

Commande de suivi de trajectoire pour les systèmes complexes et /ou incertains

Yosr Chamekh Chamekh Hammami

▶ **To cite this version:**

Yosr Chamekh Chamekh Hammami. Commande de suivi de trajectoire pour les systèmes complexes et /ou incertains. Autre. Ecole Centrale de Lille; École nationale d'ingénieurs de Tunis (Tunisie), 2012. Français. NNT : 2012ECLI0020 . tel-00741457

HAL Id: tel-00741457

https://theses.hal.science/tel-00741457

Submitted on 12 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :198

ECOLE CENTRALE DE LILLE
UNIVERSITE DE TUNIS EL MANAR
ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS

THESE

présentée en vue d'obtenir le grade de

DOCTEUR
en

Automatique, Génie informatique,
Traitement du Signal et des Images

par

Yosr CHAMEKH HAMMAMI

DOCTORAT DELIVRE SIMULTANEMENT
par l'Ecole Centrale de Lille et l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis dans le cadre d'une cotutelle internationale de thèse

Titre de la thèse :

COMMANDE DE SUIVI DE TRAJECTOIRE POUR LES SYSTÈMES COMPLEXES ET /OU INCERTAINS

Soutenue le 20 Septembre 2012 devant le Jury d'Examen :

Président	Noureddine ELLOUZE	Professeur à l'ENIT
Rapporteur	Mohamed BENREJEB	Professeur à l'ENIT
Rapporteur	Abdallah EL MOUDNI	Professeur à l'UTBM
Membre	Dumitru POPESCU	Professeur à l'UPB
Directeur de thèse	Pierre BORNE	Professeur à l'EC Lille
Directeur de thèse	Moufida LAHMARI KSOURI	Professeur à l'ENIT

Thèse préparée dans le LAGIS (EC Lille) et dans le LACS (ENIT)
Ecole Doctorale 072 SPI
PRES Université Lille Nord de France

A feu mon PAPA Sadok et à ma MAMAN Lily

Qui, sans eux ce travail n'aurait jamais pu être concrétisé,

Papa même si tu n'es pas arrivé à assister à ma soutenance sache que tu y assisteras dans nos cœurs

A mon cher époux Amin

Qui a éprouvé une patience particulière et qui a tout sacrifié pour que je puisse réaliser notre rêve

A mes sœurs Rajouta & Fifou

A qui je dédicace le fruit de ce travail

A l'âme de mon beau père Tonton Sadok

Qui aurait été particulièrement fière de moi ce jour là

A ma belle maman tata Jamila

Qui a contribué par ses encouragements à l'accomplissement de cette thèse

Et comme le meilleur vient toujours à la fin

A ma très chère princesse Douja el Ghalia

Pour qui j'ai multiplié les efforts et je me suis investit corps et âmes afin d'accomplir ce mémoire

Trouvez tous ici l'expression de ma profonde gratitude…

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué conjointement au sein du Laboratoire Analyse, Commande et Conception des Systèmes de l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Tunis, Université Tunis El Manar ainsi qu'au Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal de l'Ecole Centrale de Lille, sous la direction des Professeurs Moufida LAHMARI KSOURI et Pierre BORNE.
Je tiens à leur témoigner ma profonde gratitude pour l'accueil, le suivi et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportés tout au long de ce travail. Je leur suis très reconnaissante pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'offrant cette chance et surtout pour leur patience durant mes travaux de recherche.

J'exprime ma gratitude à Messieurs les Professeurs Mohamed BENREJEB et Abdallah EL MOUDNI pour avoir accepté de rapporter sur mon mémoire et pour l'intérêt qu'ils ont voulu porter à ce travail. Leur lecture approfondie du manuscrit, leurs remarques et interrogations judicieuses m'ont été très précieuses.

Je remercie également Monsieur le Professeur Noureddine ELLOUZE d'avoir accepté d'examiner ce travail et d'assurer la présidence du jury.

Mes remerciements s'adressent aussi au Professeur Dumitru POPESCU pour sa participation au jury et pour ses remarques fructueuses.

Je tiens particulièrement à remercier tous les membres du LACCS et tous les doctorants pour leur sympathie et l'ambiance chaleureuse qui règne dans les locaux du laboratoire.

Une mention spéciale doit être décernée à monsieur le Professeur Mekki KSOURI et à monsieur Faouzi BOUANI Maître de Conférence, qui n'ont cessé de me porter conseils et aides chaque fois que j'en ai eu besoin. Qu'ils trouvent ici le témoignage de mon haut respect.

Mes sincères remerciement sont destinés également aux collègues et amis (es) Maher BEN HRIZ, Foued THELJENI , Sami HAFSI, Hichem TLILI, Mahdi ABBES, Selma, Walid, Mounira, Asma KAROUI et Kaouther BEN TAARIT pour leur assistance et dévouement particulièrement lorsque je débutais mes travaux. Que ces mots puissent témoigner de ma profonde gratitude.

Et finalement, c'est avec un grand plaisir que je tiens à remercier mes amies Kaouther LAABIDI KHAMMAR, Amira KHRIJI ABBES et Nesrine ELFELLY ATTI pour tout ce qu'elles ont pu m'apporter pour la réalisation de ce travail. Les mots ne pourront jamais exprimer mes sentiments, ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

Mes pensées vont aux personnes qui ont fait partie de ma vie et que le destin a empêché d'être à mes cotés aujourd'hui, je ne vous oublie pas et je vous dédie ce mémoire en témoignage de mon profond amour.

Table des Matières

Introduction Générale **11**

Etat de l'art **15**

Introduction **16**

I Représentation d'état **16**

I.1 Vecteur d'état 17

I.2 Cas continu 17

I.3 Cas discret 19

II Techniques de majoration **20**

II.1 Matrices définies positives 20

II.2 Normes vectorielles 21

II.3 Systèmes majorants de systèmes continus 22

II.3.1 Propriétés des matrices pseudo-majorantes d'une matrice 24

II.3.2 Systèmes pseudo-majorants non homogènes 25

II.4 Principe de comparaison 26

III Etude de la stabilité **27**

III.1 Généralités 28

III.1.1 Point d'équilibre 29

III.1.2 Première méthode de Lyapunov 29

III.1.3 Deuxième méthode de Lyapunov 30

III.1.4 Théorèmes de Stabilité 31

III.1.5 Critères de stabilité dans l'espace d'état, cas continu 32

III.1.5.1 Cas linéaire stationnaire 32

III.1.5.2 Cas non linéaire 32

III.1.6 Théorèmes sur la stabilité 33

III.1.6.1 Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène linéaire 33

III.1.6.2 Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire....33
III.2 Domaines de stabilité....34
III.2.1 Norme du max....35
III.2.1.1 Cas continu....35
III.2.1.2 Cas discret....35
III.2.2 Norme duale du max....36
III.2.2.1 Cas continu....36
III.2.2.2 Cas discret....36
III.2.3 Fonction quadratique....36
III.2.3.1 Cas continu....36
III.2.3.2 Cas discret....37
III.2.4 Critère simplifié de Borne-Gentina....37
III.2.4.1 Cas continu....37
III.2.4.2 Cas discret....37
IV Attracteurs et Zone d'attraction....38
IV.1 Attracteurs....39
IV.1.1 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire local....40
IV.1.2 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène linéaire local....41
IV.1.3 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire local factorisable....42
IV.1.4 Stabilité asymptotique globale d'un attracteur, définition d'un Système Majorant Non Homogène linéaire....42
IV.1.5 Stabilité asymptotique locale d'un attracteur, définition d'un Système Majorant Non Homogène linéaire local....42
IV.2 Domaines d'attraction....43
Conclusion....45
Stabilisation de trajectoire par l'étude de la stabilité de mouvement....46
Introduction....47
I Stabilité de trajectoire dans le cas des systèmes multivariables non linéaires....49

I.1 Commandes et structures de commandes des systèmes multivariables 49
I.1.1 Commandes des systèmes multivariables.....49
I.1.2 Structures de commandes des systèmes multivariables 50
I.2 Calcul de la loi de commande de suivi de trajectoire des systèmes multivariables non linéaires.....52
I.2.1 Détermination de la fonction de Lyapunov.....52
I.2.1.1 La fonction de Lyapunov de forme quadratique 52
I.2.1.2 La méthode d'Aizerman.....52
I.2.1.3 Utilisation de l'énergie comme fonction de Lyapunov 53
I.2.1.4 Cas des systèmes non linéaires décrits dans l'espace d'état.....53
I.2.2 Calcul de la loi de commande permettant le suivi de trajectoire.....55
II Mise en œuvre de l'approche 57
II.1 Dans le cas d'un système monovariable.....57
II.2 Mise en œuvre de l'approche sur un système multivariable 58
III Commande de système calculée par un régulateur PI 60
III.1 Régulateurs et régulation.....61
III.1.1 Equipement de régulation.....61
III.1.2 Modes de régulation.....62
III.1.2.1 Régulateur à action proportionnelle 62
III.1.2.2 Régulateur à action non linéaire proportionnelle-intégrale.....63
III.2 Mise en œuvre d'une régulation à action proportionnelle-intégrale.....63
IV Etude du cas où ($H_x(x,t)G(x,t)$) est non inversible.....66
IV.1 Approche proposée pour la résolution du problème.....66
IV.2 Mise en œuvre de l'approche modifiée.....67
IV.2.1 Exemple 1 : Suivi de trajectoire d'un système stable 67
IV.2.2 Exemple 2: Cas d'un système très oscillant avec zéro instable.....69
IV.2.3 Exemple 3: Cas d'un système instable très oscillant.....70
Conclusion 71
Etude de la robustesse de la commande dans le cas de processus incertains et/ou mal définis.....73
Introduction.....74

I Etude de stabilité des systèmes non linéaires au voisinage d'un point de fonctionnement 75

I.1 Diagonalisation locale 76

I.2 Etude de stabilité 78

I.2.1 Systèmes majorants ou Systèmes de comparaison 78

I.2.2 Attracteurs et zone d'attraction 79

II Mise en œuvre de l'approche proposée 79

II.1 Cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbation 79

II.2 Cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre 82

III Système majorant de l'erreur d'un processus non linéaire obéissant à une loi de commande pour le suivi de trajectoire 84

III.1 Origine des erreurs sur un modèle 85

III.2 Calcul d'un système majorant l'erreur 85

III.3 Mise en œuvre de l'approche 88

III.3.1 Cas de retour à l'origine 90

III.3.2 Cas où la trajectoire désirée est non nulle 92

III.3.2.1 Représentation du système linéarisé 92

III.3.2.2 Représentation du système non linéaire 93

III.3.2.3 Représentation du système non linéaire perturbé 95

III.3.2.4 Calcul du système majorant de l'erreur 96

III.4 Mise en œuvre de la régulation à action non linéaire proportionnelle-intégrale sur un système perturbé et/ ou mal défini 97

Conclusion 98

Conclusion générale 100

Bibliographies 102

Annexes 110

Annexe A 110

Annexe B ..... Erreur ! Signet non défini.

Table des Illustrations

Figure 1: Représentation d'état d'un système linéaire invariant 18
Figure 2: Ensemble limite positif de x_0 38
Figure 3: Ensemble $J^+(x_0, D_0)$ 38
Figure 4: Attracteur L_0 asymptotiquement stable 45
Figure 5: Asservissement d'un processus 47
Figure 6: Diagramme du calcul de la commande 57
Figure 7: Evolution du système par le suivi de la trajectoire y_c. 58
Figure 8: Evolution du système par le suivi de la trajectoire y_c. 60
Figure 9: Schéma fonctionnel général d'une régulation d'un processus en boucle fermée 61
Figure 10 : Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 avec régulation 64
Figure 11 : Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 avec régulation 65
Figure 12 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c 69
Figure 13 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c 70
Figure 14 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c 71
Figure 15 : Domaine d'attraction du système (S) d'ordre 2 82
Figure 16: Attracteur du système (S) d'ordre 3 84
Figure 17: d'un système non linéaire perturbé 91
Figure 18: Evolution du système non linéaire perturbé 92
Figure 19 : Evolution du système linéaire pour le suivi la trajectoire désiré 93
Figure 20: Evolution du système non linéaire pour le suivi 94
Figure 21 : Evolution du système non linéaire pour le suivi 94
Figure 22 : Evolution du système non linéaire perturbé 95
Figure 23: Evolution du système non linéaire perturbé 96
Figure 24: Réponse indicielle d'un système perturbé d'ordre 2 98

Introduction Générale

L'étude de la stabilité de mouvement et le suivi de trajectoire ont toujours été des problèmes importants dans la théorie de la commande linéaire et/ou non linéaire.

La théorie de stabilité et de stabilisation, pour les systèmes linéaires ou non linéaires, repose sur la convergence à l'origine, ou à un voisinage de l'origine, des états du système. Le suivi de trajectoire, quant à lui, s'appuie sur la stabilisation d'un système sur une référence désirée, notamment vers un point d'équilibre.

La théorie de commande de suivi de trajectoire pour les systèmes linéaires a largement été étudiée et n'est plus un sujet d'actualité, contrairement au cas des systèmes non linéaires dont la théorie est encore en cours de développement.

Pour les systèmes non linéaires, incertains et instables, les objectifs de la commande pour le suivi de trajectoire sont plus difficiles à atteindre. En effet, et en raison de la complexité des systèmes non linéaires, de nombreux problèmes restent non résolus à ce jour. Ces derniers se posent dans certains cas, tels que l'annulation des perturbations, et ce, malgré l'évolution des lois de commande et malgré la robustesse de la stabilisation locale ou globale ou sur une trajectoire.

Ce travail entre dans ce cadre et présente une approche, basée sur la deuxième méthode de Lyapunov, pour le calcul d'une nouvelle commande permettant le suivi de trajectoire dans le cas d'un système non linéaire incertain et/ou mal défini.

Généralement, les outils d'étude de stabilité sont spécifiques à un type de systèmes et dépendent de la nature de l'évolution du processus. Le travail présenté dans ce mémoire traite des systèmes non linéaires, incertains et/ou mal définis.

Une méthode permettant l'étude de stabilité a été proposée par Borne et Gentina. Cette méthode se base sur la notion de systèmes majorants dont la généralisation aux cas non linéaires a permis de définir les systèmes de comparaison par la technique des normes vectorielles. En effet, elle permet l'étude de la stabilité d'un système, majorant un système initial, et de conclure sur la stabilité du système majoré. La diminution de l'ordre des systèmes étudiés, constitue l'un des meilleurs avantages de cette méthode. Ceci entraine la réduction de la complexité, ainsi que la détermination des conditions d'exponentialité de la stabilité du système.

Pour la phase établissement de la robustesse de la commande, nous proposons l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires par le calcul des systèmes de comparaison utilisant les techniques de majorations appliquées sur le système qui décrit l'évolution de l'erreur entre le système perturbé et le modèle théorique.

Afin d'améliorer les performances des résultats obtenus, telle que la rapidité du temps de réponse des systèmes à la commande, une régulation du type proportionnelle-intégrale est présentée. La qualité de cette régulation est, aussi mise en œuvre.

Chapitre I

Dans une première partie, ce chapitre expose les principaux concepts mathématiques utilisés dans notre travail. Nous évoquons ensuite, les différentes techniques de majoration servant à l'étude de stabilité d'un système écrit sous la forme d'équation d'état dont les normes vectorielles, les systèmes majorants et le principe de comparaison. Un rappel des outils nécessaires à l'étude de la stabilité et de la notion de domaines de stabilité sont aussi traités. Ce chapitre se termine par une illustration des notions d'attracteurs et de zones d'attraction.

Chapitre II

Ce chapitre expose une nouvelle approche basée sur l'étude de la stabilité du mouvement de systèmes continus, multivariables non linéaires. Elle repose aussi sur l'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov pour le calcul d'une loi de commande de suivi de trajectoire d'un processus dont l'évolution est décrite par son équation d'état. Cette commande est réalisée à partir d'informations accessibles concernant le processus et son évolution désirée. Tout d'abord, nous exposons le calcul de la loi de commande permettant la stabilité de trajectoire dans le cas des systèmes multivariables non linéaires, en présentant les commandes et les structures de commandes des systèmes multivariables. Une mise en œuvre de l'approche proposée, dans les cas monovariable et multivariable, ainsi qu'une mise en œuvre d'une régulation à action proportionnelle-intégrale sont proposées.

Par la suite, nous présentons une étude explicite de la régulation, des méthodes de la régulation ainsi que des modes de régulation nécessaires pour l'amélioration des performances d'une loi de commande.

Enfin, dans le cas où cette approche n'est pas définie, une méthode permettant de la généraliser, est proposée. Trois exemples illustrent cette étude. Les différents résultats et interprétations évoqués dans ce chapitre sont résumés dans la conclusion.

Chapitre III

Ce chapitre constitue une étude de la robustesse de l'étude de la stabilité du mouvement des systèmes continus. Cette étude est basée sur la stabilité des systèmes non linéaires par le calcul des systèmes majorants. Nous commençons d'abord par présenter une approche permettant l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, au voisinage d'un point de fonctionnement donné reposant sur les notions de normes vectorielles qui permettent d'aboutir au calcul des attracteurs et de la zone d'attraction. Une mise en œuvre de cette approche, est illustrée, par la suite, dans le cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbations et dans le cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre. L'étude de la robustesse de l'approche proposée au chapitre II, est réalisée, en utilisant les techniques de majoration, appliquées sur le système décrivant l'évolution de l'erreur entre le système perturbé réel et le modèle théorique.

Premier Chapitre

Etat de l'art

Introduction **16**

I Représentation d'état **16**

I.1 Vecteur d'état 17

I.2 Cas continu 17

I.3 Cas discret 19

II Techniques de majoration **20**

II.1 Matrices définies positives 20

II.2 Normes vectorielles 21

II.3 Systèmes majorants de systèmes continus 22

II.4 Principe de comparaison 26

III Etude de la stabilité **27**

III.1 Généralités 28

III.2 Domaines de stabilité 34

IV Attracteurs et Zone d'attraction **38**

IV.1 Attracteurs 39

IV.2 Domaines d'attraction 43

Conclusion **45**

Introduction

Pour étudier le comportement d'un système nous avons toujours recours à une représentation mathématique de celui-ci. Les systèmes automatiques, continus ou discrets, sont représentés soit par leurs fonctions de transfert dans le cas linéaire soit par leurs représentations d'état. Nous nous intéressons dans ce travail, dans une première partie, à la représentation d'état. Nous évoquons ensuite, les différentes techniques de majoration servant à l'étude de stabilité d'un système écrit sous la forme d'équation d'état. Puis, nous rappelons les outils de l'étude de la stabilité et nous finissons par rappeler les notions d'attracteurs et de zones d'attractions.

I Représentation d'état

La notion de représentation d'état a été introduite dans les années 1960 pour les systèmes linéaires invariants. En effet, c'est la description dynamique du système de manière interne à partir de l'évolution d'un vecteur d'état x représentatif des grandeurs décrivant l'évolution du système.

La représentation d'état constitue une alternative intéressante pour la modélisation sous forme matricielle du procédé dans l'espace temporel suivant certaines variables d'état, d'entrée et de sortie afin de l'étudier. Elle met, aussi, en évidence des informations internes au processus qui n'apparaissent pas nécessairement sur la description du système par la fonction ou la matrice de transfert étant donné l'actuel état, l'entrée et les équations dynamiques et peut, notamment, faire intervenir un transfert direct entrée-sortie lorsque la fonction de transfert présente un numérateur et un dénominateur de même degré. La représentation d'état, met aussi en évidence les problèmes liés à la simplification d'un pôle par un zéro de la fonction de transfert [17].

Dans le cas continu, cette représentation est définie par une équation différentielle du premier ordre ayant comme inconnue la valeur de l'état du système à un instant donné. Pour les systèmes à temps discret, la représentation d'état est définie au travers d'une équation aux différences du premier ordre.

Elle est définie par un vecteur de même ordre que celui du système contenant toutes les informations sur le système à un instant donné. La connaissance des entrées du système est nécessaire pour pouvoir prévoir son évolution. Ces entrées sont en général la commande et les perturbations que subit le système.

I.1 Vecteur d'état

Le modèle mathématique définissant un système physique quelconque, doit permettre de représenter l'évolution des sorties pour des entrées données, traduisant ainsi le principe de causalité et les lois physiques du processus [2]. Les grandeurs agissant sur le système peuvent évoluer à partir d'un certain instant t_0 appelé instant initial. D'un point de vue déterministe, la connaissance de ces grandeurs à un instant t_0 ainsi que la connaissance de la valeur des entrées pour tout $t > t_0$ permet la résolution des relations mathématiques entre sorties et entrées à fin de déterminer d'une manière unique la valeur des sorties pour tout $t > t_0$.

I.2 Cas continu

La représentation d'état d'un système non linéaire d'ordre n, dans le cas continu est en général donnée sous la forme suivante [2]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1)$$

où la première équation vectorielle est un système différentiel du premier ordre

x(t) : vecteur d'état du système étudié

u(t) : entrée ou commande du système

y(t) : sortie du système

f : fonction continue et satisfaisant, en général, à la condition de Lipschitz

Ce qui est équivalent à dire que ce système dépend des variables x, u et t. Une classe très importante de processus correspond à la représentation suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t), t)x(t) + B(x(t), t)u(t) \\ y(t) = C(x(t), t)x(t) + D\,(x(t), t)u(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec x(t) : vecteur d'état d'ordre n.

y(t) : vecteur de sortie d'ordre m,

u(t) : vecteur de commande d'ordre l,

A(x(t),t) : matrice carrée d'ordre n, dite matrice d'état,

$B(x(t), t)$: matrice de dimensions (n,l) dite matrice de commande,

$C(x(t), t)$: matrice de dimensions (m,n) dite matrice d'observation,

$D(x(t),t)$: matrice de dimensions (m,l) le plus souvent nulle.

Dans le cas où le système est linéaire invariant, les matrices A, B, C et D sont à coefficients constants la description du système est alors de la forme (3):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + D\,u(t) \end{cases} \tag{3}$$

et correspond au schéma de la figure (1) :

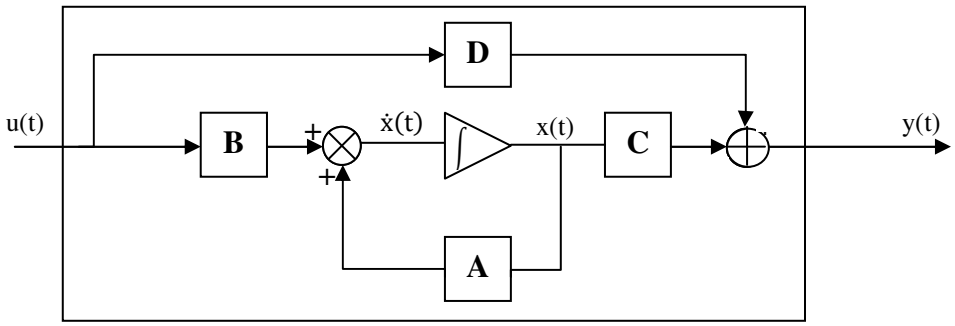


Figure 1: Représentation d'état d'un système linéaire invariant

La représentation d'état ou l'équation d'état d'un système n'est pas unique. En effet il suffit d'effectuer un changement de base de la forme z = P x où P est une matrice inversible, pour que le système se mette sous une autre forme, ce qui mène à l'écriture donnée par (4) :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = M(z(t),t)z(t) + N(z(t),t)u(t) \\ y(t) = Q(z(t),t)z(t) + R(z(t),t)u(t) \end{cases} \tag{4}$$

où $M(z(t),t) = PA(z(t),t)P^{-1}$, $N(z(t),t) = PB(z(t),t)$, $Q(z(t),t) = C(z(t),t)P^{-1}$
et $R(z(t),t) = D(z(t),t)$.

Nous écrivons: $y(t) = h(x(t),u(t),t)$ où y : vecteur sortie, figure (1) et h : vecteur fonction univoque.

L'évolution du vecteur état dépend de sa valeur initiale $x(t_0)$ à l'instant t_0, du temps t, et de la loi d'entrée $u(t_0,t)$ entre les instants t_0 et t [17, 2], ce qui s'exprime sous la forme :

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x(t_0), u(t_0, t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \tag{5}$$

où φ est la fonction de transition d'état et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ espace d'état.

Le vecteur d'état peut avoir un nombre fini de composantes et dans ce cas le système est dit markovien. Sinon, nous trouvons aussi des systèmes dont la dimension est infinie comme dans le cas des systèmes dits à paramètres répartis, dont la relation, entre sorties et entrées, est représentée par des équations aux dérivées partielles.

I.3 Cas discret

Dans le cas discret, la représentation d'état d'un système est en général donnée sous la forme suivante [2]:

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \\ y(k) = h\big(x(k)\big) \end{cases} \tag{6}$$

où la première équation vectorielle est un système discret du premier ordre, avec à l'instant k

x(k) : vecteur d'état du système étudié

u(k) l'entrée ou la commande du système

y(k) la sortie du système

f est une fonction continue et satisfaisant, en général, à la condition de Lipschitz

De même que dans le cas continu, ce système dépend des variables x, u et k. Un cas fréquent correspond à une description de la forme

$$(S): \begin{cases} x(k+1) = A(x(k), k)x(k) + B(x(k), k)u(k) \\ y(k) = C(x(k), k)x(k) \end{cases} \tag{7}$$

où x(k) est un vecteur d'état d'ordre n,

y(k) est un vecteur de sortie d'ordre m,

u(k) est un vecteur de commande d'ordre l,

A(x(k),k) est une matrice carrée d'ordre n, dite matrice d'état,

$B(x(k), k)$ est une matrice de dimensions (n,l) dite matrice de commande,

$C(x(k), k)$ est une matrice de dimensions (m,n) dite matrice d'observation.

Dans le cas où le système est linéaire invariant, les matrices A, B, C et D sont à coefficients constants et la représentation du système est de la forme :

$$(S):\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{8}$$

De même qu'en continu, la représentation d'état ou l'équation d'état d'un système discret n'est pas unique, il suffit d'effectuer un changement de base de la forme

$$z(k) = P\,x(k), \tag{9}$$

où P est une matrice inversible, pour obtenir une nouvelle représentation.

II Techniques de majoration

Parler de techniques de majoration, c'est parler de systèmes de comparaison permettant d'étudier la stabilité de processus non linéaires à travers leurs représentations d'état. Cette technique est basée principalement sur l'utilisation des normes vectorielles permettant la création d'un système majorant plus simple de dimension inférieure ou égale à la dimension du système d'origine. La réduction de l'ordre du système permet de faciliter le calcul dans le cas d'étude de stabilité [5].
En effet, pour un système non linéaire quelconque, l'étude de stabilité d'un système qui le majore permet de conclure sur la stabilité du système d'origine. L'idée des normes vectorielles a été introduite par Robert [72 et 73] dans le but de résoudre des problèmes d'analyse numérique lié à des récurrences linéaires [43]. L'utilisation de cette technique pour l'analyse de la stabilité et la majoration des systèmes non stationnaires et/ou non linéaires continus et discrets a été développée par P. Borne et J.C. Gentina [22].

II.1 Matrices définies positives

Définition 1

Un déterminant principal d'une matrice P est le déterminant d'une sous matrice de P dont la diagonale fait partie de la diagonale de P.

Définition 2

Une matrice M est définie positive si et seulement si $x^t Mx > 0 \quad \forall x \neq 0$

Une condition nécessaire pour que M soit définie positive est que tous les déterminants principaux de M soient positifs. Cette condition devient suffisante lorsque M est symétrique, c'est-à-dire $M = M^t$ [28 et 72].

Définition 3

Une matrice $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dont tous les termes hors diagonaux [31] sont négatifs ou nuls est appelée Z-matrice.

Théorème : Pour qu'une Z-matrice M soit une M-matrice [26], il faut et il suffit qu'une des propriétés suivantes qui sont équivalentes entre elles, soit vérifiée [28 31 et 32]:

1. Toute valeur propre de A a sa partie réelle positive.
2. Tous les déterminants des mineurs principaux de A sont positifs.
3. Tous les déterminants des mineurs principaux fondamentaux de A sont positifs.
4. A^{-1} existe et est non négative, c'est-à-dire, a tous ses éléments positifs ou nuls.
5. Il existe un vecteur x strictement positif tel que le vecteur Ax est aussi un vecteur strictement positif.
6. Il existe une matrice diagonale D positive telle que ADe est un vecteur strictement positif, où e est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

II.2 Normes vectorielles

L'introduction du concept de normes vectorielles permet d'envisager une étude de stabilité en utilisant une fonction de comparaison de type vectoriel dont chaque composante ne constitue plus nécessairement une fonction de Lyapunov associée à un sous système isolé extrait du système initial.

Soit un espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ et $(E_i)_{i=1,\dots k}$ une famille de sous espaces vectoriels de E tels que : $E = \cup_{i=1,\dots k}(E_i)$.
Soit x un n-vecteur défini dans E et sa projection sur E_i notée x_i telles que: $x_i = P_{r_i}x$ où P_{r_i} est l'opérateur de projection de E dans E_i.
Soit $(p_i)_{i=1\dots k}$ une famille de normes scalaires, telle que :
$\forall i = 1, \dots k$ p_i définit une norme scalaire dans le sous espace E_i, et soit p une norme vectorielle de dimension k et de composantes [12]

$$p_i(x) = p_i(x_i) \text{ et } p(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^k$$

Notons un autre vecteur y de l'espace E, avec $y_i = P_{r_i}y$, nous avons alors :

$$\left.\begin{array}{c} p_i(x_i) \geq 0, \qquad \forall\, x_i \in E_i \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \\ p_i(x_i) = 0, \Leftrightarrow\ x_i = 0 \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \\ p_i(x_i + y_i) \leq\ p_i(x_i) + p_i(y_i), \qquad \forall\, x_i, y_i \in E_i \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \\ p_i(\lambda x_i) = |\lambda| p_i(x_i) \quad \forall\, x_i \in E_i \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \qquad \forall\, \lambda \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$$

Si (k-1) des sous espaces E_i sont insuffisants pour définir tout l'espace E alors la norme vectorielle est surjective. Si en plus les sous espaces E_i sont deux à deux disjoints, la norme vectorielle est dite régulière :

$$E_i \cap E_j = (0)_i \times (0)_j\,, \qquad \forall i \neq j = 1,\dots,k$$

II.3 Systèmes majorants de systèmes continus

Dans ce qui suit nous considérons le système (S) défini par son équation d'état telle que

$$(S) \qquad \frac{dx}{dt} = A(x,t).a(x,t) \tag{10}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état et la fonction

$$f: \tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$(x,t) \to f(x,t) = A(x,t).a(x,t)$$

est supposée telle que $x = 0$ soit l'unique état d'équilibre et satisfaisant les conditions assurant l'existence des solutions $x(t; t_0, x_0)$ du système pour tout

$$(t_0, x_0) \in \tau_0 \times \mathbb{R}^n \text{ où } \tau =]-\infty, +\infty[\ ,\ t_0 \in \tau\ \ ,\ \tau_0 = [\tau_0\ , +\infty[$$

$$\text{et}\quad x(t_0; t_0, x_0) = x_0$$

Dans (S), a(x,t) est un m-vecteur de l'espace E : $a: \tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
et A(x,t) représente une matrice d'ordre $n \times m$: $A: \tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$.

Le système majorant sera défini par la norme vectorielle p(x) du vecteur d'état x. Au départ nous devons utiliser la notion de dérivée par rapport au temps de la norme vectorielle. Pour cette raison, il est nécessaire d'utiliser $D^+p_i(x_i)$ proposée par [20 et 71]. Nous notons $D^+p_i(x_i)$ la dérivée à droite dans le sous-espace E_i et $D^+p(x)$ dans l'espace E [5].

Définition 4

La matrice $M: \tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{k\times k}$ définit un système majorant associé à la norme vectorielle p si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée respectivement pour chaque composante :

$$D^{+}p(x) \leq M(x,t)p(x), \quad \forall\, x \in E \quad \forall\, t \in \tau_0 \tag{11}$$

Notons :

$$\left.\begin{array}{c} a_j(x,t) = P_{rj}^{*}a(x,t), \quad \forall\, j = 1,2,\dots k \\ A_{ij}(x,t) = P_{ri}A(x,t)P_{rj}^{*}, \qquad \forall\, i,j = 1,2,\dots k \\ M(x,t) = \{\mu_{ij}(x,t)\} \\ m_{ij}(x,y,t) = \dfrac{\text{grad}\, p_i(y_i)^{T}A_{ij}(x,t)a_j(y,t)}{p_i(y_i)} \quad \forall\, i,j = 1,2,\dots k \end{array}\right\}$$

P_{rj}^{*} est l'opérateur de projection de $\mathbb{R}^m$ sur E_j ($j = 1,2,\dots k$). Avec cette notation l'expression suivante est obtenue pour la matrice pseudo-majorante $M(x,t)$

Définition 5

La matrice $M(x,t) = \{\mu_{ij}(x,t)\}$ où $\mu_{ij}: \tau \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une matrice pseudo-majorante du processus si et seulement si

$$\left.\begin{array}{c} \mu_{ii}(x,t) = \sup_{y\in E}\{m_{ii}(x,y,t)\}, \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \quad \forall x \in E, \quad \forall t \in \tau_0 \\ \mu_{ij}(x,t) = \max\left(0, \sup_{y\in E}\{m_{ij}(x,y,t)\}\right), \quad \forall\, i \neq j = 1,2,\dots k \quad \forall x \in E, \quad \forall t \in \tau_0 \end{array}\right\}$$

Il est parfois commode et possible de déterminer une matrice pseudo-majorante qui ne dépende que de t comme présentée dans la définition 6 et une matrice pseudo-majorante constante comme dans la définition 7.

Définition 6

Soit $\mu_{ij}: \tau \to \mathbb{R}$, la matrice $M(t) = \{\mu_{ij}(t)\}$est une matrice pseudo-majorante si et seulement si

$$\left.\begin{array}{c} \mu_{ii}(t) = \sup_{y\in E}\{m_{ii}(t,y,y)\}, \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \quad \forall t \in \tau_0 \\ \mu_{ij}(t) = \max\left(0, \sup_{y\in E}\{m_{ij}(t,y,y)\}\right), \quad \forall\, i \neq j = 1,2,\dots k \quad \forall x \in E, \quad \forall t \in \tau_0 \end{array}\right\}$$

Définition 7

La matrice $M = \{\mu_{ij}\}$ est une matrice pseudo-majorante constante si et seulement si

$$\left.\begin{array}{c} \mu_{ii} = \sup\limits_{\substack{y\in E \\ t\in\tau_0}}\{m_{ii}(t,y,y)\}, \quad \forall\, i = 1,2,\dots k \quad \forall t \in \tau_0 \\ \mu_{ij} = \max\left(0, \sup\limits_{\substack{y\in E \\ t\in\tau_0}}\{m_{ij}(t,y,y)\}\right), \quad \forall\, i \neq j = 1,2,\dots k \quad \forall x \in E, \quad \forall t \in \tau_0 \end{array}\right\}$$

D'où l'inégalité suivante : $M \geq M(t) \geq M(x,t)$

Si maintenant $a(x,t) \equiv x$, alors les matrices pseudo-majorantes sont définies comme précédemment si nous notons

$$m_{ij}(x,y,t) = \frac{\text{grad } p_i(y_i)^T A_{ij}(x,t) y_i}{p_i(y_i)} \quad \text{où } A_{ij} = P_{ri} A P_{rj} \tag{12}$$

Dans un tel cas, la matrice M(x,t) pseudo-majorante de A(x,t) est facilement déterminable.

Définition 8

La matrice $M^*: \tau \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{k \times k}$

$(x,t) \rightarrow M^*(x,t)$

induit la définition d'un système (S') majorant du système (S) associé aux normes vectorielles p et q si l'inégalité suivante est vraie pour chaque composante correspondante

$$D^+ p(x) \leq M^*(x,t) q[a(x,t)], \quad \forall x \in E \quad \forall t \in \tau_0 \tag{13}$$

II.3.1 Propriétés des matrices pseudo-majorantes d'une matrice

Lorsqu'une matrice pseudo-majorante d'une matrice A, associée à la norme vectorielle régulière p, est définie, nous pouvons énoncer les propriétés suivantes [12]:

a) Les éléments hors diagonaux de la matrice M(A) sont positifs ou nuls.
b) Si nous notons par $Re(\lambda_M)$ la partie réelle de la valeur propre de partie réelle maximale de M(A) l'inégalité suivante est obtenue

$$Re(\lambda_{A(x,t)}) \leq Re(\lambda_{M(A)}) = \lambda_{M(A)} \ , \forall x \in E \quad \forall t \in \tau_0 \tag{14}$$

quelque soit la valeur propre $\lambda_{A(x,t)}$ de la matrice A.

c) Lorsque toutes les parties réelles des valeurs propres de M(A) sont négatives, cette matrice est l'opposée d'une M-matrice, et admet une inverse dont les éléments sont tous négatifs ou nuls.
d) M(A) est l'opposée d'une M-matrice si et seulement si elle vérifie les conditions de Koteliansky, c'est-à-dire les k mineurs principaux successifs sont de signes alternés, le premier étant négatif.
e) Lorsque la matrice M(A) est l'opposée d'une M-matrice et lorsque son inverse est une matrice irréductible, alors M(A) admet un vecteur propre principal, dont les composantes sont strictement positives et tel qu'il est associé à la valeur propre $\lambda_{M(A)}$ réelle, maximale et négative.

f) Si M(A) est l'opposée d'une M-matrice et a tous ses termes non constants regroupés dans une seule rangée, alors son vecteur propre principal u(x,t) associé à la valeur propre $\lambda_{M(A)}$, est de direction fixe, c'est-à-dire ne dépendant pas de t et de x.

g) La matrice pseudo-majorante dont les éléments sont définis par l'équation (12) est la plus petite matrice, élément par élément, pseudo-majorante de A associée à la norme vectorielle p.

Remarque : Lorsque la matrice M(x,t) n'admet pas une inverse irréductible, nous pouvons utiliser une matrice pseudo-majorante déduite de M(x,t) en ajoutant une matrice constante B^* avec $B^* = (b_{ij}^*)$:

$$\begin{aligned} b_{ii}^* &= 0, \quad \forall i = 1,2,\dots,k \\ b_{ij}^* &> 0, \quad \forall i \neq j = 1,2,\dots,k \end{aligned} \tag{15}$$

II.3.2 Systèmes pseudo-majorants non homogènes

Soit un système (S) défini par son équation d'état telle que :

$$(S): \frac{dx}{dt} = A(x,t).a(x,t) + B(x,t) \tag{16}$$

Jusque là, nous avons considéré les systèmes majorants du type homogène, un système est dit homogène dans le cas où $B(x,t) = 0$. Sinon le système est dit non homogène et vérifie :

a(x , t) est un m-vecteur de l'espace E :	$a: \mathbb{R}^n \times \tau \to \mathbb{R}^m$,
A(x , t) représente une matrice d'ordre n × m :	$A: \mathbb{R}^n \times \tau \to \mathbb{R}^{n\times m}$
B(x , t) est un n-vecteur de l'espace :	$B: \mathbb{R}^n \times \tau \to \mathbb{R}^n$

Ici, $x \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état et le système satisfait les conditions assurant l'existence des solutions $x(x_0, t_0; t)$ du système pour tout $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \tau_0$ où $\tau =]-\infty, +\infty[$, $t_0 \in \tau$, $\tau_0 = [\tau_0 , +\infty[$ et $x(x_0, t_0; t) = x_0$.
Soit p une norme vectorielle régulière ;

Définition 9

La paire (M,N) où $M: \mathbb{R}^n \times \tau \to \mathbb{R}^{k\times k}$ et $N: \mathbb{R}^n \times \tau_0 \to \mathbb{R}_+^k$ définit un système pseudo-majorant global non homogène sur $\mathbb{R}^n$, relatif à la norme vectorielle p, que nous notons SMNH, si et seulement si l'inégalité suivante est vérifiée composante à composante

$$D^{+}p(x) \leq M(x,t)p(x) + N(x,t), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n} \quad \forall t \in \tau_0 \tag{17}$$

II.4 Principe de comparaison

Pour les systèmes de comparaison non-linéaires, il est possible de prouver un lemme de comparaison qui généralise le lemme de comparaison de Wazewski [12] et peut être énoncé comme suit :

Lemme de Comparaison d'un système pseudo-majorant homogène **:**

Soit une norme vectorielle p associée à une matrice M(x,t) d'un système (S) telle que les éléments hors diagonaux de M(x,t) sont tous strictement positifs et où les inégalités suivantes sont vérifiées pour la solution du systèmes (S)

$$D^{+}p(x) \leq M(x,t)p(x), \quad \forall t \in \tau_0 \quad \forall x \in E \tag{18}$$

alors le système (C) défini tel que

$$\frac{dz}{dt} = M(x,t)z, \quad \forall z \in \mathbb{R}_{+}^{k} \tag{19}$$

est un système de comparaison du système (S) dans le sens ou

$$z(t) \geq p[x(t)], \quad \forall t \in \tau_0 \tag{12}$$

est vrai dès que

$$z(t_0) \geq p(x_0), \quad \forall t \in \tau_0 \tag{21}$$

Lemme de Comparaison d'un système pseudo-majorant non-homogène **:**

Supposons l'existence d'un SMNH global, tel que les éléments hors diagonaux de M(x,t) soient tous positifs ou nuls pour tout x et tout t. Alors le système

$$\frac{dz}{dt} = M(x,t)z + N(x,t), \quad \forall z \in \mathbb{R}_{+}^{k} \tag{22}$$

est un système de comparaison du système (S) : $\frac{dx}{dt} = A(x,t).a(x,t) + B(x,t)$ dans le sens que l'inégalité $z(t) \geq p\big(x(t)\big)$ [22] est vérifiée $\forall t \in \tau_0$. Pour $t = t_0$, $z(t_0) \geq p(x_0)$.

La détermination d'un système majorant non homogène, défini par la paire (M,N),pour une norme vectorielle p quelconque, donne trois différents types de système, soient :

- Non linéaire, non stationnaire (M(x,t),N(x,t))
- Linéaire, non stationnaire (M(t),N(t))
- Linéaire stationnaire (M,N)

Ces résultats sont obtenus par des majorations sur les perturbations, sur l'état et sur le temps. La majoration entraine le conservatisme par suite d'une perte d'information ; plus elle est employée, moins le modèle risque d'être convergent.

Intérêts de l'utilisation des systèmes de comparaison :

Les systèmes de comparaison tels que définis précédemment utilisant les normes vectorielles nous permettent de réduire ou de simplifier le calcul d'un système initialement d'ordre élevé et dont la complexité est importante. En effet, par exemple pour un système initialement non linéaire, non stationnaire ou les deux à la fois, un système de comparaison respectivement linéaire, stationnaire ou bien les deux à la fois peut être défini. Généralement, les systèmes de comparaison sont utilisés pour l'étude de stabilité.

III Etude de la stabilité

L'étude de stabilité d'un système constitue une phase importante dans l'analyse des comportements des systèmes asservis ainsi que dans la synthèse des lois de commande. Dans le cas des systèmes complexes, les méthodes usuelles d'étude des systèmes linéaires se révèlent souvent insuffisantes. En effet, pour les systèmes linéaires, il est possible d'utiliser certains critères de calcul, critère de Routh, critère de Nyquist, critère de Black-Nicholls…etc.
Ces critères sont plus ou moins durs à appliquer particulièrement lorsqu'il s'agit de système de grandes dimensions, et sont même souvent inexacts lorsqu'il s'agit de systèmes non linéaires, non stationnaires incertains et/ou perturbés.

La théorie de stabilité vise à tirer des conclusions sur le comportement d'un système [13], sans vraiment calculer la trajectoire des solutions du processus. Lagrange a conclu, en 1788, qu'en l'absence de forces extérieures, un état d'équilibre d'un système mécanique est stable s'il correspond à un minimum de l'énergie potentielle. Un progrès important dans la théorie quantique de stabilité qui a permis l'analyse des équations différentielles, a été réalisé grâce à Lyapunov qui a introduit l'idée de base et les définitions de stabilité utilisées aujourd'hui et a montré les théorèmes fondamentaux existants [13 et 63]. Le concept de la stabilité selon Lyapunov joue un rôle important dans la théorie de la commande et des systèmes.

Les solutions des problèmes de stabilité, extraites des systèmes de grandes dimensions, ont été approchées [11, 13, 37, 51 et 73] par la méthode des perturbations singulières pour atteindre la réduction des dimensions, en considérant séparément les systèmes rapides et lents, le concept de Bellman en 1962 des fonctions vectorielles de Lyapunov et les approches de Bailey et Siljak afin de trouver des conditions et des interactions sous lesquelles les propriétés globales des systèmes sont déduites des propriétés de stabilité de sous systèmes, ainsi que le concept de Robert en 1964 des normes vectorielles et son application à plusieurs niveaux par Borne et al. en 1973 et par Borne et Gentina en 1974.

En 1961, Lasalle et Lefshetz [60] ont développé une étude de la stabilité non-Lyapunov. Cette étude a été généralisée par Weiss et Infante en 1965. Ensuite, plusieurs résultats sur les conditions de différents types de stabilité pratique ont été donnés par Weiss en 1967, Weiss et Infante de 1965 à 1967, Michel et Porter en 1972, et puis Grujic depuis 1970 [38].

L'étude de la stabilité des systèmes linéaires conduit, généralement, à des conditions nécessaires et suffisantes et ne dépend pas de la représentation des systèmes. La tâche est différente lorsqu'il s'agit des systèmes non linéaires avec ou sans incertitudes, pour lesquels seules des conditions suffisantes sont données. Leurs domaines de stabilité dépendent de la description du système étudié ainsi que de la méthode d'étude de stabilité utilisée [4, 5, 6, 7, 13, 29 et 66].

III.1 Généralités

La synthèse d'une loi de commande d'un système quelconque, doit être réalisée de manière à pouvoir assurer la stabilité du processus globalement, ou localement dans le cas où la convergence n'est pas assurée pour toutes les conditions initiales. En effet, la stabilité absolue sert, généralement, à résoudre un problème de robustesse d'un contrôleur par rapport à des erreurs de réalisation sur le contrôleur ou de modélisation sur le processus. La vérification de la convergence d'une trajectoire vers une position d'équilibre donnée, requiert l'étude de l'évolution de la distance séparant le point courant de cette position d'équilibre. C'est sur ce principe que sont basées les première et seconde méthodes de Lyapunov dans lesquelles sont considérées des distances généralisées que nous appelons fonctions de Lyapunov [61 et 81].

Pour l'étude de stabilité d'un système représenté part son équation d'état, dans le cas continu aussi bien que dans le cas discret, nous avons toujours recours aux notions de base de la stabilité. Nous commençons par définir la boule fermée :

$$\dot{B}(\rho) = \{x / \|x\| \leq \rho\} \quad \text{où } \|x\| \text{ est la norme de x}$$

III.1.1 Point d'équilibre

Un point x_0 de l'espace d'état est dit point d'équilibre s'il vérifie les relations suivantes

$$f(x_0, .) = 0 \text{ dans le cas continu}$$
$$x_0 = f(x_0, .) \text{ dans le cas discret}$$

Le point d'équilibre $x_0 = 0$ est dit stable si,

$$\forall\ \rho > 0,\ \exists\ r > 0 \text{ tel que si } \|x(0)\| < r \text{ alors } \|x(t)\| < \rho \quad \forall t \geq 0 \tag{23}$$

Autrement dit x_0 est stable si, lorsque le point de fonctionnement du processus en est légèrement écarté, il reste dans son voisinage. Sinon, le point d'équilibre est instable.
La stabilité simple induit que si l'état initial est proche de l'origine, il en est de même de la trajectoire d'évolution future.
Si le comportement du système perturbé est majoré par celui d'un système linéaire, alors la stabilité est exponentielle. Elle s'exprime sous la forme :
Le point d'équilibre x_0 est dit exponentiellement stable si

$$\exists\ \alpha \geq 1 \text{et } \beta > 0 \text{ tels que } \|x(t; t_0, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| \exp(-\beta(t - t_0)),\ \forall t > t_0 \tag{24}$$

III.1.2 Première méthode de Lyapunov

Cette méthode permet une étude locale par linéarisation autour du point d'équilibre. En effet, c'est une justification de l'approximation linéaire des petits mouvements. Elle est intéressante en tant qu'étude préliminaire lorsque le système présente plusieurs points d'équilibre, pour déduire rapidement les différents points d'équilibres stables. L'étude de stabilité locale doit alors être poursuivie en vue de déterminer les domaines de conditions initiales garantissant la convergence vers l'équilibre asymptotiquement stable considéré.
La stabilité du système étudié, autour d'un point de fonctionnement, est déduite à partir des valeurs propres de la matrice d'état du modèle linéarisé correspondant.

Nous ramènerons, dans la suite, le point d'équilibre à l'origine.
L'évolution du processus étant régie par l'équation

$\dot{x}(t) = f(x,t)$ dans le cas continu,

et par $x(k+1) = f(x(k),k)$ dans le cas discret,

un développement limité au voisinage de l'origine conduit aux représentations respectives locales :

$\dot{x}(t) = Ax(t) + o(\|x(t)\|)$ en continu

et $x(k+1) = Ax(k) + o(\|x(k)\|)$ en discret.

Dans ces conditions la stabilité de la matrice A implique la stabilité asymptotique locale du processus.

En continu, les parties réelles des valeurs propres de A doivent être strictement négatives.
En discret, les modules des valeurs propres de A doivent être strictement inférieurs à 1.
L'étude de la stabilité locale est surtout intéressante pour savoir s'il faut poursuivre l'étude de la stabilité, ou non. En effet, si le système linéarisé est instable, le système non linéaire le sera nécessairement [15].

III.1.3 Deuxième méthode de Lyapunov

La deuxième méthode de Lyapunov est inspirée du principe physique :

Les systèmes linéaires ou non linéaires, dont l'énergie est continument dissipée, peuvent tendre vers un point d'équilibre.

L'énergie est une fonction scalaire, ainsi, pour étudier la stabilité d'un système, il suffit, d'après Lyapunov, d'examiner la variation d'une fonction scalaire, appelée fonction candidate de Lyapunov V(x), qui représente en quelque sorte l'énergie du système. Si la fonction de Lyapunov est décroissante, le système est stable. V(x) sert donc de fonction de comparaison. Elle vérifie les propriétés suivantes [15]:

- $V(x) > 0 \,, \forall x \neq 0$ et $V(0) = 0$,
- $\exists\, a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ fonctions scalaires continues monotones non décroissantes avec

$a(0) = b(0) = 0$ telles que $a(\|x\|) \leq V(x) \leq b(\|x\|)$,

- Les équipotentielles de Lyapunov d'équation $V(x) =$ constante, définissent des domaines connexes emboités avec :

$D_1 = \{x/V(x) \leq C_1\},\ D_2 = \{x/V(x) \leq C_2\}, C_1 < C_2 \quad \Rightarrow \quad D_1 \subset D_2$

- La condition $\|x\| \longrightarrow \infty \Rightarrow V(x) \longrightarrow \infty$

- Dans le cas continu la seconde méthode de Lyapunov implique que le domaine D_S, défini par la plus grande équipotentielle de Lyapunov, comprise dans le domaine D_N tel que [55]: $\frac{dV(x)}{dt} \leq -\varphi(x)$,

  avec $\varphi(x) > 0, \forall x \neq 0$, est un domaine de stabilité asymptotique globale pour le processus.

- Dans le cas discret, le domaine D_N est défini comme suit

$$D_N = \{x(k) / \Delta V(x(k) = V(x(k+1)) - V(x(k)) \leq -\varphi(x(k))\} \quad (25)$$

avec $\varphi(x(k)) > 0, \quad \forall x(k) \neq 0$.

Si $D_N \equiv \mathbb{R}^n$ alors $D_S \equiv \mathbb{R}^n$, il y a alors stabilité asymptotique pour toute condition initiale. La stabilité est alors globale et illimitée [55].

Ces conditions de stabilité sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.

L'intérêt de cette méthode est celui de l'utilisation d'une fonction scalaire V(x) pour l'étude de la convergence du vecteur x vers l'origine, au lieu d'utiliser le vecteur x lui-même.

III.1.4 Théorèmes de Stabilité

Théorème1 : L'équilibre $x_0 = 0$ est stable s'il existe une fonction V(x) définie positive et un voisinage compact D de x_0 tels que $\dot{V}(x)$, dans le cas continu et $\Delta V(x)$, dans le cas discret, soient semi- définies négatives $\forall t, \ \forall x \in D$.

Théorème2 : L'équilibre $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable, s'il existe une fonction V(x) définie positive et un voisinage D de x_0 tels que $\dot{V}(x)$, dans le cas continu et $\Delta V(x)$, dans le cas discret, soient définies négatives $\forall t, \ \forall x \in D$.

Théorème3 : L'équilibre $x_0 = 0$ est globalement asymptotiquement stable, s'il existe une fonction V(x) définie positive non bornée en rayon telle que $\dot{V}(x)$, dans le cas continu et $\Delta V(x)$, dans le cas discret, soient définies négatives $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{x_0\}$.

III.1.5 Critères de stabilité dans l'espace d'état, cas continu

Pour l'étude de stabilité des systèmes de grandes dimensions, la méthode des fonctions scalaires de Lyapunov a été généralisée, en utilisant des fonctions vectorielles de Lyapunov. Borne et Gentina ont développé l'idée de l'utilisation des fonctions vectorielles de type norme, pour définir un critère pratique applicable aux systèmes non linéaires, en s'inspirant du concept des normes vectorielles ainsi que de la notion de systèmes majorants qui aboutissent au lemme de comparaison [10, 34].

III.1.5.1 Cas linéaire stationnaire

L'évolution des processus est décrite par une expression de la forme :

$$\dot{x} = Ax \text{ , dans le cas continu}$$

$$x(k+1) = Ax(k) \text{ , dans le cas discret}$$

avec A une matrice constante.

Dans le cas continu, la condition de stabilité asymptotique est que les valeurs propres de la matrice A soient à parties réelles strictement négatives. C'est une condition suffisante et nécessaire [22].

Dans le cas discret, une condition nécessaire et suffisante, est aussi donnée, pour la stabilité asymptotique est que les valeurs propres de A soient de modules strictement inférieurs à 1.

III.1.5.2 Cas non linéaire

Les processus étudiés admettent une description de la forme :

$$\dot{x} = A(x, t, \delta)x \text{ ,} \qquad (26)$$

où A est une matrice ayant la forme $A = \{a_{i,j}(x, t, \delta)\}$, dans le cas continu, et δ représente le vecteur des perturbations agissant sur le processus. Ces perturbations peuvent être connues ou inconnues.

Dans le cas discret, ces processus sont de la forme

$$x(k+1) = A(x(k), k, \delta(k))x(k) \text{ où } A = \left\{a_{i,j}(x(k), k, \delta(k)\right\}, \tag{27}$$

tel que $\delta(k)$ représente le vecteur des incertitudes, perturbations et bruits connus ou inconnus agissant sur le système [22].

III.1.6 Théorèmes sur la stabilité

Nous présentons ici quelques théorèmes concernant la stabilité globale ou locale des ensembles attracteurs.

III.1.6.1 Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène linéaire

Théorème [43] : S'il est possible de définir un système majorant homogène linéaire de

$$\dot{x} = f(t, x, \delta) \tag{28}$$

où δ représente des paramètres de perturbations sur l'état ou le modèle, sur $\mathbb{R}^n$, relatif à une norme vectorielle p régulière telle que

$$D^+p(x) \le Mp(x), \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times \mathbb{R}^n \tag{29}$$

pour lequel la matrice constante M soit de Hurwitz ou de façon équivalente, soit l'opposée d'une M-matrice ou vérifie les conditions de Koteliansky

alors : x = 0 est globalement asymptotiquement stable pour (28)

III.1.6.2 Stabilité asymptotique globale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire

Théorème [43] : Critère de Borne & Gentina

S'il est possible de définir un système majorant homogène non linéaire de (28)

sur $\mathbb{R}^n$, relatif à une norme vectorielle p régulière telle que

$$D^+p(x) \le M(t,x)p(x), \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times \mathbb{R}^n \tag{30}$$

pour lequel la matrice M(t,x) vérifie les propriétés suivantes :

1. M(t,x) est irréductible, $\forall (t,x) \in \tau_0 \times \mathbb{R}^n$;
2. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M(t,x) + \varepsilon I_k$ soit l'opposé d'une M-matrice ;

3. Les éléments non constants de M(t,x) sont regroupés dans une seule et même ligne ou une seule et même colonne.

alors x = 0 est globalement exponentiellement stable pour (28)

III.2 Domaines de stabilité

Des concepts de domaines de différentes propriétés de stabilité, connus sous l'appellation domaines de stabilité, ont été introduits afin d'obtenir des informations complètes au sujet de la causalité entre l'état initial et le mouvement du système. Dans le cadre de la stabilité de Lyapunov, les notions des domaines de stabilité et les domaines de stabilité asymptotique ont été définis par Grujic [36, 38, 39, 40, 41, 42, et 51], et utilisés par Grujic et al. [45, 46].

Dans [47], les auteurs expliquent la différence entre le mot domaine de stabilité et le mot région de stabilité. En effet, la notion de région est surtout utilisée lorsqu'il s'agit d'un ensemble ouvert.

Définition 10

L'état x = 0 d'un système admet un domaine de stabilité noté D_S, si et seulement si [47] :

1. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ il existe un voisinage $D_S(\varepsilon)$ de x = 0 tel que $\|x(t; x_0)\| < \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ à la condition que $x_0 \in D_S(\varepsilon)$,

et

2. $D_S = \bigcup \left[D_S(\varepsilon) : \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \right]$

En effet, l'état x = 0 admet un domaine de stabilité si et seulement si [47] il satisfait les conditions de la définition 10, les frontières du domaine étant cette fois exclues.

Le domaine de l'espace d'état D_S défini par la plus grande équipotentielle de Lyapunov, comprise dans le domaine D_N, définit un domaine de stabilité pour toute condition initiale prise dans D_S. Le système dans un tel cas sera asymptotiquement stable. D_N étant le domaine dans lequel

$$\frac{dv}{dt} < 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$= 0 \text{ pour } x = 0$$

Le domaine de stabilité d'un système est calculé suivant la condition de stabilité utilisée, le choix de la fonction candidate de Lyapunov ainsi que de la norme vectorielle choisie.

III.2.1 Norme du max

III.2.1.1 Cas continu

Pour $V(x) = \max_i |x_i|$ la condition $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ impose

$$\max_i \left\{ a_{i,i}(.) + \sum_{j \neq i} |a_{i,j}(.)| \right\} \leq C < 0 \tag{31}$$

Il vient :

$$D_N = \left\{ x / \max_i \left(a_{i,i}(.) + \sum_{j \neq i} |a_{i,j}(.)| \right) \leq C < 0 \right\} \tag{32}$$

Certains cas nécessitent un changement de base diagonal de la forme $P = \mathrm{diag}\{d_i\}$, la relation $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ conduit à la relation $\max_i \left\{ a_{i,i}(.) + \sum_{j \neq i} \left| \frac{d_j}{d_i} a_{i,j}(.) \right| \right\} \leq C < 0.$

III.2.1.2 Cas discret

Le choix de $V(x) = \max_i |x_i(k)|$ conduit à la condition $\Delta V(x(k)) < 0$ suivante

$$\max_i \left\{ \sum_j |a_{i,j}(.)| \right\} \leq C < 1 \tag{33}$$

Il vient :

$$D_N = \left\{ x / \max_i \left(\sum_j |a_{i,j}(.)| \right) \leq C < 1 \right\} \tag{34}$$

Le choix de la norme du max comme fonction candidate de Lyapunov conduit à des équipotentielles de la forme hypercubique, et le domaine de stabilité vis-à-vis des conditions initiales correspondant au plus grand hypercube compris dans D_N.

III.2.2 Norme duale du max

III.2.2.1 Cas continu

Le choix de $V(x) = \sum_i |x_i|$ conduit à la condition $\frac{dV(x)}{dt} < 0$ suivante

$$\max_j \left\{ a_{j,j}(.) + \sum_{i \neq j} |a_{i,j}(.)| \right\} \leq C < 0 \tag{35}$$

Il vient :

$$D_N = \left\{ x / \max_j \left(a_{i,i}(.) + \sum_{i \neq j} |a_{i,j}| \right) \leq C < 0 \right\} \tag{36}$$

III.2.2.2 Cas discret

Le choix $V(x(k)) = \sum_i |x_i(k)|$ conduit à la condition $\Delta V(x(k)) < 0$ suivante :

$$\max_j \left\{ \sum_i |a_{i,j}(.)| \right\} \leq C < 1 \tag{37}$$

Il vient :

$$D_N = \left\{ x / \max_j \left(\sum_i |a_{i,j}| \right) \leq C < 1 \right\} \tag{38}$$

Pour la norme duale du max, les équipotentielles de Lyapunov sont des polyèdres.

III.2.3 Fonction quadratique

III.2.3.1 Cas continu

Pour $V(x) = x^t\, Q\, x$ avec Q une matrice symétrique définie positive, les équipotentielles de Lyapunov sont des hyper ellipsoïdes. Il vient pour la condition $\dot{V} < 0$

$$A^t(.)Q + QA(.) \leq S \tag{39}$$

où S est une matrice définie négative.

III.2.3.2 Cas discret

Pour $V(x(k)) = x^t(k)\, Q\, x(k)$ avec Q une matrice symétrique définie positive, il vient pour $\Delta V(x(k)) < 0$ la condition $A^t(.)QA(.) - Q$ matrice définie négative quelque soit x(k) et quelque soit k.

III.2.4 Critère simplifié de Borne-Gentina

III.2.4.1 Cas continu

S'il existe une matrice $A^* = \left\{a^*_{i,j}(.)\right\}$ telle que les éléments non constants soient isolés dans une seule rangée et vérifiant

$$a^*_{i,i}(.) \geq a_{i,i}(.) \text{ et } a^*_{i,j}(.) \geq \left|a_{i,j}(.)\right|, \quad \forall i \neq j \tag{40}$$

Alors une condition suffisante de stabilité du système initial est que les mineurs principaux de la matrice $A^*(.)$ dite matrice majorante de A(.) soient de signes alternés, le premier étant négatif, c'est à dire :

$$a^*_{1,1}(.) < 0, \ \begin{vmatrix} a^*_{1,1}(.) & a^*_{1,2}(.) \\ a^*_{2,1}(.) & a^*_{2,2}(.) \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ (-1)^1 \begin{vmatrix} a^*_{1,1}(.) & a^*_{1,2}(.) & \cdots & a^*_{1,1}(.) \\ a^*_{2,1}(.) & a^*_{2,2}(.) & \cdots & a^*_{2,1}(.) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a^*_{1,1}(.) & a^*_{1,2}(.) & \cdots & a^*_{1,1}(.) \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

III.2.4.2 Cas discret

S'il existe une matrice $A^* = \left\{a^*_{i,j}(.)\right\}$ telle que les éléments non constants soient isolés dans une seule rangée et vérifiant

$$a^*_{i,j}(.) \geq \left|a_{i,j}(.)\right|, \quad \forall i, j \tag{41}$$

Alors une condition suffisante de stabilité s'écrit :

$$1 - a^*_{1,1}(.) \geq 0, \ \begin{vmatrix} 1-a^*_{1,1}(.) & -a^*_{1,2}(.) \\ -a^*_{2,1}(.) & 1-a^*_{2,2}(.) \end{vmatrix} > 0, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} 1-a^*_{1,1}(.) & -a^*_{1,2}(.) & \cdots & -a^*_{1,1}(.) \\ -a^*_{2,1}(.) & 1-a^*_{2,2}(.) & \cdots & -a^*_{2,1}(.) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a^*_{1,1}(.) & -a^*_{1,2}(.) & \cdots & 1-a^*_{1,1}(.) \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

IV Attracteurs et Zone d'attraction

Nous présentons ici quelques définitions ayant un caractère assez théorique, mais nécessaires pour expliquer l'origine de certaines définitions notamment celle des attracteurs et des zones d'attraction [19, 20 et 32].

Définition 14

L'ensemble [3, 12 et 32]

$\Lambda^+(x_0)=\{y\in\mathbb{R}^n,$il existe une séquence $\{t_i\}\subset\tau_0$ telle que si $i\to+\infty,$ et $x(t_i;t_0,x_0)\to y\}$

est dit cycle limite positif relatif à un point initial x_0.

Cette définition, d'ordre très théorique, se résume par : $\Lambda^+(x_0)$ est l'ensemble des y qui vérifient que pour l'état initial x_0 l'état $x\to y$ lorsque $t\to\infty$ à partir d'un certain temps.

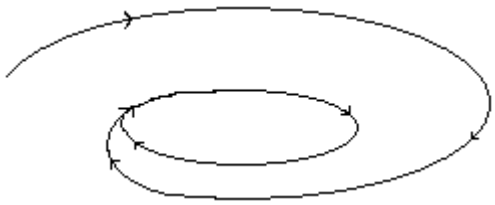


Figure 2: Ensemble limite positif de x_0

Définition 15

L'ensemble [3, 19 et 32]

$J^+(x_0,D_0)=\{y\in\mathbb{R}^n,$ il existe deux séquences $\{x_i\}\subset D_0$ et $\{t_i\}\subset\tau_0$ telles que

si $i\to+\infty,\ x_i\to x_0$ et $x(t_i;t_0,x_i)\to y\}$

En d'autres termes D_0 est l'ensemble des états initiaux $(x_i)_i$ qui mènent, chacun, à $\Lambda^+(x_i)$ qui n'est autre que $\Lambda^+(x_0)$. $J^+(x_0,D_0)$ est alors l'ensemble des y qui vérifient que pour les états initiaux $(x_i)_i$, inclus dans D_0, et qui convergent vers x_0(x_0 n'étant pas forcément un point de D_0), l'état $x\to y$ lorsque $t\to\infty$ à partir d'un certain temps t.

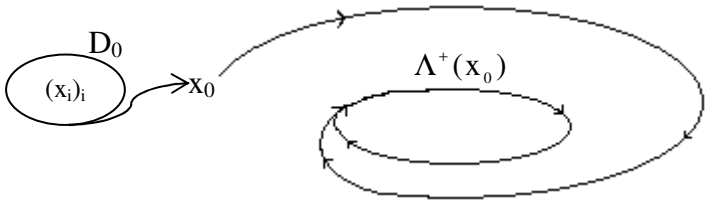


Figure 3: Ensemble $J^+(x_0,D_0)$

IV.1 Attracteurs

Définition 16

Un point d'équilibre x_0 est dit attractif si après une petite perturbation le point de fonctionnement du processus, y revient. Mathématiquement, cette définition se traduit par :
x_0 est attractif si [47] :

$$\forall t_0 \in \tau,\ \exists \delta(t_0) > 0 \text{ tel que } \forall x_0,\ \|x(t_0) - x_0\| < \delta(t_0) \Rightarrow x(t; t_0, x_0) \text{ défini } \forall t \geq t_0,$$
$$\text{et } \forall \mu > 0,\ \exists T(t_0, x_0, \mu) \text{ tel que } \forall t \geq t_0 + T,\ \|x(t; t_0, x_0) - x_0\| < \mu$$

Définition 17

Un ensemble compact $L_0 \subset \mathbb{R}^n$ est un attracteur relativement à $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\forall x \in D_0,\ \Lambda^+(x) \neq \varnothing,\ \Lambda^+(x) \subset L_0$

$\Lambda^+(x)$ est expliqué à la définition 14

D_0 est appelé domaine d'attraction : et c'est le domaine qui contient les états initiaux qui font converger le système vers $\Lambda^+(x)$

$L_0 \subset \mathbb{R}^n$ est un attracteur uniforme relativement à $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\forall x \in D_0,\ J^+(x, D_0) \neq \varnothing,\ J^+(x, D_0) \subset L_0.$$

De même, $J^+(x, D_0)$ est expliqué à la définition 15

L'uniformité est considérée par rapport à l'état x.

Définition 18

L'attracteur L_0 peut être défini par [19 et 32] :

$$\forall x(t, x_0) \in v(L_0): \quad x(t, x_0) \to L_0 \quad \text{qd} \quad t \to +\infty$$

où $v(L_0)$ est un voisinage de L_0.

L'attractivité est uniforme si δ et T, de la définition 16, sont indépendants de t_0.
Cette condition exprime que si l'état initial est dans un certain voisinage de L_0, l'état du système reviendra nécessairement à L_0 au bout d'un temps suffisant.
La propriété d'attractivité d'un système ne l'empêche pas d'avoir un comportement transitoire avant de rejoindre son état d'équilibre. Ainsi, l'attractivité n'implique pas la stabilité.
De même, l'évolution future d'un système dépend de ses conditions initiales. Si ces dernières sont proches d'un équilibre stable, son évolution peut toujours y rester sans y converger. Donc, la stabilité n'implique pas l'attractivité [55].

En revanche, si le point d'équilibre est à la fois stable et attractif, nous parlons de stabilité asymptotique. Par ailleurs nous écrivons :

Définition 19

Le point d'équilibre $x_0 = 0$ est asymptotiquement stable si [15]:

- $x_0 = 0$ est un point d'équilibre stable (d'après la définition de stabilité)
- $\exists\, r > 0$ tel que si $\|x(0)\| < r$ alors $\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| \to 0$

Définition 20

Un ensemble compact $L_0 \subset \mathbb{R}^n$ est asymptotiquement stable relativement à D_0 si et seulement si c'est un attracteur uniforme relativement à D_0 positivement invariant par rapport à (1)

$$\forall x_0 \in L_0 \quad x(t;t_0,x_0) \in L_0 \quad \forall t_0 \in \mathbb{R} \quad \forall t \in \tau_0$$

Si $D_0 = \mathbb{R}^n$, L_0 est globalement asymptotiquement stable.

En pratique, la stabilité asymptotique s'exprime par le fait que si le système perturbé ne s'éloigne pas de son point d'équilibre, il y reviendra nécessairement après un certain temps grâce à l'attractivité.
Selon Lyapunov [15], la stabilité simple peut être exprimée comme suit: si l'état initial est autour de l'origine, le système converge vers l'origine. Deux cas sont considérés: un système pour lequel l'origine est localement stable, et un processus ayant un attracteur valable pour un domaine de conditions initiales. Dans le premier cas, un système homogène majorant peut être défini. Contrairement, si nous avons un attracteur, nous définissons un système non homogène majorant [24].
Pour l'étude de stabilité, plusieurs critères sont développés et démontrés, basés sur les différents théorèmes de Lyapunov. Appliqués au système de comparaison, ces critères, permettent de déterminer l'attracteur et son domaine d'attraction [15].

IV.1.1 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire local

Théorème [71] : S'il est possible de définir un système majorant homogène non linéaire et / ou non stationnaire de (28) sur un voisinage $S \subset \mathbb{R}^n$ de l'équilibre x = 0, relatif à une norme vectorielle p régulière

$$D^{+}p(x) \le M(t,x)p(x), \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{42}$$

pour lequel la matrice M(t,x) vérifie les propriétés suivantes :

1. M(t,x) est irréductible , $\forall (t,x) \in \tau_0 \times S$;
2. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M(t,x) + \varepsilon I_k$ soit l'opposé d'une M-matrice ;
3. Les éléments non constants de M(t,x) sont regroupés dans une seule et même ligne ou une seule et même colonne.

Alors x = 0 est localement exponentiellement stable pour (28) et sa région d'attraction contient le plus grand domaine D du type

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; p^t(x) u_m(S) \le \text{constante} \right\} \text{ avec } D \subset S \tag{43}$$

Où $u_m(S)$ à composantes toutes positives et est le vecteur propre de $M^t(t_1,x_1)$ associé à sa valeur propre principale $\lambda_m(S)$ qui est strictement négative et de module maximum en (t,x)

$$\lambda_m(S) = \sup_{\substack{t \in \tau_0 \\ x \in S}} \left\{ \lambda_m(t,x) \right\} = \lambda_m(t_1,x_1) \le -\varepsilon < 0 \tag{44}$$

IV.1.2 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène linéaire local

Théorème [71] : S'il est possible de définir un système majorant homogène linéaire et stationnaire de (28) sur un voisinage $S \subset \mathbb{R}^n$ de l'équilibre x = 0, relatif à une norme vectorielle p régulière

$$D^{+}p(x) \le Mp(x), \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{45}$$

pour lequel la matrice constante M est irréductible et de Hurwitz, alors x = 0 est localement asymptotiquement stable, et sa région d'attraction contient le plus grand domaine D du type

$$D = \left\{ x \in S ; p^t(x) u_m(S) \le \text{constante} \right\} \tag{46}$$

où $u_m(S)$ strictement positif est le vecteur propre principal de M^t associé à sa valeur propre principale $\lambda_m(S)$ qui est strictement négative. De plus, la convergence dans ce domaine est exponentielle en $e^{\lambda_m(S)t}$.

IV.1.3 Stabilité asymptotique locale d'un point d'équilibre, définition d'un Système Majorant Homogène non linéaire local factorisable

Théorème [71] : S'il est possible de définir un système majorant homogène non linéaire et/ou non stationnaire de (28) sur un voisinage de l'équilibre x = 0, relatif à une norme vectorielle p régulière

$$D^{+}p(x) \le M.D(\varphi)p(x), \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{47}$$

pour lequel la matrice constante M soit irréductible, opposée d'une M-matrice, et $D(\varphi)$ est une matrice non constante, diagonale et positive

$$D(\varphi) = \mathrm{diag}(\varphi_i(t,x)),\ \varphi_i(t,x) \ge \delta > 0,\ i = 1,2,\ldots,k, \tag{48}$$

alors le point d'équilibre x = 0 est exponentiellement globalement stable.

IV.1.4 Stabilité asymptotique globale d'un attracteur, définition d'un Système Majorant Non Homogène linéaire

Théorème [20] : S'il est possible de définir un système majorant non homogène linéaire stationnaire de (28) relatif à une norme vectorielle p régulière

$$D^{+}p(x) \le M.p(x) + N, \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times \mathbb{R}^n \tag{50}$$

pour lequel la matrice constante M est de Hurwitz c'est-à-dire M est l'opposée d'une M-matrice, et N est un vecteur positif constant, alors il existe un attracteur asymptotiquement stable L et le domaine

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; p(x) \le -M^{-1}N \right\} \tag{51}$$

Inclut tous les attracteurs asymptotiquement stables ou non de (28)

IV.1.5 Stabilité asymptotique locale d'un attracteur, définition d'un Système Majorant Non Homogène linéaire local

Théorème [14] : Supposons qu'il soit possible de définir un système majorant non homogène linéaire stationnaire de (28) sur un voisinage $S \subset \mathbb{R}^n$ de l'origine x = 0, relatif à une norme vectorielle p régulière

$$D^{+}p(x) \le M.p(x) + N, \quad \forall (t,x) \in \tau_0 \times S \tag{52}$$

Pour lequel la matrice constante M est de Hurwitz, et N est un vecteur positif constant.

$$\begin{aligned} L&=\left\{x\in\mathbb{R}^n; p(x)\le -M^{-1}N\right\},\\ D&=\left\{x\in\mathbb{R}^n; p_i(x)\le \alpha_i,\ \forall i\right\},\quad D\subset S \end{aligned} \tag{53}$$

où les α_i sont les plus grandes constantes positives possible.
Supposons de plus que L vérifie $L\subset S$.
Alors il existe un attracteur asymptotiquement stable $L_0\subset L$ de (28). De plus, D est une estimation de la région d'attraction de L, c'est-à-dire que toute trajectoire issue de D à $t = t_0$ aboutit dans L.
Si $S=\mathbb{R}^n$, la propriété est globale.

IV.2 Domaines d'attraction

Dans le cadre de la stabilité de Lyapunov, la notion de domaine d'attraction de l'origine a été définie par Zubov [81] et Hahn [51]. Dans la littérature la notion de région de stabilité asymptotique a été utilisée dans le sens de domaine d'attraction [60 et 81].

Définition 21

L'état d'équilibre x = 0 d'un système défini par son équation d'état admet un domaine d'attraction noté D_0 si et seulement si [47]:

1. Pour tout $\xi\in\mathbb{R}^+$, il existe $\tau\in\mathbb{R}^+$, $\tau=\tau(x_0,\xi)$, tel que $\|x(t;x_0)\|<\xi$ pour tout $t\in\ ]\tau,+\infty[$ à condition que $x_0\in D_0$
   et
2. D_0 est un voisinage de x = 0.

La condition (1.) peut être exprimée par une forme équivalente (1'.)

1'. $\lim\left[\|x(t;x_0)\| : t\to+\infty\right]=0$ a la seule condition $x_0\in D_0$

Définition 22

L'état x = 0 du système admet un domaine d'attraction stricte noté D_{0c} si et seulement si [47] D_{0c} est le voisinage le plus large de x = 0 et un sous ensemble de D_0. $D_{0c}\subseteq D_0$

Définition 23

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ des états d'un système, admet un domaine d'attraction noté $D_0(A)$, si et seulement si [47]

1. Pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^+$ il existe $T \in \mathbb{R}^+$, $T = T(x_0, \zeta; A)$ tel que $\rho[x(t; x_0), A] < \zeta$ pour tout $t \in]T, +\infty[$ à condition que $x_0 \in D_0$,
   et
2. D_0 est un voisinage de l'ensemble A.

La condition (1.) peut s'exprimer sous une forme équivalente (1') :

1'. $\lim\{\rho[x(t; x_0), A] : t \to +\infty\} = 0$ à la seule condition $x_0 \in D_0$.

Définition 24

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^n$ des états de système admet un domaine d'attraction stricte noté $D_{0C}(A)$, si et seulement si [47] il a le domaine d'attraction $D_0(A)$ et $D_{0c}(A)$ est le voisinage le plus large de A, qui lui-même est un sous ensemble de $D_0(A)$, $D_{0c}(A) \subseteq D_0(A)$.

Définition 25

Si L_0 est un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$, et ρ une distance de $\mathbb{R}^n$, alors la région d'attraction D_0 de L_0 est définie par :

$$D_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^n,\ \rho(x(t; t_0, x_0), L_0) \to 0 \ \text{ si } \ t \to +\infty\}$$

Définition 26

Un domaine d'attraction $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ est défini par:

$$\forall\, x_0 \in D_0\ , \quad \lim_{t \to \infty} x(t, x_0) \to L_0$$

C'est-à-dire que D_0 est l'ensemble des conditions initiales permettant chacune de créer une trajectoire qui aboutit sur l'attracteur L_0.

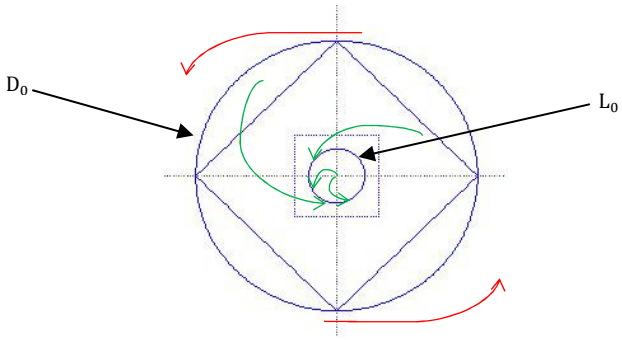


Figure 4: Attracteur L_0 asymptotiquement stable
D_0 Domaine d'attraction

Conclusion

La représentation d'état d'un système met en évidence des informations internes au processus qui n'apparaissent pas nécessairement sur la description du système par la fonction de transfert. C'est sous cette forme qu'est étudiée la stabilité des systèmes non linéaires par la technique de majoration et des systèmes de comparaison. C'est, en effet, pour cela qu'après une présentation des systèmes définis par leurs équations d'état dans le cas continu et le cas discret et en passant par une brève étude des composantes du vecteur d'état, nous avons présenté, dans ce chapitre, la notion de systèmes majorants où nous avons expliqué les différentes techniques de majoration utilisées pour l'étude de stabilité des systèmes non linéaires à travers leurs représentations d'état. C'est une technique basée principalement sur l'utilisation des normes vectorielles et des matrices majorantes afin de créer le système majorant dont la dimension est inférieure ou égale à la dimension du système d'origine.
Par ailleurs, la réduction de l'ordre du système permet de faciliter le calcul dans le cas d'étude de stabilité puisque la stabilité du système majorant implique la stabilité du système étudié, et ce, d'après le principe de comparaison développé par Borne & Gentina dans [22] en se basant sur les normes vectorielles introduites par de Robert [43]. Les outils nécessaires pour ce travail sont les matrices définies positives et les normes vectorielles.
Pour la rigueur de l'exposé, nous nous sommes retrouvés contraints à expliciter, dans ce chapitre, les différents théorèmes de base de la stabilité, à savoir, celui du point d'équilibre stable, les deux méthodes de Lyapunov, première et deuxième, ainsi que certains critères de stabilité nécessaires dans tout travail visant l'étude de stabilité. Nous avons aussi abordé le concept de domaines de stabilité et de domaines d'attraction

Deuxième Chapitre

Stabilisation de trajectoire par l'étude de la stabilité de mouvement

Introduction **47**

I Stabilité de trajectoire dans le cas des systèmes multivariables non linéaires **49**

I.1 Commandes et structures de commandes des systèmes multivariables 49

I.2 Calcul de la loi de commande de suivi de trajectoire des systèmes multivariables non linéaires 52

II Mise en œuvre de l'approche **57**

II.1 Dans le cas d'un système monovariable 57

II.2 Mise en œuvre de l'approche sur un système multivariable 58

III Commande de système calculée par un régulateur PI **60**

III.1 Régulateurs et régulation 61

III.2 Mise en œuvre d'une régulation à action proportionnelle-intégrale 63

IV Etude du cas où ($H_x(x,t)G(x,t)$) est non inversible **66**

IV.1 Approche proposée pour la résolution du problème 66

IV.2 Mise en œuvre de l'approche modifiée 67

Conclusion **71**

Introduction

La théorie de la commande est basée sur des hypothèses mathématiques afin de résoudre des concepts automatiques. Une loi de commande permet d'influer la dynamique d'un processus donné.

Parmi les objectifs de l'automatique c'est celui de rendre possible, en industrie, le fait de bien commander un système afin de maitriser son comportement et le rendre stable ou bien qu'il rejoigne et suive une consigne ou une trajectoire souhaitée en lui assurant un comportement donné. Les domaines d'application pratiques sont multiples nous pouvons citer par exemple la robotique, les satellites, le domaine de l'automobile, …etc.

Le schéma illustrant un processus commandable, par la figure (5), en boucle fermée, est décrit par un système de commande qui, à partir des informations disponibles sur le modèle du système (la ou les consignes, l'influence du bruit, …etc), agit sur la commande. Une structure bouclée, convenablement réalisée, du système permet aux sorties d'agir sur les entrées, et de limiter les imperfections et les erreurs dues aux simplifications effectuées lors de la détermination du modèle du processus [16].

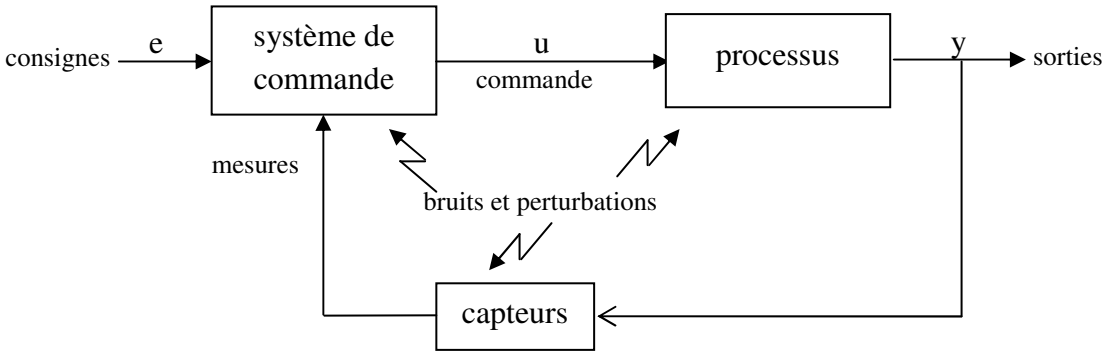


Figure 5: Asservissement d'un processus

La commande des systèmes non linéaires s'avère être très importante, tenant compte de la complexité du calcul qu'ils génèrent. Dans notre travail, nous proposons une approche permettant le calcul d'une loi de commande de suivi de trajectoire d'un processus dont l'évolution est décrite par son équation d'état. Cette commande est réalisée à partir d'informations accessibles concernant le processus et son évolution désirée [16].

Considérons le système décrit par l'équation (54) :

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(x,t)+G(x,t)u(t) \\ y(t)=h(x,t) \end{cases} \qquad (54)$$

où $t \in \tau = [0,+\infty[$ représente le temps,

$x \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état du processus,

$u \in \mathbb{R}^l$ la loi de commande,

$y \in \mathbb{R}^m$ la sortie du système.

tels que : $l \geq m$ et en général nous avons $l = m$.

L'approche proposée est basée sur l'étude de la stabilité du mouvement de systèmes continus, multivariables non linéaires ainsi que sur l'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov [37, 51 et 65].

La fonction candidate de Lyapunov utilisée, doit permettre d'assurer que la sortie y(t) du processus suive bien la sortie désirée $y_c(t)$.
L'objectif étant de trouver une loi de commande $u(x,t,y_c(t))$ qui rend $\frac{dv(x,t)}{dt}$ négative, étant donné les contraintes sur u et la dynamique de la sortie désirée acceptable par le système.

Le premier paragraphe expose le calcul de la loi de commande permettant la stabilité de trajectoire dans le cas des systèmes multivariables non linéaires, en passant par une brève présentation des commandes et des structures de commandes des systèmes multivariables.

Le paragraphe II est une mise en œuvre de l'approche proposée, aussi bien dans le cas de systèmes monovariables que dans le cas de systèmes multivariables.

Afin d'améliorer les performances d'une commande, une régulation est nécessaire. Le troisième paragraphe présente une étude explicite de la régulation, des équipements de la régulation ainsi qu'une mise en œuvre d'une régulation à action proportionnelle-intégrale .

Le paragraphe quatre, présente une méthode permettant de généraliser l'approche, proposée au premier paragraphe, dans le cas où elle n'est pas définie. Trois exemples illustrent cette étude.

Les différents résultats et interprétations évoqués dans ce chapitre, sont résumés dans la conclusion.

I Stabilité de trajectoire dans le cas des systèmes multivariables non linéaires

Dans le cas des systèmes multivariables, la mise en œuvre d'une commande nécessite des outils mathématiques très solides même si le système est représenté par un modèle linéaire et stationnaire. En effet, la commande de p variables indépendantes, nécessite l'utilisation d'au moins le même nombre de variables de commande. L'indépendance de ces variables, veut dire que chaque commande agit différemment sur les variables commandées. Si le nombre de variables de commande utilisées est supérieur à celui des variables commandées, le processus est alors mieux commandé ce qui permet de réaliser de meilleures performances. Généralement, le nombre de capteurs n'est souvent pas égal au nombre de variables commandées. Par exemple, dans le cas des actionneurs, plus il y a d'actionneurs, mieux c'est [1]. En matière de systèmes multivariables, certains concepts supplémentaires sont pertinents.

Pour le problème de commande multivariable, la liaison entrée/sortie des variables, l'effet des interactions et les options de découplage des objectifs des différentes commandes sont des questions à prendre en considération dans les premières étapes de la conception [1, 53 et 77].

I.1 Commandes et structures de commandes des systèmes multivariables

I.1.1 Commandes des systèmes multivariables

En référence aux systèmes multivariables appelés aussi systèmes Multi-entrées/Multi-sorties (MIMO) où il s'agit de m variables commandées, exprimées en tant que vecteur y (t), et de l variables de commande, exprimées en u (t), et considérant un vecteur perturbation $\delta(t)$, de dimension d, les exigences de commande d'un vecteur de référence $y_c(t)$ de dimension m, peuvent être déclarées à différents niveaux, logiques ou non, réalisables ou non réalisables. En effet, une commande idéale, comme son nom l'indique, peut être parfaite mais non réalisable. Ceci est dû aux caractères mathématiques de l'expression de la commande. Les modèles du processus ainsi que les perturbations subies par le système ne sont généralement pas parfaitement connus non plus.

Pour que le problème de commande soit réalisable, certaines conditions de réalisation d'une commande idéale, doivent être satisfaites, afin qu'elles soient compatibles avec les contraintes dans la limite des mesures et des possibilités disponibles des actionneurs. L'addition de capteurs, d'actionneurs ou de variables de commande dans des structures de commande plus complexes peut améliorer les performances du système de commande. La commande idéale serait obtenue dans le cadre d'un actionneur de puissance illimitée et de détection illimitée de l'information [1], il s'agit, alors d'une commande possible.

Si les besoins sont élaborés en tant que minimisation d'un critère de coût ou de maximisation d'un indice de performance, le contrôleur qui en résulte est alors optimal. Cependant l'optimalité d'un point de vue mathématique ne conduit pas toujours à de meilleures performances, sauf si les consignes et les critères sont correctement traduits en paramètres d'optimisation [1]. La commande est, alors, dite optimale.

Les commandes, idéale, possible et optimale sont des commandes théoriques. Elles sont basées sur des modèles et des performances idéales. En pratique, les commandes réelles doivent satisfaire d'autres conditions. En effet, il faut prendre en considération que les modèles mathématiques, que nous disposons, représentent un comportement approximatif du processus réel, et ce comportement peut changer. Les spécifications de conception de commande, représentent partiellement, aussi, les besoins des utilisateurs. Il faut, aussi, noter qu'en cours d'utilisation, le système devrait être robuste vis à vis des changements et/ou des perturbations et que la mise en œuvre du contrôleur dépend des conditions externes du système.

Ainsi, en pratique, les contrôleurs devraient faire fonctionner le processus de manière automatique, sans surveillance [1].

I.1.2 Structures de commandes des systèmes multivariables

Les variables de commandes ainsi que les informations utilisées pour générer les opérations de commande déterminent la structure du système de commande. Par exemple, dans une structure de commande en boucle ouverte, les opérations de commande sont générées sur la base des informations externes [1] : les consignes, les conditions initiales, les perturbations, les données des opérateurs, …etc. Un bon modèle du processus est requis et il n'existe aucune option dans ce cas, pour faire face à des perturbations et/ou incertitudes inattendues. En revanche, la commande en boucle fermée utilise les données

issues du processus pour générer la commande, et contrairement au cas de la boucle ouverte, dans la boucle fermée il existe de nombreuses options pour faire face aux perturbations, au suivi de trajectoire et aux incertitudes. Connaître l'évolution du processus permet d'obtenir certains renseignements provenant du système lui même, pour fermer la boucle. Le retour fonctionne quand le système en boucle fermée est stable. Dans ce cas, La commande doit être telle que le fonctionnement du processus soit insensible aux erreurs de modélisation, au bruit et aux perturbations. Pour pouvoir suivre correctement la trajectoire de référence, les informations fournies par les capteurs doivent êtres fiables [57].

Pour les systèmes multivariables, commandés par retour d'état ou de sortie, le vecteur d'entrées doit pouvoir être calculé à partir de l'ensemble des mesures et des données disponibles, afin de déterminer l'action de la commande.

Les groupes de variables d'entrées ou de sorties peuvent être traités simultanément pour commander une variable du processus. Ils agissent localement, par réception des commandes, ou des consignes, définies à partir des niveaux de décision supérieurs et renvoi des informations aux niveaux supérieurs.

Dans le cas de systèmes incertains, une commande robuste peut faire face aux défaillances de ces systèmes. La commande robuste agit sur de tels systèmes pour les rendre robustement stables [69]. A titre d'exemple, la plupart des auteurs se sont intéressés à la stabilité quadratique qui permet un certain type de robustesse. D'après [52 et 69], une condition suffisante s'énonce dans ce sens ; la stabilité quadratique implique la stabilité robuste. En effet, la stabilité quadratique est définie, en [69], par :

Définition 27

Un système incertain défini par l'équation (55)

$$\dot{x}(t) = A(x(t), \delta(t), t)x(t) \tag{55}$$

où $\delta(t)$ est une perturbation et/ou incertitude sur le système,

est quadratiquement stable si et seulement il existe une matrice unique P définie strictement positive telle que pour toutes les perturbations et/ou incertitudes $\delta(t)$ le système vérifie

$$\begin{aligned} &x^t(t)\left[\dot{P}(\delta(t)) + A^t(x(t),\delta(t),t)P(\delta(t)) + P(\delta(t))A(x(t),\delta(t),t)\right]x(t) < 0, \\ &\forall x(t) \neq 0 \text{ et } \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Cette approche a fait l'objet de plusieurs travaux [9, 28, 33, 35, 50, 56, 70 et 72] dont l'information sur la vitesse d'évolution des paramètres d'incertitudes est totalement absente. Elle suppose pouvoir calculer une commande permettant la satisfaction de cette inégalité mais, comme dans la plupart des cas, elle n'indique pas la méthode de calcul de cette commande. Sauf que, pour cette méthode, le calcul de la matrice P n'est, souvent, pas évident. L'approche proposée dans cette thèse, est plus générale et est aussi démontrée et appliquée même sur des systèmes non linéaires multivariables perturbés.

I.2 Calcul de la loi de commande de suivi de trajectoire des systèmes multivariables non linéaires

Soit le processus dont l'évolution est décrite par l'équation (54)

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t)=f(x,t) + G(x,t)u(t) \\ y(t)=h(x,t) \end{cases} \tag{54}$$

Pour l'étude de stabilité d'un tel système nous avons opté pour l'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov basée sur une des fonctions candidates, dont le choix reste toujours une étape complexe.

I.2.1 Détermination de la fonction de Lyapunov

Les méthodes les plus utilisées [6, 13 et 58] dans le cas des systèmes linéaires, en boucle ouverte, de la forme $\dot{x}(t) = Ax(t)$ sont :

I.2.1.1 La fonction de Lyapunov de forme quadratique

La fonction de Lyapunov de forme quadratique est définie par $V(x(t)) = x^t(t)Px(t)$. L'enjeu est de trouver une matrice P, définie positive, telle que V(x(t)) vérifient les conditions de la deuxième méthode de Lyapunov [13, 23 et 58]. En effet, il faut que $\dot{V}(t) < 0$. Or

$$\dot{V}(t) = x^t(t)(PA + A^tP)x(t) \tag{57}$$

Pour prouver la stabilité des systèmes, il suffit de trouver P telle que : $-(PA + A^tP)$ soit une matrice définie positive.

I.2.1.2 La méthode d'Aizerman

Cette méthode est réalisée sur deux étapes [13 et 58]:

- La première étant d'écrire l'équation du système sous une forme linéarisée assez proche, pour un point de fonctionnement considéré,
- Ensuite, de calculer une fonction de Lyapunov associée à cette forme, et tester cette fonction pour le système non linéaire.

I.2.1.3 Utilisation de l'énergie comme fonction de Lyapunov

Cette une méthode est restreinte aux systèmes d'ordre faible, et elle est généralement utilisée pour les systèmes d'ordre deux [13 et 58].

Soit le système défini par l'équation : $\ddot{x}(t) + f(x(t))\dot{x}(t) + g(x(t)) = 0$ et tel que $\begin{cases} g(0) = 0 \\ x(t)g(x(t)) > 0 \text{ pour } x(t) \neq 0 \end{cases}$

La fonction de Lyapunov est de la forme $V(x(t)) = \frac{1}{2}\dot{x}^2 + \int_0^x g(u)\,du$, il vient alors

$$\dot{V}(x(t)) = -f(x(t))\dot{x}^2(t) \tag{58}$$

Pour que le système soit stable il suffit que f(x(t)) soit positive.

I.2.1.4 Cas des systèmes non linéaires décrits dans l'espace d'état

Pour les systèmes non linéaires décrits par leurs représentations d'état de la forme

$$\dot{x}(t) = A(x(t), t)x(t) \tag{59}$$

les fonctions candidates de Lyapunov les plus utilisées sont la forme quadratique, la norme du max, la norme duale du max, la distance euclidienne ou le critère de Borne et Gentina. Les meilleurs résultats obtenus, en utilisant une de ces fonctions, sont lorsque A(x(t),t) est à diagonale dominante. C'est pour cela, que dans ce cas, il est intéressant avant chaque étude de stabilité, de remplacer, quand ce n'est pas le cas, la matrice A(x(t),t) par un changement de base $Q^{-1}A(x(t),t)Q$ permettant d'avoir une matrice à diagonale dominante [23].

Il existe différentes méthodes de construction des fonctions de Lyapunov, nous citons par exemple l'équation matricielle de Lyapunov, définie par : $V(x) = x^t\ P\ x$, où P est une matrice symétrique définie positive. Cette méthode est aussi appliquée en choisissant la matrice P sous la forme de matrice d'Hermite. D'autres formes existent comme par exemple dans le cas où A est une matrice de Schwarz [68].

Une autre méthode de construction de fonction de Lyapunov est la méthode du gradient, sur laquelle plusieurs travaux ont été fait ; tels que la méthode du gradient proposée par Schultz et Gibson [76], la méthode proposée par Ingwerson [53], la méthode de Zubov [68], ainsi que la méthode de Brokett utilisant l'intégration par partie.
Le principe de Shultz et Gibson [68 et 76] est de considérer la dérivée de la fonction de Lyapunov, et par la suite utiliser le système d'équations différentielles pour calculer la fonction elle-même. Cette méthode est appliquée dans le cas des systèmes autonomes.
La méthode de Zubov est spécialement intéressante lorsque les équations du système comprennent un terme de forme quadratique, cubique, …etc. c'est-à-dire, la partie droite de l'équation différentielle se met sous une forme algébrique [68].
La méthode de Brokett utilisant l'intégration par partie est basée sur un théorème par Brokett [68].

Le calcul de commande par backstepping [22], permet aussi la stabilisabilité avec fonction de Lyapunov assignable. En effet, pour un processus décrit, dans l'espace d'état, par son équation (61)

$$(S)\begin{cases}\dot{x}(t)=f(x,t)+G(x,t)u(t)\\ y(t)=h(x,t)\end{cases} \qquad \text{avec } f(0)=0 \qquad (61)$$

Pour $V(x)$ une fonction candidate à Lyapunov et $\alpha(x)$ une fonction de commande stabilisante, il vient

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\partial V}{\partial x}(f(x,t)+G(x,t)\alpha(x)) \qquad (62)$$

Il faut que

$$\frac{dV}{dt}\le -\Psi(x)<0,\ \ \forall\ x\neq 0 \qquad (61)$$

Si $\frac{\partial V}{\partial x}G(x,t)\neq 0$ il vient $u=\dfrac{-\frac{\partial V}{\partial x}f(x,t)+\Psi(x)}{\frac{\partial V}{\partial x}G(x,t)}$,

sinon la condition $\frac{dV}{dt}<0$ implique $\frac{\partial V}{\partial x}f(x,t)<0,\ \forall\ x\neq 0$.

Pour le principe du backstepping, nous considérons une fonction stabilisante $\alpha(x)$ associée à la fonction candidate de Lyapunov V(x), il vient :

$$\frac{\partial V}{\partial x}(f(x,t)+G(x,t)\alpha(x)) \le -\Psi(x) < 0, \quad \forall\ x \neq 0 \tag{63}$$

Pour le système

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(x,t) + G(x,t)\xi \\ \dot{\xi} = u \end{cases} \tag{64}$$

avec ξ considéré comme commande virtuelle et soit $\alpha(x)$ commande stabilisante, notons $z = \xi - \alpha(x)$, il vient

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=f(x,t) + G(x,t)(\alpha(x)+z) \\ \dot{z} = u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f(x,t) + G(x,t))(\alpha(x)+z) \end{cases} \tag{65}$$

notons $v_a(x,z) = V(x) + \frac{1}{2}z^2$, nous obtenons par dérivation :

$$\dot{v}_a = \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\alpha + Gz) + z(u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + G(\alpha + z))) \tag{66}$$

$$\dot{v}_a = \frac{\partial V}{\partial x}(f + G\alpha) + z(u - \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + G(\alpha + z)) + \frac{\partial V}{\partial x}G) \tag{67}$$

Le choix de :

$$u = \frac{\partial \alpha}{\partial x}(f + G(\alpha + z)) - \frac{\partial V}{\partial x}G - Cz,\ C > 0 \tag{68}$$

implique en posant

$$\psi(x) = -\frac{\partial V}{\partial x}(f + G\alpha) \tag{69}$$

$$\dot{v}_a = -\psi(x) - Cz^2 = -\psi_a < 0,\ \forall\ x, z \neq 0 \tag{70}$$

I.2.2 Calcul de la loi de commande permettant le suivi de trajectoire

L'évolution des processus est caractérisée par

$$(S) : \begin{cases} \dot{x}(t)=f(x,t) + G(x,t)u(t) \\ y(t)=h(x,t) \end{cases} \tag{54}$$

Dans notre travail, nous avons choisit d'utiliser la fonction candidate de Lyapunov [22, 43 et 71] définie par

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(y_c(t) - y(t))^t (y_c(t) - y(t)) \tag{71}$$

La dérivée par rapport au temps de v(x,t), est exprimée en (72)

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = (\dot{y}_c(t) - H_x \dot{x}(t))^t (y_c(t) - y(t)) \tag{72}$$

D'après la seconde méthode de Lyapunov, le système (S) est stable sur la trajectoire y_c si

$$\frac{dv(x,t)}{dt} \le -\Psi(\|y_c(t) - y(t)\|) \tag{73}$$

où $\Psi(\|y_c(t) - y(t)\|)$ est une fonction définie positive de $\|y_c(t) - y(t)\|$.

Sous la condition $H_x G(x,t)$ inversible, cette propriété peut être obtenue en choisissant la loi de commande (74)

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1} \left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) + q(x,t)\right] \tag{74}$$

ce qui implique

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = q^t(x,t)(y_c(t) - y(t)) \tag{75}$$

L'intêret de cette approche est de choisir

$$q(x,t) = -\alpha(y_c(t) - y(t)) \tag{76}$$

Ce qui implique pour $\alpha > 0$ que

Pour $\Psi(\|y_c(t) - y(t)\|) = \alpha \|y_c(t) - y(t)\|^2$, où $\alpha > 0$, on a (77)

$$\frac{dv(x,t)}{dt} = -\alpha \|(y_c(t) - y(t))\|^2 < 0 \qquad \forall\ y(t) \neq y_c(t) \tag{78}$$

Ce qui donne

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1} \left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha(y_c(t) - y(t))\right] \tag{79}$$

Ceci permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème Chamekh Y.1:

Pour un système non linéaire multivariable perturbé d'ordre n quelconque, décrit par sa représentation d'état, la commande u(t) ayant la forme

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha(y_c(t) - y(t))\right] \tag{79}$$

garantit la stabilité de mouvement pour la trajectoire y_c à la condition ($H_x G$) soit inversible.

Afin de pouvoir implémenter cette commande sur un système représenté par son équation d'état, nous avons établi le schéma bloc suivant

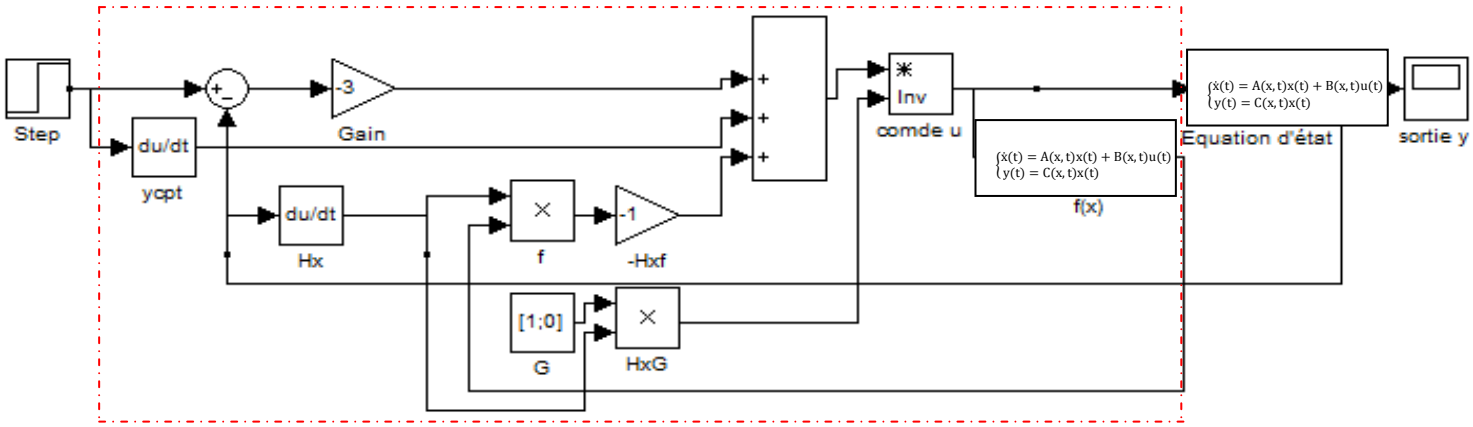


Figure 6: Diagramme du calcul de la commande

II Mise en œuvre de l'approche

II.1 Dans le cas d'un système monovariable

Pour l'implémentation de l'approche décrite précédemment pour les systèmes non linéaires, nous considérons le système monovariable (SISO) du second ordre (S) décrit par son équation d'état (80):

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -x_2 + x_1 x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = x_1 + x_1 x_2 + x_2 \end{cases} \tag{80}$$

Considérons aussi la trajectoire à suivre définie par

$$y_c(t) = \sin(at)\sin(bt) \tag{81}$$

où: $a = 0.1,\ b = 0.2$ et $\alpha = 1$. Ceci donne

$$H_x = [1 + x_2, 1 + x_1] \tag{82}$$

$$H_x G(x,t) = 2x_1 + (x_1^2 + 1)(x_2 + 1) + 2 \tag{83}$$

$$H_x f(x,t) = x_1(2x_1 + x_2(x_2 + 1) + 2) - x_2(3x_1 + x_2 + 4) \tag{84}$$

$$u(t) = \frac{\dot{y}_c - \alpha[x_2 - y_c + x_1(x_2 + 1)] + x_2(3x_1 + x_2 + 4) - x_1(2x_1 + x_2(x_2 + 1) + 2)}{2x_1 + (x_1^2 + 1)(x_2 + 1) + 2} \tag{85}$$

L'application de la loi de commande définie en (5) mène au résultat représenté par la figure (7)

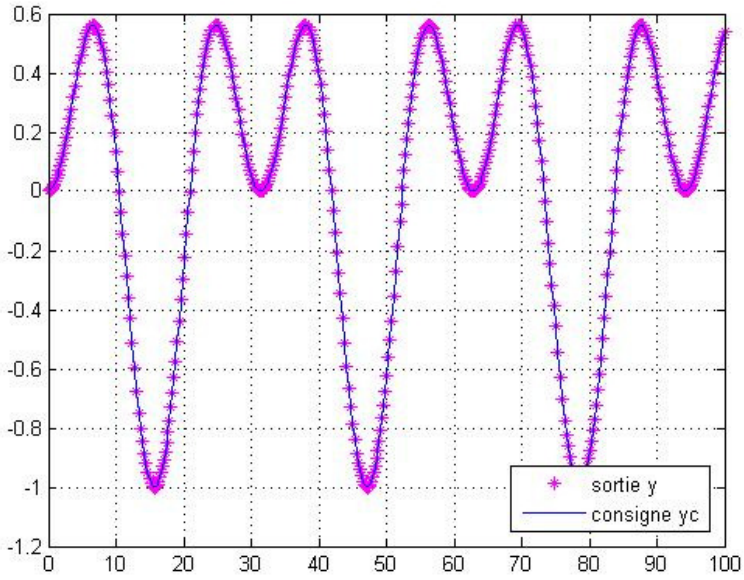


Figure 7: Evolution du système par le suivi de la trajectoire y_c.

Nous pouvons voir sur cette figure que le système suit quasi-parfaitement la trajectoire y_c. Mais ce type de consigne ne nous donne pas d'informations visibles sur le temps de réponse de la commande utilisée. Une représentation de la réponse indicielle est requise.

II.2 Mise en œuvre de l'approche sur un système multivariable

Pour l'implémentation de l'approche décrite précédemment pour les systèmes non linéaires, nous considérons le système multivariable du troisième ordre (S) décrit par son équation d'état (86)

$$(S):\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0.1x_1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ x_2 & 0 & 1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}1 & \exp(-x_1^2)\\ 2+\cos(x_1) & -1\\ 0 & 0.5\,tg^{-1}(x_2)\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2+\cos(x_1) & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases} \tag{86}$$

Considérons aussi la trajectoire à suivre définie par

$$y_c(t)=\begin{bmatrix}y_{c1}(t)\\ y_{c2}(t)\end{bmatrix} \tag{87}$$

où : $y_{c1}(t)=\sin(at)\sin(bt)$ tel que : a = 1 et b = 3 ,

$y_{c2}(t)=\sin(ct)\sin(dt)$ tel que : c = 0.1 et d = 0.3

et $\alpha=1$.

Il vient

$$H_x=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -x_2\sin(x_1) & \cos(x_1)+2 & 0\end{bmatrix} \tag{88}$$

$$H_xG(x,t)=\begin{bmatrix}-2\cos(x_1)-3 & \exp(-x_1^2)+2\\ (\cos(x_1)+2)^2-x_2\sin(x_1) & -\cos(x_1)-x_2\sin(x_1)\exp(-x_1^2)-2\end{bmatrix} \tag{89}$$

$$H_xf(x,t)=\begin{bmatrix}0.1x_1^2-2x_2-2x_3\\ x_2(\cos(x_1)+2)+x_3(\cos(x_1)+2)-0.1(x_1^2x_2\sin(x_1))\end{bmatrix} \tag{90}$$

L'application de la loi de commande définie en (5) par

$$u(t)=(H_xG(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t)-H_xf(x,t)+q(x,t)\right] \tag{74}$$

où $q(x)=-\alpha(y_c(t)-y(t))$

mène au résultat représenté par la figure (1)

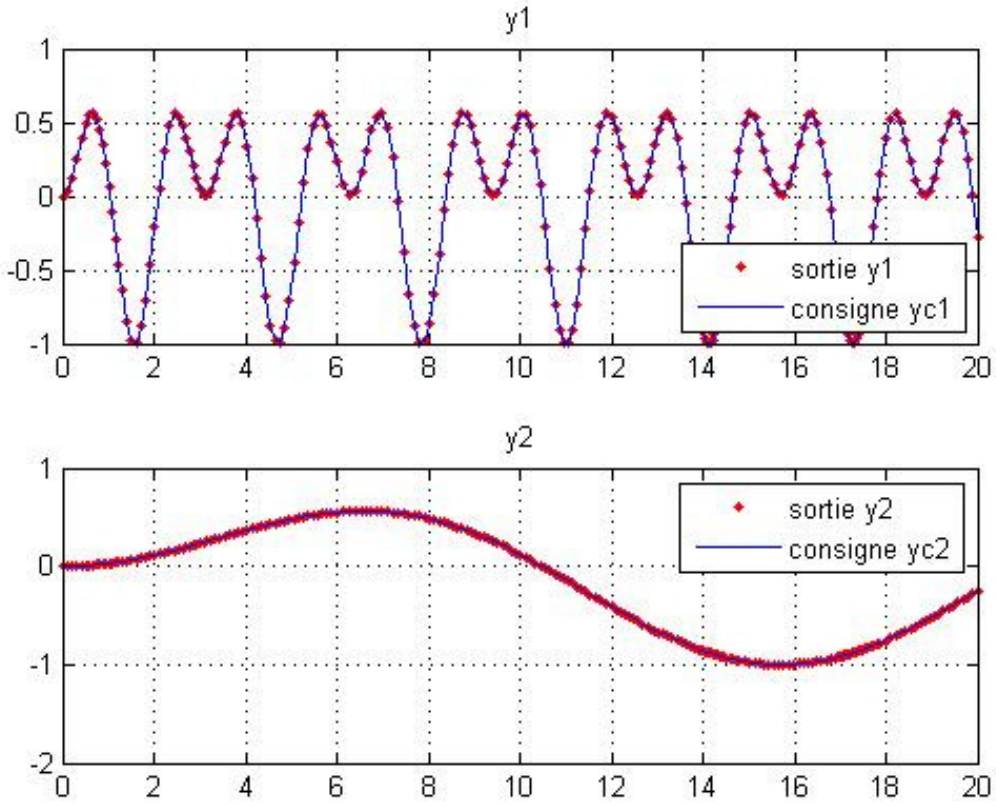


Figure 8: Evolution du système par le suivi de la trajectoire y_c.

Nous pouvons voir sur cette figure que le système multivariable suit parfaitement la trajectoire y_c.

III Commande de système calculée par un régulateur PI

Afin d'étudier la rapidité du temps de réponse d'un système à une commande donnée, une représentation indicielle de celui-ci est nécessaire. En effet, la réponse indicielle d'un système permet la caractérisation complète du régime tansitoire ainsi que celle du régime permanent, par l'étude de la stabilité, de la précision statique, de la rapidité et de la qualité du système.

Généralement, les processus présentent un certain temps de latence avant de pouvoir atteindre la consigne y_c imposée. Pour cela, il existe des correcteurs bien définis qui orientent la synthèse du régulateur. Le choix d'un tel ou tel correcteur dépend de ses caractéristiques et de ce qu'il est amené à faire, au cours du processus. Le schèma de la boucle fermée utilisant un régulateur est donné sur la figure (9) :

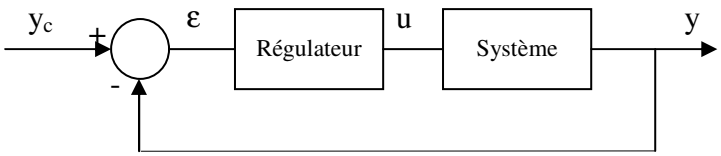


Figure 9: Schéma fonctionnel général d'une régulation d'un processus en boucle fermée

Nous pouvons bien constater de cette figure (6) que le régulateur joue le rôle d'un système tel que les consignes et les sorties du système à étudier forment les entrées du régulateur. Les sorties de celui ci, sont les commandes appropriées aux conditions finales souhaitées.

III.1 Régulateurs et régulation

III.1.1 Equipement de régulation

La régulation, en automatique, est définie comme étant une action sur le système à commander afin de le stabiliser. Elle est considérée comme une commande qui dépend de la mesure de la grandeur commandée. Quand la régulation est réalisée sans l'intervention de l'Homme, elle est dite régulation automatique. Un équipement de régulation, comprenant le régulateur et le transducteur de mesure est, alors, nécessaire [64].

Le régulateur assure plusieurs fonctions à la fois, à savoir [64]:

- La comparaison : entre la sortie du système et la consigne souhaitée. Cette fonction est assurée par un comparateur dont la sortie est la différence entre ces deux grandeurs, appelée communément erreur du système. Cette erreur est causée, généralement, par des perturbations indésirables et/ou imprévisibles sur le système.
- La correction : cette fonction est assurée par un correcteur permettant au comportement du système de régulation de s'améliorer.
- L'amplification : dans certains cas de système, nous avons recours à un amplificateur de signal par un emprunt d'énergie d'une source auxiliaire.

Quant au transducteur de mesure [64], il joue le rôle d'un transformateur d'une grandeur physique reçue, en une information fournie sous la forme d'une grandeur physique de même nature ou de nature différente, et cela selon une loi bien déterminée. Il comporte un capteur, dont le rôle est la conversion du signal d'entrée en un signal mesurable, et un convertisseur de signal permettant la transformation en un signal normalisé. La grandeur de sortie étant de même nature que la grandeur d'entrée.

III.1.2 Modes de régulation

La régulation automatique comprend deux modes à savoir ; la régulation de maintien et la régulation de correspondance. La régulation de maintien se dit dans le cas où le but est de maintenir constante la grandeur réglée. La régulation de correspondance étant celle dont le but est de faire évoluer la grandeur réglée suivant une trajectoire de référence. Dans les deux cas le but primordial est de satisfaire les performances, spécifiées dans le cahier de charges, telles que, la stabilité, la précision statique et/ou dynamique, la rapidité et/ou la qualité du système étudié. Ainsi, la nature de la correction souhaitée, définit le type de régulateur tel que les régulateurs classiques à action proportionnelle, à action intégrale et/ou à action dérivée [64].
Dans ces correcteurs classiques, à usage très général, les actions intégrale, proportionnelle et/ou dérivée peuvent coexister.
D'autres correcteurs, dont le rôle est plus spécifique, sont aussi réalisables, Nous citons par exemple, les correcteurs à Avance de phase ou les correcteurs à Retard de phase.

III.1.2.1 Régulateur à action proportionnelle

Un régulateur à action proportionnelle R_p, fournit un signal de la forme :

$$R_P = \alpha(y_c - y) \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ est appelé gain du régulateur,}$$

Le mode d'action de ce régulateur, est simple. Il convient, en général, aux installations de grandes dimensions. Son action est proportionnelle à l'écart entre la valeur de la sortie et la consigne . La qualité de la régulation est excellente, cependant, même avec un régulateur idéal, la valeur de la consigne peut n'être jamais atteinte. Cet écart peut s'atténuer en augmentant α mais, physiquement ceci est irréalisable puisque les systèmes réels sont instables quand α est trop grand. En effet, un régulateur proportionnel fournit une valeur de la commande différente de zéro si et seulement si l'écart entre la consigne et la sortie est différent de zéro. Certains systèmes requièrent, en régime

permanent, une valeur non nulle de la commande, aussi bien en asservissement qu'en régulation. Des écarts permanents sont alors inévitables [62].
Le correcteur à action intégrale ne peut être utilisé seul que dans le seul cas ou le seul objectif est la stabilité du système [64]. C'est, en effet, pour cela que la commande énnoncée au théorème Chamekh Y1, est calculée en utilisant un régulateur de ce type.

III.1.2.2 Régulateur à action non linéaire proportionnelle-intégrale

Quant au régulateur proportionnel-intégral R_{PI}, ayant la forme

$$R_{PI} = \alpha(y_c(t) - y(t)) + \beta\int(y_c(t) - y(t))dt \quad \text{où } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \tag{91}$$

et α est appelé gain de l'action proportionnelle R_P et β^{-1} est la constante de temps de l'action intégrale,
il permet, en plus de la régulation proportionnelle, l'intégration, en fonction du temps, de l'écart entre la consigne et la sortie. En effet, il permet grâce à l'intégration que l'écart devienne quasiment nul et la précision devient meilleure. Néanmoins, ce régulateur obéit au dilemme stabilité-précision ; en effet l'amélioration d'une performance se fait au détriment de l'autre, par exemple, la stabilité du système diminue lorsque sa précision augmente.

Le correcteur à action purement intégrale n'est, généralement, pas utilisé seul, à cause de sa lenteur au démarrage et des oscillations qu'il génère.

III.2 Mise en œuvre d'une régulation à action proportionnelle-intégrale

Dans ce contexte, une étude du temps de réponse de la commande énoncée au théorème Chamekh Y1 est requise, afin d'étudier le temps de réponse du système à la commande.

En effet, l'objectif principal d'un système de régulation est la réduction des effets de perturbations et/ou incertitudes sur les grandeurs à régler. Dans l'approche linéaire, ces perturbations et/ou incertitudes sont représentés par des valeurs additives sur l'entrée, l'état et/ou la sortie.

Souvent, les processus présentent un certain temps de latence avant de pouvoir atteindre la consigne y_c imposée. Pour cela, il existe des correcteurs bien définis qui orientent la synthèse du régulateur. Le choix d'un tel ou tel correcteur dépend de ses caractéristiques et de ce qu'il est amené à faire, aucours du processus.

Dans le cas de processus à évolution non linéaire, dont la consigne est à dynamique constante ou lentement variable, il est intéressant de ramener l'étude à un système linéaire défini avec une tolérance pour les petites variations autour de la consigne, définie par une trajectoire nominale, du système initial. Dans ce travail, nous considérerons des systèmes non linéaires, afin d'étudier la rapidité de leurs temps de réponse, à une commande donnée. Une représentation indicielle de celui-ci est nécessaire. En effet, la réponse indicielle d'un système permet la caractérisation complète du régime tansitoire ainsi que celle du régime permanent, par l'étude de la stabilité, de la précision statique, de la rapidité et de la qualité du système.

Soit le système continu, non linéaire d'ordre deux représenté par son équation dans l'espace d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 + 0.1\sin(x_2(t)) \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = (1 \quad 0)\, x(t) \end{cases} \tag{97}$$

avec

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha(y_c(t) - y(t))\right] \tag{79}$$

Pour une consigne indicielle, la réponse du système conduit au résultat décrit sur la figure (10) suivante, pour $\alpha = 1$:

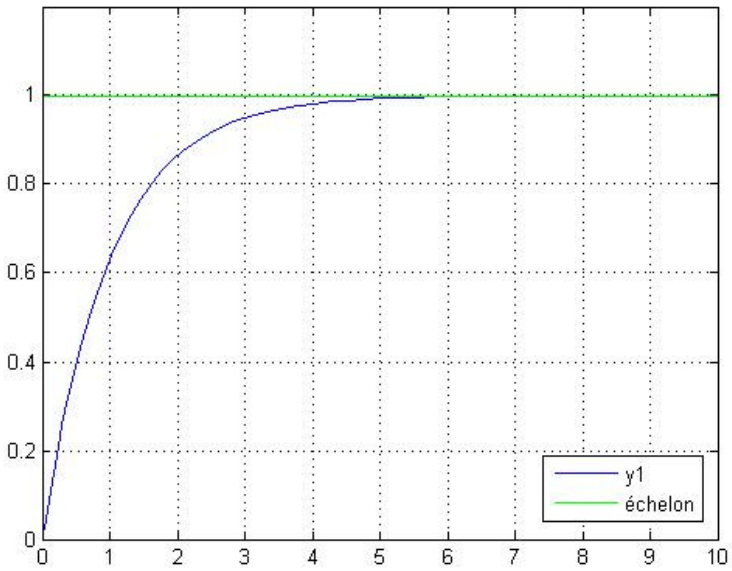


Figure 10 : Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 avec régulation proportionnelle représentée par la courbe y_1

L'une des contraintes les plus importantes lors de la réalisation d'une commande est la valeur du temps de réponse imposé, généralement, par le cahier de charge, et qui ne peut être satisfait que si l'énergie nécessaire est disponible dans le système.

Sur cette figure, nous notons bien que le système répond assez lentement à la consigne y_c. Une régulation permettant d'assurer la précision est alors la bienvenue. Un régulateur PI est suggéré à ce niveau et l'expression de la commande utilisée devient

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha(y_c(t) - y(t)) - \beta\int(y_c(t) - y(t))dt\right] \qquad (98)$$

Pour le même exemple, traité dans ce paragraphe, nous appliquons la nouvelle de commande pour $\alpha = 1$et $\beta = 5$.

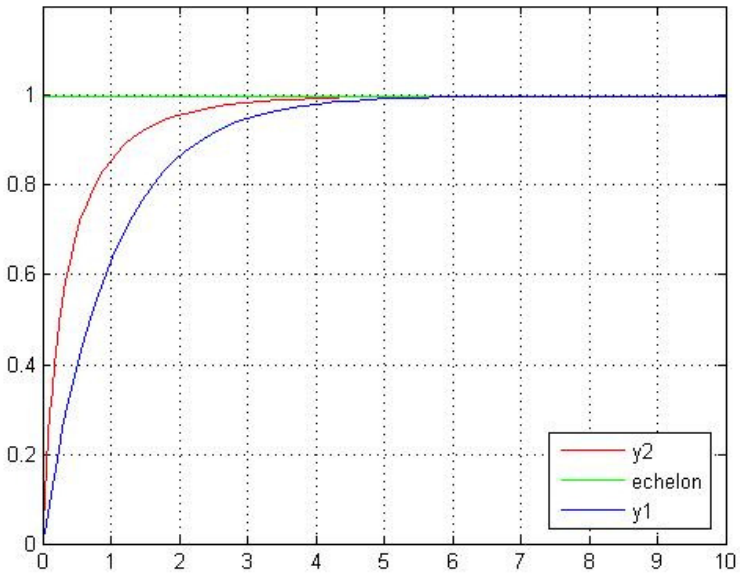


Figure 11 : Réponse indicielle d'un système d'ordre 2 avec régulation proportionnelle représentée par la courbe y_1, et proportionnelle intégrale représentée par la courbe y_2

Le temps de montée, aussi bien que le temps de réponse, de la courbe y_2 sont plus courts que ceux de y_1. Habituellement, un correcteur du type R_{PI} a pour fonction d'améliorer la précision au détriment de la stabilité et de la vitesse de réponse des systèmes linéaires en boucle ouverte. Mais, cette figure, représentant l'évolution de la sortie d'un système non linéaire avec régulation proportionnelle-intégrale, montre l'efficacité de l'intégrateur par rapport au temps de réponse du système à la commande.

IV Etude du cas où ($H_x(x,t)G(x,t)$) est non inversible

IV.1 Approche proposée pour la résolution du problème

L'application de la commande définie en (79), s'avère être restreinte à des systèmes qui vérifient que ($H_x(x,t)G(x,t)$) soit inversible. En voulant l'appliquer à un système dont l'évolution décrite par son équation d'état, sous sa forme canonique commandable suivante

$$(S)\quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0 & \cdots & b_{n-2} & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \tag{99}$$

un problème se pose, ($H_x(x,t)G(x,t)$) est égal à zéro. Dans le cas où $h(x) = (b_0\ b_1\ \cdots\ b_{n-1})$ et tel que $b_{n-1} = 0$, le terme $H_x(x,t)G(x,t)$ n'est pas inversible et il est nécessaire de modifier la loi de commande [25].

Dans le cas d'un système linéaire d'ordre n pour lequel le degré du numérateur est inférieur à $(n-1)$, il est nécessaire d'introduire des intégrations qui modifient la commande d'origine [4 et 25]. En effet, si l'évolution de notre système est définie par la relation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t), \quad \text{tel que} \quad m < n\text{-}1 \tag{100}$$

nous remplaçons u(t) par

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-m-1} \beta_i v^{(i)}(t) \tag{101}$$

telle que $\beta_{n-m-1} \neq 0$ ce qui mène à l'équation

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i' v^{(i)}(t) \tag{102}$$

d'où la forme canonique commandable du système équivalent

$$(S')\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_0 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}v(t)\\ \\ y(t)=\begin{bmatrix}b'_0 & \cdots & b'_{n-2} & b'_{n-1}\end{bmatrix}x(t)\end{cases} \quad (103)$$

avec $b'_{n-1}\neq 0$.

A partir de ce système, nous calculons la commande v(t) par la méthode présentée précédemment, ensuite nous en déduisons la commande initiale u(t) et nous remplaçons dans (S). D'où, l'énoncé du théorème suivant :

Théorème Chamekh Y.2:

Lorsque (H_xG) n'est pas inversible, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que le changement de commande défini par la relation

$$u(t)=\sum_{i=0}^{n-m-1}\beta_i v^{(i)}(t) \quad (101)$$

dans laquelle v(t) représente la nouvelle commande satisfaisant les conditions du théorème Chamekh Y.1

Pour illustrer cette approche, nous avons choisi pour exemple le cas d'un système non linéaire.

IV.2 Mise en œuvre de l'approche modifiée

IV.2.1 Exemple 1 : Suivi de trajectoire d'un système stable

Considérons le système (S) [25] de second ordre défini par

$$(S):\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}x(t)\end{cases} \quad (104)$$

Posons $u(t)=\beta_0 v(t)+\beta_1 v'(t)$ telle que v vérifie

$$(S):\begin{cases}\dot{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_0 & -a_1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}b_0' & b_1'\end{bmatrix}x(t)\end{cases} \tag{105}$$

Considérons l'évolution désirée du système décrite par: $y_c(t)=\sin(r_1t)\sin(r_2t)$

D'après la relation (5) de la commande proposée précédemment en (3.1) nous écrivons

$$v(t)=(H_x(x,t)G(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t)-H_x(x,t)f(x,t)+q(x,t)\right] \tag{106}$$

comme

$$q(x,t)=-\alpha(t)(y_c(t)-y(t)) \tag{76}$$

alors

$$v=\frac{y_c-b_0'x_2+\alpha(y_c-b_0'x_1)}{b_1'}+a_0x_1+a_1x_2-\alpha x_2 \tag{107}$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{v}=&x_2(a_0-\alpha\frac{b_0'}{b_1'})+\frac{1}{b_1'}\ddot{y}_c+\frac{\alpha}{b_1'}\dot{y}_c+\\ &(\alpha-a_1+\frac{b_0'}{b_1'})(a_1x_2-\frac{1}{b_1'}(y_c-\alpha(b_0'x_1-y_c+b_1'x_2)-x_2(b_0'-a_1b_1')))\end{aligned} \tag{108}$$

$$u=\beta_0v+\beta_1\dot{v} \tag{109}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}u=&\beta_1(x_2(a_0-\alpha\frac{b_0'}{b_1'})+\frac{1}{b_1'}\ddot{y}_c+(\alpha-a_1+\frac{b_0'}{b_1'})(a_1x_2-\frac{1}{b_1'}(\dot{y}_c-\alpha(b_0'x_1-y_c+b_1'x_2)+\\ &-x_2(b_0'-a_1b_1')))+\frac{\alpha}{b_1'}\dot{y}_c)+\frac{\beta_0}{b_1'}(\dot{y}_c-\alpha(b_1'x_1-y_c+b_2x_2)-x_2(b_0'-a_1b_1')+a_0b_1'x_1)\end{aligned} \tag{110}$$

En choisissant les paramètres de calcul tels que:

$\alpha = 0.2$

$a_0 = 0.1$ et $a_1 = 0.66$

$\beta_0 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.5$

$r_1 = 0.1$ et $r_2 = 0.3$

Ce qui donne $b_0^{'} = 2$ et $b_1^{'} = 0.1$

Le résultat de la simulation est décrit sur la figure (12) :

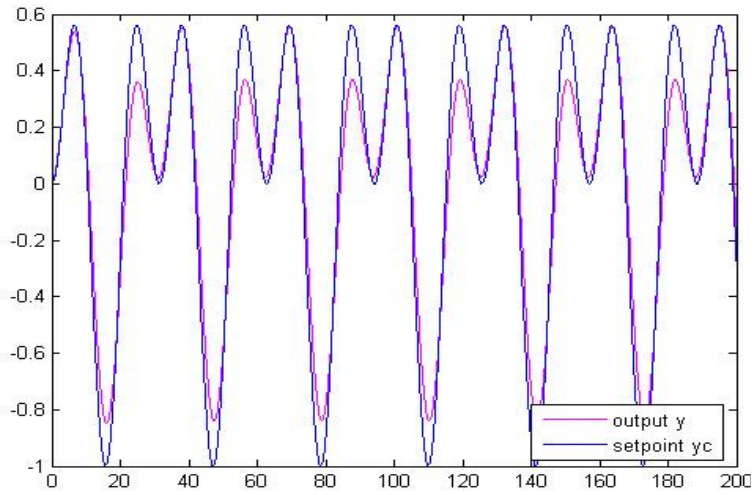


Figure 12 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c utilisant des intégrations de la commande d'origine

Cette figure montre que le système peut suivre la trajectoire désirée.

IV.2.2 Exemple 2: Cas d'un système très oscillant avec zéro instable

Considérons le même système (S) [25], avec :

$\alpha = 0.1$

$a_0 = 0.1$ et $a_1 = 0.2$

$\beta_0 = 1$ et $\beta_1 = -1$

$r_1 = 0.1$ et $r_2 = 0.3$

Ce qui implique que $b_0^{'} = 2$ et $b_1^{'} = 1$

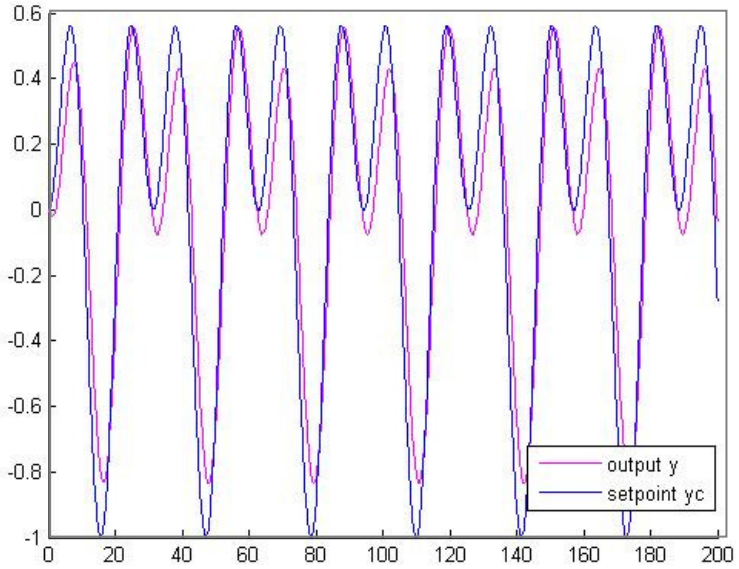


Figure 13 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c
utilisant des intégrations de la commande d'origine, du système avec zéro instable

IV.2.3 Exemple 3: Cas d'un système instable très oscillant

Soit le système du second ordre (S) [25] défini par

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \tag{104}$$

où $a_0 = 0.1$ et $a_1 = -0.3$

Il est clair que le système est instable. Le choix de la commande $u = \beta_0 v + \beta_1 v'$ mène à

$$(S) \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} b_0'(t) & b_1'(t) \end{bmatrix} x(t) \end{cases} \tag{105}$$

Considérons la trajectoire désirée décrite par:

$$y_c(t) = \sin(r_1 t)\sin(r_2 t) \tag{81}$$

où

$\alpha = 10$

$\beta_0 = 0.5$ et $\beta_1 = 0.5$

$r_1 = 0.01$ et $r_2 = 0.03$

ce qui donne $b_0^{'} = 1$ et $b_1^{'} = 5$

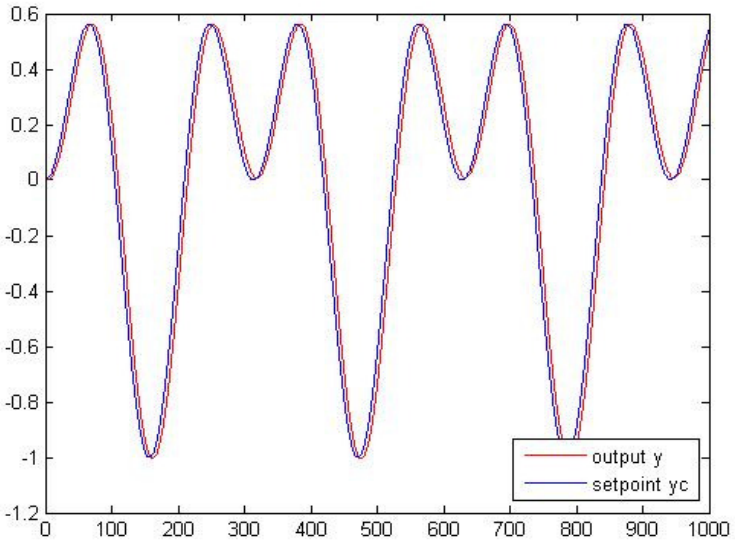


Figure 14 : Evolution de la sortie par le suivi de la trajectoire désirée y_c utilisant des intégrations de la commande d'origine

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une nouvelle approche qui permet le calcul d'une commande de suivi de trajectoire d'un système continu non linéaire. Cette approche est basée sur l'utilisation d'une fonction candidate de Lyapunov qui permet le calcul de la commande stabilisante. Un exemple montrant l'efficacité de l'approche est proposé.

Afin d'étudier le temps de réponse de cette commande, deux représentations indicielles d'un système d'ordre deux, sont illustrées. La première utilisant le régulateur à action proportionnelle énoncé au paragraphe I du même chapitre. Et la deuxième étant calculée par un régulateur proportionnel intégral.

Pour prouver l'efficacité de la méthode sur des systèmes du type multivariable, un exemple a été réalisé.

Dans le cas ou l'application directe de la méthode n'est pas possible, nous avons proposée une approche modifiée pour résoudre le problème. Différents exemples sont présentés pour montrer l'efficacité de l'approche. Le premier, étudie le cas d'un système stable qui suit une trajectoire désirée. Le second, étant le cas d'un système très oscillant avec zéro instable, et est stabilisable sur la trajectoire. Et finalement, le troisième exemple présente le cas d'un système instable très oscillant qui suit parfaitement la trajectoire désirée.

Troisième Chapitre

Etude de la robustesse de la commande dans le cas de processus incertains et/ou mal définis

Introduction **74**

I Etude de stabilité des systèmes non linéaires au voisinage d'un point de fonctionnement **74**

I.1 Diagonalisation locale 76

I.2 Etude de stabilité 78

II Mise en œuvre de l'approche proposée **79**

II.1 Cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbation 79

II.2 Cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre 82

III Système majorant de l'erreur d'un processus non linéaire obéissant à une loi de commande pour le suivi de trajectoire **84**

III.1 Origine des erreurs sur un modèle 85

III.2 Calcul d'un système majorant l'erreur 85

III.3 Mise en œuvre de l'approche 88

III.4 Mise en œuvre de la régulation à action non linéaire proportionnelle-intégrale sur un système perturbé et/ ou mal défini 97

Conclusion **98**

Introduction

En automatique, chaque système étudié doit réaliser certaines tâches. Tout en assurant la stabilité, pendant sa mise en marche, le système doit résister aux différentes perturbations possibles, externes ou internes, qu'il peut subir. Il doit remplir sa tâche avec une certaine tolérance à ces défauts. Ces perturbations, peuvent être sur la matrice d'état, sur la loi de commande et/ou externes au système.

Une commande permettant d'assurer la réalisation d'un certain niveau de performances malgré la présence d'erreurs et/ou d'incertitudes sur le modèle, est dite robuste.

L'étude de la robustesse de la commande exige, principalement, la robustesse de la stabilité du système, en tolérant certaines marges d'erreur. Ces marges sont spécifiées selon la classification des incertitudes. D'après Nyquist un système linéaire incertain, en boucle fermée, représenté dans le domaine fréquentiel, est robustement stable s'il vérifie [8] :

1. le système incertain et son modèle nominal ont le même nombre de pôles à partie réelle positive,
2. le lieu de Nyquist de la boucle ouverte nominale (régulateur + modèle nominal) vérifie le critère de Nyquist (nombre de tours encerclant le point (-1, 0) égal au nombre de pôles à parties réelles positives), c'est-à-dire que la boucle fermée nominale est stable,
3. le point critique (-1, 0) est à l'extérieur de tous les disques d'incertitudes (contenant de façon certaine le système incertain) centrés sur le lieu de Nyquist nominal.

Afin de pouvoir corriger ces erreurs, améliorer les propriétés de stabilité et/ou commander le système pour réaliser une certaine tâche, un bouclage de sortie vers les entrées de la commande est requis. Ce bouclage a pour effet de rendre les sorties du système, entrées pour le système de correction [69]. Dans notre travail, comme il a été présenté au chapitre II, l'approche utilisée est basée sur la deuxième méthode de Lyapunov.

Habituellement, l'étude de la robustesse d'une nouvelle approche se fait par la réalisation d'un régulateur permettant la correction de l'évolution du système, dans les cas d'apparition de perturbations quelconques. Dans notre travail, l'étude de la robustesse de l'approche proposée au chapitre précédent, est basée

sur l'étude de stabilité des systèmes non linéaires par le calcul des systèmes majorants [8].

Au premier paragraphe de ce chapitre, nous présentons une approche permettant l'étude de stabilité des systèmes non linéaires dans le voisinage d'un point de fonctionnement donné, par le calcul des attracteurs et de la zone d'attraction du système, et en utilisant les normes vectorielles [11 et20]. Parmi les avantages de cette méthode, nous citons la réduction de l'ordre des systèmes étudiés, d'où la réduction de la complexité, ainsi que la détermination des conditions d'exponentialité de la stabilité du système. Les normes vectorielles sont appliquées sur le système original, afin de créer un système de comparaison. La stabilité de ce dernier entraine celle du système d'origine.

Au deuxième paragraphe, nous présentons une mise en œuvre de cette approche, dans le cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbation et dans le cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre

Dans le troisième paragraphe, nous étudions la robustesse de l'approche proposée au chapitre II, en utilisant les techniques de majoration, proposées au paragraphe I de ce chapitre. Ces techniques sont appliquées sur le système décrivant l'évolution de l'erreur entre le système perturbé et le système non perturbé.

I Etude de stabilité des systèmes non linéaires au voisinage d'un point de fonctionnement

Les incertitudes affectant les systèmes automatiques sont nombreuses. Elles peuvent être dues à la connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres du système, aux approximations faites dans la modélisation ou à la présence de certains phénomènes ignorés lors de la modélisation dynamique. Nous distinguons, en général, deux sortes d'incertitudes ; les incertitudes structurées, qui sont clairement définies et affectant les composantes du système, et les incertitudes non structurées, où seule une majoration du système est possible pour les corriger.
Plusieurs critères de stabilité, sont alors proposés et utilisés dans la recherche. Dans [23], par exemple, les auteurs proposent une formulation LMI (Linear Matrix Inequality) pour la conception de commande robuste et statique de sortie, des modèles flous incertains.

Dans d'autres travaux [15 et 16], la stabilité est étudiée en utilisant la théorie de la logique floue. Une autre idée est proposée, dans [27 et 29], est celle d'utiliser les systèmes multimodèles pour l'étude et la résolution des problèmes de stabilité.
Dans [24, 78, 79 et 80] les auteurs étudient la stabilité en utilisant les fonctions de Lyapunov quadratiques. Les fonctions de Lyapunov, non quadratiques, sont, aussi, utilisées dans [24, 48, 54 et 79].
Selon [49], le problème de stabilité peut être transformé en un problème du type Lur'e.
Quant à [12, 13 et 26], les auteurs utilisent les M-matrices pour la résolution des mêmes types de problèmes.

Dans ce paragraphe, nous proposons une approche basée sur la détermination de l'attracteur et de la zone d'attraction, calculés en utilisant la technique des normes vectorielles [24 et 47]. Cependant, si la norme est d'ordre un, nous utilisons la seconde méthode de Lyapunov. Néanmoins, dans le cas où la dimension de la norme est supérieure à un, nous utilisons la fonction vectorielle de Lyapunov [39 et 44]. Cette méthode présente plusieurs avantages, à savoir; la réduction de l'ordre du système étudié, la simplification de la complexité et de l'exponentialité pour la détermination des conditions de stabilité [43].
Les normes vectorielles permettent le calcul d'un système majorant le système d'origine, en induisant un système de comparaison. Ainsi, après avoir défini un système de comparaison, l'étude de stabilité peut être effectuée directement sur ce dernier. Dans la suite, cette idée est développée.

I.1 Diagonalisation locale

Pour modéliser des systèmes dynamiques en utilisant la forme matricielle, les processus sont représentés dans l'espace d'état par leurs variables d'état.

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), u(t), t) \\ y = h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1)$$

telles que x(t) représente l'évolution du système au cours du temps t. u(t) est la commande appliquée au système à l'instant t. Les fonctions f et h peuvent changer, suivant la représentation du système.
Ainsi, la représentation d'état n'est pas unique et peut, en effet, être écrite sous plusieurs formes, selon les variables d'états, décrivant le système.

Dans ce paragraphe, nous considérons des systèmes non linéaires autonomes, avec ou sans perturbations et/ou incertitudes, décrits par une des équations d'état suivantes

$$(S): \dot{x}(t) = f(x(t)) = A(x(t))x(t) \tag{59}$$

ou bien par

$$(S') : \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t)) \tag{106}$$

dans le cas où l'origine n'est pas un point d'équilibre. Le système étant d'ordre n. la matrice d'état A(x(t)), non linéaire, est d'ordre n, aussi. Les vecteurs x(t) et B(x(t)) sont d'ordres n. Dans la suite chacun des cas est considéré séparément.
Un changement de base autour d'un point de fonctionnement x_0, par une matrice de passage régulière P, pour le système (S) tel que défini en (2) est décrit par l'équation (4)

$$(S_1) : \dot{z}(t) = D\, z(t) \tag{107}$$

Tel que $$D = D(x(t)) = P^{-1}\, A(x(t))\, P \tag{108}$$

et $$z(t) = P^{-1}x(t) \tag{109}$$

(S_1) définit un modèle d'état équivalent au système (S) de sorte que les comportements entrées-sorties du système soient les mêmes.

La matrice de passage P est calculée autour d'un point de fonctionnement x_0 et est définie par (7)

$$D(x_0) = P^{-1}A(x_0)P \tag{110}$$

Telle que $D(x_0)$ est diagonale. Dans ce qui suit nous considérons $x_0 = 0$.

De même, dans le cas d'un système défini par (S'), le changement de base autour d'un point de fonctionnement x_0 conduit à un système similaire (S_1') défini par :

$$(S_1'): \quad \dot{z}(t) = D(z(t))z(t) + \delta(z(t)) \tag{111}$$

où

$$\begin{cases} z = P^{-1}x \\ \delta(x) = P^{-1}B = [\delta_1(x), \delta_2(x), \ldots]^T \\ \left\|\delta_i(x)\right\| < \delta_{i\max} \end{cases} \quad (112)$$

Une fois les changements de base faits, l'étude de stabilité des systèmes (S_1) et (S_1') permet de conclure sur (S) et (S').

I.2 Etude de stabilité

D'après Lyapunov, si l'état initial est un voisinage de l'origine, le système converge vers l'origine [37].

Deux cas sont possibles :

- l'origine est localement stable
- le processus admet un attracteur valable pour tout un domaine de conditions initiales.

Dans le premier cas, un système majorant homogène peut être défini.
Cependant, dans le cas d'un attracteur, un système majorant non homogène est défini.

Pour l'étude de stabilité, d'un système donné, plusieurs critères sont développés et démontrés, basés sur les différents théorèmes de Lyapunov. L'application de ces critères, sur des systèmes de comparaison, permet de déterminer l'attracteur ou le domaine d'attraction du système d'origine [81].

I.2.1 Systèmes majorants ou Systèmes de comparaison

Il a été démontré dans [18] que la stabilité du système majorant d'un processus, que se soit dans le cas discret ou dans le cas continu, implique les mêmes propriétés pour le processus initial.

Le principe est alors de créer un système de comparaison à partir d'une matrice majorant la matrice d'état du système initial, et telle que la matrice majorante, soit l'opposée d'une M-matrice. En effet, le calcul du système majorant diffère, selon que l'origine soit un point d'équilibre stable ou pas [18].

I.2.2 Attracteurs et zone d'attraction

L'attracteur $\mathcal{L}_0$ est défini par [14] :

$$x(t, x_0) \rightarrow \mathcal{L}_0 \text{ quand } t \rightarrow +\infty \tag{113}$$

Un domaine d'attraction $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ est défini par :

$$\forall\, x_0 \in \mathcal{D}_0 \;, \quad \lim_{t\to\infty} x(t, x_0) \rightarrow \mathcal{L}_0 \tag{114}$$

i.e. $\mathcal{D}_0$ est l'ensemble des conditions initiales permettant à chacun de ces états initiaux de créer une trajectoire qui conduit le système vers l'attracteur $\mathcal{L}_0$.

Alors, le domaine d'attraction est défini tel que

$$\exists\, \mathcal{D}_0 \text{ contenant } \mathcal{L}_0, \text{ où } \quad \forall\, x_0 \in \mathcal{D}_0 \;\; \lim_{t\to\infty} (x(x_0, t_0, t)) \in \mathcal{L}_0 \tag{115}$$

Dans le cas où le système de comparaison est de la forme (13) :

$$\dot{X}(t) = M.X(t) + N \tag{116}$$

avec M et N matrices constantes, M étant l'opposée d'une M-matrice et N un vecteur positif. Il revient

$$\mathcal{L}_0 = \{x \,/\, p(x) \leq -M^{-1}N\} \tag{117}$$

Dans le cas où N = 0, l'attracteur est réduit à l'origine.

II Mise en œuvre de l'approche proposée

II.1 Cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbation

Considérons le système non linéaire (S) défini par [24]

$$(S): \dot{x}(t) = A\big(x(t)\big)x(t) \tag{59}$$

tels que

$$A\big(x(t)\big) = \begin{bmatrix} -2.6 + e^{x_1^2} - e^{-x_1^2} + 0.6e^{-x_2^2} & 1.7 + e^{x_1^2} - e^{-x_1^2} + 0.6e^{-x_2^2} - 0.3\cos(x_1) \\ -0.4 + e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2} & -4.4 + e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2} \end{bmatrix} \quad (118)$$

alors $A(0) = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

En diagonalisant A(0),il vient que la matrice diagonale $D(0) = P^{-1}A(0)P = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

avec $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de passage et son inverse.

Posons $D\big(x(t)\big) = P^{-1}\, A(x(t))\, P$

$$= \begin{bmatrix} -3 + e^{x_1^2} & 0.3(1 - \cos(x_1) \\ -0.4 + e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2} & -4 \end{bmatrix} \quad (119)$$

En utilisant la matrice D(x(t)) Nous réalisons un changement de base qui définit le système

$$(S_1) : \dot{z}(t) = D(x,t)z(t) \quad (120)$$

En appliquant le critère de stabilité, correspondant à la norme du max, à la matrice D(x (t)), nous obtenons les conditions de stabilité globale. Pour que ce système soit stable, posons

$$\begin{cases} -3 + e^{x_1^2} + 0.3|1 - \cos x_1| < 0 \\ \left|-0.4 + e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2}\right| - 4 < 0 \end{cases} \quad (121)$$

Il suffit alors d'avoir

$$\begin{cases} -3 + e^{x_1^2} + 0.6 < 0 \\ -0.4 + e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2} - 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} e^{x_1^2} - 2.4 < 0 \\ e^{-x_1^2} - 0.6e^{-x_2^2} - 3.6 < 0 \end{cases} \quad (122)$$

Lorsque ces conditions seront satisfaites pour tout x, la stabilité du système sera globale et illimitée. Comme ce n'est pas le cas pour ce processus, une étude locale est requise. Considérons le système ($\mathscr{S}$) majorant du système (S_1). (**S**) est défini par

$$(\mathscr{S}): \qquad \dot{X}(t) = M(x(t))\ X(t) \tag{123}$$

telle que M est la matrice majorante de D(x(t)) définie par

$$M(x(t)) = \begin{bmatrix} -3 + e^{x_1^2} & 0.6 \\ 0.6 & -4 \end{bmatrix} \tag{124}$$

Le même critère de stabilité utilisé précédemment implique

$$\begin{cases} -3 + e^{x_1^2} + 0.6 < 0 \\ 0.6 - 4 < 0 \end{cases} \tag{125}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{x_1^2} < 2.4 \qquad \Leftrightarrow \quad |x_1| < \sqrt{\ln(2.4)} = a \tag{126}$$

L'application de la norme du max au changement de base calculé précédemment avec l'utilisation de la norme $p(z) = \max(|z_1|, |z_2|)$

$$\text{avec } \begin{cases} z_1 = x_1 + x_2 \\ z_2 = x_2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad p(z) = \max(|x_1 + x_2|, |x_2|) \leq c \tag{127}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -c < x_1 + x_2 < c \\ -c < x_2 < c \end{cases} \tag{128}$$

Le domaine d'attraction est le plus grand domaine d'attraction est le plus grand domaine satisfaisant ces contraintes compris dans le domaine $|x_1| < a$.

Il vient $c = \frac{a}{2}$

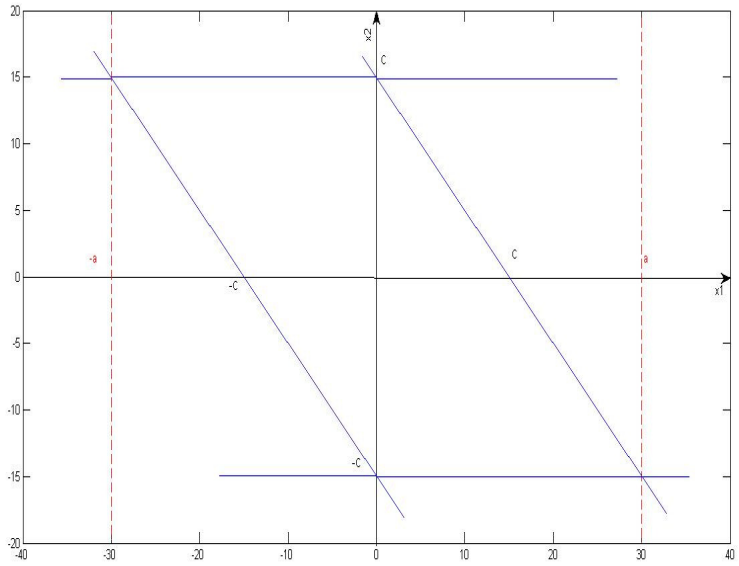


Figure 15 : Domaine d'attraction du système (S) d'ordre 2

II.2 Cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre

Soit le processus ($\mathscr{S}$') , dont l'évolution est décrite par l'expression :

$$(\mathscr{S}'): \quad \dot{x}(t) = A(x(t),t) + B(x(t),t) \quad \text{où} \tag{106}$$

$$A(x(t),t)=\begin{bmatrix} 0.6\left(1-e^{-x_1^2}\right)\cos t - 4 + 0.2\sin x_2 & 0 & 0.2\sin x_2 \\ 0.8 - 0.6\cos x_1 - 0.2e^{-x_3^2} - e^{-x_2^2} - 0.2\sin x_2 & -2e^{-x_2^2} & -4e^{-x_2^2} - 0.2\sin x_2 \\ -0.6\left(1-e^{-x_1^2}\right)\cos t + 1.2 - 0.2e^{-x_3^2} - 0.4\sin x_2 - 3e^{-x_2^2} & 0 & -0.4\sin x_2 - 3(1+e^{-x_2^2}) \end{bmatrix} \tag{129}$$

$$\text{et} \quad B(x(t),t)=\begin{bmatrix} 2\cos t \\ \frac{6+3x_1^2}{1+x_1^2} \\ 3-2\cos t \end{bmatrix} \tag{130}$$

La diagonalisation de la matrice $A(0)=\begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -4 \\ -2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$ donne :

$$D(0) = P^{-1}A(0)P = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

telles que $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et son inverse $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Posons $D\big(x(t)\big) = P^{-1}A(x(t))P$

$$= \begin{bmatrix} 0.6\left(1 - e^{-x_1^2}\right)\cos t - 4 & 0 & 0.2\sin x_2 \\ 0.3(1 - \cos x_1) & -3 + e^{-x_2^2} & 0 \\ 0.2(1 - e^{-x_3^2}) & 0 & -3\left(1 + e^{-x_2^2}\right) - 0.2\sin x_2 \end{bmatrix} \quad (131)$$

Nous obtenons alors le système (S_1') défini par:

$$(S_1'): \qquad \dot{z}(t) = D(z(t))z(t) + \delta(x(t)) \quad (111)$$

$$\text{avec} \quad \delta\big(x(t)\big) = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2\cos t \\ \frac{1.5}{1+x_1^2} \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad z(t) = P^{-1}x(t) \quad (132)$$

Considérons, pour chaque composante du nouveau vecteur état, la norme du max $P(z) = \begin{bmatrix} |z_1| \\ |z_2| \\ |z_3| \end{bmatrix}$ qui permet à l'aide d'une majoration de définir le système de comparaison suivant (**S** '):

$$\dot{X}(t) = M\,X(t) + N \quad (116)$$

où $\quad X(x) \geq p(z), \quad M = \begin{bmatrix} -3.4 & 0 & 0.2 \\ 0.6 & -2 & 0 \\ 0.2 & 0 & -2.8 \end{bmatrix}$ et $\quad N = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Comme M est l'opposé d'une M-matrice, nous obtenons :

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = -M^{-1}N \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to+\infty} p(z) \leq -M^{-1}N = \begin{bmatrix} 0.654 \\ 0.9462 \\ 1.1181 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

d'où, la zone d'attraction correspond à un polyèdre d'équation: $\begin{cases} |z_1| \leq a \\ |z_2| \leq b \\ |z_3| \leq c \end{cases}$

$$\text{or} \quad z = P^{-1}x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2x_1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

alors l'équation du polyèdre devient

$$\begin{cases} |x_1| \leq a \\ |-x_1 + x_2 - x_3| \leq 2b \\ |x_1 + x_3| \leq c \end{cases} \tag{133}$$

représenté par la figure suivante :

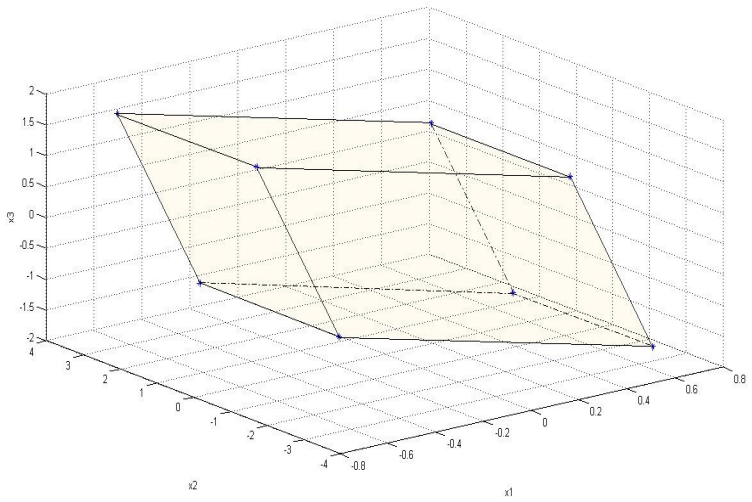


Figure 16: Attracteur du système (S) d'ordre 3

III Système majorant de l'erreur d'un processus non linéaire obéissant à une loi de commande pour le suivi de trajectoire

Plusieurs travaux ont été dédiés au suivi de trajectoire des systèmes non linéaires, complexes, perturbés et/ou mal définis. L'approche communément utilisée consiste à établir une loi de commande stabilisante pour une référence d'entrée donnée.

Au chapitre II, nous avons présentés une approche permettant le calcul de commande de suivi de trajectoire [51] d'un système non linéaire continu basée sur la stabilité de mouvement pour une sortie donnée désirée. Les erreurs et/ou perturbations sur ce type de systèmes, ont également fait l'objet de nombreux travaux de recherche. Dans [78], une nouvelle méthode est proposée pour la conception de contrôleurs pour les petites erreurs arbitraires pour les systèmes non linéaires, incertains, incompatibles sous la forme d'un retour d'état ou de sortie stricte. La méthode proposée est basée sur la seconde méthode de Lyapunov [13, 15, 16, 43].

Dans ce paragraphe, une généralisation de cette approche, par l'implémentation de normes vectorielles et la définition des systèmes de comparaison, sur les systèmes mal définis et/ou perturbés, est proposée. Cette étude est illustrée par un exemple traitant, d'une part, la commande à l'origine, et d'autre part, le suivi d'une trajectoire donnée avec une majoration de l'erreur de suivi du système.

III.1 Origine des erreurs sur un modèle

Un système physique réel dont le processus est décrit comme étant non linéaire, peut être approximé, localement, par un système linéaire. En effet, au cours de son évolution, le modèle non linéaire du processus réel, peut être représenté par une succession de modèles linéaires.
Cependant, le calcul de ces modèles ne peut être privé d'erreurs et/ou d'incertitudes, notamment quand il s'agit d'identifier les modèles par des mesures d'entrée-sortie. Les erreurs sur le modèle proviennent alors des simplifications opérées lors de la construction de ce modèle et d'incertitudes relatives aux valeurs des paramètres de ce modèle [7].

III.2 Calcul d'un système majorant l'erreur

Considérons le processus dont l'évolution est décrite par son équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,t) + G(x,t)u(t) + \delta(x,t) \\ y(t) = h(x,t) \end{cases} \tag{134}$$

Dans cette expression x(t) désigne le vecteur d'état du processus, u(t) le vecteur de la loi de commande, y(t) le vecteur de sortie et $\delta(x,t)$ représente l'influence des incertitudes et/ou perturbations.

Le calcul de la loi de commande, permettant au système de suivre une trajectoire désirée $y_c(t)$, est réalisé selon le modèle décrit par la relation (2) [22]

$$u(t) = \left(H_x G(x,t)\right)^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha\left(y_c(t) - y(t)\right)\right] \tag{79}$$

où $y_c(t)$ désigne la trajectoire désirée.

En écrivant f(x,t) et h(x,t) sous la forme

$$f(x,t) = A(x,t)x(t) \tag{135}$$

$$h(x,t) = C(x,t)x(t) \tag{136}$$

La loi de commande s'écrit alors

$$u(t) = \left(H_x G(x,t)\right)^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x A(x,t)x(t) - \alpha\left(y_c(t) - C(x,t)x(t)\right)\right] \tag{137}$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + G(x,t)(H_x G(x,t))^{-1}\,[\dot{y}_c(t) - H_x A(x,t) - \alpha(\,y_c(t)\\ - C(x,t)x(t))]\end{aligned} \tag{138}$$

d'où

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) = (A(x,t) + G(x,t)(H_x G(x,t))^{-1}(-H_x A(x,t)\\ + \alpha(C(x,t)))x\\ + G(x,t)(H_x G(x,t))^{-1}(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t))\end{aligned} \tag{139}$$

Qui peut être écrit tel que

$$\dot{x}(t) = M(x,t)\,x(t) + N(x,t)\left(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)\right) \tag{140}$$

En notant x_c le vecteur d'état du modèle théorique, nous obtenons

$$\dot{x}_c(t) = M(x_c,t)\,x_c(t) + N(x_c,t)\left(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)\right) \tag{141}$$

Et avec la même notation pour le modèle réel incertain, nous avons

$$\dot{x}(t) = M(x,t)\,x(t) + N(x,t)\left(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)\right) + \delta(x,t) \tag{142}$$

où $\delta(x,t)$ est l'incertitude sur le modèle, alors

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_c(t) = M(x,t)x(t) - M(x_c,t)x_c(t) + (N(x,t) - N(x_c,t))(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)) + \delta(x,t) \tag{143}$$

Ce qui est équivalent à

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_c(t) = M(x,t)(x(t) - x_c(t)) + (M(x,t) - M(x_c,t))x_c(t) + \big(N(x,t) - N(x_c,t)\big)\big(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)\big) + \delta(x,t) \tag{144}$$

Posons alors

$$M(x,t) = M(x_c,t) + \delta\, M(x,x_c,t) \quad \text{et} \quad N(x,t) = N(x_c,t) + \delta\, N(x,x_c,t) \tag{145}$$

Ce qui donne

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_c(t) = \delta\, M(x,x_c,t)x_c(t) + \delta\, N(x,x_c,t)(\dot{y}_c(t) - \alpha\, y_c(t)) + \delta(x,t) + M(x,t)(x(t) - x_c(t)) \tag{146}$$

Soit $\check{x}(t) = x(t) - x_c(t)$ l'erreur sur le vecteur d'état induit par les incertitudes, ce qui implique

$$\dot{\check{x}}(t) = M(x,t)\check{x}(t) + \Delta(x,x_c,t) \tag{147}$$

Une majoration, utilisant les normes vectorielles $p(\check{x})$ [12, 15, 22 et 43] (voir annexe) mène à

$$\frac{d}{dt}p(\check{x}) \leq M_c p(\check{x}) + N_c \tag{148}$$

où M_c et N_c sont des matrices constantes. D'où le système de comparaison [12, 22, 25 et 43]

$$\dot{z} = M_c z + N_c \tag{149}$$

Si M_c est une matrice stable, alors

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = -M_c^{-1}N_c \text{ [12, 22, 25 et 43]} \quad (150)$$

D'où, pour l'erreur, la majoration [12, 22, 25 et 43]

$$\lim_{t\to\infty} p(\check{x}) \leq -M_c^{-1}N_c \quad (151)$$

III.3 Mise en œuvre de l'approche

Considérons un système non linéaire (S) [25] défini par

$$(S): \begin{cases} \dot{x}(t) = A(x,t)x(t) + G(x,t)u(t) + \delta(x,t) \\ y(t) = C(x,t)x(t) \end{cases} \quad (152)$$

Nous allons calculer l'erreur entre le système réel (S) contenant les perturbations et le système linéaire non perturbé (S_L) calculé à partir de la forme de (S) avec $\delta(x,t) = 0$:

$$(S_L): \begin{cases} \dot{x_L}(t) = A_L x_L(t) + G_L u_L(t) \\ y_L(t) = C_L x_L(t) \end{cases} \quad (153)$$

A partir (5) nous commençons par le calcul de la commande $u_L(t)$ du système linéarisé qui donne

$$u_L(t) = (C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) - C_L A_L x_L(t) + \alpha(y_c(t) - y_L(t))) \quad (154)$$

Ensuite, nous calculons la commande u(t) pour le système (S), nous obtenons alors

$$u(t) = (C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) - C_L A_L x(t) + \alpha(y_c(t) - y(t))) \quad (155)$$

Ce qui conduit à l'expression du vecteur d'état

$$\dot{x}_L(t) = (A_L - G_L(C_L G_L)^{-1}C_L A_L - \alpha C_L)x_L(t) + G_L(C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) \quad (156)$$

et

$$\dot{x}(t) = (A(x,t) - G(x,t)(C_L G_L)^{-1} C_L A_L - \alpha C_L)x(t) + G(x,t)(C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) + \delta(x,t) \quad (157)$$

Notons M_L et N_L telles que

$$M_L = A_L - G_L(C_L G_L)^{-1} C_L A_L - \alpha C_L \quad (158)$$

$$N_L = G_L(C_L G_L)^{-1} \quad (159)$$

$$M(x,t) = A(x,t) - G(x,t)(C_L G_L)^{-1} C_L A_L - \alpha C(x,t) \quad (160)$$

et

$$N(x,t) = G(x,t)(C_L G_L)^{-1} \quad (161)$$

Nous pouvons écrire (24) telle que

$$\dot{x}_L(t) = M_L x_L(t) + N_L(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) \quad (162)$$

et (25) telle que

$$\dot{x}(t) = M(x,t)x(t) + N(x,t)(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) + \delta(x,t) \quad (163)$$

Soit $\check{x}(t) = x(t) - x_L(t)$ l'erreur sur le vecteur d'état induite par les incertitudes, ce qui donne

$$\dot{\check{x}}(t) = M(x,t)\check{x}(t) + \Delta(x, x_L, t) \quad (164)$$

où

$$\Delta(x, x_L, t) = (M(x,t) - M_L)x_L + (N(x,t) - N_L)(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) + \delta(x,t) \quad (165)$$

Considérons, maintenant le système de second ordre (S) défini par son équation d'état

$$(S)\begin{cases}\dot{x}(t) = \begin{pmatrix}0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix}1.5\\ 2 + 0.1\sin(x_2(t))\end{pmatrix}u(t) + \delta(x,t)\\ y(t) = (1 \quad 0)\,x(t)\end{cases} \tag{166}$$

où $|\delta(x,t)| \leq 2.10^{-2}$

Cet exemple traite deux cas de trajectoires. Dans un premier temps nous traitons le cas de retour à l'origine, où le système est à conditions initiales non nulles, pour atteindre la trajectoire $y_c = 0$. Le second cas traite le suivi d'une trajectoire définie par

$$y_c(t) = \sin(at)\sin(bt) \tag{81}$$

III.3.1 Cas de retour à l'origine

Soit le système non linéaire perturbé (S) [25] défini par

$$(S)\begin{cases}\dot{x}(t) = \begin{pmatrix}0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix}1.5\\ 2 + 0.1\sin(x_2(t))\end{pmatrix}u(t) + \delta(x,t)\\ y(t) = (1 \quad 0)\,x(t)\end{cases} \tag{167}$$

où $y_c(t) = 0$ et telle que la condition initiale est $x_0 = (1\ ,\ 1)$.

Considérons le système linéaire de second ordre (S_L) défini par son équation d'état qui correspond à la partie linéaire du système (S)

$$(S_L):\begin{cases}\dot{x_L}(t) = \begin{pmatrix}0.5 & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}x_L(t) + \begin{pmatrix}1.5\\ 2\end{pmatrix}u_L(t)\\ y_L(t) = (1 \quad 0)\,x_L(t)\end{cases} \tag{168}$$

Dans un premier temps, nous appliquons la forme linéaire de la commande $u_L(t)$ à ce système

$$u_L(t) = -(C_L G_L)^{-1}(C_L A_L x_L(t) + \alpha y_L(t)) \tag{169}$$

Les résultats obtenus sont illustrés sur la figure (17), pour $\alpha = 3$,

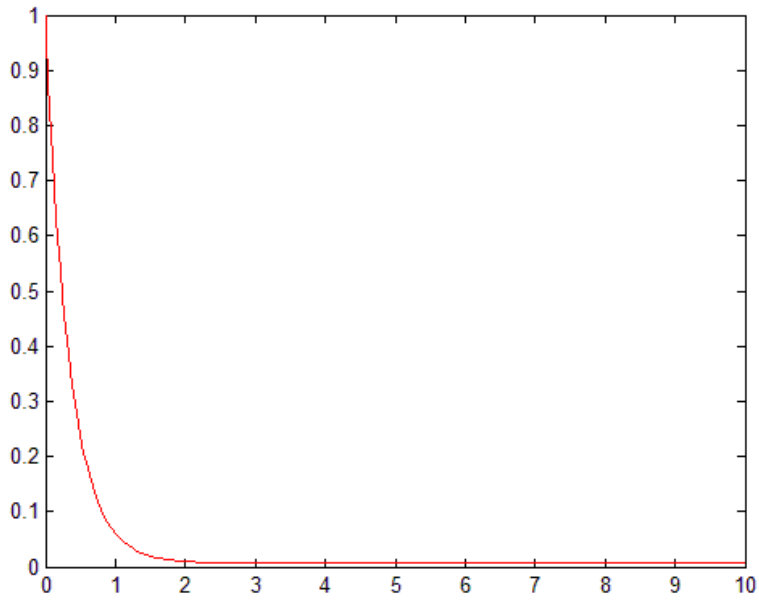


Figure 17: d'un système non linéaire perturbé
pour le suivi de la trajectoire nulle et utilisant la commande linéaire

Dans la seconde partie, nous appliquons au système la forme non linéaire de la commande u(t)

$$u(t) = -(C_L G_L)^{-1}(C_L A_L x(t) - \alpha y(t)) \tag{170}$$

Nous obtenons alors, pour $\alpha = 3$,

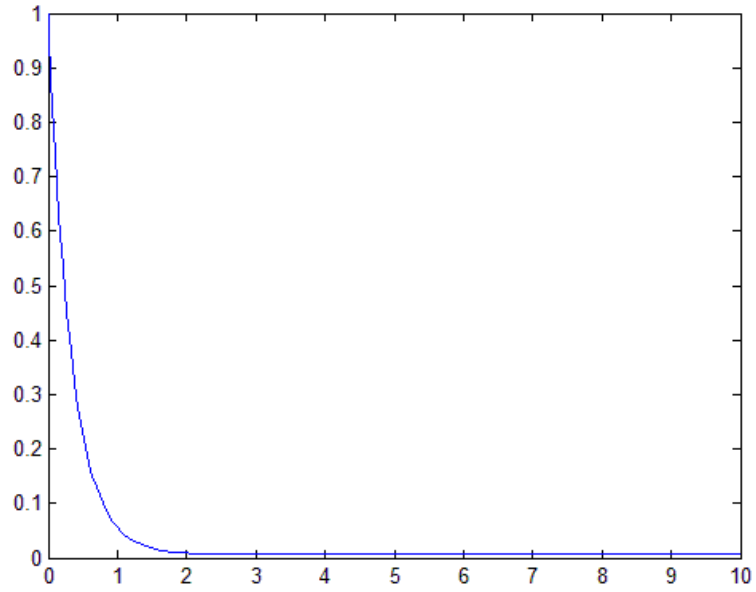


Figure 18: Evolution du système non linéaire perturbé
pour le suivi de trajectoire en utilisant la loi de commande non linéaire

Dans ce cas, le système de comparaison défini par :

$$\dot{z} = M_c z + N_c \tag{149}$$

D'où, pour l'erreur, la majoration [12, 22, 25 et 43]

$$\lim_{t\to\infty} p(\check{x}) \leq -M_c^{-1}N_c = \begin{pmatrix} 0.0165 \\ 0.0831 \end{pmatrix} \tag{171}$$

Sur la figure (18), l'évolution du système en utilisant la commande non linéaire donne presque la même chose que dans le cas de la figure (17).

III.3.2 Cas où la trajectoire désirée est non nulle

III.3.2.1 Représentation du système linéarisé

Considérons

$$u_L(t) = \left(H_{x_L}(x_L, t)G_L\right)^{-1}(\dot{y}_c(t) - H_{x_L}(x_L, t)A_L x_L(t) + \alpha(y_c(t) - y(t))) \tag{172}$$

et $$y_c(t) = \sin(at)\sin(bt). \tag{80}$$

Pour $\alpha = 3$, a=0.1 et b=0.3 l'évolution du système est représentée sur la figure (19)

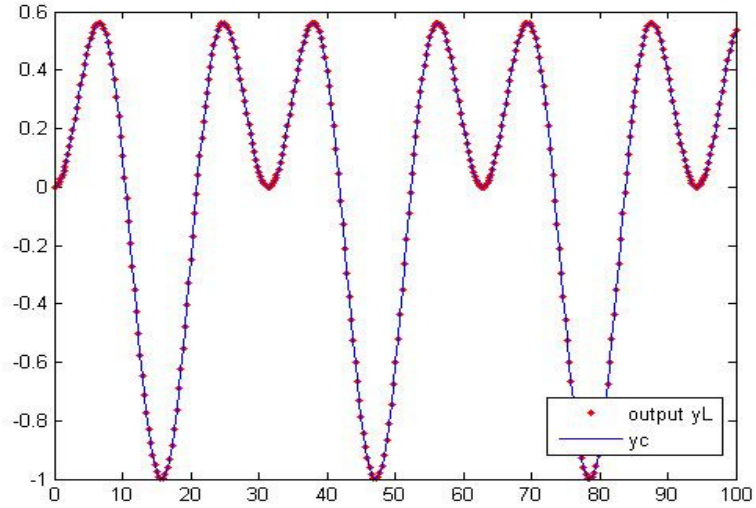


Figure 19 : Evolution du système linéaire pour le suivi la trajectoire désiré

III.3.2.2 Représentation du système non linéaire

Considérons le système non linéaire [25]

$$(S):\begin{cases}\dot{x}(t) = \begin{pmatrix}0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1\\ 2 & -3\end{pmatrix}x(t) + \begin{pmatrix}1.5\\ 2 + 0.1\sin(x_2(t))\end{pmatrix}u(t)\\ y(t) = (1 \quad 0)\,x(t)\end{cases} \tag{173}$$

En appliquant sur (S) la loi de commande linéaire, basée sur les caractéristiques linéaires du système linéaire. Cette loi de commande est définie par

$$u(t) = (C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) - C_L A_L x(t) + \alpha(y_c(t) - y(t))) \tag{174}$$

Son évolution, pour $\alpha = 3$, a = 0.1 et b = 0.3, est représenté sur la figure (20)

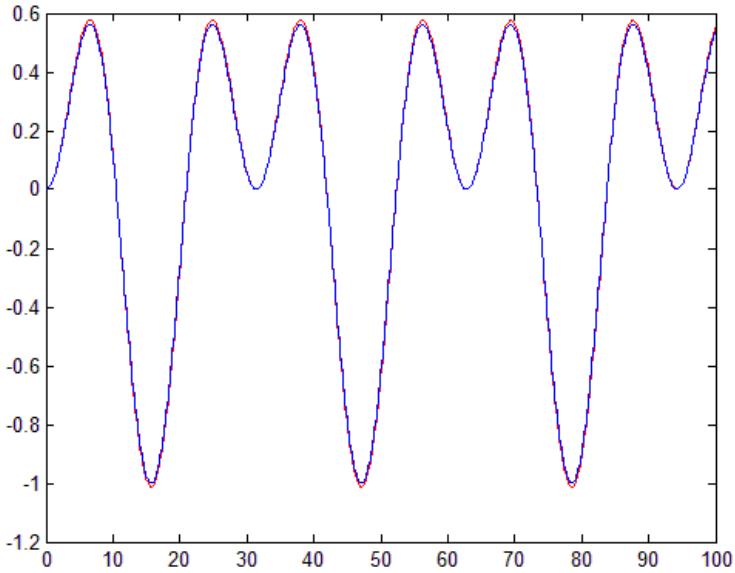


Figure 20: Evolution du système non linéaire pour le suivi
de la trajectoire désirée et utilisant la loi de commande linéaire

en appliquant à ce système la loi de commande non linéaire, c'est-à-dire la commande utilisant les paramètres non linéaires, nous obtenons des résultats meilleurs, comme le montre la figure (21), pour $\alpha = 3$, a = 0.1 et b =0.3

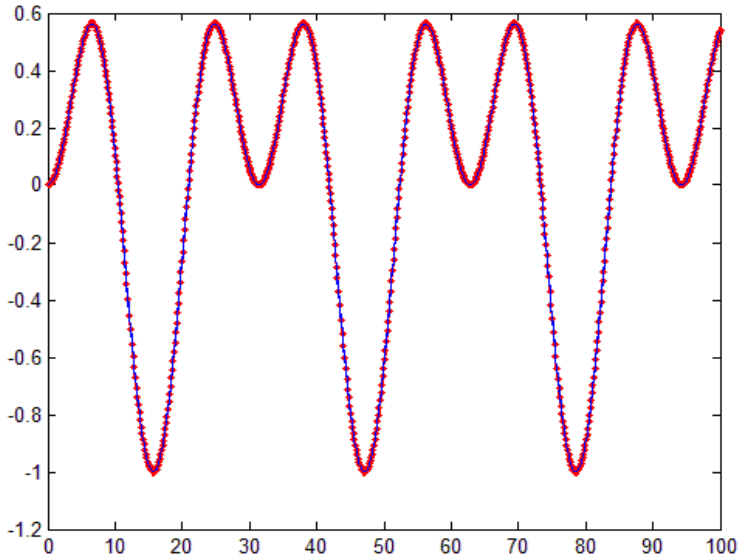


Figure 21 : Evolution du système non linéaire pour le suivi
de la trajectoire désirée et utilisant la loi de commande non linéaire

Dans ce cas, le système de comparaison défini par

$$\dot{z}(t) = M_c z(t) + N_c \tag{149}$$

et tel que $\lim_{t\to\infty} z(t) = -M_c^{-1} N_c = \begin{pmatrix} 0.1168 \\ 0.2843 \end{pmatrix}$ (175)

D'où, pour l'erreur, la majoration [12, 22, 25 et 43]

$$\lim_{t\to\infty} p(\tilde{x}) \leq -M_c^{-1}N_c = \begin{pmatrix} 0.1168 \\ 0.2843 \end{pmatrix} \tag{176}$$

III.3.2.3 Représentation du système non linéaire perturbé

Ajoutons maintenant une perturbation $\delta(t)$ au système non linéaire défini précédemment par,

$$(S') \begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 + 0.1\sin(x_2(t)) \end{pmatrix} u(t) + \delta(x,t) \\ \\ y(t) = (1 \quad 0)\, x(t) \end{cases} \tag{177}$$

où $|\delta(x,t)| \leq 2.10^{-2}$

en appliquant à ce système la forme non linéaire de la loi de commande définie par

$$u(t) = (C_L G_L)^{-1}(\dot{y}_c(t) - C_L A_L x(t) + \alpha(y_c(t) - y(t))) \tag{178}$$

Nous obtenons pour $\alpha = 3$:

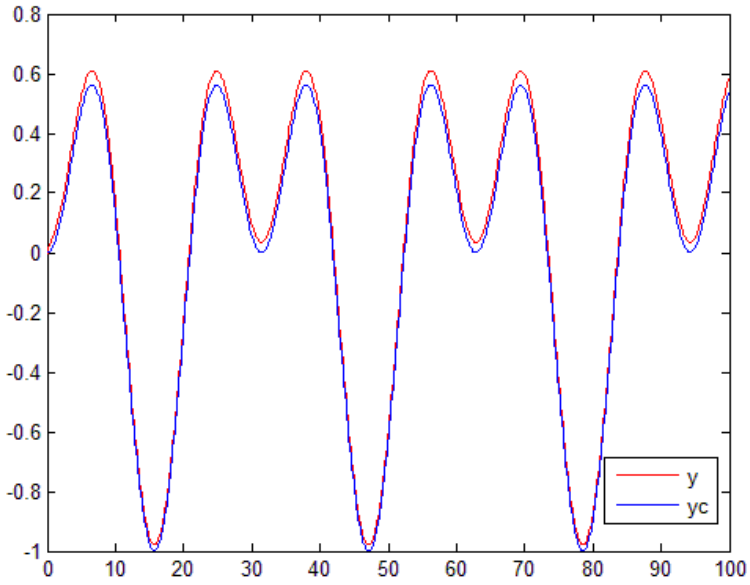


Figure 22 : Evolution du système non linéaire perturbé
pour le suivi de la trajectoire désirée et utilisant la loi de commande linéaire

Pour les mêmes conditions initiales et pour $\alpha = 3$, $a = 0.1$ et $b = 0.3$, la forme non linéaire de la loi de commande appliquée au système non linéaire perturbé, donne pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus pour la forme linéaire de la commande, comme le montre la figure (23)

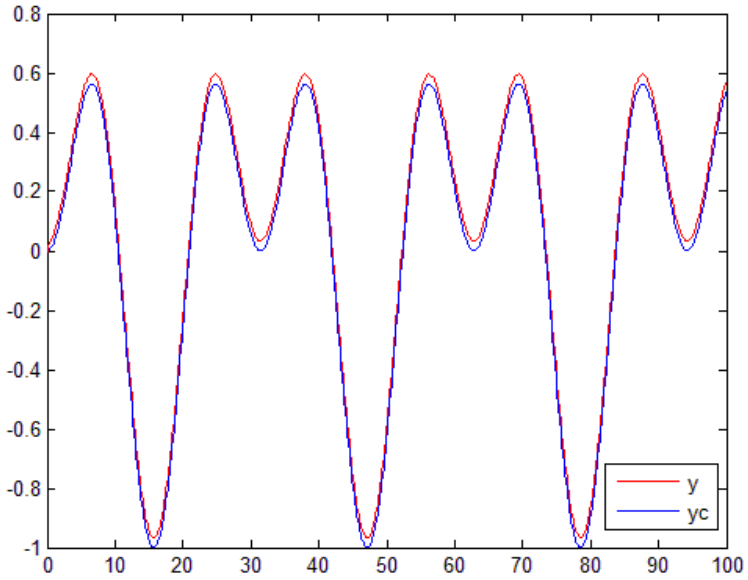


Figure 23: Evolution du système non linéaire perturbé
pour le suivi de la trajectoire désirée et utilisant la loi de commande non linéaire

III.3.2.4 Calcul du système majorant de l'erreur

Pour $\check{x}(t) = x(t) - x_L(t)$, nous avons

$$\dot{\check{x}}(t) = M(x,t)\check{x}(t) + \Delta(x, x_L, t) \tag{179}$$

Où

$$M(x,t) = \begin{pmatrix} \alpha + 0.1\exp(-x_1^2(t)) + 1 & -2 \\ \left(\frac{1}{15}\sin x_2(t) + \frac{4}{3}\right)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) + 2 & -\frac{\sin x_2(t)}{15} - \frac{13}{3} \end{pmatrix} \tag{180}$$

et

$$\Delta(x, x_L, t) = \begin{pmatrix} 0.1\exp(-x_{1_L}^2(t)) & 0 \\ -\frac{4}{3}\alpha + \left(\frac{1}{15}\sin x_2(t) + \frac{4}{3}\right)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} & -\frac{\sin x_2(t)}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1_L}(t) \\ x_{2_L}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 + \frac{1}{15}\sin x_2(t)(\dot{y}_c(t) + \alpha y_c(t)) \end{pmatrix} \quad (181)$$

Comme le montre la figure 19 $x_{1_L}(t) \leq 0.6$, alors nous pouvons calculer le système majorant de l'erreur défini en (17) par

$$\dot{z}(t) = M_c z(t) + N_c \quad (149)$$

Nous obtenons

$$M_c = \begin{pmatrix} -1.9 & 2 \\ 1.78 & -4.26 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_c = \begin{pmatrix} 0.16 \\ 0.4233 \end{pmatrix} \quad (182)$$

Ainsi, pour l'erreur, la majoration implique $\lim_{t\to\infty} p(\check{x}) \leq \begin{pmatrix} 0.3371 \\ 0.2402 \end{pmatrix}$.

III.4 Mise en œuvre de la régulation à action non linéaire proportionnelle-intégrale sur un système perturbé et/ ou mal défini

Par analogie au travail présenté au chapitre II, nous proposons dans ce paragraphe, une étude de la régulation à action proportionnelle-intégrale sur un système perturbé et/ou mal défini. Pour cela, nous considérons le même système continu, non linéaire, dordre deux, traité au paragraphe III.2 du chapitre II, avec une perturbation $\delta(t)$ et défini par son équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.1\exp(-x_1^2(t)) & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 + 0.1\sin(x_2(t)) \end{pmatrix} u(t) + \delta(t) \\ y(t) = (1 \quad 0)\, x(t) \end{cases} \quad (183)$$

telle que $\delta(t) = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{pmatrix}$

Un régulateur proportionnel-intégral a été appliqué à ce système afin d'étudier l'effet de la régulation PI sur l'approche proposée précédemment, dans le cas d' système perturbé. Nous avons choisi de garder les mêmes paramètres utilisés précédemment tels que pour la commande u(t) définie par

$$u(t) = (H_x G(x,t))^{-1}\left[\dot{y}_c(t) - H_x f(x,t) - \alpha(y_c(t) - y(t)) - \beta\int(y_c(t) - y(t))dt\right] \qquad (184)$$

et pour $\alpha = 1$et $\beta = 5$, nous obtenons les résultats de la figure suivante :

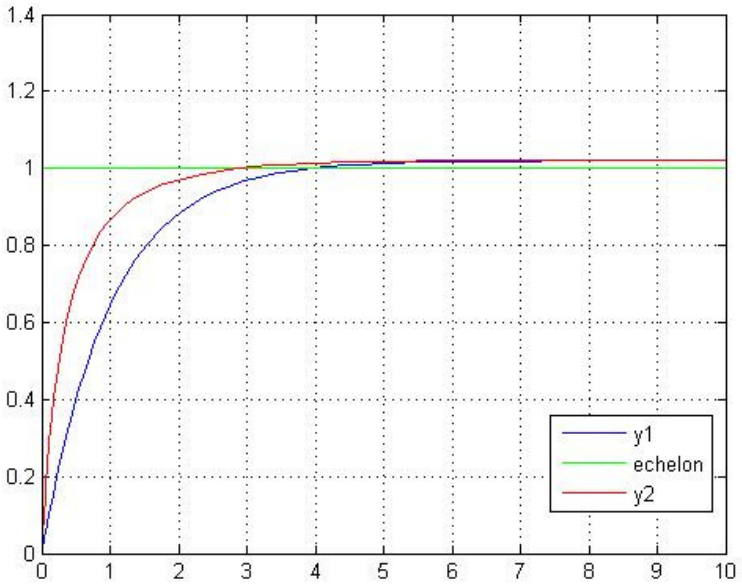


Figure 24: Réponse indicielle d'un système perturbé d'ordre 2 avec régulation proportionnelle représentée par la courbe y_1, et proportionnelle intégrale représentée par la courbe y_2

Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté une étude de la robustesse de la commande proposée aux chapitres précédents, dans le cas de systèmes incertains et/ou mal définis. Cette approche permet le calcul d'une commande, déterminée à partir d'une fonction candidate de Lyapunov, pour le suivi de trajectoire pour les systèmes non linéaires perturbés.

Nous avons commencé par présenter une approche pour l'étude de stabilité des systèmes non linéaires dans le voisinage d'un point de fonctionnement. Une diagonalisation locale des systèmes non linéaires non perturbés, permet de faire un changement de base du système étudié, afin d'étudier la stabilité sur le nouveau système. Le calcul des systèmes majorants, qui implique le calcul de l'attracteur ou de la zone d'attraction, se fait sur le nouveau système. Ceci permet de conclure sur la stabilité du système d'origine, ainsi que de déterminer sa zone d'attraction.

Afin d'expliciter l'approche, deux exemples sont donnés, le premier étant dans le cas non linéaire sans perturbation, le second est non linéaire perturbé.

Cette approche a été, ensuite, appliquée pour le calcul de l'erreur entre un système non linéaire perturbé et le modèle sans perturbations, afin de prouver la robustesse de la commande présentée dans le théorème Chamekh Y.1.

Des exemples sont donnés pour illustrer l'approche. Le premier étant le cas où la consigne est nulle. Le deuxième est à trajectoire non stationnaire.

A la fin du chapitre, une étude de la régulation à action non linéaire et proportionnelle-intégrale sur un système perturbé et/ou mal défini est donnée.

Conclusion générale

Les résultats présentés, dans ce travail, constituent un apport à l'étude de la stabilité de mouvement des systèmes incertains et/ou mal définis.

Ce mémoire propose une approche, basée sur la deuxième méthode de Lyapunov, pour le calcul d'une nouvelle commande permettant le suivi de trajectoire, dans le cas de système non linéaire incertain et/ou mal défini. Cette commande est réalisée à partir d'informations accessibles concernant le processus et son évolution désirée.

Le cas des systèmes multivariables a aussi fait l'objet de nos travaux, et l'approche proposée a été étendue et mise en œuvre à ce type de système.

Nous avons également considéré le cas où la commande proposée n'est pas définie et avons présenté une alternative permettant de résoudre ce problème, en ajoutant des intégrations à la commande d'origine. Des mises en œuvre de l'approche proposée, dans le cas monovariable et le cas multivariable sont données.

Afin d'améliorer les performances des résultats obtenus, une régulation non linéaire avec action proportionnelle-intégrale ainsi qu'une étude de la qualité de la régulation sont proposées.

Dans ce cadre, une première étude de la stabilité a été réalisée par la détermination de la zone d'attraction autour d'un point de fonctionnement, en utilisant la représentation d'état de ces systèmes. Deux idées se succèdent : le changement de base qui permet une écriture plus simple de l'équation du système et les systèmes majorants ou systèmes de comparaison utilisant les normes vectorielles. L'idée principale a été d'effectuer l'étude sur le système de comparaison plutôt que sur le système original. Ainsi et en appliquant au système majorant un critère de stabilité, nous avons pu conclure sur la zone d'attraction du système.

L'étude de la robustesse de l'approche proposée est basée sur le calcul des systèmes majorants de l'erreur entre le système perturbé et le modèle théorique. C'est une nouvelle technique permettant l'étude de stabilité des systèmes non linéaires présentant des perturbations et/ou incertitudes par le calcul des attracteurs et de la zone d'attraction du système, en utilisant les normes vectorielles. Nous avons appliqué cette approche dans le cas d'un système non linéaire du second ordre sans perturbations et dans le cas d'un système non linéaire perturbé du troisième ordre.

L'approche proposée dans ce mémoire est présentée dans le cas de systèmes continus. Une des perspectives de développement est d'étendre ces conclusions aux cas des systèmes discrets et de généraliser pour les cas hybrides.

Ce travail peut, également, s'étendre à une application dans le cas de systèmes multimodèles.

Bibliographies

[1] Albertos P., Sala A., "Multivariable control system : an engineering approach", Springer, édition 2004.

[2] Atherton D. P., Borne P., "Concise encyclopedia of modelling and simulation", Pergamon press, 1992.

[3] Bhatia N. P., Szegph G. P., "Stability theory of dynamical systems" Springer Verlag, Berlin, 1970.

[4] Benrejeb M., "Sur l'analyse et la synthèse de processus complexes hièrarchisés. Application aux systèmes singulièrement perturbés", Docteur Science Thesis, USTL, Lille, 1980.

[5] Benrejeb M., Abdelkrim M. N., "On order reduction and stabilization of TSK non linear fuzzy models by using arrow form matrix", SAMS, vol. 43, n°7, pages 977-991, 2003.

[6] Benrejeb M., Borne P., Laurent F., "Sur une application de la représentation en flèche à l'analyse des processus", RAIRO Automatique, vol. 16, n°2, pages 133-146, 1982.

[7] Benrejeb M., Gasmi M., "On the use of an arrow form matrix for modeling and stability analysis of singularly perturbed nonlinear systems", SAMS, 40, pages 209-225, 2001.

[8] Benoît B., " Commande linéaire des systèmes multivariables ", Université Bordeaux 1, Master ISAS.

[9] Bernussou J., Geromel J. C., Peres P. L. D., "A Linear Programing Oriented Procedure for Quadratic Stabilization of Uncertain Systems", Systems & Control Letters, vol. 13, pages 65–72, 1989.

[10] Borne P., "Contribution à l'étude des systèmes discrets non linéaires de grande dimension. Application aux systèmes interconnectés" Thèse de Docteur ès-sciences physique, Lille, 1976.

[11] Borne P., "Nonlinear system stability. Vector norm approach", System and Control Encyclopedia, Pergamon Press, t.5, pages 3402-3406, 1987.

[12] Borne P., "Systems and control encyclopedia" vol. 5, Pergamon Press 1987.

[13] Borne P., Benrejeb M., "On the Representation and the Stability Study of Large Scale Systems" Proceedings of IJCCC 2008, Baile Felix Spa-Oradea, Romania, 2008.

[14] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., "Estimation of attractors and invariant domains for perturbed complex and large scale systems", in Stochastic Large-scale engineering systems, Marcel Dekker inc., 1991.

[15] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I., " Analyse et régulation des processus industriels". Tome 1, éditions Technip 1993.

[16] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J. P., Rotella F., Zambettakis I., "Commande et optimisation des processus", Collection Méthodes et techniques de l'ingénieur, éditions Technip 1990.

[17] Borne P., Dauphin-Tanguy G., Richard J.P., Rotella F., Zambettakis I., "Modélisation et identification des processus". Tome 1, éditions Technip 1991.

[18] Borne P., Gentina J. C., Laurent F., "Sur la stabilité des systèmes échantillonnés non linéaires" Rev. Fr. Autom. Inf., Rech. Oper. 2, pages 96-105, 1972.

[19] Borne P., Richard J.P., Radhy N.E., "Non linear systems: 2. Stability-stabilization", Ouvrage collectif réalisé dans le cadre du Groupe Non linéaire DRET/AFCET.

[20] Borne P., Richard J.P., Tahiri M., "Estimation of attractive domains for locally stable or unstable systems", Systems Analysis Modelling Simulation, Akademic Verlag, Berlin, pages 595-610, 1990.

[21] Borne P., Rotella F., "Commande optimale", fascicule R7427, page 2, les techniques de l'ingénieur, 1996.

[22] Borne P., Vanheegh Ph., Duflos E., "Automatisation des processus dans l'espace d'état", éditions Technip, 2007

[23] Chadli M., Borne P., "Design of Robust Static Output Controller for Uncertain Fuzzy Model: an LMI Formulation" Studies in Informatics and Control ,vol. 16, n°4, pages 421-430, 2007

[24] Chamekh Y., Ksouri M., "An approach to the stability study of non-linear systems in the neighbourhood of a given operating point", 12th IFAC symposium, On large scale systems: theory and application, 2010.

[25] Chamekh Y., Ksouri M., Borne P., "A New Approach of Tracking Trajectory Control of Non Linear Processes ", Proceedings of the Romanian Academy series A: Mathematics, Physics, Technical Sciences, Information Science, n°. 3/2012 2012.

[26] Cheng C. M., Rees N. W., Feng G. "Stability analysis of fuzzy continuous time dynamic system". In Proc. Of the ICARCV, Singapore, pages 1269-1273, 1996.

[27] Dubois L., Delmotte F., Borne P., Fukuda T. "Stability analysis of a multi-model controller for constrained uncertain nonlinear systems" IJC, vol. 69, n° 4, pages 519-538, 1998

[28] El Ghaoui L., Scorletti G., "Control of Rational Systems using Linear-fractional Representations and Linear Matrix Inequalities", Automatica, vol. 32, n° 9, pages 1273–1284, 1996.

[29] El Kamel A., Borne P., Ksouri-Lahmari M., Benrejeb M.: "On the stability of non-linear multimodel system" SACTA, vol. 2, 1999.

[30] Erickson K. T. , Hedrick J. L., "Plantwide process control", Wiley, NY, 1999.

[31] Fiedler M., Ptak V., "On matrices with nonpositive off-diagonal elements and positive principal minors", Czech, Math., J., 12, pages 382-400, 1962.

[32] Fossard A. J., Normand-Cyrot D., "Stability and stabilization", Nonlinear Systems, Chapman & Hall, vol. 2, 1996.

[33] Garcia G., Bernussou J., "Pole assignment for uncertain systems in a specified disk by state feedback, IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 40, n°. 1, 1995.

[34] Gentina J. C., "Contribution à l'analyse et à la synthèse des systèmes continus non linéaires de grande dimension" Thèse de Docteur ès-sciences physique, Lille, 1976.

[35] Geromel J.C., Peres P.L.D., Bernussou J., "On a Convex Parameter Space Method for Linear Control Design of Uncertain Systems", SIAM J. Control and Optimization, vol. 29, n°. 2, pages 381–402, 1991.

[36] Gruyitch Lj. T., "Concepts of stability domains" (in Serbo-Croatian), Zagreb: Automatika, vol. 26, n° 1-2, pages 5-10, 1985.

[37] Gruyitch L. T., "General stability of large-scale systems", IFAC on Large Scale Systems Theory and Applications, Udine, pages 16-20, 1976.

[38] Gruyitch Lj. T., "Lyapunov-like solutions for stability problems of the most general stationary Lurie-Postnikov systems", Int. J. Systems Sci., vol. 12, n°7, pages 813-833, 1981.

[39] Gruyitch Lj. T., "Novel development of Lyapunov stability of motion", Int. J. Contr., vol. 22, n°4, pages 525-549, 1975.

[40] Gruyitch Lj. T., "On absolute stability and the Aizerman conjecture", Automatica, vol. 17, n°2, pages 335-349, 1981.

[41] Gruyitch Lj. T., "Sets and singularly perturbed systems", Systems Science Wroclaw, Poland, vol. 5, n°4, pages 327-338, 1979.

[42] Gruyitch Lj. T., "Stability domains of general and large-scale stationary systems", in Applied Modelling and Simulation of Technological Systems, Ed. P. Borne and S. G. Tzafestas, Elsevier Science Publishers B. V. North Holland, IMACS, pages 317-327, 1987.

[43] Gruyitch Lj. T., Gentina J.C., and Borne P., "General Aggregation of Large Scale Systems by Vector Lyapunov Functions and Vector Norms", Int. J. Control pages 529-550, 1976.

[44] Grujic Lj.T., Gentina J.C., et Borne P., "Large-Scale Systems Stability under Structural and singular Perturbations", Lecture Notes in CIS, 62, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[45] Gruyitch Lj. T., Martynyuk A. A., Ribbens-Pavella M., "Large scale systems stability under structural and singular parturbations" (in Russian), Kiev: Naukova Dumka, 1984, English edition: New York: Springer Verlag, LNCIS n°92, 1987.

[46] Gruyitch Lj. T. et Ribbens-Pavella M., "Asymptotic stability of large scale systems, Part I, domain estimations", Elec. Power and Energy Systems, vol. 1, n°3, pages 151-157, 1979.

[47] Gruyitch Lj.T., Richard J.P., Borne P., Gentina J.C., "Stability domains" Chapman and Hall, 2004

[48] Guerra T-M., Vermeiren L. "Conditions for non quadratic stabilization of discrete fuzzy models". IFAC advances in fuzzy and neural control, Valencia, Spain, pages 15-20, 2001.

[49] Guesta F., Gordillo F., Aracil J., Ollero A. "Stability analysis of non-linear multivariable T-S fuzzy control systems". IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 7, n° 5, pages 508-519, 1999.

[50] Haddad W.M., Bernstein D.S., "Robust Stabilization with Positive Real Uncertainty: Beyond the Small Gain Theorem", Systems & Control Letters, vol. 17, pages 191–208, 1991.

[51] Hahn W., "Stability of motion", Berlin: Springer Verlag, 1967.

[52] Hollot C., Barmish B., "Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems", 18th Allerton Conference on Communication and Computing, University of Illinois, Monticello, pages 697–706, 1980.

[53] Ingwerson D. R., "A modified Lyapunov method for non linear stability analysis", Trans. IRE on automatic control, AC-6, 1961.

[54] Jian J., Liao X., "Partial stabilization of a class of continuous nonlinear control systems with separated variables" Journal of Systems Science and Systems Engineering, vol. 14, n° 2, pages 177-186, 2005.

[55] Kardous Khaldi Z., "Sur la modélisation et la commande multimodèle des processus complexes et/ou incertains" Thèse de docteur en Automatique et Informatique Industrielle, Ec. Lille, 2004.

[56] Khargonekar P.P., Petersen I. R., Zhou K., "Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H∞ Control Theory", IEEE Trans. on Automat. Control, vol. 35, pages 356–361, 1990.

[57] Kokotovic P. V., "The joy of feedback: Nonlinear and adaptive" IEEE Control Systems Magazine, pages 7-17, 1992.

[58] Ksouri M. et Borne P., "Systèmes non linéaires", Centre de publication universitaire, collection/ Technologie, édition 1999.

[59] Kuo B. C., "Automatic Control systems", Prentice-Hall Book Company, Engelwood Ciffs, New-York, 1982.

[60] La Salle J. P., Lefshetz S., "Stability by Lyapunov's Direct Method", Academic Press, New York, 1961.

[61] Lyapunov A. M., "Stability of motion", London, Taylor and Francis, 1992.

[62] Longchamp R., "Commande numérique de systèmes dynamiques", 2ème édition, presses polytechniques et universitaires romandes, 2006.

[63] Lyapunov A. M., "Problème général de la stabilité du mouvement", Ann. Fac. Sci. Toulouse, vol. 9, pages 203-474, 1907, Reprinted in Ann. Math. Study, Princeton University Press, n°17, 1949.

[64] Maret L., "Régulation automatique des systèmes analogiques", Complément au traité d'électricité, Presses polytechniques romandes, édition 1987.

[65] Matrosov V.M., "On the theory of stability of motion". Prikl. Mat. Mekh. vol. 26, pages 992-1002, 1962.

[66] Naceur M., Soudani D., Benrejeb M., Borne P., "On internal multimodel control for non linear systems", IMACS Multiconference on Comp. Eng. In Syst. Appli., Beijing, pages 306-310, 2006.

[67] Ogata K., "Modern Control engineering", Prentice-Hall Book Company, Engelwood Ciffs, New-York, 1970.

[68] Parks P. C., Hahn V., "Stability theory", Prentice hall international, Series in systems and control engineering, édition 1993.

[69] Peaucelle D., "Formulation générique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres", th Sciences de l'ingénieur/Automatique/Robotique, Laboratoire d'analyse et d'architecture des systèmes (LAAS), Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2000.

[70] Peaucelle D., Arzelier D., "Robust Disk Pole Assignment by State and Dynamic Output Feedback for Generalised Uncertainty Models - An LMI Approach". Conference on Decision and Control, Tampa, Fl, USA, pages 1728–1733, 1998.

[71] Richard J.P., Borne P., et Gentina J.C., "Estimation of stability domains by use of vector Norms", North-Holland, Information and Decision Technologies 14, pages 241-251, 1988.

[72] Robert F., " Matrices non négative et normes vectorielles" National Polytechnical Institute of Grenoble, DEA manual, 1973.

[73] Robert F., "Normes vectorielles de vecteurs et de matrices", R.F.T.I. Chiffres, vol. 17, n°4, pages 261-299, 1964.

[74] Shim D., "Quadratic Stability in the Circle Theorem or Positivity Theorem". Int. J. of Robust and Nonlinear Control, vol. 6, pages 781–788, 1996.

[75] Shinners S. M., "Modern control system theory and application", Addison-Wesley Publishing Company, 1978.

[76] Shultz D. G., Gibson J. E., "The variable gradient method for generating Lyapunov functions", Trans. AIEE, 81, 1962.

[77] Skogestad S., Postethwaite I., "Multivariable feedback control", Wiley, NY, 1996.

[78] Swaroop D, Hedrick J. K., Yip P. P., and Gerdes J. C., "Dynamic Surface Control for a Class of Nonlinear Systems" IEEE transactions on automatic control, vol. 45, n° 10, 2000.

[79] Tanaka K., Nishimura M., Wang H. O. "Multi-objective Fuzzy control of High rise/ High speed elevators using LMIs". In Proc. Of the ACC, Philadelphia, USA, pages 3450-3454, 1988.

[80] Teixeira M. C. M., Assunçao E., Pietrobom H. C. "On relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers". In Proc. Of the ECC, Porto, Portugal, pages 120-125, 2001.

[81] Zubov V. I., “Methods of A.M. Lyapunov and Their Applications (in Russian)”, Leningrad: Leningrad Gos. University. English translation: Groningen: P. Noordhoff Ltd., 1964.

Annexes

Annexe

Vector norm concept and overvaluing technique

Definition of vector norm

Let $E=R^n$ be a vector space and $E_1, E_2, \ldots, E_k$ subspaces of E which verify: $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_k$. Let $x \in E$ be an n vector defined on E with a projection in the subspace E_i denoted by x_i, $x_i = P_i x$, where P_i *is a* projection operator from E into E_i, p_i is a scalar norm *(i=1,2, …,k)* defined on the subspace E_i and p denotes a vector norm of dimension k and with i th component, $p_i(x) = p_i(x_i)$, $p_i(x): R^n \to R_+^k$, where $p_i(x_i)$ is a scalar norm of x_i.

Definition of an overvaluing system

The matrix M: T x R^n defines an overvaluing system (S) with respect to the vector norm p if and only if the following inequality is verified for each corresponding component: $D^+ p(x) \le M(A(t,x))p(x) \quad \forall x \in E \quad \forall t \in T_0$.

Let us denote: $A_{ij}(t,x) = P_{ri}^* A(t,x) P_{rj}^*, \forall i, j = 1,2,...,k$; $M(t,x) = \{\mu_{ij}(t,x)\}$;

$$m_{ij}(t,x,y) = \frac{[gradp_i(y_i)]^T A_{ij}(t,x) y_i}{p_i(x_i)} \quad , \forall i, j = 1,2,...,k .$$

Definition of pseudo-overvaluing matrix

The matrix $M(t,x) = \{\mu_{ij}(t,x)\}, \mu_{ij} : T \times R^n \to R$, is a pseudo-overvaluing matrix if and only if:

$$\mu_{ij}(t,x) = \sup_{y \in E} \{m_{ij}(t,x,y)\}, \quad \forall i \neq j = 1,2,...,k, \forall x \in E, \forall t \in T_0$$

$$\mu_{ij}(t,x) = max(0, \sup_{y \in E} \{m_{ij}(t,x,y)\}), \ \forall i = 1,2,...,k, \ \forall x \in E, \forall t \in T_0$$

It is sometimes convenient to determine a pseudo-overvaluing matrix which depends on *t* only (*definition a*), and a constant pseudo-overvaluing matrix only (*definition b*).

Definition a

The matrix $M(t) = \{\mu_{ij}(t)\}, \mu_{ij} : T \to R$, is a pseudo-overvaluing matrix if and only if:

$$\mu_{ij}(t) = \sup_{y \in E} \{m_{ij}(t,y,y)\}, \ \forall i = 1,2,...,k, \forall t \in T_0$$

$$\mu_{ij}(t) = max(0, \sup_{y \in E} \{m_{ij}(t,y,y)\}), \forall i \neq j = 1,2,...,k, \forall t \in T_0$$

Definition b

The matrix $M = \{\mu_{ij}\}$ is a constant pseudo-overvaluing matrix if and only if:

$$\mu_{ii} = \sup_{\substack{y \in E \\ i \in T_0}} \{m_{ii}(t,y,y)\}, \ \forall i = 1,2,...,k$$

$$\mu_{ij} = max(0, \sup_{\substack{y \in E \\ t \in T_0}} \{m_{ij}(t,y,y)\}), \forall i \neq j = 1,2,...,k$$

Hence the following inequalities: $M \geq M(t) \geq M(t,x)$

Remark: More generally, any matrix $M'(t,x) = \{\mu'_{ij}(t,x)\}$, $\mu'_{ij} : T \times R^n \to R$, with: $\mu'_{ij}(t,x) \geq \mu_{ij}(t,x)$, $\forall i, j \ \ \forall t, x \in T_0 \times R^n$, defines a pseudo-overvaluing matrix of system (S).

This property can be efficiently implemented to reduce the complexity of a given problem.

Application to holder norms

Let us consider the matrix A partition:

$$\begin{cases} m_{ii} = \max\limits_{l \in I_i}(a_{ll} + \sum\limits_{m \in I_i, m \neq l} |a_{lm}|) & \forall i = j = 1, \cdots, k \\ m_{ij} = \max\limits_{l \in I_i}(\sum\limits_{m \in Ij} |a_{lm}|) & \forall i \neq j = 1, \cdots, k \end{cases}$$

Theorem:

For: $\|x\| = \max\limits_{j \in [1,q]} |x_j| = |x_{jm}|$, m_{ij} *is the max of the sum of* A_{ij} *elements (rows) and it comes:*

$$\begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{ij} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & A_{ji} & \cdots & A_{jj} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix} \} I_i : \text{set of index of rows}$$

$$\underbrace{\quad\quad}_{I_j : \text{set of index of columns}}$$

Similar results can be obtained by using different types of norms.

For: $\|x\| = \sum\limits_{i=1}^{q} |x_i|$, m_{ij} is the max of A_{ij} elements (columns) and it comes:

$$\begin{cases} m_{ii} = \max\limits_{l \in I_i}(a_{ll} + \sum\limits_{m \in I_i, m \neq l} |a_{lm}|) & \forall i = j = 1, \cdots, k \\ m_{ij} = \max\limits_{l \in I_j}(\sum\limits_{m \in I_i} |a_{lm}|) & \forall i \neq j = 1, \cdots, k \end{cases}$$

For Euclidean norm: $\|x\| = (\sum\limits_{i=1}^{q} x_i^2)^{0.5}$, it comes:

$$\begin{cases} m_{ii} = \max\limits_{l \in I_i}(a_{ll} + \frac{1}{2} \sum\limits_{m \in I_i, m \neq l} |a_{lm} + a_{ml}|) & \forall i = j = 1, \cdots, k \\ m_{ij} = \frac{1}{2} \left(\max\limits_{m \in I_j} (\sum\limits_{l \in I_i} |a_{ml} + a_{lm}|) \right) & \forall i \neq j = 1, \cdots, k \end{cases}$$

Commande de suivi de trajectoire pour les systèmes complexes et /ou incertains

Résumé :

Ce travail présente une nouvelle approche basée sur l'étude de la stabilité du mouvement de systèmes continus, multivariables, non linéaires. Elle repose sur l'utilisation de la seconde méthode de Lyapunov pour le calcul d'une loi de commande de suivi de trajectoire d'un processus dont l'évolution est décrite par son équation d'état. Cette commande est réalisée à partir d'informations accessibles concernant le processus et son évolution désirée.
Cette approche est étudiée dans le cas où cette commande n'est pas définie.
Afin d'étudier la robustesse de cette commande, nous présentons une approche basée sur la stabilité des systèmes non linéaires par le calcul des systèmes majorants. Cette approche est appliquée sur les systèmes décrivant l'erreur entre le système perturbé réel présentant d'importantes imprécisions et/ou incertitudes et le modèle théorique.

Mots-clefs :

Stabilité, commande de suivi de trajectoire, fonction candidate de Lyapunov, systèmes majorants, systèmes complexes, systèmes incertains.

*Trajectory tracking control for complex and / or uncertain system*s

Abstract

This work presents a new approach based on the study of the stability of motion of continuous, multivariable, nonlinear systems. It relies on the use of the second Lyapunov method for computing a control law trajectory tracking of a process whose evolution is described by the equation of state. This control is made from accessible information about the process and its desired evolution. This approach is studied in the case where the command is not defined. To investigate the robustness of this control, we present an approach based on the stability of nonlinear systems by calculating the overvaluing systems. This approach is applied to the systems describing the error between the actual perturbed system with significant inaccuracies and / or uncertainties and the theoretical model.

Keywords

Stability, trajectory tracking control, Lyapunov candidate function, overvaluing systems, complex systems, uncertain systems.