



HAL
open science

Simulation du bruit d'écoulements anisothermes par méthodes hybrides pour de faibles nombres de Mach

Cyril Nana

► **To cite this version:**

Cyril Nana. Simulation du bruit d'écoulements anisothermes par méthodes hybrides pour de faibles nombres de Mach. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Poitiers, 2012. Français. NNT: . tel-00741298

HAL Id: tel-00741298

<https://theses.hal.science/tel-00741298>

Submitted on 12 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

pour l'obtention du grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE POITIERS

ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'INGÉNIEURS DE POITIERS
(Diplôme National - Arrêté du 7 août 2006)

École doctorale : Sciences et Ingénierie en Matériaux, Mécanique, Énergétique et
Aéronautique

Secteur de recherche : Mécanique des Milieux Fluides - Acoustique

Présentée par

Cyril NANA

Simulation du bruit d'écoulements anisothermes par méthodes hybrides pour de faibles nombres de Mach

Directeur de thèse : **Dr. Christian PRAX**

Co-directeur de thèse : **Dr. David MARX**

Soutenue le 20 septembre 2012
devant la Commission d'Examen

JURY

Christophe BAILLY (rapporteur)	Professeur École Centrale de Lyon, LMFA
Franck NICLOUD (rapporteur)	Professeur Université de Montpellier II, I3M
Éric LAMBALLAIS	Professeur Université de Poitiers, Institut PPRIME
Christian TENAUD	Directeur de Recherche CNRS, LIMSI Orsay
Véronique FORTUNÉ	Maître de Conférences ENSIP, Institut PPRIME
Florent MARGNAT	Maître de Conférences ENSAM, DynFluid
David MARX	Chargé de Recherche CNRS, Institut PPRIME
Christian PRAX	Maître de Conférences ENSIP, Institut PPRIME

Résumé

Cette étude porte sur le calcul numérique du champ acoustique rayonné par des écoulements subsoniques turbulents présentant des inhomogénéités de température. Des méthodes hybrides sont développées grâce à un développement de Janzen-Rayleigh des équations de Navier-Stokes. L'écoulement est résolu par un calcul quasi incompressible puis les perturbations acoustiques sont propagées selon deux méthodes : les équations d'Euler linéarisées (**EEL**) et l'approximation à faible nombre de Mach perturbée (**PLMNA**). Les méthodes sont validées sur des cas simples puis appliquées à une couche de mélange isotherme et anisotherme en développement spatial.

Mots clés : Aéroacoustique numérique - méthodes hybrides - équations d'Euler linéarisées - faible nombre de Mach - écoulements anisothermes - termes sources acoustiques - couche de mélange

Abstract

Noise computation of non isothermal flows by hybrid methods for low Mach numbers

This study focuses on the numerical calculation of the acoustic field radiated by subsonic turbulent flows with temperature inhomogeneities. Hybrid methods are developed through a Rayleigh-Janzen expansion of the Navier-Stokes equations. The flow is solved in a quasi-incompressible way then the acoustic disturbances are propagated by two methods : the linearized Euler's equations (**EEL**) and the perturbed low Mach number approximation (**PLMNA**). The methods are validated on simple cases and then applied to an isothermal and non isothermal spatially evolving mixing layer.

Key words : Computational aeroacoustics - hybrid methods - linearized Euler's equations - low Mach number - non isothermal flows - acoustic source terms - mixing layer

Remerciements

Mes premières pensées vont à toutes celles et à tous ceux qui prêteront attention à ce travail de thèse et ne s'arrêteront pas à ces quelques lignes de remerciements, notamment le ou les thésards qui en prendront la suite (si suite il y a !).

Je tiens à remercier ensuite le Pr. Bailly et le Pr. Nicoud d'avoir accepté de corriger ce manuscrit.

Je remercie par là même l'ensemble des membres qui composent le jury.

Je remercie le Dr. Christian Prax et le Dr. David Marx de m'avoir encadré tout au long de ces presque quatre années. Vous m'avez permis de m'épanouir dans ce monde « obscur » des sciences numériques, si je puis le dire ainsi. Je tiens notamment à souligner le temps passé avec David, les nombreuses questions auxquelles il a dû répondre et toute la rigueur qu'il a exigée.

J'exprime toute ma gratitude envers le Pr. Yves Gervais pour m'avoir accueilli au sein de feu le Laboratoire d'Études Aérodynamiques et pour tous les moments informels qui contribuent à une saine et chaleureuse ambiance.

Merci au Dr. Véronique Fortuné que j'ai souvent également assailli de questions et pour sa contribution essentielle pour tous les calculs de vérification DNS. Je remercie également le professeur Éric Lamballais pour ses judicieux conseils.

Merci au Pr. Laurent-Emmanuel Brizzi pour les cafés, discussions, badminton. . .

Plus généralement, je remercie tous les personnels du bâtiment B17 avec une mention spéciale à Jean-Christophe Vergez que j'ai fréquemment embêté pour des questions informatiques et pour tout ce qu'il fait par ailleurs. . .

Je remercie la région Poitou-Charentes d'avoir financé ce travail et l'IDRIS pour la mise à disposition du serveur de calcul Brodie. Je remercie l'École Nationale Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers ENSIP de m'avoir donné la possibilité d'enseigner pendant trois ans en tant que moniteur. Je suis aussi très reconnaissant à l'Institut Supérieur de l'Aéronautique et de l'Es-pace, École Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique ISAE-ENSMA de m'avoir permis d'effectuer cette dernière année en tant qu'Attaché Temporaire à l'Enseignement et à la Recherche.

Vient à présent le moment de remercier tous ceux qui ont été là, physiquement ou en pensées. Qu'ils aient été présents pour des échanges scientifiques ou tout simplement pour se changer les idées, sortir, voir le monde et la « vraie vie ». J'ai longtemps hésité sur la formule à adopter : citer tout le monde au risque d'écrire un annuaire ou faire une formule globale très impersonnelle. Finalement, que ceux ne souhaitant pas se noyer sous une liste interminable de noms s'arrêtent ici. Bonne lecture.

Pour les autres, vous aurez été prévenus ! Merci à mes camarades chercheurs, post-doc, docteurs, thésards ou stagiaires du LEA (à peu près par ordre d'apparition) : Maud, Marie, Sébastien, Aminou, Solenn, Xavier, Stéphane, Thomas, André, David, Mathieu, Ida, Jeffrey, Rémi, Thibault, Ifanila, Thomas, Florian, Damien, Cyrille, Guillaume, Vincent, Luis, Rémy, Maxime, Sébastien, Peter, Antoine, les « footeux » du SP2MI et ceux que j'oublie.

Merci à mes camarades moniteurs : Guillaume, Alice, Julie, Évan, Maëlle, Matthieu, Clémence et les 31 autres...

Merci à mes camarades de la « moumoute mancelle » : Marco, Pyo, Riton, Max, Oliv', Tom, JB, Contre et toute la promo acoustique 2008...

Merci à mes amis montoirins, nazairiens, nantais pour les « sas » de décompression briérons et ligériens : Julien, Cathy, Séverine, Julie, Adrien, Vince, Allison, Céline, Jim, Héloïse, Dany, Yohan, Amélie, Gilles, Philippe, Walter, Quentin, Typhaine, Antoine, Mathilde, Sylvain, Éric...

Merci aux paléontologues, psychologues, littéraires et tous ceux que je ne sais classer : Aurélie, Thibault, Pauline, Antoine, Sohee, Dimitri, Alexis, Golpar, Kévin, Mélanie, Jean-Pierre, Isabelle, le Cluricaume et sa faune sauvage...

Merci à tous ceux qui ont parcouru un bout de chemin en ma compagnie et qui ont influencé de près ou de loin mes choix.

Merci à France, Marie, Émile, Roger, Nathalie.

Merci à Camille d'avoir été présente à chaque instant et d'avoir supporté mes absences (physiques et mentales) et mes humeurs.

Enfin, merci aux premiers, mes parents, de m'avoir donné le goût de l'effort et du travail. Merci à mon père de m'avoir poussé à donner le meilleur de moi-même en toute circonstance. Merci à ma mère d'avoir empli mon inconscient d'un tas de petites devises qui surgissent au moment opportun (« Quand on fait quelque chose, on le fait bien ou on ne le fait pas ! »). Je vous remercie, vous, tout comme Tatiana, Élodie, Moumini, Enzo, Jade, Dylan et Évan de ne pas m'en vouloir pour cette dernière année de travail intensif et de rédaction loin de vous.

Ce qui s'apprend sans peine ne vaut rien et ne demeure pas. Tu dois devenir ce que tu as l'ambition d'être en faisant transpirer ton corps et ton esprit.

René Barjavel, *L'Enchanteur* (1984)

Table des matières

Table des matières	I
Table des figures	IX
Liste des tableaux	XI
Nomenclature	XIII
1 Introduction	1
1.1 L'aéroacoustique	2
1.1.1 L'analogie de Lighthill	3
L'équation de propagation	3
L'équation de Lighthill	4
1.1.2 L'analogie de Lilley	6
1.1.3 L'analogie de Powell	7
1.1.4 Prise en compte des effets de température	9
1.1.4.1 La décomposition de Morfey, Michalke-Michel	10
1.1.4.2 La décomposition de Mani	10
1.1.4.3 Les effets du nombre de Reynolds	11
1.2 L'aéroacoustique numérique	12
1.2.1 Les méthodes directes	13
1.2.2 Les méthodes hybrides	15
1.2.3 Estimation du gain des méthodes hybrides	16
1.3 Plan de l'étude	19
2 L'approximation à faible nombre de Mach (LMNA)	21
2.1 Les équations LMNA d'ordres bas ou LO-LMNA	22
2.2 Méthode de résolution numérique	24

2.2.1	Avancement temporel de la simulation	25
2.2.2	Effets de température	27
2.2.3	Schémas de discrétisation spatiale	27
2.2.4	Résolution de l'équation de Poisson	29
2.2.5	Sortie de fluide	32
3	Les propagateurs acoustiques	33
3.1	Les Équations d'Euler Linéarisées 2D	33
3.1.1	Les équations d'Euler	33
3.1.2	Linéarisation des équations d'Euler	35
3.1.3	Formulation du terme source	36
3.1.4	Définition des sources des EEL à partir de LO-LMNA	38
3.1.4.1	Dimensionnement acoustique	38
3.1.4.2	Terme source S_L	38
3.1.4.3	Terme source S_P défini à partir de la pression	39
3.2	Les équations LMNA Perturbées ou PLMNA	40
3.2.1	Filtrage de la vorticité de Seo et Moon	43
3.3	Développement des EEL avec terme source S_E depuis PLMNA	45
3.4	Rappel des diverses formulations hybrides	47
3.5	Détails des méthodes de résolution numériques	48
3.5.1	Filtrage	50
3.5.2	Conditions aux limites	51
3.5.2.1	Condition de rayonnement	51
3.5.2.2	Condition de rayonnement avec sortie de fluide	53
3.5.3	Zones �ponges	53
4	Procédure de passage de lo-lmna3d aux propagateurs	55
4.1	L'interpolation	55
4.1.1	L'interpolation spline cubique	56
4.2	Test de la procédure d'interpolation	57
4.3	Interpolation des données issues de lo-lmna3d	59
5	Cas tests de validation des méthodes	61
5.1	Le tourbillon elliptique de Kirchhoff	61
5.1.1	Champs hydrodynamiques	62
5.1.2	Pression acoustique d'un tourbillon de Kirchhoff quasi circulaire	68
5.1.3	Validation des propagateurs acoustiques	69
5.1.3.1	Calcul à l'aide du solveur des équations d'Euler linéarisées	70

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	III
5.1.3.2 Validation des formulations LMNA perturbées	76
5.1.3.3 Effets de la troncature des termes sources	80
5.2 Les tourbillons corotatifs	90
5.2.1 Configuration du calcul <i>quasincompact3d</i>	91
5.2.1.1 Solution acoustique	94
5.2.2 Conclusion	96
6 La couche de mélange 2D	99
6.1 La couche de mélange isotherme	101
6.1.1 Champs hydrodynamiques	105
6.1.2 Rayonnements acoustiques	109
6.1.2.1 Filtrage de Seo et Moon pour les EEL	116
6.1.2.2 Influence de la discrétisation spatiale du domaine source . . .	118
6.1.2.3 Effet du nombre de Mach sur la propagation	120
6.2 La couche de mélange anisotherme	122
6.2.1 Champs hydrodynamiques	123
6.2.2 Rayonnements acoustiques	129
6.2.3 Effets de la température	135
6.2.4 Terme source S_e et analogie de Ribner	137
7 Conclusion	139
A Champ de vitesse du tourbillon de Kirchhoff	143
B Configuration des calculs <i>cmi2ac</i>	147
C Configuration des calculs <i>cmaac</i>	151
Actes de conférences	155
Bibliographie	169

Table des figures

1.1	Structure d'un jet rond en sortie de tuyère.	13
1.2	Une hiérarchie de diverses méthodes numériques employées en aéroacoustique.	14
2.1	Structure d'un sous-pas de temps du code <code>quasincompact3d</code>	27
2.2	Variation du nombre d'onde modifié k' en fonction du nombre d'onde k pour l'évaluation de la dérivée première	29
3.1	Variation du nombre d'onde modifié k' pour les schémas DRP	49
3.2	Représentation du domaine de calcul et des conditions aux limites.	52
4.1	Schématisation de l'interpolation	58
4.2	Champs de vitesse interpolés pour différents nombres de points par période N_p	58
4.3	Erreur ε_{L^2} sur le champ de vitesse en norme L^2	59
5.1	Tourbillon elliptique de Kirchhoff.	62
5.2	Vorticité ω_{z_0} issue de <code>quasincompact3d</code> à l'instant initial.	65
5.3	Comparaison des champs de vitesse analytiques d'un tourbillon de Kirchhoff avec ceux calculés par <code>quasincompact3d</code>	66
5.4	Comparaison du champ de pression analytique d'un tourbillon de Kirchhoff avec celui calculé par <code>quasincompact3d</code>	67
5.5	Maillage acoustique.	69
5.6	Pression acoustique rayonnée théorique à $t_a c_0 / r_0 = 1000$	71
5.7	Pression acoustique p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée par EEL+S_L	72
5.8	Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_L avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	73
5.9	Pression acoustique p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée par EEL+S_p	73

5.10	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_P avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	74
5.11	Pression acoustique p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ calculée par EEL+S_E	74
5.12	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_E avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	75
5.13	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par les diverses formulations EEL avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	75
5.14	Solutions à $t_a c_0/r_0 = 500$ calculées dans la configuration ck1 avec PLMNA et PLMNA*	77
5.15	Pression acoustique à $t_a c_0/r_0 = 1000$ calculée avec PLMNA* dans la configuration ck1	77
5.16	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par PLMNA* avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	78
5.17	Pression acoustique à $t_a c_0/r_0 = 1000$ calculée avec PLMNA dans la configuration ck2	78
5.18	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par PLMNA dans la configuration ck2 avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.	79
5.19	Pression acoustique à $t_a c_0/r_0 = 1000$ calculée avec PLMNA* dans la configuration ck3	80
5.20	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue dans la configuration ck3 par PLMNA* avec l'expression analytique de Müller.	80
5.21	Schéma de configuration de la simulation hybride	81
5.22	Champs de pression acoustique à $t_a c_0/r_0 = 1000$, sources tronquées à $r_{cut} = 5r_0$	82
5.23	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_L pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller.	83
5.24	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_P pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller.	83
5.25	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par EEL+S_E pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller.	84
5.26	Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue par PLMNA* pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller.	84
5.27	Termes sources des différentes formulations à $t_a c_0/r_0 = 1000$, sources non tronquées.	85
5.28	Composantes du terme source à divergence nulle non tronqué à $t_a c_0/r_0 = 1000$	86

5.29	Champs de pression $p' - \bar{p}'$ à $t_a c_0 / r_0 = 1000$, calculés par EEL+S_L avec le terme source à divergence nulle pour différentes valeurs de troncature r_{cut} . . .	88
5.30	Zoom sur le champ $p' - \bar{p}'$ obtenu par EEL+S_L avec le terme source à divergence nulle à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ pour $r_{cut} = 10r_0$ et $r_{cut} = 5r_0$	89
5.31	Allée de Von Karman observée derrière la Guadeloupe.	90
5.32	Configuration des deux tourbillons corotatifs de Scully.	92
5.33	Évolution temporelle de la vorticité des deux tourbillons corotatifs calculée par <code>quasincompact3d</code>	93
5.34	Champ de vorticité des deux tourbillons de Scully à $t_{c_0} / r_0 = 240$	94
5.35	Maillage acoustique dans la configuration cv1 (un point sur deux est tracé). . .	95
5.36	Pression acoustique p'_{Mitchell} obtenue par résolution de (5.54) � $t_a c_0 / r_0 = 240$. . .	96
5.37	Comparaison de l'évolution temporelle de p' obtenue par les diverses formulations au point <i>A</i> � gauche et au point <i>B</i> � droite.	97
6.1	Illustration schématique de la formation d'une couche de mélange derrière une plaque mince.	100
6.2	Couche de mélange visualisée par Brown et Roshko extraite de [20].	100
6.3	Maillage du domaine hydrodynamique dans la configuration cmi1	102
6.4	Représentation schématique du domaine de calcul hydrodynamique et des conditions aux limites pour le calcul de la couche de mélange.	102
6.5	Profil de la zone éponge pour le calcul isotherme.	103
6.6	évolution temporelle de la vorticité ω_{z_0} de la couche de mélange isotherme dans la configuration cmi2	105
6.7	Champs de vorticité hydrodynamique dans les configurations cmi1 , cmi2 et issue de <code>compact3d</code>	107
6.8	Comparaison de la vorticité en $y = 0$	107
6.9	Champs de pression hydrodynamique dans les configurations cmi1 , cmi2 et issue de <code>compact3d</code>	108
6.10	Comparaison de la pression en $y = 0$	108
6.11	Représentation schématique du domaine de calcul acoustique pour la couche de mélange.	109
6.12	Terme source S_e	110
6.13	Champs moyens des formulations EEL pour la couche de mélange isotherme dans la configuration cmi2ac1	111
6.14	Champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ obtenus avec les différentes formulations pour la couche de mélange isotherme dans la configuration cmi2ac1 pour les EEL et cmi2ac2 pour PLMNA* (voir annexe B). . . .	112

6.15	Comparaison des champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$	113
6.16	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$	114
6.17	Comparaison de la vorticité perturbée ω' à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $y = 0$	115
6.18	Comparaison de la vorticité perturbée ω' à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $y = 0$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.	116
6.19	Comparaison des champs de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.	117
6.20	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.	117
6.21	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ pour différentes valeurs de n_s	118
6.22	Comparaison des champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$ obtenus par PLMNA [*] en fonction du nombre de points du domaine source retenus $1/n_s$ dans les directions x et y	119
6.23	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ pour différents nombres de Mach M	120
6.24	Puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} à travers un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ en fonction du nombre de Mach M	121
6.25	Champs de vorticité hydrodynamiques dans la configuration cma pour les différents rapports de température.	123
6.26	Comparaison de la vorticité et de la masse volumique pour $T_1/T_2 = 1,2$	125
6.27	Comparaison de la pression hydrodynamique pour $T_1/T_2 = 1,2$	126
6.28	Comparaison de la vorticité et de la masse volumique pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$	127
6.29	Comparaison de la pression en $y = 0$ pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$	128
6.30	Champ moyen de masse volumique $\bar{\rho}$ des formulations EEL [*] pour la couche de mélange anisotherme dans un rapport $T_1/T_2 = 1,2$	129
6.31	Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration cmaac pour un rapport $T_1/T_2 = 1,2$	130
6.32	Comparaison des champs de pression acoustique en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$	131

6.33	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$	132
6.34	Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration cmaac pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$	133
6.35	Comparaison des champs de pression acoustique en $x/\delta_{\omega_0} = 200, y/\delta_{\omega_0} = 300$ et $y/\delta_{\omega_0} = -300$	134
6.36	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p pour différents rapports de température et à $M = 0,25$ avec la formulation EEL* + Sp	135
6.37	Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p , lieu d'appariement, pour différents rapports de température et à $M = 0,25$ avec la formulation EEL* + SE	136
6.38	Puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} à travers un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p en fonction du nombre de Mach M et pour différents rapports de température avec la formulation EEL* + SE	136
6.39	Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration cmaac pour un rapport $T_1/T_2 = 3,0$	138
B.1	Maillage acoustique dans les configurations cmi2ac1 et cmi2ac2	147
B.2	Zone éponge σ de la configuration cmi2ac1 et ses profils en $y = 0, x = 0$ et $x = 600\delta_{\omega_0}$	149
B.3	Fonction de pondération F_{xy} de la configuration cmi2ac1 et ses profils en $y = 0$ et en $x = 200\delta_{\omega_0}$	150
B.4	Fonction de pondération F_{xy} de la configuration cmi2ac2 et son profil en $y = 0$	150
C.1	Zone éponge σ de la configuration cmaac et ses profils en $y = 0, x = 0$ et $x = 600\delta_{\omega_0}$	153
C.2	Fonction de pondération F_{xy} de la configuration cmaac et ses profils en $y = 0$ et en $x = 200\delta_{\omega_0}$	154

Liste des tableaux

3.1	Coefficients des schémas DRP décentrés.	50
3.2	Coefficients des filtres employés.	51
4.1	Récapitulatif des grandeurs et relations de passage des différentes formulations.	60
5.1	Paramètres de la configuration ck1	70
5.2	Paramètres des configurations ck2 et ck3	79
5.3	Paramètres de la simulation <code>quasincompact3d</code> pour le calcul des deux tourbillons corotatifs.	92
5.4	Paramètres de la configuration cv1	95
6.1	Configuration des calculs cmi1 et cmi2	104
6.2	Paramètres des calculs PLMNA* pour la vérification de l'influence de n_s sur la solution acoustique.	119
6.3	Configuration des calculs cma	122
B.1	Paramètres des configurations cmi2ac1 et cmi2ac2	148
C.1	Paramètres de la configuration cmaac	152

Nomenclature

x_i	coordonnées cartésiennes, $i = (1, 2, 3)$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$
ρ	masse volumique
u_i	champ de vitesse
p	pression
T	température
τ_{ij}	tenseur des contraintes visqueuses
T_{ij}	tenseur de Lighthill
ρ_∞	masse volumique d'un volume de fluide dans un état de référence
$u_{i\infty}$	champ de vitesse d'un volume de fluide dans un état de référence
p_∞	pression d'un volume de fluide dans un état de référence
ρ_0	masse volumique hydrodynamique
u_{i0}	champ de vitesse hydrodynamique
p_0	pression thermodynamique
p_1	pression hydrodynamique
T_0	température hydrodynamique
τ_{ij0}	tenseur des contraintes visqueuses hydrodynamique
γ	coefficient de compressibilité adiabatique
Re	Nombre de Reynolds
Pr	Nombre de Prandtl
c_p	Capacité thermique massique
λ	Conductivité thermique
ρE	énergie totale volumique
ρe	énergie interne volumique
μ	viscosité dynamique

exposant *	grandeurs dimensionnelles
indice ref_h	grandeurs de référence de <code>quasincompact3d</code>
indice ref_a	grandeurs de référence des propagateurs acoustiques
k_x, k_y, k_z	nombres d'ondes
L_x, L_y, L_z	dimension du domaine de calcul de la simulation <code>quasincompact3d</code>
k'_x, k'_y, k'_z	nombres d'ondes modifiés
N_x, N_y	nombres de points de la simulation hydrodynamique <code>quasincompact3d</code>
$\Delta x, \Delta y$	pas d'espace du domaine de simulation <code>quasincompact3d</code>
Δt ou Δt_h	pas de temps de la simulation <code>quasincompact3d</code>
N_{x_a}, N_{y_a}	nombres de points de simulation des propagateurs acoustiques
L_{x_a}, L_{y_a}	dimensions des domaines de simulation acoustiques
$\Delta x_a, \Delta y_a$	pas d'espace des domaines de simulation acoustiques
Δt_a	pas de temps des propagateurs acoustiques
r_{cut}	paramètre de la troncature du domaine hydrodynamique dans les propagateurs acoustiques
$\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$	coefficients de filtrage des simulations acoustiques

Abréviations

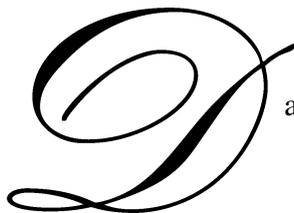
NS	Navier-Stokes
CFD	Computational Fluid Dynamics
CAA	Computational Aero Acoustics
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large Eddy Simulation
RANS	Reynolds-Averaged Navier-Stokes
LMNA	Low Mach Number Approximation
LO-LMNA	Low Order Low Mach Number Approximation
EEL	Équations d'Euler Linéarisées
PLMNA	Perturbed Low Mach Number Approximation
CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
RK3	Runge-Kutta d'ordre trois
FFT	Fast Fourier Transform
OS	Orr-Sommerfeld

EIF Expansion about Incompressible Flow
MPV Multiple Pressure Variables
APE Acoustic Perturbation Equations
PCE Perturbed Compressible Equations
LPCE Linearized Perturbed Compressible Equations
PLMNA* **PLMNA** avec filtrage de Seo et Moon
RK4 Runge-Kutta d'ordre quatre
DRP Dispersion Relation Preservation
EEL* **EEL** avec filtrage de Seo et Moon

Introduction

It's one thing to know that the Navier-Stokes equation describes the motion of a fluid, and quite another to know, for instance, that thin boundary layers form on the upstream side, but not on the downstream side, of a large rigid sphere falling through fluid. Ability to predict what will happen in a given situation, in broad outline if not in numerical detail, is an essential part of knowledge, and, as we shall see, accurate prediction of flow properties demands much more than a mere knowledge of the governing equations.

Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*, p.171



Dans la mythologie grecque, le titan Prométhée aurait donné le feu et la métallurgie aux hommes. Cette image du feu peut être vue comme le feu de la connaissance ou comme le génie créateur qui anime l'humanité. Ainsi depuis que l'homme accumule et transmet les connaissances du monde qui l'entoure, il enrichit également ce dernier de nouvelles inventions. Certaines inventions marquent des tournants majeurs dans l'histoire. La fin du XVIII^{ème} siècle voit l'avènement de la machine à vapeur. C'est la naissance de la thermodynamique et d'une civilisation thermo-industrielle. Tous les secteurs d'activité bénéficient de ce bouleversement que ce soit l'agriculture, la métallurgie, le textile ou bien-sûr le transport avec l'invention de bateaux et de trains à vapeur. L'exploitation des énergies fossiles comme le charbon devient cruciale pour nourrir ces nouvelles machines. Les premiers inconvénients apparaissent alors comme l'assombrissement du ciel des cités industrielles. La combustion du charbon est la source de chaleur nécessaire à ces machines « sifflantes » (en référence au sifflement caractéristique des locomotives à vapeur) et elle s'accompagne d'une

épaisse fumée noire. Le manque d'ensoleillement a une conséquence directe sur la santé humaine puisqu'il entraîne une carence en vitamine D et ainsi une recrudescence de cas de rachitisme. Il apparaît ici qu'une grande évolution technologique peut s'accompagner de nuisances importantes.

Les progrès technologiques accompagnant la seconde révolution industrielle sont très nombreux et ce dans des domaines variés. S'agissant du transport, l'invention du moteur à explosion au début du XIX^{ème} siècle bouscule le quotidien. Cette seconde révolution débute vers 1880 avec la domestication de nouvelles sources d'énergie comme le pétrole et l'électricité. Les deux guerres mondiales du XX^{ème} siècle apportent leur lot de morts et de désolation mais également de grandes avancées comme le développement de l'aviation. À travers le monde, les automobiles envahissent les villes, les trains troublent la tranquillité des campagnes, les «géants des mers», cargos porte-conteneurs, méthaniers, pétroliers sillonnent les océans : l'activité humaine croît, l'activité humaine se voit, l'activité humaine s'entend.

Le début des années 1970 sonne la troisième grande révolution voyant l'avènement de l'informatique et de l'électronique. C'est l'ère de la communication, de la miniaturisation ainsi que de la conquête de nouveaux espaces comme le bien nommé espace. Le transport humain sera interplanétaire avec la création de navettes spatiales et de fusées. Cependant, de nouvelles problématiques apparaissent au niveau mondial comme la préservation de l'environnement et la lutte contre le réchauffement climatique. De grandes réflexions sont dès lors menées sur la pollution engendrée par l'activité humaine et ses répercussions sur la santé ainsi que sur l'état de différents écosystèmes. Parmi ces pollutions, il y a les nuisances sonores.

Ces révolutions industrielles ont également entraîné de grands bouleversement au niveau démographique. L'espérance de vie s'est allongée, les campagnes ont été désertées au profit des villes (aujourd'hui, 50% de la population mondiale vit en ville, ce taux était inférieur à 30% en 1950 et est estimé à 60% en 2030 selon les Nations Unies) et depuis peu 7 milliard d'êtres humains coexistent sur Terre. Cela a pour conséquence de densifier les réseaux de transports urbains et interurbains causant toujours plus de gêne auditive. Parmi les moyens de transport les plus bruyants, l'avion est roi. Réduire ses nuisances sonores nécessite une pleine compréhension des mécanismes générateurs de cette pollution.

1.1 L'aéroacoustique

Dans l'éventualité où les moteurs d'avion seraient parfaitement silencieux, l'avion ne serait pas silencieux pour autant. En effet, les jets d'air en sortie de turbine sont eux-mêmes une source importante de bruit. Dans les années 1950, Sir Michael James Lighthill s'intéresse à ces phénomènes et publie deux articles majeurs [62, 63] considérés depuis comme fondateurs d'une nouvelle discipline : l'aéroacoustique. L'aéroacoustique consiste à étudier, comprendre et

prédire le bruit associé aux fluctuations aérodynamiques. Certains auteurs tel Fedorchenko [34] citent cependant les travaux de Blokhintsev en 1946 [14] comme précurseurs. Goldstein [46] évoque même la théorie de Gutin [48] développée en 1936.

1.1.1 L'analogie de Lighthill

Lorsque Sir Lighthill s'attaque au problème du son d'origine aérodynamique il n'existe pas de procédure générale permettant d'évaluer l'intensité du son produit en fonction de paramètres détaillés d'un écoulement de fluide. L'aviation est en plein essor et la question du bruit causé par les aéronefs devient alors cruciale. Il s'agit de comprendre comment s'opère la transformation de l'énergie cinétique des mouvements de cisaillement de l'écoulement en énergie acoustique. Il développe sa théorie dans [62] pour estimer le son produit par les fluctuations d'un écoulement d'air subsonique (dont la vitesse est inférieure à la célérité des ondes acoustiques). Ainsi, la question de la transition supersonique et des émissions acoustiques hautes fréquences associées (ondes de choc) est exclue. Il considère alors un écoulement de fluide dans une région limitée d'un large volume de fluide au repos. L'analogie consiste ensuite à faire apparaître une équation d'onde, équation classique des problèmes de propagation acoustique dans un milieu homogène au repos, dont les sources sont issues des fluctuations aérodynamiques de la portion de domaine constituant l'écoulement.

L'équation de propagation

Pour un fluide newtonien, en négligeant la relaxation moléculaire et les effets de diffusion, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (1.2)$$

où ρ est la densité, u_i la vitesse et p la pression (ici comme par la suite, la notation d'Einstein est utilisée à savoir que la répétition d'un indice i signifie une sommation sur $i = 1, 2, 3$). La seule contrainte exercée sur un élément de fluide apparaît dans le terme de droite de l'équation (1.2) comme la composante normale de la pression. Il est classique en acoustique de considérer le son comme les oscillations de faible amplitude d'un fluide compressible par rapport à un état au repos. Les équations précédentes sont alors linéarisées en développant

$$p = p_\infty + p' \quad , \quad u_i = u_{i\infty} + u' \quad , \quad \rho = \rho_\infty + \rho'$$

où les quantités d'indice ∞ expriment l'état au repos. Négliger la diffusion moléculaire implique que l'entropie d'un élément de fluide reste constante et par conséquent que la pression ne dépende que de la densité. Il existe alors une relation différentielle $dp = a^2 d\rho$ où a est la célérité locale du son. Linéarisons maintenant les équations (1.1) et (1.2) autour d'un état au repos pour lequel le fluide a une densité uniforme ρ_∞ , une vitesse du son a_∞ et une vitesse u_{i_∞} nulle :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_\infty \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

$$\rho_\infty \frac{\partial u'_i}{\partial t} - a_\infty^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (1.4)$$

En combinant (1.3) et (1.4) est obtenue l'équation de propagation de d'Alembert :

$$\boxed{\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_\infty^2 \nabla^2 \right] \rho' = 0} \quad (1.5)$$

où $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x_i^2$.

L'équation de Lighthill

Considérons à présent les expressions exactes des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un fluide newtonien visqueux sans apport extérieur de masse ni action de forces extérieures, soit respectivement

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_i u_j - \tau_{ij})}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0 \quad (1.7)$$

avec

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right)$$

le tenseur des contraintes visqueuses, μ la viscosité et δ_{ij} le symbole de Kronecker. Le point crucial de l'analogie consiste à exprimer ces équations sous la forme d'équations de propagations acoustiques linéaires semblables aux équations (1.3) et (1.4) dans un milieu au repos soumis à des contraintes fluctuantes extérieures. Un terme de correction $a_\infty^2 \partial \rho / \partial x_i$, une « contrainte acoustique » comme le nomme Crighton [27], est alors ajouté de part et d'autre de l'équation de quantité de mouvement (1.7). S'en suit une linéarisation et les perturbations $\rho' = \rho - \rho_\infty$ et $p' = p - p_\infty$ sont interprétées comme les différences entre les valeurs locale de ρ et p et les valeurs de ces quantités dans le fluide de référence au repos. Reste à combiner (1.6) et (1.7) et

ainsi est obtenue l'équation de propagation

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - a_\infty^2 \nabla^2 \rho' = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.8)$$

appelée *équation de Lighthill*. T_{ij} est appelé le *tenseur de Lighthill*

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (p' - a_\infty^2 \rho') \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (1.9)$$

L'équation de Lighthill (1.8) montre la propagation acoustique dans un milieu au repos d'une source quadrupolaire $\partial^2 T_{ij} / \partial x_i \partial x_j$ en l'absence de paroi solide. Ainsi, la connaissance complète du tenseur T_{ij} contenant tous les effets non linéaires permet de calculer le champ acoustique résultant. Ce terme contient tous les effets de l'écoulement du fluide sur le champ acoustique comme la convection, la réfraction, la diffraction, la dissipation. Malheureusement, T_{ij} dépend de ρ qui est une inconnue du problème. Il est donc nécessaire de simplifier le problème pour le résoudre d'où un des inconvénients majeurs de cette formulation. Elle a toutefois permis à Lighthill de faire les premières estimations quantitatives de l'intensité du son produit par des jets d'air fluctuants concordant très bien avec les mesures expérimentales. Pour cela, il a d'abord fait une estimation grossière des grandeurs contenues dans le terme source.

Le terme $p' - a_\infty^2 \rho'$ rend compte de la variation d'entropie au cours de la propagation acoustique (une partie de l'énergie acoustique est transformée en énergie thermique). Ce phénomène a généralement très peu d'effet tout comme les effets de viscosité du terme τ_{ij} sauf sur de très grandes distances comparées aux longueurs d'ondes en jeu. Alors pour un jet non chauffé pour lequel les seules variations thermiques sont dues aux frictions et aux accélérations du fluide, seules les contraintes de Reynolds $\rho u_i u_j$ contribuent au tenseur de Lighthill. À faible nombre de Mach et si la température du jet ne diffère pas sensiblement du milieu extérieur, ce tenseur peut se réduire à

$$T_{ij} \approx \rho_\infty u_i u_j \quad (1.10)$$

Des solutions de (1.8) peuvent alors être calculées à l'aide de fonctions de Green adaptées évaluées au temps retardé comme détaillé dans [46].

Finalement, Sir Lighthill parvient à montrer que la puissance acoustique totale \mathcal{P}_{ac}^T est proportionnelle à une vitesse caractéristique du jet à la puissance huit :

$$\mathcal{P}_{ac}^T \propto \rho_\infty U^8 a_\infty^{-5} l^2 \quad (1.11)$$

où l est une dimension caractéristique du jet (par exemple son diamètre en sortie de tuyère).

1.1.2 L'analogie de Lilley

Dans l'analogie de Lighthill, tous les effets de l'écoulement sur la propagation acoustique sont contenus dans le terme source. Cela peut être contraignant surtout lorsqu'il s'avère nécessaire de simplifier le terme source car alors ces effets peuvent être totalement négligés. Une idée développée par Phillips [86] a été de suivre la même approche que Lighthill mais en faisant apparaître un opérateur de propagation acoustique dans un milieu en mouvement. Ainsi les effets de l'écoulement se retrouvent contenus dans l'opérateur de propagation et non plus dans le terme source. Phillips obtient alors l'équation de propagation

$$\frac{D^2\Pi}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} a^2 \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial u_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{D}{Dt} \frac{1}{c_p} \frac{Ds}{Dt} \quad (1.12)$$

où

$$\Pi = \frac{1}{\gamma} \ln \left(\frac{p'}{p_0} \right), \quad (1.13)$$

p_0 étant une constante de référence pour la pression, $\gamma = c_p/c_v$ est le coefficient de compressibilité adiabatique, c_p et c_v les capacités thermiques massiques à pression et volume constants respectivement, s l'entropie. L'opérateur

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad (1.14)$$

est la dérivée convective. Les effets de convection sont donc pris en compte dans le terme de gauche de l'équation de Phillips (1.12) mais pas les effets de réfraction. Le terme de droite est un terme source similaire à celui de Lighthill avec respectivement un terme de fluctuations de vitesse, un terme visqueux et un terme entropique.

Plus tard, Lilley [64, 65] cherche à généraliser l'équation de Phillips afin que l'opérateur de propagation contienne également les effets de réfraction de l'écoulement moyen sur les fluctuations acoustiques. Il obtient alors l'équation de propagation

$$\frac{D}{Dt} \left[\frac{D^2\Pi}{Dt^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^2 \frac{\partial\Pi}{\partial x_j} \right) \right] + 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a^2 \frac{\partial\Pi}{\partial x_j} \right) = -2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \Psi \quad (1.15)$$

où

$$\Psi = 2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} \right) - \frac{D}{Dt} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) + \frac{D^2}{Dt^2} \left(\frac{1}{c_p} \frac{Ds}{Dt} \right) \quad (1.16)$$

représente les effets des fluctuations d'entropie et de viscosité. À présent le troisième terme de gauche de (1.15) contient les effets de réfraction de l'écoulement sur le champ acoustique. Un problème subsiste, les membres de gauche de cette équation mettent en jeu la vitesse totale $\mathbf{u} = (u_i, u_j, u_k)$ et pas uniquement l'écoulement moyen. Lilley propose de la linéariser pour

simplifier en excluant les produits de grandeurs fluctuantes dans le membre de gauche et en considérant des grandeurs moyennes $U_i = \overline{u_i}$ et $\overline{a^2}$. Les quantités acoustiques étant très faibles, il est alors raisonnable de négliger les produits de grandeurs fluctuantes comparés aux produits de grandeurs fluctuantes avec l'écoulement moyen. L'opérateur D/Dt est alors remplacé par

$$\frac{\overline{D}}{\overline{Dt}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + U_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

et l'équation (1.15) devient

$$\frac{\overline{D}}{\overline{Dt}} \left[\frac{\overline{D}^2 \Pi}{\overline{Dt}^2} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{a^2} \partial \Pi}{\partial x_j} \right) \right] + 2 \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\overline{a^2} \partial \Pi}{\partial x_j} \right) = -2 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} . \quad (1.18)$$

Les termes de viscosités et d'entropie ont été négligés dans (1.18) ce qui est valable pour des faibles nombres de Mach et des nombres de Reynolds suffisamment élevés. Selon Doak [31] qui analyse exhaustivement l'équation de Phillips et diverses analogies, les équations (1.12) et (1.18) peuvent être qualifiées de théories à « vraie source » car les effets de l'écoulement sur le champ acoustique sont clairement dissociés du membre de droite. Il est alors vraiment possible de calculer le terme source séparément. De plus, il affirme avec force que de toutes les analogies disponibles, seule celle de Lilley permet de décrire complètement les effets de convection et de réfraction. Enfin Lilley [65] montre que le rayonnement acoustique de jets fortement chauffés ne suit plus une loi en U^8 lorsque le nombre de Mach est réduit comme calculé par Lighthill dans le cas de jets froids mais évolue progressivement vers une loi en U^4 pour un nombre de Mach suffisamment faible.

1.1.3 L'analogie de Powell

La théorie de Lighthill sera modifiée et complétée par de nombreux auteurs notamment pour prendre en compte le rayonnement dû à des surfaces solides présentes dans l'écoulement. Citons par exemple l'analogie de Curle [29] ou de Ffowcs-Williams et Hawkins [35]. Powell envisage le problème du son d'origine aérodynamique autrement. Il décide de lier les aspects aérodynamiques et acoustiques en s'intéressant à la vorticité dans un écoulement légèrement compressible. Cette approche sera nommée « *Theory of Vortex Sound* » [87] ou « théorie de l'origine vorticale du son ». La vorticité appar it alors élégamment comme le moteur de l'écoulement dans son ensemble, à la fois sa partie hydrodynamique et sa partie acoustique. Howe [53] définie la théorie du vortex sound comme « *une branche de la mécanique des fluides qui s'intéresse à la conversion de l'énergie cinétique hydrodynamique (rotationnelle) en perturbations*

longitudinales que l'on nomme son. [...] C'est une part du sujet plus général qu'est l'origine aérodynamique du son ».

La formulation de Powell consiste à écrire une équation de propagation acoustique

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = S_{\text{Pow}} \quad (1.19)$$

dont la source S_{Pow} dépend de la vorticité $\boldsymbol{\omega}$. Cette dernière est par définition

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \wedge \mathbf{u} \quad . \quad (1.20)$$

En considérant des actions isentropiques sur le fluide, il existe une relation liant la pression à la masse volumique comme précédemment :

$$\begin{aligned} \nabla p &= \nabla [a^2(\rho - \rho_\infty)] \\ &\simeq a_\infty^2 \nabla \rho \quad . \end{aligned} \quad (1.21)$$

Le terme de gauche de l'équation de propagation (1.19) peut alors s'écrire :

$$\nabla^2 p - \left(\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = \nabla \cdot \nabla p - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad . \quad (1.22)$$

Le deuxième terme de droite de (1.22) est ensuite exprimé grâce à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.23)$$

et ainsi

$$\begin{aligned} \nabla^2 p - \left(\frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) &= \nabla \cdot \nabla p + \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \cdot (\rho \mathbf{u})] = \nabla \cdot \nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} \right) \\ &= \nabla \cdot \left(\nabla p + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) \quad . \end{aligned} \quad (1.24)$$

Pour un fluide non visqueux ou si la viscosité est négligeable comme pour des nombres de Reynolds suffisamment importants, l'équation de la quantité de mouvement peut s'écrire

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad . \quad (1.25)$$

  l'aide de l'identité vectorielle

$$\nabla \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\nabla \wedge \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} \quad , \quad (1.26)$$

l'équation (1.25) devient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathfrak{L} + \nabla \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (1.27)$$

où

$$\mathfrak{L} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u} \quad (1.28)$$

est le vecteur de Lamb. Remplaçons maintenant le dernier terme de droite de (1.24) à l'aide de (1.27)

$$\nabla^2 p - \left(\frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right) = -\nabla \cdot \left(\rho \mathfrak{L} + \nabla \frac{1}{2} \rho \mathbf{u}^2 - \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \nabla \rho \right) \quad (1.29)$$

Powell montre alors par une analyse dimensionnelle que pour des écoulements à faible nombre de Mach, les deux derniers membres du terme source de (1.29) sont négligeables comparés aux deux premiers. Ainsi, en considérant des petites perturbations afin de linéariser, il obtient

$$\nabla^2 p' - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = -\nabla \cdot \left(\rho_\infty \mathfrak{L} + \nabla \frac{1}{2} \rho_\infty |\mathbf{u}|^2 \right) \quad (1.30)$$

Cette formulation montre des sources de fluctuations de pression quadrupolaires. Elle est en accord avec la théorie de Lighthill. L'intérêt majeur de cette formulation est que la prise en compte de surfaces dans l'écoulement est simplifiée.

1.1.4 Prise en compte des effets de température

Par soucis de simplification, la masse volumique a souvent été considérée comme constante, égale à ρ_∞ , dans les analogies vues précédemment or dans la réalité ceci est rarement le cas notamment dans les jets en sortie de turbine où la température est plusieurs dizaines de fois supérieure à la température ambiante (en degrés Celsius). Lorsque la température augmente, la masse volumique ρ diminue ce qui laisse présager au vu de la forme du terme source principal de l'équation de Lighthill (1.8) que le niveau acoustique diminue car $\rho u_i u_j$ décroît. Les données expérimentales contredisent cette intuition. En effet, si un jet chauffé est bien plus silencieux qu'un jet froid pour des vitesses $U/a_\infty > 0,7$ [36], en deçà de cette valeur l'intensité acoustique croît progressivement avec la température. Fisher *et al.* [36] tout comme Morfey [76] ont alors essayé de mettre en évidence une contribution supplémentaire au terme source de (1.8) prenant en compte l'évolution de la masse volumique.

1.1.4.1 La décomposition de Morfey, Michalke-Michel

Morfey [76] considère l'équation de Lighthill exprimée pour la pression :

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = \underbrace{\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\rho - \frac{p}{a_\infty^2} \right)}_{\textcircled{2}} = q \quad , \quad (1.31)$$

le terme $\textcircled{1}$ est le tenseur de Reynolds. Il nomme le terme $\textcircled{2}$ « l'excès de masse volumique ». Il applique un développement à ce terme. Il apparaît alors qu'une partie de ce développement annule le tenseur de Reynolds. Morfey se restreint à une étude qualitative en ordres de grandeurs du rayonnement acoustique des jets chauds. Michalke et Michel [73] généralisent l'approche de Morfey. Leur développement du terme source de (1.31) devient :

$$q_{\text{Mich}} = \underbrace{\rho_\infty \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\left(1 + \frac{p'}{\rho_\infty a_\infty^2} \right) u_i u_j \right]}_{\textcircled{3}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[p' \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right) \right]}_{\textcircled{4}} - \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \left[\left(1 - \frac{\rho_\infty}{\rho} \right) p' \right]}_{\textcircled{5}} + O(a^{-4} \text{ ou } a_\infty^{-2} a^{-4}) \quad (1.32)$$

où $\textcircled{3}$ et $\textcircled{5}$ sont des termes quadrupolaires et $\textcircled{4}$ est dipolaire. Les termes $O()$ sont des termes d'ordre supérieur négligeables et $p' = p - p_\infty$.

Une analyse en ordres de grandeurs montre que le terme $\textcircled{5}$ est négligeable comparé aux deux autres et pour les jets chauds, le rayonnement est dominé par le terme dipolaire $\textcircled{4}$ d'où une loi en U^6 pour la puissance acoustique. Morfey *et al.* [77] soulignent que ce résultat contredit les mesures de Fisher *et al.* [36] qui avaient trouvé un rayonnement monopolaire en U^4 . Toutefois, ils montrent qu'en étendant la gamme d'évolution de température considérée, le caractère dipolaire de la contribution devient indiscutable, surtout pour des faibles vitesses d'écoulement où cette contribution est la plus importante.

1.1.4.2 La décomposition de Mani

Mani [67] utilise une équation proche de l'équation de Lilley exprimée pour la pression sous la forme

$$\frac{1}{a_\infty^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} - \nabla^2 p - \underbrace{2\rho \frac{dU}{dy} \frac{\partial v}{\partial x}}_{\textcircled{1}} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dy} \frac{\partial p}{\partial y} = \underbrace{\rho \frac{\partial^2 u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{\textcircled{2}} = q \quad (1.33)$$

où $U = U(y)$ est la vitesse moyenne cisailée de l'écoulement. Il choisit cette approche car comme vu précédemment, la source q ne contient pas les effets de l'écoulement. Ceux-ci sont

contenus dans le terme de gauche où ❶ est couramment appelé « *bruit de cisaillement* » tandis que le terme de droite ❷ est nommé « *bruit propre* ». Ici v est la composante de la vitesse suivant $x_2 = y$. Il développe ensuite le terme source en considérant une masse volumique variable $\rho = \rho(y)$ pour un jet plan et obtient :

$$q_{\text{Mani}} = \underbrace{\frac{\partial^2 \rho u_i u_j}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{❸}} - 2 \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dy} \right) \frac{\partial u_j v}{\partial x_i}}_{\text{❹}} - \underbrace{\left(\frac{d^2 \rho}{dy^2} \right) v^2}_{\text{❺}} \quad . \quad (1.34)$$

De manière identique à Morfey [76] ou Michalke et Michel, il apparaît trois contributions au terme source. Le terme ❸ est une source quadrupolaire, ❹ dipolaire et ❺ est monopolaire. De nombreuses comparaisons sont effectuées avec des données expérimentales et montrent un très bon accord pour différents rapports de température et différentes vitesses. Ribner [91] effectue une analyse en ordre de grandeurs de ces contributions et montre que le terme monopolaire est négligeable devant les deux autres. Ainsi, tout comme pour l'approche précédemment vue de Michalke-Michel, la puissance acoustique rayonnée suit une loi en U^6 dans le cas des jets chauffés.

Enfin, Mani remarque que les contributions supplémentaires dues aux gradients de masse volumique devraient avoir pour conséquence, à vitesse d'écoulement fixée, de produire plus de rayonnement basses fréquences en aval du jet et de rayonnement hautes fréquences près de la sortie de tuyère. Expérimentalement, le spectre du bruit rayonné « glisse » vers les basses fréquences. Pour Mani, ceci est un effet de propagation. Enfin, il souligne que le rayonnement à 90° du jet n'est plus un point fiable de comparaison. En effet, pour un jet froid, ce point n'est pas influencé par les effets de masquage or ce n'est plus le cas pour les jets chaud à cause des inhomogénéités de masse volumique.

1.1.4.3 Les effets du nombre de Reynolds

L'excellent accord entre les deux approches précédentes et les données expérimentales semble établir avec certitude le mécanisme de génération du bruit de jets comme combinaison de sources quadrupolaires et de sources dipolaires dues elles aux effets de températures. Cependant en 2003, Viswanathan [111] remet totalement en question la qualité des mesures effectuées durant les trente années précédentes. Ce qui était interprété comme une contribution dipolaire évidente pour des jets à faible nombre de Mach ne le convainc pas puisqu'il considère que ces écoulements sont souvent les plus pollués par l'environnement de mesure. Il cherche alors une autre explication notamment au changement de contenu spectral du rayonnement acoustique. Il émet l'hypothèse que la contribution dipolaire n'existe pas mais que ce qui est observé est en fait un effet du nombre de Reynolds [112]. Il montre d'ailleurs que pour des données non sujettes à cette « pollution » de l'effet du nombre de Reynolds il n'y a pas de rayonnement en U^6

mais bien un rayonnement en U^8 . Il établit un nombre de Reynolds critique d'environ 400 000 en dessous duquel l'effet du nombre de Reynolds est sensible.

La question de cet effet de Reynolds est depuis devenue un sujet de controverse et deux écoles s'affrontent sans que le débat ne puisse être définitivement tranché. La question des effets de température sur le rayonnement acoustique des jets est donc un sujet d'actualité.

1.2 L'aéroacoustique numérique

La résolution de problèmes de mécanique des fluides est fortement contrainte par le fait que les équations décrivant le comportement des fluides, les équations de Navier-Stokes (NS), forment un problème non linéaire pour lequel il n'existe pas à l'heure actuelle de solution générale. La recherche de cette solution fait d'ailleurs partie des sept défis mathématiques du prix du millénaire posés en l'an 2000 par le Clay Mathematical Institute. Les progrès de l'informatique permettent néanmoins de mettre en œuvre des programmes de calcul afin d'estimer des solutions approchées de certaines configurations. Voici en quoi consiste le domaine du calcul numérique en dynamique des fluides plus souvent désigné par le terme anglais Computational Fluid Dynamics (CFD). John Von Neumann est souvent considéré comme le père du calcul numérique [50]. Il a entre autres choses imaginé les premières architectures de calculateur [4] pendant la seconde guerre mondiale. Il ne faut cependant pas oublier les travaux de Shannon et surtout Turing qui ont théorisé le calcul informatique [3] dans les années 1930.

L'aéroacoustique numérique ou Computational Aero Acoustics (CAA) est une branche de la CFD. Les techniques de cette dernière sont employées en CAA pour calculer la génération de son par des phénomènes aérodynamiques. En raison des grandes différences d'échelles rencontrées en CAA, des techniques propres ont dû être développées. La figure 1.1 illustre bien ce problème d'échelles dans le cadre du bruit de jet. Les structures turbulentes de l'écoulement interagissent et créent un rayonnement acoustique comme les théories décrites précédemment le prédisent. Les dimensions caractéristiques des ondes acoustiques peuvent être de plusieurs ordres de grandeurs supérieures aux échelles turbulentes. Il est alors fréquemment nécessaire de simplifier le problème car les coûts en ressources informatiques peuvent devenir irréalistes.

Un jet d'air turbulent peut être divisé en trois zones : une zone dite de mélange, une zone de transition et une zone où le jet est pleinement développé. La présente étude s'attache aux phénomènes existant dans la couche de mélange. Là, des enroulements tourbillonnaires se forment et sont responsables en grande partie du bruit de jet pour des vitesses subsoniques. Les ondes acoustiques sont alors basses fréquences et correspondent donc à des grandes longueurs d'onde. Il est ici très important d'utiliser des méthodes de calcul suffisamment fines pour décrire les effets tourbillonnaires (dont la taille est de l'ordre du millimètre), ce degré de précision s'avérant lui inutile pour des ondes acoustiques basses fréquences (de l'ordre du mètre). Le choix dans

ces techniques de calcul est vaste ; la figure 1.2 en recense les principales. Il est néanmoins possible de les classer en deux grandes catégories : les méthodes dites « directes » et les méthodes « hybrides » ou de « splitting ».

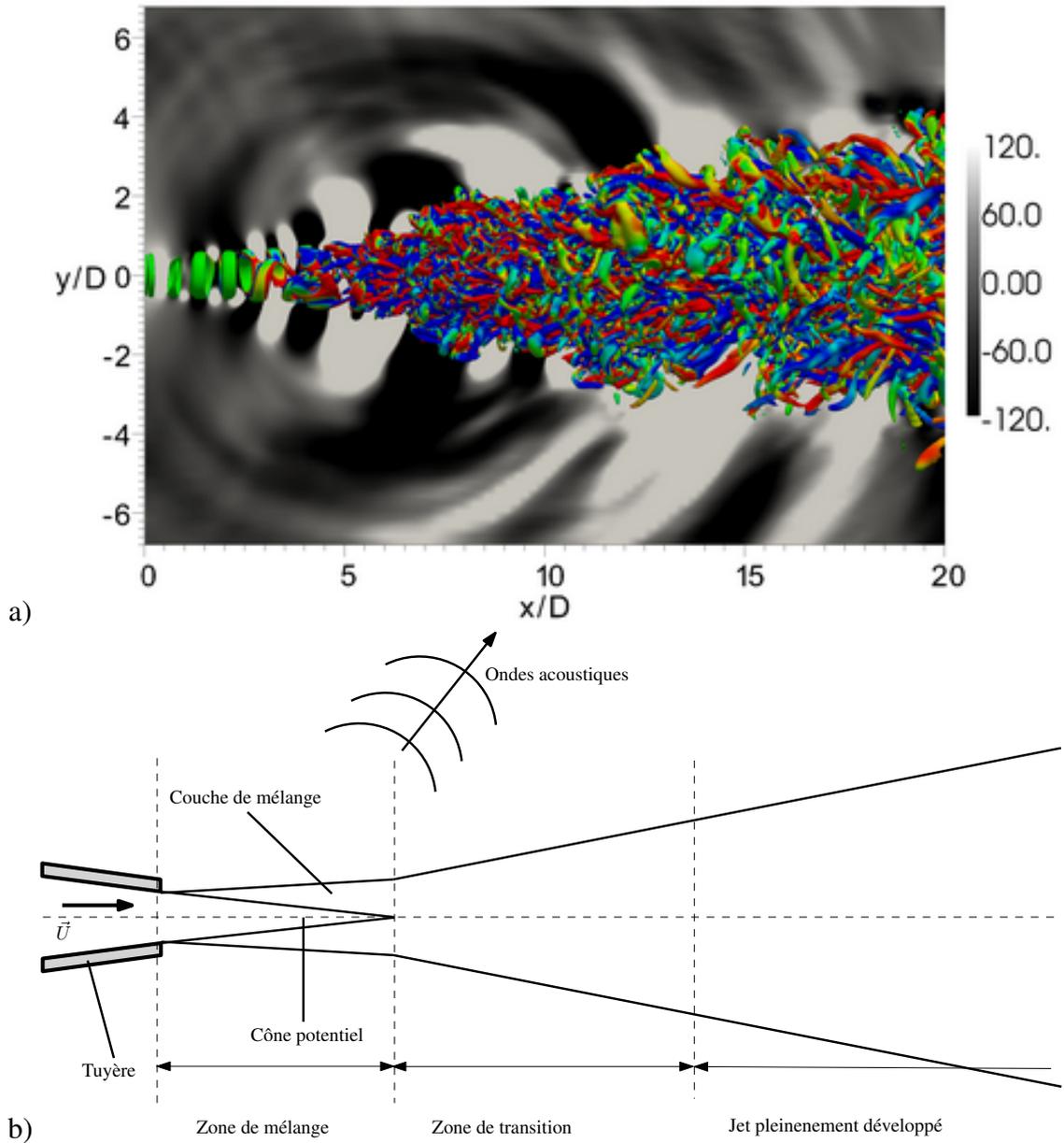


FIG. 1.1: Structure d'un jet rond en sortie de tuyère : a) calcul LES extrait de [30], b) description schématique.

1.2.1 Les méthodes directes

Par méthode directe, il est entendu que le champ acoustique est obtenu directement par résolution des équations de NS compressibles instationnaires. Les grandeurs aérodynamiques et

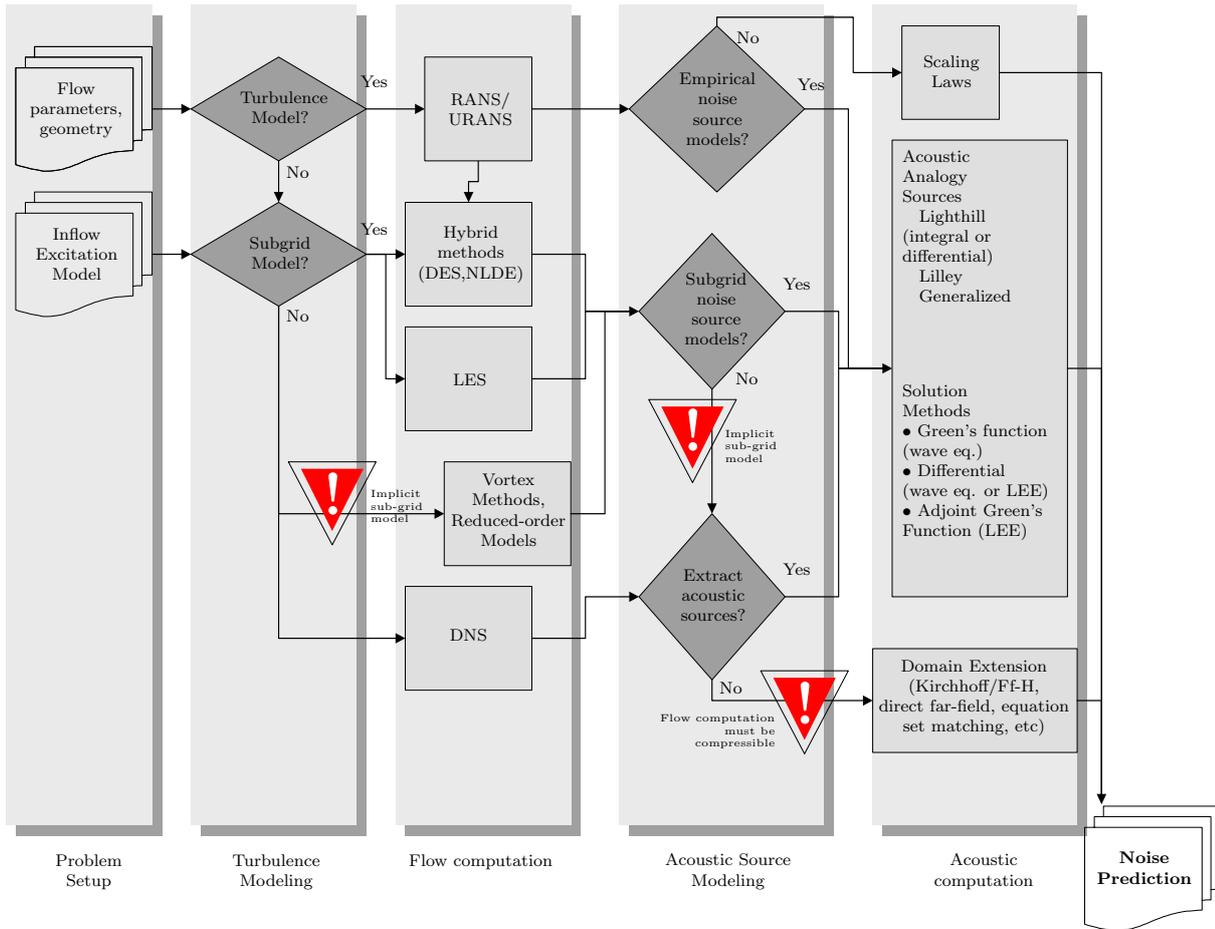


FIG. 1.2: Une hiérarchie de diverses méthodes numériques employées en aéroacoustique, extraite de [24].

acoustiques sont calculées simultanément. La simulation numérique directe ou Direct Numerical Simulation (DNS) nécessite ainsi une résolution spatiale et temporelle suffisamment fine pour capturer toutes les échelles de l'écoulement, des échelles turbulentes aux échelles acoustiques. De nombreux calculs DNS ont été effectués depuis le calcul d'un jet par Freund [40]. Cette méthode reste cependant cantonnée à des configurations académiques simples et pour des nombres de Reynolds faibles du fait de la puissance informatique requise pour de telles simulations. En supposant que la puissance des calculateurs est au mieux multipliée par cinq tous les cinq ans, Spalart [102] a estimé en 2000 que la DNS ne serait prête à être employée pour des écoulements réalistes (comme celui autour d'une automobile ou d'un avion de ligne) qu'en l'an 2080.

Une alternative est de ne pas résoudre toutes les échelles turbulentes mais de modéliser les petites échelles pour ne calculer que les grandes. C'est le principe des simulations aux grandes échelles ou Large Eddy Simulation (LES). La figure 1.1a) est un exemple de calcul LES du bruit rayonné par un jet isotherme. Le principe fut proposé par Smagorinsky [101] en 1963 pour des applications météorologiques. Concrètement, toutes les échelles plus petites que la taille d'une maille de domaine de calcul sont modélisées. C'est ce qui s'appelle le modèle sous-maille (subgrid model). De nombreux modèles sous-maillages ont été développés depuis les années 1970. Sagaut [94] en donne une description fournie. Bogey [16] a montré que la LES pouvait tout à fait servir à calculer l'acoustique rayonnée par des écoulements compressibles. Toutefois, toujours selon Spalart [102], la LES ne sera prête pour des calculs à haut nombre de Reynolds qu'en l'an 2045.

1.2.2 Les méthodes hybrides

Dans les méthodes hybrides, le problème du calcul du rayonnement acoustique est séparé du calcul de l'écoulement. C'est pourquoi le terme de technique de « splitting » est employé, *to split* signifiant littéralement *diviser* en anglais. Les grandeurs aérodynamiques sont calculées dans un premier temps. Les méthodes DNS ou LES décrites précédemment peuvent être employées mais alors les échelles acoustiques ne seront pas résolues. Elles peuvent également être obtenues par un calcul des équations de NS moyennées ou Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS). Cette approche consiste à ne simuler que l'écoulement moyen en temps et à en modéliser les fluctuations. C'est une approche statistique qui sied particulièrement bien aux applications industrielles.

Une fois l'évolution des grandeurs aérodynamiques correctement estimée, il reste à en déduire le champ acoustique. Il faut alors modéliser des sources acoustiques à partir de ces champs aérodynamiques. Un moyen pour cela est l'emploi d'une analogie (Lighthill, Powell, Lilley, . . .) et le calcul de la solution sous la forme d'une fonction de Green adaptée. Il est également possible d'utiliser des propagateurs acoustiques. Cela consiste à résoudre des équations acoustiques

classiques comme les équations d'Euler avec un terme source dépendant des fluctuations aérodynamiques. Une approche intéressante consiste encore à considérer les grandeurs acoustiques comme des perturbations autour d'écoulements incompressibles. Ce sont les méthodes dites de perturbation. Un système d'équation est alors déduit des équations de NS compressibles dont la partie incompressible est soustraite. Cette liste de méthodes est non exhaustive, les combinaisons sont très variées, ayant chacune leurs avantages et leurs inconvénients, notamment des limitations en fonction du type d'écoulement considéré.

Dans le cadre de cette étude, des méthodes hybrides sont employées. Par une approximation à faible nombre de Mach ou Low Mach Number Approximation (LMNA), un système d'équations hydrodynamiques faiblement compressibles est développé. Ce système sera nommé par la suite Low Order Low Mach Number Approximation (**LO-LMNA**).

L'intérêt de ce développement particulier est qu'il permet l'emploi de techniques de résolution dédiées aux écoulements incompressibles tout en incluant des effets de température.

Le champ acoustique est ensuite obtenu de deux manières différentes :

- la résolution des Équations d'Euler Linéarisées (**EEL**),
- la perturbation de l'approximation à faible nombre de Mach ou Perturbed Low Mach Number Approximation (**PLMNA**).

Des calculs DNS compressibles et des solutions analytiques servent de référence pour valider les différentes approches.

1.2.3 Estimation du gain des méthodes hybrides

Il est possible d'estimer le gain en temps de calcul d'une méthode hybride comparée à un calcul DNS compressible. La démarche suivie ici est celle proposée par Seo et Moon [95]. Dans le cas de l'étude du bruit rayonné par un phénomène hydrodynamique stationnaire comme ce sera le cas dans cette étude, le temps de calcul total T_{Tot}^c nécessaire aux machines de calcul est constitué d'une période transitoire d'établissement du phénomène périodique T_T^c et d'une durée suffisante de ces phénomènes T_P^c pour obtenir des champs acoustiques. Ainsi

$$T_{Tot}^c = T_T^c + T_P^c = n_T t_i^c + n_P t_i^c \quad (1.35)$$

où t_i^c est le temps de calcul pour effectuer une itération et n_T et n_P sont respectivement les nombres d'itérations couvrant les durées T_T^c et T_P^c . Ces durées « machine » correspondent aux durées physiques τ_T et $\tau_P = \tau_A = N\tau_D$. Ici l'indice A est utilisé car τ_A est une grandeur acoustique égale à N périodes d'instationnarités hydrodynamiques τ_D . Pour une échelle de temps discrétisée par le pas de temps Δt , il vient par définition

$$n_T = \frac{\tau_T}{\Delta t} = \frac{\alpha_{TA} N \tau_D}{\Delta t} \quad \text{et} \quad n_P = \frac{\tau_A}{\Delta t} = \frac{N \tau_D}{\Delta t} \quad (1.36)$$

où α_{TA} est le rapport de la durée transitoire à celle acoustique. Cette variable dépend du problème considéré.

Dans le cas du calcul DNS compressible, T_T^c et T_P^c sont toutes les deux calculées par le même code de simulation. Dans la présente méthode, la partie transitoire n'est calculée que par le code de résolution des équations **LO-LMNA**, `quasincompact3d`. Ensuite les phénomènes cycliques hydrodynamiques et acoustiques sont calculés par `quasincompact3d` et un propagateur acoustique comme expliqué précédemment. Chaque code de simulation, ou solveur, possède ses propres discrétisations de l'espace et du temps afin d'allier stabilité de la méthode de calcul et précision du résultat. Pour la partie hydrodynamique, la discrétisation spatiale doit avoir un pas d'espace Δx suffisamment petit pour bien résoudre toutes les échelles turbulentes. Dans le traitement d'un même problème,

$$\Delta x_{\text{LO-LMNA}} = \Delta x_{\text{DNS}} \quad .$$

La séparation du problème hydrodynamique et du problème acoustique permet d'utiliser un pas d'espace Δx_{AC} plus grand d'un facteur K_x pour le solveur acoustique ainsi

$$\Delta x_{\text{AC}} = K_x \Delta x_{\text{LO-LMNA}} = K_x \Delta x_{\text{DNS}} \quad .$$

La condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) est le critère de stabilité des méthodes de calcul numérique. Elle est définie comme le rapport entre la vitesse principale du problème U , la discrétisation spatiale Δx et la discrétisation temporelle Δt :

$$\text{CFL} \leq U \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad . \quad (1.37)$$

Pour un écoulement donné, cette condition régit la discrétisation temporelle. Si la vitesse de l'écoulement est U_∞ et la vitesse du son c_∞ , pour un nombre de Mach

$$M_\infty = \frac{U_\infty}{c_\infty} \quad (1.38)$$

faible, la condition CFL_{DNS} est

$$\text{CFL}_{\text{DNS}} = (c_\infty + U_\infty) \frac{\Delta t_{\text{DNS}}}{\Delta x_{\text{DNS}}} \approx c_\infty \frac{\Delta t_{\text{DNS}}}{\Delta x_{\text{DNS}}} = U_\infty \frac{\Delta t_{\text{DNS}}}{M_\infty \Delta x_{\text{DNS}}} \quad (1.39)$$

et ainsi

$$\Delta t_{\text{DNS}} = \text{CFL}_{\text{DNS}} \frac{M_\infty \Delta x_{\text{DNS}}}{U_\infty} \quad . \quad (1.40)$$

Il en est de même pour CFL_{AC} et Δt_{AC} des propagateurs acoustiques :

$$CFL_{AC} = (c_\infty + U_\infty) \frac{\Delta t_{AC}}{\Delta x_{AC}} \approx c_\infty \frac{\Delta t_{AC}}{\Delta x_{AC}} = U_\infty \frac{\Delta t_{AC}}{M_\infty \Delta x_{AC}} \quad (1.41)$$

$$\Delta t_{AC} = CFL_{AC} \frac{M_\infty \Delta x_{AC}}{U_\infty} = CFL_{AC} \frac{M_\infty K_x \Delta x_{DNS}}{U_\infty} \quad (1.42)$$

Concernant le solveur purement hydrodynamique `quasincompact3d`, la seule vitesse présente dans le problème est celle de l'écoulement donc :

$$CFL_{LO-LMNA} = U_\infty \frac{\Delta t_{LO-LMNA}}{\Delta x_{LO-LMNA}} \quad (1.43)$$

$$\Delta t_{LO-LMNA} = CFL_{LO-LMNA} \frac{\Delta x_{LO-LMNA}}{U_\infty} = CFL_{LO-LMNA} \frac{\Delta x_{DNS}}{U_\infty} \quad (1.44)$$

Sous l'hypothèse que la condition CFL est identique pour les trois solveurs, les pas de temps de la simulation hybride sont liés à celui de la simulation DNS par

$$\Delta t_{LO-LMNA} = M_\infty^{-1} \Delta t_{DNS} \quad , \quad \Delta t_{AC} = K_x \Delta t_{DNS} \quad (1.45)$$

alors les nombres d'itérations n_T et n_P valent :

$$n_{T_{DNS}} = \frac{\alpha_{TA} N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \quad , \quad n_{P_{DNS}} = \frac{N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \quad (1.46)$$

$$n_{T_{LO-LMNA}} = M_\infty \frac{\alpha_{TA} N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \quad , \quad n_{P_{LO-LMNA}} = M_\infty \frac{N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \quad (1.47)$$

$$n_{P_{AC}} = K_x^{-1} \frac{N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \quad (1.48)$$

Soit $T_{Tot_{DNS}}^c$ le temps total de calcul de la simulation DNS et $t_{i_{DNS}}^c$ le temps pour effectuer une itération :

$$\begin{aligned} T_{Tot_{DNS}}^c &= n_{T_{DNS}} t_{i_{DNS}}^c + n_{P_{DNS}} t_{i_{DNS}}^c \\ &= (\alpha_{TA} + 1) t_{i_{DNS}}^c \frac{N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \end{aligned} \quad (1.49)$$

Soit $T_{Tot_{Hyb}}^c$ le temps total de calcul de la simulation hybride, $t_{i_{LO-LMNA}}^c$ et $t_{i_{AC}}^c$ les temps pour effectuer une itération respectivement de `quasincompact3d` et du propagateur acoustique choisi :

$$\begin{aligned} T_{Tot_{Hyb}}^c &= n_{T_{LO-LMNA}} t_{i_{LO-LMNA}}^c + n_{P_{LO-LMNA}} t_{i_{LO-LMNA}}^c + n_{P_{AC}} t_{i_{AC}}^c \\ &= \left[M_\infty (\alpha_{TA} + 1) t_{i_{LO-LMNA}}^c + K_x^{-1} t_{i_{AC}}^c \right] \frac{N \tau_D}{\Delta t_{DNS}} \end{aligned} \quad (1.50)$$

Le rapport Ψ_{Hyb}^c des temps de calcul DNS et hybride permet d'estimer le gain en vitesse de calcul en fonction du nombre de Mach :

$$\Psi_{\text{Hyb}}^c = \frac{T_{\text{TotDNS}}^c}{T_{\text{TotHyb}}^c} = \frac{(\alpha_{TA} + 1)t_{i_{\text{DNS}}}^c}{M_\infty (\alpha_{TA} + 1)t_{i_{\text{LO-LMNA}}}^c + K_x^{-1}t_{i_{\text{AC}}}^c} . \quad (1.51)$$

Il apparaît très clairement que plus le nombre de Mach M_∞ sera faible et plus la méthode hybride se montrera rapide comparée au calcul DNS compressible sous réserve que les méthodes employées dans les solveurs hybrides notamment concernant les interpolations nécessaires entre les différentes échelles de temps et d'espace ne soient pas chronophages.

1.3 Plan de l'étude

L'objectif de ce travail est l'étude du rayonnement acoustique d'écoulement turbulents présentant des inhomogénéités de température à l'aide de méthodes hybrides. Tout d'abord, le chapitre 2 servira à présenter la stratégie développée pour le calcul de l'écoulement à travers le solveur hydrodynamique `quasincompact3d`.

Au chapitre 3 seront développés des propagateurs acoustiques dont les termes sources seront des fluctuations des champs hydrodynamiques préalablement calculés.

Au chapitre 4 sera présentée la méthode de passage des champs hydrodynamiques aux propagateurs acoustiques.

Des cas tests permettront de valider les méthodes hybrides au chapitre 5 en portant un intérêt tout particulier aux avantages et inconvénients de chacune notamment vis à vis de l'effet de la troncature de domaine.

Enfin au chapitre 6, ces méthodes seront appliquées à l'étude de couches de mélanges isothermes et anisothermes. Dans un premier temps, un calcul de référence DNS compressible servira à la validation puis viendra une étude des effets de la température sur le rayonnement acoustique.

L'approximation à faible nombre de Mach (LMNA)

Comme exposé précédemment, il existe de nombreuses stratégies concernant les méthodes hybrides. Ici, les champs hydrodynamiques de pression, de vitesses et de densité seront calculés dans une approche dite « Low Mach Number Approximation (LMNA) » ou approximation d'écoulement à faible nombre de Mach. En effet, pour des écoulements de faible vitesse, il est possible de découpler les grandeurs acoustiques de celles hydrodynamiques comme initié par Hardin et Pope [49] en faisant l'hypothèse que les sources sont compactes. Il est entendu dans cette notion de compacité que la taille des sources est petite devant les longueurs d'onde acoustiques.

L'approximation d'écoulement à faible nombre de Mach utilisée dans cette étude découle directement de celle employée par McMurtry *et al.* [69] pour la simulation d'écoulement réactifs à dégagement de chaleur. Cette décomposition trouve de nombreuses applications aussi bien en combustion [43, 85] qu'en astrophysique [1, 2] ou en acoustique [100, 81] car elle permet de « filtrer » des phénomènes physiques d'amplitude peu importante comparée au reste du problème comme la génération d'onde acoustique par rapport aux dégagements de chaleur dans le premier exemple cité. Il s'agit de réécrire les équations de Navier-Stokes (NS) en introduisant un développement des variables indépendantes de type *Janzen-Rayleigh* [109] aussi appelé *développement M^2* . Se dessine alors un problème de perturbation autour d'un écoulement de base appelé *zéroième approximation* ou *approximation d'ordre zéro*. La perturbation étant d'ordre immédiatement supérieur, proportionnelle à M^2 , est appelée *première approximation* ou *approximation d'ordre un*.

2.1 Les équations LMNA d'ordres bas ou LO-LMNA

En coordonnées cartésiennes $x_i = (x, y, z)$, les équations de NS adimensionnelles s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\tau_{ij}}{R_e} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2 R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu}{(\gamma - 1)} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (2.3)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2} \quad (2.4)$$

avec ρ la masse volumique, $u_i = (u, v, w)$ les composantes du champ de vitesse, p la pression et T la température. R_e est le nombre de Reynolds, M le nombre de Mach, γ le coefficient de compressibilité adiabatique, P_r le nombre de Prandtl et μ la viscosité dynamique. L'énergie interne volumique ρe et le tenseur des contraintes visqueuses τ_{ij} s'écrivent respectivement :

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1} \quad (2.5)$$

et

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (2.6)$$

La normalisation est faite avec une grandeur de référence $L_{ref_h}^*$, une vitesse de référence $U_{ref_h}^*$, un temps $t_{ref_h}^* = U_{ref_h}^* / L_{ref_h}^*$, une masse volumique $\rho_{ref_h}^*$, une pression $p_{ref_h}^* = \rho_{ref_h}^* U_{ref_h}^{*2}$ et une température de référence $T_{ref_h}^*$. Il vient alors $R_e = \rho_{ref_h}^* U_{ref_h}^* L_{ref_h}^* / \mu$, $M = U_{ref_h}^* / \sqrt{\gamma T_{ref_h}^*}$ et $P_r = \mu c_p / \lambda$. Ici c_p est la capacité thermique massique et λ la conductivité thermique. À partir de maintenant et pour le reste de ce document, les quantités étoilées x^* sont des grandeurs dimensionnelles.

Exprimée pour la pression, l'équation de l'énergie (2.3) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{(\gamma - 1)}{R_e} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2 R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (2.7)$$

L'introduction d'un paramètre $\varepsilon = \gamma M^2$ permet d'écrire densité, vitesse, pression et température

de la façon suivante :

$$\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 + \dots \quad (2.8)$$

$$u_i = u_{i_0} + \varepsilon u_{i_1} + \dots \quad (2.9)$$

$$T = T_0 + \varepsilon T_1 + \dots \quad (2.10)$$

$$p = \varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2 \dots \quad (2.11)$$

Par suite les équations de NS compressibles deviennent

$$\frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(u_{j_0} + \varepsilon u_{j_1})}{\partial x_j} + \dots = 0 \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(u_{i_0} + \varepsilon u_{i_1})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + \varepsilon \rho_1)(u_{i_0} + \varepsilon u_{i_1})(u_{j_0} + \varepsilon u_{j_1})}{\partial x_j} + \dots = \\ - \frac{\partial(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2)}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial(\tau_{ij_0} + \varepsilon \tau_{ij_1})}{\partial x_j} + \dots \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2)}{\partial t} + (u_{j_0} + \varepsilon u_{j_1}) \frac{\partial(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2)}{\partial x_j} \\ + \gamma(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2) \frac{\partial(u_{j_0} + \varepsilon u_{j_1})}{\partial x_j} + \dots = \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{(\gamma - 1)}{R_e} (\tau_{ij_0} + \varepsilon \tau_{ij_1}) \frac{\partial(u_{i_0} + \varepsilon u_{i_1})}{\partial x_j} + \frac{\varepsilon^{-1} \gamma}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \frac{\partial(T_0 + \varepsilon T_1)}{\partial x_j} \right] + \dots \\ \varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + \varepsilon p_2 + \dots = \varepsilon^{-1} \rho_0 T_0 + \rho_0 T_1 + \rho_1 T_0 + \dots \end{aligned} \quad (2.15)$$

Développons l'équation (2.12) jusqu'à l'ordre ε^0 et (2.13)-(2.15) à l'ordre ε^{-1} :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{j_0}}{\partial x_j} = 0 \quad (\varepsilon^0) \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_i} = 0 \quad (\varepsilon^{-1}) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} = \frac{1}{R_e P_r T_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \quad (\varepsilon^{-1}) \quad (2.18)$$

$$p_0 = \rho_0 T_0 \quad (\varepsilon^{-1}) \quad (2.19)$$

Dans l'équation (2.18), il est admissible de supposer que $\partial p_0 / \partial t = 0$ pour un système ouvert comme le fait l'auteur de [84]. De plus, p_0 est uniforme (2.17) et peut être interprété comme une pression thermodynamique.

À l'ordre ϵ^0 , l'équation de quantité de mouvement (2.13) devient :

$$\frac{\partial \rho_0 u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i0} u_{j0}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij0}}{\partial x_j} . \quad (2.20)$$

Le système d'équations (2.16)-(2.20) établit l'évolution des grandeurs hydrodynamiques.

Les équations Low Order Low Mach Number Approximation (**LO-LMNA**) à résoudre comme première étape du calcul hybride sont donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{j0}}{\partial x_j} &= 0 \\ \frac{\partial \rho_0 u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i0} u_{j0}}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij0}}{\partial x_j} \\ \rho_0 \frac{\partial u_{j0}}{\partial x_j} &= \frac{1}{R_e P_r T_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \\ p_0 &= \rho_0 T_0 = \text{constante} . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ce système d'équations est qualifié de « quasi incompressible » puisqu'il ne diffère des classiques équations de NS incompressibles que par la première et la troisième équation. Dans ces dernières, le terme de divergence de la vitesse $\rho_0 \partial u_{j0} / \partial x_j$ est par définition nul. Ainsi dans les configurations anisothermes, la différence dans la méthode de résolution avec un système incompressible résidera essentiellement dans l'estimation de l'avancement temporel de la masse volumique comme décrit dans la section 2.2.

L'intérêt majeur de ce système **LO-LMNA** est qu'il contient des inhomogénéités de masse volumique uniquement liées à celles de température ; l'acoustique a été filtrée et la condition de stabilité CFL ne dépend que de la principale vitesse de l'écoulement U :

$$\text{CFL}_{\text{LO-LMNA}} = U \frac{\Delta t}{\Delta x} . \quad (2.22)$$

2.2 Méthode de résolution numérique

Le code de calcul `quasincompact3d` utilisé pour résoudre les équations **LO-LMNA** est basé sur le code `incompact3d`, testé et validé antérieurement par [59] pour différents écoulements comme un jet rond seul, des jets multiples, une couche de mélange, un sillage ou encore des jets tournants. Comme évoqué précédemment, la principale différence réside dans le traitement de la masse volumique introduit dans [44].

La résolution du système (2.21) suit la démarche proposée par [69]. L'équation (2.16) peut

s'écrire :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -u_{j_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} - \rho_0 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

et en utilisant (2.18) pour un écoulement libre, (2.16) devient finalement

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -u_{j_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} - \frac{1}{Re Pr T_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \quad (2.24)$$

Les équations du système (2.21) sont donc résolues sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = F_\rho \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_{i_0}}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + F_{u_i} \quad (2.26)$$

$$p_0 = \rho_0 T_0 = \text{constante} \quad (2.27)$$

où

$$F_\rho = -u_{j_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial x_j} - \frac{1}{Re Pr T_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \quad (2.28)$$

$$F_{u_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{Re} \tau_{ij_0} - \rho_0 u_{i_0} u_{j_0} \right) \quad (2.29)$$

Ainsi, l'équation (2.25) permet de résoudre conjointement l'équation de conservation de la masse et l'équation de l'énergie.

2.2.1 Avancement temporel de la simulation

L'avancement temporel est réalisé à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta d'ordre trois (RK3). Un pas de temps $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ à l'itération n est alors divisé en trois sous-pas de temps $k = 1, 2, 3$ avec $t^1 = t^n$ et $t^4 = t^{n+1}$. Les équations (2.25) et (2.26) sont discrétisées de la façon suivante :

$$\frac{\rho_0^{k+1} - \rho_0^k}{\Delta t} = \alpha_k F_\rho^k + \beta_k F_\rho^{k-1} \quad (2.30)$$

$$\frac{(\rho_0 u_{i_0})^{k+1} - (\rho_0 u_{i_0})^k}{\Delta t} = \alpha_k F_{u_i}^k + \beta_k F_{u_i}^{k-1} - \gamma_k \frac{\partial \tilde{p}^{k+1}}{\partial x_i} \quad (2.31)$$

où

$$\tilde{p}^{k+1} = \frac{1}{\gamma_k \Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} p_1 dt \quad (2.32)$$

est la valeur moyenne de la pression entre deux sous-pas de temps. α_k , β_k et γ_k sont les coefficients du schéma de RK3 donnés par Williamson [114] pour avoir une précision d'ordre trois en temps

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{8}{15} & \beta_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= \frac{5}{12} & \beta_2 &= \frac{-17}{60} \\ \alpha_3 &= \frac{3}{4} & \beta_3 &= \frac{-5}{12} \end{aligned}$$

avec par convention $\gamma_k = \alpha_k + \beta_k$.

À un sous-pas de temps k , il faut déterminer les valeurs de ρ_0^{k+1} et $(\rho_0 u_{i_0})^{k+1}$ au sous-pas de temps suivant or cette dernière grandeur dépend de \tilde{p}^{k+1} , inconnu à cet instant de la résolution. Ce problème est contourné en employant la méthode de projection, également appelée méthode à pas fractionnaire ou de correction par le gradient de pression [21]. Il s'agit de décomposer (2.31) en utilisant un champ intermédiaire (noté ici avec un exposant $*$) :

$$\frac{(\rho_0 u_{i_0})^* - (\rho_0 u_{i_0})^k}{\Delta t} = \alpha_k F_{u_i}^k + \beta_k F_{u_i}^{k-1} \quad (2.33)$$

$$\frac{(\rho_0 u_{i_0})^{k+1} - (\rho_0 u_{i_0})^*}{\Delta t} = -\gamma_k \frac{\partial \tilde{p}^{k+1}}{\partial x_i} \quad (2.34)$$

Enfin, en prenant la divergence de cette dernière équation et en utilisant la conservation de la masse (2.16), l'équation de Poisson pour la pression est obtenue :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}^{k+1}}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{\gamma_k \Delta t} \left[\frac{\partial (\rho_0 u_{i_0})^*}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right)^{k+1} \right] \quad (2.35)$$

La résolution de (2.35) nécessite de connaître le terme $(\partial \rho_0 / \partial t)^{k+1}$. C'est ici que réside la différence de traitement par rapport à un calcul incompressible où ce terme serait nul. Il faut donc estimer à chaque sous-pas de temps de l'algorithme RK3 l'avancement de la masse volumique au sous-pas suivant. Cette estimation s'avère être une conséquente source d'erreur et d'instabilité comme souligné dans [26, 44]. Ce dernier a montré qu'un bon compromis entre stabilité numérique, facilité de mise en œuvre et coût de calcul pouvait être obtenu en réalisant l'estimation à l'aide de grandeurs connues aux pas de temps entiers t^n et t^{n-1} via le schéma précis à l'ordre deux :

$$\left(\frac{\partial \rho_0}{\partial t} \right)^{k+1} = \left(1 + \sum_{l=1}^k \gamma_l \right) F_\rho^n - \sum_{l=1}^k \gamma_l F_\rho^{n-1} + O(\Delta t^2) \quad (2.36)$$

2.2.2 Effets de température

Les inhomogénéités de température dont dépend la viscosité μ sont prises en compte à chaque sous-pas de temps en suivant la loi de Sutherland [103] établie pour de l'air dans les conditions atmosphériques. Cette loi est donnée par la relation suivante :

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T_0}{T_{ref}} \right)^{3/2} \frac{1,4}{0,4 + \frac{T_0}{T_{ref}}} \quad (2.37)$$

où μ_{ref} est la valeur de la viscosité prise à T_{ref} .

La figure 2.1 résume les étapes du calcul accomplies par le solveur hydrodynamique `quasincompact3d`.

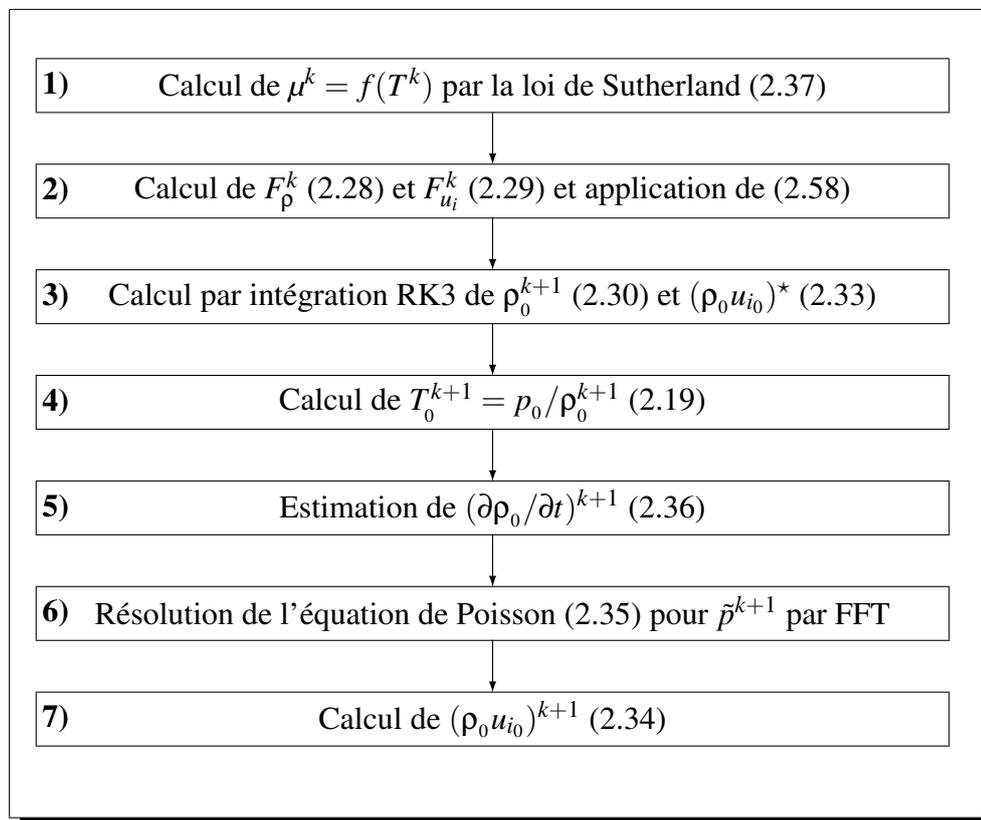


FIG. 2.1: Structure d'un sous-pas de temps du code `quasincompact3d`.

2.2.3 Schémas de discrétisation spatiale

Deux configurations seront employées dans cette étude pour le calcul hydrodynamique `quasincompact3d`. D'une part, des cas de validation où les conditions aux limites du domaine de calcul sont dites « périodiques » et d'autre part les calculs de couches de mélanges où les

conditions aux limites sont de type « non-périodique » ou « de Dirichlet » dans la direction principale de l'écoulement et de « glissement libre » dans la direction transversale.

Le code de calcul utilise des schémas aux différences finies Hermitiens (compacts) d'ordre six pour l'estimation des termes de dérivations spatiales. Ainsi, la dérivée n -ième par rapport à une direction x_γ d'un champ scalaire f , $f^{(n)} = \partial^n f / \partial x_\gamma^n$, répond à la formulation générale suivante

$$\sum_{j=-p_l}^{p_r} \alpha_j \left. \frac{\partial^n f}{\partial x_\gamma^n} \right|_{i+j} = \frac{1}{\Delta x_\gamma^n} \sum_{k=-q_l}^{q_r} a_k f_{i+k} \quad , \quad i = 1, \dots, n_{x_\gamma} \quad (2.38)$$

où n_{x_γ} est le nombre de points et Δx_γ le pas d'espace dans la direction x_γ , i l'indice du point où est évaluée la dérivée, p_l et q_l (respectivement p_r et q_r) le nombre de points voisins utilisés à gauche (respectivement à droite) de i quant à α_j et a_k , ce sont les coefficients du schéma.

Les schémas sont ici centrés, c'est-à-dire qu'ils utilisent autant de points de part et d'autre du point considéré pour la dérivation donc $p_l = p_r = p$ et $q_l = q_r = q$ et pour les schémas compacts, $p = 1$ et $q = 2$. Une exception est faite dans le cas d'une condition aux limites non-périodique (de Dirichlet) où les schémas sont dégradés à l'approche puis décentrés aux frontières concernées impliquant une réduction de l'ordre de précision à quatre puis trois. Les schémas s'écrivent de manière explicite :

$$\alpha f'_{i-1} + f'_i + \alpha f'_{i+1} = a \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x_\gamma} + b \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta x_\gamma} \quad (2.39)$$

$$\alpha' f''_{i-1} + f''_i + \alpha' f''_{i+1} = a' \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{\Delta x_\gamma^2} + b' \frac{f_{i+2} - f_{i-2}}{\Delta x_\gamma^2} \quad (2.40)$$

où f' et f'' sont respectivement les dérivées première et seconde de f par rapport à x_γ au point i , (α, a, b) sont les coefficients du schéma tels que donnés par [61]. Cette formulation implique un calcul des dérivées simultanément sur tous les points d'une ligne du domaine. En effet, f est un vecteur et sous forme matricielle, l'équation (2.39) s'écrit :

$$\mathbf{A}'_\gamma f' = \frac{1}{\Delta x_\gamma} \mathbf{B}'_\gamma f \quad . \quad (2.41)$$

Le calcul de dérivée nécessite des réarrangements de matrices par l'algorithme de Thomas afin de rendre leur inversion possible.

Ces schémas ont beaucoup été employés sur des grilles à la fois uniformes et non-uniformes dans [38, 44, 68, 55] et extensivement étudiés par Lele [61]. L'étirement de maillage requiert une attention particulière : une transformation de l'espace physique étiré vers un espace de calcul uniforme est opérée.

L'intérêt de ce type de schémas réside dans leur caractère quasi spectral. Il est entendu ici qu'une large gamme de nombres d'ondes peut être prise en compte en minimisant l'erreur de dispersion propre à la discrétisation. La figure 2.2 montre l'erreur calculée par analyse de

Fourier sur les nombres d'ondes induite par différents types de schémas pour l'évaluation d'une dérivée première. Dans le cas présent, le nombre d'onde modifié adimensionnel $k'\Delta x_\gamma$ vaut :

$$k'\Delta\gamma = \frac{2a \sin(k\Delta\gamma) + 2b \sin(2k\Delta\gamma)}{1 + 2\alpha \cos(k\Delta\gamma)} \quad (2.42)$$

Pour un calcul idéal, le nombre d'onde modifié k' correspond exactement au nombre d'onde k . L'avantage d'un schéma compact par rapport à un schéma explicite classique apparaît clairement : il permet d'obtenir pour un même nombre de points voisins une précision supérieure de deux ordres et d'être beaucoup moins dispersif.

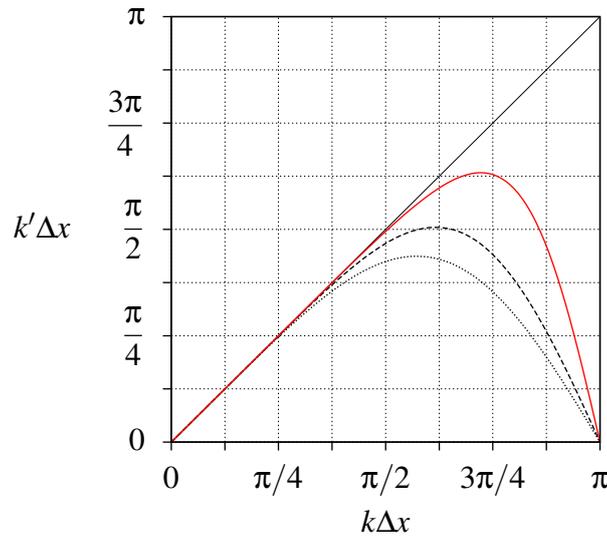


FIG. 2.2: Variation du nombre d'onde modifié k' en fonction du nombre d'onde k pour l'évaluation de la dérivée première : (—) valeur exacte, (···) schéma explicite d'ordre quatre, (- -) schéma explicite d'ordre six, (—) schéma compact d'ordre six.

2.2.4 Résolution de l'équation de Poisson

Lors de l'utilisation de conditions aux limites exclusivement périodiques ou semi-périodiques, l'équation de Poisson (2.35) est entièrement résolue dans l'espace spectral. Chaque variable est alors développée en série de Fourier discrète de la sorte :

$$f(x, y, z) = \sum_{l=-\frac{n_x}{2}}^{\frac{n_x}{2}-1} \sum_{m=-\frac{n_y}{2}}^{\frac{n_y}{2}-1} \sum_{n=-\frac{n_z}{2}}^{\frac{n_z}{2}-1} \hat{f}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (2.43)$$

(n_x, n_y, n_z) et (k_x, k_y, k_z) sont respectivement les nombres de nœuds et les nombres d'ondes dans les directions x, y et z tels que :

$$k_x = \frac{2\pi}{L_x}l \quad , \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y}m \quad , \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z}n \quad . \quad (2.44)$$

L_x, L_y et L_z sont les tailles de domaine dans les directions correspondantes. Ainsi, la dérivation dans l'espace physique est simplement une multiplication dans l'espace spectral :

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} &= i k_x \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}} &= i k_y \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial z}} &= i k_z \hat{f} \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Rappelons toutefois que l'utilisation de schémas compacts induit une modification des nombres d'ondes. La dérivation est alors

$$\begin{aligned} \widehat{\frac{\partial f}{\partial x}} &= i k'_x \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial y}} &= i k'_y \hat{f} \\ \widehat{\frac{\partial f}{\partial z}} &= i k'_z \hat{f} \quad . \end{aligned} \quad (2.46)$$

L'équation de Poisson (2.35) exprimée dans l'espace spectral par transformée de Fourier rapide ou Fast Fourier Transform (FFT) devient :

$$\gamma_k \Delta t \widehat{\hat{p}}^{(k+1)} = -\frac{1}{k'^2_{xyz}} \left[i k'_j (\widehat{\rho_0 u_{j0}})^* + \left(\widehat{\frac{\partial \rho_0}{\partial t}} \right)^{(k+1)} \right] \quad (2.47)$$

où $k'^2_{xyz} = k'^2_x + k'^2_y + k'^2_z$. Il existe une singularité pour le mode 0, lorsque $k'_x = k'_y = k'_z = 0$. Ce cas est traité en reprenant directement l'équation (2.34) qui devient

$$\frac{(\widehat{\rho_0 u_{i0}})^{(k+1)} - (\widehat{\rho_0 u_{i0}})^*}{\Delta t} = 0 \quad . \quad (2.48)$$

La pression est donc forcée à zéro pour ce mode singulier. Elle est alors définie à une constante près sur tout le domaine.

Pour les simulations de couche de mélange en développement spatial, la condition aux limites dans la direction principale de l'écoulement, suivant x , est non-périodique. Le traitement spectral dans cette direction n'est alors plus possible. La solution consiste à traiter le problème

dans l'espace physique pour la direction x et dans l'espace spectral pour les directions y et z comme le propose Lamballais dans [57].

L'équation de Poisson (2.35) s'écrit alors

$$\gamma_k \Delta t \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} - (k_y'^2 + k_z'^2) \right] \hat{p}^{(k+1)} = \frac{\partial (\widehat{\rho_0 u_0})^*}{\partial x} + i k_y' (\widehat{\rho_0 v_0})^* + i k_z' (\widehat{\rho_0 w_0})^* + \left(\frac{\partial \widehat{\rho_0}}{\partial t} \right)^{(k+1)}. \quad (2.49)$$

Sous forme matricielle, cette dernière devient

$$\gamma_k \Delta t \left[\frac{1}{\Delta x} \mathbf{A}'_x{}^{-1} \mathbf{B}'_x \frac{1}{\Delta x} \mathbf{A}'_x{}^{-1} \mathbf{B}'_x - (k_y'^2 + k_z'^2) \mathbf{I} \right] \hat{p}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{D}} \quad (2.50)$$

où

$$\mathbf{A}'_\gamma f' = \frac{1}{\Delta x_\gamma} \mathbf{B}'_\gamma f' \quad (2.51)$$

est l'opérateur de dérivation matriciel, \mathbf{I} la matrice identité et $\hat{\mathbf{D}}$ est le second membre de (2.49). L'équation (2.50) est ensuite reformulée afin de rendre sa résolution numériquement plus performante (pas d'inversion de matrice) :

$$\begin{cases} \gamma_k \Delta t \left[\mathbf{B}'_x \hat{p}^{(k+1)} - (k_y'^2 + k_z'^2) \Delta x \mathbf{A}'_x \hat{p}^{(k+1)} \right] = \Delta x \mathbf{A}'_x \hat{\mathbf{D}} \\ \Delta x \mathbf{A}'_x \hat{p}^{(k+1)} - \mathbf{B}'_x \hat{p}^{(k+1)} = 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

À présent, le traitement du mode 0 pour $k'_y = k'_z = 0$ conduit à intégrer l'égalité

$$\gamma_k \Delta t \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \hat{p}^{(k+1)} = \frac{\partial (\widehat{\rho_0 u_0})^*}{\partial x} + \left(\frac{\partial \widehat{\rho_0}}{\partial t} \right)^{k+1} \quad (2.53)$$

et (2.34) peut s'écrire

$$(\rho_0 u_{i_0})^* = (\rho_0 u_{i_0})^{k+1} - \gamma_k \Delta t \frac{\partial \hat{p}^{k+1}}{\partial x_i} \quad (2.54)$$

Il ne reste donc qu'à intégrer la variation temporelle de la masse volumique suivant x :

$$(\widehat{\rho_0 u_0})^{k+1} = - \int \left(\frac{\partial \widehat{\rho_0}}{\partial t} \right)^{k+1} dx + (\widehat{\rho_0 u_0})_e^{k+1} \quad (2.55)$$

où

$$(\widehat{\rho_0 u_0})_e^{k+1} = (\widehat{\rho_0 u_0})^{k+1} |_{x=0} \quad (2.56)$$

est la constante d'intégration déterminée par la condition à l'entrée du domaine de calcul ($x = 0$) au sous-pas de temps $k + 1$. C'est la condition de conservation du débit à travers toutes les sections à $x = \text{constante}$. Cette manipulation suffit à assurer une bonne résolution de la dynamique.

Encore une fois, la pression pour le mode 0 est forcée à zéro. Il en résulte que la pression est définie à une valeur constante près dans le plan (y, z) , cette constante étant elle une fonction de x .

2.2.5 Sortie de fluide

Le traitement de la limite aval d'un domaine de calcul pour la simulation d'écoulements est toujours un problème délicat. Dans le cas des simulations quasi incompressibles, l'évacuation naturelle du fluide peut être simplement simulée par une équation de convection

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \quad (2.57)$$

appliquée à toute grandeur $q = (\rho_0 u_{i_0}, \rho_0)$ de l'écoulement. La grandeur \bar{U} est une approximation de la vitesse moyenne sur la section de sortie. Ce traitement est très efficace mais il n'inclut pas de mécanisme dissipateur de l'énergie. Dans le cadre d'une méthode hybride aéroacoustique, ceci peut s'avérer une source d'erreur importante puisque dans un second temps, il faudra inclure dans le calcul acoustique un tel mécanisme de dissipation des structures tourbillonnaires. Or les niveaux d'énergie hydrodynamiques sont bien supérieurs aux niveaux acoustiques. Les différents essais effectués dans le cadre de ce travail ont montré qu'il était préférable d'utiliser une zone de dissipation aussi appelée « zone éponge » ou « zone tampon » à la fois dans le calcul des grandeurs hydrodynamiques et dans celui des grandeurs acoustiques car une infime erreur sur l'évaluation des premières peut totalement polluer le champ des dernières. Le traitement dans la zone éponge du calcul acoustique est alors beaucoup moins important.

Le terme dissipatif employé ici est exprimé comme dans [13, 16] par

$$\frac{\partial q}{\partial t} + N(q) = -\sigma(x)(q - q^*) \quad (2.58)$$

où $\sigma(x)$ est le profil d'évolution de la zone éponge et $N(q)$ est le reste de l'opérateur associé aux équations résolues. La quantité q^* est un champ cible moyen calculé par le filtre passe-bas

$$q^{*n} = q^{*n-1} + (1 - \alpha_s)q^n \quad . \quad (2.59)$$

Le terme q^* est donc estimé à chaque itération n et le coefficient α_s possède une valeur proche de 1 au début du calcul puis est lentement incrémenté jusqu'à atteindre la valeur 1. En suivant la démarche de [23], le maillage est également étiré suivant x dans cette zone afin de dissiper naturellement les éventuelles hautes fréquences. Le dernier traitement consiste à augmenter la viscosité dans la zone éponge.

Les propagateurs acoustiques

Comme le montre le chapitre 1, il existe de nombreuses façons de calculer le champ acoustique à partir de champs sources d'origine aérodynamique. Dans le cadre de cette étude, les perturbations acoustiques générées par l'écoulement sont obtenues suivant deux stratégies différentes :

- la résolution des Équations d'Euler Linéarisées (**EEL**),
- la résolution des équations LMNA perturbées ou Perturbed Low Mach Number Approximation (**PLMNA**).

Les équations **EEL** et **PLMNA** sont résolues par les deux codes de calcul `seel2d` et `plmna2d` respectivement. Programmés en Fortran 90, ils utilisent les mêmes techniques de résolution numérique.

3.1 Les Équations d'Euler Linéarisées 2D

3.1.1 Les équations d'Euler

Soit un fluide non dissipatif (non visqueux et non conducteur de chaleur), les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent alors être exprimées dans un espace bidimensionnel de la manière suivante avec ρ la masse volumique, $\mathbf{u} = (u_i, u_j)$ le champ de vitesse, p la pression, s l'entropie et e l'énergie interne :

Conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad . \quad (3.1)$$

Sous forme indicielle, l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad . \quad (3.2)$$

Conservation de la quantité de mouvement :

La conservation de la quantité de mouvement peut s'écrire :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p \quad , \quad (3.3)$$

ou en notations indicielles

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad . \quad (3.4)$$

Les équations (3.3) et (3.4) peuvent également apparaître sous une forme conservative en tenant compte de l'équation de conservation de la masse (3.1) comme suit :

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = -\nabla p \quad (3.5)$$

soit en notations indicielles pour la i -ème composante de la vitesse

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} \quad . \quad (3.6)$$

Conservation de l'énergie :

Dans le cas d'un fluide non dissipatif, une particule de fluide conserve son entropie s , ainsi :

$$\frac{ds}{dt} = 0 \quad (3.7)$$

où $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ est la dérivée particulaire. Soit également :

$$\rho \frac{\partial s}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla s = 0 \quad (3.8)$$

et sous forme conservative

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} s) = 0 \quad . \quad (3.9)$$

L'équation pour l'énergie interne e est alors :

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{u}) + p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad . \quad (3.10)$$

Pour un gaz parfait, une relation liant la pression, la masse volumique et l'énergie interne est donnée par :

$$p = (\gamma - 1) \rho e \quad . \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) permet la réécriture de l'équation de conservation de l'énergie (3.10) avec la variable p :

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \mathbf{u}) + (\gamma - 1) p \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.12)$$

soit sous forme indicielle

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u_j}{\partial x_j} + (\gamma - 1) p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad . \quad (3.13)$$

3.1.2 Linéarisation des équations d'Euler

La linéarisation s'effectue en considérant chaque variable α comme composée d'une valeur moyenne $\bar{\alpha}$ et d'une partie fluctuante α' :

$$u_i(x, y, t) = \bar{u}_i(x, y) + u'_i(x, y, t) \quad (3.14)$$

$$p(x, y, t) = \bar{p}(x, y) + p'(x, y, t) \quad (3.15)$$

$$\rho(x, y, t) = \bar{\rho}(x, y) + \rho'(x, y, t) \quad . \quad (3.16)$$

Cette décomposition est introduite dans les équations précédentes. La linéarisation consiste à négliger les non-linéarités constituées par les produits de grandeurs fluctuantes.

Les équations décrivant le problème se limitent finalement à

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u'_j + \rho' \bar{u}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u'_i u'_j) + (\bar{\rho} u'_j + \rho' \bar{u}_j) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= S_i \\ \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' \bar{u}_j + \gamma \bar{p} u'_j) + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Les grandeurs exprimées dans ces équations sont adimensionnées par la masse volumique de référence $\rho_{ref_a}^*$, la célérité du son dans l'air $c_{ref_a}^*$, une longueur $L_{ref_a}^*$, un temps $t_{ref_a}^* = L_{ref_a}^* / c_{ref_a}^*$ et la pression $p_{ref_a}^* = \rho_{ref_a}^* c_{ref_a}^{*2}$. Le terme S_i est le terme source défini selon l'analogie aéro-

coustique. L'expression de ce terme est discutée dans le paragraphe suivant.

3.1.3 Formulation du terme source

Dans le cas d'un espace 2D cartésien, les équations du système (3.17) sont généralement écrites sous la forme matricielle suivante comme dans les travaux de [16, 18, 19] :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t_a} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{H} = \mathbf{S} \quad (3.18)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \bar{\rho} u'_x \\ \bar{\rho} u'_y \\ p' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} u'_x + \rho' \bar{u}_x \\ \bar{\rho} u'_x \bar{u}_x + p' \\ \bar{\rho} u'_y \bar{u}_x \\ p' \bar{u}_x + \gamma \bar{p} u'_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} u'_y + \rho' \bar{u}_y \\ \bar{\rho} u'_x \bar{u}_y \\ \bar{\rho} u'_y \bar{u}_y + p' \\ p' \bar{u}_y + \gamma \bar{p} u'_y \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\bar{\rho} u'_x + \rho' \bar{u}_x) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + (\bar{\rho} u'_y + \rho' \bar{u}_y) \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \\ (\bar{\rho} u'_x + \rho' \bar{u}_x) \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} + (\bar{\rho} u'_y + \rho' \bar{u}_y) \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} \\ (\gamma - 1) p' \left(\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} \right) - (\gamma - 1) \left(u'_x \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + u'_y \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Dans ces références, le terme source n'a des composantes que dans l'équation de quantité de mouvement. Ce terme $\mathbf{S} = (0, S_x, S_y, 0)^t$ à droite de (3.18) doit contenir les fluctuations du champ hydrodynamique provoquant le rayonnement acoustique.

Bogey *et al.* [19] définissent \mathbf{S} en écrivant une équation de propagation pour la pression similaire à l'équation de Lilley à partir des **EEL**. Pour cela, ils font l'hypothèse d'un écoulement moyen strictement parallèle $\bar{u}_x = \bar{u}_x(y)$ et $\bar{u}_y = 0$. La masse volumique et la vitesse du son moyennes ne dépendent que de la direction y , $\bar{\rho} = \bar{\rho}(y)$ et $\bar{c} = \bar{c}(y)$ et la pression moyenne est constante, c'est la pression statique $\bar{p} = p_\infty$. Les fluctuations d'entropie sont présumées nulles et alors :

$$p' = \bar{c}^2 \rho' \quad . \quad (3.21)$$

La dérivée convective basée sur la vitesse moyenne $\bar{D}/\bar{D}t_a = \partial/\partial t_a + \bar{u}_x \partial/\partial x$ est appliquée à l'équation de conservation de la masse et la divergence de l'équation de quantité de mouvement lui est soustraite. Il apparaît alors l'équation de Phillips pour la pression :

$$\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}^2 p'}{\bar{D}t_a^2} - \nabla^2 p' - 2\bar{\rho} \frac{\partial u'_y}{\partial x} \frac{d\bar{u}_x}{dy} = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad . \quad (3.22)$$

L'opérateur $\bar{D}/\bar{D}t$ est encore appliqué à (3.22) pour faire disparaître le terme en u'_y en combinai-

son de l'équation de quantité de mouvement dérivée par rapport à x . L'équation de propagation correspondant au système (3.18) devient :

$$\frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}^2 p'}{\bar{D}t_a^2} - \nabla^2 p' \right) + 2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} = \Lambda \quad (3.23)$$

où le terme source Λ s'écrit

$$\Lambda = -\frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \nabla \cdot \mathbf{S} + 2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{\partial S_x}{\partial x} \quad . \quad (3.24)$$

Goldstein [46] montre que le membre de gauche de (3.23) est identique à celui de l'équation de Lilley mais que le terme source est quelque peu différent. Finalement, Bogey *et al.* réécrivent (3.24) pour faire correspondre (3.23) à l'expression simplifiée de l'équation de Lilley donnée par Goldstein :

$$\Lambda = -\frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \frac{\partial^2 \rho u_i'' u_j''}{\partial x_i \partial x_j} + 2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{\partial^2 \rho u_y'' u_j''}{\partial x \partial x_j} \quad . \quad (3.25)$$

Le terme source des **EEL** est alors

$$S_i = -\frac{\partial \rho u_i'' u_j''}{\partial x_j} \quad (3.26)$$

où les $u_i'' = u_i - \bar{u}_i$ sont des fluctuations hydrodynamiques. Bailly *et al.* [6] suggèrent de soustraire aux termes sources leur moyenne temporelle afin de les « centrer » (les résultats de Bogey [16] confirment cette nécessité). Le terme \mathbf{S} finalement utilisé est donc

$$\mathbf{S} = (0, S_x - \bar{S}_x, S_y - \bar{S}_y, 0) \quad . \quad (3.27)$$

Il est bien développé ici un terme source pour les **EEL** basé sur une équation de propagation de Lilley. L'équation de Lilley est une équation de type Orr-Sommerfeld (OS) comme le souligne Mani dans [66]. Or, ces équations ont des solutions instables et ce sont justement ces solutions qui sont à l'origine de la turbulence dans un jet. Il s'avère alors crucial de traiter d'une manière ou d'une autre les **EEL** afin de ne pas exciter d'instabilités ce qui explique que Bogey *et al.* [19] annulent le terme \mathbf{H} qu'ils analysent comme contenant la source de ces instabilités. Une objection à l'élimination pure et simple du terme \mathbf{H} est qu'il contient une part a priori non négligeable des actions de l'écoulement moyen sur le champ acoustique. L'attrait majeur des **EEL** par rapport à l'utilisation de l'équation de Lighthill n'est alors plus aussi évident.

Billson *et al.* [13] obtiennent un terme source similaire dans les équations de quantité de mouvement en perturbant les équations d'Euler compressibles mais ils extraient également une composante du terme source dans l'équation de l'énergie prenant en compte les effets de température. Ils ne présentent cependant la mise en œuvre que sur une configuration isotherme. Cette forme du terme source est également proche de celle développée par Sinayoko *et al.* [99] en

s'appuyant sur la décomposition de Goldstein [47] pour des écoulements homentropiques.

3.1.4 Définition des sources des EEL à partir de LO-LMNA

3.1.4.1 Dimensionnement acoustique

Les champs moyennés $(\bar{u}_i, \bar{p}, \bar{\rho})$ sont issus dans cette analogie de la moyenne temporelle des champs $(u_{i0}, \varepsilon^{-1} p_0, \rho_0)$ calculés par le solveur `quasincompact3d`. Cela nécessite de les redimensionner en $(u_{i0_a}, p_{0_a}, \rho_{0_a})$ car les grandeurs de référence ne sont pas les mêmes entre `see12d`, le code de résolution des **EEL**, et `quasincompact3d`. Ainsi, u_{i0_a} est le champ hydrodynamique de vitesse calculé par `quasincompact3d`, interpolé au temps acoustique et exprimé en fonction des grandeurs de référence acoustiques. Les grandeurs physiques dimensionnelles sont

$$\begin{aligned} \bar{u}_x^* &= \bar{u}_x c_{ref_a}^* = \bar{u}_{x0_a} c_{ref_a}^* = \bar{u}_{x0} U_{ref_h}^* \quad , & \bar{p}^* &= \bar{p} p_{ref_a}^* = \frac{1}{\gamma} p_{ref_a}^* \\ \bar{u}_y^* &= \bar{u}_y c_{ref_a}^* = 0 \quad , & \bar{\rho}^* &= \bar{\rho} \rho_{ref_a}^* = \bar{\rho}_{0_a} \rho_{ref_a}^* = \bar{\rho}_0 \rho_{ref_h}^* \\ t^* &= t_a t_{ref_a}^* = t t_{ref_h}^* \quad , & L_{ref_a}^* &= L_{ref_h}^* \quad . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Viennent alors les relations de passage :

$$\begin{aligned} \bar{u}_x &= \bar{u}_{x0_a} = \bar{u}_{x0} M \quad , & \bar{p} &= \frac{1}{\gamma} \\ \bar{u}_y &= 0 \quad , & \bar{\rho} &= \bar{\rho}_{0_a} = \bar{\rho}_0 \frac{\rho_{ref_h}^*}{\rho_{ref_a}^*} \\ t_a &= t M^{-1} \end{aligned} \quad (3.29)$$

où

$$M = \frac{U_{ref_h}^*}{c_{ref_a}^*} \quad (3.30)$$

est le nombre de Mach de la simulation hybride et pour rappel $\varepsilon = \gamma M^2$. De cette manière, il est possible à partir d'un unique calcul hydrodynamique de faire varier la vitesse de l'écoulement en fixant la valeur de M .

3.1.4.2 Terme source \mathbf{S}_L

Conformément à (3.26) et (3.27), le terme source tel que défini par Bogey *et al.* [19] noté ici \mathbf{S}_L s'écrit :

$$\mathbf{S}_L = (0, S_{Lx} - \bar{S}_{Lx}, S_{Ly} - \bar{S}_{Ly}, 0) \quad (3.31)$$

où

$$S_{Lx} = - \left(\frac{\partial \rho_{0a} u''_{x0a}{}^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{x0a} u''_{y0a}}{\partial y} \right) , \quad S_{Ly} = - \left(\frac{\partial \rho_{0a} u''_{x0a} u''_{y0a}}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{y0a}{}^2}{\partial y} \right) .$$

(3.32)

Les fluctuations de vitesse u''_{x0a} et u''_{y0a} sont calculées à partir des champs **LO-LMNA** interpolés au temps t_a comme

$$u''_{x0a} = u_{x0a} - \overline{u_{x0a}} \quad \text{et} \quad u''_{y0a} = u_{y0a} - \overline{u_{y0a}} . \quad (3.33)$$

Les détails de l'interpolation sont donnés au chapitre 4.

3.1.4.3 Terme source S_p défini à partir de la pression

Il a été mentionné au paragraphe 3.1.3 la nécessité de modifier le propagateur afin que le terme source n'excite pas d'instabilités. Une autre option consiste à modifier le terme source. De plus, notons la présence du champ ρ_{0a} dans (3.32) qui contient des fluctuations dans le cas d'un calcul anisotherme ce qui soulève la question de la prise en compte ou non de ces fluctuations et la soustraction ou non de la moyenne temporelle de la masse volumique. Bogey *et al.* [19] arguent toutefois que le produit triple de fluctuations $\rho'' u''_i u''_j$ est négligeable devant le produit double $\overline{\rho} u''_i u''_j$. Il serait commode de disposer d'un terme source simplifié.

Par identification de (3.26) avec (2.20), le terme source devient :

$$S_i = - \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{p}_{1a}}{\partial x_i} + \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_{0a} \overline{u}_{i0a}}{\partial t_a} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a}}{\partial t_a} + \frac{\partial \rho_{0a} \overline{u}_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} \overline{u}_{j0a}}{\partial x_j} \\ + \frac{\partial \rho_{0a} \overline{u}_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial \overline{\tau}_{ij0a}}{\partial x_j} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau''_{ij0a}}{\partial x_j} . \quad (3.34)$$

Pour un nombre de Reynolds suffisamment important, les termes visqueux de (3.34) sont négligeables. Appliquons maintenant l'opérateur divergence et la dérivée convective $\overline{D}/\overline{D}t_a$ à (3.34) afin de retrouver une forme similaire à (3.25) :

$$- \frac{\overline{D}}{\overline{D}t_a} \frac{\partial^2 \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\overline{D}}{\overline{D}t_a} \nabla \cdot \left(\frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a}}{\partial t_a} \right) \\ + \frac{\overline{D}}{\overline{D}t_a} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \rho_{0a} \overline{u}_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} \overline{u}_{j0a}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_{0a} \overline{u}_{i0a} \overline{u}_{j0a}}{\partial x_j} \right) . \quad (3.35)$$

En faisant l'hypothèse de Lilley que la vitesse moyenne ne possède qu'une seule composante

selon la direction x , que l'écoulement est cisailé dans la direction y et qu'il est isotherme, (3.35) devient :

$$\Lambda_P = \frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \nabla \cdot \left(\frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} \right) + 2\rho_{0a} \frac{\partial \bar{u}_{x0a}}{\partial y} \frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \left(\frac{\partial u''_{y0a}}{\partial x} \right) . \quad (3.36)$$

Sous l'hypothèse que le deuxième terme de (3.36) est négligeable devant le premier, c'est-à-dire que u''_{y0a} est faiblement dépendant de x , le terme source noté \mathbf{S}_P s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{S}_P = (0, S_{Px}, S_{Py}, 0) \quad (3.37)$$

où

$$S_{Px} = \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x} \quad , \quad S_{Py} = \frac{\partial p''_{1a}}{\partial y} . \quad (3.38)$$

Cette forme du terme source correspond à celle trouvée par Prax *et al.* [88] et également à celle exprimée dans le système APE-1 de Ewert *et al.* [33]. Notons toutefois que dans la formulation de Prax *et al.*, le terme source est représenté par le gradient de la pression hydrodynamique ∇p_{1a} et non par le gradient des fluctuations de cette pression.

3.2 Les équations LMNA Perturbées ou PLMNA

Au chapitre 2, le système Low Order Low Mach Number Approximation (**LO-LMNA**) a été développé pour calculer l'évolution d'un champ hydrodynamique faiblement compressible. Un développement de Janzen-Rayleigh a permis de « filtrer » l'acoustique en ne considérant que les ordres les plus bas de ce développement. Il est alors raisonnable de penser qu'il est possible de construire de la même manière un propagateur acoustique en conservant les ordres supérieurs. C'est la voie suivie par Slimon *et al.* [100] à l'aide d'un développement autour d'un écoulement incompressible ou Expansion about Incompressible Flow (**EIF**). Là, chaque grandeur est considérée comme constituée d'une partie incompressible et d'une partie perturbée. Cette perturbation est introduite dans les équations de Navier-Stokes (NS) compressibles dont est soustraite la solution incompressible. Slimon *et al.* font alors un développement de la perturbation. Ils obtiennent un jeu d'équations infini et proposent donc de grouper tous les ordres de perturbation dans une seule grandeur x' . Leur étude est une extension de la méthode initiée par Hardin et Pope [49]. De la même façon, Munz *et al.* [82] développent la méthode de pression à variables multiple ou Multiple Pressure Variables (**MPV**). Ewert *et al.* [32, 33] développent les Acoustic Perturbation Equations (**APE**) par un filtrage des **EEL** exprimées dans l'espace fréquence/nombre d'onde par une transformation de Fourier-Laplace. Ils forment plusieurs systèmes d'**APE** selon la nature des champs sources, qu'ils proviennent d'une simulation compressible ou incompressible. Seo et Moon [95] perturbent également les équations

tions de NS compressibles, cependant ils ne négligent pas les forces visqueuses afin d'obtenir un système d'équations, les équations compressibles perturbées ou Perturbed Compressible Equations (**PCE**). Cette approche est plus adaptée aux problèmes d'interactions d'un fluide avec une paroi solide. Les **PCE** présentent alors un opérateur de propagation assez proche des **EEL** avec des forces visqueuses comme terme source des équations de quantité de mouvement et un terme source basé sur la dérivée totale de la pression et le flux de chaleur dans l'équation de l'énergie. Plus tard, ils simplifient ce système en le linéarisant [96] et créent ainsi les Linearized Perturbed Compressible Equations (**LPCE**) dont le seul terme source est la dérivée totale de la pression hydrodynamique dans l'équation de l'énergie.

La démarche suivie dans cette étude est très similaire à celle conduisant aux **PCE**. Cependant dans le cas des **PCE**, le champ hydrodynamique est incompressible et la méthode ne rend donc pas compte des effets de température. Les équations de NS compressibles vues au chapitre 2

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{(\gamma-1)}{Re} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2 Re Pr} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3.41)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2} \quad (3.42)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (3.43)$$

sont perturbées en décomposant ρ , u_i , p et T en

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho'_h & , & & u_i &= u_{i0} + u'_{ih} & , & & \\ T &= T_0 + T'_h & , & & p &= \varepsilon^{-1} p_0 + p_1 + p'_h & . & & \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dans les expressions (3.44), les perturbations ρ'_h , u'_{ih} , T'_h et p'_h contiennent l'acoustique. Par identification avec le développement de Janzen-Rayleigh des équations (2.8)-(2.11), elle contiennent en fait toutes les fluctuations d'ordre au moins égal à ε :

$$\begin{aligned} \rho'_h &= \varepsilon \rho_1 + \varepsilon^2 \rho_2 + \varepsilon^3 \rho_3 + \dots & , & & u'_{ih} &= \varepsilon u_{i1} + \varepsilon^2 u_{i2} + \varepsilon^3 u_{i3} + \dots & , & & \\ T'_h &= \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \varepsilon^3 T_3 + \dots & , & & p'_h &= \varepsilon p_2 + \varepsilon^2 p_3 + \varepsilon^3 p_e + \dots & . & & \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ici, les perturbations sont notées avec un indice $_h$ pour signifier la normalisation par rapport aux grandeurs de référence hydrodynamiques $\rho_{ref_h}^*$, $u_{ref_h}^*$, $p_{ref_h}^*$ et $T_{ref_h}^*$.

Afin de linéariser les équations, les produits de perturbations sont négligés. Rappelons que les

champs ρ_0 , u_{i_0} , p_0 et T_0 sont calculés par `quasincompact3d` tels que :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{j_0}}{\partial x_j} = 0 \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_{i_0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i_0} u_{j_0}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij_0}}{\partial x_j} \quad (3.47)$$

$$p_0 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} = \frac{1}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \quad (3.48)$$

$$p_0 = \rho_0 T_0 = \text{constante} \quad (3.49)$$

L'équation de continuité (3.39) devient :

$$\frac{\partial \rho'_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 u'_{jh} + \rho'_h u_{j_0}) = \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{j_0}}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (3.46)}} \quad (3.50)$$

En procédant de même, l'équation (3.40) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 u'_{ih}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'_h u_{i_0}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 u_{i_0} u'_{jh} + \rho_0 u'_{ih} u_{j_0} + \rho'_h u_{i_0} u_{j_0}) + \frac{\partial p'_h}{\partial x_i} &= \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau'_{ijh}}{\partial x_j} \\ - \left(\underbrace{\varepsilon^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial x_i}}_{=0 \text{ (3.49)}} + \underbrace{\frac{\partial \rho_0 u_{i_0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i_0} u_{j_0}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_1}{\partial x_i} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij_0}}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (3.47)}} \right) & \quad (3.51) \end{aligned}$$

L'équation (3.50) est injectée dans (3.51), l'équation de quantité de mouvement est finalement :

$$\frac{\partial \rho_0 u'_{ih}}{\partial t} + \rho'_h \frac{\partial u_{i_0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u'_{ih} u_{j_0}}{\partial x_j} + (\rho_0 u'_{jh} + \rho'_h u_{j_0}) \frac{\partial u_{i_0}}{\partial x_j} + \frac{\partial p'_h}{\partial x_i} = \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau'_{ijh}}{\partial x_j} \quad (3.52)$$

Développons maintenant l'équation de l'énergie (3.41) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_h}{\partial t} + u_{j_0} \frac{\partial p'_h}{\partial x_j} + u'_{jh} \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon^{-1} p_0 + p_1) + \gamma p'_h \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} + \gamma (\varepsilon^{-1} p_0 + p_1) \frac{\partial u'_{jh}}{\partial x_j} &= F_v \\ - \left[\underbrace{\frac{\partial \varepsilon^{-1} p_0}{\partial t} + u_{j_0} \frac{\partial \varepsilon^{-1} p_0}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (3.49)}} + \underbrace{\gamma \varepsilon^{-1} p_0 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} - \frac{\gamma \varepsilon^{-1}}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right)}_{=0 \text{ (3.48)}} + \frac{\partial p_1}{\partial t} + u_{j_0} \frac{\partial p_1}{\partial x_j} + \gamma p_1 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} \right] & \quad (3.53) \end{aligned}$$

où

$$F_v = \frac{(\gamma - 1)}{R_e} (\tau_{ij_0} + \tau'_{ijh}) \frac{\partial (u_{i_0} + u'_{ih})}{\partial x_j} + \frac{\gamma \varepsilon^{-1}}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T'_h}{\partial x_j} \right) \quad (3.54)$$

Pour un nombre de Reynolds suffisamment important, le terme thermo-visqueux F_v est négli-

geable. Après réorganisation, l'équation de conservation de l'énergie perturbée s'écrit :

$$\frac{\partial p'_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} [(p'_h u_{j_0} + \gamma(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1) u'_{j_h})] + (\gamma - 1) \left[p'_h \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} - u'_{j_h} \frac{\partial(\varepsilon^{-1} p_0 + p_1)}{\partial x_j} \right] = S_e \quad (3.55)$$

où

$$S_e = - \left(\frac{Dp_1}{Dt} + \gamma p_1 \frac{\partial u_{j_0}}{\partial x_j} \right) \quad (3.56)$$

et $D/Dt = \partial/\partial t + u_{j_0} \partial/\partial x_j$ est la dérivée convective.

Le propagateur **PLMNA** écrit avec la normalisation acoustique, $\rho_{ref_a}^*$, $c_{ref_a}^*$, $p_{ref_a}^*$, $L_{ref_a}^*$ est finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0_a} u'_j + \rho' u_{j_0_a}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_{0_a} u'_i}{\partial t_a} + \rho' \frac{\partial u_{i_0_a}}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0_a} u'_i u_{j_0_a}) + (\rho_{0_a} u'_j + \rho' u_{j_0_a}) \frac{\partial u_{i_0_a}}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' u_{j_0_a} + \gamma p_{0_a} u'_j) + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial u_{j_0_a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p_{0_a}}{\partial x_j} \right) &= S_e \\ S_e &= - \left(\frac{Dp_{1_a}}{Dt_a} + \gamma p_{1_a} \frac{\partial u_{j_0_a}}{\partial x_j} \right) . \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les relations de passage pour le redimensionnement sont semblables à (3.29) :

$$\begin{aligned} u_{i_0_a} &= u_{i_0} M \quad , \quad p_{0_a} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + p_1 M^2 \right) \frac{\rho_{ref_h}^*}{\rho_{ref_a}^*} \\ \rho_{0_a} &= \rho_0 \frac{\rho_{ref_h}^*}{\rho_{ref_a}^*} \quad , \quad p_{1_a} = p_1 M^2 \frac{\rho_{ref_h}^*}{\rho_{ref_a}^*} \\ t_a &= t M^{-1} . \end{aligned} \quad (3.58)$$

Le système **PLMNA** (3.57) possède quelques similarités avec les **EEL** (3.17). Il s'agit en fait des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement instationnaire. Le terme source ne se situe que dans l'équation de l'énergie. Sa forme est proche de celle du terme source développé par Ribner dans son analogie [92]. Un exemple sur un cas simple permettra de mettre ceci en évidence au paragraphe 5.1.3.3. La résolution de (3.57) se fait également sous la forme matricielle (3.18).

3.2.1 Filtrage de la vorticité de Seo et Moon

Ce jeu d'equations est surtout semblable aux **PCE** [95]. Seo et Moon constatent que ce système peut contenir et entretenir de fortes instabilités par l'equation de quantité de mouvement.

Ils proposent alors un filtrage en traitant l'équation de transport de la vorticité perturbée [96]. En effet, un champ de vitesse acoustique est par définition irrotationnel. Sa vorticité est nulle.

Soient les équations de continuité et de quantité de mouvement **LO-LMNA**  crites sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_{0a}}{\partial t_a} + \nabla \cdot (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a}) = 0 \quad (3.59)$$

$$\rho_{0a} \frac{\partial \mathbf{u}_{0a}}{\partial t_a} + \mathbf{u}_{0a} \frac{\partial \rho_{0a}}{\partial t_a} + (\mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a}) + (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a}) (\nabla \cdot \mathbf{u}_{0a}) = -\nabla p_{1a} + \mathbf{F}_{v_{0a}} \quad (3.60)$$

o 

$$\mathbf{F}_{v_{0a}} = \frac{\partial \tau_{ij_{0a}}}{\partial x_j} \quad . \quad (3.61)$$

  l'aide de l'identit  vectorielle

$$\begin{aligned} \nabla \wedge [\mathbf{u}_{0a} \wedge (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a})] &= \mathbf{u}_{0a} [\nabla \cdot (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a})] - (\mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a}) \\ &\quad - (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a}) (\nabla \cdot \mathbf{u}_{0a}) + (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a} \quad , \end{aligned} \quad (3.62)$$

et de (3.59), l'équation (3.60) peut aussi s'écrire

$$\frac{D\mathbf{u}_{0a}}{Dt_a} = \frac{1}{\rho_{0a}} \{ \nabla \wedge [\mathbf{u}_{0a} \wedge (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a})] - \nabla p_{1a} + \mathbf{F}_{v_{0a}} \} \quad . \quad (3.63)$$

L'équation de quantité de mouvement perturbée du système **PLMNA** (3.57) sous forme vectorielle est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{0a} \mathbf{u}'}{\partial t_a} + \rho' \frac{\partial \mathbf{u}_{0a}}{\partial t_a} + (\rho_{0a} \mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a} + (\rho' \mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a} + (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}' \\ + \mathbf{u}' [\nabla \cdot (\rho_{0a} \mathbf{u}_{0a})] + \nabla p' = 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.64)$$

Soit l'identité vectorielle

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a} &= \nabla (\mathbf{u}_{0a} \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}_{0a} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}') - \mathbf{u}' \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}_{0a}) \\ &= \nabla (\mathbf{u}_{0a} \cdot \mathbf{u}') + \omega' \wedge \mathbf{u}_{0a} + \Omega_{0a} \wedge \mathbf{u}' \end{aligned} \quad (3.65)$$

où $\omega' = \nabla \wedge \mathbf{u}'$ et $\Omega_{0a} = \nabla \wedge \mathbf{u}_{0a}$ sont respectivement la vorticité perturbée et la vorticité dynamique, (3.64) devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t_a} + \nabla (\mathbf{u}_{0a} \cdot \mathbf{u}') + \frac{1}{\rho_{0a}} \nabla p' = \mathbf{u}_{0a} \wedge \omega' + \mathbf{u}' \wedge \Omega_{0a} - \frac{\rho'}{\rho_{0a}} \frac{D\mathbf{u}_{0a}}{Dt_a} \quad . \quad (3.66)$$

L'équation de transport de la vorticité perturbée est obtenue en calculant le rotationnel de (3.66) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial t_a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega' = & \underbrace{[(\Omega_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a}]}_I - \underbrace{[(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \Omega_{0a} + \Omega_{0a} (\nabla \cdot \mathbf{u}')]]}_II \\ & - \underbrace{\omega' (\nabla \cdot \mathbf{u}_{0a})}_III + \underbrace{\frac{1}{\rho_{0a}^2} (\nabla \rho_{0a} \wedge \nabla p')}_{IV} - \underbrace{\nabla \wedge \left(\frac{\rho'}{\rho_{0a}} \frac{D \mathbf{u}_{0a}}{dt_a} \right)}_V. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Les termes I – V de (3.67) sont clairement des termes de création et de diffusion de la vorticité perturbée. Le terme I repr esente l'étirement tridimensionnel de la vorticité. Dans une configuration bidimensionnelle, ce terme est nul. Le seul terme qui diffère de ceux calculés par Seo et Moon est le terme III. En effet ils avaient considéré un écoulement incompressible ce qui implique l'annulation de ce terme. Ils identifient le terme II comme principal responsable de la création de vorticité perturbée car il contient les intéractions de la vorticité hydrodynamique avec la vitesse perturbée. Par une analyse en ordre de grandeur de l'équation de propagation des **LPCE**, ils soulignent que les membres de droite de (3.66) ne contribuent pas sensiblement au rayonnement acoustique et donc que leur annulation est tolérable et permet de supprimer la vorticité perturbée.

Le système d'équations **PLMNA** avec filtrage de Seo et Moon (**PLMNA***) s'écrit finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_j + \rho' u_{j0a}) &= 0 \\ \frac{\partial u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial (u'_j u_{j0a})}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_{0a}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' u_{j0a} + \gamma p_{0a} u'_j) + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p_{0a}}{\partial x_j} \right) &= S_e \\ S_e &= - \left(\frac{D p_{1a}}{D t_a} + \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Par rapport au système **PLMNA** (3.57), seule l'équation de quantité de mouvement a été modifiée par cette opération de filtrage de la vorticité perturbée.

3.3 Développement des EEL avec terme source S_E depuis PLMNA

Les grandeurs hydrodynamiques peuvent être décomposées en terme de fluctuations autour d'une grandeur moyenne tout comme cela avait été fait pour le calcul du terme source des **EEL**

(3.26). La décomposition suivante est alors utilisée :

$$u_{i0_a} = \overline{u_{i0_a}} + u''_{i0_a} \quad , \quad p_{0_a} = \overline{p_{0_a}} + p''_{i0_a} \quad , \quad \rho_{0_a} = \overline{\rho_{0_a}} + \rho''_{0_a} \quad (3.69)$$

où la barre \bar{x} signifie la moyenne temporelle et le double prime x'' les fluctuations autour de cette moyenne. La démarche proposée ici consiste à retrouver une formulation **EEL** à partir du système **PLMNA**. En insérant cette décomposition dans les **PLMNA** (3.57), il vient :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho_{0_a}} u'_j + \rho' \overline{u_{j0_a}} + \rho''_{0_a} u'_j + \rho' u''_{j0_a} \right) = 0 \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \overline{\rho_{0_a}} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial \rho''_{0_a} u'_i}{\partial t_a} + \rho' \frac{\partial u''_{i0_a}}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\rho_{0_a}} u'_i \overline{u_{j0_a}} + \overline{\rho_{0_a}} u'_i u''_{j0_a} + \rho_{0_a} u'_i \overline{u_{j0_a}} + \rho''_{0_a} u'_i u''_{j0_a} \right) \\ & + \left(\overline{\rho_{0_a}} u'_j + \rho' \overline{u_{j0_a}} + \rho''_{0_a} u'_j + \rho' u''_{j0_a} \right) \frac{\partial \overline{u_{i0_a}}}{\partial x_j} + \left(\overline{\rho_{0_a}} u'_j + \rho' \overline{u_{j0_a}} + \rho''_{0_a} u'_j + \rho' u''_{j0_a} \right) \frac{\partial u''_{i0_a}}{\partial x_j} \\ & + \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(p' \overline{u_{j0_a}} + \gamma \overline{p_{0_a}} u'_j + p' u''_{j0_a} + \gamma p''_{0_a} u'_j \right) \\ & + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial \overline{u_{j0_a}}}{\partial x_j} + p' \frac{\partial u''_{j0_a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \overline{p_{0_a}}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p''_{0_a}}{\partial x_j} \right) = S_e \end{aligned} \quad (3.72)$$

En suivant la démarche de Béchara *et al.* [10], les produits de fluctuations hydrodynamiques et de fluctuations acoustiques sont négligés. Le système obtenu est alors strictement celui des **EEL** avec un terme source $\mathbf{S_E} = (0, 0, 0, S_e)^T$ n'ayant qu'une composante dans l'équation de l'énergie :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} u'_j + \rho' \overline{u}_j) = 0 \\ & \frac{\partial \overline{\rho} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\rho} u'_i \overline{u}_j) + (\overline{\rho} u'_j + \rho' \overline{u}_j) \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = 0 \\ & \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' \overline{u}_j + \gamma \overline{p} u'_j) + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} \right) = S_e \\ & S_e = - \left(\frac{Dp_{1_a}}{Dt_a} + \gamma p_{1_a} \frac{\partial u_{j0_a}}{\partial x_j} \right) . \end{aligned} \quad (3.73)$$

Les champs moyens sont écrits en cohérence avec les **EEL** :

$$\begin{aligned} \overline{u_i} &= \overline{u_{i0a}} = \overline{u_{i0}} M & , & & \overline{p} &= \overline{p_{0a}} = \left(\frac{p_0}{\gamma} + p_1 M^2 \right) \frac{\rho_{refh}^*}{\rho_{refa}^*} & , \\ \overline{\rho} &= \overline{\rho_{0a}} = \overline{\rho_0} \frac{\rho_{refh}^*}{\rho_{refa}^*} & . & & & & \end{aligned} \quad (3.74)$$

Il aurait tout à fait été possible de déduire ce système en perturbant directement les équations d'Euler compressibles de la même façon, c'est-à-dire en décomposant chaque grandeur en une moyenne hydrodynamique, des fluctuations hydrodynamiques autour de cette moyenne et des fluctuations acoustiques. L'avantage de ce système comparé à la formulation de Bogey *et al.* est qu'ici, aucune hypothèse n'est posée sur l'allure du champ hydrodynamique moyen pour déduire le terme source. Notons que dans le cas où la simulation hydrodynamique est incompressible, cette expression des équations d'Euler correspond à celle développée par Shen et Sorensen [98] et également au système **APE-2** de Ewert *et al.* [33] concernant la forme du terme source.

3.4 Rappel des diverses formulations hybrides

Dans le cadre de cette étude, cinq formulations hybrides différentes sont employées. Elles se classent en deux familles :

- les propagateurs basés sur les équations d'Euler linéarisées,
- les propagateurs « instationnaires » calculant des perturbations autour de l'écoulement hydrodynamique à chaque instant.

Dans la famille des **EEL**, les trois propagateurs se différencient principalement par l'expression de leur terme source. Ainsi, le propagateur **EEL+S_L** comprend le système d'équation (3.17) avec des termes sources incluant les fluctuations de vitesse (3.32). Le propagateur **EEL+S_P** comprend lui aussi le système (3.17) mais ses termes sources sont calculés sur les fluctuations du gradient de pression (3.38). Le dernier est le propagateur **EEL+S_E** dont le système d'équation (3.73) a un unique terme source dans l'équation d'énergie basé sur la dérivée totale de la pression hydrodynamique.

La deuxième famille est celle des équations LMNA perturbées : le propagateur **PLMNA** (3.57) et sa version à filtrage de la vorticité perturbée **PLMNA*** (3.68).

En faisant les mêmes hypothèses que Ribner [92], c'est-à-dire que la propagation acoustique se fait dans un milieu au repos, sans écoulement moyen, la formulation **EEL+S_E** peut s'écrire sous la forme de l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t_a^2} - \nabla^2 p' = \underbrace{-\frac{\partial^2 p_{1a}}{\partial t_a^2}}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_a} \left(u_{j0a} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x_j} \right)}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t_a} \left(\gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right)}_{\textcircled{3}} \quad (3.75)$$

(de plus amples détails sur la formation de cette équation d'onde seront donnés au paragraphe 5.1.3.3). L'équation (3.75) avec le terme source $\textcircled{1}$ correspond exactement à l'analogie de Ribner. L'originalité apparaît alors à travers les termes $\textcircled{2}$ et $\textcircled{3}$. Pour une configuration isotherme, le terme $\textcircled{3}$ est nul. Le rôle de chacune des contributions du membre de droite de (3.75) sera étudié au chapitre 6.

3.5 Détails des méthodes de résolution numériques

Les différents jeux d'équations développés ici sont résolus par les codes de calcul `see12d` et `plmna2d` sous la forme conservative (3.18). Les schémas de résolution numérique sont identiques à ceux extensivement détaillés et utilisés par Bailly *et al.* [5] ou Bogey *et al.* [17]. Les dérivées spatiales sont calculées à l'aide des schémas aux différences finies centrés :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} \right|_j = \frac{1}{\Delta x_\gamma} \sum_{k=-3}^3 a_k f_{j+k} \quad , \quad j = 4, \dots, n_{x_\gamma} - 3 \quad (3.76)$$

où n_{x_γ} est le nombre de points et Δx_γ le pas d'espace dans la direction $x_\gamma = x, y$. Ces schémas aux différences finies centrés à sept points voisins ont un ordre de précision maximal théorique $(\Delta x_\gamma)^6$. Ici les coefficients a_k utilisés sont ceux calculés par Tam et Shen [107] :

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_1 &= -a_{-1} = 0,770882380518 \\ a_2 &= -a_{-2} = -0,166705904415 \\ a_3 &= -a_{-3} = 0,020843142770 \quad . \end{aligned} \quad (3.77)$$

Ce schéma découle de ceux calculés par Tam et Webb [108]. Ces derniers ont calculé les coefficients a_k de manière à minimiser l'erreur commise sur le nombre d'onde

$$E = \int_{\pi/2}^{\pi/2} |k\Delta x_\gamma - k'\Delta x_\gamma|^2 d(k\Delta x_\gamma) \quad (3.78)$$

en fixant arbitrairement la précision à $(\Delta x_\gamma)^4$. Ainsi à nombre de points égal, le schéma de dérivation se révèle moins dispersif que son équivalent en différences finies centrées standard comme le montre la figure 3.1. Ces coefficients forment donc naturellement les schémas à « préservation de la relation de dispersion » ou Dispersion Relation Preservation (DRP).

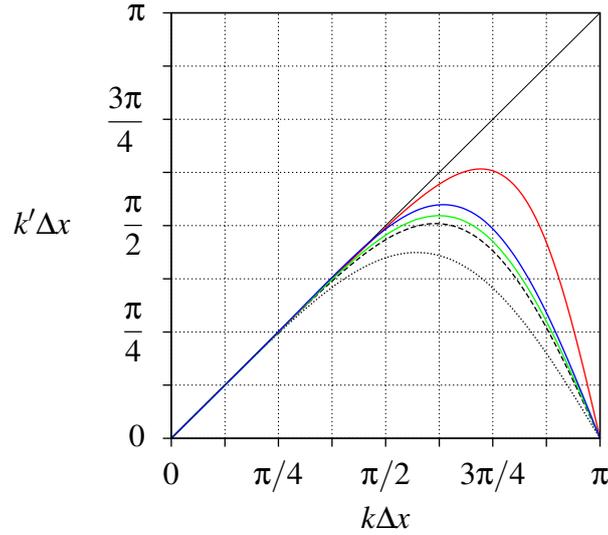


FIG. 3.1: Variation du nombre d'onde modifié k' pour les schémas DRP en fonction du nombre d'onde k pour l'évaluation de la dérivée première : (—) valeur exacte, (···) schéma explicite d'ordre quatre, (- -) schéma explicite d'ordre six, (—) schéma compact d'ordre six, (—) schéma DRP de Tam et Webb, (—) schéma DRP de Tam et Shen.

Près des frontières du domaine de calcul, c'est-à-dire pour $j = [1, 2, 3]$ et $j = (n_{x_\gamma} - 2)$, $j = (n_{x_\gamma} - 1)$, $j = n_{x_\gamma}$, il n'est plus possible d'utiliser le schéma centré (3.76) comme l'illustre la figure 3.2. Les schémas DRP décentrés [104] sont alors employés :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_\gamma} \right|_j = \frac{1}{\Delta x_{\gamma j}} \sum_{k=-L}^M a_k f_{j+k} \quad . \quad (3.79)$$

Les valeurs des coefficients a_k dans les cas décentrés sont données dans le tableau 3.1 pour $j = [1, 2, 3]$. Les coefficients pour $j = [(n_{x_\gamma} - 2), (n_{x_\gamma} - 1), n_{x_\gamma}]$ se déduisent des précédents par symétrie.

L'avancement temporel est réalisé à l'aide d'un algorithme de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4) qui a la propriété d'allier forte stabilité et faible coup de stockage. Chaque itération du calcul est divisée en quatre sous-pas de temps. La solution de l'équation (3.18) à l'itération $n + 1$ est obtenue en calculant les p sous-pas de temps :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{i,j}^0 &= \mathbf{K}_{i,j}^n \\ \mathbf{K}_{i,j}^m &= -\frac{1}{\Delta x_i} \sum_{k=-L}^M a_k \mathbf{E}_{i+k,j}^m - \frac{1}{\Delta y_j} \sum_{k=-L}^M a_k \mathbf{F}_{i,j+k}^m - \mathbf{H}_{i,j}^m \quad , \quad m = 1, \dots, 3 \\ \mathbf{U}_{i,j}^p &= \mathbf{U}_{i,j}^n + \alpha_p \Delta t \left(\mathbf{K}_{i,j}^{p-1} + \mathbf{S}_{i,j}^n \right) \quad , \quad p = 1, \dots, 4 \\ \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{U}_{i,j}^4 \end{aligned} \quad (3.80)$$

$j = 1 :$ $(L, M) = (0, 6)$	$j = 2 :$ $(L, M) = (1, 5)$	$j = 3 :$ $(L, M) = (2, 4)$
$a_0 = -2.192280339$	$a_{-1} = -0.209337622$	$a_{-2} = 0.049041958$
$a_1 = 4.748611401$	$a_0 = -1.084875676$	$a_{-1} = -0.468840357$
$a_2 = -5.108851915$	$a_1 = 2.147776050$	$a_0 = -0.474760914$
$a_3 = 4.461567104$	$a_2 = -1.388928322$	$a_1 = 1.273274737$
$a_4 = -2.833498741$	$a_3 = 0.768949766$	$a_2 = -0.518484526$
$a_5 = 1.128328861$	$a_4 = -0.281814650$	$a_3 = 0.166138533$
$a_6 = -0.203876371$	$a_5 = 0.048230454$	$a_4 = -0.026369431$

TAB. 3.1: Coefficients des schémas DRP décentrés.

où les coefficients α_p valent

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{1}{3} \quad , \quad \alpha_3 = \frac{1}{2} \quad , \quad \alpha_4 = 1 \quad .$$

Pour le propagateur **PLMNA**, le terme supplémentaire en dérivée temporelle $\partial u_{i_0 a} / \partial t_a$ est calculé avec le schéma DRP décentré donné en première colonne du tableau 3.1. Il en est de même pour l'estimation de la dérivée temporelle dans le calcul du terme source lorsque celui-ci est fonction de la dérivée totale de la pression, c'est-à-dire pour **EEL+S_E**, **PLMNA** et **PLMNA***.

3.5.1 Filtrage

L'utilisation de schémas de dérivation aux différences finies centrés peut entraîner des oscillations hautes fréquences d'une maille du domaine de calcul à une autre appelées « oscillations maille-à-maille ». Ces oscillations apparaissent notamment en frontière du domaine, en présence de forts gradients ou de discontinuités et également lorsque le maillage est brutalement étiré. Ces ondes parasites purement numériques peuvent d'une part polluer la solution physique et d'autre part créer des instabilités de la méthode de résolution. Il est donc nécessaire de les dissiper en introduisant des termes de dissipation artificielle dans (3.80) ou bien en filtrant de manière efficace sans affecter les grandes longueurs d'ondes physiques. Ici, il est appliqué un filtrage aux quantités \mathbf{U}^{n+1} issues de (3.80) :

$$\tilde{\mathbf{U}}_{i,j}^{n+1} = \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} - \sum_{k=-\tilde{L}}^{\tilde{M}} \tilde{d}_k \left(\tilde{\sigma}_x \mathbf{U}_{i+k,j}^{n+1} + \tilde{\sigma}_y \mathbf{U}_{i,j+k}^{n+1} \right) \quad (3.81)$$

Filtre d'ordre 4 : $(\tilde{L}, \tilde{M}) = (2, 2)$	Filtre d'ordre 8 : $(\tilde{L}, \tilde{M}) = (4, 4)$
$\tilde{d}_0 = 0,375$ $\tilde{d}_1 = -0,25$ $\tilde{d}_2 = 0,0625$ $\tilde{d}_{-1} = \tilde{d}_1$ $\tilde{d}_{-2} = \tilde{d}_2$	$\tilde{d}_0 = 35/128$ $\tilde{d}_1 = -7/32$ $\tilde{d}_2 = 7/64$ $\tilde{d}_3 = -1/32$ $\tilde{d}_4 = 1/256$ $\tilde{d}_{-1} = \tilde{d}_1$ $\tilde{d}_{-2} = \tilde{d}_2$ $\tilde{d}_{-3} = \tilde{d}_3$ $\tilde{d}_{-4} = \tilde{d}_4$

TAB. 3.2: Coefficients des filtres employés.

où $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y$ est l'amplitude du filtrage, respectivement suivant x et y , comprise entre zéro et un. Au choix, deux types de filtres sont utilisés : un filtrage d'ordre quatre [104] ou un filtrage d'ordre huit proposé par Bogey *et al.* [17]. Les coefficients correspondants sont donnés dans le tableau 3.2.

3.5.2 Conditions aux limites

Le traitement des limites du domaine de simulation est crucial. Il convient d'évacuer correctement les ondes et l'écoulement afin d'éliminer toute réflexion aux frontières qui parasiterait la solution physique calculée. La figure 3.2 représente les différentes conditions mises en œuvre aux frontières du domaine.

3.5.2.1 Condition de rayonnement

Pour des sources acoustiques suffisamment éloignées des frontières, Tam et Webb [108] ont proposé d'appliquer des conditions aux limites anéchoïques en présence d'un écoulement uniforme basées sur une solution asymptotique des **EEL**. Ce traitement a ensuite été étendu par Tam et Dong [105, 106] aux écoulements quelconques. Il s'agit de traiter les points aux frontières avec les **EEL** écrites en coordonnées polaires en supposant que les fluctuations présentes ne sont que de nature acoustique :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t_a} + \mathbf{V}_g \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) \right] \mathbf{U} = 0 \quad (3.82)$$

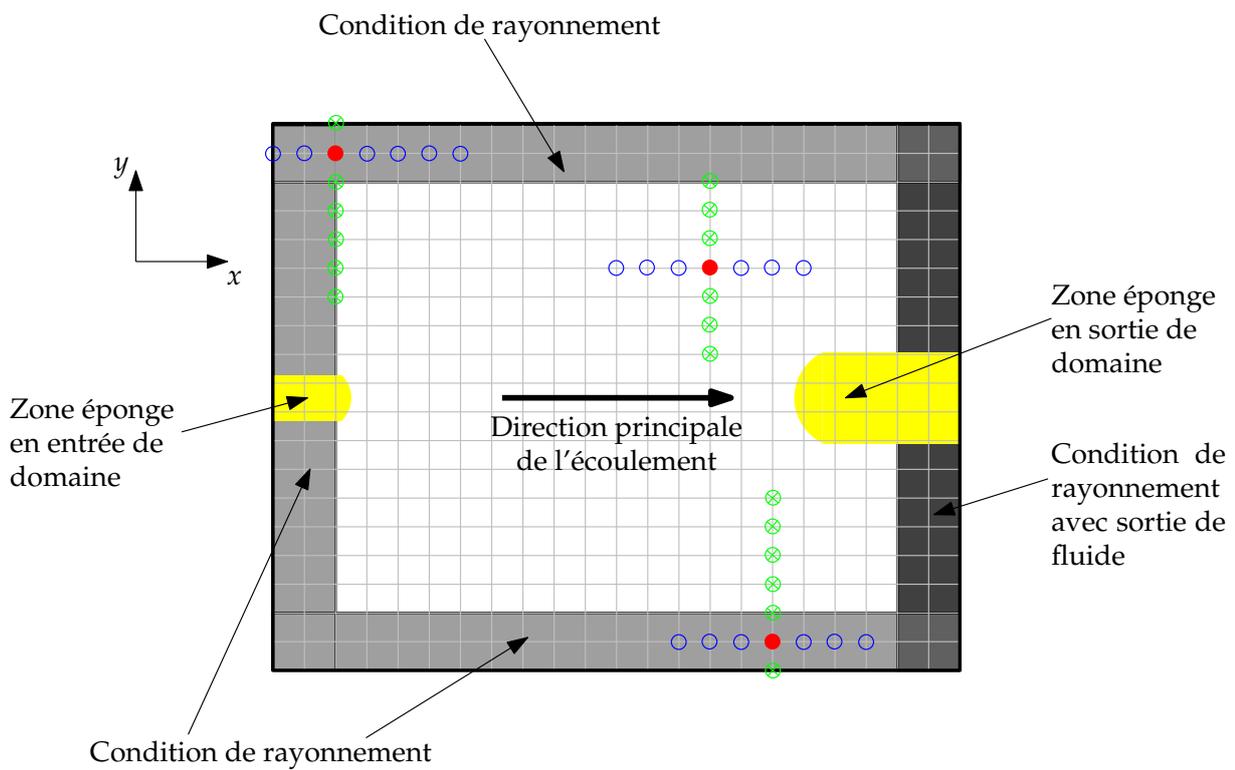


FIG. 3.2: Représentation du domaine de calcul et des conditions aux limites. Aux points marqués ●, la dérivée suivant x est évaluée avec les points voisins ○ et suivant y avec les points voisins ⊗.

où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et \mathbf{V}_g est la vitesse de groupe des ondes acoustiques définie par

$$\mathbf{V}_g = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r + \sqrt{\bar{c}^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\theta)^2} \quad . \quad (3.83)$$

Les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ sont les vecteurs unitaires dans les directions r et $\theta = \arctan(y/x)$. Les coordonnées polaires r et θ sont calculées depuis le centre du domaine. Dans l'équation (3.83), $\bar{c} = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ est la célérité moyenne du son. En coordonnées cartésiennes, \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_x + \cos \theta \mathbf{e}_y \quad . \end{aligned} \quad (3.84)$$

3.5.2.2 Condition de rayonnement avec sortie de fluide

En présence d'un écoulement de fluide, des perturbations vorticales et entropiques s'ajoutent aux perturbations acoustiques aux frontières. En l'absence de paroi, les fluctuations de pression restent elles inchangées. Les conditions aux limites avec sortie de fluide sont :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}p'}{\bar{D}t_a} &= \frac{1}{\bar{c}^2} \left(\frac{\bar{D}p'}{\bar{D}t_a} \right) \\ \frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} (\bar{\rho} u'_i) &= -\frac{\partial p'}{\partial x_i} \\ \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \mathbf{V}_g \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2r} \right) p' &= 0 \end{aligned} \quad (3.85)$$

où $\bar{D}/\bar{D}t_a = \partial/\partial t_a + \bar{u}_j \partial/\partial x_j$.

3.5.3 Zones éponges

La présence de structures vorticales dans l'écoulement peut créer des sources acoustiques très importantes lorsque ces structures atteignent la frontière aval. D'autre part, l'injection de terme source en entrée de domaine peut aussi créer des oscillations non physiques. Des zones éponges sont utilisées afin de dissiper ces oscillations en entrée et ces structures en sortie du domaine de calcul comme l'illustre la figure 3.2. À chaque itération, un terme dissipatif est ajouté :

$$\mathbf{U}_{i,j}^{n+1} \Leftarrow \mathbf{U}_{i,j}^{n+1} (1 - \sigma_{i,j}) \quad (3.86)$$

où $\sigma_{i,j}$ est une fonction aux valeurs comprises entre zéro et un définissant la forme et l'amplitude de la zone éponge. Cette fonction est à définir avec prudence car une zone éponge trop abrupte viendrait à créer un rayonnement acoustique parasite. A contrario, une amplitude trop faible ne permettrait pas de suffisamment dissiper les structures ce qui rendrait la zone éponge totalement

inefficace. Cette stratégie est particulièrement bien adaptée aux simulations aéroacoustiques comme l'ont montré Richards *et al.* [93].

Procédure de passage des données issues de `quasincompact3d` aux propagateurs acoustiques

L'une des principales difficultés du calcul hybride réside dans la différence des échelles rencontrées. En effet, le code de résolution des **LO-LMNA** gère des échelles de plusieurs ordres de grandeur plus petites que celles acoustiques. Comme il a été souligné dans les chapitres précédents, le solveur hydrodynamique et les solveurs acoustiques utilisent chacun des normalisations qui leur sont propres. Passer des champs hydrodynamiques en terme source des propagateurs acoustiques n'est donc pas trivial et nécessite une étape d'interpolation entre les solveurs afin de faire correspondre les échelles de temps. Concernant les différences de discrétisation spatiale, de maillage, un simple « mapping » sera effectué, c'est-à-dire que la discrétisation spatiale acoustique sera choisie dans chaque direction de sorte qu'elle corresponde exactement à un nombre entier de pas d'espace du calcul hydrodynamique. En ce qui concerne le temps, il est nécessaire de faire correspondre les temps dimensionnels hydrodynamique t_h^* et acoustique t_a^* .

4.1 L'interpolation

Il existe de nombreuses méthodes d'interpolation, citons par exemple les interpolations linéaire, polynomiale, rationnelle. L'interpolation temporelle choisie dans cette étude est l'inter-

polation spline cubique.

Le principe de l'interpolation est local. Pour une fonction $f(t)$, connaissant un ensemble t_i de points ($i \in [1, N]$) et les valeurs $f(t_i)$ correspondantes, les algorithmes d'interpolation permettent de déterminer la valeur de cette fonction pour n'importe quelle valeur de t comprise dans l'intervalle $[t_1, t_N]$. Si t est en dehors, il s'agit alors d'extrapolation qu'il convient de manier avec prudence. Cette valeur de $f(t)$ à t sera dépendante de celles des points voisins d'où ce caractère local. Ceci entraîne que la continuité des dérivées de la fonction n'est bien souvent pas assurée. Les méthodes dites « spline » autorisent quant à elles une continuité de la fonction à plusieurs ordres de dérivation par l'utilisation de coefficients déterminés plus ou moins non localement [89]. L'intérêt ici est de réduire les oscillations numériques, élément essentiel lorsque de petites oscillations des champs hydrodynamiques entraînent des phénomènes acoustiques de grande ampleur.

4.1.1 L'interpolation spline cubique

Deux points étant reliés par une droite, trois points par une courbe et ainsi de suite, un polynôme d'interpolation de N points $u_i = f(t_i)$, $i \in [1, N]$, est de degré $N - 1$. Il est donné par la formule de Lagrange :

$$P(t) = \frac{(t-t_2)(t-t_3)\dots(t-t_N)}{(t_1-t_2)(t_1-t_3)\dots(t_1-t_N)}u_1 + \frac{(t-t_1)(t-t_3)\dots(t-t_N)}{(t_2-t_1)(t_2-t_3)\dots(t_2-t_N)}u_2 + \dots + \frac{(t-t_1)(t-t_2)\dots(t-t_{N-1})}{(t_N-t_1)(t_N-t_2)\dots(t_N-t_{N-1})}u_N \quad (4.1)$$

Il y a N termes, chacun de degré $N - 1$. Ils sont tous égaux à zéro pour tous les t_i à l'exception d'un, égal à u_i .

Sur un intervalle $[j, j+1] \in [1, N]$, la formule de l'interpolation cubique s'exprime comme suit :

$$u = Au_j + Bu_{j+1} + C\ddot{u}_j + D\ddot{u}_{j+1} \quad (4.2)$$

où

$$A \equiv \frac{t_{j+1}-t}{t_{j+1}-t_j}, \quad B \equiv \frac{t-t_j}{t_{j+1}-t_j}, \quad C \equiv \frac{1}{6}(A^3-A)(t_{j+1}-t_j)^2, \quad D \equiv \frac{1}{6}(B^3-B)(t_{j+1}-t_j)^2 \quad (4.3)$$

L'interpolation cubique est linéaire à l'ordre deux, ainsi la dérivée seconde de u par rapport à t \ddot{u} s'écrit :

$$\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2} = A\ddot{u}_j + B\ddot{u}_{j+1} \quad (4.4)$$

La condition nécessaire à l'existence de la dérivée seconde de u est la continuité de la dérivée

de u à l'ordre un

$$\frac{du}{dt} = \frac{u_{j+1} - u_j}{t_{j+1} - t_j} - \frac{3A^2 - 1}{6}(t_{j+1} - t_j)\ddot{u}_j + \frac{3B^2 - 1}{6}(t_{j+1} - t_j)\ddot{u}_{j+1} \quad . \quad (4.5)$$

Cela revient à égaliser l'équation (4.5) calculée en $t = t_j$ sur l'intervalle $[t_{j-1}, t_j]$ à celle calculée en $t = t_j$ sur l'intervalle $[t_j, t_{j+1}]$. Il vient alors ($j \in [2, N - 1]$) :

$$\frac{t_j - t_{j-1}}{6}\ddot{u}_{j-1} + \frac{t_{j+1} - t_{j-1}}{3}\ddot{u}_j + \frac{t_{j+1} - t_j}{6}\ddot{u}_{j+1} = \frac{u_{j+1} - u_j}{t_{j+1} - t_j} - \frac{u_j - u_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \quad . \quad (4.6)$$

L'équation (4.6) est un système de $N - 2$ équations, or il y a N inconnues. Deux conditions supplémentaires sont requises pour obtenir une solution unique, il s'agit des conditions au frontières t_1 et t_N .

En assignant une valeur nulle à \ddot{u} sur une frontière ou sur les deux, l'interpolation est alors appelée « spline cubique naturelle ». Si la valeur de \dot{u} , dérivée d'ordre un, est connue sur une ou sur les deux frontières, alors \ddot{u} pourra être calculée suivant l'équation (4.5) sur la ou les frontières considérées.

4.2 Test de la procédure d'interpolation

Le test de la procédure d'interpolation va consister à reconstituer l'évolution temporelle d'un champ de vitesse $V(t)$ sur une période T en prenant un nombre de points par période N_P plus ou moins important comme l'illustre la figure 4.1 et à estimer l'erreur commise. Le champ de vitesse $V(t)$ est le champ de vitesse causé par la corotation de deux tourbillons sur lesquels plus de détails seront donnés au chapitre 5.

Sur la figure 4.2, il apparaît très clairement qu'il faut au moins une quinzaine de points par période pour correctement reconstituer le champ $V(t)$. En effet, soit l'erreur commise sur le champ reconstitué ε_{L^2}

$$\varepsilon_{L^2} = \sqrt{\int_0^T [V(t) - V_{int}(t)]^2 dt} \quad (4.7)$$

où $V_{int}(t)$ est le champ de vitesse reconstitué à partir des N_P points, cette erreur est inférieure à 1% pour $N_P \geq 14$ comme le montre la figure 4.3 b). L'interpolation spline cubique nécessite d'utiliser au moins quatre points voisins et est d'ordre formel maximal de précision $(\Delta t)^3$. Sur la figure 4.3 a), l'erreur d'interpolation suit bien une évolution similaire à $(\Delta t)^3$ tracée en trait plein.

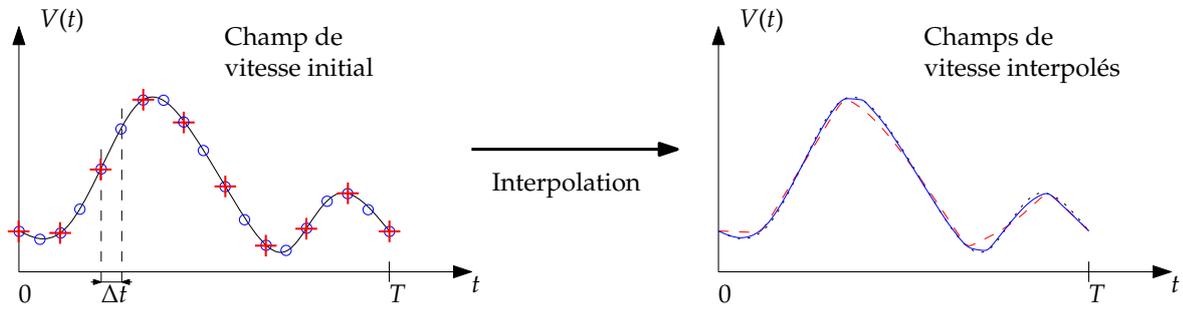


FIG. 4.1: Schématisation de l'interpolation. La courbe (- -) est reconstruite à partir des points +, la courbe (—) est reconstruite à partir des points ○, (· · ·) est la vitesse de départ.

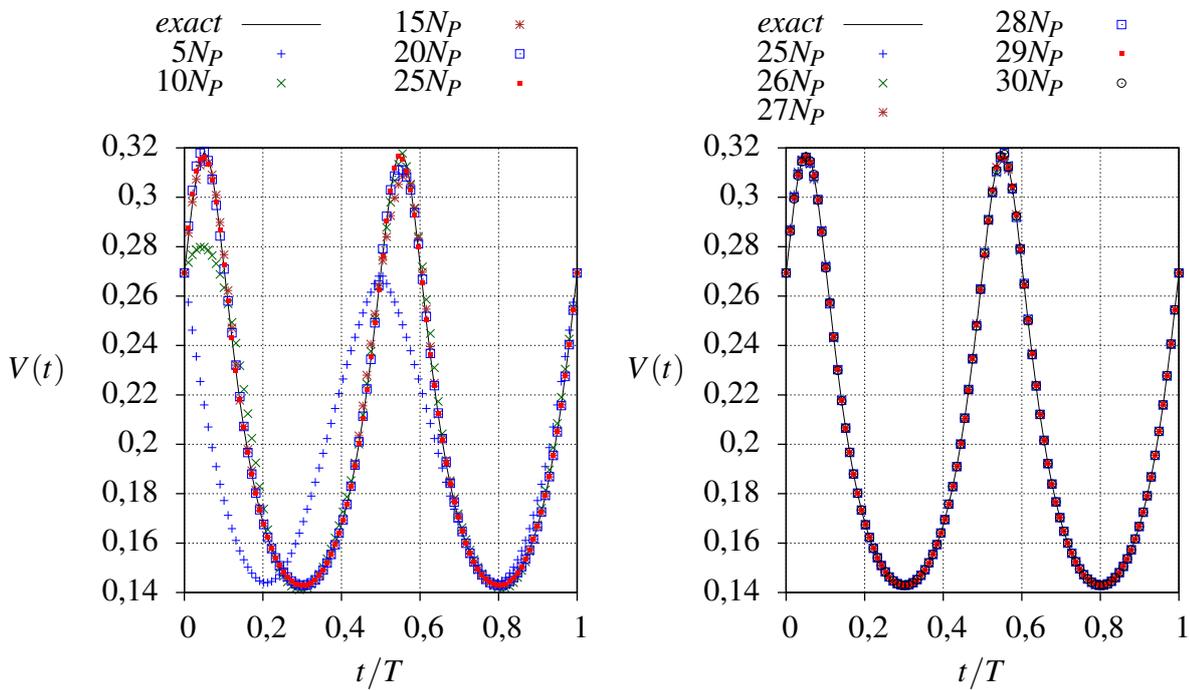


FIG. 4.2: Champs de vitesse interpolés pour différents nombres de points par période N_p .

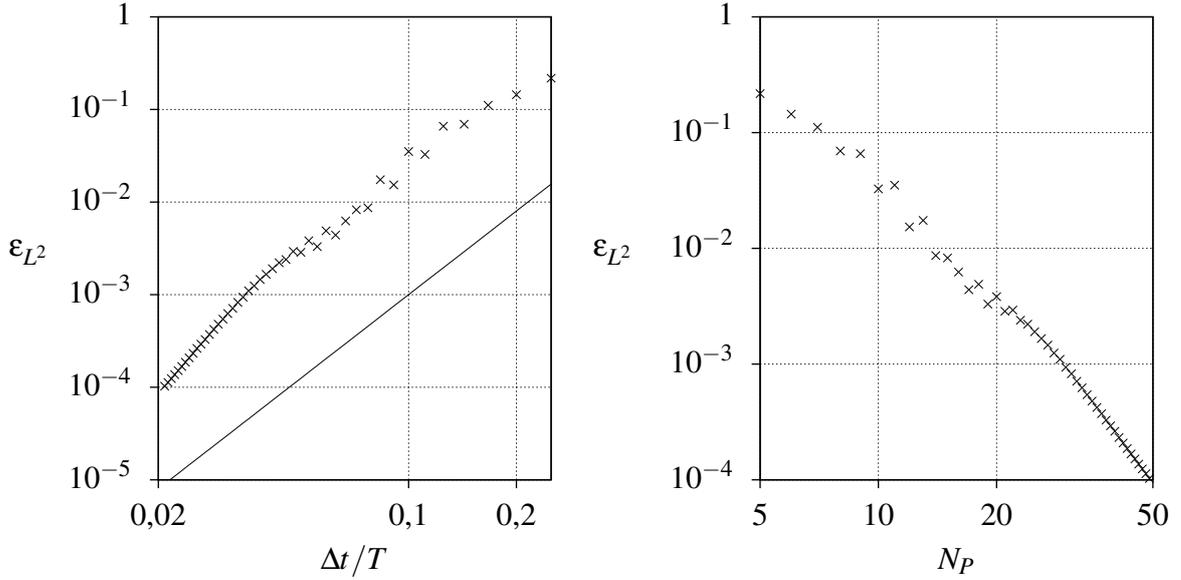


FIG. 4.3: (++) Erreur ε_{L^2} sur le champ de vitesse en norme L^2 , (—) $(\Delta t/T)^3$.

4.3 Interpolation des données issues de `quasincompact3d`

Dans la suite, les variables ayant pour exposant un * sont des variables dimensionnelles, les autres étant normalisées selon la méthode propre à chaque solveur. Les variables indicées $_h$ concernent le calcul hydrodynamique tandis que celles d'indice $_a$ sont celles du propagateur acoustique.

Comme énoncé plus haut, le but de l'interpolation est de faire correspondre les instants t_h^* et t_a^* .

Les instants t_h^* et t_a^* s'expriment en fonction des itérations it_h et it_a , des pas de temps Δt_h et Δt_a et des grandeurs de référence :

$$t_h^* = (it_h - 1)\Delta t_h t_{ref_h}^* = (it_h - 1)\Delta t_h \frac{L_{ref_h}^*}{U_{ref_h}^*} \quad (4.8)$$

$$t_a^* = (it_a - 1)\Delta t_a t_{ref_a}^* = (it_a - 1)\Delta t_a \frac{L_{ref_a}^*}{U_{ref_a}^*} \quad (4.9)$$

Faire correspondre les instants dimensionnels revient à égaliser les équations (4.8) et (4.9). Pour des champs hydrodynamiques sauvegardés toutes les N_h itérations, le nombre N_a d'itérations du solveur acoustique entre deux sauvegardes hydrodynamiques est alors donné par la relation :

$$N_a = \frac{it_a - 1}{it_h - 1} = \frac{\Delta t_h}{\Delta t_a} M^{-1} N_h \quad (4.10)$$

car $N_a \Delta t_a t_{ref_a}^* = N_h \Delta t_h t_{ref_h}^*$ et $L_{ref_a}^* = L_{ref_h}^*$.

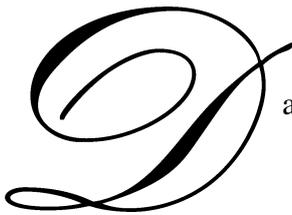
Pour des raisons de coût de stockage en mémoire, il sera nécessaire de fixer la valeur N_h la plus haute possible sans pour autant détériorer la qualité du calcul acoustique. En pratique, N_h sera choisie de sorte que le nombre de points par période N_p soit supérieur à 15 pour la fréquence maximale du champ hydrodynamique afin que l'erreur d'interpolation reste inférieure à 1%.

Les différentes relations de passage entre les solveurs sont récapitulées dans le tableau 4.1.

	LO-LMNA	EEL +S_L / EEL +S_p	EEL +S_E	PLMNA / PLMNA*
U_{ref}^*	U_{refh}^*	c_{refa}^*	c_{refa}^*	c_{refa}^*
L_{ref}^*	L_{refh}^*	$L_{refa}^* = L_{refh}^*$	$L_{refa}^* = L_{refh}^*$	$L_{refa}^* = L_{refh}^*$
t_{ref}^*	$t_{refh}^* = \frac{L_{refh}^*}{U_{refh}^*}$	$t_{refa}^* = \frac{L_{refa}^*}{U_{refa}^*}$	$t_{refa}^* = \frac{L_{refa}^*}{U_{refa}^*}$	$t_{refa}^* = \frac{L_{refa}^*}{U_{refa}^*}$
ρ_{ref}^*	ρ_{refh}^*	$\rho_{refa}^* = \rho_{refh}^*$	$\rho_{refa}^* = \rho_{refh}^*$	$\rho_{refa}^* = \rho_{refh}^*$
p_{ref}^*	$\rho_{refh} U_{refh}^{*2}$	$\rho_{refa} c_{refa}^{*2}$	$\rho_{refa} c_{refa}^{*2}$	$\rho_{refa} c_{refa}^{*2}$
M		$M = U_{refh}/c_{refa}$	$M = U_{refh}/c_{refa}$	$M = U_{refh}/c_{refa}$
Grandeurs utilisées	$u_{x_0}, u_{y_0}, \rho_0,$ T_0, p_0, p_1 t	u'_x, u'_y, ρ', p' $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{\rho}, \bar{p}$ $u''_{x_{0a}}, u''_{y_{0a}}, \rho_{0a}, p_{1a}$ t_a	u'_x, u'_y, ρ', p' $\bar{u}_x, \bar{u}_y, \bar{\rho}, \bar{p}$ $u_{x_{0a}}, u_{y_{0a}}, p_{1a}$ t_a	u'_x, u'_y, ρ', p' $u_{x_{0a}}, u_{y_{0a}}, \rho_{0a}$ p_{1a}, p_{0a} t_a
Relations de passage		$\bar{u}_x = \bar{u}_{x_0} M$ $\bar{u}_y = 0$ $\bar{\rho} = \rho_0$ $\bar{p} = 1/\gamma$ $u''_{x_{0a}} = (u_{x_0} - \bar{u}_{x_0}) M$ $u''_{y_{0a}} = (u_{y_0} - \bar{u}_{y_0}) M$ $\rho_{0a} = \rho_0$ $p''_{1a} = (p_1 - \bar{p}_1) M^2$ $t_a = t M^{-1}$	$\bar{u}_x = \bar{u}_{x_0} M$ $\bar{u}_y = \bar{u}_{y_0} M$ $\bar{\rho} = \rho_0$ $\bar{p} = (p_0/\gamma + p_1 M^2)$ $u_{x_{0a}} = u_{x_0} M$ $u_{y_{0a}} = u_{y_0} M$ $p_{1a} = p_1 M^2$ $t_a = t M^{-1}$	$u_{x_{0a}} = u_{x_0} M$ $u_{y_{0a}} = u_{y_0} M$ $\rho_{0a} = \rho_0$ $p_{1a} = p_1 M^2$ $p_{0a} = p_0/\gamma + p_{1a}$ $t_a = t M^{-1}$

TAB. 4.1: Récapitulatif des grandeurs et relations de passage des différentes formulations.

Cas tests de validation des méthodes



ans le but de valider les différentes approches hybrides, il est nécessaire de déterminer un cas test fournissant un champ hydrodynamique dont sont connues la vitesse et la pression ainsi qu'une solution analytique du champ acoustique rayonné. Ici, deux cas bien connus sont étudiés : le champ de pression acoustique causé par la rotation d'un tourbillon elliptique de Kirchhoff et celui causé par la corotation puis l'appariement de deux tourbillons corotatifs.

5.1 Le tourbillon elliptique de Kirchhoff

Le tourbillon de Kirchhoff est un « patch » de vortacité elliptique. Le terme patch signifie que la vortacité est constante dans une zone donnée de l'espace, ici à l'intérieur de l'ellipse, et nulle à l'extérieur comme le montre la figure 5.1. L'intérêt de ce tourbillon est qu'il constitue une solution exacte des équations d'Euler incompressibles 2D et il est ainsi possible de totalement en définir le champ de pression à la fois en champ proche et en champ lointain. Considérons un tourbillon elliptique de grand rayon $a = r_0(1 + \varepsilon)$ et de petit rayon $b = r_0(1 - \varepsilon)$ avec $0 < \varepsilon < 1$ et r_0 est une constante. La vortacité $\omega = \nabla \wedge \mathbf{u} = (0, 0, \omega)^T$ est constante dans l'ellipse définie par

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \quad (5.1)$$

et nulle en dehors.

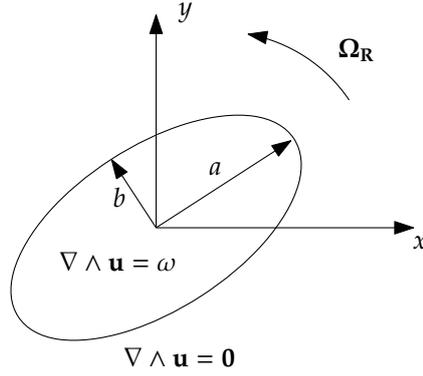


FIG. 5.1: Tourbillon elliptique de Kirchhoff.

5.1.1 Champs hydrodynamiques

Lamb [56] tout comme Basset [8] ont pu trouver une expression analytique pour le champ de vitesse à la fois à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipse en imaginant que la frontière de l'ellipse tourne à une certaine vitesse constante Ω_R sans changer d'aspect. Alors la fonction de courant à l'extérieur de celle-ci s'écrit

$$\Psi_{ext} = \frac{1}{4}\Omega_R(a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{1}{2}\omega ab\xi \quad (5.2)$$

où $\xi \in [0, +\infty[$, $\eta \in [0, 2\pi]$ sont les coordonnées elliptiques et

$$x' = r \cos(\theta - \Omega_R t) \quad (5.3)$$

$$y' = r \sin(\theta - \Omega_R t) \quad (5.4)$$

$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (5.5)$$

$$\theta = \arctan \frac{y'}{x'} \quad (5.6)$$

La fonction de courant à l'intérieur de l'ellipse Ψ_{int} doit satisfaire la relation

$$\frac{\partial^2 \Psi_{int}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{int}}{\partial y'^2} = \omega \quad (5.7)$$

et la condition limite

$$u \frac{x'}{a^2} + v \frac{y'}{b^2} = -\Omega_R y' \frac{x'}{a^2} + \Omega_R x' \frac{y'}{b^2} \quad (5.8)$$

Ces deux conditions sont satisfaites par

$$\Psi_{int} = \frac{1}{2}\omega(Ax'^2 + By'^2) \quad (5.9)$$

avec

$$A + B = 1 \quad , \quad Aa^2 - Bb^2 = \frac{\Omega_R}{\omega}(a^2 - b^2) \quad . \quad (5.10)$$

La condition de continuité impose que $\partial\psi_{int}/\partial\xi = \partial\psi_{ext}/\partial\xi$ sur l'ellipse.

En écrivant $x' = c \cosh\xi \cos\eta$, $y' = c \sinh\xi \sin\eta$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, il vient

$$-\frac{1}{2}\Omega_R(a+b)^2 e^{-2\xi} = \frac{1}{2}\omega c^2(A-B) \cosh\xi \sinh\xi \quad . \quad (5.11)$$

Sur l'ellipse, $\cosh\xi = a/c$ et $\sinh\xi = b/c$ et l'équation précédente devient

$$A - B = -\frac{\Omega_R}{\omega} \cdot \frac{a^2 - b^2}{ab} \quad . \quad (5.12)$$

Finalement, en combinant (5.12) avec (5.10) :

$$Aa = Bb = \frac{ab}{a+b} \quad (5.13)$$

et l'ellipse tourne autour de l'origine sans changer d'aspect et à la vitesse angulaire constante

$$\Omega_R = \frac{ab}{(a+b)^2} \omega \quad . \quad (5.14)$$

La fonction de courant ψ étant connue dans tout l'espace, les champs de vitesse sont obtenus par application de la condition de Cauchy-Riemann :

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y'} \quad , \quad v = \frac{\partial\psi}{\partial x'} \quad . \quad (5.15)$$

Dans l'ellipse, il s'écrivent

$$u = -\omega \frac{a}{a+b} y' \quad (5.16)$$

$$v = \omega \frac{b}{a+b} x' \quad (5.17)$$

et en dehors de l'ellipse

$$u = -\left(\frac{\partial\psi_{ext}}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial y'} + \frac{\partial\psi_{ext}}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial y'} \right) \quad (5.18)$$

$$v = \left(\frac{\partial\psi_{ext}}{\partial\xi} \frac{\partial\xi}{\partial x'} + \frac{\partial\psi_{ext}}{\partial\eta} \frac{\partial\eta}{\partial x'} \right) \quad . \quad (5.19)$$

Le détail des champs de vitesse (5.18) et (5.19) est donné en annexe A.

La vitesse dans le repère lié aux axes de l'ellipse s'exprime

$$u_R = u + \Omega_R y' \quad (5.20)$$

$$v_R = v - \Omega_R x' \quad (5.21)$$

et dans le repère $(0, x, y)$:

$$u_x = u \cos(\Omega_R t) - v \sin(\Omega_R t) \quad (5.22)$$

$$u_y = u \sin(\Omega_R t) + v \cos(\Omega_R t) \quad (5.23)$$

Les équations (5.22) et (5.23) permettent de connaître les champs de vitesse hydrodynamiques. Il faut maintenant déterminer de la même manière la pression. Müller [79] calcule astucieusement le champ de pression résultant de la rotation du tourbillon de Kirchhoff en considérant un repère tournant à la vitesse angulaire Ω_R . La fonction de courant devient alors

$$\Psi_R(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) - \frac{1}{2} \Omega_R [x'(\xi, \eta)^2 + y'(\xi, \eta)^2] - \Psi_0 \quad (5.24)$$

où $\Psi_0 = \Psi(\xi, 0) - 1/2 \Omega_R a^2$ avec $\xi_0 = \operatorname{arcsinh}(b/c)$ sur l'ellipse. Ainsi définie, $\Psi_R = 0$ sur cette même ellipse. Selon Batchelor [9], la conservation de la quantité de mouvement exprimée par rapport à un repère en rotation s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_R}{\partial t} - \mathbf{u}_R \wedge (\nabla \wedge \mathbf{u}_R + 2\Omega_R) = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} |\mathbf{u}_R|^2 - \frac{1}{2} |\Omega_R \wedge \mathbf{x}|^2 \right) \quad (5.25)$$

La rotation s'effectue à vitesse angulaire constante et le premier terme du membre de gauche de (5.25) est nul. Finalement le membre de gauche s'écrit $-\nabla(\omega \Psi_R)$ car $\nabla \wedge \mathbf{u}_R = (\omega - 2\Omega_R) \mathbf{e}_z$ et

$$\mathbf{u}_R \wedge \mathbf{e}_z = v_R \mathbf{e}_a - u_R \mathbf{e}_b = \frac{\partial \Psi_R}{\partial x'} \mathbf{e}_a + \frac{\partial \Psi_R}{\partial y'} \mathbf{e}_b \quad (5.26)$$

À l'extérieur de l'ellipse, $\omega = 0$ et la pression p_{ext} s'écrit :

$$p_{ext} = -\frac{1}{2} \rho (u_R^2 + v_R^2) + \frac{1}{2} \rho \Omega_R (x^2 + y^2) - p_\infty \quad (5.27)$$

où $p_\infty = \rho ab \omega \Omega_R / 2$ est une constante issue de l'intégration de (5.25).

Dans l'ellipse, p_{int} s'écrit :

$$p_{int} = -\frac{1}{2} \rho (u_R^2 + v_R^2) + \frac{1}{2} \rho \Omega_R (x^2 + y^2) + \rho \omega \Psi_R - p_\infty \quad (5.28)$$

avec

$$\begin{aligned}\Psi_R &= \Psi - \frac{\Omega_R}{2} (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2} ab\Omega_R \\ &= \Psi - \frac{1}{2} \omega \left(\frac{b^2}{(a+b)^2} x'^2 + \frac{a^2}{(a+b)^2} y'^2 \right) - \frac{1}{2} ab\Omega_R \quad .\end{aligned}\tag{5.29}$$

Afin de vérifier que l'expression analytique de la pression (5.28) et (5.27) est correcte, les champs de vitesse u_x (5.22) et u_y (5.23) sont injectés en condition initiale du solveur hydrodynamique, c'est-à-dire pour $t = 0$ avec $r_0 = 1$, $\varepsilon = r_0/3$, $\Delta x = \Delta y = r_0/5$, $\Delta t = 0,3$ et sur un domaine au maillage régulier de dimensions $L_x \times L_y = [20r_0 \times 20r_0]$. La masse volumique est constante : $\rho_0 = 1$; $R_e = 7500$, $P_r = 0,75$. La vitesse angulaire Ω_R est fixée telle que :

$$\Omega_R = -\frac{c_0}{4\pi r_0} \quad .\tag{5.30}$$

La vorticité $\omega_{z_0} = \nabla \wedge \mathbf{u}_0$   l'instant initial dans le solveur `quasincompact3d` est représentée

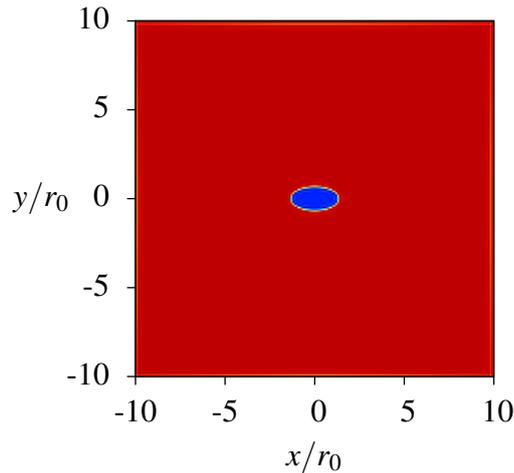


FIG. 5.2: Vorticité ω_{z_0} issue de `quasincompact3d`   l'instant initial, niveaux de $-0,4$   0 .

sur la figure 5.2. Celle-ci est bien constante dans l'ellipse et nulle en dehors. Les champs de vitesse étant des solutions exactes des équations d'Euler incompressibles 2D, la pression calculée par le solveur hydrodynamique devrait être égale à son expression analytique pendant les premières itérations, lorsque les effets de la viscosité ne sont pas encore sensibles. Les champs de vitesse et de pression analytiques et ceux calculés par le solveur hydrodynamiques à deux instants différents sont en excellent accord comme le montrent les figures 5.3 et 5.4. Sur la figure 5.4, p_1 étant défini à une constante près tout comme la pression calculée à l'aide de (5.28) et (5.27), ces constantes p_{1_∞} et p_∞ ont été soustraites pour la comparaison.

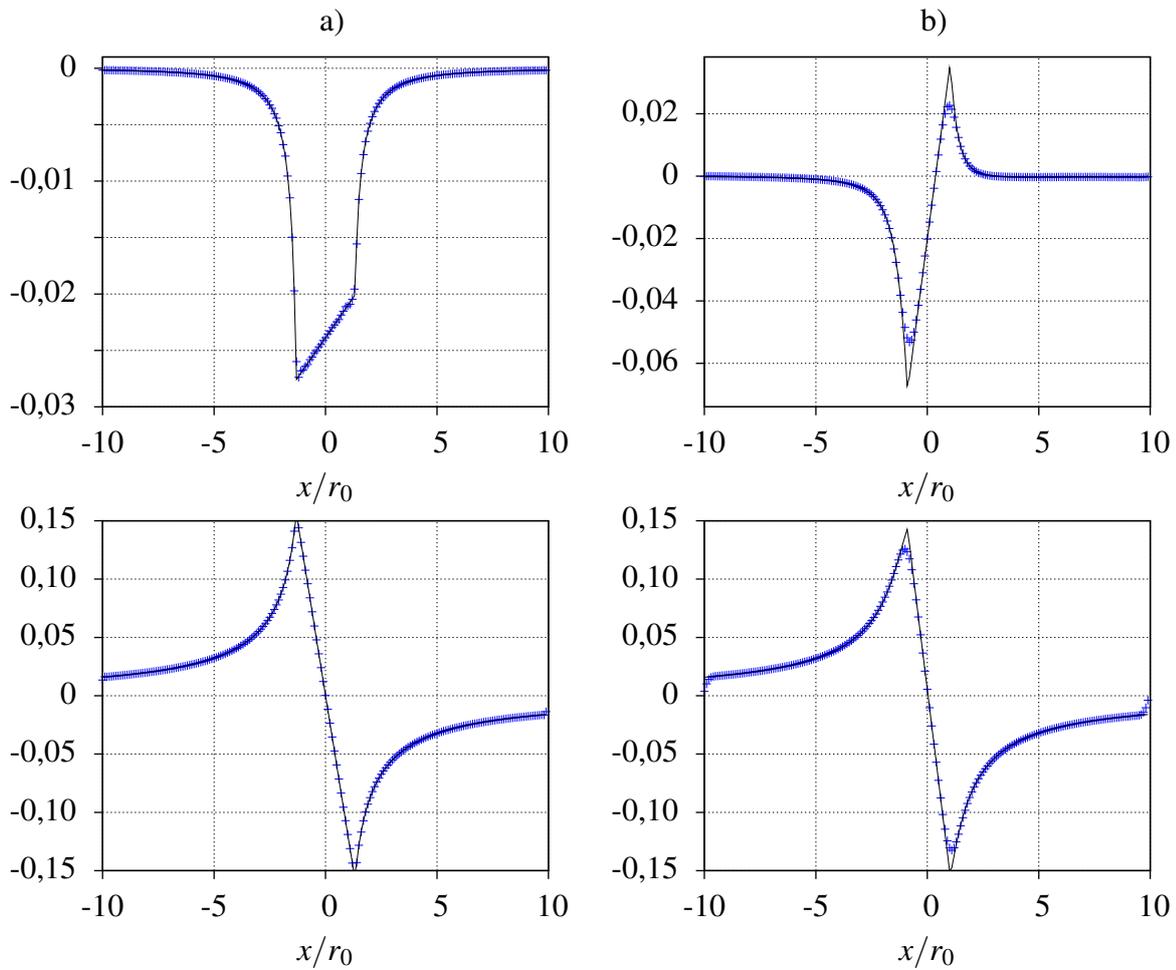


FIG. 5.3: Comparaison des champs de vitesse analytiques d'un tourbillon de Kirchhoff avec ceux calculés par `quasincompact3d`; a) après 3 itérations de `quasincompact3d`, b) après 50 itérations de `quasincompact3d`. En haut, vitesse u_x en $y/r_0 = 0$: (—) u_x obtenue par (5.22), (++) u_{x_0} obtenue par `quasincompact3d`. En bas, champ de vitesse u_y en $y/r_0 = 0$: (—) u_y obtenue par (5.23), (++) u_{y_0} obtenue par `quasincompact3d`.

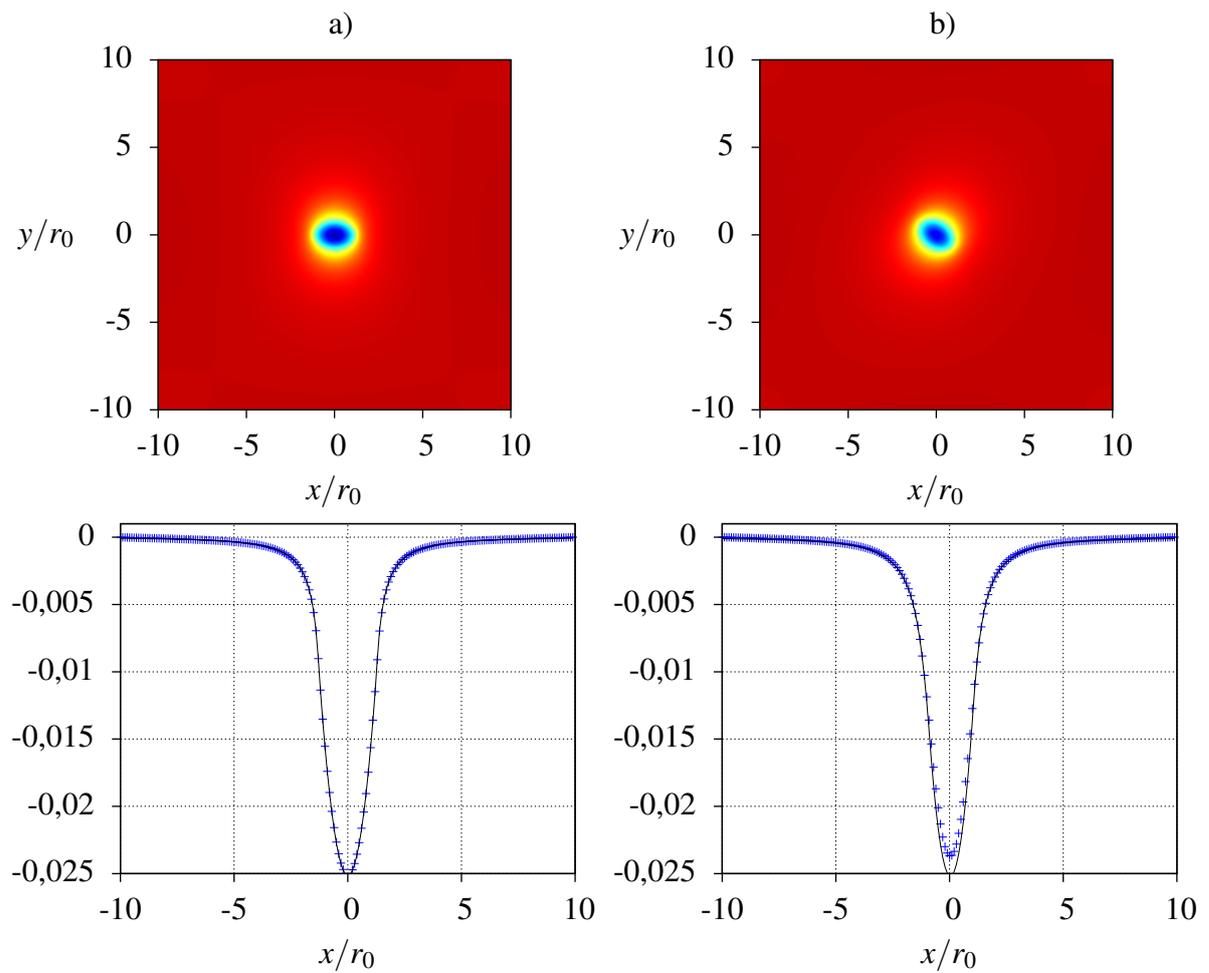


FIG. 5.4: Comparaison du champ de pression analytique d'un tourbillon de Kirchhoff avec celui calculé par `quasincompact3d`; a) après 3 itérations de `quasincompact3d`, b) après 50 itérations de `quasincompact3d`. En haut, champ de pression p_1 issu de `quasincompact3d`, niveaux de $-0,025$ à 0 . En bas, pression en $y/r_0 = 0$: (—) $p - p_\infty$ obtenue par (5.28) et (5.27), (++) $p_1 - p_{1\infty}$ obtenue par `quasincompact3d`.

5.1.2 Pression acoustique d'un tourbillon de Kirchhoff quasi circulaire

En considérant un tourbillon elliptique quasi circulaire, c'est-à-dire défini par les axes

$$a = r_0(1 + \varepsilon) \quad , \quad b = r_0(1 - \varepsilon) \quad (5.31)$$

avec $r_0 > 0$ et $0 < \varepsilon \ll 1$, Müller propose de résoudre l'équation de Helmholtz

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0 \quad (5.32)$$

en dehors du cercle de rayon r_0 . Ici, p' est la pression acoustique et c la vitesse du son. Cette pression acoustique est induite par le tourbillon de Kirchhoff sur le cercle de rayon r_0 , d'où la condition de frontière issue de l'équation de quantité de mouvement dans la direction radiale :

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} = - \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (5.33)$$

où u_r est la vitesse sur le cercle. Pour un tourbillon quasi circulaire, cette vitesse est approchée par la vitesse normale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \approx 2r_0 \varepsilon \Omega_R \sin[2(\theta - \Omega_R t)] = 2r_0 \varepsilon \Omega_R \Re \left\{ e^{i[2(\theta - \Omega_R t) - \pi/2]} \right\} \quad (5.34)$$

Le terme $\Re\{\}$ exprime la partie réelle de l'expression entre accolades et $i = \sqrt{-1}$ est le nombre imaginaire. Finalement, la pression acoustique a pour expression :

$$p'_{\text{Müller}}(r, \theta, t) = \Re \left\{ A H_2^{(1)}(kr) e^{i[2(\theta - \Omega_R t)]} \right\} \quad (5.35)$$

où $H_2^{(1)}$ est la fonction de Hankel de second ordre, $k = 2\Omega_R/c$ est le nombre d'onde et

$$A = \frac{\rho r_0^4 \varepsilon \pi \Omega_R}{2} e^{i\pi[(kr_0/2)^4 + 1]/2} \quad (5.36)$$

Il existe d'autres formes de solutions analytiques pour exprimer le champ acoustique créé par la rotation du tourbillon. Müller cite d'ailleurs la forme développée par Möhring [70, 71] :

$$p'_{\text{Möhring}}(r, \theta, t) = \frac{1}{8} \frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \rho |\mathbf{u}_{\text{ellipse}}|^2 M^{\frac{3}{2}} \left[\frac{\pi(a+b)}{r} \right]^{\frac{1}{2}} \cos \left[2\theta - 2\Omega_R \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \quad (5.37)$$

où $M = |\mathbf{u}_{\text{ellipse}}|/c$ est le nombre de Mach et $|\mathbf{u}_{\text{ellipse}}|$ la norme de la vitesse sur l'ellipse définie par

$$|\mathbf{u}_{\text{ellipse}}| = |(a+b)\Omega_R| \quad (5.38)$$

Möhring obtient cette solution en utilisant la représentation développée par Powell et en remplaçant la solution en fonction de Green par un vecteur de Green [75].

5.1.3 Validation des propagateurs acoustiques

Ici, les champs hydrodynamiques analytiques d'un tourbillon elliptique de Kirchhoff donnés par les expressions (5.22) et (5.23) pour les vitesses et (5.28) et (5.27) pour la pression sont utilisés pour calculer les termes sources des propagateurs **PLMNA**, **PLMNA***, **EEL+S_L**, **EEL+S_P** et **EEL+S_E**.

Le domaine de simulation est constitué de $N_{x_a} \times N_{y_a} = 285 \times 285$ points sur une grille cartésienne. Le maillage centré sur l'origine du repère est constant pour $|x/r_0| < 2(r_0 + \varepsilon)$ puis il est étiré suivant un accroissement géométrique de 4% et est constant sur le reste du domaine afin de respecter la condition $\Delta x_a \leq 3,2r_0$. La discrétisation est identique dans la direction y . Les pas d'espaces au centre sont $\Delta x_a = \Delta y_a = r_0/10$ avec $r_0 = 1$. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 5.5 à gauche (un point sur deux est tracé) et à droite l'évolution de Δx_a .

Le tourbillon tourne dans le sens horaire avec $\Omega_R = -c_0/(4\pi r_0)$ et $\varepsilon = r_0/100$. Le tableau 5.1 récapitule les paramètres de cette configuration qui sera notée **ck1**.

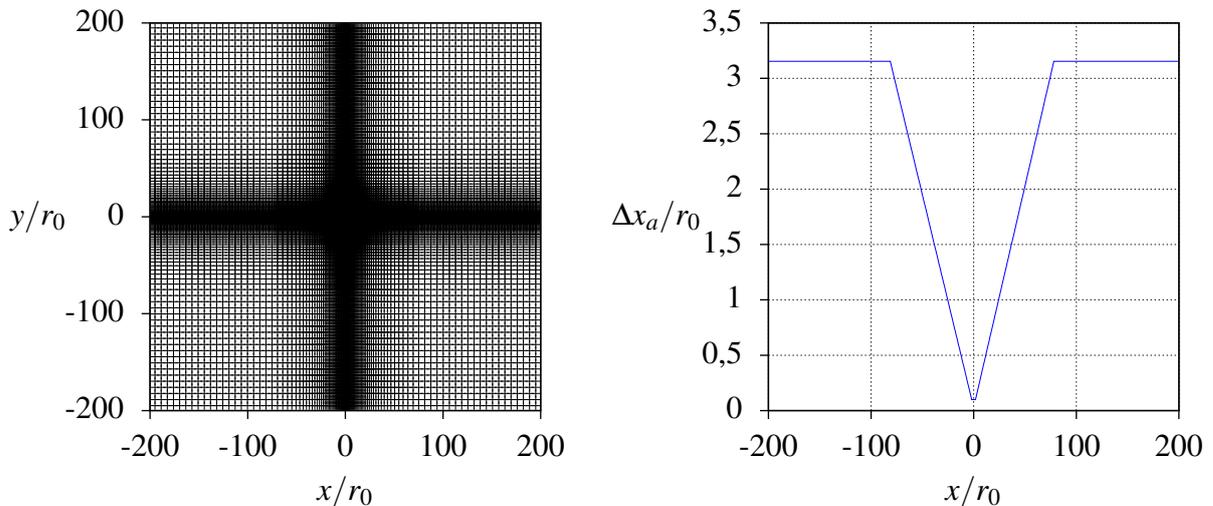


FIG. 5.5: Maillage acoustique.

Le champ acoustique analytique obtenu avec l'expression (5.35) est représenté sur la figure 5.6 en haut à gauche au temps adimensionnel $t_a c_0/r_0 = 1000$ et celui obtenu avec (5.37) en haut à droite. Les deux expressions donnent une solution comparable. Le champ de pression comporte une structure en double hélice caractéristique de la rotation d'une source quadrupolaire. Le tourbillon de Kirchhoff en rotation est alors appelé « quadrupôle tournant ». Une période de rotation $T_R = 2\pi/|\Omega_R|$ correspond à deux émissions acoustiques. La fréquence acoustique

émise f_{ac} est donc :

$$f_{ac} = \frac{2}{T_R} = \frac{|\Omega_R|}{\pi} = \frac{c_0}{4\pi^2 r_0} \quad (5.39)$$

et la longueur d'onde λ_{ac} correspondante vaut

$$\frac{\lambda_{ac}}{r_0} = \frac{c_0}{r_0 f_{ac}} = 39,48 \quad . \quad (5.40)$$

Ainsi, les longueurs d'ondes acoustiques sont toujours discrétisées par au moins 12 points ce qui est bien supérieur aux 6,5 points minimum préconisés par Tam et Webb pour les schémas DRP [108].

ck1	
N_{x_a}	285
N_{y_a}	285
L_{x_a}	$400r_0$
L_{y_a}	$400r_0$
étirement suivant x	oui
$\Delta x_{a_{\min}}$	$r_0/10$
$\Delta x_{a_{\max}}$	$3,2r_0$
accroissement de maille suivant x	4%
étirement suivant y	oui
$\Delta y_{a_{\min}}$	$r_0/10$
$\Delta y_{a_{\max}}$	$3,2r_0$
accroissement de maille suivant y	4%
r_0	1
c_0	1
ε	$r_0/100$
Δt_a	0,1
Ω_R	$-c_0/(4\pi r_0)$
filtrage en x	ordre 8
$\tilde{\sigma}_x$	0,05
filtrage en y	ordre 8
$\tilde{\sigma}_y$	0,05
troncature des sources en x	non
troncature des sources en y	non

TAB. 5.1: Paramètres de la configuration **ck1**

5.1.3.1 Calcul à l'aide du solveur des équations d'Euler linéarisées

Le tourbillon elliptique est placé au centre du domaine. Les termes sources sont calculés conformément à la formulation utilisée, nommément **EEL+S_L** pour le terme source basé sur

le tenseur de Lighthill, $\mathbf{EEL}+\mathbf{S}_P$ pour celui basé sur le gradient de la pression hydrodynamique et $\mathbf{EEL}+\mathbf{S}_E$ pour celui basé sur la dérivée totale de la pression. Les champs moyens nécessaires, rappelés dans le tableau 4.1 page 60, ainsi que la moyenne temporelle des termes sources lorsque nécessaire sont préalablement calculés pour 2 périodes de rotation du vortex. S'agissant des deux premières formulations, il a été vu précédemment qu'elles résultent de l'approximation d'une vitesse moyenne cisailée suivant y . Ici, il n'y pas de vitesse de cisaillement donc la composante \bar{u}_x est prise égal à zéro.

Afin d'éviter la génération d'ondes hautes fréquences et de forte amplitude au début du calcul, les sources sont graduellement injectés au cours du temps selon une croissance exponentielle.

Sous réserve que le domaine soit assez étendu, les perturbations arrivant aux frontières ne sont que de nature acoustique. Ici, seules les conditions de rayonnement sont appliquées aux frontières du domaine.

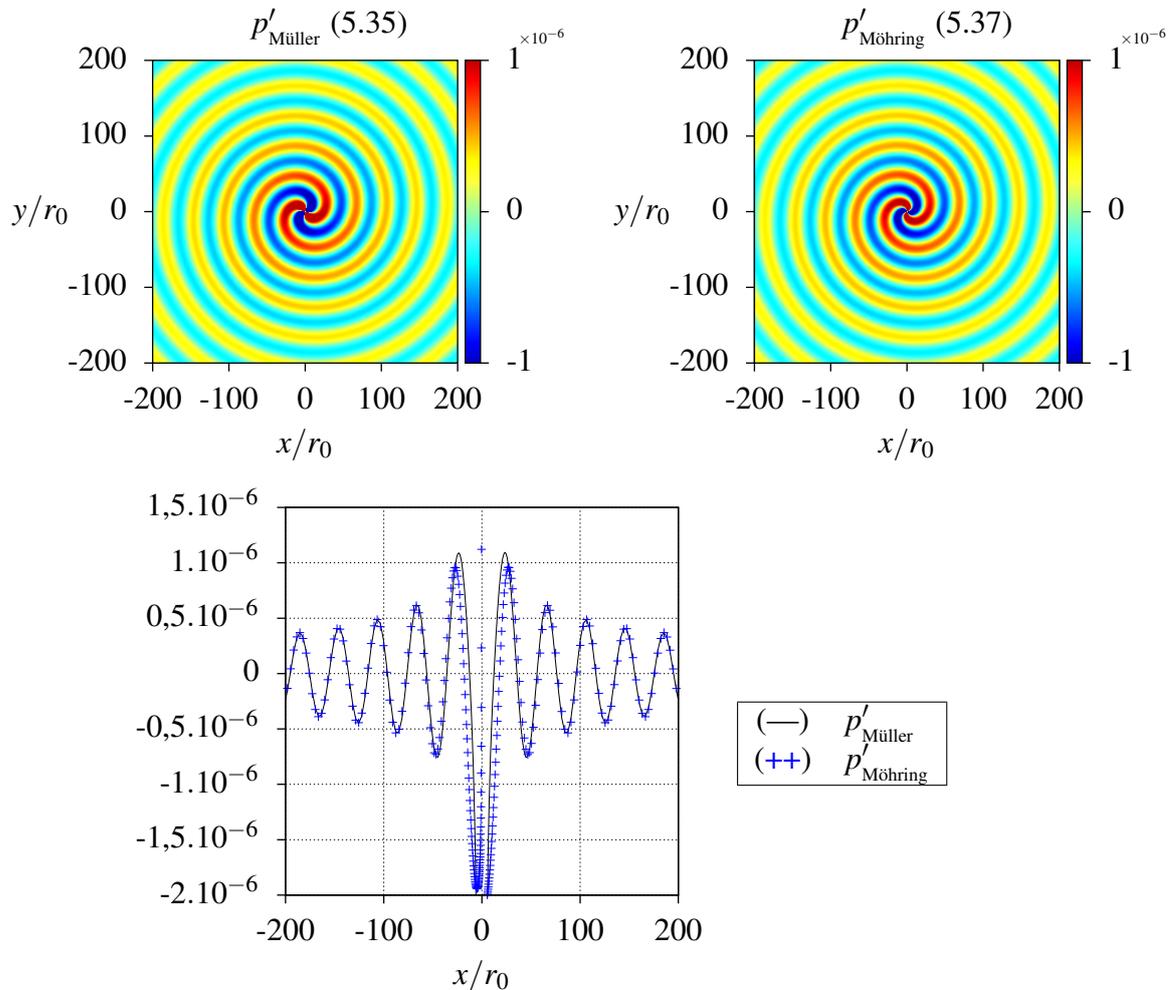


FIG. 5.6: Pression acoustique rayonnée théorique à $t_a c_0 / r_0 = 1000$.

Le terme source S_L

Le champ de pression obtenu avec la méthode **EEL**+**S_L** est représenté sur la figure 5.7. La structure en double hélice est bien présente et conforme à ce qui était attendu, aussi bien en terme de phase que d'amplitude. Il n'y a pas de problème de réflexion aux frontières. Malgré la soustraction de la moyenne du terme source, il reste une composante moyenne dans le champ de pression notée \bar{p}' . Cette moyenne est calculée sur 2000 itérations et soustraite à p' . Le champ acoustique à droite de la figure 5.7 est alors parfaitement conforme à celui attendu. Sur la figure 5.8, il y a un très bon accord de la pression suivant x en $y = 0$ et sur la diagonale du domaine avec le champ de pression analytique de Müller (5.35). La moyenne des erreurs relatives $\overline{E_{R_i}}$, une erreur relative E_{R_i} calculée en un point x_i comme

$$E_{R_i} = \frac{p'_{\text{Müller}} - (p' - \bar{p}')}{p'_{\text{Müller}}} , \quad (5.41)$$

est d'environ 7% suivant x , 3% sur la diagonale et 7% sur tout le domaine. Les points situés au centre du domaine, c'est-à-dire pour $|x| < 30$ ou $|y| < 30$ sont exclus de ce calcul d'erreur car la pression analytique y est beaucoup plus importante. En effet, le modèle analytique est surtout valable en champ lointain. Toutefois, le calcul d'erreur sur tout le domaine, y compris les points centraux, n'amène l'erreur relative moyenne qu'à 10%. Les points pour lesquels l'amplitude est inférieure à 1.10^{-7} ne sont pas non plus pris en compte dans ce calcul ce qui laisse tout de même 110 points de comparaison suivant x , 122 dans la diagonale et 50936 sur tout le domaine.

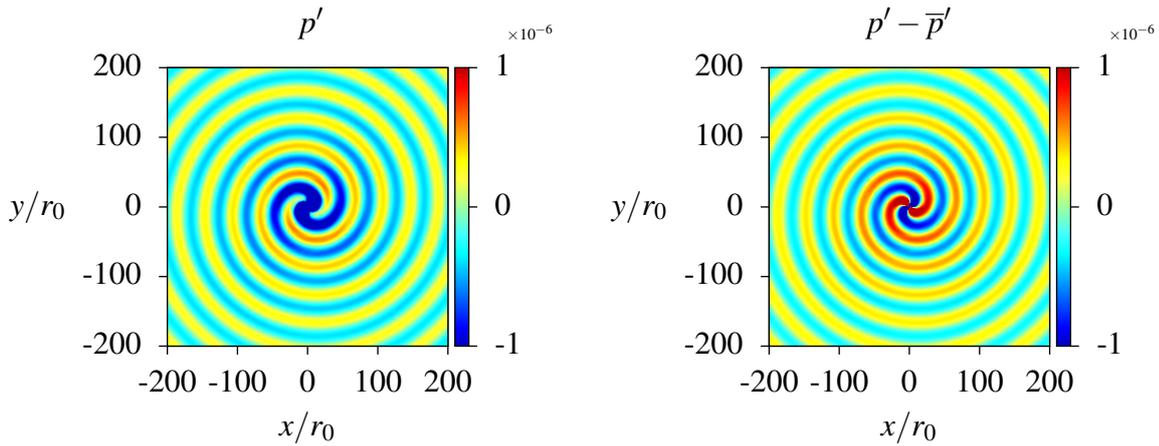


FIG. 5.7: Pression acoustique p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée par **EEL**+**S_L** .

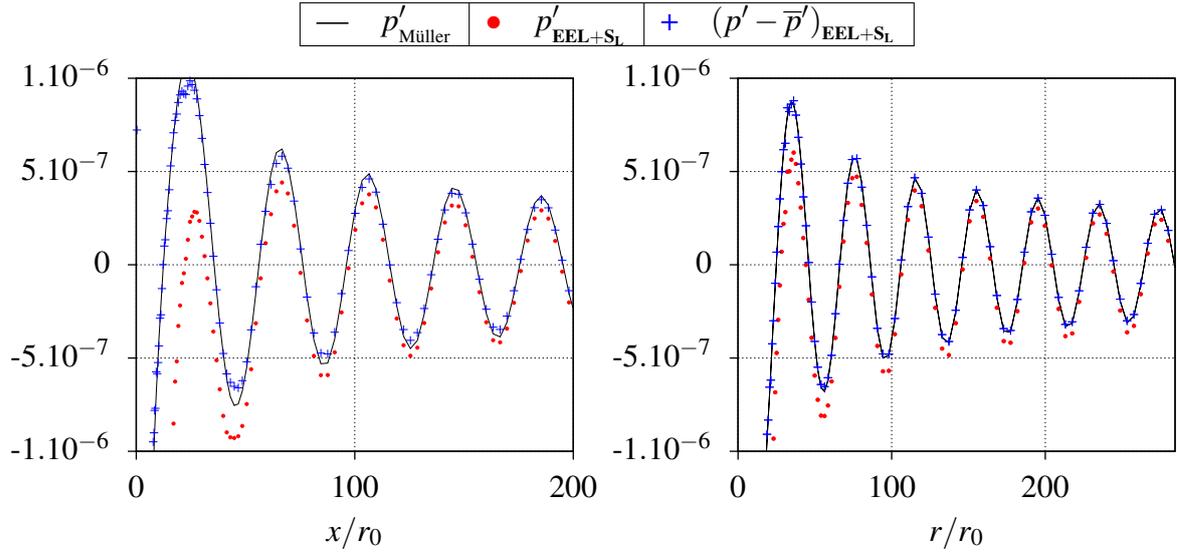


FIG. 5.8: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **EEL+S_L** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

Le terme source S_P

Le champ de pression acoustique obtenu avec le terme source basé sur le gradient de pression hydrodynamique S_P est reproduit sur la figure 5.9. Il est tout à fait conforme au résultat attendu et contrairement à celui obtenu par **EEL+S_L**, il ne comporte pas de valeur moyenne. Les profils tracés en $y = 0$ et suivant la diagonale sur la figure 5.10 trouvent là encore un très bon accord avec l'expression analytique avec une erreur relative moyenne de 4% suivant x , 4% suivant la diagonale et environ 4% sur tout le domaine.

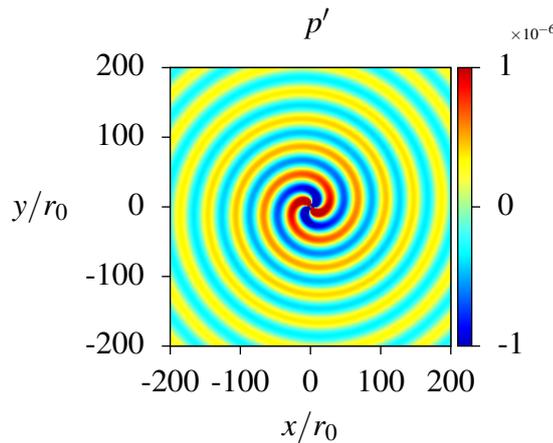


FIG. 5.9: Pression acoustique p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée par **EEL+S_P**.

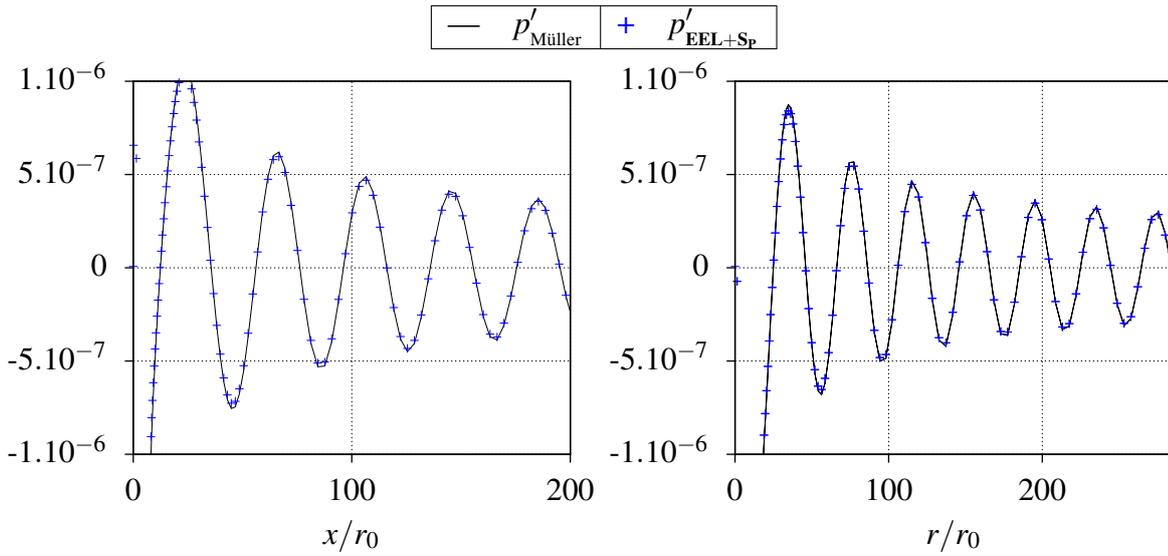


FIG. 5.10: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **EEL+S_P** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

Le terme source **S_E**

Le champ de pression obtenu avec la méthode **EEL+S_E** est représenté sur la figure 5.11. La structure en double hélice est encore une fois bien présente et conforme à ce qui était attendu. La seule différence avec les champs obtenus précédemment réside dans la partie centrale comme le montre la figure de droite. Les comparaisons avec l'expression analytique sont tout à fait correctes sur la figure 5.12. Les erreurs relatives moyennes sont de 8% suivant x , 8% dans la diagonale et 8% sur tout le domaine.

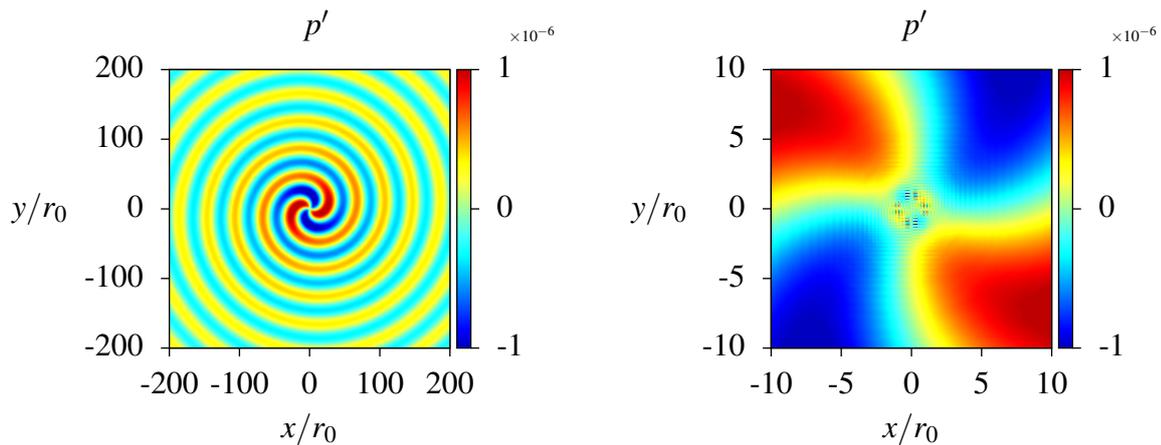


FIG. 5.11: Pression acoustique p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée par **EEL+S_E**. Zoom sur la partie centrale à droite .

Finalement, les trois formulations des équations d'Euler linéarisées convergent vers le même

résultat en champ lointain avec quelques légères différences d'amplitude comme le révèle la figure 5.13.

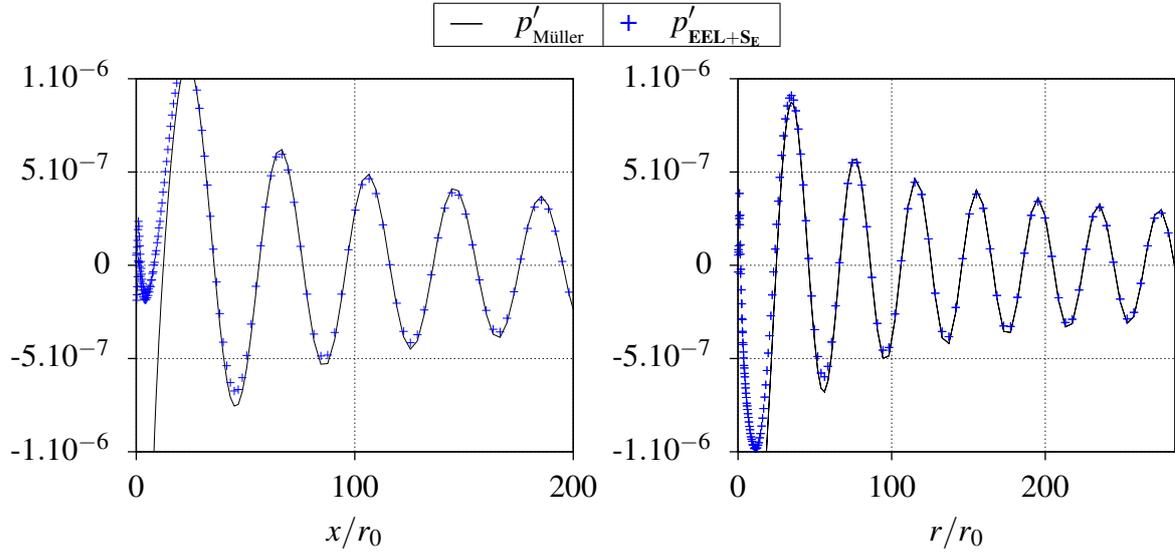


FIG. 5.12: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **EEL+S_E** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

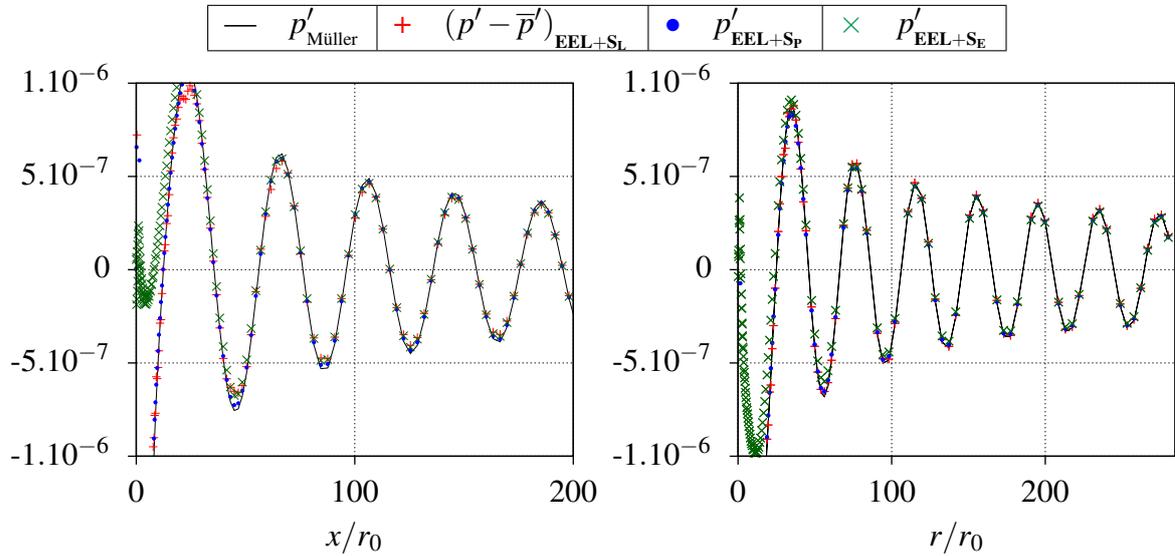


FIG. 5.13: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par les diverses formulations **EEL** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

5.1.3.2 Validation des formulations LMNA perturbées

La même configuration **ck1** est ici employée. Les solutions obtenues avec le propagateur **PLMNA** sont représentées sur la figure 5.14 à gauche, avec **PLMNA*** à droite. Les coefficients de filtrage $\tilde{\sigma}_x$ et $\tilde{\sigma}_y$ définis au paragraphe 3.5.1 ont dû être fortement augmentés pour le calcul **PLMNA** à une valeur de 0,5 afin qu'il ne diverge pas. Toutefois, le résultat est grandement sur-estimé alors que le calcul **PLMNA*** semble converger vers la solution attendue. Ceci est causé par la sous-résolution de la vorticité hydrodynamique Ω_{0a} du terme II de l'équation de transport de la vorticité perturbée (3.67). En effet, Seo et Moon [96] ont montré dans une configuration similaire que seule la version dont la vorticité perturbée est filtrée permet de correctement décrire le champ acoustique lorsque le tourbillon n'est résolu que par 10×10 points. Ici, le patch de vorticité est discr t s  par 20×20 points ce qui semble toujours insuffisant. Le champ de vorticité perturbée tracé sur la figure 5.14 apparaît très important avec les **PLMNA** alors qu'il est très faible avec les **PLMNA***. La pression obtenue avec **PLMNA*** est semblable à celle obtenue avec **EEL+S_F** comme le montre la figure 5.15. La comparaison avec la solution analytique sur la figure 5.16 est encore une fois en très bon accord avec une erreur relative moyenne d'environ 10% suivant x ainsi que sur la diagonale et sur tout le domaine.

Selon Seo et Moon [96], l'emploi d'un maillage plus raffiné au niveau du patch de vorticité, notamment en le décrivant par 100×100 points, suffit à faire converger le calcul **PCE** vers la solution analytique. Ici, cela n'a pas été suffisant avec les **PLMNA**. Cela peut venir de la perte de précision occasionnée par l'emploi d'un schéma décentré pour l'estimation de $\partial p_{1a} / \partial t_a$ dans le calcul du terme source et des termes $\partial u_{i0a} / \partial t_a$ apparaissant dans les équations de quantité de mouvement du système (3.57) p.43. Toutefois, l'emploi d'un filtrage suivant x et y d'ordre 4 de forte amplitude et d'un étirement de maillage moins brutal a permis d'obtenir le résultat attendu comme le montrent les figures 5.17 et 5.18. L'erreur moyenne relative sur le champ de pression est alors d'environ 15% sur tout le domaine. La configuration complète du calcul, nommée **ck2**, est détaillée dans le tableau 5.2. Remarquons que la valeur des coefficients de filtrage y est égale à un. L'emploi d'un filtrage si important est bien entendu à proscrire et dans la suite de l'étude, seule la version **PLMNA*** sera employée.

Convergence de maillage

Afin de s'assurer de la convergence de maillage, c'est-à-dire que la solution obtenue ne dépend pas du maillage choisi, le calcul **PLMNA*** est mené sur un maillage régulier, non-étiré, dans la configuration **ck3** (cf tableau 5.2) sur 2001×2001 points. Le champ de pression obtenu, représenté figures 5.19 et 5.20, est identique à celui obtenu dans la configuration **ck1**. Seule la zone centrale diffère quelque peu en raison d'un maillage plus fin dans la configuration **ck3** que dans la précédente.

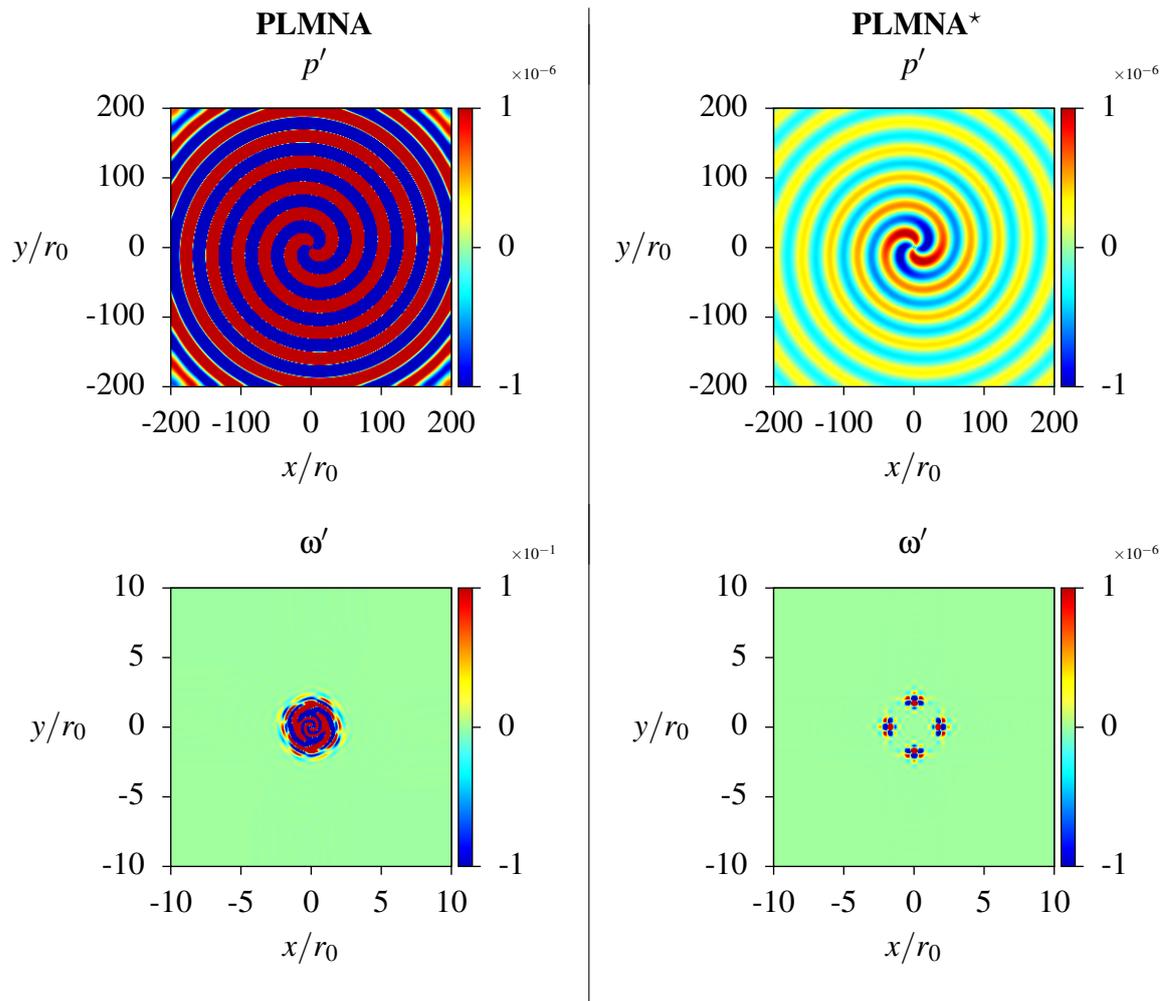


FIG. 5.14: Solutions à $t_a c_0 / r_0 = 500$ calculées dans la configuration **ck1** avec **PLMNA** à gauche, **PLMNA*** à droite. En haut, pression acoustique p' ; en bas, vorticité perturbée ω' .

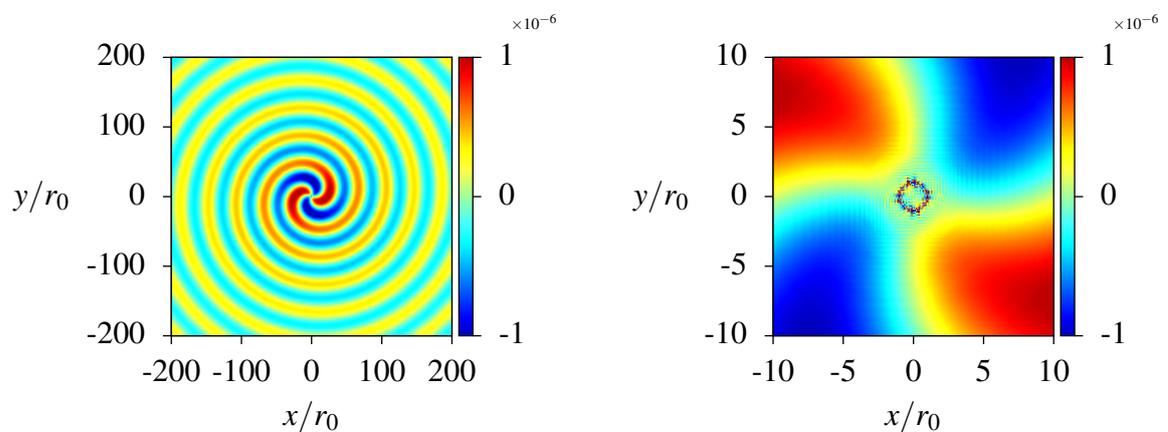


FIG. 5.15: Pression acoustique à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée dans la configuration **ck1** avec **PLMNA***. Zoom sur la partie centrale à droite .

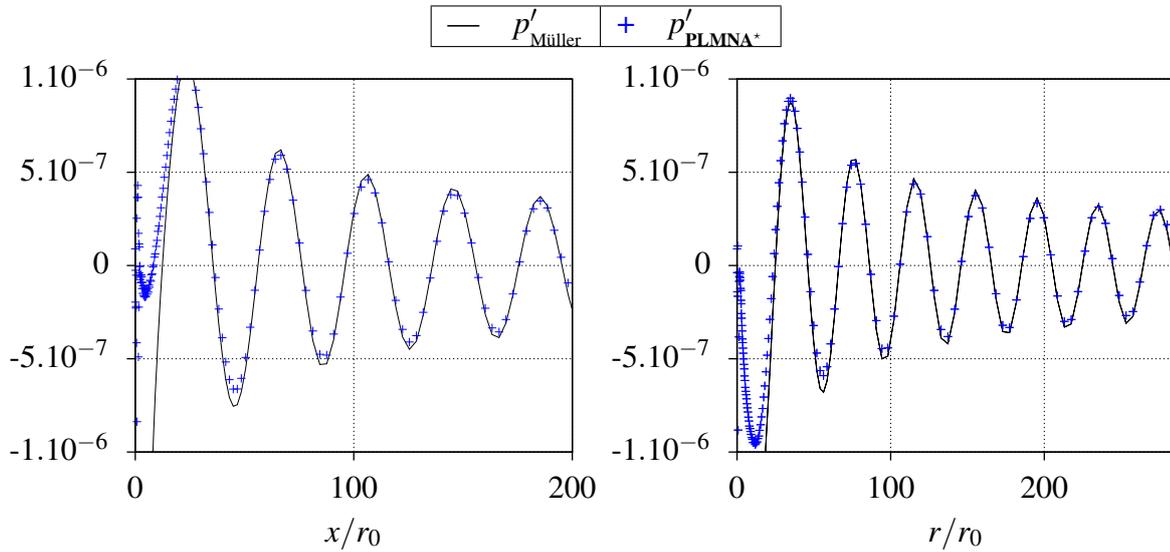


FIG. 5.16: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **PLMNA*** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

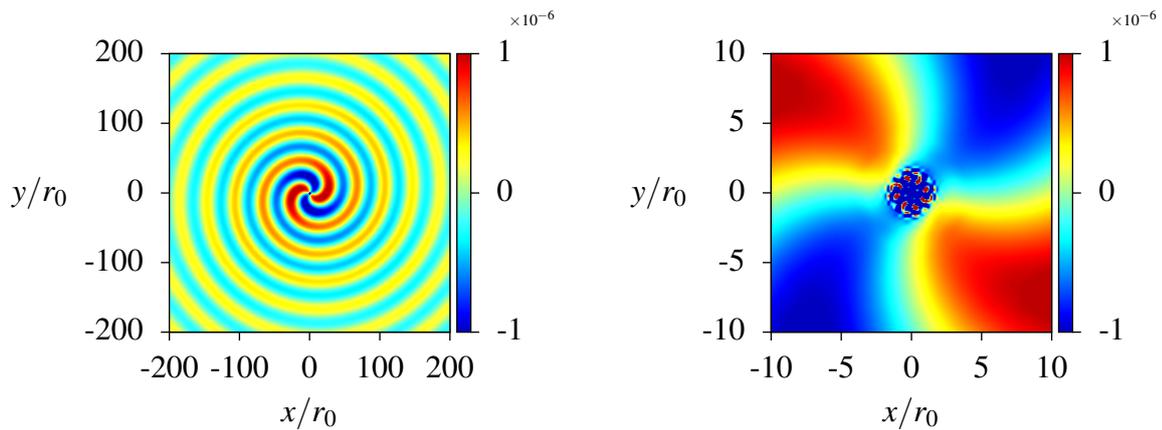


FIG. 5.17: Pression acoustique à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ calculée dans la configuration **ck2** avec **PLMNA**. Zoom sur la partie centrale à droite .

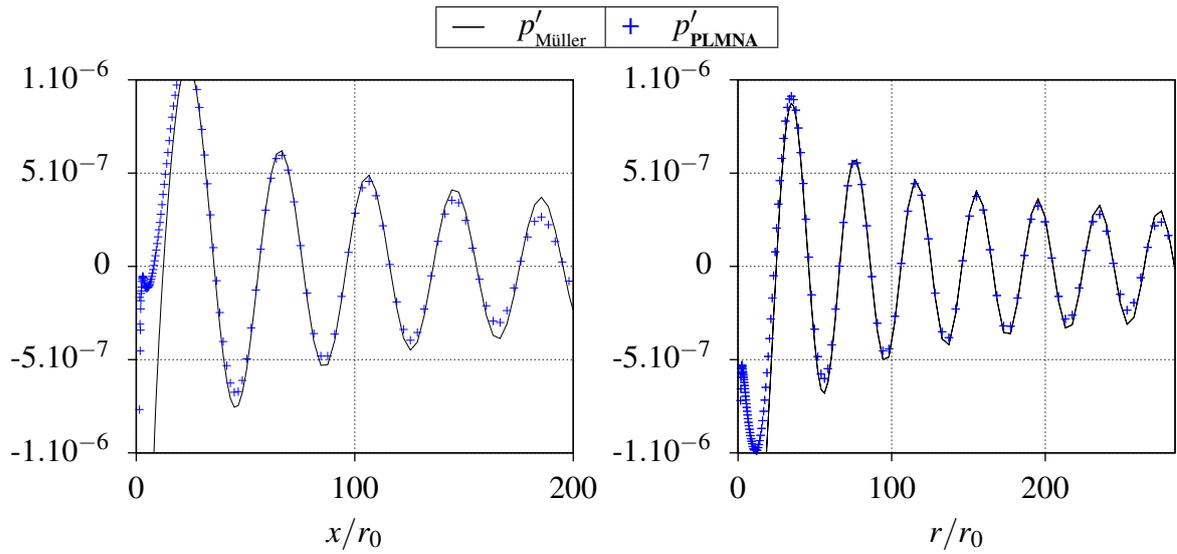


FIG. 5.18: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **PLMNA** dans la configuration **ck2** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

	ck2	ck3
N_{x_a}	495	2001
N_{y_a}	495	2001
L_{x_a}	$400r_0$	$400r_0$
L_{y_a}	$400r_0$	$400r_0$
étirement suivant x	oui	non
$\Delta x_{a_{\min}}$	$r_0/5$	$r_0/5$
$\Delta x_{a_{\max}}$	$3,2r_0$	$r_0/5$
accroissement de maille suivant x	1%	0%
étirement suivant y	oui	non
$\Delta y_{a_{\min}}$	$r_0/5$	$r_0/5$
$\Delta y_{a_{\max}}$	$3,2r_0$	$r_0/5$
accroissement de maille suivant y	1%	0%
r_0	1	1
c_0	1	1
ε	$r_0/100$	$r_0/100$
Δt_a	0,1	0,1
Ω_R	$-c_0/(4\pi r_0)$	$-c_0/(4\pi r_0)$
filtrage en x	ordre 4	ordre 8
$\tilde{\sigma}_x$	1,00	0,05
filtrage en y	ordre 4	ordre 8
$\tilde{\sigma}_y$	1,00	0,05
troncature des sources en x	non	non
troncature des sources en y	non	non

TAB. 5.2: Paramètres des configurations **ck2** et **ck3**

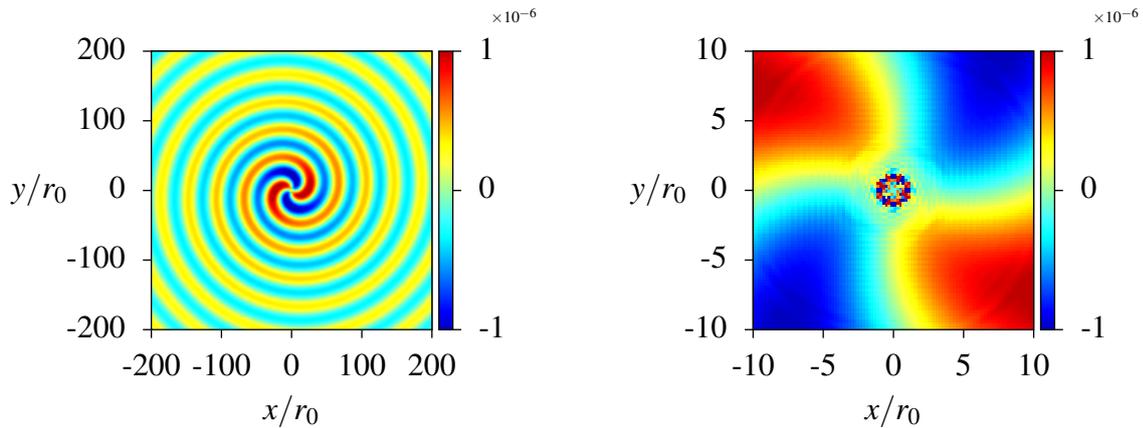


FIG. 5.19: Pression acoustique à $t_a c_0/r_0 = 1000$ calculée avec **PLMNA*** dans la configuration **ck3**. Zoom sur la partie centrale à droite .

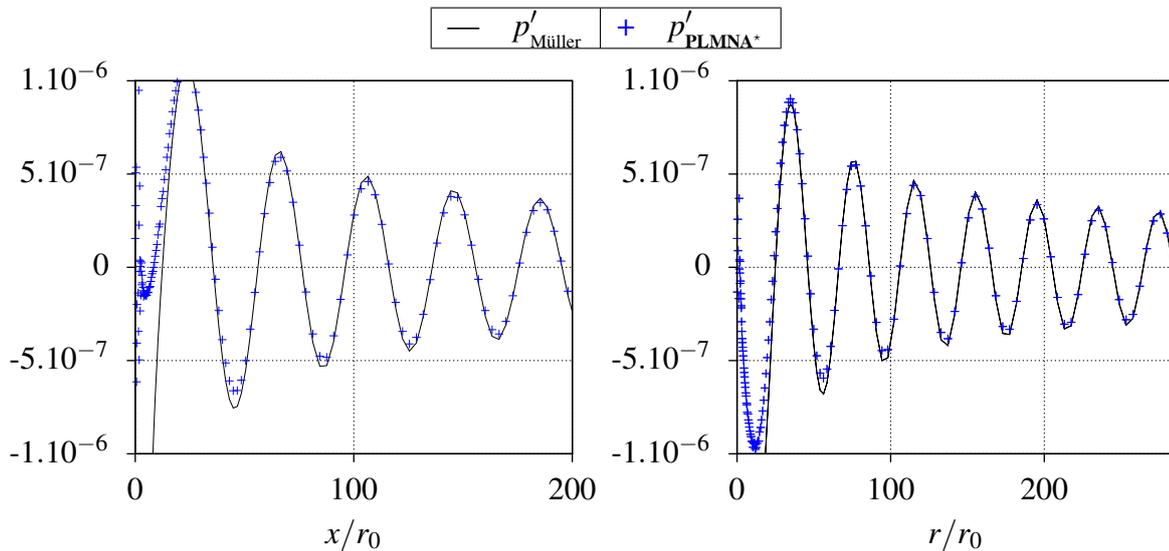


FIG. 5.20: Comparaison de p' à $t_a c_0/r_0 = 1000$ obtenue dans la configuration **ck3** par **PLMNA*** avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

5.1.3.3 Effets de la troncature des termes sources

Jusqu'à présent, les termes sources des différentes formulations ont été calculés sur tout le domaine. En pratique, cela ne sera jamais possible dans le cas de simulations hybrides. En effet, comme l'illustre la figure 5.21, le calcul hybride sera effectué sur deux domaines de simulations différents : un domaine hydrodynamique et un domaine acoustique. Chaque simulation ayant ses propriétés de stabilité numérique, de maillage, de grandeurs de références. Il ne sera donc nullement possible d'évaluer le terme source sur tout le domaine de rayonnement. Ainsi, le

passage du domaine hydrodynamique au domaine acoustique représente une troncature dans le sens où les sources auront une valeur dans le domaine intérieur et seront nulles au dehors. Cela peut causer de forts gradients, eux-mêmes représentant des sources de rayonnement artificielles, non physiques. Il n'est pas aisé de déterminer l'étendue spatiale des sources nécessaire pour une estimation correcte du rayonnement acoustique tant cela dépend aussi bien du problème considéré que de la formulation employée pour l'analogie.

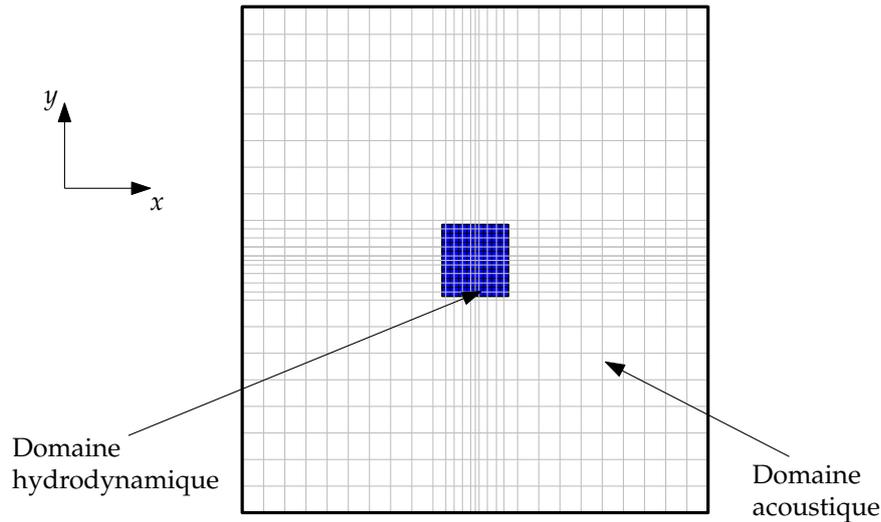


FIG. 5.21: Schéma de configuration de la simulation hybride

La configuration **ck1** est de nouveau employée ici. Les termes sources tout comme les éventuels champs moyens ou instantanés selon les formulations sont mis brutalement à zéro lorsque $|x/r_0| > r_{cut}/r_0$ ou $|y/r_0| > r_{cut}/r_0$. Les valeurs $5r_0$, $10r_0$, $15r_0$ et $20r_0$ sont successivement choisies pour r_{cut} .

Le champ de pression acoustique obtenu par les différentes approches est représenté sur la figure 5.22 pour le cas le plus défavorable, le plus tronqué, c'est-à-dire pour $r_{cut} = 5r_0$. Il n'apparaît pas de différence notable pour le calcul **EEL+S_L**. D'ailleurs la comparaison de l'évolution de $p' - \bar{p}'$ de la figure 5.23 montre que la troncature n'a eu aucun effet sur l'acoustique rayonnée. En revanche, toutes les autres formulations, basées sur la pression hydrodynamique, voient l'amplitude de pression diminuer. En ce qui concerne la formulation **EEL+S_P**, des trous apparaissent dans les diagonales du domaine. Ceci se voit notamment sur les profils de la figure 5.24 où l'amplitude baisse avec la troncature de manière plus importante sur la diagonale qu'en $y = 0$. Le niveau de pression est cependant beaucoup moins affecté par la troncature que celui des deux dernières formulations basées, elles, sur la dérivée totale de la pression. Lorsque r_{cut} augmente, p' suit une évolution semblable pour les **EEL+S_E** sur la figure 5.25 que pour les **PLMNA*** de la figure 5.26.

La baisse d'amplitude semble tout à fait correcte dans le sens où il est prévisible que la

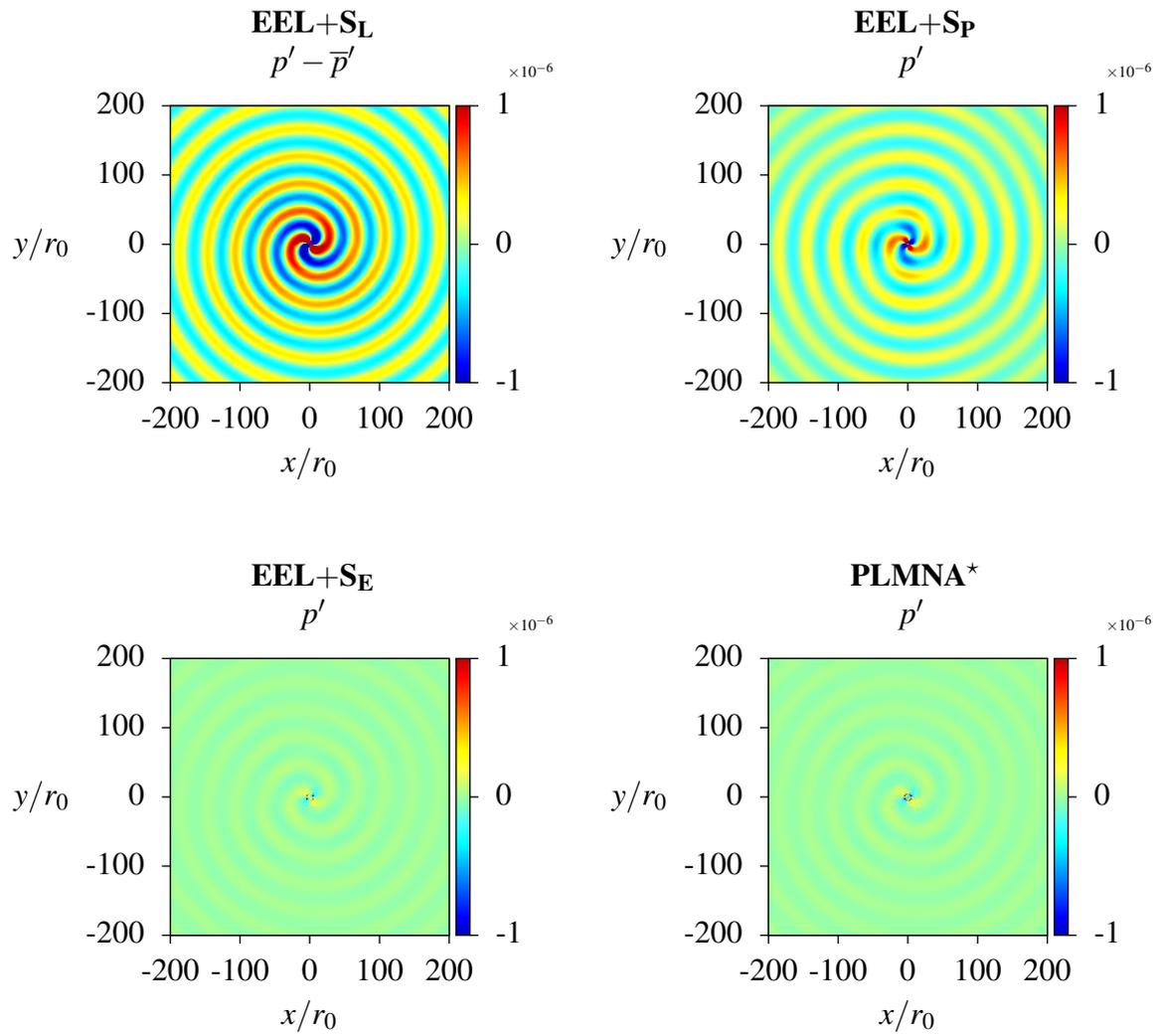


FIG. 5.22: Champs de pression acoustique à $t_a c_0 / r_0 = 1000$, sources tronquées à $r_{cut} = 5r_0$.

troncature réduit la quantité d'énergie hydrodynamique disponible pour causer le rayonnement acoustique. Cependant, cela n'a visiblement aucun effet pour la formulation $\mathbf{EEL}+\mathbf{S}_L$. Cela peut être dû à un rayonnement supplémentaire dont l'origine serait le fort gradient engendré par la brusque troncature des termes sources. Il est d'ailleurs nettement visible sur la figure 5.27 que les termes sources \mathbf{S}_L ont une étendue spatiale plus importante que ceux des autres formulations.

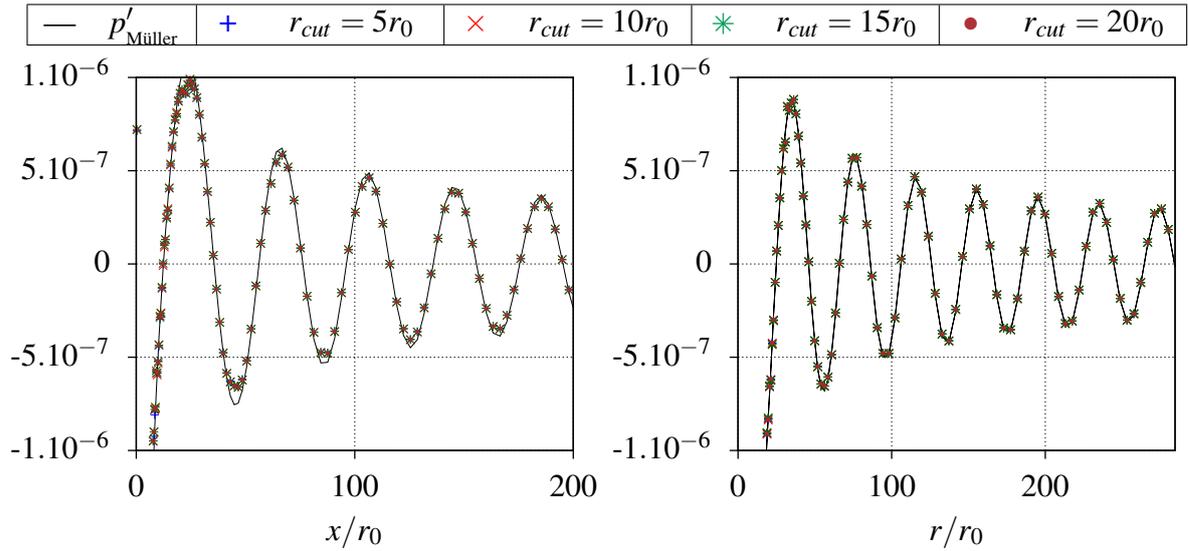


FIG. 5.23: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par $\mathbf{EEL}+\mathbf{S}_L$ pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

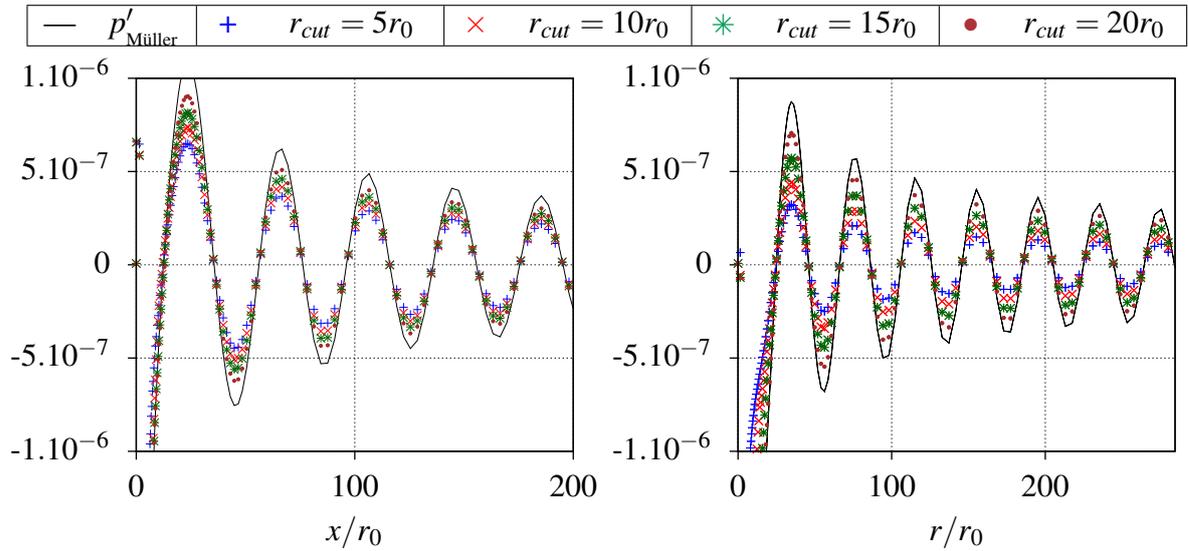


FIG. 5.24: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par $\mathbf{EEL}+\mathbf{S}_P$ pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

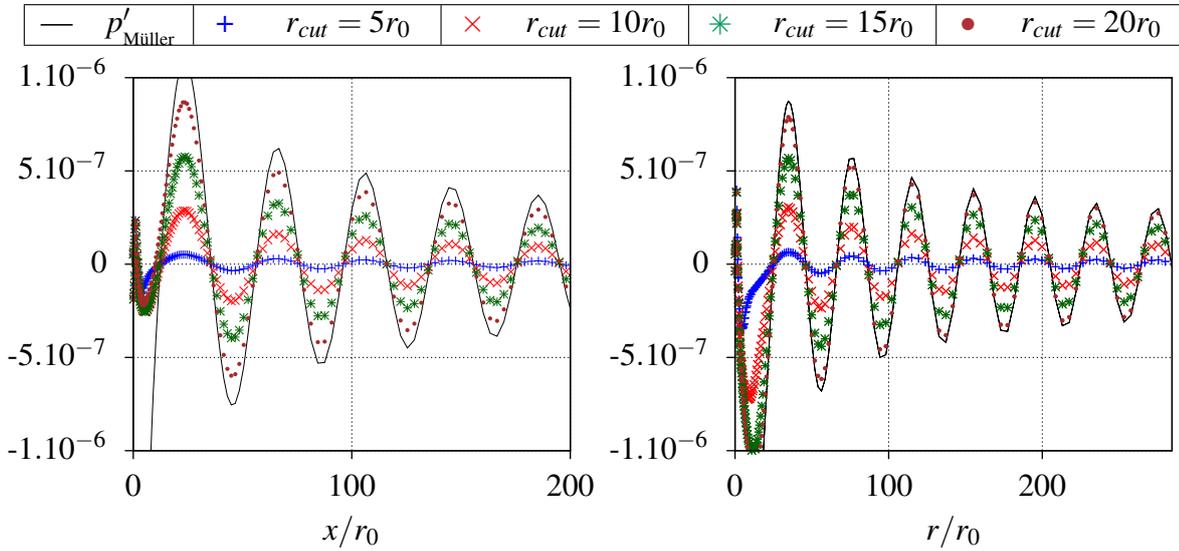


FIG. 5.25: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **EEL+SE** pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

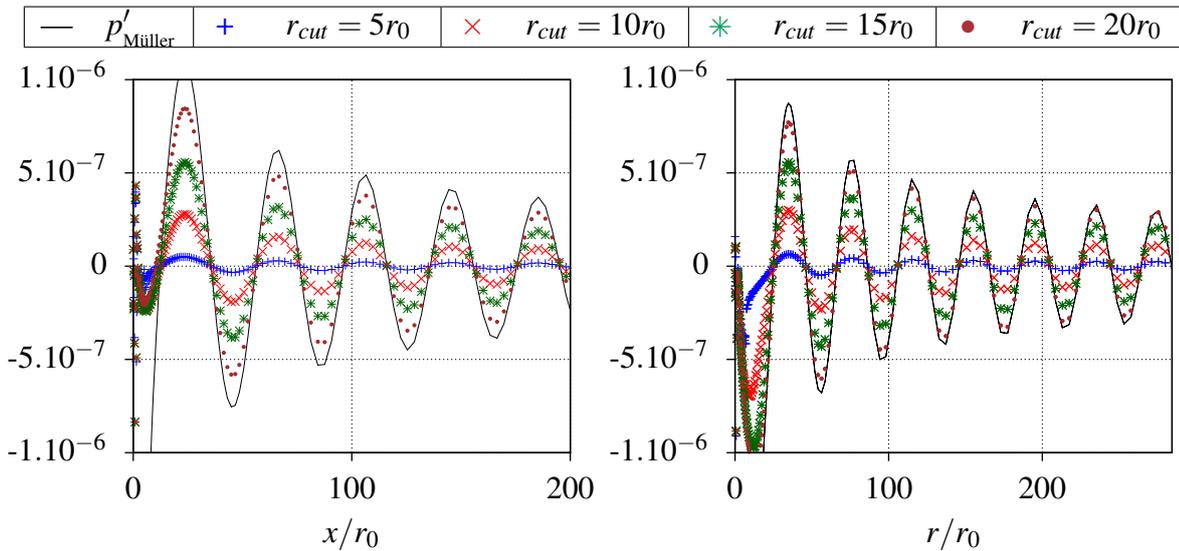
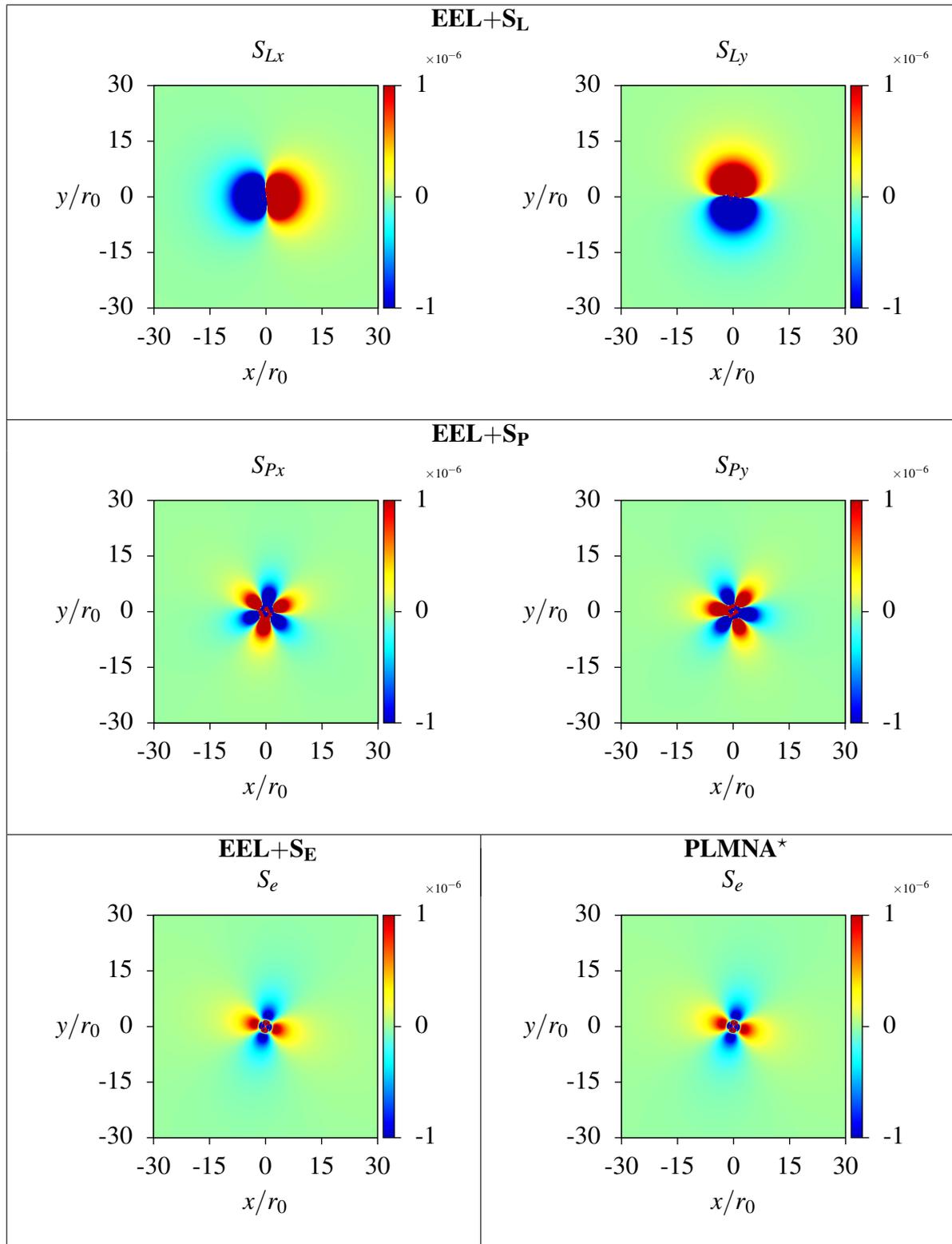


FIG. 5.26: Comparaison de p' à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ obtenue par **PLMNA*** pour différentes valeurs de r_{cut} avec l'expression analytique de Müller en $y = 0$ à gauche et suivant la diagonale à droite.

FIG. 5.27: Termes sources des différentes formulations à $t_a c_0 / r_0 = 1000$, sources non tronquées.

Emploi d'un terme source à divergence nulle

Une façon simple de quantifier les effets de la troncature est de se servir de la définition des termes sources \mathbf{S}_L . En effet, il a été vu au chapitre 3, paragraphe 3.1.3, que ce terme est formulé à partir de l'équation de Lilley rappelée ici :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \left(\frac{1}{\bar{c}^2} \frac{\bar{D}^2 p'}{\bar{D}t_a^2} - \nabla^2 p' \right) + 2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial y} &= \Lambda \\ \Lambda &= -\frac{\bar{D}}{\bar{D}t_a} \nabla \cdot \mathbf{S} + 2 \frac{d\bar{u}_x}{dy} \frac{\partial S_x}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.42)$$

Le terme source Λ dans l'équation de propagation ainsi formée est égal à la dérivé convective de la divergence de \mathbf{S}_L (dans le cas présent, \bar{u}_x dans (5.42) est nul). Par conséquent, si la divergence des termes \mathbf{S}_L est nulle il ne doit pas y avoir de rayonnement acoustique. Afin de vérifier cette assertion, S_{Lx} et S_{Ly} sont choisis pour un cas test comme :

$$\begin{aligned} S_{Lx} &= \beta_1 \left[Y_1 e^{-\beta_2 r_1^2} + Y_2 e^{-\beta_2 r_2^2} \right] \\ S_{Ly} &= -\beta_1 \left[X_1 e^{-\beta_2 r_1^2} + X_2 e^{-\beta_2 r_2^2} \right] \end{aligned} \quad (5.43)$$

où β_1 et β_2 sont des réels strictement positifs (ici $\beta_1 = 4 \cdot 10^{-4}$, $\beta_2 = 0,04$) et

$$\begin{aligned} X_1 &= x - r_0 \cos(\Omega_R t) \quad , \quad Y_1 = y - r_0 \sin(\Omega_R t) \quad , \quad r_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2} \quad , \\ X_2 &= x + r_0 \cos(\Omega_R t) \quad , \quad Y_2 = y + r_0 \sin(\Omega_R t) \quad , \quad r_2 = \sqrt{X_2^2 + Y_2^2} \quad . \end{aligned} \quad (5.44)$$

Ces termes évoluent temporellement en amplitude, tournent au cours du temps et vérifient toujours bien $\nabla \cdot \mathbf{S}_L = 0$. La figure 5.28 montre les termes sources pour le cas sans troncature.

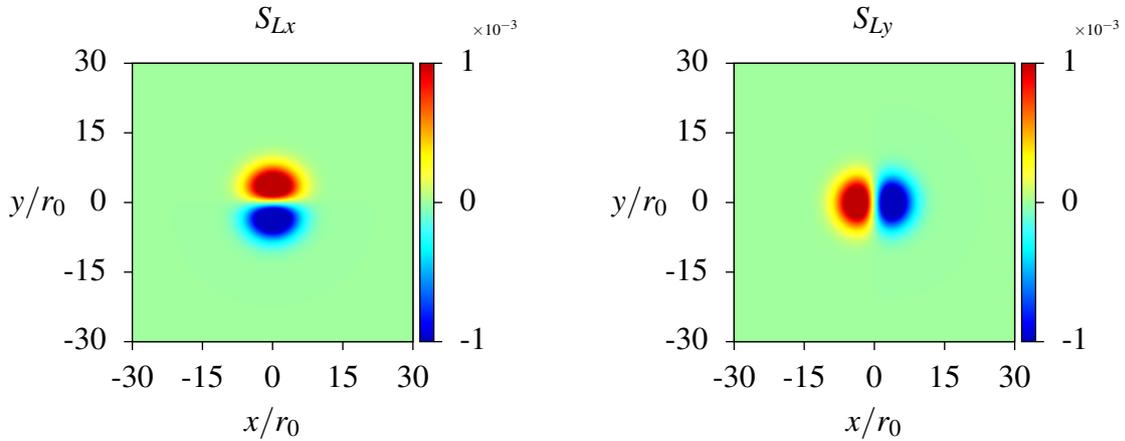


FIG. 5.28: Composantes du terme source à divergence nulle non tronqué à $t_a c_0 / r_0 = 1000$.

Les champs de pression obtenus pour différentes troncatures sur la figure 5.29 montrent à quel point la troncature génère elle-même un rayonnement. En effet, la première figure de 5.29 pour laquelle aucune troncature n'est appliquée donne un rayonnement nul conformément à ce qui est attendu alors que celui-ci est considérable pour une valeur de r_{cut} inférieur à $15r_0$. De plus, alors que les termes sources tournent dans le sens horaire, une structure à double hélice tournant dans le sens inverse apparaît, ce qui peut expliquer par un jeu de compensation que le niveau obtenu avec $\mathbf{EEL} + \mathbf{S}_L$ pour le tourbillon de Kirchhoff ne semblait pas affecté par la troncature. La représentation de la pression au centre du domaine dans les cas $r_{cut} = 10r_0$ et $r_{cut} = 5r_0$ de la figure 5.30 permet d'identifier que le rayonnement est bien causé par les frontières du domaine intérieur symbolisées par le carré blanc en pointillés.

Afin d'analyser plus finement la source de ce rayonnement, modélisons la troncature des champs hydrodynamiques par une fonction f_{xy} et $\tilde{\mathbf{S}}_L$ le terme source construit à partir de champs tronqués dans la méthode $\mathbf{EEL} + \mathbf{S}_L$. La divergence de ce dernier devient :

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}_L &= \nabla \cdot \left(f_{xy}^2 \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} + \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a} \frac{\partial f_{xy}^2}{\partial x_j} \right) \\ &= f_{xy}^2 (\nabla \cdot \mathbf{S}_L) + 2\mathbf{S}_L \cdot (\nabla f_{xy}^2) + \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a} \Delta f_{xy}^2 \end{aligned} \quad (5.45)$$

Le même développement est possible pour les termes sources \mathbf{S}_P :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}_P &= \nabla \cdot \left(f_{xy} \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} + p''_{1a} \frac{\partial f_{xy}}{\partial x_i} \right) \\ &= f_{xy} (\nabla \cdot \mathbf{S}_P) + 2\mathbf{S}_P \cdot (\nabla f_{xy}) + p''_{1a} \Delta f_{xy} \end{aligned} \quad (5.46)$$

Les deux derniers termes de (5.45) et (5.46) sont les sources artificielles causées par la troncature f_{xy} . La connaissance de ces termes ne permet cependant pas un traitement adéquat des équations ou des sources en vue de leur suppression du fait de la répartition de \mathbf{S} sur x et y . La fonction de troncature f_{xy} est inhérente à l'inclusion de domaine dans un autre domaine. Rappelons que cette fonction vaut 1 dans le domaine hydrodynamique et 0 à l'extérieur. Il serait possible d'appliquer une pondération F_{xy} uniquement aux termes sources calculés afin de supprimer les effets de bords induits par f_{xy} mais ceci créerait également des sources artificielles puisque dans ce cas, la divergence du terme source modifié $\tilde{\mathbf{S}}'$ devient :

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}' = F_{xy} \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot (\nabla F_{xy}) \quad (5.47)$$

La question se pose alors de savoir si les formulations ayant un terme source situé uniquement dans l'équation de l'énergie sont ou non également victimes de ces rayonnements

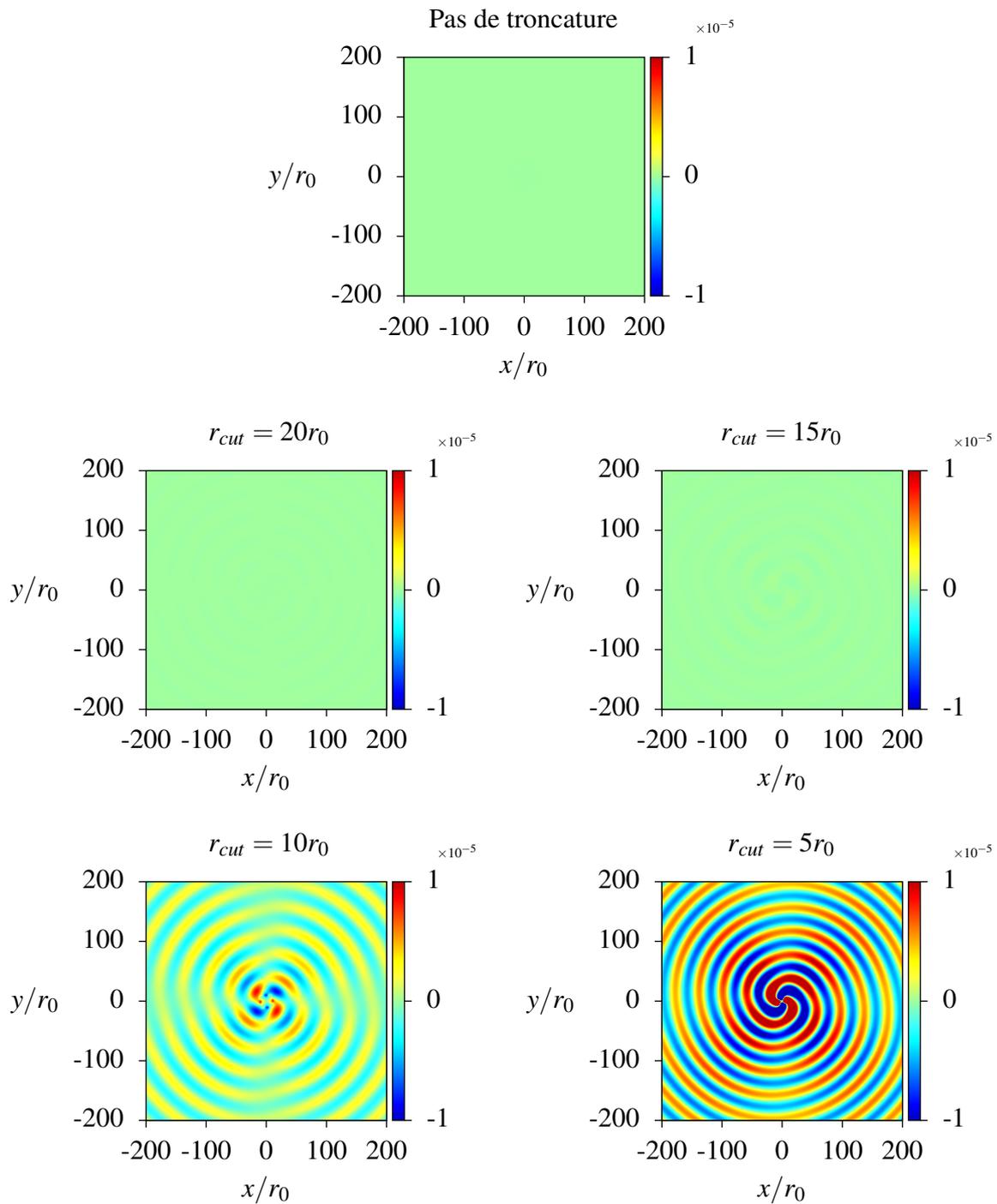


FIG. 5.29: Champs de pression $p' - \bar{p}'$ à $t_a c_0 / r_0 = 1000$, calculés par **EEL**+**S_L** avec le terme source à divergence nulle pour différentes valeurs de troncature r_{cut} .

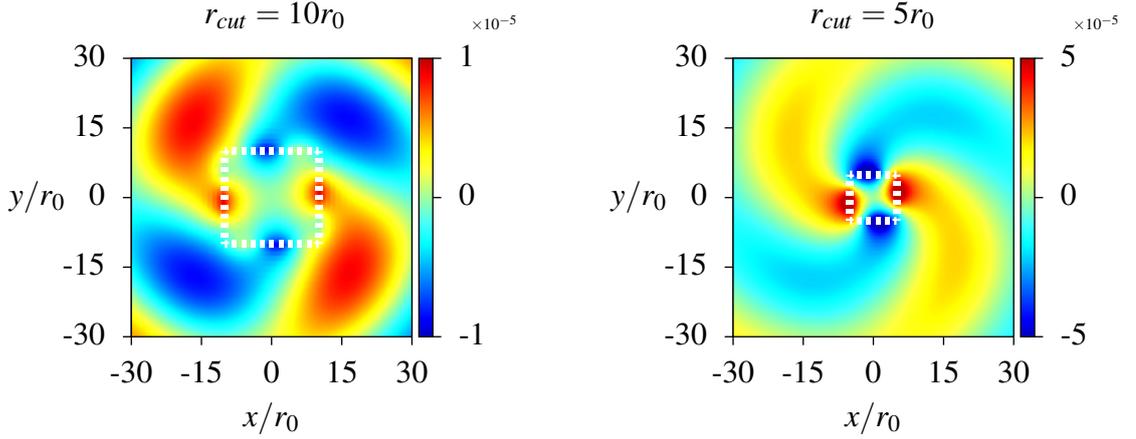


FIG. 5.30: Zoom sur le champ $p' - \bar{p}'$ obtenu par **EEL+S_L** avec le terme source à divergence nulle à $t_a c_0 / r_0 = 1000$ pour $r_{cut} = 10r_0$ et $r_{cut} = 5r_0$. Le carré blanc en pointillés représente la zone de troncature.

parasites. Dans le cas présent, le système d'équation **EEL+S_E** (3.73) se simplifie en :

$$\frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0 \quad (5.48)$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = S_e \quad (5.50)$$

$$S_e = - \left(\frac{D p_{1a}}{D t_a} + \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right) \quad (5.51)$$

car $\bar{u}_x = \bar{u}_y = 0$, $\bar{p} = \bar{p} c_0^{-2} / \gamma$, $\bar{\rho} = 1$ et $\bar{c}_0^2 = 1$. En soustrayant la divergence de (5.49) à la dérivée temporelle de (5.50), il vient l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t_a^2} - \nabla^2 p' = \frac{\partial S_e}{\partial t_a} \quad (5.52)$$

Ainsi, le terme source est la dérivée temporelle de S_e . Il apparaît alors que l'emploi d'une fonction de pondération F_{xy} sur S_e pour supprimer les effets de bord ne peut générer de source supplémentaire puisque F_{xy} ne dépend pas du temps.

Concernant les formulations instationnaires **PLMNA** et **PLMNA***, tous les gradients ainsi que le terme source seront soumis à cette pondération F_{xy} . Il n'est cependant pas aisé de développer une équation de propagation comme précédemment pour en quantifier les effets car les simplifications concernant les champs moyens ne sont plus possibles.

L'équation 5.52 est très similaire à l'analogie de Ribner [92] qui s'écrirait avec les notations

employées ici :

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t_a^2} - \nabla^2 p' = -\frac{\partial^2 p_{1a}}{\partial t_a^2} \quad . \quad (5.53)$$

Ribner a ainsi montré que les variations temporelles de la partie incompressible du champ de pression représentaient une source acoustique.

5.2 Les tourbillons corotatifs

À présent, un cas hybride complet est testé. C'est-à-dire que les champs hydrodynamiques en entrée des propagateurs proviendront d'une simulation **LO-LMNA**. Le cas étudié est celui de l'appariement de deux vortex en corotation. Ce cas sert souvent pour les validations de méthodes hybrides à l'image des calculs de Bogey *et al.* [19] ou encore Lee & Koo [60]. Bien qu'académique, le cas de tourbillons corotatifs n'en est pas moins intéressant puisque de tels phénomènes existent lors de la séparation d'un écoulement sur un angle ou bien derrière de larges obstacles placés dans un écoulement formant ainsi quelque chose se rapprochant d'une allée de Von Karman à un couloir. La figure 5.31 en est un magnifique exemple. De plus, dans les jets et plus particulièrement dans leurs couches de mélange, l'appariement tourbillonnaire est un processus très énergétique et une source importante de bruit.



FIG. 5.31: Allée de Von Karman observée derrière la Guadeloupe (www.nasaimages.org).

Dans le cas de deux points de vorticité en corotation, Müller et Obermeier [80] calculent les champs dynamiques et acoustiques en utilisant la méthode M.A.E. pour Matched Asymptotic Expansions. Cette méthode donne une solution asymptotique des équations différentielles de l'écoulement considérée valable à la fois en champ proche et en champ lointain. Cette approche ne prend pas en compte le phénomène d'appariement et ne pourra donc pas servir ici de solution de référence. Barré [7] quant à lui utilise avec un bon accord une formulation proche

de l'équation (5.37) mais prenant en compte le changement d'aspect d'un tourbillon elliptique dans le cas d'un tourbillon de Kirchhoff se séparant en tourbillons corotatifs. Ici, il sera préféré l'approche de Mitchell *et al.*[74]. Ces derniers ont justement développé un modèle basé sur la vorticité pour prédire le champ acoustique rayonné par deux tourbillons corotatifs. Après avoir calculé le champ de vorticité de deux vortex corotatifs par DNS, ils expriment la pression en champ lointain en dérivant la solution bidimensionnelle de Möhring [71] par la méthode de développement asymptotique à la manière du résultat tri-dimensionnel obtenu par Kambe *et al.* [54]. Ce champ de pression rayonnée s'exprime :

$$p'_{\text{Mitchell}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho_0}{8\pi c_0^2} \int_0^\infty [\ddot{Q}_1(t^*) \cos(2\theta) + \ddot{Q}_2(t^*) \sin(2\theta)] d\xi \quad (5.54)$$

où $t^* = t - (r/c_0) \cosh(\xi)$ est le temps retardé ou temps observateur, ξ est la variable d'intégration, θ est l'angle mesuré par rapport à l'axe des x depuis le centre du domaine, \ddot{Q}_1 et \ddot{Q}_2 sont respectivement les dérivées troisièmes en temps des moments de vorticité du second ordre Q_1 et Q_2 définis comme

$$Q_1 \equiv 2 \iint xy \omega dx dy \quad , \quad Q_2 \equiv \iint (y^2 - x^2) \omega dx dy \quad . \quad (5.55)$$

Dans [74], le champ de pression acoustique obtenu grâce à (5.54) est comparé avec un très bon accord au résultat de la DNS.

5.2.1 Configuration du calcul quasi compact 3d.

À l'instant initial, les deux tourbillons sont séparés d'une distance $2r_0$ comme le schématise la figure 5.32. Les champs de vitesse des deux tourbillons corotatifs sont définis suivant le modèle de Scully :

$$V_\theta(r_i) = \frac{\Gamma_0 r_i}{2\pi(r_c^2 + r_i^2)} \quad (5.56)$$

où V_θ est la vitesse tangentielle, r_i la distance au centre du tourbillon, r_c le rayon du noyau central et Γ_0 la circulation du tourbillon. Ils sont alignés suivant l'axe x à l'instant initial et tournent dans le sens trigonométrique.

En effet, le profil de vitesse tangentielle d'un vortex peut s'exprimer sous la formule générale [110] :

$$V_\theta(r) = \frac{\Gamma r}{2\pi(r_c^{2n} + r^{2n})^{1/n}} \quad . \quad (5.57)$$

Pour $n \rightarrow \infty$, le modèle de Rankine est obtenu ; pour $n = 1$, c'est le modèle de Scully. Vatisas *et al.* ont montré que le modèle $n = 2$ est celui se rapprochant le plus des données expérimentales.

Soit $\Gamma_0 = r_0 c_0$ la circulation de chaque vortex, la vitesse angulaire initiale de corotation est

$\Omega_0 = \Gamma_0 / (4\pi r_0^2)$ et le rayon du noyau est choisi tel que $r_c = r_0/3$ et $r_0 = 15$. Ainsi le nombre de Mach de corotation $M_0 = \Omega_0 r_0 / c_0$ est suffisamment faible pour respecter les hypothèses de compacité ($M_0 < 0,1$ [116]).

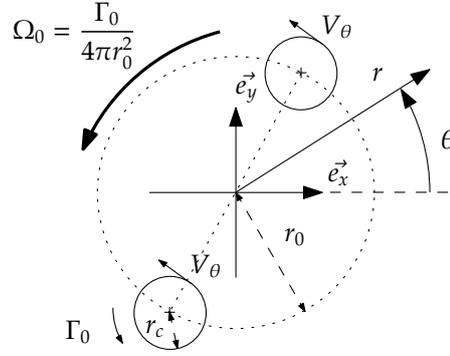


FIG. 5.32: Configuration des deux tourbillons corotatifs de Scully.

Le calcul **LO-LMNA** est mené sur un domaine cartésien régulier de dimensions $L_x \times L_y = 40r_0 \times 40r_0$ avec $N_x \times N_y = 800 \times 800$ points et des conditions aux limites de type périodique. Ici la vitesse du son dans l'air c_0 est prise comme vitesse de référence afin de faciliter l'interpolation avec les propagateurs acoustiques. Le nombre de Reynolds de la simulation vaut $R_e = r_0 c_0 / \nu = 7500$. Le pas de temps vaut $\Delta t = 0,8$ et les champs sont sauvegardés toutes les $N_h = 5$ itérations. Tous les paramètres de cette configuration sont récapitulés dans le tableau 5.3.

N_x	800
N_y	800
L_x	$40r_0$
L_y	$40r_0$
r_0	15
r_c	$r_0/5$
Γ_0	$r_0 c_0$
Ω_0	$\Gamma_0 / (4\pi r_0^2)$
R_e	7500
Δt	0,8

TAB. 5.3: Paramètres de la simulation `quasincompact3d` pour le calcul des deux tourbillons corotatifs.

L'évolution temporelle de la vorticité est représentée sur la figure 5.33. Les deux vortex tournent l'un autour de l'autre pendant deux périodes et demie de corotations puis ils se rapprochent, accélèrent et forment des filaments de vorticité pendant une période et demie. Il s'apparient ensuite brusquement en une demi-période et évoluent lentement en un tourbillon unique stable.

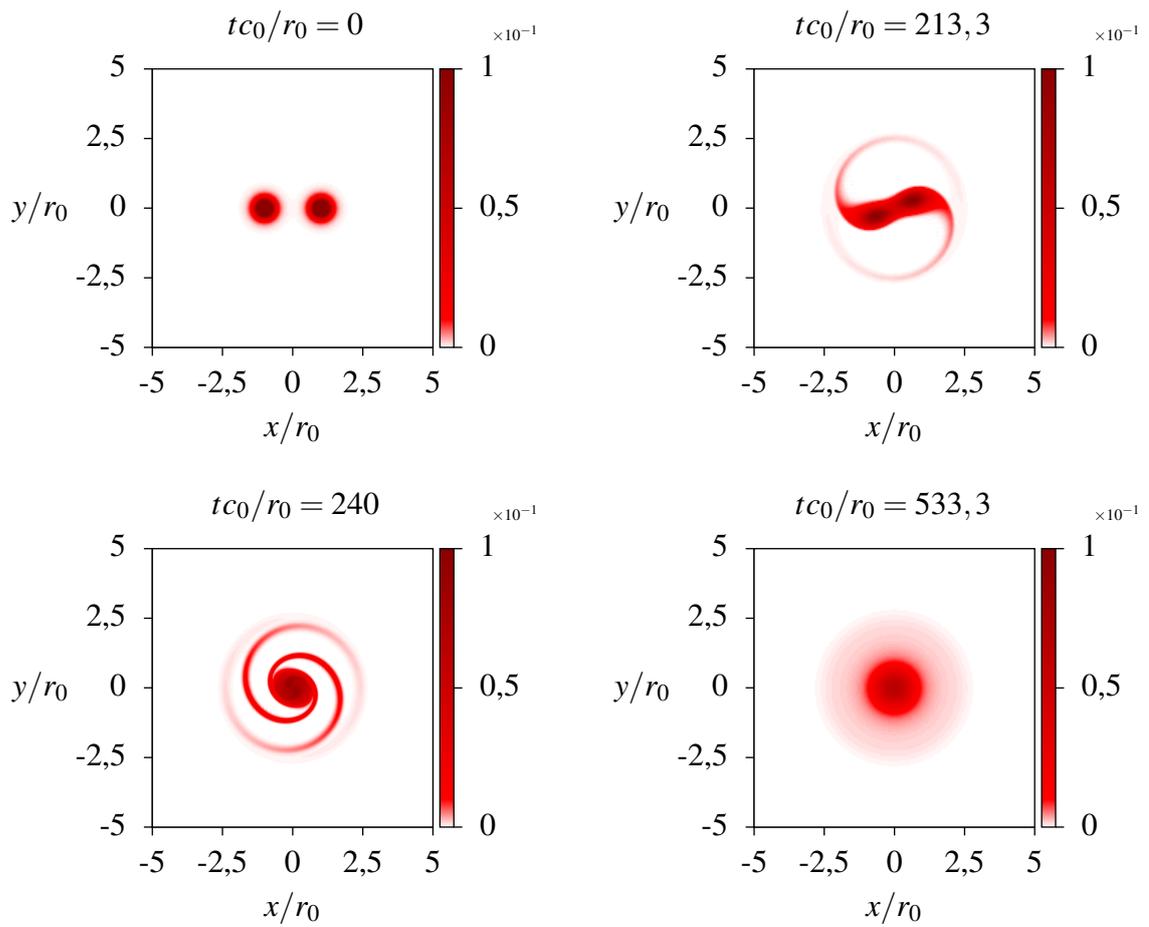


FIG. 5.33: Évolution temporelle de la vorticité des deux tourbillons corotatifs calculée par `quasincompact3d`.

Il faut noter que des régions d'antivorticité apparaissent aux frontières du domaine hydrodynamique. Ceci se voit par les contours bleutés de la figure 5.34. Ce phénomène n'a rien de physique et est entièrement dû à l'emploi de conditions périodiques. En effet, cette technique équivaut à considérer ici qu'il existe un champ vortical image identique de l'autre côté de chaque frontière et ce sont les interactions entre ces images et la solution calculée qui créent ces antivorticités. Cependant, ces régions seront négligées dans le calcul hybride du fait de l'utilisation de la fonction de pondération F_{xy} décrite précédemment.

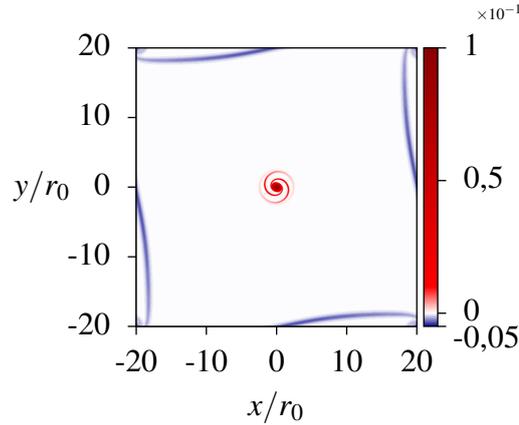


FIG. 5.34: Champ de vorticité des deux tourbillons de Scully à $tc_0/r_0 = 240$.

5.2.1.1 Solution acoustique

Le domaine acoustique de dimension $L_{x_a} \times L_{y_a} = 300r_0 \times 300r_0$ est constitué de $N_{x_a} \times N_{y_a} = 368 \times 368$ points. Le maillage est régulier au centre de sorte que la discrétisation acoustique soit quatre fois plus grande que la discrétisation dynamique, ainsi $\Delta x_a = 4\Delta x$ et $\Delta y_a = 4\Delta y$. Le maillage subit ensuite un étirement géométrique de 4% par maille. Pour le calcul des termes sources des propagateurs, seul un point sur quatre du domaine hydrodynamique est considéré dans chaque direction. Les termes sources sont tronqués selon la fonction F_{xy} :

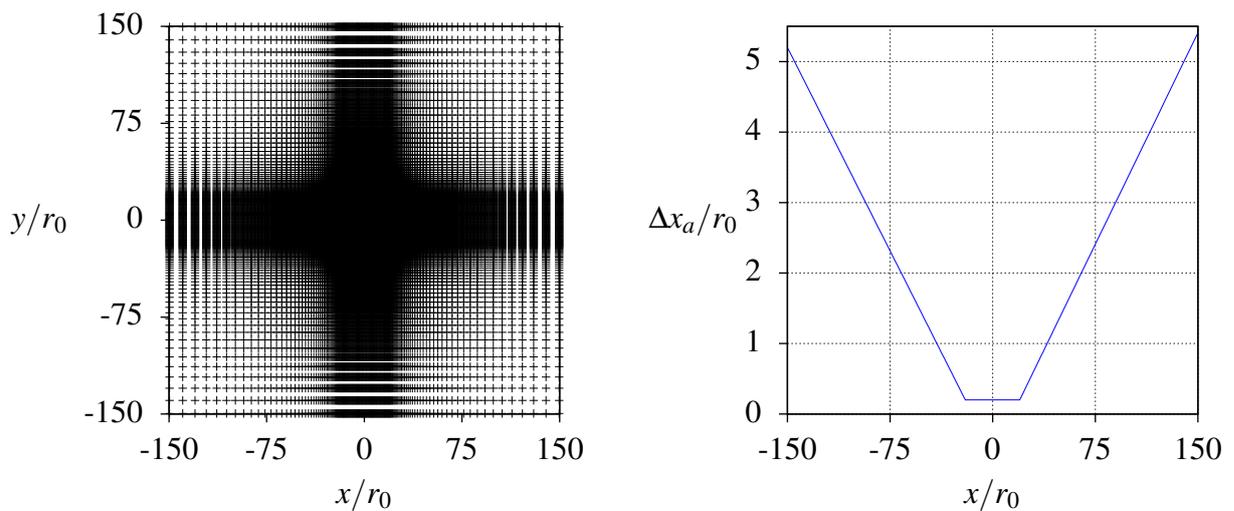
$$F_{xy}(r) = \begin{cases} 1 & \text{pour } r \leq 18r_0 \\ 0 & \text{pour } r > 18r_0 \end{cases} . \quad (5.58)$$

Cette configuration nommée **cv1** est récapitulée dans le tableau 5.4 et le maillage est représenté sur la figure 5.35.

La solution analytique p'_{Mitchell} est obtenue en calculant (5.54) par une intégration à quadrature adaptative. La borne supérieure de l'intégration est fixée à

$$\xi_0 = \operatorname{arccosh} \left[\frac{c_0(t_a - t_0)}{r} \right] \quad (5.59)$$

cv1	
N_{x_a}	368
N_{y_a}	368
L_{x_a}	$300r_0$
L_{y_a}	$300r_0$
étirement suivant x	oui
$\Delta x_{a_{\min}}$	$r_0/5$
$\Delta x_{a_{\max}}$	$5,4r_0$
accroissement de maille suivant x	4%
étirement suivant y	oui
$\Delta y_{a_{\min}}$	$r_0/5$
$\Delta y_{a_{\max}}$	$5,4r_0$
accroissement de maille suivant y	4%
r_0	15
c_0	1
Δt_a	1,5
filtrage en x	ordre 8
$\tilde{\sigma}_x$	0,05
filtrage en y	ordre 8
$\tilde{\sigma}_y$	0,05
troncature des sources en x	oui
troncature des sources en y	oui

TAB. 5.4: Paramètres de la configuration **cv1**FIG. 5.35: Maillage acoustique dans la configuration **cv1** (un point sur deux est tracé).

où t_0 est égal à un quart de la période de corotation initiale afin de supprimer le transitoire du calcul dynamique. La figure 5.36 montre la solution obtenue par résolution de (5.54) à $t_a c_0/r_0 = 240$. La longueur d'onde y est plus petite au centre du domaine car à cet instant les tourbillons accélèrent pour s'appareiller. Pour les comparaisons avec les solutions des propagateurs, l'évolution temporelle de la pression est enregistrée au point $A(100r_0, 25r_0)$ marqué ■ et sur la diagonale au point $B(100r_0, 100r_0)$ marqué ●.

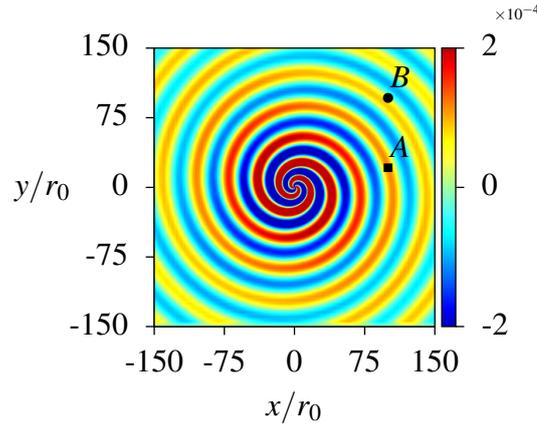


FIG. 5.36: Pression acoustique p'_{Mitchell} obtenue par résolution de (5.54) à $t_a c_0/r_0 = 240$.

La pression est maintenant calculée avec toutes les formulations vues précédemment dans la configuration **cv1** à l'exception de **PLMNA** de par la nécessité d'employer un maillage plus fin et un filtrage plus important.

Contrairement au cas précédent, ici il n'est pas possible de calculer des champs moyens ou des termes sources moyens puisque le phénomène étudié, l'appariement, n'est pas périodique.

Les évolutions temporelles de la pression en A et B sont tracées sur la figure 5.37. Tous les calculs convergent vers la même solution, il apparaît bien un pic d'amplitude dû à l'appariement puis une augmentation de la fréquence du signal. Les diverses formulations sont plus faibles en amplitude au début du calcul que la solution p'_{Mitchell} surtout sur la diagonale. Sur la diagonale justement, la solution calculée par **EEL+SL** est plus proche de la solution de Mitchell mais ceci ne signifie pas un calcul plus fiable notamment en raison du probable rayonnement causé par la fonction de pondération principalement dans cette direction comme il a été démontré auparavant. Enfin il faut noter que les termes Q_1 et Q_2 sont calculés pour tous les points de la simulation hydrodynamique alors que les termes sources ne le sont que sur quatre fois moins de points dans chaque direction ce qui peut expliquer la différence d'amplitude rencontrée.

5.2.2 Conclusion

Cette partie de validation a permis de montrer les différences entre les formulations développées et de mettre en exergue certaines subtilités et certains écueils inhérents aux méthodes

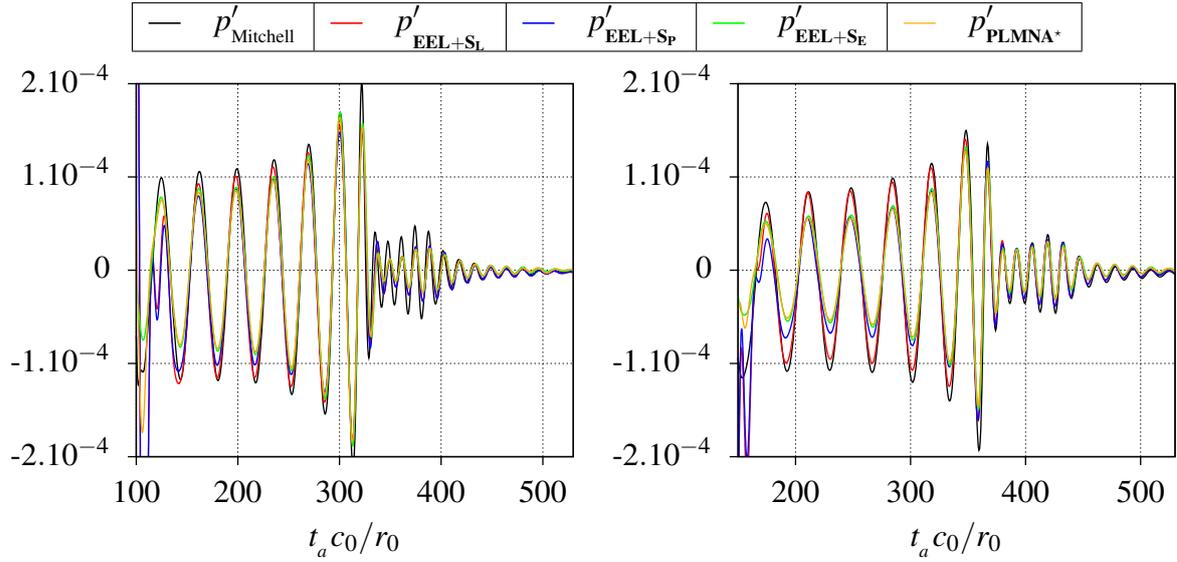


FIG. 5.37: Comparaison de l'évolution temporelle de p' obtenue par les diverses formulations au point A à gauche et au point B à droite.

hybrides. Citons principalement le problème de troncature de domaine qu'il convient de garder à l'esprit par la suite car il a été ici clairement démontré que des rayonnements parasites non physiques peuvent totalement polluer le rayonnement acoustique attendu. En cela, les méthodes dont le terme source repose sur la dérivée convective de la pression hydrodynamique comme les **EEL+S_E** ou les **PLMNA*** semblent beaucoup moins contraignantes pour deux raisons. Tout d'abord l'étendue spatiale du terme source S_e est moins importante que celle des termes sources des formulations **EEL+S_L** et **EEL+S_P**, ensuite la troncature ne fait pas apparaître de contribution supplémentaire dans l'équation de propagation.

Les méthodes ont été validées à la fois pour un champ hydrodynamique totalement analytique, le tourbillon de Kirchhoff, et pour une simulation d'appariement tourbillonnaire calculée par `quasincompact3d`, ce cas représentant un calcul hybride complet.

La couche de mélange 2D

Finally, there is a physical problem that is common to many fields, that is very old, and that has not been solved. It is not the problem of finding new fundamental particles, but something left over from a long time ago—over a hundred years. Nobody in physics has really been able to analyze it mathematically satisfactorily in spite of its importance to the sister sciences. It is the analysis of circulating or turbulent fluids. If we watch the evolution of a star, there comes a point where we can deduce that it is going to start convection, and thereafter we can no longer deduce what should happen. A few million years later the star explodes, but we cannot figure out the reason. We cannot analyze the weather. We do not know the patterns of motions that there should be inside the earth. The simplest form of the problem is to take a pipe that is very long and push water through it at high speed. We ask : to push a given amount of water through that pipe, how much pressure is needed ? No one can analyze it from first principles and the properties of water. If the water flows very slowly, or if we use a thick goo like honey, then we can do it nicely. You will find that in your textbook. What we really cannot do is deal with actual, wet water running through a pipe. That is the central problem which we ought to solve some day, and we have not.

Richard P. Feynman, *Lectures on Physics, Vol.1, section 3-7*

La couche de mélange fait partie de la famille des « écoulements cisailés libres ». Le terme libre signifie qu'il n'y a pas d'interaction avec un quelconque mur ou surface solide. Les couches de mélange sont des écoulements turbulents qui apparaissent entre deux écoulements quasi parallèles animés de vitesses différentes. Elles se forment par exemple à la frontière d'un jet axisymétrique avec le milieu extérieur au repos comme l'illustre la figure 1.1 page 13 dans le cas d'un jet rond. Expérimentalement, cet écoulement peut être créé derrière une plaque mince séparant deux écoulements de vitesses différentes. Ceci est schématisé sur la figure 6.1.

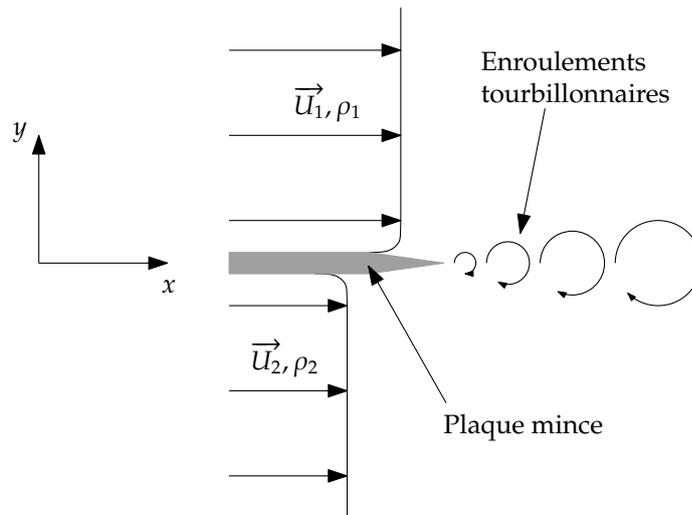


FIG. 6.1: Illustration schématique de la formation d'une couche de mélange derrière une plaque mince.

Derrière la plaque, des instabilités de type Kelvin-Helmoltz apparaissent donnant lieu à des appariements tourbillonnaires successifs. Les visualisations d'écoulements de Brown et Roshko [20] ont permis de mettre en évidence ce processus. La figure 6.2 est un exemple de leurs visualisations. L'épaisseur de la couche de mélange croît avec les appariements successifs de manière linéaire comme l'ont montré Winand et Browand [115]. Il est d'ailleurs possible de contrôler le développement de ces appariements. Par exemple, Becker et Massaro [12], Bechert et Pfizenmaier [11] ou encore Crow et Champagne [28] ont excité un jet à l'aide de petites perturbations acoustiques. De nombreuses autres expériences ont été menées sur le sujet. Ho et Huerre [51] en donnent un bon aperçu.

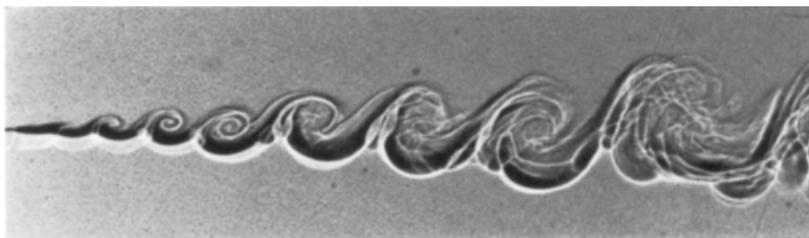


FIG. 6.2: Couche de mélange visualisée par Brown et Roshko extraite de [20].

Le principe consiste à exciter l'écoulement périodiquement à une fréquence donnée ce qui déclenche une onde d'instabilité laquelle est ensuite amplifiée. Michalke a calculé par une étude de stabilité de la couche de mélange spatiale [72] que la fréquence du mode le plus instable pour

un profil de vitesse en tangente hyperbolique est

$$f_0 = 0,132 \frac{(U_1 + U_2)}{2\delta_{\omega_0}} \quad (6.1)$$

où U_1 et U_2 sont les vitesses moyennes des deux écoulements comme représenté sur la figure 6.1. L'épaisseur de vorticité initiale δ_{ω_0} est définie à l'origine x_0 comme

$$\delta_{\omega_0} = |U_1 - U_2| \left(\left| \frac{\partial U(x_0, y)}{\partial y} \right|_{\max} \right)^{-1} . \quad (6.2)$$

Ce procédé de forçage de la couche de mélange sur son mode le plus instable et ses harmoniques est très courant en simulation numérique. En effet, sans forçage les appariements apparaissent naturellement mais sur une distance qui peut se révéler très longue et après un long temps de calcul. Cela s'avère coûteux du point de vue du calcul numérique car cela implique un domaine de simulation très étendu et donc un grand nombre de points de maillage. Grâce au forçage, le lieu des appariements peut être arbitrairement fixé. C'est la méthode employée par Colonius *et al.* [23]. Ces auteurs ont excité une couche de mélange plane à la fréquence f_0 et à ses trois premières sous-harmoniques en introduisant en condition d'entrée du domaine des petites perturbations périodiques de vitesse. Cette procédure est également suivie par Bogy *et al.* [18], Billson *et al.* [13], Fortuné *et al.* [39] ou encore Golanski *et al.* [45]. Freund *et al.* [41, 42] se sont intéressés de la même manière au développement d'une couche de mélange annulaire.

Ces différentes études ne s'intéressent pas seulement à la dynamique de la couche de mélange mais surtout au rayonnement acoustique que cela engendre. La simulation numérique de couche de mélange est donc une configuration assez fréquemment étudiée en aéroacoustique numérique. Cependant, peu d'études prennent en compte des inhomogénéités de masse volumique. Ce thème est très présent ces dernières années au sein de l'institut PPRIME avec les travaux de Fortuné [38], Golanski [44] et Moser [78, 22]. Ce dernier a calculé le champ acoustique rayonné par une couche de mélange isotherme et anisotherme en développement spatial par une simulation DNS compressible. Ses résultats serviront de référence pour confirmer la validité des méthodes employées dans la présente étude.

Récemment, Bodony s'est également intéressé au rôle de la température dans les écoulements cisailés [15] tout comme Sharma et Lele [97].

6.1 La couche de mélange isotherme

Pour les calculs de la dynamique de l'écoulement, deux tailles de domaine sont utilisées : un domaine **cmi1** de dimensions $L_x \times L_y = 600\delta_{\omega_0} \times 40\delta_{\omega_0}$ utilisant 1537×289 points et un do-

maine **cmi2** de dimensions $L_x \times L_y = 600\delta_{\omega_0} \times 180\delta_{\omega_0}$ avec 1001×601 points. Conformément à la méthodologie décrite dans le paragraphe 2.2.5, un étirement de maillage dans la direction x et une zone éponge en sortie de domaine sont conjointement employés pour dissiper les structures tourbillonnaires à l'approche de la frontière aval du domaine. L'étirement en x est réalisé de façon parabolique comme le montre la figure 6.3.

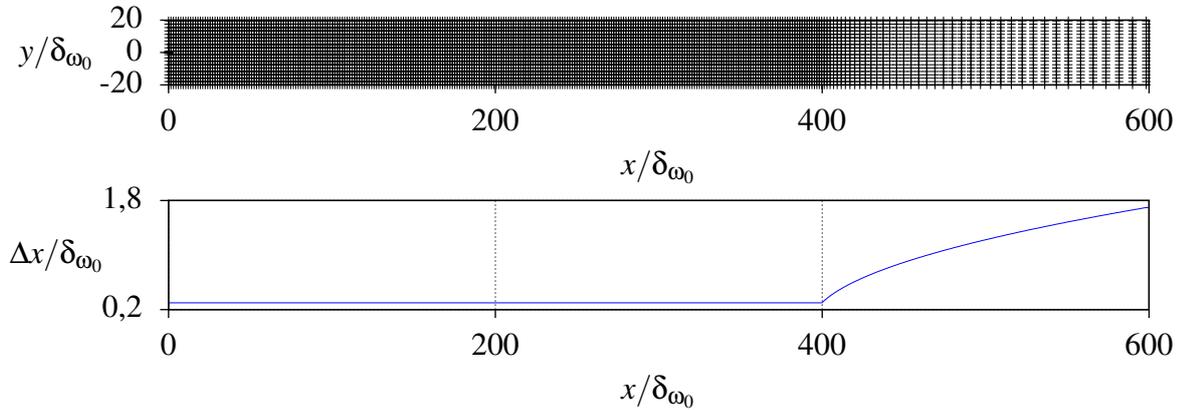


FIG. 6.3: Maillage du domaine hydrodynamique dans la configuration **cmi1**.

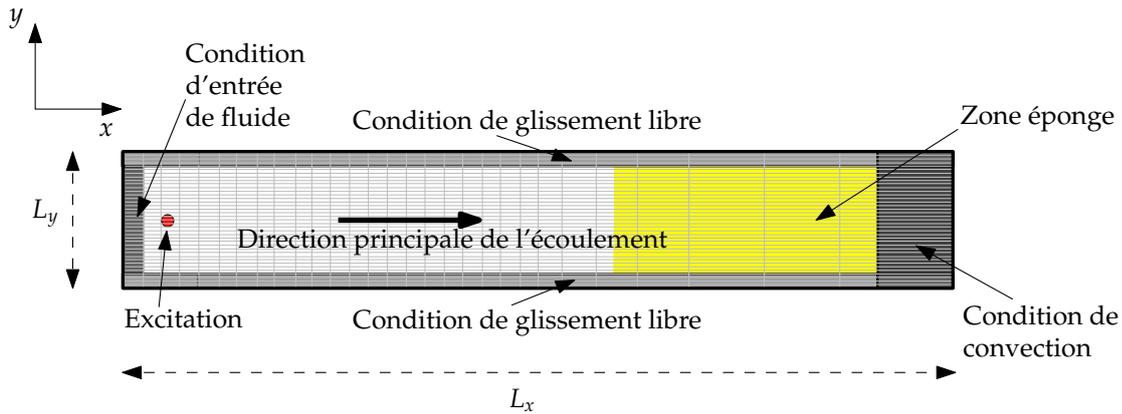


FIG. 6.4: Représentation schématique du domaine de calcul hydrodynamique et des conditions aux limites pour le calcul de la couche de mélange.

Aux frontières inférieure et supérieure du domaine sont appliquées des conditions de glissement libre. À la frontière aval, la condition de convection (2.57) est utilisée. Ces différentes conditions sont schématisées sur la figure 6.4. Le profil de la zone éponge représenté sur la figure 6.5 évolue suivant une fonction en tangente hyperbolique $\sigma(x)$ à partir de $x_s = 350\delta_{\omega_0}$:

$$\sigma(x) = 0,075 \{1 + \tanh [0,02(x - 0,875L_x)]\} \quad . \quad (6.3)$$

Cette forme est choisie empiriquement de manière à ne pas dégrader la solution calculée dans le reste du domaine. De plus, la viscosité est augmentée selon une loi parabolique de sorte qu'elle vaut en $x = L_x$ cent fois sa valeur en x_s .

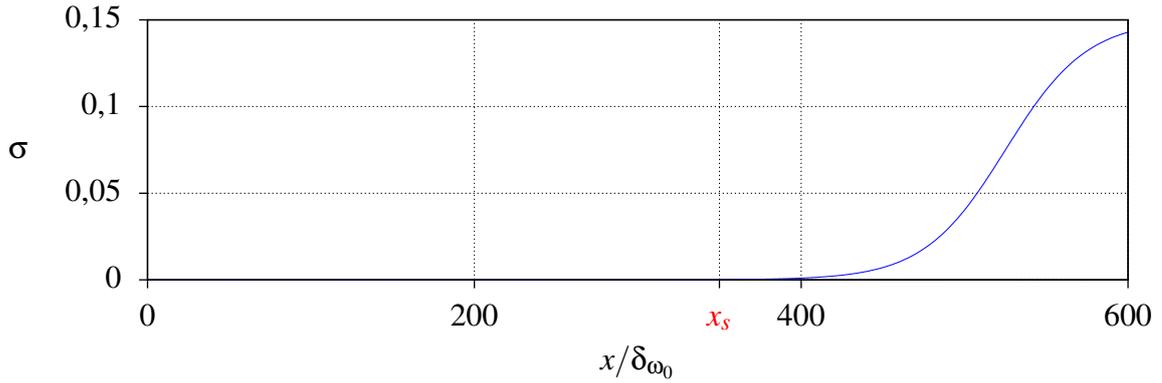


FIG. 6.5: Profil de la zone éponge pour le calcul isotherme.

Un profil de vitesse en tangente hyperbolique est imposé sur tout le domaine à l'instant initial comme :

$$u_{x_0}(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_0}}\right) \quad (6.4)$$

avec $U_2 = 1$, $U_1 = 2U_2$ et $\delta_{\omega_0} = 1$. Ainsi, la vitesse moyenne dimensionnelle U_2^* représente la vitesse de référence et l'épaisseur de vorticité initiale $\delta_{\omega_0}^*$ la longueur de référence. Dans le cas isotherme, la masse volumique est la même pour les deux fluides donc $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Dans toutes les simulations, aussi bien isothermes qu'anisothermes, c'est dans la partie la plus lente de l'écoulement, le fluide d'indice 2, que seront choisies les vitesses et masses volumiques de référence. Le nombre de Reynolds est calculé suivant la différence de vitesse des deux fluides $\Delta U = U_1 - U_2$, la masse volumique du fluide 2 et l'épaisseur de vorticité initiale :

$$Re = \frac{\rho_2 \Delta U \delta_{\omega_0}}{\mu_2} = 400 \quad . \quad (6.5)$$

Ce nombre de Reynolds sera le même pour toutes les simulations, de même pour le nombre de Prandtl $Pr = \mu_2 c_p / \lambda = 0,75$ où c_p est la capacité thermique massique et λ la conductivité thermique.

À chaque itération temporelle, le champ de vitesse (6.4) est appliqué en entrée du domaine, c'est-à-dire en $x = 0$. Le point rouge sur la figure 6.4 symbolise l'endroit où est appliquée la perturbation incompressible du champ de vitesse utilisée pour forcer le développement tourbillonnaire. Cette perturbation est ajoutée aux champs de vitesse u_{x_0} et u_{y_0} en $(x_e; y_e) = (2, 4\delta_{\omega_0}; 0)$. Ses composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_{x_e}(x, y) &= -(y - y_e) f_e(x, y, t) \\ u_{y_e}(x, y) &= (x - x_e) f_e(x, y, t) \end{aligned} \quad (6.6)$$

	cmi1	cmi2
N_x	1537	1001
N_y	289	601
L_x	$600\delta_{\omega_0}$	$600\delta_{\omega_0}$
L_y	$40\delta_{\omega_0}$	$180\delta_{\omega_0}$
étirement suivant x	oui	oui
Δx_{\min}	$0,3\delta_{\omega_0}$	$0,5\delta_{\omega_0}$
Δx_{\max}	$1,7\delta_{\omega_0}$	$1,5\delta_{\omega_0}$
étirement suivant y	non	non
Δy	$0,14\delta_{\omega_0}$	$0,3\delta_{\omega_0}$
Δt	0,075	0,104
δ_{ω_0}	1	1
U_1	$2U_2$	$2U_2$
ρ_1	ρ_2	ρ_2
T_1	T_2	T_2
U_2	1	1
ρ_2	1	1
T_2	1	1
R_e	400	400
P_r	0,75	0,75
f_1	$f_0/2$	$f_0/2$
α_{e_1}	$5 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
f_2	$f_0/4$	$f_0/4$
α_{e_2}	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
ϕ_{e_2}	$\pi/4$	$\pi/4$

TAB. 6.1: Configuration des calculs **cmi1** et **cmi2**.

où la fonction f_e a la même forme que celle définie par [78]

$$f_e(x, y, t) = \frac{U_1 + U_2}{2\Delta y} e^{[-\ln^2(r/\Delta y)^2]} [\alpha_{e_1} \sin(2\pi f_1 t) + \alpha_{e_2} \sin(2\pi f_2 t - \phi_{e_2})] \quad (6.7)$$

avec $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Les fréquences f_1 et f_2 sont les deux premières sous-harmoniques du mode le plus instable f_0 (6.1) ainsi $f_1 = 2f_2 = f_0/2$. Les coefficients $\alpha_{e_1} = 5 \cdot 10^{-4}$ et $\alpha_{e_2} = \alpha_{e_1}/2$ sont les amplitudes de ces forçages. Le terme de déphasage $\phi_{e_2} = \pi/4$ permet de régler le lieu de l'appariement tourbillonnaire. L'amplitude du forçage doit rester faible comparée aux vitesses de l'écoulement sans quoi cela pourrait engendrer la création de sources acoustiques supplémentaires lors du calcul de propagation. Les caractéristiques des configurations **cmi1** et **cmi2** sont résumées dans le tableau 6.1.

L'évolution de la vorticité dans la configuration **cmi2** est représentée sur la figure 6.6. La couche de mélange se déstabilise, des enroulements tourbillonnaires se forment et un lâcher tourbillonnaire apparaît vers $tU_2/\delta_{\omega_0} = 125$.   partir de $tU_2/\delta_{\omega_0} = 500$, un état périodique est

atteint. L'appariement tourbillonnaire se produit alors en $x/\delta_{\omega_0} = 200$. La zone éponge atténue efficacement les vortex et restabilise la couche de mélange vers $x/\delta_{\omega_0} = 500$.

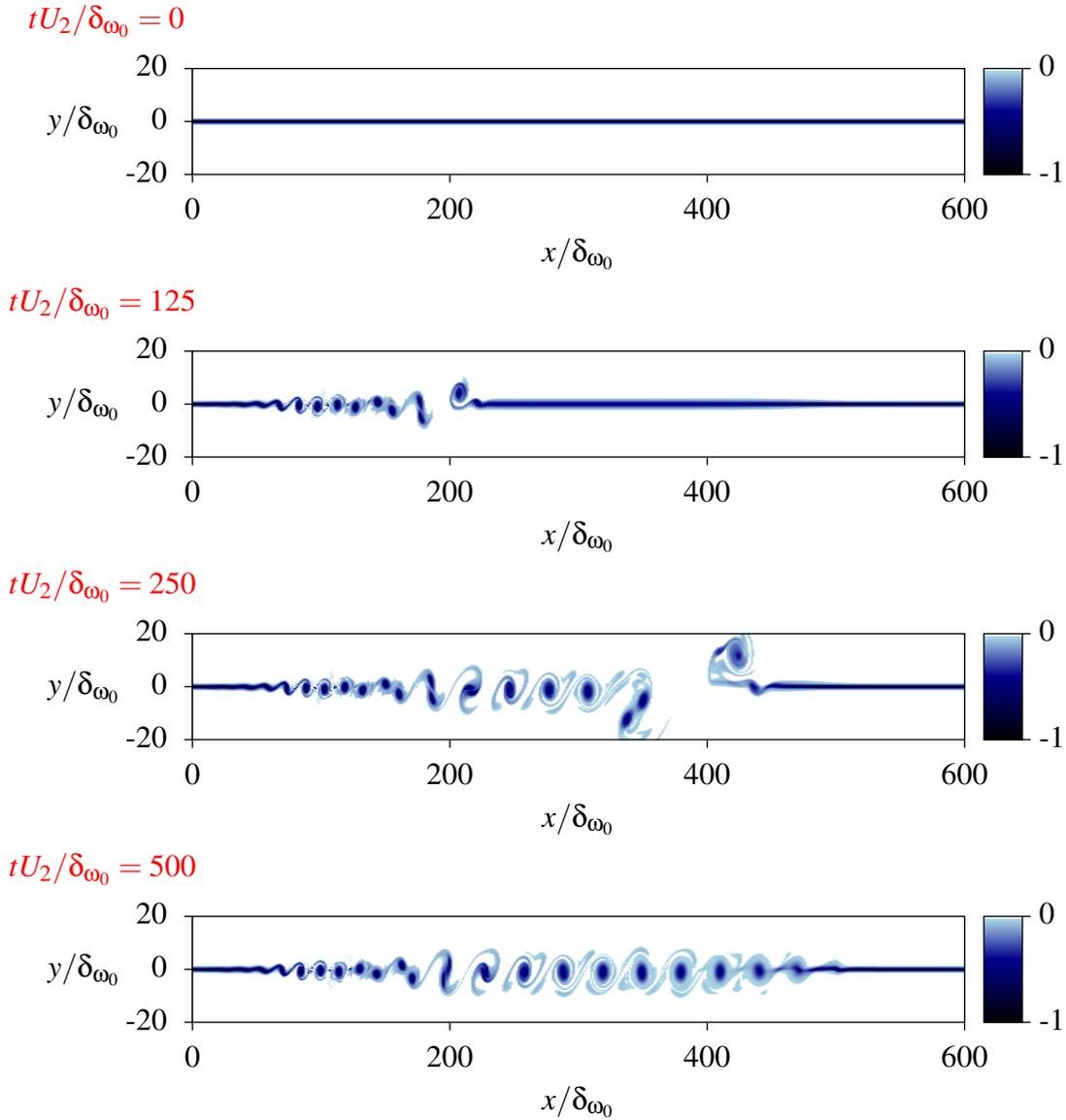


FIG. 6.6: Évolution temporelle de la vorticité ω_{z_0} de la couche de mélange isotherme dans la configuration **cmi2**.

6.1.1 Champs hydrodynamiques

Afin de valider la simulation `quasincompact3d`, les champs hydrodynamiques sont comparés à ceux obtenus par le calcul DNS compressible `compact3d` de [78]. Pour ce calcul DNS, $U_1 = 0,5$ et $U_2 = 0,25$. Le domaine de la simulation compressible s'étend sur $L_x \times L_y = 800\delta_{\omega_0} \times 800\delta_{\omega_0}$; il est étiré suivant x et y et contient 1035×431 points. Ce calcul a une originalité comparé à ceux détaillés dans [78] : il permet d'utiliser un domaine sous-discrétisé grâce

à la modification de l'opérateur de calcul des termes visqueux de Lamballais *et al.* [58]. Les solutions des calculs `quasincompact3d` sont renormalisées avec $M = 0,25$ pour la comparaison, la normalisation du calcul `compact3d` étant identique à celle des propagateurs acoustiques (pour rappel, toutes les relations de passage sont décrites dans le tableau 4.1 page 60). Les champs de vorticité des simulations **cmi1** et **cmi2** sur la figure 6.7 montrent un très bon accord de comportement avec le résultat de la simulation DNS compressible. La zone éponge de la simulation **cmi1** atténue beaucoup moins les tourbillons que celle de la simulation **cmi2** alors qu'elles sont définies de la même manière. Ceci s'explique par le fait que le calcul **cmi1** est lancé depuis la solution du calcul **cmi2** une fois le transitoire terminé. Or, le champ cible q^* de la zone éponge dans (2.58) est une moyenne temporelle des champs hydrodynamiques. Ainsi la zone éponge de la configuration **cmi2** fait plus tendre les champs vers l'état initial (le profil de vitesse en tangente hyperbolique) mais cela n'a pas d'effet notable sur la solution dans le reste du domaine comme le montre la coupe effectuée en $y/\delta_{\omega_0} = 0$ de la figure 6.8. Là les profils ont été recalés suivant x pour faire correspondre les lieux d'appariements. L'accord est très concluant entre les simulations `quasincompact3d` et la simulation `compact3d`. Pour la simulation **cmi2**, il y a d'importantes fluctuations de vorticité autour de $x/\delta_{\omega_0} = 70$. Ceci est dû à la taille des mailles qui est plus importante dans cette configuration que dans la configuration **cmi1**. Alors l'enroulement tourbillonnaire est ici à la limite de la sous-discrétisation.

Les champs de pression hydrodynamiques de la figure 6.9 correspondent bien avec ceux de la simulation DNS compressible. Comme cela a été évoqué au paragraphe 2.2.4, le forçage de la pression à zéro pour le mode 0 lors de la résolution de l'équation de Poisson implique que la pression hydrodynamique p_{1a} comprend une valeur moyenne constante suivant y et qui varie suivant x . Margnat [68] propose de corriger cet effet en post-traitement en s'appuyant sur l'équation de Poisson et en repassant dans le domaine spectral. Ici, il a été décidé de tout simplement assurer que la pression tende vers zéro loin de la zone centrale de mélange. La valeur moyenne de p_{1a} suivant y pour $|y| > 30\delta_{\omega_0}$ dans la configuration **cmi2ac** et pour $|y| > 18\delta_{\omega_0}$ dans la configuration **cmi1ac** est calculée pour chaque valeur de x . Cette moyenne nommée $p_{1\infty x}$ est ensuite soustraite à p_{1a} . Dans la suite du document, cette opération est toujours effectuée sur la pression hydrodynamique mais non mentionnée pour des raisons de clarté de lecture.

Les profils de pression tracés en $y = 0$ sur la figure 6.10 montrent une amplitude similaire sur les deux tailles de domaine. Cependant, seuls les résultats issus de la configuration **cmi2** seront utilisés comme source des propagateurs afin de s'affranchir des problèmes pouvant survenir près des frontières comme les erreurs dues à la troncature.

Outre ces validations avec le résultat du calcul DNS compressible, de nombreuses vérifications concernant les propriétés physiques de cette couche de mélange ont été effectuées par Golanski [44] notamment pour ce qui est du taux d'élargissement ou du rapport d'entraînement volumétrique.

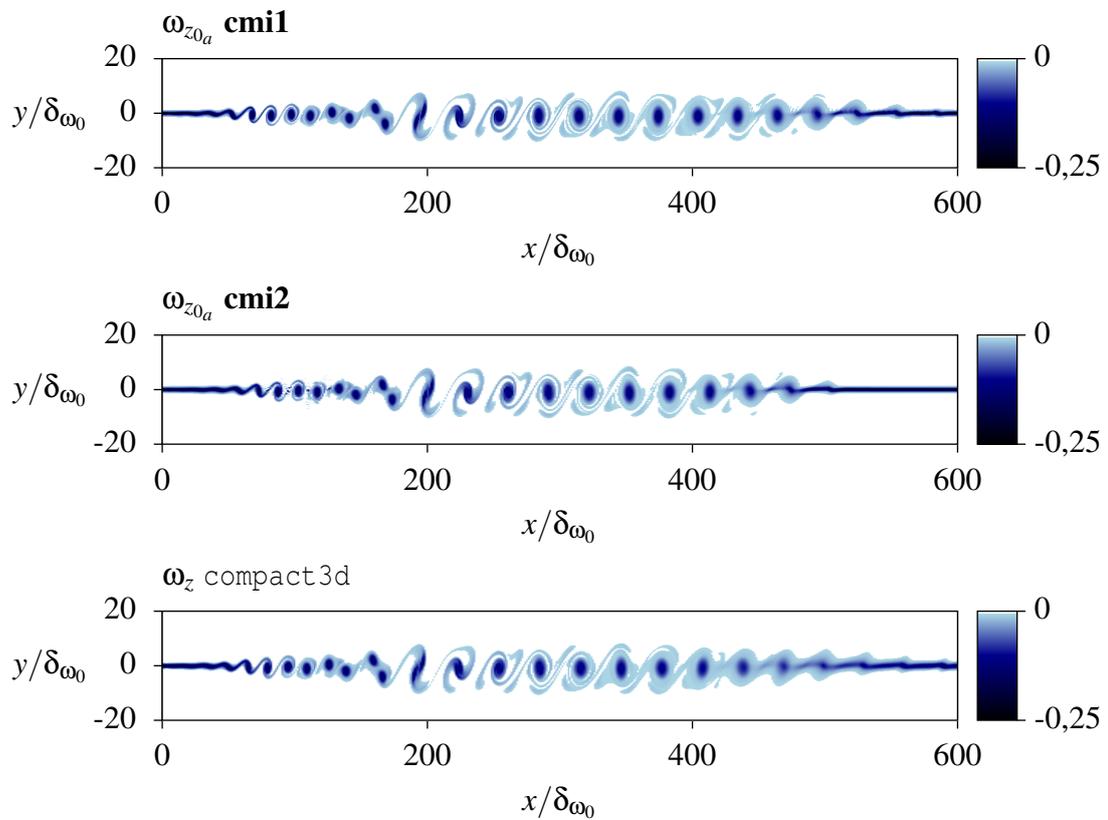


FIG. 6.7: Champs de vorticité hydrodynamique dans les configurations **cmi1**, **cmi2** et issue de compact3d.

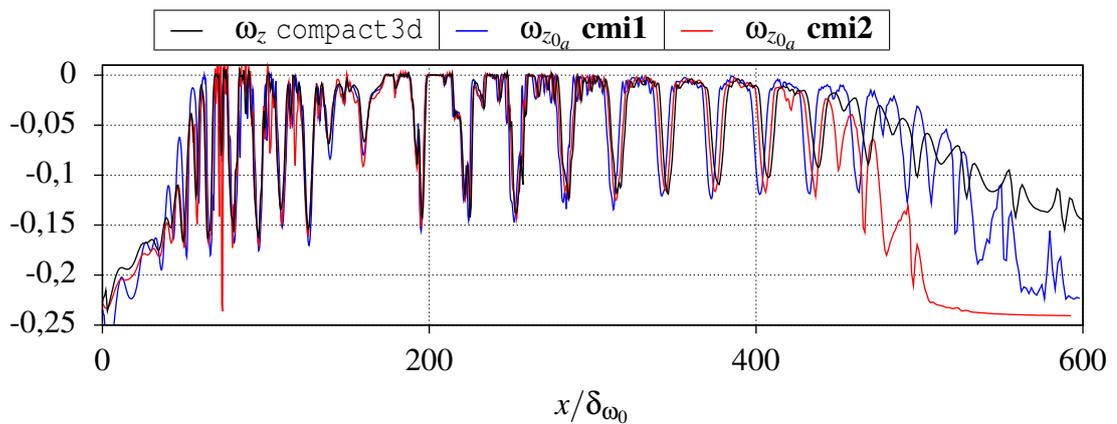


FIG. 6.8: Comparaison de la vorticité en $y = 0$.

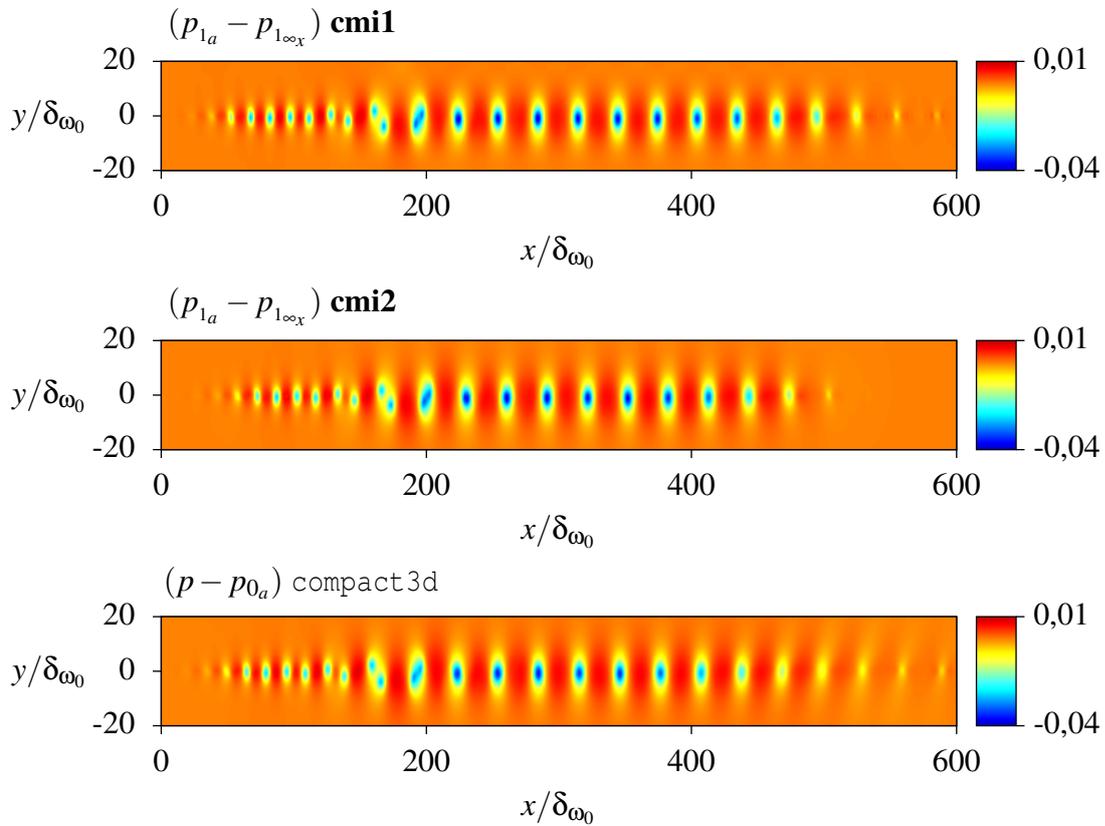


FIG. 6.9: Champs de pression hydrodynamique dans les configurations **cmi1**, **cmi2** et issue de compact3d.

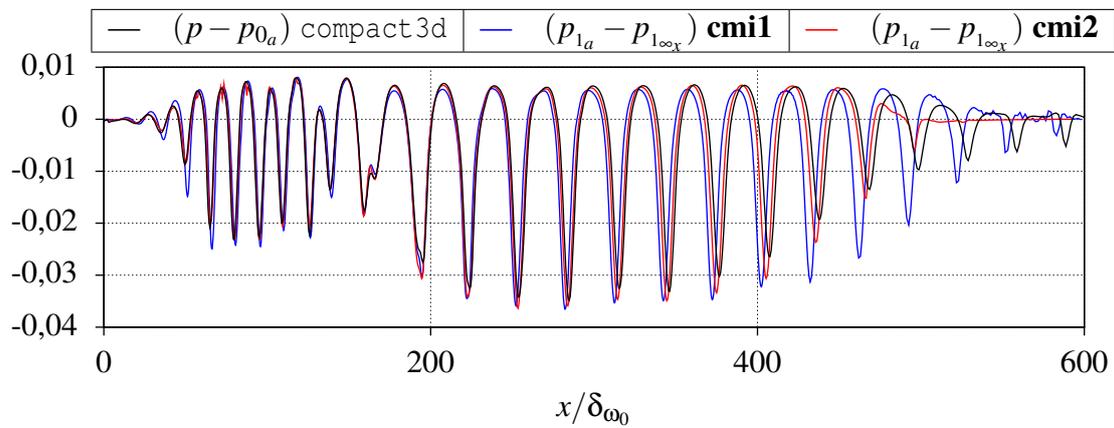


FIG. 6.10: Comparaison de la pression en $y = 0$.

6.1.2 Rayonnements acoustiques

Les champs de pression acoustiques sont à présent calculés au moyen des propagateurs à partir des champs hydrodynamiques obtenus. Le maillage du domaine acoustique est tel que la zone hydrodynamique s'y retrouve centrée suivant y comme cela est représenté sur le schéma de la configuration de la figure 6.11. Au centre du domaine, le maillage est régulier dans la direction y avec un pas d'espace Δy_a égal à quatre fois Δy , le pas d'espace de la simulation `quasincompact3d`. En effet, seul un point sur quatre du calcul hydrodynamique est utilisé dans chaque direction. En dehors de cette zone de recouvrement entre le domaine hydrodynamique et le domaine acoustique, les mailles sont étirées de façon géométrique suivant y .

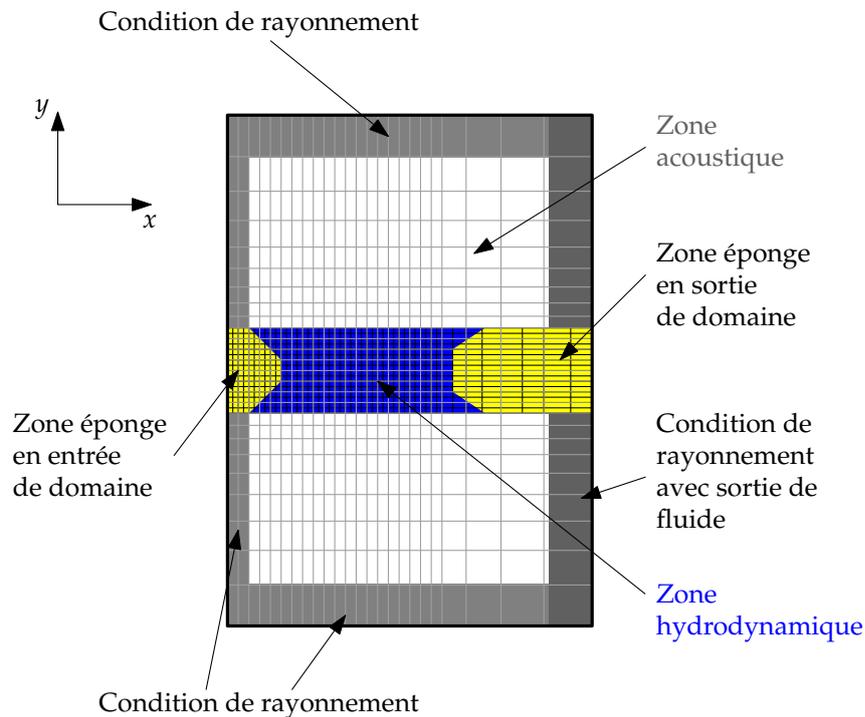
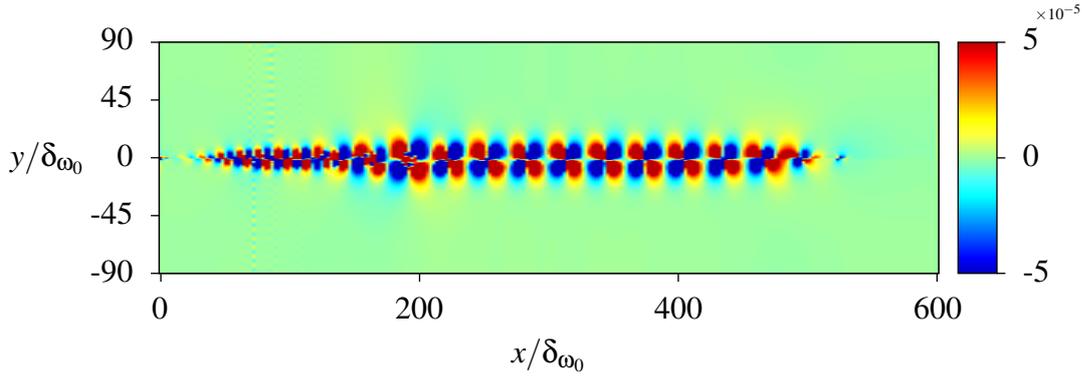


FIG. 6.11: Représentation schématique du domaine de calcul acoustique pour la couche de mélange.

Les termes sources sont pondérés dans la direction y suivant la fonction F_y

$$F_y(y) = 1 - 0,5\{1 + \tanh[2(|y| - y_{cut})]\} \quad (6.8)$$

afin de ne conserver que la zone comprise entre $y = -20\delta_{\omega_0}$ et $y = 20\delta_{\omega_0}$. Comme le montre la figure 6.12, c'est à cet endroit que se concentrent les sources. La pondération permet d'exclure les éventuels effets de bords. La figure 6.12 donne à titre d'exemple le terme source S_e . La même concentration au centre du domaine est observée pour les autres expressions du terme source.

FIG. 6.12: Terme source S_e .

Le domaine de calcul acoustique comprend des zones éponges en entrée et en sortie de domaine. Elles évoluent respectivement selon les fonctions $\sigma_{in}(x, y)$ et $\sigma_{out}(x, y)$:

$$\begin{aligned}\sigma_{in}(x, y) &= A_{in}^s h_{in}^s(y) g_{in}^s(x) \\ h_{in}^s(y) &= 1 - 0,5 \{1 + \tanh[0,2(|y| - y_{in}^s)]\} \\ g_{in}^s(x) &= \begin{cases} 1 & \text{pour } x \leq x_{in}^s \\ e^{-0,001(x-x_{in}^s)^2} & \text{pour } x > x_{in}^s \end{cases}\end{aligned}\quad (6.9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{out}(x, y) &= A_{out}^s h_{out}^s(y) g_{out}^s(x) \\ h_{out}^s(y) &= 1 - 0,5 \{1 + \tanh[0,02(|y| - y_{out}^s)]\} \\ g_{out}^s(x) &= \begin{cases} e^{-0,001(x-x_{out}^s)^2} & \text{pour } x \leq x_{out}^s \\ 1 & \text{pour } x > x_{out}^s \end{cases}\end{aligned}\quad (6.10)$$

où A_{in}^s et A_{out}^s sont les amplitudes des zones d'amortissement. Une amplitude trop importante peut avoir pour conséquence de créer des sources artificielles de rayonnement acoustique. D'autre part une amplitude trop faible ne suffira pas à ce que ces zones remplissent leur office. Elles doivent dissiper les structures convectées par l'écoulement moyen avant la frontière aval du domaine de simulation pour la zone en sortie et dissiper les fluctuations dues à l'excitation et à l'injection des sources en entrée. Afin de ne pas avoir à imposer des amplitudes trop importantes, les termes sources sont également pondérés dans la direction x selon la fonction F_x :

$$\begin{aligned}F_x(x) &= f_{in}(x) f_{out}(x) \\ f_{in}(x) &= 1 - 0,5 \{1 + \tanh[-\alpha_{cut_{in}}(x - x_{cut_{in}})]\} \\ f_{out}(x) &= 1 - 0,5 \{1 + \tanh[\alpha_{cut_{out}}(x - x_{cut_{out}})]\}\end{aligned}\quad (6.11)$$

Tous les paramètres de cette configuration sont résumés en annexe B dans le tableau B.1 sous le nom **cmi2ac1**. Pour le calcul **PLMNA***, l'emploi de zones éponges n'est pas néces-

saire : il n'y a pas d'écoulement moyen et donc pas de convection des termes sources. Dans ce cas il sera employé la configuration **cmi2ac2** qui est identique en tout point à la précédente à l'exception de ces zones et de la fonction de pondération F_x qui possède une décroissance plus brutale en $x_{cut_{out}} = 350\delta_{\omega_0}$. Le maillage, les zones éponges et les fonctions de pondération de la configuration **cmi2ac1** sont représentés en annexe B.

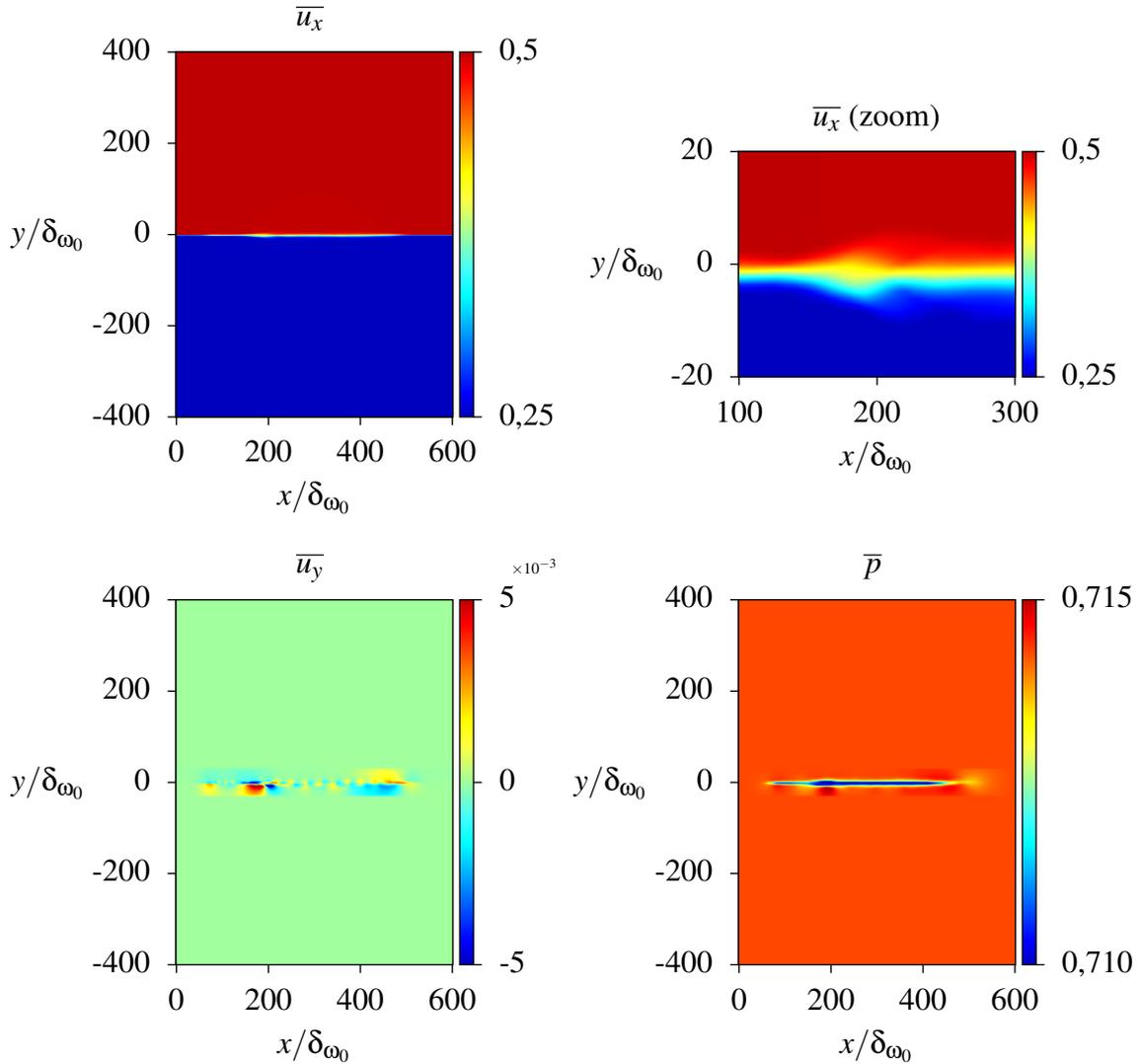


FIG. 6.13: Champs moyens des formulations **EEL** pour la couche de mélange isotherme dans la configuration **cmi2ac1**.

La figure 6.13 représente les champs moyens de pression et de vitesse utilisés pour les formulations **EEL**. La vitesse \bar{u}_x est étendue suivant y afin que l'écoulement y soit uniforme aux vitesses $U_1 = 0,5$ et $U_2 = 0,25$ respectivement en haut et en bas. Ainsi l'écoulement de fond est similaire à l'écoulement de la simulation compressible de référence. La vitesse \bar{u}_y et la pression \bar{p} sont elles pondérées suivant y de la même manière que les termes sources. Rappelons que ces derniers champs moyens sont constants dans les formulations **EEL+S_L** et **EEL+S_P**.

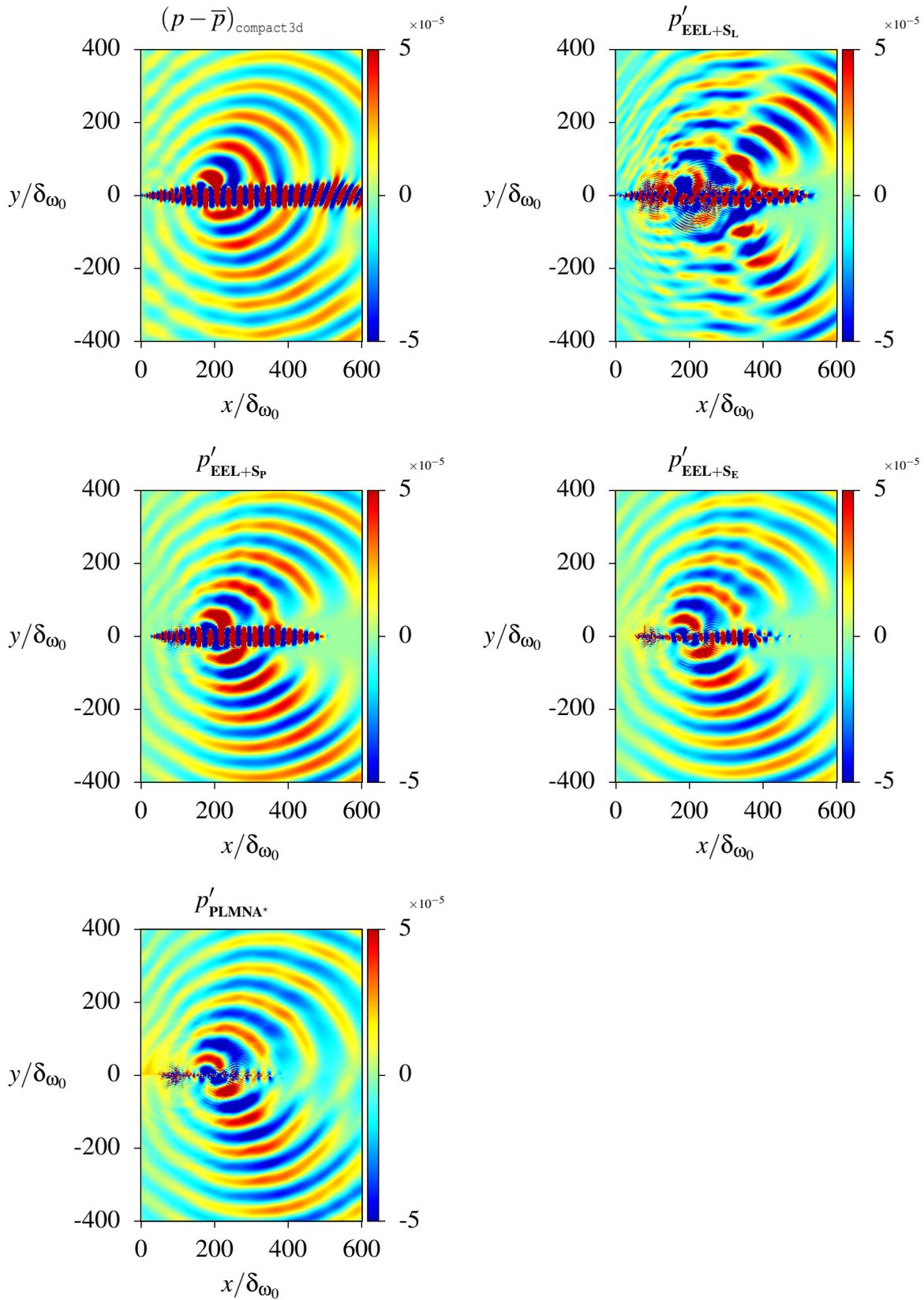


FIG. 6.14: Champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ obtenus avec les différentes formulations pour la couche de mélange isotherme dans la configuration **cmi2ac1** pour les **EEL** et **cmi2ac2** pour **PLMNA*** (voir annexe B).

Les champs de pression acoustique obtenus avec les différentes formulations sont représentés sur la figure 6.14. Toutes semblent donner un résultat cohérent avec la solution obtenue par le calcul `compact3d` à l'exception du calcul **EEL+S_L**. Pour cette configuration, deux lobes sont présents dans la partie lente et la partie rapide alors que les autres solutions montrent une directivité marquée vers 60° et centrée sur le lieu d'appariement $x_p = 200\delta_{\omega_0}$. Il aurait toutefois été possible d'obtenir un meilleur rayonnement dans la configuration **EEL+S_L** comme ce fut le cas dans [83] en apportant plus de soin au traitement des zones éponges ce qui s'avère fastidieux et très empirique. La pression semble surestimée dans la partie lente pour **EEL+S_P** et les fronts d'ondes présentent de légères discontinuités pour **EEL+S_E**. Ces observations sont assez visibles sur les coupes effectuées en $x = x_p$, $y = -300\delta_{\omega_0}$ et $y = 300\delta_{\omega_0}$ de la figure 6.15. La principale différence entre **EEL+S_P** et **EEL+S_E** ou **PLMNA*** est que dans le premier, la pression hydrodynamique apparaît dans la partie centrale alors que dans les derniers la partie centrale semble ne contenir que les perturbations ce qui est plus cohérent avec la définition même d'une méthode de splitting.

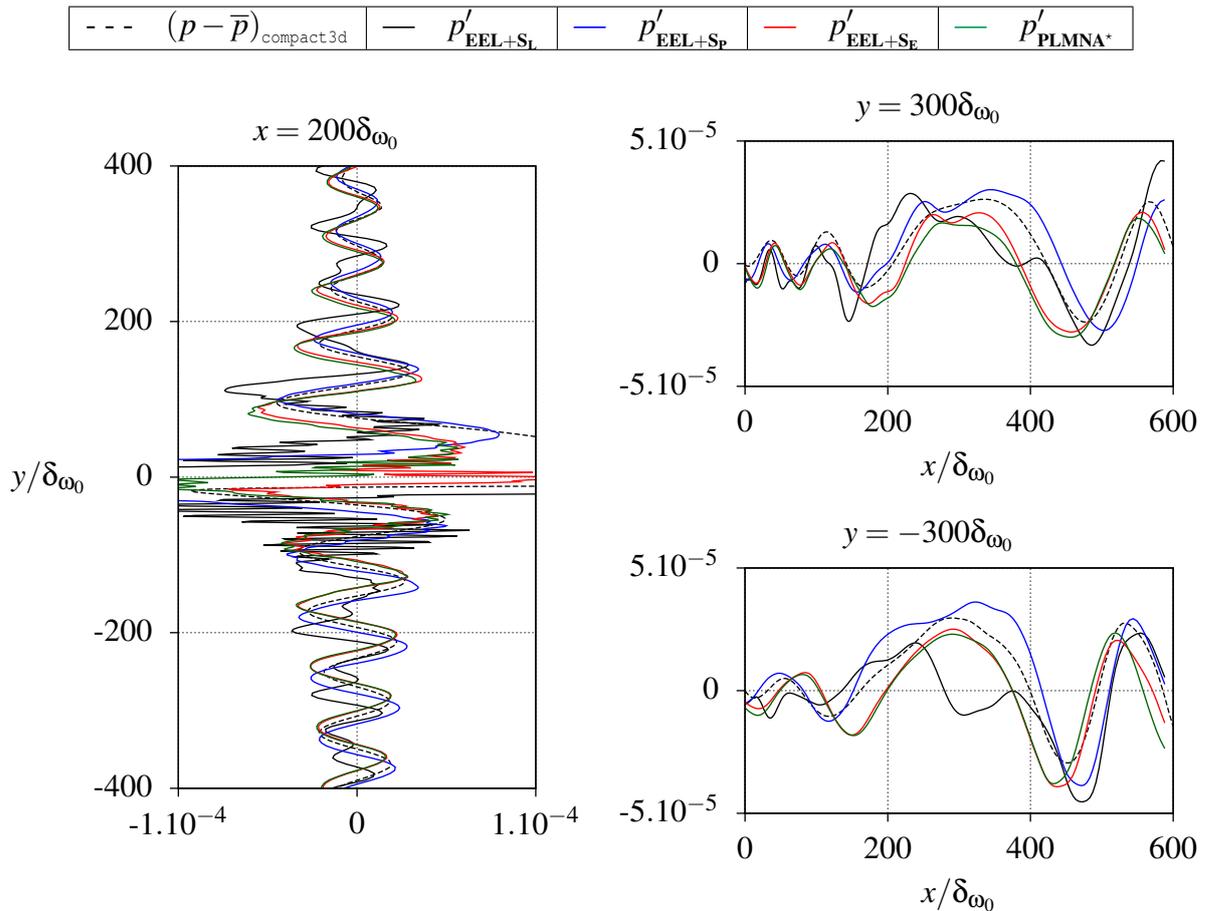


FIG. 6.15: Comparaison des champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$.

Afin de mieux rendre compte des différences de rayonnement des différentes méthodes hybrides, la pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} est tracée sur la figure 6.16. La pression quadratique p_{rms} est la moyenne temporelle des fluctuations de pression acoustique calculée sur 10 périodes acoustiques :

$$p_{rms} = \sqrt{\overline{p'^2}} \quad . \quad (6.12)$$

Alors p_{dB} s'exprime comme

$$p_{dB} = 20 \log \left(\frac{p_{rms}}{p_R} \right) \quad (6.13)$$

où p_R est une référence choisie ici comme le maximum de p_{rms} du calcul **PLMNA***. La pression quadratique est calculée le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$.

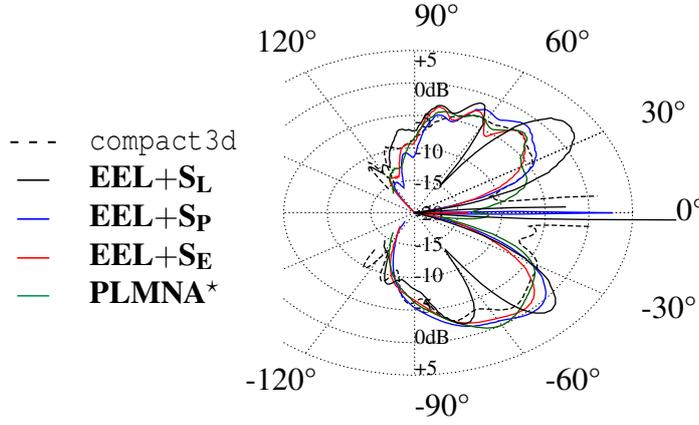


FIG. 6.16: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$.

Ainsi, la différence de rayonnement de la simulation **EEL+S_L** apparaît très nettement sur la figure 6.16. Les lobes supplémentaires se détachent clairement. Pour les autres formulations, le niveau de pression rayonnée est plus important dans la partie lente que dans la partie rapide comme cela avait été observé dans les études précédentes [44, 78].

Il a été établi dans les chapitres antérieurs qu'une des causes d'un mauvais rayonnement est la création de vorticité perturbée ω' due à la présence des termes sources. En effet, cette vorticité tracée sur la figure 6.17 en $y = 0$ est très importante pour la méthode **EEL+S_L**. Elle est quasi nulle pour la méthode **PLMNA*** dont, rappelons le, les équations de quantité de mouvement ont été modifiées selon la méthode de Seo et Moon afin d'empêcher la création de cette vorticité. Cette dernière bien que faible croît exponentiellement pour les **EEL+S_P** et les **EEL+S_E**   l'endroit de la pondération aval en x . Il semble dès lors nécessaire d'appliquer le filtrage de Seo et Moon aux **EEL**.

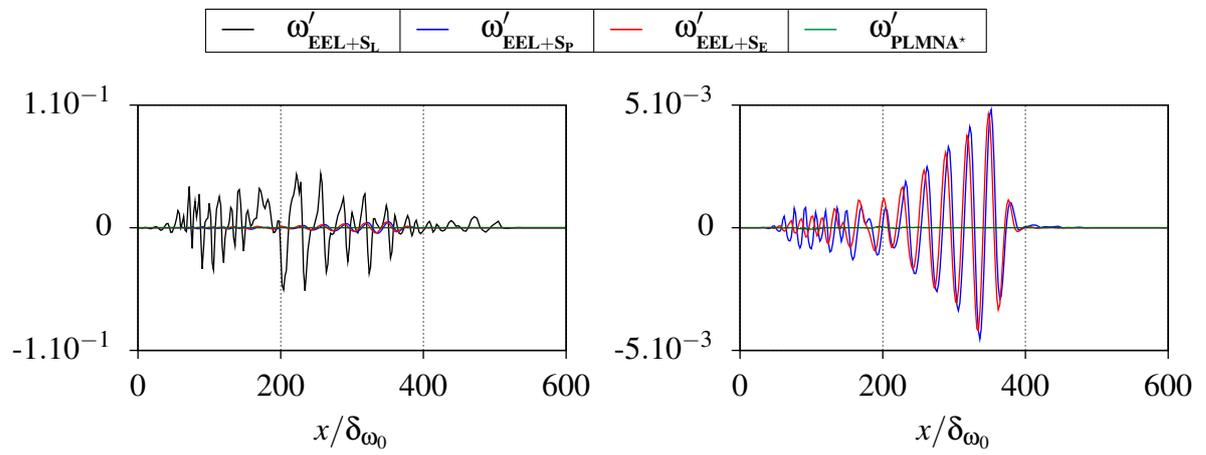


FIG. 6.17: Comparaison de la vorticité perturbée ω' à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $y = 0$.

6.1.2.1 Filtrage de Seo et Moon pour les EEL

Ici, le filtrage de Seo et Moon est appliqué aux équations d'Euler Linéarisées afin de supprimer la création de vorticité perturbée ω' . Concrètement, le membre de gauche de l'équation de quantité de mouvement des systèmes (3.17) et (3.73) est remplacé par :

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial(u'_j u_{j0a})}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_{0a}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \quad . \quad (6.14)$$

Cette procédure a été expliquée au paragraphe 3.2.1. Les systèmes d'équations ainsi obtenus, les équations d'Euler Linéarisées avec filtrage de Seo et Moon, seront notés **EEL***.

La vorticité perturbée obtenue après application de ce filtrage est tracée sur la figure 6.18. Le filtrage n'a eu que peu d'effet dans la configuration **EEL***+**S_L** où la vorticité est toujours importante. En revanche, elle est d'un ordre de grandeur inférieur pour les **EEL***+**S_P** et ne présente plus de croissance exponentielle. Concernant la formulation **EEL***+**S_E**, là la vorticité perturbée a perdu plusieurs ordres de grandeur et se retrouve même nettement inférieure à celle des **PLMNA***. Ces constatations vont de paire avec l'observation des rayonnements des figures 6.19 et 6.20. Sur la première, le champ de pression est mieux défini au centre du domaine, il comporte moins d'oscillations. Sur la seconde où sont représentées les moyennes quadratiques sur le cercle R , la solution obtenue avec les **EEL***+**S_L** se démarque toujours de par sa forme et son amplitude.

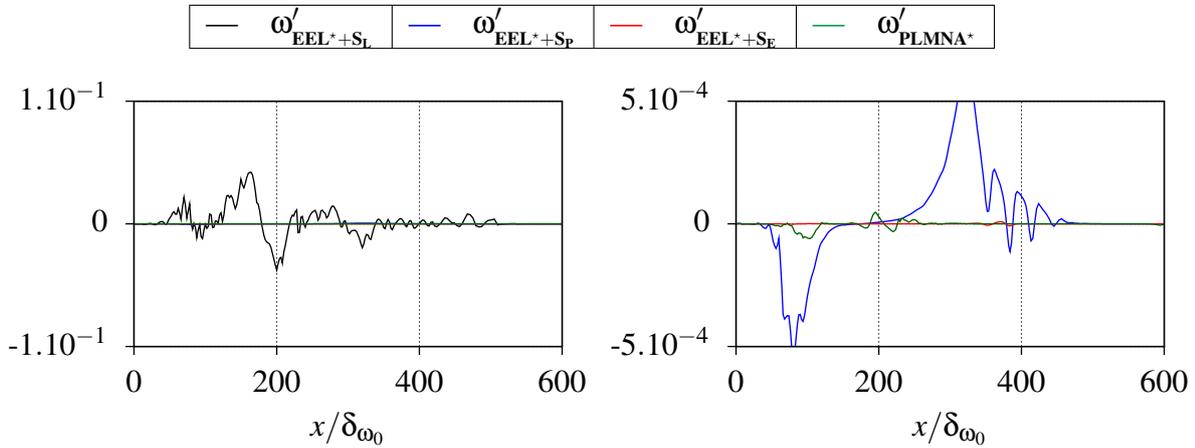


FIG. 6.18: Comparaison de la vorticité perturbée ω' à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $y = 0$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.

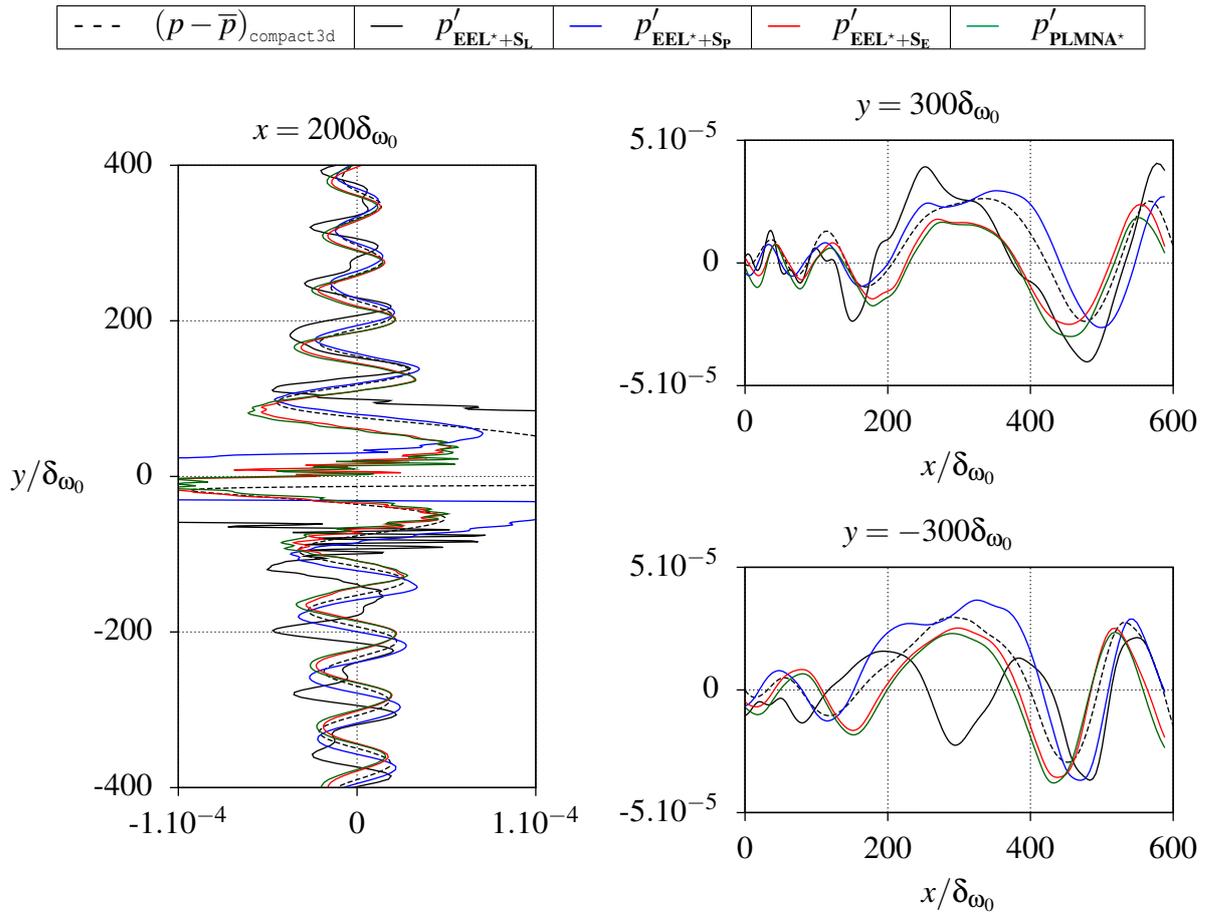


FIG. 6.19: Comparaison des champs de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.

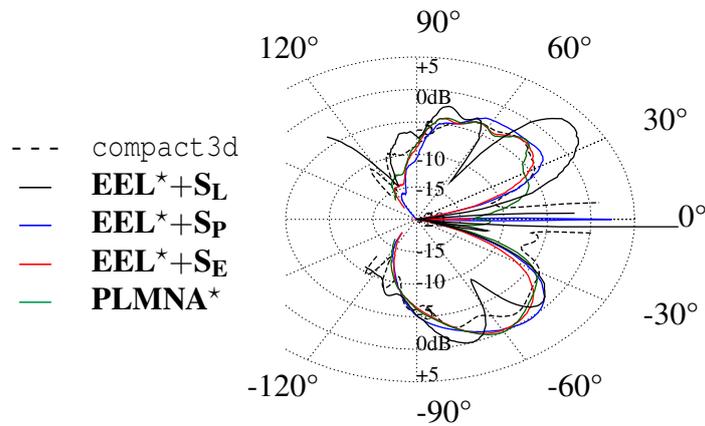


FIG. 6.20: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$; filtrage de Seo et Moon pour toutes les formulations.

6.1.2.2 Influence de la discrétisation spatiale du domaine source

L'avantage principal du calcul hybride comparé à un calcul direct est de pouvoir utiliser des tailles de mailles différentes pour le domaine de simulation hydrodynamique et pour le domaine acoustique. Jusqu'alors, il a été décidé arbitrairement de ne se servir que d'un point tous les n_s points du domaine hydrodynamique dans chaque direction pour le calcul acoustique. Afin de vérifier l'indépendance de la solution par rapport au maillage, le nombre de points conservés pour le calcul acoustique $1/n_s$ sera étudié pour des valeurs de $n_s = [1; 2; 4; 8]$. La méthode **PLMNA**^{*} est employée pour cette vérification et les détails de configuration sont donnés dans le tableau 6.2.

Les rayonnements obtenus figure 6.21 sont similaires. Sur la figure 6.22 il apparaît cependant des oscillations importantes au centre, près de $y = 0$, pour $n_s = 8$. D'ailleurs pour cette valeur de n_s , le rayonnement est un décibel inférieur aux autres sur la figure 6.21 dans la partie rapide. Le choix $n_s = 4$ ne dégrade donc pas la solution et permet d'effectuer un calcul acoustique plus rapide qu'avec tous les points du domaine dynamique. Une valeur supérieure risquerait de ne pas convenir.

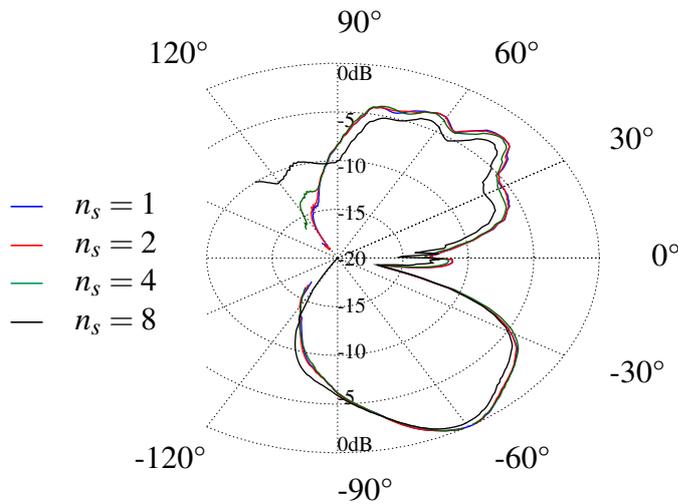


FIG. 6.21: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ pour différentes valeurs de n_s .

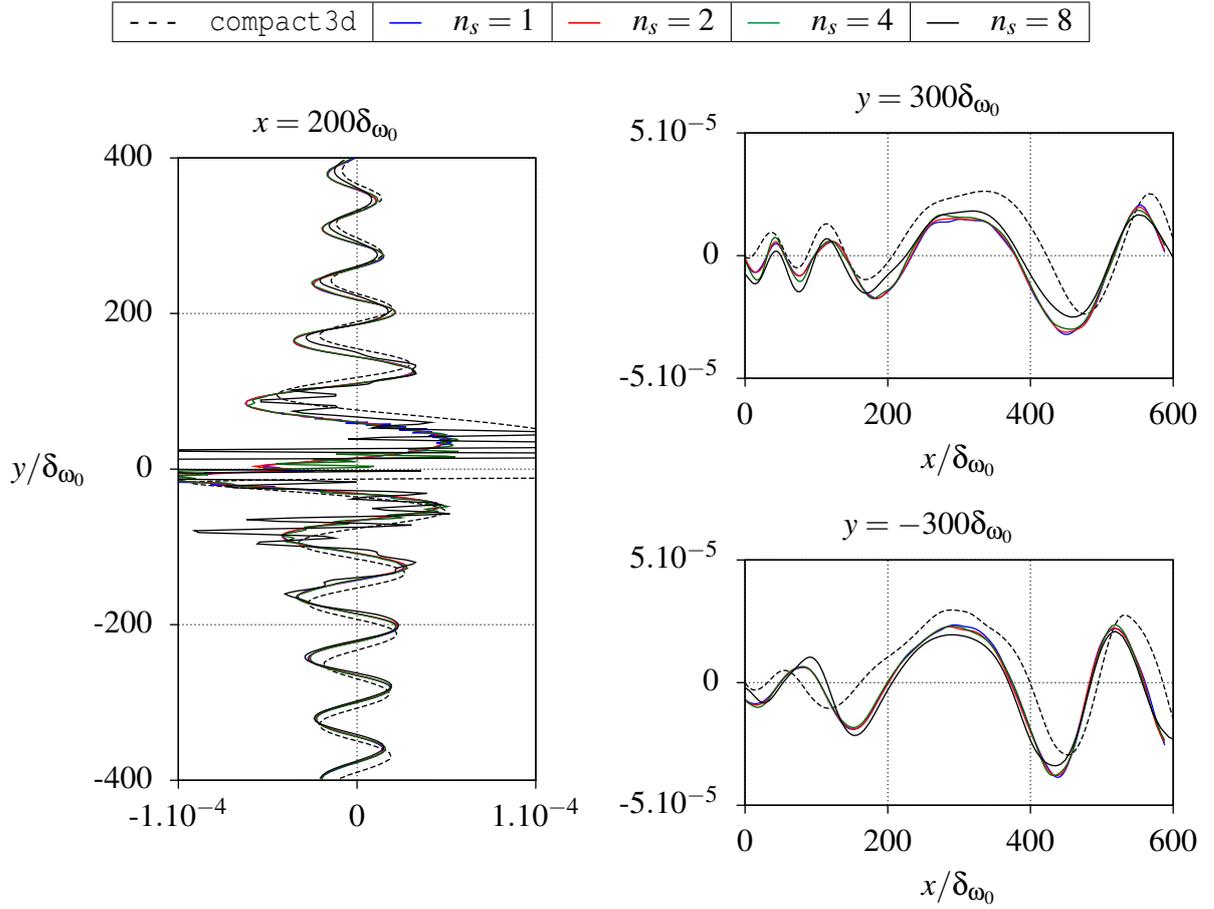


FIG. 6.22: Comparaison des champs instantanés de pression acoustique à $t_a c_0 / \delta_{\omega_0} = 420$ en $x / \delta_{\omega_0} = 200$, $y / \delta_{\omega_0} = 300$ et $y / \delta_{\omega_0} = -300$ obtenus par **PLMNA**^{*} en fonction du nombre de points du domaine source retenus $1/n_s$ dans les directions x et y .

n_s	1	2	4	8
N_{x_a}	1001	501	251	127
N_{y_a}	1089	665	407	241
$\Delta x_{a_{\min}}$	Δx_{\min}	$2\Delta x_{\min}$	$4\Delta x_{\min}$	$8\Delta x_{\min}$
$\Delta y_{a_{\min}}$	Δy	$2\Delta y$	$4\Delta y$	$8\Delta y$
Δt_a	0,149	0,298	0,596	0,596

TAB. 6.2: Paramètres des calculs **PLMNA**^{*} pour la vérification de l'influence de n_s sur la solution acoustique.

6.1.2.3 Effet du nombre de Mach sur la propagation

Le calcul **PLMNA*** est effectué à présent pour des nombres de Mach M compris entre 0,1 et 0,35. L'approximation de faible nombre de Mach est en théorie respectée pour cette gamme d'évolution. Les rayonnements correspondants sont tracés sur la figure 6.23. La pression de référence choisie ici est le p_{rms} maximum qui correspond à M maximum. En effet, le rayonnement acoustique augmente avec le nombre de Mach. Il n'y a pas de changement notable de la directivité. Selon Howe [52], dans une configuration bidimensionnelle, l'intensité acoustique est fonction du nombre de Mach à la puissance sept, l'intensité acoustique étant proportionnelle au carré de la pression acoustique. Alors la puissance acoustique, qui n'est autre que la somme de l'intensité à travers une surface, doit elle aussi être proportionnelle au nombre de Mach à la puissance sept. La puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} représentée sur la figure 6.24 est la somme sur le cercle R des intensités acoustiques $I_{ac} = p_{rms}^2$. Cette puissance suit bien une loi en M^7 ; ce résultat est identique à celui de Moser [78].

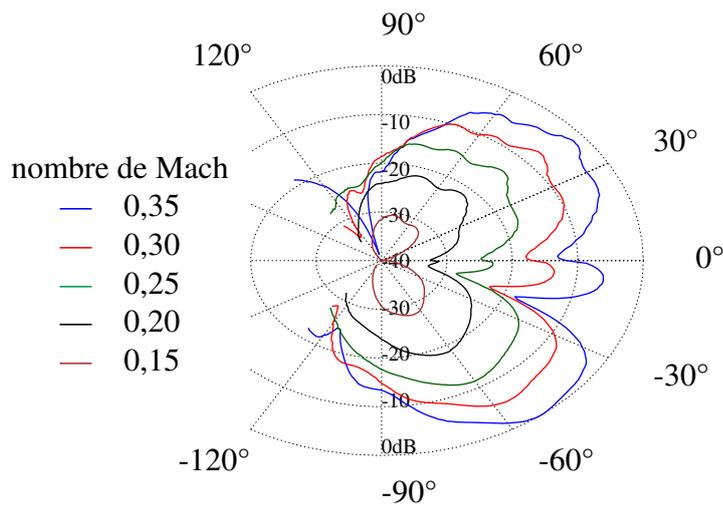


FIG. 6.23: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ pour différents nombres de Mach M .

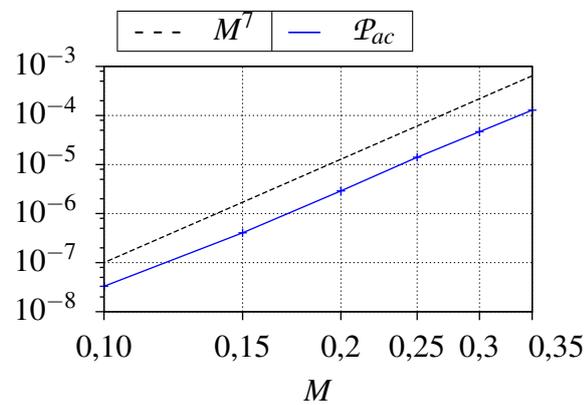


FIG. 6.24: Puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} à travers un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre $x_p = 200\delta_{\omega_0}$ en fonction du nombre de Mach M .

6.2 La couche de mélange anisotherme

La couche de mélange présente maintenant des inhomogénéités de température. Ainsi, le champ de température est initialisé selon la relation de Crocco-Busemann [113] :

$$T_0(y) = \frac{u_{x_0}(y)(U_1 + U_2) - U_1U_2 - u_{x_0}^2(y)}{2C_p} + \frac{(T_1 - T_2)u_{x_0}(y) + T_2U_1 - T_1U_2}{U_1 - U_2} . \quad (6.15)$$

À chaque itération, ce profil de température est injecté en entrée de domaine, en $x = 0$. Quatre rapports de températures sont calculés : $T_1/T_2 = [1, 2 ; 2, 0 ; 2, 5 ; 3, 0]$. L'écoulement du bas, d'indice 2 sera toujours l'écoulement froid. Comme constaté par Golanski [44], dans les configurations anisothermes le maillage doit être plus raffiné. Ici, le domaine de simulation est étendu sur $L_x \times L_y = 600\delta_{\omega_0} \times 160\delta_{\omega_0}$ avec $N_x \times N_y = 1537 \times 1201$ points. Le maillage est étiré dans la direction x de la même façon que pour la configuration isotherme. Les traitements de zone éponge et d'augmentation de la viscosité sont également équivalents. Les paramètres de cette configuration nommée **cma** sont récapitulés dans le tableau 6.3.

	cma
N_x	1537
N_y	1201
L_x	$600\delta_{\omega_0}$
L_y	$160\delta_{\omega_0}$
étirement suivant x	oui
Δx_{\min}	$0,3\delta_{\omega_0}$
Δx_{\max}	$1,7\delta_{\omega_0}$
étirement suivant y	non
Δy	$0,14\delta_{\omega_0}$
Δt	0,01
δ_{ω_0}	1
U_1	$2U_2$
U_2	1
ρ_2	1
T_2	1
Re	400
Pr	0,75
f_1	$f_0/2$
α_{e_1}	$5 \cdot 10^{-4}$
f_2	$f_0/4$
α_{e_2}	$2,5 \cdot 10^{-4}$
ϕ_{e_2}	$3\pi/20$

TAB. 6.3: Configuration des calculs **cma**.

La vorticité représentée sur la figure 6.25 prend des valeurs positives à certains endroits tracés en rouge. Cette anti-vorticité ou vorticité contra-rotative est due à l'apparition du couple barocline décrit par [25, 90, 37]. Ce couple cause la baisse de l'entraînement du fluide le moins dense vers le fluide le plus dense. Notons aussi que l'appariement se déplace vers l'amont de l'écoulement lorsque le rapport de température augmente.

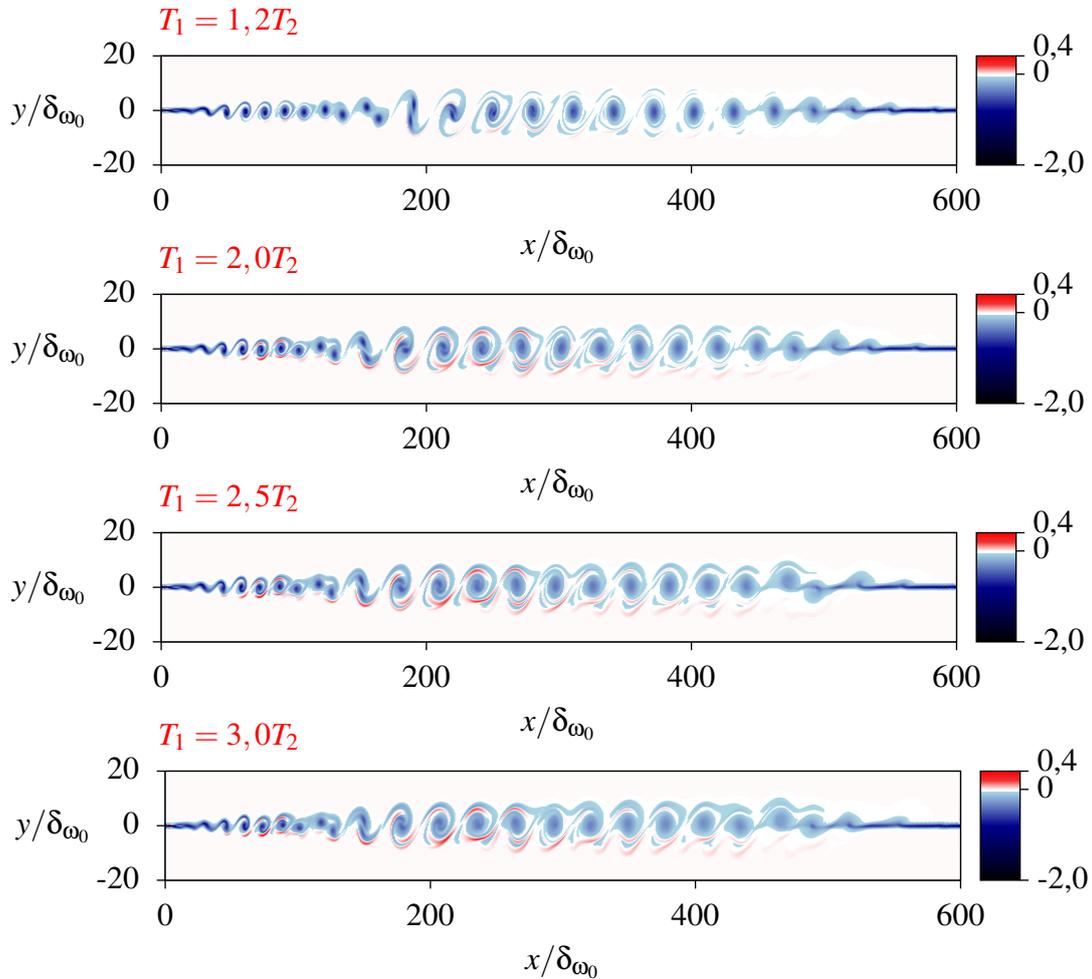


FIG. 6.25: Champs de vorticité hydrodynamiques dans la configuration **cma** pour les différents rapports de température.

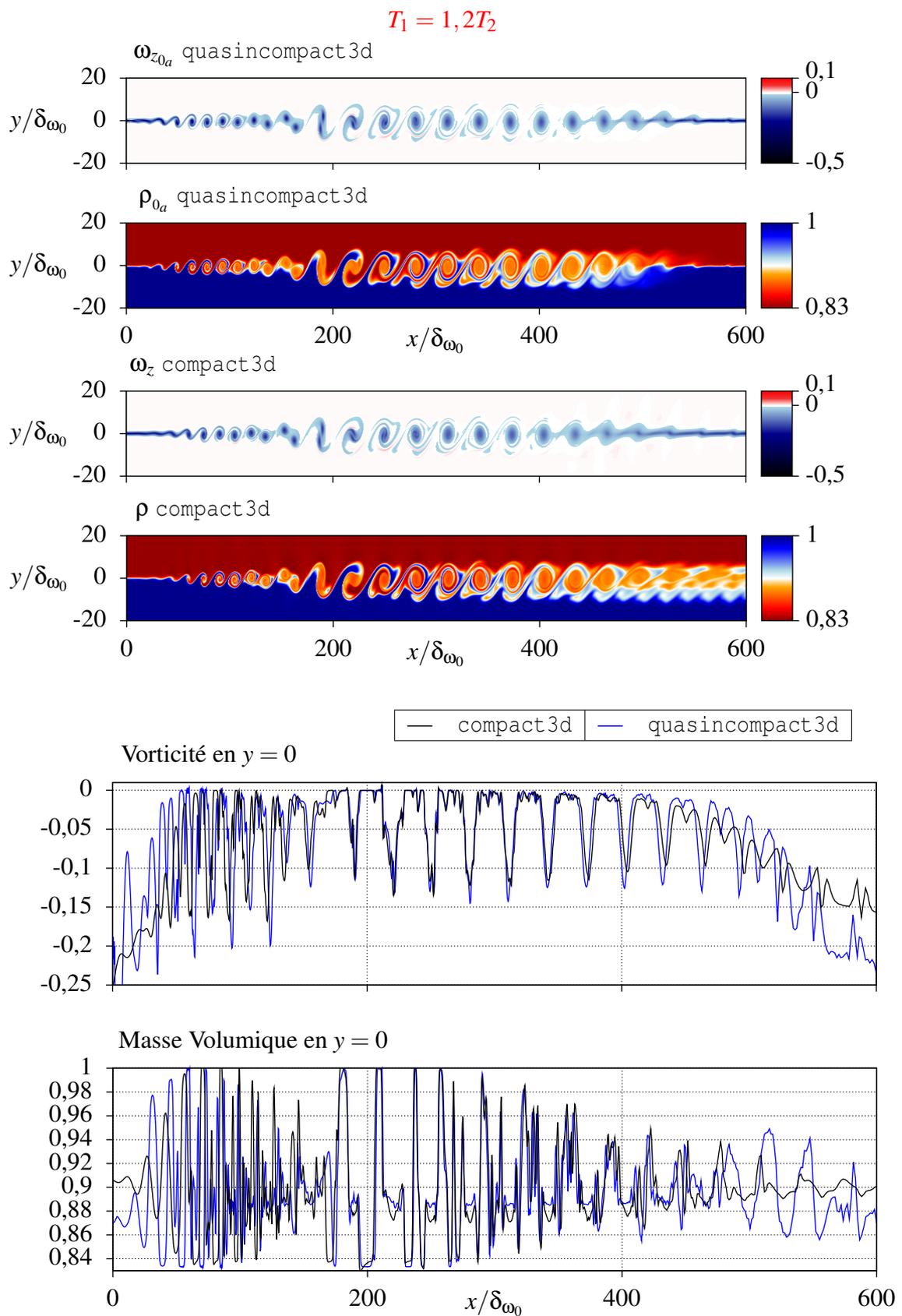
6.2.1 Champs hydrodynamiques

Pour valider la simulation hydrodynamique anisotherme, deux calculs DNS compressibles sont effectués : un premier avec un rapport de température $T_1/T_2 = 1,2$ et un second avec un rapport de $T_1/T_2 = 2,0$. Les vitesses sont dans les deux cas égales à $0,25$ pour U_2 et $0,5$ pour U_1 . Le domaine des simulations compressibles `compact3d` s'étend sur $L_x \times L_y = 800\delta_{\omega_0} \times 800\delta_{\omega_0}$ avec $N_x \times N_y = 2071 \times 785$ points. Encore une fois, les champs hydrodynamiques issus de

la simulation `quasincompact3d` sont redimensionnés pour la comparaison avec les champs compressibles.

Pour le rapport de température $T_1 = 1,2T_2$, l'accord entre la simulation `quasincompact3d` et la référence `compact3d` est excellent. Sur la figure 6.26, la vorticité et la masse volumique coïncident parfaitement même si la vorticité du calcul `quasincompact3d` est un peu plus importante en entrée de domaine. Ceci peut s'expliquer par le fait que le calcul `compact3d` comprend une zone éponge en entrée de domaine afin de réduire les effets de l'excitation sur le champ acoustique. Notons là encore un léger déphasage en aval de l'appariement. Les champs de pression de la figure 6.27 sont eux aussi en très bon accord. Pour ce rapport de température, les champs hydrodynamiques ne présentent pas de différence notable avec ceux de la simulation isotherme à l'exception de la faible apparition de vorticité contra-rotative.

Concernant la simulation à $T_1 = 2,0T_2$, cette vorticité contra-rotative visible en rouge sur la figure 6.28 est beaucoup plus importante. La solution `quasincompact3d` est encore une fois dans un très bon accord avec la solution DNS compressible, que ce soit pour la vorticité et la masse volumique de la figure 6.28 que pour la pression hydrodynamique de la figure 6.29. Cependant, le déphasage déjà constaté auparavant est ici beaucoup plus important. L'amplitude de la pression est également légèrement sous-évaluée. Rappelons que dans la configuration isotherme, il a été montré que le traitement des conditions aux limites dans la direction y n'était pas idéal et que cela pouvait avoir pour conséquence de faire chuter le niveau de pression. Le domaine avait alors été élargi à $L_y = 180\delta_{\omega_0}$. Ici, le domaine ne mesure que $L_y = 160\delta_{\omega_0}$. Les mailles du domaine étant plus petites que dans la configuration isotherme, l'élargissement de la direction y entraîne très vite un nombre de points de calcul prohibitif. Toutefois, il n'y a pas ici de différence flagrante de comportement entre les simulations de référence et celles de la présente méthode. De manière générale, notons que l'augmentation de température aura eu pour principal effet de faire chuter le niveau de pression, que ce soit dans la solution de référence ou dans le calcul `quasincompact3d`.

FIG. 6.26: Comparaison de la vorticité et de la masse volumique pour un rapport $T_1/T_2 = 1,2$.

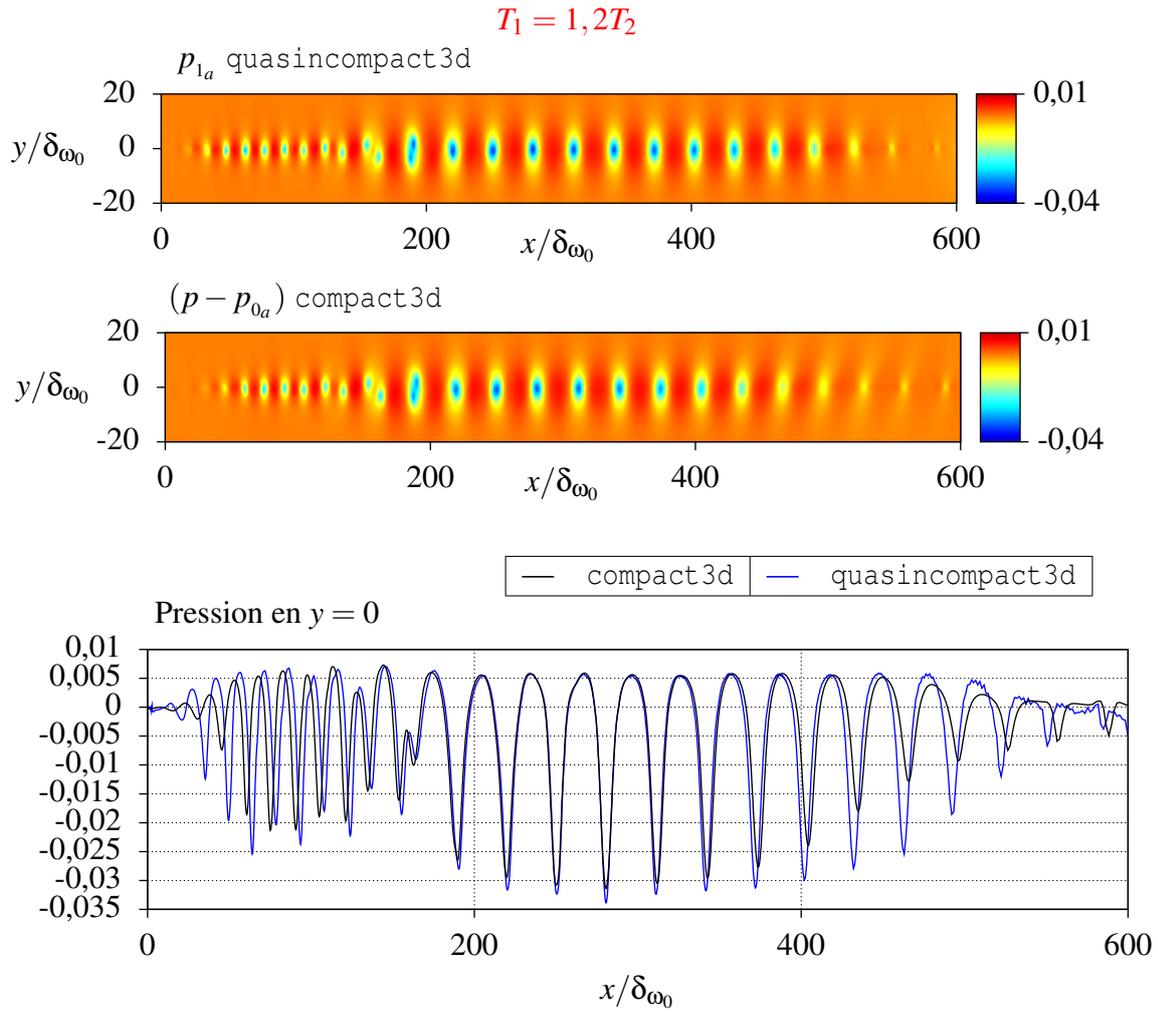
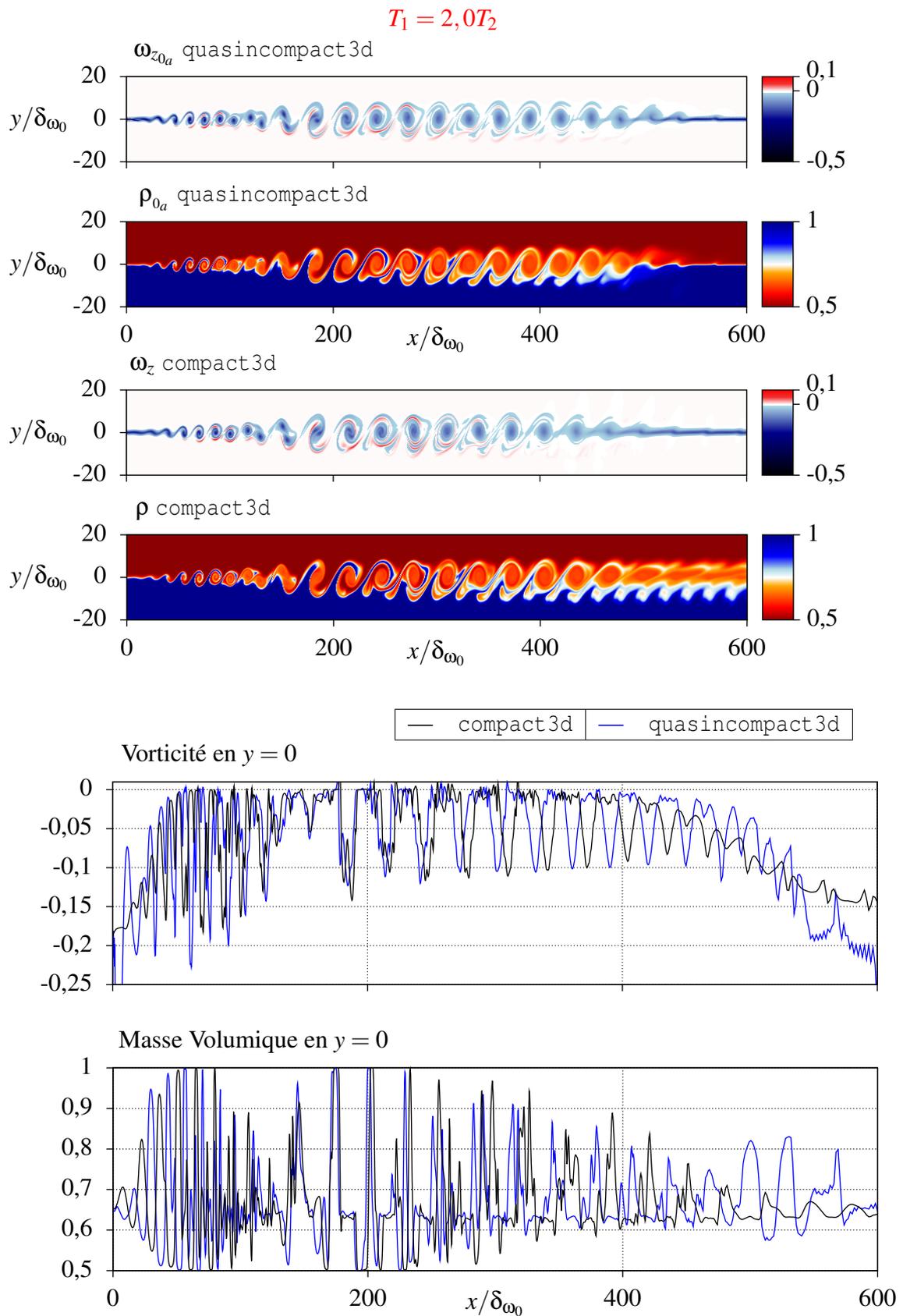


FIG. 6.27: Comparaison de la pression hydrodynamique pour un rapport $T_1/T_2 = 1,2$.

FIG. 6.28: Comparaison de la vorticité et de la masse volumique pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$.

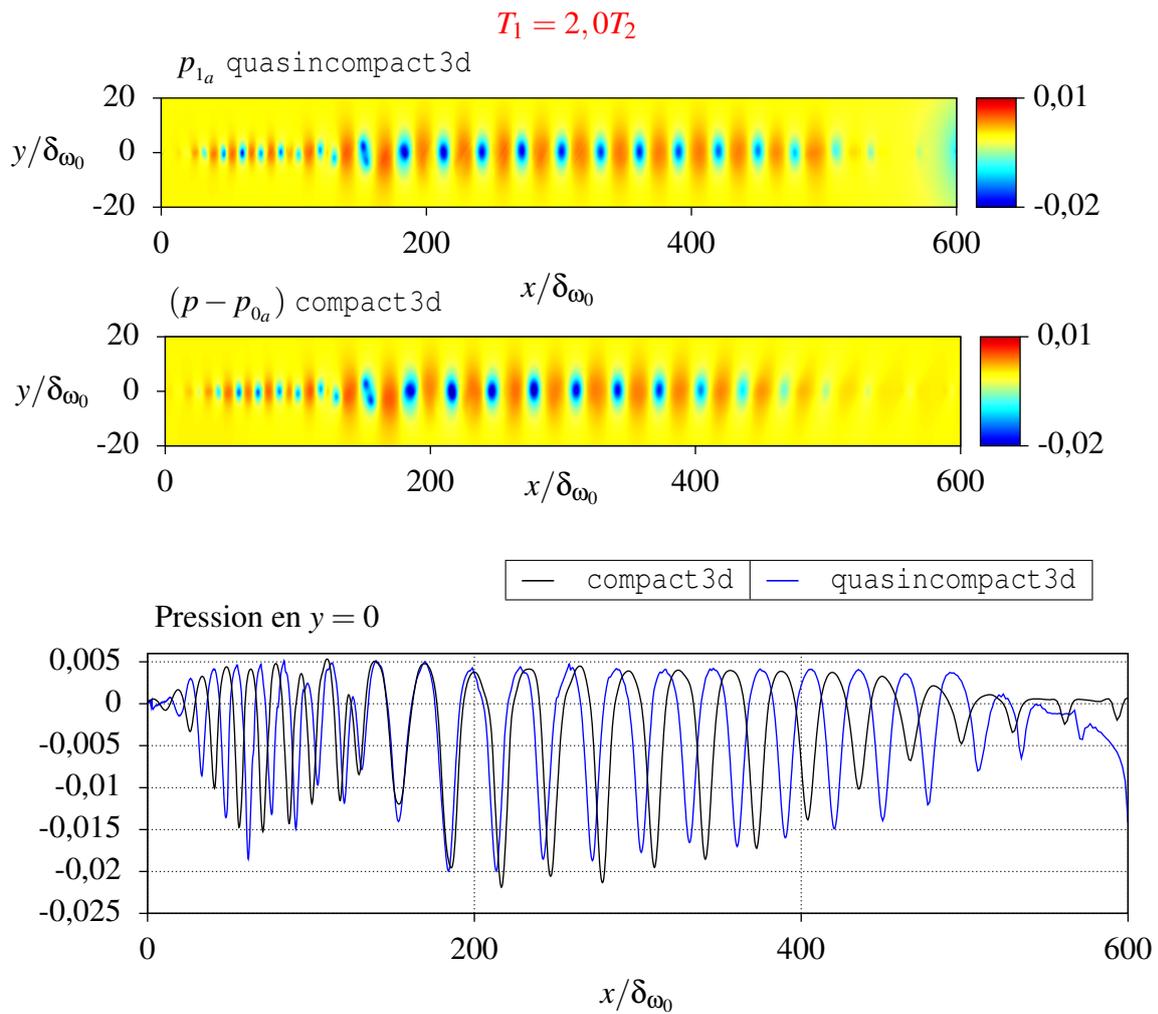


FIG. 6.29: Comparaison de la pression en $y = 0$ pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$.

6.2.2 Rayonnements acoustiques

Le calcul acoustique est encore une fois mené sur un domaine de dimensions $L_{x_a} \times L_{y_a} = 600\delta_{\omega_0} \times 800\delta_{\omega_0}$. Seul un point sur quatre du calcul hydrodynamique est utilisé dans chaque direction. Tous les paramètres de cette simulation nommée **cmaac** sont disponibles en annexe C.

Le champ moyen de masse volumique n'est plus uniforme. Celui-ci est donc calculé à partir des champs hydrodynamiques et étendu dans la direction y de la même manière que pour la composante suivant x de la vitesse. La masse volumique moyenne est représentée sur la figure 6.30 dans le cas $T_1 = 1,2T_2$. La même extension suivant y est appliquée aux champs instantanés de masse volumique pour les calculs **PLMNA***.

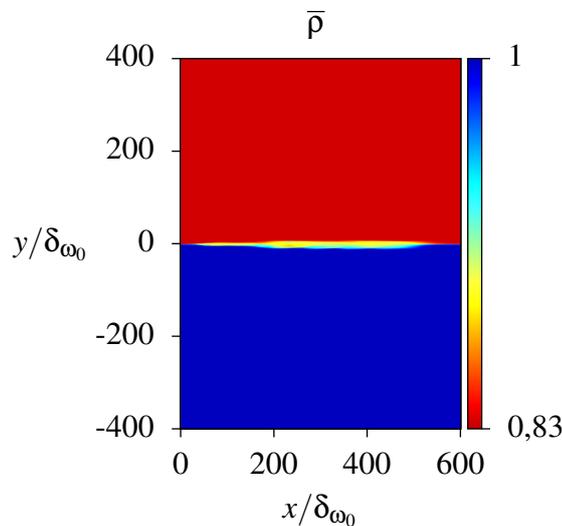


FIG. 6.30: Champ moyen de masse volumique $\bar{\rho}$ des formulations **EEL*** pour la couche de mélange anisotherme dans un rapport $T_1/T_2 = 1,2$.

Les rayonnements acoustiques obtenus figures 6.31 et 6.32 sont conformes à ceux de la simulation **compact3d**. Ils présentent tous une légère dissymétrie : le rayonnement dans la partie froide (où l'écoulement est plus lent) est dirigé de façon plus marquée vers l'aval que celui dans la partie chaude.

Concernant le rapport de température $T_1 = 2,0T_2$ des figures 6.33, 6.34 et 6.35, la dissymétrie est beaucoup plus marquée. En fait, il apparaît un deuxième lobe de rayonnement dans la partie froide dirigé vers l'amont. Une autre conséquence de l'augmentation de la température est la baisse du niveau de pression acoustique. Cet effet pouvait être anticipé puisque le niveau de pression hydrodynamique a lui même chuté. La masse volumique étant plus faible dans la partie chaude, le débit d'énergie cinétique est diminué. L'amplitude de la pression acoustique est sous-estimée comme cela est visible sur les coupes de la figure 6.35 et sur les directivités de la figure 6.33. De nouveaux calculs des champs hydrodynamiques effectués postérieurement

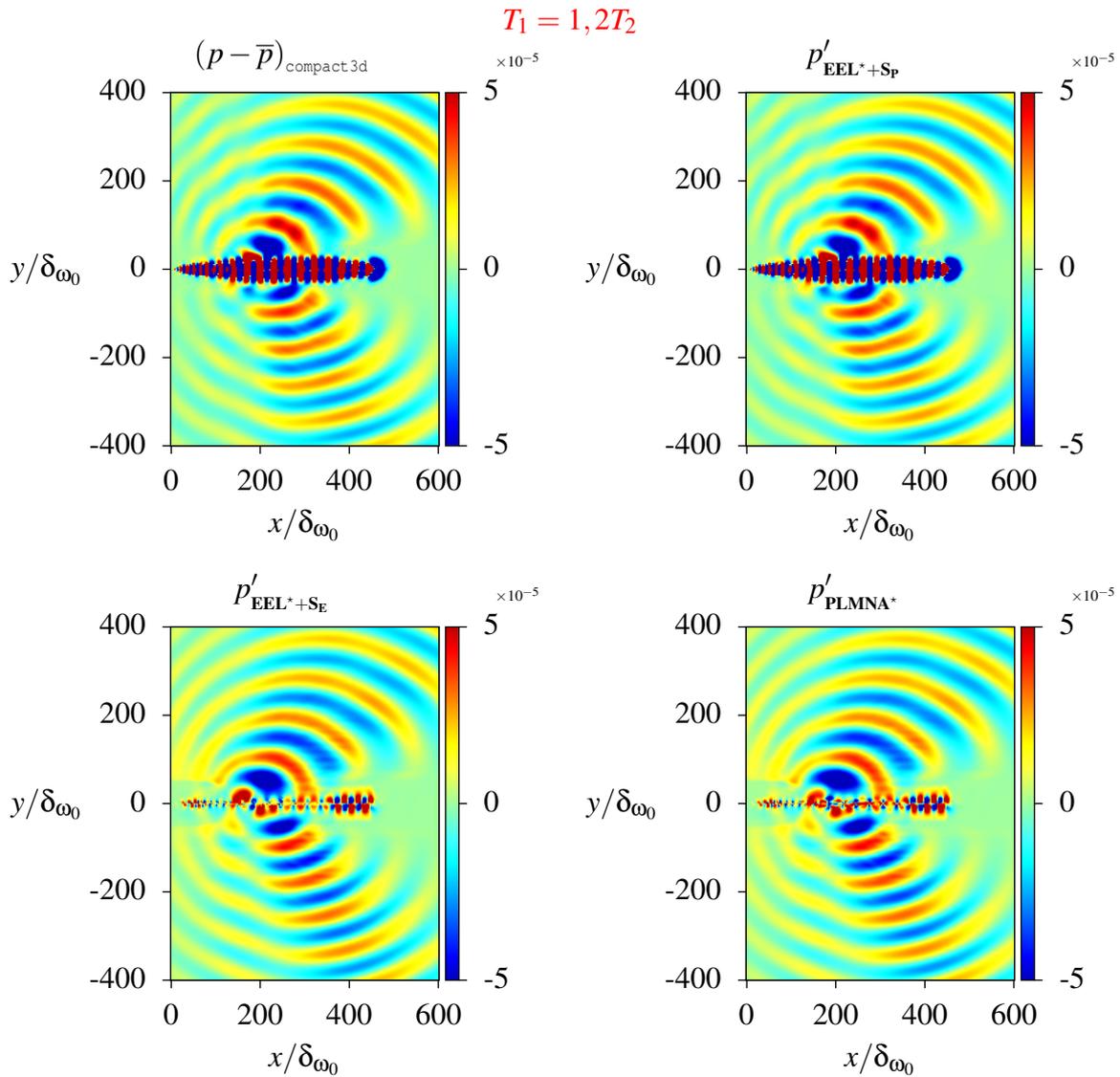


FIG. 6.31: Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration **maac** pour un rapport $T_1/T_2 = 1,2$.

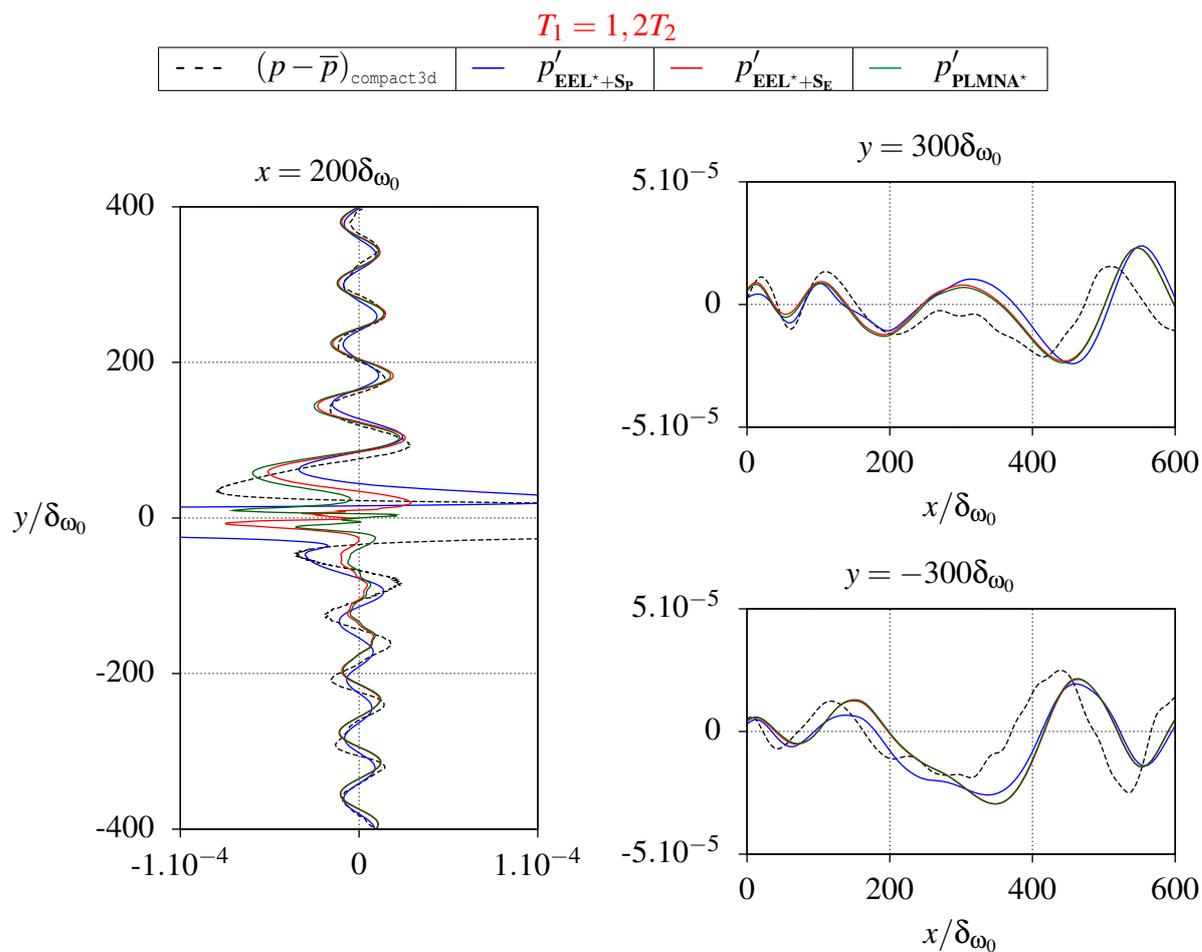
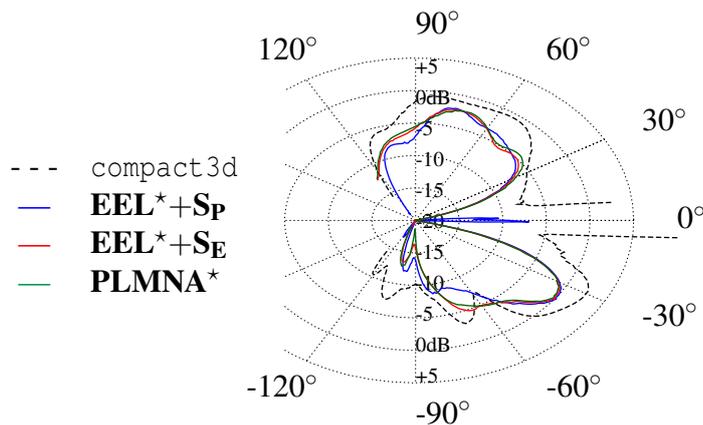


FIG. 6.32: Comparaison des champs de pression acoustique en $x/\delta_{\omega_0} = 200$, $y/\delta_{\omega_0} = 300$ et $y/\delta_{\omega_0} = -300$.

laissent penser que cette sous-estimation est fortement corrélée à l'amplitude de la zone éponge employée. Une zone éponge hydrodynamique moins brutale permet d'améliorer l'amplitude et la directivité obtenues lors des calculs acoustiques. Remarquons toutefois que la différence d'amplitude observée sur la figure 6.33 n'est que d'environ deux décibels. Par la suite, les calculs effectués pour différents rapports de température présentent tous ce problème, la même configuration de zone éponge ayant été employée pour chacun. Néanmoins, cela n'empêche pas de dégager des tendances en accord avec les simulations DNS compressibles.

Une chose est remarquable ici concernant la formulation $\mathbf{EEL}^* + \mathbf{S_P}$. Le terme source $\mathbf{S_P}$ a été construit au paragraphe 3.1.4.3 sous une hypothèse d'isothermie or le rayonnement acoustique suit une tendance similaire aux autres formulations et à la solution de référence. Ainsi, il semble que le champ de pression hydrodynamique contient en lui-même les effets d'inhomogénéités de masse volumique.



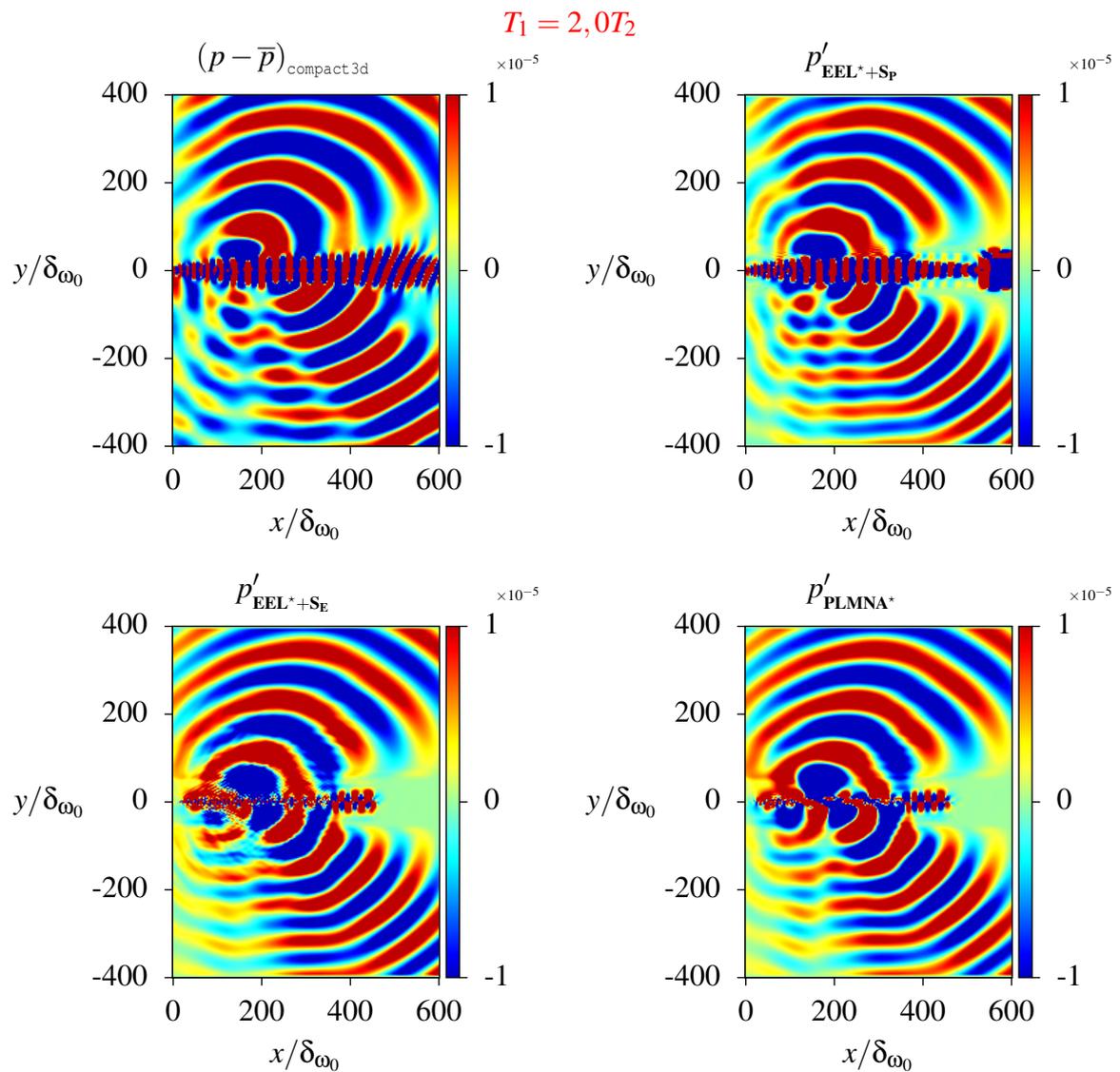


FIG. 6.34: Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration **maac** pour un rapport $T_1/T_2 = 2,0$.

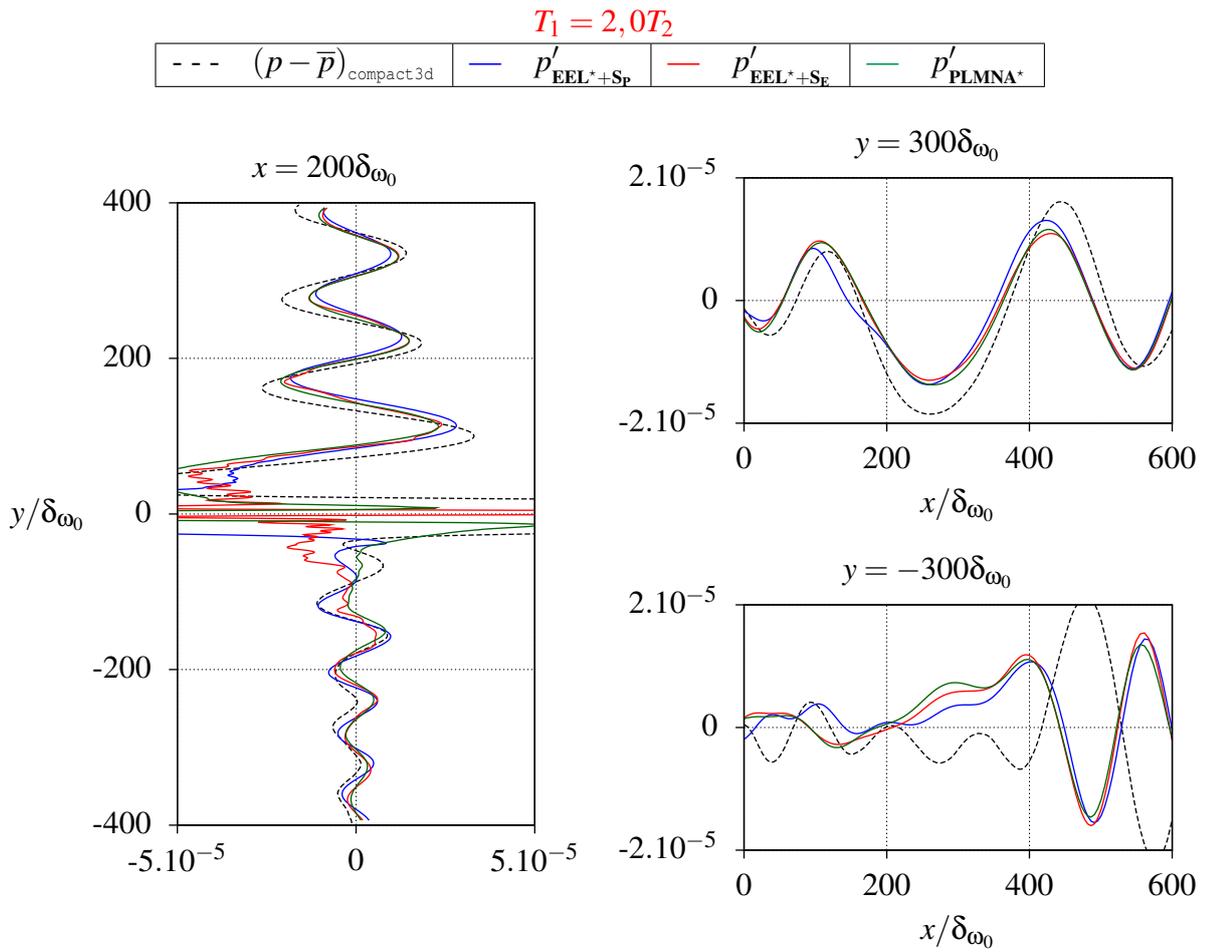


FIG. 6.35: Comparaison des champs de pression acoustique en $x/\delta_{\omega_0} = 200$, $y/\delta_{\omega_0} = 300$ et $y/\delta_{\omega_0} = -300$.

6.2.3 Effets de la température

Lorsque le rapport de température T_1/T_2 augmente, le niveau de pression acoustique diminue. Sur les figures 6.36 et 6.37 sont tracés les rayonnements acoustiques p_{dB} sur un cercle de rayon $R = 300\delta_{\omega_0}$ et centré sur le lieu de l'appariement. Il a été vu précédemment que celui-ci pouvait varier avec la température. À partir du rapport de températures $T_1 = 2,5T_2$, le rayonnement acoustique change de forme, le second lobe de rayonnement dans la partie froide devient très important. Ce phénomène se produit aussi bien avec le terme source \mathbf{S}_p qu'avec le terme \mathbf{S}_E .

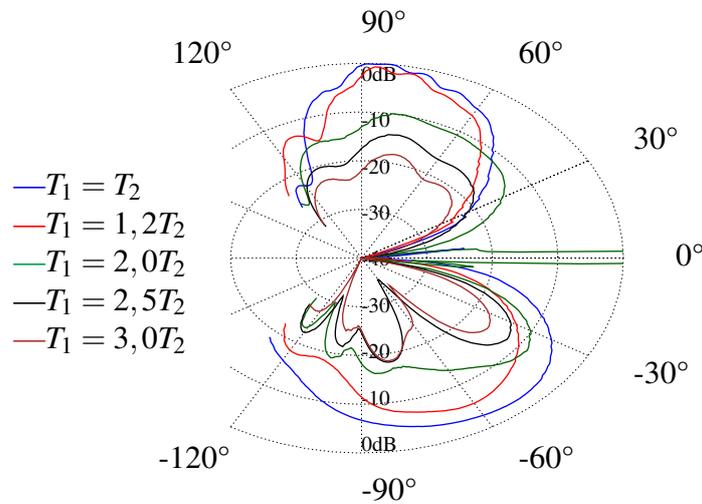


FIG. 6.36: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p , lieu d'appariement, pour différents rapports de température et à $M = 0,25$ avec la formulation $\mathbf{EEL}^* + \mathbf{S}_p$.

L'évolution de la puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} avec la température sur la figure 6.37 montre également un changement de comportement à partir de $T_1 = 2,5T_2$. Là, la puissance acoustique rayonnée ne suit plus une loi en M^7 . Ce résultat est en accord avec ceux de Moser [78] et de Fortuné [38].

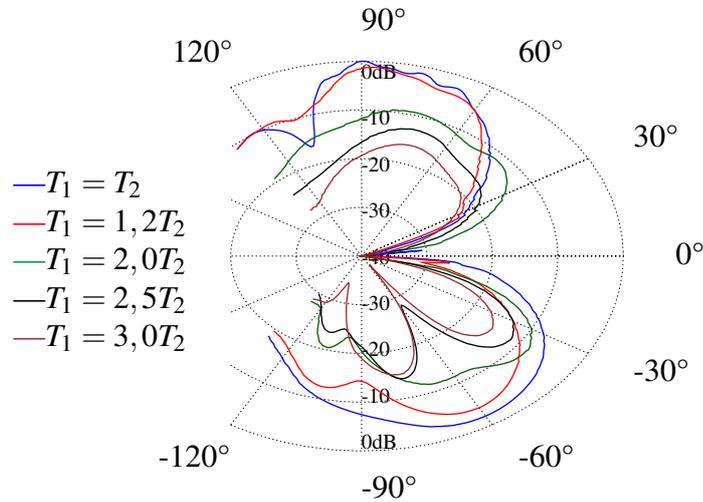


FIG. 6.37: Pression quadratique exprimée en décibels p_{dB} le long d'un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p , lieu d'appariement, pour différents rapports de température et à $M = 0,25$ avec la formulation $\mathbf{EEL}^* + \mathbf{S}_E$.

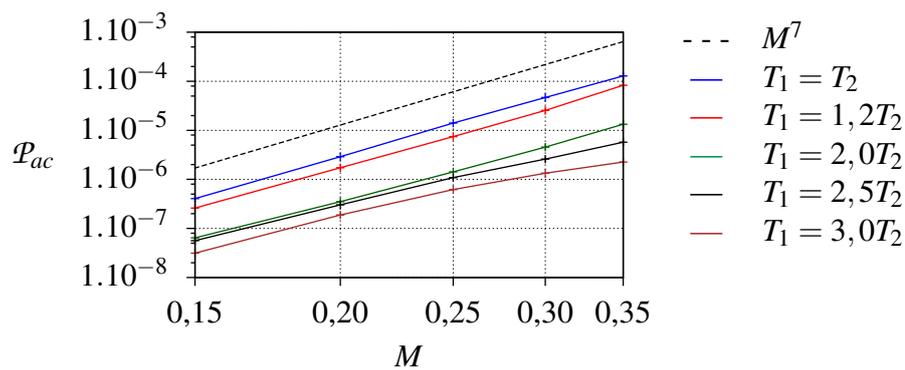


FIG. 6.38: Puissance acoustique \mathcal{P}_{ac} à travers un cercle de rayon $R_p = 300\delta_{\omega_0}$ de centre x_p , lieu d'appariement, en fonction du nombre de Mach M et pour différents rapports de température avec la formulation $\mathbf{EEL}^* + \mathbf{S}_E$.

6.2.4 Terme source S_e et analogie de Ribner

Au paragraphe 3.3, le terme source S_e a été défini comme :

$$S_e = - \left(\frac{Dp_{1a}}{Dt_a} + \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right) . \quad (6.16)$$

Il peut alors être séparé en trois contributions :

$$S_{e1} = - \frac{\partial p_{1a}}{\partial t_a} \quad (6.17)$$

$$S_{e2} = - u_{i0a} \frac{\partial p_{1a}}{\partial x_i} \quad (6.18)$$

$$S_{e3} = - \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} . \quad (6.19)$$

Le terme S_{e1} correspond au terme source de l'analogie de Ribner [92] à la différence que Ribner avait considéré une pression incompressible. Ici, les légers effets de compressibilité ne sont pas négligés puisque p_{1a} est issu de la formulation **LO-LMNA**. Le terme S_{e3} est nul dans les cas isothermes puisqu'alors la divergence de la vitesse est nulle. Dans les cas anisothermes, il est envisageable que ce terme ait une contribution non négligeable. Afin de vérifier cette supposition, le calcul $\mathbf{EEL}^* + \mathbf{S}_E$ est effectué avec chacun de ces trois termes pour le cas où les effets de température sont les plus sensibles, c'est-à-dire pour $T_1 = 3,0T_2$. Les résultats de ces simulations sont représentés sur la figure 6.39.

La contribution majeure au rayonnement acoustique provient sans conteste du terme S_{e1} . Le terme S_{e2} contribue lui à un ordre de grandeur inférieur et le terme S_{e3} à un ordre encore inférieur. Pour ce rapport de température où l'évolution physique du rayonnement (directivité, loi en puissance) diverge notablement de la configuration isotherme, il n'est pas possible d'affirmer que les effets de température sont représentés par le terme S_{e3} . Par ailleurs, les simulations avec le gradient de pression \mathbf{S}_P ont permis de montrer que les effets de température étaient déjà compris dans le calcul de la pression hydrodynamique.

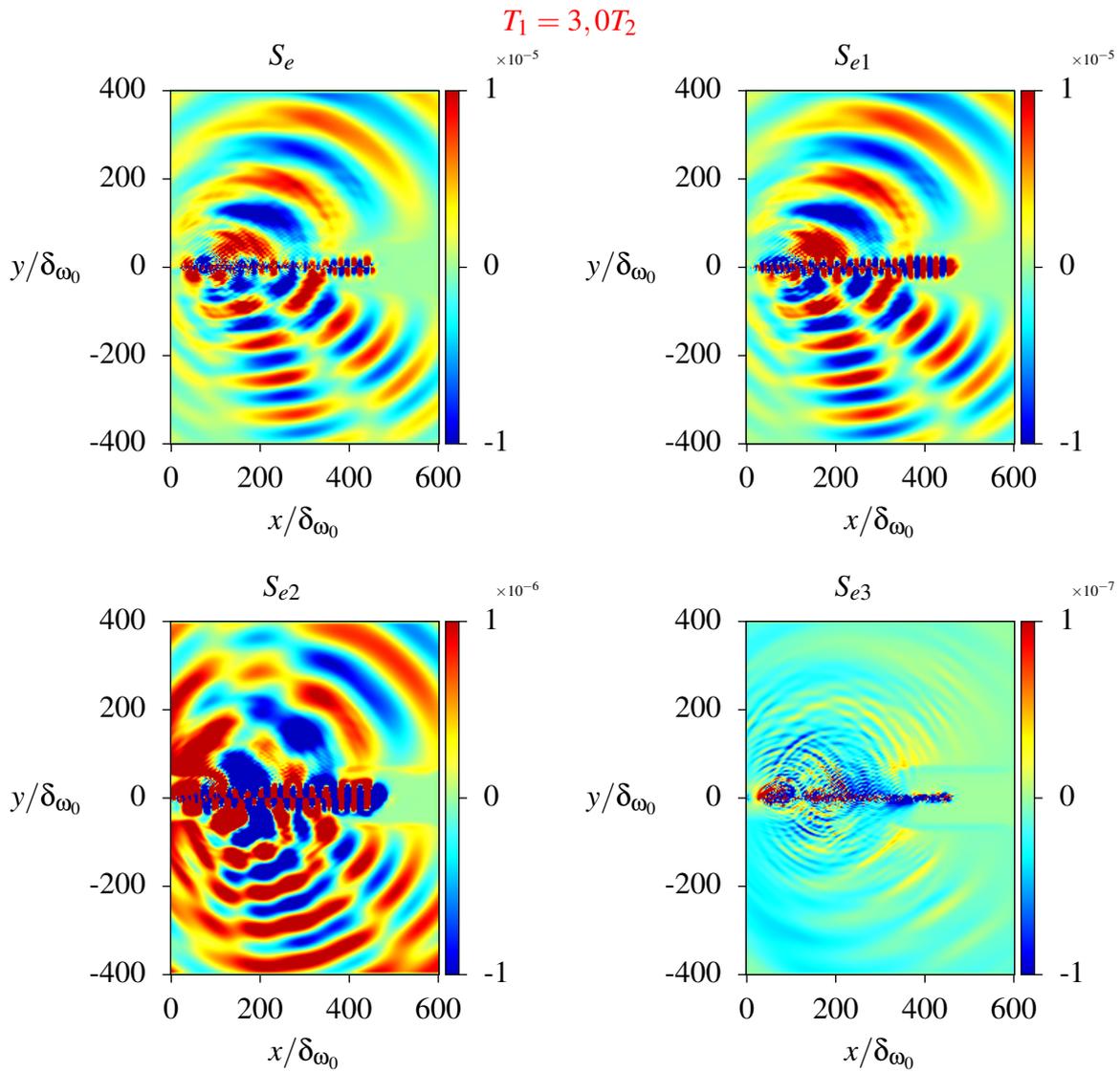
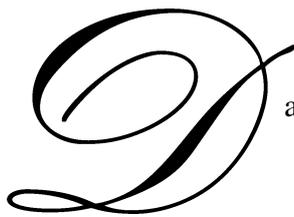


FIG. 6.39: Champ de pression acoustique obtenu avec les différentes formulations pour la couche de mélange anisotherme dans la configuration **cmac** pour un rapport $T_1/T_2 = 3,0$.

Conclusion



ans cette étude, des méthodes hybrides ont été développées afin de calculer le champ acoustique rayonné par des écoulements à faible nombre de Mach présentant des inhomogénéités de température. Il existe en aéroacoustique de nombreuses méthodes pour déterminer le champ de pression acoustique issu d'écoulements turbulents. Des exemples ont été évoqués au chapitre 1, néanmoins les effets de température sont rarement pris en considération dans les méthodes hybrides.

Ici, il a été choisi de résoudre les équations de Navier-Stokes en introduisant un développement de type Janzen-Rayleigh. Ainsi au chapitre 2 est obtenu un jeu d'équations quasi incompressible identique à celui de Golanski [44], le système Low Order Low Mach Number Approximation (**LO-LMNA**), en ne conservant que les ordres les plus bas du développement. Il permet d'employer des méthodes numériques propres aux écoulements incompressibles tout en conservant des inhomogénéités de température.

Au chapitre 3, deux jeux d'équations sont établis pour calculer la propagation des perturbations de pression acoustiques : les Équations d'Euler Linéarisées (**EEL**) et les Perturbed Low Mach Number Approximation (**PLMNA**). Concernant les **EEL**, trois termes sources différents sont formés à partir des solutions hydrodynamiques **LO-LMNA** : les termes **S_L**, **S_P** et **S_E**. Les hypothèses conduisant à chacun de ces termes sont à cette occasion discutées. Quant aux équations **PLMNA**, elles sont obtenues directement en soustrayant les solutions **LO-LMNA** des équations de Navier-Stokes pour lesquelles chaque grandeur est décomposée en une partie hydrodynamique et une perturbation. Elle ont pour terme source le même terme **S_E**. L'originalité de ce terme est qu'aucune hypothèse autre que celle du faible nombre de Mach n'a été posée

pour le déduire. L'application de la démarche de Seo et Moon [96] a permis de filtrer la vorticité perturbée des **PLMNA** qui sont alors notées **PLMNA***. Ce filtrage a également été appliqué aux **EEL** qui sont notées en ce cas **EEL***.

Les champs hydrodynamiques sont interpolés en temps pour calculer les sources acoustiques. Les détails de cette interpolation et les précautions nécessaires sont traités au chapitre 4.

Les différentes approches sont validées au chapitre 5 grâce à deux configurations académiques : le tourbillon elliptique de Kirchhoff et les tourbillons corotatifs de Scully. Là sont mis en évidence les avantages des formulations où le terme source n'apparaît que dans l'équation de l'énergie, le terme source **S_E**. En effet, les différents essais effectués ont montré la sensibilité des autres formulations à la troncature des sources. Cette troncature pouvant créer des sources acoustiques totalement artificielles, polluant alors toute la solution physique. Ce résultat est d'ailleurs formalisé à travers l'écriture des équations d'ondes correspondant aux diverses formulations dans le cas le plus simple où le milieu de propagation est considéré au repos. Dans ce cas très particulier, la méthode **EEL*+S_E** est très proche de l'analogie de Ribner.

Les méthodes hybrides ont finalement été employées pour analyser le rayonnement acoustique d  à la formation d'un appariement tourbillonnaire dans une couche de mélange. Cette étude est menée à la fois sur un écoulement isotherme et sur un écoulement à divers ratios de température entre l'écoulement rapide et l'écoulement lent. Les résultats ont montré un très bon accord avec les solutions de référence d'un calcul DNS compressible. Les résultats acoustiques ont permis de vérifier les effets du nombre de Mach et de la température sur le rayonnement. Il s'est avéré que le rayonnement acoustique de la couche de mélange suit une loi en puissance sept du nombre de Mach pour la puissance acoustique dans le cas isotherme, ce qui est conforme avec la littérature. Concernant les configurations anisothermes étudiées, l'augmentation de la température de la partie rapide de l'écoulement a pour effet de diminuer la pression hydrodynamique ainsi que le rayonnement acoustique. La directivité est modifiée avec un second lobe de rayonnement dans la région froide. Ce lobe devient même prédominant lorsque le rapport de température devient plus conséquent. Pour le rapport de $T_1 = 3T_2$, la puissance acoustique ne suit d'ailleurs plus une loi en M^7 .

Un des avantages des formulations **EEL*+S_p**, **EEL*+S_E** et **PLMNA*** par rapport à la formulation classique **EEL+S_L** est qu'elles permettent de configurer simplement les zones éponges acoustiques. Sans précaution particulière dans le choix des zones éponges, la méthode **EEL+S_L** s'est révélée fortement polluée par des rayonnements parasites avec une vorticité perturbée très importante. Une question reste en suspens quant à l'influence de la zone éponge hydrodynamique et son impact en terme de niveau acoustique rayonné. D'un côté cette zone n'est pas nécessaire pour le bon déroulement du calcul dynamique. D'un autre, elle présente l'avantage d'atténuer les structures en aval du domaine et donc de ne pas effectuer de traite-

ment trop important lors du calcul acoustique. Des calculs ultérieurs devront donc montrer si l'absence de celle-ci permet de retrouver les niveaux rayonnés par le calcul DNS compressible.

Perspectives

Le solveur hydrodynamique sur lequel a reposé cette étude fait l'objet d'une restructuration et est en cours de parallélisation au sein de l'axe de recherche. De manière délibérée dans le cadre de cette thèse, l'effort s'est concentré davantage sur l'étape du couplage acoustique-hydrodynamique que sur les spécificités du solveur `quasincompact3d` pourtant déterminantes pour un calcul fidèle des termes sources dans les modèles aéroacoustiques.

Les limitations associées aux coûts de calcul de cette version non parallélisée doivent à terme être levées afin de tirer pleinement avantage des modèles proposés. En effet, sur des configurations tridimensionnelles de jet chaud à faible nombre de Mach, les outils développés au cours de cette étude pourraient permettre une exploration des mécanismes sources. Une voie possible serait par exemple d'utiliser des corrélations du champ fluctuant de vitesse ou de température avec le champ acoustique rayonné tout en détaillant l'influence et la contribution de chacun des termes sources de façon séparée. Certaines incertitudes doivent avant tout être levées, en particulier les raisons des écarts de niveau observés entre la simulation DNS compressible et les méthodes hybrides.

Champ de vitesse du tourbillon de Kirchhoff



onsidérons le tourbillon elliptique défini par

$$\left(\frac{x'}{a}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b}\right)^2 = 1 \quad , \quad (\text{A.1})$$

où a et b sont respectivement le grand et le petit axe. Lorsque le tourbillon tourne autour de son centre à la vitesse angulaire constante Ω_R et pour une vorticité constante ω dans l'ellipse et nulle à l'extérieur, la fonction de courant à l'extérieur de l'ellipse s'écrit :

$$\Psi_{ext} = \frac{1}{4}\Omega_R(a+b)^2 e^{-2\xi} \cos 2\eta + \frac{1}{2}\omega ab\xi \quad (\text{A.2})$$

où ξ et η sont les coordonnées elliptiques dont les relations avec x' et y' sont

$$x' = c \cosh \xi \cos \eta \quad , \quad y' = c \sinh \xi \sin \eta \quad (\text{A.3})$$

avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Le champ de vitesse à l'extérieur de l'ellipse est alors

$$u = -\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial y'} = -\left(\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y'} + \frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y'}\right) \quad (\text{A.4})$$

$$v = \frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial x'} = \left(\frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x'} + \frac{\partial \Psi_{ext}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x'}\right) \quad (\text{A.5})$$

Les fonctions cosh et sinh sont reliées par leurs dérivées

$$d(\sinh \xi) = \cosh \xi d\xi \quad , \quad d(\cosh \xi) = \sinh \xi d\xi \quad (\text{A.6})$$

ce qui permet de décomposer :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x'} = \frac{1}{\cosh \xi} \frac{\partial \sinh \xi}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \xi}{\partial y'} = \frac{1}{\sinh \xi} \frac{\partial \cosh \xi}{\partial y'} \quad . \quad (\text{A.7})$$

De la même façon :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x'} = \frac{1}{\cos \eta} \frac{\partial \sin \eta}{\partial x'} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y'} = -\frac{1}{\sin \eta} \frac{\partial \cos \eta}{\partial y'} \quad . \quad (\text{A.8})$$

En utilisant (A.3) dans (A.8) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial x'} = \frac{c \cosh \xi}{x'} \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{y'}{c \sinh \xi} \right) = \frac{y'}{x'} \cosh \xi \left(\frac{-1}{\sinh^2 \xi} \right) \frac{\partial \sinh \xi}{\partial x'} \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y'} = -\frac{c \cosh \xi}{y'} \cdot \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{x'}{c \cosh \xi} \right) = \frac{x'}{y'} \sinh \xi \left(\frac{1}{\cosh^2 \xi} \right) \frac{\partial \cosh \xi}{\partial y'} \quad . \quad (\text{A.10})$$

Par définition des fonctions sinus et cosinus :

$$\cos^2 \eta + \sin^2 \eta = 1 \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow \frac{x'^2}{1 + \sinh^2 \xi} + \frac{y'^2}{\sinh^2 \xi} = c^2 \quad (\text{A.12})$$

$$\Leftrightarrow c^2 \beta^2 + (c^2 - x'^2 - y'^2) \beta - y'^2 = 0 \quad (\text{A.13})$$

où $\beta = \sinh^2 \xi$.

Puisque $\beta \geq 0$, en calculant le discriminant de (A.13) il vient :

$$\beta = \frac{\lambda_- + \sqrt{\lambda_-^2 + 4c^2 y'^2}}{2c^2} \quad , \quad \lambda_- = x'^2 + y'^2 - c^2 \quad . \quad (\text{A.14})$$

La coordonnée ξ est définie sur $[0, +\infty[$ donc $\sinh \xi \geq 0$ et

$$\sinh \xi = \frac{\sqrt{2}}{2c} \left(\lambda_- + \sqrt{\lambda_-^2 + 4c^2 y'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \sinh \xi}{\partial x'} = \frac{x'}{2c^2 \sinh \xi} \left[1 + \lambda_- \left(\lambda_-^2 + 4c^2 y'^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad . \quad (\text{A.16})$$

Soit $\alpha = \cosh^2 \xi = 1 + \beta$, alors :

$$\alpha = \frac{\lambda_+ + \sqrt{\lambda_+^2 - 4c^2 x'^2}}{2c^2}, \quad \lambda_+ = x'^2 + y'^2 + c^2 \quad (\text{A.17})$$

et

$$\cosh \xi = \frac{\sqrt{2}}{2c} \left(\lambda_+ + \sqrt{\lambda_+^2 - 4c^2 x'^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \cosh \xi}{\partial y'} = \frac{y'}{2c^2 \cosh \xi} \left[1 + \lambda_+ \left(\lambda_+^2 - 4c^2 x'^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A.19})$$

Il reste à déterminer la dérivée de ψ_{ext} par rapport à ξ et η :

$$\frac{\partial \psi_{ext}}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \Omega_R (a+b)^2 e^{-2\xi} \cos(2\eta) + \frac{1}{2} ab \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \psi_{ext}}{\partial \eta} = -\frac{1}{2} \Omega_R (a+b)^2 e^{-2\xi} \sin(2\eta) \quad (\text{A.21})$$

et

$$\cos(2\eta) = \cos^2 \eta - \sin^2 \eta = \frac{x'^2}{c^2 \cosh^2 \xi} - \frac{y'^2}{c^2 \sinh^2 \xi} \quad (\text{A.22})$$

$$\sin(2\eta) = 2 \sin \eta \cos \eta = \frac{x' y'}{c^2 \cosh \xi \sinh \xi} \quad (\text{A.23})$$

$$e^{-2\xi} = (\cosh \xi - \sinh \xi)^2 \quad (\text{A.24})$$

Configuration des calculs **cmi2ac**

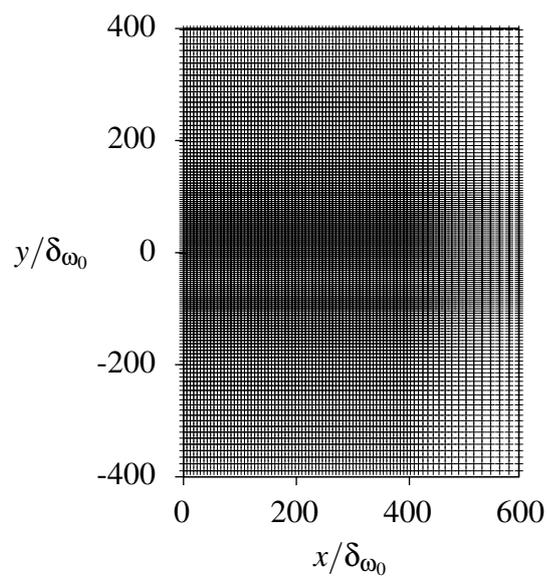


FIG. B.1: Maillage acoustique dans les configurations **cmi2ac1** et **cmi2ac2** (un point sur trois est représenté dans chaque direction).

	cmi2ac1	cmi2ac2
N_{x_a}	251	251
N_{y_a}	407	407
L_{x_a}	$600\delta_{\omega_0}$	$600\delta_{\omega_0}$
L_{y_a}	$800\delta_{\omega_0}$	$800\delta_{\omega_0}$
étirement suivant x	oui	oui
$\Delta x_{a_{\min}}$	$4\Delta x_{\min}$	$4\Delta x_{\min}$
$\Delta x_{a_{\max}}$	$4\Delta x_{\max}$	$4\Delta x_{\max}$
étirement suivant y	oui	oui
$\Delta y_{a_{\min}}$	$4\Delta y$	$4\Delta y$
$\Delta y_{a_{\max}}$	$3,7\delta_{\omega_0}$	$3,7\delta_{\omega_0}$
accroissement de maille suivant y	1,0%	1,5%
δ_{ω_0}	1	1
c_0	1	1
Δt_a	0,596	0,596
filtrage en x	ordre 4	ordre 4
$\tilde{\sigma}_x$	0,20	0,20
filtrage en y	ordre 4	ordre 4
$\tilde{\sigma}_y$	0,20	0,20
pondération des sources en x	oui	oui
$x_{cut_{in}}$	$50\delta_{\omega_0}$	$50\delta_{\omega_0}$
$\alpha_{cut_{in}}$	0,04	0,04
$x_{cut_{out}}$	$400\delta_{\omega_0}$	$350\delta_{\omega_0}$
$\alpha_{cut_{out}}$	0,02	0,04
pondération des sources en y	oui	oui
y_{cut}	$30\delta_{\omega_0}$	$30\delta_{\omega_0}$
zone éponge en entrée	oui	non
A_{in}^s	0,01	✘
y_{in}^s	$40\delta_{\omega_0}$	✘
x_{in}^s	$50\delta_{\omega_0}$	✘
zone éponge en sortie	oui	non
A_{out}^s	0,10	✘
y_{out}^s	$60\delta_{\omega_0}$	✘
x_{out}^s	$400\delta_{\omega_0}$	✘

TAB. B.1: Paramètres des configurations **cmi2ac1** et **cmi2ac2**

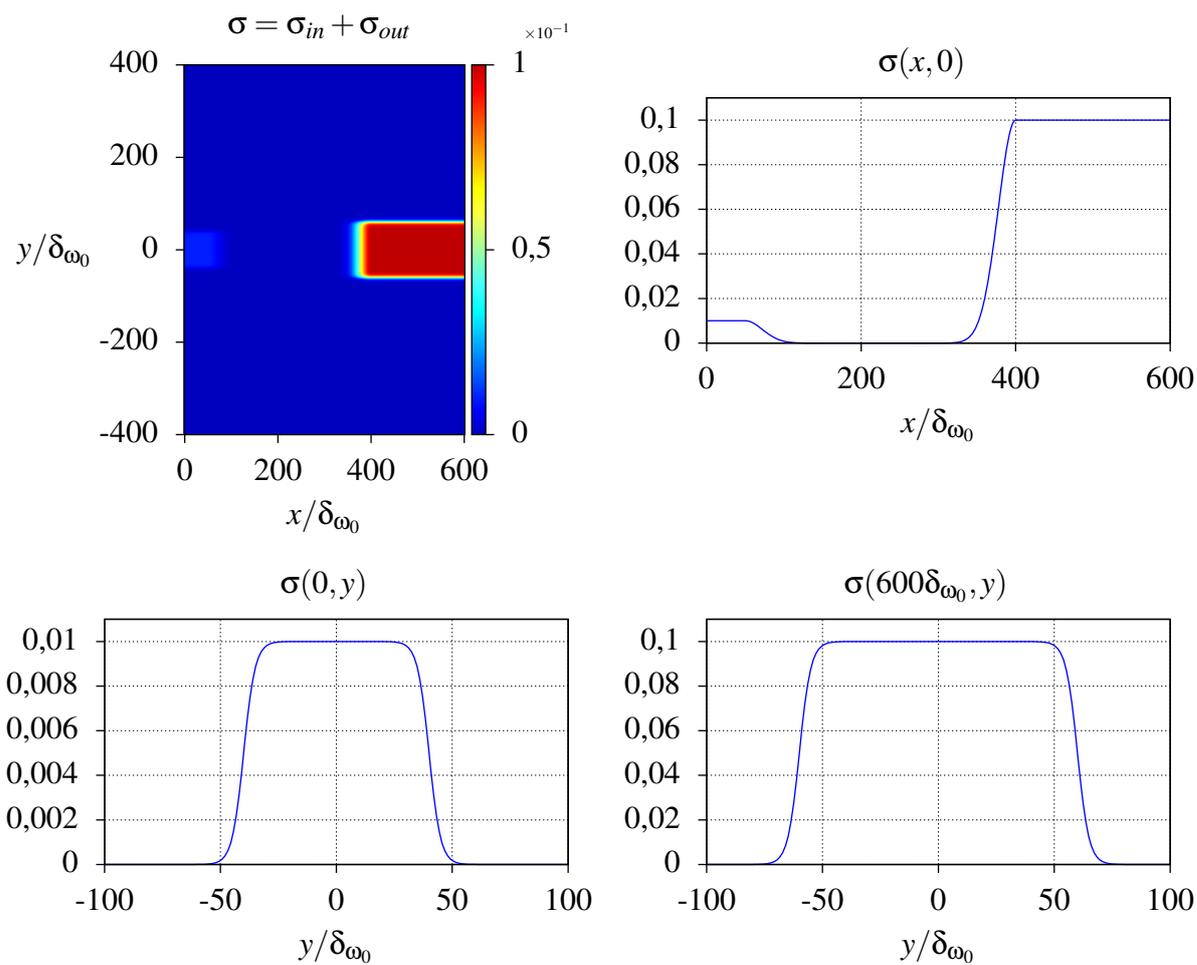


FIG. B.2: Zone éponge σ de la configuration **cmi2ac1** et ses profils en $y = 0$, $x = 0$ et $x = 600\delta_{\omega_0}$.

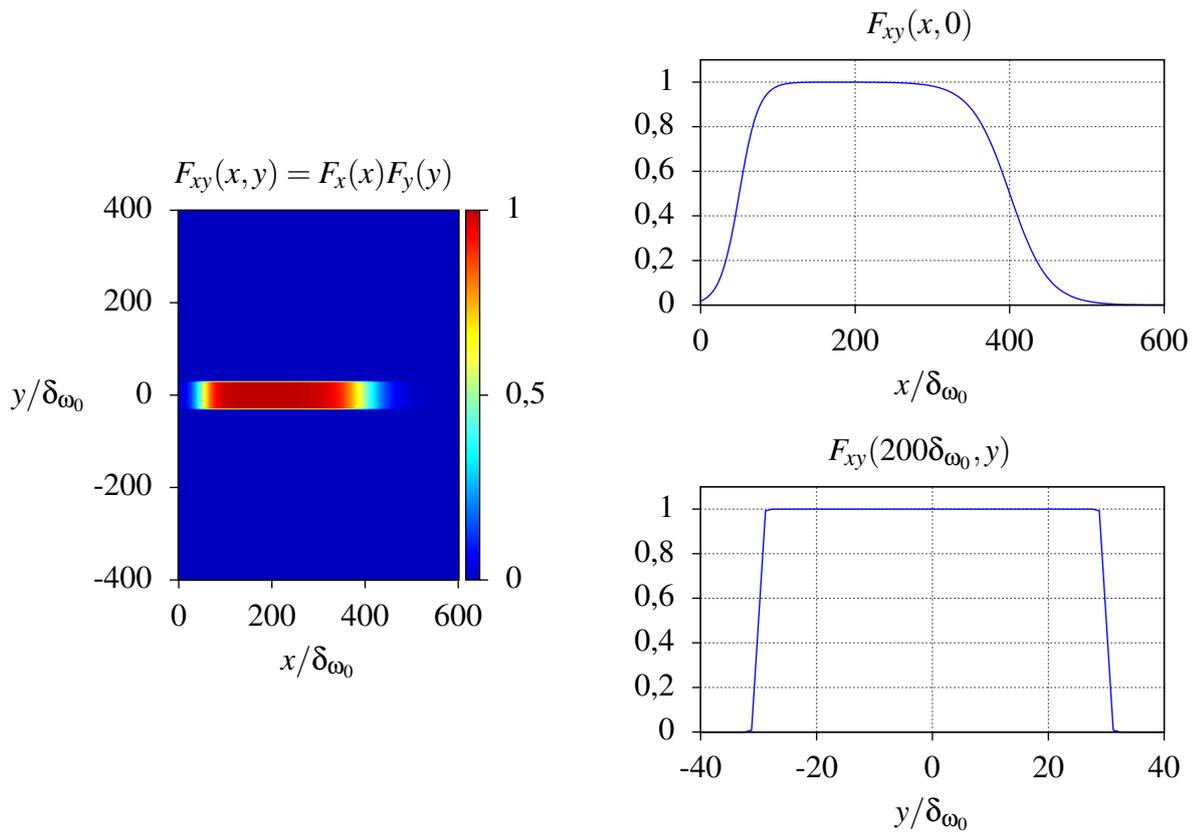


FIG. B.3: Fonction de pondération F_{xy} de la configuration **cmi2ac1** et ses profils en $y = 0$ et en $x = 200\delta_{\omega_0}$.

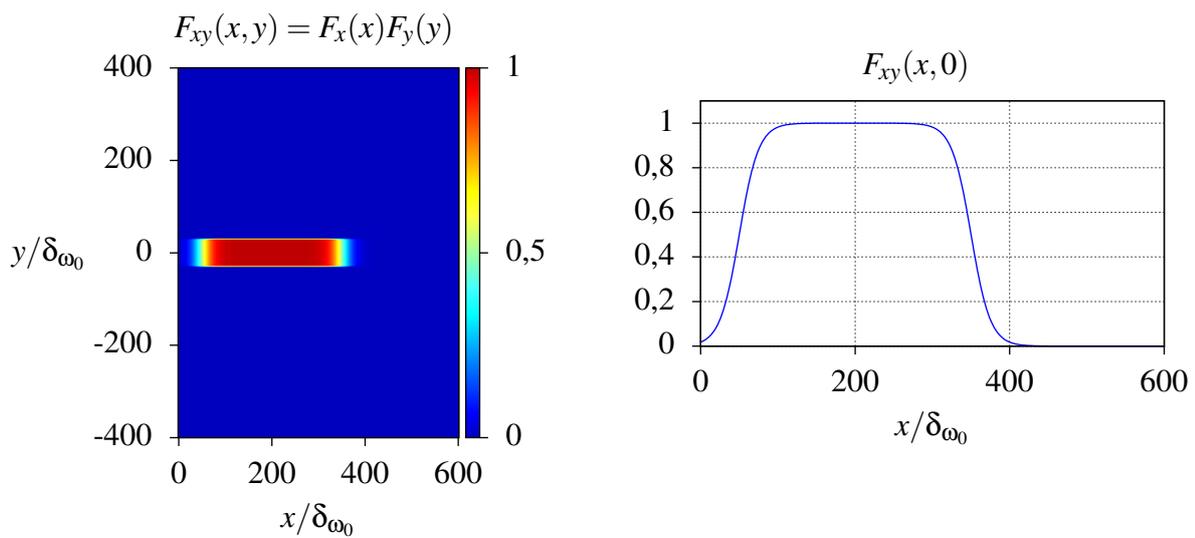


FIG. B.4: Fonction de pondération F_{xy} de la configuration **cmi2ac2** et son profil en $y = 0$.

Configuration des calculs cmaac

Les traitements de zones éponges et de pondération sont similaires à ceux des configurations isothermes. La seule différence notable est qu'ici, la pondération dans la direction y est moins brutale car des oscillations sont apparues avec la précédente forme. Ainsi, les termes sources sont pondérés dans la direction y suivant la fonction F_y ,

$$F_y(y) = 1 - 0,5\{1 + \tanh [0,2(|y| - y_{cut})]\} \quad . \quad (C.1)$$

	cmaac
N_{x_a}	385
N_{y_a}	691
L_{x_a}	$600\delta_{\omega_0}$
L_{y_a}	$800\delta_{\omega_0}$
étirement suivant x	oui
$\Delta x_{a_{\min}}$	$4\Delta x_{\min}$
$\Delta x_{a_{\max}}$	$4\Delta x_{\max}$
étirement suivant y	oui
$\Delta y_{a_{\min}}$	$4\Delta y$
$\Delta y_{a_{\max}}$	$3,7\delta_{\omega_0}$
accroissement de maille suivant y	1,0%
δ_{ω_0}	1
c_0	1
Δt_a	0,094
filtrage en x	ordre 4
$\tilde{\sigma}_x$	0,40
filtrage en y	ordre 4
$\tilde{\sigma}_y$	0,40
pondération des sources en x	oui
$x_{cut_{in}}$	$30\delta_{\omega_0}$
$\alpha_{cut_{in}}$	0,04
$x_{cut_{out}}$	$450\delta_{\omega_0}$
$\alpha_{cut_{out}}$	0,40
pondération des sources en y	oui
y_{cut}	$40\delta_{\omega_0}$
zone éponge en entrée	oui
A_{in}^s	0,10
y_{in}^s	$40\delta_{\omega_0}$
x_{in}^s	$50\delta_{\omega_0}$
zone éponge en sortie	oui
A_{out}^s	0,20
y_{out}^s	$60\delta_{\omega_0}$
x_{out}^s	$400\delta_{\omega_0}$

TAB. C.1: Paramètres de la configuration **cmaac**

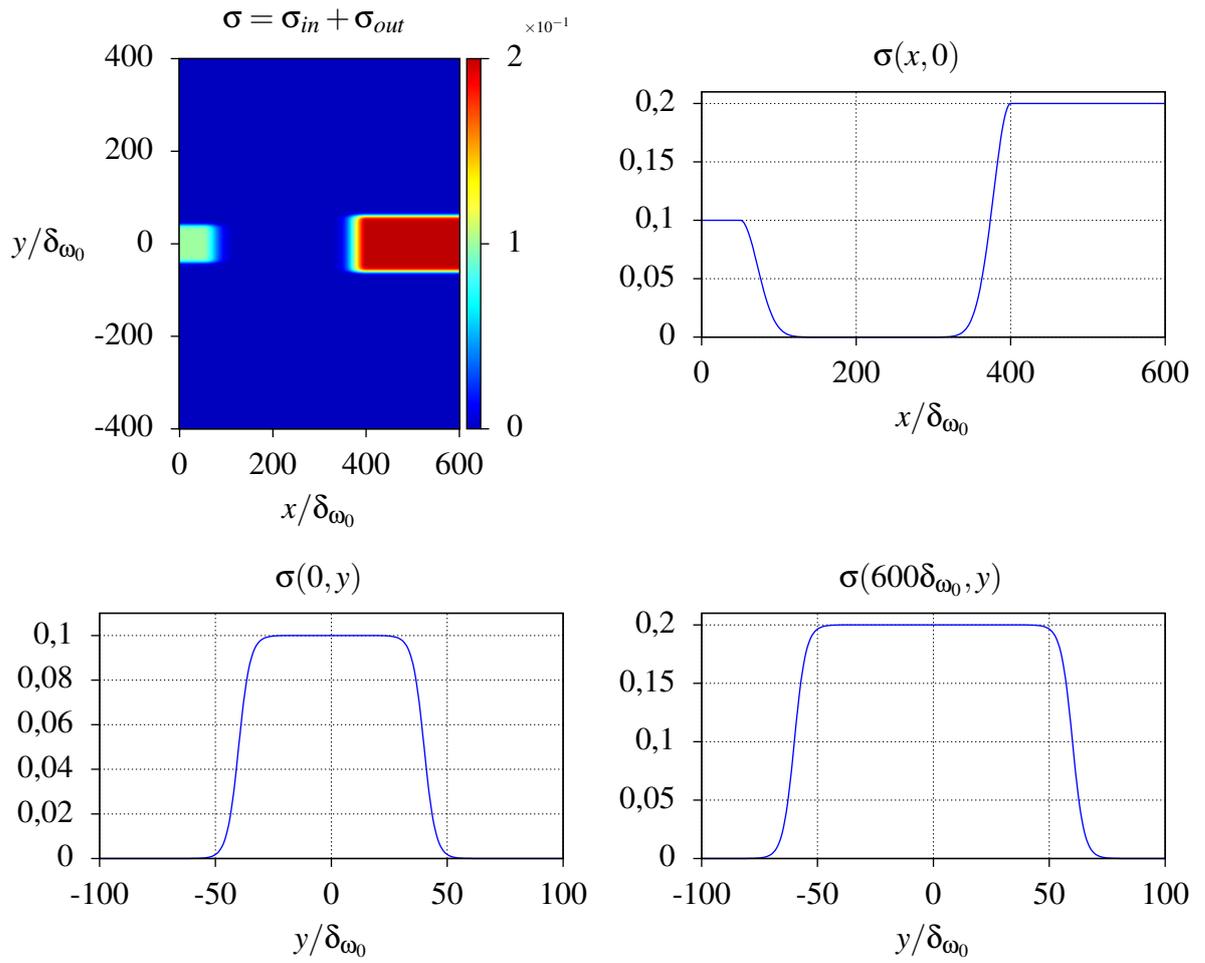


FIG. C.1: Zone éponge σ de la configuration **cmaac** et ses profils en $y = 0$, $x = 0$ et $x = 600\delta_{\omega_0}$.

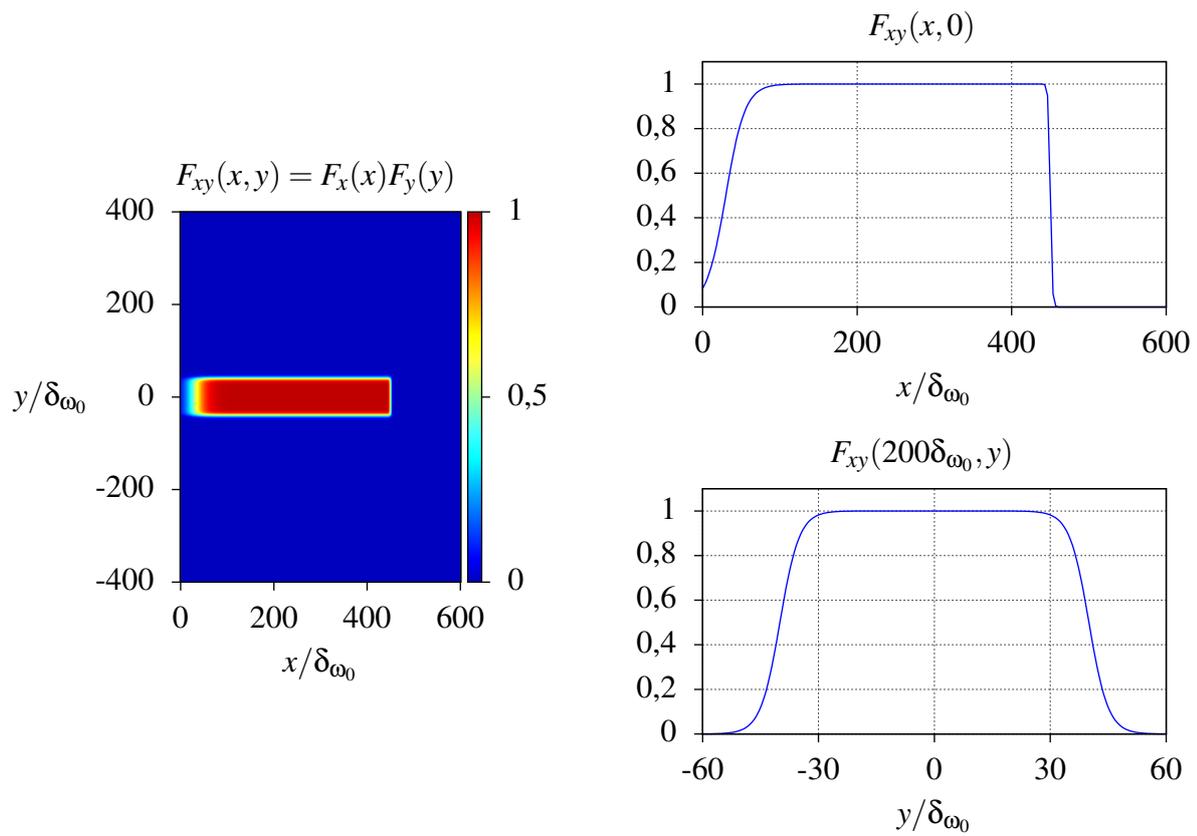


FIG. C.2: Fonction de pondération F_{xy} de la configuration **cmaac** et ses profils en $y = 0$ et en $x = 200\delta_{\omega_0}$.

Actes de conférences



DISCUSSION OF SOURCE TERMS IN COMPUTATIONAL AEROACOUSTICS OF ANISOTHERMAL FLOW USING A LOW MACH NUMBER APPROXIMATION.

Cyril Nana, David Marx, Christian Prax and Véronique Fortuné

Institute PPRIME, Department of Fluid Flow, Heat Transfer and Combustion, Université de Poitiers, ENSMA, CNRS, Téléport 2 - Bd., Marie et Pierre Curie B.P. 30179, 86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex, France, e-mail: cyril.nana@univ-poitiers.fr

A hybrid method is presented to compute the sound emitted by low Mach-number flows. The flow solver is a low Mach number approximation of the Navier-Stokes equations. It allows going beyond the incompressible approach by taking into account temperature and density inhomogeneities. The radiated sound computation is performed using linearized Euler equations. It is well known that these equations support unstable vorticity modes that can spoil the acoustic result. One way to avoid the vortical mode development is to not excite it. To do this, it is proposed to use the pressure gradient as a source term. This source term can be used for both isothermal and anisothermal flows. The method has been applied to isothermal and anisothermal excited shear layers. The validity of the proposed method is assessed by comparison to a direct noise computation. The isothermal case is presented here, the anisothermal case and temperature effects will be discussed at the congress.

1. Introduction

Aerodynamically generated noise prediction has become a major issue in transport industry. Numerical aeroacoustic computations have established themselves as powerful tools to predict noise radiated by many types of flows. Two classes of methods are available. The first class of methods consists in performing Direct Noise Simulation (DNS). The compressible Navier-Stokes equations are calculated both in the aerodynamic source region and in the acoustic far field [1, 2, 3]. The connection between the dynamic flow and the sound produced by it is done naturally and requires no model for the sound source. This method requires large computational resources and is inefficient in the low Mach number range. This has motivated the second class of methods, known as hybrid methods [4]. For Mach number less than about 0.3, these methods can lead to a speed-up factor of up to 30 over the DNS [5]. They consist in splitting the full computation into a dynamic flow computation and a sound propagation computation, using a source model in between. The flow computation is typically incompressible [4, 5], but density and temperature inhomogeneities can also be taken into account [6, 7]. The noise computation can be done using some kind of perturbed equations, such as the linearized Euler equations (LEE) [2, 6, 8]. One well known problem with the LEE is that they can sustain unstable vortical modes that can spoil the noise computation. One strategy to avoid this mode is to modify the equations so that they do not support the mode anymore [2, 8, 9]. But a detrimental effect of this is to neglect some sound/flow interactions. Another strategy consists in not exciting the

18th International Congress on Sound and Vibration, 10–14 July 2011, Rio de Janeiro, Brazil

vortical mode [6] by using a rotational-free source term such as a pressure gradient. In [6], the use of the pressure gradient has been assessed on a simplified test case. Here the source term is assessed on a more realistic case, that of a shear layer where sound is produced by vortex pairing. The Low Mach Number Approximation (LMNA) flow solver is presented in section 2. The acoustic solver based on the LEE is presented in section 3, where the source terms are discussed. The shear layer configuration is presented in section 4. Section 5 presents the noise radiated using both a classical source term and the pressure gradient source term and shows the efficiency of the latter in suppressing unwanted vorticity. Conclusions are provided in section 6.

2. The Low Mach Number Approximation

The first part of the hybrid approach consists in calculating the flow. Here, a low Mach approximation is used [10, 11, 7, 6] so as to retain temperature and density inhomogeneities, which is necessary for dealing with anisothermal flows. These equations are obtained from the full normalized Navier-Stokes equations that read:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (p + E) u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \frac{\partial u_i \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{M^2 Re Pr (\gamma - 1)} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} \quad (3)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2} \quad (4)$$

where ρ , $u_{i,j}$, p , T are the density, velocity, pressure and temperature respectively. Re , M and Pr stand respectively for the Reynolds, Mach and Prandtl number, γ is the ratio of specific heats at constant pressure and volume. The total energy per volume unit E and the viscous stress tensor τ write as follows:

$$E = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho u_i u_i \quad \tau = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (5)$$

Normalization is done using a length scale L_{ref} , a velocity scale U_{ref} , a time scale $t_{ref} = U_{ref}/L_{ref}$, a density scale ρ_{ref} , a pressure scale $p_{ref} = \rho_{ref} U_{ref}^2$, and a temperature scale T_{ref} . Then it comes $Re = \rho_{ref} U_{ref} L_{ref} / \mu$, $M = U_{ref} / \sqrt{\gamma T_{ref}}$ and $Pr = \mu c_p / k$. A small parameter $\epsilon = \gamma M^2$ is introduced in the following expansions:

$$\rho = \rho^{(0)} + \epsilon \rho^{(1)} + \dots \quad u_i = u_i^{(0)} + \epsilon u_i^{(1)} + \dots \quad (6)$$

$$T = T^{(0)} + \epsilon T^{(1)} + \dots \quad p = \frac{p^{(0)}}{\epsilon} + p^{(1)} + \dots \quad (7)$$

Introducing this expansion into Eq. (1-4), an asymptotic expansion of the Navier-Stokes equations is obtained. Keeping the lowest order terms in ϵ provides our set of LMNA equations:

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \quad (9)$$

$$\rho^{(0)} \frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{1}{Re Pr T^{(0)}} \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x_j^2} \quad (10)$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (11)$$

While density inhomogeneities are present, these are not acoustic, and the solver has no CFL restriction as would be the case for a compressible solver. Thus, the LMNA solver is as efficient as an incompressible solver.

3. The Linearized Euler Equations

The acoustic quantities ρ' , u'_i , p' are here calculated with Euler equations linearized about the mean fields of velocity (u_0, v_0) , pressure p_0 and density ρ_0 deduced from the previous LMNA solutions to form the Linearized Euler Equations.

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = \mathbf{u}_0(x, y, z, t) + \mathbf{u}'(x, y, z, t) \quad (12)$$

$$p(x, y, z, t) = p_0(x, y, z, t) + p'(x, y, z, t) \quad (13)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0(x, y, z, t) + \rho'(x, y, z, t) \quad (14)$$

$$s(x, y, z, t) = s_0(x, y, z, t) + s'(x, y, z, t) \quad (15)$$

The formulation is the same as the one studied by [2, 6] :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{H} = \mathbf{S} \quad (16)$$

with

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho_0 u' \\ \rho_0 v' \\ p' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho_0 u' + \rho' u_0 \\ \rho_0 u' u_0 + p' \\ \rho_0 u_0 v' \\ p' u_0 + \gamma p_0 u' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho_0 v' + \rho' v_0 \\ \rho_0 u' v_0 \\ \rho_0 v_0 v' + p' \\ p' v_0 + \gamma p_0 v' \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial u_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ (\rho_0 u' + \rho' u_0) \frac{\partial v_0}{\partial x} + (\rho_0 v' + \rho' v_0) \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) p' \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - (\gamma - 1) \left(u' \frac{\partial p_0}{\partial x} + v' \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

\mathbf{S} is the source term used to form the analogy. In [12] the source term is given by

$$\mathbf{S} = (0, S2 - \overline{S2}, S3 - \overline{S3}, 0) \quad (19)$$

where

$$S2 = -\frac{\partial \rho_0 u_i u_j}{\partial x_i}, \quad S3 = -\frac{\partial \rho_0 u_i u_j}{\partial x_j} \quad (20)$$

and $\overline{S2}$, $\overline{S3}$ are time averaged quantities. This expression of the source term was successfully used by [12, 2] to calculate noise radiated by mixing layers arisen from DNS and LES computations.

Comparing this expression of the source term with Eq. (9) leads to

$$-\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} \quad (21)$$

We approximate mean velocity, pressure and dilatation fields of the EEL as temporal averages of the ones given by the LMNA system of equations Eq. (8)-(11). The viscous term can be neglected, providing that the Reynolds number is sufficiently high. The source terms become:

$$-\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)}}{\partial t} \quad (22)$$

18th International Congress on Sound and Vibration, 10–14 July 2011, Rio de Janeiro, Brazil

For isothermal cases, we expect the last term of the RHS of Eq. (22) not to radiate as stated by [13] since it is divergence free.

Main drawback of LEE is that source terms can excite spurious vortical modes. [2] proposed to modify the operator by nullifying the \mathbf{H} term of Eq. (16).

Here we chose to use source terms based on the the gradient of incompressible pressure \mathbf{S}_P and to compare the results with classical \mathbf{S}_L terms where \mathbf{S}_P and \mathbf{S}_L are:

$$\mathbf{S}_P = \frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} \quad , \quad \mathbf{S}_L = -\frac{\partial \rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}}{\partial x_j} \quad . \quad (23)$$

4. Flow configuration

We consider the spatial development of a bidimensional mixing layer between two streams of velocity, temperature and density (U_1, T_1, ρ_1) and (U_2, T_2, ρ_2) respectively. The initial mean velocity field is given by hyperbolic-tangent profile

$$U(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_1 - U_2}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_0}}\right) \quad (24)$$

where δ_{ω_0} is the initial vorticity thickness.

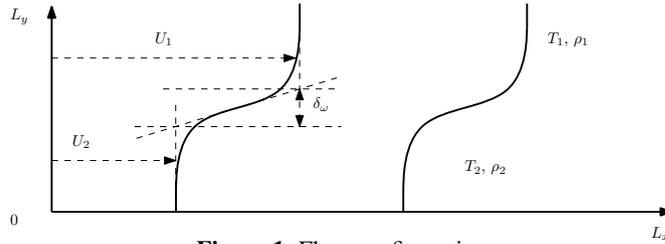


Figure 1. Flow configuration

This mean flow is forced with two subharmonics $f_0/2$ and $f_0/4$ where f_0 is the frequency of the most unstable mode as found by [14]. From now on, velocity and length are scaled with respect to the sound velocity c_0 and the initial vorticity thickness δ_{ω_0} . Compressible DNS calculation schemes used for comparison with the hybrid method are extensively explicated in [3]. The LMNA solver is detailed in [6].

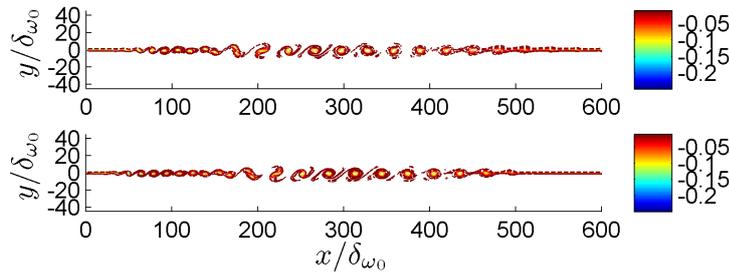


Figure 2. Vorticity plots, up compressible DNS, down LMNA

Initially, the upper and lower velocity U_1 and U_2 (Figure 1) are set to 0.50 and 0.25 respectively with a Reynolds number $Re = 400$. In the following, an isothermal configuration is used thus $T_1 = T_2$ and $\rho_1 = \rho_2$. Figure 2 shows a good agreement between compressible DNS and LMNA calculations. Yet a slight shift in the pairing location appears. It is located at $x_{0D} = 180\delta_{\omega_0}$ for compressible DNS and $x_{0L} = 195\delta_{\omega_0}$ for LMNA results.

5. Results

First, LEE are calculated without time averaged velocity fields to avoid any spurious vortical mode. Source terms S_P and S_L create similar acoustic fields as we can see on the dilatation fields (Figure 3). We observe a slight difference of intensity that may be due to the weighting factor of S_P following the y -axis. Indeed the pressure field decays more slowly than velocity ones.

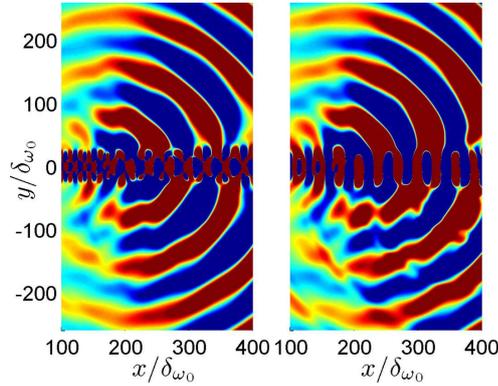


Figure 3. Dilatation fields without mean velocity fields: left $EEL+S_P$, right $EEL+S_L$, levels from $-2.5 \cdot 10^{-6}$ to $2.5 \cdot 10^{-6}$.

LEE are now calculated about the mean velocity fields u_0 and v_0 taken as the time averages of the LMNA solutions. One can clearly see on Figure 4 a major difference between dilatation resulting of the use of S_P terms and S_L terms. These last ones excite vortical modes and therefore considerably overestimate the result whereas S_P terms do not. When compared to DNS calculation on the left of the figure, dilatation fields provided by the simulation with S_P remains slightly underestimated for the same reason as explained before.

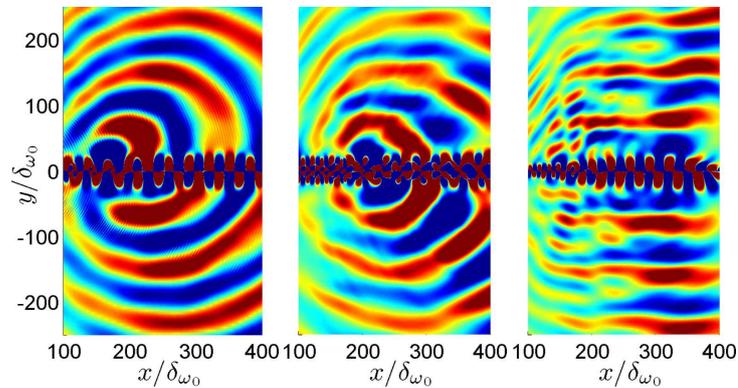


Figure 4. Dilatation fields: left compressible DNS, centre $EEL+S_P$, levels from $-2.5 \cdot 10^{-6}$ to $2.5 \cdot 10^{-6}$, right $EEL+S_L$, levels from $-2.5 \cdot 10^{-4}$ to $2.5 \cdot 10^{-4}$.

6. Conclusion

In this study, source terms based on the gradient of pressure proved to radiate in the same way as classical ones based on Lighthill's turbulence stress tensor when no mean velocity is applied to the LEE. Furthermore, these new terms have the advantage not to excite any vortical mode in the LEE in presence of a mean shear flow. Still the use of S_P terms do not need to modify the acoustic

18th International Congress on Sound and Vibration, 10–14 July 2011, Rio de Janeiro, Brazil

propagator. A question remains on the contribution of the second term of the RHS of Eq. (22) in the case of anisothermal flows. This key point will be discussed at the congress.

Acknowledgments:

Part of the calculation resources were provided by **IDRIS** (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, CNRS).

REFERENCES

- ¹ T. Colonius, S. K. Lele, and P. Moin. Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **330**:375–409, 1997.
- ² C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized euler's equations. *AIAA Journal*, **40**(2):235–243, 2002.
- ³ E. Lamballais, V. Fortuné, and S. Laizet. Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. *J. Comp. Phys.*, **230**:3270–3275, 2011.
- ⁴ J.C. Hardin and D.S. Pope. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **6**:323–340, 1994.
- ⁵ J.-H. Seo and Y. J. Moon. Perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at low mach numbers. *AIAA Journal*, **43**:1716–1724, 2005.
- ⁶ C. Prax, F. Golanski, and L. Nadal. Control of the vorticity mode in the linearized euler equations for hybrid aeroacoustic prediction. *J. Comp. Phys.*, **227**:6044–6057, 2008.
- ⁷ C.-D. Munz, M. Dumbser, and S. Roller. Linearized acoustic perturbation equations for low mach number flow with variable density and temperature. *J. Comp. Phys.*, **224**:352–364, 2007.
- ⁸ J.-H. Seo and Y. J. Moon. Linearized perturbed compressible equations for low mach numbers aeroacoustics. *J. Comp. Phys.*, **218**:702–719, 2006.
- ⁹ R. Ewert W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comp. Phys.*, **188**:365–398, 2003.
- ¹⁰ P. A. McMurtry, W.-H. Jou, J. J. Riley, and R. W. Metcalfe. Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release. *AIAA Journal*, **24**(6):962–970, 1986.
- ¹¹ R. B. Pember, L. H. Howell, J. B. Bell, P. Colella, C. Y. Crutchfield, W. A. Fiveland, and J.P. Jessee. An adaptative projection method for unsteady, low mach number combustion. *Combustion Science and Technology*, 1998.
- ¹² M. Billson, L.-E. Erikson, and L. Davidson. Acoustic souce terms for the linear Euler equations on conservative form. *AIAA paper*, **02-2582**, 2002.
- ¹³ B. T. Chu and L. S. G.Kovaszny. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.*, **3**(5):494–514, 1958.
- ¹⁴ A. Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, **23**:521–544, 1965.



ACOUSTICS 2012

**The perturbed low Mach number approximation for the
aeroacoustic computation of anisothermal flows**

C. Nana, D. Marx, C. Prax and V. Fortuné

Institut Pprime, CNRS - Université de Poitiers - ENSMA, ENSIP, 6 rue Marcel Doré,
Batiment B17, BP 633, 86022 Poitiers, France
cyril.nana@univ-poitiers.fr

We present here a new hybrid method for the computation of the sound emitted by subsonic flows with temperature and density inhomogeneities. This method consists in splitting the flow field into a hydrodynamic part and an acoustic one thanks to a low Mach number approximation of the Navier-Stokes equations. We therefore consider the hydrodynamic part to be quasi incompressible. The acoustic quantities are obtained by a perturbation of the compressible Navier-Stokes equations from which hydrodynamic quantities are subtracted. These become a source term based on the convective derivative of the hydrodynamic pressure. The method has been successfully applied to isothermal and anisothermal excited mixing layers. The validity of the proposed method is assessed by comparison to a compressible direct numerical simulation on the one hand and to LEE computations with different source terms on the other hand.

1 Introduction

Aerodynamically generated noise prediction has become a major issue in transport industry. Numerical aeroacoustic computations have established themselves as powerful tools to predict noise radiated by many types of flows.

Two classes of methods are available. The first class of methods consists in performing a direct noise prediction, *e.g.* with a compressible Direct Numerical Simulation (DNS). The compressible Navier-Stokes equations are calculated both in the aerodynamic source region and in the acoustic far field [1, 2, 3]. The connection between the dynamic flow and the sound produced by it is done naturally and requires no model for the sound source. This method requires large computational resources and is inefficient in the low Mach number range. This has motivated the second class of methods, known as hybrid methods [4]. For Mach number less than about 0.3, these methods can lead to a speed-up factor of up to 30 over the DNS [5]. They consist in splitting the full computation into a dynamic flow computation and a sound propagation computation, using a source model in between. The flow computation is typically incompressible [4, 5], but density and temperature inhomogeneities can also be taken into account [6, 7]. The noise computation can be done using some kind of perturbed equations, such as the linearized Euler equations (LEE) [2, 6, 8]. One well known problem with the LEE is that they can sustain unstable vortical modes that can spoil the noise computation. One strategy to avoid this mode is to modify the equations so that they do not support the mode anymore [2, 8, 9]. But a detrimental effect of this is to neglect some sound/flow interactions. Furthermore, density fluctuations are often neglected in the development of the source terms for the LEE [2] whereas these can significantly affect the radiated sound. The question of how density fluctuations contribute to the sound field is still a subject of controversy [10, 11]. It appears crucial to develop a method that can take into account efficiently this phenomena for a better understanding of the processes involved. The Low-Order Low Mach Number Approximation (**LO-LMNA**) flow solver is presented in section 2. The acoustic solver based on a perturbation of the compressible Navier-Stokes equations, the Perturbed Low Mach Number Approximation (**PLMNA**) and its vorticity-filtered version **PLMNA*** are presented in section 3. In section 4, the LEE are retrieved from the PLMNA with a source term different from the ones classically used. The shear layer configuration and comparisons of the radiated noise obtained with the different strategies are presented in section 5. Conclusions are provided in section 6.

2 The Low Mach Number Approximation

The first part of the hybrid approach consists in calculating the flow. Here, a low Mach approximation is used [12, 13, 7, 6] so as to retain temperature and density inhomogeneities, which is necessary for dealing with anisothermal flows. These equations are obtained from the full normalized Navier-Stokes equations that read:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho e + p) u_j}{\partial x_j} = \frac{\tau_{ij}}{R_e} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{(\gamma - 1)^{-1}}{M^2 R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad (3)$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma M^2} \quad (4)$$

where ρ , $u_{i,j}$, p , T are the density, velocity, pressure and temperature respectively. R_e , M and P_r stand respectively for the Reynolds, Mach and Prandtl number, γ is the ratio of specific heats at constant pressure and volume. The internal energy per volume unit ρe and the viscid stress tensor τ write as follows:

$$\rho e = \frac{p}{\gamma - 1}, \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right). \quad (5)$$

Normalization is done using a length scale L_{refh}^* , a velocity scale U_{refh}^* , a time scale $t_{refh}^* = U_{refh}^*/L_{refh}^*$, a density scale ρ_{refh}^* , a pressure scale $p_{refh}^* = \rho_{refh}^* U_{refh}^{*2}$, and a temperature scale T_{refh}^* . Then it comes $R_e = \rho_{refh}^* U_{refh}^* L_{refh}^*/\mu$, $M = U_{refh}^*/\sqrt{\gamma r T_{refh}^*}$ and $P_r = \mu c_p/k$. A small parameter $\epsilon = \gamma M^2$ is introduced in the following expansions:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 + \dots, & u_i &= u_{i0} + \epsilon u_{i1} + \dots \\ T &= T_0 + \epsilon T_1 + \dots, & p &= \frac{p_0}{\epsilon} + p_1 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Introducing this expansion into Eq. (1)-(4), an asymptotic expansion of the Navier-Stokes equations is obtained. Keeping the lowest order terms in ϵ provides our set of **LO-**

LMNA equations:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i0}}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho_0 u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i0} u_{j0}}{\partial x_j} = -\frac{\partial p_1}{\partial x_i} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij0}}{\partial x_j} \quad (8)$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_{i0}}{\partial x_i} = \frac{1}{R_e P_r T_0} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right) \quad (9)$$

$$p_0 = \rho_0 T_0 \quad (10)$$

Density inhomogeneities are not acoustic and the CFL number is doesn't depend on the sound velocity as would be the case for a compressible solver. Thus, the **LO-LMNA** solver is as efficient as an incompressible solver.

3 The Perturbed Low Mach Number Approximation

The equations (1)-(4) are perturbed using the decomposition

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho'_h, & u_i &= u_{i0} + u'_{ih}, \\ T &= T_0 + T'_h, & p &= \epsilon^{-1} p_0 + p_1 + p'_h. \end{aligned} \quad (11)$$

The primed quantities ρ'_h , u'_{ih} , T'_h and p'_h contain acoustic fields. As a matter of fact, identifying Eq. (11) with Eq. (6) reveals that these are the sum of all the fluctuations of order at least ϵ :

$$\begin{aligned} \rho'_h &= \epsilon \rho_1 + \epsilon^2 \rho_2 + \dots, & u'_{ih} &= \epsilon u_{i1} + \epsilon^2 u_{i2} + \dots, \\ T'_h &= \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots, & p'_h &= \epsilon p_2 + \epsilon^2 p_3 + \dots. \end{aligned} \quad (12)$$

The continuity equation Eq. (1) becomes:

$$\frac{\partial \rho'_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 u'_{jh} + \rho'_h u_{j0}) = \underbrace{\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{j0}}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (7)}}. \quad (13)$$

We proceed in the same way for the momentum equation Eq. (2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0 u'_{ih}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'_h u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_0 u_{i0} u'_{jh} + \rho_0 u'_{ih} u_{j0} + \rho'_h u_{i0} u_{j0}) \\ + \frac{\partial p'_h}{\partial x_i} = \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau'_{ijh}}{\partial x_j} \\ - \left(\underbrace{\epsilon^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial x_i}}_{=0 \text{ (10)}} + \underbrace{\frac{\partial \rho_0 u_{i0}}{\partial t} + \frac{\partial \rho_0 u_{i0} u_{j0}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_1}{\partial x_i} - \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ij0}}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (8)}} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

and the energy equation Eq. (3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_h}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial p'_h}{\partial x_j} + u'_{jh} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon^{-1} p_0 + p_1) + \gamma p'_h \frac{\partial u_{j0}}{\partial x_j} \\ + \gamma (\epsilon^{-1} p_0 + p_1) \frac{\partial u'_{jh}}{\partial x_j} = F_v - \left[\frac{\partial p_1}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial p_1}{\partial x_j} + \gamma p_1 \frac{\partial u_{j0}}{\partial x_j} \right] \\ - \left[\underbrace{\frac{\partial \epsilon^{-1} p_0}{\partial t} + u_{j0} \frac{\partial \epsilon^{-1} p_0}{\partial x_j}}_{=0 \text{ (10)}} + \underbrace{\gamma \epsilon^{-1} p_0 \frac{\partial u_{j0}}{\partial x_j} - \frac{\gamma \epsilon^{-1}}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T_0}{\partial x_j} \right)}_{=0 \text{ (9)}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

where

$$F_v = \frac{(\gamma - 1)}{R_e} (\tau_{ij0} + \tau'_{ijh}) \frac{\partial (u_{i0} + u'_{ih})}{\partial x_j} + \frac{\gamma \epsilon^{-1}}{R_e P_r} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial T'_h}{\partial x_j} \right). \quad (16)$$

For sufficiently high Reynolds numbers, viscous term are small enough to be neglected. The Perturbed Low Mach Number Approximation system (**PLMNA**) is finally:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_j + \rho' u_{j0a}) = 0 \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{0a} u'_i}{\partial t_a} + \rho' \frac{\partial u_{i0a}}{\partial t_a} + (\rho_{0a} u'_j + \rho' u_{j0a}) \frac{\partial u_{i0a}}{\partial x_j} \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_i u_{j0a}) + \frac{\partial p'}{\partial x_i} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t_a} + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p_{0a}}{\partial x_j} \right) \quad (19)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} (p' u_{j0a} + \gamma p_{0a} u'_j) = S_4$$

$$S_4 = - \left(\frac{D p_{0a}}{D t_a} + \gamma p_{0a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right) \quad (20)$$

where $D/D t_a = \partial/\partial t_a + u_{j0} \partial/\partial x_j$ is the convective derivative. The **PLMNA** equations (17)-(20) are normalized with respect to the acoustic reference quantities $\rho_{ref,a}^*$, $c_{ref,a}^*$ and $p_{ref,a}^*$ where $c_{ref,a}^*$ is the sound velocity and $t_{ref,a}^* = c_{ref,a}^*/L_{ref,a}^*$. That leads to the following relations:

$$\begin{aligned} u_{i0a} &= u_{i0} M, & p_{0a} &= \left(\frac{p_0}{\gamma} + p_1 M^2 \right) \frac{\rho_{ref,a}^*}{\rho_{ref,a}^*}, \\ \rho_{0a} &= \rho_0 \frac{\rho_{ref,a}^*}{\rho_{ref,a}^*}, & p_{1a} &= p_1 M^2 \frac{\rho_{ref,a}^*}{\rho_{ref,a}^*}, \\ t_a &= t M^{-1}, & L_{ref,a} &= L_{ref,a}^* \end{aligned} \quad (21)$$

with the $M = U_{ref,a}^*/c_{ref,a}^*$ the Mach number of the hybrid calculation. This solver is very similar to the Perturbed Compressible Equations (PCE) developed by Seo and Moon [8]. They proposed to filter the momentum equation Eq. (18) since it can strongly create perturbed vorticity. Indeed, taking the curl of Eq. (18), they derived a transport equation for the perturbed vorticity close to

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega'}{\partial t_a} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega' &= \underbrace{\left[(\boldsymbol{\Omega}_{0a} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{u}_{0a} \right]}_I \\ &- \underbrace{\left[(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}_{0a} + \boldsymbol{\Omega}_{0a} (\nabla \cdot \mathbf{u}') \right]}_II \\ &- \underbrace{\omega' (\nabla \cdot \mathbf{u}_{0a})}_III + \underbrace{\frac{1}{\rho_{0a}^2} (\nabla \rho_{0a} \wedge \nabla p')}_IV - \underbrace{\nabla \wedge \left(\frac{\rho'}{\rho_{0a}} \frac{D \mathbf{u}_{0a}}{D t_a} \right)}_V \end{aligned} \quad (22)$$

where $\boldsymbol{\Omega}_{0a} = \nabla \wedge \mathbf{u}_{0a}$ and $\omega' = \nabla \wedge \mathbf{u}'$ are the hydrodynamic and perturbed vorticity respectively. The term II is the main source of perturbed vorticity but doesn't contribute much to the radiated sound field [8]. The term I is zero for a two-dimensional case. The terms IV – V only cause diffusion of ω' . The term is absent in Seo and Moon's analysis since they consider a solenoidal flow. We reasonably neglect the right hand-side of Eq. (22) and obtain the perturbed vorticity free

or vorticity filtered system **PLMNA***:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_j + \rho' u_{j0a}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_{0a} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_j u_{j0a}) + \rho_{0a} u'_i \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p_{0a}}{\partial x_j} \right) & \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' u_{j0a} + \gamma p_{0a} u'_j) &= S_4 \\ S_4 &= - \left(\frac{D p_{1a}}{D t_a} + \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

4 From PLMNA to the Linearized Euler Equations

Let us consider the hydrodynamic quantities issued from the **LO-LMNA** solver as the sum of fluctuations x' about mean temporal averages values \bar{x} like:

$$u_{i0a} = \bar{u}_{i0a} + u''_{i0a}, \quad p_{0a} = \bar{p}_{0a} + p''_{0a}, \quad \rho_{0a} = \bar{\rho}_{0a} + \rho''_{0a}. \quad (24)$$

If we now substitute (24) in the **PLMNA** equations (17)-(20), we find:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}_{0a} u'_j + \rho' \bar{u}_{j0a} + \rho''_{0a} u'_j + \rho' u''_{j0a}) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho}_{0a} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial \rho''_{0a} u'_i}{\partial t_a} + \rho' \frac{\partial u''_{i0a}}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho}_{0a} u'_j u_{j0a} + \rho_{0a} u'_i u''_{j0a}) & \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho_{0a} u'_i \bar{u}_{j0a} + \rho''_{0a} u'_i u''_{j0a}) + (\bar{\rho}_{0a} u'_j + \rho' \bar{u}_{j0a}) \frac{\partial (\bar{u}_{i0a} + u''_{i0a})}{\partial x_j} & \\ + (\rho''_{0a} u'_j + \rho' u''_{j0a}) \frac{\partial (\bar{u}_{i0a} + u''_{i0a})}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' \bar{u}_{j0a} + \gamma \bar{p}_{0a} u'_j + p' u''_{j0a} + \gamma p''_{0a} u'_j) & \\ + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial \bar{u}_{j0a}}{\partial x_j} + p' \frac{\partial u''_{j0a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \bar{p}_{0a}}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial p''_{0a}}{\partial x_j} \right) &= S_4 \end{aligned} \quad (26)$$

In the same manner as done by B  chara *et al.* [14], we will neglect each term involving products of hydrodynamic x'' and acoustic fluctuations x' . We retrieve then the **LEE** with a source term $\mathbf{S}_E = (0, 0, 0, S_4)^T$ in the energy equation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u'_j + \rho' \bar{u}_j) &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\rho} u'_i}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} u'_j \bar{u}_i) + (\bar{\rho} u'_j + \rho' \bar{u}_j) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} &= 0 \\ \frac{\partial p'}{\partial t_a} + \frac{\partial}{\partial x_j} (p' \bar{u}_j + \gamma \bar{p} u'_j) + (\gamma - 1) \left(p' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} - u'_j \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) &= S_4 \\ S_4 &= - \left(\frac{D p_{1a}}{D t_a} + \gamma p_{1a} \frac{\partial u_{j0a}}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

where the mean hydrodynamic flow fields are

$$\begin{aligned} \bar{u}_i = \bar{u}_{i0a} = \bar{u}_{i0} M, \quad \bar{p} = \bar{p}_{0a} = \rho_{0a}^* \frac{\rho_{refa}^*}{\rho_{refa}^*}, \\ \bar{\rho} = \bar{\rho}_{0a} = \left(\frac{p_{0a}}{\gamma} + p_1 M^2 \right) \frac{\rho_{refa}^*}{\rho_{refa}^*}. \end{aligned} \quad (28)$$

The **LEE** are numerically solved using the same matrix formulation as the one employed by [2, 6] :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t_a} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} + \mathbf{H} = \mathbf{S} \quad (29)$$

where \mathbf{S} is the source term used to form the analogy. In our new method,

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_E = (0, 0, 0, S_4). \quad (30)$$

4.1 Classical formulation of the source terms

Bogey *et al.* [2] developed a different source term by deriving Lilley's wave equation from the **LEE** and consequently making the hypothesis of a strictly parallel mean flow with $\bar{u} = \bar{u}(y)$ and $\bar{v} = 0$. They also considered the mean pressure \bar{p} constant and the mean density and sound velocity only as function of the transverse coordinate y , $\bar{\rho} = \bar{\rho}(y)$ and $\bar{c} = \bar{c}(y)$. The source term is given by

$$\mathbf{S} = (0, S_2 - \bar{S}_2, S_3 - \bar{S}_3, 0) \quad (31)$$

where

$$S_2 = - \frac{\partial \rho u'_i u''_j}{\partial x_i}, \quad S_3 = - \frac{\partial \rho u'_i u''_j}{\partial x_j} \quad (32)$$

and \bar{S}_2, \bar{S}_3 are time averaged quantities. This expression of the source term was successfully used by [15, 2] to calculate noise radiated by mixing layers arisen from DNS and LES computations however, Bogey *et al.* neglected fluctuations of density, arguing that the triple product of fluctuations $\rho'' u'_i u''_j$ would be very small. Furthermore, they needed to nullify the term \mathbf{H} to cancel instabilities.

Comparing the expression of the source term Eq.(33) with Eq. (8) leads to

$$- \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} = \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \tau''_{ij0a}}{\partial x_j} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a}}{\partial t_a}. \quad (33)$$

We approximate mean velocity, pressure and dilatation fields of the **LEE** as temporal averages of the ones given by the **LO-LMNA** system of equations Eq. (7)-(10). The viscous term can be neglected, providing that the Reynolds number is sufficiently high. The source terms become:

$$- \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j} = \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a}}{\partial t_a}. \quad (34)$$

For isothermal cases, we expect the last term of the RHS of Eq. (35) not to radiate as stated by [16] since it is divergence free. Instead of acting on \mathbf{H} , we can use a simplified form of the source term \mathbf{S}_P and compare the results with classical \mathbf{S}_L terms where \mathbf{S}_P and \mathbf{S}_L are:

$$\mathbf{S}_P = \frac{\partial p''_{1a}}{\partial x_i}, \quad \mathbf{S}_L = - \frac{\partial \rho_{0a} u''_{i0a} u''_{j0a}}{\partial x_j}. \quad (35)$$

5 Application to a shear layer with density gradient

5.1 Flow configuration

We consider the spatial development of a bidimensional mixing layer between two streams of velocity, temperature

and density (U_u, T_u, ρ_u) and (U_d, T_d, ρ_d) respectively. The initial mean velocity field is given by hyperbolic-tangent profile

$$U(y) = \frac{U_u + U_d}{2} + \frac{U_u - U_d}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_{\omega_0}}\right) \quad (37)$$

where δ_{ω_0} is the initial vorticity thickness. The temperature profile is defined by the Crocco-Buseman relation

$$T(y) = \frac{1}{2C_p} \left[U(y)(U_u + U_d) - U_u U_d - U^2(y) \right] + (T_u - T_d) \frac{U(y)}{U_u - U_d} + \frac{T_d U_u - T_u U_d}{U_u - U_d} \quad (38)$$

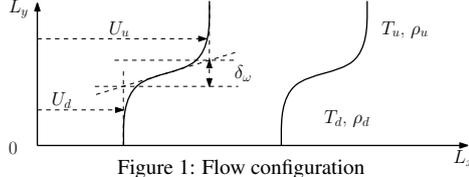


Figure 1: Flow configuration

This mean flow is forced with two subharmonics $f_0/2$ and $f_0/4$ where f_0 is the frequency of the most unstable mode as found by [17]. From now on, velocity and length are scaled with respect to the sound velocity c_0 and the initial vorticity thickness δ_{ω_0} . Compressible DNS calculation schemes used for comparison with the hybrid method are extensively explicit in [3]. The **LO-LMNA** solver is detailed in [6].

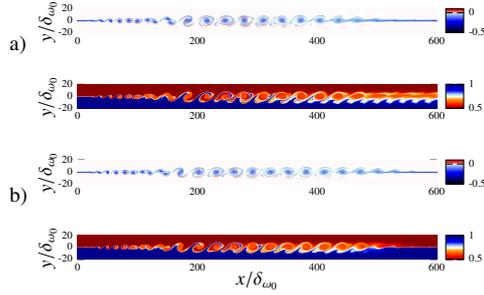


Figure 2: Up vorticity plot, down density plot: a) compressible DNS, b) **LO-LMNA**

Initially, the upper and lower velocity U_u and U_d (Figure 1) are set to 0.50 and 0.25 respectively with a Reynolds number $Re = 400$. In the following, two setups are used: an isothermal configuration (case1) with $T_u = T_d$ and $\rho_u = \rho_d$ and an anisothermal one (case2) with $T_u = 2T_d$ and $\rho_u = 0.5\rho_d$. Figure 2 shows a good agreement between compressible DNS and **LO-LMNA** calculations for the anisothermal case. The computational domain extends to $L_x = 600$, $L_y = 180$ with 1001×601 points for the case1 and $L_x = 600$, $L_y = 40$ with 1537×289 points for the case2. The x -direction is stretched from $x/\delta_{\omega_0} = 350$ where a buffer zone is also applied. Because of the gradient of density, the case2 needs to be more refined in the y -direction compared to case1. The acoustic computational domain is for both cases $L_x = 600$ and $L_y = 800$. Hydrodynamic fields are mapped on the acoustic grid and interpolated in time using a cubic spline scheme to match with the acoustic time t_a .

5.2 Results

For the case1, Figure 3, the reference compressible DNS solution a) is computed using 1035×431 grid points. Source terms are damped in the x -direction for the **PLMNA** b), the **PLMNA*** c) and the **LEE** with the source term in the energy equation **LEE+S_E** d). Only a very small buffer zone amounting to 1% of the calculated quantities was necessary to dissipate high frequency fluctuations. Pressure field b), c) and d) show a good agreement with the reference solution a). The filtering applied on the **PLMNA** is very efficient since the fluctuations appearing downstream of the pairing process on b) disappeared on c). For the **LEE** with the **S_L** and **S_P** terms respectively e) and f), damping in the x -direction isn't possible anymore since it creates additional radiation. The buffer zone needs to be more efficient and amount to 10% of the calculated quantities. This treatment also creates additional radiation that can change the directivity pattern. It is noticeable on e).

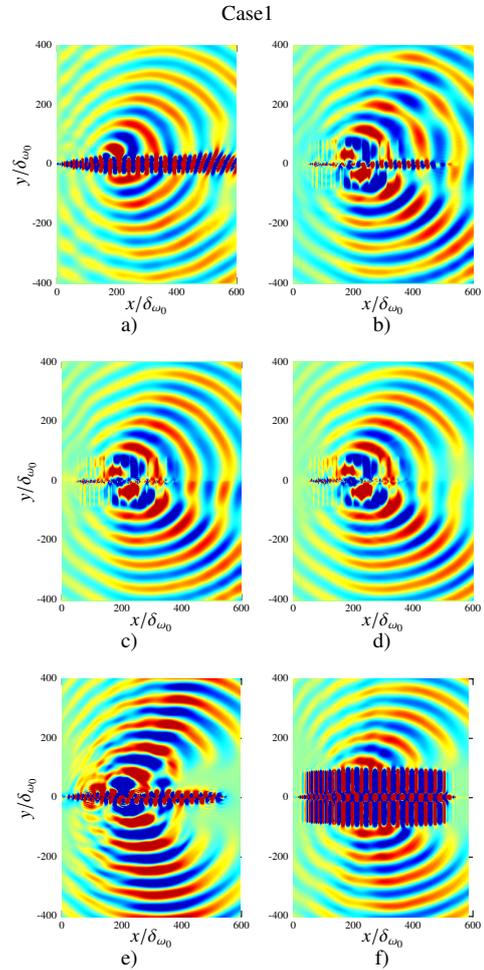


Figure 3: Pressure: a) compressible DNS, b) **PLMNA**, c) **PLMNA***, d) **LEE+S_E**, e) **LEE+S_L**, f) **LEE+S_P**, levels from -5.10^{-5} to 5.10^{-5} .

In the anisothermal flow of the case2 on Figure 4, the **LEE+S_L** and **LEE+S_P** were not able to predict a pressure

field similar to the reference solution a). The latter is computed using 2071×785 grid points. The **PLMNA**, **PLMNA***, gave similar results respectively b) and c). The directivity pattern is in great agreement with a). Therefore, the amplitude of pressure fluctuations is smaller by a factor about 4. That may be due to the size of the hydrodynamic domain in the y -direction that could be too small. Indeed, for the **LEE+S_E** on d), a greater hydrodynamic domain was used with $L_y = 80$ and the factor is only about 2.

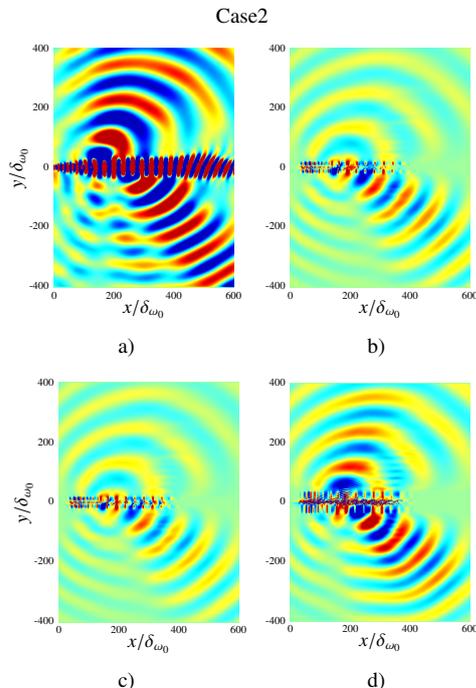


Figure 4: Pressure: a) compressible DNS, b) **PLMNA**, c) **PLMNA***, d) **LEE+S_E**, levels from $-2 \cdot 10^{-5}$ to $2 \cdot 10^{-5}$.

6 Conclusion

In this study, a hybrid method based on a low Mach number approximation and a perturbation of the Navier-Stokes equation was successfully used to compute the acoustic field caused by fluctuations of anisothermal flows. Source terms for the classical linearized Euler equations were straightforwardly developed from the perturbation equations giving a single term in the energy equation. The main advantage of the proposed method is the absence of any hypothesis on the shape of the background hydrodynamic flow field.

Acknowledgments

Part of the calculation resources were provided by the **IDRIS** (Institut du Développement et des Ressources en Informatique Scientifique, CNRS).

References

- [1] T. Colonius, S. K. Lele, and P. Moin. Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **330**:375–409, 1997.
- [2] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations. *AIAA Journal*, **40**(2):235–243, 2002.
- [3] E. Lamballais, V. Fortuné, and S. Laizet. Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. *J. Comp. Phys.*, **230**:3270–3275, 2011.
- [4] J.C. Hardin and D.S. Pope. An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **6**:323–340, 1994.
- [5] J.-H. Seo and Y. J. Moon. Perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at low Mach numbers. *AIAA Journal*, **43**:1716–1724, 2005.
- [6] C. Prax, F. Golanski, and L. Nadal. Control of the vorticity mode in the linearized Euler equations for hybrid aeroacoustic prediction. *J. Comp. Phys.*, **227**:6044–6057, 2008.
- [7] C.-D. Munz, M. Dumbser, and S. Roller. Linearized acoustic perturbation equations for low Mach number flow with variable density and temperature. *J. Comp. Phys.*, **224**:352–364, 2007.
- [8] J.-H. Seo and Y. J. Moon. Linearized perturbed compressible equations for low Mach numbers aeroacoustics. *J. Comp. Phys.*, **218**:702–719, 2006.
- [9] R. Ewert and W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comp. Phys.*, **188**:365–398, 2003.
- [10] K. Viswanathan. Jet aeroacoustic testing: Issues and implications. *AIAA Journal*, **41**(9):1674–1689, 2003.
- [11] K. Viswanathan. Aeroacoustic of hot jets. *J. Fluid Mech.*, **516**:39–82, 2004.
- [12] P. A. McMurtry, W.-H. Jou, J. J. Riley, and R. W. Metcalfe. Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release. *AIAA Journal*, **24**(6):962–970, 1986.
- [13] R. B. Pember, L. H. Howell, J. B. Bell, P. Colella, C. Y. Crutchfield, W. A. Fiveland, and J.P. Jessee. An adaptive projection method for unsteady, low Mach number combustion. *Combustion Science and Technology*, 1998.
- [14] W. Béchara, C. Bailly, P. Lafon, and S. Candel. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows. *AIAA Journal*, **32**(3):455–463, 1994.
- [15] M. Billson, L.-E. Erikson, and L. Davidson. Acoustic source terms for the linear Euler equations on conservative form. *AIAA paper*, **02-2582**, 2002.
- [16] B. T. Chu and L. S. G. Kovaszny. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *J. Fluid Mech.*, **3**(5):494–514, 1958.
- [17] A. Michalke. On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, **23**:521–544, 1965.

Bibliographie

- [1] A. S. ALMGREN, J. B. BELL, P. COLELLA, L . H. HOWELL et M. L. WELCOME : A conservative adaptative projection method for the variable density incompressible navier-stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 1998.
- [2] A. S. ALMGREN, J. B. BELL, C. A. RENDLEMAN et M. ZINGALE : Low Mach number modelling of type ia supernovae. i. hydrodynamics. *The Astrophysical J.*, **637**:922–936, 2006.
- [3] W. ASPRAY : *Computing before computers*. Iowa State University Press, Ames, IA, USA, 1990.
- [4] W. ASPRAY : *John von Neumann and the Origins of Modern Computing*. MIT Press, 1990.
- [5] C. BAILLY et D. JUVÉ : Numerical simulation of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA Journal*, **38**(1):22–29, 2000.
- [6] C. BAILLY, P. LAFON et S. CANDEL : A stochastic approach to compute noise generation and radiation of free turbulent flows. *AIAA paper*, **95-092**, 1995.
- [7] S. BARRÉ, C. BOGEY et C. BAILLY : Direct simulation of isolated elliptic vortices and of their radiated field. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **22**(1):65–82, 2008.
- [8] A. B. BASSET : *An Elementary Treatise on Hydrodynamics and Sounds*, pages 111–112. Cambridge University Press, 2nd édition, 1900.
- [9] G. K. BATCHELOR : *An Introduction to Fluid Dynamics*, pages 111–396. Cambridge University Press, 21st édition, 2002.
- [10] W. BÉCHARA, C. BAILLY, P. LAFON et S. CANDEL : Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows. *AIAA Journal*, **32**(3):455–463, 1994.

- [11] D. W. BECHERT et E. PFIZENMAIER : Amplification of jet noise by a higher mode acoustical excitation. *AIAA Journal*, 15:1268–1271, 1978.
- [12] H. A. BECKER et T. A. MASSARO : Vortex evolution in a round jet. *J. Fluid Mech.*, 31(03):435–448, 1968.
- [13] M. BILLSON, L.-E. ERIKSON et L. DAVIDSON : Acoustic source terms for the linear Euler equations on conservative form. *AIAA paper*, **02-2582**, 2002.
- [14] D. I. BLOKHINTSEV : Acoustics of a nonhomogeneous moving medium. TM 1399, NACA, 1946.
- [15] D. J. BODONY : Understanding the role of temperature in free shear flows via modification of the dynamics of the large scales. In *CFTR, Proceedings of the Summer Program*, pages 227–236, 2010.
- [16] C. BOGEY : *Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides*. Thèse de doctorat, École Centrale de Lyon, 2000.
- [17] C. BOGEY et C. BAILLY : A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comp. Phys.*, **194**:194–214, 2004.
- [18] C. BOGEY, C. BAILLY et D. JUVÉ : Numerical simulation of sound generated by vortex pairing in a mixing layer. *AIAA Journal*, **38**(12):2210–2218, 2000.
- [19] C. BOGEY, C. BAILLY et D. JUVÉ : Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations. *AIAA Journal*, **40**(2):235–243, 2002.
- [20] G. L. BROWN et A. ROSHKO : On density effects and large structure in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech.*, **64**(4):775–816, 1974.
- [21] A. J. CHORIN : A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Phys.*, **2**:12–26, 1967.
- [22] C. MOSER, E. LAMBALLAIS et Y. GERVAIS : Direct computation of the sound generated by isothermal and non-isothermal mixing layers. *AIAA paper*, **2006-2447**, 2006.
- [23] T. COLONIUS, S. K. LELE et P. MOIN : Sound generation in a mixing layer. *J. Fluid Mech.*, **330**:375–409, 1997.
- [24] T. COLONIUS et S. K. LELE : Computational aeroacoustics : progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, **40**:345–416, 2004.
- [25] P. COMTE, M. LESIEUR et E. LAMBALLAIS : Large- and small-scale stirring of vorticity and a passive scalar in 3-D temporal mixing layer. *Phys. Fluids A*, **4**(12):2761–2778, 1992.
- [26] A. W. COOK et J. J. RILEY : Direct numerical simulation of a turbulent reactive plume on a parallel computer. *J. Comp. Phys.*, **129**:263–283, 1996.

- [27] D. J. CRIGHTON : Basic principles of aerodynamic noise generation. *Prog. Aerospace Sci.*, **16**(1):31–96, 1975.
- [28] S. C. CROW et F. C. CHAMPAGNE : Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech.*, **48**:547–591, 1971.
- [29] N. CURLE : The influence of solid boundaries on aerodynamic sound. *Proc. Roy. Soc. London*, **231**:505–514, 1955.
- [30] G. DAVILLER : *Étude Numérique des Effets de Température dans les jets Simples et Co-axiaux*. Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique et d’Aéronautique, 2010.
- [31] P. E. DOAK : Analysis of internally generated sound in continuous materials : 2. a critical review of the conceptual adequacy and physical scope of existing theories of aerodynamic noise, with special reference to supersonic jet noise. *Journal of Sound and Vibration*, **25**(2):263–335, 1972.
- [32] R. EWERT, M. MEINKE et W. SCHRÖDER : Comparison of source term formulations for a hybrid CFD/CAA method. *AIAA paper*, **01-2200**, 2001.
- [33] R. EWERT et W. SCHRÖDER : Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *J. Comp. Phys.*, **188**:365–398, 2003.
- [34] A. T. FEDORCHENKO : Fundamental flaws in aeroacoustic theory. *J. Sound Vib.*, **232**(4):719–782, 2000.
- [35] J. E. FFOWCS WILLIAMS et D. L. HAWKINGS : Sound generation by turbulence and surfaces in arbitrary motion. *Proc. Roy. Soc. London A*, **264**:321–342, 1969.
- [36] M. J. FISHER, P. A. LUSH et M. HARPER BOURNE : Jet noise. *J. Sound Vib.*, **28**(3):563–585, 1973.
- [37] J. FONTANE : *Transition des écoulements cisailés libres à densité variable*. Thèse de doctorat, Institut Nationale Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [38] V. FORTUNÉ : *Étude par Simulation Numérique Directe du rayonnement acoustique de couches de mélange isothermes et anisothermes*. Thèse de doctorat, École Supérieure d’Ingénieurs de Poitiers, 2000.
- [39] V. FORTUNÉ, E. LAMBALLAIS et Y. GERVAIS : Study of temperature effects on radiated noise from mixing layers using DNS. *AIAA paper*, **2001-2257**, 2001.
- [40] J. B. FREUND : Acoustic sources in a turbulent jet : a direct numerical simulation study. *AIAA paper*, **99-1858**, 1999.
- [41] J. B. FREUND, S. K. LELE et P. MOIN : Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. part 1. turbulence and growth rate. *J. Fluid Mech.*, **421**:229–267, 2000.

- [42] J. B. FREUND, S. K. LELE et P. MOIN : Compressibility effects in a turbulent annular mixing layer. part 2. mixing of a passive scalar. *J. Fluid Mech.*, **421**:269–292, 2000.
- [43] A. GIAUQUE et H. PITSCH : Detailed modeling of combustion noise using a hydrodynamic/acoustic splitting technique. Rapport technique, Center for Turbulence Research, 2008.
- [44] F. GOLANSKI : *Méthode hybride pour le calcul du rayonnement acoustique d'écoulements anisothermes à faibles nombres de Mach*. Thèse de doctorat, École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 2004.
- [45] F. GOLANSKI, C. PRAX, E. LAMBALLAIS, V. FORTUNÉ et J.-C VALIÈRE : An aeroacoustic hybrid approach for non-isothermal flows at low Mach number. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, **45**:441–461, 2004.
- [46] M. E. GOLDSTEIN : *Aeroacoustics*. Mc Graw Hill International, 1976.
- [47] M. E. GOLDSTEIN : On identifying the true sources of aerodynamic sound. *J. Fluid Mech.*, **526**:337–347, 2005.
- [48] L. GUTIN : Über das schallfeld einer rotierenden luftschraube. *Phys. Zeitschr. der Sowjetunion*, Ed.9, Heft 1:57–71, 1936.
- [49] J.C. HARDIN et D.S. POPE : An acoustic/viscous splitting technique for computational aeroacoustics. *Theoret. Comput. Fluid Dynamics*, **6**:323–340, 1994.
- [50] C. HIRSCH : *Numerical Computation of Internal and External Flows*, volume 1. John Wiley and Sons, New York, seconde édition, 2007.
- [51] C. M. HO et P. HUERRE : Perturbed free shear layers. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**:365–424, 1984.
- [52] M. S. HOWE : Contributions to the theory of aerodynamic sound, with applications to excess jet noise and the theory of the flute. *J. Fluid Mech.*, **71**(4):625–673, 1975.
- [53] M. S. HOWE : *Theory of Vortex Sound*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [54] T. KAMBE, T. MINOTA et M. TAKAOKA : Acoustic wave radiated by head-on collisions of two vortex rings. *Proc. Roy. Soc. London E*, **48**:1866–1881, 1993.
- [55] S. LAIZET : *Développement d'un code de calcul combinant des schémas de haute précision avec une frontière immergée pour la simulation des mouvements tourbillonnaires en aval d'un bord de fuite*. Thèse de doctorat, École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 2005.
- [56] H. LAMB : *Hydrodynamics*, pages 86–89, 232–233. Cambridge University Press, 7th édition, 1975.

- [57] E. LAMBALLAIS : *Simulation numérique de la turbulence dans un canal plan tournant*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1996.
- [58] E. LAMBALLAIS, V. FORTUNÉ et S. LAIZET : Straightforward high-order numerical dissipation via the viscous term for direct and large eddy simulation. *J. Comp. Phys.*, **230**:3270–3275, 2011.
- [59] S. LARDEAU : *Simulation numérique directe du contrôle d'écoulements cisailés libres par injection de fluide*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [60] D. J. LEE et S. O. KOO : Numerical study of sound generation due to a spinning vortex pair. *AIAA Journal*, **33**(1):20–26, 1995.
- [61] S. K. LELE : Compact finite difference scheme with spectral-like resolution. *J. Comp. Phys.*, **103**:16–42, 1992.
- [62] M. J. LIGHTHILL : On sound generated aerodynamically I General theory. *Proc. Roy. Soc. London A*, **211**:567–587, 1952.
- [63] M. J. LIGHTHILL : On sound generated aerodynamically II Turbulence as a source of sound. *Proc. Roy. Soc. London A*, **223**:1–32, 1954.
- [64] G.M. LILLEY : The generation and radiation of supersonic jet noise. Vol IV : Theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources and combustion noise. *AFAPL report*, **53**, 1972.
- [65] G.M. LILLEY : On the noise from jets. *AGARD Conference Proceedings*, **131**, 1974.
- [66] R. MANI : The influence of jet flow noise. part 1. the noise of unheated jets. *J. Fluid Mech.*, **73**(4):753–778, 1975.
- [67] R. MANI : The influence of jet flow noise. part 2. the noise of heated jets. *J. Fluid Mech.*, **73**(4):779–793, 1975.
- [68] F. MARGNAT : *Méthode numérique hybride pour l'étude du rayonnement acoustique d'écoulements turbulents pariétaux*. Thèse de doctorat, École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 2005.
- [69] P. A. MCMURTRY, W.-H. JOU, J. J. RILEY et R. W. METCALFE : Direct numerical simulations of a reacting mixing layer with chemical heat release. *AIAA Journal*, **24**(6): 962–970, 1986.
- [70] W. MÖHRING : On vortex sound at low Mach number. *J. Fluid Mech.*, **85**:685–691, 1978.
- [71] W. MÖHRING : *Mechanics of Sound Generation in Flows*. Springer, 1979.
- [72] A. MICHALKE : On spatially growing disturbances in an inviscid shear layer. *J. Fluid Mech.*, **23**:521–544, 1965.

- [73] A. MICHALKE AND U. MICHEL : Prediction of jet noise in flight from static tests. *J. Sound Vib.*, **67**(3):347–367, 1979.
- [74] B. E. MITCHELL, S. K. LELE et P. MOIN : Direct computation of the sound generated by vortex pairing in an axisymmetric jet. *J. Fluid Mech.*, **383**:113–142, 1999.
- [75] W. MÖHRING, E.-A. MÜLLER et F. OBERMEIER : Problems in flow acoustics. *Reviews of Modern Physics*, **55**(3), 1983.
- [76] C. L. MORFEY : Amplification of aerodynamic noise by convected flow inhomogeneities. *J. Sound Vib.*, **31**(4):391–397, 1973.
- [77] C. L. MORFEY, V. M. SZEWCZYK et B. J. TESTER : New scaling laws for hot and cold jet mixing noise based on a geometric acoustics model. *J. Sound Vib.*, **61**(2):255–292, 1978.
- [78] C. MOSER : *Calcul direct du son rayonné par une couche de mélange en développement spatial : étude des effets du nombre de Mach et de l'anisothermie*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers, 2006.
- [79] B. MÜLLER : On sound generation by the kirchhoff vortex. Rapport technique **209**, Department of Scientific Computing, Uppsala University, October 1998.
- [80] E.-A. MÜLLER et F. OBERMEIER : The spinning vortices as a source of sound. *AGARD Conference Proceedings*, **22**:22–22–8, 1967.
- [81] C.-D. MUNZ, M. DUMBSER et S. ROLLER : Linearized acoustic perturbation equations for low Mach number flow with variable density and temperature. *J. Comp. Phys.*, **224**:352–364, 2007.
- [82] C.-D. MUNZ, M. DUMBSER et M. ZUCCHINI : The multiple pressure variables method for fluid dynamics and aeroacoustics at low Mach number. *CEMRACS*, 2003.
- [83] C. NANA, D. MARX, C. PRAX et V. FORTUNÉ : The perturbed low Mach number approximation for the aeroacoustic computation of anisothermal flows. *In Acoustics2012 Proceedings, Nantes*, 2012.
- [84] F. NICLOUD : Conservative high-order finite-difference schemes for low-Mach number flows. *J. Comp. Phys.*, **158**:71–97, 2000.
- [85] R. B. PEMBER, L. H. HOWELL, J. B. BELL, P. COLELLA, C. Y. CRUTCHFIELD, W. A. FIVELAND et J.P. JESSEE : An adaptative projection method for unsteady, low Mach number combustion. *Combustion Science and Technology*, 1998.
- [86] O.M. PHILLIPS : On the generation of sound by supersonic turbulent shear layer. *J. Fluid Mech.*, **9**(1):1–28, 1960.
- [87] A. POWELL : Theorie of vortex sound. *J. Acoust. Soc. Am.*, **36**:177–195, 1964.

- [88] C. PRAX, F. GOLANSKI et L. NADAL : Control of the vorticity mode in the linearized euler equations for hybrid aeroacoustic prediction. *J. Comp. Phys.*, **227**:6044–6057, 2008.
- [89] William PRESS, Saul TEUKOLSKY, William VETTERLING et Brian FLANNERY : *Numerical Recipes in Fortran*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd édition, 1989.
- [90] J. REINAUD, L. JOLY et P. CHASSAING : The baroclinic secondary instability of the two-dimensional shear layer. *Phys. Fluids*, **12**(10):2489–2505, 2000.
- [91] H. S. RIBNER : Perspectives on jet noise. *AIAA Journal*, **19**(12):1513–1526, 1981.
- [92] H.S. RIBNER : The generation of sound by turbulent jets. volume 8 de *Advances in Applied Mechanics*, pages 103 – 182. Elsevier, 1964.
- [93] S.K RICHARDS, X ZHANG, X.X CHEN et P.A NELSON : The evaluation of non-reflecting boundary conditions for duct acoustic computation. *J. Sound Vib.*, **270**(3):539–557, 2004.
- [94] P. SAGAUT : *Large Eddy Simulation for Incompressible flows*. Springer, first edition édition, 2001.
- [95] J.-H. SEO et Y. J. MOON : Perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at low Mach numbers. *AIAA Journal*, **43**:1716–1724, 2005.
- [96] J.-H. SEO et Y. J. MOON : Linearized perturbed compressible equations for low Mach numbers aeroacoustics. *J. Comp. Phys.*, **218**:702–719, 2006.
- [97] A. SHARMA et S. K. LELE : Effect of heating on noise radiation of a two-dimensional mixing layer : direct computation and acoustic analogy predictions. *AIAA paper*, 2011.
- [98] W.Z. SHEN et J.N. SØRENSEN : Aeroacoustic modelling of low-speed flows. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, **13**:271–289, 1999. 10.1007/s001620050118.
- [99] S. SINAYOKO, A. AGARWAL et Z. ZHU : Flow decomposition and aerodynamic sound generation. *J. Fluid Mech.*, **668**:335–350, 2011.
- [100] S. A. SLIMON, M. C. SOTERIOU et D. W. DAVIS : Development of computational aeroacoustics equations for subsonic flows using a Mach number expansion approach. *J. Comp. Phys.*, **159**:377–406, 2000.
- [101] J. SMAGORINSKY : General circulation experiments with the primitive equations. *Mon. Weath. Rev.*, **91**(3):99–164, 1963.
- [102] P. R. SPALART : Strategies for turbulence modelling and simulations. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, **21**:252–263, 2000.
- [103] W. SUTHERLAND : The viscosity of gases and molecular force. *Philosophical Magazine (S.5)*, **36**:507–531, 1893.

- [104] C. K. W. TAM : Computational aeroacoustics : Issues and methods. *AIAA Journal*, **33**(10):1788–1796, 1995.
- [105] C.K.W. TAM et Z. DONG : Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *AIAA paper*, **95-007**, 1995.
- [106] C.K.W. TAM et Z. DONG : Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a nonuniform mean flow. *J. Comp. Phys.*, **4**(2):175–201, 1996.
- [107] C.K.W. TAM et H. SHEN : Direct computation of nonlinear acoustic pulses using high-order finite difference schemes. *AIAA paper*, **93-4325**, 1993.
- [108] C.K.W. TAM et J.C. WEBB : Dispersion-Relation-Preserving finite difference schemes for computational acoustics. *J. Comp. Phys.*, **107**:262–281, 1993.
- [109] M. VAN DYKE : *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Parabolic Press, Stanford, CA, 1975.
- [110] G. H. VATISTAS, V.KOZEL et W. C. MIH : A simpler model for concentrated vortices. *Experiments in Fluids*, **11**:73–76, 1991.
- [111] K. VISWANATHAN : Jet aeroacoustic testing : Issues and implications. *AIAA Journal*, **41**(9):1674–1689, 2003.
- [112] K. VISWANATHAN : Aeroacoustic of hot jets. *J. Fluid Mech.*, **516**:39–82, 2004.
- [113] F. M. WHITE : *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, Inc., seconde édition, 1974.
- [114] J. H. WILLIAMSON : Low-storage runge kutta schemes. *J. Comp. Phys.*, **35**:48–56, 1980.
- [115] C. D. WINANT et F. K. BROWAND : Vortex pairing : the mechanism of turbulent mixing-layer growth at moderate Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, **63**(2):237–255, 1974.
- [116] J. E. YATES : Application of the bernoulli enthalpy concept to the study of vortex noise and jet impingement noise. *NASA Contractor Report*, 2987, 1978.