (a) et ses cartographies d'orientation à VAG  $OR_{V_{25}^f}^3(f)$  (b) et d'épaisseur à VAG  $Epais_{V_{25}^f}^4(f)$  (c). Le ton de gris de chaque point  $x$  de la cartographie (b) (resp. (c)) représente son orientation (resp. épaisseur locale).

Des post-traitements pourraient permettre de segmenter et classifier ces vaisseaux réiniens, à partir de cette cartographie d'épaisseur.

---

La partie suivante présente les conclusions et perspectives de l'approche TIVAG (Traitement d'Image à Voisines Adaptatifs Généraux).

Cinquième partie

**CONCLUSIONS ET  
PERSPECTIVES**



# Conclusions

Ce mémoire de thèse a présenté le TIVAG - Traitement d'Images à Voisinages Adaptatifs Généraux (GANIP - General Adaptive Neighborhood Image Processing). La mise en place de cette approche a découlé de la problématique posée.

Pour répondre aux limites des approches existantes (Sec. 1.1), différentes étapes "théoriques" ont été nécessaires. Elles ont conduit à la définition de divers concepts :

- Voisinages Adaptatifs Généraux (VAG),
- Morphologie Mathématique à VAG,
- Filtrage de Choquet à VAG,
- Égalisation d'histogramme à VAG,
- Critères d'analyse (orientation, épaisseur, ...) à VAG.

Les VAG respectent bien les conditions visées par la problématique.

En effet, ils sont d'une part *intrinsèquement* adaptatifs en espace dans le sens où chaque voisinage coïncide spatialement avec la structure locale du point considéré sans aucune connaissance a priori, suivant les informations radiométriques, géométriques, morphologiques, ou texturales à analyser. D'autre part, ils sont physiquement cohérents puisqu'ils sont structurés suivant un modèle GLIP qui peut être compatible avec la nature physique et/ou psychophysique de l'image étudiée. De plus, ils présentent une nature multi-échelle par la famille croissante de VAG qui est générée pour chaque point de l'image.

Ces voisinages adaptatifs généraux ont alors conduit au développement d'outils de traitement d'image comme les opérateurs morphologiques qui vérifient les propriétés usuelles de la MM et qui en addition en satisfont de nouvelles telle que la connexité de la dilatation et de l'érosion adaptatives. Cette propriété est topologiquement remarquable, contribuant à la résolution de nombreuses applications pratiques, là où les méthodes classiques sont insuffisantes.

De plus, certains opérateurs morphologiques à VAG, tels que les filtres alternés séquentiels adaptatifs, répondent à la problématique en fournissant des représentations multi-échelles pertinentes. Le filtrage de Choquet à VAG a permis une extension de nombreux filtres non-linéaires aux VAG. Ceux-ci ont par exemple conduit à une meilleure restauration des images bruitées que les filtres usuels du même type. Cependant, les VAG pris élémentairement ne sont pas suffisants pour permettre de corriger la présence d'un bruit impulsionnel du fait de la nature ponctuelle de son support spatial. Néanmoins, une réponse simple a été apportée par l'utilisation d'une combinaison

par union ensembliste des VAG.

Enfin, l'introduction de critères d'analyse à VAG permettant une analyse pertinente des images a conduit à la résolution de certains problèmes de segmentation et à la définition de cartographies fournissant des informations locales de l'image étudiée. Plus particulièrement, deux critères à VAG ont été mis en place : l'orientation et l'épaisseur.

En pratique, des applications directes des transformations à VAG ont été exposées dans différents domaines du traitement d'image, en fournissant des résultats satisfaisants et prometteurs :

- restauration d'image,
- rehaussement d'image,
- décomposition d'image multi-échelle,
- segmentation d'image,
- représentation locale d'information.

Il apparaît clairement que l'approche TIVAG permet la résolution de nombreuses applications.

Cependant, toutes ces transformations à VAG ont été délicates à mettre en oeuvre informatiquement. En effet, les opérateurs et opérations mis en place dans cette thèse traitent un nombre important de données et sont par conséquent coûteux en temps d'exécution. Les traitements présentés dans ce manuscrit sont réalisés en deux étapes. Tout d'abord, les VAG sont tous stockés en mémoire vive (RAM). Ensuite l'opérateur de traitement (tel qu'un filtre de Choquet) est appliqué sur l'image concernée. Cette première étape, qui n'est pas forcément nécessaire, présente cependant l'avantage d'éviter plusieurs calculs des VAG pour des opérateurs complexes tels que les filtres alternés séquentiels adaptatifs. Cela requiert néanmoins une "grosse" mémoire vive.

L'approche TIVAG a été présentée dans deux congrès avec actes et fait l'objet de trois publications en cours dans des journaux scientifiques :

- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology and its Applications to Image Filtering and Segmentation. *Proceedings of the 9th European Congress on Stereology and Image Analysis*. Vol. II, pp. 123-130. Zakopane, Poland. May 10-13, 2005.  
[Debayle and Pinoli, 2005a]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Multiscale Image Filtering and Segmentation by means of Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology. *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*. Vol. III, pp. 537-540. Genova, Italy. September 11-14, 2005.  
[Debayle and Pinoli, 2005d]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. Spatially Adaptive Morphological Image Filtering using Intrinsic Structuring Elements. *Image Analysis and Stereology*. Vol. 24, No. 3, pp. 145-158, 2005.  
[Debayle and Pinoli, 2005e]
- J. Debayle and J.-C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part I : Introduction and Theoretical Aspects. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Submitted paper : March 17, 2005. Revised form : November 3, 2005.

[[Debayle and Pinoli, 2005b](#)]

- J. Debayle and J.-C. Pinoli. General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part II : Practical Application Examples. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Submitted paper : March 17, 2005. Revised form : November 3, 2005.

[[Debayle and Pinoli, 2005c](#)]



# Perspectives

Ce mémoire a permis de montrer l'intérêt théorique et pratique des VAG (Voisinages adaptatifs Généraux), démontrant son intérêt en traitement et analyse d'image. Il ouvre aussi des perspectives prometteuses dans de nombreux domaines.

Premièrement, la morphologie mathématique à VAG a fait apparaître des familles de filtres, ne satisfaisant pas les conditions requises pour définir des granulométries ou anti-granulométries au sens de [Serra \[1988a\]](#). Néanmoins, il conviendrait d'effectuer une étude approfondie de ces opérateurs. La non-monotonie d'une telle famille pourrait conduire à l'extraction d'informations spécifiques sur l'image d'analyse [Debayle and Pinoli, in preparation].

Ensuite, les VAG peuvent contribuer à la définition de structures prétopologiques. En effet, il est possible de définir des fonctions d'adhérences (adaptatives), à partir de la fonction structurante adaptative plate  $R_{m_b}^b$ , qui n'est pas idempotente, structurant ainsi l'espace  $D$  en espace prétopologique [[Cech, 1966](#); [Belmandt, 1993](#)] et non topologique. De telles structures peuvent donner naissance à des pseudo-métriques [[Smyth, 1995](#)], c'est-à-dire des métriques ne satisfaisant pas l'axiome de l'inégalité triangulaire, sans être incommode à la perception visuelle humaine comme l'illustre la figure suivante.



$$d(A, C) > d(A, B) + d(B, C).$$

Ces concepts prétopologiques adaptatifs pourraient permettre la définition de différentes notions de continuité, proximité, connexité, ... adaptées aux structures de l'image et basées sur une axiomatique structurelle plus faible (la fonction d'adhérence n'étant pas idempotente). Cette thématique de prétopologie à VAG devrait pouvoir faire l'objet d'une thèse de doctorat (CIS - ENSMSE).

D'autre part, une autre perspective intéressante concerne la théorie de la mesure. De nombreux points restent à étudier et à appliquer à l'analyse d'image, tels que les filtres de convolution de

Choquet à VAG ou les filtres de Sugeno à VAG. De nouvelles mesures pourraient aussi être introduites pour répondre à des problèmes spécifiques de filtrage ou de segmentation d'image.

La théorie de la mesure nécessiterait certainement une thèse de recherche fondamentale sur son application à l'analyse d'image (CIS - ENSMSE).

Enfin, les VAG peuvent être définis en toute dimension, notamment la 3D, permettant de traiter et de répondre à de nombreux problèmes applicatifs concrets issus par exemples d'images 3D acquises par tomographie. Ceci nécessiterait néanmoins une implémentation efficace des algorithmes à VAG pour pouvoir être exécutés dans des délais raisonnables.

De plus, de nouveaux VAG pourraient être définis permettant la mise en place d'autres critères d'analyse à VAG (courbure, descripteurs de formes, ...) [Debayle, Gavet and Pinoli, in preparation]. Ces nouveaux voisinages permettraient de prendre intrinsèquement en compte des critères spécifiques, ouvrant de nombreuses perspectives d'analyse d'image.

# LISTES ET NOMENCLATURE DES SYMBOLES



# Liste des figures

2.1	Images diverses. . . . .	18
2.2	Images issues du génie des matériaux. . . . .	19
2.3	Images issues du génie bio-médical. . . . .	21
3.1	Image 'muscle' à résolutions spatiales décroissantes [Bertolino, 1995]. . . . .	24
3.2	Image 'muscle' à différentes résolutions de détails [Bertolino, 1995]. . . . .	25
3.3	Pyramides Gaussienne et Laplacienne réalisées sur l'image 'cameraman'. . . . .	26
3.4	Principe de découpage récursif du quad-tree [Bertolino, 1995]. . . . .	28
3.5	Différents partitionnements géométriques de l'image 'muscle' [Bertolino, 1995]. . . . .	29
3.6	Pyramide de graphe [Bertolino, 1995]. . . . .	30
3.7	Pyramide de graphe (stochastique). . . . .	30
3.8	Transformées dyadiques par ondelettes de Haar. . . . .	33
3.9	Scale-space morphologique par fermetures/ouvertures. . . . .	36
3.10	Scale-spaces linéaire (a) et par diffusion anisotrope (b). . . . .	38
3.11	Ouverture vs. ouverture géodésique (par reconstruction) de l'image 'Lena'. . . . .	45
4.1	Maximisation de la plage dynamique. . . . .	59
5.1	Opérations morphologiques binaires. . . . .	64
5.2	Opérations morphologiques plates sur l'image 'tools'. . . . .	67
6.1	VAG d'un point selon le critère de luminance ou de contraste. . . . .	78
6.2	Emboîtement géométrique des VAG. . . . .	81
7.1	VAG non symétriques. . . . .	87
7.2	Eléments structurants adaptatifs vs. usuels. . . . .	89
7.3	Morphologie mathématique 1D plate : classique vs. adaptative. . . . .	94
7.4	Opérateurs morphologiques adaptatifs plats. . . . .	95
7.5	Opérateurs morphologiques classiques plats. . . . .	96
7.6	Filtrage adaptatif alterné plat selon différents modèles GLIP. . . . .	102
7.7	Etude granulométrique adaptative de l'image 'vaisseaux'. . . . .	104
7.8	Opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats. . . . .	109
7.9	FAS : adaptatifs vs. classiques. . . . .	111

8.1	Illustration de quelques filtres de Choquet adaptatifs. . . . .	124
8.2	Illustration du filtrage de Choquet à VAG. . . . .	125
9.1	Fonctions critères à VAG. . . . .	129
9.2	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_1^1}^1(f)$ . . . . .	130
9.3	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_1^1}^1(f)$ . . . . .	130
9.4	VAG monodirectionnel et multidirectionnel . . . . .	131
9.5	Critère d'orientation à VAG . . . . .	132
9.6	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_1^3}^3(f)$ . . . . .	133
9.7	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_f^3}^3(f)$ . . . . .	133
9.8	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_{10}^3}^3(f)$ . . . . .	134
9.9	Caractérisation multi-échelle de l'orientation locale. . . . .	135
9.10	Épaisseur locale à VAG. . . . .	137
9.11	Critère d'épaisseur à VAG. . . . .	137
9.12	Critère d'épaisseur à VAG. . . . .	138
10.1	Restauration d'image par filtrage de Choquet. . . . .	146
10.2	Restauration d'image par filtrage médian. . . . .	148
11.1	Rehaussement de l'image 'Lena' par contraste morphologique. . . . .	151
11.2	Rehaussement de l'image 'vaisseaux' par contraste morphologique. . . . .	152
11.3	Egalisation d'histogramme. . . . .	154
12.1	Décomposition multi-échelle par FAS de l'image 'cameraman'. . . . .	159
12.2	Décomposition multi-échelle par FAS de l'image 'bridge'. . . . .	160
12.3	Décomposition multi-échelle par ouvertures/fermetures adaptatives . . . . .	161
13.1	Segmentation par LPE. . . . .	164
13.2	Segmentation pyramidale de l'image 'Lena'. . . . .	166
13.3	Segmentation hiérarchique de l'image 'tools'. . . . .	168
13.4	Segmentation d'une image de grains métallurgiques. . . . .	170
13.5	Simulation d'un changement local de l'illumination de la scène. . . . .	171
13.6	Segmentation d'une image de grains métallurgiques. . . . .	172
13.7	Cellules endothéliales cornéennes. . . . .	173
13.8	Segmentation de cellules endothéliales cornéennes. . . . .	174
13.9	Segmentation des cellules sanguines. . . . .	175
13.10	Segmentation des cellules sanguines allongées . . . . .	175
14.1	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_1^3}^3(f)$ . . . . .	178
14.2	Critère d'orientation à VAG $OR_{V_{30}^3}^3(f)$ . . . . .	179
14.3	Critère d'épaisseur à VAG. . . . .	180

# Liste des tableaux

4.1	Structures et opérations des modèles CLIP, MHIP, LRIP, et LIP [Pinoli, 1997a]. . .	60
7.1	Catégorie des opérateurs morphologiques adaptatifs alternés plats . . . . .	112



# Liste des exemples

3.1	Pyramides Gaussienne et Laplacienne[Burt and Adelson, 1983]	26
3.2	Transformée dyadique par ondelettes[Mallat, 1989a]	33
3.3	Linear Gaussian Scale-Space[Witkin, 1983]	35
3.4	Scale-space par dilatation/érosion[Jackway and Deriche, 1996]	36
3.5	Scale-space par fermeture/ouverture[Jackway, 1992b]	36
3.6	Scale-space par diffusion anisotrope[Perona and Malik, 1990]	37
3.7	Scale-space par diffusion anisotrope régularisée[Catte et al., 1992]	38
3.8	Scale-space par diffusion anisotrope généralisée[Alvarez et al., 1992]	38
3.9	Scale-space par diffusion anisotrope matricielle[Weickert, 1994]	39
3.10	Filtre de Nagao[Nagao and Matsuyama, 1979]	41
3.11	Filtre de Lee amélioré[Lee, 1981]	42
3.12	Filtre à fenêtre rectangulaire adaptative[Song and Pearlman, 1986]	42
3.13	Filtre moyen à voisinages adaptatifs[Paranjape et al., 1994b]	43
3.14	Filtres alternés séquentiels à voisinages adaptatifs[Braga Neto, 1996]	43
4.1	Maximisation de la plage dynamique [Jourlin and Pinoli, 1995]	59
6.1	Critère de luminance	76
6.2	Voisinages adaptatifs généraux $V_m^h$	77
7.1	Etude granulométrique adaptative de l'image 'vaisseaux'	103
8.1	Représentation de la mesure floue associée au filtre médian $3 \times 3$	118
8.2	Représentation de la mesure floue associée au filtre moyen $3 \times 3$	118
8.3	Filtre moyen adaptatif	120
8.4	Filtre médian adaptatif	120
8.5	Filtre min adaptatif	121
8.6	Filtre max adaptatif	121
8.7	Filtre $\alpha$ -trimmed mean adaptatif	121
8.8	Filtre $n$ -puissance adaptatif	122
8.9	Filtre $n$ -puissance inverse adaptatif	122
8.10	Filtre $\alpha$ -quasi-midrange adaptatif	122



# Nomenclature des symboles

## Acronymes

---

TIVAG	Traitement d'Image à Voisinages Adaptatifs Généraux
GANIP	General Adaptive Neighborhood Image Processing
GLIP	General Linear Image Processing
CLIP	Classical Linear Image Processing
MHIP	Multiplicative Homomorphic Image Processing
LRIP	Log-Ratio Image Processing
LIP	Logarithmic Image Processing
MM	Morphologie Mathématique
ES	Élément Structurant
VAG	Voisinage Adaptatif Général
ESA	Élément Structurant Adaptatif

## Opérateurs GLIP

---

$\oplus$	addition vectorielle générale
$\otimes$	multiplication scalaire générale
$\ominus$	opposé général ou soustraction vectorielle générale
$+$	addition vectorielle CLIP
$\times$	multiplication scalaire CLIP
$-$	opposé CLIP ou soustraction vectorielle CLIP
$\boxplus$	addition vectorielle MHIP
$\boxtimes$	multiplication scalaire MHIP
$\boxminus$	opposé MHIP ou soustraction vectorielle MHIP
$\diamond$	addition vectorielle LRIP
$\diamond$	multiplication scalaire LRIP
$\diamond$	opposé MHIP ou soustraction vectorielle LRIP
$\triangle$	addition vectorielle LIP
$\triangle$	multiplication scalaire LIP
$\triangle$	opposé MHIP ou soustraction vectorielle LIP

**Voisinages adaptatifs généraux**

---

$\mathcal{I} = (\tilde{E}^D, \tilde{\oplus}, \tilde{\otimes}, \geq)$  ..... espace vectoriel ordonné GLIP des fonctions images  
 $\mathcal{C} = (E^D, \oplus, \otimes, \geq)$  ..... espace vectoriel ordonné GLIP des fonctions critères  
 $h$  ..... fonction critère  
 $m_{\square}$  ..... tolérance d'homogénéité  
 $J_{\square}$  ..... intervalle d'homogénéité  
 $V_{m_{\square}}^h(x)$  ..... voisinage adaptatif général de  $x$   
 $P_x^y$  ..... chemin d'extrémités  $x$  et  $y$   
 $V_{J_{\square}}^h(x)$  ..... voisinage adaptatif général de  $x$  avec un intervalle d'homogénéité

**Morphologie mathématique usuelle**

---

$B$  ..... élément structurant  
 $B_r(x)$  ..... disque centré en  $x$  de rayon  $r$   
 $\oplus$  ..... addition ou somme de Minkowski  
 $\ominus$  ..... soustraction ou différence de Minkowski  
 $D_B$  ..... dilatation morphologique binaire ou plate  
 $E_B$  ..... érosion morphologique binaire ou plate  
 $F_B$  ..... fermeture morphologique binaire ou plate  
 $O_B$  ..... ouverture morphologique binaire ou plate  
 $X_t(f)$  ..... section de l'image  $f$  au niveau  $t$   
 $SG(f)$  ..... sous-graphe de l'image  $f$   
 $D(., g)$  ..... dilatation morphologique à tons de gris  
 $E(., g)$  ..... érosion morphologique à tons de gris  
 $F(., g)$  ..... fermeture morphologique à tons de gris  
 $O(., g)$  ..... ouverture morphologique à tons de gris

**Morphologie mathématique à VAG**

---

$R_{m_{\square}}^h$  ..... élément structurant adaptatif  
 $R_{m_{\square}}^h$  ..... fonction structurante adaptative  
 $D_{m_{\square}}^h$  ..... dilatation morphologique adaptative plate  
 $E_{m_{\square}}^h$  ..... érosion morphologique adaptative plate  
 $F_{m_{\square}}^h$  ..... fermeture morphologique adaptative plate  
 $O_{m_{\square}}^h$  ..... ouverture morphologique adaptative plate  
 $D_{m_{\square}}^h(., g)$  ..... dilatation morphologique adaptative à tons de gris  
 $E_{m_{\square}}^h(., g)$  ..... érosion morphologique adaptative à tons de gris  
 $F_{m_{\square}}^h(., g)$  ..... fermeture morphologique adaptative à tons de gris  
 $O_{m_{\square}}^h(., g)$  ..... ouverture morphologique adaptative à tons de gris  
 $FO_{m_{\square}}^h$  ..... filtre morphologique adaptatif alterné plat

$OF_{m\ominus}^h$	.....	filtre morphologique adaptatif alterné plat
$FOF_{m\ominus}^h$	.....	filtre morphologique adaptatif alterné plat
$OFO_{m\ominus}^h$	.....	filtre morphologique adaptatif alterné plat
$D_{m\ominus,p}^h$	.....	dilatation morphologique adaptative séquentielle plate
$E_{m\ominus,p}^h$	.....	érosion morphologique adaptative séquentielle plate
$F_{m\ominus,p}^h$	.....	fermeture morphologique adaptative séquentielle plate
$O_{m\ominus,p}^h$	.....	ouverture morphologique adaptative séquentielle plate
FAS. $FO_{m\ominus,n}^h$	.....	filtre morphologique adaptatif alterné séquentiel plat
FAS. $OF_{m\ominus,n}^h$	.....	filtre morphologique adaptatif alterné séquentiel plat

**Filtrage de Choquet**

---

$\mu$	.....	mesure floue
$IC_\mu$	.....	intégrale floue de Choquet par rapport à la mesure $\mu$
$FIC_\mu^W$	.....	filtre de Choquet sur $W$ par rapport à la mesure $\mu$
$FCIC_\mu^W(.,g)$	.....	filtre de convolution de Choquet sur $W$ par rapport à la mesure $\mu$
$\mu_y$	.....	mesure floue définie sur le VAG $V_{m\ominus}^h(y)$
$FIC_{m\ominus}^h$	.....	filtre de Choquet adaptatif
$FCIC_{m\ominus}^h(.,g)$	.....	filtre de convolution de Choquet adaptatif
$Moy_{m\ominus}^h$	.....	filtre moyen adaptatif
$Med_{m\ominus}^h$	.....	filtre médian adaptatif
$Min_{m\ominus}^h$	.....	filtre min adaptatif
$Max_{m\ominus}^h$	.....	filtre max adaptatif
$TMoy_{m\ominus}^h(.,\alpha)$	.....	filtre $\alpha$ -trimmed mean adaptatif
$Puiss_{m\ominus}^h(.,n)$	.....	filtre $n$ -puissance adaptatif
$PuissInv_{m\ominus}^h(.,n)$	.....	filtre $n$ -puissance inverse adaptatif
$QM_{m\ominus}^h(.,\alpha)$	.....	filtre $\alpha$ -quasi midrange adaptatif

**Critères d'analyse à VAG**

---

$OR_{V_{m\ominus}^f}$	.....	opérateur d'orientation à VAG
$Epais_{V_{m\ominus}^f}$	.....	opérateur d'épaisseur à VAG



# BIBLIOGRAPHIE



# Références bibliographiques

(avec indication des pages où elles sont citées)

- Alvarez, L., Lions, P. L., and Morel, J. M. (1992). Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion : (ii). *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 29(3) :845–866. [38](#), [195](#)
- Amattouch, M. (2005). Théorie de la mesure appliquée à l’analyse d’image. Master’s thesis, Ecole nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne. [119](#)
- Antoine, J. P., Carrette, P., Murenzi, R., and Piette, B. (1993). Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform. *Signal Processing*, 31 :241–272. [33](#)
- Ash, R. and Doleans-Dade, C. (2000). *Probability and measure theory*. Academic Press. [116](#)
- Bakshi, B. R. (1999). Multiscale Analysis and Modeling using Wavelets. *Journal of Chemometrics*, 13 :415–434. [25](#), [34](#)
- Bangham, J. A., Chardaire, P., Pye, C. J., and Ling, P. D. (1996a). Multiscale Nonlinear Decomposition : the Sieve Decomposition Theorem. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18 :529–539. [25](#)
- Bangham, J. A., Ling, P., and Young, R. (1996b). Multiscale Recursive Medians, Scale-Space, and Transforms with Applications to Image Processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, 5(6) :1043–1048. [25](#)
- Bangham, J. A., Ling, P. D., and Harvey, R. (1996c). Scale-Space from Nonlinear Filters. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Image Processing*, 18(5) :520–528. [25](#), [35](#)
- Belmandt, Z. (1993). *Manuel de prétopologie et ses applications*. Hermès. [187](#)
- Bertolino, P. (1995). *Contributions des pyramides irrégulières en segmentation d’images multirésolution*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France. [24](#), [25](#), [28](#), [29](#), [30](#), [191](#)
- Bertolino, P. and Montanvert, A. (1996). Multiresolution Segmentation Using the Irregular Pyramid. In *Proceedings of The IEEE International Conference on Image Processing*, pages 257–260, Lausanne, Suisse. [29](#)

- Beucher, S. (1990). *Segmentation d'images et morphologie mathématique*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France. [44](#)
- Beucher, S. and Lantuejoul, C. (1979). Use of watersheds in contour detection. In *International Workshop on image processing, real-time edge and motion detection/estimation*, Rennes, France. [163](#)
- Beucher, S. and Meyer, F. (1993). The morphological approach to segmentation : the watershed transformation. In Dougherty, E., editor, *Mathematical Morphology in Image Processing*, pages 433–481, N.Y., U.S.A. Decker, M. [164](#)
- Billingsley, F. C. (1970). Applications of Digital Image Processing. *Applied Optics*, 9 :288–299. [57](#)
- Bolon, P. (1992). Filtrage d'ordre, vraisemblance et optimalité des prétraitements d'image. *Traitement du Signal*, 9 :225–250. [39](#)
- Boomgaard, R. V. D. and Heijmans, H. J. A. M. (2000). Morphological scale-space operators : an algebraic framework. In Goutsias, J., Vincent, L., and Bloomberg, D. S., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, pages 283–290. Kluwer Academic Publishers. [35](#)
- Braga Neto, U. D. M. (1996). Alternating Sequential Filters by Adaptive-Neighborhood Structuring Functions. In Maragos, P., Schafer, R. W., and Butt, M. A., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, pages 139–146. Kluwer Academic Publishers. [43](#), [195](#)
- Brailean, J. C., Sullivan, B. J., Chen, C. T., and Giger, M. L. (1991). Evaluating the EM algorithm for image processing using a human visual fidelity criterion. In *Proceedings of the International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 2957–2960. [58](#)
- Braviano, G. (1995). *Logique floue en analyse d'image*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. [30](#)
- Burt, P. J. and Adelson, E. H. (1983). The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code. *IEEE Transactions on Communications*, 31(4) :532–540. [26](#), [27](#), [195](#)
- Buzuloiu, V., Ciuc, M., Rangayyan, R. M., and Vertan, C. (2001). Adaptive-Neighborhood Histogram Equalization of Color Images. *Electronic Imaging*, 10(2) :445–459. [44](#), [153](#)
- Candes, E. J. (1999). Harmonic Analysis of Neural Networks. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 6 :197–218. [34](#)
- Candes, E. J. and Donoho, D. (1999). Curvelets - A Surprising Effective Nonadaptive Representation for Objects with Edges. In Schumaker, L. L. and al., editors, *Curves and Surfaces*. Vanderbilt University Press. [34](#)
- Catte, F., Coll, T., Lions, P. L., and Morel, J. M. (1992). Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion : (i). *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 29(1) :182–193. [37](#), [38](#), [195](#)

- Cech, A. (1966). *Topological Spaces*. John Wiley and Sons. 187
- Charif-Chefchaoui, M. and Schonfeld, D. (1994). Spatially-Variant Mathematical Morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 555–559, Austin, Texas, U.S.A. 87
- Chassery, J. M. and Montanvert, A. (1991). *Géométrie discrète en analyse d'images*. Hermès, Paris, France. 28
- Chazallon, L. and Pinoli, J. C. (1997). An Automatic Morphological Method for Aluminium Grain Segmentation in Complex Grey Level Images. *Acta Stereologica*, 16(2) :119–130. 169
- Cheng, F. and Venetsanopoulos, A. N. (2000). Adaptive Morphological Operators, Fast Algorithms and their Applications. *Pattern Recognition*, 33 :917–933. 42
- Choquet, G. (1953). Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5 :131–295. 115
- Choquet, G. (1966). *Topology*. Academic Press, New-York, U.S.A. 46
- Choquet, G. (2000). *Cours de topologie*, chapter Espaces topologiques et espaces métriques, pages 45–51. Dunod, Paris, France. 76, 77
- Chui, C. K. (1992a). *Wavelet analysis and its applications, vol. 1, An introduction to wavelets*. Academic Press, San Diego, U.S.A. 31
- Chui, C. K. (1992b). *Wavelet analysis and its applications, vol. 2, Wavelets - A tutorial in theory and applications*. Academic Press, San Diego, U.S.A. 31
- Chui, C. K. and Lian, J. (1996). A study on orthonormal multiwavelets. *Appl. Numer. Math.*, 20 :273–298. 34
- Ciuc, M., Rangayyan, R. M., Zaharia, T., and Buzuloiu, V. (2000). Filtering Noise in Color Images using Adaptive-Neighborhood Statistics. *Electronic Imaging*, 9(4) :484–494. 44
- Cocquerez, J. P. and Philipp, S. (1995). *Analyse d'images : Filtrage et segmentation*. Masson, Paris, France. 40
- Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J. (1992). Bi-orthogonal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math*, 45 :485–560. 32
- Coifman, R. and Meyer, Y. (1991). Remarque sur l'analyse de Fourier à fenêtres. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 312 :259–261. 34
- Cornsweet, T. N. (1970). *Visual Perception*. Academic Press, New-York, U.S.A. 45
- Coster, M. and Chermant, J. L. (1985). *Précis d'analyse d'image*. Hermès. 62, 129
- Cottet, G. and Germain, L. (1993). Image processing through reaction combined with non-linear diffusion. *Mathematics of Computation*, 61(204) :659–673. 39

- Coulibaly, M. (1992). *Analyse par ondelettes : quelques aspects numériques et applications à des signaux océaniques simulés et à l'estimation de densité de probabilité*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France. [32](#)
- Crespo, J., Serra, J., and Schafer, R. W. (1995). Theoretical aspects of morphological filters by reconstruction. *Signal Processing*, 47 :201–225. [168](#)
- Cuisenaire, O. (2005). Locally Adaptable Mathematical Morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume II, pages 125–128, Genova, Italy. [87](#)
- Dainty, J. C. and Shaw, R. (1974). *Image Science*. Academic Press, London, U.K. [45](#)
- Daubechies, I. (1988). Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Commun. Pure Appl. Math.*, XLI :901–996. [31](#), [32](#)
- Daubechies, I. (1992). Ten Lectures on Wavelets. SIAM. Notes for the CBMS Conference (Lowell). [31](#), [32](#)
- Debayle, J. and Pinoli, J. C. (2005a). Adaptive-Neighborhood Mathematical Morphology and its Applications to Image Filtering and Segmentation. In *9th European Congress on Stereology and Image Analysis. May, 10-13. Zakopane, Poland*, volume II, pages 123–130. [15](#), [184](#)
- Debayle, J. and Pinoli, J. C. (2005b). General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part I : Introduction and Theoretical Aspects. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Submitted paper : March 17, 2005. Revised form : November 3, 2005. [15](#), [185](#)
- Debayle, J. and Pinoli, J. C. (2005c). General Adaptive Neighborhood Image Processing. Part II : Practical Application Examples. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*. Submitted paper : March 17, 2005. Revised form : November 3, 2005. [15](#), [185](#)
- Debayle, J. and Pinoli, J. C. (2005d). Multiscale Image Filtering and Segmentation by means of Adaptive Neighborhood Mathematical Morphology. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing. September, 11-14. September, 11-14*, volume III, pages 537–540, Genova, Italy. [15](#), [184](#)
- Debayle, J. and Pinoli, J. C. (2005e). Spatially Adaptive Morphological Image Filtering using Intrinsic Structuring Elements. *Image Analysis and Stereology*, 24(3) :145–158. [15](#), [184](#)
- Delaunay, B. (1934). Sur la sphère vide. *Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk*, 7 :793–800. [29](#)
- Deng, G. and Cahill, L. W. (1993). Multiscale image enhancement using the logarithmic image processing model. *Electronic Letters*, 29 :803–804. [58](#)
- Deng, G., Cahill, L. W., and Tobin, J. R. (1995). A study of the logarithmic image processing model and its application to image enhancement. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4 :506–512. [46](#), [58](#)

- Deng, G. and Pinoli, J. C. (1998). Differentiation-Based Detection Using the Logarithmic Image Processing Model. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 8 :161–180. 58, 171
- Deng, G., Pinoli, J. C., Ng, W. Y., Cahill, L. W., and Jourlin, M. (1994). A comparative study of the Log-ratio image processing approach and the logarithmic image processing model. unpublished manuscript. 57
- Dias, A. and Rangayyan, R. M. (1997). Adaptive region-based filtering of multiplicative noise. In Dougherty, E. R. and Astola, J. T., editors, *Nonlinear Image Processing VIII*, volume 3026 of Proc. SPIE, pages 338–348. 44
- Dieudonné, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain*. Hachette, Paris, France. 11
- Dunford, N. and Schwartz, J. T. (1988). *Linear Operators, Part I, General Theory*. Wiley-Interscience, New-York, U.S.A. 47, 57
- Eichmann, G., Lu, C., Zhu, J., and Li, Y. (1988). Pyramidal Image Processing using Morphology. In *Proceedings of The SPIE Applications of Digital Image Processing XI*, pages 30–37, San Diego, California, USA. 27
- Fejes, S. and Vajda, F. (1994a). An Efficient Implementation Technique of Adaptive Morphological Operations. In Serra, J. and Soille, P., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing. Proceedings of The International Society for Mathematical Morphology*, volume 2 of *Computational Imaging and Vision*. Kluwer Academic Publishers. 42
- Fejes, S. and Vajda, F. (1994b). Simplified Adaptive Approach to Efficient Morphological Image Analysis. In *Proceedings of The International Conference of Pattern Recognition*, pages 257–261. 42
- Florack, L. M. J. and Kuijper, A. (2000). The Topological Structure of Scale-Space Images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(1) :65–79. 35
- Florack, L. M. J., Salden, A. H., Romeny, B. M. T. H., Koenderink, J. J., and Viergever, M. A. (1995). Nonlinear Scale-Space. *Image and Vision Computing*, 13(4) :279–294. 35
- Flouzat, G., Amram, O., Laporterie, F., and Cherchali, S. (2001). Multiresolution Analysis and Reconstruction by a Morphological Pyramid in the Remote Sensing of Terrestrial Surfaces. *Signal Processing*, 81(10) :2171–2185. 31
- Gabor, D. (1946). Theory of Communication. *J. Inst. Electr. Engeg.*, 93(III) :429–457. 31
- Gonzalez, R. C. and Woods, R. C. (1992). *Digital Image Processing*. Addison Wesley, Reading, MA. 40
- Goodman, T. N. T., Lee, S. L., and Tang, W. S. (1993). Wavelets in wandering subspaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 338(1) :639–654. 34
- Gordon, R. and Rangayyan, R. M. (1984). Feature Enhancement of Mammograms using Fixed and Adaptive Neighborhoods. *Applied Optics*, 23(4) :560–564. 42, 44

- Goupillaud, P., Grossmann, A., and Morlet, J. (1984). Cycle-octaves and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, 23 :85–102. [31](#)
- Goutsias, J. and Heijmans, H. J. A. M. (2000). Multiresolution Signal Decomposition Schemes. Part 1 : Linear and Morphological Pyramids. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(11) :1862–1876. [27](#)
- Grabisch, M. (1994). Fuzzy integrals as a generalized class of order filters. In *Proceedings of European Symposium on Satellite Remote Sensing*, Roma, Italy. [117](#)
- Granrath, D. J. (1981). The role of human visual models in image processing. In *Proceedings of the IEEE*, volume 69, pages 552–561. [45](#)
- Gremillet, P., Jourlin, M., and Pinoli, J. C. (1994). LIP model-based three-dimensionnal reconstruction and visualisation of HIV infected entire cells. *Journal of Microscopy*, 174 :31–38. [58](#)
- Grimaud, M. (1991). *La géodésie numérique en morphologie mathématique. Application à la détection automatique de microcalcifications en mammographie numérique*. PhD thesis, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, France. [44](#)
- Grossman, A. and Morlet, J. (1984). Decomposition of hardy fuctions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM J. Math. Anal.*, 15 :723–736. [31](#)
- Hafstrom, J. E. (1967). *Introduction to Analysis and Abstract Algebra*. W.B. Saunders, Philadelphia, U.S.A. [46](#)
- Halmos, P. (1950). *Measure Theory*. D. van Nostrand and Co. [116](#)
- Hawkes, P. (1997). Image Algebra and Rank-Order Filters. *Scanning Microscopy*, 11 :479–482. [44](#)
- Heijmans, H. J. A. M. and Boomgaard, R. V. D. (2000). Algebraic Framework for Linear and Morphological Scale-Spaces. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 13(1/2) :269–301. [35](#)
- Heijmans, H. J. A. M. and Goutsias, J. (2000a). Morphological Pyramids and Wavelets Based on Quincunx Lattice. In Goutsias, J., Vincent, L., and Bloomberg, D. S., editors, *Mathematical Morphology and Its Applications to Image and Signal Processing*, pages 273–281. Kluwer Academic Publishers. [34](#)
- Heijmans, H. J. A. M. and Goutsias, J. (2000b). Multiresolution Signal Decomposition Schemes. Part 2 : Morphological Wavelets. *IEEE Transactions on Image Processing*, 9(11) :1897–1913. [34](#)
- Hendriks, C. L. L. and Vliet, L. J. V. (2000). Morphological Scale-Space to Differentiate Microstructures of food products. In Vliet, L. J. V., Heijnsdijk, J. W. J., Kielman, T., and W., K. P. M., editors, *Proceedings of The 6th Annual Conference of the Advanced School for Computing and Imaging*, pages 289–293, Lommel, Belgium. [35](#)

- Holscheinder, M. (1995). *Wavelets : an analysis tool*. Oxford Sci., New-York, U.S.A. [31](#)
- Horowitz, J. L. and Pavlidis, T. (1974). Picture segmentation by a direct split-and-merge procedure. In *Proceedings of the 2nd ICPR*, pages 424–433. [28](#)
- Jackway, P. T. (1992a). Morphological scale-space. In *Proceedings of The 11th IAPR International Conference on Pattern Recognition*, The Hague, The Netherlands. [35](#)
- Jackway, P. T. (1992b). Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Closing-Opening Filter. In *Proceedings of The 2nd Singapore International Conference on Image Processing*, pages 278–281. [36](#), [195](#)
- Jackway, P. T. and Deriche, M. (1996). Scale-Space Properties of the Multiscale Morphological Dilatation-Erosion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(1) :33–51. [25](#), [36](#), [195](#)
- Jain, A. K. (1981). Advances in mathematical models for image processing. In *Proceedings of the IEEE*, volume 69, pages 502–528. [45](#)
- Jain, A. K. (1989). *Fundamentals of Digital Image Processing*. Prentice Hall, Englewood Cliffs. [39](#), [40](#)
- Jänich, K. (1983). *Topology*. Springer, Berlin, Germany. [46](#)
- Jolion, J. M. (1990). Analyse d'image : le modèle pyramidal. *Traitement du Signal*, 7(1) :5–17. [25](#)
- Jolion, J. M. and Montanvert, A. (1992). The adapted pyramid : a framework for 2d image analysis. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 55(3) :339–348. [30](#)
- Jourlin, M. and Pinoli, J. C. (1987). Logarithmic Image Processing. *Acta Stereologica*, 6 :651–656. [45](#), [46](#), [57](#)
- Jourlin, M. and Pinoli, J. C. (1988). A model for logarithmic image processing. *Journal of Microscopy*, 149 :21–35. [46](#), [57](#), [173](#)
- Jourlin, M. and Pinoli, J. C. (1995). Image dynamic range enhancement and stabilization in the context of the logarithmic image processing model. *Signal Processing*, 41 :225–237. [58](#), [59](#), [195](#)
- Jourlin, M. and Pinoli, J. C. (2001). Logarithmic Image Processing : The Mathematical and Physical Framework for the Representation and Processing of Transmitted Images. *Advances in Imaging and Electron Physics*, 115 :129–196. [57](#), [58](#), [171](#)
- Jourlin, M., Pinoli, J. C., and Zeboudj, R. (1988). Contrast definition and contour detection for logarithmic images. *Journal of Microscopy*, 156 :33–40. [56](#), [58](#), [77](#), [150](#)
- Kantorovitch, L. and Akilov, G. (1981). *Analyse Fonctionnelle*. Editions Mir, Moscou, Russia. [47](#), [55](#)
- Kelley, J. L. (1955). *General Topology*. D. Van Nostrand, New-York, U.S.A. [46](#)

- Kelly, M. D. (1971). Edge detection in pictures by computer using planning. In Meltzer, B. and Michie, D., editors, *Machine Intelligence*, volume 6, pages 397–409. Edinburg Univ. Press, Edinburg, Scotland. [25](#)
- Klee, V. (1980). On the Complexity of d-Dimensional Voronoi Diagrams. *Archiv. Math.*, 34 :75–80. [29](#)
- Koenderink, J. J. (1984). The Structure of Images. *Biological Cybernetics*, 50 :363–370. [34](#), [35](#), [37](#)
- Krissian, K. (2000). *Traitement multi-échelle : applications à l'imagerie médicale et à la détection tridimensionnelle de vaisseaux*. PhD thesis, Université Sophia-Antipolis, Nice, France. [39](#)
- Kropatsch, W. G. and Macho, H. (1995). Finding the structure of connected components using dual irregular pyramids. In *Cinquième Colloque DGCI*, pages 147–158, LLAIC1, Université d'Auvergne. [30](#)
- Kyeong-Ryeol, P. and Chung-Nim, L. (1996). Scale-space using mathematical morphology. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(11) :1121–1126. [25](#), [35](#)
- Lang, S. (1966). *Linear Algebra*. Addison Wesley, Reading, MA. [46](#)
- Lantuéjoul, C. and Beucher, S. (1980). Geodesic distance and image analysis. *Mikroskopie*, 37 :138–142. [44](#)
- Lantuéjoul, C. and Beucher, S. (1981). On the use of the geodesic metric in image analysis. *Journal of Microscopy*, 121 :39–49. [44](#)
- Laporterie, F. (2002). *Représentations hiérarchiques d'images avec des pyramides morphologiques. Application à l'analyse et à la fusion spatio-temporelle de données en observation de la Terre*. PhD thesis, École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, Toulouse, France. [25](#), [27](#), [31](#)
- Laporterie, F., Flouzat, G., and Amram, O. (2002). The Morphological Pyramid and its Applications to Remote Sensing : Multiresolution Data Analysis and Features Extraction. *Image Analysis and Stereology*, 21(1) :49–53. [31](#)
- Le Pennec, E. and Mallat, S. (2004). Sparse Geometrical Image Approximation with Bandelets. *IEEE Transaction on Image Processing*, 14(4) :423–438. [34](#)
- Lee, D. T. and Schachter, B. J. (1980). Two Algorithms for Constructing a Delaunay Triangulation. *Int. J. Computer Information Sci.*, 9 :219–242. [29](#)
- Lee, J. S. (1981). Refined Filtering of Image using Local Statistics. *Computer Graphics and Image Processing*, 15 :380–389. [40](#), [41](#), [42](#), [195](#)
- Lee, J. S. (1983). A simple speckle smoothing algorithm for synthetic aperture radar images. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 13 :85–89. [42](#)

- Lee, Y. H. and Kassam, S. A. (1985). Generalized median filtering and related nonlinear filtering techniques. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 33 :673–683. [42](#)
- Lemarié, P. G. (1988). Ondelettes à localisation exponentielle. *J. Math. Pures Appl.*, 67(3) :227–236. [32](#)
- Lerallut, R., Decencière, E., and Meyer, F. (2005). Image filtering using morphological amoebas. In Ronse, C., Najman, L., and Decencière, E., editors, *Proceedings of the 7th International Symposium on Mathematical Morphology*, pages 13–22, Paris, France. [87](#)
- Lim, J. S. (1990). *Two-Dimensional Signal and Image Processing*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, U.S.A. [46](#)
- Lindeberg, T. (1990). Scale-Space for Discrete Signals. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(3) :234–245. [25](#), [34](#)
- Lindeberg, T. (1994a). Scale-Space Theory : a Basic Tool for Analysing Structures at Different Scales. *Journal of Applied Statistics*, 21(2) :225–270. (Supplement on Advances in Applied Statistics : Statistics and Images : 2). [34](#)
- Lindeberg, T. (1994b). *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. [23](#)
- Lindeberg, T. (1996). Scale-Space : a Framework for Handling Image Structures at Multiple Scales. In *Proceedings of The CERN School of Computing Egmond aan Zee*, The Netherlands. [34](#)
- Lindeberg, T. and Garding, J. (1994). Shape-Adapted Smoothing in Estimation of 3-D Depth Cues from Affine Distortions of Local 2-D Brightness Structure. In *Proceedings of The Third European Conference on Computer Vision*, volume 800 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 389–400, Stockholm, Sweden. Springer-Verlag. [35](#)
- Luxemburg, W. A. J. and Zaanen, A. C. (1971). *Riesz Spaces*. North Holland, Amsterdam, Netherlands. [47](#), [55](#)
- Mahesh, B., Song, W. J., and Pearlman, W. A. (1990). Adaptive estimators for filtering noisy images. *Optical Engineering*, 29 :489–494. [42](#)
- Mallat, S. (1989a). A Theory for Multiresolution Decomposition : The Wavelet Representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :674–693. [25](#), [32](#), [33](#), [195](#)
- Mallat, S. (1989b). A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :674–693. [31](#), [32](#)
- Mallat, S. (1989c). Multifrequency channel decomposition of images and wavelets models. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Analysis*, 37 :2091–2110. [31](#)
- Mallat, S. (1989d). Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of  $L^2(\mathbb{R})$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, 315(1) :69–87. [32](#)

- Malvar, H. (1990). Lapped transform for efficient transform/subband coding. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 38(6) :966–978. [34](#)
- Maragos, P. (1988). Morphology-Based Symbolic Image Modeling, Multi-Scale Nonlinear Smoothing and Pattern Spectrum. In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, volume 1091, pages 766–773, Ann Arbor, Michigan, USA. [27](#)
- Marr, D. (1982). *Vision : A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. W.H. Freeman and Company, San Fransisco, U.S.A. [2](#), [45](#)
- Marr, D. and Hildreth, E. (1980). Theory of Edge Detection. In *Proceedings of R. Soc. London*, volume B, pages 187–217. [46](#)
- Matheron, G. (1967). *Eléments pour une théorie des milieux poreux*. Masson, Paris. [61](#)
- Mayet, F., Pinoli, J. C., and Jourlin, M. (1996). Justifications physiques et applications du modèle LIP pour le traitement des images obtenues en lumière transmise. *Traitement du signal*, 13 :251–262. [58](#), [59](#)
- Mecke, K. R. (1996). Morphological Characterization of Patterns in Reaction-Diffusion Systems. *Physical Review E*, 53(5) :4794–4800. [25](#)
- Meer, P. (1989). Stochastic image pyramids. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 45 :269–294. [30](#)
- Meyer, F. (1994). Minimum Spanning Forests for Morphological Segmentation. In Serra, J. and Soille, P., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 77–84. Kluwer Academic Publishers. [30](#)
- Meyer, F. (2000). Flooding and Segmentation. In Goutsias, J., Vincent, L., and Bloomberg, D. S., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image and Signal Processing*, pages 189–198. Kluwer Academic Publishers. [30](#)
- Meyer, F. and Beucher, S. (1990). Morphological Segmentation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 1(1) :21–46. [163](#)
- Meyer, F. and Maragos, P. (1999). Morphological Scale-Space Representation with Levelings. In Nielsen, M., Johansen, P., Olsen, O. F., and Weickert, J., editors, *Scale-Space Theories in Computer Vision. Proceedings of The Second International Conference, Scale-Space'99*, volume 1682 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 187–198, Corfu, Greece. Springer. [35](#)
- Meyer, Y. (1987). Ondelettes, fonctions splines et analyse graduée. In *Cahiers du Cérémade*, number 8703, Université Paris-Dauphine, France. [32](#)
- Meyer, Y. (1990). *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, Paris, France. [31](#), [32](#)
- Meyer, Y. (1992). *Wavelets and applications*. Masson. [31](#)
- Minkowski, H. (1903). Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.*, 57 :447–495. [62](#)

- Montanvert, A., Meer, P., and Rosenfeld, A. (1991). Hierarchical image analysis using irregular tessellations. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(4) :307–316. [29](#), [30](#)
- Morales, A. (1995). Morphological pyramid by alternating sequential filters. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(7) :965–977. [27](#)
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Girard, D. (1982a). Wave propagation and sampling theory 1, Complex signal and scattering in multilayered media. *Geophysics*, 47 :203–221. [31](#)
- Morlet, J., Arens, G., Fourgeau, E., and Girard, D. (1982b). Wave propagation and sampling theory 2, Sampling theory and complex waves. *Geophysics*, 47 :222–236. [31](#), [32](#)
- Murenzi, R. (1990). *Ondelettes multidimensionnelles et applications à l'analyse d'images*. PhD thesis, Université catholique de Louvain, Belgique. [33](#)
- Nagao, M. and Matsuyama, T. (1979). Edge preserving Smoothing. *Computer Graphics and Image Processing*, 9 :394–407. [41](#), [195](#)
- Nitzberg, M. and Shiota, T. (1992). Nonlinear image filtering with edge and corner enhancement. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Image Processing*, 14(8) :826–833. [37](#)
- Okabe, A., Boots, B., and Sugihara, K. (2000). *Spatial Tessellations : Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*. Wiley, New-York, U.S.A. [28](#)
- Oppenheim, A. V. (1965). Superposition in a class of nonlinear systems. Technical report, Research Laboratory of Electronics, M.I.T., Cambridge, U.S.A. [46](#), [57](#)
- Oppenheim, A. V. (1967). Generalized Superposition. *Information and Control*, 11 :528–536. [46](#), [56](#)
- Oppenheim, A. V. (1968). Nonlinear filtering of Multiplied and Convolved Signals. In *Proceedings of the IEEE*, volume 56. [45](#), [46](#), [56](#)
- Paranjape, R. B., Morrow, W. M., and Rangayyan, R. M. (1992). Adaptive-Neighborhood histogram equalization for image enhancement. *Graphical Models and Image Processing*, 54 :259–267. [44](#), [153](#)
- Paranjape, R. B., Rabie, T. F., and Rangayyan, R. M. (1994a). Image restoration by adaptive neighborhood noise subtraction. *Applied Optics*, 33 :1861–1869. [44](#)
- Paranjape, R. B., Rangayyan, R. M., and Morrow, W. M. (1994b). Adaptive Neighbourhood Mean and Median Image Filtering. *Electronic Imaging*, 3(4) :360–367. [42](#), [43](#), [44](#), [195](#)
- Park, J. M., Song, W. J., and Pearlman, W. A. (1999). Speckle filtering of SAR images based on adaptive windowing. In *IEEE Proceedings of Vision, Image and Signal Processing*, volume 146, pages 191–197. [42](#)

- Perona, P. and Malik, J. (1990). Scale-Space and Edge Detection using Anisotropic Diffusion. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(7) :629–639. [25](#), [35](#), [37](#), [195](#)
- Pinoli, J. C. (1987). *Contribution à la modélisation, au traitement et à l'analyse d'image*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Saint-Etienne, France. [56](#), [57](#)
- Pinoli, J. C. (1991). A contrast definition for logarithmic images in the continuous setting. *Acta Stereologica*, 10 :85–96. [47](#), [77](#), [150](#)
- Pinoli, J. C. (1992a). Metrics, scalar product and correlation adapted to logarithmic images. *Acta Stereologica*, 11 :157–168. [47](#)
- Pinoli, J. C. (1992b). Modélisation et traitement des images logarithmiques : Théorie et applications fondamentales. Technical Report 6, Department of Mathematics, University of Saint-Etienne. (this report is a revised and expanded synthesis of the theoretical basis and several fundamental applications of the LIP approach published from 1984 to 1992. It has been reviewed by international referees and presented in December 1992 for passing the "Habilitation à Diriger des Recherches" French degree). [77](#), [150](#)
- Pinoli, J. C. (1997a). A General Comparative Study of the Multiplicative Homomorphic, Log-Ratio and Logarithmic Image Processing Approaches. *Signal Processing*, 58 :11–45. [57](#), [58](#), [59](#), [60](#), [171](#), [193](#)
- Pinoli, J. C. (1997b). The Logarithmic Image Processing Model : Connections with Human Brightness Perception and Contrast Estimators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 7(4) :341–358. [57](#), [58](#), [173](#)
- Pitas, I. and Venetsanopoulos, A. N. (1990). *Nonlinear Digital Filters : Principles and Applications*. Kluwer Academic Publishers. [40](#)
- Pratt, W. K. (1991). *Digital Image Processing*. John Wiley & Sons, New-York, U.S.A., 2nd ed. edition. [40](#), [58](#)
- Preparata, F. R. and Shamos, M. I. (1985). *Computational Geometry : An Introduction*. Springer-Verlag, New-York, U.S.A. [28](#), [29](#)
- Rabie, T. F., Rangayyan, R. M., and Paranjape, R. B. (1994). Adaptive-Neighborhood Image Deblurring. *Electronic Imaging*, 3(4) :368–378. [44](#)
- Rangayyan, R. M., Ciuc, M., and Faghil, F. (1998). Adaptive-Neighborhood Filtering of Images corrupted by Signal-Dependent Noise. *Applied Optics*, 37(20) :4477–4487. [44](#)
- Rangayyan, R. M. and Das, A. (1998). Filtering Multiplicative Noise in Images using Adaptive Region-Based Statistics. *Electronic Imaging*, 7(1) :222–230. [44](#)

- Rangayyan, R. M., Shen, L., Desaultes, J. E. L., Bryant, H., Terry, T. J., Horeckzo, N., and Rose, M. S. (1997). Improvement of sensitivity of breast cancer diagnosis with adaptive neighborhood contrast enhancement of mammograms. *IEEE Transactions on Information Technology in Biomedicine*, 1 :161–170. [44](#)
- Ritter, G. X. (1991). Recent developments in image algebra. In Hawkes, P., editor, *Advances in Electronics and Electron Physics*, pages 243–308. Academic Press, New-York, U.S.A. [44](#)
- Ritter, G. X. and Wilson, J. N. (1996). *Handbook of Computer Vision Algorithms in Image Algebra*. CRC Press, Boca Ration, FL, U.S.A. [44](#)
- Ritter, G. X., Wilson, J. N., and Davidson, J. L. (1990). Image algebra, an overview. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 49(3) :297–331. [44](#)
- Romeny, B. M. T. H. (1999). Scale-Space Theory for Multiscale Geometric Image Analysis. Tutorial. [35](#)
- Rosenfeld, A. (1969). *Picture Processing by Computers*. Academic Press, New-York, U.S.A. [46](#)
- Salembier, P. (1992). Structuring element adaptation for morphological filters. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 3(2) :115–136. [42](#)
- Salembier, P. and Serra, J. (1995). Flat zones filtering, connected operators, and filters by reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 4(8) :1153–1159. [168](#)
- Samet, H. (1980). Region representation : quadrees from binary arrays. *Computer Graphics and Image Processing*, 13 :88–93. [28](#)
- Schmitt, M. and Mattioli, J. (1994). *Morphologie mathématique*. Masson. [62](#), [63](#)
- Segall, A. C., Chen, W., and Acton, S. T. (1996). Nonlinear Pyramids for Object Identification. In *Proceedings of The Thirtieth Asilomar Conference on Systems, Signals and Computers*, Pacific Grove, California, USA. [31](#)
- Serra, J. (1982a). *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, U.K. [62](#)
- Serra, J. (1982b). *Image Analysis and Mathematical Morphology*, chapter Size Criteria, pages 318–372. Academic Press. [103](#)
- Serra, J. (1988a). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Mathematical Morphology for Complete Lattices, pages 13–35. Academic Press, London, U.K. [62](#), [63](#), [90](#), [97](#), [103](#), [187](#)
- Serra, J. (1988b). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Introduction to Morphological Filters, pages 101–114. Academic Press, London, U.K. [63](#), [101](#), [112](#)

- Serra, J. (1988c). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Mathematical Morphology fo Boolean Lattices, pages 37–58. Academic Press, London, U.K. [86](#)
- Serra, J. (1988d). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Examples of Structuring Functions and Their Uses, pages 71–99. Academic Press, London, U.K. [90](#), [97](#)
- Serra, J. (1988e). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Filters and Lattices, pages 115–140. Academic Press, London, U.K. [101](#), [110](#), [112](#)
- Serra, J. (1988f). *Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume 2 : Theoretical Advances*, chapter Alternating Sequential Filters, pages 203–216. Academic Press, London, U.K. [104](#)
- Serra, J. and Salembier, P. (1993). Connected Operators and Pyramids. In *Proceedings of The SPIE Conference on Visual Communication and Image Processing*, volume 2030, pages 65–76. [157](#), [167](#), [168](#)
- Sethian, J. (1996). *Level Sets Methods*. Cambridge University Press. [35](#)
- Shvayster, H. and Peleg, S. (1983). Pictures as elements in a vector space. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 442–446, Washington, U.S.A. [46](#), [56](#), [57](#)
- Shvayster, H. and Peleg, S. (1987). Inversion of Picture Operators. *Pattern Recognition Letters*, 5 :49–61. [46](#), [56](#), [57](#)
- Smyth, M. B. (1995). Semi-metrics, closure spaces and digital topology. *Theoretical Computer Science*, 151 :257–276. [187](#)
- Soille, P. (2003a). *Morphological Image Analysis. Principles and Applications*. Springer Verlag, New York. [62](#), [63](#)
- Soille, P. (2003b). *Morphological Image Analysis. Principles and Applications*, chapter Filtering, pages 241–265. Springer Verlag, New York. [149](#)
- Song, W. J. and Pearlman, W. A. (1986). Restoration of Noisy Images with Adaptive Windowing and Nonlinear Filtering. In *Visual Communication and Image Processing*, pages 198–206. [42](#), [195](#)
- Stockham, T. G. (1968). The applications of generalized linearity to automatic gain control. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, AU-16(2) :267–270. [46](#), [57](#)
- Stockham, T. G. (1972). Image Processing in the Context of a Visual Model. In *Proceedings of the IEEE*, volume 60, pages 825–842. [45](#), [46](#)
- Strang, G. (1976). *Linear Algebra and its Applications*. Academic Press, New-York, U.S.A. [46](#)

- Sugeno, M. (1974). *Theory of fuzzy integrals and its applications*. PhD thesis, Tokyo Institute of Technology. 115
- Sun, F. K. and Maragos, P. (1989). Experiments on Image Compression using Morphological Pyramids. In *Proceedings of The SPIE Visual Communications and Image Processing IV*, pages 1303–1312. 27
- Sweldens, W. (1999). The Lifting Scheme : A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets. *Appl. Comput. Harmon. Analysis.*, 3 :186–200. 34
- Tabiza, M. (1998). *Filtres  $L_p$  : étude des propriétés et application en traitement d'images*. PhD thesis, Université de Savoie, France. 40
- Tanimoto, S. (1979). Image Transmission with gross information first. *Computer Graphics and Image Processing*, 9 :72–76. 27
- Tanimoto, S. and Pavlidis, T. (1975). A hierarchical data structure for picture processing. *Computer Graphics and Image Processing*, 4(2) :104–119. 27
- Ter Haar Romeny, B. (1994). *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands. 12, 23
- Toët, A. (1989). A Morphological Pyramidal Image Decomposition. *Pattern Recognition*, 9(4) :255–261. 27
- Vachier, C. (2001). Morphological Scale-Space Analysis and Feature Extraction. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing*, volume 3, pages 676–679, Thessaloniki, Greece. 168
- Valentine, F. A. (1964). *Convex Sets*. McGraw-Hill, New-York, U.S.A. 57
- Verly, J. G. and Delanoy, R. L. (1993). Some Principles and Applications of Adaptive Mathematical Morphology for Range Imagery. *Optical Engineering*, 32(12) :3295–3306. 42
- Vincent, L. and Soille, P. (1991). Watersheds in Digital Spaces : An Efficient Algorithm based on Immersion Simulations. *IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13(6) :583–589. 164
- Vogt, R. C. (1994). A Spatially Variant, Locally Adaptive, Background Normalization Operator. In Serra, J. and Soille, P., editors, *Mathematical Morphology and its Applications to Image Processing*, pages 45–52. Kluwer Academic Publishers. 42
- Voronoi, G. (1908). Nouvelles applications de paramètres continus à la théorie des formes quadratiques. Deuxième mémoire : recherches sur les paralléloèdres primitifs. *Journal für die reine and angewandte Mathematik*, 134 :198–287. 28
- Weickert, J. (1994). Scale-Space Properties of Non-Linear Diffusion Filtering with a Diffusion Tensor. Technical Report 110, University of Kaiserslautern, Germany. 39, 195

- Weickert, J. (1998). *Anisotropic Diffusion in Image Processing*. European Consortium for Mathematics in Industry. B.G. Teubner Stuttgart, Germany. [23](#), [25](#), [39](#)
- Whal, F. M. (1987). *Digital Image Signal processing*. Artech House, Boston, U.S.A. [42](#)
- Whitaker, R. and Pizer, S. (1993). A multi-scale approach to nonuniform diffusion. *CVGIP : Image Understanding*, 57(1) :99–110. [37](#)
- Willersinn, D. (1995). *Dual irregular pyramids*. PhD thesis, Technische Universitat Wien, Institut fur Automation. [30](#)
- Witkin, A. P. (1983). Scale-Space Filtering. In *Proceedings of The International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 1019–1023, Karlsruhe, Germany. [25](#), [34](#), [35](#), [195](#)
- Wright, A. S. and Acton, S. T. (1997). Watershed Pyramids for Edge Detection. In *Proceedings of The IEEE International Conference on Image Processing*, volume 2, pages 578–581, Santa Barbara, California, USA. [31](#)
- Wu, Y. and Maître, H. (1992). Smoothing speckled synthetic aperture radar images by using maximum homogeneous region filters. *Optical Engineering*, 31 :1785–1792. [42](#)

# INDEX



# Index des définitions et propriétés

<b>A</b>	
Addition de Minkowski .....	62
Adjonction des opérateurs morphologiques adaptatifs plats .....	91
Adjonction des opérateurs morphologiques adaptatifs séquentiels plats .....	105
Anti-granulométrie .....	103
<b>C</b>	
Catégorie des opérateurs morphologiques ..	113
Chemin .....	77
Contraste LIP .....	150
Contraste morphologique .....	149
Contraste morphologique adaptatif .....	150
<b>D</b>	
Décomposition pyramidale .....	157
Décomposition pyramidale hiérarchique .....	167
Différence de Minkowski .....	68
Dilatation morphologique	
à tons de gris .....	68
binaire .....	63
plate .....	66
Dilatation morphologique adaptative	
à tons de gris .....	97
plate .....	90
séquentielle plate .....	105
<b>E</b>	
Éléments structurants adaptatifs .....	87
Épaisseur à VAG	
(définition 1) .....	136
(définition 2) .....	136
<b>F</b>	
Fermeture morphologique	
à tons de gris .....	69
binaire .....	64
plate .....	67
Fermeture morphologique adaptative	
à tons de gris .....	98
plate .....	91
séquentielle plate .....	106
Filtre de Choquet .....	117
adaptatif .....	119
Filtre de convolution de Choquet .....	119
adaptatif .....	119
Filtre morphologique .....	70
Filtres morphologiques adaptatifs	
élémentaires plats .....	101
alternés plats .....	101
alternés séquentiels plats .....	110
Fonction structurante adaptative plate .....	89
Fonction structurante plate .....	86
<b>G</b>	
Granulométrie .....	103

Granulométries, anti-granulométries adaptatives ..... 110

**I**

Intégrale floue de Choquet  
 continue.....116  
 discrète ..... 116

**M**

Mesure cardinale ..... 117  
 Mesure floue.....115  
 Module d'un vecteur.....56

**O**

Opérateur auto-transposé.....86  
 Opérateur connexe.....70  
 Opérateur transposé.....86  
 Opérateurs adjoints.....85  
 Orientation à VAG  
 (définition 1) ..... 128  
 (définition 2) ..... 129  
 (définition 3) ..... 132  
 Ouverture morphologique  
 à tons de gris.....69  
 binaire ..... 64  
 plate ..... 67  
 Ouverture morphologique adaptative  
 à tons de gris.....98  
 plate ..... 91  
 séquentielle plate.....106

**P**

Partie positive et négative d'un vecteur ..... 56  
 Propriétés des éléments structurants adaptatifs  
 88  
 Propriétés des filtres morphologiques adaptatifs  
 alternés plats.....101  
 Propriétés des opérateurs morphologiques adaptatifs  
 à tons de gris.....99  
 plats ..... 92  
 séquentiels plats.....107  
 Propriétés des opérateurs morphologiques binaires ..... 65

Propriétés des voisinages adaptatifs généraux79  
 (définition plus générale) ..... 82  
 Pyramide d'opérateurs.....157

**S**

Section d'une image à tons de gris ..... 66  
 Segmentation d'une image ..... 163  
 Somme de Minkowski.....68  
 Sous-graphe ..... 68  
 Soustraction de Minkowski.....62

**T**

Treillis complet ..... 62

**V**

Voisinages adaptatifs généraux.....76  
 (définition équivalente) ..... 78  
 (définition plus générale) ..... 82

# Abstract

This thesis deals with multiscale and adaptive (both with spatial and intensity settings) processing of gray tone images.

From a punctual characterization, an image is represented with a set of local neighborhoods, called general adaptive neighborhoods (GANs). For each point of the image to be studied, an increasing collection of GANs is defined, allowing a context-dependent multiscale analysis to be performed. These GANs are adaptive in the sense that each neighborhood spatially coincides with the local structure of the seed point, following the radiometric, morphological, geometrical or textural characteristics to be analyzed. In addition, the GANs are physically relevant since they depend on the physical and/or psychophysical nature of the image to be studied. Consequently, the GANs are adapted to linear images or imaging systems, but also nonlinear and/or bounded range images such as transmitted light images, practical digital images or the human brightness perception system.

This image representation, based on general adaptive neighborhoods, allows efficient image processing tools to be built. These GANs naturally constitute operational windows for local image transformations. Firstly, adaptive mathematical morphology is introduced using GANs as (adaptive) structuring elements. The resulting transformations satisfy the usual properties of classical morphological operators. Moreover, in several important and practical cases, the adaptive morphological operators are connected, that is of great topological importance, in comparison to the usual ones which fail to this property. Secondly, Choquet filtering is extended with the GANs, generalizing several nonlinear operators such as rank-order filters.

Beyond, the GANs enable to introduce local adaptive descriptors for gray tone images, such as orientation or thickness. These local measures lead on the definition of new GANs allowing a more significant spatial analysis to be performed, or the solving of practical applications in image processing and analysis.

In this thesis, the general adaptive neighborhood image processing (GANIP) is applied in the fields of image restoration, image enhancement or image segmentation. This approach promises large theoretical prospects and should permit the devising of several image processes responding to concrete problems.

**Keywords :** nonlinear image processing, multiscale analysis, adaptive neighborhoods, algebraic model, mathematical morphology, Choquet filtering, local adaptive descriptors.

# Résumé

Cette thèse de doctorat porte sur le traitement multi-échelle et adaptatif (en espace et en intensité) des images à tons de gris.

A partir d'une caractérisation ponctuelle, une image est représentée par un ensemble de voisinages locaux : les voisinages adaptatifs généraux (VAG). A chaque point de l'image est associée une famille croissante de VAG permettant une analyse multi-échelle des différentes caractéristiques de l'image. Ces VAG sont adaptatifs dans le sens où chaque voisinage coïncide spatialement avec la structure locale du point considéré, suivant les informations radiométriques, morphologiques, géométriques, ou texturales, étudiées. De plus, les VAG sont physiquement cohérents puisque leur modélisation dépend de la nature physique et/ou psychophysique de l'image à analyser. Par conséquent, les VAG sont adaptés aux images ou systèmes d'imagerie linéaires, mais aussi non linéaires et/ou bornés, tels que les images acquises en lumière transmise, en lumière réfléchie (modèle multiplicatif) ou le système humain de perception visuelle.

Cette analyse par voisinages adaptatifs généraux conduit au développement d'outils de traitement d'image. Ces VAG forment naturellement des fenêtres opérationnelles propices à des transformations locales d'image. Dans un premier temps, la morphologie mathématique adaptative est introduite en considérant des éléments structurants (adaptatifs) basés sur ces VAG. Les transformations résultantes satisfont les propriétés standards des opérateurs morphologiques usuels et de surcroît en vérifient de nouvelles telles que la connexité, ce qui est topologiquement remarquable. Dans un second temps, le filtrage de Choquet est étendu à l'aide des voisinages adaptatifs généraux, généralisant de nombreux opérateurs non-linéaires tels que les filtres d'ordre.

En outre, les VAG permettent la définition de descripteurs adaptatifs locaux d'images en tons de gris tels que l'orientation ou l'épaisseur. Ces mesures peuvent conduire d'une part à la définition de nouveaux VAG permettant une analyse d'image plus cohérente ou d'autre part à la résolution de problèmes pratiques de traitement d'image.

Dans le cadre de cette thèse, le traitement d'image à voisinages adaptatifs généraux (TIVAG) à été appliqué aux problèmes de restauration, de rehaussement ou de segmentation d'image. Cette approche ouvre par ailleurs de nouvelles perspectives théoriques et devrait permettre la mise au point de nombreux processus de traitement d'image répondant à des problèmes applicatifs concrets.

**Mots clés :** traitement d'image non linéaire, analyse multi-échelle, voisinages adaptatifs, modèle algébrique, morphologie mathématique, filtrage de Choquet, descripteurs adaptatifs locaux.