



**HAL**  
open science

# **FOLDIS : un modèle cinématique de bassins sédimentaires par éléments discrets associant plis, failles, érosion/sédimentation et compaction**

Renaud Divies

► **To cite this version:**

Renaud Divies. FOLDIS : un modèle cinématique de bassins sédimentaires par éléments discrets associant plis, failles, érosion/sédimentation et compaction. Tectonique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00744407

**HAL Id: tel-00744407**

**<https://theses.hal.science/tel-00744407>**

Submitted on 23 Oct 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TS 27/GRE1/0110/D  
(double)

SSP



Thèse  
présentée par  
DIVIES Renaud

pour obtenir le titre de docteur  
de l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER (Grenoble I)  
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et 30 mars 1992)

---

FOLDIS : un modèle cinématique de bassins sédimentaires par éléments discrets associant  
plis, failles, érosion/sédimentation et compaction

---

Date de soutenance : 15 Juillet 1997

Composition du Jury :

- Président : Guy PERRIER (Université Joseph Fourier Grenoble I)  
Directeur : Jean-Pierre GRATIER (Université Joseph Fourier Grenoble I)  
Co-directeur : William SASSI (Institut Français du Pétrole)  
Rapporteurs : Dominique FRIZON de LAMOTTE (Université de Cergy-Pontoise)  
Marc DAIGNIERES (Université de Montpellier)  
Examineur : Alain DOULCET (Elf Pau)



Thèse préparée à l'Institut Français du Pétrole (Division Géologie-Géochimie)

Thèse  
présentée par  
DIVIES Renaud

pour obtenir le titre de docteur  
de l'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER (Grenoble I)  
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et 30 mars 1992)

---

FOLDIS : un modèle cinématique de bassins sédimentaires par éléments discrets associant  
plis, failles, érosion/sédimentation et compaction

---

Date de soutenance : 15 Juillet 1997

Composition du Jury :

Président : Guy PERRIER (Université Joseph Fourier Grenoble I)  
Directeur : Jean-Pierre GRATIER (Université Joseph Fourier Grenoble I)  
Co-directeur : William SASSI (Institut Français du Pétrole)  
Rapporteurs : Dominique FRIZON de LAMOTTE (Université de Cergy-Pontoise)  
Marc DAIGNIERES (Université de Montpellier)  
Examineur : Alain DOULCET (Elf Pau)



10190191

Thèse préparée à l'Institut Français du Pétrole (Division Géologie-Géochimie)

# Remerciements

Mon travail de recherche a été dirigé par Jean-Pierre Gratier de l'Université de Grenoble. J'ai grandement apprécié son aide et ses connaissances dispensées au cours de discussions qui m'ont toujours beaucoup appris.

William Sassi de l'Institut Français du Pétrole a co-dirigé mon travail de thèse. J'ai également apprécié sa disponibilité et sa compétence pour orienter mon travail vers des questions à la fois d'intérêt scientifique et appliquées à la modélisation de bassin et la géologie pétrolière.

Mon travail a été financé par une allocation de recherche attribuée par l'IFP. J'ai pu ainsi bénéficier au cours de ma thèse dans les laboratoires de la division Géologie-Géochimie de l'IFP de moyens matériels utiles et performants. L'encadrement de chercheurs et de techniciens qualifiés a aussi été favorable à la réalisation d'un travail de qualité. En particulier, j'ai considérablement profité de l'expérience et des connaissances des géologues de l'IFP; je remercie spécialement Jean-Luc Faure, Bernard Colletta, Jean Letouzey, François Roure, Nadine Ellouz et Eric Deville. Des exemples et des recommandations profitables concernant les différents aspects de la modélisation cinématique en géologie m'ont été prodigués par Isabelle Moretti, Pierre Labaume et Jean Burrus.

L'exercice particulier que constitue la conception et la réalisation d'un programme informatique nécessite d'autres enseignements et compétences que ceux spécifiques à la discipline étudiée. De précieux conseils concernant la méthodologie et la manipulation des concepts physiques dans les modèles informatiques m'ont été prodigués par Frédéric Schneider. Je sais gré également à Didier Granjeon de m'avoir aidé de façon très patiente et efficace pour la réalisation du couplage de mon programme avec le sien. Les aspects informatiques et numériques ont eu une grande importance dans mon travail. Je suis reconnaissant à Sylvie Wolf, Marie-Christine Cacas, Isabelle Faille, Olivier Labergerie, Frédéric Simiand, Oswaldo Jimenez, Walid Choueiri et Hervé Devoitine pour leur aide appréciable en analyse numérique et en programmation.

Je remercie très sincèrement les stagiaires Cécile Tardieu et Valérie Colin, les étudiants en D.E.A. Elsa Bonnay et Bruno Furlan qui m'ont grandement aidé par des remarques constructives et en testant et en utilisant mon programme.

# Sommaire

<b>Remerciements</b> .....	<b>2</b>
<b>Sommaire</b> .....	<b>3</b>
<b>Chapitre 1 : Introduction et présentation de la problématique</b> .....	<b>6</b>
1.1 : Modèles de bassins en géologie pétrolière .....	6
1.2 : Problématique et présentation du sujet de la thèse .....	8
1.3 : Méthodologie d'une étude géologique de bassin sédimentaire. ....	9
1.4 : La dimension temporelle dans les modèles géométriques : cinématique .....	11
<b>Chapitre 2 : Modélisation cinématique</b> .....	<b>13</b>
2.1 : Méthode des coupes équilibrées .....	13
2.2 : Principes de la modélisation cinématique directe 2D .....	15
2.2.1 : Notion de continuité de la déformation .....	16
2.2.2 : Les structures tectoniques simples à l'échelle du bassin .....	18
2.2.3 : La déformation continue d'une écaille tectonique .....	22
2.3 : Cinématique fondée sur le mécanisme du cisaillement simple (simple shear) ..	26
2.3.1 : Définition du mécanisme du cisaillement simple. ....	26
2.3.2 : Etude des propriétés de la transformation F. ....	26
2.3.3 : Discussion concernant les conditions à la limite du problème cinématique .....	27
2.4 : Cinématique basée sur la déformation par flexion (flexural slip) .....	31
2.4.1 : Définition du mécanisme de flexion d'un domaine continu .....	32
2.4.2 : Analyse de la transformation par flexion continue .....	33
2.4.3 : Cas particulier d'une stratification initialement parallèle .....	34
2.4.4 : Exemple : déformation d'un domaine carré uniformément stratifié .....	36
2.5 : Le modèle de Suppe .....	43
2.5.1 : Etude géométrique du glissement flexural d'une stratification parallèle .....	43
2.5.2 : La reconstruction géométrique de Suppe .....	45
2.5.3 : Avantages et inconvénients de la méthode géométrique de Suppe .....	48
2.6 : Le modèle de Waltham .....	51
2.7 : Le modèle de Contreras et Suter .....	52
2.7.1 : Présentation de la méthode .....	52
2.7.2 : Avantages et inconvénients de la méthode .....	53
<b>Chapitre 3 : Géométrie du modèle discret FOLDIS : structure de données</b> ..	<b>56</b>
3.1 : Discrétisation de la géométrie du bassin .....	56
3.1.1 : Représentation des failles .....	56
3.1.2 : Représentation des écailles tectoniques .....	57
3.1.3 : Unités géologiques et unités cinématiques .....	61
3.1.4 : Discrétisation des unités cinématiques en éléments .....	62

3.1.5 : Procédure automatique de découpage des unités cinématiques .....	64
3.2 : Coordonnées locales et marqueurs lithologiques .....	75
3.2.1 : Coordonnées locales .....	76
3.2.2 : Marqueurs lithologiques dans les éléments .....	81
<b>Chapitre 4 : Déplacement et déformation des unités cinématiques .....</b>	<b>87</b>
4.1 : Les principes géométriques de la méthode cinématique. ....	88
4.2 : Traduction des principes géométriques au niveau élémentaire .....	88
4.2.1 : Conservation de la quantité de matière (principe n° 1) .....	89
4.2.2 : Conservation de l'épaisseur des unités cinématiques (principe n° 2) .....	89
4.2.3 : Glissement localisé au niveau des inter-unités (principe n° 3) .....	90
4.3 : Critère géométrique nécessaire à la reconstruction (principe n° 4) .....	90
4.4 : Implémentation numérique de la méthode .....	95
4.4.1 : Stratégie de résolution de la reconstruction d'une unité cinématique .....	95
4.4.2 : Définition du critère de sélection d'une configuration de l'unité cinématique .....	96
4.4.3 : Recherche de la configuration optimale vis à vis du critère .....	114
4.4.4 : Configuration initiale pour démarrer l'algorithme de convergence .....	120
4.4.5 : Calcul du gradient associé à une configuration .....	122
4.4.6 : Recherche d'un algorithme de convergence accéléré .....	123
4.5 : Etude de la stabilité de la méthode .....	125
4.5.1 : Stabilité géométrique de la méthode .....	125
4.5.2 : Exemple de mise en oeuvre de la méthode de déformation tectonique .....	132
<b>Chapitre 5 : Erosion et sédimentation, modélisation couplée avec Dionisos .</b>	<b>134</b>
5.1 : Les phénomènes de sédimentation et d'érosion. ....	134
5.2 : Prise en compte de la sédimentation dans FOLDIS .....	135
5.3 : Prise en compte de l'érosion dans FOLDIS .....	138
5.4 : Exemple d'une modélisation couplée mettant en jeu déformation tectonique, sédimentation et érosion sur un exemple synthétique .....	140
5.4.1 : Les paramètres de la modélisation .....	140
5.4.2 : Analyse de la modélisation et conclusion .....	143
<b>Chapitre 6 : Compaction .....</b>	<b>145</b>
6.1 : Loi de compaction adoptée dans le modèle .....	146
6.2 : Prise en compte des effets géométriques de la compaction .....	148
6.2.1 : Règles géométriques du modèle de compaction .....	148
6.2.2 : Ecriture du critère de compaction .....	154
6.3 : Implémentation numérique .....	157
6.4 : Exemple synthétique .....	158
<b>Chapitre 7 : Exemples de modélisations avec FOLDIS, perspectives et conclusion. ....</b>	<b>162</b>
7.1 : Caractérisation du mécanisme de déformation. ....	162
7.2 : Potentialités et limites géométriques du modèle. ....	166
7.3 : Différents styles de duplex. ....	171
7.4 : Perspectives .....	174
7.4.1 : Modélisation de la croissance d'une faille. ....	174
7.4.2 : Extension en 3D du modèle cinématique discret FOLDIS. ....	177

<b>Conclusion</b> .....	<b>179</b>
<b>Annexes</b> .....	<b>180</b>
1 : Notions de topologie et de continuité .....	180
1.1 : Notion de topologie .....	180
1.2 : Axiomes des voisinages .....	180
1.3 : Application continue .....	181
2 : Points et vecteurs .....	181
3 : Angles .....	184
3.1 : Définition de la mesure d'un angle de deux vecteurs .....	184
3.2 : Continuité de la mesure d'un angle de deux vecteurs .....	184
3.3 : Différentielle de la mesure d'un angle de deux vecteurs .....	186
4 : Lignes polygonales et polygones .....	187
4.1 : Ligne polygonale .....	187
4.2 : Polygone .....	188
4.3 : Paramétrage d'une ligne polygonale par l'abscisse curviligne .....	194
4.4 : Sous-lignes polygonales d'une ligne polygonale et relation d'ordre .....	195
4.5 : Ligne polygonale triangulaire et aire d'une ligne polygonale orientée .....	196
4.6 : Ligne polygonale ondulante .....	196
4.7 : Ondulations d'une ligne polygonale .....	197
5 : Résultats de calcul différentiel .....	199
5.1 : Formule de Taylor .....	199
5.2 : Différentiation d'une fonction définie par une intégrale .....	199
5.3 : Transformée d'un vecteur matériel infinitésimal .....	200
5.4 : Transformée d'une surface infinitésimale .....	201
5.5 : Gradient d'une fonction composée .....	202
6 : Le mécanisme du cisaillement simple .....	204
6.1 : Résolution de (1) et (2) par la méthode des caractéristiques .....	204
6.2 : Prise en compte de l'équation aux dérivées partielles (3) .....	206
7 : Le mécanisme de flexion-écoulement .....	209
7.1 : Résolution de (1) et (2) par la méthode des caractéristiques .....	209
7.2 : Prise en compte de l'équation aux dérivées partielles (3) .....	212
7.3 : Condition nécessaire sur le bord de frontière imposé. ....	215
<b>Références :</b> .....	<b>217</b>

# Chapitre 1 : Introduction et présentation de la problématique

Dans ce chapitre introductif, on montre tout d'abord la tendance actuelle des modèles de bassin en géologie pétrolière à intégrer les connaissances et les progrès récents des différentes disciplines des sciences de la terre. On expose ensuite la problématique que l'on se pose dans le cadre de cette évolution générale, de façon à améliorer les modèles de bassin qui existent en ce qui concerne les déformations tectoniques. Puis, d'un point de vue général, on situe les méthodes de modélisation informatique et de simulation par le calcul, dans la méthodologie générale d'une étude géologique de bassin. On souligne à quels différents niveaux le travail de modélisation fait réaliser des progrès importants et comment il s'insère dans le contexte global d'une étude géologique de bassin. On positionne enfin le type de modélisation choisie pour le modèle FOLDIS, à savoir un modèle direct, par rapport à l'autre démarche possible, une modélisation rétrograde, qui constitue une alternative permettant d'adopter un point de vue complémentaire.

## 1.1 : Modèles de bassins en géologie pétrolière

La modélisation de bassin en géologie pétrolière est une discipline nouvelle qui est apparue à la fin des années 1970 et au début des années 1980. Cette discipline s'est considérablement développée à la fin des années 1980 et au début des années 1990. Il s'agit maintenant d'une discipline reconnue dont l'objectif est d'accroître les chances de réussite dans le domaine de l'exploration pétrolière. Il s'agit d'atteindre ce but en intégrant dans un modèle cohérent les données diverses provenant des différents domaines des sciences de la terre : géologie, géophysique, et géochimie. Ainsi, cette discipline permet de synthétiser et de regrouper les résultats et les progrès accomplis dans les domaines de la géologie structurale et de la géologie sédimentaire avec les acquis de la géochimie qui concernent la diagenèse minérale ainsi que la génération des hydrocarbures. La modélisation de bassin autorise donc l'étude des phénomènes complexes de mise en place des gisements pétroliers. Les étapes de cette mise en place sont successivement la génération, la migration et l'accumulation des hydrocarbures vers les pièges présents dans le bassin sédimentaire.

Le point qu'il est très important de souligner est la grande influence de la configuration géométrique du bassin à toutes les étapes de la formation d'un gisement d'hydrocarbures. On indique quelle est l'influence de la géométrie pour chacun des différents mécanismes physico-chimiques successifs qui président à la formation des gisements pétroliers :

- La genèse des hydrocarbures par craquage du kérogène se produit pendant l'enfouissement des sédiments. L'augmentation des paramètres thermodynamiques de pression et de température qui est associée à l'enfouissement est à l'ori-

gine des réactions chimiques de transformation de la matière organique en hydrocarbures. Or l'enfouissement des sédiments est clairement liée à l'évolution géométrique du bassin.

- Le mécanisme physique qui est le moteur des phases d'expulsion et de migration des fluides hydrocarbures est le gradient de pression. Cependant, les propriétés physiques d'écoulement des différentes phases fluides hydrocarbures, comme la densité et la viscosité, entrent également en ligne de compte pour gouverner ces phénomènes. De plus, les caractéristiques physiques des matériaux sédimentaires encaissants, porosité et perméabilité, sont également essentielles pour déterminer les écoulements. Il apparaît donc que la configuration géométrique des terrains autour des roches mères des hydrocarbures, ainsi que leurs propriétés physiques, conditionnent grandement l'existence et la géométrie des chemins de migration dans le bassin.

- L'accumulation des hydrocarbures dans des réservoirs après la phase de migration dépend grandement de la géométrie et des propriétés physiques, en particulier de la porosité, des terrains constituant le réservoir. De plus, les propriétés physiques des terrains sus-jacents au réservoir sont également essentielles en ce qui concerne l'accumulation des hydrocarbures ; il est nécessaire que ces terrains encaissants soient imperméables. Il apparaît donc que la disposition géométrique des terrains ainsi que l'évolution de cette géométrie du fait des déformations tectoniques sont des informations déterminantes pour l'existence de pièges potentiels pour les hydrocarbures. En effet, de nombreuses structures tectoniques telles que les anticlinaux, les failles ou les contacts anormaux ainsi que des formes sédimentaires comme des biseaux stratigraphiques sont autant de pièges structuraux et sédimentaires en puissance. Il est évident que la nature géométrique de ces objets géologiques gouverne l'existence de gisements pétroliers dans un bassin.

Le domaine de la modélisation de bassin dont l'objet est l'étude de la géométrie et de son évolution au cours du temps est la modélisation cinématique. Il apparaît à la lumière du développement précédent que pour une modélisation de bassin menée dans un but d'évaluation pétrolière, l'aspect géométrique est essentiel. La modélisation cinématique est donc un sujet fondamental de la modélisation de bassin. Il s'agit de prendre en compte les déformations géométriques qui affectent les niveaux sédimentaires du bassin lors des phases tectoniques. Il apparaît également important de tenir compte des modifications géométriques dues à la compaction des sédiments lors de leur enfouissement.

Le modèle cinématique FOLDIS qui est présenté dans cette thèse a été développé dans cette optique. Il s'agit de permettre la prise en compte couplée dans le même modèle des concepts de géologie structurale concernant la déformation tectonique complexe, avec le processus physique de compaction par diminution de porosité.

## 1.2 : Problématique et présentation du sujet de la thèse

La reconstruction géométrique d'un bassin sédimentaire depuis son état initial jusqu'à l'état final actuel est un élément clé de l'approche quantitative de l'évaluation pétrolière des bassins en exploration. En effet, on a déjà souligné au paragraphe précédent l'influence primordiale des données de nature géométrique sur l'ensemble des processus physico-chimiques de mise en place des gisements d'hydrocarbures.

L'objet de la thèse est de mettre au point un prototype de modèle 2D capable de simuler l'évolution géométrique d'une coupe de bassin affectée par le jeu de failles. Une modélisation mécanique de la déformation tectonique, fondée sur le principe des calculs de structure, n'est pas poursuivie car cette approche est trop complexe pour être appliquée au domaine des bassins sédimentaires. Au contraire, le modèle cinématique développé, FOLDIS, repose sur des hypothèses simplificatrices de nature purement géométrique qui déterminent entièrement le mode de déformation envisagé.

Jusqu'à présent, les modèles cinématiques de bassin, tels que THRUSTPACK, destinés à modéliser la déformation tectonique complexe des bassins d'avant-chaînes de montagne n'incluent pas la prise en compte des effets géométriques de la compaction mécanique par diminution de porosité. D'autres types de modèles de bassin, comme TEMIS, destinés à modéliser les écoulements, la compaction associée ainsi que l'évolution physico-chimique de la matière organique et des fluides hydrocarbures, ne peuvent être appliqués que dans des zones où la déformation tectonique est simple. C'est à dire dans des bassins sans failles obliques actives, dont le jeu entraînerait nécessairement des déplacements latéraux des écaillés tectoniques ainsi qu'une déformation conjointe des sédiments.

Le développement du modèle cinématique FOLDIS a un double objectif :

- Il s'agit de proposer une méthode de calcul des déformations tectoniques qui présente des améliorations par rapport aux modèles cinématiques existants. Les configurations d'application du modèle FOLDIS sont en effet plus étendues que celle du modèle cinématique THRUSTPACK par exemple. Pour illustrer cette affirmation, on peut avancer le simple fait que les géométries des failles présentes dans un domaine d'étude du modèle FOLDIS ne sont pas limitées à être toutes définies avec un pendage orienté dans le même sens.
- Il s'agit ensuite de prendre en compte le phénomène de compaction dans le modèle. Comme les objets du modèle FOLDIS sont de nature discrète, ils se prêtent bien à une modification de leur géométrie et à une redéfinition de leur contour. Après chaque stade de l'évolution du bassin, il est possible de proposer un couplage des déformations tectoniques avec les déformations liées à la compaction par diminution de porosité. Ce couplage repose sur un calcul géométrique incrémental. On effectue une prise en compte successive de la déformation tectonique puis de la compaction mécanique pour chaque intervalle de temps correspondant à un incrément cinématique.

### 1.3 : Méthodologie d'une étude géologique de bassin sédimentaire.

L'étude géologique d'un bassin sédimentaire débute nécessairement à partir d'un ensemble d'observations et de données géologiques et géophysiques recueillies sur le terrain. Ces données sont de différentes natures, elles peuvent être recueillies au niveau de la surface topographique ou bien indirectement par le biais de mesures instrumentales de profondeur, à l'intérieur même du bassin.

À l'affleurement, les géologues sédimentaires et structuralistes procèdent à un travail d'observation et d'identification. Le sédimentologue examine et identifie la succession des lithologies et des faciès ainsi que leur disposition à l'affleurement. Le structuraliste met en évidence des objets plus complexes : les structures tectoniques. À l'aide de données quantitatives mesurées sur le terrain, pendage des couches ou de l'orientation des fractures, ainsi que par une observation directe des formes à l'affleurement, le géologue structuraliste reconnaît des structures telles que des plis ou des chevauchements. L'observation de zones de discontinuité et d'intense déformation lui permet de caractériser et de localiser des failles. Il recueille également sur le terrain des observations concernant le mode de fonctionnement ou de mise en place des objets structuraux rencontrés. Ainsi, il est parfois possible de distinguer des failles en fonctionnement normal, inverse ou en décrochement par le simple examen de stries qui mettent en évidence le déplacement relatif des deux compartiments.

Ces données classiquement recueillies par le géologue au niveau de la topographie sont synthétisées et regroupées sur la carte géologique. Ce travail de synthèse est vraiment essentiel et riche d'enseignements. Il permet en effet de mieux comprendre, en les regroupant, l'ensemble des observations effectuées sur le terrain. De plus, la construction de la carte géologique amène le géologue à travailler à une échelle supérieure par rapport à l'échelle de l'échantillon ou de l'observation individuelle. Ce changement d'échelle conduit nécessairement à un travail d'interpolation qui doit être mené entre les points de données. On voit donc qu'un des mérites de l'établissement de la carte géologique est la vérification de la cohérence générale des informations discrètes recueillies sur le terrain. L'autre vertu de ce travail réside dans l'information qui est obtenue du fait de l'exercice d'interpolation. L'interpolation est fondée sur des hypothèses géométriques concernant les différentes structures envisagées et leur mode de fonctionnement. Ces hypothèses ont des implications géométriques qui permettent de mettre en continuité les structures entre les points discrets où elles ont été observées.

La connaissance des structures profondes du bassin peut être également interpolée et déduite des données recueillies au niveau de la topographie. Il est en effet possible, à partir des informations géométriques rassemblées sur la carte géologique, spécialement à l'aide des mesures de pendage de couches ou de failles, d'envisager de tracer sur des coupes verticales l'agencement des couches et des structures géologiques en profondeur dans le bassin. Un simple travail interprétatif à partir des seules données de surface de la carte est cependant insuffisant pour accéder à une connaissance certaine et précise des structures profondes. Il apparaît clairement que le problème de détermination des structures profondes est typiquement sous-contraint.

Des moyens d'investigation supplémentaires et plus élaborés sont nécessaires pour recueillir des mesures géologiques et géophysiques des profondeurs du bassin. Les impor-

tants moyens financiers engagés par l'industrie pétrolière dans le but de réaliser l'évaluation du potentiel pétrolier des zones prometteuses a permis d'employer des moyens efficaces pour recueillir des mesures profondes. Des sondages permettent de collecter et d'analyser directement des échantillons de sédiments profonds. Ces sondages permettent également d'obtenir un grand nombre de mesures physiques in situ. En plus des renseignements concernant les propriétés physiques des matériaux sédimentaires en place, ces informations autorisent l'identification des lithologies et des faciès profonds. Des campagnes de sismique-réflexion permettent également de connaître la position des interfaces séparant les différentes lithologies dans les profondeurs du bassin.

Il est important de remarquer que la démarche du géologue consiste en premier lieu à intégrer l'ensemble des informations recueillies sur le terrain. Il doit ensuite être capable de dépasser la diversité et le caractère ponctuel des mesures et des données pour parvenir à la compréhension des phénomènes, et remonter à leurs causes.

On a déjà souligné que lors de l'établissement de la carte géologique on procédait à une vérification de la cohérence des données recueillies sur le terrain. De la même façon, lors de l'étude des structures profondes du bassin, au moyen de coupes verticales, on procède également à une vérification de la compatibilité des données entre elles. Le fait d'envisager le fonctionnement et la mise en place des structures tectoniques est aussi un moyen de vérifier leur compatibilité. Cette vérification est alors d'un autre ordre, elle repose en effet sur la vraisemblance des phénomènes tectoniques ayant conduit le bassin dans son état actuel. On s'intéresse donc ici à l'évolution géométrique du bassin, pour laquelle intervient la dimension temporelle. Cette discipline de la géologie dont l'objet est l'étude de la géométrie au cours du temps est la cinématique. «La cinématique n'est que de la géométrie dans le temps» Goguel -1948- [21].

Ainsi, la crédibilité de l'état modélisé au stade actuel du bassin est évaluée à l'aune de sa vraisemblance cinématique. C'est à dire que pour que l'état modélisé actuel soit jugé satisfaisant il doit être possible de l'inclure à la fin d'une évolution cinématique plausible. En cas de vraisemblance du scénario cinématique, l'état modélisé du bassin au stade actuel est accepté pour être éventuellement confronté à d'autres observations permettant de confirmer sa vraisemblance. Dans le cas où il n'est pas possible d'inclure le stade actuel dans un scénario cinématique plausible, l'état modélisé actuel doit être nécessairement rejeté. Il convient alors dans ce cas, grâce aux remarques faites lors de la première étude, d'améliorer et de concevoir un autre état modélisé du bassin au stade actuel ainsi qu'une évolution cinématique y conduisant de façon vraisemblable.

## 1.4 : La dimension temporelle dans les modèles géométriques : cinématique

Il existe deux grandes familles de méthodes permettant de concevoir des scénarios cinématiques aboutissant à l'état géométrique actuel du bassin. Ces deux méthodes diffèrent par la façon de considérer le paramètre temporel dans le modèle. Il est possible de réaliser la modélisation cinématique dans le sens naturel d'écoulement du temps, et l'on parle alors de modèle direct ou «forward». Ainsi, dans une telle modélisation, la description des différentes étapes de l'histoire du bassin est réalisée dans l'ordre chronologique. La modélisation cinématique en sens contraire, c'est à dire en remontant le temps est qualifiée de modélisation rétrograde ou «backward». On réalise alors dans ce cas la restauration de la géométrie du bassin, à partir de l'état actuel que l'on modifie par étapes successives pour les différentes dates de son passé géologique.

La modélisation cinématique directe est naturelle, elle permet en effet d'envisager les processus physiques et géologiques qui conduisent à l'évolution de l'état géométrique et thermodynamique du bassin dans leur ordre chronologique. Dans le modèle FOLDIS, la modélisation cinématique envisagée est de type direct. L'état géométrique actuel du bassin est donc le dernier des états modélisés successifs. La modélisation commence à une date du passé, choisie comme origine, après laquelle est menée l'étude. Le calcul de l'évolution du bassin au cours du temps est conduit à partir de l'état initial hypothétique du bassin à la date origine. Pour mener à bien cette étude cinématique directe, il est nécessaire de préciser différents types de paramètres dans le modèle :

- La configuration géométrique initiale du bassin est un important paramètre de la modélisation cinématique directe. Cette première géométrie, point de départ de la modélisation est généralement une configuration très simple du bassin. En effet, la modélisation est logiquement menée à partir d'une date origine qui est antérieure à la mise en place des structures plus ou moins complexes que l'on souhaite étudier. Les phases ultérieures de déformation, de sédimentation et d'érosion viennent compliquer par la suite la géométrie du bassin.
- De nombreux paramètres évolutifs doivent être spécifiés tout au long de l'histoire du bassin. Ils sont nécessaires de façon à déterminer précisément et de façon unique son évolution. Ces paramètres peuvent être regardés comme des conditions à la limite du modèle géométrique :
  - La quantité de déplacement affectant les écailles structurales le long des failles du bassin ainsi que le mécanisme de déformation affectant les sédiments sont les paramètres cinématiques essentiels de l'évolution tectonique.
  - La répartition spatiale et temporelle du matériel sédimenté à la topographie du bassin est un paramètre important qui contrôle la quantité de matériel sédimentaire entrant dans le système constitué par le modèle.

- L'intensité du phénomène d'érosion est également un paramètre essentiel du modèle. Il détermine la quantité de matériel sédimentaire sortant du système au cours de son évolution.
- Le taux de subsidence, affectant la position de la frontière basale du domaine de bassin étudié est aussi un paramètre majeur du modèle.
- La compaction subie par les matériaux sédimentaires au cours de leur enfouissement est réglée par la loi de comportement donnant l'évolution de la porosité des sédiments en fonction de la profondeur pour chaque lithologie.
- L'état actuel du bassin est l'état final de la modélisation cinématique. Cet état comporte lui-même bon nombre d'hypothèses. En effet, entre les points de donnée issus de l'observation et qui peuvent être considérés comme des points obligatoires il est nécessaire d'interpoler la géométrie des structures. Le contour des objets géologiques, corps sédimentaires ou structures tectoniques comporte une part d'incertitude.

Il convient d'utiliser tous les points de données issus de l'observation de l'état actuel du bassin pour caler précisément les différents paramètres quantitatifs associés aux hypothèses énoncées précédemment. La manière de procéder pour mener à bien l'étude cinématique en respectant parfaitement les données est une entreprise très délicate étant donné le grand nombre d'hypothèses entrant en ligne de compte. On ne connaît pas de procédure systématique fiable et rapide. On doit réaliser la modélisation d'un grand nombre d'études correspondant aux différents paramètres envisagés et comparer ensuite la qualité des résultats obtenus vis-à-vis des données réelles dont on dispose. L'influence individuelle des paramètres importants peut être estimée une à une en réalisant des essais de modélisation successifs, On tente alors de réduire les erreurs constatées sur les points de données en modifiant uniquement les paramètres étudiés. Toutefois, le fait que les influences des différents paramètres ne soient pas indépendantes les unes des autres complique singulièrement la tâche du géologue modélisateur. Il est alors indispensable pour mener à bien la modélisation, d'avoir une bonne expérience et un flair exercé pour déterminer a priori quels sont les paramètres importants et agir uniquement sur ceux-ci.

La modélisation rétrograde de la cinématique consiste au contraire à reconstruire l'état initial du bassin à partir de son état actuel qui peut être considéré comme bien connu. Cette connaissance est spécialement établie si les données concernant l'état actuel sont nombreuses et si une campagne sismique y a été menée révélant la géométrie de certaines structures profondes. Le calcul des différents stades géométriques du bassin sont menés en remontant le temps. La stratégie adoptée dans cette méthode consiste à partir de l'état déformé actuel et à retrancher successivement les déformations subies par les matériaux sédimentaires en place. A coté des déformations tectoniques, l'influence de la compaction peut être également progressivement éliminée en utilisant des méthodes de décompaction. Il convient de retirer par étapes successives les sédiments à l'affleurement de l'état courant du modèle et dans l'ordre inverse de leur dépôt. Il s'agit parallèlement à ce «deshabillage» d'estimer la décompaction résultante. L'objectif de ces opérations géométriques est de remettre progressivement à plat les sédiments profonds déformés en utilisant comme cible de la reconstruction le profil topographique du bassin.

## Chapitre 2 : Modélisation cinématique

L'objet de la modélisation cinématique des bassins sédimentaires est de reconstituer les étapes successives de la formation et de l'évolution des structures tectoniques présentes dans les bassins. A l'origine, cette approche n'a pas eu un caractère quantitatif. Il a fallu attendre que Goguel -1948- [21] et Ramsay -1967- [50] et -1987- [51] introduisent les notions de la théorie des déformations en géologie structurale pour que la modélisation cinématique réalise des progrès considérables. La prise en compte de mécanismes de déformation précis pour les matériaux géologiques a conduit à attribuer à l'approche cinématique un caractère prédictif, Goguel -1983- [22], Nicolas -1984- [45], Mc Clay -1992- [36] et Merle -1994- [39]. Le fait de faire correspondre théoriquement chaque contexte tectonique à un mode de déformation spécifique, permet d'aboutir à une évolution cinématique déterminée des structures présentes dans le bassin.

Les techniques de construction des «coupes équilibrées», Dahlstrom -1969- [10], ont été à l'origine du développement ultérieur des modèles cinématiques. L'équilibrage de coupes permet en appliquant des règles géométriques et cinématiques simples de proposer une géométrie cohérente des structures profondes de la section géologique, De Paor -1988- [13], Gratier -1988- [25], Moretti -1991- [43]. La géométrie profonde suggérée offre le double avantage d'être à la fois cohérente vis-à-vis des données géologiques et géophysiques et cohérente vis-à-vis d'une cinématique possible. Les progrès réalisés à partir de ces techniques ont permis le développement des méthodes cinématiques modernes qui sont utilisées dans des programmes informatiques, Geiser -1988- [20], Moretti -1989- [41], Endignoux -1990- [17], Howard -1993- [27], Hardy -1996- [26].

On expose tout d'abord dans ce chapitre le principe de la méthode d'équilibrage des coupes. Ensuite, après avoir décrit les règles et les caractéristiques essentielles de la modélisation cinématique en géologie des bassins sédimentaires, on présente des modèles classiques. On étudie d'abord deux modèles fondés sur des modes de déformation élémentaires, le cisaillement simple, puis la flexuration. On présente enfin trois modèles cinématiques récents. Tout d'abord, on examine le «Fault-bend-fold» de Suppe -1983- [60] qui a été utilisé dans différentes modélisations, Endignoux -1989- [15], Zoetemeijer -1992- [72], et sur lequel est fondé le logiciel THRUSTPACK. Enfin, on observe le modèle proposé par Walther -1989- [63] et -1990- [64], et celui développé par Contreras et Suter -1990- [8].

### 2.1 : Méthode des coupes équilibrées

Le terme de «Balanced Cross Section» a été introduit par Dahlstrom -1969- [10]. La traduction française de ce terme par «coupe équilibrée» a été proposée par Mugnier dans sa thèse -1984- [44]. Un exposé détaillé des fondements et des techniques de la méthode des «coupes équilibrées» a été présenté dans l'ouvrage collectif coordonné par Gratier -1988- [25].

On a souligné le fait, section 1.3 page 9, que l'extrapolation des structures profondes d'une coupe de bassin était un problème insuffisamment contraint. L'un des principaux intérêts de la méthode des «coupes équilibrées» est qu'en se basant sur quelques règles géométriques simples, il est possible de contraindre davantage ce problème.

L'idée de base de la méthode est la construction, parallèlement à la coupe du bassin au stade actuel, d'une seconde coupe, avant la déformation tectonique. Il convient de vérifier alors l'existence d'un chemin cinématique menant de la coupe non déformée initiale à la coupe actuelle. Toutefois, la méthode n'impose pas que l'on explicite précisément le chemin cinématique. Mais on vérifie tout de même quantitativement la crédibilité d'un chemin cinématique menant de l'état initial à l'état présent. Compte tenu des hypothèses géométriques qui précisent le mode de déformation adopté, des relations géométriques nécessaires sont déduites. Par exemple certaines quantités, comme les surfaces, doivent être conservées entre les coupes initiales et finales. On voit donc que la condition d'existence du chemin cinématique a d'importantes conséquences, elle introduit des impératifs géométriques qui sont autant de contraintes au sujet de la géométrie des structures profondes du bassin.

L'utilité de la méthode de construction des «coupes équilibrées» est donc d'éviter des incohérences concernant les structures tectoniques de la coupe actuelle du bassin. Des techniques récentes ont été développées à partir des concepts initiaux de la méthode, ainsi des logiciels de restauration de coupe, Geiser -1988- [20], Moretti -1989- [41] et -1991- [43], ont été réalisés. Ils consistent en l'implantation de quelques modèles élémentaires de transformation géométrique dans des outils interactifs. Le mode de transformation par bloc rigide est apparu le premier car il est le plus simple à mettre en oeuvre. Il s'agit de l'application à des blocs connexes de sédiments d'opérations géométriques non déformantes : translation et rotation. Ce premier modèle est particulièrement bien adapté pour l'interprétation structurale de zones tectoniques en extension où un matériau compétent surplombe un matériau ductile. Ensuite ont été développés les modèles maintenant classiques du cisaillement simple et du cisaillement par flexure qui produit un plissement isopaque ou un plissement isopaque en kink. Enfin, ont été développées des méthodes dites «libres» qui conservent ou non les surfaces et qui consistent en une déformation du matériau par une projection géométrique sur des lignes cibles. Ces outils de restauration servent à reconstituer le chemin cinématique en remontant le temps, partant de l'état présent, ils permettent de remonter à l'état initial. Il s'agit donc d'outils de modélisation cinématique rétrograde («backward»), voir section 1.4 page 12.

Il est à noter que même si le mode de déformation des sédiments est parfaitement précisé, la détermination des structures profondes dans l'état actuel à partir des seules données de surface peut demeurer un problème insuffisamment contraint. La solution du problème cinématique rétrograde n'est pas nécessairement unique, et on ne retient alors que la solution la plus crédible géologiquement.

## 2.2 : Principes de la modélisation cinématique directe 2D

A la fin des années 80, des modèles cinématiques informatiques ont été développés, Contreras & Suter -1990- [8], Endignoux -1990- [17], Hardy -1996- [26], Howard -1993- [27], Suppe -1983- [60], Waltham -1989- [63] et -1990- [64], Zoetemeijer -1992- [72]. Ces modèles et ces logiciels proposent la construction effective du chemin cinématique menant de l'état initial du bassin à l'état déformé actuel. Leur développement a été rendu possible grâce aux importantes avancées réalisées dans le domaine de l'informatique, à savoir l'accroissement des moyens de calcul et de la quantité d'information pouvant être traitée. De plus, les progrès accomplis à partir des notions initialement établies pour la construction de «coupes équilibrées» d'une part et concernant la théorie de la déformation introduite par Goguel -1948- [21] et Ramsay -1987- [51] d'autre part ont également été décisifs pour l'essor des modèles cinématiques. Ceux-ci représentent une amélioration significative dans le domaine de la géologie structurale dans la mesure où la construction effective du chemin cinématique dispense de la vérification de son existence comme dans les méthodes d'équilibrage de coupes. De plus, l'information géométrique relative aux stades successifs du bassin est alors disponible. Ce qui est indispensable lorsque l'on souhaite analyser l'évolution physico-chimique d'un bassin sédimentaire comme c'est le cas dans les modèles développés pour les besoins de l'exploration pétrolière.

Les méthodes cinématiques directes, voir section 1.4 page 11, qui permettent de déterminer l'évolution du bassin à partir de la géométrie de l'état initial appartiennent à deux grandes familles de méthodes. La détermination de la cinématique est toutefois toujours réalisée sous la forme du calcul d'une série d'états géométriques à des dates successives. Les deux familles de méthodes, à savoir les méthodes mécaniques et géométriques, diffèrent par la nature des hypothèses qui sont formulées.

L'approche mécanique consiste à attribuer aux matériaux sédimentaires du bassin des lois de comportement qui lient de façon univoque la déformation subie par le matériau aux contraintes exercées sur lui. Ainsi, la considération de la relation fondamentale de la dynamique, compte tenu des conditions aux limites du domaine d'étude, conduit à une évolution unique de la géométrie du bassin. Cependant une telle approche appliquée aux problèmes de géologie structurale comporte des difficultés importantes. Les incertitudes liées aux lois de comportement, à l'hétérogénéité des matériaux ainsi qu'à la quantification des conditions aux limites sont considérables. Ces incertitudes sont autant de facteurs qui nuisent grandement à l'utilisation d'une approche mécanique dans les contextes de bassins complexes. D'autre part, avec une telle approche, la quantité de calculs à mettre en oeuvre pour déterminer les déformations est considérable.

Au contraire, les méthodes cinématiques basées sur des principes géométriques sont plus simples et demandent moins de calculs. Ces méthodes nécessitent de fixer a priori le mécanisme de déformation mis en jeu. De la même façon que pour les méthodes d'équilibrage de coupes, dans les modèles cinématiques 2D, l'hypothèse que toute la matière présente initialement dans le domaine d'étude 2D s'y déforme et y demeure durant la modélisation est classique. Cette hypothèse revient à écrire la conservation de la matière pour chaque couche sédimentaire au cours des phases tectoniques. Connaissant le mode de déformation, il est alors aisé d'en déduire l'évolution géométrique 2D de la coupe du bassin. Le principal défaut de la famille des méthodes géométriques est qu'elle n'est pas géné-

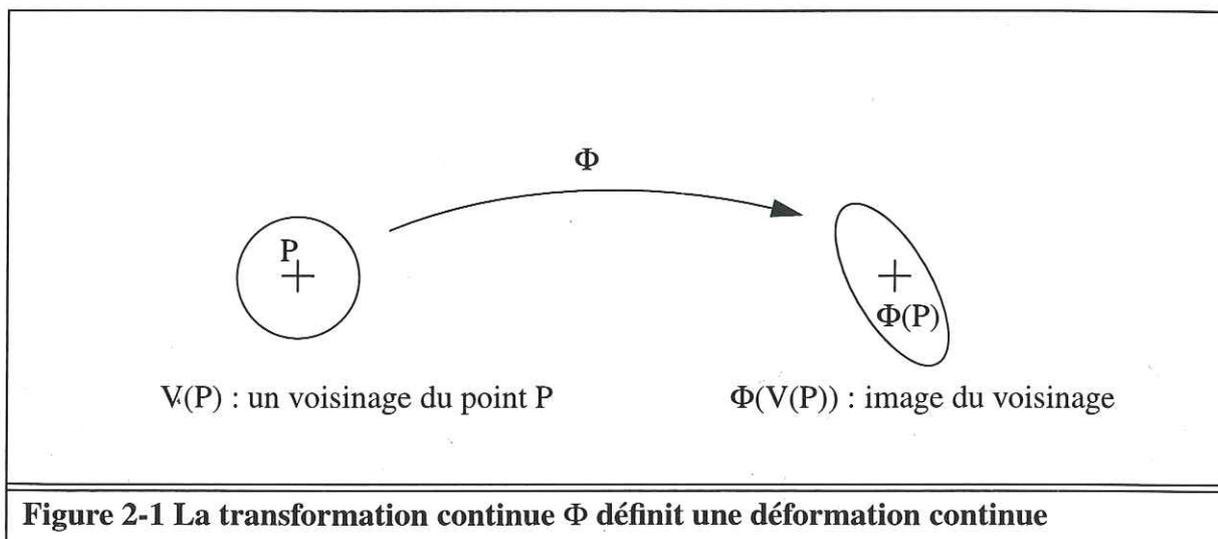
rale, elle repose en effet sur des hypothèses qui ne sont justifiées que dans des contextes tectoniques particuliers. Cependant, le mérite majeur des méthodes géométriques est leur simplicité par rapport aux méthodes mécaniques. En particulier, le nombre de paramètres est plus restreint pour une modélisation cinématique fondée sur des principes géométriques que pour une modélisation mécanique. Ainsi, il est plus facile de reproduire les structures tectoniques d'un exemple naturel à l'aide d'un modèle cinématique géométrique adapté au contexte tectonique que par une méthode mécanique qui est plus complexe. C'est la raison pour laquelle le modèle cinématique développé, FOLDIS, appartient à la famille des méthodes fondées sur des hypothèses géométriques.

On présente dans la suite de ce chapitre les principes généraux des méthodes cinématiques géométriques directes. Pour cela, il est utile de commencer par définir et distinguer les domaines du bassin où la déformation des sédiments est continue des domaines où elle est discontinue. On décrit ensuite les structures tectoniques simples de grande échelle qui existent dans les bassins sédimentaires, on analyse alors comment s'agencent les deux types de déformations continue et discontinue pour chacune de ces structures. Enfin, on examine et on formalise le problème cinématique fondamental de la transformation géométrique continue d'un domaine connexe élémentaire, une écaille tectonique. En particulier, on aborde la façon dont est gérée la déformation discontinue aux frontières de l'écaille. On distingue alors les différents types de conditions à la limite qui peuvent être appliqués à la frontière d'une écaille dans les méthodes géométriques. Une fois les principes et la formalisation des modèles cinématiques géométriques présentés on examine, selon ces principes, différentes méthodes cinématiques existantes.

### 2.2.1 : Notion de continuité de la déformation

Les déformations qui affectent les terrains géologiques peuvent être classées en deux grandes catégories de transformations suivant qu'elles préservent ou non la topologie des objets affectés, les déformations continues et discontinues.

- Les déformations continues

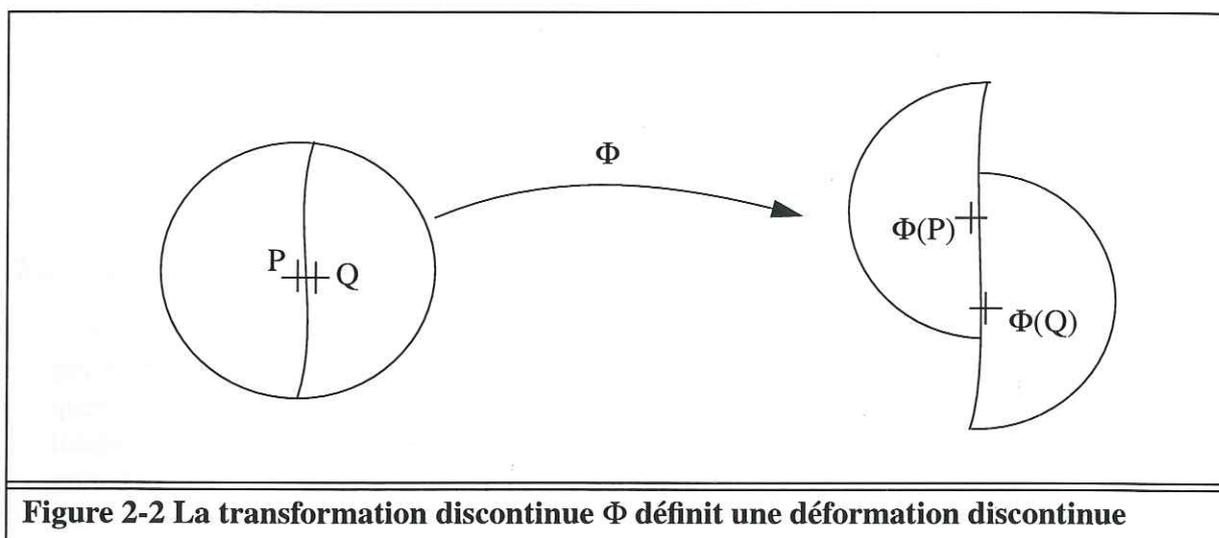


Au cours d'une déformation continue, la topologie des objets est conservée. On peut traduire de manière équivalente l'énoncé précédent en l'illustrant, une déformation continue transforme tout voisinage, par exemple une boule ouverte centrée en un point  $P$ , en un ensemble qui est lui-même un voisinage du point  $\Phi(P)$ , comme le montre la figure 2-1. Cette propriété est essentielle, car elle assure que la fonction mathématique  $\Phi$  qui sert à étudier la transformation géométrique décrivant la déformation fait partie de la classe des fonctions continues  $C^0$ .

- Les déformations discontinues

Ces déformations à la différence des précédentes modifient la topologie des objets déformés. En effet, de telles transformations modifient les voisinages des points matériels. On voit sur l'exemple de la figure 2-2, comment deux points voisins  $P$  et  $Q$  sont transformés en deux points qui ne le sont plus  $\Phi(P)$  et  $\Phi(Q)$ .

Le lieu des points pour lesquels la déformation n'est plus continue est appelé cassure, fracture ou faille suivant l'amplitude du saut caractérisant la discontinuité.



**Figure 2-2 La transformation discontinue  $\Phi$  définit une déformation discontinue**

Dans la nature, les déformations subies par les sédiments sont une combinaison des deux types continu et discontinu. Il existe dans les bassins des discontinuités majeures, de grande dimension, les failles. Leur extension spatiale peut dépasser plusieurs dizaines de kilomètres. Et leur jeu qui est le déplacement relatif des deux compartiments de part et d'autre de la surface de discontinuité, est également de grande échelle et peut excéder plusieurs kilomètres. Entre les failles majeures du bassin, la déformation des sédiments n'est pas nécessairement de caractère continu. En effet, à l'échelle locale de l'affleurement ou de l'échantillon, on observe dans les terrains fortement remaniés des évidences de déformations discontinues sous la forme de fractures. Toutefois, ces discontinuités sont de petite taille et n'entraînent que des remaniements locaux. Ainsi, pour une étude menée à l'échelle du bassin, il est raisonnable de négliger, pour simplifier, ces déformations discontinues de petite dimension. De sorte que la modélisation de la déformation des sédiments entre les grandes failles est classiquement réalisée de façon continue.

La déformation tectonique qui a été envisagée comme un processus physique n'est cependant pas le seul type de déformation à affecter les terrains géologiques. En effet, d'autres processus de nature chimique ou physico-chimique entrent en jeu. Par exemple, des changements de phase, ou des réactions chimiques, affectent certains minéraux constitutifs des sédiments. En plus des modifications de nature minéralogique et chimique qui touchent les sédiments, des remaniements géométriques accompagnent fréquemment ces phénomènes. Ainsi, le passage de certains minéraux dans une phase fluide, par exemple sous l'action de contraintes élevées, favorise le transport plus ou moins lointain d'une partie de la matière initialement présente dans les sédiments. De plus, même dans le cas où les minéraux transformés par des réactions chimiques restent en place, le bilan volumique des réactions chimiques n'est généralement pas nul, et des modifications géométriques accompagnent nécessairement ces transformations.

Il ressort de l'étude de ces processus physico-chimiques un caractère de grande complexité de ces phénomènes. Or, dans les parties superficielles du bassin qui font l'objet de la modélisation, c'est à dire pour les premiers kilomètres de sédiments, les transformations physico-chimiques des sédiments sont limitées par rapport aux zones plus profondes du bassin. Si bien que même si des changements minéralogiques existent dans la partie superficielle de bassin modélisée, pour simplifier la modélisation, on n'étudie pas en détail ces processus et on néglige leur influence géométrique à l'échelle d'étude du bassin. Ainsi, il apparaît raisonnable de modéliser la déformation des séries sédimentaires du bassin selon un mode continu, de manière à négliger et moyenniser les irrégularités géométriques de processus complexes qui sont discontinus dans le détail.

### **2.2.2 : Les structures tectoniques simples à l'échelle du bassin**

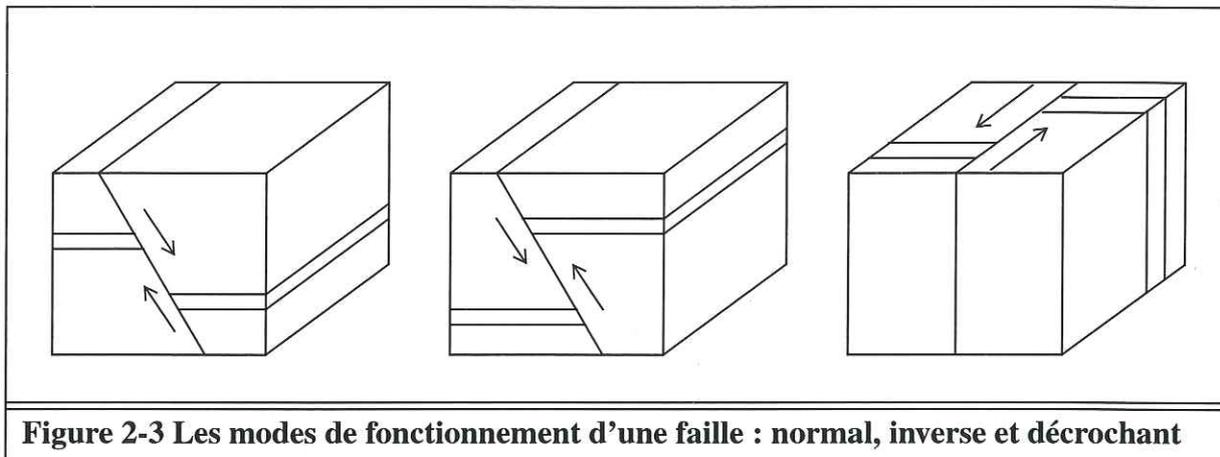
Il est possible de distinguer trois contextes tectoniques différents, la distension, la compression et le décrochement qui conduisent à la formation de structures tectoniques spécifiques. Les situations distensives et compressives se caractérisent par un changement de longueur du bassin dans une direction particulière. On a affaire respectivement à un allongement et un raccourcissement dans la direction déformée principale du bassin. Le régime tectonique décrochant est différent, il s'agit du déplacement relatif purement horizontal de deux compartiments du bassin, il n'y a donc pas dans cette situation de composante verticale du déplacement relatif d'un bloc par rapport à l'autre.

Chacun des trois contextes tectoniques est associé à des failles de géométrie particulière et à un fonctionnement tectonique spécifique de ces discontinuités. Le régime tectonique en distension est associé à des failles normales, la compression est associée à des failles inverses et le décrochement est associé à des failles décrochantes, voir la figure 2-3.

Ayant caractérisé les différents types de failles en fonction du régime tectonique, on examine les structures tectoniques engendrées par déformation continue entre les failles majeures, c'est à dire les plis. Il s'agit de la déformation de couches sédimentaires généralement initialement planes qui acquièrent une géométrie plissée.

Afin d'étudier les différents types de plis et leur génération, il est utile d'observer les interactions classiques qui existent entre les plis et les failles. Dans le contexte d'une faille chevauchante, on caractérise trois principaux types de plis, le pli de rampe, le pli de propa-

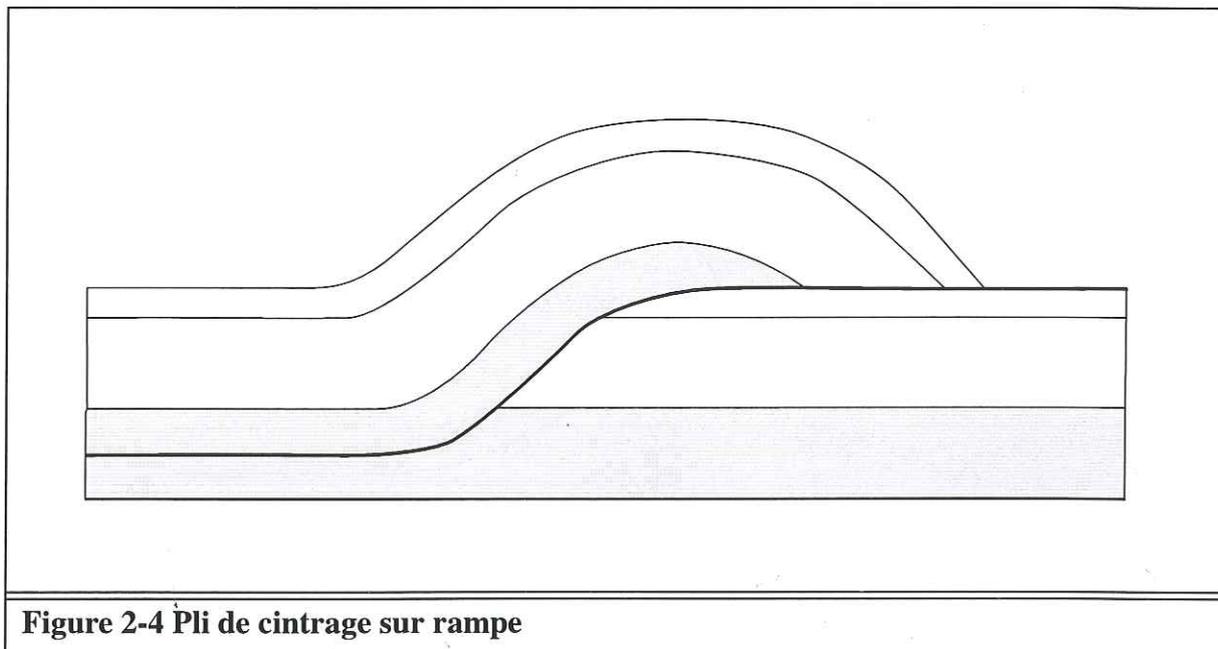
gation de faille et le pli de détachement.



**a) Le pli de cintrage sur rampe.**

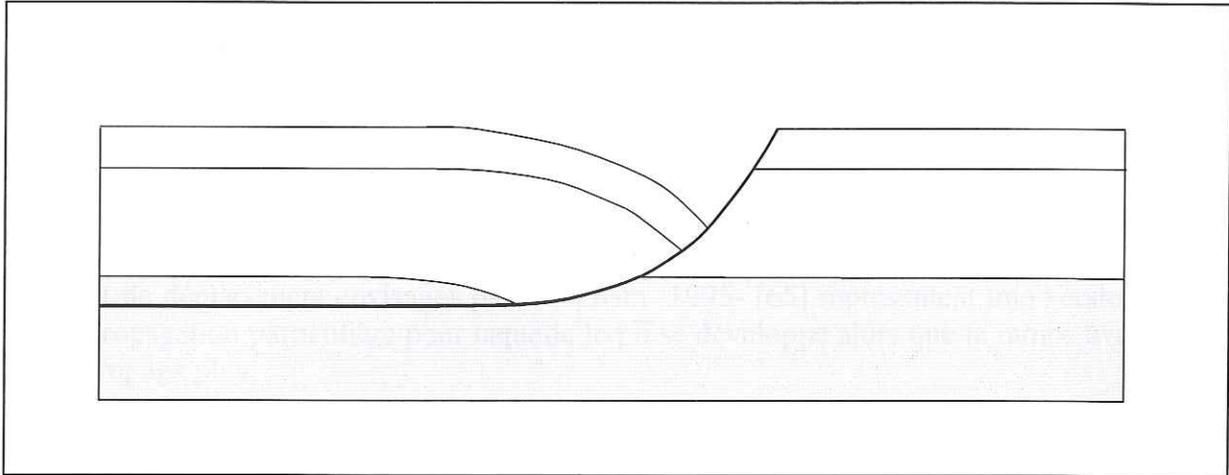
Il se développe à partir d'une faille préexistante qui à partir d'un niveau de décollement basal, quasiment horizontal, rejoint la surface topographique par une rampe. Dans cette situation, la discontinuité que représente la faille sépare complètement deux compartiments ou écaïlles tectoniques.

L'écaïlle chevauchante, ou compartiment allochtone (hanging-wall) est le lieu de déformations internes, de caractère continu dans la modélisation. L'écaïlle basale, ou compartiment autochtone (foot-wall) n'est pas déformée lors du fonctionnement de la faille.



Il est à noter que le même type d'interaction entre faille et pli peut être observé dans un régime tectonique en distension. Ainsi, de la même façon, une faille normale recoupe la topographie et sépare complètement deux écaïlles tectoniques distinctes. L'écaïlle tectoni-

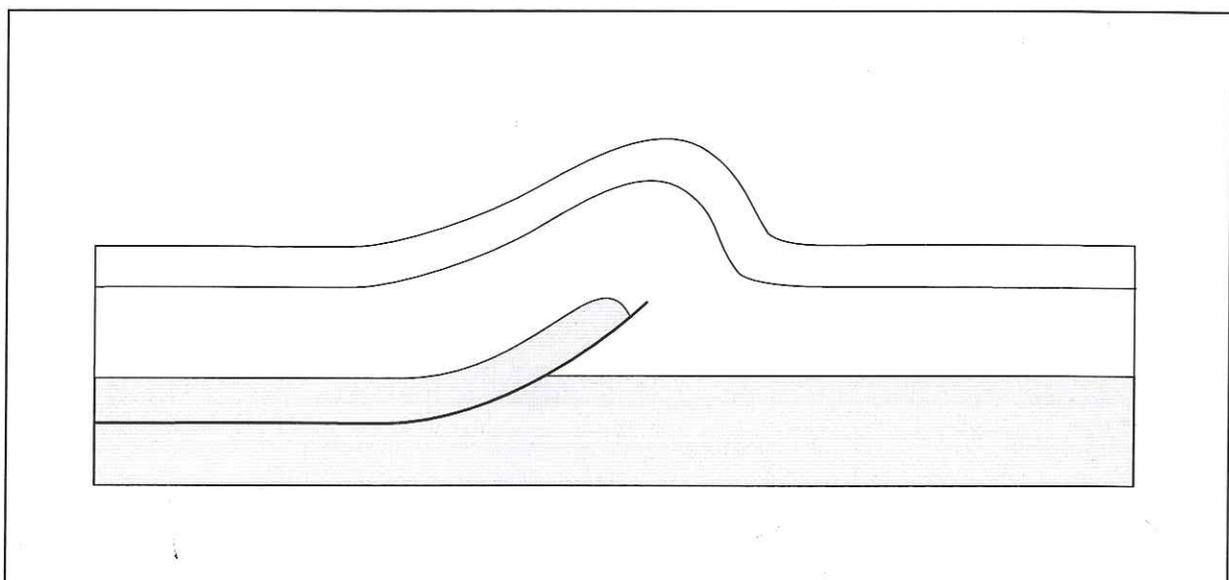
que supérieure (hanging-wall) est déformée, il se développe une structure plissée en roll-over au fur et à mesure que joue la faille, voir la figure 2-5. Au contraire, l'écaïlle tectonique inférieure (foot-wall) n'est pas déformée lors du jeu de la faille normale.



**Figure 2-5 Développement d'une structure en roll-over sur une faille normale listrique**

#### **b) Le pli de propagation de faille**

Il se distingue du pli de rampe car il se développe simultanément à la formation de la faille au sein des sédiments du bassin. La géométrie de la faille est particulière, il s'agit d'une faille aveugle, qui ne recoupe pas la topographie. Dans ce cas, et contrairement au précédent, la faille ne délimite pas deux écaïlles tectoniques distinctes. Sur une coupe de bassin, ce type de faille possède un point de terminaison au sein des sédiments.



**Figure 2-6 Pli par propagation de faille**

Le point terminal de la faille est particulier, il réalise la transition entre un domaine où la déformation est continue, dans les sédiments, et un domaine où la déformation est disconti-

nue, le long de la faille. C'est pourquoi le jeu de la faille est nécessairement nul au niveau du point terminal de la faille de propagation.

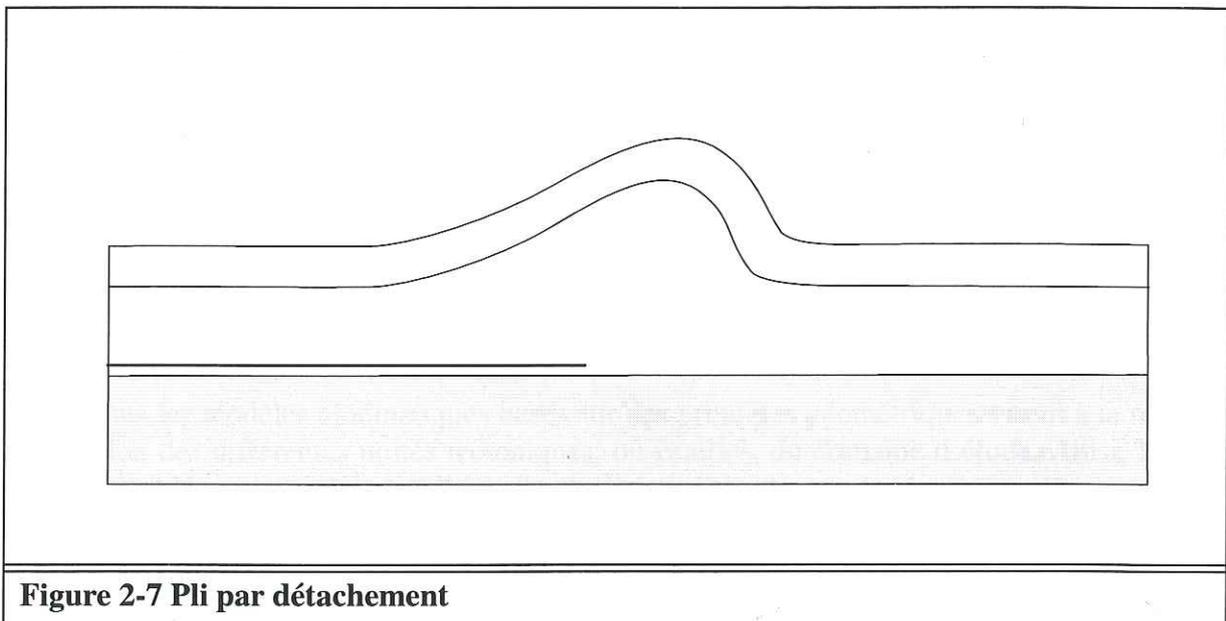
Ce type de pli, se développant simultanément à la propagation de la faille est vraiment général, et on peut voir le pli de rampe comme un cas particulier d'un pli de propagation. En effet, pour un pli de rampe, il y a une première phase de mise en place de la faille pour laquelle la vitesse de propagation de la faille n'est pas nulle alors que la vitesse de formation du pli est nulle. Une seconde phase correspond à la configuration inverse des vitesses, la faille ayant atteint la topographie ne se propage plus pendant que le pli se développe.

Il est possible d'envisager de nombreuses variantes concernant les développements successifs ou simultanés à des vitesses différentes de la rampe et du pli. Ainsi, les plis à gradient de déplacement envisagés par Wickham -1995- [65] représentent une version de pli de propagation particulière pour laquelle le pli se développe alors que la rampe aveugle ne se propage plus.

Les plis composites décrits par Chester -1990- [6] sont une combinaison des deux modes de développement de plis précédents. Le déplacement du compartiment allochtone au niveau de la partie basale de la rampe engendre un pli de cintrage sur rampe, alors que la partie supérieure de la rampe se propage et engendre un pli de propagation.

### c ) Les plis par détachement

Ces plis sont vraiment différents des précédents car ils ne sont pas associés à une rampe. Ils sont associés à un décollement basal épais et ductile, voir la figure 2-7.



**Figure 2-7 Pli par détachement**

Les plis par détachement sont aussi qualifiés de plis disharmoniques.

Le pli de propagation peut être considéré comme étant un pli de caractère très général, ainsi on peut également envisager le pli de détachement comme un cas particulier de pli de propagation. Simplement, dans ce cas, la propagation de la faille est arrêtée très tôt, avant la

formation de la rampe, et le pli se développe alors que la vitesse de croissance de la faille est nulle. Cependant cette généralisation n'est pas justifiée. En effet, contrairement aux plis précédents, il n'y a pas de déterminisme entre les caractéristiques du pli de détachement et la forme du décollement. De nombreux comportements de charnière et de flancs sont possibles menant à des géométries de plis symétriques ou non. L'absence de relation univoque entre les géométries de surface et en profondeur a rendu les différentes tentatives de modélisation directe des plis disharmoniques sans intérêt pratique.

Le régime tectonique décrochant n'est généralement pas, pour sa part, lié à une déformation notable des ensembles sédimentaires lorsque la faille décrochante est plane et verticale. Les deux compartiments du bassin font simplement l'objet d'un déplacement relatif quasiment sans déformation interne.

Ces différentes structures simples, associations de failles et de plis, sont caractéristiques de la tectonique des bassins sédimentaires. Dans des bassins réels complexes, ces formes simples sont associées entre elles et créent des structures tectoniques superposées et compliquées. En particulier, on rencontre des empilements de plusieurs écailles simples formant des structures imbriquées ou super-structures. Les systèmes de failles peuvent être compliqués du fait de branchements possibles de failles sur un ou plusieurs niveaux de décollements. De plus, il existe souvent des failles secondaires conjuguées, dans des directions antagonistes par rapport aux failles principales. Ces failles antithétiques viennent aussi compliquer la configuration des écailles du bassin aussi bien dans les régimes tectoniques en compression qu'en extension.

### 2.2.3 : La déformation continue d'une écaille tectonique

Dans un modèle cinématique 2D, les écailles tectoniques sont les domaines connexes à deux dimensions qui sont limités par des failles. A l'intérieur de ces écailles, la déformation des matériaux sédimentaires est modélisée comme continue. Les méthodes cinématiques basées sur des principes mécaniques sont telles que la déformation calculée dépend de la nature des matériaux présents dans le domaine d'étude par le biais de la loi de comportement attribuée à chaque matériau. Au contraire, dans les modèles cinématiques basés sur des principes géométriques, les déformations ne dépendent pas directement de la nature du matériau. C'est pourquoi, seules interviennent dans le calcul des déformations des considérations purement géométriques.

Tous les modèles cinématiques basés sur des principes géométriques visent à la reconstruction des différentes unités tectoniques, ou écailles, du domaine d'étude. Ainsi, le problème cinématique global à l'échelle de l'ensemble du bassin étudié se décompose en autant de sous-problèmes géométriques de déformation qu'il y a d'écailles tectoniques.

On considère ainsi le problème géométrique fondamental de la déformation d'une écaille tectonique  $E$ , domaine connexe à deux dimensions et de contour fermé  $\partial E$ . D'une façon générale, il est possible de formaliser cette étude en appelant  $\Phi_t()$  la transformation géométrique que subit l'écaille  $E$ , le paramètre  $t$  représente la date à laquelle l'écaille déformée est considérée. D'après le caractère continu de la déformation géométrique associée à la transformation  $\Phi_t()$ , la nature topologique de l'écaille  $E$  est invariante au cours du temps. On en déduit en particulier que le contour de la transformée de l'écaille :  $\partial(\Phi_t(E))$

coïncide avec le transformé du contour de l'écaïlle initiale :  $\Phi_t(\partial E)$ .

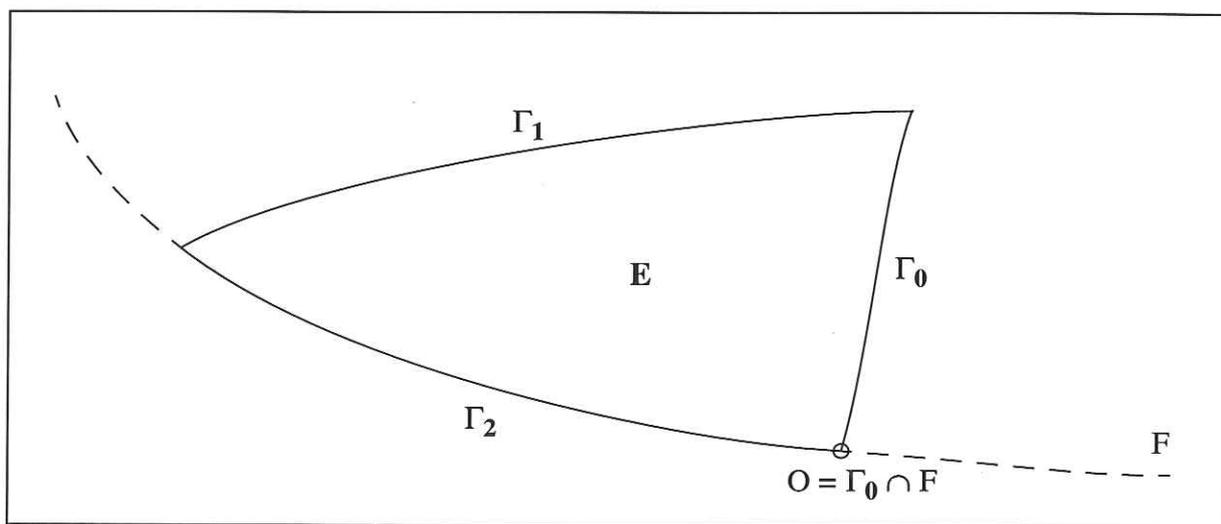
Le problème est résolu par la détermination de la fonction  $\Phi_t()$  qui permet de connaître la géométrie déformée de l'écaïlle E, à savoir  $\Phi_t(E)$ .

Les données du problème géométrique sont :

- la géométrie de l'écaïlle initiale E.
- des conditions à la limite concernant les contours  $\partial E$  et  $\partial(\Phi_t(E))$ .

Le contour  $\partial E = \Gamma$ , de l'écaïlle tectonique E qui repose sur la faille F, peut être décomposé en trois parties disjointes comme indiqué sur la figure 2-8.

$$\partial E = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$



**Figure 2-8** Frontière  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  de l'écaïlle E limitée par une faille F

La décomposition de la frontière  $\Gamma : (\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2)$  de l'écaïlle E dépend des conditions à la limite du problème cinématique.

- La transformée de la frontière  $\Gamma_0$  par la fonction  $\Phi_t()$  est directement donnée par les conditions à la limite. La partie de frontière  $\Phi_t(\Gamma_0)$  est imposée par le modélisateur qui déplace et déforme à volonté la frontière  $\Gamma_0$ .
- La transformée de la frontière  $\Gamma_1$  par la fonction  $\Phi_t()$  est déterminée par la résolution du problème cinématique et le calcul de la transformation  $\Phi_t()$ . Il s'agit d'un bord libre de l'écaïlle E qui n'est pas fixé de façon immédiate par les conditions à la limite.
- La frontière  $\Gamma_2$  est en coïncidence avec la faille F dans l'état initial de l'écaïlle E. Sa transformée par la fonction continue  $\Phi_t()$  est telle qu'elle reste en coïncidence avec la faille dans la configuration déformée. La condition à la limite sur la frontière  $\Gamma_2$  est donc celle d'un glissement sur le support constitué par la faille F.

On appelle  $O$  le point commun des frontières  $\Gamma_0$  (bord imposé) et  $\Gamma_2$  (coïncidant avec la faille), le transformé de ce point est noté :  $o = \Phi_t(O)$ . Il est à noter que puisque le point  $O$  appartient à la frontière  $\Gamma_0$ , la position du point  $o = \Phi_t(O)$  est connue par la donnée des conditions à la limite.

Quel que soit le modèle cinématique géométrique adopté, il est toujours possible de décomposer la frontière  $\Gamma$  de l'écaïlle  $E$  selon les trois types de frontière indiqués. La frontière  $\Gamma_2$  qui est en coïncidence avec la faille est toujours présente dans le contour de l'écaïlle. Suivant le mode de déformation adopté dans le modèle cinématique et suivant la configuration géométrique particulière de l'écaïlle  $E$ , les deux types de frontière  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  ont des importances respectives qui peuvent varier. Une de ces frontières peut même être absente ou réduite à un unique point.

D'une façon générale, le problème de la détermination de la cinématique est celui de la caractérisation à chaque date  $t$  de la transformation continue  $\Phi_t(\cdot)$ . Plus simplement, on s'intéresse à cette caractérisation à une date  $t$  quelconque et on omet l'indice  $t$  dans les notations par la suite.

Le problème est donc de construire sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^2$ , qui correspond à l'écaïlle  $E$ , la fonction vectorielle  $\Phi(\cdot)$  opérant de  $\Omega$  dans  $\mathfrak{R}^2$  et présentant la propriété d'être continue et de satisfaire aux conditions à la limite. La fonction  $\Phi(\cdot)$  fournit les nouvelles coordonnées  $(x, y)$  dans l'état déformé du point  $(X, Y)$  de l'état initial.

$$\Phi(X, Y) = \begin{bmatrix} x(X, Y) \\ y(X, Y) \end{bmatrix}$$

On peut imposer suivant le mode de déformation choisi que la fonction vectorielle  $\Phi(\cdot)$  en plus d'être continue, de classe  $C^0$  sur le domaine  $\Omega$  soit également continûment différentiable, de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ , son gradient est alors :

$$\nabla \Phi(X, Y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X}(X, Y) & \frac{\partial x}{\partial Y}(X, Y) \\ \frac{\partial y}{\partial X}(X, Y) & \frac{\partial y}{\partial Y}(X, Y) \end{bmatrix}$$

Plus simplement on note :  $\nabla \Phi = \begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix}$

La différentielle de la fonction vectorielle  $\Phi$  est :  $d\Phi = \nabla \Phi \begin{bmatrix} dX \\ dY \end{bmatrix}$

Le concept de déformation entre un état initial et un état final retient le changement de forme entre les deux états. C'est à dire ce en quoi la transformation géométrique  $\Phi(\cdot)$  qui fait passer de l'état initial à l'état déformé diffère d'une isométrie directe, c'est à dire une translation ou rotation. L'analyse des déformations a donc pour objet l'étude de la fonction

vectorielle  $\Phi()$ , et plus spécialement l'étude de son gradient  $\nabla\Phi$ .

Lorsque la déformation est la même pour tous les points du milieu continu étudié, on parle de déformation homogène, et dans le cas contraire, on parle de déformation hétérogène.

Différents modèles cinématiques adoptent des principes géométriques simples, et sont fondés sur un mode de déformation élémentaire. Par exemple, il est commode d'adopter comme mode de déformation, le cisaillement simple dans une direction particulière fixée a priori. Ce mode de déformation conduit à une détermination de la cinématique par des calculs très simples. D'autres modèles sont fondés sur des mécanismes idéaux ou observés dans des plis naturels. Ainsi, les modèles de plissement par flexion, ainsi que le modèle de Suppe s'appuient sur un mode de déformation par glissement selon la direction stratigraphique avec conservation de l'épaisseur des couches, ils conduisent à la formation de plis isopaques.

## 2.3 : Cinématique fondée sur le mécanisme du cisaillement simple (simple shear)

On analyse le mode de déformation élémentaire du cisaillement simple dans une direction particulière ainsi que le modèle cinématique qui est fondé sur ce mode de déformation. Après avoir défini rigoureusement le mode de déformation, on étudie les propriétés géométriques de la transformation. Il ne s'agit pas d'un mécanisme homogène pour tout le domaine car l'intensité de la déformation varie d'un point à l'autre. Enfin on examine le type de conditions à la limite qu'il convient de fournir pour que le problème cinématique soit mathématiquement bien posé.

### 2.3.1 : Définition du mécanisme du cisaillement simple.

Le mécanisme de déformation par cisaillement simple dans la direction définie par l'angle  $\alpha$  est caractérisé par les deux propriétés suivantes qui se traduisent par une relation faisant intervenir le gradient de la fonction  $\Phi$  :

1 / La déformation d'un domaine infinitésimal autour d'un point  $(X, Y)$  quelconque est isosurfacique, ce qui est équivalent à la proposition :

$$\forall (X, Y) \in \Omega, \det(\nabla\Phi(X, Y)) = 1$$

Pour la justification de la formule, voir annexe section 5.4 page 201.

2 / D'autre part, le transformé d'un vecteur matériel infinitésimal dans la direction définie par l'angle  $\alpha$  est un vecteur matériel identique à lui-même :

$$\forall (X, Y) \in \Omega, \nabla\Phi(X, Y) \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

Pour la justification de la formule, voir annexe section 5.3 page 200.

### 2.3.2 : Etude des propriétés de la transformation $\Phi$ .

On s'attache dans ce paragraphe à expliciter la forme de la transformation géométrique  $\Phi$ . Il s'agit de définir la transformation géométrique  $\Phi$  de manière unique à partir de la définition du mode de déformation et de conditions à la limite bien choisies sur le contour  $\Gamma$  de l'écaille  $E$ .

Ce problème géométrique est équivalent à la résolution du système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{cases} x_X \cos(\alpha) + x_Y \sin(\alpha) = \cos(\alpha) & (1) \\ y_X \cos(\alpha) + y_Y \sin(\alpha) = \sin(\alpha) & (2) \\ x_X y_Y - x_Y y_X = 1 & (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles est menée en annexe section 6 page 204, grâce à la méthode des caractéristiques [32].

La frontière  $\Gamma_2$  est paramétrée par le couple de fonctions :  $(X_{\Gamma_2}(v), Y_{\Gamma_2}(v))$  avec la définition suivante du paramètre  $v$  :

$$v(X, Y) = (X - X_{\Gamma_2}(0)) \sin(\alpha) - (Y - Y_{\Gamma_2}(0)) \cos(\alpha)$$

$$O = (X_{\Gamma_2}(0), Y_{\Gamma_2}(0))$$

La frontière  $\Phi(\Gamma_2)$  est paramétrée par le couple de fonctions :  $(x_{\Gamma_2}(w), y_{\Gamma_2}(w))$  avec la définition suivante du paramètre  $w$  :

$$w(x, y) = (x - x_{\Gamma_2}(0)) \sin(\alpha) - (y - y_{\Gamma_2}(0)) \cos(\alpha)$$

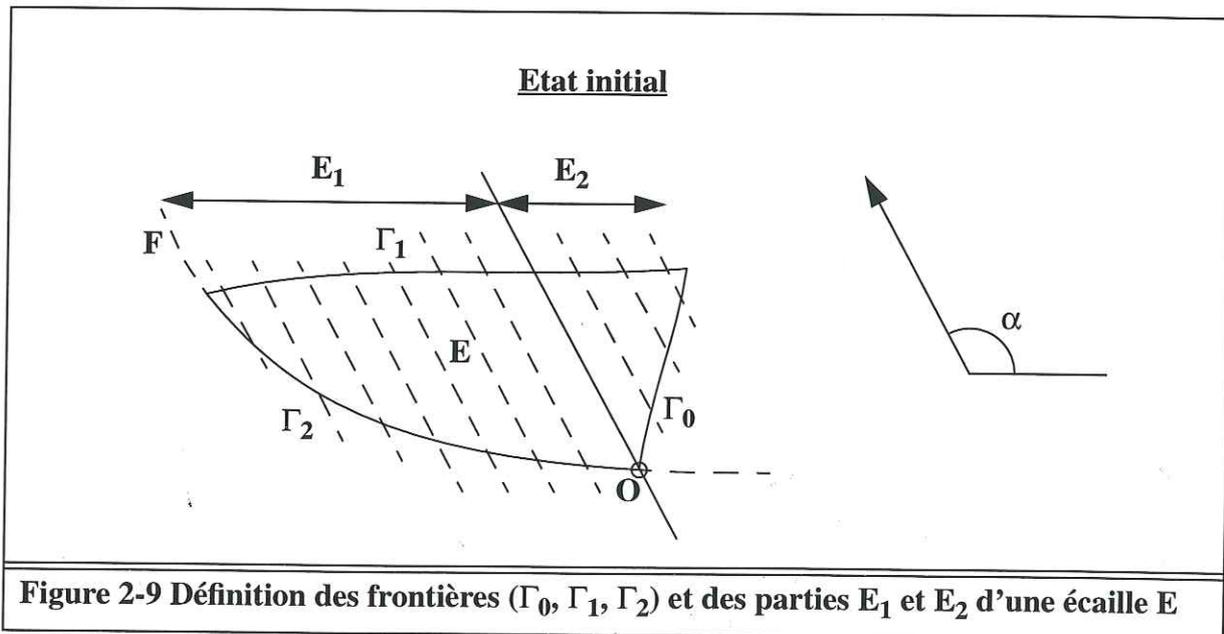
$$o = (x_{\Gamma_2}(0), y_{\Gamma_2}(0))$$

On obtient les composantes  $(x, y)$  de la transformation  $\Phi$  :

$$\begin{cases} x(X, Y) = x_{\Gamma_2}(v(X, Y)) + X - X_{\Gamma_2}(v(X, Y)) \\ y(X, Y) = y_{\Gamma_2}(v(X, Y)) + Y - Y_{\Gamma_2}(v(X, Y)) \end{cases}$$

### 2.3.3 : Discussion concernant les conditions à la limite du problème cinématique

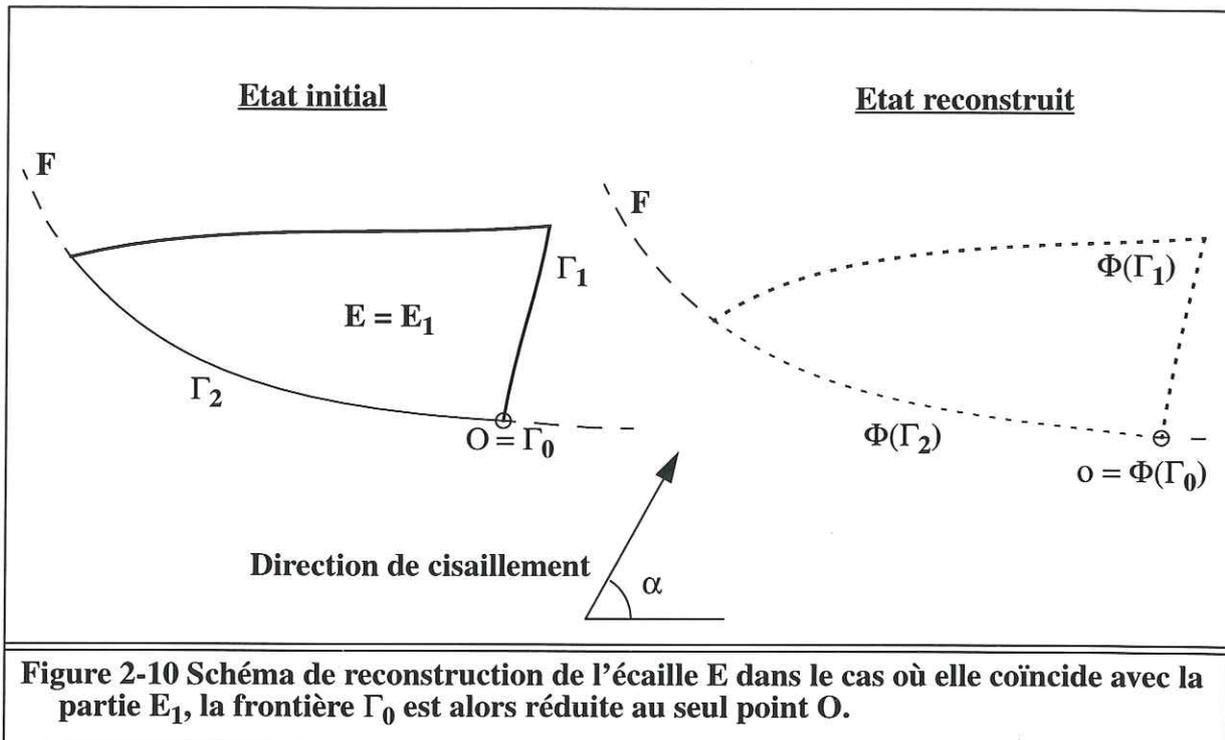
Dans le problème que l'on a analysé, les points  $(X, Y)$  de l'écaille  $E$  qui ont été reconstruits sont portés par des droites caractéristiques (dont la direction est définie par l'angle  $\alpha$ ) qui recoupent le bord  $\Gamma_2$  de l'écaille (en coïncidence avec la faille  $F$ ).



Cependant une telle configuration n'est pas générale comme le montre la figure 2-9, il

convient donc de distinguer les parties  $E_1$  et  $E_2$  de l'écaille  $E$ . La partie  $E_1$  correspond aux points de l'écaille qui sont portés par une droite caractéristique recoupant le bord  $\Gamma_2$  de l'écaille. La partie  $E_2$  est simplement la partie complémentaire de la partie  $E_1$ .

Si la configuration de l'écaille  $E$  est telle que la partie  $E_2$  soit vide, il est facile de reconstruire la totalité de l'écaille grâce à la démarche précédente. Dans une telle configuration, la frontière  $\Gamma_0$  est réduite au point  $O$  comme il est indiqué sur la figure 2-10.



**Figure 2-10** Schéma de reconstruction de l'écaille  $E$  dans le cas où elle coïncide avec la partie  $E_1$ , la frontière  $\Gamma_0$  est alors réduite au seul point  $O$ .

La façon dont est reconstruite la partie  $E_1$  de l'écaille, à partir de la connaissance de la géométrie de la faille  $F$  et du déplacement du point  $O$  de la frontière  $\Gamma_0$  suggère d'opérer une reconstruction analogue pour la partie  $E_2$ . L'information indispensable à la reconstruction de la partie  $E_2$  provient nécessairement de la condition à la limite indiquant le déplacement de la frontière  $\Gamma_0$ . Ainsi, il est nécessaire que les droites caractéristiques traversant la partie  $E_2$  recoupent une seule fois la frontière  $\Gamma_0$ . Pour que la reconstruction de la partie  $E_2$  soit possible, il convient donc de définir sur le contour de l'écaille  $E$  la frontière  $\Gamma_0$  telle que chaque droite caractéristique de la partie  $E_2$  la recoupe une seule fois.

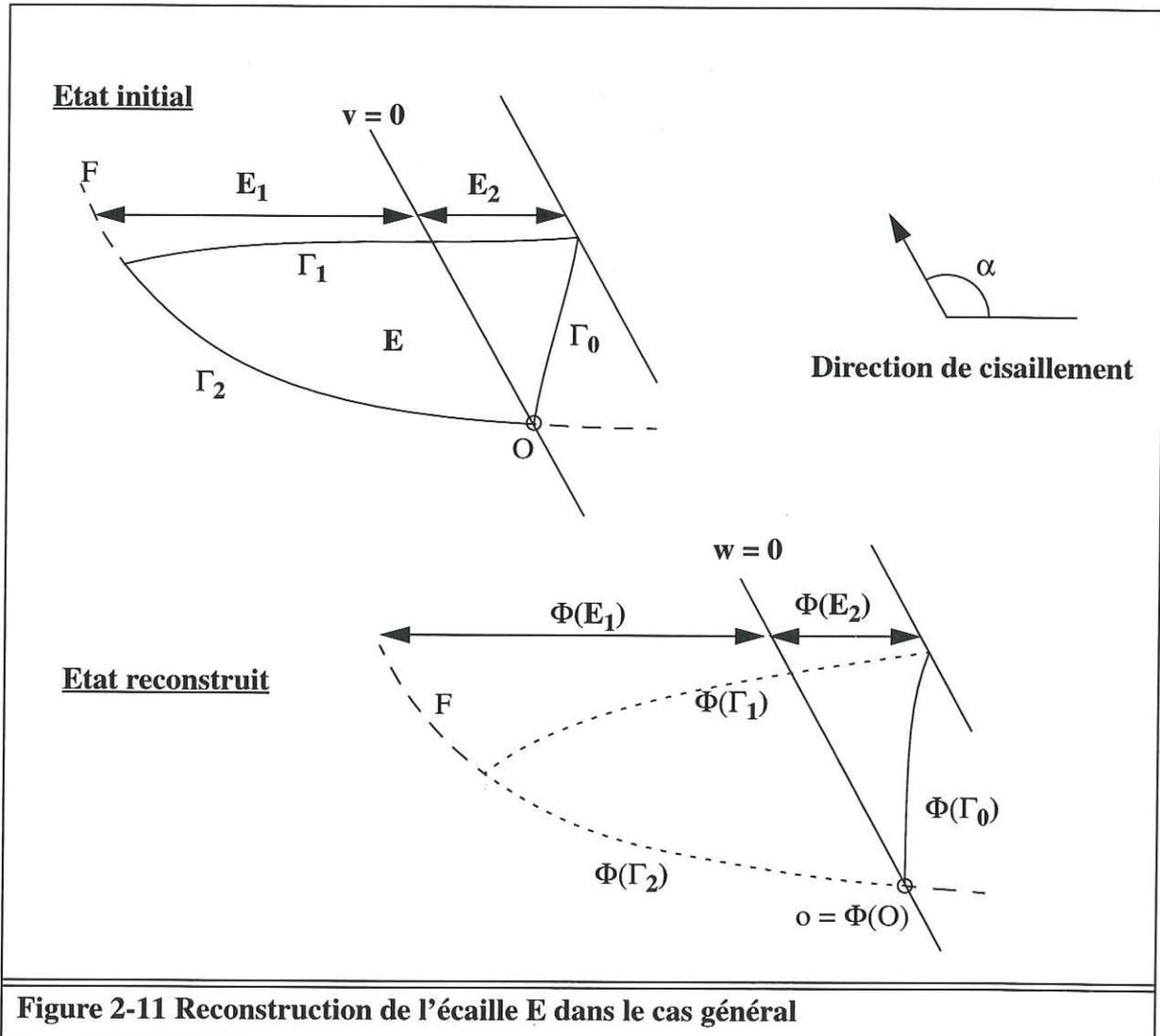
Comme chaque point de la frontière  $\Gamma_0$  définit un paramètre  $v$  différent, il est possible de paramétrer la frontière  $\Gamma_0$  à l'aide du paramètre  $v$  :  $(X_{\Gamma_0}(v), Y_{\Gamma_0}(v))$ . Le point origine du paramétrage  $(X_{\Gamma_0}(0), Y_{\Gamma_0}(0))$  est toujours le même point  $O$ .

D'une façon analogue au raisonnement de l'annexe section 6 page 206, on établit en introduisant une fonction  $f()$ , et en remarquant que le transformé du point de paramètre  $v$   $(X_{\Gamma_0}(v), Y_{\Gamma_0}(v))$  est nécessairement le point :

$$(x_{\Gamma_0}(f(v)), y_{\Gamma_0}(f(v))) = \Phi(X_{\Gamma_0}(v), Y_{\Gamma_0}(v))$$

On montre comme à l'annexe section 6 page 207 que la fonction  $f()$  est l'identité. Il est alors nécessaire pour que la reconstruction soit possible que la transformée de la frontière  $\Gamma_0$  vérifie en tout point :

$$\forall v, (x_{\Gamma_0}(v), y_{\Gamma_0}(v)) = \Phi(X_{\Gamma_0}(v), Y_{\Gamma_0}(v))$$



**Figure 2-11 Reconstruction de l'écaille E dans le cas général**

Ce qui revient à dire que chaque point de paramètre  $v$  de la frontière  $\Gamma_0$  est nécessairement transformé par la fonction  $\Phi$  en un point de la frontière  $\Phi(\Gamma_0)$  dont le paramètre  $w$  est égal à  $v$ . Cette relation constitue une condition nécessaire qui doit être vérifiée par la frontière  $\Gamma_0$  et sa transformée  $\Phi(\Gamma_0)$ .

Les composantes de la fonction  $\Phi$  pour les points de l'écaille  $E_2$  sont alors :

$$\begin{cases} x(X, Y) = x_{\Gamma_0}(v(X, Y)) + X - X_{\Gamma_0}(v(X, Y)) \\ y(X, Y) = y_{\Gamma_0}(v(X, Y)) + Y - Y_{\Gamma_0}(v(X, Y)) \end{cases}$$

En conclusion de cette étude, on précise que la fonction  $\Phi$ , définissant la transformation géométrique reposant sur le mode de déformation du cisaillement simple, peut être obtenue de façon rigoureusement exacte. Il n'est en effet pas nécessaire d'avoir recours à une méthode numérique de résolution. Les conditions à la limite nécessaires pour que le problème soit mathématiquement bien posé dépendent de la configuration géométrique de l'écaille ainsi que de la direction du cisaillement définie par l'angle  $\alpha$ . En effet, suivant les configurations, la frontière  $\Gamma_0$  peut être réduite à un unique point ou au contraire peut représenter une partie de longueur non nulle du contour  $\Gamma$ .

La justification de l'emploi du mode de déformation du cisaillement simple selon une direction pour déformer une écaille tectonique entière dans un bassin n'est pas nécessairement établie. En effet, il n'y a pas de raison a priori pour que la déformation se produise selon la même direction pour l'ensemble de l'écaille tectonique.

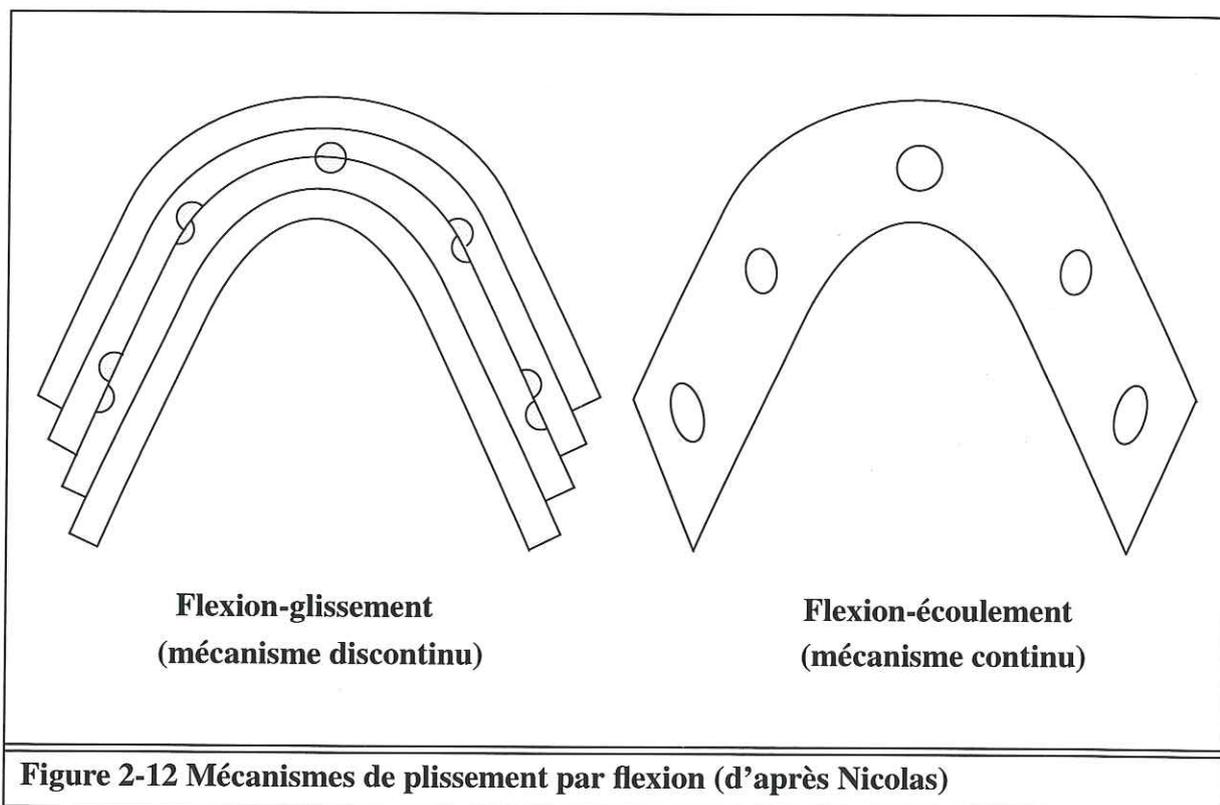
Ce mode de déformation est tout de même souvent utilisé par les géologues pour modéliser une cinématique dans le contexte tectonique d'une extension. Une des raisons de cet emploi est la simplicité du modèle, il ne nécessite en effet pas une grosse quantité de calculs, comme le prouve l'étude que l'on a menée. De plus, dans un régime extensif, les résultats géométriques obtenus apparaissent souvent géologiquement réalistes, spécialement parce qu'on dispose d'un degré de liberté et qu'il est possible d'ajuster la géométrie reconstruite du roll-over en choisissant un paramètre  $\alpha$  adapté. Toutefois, ce mode de déformation n'est pas mécaniquement fondé, notamment dans le cas où la géométrie de la faille est listrique. En effet, comme la direction de la faille n'est pas constante, le mécanisme de cisaillement selon la direction constante  $\alpha$  ne peut être justifié comme un cisaillement dans la direction antithétique à la faille.

Un mode de déformation plus justifié mécaniquement et géologiquement semble être celui de la déformation par flexion (flexural slip). En effet, dans ce cas, la direction du glissement coïncide avec la direction stratigraphique. Il paraît tout à fait logique de privilégier les discontinuités lithologiques, qui sont des zones de faiblesse mécanique, comme la direction du cisaillement à l'intérieur des sédiments.

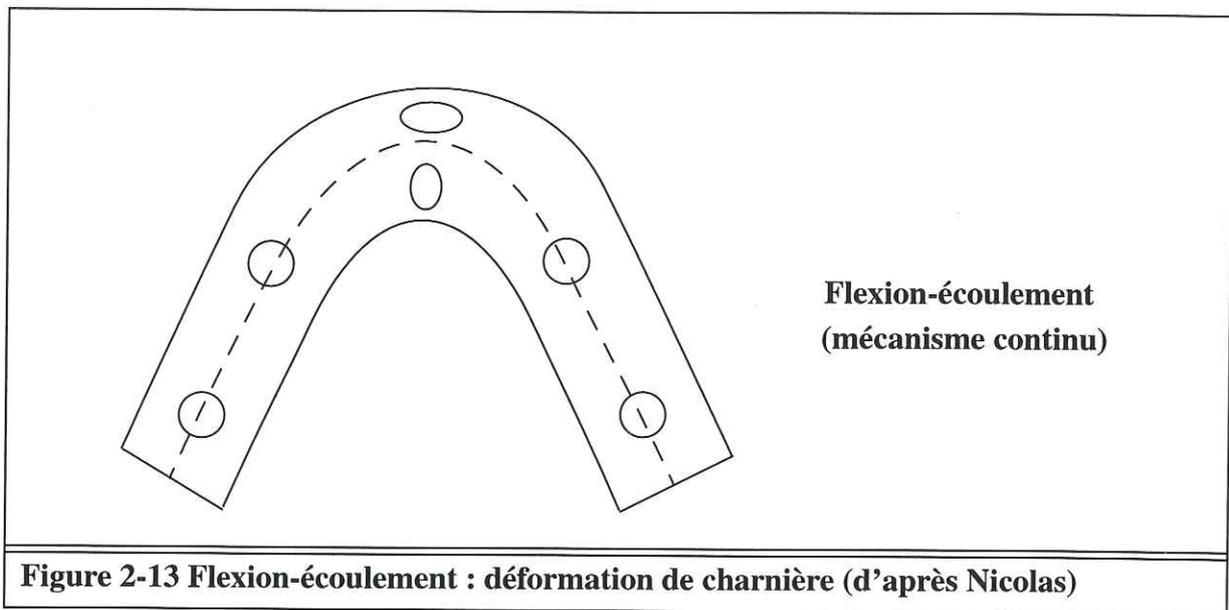
## 2.4 : Cinématique basée sur la déformation par flexion (flexural slip)

Le mode de déformation par flexion a été présenté par de nombreux auteurs, Nicolas - 1984- [45] et Ramsay -1967- [50] et -1987- [51]. Il est remarquablement bien justifié dans un régime tectonique compressif, on observe alors classiquement le développement de plis isopaques.

La caractéristique des plis isopaques est que les couches sédimentaires sont plissées en conservant leur épaisseur. On distingue deux importantes variantes de ce mécanisme suivant qu'il a un caractère partout continu ou non. La figure 2-12 montre les deux versions du mécanisme de flexion, à savoir la flexion-glisserment et la flexion-écoulement. Les marqueurs de la déformation, symbolisés par des cercles dans la configuration initiale deviennent des ellipses sur les flancs rectilignes du pli dans le cas du mécanisme continu de flexion-écoulement (déformation de flanc). En revanche, dans le cas du mécanisme discontinu de flexion-glisserment, les cercles contenant une limite stratigraphique dans la configuration initiale sont décalés de façon discontinue selon cette direction.



Une autre version du même mécanisme de flexion-écoulement est possible en localisant la déformation au niveau de la charnière du pli, voir la figure 2-13, au lieu de la localiser sur les flancs du pli comme sur la figure 2-12.



**Figure 2-13 Flexion-écoulement : déformation de charnière (d'après Nicolas)**

On peut cependant faire observer que cette façon de décrire le mécanisme de déformation par flexion est approximative. En effet, elle n'éclaire pas sur les détails du mode de déformation employé. La différence concernant les deux modes de flexion, à savoir flexion-glissement et flexion-écoulement, est uniquement descriptive. Elle ne repose que sur le repérage des différents niveaux de discontinuité existant pour le mode de déformation par flexion-glissement. On peut cependant envisager une analyse commune de ces deux mécanismes, en considérant la déformation par flexion-glissement comme l'empilement de milieux continus déformés par flexion-écoulement qui glissent les uns par rapport aux autres de façon discontinue. De plus, on peut considérer que les deux variantes du mode de déformation par flexion-écoulement, à savoir la localisation de la déformation dans les flancs ou dans la charnière du pli, ne diffèrent que du fait des conditions aux limites appliquées aux deux extrémités de la couche. Pour étudier ce modèle cinématique, il apparaît fondamental de démontrer le mécanisme intime de la déformation, c'est à dire le mécanisme de déformation continu par flexion-écoulement.

Pour analyser de façon approfondie le mode de déformation par flexion-écoulement d'un milieu continu  $\Omega$  en deux dimensions, il convient tout d'abord de le définir et de le caractériser de façon précise. On étudie ensuite le type de conditions aux limites qu'il convient de fournir pour que le problème de reconstruction d'une écaïlle tectonique soit bien posé. On donne enfin un exemple simple d'application de la méthode.

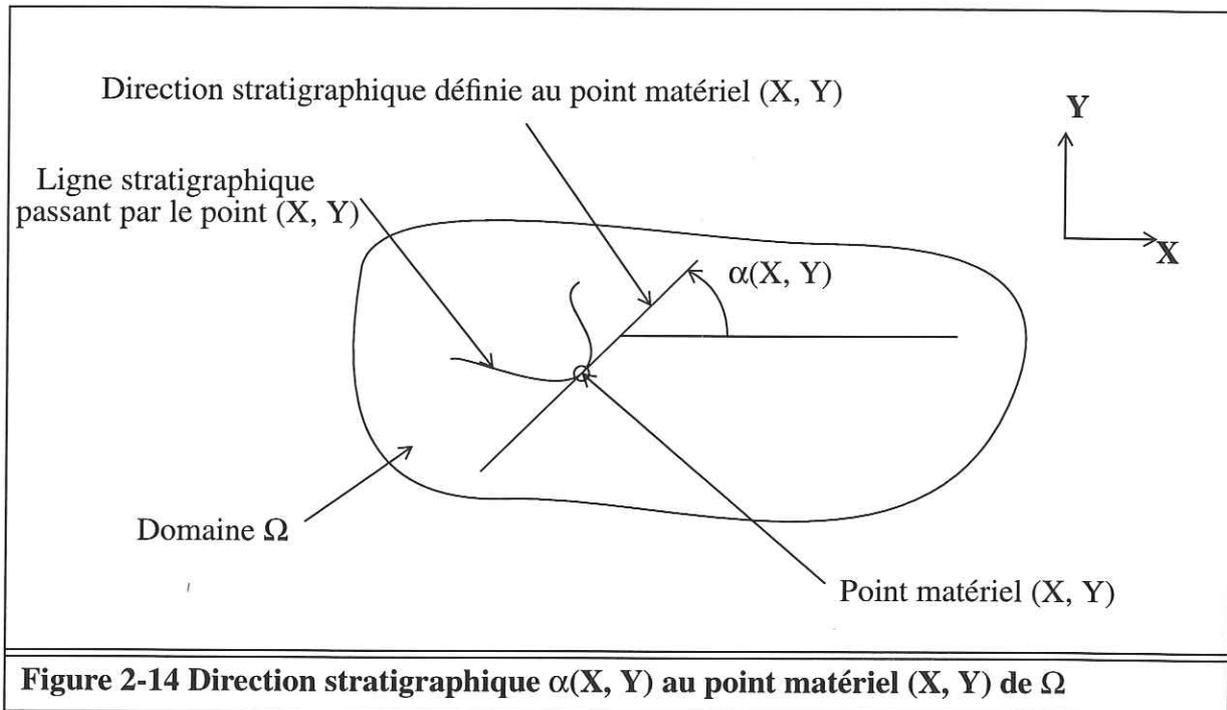
#### 2.4.1 : Définition du mécanisme de flexion d'un domaine continu

Ce mécanisme repose sur l'existence d'une direction stratigraphique en tout point du domaine  $\Omega$ . Une telle direction peut être définie en tout point  $(X, Y)$  du domaine  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^2$  par la donnée de la mesure de l'angle de cette direction avec l'axe des abscisses :  $\alpha(X, Y)$ .

La déformation élémentaire correspondant au mécanisme de flexion-écoulement en tout

point matériel du milieu continu est alors un cisaillement simple dans la direction stratigraphique définie au point matériel.

Le champ de scalaire  $\alpha(X, Y)$  est défini sur le domaine  $\Omega$  de  $\mathcal{R}^2$  et prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$  de  $\mathcal{R}$ .



**Figure 2-14** Direction stratigraphique  $\alpha(X, Y)$  au point matériel  $(X, Y)$  de  $\Omega$

Le mécanisme de déformation de la flexion continue (flexion-écoulement) est entièrement caractérisé par deux propriétés exprimées localement au point  $(X, Y)$  portant sur le tenseur gradient de la transformation  $\Phi$  :

- 1 / La transformation d'un domaine infinitésimal autour du point  $(X, Y)$  est isosurfacique, ce qui est équivalent à la proposition :

$$\forall (X, Y) \in \Omega, \det(\nabla\Phi(X, Y)) = 1$$

voir annexe section 5.4 page 201.

- 2 / De plus la déformation est caractérisée par le fait que la transformation d'un vecteur infinitésimal dans la direction stratigraphique  $\alpha(X, Y)$  au point  $(X, Y)$  est isométrique, ce qui est équivalent à la proposition :

$$\forall (X, Y) \in \Omega, \exists \beta(X, Y) \text{ tel que } \nabla\Phi(X, Y) \begin{bmatrix} \cos(\alpha(X, Y)) \\ \sin(\alpha(X, Y)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta(X, Y)) \\ \sin(\beta(X, Y)) \end{bmatrix}$$

voir annexe section 5.3 page 200.

### 2.4.2 : Analyse de la transformation par flexion continue

Le problème de reconstruction géométrique se traduit analytiquement par la recherche des fonctions composantes  $x(X, Y)$ ,  $y(X, Y)$  de la fonction vectorielle  $\Phi(X, Y)$ . Cette résolution est accompagnée de la détermination du champ scalaire, inconnue secondaire, qui

correspond à la direction stratigraphique  $\beta(X, Y)$  au point  $\Phi(X, Y)$  dans la configuration déformée. Le champ  $\beta(X, Y)$  est défini sur le domaine  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^2$  et prend ses valeurs dans  $\mathfrak{R}$ . Il convient ensuite de préciser les conditions aux limites à appliquer sur le contour du domaine  $\Omega$  pour que la fonction vectorielle  $\Phi(X, Y)$  soit définie de façon unique.

L'étude de ce problème est menée en annexe section 7 page 209.

La donnée du champ de scalaire  $\alpha(X, Y)$ , des directions de la stratigraphie en tout point  $(X, Y)$  du domaine  $\Omega$  permet de définir un difféomorphisme  $\Psi$  sur le domaine  $\Omega$ , voir annexe section 7.2 page 212 :

$$\Psi(X, Y) = \begin{bmatrix} s(X, Y) \\ v(X, Y) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Psi^{-1}(s, v) = \begin{bmatrix} X(s, v) \\ Y(s, v) \end{bmatrix}$$

A partir de ce difféomorphisme, on définit le champ scalaire :  $a = \det(\text{grad}(\Psi^{-1}))$

En résumé de cette étude, le champ scalaire  $\beta(X, Y)$  est obtenu comme solution d'une équation aux dérivées partielles :

$$\beta_{ss}(\beta_v - a_s) - \beta_{sv}\beta_s + \beta_s a_{ss} + a\beta_s^3 = 0$$

La transformation  $\Phi(X, Y)$  est ensuite déduite du champ  $\beta(X, Y)$  des directions stratigraphiques dans la configuration déformée du domaine  $\Omega$  en résolvant le système différentiel :

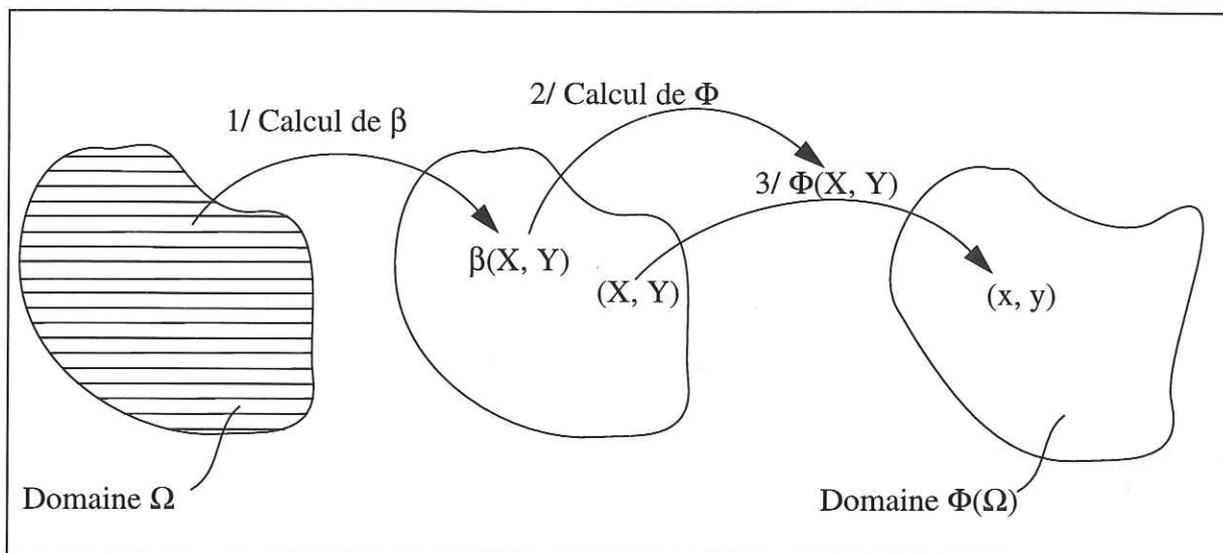
$$\nabla\Phi \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$$

### 2.4.3 : Cas particulier d'une stratification initialement parallèle

On considère la déformation d'un bloc de terrain  $\Omega$  infiniment stratifié parallèlement à l'axe des  $x$ . Le champ de scalaire  $\alpha(X, Y)$  défini par une telle stratification est uniformément nul sur le domaine  $\Omega$ . Le changement de variables correspondant au champ de scalaire  $\alpha(X, X)$  est le difféomorphisme  $\Psi$  égal à l'identité. Dans le cas présent le champ de scalaire  $a(X, Y) = \det(\text{grad}(\Psi^{-1}))$  est constant et vaut 1.

L'équation aux dérivées partielles peut être simplifiée, voir annexe section 7.2 page 212, si  $\beta_X$  est non nul :

$$\beta_X = \left( \frac{\beta_Y}{\beta_X} \right)_X$$



**Figure 2-15** Etapes du calcul de la déformation d'un domaine  $\Omega$  uniformément stratifié

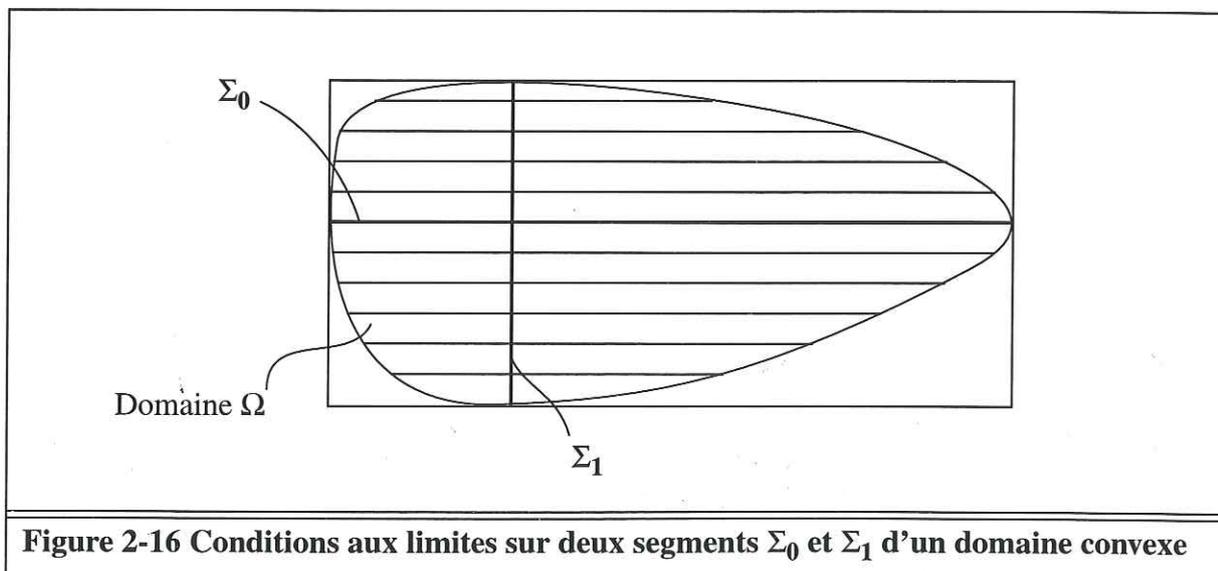
En intégrant cette équation par rapport à la variable  $X$ , on obtient :  $\beta = \frac{\beta_Y}{\beta_X} + K(Y)$  où  $K(Y)$  est une fonction quelconque de la variable  $Y$ .

On obtient une équation aux dérivées partielles du premier ordre quasi-linéaire :

$$(K(Y) - \beta)\beta_X + \beta_Y = 0$$

A partir du domaine  $\Omega$ , on définit les réels  $X_{\min}$ ,  $X_{\max}$ ,  $Y_{\min}$ ,  $Y_{\max}$  qui déterminent le plus petit rectangle englobant  $\Omega$  :

$$\Omega \subset [X_{\min}, X_{\max}] \times [Y_{\min}, Y_{\max}]$$



**Figure 2-16** Conditions aux limites sur deux segments  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  d'un domaine convexe

Supposons que le domaine  $\Omega$  soit convexe et qu'il existe un segment de droite  $\Sigma_0$  de  $\Omega$  tel que  $\{Y=Y_0 \text{ et } X \in [X_{\min}, X_{\max}]\}$  et un segment de droite  $\Sigma_1$  de  $\Omega$  tel que  $\{X=X_1 \text{ et } Y \in [Y_{\min}, Y_{\max}]\}$ .

La donnée comme conditions aux limites des valeurs de  $\beta$  sur les deux segments  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  (les valeurs de  $\beta$  au point d'intersection de  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  doivent être compatibles) conduit à définir un unique champ de scalaire  $\beta$  sur le domaine  $\Omega$ .

Sur les segments  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  :

- $\forall X \in [X_{\min}, X_{\max}], \beta(X, Y_0) = f(X)$
- $\forall Y \in [Y_{\min}, Y_{\max}], \beta(X_1, Y) = g(Y)$

Remarques : Les fonctions  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont de classe  $C^2$  et telles que  $f(X_1) = g(Y_0)$

La donnée des fonctions  $f(X)$  et  $g(Y)$  permet de connaître les valeurs des dérivées partielles  $\beta_X(X, Y_0)$  et  $\beta_Y(X_1, Y)$  sur les segments respectifs  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$ .

Numériquement la détermination du champ de scalaire  $\beta(X, Y)$  peut être obtenue en des valeurs discrètes par la procédure suivante :

- 1 / L'écriture de l'équation différentielle d'ordre un au point  $(X_1, Y_0)$  pour lequel on connaît les valeurs de  $\beta(X_1, Y_0)$ ,  $\beta_X(X_1, Y_0)$  et  $\beta_Y(X_1, Y_0)$  permet d'en déduire la valeur de  $K(Y_0)$  :

$$K(Y_0) = \beta(X_1, Y_0) - \frac{\beta_Y(X_1, Y_0)}{\beta_X(X_1, Y_0)} = g(Y_0) - \frac{g'(Y_0)}{f'(X_1)}$$

- 2 / Connaissant  $K(Y_0)$ , on peut écrire l'équation aux dérivées partielles en tout point  $(X, Y_0)$  :  $(K(Y_0) - \beta(X, Y_0))\beta_X(X, Y_0) + \beta_Y(X, Y_0) = 0$

On en déduit la valeur de  $\beta_Y(X, Y_0) = f'(X)(f(X) - K(Y_0))$

- 3 / On peut ensuite intégrer numériquement l'équation précédente pour obtenir la valeur de  $\beta(X, Y_0 + \Delta Y)$  à partir de la condition à la limite  $\beta(X, Y_0) = f(X)$

En posant  $Y_1 = Y_0 + \Delta Y$  et  $\beta(X, Y_1) = f_1(X)$ , on peut répéter les trois opérations précédentes en remplaçant dans les formules  $Y_0$  par  $Y_1$  et  $f(X)$  par  $f_1(X)$ . On obtient ainsi de proche en proche une approximation du champ scalaire  $\beta(X, Y)$ .

#### 2.4.4 : Exemple : déformation d'un domaine carré uniformément stratifié

On considère la déformation d'un bloc de terrain carré  $\Omega = [0, 1]^2$  infiniment stratifié parallèlement à l'axe des  $X$ .

Comme précédemment, le champ de scalaire  $\alpha(X, Y)$  est uniformément nul sur le domaine  $\Omega = [0, 1]^2$  et  $a(X, Y) = \det(\text{grad}(\Psi^{-1})) = 1$ . On obtient la même équation aux dérivées partielles d'ordre un qu'au paragraphe précédent :  $(K(Y) - \beta)\beta_X + \beta_Y = 0$

On choisit de donner les conditions aux limites sur les segments  $\Sigma_0$  et  $\Sigma_1$  respectivement  $\{Y=0, X \in [0,1]\}$  et  $\{X=0, Y \in [0,1]\}$

Pour résoudre analytiquement ce problème par la méthode des caractéristiques, on envisage une courbe  $C$  d'équation paramétrique  $X(t), Y(t)$ . Le long de  $C$  on a :

$$\begin{cases} X'(t) = K(Y) - \beta & (a) \\ Y'(t) = 1 & (b) \\ \beta'(t) = 0 & (c) \end{cases}$$

En intégrant la troisième équation (c) du système, on trouve que les courbes caractéristiques  $C$  correspondent à une valeur constante de  $\beta$  notée  $\beta_0$ . L'intégration de la seconde équation (b) donne la relation :  $Y(t) = t + Y_0$  ( $Y_0$  est une constante),  $Y$  est donc une fonction linéaire de  $t$ . Ce qui permet d'intégrer la première équation (a), en notant  $H(t)$  la primitive de la fonction  $K(t+Y_0)$  telle que  $H(0)=0$  :  $X(t) = H(t) - \beta_0 t + X_0$  ( $X_0$  est une constante).

Remarque : le point  $(X_0, Y_0)$  est le point de la courbe caractéristique  $C$  correspondant au paramètre  $t=0$ .

On obtient le système :

$$\begin{cases} X(t) = H(t) - \beta_0 t + X_0 & (a) \\ Y(t) = t + Y_0 & (b) \\ \beta(t) = \beta_0 & (c) \end{cases} \quad \text{avec } H(0)=0$$

#### a ) Condition particulière : $g(Y)=0$

Pour fixer les idées on précise les conditions à la limite le long de  $\Sigma_1$  :  $g(Y)=0$  sur  $[0,1]$  et  $f(X)$  est une fonction quelconque de classe  $C^2$  sur  $[0,1]$

Le segment  $\Sigma_1$  :  $\{X=0, Y \in [0,1]\}$  correspond à une courbe caractéristique pour laquelle le paramètre  $\beta$  est constant et nul  $\beta_0=0$ . De plus, sur  $\Sigma_1$  si on fixe le paramètre  $t=0$  pour le point  $(0, 0)$  c'est à dire  $(X_0, Y_0)=(0, 0)$ , on obtient :

$$\begin{cases} X(t) = H(t) \\ Y(t) = t \end{cases} \quad \text{or } X(t) = 0 \text{ sur } \Sigma_1, \text{ donc } H(t) \text{ est constante et nulle sur l'intervalle } [0,1].$$

Les autres courbes caractéristiques ont donc pour équations paramétriques quand le paramètre  $t$  décrit l'intervalle  $[0,1]$  :

$$\begin{cases} X(t) = -\beta_0 t + X_0 \\ Y(t) = t + Y_0 \\ \beta(t) = \beta_0 \end{cases}$$

On considère les courbes caractéristiques qui coupent le segment  $\Sigma_1$ , elles passent par le point  $(X_0, 0)$  pour  $X_0 \in [0,1]$  et correspondent à la valeur constante  $\beta_0 = f(X_0)$ . On fixe la

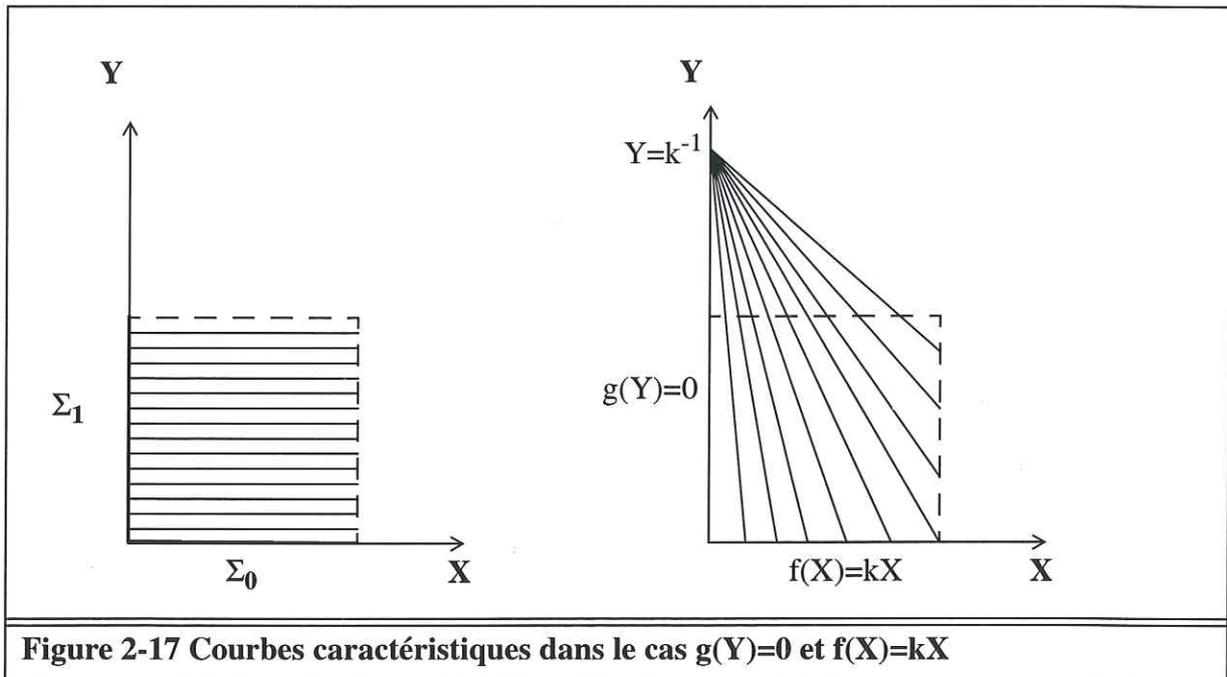
$$\text{valeur } t=0 \text{ en ce point ce qui donne } Y_0=0 : \begin{cases} X(t) = -f(X_0)t + X_0 \\ Y(t) = t \end{cases} \text{ avec } t \in [0,1]$$

Les courbes caractéristiques sont donc des segments de droite dans le domaine  $[0,1]^2$ .

**b) Condition particulière supplémentaire :  $f(X)=k X$**

On précise la fonction :  $f(X) = k X$  sur  $[0,1]$ , on vérifie que  $f(0)=g(0)=0$ .

$\forall X_0 \in [0,1] : X = X_0 (1 - k Y)$  sont les équations des droites caractéristiques dans le domaine  $[0,1]^2$  passant par  $(X_0, 0)$  : c'est un faisceau de droites passant par le point  $(0, k^{-1})$



**Figure 2-17 Courbes caractéristiques dans le cas  $g(Y)=0$  et  $f(X)=kX$**

- Si  $k < 1$  et  $k \neq 0$  seules une partie des courbes caractéristiques du domaine  $[0,1]^2$  coupent le segment  $\Sigma_0$ , voir la figure 2-17.
- Si  $k \geq 1$  le point  $(0, k^{-1})$  appartient au domaine  $[0,1]^2$  et il représente une singularité,  $\beta$  ne pouvant être défini en ce point. De même, seules une partie des courbes caractéristiques du domaine  $[0,1]^2$  coupent le segment  $\Sigma_0$ .

Dans ces deux cas, on détermine le champ  $\beta$  sur la partie du domaine  $[0,1]^2$  qui contient les droites caractéristiques qui coupent le segment  $\Sigma_0$ . Il est alors possible de vérifier que l'expression analytique obtenue pour  $\beta(x, y)$  vérifie l'équation différentielle sur l'ensemble du domaine  $[0,1]^2$  et constitue la solution du problème.

Détermination de  $\beta(X, Y)$  :

Le point  $(X, Y)$  appartient à la droite caractéristique passant par les points  $(0, k^{-1})$  et le point de l'axe des  $X$  :  $(X_0, 0)$  tel que  $\beta=f(X_0)=kX_0$  soit  $(\beta k^{-1}, 0)$ .

Cette appartenance est équivalente à la nullité du déterminant : 
$$\begin{vmatrix} \beta k^{-1} & X \\ -k^{-1} & Y-k^{-1} \end{vmatrix} = 0$$

Soit :  $\beta k^{-1}(Y-k^{-1}) + X k^{-1} = 0$

On obtient la formule analytique :  $\beta(X, Y) = \frac{X}{k^{-1}-Y}$  avec  $(X, Y) \in [0, 1]^2$  et  $k < 1, k \neq 0$

$$\beta_X(X, Y) = \frac{1}{k^{-1}-Y} \text{ et } \beta_{XX}(X, Y) = 0$$

$$\beta_Y(X, Y) = \frac{X}{(k^{-1}-Y)^2} \text{ et } \beta_{XY}(X, Y) = \frac{1}{(k^{-1}-Y)^2}$$

On vérifie donc que sur le domaine  $[0, 1]^2$   $\beta$  est solution de :  $\beta_{XY}\beta_Y - \beta_{XX}\beta_X + \beta_X^3 = 0$

Or on rappelle que  $\begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$  et comme  $\alpha = 0$ , on obtient :

$$\begin{cases} x_X = \cos\left(\frac{X}{k^{-1}-Y}\right) & (1) \\ y_X = \sin\left(\frac{X}{k^{-1}-Y}\right) & (2) \end{cases}$$

$$\text{que l'on intègre } \begin{cases} x(X, Y) = (k^{-1}-Y) \sin\left(\frac{X}{k^{-1}-Y}\right) + C_1(Y) & (1) \\ y(X, Y) = -(k^{-1}-Y) \cos\left(\frac{X}{k^{-1}-Y}\right) + C_2(Y) & (2) \end{cases}$$

On voit que pour déterminer les constantes d'intégration  $C_1(Y)$  et  $C_2(Y)$ , il faut connaître le déplacement d'un ensemble de points  $(X, Y)$  tel que  $X$  est élément de  $[0, 1]$  et  $Y$  décrit la totalité de l'intervalle  $[0, 1]$ . C'est pourquoi on est amené à préciser le déplacement le long de la frontière  $\Sigma_1$ .

**c ) Déplacement imposé sur la frontière  $\Sigma_1^*$ .**

On impose pour fixer les idées un déplacement nul sur le segment  $\Sigma_1$ .

$$\forall Y \in [0,1] \text{ on a } \Phi(0, Y) = (0, Y)$$

Remarque : En écrivant la relation (I) de l'annexe section 7.3 page 215 :

$$\det(\nabla\Phi \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

On a ici :  $\vec{v} = \vec{w} = \vec{j}$  et  $\vec{u} = \vec{i}$

On obtient donc les relations  $\begin{cases} \det(\nabla\Phi \vec{u}, \vec{j}) = 1 \\ \|\nabla\Phi \vec{u}\| = 1 \end{cases}$  d'où nécessairement :  $\nabla\Phi \vec{u} = \vec{i}$

La nouvelle condition à la limite concernant le déplacement nul du segment  $\Sigma_1$  est compatible avec la direction stratigraphique inchangée :  $g(Y)=0$  sur  $[0,1]$  qui était imposée le long de  $\Sigma_1$  au paragraphe a).

Le déplacement de la frontière  $\Sigma_1$  détermine les constantes d'intégration  $C_1(Y)$  et  $C_2(Y)$

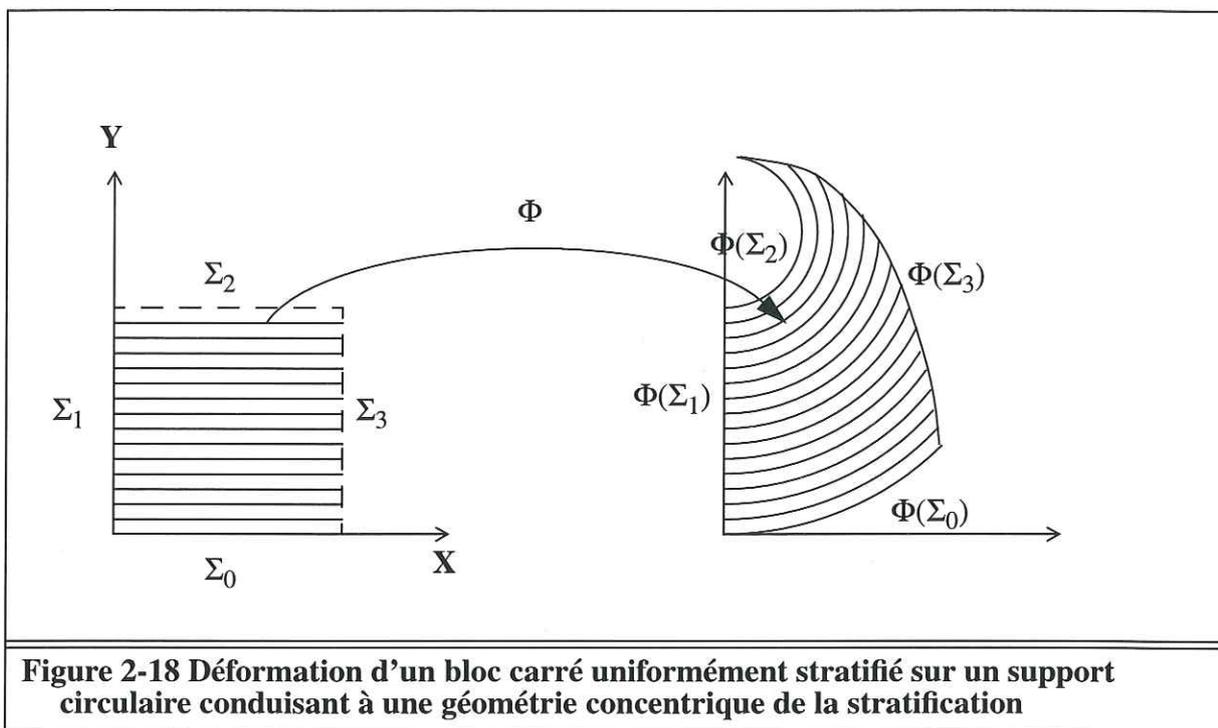
$$\begin{cases} x(0, Y) = C_1(Y) = 0 & (1) \\ y(0, Y) = -(k^{-1}-Y) + C_2(Y) = Y & (2) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} C_1(Y) = 0 \\ C_2(Y) = k^{-1} \end{cases}$$

Les composantes du déplacement  $\Phi$  sont donc :

$$\begin{cases} x(X, Y) = (k^{-1}-Y) \cos\left(\frac{X}{k^{-1}-Y} - \frac{\pi}{2}\right) \\ y(X, Y) = k^{-1} + (k^{-1}-Y) \sin\left(\frac{X}{k^{-1}-Y} - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

On remarque que la transformée d'un segment de droite de longueur unité correspondant à une strate ( $Y=cste$  et  $X \in [0,1]$ ) est l'arc de cercle de centre  $(0, k^{-1})$  de rayon  $(k^{-1}-Y)$  et de longueur unité parcouru selon l'orientation positive du plan à partir de son extrémité  $(0, Y)$ , voir la figure 2-18.

On remarque que les arcs de cercle ont le même centre  $(0, k^{-1})$  qui ne dépend pas de la variable  $Y$ . On retrouve ainsi le résultat bien connu des géologues : le mécanisme du glissement flexural peut conduire à des plis concentriques.



**Figure 2-18 Déformation d'un bloc carré uniformément stratifié sur un support circulaire conduisant à une géométrie concentrique de la stratification**

Calcul du déplacement des frontières du carré unité :

- $\Sigma_0 \rightarrow \Phi(\Sigma_0)$  : arc de cercle de rayon  $k^{-1}$ , de centre  $(0, k^{-1})$  et de longueur unité parcouru selon l'orientation positive du plan à partir de l'extrémité  $(0, 0)$ .
- $\Sigma_1 \rightarrow \Phi(\Sigma_1) = \Sigma_1$
- $\Sigma_2 \rightarrow \Phi(\Sigma_2)$  : arc de cercle de rayon  $(k^{-1}-1)$ , de centre  $(0, k^{-1})$  et de longueur unité parcouru selon l'orientation positive du plan à partir de l'extrémité  $(0, 1)$ .

$$\bullet \Sigma_3 \rightarrow \Phi(\Sigma_3) : \begin{cases} x(1, Y) = (k^{-1}-Y) \cos\left(\frac{1}{k^{-1}-Y} - \frac{\pi}{2}\right) \\ y(1, Y) = k^{-1} + (k^{-1}-Y) \sin\left(\frac{1}{k^{-1}-Y} - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

En posant :  $\theta = (k^{-1}-Y)^{-1}$  et en appelant  $\rho$  la distance du point  $(x, y)$  au point  $(0, k^{-1})$ , on obtient la relation :  $\rho\theta = 1$  pour la courbe  $\Phi(\Sigma_3)$ . Or cette relation est l'équation en coordonnées polaires d'une spirale hyperbolique qui est asymptote au point  $(0, k^{-1})$  à une extrémité et asymptote à la droite d'équation  $X=1$  à l'autre extrémité. La transformée de la frontière  $\Sigma_3$  est donc un arc de cette spirale hyperbolique.

Sur cet exemple les conditions à la limite étaient :

- Bord  $\Gamma_0$  du domaine (à déplacement imposé) :  $\Sigma_1$ . Avec  $\Phi(\Sigma_1) = \Sigma_1$ .

- Bord  $\Gamma_1$  du domaine (bord libre) :  $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$ .
- Bord  $\Gamma_2$  du domaine (bord glissant) :  $\Sigma_0$ . Avec  $\Phi(\Sigma_0)$  sur l'arc de cercle de centre  $(0, k^{-1})$  et de rayon  $k^{-1}$ .

En conclusion de l'étude de la transformation  $\Phi$ , correspondant au mode de déformation continu par flexion-écoulement, on peut avancer qu'il est envisageable de concevoir des méthodes numériques de résolution de ce problème géométrique. En effet, il est possible de le transformer pour en obtenir une forme analytique, on obtient alors un système d'équations aux dérivées partielles.

L'étude générale de la transformation  $\Phi$ , ainsi que la reconstruction de configurations géométriques particulières suggèrent que pour que le problème géométrique de reconstruction soit bien posé, les impératifs portant sur les conditions à la limite se résument à des exigences portant sur la partie  $\Gamma_0$  (bord à déplacement imposé) de la frontière de l'écaille tectonique.

En particulier, il ressort que le bord à déplacement imposé  $\Gamma_0$  doit nécessairement recouper toutes les lignes stratigraphiques présentes dans l'écaille tectonique de façon à ce que chaque ligne stratigraphique possède une condition à la limite au moment de la reconstruction. De plus, le transformé de la partie de frontière  $\Gamma_0$ ,  $\Phi(\Gamma_0)$  qui est imposé par le modélisateur, doit vérifier certaines exigences supplémentaires pour que  $\beta$  existe voir annexe section 7.3 page 215.

Il apparaît que certaines géométries de failles (conditions à la limite portant sur la frontière  $\Gamma_2$ ) ne permettent pas de reconstruire l'écaille tectonique d'une façon géologiquement acceptable. Par exemple, la reconstruction d'une stratigraphie initialement parallèle et plane sur une géométrie de faille circulaire en configuration telle que se développe un anticlinal montre des domaines de l'écaille pour lesquels la reconstruction est impossible. On met ainsi en évidence l'existence de limitations à l'applicabilité de ce mode de déformation pour définir une cinématique.

## 2.5 : Le modèle de Suppe

A partir des méthodes élaborées et décrites par J. Suppe -1983- [60], des modèles ont été développés et de nombreux travaux de modélisation cinématique de bassins ont été réalisés permettant la description et la compréhension d'exemples géologiques complexes Endignoux -1990- [17], Xiao -1992- [71], Zoetemeijer -1992- [72], Roure -1993- [52] et -1995- [53]. En particulier, le logiciel THRUSTPACK développé par l'Institut Français du Pétrole utilise les principes géométriques avancés par J. Suppe.

### 2.5.1 : Etude géométrique du glissement flexural d'une stratification parallèle

Les hypothèses géométriques du modèle de J. Suppe sont analogues à celles du glissement flexural (flexural slip). Les sédiments présents dans le modèle sont supposés infiniment stratifiés et leur déformation a lieu par simple glissement sans changement de longueur selon la direction stratigraphique. Du fait de la conservation de la matière dans le domaine d'étude 2D, les couches représentées conservent la même aire avant et après la déformation. Ce principe de conservation de l'aire, associé à celui de la conservation des longueurs selon la direction stratigraphique entraîne nécessairement la conservation des longueurs dans la direction normale à la stratigraphie lors de la déformation. Il y a donc conservation des épaisseurs des couches sédimentaires et l'on qualifie ce mécanisme de plissement isopaque des strates.

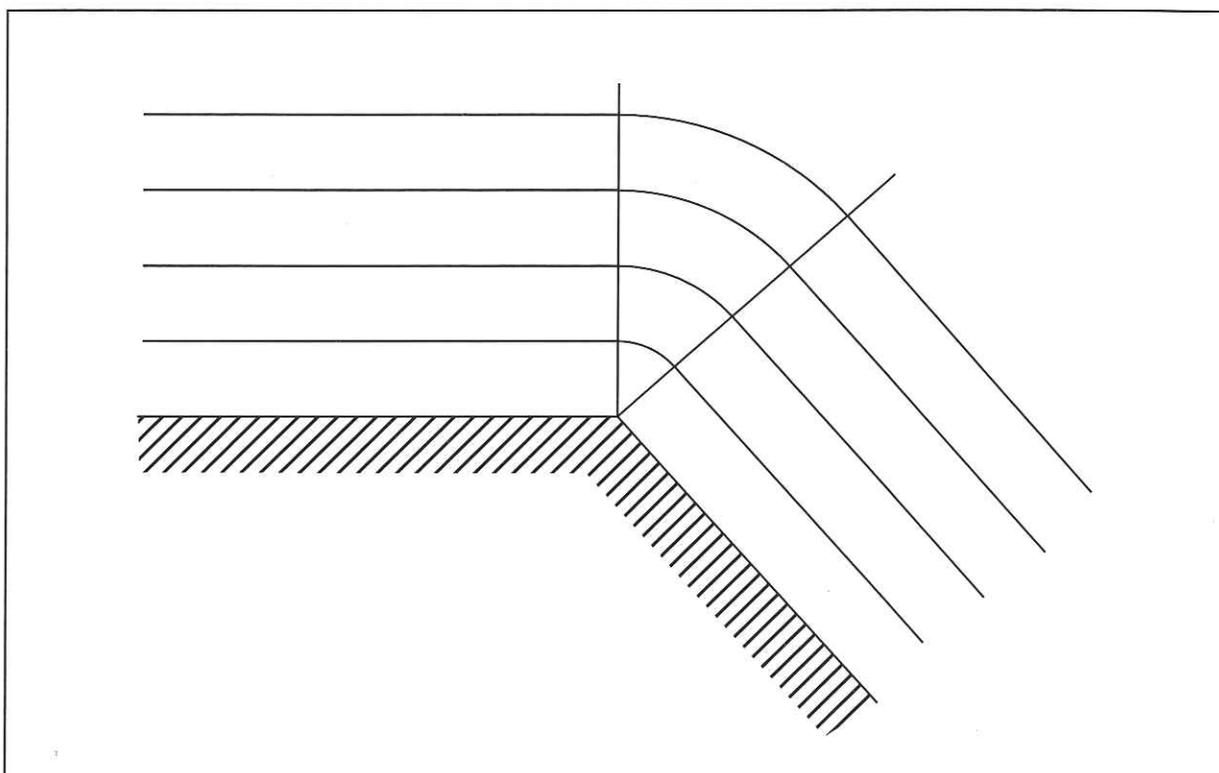
L'originalité de la méthode de J. Suppe est qu'elle procède à des hypothèses simplificatrices astucieuses qui permettent d'opérer une reconstruction des écaïlles de terrain déformées de façon géométriquement très simple. Ainsi, dans le cas où la stratification est initialement parallèle dans une écaïlle tectonique, ce qui implique que chaque couche a une épaisseur constante dans toute l'écaïlle, il est possible d'envisager grâce à la méthode de J. Suppe une reconstruction par des moyens géométriques élémentaires sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des calculs complexes.

L'étude du glissement flexural au chapitre précédent, a permis de montrer deux cas simples bien connus des géologues structuralistes pour lesquels la reconstruction des écaïlles initialement uniformément stratifiées était très simple. Il s'agit des cas où la géométrie du support représenté par la faille (bord  $\Gamma_2$  de l'écaïlle) a une forme rectiligne ou circulaire. Dans chacun de ces cas, la stratification de l'écaïlle reconstruite présente les mêmes caractéristiques que celles du support, à savoir elle est respectivement rectiligne parallèle au support ou circulaire concentrique par rapport au support.

La façon simple et naturelle de modéliser une faille dans un modèle est de la représenter sous la forme d'une ligne polygonale. Il est donc commode d'utiliser les résultats et les remarques précédentes pour reconstruire l'écaïlle sur la faille (frontière  $\Gamma_2$  de l'écaïlle) modélisée par une ligne polygonale. Ainsi, sur chaque partie rectiligne du support on reconstruit une portion d'écaïlle dans laquelle la stratification est parallèle.

La difficulté principale de cette approche géométrique simplifiée du flexural slip est de raccorder entre elles, au niveau des points de rupture de pente du support polygonal, les parties où la stratification est parallèle. Ce raccordement est possible dans le cas d'une configuration anticlinale comme le montre la figure 2-19. En effet, on peut considérer la ligne

polygonale du support comme la succession d'un segment de droite, d'un cercle de rayon nul au point de rupture du pente, et d'un autre segment de droite. Il est alors possible dans cette configuration simple de déterminer la géométrie exacte de la stratification déformée. En effet, on raccorde parfaitement les droites et les arcs de cercle concentriques comme on le montre sur la figure 2-19. Le plissement obtenu est bien connu des géologues structuralistes, il s'agit de celui d'un pli isopaque concentrique.



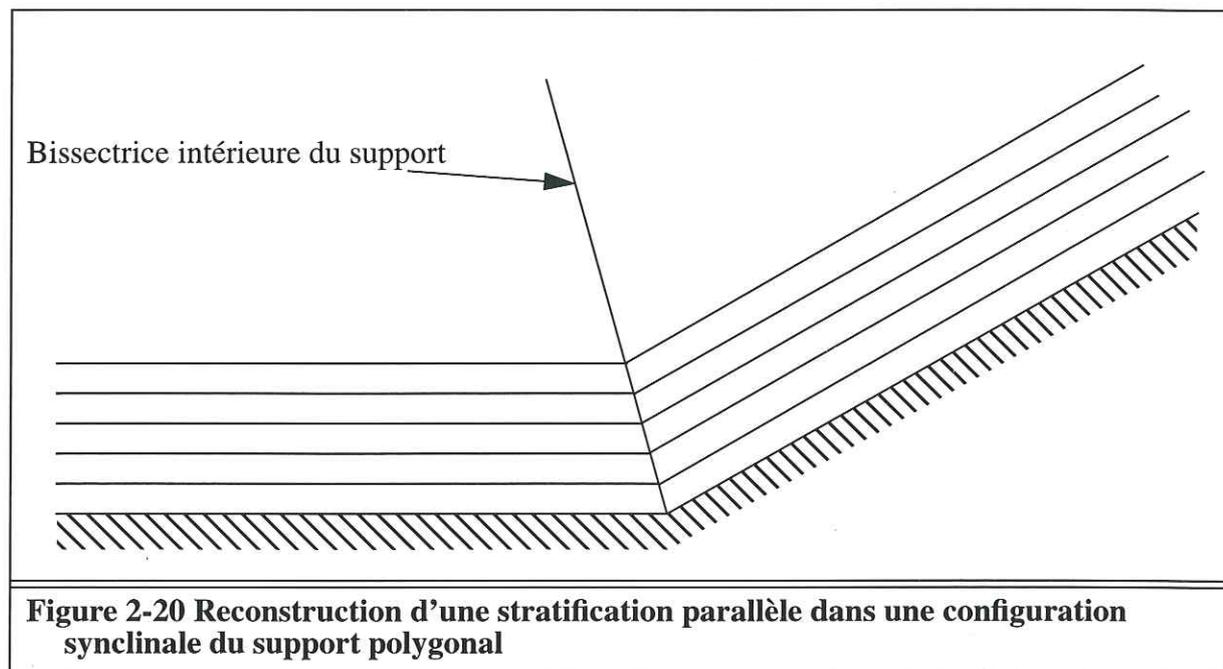
**Figure 2-19 Reconstruction d'une stratification parallèle dans une configuration anticlinale du support polygonal**

Dans le cas d'une configuration synclinale, une telle reconstruction n'est pas possible. En effet, le fait de considérer le point de rupture de pente comme un cercle de rayon nul ne permet pas de raccorder les stratifications rectilignes de part et d'autre du point de rupture de pente comme dans le cas précédent. Ainsi, on doit admettre l'impossibilité d'une reconstruction des lignes stratigraphiques sous forme de courbes de classe  $C^1$  (courbes continûment dérivables). Il est toutefois possible de les reconstruire sous forme de courbes de classe  $C^0$  (courbes simplement continues). En effet, en prolongeant les stratigraphies rectilignes de part et d'autre du point de rupture de pente du support, on observe que ces droites se recoupent sur la bissectrice intérieure du support polygonal.

On peut ainsi proposer une reconstruction des lignes stratigraphiques dans la configuration synclinale, sous la forme de lignes polygonales (courbes de classe  $C^0$ ) dont les points de rupture de pente sont répartis sur la bissectrice intérieure du support polygonal, voir la reconstruction de la figure 2-20. On note que la transformation géométrique ainsi définie n'est pas partout continûment différentiable comme c'était le cas pour la même reconstruction dans la configuration anticlinale, il existe des points particuliers (sur la bissectrice)

pour lesquels elle n'est pas différentiable. La déformation subie par les points matériels est donc définie presque partout, et là où elle est définie, elle correspond bien à la définition du glissement flexural. Cependant, pour les points matériels reconstruits le long de la bissectrice intérieure du support polygonal, la déformation n'est pas définie (on peut la considérer comme infinie).

Un tel mode de plissement est bien connu des géologues structuralistes qui le qualifient de plissement isopaque en «kinks».



### 2.5.2 : La reconstruction géométrique de Suppe

Le modèle de J. Suppe s'appuie sur les remarques géométriques précédentes; le fait incontournable est qu'il est nécessaire d'introduire des plissements en «kinks» pour résoudre exactement le problème de la déformation par glissement flexural d'une écaïlle uniformément stratifiée reconstruite sur un support polygonal.

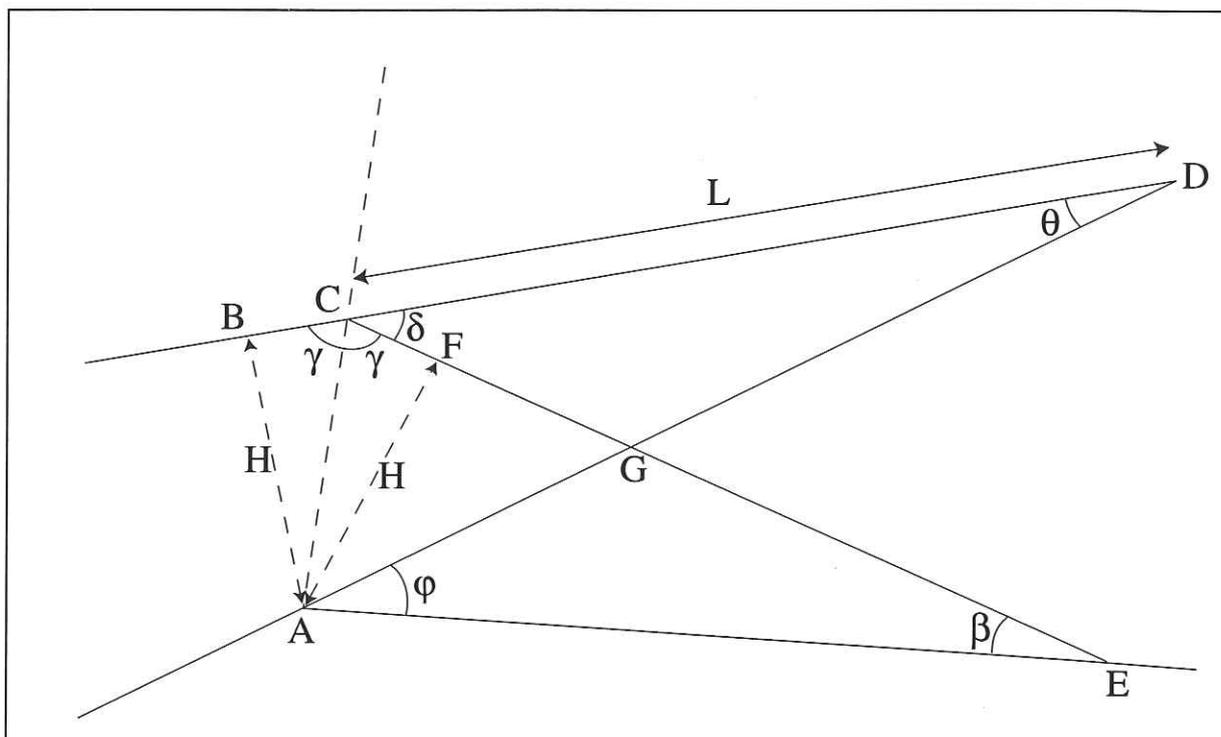
Dans son modèle, J. Suppe propose un mode de traitement identique pour les configurations synclinale et anticlinale. Il s'agit d'opérer grâce à une reconstruction pliée selon un «kink» rectiligne dans les deux configurations. L'idée de la méthode géométrique est de placer aussi bien dans la configuration anticlinale que dans la configuration synclinale un «kink» rectiligne passant par le point de rupture de pente du support de façon à raccorder les lignes stratigraphiques rectilignes et parallèles des deux compartiments de l'écaïlle.

Comme le mode de plissement est isopaque et comme les stratigraphies sont rectilignes et parallèles, il est nécessaire que le «kink» rectiligne soit la bissectrice intérieure de chaque ligne stratigraphique au point de rupture de pente de celle-ci.

La configuration géométrique se complique un peu lorsque la stratification parallèle n'est pas selon la direction du support. Il est toutefois possible d'opérer la reconstruction de

la même façon, c'est à dire en plaçant un «kink» rectiligne au niveau du point de rupture de pente du support.

Le point essentiel de la méthode de reconstruction de J. Suppe est donc de savoir placer le «kink», comme il est indiqué sur la figure 2-21. Cette connaissance permet de plier la stratification de façon à ce qu'elle reste parallèle à elle-même au passage d'un point de rupture de pente du support.



**Figure 2-21 Placement géométrique du «kink» dans la reconstruction de J. Suppe**

Les données du problème géométrique de placement du «kink» sont :

- L'angle  $\theta$  entre la direction de la stratification dans le premier compartiment de l'échelle, avant pliage de celle-ci sur le «kink», et le support dans ce premier compartiment.
- L'angle  $\varphi$  entre les deux directions du support de part et d'autre du point de rupture de pente, c'est à dire de part et d'autre du «kink».

Les inconnues principales du problème sont :

- L'angle  $\beta$  entre la direction de la stratification dans le second compartiment de l'échelle, après pliage de celle-ci sur le «kink», et le support dans ce second compartiment.
- L'angle  $\gamma$  entre la direction stratigraphique et le «kink». Cet angle est nécessairement le même de part et d'autre du «kink», car il est bissecteur des lignes stratigraphiques au point de rupture de pente de celles-ci.

La connaissance de l'angle  $\gamma$  permet de connaître la direction du «kink» et de le placer au point de rupture de pente du support. L'angle  $\beta$  remplace alors l'angle  $\theta$  en mesurant

l'angle de la stratification par rapport au support. Il est alors possible de placer les «kinks» de proche en proche sur l'ensemble des points de rupture de pente du support.

Calcul des angles  $\gamma$  et  $\beta$  :

En écrivant l'égalité des angles alternes des droites (CE) et (DA) qui de plus appartiennent respectivement aux triangles (CGD) et (AGE), on obtient :

$$\beta + \varphi = \theta + \delta$$

Or on a :  $2\gamma + \delta = \pi$  ; et on pose :  $\tau = \theta - \varphi$

On obtient donc l'expression de  $\beta$  en fonction de  $\gamma$  et des données :

$$\beta = \pi - 2\gamma + \tau$$

D'autre part on écrit que les segments [C, D] et [C, E] ont même longueur L :

$$CD = BD - BC = \frac{H}{\tan\theta} - \frac{H}{\tan\gamma}$$

$$CE = CF + FE = \frac{H}{\tan\gamma} + \frac{H}{\tan\beta}$$

En égalant ces deux longueurs et en simplifiant par H, on obtient :

$$\frac{1}{\tan\theta} = \frac{2}{\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\beta} \quad \text{Soit} \quad \tan\beta = \frac{\tan\theta \tan\gamma}{\tan\gamma - 2\tan\theta}$$

En utilisant l'expression trouvée pour  $\beta$  et en appliquant la formule trigonométrique donnant la tangente d'une somme :  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$

$$\tan\beta = \tan((\pi - 2\gamma) + \tau) = \frac{\tan\tau - \tan(2\gamma)}{1 + \tan(2\gamma)\tan\tau}$$

En égalant les deux expressions trouvées pour  $\tan\beta$  :

$$\tan\theta \tan\gamma (1 + \tan(2\gamma)\tan\tau) = (\tan\tau - \tan(2\gamma))(\tan\gamma - 2\tan\theta)$$

$$\text{et en remplaçant : } \tan(2\gamma) = \frac{2\tan\gamma}{1 - \tan^2\gamma}$$

$$\tan\theta \tan\gamma (1 - \tan^2\gamma + 2\tan\gamma \tan\tau) = (\tan\tau (1 - \tan^2\gamma) - 2\tan\gamma)(\tan\gamma - 2\tan\theta)$$

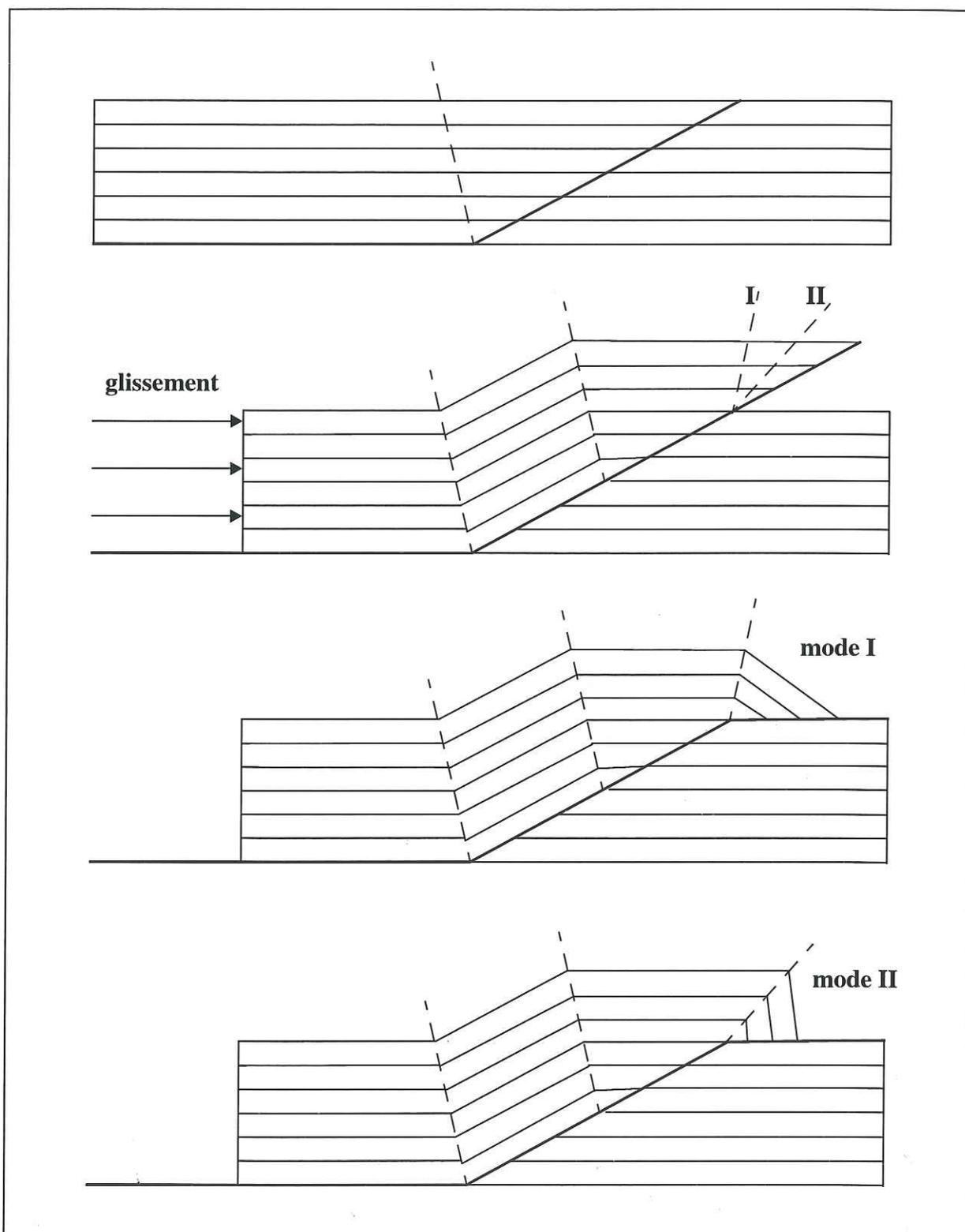
On obtient ainsi une équation du troisième degré en  $\tan\gamma$  dont la résolution fournit le ou les angles  $\gamma$  permettant de placer le «kink» dans une configuration où la reconstruction est

possible. On peut, à partir de la maîtrise de cette opération élémentaire de placement du «kink», reconstruire sur un support polygonal quelconque une écaille à stratification initialement parallèle.

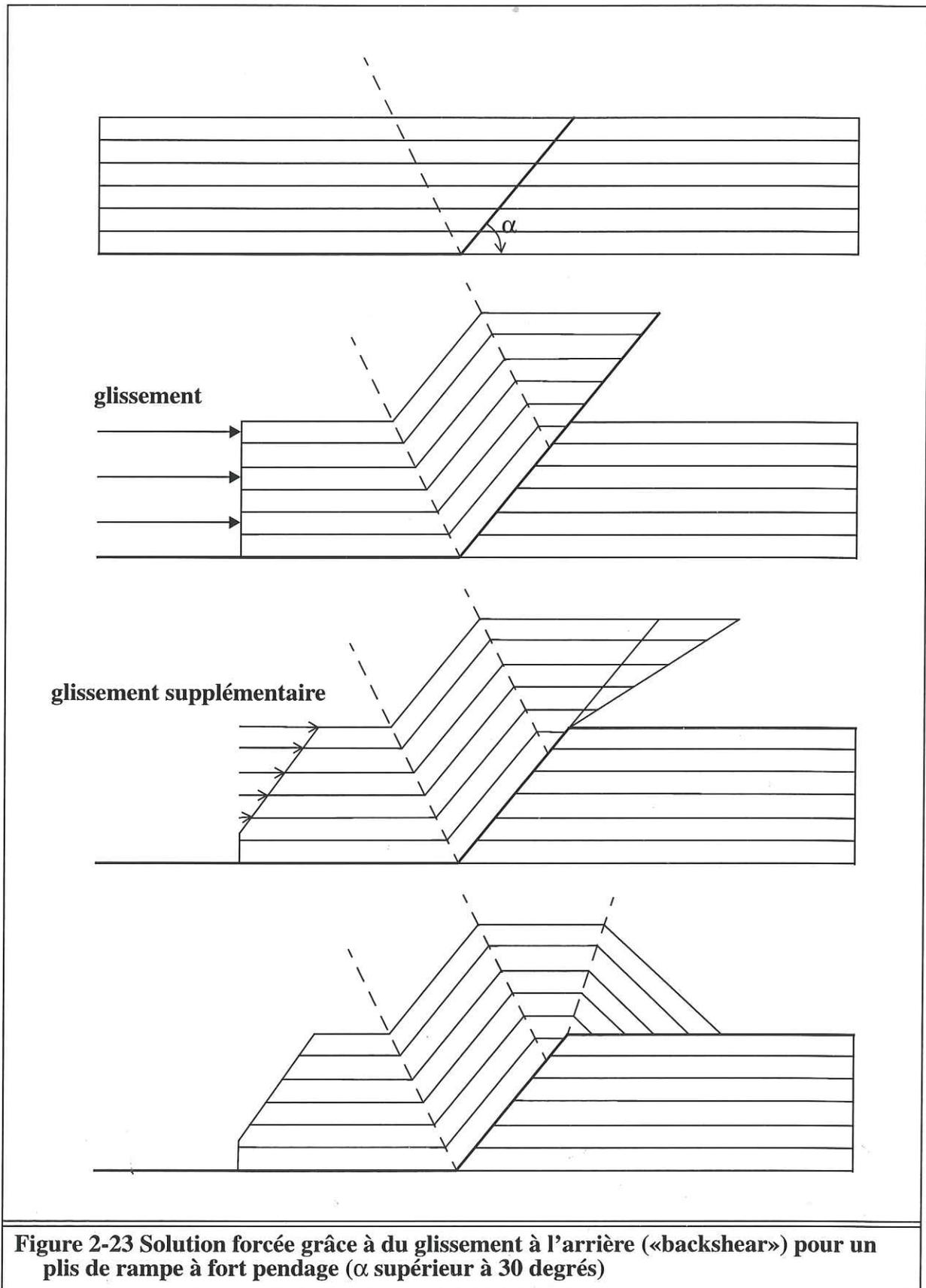
### 2.5.3 : Avantages et inconvénients de la méthode géométrique de Suppe

L'étude détaillée de la résolution de l'équation du troisième degré donnant les valeurs de la tangente de l'angle  $\gamma$  en fonction des données géométriques du problème, révèle qu'il existe des configurations pour lesquelles il n'y a pas de solution et d'autres pour lesquelles il en existe plusieurs. Pour des plis de cintrage sur rampe pour lesquels le pendage de la faille est assez faible (angle inférieur à 30 degrés), J. Suppe a identifié deux modes de plissement possibles, tous deux fournis par la résolution de l'équation du troisième degré, à savoir les modes (I) et (II) qui sont illustrés par la reconstruction de la figure 2-22. Si le pendage de la faille sur laquelle se développe l'anticlinal est assez fort (angle supérieur à 30 degrés) il n'existe plus de solution géométrique au problème. Dans un tel cas, il est tout de même possible d'opérer une reconstruction du pli de cintrage sur rampe en modifiant légèrement le problème initial. En effet, en imposant des conditions à la limite légèrement différentes, en particulier en introduisant un glissement différentiel de la bordure de l'écaille, il devient possible d'opérer la reconstruction. Ainsi, plutôt que de simplement translater le bord latéral vertical limitant le compartiment allochtone, il est possible d'opérer un glissement différentiel sur cette frontière. Le bord latéral est alors déformé et ne demeure plus rectiligne dans la configuration reconstruite. Ce procédé qui consiste à modifier les conditions à la limite du problème initial de façon à forcer une solution est appelé communément : glissement arrière (back-shear), et il est illustré par la figure 2-23.

Les avantages de la modélisation cinématique de J. Suppe sont d'une part la simplicité de la méthode alliée au réalisme du mécanisme élémentaire de déformation, ainsi que la modélisation de plis selon un style en chevron suivant les «kinks» du modèles. L'utilisation du modèle est potentiellement grande dans les nombreux bassins en compression où il existe des chevauchements et des plis de rampe. L'inconvénient de cette méthode est celui de toutes les méthodes cinématiques géométriques, elle ne rend en effet compte que d'un seul mécanisme de déformation et d'un seul style de plissement qui ne sont pas applicables de façon réaliste dans tous les contextes. D'autre part il est à noter une difficulté importante pour appliquer la méthode aux cas complexes où la stratification n'est pas parallèle. En effet, le calcul de la géométrie des «kinks» dans une telle configuration devient extrêmement difficile et ne conduit pas à une description aussi simple de la stratification des sédiments entre les «kinks». On conçoit donc que cette méthode de modélisation de la déformation tectonique peut difficilement être couplée avec la prise en compte d'un phénomène comme la compaction qui altère le caractère rectiligne et parallèle de la stratification.



**Figure 2-22 Les deux modes (I et II) de reconstruction des plis de cintrage sur rampe par la méthode du Fault-Bend-Fold**



## 2.6 : Le modèle de Waltham

La méthode cinématique proposée par D. Waltham -1989- [63] et -1990- [64] est une méthode très générale qui a le mérite d'explicitier clairement les hypothèses géométriques à la base de la reconstruction cinématique.

L'idée fondamentale de la méthode est de considérer l'équation de conservation de la matière comme c'est le cas dans les méthodes mécaniques de calcul des déformations.

$$\text{On considère l'équation : } \operatorname{div} \vec{V} = 0 \text{ (I)}$$

Le vecteur  $\vec{V}(t)$  étant le champ des vitesses des points matériels des sédiments présents dans le bassin à la date  $t$  considérée.

Il est évident que la seule équation aux dérivées partielles (I) est insuffisante pour déterminer une unique déformation du milieu continu. Dans les méthodes mécaniques, la façon classique de bien poser mathématiquement le problème est d'écrire la relation fondamentale de la dynamique en tenant compte d'une loi de comportement du matériau.

Ici D. Waltham propose d'introduire des conditions supplémentaires de nature purement géométrique afin de déterminer un unique champ des vitesses  $\vec{V}(t)$  à chaque date  $t$ . Ces hypothèses restrictives portent directement sur le champ des vitesses, qui est l'inconnue du problème. Cependant, la nature plutôt abstraite de ces conditions géométriques supplémentaires n'aide pas nécessairement le géologue modélisateur au moment de leur formulation. En effet, les informations dont il dispose sont souvent incomplètes ou peuvent présenter des difficultés à être transformées en information concernant le champ des vitesses des particules solides.

Ainsi, d'une manière analogue à la méthode cinématique du cisaillement simple pour laquelle l'utilisateur du modèle est amené à définir la direction particulière, constante pour tout le modèle, selon laquelle a lieu la déformation cisailante, le géologue modélisateur doit préciser pour tout le milieu continu des sédiments la direction de déplacement des points matériels. Ceci revient à définir en tout point du modèle, la direction du vecteur des vitesses  $\vec{V}(t)$ . La norme de ce champ de vecteurs devient alors l'inconnue du problème cinématique, et elle est facilement déterminée par la résolution de l'équation aux dérivées partielles (I) compte tenu des conditions à la limite.

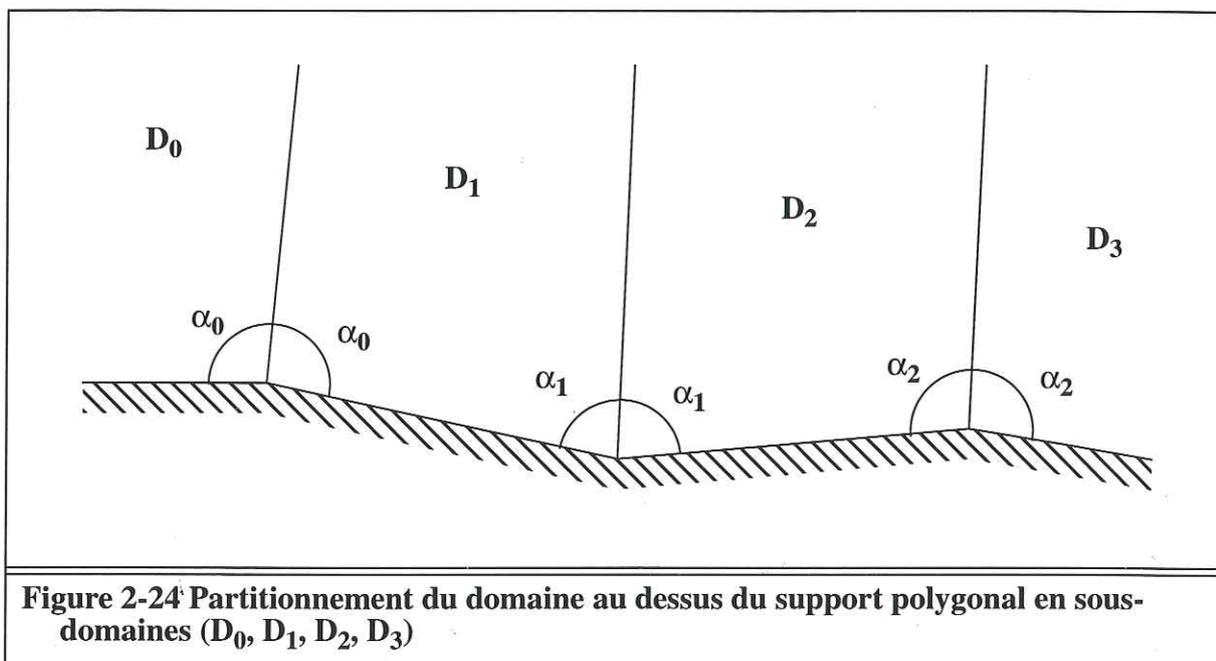
D. Waltham propose une résolution de l'équation aux dérivées partielles (I) par des méthodes classiquement utilisées pour résoudre des problèmes physiques, pour lesquels la nature des équations aux dérivées partielles est la même. Ainsi, une intégration de l'équation (I) par la méthode des différences finies qui est facile à mettre en oeuvre est envisageable. Elle permet en déformant et en déplaçant par incréments successifs une grille de points matériels discrets sur l'ensemble du domaine, on obtient la cinématique recherchée.

## 2.7 : Le modèle de Contreras et Suter

La méthode cinématique proposée par J. Contreras et M. Suter -1990- [8] présente un lien de parenté certain avec la méthode de J. Suppe. En effet, le traitement géométrique du support, qui est de nature polygonale, et sur lequel se produit le plissement et la déformation des terrains sédimentaires présente des analogies avec la méthode du «Fault-Bend-Fold» de J. Suppe. De plus, la déformation modélisée est analogue à celle du glissement flexural, toutefois la direction du glissement n'est pas nécessairement celle de la stratification comme dans la méthode du «Fault-Bend-Fold», cette direction est en effet directement définie par la géométrie du support localement au point considéré.

### 2.7.1 : Présentation de la méthode

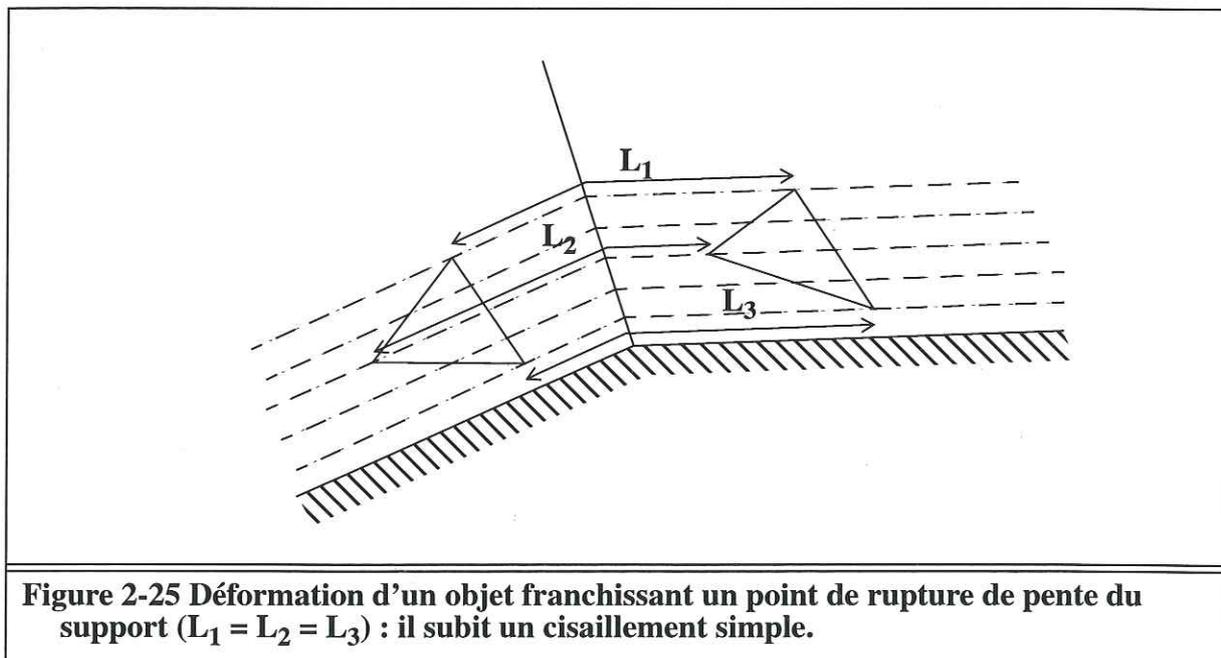
Le domaine pour lequel a lieu la reconstruction est l'objet d'un partitionnement. Les frontières de la partition sont rectilignes et analogues aux «kinks» de la méthode de J. Suppe. Pour chacun des points de rupture de pente du support, on trace la demi-bissectrice au support située dans le secteur du plan au dessus du support. Un exemple de cette partition du domaine est montré sur la figure 2-24. Le fait que la frontière rectiligne tracée à partir des points de rupture de pente du support soit la bissectrice du support est une propriété géométrique nécessaire et importante comme on l'a déjà remarqué lors de la présentation de la méthode de J. Suppe, section 2.5.1 page 43. En effet, la juxtaposition de deux glissements flexuraux rectilignes différents dans deux domaines voisins implique nécessairement que la frontière séparant les deux domaines soit une droite dont la direction est précisément celle de la bissectrice des deux directions de glissement. Ainsi, la déformation subie par un objet de contour quelconque est bien conservative vis à vis de la surface de l'objet.



L'idée de la méthode est simple, il s'agit de faire glisser tous les points matériels selon des trajectoires rectilignes et parallèles au support dans chacun des sous-domaines respec-

tifs définis par rapport au support polygonal. Ainsi, la trajectoire de chaque point matériel M du domaine est nécessairement confondue avec la ligne polygonale définie par la géométrie du support et constituée de segments parallèles au support dans chaque sous-domaine de la partition. Sur chaque trajectoire polygonale, la quantité de déplacement d'un point matériel est mesurée par la longueur de la portion de ligne polygonale parcourue. Lors d'un incrément de déplacement, chaque point matériel appartenant à une même ligne polygonale a une trajectoire de longueur identique. Cette propriété est analogue à celle du glissement flexural pour lequel les longueurs sont conservées dans la direction stratigraphique selon laquelle a lieu le cisaillement.

Si les conditions à la limite du problème cinématique sont données par la nouvelle position d'une frontière du domaine qui est déplacée par une simple translation, alors toutes les trajectoires de tous les points matériels du domaine ont la même longueur, comme le remarquent les auteurs de la méthode. Dans ce cas, la déformation subie par les objets est parfaitement définie puisqu'il s'agit d'un cisaillement simple comme le montre la figure 2-25.

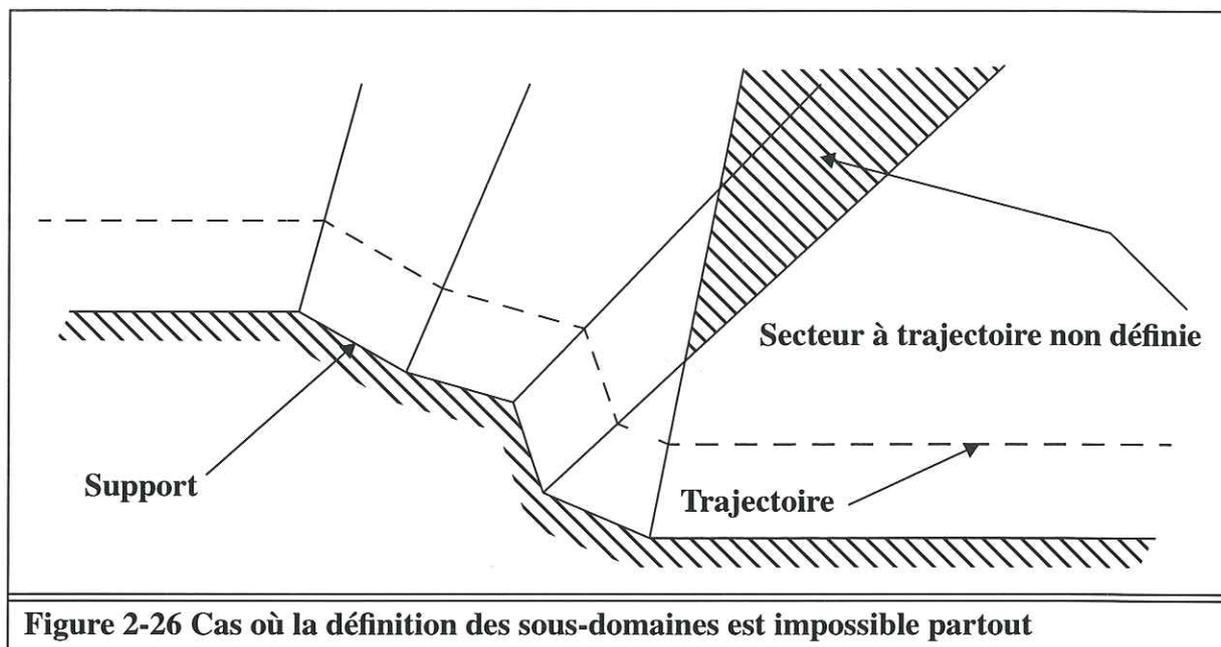


**Figure 2-25 Déformation d'un objet franchissant un point de rupture de pente du support ( $L_1 = L_2 = L_3$ ) : il subit un cisaillement simple.**

### 2.7.2 : Avantages et inconvénients de la méthode

Les avantages de cette méthode de modélisation sont d'une part sa simplicité de mise en oeuvre ainsi que le réalisme des géométries reconstruites du point de vue géologique.

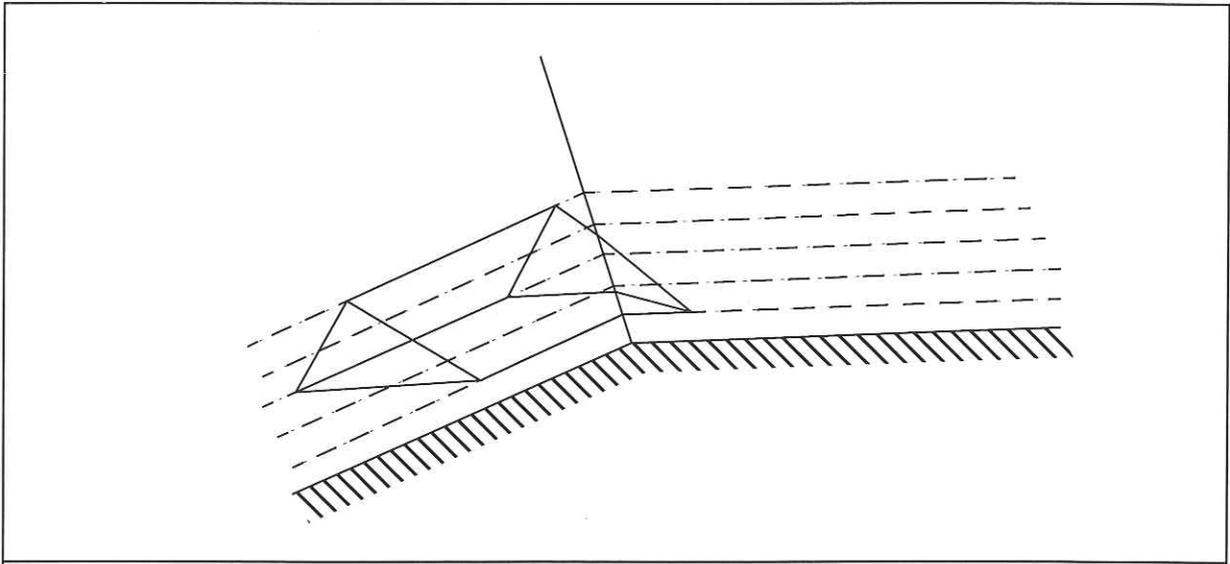
Cette méthode de reconstruction comporte également des inconvénients. En effet, il n'est pas toujours possible de définir une partition du domaine situé au dessus de la faille à l'aide de la méthode décrite précédemment comme le suggère la figure 2-26.



**Figure 2-26 Cas où la définition des sous-domaines est impossible partout**

Il peut aussi arriver que pour certaines configurations de support, les bissectrices issues des point de rupture de pente de la ligne polygonale support se recoupent dans le domaine. Il est alors impossible de définir une partition du domaine au dessus du support à partir des bissectrices comme frontières de la partition. Certains secteurs du domaine sont tels qu'il est impossible d'y définir une trajectoire. Il existe donc des configurations géométriques pour lesquelles la méthode cinématique n'est pas directement applicable. Ce fait montre une des limitations de la méthode.

De plus, un autre désavantage de cette méthode cinématique est que l'élément reconstruit à partir d'un élément polygonal initial n'est pas nécessairement un élément polygonal de même nature. Ce désavantage peut se révéler important quand il s'agit de coupler la méthode cinématique avec une méthode d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles comme on le fait pour une étude des transferts dans le bassin. En effet, les méthodes d'intégration numérique comme celle des éléments finis ou des volumes finis sont utilisables avec des éléments ayant une forme bien particulière qui n'est pas nécessairement préservée lors de la reconstruction cinématique. La figure 2-27 montre la déformation d'un élément triangulaire sur un exemple analogue à celui de la figure 2-25 pour lequel la reconstruction est située sur un secteur à cheval entre deux domaines où les trajectoires sont rectilignes.



**Figure 2-27 Déformation d'un élément triangulaire reconstruit à cheval sur une frontière entre deux sous-domaines.**

# Chapitre 3 : Géométrie du modèle discret FOLDIS : structure de données

Le caractère discret du modèle FOLDIS apparaît à différents niveaux. -(1) Au niveau géométrique, les corps géologiques présents dans la coupe du bassin sont discrétisés et représentés par un nombre fini d'objets géométriques à la base de la modélisation. -(2) Au niveau temporel, le caractère discret du modèle cinématique apparaît également, par le fait que l'évolution géométrique du bassin est suivie en calculant un nombre fini d'étapes de déformation pour la période géologique étudiée.

Dans ce chapitre qui est organisé en deux parties, on présente d'abord la nature géométrique et les structures de données des objets géologiques du bassin que sont les écailles tectoniques et les failles. On présente également la nature géométrique des objets de discrétisation spécifiques à la méthode cinématique, à savoir les unités cinématiques et les éléments pseudo-quadrilatères. Dans la deuxième partie du chapitre, on expose la méthode de repérage des coordonnées locales aux éléments. On montre également la façon de repérer des marqueurs contenus dans des éléments comme par exemple les limites des différentes lithologies présentes au sein des unités cinématiques du modèle.

## 3.1 : Discrétisation de la géométrie du bassin

Dans cette partie, on explique la procédure de découpage d'une coupe géologique en différentes sous-unités de taille de plus en plus petite pour obtenir finalement une discrétisation complète en blocs de matière élémentaires.

Les différents objets géologiques dont on décrit la géométrie dans le modèle sont les couches sédimentaires, les failles, et les écailles de terrain délimitées par les failles. Chacun de ces objets géologiques est décomposé, et représenté comme un ensemble d'objets de base. Dans la modélisation en deux dimensions présentée, il y a deux types d'objets fondamentaux: les objets à une dimension qui sont des segments de droite, et des objets à deux dimensions, les éléments ou blocs de matière élémentaires dont on explicitera la géométrie par la suite, section 3.1.4 page 63.

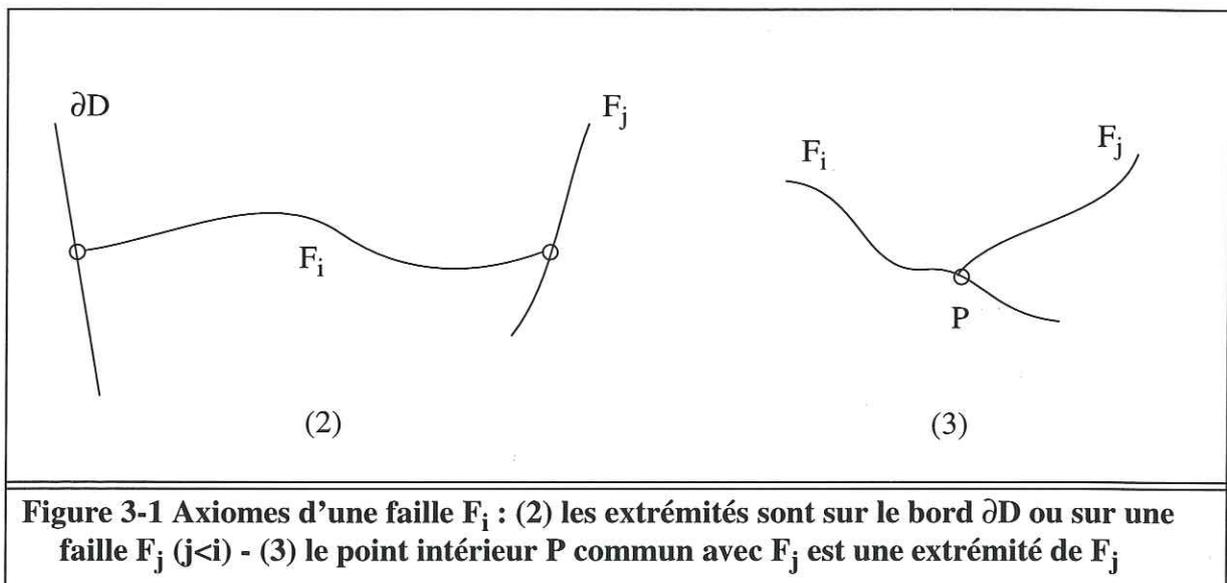
### 3.1.1 : Représentation des failles

Les failles sont des zones de cassure qui représentent les discontinuités cinématiques majeures du bassin sédimentaire. Dans le modèle, qui est une coupe à deux dimensions du bassin, une faille est une entité géologique qui est représentée par un objet connexe à une

seule dimension.

Dans la pratique, le géologue représente sur la coupe du bassin le réseau des failles majeures qui sont souvent branchées entre elles. Dans le modèle, les failles sont représentées à l'aide des objets de base à une dimension, les segments de droite. Une faille est un ensemble de segments qui constituent une ligne polygonale. La ligne polygonale, voir annexe section 4.1 page 187, présente l'importante propriété de ne pas se recouper elle-même. De plus, dans le modèle, la nature géométrique des failles n'est pas quelconque, elle est caractérisée par les trois axiomes suivants illustrées sur la figure 3-1 :

- Les failles du modèle sont des lignes polygonales indicées par les entiers de l'ensemble  $\{0, \dots, n-1\}$  où  $n$  est le nombre de failles du modèle. L'indiciation induit la relation d'ordre total :  $(F_i \text{ précède } F_j) \Leftrightarrow (i < j)$
- Chaque extrémité d'une faille  $F_i$  appartient soit à une autre faille  $F_j$  qui la précède ( $j < i$ ) soit à la frontière  $\partial D$  du domaine d'étude  $D$ .
- Si une faille  $F_i$  du modèle possède un point intérieur  $P$  commun avec une autre faille  $F_j$ ,  $P$  est nécessairement une extrémité de  $F_j$  ( remarque : on a  $i < j$  ).



**Figure 3-1 Axiomes d'une faille  $F_i$  : (2) les extrémités sont sur le bord  $\partial D$  ou sur une faille  $F_j$  ( $j < i$ ) - (3) le point intérieur  $P$  commun avec  $F_j$  est une extrémité de  $F_j$**

Grâce à ces trois axiomes, l'ensemble des failles du modèle, représentées par des lignes polygonales, présente la propriété de réaliser un découpage du domaine  $D$  en sous-domaines connexes à deux dimensions.

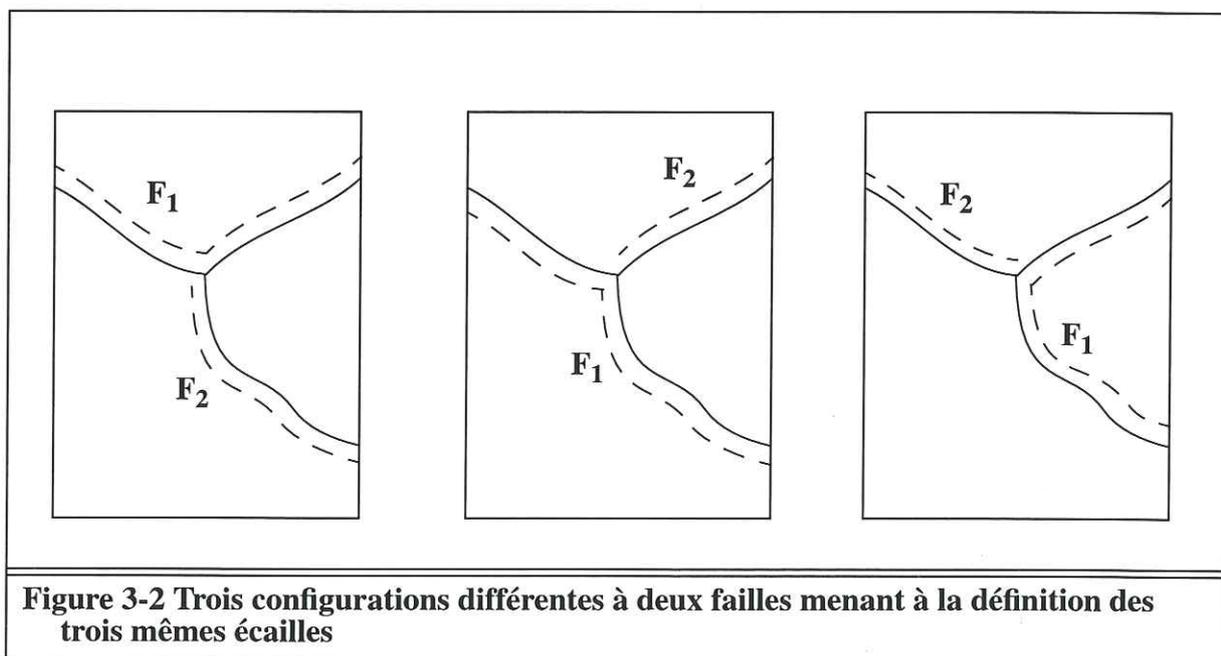
### 3.1.2 : Représentation des écaïlles tectoniques

Les écaïlles tectoniques correspondent aux sous-domaines connexes à deux dimensions découpés par les failles. Les frontières des écaïlles tectoniques sont donc soit des failles soit des bords du domaine d'étude.

Dans le modèle, les notions d'écaïlle tectonique et de faille sont complémentaires et découlent l'une de l'autre. En effet, un domaine partitionné en écaïlles implique la connais-

sance de la géométrie de l'ensemble des failles du modèle car elles constituent les frontières des écaïlles. Inversement, la connaissance des trajectoires des failles dans le domaine revient à définir une partition du domaine en écaïlles.

Dans FOLDIS, la notion fondamentale est celle d'écaïlle plutôt que celle de faille c'est aussi le cas dans le logiciel Locace où les entités fondamentales sont les modules qui sont les analogues des écaïlles. En effet, la modélisation cinématique consiste à reconstruire la géométrie des écaïlles tectoniques du bassin à différents stades de son histoire, la géométrie des failles est simplement liée au contour des écaïlles. De plus, il est à noter qu'étant donnée une partition du bassin en écaïlles, il peut exister plusieurs configurations de failles menant à la même partition en écaïlles comme il est indiqué sur la figure 3-2.



**Figure 3-2 Trois configurations différentes à deux failles menant à la définition des trois mêmes écaïlles**

Ces remarques étant faites, on choisit d'envisager le bassin comme un ensemble d'écaïlles plutôt que comme un ensemble de failles.

La notion de faille est cependant utile car l'état initial du bassin est souvent défini par la donnée des failles qui traversent et découpent le bassin. Les écaïlles de l'état initial qui sont les objets fondamentaux sont alors déduits des trajectoires des failles. Les écaïlles sont reconstruites au cours du temps pour la succession des états du bassin calculés. Il est à noter qu'à un stade quelconque de l'histoire géologique du bassin, une faille peut apparaître dans une écaïlle et la scinder en deux écaïlles indépendantes. Il est donc souhaitable de prévoir la possibilité de faire apparaître des failles à un moment quelconque de l'histoire, la conséquence de cette possibilité se traduit alors au niveau des écaïlles qui peuvent ainsi être redéfinies à tous les stades.

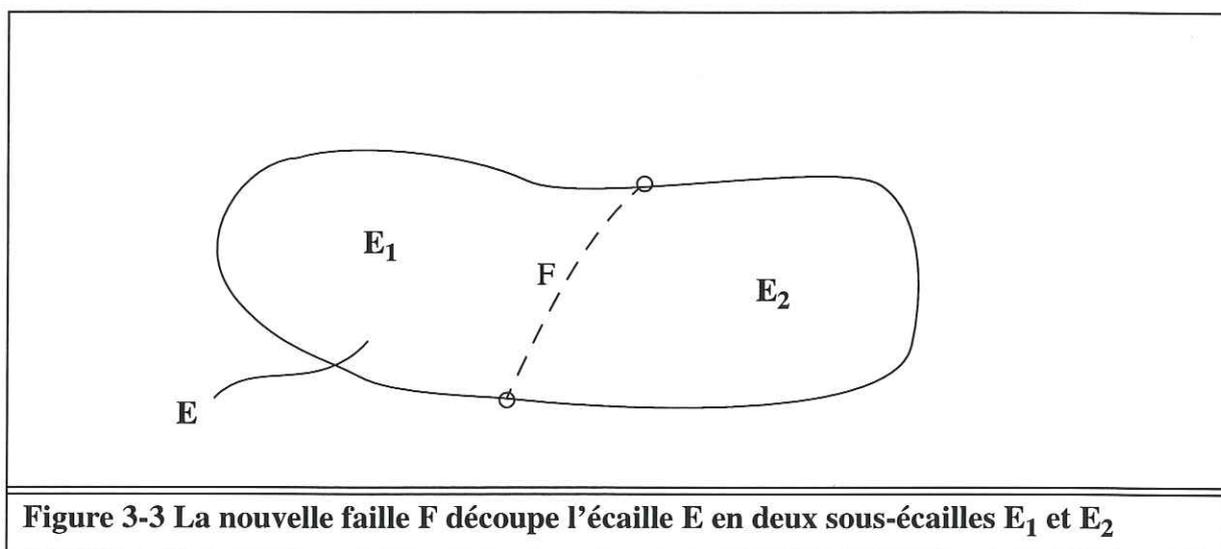
Il est facile de vérifier que compte tenu des axiomes concernant les failles du modèle le nombre d'écaïlles présentes à l'intérieur de la coupe du bassin est directement lié au nombre de failles. En fait, le nombre d'écaïlles est égal au nombre de failles plus une. Ce fait se démontre facilement par récurrence en introduisant les failles du domaine dans l'ordre de leur indication :

- La propriété est vraie au rang 0:

Un domaine d'étude ne comportant pas de failles possède une seule écaille tectonique qui correspond au domaine d'étude D dans son ensemble.

- Supposons vraie la propriété au rang n:

Le fait d'introduire une faille supplémentaire comme sur la figure 3-3 revient à découper nécessairement une écaille en deux sous-unités ce qui conduit à augmenter de un le nombre d'écailles et rend vrai la propriété au rang (n+1).



**Figure 3-3 La nouvelle faille F découpe l'écaille E en deux sous-écailles E<sub>1</sub> et E<sub>2</sub>**

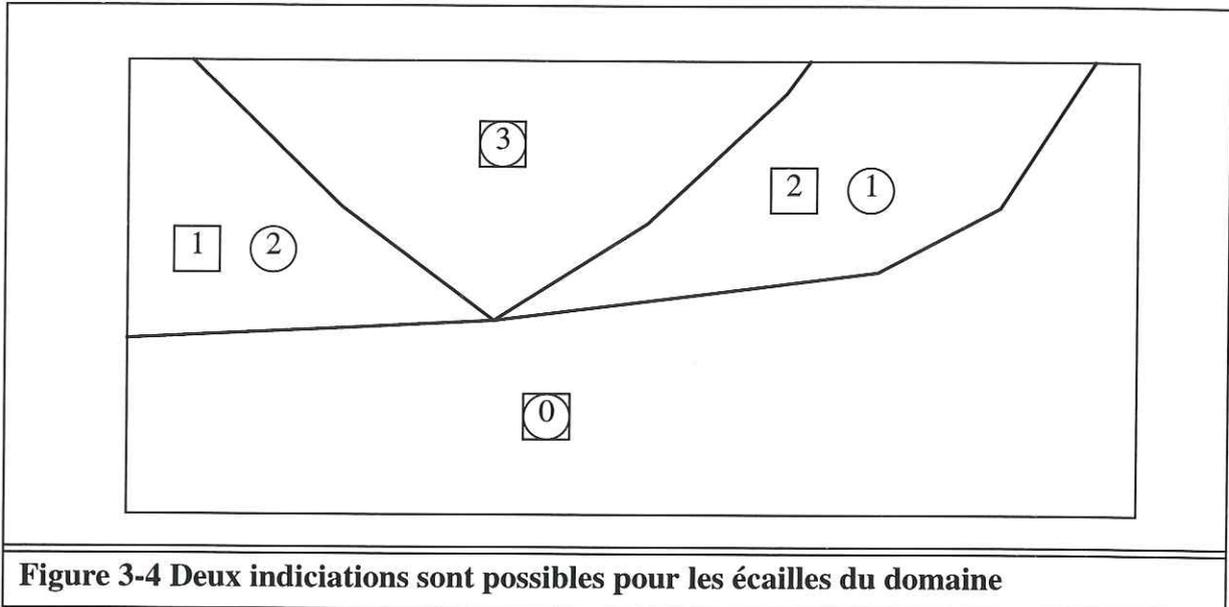
Les écailles sont les entités importantes du domaine, de préférence aux failles, du point de vue cinématique, et on se propose de définir l'ordre de leur reconstruction. Cet ordre est très important à définir, chaque écaille étant reconstruite, compte tenu de conditions à la limite, sur un support dont la géométrie doit être connue. Ainsi, on voit que l'on doit commencer par la reconstruction des écailles de la base du domaine dont le support est connu. Les autres écailles sont ensuite reconstruites au fur et à mesure que leur support est connu du bas vers le haut du domaine. Pour ce faire, à chaque étape de l'histoire géologique du bassin, on définit une numérotation des écailles qui correspond à l'ordre de leur reconstruction.

L'utilisateur du modèle pourrait à chaque stade de l'histoire géologique du bassin définir l'ordre de reconstruction des écailles. Cependant, il est possible de définir cet ordre de manière simple et quasi-automatique. Le principe de base de la numérotation automatique des écailles est le suivant :

Si deux écailles (a) et (b) sont séparées par une faille, et que  $n_a$  et  $n_b$  désignent les indices respectifs de ces écailles, alors si l'écaille (a) est située sous l'écaille (b), on a :  $n_a < n_b$ . On dit qu'une écaille (a) est située sous une écaille (b) si pour tous les segments de la ligne polygonale modélisant la faille séparant (a) et (b), la normale inférieure est dirigée vers (a) et la normale supérieure est dirigée vers (b).

Ce principe est toutefois insuffisant pour numérotter de manière unique toutes les écailles

du domaine comme on le montre sur l'exemple figure 3-4 :

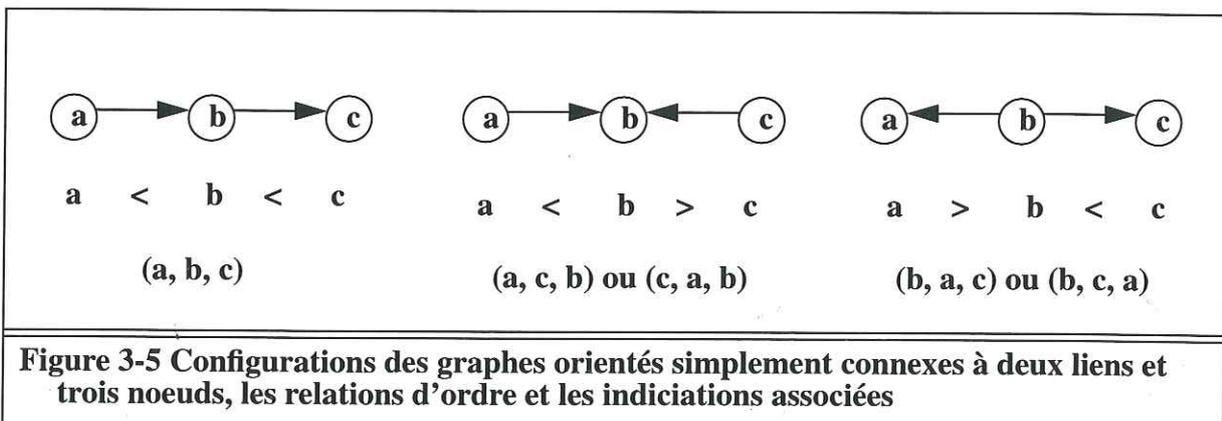


**Figure 3-4 Deux indications sont possibles pour les écaïlles du domaine**

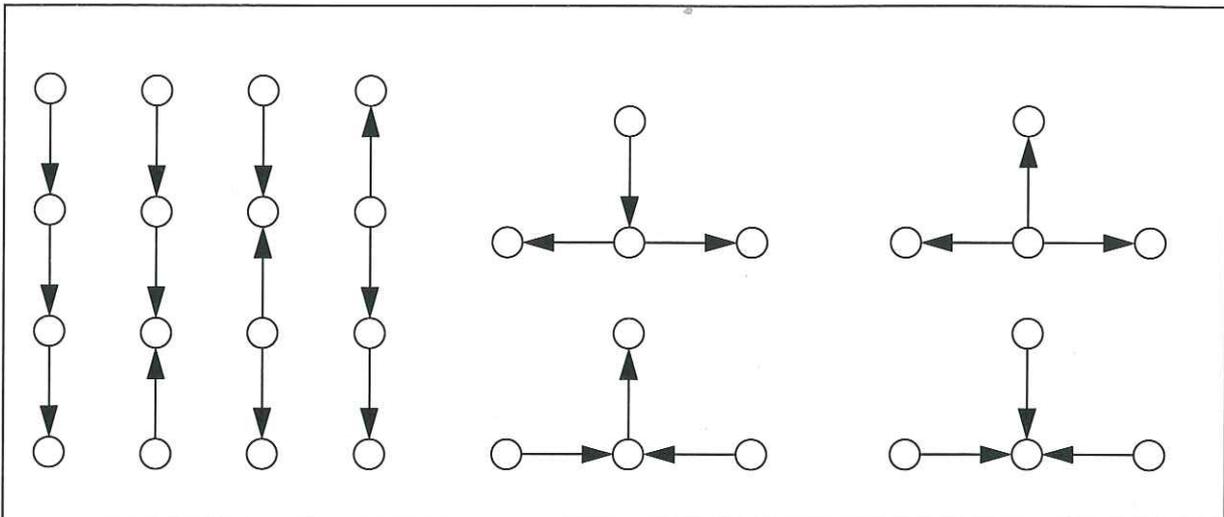
On montre que le problème de numérotation des écaïlles du domaine en utilisant uniquement le principe automatique ne conduit pas toujours à une numérotation unique. On analyse ce problème en le formulant dans les termes de la théorie des graphes.

En effet, si on considère un domaine à  $(n+1)$  écaïlles et comportant par conséquent  $n$  failles, la prise en compte du principe de numérotation automatique pour chacune des  $n$  failles revient à créer un graphe dont les  $(n+1)$  noeuds sont les écaïlles et les  $n$  liens orientés entre ces noeuds traduisent la relation «est au dessus de» entre deux écaïlles voisines.

On voit que le graphe ainsi créé est simplement connexe du fait de la connexité du domaine d'étude. Parmi toutes les configurations de graphes possibles, seule la configuration qui est un arbre unaire induit un unique ordre total, et une indication unique pour les écaïlles du domaine; toutes les autres configurations de graphes induisent plusieurs ordres comme le montre l'exemple de la figure 3-5.



**Figure 3-5 Configurations des graphes orientés simplement connexes à deux liens et trois noeuds, les relations d'ordre et les indications associées**



**Figure 3-6 Les huit configurations des graphes orientés simplement connexes à trois liens et quatre noeuds**

Il apparaît alors que la numérotation automatique des écaïlles du domaine, dans le cas où le graphe associé n'est pas un arbre unaire, n'a pas une solution unique. Il est nécessaire de faire intervenir l'utilisateur pour introduire des relations d'ordre supplémentaires entre les écaïlles de façon à définir un ordre précis de reconstruction des écaïlles. On pourrait penser qu'une telle numérotation des écaïlles n'est pas absolument nécessaire. Cependant il peut arriver lors de la déformation tectonique que deux écaïlles qui n'étaient pas voisines dans les états initiaux le deviennent à partir d'un certain stade de l'histoire géologique. Il est alors absolument nécessaire de lever l'ambiguïté concernant l'ordre de reconstruction des deux écaïlles.

### 3.1.3 : Unités géologiques et unités cinématiques

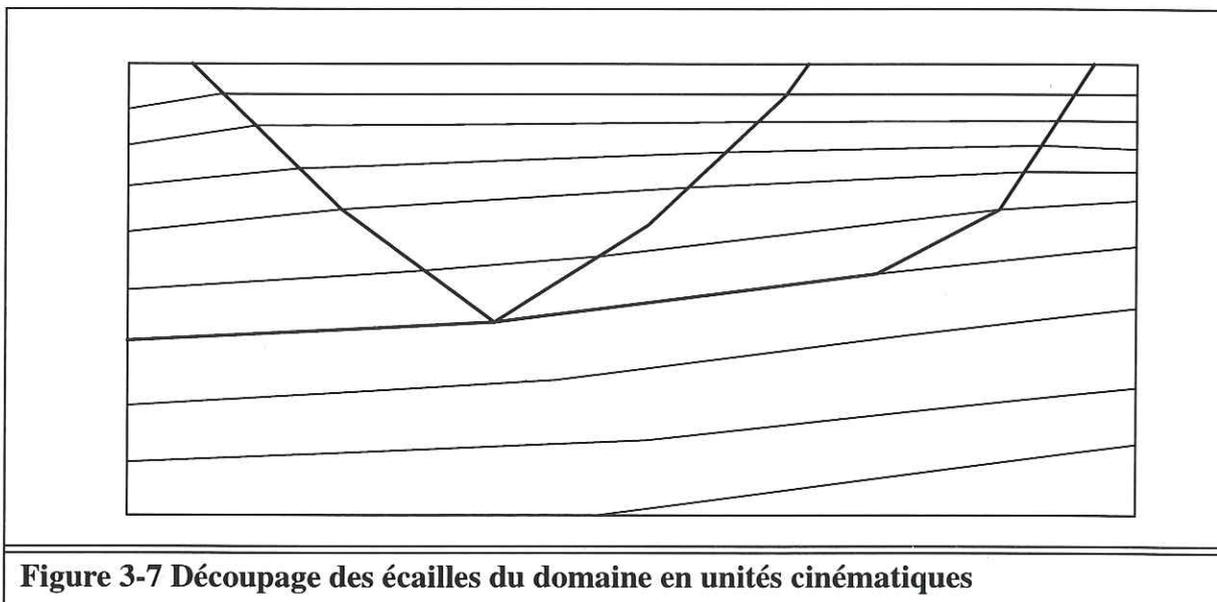
Dans chaque écaïlle, sont individualisées des couches de lithologies différentes. Les discontinuités stratigraphiques réalisent une partition de l'écaïlle en sous-domaines connexes à deux dimensions: les couches ou bancs géologiques.

Pour les besoins de la méthode cinématique, il est nécessaire de partitionner chaque écaïlle en unités cinématiques. L'utilité de ce découpage, voir section 4 page 87, est que les différentes unités cinématiques peuvent glisser de façon discontinue les unes par rapport aux autres. Ainsi, la définition des contours des unités cinématiques revient à localiser la déformation discontinue par glissement à l'intérieur des écaïlles. Au contraire, la déformation à l'intérieur des unités cinématiques est continue.

Il est possible de respecter exactement la lithologie lors du découpage d'une écaïlle en unités cinématiques, et dans ce cas les notions d'unités stratigraphiques et cinématiques coïncident précisément. Lors des phases tectoniques, le processus de déformation appliqué dans le modèle sera qualifié de glissement banc sur banc. Au contraire, il est possible d'opérer un regroupement de plusieurs bancs géologiques au sein d'une même unité cinématique. Par exemple, on peut souhaiter regrouper et rendre solidaire un empilement de fines couches de calcaire dans une seule et même unité cinématique. De cette façon, le

mécanisme de déformation est différent, il n'y a pas de glissement aux interfaces des bancs, le glissement est localisé aux interfaces de l'unité cinématique.

Que l'on choisisse d'opérer ou non des regroupements lithologiques lors de la définition des unités cinématiques du modèle, les caractéristiques géométriques des unités cinématiques sont analogues à celles des bancs, à savoir une grande extension longitudinale par rapport à une extension latérale beaucoup plus petite. Il est donc logique et naturel de modéliser le contour des unités cinématiques au moyen de deux frontières dans la direction longitudinale de l'unité, à savoir les frontières supérieure et inférieure. Deux autres frontières latérales peuvent venir compléter le contour fermé des unités cinématiques. Chacune de ces frontières est une ligne polygonale.



La figure 3-7 montre la discrétisation du domaine lors du découpage des écailles en unités cinématiques. Chaque écaille du domaine est la juxtaposition d'unités cinématiques.

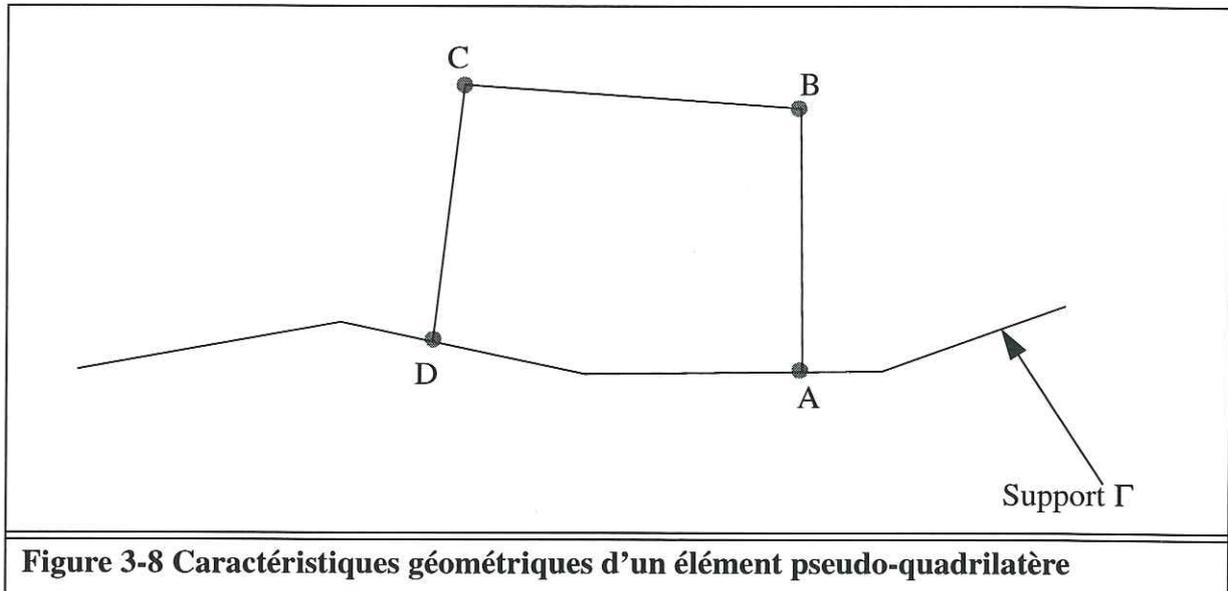
### 3.1.4 : Discrétisation des unités cinématiques en éléments

Les deux étapes précédentes de discrétisation du domaine ont conduit à définir successivement les écailles tectoniques séparées par les failles ainsi que les unités cinématiques susceptibles de glisser les unes par rapport aux autres. Une étape de discrétisation supplémentaire est cependant nécessaire pour modéliser la déformation tectonique, c'est pourquoi les unités cinématiques sont elles-mêmes découpées en éléments.

Les éléments, ou «briques de base» à deux dimensions, de la modélisation ont une forme géométrique particulière. Il s'agit de pseudo-quadrilatères dont le contour fermé est constitué de quatre parties, à savoir les trois bords droit, supérieur et gauche qui sont de simples segments de droite et le bord inférieur qui est une ligne polygonale quelconque.

Le fait de définir pour le bord inférieur de l'élément une géométrie libre (ligne polygonale quelconque) présente des avantages qui apparaissent clairement lors de la modélisation de la cinématique. Cependant, on peut déjà avancer qu'un tel élément est bien adapté

pour modéliser un bloc de matière glissant sur un support  $\Gamma$  de forme polygonale quelconque. En effet, la souplesse de forme de l'élément au niveau de son bord inférieur lui permet d'épouser parfaitement les contours du support  $\Gamma$  sans qu'il y ait de domaines vides ou de recouvrement.

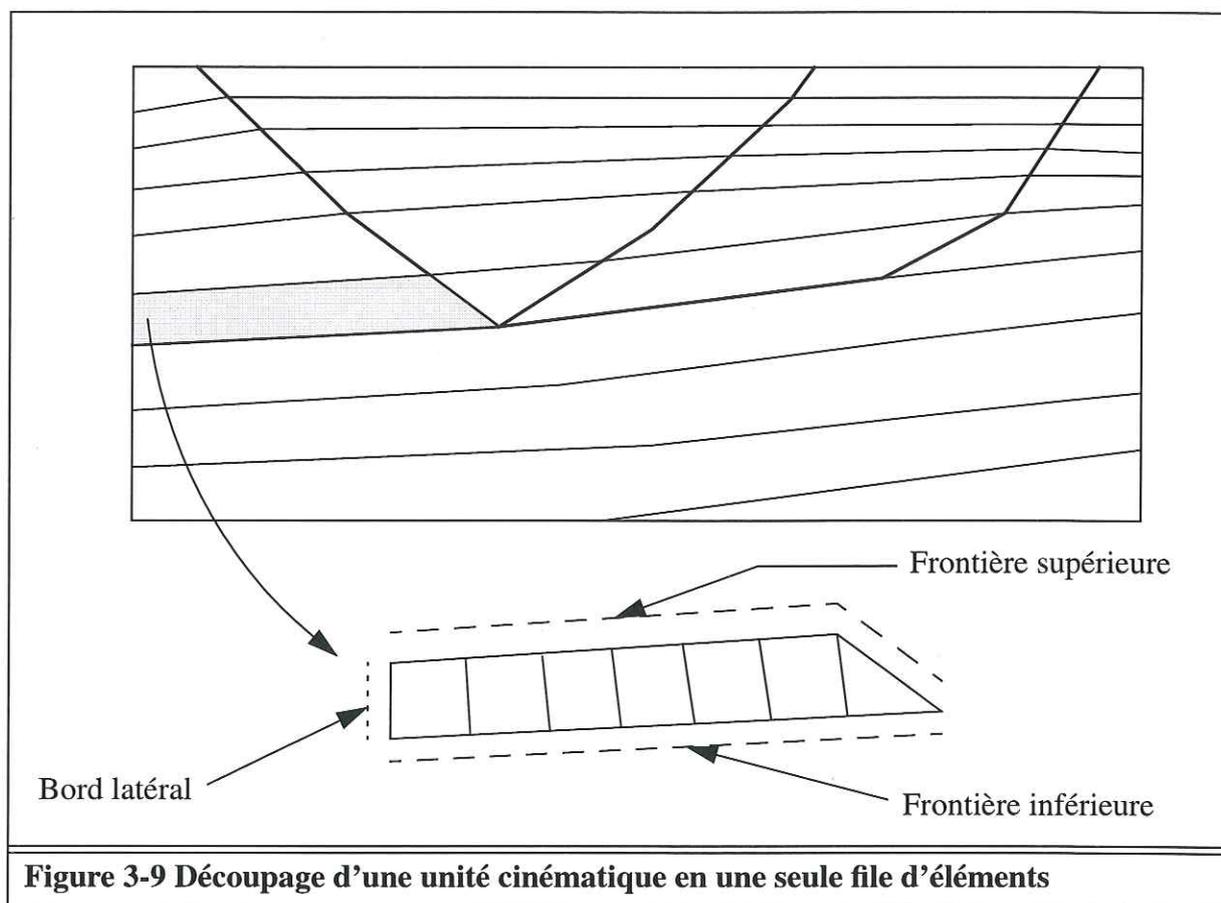


**Figure 3-8** Caractéristiques géométriques d'un élément pseudo-quadrilatère

La géométrie du support  $\Gamma$  étant donnée, on voit que l'élément est parfaitement défini par la donnée des quatre nœuds (A, B, C, D) de l'élément. Deux nœuds, A et D, appartiennent au support et peuvent être déterminés par la donnée de leurs abscisses curvilignes sur le support  $\Gamma$ , respectivement  $s_A$  et  $s_D$ . La position des deux autres nœuds, B et C, est définie par la donnée de leurs coordonnées dans le plan,  $(x_B, y_B)$  et  $(x_C, y_C)$ . La géométrie d'un élément isolé reposant sur le support  $\Gamma$  donné est donc parfaitement définie par six paramètres. Un élément possède donc six degrés de liberté, qui correspondent aux paramètres  $(s_A, x_B, y_B, x_C, y_C, s_D)$ .

Les unités cinématiques du domaine sont discrétisées comme une unique file d'éléments pseudo-quadrilatères. Le bord supérieur de chaque élément coïncide exactement avec une partie de la frontière supérieure de l'unité cinématique. De même, le bord inférieur des éléments coïncide avec la frontière inférieure de l'unité cinématique. Les bords latéraux des éléments, situés à l'intérieur de la file, présentent la propriété d'être partagés par deux éléments voisins. Seuls les éléments qui sont aux deux extrémités de la file possèdent un bord latéral propre qui n'est partagé par aucun autre élément de la file. Ce bord coïncide alors avec une frontière latérale ou éventuellement une partie de la frontière supérieure de l'unité cinématique.

Il est à noter que comme le bord supérieur d'un élément est un unique segment de droite, par chaque sommet (point de rupture de pente) de la ligne polygonale frontière supérieure de l'unité cinématique, il passe nécessairement une frontière latérale séparant deux éléments.



**Figure 3-9 Découpage d'une unité cinématique en une seule file d'éléments**

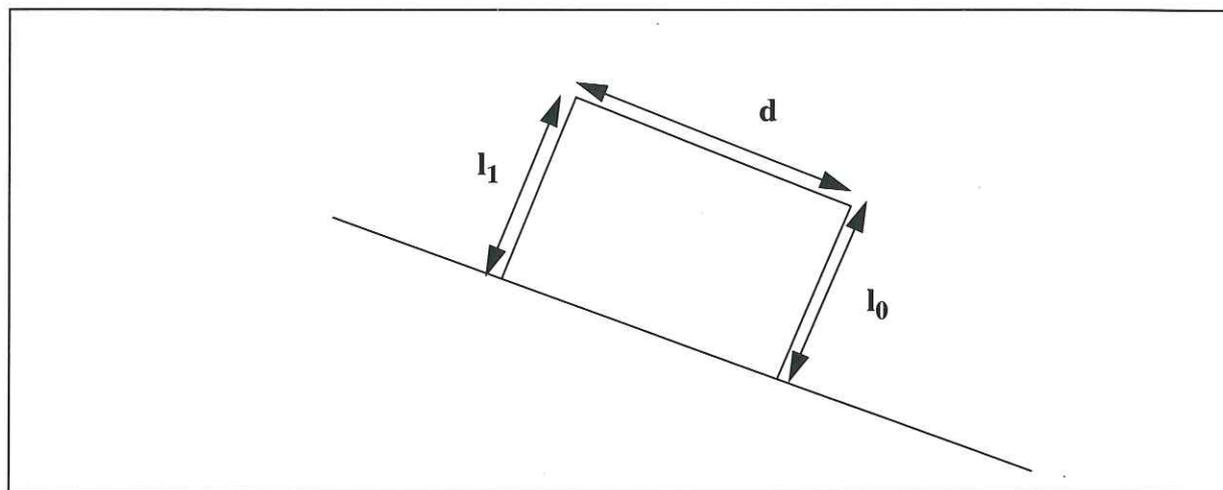
On a montré précédemment que le nombre de degrés de liberté d'un élément isolé était égal à six, il s'agit du nombre de paramètres fixant la position des quatre noeuds de l'élément. Or dans une unité cinématique, les éléments constituent une file, et les noeuds sont dans le cas général partagés par deux éléments voisins, sauf pour les noeuds des premiers et derniers éléments de la file. A partir de ces simples remarques, il est facile de dénombrer les degrés de liberté d'une unité cinématique modélisée sous la forme d'une file de  $n$  éléments. L'unité possède  $(n+1)$  noeuds sur le support  $\Gamma$  soit  $(n+1)$  degrés de liberté. Elle possède également  $(n+1)$  noeuds n'appartenant pas au support  $\Gamma$  soit  $2(n+1)$  degrés de liberté. Le nombre total de degrés de liberté de l'unité composée de  $n$  éléments est donc égal à  $3(n+1)$ .

L'importance de ce dénombrement des degrés de liberté d'une unité cinématique apparaît lorsque l'on veut résoudre le problème géométrique de la reconstruction de l'unité cinématique. En effet, les inconnues de ce problème géométrique sont les  $3(n+1)$  paramètres caractérisant la géométrie de l'unité cinématique.

### 3.1.5 : Procédure automatique de découpage des unités cinématiques

Une fois connu les contours des unités cinématiques des écailles, il convient de discrétiser chaque unité cinématique en une file d'éléments pseudo-quadrilatères. Cette tâche peut

facilement être automatisée en fonction d'un paramètre de forme  $\phi$  des éléments. Ce paramètre  $\phi$  est défini comme indiqué sur la figure 3-10. Il caractérise la géométrie de l'élément en mesurant l'aplatissement de l'élément sur son support. Le paramètre  $\phi$  est égal au rapport du diamètre  $d$  de l'élément dans la direction stratigraphique par la longueur moyenne des deux segments latéraux de l'élément  $(l_0+l_1)/2$ .



**Figure 3-10** Caractérisation de la forme d'un élément pseudo-quadrilatère par le paramètre adimensionnel  $\phi=2d/(l_0+l_1)$

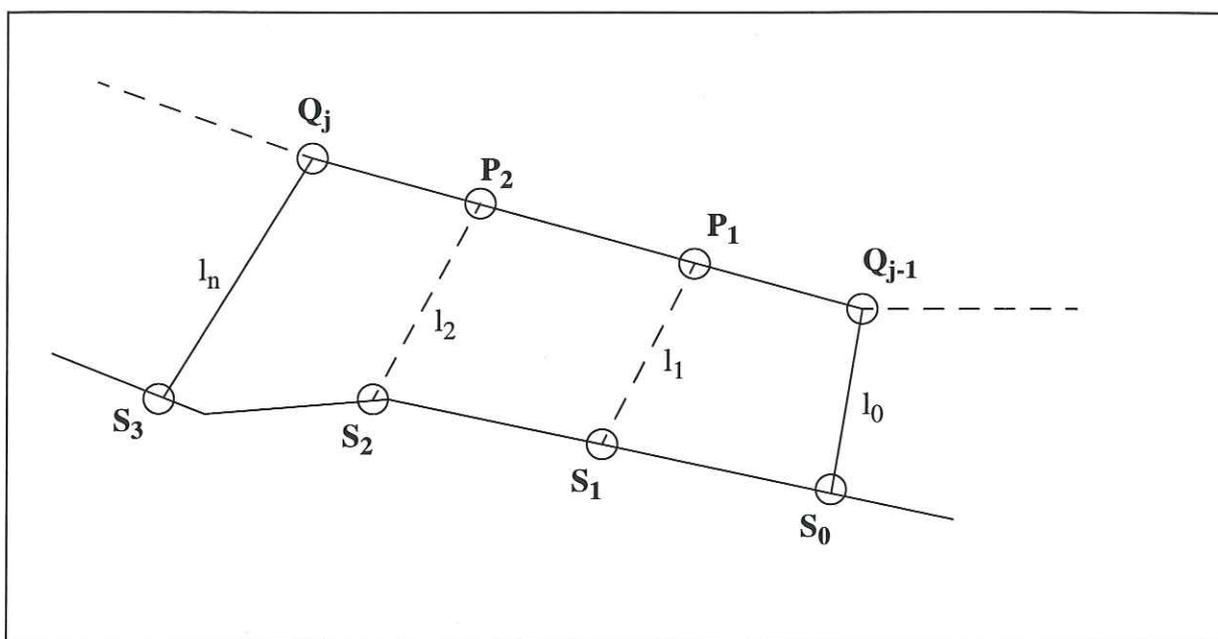
Il est pratique de mailler automatiquement les unités cinématiques simplement en respectant un paramètre de forme donné  $\phi$ . Par ce biais, il est possible de contrôler le raffinement du découpage des unités cinématiques. Par exemple, la donnée d'un paramètre de forme plus petit revient à définir un maillage plus dense. Et le maillage d'une unité cinématique avec des éléments dont le paramètre de forme est égal à un, conduit à définir un découpage avec des éléments isodiamétriques. La discussion concernant le choix d'un paramètre de forme optimal est menée section 4.5.1 page 125. Le point essentiel est qu'il y a compétition entre différentes considérations au moment du choix du paramètre de forme. Par exemple, si on considère la stabilité géométrique de la méthode de reconstruction, la tendance est à définir un maillage dont les éléments ont un paramètre de forme petit. Au contraire, si on souhaite mettre en avant l'économie de calcul en réduisant la quantité de données et d'inconnues, il apparaît qu'un maillage moins dense, dont le paramètre de forme est plus grand est plus approprié.

La procédure automatique de maillage d'une unité cinématique en une file de  $n$  éléments pseudo-quadrilatères consiste à définir deux suites de  $(n+1)$  noeuds ( $P_i$ ) et ( $S_i$ ) respectivement sur les frontières supérieure et inférieure de l'unité cinématique. Les quatre noeuds de l'élément d'indice  $i$  sont alors  $(P_{i-1}, S_{i-1}, S_i, P_i)$ . La procédure de maillage comporte deux étapes principales :

- 1 / A partir de la ligne polygonale ( $Q_j$ ) frontière supérieure de l'unité cinématique, il convient de définir les noeuds  $P_i$  du maillage qui reposent sur ( $Q_j$ ). Il est à noter que tous les sommets de ( $Q_j$ ) sauf éventuellement les extrémités (si l'unité cinématique ne possède pas de frontières latérales) font partie des noeuds  $P_i$ .

Il s'agit donc de densifier les segments de la ligne polygonale ( $Q_j$ ) en définissant des noeuds supplémentaires en plus des sommets  $Q_j$  obligatoires.

2 / A partir de la géométrie de la ligne polygonale ( $R_j$ ) frontière inférieure de l'unité cinématique, il s'agit de définir des noeuds  $S_i$  en nombre égal aux noeuds  $P_i$  de façon à compléter le maillage. Les premier et dernier noeuds de la suite ( $S_i$ ) sont nécessairement les premier et dernier noeuds de ( $R_j$ ). Il s'agit ensuite d'apparier chaque noeud  $P_i$  avec un noeud  $S_i$ .



**Figure 3-11 Découpage d'un segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  de la frontière supérieure en trois segments**

Une façon simple de réaliser cet appariement est de paramétrer les deux lignes polygonales ( $Q_j$ ) et ( $R_j$ ) à l'aide des abscisses curvilignes positives respectives  $q \in [0, Q]$  et  $r \in [0, R]$ . De cette façon, on définit une bijection entre les lignes ( $Q_j$ ) et ( $R_j$ ). Un point de la ligne ( $Q_j$ ) est associé à un unique point de la ligne ( $R_j$ ) par la relation liant les abscisses curvilignes :  $q = r Q/R$ .

#### a ) Procédure de densification d'un segment $[Q_{j-1}, Q_j]$

La densification du segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  est illustrée par la figure 3-11. Les données de ce problème sont les paramètres géométriques suivants : les valeurs des longueurs des deux segments latéraux  $l_0$  et  $l_n$ , la longueur  $D$  du segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$ , et le paramètre de forme  $\phi$ .

On répond à ce problème en donnant le nombre  $n-1$  de points découpant  $[Q_{j-1}, Q_j]$  ainsi que par la suite des valeurs  $(u_i)$  avec  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  indiquant la position des  $(n+1)$  noeuds ( $P_i$ ) sur le segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$ . On a nécessairement  $u_0=0$  car  $P_0=Q_{j-1}$  et  $u_n=D$  car  $P_n=Q_j$ . On appelle  $(l_i)$  la suite des longueurs des segments latéraux opérant le découpage comme sur la

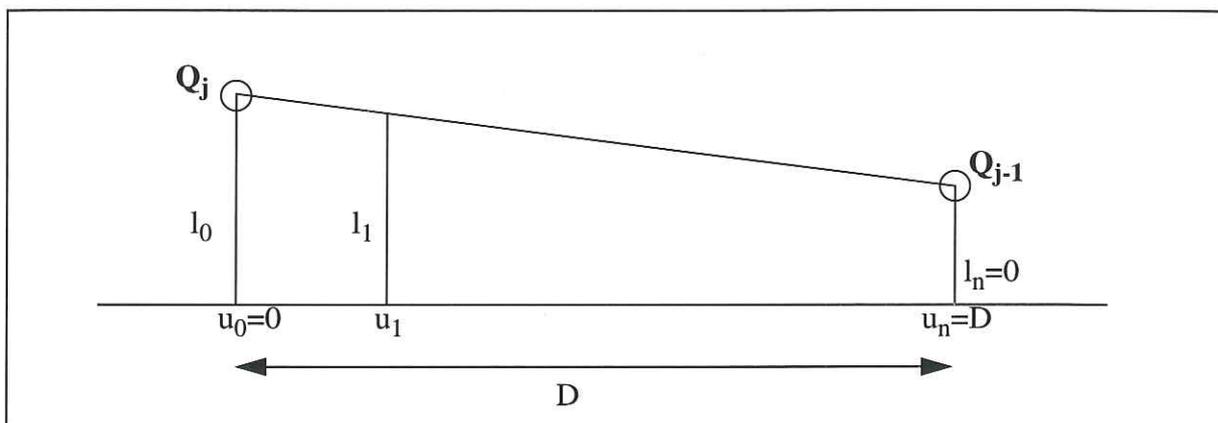
figure 3-12.

En considérant que la longueur  $l_i$  du segment latéral de découpe varie linéairement avec la coordonnée  $u_i$  (comme pour le cas d'un support linéaire : figure 3-12), on a la relation linéaire suivante entre la coordonnée  $u$  d'un segment latéral et  $l$  sa longueur :

$$D l = D l_0 + u (l_n - l_0).$$

En différentiant par rapport aux variables  $u$  et  $l$ , on obtient la relation différentielle :

$$D dl = (l_n - l_0) du.$$



**Figure 3-12 Notations du calcul de densification d'un segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$**

On peut considérer la découpe du segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  à l'aide d'une fonction de densité  $g(u)$  avec  $u \in [0, D]$ . Cette fonction  $g(u)$  peut être comprise comme la densité d'éléments par unité de longueur au point de coordonnée  $u$ . On a la relation :

$$\int_0^D g(u) du = n$$

Cette intégrale exprime le fait que le segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  est découpé en  $n$  éléments. La suite des valeurs  $(u_i)$  avec  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  est alors déterminée par la connaissance de la fonction  $g(u)$  sur l'intervalle  $[0, D]$  grâce aux relations :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \int_{u_i}^{u_{i+1}} g(u) du = 1$$

Le découpage du segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  est alors transformé en la détermination du nombre  $n$  d'éléments de ce découpage ainsi qu'en la détermination de la fonction de densité  $g(u)$  sur l'intervalle  $[0, D]$ .

Si les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont distincts, alors la relation linéaire énoncée précédemment entre les réels  $u$  et  $l$  définit une fonction affine  $u(l)$  de l'intervalle d'extrémités  $l_0$  et  $l_n$  sur  $[0, D]$  et sa bijection réciproque  $l(u)$  existe et est également affine.

La relation différentielle :  $D dl = (l_n - l_0) du$ , permet d'opérer le changement de variable d'intégration

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \int_{l_i}^{l_{i+1}} \frac{Dg(u(l))}{(l_n - l_0)} dl = 1$$

Soit

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \int_{l_i}^{l_{i+1}} g(u(l)) dl = \frac{(l_n - l_0)}{D}$$

Et en sommant les  $n$  intégrales précédentes on obtient :

$$\int_{l_0}^{l_n} g(u(l)) dl = \frac{(l_n - l_0)n}{D}$$

Remarque : cette écriture n'est valide que dans l'hypothèse où les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont distincts.

On peut fixer arbitrairement le nombre  $n$  d'éléments découpant le segment  $[Q_{j-1}, Q_j]$  en écrivant le paramètre de forme  $\bar{\phi}$  pour un élément moyen hypothétique du découpage. Le diamètre de cet élément selon la direction stratigraphique est égal à  $D/n$ , et la longueur moyenne des deux segments latéraux de cet élément est  $(l_0 + l_n)/2$ .

$$\text{On obtient ainsi la relation : } \bar{\phi} = \frac{2D}{n(l_0 + l_n)}$$

$$\text{Le nombre } n \text{ vaut alors : } n = \frac{2D}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)}$$

Le nombre  $n$  d'éléments peut être raisonnablement fixé en égalant la quantité  $\bar{\phi}$  au paramètre de forme  $\phi$  qui est connu a priori. L'entier  $n$  est donc pris égal à l'entier le plus proche du réel  $n$  donné par la formule précédente en remplaçant la quantité inconnue  $\bar{\phi}$  par  $\phi$  (la fonction  $E$  désignant la partie entière) :

$$n = E\left(\frac{2D}{\phi(l_0 + l_n)} + \frac{1}{2}\right)$$

On peut ensuite remplacer la quantité  $n/D$  dans l'intégrale précédente :

$$\int_{l_0}^{l_n} g(u(l)) dl = \frac{2(l_n - l_0)}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)}$$

En notant  $G(l)$  une primitive de la fonction  $g(u(l))$ , on a la relation:

$$G(l_n) - G(l_0) = \frac{2(l_n - l_0)}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)}$$

On peut exhiber une fonction  $g_1(u(l))$  vérifiant la relation intégrale précédente dans tous les cas de figure en considérant comme fixé le paramètre  $l_0$  et variable le paramètre  $l_n$ . Cette façon de procéder revient à privilégier le paramètre  $l_0$  par rapport à  $l_n$ . La relation intégrale précédente est écrite en remplaçant la variable  $l_n$  par la variable muette  $l$ .

$$G_1(l) - G_1(l_0) = \frac{2(l - l_0)}{\bar{\phi}(l_0 + l)}$$

En dérivant par rapport à la variable  $l$ , on obtient une expression de la fonction de densité  $g_1(u(l))$  en fonction des seuls paramètres  $\bar{\phi}$  et  $l_0$  :

$$g_1(u(l)) = \frac{d}{dl} \left( \frac{2(l - l_0)}{\bar{\phi}(l_0 + l)} \right) = \frac{4l_0}{\bar{\phi}(l_0 + l)^2}$$

Une démarche analogue consiste à privilégier le paramètre  $l_n$  en le considérant comme fixé, cela conduit aux définitions des fonctions suivantes :

$$G_2(l_n) - G_2(l) = \frac{2(l_n - l)}{\bar{\phi}(l + l_n)}$$

On dérive ensuite par rapport à la variable  $l$  :

$$g_2(u(l)) = \frac{4l_n}{\bar{\phi}(l_n + l)^2}$$

Le choix d'une des deux fonctions de densité  $g_1(u(l))$  ou  $g_2(u(l))$  n'est pas plus justifié dans un cas que dans l'autre, et ce choix revient à privilégier un des deux paramètres  $l_0$  ou  $l_n$  par rapport à l'autre.

On peut remarquer qu'il est possible d'écrire plus simplement les deux fonctions  $G_1$  et  $G_2$  à l'aide des constantes d'intégration  $K_1$  et  $K_2$ . Les valeurs de  $K_1$  et  $K_2$  sont sans influence sur les valeurs des termes de la suite  $(u_i)$  et du découpage ainsi défini.

$$G_1(l) = \frac{-4l_0}{\bar{\phi}(l_0 + l)} + K_1$$

$$G_2(l) = \frac{-4l_n}{\bar{\phi}(l_n + l)} + K_2$$

Il est remarquable que si deux fonctions  $G_1$  et  $G_2$  vérifient la relation :

$$G(l_n) - G(l_0) = \frac{2(l_n - l_0)}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)}$$

Alors la fonction  $G$ , barycentre des fonctions  $G_1$  et  $G_2$  pondérés respectivement par  $\alpha$  et  $(1-\alpha)$  vérifie la même relation quel que soit le paramètre  $\alpha$  :

$$G(l) = \alpha G_1(l) + (1 - \alpha) G_2(l)$$

Ainsi, il apparaît souhaitable pour obtenir des formules symétriques pour les paramètres  $l_0$  et  $l_n$  d'adopter pour définir  $G$  un paramètre  $\alpha$  respectant la symétrie des paramètres  $l_0$  et  $l_n$ , soit  $\alpha=1/2$ . Cependant, comme les fonctions  $G_1$  et  $G_2$  ne sont plus correctement définies pour  $l_0=0$  et  $l_n=0$  respectivement. Il est judicieux d'adopter comme paramètre  $\alpha$  une fonction des variables  $l_0$  et  $l_n$ ,  $\alpha(l_0, l_n)$ , telle que :

$$\alpha(0, l_n)=0 \text{ et } \alpha(l_0, 0)=1$$

De cette façon si  $l_0=0$  :  $G(l)=G_1(l)$  ; et si  $l_n=0$  :  $G(l)=G_2(l)$ .

Une telle fonction est par exemple :  $\alpha(l_0, l_n) = \frac{l_0}{l_0 + l_n}$

On obtient :

$$g(u(l)) = \frac{4}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)} \left( \left( \frac{l_0}{l_0 + 1} \right)^2 + \left( \frac{l_n}{l_n + 1} \right)^2 \right)$$

$$G(l) = \frac{-4}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)} \left( \frac{l_0^2}{l_0 + 1} + \frac{l_n^2}{l_n + 1} \right)$$

La fonction  $G$  est bien symétrique pour les paramètres  $l_0$  et  $l_n$  et elle est définie si un des paramètres  $l_0$  ou  $l_n$  est nul.

Cette écriture a été obtenue sous l'hypothèse que les réels  $l_0$  et  $l_n$  étaient distincts. La fonction  $G(l)$  étant alors définie sur l'intervalle d'extrémités  $l_0$  et  $l_n$ .

Remarque :

Si les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont confondus l'intervalle est réduit à un seul point, et on obtient une valeur constante :

$$g(u(l_0)) = \frac{4l_0}{\bar{\phi}(2l_0)^2} = \frac{1}{\bar{\phi}l_0}$$

Dans ce cas, le changement de variable  $u(l)$  n'est pas valide pour le calcul des intégrales. On obtient une solution au problème de découpage en adoptant la fonction de densité cons-

tante  $g(u) = 1/\bar{\phi}l_0$  :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \int_{u_i}^{u_{i+1}} \frac{1}{\bar{\phi}l_0} du = 1$$

On a la relation de récurrence :  $u_{i+1} = u_i + \bar{\phi}l_0$ . Le découpage est donc équidistant :  $u_i = i\bar{\phi}l_0$  et on vérifie que :  $u_n = n\bar{\phi}l_0 = D$

Dans le cas où les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont distincts, il est commode de déterminer la suite  $(l_i)$  plutôt que de calculer directement la suite  $(u_i)$  :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \int_{l_i}^{l_{i+1}} g(u(l)) dl = \frac{(l_n - l_0)}{D}$$

$$\frac{-4}{\bar{\phi}(l_0 + l_n)} \left[ \frac{l_0^2}{l_0 + 1} + \frac{l_n^2}{l_n + 1} \right]_{l_i}^{l_{i+1}} = \frac{(l_n - l_0)}{D}$$

$$\left[ \frac{l_0^2}{l_0 + 1} + \frac{l_n^2}{l_n + 1} \right]_{l_i}^{l_{i+1}} = \frac{(l_n - l_0)(l_0 + l_n)\bar{\phi}}{-4D} = \frac{l_n - l_0}{-2n}$$

Il est utile d'introduire une fonction  $F$  sur l'intervalle positif d'extrémités  $l_0$  et  $l_n$  de la façon suivante :

$$F(l) = \frac{l_0^2}{l_0 + 1} + \frac{l_n^2}{l_n + 1}$$

La fonction  $F$  est positive sur son intervalle de définition car les quantités  $l_0$  et  $l_n$  sont elles-mêmes positives. De plus la fonction  $F$  est décroissante car sa dérivée est négative.

Comme on a toujours :  $F(0) = l_0 + l_n$  ; on en déduit que pour tout  $l$  de l'intervalle positif d'extrémités  $l_0$  et  $l_n$  on a la relation :

$$0 \leq F(l) \leq l_0 + l_n$$

Il est utile de déterminer la fonction réciproque de  $F : F^{-1}$

$$y = F(l) = \frac{l_0^2}{l_0 + 1} + \frac{l_n^2}{l_n + 1}$$

L'équation  $1 = F^{-1}(y)$  est une équation du second degré en  $l$  :

$$y(l_0 + 1)(l_n + 1) = l_0^2(l_n + 1) + l_n^2(l_0 + 1)$$

$$l^2y + l((l_0 + l_n)y - (l_0^2 + l_n^2)) + (l_0 l_n)(y - (l_0 + l_n)) = 0$$

Il est commode de poser :  $s = l_0 + l_n$  et  $p = l_0 l_n$ .

$$l^2y + l(sy - s^2 + 2p) + p(y - s) = 0$$

Le déterminant est :  $\Delta = (sy - s^2 + 2p)^2 + 4p(s - y)y$

Comme le réel "y" appartient à l'intervalle  $]0, s]$ , le déterminant est toujours positif, et l'équation du second degré en l admet des solutions qui sont données par la formule :

$$l = F^{-1}(y) = \frac{s^2 - 2p - sy \pm \sqrt{\Delta}}{2y}$$

Or on sait que la quantité  $F^{-1}(y)$  est nécessairement positive car le domaine de définition de F est un intervalle positif.

Comme la quantité  $\sqrt{\Delta}$  est toujours supérieure à  $(s^2 - 2p - sy)$ , la formule donnant  $F^{-1}(y)$  avec un signe plus est la seule qui fournit une solution positive acceptable.

On obtient ainsi l'unique formule donnant l'expression de la fonction réciproque  $F^{-1}$  :

$$F^{-1}(y) = \frac{s^2 - 2p - sy + \sqrt{\Delta}}{2y}$$

On peut donc écrire la relation de récurrence à l'aide de la fonction F :

$$F(l_{i+1}) - F(l_i) = \frac{(l_n - l_0)}{-2n}$$

Et en utilisant la fonction réciproque  $F^{-1}$ , on obtient l'expression du terme général de la suite  $(l_j)$  en fonction du terme précédent :

$$l_{i+1} = F^{-1}\left(F(l_i) - \frac{(l_n - l_0)}{2n}\right)$$

Dans le cas où les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont distincts, la suite  $(u_i)$  peut être déduite de  $(l_i)$  grâce à la fonction de changement de variable  $u(l) : u_i = u(l_i)$

On peut remarquer que dans le cas où les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont confondus, la relation de récurrence indique que la suite  $(l_i)$  est stationnaire. Ce fait confirme bien que la suite  $(u_i)$  ne peut être déduite de  $(l_i)$  dans ce cas.

### b) Maillage d'un biseau

On examine le cas du maillage d'un biseau d'une unité cinématique pour lequel la longueur nulle correspond au paramètre  $l_n$ , les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont distincts.

$$\text{On a donc : } n = \frac{2D}{\bar{\phi}l_0}$$

La fonction de densité devient :

$$g(u(l)) = \frac{4l_0^2}{\bar{\phi}(l_0 + l)^2}$$

La fonction  $F(l)$  et sa réciproque  $F^{-1}(y)$  :

$$F(l) = \frac{l_0^2}{l_0 + l}$$
$$F^{-1}(y) = l_0 \left( \frac{l_0}{y} - 1 \right)$$

La relation de récurrence de la suite  $(l_i)$  est dans ce cas :

$$l_{i+1} = F^{-1} \left( F(l_i) + \frac{l_0}{2n} \right)$$

En explicitant les écritures de  $F(l)$  et  $F^{-1}(y)$ .

$$l_{i+1} = F^{-1} \left( \frac{l_0^2}{l_0 + l_i} + \frac{l_0}{2n} \right) = F^{-1} \left( \frac{(2n+1)l_0^2 + l_0 l_i}{2n(l_0 + l_i)} \right)$$

$$l_{i+1} = l_0 \left( \frac{2n(l_0 + l_i)}{(2n+1)l_0 + l_i} - 1 \right)$$

Ce qui donne la relation de récurrence suivante :

$$l_{i+1} = l_0 \frac{2n(l_0 + l_i) - (2n+1)l_0 - l_i}{(2n+1)l_0 + l_i} = l_0 \frac{(2n-1)l_i - l_0}{l_0(2n+1) + l_i}$$

On peut montrer que le terme général de la suite  $(l_i)$  est :  $l_i = l_0 \frac{n-i}{n+i}$

En appliquant la formule de récurrence pour l'indice  $i=0$ .

$$l_1 = l_0 \frac{(2n-1)l_0 - l_0}{l_0(2n+1) + l_0} = l_0 \frac{n-1}{n+1}$$

$$l_{i+1} = l_0 \frac{(2n-1)l_0 \frac{n-i}{n+i} - l_0}{l_0(2n+1) + l_0 \frac{n-i}{n+i}}$$

$$l_{i+1} = l_0 \frac{(2n-1)(n-i) - (n+i)}{(2n+1)(n+i) + (n-i)} = l_0 \frac{2n^2 - 2n(i+1)}{2n^2 + 2n(i+1)} = l_0 \frac{n - (i+1)}{n + (i+1)}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence.

$$\text{Comme } u(1) = \frac{D(1-l_0)}{(l_n-l_0)} = \frac{D(1-l_0)}{-l_0}$$

On obtient le terme général de la suite  $(u_i)$  :

$$u_i = \frac{D(l_i-l_0)}{-l_0} = \frac{2iD}{(n+i)}$$

On vérifie bien que  $(u_0=0)$  et  $(u_n=D)$

On examine le cas du maillage d'un biseau d'une unité cinématique pour lequel la longueur nulle correspond à  $l_0$ , les réels  $l_0$  et  $l_n$  sont bien différents dans ce cas.

$$\text{On a donc : } n = \frac{2D}{\bar{\phi}l_n}$$

La fonction de densité devient :

$$g(u(1)) = \frac{4l_n^2}{\bar{\phi}(l_n+1)^2}$$

La fonction  $F(l)$  et sa réciproque  $F^{-1}(y)$  :

$$F(l) = \frac{l_n^2}{l_n+1}$$

$$F^{-1}(y) = l_n \left( \frac{l_n}{y} - 1 \right)$$

La relation de récurrence de la suite  $(l_i)$  devient dans ce cas :

$$l_{i+1} = F^{-1} \left( F(l_i) - \frac{l_n}{2n} \right)$$

En explicitant les écritures de  $F(l)$  et  $F^{-1}(y)$ .

$$l_{i+1} = F^{-1}\left(\frac{l_n^2}{l_n + l_i} - \frac{l_n}{2n}\right) = F^{-1}\left(\frac{(2n-1)l_n^2 - l_i l_n}{2n(l_n + l_i)}\right)$$

Ce qui donne la relation de récurrence suivante :

$$l_{i+1} = l_n \left( \frac{2n(l_n + l_i)}{(2n-1)l_n - l_i} - 1 \right) = l_n \frac{(2n+1)l_i + l_n}{(2n-1)l_n - l_i}$$

On peut montrer que le terme général de la suite  $(l_i)$  est :  $l_i = l_n \frac{i}{2n-i}$

En appliquant la formule de récurrence pour l'indice  $i=0$ . (en rappelant que  $l_0=0$ )

$$l_1 = l_n \frac{l_n}{l_n(2n-1)} = l_n \frac{1}{2n-1}$$

$$l_{i+1} = l_n \frac{(2n+1)\frac{i}{2n-i} + 1}{(2n-1) - \frac{i}{2n-i}}$$

$$l_{i+1} = l_n \frac{(2n+1)i + (2n-i)}{(2n-1)(2n-i) - i} = l_n \frac{2n(i+1)}{2n(2n-(i+1))} = l_n \frac{i+1}{2n-(i+1)}$$

Ce qui achève la démonstration par récurrence.

$$\text{Comme } u(1) = \frac{D(1-l_0)}{(l_n-l_0)} = \frac{Dl}{l_n}$$

On obtient le terme général de la suite  $(u_i)$  :

$$u_i = \frac{Dl_i}{l_n} = \frac{iD}{2n-i}$$

On vérifie bien que  $(u_0=0)$  et  $(u_n=D)$

### 3.2 : Coordonnées locales et marqueurs lithologiques

FOLDIS est un modèle discret dans lequel on décrit les écaïlles tectoniques du bassin comme un empilement d'unités cinématiques, susceptibles de glisser les unes sur les autres lors des phases tectoniques. Ces unités représentent souvent elles-mêmes un empilement de niveaux sédimentaires distincts. Cependant dans une unité cinématique, les niveaux sédimentaires ont un comportement cinématique d'ensemble solidaire et cohérent. Les objets fondamentaux de la modélisation sont donc les unités cinématiques qui sont constituées d'une unique file d'éléments pseudo-quadrilatères.

Il est toutefois nécessaire de savoir repérer dans un premier temps, puis de suivre des objets géologiques qui sont d'une taille inférieure à celle des unités cinématiques. Par exemple, il est utile de pouvoir discerner des entités comme des horizons stratigraphiques à l'intérieur des éléments d'une unité cinématique.

Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de définir pour les briques de base de la modélisation, à savoir les éléments pseudo-quadrilatères, un système de coordonnées locales. Ces coordonnées servent à repérer la position, relativement à l'élément, des objets matériels qui le constituent. Elles permettent ainsi d'accéder aux détails internes à l'unité cinématique.

### 3.2.1 : Coordonnées locales

Comme les éléments sont des objets de dimension deux, on définit pour repérer les points géométriques qui les composent un système de coordonnées à deux paramètres. On énonce tout d'abord les principes a priori qui doivent être respectés par le système de coordonnées locales. Puis on expose la façon dont on définit ces coordonnées, en soulignant les défauts de la méthode et ses insuffisances de manière à proposer une amélioration.

#### a ) Principes à la base de la définition des coordonnées locales

On définit le système de coordonnées locales à un élément à l'aide d'un objet mathématique : une fonction bijective  $\varphi$ . La bijection  $\varphi$  agit d'un domaine  $D$  de  $\mathcal{R}^2$ , qui représente l'ensemble des coordonnées locales, vers l'ensemble des points géométriques de l'élément  $E$ . Avant de définir effectivement la fonction  $\varphi$ , on énonce les principes que l'on souhaite lui voir respecter. Ces principes sont justifiés par les propriétés qu'ils impliquent quant au système de coordonnées locales.

- Le domaine  $D$ , ensemble de définition de la fonction  $\varphi$ , doit être un domaine invariant de  $\mathcal{R}^2$ .

Ainsi, quelle que soit la façon dont l'élément est transformé et déformé lors des phases tectoniques, il est toujours possible de suivre un point matériel à l'aide de ses coordonnées locales dans l'élément.

- La bijection  $\varphi$  doit présenter l'importante propriété d'être continue.

Ainsi, cette propriété assure que la topologie de l'élément  $E$  est bien conservée au cours de son déplacement et de sa déformation. Elle implique en particulier que les points de la frontière de l'élément  $\partial E$  correspondent par la fonction  $\varphi$  à des points de  $\partial D$ , frontière du domaine des coordonnées locales  $D$ . De cette façon, en suivant les points matériels des éléments à travers leurs coordonnées locales, on assure que tous les voisinages des points des éléments sont conservés.

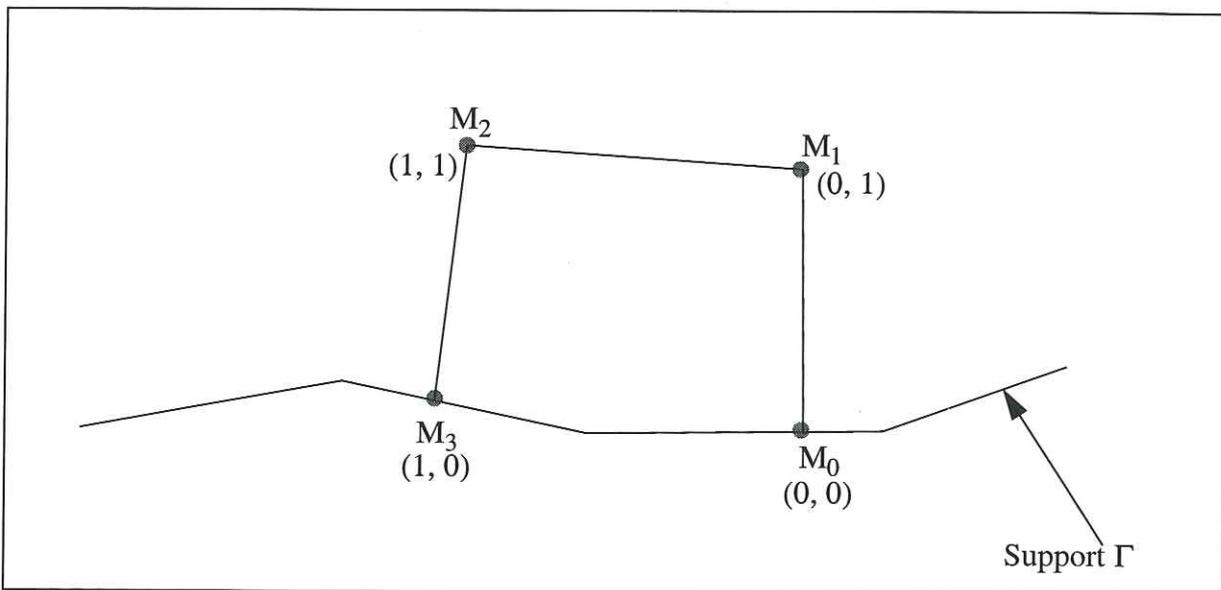
#### b ) Définition des coordonnées locales

On choisit de prendre pour domaine  $D$ , ensemble de définition de la fonction  $\varphi$ , le domaine carré de  $\mathcal{R}^2$  :  $[0, 1]^2$ .

On désigne par  $(\xi, \eta)$  les deux coordonnées locales à l'élément.

L'élément pseudo-quadrilatère  $E$  possède quatre noeuds ( $M_1, M_2$ ), et les deux noeuds ( $M_0, M_3$ ) qui reposent sur le support  $\Gamma$ . Les coordonnées locales de ces noeuds, voir figure 3-13, sont respectivement :

- $\varphi(0, 0) = M_0$
- $\varphi(0, 1) = M_1$
- $\varphi(1, 1) = M_2$
- $\varphi(1, 0) = M_3$



**Figure 3-13 Coordonnées locales des noeuds d'un élément pseudo-quadrilatère**

Afin de caractériser entièrement la fonction  $\varphi$ , on complète sa définition en introduisant des propriétés supplémentaires concernant sa linéarité :

- Pour tout  $\xi \in [0, 1]$ , les fonctions partielles  $\varphi_{|\xi}(\eta) = \varphi(\xi, \eta)$ , de la seule variable  $\eta$  sont linéaires :

Ainsi, on a pour tout  $\eta \in [0, 1]$  on a :

$$\varphi(\xi, \eta) = (1 - \eta) \varphi(\xi, 0) + \eta \varphi(\xi, 1)$$

- La fonction partielle  $\varphi_{|\eta=1}(\xi) = \varphi(\xi, 1)$ , de la seule variable  $\xi$  est linéaire :

Ainsi, on a pour tout  $\xi \in [0, 1]$  :

$$\varphi(\xi, 1) = (1 - \xi) \varphi(0, 1) + \xi \varphi(1, 1)$$

Il y a linéarité de la fonction  $\varphi_{|\eta=1}(\xi)$  sur le segment  $[M_1, M_2]$ .

- La fonction partielle  $\varphi_{|\eta=0}(\xi) = \varphi(\xi, 0)$ , est telle que :

Pour tout  $\xi \in [0, 1]$  : le point  $\varphi(\xi, 0)$  appartient au support  $\Gamma$  de l'élément. On désigne par  $s(M)$  la fonction qui donne la coordonnée curviligne du point  $M$  sur le support  $\Gamma$ .

$\forall \xi \in [0, 1]$  on a :

$$s(\varphi(\xi, 0)) = (1 - \xi) s(\varphi(0, 0)) + \xi s(\varphi(1, 0))$$

Cette propriété est la linéarité, sur le support  $\Gamma$ , de la fonction composée  $s \circ \varphi$ , soit :  $s(\varphi_{|\eta=0}(\xi))$ .

Remarque :

$\varphi(\xi, \eta)$  désigne un point géométrique appartenant à l'élément  $E$ . On manipule ce point  $\varphi(\xi, \eta)$  comme un élément d'un espace vectoriel de dimension deux. En particulier, la définition des opérations d'addition et de multiplication par un scalaire correspondent à celles des éléments de l'espace vectoriel.

Construction effective du point  $\varphi(\xi, \eta)$  :

Soit  $(\xi, \eta)$  un point quelconque du domaine  $[0, 1]^2$ .

- Les points  $\varphi(\xi, 1)$  et  $\varphi(\xi, 0)$  appartiennent respectivement à  $[M_1, M_2]$  et au support  $\Gamma$ . Ces deux points sont parfaitement déterminés par la connaissance des coordonnées absolues des quatre noeuds  $(M_0, M_1, M_2, M_3)$  et par les propriétés de linéarité de la fonction  $\varphi$  sur le segment  $[M_1, M_2]$  et sur le support  $\Gamma$ .

- La propriété de linéarité de la fonction partielle  $\varphi_{|\xi}(\eta)$  permet ensuite de construire le point  $\varphi(\xi, \eta)$  à partir des deux points  $\varphi(\xi, 1)$  et  $\varphi(\xi, 0)$  :

$$\varphi(\xi, \eta) = (1 - \eta) \varphi(\xi, 0) + \eta \varphi(\xi, 1)$$

Détermination des coordonnées locales d'un point  $M$  de l'élément  $E$  :

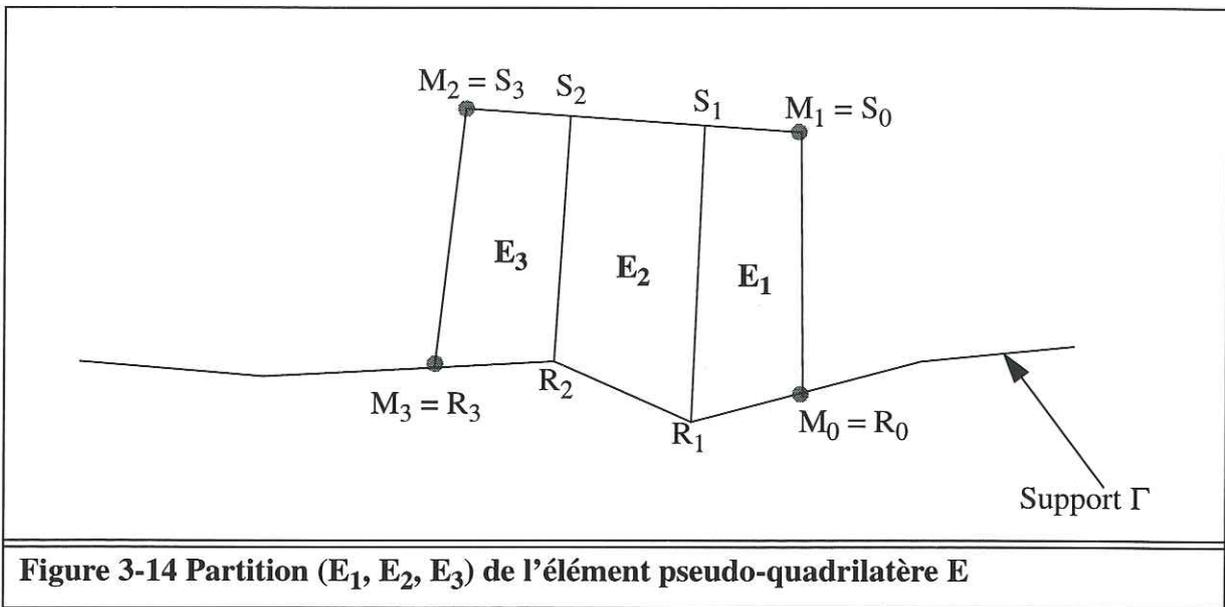
Soit  $M$ , un point quelconque de l'élément  $E$ . Il s'agit d'indiquer la méthode de détermination des coordonnées locales du point  $M$  :  $(\xi, \eta) = \varphi^{-1}(M)$ .

On réalise une partition de l'élément  $E$  de la façon suivante :

- On note  $(R_i)$  les  $(n-1)$  points de rupture de pente sur le support  $\Gamma$  entre les noeuds  $M_0$  et  $M_3$ , voir figure 3-14. La suite de points  $(R_i)$  est indiquée dans l'ordre de leur abscisse curviligne sur le support  $\Gamma$  entre  $R_0 = M_0$  et  $R_n = M_3$ . On détermine ensuite la suite des premières coordonnées locales  $(\xi_i)$  des points de la suite  $(R_i)$  (en particulier on a :  $\xi_0 = 0$  et  $\xi_n = 1$ ).

- On construit ensuite sur le segment  $[M_1, M_2]$  la suite de points  $(S_i)$  ayant pour coordonnées locales  $(\xi_i, 1)$ . On a alors  $S_0 = M_1$  et  $S_n = M_2$ .

- Les parties  $E_i$  de la partition de l'élément  $E$ , voir figure 3-14, sont les quadrilatères  $(R_{i-1}, S_{i-1}, S_i, R_i)$ .



**Figure 3-14 Partition ( $E_1, E_2, E_3$ ) de l'élément pseudo-quadrilatère  $E$**

On remarque que la propriété de linéarité de la fonction composée  $s(\varphi_{|\eta=0}(\xi))$  sur l'ensemble de l'élément  $E$  entraîne la linéarité de  $\varphi_{|\eta=0}(\xi)$  sur chaque partie  $E_i$ , car la fonction  $s(M)$  est elle même linéaire chaque segment  $[R_{i-1}, R_i]$ . La linéarité de la fonction  $\varphi_{|\eta=0}(\xi)$ , compte tenu des autres propriétés de linéarité, entraîne la bilinéarité de  $\varphi(\xi, \eta)$  sur chaque partie  $E_i$  de l'élément  $E$ .

Il est possible de montrer que pour que la fonction  $\varphi(\xi, \eta)$  soit bilinéaire et régulière (de classe  $C^1$ ) sur chaque partie  $E_i$  une condition nécessaire est que le quadrilatère correspondant à la partie  $E_i$  ne possède pas d'angle intérieur supérieur à 180 degrés. Dans une telle configuration la fonction bilinéaire  $\varphi(\xi, \eta)$  est de plus inversible.

Soit  $M$ , un point appartenant à une partie  $E_i$  dans une configuration régulière :

On appelle  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$  les coordonnées absolues respectives des quatre sommets  $(R_{i-1}, S_{i-1}, S_i, R_i)$  de la partie  $E_i$  à laquelle appartient le point  $M$ . On appelle  $(\xi_0, \eta_0), (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), (\xi_3, \eta_3)$  les coordonnées locales à l'élément  $E$  respectivement aux mêmes sommets  $(R_{i-1}, S_{i-1}, S_i, R_i)$  de la partie  $E_i$ .

La bilinéarité de la fonction  $(x, y) = \varphi(\xi, \eta)$  entraîne également la bilinéarité de la fonction réciproque,  $(\xi, \eta) = \varphi^{-1}(x, y)$  qui est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 xy \\ \eta(x, y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy \end{cases}$$

On appelle M la matrice carrée d'ordre 4 :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & y_0 & x_0 y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \end{bmatrix}$$

Dans le cas d'une configuration régulière de la partie  $E_i$ , la matrice M est inversible et on peut donc écrire :

$$\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \text{on obtient} \quad \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad \text{on obtient} \quad \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

On détermine ainsi les huit coefficients  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$  qui définissent la fonction réciproque  $\varphi^{-1}(x, y)$ .

On parvient de cette façon à calculer à partir des coordonnées absolues  $(x, y)$  du point M ses coordonnées locales à l'élément  $(\xi, \eta)$ .

### c ) Inaptitude de la méthode du transport par les coordonnées locales pour des objets de dimension deux.

Il peut paraître intéressant d'utiliser les coordonnées locales à un élément  $(\xi, \eta)$  pour décrire et transporter des objets géologiques qui y sont contenus. En effet, il semble naturel de décrire les objets matériels composant un élément comme un sous-ensemble des points de l'élément. Lors du transport et de la déformation de l'élément, les objets internes sont eux-mêmes transportés et déformés. Ils sont alors reconstruits comme l'ensemble des points ayant les mêmes coordonnées locales. Cette façon de procéder pour transporter les objets composant l'élément est très simple. Toutefois il est essentiel de souligner un défaut important de cette méthode de transport des objets à deux dimensions composant l'élément. En effet, rien n'assure que par cette méthode, le principe de conservation de la surface des objets soit respecté.

On voit donc qu'une telle méthode de transport et de déformation des objets contenus dans les éléments n'est pas satisfaisante du point de vue physique ni même géologique. On doit concevoir une autre description des ensembles de points connexes à l'intérieur des éléments. La question essentielle est que le transport d'un tel ensemble doit être conservatif en ce qui concerne la mesure de l'ensemble de points, le calcul de l'aire.

### 3.2.2 : Marqueurs lithologiques dans les éléments

#### a ) Partition d'un élément selon les strates

Dans ce chapitre, on considère les parties d'un élément pseudo-quadrilatère E.

On note  $\mathcal{A}$  l'ensemble des parties A de l'élément E qui présentent les propriétés géométriques suivantes :

- A est une partie connexe de l'élément E.
- La frontière  $\partial A$  de la partie A est constituée de deux parties connexes  $\partial A_1$  et  $\partial A_2$  ( $\partial A = \partial A_1 \cup \partial A_2$ ). La frontière  $\partial A_1$  est intérieure à l'élément E; et la frontière  $\partial A_2$  coïncide avec une partie du contour  $\partial E$  de l'élément.

Une partie A appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}$ , est représentée sur la figure 3-15.

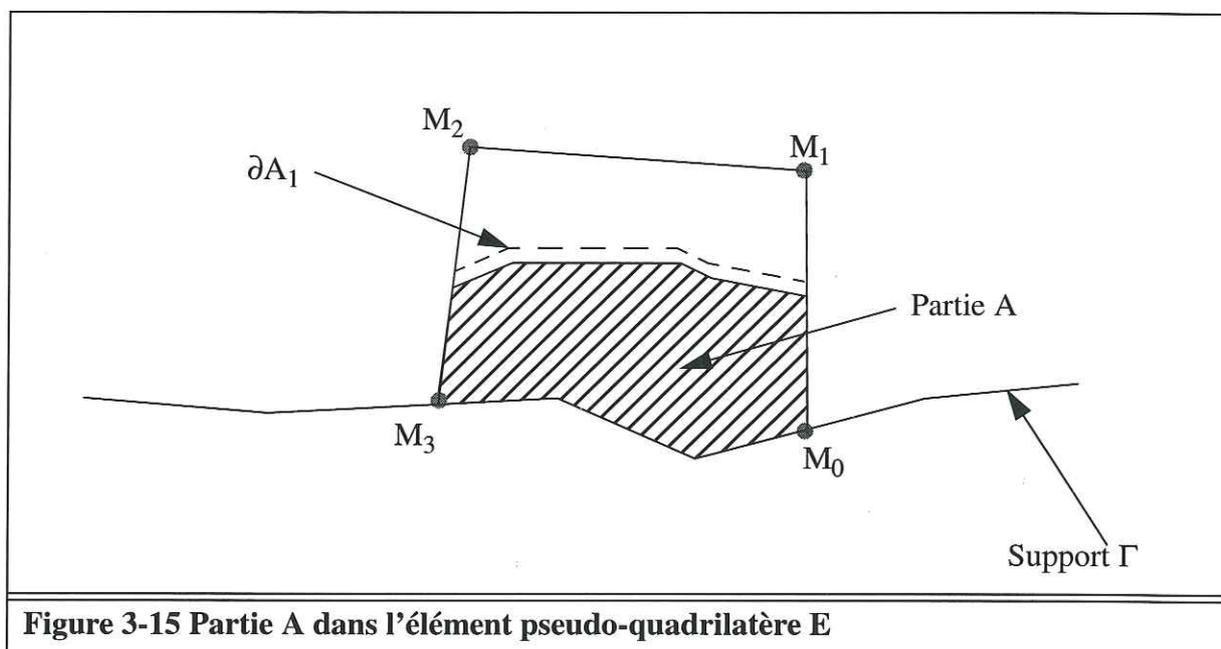
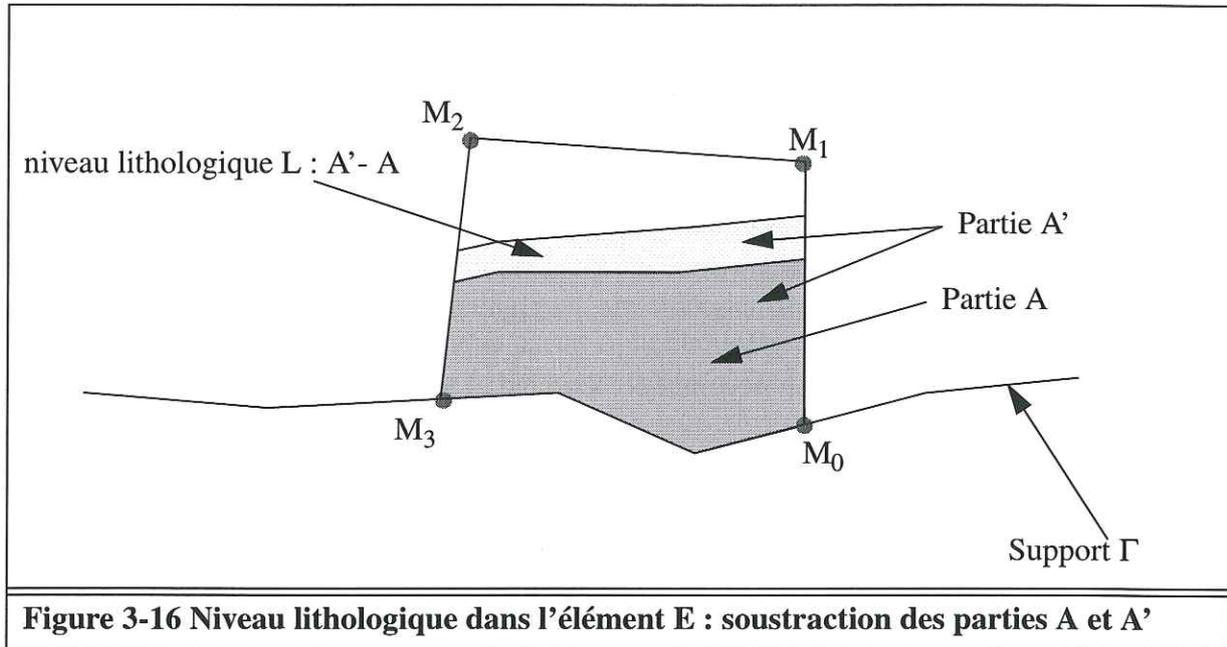


Figure 3-15 Partie A dans l'élément pseudo-quadrilatère E

Du fait des propriétés particulières qui ont été énoncées au sujet de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , on peut avancer que la géométrie de la partie A est entièrement définie par la donnée de la fraction  $\partial A_1$  de sa frontière. La ligne  $\partial A_1$  réalise en effet un découpage en deux parties de l'élément E. Il convient alors de définir quelle est la partie de E correspondant à A. Ce choix peut être réalisé conventionnellement suivant le sens de parcours de la ligne  $\partial A_1$ . En effet, on peut décider que le contour  $\partial A$  ( $\partial A_1 \cup \partial A_2$ ) doit être orienté dans le sens positif du plan. Selon cette convention, le choix de l'orientation de la ligne  $\partial A_1$  décide quelle est celle des deux parties de E qui correspond à A.

Un niveau lithologique quelconque contenu dans un élément pseudo-quadrilatère ne présente pas nécessairement toutes les propriétés géométriques pour appartenir à l'ensemble  $\mathcal{A}$ . On ne peut donc pas modéliser directement un niveau lithologique ordinaire sous la forme d'un élément de  $\mathcal{A}$ . Cependant, il est possible de représenter tout niveau lithologique,

partie de l'élément E, à l'aide d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$  ou d'une simple opération de soustraction de deux de ces éléments. Une telle façon de procéder est présentée sur la figure 3-16, où le niveau lithologique L est la soustraction des parties A et A'.



**Figure 3-16 Niveau lithologique dans l'élément E : soustraction des parties A et A'**

On présente la méthode de description de l'élément E en une partition correspondant aux strates qui le composent. Pour réaliser cette partition, on effectue une indication des strates ( $S_i$ ) de l'élément, la numérotation est accomplie de 1 à n, de la base vers le sommet de l'élément. On note  $L_i$  la ligne constituant le toit de la strate  $S_i$ . On définit ensuite pour chaque ligne  $L_i$  la partie basale  $A_i$  de l'élément appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}$  et pour laquelle la ligne  $L_i$  constitue la frontière interne, soit  $L_i = \partial(A_i)_1$ . On note que pour la ligne  $L_n$ , on a  $A_n = E$ .

Les strates ( $S_i$ ) sont modélisées de la façon suivante :

- $i=1 : S_1 = A_1$
- $i \neq 1 : S_i = A_i - A_{i-1}$
- $i=n : S_n = E - A_{n-1}$

On a ainsi mis en évidence la méthode selon laquelle on peut à l'aide d'éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$  représenter une partition de l'élément pseudo-quadrilatère E selon ses strates. Chaque élément A de l'ensemble  $\mathcal{A}$  est lui même défini de façon spécifique par la ligne frontière  $\partial A_1$ .

### b ) Modélisation des strates

Il n'est pas souhaitable de retenir l'ensemble de l'information géométrique relativement à chaque partie  $A_i$ , encore que toute cette information puisse être retenue par la seule connaissance de la ligne frontière  $L_i = \partial(A_i)_1$ . On cherche simplement à décrire les éléments  $A_i$

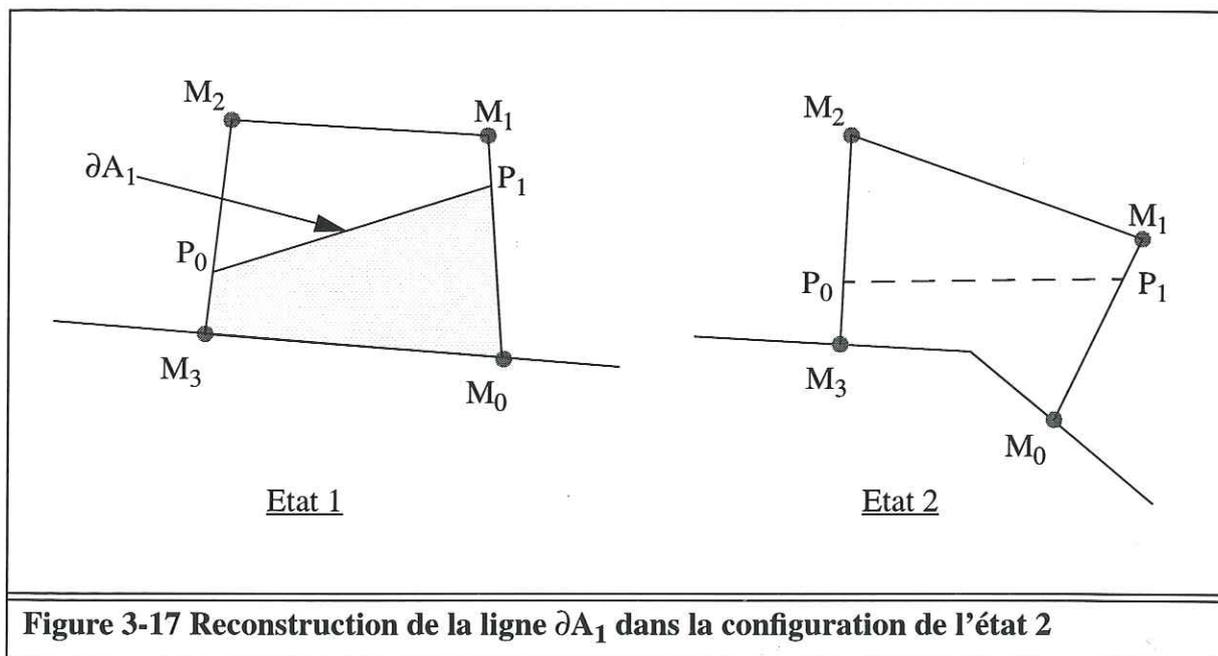
de l'ensemble  $\mathcal{A}$  d'une façon succincte. Pour réaliser cela, on choisit de ne retenir que quelques informations géométriques essentielles au sujet des éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$ , elles peuvent être résumées à l'aide des paramètres scalaires suivants :

- La mesure de la surface de la partie  $A$  :  $S(A)$
- La position des deux points extrémités de la ligne frontière  $\partial A_1$ . Ces deux points qui appartiennent à la frontière  $\partial E$  peuvent être repérés par leurs coordonnées locales à l'élément.

Un tel procédé de description des éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$  offre l'avantage de permettre la modélisation des strates à l'aide d'un nombre réduit d'informations géométriques et de paramètres. L'important intérêt présenté par cette méthode est de se prêter à la conservation de la surface des objets géologiques ainsi décrits. En effet, il suffit pour respecter ce principe, de conserver pour chaque partie  $A_i$  le paramètre  $S(A_i)$  qui représente son aire. On voit ainsi le moyen d'améliorer la méthode de transport des objets géologiques inclus dans les éléments pseudo-quadrilatères.

Méthode de reconstruction des éléments  $A$  de l'ensemble  $\mathcal{A}$  à l'aide des paramètres géométriques retenus :

Connaissant la position des deux points extrémités  $P_0$  et  $P_1$  de la ligne  $\partial A_1$  dans l'élément  $E$  de la configuration de l'état 1, il est possible de reconstruire ces deux points sur l'élément déformé et déplacé dans la configuration de l'état 2 grâce à leurs coordonnées locales, voir figure 3-17.



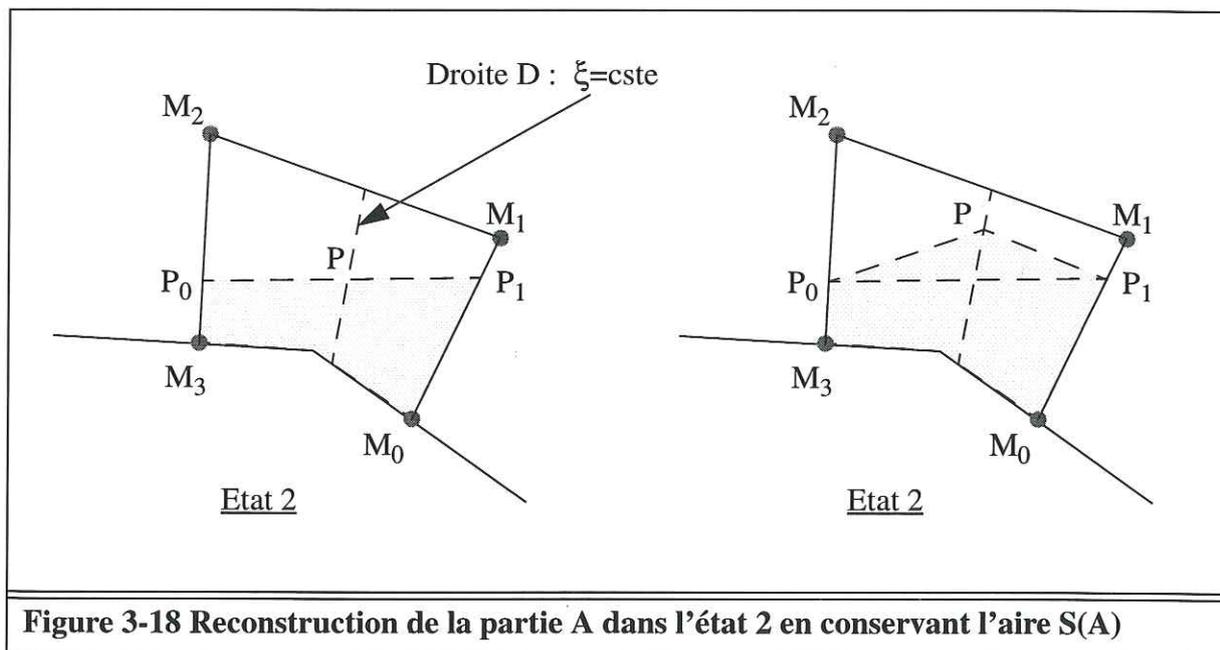
**Figure 3-17 Reconstruction de la ligne  $\partial A_1$  dans la configuration de l'état 2**

Cependant la surface occupée par la partie  $A$  reconstruite dans l'état 2 en considérant la ligne  $\partial A_1$  comme un segment de droite ne respecte pas nécessairement la surface  $S(A)$  ainsi que le montre la figure 3-17. Il convient donc de modifier la trajectoire de la ligne  $\partial A_1$  de façon à respecter le principe de conservation de l'aire de la partie  $A$ . Cependant cette

modification de la ligne  $\partial A_1$  doit être réalisée en conservant inchangées ses deux extrémités  $P_0$  et  $P_1$ , de telle façon que soit assurée la continuité des objets géologiques de part et d'autre des frontières entre éléments.

Un principe simple qui peut être appliqué pour parvenir à la reconstruction de la partie A en respectant l'aire  $S(A)$  est d'introduire un degré de liberté sous la forme d'un paramètre au niveau de la ligne  $\partial A_1$ . Il suffit ensuite de «régler» ce paramètre de liberté pour que l'aire de la partie A soit égale à  $S(A)$ . On choisit d'introduire ce paramètre de liberté à partir de la configuration simple où la ligne  $\partial A_1$  est le segment de droite  $[P_0, P_1]$ , de la façon suivante :

- On appelle  $(\xi, \eta)$  les coordonnées locales à l'élément du point P, milieu du segment  $[P_0, P_1]$  dans la configuration de l'état 2.
- Le paramètre de liberté est introduit au niveau du point P. La première coordonnée locale  $\xi$  du point P est gardée invariante. La seconde coordonnée locale  $\eta$  varie dans l'intervalle  $[0, 1]$ , de façon que le point P soit toujours dans l'élément. Du fait des propriétés de linéarité des coordonnées locales à l'élément, on peut avancer que le point P appartient à une droite que l'on appelle D. Le paramètre de liberté  $\eta$  sert à «régler» l'aire de la partie A pour qu'elle soit égale à  $S(A)$ .



**Figure 3-18 Reconstruction de la partie A dans l'état 2 en conservant l'aire  $S(A)$**

Il est facile de montrer que le paramètre de liberté introduit, la coordonnée locale  $\eta$  du point P, permet d'atteindre la configuration unique de la partie A ayant pour aire  $S(A)$ .

On rappelle que la formule générale donnant l'aire algébrique d'un polygone P quelconque dont les  $n$  sommets  $P_i$ , de coordonnées  $(x_i, y_i)$ , sont indicés selon le sens de parcours de son contour, voir annexe section 4.2 page 188 est :

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

On utilise les notations  $(x_p, y_p)$  pour les coordonnées du point P et  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  pour les coordonnées des deux extrémités  $P_0$  et  $P_1$  de la ligne  $\partial A_1$ . Comme la partie A est un polygone dont un des sommets est le point P, on peut appliquer la formule précédente pour évaluer son aire. Il est commode de noter S son aire algébrique lorsque le point P est au milieu du segment  $[P_0, P_1]$ . On obtient alors, d'une façon générale, l'expression suivante de l'aire de la partie A :

$$S(A) = S \pm (x_p(y_1 - y_0) + x_0(y_p - y_1) + x_1(y_0 - y_p))/2$$

L'ambiguïté sur le signe dans cette expression dépend du sens de parcours du contour du polygone  $(P_0, P, P_1$  ou  $P_1, P, P_0)$ .

Quand le point P décrit la droite D (en gardant une coordonnée  $\xi$  constante) ses coordonnées absolues s'écrivent en fonction des constantes  $\alpha$  et  $\beta$  et du paramètre de liberté  $\eta$  :

$$x_p = \alpha\eta + \frac{x_0 + x_1}{2} \text{ et } y_p = \beta\eta + \frac{y_0 + y_1}{2}$$

En remplaçant les coordonnées  $(x_p, y_p)$  dans l'équation générale de l'aire algébrique de la partie A, on obtient après simplification :

$$S(A) = S \pm \eta(\alpha(y_1 - y_0) + \beta(x_0 - x_1))/2$$

Le coefficient multiplicateur du paramètre de liberté  $\eta$  dans l'expression précédente de l'aire de la partie A n'est pas nul dans la mesure où les droites  $(P_0 P_1)$  et D ne sont pas parallèles. On voit donc que dans ce cas l'aire de la partie A est une fonction affine du paramètre  $\eta$ . Il existe donc une unique valeur de ce paramètre  $\eta$  telle que l'aire de A soit égale à  $S(A)$  :

$$\eta = \pm 2 \frac{S(A) - S}{\alpha(y_1 - y_0) + \beta(x_0 - x_1)}$$

La valeur du paramètre de liberté  $\eta$  ainsi déterminée donne la configuration recherchée de l'unique ligne polygonale à trois sommets  $\partial A_1$  telle que l'aire de la partie A reconstruite soit égale à la valeur  $S(A)$  antérieure.

On ne considère donc dans l'ensemble  $\mathcal{A}$  que le sous-ensemble des éléments A ayant une frontière  $\partial A_1$  qui est ligne polygonale comportant trois sommets  $(P_0, P, P_1)$  tels que la coordonnée locale  $\xi$  du point P soit égale à celle du point milieu du segment  $[P_0, P_1]$ . Le fait de procéder à cette réduction de l'ensemble  $\mathcal{A}$  simplifie grandement les géométries prises en compte.

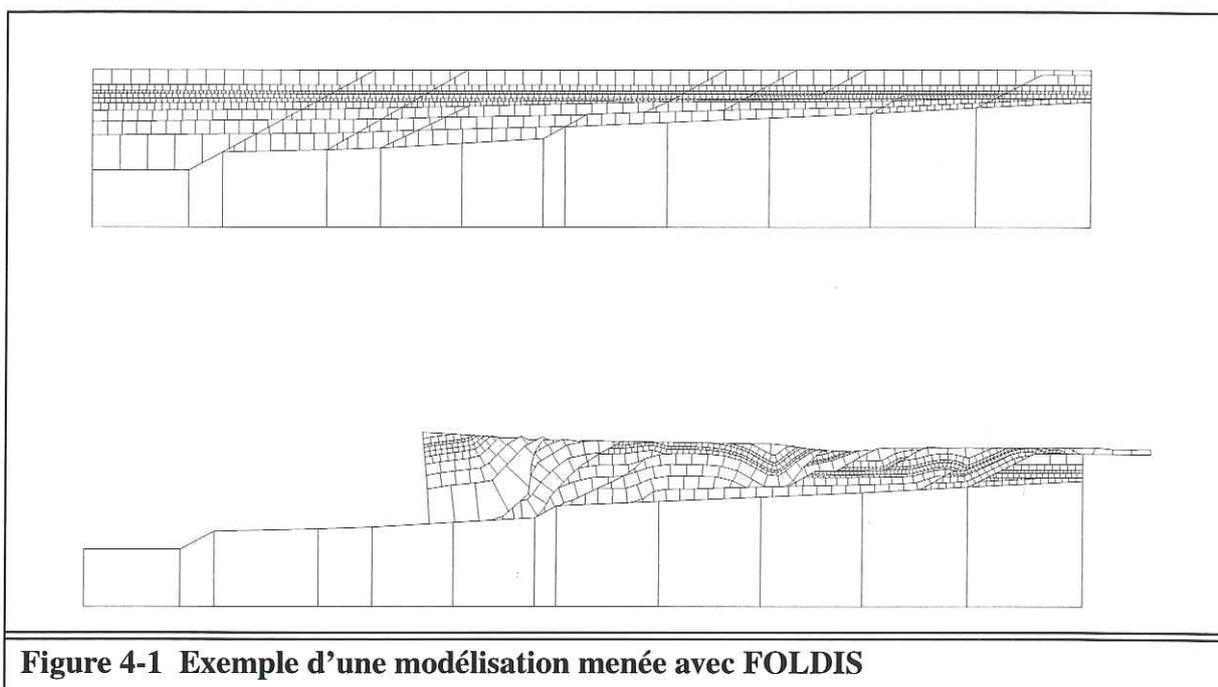
L'avantage de cette simplification géométrique réside dans la possibilité de respecter exactement le principe de conservation des aires des éléments du sous-ensemble de  $\mathcal{A}$ , lors de leur reconstruction. Les niveaux stratigraphiques qui sont décrits dans le modèle comme une soustraction de deux éléments de l'ensemble  $\mathcal{A}$  sont donc également reconstruits en

respect de ce principe.

Cependant, il convient de remarquer que cette méthode ne permet pas de décrire de façon très précise des géométries complexes à l'intérieur d'un élément pseudo-quadrilatère. En effet, la ligne frontière  $\partial A_1$  de la partie A a nécessairement une géométrie de ligne polygonale comportant au plus trois sommets. Ce fait interdit donc de représenter le contour des objets internes à un élément avec un grand nombre de détails. Toutefois cette simplification géométrique n'est pas très restrictive. Puisque compte tenu de l'échelle des éléments pseudo-quadrilatères, qui sont des objets de taille réduite par rapport à la coupe du bassin dans son ensemble, il n'est pas nécessaire de décrire de façon très précise la géométrie des objets à une échelle inférieure.

# Chapitre 4 : Déplacement et déformation des unités cinématiques

Le modèle FOLDIS a été développé dans la lignée du modèle du "Fault-bend-fold" de Suppe -1983- [60]. Mais alors que la déformation cisailante est pénétrative dans le modèle de Suppe, elle est localisée aux interfaces des unités cinématiques dans le modèle FOLDIS. Ainsi, les couches de sédiments sont déformées par glissement discontinu le long des limites des unités cinématiques. La déformation est beaucoup plus faible à l'intérieur des unités et elle est de caractère continue (les voisinages de points matériels sont conservés).



**Figure 4-1 Exemple d'une modélisation menée avec FOLDIS**

Dans ce chapitre, on expose tout d'abord de façon détaillée les quatre principes du modèle cinématique.

- (1) Conservation de la quantité de matière.
- (2) Conservation de l'épaisseur des bancs.
- (3) Glissement localisé au niveau des discontinuités inter-unités.
- (4) Conservation de la symétrie angulaire des couples d'éléments adjacents.

Les deux premiers principes sont classiques et souvent utilisés dans les méthodes d'équilibrage de coupes. Les deux autres principes sont spécifiques de la méthode cinématique développée dans FOLDIS.

On examine ensuite la façon dont ces principes sont traduits en relations géométriques au niveau des éléments de l'unité cinématique. Puis, on présente les algorithmes informatiques utilisés pour calculer la déformation géométrique. On aborde enfin les aspects numériques de la résolution du problème. On analyse finalement la stabilité de la solution géométrique obtenue et on examine les conditions d'application de la méthode.

#### **4.1 : Les principes géométriques de la méthode cinématique.**

La reconstruction du bassin dans son ensemble est réalisée écaille par écaille comme dans de nombreux modèles cinématiques. La reconstruction est menée en respectant l'ordre d'indiciation des écailles. Chaque écaille est reconstruite selon le même principe, en restaurant ses éléments constitutifs, les unités cinématiques. De même, l'ordre de reconstruction est bien précis, on indice les unités cinématiques dans l'ordre de leur restauration, du bas vers le haut de l'écaille. Chaque unité cinématique est pareillement reconstruite grâce à la restauration des éléments pseudo-quadrilatères qui la composent. La formulation des principes du modèle amènent à considérer que l'étape cruciale de l'algorithme cinématique est la reconstruction des unités cinématiques. En effet, le principe n°2 énonce la conservation de l'épaisseur qui est une grandeur attachée aux unités cinématiques, et le principe n°3 indique l'existence de glissement au niveau des interfaces des unités cinématiques. Ces deux principes ne peuvent être pris en compte qu'au moment de la restauration des unités.

Les trois données géométriques du problème de reconstruction des unités cinématiques sont la connaissance de la géométrie du support  $\Gamma$  sur lequel repose l'unité, la quantité de déplacement appliquée à l'unité, et sa configuration géométrique initiale. Le support  $\Gamma$  est bien une donnée du problème. En effet, il correspond au toit de bancs sous-jacents à l'unité qui sont déjà reconstruits. Le principe n°3 autorise l'unité à glisser sur le support  $\Gamma$ , l'indétermination concernant sa position sur ce support est levée par la connaissance de la quantité de déplacement appliquée à l'unité. Cette précision est fournie par la condition à la limite, le déplacement imposé d'un bord de l'écaille. Ce déplacement donne généralement le déplacement d'un des bords de l'unité. Enfin, la configuration géométrique initiale de l'unité est également connue. La reconstruction d'une unité cinématique est ensuite traduite au niveau élémentaire, il s'agit de reconstruire la file des éléments qui composent l'unité. Il convient pour cela d'exprimer au niveau des éléments les principes géométriques à la base de la méthode.

#### **4.2 : Traduction des principes géométriques au niveau élémentaire**

On a vu, section 3.1.4 page 64, que le nombre de degrés de liberté d'une unité cinématique constituée d'une file de  $n$  éléments était égal à  $3(n+1)$ . Pour que le problème de reconstruction d'une unité soit bien posé il est nécessaire d'écrire au moins trois relations pour chaque élément. Chacun des deux principes n°1 et n°2, donnés en introduction de ce chapitre, mène à l'écriture d'une relation faisant intervenir les paramètres géométriques de l'élément. Le principe géométrique n°3 n'introduit pas de relation de ce type, il précise qu'un

glissement est localisé au niveau de l'interface entre les unités. L'introduction d'un principe supplémentaire n°4 menant à l'écriture d'une autre relation géométrique est donc nécessaire pour que le problème de la reconstruction soit bien posé.

On examine d'abord la traduction des principes n°1 et n°2 au niveau élémentaire en une relation de conservation d'une grandeur géométrique intrinsèque propre à l'élément. On met ensuite en évidence le respect du principe n°3 de glissement localisé aux interfaces des unités. Enfin, on explicite en le justifiant et en le complétant le principe n°4.

#### **4.2.1 : Conservation de la quantité de matière (principe n° 1)**

La conservation de la matière dans le bassin, dans une écaille ou dans une unité est exactement réalisée du fait du respect des deux règles suivantes lors de l'opération globale de reconstruction. Premièrement, chaque élément pseudo-quadrilatère est reconstruit en conservant la quantité de matière qu'il renferme. Deuxièmement, tous les objets géologiques du modèle, organisés comme des ensemble d'éléments, sont reconstruits comme des ensembles de ces mêmes éléments reconstruits.

Le principe de conservation de la matière d'un élément s'exprime en termes géométriques. En effet, l'aire de l'élément ( $A$ ) est liée à la quantité de matière (masse de matière solide  $Q$ ) qu'il contient.

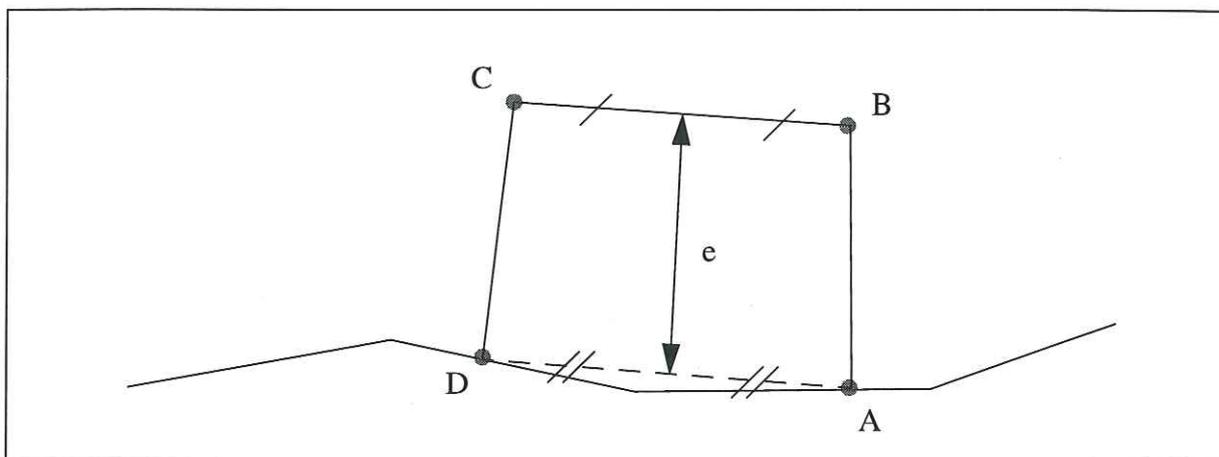
La quantité de matière ( $Q$ ) de l'élément est égale à la densité moyenne de la matière dans l'élément ( $\rho$ ) multipliée par le volume de l'élément. Or le volume est l'aire de l'élément ( $A$ ) multipliée par l'unité de longueur, dimension conventionnelle de l'élément dans la troisième direction de l'espace  $Q = \rho \cdot A \cdot 1$ .

Le principe de conservation de la matière est ainsi traduit en une relation concernant l'aire de l'élément. À densité constante, il y a conservation de l'aire élémentaire.

#### **4.2.2 : Conservation de l'épaisseur des unités cinématiques (principe n° 2)**

L'épaisseur de l'unité cinématique localement à un élément est définie par un scalaire qui ne dépend que de la géométrie de l'élément. Ce scalaire est défini conventionnellement comme la distance séparant les points milieux des deux segments dont les extrémités sont respectivement les noeuds supérieurs ( $B$  et  $C$ ) et les noeuds inférieurs ( $A$  et  $D$ ) de l'élément, voir la figure 4-2.

La conservation de l'épaisseur de l'unité cinématique localement à l'élément est traduite en la conservation de la grandeur scalaire ( $e$ ) attachée à l'élément, voir la figure 4-2.



**Figure 4-2** Epaisseur ( $e$ ) de l'unité localement à l'élément

#### 4.2.3 : Glissement localisé au niveau des inter-unités (principe n° 3)

La reconstruction des unités cinématiques d'une écaïlle du bas vers le haut permet de connaître la géométrie du support  $\Gamma$  de l'unité cinématique avant d'opérer la reconstruction. Ce fait autorise l'unité à glisser le long du support  $\Gamma$  pour atteindre sa nouvelle position. Le mécanisme de déformation du modèle FOLDIS autorise un cisaillement localisé au niveau de l'interface entre les unités. Ainsi, deux points initialement voisins appartenant à deux unités cinématiques ne sont plus forcément voisins après la reconstruction.

#### 4.3 : Critère géométrique nécessaire à la reconstruction (principe n° 4)

Le dénombrement des degrés de liberté associés aux éléments d'une unité cinématique montre qu'il est nécessaire d'introduire un principe supplémentaire pour que le problème de reconstruction des éléments soit bien posé.

Avant de préciser le principe géométrique supplémentaire n°4, on examine la démarche qui conduit à la prise en compte des deux premiers principes. Ils correspondent à des propriétés particulières du mode de déformation. Ainsi, le principe n°1, associé à la conservation de la densité traduit un mécanisme de déformation isovolumique. Le principe n°2 traduit un mécanisme de déformation isopaque pour l'unité cinématique.

Les deux premiers principes ont été convertis en la conservation de paramètres géométriques intrinsèques à un élément. La principe n°1 a été traduit en une relation concernant l'aire de l'élément. La principe n°2 conduit à la conservation de la distance ( $e$ ) qui représente l'épaisseur locale à un élément de l'unité cinématique.

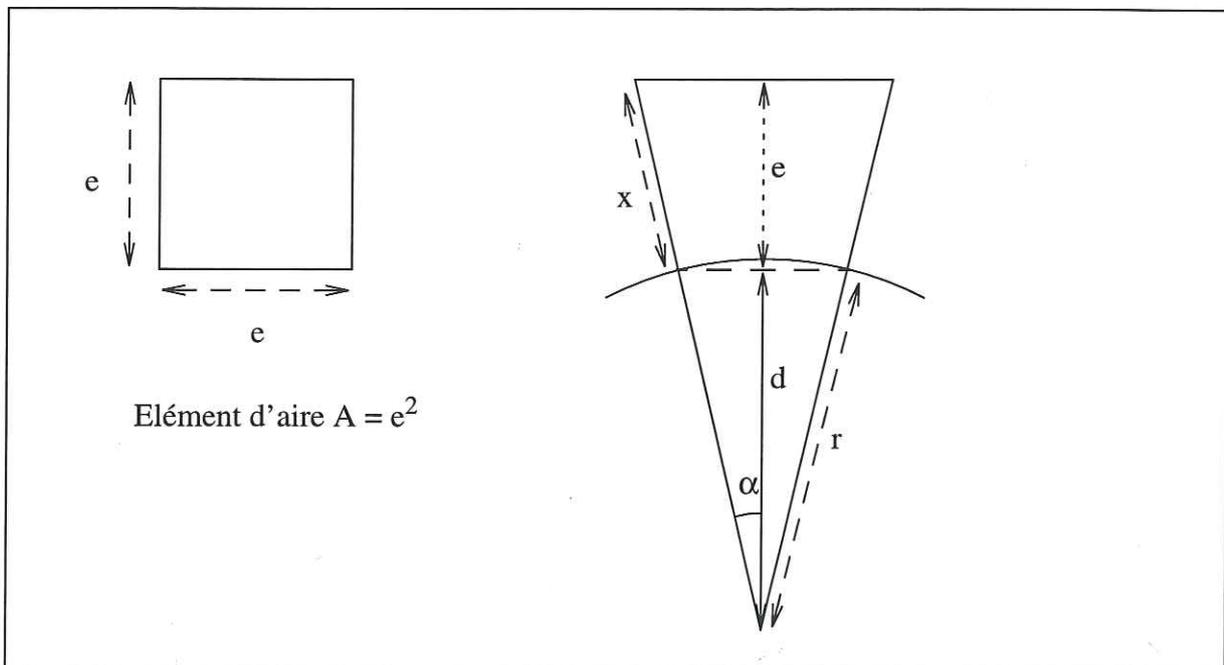
On compare le mécanisme de déformation du fault-bend-fold de Suppe avec celui de la méthode cinématique développée pour FOLDIS. Les deux déformations sont isovolumiques et isopaques aux endroits où la déformation est continue. Les deux premiers principes

sont donc vérifiées pour les deux modèles. Les modèles diffèrent cependant au regard du caractère cisailant de la déformation. Dans le modèle de Suppe, le cisaillement est pénétratif, il affecte intimement et continûment le matériau. Dans le modèle FOLDIS, le cisaillement est discontinu et localisé aux interfaces des unités cinématiques. On doit donc définir pour le modèle FOLDIS une caractéristique du mécanisme de déformation, remplaçant le cisaillement simple pénétratif de la méthode de Suppe. Ce principe n°4 doit ensuite être traduit en une relation géométrique concernant les éléments.

On suit une démarche en deux étapes pour définir le principe supplémentaire n°4. On envisage d'abord un problème de reconstruction très simple dont on connaît a priori la solution. On déduit ensuite de cet exercice la définition d'une grandeur géométrique intrinsèque aux éléments qui soit conservée dans la configuration reconstruite.

La problème simple que l'on choisit d'étudier est la reconstruction d'une unité cinématique rectiligne homogène sur support constitué par l'extérieur d'un arc de cercle. Dans ce cas, l'unité cinématique rectiligne est pliée pour former un anticlinal. Comme le support  $\Gamma$  présente une symétrie radiale, l'unité reconstruite présente la même symétrie, voir la figure 4-4. Compte tenu de cette remarque, on reconstruit l'unité cinématique à l'aide des seuls principes n°1 et n°2 par le raisonnement géométrique suivant:

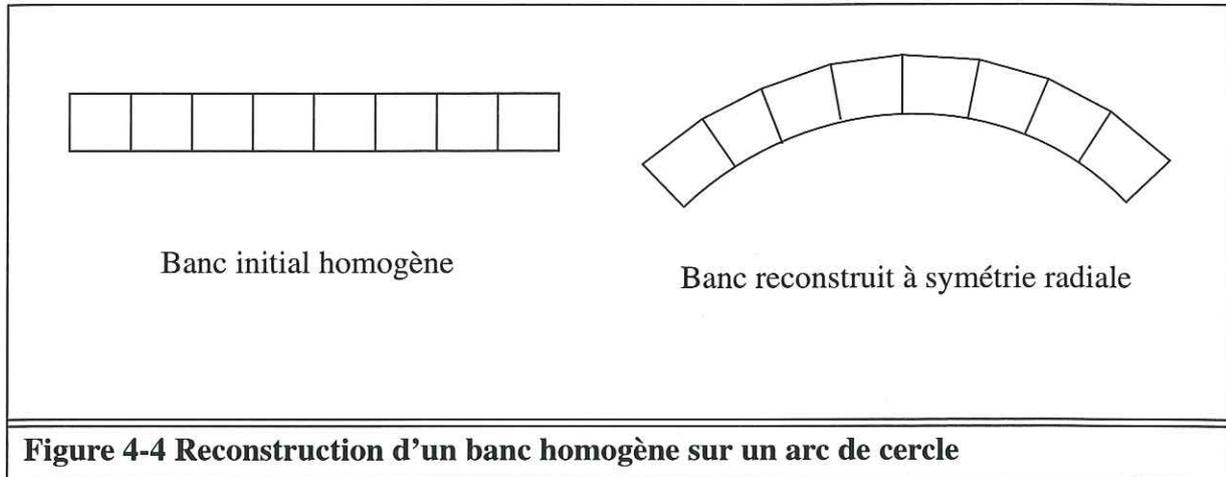
Connaissant le rayon ( $r$ ) du support, et connaissant les deux paramètres intrinsèques: aire ( $A$ ), et épaisseur ( $e$ ) de l'élément, on détermine exactement les dimensions de l'élément reconstruit. En particulier, on calcule la longueur ( $x$ ) des cotés latéraux de l'élément et le demi-angle ( $\alpha$ ), voir la figure 4-3.



**Figure 4-3 Géométrie d'un élément reconstruit sur un arc de cercle**

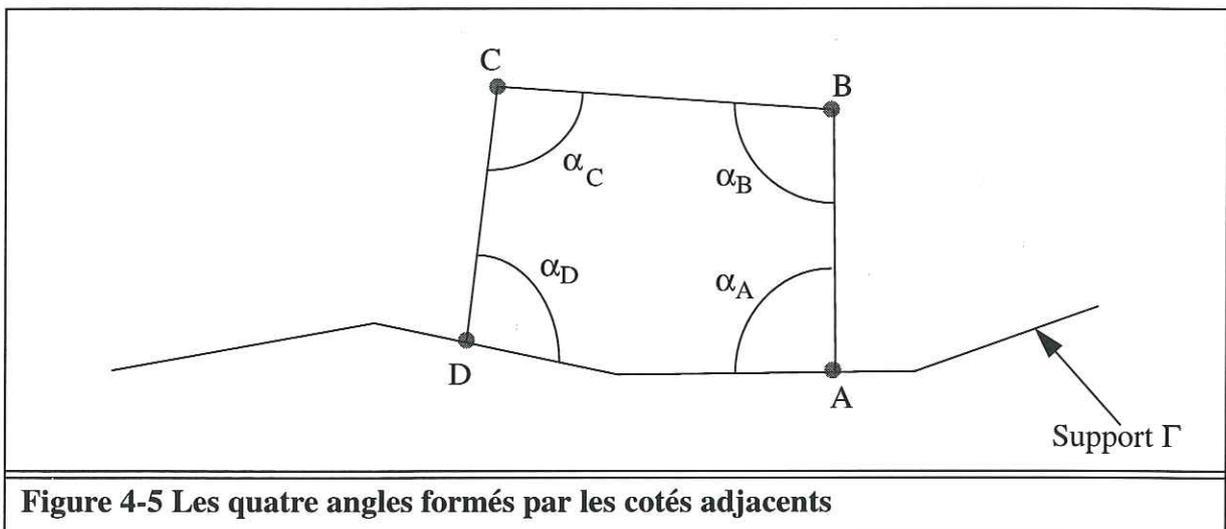
Pour le demi-angle ( $\alpha$ ) on a la relation  $A = \tan \alpha \cdot (r \cdot \cos \alpha + e)^2 - \alpha \cdot r^2$

La longueur ( $x$ ) vérifie la relation:  $x = \frac{e}{\cos \alpha}$



**Figure 4-4 Reconstruction d'un banc homogène sur un arc de cercle**

On recherche une grandeur géométrique intrinsèque à l'élément qui soit conservée lors de la reconstruction de l'exemple précédent. Une idée naturelle pour définir une telle grandeur est de s'intéresser aux angles définis par les cotés adjacents du polygone formé par l'élément, voir la figure 4-5.

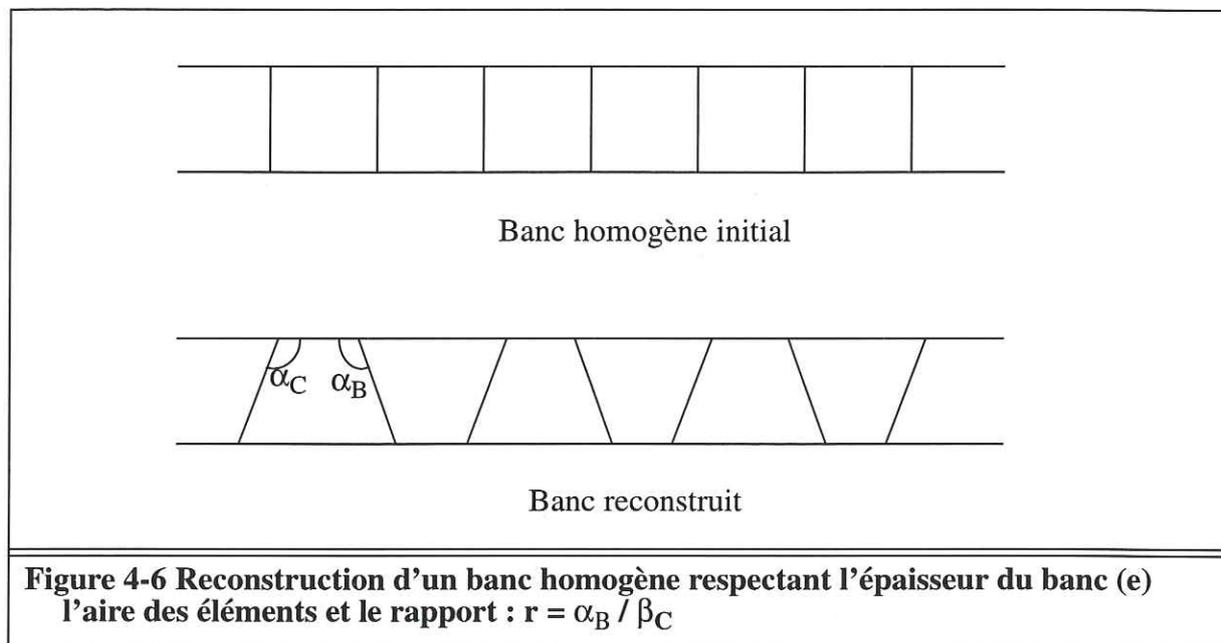


**Figure 4-5 Les quatre angles formés par les cotés adjacents**

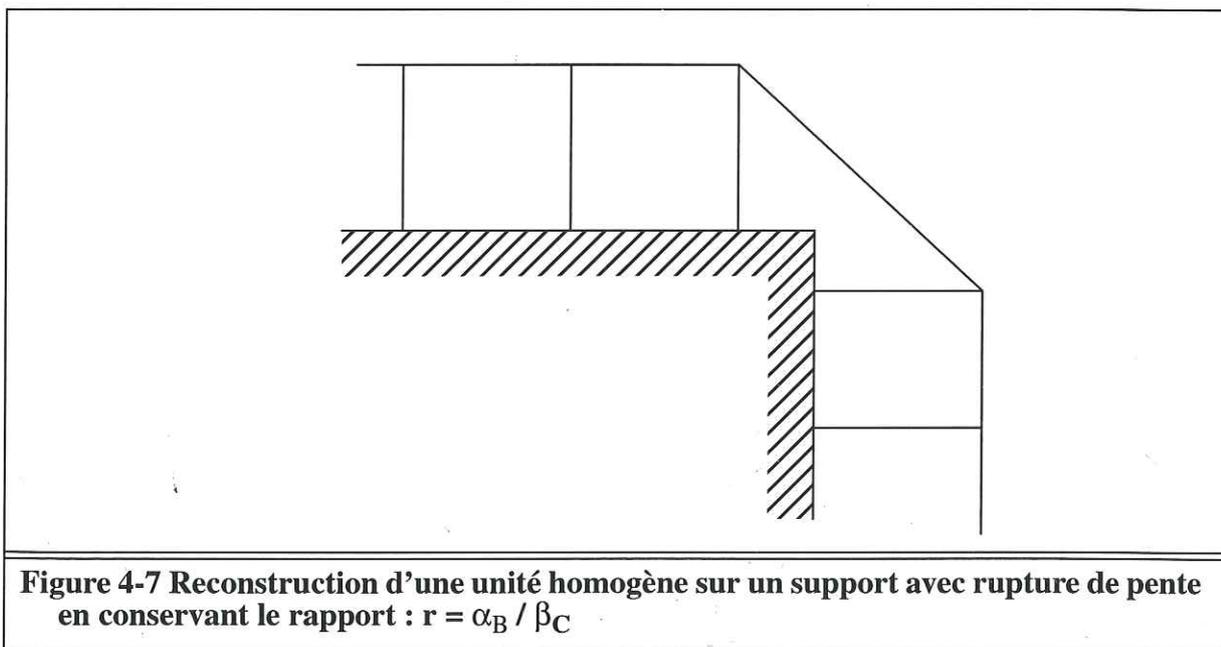
L'élément est un pseudo-quadrilatère, il possède quatre angles susceptibles d'être retenus pour définir la grandeur intrinsèque ( $\alpha_A$ ,  $\alpha_B$ ,  $\alpha_C$  et  $\alpha_D$ ). On ne retient pas les angles  $\alpha_A$  et  $\alpha_D$  car ils dépendent directement de la configuration du support  $\Gamma$  localement aux noeuds A et D, ils ne peuvent donc être considérés comme des grandeurs intrinsèques à l'élément. On tente donc de définir la grandeur intrinsèque à partir des seuls angles  $\alpha_B$  et  $\alpha_C$ .

L'étude de la reconstruction précédente suggère de retenir comme grandeur intrinsèque la valeur du rapport  $r = \alpha_B / \alpha_C$ . En effet, cette valeur reste invariante lors de la reconstruction. Cependant, il apparaît que le choix de cette valeur présente des défauts:

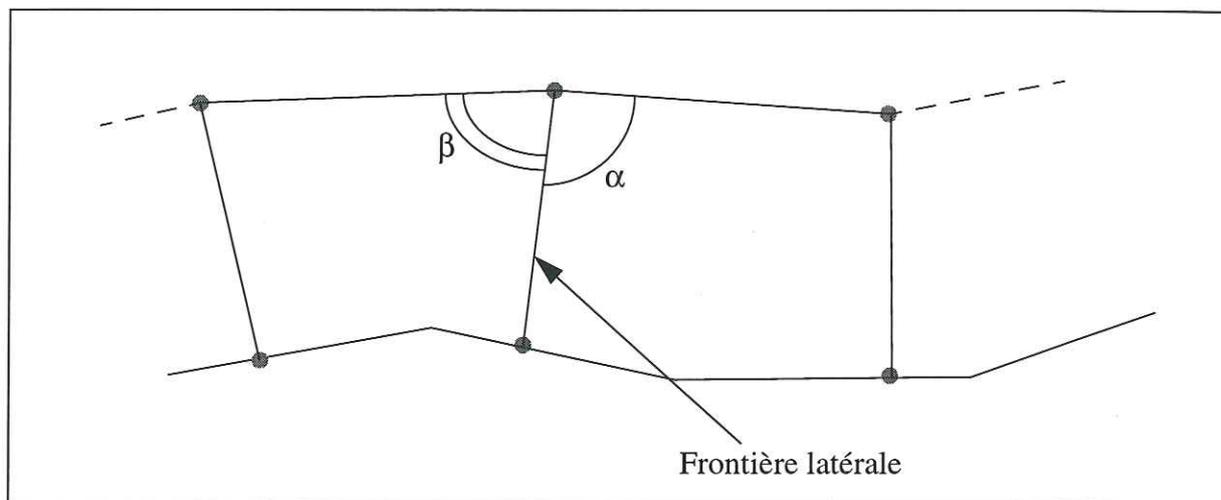
1 / Il existe une infinité de reconstructions d'un banc homogène sur un support rectiligne qui respectent le rapport  $r$ , voir la figure 4-6. Or on veut que la reconstruction soit unique et identique au banc initial pour que la déformation soit minimale.



2 / De plus, la conservation du rapport  $r = \alpha_B / \beta_C$ , pour chaque élément présente un autre défaut. La déformation subie par un banc homogène reconstruit sur un support présentant un point de rupture de pente est localisée sur un seul élément. Il est préférable de répartir la déformation entre quelques éléments voisins afin de minimiser la déformation totale subie par le banc.

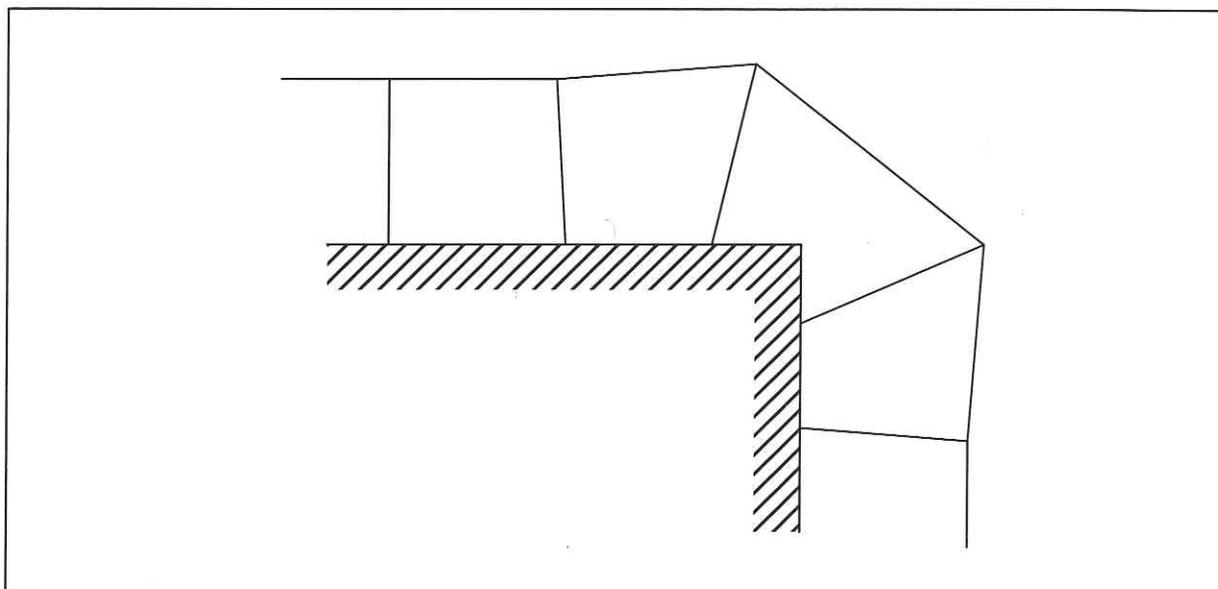


Pour éliminer les deux défauts précédents et répartir la déformation entre des éléments voisins, on écrit une relation concernant les angles de deux éléments de part et d'autre d'une frontière latérale les séparant, voir figure 4-8.



**Figure 4-8 Définition du rapport :  $r = \alpha / \beta$ , pour chaque frontière latérale**

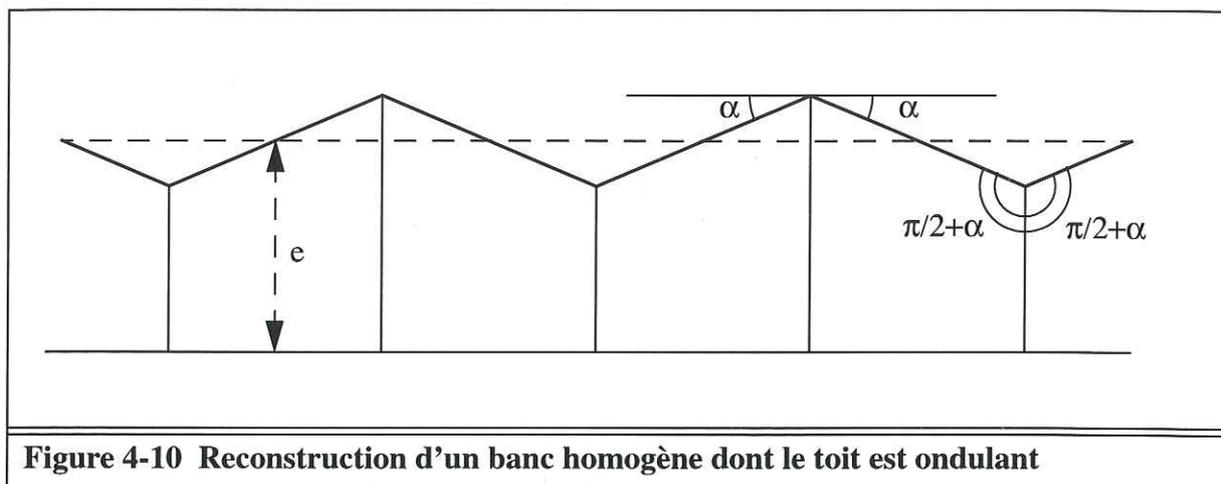
Ainsi, en conservant le rapport angulaire des éléments voisins, les configurations indésirables mises en avant par les deux défauts précédents sont éliminées, voir la figure 4-9.



**Figure 4-9 Reconstruction d'un banc homogène sur un support avec rupture de pente en conservant le rapport :  $r = \alpha / \beta$ , pour les frontières latérales**

La reconstruction ainsi définie comporte toutefois encore des défauts. On montre qu'il existe plusieurs solutions au problème de reconstruction d'une unité cinématique. Une unité cinématique initialement rectiligne homogène reconstruite sur un support rectiligne possède encore de nombreuses reconstructions possibles, voir la figure 4-10. Il existe une famille de solutions qui répondent aux principes et dont le toit de l'unité cinématique pré-

sente des ondulations. Ces configurations ondulantes sont géologiquement inacceptables. La seule solution de ce problème devrait être celle pour laquelle la déformation de l'unité est nulle. Il convient donc de compléter les principes géométriques retenus de façon à mathématiquement contraindre davantage le problème et ainsi écarter les reconstructions dont la géométrie est inacceptable géologiquement.



**Figure 4-10 Reconstruction d'un banc homogène dont le toit est ondulant**

On expose dans le chapitre suivant la façon dont on procède pour trier les solutions et n'en retenir qu'une seule en écartant celles qui ont un caractère ondulant.

#### 4.4 : Implémentation numérique de la méthode

Les quatre principes géométriques retenus précédemment définissent de façon un peu incomplète la méthode cinématique du modèle. On doit pour la compléter, trier les solutions quand il y en a plusieurs, de manière en n'en retenir qu'une seule. Enfin, on souhaite écarter les configurations reconstruites qui présentent une géométrie du toit de l'unité cinématique avec des ondulations.

On expose dans la suite de ce chapitre la stratégie générale de sélection de la configuration reconstruite de l'unité cinématique parmi celles répondant aux principes. Après avoir introduit les outils permettant de formaliser le problème en termes mathématiques, on expose les étapes de la résolution numérique du problème. On définit finalement le critère de sélection complet, et on décrit l'algorithme de résolution et son implémentation.

##### 4.4.1 : Stratégie de résolution de la reconstruction d'une unité cinématique

La reconstruction d'une unité cinématique à  $n$  éléments sur un support  $\Gamma$  peut être transformée de façon équivalente en un problème classique d'analyse numérique, la minimisation d'une fonction. Il s'agit en effet de trouver les configurations de l'unité à  $n$  éléments respectant les principes géométriques retenus, voir section page 88. La résolution a lieu dans l'ensemble  $Y_n$  des configurations qui est un espace que l'on peut identifier à une partie de  $\mathcal{R}^{3(n+1)}$ . On écrit chaque principe géométrique sous la forme d'un critère, qui est une

fonction de  $Y_n$  dans  $\mathcal{R}$ . Les minima de cette fonction correspondent à des configurations qui vérifient exactement le principe en question. La prise en compte simultanée de tous les principes est réalisée en minimisant un critère global  $\sigma()$ , somme de tous les critères.

Le critère global  $\sigma()$  est une semi-distance sur l'espace  $Y_n$ . On appelle  $\mathcal{S}_n$  une configuration idéale respectant exactement les principes géométriques. Le critère  $\sigma()$  appliqué à une configuration quelconque  $\gamma_n$  de l'espace  $Y_n$  est la mesure de l'écart séparant les deux configurations  $\gamma_n$  de  $\mathcal{S}_n$  vis à vis du respect des principes. La résolution du problème revient à trouver les minima de la fonction  $\sigma()$  sur l'espace  $Y_n$ . On complète ensuite le critère  $\sigma()$  en y ajoutant un terme pénalisant les configurations présentant des ondulations. On tient également compte des conditions aux limites, on obtient une solution unique et géologiquement acceptable du problème de reconstruction de l'unité cinématique.

#### 4.4.2 : Définition du critère de sélection d'une configuration de l'unité cinématique

##### a ) Coordonnées des sommets d'un élément

L'élément  $E_i$  a pour contour  $\partial E_i$ , polygone formé des quatre sommets  $(P_i, S_i, S_{i-1}, P_{i-1})$  ainsi que de sommets du support  $\Gamma$ , comme l'illustre la figure 4-11. L'orientation du polygone  $\partial E_i$  est la suivante :

$$\partial E_i = (P_i, S_i, \Gamma_{i_\Gamma(S_i)}, \dots, \Gamma_{i_\Gamma(S_{i-1})+1}, S_{i-1}, P_{i-1})$$

Remarque :

- L'application  $i_\Gamma()$  est celle qui est définie en annexe section 4.3 page 194.
- $\Gamma$  est la ligne polygonale support de l'élément  $\Gamma = (\Gamma_j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$

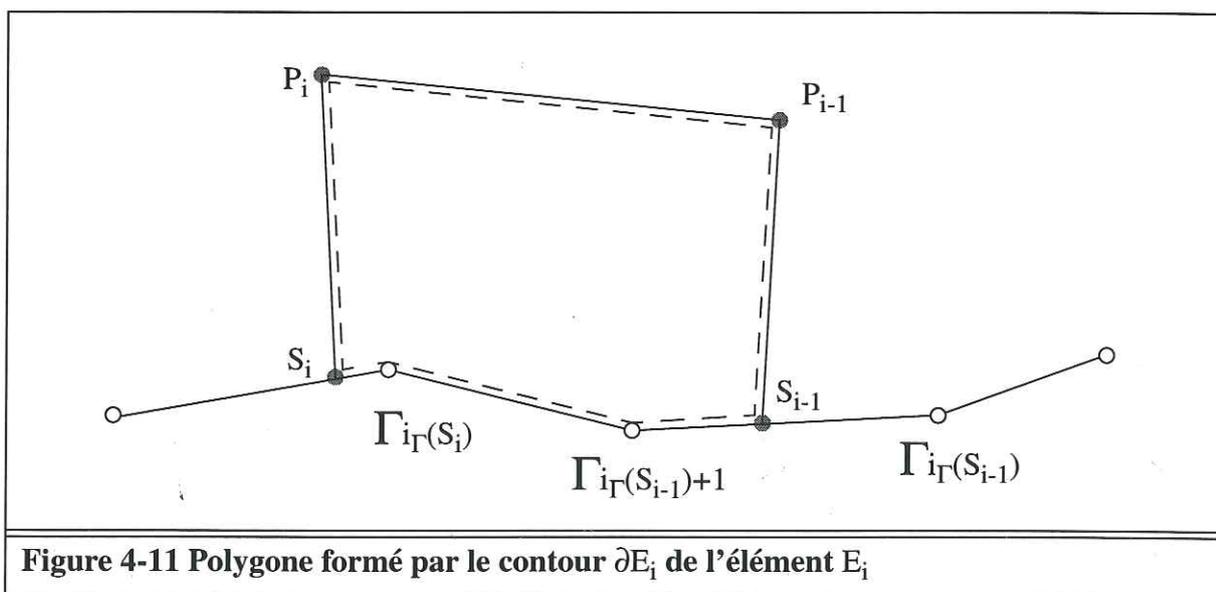


Figure 4-11 Polygone formé par le contour  $\partial E_i$  de l'élément  $E_i$

Les coordonnées des sommets du support sont  $\Gamma_j : (X_j, Y_j) \forall j \in \{0, \dots, m\}$ . Les noeuds

(S<sub>i</sub>) qui reposent sur  $\Gamma$  ont pour coordonnées :  $(x(s_i), y(s_i)) \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Les noeuds supérieurs (P<sub>i</sub>) ont pour coordonnées :  $(x_i, y_i) \forall i \in \{0, \dots, n\}$ . Comme la géométrie du support  $\Gamma$  est une donnée du problème de reconstruction, les grandeurs (X<sub>j</sub>) et (Y<sub>j</sub>) sont considérées comme des paramètres. Au contraire, les grandeurs (x<sub>i</sub>) (y<sub>i</sub>) et (s<sub>i</sub>) sont les variables du problème, leur détermination permet la reconstruction de l'unité cinématique. Enfin, les coordonnées x(s<sub>i</sub>) et y(s<sub>i</sub>) des noeuds (S<sub>i</sub>) dépendent de la variable s<sub>i</sub> et de la géométrie du support  $\Gamma$ , ce sont des fonctions de la variable s<sub>i</sub> et des paramètres X<sub>j</sub>, Y<sub>j</sub>.

La fonction composée ( $i_\Gamma \circ \Gamma$ ), voir l'annexe section 4.3 page 194, est définie sur l'intervalle  $[0, L_\Gamma]$ . On la note  $i^\Gamma() : i^\Gamma(s_i) = (i_\Gamma \circ \Gamma)(s_i) = i_\Gamma(\Gamma(s_i)) = i_\Gamma(S_i)$ . Elle est constante et égale à l'entier k sur les intervalles  $[l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[ \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ .

D'après la définition de l'abscisse curviligne de la ligne polygonale  $\Gamma$ , voir annexe section 4.3 page 194, on a l'égalité vectorielle :

$$\forall s_i \in [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[ : \quad \overrightarrow{\Gamma_k S_i} = \overrightarrow{\Gamma_k \Gamma(s_i)} = \frac{s_i - l_\Gamma^k}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}$$

Ainsi, les coordonnées de la fonction vectorielle  $S_i = \overline{\Gamma}(s_i)$ , x(s<sub>i</sub>) et y(s<sub>i</sub>), sont exprimées en fonction de la variable s<sub>i</sub>, de  $k = i^\Gamma(s_i)$ , et des paramètres (X<sub>i</sub>), (Y<sub>i</sub>) et ( $l_\Gamma^i$ ).

$$\forall s_i \in [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[ , \forall k \in \{0, \dots, m-1\} \quad \overline{S}_i = \overline{\Gamma}_k + \frac{s_i - l_\Gamma^k}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}$$

Soit en développant l'écriture

$$\begin{bmatrix} x(s_i) \\ y(s_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} + \frac{s_i - l_\Gamma^k}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \left( \begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} \right)$$

Or,  $l_\Gamma^k \neq l_\Gamma^{k+1} \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ , les fonctions x(s<sub>i</sub>) et y(s<sub>i</sub>) sont de classe C<sup>∞</sup> sur les intervalles  $[l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[ \forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ .

Les limites par valeurs inférieures des fonctions x(s<sub>i</sub>) et y(s<sub>i</sub>) en  $l_\Gamma^k \forall k \in \{1, \dots, m\}$  sont égales respectivement à x(l<sub>Γ</sub><sup>k</sup>) et y(l<sub>Γ</sub><sup>k</sup>), les fonctions sont continues sur l'intervalle  $[0, L_\Gamma]$ .

$$\forall k \in \{0, \dots, m\} \quad \begin{bmatrix} x(l_\Gamma^k) \\ y(l_\Gamma^k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} \text{ soit : } \overline{\Gamma}(l_\Gamma^k) = \overline{\Gamma}_k$$

Les limites par valeurs inférieures aux points  $l_\Gamma^k$  sont :  $\lim_{\substack{s \rightarrow l_\Gamma^k \\ s < l_\Gamma^k}} i^\Gamma(s) = k - 1$

On trouve :

$$\lim_{\substack{s \rightarrow l_\Gamma^k \\ s < l_\Gamma^k}} \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} + \frac{l_\Gamma^k - l_\Gamma^{k-1}}{l_\Gamma^{k-1+1} - l_\Gamma^{k-1}} \left( \begin{bmatrix} X_{k-1+1} \\ Y_{k-1+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ Y_{k-1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } \lim_{\substack{s \rightarrow l_\Gamma^k \\ s < l_\Gamma^k}} \bar{\Gamma}(s) = \bar{\Gamma}_k$$

Aux points  $(l_\Gamma^k) \forall k \in \{0, \dots, m\}$ , il y a continuité de la fonction  $\bar{\Gamma}(s_i)$ .

Etude de la dérivabilité :

Sur les intervalles  $[l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$ ,  $\forall k \in \{0, \dots, m-1\}$ , les dérivées sont :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} x(s) &= \frac{X_{k+1} - X_k}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \\ \frac{d}{ds} y(s) &= \frac{Y_{k+1} - Y_k}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \\ \text{Soit } \frac{d}{ds} \bar{\Gamma}(s) &= \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \end{aligned}$$

Les dérivées sont constantes sur les intervalles  $[l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$ . Comme les valeurs des constantes diffèrent, il y a non dérivabilité sur le domaine  $[0, L_\Gamma]$ .

### b) Définition d'une semi-distance dans l'espace $\Upsilon_n$

On définit sur l'espace  $\Upsilon_n$  une semi-distance qui mesure l'écart de la configuration  $\gamma_n$  à une configuration idéale respectant les principes géométriques, voir section 4.1 page 88.

#### b-1) Identification de l'espace $\Upsilon_n$ à une partie de $\mathfrak{R}^{3(n+1)}$

La configuration  $\gamma_n$  d'une unité cinématique constituée de  $n$  éléments est identifiée à la suite des éléments :  $\gamma_n = (E_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ . Ses paramètres sont les coordonnées des noeuds :

1 / Les noeuds  $(P_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  sont déterminés par  $2(n+1)$  coordonnées dans le plan :  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$

2 / Les noeuds  $(S_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$  sont déterminés par  $(n+1)$  abscisses curvilignes sur le support  $\Gamma$  :  $(s_i)$ ,  $i \in \{0, \dots, n\}$

La suite  $(s_i)$  est croissante :  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , on a :  $s_{i-1} < s_i$ .

L'élément  $E_i$  est déterminé par les six paramètres  $(x_{i-1}, y_{i-1}, s_{i-1}, x_i, y_i, s_i)$ .

L'unité cinématique  $\gamma_n$  est identifiée à  $(x_0, y_0, s_0, x_1, y_1, s_1, \dots, x_i, y_i, s_i, \dots, x_n, y_n, s_n)$  qui est un élément de  $\mathfrak{R}^{3(n+1)}$ .

On peut identifier l'espace  $\Upsilon_n$  à  $D_\Gamma^{(n+1)} = (\mathfrak{R}^2 \times [0, L_\Gamma])^{(n+1)}$ , avec  $(s_{i-1} < s_i)$ .

#### b-2 ) Ecart par rapport au principe de conservation de l'aire

Le premier principe est de reconstruire chaque élément de l'unité avec une aire géométrique déterminée. On mesure l'écart relativement à l'aire entre deux unités cinématiques en sommant sur tous les éléments les différences d'aire élevés au carré.

On note  $a()$  la fonction qui donne l'aire d'un élément. Deux unités cinématiques  $\alpha$  et  $\beta$  constituées de  $n$  éléments  $(\alpha_i)$  et  $(\beta_i)$ , ont un écart d'aire mesuré par :

$$d_1(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (a(\alpha_i) - a(\beta_i))^2$$

On vérifie que  $d_1$  est positive. Elle est nulle pour deux unités  $\alpha$  et  $\beta$  ayant des éléments d'aires identiques.

#### b-3 ) Ecart par rapport au principe de conservation de l'épaisseur d'une unité

Avec le second principe, on conserve l'épaisseur de l'unité lors de la reconstruction. On mesure l'écart relativement à l'épaisseur entre deux unités cinématiques en sommant sur tous les éléments les écarts d'épaisseur élevés au carré.

On note  $e()$  la fonction qui donne l'épaisseur d'un élément. Deux unités cinématiques  $\alpha$  et  $\beta$  constituées de  $n$  éléments  $(\alpha_i)$  et  $(\beta_i)$ , ont un écart d'épaisseur mesuré par :

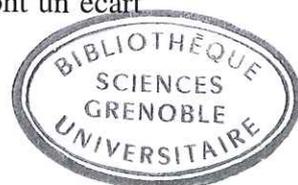
$$d_2(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n (e(\alpha_i) - e(\beta_i))^2$$

On vérifie que  $d_2$  est positive. Elle est nulle pour deux unités  $\alpha$  et  $\beta$  ayant des épaisseurs identiques.

#### b-4 ) Ecart par rapport au principe de conservation de la relation d'angle de deux éléments adjacents

Le quatrième principe consiste à conserver la relation d'angle entre deux éléments adjacents lors de la reconstruction. On mesure l'écart relativement à la relation d'angle entre deux unités cinématiques en sommant sur tous les éléments les écarts des rapports élevés au carré.

On note  $r(\alpha_i)$  la fonction qui donne le rapport d'angle entre les éléments adjacents  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$ . Deux unités cinématiques  $\alpha$  et  $\beta$  constituées de  $n$  éléments  $(\alpha_i)$  et  $(\beta_i)$ , ont un écart



associé à la relation d'angle mesuré par :

$$d_3(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n-1} (r(\alpha_i) - r(\beta_i))^2$$

On vérifie que  $d_3$  est positive. Elle est nulle pour deux unités à  $n$  éléments vérifiant les mêmes relations d'angle.

#### b-5) Définition de la semi-distance $d$ sur l'espace $\Upsilon_n$

La semi-distance  $d$  est la somme des trois écarts qui correspondent respectivement aux trois principes géométriques de conservation :  $d = d_1 + d_2 + d_3$

On prouve que la fonction  $d$  de  $\Upsilon_n^2$  dans  $\mathfrak{R}$  ainsi définie, vérifie bien les axiomes d'une semi-distance :

$$1 / \forall x \in E_n, d(x, x) = 0 \text{ (axiome d'identité)}$$

$$2 / \forall x, y \in E_n, d(x, y) = d(y, x) \text{ (axiome de symétrie)}$$

$$3 / \forall x, y, z \in E_n, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

On définit une configuration idéale  $\mathfrak{S}_n$  de l'unité cinématique à  $n$  éléments dont la géométrie n'est pas explicitée mais dont les paramètres géométriques (aires, épaisseurs et relations d'angle) sont ceux qui doivent être respectés lors de la reconstruction. On mesure à l'aide de  $d$ , l'écart de n'importe quelle configuration  $\gamma_n$  d'une unité à  $n$  éléments à la configuration idéale  $\mathfrak{S}_n$ . Le critère de sélection géométrique  $\sigma()$  est la fonction de  $\Upsilon_n$  dans  $\mathfrak{R}$  :  $\sigma(\gamma_n) = d(\gamma_n, \mathfrak{S}_n)$ . Cette fonction est définie à partir de la distance  $d()$ , on appelle respectivement  $\sigma_1()$ ,  $\sigma_2()$ ,  $\sigma_3()$  les trois critères partiels définis à partir des semi-distances  $d_1()$ ,  $d_2()$ ,  $d_3()$ .

La reconstruction de l'unité consiste à trouver les minima de la fonction  $\sigma()$ . On s'intéresse aux propriétés de continuité et de différentiabilité de  $\sigma()$  pour mener une minimisation. On précise les notations, et on explicite à l'aide de celles-ci les grandeurs géométriques utiles à l'expression du critère  $\sigma()$ .

#### c) Propriétés de régularité de la semi-distance $d()$ et du critère $\sigma()$

##### c-1) Régularité des fonctions $d_1()$ et $\sigma_1()$ :

L'aire algébrique de l'élément  $E_i$  est calculée comme l'aire du polygone orienté  $\partial E_i$  à l'aide de la fonction  $\mathcal{A}()$  (définie en annexe section 4.2 page 193). On rappelle que la fonction  $\mathcal{A}_n()$ , définie sur l'espace  $\mathfrak{R}^{2n}$  et à valeurs dans  $\mathfrak{R}$  (où  $n$  est le nombre de sommets du polygone  $\partial E_i$  est de classe  $C^\infty$ .

On étudie la fonction  $\mathcal{A}(\partial E_i)$  qui associe à un élément  $E_i$  de coordonnées  $(x_{i-1}, y_{i-1}, s_{i-1},$

$x_i, y_i, s_i$ ) dans  $\mathfrak{R}^6$  son aire algébrique dans  $\mathfrak{R}$ . Le domaine de définition de  $\mathcal{A}(x_{i-1}, y_{i-1}, s_{i-1}, x_i, y_i, s_i)$  est  $D_{\Gamma^2} = (\mathfrak{R}^2 \times [0, L_{\Gamma}])^2$  (avec  $s_{i-1} < s_i$ ), c'est une restriction de  $\mathfrak{R}^6$ .

On note  $(q, k)$  le couple d'entiers de  $\{0, \dots, m\}^2$  tels que :

$$(s_{i-1}, s_i) \in [l_{\Gamma^q}, l_{\Gamma^{q+1}}[ \times [l_{\Gamma^k}, l_{\Gamma^{k+1}}[ \text{ (avec } q \leq k)$$

Le polygone formant le contour de l'élément  $E_i$  est donc constitué des sommets :

$$\partial E_i = (P_i, S_i, \Gamma_k, \dots, \Gamma_{q+1}, S_{i-1}, P_{i-1})$$

L'aire algébrique du polygone  $\partial E_i$  est :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\partial E_i) = & \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \sum_{j=0}^{k-q} \det(\overline{\Gamma_{q+1+j}}, \overline{\Gamma_{q+j}}) + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}}) \\ & + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i}) \end{aligned}$$

On démontre la formule dans les trois configurations  $(q=k)$ ,  $(q+1=k)$  et  $(q+1 < k)$  :

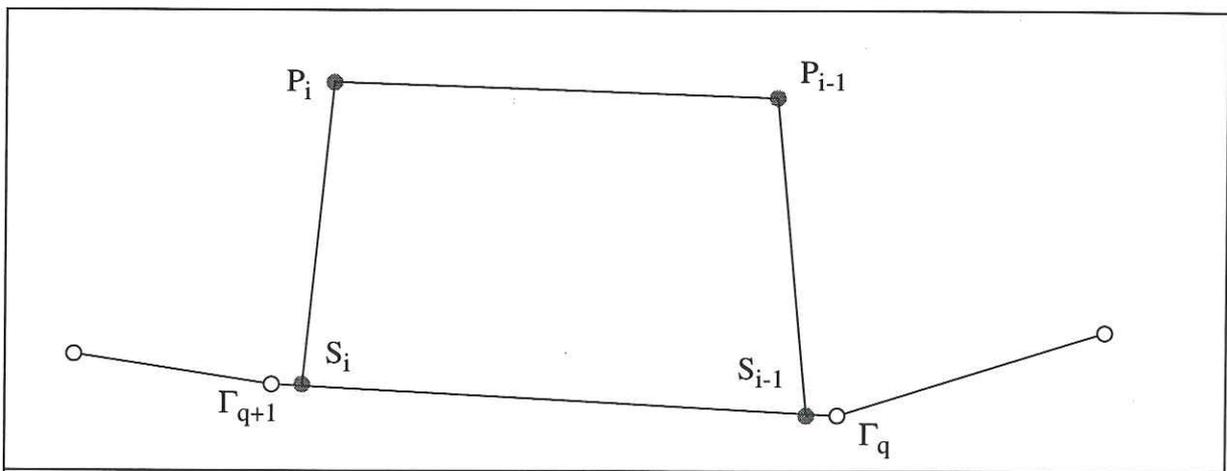
1 /  $q = k$

Le polygone  $\partial E_i$  est un quadrilatère:

$$\partial E_i = (P_i, S_i, S_{i-1}, P_{i-1})$$

Son aire est égale à :

$$\mathcal{A}(\partial E_i) = \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{S_{i-1}}) + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i})$$



**Figure 4-12** Élément  $E_i$  dans la configuration  $(q = k)$

Or les sommets  $S_{i-1}$  et  $S_i$  sont sur  $[\Gamma_q, \Gamma_{q+1}[$  donc les quatre points  $S_{i-1}, S_i, \Gamma_q, \Gamma_{q+1}$  sont alignés, on en déduit la relation :

$$\det(\overline{S_i}, \overline{S_{i-1}}) = \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{q+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{\Gamma_q}) + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}})$$

L'aire algébrique de l'élément vérifie donc bien la formule générale; la somme est réduite à un seul terme (j=0):

$$\mathcal{A}(\partial E_i) = \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{\Gamma_q}) + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}}) \\ + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i})$$

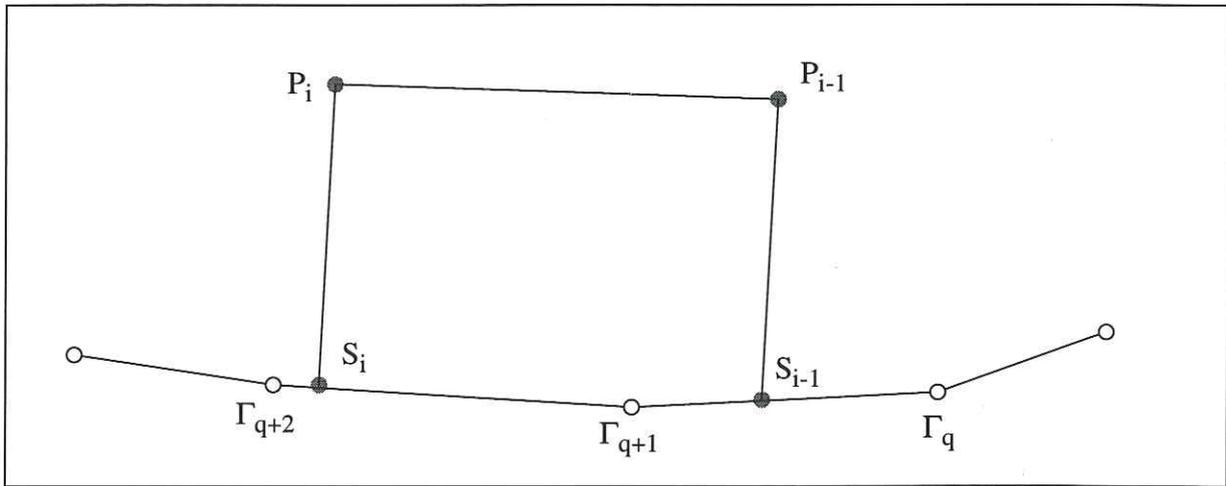
$$2 / q+1=k$$

Le polygone  $\partial E_i$  est un pentagone :

$$\partial E_i = (P_i, S_i, \Gamma_k, S_{i-1}, P_{i-1})$$

L'aire du pentagone est :

$$\mathcal{A}(\partial E_i) = \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_k}) + \det(\overline{\Gamma_k}, \overline{S_{i-1}}) + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) \\ + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i})$$



**Figure 4-13** Elément  $E_i$  dans la configuration ( $q+1 = k$ )

Or les sommets  $S_{i-1}$  et  $S_i$  sont respectivement sur les segments  $[\Gamma_q, \Gamma_{q+1}[$  et  $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}[$  donc on a les deux relations suivantes :

$$\det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{S_{i-1}}) = \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{\Gamma_q}) + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}})$$

$$\det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_k}) = \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{k+1}}, \overline{\Gamma_k})$$

L'aire algébrique de l'élément vérifie bien la formule générale annoncée; la somme comporte deux termes (j=0, 1):

$$\mathcal{A}(\partial E_i) = \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{q+2}}, \overline{\Gamma_{q+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{\Gamma_q}) \\ + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}}) + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i})$$

$$3 / q+1>k$$

Le polygone formé par le contour de l'élément comporte ( $k-q+4$ ) sommets :

$$\partial E_i = (P_i, S_i, \Gamma_k, \dots, \Gamma_{q+1}, S_{i-1}, P_{i-1})$$

Son aire est égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\partial E_i) = & \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_k}) + \sum_{j=1}^{k-q-1} \det(\overline{\Gamma_{q+1+j}}, \overline{\Gamma_{q+j}}) \\ & + \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{S_{i-1}}) + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i}) \end{aligned}$$

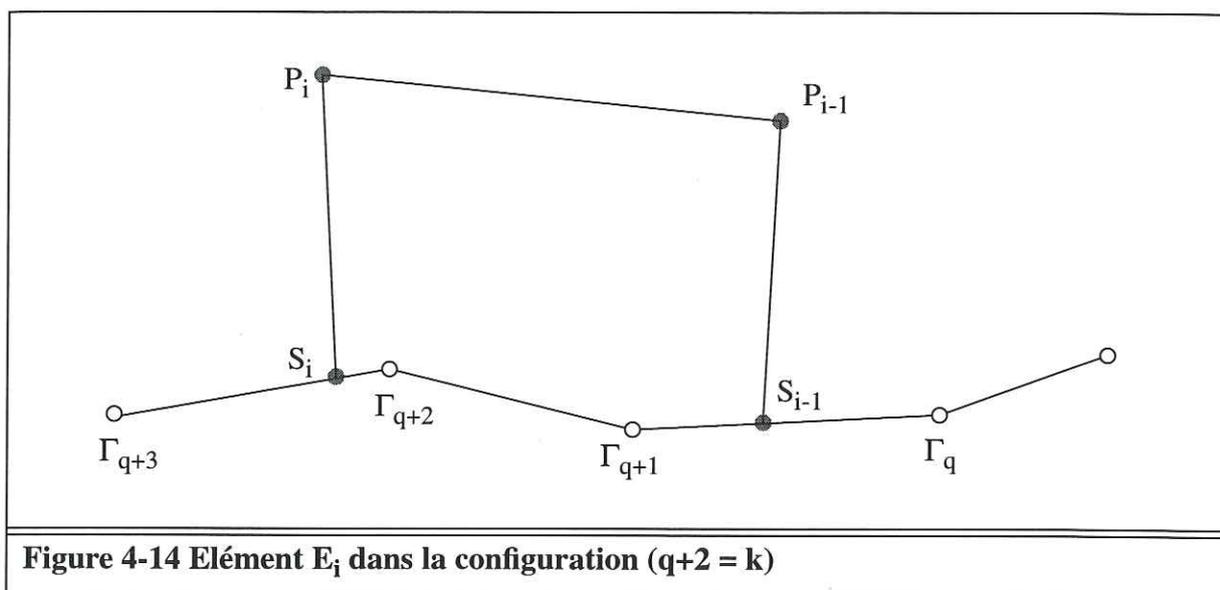


Figure 4-14 Elément  $E_i$  dans la configuration ( $q+2 = k$ )

Les sommets  $S_{i-1}$  et  $S_i$  sont respectivement sur  $[\Gamma_q, \Gamma_{q+1}[$  et  $[\Gamma_k, \Gamma_{k+1}[$ , on a :

$$\det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{S_{i-1}}) = \det(\overline{\Gamma_{q+1}}, \overline{\Gamma_q}) + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}})$$

$$\det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_k}) = \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \det(\overline{\Gamma_{k+1}}, \overline{\Gamma_k})$$

L'aire algébrique de l'élément vérifie bien la formule générale annoncée; la somme contient  $(q-k)$  termes :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\partial E_i) = & \det(\overline{P_i}, \overline{S_i}) + \det(\overline{S_i}, \overline{\Gamma_{k+1}}) + \sum_{j=0}^{k-q} \det(\overline{\Gamma_{q+1+j}}, \overline{\Gamma_{q+j}}) \\ & + \det(\overline{\Gamma_q}, \overline{S_{i-1}}) + \det(\overline{S_{i-1}}, \overline{P_{i-1}}) + \det(\overline{P_{i-1}}, \overline{P_i}) \end{aligned}$$

### Continuité

Connaissant l'expression de  $\mathcal{A}(\partial E_i)$ , on étudie sa continuité. L'élément  $E_i$  est identifié à  $(\overline{P_{i-1}}, s_{i-1}, \overline{P_i}, s_i)$  sur le domaine  $D_{\Gamma^2} = (\mathcal{R}^2 \times [0, L_{\Gamma}])^2$  (avec  $s_{i-1} < s_i$ ). Sur chaque domaine ouvert associé à un couple d'entiers  $(q, k)$  l'aire algébrique de l'élément  $E_i$  est une somme de déterminants. Comme le déterminant est une fonction continue, l'aire algébrique est elle-même continue sur chaque ouvert associé à un couple d'entiers  $(q, k)$ .

Sur  $\mathcal{R}^2 \times [l_{\Gamma}^q, l_{\Gamma}^{q+1}[ \times \mathcal{R}^2 \times [l_{\Gamma}^k, l_{\Gamma}^{k+1}[$ ,  $\mathcal{A}(\partial E_i)$  est continue.

On prouve la continuité de  $\mathcal{A}(\partial E_i)$  sur l'ensemble du domaine en examinant sa continuité

sur les frontières des domaines ouverts associés aux couples d'entiers  $(q, k)$ . Ces frontières sont les familles de droites  $(s_{i-1} = l_\Gamma^j)$  et  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ .

Sachant que la fonction  $\bar{\Gamma}(s_i)$  est continue  $\lim_{s_i \rightarrow l_\Gamma^k} \bar{S}_i = \lim_{s_i \rightarrow l_\Gamma^k} \bar{\Gamma}(s_i) = \bar{\Gamma}_k$

La limite par valeurs supérieures est :

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i > l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) = \mathcal{A}(\bar{P}_i, l_\Gamma^k, l_\Gamma^k, \dots, l_\Gamma^{q+1}, S_{i-1}, \bar{P}_{i-1})$$

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i > l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{P}_i, \bar{\Gamma}_k) + \det(\bar{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_{k+1}) + \sum_{j=0}^{k-q} \det(\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \bar{\Gamma}_{q+j})$$

$$+ \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{S}_{i-1}) + \det(\bar{S}_{i-1}, \bar{P}_{i-1}) + \det(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$$

La limite par valeurs inférieures est :

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i < l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) = \mathcal{A}(\bar{P}_i, l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k-1}, \dots, l_\Gamma^{q+1}, S_{i-1}, \bar{P}_{i-1})$$

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i < l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{P}_i, \bar{\Gamma}_k) + \det(\bar{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_k) + \sum_{j=0}^{k-1-q} \det(\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \bar{\Gamma}_{q+j})$$

$$+ \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{S}_{i-1}) + \det(\bar{S}_{i-1}, \bar{P}_{i-1}) + \det(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$$

On prouve l'égalité des limites :

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i > l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) - \lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i < l_\Gamma^k}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_{k+1}) + \det(\bar{\Gamma}_{k+1}, \bar{\Gamma}_k) - \det(\bar{\Gamma}_k, \bar{\Gamma}_k) = 0$$

$\mathcal{A}(E_i)$  est donc continue sur  $\mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}] \times \mathfrak{R}^2 \times [0, L_\Gamma]$  pour tout  $q$  de  $\{0, \dots, m-1\}$

De même,  $\bar{\Gamma}(s_{i-1})$  est continue  $\lim_{s_{i-1} \rightarrow l_\Gamma^q} \bar{S}_{i-1} = \lim_{s_{i-1} \rightarrow l_\Gamma^q} \bar{\Gamma}(s_{i-1}) = \bar{\Gamma}_q$

La limite par valeurs supérieures est :

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_\Gamma^q \\ s_{i-1} > l_\Gamma^q}} \mathcal{A}(E_i) = \mathcal{A}(\bar{P}_i, \bar{S}_i, l_\Gamma^k, \dots, l_\Gamma^{q+1}, l_\Gamma^q, \bar{P}_{i-1})$$

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} > l_{\Gamma^q}}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{P}_i, \bar{S}_i) + \det(\bar{S}_i, \bar{\Gamma}_{k+1}) + \sum_{j=0}^{k-q} \det(\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \bar{\Gamma}_{q+j}) \\ + \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{\Gamma}_q) + \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{P}_{i-1}) + \det(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$$

Et la limite par valeurs inférieures :

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} < l_{\Gamma^q}}} \mathcal{A}(E_i) = \mathcal{A}(\bar{P}_i, \bar{S}_i, l_{\Gamma^k}, \dots, l_{\Gamma^{q+1}}, l_{\Gamma^q}, l_{\Gamma^q}, \bar{P}_{i-1})$$

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} < l_{\Gamma^q}}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{P}_i, \bar{S}_i) + \det(\bar{S}_i, \bar{\Gamma}_{k+1}) + \sum_{j=0}^{k-q} \det(\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \bar{\Gamma}_{q+j}) \\ + \det(\bar{\Gamma}_{q-1}, \bar{\Gamma}_q) + \det(\bar{\Gamma}_{q-1}, \bar{\Gamma}_q) + \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{P}_{i-1}) + \det(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i)$$

On démontre l'égalité des limites :

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} > l_{\Gamma^q}}} \mathcal{A}(E_i) - \lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} < l_{\Gamma^q}}} \mathcal{A}(E_i) = \det(\bar{\Gamma}_q, \bar{\Gamma}_q) - \det(\bar{\Gamma}_{q-1}, \bar{\Gamma}_q) - \det(\bar{\Gamma}_{q-1}, \bar{\Gamma}_q) = 0$$

$\mathcal{A}(E_i)$  est donc continue sur le domaine :  $D_{\Gamma^2} = (\mathfrak{R}^2 \times [0, L_{\Gamma}])^2$  (avec  $s_{i-1} < s_i$ )

### Différentiabilité

La différentielle de  $\mathcal{A}(E_i)$  sur  $\mathfrak{R}^2 \times [l_{\Gamma^q}, l_{\Gamma^{q+1}}[ \times \mathfrak{R}^2 \times [l_{\Gamma^k}, l_{\Gamma^{k+1}}[$ , avec  $q$  et  $k$  fixés, est :

$$d\mathcal{A}(E_i) = \det(d\bar{P}_i, \bar{S}_i) + \det(\bar{P}_i, d\bar{S}_i) + \det(d\bar{S}_i, \bar{\Gamma}_{k+1}) + \det(\bar{S}_i, d\bar{\Gamma}_{k+1}) \\ + \sum_{j=0}^{k-q} [\det(d\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \bar{\Gamma}_{q+j}) + \det(\bar{\Gamma}_{q+1+j}, d\bar{\Gamma}_{q+j})] \quad (k \geq q) \\ + \det(d\bar{\Gamma}_q, \bar{S}_{i-1}) + \det(\bar{\Gamma}_q, d\bar{S}_{i-1}) + \det(d\bar{S}_{i-1}, \bar{P}_{i-1}) \\ + \det(\bar{S}_{i-1}, d\bar{P}_{i-1}) + \det(d\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i) + \det(\bar{P}_{i-1}, d\bar{P}_i)$$

En regroupant les termes :

$$d\mathcal{A}(E_i) = \det(d\bar{P}_i, \overrightarrow{P_{i-1} \bar{S}_i}) + \det(d\bar{S}_i, \overrightarrow{P_i \bar{\Gamma}_{k+1}}) + \det(d\bar{\Gamma}_{k+1}, \overrightarrow{S_i \bar{\Gamma}_k}) \\ + \sum_{j=0}^{k-q-1} \det(d\bar{\Gamma}_{q+1+j}, \overrightarrow{\Gamma_{q+2+j} \bar{\Gamma}_{q+j}}) + \det(d\bar{\Gamma}_q, \overrightarrow{\Gamma_{q+1} S_{i-1}}) \\ + \det(d\bar{S}_{i-1}, \overrightarrow{\Gamma_q P_{i-1}}) + \det(d\bar{P}_{i-1}, \overrightarrow{S_{i-1} P_i})$$

Comme  $k$  et  $q$  sont des entiers fixés,  $\bar{\Gamma}_k$  et  $\bar{\Gamma}_q$  sont des constantes et  $d\bar{\Gamma}_k = d\bar{\Gamma}_q = \bar{0}$ . De la même façon pour tous les entiers  $j$  fixés de  $\{0, \dots, k-q+1\}$ ,  $d\bar{\Gamma}_{q+j} = \bar{0}$

On obtient sur  $\mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}[ \times \mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$  l'expression différentielle :

$$d\mathcal{A}(E_i) = \det(d\bar{P}_i, \overrightarrow{P_{i-1}S_i}) + \det(d\bar{S}_i, \overrightarrow{P_i\Gamma_{k+1}}) \\ + \det(d\bar{S}_{i-1}, \overrightarrow{\Gamma_q P_{i-1}}) + \det(d\bar{P}_{i-1}, \overrightarrow{S_{i-1}P_i})$$

$$\text{Sur } [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[ \quad \bar{S}_i = \bar{\Gamma}(s_i) = \bar{\Gamma}_k + s_i \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k}, \text{ donc } d\bar{S}_i = d\bar{\Gamma}(s_i) = \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i$$

$$\text{De même sur } [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}[ \quad d\bar{S}_{i-1} = d\bar{\Gamma}(s_{i-1}) = \frac{\overrightarrow{\Gamma_q \Gamma_{q+1}}}{l_\Gamma^{q+1} - l_\Gamma^q} ds_{i-1}$$

$$d\mathcal{A}(E_i) = \det(d\bar{P}_i, \overrightarrow{P_{i-1}S_i}) + \frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}, \overrightarrow{P_i \Gamma_{k+1}})}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i \\ + \frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_q \Gamma_{q+1}}, \overrightarrow{\Gamma_q P_{i-1}})}{l_\Gamma^{q+1} - l_\Gamma^q} ds_{i-1} + \det(d\bar{P}_{i-1}, \overrightarrow{S_{i-1}P_i})$$

On obtient la différentielle sur  $\mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}[ \times \mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$

$$d\mathcal{A}(E_i) = \det(d\bar{P}_i, \overrightarrow{P_{i-1}S_i}) + \frac{\det(\bar{P}_i, \overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}})}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i \\ + \frac{\det(\bar{P}_{i-1}, \overrightarrow{\Gamma_q \Gamma_{q+1}})}{l_\Gamma^{q+1} - l_\Gamma^q} ds_{i-1} + \det(d\bar{P}_{i-1}, \overrightarrow{S_{i-1}P_i})$$

De la même manière que pour la continuité, la différentiabilité est étudiée sur chaque domaine ouvert associé au couple d'entiers  $(q, k)$ . Les frontières de ces domaines sont les familles de droites  $(s_{i-1} = l_\Gamma^j)$  et  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ , il convient de vérifier la continuité des différentielles sur ces familles de droites.

Or les dérivées partielles de  $\mathcal{A}()$  par rapport à la variable  $s_i$  ne sont pas continues :

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i > l_\Gamma^k}} \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_i} \right) = \frac{\det(\bar{P}_i, \overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}})}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i < l_\Gamma^k}} \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_i} \right) = \frac{\det(\bar{P}_i, \overrightarrow{\Gamma_{k-1} \Gamma_k})}{l_\Gamma^k - l_\Gamma^{k-1}}$$

Les dérivées partielles de  $\mathcal{A}()$  par rapport à  $s_{i-1}$  ne sont pas continues non plus :

$$\lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} > l_{\Gamma^q}}} \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_{i-1}} \right) = \frac{\det(\overline{P_{i-1}}, \overline{\Gamma_q \Gamma_{q+1}})}{l_{\Gamma^{q+1}} - l_{\Gamma^q}} \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{s_{i-1} \rightarrow l_{\Gamma^q} \\ s_{i-1} < l_{\Gamma^q}}} \left( \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_{i-1}} \right) = \frac{\det(\overline{P_{i-1}}, \overline{\Gamma_{q-1} \Gamma_q})}{l_{\Gamma^q} - l_{\Gamma^{q-1}}}$$

La fonction  $\mathcal{A}()$  n'est donc pas différentiable sur la totalité de son domaine de définition  $D_{\Gamma}^2 = (\mathfrak{R}^2 \times [0, L_{\Gamma}])^2$  (avec  $s_{i-1} < s_i$ )

On note  $(\mathcal{A}(\alpha_i))$  la suite des aires algébriques des éléments de l'unité dans la configuration  $\alpha$ , et  $(\mathcal{A}(E_i))$  la suite des aires d'une configuration idéale  $\mathfrak{S}_n$ . L'expression du critère partiel  $\sigma_1()$  sur  $D_{\Gamma}^{n+1}$  ( $s_{i-1} < s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) en fonction des paramètres  $\mathcal{A}(\alpha_i)$  et  $\mathcal{A}(E_i)$  est :

$$\sigma_1(x_0, y_0, s_0, \dots, x_n, y_n, s_n) = d_1(\alpha, \mathfrak{S}_n) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}(\alpha_i) - \mathcal{A}(E_i))^2$$

$\sigma_1()$  est continue sur  $D_{\Gamma}^{n+1}$  (avec  $s_{i-1} < s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) et différentiable (de classe  $C^{\infty}$ ) sur le domaine privé des droites  $(s_i = l_{\Gamma^j}) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$  ( $\Gamma = (\Gamma_j)_{j \in \{0, \dots, m\}}$ )

c-2) Régularité des fonctions  $d_2()$  et  $\sigma_2()$  :

L'épaisseur de l'élément  $E_i$  est la distance entre les milieux de  $[P_i, P_{i-1}]$  et  $[S_i, S_{i-1}]$ . On appelle  $\mathcal{B}_{\Gamma}(\overline{P}_{i-1}, s_{i-1}, \overline{P}_i, s_i) = \mathcal{B}(E_i)$  la fonction qui associe son épaisseur à l'élément  $E_i$ .  $\mathcal{B}_{\Gamma}$  est définie sur  $D_{\Gamma}^2 = (\mathfrak{R}^2 \times [0, L_{\Gamma}])^2$  (avec  $s_{i-1} < s_i$ ).

On note  $(q, k)$  le couple d'entiers de  $\{0, \dots, m\}^2$  tels que :

$$(s_{i-1}, s_i) \in [l_{\Gamma^q}, l_{\Gamma^{q+1}}[ \times [l_{\Gamma^k}, l_{\Gamma^{k+1}}[ \quad (\text{avec } q \leq k)$$

$$\overline{\mathcal{B}}_{\Gamma} = \frac{1}{2} [(\overline{P}_i + \overline{P}_{i-1}) - (\overline{S}_i + \overline{S}_{i-1})]$$

$$\mathcal{B}_{\Gamma} = \|\overline{\mathcal{B}}_{\Gamma}\|$$

$$\mathcal{B}_{\Gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{(x_i + x_{i-1} - x(s_i) - x(s_{i-1}))^2 + (y_i + y_{i-1} - y(s_i) - y(s_{i-1}))^2}$$

Comme les fonctions  $x(s_i)$ ,  $y(s_i)$ ,  $x(s_{i-1})$  et  $y(s_{i-1})$  sont continues sur l'intervalle  $[0, L_{\Gamma}]$ , on en déduit la continuité de la fonction  $\mathcal{B}_{\Gamma}(\overline{P}_{i-1}, s_{i-1}, \overline{P}_i, s_i)$  sur son domaine.

Différentiation de  $\mathcal{B}_{\Gamma}()$  :

$$d\mathcal{B}_{\Gamma} = \frac{\overline{\mathcal{B}}_{\Gamma} \cdot d\overline{\mathcal{B}}_{\Gamma}}{\mathcal{B}_{\Gamma}}$$

$$d\overline{\mathcal{B}}_{\Gamma} = \frac{1}{2} (d\overline{P}_i + d\overline{P}_{i-1} - d\overline{S}_i - d\overline{S}_{i-1})$$

Pour  $s_i \in [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$ , on a :  $d\bar{S}_i = d\bar{\Gamma}(s_i) = \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i$

Et  $s_{i-1} \in [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}[$ , on a :  $d\bar{S}_{i-1} = d\bar{\Gamma}(s_{i-1}) = \frac{\overrightarrow{\Gamma_q \Gamma_{q+1}}}{l_\Gamma^{q+1} - l_\Gamma^q} ds_{i-1}$

La différentielle de  $\mathcal{B}_\Gamma$  sur le domaine  $\mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^q, l_\Gamma^{q+1}[ \times \mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$  est :

$$d\mathcal{B}_\Gamma = \frac{\bar{\mathcal{B}}_\Gamma}{2\mathcal{B}_\Gamma} \cdot \left( d\bar{P}_i + d\bar{P}_{i-1} - \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i - \frac{\overrightarrow{\Gamma_q \Gamma_{q+1}}}{l_\Gamma^{q+1} - l_\Gamma^q} ds_{i-1} \right)$$

On en déduit que  $\mathcal{B}_\Gamma$  est différentiable partout, sauf sur les domaines où l'épaisseur  $\mathcal{B}_\Gamma$  est nulle et sur les familles de droites  $(s_{i-1} = l_\Gamma^j)$  et  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ . En effet, il n'y a pas continuité des dérivées partielles par rapport aux abscisses curvilignes  $s_{i-1}$  et  $s_i$  sur les deux familles de droites  $(s_{i-1} = l_\Gamma^j)$  et  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\}$ .

On note  $(\mathcal{B}_\Gamma(\alpha_i))$  la suite des épaisseurs des éléments de l'unité  $\alpha$ , et  $(\mathcal{B}_\Gamma(E_i))$  les épaisseurs d'une configuration idéale  $\mathfrak{S}_n$ . L'expression du critère partiel  $\sigma_2()$  sur  $D_\Gamma^{n+1}$  (et  $s_{i-1} < s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) en fonction des paramètres  $(\beta_i)$  et de la fonction  $\mathcal{B}_\Gamma$ .

$$\sigma_2(x_0, y_0, s_0, \dots, x_n, y_n, s_n) = d_2(\alpha, \mathfrak{S}_n) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{B}_\Gamma(\alpha_i) - \mathcal{B}_\Gamma(E_i))^2$$

On en déduit que  $\sigma_2$  est une fonction continue (de classe  $C^0$ ) sur  $D_\Gamma^{n+1}$  (avec  $s_{i-1} < s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) et qu'elle est différentiable sur le même domaine privé du sous-domaine où elle est nulle et des familles de droites  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ .

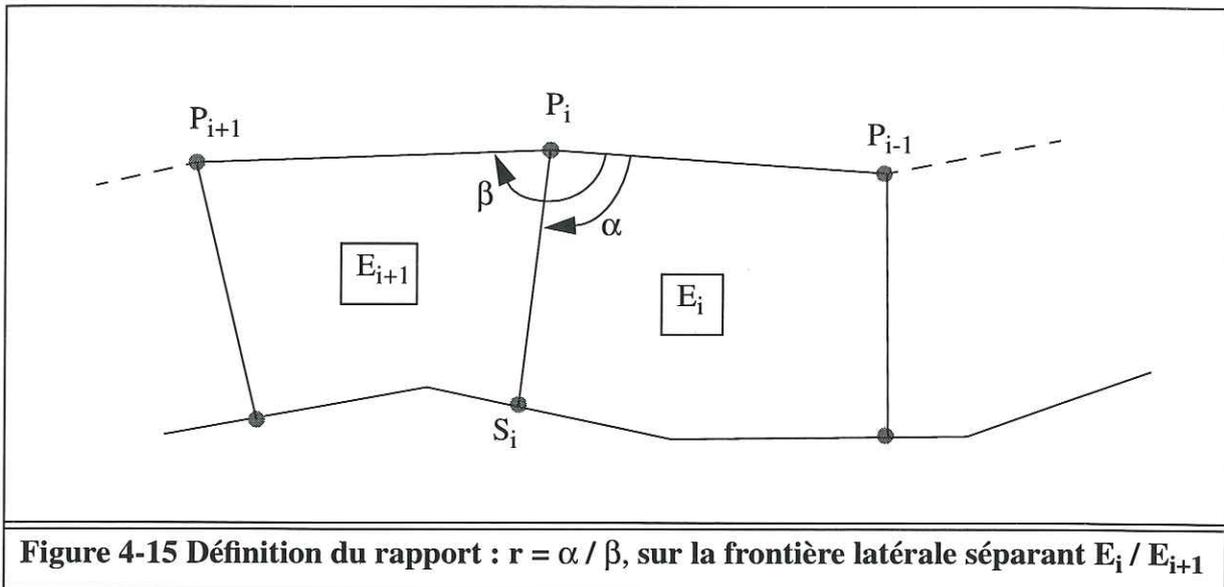
### c-3) Régularité des fonctions $d_3()$ et $\sigma_3()$ :

Le critère  $\sigma_3()$  est défini à partir de la conservation d'un scalaire, rapport d'angles relatif à deux éléments adjacents,  $E_i$  et  $E_{i+1}$ . Il dépend de la position des quatre sommets :  $\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, \bar{S}_i$ . On appelle  $C_\Gamma(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, s_i) = C_\Gamma(E_i, E_{i+1})$  la fonction qui associe aux quatre sommets des deux éléments, la valeur du rapport d'angles.  $C_\Gamma$  est définie sur  $(\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times [0, L_\Gamma])$  qui est une restriction de  $\mathfrak{R}^7$ .

Sur la configuration des éléments  $E_i$  et  $E_{i+1}$ , voir la figure 4-15, on définit les angles orientés  $\alpha$  et  $\beta$  :

$$\alpha = \text{mesure}(\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i S_i})$$

$$\beta = \text{mesure}(\overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}})$$



Les mesures des angles orientés  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels de l'intervalle  $[0, 2\pi[$ , le rapport  $(\alpha/\beta)$  est défini pour  $\beta \neq 0$ .

$$C_\Gamma(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, s_i) = \frac{\alpha}{\beta}$$

La fonction  $C_\Gamma(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, s_i)$  est continue sur  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times [0, L_\Gamma]$  privé des espaces de dimension cinq  $(\bar{P}_{i-1} = \bar{P}_i)$ ,  $(\bar{P}_{i+1} = \bar{P}_i)$  et  $(\bar{S}_i = \bar{P}_i)$  pour lesquels s'annulent respectivement les vecteurs  $\overrightarrow{P_i P_{i-1}}$ ,  $\overrightarrow{P_i P_{i+1}}$ ,  $\overrightarrow{P_i S_i}$  et pour lesquels les angles ne sont pas définis. Le domaine de continuité est également privé de l'ensemble  $(\overrightarrow{P_i P_{i-1}} = k \overrightarrow{P_i S_i}, \forall k \in \mathfrak{R}^+)$  pour lequel la mesure de l'angle  $\alpha$  n'est pas continue, et de l'ensemble  $(\overrightarrow{P_i P_{i-1}} = k \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \forall k \in \mathfrak{R}^+)$  pour lequel la mesure de l'angle  $\beta$  n'est pas continue et peut s'annuler.

On note  $k$  l'entier de  $\{0, \dots, m\}$  tel que  $s_i \in [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$

Sur le domaine  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2 \times [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[$  la différentielle de  $C_\Gamma(\bar{P}_{i-1}, \bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, s_i)$  est :

$$dC_\Gamma = \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{\beta^2}$$

$$d\alpha = \frac{\det(\overrightarrow{dP_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i-1}})}{\overrightarrow{P_i P_{i-1}}^2} - \frac{\det(\overrightarrow{dP_i S_i}, \overrightarrow{P_i S_i})}{\overrightarrow{P_i S_i}^2}$$

$$d\beta = \frac{\det(\overrightarrow{dP_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i-1}})}{\overrightarrow{P_i P_{i-1}}^2} - \frac{\det(\overrightarrow{dP_i P_{i+1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}})}{\overrightarrow{P_i P_{i+1}}^2}$$

Pour étudier la différentiabilité de  $C_\Gamma$ , on examine la dérivée partielle par rapport à  $s_i$  :

$$\text{Pour } s_i \in [l_\Gamma^k, l_\Gamma^{k+1}[, \text{ on a : } d\bar{S}_i = d\bar{\Gamma}(s_i) = \frac{\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}}{l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k} ds_i$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s_i} = -\frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}, \overrightarrow{P_i S_i})}{(l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k) \overrightarrow{P_i S_i}^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_i} = 0$$

$$\frac{\partial C_\Gamma}{\partial s_i} = \frac{\beta \frac{\partial \alpha}{\partial s_i} - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial s_i}}{\beta^2} = -\frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}, \overrightarrow{P_i S_i})}{\beta (l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k) \overrightarrow{P_i S_i}^2}$$

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i < l_\Gamma^k}} \left( \frac{\partial C_\Gamma}{\partial s_i} \right) = \frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_{k-1} \Gamma_k}, \overrightarrow{P_i})}{\beta (l_\Gamma^k - l_\Gamma^{k-1}) \overrightarrow{P_i \Gamma_k}^2}$$

$$\lim_{\substack{s_i \rightarrow l_\Gamma^k \\ s_i > l_\Gamma^k}} \left( \frac{\partial C_\Gamma}{\partial s_i} \right) = \frac{\det(\overrightarrow{\Gamma_k \Gamma_{k+1}}, \overrightarrow{P_i})}{\beta (l_\Gamma^{k+1} - l_\Gamma^k) \overrightarrow{P_i \Gamma_k}^2}$$

Les limites par valeurs supérieures et inférieures de la dérivée partielle diffèrent, il n'y a donc pas différentiabilité sur les droites  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$ .

On note  $(C_\Gamma(\alpha_i, \alpha_{i+1}))$  la suite des rapports d'angles de l'unité  $\alpha$ , et  $(C_\Gamma(E_i, E_{i+1}))$  ceux d'une configuration idéale  $\mathfrak{S}_n$ . L'expression du critère partiel  $\sigma_3()$  sur  $D_\Gamma^{n+1}$  (et  $s_{i-1} < s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ) est :

$$\sigma_3(x_0, y_0, s_0, \dots, x_n, y_n, s_n) = d_3(\alpha, \mathfrak{S}_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (C_\Gamma(\alpha_i, \alpha_{i+1}) - C_\Gamma(E_i, E_{i+1}))^2$$

#### c-4) Régularité des fonctions $d()$ et $\sigma()$

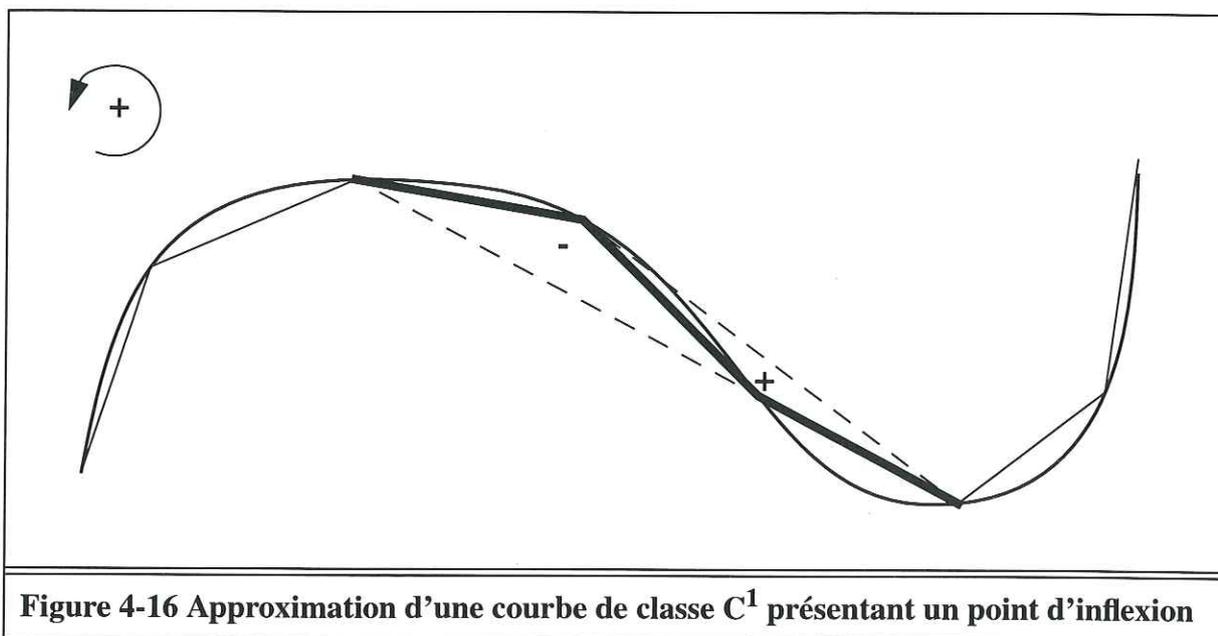
L'étude de la régularité prouve que les fonctions  $d()$  et  $\sigma()$  sont continues. De plus, elles sont différentiables partout sauf sur les droites  $(s_i = l_\Gamma^j) \forall (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$  et sauf sur les domaines où l'épaisseur de l'élément  $E_i$  est nulle,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

#### d ) Pénalisation des configurations présentant des ondulations

Le toit d'une unité cinématique comportant  $n$  éléments est une ligne polygonale d'ordre  $(n+2)$  dont les deux sommets aux extrémités appartiennent au support  $\Gamma$ .

On a mis en évidence des configurations qui présentent une géométrie ondulée du toit, voir section 4.2.3 page 94. Ces configurations vont être écartées en ajoutant un terme de pénalisation au critère de sélection  $\sigma()$ .

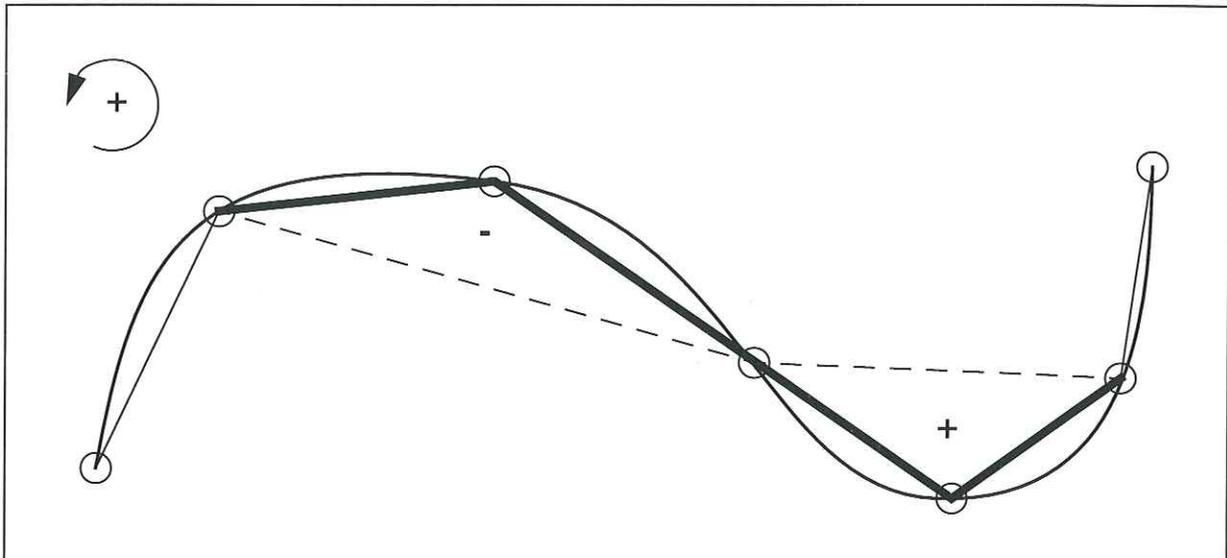
Un point d'inflexion sur courbe  $C$  de classe  $C^1$  est analogue à une ondulation pour une ligne polygonale  $P$ . On peut en effet approximer une courbe classe  $C^1$  par une ligne polygonale  $P$  d'ordre  $n$  dont les sommets sont régulièrement répartis sur  $C$ . A partir d'un certain niveau de précision de l'approximation, c'est à dire à partir d'un certain ordre de la ligne polygonale  $P$ , celle-ci possède une ondulation localement au point d'inflexion de la courbe  $C$ .



**Figure 4-16** Approximation d'une courbe de classe  $C^1$  présentant un point d'inflexion

Dans le modèle, une même unité cinématique peut présenter une configuration anticlinale sur un tronçon et synclinale sur un autre. Si le toit d'une telle unité est une courbe  $C$  de classe  $C^1$ , celle-ci possède nécessairement un point d'inflexion. La modélisation de  $C$  par une ligne polygonale  $P$  possède donc obligatoirement une ondulation à partir d'un certain ordre. On voit donc qu'on ne doit pas éliminer systématiquement toutes les ondulations des lignes polygonales du modèle. Seules doivent être éliminées les ondulations analogues à celles décrites section 4.2.3 page 95. Ce sont des ondulations courtes et répétées qui sont d'ordre trois. On les pénalise donc tout en autorisant les ondulations d'ordre supérieur. Ainsi, on élimine les configurations indésirables en permettant toutefois la représentation d'objets géologiques complexes. Les ondulations d'ordre  $n$  supérieur à trois présentent la propriété caractéristique d'avoir  $n-1$  sommets alignés. La figure 4-17 montre la façon dont une courbe admettant un point d'inflexion est approximée par une ligne polygonale com-

portant une ondulation d'ordre strictement supérieur à trois.



**Figure 4-17** Approximation d'une courbe de classe  $C^1$  présentant un point d'inflexion à l'aide d'une ligne contenant une ondulation d'ordre quatre

d-1 ) Détection des ondulations d'ordre trois d'une ligne polygonale

On détecte les ondulations d'ordre trois d'une ligne polygonale  $P = (P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  :

$$\forall i \in \{0, \dots, n-3\}, (\mathcal{A}(P^2_i) \mathcal{A}(P^2_{i+1}) < 0) \Leftrightarrow (P^3_i \text{ est une ondulation})$$

En notant  $(x_i, y_i)$  les coordonnées du  $i^{\text{ème}}$  sommet  $P_i$  de la ligne polygonale  $P$ , on a :

$$\mathcal{A}(P^2_i) = \frac{1}{2} [x_i(y_{i+1} - y_{i+2}) + x_{i+1}(y_{i+2} - y_i) + x_{i+2}(y_i - y_{i+1})]$$

Une expression équivalente est :

$$2 \mathcal{A}(P^2_i) = \det(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) + \det(\bar{P}_{i+1}, \bar{P}_{i+2}) + \det(\bar{P}_{i+2}, \bar{P}_i)$$

En différentiant l'expression précédente, on obtient :

$$2 d\mathcal{A}(P^2_i) = \det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i+2}) + \det(d\bar{P}_{i+1}, \bar{P}_{i+2} - \bar{P}_i) + \det(d\bar{P}_{i+2}, \bar{P}_i - \bar{P}_{i+1})$$

d-2 ) Critère  $\xi$  de pénalisation des ondulations

L'objectif de ce paragraphe est de définir une fonction  $\xi()$  que l'on applique à une unité cinématique de façon à pénaliser les configurations ondulantes du toit de l'unité. Pour cela, on définit une fonction  $\varphi_n()$  de l'espace des lignes polygonales  $P$  d'ordre  $n$  vers  $\mathfrak{R}$ . La fonction  $\varphi_n()$  est positive, elle est nulle pour les configurations de  $P$  qui ne comportent pas d'ondulation d'ordre trois.

On appelle  $f$  la fonction de  $\mathfrak{R}$  dans  $\mathfrak{R}$  définie par :

- Si ( $x < 0$ ) :  $f(x) = -x$
- Si ( $x \geq 0$ ) :  $f(x) = 0$

$f$  est continue sur  $\mathfrak{R}$  et est différentiable sur  $\mathfrak{R} \setminus \{0\}$

- Si ( $x < 0$ )  $df(x) = -1$
- Si ( $x > 0$ )  $df(x) = 0$

Une ondulation d'ordre trois,  $P_i^3$ , est caractérisée par une valeur négative du produit ( $\mathcal{A}(P_i^2) \mathcal{A}(P_{i+1}^2)$ ). On définit la fonction  $\varphi()$  appliquée aux lignes polygonales d'ordre 3 :

$$\varphi : \mathfrak{R}^8 \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}, \bar{P}_{i+2}, \bar{P}_{i+3}) \mapsto \varphi(P_i^3) = f(\mathcal{A}(P_i^2) \mathcal{A}(P_{i+1}^2))$$

Comme les fonctions  $\mathcal{A}(P_i^2)$ ,  $\mathcal{A}(P_{i+1}^2)$  et  $f()$  sont continues, la fonction  $\varphi$  est continue sur  $\mathfrak{R}^8$ . De plus  $\varphi()$  est positive. La nullité de  $\varphi(P_i^3)$  est équivalente au fait que  $P_i^3$  n'est pas une ondulation.

Les fonctions  $\mathcal{A}(P_i^2)$  et  $\mathcal{A}(P_{i+1}^2)$  sont différentiables sur leur domaine de définition à la différence de la fonction  $f()$  qui n'est pas différentiable en 0.  $\varphi$  donc est différentiable pour les configurations telles que  $\mathcal{A}(P_i^2) \neq 0$  et  $\mathcal{A}(P_{i+1}^2) \neq 0$ .  $\varphi$  est donc différentiable si et seulement si ( $P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$  ne sont pas alignés et  $P_{i+1}, P_{i+2}, P_{i+3}$  ne sont pas alignés) :

$$d\varphi(P_i^3) = df(\mathcal{A}(P_i^2) \mathcal{A}(P_{i+1}^2)) (d\mathcal{A}(P_i^2) \mathcal{A}(P_{i+1}^2) + \mathcal{A}(P_i^2) d\mathcal{A}(P_{i+1}^2))$$

La fonction  $\varphi_n()$  de l'espace des lignes polygonales d'ordre  $n$  (identifié à  $\mathfrak{R}^{2(n+1)}$ ) sur  $\mathfrak{R}$  est définie à l'aide de  $\varphi()$  :

$$\varphi_n : \mathfrak{R}^{2(n+1)} \rightarrow \mathfrak{R}$$

$$(\bar{P}_0, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n) \mapsto \varphi_n(P^n) = \sum_{i=0}^{n-3} \varphi(P_i^3)$$

Remarque : On a l'égalité  $\varphi(P_i^3) = \varphi_3(P_i^3)$ .

On définit la fonction  $\xi()$  sur l'espace  $\Upsilon_n$  des bancs  $\gamma_n$  à  $n$  éléments reposant sur un support  $\Gamma$ . Le toit du banc  $\gamma_n$  est une ligne polygonale  $P = (P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  d'ordre  $n$ .

$$\xi(\gamma_n) = \varphi_n(P) = \sum_{i=0}^{n-3} \varphi(P_i^3)$$

On montre que la fonction  $\xi(\gamma_n)$  est continue. Il s'agit en effet de la somme de fonctions continues. De plus, elle est différentiable sur l'espace  $\Upsilon_n$  privé des configurations pour lesquelles il existe  $i$  de  $\{0, \dots, n-3\}$  tel que  $\mathcal{A}(P_i^2) = 0$ .

Sur le domaine où elle est différentiable :

$$d\xi(\gamma_n) = \sum_{i=0}^{n-3} d\varphi(P^3_i)$$

**e ) Ecriture de  $\sigma$  : critère complet de sélection (pondération des termes)**

Le critère total  $\sigma()$  est une combinaison linéaire des critères partiels.

$$\sigma(\gamma_n) = \lambda_1 d_1(\gamma_n, \mathcal{S}_n) + \lambda_2 d_2(\gamma_n, \mathcal{S}_n) + \lambda_3 d_3(\gamma_n, \mathcal{S}_n) + \lambda_4 \xi(\gamma_n)$$

$$\sigma(\gamma_n) = \lambda_1 \sigma_1(\gamma_n) + \lambda_2 \sigma_2(\gamma_n) + \lambda_3 \sigma_3(\gamma_n) + \lambda_4 \xi(\gamma_n)$$

Les paramètres de pondérations  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$  sont tels que :

$$\lambda_1 \gg \lambda_4 ; \lambda_2 \gg \lambda_4 \text{ et } \lambda_3 \gg \lambda_4 .$$

Ainsi, lors de la minimisation on a :

$$d_1(\gamma_n, \mathcal{S}_n) \ll \xi(\gamma_n) ; d_2(\gamma_n, \mathcal{S}_n) \ll \xi(\gamma_n) ; d_3(\gamma_n, \mathcal{S}_n) \ll \xi(\gamma_n) .$$

On respecte alors numériquement les trois critères géométriques constitutifs de la méthode. Parmi les solutions vérifiant les trois critères  $\sigma_1()$ ,  $\sigma_2()$  et  $\sigma_3()$  la solution retenue est celle pour laquelle le critère  $\xi()$  pénalisant les ondulations d'ordre trois est minimum.

**f ) Prise en compte de la condition à la limite**

La condition à la limite dans le modèle cinématique FOLDIS est donnée pour chaque écaïlle par la connaissance du déplacement d'un des bords de l'écaïlle.

Au niveau des unités cinématiques, la condition à la limite correspond au déplacement d'une frontière latérale d'un élément. Cette condition peut porter selon les cas sur un segment de droite ou sur un seul noeud. La position du segment, ou du point, est alors une donnée du problème de reconstruction, ses coordonnées ne sont pas des inconnues mais des paramètres lors de la minimisation numérique. Le critère de sélection  $\sigma()$  est minimisé en modifiant de façon systématique la valeur des variables du problème qui correspondent aux coordonnées des noeuds inconnus.

**4.4.3 : Recherche de la configuration optimale vis à vis du critère**

**a ) Problème de minimisation d'une fonction réelle  $f()$**

Le problème est celui de trouver un minimum local d'une fonction  $f$  réelle à variables dans un espace  $E$  (de dimension  $p$ ).

$$f: \begin{array}{l} E \rightarrow \mathfrak{R} \\ \bar{X} \mapsto f(\bar{X}) \end{array}$$

L'espace  $E$  de dimension  $p$  est identifié à  $\mathfrak{R}^p$ ,  $f$  est alors une fonction réelle à  $p$  variables.

La proposition ( $\bar{X}$  est un minimum local de la fonction  $f$ ) signifie qu'il existe un voisinage de  $\bar{X}$ ,  $V(\bar{X})$ , tel que le réel  $f(\bar{X})$  soit le minimum de l'ensemble  $f(V(\bar{X}))$ .

La proposition ( $\bar{X}$  est minimum global de la fonction  $f$ ) signifie que le réel  $f(\bar{X})$  est le minimum de l'ensemble de réels  $f(E)$ .

La minimisation locale de  $f$  est transformée de façon équivalente en un problème de recherche de racines si la fonction  $f$  est suffisamment régulière (de classe  $C^1$ ). En effet,  $\bar{X}$  est un extremum local de la fonction  $f$  si et seulement si  $\|\bar{\nabla}f(\bar{X})\|=0$ . On distingue parmi les extrema locaux, les minima et les maxima.

La stratégie de résolution du problème consiste à trouver à partir d'un point initial  $\bar{X}_0$  de l'espace  $E$ , un minimum  $\bar{X}_m$ , limite dans  $E$  d'une suite convergente  $(\bar{X}_i)$  d'éléments de  $E$ .

Si la fonction  $f$  est suffisamment régulière (de classe  $C^2$ ), on montre qu'il existe des algorithmes (par exemple la méthode de Newton) qui permettent à partir de différentes valeurs initiales  $\bar{X}_0$  bien choisies de trouver les extrema annulant la fonction réelle  $\|\bar{\nabla}f(X)\|$ .

### b) Algorithme numérique de minimisation

L'algorithme de minimisation adopté est itératif. Il repose sur le calcul du gradient de la fonction  $f()$  :  $\bar{\nabla}f$ . On construit une suite convergente  $(\bar{X}_i)$  à partir de la valeur initiale  $\bar{X}_0$ . La limite  $\bar{X}_m$  de la suite vérifie les deux propriétés suivantes :

- 1 / La suite réelle  $u_i=f(\bar{X}_i)$  est décroissante.
- 2 / La suite  $(\bar{X}_i)$  converge et sa limite  $\bar{X}_m$  est telle que  $\|\bar{\nabla}f(\bar{X}_m)\|=0$

Ces propriétés assurent que  $\bar{X}_m$  est bien un minimum local de la fonction  $f()$ .

Connaissant le point  $\bar{X}_i$ , la valeur du gradient de  $f()$  au point  $\bar{X}_i$ ,  $\bar{\nabla}f(\bar{X}_i)$ , fournit une "direction de descente",  $-\bar{\nabla}f(\bar{X}_i)$ , qui permet de construire une suite  $u_i=f(\bar{X}_i)$  décroissante (propriété 1). La construction de la suite  $(\bar{X}_i)$  est récurrente ;

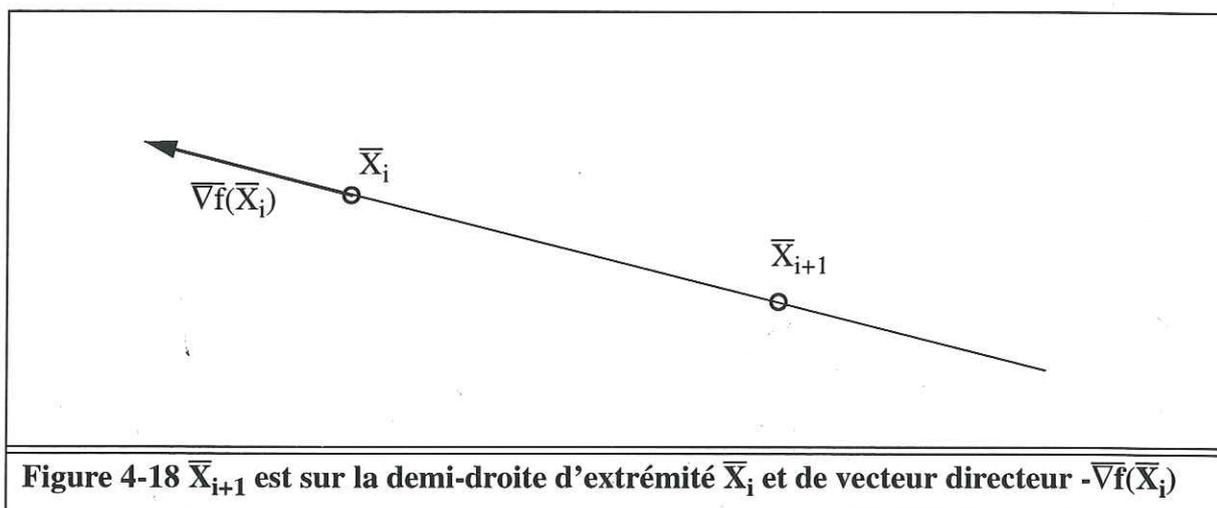


Figure 4-18  $\bar{X}_{i+1}$  est sur la demi-droite d'extrémité  $\bar{X}_i$  et de vecteur directeur  $-\bar{\nabla}f(\bar{X}_i)$

Le point  $\bar{X}_{i+1}$  est défini à partir du point  $\bar{X}_i$ , il est sur la demi-droite d'extrémité  $\bar{X}_i$  et de vecteur directeur  $-\nabla f(\bar{X}_i)$ , voir la figure 4-18. Le point  $\bar{X}_{i+1}$  est déterminé de façon unique par la valeur du scalaire positif  $p_m$  :  $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - p_m \nabla f(\bar{X}_i)$ .

On définit la fonction  $g(p)$  de la variable réelle positive  $p$  :  $g(p) = f(\bar{X}_i - p \nabla f(\bar{X}_i))$ . On détermine le réel  $p_m$  en minimisant la fonction  $g(p)$ .

Numériquement, la minimisation consiste en la construction d'une suite réelle positive convergente  $(p_j)$  dont la limite  $p_m$  minimise  $g(p)$ .

b-1 ) Valeur initiale de la suite : le terme  $p_0$

On pose  $q_0=0$  et on choisit un réel positif  $q$ , la comparaison de  $g(q)=f(\bar{X}_i - q \nabla f(\bar{X}_i))$  à  $g(0)=f(\bar{X}_i)$  conduit à définir  $q_1$  et  $q_2$  de la façon suivante :

- si  $g(q) < g(0)$  : on pose  $q_1=q$  et  $q_2=2q$
- si  $g(q) \geq g(0)$  : on pose  $q_1=q/2$  et  $q_2=q$

Remarque : on obtient un triplet  $(q_0, q_1, q_2)$  qui vérifie les inégalités  $0 \leq q_0 < q_1 < q_2$ , le triplet est donc ordonné.

On définit les trois configurations possibles d'un triplet ordonné  $(q_0, q_1, q_2)$  :

- 1 :  $(q_0, q_1, q_2)$  est tel que  $g(q_1) \leq g(q_0)$  et  $g(q_1) \leq g(q_2)$ .
- 0 :  $(q_0, q_1, q_2)$  n'est pas de configuration 1 et  $g(q_0) \leq g(q_2)$ .
- 2 :  $(q_0, q_1, q_2)$  n'est ni de configuration 1 ni de configuration 0.

On applique au triplet initial  $(q_0, q_1, q_2)$  l'algorithme qui consiste en une boucle, modifiant les valeurs de  $q_1$  et  $q_2$  :

répéter la boucle

{ début

si configuration  $(q_0, q_1, q_2) == 1$  : sortir de la boucle;

si configuration  $(q_0, q_1, q_2) == 0$  :  $q_2=q_1$ ;  $q_1=q_1/2$ ; aller à début;

si configuration  $(q_0, q_1, q_2) == 2$  :  $q_1=q_2$ ;  $q_2=2q_2$ ; aller à début;

fin}

On montre que pour tout réel strictement positif  $q$  l'algorithme précédent converge. On obtient après un nombre fini d'itérations un triplet  $(q_0, q_1, q_2)$  dans la configuration un.

Démonstration :

On considère les différentes configurations pour le premier triplet  $(q_0, q_1, q_2)$ .

- si  $g(q) < g(0)$  : on pose  $q_1=q$  et  $q_2=2q$ 
  - si  $g(q) \leq g(2q)$  : configuration  $(0, q, 2q) == 1$
  - si  $g(q) > g(2q)$  : configuration  $(0, q, 2q) == 2$
- si  $g(q) \geq g(0)$  : on pose  $q_1=q/2$  et  $q_2=q$ 
  - si  $g(q/2) \leq g(0)$  : configuration  $(0, q/2, q) == 1$
  - si  $g(q/2) > g(0)$  : configuration  $(0, q/2, q) == 0$

On considère maintenant le triplet  $(q_0, q_1, q_2)$  lors de la première itération :

- Si configuration  $(q_0, q_1, q_2) == 2$

Alors nécessairement  $(q_0, q_1, q_2) == (0, q, 2q)$

La fonction positive  $g(x)$  tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ . Soit  $m$  un réel positif tel que :  $(x > m) \Rightarrow (g(x) > g(0))$ .

Au début de la deuxième itération on aura :  $(q_0, q_1, q_2) == (0, 2q, 4q)$

Après moins de  $\ln(m/q)/\ln(2)$  itérations l'algorithme s'arrête.

- Si configuration  $(q_0, q_1, q_2) == 0$

Alors nécessairement  $(q_0, q_1, q_2) == (0, q/2, q)$

Soit  $m$  le premier minimum local positif de la fonction  $g()$ . La fonction  $g$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, m]$  et  $g(0) < g(q/2)$ , donc :  $m \in [0, q/2]$

A l'itération suivante on aura :  $(q_0, q_1, q_2) == (0, q/4, q/2)$

Après moins de  $\ln(q/m)/\ln(2)$  itérations on obtient la configuration un et l'algorithme s'arrête.

Après avoir appliqué l'algorithme précédent on obtient un triplet  $(q_0, q_1, q_2)$  dans la configuration un et vérifiant les inégalités  $0 \leq q_0 < q_1 < q_2$ . On définit ensuite le réel  $p_0$ , il s'agit de la moyenne arithmétique des réels  $q_0, q_1, q_2$  :  $p_0 = (q_0 + q_1 + q_2)/3$ .

Les réels  $(q_0, q_1, q_2)$  sont en progression arithmétique car  $q_0=0$  et  $q_2=2q_1$ , donc  $p_0 = q_1$ .

b-2 ) Définition récurrente du terme général  $p_j$  de la suite :

On approxime la fonction  $g(q)$  sur l'intervalle  $[q_0, q_2]$  par le polynôme de degré deux  $g(q) = a + b q + c q^2$  qui coïncide avec la fonction  $g$  aux trois points d'abscisses  $q_0, q_1$  et  $q_2$ . Les coefficients  $(a, b, c)$  du polynôme  $g(q)$  sont déterminés de façon unique par les trois égalités :  $g(q_0) = g(q_0)$ ,  $g(q_1) = g(q_1)$ ,  $g(q_2) = g(q_2)$ .

$$\text{On a la relation matricielle: } M \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(q_0) \\ g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & q_0 & q_0^2 \\ 1 & q_1 & q_1^2 \\ 1 & q_2 & q_2^2 \end{bmatrix}$$

Le déterminant de la matrice M est :

$$\det(M) = q_1 q_2^2 - q_2 q_1^2 + q_2 q_0^2 - q_0 q_2^2 + q_0 q_1^2 - q_1 q_0^2 = -(q_0 - q_1)(q_1 - q_2)(q_2 - q_0)$$

Du fait des inégalités strictes  $q_0 < q_1 < q_2$ , le déterminant de la matrice carré M est non nul. M est donc inversible :

$$M^{-1} = \frac{-1}{(q_0 - q_1)(q_1 - q_2)(q_2 - q_0)} \begin{bmatrix} q_1 q_2 (q_2 - q_1) & q_0 q_2 (q_0 - q_2) & q_0 q_1 (q_1 - q_0) \\ q_1^2 - q_2^2 & q_2^2 - q_0^2 & q_0^2 - q_1^2 \\ q_2 - q_1 & q_0 - q_2 & q_1 - q_0 \end{bmatrix}$$

Les coefficients a, b, c sont données par la relation matricielle :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} g(q_0) \\ g(q_1) \\ g(q_2) \end{bmatrix}$$

Le polynôme de degré deux  $g(q) = a + b q + c q^2$  admet un minimum unique si et seulement si le coefficient c est un réel strictement positif.

On détermine de nouvelles valeurs pour les paramètres  $q_0, q_1, q_2$  de la façon suivante :

• Si  $c > 0$

Le minimum de la fonction  $g(q)$  est atteint pour  $q = q_m = -b/(2c)$

- Si  $q_m \in ]-\infty, q_0]$  et  $(2q_0 - q_1) > 0$  on pose  $q_2 = 2q_0 - q_1$
- Si  $q_m \in ]-\infty, q_0]$  et  $(2q_0 - q_1) \leq 0$  on pose  $q_2 = (q_0 + q_1)/2$
- Si  $q_m \in ]q_0, q_1]$  on pose  $q_2 = (q_0 + q_1)/2$
- Si  $q_m \in ]q_1, q_2]$  on pose  $q_0 = (q_1 + q_2)/2$
- Si  $q_m \in ]q_2, +\infty[$  on pose  $q_0 = 2q_2 - q_1$

• Si  $c \leq 0$

- Si  $g(q_0) \leq g(q_2)$  et  $(2q_0 - q_1) > 0$  on pose  $q_2 = 2q_0 - q_1$
- Si  $g(q_0) \leq g(q_2)$  et  $(2q_0 - q_1) \leq 0$  on pose  $q_2 = (q_0 + q_1)/2$
- Si  $g(q_0) > g(q_2)$  on pose  $q_0 = 2q_2 - q_1$

Un seul paramètre,  $q_0$  ou  $q_2$ , change de valeur, l'autre paramètre ainsi que  $q_1$  demeurent inchangés. Les trois paramètres étaient initialement deux à deux distincts ils le demeurent avec la nouvelle valeur introduite.

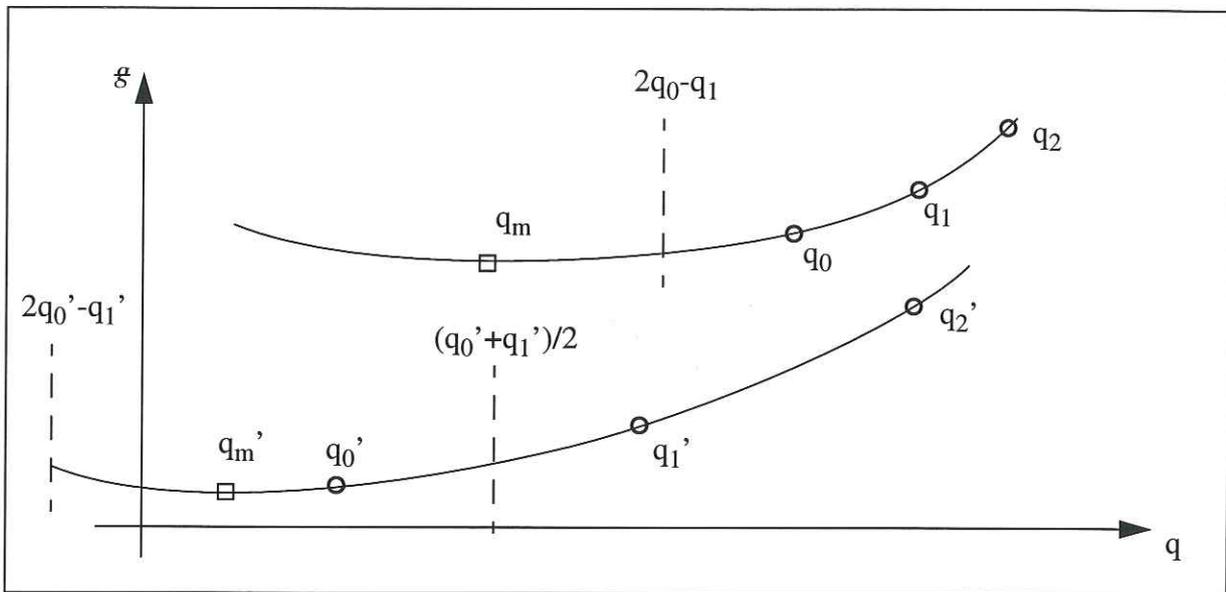


Figure 4-19 Deux configurations du polynôme  $g(q)$  avec ( $c > 0$ ) et  $q_m \in ]-\infty, q_0]$

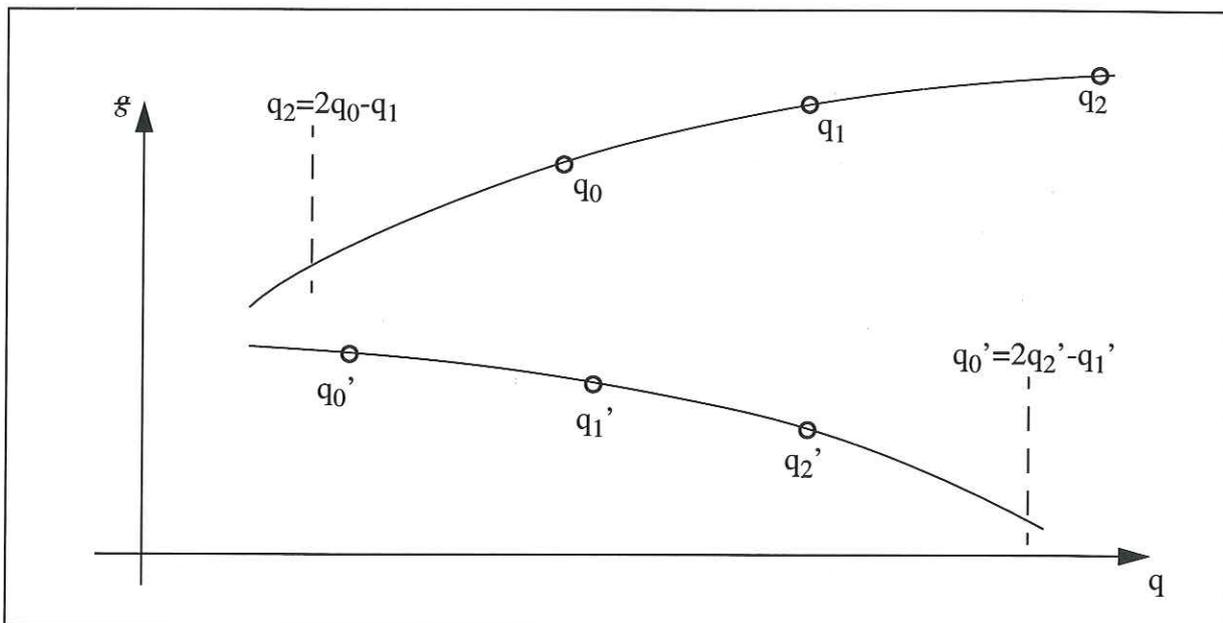


Figure 4-20 Deux configurations du polynôme  $g(q)$  avec ( $c < 0$ )

Après le calcul des nouveaux paramètres ( $q_0, q_1, q_2$ ) on opère une permutation de façon à respecter les inégalités :  $0 \leq q_0 < q_1 < q_2$ .

Les trois paramètres initiaux ( $q_0, q_1, q_2$ ) sont en progression arithmétique de raison  $r$  strictement positive ( $q_1 = q_0 + r$  et  $q_2 = q_1 + r$ ). Les nouveaux paramètres réordonnés le sont aussi, la raison  $r'$  vaut suivant les configurations :

- Si  $c > 0$

Le minimum de la fonction  $g(q)$  est atteint pour  $q = q_m = -b/(2c)$

- Si  $q_m \in ]-\infty, q_0]$  et  $(2q_0 - q_1) > 0$  on a :  $r' = r$
- Si  $q_m \in ]-\infty, q_0]$  et  $(2q_0 - q_1) \leq 0$  on a :  $r' = r/2$
- Si  $q_m \in ]q_0, q_1]$  on a :  $r' = r/2$
- Si  $q_m \in ]q_1, q_2]$  on a :  $r' = r/2$
- Si  $q_m \in ]q_2, +\infty[$  on a :  $r' = r$
- Si  $c \leq 0$ 
  - Si  $g(q_0) \leq g(q_2)$  et  $(2q_0 - q_1) > 0$  on a :  $r' = r$
  - Si  $g(q_0) \leq g(q_2)$  et  $(2q_0 - q_1) \leq 0$  on a :  $r' = r/2$
  - Si  $g(q_0) > g(q_2)$  on a :  $r' = r$

Le réel  $p_j$  est défini comme la moyenne arithmétique des paramètres  $(q_0, q_1, q_2)$  :

$$p_j = (q_0 + q_1 + q_2)/3.$$

Une fois déterminée la valeur de la limite  $p_m$  de la suite  $(p_j)$ , on construit le point :

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - p_m \nabla f(\bar{X}_i).$$

La suite  $(\bar{X}_i)$  ainsi définie converge vers le minimum local  $\bar{X}_m$ .

Dans le modèle FOLDIS, on applique la méthode numérique ainsi décrite pour minimiser le critère de sélection de l'unité cinématique et procéder à sa reconstruction.

#### 4.4.4 : Configuration initiale pour démarrer l'algorithme de convergence

L'algorithme itératif de minimisation nécessite pour être démarré d'une configuration initiale de l'unité cinématique. On construit donc une géométrie approchée de la solution qui est l'état d'indice 0 de l'algorithme itératif.

L'introduction de la condition à la limite consiste à positionner un noeud ou un segment frontière d'un élément sur le support  $\Gamma$ .

La construction de la configuration d'indice 0 respectant la condition à la limite est réalisée en trois étapes :

1 / On déplace tous les points reposant sur le support en ajoutant à leurs abscisses curvilignes une même quantité, de façon à respecter la condition à la limite.

Cette opération revient à faire glisser tous les sommets reposant sur le support  $\Gamma$  d'une même longueur définie par la condition à la limite.

Cette opération permet de définir un angle de rotation  $\alpha_i$  pour chaque élément  $E_i$ , dont les sommets  $S_{i-1}, S_i$  reposent sur  $\Gamma$  et deviennent  $S'_{i-1}$  et  $S'_i$ .

$$\alpha_i = \text{mesure}(\overrightarrow{S_{i-1}S_i}, \overrightarrow{S'_{i-1}S'_i})$$

2 / Le déplacement des sommets  $P_i$  se fait de la façon suivante :

- L'unité cinématique comporte  $n$  éléments  $E_i$ , indicés de 1 à  $n$ , qui définissent ( $\alpha_i$ ). On pose  $\alpha_0 = \alpha_1$  et  $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ .
- La nouvelle position  $P'_i$  du sommet  $P_i$ , voir figure 4-21, est :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \text{mesure}(\overrightarrow{S_i P_i}, \overrightarrow{S'_i P'_i}) = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} \text{ et } \|\overrightarrow{S_i P_i}\| = \|\overrightarrow{S'_i P'_i}\|$$

3 / Enfin on reconstruit le sommet  $P'_i$  de façon à respecter si elle existe la condition à la limite imposée sur le segment  $[S_i, P_i]$ .

La configuration ainsi reconstruite ne respecte évidemment pas les critères géométriques de la méthode cinématique. C'est une configuration approchée de la solution qui respecte la condition à la limite et qui sert à initialiser l'algorithme itératif de minimisation.

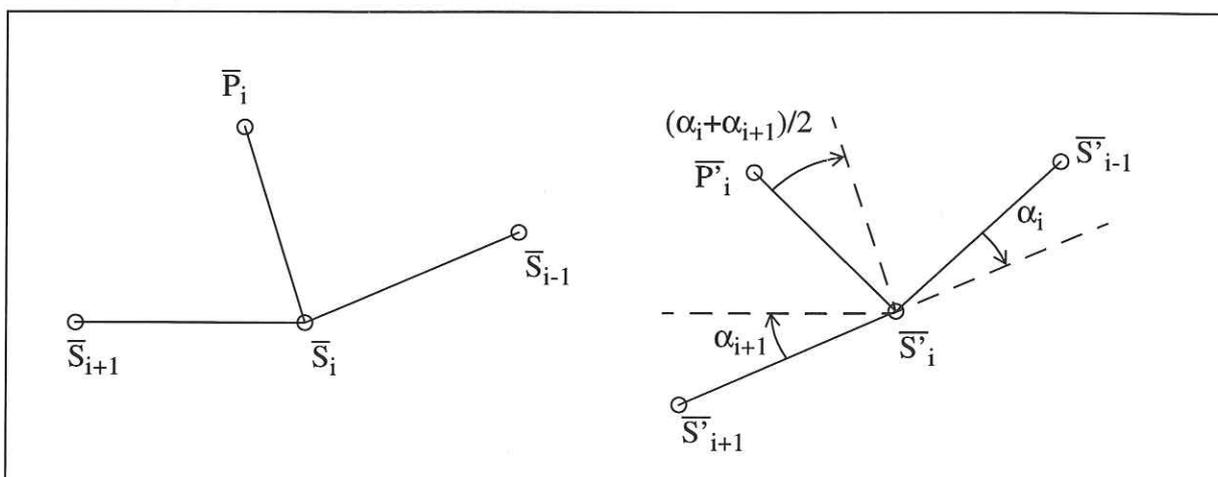


Figure 4-21 Reconstruction du sommet  $P_i$  en fonction des angles  $\alpha_i$  et  $\alpha_{i+1}$

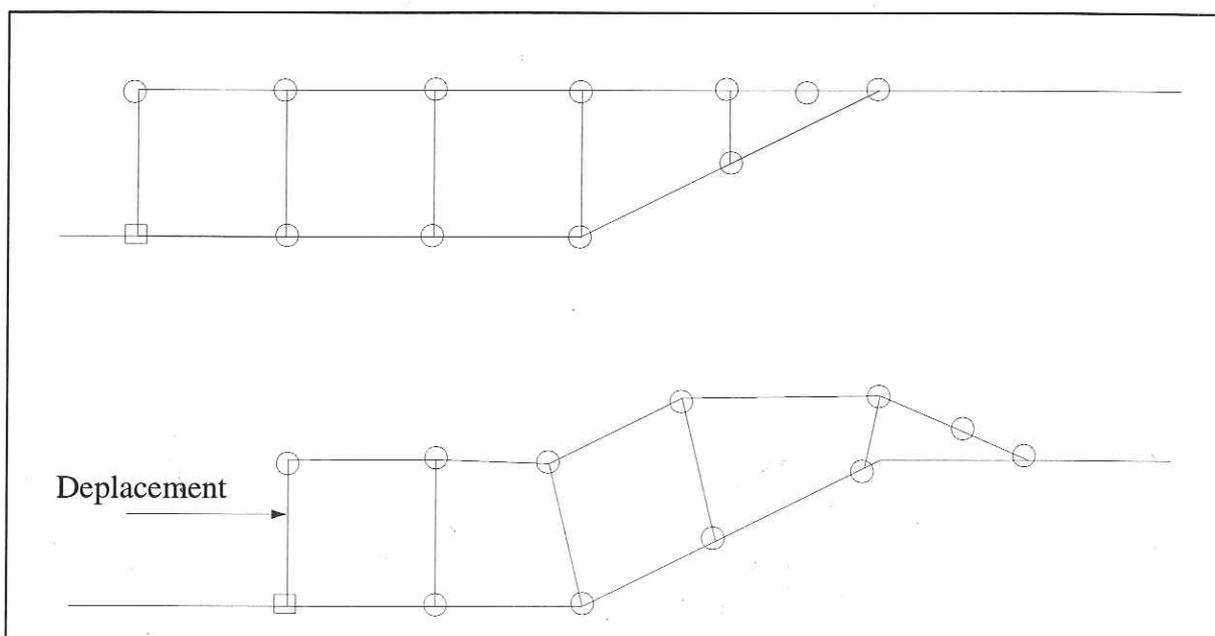


Figure 4-22 Configuration initiale d'une unité cinématique à cinq éléments

La figure 4-22 montre un exemple de l'application de l'algorithme de construction automatique de la configuration initiale pour une unité cinématique constituée de cinq éléments.

Il convient ensuite d'appliquer l'algorithme itératif de minimisation à la fonction critère appliquée à la configuration de l'unité cinématique. Il est nécessaire d'évaluer numériquement la valeur de la fonction critère et de son gradient pour une configuration quelconque de l'unité cinématique.

#### 4.4.5 : Calcul du gradient associé à une configuration

La configuration  $\gamma_n$  d'une unité cinématique de  $n$  éléments  $(\alpha_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ .

Le critère  $\sigma(\gamma_n)$  est une fonction différentiable, sauf sur :

- les droites  $(s_i = l_i^j) \forall (i, j) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, m\}$
- les domaines où l'épaisseur de l'élément  $E_i$  est nulle,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ .

Le gradient de la fonction  $\sigma(\gamma_n)$  vaut :

$$d\sigma(\gamma_n) = \lambda_1 d\sigma_1(\gamma_n) + \lambda_2 d\sigma_2(\gamma_n) + \lambda_3 d\sigma_3(\gamma_n) + \lambda_4 d\xi(\gamma_n)$$

On a vu, paragraphe c-1 page 107 :  $\sigma_1(\gamma_n) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}(\alpha_i) - \mathcal{A}(E_i))^2$

Donc on obtient :  $d\sigma_1(\gamma_n) = 2 \sum_{i=1}^n (\mathcal{A}(\alpha_i) - \mathcal{A}(E_i)) d\mathcal{A}(\alpha_i)$

On a vu, paragraphe c-2 page 108 :  $\sigma_2(\gamma_n) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{B}_T(\alpha_i) - \mathcal{B}_T(E_i))^2$

Donc on obtient :  $d\sigma_2(\gamma_n) = 2 \sum_{i=1}^n (\mathcal{B}_T(\alpha_i) - \mathcal{B}_T(E_i)) d\mathcal{B}_T(\alpha_i)$

On a vu, paragraphe c-3 page 110 :  $\sigma_3(\gamma_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (C_T(\alpha_i, \alpha_{i+1}) - C_T(E_i, E_{i+1}))^2$

Donc on obtient :  $d\sigma_3(\gamma_n) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} (C_T(\alpha_i, \alpha_{i+1}) - C_T(E_i, E_{i+1})) dC_T(\alpha_i, \alpha_{i+1})$

On a vu, paragraphe d-2 page 113 :  $\xi(\gamma_n) = \sum_{i=0}^{n-3} \varphi(P_i^3)$

$$\text{Donc on obtient : } d\xi(\gamma_n) = \sum_{i=0}^{n-3} d\varphi(P^3_i)$$

Or, on a explicité précédemment les expressions différentielles  $d\mathcal{A}(\alpha_i)$ ,  $d\mathcal{B}_T(\alpha_i)$ ,  $dC_T(\alpha_i, \alpha_{i+1})$  et  $d\varphi(P^3_i)$ , on est donc à même de les évaluer numériquement. On obtient ainsi le moyen de calculer numériquement le gradient du critère  $\sigma(\gamma_n)$ .

#### 4.4.6 : Recherche d'un algorithme de convergence accéléré

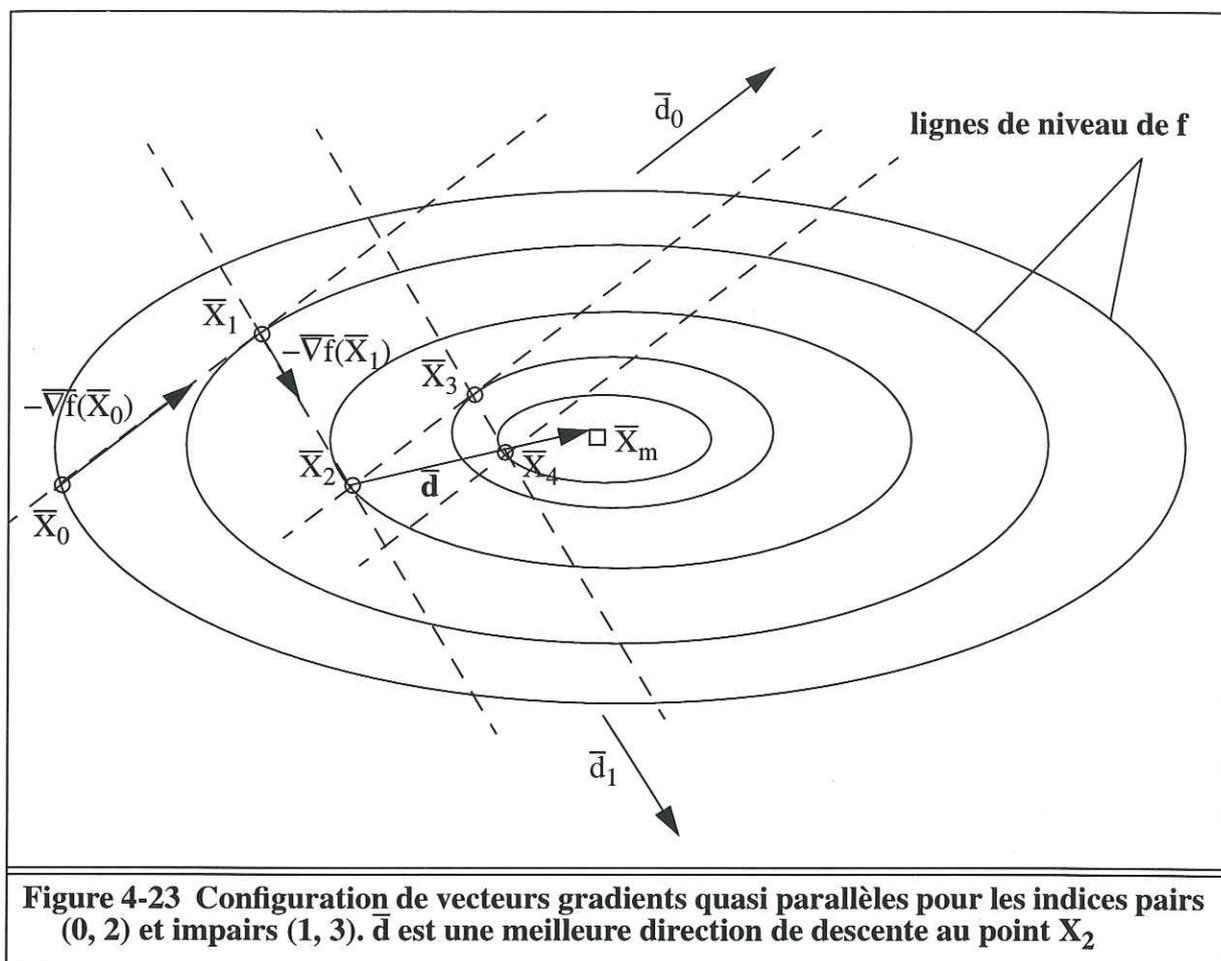
Le principe de l'algorithme de convergence accéléré est de rechercher une meilleure direction de descente au point  $\bar{X}_i$  que celle définie par le vecteur gradient, à savoir  $-\nabla f(\bar{X}_i)$ . En effet, l'opposé du gradient constitue la meilleure direction de descente pour un voisinage de diamètre nul du point  $\bar{X}_i$ , cette direction n'est plus forcément optimale pour un voisinage de diamètre non nul du point  $\bar{X}_i$ . En particulier, il existe une situation assez fréquente dans l'algorithme de convergence que l'on nomme configuration à gradients alternés où l'on observe que les vecteurs gradients de la fonction  $f()$  aux points  $\bar{X}_{i-2}$  et  $\bar{X}_i$  sont quasiment parallèles. On nomme  $\bar{d}_0$  un vecteur parallèle aux gradients pour les indices pairs et  $\bar{d}_1$  un vecteur parallèle aux gradients pour les indices impairs. Les vecteurs  $\bar{d}_0$  et  $\bar{d}_1$  sont alors quasiment orthogonaux ( $\bar{d}_0 \cdot \bar{d}_1 \approx 0$ ) du fait que le point  $\bar{X}_{i+1}$  est le point qui minimise la fonction  $f$  selon la direction  $-\nabla f(\bar{X}_i)$  à partir du point  $\bar{X}_i$ . On observe alors que l'algorithme itératif de construction des points de la suite  $(\bar{X}_i)$  opère pendant de nombreuses itérations dans le même plan en définissant des points selon les directions alternées  $\bar{d}_0$  et  $\bar{d}_1$ . On observe aussi l'alignement dans le plan  $(\bar{d}_0, \bar{d}_1)$  des points d'indices pairs d'une part et des points d'indices impairs d'autre part.

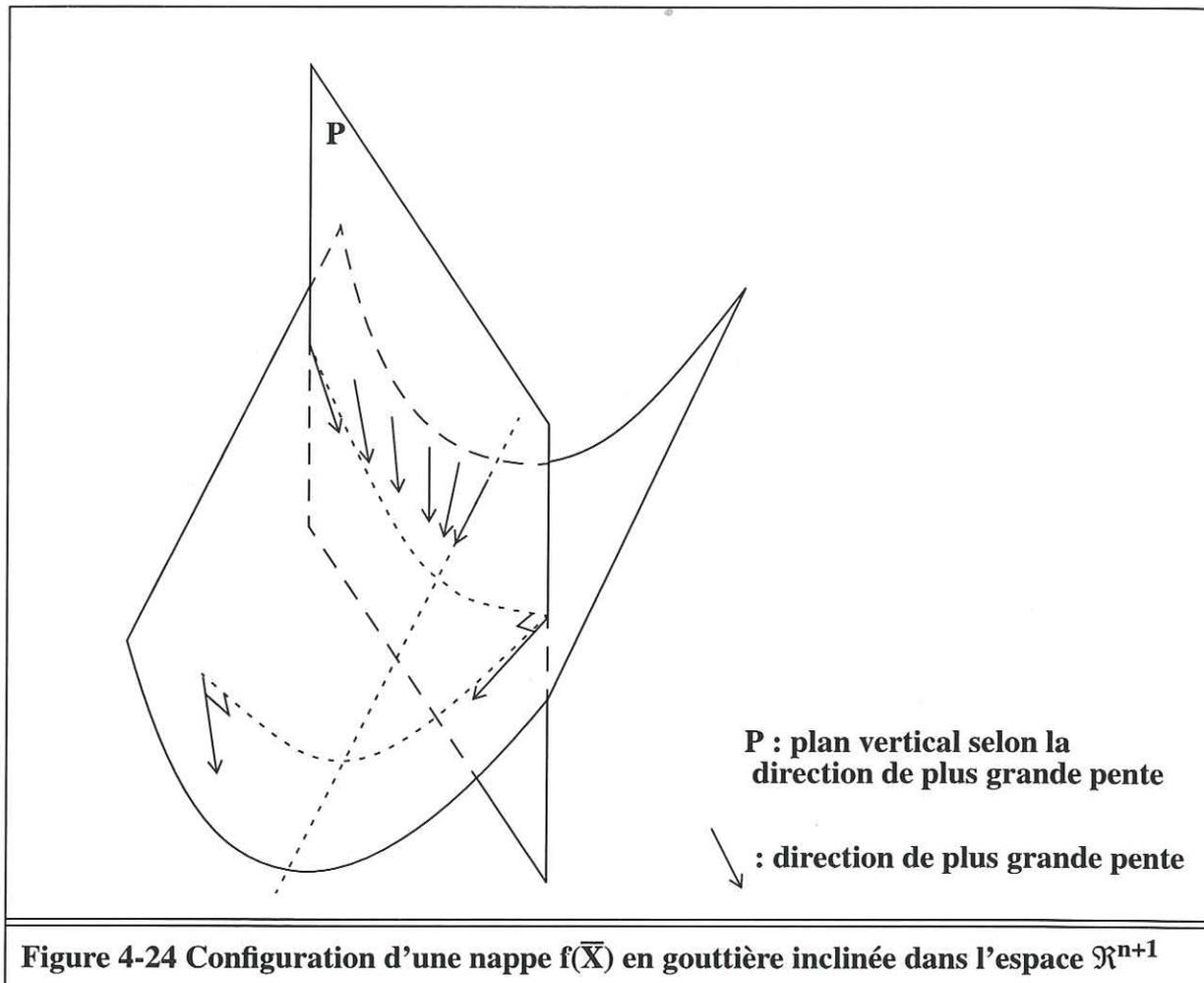
On repère une telle configuration lors du déroulement de l'algorithme itératif en vérifiant le parallélisme des vecteurs gradients  $\nabla f(\bar{X}_{i-2})$  et  $\nabla f(\bar{X}_i)$ . Ce constat est fait en évaluant le produit scalaire des gradients  $\nabla f(\bar{X}_{i-2}) \cdot \nabla f(\bar{X}_i)$  qui est très voisin du produit des normes  $\|\nabla f(\bar{X}_{i-2})\| \|\nabla f(\bar{X}_i)\|$  en cas de parallélisme. Dans un tel contexte, on explore une autre direction que celle du gradient. On rappelle les deux égalités :

$$\bar{X}_{i-1} = \bar{X}_{i-2} - p_{i-2} \nabla f(\bar{X}_{i-2}) \text{ et } \bar{X}_i = \bar{X}_{i-1} - p_{i-1} \nabla f(\bar{X}_{i-1})$$

La direction définie par la combinaison linéaire :  $\bar{d} = -(p_{i-2} \nabla f(\bar{X}_{i-2}) + p_{i-1} \nabla f(\bar{X}_{i-1}))$  apparaît alors être une meilleure direction de descente comme il l'est indiqué sur la figure 4-23.

On observe une configuration à gradients alternés pour la fonction  $f()$  de  $\mathfrak{R}^n$  dans  $\mathfrak{R}$  dans le cas où la nappe de la fonction  $f()$  dans l'espace  $\mathfrak{R}^{n+1}$  a une forme analogue à celle d'une gouttière inclinée dans l'espace  $\mathfrak{R}^3$  comme il l'est indiqué sur la figure 4-24. En effet, dans ce cas les points successifs de la suite  $(\bar{X}_i)$  sont situés de part et d'autre de l'axe de la gouttière et la trajectoire de descente décrit une série de zigzags. Dans cette configuration la direction de descente optimale est parallèle à l'axe de la gouttière inclinée. On remarque que l'on retrouve cette direction optimale en envisageant le vecteur  $(\bar{X}_{i-2}, \bar{X}_i)$ .





## 4.5 : Etude de la stabilité de la méthode

On étudie la stabilité de la méthode de calcul de la cinématique. Pour cela, on analyse la reconstruction d'un élément initialement rectangulaire sur un support circulaire de rayon quelconque dans les configurations synclinale et anticlinale. De cette façon, on met en évidence les formes qu'il convient de privilégier lors du découpage des unités cinématiques en éléments pour que la méthode soit stable dans le maximum de configurations.

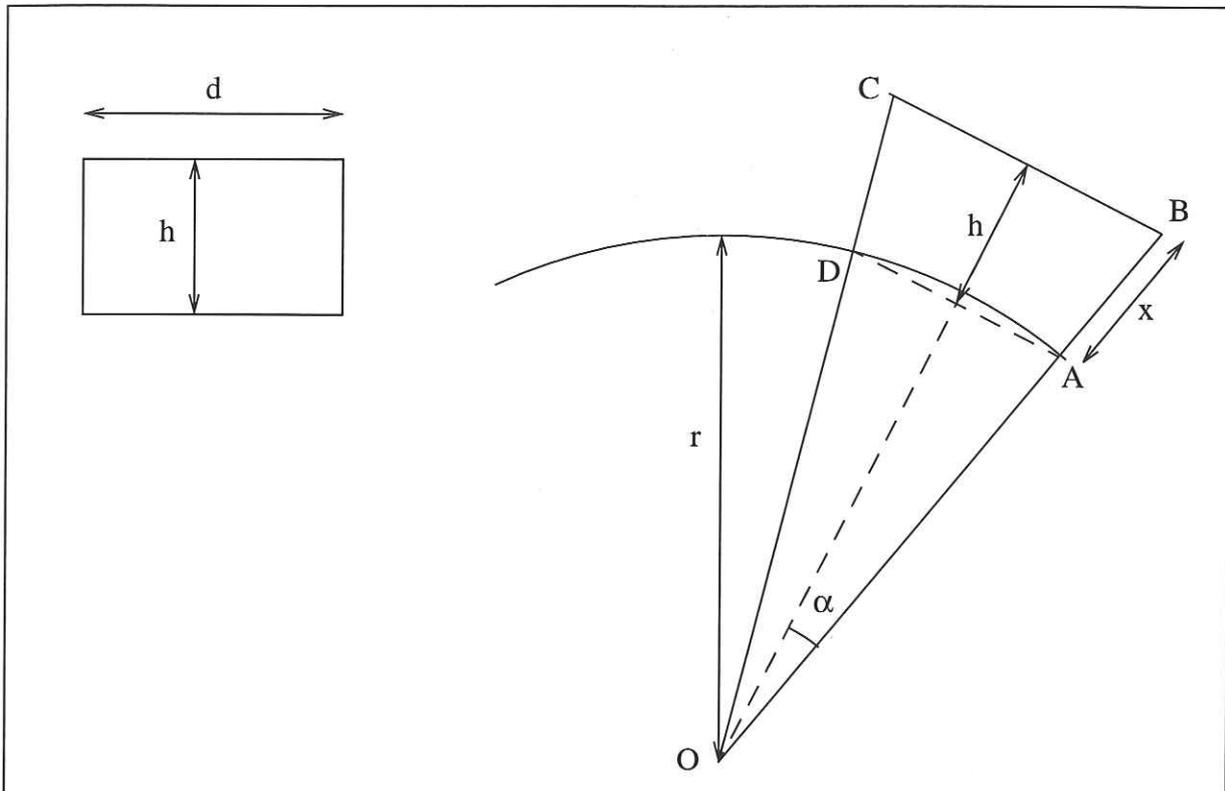
On présente ensuite un exemple de calcul de déformation d'une unité cinématique. On étudie la rapidité de convergence de l'algorithme ainsi que la justesse de la solution fournie.

### 4.5.1 : Stabilité géométrique de la méthode

Pour étudier la reconstruction d'un élément quelconque dans toutes les configurations de support, on analyse la déformation d'un élément initialement rectangulaire isolé de dimensions  $(h, d)$  sur un support circulaire de rayon  $r$ .

### a) Reconstruction dans le cas d'une configuration anticlinale

La reconstruction de l'élément est possible s'il existe un angle  $\alpha$  de l'intervalle  $[0, \pi/2]$  tel que l'élément reconstruit présente une épaisseur  $h$  et une aire égale à l'aire initiale de l'élément soit le produit des longueurs  $h d$ , voir la figure 4-25.



**Figure 4-25 Déformation d'un élément rectangulaire ( $h, d$ ) sur un support circulaire de rayon  $r$  en configuration anticlinale**

Après reconstruction sur le support, l'élément a pour contour les trois segments  $[A,B]$ ,  $[B,C]$ ,  $[C,D]$  et l'arc de cercle  $(D,A)$ . Son aire est égale à l'aire du triangle  $(O,B,C)$  diminuée de l'aire de la portion de disque  $(O,A,D)$  de rayon  $r$  et d'angle  $2\alpha$ .

En appelant  $x$  la longueur du segment  $[A,B]$ , de même qu'à la section 4.2.3 page 91, on obtient les relations suivantes :

- $x = h/\cos(\alpha)$
- hauteur du triangle  $(O,B,C) = \cos(\alpha) (r+x) = h + r \cos(\alpha)$
- aire du triangle  $(O,B,C) = (h + r \cos(\alpha))^2 \tan(\alpha)$
- aire de la portion de cercle  $(O,A,D) = \alpha r^2$
- aire de l'élément  $= (h + r \cos(\alpha))^2 \tan(\alpha) - \alpha r^2 = h d$

L'écriture de l'aire de l'élément reconstruit fournit une relation entre l'angle  $\alpha$  et les données géométriques  $r, h$  et  $d$ . En divisant les deux membres de la relation par la quantité  $h^2$  on obtient une relation adimensionnelle :

$$d/h = (1 + \cos(\alpha) r/h)^2 \tan(\alpha) - \alpha (r/h)^2$$

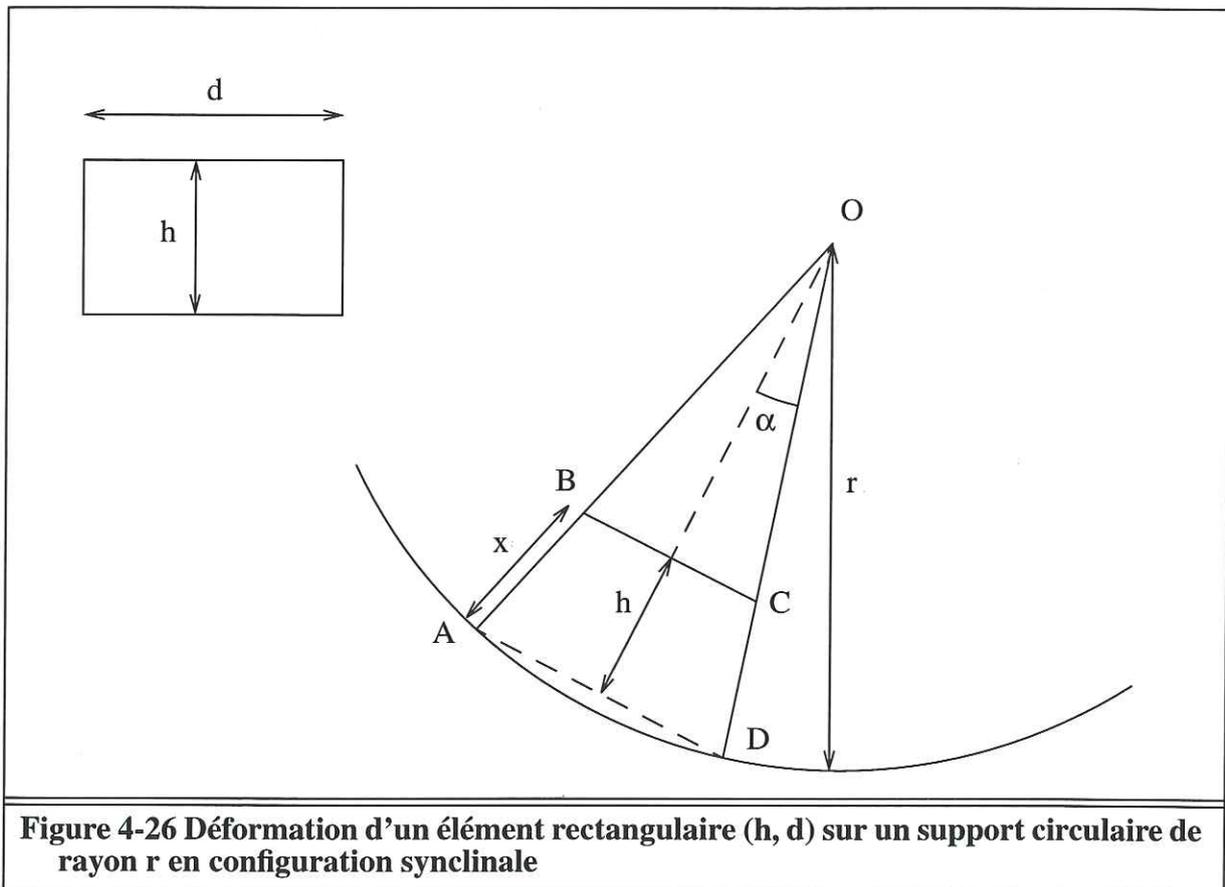
On appelle  $f(\alpha)$  la fonction de l'angle  $\alpha$  et du paramètre  $(r/h)$ :

$$f(\alpha) = (1 + \cos(\alpha) r/h)^2 \tan(\alpha) - \alpha (r/h)^2 .$$

On remarque que  $f(0)=0$  et  $f(\pi/2)=+\infty$  quelle que soit la valeur du rapport  $(r/h)$ . De plus  $f(\alpha)$  est une fonction continue sur l'intervalle  $[0, \pi/2[$ . Donc quel que soit le couple de réels positifs  $(r, h)$ , on a la relation  $[0, +\infty[ \subset f([0, \pi/2[)$ . Ainsi quel que soit le couple de réels positifs  $(d, h)$  il existe un réel  $\alpha$  de  $[0, \pi/2[$  tel que  $f(\alpha) = d/h$ .

### b ) Reconstruction dans le cas d'une configuration synclinale

La reconstruction de l'élément est possible s'il existe un angle  $\alpha$  de l'intervalle  $[0, \pi/2[$  et un réel  $x$  de  $[0, r]$  tels que l'élément reconstruit présente une symétrie radiale, un épaisseur  $h$  et une aire égale à l'aire initiale de l'élément soit :  $h d$ .



**Figure 4-26 Déformation d'un élément rectangulaire (h, d) sur un support circulaire de rayon r en configuration synclinale**

Après reconstruction sur le support, l'élément a pour contour les segments  $[A,B]$ ,  $[B,C]$ ,  $[C,D]$  et l'arc de cercle  $(D, A)$ . Son aire est égale à l'aire de la portion de disque  $(O,A,D)$  de rayon  $r$  et d'angle  $2\alpha$  diminuée de l'aire du triangle  $(O,B,C)$ .

En appelant  $x$  la longueur du segment  $[A,B]$  comme précédemment, on obtient les relations suivantes :

- $x = h/\cos(\alpha)$

- hauteur du triangle (O,B,C) =  $\cos(\alpha) (r-x) = r \cos(\alpha) - h$
- aire du triangle (O,B,C) =  $(r \cos(\alpha) - h)^2 \tan(\alpha)$
- aire de la portion de cercle (O,A,D) =  $\alpha r^2$
- aire de l'élément =  $\alpha r^2 - (r \cos(\alpha) - h)^2 \tan(\alpha) = h d$

L'écriture de l'aire de l'élément reconstruit fournit une relation entre l'angle  $\alpha$  et les données géométriques  $r$ ,  $h$  et  $d$ . En divisant les deux membres de la relation par la quantité  $h^2$  on obtient une relation adimensionnelle :

$$d/h = \alpha (r/h)^2 - (\cos(\alpha) r/h - 1)^2 \tan(\alpha)$$

On appelle  $g$  la fonction de l'angle  $\alpha$  et du paramètre  $(r/h)$  :

$$g(\alpha) = \alpha (r/h)^2 - (\cos(\alpha) r/h - 1)^2 \tan(\alpha)$$

La condition d'existence de la reconstruction peut être exprimée à l'aide d'une condition portant sur la hauteur du triangle (O,B,C) qui doit être un nombre réel de l'intervalle  $[0, r]$  :

$$0 \leq r \cos(\alpha) - h \leq r$$

La première inégalité implique :

$$h/r \leq \cos(\alpha)$$

Soit l'appartenance de la quantité  $\cos(\alpha)$  à l'intervalle  $[h/r, 1]$ .

Une condition nécessaire de l'existence de la reconstruction géométrique de l'élément apparaît immédiatement :  $h \leq r$ . Ainsi, une reconstruction n'est envisageable que dans le cas où le rayon  $r$  du cercle est supérieur à l'épaisseur  $h$  de l'élément.

Dans ce cas de figure ( $h \leq r$ ), l'angle  $\alpha$  recherché appartient nécessairement à l'intervalle  $[0, \text{Arccos}(h/r)]$ .

On remarque :

- $g(0) = 0$
- $g(\text{Arccos}(h/r)) = \text{Arccos}(h/r) (r/h)^2$

On étudie la dérivée de la fonction  $g(\alpha)$  :

$$g'(\alpha) = \left(\frac{r}{h}\right)^2 + 2 \tan \alpha \left(\frac{r}{h} \cos \alpha - 1\right) \frac{r}{h} \sin \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{r}{h} \cos \alpha - 1\right)^2$$

$$g'(\alpha) = 2 \left(\frac{r}{h}\right)^2 (1 - \cos^2 \alpha) + 2 \frac{r}{h} \cos \alpha - \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Pour simplifier les écritures, on pose  $t = r/h$  et  $c = \cos \alpha$ . Il est évident que compte tenu des hypothèses concernant les paramètres  $r$ ,  $h$  et  $\alpha$ , les nouveaux paramètres  $t$  et  $c$  sont eux-mêmes positifs.

$$g'(\alpha) = 2t^2(1 - c^2) + 2tc - \frac{1}{c^2}$$

Pour trouver les racines de la fonction  $g'(\alpha)$ , on remarque qu'il s'agit d'un polynôme du second degré de la variable  $t$ .

$$\text{Le discriminant vaut : } \Delta = c^2 + \frac{2(1 - c^2)}{c^2} = c^2 + \frac{2}{c^2} - 2$$

Or  $c^2 \in ]0, 1]$  car  $c = \cos\alpha$ .

$$\Delta = \frac{1}{c^2}(c^4 - 2c^2 + 2)$$

$\Delta$  est le produit d'une fraction positive par un polynôme bicarré de la variable  $c$  dont le discriminant est :  $\Delta' = \frac{1 - 2}{c^2} = \frac{-1}{c^2}$ .

Comme  $\Delta'$  est strictement négatif, on en déduit le fait que  $\Delta$  ne s'annule pas et est de signe constant quel que soit  $c$ . En fait,  $\Delta$  est positif pour  $c^2 \in ]0, 1]$ .

La fonction  $g'(\alpha)$  possède donc deux racines qui correspondent aux deux valeurs du paramètre  $t = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2(1 - c^2)}$ . Le paramètre  $t$  étant nécessairement positif, seule la racine positive est valide et elle correspond à la fonction :

$$t(c) = \frac{-c + \frac{1}{c}\sqrt{c^4 - 2c^2 + 2}}{2(1 - c^2)} \text{ avec } c \in ]0, 1].$$

On a vu qu'il était nécessaire d'avoir :  $h/r \leq \cos(\alpha)$  pour qu'une reconstruction existe, cette inégalité s'écrit à l'aide des paramètres  $t$  et  $c$  :  $1/t \leq c$ , donc :  $t \geq 1/c$ .

On mène l'étude de la reconstruction de l'élément dans un diagramme  $(t, c)$  avec  $t \geq 1/c$  et  $c \in ]0, 1]$ . Ce domaine de reconstruction possible correspond à une bande infinie du plan limitée par une branche d'hyperbole comme le montre la figure 4-27.

Sur l'intervalle  $]0, 1[$ , la fonction  $t(c)$  doit vérifier l'inégalité stricte :

$$t(c) < 1/c$$

$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow (2 < 2/c^2)$$

$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow (c^2 + 2/c^2 - 2 < c^2 + 4/c^2 - 4)$$

$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow (c^2 + 2/c^2 - 2 < (2/c - c)^2)$$

Or  $(c \in ]0, 1[) \Rightarrow (2/c - c > 0)$ , donc en prenant la racine carrée des deux membres de l'inégalité précédente qui sont tous deux positifs, on obtient :

$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow \left( \frac{1}{c} \sqrt{c^4 - 2c^2 + 2} < 2/c - c \right)$$

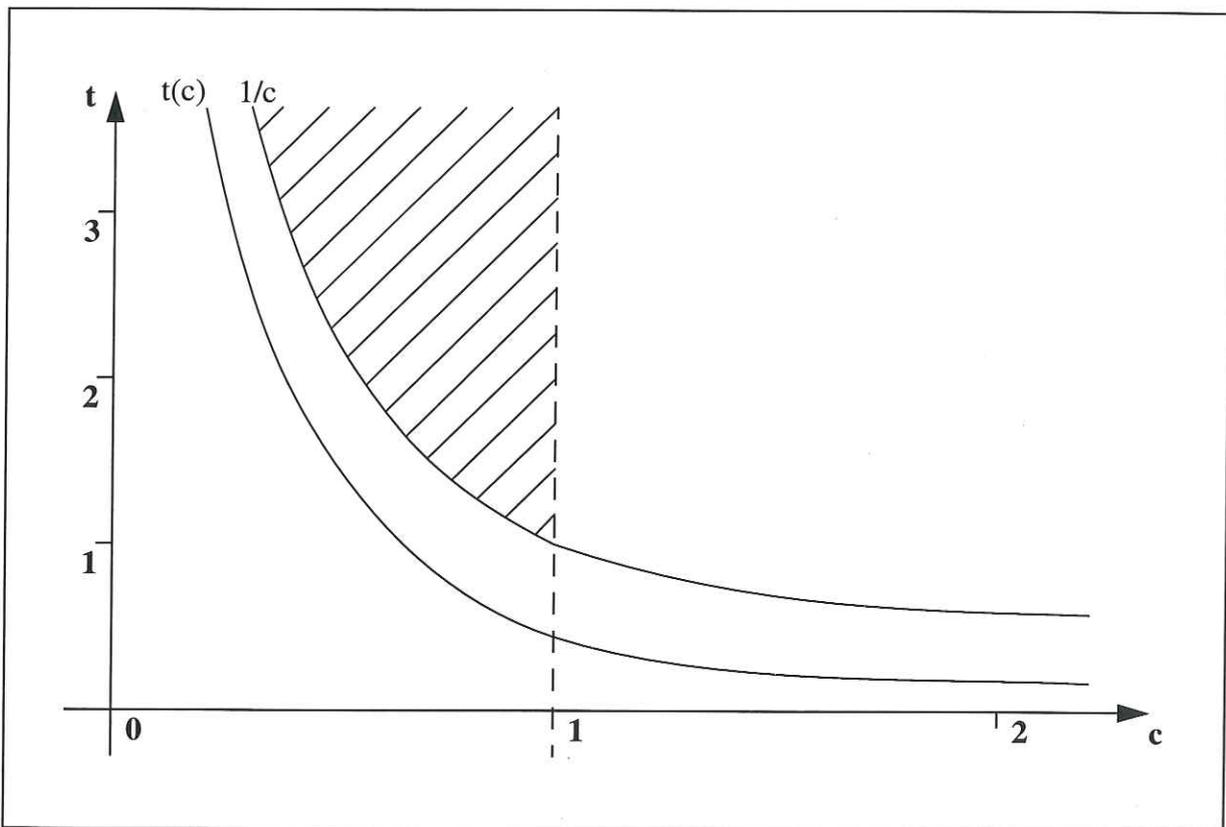
$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow \left( \frac{1}{c} \sqrt{c^4 - 2c^2 + 2} < 2(1 - c^2)/c + c \right)$$

De plus comme  $(c \in ]0, 1[) \Rightarrow ((1 - c^2) > 0)$ , on peut diviser chaque membre de l'inégalité par  $2(1 - c^2)$  après avoir retranché  $c$  aux deux membres.

On obtient :

$$(c \in ]0, 1[) \Rightarrow \left( \frac{-c + \frac{1}{c} \sqrt{c^4 - 2c^2 + 2}}{2(1 - c^2)} < 1/c \right)$$

Ce qui démontre bien :  $(c \in ]0, 1[) \Rightarrow (t(c) < 1/c)$



**Figure 4-27** Domaine de reconstruction possible de l'élément : partie du plan  $(t, c)$  limitée par la droite  $c=1$  et l'hyperbole  $t=1/c$ . La courbe  $t(c)$  ne recoupe pas ce domaine.

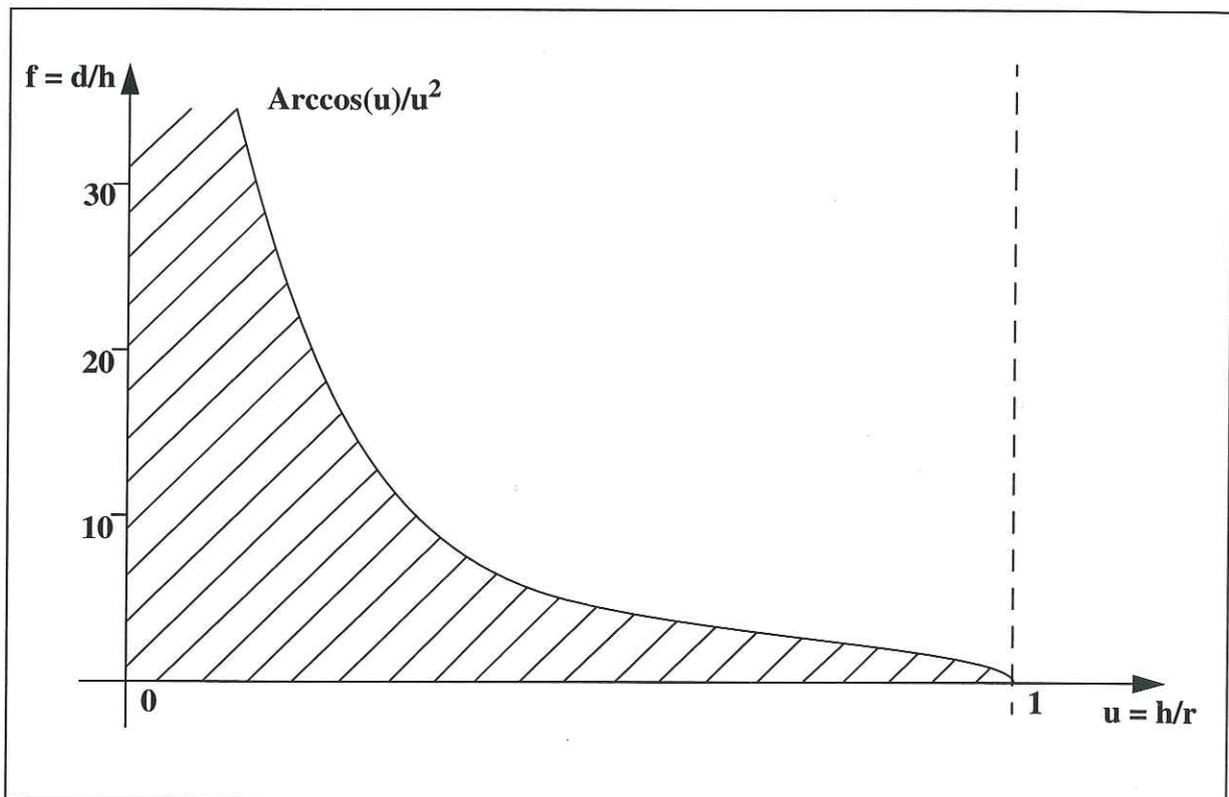
On cherche un équivalent de  $t(c)$  quand  $c$  tend vers 1, on pose  $c=1+\varepsilon$ ,  $\varepsilon$  tend alors vers 0 :

$$t(c) = \frac{-(1 + \varepsilon) + (1 + \varepsilon)^{-1} \sqrt{(1 + \varepsilon)^4 - 2(1 + \varepsilon)^2 + 2}}{2(1 - (1 + \varepsilon)^2)}$$

$$t(c) \sim \frac{-(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)\sqrt{1+4\varepsilon-2(1+2\varepsilon)+2}}{2(1-(1+2\varepsilon))} \sim \frac{-2\varepsilon}{-4\varepsilon} \sim \frac{1}{2}$$

Ainsi, pour  $c \in ]0, 1]$ , on a les inégalités :  $t(c) < 1/c \leq t$ . Ce qui signifie que les racines positives de la fonction  $g'(\alpha)$  correspondant à la courbe  $t(c)$  ne sont pas dans le domaine de reconstruction possible (voir la figure 4-27). La fonction  $g'(\alpha)$  est continue sur l'intervalle  $[0, \pi/2[$ , et d'après la remarque précédente elle ne possède pas de zéro sur le domaine de reconstruction possible, on en déduit qu'elle possède un signe constant. Ce fait démontre que la fonction  $g(\alpha)$  est monotone sur l'intervalle  $[0, \text{Arccos}(h/r)]$  qui correspond au domaine de reconstruction possible. La fonction  $g(\alpha)$  est en fait croissante et l'image de l'intervalle de départ  $[0, \text{Arccos}(h/r)]$  est l'intervalle  $[0, \text{Arccos}(h/r) (r/h)^2]$ .

On déduit donc de cette étude que l'ensemble des valeurs  $(d/h)$  pour lesquelles la reconstruction existe est l'intervalle  $[0, \text{Arccos}(h/r) (r/h)^2]$ . Ainsi, l'existence de la reconstruction de l'élément dans le cas d'une configuration synclinale est équivalente à l'inégalité:  $d/h \leq \text{Arccos}(h/r) (r/h)^2$ .



**Figure 4-28** Domaine du plan  $(h/r, d/h)$  où la reconstruction de l'élément existe : domaine sous la courbe  $\text{Arccos}(u)/u^2$ .

Or la grandeur  $(d/h)$ , liée à l'élément initial, est analogue au paramètre de forme  $p$  qui a été défini section 3.1.5 page 64.

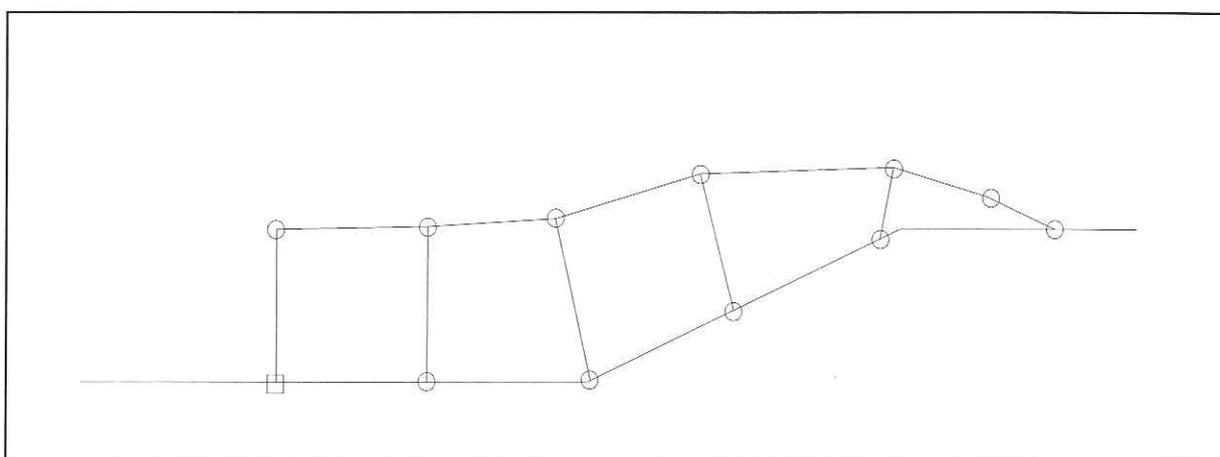
Comme la fonction  $f(u) = \text{Arccos}(u)/u^2$  est décroissante, il est clair que plus le paramètre de forme  $p$  est petit, plus la gamme de valeurs  $(h/r)$  pour lesquelles la reconstruction existe

est étendue comme le montre la figure 4-28.

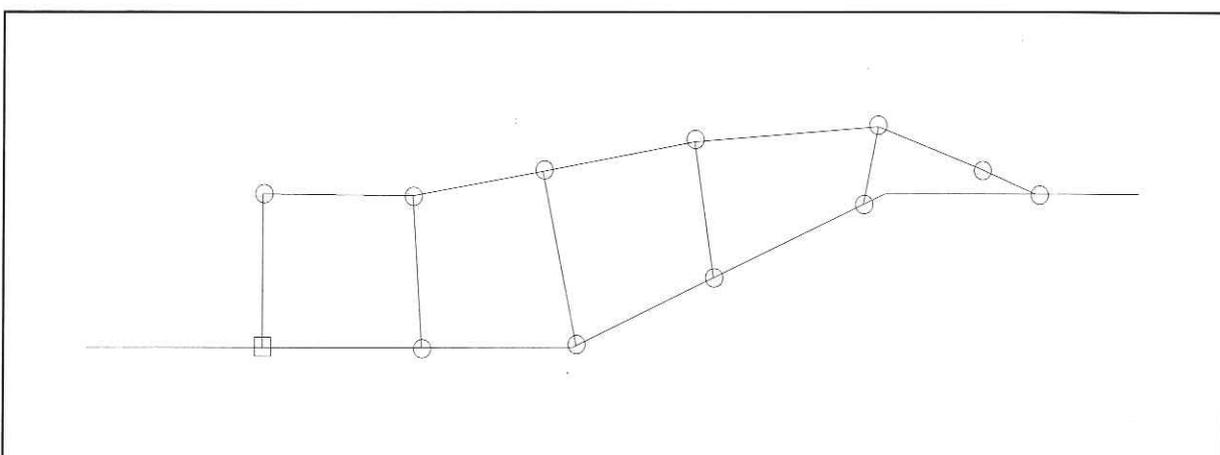
Si l'unité cinématique est maillée avec un paramètre de forme  $p$ , l'ensemble des valeurs  $(h/r)$  pour lesquelles la reconstruction est possible est l'intervalle  $[0, f^{-1}(p)]$ . On ne peut cependant pas donner une formule algébrique permettant d'expliciter la fonction  $f^{-1}(p)$ , fonction réciproque de  $f(u) = \text{Arccos}(u)/u^2$ .

#### 4.5.2 : Exemple de mise en oeuvre de la méthode de déformation tectonique

On reprend l'exemple de la figure 4-22 sur lequel on applique l'algorithme de minimisation du critère  $\sigma()$  à partir de la configuration initiale.



**Figure 4-29 Configuration reconstruite après cinq itérations de l'unité à cinq éléments**



**Figure 4-30 Reconstruction après trente-trois itérations de l'unité à cinq éléments**

On présente sur les figure 4-29 et figure 4-30 les géométries de l'unité cinématique au cours de l'algorithme convergent de reconstruction après respectivement 5 et 33 itérations. Les géométries de l'unité cinématique non déformée et avant l'algorithme convergent (0 itérations) ont été données sur la figure 4-22.

Evolution du critère  $\sigma(\gamma_n)$  au cours de la convergence :

Nombre d'itérations	Critère de sélection
0	0.4673150
5	0.1875447
33	0.0233504
159	0.0011702

La convergence numérique de l'algorithme de minimisation du critère  $\sigma(\gamma_n)$  est obtenue après 159 itérations, on n'observe plus d'évolution perceptible de la géométrie de l'unité cinématique après seulement 33 itérations. La géométrie obtenue est donc celle de la figure 4-30.

$$\sigma(\gamma_n) = \lambda_1 \sigma_1(\gamma_n) + \lambda_2 \sigma_2(\gamma_n) + \lambda_3 \sigma_3(\gamma_n) + \lambda_4 \xi(\gamma_n)$$

Dans la résolution numérique de l'exemple on a utilisé les valeurs suivantes :

- $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 10$
- $\lambda_4 = 1$

Pour la conservation de l'aire des éléments le critère  $\sigma_1(\gamma_n)$  appliqué est normalisé:

$$\sigma_1(\gamma_n) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\mathcal{A}(\alpha_i) - \mathcal{A}(E_i)}{\mathcal{A}(E_i)} \right)^2$$

Après convergence de l'algorithme, on a:  $\sigma(\gamma_n) \cong 1,1702 \times 10^{-3}$

Si on considère que la valeur du critère  $\sigma(\gamma_n)$  est due dans la proportion de 1 pour 31 à la valeur du critère  $\sigma_1(\gamma_n)$  portant sur les aires:  $\sigma_1(\gamma_n) \cong 3,775 \times 10^{-5}$

Pour chaque élément, on peut donc estimer un majorant de l'erreur relative concernant la relation de conservation de l'aire :

$$\left| \frac{\mathcal{A}(\alpha_i) - \mathcal{A}(E_i)}{\mathcal{A}(E_i)} \right| \cong \sqrt{\frac{3,775 \times 10^{-5}}{5}} \cong 2,74 \times 10^{-3}$$

L'erreur relative concernant l'aire représentée dans le plan de coupe de chaque élément est donc inférieure à 2.74‰ pour l'exemple reconstruit.

# Chapitre 5 : Erosion et sédimentation, modélisation couplée avec Dionisos

L'érosion et la sédimentation influent grandement sur l'évolution géométrique et thermodynamique des bassins sédimentaires. Il est donc essentiel de développer pour le modèle cinématique FOLDIS des méthodes pour prendre en compte leurs effets géométriques.

Dans ce chapitre, après avoir souligné la diversité et la complexité des phénomènes naturels à l'origine de la sédimentation et de l'érosion, on présente les méthodes spécifiques et les outils géométriques développés pour leur modélisation. Un point essentiel de ces méthodes est qu'elles doivent assurer que l'état modélisé du bassin après une phase d'érosion ou de sédimentation est compatible avec le calcul d'une phase de déformation tectonique ultérieure. De cette façon, il est possible de réaliser le couplage des déformations tectoniques avec les phénomènes d'érosion/sédimentation; pour cela, on enchaîne les phases successives de déformation tectonique avec celles d'érosion et de sédimentation. Grâce au modèle DIONISOS qui permet de calculer l'érosion et la sédimentation d'un bassin sédimentaire, on présente ensuite la modélisation couplée du développement d'un pli de rampe avec prise en compte synchrone des processus érosifs et sédimentaires.

## 5.1 : Les phénomènes de sédimentation et d'érosion.

L'érosion et la sédimentation se caractérisent par un transfert de matière au niveau topographique à l'intérieur du système représenté par le bassin sédimentaire. Il peut également y avoir transfert de matière entre le système étudié et le milieu extérieur. L'érosion et la sédimentation sont des phénomènes complexes qui modifient la surface topographique en la creusant à certains endroits et la comblant à d'autres. Les causes et les actions de ces phénomènes sont diverses. En particulier, les facteurs climatiques interviennent grandement. L'influence des précipitations, des températures et des circulations atmosphériques est déterminante. La nature des écoulements fluides en surface est également un facteur essentiel pour l'érosion et la sédimentation. Ainsi, une surface topographique exondée est soumise aux ruissellements des eaux météoriques, alors qu'une topographie inondée subit l'influence des courants. Les actions de ces différentes causes peuvent être mécanique, physique ou chimique. La nature des sédiments, en particulier la dureté, la compétence, ainsi que les propriétés vis à vis de l'eau comme la perméabilité, la solubilité des minéraux, ont aussi une grande incidence sur ces phénomènes. Les interactions entre ces divers facteurs font que les processus d'érosion/sédimentation sont complexes à modéliser. La variation d'un seul de ces facteurs peut modifier considérablement les vitesses relatives de ces phénomènes et peut donc changer la nature des phénomènes prépondérants, ce qui induit de fortes différences dans les formes topographiques résultantes.

L'objectif de la modélisation 2D proposée avec FOLDIS n'est pas une étude géomor-

phologique. Il s'agit de reproduire et de comprendre l'évolution géométrique de la globalité du bassin. Pour bien prendre en compte les phénomènes d'érosion et de sédimentation, il faut les étudier spécifiquement à l'aide d'un modèle stratigraphique 3D. C'est le but du modèle DIONISOS, développé dans le cadre de la thèse de D. Granjeon -1996- [24] à l'Institut Français du Pétrole. Cette modélisation numérique de l'architecture stratigraphique d'un bassin calcule le volume des sédiments transportés par l'eau en chaque point du bassin à l'aide d'une loi empirique de diffusion des sédiments. Cette loi est applicable sur de grandes échelles de temps (quelques milliers d'années) et d'espace (quelques dizaines à centaines de kilomètres). Elle permet de prendre en compte différents types de transports sédimentaires, depuis le lent ruissellement sur des pentes douces jusqu'au rapide transport fluvial.

Dans notre étude, la première étape est réalisée par FOLDIS qui définit l'évolution tectonique du bassin et son changement topographique, ainsi est créé l'espace pour accueillir les sédiments. La seconde étape est apportée par DIONISOS qui calcule le flux sédimentaire en chaque point du bassin. Le principe de conservation de la masse permet de connaître à partir du flux le volume sédimenté ou érodé en tout point.

Dans FOLDIS, il est nécessaire de développer les outils géométriques pour prendre en compte les modifications apportées par la sédimentation et l'érosion.

## 5.2 : Prise en compte de la sédimentation dans FOLDIS

Le dépôt d'une couche de sédiment dans un intervalle de temps entre deux états successifs se traduit par l'apparition d'une nouvelle couche à l'affleurement.

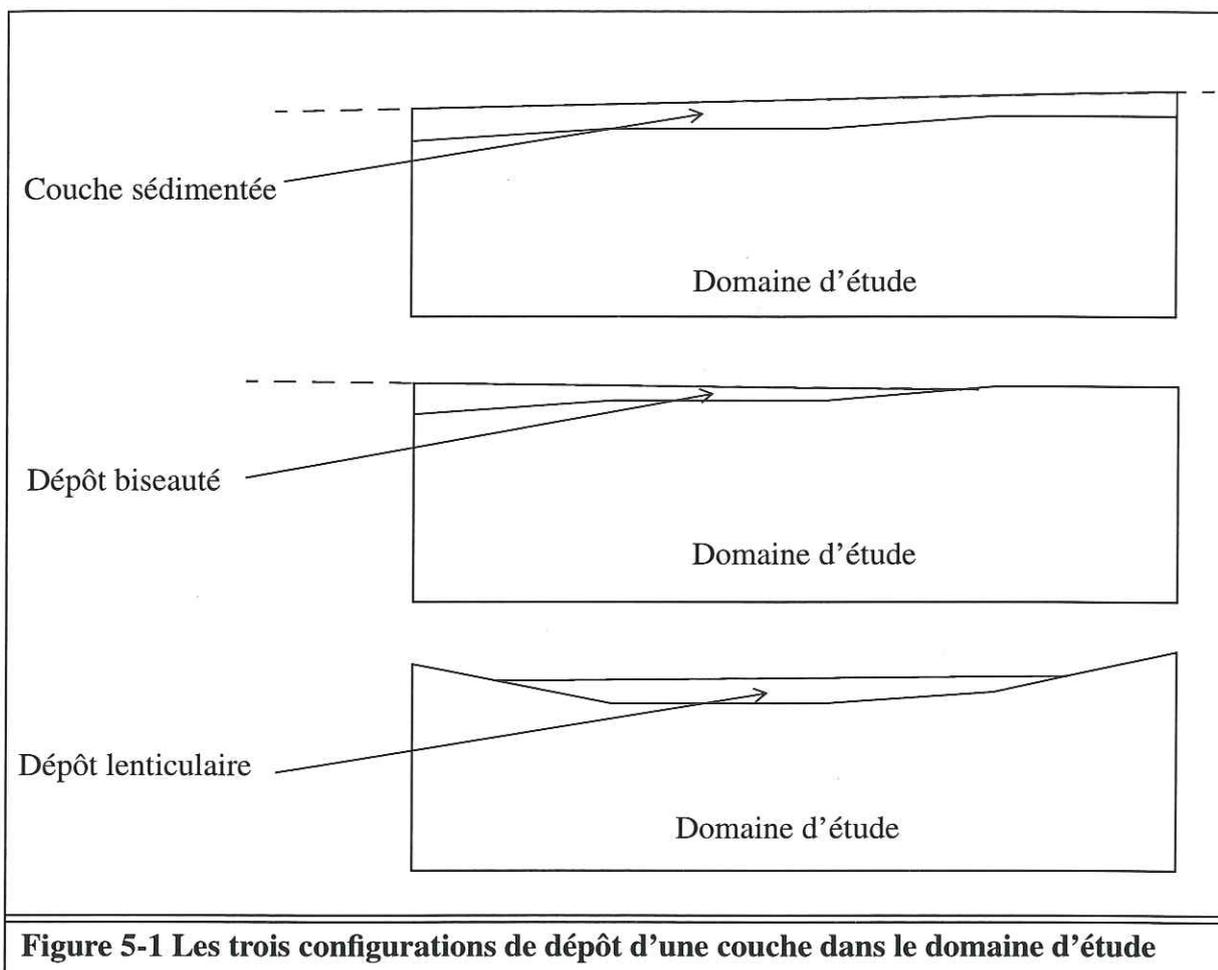
Trois configurations sont possibles pour la couche sédimentée par rapport aux frontières du domaine étudié, voir la figure 5-1 :

1 / La couche sédimentée peut être plus étendue que la dimension horizontale du domaine d'étude. Dans ce cas, la couche déposée recoupe les deux bords latéraux du domaine.

2 / La couche déposée peut être biseautée. Elle ne se prolonge pas horizontalement à travers l'ensemble du domaine étudié.

Une telle configuration de sédimentation se produit par exemple lors d'un dépôt en milieu littoral. L'extension du dépôt est alors limitée à la partie inondée du bassin, alors que la partie exondée n'est pas recouverte de sédiments.

3 / La couche déposée peut être moins étendue que le domaine d'étude. Elle est alors totalement incluse dans le domaine et a une forme lenticulaire, biseautée à ses extrémités.



**Figure 5-1 Les trois configurations de dépôt d'une couche dans le domaine d'étude**

Le sédiment déposé est incorporé dans FOLDIS et est pris en compte à l'intérieur d'une unité cinématique. Il existe deux possibilités distinctes dans la façon d'incorporer le sédiment dans une unité cinématique. Ces deux éventualités sont illustrées par la figure 5-2 et se distinguent par le comportement solidaire ou au contraire glissant de la couche nouvellement déposée vis à vis des couches sous-jacentes.

1 / La couche déposée correspond à la création d'une nouvelle unité cinématique

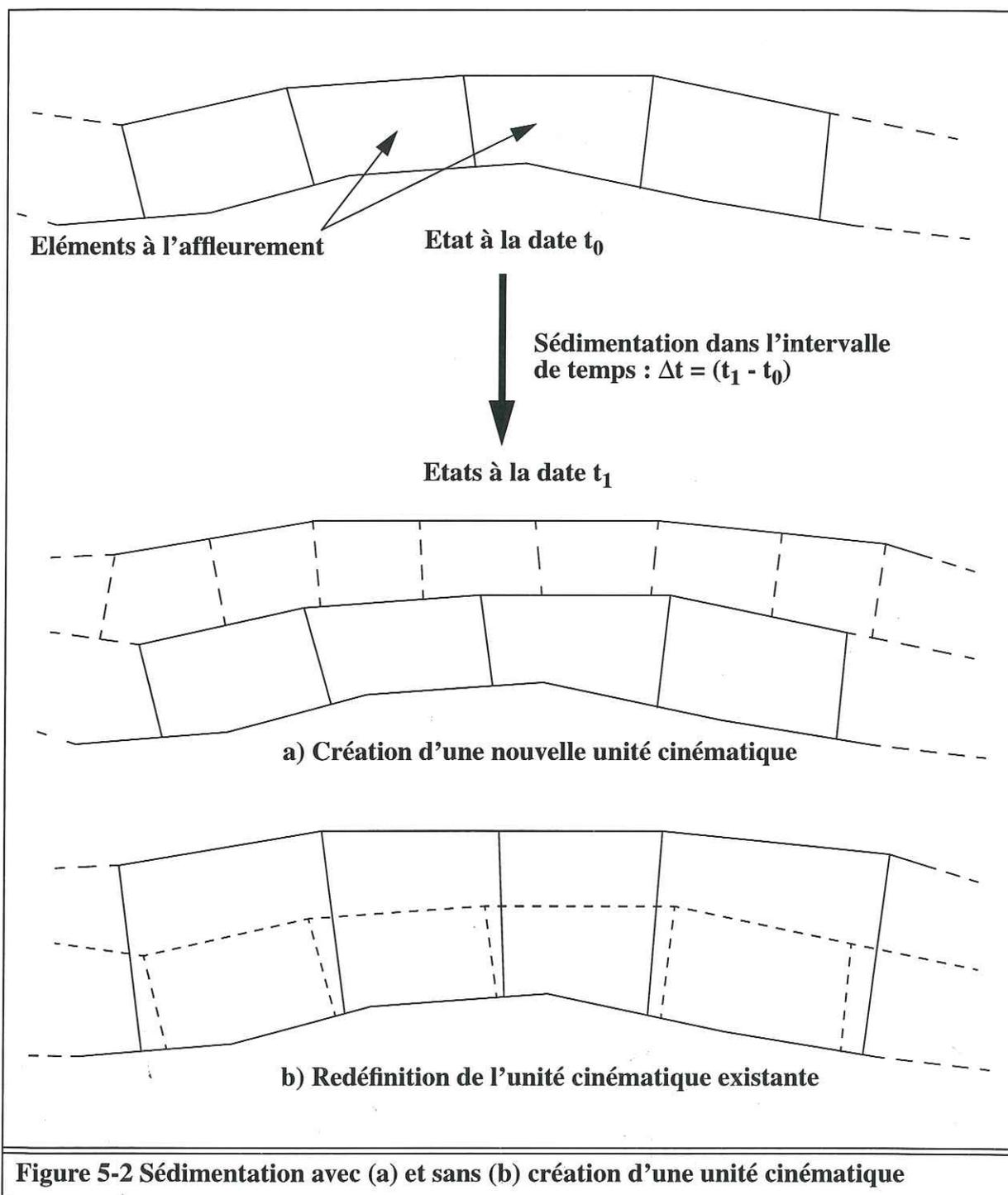
La nouvelle unité cinématique est soit rattachée à une écaïlle déjà existante, soit incluse dans une nouvelle écaïlle créée en même temps que l'unité. La frontière supérieure de la nouvelle unité cinématique coïncide avec celle de la couche sédimentée on réalise son découpage en éléments selon les principes énoncés section 3.1.5 page 64.

Le comportement cinématique de la couche sédimentée est alors déterminé par le fait qu'elle constitue à elle seule une unité cinématique. La couche est susceptible de se désolidariser et de glisser le long des couches sous-jacentes lors de l'évolution tectonique ultérieure.

2 / La couche sédimentée est incluse dans l'unité cinématique affleurante.

La frontière supérieure de l'unité cinématique à l'affleurement est modifiée de façon à ce qu'elle coïncide avec le toit de la couche sédimentée. On remaille ensuite l'unité cinématique en éléments selon les principes déjà énoncés section 3.1.5 page 64.

De cette façon, la couche sédimentée est incorporée dans les couches sous-jacentes et en est solidaire durant les phases tectoniques.

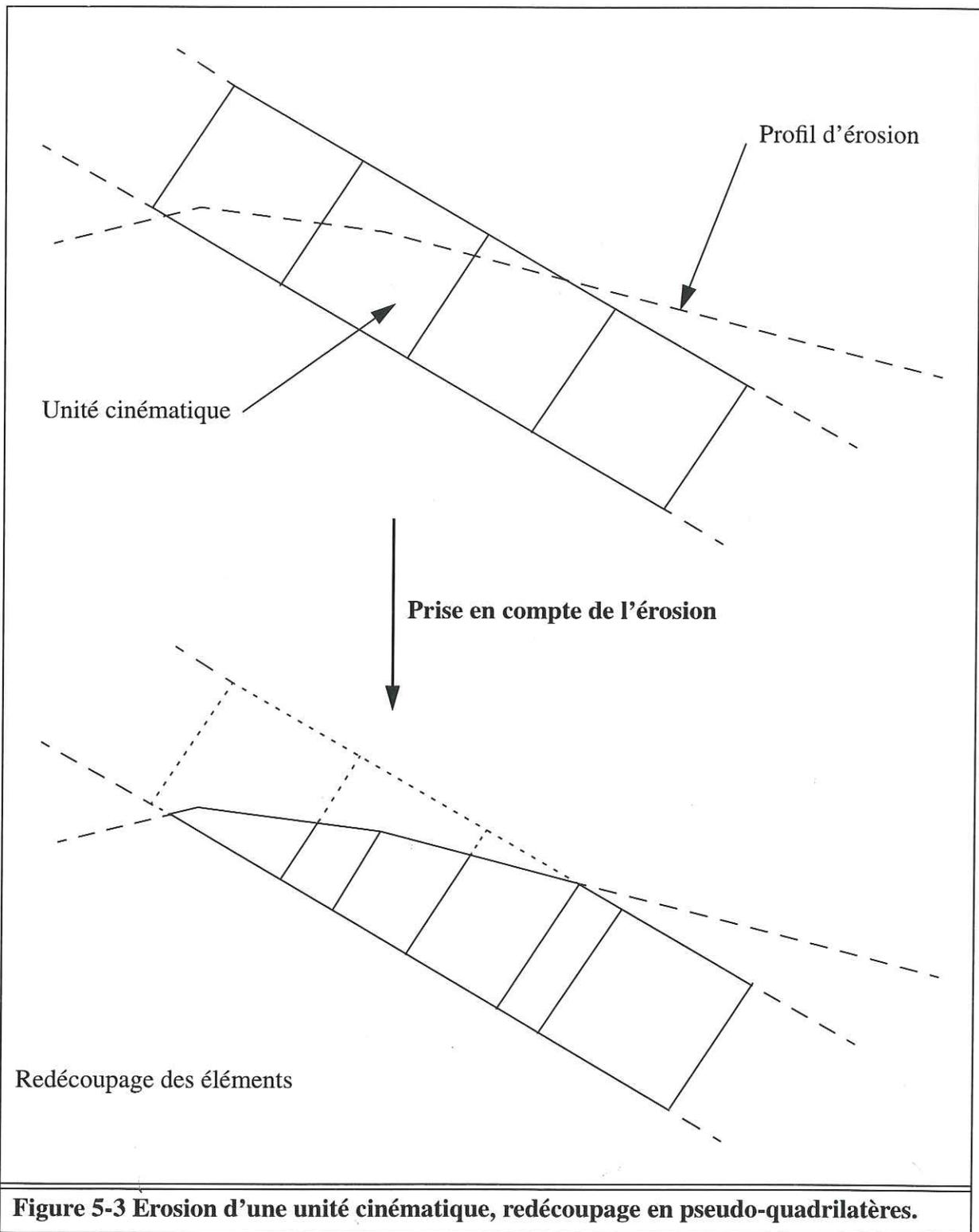


### 5.3 : Prise en compte de l'érosion dans FOLDIS

Dans le modèle de bassin 2D FOLDIS, l'influence géométrique de l'érosion est prise en compte soit grâce à l'information fournie par l'utilisateur du modèle qui donne la topographie après action de l'érosion, soit grâce à un modèle comme DIONISOS qui calcule les modifications géométriques du relief dues à l'érosion.

Informatiquement, il est plus difficile de traiter l'érosion que la sédimentation. En effet, il s'agit de retirer du modèle les objets totalement érodés et de modifier ceux qui le sont partiellement. Au contraire, la sédimentation est simple, elle consiste seulement à ajouter de nouveaux objets dans le modèle. La difficulté de l'érosion provient du fait que les objets présents dans le modèle peuvent voir leur connexité modifiée. Ainsi, une écaille ou une unité cinématique, peuvent être découpées par l'érosion en plusieurs parties. Il est donc nécessaire de pouvoir les remplacer dans le modèle par une juxtaposition d'objets connexes. Il est donc avantageux de gérer les ensembles d'objets du programme avec des structures de données informatiques suffisamment souples pour que les ajouts et les retrais d'objets soient simples. Ainsi il apparaît judicieux que les ensembles soient des listes plutôt que des tableaux d'objets.

La façon de prendre en compte géométriquement l'érosion dans le modèle est décrite par la figure 5-3. Il s'agit de définir le contour des nouvelles unités cinématiques en tenant compte du profil d'érosion fourni au modèle. On procède ensuite au découpage automatique du nouveau contour de chaque unité cinématique en cas de modification.



## 5.4 : Exemple d'une modélisation couplée mettant en jeu déformation tectonique, sédimentation et érosion sur un exemple synthétique

On présente la modélisation d'un pli de cintrage sur rampe classique pour lequel le pendage de la faille est de 30 degrés. On montre sur cet exemple le couplage de la modélisation de la cinématique avec les processus érosifs et sédimentaires. Les paramètres géométriques permettant de définir la nouvelle topographie sont obtenus à l'aide d'une modélisation en deux dimensions avec DIONISOS des processus d'érosion et de sédimentation par une équation physique de transport.

### 5.4.1 : Les paramètres de la modélisation

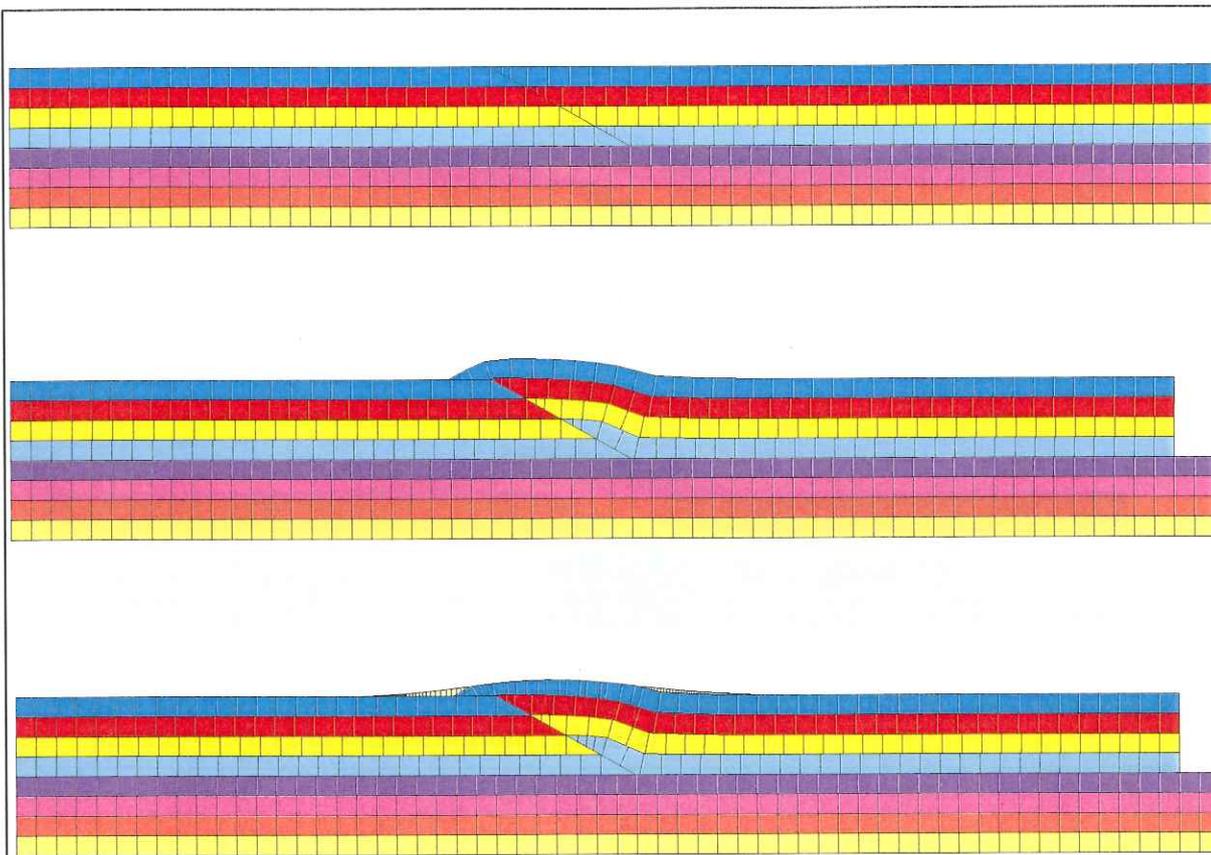
#### 1 / Définition de la géométrie initiale :

- Dimensions du domaine : 4 kilomètres sur 30 kilomètres.
- Découpage régulier du domaine en 8 unités cinématiques (500 mètres d'épaisseur par unité). La lithologie des sédiments est fixée, homogène sur tout le domaine, équivalente à celle du sable.
- Faille : rampe à 30 degrés de l'horizontale branchée sur un niveau de décollement à 2 kilomètres de profondeur.

#### 2 / Paramètres d'évolution du modèle :

L'intervalle de temps pendant lequel est menée la modélisation est de  $5 \cdot 10^5$  ans. Il est divisé régulièrement en cinq incréments de  $10^5$  ans. On enchaîne successivement pour chaque pas de temps une phase de déformation tectonique suivie d'une phase d'érosion/sédimentation.

- Paramètres cinématiques de FOLDIS
  - Déplacements par incréments de 1 kilomètre de la frontière verticale droite de l'écaille chevauchante (hanging-wall).
- Modélisation de l'érosion/sédimentation avec DIONISOS
  - Lithologie : Sable (masse volumique:  $2200 \text{ kg m}^{-3}$ )
  - Coefficient de diffusion  $K=0.01 \text{ km}^2\text{ka}^{-1}$  (soit :  $3.17 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ ).
  - Pas de temps :  $10^5$  ans.

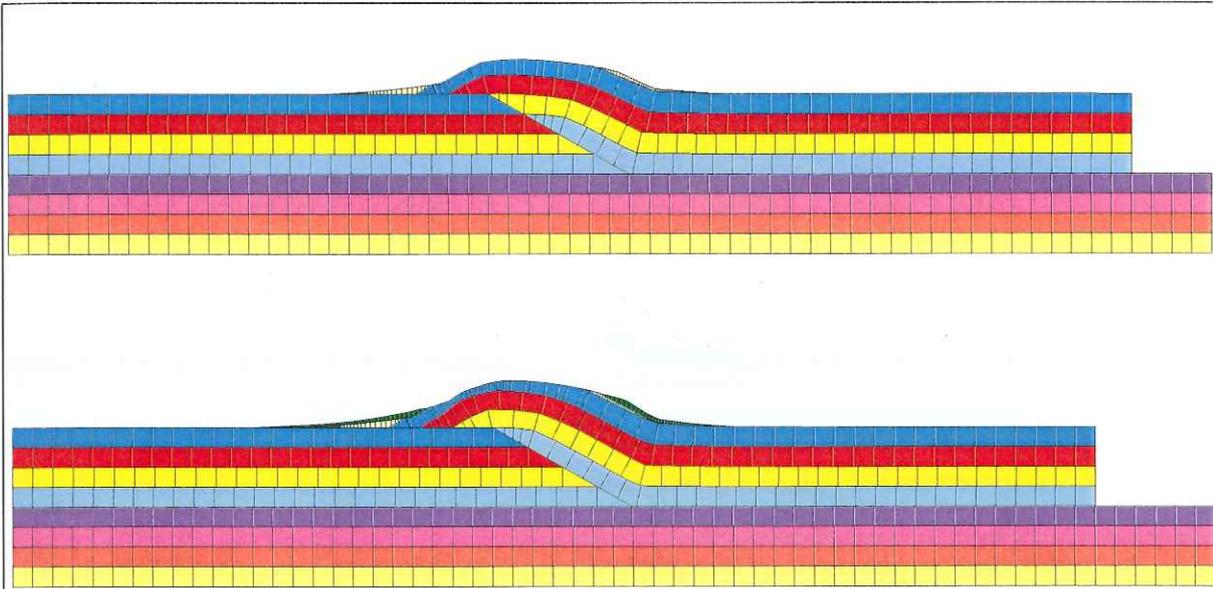


**Figure 5-4 Etat initial (stade 0), puis état après un incrément de déformation tectonique, enfin l'état est repris par l'érosion et la sédimentation (stade 1).**

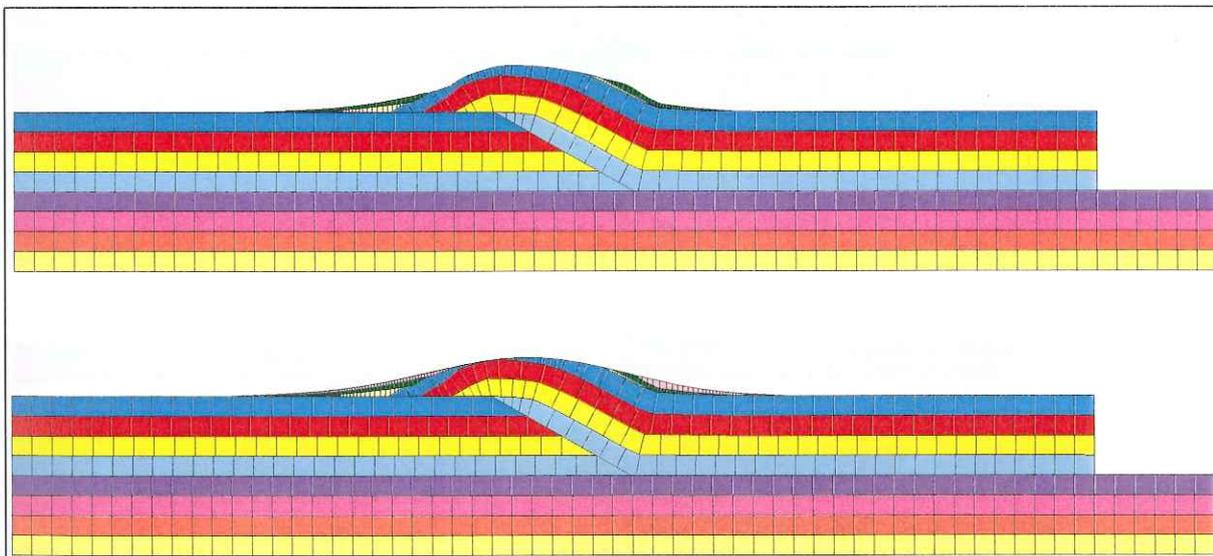
La modélisation couplée de la déformation tectonique par FOLDIS en tenant compte de la sédimentation et de l'érosion avec DIONISOS est réalisée en décomposant l'intervalle de temps étudié en cinq étapes régulièrement espacées dans le temps. Ainsi, l'enchaînement des phénomènes tectonique et d'érosion/sédimentation est réalisé d'une manière suffisamment réaliste qui s'approche d'un couplage idéal pour lequel le nombre d'étapes de la modélisation devient très grand de façon à reproduire le couplage de phénomènes continus.

Il n'est pas utile de discrétiser trop finement l'intervalle de temps étudié, en effet les désavantages d'une telle discrétisation sont l'accroissement du temps et de l'espace mémoire nécessaires pour calculer la masse d'informations géométriques relatives à chaque état de la modélisation. Le gain en précision géométrique apporté par une discrétisation plus fine de l'intervalle de temps n'est pas forcément très profitable du fait de l'échelle à laquelle on mène l'étude. En effet, en étudiant un bassin, on raisonne à l'échelle d'une zone de plusieurs dizaines de kilomètres d'extension horizontale, et la précision verticale ne peut être raisonnablement inférieure à quelques dizaines de mètres. Il est donc illusoire de chercher à modéliser de façon très fine les détails des corps sédimentaires à l'aide d'une étude menée à l'échelle du bassin. Il est préférable de restreindre la zone étudiée pour atteindre

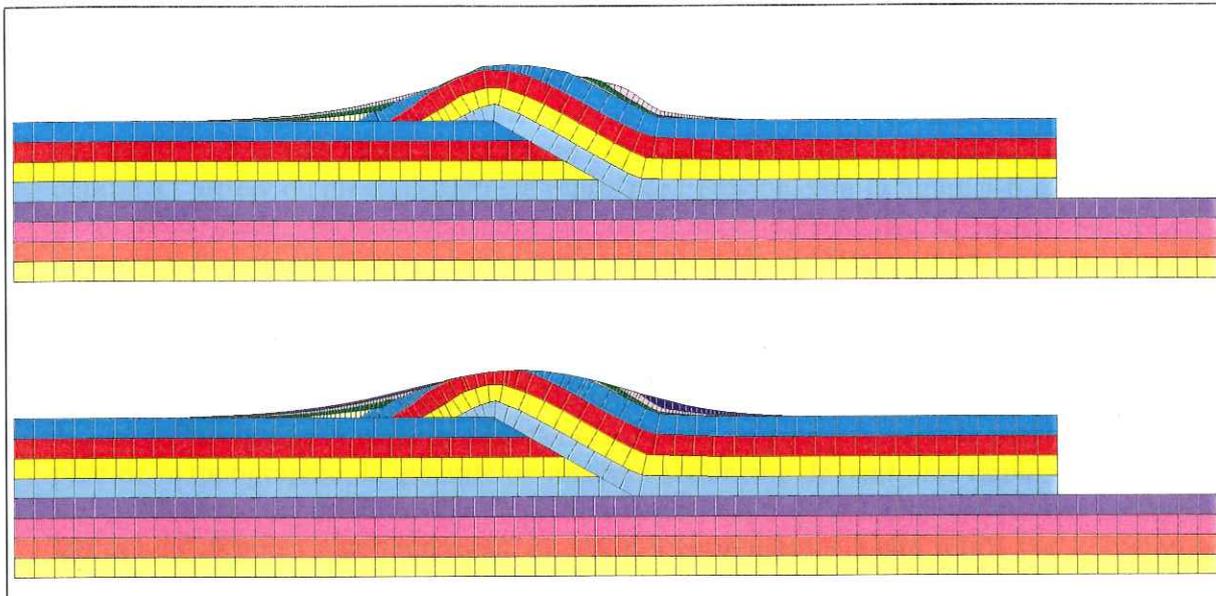
une telle précision.



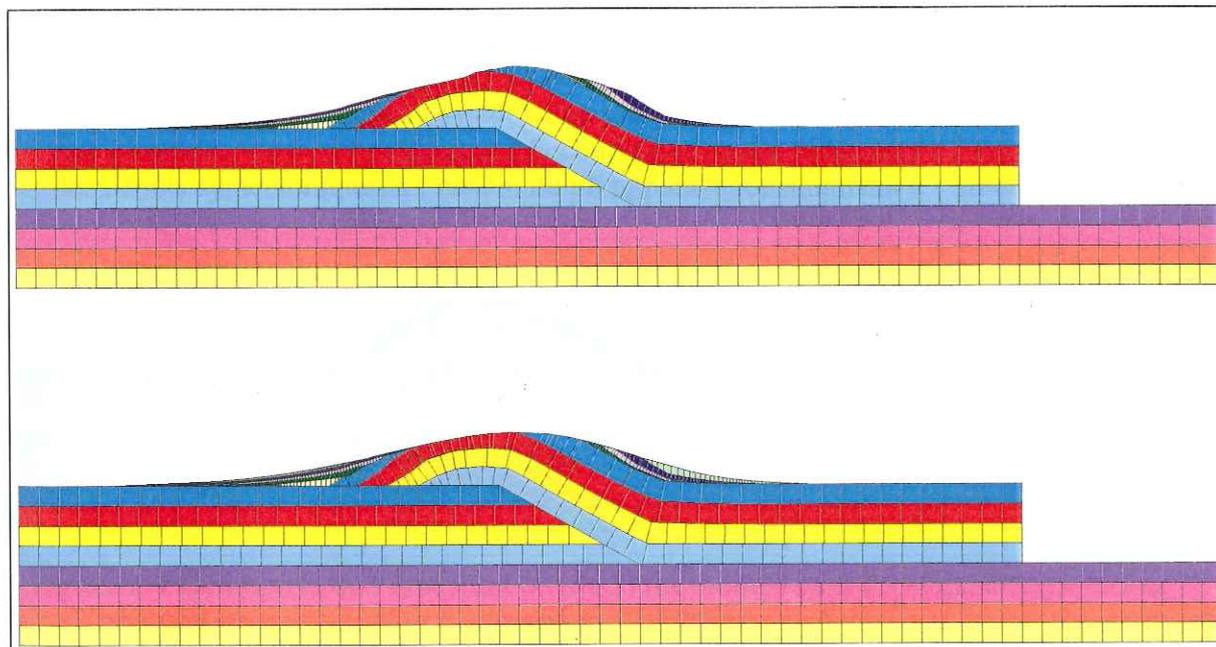
**Figure 5-5** Etat après deux incréments de déformation tectonique, puis l'état est repris par l'érosion et la sédimentation (stade 2)



**Figure 5-6** Etat après trois incréments de déformation tectonique, puis l'état est repris par l'érosion et la sédimentation (stade 3)



**Figure 5-7** Etat après quatre incréments de déformation tectonique, puis l'état est repris par l'érosion et la sédimentation (stade 4)



**Figure 5-8** Etat après cinq incréments de déformation tectonique, puis l'état est repris par l'érosion et la sédimentation (stade 5)

#### 5.4.2 : Analyse de la modélisation et conclusion

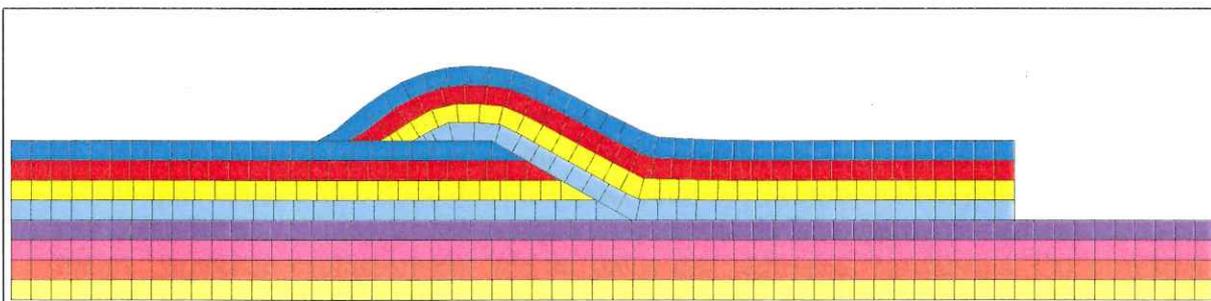
La modélisation du pli de rampe avec prise en compte des phénomènes de sédimentation et d'érosion donne d'intéressants résultats concernant la forme et la répartition des corps sédimentaires syntectoniques associés. De plus, la forme du relief elle-même est plus réaliste du fait de la prise en compte des phénomènes d'altération et de dépôt à la surface topo-

graphique.

Le matériel porté en altitude est systématiquement érodé au cours de la modélisation, la couche supérieure qui est à l'affleurement au stade 0 est érodée à l'exclusion de tout autre aux stades 1 et 2, voir figure 5-4 et figure 5-5. A partir du stade 3, le matériel syntectonique déposé à l'arrière du pli est également repris par l'érosion, voir la figure 5-6. De plus, à partir du même stade 3 de la modélisation, la couche supérieure est découpée deux parties connexes qui deviennent indépendantes pour la suite de la modélisation. Aux stades 4 et 5 la couche sous-jacente à la couche supérieure est également entamée par l'érosion, voir figure 5-7 et figure 5-8.

La sédimentation est importante à l'avant du pli en début de la modélisation aux stades 1, 2 et 3. Puis quand le matériel sédimenté à l'avant du pli est transporté passivement sur le plan de la topographie, la quantité de matériel sédimenté devient plus faible. En effet, une fine pellicule se dépose à l'avant du pli aux stades 4 et 5 de la modélisation. Les sédiments qui ont été déposés antérieurement, au stade 4 commencent à être repris par l'érosion au stade 5.

A l'arrière du pli de rampe, la sédimentation est faible au début de la modélisation, au stade 1, avant que le relief créé par le pli de rampe ne soit maximum. Puis, au fur et à mesure que se développe le pli de rampe, la quantité de matériel sédimenté à l'arrière du pli devient de plus en plus importante. Au cours de la croissance du pli de rampe, les sédiments sont progressivement déformés du fait de leur passage au niveau de la rampe. Ils sont portés en altitude et subissent systématiquement l'action de l'érosion à tous les stades de la modélisation. Ainsi, contrairement à la configuration des sédiments à l'avant du pli, chacun des dépôts syntectoniques à l'arrière du pli apparaît constamment à l'affleurement.



**Figure 5-9 Géométrie de l'état final (stade 5) du modèle sans érosion/sédimentation**

Le couplage des phénomènes tectonique et d'érosion/sédimentation est nécessaire pour mener l'étude de bassins sédimentaires réels. La figure 5-9 montre la différence sur la géométrie finale du modèle suivant que l'on tient compte ou non de l'érosion/sédimentation.

DIONIŞOS permet de calculer le granoclassement et la répartition des lithologies de sédiments à l'intérieur du bassin. Ainsi, une modélisation des dépôts avec des variations latérales des faciès et des propriétés physiques peut être envisagée. Le couplage avec l'évolution tectonique et avec la modélisation des écoulements dans le bassin conduit à l'élaboration de puissants modèles pour l'exploration pétrolière

## Chapitre 6 : Compaction

La compaction est le phénomène responsable de la diminution de volume des sédiments au cours de l'évolution d'un bassin. En modélisation de bassin, il est très important de la prendre en compte car ses conséquences ont une portée sérieuse sur les transformations du bassin. Les influences géométriques de la compaction sont prises en compte directement dans le modèle FOLDIS. De plus, la compaction des sédiments s'accompagne d'une modification des propriétés physiques des matériaux. Ainsi, on observe une diminution de la perméabilité et une évolution des propriétés physiques liées aux transferts thermiques comme la conductivité ou la capacité thermique. La compaction des sédiments est également associée à une expulsion et à une circulation des fluides initialement présents au sein de la porosité connectée des sédiments. C'est pourquoi, il faut tenir compte de la compaction des sédiments lors de l'étude des transferts thermiques et fluides dans les modélisations de bassin effectuées pour les besoins de l'exploration pétrolière.

La compaction est liée à l'enfouissement des sédiments qui se produit soit en raison de l'évolution tectonique soit à cause des dépôts sédimentaires dans le bassin. Avec l'augmentation de l'enfouissement, et donc de la quantité de matériaux pesant sur les sédiments, il y a augmentation de la contrainte verticale. Or les matériaux récemment sédimentés, très poreux et non consolidés sont fortement sensibles aux effets d'une élévation de contrainte. Les contraintes exercées sur les sédiments ne sont pas exclusivement dues au poids des matériaux sus-jacents, il existe également des causes tectoniques aux contraintes. Une prise en compte rigoureuse de la compaction des sédiments devrait être menée à partir de l'évaluation de l'état de contrainte régnant dans les sédiments. Cependant, le modèle cinématique FOLDIS qui simule les déformations des sédiments lors des phases tectoniques est de nature géométrique et non mécanique. Aussi, les contraintes à l'origine des déformations ne sont pas évaluées en tout point du modèle comme ce serait le cas pour une méthode mécanique. On se limite donc dans la modélisation de la compaction, puisqu'on ne calcule pas l'état des contraintes, à tenir compte uniquement de la composante verticale de la contrainte, supposée exclusivement liée au poids des sédiments sus-jacents. On se restreint donc dans le modèle FOLDIS à simuler la compaction due à l'enfouissement et non due à la tectonique.

Dans ce chapitre, on présente les lois de compaction adoptées dans le modèle pour tenir compte de la rhéologie des matériaux sédimentaires du bassin. On expose ensuite les principes retenus pour la modélisation des effets géométriques de la compaction sur les sédiments du bassin. Enfin, on montre et on discute les outils numériques pour gérer l'évolution géométrique du modèle.

## 6.1 : Loi de compaction adoptée dans le modèle

La compaction est un phénomène physico-chimique qui se caractérise par la diminution du volume occupé par les sédiments en raison de l'augmentation des contraintes exercées sur le matériau sédimentaire.

Les causes et les manifestations de ce phénomène complexe sont multiples et elles peuvent être classées en deux catégories:

- L'augmentation de la contrainte a un effet purement mécanique sur la matrice solide des sédiments. Celle-ci a tendance à être écrasée et tassée dans la direction de la contrainte principale. En liaison avec ce tassement du solide, les fluides interstitiels voient leur pression augmenter. Une circulation des fluides interstitiels vers les zones du bassin à basse pression se produit alors de façon plus ou moins différée.

La compaction mécanique correspond à une diminution de la porosité du sédiment, le volume de la matrice solide restant pour sa part constant.

- La compaction peut également être due à des phénomènes physico-chimiques. En effet, le domaine thermodynamique de stabilité de certaines phases minérales des sédiments est limité. Des transitions de phases transforment ces phases minérales instables lors de l'enfouissement. Au cours de ces transformations, le sédiment voit sa densité augmenter à mesure que la pression s'élève. De plus, des réactions chimiques de dissociation de minéraux solides avec production et départ d'une phase liquide ont lieu. Ces réactions physico-chimiques participent à la diminution du volume total des sédiments en place.

En modélisation de bassin, on se limite généralement à prendre en compte la compaction mécanique, liée à la diminution de porosité. La densité de la matrice solide est supposée rester constante. Ce choix est justifié par le fait que la diminution de porosité des sédiments intervient dès les premières phases de l'enfouissement, contrairement aux changements minéralogiques qui sont plus profonds.

Mécaniquement, la contrainte qui s'exerce sur la matrice solide est la contrainte verticale effective donnée par la loi de Terzaghi:

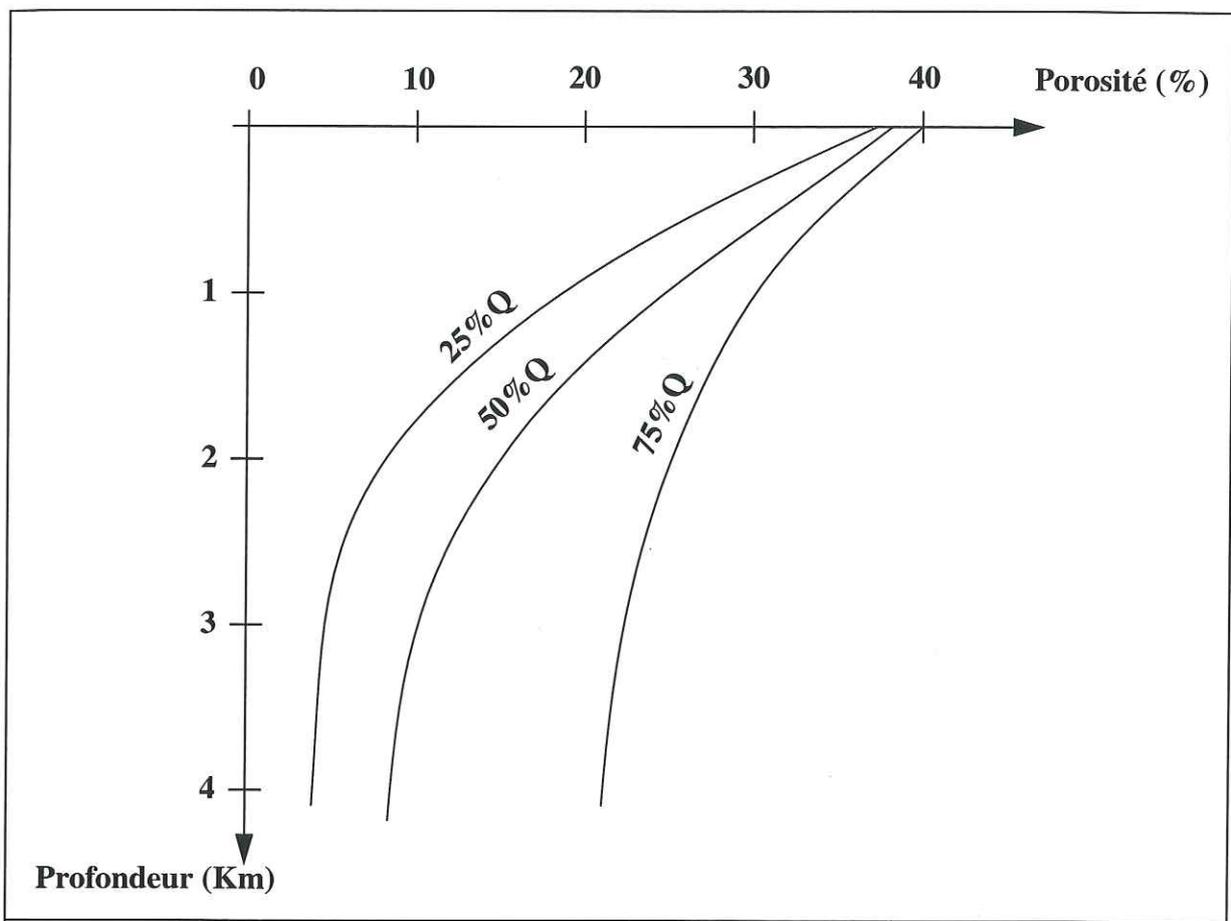
$$\sigma_{\text{eff}} = S_g - P_w$$

$S_g$  représente la pression exercée par les sédiments sus-jacents, soit le poids d'une colonne verticale de sédiments dont la section horizontale est d'aire unité.  $P_w$  est la pression des fluides. Ainsi, la contrainte effective exercée sur le squelette solide est égale à la pression due au poids des sédiments diminuée de la pression des fluides.

Pour chaque lithologie on établit une loi expérimentale de comportement donnant la correspondance univoque entre la contrainte effective et la porosité du sédiment:

$$\phi = \phi(\sigma_{\text{eff}})$$

Pour de nombreux sédiments, la loi de variation de la porosité avec la contrainte effective est une courbe dont la concavité est tournée vers le bas, comme il est indiqué sur la figure 6-1.



**Figure 6-1 Lois de porosité profondeur expérimentales pour des mélanges de sables (Q) et d'argile en différentes proportions**

Il est plus commode d'utiliser une loi simple que l'on peut calibrer facilement qu'un grand nombre de données expérimentales, aussi des auteurs on proposer une formule dépendant des deux paramètres ( $\phi_0$ ,  $\sigma_0$ ):

$$\text{Loi d'Athy : } \phi = \phi_0 \exp\left(\frac{-\sigma_{\text{eff}}}{\sigma_0}\right)$$

$\phi_0$  représente la porosité en surface et  $\sigma_0$  permet de régler la vitesse de diminution de la porosité avec l'augmentation de l'enfouissement.

Dans le modèle développé, le couplage de l'écoulement de la phase fluide interstitielle avec la diminution de porosité par compaction n'est pas envisagé. On souhaite cependant à terme développer une modélisation des circulations fluides interstitielles et envisager le couplage. En effet, le couplage de la compaction avec l'écoulement des fluides interstitiels est bien réel. L'enfouissement des sédiments entraîne une augmentation de la pression des fluides interstitiels qui se mettent en mouvement vers les zones du bassin où la pression est plus faible. L'importance de ce couplage apparaît quand l'évacuation des fluides interstitiels est rendue difficile par des conditions défavorables à l'écoulement, par exemple si les

perméabilités le long des chemins d'évacuation sont faibles. Dans ce cas, la compaction est différée. Ce retard de la compaction correspond à l'instauration d'une phase transitoire avant d'atteindre un état d'équilibre pour lequel la circulation fluide est nulle du fait de la disparition des surpressions.

Le fait de ne pas envisager dans un premier temps le couplage compaction/écoulement dans le modèle revient à considérer que l'écoulement des fluides est un phénomène rapide vis à vis de l'enfouissement des sédiments qui est à l'origine des surpressions. Dans le modèle, on propose une prise en compte simplifiée de la compaction mécanique, sans envisager la dynamique de l'écoulement des fluides. On modélise un bassin constamment à l'état d'équilibre hydrostatique, c'est à dire sans aucune surpressions. Toutefois, les outils de modélisation développés pour prendre en compte les effets géométriques et physiques de la variation de porosité ont été conçus dans l'optique du couplage avec le phénomène dynamique de l'écoulement des fluides interstitiels du bassin.

## 6.2 : Prise en compte des effets géométriques de la compaction

On définit les règles qui permettent de prendre en compte l'effet géométrique de la compaction dans le modèle FOLDIS. Puis, on explique les choix réalisés pour la mise en oeuvre de ces règles compte tenu des structures de données du programme et qu'il doit être possible d'enchaîner les calculs de compaction avec ceux de déformation lors d'une phase tectonique. On modélise ensuite la compaction sur un exemple synthétique théorique.

### 6.2.1 : Règles géométriques du modèle de compaction

La transformation géométrique  $F$  modélise les effets géométriques de la compaction sur la représentation discrète du bassin dans FOLDIS, à savoir un ensemble d'unités cinématiques composées d'éléments pseudo-quadrilatères.

On rappelle que la compaction est modélisée comme la variation de la porosité  $\phi$  des matériaux sédimentaires présents dans le bassin. Cette prise en compte est réalisée au niveau de chaque élément de discrétisation du modèle. Ainsi, outre les grandeurs géométriques que sont l'aire et l'épaisseur des éléments, et à côté d'informations géologiques comme la nature lithologique du matériau constituant l'élément, il convient d'associer à chaque élément la grandeur physique  $\phi$  représentant la porosité moyenne de l'élément. Cette grandeur est liée à la nature lithologique des matériaux constituant l'élément, chaque matériau vérifiant une loi de porosité :  $\phi = \phi(\sigma_{\text{eff}})$ .

La transformation géométrique  $F$  est conçue pour mettre en accord l'aire «physique» de l'élément qui dépend de la porosité, avec l'aire «géométrique» de l'élément qui est la quantité d'espace effectivement attribuée à l'élément. Il est important de préciser que la transformation  $F$  est supposée continue. Ce choix implique que la topologie des objets transformés par  $F$  est exactement conservée. Cependant, dans certains cas, il faut être capable de modéliser une compaction différentielle de part et d'autre d'une discontinuité principale comme une faille. On définit alors deux transformations géométriques continues  $F_1$  et

$F_2$  que l'on applique successivement et respectivement à l'écaille inférieure puis à l'écaille supérieure.

Ainsi, on dégage deux règles importantes permettant de préciser les caractéristiques requises concernant la transformation F. Ces règles permettent de proposer une définition de F en s'appuyant sur la discrétisation du bassin dans FOLDIS, en écailles, en unités cinématiques et finalement en éléments.

**a ) Première règle : conservation de la quantité de matière solide contenue dans l'élément au cours de la compaction F.**

Les deux grandeurs attachées à un élément et qui sont utiles à la détermination de la transformation géométrique F sont :

- La porosité moyenne  $\phi$  attribuée à l'élément.
- Le volume V occupé par l'élément, sachant qu'en deux dimensions, la grandeur V correspond à l'aire A de l'élément. (la dimension de l'élément dans la troisième direction de l'espace est conventionnellement prise égale à l'unité de longueur)

On appelle  $\rho_s$  la masse volumique du solide constituant l'élément. On néglige l'influence des conditions thermodynamiques, pression et température, sur la grandeur  $\rho_s$ . Il est vrai que dans un bassin sédimentaire la variation de la masse volumique du matériau solide est seulement de quelques pourcents entre les conditions en surface et en profondeur.

La masse solide de l'élément est la grandeur physique à conserver au cours de la transformation F simulant la compaction :

Dans l'état initial : Etat 0

- Contrainte effective :  $\sigma_{e0}$
- $\phi_0 = \phi(\sigma_{e0})$  porosité de l'élément
- $A_0$  : aire de l'élément
- $V_0 = 1 A_0$  : volume de l'élément
- Volume de fluide dans l'élément :  $V_0 \phi_0$
- Volume de solide dans l'élément:  $V_0 (1 - \phi_0)$
- Masse de solide dans l'élément:  $V_0 (1 - \phi_0) \rho_s$

Dans l'état compacté : Etat 1 = F (Etat 0)

- Masse de solide dans l'élément:  $V_1 (1 - \phi_1) \rho_s$

En écrivant la conservation de la masse solide et en simplifiant par la masse volumique du matériau solide supposée invariante entre les états 0 et 1 :

$$V_0 (1 - \phi_0) = V_1 (1 - \phi_1)$$

On obtient ainsi l'expression de la nouvelle aire  $A_1$  de l'élément dans l'état 1 en fonc-

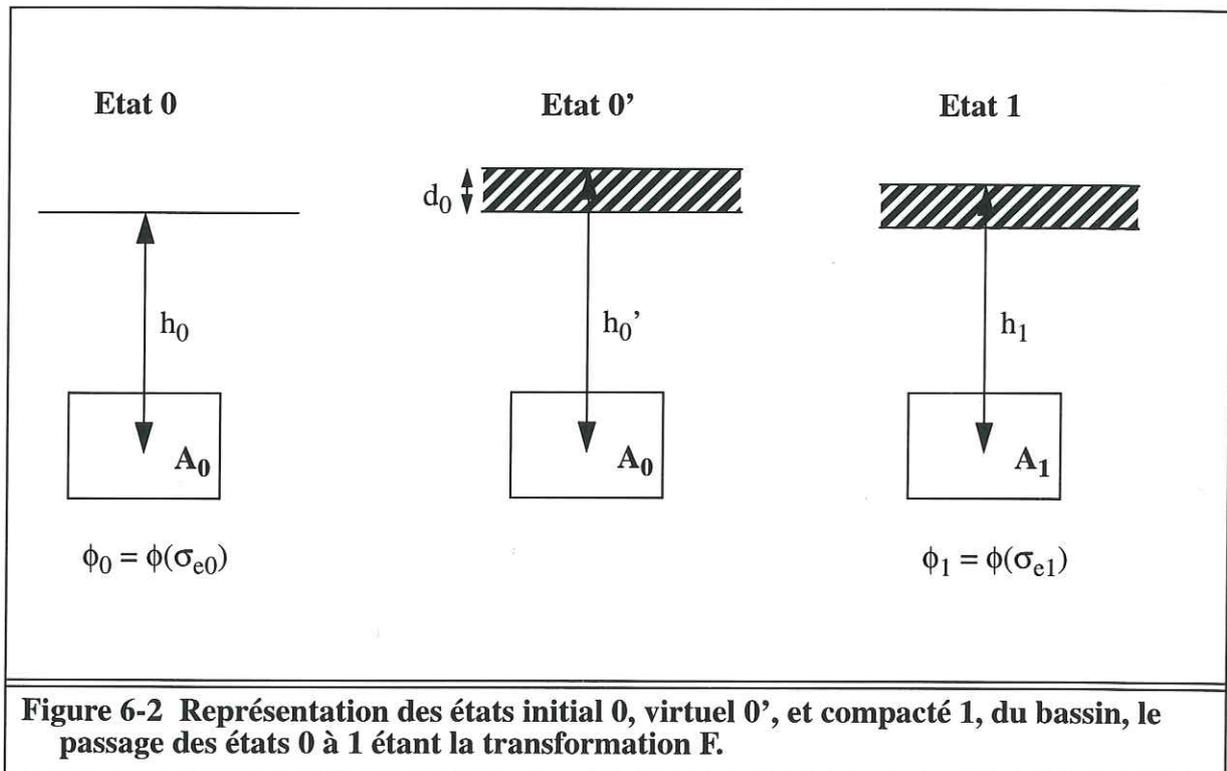
tion des porosités  $\phi_0$ ,  $\phi_1$  et de l'aire  $A_0$  de l'élément dans l'état 0.

$$A_1 = A_0 \frac{1 - \phi_0}{1 - \phi_1} \quad (I)$$

Ainsi, la conservation de la matière solide est formulée au niveau élémentaire: l'aire  $A_1$  de l'élément compacté est telle que la loi (I) soit vérifiée.

Analysons la transformation F pour le cas d'un bassin sédimentaire dans les conditions hydrostatiques lors du dépôt d'une nouvelle couche, comme il est indiqué sur la figure 6-2.

Le fait que le bassin soit dans l'état hydrostatique signifie que la pression de fluide  $P_w$  au niveau de l'élément est exactement égale au poids de la colonne de fluide de section d'aire unité au dessus de l'élément. On écrit la loi de Terzaghi qui donne la contrainte effective au niveau de l'élément:  $\sigma_{e0} = S_g - P_w$ .



**Figure 6-2** Représentation des états initial 0, virtuel 0', et compacté 1, du bassin, le passage des états 0 à 1 étant la transformation F.

La surcharge appliquée est représentée sur l'état virtuel du bassin : Etat 0'. La surcharge déposée sur une épaisseur  $d_0$  est responsable d'une contrainte effective :  $\Delta\sigma_{e0}$  à l'enfouissement  $d_0$ . La contrainte effective au niveau de l'élément, pour un enfouissement égal à :  $h_0' = h_0 + d_0$ , est alors :  $\sigma_{e0}' = \sigma_{e0} + \Delta\sigma_{e0}$

Après compaction, dans l'état 1, la transformation géométrique F ne change pas la quantité de matière solide située au dessus de l'élément, seule la répartition de cette quantité sur la verticale est modifiée. Le poids de matière solide au dessus de l'élément est exactement identique dans les états 0' et 1. La contrainte effective au niveau de l'élément reste égale à celle de l'état virtuel 0', on a :  $\sigma_{e1} = \sigma_{e0}'$ .

Ainsi, à partir de la géométrie de l'état virtuel  $0'$ , on estime la contrainte effective  $\sigma_{e1}$  de l'état 1. La connaissance de  $\sigma_{e1}$  permet de calculer la porosité dans l'état 1 :  $\phi_1 = \phi(\sigma_{e1})$ .

Les porosités  $\phi_0$  et  $\phi_1$  de l'élément dans l'état initial (0) et l'état compacté (1) permettent d'estimer l'aire  $A_1$  à attribuer à l'élément dans l'état (1) en écrivant le principe (I).

### **b ) Deuxième règle : conservation de la topologie lors de la compaction F.**

Chaque élément est un pseudo-quadrilatère qui possède quatre noeuds (A, B, C, D). Le contour fermé de l'élément est constitué des trois segments [A, B], [B, C], [C, D] et d'une ligne polygonale joignant les noeuds D et A de façon qu'il n'y ait aucun vide ni recouvrement de matière entre l'élément considéré et ses voisins sous-jacents. Les noeuds A et D de l'élément sont appelés les noeuds basaux de l'élément. Les deux autres noeuds, B et C sont appelés les noeuds supérieurs, ils appartiennent au toit de l'unité cinématique.

On cherche à définir une transformation F, modélisant la compaction, qui soit continue et qui s'appuie sur les éléments de discrétisation du modèle, les pseudo-quadrilatères (A, B, C, D). Pour cela, on pose comme principe que le transformé d'un élément pseudo-quadrilatère (A, B, C, D) soit un élément pseudo-quadrilatère (F(A), F(B), F(C), F(D)).

Pour étudier la continuité de la transformation F, on distingue deux configurations des points matériels M d'un élément :

1 / M est un point strictement intérieur à l'élément E.

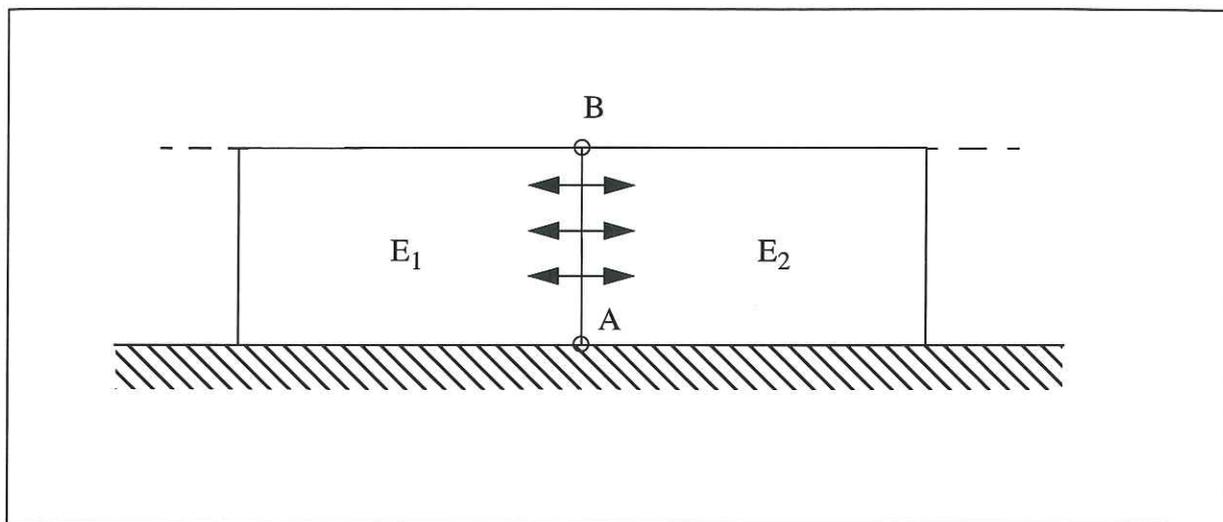
2 / M est un point de la frontière de l'élément E.

Il n'est pas nécessaire de chercher à préciser d'emblée la transformation F pour les points M strictement intérieurs aux éléments. On suppose simplement que le transformé F(M) d'un point matériel M situé strictement à l'intérieur d'un élément E est nécessairement strictement intérieur à l'élément transformé F(E).

On étudie la continuité de F pour les points matériels M situés sur les frontières des éléments. Dans le modèle, il existe deux configurations de frontières séparant deux éléments :

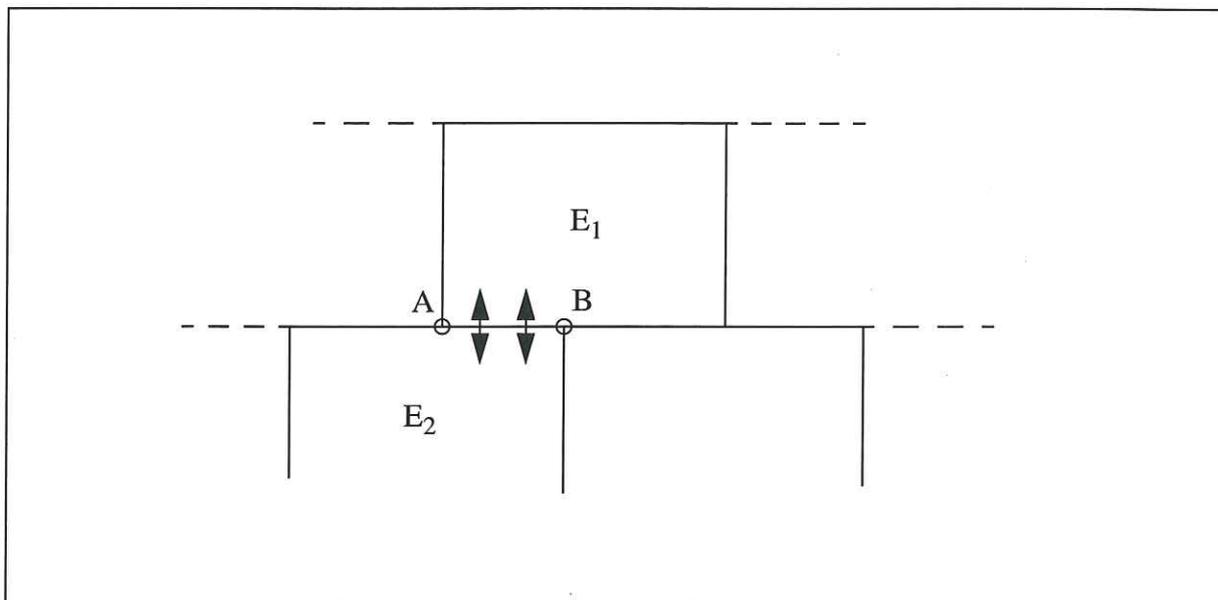
1 / Les éléments voisins peuvent appartenir à la même unité cinématique

La frontière entre les deux éléments voisins  $E_1$  et  $E_2$  d'une même unité cinématique est le segment [A, B], comme le montre la figure 6-3. Les deux extrémités A et B correspondent aux deux noeuds communs aux éléments  $E_1$  et  $E_2$ . Le noeud A est un noeud basal et B un noeud supérieur pour chacun des deux éléments  $E_1$  et  $E_2$ . Du fait de la continuité de F, le segment frontière [A, B] séparant les deux éléments voisins est préservé par la transformation F. Le transformé de [A, B] correspond à la frontière des éléments transformés  $F(E_1)$  et  $F(E_2)$ . Ainsi, le transformé du segment [A, B] est le segment [F(A), F(B)] qui est la frontière des éléments  $F(E_1)$  et  $F(E_2)$ .



**Figure 6-3 Voisinage entre deux éléments contigus d'une même unité cinématique**

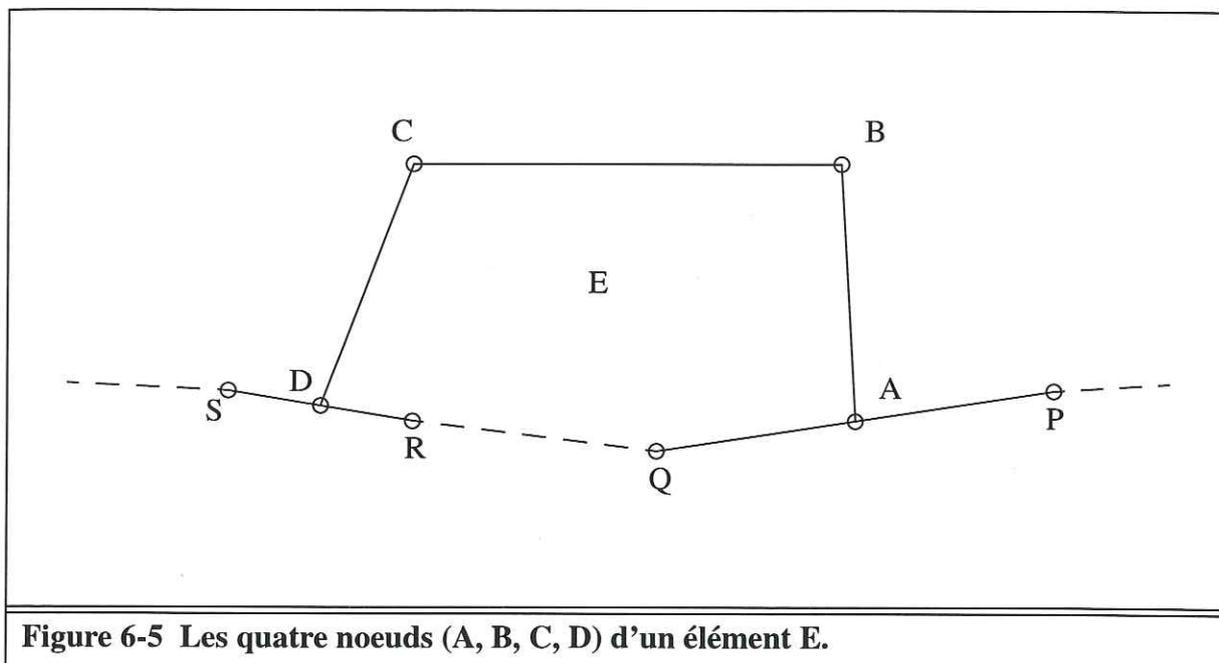
2 / Les deux éléments voisins  $E_1$  et  $E_2$  appartiennent à deux unités cinématiques différentes



**Figure 6-4 Voisinage entre deux éléments de deux unités cinématiques distinctes**

Les éléments voisins  $E_1$  et  $E_2$  qui appartiennent à deux unités cinématiques distinctes ont nécessairement une frontière commune qui est un segment de droite  $[A, B]$ , comme le montre la figure 6-4. Les points A et B sont alors des noeuds qui chacun appartiennent soit à l'élément  $E_1$  soit à l'élément  $E_2$ . A la différence du cas précédent, les points A et B correspondent à des noeuds qui n'appartiennent qu'à un des deux éléments. La continuité de la transformation  $F$  impose que la frontière des deux éléments  $E_1$  et  $E_2$  soit transformée en la

frontière des deux éléments  $F(E_1)$  et  $F(E_2)$ . Ainsi, il est clair que le transformé du segment  $[A, B]$  doit être le segment de droite  $[F(A), F(B)]$ .



**Figure 6-5 Les quatre noeuds (A, B, C, D) d'un élément E.**

Règles topologiques retenues pour définir la transformation  $F$  :

Les quatre noeuds (A, B, C, D) de l'élément E, définis comme indiqué sur la figure 6-5, sont transformés par  $F$  de la façon suivante :

- 1 / Les noeuds supérieurs (B et C) de l'élément E sont transformés de façon quelconque en  $F(B)$  et  $F(C)$  et deviennent les noeuds supérieurs de l'élément  $F(E)$ .
- 2 / Les noeuds basaux (A et D) de l'élément E sont transformés en  $F(A)$  et  $F(D)$  et deviennent les noeuds basaux de l'élément  $F(E)$ . Les noeuds A et D appartiennent respectivement aux segments du support  $[P, Q]$  et  $[R, S]$  et vérifient les relations :

$$\vec{PA} = r\vec{PQ} \Rightarrow (F(\vec{PA}) = rF(\vec{PQ})) \quad (I)$$

$$\vec{RD} = t\vec{RS} \Rightarrow (F(\vec{RD}) = tF(\vec{RS})) \quad (II)$$

Ces relations signifient que les noeuds basaux A et D de l'élément E sont attachés aux segments de support  $[P, Q]$  et  $[R, S]$ , et ils y demeurent attachés de la même façon après compaction.

On peut résumer ces relations topologiques en disant que la transformation  $F$  qui agit sur les contours des éléments est définie par la donnée des transformés des noeuds supérieurs B et C de chaque élément du modèle. Les transformés des noeuds basaux (A et D) sont simplement déduits des relations (I) et (II) et de la connaissance des transformés des points (P, Q, R, S).

Ainsi pour une unité cinématique qui comporte  $n$  éléments, on dénombre les noeuds basaux (de type A et D), il y en a  $(n+1)$  et les noeuds supérieurs (de type B et C) au nombre de  $(n+1)$ .

Si on considère le domaine modélisé dans son ensemble, en notant  $p$  le nombre d'unités cinématiques du domaine et en notant  $q$  le nombre total d'éléments, on dénombre qu'il y a  $(p+q)$  noeuds basaux (du type A et D) et autant de noeuds supérieurs (du type B et C). Ainsi, la détermination de la géométrie compactée est un problème qui consiste à positionner correctement les  $(p+q)$  noeuds supérieurs.

### 6.2.2 : Ecriture du critère de compaction

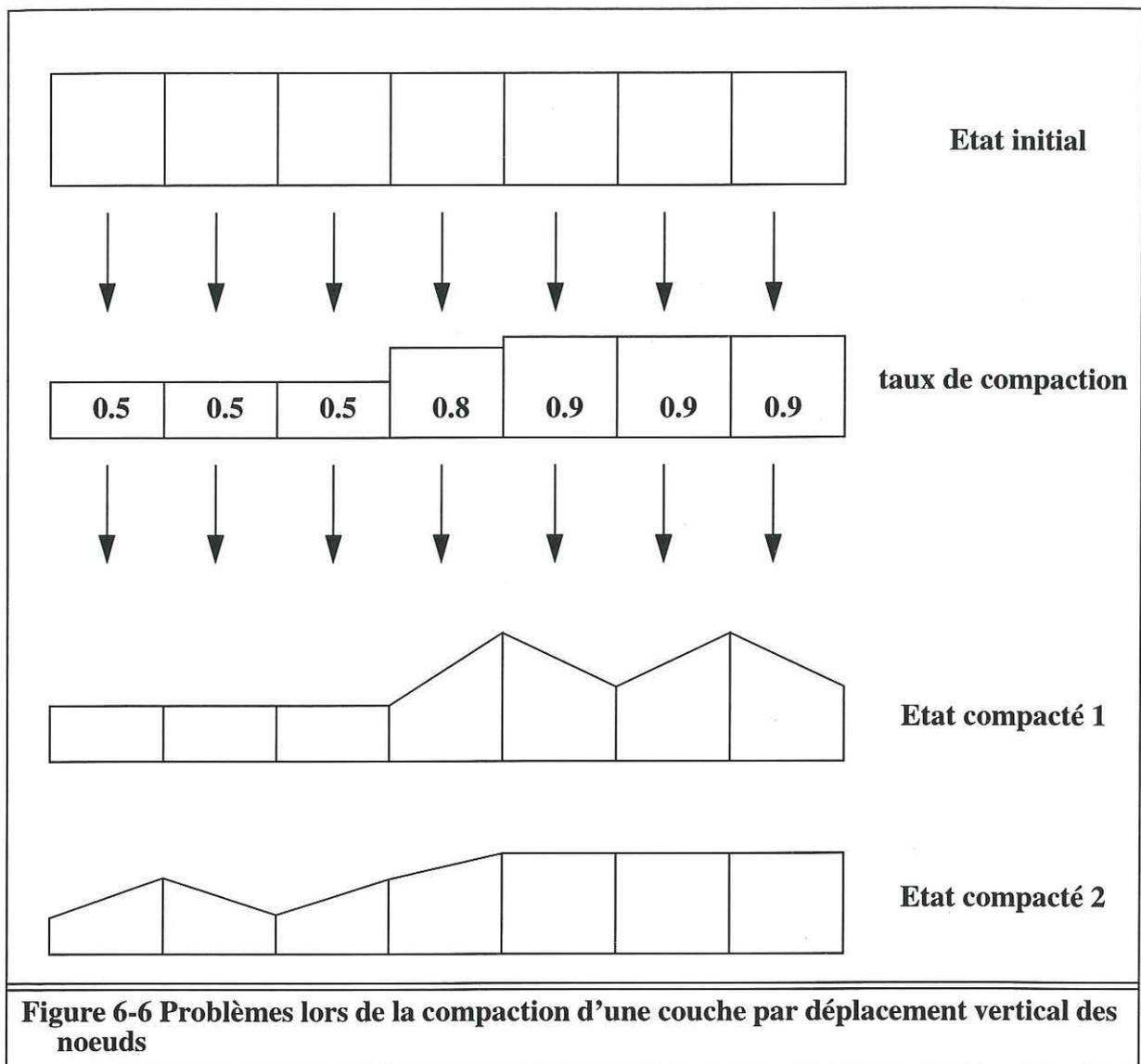
Le problème de la compaction géométrique du modèle a été reformulé en termes de localisation des noeuds supérieurs des éléments constituant le modèle.

Un modèle qui comporte  $p$  unités cinématiques et un total de  $q$  éléments, a  $(p+q)$  noeuds supérieurs. Comme on écrit seulement  $q$  relations d'aire (une relation l'aire par élément), il semble qu'il y ait suffisamment de degrés de liberté pour déplacer verticalement les noeuds supérieurs en conservant leur coordonnée horizontale  $x$ .

#### a ) Les degrés de liberté du problème de compaction

L'exemple de la figure 6-6 met en évidence les défauts de la méthode consistant à déplacer verticalement les noeuds supérieurs des éléments. Le problème est mathématiquement mal posé pour une unité cinématique qui contient  $n$  éléments et donc  $(n+1)$  degrés de libertés verticaux, on n'écrit en effet que  $n$  relations d'aire. Il existe donc un ensemble solution infini à un degré de liberté pour les géométries possibles de l'état compacté. De plus, on met en évidence sur l'exemple de la figure 6-6 qu'il est impossible d'obtenir une géométrie satisfaisante de l'unité cinématique compactée avec cette façon de procéder. En effet, avec les données géométriques de l'exemple, une solution acceptable devrait présenter deux paliers horizontaux aux deux extrémités de la couche compactée. On remarque qu'une telle solution n'existe pas et que la présence d'un palier horizontal à une des extrémités de la couche compactée implique nécessairement une géométrie ondulée à l'autre extrémité. Le fait de déplacer verticalement les noeuds supérieurs des éléments n'est pas suffisamment souple pour fournir des géométries compactées acceptables du point de vue géologique.

De façon à bien poser le problème géométrique de la compaction en termes mathématiques et pour obtenir des géométries géologiquement acceptables dans tous les cas de figure, on est amené à introduire dans un premier temps des degrés de liberté supplémentaires par rapport aux seuls degrés de liberté verticaux. On considère que les noeuds supérieurs peuvent être déplacés de façon quelconque par  $F$  dans le plan de coupe. Ainsi le nombre de degrés de liberté du problème géométrique devient égal à  $2(p+q)$ .



**Figure 6-6 Problèmes lors de la compaction d'une couche par déplacement vertical des noeuds**

### b) Critère de sélection de la solution géométrique du problème de compaction

Afin de sélectionner une unique solution géologiquement acceptable, on élabore un critère permettant de trier l'ensemble des solutions possibles. L'algorithme de sélection de la géométrie compactée est ensuite construit en minimisant itérativement le critère à partir de la géométrie initiale de l'état 0' (état virtuel chargé, non compacté) pour obtenir après convergence de l'algorithme l'état 1 compacté.

La détermination de la transformation F est réalisée par la localisation des noeuds supérieurs des éléments. Les inconnues du problème sont donc les nouvelles coordonnées  $(x_i, y_i)$  de ces noeuds.

La minimisation du critère est menée dans l'espace  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  des coordonnées des n noeuds supérieurs des éléments du modèle.

Définition du critère et de l'algorithme de minimisation :

- Chaque élément est représenté avec une aire calculée en fonction du changement de porosité.

On note  $I_j$  l'ensemble des noeuds qui forment le contour de l'élément  $E_j$  d'indice  $j$ . Les noeuds de l'ensemble  $I_j$  sont ordonnés et indicés dans le sens positif du contour de  $E_j$  :  $(\bar{P}_i)$ . Ainsi l'aire algébrique  $a_j$  de l'élément  $E_j$  est égale à :

$$a_j = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_j} \det(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1})$$

La transformation  $F$  est telle que l'aire  $a_j$  soit égale à  $A_j$  l'aire calculée en fonction du changement de porosité.

- On pénalise les ondulations dans la représentation du contour des unités cinématiques  $U_k$  à l'aide de la fonction  $\xi$  qui a été définie section 5.4.2 page 143.
- Lors de la minimisation du critère, on privilégie le déplacement vertical des noeuds par rapport au déplacement horizontal.

Le critère de sélection de la géométrie compactée du modèle s'écrit :

$$C = \lambda_1 \sum_{E_j} (a_j - A_j)^2 + \lambda_2 \sum_{U_k} \xi(U_k)$$

Les coefficients  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont choisis tels que :  $\lambda_1 \gg \lambda_2$ , de telle façon que le respect des aires élémentaires soit vérifié en priorité par rapport à la pénalisation des ondulations.

L'algorithme de minimisation du critère  $C$  est mené en modifiant la position des noeuds des éléments de façon itérative. Plutôt que de déplacer les noeuds des éléments dans la direction opposée au gradient du critère  $C$ , on choisit de privilégier le déplacement vertical des noeuds. On décompose le gradient du critère  $C$  en deux parties, une correspondant au gradient suivant les coordonnées  $x$  et l'autre au gradient suivant les coordonnées  $y$  :

$$\bar{\nabla} C = \bar{\nabla} C_x + \bar{\nabla} C_y$$

On modifie ensuite itérativement la géométrie en déplaçant les noeuds des éléments de la quantité :  $\mu_1 \bar{\nabla} C_x + \mu_2 \bar{\nabla} C_y$ .

Les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont choisis tels que :  $\mu_1 \ll \mu_2$ , ainsi le déplacement vertical des noeuds est privilégié par rapport au déplacement horizontal.

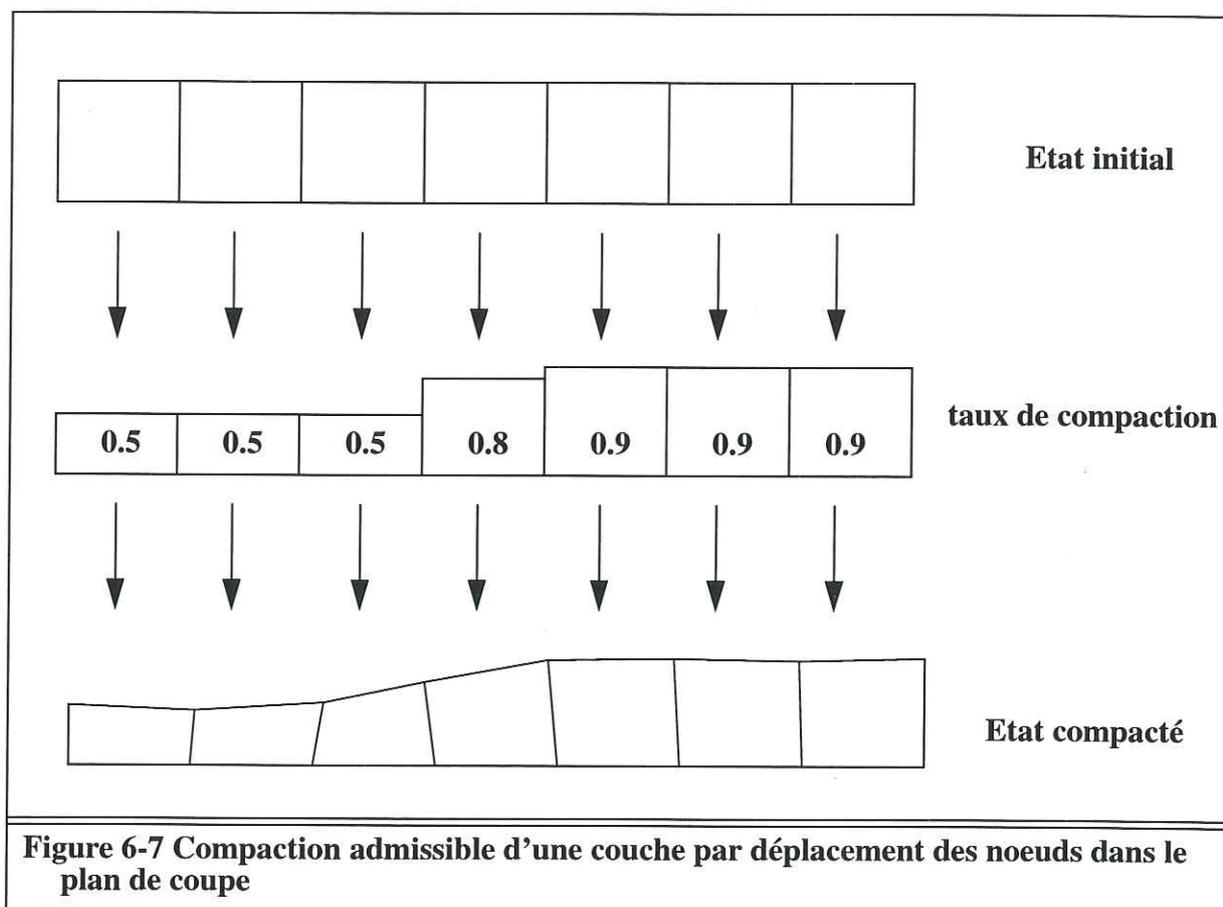


Figure 6-7 Compaction admissible d'une couche par déplacement des noeuds dans le plan de coupe

### 6.3 : Implémentation numérique

Les éléments sont constitués de noeuds supérieurs dont les coordonnées sont les variables  $(x_i, y_i)$  du problème géométrique de compaction et de noeuds basaux dont les coordonnées  $(u_j, v_j)$  sont déduites des variables précédentes.

Calcul du gradient du critère  $C$  :

Les composantes du vecteur gradient sont les dérivées partielles par rapport aux variables  $x_i$  et  $y_i$  de la fonction critère  $C$ .

$$\frac{\partial C}{\partial x_i} = 2\lambda_1 \sum_{E_j} (a_j - A_j) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + \lambda_2 \sum_{U_k} \frac{\partial \xi}{\partial x_i} (U_k)$$

Différentielle totale du critère  $C$  :

$$dC = \sum_{i \in I} \left( \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial y_i} dy_i \right) + \sum_{j \in J} \left( \frac{\partial C}{\partial u_j} du_j + \frac{\partial C}{\partial v_j} dv_j \right)$$

Les noeuds supérieurs  $\bar{P}_i$  sont indicés par les entiers de l'ensemble I et leurs coordonnées sont les variables  $(x_i, y_i)$ .

Les noeuds basaux  $\bar{Q}_j$  sont indicés par les entiers de l'ensemble J et leurs coordonnées sont les variables  $(u_j, v_j)$ .

Chaque noeud  $\bar{Q}_j$  est lié à deux noeuds  $\bar{P}_{i1}$  et  $\bar{P}_{i2}$  :

$$\bar{Q}_j = r_j \bar{P}_{i1} + (1-r_j) \bar{P}_{i2} \quad \Rightarrow \quad F(\bar{Q}_j) = r_j F(\bar{P}_{i1}) + (1-r_j) F(\bar{P}_{i2})$$

On a la relation différentielle :

$$d\bar{Q}_j = r_j d\bar{P}_{i1} + (1-r_j) d\bar{P}_{i2}$$

Avec les coordonnées des noeuds :

$$\begin{aligned} du_j &= r_j dx_{i1} + (1-r_j) dx_{i2} \\ dv_j &= r_j dy_{i1} + (1-r_j) dy_{i2} \end{aligned}$$

En éliminant les variables secondaires  $(u_j, v_j)$ , on différentie le critère C comme une fonction des seules variables principales  $x_i$  et  $y_i$  des noeuds  $\bar{P}_i$  :

$$dC = \sum_{i \in I} \frac{\partial C}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial C}{\partial y_i} dy_i + \sum_{j \in J} \frac{\partial C}{\partial u_j} (r_j dx_{i1} + (1-r_j) dx_{i2}) + \frac{\partial C}{\partial v_j} (r_j dy_{i1} + (1-r_j) dy_{i2})$$

De cette façon on évalue les dérivées partielles du critère C dans l'espace des variables  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  des coordonnées des n noeuds supérieurs des éléments du modèle.

## 6.4 : Exemple synthétique

On montre le couplage de la modélisation 2D de la déformation tectonique avec le phénomène de compaction par diminution de porosité sur un exemple théorique classique.

Les dimensions du domaine sont de 30 kilomètres pour l'extension latérale et de 4 kilomètres pour l'extension verticale. La faille, en forme de rampe rectiligne à 30 degrés relie un niveau de décollement à 2 kilomètres de profondeur avec la surface topographique. Le contexte tectonique est compressif et on modélise le développement d'un pli de cintrage sur rampe.

La compaction est modélisée en faisant l'hypothèse que le bassin est toujours à l'état d'équilibre du point de vue de la loi de comportement donnant la valeur de la porosité du matériau vis à vis de la profondeur. Ainsi, la porosité d'un sédiment correspond toujours à la profondeur maximale atteinte par le sédiment au cours de son histoire. Cette hypothèse revient à dire que l'écoulement des fluides interstitiels du fait de la diminution de porosité

est un phénomène rapide par rapport à la déformation tectonique et à l'enfouissement sédimentaire qui sont les phénomènes moteurs de la compaction.

Le matériau sédimentaire composant tout le bassin dans l'exemple synthétique modélisé est supposé homogène. La loi de comportement adoptée correspond à celle d'un grès classique qui est la suivante :

$$\phi = \phi(z) = \phi_0 \exp\left(-\frac{z}{z_0}\right)$$

dont les paramètres sont égaux à :

- $\phi_0 = 43,4 \%$
- $z_0 = 3,6 \text{ km}$

C'est à dire que la porosité en surface est de 43,4 %. A la profondeur de 3,6 km la porosité est multipliée par la quantité (1/e), soit une porosité de 15,96%.

On présente successivement sur la figure 6-8 la géométrie du bassin à l'état initial avant déformation, puis la géométrie de l'état final après calcul de la déformation pour un déplacement horizontal de 3 kilomètres en compression de la frontière latérale de l'échelle supérieure sans tenir compte du phénomène de compaction. On montre enfin sur la même figure le même exemple cinématique en tenant compte de l'effet géométrique de la compaction.

On observe que les éléments affectés par le phénomène de compaction sont ceux de l'unité autochtone qui sont enfouis sous l'unité allochtone. Les effets géométriques de la compaction sont uniquement perceptibles pour les sédiments peu profonds (initialement à une profondeur inférieure à 2,5 km). Ce phénomène s'explique par la forme de la loi porosité/profondeur adoptée, voir la figure 6-1. En effet, la porosité varie sensiblement par rapport à l'enfouissement pour les faibles profondeurs seulement. On constate également que la forme de la faille est assez nettement affectée du fait de la compaction. La rampe demeure quasiment rectiligne mais son inclinaison générale diminue, on mesure une inclinaison moyenne de 26 degrés au lieu des 30 degrés initiaux. On remarque aussi la tendance de la rampe à avoir une pente plus faible dans les zones les moins profondes. L'allure des sédiments autochtones sous le pli de rampe est également modifiée, ils prennent une configuration en demi-cuvette.

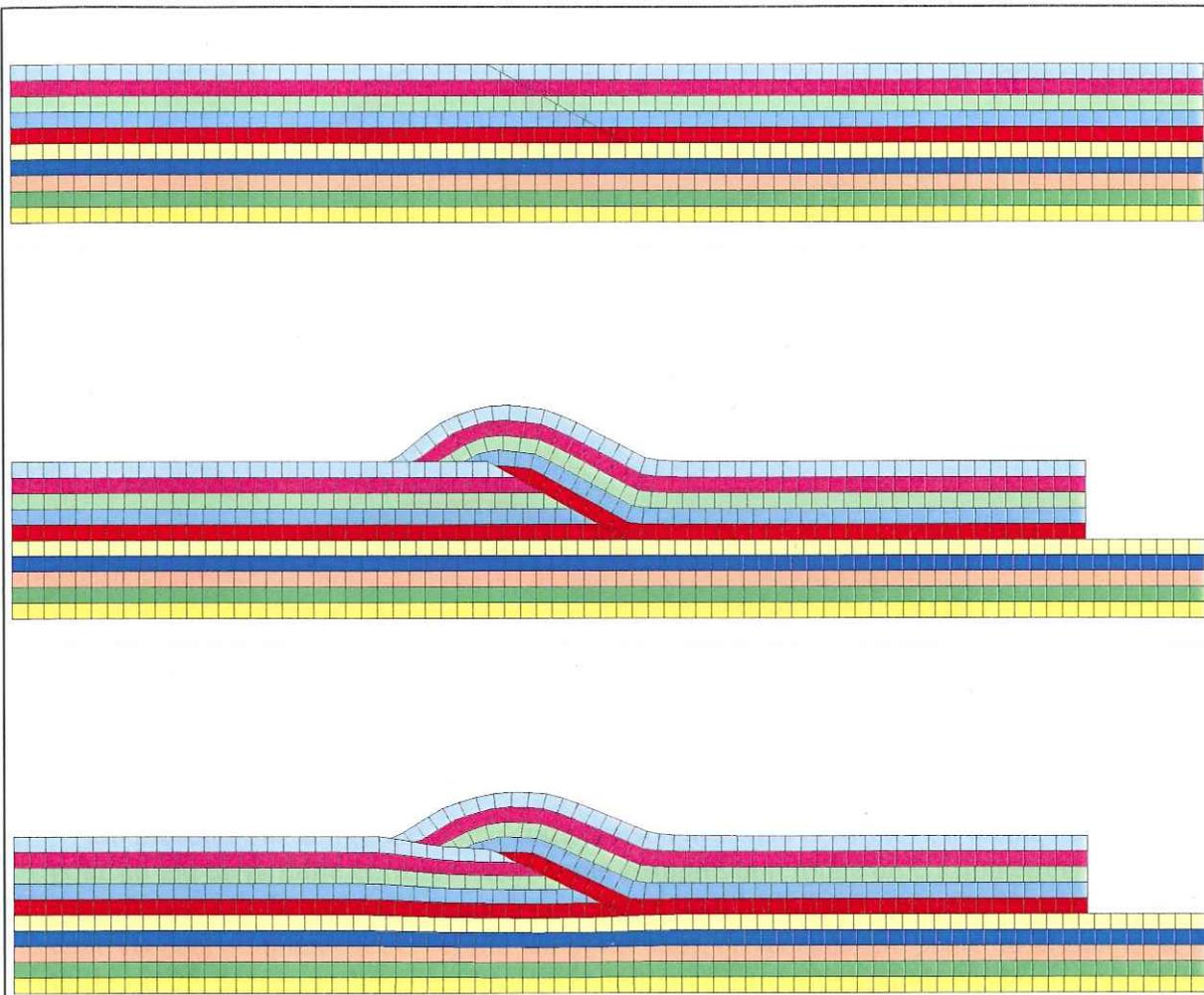
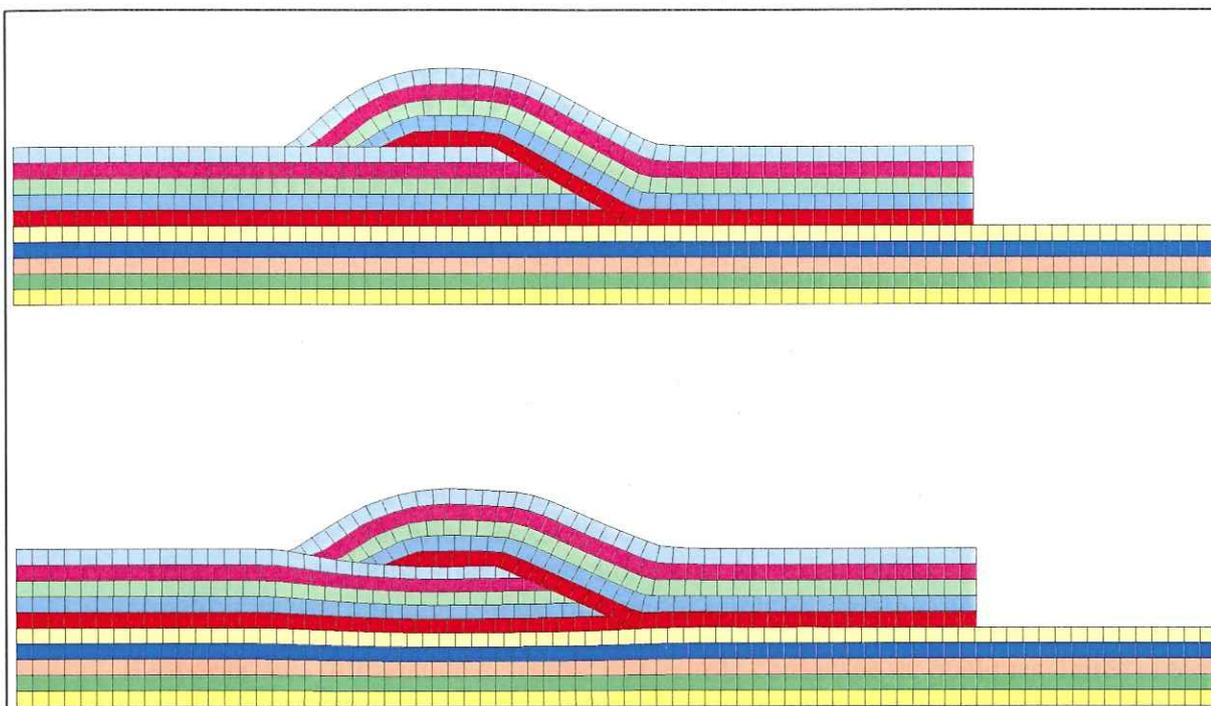


Figure 6-8 Effets géométriques de la compaction pour un pli de rampe



**Figure 6-9 Couplage de la déformation tectonique et de la compaction**

On présente sur la figure 6-9 une comparaison des états déformés du même bassin initial pour un jeu de la faille correspondant à une compression totale de 6 kilomètres. Les effets géométriques de la compaction que l'on observe sont les mêmes que pour l'exemple précédent, ils sont simplement accentués. En particulier, on mesure une pente de la rampe de la faille de 25 degrés au lieu des 30 degrés initiaux. La configuration en demi-cuvette des sédiments autochtones sous le pli de rampe est également accentuée.

# Chapitre 7 : Exemples de modélisations avec FOLDIS, perspectives et conclusion.

## 7.1 : Caractérisation du mécanisme de déformation.

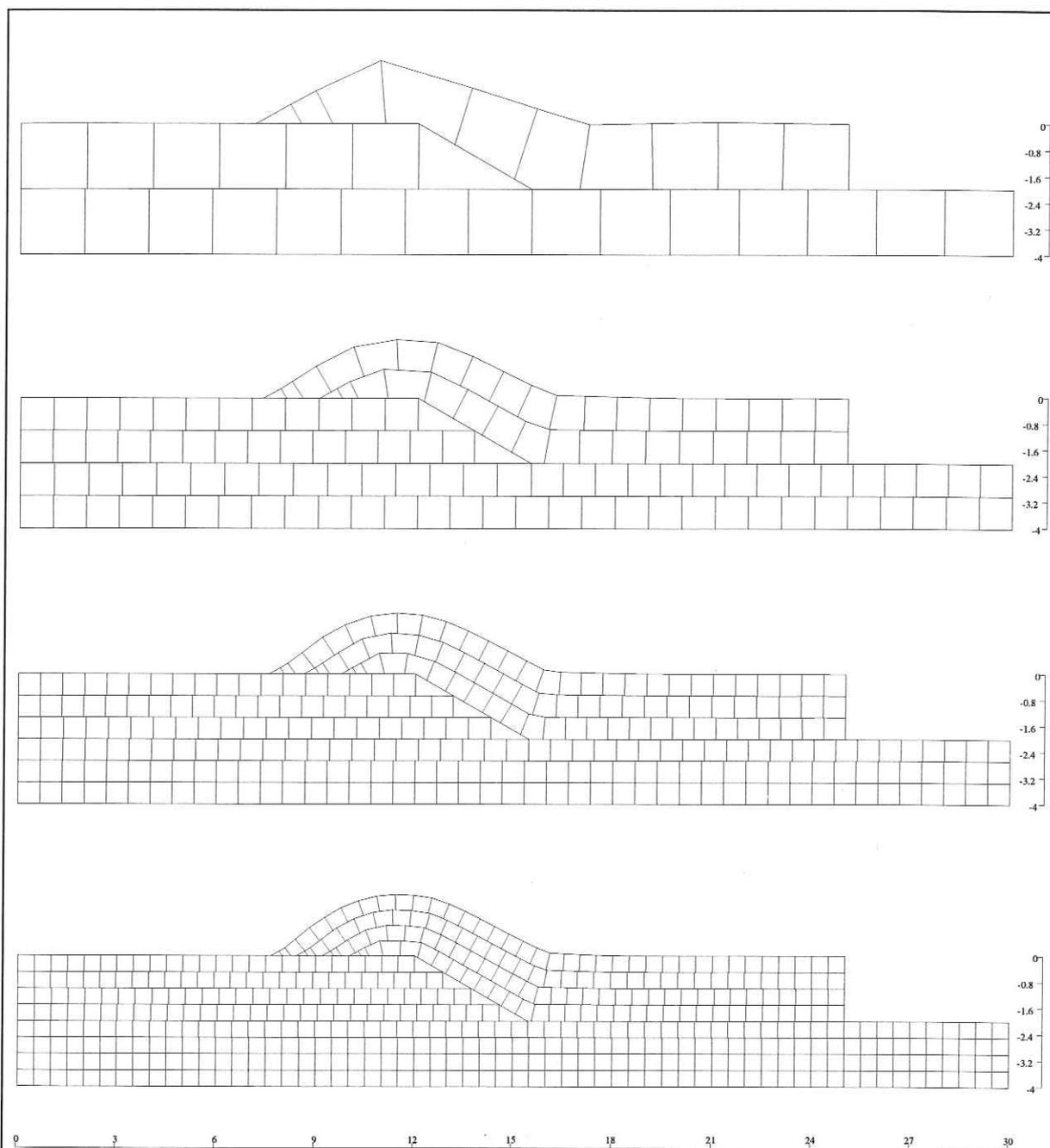
La modélisation de la cinématique ainsi que le mécanisme de déformation adoptés dans le programme FOLDIS sont étroitement liés au choix de la discrétisation des écailles en unités cinématiques. En effet, les unités cinématiques ont un comportement bien particulier, elles sont susceptibles de glisser librement les unes sur les autres et subissent une déformation interne continue qui est minimisée selon un certain critère géométrique.

Il est donc très différent de déformer une écaille composée de quelques unités cinématiques et de déformer une écaille constituée de nombreuses unités cinématiques. La principale différence réside dans la façon dont sont répartis les niveaux de glissement à l'intérieur de l'écaille. Dans le premier cas, il y a quelques niveaux de décollement aux interfaces des unités cinématiques à l'intérieur de l'écaille et dans le second cas les niveaux de décollement sont plus nombreux et diffus dans l'écaille.

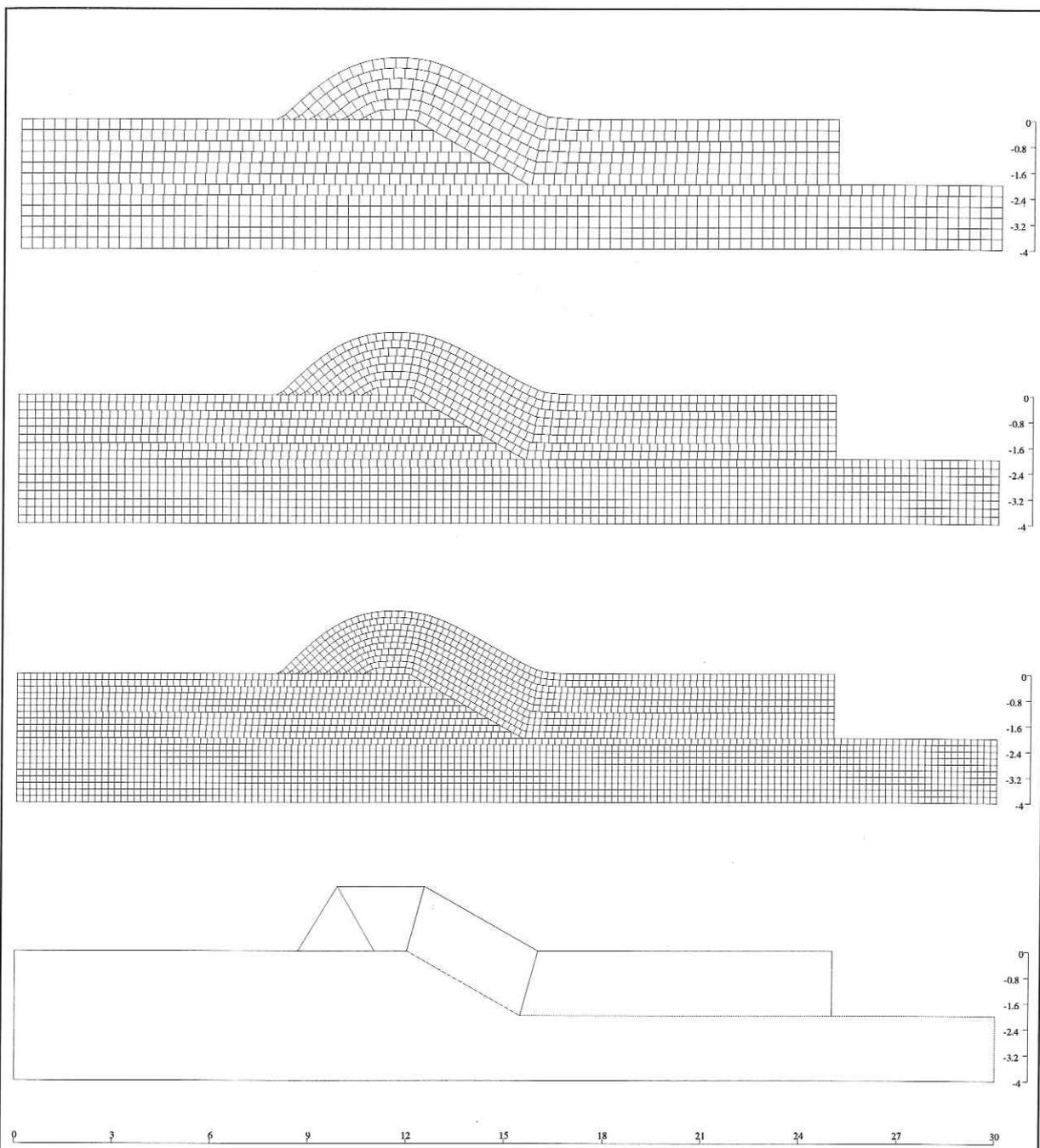
On modélise un pli de rampe classique dont on présente les résultats figure 7-1 et figure 7-2. La géométrie de la rampe est rectiligne et fait un angle de 30 degrés avec l'horizontale, elle relie un niveau de décollement à 2 kilomètres de profondeur avec la surface topographique. L'exemple est modélisé en tectonique compressive, le paramètre cinématique est le même pour chaque modélisation, il s'agit d'un déplacement de 5 kilomètres de la frontière latérale de l'écaille supérieure (hanging-wall). On teste et on compare une série de modélisations pour lesquelles l'écaille supérieure est découpée de façon régulière en 1, 2, 3, 4, 6, 8 ou 10 unités cinématiques selon la modélisation. Chaque unité cinématique modélise le comportement d'une couche ou d'une série de couches formant une unité compétente qui se déforme peu et de façon isopaque, l'interface entre les unités cinématiques est l'endroit où se localise la déformation discontinue par glissement. On compare, sur la figure 7-2, les géométries modélisées avec le logiciel FOLDIS avec la modélisation du même exemple cinématique modélisé à l'aide du logiciel THRUSTPACK.

On observe que sur la série d'exemples modélisés avec FOLDIS, on obtient assez rapidement une convergence pour les géométries du pli de rampe et pour le relief obtenus. En effet, les exemples modélisés avec 6, 8 et 10 unités cinématiques sont quasiment identiques au regard de la topographie. L'évolution observée sur les exemples modélisés avec 1, 2, 3 et 4 unités cinématiques est une disparition progressive de l'aspect anguleux et irrégulier des contours des unités cinématiques. On remarque également une tendance des plis modélisés à se rapprocher de plis concentriques à mesure que la discrétisation devient plus fine. La conséquence de cette évolution est que le pli modélisé avec peu d'unités cinématiques est plus étendu qu'un pli modélisé avec de nombreuses unités cinématiques, celui-ci est en

effet plus ramassé avec des formes circulaires et régulières.



**Figure 7-1 Pli de rampe modélisé avec FOLDIS pour différentes épaisseurs des unités cinématiques (2 km, 1 km, 2/3 km et 1/2 km)**



**Figure 7-2 Pli de rampe modélisé avec FOLDIS pour différentes épaisseurs des unités cinématiques (1/3 km, 1/4 km et 1/5 km) puis avec THRUSPACK**

Outre l'impact de la discrétisation sur le mécanisme de déformation, l'autre important facteur à prendre en compte pour analyser les exemples modélisés est que la discrétisation influe sur la précision géométrique des tracés. Ainsi, dans le cas de la discrétisation la plus grossière, la géométrie du pli de rampe est représentée à l'aide d'un petit nombre d'objets géométriques de bases. La tête de pli est modélisée par seulement deux éléments, ce qui

signifie que sa géométrie à la topographie est décrite par une ligne polygonale comportant seulement trois points. De même, le coeur du pli de rampe est modélisé avec simplement quatre éléments, soit une ligne polygonale de cinq points pour en représenter le contour à la topographie. Pour que la précision géométrique du tracé soit satisfaisante il est nécessaire d'avoir une discrétisation suffisamment fine des couches.

Les éléments pseudo-quadrilatères qui constituent la discrétisation des unités cinématiques ne doivent pas être quelconques, ils doivent être pratiquement isodiamétriques pour que le comportement géométrique et numérique du modèle soit satisfaisant. On voit donc que l'épaisseur des unités cinématiques du modèle qui conditionne son comportement cinématique est liée du fait de la forme particulière des éléments à l'espacement des noeuds de discrétisation sur les contours des unités cinématiques. En fait, l'épaisseur des unités et l'espacement des noeuds définissant les contours sont du même ordre de grandeur. La précision géométrique du tracé des différents contours dans le modèle FOLDIS est donc dépendante du choix de la description des écaïlles en unités cinématiques. Cependant si on prend soin de ne pas modéliser d'unités cinématiques trop épaisses, on s'affranchit rapidement des problèmes de précision géométrique des tracés.

Sur la figure 7-2, on observe que la modélisation du pli de rampe avec THRUSTPACK est vraiment différente de celles obtenues avec FOLDIS. En effet, la modélisation du pli en «kinks» aboutit à la représentation de formes segmentées et anguleuses pour les strates et les contours de couches. Au contraire, la modélisation réalisée avec une discrétisation suffisamment fine dans FOLDIS conduit à produire des plis anticlinaux du type concentrique au niveau des points de rupture de pente de la faille. La reconstruction des parties de l'écaïlle qui reposent sur la rampe ou sur les plats de la faille est cependant assez proche dans les deux modèles. En effet, les strates sont alors reconstruites de façon rectiligne et parallèlement à la faille. On remarque que le pli modélisé par THRUSTPACK est moins étendu latéralement, il est de forme plus massive et ramassée que celui produit avec FOLDIS.

## 7.2 : Potentialités et limites géométriques du modèle.

Le modèle FOLDIS autorise le découpage du domaine par des failles de directions quelconques. Ainsi, il est possible de définir des failles de vergences opposées, vers l'avant-pays et vers l'arrière-pays. La combinaison de telles vergences alliées à une tectonique compressive peut conduire à la définition d'un compartiment surélevé: un «pop-up» comme le montre la figure 7-3.

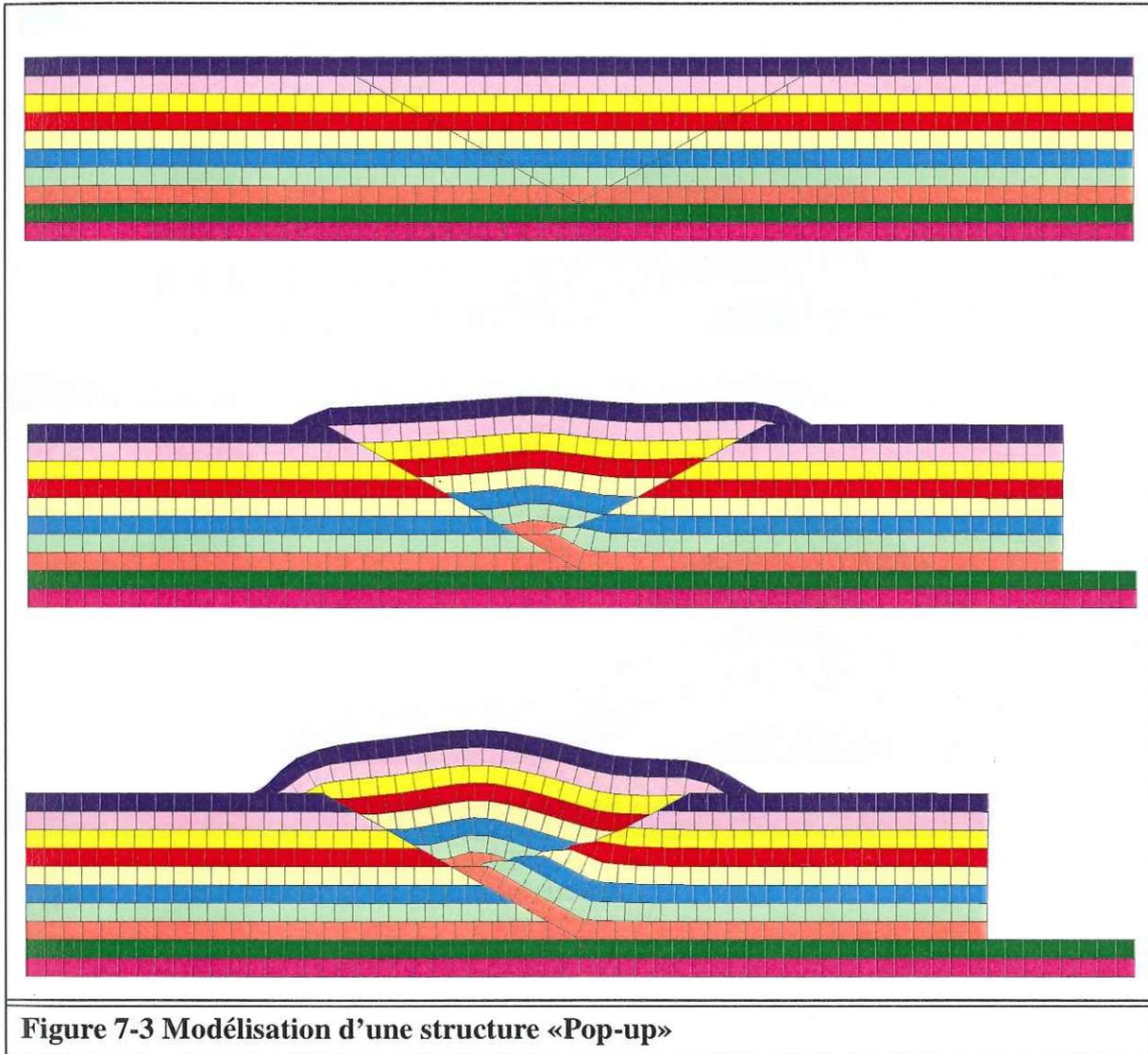
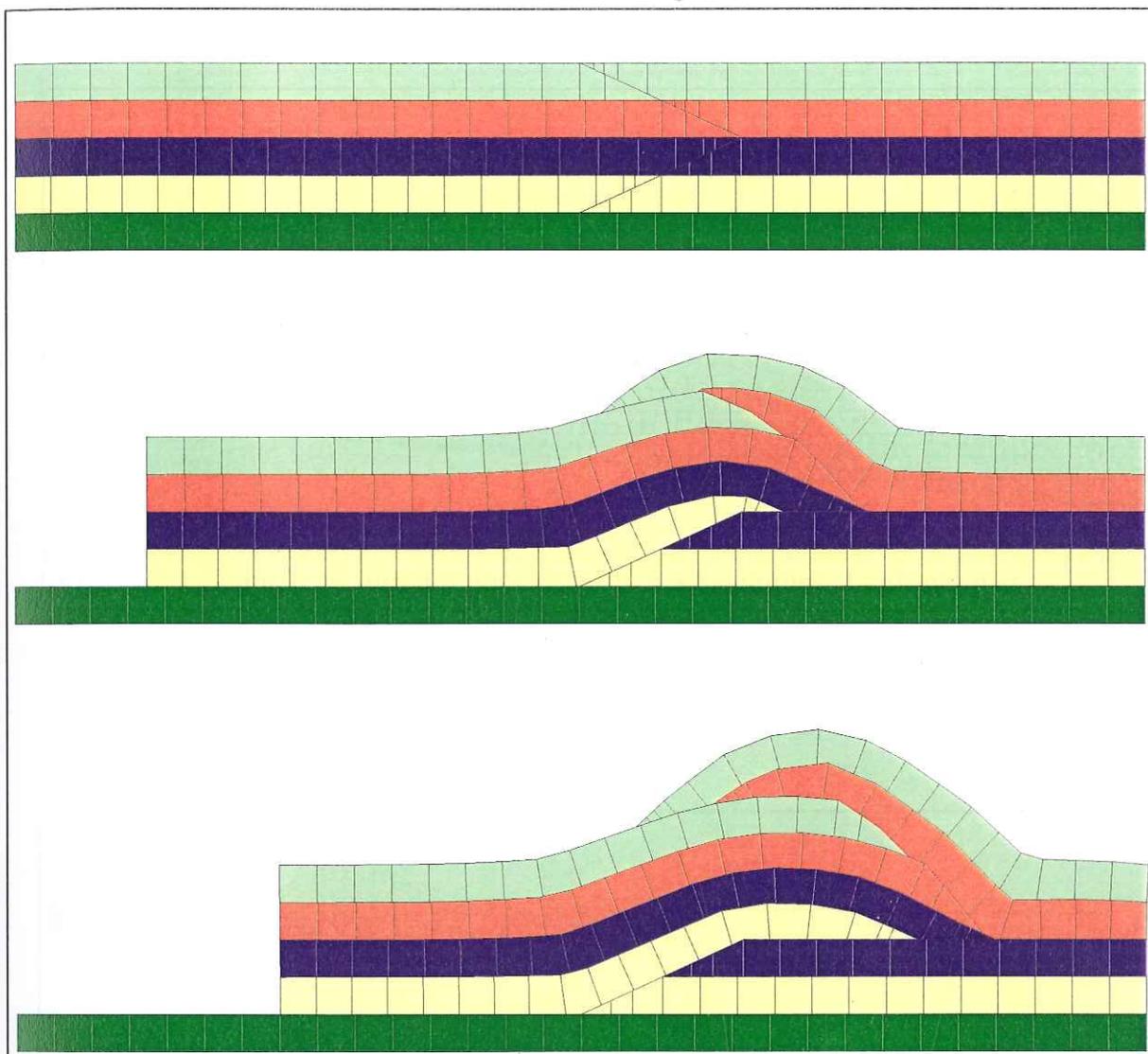


Figure 7-3 Modélisation d'une structure «Pop-up»

Le potentiel du modèle tient dans sa souplesse géométrique. On peut attribuer des formes très diverses aux écailles du fait de leur découpage par les failles. Ainsi, il est tout à fait possible de modéliser des géométries complexes où la vergence des failles n'est pas exclusivement tournée vers l'avant-pays. On peut envisager de reproduire des exemples de bassins comportant des failles à vergences opposées qui provoquent des rétrochevauchements.

De même, on peut envisager de modéliser des géométries de failles plus compliquées pour lesquelles une écaille pénètre comme un coin à l'intérieur d'une autre. La figure 7-4 montre un tel exemple de coin (intercutaneous wedge), la géométrie initiale de l'exemple

est complexe du point de vue du branchement des différentes failles.

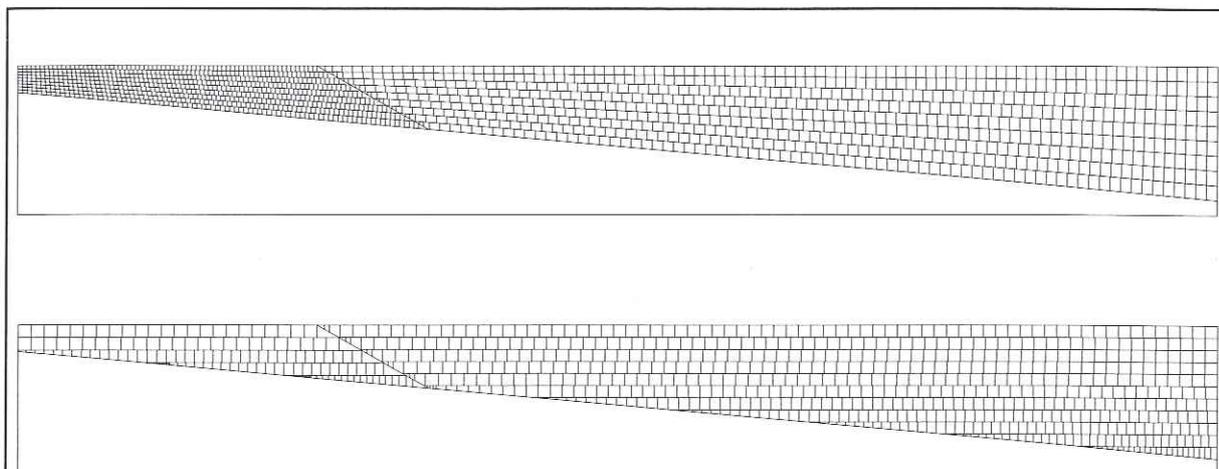


**Figure 7-4 Modélisation d'un coin intercutané**

Les potentialités du modèle FOLDIS ne résident pas seulement dans la flexibilité de la représentation géométrique des failles découpant le bassin. Un autre important aspect est la possible prise en compte d'une stratification complexe. Les conséquences sur le modèle d'une stratification particulière ont été mises en évidence section 7.1 page 162. Ainsi les conséquences d'une stratification non parallèle ne sont pas exclusivement géométriques, en effet le mécanisme de déformation dépend de la distribution des limites des unités cinématiques car elles localisent le glissement. Il est donc possible reproduire le comportement discontinu d'ensembles sédimentaires qui glissent les uns par rapport aux autres. Pour cela, on regroupe les ensembles sédimentaires au sein d'unités cinématiques distinctes.

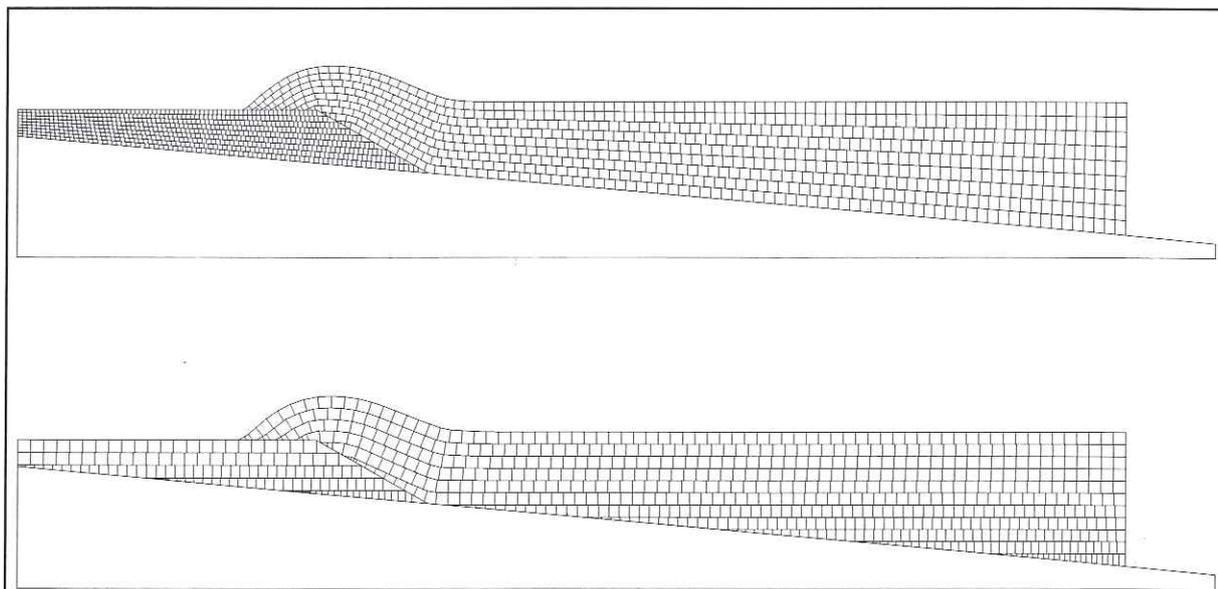
Le fait de tenir compte de la direction de glissement liée à une stratification non nécessairement parallèle distingue nettement le modèle FOLDIS des autres modèles cinématiques géométriques. THRUSTPACK, par exemple, suppose que les écailles sont

uniformément stratifiées, ce qui facilite le calcul de la déformation cisailante qui est constante par compartiments dans les écailles.



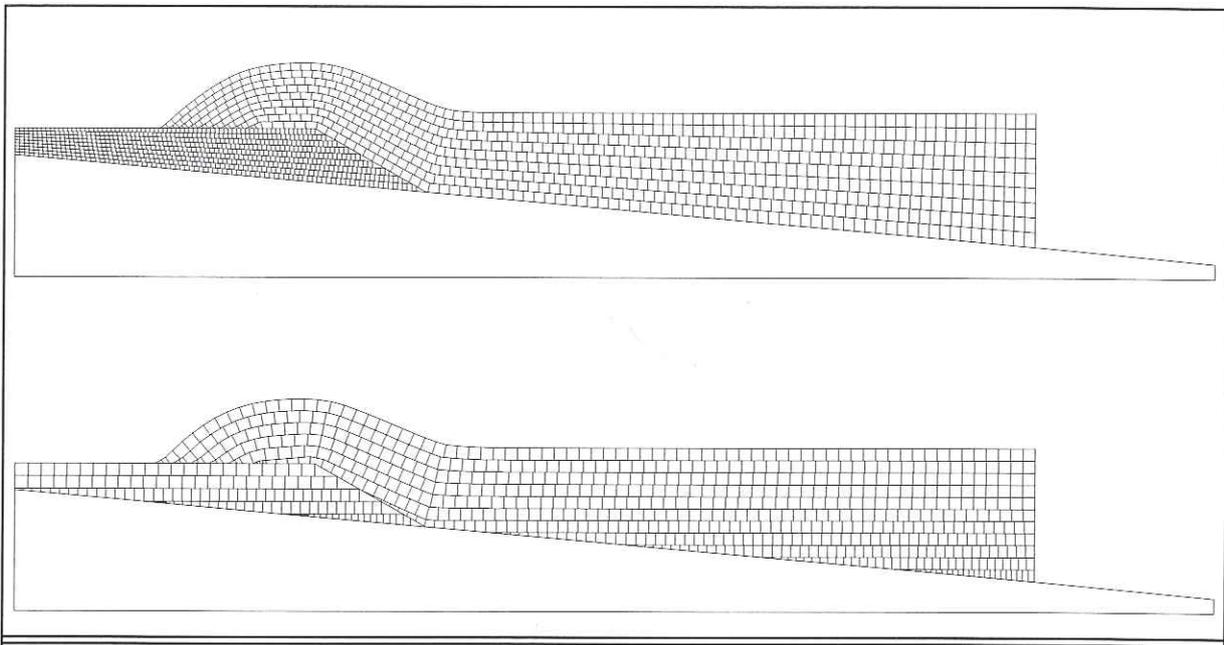
**Figure 7-5 Géométries initiales pour des couches isopaques et anisopaques**

On modélise un pli de rampe constitué de couches anisopaques. La figure 7-5 montre la géométrie initiale de l'écaille présentant des variations latérales d'épaisseur. On présente en parallèle sur la même figure une configuration identique de la faille dans le modèle mais correspondant à une stratification isopaque.

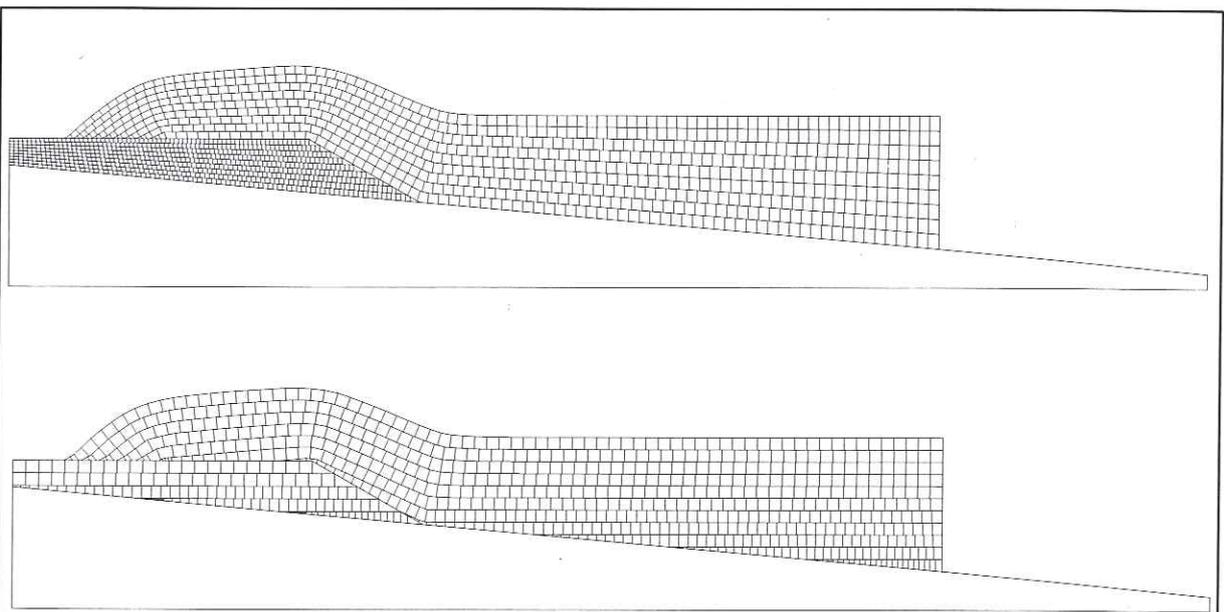


**Figure 7-6 Géométries déformées précoces pour des couches isopaques et anisopaques**

La figure 7-6 montre un stade précoce du développement du pli de rampe. On compare les géométries obtenues dans les configurations isopaques et anisopaques. Les différences géométriques sont minimales entre les deux configurations.



**Figure 7-7 Géométries déformées intermédiaires pour des couches isopaques et anisopaques**

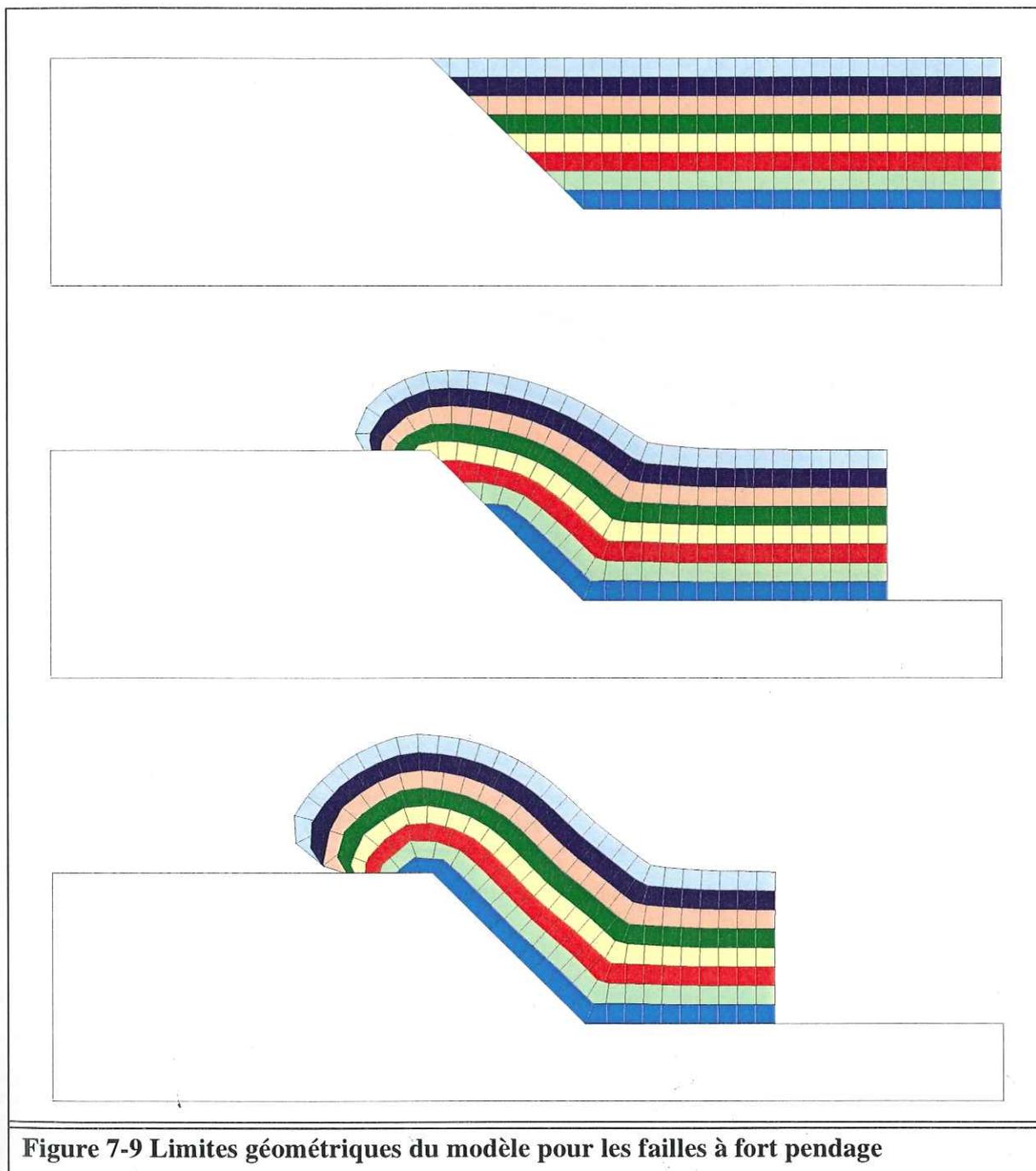


**Figure 7-8 Géométries déformées finales pour des couches isopaques et anisopaques**

Les géométries intermédiaire, figure 7-7, et finale, figure 7-8, montrent des différences minimales concernant les reliefs obtenus entre la modélisation des cas isopaques et anisopaques. En effet, sur ces exemples, les directions stratigraphiques sont quasiment identiques puisqu'elles sont horizontales dans le cas isopaques et sub-horizontales dans le cas anisopaques. De plus, le nombre d'unités cinématiques est le même dans les deux cas modélisés. Ces deux raisons font que les plis de rampes obtenus sont quasiment identiques. La seule

différence concerne la répartition fidèle des couches en éventail sédimentaire à l'intérieur du pli pour le cas anisopaque. Pour que la différence cinématique soit notable entre un cas isopaque et anisopaque il faut que les contrastes d'épaisseur soient plus marqués ou que les directions stratigraphiques soient différentes.

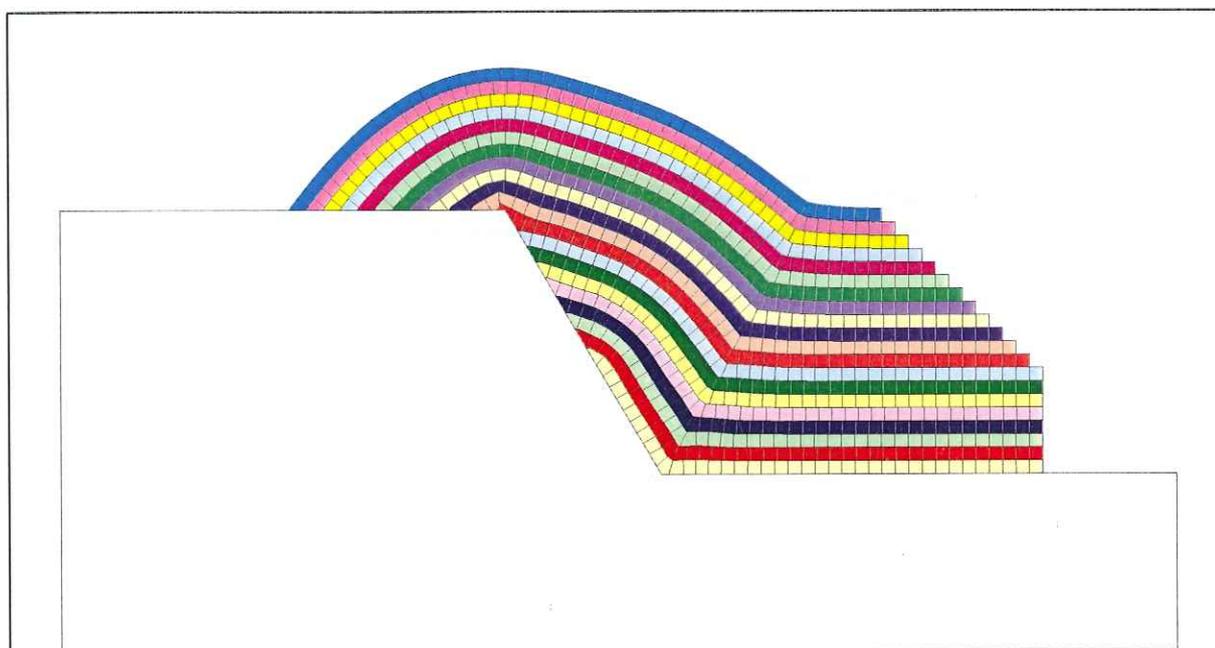
De la même façon que dans le modèle cinématique géométrique de Suppe sur lequel est basé le logiciel THRUSTPACK, il existe des configurations géométriques pour lesquelles le modèle connaît des limites, voir la figure 7-9.



Ainsi, la modélisation d'une faille inverse de fort pendage produit une géométrie de pli

de rampe problématique. On observe en effet pour un jeu suffisamment important de la faille une forme enroulée caractéristique de la tête de pli. Les couches supérieures de l'écaïlle ne reposent alors pas sur le plat de la faille comme c'est toujours le cas avec des failles de plus faible pendage. En fait, il apparaît qu'il y a un déficit de matière dans la partie supérieure de la tête de pli pour que la géométrie de pli obtenue soit satisfaisante.

Il existe plusieurs façons de surmonter cette difficulté de modélisation de la cinématique du plissement compte tenu de la forte pente de la rampe. On peut envisager un mécanisme de déformation différent des sédiments, en particulier un mécanisme lié à une diminution des épaisseurs des couches supérieures de l'écaïlle qui sont situées sur l'extrados du pli. Il est également possible de conserver le même mécanisme de plissement isopaque utilisé dans le modèle FOLDIS et de modifier les conditions à la limite du problème pour obtenir une géométrie de pli satisfaisante. La figure 7-10 montre une telle façon de procéder. On déplace davantage la partie supérieure de l'écaïlle que la partie inférieure, de cette façon la géométrie du pli modélisé est acceptable.



**Figure 7-10** Glissement différentiel à l'arrière

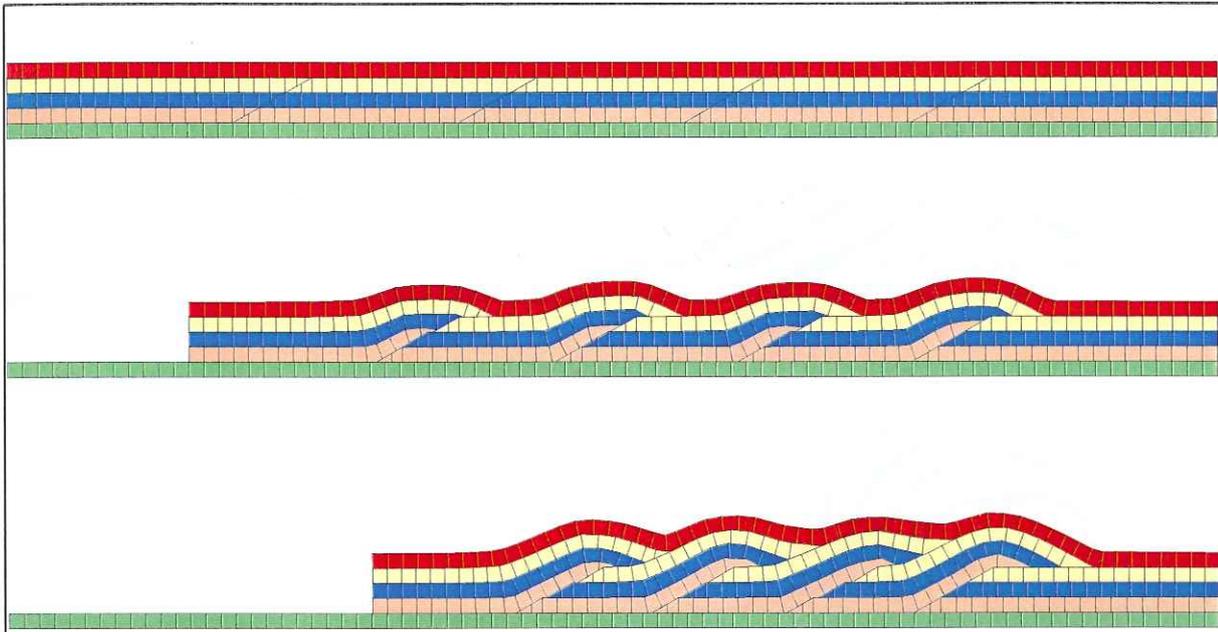
Ce glissement différentiel à l'arrière de l'écaïlle est analogue au «back-shear» du modèle THRUSTPACK.

### 7.3 : Différents styles de duplex.

Un duplex est une structure tectonique complexe qui se développe entre un niveau de décollement basal (floor thrust) et un niveau de décollement somital (roof thrust). Des rampes relient ces deux niveaux de décollement. Le duplex est l'empilement des écaïlles tectoniques imbriquées qui se développe lors de la compression tectonique.

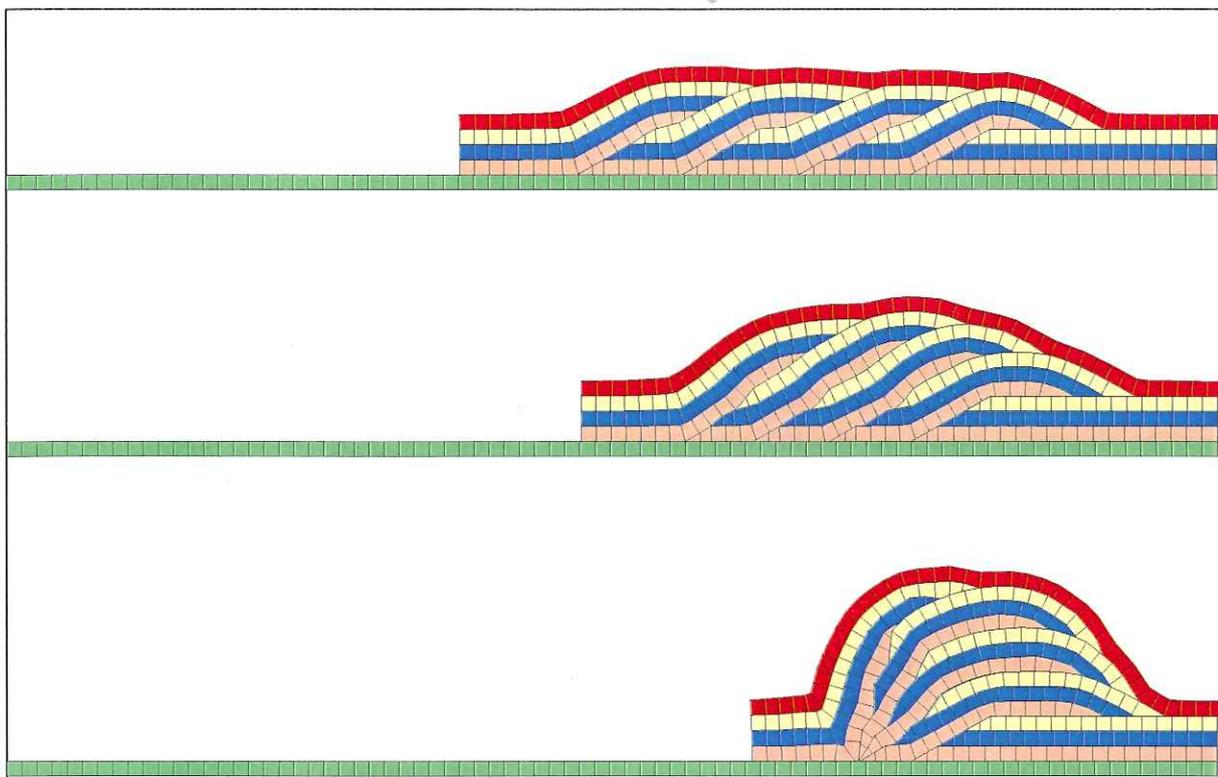
Les facteurs dont dépend la forme du duplex sont :

- l'angle des rampes.
- l'espacement des rampes.
- le déplacement des différentes écailles.



**Figure 7-11 Différents types de duplex: géométrie initiale, anticlinaux de rampes indépendants, et duplex versant vers l'arrière-pays.**

Sur la figure 7-11 on modélise différents types de duplex idéaux et hypothétiques qui correspondent à une même valeur du déplacement appliqué aux différentes écailles. A côté de la géométrie initiale faillée mais non déformée tectoniquement, le fonctionnement des rampes en failles inverses d'un même petit déplacement entraîne la formation d'anticlinaux de rampes indépendants. Pour une valeur plus importante de la compression également répartie entre les différentes écailles, les anticlinaux de rampes interfèrent et engendrent la formation d'un duplex à vergence vers l'arrière-pays.



**Figure 7-12 Différents styles de duplex pour une compression croissante: vrai duplex, chevauchement d'anticlinaux de rampe à vergence vers l'avant-pays, empilement d'écailles en antiforme**

Sur la figure 7-12, on étudie toujours l'influence du facteur géométrique: quantité de déplacement des différentes écailles sur le style de la structure duplex, les autres facteurs géométriques restent invariants. La première figure montre une structure pour laquelle l'imbrication des écailles est telle que le niveau de décollement supérieur devient tabulaire, il s'agit du style appelé «vrai duplex». Une compression plus importante sur la deuxième figure aboutit à un style de duplex qui correspond à un chevauchement d'anticlinaux de rampe à vergence vers l'avant-pays. Enfin sur la troisième figure on présente un style de duplex pour lequel la compression est encore plus importante, on aboutit à un empilement des écailles tectoniques: «antiformal stack».

Dans la modélisation présentée, les différents styles de duplex sont développés à partir d'une unique géométrie initiale théorique, symétrique et périodique. En effet, les rampes ont toutes la même inclinaison de 30 degrés et l'espacement qui les sépare est constant. On obtient ainsi différents styles théoriques de duplex pour lesquels les structures tectoniques sont régulières. Il convient de noter que la géométrie du duplex dépend également de la forme des écailles qui peut être caractérisée par la valeur du rapport hauteur sur longueur de l'écaille. Dans les exemples naturels, les configurations obtenues sont beaucoup plus complexes du fait du caractère irrégulier du découpage des écailles par les failles. De plus, l'étude de la mise en place des différents styles de duplex est un problème cinématique important. En effet, l'ordre d'activation successif ou simultané des différentes failles conduit

à des géométries intermédiaires très différentes. °

## 7.4 : Perspectives

### 7.4.1 : Modélisation de la croissance d'une faille.

On envisage dans ce chapitre la possibilité pour les failles qui découpent le domaine d'apparaître et de voir leurs trajectoires modifiées au cours de la modélisation. L'apparition d'une discontinuité dans les sédiments peut être envisagée de différentes façons suivant les conditions mécaniques, la nature des matériaux et l'échelle de temps à laquelle est menée l'étude. Ainsi, la modélisation de l'apparition d'une faille peut être réalisée en une seule fois ou au contraire accomplie progressivement dans le cas d'un pli de propagation.

#### a) Développement de failles dans le modèle

Il est possible de faire apparaître une nouvelle faille dans le modèle simplement en scindant chaque écaille traversée par la nouvelle faille en deux nouvelles écailles. Ce découpage implique une redéfinition des écailles.

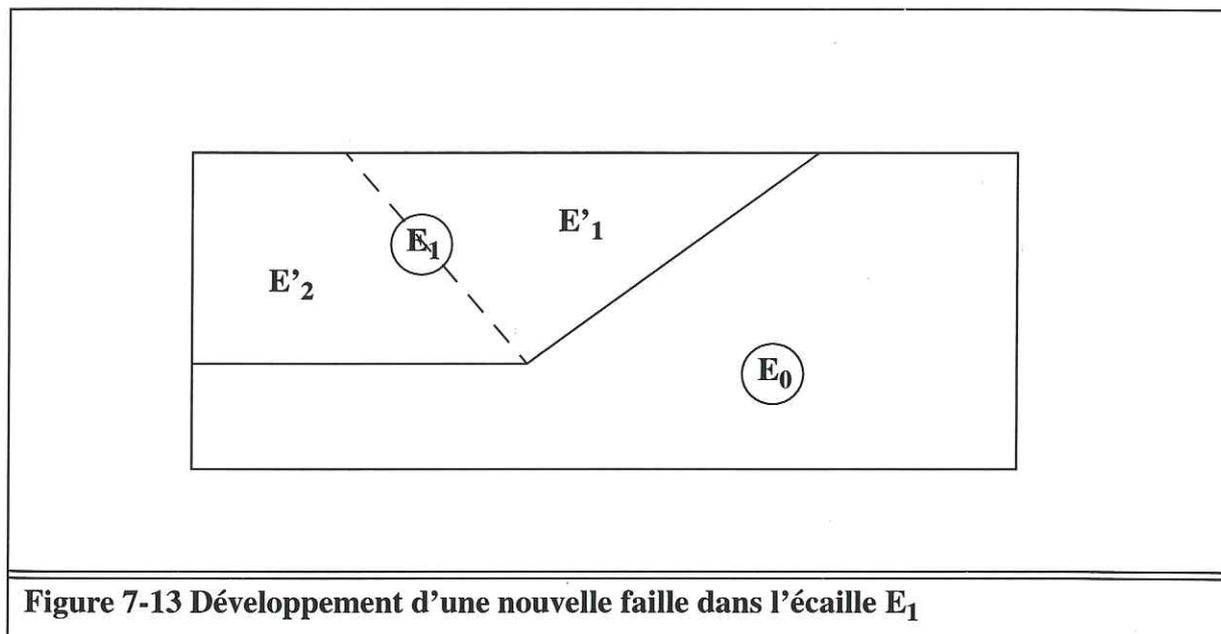


Figure 7-13 Développement d'une nouvelle faille dans l'écaille  $E_1$

L'exemple de la figure 7-13 illustre le découpage de l'écaille  $E_1$  par une nouvelle faille dans une direction antithétique par rapport à celle de la rampe. Il faut ensuite découper les unités cinématiques constituant l'écaille  $E_1$  avec la faille antithétique, de façon à obtenir les unités cinématiques composant les deux nouvelles écailles  $E'_1$  et  $E'_2$ .

## b) Glissement différentiel le long d'une discontinuité (pli de propagation)

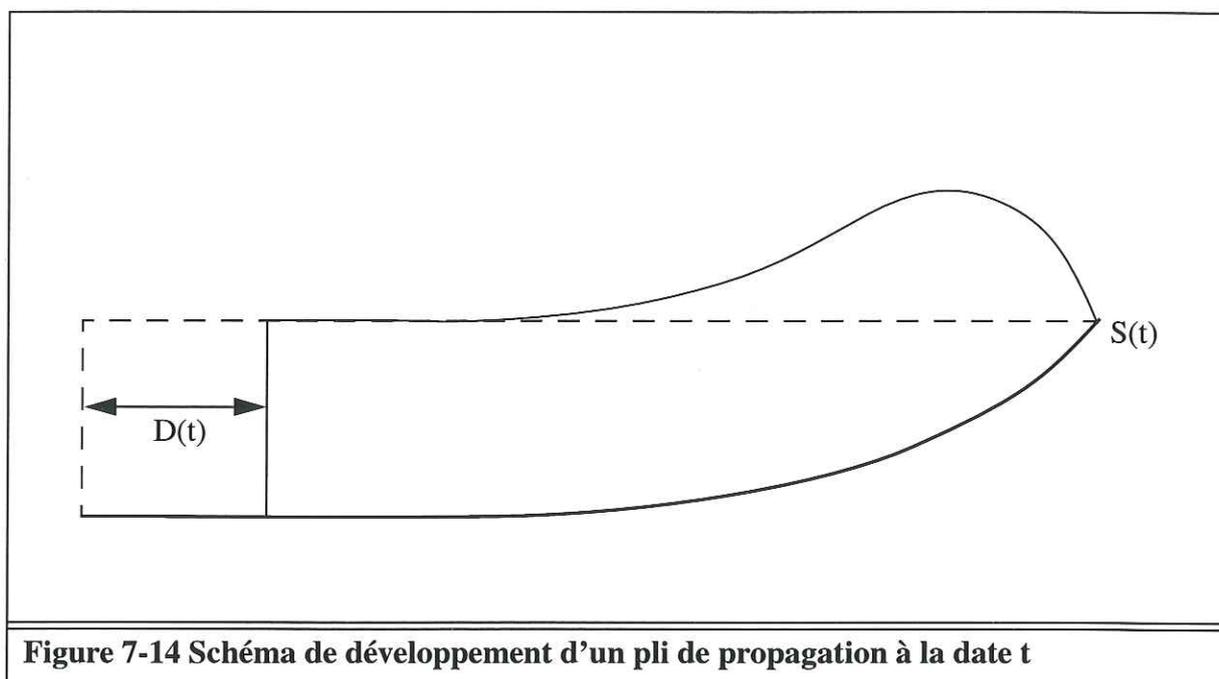


Figure 7-14 Schéma de développement d'un pli de propagation à la date t

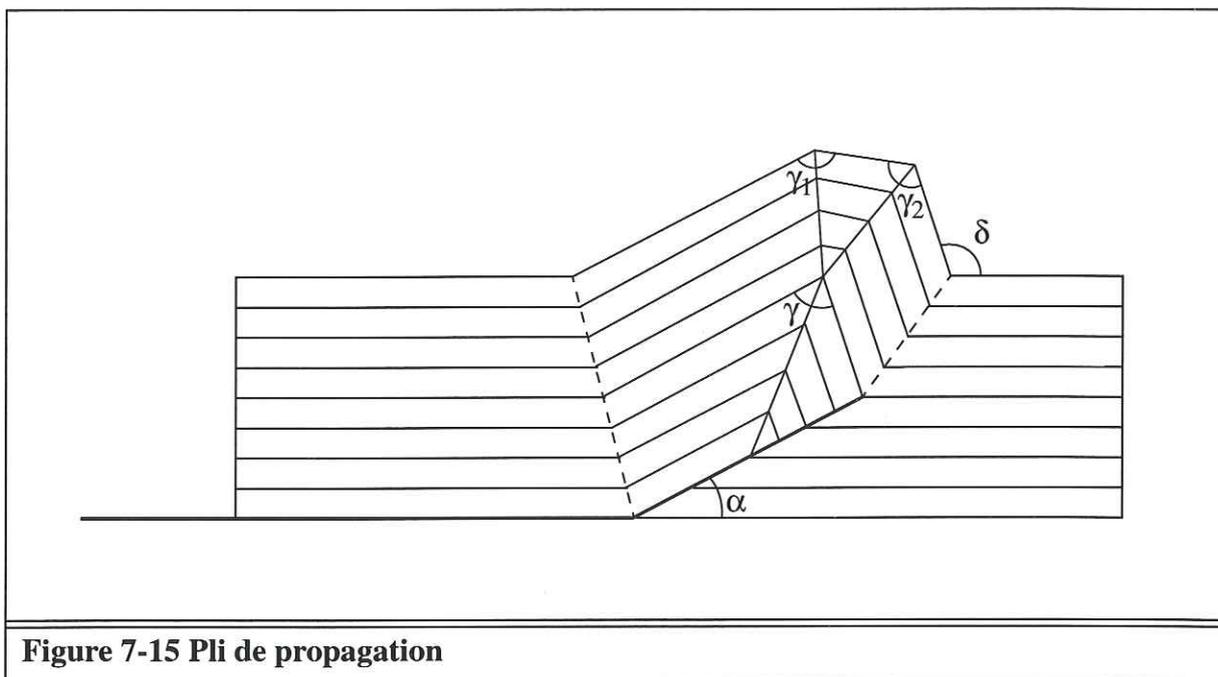
La figure 7-14 montre les principes du développement d'un pli de propagation. Il s'agit du développement de la faille qui prolonge sa trajectoire au sein des sédiments par déplacement du point  $S(t)$  de façon synchrone à la formation du pli par déplacement de la frontière latérale de l'écaïlle supérieure de la longueur  $D(t)$ . La faille est le lieu d'une déformation discontinue entre les compartiments supérieur et inférieur de sédiments. L'extension de la faille est limitée, elle est aveugle et se termine à la date  $t$  au point  $S(t)$ , «tip point». On peut mesurer le glissement du compartiment supérieur par rapport au compartiment inférieur à la date  $t$  le long de la faille par la distance  $d(s,t)$  séparant les deux points matériels initialement confondus à la date  $t=0$  et à l'abscisse curviligne  $s$  sur la faille. La mesure du glissement à une date fixée  $t_0$ ,  $d(s,t=t_0)$ , est nécessairement variable le long de la faille. En effet, le glissement évolue d'une quantité  $D(t_0)$  à une extrémité de la faille jusqu'à un glissement nul au niveau du point terminal  $S(t_0)$  à l'autre extrémité.

La figure 7-15 montre la construction géométrique du modèle de pli de propagation d'après Jamison -1987- [30], Mercier -1995- [37] et [38]. Le mécanisme de déformation des sédiments adopté dans ce modèle de pli de propagation est le même que dans le modèle de Suppe. Il s'agit du plissement isopaque en «kinks» d'une série à stratification continûment parallèle. La façon de procéder pour déterminer la cinématique de ce type de pli de propagation repose sur les hypothèses géométriques suivantes:

- La faille se développe à partir d'un niveau de décollement basal dans une direction précise définie par l'angle  $\alpha$ .
- Les vitesses de croissance de la faille et du pli sont liées, il existe un coefficient de proportionnalité constant  $k$  entre ces deux vitesses:

$$\frac{dS}{dt}(t) = k \frac{dD}{dt}(t)$$

- Les valeurs de l'angle  $\alpha$  et du réel  $k$  ne sont pas quelconques, ces valeurs sont liées par une relation géométrique.



**Figure 7-15 Pli de propagation**

Compte tenu de ces hypothèses, il est possible de montrer que l'angle  $\gamma$  dépend exclusivement de l'angle  $\alpha$  comme le signale Mercier -1995- [37]:

$$\gamma = 2 \operatorname{atan}(3 \tan(\alpha/2))$$

On voit donc que dans ce modèle de pli de propagation, les angles  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  conservent les mêmes valeurs lors du développement du pli.

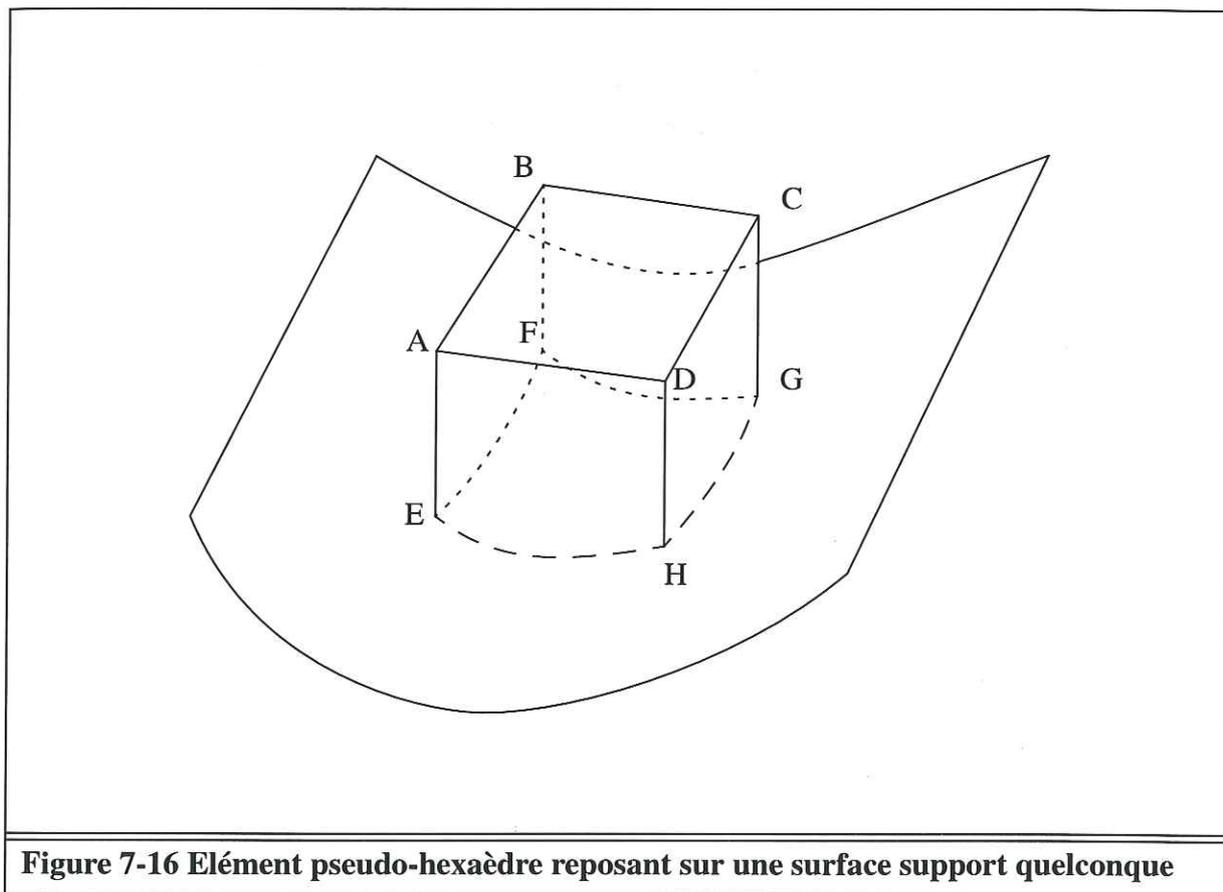
Les contraintes et les degrés de liberté du problème géométrique de la modélisation d'un pli de propagation sont différents de ceux de la modélisation d'un pli de rampe. On peut envisager l'étude cinématique du développement d'un pli de propagation avec une approche conforme aux principes géométriques du modèle FOLDIS. Il faut alors définir les paramètres géométriques que l'on considère comme des données ou des inconnues du problème de reconstruction.

En considérant le glissement différentiel  $d$  le long de la faille comme une donnée du problème de reconstruction, la position des noeuds des éléments pseudo-quadrilatères qui reposent sur la faille est connue. Il s'agit de déterminer la position des autres noeuds des éléments. Le nombre de degrés de liberté d'un élément est alors égal à deux. Dans ce cas, le problème géométrique compte tenu des principes du modèle FOLDIS apparaît comme sur-déterminé. Il convient donc d'écarter un des principes de base, la conservation des épaisseurs, pour que le problème de reconstruction soit bien posé mathématiquement. Le pli formé n'est plus isopaque puisqu'il existe des zones d'épaississement qui peuvent être localisées près de la tête du pli si le gradient du glissement  $d$  sur la faille est concentré à cet endroit.

### 7.4.2 : Extension en 3D du modèle cinématique discret FOLDIS.

Il est possible d'étendre à trois dimensions les principes cinématiques développés pour le modèle FOLDIS à deux dimensions.

Les analogues des éléments pseudo-quadrilatères sont alors des éléments pseudo-hexaèdres. Ils possèdent huit noeuds (A, B, C, D, E, F, G, H), voir figure 7-16, les quatre derniers noeuds appartenant à la surface support.



**Figure 7-16** Élément pseudo-hexaèdre reposant sur une surface support quelconque

Les six faces du pseudo-hexaèdre sont:

- La face supérieure (A, B, C, D) est plane.
- Les quatre faces latérales (A, B, F, E) (B, C, G, F) (C, D, H, G) (D, A, E, H) sont également planes
- La face inférieure (E, F, G, H).

On cherche à évaluer pour un élément pseudo-hexaèdre quelconque le nombre de degrés de liberté disponible lors de la reconstruction. La stratégie de dénombrement consiste d'abord à évaluer le nombre de paramètres de chaque noeud de l'élément en tenant compte de la répartition des noeuds entre les différents éléments voisins. Il convient ensuite de vérifier la géométrie de l'élément en contrôlant la coplanarité des quatre noeuds appartenant à chaque face plane. Cette opération équivaut à retrancher des degrés de liberté dans le calcul de dénombrement.

Un élément comporte huit noeuds, voir figure 7-16, quatre sur le support (E, F, G, H) et quatre qui n'y sont pas (A, B, C, D). Chaque noeud reposant sur le support possède deux degrés de liberté ( $u, v$ ) qui déterminent sa position dans la paramétrisation de la surface support. Chacun des autres noeuds possède trois degrés de liberté ( $x, y, z$ ) qui sont ses coordonnées dans le repère absolu de l'espace à trois dimensions. On dénombre donc à ce stade un total de vingt degrés de liberté.

Or comme chaque noeud appartient à quatre éléments différents, il convient de diviser le nombre total des degrés de liberté par quatre. On obtient ainsi pour chaque élément un nombre propre de degrés de liberté égal à cinq. Il convient ensuite de tenir compte des relations de coplanarité concernant les noeuds appartenant à une même face. Cette prise en compte conduit également à diminuer le nombre propre de degrés de liberté de chaque élément.

Cinq faces du pseudo-hexaèdre sont planes:

- La face supérieure (A, B, C, D). Cette face appartient en propre à l'élément, et il convient de tenir compte d'une relation de coplanarité la concernant.
- Les quatre faces latérales (A, B, F, E) (B, C, G, F) (C, D, H, G) (D, A, E, H). Ces faces latérales sont également partagées par un autre élément voisin. Il convient donc de prendre en compte une demi-relation de coplanarité pour chaque face, soit au total deux relations.

Une fois retranchées l'équivalent des trois relations de coplanarité, le nombre exact des degrés de liberté de chaque élément est égal à deux.

Il est alors possible de retenir deux principes forts par éléments, à savoir la conservation du volume qui est liée à la conservation de la matière, et par exemple la conservation de l'épaisseur si on veut modéliser un mode de déformation isopaque.

On peut également ajouter des principes de poids plus faibles dans le critère de sélection géométrique de la configuration reconstruite. Ainsi, on peut pénaliser les configurations oscillantes de la même façon qu'en deux dimensions.

# Conclusion

Le but de la thèse était de concevoir un nouveau modèle cinématique incrémental susceptible d'être intégré dans les modèles de bassin utilisés et développés à l'Institut Français du Pétrole. L'expérience des modèles direct THRUSTPACK et rétrograde LOCACE, tous deux développés à l'IFP, a été prise en compte pour proposer dans le modèle FOLDIS un mode de déformation des sédiments réaliste et adapté aux contextes tectoniques compressifs des bassins sédimentaires des avant-chaînes de montagne.

Le premier objectif du modèle FOLDIS était d'autoriser la prise en compte d'une large gamme de géométries et de configurations possibles pour les objets structuraux présents dans le modèle. Le second objectif était de tenir compte du processus de compaction dans la modélisation cinématique. Ainsi la modification géométrique des sédiments est due à la fois à des causes tectoniques qui provoquent un plissement et à des causes mécaniques qui engendrent une compaction par diminution de porosité du fait de l'enfouissement. L'importance du couplage géométrique de la tectonique avec la compaction apparaît particulièrement dans l'optique d'une modélisation future des écoulements fluides liés à l'activité tectonique et sédimentaire des bassins.

Ces objectifs ont été atteints et un brevet d'invention a été déposé par l'Institut Français du Pétrole pour protéger les concepts originaux du prototype de modèle FOLDIS. Ainsi, une intégration des principes de FOLDIS est envisageable dans les modèles de l'IFP couramment utilisés par les géologues modélisateurs chargés de l'étude des zones prometteuses à fort potentiel pétrolier.

Les configurations nouvelles qu'il est possible de modéliser avec FOLDIS sont spécialement intéressantes pour l'interprétation structurale. En particulier, il est envisageable de prendre en compte des failles antithétiques ainsi que des trajectoires de failles sinueuses qui conduisent à des configurations complexes des écailles et des objets structuraux du modèle. Le couplage du modèle FOLDIS avec DIONISOS, qui simule les processus d'érosion/sédimentation, permet d'avoir un outil déterministe et réaliste pour calculer l'évolution géométrique des bassins.

Les perspectives ouvertes par la thèse apparaissent nombreuses et prometteuses dans le domaine de la modélisation cinématique. En particulier, il semble envisageable de généraliser à trois dimensions les concepts qui ont été mis en oeuvre dans le modèle à deux dimensions FOLDIS. De plus, les idées concernant le mécanisme de déformation modélisé ainsi que la description discrète utilisées dans le modèle semblent être susceptibles d'être reprises et développées pour modéliser des styles tectoniques différents et plus complexes comme les failles de propagation. Le champ d'application du modèle peut être étendu si d'autres mécanismes de déformation des sédiments y sont intégrés.

# Annexes

## Rappels géométriques, notations et notions utiles au développement du modèle cinématique

### 1 : Notions de topologie et de continuité

#### 1.1 : Notion de topologie

Une topologie  $O$  sur un ensemble  $E$  est un ensemble de parties de  $E$  tel que :

- $[O_1]$  La réunion de toute famille d'éléments de  $O$  est un élément de  $O$ .
- $[O_2]$  L'intersection de deux éléments de  $O$  est un élément de  $O$ .
- $[O_3]$  La partie vide  $\emptyset$  et  $E$  sont éléments de  $O$ .

Les éléments de  $O$  sont appelés ouverts ou parties ouvertes de la topologie. La topologie est dite définie par les ouverts ; il est possible de façon logiquement équivalente, de définir une topologie sur un ensemble  $E$  par la donnée des parties fermées ou par la donnée des voisinages de  $E$ .

Un espace  $E$  munie d'une topologie  $O$  est appelé un espace topologique.

#### 1.2 : Axiomes des voisinages

Une topologie sur un ensemble  $E$  peut être définie par la donnée, en tout point  $x$  de  $E$  d'une famille  $V_x$  de parties de  $E$  satisfaisant aux axiomes des voisinages :

- $[V_1]$  Toute partie de  $E$  qui contient un élément de  $V_x$  est élément de  $V_x$ .
- $[V_2]$  Toute intersection finie d'éléments de  $V_x$  est élément de  $V_x$ .
- $[V_3]$  L'élément  $x$  appartient à chaque ensemble de  $V_x$ .
- $[V_4]$  Si  $V$  appartient à  $V_x$ , il existe  $W$  dans  $V_x$  tel que pour tout  $y$  élément de  $W$  on ait  $V$  dans  $V_y$ .

### 1.3 : Application continue

Une application  $\Phi$  d'un espace topologique  $E$  dans un espace topologique  $F$  est continue en un point  $x$  de  $E$  si et seulement si :

Quel que soit le voisinage  $W$  du point  $\Phi(x)$  dans  $F$ , il existe un voisinage  $V$  du point  $x$  dans  $E$  dont l'image  $\Phi(V)$  par  $\Phi$  est contenue dans  $W$  ( $\Phi(V) \subset W$ ).

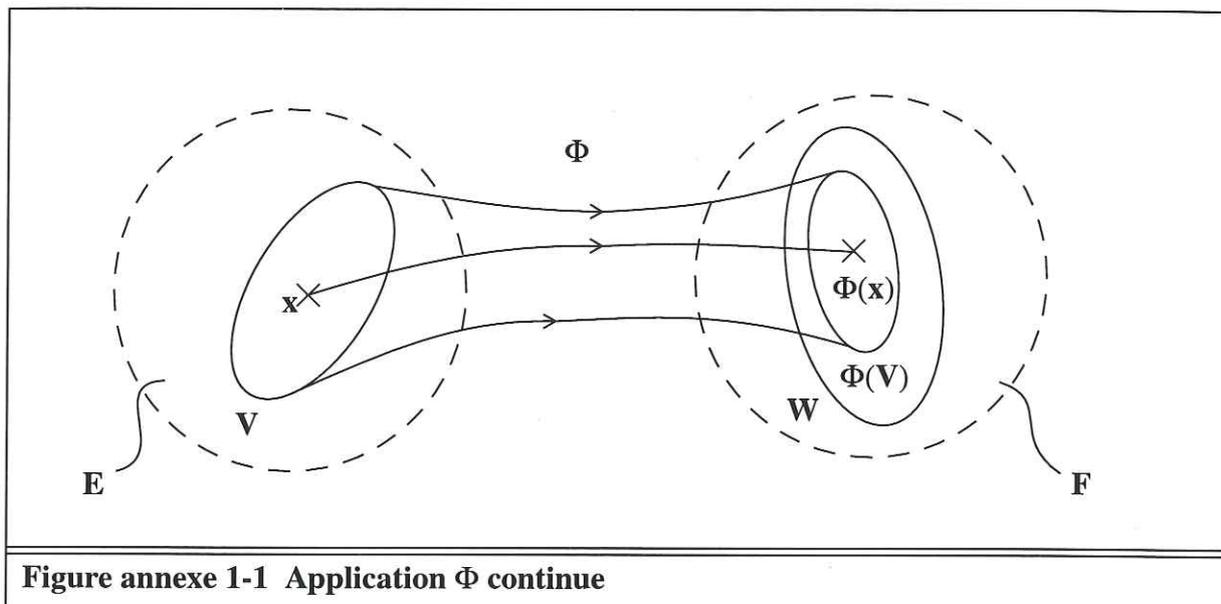


Figure annexe 1-1 Application  $\Phi$  continue

Une application  $\Phi$  d'un espace topologique  $E$  vers un espace topologique  $F$  est continue si elle est continue en tout point  $x$  de  $E$ .

On dit que les espaces topologiques  $E$  et  $F$  sont topologiquement équivalents s'il existe une application continue bijective de  $E$  vers  $F$ . Les espaces  $E$  et  $F$  ont alors même topologie.

## 2 : Points et vecteurs

On travaille dans l'ensemble des points  $A$  du plan affine  $\mathcal{P}$

A partir des couples  $(A, B)$  de points du plan  $\mathcal{P}$ , on définit l'ensemble des vecteurs du plan. Il s'agit de l'ensemble quotient des couples de points par la relation d'équipotence.

La classe d'équivalence du couple de points  $(A, B)$  est le vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .

L'ensemble des vecteurs du plan muni d'une base orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j})$  est isomorphe à l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^2$ .

$$\vec{U} = x_u \vec{i} + y_u \vec{j}$$

On identifie le vecteur  $\vec{U}$  du plan à la matrice colonne de ses coordonnées.

$$\vec{U} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix}$$

Pour tout vecteur  $\vec{U}$ , et pour tout point A du plan, il existe un unique point B de  $\mathcal{P}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{U}$ . On montre que le plan  $\mathcal{P}$  muni d'un repère est également isomorphe à l'espace vectoriel  $\mathfrak{R}^2$ . On identifie le point  $\bar{A}$  à la matrice colonne de ses coordonnées.

O étant l'origine du plan, les coordonnées du point  $\bar{A}$  sont celles du vecteur  $\overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{OA} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \bar{A}$$

On a la relation suivante :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} = \bar{B} - \bar{A}$$

La fonction qui à un couple de points (A, B) de  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2$  associe le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  de  $\mathfrak{R}^2$  a pour composantes des polynômes à deux indéterminées homogènes de degré un, continûment différentiables. La fonction vectorielle est donc continûment différentiable.

On adopte les notations suivantes pour les différentielles des coordonnées d'un point et

d'un vecteur :  $d\bar{A} = \begin{bmatrix} dx_A \\ dy_A \end{bmatrix}$  et  $d\vec{U} = \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix}$

On a donc la relation différentielle :  $d\overrightarrow{AB} = d\bar{B} - d\bar{A}$

En notant :  $\vec{U} = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix}$ ,  $\vec{V} = \begin{bmatrix} x_v \\ y_v \end{bmatrix}$ , on définit les fonctions de  $\mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}^2$  dans  $\mathfrak{R}$  :

produit scalaire :  $\vec{U} \cdot \vec{V} = x_u x_v + y_u y_v$

déterminant :  $\det(\vec{U}, \vec{V}) = x_u y_v - x_v y_u$

Propriétés remarquables du produit scalaire et du déterminant :

1 / Les fonctions produit scalaire et déterminant ont été définies à l'aide de vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , elles seront également utilisées avec des points du plan  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

2 / Les fonctions produit scalaire et déterminant sont des polynômes à quatre indéterminées homogènes de degré deux, indéfiniment différentiables.

En notant  $d\vec{U} = \begin{bmatrix} dx_u \\ dy_u \end{bmatrix}$ ,  $d\vec{V} = \begin{bmatrix} dx_v \\ dy_v \end{bmatrix}$  on établit :

$$d(\vec{U} \cdot \vec{V}) = x_u dx_v + x_v dx_u + y_u dy_v + y_v dy_u = d\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot d\vec{V}$$

$$d(\det(\vec{U}, \vec{V})) = x_u dy_v + y_v dx_u - y_u dx_v - x_v dy_u = \det(\vec{U}, d\vec{V}) + \det(d\vec{U}, \vec{V})$$

3 / On note  $\|\vec{U}\|$  la norme euclidienne du vecteur  $\vec{U}$

$$\begin{aligned} \|\vec{U}\| &= \sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}} = \sqrt{\vec{U}^2} \\ d\|\vec{U}\| &= \frac{d(\vec{U} \cdot \vec{U})}{2\sqrt{\vec{U} \cdot \vec{U}}} = \frac{\vec{U} \cdot d\vec{U}}{\|\vec{U}\|} \end{aligned}$$

4 / Relation remarquable liant le produit scalaire et le déterminant :

$$\vec{U}^2 \vec{V}^2 = (x_u^2 + y_u^2)(x_v^2 + y_v^2)$$

$$\vec{U}^2 \vec{V}^2 = x_u^2 x_v^2 + y_u^2 y_v^2 + 2(x_u x_v)(y_u y_v) + x_u^2 y_v^2 + x_v^2 y_u^2 - 2(x_u y_v)(x_v y_u)$$

$$\vec{U}^2 \vec{V}^2 = (\vec{U} \cdot \vec{V})^2 + (\det(\vec{U}, \vec{V}))^2$$

5 / Le déterminant de deux vecteurs est une forme bilinéaire alternée :

$$\det(\vec{U}, \vec{U}) = x_u y_u - x_u y_u = 0$$

$$\det(\vec{U}, \vec{V}) = x_u y_v - x_v y_u = -\det(\vec{V}, \vec{U})$$

$$\det(\vec{U}, \vec{V} + \vec{W}) = x_u(y_v + y_w) - (x_v + x_w)y_u = \det(\vec{U}, \vec{V}) + \det(\vec{U}, \vec{W})$$

$$\lambda \det(\vec{U}, \vec{V}) = \lambda(x_u y_v - x_v y_u) = \det(\lambda \vec{U}, \vec{V}) = \det(\vec{U}, \lambda \vec{V})$$

6 / Déterminant de points alignés

Soient  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  trois points alignés du plan.

Il existe un réel  $k$  tel que :  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = k \det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\det(\bar{B} - \bar{A}, \bar{C} - \bar{A}) = 0$$

$$\det(\bar{B}, \bar{C}) + \det(-\bar{A}, \bar{C}) + \det(\bar{B}, -\bar{A}) + \det(-\bar{A}, -\bar{A}) = 0$$

On obtient la relation :  $\det(\bar{A}, \bar{C}) = \det(\bar{A}, \bar{B}) + \det(\bar{B}, \bar{C})$

7 / Relation remarquable concernant le déterminant :

Soient  $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}$  trois vecteurs quelconques du plan :

$$\vec{U} \det(\vec{V}, \vec{W}) + \vec{V} \det(\vec{W}, \vec{U}) + \vec{W} \det(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{0}$$

### 3 : Angles

On identifie dans les notations le couple de vecteurs non nuls  $(\vec{U}, \vec{V})$  avec l'angle géométrique orienté défini par ce couple.

#### 3.1 : Définition de la mesure d'un angle de deux vecteurs

La mesure de l'angle des vecteurs non nuls  $(\vec{U}, \vec{V})$  est définie de  $\mathfrak{R}^{2*} \times \mathfrak{R}^{2*}$  dans  $\mathfrak{R}$  par :

- $\det(\vec{U}, \vec{V}) \geq 0$

$$\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V}) = \cos^{-1} \left( \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|} \right)$$

- $\det(\vec{U}, \vec{V}) < 0$

$$\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V}) = 2\pi - \cos^{-1} \left( \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|} \right)$$

La mesure d'un angle est un réel de l'intervalle  $[0, 2\pi[$ . Par la suite, on identifie l'angle lui-même avec la valeur de sa mesure dans l'intervalle  $[0, 2\pi[$ .

#### 3.2 : Continuité de la mesure d'un angle de deux vecteurs

Les fonctions  $\vec{U} \cdot \vec{V}$  et  $\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|$  sont continues de  $\mathfrak{R}^{2*} \times \mathfrak{R}^{2*}$  dans  $\mathfrak{R}$  et  $\mathfrak{R}^{+*}$  respectivement.

A l'aide de la relation 4/ de l'annexe section 2 page 183 liant le produit scalaire et le déterminant :

$$\vec{U}^2 \vec{V}^2 = (\vec{U} \cdot \vec{V})^2 + (\det(\vec{U}, \vec{V}))^2$$

Et en remarquant l'inégalité :  $(\det(\vec{U}, \vec{V}))^2 \geq 0$ .

On obtient la relation :  $\vec{U} \cdot \vec{V} \geq (\vec{U} \cdot \vec{V})^2$

Or  $\forall \vec{U}, \vec{V} \in \mathfrak{R}^{2*}$ , on a  $\vec{U} \cdot \vec{V} > 0$

En divisant les deux membres de l'inégalité par cette quantité strictement positive :

$$\frac{(\vec{U} \cdot \vec{V})^2}{\vec{U} \cdot \vec{V}} \leq 1$$

En prenant la racine carrée, on obtient :  $-1 \leq \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|} \leq 1$

La fonction  $\cos^{-1}$  est continue de  $[-1, 1]$  dans  $[0, \pi]$ , la mesure de l'angle est donc continue sur les domaines ouverts ( $\det(\vec{U}, \vec{V}) < 0$ ) et ( $\det(\vec{U}, \vec{V}) > 0$ ). On étudie aussi la continuité sur le domaine ( $\det(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ ).

Or  $\forall \vec{U}, \vec{V} \in \mathfrak{R}^{2*} : (\det(\vec{U}, \vec{V}) = 0) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathfrak{R}^*, \vec{U} = k\vec{V})$

On a donc : ( $\det(\vec{U}, \vec{V}) = 0$ )  $\Rightarrow$  ( $\exists k \in \mathfrak{R}^*, \|\vec{U}\| = |k| \|\vec{V}\|$  et  $\vec{U} \cdot \vec{V} = k\vec{V}^2$ )

Le rapport se simplifie  $\frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|} = \frac{k\vec{V}^2}{|k|\vec{V}^2} = \pm 1$  le signe étant celui de  $k$ .

•  $\vec{U} = k\vec{V}$  et  $k < 0$

$$\lim_{\substack{\det(\vec{U}, \vec{V}) \rightarrow 0 \\ \det(\vec{U}, \vec{V}) > 0}} (\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V})) = \text{mesure}(k\vec{V}, \vec{V}) = \cos^{-1}(-1) = \pi$$

$$\lim_{\substack{\det(\vec{U}, \vec{V}) \rightarrow 0 \\ \det(\vec{U}, \vec{V}) < 0}} (\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V})) = 2\pi - \cos^{-1}(-1) = \pi$$

Il y a donc continuité sur ce domaine.

•  $\vec{U} = k\vec{V}$  et  $k > 0$

$$\lim_{\substack{\det(\vec{U}, \vec{V}) \rightarrow 0 \\ \det(\vec{U}, \vec{V}) > 0}} (\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V})) = \text{mesure}(k\vec{V}, \vec{V}) = \cos^{-1}(1) = 0$$

$$\lim_{\substack{\det(\vec{U}, \vec{V}) \rightarrow 0 \\ \det(\vec{U}, \vec{V}) < 0}} (\text{mesure}(\vec{U}, \vec{V})) = 2\pi - \cos^{-1}(1) = 2\pi$$

Il n'y a donc pas continuité sur ce domaine.

On résume ce résultat par la proposition suivante :  $\forall \vec{U}, \vec{V} \in \mathfrak{R}^{2*}$ ,

$$(\text{la fonction mesure}(\vec{U}, \vec{V}) \text{ est continue}) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{U}, \vec{V} \in \mathfrak{R}^{2*} \\ \forall k > 0, \vec{U} \neq k\vec{V} \end{cases}$$

La mesure de l'angle  $\alpha = (\vec{U}, \vec{V})$  est différentiable sur le domaine où elle est continue.

### 3.3 : Différentielle de la mesure d'un angle de deux vecteurs

$$\text{On a la relation : } \tan(\alpha) = \frac{\det(\vec{U}, \vec{V})}{\vec{U} \cdot \vec{V}}$$

$$\text{En différentiant le premier membre : } d(\tan(\alpha)) = \frac{d\alpha}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\text{En remarquant que: } \cos^2(\alpha) = \frac{(\vec{U} \cdot \vec{V})^2}{\vec{U}^2 \vec{V}^2} \text{ on obtient: } d(\tan(\alpha)) = \frac{\vec{U}^2 \vec{V}^2}{(\vec{U} \cdot \vec{V})^2} d\alpha$$

En différentiant le second membre :

$$d\left(\frac{\det(\vec{U}, \vec{V})}{\vec{U} \cdot \vec{V}}\right) = \frac{d(\det(\vec{U}, \vec{V}))}{\vec{U} \cdot \vec{V}} - \frac{\det(\vec{U}, \vec{V})}{(\vec{U} \cdot \vec{V})^2} d(\vec{U} \cdot \vec{V})$$

$$\text{Il vient : } d\alpha = \frac{(\vec{U} \cdot \vec{V}) d(\det(\vec{U}, \vec{V})) - \det(\vec{U}, \vec{V}) d(\vec{U} \cdot \vec{V})}{\vec{U}^2 \vec{V}^2} = \frac{N}{D}$$

On développe le numérateur N:

$$N = (\vec{U} \cdot \vec{V}) (\det(d\vec{U}, \vec{V}) + \det(\vec{U}, d\vec{V})) - (d\vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot d\vec{V}) \det(\vec{U}, \vec{V})$$

Or d'après la relation 7/ de l'annexe section 2 page 184 on a les deux égalités :

$$\vec{U} \det(d\vec{U}, \vec{V}) - d\vec{U} \det(\vec{U}, \vec{V}) = -\vec{V} \det(\vec{U}, d\vec{U})$$

$$\vec{V} \det(\vec{U}, d\vec{V}) - d\vec{V} \det(\vec{U}, \vec{V}) = \vec{U} \det(\vec{V}, d\vec{V})$$

En effectuant le produit scalaire des deux membres de la première égalité par  $\vec{V}$  et de la seconde par  $\vec{U}$  on reconnaît les termes du numérateur N.

En simplifiant et en regroupant les termes on obtient :

$$N = \vec{U}^2 \det(\vec{V}, d\vec{V}) - \vec{V}^2 \det(\vec{U}, d\vec{U})$$

En reportant la valeur calculée de N dans la différentielle de la mesure de l'angle  $\alpha$  :

$$d\alpha = \frac{\vec{U}^2 \det(\vec{V}, d\vec{V}) - \vec{V}^2 \det(\vec{U}, d\vec{U})}{\vec{U}^2 \vec{V}^2}$$

$$d\alpha = \frac{\det(\vec{V}, d\vec{V})}{\vec{V}^2} - \frac{\det(\vec{U}, d\vec{U})}{\vec{U}^2}$$

## 4 : Lignes polygonales et polygones

Le but de ce chapitre est de définir un vocabulaire et de présenter les notions utiles concernant les lignes polygonales et les polygones. Ces notions sont importantes sachant que les objets géométriques à une dimension du modèle sont des lignes polygonales ou des réunions de lignes polygonales. Plus précisément, on cherche à définir de façon précise le caractère ondulant d'une ligne polygonale.

### 4.1 : Ligne polygonale

Une ligne polygonale P est la réunion de n segments de droite jointifs :

$$P = \bigcup_{i=1}^n [P_{i-1}, P_i] \text{ avec } n \geq 1$$

qui vérifient les deux propriétés suivantes,  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , avec  $i < j$  :

- $j = i+1$      $[P_{i-1}, P_i] \cap [P_{j-1}, P_j] = \{P_i\}$
- $j \neq i+1$      $[P_{i-1}, P_i] \cap [P_{j-1}, P_j] = \emptyset$

Il est à noter que du fait de la deuxième propriété, une ligne polygonale ne peut se recouper elle-même. De plus on remarque que la représentation de P sous forme d'une réunion finie de segments n'est pas unique. Il est en effet possible d'obtenir d'autres représentations de la ligne polygonale P en considérant n'importe quel segment comme la réunion de deux segments. On appelle représentations minimales d'une ligne polygonale P, les représenta-

tions de  $P$  qui sont la réunion d'un nombre minimal de segments. On peut montrer que les représentations minimales de  $P$  sont au nombre de deux et qu'elles peuvent être transformées l'une en l'autre simplement en inversant l'ordre des indices attribués aux sommets.

On appelle ordre de la représentation de la ligne polygonale  $P$  le nombre  $n$  de segments dont la ligne polygonale est la réunion. Une ligne polygonale  $P$  de représentation d'ordre  $n$  possède  $(n+1)$  sommets :  $P_i$ , avec  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Les représentations minimales de la ligne polygonale  $P$  sont celles dont l'ordre  $n$  est minimal.

Par la suite, on s'intéresse à une représentation particulière d'ordre  $n$  de la ligne polygonale  $P$  plutôt qu'à ses représentations minimales. Une ligne polygonale  $P$  est un objet géométrique à une dimension, défini à partir d'une représentation d'ordre  $n$ , qui possède deux orientations différentes suivant le sens dans lequel on la parcourt. Cette notion d'orientation est importante lorsqu'on veut munir  $P$  d'un paramétrage, par exemple l'abscisse curviligne. L'indiciation des sommets d'une représentation d'une ligne polygonale définit un sens de parcours et donc une orientation de la ligne polygonale. Il ne sera donc pas nécessaire de préciser l'orientation quand celle-ci est la même que celle qui est définie par l'indiciation des sommets.

Par la suite, on identifie la représentation de la ligne polygonale  $P$  orientée d'ordre  $n$  à la suite de ses  $(n+1)$  sommets :  $P = (P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$  avec  $n \geq 1$ .

## 4.2 : Polygone

### 4.2.1 : Définition d'un polygone

Un polygone  $P$  est la réunion de  $n$  segments de droite :

$$P = \bigcup_{i=1}^n [P_{i-1}, P_i] \text{ avec } n \geq 3$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

- $[P_0, P_1] \cap [P_{n-1}, P_n] = \{P_0\} = \{P_n\}$
- $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ , avec  $i < j$  et  $(i, j) \neq (1, n)$ 
  - $j = i+1 \quad [P_{i-1}, P_i] \cap [P_{j-1}, P_j] = \{P_i\}$
  - $j \neq i+1 \quad [P_{i-1}, P_i] \cap [P_{j-1}, P_j] = \emptyset$

De la même façon que pour une ligne polygonale, on remarque que la représentation d'un polygone sous la forme d'une réunion finie de segments n'est pas unique. On appelle ordre de la représentation du polygone  $P$  le nombre  $n$  de ses segments, le nombre de sommets est alors aussi égal à  $n$ .

Il est également possible de définir des représentations minimales de  $P$ , il s'agit des représentations dont l'ordre  $n$  est minimal. On peut montrer que ces représentations minimales sont au nombre de  $2n$  (où  $n$  est l'ordre minimal). De la même façon que pour une

ligne polygonale, il est possible d'orienter le polygone P de deux façons suivant le sens dans lequel on le parcourt. Le choix d'une représentation est lié au choix d'orientation du polygone en adoptant la convention de parcourir le polygone dans l'ordre défini par l'indication des sommets.

Par la suite, on s'intéresse à une représentation P orientée d'ordre n du polygone plutôt qu'à une de ses représentations minimales; on identifie la représentation étudiée à la suite de ses n sommets :  $P = (P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  avec  $n \geq 3$ .

#### 4.2.2 : Aire d'un polygone

On s'intéresse au domaine D(P) du plan  $\mathcal{P}$  qui est l'ensemble des points du plan qui sont à l'intérieur du contour fermé formé par le polygone P.

L'aire géométrique d'un domaine quarrable  $\Omega$  du plan  $\mathcal{P}$  identifié à  $\mathcal{R}^2$  est définie par l'intégrale :

$$\mathcal{A}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 \, dx \, dy, \text{ le plan } \mathcal{P} \text{ étant muni d'un repère orthonormé direct.}$$

On définit l'aire algébrique, notée  $\mathcal{A}(P)$ , du polygone P comme le réel :

- $\mathcal{A}(P) = \mathcal{A}(D(P))$  si l'orientation de P est directe.
- $\mathcal{A}(P) = -\mathcal{A}(D(P))$  si l'orientation de P est indirecte.

$\mathcal{A}(D(P))$  est l'aire géométrique du domaine D(P) du plan  $\mathcal{P}$

$$\mathcal{A}(P) = \pm \mathcal{A}(D(P)) = \pm \int_{D(P)} 1 \, dx \, dy$$

L'aire algébrique du polygone orienté  $P = (P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  est donné au signe près par la formule précédente, sachant qu'une orientation directe de P correspond au signe positif, une orientation indirecte correspond au signe négatif.

Le théorème de la divergence fournit le moyen de calculer l'intégrale sur un domaine  $\Omega$  d'un espace E de dimension k, comme une intégrale sur la frontière du domaine  $\Omega : \partial\Omega$  qui est un domaine de dimension (k-1).

$$\text{Théorème de la divergence : } \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\vec{V} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

L'opérateur  $\vec{\nabla}$  est l'opérateur différentiel nabla,  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal extérieur à la frontière  $\partial\Omega$ ;  $\vec{V}$  est un champ de vecteur, application de E dans  $\mathcal{R}^k$ .

On applique le théorème de la divergence au calcul de l'intégrale donnant l'aire du domaine D(P) qui est un domaine de l'espace  $\mathcal{R}^2$  (k=2). Pour appliquer le théorème on écrit la fonction scalaire constante 1 sous la forme  $(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ , divergence d'un champ de vecteurs. Un tel champ de vecteurs de  $\mathcal{R}^2$  dans  $\mathcal{R}^2$  n'est pas unique.

On choisit pour la commodité des calculs :

$$\vec{V}(x, y) = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

On vérifie que la divergence vaut 1 :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}(x, y) = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 1$

L'aire algébrique du polygone devient :

$$\mathcal{A}(P) = \pm \int_{\partial(D(P))} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

Or la frontière  $\partial(D(P))$  est le Polygone  $P = \bigcup_{i=1}^n [P_{i-1}, P_i]$  lui-même.

On rappelle la convention d'indice  $P_0 = P_n$ .

$$\mathcal{A}(P) = \pm \int_{\bigcup_{i=1}^n [P_{i-1}, P_i]} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

$$\mathcal{A}(P) = \pm \sum_{i=1}^n \left( \int_{[P_{i-1}, P_i]} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma \right)$$

L'aire algébrique  $\mathcal{A}(P)$  est donc au signe près une somme d'intégrales curvilignes dont les domaines d'intégration sont les segments du polygone  $P$ . Pour évaluer ces intégrales, on paramètre les segments  $[P_{i-1}, P_i]$  à l'aide de l'abscisse curviligne  $s$ . On choisit l'origine du paramétrage au sommet  $P_{i-1}$ , le paramètre du point  $P_i$  est positif égal à la longueur du segment  $[P_{i-1}, P_i]$  soit  $\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|$ .

Le point  $M$  décrit le segment  $[P_{i-1}, P_i]$  quand  $s$  décrit l'intervalle  $[0, \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|]$ .

$$\vec{M}(s) = \vec{P}_{i-1} + \frac{s}{\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|} (\vec{P}_i - \vec{P}_{i-1})$$

L'aire algébrique  $\mathcal{A}(P)$  est donc au signe près une somme d'intégrales simples.

$$\mathcal{A}(P) = \pm \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{\|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\|} (\vec{V} \cdot \vec{n}) ds \right)$$

Les coordonnées des sommets  $P_i$  du polygone étant notés  $(x_i, y_i)$ , le vecteur  $\vec{n}$  unitaire normal extérieur au segment  $[P_{i-1}, P_i]$  est défini au signe près par :

$$\vec{n} = \frac{\pm 1}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} \begin{bmatrix} y_i - y_{i-1} \\ x_{i-1} - x_i \end{bmatrix}$$

Un polygone orienté dans le sens direct du plan, correspond à une normale extérieure  $\vec{n}$  de signe positif, une orientation contraire correspond au signe négatif.

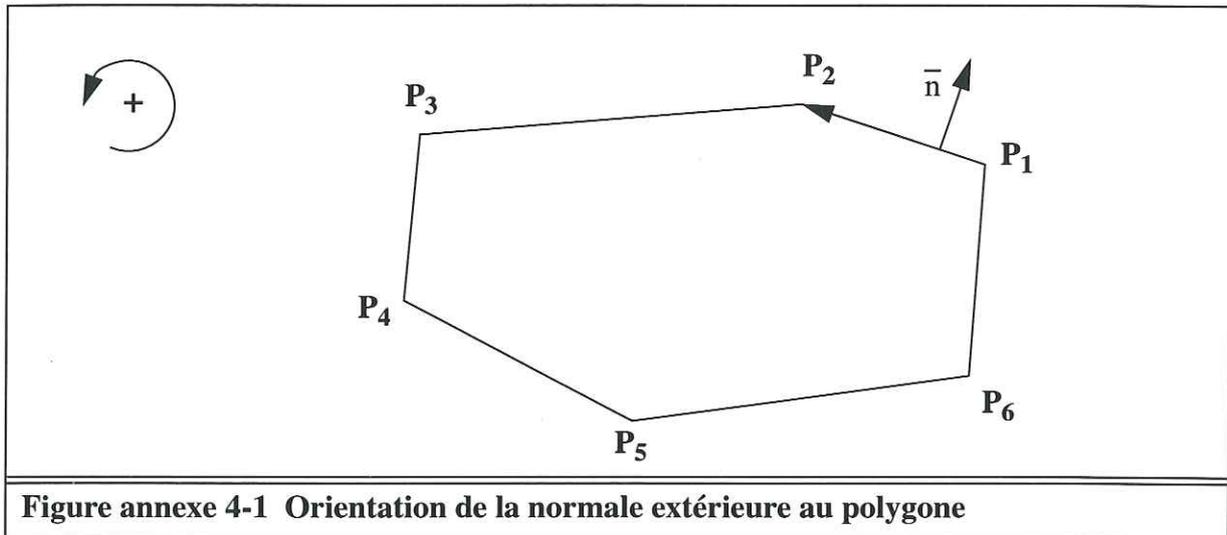


Figure annexe 4-1 Orientation de la normale extérieure au polygone

La valeur du vecteur  $\vec{V}(x, y) = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$  au point  $\bar{M}(s)$  du segment  $[P_{i-1}, P_i]$  est :

$$\vec{V}(\bar{M}(s)) = \begin{bmatrix} x_{i-1} + \frac{s}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} (x_i - x_{i-1}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le produit scalaire  $\vec{V}(\bar{M}(s)) \cdot \vec{n} = \pm \left( x_{i-1} + \frac{s}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} (x_i - x_{i-1}) \right) \frac{(y_i - y_{i-1})}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|}$

On peut donc évaluer l'intégrale simple :

$$\int_0^{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \pm \int_0^{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} \left( x_{i-1} + \frac{s}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} (x_i - x_{i-1}) \right) \frac{(y_i - y_{i-1})}{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} ds$$

$$\int_0^{\|\vec{P}_{i-1}P_i\|} \vec{V} \cdot \vec{n} ds = \pm \left( x_{i-1} + \frac{1}{2} (x_i - x_{i-1}) \right) (y_i - y_{i-1}) = \pm \frac{1}{2} (x_i + x_{i-1}) (y_i - y_{i-1})$$

On obtient l'expression de l'aire algébrique de polygone P:

$$\mathcal{A}(P) = \pm \sum_{i=1}^n \left( \pm \frac{1}{2} (x_i + x_{i-1})(y_i - y_{i-1}) \right)$$

On observe qu'il y a une simplification des deux discussions sur les signes. En effet si le polygone  $P$  est orienté directement les deux signes sont positifs, dans le cas contraire les deux signes sont simultanément négatifs.

$$\text{On obtient } \mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i + x_{i-1})(y_i - y_{i-1})$$

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i (y_i - y_{i-1}) + \sum_{i=0}^{n-1} x_i (y_{i+1} - y_i) \right)$$

On introduit la seconde convention d'indice  $P_{n+1} = P_1$  et on rappelle que  $P_0 = P_n$

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n x_i (y_i - y_{i-1}) + \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_i) \right)$$

En regroupant et en simplifiant les deux sommes :

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

On peut identifier l'ensemble des polygones à  $n$  sommets à l'espace vectoriel  $\mathcal{R}^{2n}$ . On peut alors considérer la fonction  $\mathcal{A}_n()$  qui aux  $2n$  coordonnées des  $n$  sommets d'un polygone associe son aire algébrique.  $\mathcal{A}_n()$  est un polynôme homogène de degré deux à  $2n$  indéterminées. Une telle fonction est de classe  $C^\infty$ .

$$\mathcal{A}_n(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

#### 4.2.3 : Aire algébrique d'un polygone à quatre sommets (quadrilatère)

Il est possible d'exprimer l'aire algébrique d'un quadrilatère sous la forme d'un déterminant de vecteurs correspondants aux diagonales du quadrilatère.

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3, P_4)) = 1/2 [ x_1(y_2-y_4) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_4-y_2) + x_4(y_1-y_3) ]$$

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3, P_4)) = 1/2 [ (x_1-x_3)(y_2-y_4) - (x_2-x_4)(y_1-y_3) ]$$

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3, P_4)) = 1/2 \det(\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_2P_4})$$

#### 4.2.4 : Aire algébrique d'un polygone à trois sommets (triangle)

De la même façon, il est possible d'exprimer l'aire algébrique d'un triangle sous la forme d'un déterminant de vecteurs.

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3)) = 1/2 [ x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2) ]$$

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3)) = 1/2 [ (x_1-x_2)(y_2-y_3) - (x_2-x_3)(y_1-y_2) ]$$

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3)) = 1/2 \det(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3})$$

Remarque : on peut voir cette formule comme un cas particulier de la précédente, le triangle  $(P_1, P_2, P_3)$  est analogue au quadrilatère dégénéré  $(P_1, P_2, P_2, P_3)$ .

$$\mathcal{A}((P_1, P_2, P_3)) = \mathcal{A}((P_1, P_2, P_2, P_3))$$

#### 4.2.5 : Expression générale de l'aire algébrique d'un polygone

On exprime l'aire algébrique d'un polygone  $P = (P_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$  en une somme de déterminants sans faire intervenir les coordonnées  $(x_i, y_i)$ .

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (y_{i+1} - y_{i-1})$$

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_i y_{i-1} \right]$$

$$\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} x_{i+1} y_i \right]$$

Or avec les conventions d'indice  $0=n$  et  $n+1=1$

$$\text{On obtient } \mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - \sum_{i=1}^n x_{i+1} y_i \right] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i)$$

$$\text{Or } \det(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) = x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i$$

$$\boxed{\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \det(\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) \right)}$$

#### 4.2.6 : Différentiation de l'aire algébrique d'un polygone

En différenciant la formule précédente compte tenu de la relation 2/ de l'annexe section 2 page 183 on obtient :

$$d\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) + \det(\bar{P}_i, d\bar{P}_{i+1})]$$

$$d\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^n \det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) + \sum_{i=2}^{n+1} \det(\bar{P}_{i-1}, d\bar{P}_i) \right)$$

Or avec les conventions d'indice  $0=n$  et  $n+1=1$ , on peut écrire :

$$d\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) + \det(\bar{P}_{i-1}, d\bar{P}_i)$$

$$d\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i+1}) - \det(d\bar{P}_i, \bar{P}_{i-1})$$

On obtient la formule :

$$d\mathcal{A}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \det(d\bar{P}_i, \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}})$$

#### 4.3 : Paramétrage d'une ligne polygonale par l'abscisse curviligne

Soit  $P$  une ligne polygonale d'ordre  $n$ ,  $P = (P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ . Comme par définition la ligne polygonale ne se recoupe pas elle-même, il est possible de réaliser une partition de  $P$  en  $(n+1)$  parties de la façon suivante :  $[P_i, P_{i+1}[$  pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et  $\{P_n\}$ .

On définit une application  $i_P()$  de  $P$  dans  $\{0, \dots, n\}$  telle que,  $\forall M \in P$  :

- Si  $M \in [P_i, P_{i+1}[$  :  $i_P(M) = i$
- Si  $M = P_n$  :  $i_P(M) = n$

On remarque que  $\forall i \in \{0, \dots, n\}$   $i_P(P_i) = i$

On munit  $P$  d'un paramétrage  $l_P()$ , application de  $P$  dans  $\mathfrak{R}$ , définie à l'aide de l'application  $i_P()$  et de la norme euclidienne, vérifiant les deux propriétés suivantes :

- $l_P(P_0) = 0$

- $\forall M \in P, l_P(M) = l_P(P_{i_P(M)}) + \left\| \overrightarrow{P_{i_P(M)}M} \right\|$

On note :  $l_P^i = l_P(P_i)$ , ce qui donne :  $\forall M \in P, l_P(M) = l_P^{i_P(M)} + \left\| \overrightarrow{P_{i_P(M)} M} \right\|$

On obtient :  $\forall i \in \{1, \dots, n\} l_P^i = \sum_{j=1}^i \left\| \overrightarrow{P_{j-1} P_j} \right\|$  et on note  $L_P = l_P^n = \sum_{j=1}^n \left\| \overrightarrow{P_{j-1} P_j} \right\|$

Puisque  $P$  est une ligne polygonale, elle ne se recoupe pas elle-même,  $l_P()$  est une bijection de  $P$  dans l'intervalle  $[0, L_P]$ . Et on note  $P()$  la bijection réciproque qui à un réel  $s$  de l'intervalle  $[0, L_P]$  fait correspondre un unique point  $P(s)$  de la ligne polygonale.

#### 4.4 : Sous-lignes polygonales d'une ligne polygonale et relation d'ordre

Soit une ligne polygonale  $P$  d'ordre  $n$ , on appelle  $j^{\text{ème}}$  sous-ligne polygonale d'ordre  $k$  de la ligne polygonale  $P$ , la ligne polygonale notée  $P_j^k$  formée de  $k$  segments consécutifs de  $P$  et débutant à l'indice  $j$  :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{0, \dots, n-k\}$$

$$P_j^k = (P_i)_{i \in \{j, j+1, \dots, j+k\}}$$

Remarque :  $P_0^n = P$

On note  $Q \subseteq P$ , la relation : il existe un couple  $(j, k)$  tel que  $Q = P_j^k$  ; et on dit :  $Q$  est une sous-ligne polygonale de  $P$ .

On note  $Q \subset P$ , la relation :  $(Q \subseteq P)$  et  $(Q \neq P)$

On vérifie aisément que la relation  $\subseteq$  est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des sous-lignes polygonales de  $P$  :

- 1 / La relation est réflexive,  $\forall Q \subseteq P, Q \subseteq Q$
- 2 / La relation est transitive,  $\forall Q, R, S \subseteq P, ((Q \subseteq R) \text{ et } (R \subseteq S)) \Rightarrow (Q \subseteq S)$
- 3 / La relation est antisymétrique,  $\forall Q, R \subseteq P, ((Q \subseteq R) \text{ et } (R \subseteq Q)) \Rightarrow (Q=R)$

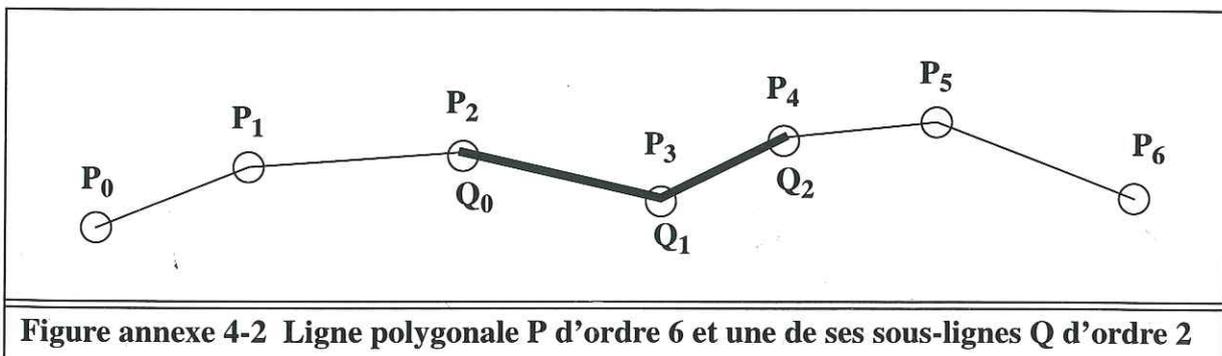


Figure annexe 4-2 Ligne polygonale  $P$  d'ordre 6 et une de ses sous-lignes  $Q$  d'ordre 2

#### 4.5 : Ligne polygonale triangulaire et aire d'une ligne polygonale orientée

On appelle ligne polygonale triangulaire  $P$ , une ligne polygonale qui possède trois sommets, son ordre est égal à deux.

Dans le plan  $\mathcal{P}$  orienté, l'aire d'une ligne polygonale orientée  $P = (P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ , est le réel égal à l'aire algébrique du polygone orienté dont la représentation est identifiée à la même suite de sommets  $(P_i)_{i \in \{0, \dots, n\}}$ ; on note  $\mathcal{A}(P)$  cette aire.

Remarque : dans le cas d'une ligne polygonale triangulaire  $P$ , l'aire  $\mathcal{A}(P)$  est égale à l'aire du triangle  $(P_0, P_1, P_2)$

#### 4.6 : Ligne polygonale ondulante

Une ligne polygonale  $Q$  est dite ondulante si et seulement si elle contient à la fois une sous-ligne polygonale triangulaire  $Q^2_j$  d'aire strictement positive et une sous-ligne polygonale triangulaire  $Q^2_k$  d'aire strictement négative.

On note  $Q \sim$ , la relation :  $Q$  est une ligne polygonale ondulante.

$$(Q \sim) \Leftrightarrow (\exists j, \mathcal{A}(Q^2_j) > 0 \text{ et } \exists k, \mathcal{A}(Q^2_k) < 0)$$

On note  $Q \sim P$ , la relation :  $Q$  est une sous-ligne polygonale ondulante de la ligne polygonale  $P$ .

$$(Q \sim P) \Leftrightarrow (Q \subseteq P \text{ et } Q \sim)$$

Il est à noter qu'une ligne polygonale ondulante est nécessairement d'ordre supérieur ou égal à trois, car celle-ci possède par définition au moins deux sous-lignes polygonales distinctes d'ordre deux.

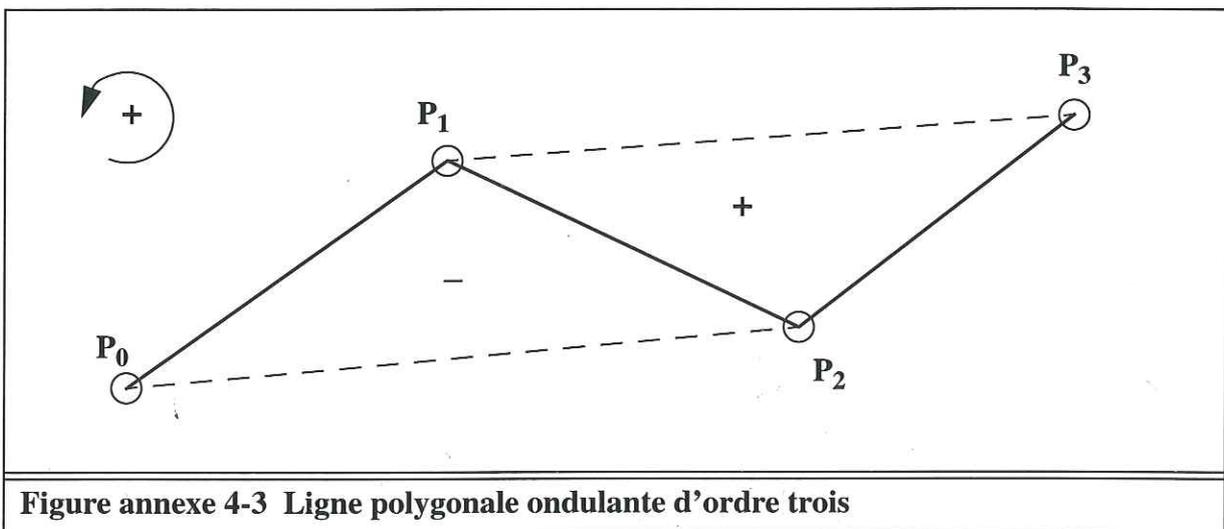


Figure annexe 4-3 Ligne polygonale ondulante d'ordre trois

#### 4.7 : Ondulations d'une ligne polygonale \*

On appelle ondulations de la ligne polygonale P, les éléments minimaux (au sens de la relation d'ordre  $\subseteq$ ) de l'ensemble des sous-lignes polygonales ondulantes de P.

$$(Q \text{ est une ondulation de } P) \Leftrightarrow \left( \begin{array}{l} (Q \sim P) \\ (R \sim P) \\ (R \subseteq Q) \end{array} \right) \Rightarrow (R = Q)$$

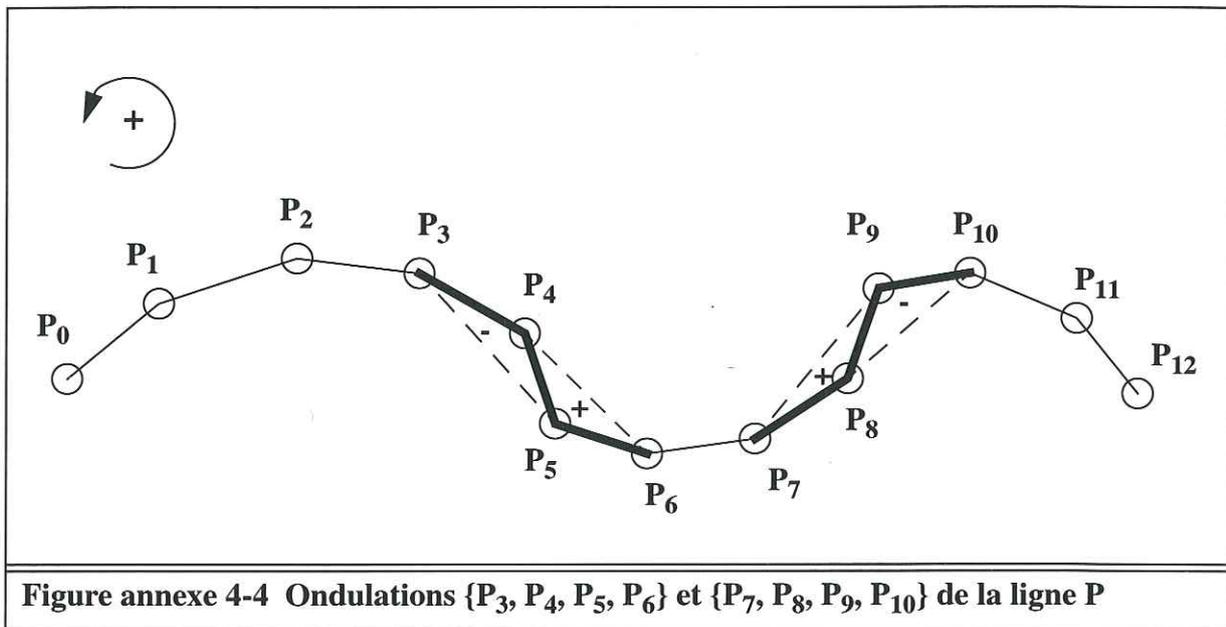


Figure annexe 4-4 Ondulations  $\{P_3, P_4, P_5, P_6\}$  et  $\{P_7, P_8, P_9, P_{10}\}$  de la ligne P

Soit Q une ligne polygonale et P une ondulation d'ordre n de Q, on démontre par l'absurde les deux propriétés suivantes : (A) les deux sous-lignes triangulaires  $P^2_0$  et  $P^2_{n-2}$  (avec  $n \geq 3$ ) ont des aires non nulles de signes opposés; (B) les sous-lignes triangulaires  $P^2_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n-3\}$  (avec  $n \geq 4$ ) ont toutes des aires nulles.

1 / Démonstration de (A)

• Si  $\mathcal{A}(P^2_0) = 0$

$(P \sim) \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n-2\}, \mathcal{A}(P^2_j) > 0 \text{ et } \exists k \in \{1, \dots, n-2\}, \mathcal{A}(P^2_k) < 0)$

Or  $(P^2_j \subseteq P^{n-1}_1)$  et  $(P^2_k \subseteq P^{n-1}_1) \Rightarrow (P^{n-1}_1 \sim)$

$(P^{n-1}_1 \sim \text{ et } P^{n-1}_1 \subset P) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

• Si  $\mathcal{A}(P^2_{n-2}) = 0$

$(P \sim) \Rightarrow (\exists j \in \{0, \dots, n-3\}, \mathcal{A}(P^2_j) > 0 \text{ et } \exists k \in \{0, \dots, n-3\}, \mathcal{A}(P^2_k) < 0)$

Or  $(P^2_j \subseteq P^{n-1}_0)$  et  $(P^2_k \subseteq P^{n-1}_0) \Rightarrow (P^{n-1}_0 \sim)$

$(P^{n-1}_0 \sim \text{ et } P^{n-1}_0 \subset P) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

• Si  $\mathcal{A}(P^2_0) \mathcal{A}(P^2_{n-2}) > 0$

$(P \sim) \Rightarrow (\exists j \in \{1, \dots, n-3\}, \mathcal{A}(P^2_j) \mathcal{A}(P^2_0) < 0)$

Or  $(P^2_j \subseteq P^{n-1}_0)$  et  $(P^2_1 \subseteq P^{n-1}_0) \Rightarrow (P^{n-1}_0 \sim)$

$(P^{n-1}_0 \sim$  et  $P^{n-1}_0 \subset P) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

Ce qui démontre que :  $\mathcal{A}(P^2_0) \mathcal{A}(P^2_{n-2}) < 0$ . La propriété (A) est donc vraie.

2 / Démonstration de (B)

D'après la propriété (A) :  $\mathcal{A}(P^2_0) \mathcal{A}(P^2_{n-2}) < 0$

$(\text{non B}) \Leftrightarrow (\exists i \in \{1, \dots, n-3\}, \mathcal{A}(P^2_i) \neq 0)$

L'une des deux propositions suivantes est vraie :

•  $\mathcal{A}(P^2_i) \mathcal{A}(P^2_{n-2}) < 0$

$(P^{n-i}_i \sim$  et  $P^{n-i}_i \subset P) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

•  $\mathcal{A}(P^2_0) \mathcal{A}(P^2_i) < 0$

$(P^{i+2}_0 \sim$  et  $P^{i+2}_0 \subset P) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

$(\text{non B}) \Rightarrow (P \text{ n'est pas une ondulation})$

Ce qui démontre que la propriété (B) est vraie.

## 5 : Résultats de calcul différentiel

### 5.1 : Formule de Taylor

Formule de Taylor à l'ordre  $n$  d'une fonction  $f$  d'un espace  $E$  (de dimension  $p$ ) dans  $\mathfrak{R}$ ,  $f$  est de classe  $C^n$  et différentiable  $(n+1)$  fois sur  $E$  :

Il existe  $\theta \in [0, 1]$  tel que :

$$f(\bar{X} + \bar{h}) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left( \bar{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \right)^i f(\bar{X}) + \frac{1}{(n+1)!} \left( \bar{h} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{X}} \right)^{n+1} f(\bar{X} + \theta \bar{h})$$

$$f(\bar{X} + \bar{h}) = \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j_1 + \dots + j_p = i} \left( \frac{h_1^{j_1} \dots h_p^{j_p}}{j_1! \dots j_p!} \frac{\partial^i f(\bar{X})}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_p^{j_p}} \right) \right) + E_n(\bar{h}, \bar{X} + \theta \bar{h})$$

$$\text{avec } E_n(\bar{h}, \bar{X} + \theta \bar{h}) = \sum_{j_1 + \dots + j_p = n+1} \left( \frac{h_1^{j_1} \dots h_p^{j_p}}{j_1! \dots j_p!} \frac{\partial^{n+1} f(\bar{X} + \theta \bar{h})}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_p^{j_p}} \right)$$

### 5.2 : Différentiation d'une fonction définie par une intégrale

Il s'agit de différentier la fonction de deux variables réelles :

$$f(x, y) = \int_0^x g(z, y) dz$$

$$f(x + dx, y + dy) = \int_0^{x+dx} g(z, y + dy) dz$$

$$df = \int_0^{x+dx} g(z, y + dy) dz - \int_0^x g(z, y) dz$$

$$df = \int_0^{x+dx} \left( g(z, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(z, y) dy \right) dz - \int_0^x g(z, y) dz$$

$$df = \int_x^{x+dx} g(z, y) dz + \int_0^{x+dx} \left( \frac{\partial}{\partial y} g(z, y) dy \right) dz$$

$$df = g(x, y) dx + \left( \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} g(z, y) dz \right) dy$$

### 5.3 : Transformée d'un vecteur matériel infinitésimal

On envisage d'évaluer la transformation par l'application différentiable  $\Phi$  d'un segment matériel infinitésimal  $S$ .

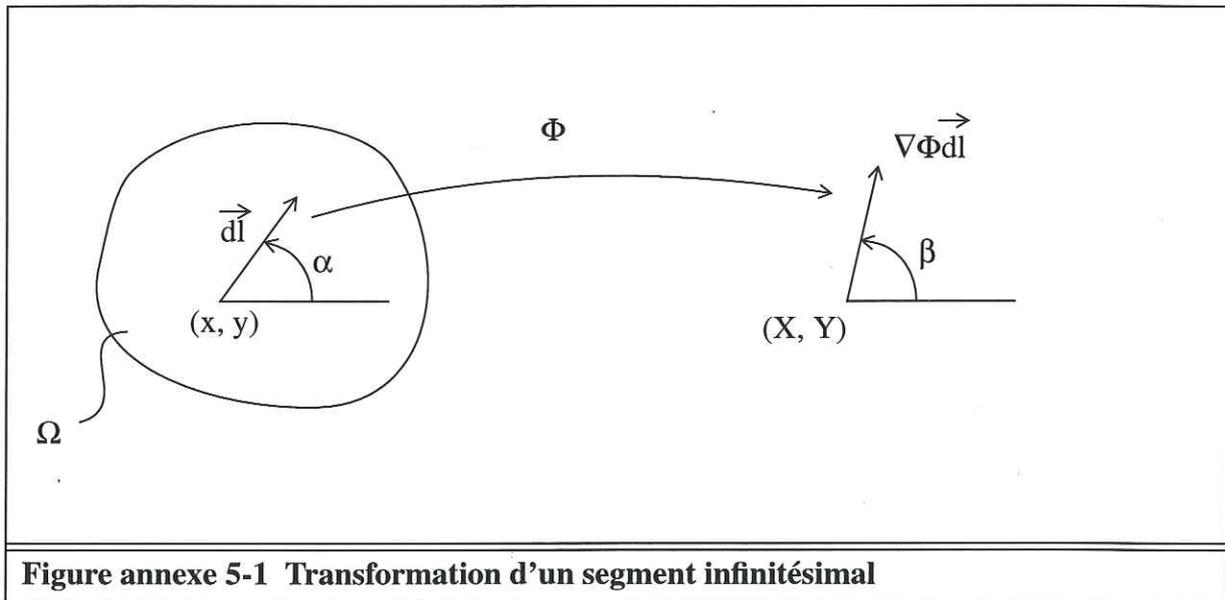


Figure annexe 5-1 Transformation d'un segment infinitésimal

Le segment infinitésimal  $S$  est défini par la donnée du sommet  $(x, y)$ , et du vecteur  $\vec{dl}$  de longueur  $dl$  et de direction définie par l'angle  $\alpha$ .

Les points de  $S$  sont déterminés par la coordonnée locale  $\lambda$  de l'ensemble  $[0, 1]$

$$(\lambda \in [0, 1]) \Leftrightarrow ((x + \lambda dl \cos(\alpha), y + \lambda dl \sin(\alpha)) \in S)$$

La différentielle de  $\Phi$  est :  $d\Phi(x, y) = \Phi_x(x, y) dx + \Phi_y(x, y) dy$

$$\Phi(x + \lambda dl \cos(\alpha), y + \lambda dl \sin(\alpha)) = \Phi(x, y) + \Phi_x(x, y) \lambda dl \cos(\alpha) + \Phi_y(x, y) \lambda dl \sin(\alpha)$$

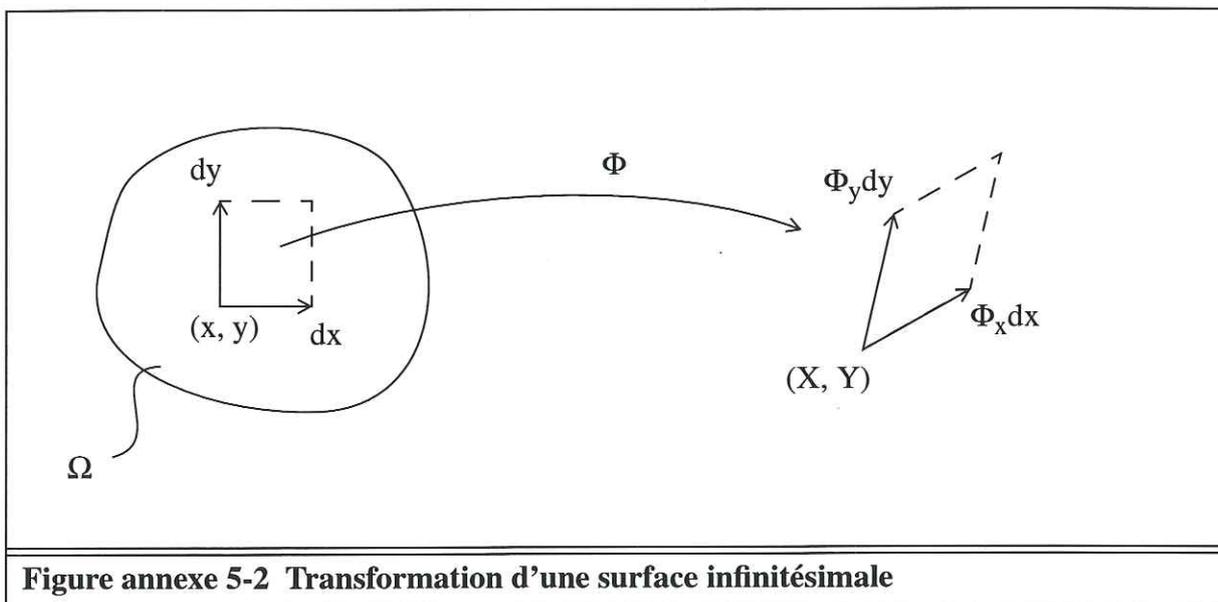
$$\Phi(x + \lambda dl \cos(\alpha), y + \lambda dl \sin(\alpha)) = \Phi(x, y) + \lambda \nabla\Phi \vec{dl}$$

Le segment  $S$  est donc transformé en un segment  $\Phi(S)$  défini par le sommet  $\Phi(x, y)$  et le vecteur :  $\nabla\Phi \vec{dl}$

La transformation  $\Phi$  est isométrique au point  $(x, y)$  dans la direction  $\alpha$  si et seulement si on a :  $\left\| \nabla \Phi \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right\| = 1$  autrement dit s'il existe  $\beta$  tel que :  $\nabla \Phi \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix}$

### 5.4 : Transformée d'une surface infinitésimale

On envisage d'évaluer la transformation par l'application différentiable  $\Phi$  d'une surface matérielle infinitésimale  $\Delta$ .



**Figure annexe 5-2 Transformation d'une surface infinitésimale**

L'aire du rectangle infinitésimal  $\Delta$  défini par la donnée du sommet  $(x, y)$  et des vecteurs  $(dx, 0)$  et  $(0, dy)$  est le produit:  $dx dy$ .

Les points de  $\Delta$  sont déterminés par les coordonnées locales  $(\alpha, \beta)$  de l'ensemble  $[0, 1]^2$

$$((\alpha, \beta) \in [0, 1]^2) \Leftrightarrow ((x + \alpha dx, y + \beta dy) \in \Delta)$$

La différentielle de  $\Phi$  est :  $d\Phi(x, y) = \Phi_x(x, y)dx + \Phi_y(x, y)dy$

Donc  $\Phi(x + \alpha dx, y + \beta dy) = \Phi(x, y) + \Phi_x(x, y)\alpha dx + \Phi_y(x, y)\beta dy$

Le rectangle  $\Delta$  est donc transformé en un parallélogramme:  $\Phi(\Delta)$ , défini par la donnée du sommet  $\Phi(x, y)$  et des vecteurs  $\Phi_x(x, y) dx$  et  $\Phi_y(x, y) dy$ .

L'aire du quadrilatère  $\Phi(\Delta)$  est donc:  $\det(\Phi_x(x, y)dx, \Phi_y(x, y)dy) = \det(\nabla \Phi) dx dy$ .

$$(\Phi \text{ de classe } C^1 \text{ est isosurfacique et garde l'orientation}) \Leftrightarrow (\det(\nabla \Phi) = 1)$$

## 5.5 : Gradient d'une fonction composée

Soient deux fonctions de  $\mathfrak{R}^2$  dans  $\mathfrak{R}^2$ ,  $F(x, y)$  et  $G(u, v)$  de classe  $C^1$  sur leur ensemble de définition respectif  $D_F$  et  $D_G$ . Leurs fonctions composantes sont respectivement  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  et  $g_1(u, v)$ ,  $g_2(u, v)$ .

On suppose de plus qu'on a la relation d'inclusion :

$$F(D_F) \subset D_G$$

1 / On note dans le système de coordonnées  $(x, y)$  :

$$\nabla F(x, y) = \nabla \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} f_1(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} f_2(x, y) \end{bmatrix}$$

Ecriture différentielle matricielle :

$$dF(x, y) = \nabla F \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

2 / On note dans le système de coordonnées  $(u, v)$  :

$$\text{grad} G(u, v) = \text{grad} \begin{bmatrix} g_1(u, v) \\ g_2(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} g_1(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} g_1(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} g_2(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} g_2(u, v) \end{bmatrix}$$

Ecriture différentielle matricielle :

$$dG(u, v) = \text{grad} G \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix}$$

On peut construire la fonction composée :  $H(x, y) = G(F(x, y)) = G \circ F(x, y)$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} g_1(f_1(x, y), f_2(x, y)) \\ g_2(f_1(x, y), f_2(x, y)) \end{bmatrix}$$

Il est commode d'adopter la notation indicielle pour les composantes d'une fonction vectorielle car elle permet de condenser les écritures. Par exemple,  $H_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $H$ , en notation tensorielle, on peut écrire :

$$H_i(x, y) = G_i(F(x, y))$$

De même en notant  $x_j$  la  $j^{\text{ème}}$  coordonnée du vecteur  $(x, y)$  ou  $(u, v)$ . On peut écrire de façon condensée l'expression des dérivées partielles de  $H$  en appliquant la règle de dérivation en chaîne.

$$\frac{\partial H_i}{\partial x_j}(x, y) = \sum_k \left( \frac{\partial G_i}{\partial x_k}(F(x, y)) \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x, y) \right)$$

Ce qui peut s'écrire de façon condensée comme un produit de matrices:

$$\nabla H = \text{grad}G(F) \cdot \nabla F$$

On peut alors considérer la fonction  $F(x, y)$  comme la fonction de passage du système de coordonnées  $(u, v)$  à  $(x, y)$ , ainsi on écrit:

$$(u, v) = F(x, y)$$

Avec la convention précédente concernant les systèmes de coordonnées  $(u, v)$  et  $(x, y)$ , et par abus de langage, on note  $G(x, y)$  la fonction  $H(x, y)$ . Il convient de distinguer alors les deux fonctions  $G(u, v)$  et  $G(x, y)$  qui représentent la même transformation  $G$  mais définie respectivement dans chacun des deux systèmes de coordonnées.

On obtient la relation:

$$\nabla G = \text{grad}G \cdot \nabla F$$

Remarques :

- Le gradient  $\nabla$  est appliqué au point  $(x, y)$
- Le gradient  $\text{grad}$  est appliqué au point  $(u, v) = F(x, y)$

## 6 : Le mécanisme du cisaillement simple

On s'attache dans cette annexe à expliciter la forme de la transformation géométrique  $\Phi$  correspondant au mode de déformation par cisaillement simple. Compte tenu de la définition du mode de déformation par cisaillement simple, voir section 2.3.1 page 26, il s'agit de définir la transformation géométrique  $\Phi$  de manière unique à partir de conditions à la limite bien choisies sur le contour  $\Gamma$  de l'écaille dans l'état initial.

Le problème géométrique est équivalent à la résolution du système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\begin{cases} (x_X \cos(\alpha) + x_Y \sin(\alpha) = \cos(\alpha)) & (1) \\ (y_X \cos(\alpha) + y_Y \sin(\alpha) = \sin(\alpha)) & (2) \\ (x_X y_Y - x_Y y_X = 1) & (3) \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles peut être menée grâce à la méthode des caractéristiques [32]. On considère tout d'abord le sous-système composé des deux premières équations.

### 6.1 : Résolution de (1) et (2) par la méthode des caractéristiques

Considérons une courbe paramétrique  $C$  d'un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  définie par deux fonctions scalaires  $X(s)$  et  $Y(s)$ , le paramètre  $s$  prenant ses valeurs dans l'intervalle  $J$ .

Considérons alors le système des trois équations différentielles ordinaires :

$$(I) \begin{cases} \frac{dX}{ds} = \cos(\alpha) & (a) \\ \frac{dY}{ds} = \sin(\alpha) & (b) \\ \frac{dx}{ds} = \cos(\alpha) & (c) \end{cases}$$

On vérifie que la résolution du système (I) des trois équations différentielles ordinaires (a), (b) et (c) est équivalent à la résolution de l'équation aux dérivées partielles (1) sur le sous-domaine de  $\Omega$  constitué par la courbe paramétrique  $C$ .

En effet, sur le domaine  $J$  on a :  $x(s) = x(X(s), Y(s))$ .

Et en dérivant par rapport au paramètre  $s$ , on obtient :

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{dY}{ds}$$

On vérifie que l'équation obtenue est équivalente à l'équation aux dérivées partielles (1) avec les notations du système des équations différentielles (a) (b) et (c).

On intègre le sous-système de deux équations différentielles (a) et (b) :

$$\begin{cases} X(s) = X(0) + s \cos(\alpha) \\ Y(s) = Y(0) + s \sin(\alpha) \end{cases}$$

On trouve alors que les courbes caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles (1) sont les droites parallèles à la direction définie par l'angle  $\alpha$ . Il en est de même pour l'équation aux dérivées partielles (2).

On prend ensuite en compte les conditions à la limite sur la frontière  $\Gamma_2$  de l'écaïlle dans l'état initial.

On paramètre la frontière  $\Gamma_2$  par le couple de fonctions:  $(X_{\Gamma_2}(v), Y_{\Gamma_2}(v))$ .

L'origine du paramétrage est choisie au point O de la frontière  $\Gamma_2$ , voir la figure 2-8, c'est à dire:  $O = (X_{\Gamma_2}(0), Y_{\Gamma_2}(0))$

Le paramètre  $v$  est défini de la façon suivante:

$$v(X, Y) = (X - X_{\Gamma_2}(0)) \sin(\alpha) - (Y - Y_{\Gamma_2}(0)) \cos(\alpha)$$

Remarques:

- Le paramètre  $v$  associé à un point quelconque  $(X, Y)$  du plan est défini comme la distance algébrique de ce point à la droite passant par O et de direction définie par l'angle  $\alpha$ . Ainsi, les points d'une droite caractéristique ont le même paramètre  $v$ .
- Un tel paramétrage de la ligne frontière  $\Gamma_2$  n'est pas toujours possible. En effet, si plusieurs points de la frontière  $\Gamma_2$  correspondent au même paramètre  $v$ , on ne peut définir de bijection d'un intervalle réel vers la frontière  $\Gamma_2$ .
- En prenant l'origine du paramétrage des droites caractéristiques sur la frontière  $\Gamma_2$ , les équations paramétriques des droites caractéristiques sont:

$$\begin{cases} X(s) = X_{\Gamma_2}(v) + s \cos(\alpha) \\ Y(s) = Y_{\Gamma_2}(v) + s \sin(\alpha) \end{cases}$$

De même, la frontière  $\Phi(\Gamma_2)$  est paramétrée par:  $(x_{\Gamma_2}(w), y_{\Gamma_2}(w))$ .

L'origine du paramétrage est le point:  $o = \Phi(O) = (x_{\Gamma_2}(0), y_{\Gamma_2}(0))$

Le paramètre  $w$  est défini d'une façon analogue au paramètre  $v$ :

$$w(x, y) = (x - x_{\Gamma_2}(0)) \sin(\alpha) - (y - y_{\Gamma_2}(0)) \cos(\alpha)$$

Le choix des paramètres  $v$  et  $w$  pour paramétrer les frontières  $\Gamma_2$  et  $\Phi(\Gamma_2)$  induisent la

définition d'une fonction f:

$$f(v) = w, \text{ telle que: } (x_{\Gamma_2}(w), y_{\Gamma_2}(w)) = \Phi(X_{\Gamma_2}(v), Y_{\Gamma_2}(v))$$

A l'aide de la fonction f(), on écrit le transformé par  $\Phi$  des points de la frontière  $\Gamma_2$ :

$$\Phi(X_{\Gamma_2}(v), Y_{\Gamma_2}(v)) = (x_{\Gamma_2}(f(v)), y_{\Gamma_2}(f(v)))$$

On intègre la troisième équation différentielle du système :  $(c) \frac{dx}{ds} = \cos(\alpha)$

Sur chaque droite caractéristique, on a:  $x(s) = x(0) + s \cos(\alpha)$  où  $x(0)$  est une constante d'intégration.

Or la quantité:  $s \cos(\alpha)$  vaut  $X(s) - X_{\Gamma_2}(v)$ .

On écrit l'expression de la première composante, x, de la transformation  $\Phi$ :

$$x(X, Y) = x_{\Gamma_2}(f(v(X, Y))) + X - X_{\Gamma_2}(v(X, Y))$$

De la même façon, on obtient:

$$y(X, Y) = y_{\Gamma_2}(f(v(X, Y))) + Y - Y_{\Gamma_2}(v(X, Y))$$

La transformation  $\Phi$  n'est pas entièrement définie car elle dépend de la fonction f() dont la forme n'a pas été explicitée.

## 6.2 : Prise en compte de l'équation aux dérivées partielles (3)

L'équation (3) traduit que la transformation  $\Phi$  est isosurfacique:  $x_X y_Y - x_Y y_X = 1$

Pour simplifier les écritures, on note :  $v = v(X, Y)$  et  $w = f(v(X, Y))$ .

Les dérivées partielles des composantes x et y de la fonction vectorielle  $\Phi$  sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial X}(X, Y) = x_X = x_{\Gamma_2}'(w)f'(v)v_X + 1 - X_{\Gamma_2}'(v)v_X \\ \frac{\partial x}{\partial Y}(X, Y) = x_Y = x_{\Gamma_2}'(w)f'(v)v_Y - X_{\Gamma_2}'(v)v_Y \\ \frac{\partial y}{\partial X}(X, Y) = y_X = y_{\Gamma_2}'(w)f'(v)v_X - Y_{\Gamma_2}'(v)v_X \\ \frac{\partial y}{\partial Y}(X, Y) = y_Y = y_{\Gamma_2}'(w)f'(v)v_Y + 1 - Y_{\Gamma_2}'(v)v_Y \end{array} \right.$$

Le déterminant du gradient de la transformation  $\Phi$  est:

$$\det(\nabla\Phi(X, Y)) = 1 + (x_{\Gamma_2}'(w)v_X + x_{\Gamma_2}'(w)v_Y)f'(v) - (X_{\Gamma_2}'(v)v_X + Y_{\Gamma_2}'(v)v_Y)$$

En écrivant l'équation (3), on obtient l'équation différentielle (A) permettant d'expliquer la forme de la fonction f():

$$(x_{\Gamma_2}'(w)v_X + x_{\Gamma_2}'(w)v_Y)f'(v) = X_{\Gamma_2}'(v)v_X + Y_{\Gamma_2}'(v)v_Y$$

Or comme :  $v(X, Y) = (X - X_{\Gamma_2}(0))\sin(\alpha) - (Y - Y_{\Gamma_2}(0))\cos(\alpha)$

les dérivées partielles du paramètre  $v$  sont des constantes :  $\begin{cases} v_X = \sin(\alpha) \\ v_Y = -\cos(\alpha) \end{cases}$

Le paramètre  $v$  du point  $(X_{\Gamma_2}(v), Y_{\Gamma_2}(v))$  de la frontière  $\Gamma_2$  vaut:

$$v = (X_{\Gamma_2}(v) - X_{\Gamma_2}(0))\sin(\alpha) - (Y_{\Gamma_2}(v) - Y_{\Gamma_2}(0))\cos(\alpha)$$

En dérivant cette relation par rapport à la variable  $v$ , on obtient alors l'équation liant les dérivées des fonctions paramétriques de la frontière  $\Gamma_2$ :

$$1 = X_{\Gamma_2}'(v)\sin(\alpha) - Y_{\Gamma_2}'(v)\cos(\alpha)$$

Le second membre de l'équation (A) est donc égal à l'unité.

De même, le paramètre  $w$  des points  $(x_{\Gamma_2}(w), y_{\Gamma_2}(w))$  de la frontière  $\Phi(\Gamma_2)$  vaut:

$$w = (x_{\Gamma_2}(w) - x_{\Gamma_2}(0))\sin(\alpha) - (y_{\Gamma_2}(w) - y_{\Gamma_2}(0))\cos(\alpha)$$

En dérivant cette équation par rapport à la variable  $w$ , on obtient une relation liant les dérivées des fonctions paramétriques de la frontière  $\Phi(\Gamma_2)$ :

$$1 = x_{\Gamma_2}'(w)\sin(\alpha) - y_{\Gamma_2}'(w)\cos(\alpha)$$

Le premier membre de l'équation (A) vaut:  $f'(v)$ .

Ainsi, l'équation différentielle (A) se simplifie:

$$f'(v) = 1$$

La fonction  $f$  est donc de la forme:

$$f(v) = v + \text{cste.}$$

La valeur de la constante est déterminée par la valeur à l'origine:  $f(0) = \text{cste.}$

$$\text{On a donc: } (x_{\Gamma_2}(f(0)), y_{\Gamma_2}(f(0))) = \Phi(X_{\Gamma_2}(0), Y_{\Gamma_2}(0))$$

Or on rappelle que le point  $o = (x_{\Gamma_2}(0), y_{\Gamma_2}(0))$ , origine du paramétrage de  $\Phi(\Gamma_2)$  a été

pris conventionnellement comme le transformé par  $\Phi$  du point  $O = (X_{\Gamma_2}(0), Y_{\Gamma_2}(0))$ , origine du paramétrage de  $\Gamma_2$ . On en déduit que  $f(0)$  est nulle, la fonction  $f()$  est l'identité.

La transformation  $\Phi$  est donc maintenant parfaitement définie :

$$\begin{cases} x(X, Y) = x_{\Gamma_2}(v(X, Y)) + X - X_{\Gamma_2}(v(X, Y)) \\ y(X, Y) = y_{\Gamma_2}(v(X, Y)) + Y - Y_{\Gamma_2}(v(X, Y)) \end{cases}$$

avec  $v(X, Y) = (X - X_{\Gamma_2}(0))\sin(\alpha) - (Y - Y_{\Gamma_2}(0))\cos(\alpha)$

## 7 : Le mécanisme de flexion-écoulement

Le problème de reconstruction géométrique est traduit analytiquement en la recherche des fonctions composantes  $x(X, Y)$ ,  $y(X, Y)$  de la fonction vectorielle  $\Phi(X, Y)$  et de la fonction scalaire  $\beta(X, Y)$  définies sur le domaine  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^2$  et à valeurs dans  $\mathfrak{R}$ . Il convient ensuite de préciser les conditions à la limite à appliquer sur le contour du domaine  $\Omega$  telles que ces fonctions soient définies de façon unique.

Le problème analytique est donc la résolution du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \end{bmatrix} \\ \det \left( \begin{bmatrix} x_X & x_Y \\ y_X & y_Y \end{bmatrix} \right) = 1 \end{array} \right.$$

En développant la première relation matricielle ainsi que le déterminant, on obtient le système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_X \cos(\alpha) + x_Y \sin(\alpha) = \cos(\beta) \quad (1) \\ y_X \cos(\alpha) + y_Y \sin(\alpha) = \sin(\beta) \quad (2) \\ x_X y_Y - x_Y y_X = 1 \quad (3) \end{array} \right.$$

La résolution de ce système d'équations aux dérivées partielles peut être menée grâce à la méthode des caractéristiques [32]. On considère tout d'abord le sous-système composé des deux premières équations.

### 7.1 : Résolution de (1) et (2) par la méthode des caractéristiques

Une courbe paramétrique  $C$  sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^2$  est définie par deux fonctions coordonnées  $(X_C(s), Y_C(s))$ . Le paramètre  $s$  prend ses valeurs dans l'intervalle réel  $J$ . Envisageons le système des trois équations différentielles:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{ds} = \cos(\alpha) \quad (a) \\ \frac{dY}{ds} = \sin(\alpha) \quad (b) \\ \frac{dx}{ds} = \cos(\beta) \quad (c) \end{array} \right.$$

On vérifie que la résolution de ce système de trois équations différentielles ordinaires (a), (b) et (c) équivaut à la résolution de (1) sur la courbe paramétrique C.

En effet, sur l'intervalle J, on a:  $x(s)=x(X_C(s), Y_C(s))$

En dérivant par rapport au paramètre s, on obtient:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial X} \frac{dX}{ds} + \frac{\partial x}{\partial Y} \frac{dY}{ds}$$

L'équation obtenue est équivalente à l'équation aux dérivées partielles (1) avec les notations du système de trois équations différentielles (a) (b) et (c).

Le paramètre  $\alpha$  étant une donnée du problème, on intègre le système des équations différentielles (a) et (b).

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = \cos(\alpha) & (a) \\ \frac{dY}{ds} = \sin(\alpha) & (b) \end{cases}$$

Les solutions sont les courbes paramétriques  $(X(s), Y(s))$ , tangentes en tout point à la direction stratigraphique définie par l'angle  $\alpha(X, Y)$ . Ces courbes sont les lignes stratigraphiques du domaine  $\Omega$  de  $\mathfrak{R}^2$ . Les courbes caractéristiques des équations aux dérivées partielles (1) et (2) sont donc les lignes stratigraphiques.

La fonction  $\beta(X, Y)$  n'est pas une donnée du problème, il n'est pas possible d'intégrer directement les équations aux dérivées partielles (1) et (2). Cependant, en considérant la fonction  $\beta(X, Y)$  comme un paramètre, on obtient une expression des fonctions  $x(X, Y)$  et  $y(X, Y)$  le long des lignes stratigraphiques C d'équations paramétriques  $(X_C(s), Y_C(s))$ .

$$\begin{cases} x(s) = x(0) + \int_0^s \cos(\beta(X_C(s), Y_C(s))) ds \\ y(s) = y(0) + \int_0^s \sin(\beta(X_C(s), Y_C(s))) ds \end{cases}$$

On se donne la transformée d'un point choisi comme origine des abscisses curvilignes sur la ligne stratigraphique C:

$$\Phi(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}$$

On détermine alors le déplacement en tout point de la ligne C en fonction du paramètre  $\beta(X, Y)$  et de l'abscisse curviligne s:

$$\Phi(s) = \Phi(0) + \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\beta(X_C(s), Y_C(s))) \\ \sin(\beta(X_C(s), Y_C(s))) \end{bmatrix} ds$$

En particulier, s'il existe une courbe  $\Gamma$  paramétrée par les fonctions  $(X_\Gamma(v), Y_\Gamma(v))$  qui coupe chaque ligne stratigraphique  $C$  en un unique point, on choisit ce point pour origine des abscisses curvilignes sur les lignes stratigraphiques.

Ainsi, si chaque ligne stratigraphique  $C$  est paramétrée dans le même sens, on définit un paramétrage continu  $(s, v)$  du domaine  $\Omega$ . Chaque point du domaine  $\Omega$  appartient à une ligne stratigraphique  $C$ . Les paramètres  $(s, v)$  du point  $(X, Y)$  sont respectivement l'abscisse curviligne  $s$  du point  $(X, Y)$  sur  $C$  et le paramètre  $v$  du point d'intersection de  $C$  et  $\Gamma$  dans le paramétrage de  $\Gamma$ .

La donnée du champ de scalaire  $\alpha(X, Y)$  permet de définir un difféomorphisme  $\Psi$  du domaine  $\Omega$  paramétré par les coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  vers le même domaine  $\Omega$  paramétré par les coordonnées  $(s, v)$  :

$$\Psi(X, Y) = \begin{bmatrix} s(X, Y) \\ v(X, Y) \end{bmatrix} \text{ et } \Psi^{-1}(s, v) = \begin{bmatrix} X(s, v) \\ Y(s, v) \end{bmatrix}$$

La donnée de la transformée de chaque point de  $\Gamma$  est une fonction de  $\Gamma$  dans  $\mathcal{R}^2$ :

$$\Phi(X_\Gamma(v), Y_\Gamma(v)) = \Phi_0(v) = \Phi(0, v), \text{ les points de } \Gamma \text{ sont tels que } s=0$$

Cette fonction permet d'écrire  $\Phi$  dans le système de coordonnées  $(s, v)$  en fonction du champ scalaire inconnu  $\beta(X, Y)$ :

$$\Phi(s, v) = \Phi(0, v) + \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \\ \sin(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \end{bmatrix} ds$$

On différencie la fonction  $\Phi(s, v)$ , fonction définie par une intégrale de la forme:

$$f(x, y) = \int_0^x g(z, y) dz$$

On démontre en annexe section 5.2 page 199 le résultat différentiel:

$$df(x, y) = g(x, y)dx + \left( \int_0^x \frac{\partial}{\partial y} g(z, y) dz \right) dy$$

En appliquant ce résultat, on obtient l'écriture différentielle condensée:

$$d\Phi(s, v) = \frac{d\Phi_0}{dv} dv + \left[ \begin{array}{c} \cos(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \\ \sin(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \end{array} \right] ds + \left( \int_0^s \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \\ \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \end{array} \right] ds \right) dv$$

Les dérivées partielles de la fonction vectorielle  $\Phi$  sont:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{d\Phi_0}{dv} + \int_0^s \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \\ \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \end{array} \right] ds$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \left[ \begin{array}{c} \cos(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \\ \sin(\beta(\Psi^{-1}(s, v))) \end{array} \right]$$

Le gradient par rapport aux coordonnées  $(s, v)$  de la fonction vectorielle  $\Phi$  est:

$$\text{grad}(\Phi) = \left[ \begin{array}{cc} \cos(\beta) & x'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta) ds \\ \sin(\beta) & y'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta) ds \end{array} \right]$$

## 7.2 : Prise en compte de l'équation aux dérivées partielles (3)

La fonction  $\Psi^{-1}$  permet de passer des coordonnées  $(s, v)$  vers les coordonnées cartésiennes  $(X, Y)$  du domaine  $\Omega$ , on a établi, annexe section 5.5 page 202, la relation matricielle:

$$\text{grad}(\Phi) = \nabla \Phi \text{ grad}(\Psi^{-1})$$

En écrivant l'égalité des déterminants des deux membres de la relation précédente et en tenant compte de l'équation (3)  $\det(\nabla \Phi) = 1$  on obtient:

$$\det(\text{grad}(\Phi)) = \det(\text{grad}(\Psi^{-1}))$$

Il n'apparaît plus dans l'équation que la fonction inconnue  $\beta(X, Y) = \beta(\Psi^{-1}(s, v))$ :

$$\det(\text{grad}(\Psi^{-1})) = \cos(\beta) \left( y'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta) ds \right) - \sin(\beta) \left( x'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta) ds \right) \quad (I)$$

On utilise les notations simplificatrices suivantes:

$$a = \det(\text{grad}(\Psi^{-1})); \quad b = y'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta) ds; \quad c = x'_0 + \int_0^s \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta) ds$$

La relation (I) devient alors en écriture condensée :

$$a = \cos(\beta)b - \sin(\beta)c \quad (\text{I})$$

De façon à déterminer quelle type de condition à la limite attribuer pour obtenir un unique champ scalaire solution  $\beta(X, Y)$ , on dérive la relation (I) par rapport à la variable  $s$ .

Les dérivées partielles des fonctions  $b$  et  $c$  par rapport à la variable  $s$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial b}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial v} \sin(\beta) = \cos(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial v} \\ \frac{\partial c}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial v} \cos(\beta) = -\sin(\beta) \frac{\partial \beta}{\partial v} \end{cases}$$

Une première dérivation de la relation (I) par rapport à  $s$  donne:

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{\partial \beta}{\partial s} (-\sin(\beta)b - \cos(\beta)c) + (\cos^2(\beta) + \sin^2(\beta)) \frac{\partial \beta}{\partial v}$$

On simplifie l'expression et on obtient l'équation (II):

$$\frac{\partial a}{\partial s} = -(\sin(\beta)b + \cos(\beta)c) \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial \beta}{\partial v} \quad (\text{II})$$

Une seconde dérivation par rapport à la variable  $s$  donne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 a}{\partial s^2} = & -(\sin(\beta)b + \cos(\beta)c) \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} - (\cos(\beta)b - \sin(\beta)c) \left( \frac{\partial \beta}{\partial s} \right)^2 \\ & - (\sin(\beta)\cos(\beta) - \cos(\beta)\sin(\beta)) \frac{\partial \beta}{\partial v} \frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial v \partial s} \end{aligned}$$

On simplifie l'expression et on obtient l'équation (III):

$$\frac{\partial^2 a}{\partial s^2} = -(\sin(\beta)b + \cos(\beta)c) \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + (\sin(\beta)c - \cos(\beta)b) \left( \frac{\partial \beta}{\partial s} \right)^2 + \frac{\partial^2 \beta}{\partial v \partial s} \quad (\text{III})$$

En écrivant la combinaison linéaire suivante:  $\left( \frac{\partial \beta}{\partial s} \right) (\text{III}) - \frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} (\text{II}) + \left( \frac{\partial \beta}{\partial s} \right)^3 (\text{I})$

On obtient l'équation (IV) dans laquelle les termes  $b$  et  $c$  n'apparaissent plus, l'inconnue est la fonction  $\beta(s, v)$ :

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\frac{\partial^2 a}{\partial s^2} - \frac{\partial^2\beta}{\partial s^2}\left(\frac{\partial a}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)^3 a = \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\frac{\partial^2\beta}{\partial v\partial s} - \frac{\partial^2\beta}{\partial s^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial v}\right) \quad (\text{IV})$$

C'est une équation aux dérivées partielles quasi-linéaire d'ordre deux que l'on peut écrire sous la forme générale :

$$A\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2} + B\frac{\partial^2\beta}{\partial v\partial s} + C\frac{\partial^2\beta}{\partial v^2} + D = 0 \quad (\text{V})$$

Les coefficients A, B, C et D étant des fonctions des variables s, v,  $\beta$ ,  $\frac{\partial\beta}{\partial s}$  et  $\frac{\partial\beta}{\partial v}$ .

On écrit l'équation (IV) sous la forme (V):

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2}\left(\frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial s}\right) - \frac{\partial^2\beta}{\partial v\partial s}\left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right) + \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial^2 a}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)^2 a\right) = 0$$

On identifie les coefficients A, B, C et D:

$$A = \frac{\partial\beta}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial s}; \quad B = -\left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right); \quad C = 0; \quad D = \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial^2 a}{\partial s^2} + \left(\frac{\partial\beta}{\partial s}\right)^2 a\right)$$

Dans la résolution de l'équation (V) par la méthode des caractéristiques [32], les courbes caractéristiques sont solutions de l'équation différentielle:

$$A\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 - B\left(\frac{dv}{ds}\right) + C = 0$$

Cette équation se simplifie et se factorise du fait que C est nul:

$$\left(A\left(\frac{dv}{ds}\right) - B\right)\left(\frac{dv}{ds}\right) = 0$$

Les courbes caractéristiques sont donc d'une part les lignes stratigraphiques qui correspondent à l'équation ( $v=cste$ , solution de  $v'(s)=0$ ) et d'autre part les courbes solutions de l'équation différentielle:

$$Adv = Bds$$

Soit en remplaçant A et B:

$$\frac{\partial\beta}{\partial v}dv + \frac{\partial\beta}{\partial s}ds = \frac{\partial a}{\partial s}dv$$

Les courbes caractéristiques sont solutions de l'équation différentielle:  $d\beta = \frac{\partial a}{\partial s}dv$

On écrit l'équation (IV) en adoptant la notation indicielle pour indiquer la dérivation partielle par rapport à une variable et on obtient l'équation (VI):

$$\beta_{ss}(\beta_v - a_s) - \beta_{sv}\beta_s + \beta_s a_{ss} + a\beta_s^3 = 0 \quad (\text{VI})$$

Si  $\beta_s \neq 0$  on divise par  $\beta_s^2$ , et on obtient:

$$\frac{\beta_s a_{ss} - \beta_{ss} a_s}{\beta_s^2} + a\beta_s = \frac{\beta_{sv}\beta_s - \beta_{ss}\beta_v}{\beta_s^2}$$

En appliquant aux deux fractions la formule différentielle:

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$$

On obtient la relation:

$$\left(\frac{a_s}{\beta_s}\right)_s + a\beta_s = \left(\frac{\beta_v}{\beta_s}\right)_s$$

### 7.3 : Condition nécessaire sur le bord de frontière imposé.

La condition à la limite sur le bord de frontière  $\Gamma_0$  est la donnée de la transformée  $\Phi(\Gamma_0)$ .

La frontière  $\Gamma_0$  est paramétrée par le couple de fonctions  $(X(t), Y(t))$ . On définit alors les fonctions  $(x(t), y(t))$  telles que :  $(x(t), y(t)) = \Phi(X(t), Y(t))$ . Ainsi la courbe  $\Phi(\Gamma_0)$  est paramétrée par les fonctions  $(x(t), y(t))$  à l'aide du même paramètre  $t$ .

On appelle  $\vec{u}$  le vecteur unitaire selon la direction stratigraphique au point  $(X(t), Y(t))$ .

On appelle  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  les vecteurs  $\vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{dX}{dt} \\ \frac{dY}{dt} \end{bmatrix}$  et  $\vec{w} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix}$

Envisageons le scalaire :  $\det(\nabla\Phi \vec{u}, \nabla\Phi \vec{v}) = \det(\nabla\Phi) \det(\vec{u}, \vec{v})$

En dérivant  $\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \Phi\left(\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}\right)$  par rapport à la variable  $t$  on obtient:  $\vec{w} = (\nabla\Phi)\vec{v}$

Et comme de plus,  $\det(\nabla\Phi) = 1$

On obtient l'égalité (I) :

$$\det(\nabla\Phi \vec{u}, \vec{w}) = \det(\vec{u}, \vec{v})$$

- Le vecteur  $\vec{u}$  est donné, unitaire et dans la direction stratigraphique.
- Le vecteur  $\vec{v}$  est défini et donné pour les points de la frontière paramétrée  $\Gamma_0$ .
- Le vecteur  $\nabla\Phi \vec{u}$ , nouvelle direction stratigraphique, est tel que  $\|\nabla\Phi \vec{u}\| = 1$ .

La donnée de la transformée  $\Phi(\Gamma_0)$  paramétrée par  $(x(t), y(t))$  ne doit pas être quelconque, on doit avoir nécessairement l'inégalité (II)  $|\det(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{w}\|$  pour qu'il existe une direction stratigraphique de la configuration déformée :  $\nabla\Phi \vec{u}$  vérifiant l'égalité (I).

Remarque : la donnée de la transformée  $\Phi(\Gamma_0)$  paramétrée par  $(x(t), y(t))$  et vérifiant l'inégalité (II) en chacun de ses points entraîne nécessairement du fait de l'égalité (I) et de la relation :  $\|\nabla\Phi \vec{u}\| = 1$ , l'existence suivant les configurations de une ou deux directions possibles pour la nouvelle stratigraphie :  $\nabla\Phi \vec{u}$ . L'unique direction de la nouvelle stratigraphie est déterminée du fait des autres conditions à la limite.

## Références :

- [1] BEHZADI, H. & DUBEY, A.K. , Variation of Interlayer Slip in Space and Time during Flexural Folding. , Journal of Structural Geology. Vol 2, No 4, pp 453, 457 (1980)
- [2] BIBERON, B. , Mécanismes et Evolution de Chevauchements à Vergences Opposées, Exemple des structures de la Sainte-Victoire (Provence). Thèse de Doctorat, Université de Grenoble , 189 p (1988)
- [3] BOYER, S.E. , Styles of Folding within Thrust Sheets: Examples from the Appalachian and Rocky Mountains of the U.S.A. and Canada , Journal of Structural Geology. Vol 8, No 3-4, pp 325, 339 (1986)
- [4] BURBANK, D. & MEIGS, A. & BROZOVIC N. , Interactions of Growing Folds and Coeval Depositional Systems. Basin Research , Vol 8, pp 199, 223 (1996)
- [5] CHAPPLE, W. & SPANG, J. , Significance of Layer-Parallel Slip During Folding of Layered Sedimentary Rocks. , Geological Society of America Bulletin. Vol 85, pp 1523, 1534 (1974)
- [6] CHESTER, J.S. & CHESTER, F.M. , Fault Propagation Folds above Thrust with Constant Dip. , Journal of Structural Geology. Vol 12, No 7, pp 903, 910 (1990)
- [7] CHOUERI, W. , Projet Demeter Backstripping 1D , Rapport interne de l'Institut Français du Pétrole, 21p (1993)
- [8] CONTRERAS, J. & SUTER, M. , Kinematic Modeling of Cross-Sectional Deformation by Computer Simulation, Journal of Geophysical Research. Vol 95, No B13, pp 21913, 21929 (1990)
- [9] CRUIKSHAN, K.M. & NEAVEL, K.E. & ZHAO, G.Z. , Computer Simulation of Growth of Duplex Structures. , Tectonophysics, Vol 164, pp1, 12 (1989)
- [10] DAHLSTROM, C.D.A. , Balanced Cross Sections , Can. J. Earth Sci. , No 6, pp 743, 757 (1969)
- [11] DARROS DE MATOS, R.M. , Geometry of the Hanging Wall Above a System of Listric Normal Faults - A Numerical Solution, The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 77, No 11, pp 1839, 1859 (1993)
- [12] DE PAOR, D.G. , Stretch in Shear Zone : Implications for Section Balancing, Journal of Structural Geology. Vol 9, No 7, pp 893, 895 (1987)
- [13] DE PAOR, D.G. , Balanced Section in Thrust Belts - Part 1 : Construction, The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 72, No 1, pp 73, 90 (1988)

- [14] DE PAOR, D.G. & BRADLEY, D.C. , Balanced Section in Thrust Belts - Part 2 : Computerize Line and Area Balancing, *Geobyte* May pp 33, 37 (1988)
- [15] ENDIGNOUX, L. & MORETTI, I. & ROURE, F. , Forward Modeling of the Southern Apennines. , *Tectonics*. , Vol 8, No 5, pp 1095, 1104 (1989)
- [16] ENDIGNOUX, L. & WOLF, S. , Thermal and Kinematic Evolution of Thrust Basins : A 2D Numerical Model. , *Petroleum and Tectonics in Mobile Belts*. , Editions Technip , pp 181, 192 (1990)
- [17] ENDIGNOUX, L. & MUGNIER, J-L. , The Use of Forward Kinematic Model in the Construction of Balanced Cross Section, *Tectonics*. Vol 9, No 5, pp 1249, 1262 (1990)
- [18] FAURE, J.L. , Failles Normales, Coupes Equilibrées et Subsidence dans les Bassins en Extension. Le Bassin Viking (Mer du Nord) et le Domaine Briançonnais (Alpes Occidentales) au Jurrassique. Thèse de Doctorat. , Université de Montpellier II (1990)
- [19] FAVIE, J-M. , Transferts de Masse et de Chaleur dans les Zones Faillées avec Chevauchement. Thèse de Doctorat, Université de Bordeaux I, 141 p. (1992)
- [20] GEISER, J. & GEISER, P.A. & KLIGFIELD, R. & RATLIFF, R. & ROWAN, M. , New Applications of Computer-Based Section Construction : Strain Analysis, Local Balancing, and Subsurface Fault Prediction. , *The Mountain Geologist*. , Vol 25, No 2, pp 47, 59 (1988)
- [21] GOGUEL, J. , Introduction à l'Etude Mécanique des Déformations de l'Ecorce Terrestre. , *Mem. Serv. Carte Géol. France*. , 530p (1948)
- [22] GOGUEL, J. , Etude Mécanique des Déformations Géologiques, Bureau de Recherches Géologiques et minières, *Manuels & Méthodes* No 6, 193p (1983)
- [23] GRAHAM, R. & HOSSACK, J. & DERAMOND J. & SOULA J-C. , Géométrie des Surfaces de Chevauchement, *Bull. Soc. Geol. France*, Vol III, No 1, pp 169, 181 (1987)
- [24] GRANJEON, D. , Modélisation Déterministe du Remplissage Sédimentaire d'un Bassin. , Rapport interne de l'Institut Français du Pétrole, 136p (1995)
- [25] GRATIER, J.P. (Coordonateur), L'équilibrage des Coupes Géologiques, *Mém. Docum. Centre Arm. Et. Struct. Socles*, Rennes 20, 165p (1988)
- [26] HARDY, S. & POBLET, J. & McCLAY, K. & WALTHAM, D. , Mathematical Modeling of Growth Strata Associated with Fault-related Fold Structures. In Buchanan, P.G. and Nieuwland, D.A. (eds.), *Modern Developments in Structural Interpretation, Validation and Modelling*, *Geol. Soc. Spec. Public. No99*, pp 265, 282 (1996)
- [27] HOWARD, J. , Restoration of Cross-Sections Through Unfaulted, Variably Strained Strata. , *Journal of Structural Geology*. Vol 15, No 11, pp 1331, 1342 (1993)
- [28] HUGHES, T.J.R. , *The Finite Element Method* , Prentice-Hall , Inc. (1987)
- [29] HWANG W.T. , The Evolution of Fold-and-Thrust Structures. , Ph.D. Thesis, Department of Geology and Geophysics, University of California Berkeley. 95p (1983)

- [30] JAMISON, W.R. , Geometric Analysis of Fold Development in Overthrust Terranes. , Journal of Structural Geology. Vol 9, No 2, pp 207, 219 (1987)
- [31] JIMENEZ, O. , Modélisation par Eléments Finis de la Compaction et des Transferts Couplés dans les Structures Géologiques Chevauchantes. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux I., 167 p. (1995)
- [32] KINCAID, D. & CHENEY, W. , Numerical Analysis, Mathematics of Scientific Computing. , Brooks/Cole , 690 p (1991)
- [33] LE LIONNAIS, F. & BOUVIER, A. & GEORGE, M. , Dictionnaire des Mathématiques , Presses Universitaires de France (1992)
- [34] LISLE, R.J. , Constant Bed-Length Folding : Three-Dimensional Geometrical Implications. , Journal of Structural Geology. Vol 14, No 2, pp 245, 252 (1992)
- [35] MANDL, G. , Tectonic Deformation by Rotating Parallel Faults : the «Bookshelf» Mechanism, Tectonophysics. Vol 141, pp277, 316 (1987)
- [36] Mc CLAY, K.R. , Thrust Tectonics , Chapman & Hall. , 447p (1992)
- [37] MERCIER, E. & OUTTANI, F. & FRIZON de LAMOTTE, D. & GHANDRICHE, H. Geometry of Fault-propagation Folds: Method and Application - Comment. , Tectonophysics. Vol 245, pp111, 113 (1995)
- [38] MERCIER, E. & OUTTANI, F. & FRIZON de LAMOTTE, D. , Forward Modelling of the late Evolutions of Fault-propagation Folds: Principles and Example. (1995)
- [39] MERLE, O. , Nappes et Chevauchements. , Masson. , 137p (1994)
- [40] MITRA, R.T. & BOYER, S.E. , Energy Balance and Deformation Mechanisms of Duplexes. , Journal of Structural Geology. Vol 8, No 3-4, pp 291, 304 (1986)
- [41] MORETTI, I. & LARRERE, M. , Locace : Computer-Aided Construction of Balanced Geological Cross Sections. , Geobyte. , October, pp 16, 24 (1989)
- [42] MORETTI, I. & TRIBOULET, S. & ENDIGNOUX, L. , Some Remarks on the Geometrical Modeling of Geological Deformations. , Petroleum and Tectonics in Mobile Belts. , J. Letouzey (Editor) and Editions Technip pp155, 162 (1990)
- [43] MORETTI, I. , Locace/Baliss : Un Test de la Cohérence Géologique d'une Interprétation Sismique. , Revue de l'Institut Français du Pétrole. , Vol 46 , No 5, pp 563, 580 (1991)
- [44] MUGNIER, J.L. , Déplacements et déformations dans l'avant pays d'une chaîne de collision : méthodes d'études et modélisations - exemple du Jura. Thèse de Doctorat, Université de Grenoble , 163 p (1984)
- [45] NICOLAS, A. , Principes de Tectonique. , Masson , 196 p (1984)
- [46] OUTTANI, F. , Cinématique, Modélisation et Bilan Energétique des Plis de Rampe : Approche Théorique et Application à Deux Régions du Front Sud Atlasique. Thèse de Doctorat, Université de Cergy-Pontoise , 244 p (1996)

- [47] PARKER GAY, S. , Gravitational Compaction, A Neglected Mechanism in Structural and Stratigraphic Studies : New Evidence from Mid- Continent, USA. , The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 73, No 5, pp 641, 657 (1989)
- [48] PERRIER, R. & QUIBLIER, J. , Thickness Changes in Sedimentary Layers During Compaction History; Methods for Quantitative Evaluation. , The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 58, No 3, pp 507, 520 (1974)
- [49] POLLARD, D.D. & SALTZER, S.D. & RUBIN, A.M. , Stress Inversion Methods : Are they Based on Faulty Assumptions? , Journal of Structural Geology. Vol 15, No 8, pp 1045, 1054 (1993)
- [50] RAMSAY, J. , Folding and Fracturing of Rocks. , Mc Graw-Hill Book Compagny , 568 p (1967)
- [51] RAMSAY, J. & HUBER, M. , The Techniques of Modern Structural Geology , Vol 2 : Folds and Fractures. , Academic Press , pp 309, 700 (1987)
- [52] ROURE, F. & ROCA, E. & SASSI, W. , The Neogene Evolution of the Outer Carpathian Flysch Units (Poland, Ukraine and Romania): Kinematics of a Foreland/Fold-and-Thrust Belt System. , Sedimentary Geology. No 86, pp 177, 201 (1993)
- [53] ROURE, F. & SASSI, W. , Kinematics of Deformation and Petroleum System Appraisal in Neogene Foreland Fold-and-Thrust Belts. Petroleum Geoscience, Vol 1, pp253, 269 (1995)
- [54] SAATDJAN, E. , Phénomènes de Transport et leurs Résolutions Numériques. , Polytechnica, 355 p (1993)
- [55] SALENÇON, J. , Mécanique du Continu, Tome I, Concepts Généraux. , Ellipses , 352 p (1995)
- [56] SANS, M. & MUNOZ, J.A. & VERGES, J. , Triangle Zone and Thrust Wedge Geometries Related to Evaporitic Horizons (Southern Pyrenees). , Bulletin of Canadian Petroleum Geology. Vol 44, No 2, pp 375-384 (1996)
- [57] SCHNEIDER, F. , Traitements Numériques de la Compaction dans les Simulateurs de Bassins Sédimentaires. , Rapport interne de l'Institut Français du Pétrole, 101p (1991)
- [58] SCHNEIDER, F. , Modèle de Compaction Elasto-Plastique en Simulation de Bassins. , Revue de l'Institut Français du Pétrole. , Vol 48 , No 1, pp 3-14 (1993)
- [59] SMITH, R.E. & WILTSCHKO, D.V. , Generation and Maintenance of Abnormal Fluid Pressures beneath a Ramping Thrust Sheet: Isotropic Permeability Experiments. , Journal of Structural Geology., Vol 18, No 7, pp 951, 970 (1996)
- [60] SUPPE, J. , Geometry and Kinematics of Fault-Bend Folding, American Journal of Science. , Vol 283, September, pp 684, 721 (1983)
- [61] TANNER, G. , The Flexural-Slip Mechanism , Journal of Structural Geology., Vol 11, No 6, pp 635, 655 (1989)

- [62] TURCOTTE, D.L. & SCHUBERT, G. , Geodynamics: Applications of Continuum Physics to Geological Problems. , John Wiley & Sons, New-York , 450 p (1982)
- [63] WALTHAM, D. , Finite Difference Modelling of Hangingwall Deformation, Journal of Structural Geology. Vol 11, No 4, pp 433, 437 (1989)
- [64] WALTHAM, D. , Finite Difference Modelling of Sandbox Analogues, Compaction and Detachment Free Deformation, Journal of Structural Geology. Vol 12, No 3, pp 375, 381 (1990)
- [65] WICKHAM, J. , Fault Displacement-Gradient Folds and the Structure of Lost Hills, California (U.S.A.). , Journal of Structural Geology. Vol 17, No 9, pp 1293, 1302 (1995)
- [66] WILLIAMS, R.T. , Energy Balance for Large Thrust Sheets and Fault-Bend Folds. , Journal of Structural Geology. Vol 9, No 3, pp 375, 379 (1987)
- [67] WHITE, N.J. & JACKSON, J.A. & MCKENZIE, D.P. , The Relationship between the Geometry of Normal Faults and that in the Sedimentary Layers in their Hanging Walls, Journal of Structural Geology. Vol 8, No 8, pp 897, 909 (1986)
- [68] WHITE, N.J. , A Method for Automatically Determining Normal Fault Geometry at Depth, Journal of Geophysical Research. Vol 97 No B2, pp 1715, 1733 (1992)
- [69] WITHJACK, M.O. & PETERSON, E.T. , Prediction of Normal Faults Geometries - A Sensitivity Analysis, The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 77, No 11, pp 1860, 1873 (1993)
- [70] XIAO, H-B. & SUPPE, J. , Role of Compaction in Listric Shape of Growth Normal Faults , The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 73, No 6, pp 777, 786 (1989)
- [71] XIAO, H-B. & SUPPE, J. , Origin of Rollover, The American Association of Petroleum Geologists Bulletin. Vol 76, No 4, pp 509, 529 (1992)
- [72] ZOETEMEIJER, R. , Tectonic Modelling of Foreland Basins, Thin Skinned Thrusting, Syntectonic Sedimentation and Lithospheric Flexure. , Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam. , 148 p, (1992)
- [73] ZOETEMEIJER, R. & SASSI, W. & ROURE, F. & CLOETINGH, S. , Stratigraphic and Kinematic Modeling of Thrust Evolution, Northern Apennines, Italy. , GEOLOGY Vol 20, pp 1035, 1038 (1992)

