



HAL
open science

Suivi de fronts par des méthodes de raffinement de maillage adaptatif et application à la simulation du procédé de récupération Steam Assited Gravity Drainage

Magnolia Mamaghani

► **To cite this version:**

Magnolia Mamaghani. Suivi de fronts par des méthodes de raffinement de maillage adaptatif et application à la simulation du procédé de récupération Steam Assited Gravity Drainage. Optimisation et contrôle [math.OC]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2010. Français. NNT : 2010CLF22014 . tel-00740906

HAL Id: tel-00740906

<https://theses.hal.science/tel-00740906>

Submitted on 11 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D. U. 2014

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
(U.F.R de Sciences et Technologies)
ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES
N° : 636

IFP
(Laboratoire d'accueil : Direction Ingénierie des réservoirs)

Thèse

présentée par

MAMAGHANI Magnolia
Diplômée d'un Master Spécialisé en Calculs Scientifiques Appliqués

pour obtenir le grade de
DOCTEUR D'UNIVERSITÉ
SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

SUIVI DE FRONTS PAR DES MÉTHODES DE RAFFINEMENT DE MAILLAGE
ADAPTATIF ET APPLICATION À LA SIMULATION DU PROCÉDÉ DE
RÉCUPÉRATION STEAM ASSISTED GRAVITY DRAINAGE

Soutenue publiquement le 02 février 2010, devant la commission d'examen.

Président : Robert EYMARD.

Examineurs : Claire CHAINAIS-HILLAIRET, Jérôme DRONIOU, Guillaume ENCHÉRY,
Stéphane LABBÉ, Roland MASSON, Rachid TOUZANI.

Introduction

Pendant l'année 2008, l'idée d'un pétrole de moins en moins disponible et à des prix de plus en plus chers était dans tous les esprits. Les décalages entre l'offre et la demande ont participé à ce que les prix du baril augmentent de façon exceptionnelle jusqu'en milieu d'année. Malgré une baisse des prix toute aussi rapide ensuite, les besoins croissants des pays en développement et les contraintes sur les ressources pétrolières font que les compagnies pétrolières investissent de plus en plus en R&D. Un enjeu énergétique actuel, dans le secteur de l'amont pétrolier, est le développement de technologies qui permettraient d'obtenir de meilleurs taux de récupération ou qui rendraient possible l'exploitation de gisements connus auparavant comme inexploitable.

Le progrès technologique est un important facteur à prendre en compte pour l'évaluation des réserves. En effet, par le terme de réserves, on ne parle pas de ce qui reste effectivement sous terre, mais de la quantité de pétrole exploitable aujourd'hui ou qui pourrait être exploité dans le futur sous réserve de posséder les technologies adéquates et sous réserve d'un coût de production rentable. On distingue ainsi du pétrole conventionnel (celui exploité actuellement), le pétrole non-conventionnel qui regroupe des volumes considérables d'hydrocarbures, aujourd'hui à maturité, qu'on ne sait pas extraire.

Par pétrole non-conventionnel on parle par exemple de pétrole lourd, extra-lourd et de bitume. Les accumulations en bruts lourds, dont recèle le sous-sol, représentent un potentiel majeur de réserves énergétiques pour le futur. Elles se trouvent un peu partout dans le monde (Moyen-Orient, Russie, Mexique, Brésil) mais la majeure partie se concentre au Canada (au bord du lac Athabasca) et au Venezuela (sur les rives de l'Orénoque). Bien qu'en grande quantité, l'exploitation de ces bruts reste limitée car les pays qui les possèdent préfèrent concentrer leurs efforts sur les ressources plus faciles à récupérer. D'une consistance visqueuse à quasi solide, ils ne peuvent être pompés sans être au préalable chauffés ou dilués. Il faut donc avoir recours à des procédés de la récupération assistée améliorée, qui permettent, par divers moyens, de chauffer l'huile en place pour diminuer sa viscosité et favoriser son écoulement vers les puits producteurs.

Malgré son coût d'exploitation relativement élevé et ses consommations importantes en eau et en énergie, le Steam Assisted Gravity Drainage (SAGD) est le procédé de récupération thermique sur lequel plusieurs compagnies pétrolières fondent de grands espoirs. Ce procédé consiste en deux puits horizontaux forés l'un au dessus de l'autre à quelques mètres d'écart. De la vapeur est injectée dans le réservoir par le puits supérieur ce qui provoque la formation d'une chambre. L'huile située au voisinage des parois de la chambre se réchauffe et descend ensuite par gravité vers le puits producteur en même temps que de l'eau liquide issue de la condensation de la vapeur.

Le développement de gisements par SAGD nécessite de mettre en oeuvre des technologies coûteuses qui présentent, de plus, de nombreux risques techniques, économiques et environnementaux. La simulation numérique de ce procédé est alors un outil appréciable qui permet de comprendre les mécanismes physiques déterminants, mais aussi de fournir des estimations de production et d'aider à la décision en rendant possible l'évaluation des investissements et des risques associés.

Cependant, les simulations numériques du SAGD présentent des inconvénients non négligeables. C'est le suivi de l'interface d'écoulement qui constitue une difficulté majeure dans la simulation du procédé. Le problème est que la zone d'écoulement de l'huile est peu épaisse en pratique (de quelques décimètres en début de simulation à quelques mètres ensuite) comparée aux dimensions du réservoir. Ainsi, la discrétisation en espace doit être assez fine si l'on souhaite obtenir des résultats qui ne dépendent pas de la résolution de la grille et si l'on souhaite prédire de façon relativement précise la production en huile. Il faut donc parfois utiliser des mailles dont les dimensions ne dépassent pas le mètre, ce qui peut amener à des simulations à plusieurs millions de mailles dans des cas réels : cela entraîne alors des temps globaux de simulation extrêmement longs. C'est pourquoi il est nécessaire d'utiliser une technique de sous-maillage dynamique pour suivre le déplacement de l'interface d'écoulement, dans le but d'avoir de fines cellules uniquement dans cette zone et des cellules plus grossières en dehors. Ainsi le nombre total de cellules est réduit tout comme les temps de calculs.

Des études récentes sur l'utilisation de méthodes de raffinement de maillage adaptatif pour le problème d'injection de vapeur en milieu poreux ont déjà été publiées ([10], [46]). L'interface d'écoulement est généralement détectée par des gradients de température et de saturations, ou même par des valeurs seuils de ces variables ([30]). Ces études ont montré que l'utilisation d'une technique de sous-maillage dynamique pouvait permettre d'atteindre une certaine précision dans les résultats tout en diminuant les temps de calculs. Malgré les gains en temps observés, pour ajuster l'amplitude des gradients il est nécessaire de faire quelques calculs sur grille entièrement fine.

À l'IFP, un générateur de maillages adaptatifs a été développé pour la simulation du SAGD. Couplé au simulateur de réservoir *Puma^{FLOW}*, il permet de mettre à jour régulièrement le maillage au cours de la simulation en raffinant localement les mailles situées dans la zone d'écoulement.

L'objet principal de ce travail de thèse consiste à définir de nouveaux critères de raffinement pour ce générateur de maillages adaptatifs. Basés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour des schémas volumes finis pour des équations hyperboliques non linéaires, nous verrons que les nouveaux critères que nous proposons ont la particularité d'avoir des bornes supérieures qui ne dépendent que des données initiales du problème. Nous verrons de plus, qu'en milieux homogène et hétérogène, ils permettent d'éviter un raffinement trop important, notamment celui de zones où il n'y a pas d'écoulement.

Ce manuscrit s'organise de la façon suivante.

Chapitre 1

Dans ce chapitre, nous présentons le principe du SAGD et le modèle mathématique associé.

Après la définition des différentes grandeurs physiques intervenant dans la modélisation de fluides en milieu poreux, nous présentons les différents mécanismes d'exploitation des hydrocarbures. Nous verrons précisément en quoi consistent les méthodes d'extraction thermiques, et particulièrement, le principe du procédé SAGD.

Nous introduisons ensuite les différentes lois de conservation et les équations de continuité qui décrivent le modèle de réservoir "dead oil thermique" (modèle mathématique de notre étude). Nous rappellerons l'influence de la température et de la pression sur les différentes propriétés des fluides ainsi que sur les propriétés thermodynamiques.

Nous terminons le chapitre avec la définition des conditions initiales et des conditions d'exploitation qui reviennent à imposer des conditions aux limites à certains endroits du réservoir (injection de vapeur par le puits injecteur, production d'eau et d'huile par le puits producteur, etc.).

Chapitre 2

Le but ici est de rappeler l'intérêt d'une méthode de raffinement de maillage adaptatif pour la simulation du SAGD.

Nous allons tout d'abord présenter le simulateur de réservoir *Puma*^{FLOW} et le modèle numérique implémenté dans ce logiciel.

Des premiers tests numériques sur un cas synthétique montreront l'influence de la taille des mailles sur les profils de production en huile. Ainsi, le raffinement de maillage adaptatif apparaît comme un bon compromis entre précision des résultats et temps de calculs.

Nous introduisons alors brièvement le principe du raffinement de maillage adaptatif. Nous présentons ensuite, plus particulièrement, la méthode mise en place à l'IFP pour la modélisation du SAGD.

Enfin, nous présentons des premiers résultats où la stratégie de raffinement est basée sur des températures seuils. Malgré les gains en temps observés, nous verrons que l'utilisation de températures seuils comme critère de raffinement limite les performances de l'adaptation du maillage en milieux homogènes. Nous montrerons de plus que cette technique de raffinement n'est pas appropriée en milieux hétérogènes.

Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous définissons, pour la méthode IFP, une nouvelle stratégie de raffinement basée sur une estimation d'erreur *a posteriori* pour des schémas volumes finis pour des équations hyperboliques non linéaires.

Le modèle mathématique du problème SAGD étant complexe, nous focalisons notre étude sur l'équation de conservation de la masse de l'huile. Après quelques simplifications, nous récrivons cette loi de conservation en une équation hyperbolique non linéaire connue.

A partir de l'estimation d'erreur *a posteriori* pour des schémas volumes finis pour des équations hyperboliques non linéaires mise au point par D. Kröner et M. Ohlberger [28], nous présentons les principaux résultats mathématiques aboutissant à la construction de nouveaux critères de raffinement.

Ensuite, nous poursuivons par une application de ces nouveaux critères en milieux homogènes et hétérogènes. Nous comparons alors les résultats où les critères de raffinement sont dans un cas le critère dérivé de l'estimation d'erreur *a posteriori* et dans l'autre cas des températures seuils. Nous comparons également ces résultats avec ceux obtenus pour le cas fin de référence. Les points importants que nous regardons sont le maillage obtenu pour les deux critères étudiés, le cumulé d'huile produit, la réduction du nombre de mailles et les gains en temps de calculs.

Chapitre 4

Dans ce chapitre, nous définissons une stratégie de raffinement basée sur une estimation d'erreur *a posteriori* pour des systèmes hyperboliques symétriques. Il s'agit d'une étude académique qui fait

suite aux travaux de J.P. Vila et P. Villedieu [45].

De façon quasi analogue à celle menée par D. Kröner et M. Ohberger dans [28], comme l'ont fait V. Jovanović et C. Rohde [26], nous reprenons l'étude de J.P. Vila et P. Villedieu [45] sur la convergence d'un schéma volumes finis pour des systèmes de type Friedrichs.

A partir du résultat fondamental de J.P. Vila et P. Villedieu sur le contrôle de l'erreur à l'aide de termes de mesures, nous démontrons une estimation d'erreur *a posteriori* en norme L^2 . Les techniques de passage de l'estimation d'erreur *a priori* à l'estimation d'erreur *a posteriori* sont similaires à celles utilisées dans le chapitre 3.

Nous définissons ensuite les estimateurs d'erreur locaux à partir desquels nous construisons une technique de raffinement de maillage adaptatif.

Enfin, nous terminons par la validation de cette méthode à travers quelques simulations numériques.

I. Quelques notions d'ingénierie de réservoir et présentation de la modélisation du procédé SAGD

Depuis la récente fluctuation des prix, les compagnies pétrolières investissent de plus en plus en R&D afin d'augmenter les taux de récupération, d'exploiter des gisements difficiles (comme des réservoirs de bruts lourds, fracturés ou très peu perméables), d'optimiser la production de champs matures ou la production de gisements en grands fonds, avec un souci de rentabilité, tout en essayant de préserver l'environnement. C'est dans ce contexte que l'ingénierie de réservoir, qui a pour objectif d'améliorer l'évaluation, le développement et l'exploitation des gisements, suit son évolution.

Dans ce chapitre introductif, nous allons rappeler, dans un premier temps, le processus de formation des réservoirs d'hydrocarbures, ainsi que les caractéristiques physiques qui les définissent.

Nous verrons ensuite que, lorsque les forces naturelles de ces réservoirs ne permettent pas une bonne récupération des hydrocarbures en place, différents procédés d'extraction peuvent être envisagés.

Parmi ces procédés, des techniques de récupération très élaborées, telles que les méthodes thermiques, connaissent aujourd'hui un regain d'intérêt qui se justifie par la recherche d'un meilleur taux de récupération et par le besoin d'exploiter des gisements inexploitable autrement. Nous verrons ainsi, en quoi consiste le procédé thermique : Steam Assisted Gravity Drainage (SAGD). Le modèle mathématique que nous allons utiliser pour la simulation de ce procédé est le modèle dead-oil thermique. Après une courte description des modèles de réservoirs, nous introduisons les différentes lois qui modélisent les écoulements dans le réservoir, soient : la loi de Darcy, la loi de conservation des masses de chaque composant, la loi de conservation de l'énergie, les relations d'équilibre des phases et la loi de conservation du volume poreux. Cela conduit à un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires dont les inconnues sont les pressions, les saturations de chacune des phases et la température.

1 Formation et caractérisation d'un réservoir

1.1 Formation et migration des hydrocarbures

Les hydrocarbures sont issus de transformations diverses et successives de matières organiques, qui tirent leur origine du phytoplancton marin et de plantes terrestres [15].

Le processus de formation de ces hydrocarbures, qui peut s'étaler sur une période allant d'une dizaine de millions à quelques centaines d'années, débute par une sédimentation : les restes des matières organiques sont transportés par l'eau et enfouis en milieu marin ou fluvial (Figure I.1).

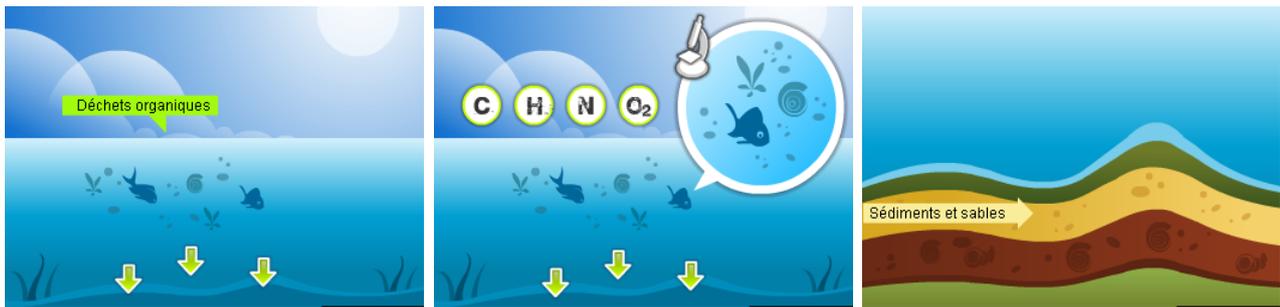


Fig. I.1: Sédimentation [20]

Au fur et à mesure que les sédiments s'enfouissent, ils subissent une subsidence qui est accompagnée par une augmentation de la chaleur et de la pression. Les matières organiques, qui n'ont pas été détruites par oxydation lors de l'enfouissement, contiennent du kérogène qui devient instable avec la montée en température. Les hydrates de carbone craquent alors en hydrocarbures (voir la Figure I.2) : on parle de craquage thermique.

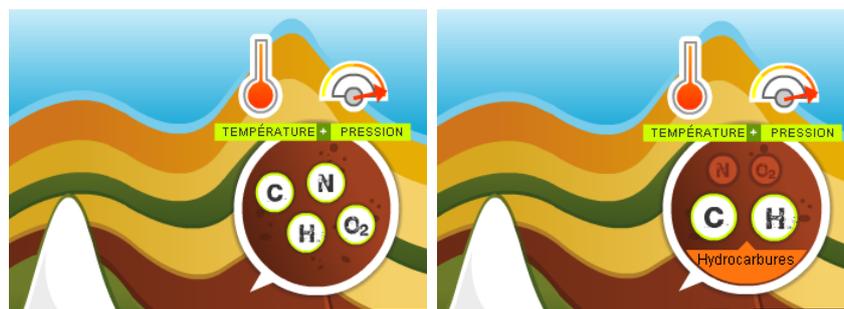


Fig. I.2: Compaction [20]

Les hydrocarbures ainsi formés au sein des roches mères (de très fines roches sédimentaires riches en kérogène et ayant atteint des conditions de température et de pression nécessaires à la formation d'huile et de gaz), sont ensuite très généralement expulsés vers des zones à pression plus faible ; c'est la pression, exercée par les couches rocheuses susjacentes, associée à la gravité qui provoque cette migration (dite migration primaire) des hydrocarbures vers des couches sédimentaires supérieures.

Les densités du gaz et de l'huile étant plus faibles que celle de l'eau, les hydrocarbures remontent jusqu'à ce qu'ils soient emprisonnés dans des roches sédimentaires poreuses, telles que du grès ou du calcaire situés sous des barrières moins perméables (comme des argiles), ou jusqu'à ce qu'ils atteignent la surface (Figure I.3).

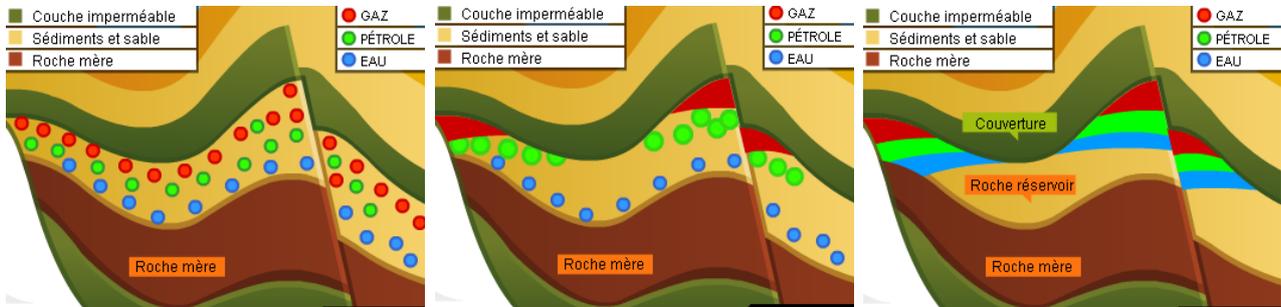


Fig. I.3: Migration [20]

Une fois piégé, le pétrole peut être encore dégradé suite à des infiltrations d'eau et de bactéries. Cela détruit les composés légers des hydrocarbures. À de faibles profondeurs, dans des sables très perméables, la dégradation se fait plus rapidement et peut aboutir à du pétrole lourd ou du bitume.

1.2 Les roches sédimentaires

Une fois qu'un gisement a été identifié dans un bassin, l'ingénieur réservoir essaie d'estimer trois quantités par divers procédés (telles que les mesures sur carottes en laboratoire ou l'étude des diagraphies) : la porosité, les saturations d'huile et de gaz et la perméabilité. Les deux premières permettent d'estimer les volumes en place et la dernière, la facilité avec laquelle les fluides pourront se déplacer et donc être produits.

1.2.1 Le réseau poreux

Une roche poreuse est constituée de grains entre lesquels il existe des espaces de dimensions très faibles (de l'ordre du micromètre), appelés **pores**, qui permettent le passage de liquides ou de gaz. La porosité est définie de façon générale par :

$$\phi = \frac{\text{Volume de pores}}{\text{Volume total de l'échantillon de roche}} .$$

Cette grandeur adimensionnelle varie au sein du gisement en fonction de la nature de la roche et de la pression de pore. Pour des roches faiblement consolidées (c'est en particulier le cas pour des champs de bruts lourds), cette porosité peut évoluer au cours de l'exploitation du gisement sous l'effet de variations de la pression de pore liées à la production et/ou l'injection de vapeur (exploitation par SAGD par exemple). Pour ce type de champ, une prise en compte des effets géomécaniques peut être nécessaire [34].

En général, la porosité est dite :

- faible si elle est $<$ à 5%,
- médiocre si elle est comprise entre 5% et 10%,
- moyenne si elle est comprise entre 10% et 20%,
- bonne si elle est comprise entre 20% et 30%,
- et excellente si elle est $>$ à 30%.

1.2.2 La perméabilité

La perméabilité intrinsèque (ou absolue) de la roche, \mathbb{K} , est par définition son aptitude à laisser circuler, sous l'effet de variations de pression dans le réseau poreux, un fluide dont elle est saturée. La perméabilité dépend de la nature de la roche et de sa profondeur. Elle est homogène à une surface et s'exprime dans le système international en m^2 . Mais cette unité n'étant pas physiquement adaptée, les ingénieurs réservoirs préfèrent travailler avec le milliDarcy (de symbole mD, $1 \text{ mD} = 0.987 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$).

Une perméabilité est dite :

- très faible si elle est $<$ à 1 mD,
- faible si elle est comprise entre 1 mD et 10 mD,
- médiocre si elle est comprise entre 10 mD et 50 mD,
- moyenne si elle est comprise entre 50 mD et 200 mD,
- bonne si elle est comprise entre 200 mD et 500 mD,
- et excellente si elle est $>$ à 500 mD.

Elle est traditionnellement représentée par un tenseur, \mathbb{K} , défini comme suit :

$$\mathbb{K} = \begin{pmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{pmatrix}.$$

Lorsque les termes diagonaux sont les seuls termes non nuls et qu'ils sont tels que $K_{xx} = K_{yy} = K_{zz}$, le milieu est dit isotrope. Par contre, si au moins deux de ces termes diagonaux sont différents, le milieu est alors dit anisotrope. En général, la perméabilité d'une roche selon les directions verticale et horizontale est anisotrope et présente de forts contrastes ($\mathbb{K}_v < \mathbb{K}_h$).

On dit aussi que le milieu est homogène si la perméabilité et la porosité du milieu sont partout les mêmes. Dans le cas contraire, on parle de milieu hétérogène.

1.2.3 Les saturations

Pour estimer les réserves, en plus de la porosité, il est nécessaire de connaître la nature et le volume des fluides qui occupent les pores de la roche. La saturation en un fluide d'un échantillon de roche représente la proportion d'occupation du volume poreux par ce fluide.

On définit ainsi la saturation d'un fluide p par :

$$S_p = \frac{\text{Volume poreux occupé par le fluide } p}{\text{Volume de pores}}.$$

Remarque 1.1. *Lors de la migration des hydrocarbures, l'huile chasse l'eau des pores (phénomène de drainage), mais il reste toujours une fine pellicule d'eau dite eau interstitielle. Ceci est lié aux phénomènes capillaires. Les valeurs courantes de la saturation en eau interstitielle varient entre 10% et 35%.*

1.2.4 La répartition des fluides dans le réservoir

La répartition des fluides dans la roche réservoir est conditionnée par la mouillabilité de la roche et par la gravité.

Avant le début de l'exploitation, un gisement est supposé être à l'équilibre gravitaire et thermodynamique. Sous les effets de la gravité, on observe une ségrégation verticale des fluides dans le réservoir : le gaz, moins dense, se situe au dessus de l'huile qui elle-même est au dessus de l'eau (voir la Figure I.4).

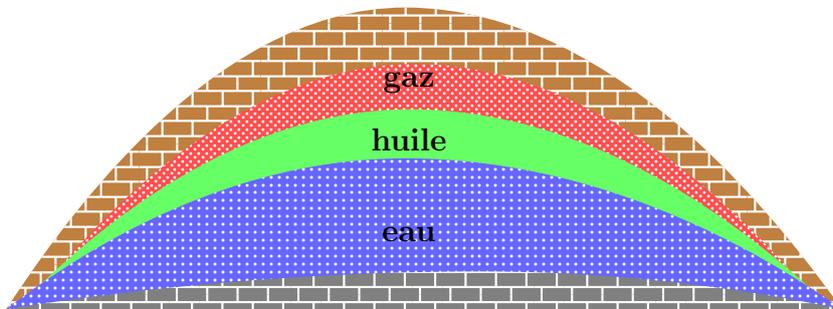


Fig. I.4: Ségrégation verticale des fluides sous l'effet de la pesanteur

Pour définir les conditions d'exploitation, notamment les débits d'injection et de production, il est nécessaire de déterminer la pression du gisement. On suppose que la pression d'un fluide p , P_p , ne dépend que de la cote z , et est déterminée par

$$\frac{dP_p}{dz} = \rho_p \cdot g,$$

où g est l'accélération de la pesanteur, et où ρ_p est la masse volumique du fluide considéré.

Notons que la présence d'un dôme de gaz (ou gas-cap) n'est pas obligatoire si la pression de l'huile, P_o , reste supérieure à la pression de bulle initiale (pression à laquelle la première bulle de gaz apparaît). Le gaz peut apparaître plus tard, au cours de l'exploitation, si la pression diminue suffisamment.

Lorsque les fluides sont non miscibles, il existe une tension interfaciale entre les fluides au niveau de leur surface de contact et donc une différence de pression que l'on appelle pression capillaire. Ces pressions capillaires dépendent de la taille des pores et de la mouillabilité de la roche à ces fluides (préférence de la roche à être couverte par l'un de ces fluides).

En général, les roches réservoirs sont :

- en présence d'eau et d'huile, mouillables à l'eau,
- en présence d'huile et de gaz, mouillables à l'huile,
- en présence d'eau et de gaz, mouillables à l'eau.

La pression capillaire, qui représente la différence de pression qui existe à l'interface de deux fluides non miscibles (p_1 étant le fluide mouillant et p_2 le fluide non mouillant), est définie par :

$$P_{c_{p_1 p_2}} = P_{p_1} - P_{p_2}.$$

Dans les roches à faible porosité, les pressions capillaires sont importantes. Inversement, dans les roches à porosité forte, ces pressions sont plus faibles.

2 Mécanismes de récupération

Une des tâches de l'ingénierie de réservoir est de proposer des schémas de récupération des hydrocarbures en tenant compte de la configuration du réservoir.

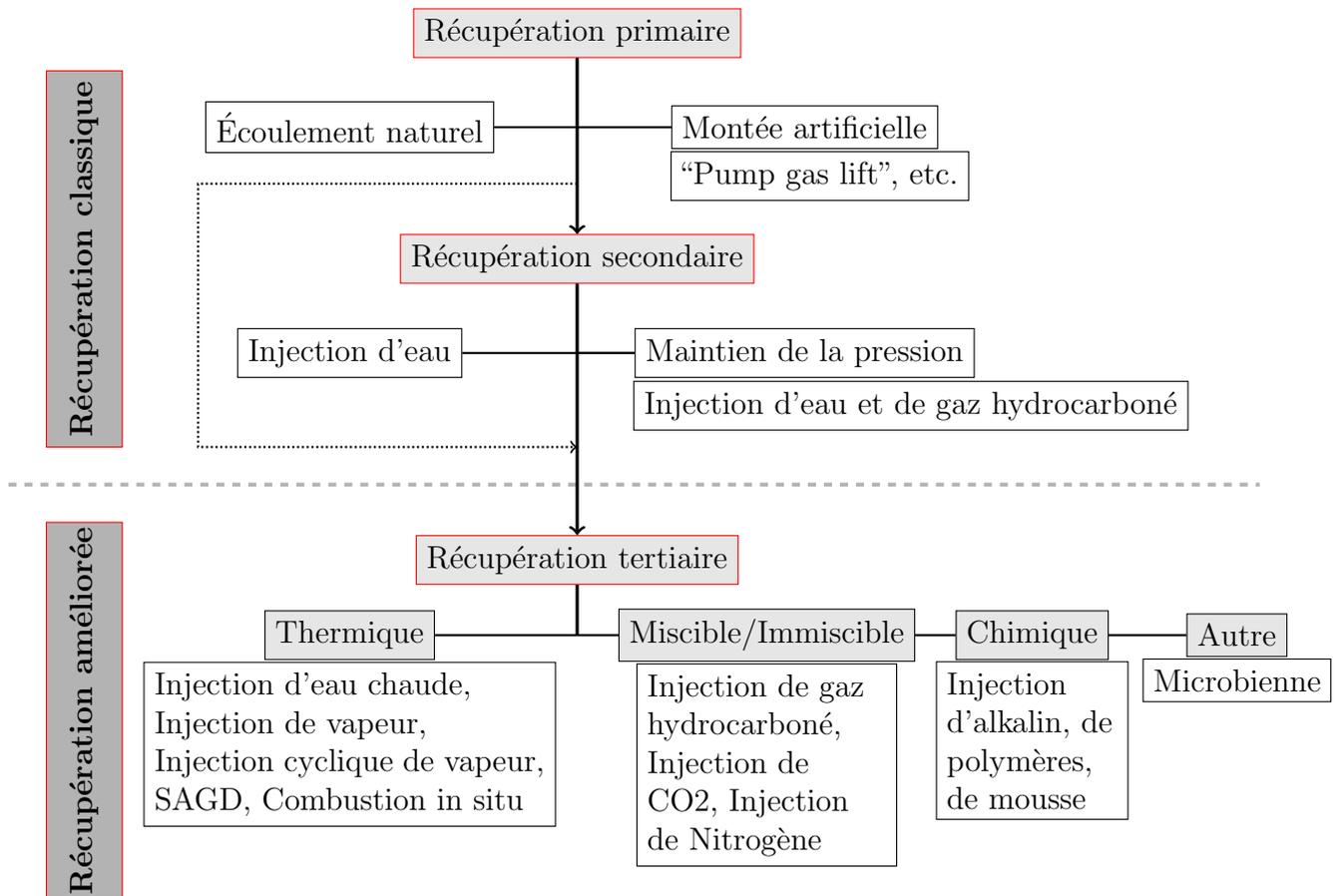


Fig. 1.5: Synthèse des procédés de récupération [32]

Dans la plupart des gisements d'huile, une simple production ou déplétion dans le gisement ne permet la récupération que d'une faible partie de l'huile (récupération primaire). En effet, au cours de la production, la chute de pression réduit l'écoulement de l'huile vers les puits producteurs. Cela peut également entraîner l'apparition de gaz libre dans le réservoir, ce qui peut être très pénalisant. Le gaz est généralement plus mobile que l'huile et s'écoule donc de préférence vers les puits, ce qui amène à une production essentiellement gazeuse avec une faible fraction d'huile.

Afin d'éviter cela, des mécanismes de récupération assistée classique (récupération secondaire) ou améliorée (récupération tertiaire) sont mis en place (injection d'eau ou de vapeur par exemple). Tout en maintenant la pression, le balayage des hydrocarbures par le fluide injecté améliore ainsi la production d'huile. Ceci permet de prolonger la production.

Dans ce qui suit, les différentes valeurs des taux de récupération sont issues de [32].

2.1 Méthodes de récupération primaire

La récupération primaire se fait par drainage naturel par une chute de pression à l'aide de puits producteurs. Le taux de récupération, qui est en moyenne de 25%, varie suivant la nature de la roche et des fluides en place. Par exemple, pour un gisement d'huile monophasique, on peut obtenir un taux de 10%.

En présence d'un aquifère actif (réalimenté par des circulations d'eau souterraines, la pression dans cet aquifère reste constante), l'eau pénètre dans la région du gisement initialement occupée par l'huile, ce qui permet de maintenir la pression du gisement et d'améliorer la récupération. Cela permet d'augmenter le taux de récupération de 10% à 60%. De la même façon, l'expansion d'un dôme de gaz peut porter ce taux à 40%. Enfin, dans le cas d'un gisement de gaz, il sera compris entre 60% et 95%.

2.2 Méthodes de récupération secondaire

A mesure que le pétrole et le gaz sont produits par déplétion, la pression baisse à l'intérieur du réservoir. Afin de stabiliser cette pression au dessus du "point de bulle" et d'augmenter la quantité d'huile récupérée, on s'oriente vers des techniques secondaires qui consistent à injecter des fluides dans le gisement (en premier lieu de l'eau ou du gaz). L'eau est généralement injectée à la base du gisement, ou bien en périphérie afin d'opérer une sorte de balayage qui poussera l'huile vers les puits de production tout en maintenant la pression dans le réservoir.

Les injections de gaz sont réalisées soit au sommet du gisement quand il s'agit simplement de faire remonter la pression, soit à sa base pour qu'il déplace vers les puits de production le pétrole tout en minimisant la ségrégation gravitaire. Elles sont souvent plus efficaces mais plus onéreuses que les injections d'eau du fait des coûts de compression. Mais selon la structure du gisement, ces deux fluides peuvent être utilisés alternativement, l'eau étant injectée à la partie inférieure du gisement et le gaz à sa partie supérieure afin d'améliorer le balayage.

Ces procédés de récupération secondaire ont largement fait leurs preuves puisqu'ils contribuent à la production des deux tiers des quantités de brut dans le monde. Par ailleurs, en faisant appel à des architectures de puits plus complexes, tels que des puits horizontaux, on peut augmenter la surface de drainage et améliorer nettement le taux de récupération. Le taux moyen varie de 25% à 40%.

L'efficacité de ce type de récupération est toutefois limitée par deux phénomènes :

- à l'échelle macroscopique, compte tenu du profil des écoulements entre puits injecteurs et puits producteurs, certaines zones ne sont pas totalement balayées par le fluide injecté comme le montre la Figure I.6 (on parle de l'efficacité de balayage) ;
- à l'échelle microscopique, le déplacement d'un fluide par un autre n'est jamais total car il existe une saturation résiduelle du fluide en place (conséquence d'un piégeage capillaire et gravitaire).

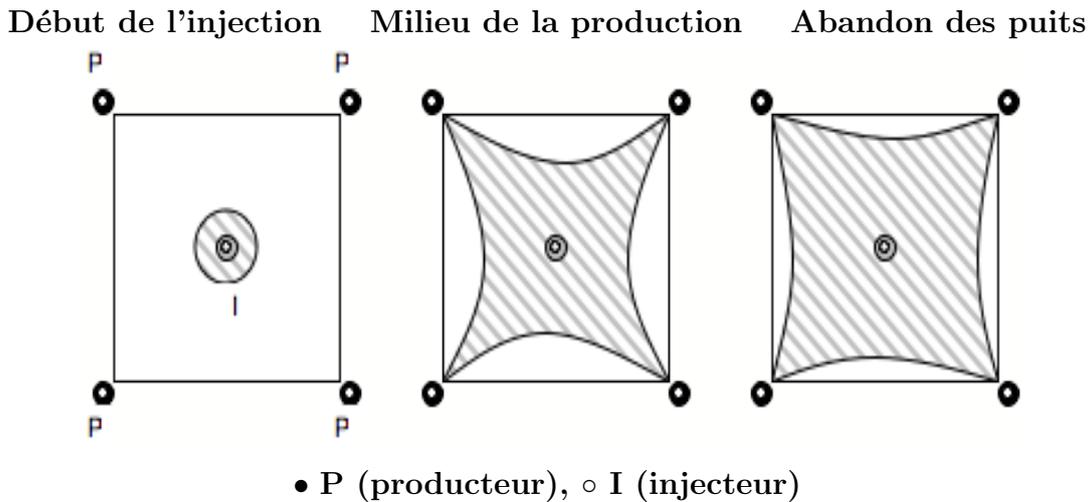


Fig. I.6: Efficacité de balayage sur une configuration de puits 5-spot à différents temps

L'efficacité de balayage représente le produit des efficacités horizontale (ou superficielle) et verticale. L'efficacité horizontale représente le rapport de la surface balayée par le fluide injecté sur la surface totale de la couche considérée. De la même façon, l'efficacité verticale représente le rapport de la surface balayée par le fluide injecté sur la surface totale d'une section verticale. Ces deux efficacités dépendent non seulement de la configuration des puits, mais aussi du rapport des mobilités entre le fluide injecté et le fluide déplacé. La mobilité d'un fluide p est globalement définie par :

$$M_p = \mathbb{K} \frac{kr_p}{\mu_p},$$

où \mathbb{K} est la perméabilité absolue de la roche, kr_p la perméabilité relative du fluide p et μ_p la viscosité de ce même fluide.

Ainsi, l'efficacité de balayage diminue lorsque le rapport de la mobilité du fluide déplaçant sur celle du fluide déplacé augmente [40] ; des digitations apparaissent alors (voir Figure I.7 (a)). L'écoulement est stable lorsque ce rapport est inférieur à 1 (voir Figure I.7 (b)).

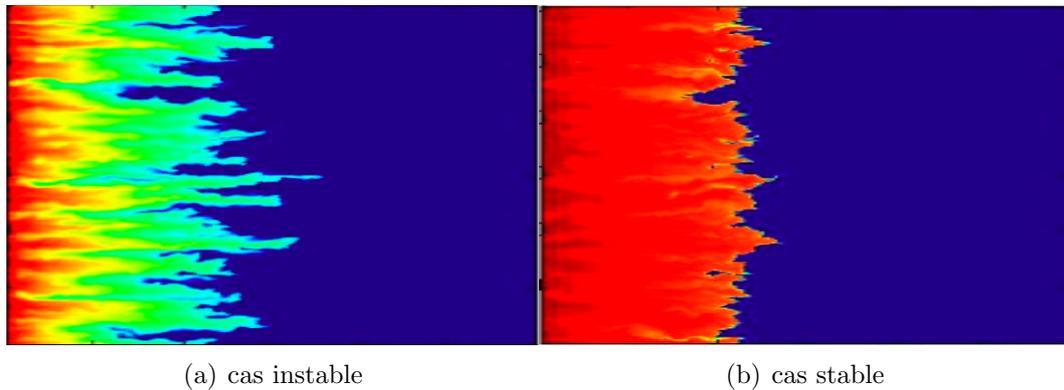


Fig. I.7: Influence du rapport de mobilité sur l'écoulement [1]

Un autre facteur néfaste à la récupération est le piégeage du fluide que l'on souhaite extraire, dans les pores de la roche. Ce sont les forces capillaires qui sont responsables de ce mécanisme. A l'échelle du pore, les pressions capillaires sont fonction de l'inverse du rayon de pore (voir annexe B). Cela signifie que les forces capillaires sont fortes dans les petits pores, ce qui va faciliter le déplacement du fluide injecté dans ces pores lorsque la roche est mouillable à ce fluide. Cette préférence à balayer ces petits pores va entraîner le piégeage de gouttes du fluide initialement en place dans les plus gros pores (voir la Figure I.8).

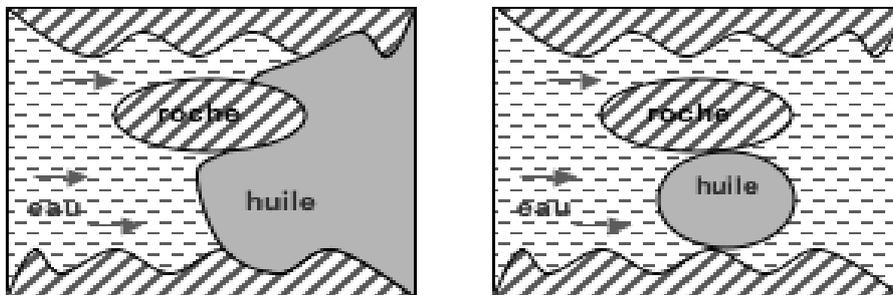


Fig. I.8: Piégeage capillaire d'une goutte d'huile

Les forces gravitaires peuvent aussi contribuer au piégeage des fluides dans les pores de la roche. Du fait des différences entre la densité du fluide déplacé et celle du fluide déplaçant, une ségrégation peut apparaître à l'échelle du pore. Par exemple, le gaz peut rester piégé dans les parties hautes d'un pore et les liquides (tels que l'eau et l'huile) dans les parties basses du pore. Une fois piégé, le fluide déplaçant ne peut plus les atteindre.

La proportion de ces gouttes piégées dans le réservoir, en fin d'exploitation, correspond à la saturation résiduelle du fluide que l'on souhaite récupérer.

2.3 Méthodes de récupération assistée améliorée : les méthodes thermiques

Ces méthodes, bien qu'elles n'interviennent que dans la production d'environ 2 millions de barils par jour actuellement (soit à peine 2% de la production mondiale), portent toutefois l'espoir d'augmenter, encore, les possibilités de récupération.

Ce sont des techniques de récupération tertiaire qui sont généralement mises en oeuvre dans les dernières phases de la vie d'un gisement (après les méthodes d'extraction primaire et secondaire). Elles visent à pousser plus efficacement le brut vers les puits de production, à augmenter la fluidité du pétrole qu'on cherche à récupérer, ou, au contraire, à diminuer la perméabilité de certaines couches du sous-sol qui pourraient nuire à l'efficacité du balayage.

Elles regroupent les méthodes d'injection de gaz miscibles, les méthodes chimiques (injection de polymères ou de tensioactifs par exemple) ou encore les méthodes thermiques (injection de vapeur ou combustion in situ).

Dans certains cas, appliquer directement ces méthodes de récupération peut s'avérer efficace. Par exemple, l'exploitation de gisements d'Asie Orientale par des méthodes thermiques a permis de porter le taux de récupération à 60% (le taux moyen varie de 30% à 70%).

Pour augmenter la fluidité du pétrole, notamment lorsqu'il s'agit de bruts lourds, extra-lourds ou de sables bitumineux on va chercher à réchauffer une partie du réservoir. D'une consistance visqueuse à quasi solide (voir Figure I.10), les bruts lourds et les bitumes ne peuvent être pompés sans être au préalable fluidifiés : leur viscosité peut atteindre des milliers de centipoises voire dépasser le million de centipoises, alors que celle d'une huile légère est inférieure à une centaine de centipoises (voir Figure I.9).

Densité selon la norme American Petroleum Institute

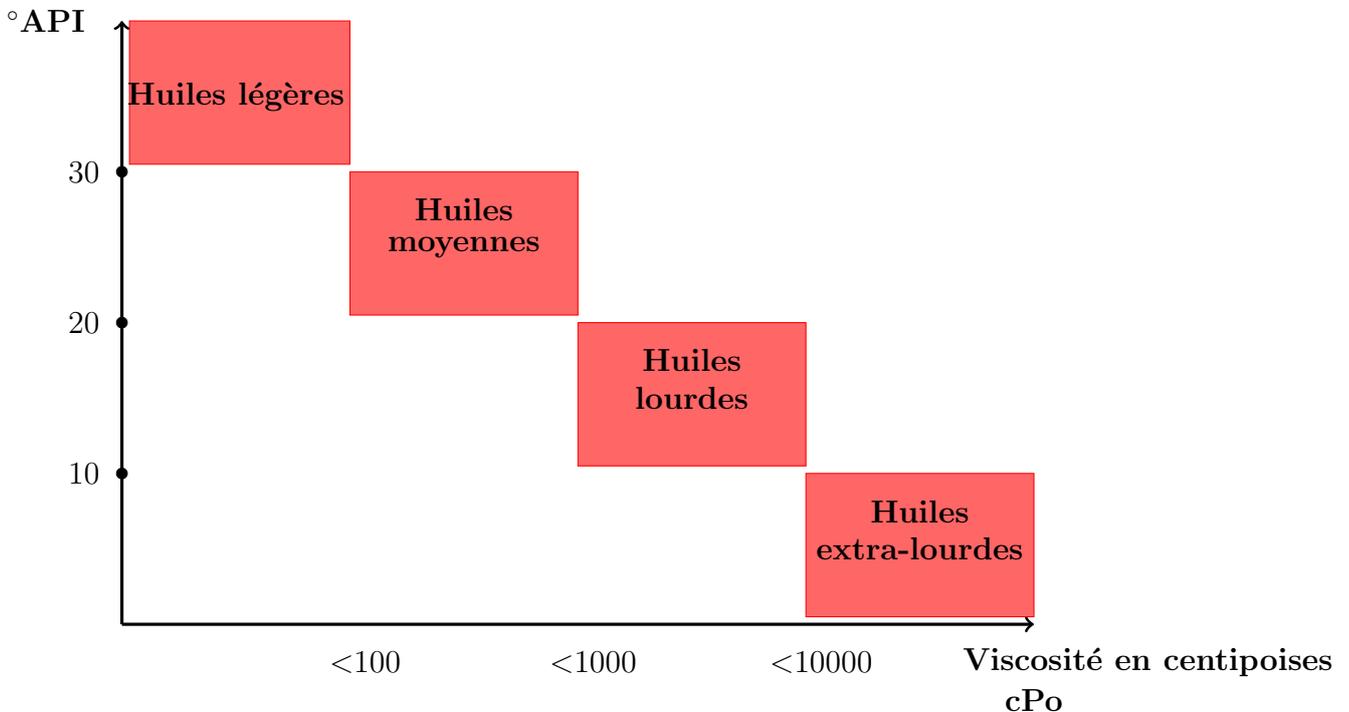


Fig. I.9: Classification des huiles



Fig. I.10: Sable bitumineux (Alberta, Canada)

Il faut donc avoir recours à des procédés thermiques, qui permettent, par divers moyens, de chauffer l'huile en place pour diminuer sa viscosité et favoriser son écoulement vers les puits producteurs.

2.3.1 L'injection de vapeur Huff and Puff

L'injection de vapeur est une technique qui se révèle efficace lorsque les gisements sont peu profonds. Au delà de 1000 mètres de profondeur, la perte d'énergie et la montée en pression font que le fluide qui arrive en bas n'est plus de la vapeur mais plutôt de l'eau chaude.

Les injections Huff and Puff (ou cycliques) consistent à injecter de la vapeur dans le gisement au moyen d'un puits qui ne sera mis en production qu'après plusieurs semaines de maturation (temps nécessaire pour que la chaleur diffuse et fluidifie l'huile avoisinant les puits). A mesure que la production diminue, on reprend l'injection de vapeur.

Il s'agit surtout d'un procédé de stimulation, qui ne peut pas maintenir la pression du gisement, ni assurer un taux de récupération élevé. Son avantage est d'être économique à court terme grâce à son bon quotient "huile produite/vapeur injectée" (Oil Steam Ratio).

2.3.2 Le procédé SAGD

Le procédé SAGD a été introduit par R.M. Butler [5] dans les années 80. Il s'agit d'une méthode relativement sophistiquée qui, grâce à une architecture de puits horizontaux et une injection de vapeur en continu dans le réservoir, permet un bon maintien de la pression du gisement durant le processus de production. La récupération finale peut être élevée.

Il faut d'abord forer une série de doublets : chaque doublet étant constitué de deux puits horizontaux parallèles distants de 3 à 5 mètres (voir Figure I.11). Les doublets sont eux-mêmes espacés d'environ 150 à 200 mètres. Les deux puits horizontaux permettent d'augmenter l'aire de drainage, mais l'efficacité du SAGD résulte essentiellement de l'effet gravitaire et de la chute de pression au puits producteur.

Sachant que la vapeur ne peut pas pénétrer dans le réservoir tant que le pétrole n'a pas été fluidifié, on commence par faire circuler de la vapeur dans les deux puits des doublets pendant deux à trois mois pour réchauffer la roche et le pétrole ; une injection immédiate de vapeur risquerait de fracturer le milieu. L'utilité de cette étape, d'une durée de quelques semaines à quelques mois, est de permettre une communication hydraulique entre les deux puits et une injection plus importante de vapeur ensuite.

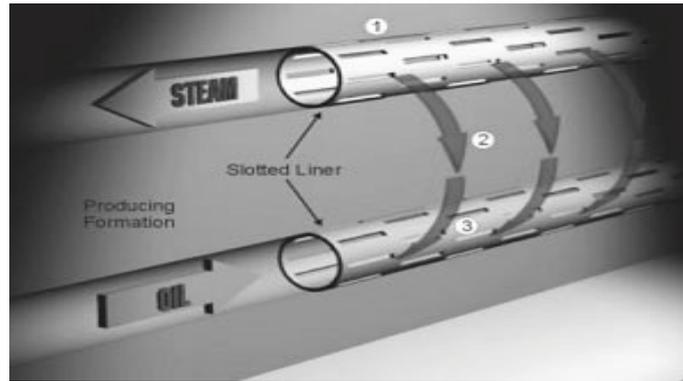


Fig. I.11: Architecture des puits

Une fois l'étape de préchauffage terminée, le puits producteur fonctionne en déplétion naturelle pendant quelques jours. Quand l'huile se met à couler vers le puits producteur, on débute l'injection de la vapeur dans le puits injecteur.

Au cours des premiers mois, une régulation des débits peut être nécessaire : suivant la différence de température entre les puits, le débit de production est réduit ou bien augmenté ([18], [19]). Il s'agit ici d'éviter que le producteur "aspire" la vapeur injectée.

Dans un milieu poreux homogène, à forte perméabilité verticale, la vapeur, plus légère que l'huile, monte progressivement vers le toit du réservoir (voir la Figure I.12) ; une chambre de vapeur se forme et grossit lentement.

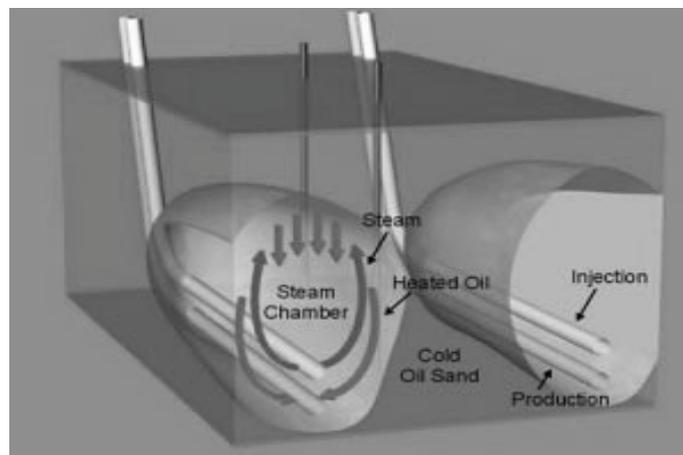


Fig. I.12: Visualisation de la chambre de vapeur

L'huile au contact de la vapeur se réchauffe et la vapeur se condense. La chute de pression au niveau du puits producteur et les effets gravitaires aident ensuite l'huile réchauffée et l'eau liquide formée à s'écouler vers le puits producteur le long des parois de la chambre de vapeur (voir Figure I.13).

Lorsque la phase de production est suffisamment avancée, trois zones peuvent être identifiées à l'intérieur du réservoir : la chambre de vapeur, l'interface d'écoulement et la zone d'huile froide (ce sont respectivement les zones 1, 2 et 3 de la Figure I.13).

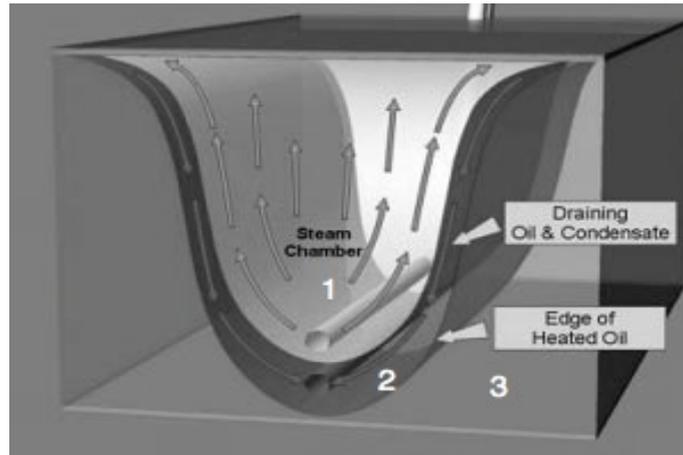


Fig. I.13: Expansion de la chambre de vapeur

2.3.3 La combustion in situ

La combustion in situ est un procédé qui n'est en pratique pas encore utilisé. Son principe est de brûler une certaine quantité du brut présent dans le réservoir afin de produire la chaleur nécessaire pour réduire la viscosité et ainsi permettre une meilleure extraction de l'huile.

De l'air, ou de l'oxygène, sont ainsi fournis à la zone de combustion (ou front de combustion) par le biais d'un puits injecteur vertical. Ce processus de combustion est le plus souvent initié par un réchauffement de la région avoisinant le puits injecteur, et ce, soit par injection de vapeur dans le puits injecteur fermé, soit en plaçant un élément de chauffage dans le puits injecteur possédant une puissance de 10 à 40 Kwatts. Cette période de chauffage permet d'atteindre une température suffisamment haute pour que la combustion se produise dès lors que l'air est injecté. Cette forte montée en température provoque un craquage thermique : un front de combustion soutenu par l'injection d'air est créé, du coke est produit et un brut plus léger est libéré. Il est intéressant de noter qu'avec un tel mécanisme de récupération il n'y a pas de pertes de chaleur tant que l'oxygène présent dans le gaz injecté réagit avec l'huile au niveau du front de combustion.

Les attraits principaux de ce procédé de récupération sont une production de chaleur à coûts moindres (comparé à l'injection de vapeur), mais aussi la présence du combustible à l'intérieur même du réservoir.

3 Modélisation du procédé SAGD

L'objet de cette thèse est la simulation du SAGD à moindre coût. Dans cette section, nous présentons le modèle réservoir utilisé pour la simulation de ce procédé.

3.1 Introduction aux modèles de réservoirs

Les modèles de réservoirs les plus répandus pour un écoulement triphasique gaz-huile-eau (le gaz peut être de la vapeur d'eau ou des hydrocarbures) sont le modèle black-oil, le modèle black-oil généralisé et le modèle dead-oil [2].

3.1.1 Le modèle black-oil

Le modèle black-oil est un modèle très utilisé pour simuler l'exploitation de réservoirs par déplétion, injection d'eau ou de gaz non miscibles pour des huiles ou des gaz contenant une quantité négligeable de condensats (hydrocarbures issus de la condensation du gaz).

Dans ce modèle, le composant lourd est présent seulement dans la phase huile et le composant eau dans la phase eau.

Par contre, le composant léger peut être présent dans les phases gaz et huile. En effet pour une pression supérieure à la pression de bulle, le composant léger est dissout dans l'huile et est libéré dans la phase gazeuse lorsque la pression diminue en dessous de ce point. En surface, on obtient alors du léger pouvant provenir de la phase gazeuse ou de la phase huile. On suppose de plus que le composant léger libre et le composant léger dissout ont les mêmes propriétés (leurs masses volumiques sont égales).

3.1.2 Le modèle black-oil généralisé

Ce qui différencie ce modèle du modèle black-oil est la présence dans la phase gaz d'un composant de type condensat en plus du composant léger. Ainsi, le composant lourd en surface proviendra de la phase huile (huile présente dans le réservoir) et le condensat sera issu de la phase gaz (composant dissout dans la phase gaz). Ce modèle est principalement utilisé dans le traitement de gaz à condensats.

3.1.3 Le modèle dead-oil

Dans ce modèle, l'huile contenue dans le réservoir est une huile dite morte. Elle a, en ce sens, perdu tous ses composants légers par dégradation bactérienne par exemple. Ainsi, la phase huile ne contient qu'un seul composant lourd à la différence du modèle black-oil. Il n'y a donc pas de changement de phase pour l'huile. L'eau contient toujours un seul composant.

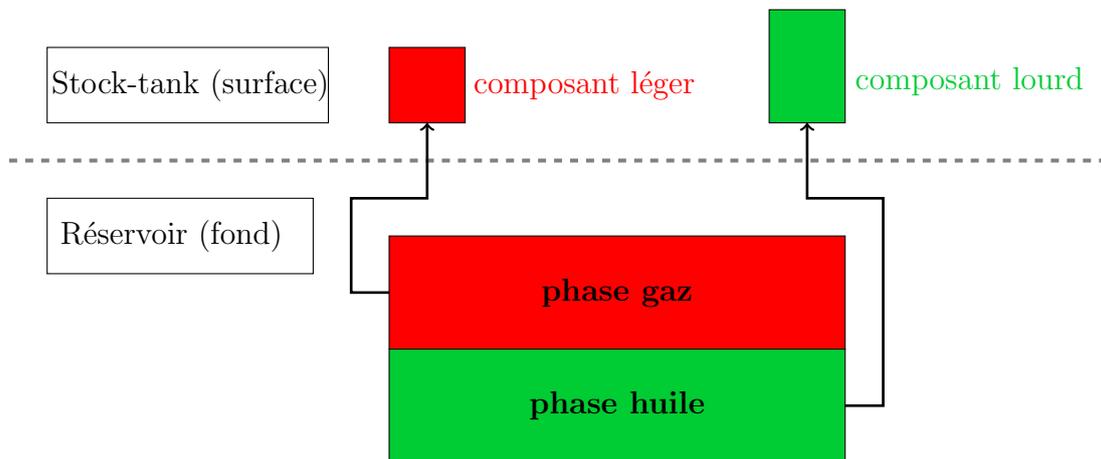


Fig. I.14: Représentation schématique du modèle dead-oil

3.2 Le modèle dead-oil thermique

Pour la simulation du procédé SAGD nous utilisons un modèle dead-oil thermique en vu de l'exploitation d'une huile canadienne (le réservoir est alors peu profond et l'huile n'a plus de composant léger).

Il fait intervenir trois phases : les phases vapeur (indice : s), huile (indice : o) et eau (indice : w). Les écoulements de ces phases sont décrits par les variations spatiales et temporelles des pressions et des saturations, sous l'effet de l'injection de la vapeur et de la production de l'huile et de l'eau. On modélise alors les écoulements de chaque composant, que sont le composant lourd et le composant eau. Dans ce modèle thermique, il faut également tenir compte de la température et modéliser le transport de l'énergie. Le système d'équations se compose :

- de la loi de Darcy,
- des équations de conservation des masses d'eau et d'huile,
- de l'équation de conservation de l'énergie,
- des équations d'équilibre vapeur/eau,
- de la conservation du volume poreux.

Le procédé SAGD est un procédé qui s'applique pour des gisements peu profonds et où la perméabilité absolue et la porosité sont excellentes (voir section 1.2) ; les rayons des pores du milieu sont alors importants. Ces caractéristiques font que les pressions capillaires, qui peuvent exister aux interfaces vapeur-huile et eau-huile, sont relativement faibles. C'est pourquoi ces pressions sont négligées dans notre modèle. Cela entraîne donc la définition d'une seule pression, P , telle que : $P = P_o = P_w = P_s$.

Les inconnues du problème sont alors la pression (P), la température (T) et les saturations des phases vapeur, huile et eau (S_s, S_o, S_w).

3.2.1 La loi de Darcy

Cas d'un écoulement monophasique

Considérons un échantillon de perméabilité \mathbb{K} . Un fluide de viscosité dynamique μ est injecté horizontalement en entrée de l'échantillon. S'il n'existe pas de réaction du fluide avec la roche, ce qui est le cas en général, Henry Darcy a établi une loi qui relie la vitesse de l'écoulement à la pression P ; cette loi est donnée par :

$$\vec{U} = -\frac{\mathbb{K}}{\mu} \nabla P.$$

Cas d'un écoulement polyphasique

Pour des écoulements polyphasiques la loi de Darcy peut être généralisée en introduisant la notion de perméabilité relative. La perméabilité relative est un terme de correction de la perméabilité absolue \mathbb{K} exprimant le fait qu'un fluide, en s'écoulant, peut être gêné par la présence des autres fluides. Dans ce cas, la vitesse de filtration d'un fluide p , \vec{U}_p , s'écrit sous la forme :

$$\vec{U}_p = -\mathbb{K} \frac{k_{rp}}{\mu_p} (\nabla P_p - \rho_p \cdot \vec{g}), \quad p \in \{w, s, o\} \quad (1)$$

dans laquelle \vec{g} est l'accélération de la pesanteur, \mathbb{K} la perméabilité absolue de la roche, P_p la pression de la phase p , k_{rp} la perméabilité relative à la phase p , ρ_p la masse volumique et μ_p la viscosité.

Dans ce qui suit, nous précisons chacune des grandeurs intervenant dans l'expression de la vitesse de Darcy polyphasique : masse volumique, viscosité et perméabilités relatives. Toutes les lois et corrélations citées dans cette section sont issues de [31].

La masse volumique

Les masses volumiques des fluides sont des fonctions qui dépendent de la température et de la pression et sont données par des corrélations.

Ainsi, la masse volumique de l'huile, ρ_o , est donnée par :

$$\rho_o(P, T) = \rho_{oref}[1 + c(P - P_{ref}) - d(T - T_{ref})],$$

où ρ_{oref} est la masse volumique de l'huile calculée à partir d'une pression et d'une température de référence, P_{ref} (exprimée en Pa) et T_{ref} (exprimée en K); c est la compressibilité de l'huile et d est le coefficient d'expansion thermique.

La corrélation donnant la masse volumique de l'eau, ρ_w , s'écrit sous la forme :

$$\rho_w(P, T) = \rho_w(T)[1 + C_w(P, T)(P - P_{sat})]f(C_s),$$

où $\rho_w(T)$ est donnée par une corrélation; C_s désigne la salinité, C_w la compressibilité de l'eau et P_{sat} la pression saturante [42].

La corrélation qui définit la masse volumique de la vapeur, ρ_s , tient compte de la compressibilité de la vapeur ($Z(T)$) et de la constante des gaz parfaits (R). Elle est donnée par :

$$\rho_s(P, T) = \frac{P \times 0.018016}{Z(T)RT}.$$

La viscosité

Lorsque la température augmente, cette propriété tend à décroître de façon exponentielle.

La viscosité de l'huile se détermine à partir de points de mesure, en fonction de la température. A une température T , située entre deux températures de la table, T_1 et T_2 (pour lesquelles correspondent les deux viscosités, μ_1 et μ_2), la viscosité de l'huile est interpolée selon la relation d'Andrade : $\mu = Ae^{\frac{B}{T}}$. Nous avons ainsi :

$$\mu_o(T) = \mu_1 e^{\left[\left(1 - \frac{T_1}{T}\right) \left(\frac{T_2}{T_2 - T_1}\right) \ln\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \right]}.$$

La viscosité de l'eau est donnée par la loi de Bingham (pour $T \leq 260^\circ C$). La viscosité de la vapeur $\mu_s(T)$ est obtenue par interpolation dans les tables internationales ou par la formule d'Hilsenrath.

Les perméabilités relatives

Lorsque plusieurs phases s'écoulent dans un milieu, la perméabilité à introduire dans la loi de Darcy n'est plus la perméabilité absolue du milieu mais une perméabilité réduite appelée perméabilité tensorielle. La perméabilité tensorielle est définie comme le produit de la perméabilité relative, noté k_r , et du tenseur de perméabilité \mathbb{K} vu précédemment.

Cette notion de perméabilité relative a pour but d'étendre le concept de perméabilité à des écoulements polyphasiques et permet de donner une formulation quantitative à ces écoulements. Les perméabilités relatives, généralement définies pour un type de roche, sont des fonctions de la saturation.

Il existe deux couples de perméabilités relatives :

- un couple eau-huile avec une perméabilité relative à l'eau k_{rw} , fonction de la saturation en eau S_w et une perméabilité relative à l'huile en balayage à l'eau k_{row} , fonction de S_w ;
- un couple gaz-huile avec une perméabilité relative à la vapeur k_{rs} , fonction de la saturation en vapeur S_s et une perméabilité relative à l'huile en balayage à la vapeur k_{ros} en présence d'eau irréductible, fonction de S_s .

Chaque courbe k_r est définie par sa forme et par ses points limites (voir annexe A). Dans le cas thermique, chacun de ces points limites peut varier linéairement avec la température [47]. Il faut alors modifier localement en temps et en espace les courbes de perméabilités relatives.

À partir des courbes de perméabilités relatives et de combinaisons linéaires, il est possible de déterminer la valeur de la perméabilité relative triphasique de l'huile k_{ro} qui intervient dans les termes d'écoulement de l'huile. Dans notre modèle, elle est donnée par la méthode de Stone 2, dans laquelle elle est fonction des courbes de perméabilité relative de l'huile diphasiques en balayage eau-huile et gaz-huile et des perméabilités relatives de l'eau et du gaz. La formule utilisée et issue de la version normalisée par Aziz et Settari [2] est la suivante :

$$k_{ro} = \max \left\{ 0, k_{rowmax} \left[\left(\frac{k_{row}}{k_{rowmax}} + k_{rw} \right) \left(\frac{k_{rog}}{k_{rogmax}} + k_{rg} \right) - k_{rw} - k_{rg} \right] \right\}.$$

3.2.2 Les lois de conservation des masses d'eau et d'huile

Les équations de conservation des masses d'eau et d'huile sont données par :

$$\partial_t [\phi(\rho_w S_w + \rho_s S_s)] + \text{div} [\rho_w \vec{U}_w + \rho_s \vec{U}_s] = 0 \quad (2)$$

$$\partial_t [\phi \rho_o S_o] + \text{div} [\rho_o \vec{U}_o] = 0 \quad (3)$$

où \vec{U}_w est la vitesse de filtration de l'eau, \vec{U}_s est la vitesse de filtration de la vapeur (voir la section 3.2.1) et, S_w et S_s les saturations respectives de ces deux fluides. ρ_w , ρ_s et ρ_o sont les masses volumiques de l'eau, de la vapeur et de l'huile.

Dans ces équations de conservation on retrouve la porosité de la roche. Celle-ci est supposée ne dépendre que de la nature de la roche (donc de l'espace).

Remarque 3.1. *Si l'on souhaite tenir compte des effets géomécaniques qui peuvent intervenir lors de l'exploitation par SAGD, il faut dans ce cas, définir une porosité fonction de la pression. Lors du processus d'exploitation, l'huile réchauffée par la vapeur tend à se dilater. Par ailleurs, la vapeur injectée entraîne une augmentation de la pression de pore au cours du temps, ce qui augmente la porosité du milieu. Une relation possible pour tenir compte des effets de la pression est la suivante :*

$$\phi(P) = \phi_{ref}(1 + C_r \cdot (P - P_{ref})),$$

où ϕ_{ref} est une porosité de référence, P_{ref} une pression de référence et C_r la compressibilité de la roche [31].

3.2.3 La loi de conservation de l'énergie

Le système d'équations de conservation des masses est complété par la loi de conservation de l'énergie donnée par :

$$\begin{aligned} \partial_t \left[\left(\phi(S_w \rho_w e_w + S_o \rho_o e_o + S_s \rho_s e_s) \right) + (1 - \phi) \rho_r e_r \right] \\ + \text{div}(\vec{J} + \rho_w H_w \vec{U}_w + \rho_o H_o \vec{U}_o + \rho_s H_s \vec{U}_s) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

où l'on a noté, e_p l'énergie interne de la phase p , e_r l'énergie interne de la roche, H_p l'enthalpie du fluide p et \vec{J} le flux thermique.

Le flux thermique, \vec{J} , est donné par la loi de Fourier : $\vec{J} = -\lambda \cdot \vec{\nabla} T$. λ représente la conductivité thermique de la roche réservoir et des fluides qu'elle contient ; dépendante de la température, elle décroît lorsque la température augmente selon la relation de Somerton suivante :

$$\lambda(T) = \lambda_{ref} + \alpha(T - T_{ref})(\lambda_{ref} - 1.42),$$

où α est une constante généralement donnée par l'utilisateur et où, λ_{ref} et T_{ref} sont respectivement la conductivité thermique et la température de référence. Dans notre cas,

$$\lambda(T) = \lambda_{ref}.$$

Les enthalpies des phases vapeur, eau et huile s'expriment en fonction de la température. Pour obtenir l'enthalpie de l'huile, nous intégrons, entre une température de référence, T_{ref} , et une température, T , la capacité calorifique. Nous avons alors :

$$H_o(T) = \int_{T_{ref}}^T \rho_{oc}(T) dT = \int_{T_{ref}}^T (o_1 + o_2 T) dT = o_1(T - T_{ref}) + \frac{o_2}{2}(T^2 - T_{ref}^2),$$

avec o_1 la capacité calorifique de référence et o_2 la dérivée par rapport à la température de la capacité calorifique définie par : $\rho_{oc}(T) = o_1 + o_2 T$.

Dans notre cas,

$$H_o(T) = o_1(T - T_{ref}).$$

L'enthalpie de l'eau est une fonction cubique de la température. L'enthalpie de la vapeur se calcule en utilisant la relation de Koch.

Les énergies internes de l'huile, de l'eau et de la vapeur sont prises égales respectivement aux enthalpies de l'huile, de l'eau et de la vapeur.

Tout comme pour les fluides, l'énergie interne de la roche est égale à l'enthalpie de la roche. Le calcul de l'enthalpie de la roche est identique à celui de l'enthalpie de l'huile.

Nous avons donc :

$$H_r(T) = roc_1(T - T_{ref}) + \frac{roc_2}{2}(T^2 - T_{ref}^2),$$

avec roc_1 la capacité calorifique de référence et roc_2 la dérivée par rapport à la température de la capacité calorifique définie par : $\rho_{rc}(T) = roc_1 + roc_2T$.

Dans notre cas,

$$H_r(T) = roc_1(T - T_{ref}).$$

3.2.4 Les relations d'équilibre liquide-vapeur

Pour définir l'état d'équilibre, les relations suivantes sont toujours satisfaites :

$$S_s S_w (T - T_{sat}(P)) = 0, \quad (5a)$$

$$S_w \geq 0, \quad S_s \geq 0 \quad (5b)$$

$$S_s (T - T_{sat}(P)) \geq 0, \quad S_w (T - T_{sat}(P)) \leq 0, \quad (5c)$$

où T_{sat} est la température à laquelle la vapeur est en équilibre avec sa phase liquide.

Les équations (5) correspondent à trois cas :

- si la température est inférieure à la température saturante ($T - T_{sat}(P) < 0$), il y a alors liquéfaction ($S_w \geq 0$) et la saturation en vapeur est nulle ;
- lorsque la température est égale à la température saturante de la vapeur ($T = T_{sat}$), les phases vapeur et eau sont dites en équilibre ;
- si la température dépasse la température saturante ($T - T_{sat}(P) > 0$), on a alors de la vapeur sèche ($S_s \geq 0$) et la saturation en eau est nulle.

3.2.5 La conservation du milieu poreux

Pour clore le système, on exprime la conservation du volume poreux qui est donnée par l'équation de continuité suivante :

$$S_s + S_o + S_w = 1. \quad (6)$$

3.2.6 Le système d'équations

En résumé, le système d'équations est le suivant :

$$\begin{cases}
 \partial_t [\phi(\rho_w S_w + \rho_s S_s)] + \text{div} [\rho_w \vec{U}_w + \rho_s \vec{U}_s] = 0, & (2) \\
 \partial_t [\phi \rho_o S_o] + \text{div} [\rho_o \vec{U}_o] = 0, & (3) \\
 \partial_t \left[\left(\phi(S_w \rho_w e_w + S_o \rho_o e_o + S_s \rho_s e_s) \right) + (1 - \phi) \rho_r e_r \right] \\
 + \text{div} (\vec{J} + \rho_w H_w \vec{U}_w + \rho_o H_o \vec{U}_o + \rho_s H_s \vec{U}_s) = 0, & (4) \\
 \vec{U}_p = -\mathbb{K} \frac{k_{rp}}{\mu_p} (\nabla P - \rho_p \cdot \vec{g}) \text{ pour } p = s, o, w, & (1) \\
 S_s S_w (T - T_{sat}(P)) = 0, & (5a) \\
 S_w \geq 0, S_s \geq 0, & (5b) \\
 S_s (T - T_{sat}(P)) \geq 0, S_w (T - T_{sat}(P)) \leq 0 & (5c) \\
 S_s + S_o + S_w = 1. & (6)
 \end{cases}$$

Remarque 3.2. Dans ce modèle, nous rappelons que les pressions capillaires sont négligées. Si cela n'était pas le cas, il y aurait trois pressions, une pour chaque phase, et donc deux inconnues supplémentaires. Se rajouterait alors à ce système, les relations des pressions capillaires vapeur-huile (P_{cs}) et eau-huile (P_{cw}) suivantes (voir annexe B) :

$$P_{cw} = P_o - P_w,$$

$$P_{cs} = P_s - P_o.$$

Les dépendances des paramètres par rapport aux inconnues du problème sont données dans le Tableau I.1.

Paramètres	Espace	Inconnues				
		P	S_s	S_o	S_w	T
ϕ	×					
\mathbb{K}	×					
ρ_s		×				×
ρ_o		×				×
ρ_w						×
μ_s						×
μ_o						×
μ_w						×
k_{rs}	×		×			×
k_{ro}	×		×		×	×
k_{rw}	×				×	×
λ						×
H_s		×				×
H_o						×
H_w						×
e_s		×				×
e_o						×
e_w						×
T_{sat}		×				

Tab. 1.1: Dépendance des paramètres

3.3 Les conditions initiales et les conditions aux limites

Pour que le problème mathématique soit bien posé, nous devons définir des conditions aux limites et initiales pour les inconnues du problème, soient la pression, les saturations et la température.

Les conditions initiales

On se place dans le cas où le réservoir n'a pas été exploité et on suppose qu'il est à l'équilibre hydrostatique.

Une pression de référence est supposée connue à une certaine côte dans la zone à huile.

La pression de l'huile initiale se déduit de cette pression de référence et se calcule en utilisant la loi hydrostatique :

$$\overline{\nabla P} = \rho_o \overline{g}.$$

Une fois les pressions initialisées, on définit les saturations initiales en eau et en huile. La saturation en eau est à sa saturation en eau irréductible : $S_{w,ini} = S_{wi}$.

D'après (6), la saturation en huile est égale à : $S_o = 1 - S_{wi}$ (la saturation en vapeur est nulle car l'injection n'a pas encore débuté).

Enfin, la température est uniforme dans le réservoir.

Les conditions aux limites

Les notations utilisées pour les bords du domaine sont données sur la Figure I.15.

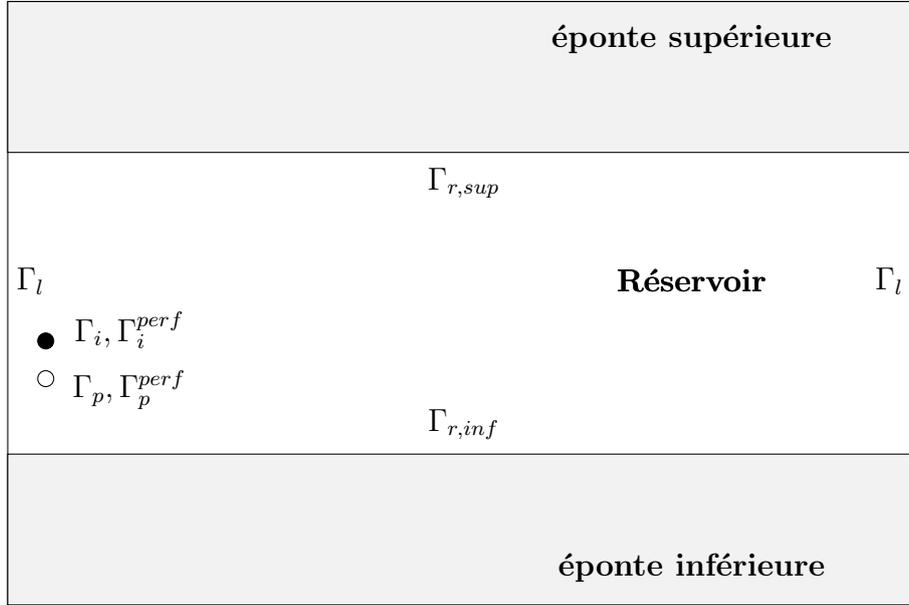


Fig. I.15: Représentation des limites du domaine

Γ_l représente les bords latéraux du réservoir. Les limites supérieure et inférieure du réservoir sont respectivement $\Gamma_{r,inf}$ et $\Gamma_{r,sup}$. Γ_i et Γ_p représentent respectivement les puits injecteur et producteur (pas seulement leurs perforations).

Sur Γ_l

On fixe une condition de type flux nul. En d'autres termes, il n'y a pas d'échange de masse ni de chaleur.

Sur les perforations des puits injecteur et producteur (respectivement, Γ_i^{perf} et Γ_p^{perf})

Pour modéliser le couplage puits-réservoir, on utilise la loi de Darcy (1) en écoulement plan radial, tout en supposant que le régime permanent est atteint à chaque pas de temps au cours de la simulation dans le volume des mailles du réservoir traversées par les puits.

Le flux de Darcy d'une phase p d'une couche perforée vers le puits est donnée par :

$$U_p^{puits} = IP \frac{k_{rp}}{\mu_p} \left((P - P_{puits}) - \rho_p g (z - z_{puits}) \right),$$

où P représente la pression moyenne de la maille (solution des équations du réservoir), P_{puits} la pression des mailles traversées par les puits et IP l'Indice de Productivité.

L' IP est calculé d'après la formule de Peaceman [35]. Si le réservoir est anisotrope et si les puits horizontaux sont parallèles à l'axe (Oy) :

$$IP = \frac{2\pi \sqrt{k_{xx} k_{zz}} N_y}{\log \left(\frac{r_0}{r_{puits}} \right) + skin},$$

où r^{puits} définit le rayon du puits et N_y la largeur du réservoir.

Remarque 3.3. *Le skin est le coefficient d'effet pariétal. Il détermine le degré de modification de la perméabilité aux alentours du puits à la suite du forage. S'il est positif, cela signifie que la couche près du puits est colmatée; la perméabilité est alors diminuée. A l'inverse, s'il est négatif, la couche près du puits a une perméabilité meilleure. Dans notre étude, ce coefficient est nul.*

Le rayon équivalent de la maille, r_0 , est donné par

$$r_0 = 0.28 \frac{N}{D}$$

avec

$$N = \left[\sqrt{\frac{k_{xx}}{k_{zz}}} \Delta_z^2 + \sqrt{\frac{k_{zz}}{k_{xx}}} \Delta_x^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad D = \left(\frac{k_{xx}}{k_{zz}} \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{k_{zz}}{k_{xx}} \right)^{\frac{1}{4}}$$

où Δ_x et Δ_z sont les mesures des cotés de la maille selon les directions X et Z.

Les flux massiques sont caractérisés :

- soit par des conditions sur les pressions, on dit alors que le puits fonctionne en pression limite imposée (en tête ou en fond du puits);
- soit par des débits, on dit alors que le puits fonctionne en débit (maximum ou minimum) imposé.

Sur Γ_i

La température, T^{puits} , est imposée. Le flux diffusif de Fourier est donné par :

$$J^{puits} = IT \lambda (T - T^{puits}),$$

où l'indice de conductivité thermique, IT , est égal à :

$$\frac{2\pi N_y}{\log\left(\frac{r}{r^{puits}}\right)}, \quad \text{avec } r = 0.2\sqrt{\Delta_x \Delta_z}.$$

Sur Γ_p

On impose une condition de flux de Fourier nul; la température des mailles du puits producteur est alors égale à la température imposée aux perforations ($T = T^{puits}$).

Sur $\Gamma_{r,inf}$ et $\Gamma_{r,sup}$

Les couvertures supérieure et inférieure du réservoir (ou épontes supérieure et inférieure) étant imperméables, les flux massiques sont nuls.

On suppose de plus que la chaleur ne diffuse pas entre les épontes et le réservoir : le flux de fourier est alors nul.

II. Simulation du procédé de récupération SAGD

L'exploitation par SAGD d'un réservoir saturé en une huile lourde nécessite de mettre en œuvre des technologies complexes et relativement coûteuses comme les puits ou encore les générateurs de vapeur installés en surface. Par ailleurs, ce procédé est un grand consommateur d'énergie et les gaz à effet de serre qu'il émet peuvent avoir des conséquences sur l'environnement très néfastes. Ces différents points font que la simulation numérique du SAGD est un outil important. Elle permet d'estimer le rapport du volume de vapeur injectée par le volume d'huile produit (appelé SOR de l'anglais Steam-Oil Ratio) et ainsi d'évaluer la rentabilité du projet.

Les simulations numériques du procédé SAGD se font à l'IFP avec le logiciel *Puma^{FLOW}* [25]. Après une présentation des caractéristiques de ce simulateur de réservoir (schéma numérique utilisé, résolution du système discret), nous présentons un exemple de simulation SAGD sur un cas synthétique. Sur cet exemple nous montrerons la sensibilité du modèle numérique à la taille du maillage. Pour estimer correctement les volumes d'huile produits, nous verrons que les simulations SAGD nécessitent une discrétisation fine de l'interface d'écoulement, engendrant des temps de simulations longs.

Le raffinement de maillage adaptatif apparaît ainsi comme un bon compromis entre précision dans les résultats et temps de calculs. Nous présenterons le fonctionnement du générateur de maillages adaptatifs de l'IFP [33], où deux températures seuils sont utilisées comme critères de détection de la zone d'écoulement. Enfin, les résultats obtenus en milieux homogènes et hétérogènes vont nous permettre de mettre en évidence les limites du critère de raffinement.

1 Introduction au simulateur de réservoir *Puma^{FLOW}*

Le logiciel *Puma^{FLOW}* est utilisé pour la simulation dynamique des réservoirs.

Dans des contextes géologiques variés, de la récupération primaire à la récupération améliorée, divers procédés d'extraction des hydrocarbures peuvent être modélisés. Les réservoirs peuvent présenter des fractures (voir Figure II.1) ainsi que des porosités et des perméabilités variables. De nombreux types de maillages peuvent également être utilisés, comme par exemple des maillages non uniformes (voir section 1.1.1).

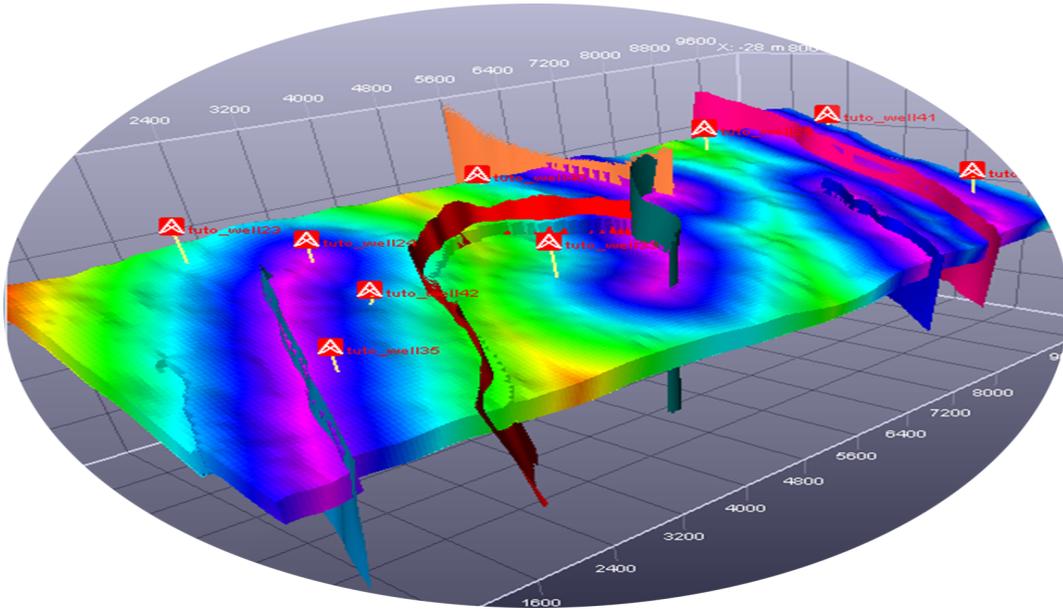


Fig. II.1: Exemple d'étude *Puma^{FLOW}* en milieu fracturé [43]

1.1 La discrétisation des équations du modèle

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le modèle considéré est un système couplé, composé des lois de conservation des masses des constituants eau (2) et huile (3), et de la loi de conservation de l'énergie (4).

La complexité du système d'équations ne permet pas de trouver une solution analytique au problème posé. Ces équations continues sont alors approchées par des équations discrètes qu'il est possible de résoudre numériquement. Dans *Puma^{FLOW}*, elles sont discrétisées en espace à l'aide de volumes finis centrés sur les mailles.

1.1.1 Le maillage

Les maillages en simulation de réservoir doivent proposer une image discrétisée fidèle au modèle géologique, en tenant compte de la géométrie du réservoir et des hétérogénéités.

Parmi les maillages utilisés en simulation de réservoir, on retrouve les maillages cartésiens structurés. Ces maillages simples ne permettent pas de représenter des géométries complexes ni de prendre en compte les failles.

Dans ce cas, on utilise des maillages de type Corner Point Geometry (CPG) où les mailles sont des hexaèdres quelconques. Ce type de maillage offre plus de souplesse dans la représentation des géométries des réservoirs, comme le montre la Figure II.2.

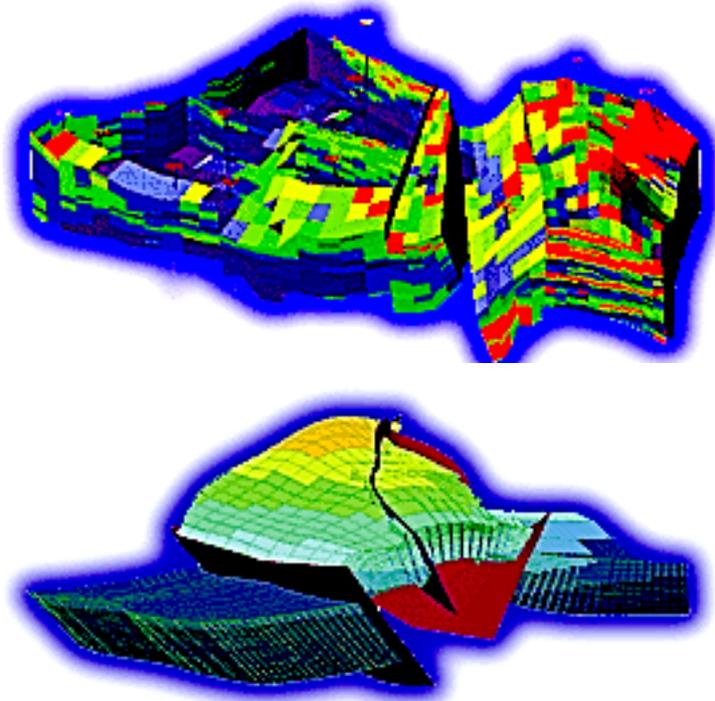


Fig. II.2: Exemple de grilles CPG [43]

Pour corriger la diffusion numérique sans trop augmenter le nombre de mailles, on utilise en ingénierie de réservoir des maillages non structurés raffinés localement. Dans notre cas, on travaille avec un maillage cartésien raffiné localement¹(voir la Figure II.3).

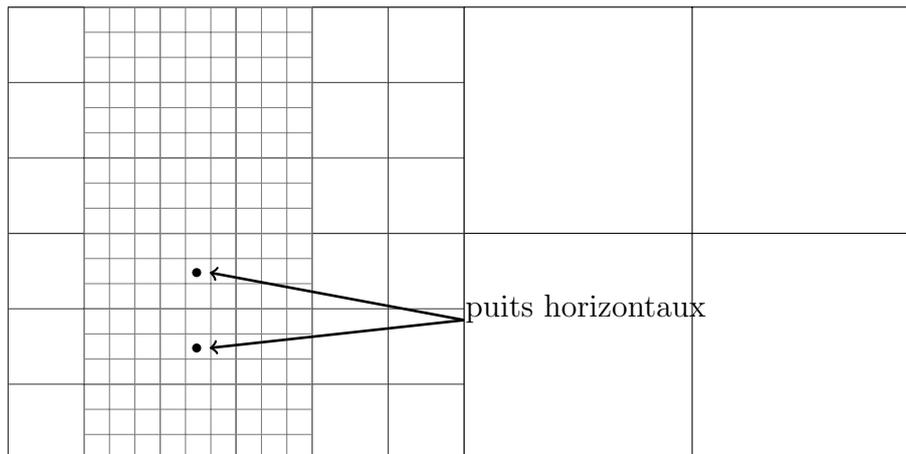


Fig. II.3: Exemple de maillage cartésien non structuré raffiné localement en dimension 2

¹ La zone des puits est toujours raffinée.

1.1.2 Le schéma numérique

Plusieurs schémas numériques sont disponibles dans $PUMA^{flow}$. Concernant la discrétisation en temps, les schémas dits IMPES (schéma implicite en temps pour la pression et explicite pour la saturation) et fully implicit (schéma totalement implicite en temps pour toutes les variables) restent les plus utilisés.

Le schéma numérique utilisé pour simuler notre modèle SAGD est le schéma volumes finis à cinq points implicite en temps. Il est inconditionnellement stable contrairement au schéma explicite. Cependant, les valeurs des pas de temps sont limitées par la convergence de l'algorithme de Newton (utilisé pour la résolution du système non linéaire). Comparé au schéma explicite, le temps de résolution d'un pas de temps est plus important car le système linéaire a plusieurs inconnues par cellule, mais le nombre de pas de temps peut être réduit.

Soit \mathcal{T} un maillage cartésien structuré et uniforme. Pour une maille $K \in \mathcal{T}$, nous introduisons les notations suivantes :

- $m(K)$: la mesure de la maille K ,
- ∂K : la frontière de la maille K , de mesure $m(\partial K)$,
- $\mathcal{E}(K)$: l'ensemble des arêtes de la maille K ,
- $\mathcal{E}^{int}(K)$: l'ensemble des arêtes de la maille K intérieures au domaine,
- $e \in \mathcal{E}(K)$: une arête de la maille K , de mesure $m(e)$,
- K_e : la cellule voisine de K telle que $\overline{K} \cap \overline{K_e} = e$, on note alors $e = K|K_e$,
- d_{K,K_e} : la distance qui sépare les centres des mailles K et K_e ,
- $d_{K,e}$: la distance qui sépare le centre de la maille K de l'arête e ,
- $n_{K,e}$: la normale unitaire à e extérieure à K .

Pour $N \in \mathbb{N}$, soit $0 = t^0 < t^1 < \dots < t^N = T$ une partition de l'intervalle $[0, T]$. Nous définissons également le pas de temps Δt par $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ pour $n \in \mathcal{N}$ où $\mathcal{N} = \{0, \dots, N-1\}$.

La méthode des volumes finis consiste à chercher une approximation de la solution constante sur chaque volume de contrôle K et à chaque pas de temps Δt . Pour obtenir le schéma, on écrit dans un premier temps un schéma différences finies pour la partie temporelle. Puis, on intègre, sur une maille K , le système obtenu.

Ainsi, pour l'équation de conservation de la masse d'huile (3), le schéma en temps s'écrit :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\phi \rho_o(x, t^{n+1}) S_o(x, t^{n+1}) - \phi \rho_o(x, t^n) S_o(x, t^n) \right] + \operatorname{div} \left[\rho_o \vec{U}_o(x, t^{n+1}) \right] = 0.$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_K \left[\phi \rho_o(x, t^{n+1}) S_o(x, t^{n+1}) - \phi \rho_o(x, t^n) S_o(x, t^n) \right] dx \\ & + \int_K \operatorname{div} \left[\rho_o \vec{U}_o(x, t^{n+1}) \right] dx = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_K \left[\phi \rho_o(x, t^{n+1}) S_o(x, t^{n+1}) - \phi \rho_o(x, t^n) S_o(x, t^n) \right] dx \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \int_e \left[\rho_o \vec{U}_o(\gamma, t^{n+1}) \cdot n_{K,e} \right] d\gamma = 0. \end{aligned}$$

La discrétisation numérique de l'équation de conservation de la masse d'huile (3) s'écrit pour une maille $K \in \mathcal{T}$ sous la forme suivante :

$$\frac{\phi_K m(K)}{\Delta t} \left[(\rho_o)_K^{n+1} (S_o)_K^{n+1} - (\rho_o)_K^n (S_o)_K^n \right] + \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \mathcal{F}_{o,K,e} = 0,$$

où $\mathcal{F}_{o,K,e}$ représente le flux numérique de Darcy (consistant, conservatif et monotone) de la phase huile, sur l'arête $e \in \mathcal{E}(K)$, orienté selon la normale sortante à la maille K , c'est-à-dire une approximation de

$$\int_e \left[\rho_o \vec{U}_o(\gamma, t^{n+1}) \cdot n_{K,e} \right] d\gamma.$$

On rappelle que ,

$$\vec{U}_o(\gamma, t) = -\mathbb{K}(\gamma) \frac{k_{ro}(\gamma, t)}{\mu_o(\gamma, t)} \left(\vec{\nabla} P(\gamma, t) - \rho_o(\gamma, t) g \nabla z \right).$$

Si le maillage est admissible [23], nous approchons par des différences finies le gradient de pression dans la direction normale à l'interface :

$$\vec{\nabla} P(\gamma, t^{n+1}) \cdot n_{K,e} \approx \frac{P_{K_e}^{n+1} - P_K^{n+1}}{d_{K,K_e}}, \text{ pour } e = K|K_e.$$

De la même façon :

$$\nabla z \cdot n_{K,e} \approx \frac{z_{K_e} - z_K}{d_{K,K_e}}, \text{ pour } e = K|K_e.$$

Dans l'idée d'un décentrage amont, on utilise une moyenne arithmétique pour approcher, sur une interface e ($e = K|K_e$), la masse volumique qui est devant le terme de gravité :

$$(\rho_o)_e^n = \frac{\rho_o(P_K^n, T_K^n) + \rho_o(P_{K_e}^n, T_{K_e}^n)}{2}.$$

Pour calculer à l'interface de deux mailles la perméabilité absolue, on utilise une moyenne hamonique :

$$\left(\mathbb{K} \right)_e = \frac{d_{K,K_e}}{\frac{d_{K,e}}{\mathbb{K}_K \cdot n_{K,e}} + \frac{d_{K_e,e}}{\mathbb{K}_{K_e} \cdot n_{K,e}}}.$$

Pour approcher les autres termes d'interface, on effectue un décentrage amont en fonction du sens de l'écoulement de chaque phase. Le sens de cet écoulement est déterminé par le signe de la différence de potentiel entre les deux mailles.

Ainsi nous définissons :

$$\left(\rho_o \right)_e^{n+1} \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right)_e^{n+1} = \begin{cases} \rho_o(P_{K_e}^{n+1}, T_K^{n+1}) \frac{k_{ro}(S_{K_e}^{n+1})}{\mu_o(T_{K_e}^{n+1})} & \text{si } P_{K_e}^{n+1} + (\rho_o)_e^n g z_{K_e} \geq P_K^{n+1} + (\rho_o)_e^n g z_K, \\ \rho_o(P_K^{n+1}, T_{K_e}^{n+1}) \frac{k_{ro}(S_K^{n+1})}{\mu_o(T_K^{n+1})} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le décentrage précédent nous tenons compte respectivement de la monotonie de la masse volumique de l'huile, de la perméabilité relative à l'huile et de la viscosité de l'huile (voir 3.2.1).

Remarque 1.1. Contrairement au schéma IMPES, les mobilités des flux numériques (soit le rapport de la perméabilité relative avec la viscosité) sont prises ici au temps $n + 1$.

Finalement, si $e \in \mathcal{E}^{int}(\mathbf{K})$,

$$\mathcal{F}_{o,K,e} = -m(e) (\mathbb{K})_e \left(\frac{k_{ro}}{\mu_o} \right)_e^{n+1} (\rho_o)_e^{n+1} \left(\frac{P_{K_e}^{n+1} - P_K^{n+1}}{d_{K,K_e}} + (\rho_o)_e^n g \frac{(z_{K_e} - z_K)}{d_{K,K_e}} \right).$$

Remarque 1.2. Si l'arête e est sur le bord du domaine, on utilise les conditions aux limites pour définir le flux numérique $\mathcal{F}_{o,K,e}$.

De la même façon, la discrétisation numérique de l'équation de conservation de la masse de l'eau (2) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_K}{\Delta t} m(\mathbf{K}) \left[(\rho_w)_K^{n+1} (S_w)_K^{n+1} - (\rho_w)_K^n (S_w)_K^n + (\rho_s)_K^{n+1} (S_s)_K^{n+1} - (\rho_s)_K^n (S_s)_K^n \right] \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} (\mathcal{F}_{w,K,e} + \mathcal{F}_{s,K,e}) = 0 \end{aligned}$$

avec, $\forall e \in \mathcal{E}^{int}(\mathbf{K})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{w,K,e} &= -m(e) (\mathbb{K})_e \left(\frac{k_{rw}}{\mu_w} \right)_e^{n+1} (\rho_w)_e^{n+1} \left(\frac{P_{K_e}^{n+1} - P_K^{n+1}}{d_{K,K_e}} + (\rho_w)_e^n g \frac{(z_{K_e} - z_K)}{d_{K,K_e}} \right), \\ \mathcal{F}_{s,K,e} &= -m(e) (\mathbb{K})_e \left(\frac{k_{rs}}{\mu_s} \right)_e^{n+1} (\rho_s)_e^{n+1} \left(\frac{P_{K_e}^{n+1} - P_K^{n+1}}{d_{K,K_e}} + (\rho_s)_e^n g \frac{(z_{K_e} - z_K)}{d_{K,K_e}} \right). \end{aligned}$$

Enfin, la discrétisation numérique de l'équation de conservation de l'énergie (4) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \frac{\phi_K}{\Delta t} m(\mathbf{K}) \left[(\rho_o)_K^{n+1} (e_o)_K^{n+1} (S_o)_K^{n+1} - (\rho_o)_K^n (e_o)_K^n (S_o)_K^n + (\rho_w)_K^{n+1} (e_w)_K^{n+1} (S_w)_K^{n+1} - (\rho_w)_K^n (e_w)_K^n (S_w)_K^n \right. \\ & \quad \left. + (\rho_s)_K^{n+1} (e_s)_K^{n+1} (S_s)_K^{n+1} - (\rho_s)_K^n (e_s)_K^n (S_s)_K^n \right] + \frac{(1 - \phi_K)}{\Delta t} m(\mathbf{K}) \left[(\rho_r)_K^{n+1} (e_r)_K^{n+1} - (\rho_r)_K^n (e_r)_K^n \right] \\ & + \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} (\mathcal{F}_{T,K,e} + \mathcal{F}_{H,o,K,e} + \mathcal{F}_{H,w,K,e} + \mathcal{F}_{H,s,K,e}) = 0 \end{aligned}$$

avec, $\forall e \in \mathcal{E}^{int}(\mathbf{K})$,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{T,K,e} &= -m(e) \lambda \frac{T_{K_e}^{n+1} - T_K^{n+1}}{d_{K,K_e}}, \\ \mathcal{F}_{H,o,K,e} &= (H_o)_e^{n+1} \mathcal{F}_{o,K,e}, \\ \mathcal{F}_{H,w,K,e} &= (H_w)_e^{n+1} \mathcal{F}_{w,K,e}, \\ \mathcal{F}_{H,s,K,e} &= (H_s)_e^{n+1} \mathcal{F}_{s,K,e}. \end{aligned}$$

Remarque 1.3. $\mathcal{F}_{T,K,e}$ représente le flux numérique de Fourier (consistant, conservatif et monotone) sur l'arête $e \in \mathcal{E}(K)$, orienté selon la normale sortante à la maille K .

Comme pour les mobilités, on effectue un décentrage amont en fonction du sens de l'écoulement de chaque phase pour approcher les enthalpies ; ainsi, nous avons :

pour les phases huile et eau (ici, $p \in \{o, w\}$)

$$(H_p)_e^{n+1} = \begin{cases} H_p(T_{K_e}^{n+1}) & \text{si } P_{K_e}^{n+1} + (\rho_p)_e^n g z_{K_e} \geq P_K^{n+1} + (\rho_p)_e^n g z_K, \\ H_p(T_K^{n+1}) & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour la phase vapeur,

$$(H_s)_e^{n+1} = \begin{cases} H_s(P_K^{n+1}, T_{K_e}^{n+1}) & \text{si } P_{K_e}^{n+1} + (\rho_p)_e^n g z_{K_e} \geq P_K^{n+1} + (\rho_p)_e^n g z_K, \\ H_s(P_{K_e}^{n+1}, T_K^{n+1}) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.1.3 Calcul des flux dans le cas d'un maillage cartésien non structuré raffiné localement

Nous avons vu en section 1.1.1 que le raffinement local de maillage permet de réduire la diffusion numérique.

Cependant, pour que les résultats ne soient pas affectés par la topologie non structurée du maillage, il faut que le schéma numérique soit adapté. Des études ont en effet montré que l'application d'un schéma à cinq points sur un maillage raffiné localement entraînait une dispersion significative dans les résultats [38].

Nous avons vu que le gradient de pression dans les termes de flux est calculé par des différences finies. Pour que ce gradient soit consistant, la droite reliant les centres de deux cellules voisines doit être orthogonale à l'interface [23]. Cela n'étant plus le cas entre les mailles de centres e_1 et c (voir la Figure II.4), les valeurs des inconnues sont données en un pseudo centre de la cellule plus grossière (le pseudo centre c_1 , de la maille de centre c , est situé en face du centre e_1 de la sous-maille), par une combinaison convexe des valeurs des mailles grossières voisines [37]. Le gradient est alors calculé entre e_1 et c_1 .

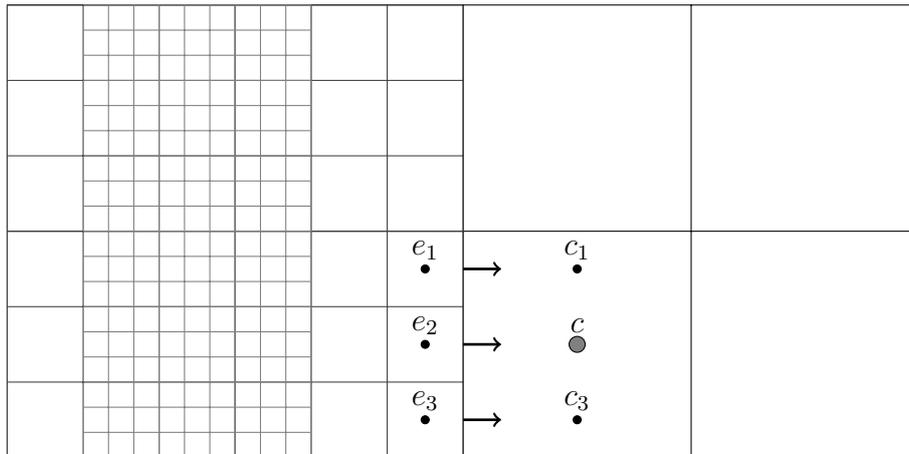


Fig. II.4: Schématisation de la connection entre deux niveaux de grilles

1.2 La gestion des pas de temps

La longueur des pas de temps est calculée en fonction des variations des inconnues au cours du temps.

Soient X une inconnue et dX sa variation maximale calculée par rapport à l'instant précédent ($dX = \max_i |X_i^{n+1} - X_i^n|$). dX_1 et dX_2 représentent des valeurs seuils choisies pour la variable X et d_{var} un coefficient généralement égal à 0.1 .

On distingue quatre cas :

- si $dX \leq dX_1/(1 + d_{var})$, le pas de temps est augmenté,
- si $dX_1/(1 + d_{var}) \leq dX \leq dX_1 \cdot (1 + d_{var})$, le pas de temps reste le même,
- si $dX_1 \cdot (1 + d_{var}) \leq dX \leq dX_2$, le pas de temps est réduit pour l'itération suivante,
- si $dX \geq dX_2$, le calcul est recommencé avec un pas de temps plus petit.

Ce test est effectué pour toutes les variables et le pas de temps final sera contraint par la variation de la plus forte des variables. La réduction ou l'augmentation du pas de temps se fait à l'aide de deux ratios définis au préalable R1 et R2.

Si le pas de temps final doit être réduit, il est divisé par R1 ; si au contraire il doit être augmenté, il est alors multiplié par R1. Enfin si les calculs apparaissent incorrects (pressions négatives, saturations non comprises entre 0 et 1) à la fin d'un pas de temps, alors celui-ci est divisé par R2 (généralement les valeurs de R1 et R2 sont comprises entre 1.2 et 1.5) .

1.3 Résolution du schéma implicite en temps

Les pressions, les saturations et la température interviennent toutes dans les équations du système (voir section 3.2.6). En fonction de l'état thermodynamique de la maille (voir chapitre 1 section 3.2.4) il est possible de réduire le nombre d'inconnues ainsi que le nombre d'équations du système. Trois cas se présentent.

- On est à l'équilibre eau-vapeur.
La température est alors à la température saturante ($T = T_{sat}(P)$) et les trois phases sont en équilibre. Nous pouvons alors choisir pour inconnues principales la pression et deux saturations (P , S_o et S_s par exemple) ; la troisième saturation (S_w) se déduit des deux autres grâce à la loi de conservation du volume poreux (6).
- On a de la vapeur sèche.
La température est supérieure à la température saturante et la saturation en eau est nulle. Les inconnues principales peuvent alors être la pression, la température et la saturation en huile ; la saturation en vapeur est dans ce cas égale à $1 - S_o$.
- On a de l'eau liquide uniquement.
La saturation en vapeur est nulle. Les inconnues principales sont donc la pression, la température et la saturation en huile ; la saturation en eau est dans ce cas égale à $1 - S_o$.

Si par exemple nous prenons pour inconnues principales P , T et S_o , le système d'équations peut s'écrire : $F(X) = 0$ avec $X = (P, T, S_o)$.

Le système discret est un système non linéaire. Pour le résoudre, nous utilisons une méthode de Newton. Chaque itération de Newton implique la résolution d'un système linéaire. Celui-ci est résolu par une méthode itérative de type Bi-CGstab préconditionnée.

2 Présentation d'un cas test synthétique

Le réservoir considéré pour ces premiers tests numériques est représenté sur la Figure II.5. Celui-ci étant homogène, on ne considère qu'une moitié en utilisant la symétrie (yOz) : dans ce cas un seul doublet de puits est défini et positionné en bordure de domaine. On simule donc le développement d'une moitié de la chambre de vapeur, l'autre moitié se déduisant de la première par symétrie. Cela permet de réduire les temps de calculs. Nous avons de plus pris une seule maille en y , avec un maillage (X,Z). Les données pétrophysiques et thermodynamiques, ainsi que les données aux puits, sont détaillées dans l'annexe D.

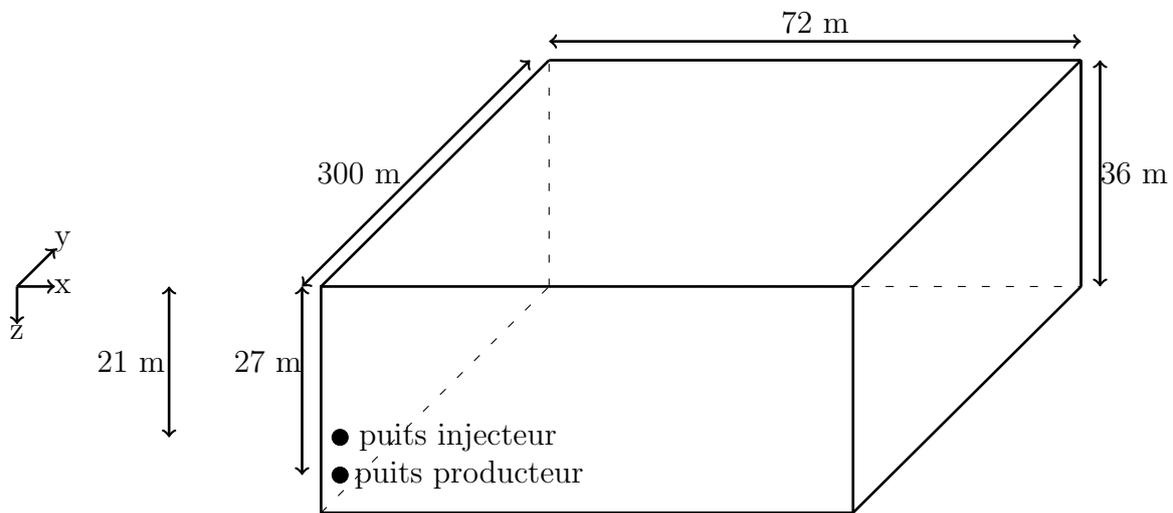


Fig. II.5: Géométrie du réservoir

Les simulations sont effectuées en utilisant un maillage cartésien régulier et portent sur une période d'une dizaine d'années environ. Les 150 premiers jours consistent à préchauffer la région avoisinant les puits. Une période de 3 jours suit, où seul le puits producteur est ouvert, le réservoir est alors en déplétion naturelle. Enfin, la dernière période est une période d'injection/production.

Au puits injecteur on impose un débit maximum de 250 tonnes de vapeur par jour, avec une pression limite de 59 bars. Au puits producteur on impose un débit maximum de 250 m³ par jour d'eau et d'huile, avec une pression limite de 25 bars. Pour éviter que la vapeur injectée soit produite, suivant la différence de température entre les puits injecteur et producteur, les débits aux puits sont régulés : si la différence de température est faible, l'injection de vapeur est diminuée ; par opposition, si la différence de température est grande, le débit de production est augmenté (on parle de "steam trap control" [18]). Pour la simulation, la solution fine (prise pour référence par la suite) est calculée sur une grille composée de 108 mailles selon x et 54 mailles selon z . Les mailles sont carrées et mesurent 0.66 m de côté. Les puits injecteur et producteur, tous deux horizontaux et parallèles à l'axe des y , sont situés en bordure de domaine précisément, à 3 m du bord, à 21 m et 27 m de profondeur, ce qui donne un écart entre puits de 6 m (voir figure II.5).

2.1 Description de la solution obtenue sur maillage fin

Dans ce paragraphe, nous décrivons les solutions obtenues pour l'exemple décrit précédemment.

2.1.1 Comportement de la chambre de vapeur

Une chambre de vapeur se forme dès l'ouverture du puits injecteur. Nous distinguons trois phases au cours desquelles la chambre de vapeur a une forme différente.

1. La chambre de vapeur croît en prenant une forme ovoïde; cette période se termine dès que la vapeur a atteint le toit du réservoir (voir Figure II.6).

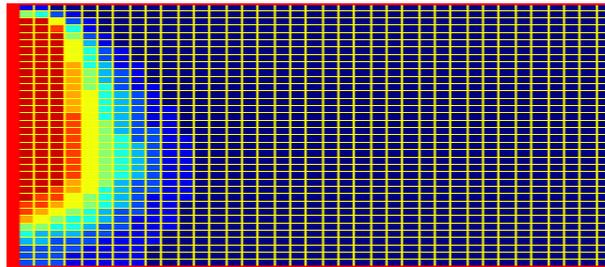


Fig. II.6: Visualisation de la chambre de vapeur lors de la première phase

2. La chambre de vapeur s'élargit le long du toit du réservoir, jusqu'aux limites latérales du domaine (voir Figure II.7).

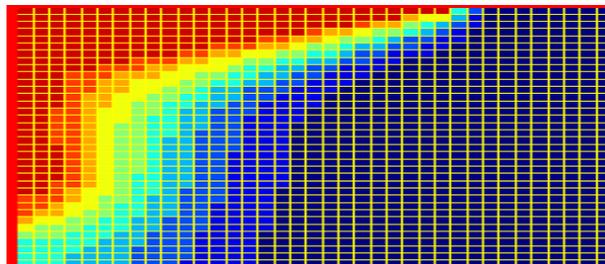


Fig. II.7: Visualisation de l'élargissement de la chambre de vapeur au toit du réservoir

3. La vapeur envahit la partie inférieure du réservoir. Le mécanisme de production est ici davantage un mécanisme de déplacement forcé de l'huile par la vapeur qu'un mécanisme de drainage par gravité (voir Figure II.8).

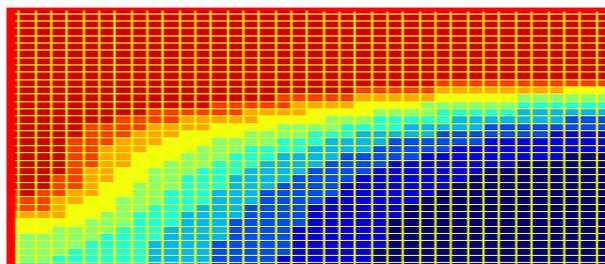


Fig. II.8: Visualisation de la descente de la chambre de vapeur

2.1.2 Description de la solution fine

Les différents profils de saturation et de température présentés ci-après ont été obtenus au bout d'un temps de 1000 jours. A cet instant, la chambre de vapeur est dans sa phase d'élargissement. La saturation en huile, représentée sur la Figure II.9, reste constante dans la zone de vapeur et a pour valeur 0.1 ce qui correspond à la saturation en huile résiduelle suite au balayage par la vapeur. Ensuite, elle augmente très rapidement pour atteindre un premier plateau où sa valeur est de 0.5. Ce plateau se trouve immédiatement en aval de la chambre de vapeur et est caractéristique de l'huile réchauffée mobile. Enfin, le second et dernier plateau représente la zone d'huile non mobile. La saturation dans cette région est égale à la saturation initiale, soit 0.85.

Le profil de la saturation en vapeur que l'on peut voir sur la Figure II.10 nous permet de bien localiser la chambre de vapeur dans le réservoir : elle est maximale là où est la vapeur et nulle ailleurs.

La saturation en eau n'est supérieure à la saturation d'eau interstitielle que sur la zone d'interface marquant la transition entre la chambre de vapeur et l'huile froide. Cette eau résulte de la condensation de la vapeur au contact de l'huile froide.

Avec la gravité, elle contribue au déplacement de l'huile réchauffée vers le puits producteur (voir Figure II.11).

La température atteint les 272°C dans la chambre de vapeur ; cette température correspond à la température saturante à la pression locale ($T_{sat}(P)$). Elle diminue ensuite régulièrement jusqu'à atteindre la température initiale du réservoir, soit 27°C (voir Figure II.12).

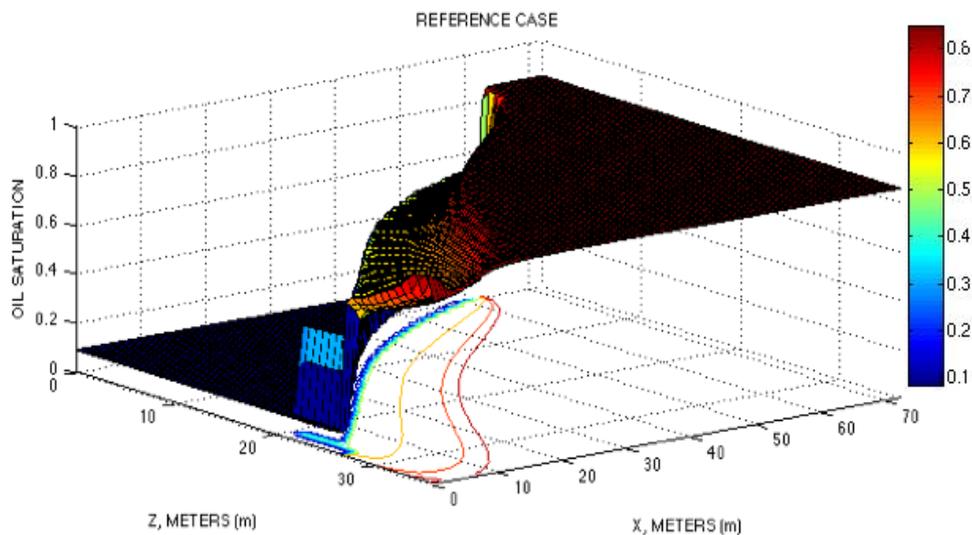


Fig. II.9: Cas fin de référence : la saturation en huile à $t=1000$ jours

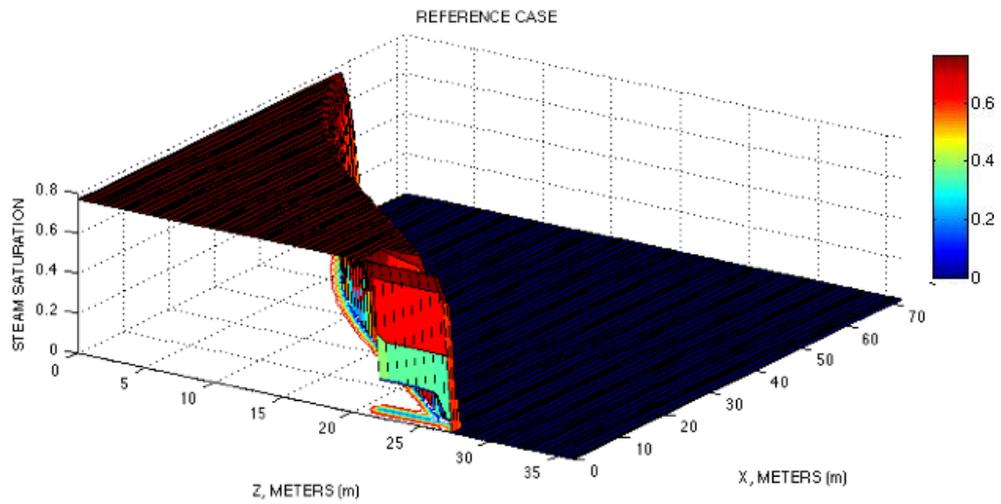


Fig. II.10: Cas fin de référence : la saturation en vapeur à t=1000 jours

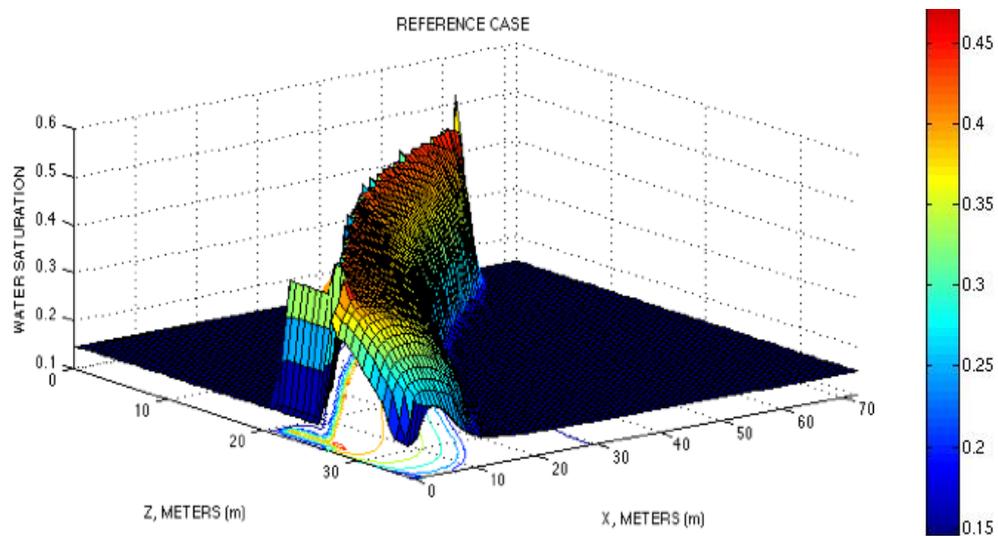


Fig. II.11: Cas fin de référence : la saturation en eau à t=1000 jours

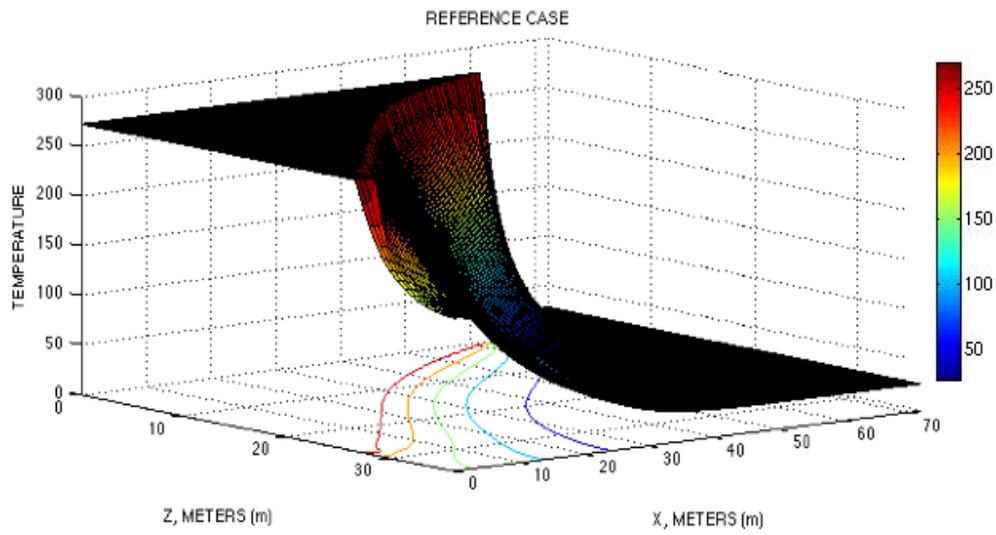


Fig. II.12: Cas fin de référence : la température à $t=1000$ jours

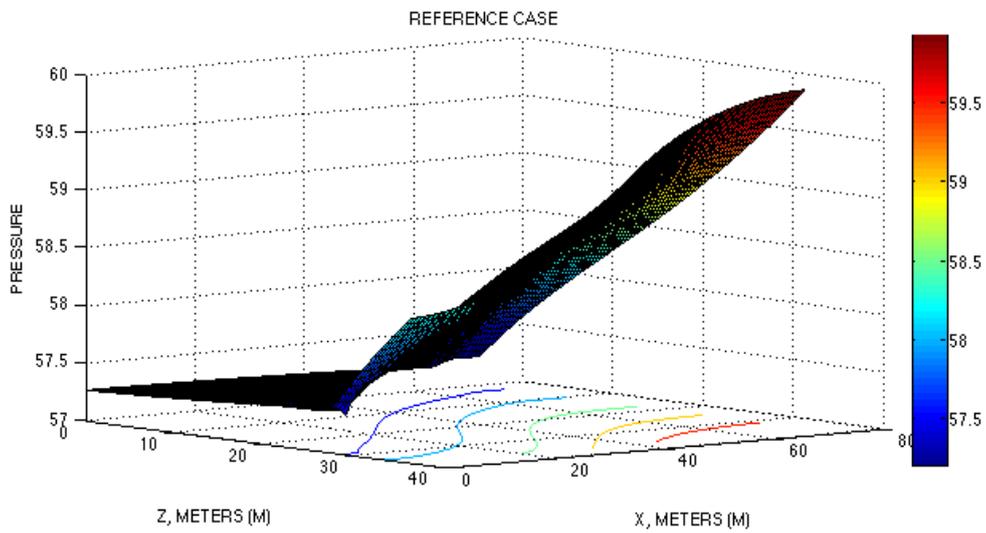


Fig. II.13: Cas fin de référence : la pression à $t=1000$ jours

La Figure II.13 représente le champ de pression. On constate que la pression reste constante dans la zone vapeur, puis augmente continûment et atteint sa valeur maximale de 59.93 bars.

Les Figures II.14 et II.15 nous montrent l'évolution au cours du temps du volume cumulé d'huile produit et du débit d'huile surfacique produit par jour. On observe sur une période, comprise entre l'instant où l'on ouvre les puits (à 153 jours) et l'instant où on atteint le plateau de production (vers 2500 jours), une augmentation continue du volume cumulé d'huile ; la valeur maximale est légèrement supérieure à 0.18 hm^3 , ce qui correspond à 97% du volume d'huile initial (voir Figure II.14).

La courbe donnant le débit d'huile (voir Figure II.15) nous permet de distinguer les différents stades où la chambre de vapeur change de morphologie. Les deux pics de production, aux alentours de 170 et 280 jours, suivent l'ouverture des puits et sont représentatifs d'une régulation du débit. Le débit augmente ensuite continûment jusqu'à environ 1300 jours. Durant cette période, la chambre atteint le toit du réservoir et s'évase en prenant la forme d'un éventail. Dès que la chambre de vapeur atteint les bords latéraux du domaine, le débit d'huile produit diminue. Au delà, on se trouve dans la phase de descente de la vapeur vers la base du réservoir. Il n'y a plus à ce stade de drainage par gravité mais plutôt un déplacement forcé de l'huile sous l'effet du pompage.

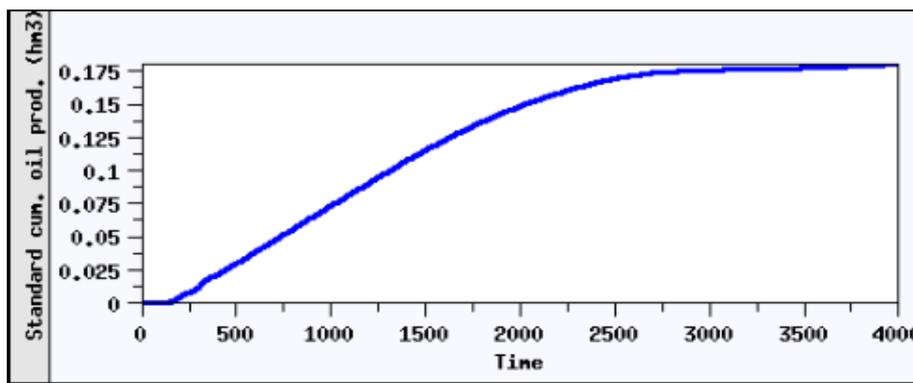


Fig. II.14: Cas fin de référence : le cumulé d'huile produit

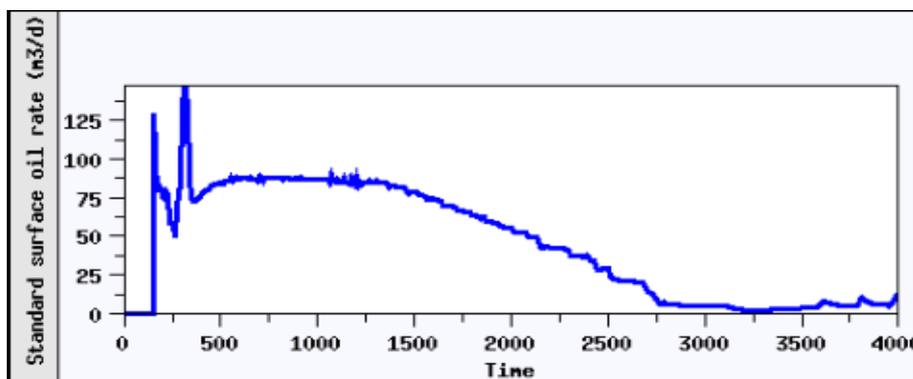


Fig. II.15: Cas fin de référence : le débit d'huile produit

3 Sensibilité du modèle

3.1 Influence de la taille des mailles

En pratique, vu l'augmentation rapide des temps de calculs avec l'augmentation de la taille du maillage, on essaie de trouver le meilleur compromis entre temps de calculs et précision des résultats : partant d'une solution grossière, le maillage est raffiné jusqu'à obtenir une bonne précision des calculs dans des délais acceptables.

Le paragraphe qui suit montre pour trois maillages les résultats que l'on peut obtenir. Trois grilles aux mailles carrées ont été utilisées :

- cas (A) $Nz = 6$ $Nx = 12$, mailles de 6m de côté
- cas (B) $Nz = 18$ $Nx = 36$, mailles de 2m de côté
- cas (C) $Nz = 54$ $Nx = 108$, mailles de 0.66m de côté

Les Figures II.16 à II.22 montrent, à des dates correspondant aux trois phases de production mentionnées dans le paragraphe 1.3.2 (page 18), l'influence de la taille des mailles sur la température, les trois saturations, le cumulé d'huile et le cumulé d'eau. On remarque sur le Tableau II.1 que le raffinement des mailles diminue la durée des phases de production.

DURÉE DES PHASES DE PRODUCTION		
GRILLE	PHASES DE PRODUCTION	DURÉE (jours)
(A)	phase 1	0 -- > 500
	phase 2	500 --- > 2000
	phase 3	2000 -- > 3100
(B)	phase 1	0 -- > 310
	phase 2	310 -- > 1300
	phase 3	1300 -- > 2800
(C)	phase 1	0 -- > 270
	phase 2	270 -- > 1150
	phase 3	1150 -- > 2600

Tab. II.1: Durée des phases de production en fonction de la taille des mailles

Les résultats avec la grille grossière 12×6 ne sont pas satisfaisants. Nous observons de faibles températures avec un maximum de 238°C dans la chambre de vapeur : les mailles grossières ne sont pas assez chauffées et par conséquent, la production de l'huile est sous-estimée (voir Figure II.20).

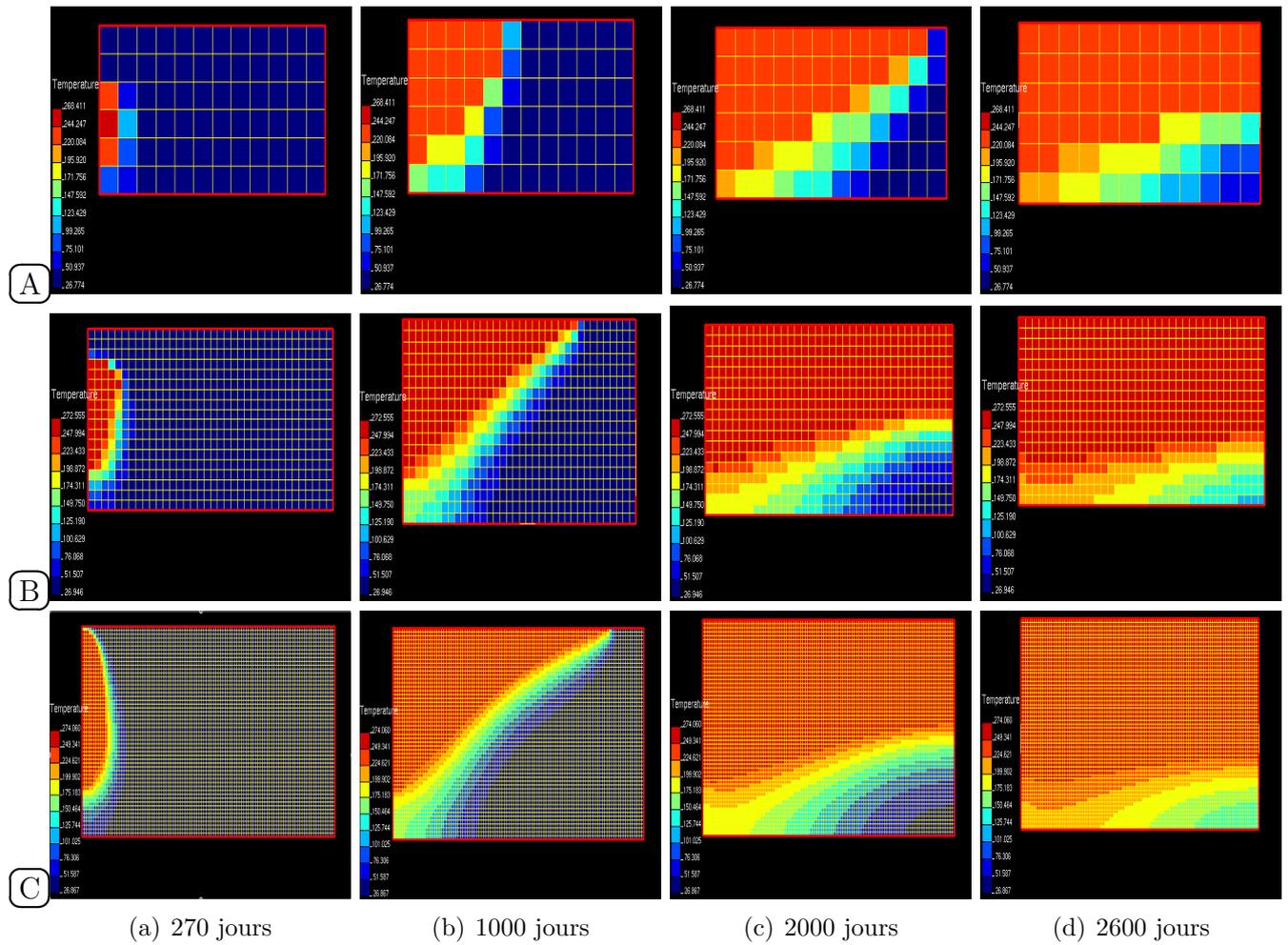


Fig. II.16: Sensibilité de la température à la taille des mailles

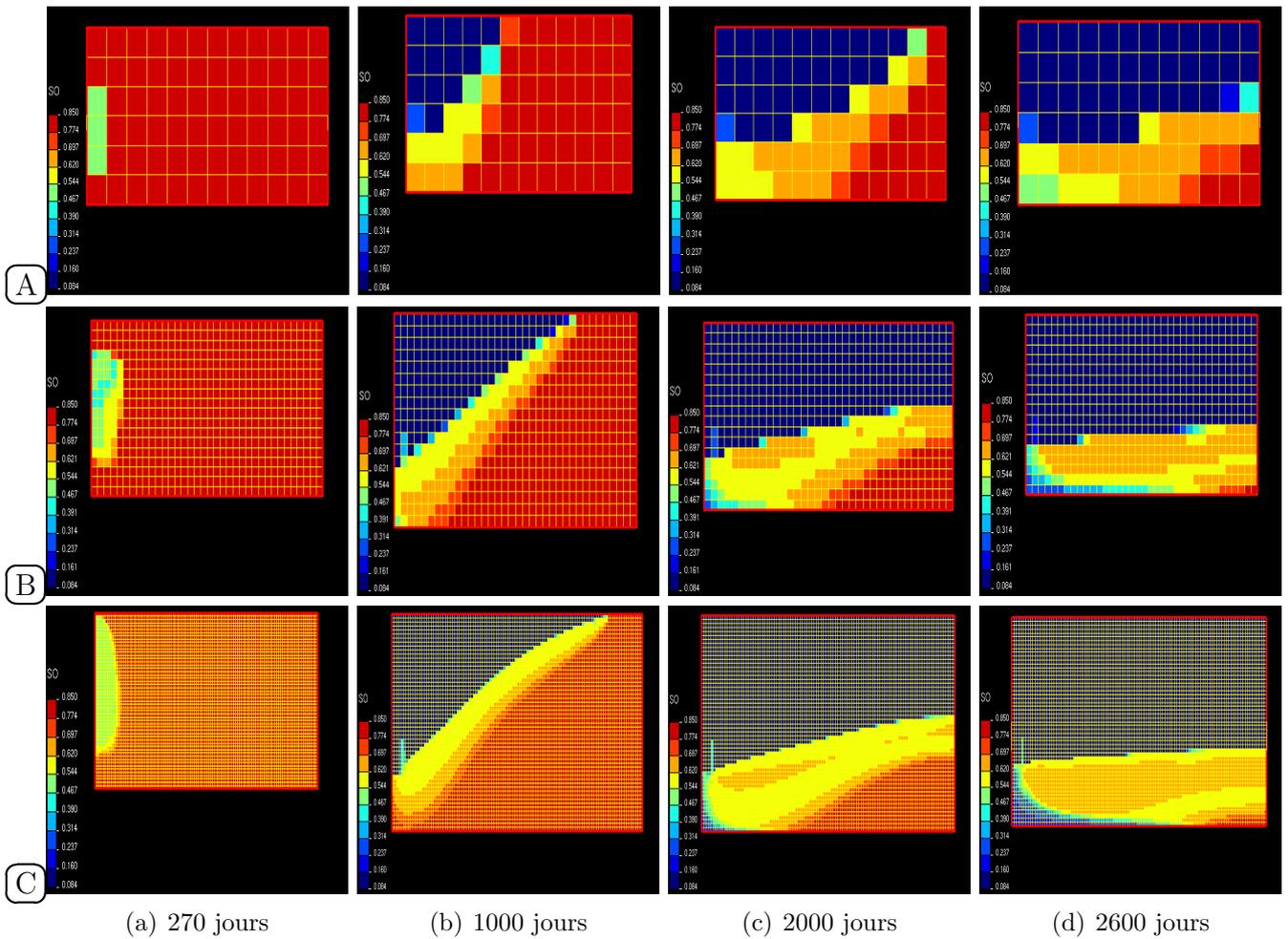


Fig. II.17: Sensibilité de la saturation en huile à la taille des mailles

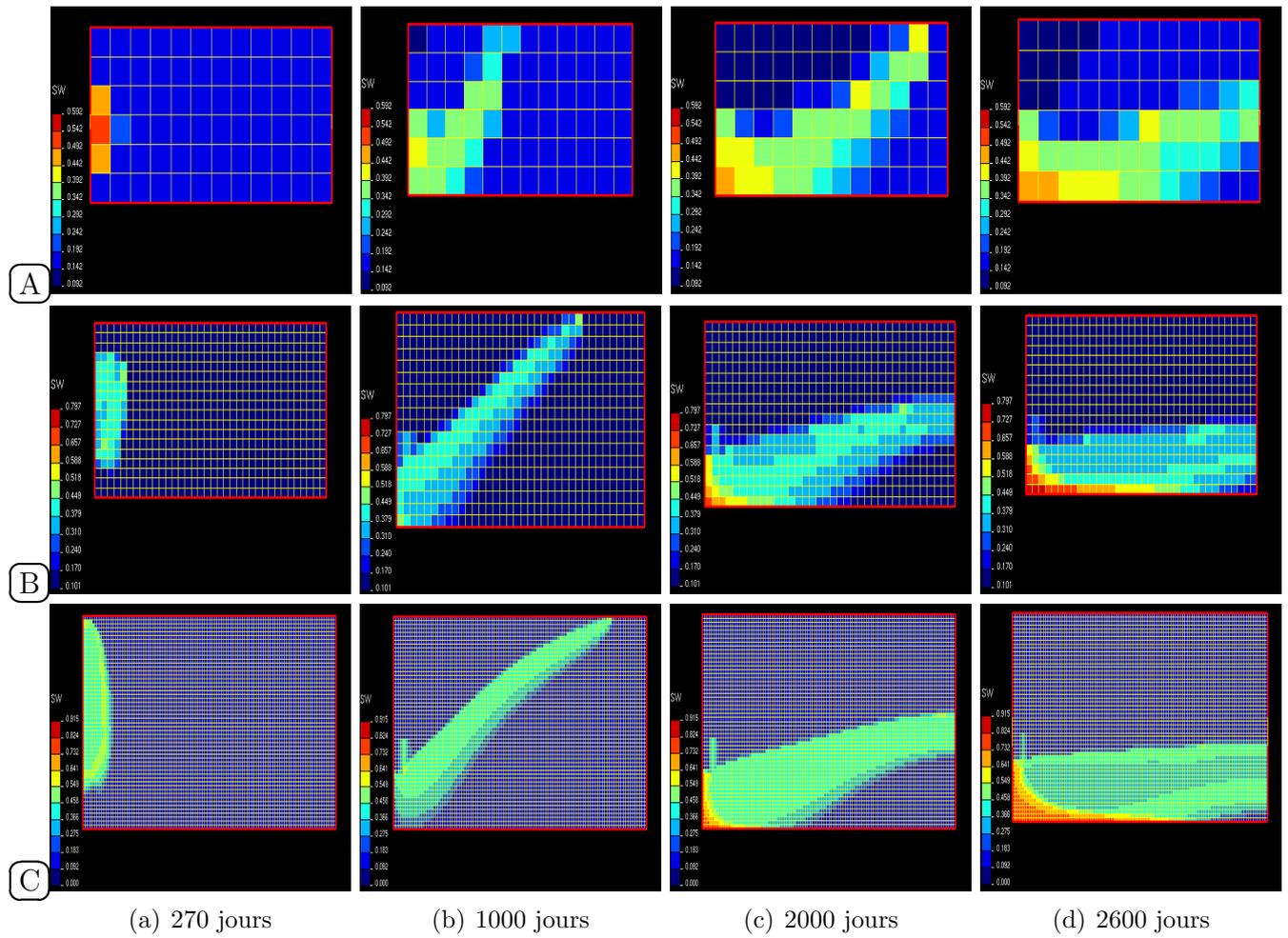


Fig. II.18: Sensibilité de la saturation en eau à la taille des mailles

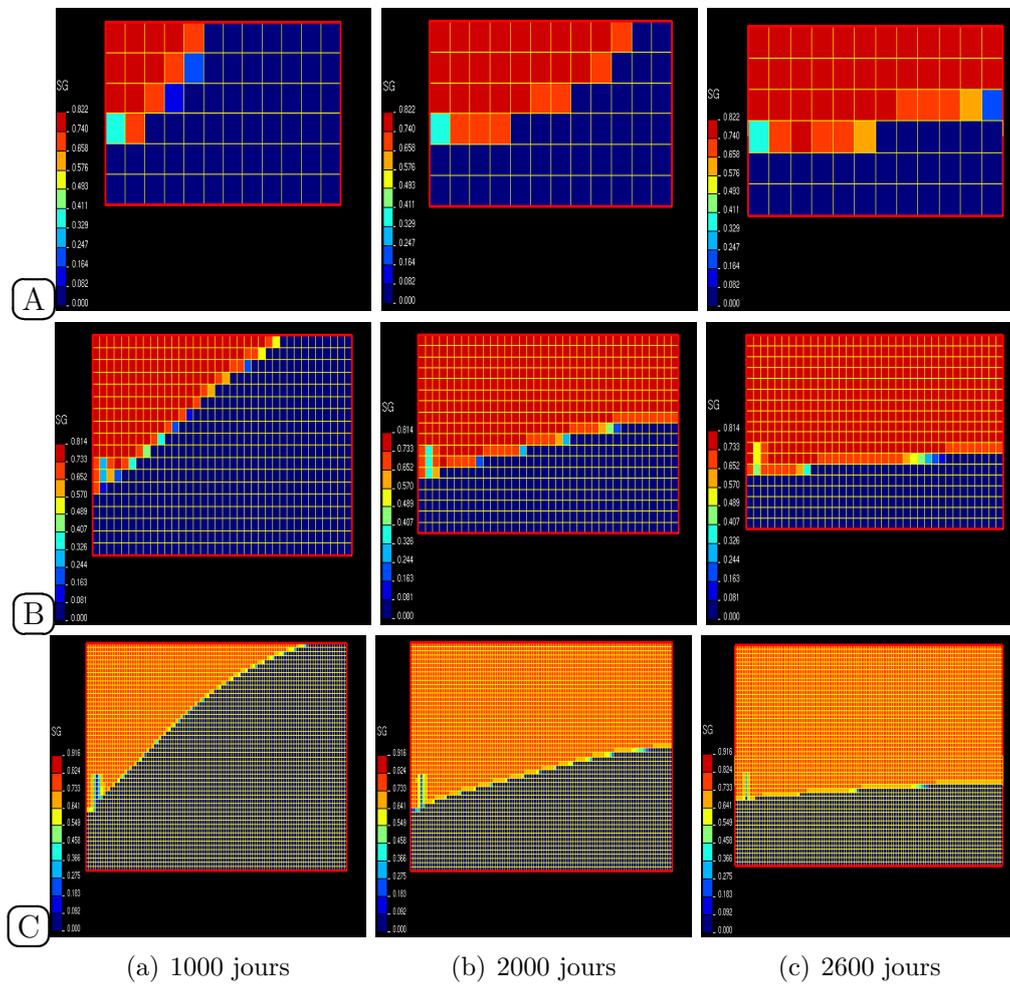


Fig. II.19: Sensibilité de la saturation en vapeur à la taille des mailles

La récupération en huile cumulée atteint 0.181 hm^3 avec la grille fine et 0.17 hm^3 avec la grille A (voir la Figure II.20) ; l'erreur relative en fin de simulation est supérieure à 6%, soit une différence de plus de 88 000 us.bl.

Le débit total au puits producteur étant imposé, on estime une production d'eau plus importante par rapport aux deux autres cas plus fins : en fin de simulation, 0.55 hm^3 d'eau sont produits en plus avec la grille A (voir Figure II.22).

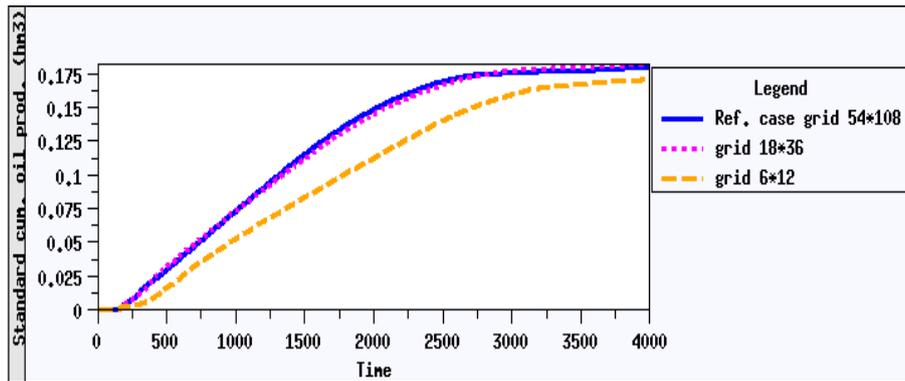


Fig. II.20: Sensibilité à la taille des mailles : le cumulé d'huile produite

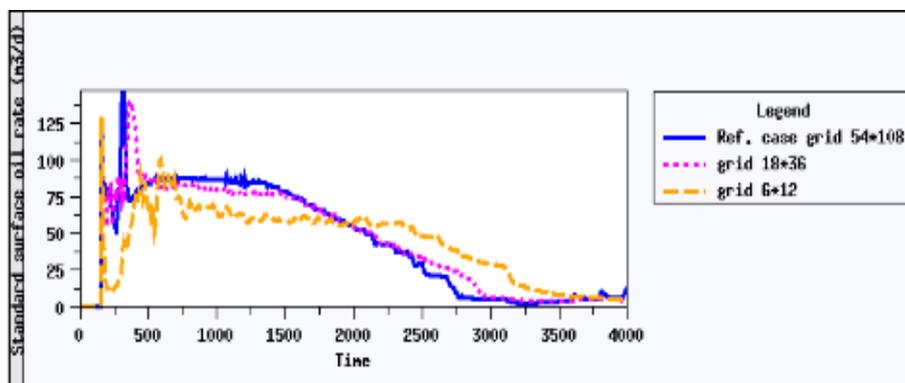


Fig. II.21: Sensibilité à la taille des mailles : le débit d'huile produit

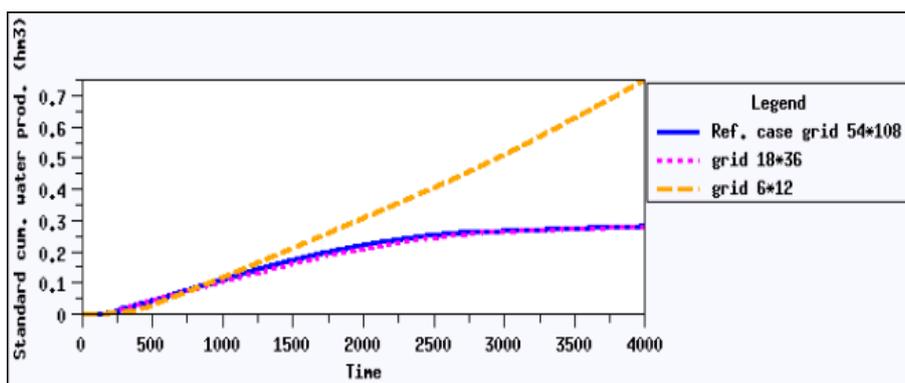


Fig. II.22: Sensibilité à la taille des mailles : le cumulé d'eau produit

A différentes dates de la simulation, les courbes de la Figure II.23 donnent les temps CPU ainsi que le nombre de pas de temps obtenus. On constate que raffiner la grille entraîne une augmentation des temps CPU et du nombre de pas de temps.

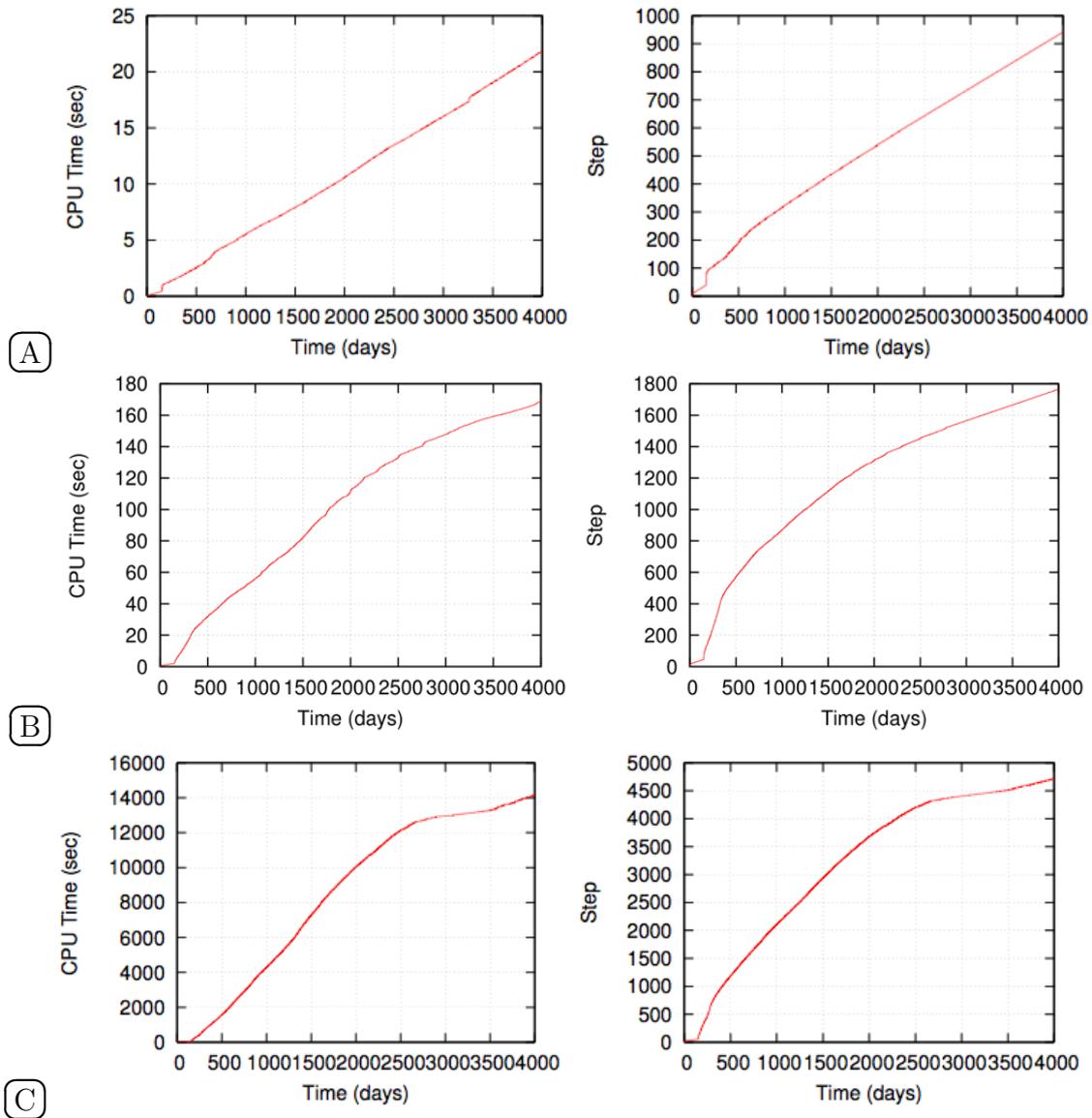


Fig. II.23: Sensibilité à la taille des mailles : les temps CPU et le nombre de pas de temps

Ces différents résultats montrent que si l'on souhaite obtenir des prévisions de production fiables, il faut mailler finement l'interface d'écoulement. Les résultats obtenus avec la grille B sont relativement satisfaisants mais les mailles sont déjà fines et sur des cas 3D cela aboutirait à des temps CPU trop importants.

Le raffinement de maillage adaptatif apparaît alors comme une bonne alternative : il consiste à raffiner localement la discrétisation en temps et en espace afin que la solution donnée par le schéma numérique soit la plus proche possible de la solution exacte tout en limitant les temps de calculs.

4 Application du raffinement de maillage adaptatif à la simulation du SAGD

4.1 Principe du raffinement de maillage adaptatif

Ce paragraphe a pour but de présenter, dans les grandes lignes, les principes de base du raffinement de maillage adaptatif.

Depuis les travaux de Berger et Collela [4], le raffinement de maillage adaptatif est une technique couramment utilisée dans la résolution de problèmes aux dérivées partielles.

Cette technique a été introduite à l'origine pour la résolution de problèmes issus de la mécanique des fluides. Les solutions étudiées dans ce domaine présentent souvent des discontinuités qu'il faut être capable de reproduire numériquement. Malheureusement, en présence de maillages trop grossiers, les schémas numériques introduisent une diffusion numérique qui tend à lisser les fronts. Le moyen le plus simple de réduire cette diffusion est d'affiner le maillage là où la solution peut présenter des irrégularités. Mais en présence d'un front très mobile, cette zone peut être étendue et aboutir à des temps de calculs trop importants. L'idée inhérente au raffinement de maillage adaptatif est de suivre le déplacement du front et de ne raffiner le maillage au cours d'un pas de temps que là où l'erreur de discrétisation est trop importante.

Le raffinement de la solution en temps et en espace s'effectue, en général, sur l niveaux ($l = 1, 2, 3, 4$ en pratique). Notons Δt et h les pas de temps et d'espace de la discrétisation la plus grossière. Au niveau 1, i.e. au premier niveau, ces paramètres sont raffinés selon un même ratio r .

Ainsi $\Delta t_1 = \Delta t/r$ et $h_1 = h/r$ et le même ratio est utilisé pour les niveaux suivants ($\Delta t_2 = \Delta t_1/r$ et $h_2 = h_1/r, \dots, \Delta t_l = \Delta t_{l-1}/r$ et $h_l = h_{l-1}/r$). Le fait d'utiliser ce même paramètre r à la fois pour la discrétisation en temps et en espace et à chaque niveau, présente plusieurs avantages.

Pour des schémas explicites, si les pas de temps et d'espace du niveau le plus grossier ont été choisis de façon à satisfaire la condition de type CFL, alors les pas de temps et d'espace des niveaux supérieurs vérifieront également cette condition. De plus, par cette méthode, on n'utilise des petites mailles et de petits pas de temps que là où l'erreur est importante et non pas sur l'ensemble du domaine. En termes de temps de calculs, on optimise donc à la fois l'intégration en temps et l'intégration en espace.

D'un point de vue algorithmique, les différents niveaux de grille satisfont une règle d'emboîtement : une grille de niveau l est toujours contenue dans une grille de niveau $l - 1$ et chaque niveau de grille a son propre vecteur de solutions (cf. Figure II.24). Ainsi, un même point de l'espace peut être recouvert par plusieurs niveaux de grille. Pour limiter les temps de calculs, la mise à jour du maillage ne s'effectue pas à chaque pas de temps. Dans ce cas, les algorithmes construisent, à chaque niveau, une zone tampon autour de chaque région à raffiner. Cela permet d'anticiper les déplacements futurs du front et d'éviter qu'il ne quitte la zone raffinée avant la prochaine mise à jour du maillage.

Remarque 4.1. *Les maillages de niveau $1 \dots l$ n'ont pas nécessairement la même orientation que la grille initiale. Leur orientation peut être calculée de façon à suivre au maximum la limite de la zone de front. Cela limite l'étendue de la zone raffinée et réduit l'effet d'axe (voir [36] pour une illustration de l'effet d'axe en simulation de réservoir).*

Le calcul d'un pas de temps Δt se fait en commençant par les niveaux de discrétisation les plus élevés et en descendant la hiérarchie des grilles.

À chaque fois, il faut calculer les conditions aux limites à appliquer aux bords de la zone raffinée et, à la fin du pas de temps, mettre à jour la solution au niveau immédiatement inférieur. Lorsque deux grilles d'un même niveau de raffinement se recouvrent en un ou plusieurs points, il peut être nécessaire de faire une moyenne des solutions calculées dans les deux domaines avant de passer au calcul du niveau suivant.

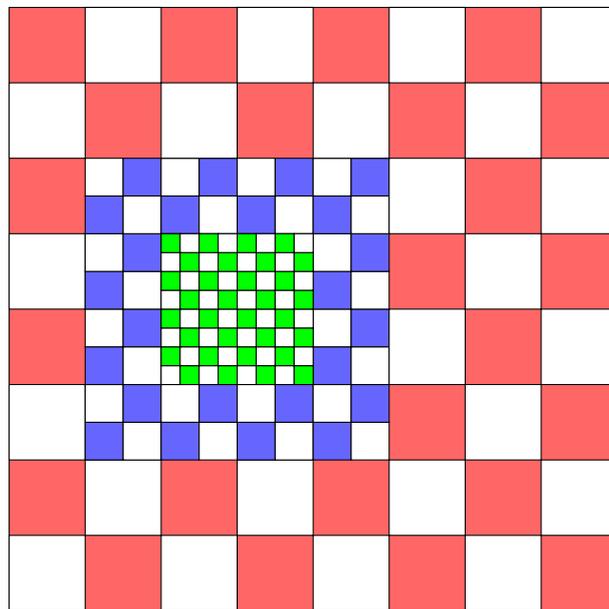
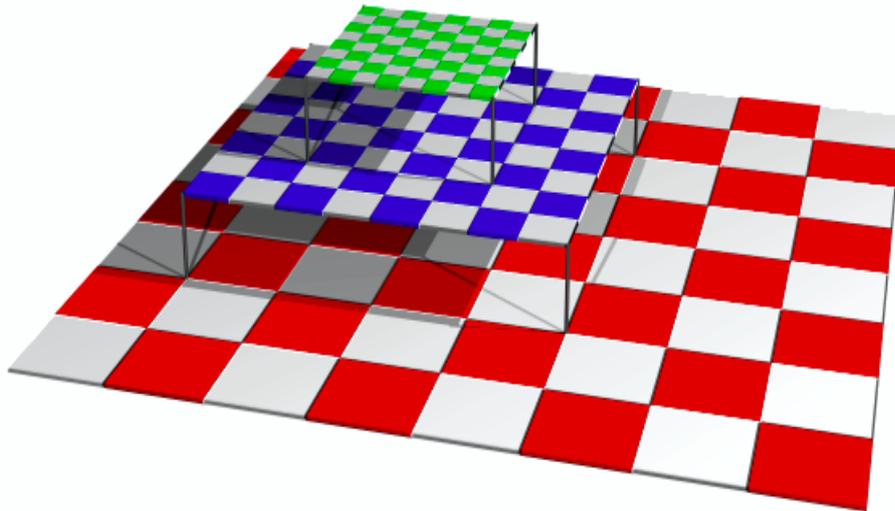


Fig. II.24: Exemple de raffinement local

4.2 Le générateur de sous-maillages dynamiques du groupe IFP

Nous présentons ici la technique de raffinement de maillage adaptatif mise en place pour simuler le SAGD avec le simulateur de réservoir de l'IFP, $PUMA^{flow}$.

4.2.1 Principe du couplage

La gestion du sous-maillage dynamique est originale car elle se fait à l'extérieur de $PUMA^{flow}$ (contrairement au simulateur STARS du groupe canadien Computer Modelling Group [41]), ce qui permet d'utiliser, potentiellement, n'importe quel simulateur thermique de réservoir.

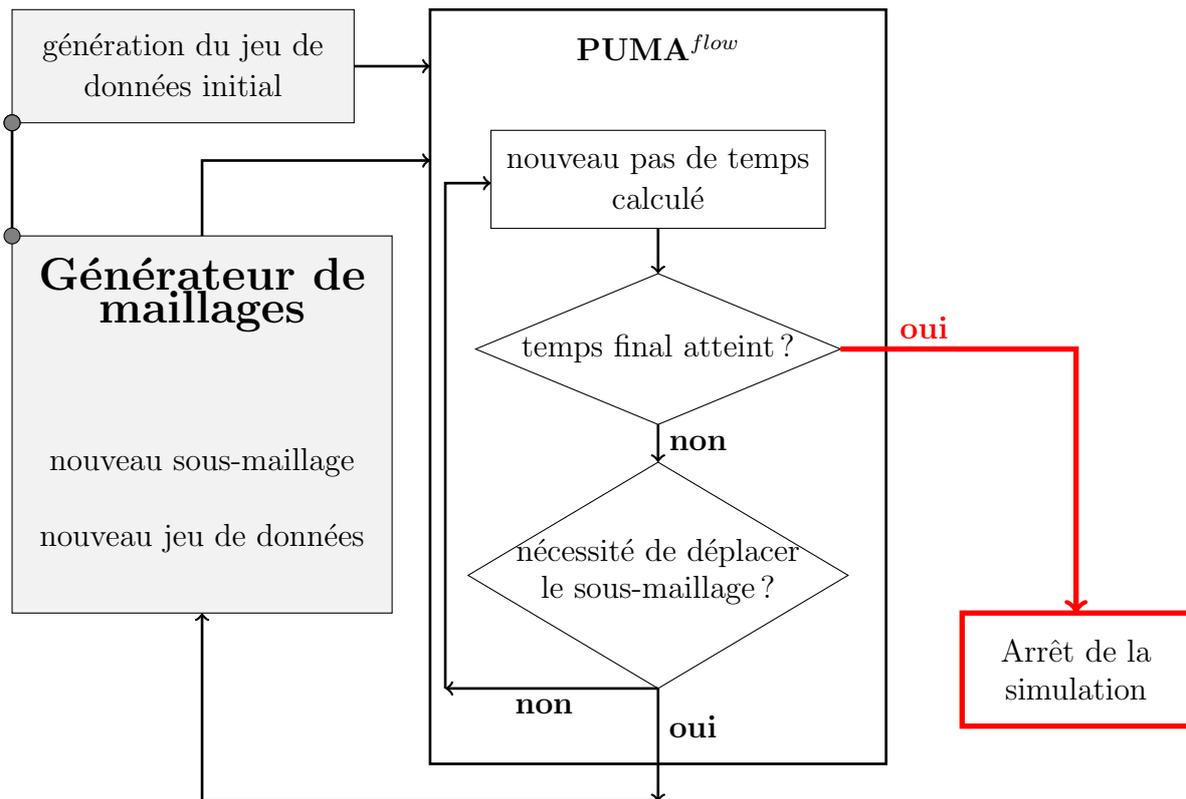


Fig. II.25: Couplage entre le générateur de maillages et le simulateur $Puma^{flow}$

Une simulation SAGD est découpée en plusieurs périodes. La première période fait l'objet d'un traitement à part : au cours de cette première période, la chambre de vapeur étant dans sa première phase de développement (voir section 2.1.1), le générateur de maillage met alors en place un maillage localement raffiné autour des puits pour simuler les premiers instants d'injection de vapeur dans le réservoir.

Au début de chacune des périodes suivantes, le simulateur de réservoir s'arrête et le générateur de maillages crée, grâce au critère de raffinement, un nouveau maillage, raffiné là où s'écoulera a priori l'huile au cours de la période suivante (le maillage est fixe sur toute la durée de la période).

Remarque 4.2. *Le calcul des pas de temps sur une période dépend de la grille de niveau le plus élevé. Il n'existe pas dans ce programme adaptatif de sous pas de temps locaux, contrairement à ce qui a été présenté dans le paragraphe 4.1.*

En plus de réactualiser le maillage, le coupleur met aussi à l'échelle les paramètres pétrophysiques et les différentes variables (pressions, saturations, températures) en fonction de leur position sur la grille et de leur nouveau niveau de raffinement. Ce couplage est résumé sur la Figure II.25.

Pour le bon fonctionnement du générateur de maillage, l'utilisateur doit fournir un certain nombre de données en entrée. Ainsi, en plus des données thermodynamiques, pétrophysiques, numériques et de gestion des débits aux puits, doivent être précisés la taille des périodes, la dimension du réservoir, la taille du maillage grossier, le ratio de raffinement dans chaque direction, le nombre de niveaux de grille, le nombre de doublets de puits ou encore la position dans le réservoir des puits. Il est possible d'avoir un à plusieurs doublets de puits. Pour des problèmes homogènes, nous avons vu que simuler le SAGD sur une moitié de domaine permettait de réduire les temps de calculs : dans ce cas un seul doublet de puits est défini et positionné en bordure de domaine.

Initialement, les différents cas tests qui pouvaient être étudiés étaient essentiellement des problèmes en milieu homogène en deux dimensions. Ce n'est que par la suite, dans le cadre de ce travail, que son champ d'application a été élargi aux problèmes hétérogènes (toujours en deux dimensions).

4.2.2 Le positionnement du maillage fin

Supposons qu'une période vient d'être simulée (période P_i de la Figure II.26, par exemple) et que le générateur de maillages est appelé pour créer un nouveau maillage.

Comme nous l'avons précisé précédemment (voir section 4.2.1), le générateur va créer un nouveau maillage adaptatif qui sera fixe pendant la simulation de la prochaine période (période P_{i+1}). Pour cela, il récupère le maillage utilisé lors de la période P_i ainsi que les valeurs de toutes les variables aux instants t^n et t^{n-1} (voir Figure II.26).

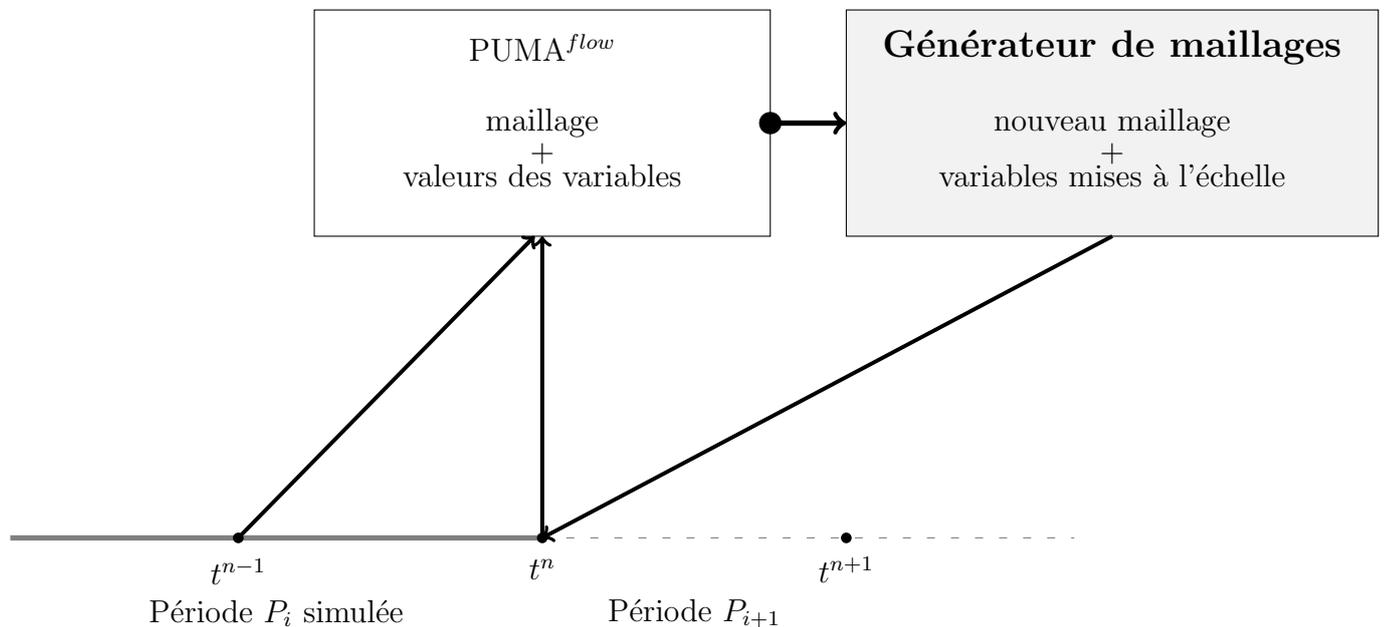


Fig. II.26: Données récupérées par le générateur de maillages

En utilisant un critère permettant de mettre en évidence les zones de discontinuités de certaines variables (zones où le schéma diffuse beaucoup en présence de grosses mailles), le générateur détecte la position de l'interface d'écoulement aux instants t^{n-1} et t^n .

Cela permet de calculer une vitesse moyenne de déplacement de cette interface et ainsi d'estimer son déplacement sur la période P_{i+1} (voir Figure II.27).

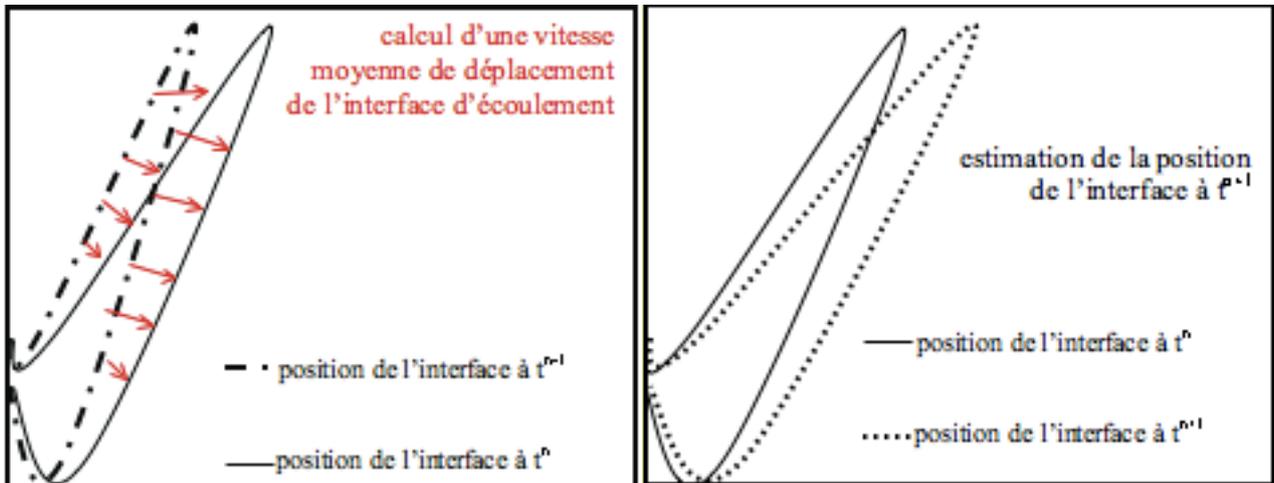


Fig. II.27: Estimation de la position de l'interface

Les cellules fines seront donc dans les zones qui seront a priori balayées par l'interface. Le code maille alors finement toute la zone comprise entre la position de l'interface à l'instant t^n et sa position estimée à l'instant t^{n+1} (voir la Figure II.28). Le code élargit ensuite la zone raffinée pour conserver une marge de sécurité.

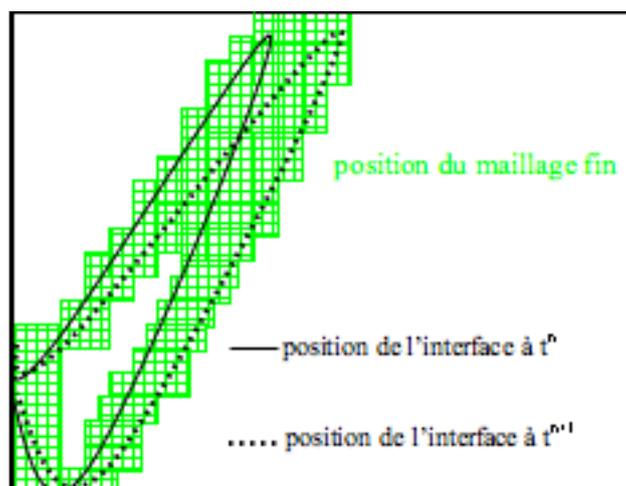


Fig. II.28: Position du maillage fin

Enfin, une fois les cellules fines activées, en fonction de leur position et de la hiérarchie des grilles, le générateur active les mailles de niveau intermédiaire à grossier. Le nouveau maillage est alors créé. Il faut à ce stade, en fonction de l'ancien maillage, mettre à l'échelle toutes les variables.

4.2.3 La mise à l'échelle des variables pour des problèmes en milieu homogène

On appelle "downscaling" le passage d'un maillage grossier à un maillage plus fin. L'"upscaling" désigne le passage d'un maillage fin à un niveau plus grossier.

Le downscaling des variables

Lorsqu'une maille grossière est raffinée, il faut calculer les propriétés physiques (température, saturations, pression) associées aux mailles sous-jacentes. Cette étape est appelée downscaling. Dans le générateur de maillages, la température et les saturations d'une sous-maille sont les mêmes que celles de la maille d'appui (voir la Figure II.29).

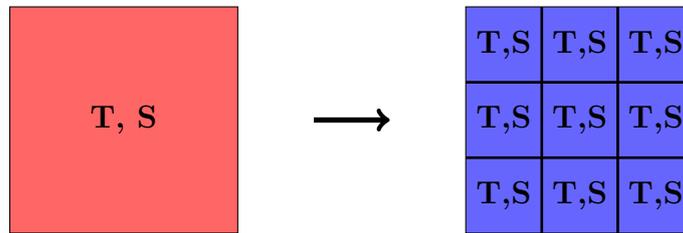


Fig. II.29: Downscaling de la température et des saturations

En ce qui concerne la pression, elle est calculée par l'interpolation verticale linéaire suivante :

$$P_{l+1,K*} = P_{l,K} + \frac{d(x_K, x_{K*})}{d(x_K, x_{Ke})} (P_{l,Ke} - P_{l,K}),$$

où, comme le montre la Figure II.30,

- $P_{l+1,K*}$ est la pression de la sous-maille $K*$ de niveau $l + 1$,
- $P_{l,K}$ est la pression de la maille d'appui, K de niveau l ,
- $P_{l,Ke}$ est la pression de la maille de l'ancien maillage la plus proche verticalement de la maille $K*$,
- $d(x_K, x_{K*})$ représente la distance entre les centres des mailles (l, K) et $(l + 1, K*)$,
- $d(x_K, x_{Ke})$ représente la distance entre les centres des mailles (l, K) et (l, Ke) .

Remarque 4.3. La Figure II.30 illustre un exemple d'interpolation possible.

Sur l'ancien maillage, la maille la plus proche de la maille $(l + 1, K*)$ peut être une maille de niveau $l + 1$.

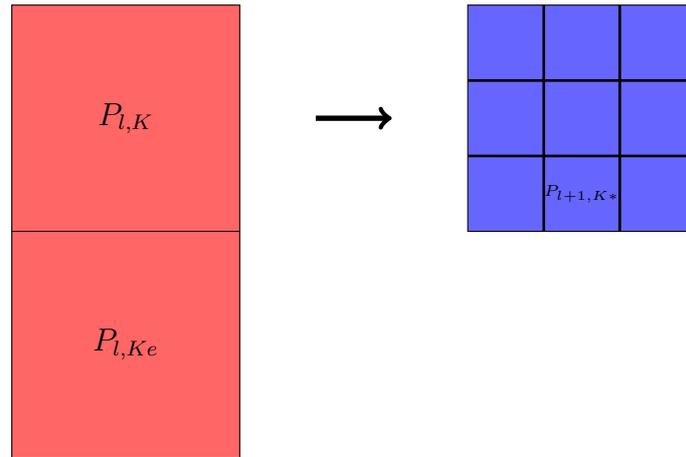


Fig. II.30: Downscaling de la pression

L'upscaling des variables

Inversement, lorsqu'une maille est déraffinée, le fait de déduire les propriétés physiques de la maille grossière à partir des mailles sous-jacentes est appelé upscaling.

Pour toutes les variables, on calcule les nouvelles propriétés de la maille de niveau inférieur par une moyenne arithmétique [46] :

$$X_{l,K} = \frac{\sum_{j=1}^M X_{l+1,K_j}}{M}$$

où

- $X_{l,K}$ est la propriété de la maille K de niveau l ,
- X_{l+1,K_j} est la même propriété mais pour la sous-maille K_j de niveau $l + 1$,
- M est le nombre de sous-mailles de niveau $l + 1$ contenues dans la maille (l, K) .

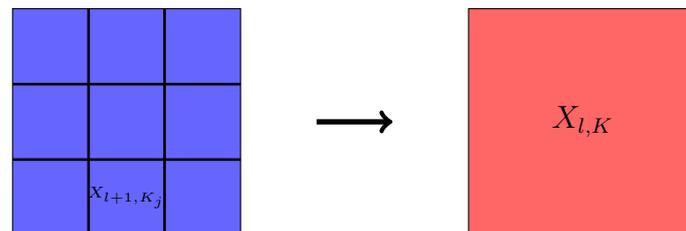


Fig. II.31: Upscaling des variables en milieu homogène

4.2.4 La mise à l'échelle des variables pour des problèmes en milieu hétérogène

Nous précisons maintenant comment sont mises à l'échelle les variables et les propriétés pétrophysiques pour des cas hétérogènes.

Initialement, le code dispose en entrée des cartes de perméabilités et de porosités sur la grille fine. Les cartes des niveaux inférieurs (niveaux plus grossiers) sont déduites de ces cartes fines à l'aide d'une moyenne arithmétique. Pour la perméabilité, le choix de cette moyenne est purement arbitraire. D'autres lois algébriques peuvent être utilisées. Des solutions numériques sont aussi envisageables ([39], [17]).

L'upscaling et le downscaling de la température et de la pression se font de la même façon qu'en milieu homogène (voir section 4.2.3).

Pour les saturations, on conserve en permanence la solution sur la grille fine. On crée ainsi au temps initial une carte fine des saturations que l'on met à jour à la fin de chaque période simulée. Seules les nouvelles saturations des mailles fines du maillage adaptatif sont mises à jour car il n'y a pas d'écoulement en dehors des zones raffinées.

Pour assurer la conservation des volumes des fluides, les saturations issues du niveau fin sont mises à l'échelle sur les deux niveaux plus grossiers. On utilise pour cela une moyenne arithmétique pondérée par les valeurs des porosités données à l'échelle immédiatement supérieure.

Ainsi, pour calculer les saturations d'un niveau l nous utilisons la formule suivante :

$$S_{l,K} = \frac{\sum_{j=1}^M \phi_{l+1,K_j} dx_{l+1} dy_{l+1} dz_{l+1} S_{l+1,K_j}}{\phi_{l,K} dx_l dy_l dz_l},$$

où

- $S_{l,K}$ est la saturation de la maille K de niveau l ,
- S_{l+1,K_j} est la saturation de la $j^{\text{ème}}$ sous-maille de K de niveau $l + 1$,
- $\phi_{l,K}$ est la porosité de la maille K de niveau l ,
- dx_l, dy_l, dz_l sont respectivement les dimensions d'une maille de niveau l ,
- M est le nombre de sous-mailles de niveau $l + 1$ contenues dans (l, K) .

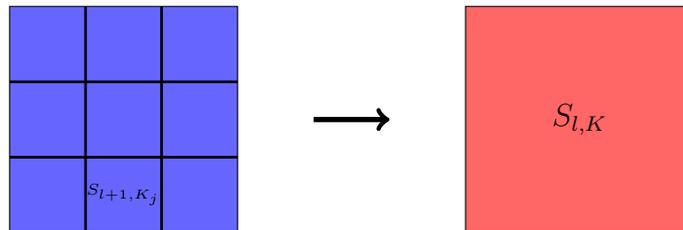


Fig. II.32: Upscaling des saturations en milieu hétérogène

4.3 Le raffinement de maillage basé sur les températures seuils

Au début du chapitre, nous avons vu que les méthodes classiques de raffinement de maillage adaptatif sont basées sur l'estimation d'une erreur de troncature du schéma numérique. Malheureusement, ces études se limitent souvent à des cas simplifiés.

Pour des systèmes plus complexes, comme celui présenté au chapitre 1, il faut avoir recours à des heuristiques [46], comme des valeurs seuils ou des calculs de gradient (sur la température et/ou sur les saturations), pour détecter les zones où la solution présente de fortes irrégularités et, où, potentiellement, l'erreur de discrétisation risque d'être plus importante.

Initialement, les études menées à l'IFP étaient basées sur l'utilisation de températures seuils [30]. Elles ont montré que le raffinement de maillage adaptatif pouvait permettre d'atteindre une certaine précision dans les résultats tout en diminuant les temps de calculs : des gains en temps de 3 et 2 ont respectivement été démontrés pour des cas tests en milieu homogène en deux et trois dimensions. Plus récemment, des études où la stratégie de raffinement est basée sur des gradients de température, des saturations et/ou des fractions molaires ont été publiées (voir [10] et [46]).

Christensen *et al.* [10] ont implémenté, à l'intérieur du simulateur de réservoir STARS, une technique de maillage dynamique qui identifie le déplacement de l'interface d'écoulement au travers de larges gradients de la température, des saturations et des fractions molaires (le modèle réservoir utilisé étant un modèle compositionnel). Ils ont montré des gains en temps de 2 et de 3, respectivement pour un cas 2D-homogène et un cas 3D-hétérogène. L'inconvénient pour ce type de critère de raffinement est qu'il est nécessaire d'effectuer des premiers calculs sur une grille entièrement fine afin d'évaluer les amplitudes des gradients et ainsi leurs valeurs seuils.

Pour des milieux hétérogènes, où différentes courbes de perméabilités relatives sont définies pour chaque type de roche, Wang *et al.* [46] proposent un critère de raffinement basé sur les variations des perméabilités relatives. Avec cette stratégie de raffinement de maillage adaptatif, un gain en temps de 5 pour un cas 1D a été observé.

4.3.1 Application à un cas homogène

Nous rappelons ici les premiers résultats obtenus sur un cas 2D-homogène en utilisant comme températures seuils 50°C et 250°C pour le suivi de l'interface d'écoulement [30]. Le cas test utilisé est celui présenté en section 2. Le maillage grossier est d'une taille 12×6 ($N_x = 12$ et $N_z = 6$). Nous avons deux niveaux de raffinement et le maillage est généré tous les 10 jours.

La stratégie de raffinement assure un maillage fin autour des puits et sur le front de température tout entier (à savoir, la surface comprise entre 50°C et 250°C) comme le montrent les Figures II.33 et II.34, où sont représentés les profils de la température et de la saturation en huile à différents stades de développement de la chambre de vapeur.

Le nombre de mailles est diminué en moyenne de 58% sur l'ensemble de la simulation par rapport au cas fin avec une valeur supérieure à 80% en début de simulation (voir Figure II.35).

En terme de gain en temps CPU, cette approche permet un gain cumulé moyen de 4,5 (voir Figure II.37) sans perte de précision sur la production cumulée en huile comme le montre la Figure II.36.

Remarque 4.4. *Le gain cumulé représente le rapport entre le temps cumulé du cas fin et celui du cas avec sous-maillage dynamique.*

Bien que l'utilisation des températures seuils soit un bon compromis entre temps de calculs et précision des résultats, l'efficacité de la méthode pour ce cas test est limitée. En effet, au cours du processus, il y a un étalement du front de température, ce qui entraîne une augmentation du nombre de mailles fines dans la zone d'huile froide non mobile (voir les profils (a) à (d) de la Figure II.34).

La zone raffinée est alors encore trop importante. En fait le maillage devrait être fin là où la solution (précisément la saturation en huile) est irrégulière, typiquement dans les zones de fort gradient.

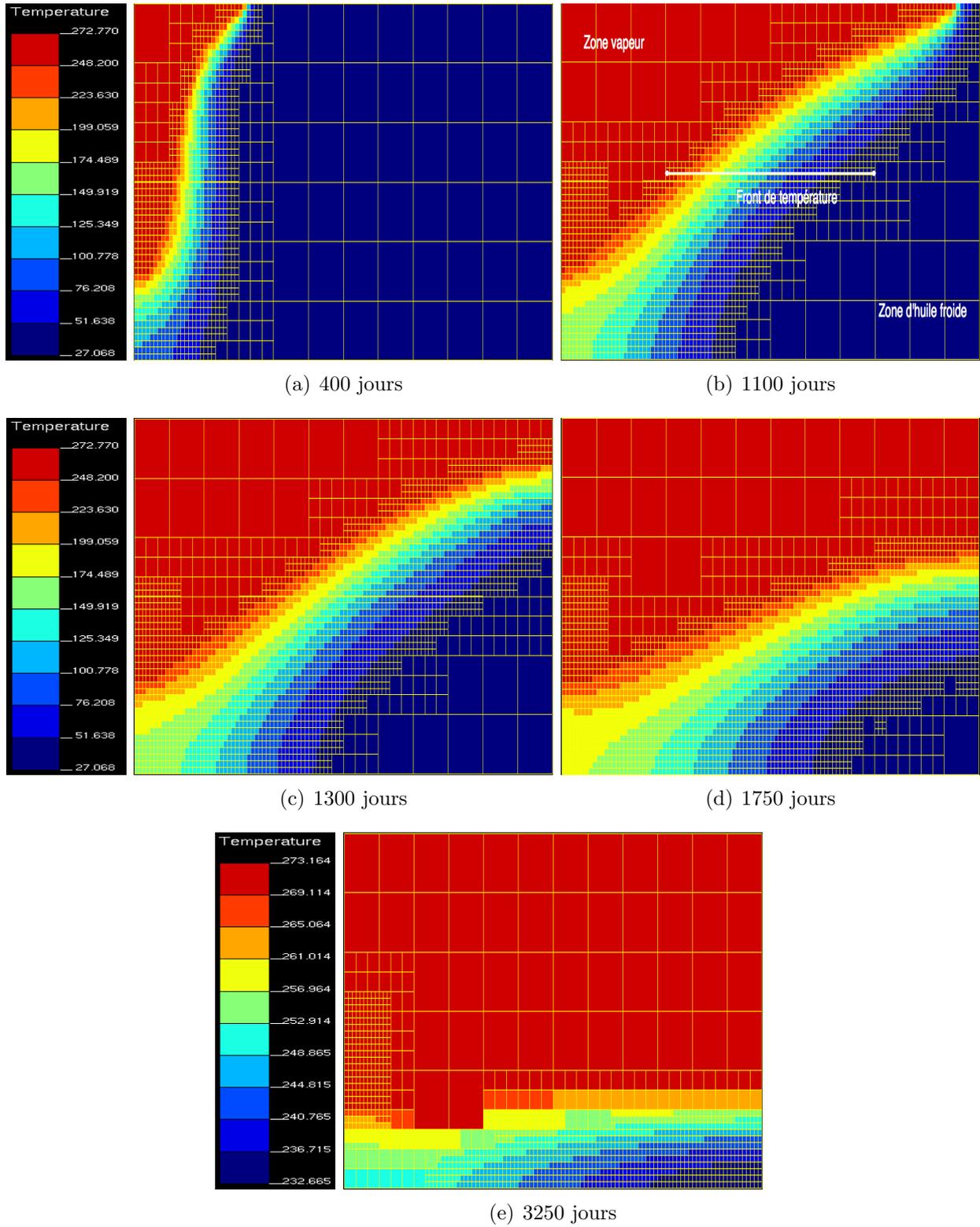


Fig. II.33: Maillage adaptatif avec les températures seuils : la température

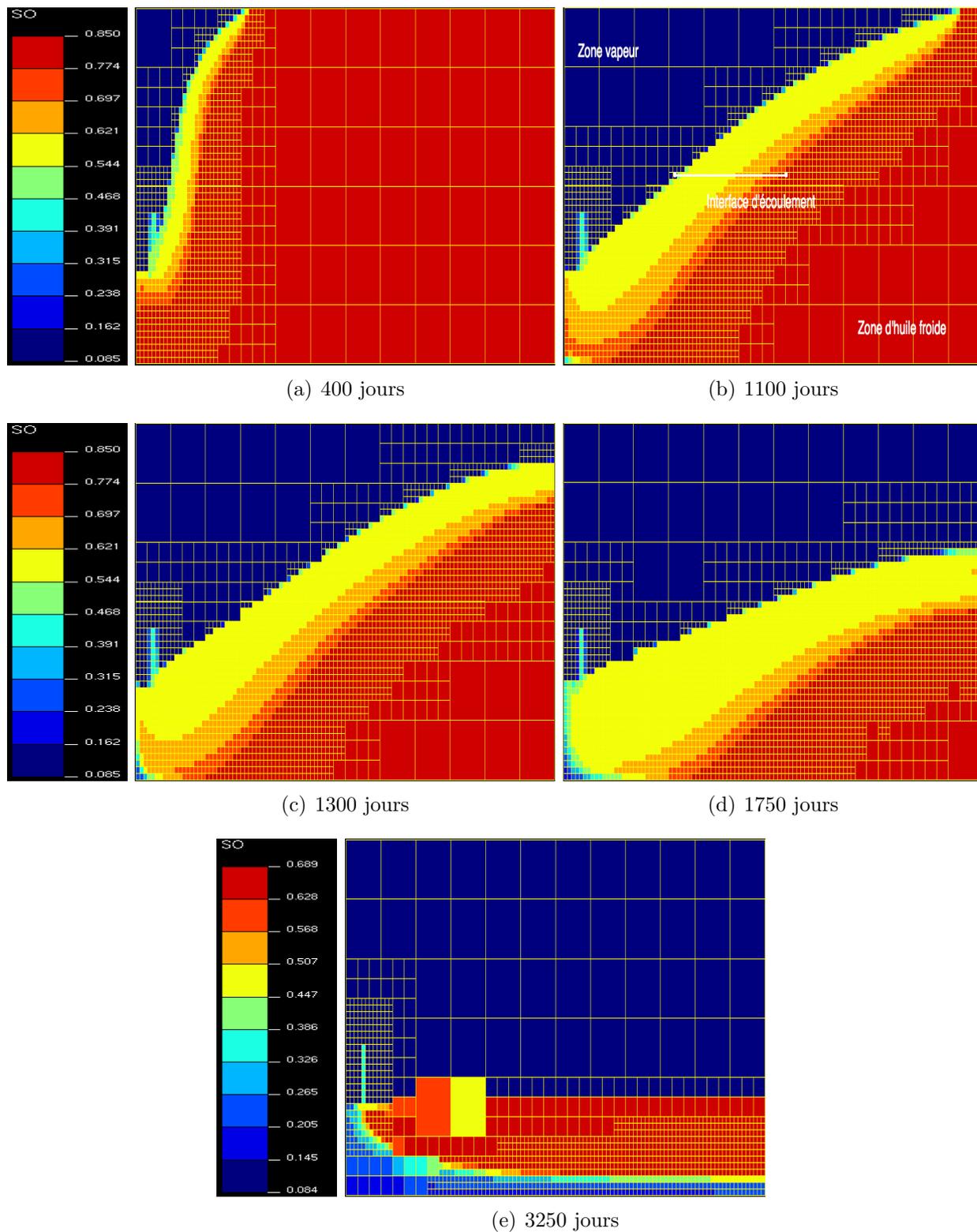


Fig. II.34: Maillage adaptatif avec les températures seuils : la saturation en huile

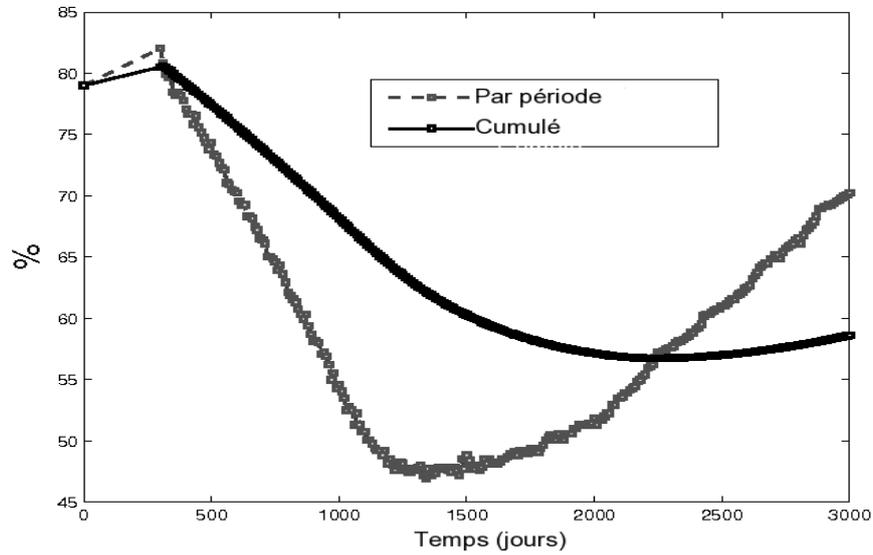


Fig. II.35: Réduction du nombre de mailles

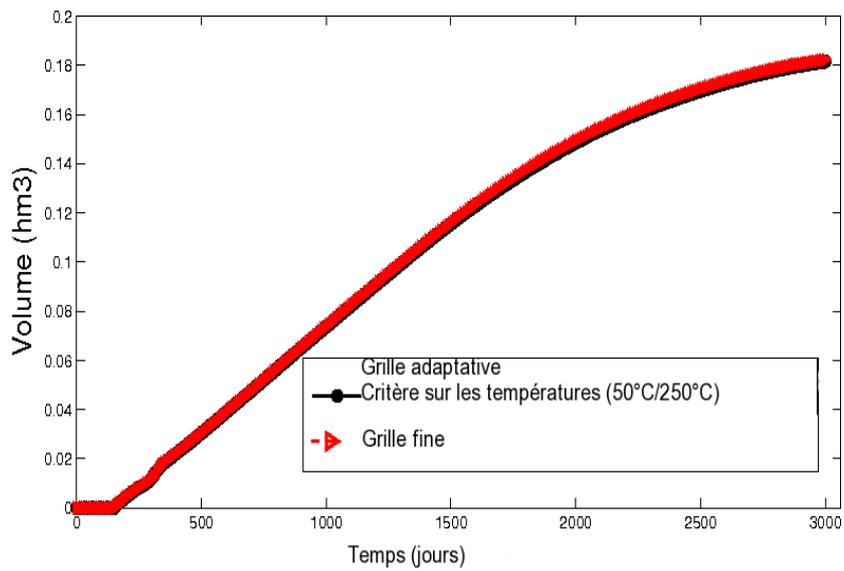


Fig. II.36: Production cumulée de l'huile

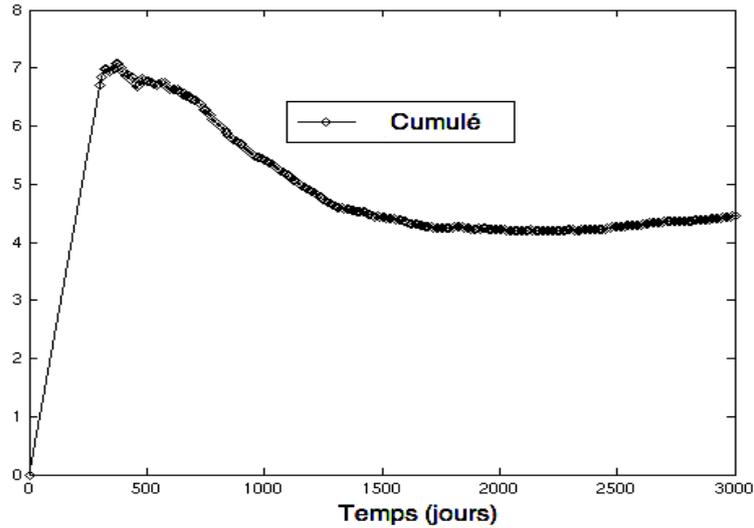


Fig. II.37: Gain en temps CPU cumulé

4.3.2 Application à un cas hétérogène

Nous considérons un réservoir hétérogène à deux faciès : de l'argile est laminée en différentes couches où les plus fines ont l'épaisseur d'une cellule fine, soit 0.66 m. La carte des faciès est représentée sur la Figure II.38. Nous utilisons pour le sable les données pétrophysiques du cas homogène (voir section 2) ; pour l'argile, nous avons les données suivantes : la perméabilité horizontale, la perméabilité verticale, la porosité et la saturation en eau initiale sont respectivement égales à 0.01 mD, 0.01 mD, 10% et 100%.

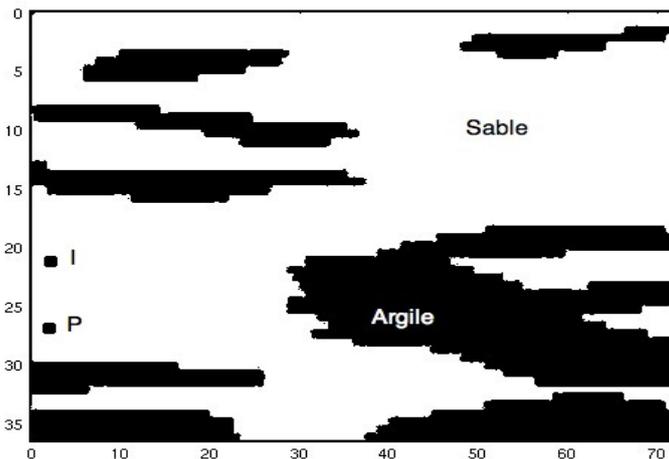


Fig. II.38: Milieu hétérogène : l'argile est en noir et le sable en blanc

A partir des résultats obtenus sur la grille entièrement fine, nous allons tout d'abord étudier la dynamique des écoulements de vapeur, d'eau et d'huile dans le réservoir.

Comme nous pouvons le voir sur la Figure II.39, dès le début de l'injection dans le réservoir, la vapeur est bloquée par une couche d'argile imperméable (la vapeur ne peut plus progresser vers le toit du réservoir); la chambre de vapeur s'étend en dessous de la barrière argileuse, jusqu'à ce qu'elle la contourne et qu'elle se développe dans une autre zone du réservoir. Contrairement au cas homogène, la vapeur se subdivise ici en plusieurs chambres de tailles différentes.

Le front de température quant à lui est différent du front de saturation puisque la chaleur se propage au travers des couches d'argile (voir la Figure II.40).

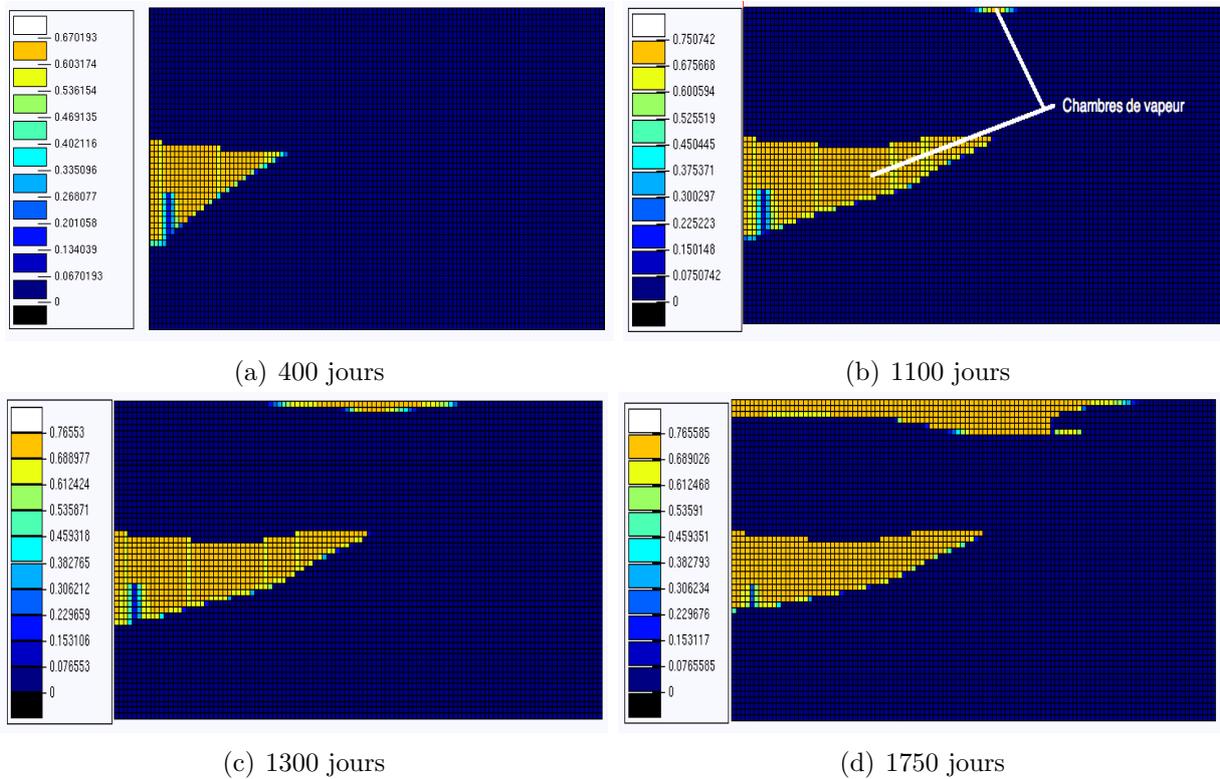


Fig. II.39: Maillage entièrement fin : la saturation en vapeur

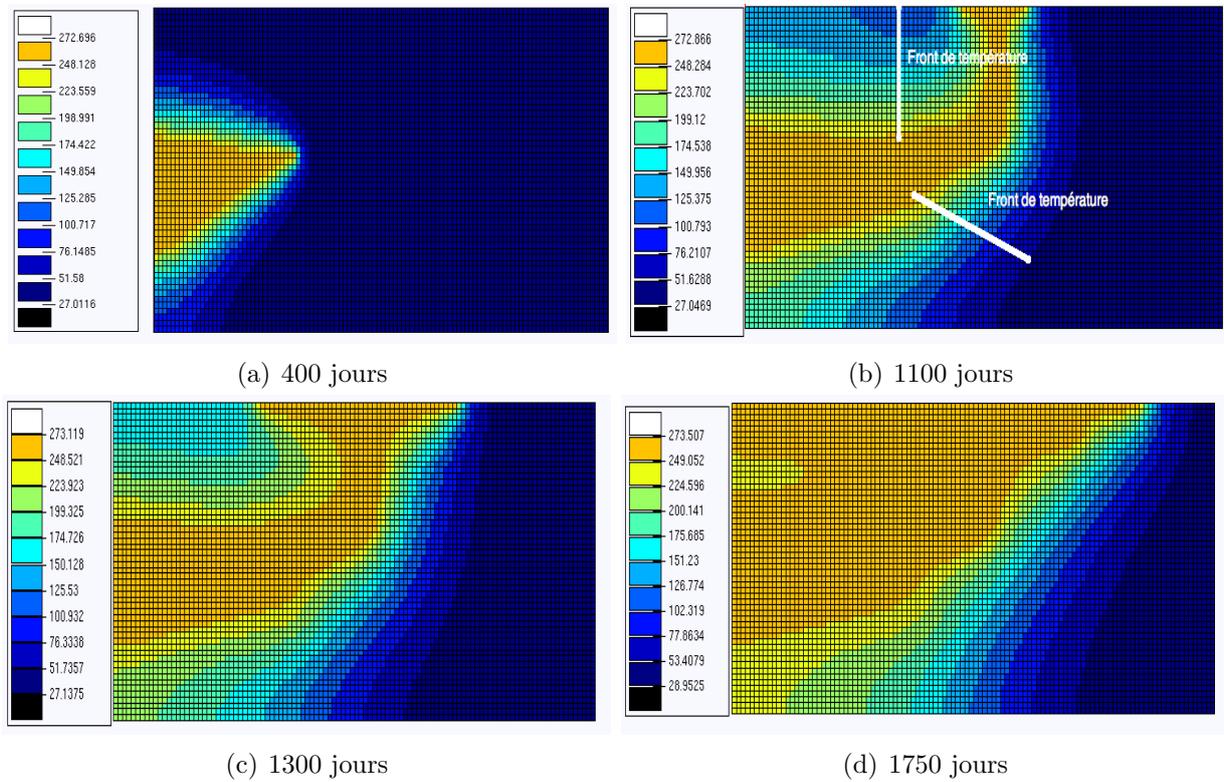


Fig. II.40: Maillage entièrement fin : la température

Des écoulements d'huile ont lieu dans les zones de fortes températures (supérieures à $220^{\circ}C$). Sur les Figures II.41 et II.42 nous pouvons distinguer des zones saturées en huile lourde (zones dites d'huile froide) et des zones balayées par la vapeur, les zones où l'huile réchauffée et l'eau (venant de la condensation de la vapeur) s'écoulent vers le puits producteur.

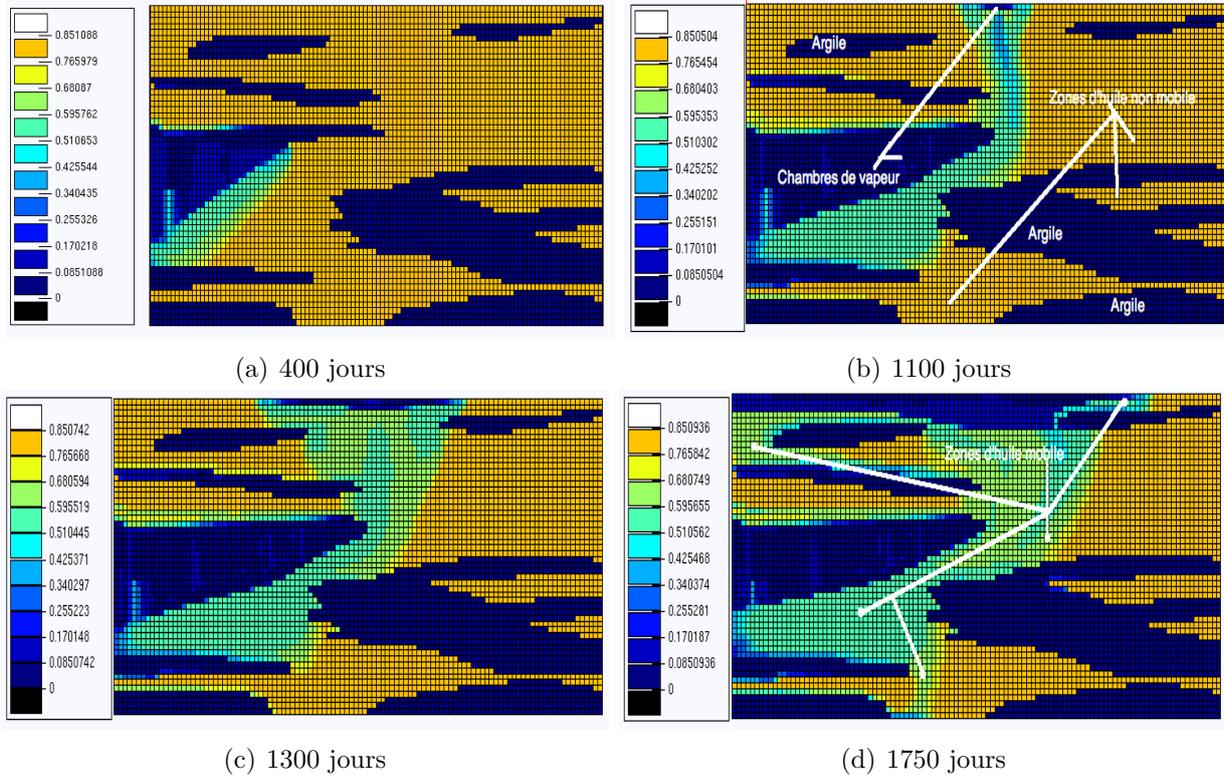


Fig. II.41: Maillage entièrement fin : la saturation en huile

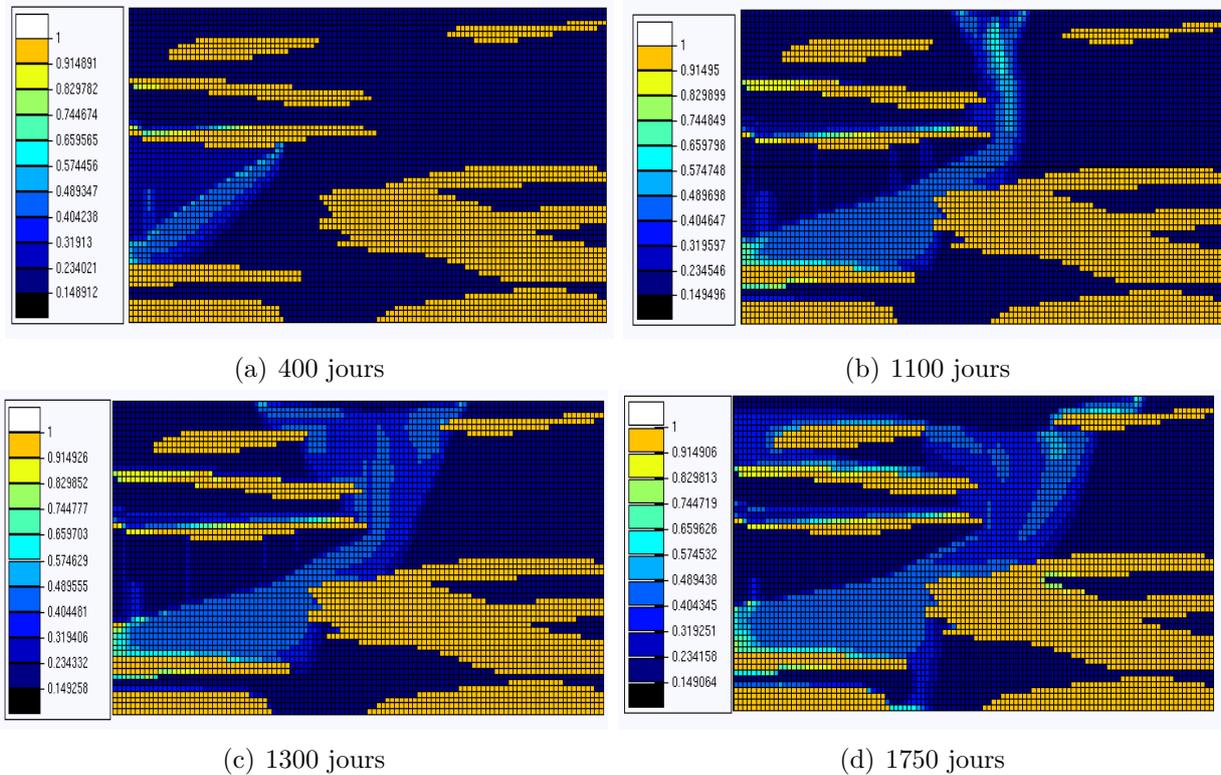


Fig. II.42: Maillage entièrement fin : la saturation en eau

L'utilisation d'une méthode de raffinement de maillage adaptatif basée sur le suivi du front de température entraîne le raffinement de plusieurs zones où il n'y a pas d'écoulement d'huile (cela peut être des zones d'argiles ou des zones où l'huile n'a pas été suffisamment réchauffée pour être mobile). C'est ce que nous pouvons voir sur les Figures II.43, II.44 II.45.

Un autre problème peut apparaître avec les températures seuils pour critère de raffinement. En dehors du front de température, dans les zones les plus chaudes et les plus froides du réservoir, il y a un grossissement des cellules et un upscaling des propriétés. La manière dont les perméabilités sont moyennées peut avoir des conséquences sérieuses sur l'écoulement.

En effet, dans notre cas, en utilisant une moyenne arithmétique, les perméabilités des cellules grossières ne sont pas représentatives des hétérogénéités que l'on peut avoir à l'échelle fine. De ce fait, l'huile, qui ne devrait pas s'écouler en raison des barrières d'argile avoisinantes, est balayée par la vapeur qui s'étend plus facilement avec ces nouvelles perméabilités. Ceci entraîne alors une légère surestimation de la production en huile comme le montre la Figure II.46.

L'utilisation d'une moyenne harmonique permettrait au contraire de réduire les perméabilités des cellules grossières ce qui pourrait diminuer les prédictions de la production en huile [46].

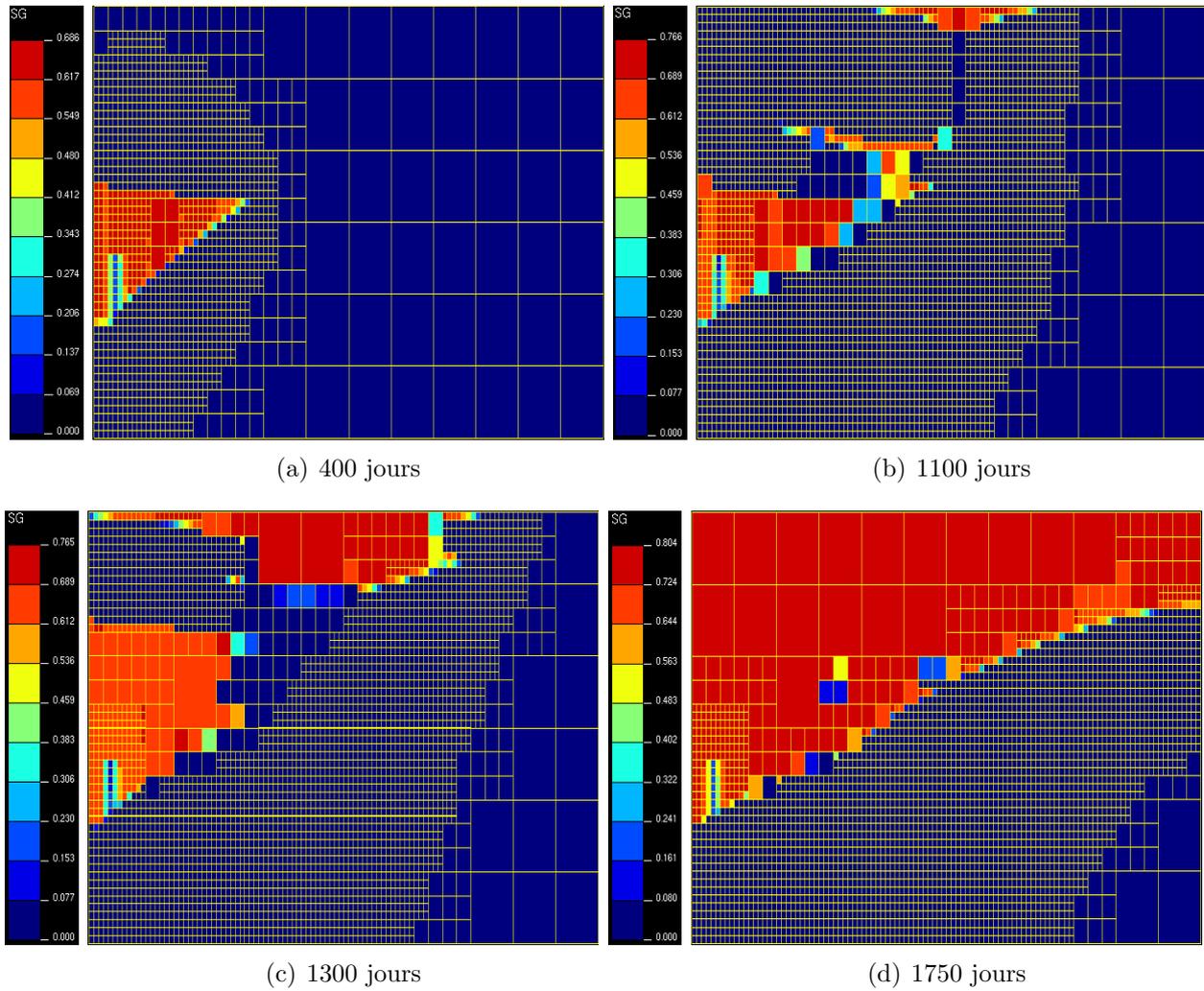


Fig. II.43: Maillage adaptatif en milieu hétérogène avec les températures seuils : la saturation en vapeur

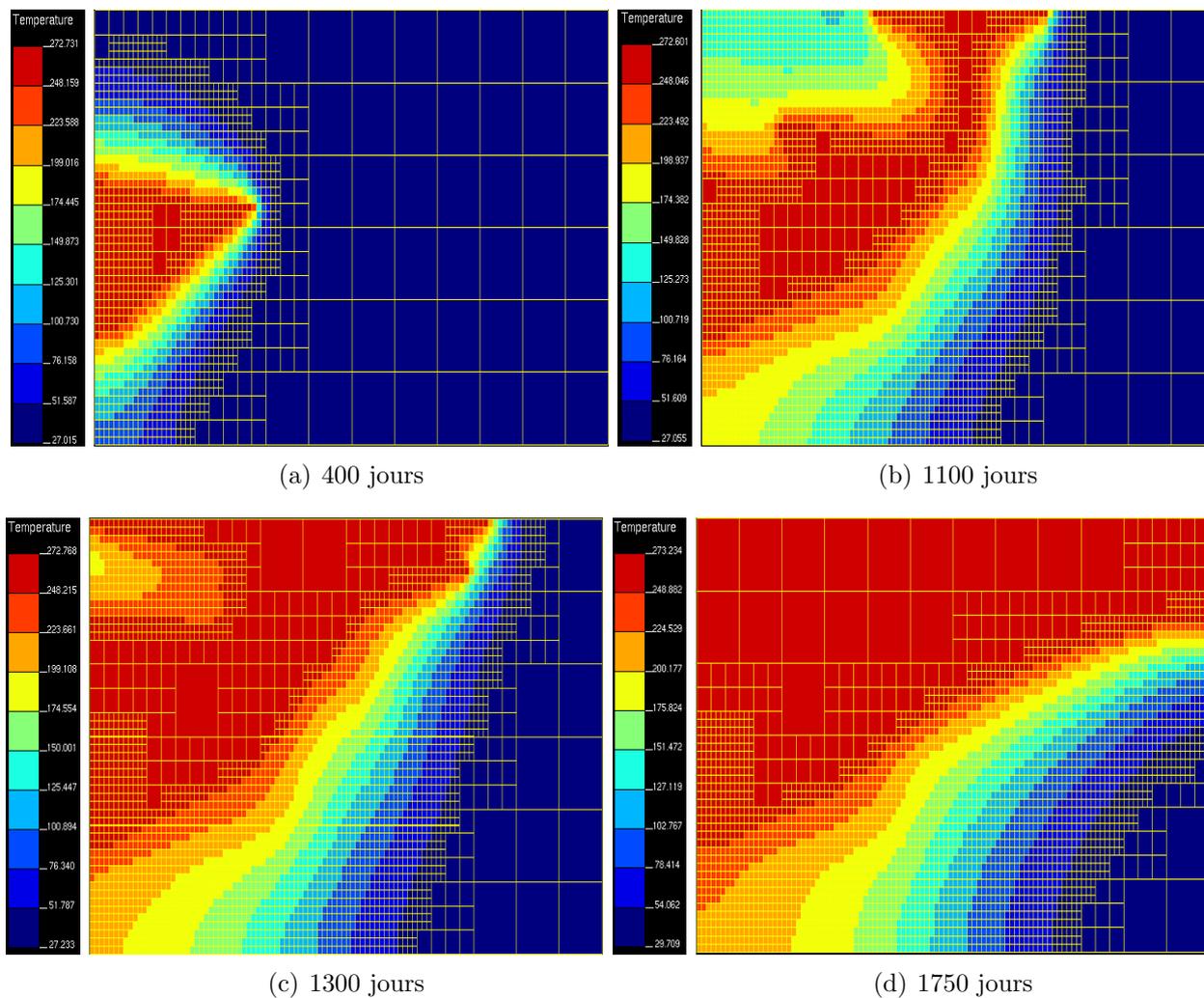


Fig. II.44: Maillage adaptatif en milieu hétérogène avec les températures seuils : la température

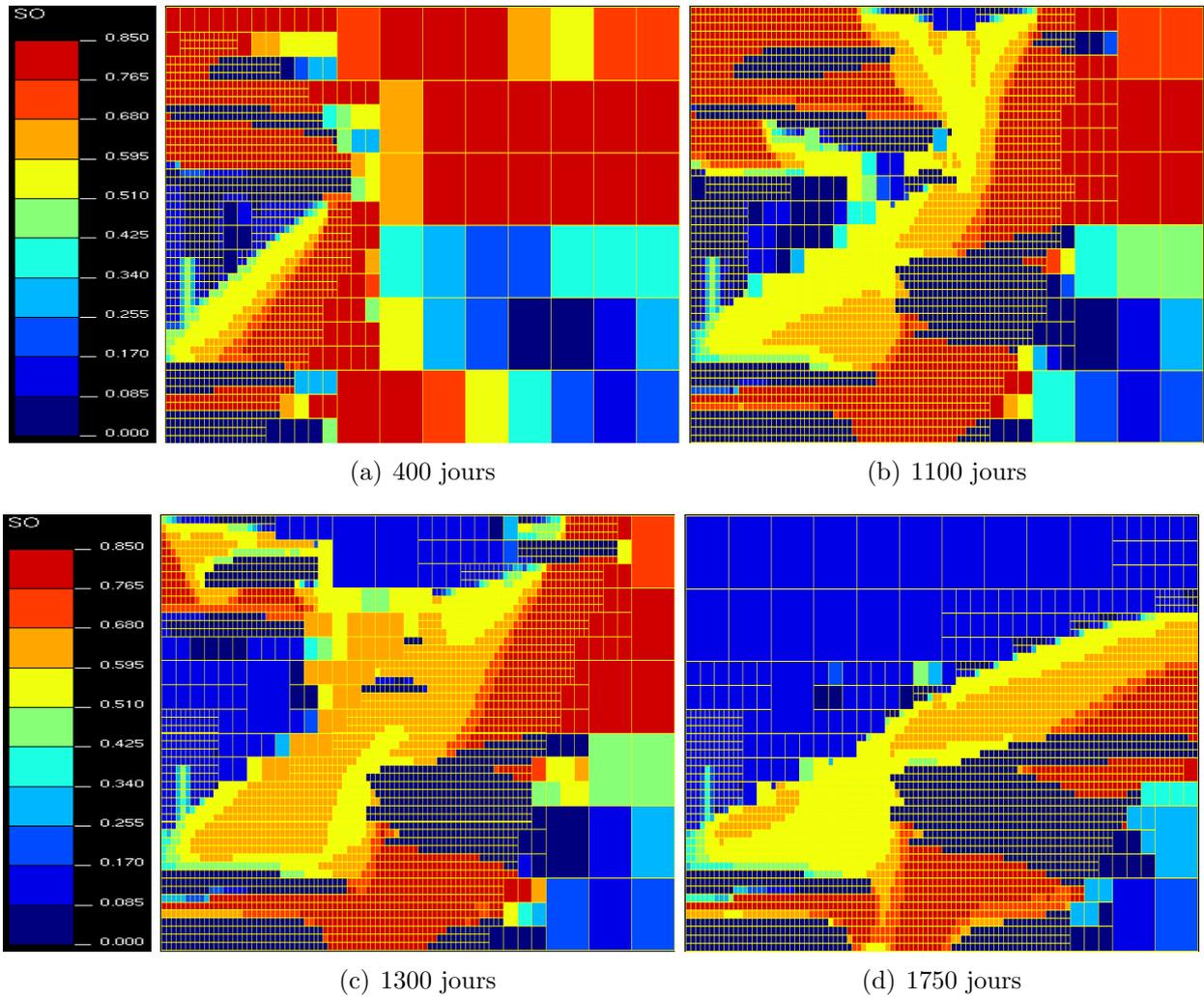


Fig. II.45: Maillage adaptatif en milieu hétérogène avec les températures seuils : la saturation en huile

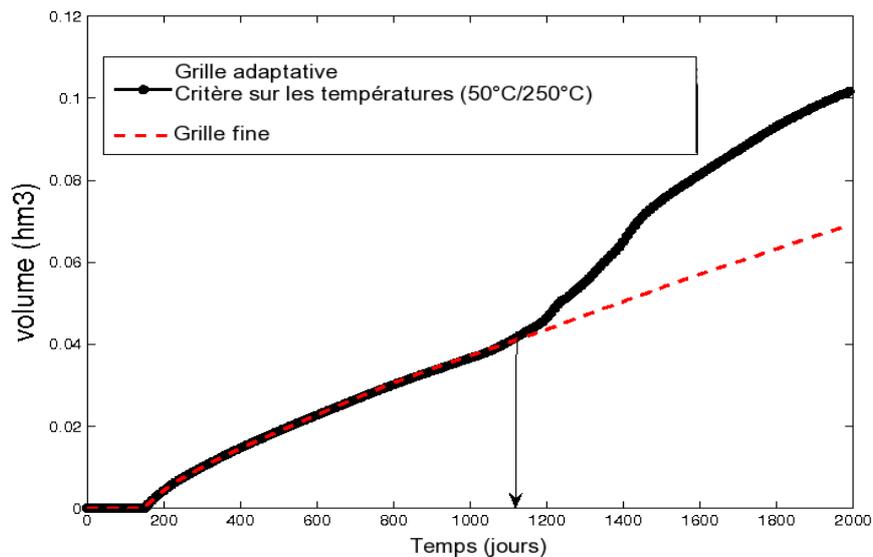


Fig. II.46: Production cumulée de l'huile

Ces premiers tests de raffinement de maillage adaptatif pour la simulation du SAGD montrent clairement que le choix des températures seuils comme critère de raffinement n'est pas applicable.

En milieu homogène, l'étalement du front de température au cours du temps entraîne un raffinement trop étendu, notamment dans la zone d'huile non mobile, et tend à limiter les performances de la méthode.

En milieu hétérogène, nous avons vu que le générateur de maillages conserve un nombre important de cellules fines en raffinant notamment des zones dépourvues d'huile mobile. Par ailleurs, dans la zone la plus chaude du réservoir, le grossissement des mailles peut aboutir à une mauvaise estimation de la production.

Dans le chapitre suivant nous proposons de nouveaux critères de raffinement qui permettent de mieux suivre les discontinuités de la saturation en huile et ainsi de détecter de façon plus précise l'interface d'écoulement.

III. Construction de nouveaux critères de raffinement basés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori*

Nous avons vu, qu'en pratique, il n'est pas possible de raffiner uniformément la taille des éléments autant que nécessaire, pour des raisons évidentes de coûts de calculs. Nous avons également vu qu'il était possible d'optimiser la taille du maillage et les temps de calculs en raffinant seulement des zones prédéfinies et en déraffinant en dehors de celles-ci. Ce processus, généralement dicté par des considérations liées d'une part à la géométrie du domaine et d'autre part à la physique du problème étudié, nécessite l'identification a priori des zones à raffiner. Nous avons montré que le critère de raffinement basé sur des températures seuils limite les performances de la méthode en milieu homogène et qu'il n'est pas applicable en milieu hétérogène. De ce fait, un choix judicieux de la stratégie d'adaptation de maillage s'impose. C'est pourquoi nous allons dans ce chapitre définir de nouveaux critères de raffinement.

Une option possible est d'associer le maillage à une métrique qui permet de guider le raffinement de maillage en fonction d'un critère d'erreur *a posteriori*. Cette approche permet en particulier de guider le maillage en tenant compte de la dynamique des phénomènes modélisés. La qualité de la solution obtenue est évaluée à travers des techniques d'estimation *a posteriori* de l'erreur. Une fois l'erreur estimée, il est possible de contrôler la qualité de la solution en calculant la taille optimale de chaque élément du maillage.

Dans ce chapitre, une présentation de l'estimation d'erreur *a posteriori*, mise au point par D. Kröner et M. Ohlberger [28], pour des schémas volumes finis pour des équations hyperboliques non linéaires est faite. Cette estimation d'erreur, appliquée à l'équation de conservation de l'huile du modèle réservoir, nous permet de définir de nouveaux critères de raffinement.

Nous poursuivons ensuite par une application de ces nouveaux critères de raffinement pour les cas homogène et hétérogène définis dans le premier chapitre.

Vue la complexité du modèle de réservoir (P), il semble difficile de dériver des estimations d'erreur *a posteriori* pour le système tout entier. C'est pourquoi nous nous focaliserons sur le déplacement de l'huile réchauffée mobile en considérant l'équation de conservation de la masse de l'huile (3).

1 Réduction à un problème hyperbolique

Sur la Figure III.1 sont représentées, pour un réservoir homogène exploité depuis 400 jours, les saturations en vapeur, en eau et en huile, ainsi que la masse volumique de l'huile, à une profondeur de 14 mètres.

On remarque que les saturations présentent d'importantes discontinuités alors que la masse volumique de l'huile augmente de façon plutôt régulière. La zone d'écoulement se situe dans la zone de variations des saturations en eau et en huile. Les saturations en eau et en huile sont constantes en dehors de l'interface d'écoulement ; cela montre qu'il n'est pas nécessaire de mailler finement l'ensemble du réservoir.

Sur la Figure III.2, les mêmes profils sont représentés après 1000 jours d'exploitation. On peut ainsi voir comment les fronts se déplacent. On remarque que, dans la zone d'écoulement, les saturations en eau et en huile se régularisent. Cela montre qu'un déraffinement de l'intérieur de la zone d'écoulement peut avoir lieu au cours du temps.

Devant ces différents points, nous constatons qu'il est possible de suivre le déplacement de la zone d'écoulement en suivant les discontinuités de la saturation en huile.

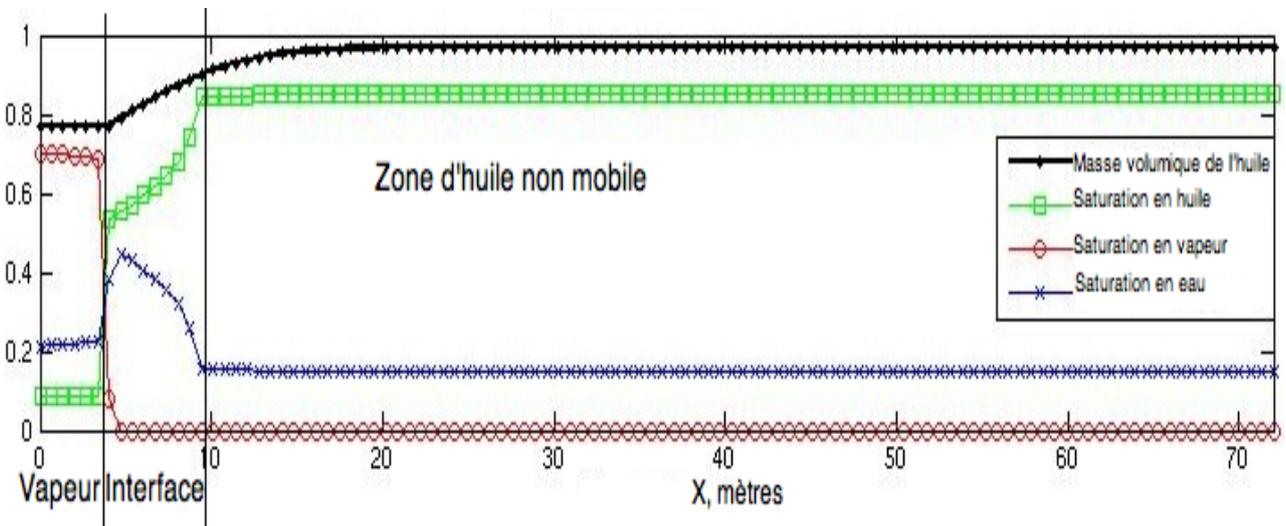


Fig. III.1: Profils 1D des saturations et de la masse volumique de l'huile à 400 jours et à 14 mètres de profondeur en milieu homogène

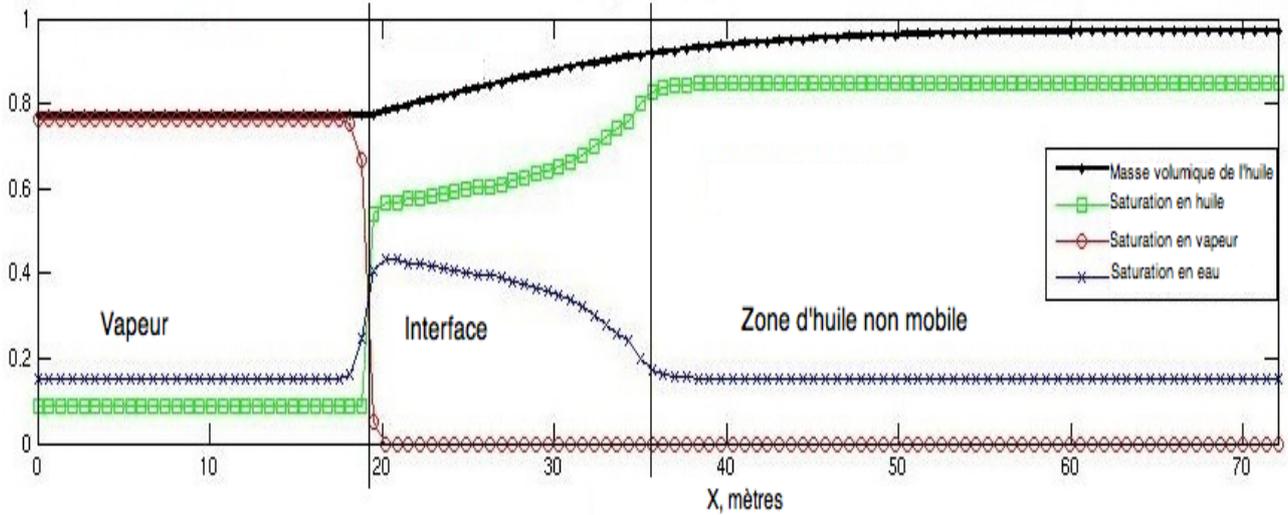


Fig. III.2: Profils 1D des saturations et de la masse volumique de l'huile à 1000 jours et à 14 mètres de profondeur en milieu homogène

En regardant la loi de conservation de la masse de l'huile (3), nous constatons qu'il est possible de la simplifier moyennant quelques hypothèses.

En effet, sachant que dans cette zone seule de l'eau, provenant de la condensation de la vapeur, s'écoule avec l'huile réchauffée mobile, la saturation en vapeur est nulle. Ainsi, d'après l'équation de conservation du volume poreux (6), la saturation en eau devient une fonction de la saturation en huile tout comme la perméabilité relative à l'huile. L'huile s'écoulant uniquement dans le sable du réservoir, nous supposons la porosité constante. De plus, au cours du temps, la masse volumique de l'huile ne connaît pas de grandes variations dans la zone d'écoulement (voir Figure III.2) ; nous faisons alors l'hypothèse simplificatrice qu'elle est constante.

Sous ces hypothèses, nous pouvons récrire l'équation de conservation de la masse de l'huile comme suit :

$$\partial_t S_o + \text{div} \left[-\mathbb{K} \frac{k_{ro}(S_o)}{\phi \mu_o} (\overline{\nabla P} - \rho_o \cdot \vec{g}) \right] = 0.$$

C'est une équation hyperbolique non linéaire de la forme :

$$\partial_t S_o(x, t) + \text{div}(F(x, t, S_o)) = 0$$

où

$$F(x, t, S_o) = \vec{v}(x, t) k_{ro}(S_o),$$

avec

$$\vec{v}(x, t) = \frac{-\mathbb{K}}{\phi \mu_o} (\overline{\nabla P} - \rho_o \cdot \vec{g}).$$

La bonne notion de solution pour ce type de problème est la solution entropique introduite par S.N. Kruzkov [29]. De nombreux schémas numériques pour ces problèmes hyperboliques non linéaires scalaires ont été construits et étudiés.

La convergence de schémas volumes finis et des estimations d'erreur *a priori* ont été établies par R. Eymard, T. Gallouet, R. Herbin [22] [23] avec M. Ghilani [21], J. P. Vila [44], B. Cockburn, F. Coquel, P. Lefloch [11] [12] et par C. Chainais-Hillairet [8].

Par la suite, des estimations d'erreur *a posteriori* pour des schémas volumes finis ont été obtenus par B. Cockburn, H. Gau [13], D. Kröner et M. Ohlberger [28].

Les estimations d'erreur *a posteriori* sont des outils très utiles pour l'adaptation de maillages car elles fournissent une borne supérieure pour l'erreur commise entre la solution exacte et la solution approchée. Dépendant uniquement de constantes calculables et de la solution approchée, ces bornes permettent de contrôler facilement l'erreur. Cela implique que la taille de la grille peut être localement choisie en fonction de l'amplitude de l'erreur ; si l'erreur est plus grande qu'une valeur seuil donnée, la grille devra être localement raffinée. De cette façon, le nombre total de cellules est réduit ce qui diminue les temps de calculs.

Dans la section qui suit, nous étudions l'estimation d'erreur *a posteriori* proposée par D. Kröner et M. Ohlberger dans [28]. Plus précisément, nous montrons comment les estimateurs d'erreur *a posteriori* locaux, qui s'appliquent à des schémas implicites, peuvent être utilisés pour la définition de nouveaux critères de raffinement pour le problème SAGD.

2 Estimation d'erreur *a posteriori* pour des équations hyperboliques non linéaires pour des schémas volumes finis implicites

2.1 Présentation du problème

Considérons l'équation hyperbolique non linéaire suivante

$$u_t(x, t) + \operatorname{div}(F(x, t, u)) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (9a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad (9b)$$

avec

$$F : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \\ (x, t, s) \mapsto F(x, t, s) .$$

Nous supposons que

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \text{ avec } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } A \leq u_0 \leq B \text{ p.p.}, \quad (10a)$$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^d) \text{ et } \partial_s F \text{ est localement lipschitzienne}, \quad (10b)$$

$$\operatorname{div}_x[F(x, t, s)] = 0 \quad \forall (x, t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad (10c)$$

pour tout compact K_c inclus dans \mathbb{R} , il existe une constante $c_0(K_c)$ telle que pour presque tout $(x, t, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ \times K_c$,

$$|\partial_s F(x, t, s)| \leq c_0(K_c) \quad (10d) \\ \left| \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s}(x, t, s) \right| + \left| \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s}(x, t, s) \right| \leq c_0(K_c).$$

Pour un couple de nombres réels quelconques (a, b) , nous notons par $a \top b$ le maximum entre a et b , et par $a \perp b$ le minimum.

Nous notons également par $|x|$ la norme euclidienne de x dans \mathbb{R}^d et par $x \cdot y$ le produit scalaire de x et y dans \mathbb{R}^d .

Sous les hypothèses (10), le problème (9) admet une unique solution entropique [29], u , qui est définie par :

Définition 2.1. *Une solution $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times]0, +\infty[)$ est une solution entropique de (9) si pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$*

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} [|u(x, t) - \kappa| \Phi_t(x, t) + (F(x, t, u(x, t) \top \kappa) - F(x, t, u(x, t) \perp \kappa)) \cdot \nabla \Phi(x, t)] dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - \kappa| \Phi(x, 0) dx \geq 0, \forall \Phi \in C_c^1(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+). \quad (11)$$

Nous rappelons que, sous les hypothèses précédentes, l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème (9) a été prouvée par S.N. Kruzkov [29].

Dans [28] une estimation d'erreur *a posteriori* a été établie pour des schémas volumes finis explicites en temps. Dans ce qui suit, nous allons montrer que cette estimation reste valable pour des schémas volumes finis implicites en temps car, comme nous l'avons vu au chapitre 2, c'est ce type de schéma qui est utilisé pour la simulation du problème SAGD.

Remarque 2.1. (10c) est une hypothèse technique non réaliste dans notre problème du fait de la compressibilité des fluides. Le travail présenté ci-après peut être étendu à des problèmes où $\text{div}_x[F(x, t, s)] \neq 0$ et où les termes sources sont pris en compte. Dans ce cas, l'inégalité d'entropie approchée (voir le Théorème 4 de [9]) présente un terme d'erreur supplémentaire qui ne change pas l'allure des estimateurs d'erreur (en temps et en espace) définis dans la section 2.4.

2.2 Définition du schéma volumes finis implicite en temps

Les notations pour le maillage sont les mêmes que celles introduites dans la présentation du schéma numérique utilisé pour la simulation du SAGD (voir chapitre 2).

On définit par h_K , le diamètre d'une cellule K ($h_K = \text{diam}(K)$) et par $m(K)$ sa mesure dans \mathbb{R}^d . $m(e)$ est la mesure dans \mathbb{R}^{d-1} d'une arête de K et h_e le maximum entre le diamètre de K et celui de sa cellule voisine dont l'arête commune est e ($h_e = \max\{h_K, h_{K_e}\}$). \mathcal{E} représente l'ensemble des arêtes du maillage.

Nous supposons qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour tout $K \in \mathcal{T}$ nous avons :

$$m(K) \geq \alpha h_K^d, \quad (12a)$$

$$\alpha m(e) \leq h_e^{d-1}. \quad (12b)$$

Le schéma volumes finis implicite en temps s'écrit :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{m(K)} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} g_{K,K_e}^n(u_K^{n+1}, u_{K_e}^{n+1}), \quad (13a)$$

$$u_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx. \quad (13b)$$

Les flux numériques g_{K,K_e}^n satisfont les hypothèses suivantes de monotonie, conservativité, régularité et consistance :

$$(u, v) \rightarrow g_{K,K_e}^n(u, v) \text{ est croissante par rapport à } u \text{ et décroissante par rapport à } v, \quad (14a)$$

$$g_{K,K_e}^n(u, v) = -g_{K_e,K}^n(v, u) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (14b)$$

$$\exists L > 0 \text{ telle que } |g_{K,K_e}^n(u, v) - g_{K,K_e}^n(u', v')| \leq L m(e) (|u - u'| + |v - v'|), \quad (14c)$$

$$g_{K,K_e}^n(u, u) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e F(x, t, u) n_{K,K_e} dx dt, \quad (14d)$$

où L est indépendante de n et du maillage.

L'hypothèse (14d) peut aussi être remplacée par :

$$\left| g_{K,K_e}^n(s, s) - \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e F(x, t, s) n_{K,K_e} dx dt \right| \leq M_1 (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} \quad \forall s \in [A, B], \quad (15a)$$

$$\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} g_{K,K_e}^n(s, s) = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}, \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad \forall s \in [A, B]. \quad (15b)$$

Remarque 2.2. Si $F(x, t, s) = F(s)$ et $g_{K,K_e}^n(s, s) = m(e)F(s)$, la constante M_1 est nulle.

La solution approchée, u_h , et la condition initiale discrète, u_h^0 , sont définies par :

$$u_h(x, t) = u_K^{n+1} \quad \forall x \in K \text{ et } t \in]t^n, t^{n+1}], \quad (16a)$$

$$u_h^0(x) = u_K^0 \quad \forall x \in K. \quad (16b)$$

2.3 L'inégalité d'entropie approchée

Dans cette sous-section nous rappelons que la solution approchée satisfait une inégalité d'entropie approchée. Cette inégalité est similaire à l'inégalité d'entropie vérifiée par la solution entropique (voir Définition 2.1), mais avec en supplément des termes d'erreur exprimés à l'aide de mesures.

Pour $\Omega = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+$ nous utiliserons $\mathbb{M}(\Omega)$ pour définir l'ensemble des formes linéaires continues et positives sur $C_c(\Omega)$. Par ailleurs, $\langle \mu, g \rangle$ dénotera $\int_{\Omega} g d\mu$ pour tout $g \in C_c(\Omega)$ et $\mu \in \mathbb{M}(\Omega)$.

Lemme 2.1. Soit u_h la solution discrète définie par (13),(16). Nous supposons que les hypothèses (10), (12) et (14) sont vérifiées. Alors, il existe des mesures $\mu_h^0 \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d)$ et $\mu_h \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ telles que, pour tout $\kappa \in \mathbb{R}$ et pour tout $\Phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, nous ayons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left[|u_h(x, t) - \kappa| \Phi_t(x, t) + [F(x, t, u_h(x, t) \top \kappa) - F(x, t, u_h(x, t) \perp \kappa)] \cdot \nabla \Phi \right] dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(x) - \kappa| \Phi(x, 0) dx \geq - \langle \mu_h, |\nabla \Phi| + |\Phi_t| \rangle - \langle \mu_h^0, \Phi(x, 0) \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

avec, pour $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$,

$$\begin{aligned} \langle \mu_h, \psi \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |u_K^{n+1} - u_K^n| \int_K \int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi(x, t) dt dx + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ e=K|K_e}} \Delta t (\sigma_{K, K_e}^1 + \sigma_{K, K_e}^2) \\ & + 2M_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{e \in \mathcal{E} \\ e=K|K_e}} \langle \nu_{K, K_e}^n, \psi \rangle, \end{aligned}$$

$$\sigma_{K, K_e}^1 = \max_{u_{K_e}^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} (g_{K, K_e}^n(d, c) - g_{K, K_e}^n(d, d)) \langle \mu_{K, K_e}^n, \psi \rangle,$$

$$\sigma_{K, K_e}^2 = \max_{u_{K_e}^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} (g_{K, K_e}^n(d, c) - g_{K, K_e}^n(c, c)) \langle \mu_{K, K_e}^n, \psi \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle \mu_{K, K_e}^n, \psi \rangle &= \\ & \frac{1}{(\Delta t)^2 m(K) m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 (h_e + \Delta t) \psi(\gamma + \theta(x - \gamma), s + \theta(t - s)) d\theta d\gamma ds dx dt, \end{aligned}$$

$$\langle \nu_{K, K_e}^n, \psi \rangle = \frac{1}{\Delta t m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \int_0^1 (h_e + \Delta t)^2 \psi(\xi + \theta(\gamma - \xi), \tau + \theta(s - \tau)) d\theta d\xi d\tau d\gamma ds,$$

et pour $\psi \in C_c(\mathbb{R}^d)$,

$$\langle \mu_h^0, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} |u_h^0(x) - u_0(x)| \psi(x) dx,$$

où M_1 , qui ne dépend que de F , u_0 et T , est donnée par (15).

Voir [7] pour la démonstration. Un outil clef dans cette démonstration est l'inégalité d'entropie discrète donnée dans le Lemme 2.2 de [7].

Connaissant l'inégalité d'entropie approchée ainsi que les différents termes d'erreur, nous pouvons maintenant déduire une estimation d'erreur *a posteriori*.

2.4 Une estimation d'erreur *a posteriori* et des estimateurs d'erreur *a posteriori* locaux

L'estimation d'erreur *a posteriori* est basée sur l'inégalité d'entropie approchée (voir Lemme 2.1) et sur les Lemmes 2.2 et 2.3 énoncés ci-après.

Lemme 2.2. *On suppose les hypothèses (10) vérifiées avec de plus $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On note alors u l'unique solution du problème (9) définie par (11).*

Soit $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ telle que $A \leq \tilde{u} \leq B$ presque partout. Nous supposons qu'il existe des mesures $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ et $\mu_0 \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ il existe a_0, a et b telles que

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left[|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \psi_t(x, t) + [F(x, t, \tilde{u}(x, t)) \top u(x, t) - F(x, t, \tilde{u}(x, t)) \perp u(x, t)] \cdot \nabla \psi(x, t) \right] dx dt \geq - \left[a_0 \mu_0(\{\psi(\cdot, 0) \neq 0\}) + a \mu(\{\psi \neq 0\}) + b \sqrt{\mu(\{\psi \neq 0\})} \right]. \quad (18)$$

avec

$$\begin{aligned} a_0 &= \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty, \quad a = \|\psi_t\|_\infty + \|\nabla \psi\|_\infty, \\ b &= \left[\|\psi_t\|_\infty + 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty + c_0([A, B]) \|\nabla \psi\|_\infty \right] |u|_{BV(K_{\psi, r})} \\ &\quad + \left(2d c_0([A, B]) + 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty |u_0|_{BV(K_{\psi_0, r})} \\ &\quad + \|\psi\|_\infty (4 + 2d) + \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} K_\psi &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+; \psi(x, t) \neq 0\}, \quad K_{\psi_0} = \{x \in \mathbb{R}^d; \psi(x, 0) \neq 0\}, \\ K_{\psi, r} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+ | \exists (y, s) \in K_\psi, d(x, y) \leq \frac{1}{r}, d(t, s) \leq \frac{1}{r}\} \\ \text{et } K_{\psi_0, r} &= \{x \in \mathbb{R}^d | \exists y \in K_{\psi_0}, d(x, y) \leq \frac{1}{r}\}. \end{aligned}$$

Preuve. Pour obtenir le détail des constantes a et b , il suffit de reprendre les arguments du Lemme 3.6 dans [7] et de contrôler toutes les constantes qui apparaissent dans les estimations.

Considérons des noyaux régularisants $\bar{\rho}_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\rho_d \in C_c^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tels que

$$\text{supp}(\bar{\rho}_1) \subset [-1, 0], \quad \bar{\rho}_1 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \bar{\rho}_1(x) dx = 1,$$

$$\text{supp}(\rho_d) \subset \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq 1\}, \quad \rho_d \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \rho_d(x) dx = 1.$$

De plus, on ajoute les conditions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} |\bar{\rho}'_1(t)| dt \leq 4, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_d(y)| dy \leq 2d.$$

Pour tout $r \geq 1$ nous définissons $\bar{\rho}_{1, r}$ et $\rho_{d, r}$ de telle sorte que

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{1, r}(t) &= r \bar{\rho}_1(rt), \quad \rho_{d, r}(x) = r^d \rho_d(rx), \quad \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \rho_{d, r}(x - y) \bar{\rho}_{1, r}(t - s) dy ds = 1, \\ \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\nabla \rho_{d, r}(x - y)| \bar{\rho}_{1, r}(t - s) dy ds &\leq 2dr, \quad \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \rho_{d, r}(x - y) |\bar{\rho}'_{1, r}(t - s)| dy ds \leq 4r. \end{aligned}$$

Nous posons finalement,

$$\Phi(x, t, y, s) = \psi(x, t) \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}_{1,r}(t - s).$$

On applique l'inégalité (17) avec la fonction $\Phi(\cdot, \cdot, y, s)$ et en prenant $\kappa = u(y, s)$. Ensuite nous intégrons par rapport à y et s . Ceci nous donne une estimation de la forme :

$$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 \geq -E$$

où

$$\begin{aligned} D_1 &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\tilde{u}(x, t) - u(y, s)| \psi_t(x, t) \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds dt, \\ D_2 &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\tilde{u}(x, t) - u(y, s)| \psi(x, t) \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}'_{1,r}(t - s) dx dy ds dt, \\ D_3 &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \left[F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s)) \right] \cdot \nabla \psi(x, t) \\ &\quad \times \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds dt, \\ D_4 &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \left[F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s)) \right] \cdot \nabla \rho_{d,r}(x - y) \\ &\quad \times \psi(x, t) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds dt, \\ D_5 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |u_0(x) - u(y, s)| \psi(x, 0) \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds. \end{aligned}$$

Le terme E provient des termes de mesures de (17) :

$$\begin{aligned} E &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi_t(x, t)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\nabla \psi(x, t)| \\ &\quad \times |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, t)| |\bar{\rho}'_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\ &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, t)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\ &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, 0)| |\bar{\rho}_{1,r}(-s)| d\mu_0(x). \end{aligned}$$

$$\text{Posons } \epsilon(r, K_\psi, u) = \sup \left\{ \int_{K_\psi} |u(x, t) - u(x + \eta, t + \tau)| dx dt, |\eta| \leq \frac{1}{r}, 0 \leq \tau \leq \frac{1}{r} \right\}.$$

Traitons chaque terme D_i (voir [7], page 53).

Etude du terme D_1 .

Posons,

$$\begin{aligned} D_{10} &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \psi_t(x, t) dx dt \\ &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \psi_t(x, t) \rho_{d,r}(x - y) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds dt. \end{aligned}$$

Nous avons,

$$\begin{aligned} |D_1 - D_{10}| &\leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \left| |\tilde{u}(x, t) - u(y, s)| - |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \right| \\ &\quad |\psi_t(x, t)| |\rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dx dy ds dt. \end{aligned}$$

En utilisant le caractère 1-Lipschitzien de la valeur absolue, nous obtenons :

$$|D_1 - D_{10}| \leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |u(x, t) - u(y, s)| |\psi_t(x, t)| |\rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dx dy ds dt.$$

Les définitions de $\epsilon(r, K_\psi, u)$, $\bar{\rho}_{1,r}$ et $\rho_{d,r}$ nous permettent d'écrire :

$$|D_1 - D_{10}| \leq \|\psi_t\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u).$$

Etude du terme D_3 .

Posons

$$D_{30} = \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} [F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(x, t)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t))] \cdot \nabla \psi(x, t) dx dy ds dt.$$

Nous avons alors,

$$|D_3 - D_{30}| \leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \left| F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(x, t)) \right. \\ \left. + F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t)) \right| |\nabla \psi(x, t)| |\rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dx dy ds dt.$$

Pour $[A, B] \subset \mathbb{R}$, pour $a \in [A, B]$, les hypothèses sur F assurent que :

la fonction $g : z \mapsto F(x, t, a \top z) - F(x, t, a \perp z) = \text{sign}(a - z)[F(x, t, a) - F(x, t, z)]$, est lipschitzienne en z uniformément en x et t avec pour constante de lipschitz $c_0([A, B])$.

$$|D_3 - D_{30}| \leq c_0([A, B]) \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |u(x, t) - u(y, s)| |\nabla \psi(x, t)| |\rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dx dy ds dt \\ \leq c_0([A, B]) \|\nabla \psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u).$$

Etude du terme $(-D_2 - D_4)$.

Posons,

$$D_{40} = \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} [F(y, s, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) - F(y, s, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s))] \cdot \nabla \rho_{d,r}(x - y) \\ \times \psi(x, t) \bar{\rho}_{1,r}(t - s) dx dy ds dt.$$

D'après la définition de la solution entropique :

$$-D_2 - D_{40} \geq 0.$$

Nous avons alors,

$$-D_2 - D_4 \geq \mathcal{D}_4, \quad \text{avec } \mathcal{D}_4 = D_{40} - D_4,$$

Nous savons que

$$F(y, s, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) - F(y, s, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(y, s)) \\ + F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(y, s)) = \text{sign}(\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) [F(y, s, \tilde{u}(x, t)) - F(y, s, u(y, s)) \\ - F(x, t, \tilde{u}(x, t)) + F(x, t, u(y, s))].$$

De plus,

$$F(y, s, \tilde{u}(x, t)) - F(y, s, u(y, s)) = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial s} \left(y, s, u(y, s) + \theta(\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) \right) (\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) d\theta,$$

$$F(x, t, u(y, s)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t)) = - \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial s} \left(x, t, u(y, s) + \theta(\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) \right) (\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) d\theta.$$

Nous avons alors,

$$|\mathcal{D}_4| = \left| \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial s} \left(y, s, u(y, s) + \theta(\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) \right) - \frac{\partial F}{\partial s} \left(x, t, u(y, s) + \theta(\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) \right) \right] (\tilde{u}(x, t) - u(y, s)) \times \psi(x, t) |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\theta dx dy ds dt \right|.$$

$\frac{\partial F}{\partial s}$ étant localement lipschitzienne, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}_4| &\leq \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} \left[\left| \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial s} \right| |x - y| + \left| \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial s} \right| |t - s| \right] |\tilde{u}(x, t) - u(y, s)| |\psi(x, t)| \\ &\quad \times |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dx dy ds dt \\ &\leq \frac{1}{r} c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u) \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)} |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| dy ds \\ &\leq 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u). \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement,

$$-D_2 - D_4 \geq \mathcal{D}_4 \geq -2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u).$$

Étude du terme $(-D_5)$.

En réécrivant l'inégalité (11) avec $\Phi(y, s) = \psi(x, 0) \rho_{d,r}(x - y) \int_s^\infty \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau$ et $\kappa = u_0(x)$, et en intégrant par rapport à x , on obtient :

$$-D_5 \geq -D_6 - D_7,$$

avec

$$D_6 = \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} \left[F(y, s, u(y, s) \top u_0(x)) - F(y, s, u(y, s) \perp u_0(x)) \right] \cdot \nabla \rho_{d,r}(x - y) \times \psi(x, 0) \int_s^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau dx dy ds,$$

et

$$D_7 = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |u_0(y) - u_0(x)| \psi(x, 0) \rho_{d,r}(x - y) \int_0^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau dx dy.$$

D'après la définition de la fonction $\bar{\rho}_{1,r}$, nous avons $\int_0^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau = 1$.

Ainsi,

$$|D_7| \leq \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0).$$

Soit,

$$\begin{aligned} D_{60} = & - \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} \left[F(y, s, u(y, s) \top u_0(y)) - F(y, s, u(y, s) \perp u_0(y)) \right] \cdot \nabla \rho_{d,r}(x - y) \\ & \times \psi(x, 0) \int_s^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau dx dy ds. \end{aligned}$$

Par intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} D_{60} = & \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} \left[F(y, s, u(y, s) \top u_0(y)) - F(y, s, u(y, s) \perp u_0(y)) \right] \cdot \nabla \psi(x, 0) \\ & \times \rho_{d,r}(x - y) \int_s^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau dx dy ds. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} |D_{60}| & \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} \left| F(y, s, u(y, s) \top u_0(y)) - F(y, s, u(y, s) \perp u_0(y)) \right| |\nabla \psi(x, 0)| \\ & \quad \times |\rho_{d,r}(x - y)| \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau dx dy ds \\ & \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} c_0([A, B]) |u(y, s) - u_0(y)| |\nabla \psi(x, 0)| |\rho_{d,r}(x - y)| \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau dx dy ds \\ & \leq \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} c_0([A, B]) (\|u\|_\infty + \|u_0\|_\infty) |\nabla \psi(x, 0)| |\rho_{d,r}(x - y)| \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau dx dy ds \\ & \leq c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} |\nabla \psi(x, 0)| |\rho_{d,r}(x - y)| \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau dx dy ds \\ & \leq \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) \int_{\mathbb{R}^+} \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| ds d\tau \\ & \leq \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) \int_{\mathbb{R}^+} |\tau \bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau \\ & \leq \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^+} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau \\ & \leq \frac{1}{r} \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)). \end{aligned}$$

Comme $-D_5 \geq -D_6 - D_7 \geq -(D_6 - D_{60}) - D_7 - D_{60}$, il nous reste à évaluer la quantité $(D_6 - D_{60})$.

$$\begin{aligned} D_6 - D_{60} = & \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} \left[F(y, s, u(y, s) \top u_0(x)) - F(y, s, u(y, s) \perp u_0(x)) \right. \\ & \left. - F(y, s, u(y, s) \top u_0(y)) + F(y, s, u(y, s) \perp u_0(y)) \right] \cdot \nabla \rho_{d,r}(x - y) \\ & \quad \times \psi(x, 0) \int_s^{+\infty} \bar{\rho}_{1,r}(-\tau) d\tau dx dy ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |D_6 - D_{60}| &\leq \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} |F(y, s, u_0(x)) - F(y, s, u_0(y))| |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| \\
 &\quad \times |\psi(x, 0)| \int_s^{+\infty} |\bar{\rho}_{1,r}(-\tau)| d\tau dx dy ds \\
 &\leq \frac{1}{r} \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) \int_{(\mathbb{R}^d)^2} |u_0(x) - u_0(y)| |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| dx dy \\
 &\leq \frac{1}{r} \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| dy \\
 &\leq \frac{r}{r} \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty 2d c_0([A, B]) \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) \\
 &\leq \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty 2d c_0([A, B]) \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0).
 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
 -D_5 &\geq -\|\psi(\cdot, 0)\|_\infty 2d c_0([A, B]) \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) - \frac{1}{r} \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (\|u\|_\infty + \|u_0\|_\infty) \\
 &\quad - \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) \\
 &\geq \left(-2d c_0([A, B]) - 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) - \frac{1}{r} \|\nabla \psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)).
 \end{aligned}$$

Evaluation de $D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 \geq -E$.

Nous rappelons :

$$\begin{aligned}
 E &= \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi_t(x, t)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\
 &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\nabla \psi(x, t)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\
 &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, t)| |\bar{\rho}'_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\
 &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)^2} |\nabla \rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, t)| |\bar{\rho}_{1,r}(t - s)| d\mu(x, t) \\
 &\quad + \int_{(\mathbb{R}^d)^2 \times \mathbb{R}^+} |\rho_{d,r}(x - y)| |\psi(x, 0)| |\bar{\rho}_{1,r}(-s)| d\mu_0(x).
 \end{aligned}$$

Alors,

$$E \leq \|\psi_t\|_\infty \mu(K_\psi) + \|\nabla \psi\|_\infty \mu(K_\psi) + \|\psi\|_\infty 4r \mu(K_\psi) + \|\psi\|_\infty 2dr \mu(K_\psi) + \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \mu_0(K_{\psi_0}).$$

Nous avons alors, $-E \geq -\|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \mu_0(K_{\psi_0}) - \left(\|\psi_t\|_\infty + \|\nabla \psi\|_\infty + r\|\psi\|_\infty(4 + 2d) \right) \mu(K_\psi)$.

$D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 \geq -E$ revient à écrire :

$$(D_1 - D_{10}) + D_2 + (D_3 - D_{30}) + D_4 + D_5 + D_{10} + D_{30} \geq -E.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
D_{10} + D_{30} &\geq -E - (D_1 - D_{10}) - D_2 - D_4 - (D_3 - D_{30}) - D_5 \\
&\geq -\|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \mu_0(K_{\psi_0}) - \left(\|\psi_t\|_\infty + \|\nabla\psi\|_\infty + r\|\psi\|_\infty(4 + 2d) \right) \mu(K_\psi) \\
&\quad - \|\psi_t\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u) - 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u) - c_0([A, B]) \|\nabla\psi\|_\infty \epsilon(r, K_\psi, u) \\
&\quad + \left(-2d c_0([A, B]) - 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) \\
&\quad - \frac{1}{r} \|\nabla\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)).
\end{aligned}$$

Si $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$, nous avons (voir Théorème 3.3 de [7] page 57) :

$$\epsilon(r, K_\psi, u) \leq \frac{|u|_{BV(K_{\psi,r})}}{r},$$

et

$$\epsilon(r, K_{\psi_0}, u_0) \leq \frac{|u_0|_{BV(K_{\psi_0,r})}}{r}.$$

En prenant, $\frac{1}{r} = \sqrt{\mu(K_\psi)}$ nous obtenons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} \left[|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \psi_t(x, t) + [F(x, t, \tilde{u}(x, t)) \top u(x, t) - F(x, t, \tilde{u}(x, t)) \perp u(x, t)] \cdot \nabla\psi(x, t) \right] \\
&\quad dxdt \\
&\geq -\|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \mu_0(K_{\psi_0}) - \left(\|\psi_t\|_\infty + \|\nabla\psi\|_\infty \right) \mu(K_\psi) - \|\psi_t\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} \sqrt{\mu(K_\psi)} \\
&\quad - 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} \sqrt{\mu(K_\psi)} - c_0([A, B]) \|\nabla\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} \sqrt{\mu(K_\psi)} \\
&\quad + \left(-2d c_0([A, B]) - 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty |u_0|_{BV(K_{\psi_0,r})} \sqrt{\mu(K_\psi)} \\
&\quad - \sqrt{\mu(K_\psi)} \|\nabla\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) - \|\psi\|_\infty(4 + 2d) \sqrt{\mu(K_\psi)} \\
&\geq -\|\psi(\cdot, 0)\|_\infty \mu_0(K_{\psi_0}) - \left(\|\psi_t\|_\infty + \|\nabla\psi\|_\infty \right) \mu(K_\psi) \\
&\quad - \left[\|\psi_t\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} + 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} + c_0([A, B]) \|\nabla\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} + \|\psi\|_\infty(4 + 2d) \right. \\
&\quad \left. - \left(-2d c_0([A, B]) - 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty |u_0|_{BV(K_{\psi_0,r})} \right. \\
&\quad \left. + \|\nabla\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)) \right] \sqrt{\mu(K_\psi)}.
\end{aligned}$$

En posant,

$$a_0 = \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty, \quad a = \|\psi_t\|_\infty + \|\nabla\psi\|_\infty$$

et

$$\begin{aligned} b = & \|\psi_t\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} + 2d c_0([A, B]) \|\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} + c_0([A, B]) \|\nabla\psi\|_\infty |u|_{BV(K_{\psi,r})} \\ & + \|\psi\|_\infty (4 + 2d) - \left(-2d c_0([A, B]) - 1 \right) \|\psi(\cdot, 0)\|_\infty |u_0|_{BV(K_{\psi_0,r})} \\ & + \|\nabla\psi(\cdot, 0)\|_\infty c_0([A, B]) (2 \max(|A|, |B|)), \end{aligned}$$

nous obtenons finalement l'inégalité (18). \square

Définissons la fonction test, avant d'énoncer le deuxième Lemme sur lequel repose l'estimation d'erreur *a posteriori*.

Définition 2.2. *Pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, soit*

$$\psi(x, t) = \frac{T-t}{T} \rho(|x - x_0| + \omega t), \quad (19)$$

avec $\omega \in \mathbb{R}^+$ et $\rho \in C_0^1(\mathbb{R}^+; [0, 1])$.

La fonction ρ est telle que $\rho' \leq 0$, et pour tout $R > 0$ et tout $T > 0$,

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, R] \\ 0 & \text{sur } [R+1, +\infty] \end{cases} \quad \text{et} \quad \|\rho'\|_\infty \leq 2.$$

Lemme 2.3. *On suppose les hypothèses (10) vérifiées avec de plus $u_0 \in BV_{loc}(\mathbb{R}^d)$. On note alors u l'unique solution du problème (9) définie par (11).*

Soit $\tilde{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ telle que $A \leq \tilde{u} \leq B$ presque partout. Nous supposons qu'il existe des mesures $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+)$ et $\mu_0 \in \mathbb{M}(\mathbb{R}^d)$ telles que le Lemme 2.1 soit vérifié avec \tilde{u} à la place de u_h . Alors, pour toute fonction $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ de la forme (19), avec $\omega = c_0([A, B])$, il existe a_0, a et b telles que

$$\int_{K_\psi} |u - \tilde{u}| dx dt \leq T \left(a_0 \mu_0(\{\psi(\cdot, 0) \neq 0\}) + a \mu(\{\psi \neq 0\}) + b \sqrt{\mu(\{\psi \neq 0\})} \right) \quad (20)$$

avec

$$a_0 = 1, \quad a = 2\omega + \frac{1}{T} + 2$$

et

$$\begin{aligned} b = & (2\omega + \frac{1}{T} - 2d\omega + 2\omega) |u|_{BV(K_{\psi,r})} + (2d\omega + 1) |u_0|_{BV(K_{\psi_0,r})} \\ & + (4 + 2d + 4\omega \max(|A|, |B|)). \end{aligned}$$

Preuve.

En appliquant l'inégalité (18) avec la fonction ψ donnée par la Définition 2.2, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \left(\frac{T-t}{T} \rho' \omega - \frac{1}{T} \right) \\ & + [F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(x, t)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t))] \left(\frac{T-t}{T} \rho' \frac{x - x_0}{|x - x_0|} \right) dx dt \\ & \geq -\mu_0(K_{\psi_0}) - a \mu(K_\psi) - b \sqrt{\mu(K_\psi)}. \end{aligned}$$

Le terme contenant F peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned} & \left| [F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(x, t)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t))] \left(\frac{T-t}{T} \rho' \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \right| \\ & \leq c_0([A, B]) |\tilde{u}(x, t) \top u(x, t) - \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t)| \frac{T-t}{T} |\rho'| \\ & \leq c_0([A, B]) |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \frac{T-t}{T} |\rho'|. \end{aligned}$$

Nous déduisons alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \left| [F(x, t, \tilde{u}(x, t) \top u(x, t)) - F(x, t, \tilde{u}(x, t) \perp u(x, t))] \left(\frac{T-t}{T} \rho' \frac{x-x_0}{|x-x_0|} \right) \right| \\ & \leq \omega |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \frac{T-t}{T} |\rho'|. \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons :

$$-\frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| dx dt \geq -\mu_0(K_{\psi_0}) - a\mu(K_{\psi}) - b\sqrt{\mu(K_{\psi})}.$$

Nous montrons finalement, pour $K_{\psi} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$,

$$\int_{K_{\psi}} |\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| dx dt \leq T \left(\mu_0(K_{\psi_0}) + a\mu(K_{\psi}) + b\sqrt{\mu(K_{\psi})} \right).$$

□

L'estimation d'erreur *a posteriori* repose sur le Lemme de l'inégalité d'entropie approchée 2.1 et sur le Lemme 2.2. L'estimation d'erreur *a posteriori* établie par M. Ohlberger et D. Kröner dans [28] (voir Théorème 2.11 de [28]) leur a permis de définir trois estimateurs d'erreur *a posteriori* locaux pour le cas particulier où $F(x, t, v) = F(v)$ (Corollaire 2.14 de [28]). Pour chacun des ces estimateurs, ils ont défini des bornes supérieures calculables et avec lesquelles ils contrôlent l'erreur en norme L^1 commise entre la solution exacte et la solution approchée. Ceci est la base de l'algorithme adaptatif qu'ils proposent.

Afin d'adapter cette stratégie à notre problème, nous avons récrit l'estimation d'erreur *a posteriori* pour le cas général (voir Théorème 2.1).

En utilisant la régularité des flux (14c), nous avons

$$\begin{aligned} & \max_{u_{K_e}^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} (g_{K, K_e}^n(d, c) - g_{K, K_e}^n(d, d)) + \max_{u_{K_e}^{n+1} \leq c \leq d \leq u_K^{n+1}} (g_{K, K_e}^n(d, c) - g_{K, K_e}^n(c, c)) \\ & \leq 2L m(e) |u_K^{n+1} - u_{K_e}^{n+1}|. \end{aligned}$$

Théorème 2.1. Soit u_h la solution discrète définie par (16). On suppose les hypothèses (10) et (12) vérifiées. Soit $u_0 \in BV(\mathbb{R}^d)$, $\omega = c_0([A, B])$, $\mathcal{R} > 0$ et T tel que $T \in]0, \frac{\mathcal{R}}{\omega}[$. Nous posons

$$\begin{aligned} K_c &\subset \bigcup_{0 \leq t \leq T} B_{\mathcal{R}-\omega t}(x_0) \times \{t\}, \\ I_0 &= \left\{ n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq t^n \leq \min \left\{ \frac{\mathcal{R}+1}{\omega}, T \right\} \right\}, \\ D_{\mathcal{R}+1} &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^+, |x - x_0| + \omega t < \mathcal{R} + 1\}, \\ M(t) &= \{K \in \mathcal{T} \mid \exists x \in K, (x, t) \in D_{\mathcal{R}+1}\}. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\int_{K_c} |u - u_h| dx dt \leq T \left[\int_{|x-x_0| < \mathcal{R}+1} |u_0(x) - u_h(x, 0)| dx + aQ^* + b\sqrt{Q^*} \right]$$

avec a et b telles qu'elles ont été définies dans le Lemme 2.2 et où

$$\begin{aligned} Q^* &= \sum_{n \in I_0} \sum_{K \in M(t^n)} \Delta t h_K^d |u_K^{n+1} - u_K^n| + 4L \sum_{n \in I_0, n > 0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |u_K^n - u_{K_e}^n| \delta_{K, K_e}^n \\ &\quad + 2M_1 \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t h_e^{d-1} (\Delta t + h_e)^2 \delta_{K, K_e}^n \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \delta_{K, K_e}^n &= 0, \text{ si } (K \cup K_e) \times [t^n, t^{n+1}[\cap D_{\mathcal{R}+1} = \emptyset, \\ &= 1, \text{ sinon.} \end{aligned}$$

$\sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)}$ représente la somme sur toutes les arêtes incluses dans $M(t^n)$.

Preuve. Par le Lemme 2.1, le Lemme 2.2 est vérifié pour $\tilde{u} = u_h$. Ensuite, en suivant les étapes de la démonstration du Théorème 2.11 et en utilisant les Lemmes 2.12 et 2.13 de [28], l'estimation d'erreur *a posteriori* peut être démontrée.

A partir de l'estimation du Théorème 2.1 et, comme M. Ohlberger et D. Kröner l'ont fait, nous définissons les estimateurs d'erreur locaux suivants :

$$\begin{aligned} (\eta_0)_K &= \int_K |u_0(x) - u_h(x, 0)| dx, \\ (\eta_t)_K^n &= h_K^d |u_K^{n+1} - u_K^n|, \\ (\eta_x)_e^n &= (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |u_K^n - u_{K_e}^n|, \\ (\eta_m)_e^n &= (\Delta t + h_e)^2 h_e^{d-1}. \end{aligned}$$

Associées à chaque estimateur local, nous définissons les bornes supérieures suivantes pour $\alpha, \beta, \theta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{Tol_0}{TM^0}, \\ B_t &= \min\left\{\alpha \frac{Tol_t}{aT^2M^n}, (1-\alpha)^2 \frac{Tol_t^2}{b^2T^3M^n}\right\}, \\ B_x &= \min\left\{\beta \frac{Tol_x}{4LaT^2E^n}, (1-\beta)^2 \frac{Tol_x^2}{4Lb^2T^3E^n}\right\}, \\ B_m &= \min\left\{\theta \frac{Tol_m}{2aT^2M_1E^n}, (1-\theta)^2 \frac{Tol_m^2}{2b^2T^3M_1E^n}\right\}. \end{aligned}$$

Ici, nous rappelons que les constantes a, b, T, L et M_1 sont les constantes du Théorème 2.1. M^n et E^n représentent respectivement le nombre de cellules et le nombre d'arêtes à l'instant t^n dans l'ensemble $M(t^n)$. Ensuite, Tol_0, Tol_t, Tol_x et Tol_m sont les tolérances de η_0, η_t, η_x et η_m . Elles sont choisies de sorte que, pour une tolérance Tol donnée, nous avons :

$$Tol = Tol_0 + Tol_t + Tol_x + Tol_m.$$

Avec ces définitions, nous pouvons énoncer le Corollaire suivant.

Corollaire 2.1. *On suppose les hypothèses du Théorème 2.1 satisfaites. Si nous avons $(\eta_0)_K \leq B_0$, $(\eta_t)_K^n \leq B_t$, $(\eta_x)_e^n \leq B_x$ et $(\eta_m)_e^n \leq B_m$ pour tout $n \in I_0$, $K \in M(t^n)$ et pour toutes les arêtes incluses dans $M(t^n)$, alors l'estimation suivante est vérifiée pour toute tolérance Tol donnée :*

$$\int_{K_c} |u - u_h| \leq Tol.$$

Preuve. En utilisant les hypothèse du Corollaire, nous avons d'après le Théorème 2.1,

$$\begin{aligned} \int_{K_c} |u - u_h| &\leq T \left[\int_{|x-x_0| < R+1} |u_0(x) - u_h(x, 0)| dx \right. \\ &\quad + a \left(\sum_{n \in I_0} \sum_{K \in M(t^n)} \Delta t h_K^d |u_K^{n+1} - u_K^n| \right. \\ &\quad \quad + 4L \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |u_K^n - u_{K_e}^n| \\ &\quad \quad \left. + 2M_1 \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t h_e^{d-1} (\Delta t + h_e)^2 \delta_{K, K_e}^n \right) \\ &\quad + b \left(\sum_{n \in I_0} \sum_{K \in M(t^n)} \Delta t h_K^d |u_K^{n+1} - u_K^n| \right. \\ &\quad \quad + 4L \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |u_K^n - u_{K_e}^n| \\ &\quad \quad \left. + 2M_1 \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t h_e^{d-1} (\Delta t + h_e)^2 \delta_{K, K_e}^n \right)^{\frac{1}{2}} \left. \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{K_c} |u - u_h| &\leq T \left[\sum_{K \in M(0)} B_0 \right. \\
 &\quad + a \left(\sum_{n \in I_0} \sum_{K \in M(t^n)} \Delta t B_t + 4L \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t B_x + 2M_1 \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t B_m \right) \\
 &\quad \left. + b \left(\sum_{n \in I_0} \sum_{K \in M(t^n)} \Delta t B_t + 4L \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t B_x + 2M_1 \sum_{n \in I_0} \sum_{e \in \mathcal{E}(t^n)} \Delta t B_m \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
 &\leq Tol_0 + \alpha Tol_x + \beta Tol_t + \theta Tol_m \\
 &\quad + \left[(1 - \alpha)^2 Tol_x^2 + (1 - \beta)^2 Tol_t^2 + (1 - \theta)^2 Tol_m^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq Tol.
 \end{aligned}$$

3 De nouveaux critères de raffinement basés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori*

Nous appliquons maintenant ces estimateurs d'erreur locaux afin de définir une stratégie de raffinement pour le problème SAGD. La résolution étant fixe sur chaque niveau de grille, les deux estimateurs $(\eta_0)_K$ et $(\eta_m)_e^n$ sont constants. De ce fait, des quatre estimateurs présentés dans la section précédente, nous travaillons essentiellement avec les estimateurs en espace et en temps. Lorsque nous les appliquons à la saturation en huile, S_o , nous obtenons :

$$(\eta_x)_e^n = (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |(S_o)_K^n - (S_o)_{K_e}^n|,$$

$$(\eta_t)_K^n = h_K^d |(S_o)_K^{n+1} - (S_o)_K^n|.$$

Notre générateur de maillages adaptatifs fonctionne avec un critère par maille pour décider du grossissement ou non d'une cellule fine. Pour cela, nous modifions le critère en espace, $(\eta_x)_e^n$ (qui est un critère sur les arêtes), en un critère sur les mailles.

Ainsi, notre critère en espace se compose partiellement d'une somme de η_x sur les arêtes. Précisément, nous utilisons :

$$(\zeta_x)_K^n = T^2 E^n \sum_{e \subset \partial K} (\Delta t + h_e) h_e^{d-1} |(S_o)_K^n - (S_o)_{K_e}^n|,$$

$$(\zeta_t)_K^n = T^2 M^n h_K^d |(S_o)_K^{n+1} - (S_o)_K^n|,$$

où T est le temps final de la simulation, E^n est le nombre d'arêtes de la grille fine, M^n le nombre de cellules de la grille fine, Δt est la taille de période, h_e est le diamètre maximum entre deux cellules voisines K et K_e , h_K est le diamètre de K , d est la dimension de l'espace et $(S_o)_K^n$ est la saturation en huile de la cellule K à l'instant t^n .

Etudions tout d'abord le critère en espace.

Comme nous pouvons le voir, cette quantité, que nous évaluons sur chaque cellule, provient de la comparaison de η_x avec sa borne supérieure B_x (voir la section précédente). La suppression du terme $T^2 E^n$ dans la borne supérieure B_x , nous permet d'obtenir, pour notre critère en espace, une valeur seuil (que l'on note ε_x), qui dépend uniquement des données du problème étudié.

Lorsque le critère excède ε_x , la saturation en huile connaît de fortes discontinuités, ce qui indique qu'une discrétisation fine est nécessaire à cet endroit.

Comme nous pouvons le voir sur la Figure III.3, qui représente une cartographie des valeurs que prend le critère, en milieu homogène pour différentes tailles de grille à différents instants (voir aussi le Tableau III.1), l'interface d'écoulement est correctement détectée ; les discontinuités de la saturation en huile sont caractérisées par les zones de plus grande valeur (zones blanches de la Figure III.3).

Il est également important de noter que le critère en espace est totalement indépendant de l'instant où l'on se place et de la taille de la grille : c'est un point fort qui assure que la valeur de ε_x ne change pas de façon significative durant une simulation tout entière.

Toutefois, la manière dont ce critère réagit en milieu hétérogène tend à réduire l'efficacité de la méthode de raffinement de maillage adaptatif. En effet, il a tendance à détecter un nombre important de cellules ce qui augmente le nombre de zones raffinées. Comme le montrent les cartographies de la Figure III.4, le critère atteint sa valeur maximale non seulement dans les zones où l'huile est mobile mais aussi au niveau des interfaces séparant deux types de roches (à savoir sur les frontières des couches d'argiles).

Griles	grille grossière	grille intermédiaire	grille fine
Nombre de cellules (direction Z)	$Nz = 6$	$Nz = 18$	$Nz = 54$
Nombre de cellules (direction X)	$Nx = 12$	$Nx = 36$	$Nx = 108$
Taille des cellules	6m	2m	0.66m

Tab. III.1: Discrétisation en espace

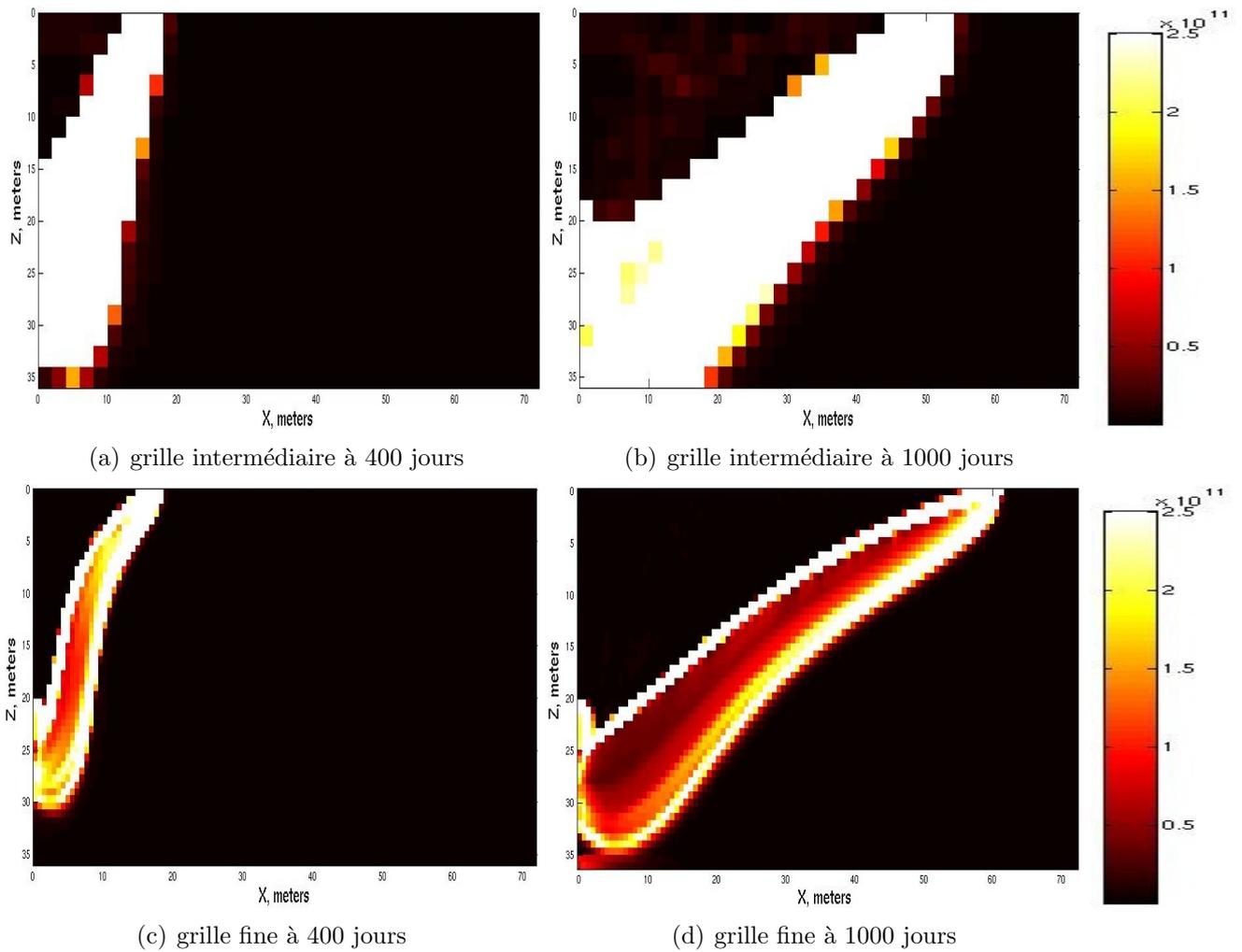


Fig. III.3: Cartographies du critère en espace pour le cas homogène

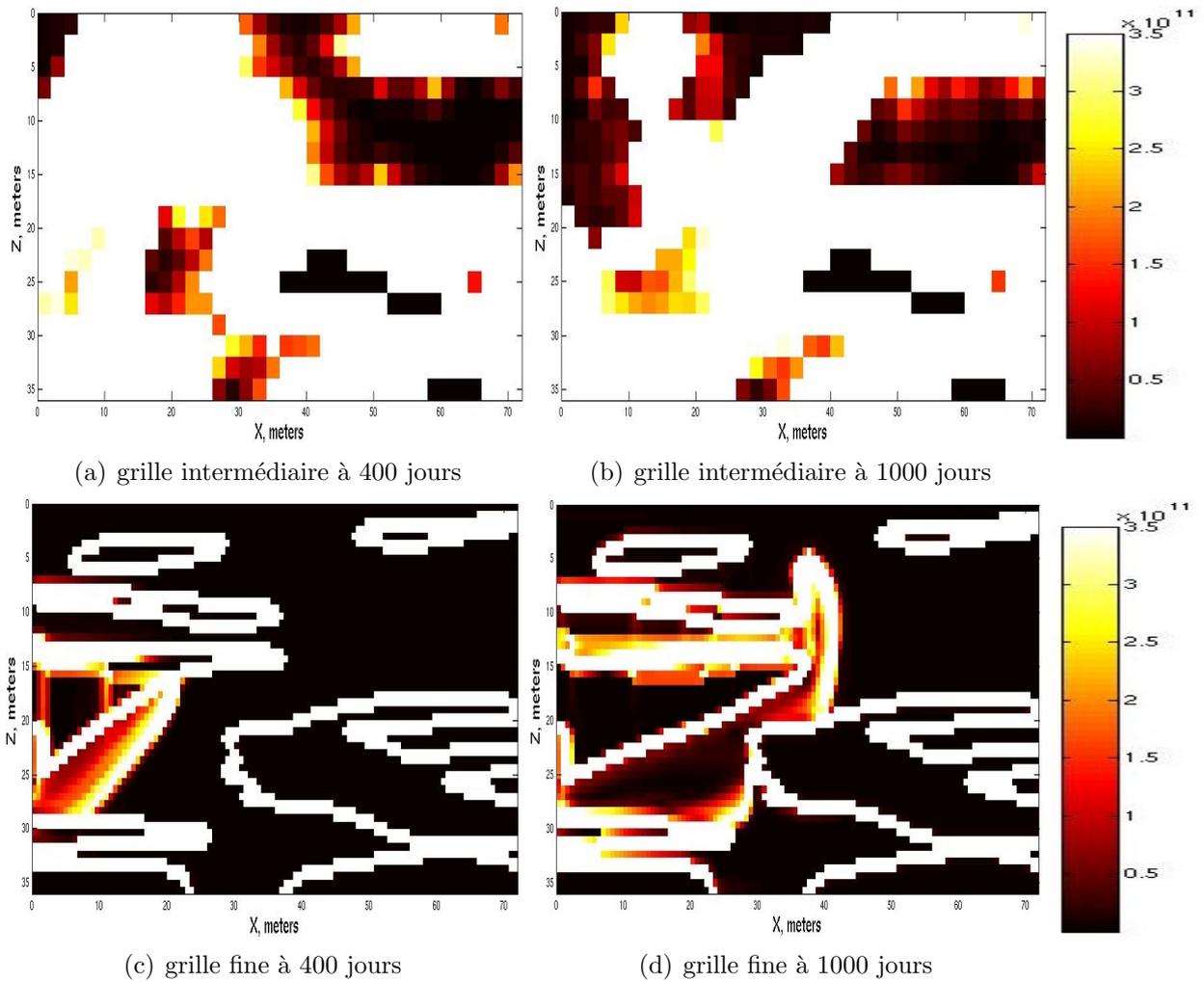


Fig. III.4: Cartographies du critère en espace pour le cas heterogène

Etudions maintenant le critère en temps.

Ce critère compare, pour une cellule, la saturation en huile à deux instants t^n et t^{n+1} , avec en supplément des termes qui viennent des données du maillage et de la comparaison de η_t avec B_t (voir la section précédente).

Dans notre approche, ces deux instants, t^n et t^{n+1} , sont respectivement le début et la fin d'une période. Etant donné que le maillage adaptatif créé par le générateur est fixe sur toute la durée d'une période, ce critère devient rapidement inapplicable pour des tailles de période longues. Par exemple, si une cellule du maillage se situe dans la zone d'huile non mobile à l'instant t^n et dans la zone vapeur à l'instant t^{n+1} , le critère en temps atteindrait sa valeur maximale et la cellule serait étiquetée pour un futur raffinement bien qu'elle ne soit pas dans une zone qui requiert une résolution plus fine.

Toutefois, ce critère garde de l'intérêt sur des tailles de période raisonnables et surtout parce qu'il est, comme le critère en espace, indépendant de l'instant et de la taille de la grille (voir la Figure III.5). Ainsi, la valeur de ε_t ne connaît pas d'importantes variations au cours d'une simulation tout entière.

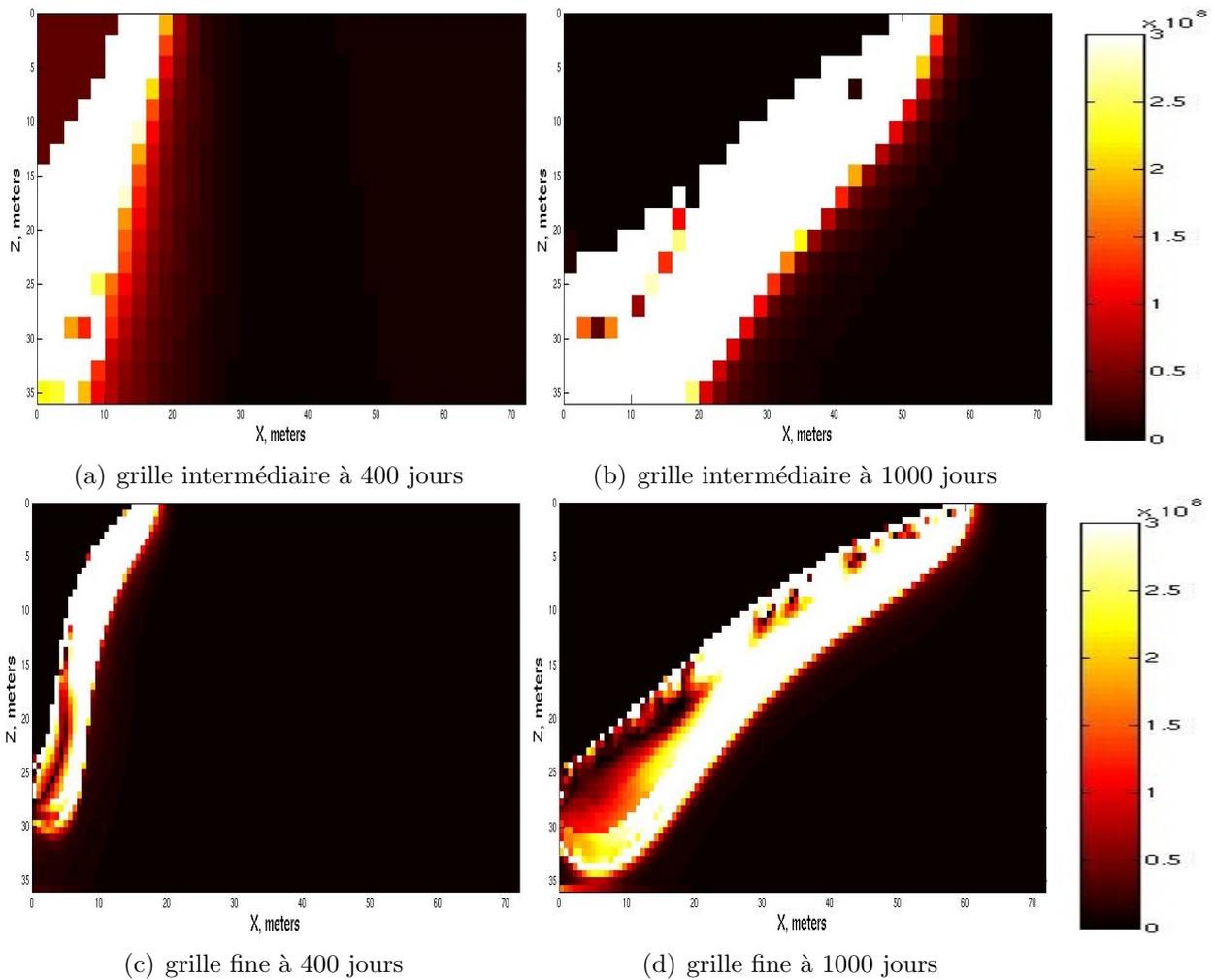


Fig. III.5: Cartographies du critère en temps pour le cas homogène

III Construction de nouveaux critères de raffinement basés sur des estimateurs d'erreur *a posteriori*

Par ailleurs, en milieu hétérogène, si aucun écoulement n'apparaît autour des couches d'argile durant la période, le pourtour de ces couches d'argiles, où un front raide de la saturation en huile existe (dû au changement de type de roche), ne sont pas raffinées (voir la Figure III.6).

Ce critère apparaît alors comme une bonne alternative au critère en espace pour l'étude de cas hétérogènes. Précisément, coupler ce critère au critère en espace peut réduire de façon considérable le nombre de cellules fines en milieu hétérogène.

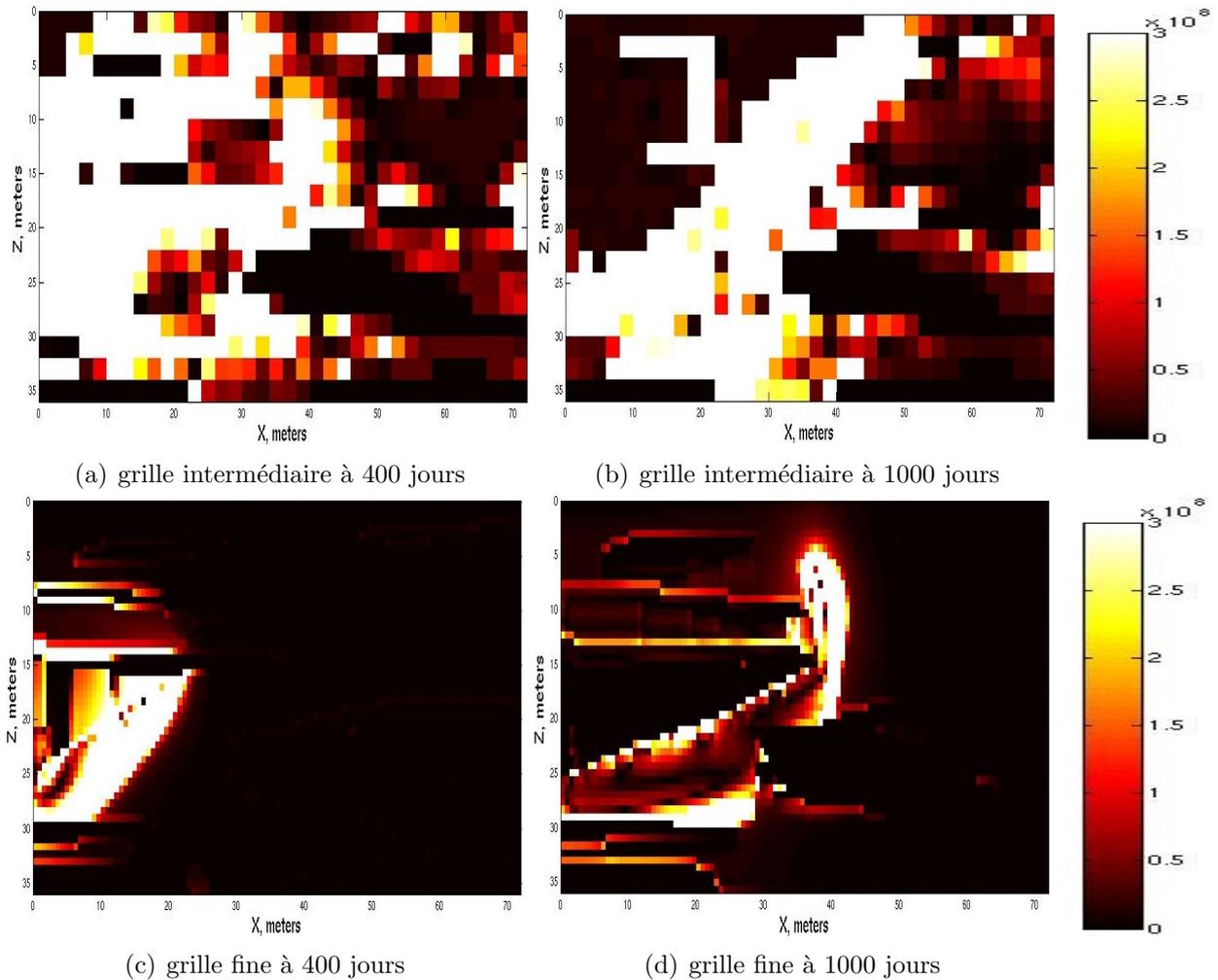


Fig. III.6: Cartographies du critère en temps pour le cas hétérogène

Finalement, notre stratégie de raffinement de maillage adaptatif fonctionne de la manière suivante :

- ε_x et ε_t sont déterminés numériquement après une simulation sur grille fine sur une courte période de 300 jours (cela correspond dans notre exemple à la période de préchauffage et aux premiers mois d'injection de vapeur)

- **En milieu homogène**

Pour chaque période

{

Pour chaque cellule K de la grille fine

{

Si $((\zeta_x)_K^n \geq \varepsilon_x)$ la cellule K est activée;

}

Les cellules de tailles intermédiaires et grossières sont créées en respectant, la règle d'emboîtement des niveaux de grilles, là où les cellules fines n'ont pas été activées

}

- **En milieu hétérogène**

Pour chaque période

{

Pour chaque cellule K de la grille fine

{

Si $((\zeta_x)_K^n \geq \varepsilon_x$ et $(\zeta_t)_K^n \geq \varepsilon_t)$ la cellule K est activée;

}

Les cellules de tailles intermédiaires et grossières sont créées, en respectant la règle d'emboîtement des niveaux de grilles, là où les cellules fines n'ont pas été activées

}

Remarque 3.1. *Nous rappelons que la règle d'emboîtement des niveaux de grilles est expliquée dans le chapitre 2.*

Dans la section suivante, nous évaluons ces nouvelles stratégies de raffinement sur les exemples introduits dans les chapitre 1 et 2.

4 Résultats numériques

4.1 Résultats obtenus en milieu homogène avec le critère en espace

Dans cette section, nous montrons l'efficacité du nouvel algorithme adaptatif basé sur le critère en espace. Nous utilisons ici, le même exemple introduit dans le chapitre 1.

Comme nous l'avons expliqué précédemment et comme la Figure III.7 le montre, la grille la plus fine recouvre les zones de forts gradients de la saturation en huile et des cellules de taille intermédiaire recouvrent l'intérieur de l'interface d'écoulement.

Le nombre de cellules est réduit de 70% en moyenne (voir la Figure III.12), par rapport à la grille fine, sur le temps global de la simulation qui est de 3000 jours. En terme de temps CPU, cette approche permet d'avoir un facteur d'accélération de 6 en moyenne, avec un gain en temps maximum de 10 sur les premières années simulées, comme le montre la Figure III.11. De plus, ces gains sont obtenus tout en gardant une estimation précise de la production cumulée en huile (voir la Figure III.13).

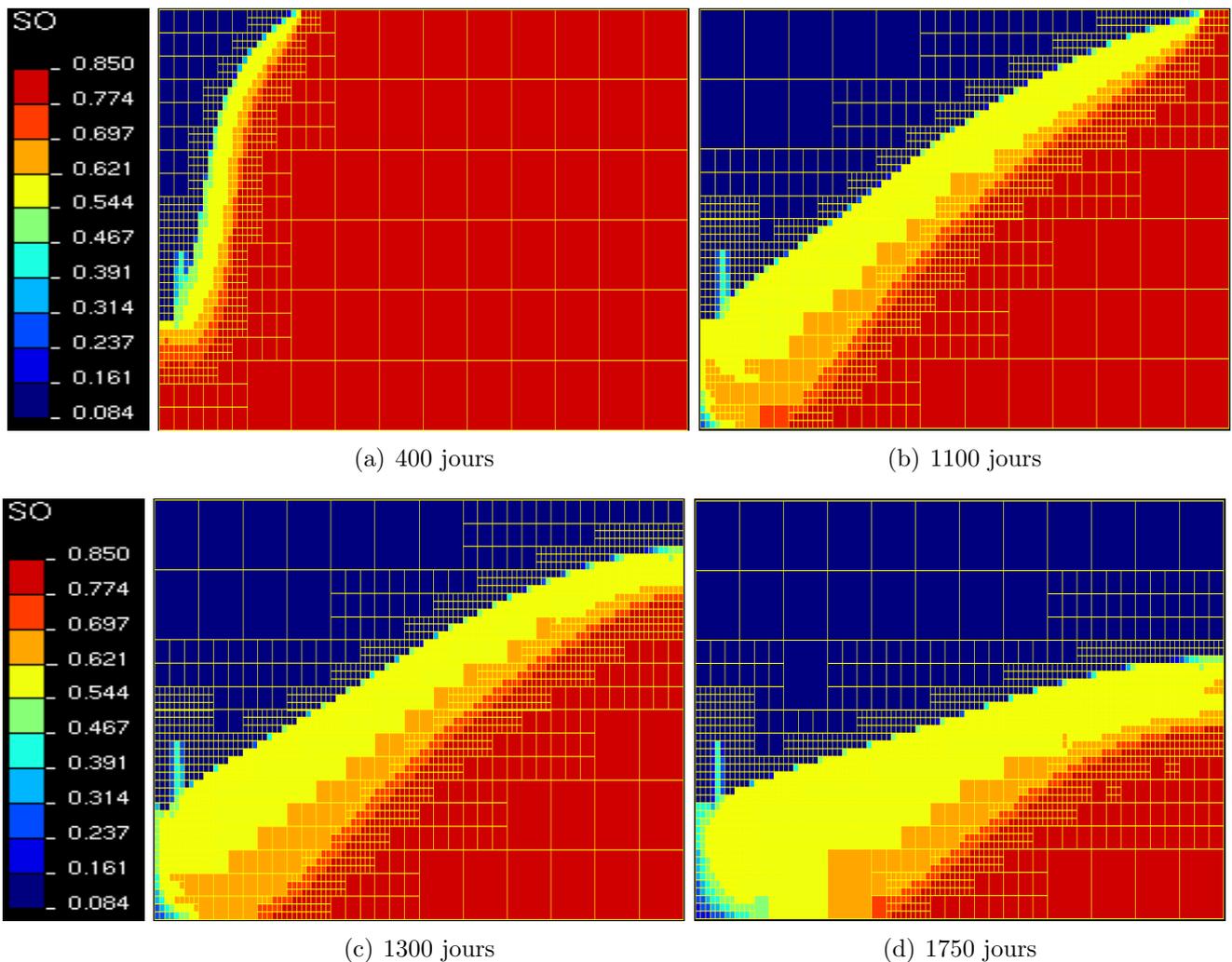


Fig. III.7: Profils de la saturation en huile

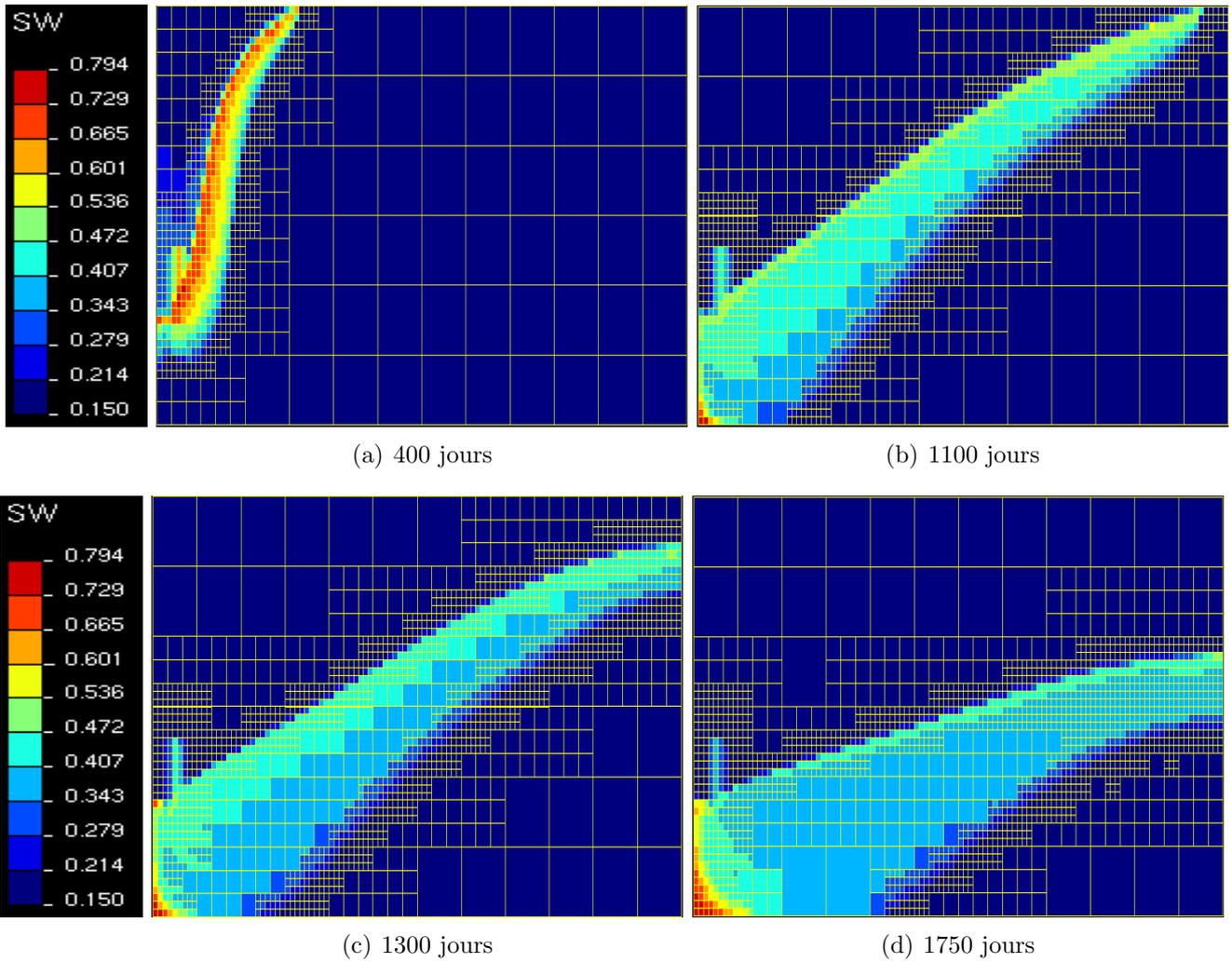


Fig. III.8: Profils de la saturation en eau

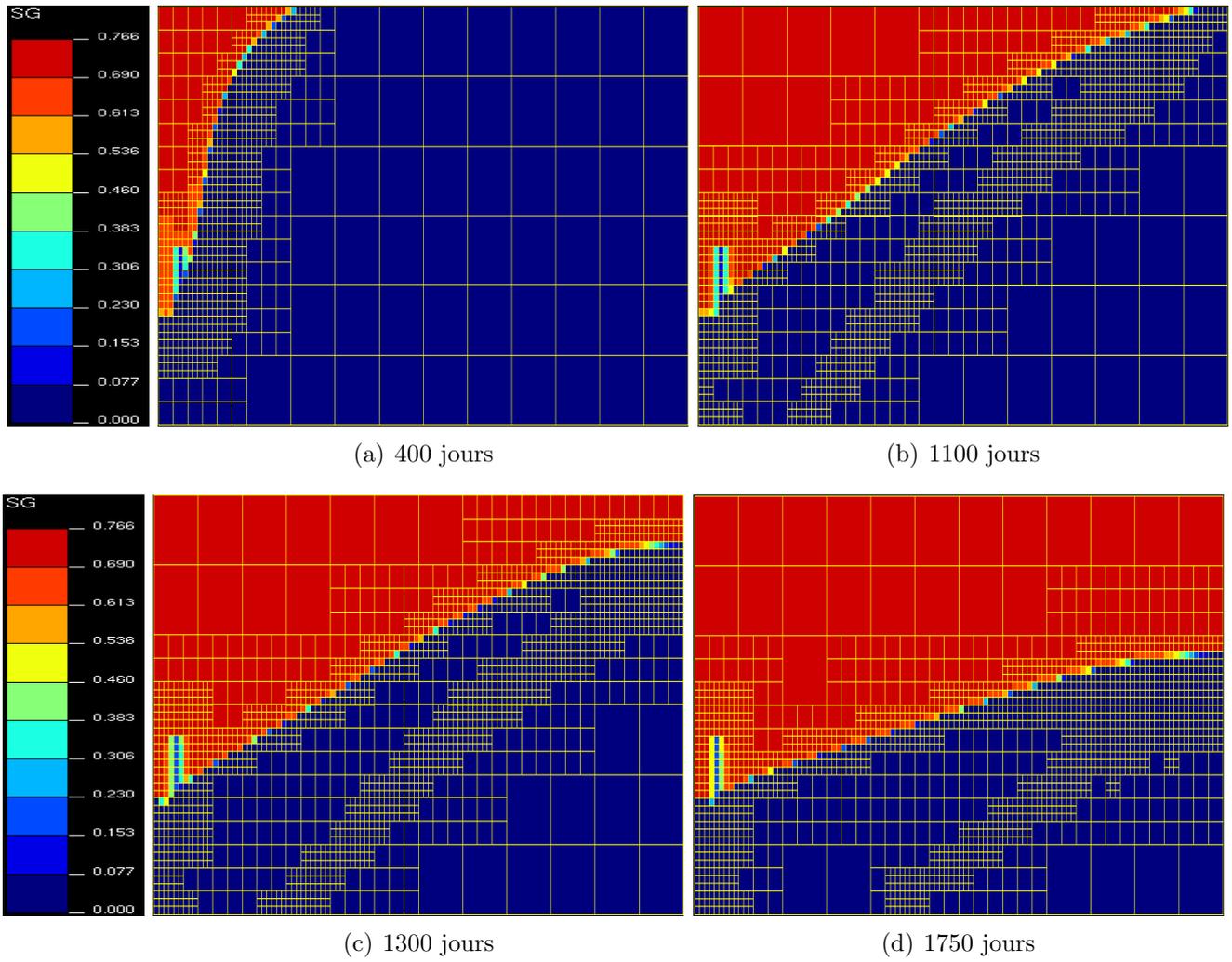


Fig. III.9: Profils de la saturation en vapeur

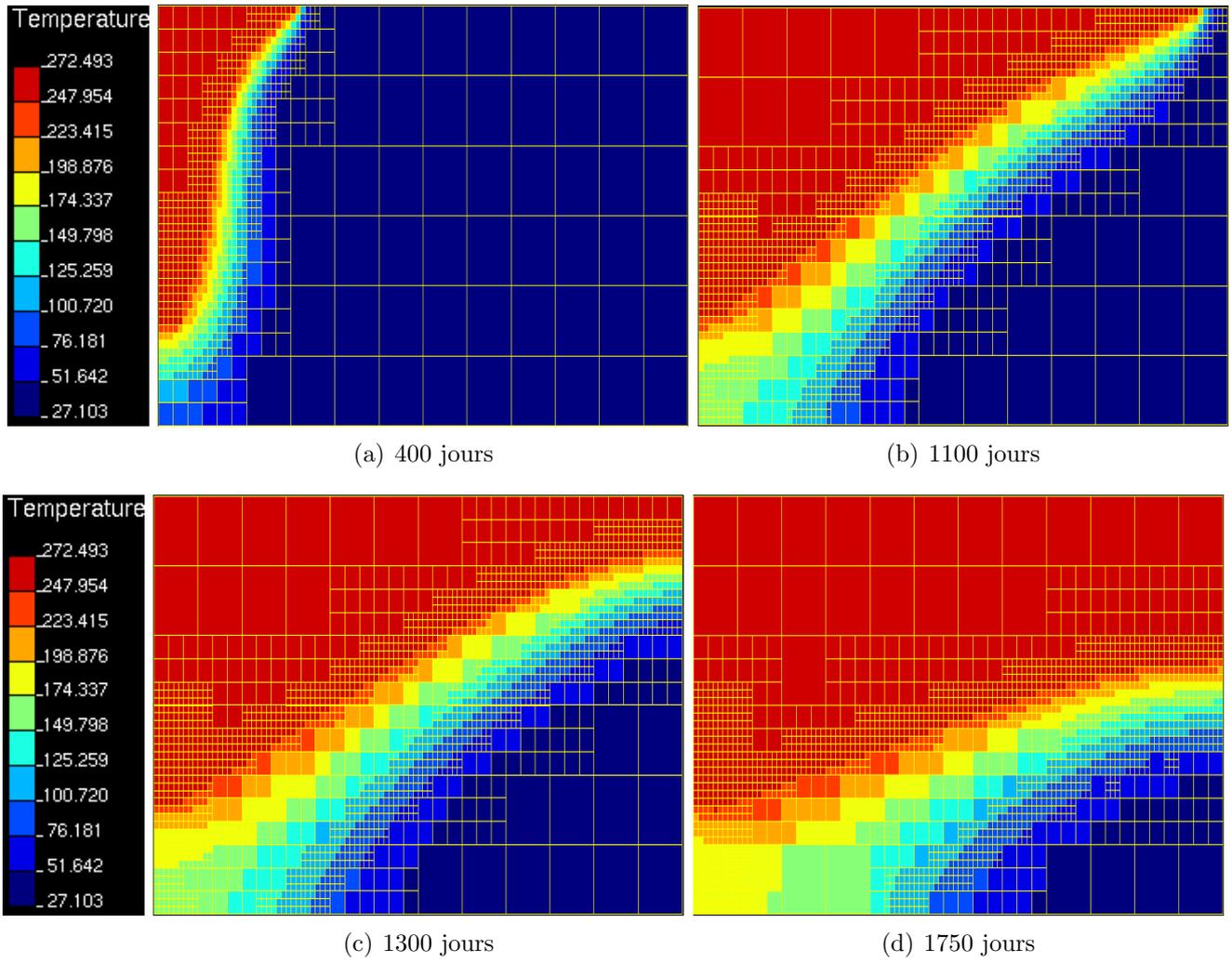


Fig. III.10: Profils de la température

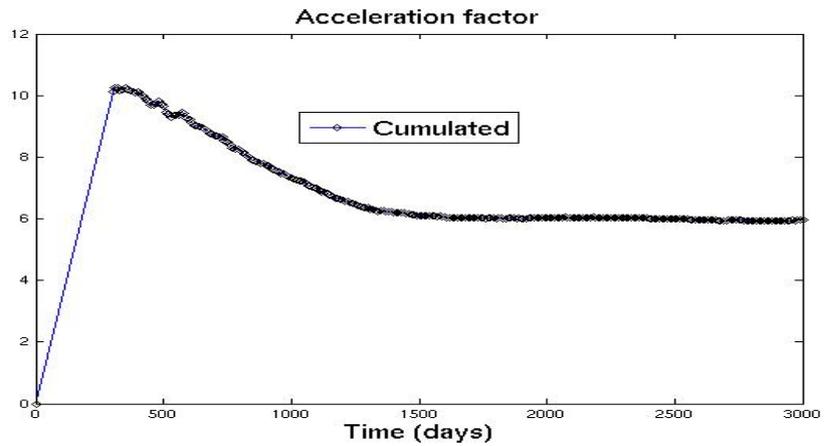


Fig. III.11: Gains en temps cumulé

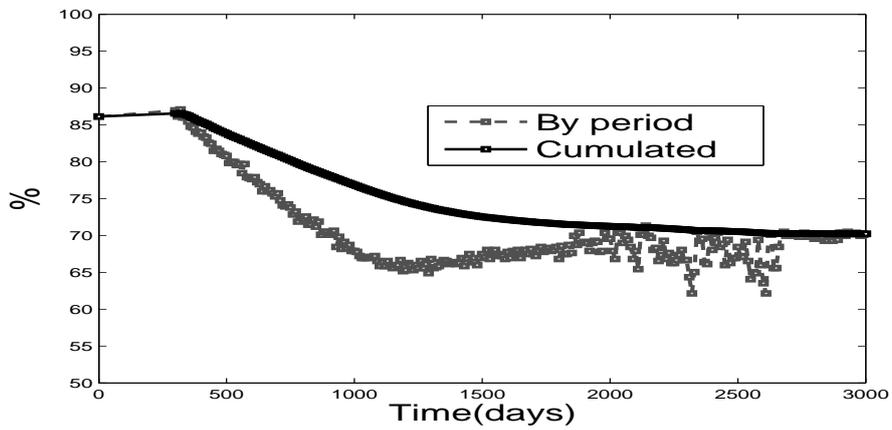


Fig. III.12: Réduction du nombre total de cellules

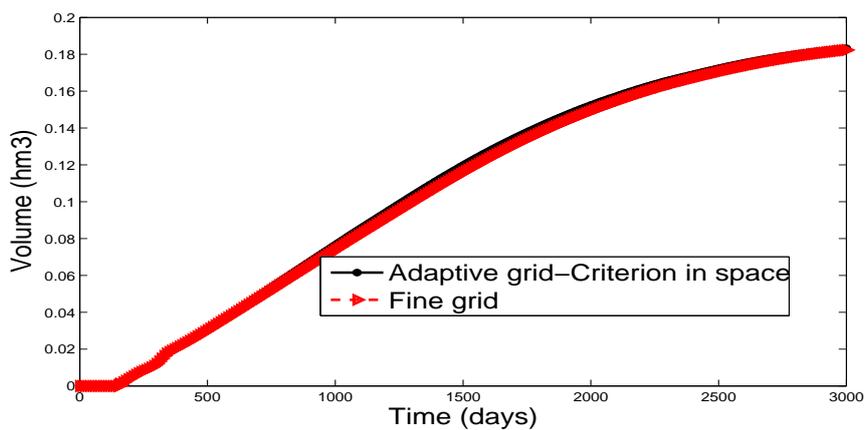


Fig. III.13: Production cumulée de l'huile

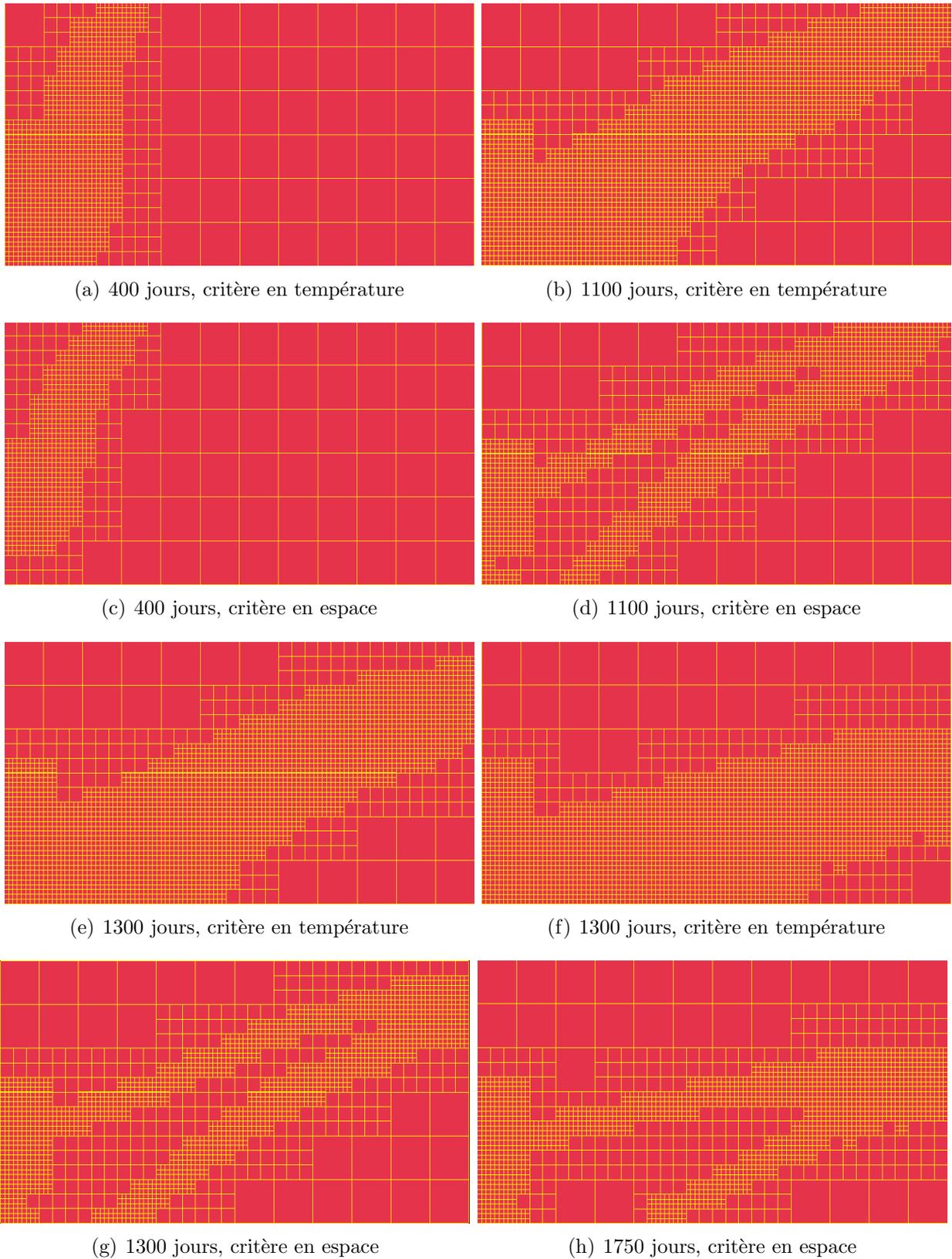


Fig. III.14: Comparaison des maillages adaptatifs obtenus avec les températures seuils et le critère en espace

La comparaison des grilles adaptatives avec celles obtenues avec les températures seuils (illustrées sur la figure FIG. III.14) permet de mettre en évidence le fait que la zone raffinée est moins importante avec le nouveau critère.

Le déraffinement qui a lieu à l'intérieur de la zone d'huile mobile permet de réduire le nombre de mailles en particulier lorsque la zone de transition s'élargit, ce qui n'est pas le cas avec le critère basé sur les températures.

Le tableau III.2 compare les résultats de ces deux approches : nous pouvons voir que le gain en temps est meilleur avec le critère en espace ; il est de 1.3 par rapport à l'approche initiale.

2D	grille fine	grille adaptative (critère sur les températures seuils)	grille adaptative (critère en espace)
Nombre total de cellules	5832	×	×
Réduction du nombre total de cellules	0%	58%	70%
Temps CPU (Sec)	14342	3222	2407
Gains en temps	1	4.5	6

Tab. III.2: Comparaison des résultats numériques pour le cas 2D homogène

4.2 Résultats obtenus en milieu hétérogène avec les critères en temps et en espace

Le contrôle de la taille des cellules avec le critère en espace conduit à un raffinement des zones où la saturation en huile est discontinue, incluant à certains endroits les couches d'argile alors qu'aucun écoulement d'huile n'apparaît (voir les Figures III.15 (a) et (b)). Cela entraîne un nombre important de cellules fines et de faibles gains en temps de calculs : la réduction du nombre total de mailles est de 36% en moyenne et la simulation est accélérée par un facteur de 1.7 sans perte de précision sur les prédictions de production en huile.

Couplé au critère en espace, le critère en temps permet une réduction du nombre de cellules plus importante toujours en maintenant une bonne précision dans les résultats.

Les zones raffinées sont localisées dans les zones de fortes discontinuités de la saturation en huile et là où des écoulements ont lieu. Par ailleurs, les interfaces liées aux changements de faciès (ou roche) sont raffinées uniquement si de l'eau et de l'huile coulent autour d'elles.

Ainsi, nous obtenons une réduction du nombre de mailles de 58% en moyenne, comme le montre la Figure III.20. Le gain en temps est supérieur à 2 (voir la Figure III.19) avec une bonne restitution du profil de la production en huile (voir la Figure III.21).

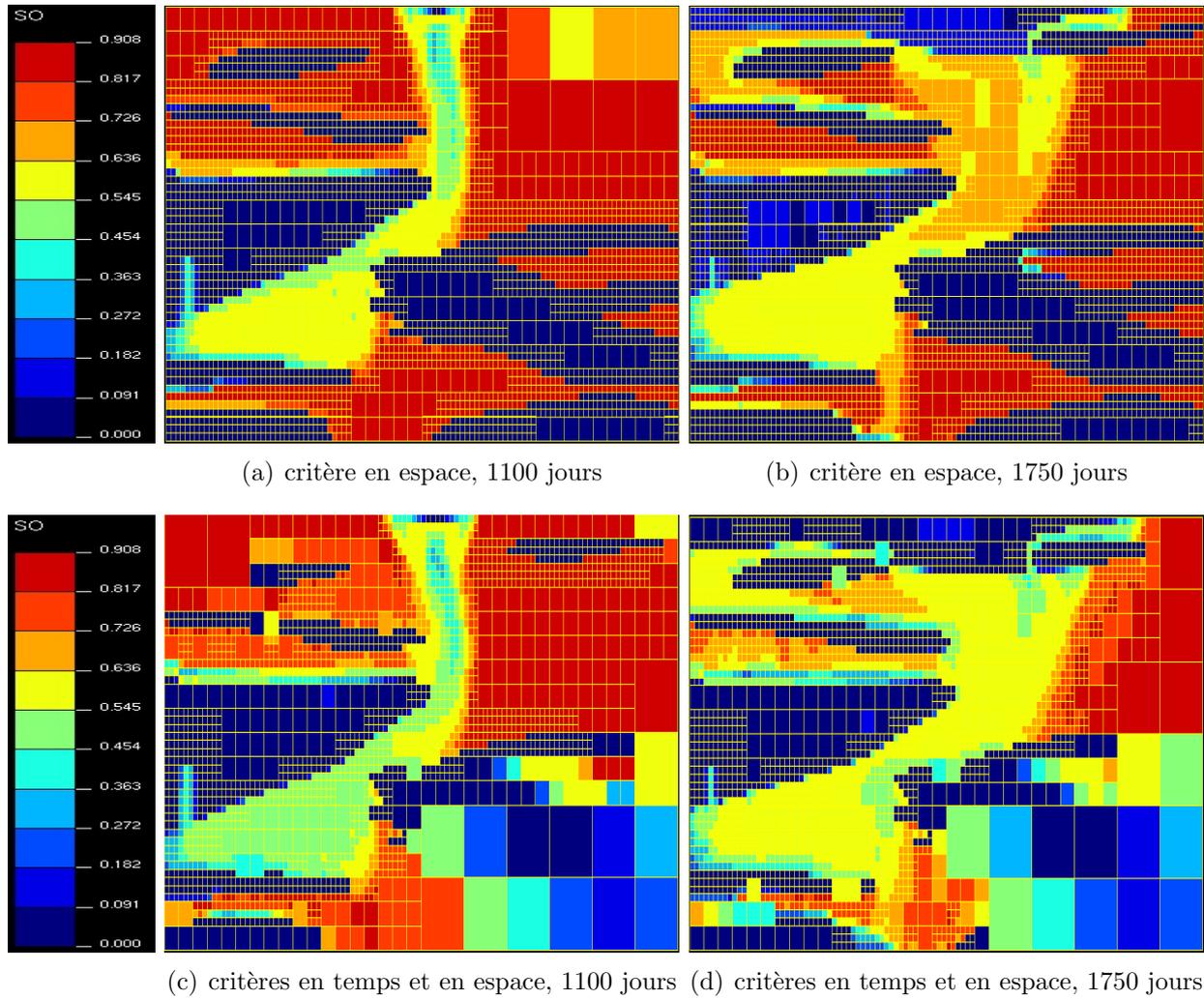


Fig. III.15: Profils de la saturation en huile

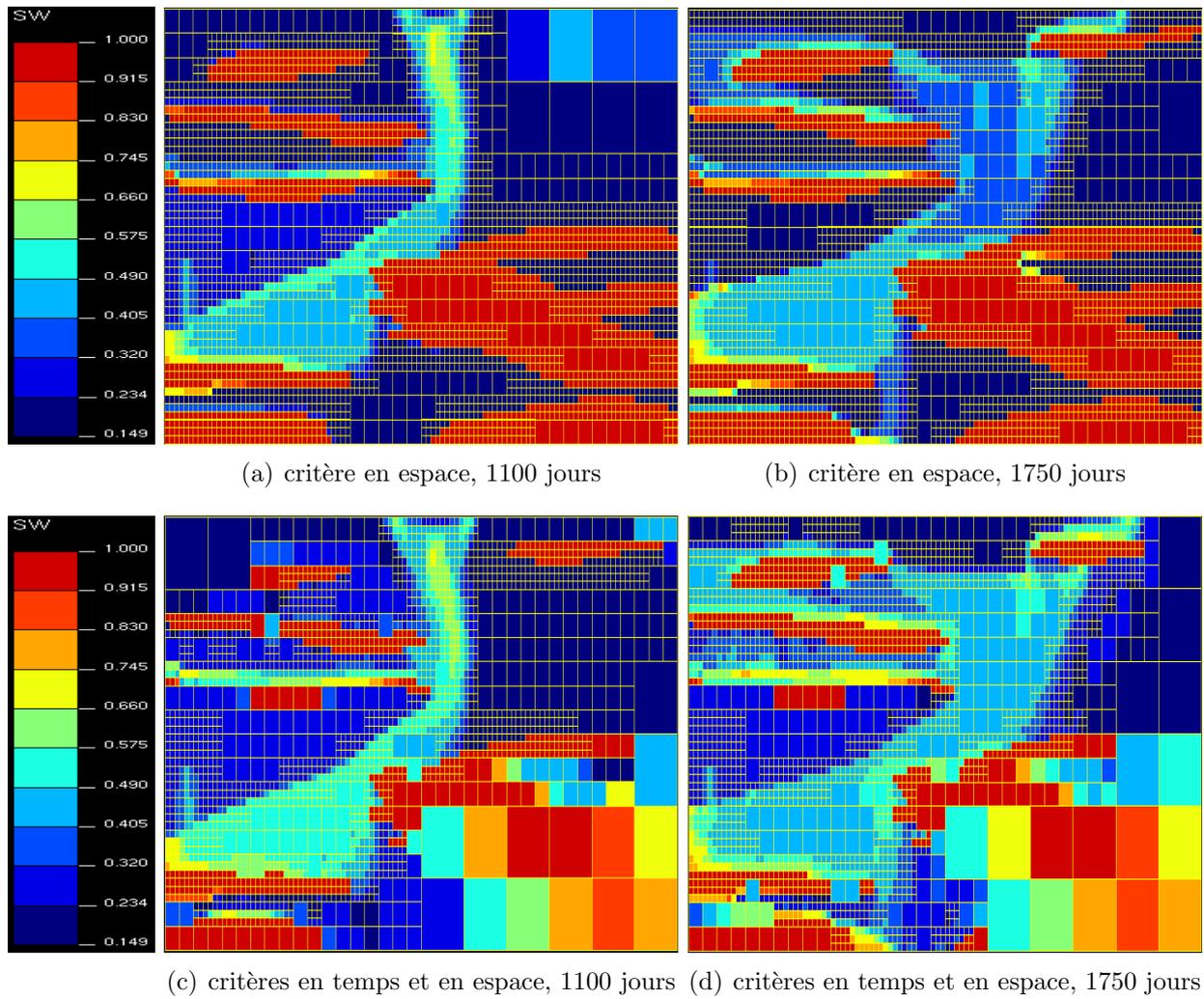


Fig. III.16: Profils de la saturation en eau

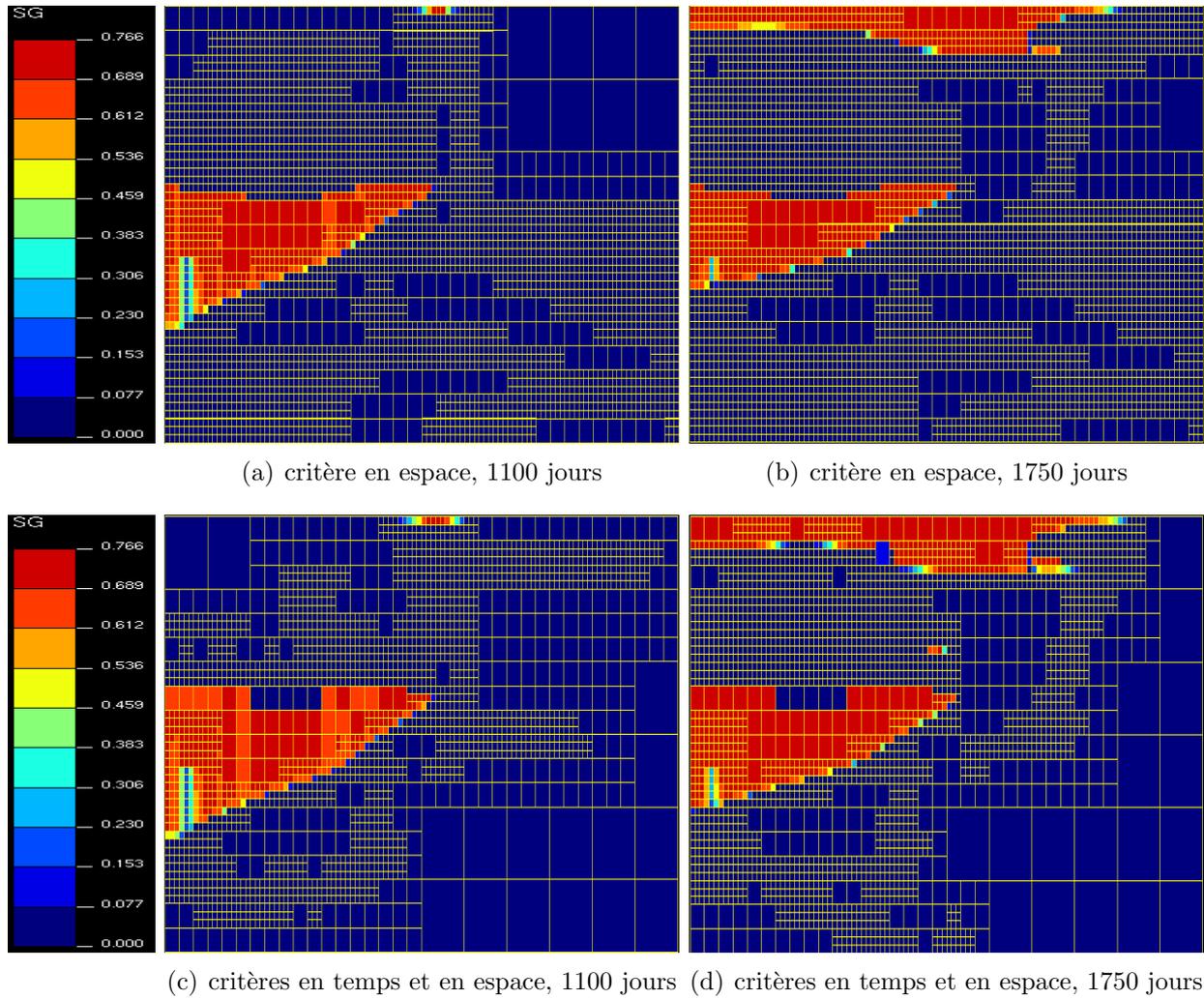


Fig. III.17: Profils de la saturation en vapeur

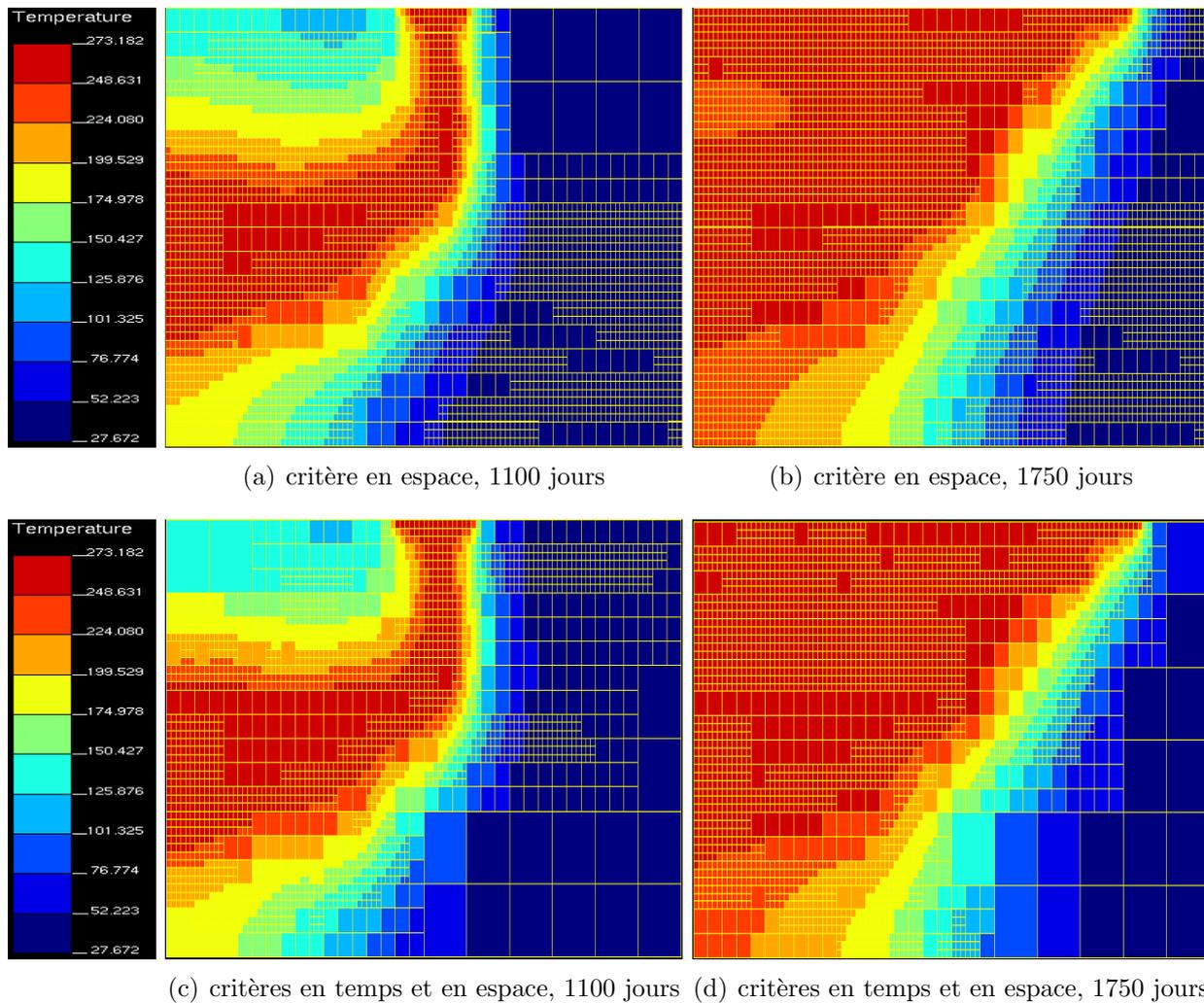


Fig. III.18: Profils de la température

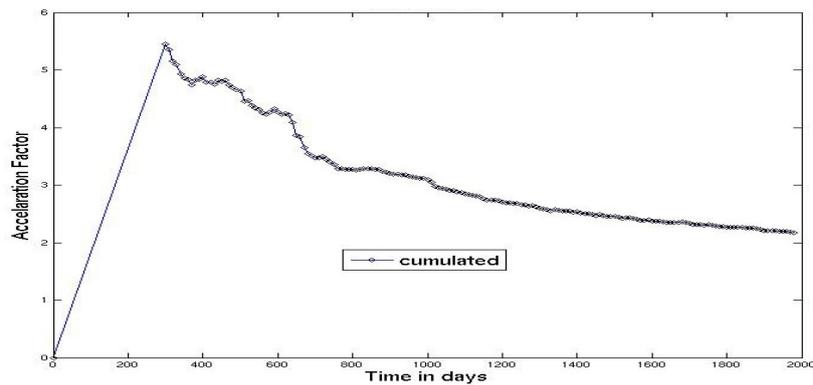


Fig. III.19: Gains en temps cumulés

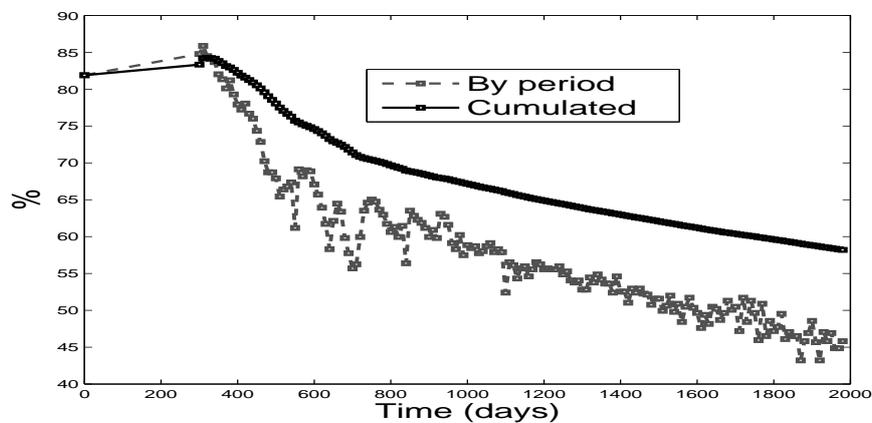


Fig. III.20: Réduction du nombre de cellules

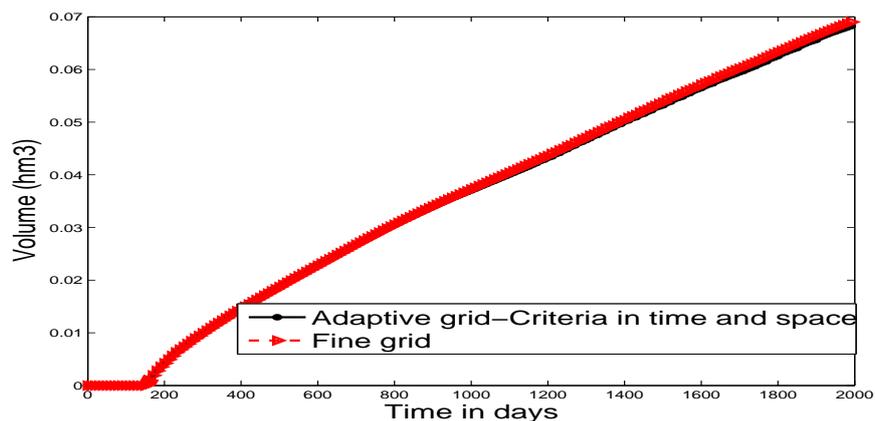


Fig. III.21: Production en huile cumulée

Remarque 4.1. Le volume d'huile estimé à 2000 jours, soit 0.07 hm^3 , représente environ 40% du volume d'huile initial. Devant ce faible volume, on peut s'interroger sur la rentabilité de l'exploitation. L'objectif ici n'était pas d'évaluer la rentabilité d'un tel projet, mais de valider sur un cas synthétique la nouvelle stratégie de raffinement.

IV. Une stratégie de raffinement de maillage adaptatif basée sur des estimateurs d'erreur *a posteriori* locaux pour des systèmes hyperboliques symétriques

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, D. Kröner et M. Ohlberger ont démontré une estimation d'erreur *a posteriori* [28] à partir de l'étude de C. Chainais sur la convergence d'un schéma volumes finis pour des problèmes hyperboliques scalaires non linéaires. Cette estimation repose sur l'inégalité d'entropie approchée écrite pour des entropies de Kruskov et satisfaite par la solution du schéma numérique [7].

Pour des systèmes hyperboliques linéaires de type systèmes de Friedrichs [24], J.P. Vila et P. Villedieu ont étudié la convergence d'un schéma volumes finis sur des maillages non structurés et ont démontré une estimation d'erreur a priori d'ordre $h^{\frac{1}{2}}$ pour l'approximation de solutions dans H^1 [45]. Celle-ci ne repose pas sur une inégalité d'entropie approchée avec des entropies de Kruskov (cette technique n'est adaptée qu'au cas scalaire) mais sur une formulation faible et une formulation d'énergie approchées (cette technique utilise la linéarité du système).

V. Jovanović et C. Rohde ont étendu les résultats de J.P. Vila et P. Villedieu : ils ont démontré une estimation d'erreur a priori pour des solutions dans $H^s (s \geq 0)$ et aussi une estimation d'erreur *a posteriori* qui pourrait être la base d'un algorithme adaptatif [26].

De façon quasi analogue à celle menée par D. Kröner et M. Ohlberger dans [28], nous allons à partir des travaux de J.P. Vila et P. Villedieu [45] reprendre les étapes de la démonstration de l'estimation d'erreur a priori et définir, comme l'ont fait V. Jovanović et C. Rohde, une estimation d'erreur *a posteriori*. On en déduira des estimateurs d'erreur locaux, à partir desquels, une technique de raffinement de maillage adaptatif est construite. Cette stratégie de raffinement de maillage adaptatif sera ensuite validée à travers des simulations numériques.

1 Présentation du problème et du schéma numérique

1.1 Présentation des systèmes de Friedrichs

Soit $\mathcal{Q} = \mathbb{R}^d \times]0, +\infty[$ et $\mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille $m \times m$ à coefficients réels. Nous considérons des fonctions

$$A^i : (x, t) \in \mathcal{Q} \rightarrow A^i(x, t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}) \quad 1 \leq i \leq d$$

telles que :

$$\text{les matrices } A^i, \text{ pour } i = 1, \dots, d, \text{ sont symétriques (i.e. } A^i = (A^i)^\top), \quad (20a)$$

$$\text{pour } i = 1, \dots, d, \quad A^i \in L^\infty(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_m(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_m(\mathbb{R})), \quad (20b)$$

$$\text{div } A \in L^\infty(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_m(\mathbb{R})), \text{ avec } \text{div } A = \sum_{i=1}^d \frac{\partial A^i}{\partial x_i}. \quad (20c)$$

Pour $B : (x, t) \in \mathcal{Q} \rightarrow B(x, t) \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ et pour $f : (x, t) \in \mathcal{Q} \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}^m$, nous considérons, comme J.P. Vila et P. Villedieu, le système de Friedrichs [24] sous la forme conservative suivante :

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^d \frac{\partial (A^i u)}{\partial x_i} + B u = f, \text{ sur } \mathcal{Q}. \quad (21)$$

Notons que ce système peut s'écrire sous une forme non conservative [3] :

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^d A^i \frac{\partial u}{\partial x_i} + (\text{div } A + B) u = f, \text{ sur } \mathcal{Q}. \quad (22)$$

Pour $u_0 : x \in \mathbb{R}^d \rightarrow u_0(x) \in \mathbb{R}^m$, nous considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^d \frac{\partial (A^i u)}{\partial x_i} + B u = f, \text{ sur } \mathcal{Q} \quad (23a)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d. \quad (23b)$$

1.2 Existence d'une unique solution faible

Notons $\mathbb{H}^1 = H^1(\mathbb{R}^d)^m$. Si $u_0 \in \mathbb{H}^1$ et si, il existe $T > 0$ tel que $f \in L^2([0, T], \mathbb{H}^1)$, alors il existe une unique solution faible. Ce résultat, démontré dans [3], est le suivant :

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses (20), on suppose que $u_0 \in \mathbb{H}^1$, qu'il existe $T > 0$ tel que $f \in L^2([0, T]; \mathbb{H}^1)$ et que $B \in L^\infty(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_m(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_m(\mathbb{R}))$.*

Alors le problème (23) admet une unique solution faible $u \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{H}^1)$ qui satisfait,

$$\sup_{t \in [0, T]} \|u(\cdot, t)\|_{H^1} \leq C(T, A^i, B) (\|u_0\|_{H^1} + \|f\|_{L^2([0, T]; \mathbb{H}^1)}).$$

Enfin, si $u_0 \in [C_c^\infty(\mathbb{R}^d)]^m$ et $f \in [C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T])]^m$ alors $u \in [C_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, T])]^m$ est une solution classique.

La solution faible u satisfait la formulation faible suivante :

pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty], \mathbb{R}^m)$,

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} u^\top(x, t) \partial_t \psi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^d} u_0^\top(x) \psi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} u^\top(x, t) \sum_{i=1}^d A^i(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} (u^\top(x, t) B^\top(x, t) - f^\top(x, t)) \psi(x, t) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Une conséquence de la formulation faible est la formulation de l'énergie. Satisfaite par la solution faible u , elle s'écrit :

pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty], \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} & - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} \|u\|^2 \partial_t \phi(x, t) dx dt - \int_{\mathbb{R}^d} \|u_0\|^2 \phi(x, 0) dx - \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} \sum_{i=1}^d u^\top(x, t) A^i(x, t) u(x, t) \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx dt \\ & + \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} u^\top(x, t) \operatorname{div} A(x, t) u(x, t) \phi(x, t) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} 2u^\top(x, t) B(x, t) u(x, t) \phi(x, t) dx dt \\ & = \int_{\mathbb{R}^d \times [0, +\infty]} 2u^\top(x, t) f(x, t) \phi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Cette formulation de l'énergie est un outil important pour la convergence du schéma numérique et l'estimation d'erreur *a priori*. Pour les systèmes de Friedrichs, elle joue le même rôle que l'inégalité d'entropie avec les entropies de Kruskov pour les problèmes hyperboliques scalaires [7].

Dans ce qui suit nous présentons le schéma numérique de type volumes finis ainsi que les résultats fondamentaux présentés par J.P. Vila et P. Villedieu dans [45].

1.3 Le schéma numérique

Nous approchons la solution du système (23) par un schéma volumes finis sur un maillage non structuré. La construction du schéma suit celle présentée dans [26] (ou [45]).

Nous utilisons pour le maillage les notations et les hypothèses introduites dans la section 2.2 du chapitre 3. Par ailleurs, pour Ψ suffisamment régulière, nous introduisons les écritures suivantes :

$$\Psi_K(t) = \frac{1}{m(K)} \int_K \Psi(x, t) dx, \quad (24a)$$

$$\Psi_K^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Psi_K(t) dt, \quad (24b)$$

$$\Psi_e^n = \frac{1}{\Delta t m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e \Psi(\gamma, t) d\gamma dt. \quad (24c)$$

Les valeurs de v_h sont calculées, pour $n \in \mathcal{N}$ et pour $K \in \mathcal{T}$, par le schéma numérique conservatif suivant :

$$v_K^{n+1} = v_K^n - \frac{\Delta t}{m(K)} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) g_{K,e}^n(v_K^n, v_{K_e}^n) + \Delta t f_K^n, \quad (25a)$$

avec

$$v_K^0 = \frac{1}{m(K)} \int_K u_0(x) dx. \quad (25b)$$

Le flux numérique, sortant de l'arête $e \in \mathcal{E}(K)$ d'une cellule $K \in \mathcal{T}$, est donné par :

$$g_{K,e}^n(u, v) = -C_{K,e}^n \cdot v + D_{K,e}^n \cdot u, \text{ pour } (u, v) \in \mathbb{R}^m \quad (25c)$$

où

$$\begin{aligned} -C_{K,e}^n &= (A_{K,e}^n)^-, & D_{K,e}^n &= (A_{K,e}^n)^+, \\ (A^i)_e^n &= \frac{1}{\Delta t m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e A^i(t, \gamma) d\gamma dt, & A_{K,e}^n &= \sum_{i=1}^d n_{K,e}^i (A^i)_e^n. \end{aligned} \quad (25d)$$

Les opérateurs $(\cdot)^+$ et $(\cdot)^-$ représentent respectivement les parties positive et négative d'une matrice symétrique.

Remarque 1.1. Pour une matrice A symétrique, on a $A = P^{-1}DP$ où la matrice D est la matrice diagonale des valeurs propres. En notant respectivement D^+ et D^- les matrices des valeurs propres positives et négatives, on définit la partie positive et la partie négative de la matrice A de la façon suivante :

$$A^+ = P^{-1}D^+P, \quad A^- = P^{-1}D^-P.$$

D'après la définition (25d), nous avons :

$$C_{K,e}^n = D_{K_e,e}^n. \quad (26)$$

Cela conduit à un flux numérique consistant et assure un schéma numérique conservatif. En effet, pour $K \in \mathcal{T}$ et $e \in \mathcal{E}(K)$, nous avons : $g_{K,e}^n(v, w) = -g_{K_e,e}^n(w, v)$.

Le schéma (25a) peut également s'écrire sous une forme non conservative. En utilisant la formule de Green nous obtenons : $\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) A_{K,e}^n = m(K) (\operatorname{div} A)_K^n$.

Ainsi, en combinant cette égalité à (25a) et en utilisant (26), nous obtenons :

$$v_K^{n+1} = v_K^n - \frac{\Delta t}{m(K)} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) C_{K,e}^n (v_K^n - v_{K_e}^n) - \Delta t \left(((\operatorname{div} A)_K^n + B_K^n) \cdot v_K^n - f_K^n \right). \quad (27)$$

Enfin, sous les hypothèses du maillage, l'approximation de u par des volumes finis (notée v_h) est définie par :

$$v_h(x, t) = v_K^n, \quad \forall (x, t) \in K \times [t^n, t^{n+1}[\text{ où } t^n = n\Delta t. \quad (28)$$

2 Propriétés du schéma numérique

En pratique, les termes en $\operatorname{div} A$, B et f ne contribuent pas à des estimateurs d'erreur locaux évolutifs en temps. On se place alors, dans toute la suite, dans le cas où $\operatorname{div} A = B = f = 0$.

2.1 Résultats de stabilité

Dans cette section, nous rappelons les résultats de stabilité introduits dans [45].

L'estimation d'énergie locale faisant introduire la condition de CFL et la stabilité uniforme de la solution approchée v_h sont des outils nécessaires à l'estimation d'erreur *a posteriori* (voir la Proposition 2.1). On introduit les notations suivantes :

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, \|v\| = \left(\sum_{i=1}^m v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall v \in \mathbb{R}^m, \|v\|_{C_{K,e}^n} = (v^\top \cdot C_{K,e}^n \cdot v)^{\frac{1}{2}},$$

$$\forall M \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}), \|M\| = \sup_{\|v\|=1} \|M \cdot v\|.$$

Proposition 2.1. *Sous les hypothèses (20) sur les données, on considère, v_h , l'approximation par volumes finis de la solution u . Sous la condition de CFL suivante :*

$$\sup_{K \in \mathcal{T}, e \in \mathcal{E}(K)} \frac{\Delta t \, m(\partial K)}{m(K)} \|C_{K,e}^n\| \leq 1 - \epsilon \quad (29a)$$

où $\epsilon \in]0, 1[$, la solution du schéma explicite (25) satisfait :

$$\begin{aligned} m(K) (\|v_K^{n+1}\|^2 - \|v_K^n\|^2) + \Delta t \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} [(v_K^n)^\top \cdot C_{K,e}^n \cdot v_K^n - (v_{K_e}^n)^\top \cdot C_{K,e}^n \cdot v_{K_e}^n] m(e) \\ \leq -\epsilon \Delta t \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|v_K^n - v_{K_e}^n\|_{C_{K,e}^n}^2 m(e) \end{aligned} \quad (29b)$$

Par ailleurs, pour h assez petit et pour $T \in \mathbb{R}^+$, la solution approchée v_h vérifie :

$$\|v_h(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2, \quad \forall t \in [0, T] \quad (29c)$$

De plus, les dérivées discrètes de v_h satisfont :

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|v_K^n - v_{K_e}^n\|_{C_{K,e}^n}^2 \Delta t \, m(e) \leq \frac{1}{\epsilon} \|u_0\|_{L^2}^2 \quad (29d)$$

Pour (29b) voir la preuve de la proposition 3.1 dans [45]. La démonstration des inégalités (29c) et (29d) suit celle de la proposition 3.2 de [45].

2.2 Formulation faible et formulation d'énergie approchées

Le point de départ pour la définition de l'estimation d'erreur *a posteriori* repose sur les formulations faible (30a) et d'énergie (30b) approchées données par la Proposition 2.2.

Pour tout sous-ensemble compact B de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$, définissons tout d'abord par \mathbf{H}_B l'espace des fonctions $H^1(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^d)$ à support compact dans B . Posons $\mathbb{H}_B = (\mathbf{H}_B)^m$, $\mathbf{H} = \bigcup_B \mathbf{H}_B$ et $\mathbb{H} = \mathbf{H}^m$. Nous définissons également par \mathbb{H}' l'ensemble des formes linéaires μ de \mathbb{H} .

Pour tout sous-ensemble compact B , il existe une constante positive $C(B)$ telle que :

$$\forall \psi \in \mathbb{H}_B, | \langle \mu, \psi \rangle | \leq C(B) \|\psi\|_{(H^1(B)^m)}.$$

On notera par \mathcal{R} l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$ et par \mathcal{C}_c^{1+} l'ensemble des fonctions positives \mathcal{C}^1 à support compact dans $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$.

Proposition 2.2. *On suppose les hypothèses (20) et la condition de CFL (29a) vérifiées. Soit u une solution de (23) telle que $u \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{H}^1) \cap C^1([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^d)^m)$. La solution approchée, v_h , définie par le schéma numérique (25) satisfait :*

$$\forall \psi \in \mathbb{H}, - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} v_h^\top \cdot \partial_t \psi dx dt - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} v_h^\top \cdot \sum_{i=1}^d A^i \cdot \partial_i \psi dx dt - \int_{\mathbb{R}^d} u_0^\top \cdot \psi(x, 0) dx = \langle \mu_h, \psi \rangle, \quad (30a)$$

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^{1+}, - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} \|v_h\|^2 \partial_t \phi dx dt - \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d} v_h^\top \cdot \sum_{i=1}^d A^i \cdot v \partial_i \phi dx dt - \int_{\mathbb{R}^d} \|u_0\|^2 \cdot \phi(x, 0) dx \leq \langle \nu_h, \phi \rangle. \quad (30b)$$

Les mesures $\mu_h \in \mathbb{H}'$ et $\nu_h \in \mathcal{R}$ sont définies par :

$$\forall \psi \in \mathbb{H}, \langle \mu_h, \psi \rangle = \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_h^l(\psi), \quad (30c)$$

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^{1+}, \langle \nu_h, \phi \rangle = \sum_{l=1}^4 \mathbf{E}_h^l(\phi) - \varepsilon \mathbf{Q}_h(\phi), \quad (30d)$$

où \mathbf{Q}_h est un terme positif défini par

$$\mathbf{Q}_h(\phi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|v_K^n - v_{K_e}^n\|_{C_{K,e}^n}^2 \phi_K^n \Delta t \, m(e),$$

et où

$$\mathbf{R}_h^1(\psi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (v_K^{n+1} - v_K^n)^\top (\psi_K(t^{n+1}) - \psi_K^n),$$

$$\mathbf{R}_h^2(\psi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) (v_K^n - v_{K_e}^n)^\top \cdot C_{K,e}^n \cdot (\psi_e^n - \psi_K^n),$$

$$\mathbf{R}_h^3(\psi) = \int_{\mathbb{R}^d} (v_h(x, 0^+) - u_0(x))^\top \cdot \psi(x, 0) dx,$$

$$\mathbf{R}_h^4(\psi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t m(K) (v_K^n)^\top \cdot \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \frac{m(e)}{m(K)} A_{K,e}^n \psi_e^n - \frac{1}{\Delta t m(K)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \sum_{i=1}^d \partial_i (A^i \cdot \psi) dx dt \right],$$

$$\mathbf{E}_h^1(\phi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) (\|v_K^{n+1}\|^2 - \|v_K^n\|^2) (\phi_K(t^{n+1}) - \phi_K^n),$$

$$\mathbf{E}_h^2(\phi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \Delta t \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) (v_K^n - v_{K_e}^n)^\top \cdot C_{K,e}^n \cdot (v_K^n + v_{K_e}^n) (\phi_e^n - \phi_K^n),$$

$$\mathbf{E}_h^3(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} (\|v_h(x, 0^+)\|^2 - \|u_0(x)\|^2) \phi(x, 0) dx,$$

$$\mathbf{E}_h^4(\phi) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t m(K) (v_K^n)^\top \cdot \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \frac{m(e)}{m(K)} A_{K,e}^n \phi_e^n - \frac{1}{\Delta t m(K)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \sum_{i=1}^d \partial_i (A^i \cdot \phi) dx dt \right] \cdot v_K^n.$$

Les étapes de la démonstration sont détaillées en annexes dans [45] (voir la preuve de la proposition 5.1 de [45]).

3 Estimation d'erreur *a posteriori*

3.1 Contrôle de l'erreur

Dans cette section nous rappelons que, si la proposition 2.2 est satisfaite par la solution approchée v_h , alors l'erreur en norme L^2 commise entre v_h et une solution régulière classique du problème (23) peut être estimée (objet de la Proposition 3.1).

Proposition 3.1. *Soit $u \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{H}^1) \cap C^1([0, +\infty[, L^2(\mathbb{R}^d)^m)$ une solution de (23) et v_h la solution approchée définie par le schéma numérique (25) telles que leurs supports sont dans la boule de rayon $R > 0$. On suppose que v_h satisfait les inégalités de la proposition 2.2.*

Alors, pour $T > 0$ et $\delta > 0$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \|u - v_h\|^2 dx dt = \int_0^T \int_{B(0,R)} \|u - v_h\|^2 dx dt \leq \langle \nu_h, g_{\delta,R} \rangle - 2 \langle \mu_h, g_{\delta,R} u \rangle. \quad (31a)$$

Les fonctions $g_{\delta,R} : \mathbb{R}^d \times [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ et $\theta : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par

$$g_{\delta,R}(x, t) = \theta(t) \xi_{\delta,R}(x, t), \quad \theta(t) = (T - t) \mathbb{I}_{[0,T]} \quad (31b)$$

où $\xi_{\delta,R}(x, t)$ est une régularisation de la fonction caractéristique pour la boule $B(0, R)$ et pour $t \leq T$, définie par

$$\xi_{\delta,R}(x, t) = 1 - \mathcal{Y}_\delta(|x| - R - \lambda(T - t)), \text{ avec } \mathcal{Y}_\delta(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \leq 0 \\ 1 & \text{si } s \geq 2\delta \end{cases}. \quad (31c)$$

Enfin, la constante λ est donnée par $\lambda = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^d n_i A^i \right\|_\infty \mid n = (n_1, \dots, n_d)^\top, \|n\| = 1 \right\}$.

La preuve de l'inégalité (31a) suit celle de la Proposition 4.1 de [45].

En supposant u_0 à support compact, on a u et v_h à support compact dans $[0, T] \times \mathbb{R}^d$. On choisit alors $\delta = 1$ et $R = R_0$ avec R_0 assez grand pour assurer que $\xi_{1,R_0}(x, t) = 1$ et donc $g_{1,R_0}(x, t) = \theta(t)$ sur le support de u et de v . Ainsi,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \|u - v_h\|^2 dx dt \leq \langle \nu_h, \theta \rangle - 2 \langle \mu_h, \theta u \rangle.$$

3.2 Calcul du terme d'erreur

Dans cette section nous allons évaluer le terme d'erreur $\langle \nu_h, \theta \rangle - 2 \langle \mu_h, \theta u \rangle$. D'après la proposition 2.2, nous avons :

$$\langle \nu_h, \theta \rangle - 2 \langle \mu_h, \theta u \rangle \leq \left[\sum_{l=1}^4 \mathbf{E}_h^l(\theta) - 2\mathbf{R}_h^l(\theta u) \right] - \varepsilon_{\mathbf{Q}_h}(\theta).$$

Le terme $\varepsilon_{\mathbf{Q}_h}(\theta)$ étant positif, il suffit de majorer : $\sum_{l=1}^4 \mathbf{E}_h^l(\theta) - 2\mathbf{R}_h^l(\theta u)$.

3.2.1 Evaluation du terme $(\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^1(\theta u))$

Nous avons,

$$\mathbf{R}_h^1(\theta u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K})(v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n)^\top ((\theta u)_{\mathbf{K}}(t^{n+1}) - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n).$$

On remarque que

$$(\theta u)_{\mathbf{K}}(t^{n+1}) = \theta(t^{n+1})u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})$$

et que

$$(\theta u)_{\mathbf{K}}(t^{n+1}) - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n = \theta(t^{n+1})u_{\mathbf{K}}(t^{n+1}) - u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n + u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n.$$

On récrit alors

$$\mathbf{R}_h^1(\theta u) = \mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u) + \mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u),$$

avec

$$\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K})(v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n)^\top u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})(\theta(t^{n+1}) - \theta^n)$$

et

$$\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K})(v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n)^\top (u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n).$$

Travaillons sur $\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)$.

Nous avons dans un premier temps :

$$u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\frac{1}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} u(x, t^{n+1}) - u(x, t) dx \right] \theta(t) dt.$$

Ainsi nous avons :

$$\|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\| \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\frac{1}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} \|u(x, t^{n+1}) - u(x, t)\| dx \right] \theta(t) dt.$$

Sachant que $u(x, t^{n+1}) - u(x, t) = \int_t^{t^{n+1}} \partial_t u(x, s) ds$, nous avons :

$$\|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\| \leq \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\frac{1}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} \int_t^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, s)\| ds dx \right] \theta(t) dt.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_t^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, s)\| ds \theta(t) dt &= \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left[\int_{t^n}^s \theta(t) dt \right] \|\partial_t u(x, s)\| ds \\ &\leq \Delta t \theta^n \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, s)\| ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\| \leq \theta^n \frac{1}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, t)\| dt dx.$$

Si nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\| \leq \theta^n \frac{1}{m(\mathbf{K})} \left(\int_{\mathbf{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, t)\|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(m(\mathbf{K}) \Delta t \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi,

$$\|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\|^2 \leq (\theta^n)^2 \frac{\Delta t}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, t)\|^2 dt dx.$$

Si nous regardons maintenant $|\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)|$, avec une inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & |\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)| \\ & \leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K})^2 \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \frac{\Delta t (\theta^n)^2}{m(\mathbf{K})} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \frac{m(\mathbf{K})}{\Delta t (\theta^n)^2} \|u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\theta^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \int_{\mathbf{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t u(x, t)\|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t (\theta^n)^2 \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq T \|\partial_t u\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Etant donné que $\partial_t u = - \sum_{i=1, \dots, d} A^i \frac{\partial u}{\partial x_i}$, nous avons d'après le Théorème 1.1 :

$$\|\partial_t u\|_{L^2} \leq \max_i (\|A^i\|) \|Du\|_{L^2} \leq \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1}.$$

Alors,

$$|\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)| \leq T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Travaillons maintenant sur $\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u)$.

Nous voulons évaluer la quantité $\left(\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u) \right)$.

Nous pouvons tout d'abord écrire :

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u)| &= \left| \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) |\theta(t^{n+1}) - \theta^n| \left(v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n \right)^\top \left(v_{\mathbf{K}}^{n+1} + v_{\mathbf{K}}^n - 2u_{\mathbf{K}}(t^{n+1}) \right) \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\| \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} + v_{\mathbf{K}}^n - 2u_{\mathbf{K}}(t^{n+1})\|. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donne :

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u)| &\leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} + v_K^n - 2u_K(t^{n+1})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Nous avons de plus,

$$\begin{aligned} \|v_K^{n+1} + v_K^n - 2u_K(t^{n+1})\|^2 &= \|(v_K^{n+1} - v_K^n) + 2(v_K^n - u_K^n) + 2(u_K^n - u_K(t^{n+1}))\|^2 \\ &\leq 3\|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 + 12\|v_K^n - u_K^n\|^2 + 12\|u_K^n - u_K(t^{n+1})\|^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} + v_K^n - 2u_K(t^{n+1})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(3 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(12 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^n - u_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(12 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|u_K^n - u_K(t^{n+1})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Regardons maintenant chacun des trois termes de droite de l'inégalité précédente.

Nous gardons tout d'abord le premier terme.

$$\text{Le second terme donne : } \left(12 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^n - u_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{3} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}.$$

Ensuite, concernant le troisième terme, nous savons que :

$$\|u_K^n - u_K(t^{n+1})\| \leq \left(\frac{\Delta t}{m(K)} \right)^{\frac{1}{2}} \|\partial_t u\|_{L^2(K \times [t^n, t^{n+1}])}.$$

Il se majore donc par :

$$\begin{aligned} \left(12 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|u_K^n - u_K(t^{n+1})\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(12 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t^2 \|\partial_t u\|_{L^2(K \times [t^n, t^{n+1}])}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\sqrt{3} \Delta t \|\partial_t u\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\sqrt{3} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u)| &\leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{3} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)} + 2\sqrt{3} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \right]. \end{aligned}$$

En combinant tous les résultats nous avons l'estimation finale de l'entité $|\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^1(\theta u)|$:

$$\begin{aligned}
 |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^1(\theta u)| &= |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u) - 2\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)| \\
 &\leq |\mathbf{E}_h^1(\theta) - 2\mathbf{R}_h^{1,a}(\theta u)| + |2\mathbf{R}_h^{1,b}(\theta u)| \\
 &\leq \sqrt{3} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \\
 &\quad + 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)} \\
 &\quad + 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + 2 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1}.
 \end{aligned}$$

3.2.2 Evaluation du terme $(\mathbf{E}_h^2(\theta) - 2\mathbf{R}_h^2(\theta u))$

Étant donné que θ ne dépend que de t nous avons : $\mathbf{E}_h^2(\theta) = 0$. De ce fait, il suffit d'évaluer la quantité $|2\mathbf{R}_h^2(\theta u)|$. Nous savons que :

$$\mathbf{R}_h^2(\theta u) = \sum_{n \in \mathcal{N}} \Delta t \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} m(e) (v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n ((\theta u)_e^n - (\theta u)_{\mathbf{K}}^n).$$

Nous avons alors :

$$|2\mathbf{R}_h^2(\theta u)| = \left| 2 \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} m(e) (v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \theta(t) (u_e(t) - u_{\mathbf{K}}(t)) dt \right) \right|.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |2\mathbf{R}_h^2(\theta u)| &\leq 2 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \text{diam}(\mathbf{K}) \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} m(e) \| (v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n \|^2 \theta^n \Delta t \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \frac{1}{\text{diam}(\mathbf{K})} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} m(e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|u_e(t) - u_{\mathbf{K}}(t)\|^2 \theta(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Posons

$$S = \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \frac{1}{\text{diam}(\mathbf{K})} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} m(e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|u_e(t) - u_{\mathbf{K}}(t)\|^2 \theta(t) dt.$$

La majoration de ce terme S repose sur le Lemme 6.3 de [16] qui se généralise pour $v \in (H^1)^m$. Rappelons ce Lemme :

Lemme 3.1. *Soit \mathcal{T} , l'union de sous-ensembles convexes d'une famille finie de polygones ouverts de Ω et $v \in (H^1)^m$. On suppose qu'il existe une constante α telle que pour tout $\mathbf{K} \subset \mathcal{T}$, la boule de centre $x_{\mathbf{K}}$ et de rayon $\alpha \text{diam}(\mathbf{K})$ est incluse dans \mathbf{K} . Alors, il existe une constante $C(d, \alpha)$, qui ne dépend que de d et de α , telle que*

$$\left\| \frac{1}{m(\mathbf{K})} \int_{\mathbf{K}} v(x) dx - \frac{1}{m(e)} \int_e v(y) dy \right\|^2 \leq \frac{C(d, \alpha) \text{diam}(\mathbf{K})}{m(e)} \int_{\mathbf{K}} \|Dv(x)\|^2 dx.$$

Remarque 3.1. $C(d, \alpha) = 2 d \left[\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{(2)^{d+2}}{(d-1) \alpha^{d+1}} \right]$.

Nous pouvons maintenant majorer le terme S . Nous avons tout d'abord :

$$\|u_e(t) - u_K(t)\|^2 \leq C(d, \alpha) \frac{\text{diam}(K)}{m(e)} \int_K \|Du\|^2 dx \leq C(d, \alpha) \frac{\text{diam}(K)}{m(e)} \|u(t)\|_{H^1(K)}^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \frac{1}{\text{diam}(K)} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} m(e) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|u_e(t) - u_K(t)\|^2 \theta(t) dt \\ &\leq \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} C(d, \alpha) \|u(t)\|_{H^1(K)}^2 \theta(t) dt \\ &\leq \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \sum_{n \in \mathcal{N}} \Delta t \\ &\leq \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

avec \mathcal{E}^m le nombre maximum d'arêtes pour une maille.

Nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} |2\mathbf{R}_h^2(\theta u)| &\leq \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K) \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|(v_K^n - v_{K_e}^n)^\top C_{K,e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left(4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

3.2.3 Evaluation du terme $(\mathbf{E}_h^3(\theta) - 2\mathbf{R}_h^3(\theta u))$

Nous avons simplement :

$$|\mathbf{E}_h^3(\theta) - 2\mathbf{R}_h^3(\theta u)| = T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx.$$

3.2.4 Evaluation du terme $(\mathbf{E}_h^4(\theta) - 2\mathbf{R}_h^4(\theta u))$

Pour A constant, les termes \mathbf{E}_h^4 et \mathbf{R}_h^4 disparaissent.

Pour A non constant, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_h^4(\theta u) &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t m(K) (v_K^n)^\top \cdot \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \frac{m(e)}{m(K)} A_{K,e}^n (\theta u)_e^n - \frac{1}{\Delta t m(K)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \sum_{i=1}^d \partial_i (A^i \cdot (\theta u)) dx dt \right], \\ \mathbf{E}_h^4(\theta) &= \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \Delta t m(K) (v_K^n)^\top \cdot \left[\sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \frac{m(e)}{m(K)} A_{K,e}^n \theta_e^n - \frac{1}{\Delta t m(K)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_K \sum_{i=1}^d \partial_i (A^i \cdot \theta) dx dt \right] \cdot v_K^n. \end{aligned}$$

La majoration du terme $(\mathbf{E}_h^4(\theta) - 2\mathbf{R}_h^4(\theta u))$ fait apparaître des termes qui ne dépendent pas de la solution approchée mais de la régularité de A . Ces termes vont essentiellement impacter sur les données du maillage. Ils n'interviendront pas dans les aspects évolutifs en temps et n'auront donc pas d'influence particulière dans l'estimation d'erreur *a posteriori*. L'estimation finale écrite pour A constant peut alors suffire.

3.2.5 Majoration finale

En considérant A constant et en regroupant tous les résultats obtenus dans la section 3.2, nous avons la majoration du terme $\langle \nu_h, \theta \rangle - 2 \langle \mu_h, \theta u \rangle$ suivante :

$$\begin{aligned}
 \langle \nu_h, \theta \rangle - 2 \langle \mu_h, \theta u \rangle &\leq -\varepsilon \mathbf{Q}_h + \sqrt{3} \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \\
 &\quad + 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)} \\
 &\quad + 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + 2 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \text{diam}(\mathbf{K}) \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} \|(v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K}, e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \left(4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \quad \quad + T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx. \quad (32)
 \end{aligned}$$

3.3 Estimation d'erreur *a posteriori*

Nous présentons ici le résultat principal de notre étude.

Proposition 3.2. *Soit $u \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{H}^1)$ une solution de (23) et v_h la solution approchée définie par le schéma numérique (25) telles que leurs supports sont dans la boule de rayon $R_0 > 0$ suffisamment grand. On suppose que v_h satisfait les inégalités de la proposition 2.2.*

Alors,

$$\begin{aligned}
 \|u - v_h\|_{L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2(\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \\
 &\quad + 4\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + 4 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} h_e \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} \|(v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K}, e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \quad \quad + 2T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx. \quad (33)
 \end{aligned}$$

Preuve. D'après la proposition 2.2 et en utilisant l'inégalité de Young sur l'inégalité (32), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \|u - v_h\|^2 dx dt + \varepsilon \mathbf{Q}_h &\leq (\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \\
 &+ 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &+ 2 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &+ \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} \text{diam}(K) \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|(v_K^n - v_{K_e}^n)^\top C_{K,e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &+ T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

En posant $h_e = \max\{\text{diam}(K), \text{diam}(K_e)\}$, nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}^2 + \varepsilon \mathbf{Q}_h &\leq (\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \\
 &+ 2\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &+ 2 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} m(K) \Delta t \|v_K^{n+1} - v_K^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &+ \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{K \in \mathcal{T}} h_e \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} \|(v_K^n - v_{K_e}^n)^\top C_{K,e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &+ T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

Le terme $\varepsilon \mathbf{Q}_h$ étant positif, nous obtenons finalement l'estimation d'erreur *a posteriori* suivante :

$$\begin{aligned}
 \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2(\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \\
 &\quad + 4\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + 4 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\
 &\quad + \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} h_e \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} \|(v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad \times \left(2^4 \mathcal{E}^m C(d, \alpha) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\quad + 2T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx.
 \end{aligned} \tag{34}$$

4 Une stratégie adaptative

4.1 Définition d'estimateurs d'erreur *a posteriori*

A partir de l'estimation (34) nous définissons les estimateurs d'erreur *a posteriori* locaux suivants :

$\forall n \in \mathcal{N}, \forall \mathbf{K} \in \mathcal{T}$ et $\forall e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})$,

$$\begin{aligned}
 (\eta_0)_{\mathbf{K}} &= \int_{\mathbf{K}} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx, \\
 (\eta_t)_{\mathbf{K}}^n &= m(\mathbf{K}) \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2, \\
 (\eta_x)_e^n &= h_e m(e) \|(v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n\|^2.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs nous définissons les bornes supérieures suivantes pour $\beta \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{Tol_0}{2T M}, \\
 B_t &= \min \left\{ \frac{\beta Tol_t}{2(\sqrt{3} + 6) T M}, \frac{(1 - \beta)^2 Tol_t^2}{T^3 M (\max_i (\|A^i\|))^2 \|u_0\|_{H^1}^2 (4\sqrt{3} + 4)^2} \right\}, \\
 B_x &= \frac{Tol_x^2}{2^4 T^4 M (\mathcal{E}^m)^2 C(d, \beta) \|u_0\|_{H^1}^2}.
 \end{aligned}$$

Ici M et E définissent respectivement le nombre de mailles et le nombre d'arêtes. De plus, Tol_0 , Tol_t et Tol_x représentent les tolérances des estimateurs η_0 , η_t et η_x . Ces tolérances sont choisies de telle sorte que, pour une tolérance donnée Tol , nous avons : $Tol = Tol_0 + Tol_t + Tol_x$.

Théorème 4.1. *On suppose les hypothèses (20) vérifiées. On considère l'approximation par volumes finis, v_h . On suppose la condition de CFL (29a) vérifiée.*

Si $\forall n \in \mathcal{N}, \forall \mathbf{K} \in \mathcal{T}$ et $\forall e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})$ nous avons $(\eta_0)_{\mathbf{K}} \leq B_0$, $(\eta_t)_{\mathbf{K}}^n \leq B_t$ et $(\eta_x)_e^n \leq B_x$, alors pour toute tolérance Tol donnée

$$\|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}^2 \leq Tol.$$

preuve. En utilisant les hypothèses du Théorème 4.1 et d'après l'estimation (34), nous avons

$$\begin{aligned} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2(\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \\ &\quad + 4\sqrt{3} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta t \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\ &\quad + 4 \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} m(\mathbf{K}) \Delta t \|v_{\mathbf{K}}^{n+1} - v_{\mathbf{K}}^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \\ &\quad + \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} h_e \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} \|(v_{\mathbf{K}}^n - v_{\mathbf{K}_e}^n)^\top C_{\mathbf{K},e}^n\|^2 \theta^n \Delta t m(e) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(2^4 \mathcal{E}^m C(d, \beta) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2T \int_{\mathbb{R}^d} |v_h(x, 0) - u_0(x)|^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|u - v_h\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2(\sqrt{3} + 6) \sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \Delta t B_t \\ &\quad + (4 + 4\sqrt{3}) T \max_i (\|A^i\|) \|u_0\|_{H^1} \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \Delta t B_t \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left(\sum_{n \in \mathcal{N}} \sum_{\mathbf{K} \in \mathcal{T}} \sum_{e \in \mathcal{E}(\mathbf{K})} \theta^n \Delta t B_x \right)^{\frac{1}{2}} \left(2^4 \mathcal{E}^m C(d, \beta) T^2 \|u_0\|_{H^1}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + 2T \sum_{\mathbf{K}} B_0 \\ &\leq \beta Tol_t + \left((1 - \beta)^2 Tol_t^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(Tol_x^2 \right)^{\frac{1}{2}} + Tol_0 \\ &\leq Tol. \quad \square \end{aligned}$$

4.2 Algorithme adaptatif

Basé sur l'estimation d'erreur *a posteriori* (34) et d'après le résultat du Théorème 4.1, nous définissons l'algorithme adaptatif suivant :

```

Pour tout  $n \in \mathcal{N}$ 
{
  pour toute grille  $\mathcal{T}_l$  de niveau  $l$ 
  {
    pour tout  $K \in \mathcal{T}_l$  et tout  $e \in \mathcal{E}(K)$ 
    {
      on raffine  $K$  si  $(\eta_0)_K \geq B_0$  ou  $(\eta_t)_K^n \geq B_t$  ;
      on raffine  $K$  et  $K_e$  si  $(\eta_x)_e^n \geq B_x$  ;
      on calcule la taille du prochain pas de temps ;
    }
  }
}

```

5 Tests numériques

Dans cette section nous validons les résultats théoriques de la section 4 sur des tests numériques en deux dimensions. Pour les exemples que nous présentons ci-après, nous avons utilisé la librairie Chombo [14].

Dans cette approche, les mailles sont carrées de longueur de côté Δx_l pour la grille de niveau l . Les pas de temps sont donnés par la condition de CFL ; ils dépendent donc du niveau de la grille. Par ailleurs, le raffinement des mailles est guidé par l'estimateur local en espace : une maille est raffinée lorsque le seuil relatif à η_x est dépassé. La condition de CFL est pour la norme de l'énergie

$$\Delta t_l \leq \frac{(1 - \xi)\Delta x_l}{4 \sup_{K \in \mathcal{T}, e \in \partial K} C_{e,K}^n}$$

et l'estimateur en espace devient : $(\eta_x)_e^n = \sqrt{2}(\Delta x_l)^2 (C_{K|L,K}^n)^2 (u_K^n - u_L^n)^2$.

Enfin, nous présentons les résultats obtenus avec 2, 3 et 5 niveaux de grille. Pour ces maillages adaptatifs, les mailles sont respectivement divisées (selon chaque direction de l'espace) en 16, 4 et 2.

5.1 Déplacement d'un front incliné

Cet exemple nous rappelle le déplacement de l'interface d'écoulement d'une moitié de chambre de vapeur en milieu homogène.

5.1.1 Présentation du problème

$\Omega \times (0, T) = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$. Le flux est ici donné par :

$$F(x, t, u) = v(x, t)u(x, t),$$

où

$$v(x, t) = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Initialement $u(x, t) = 0$. Les conditions aux limites sont de type flux nuls sur les bords excepté sur le bord $x_1 = -1$ où $u(x, t) = 1$.

Dans ce cas, la solution est $u(x, t) = u_0((x_1 - (x_2 + 1)t, x_2)^\top)$.

5.1.2 Expression de $C_{e,K}^n$

En faisant l'approximation

$$(A^i)_e^n = \frac{1}{\Delta t m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e A^i(t, x(\sigma)) d\sigma dt \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} A^i(t, x_e) dt$$

nous avons,

$$C_{e,K}^n = \begin{cases} -(-x_{2,e} - 1)^- \text{ si } n_{K,e} = (-1, 0)^\top \\ -(x_{2,e} + 1)^- \text{ si } n_{K,e} = (1, 0)^\top \\ 0 \text{ si } n_{K,e} = (0, -1)^\top \\ 0 \text{ si } n_{K,e} = (0, 1)^\top. \end{cases}$$

5.1.3 Résultats numériques

On prend $\Delta x_0 = \frac{1}{30}$ comme pas d'espace le plus grossier. Comme ici $\sup_{K \in T, e \in \partial K} C_{e,K}^n \leq 1$, le pas de temps utilisé est

$$\Delta t_l = \frac{0.9 \Delta x_l}{4} = 0.225 \Delta x_l$$

où l'indice l indique le niveau de raffinement. Le seuil ϵ relatif à l'estimateur (au-delà duquel une maille doit être raffinée) est fixé à 10^{-8} . Les solutions obtenues par la technique de raffinement de maillage adaptatif, avec 2, 3 et 5 niveaux de grille, aux temps $t = 1$ et $t = 2$ sont représentées sur la Figure IV.1. La Figure IV.2 donne les maillages correspondants. La même simulation a été réalisée sur le maillage le plus fin ($\Delta x_F = \frac{1}{480}$) (voir Figure IV.3). Enfin la figure IV.4 donne la solution sur le maillage le plus grossier.

Le tableau IV.1 montre l'erreur numérique obtenue pour : la grille grossière M_0 , la grille fine M_5 , la grille adaptative à 2 niveaux $M_{ad,2}$, la grille adaptative à 3 niveaux $M_{ad,3}$ et la grille adaptative à 5 niveaux $M_{ad,5}$. On remarque que les résultats obtenus avec les différentes grilles adaptatives sont précis. Leur erreur numérique reste très proche de celle de la grille fine.

Le tableau IV.2 montre le nombre cumulé de mailles au temps final $t = 2$ pour chacune des grilles présentées précédemment. Nous pouvons voir que plus le nombre de niveaux de grille est important, plus le nombre cumulé de mailles est petit. Enfin, nous avons représenté sur le tableau IV.3 le cumulé du nombre de pas de temps ainsi que le nombre moyen de mailles par pas de temps pour chacune des grilles.

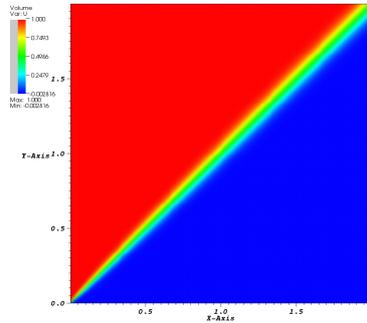
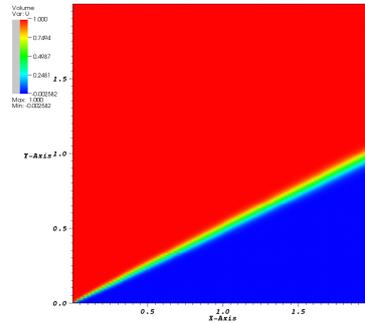
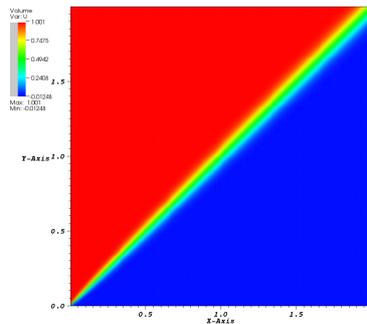
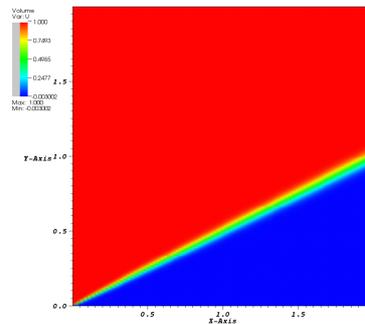
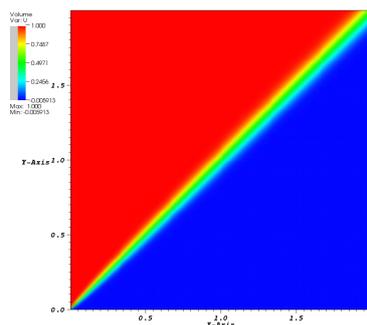
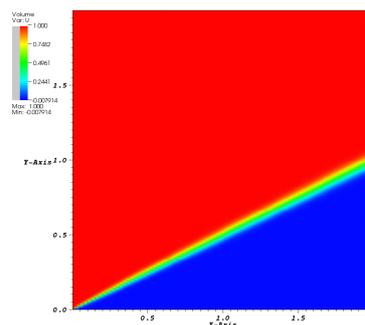
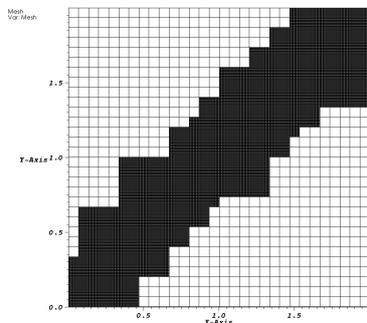
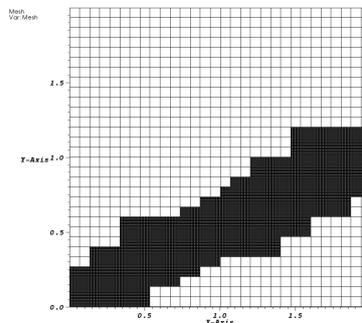
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$ (b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$ (c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$ (d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$ (e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$ (f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

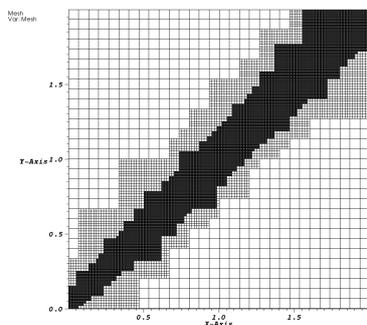
Fig. IV.1: Solutions obtenues avec un raffinement de maillage adaptatif sur 2, 3 et 5 niveaux



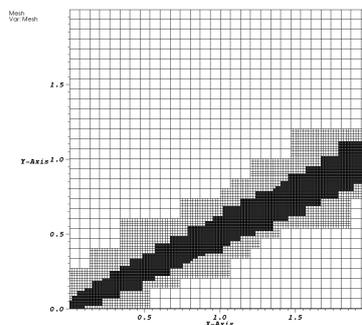
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$



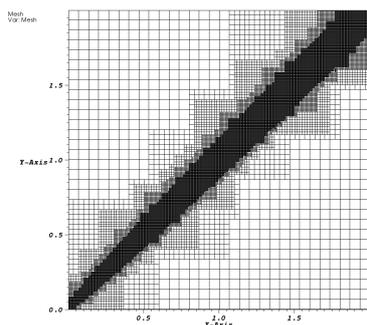
(b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$



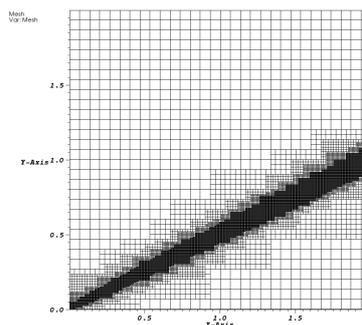
(c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$



(d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$

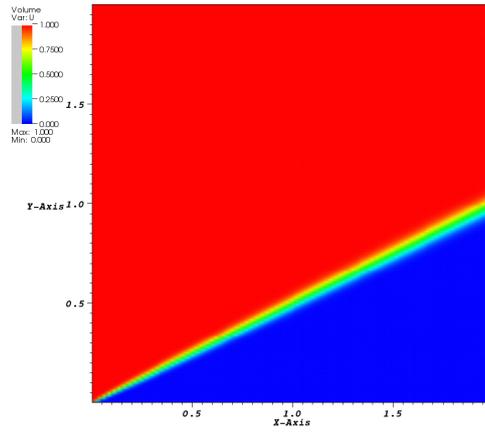
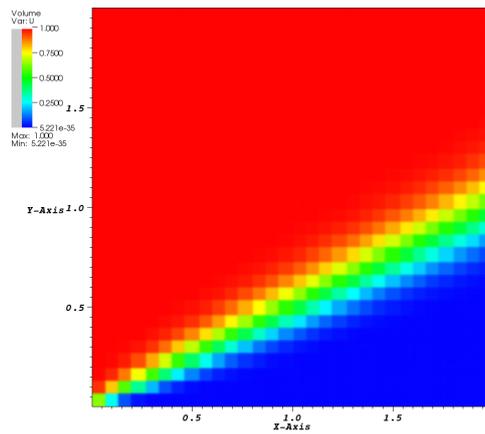


(e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$



(f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

Fig. IV.2: Maillages adaptatifs obtenus avec 2, 3 et 5 niveaux de grille

Fig. IV.3: Solution fine à $t = 2$ Fig. IV.4: Solution grossière à $t = 2$

Temps	maillage grossier M_0 $N = 30$	maillage fin M_5 $N = 480$	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
$t_1 = 0.5$	0.261	0.131	0.1407	0.1411	0.146
$t_2 = 1$	0.308	0.1550	0.161	0.1611	0.1639
$t_3 = 1.5$	0.263	0.131	0.1345	0.1346	0.136
$t_4 = 2$	0.230	0.115	0.118	0.1173	0.118

Tab. IV.1: Erreur en norme L^2

maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
120 600	491 673 600	153 986 584	81 896 440	66 563 024

Tab. IV.2: Cumulé du nombre de mailles au temps final

	maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
nombre total de pas de temps	134	2134	2291	2940	4290
nombre moyen de mailles par pas de temps	900	230 400	67 214	27 856	15516

Tab. IV.3: Cumulé du nombre de pas de temps et nombre moyen de mailles par pas de temps

5.2 Cylindre tournant

5.2.1 Présentation du problème

$\Omega \times (0, T) = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [0, 2]$. On considère le flux et la condition initiale suivants :

$$F(x, t, u) = \begin{pmatrix} -x_2 u \\ x_1 u \end{pmatrix} \text{ et } u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x - (0.5, 0)| \leq 0.2, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas, la solution est $u(x, t) = u_0((\cos(t)x_1 + \sin(t)x_2, -\sin(t)x_1 + \cos(t)x_2)^\top)$.

5.2.2 Expression de $C_{e,K}^n$

Ici $A^1(x, t) = -x_2$ et $A^2(x, t) = x_1$. Ainsi, pour une interface e , en faisant l'approximation

$$(A^i)_e^n = \frac{1}{\Delta t m(e)} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_e A^i(t, x(\sigma)) d\sigma dt \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} A^i(t, x_e) dt$$

nous avons :

$$C_{e,K}^n = \begin{cases} -(x_{2,e})^- & \text{si } n_{K,e} = (-1, 0)^\top \\ -(-x_{2,e})^- & \text{si } n_{K,e} = (1, 0)^\top \\ -(-x_{1,e})^- & \text{si } n_{K,e} = (0, -1)^\top \\ -(x_{1,e})^- & \text{si } n_{K,e} = (0, 1)^\top. \end{cases}$$

5.2.3 Résultats numériques

Nous reprenons $\Delta x_0 = \frac{1}{30}$ comme pas d'espace le plus grossier. Comme ici $\sup_{K \in T, e \in \partial K} C_{e,K}^n \leq 1$, le pas de temps utilisé sur la grille de niveau l est

$$\Delta t_l = \frac{0.9 \Delta x_l}{4} = 0.225 \Delta x_l .$$

Le seuil ϵ relatif à l'estimateur est fixé à 10^{-8} . Les solutions obtenues par la technique de raffinement de maillage adaptatif avec respectivement 2, 3 et 5 niveaux de grille, aux temps $t = 0$ et $t = 2$, sont représentées sur la Figure IV.5.

La Figure IV.6 donnent les maillages correspondants. La même simulation a été réalisée sur le maillage le plus fin ($\Delta x_F = \frac{1}{480}$) (voir Figure IV.7). Enfin la Figure IV.8 donne la solution sur le maillage le plus grossier.

Les erreurs numériques sont représentées sur le tableau IV.4. Le tableau IV.5 montre, au temps final $t = 2$, le nombre cumulé de mailles des cinq maillages. Enfin, nous avons représenté sur le tableau IV.6 le cumulé du nombre de pas de temps ainsi que le nombre moyen de mailles par pas de temps pour chacune des grilles.

Temps	maillage grossier M_0 $N = 30$	maillage fin M_5 $N = 480$	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
$t_1 = 0.5$	0.177	0.0830	0.0835	0.0835	0.0834
$t_2 = 1$	0.220	0.1020	0.1020	0.1020	0.1020
$t_3 = 1.5$	0.240	0.1120	0.1126	0.1126	0.1121
$t_4 = 2$	0.264	0.120	0.1205	0.1204	0.120

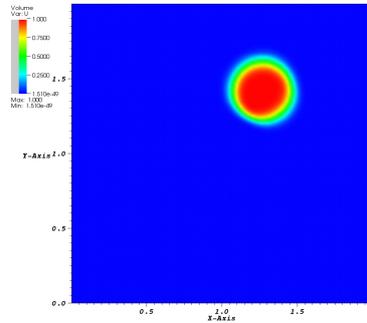
Tab. IV.4: Erreur en norme L^2

maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
120 600	491 673 600	83 633 432	44 246 392	33 363 776

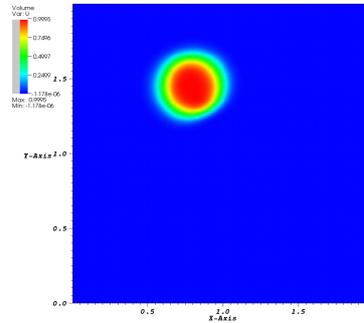
Tab. IV.5: Cumulé du nombre de mailles au temps final

	maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
nombre total de pas de temps	134	2134	2307	2964	4364
nombre moyen de mailles par pas de temps	900	230 400	36 252	14 928	7645

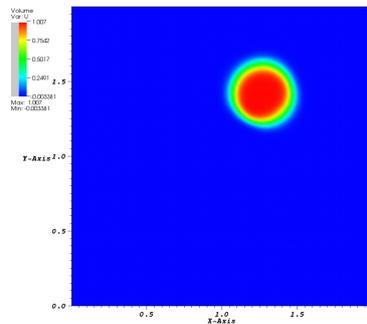
Tab. IV.6: Cumulé du nombre de pas de temps et nombre moyen de mailles par pas de temps



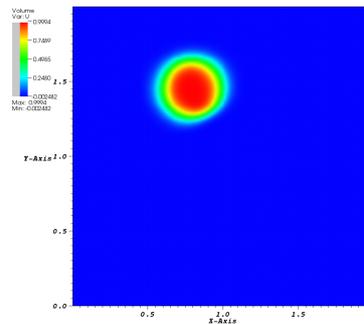
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$



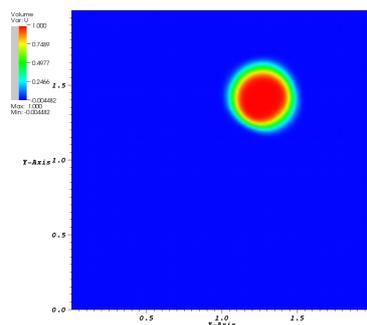
(b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$



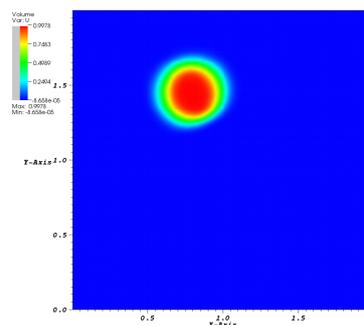
(c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$



(d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$



(e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$



(f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

Fig. IV.5: Solutions obtenues avec un raffinement de maillages adaptatifs sur 2, 3 et 5 niveaux

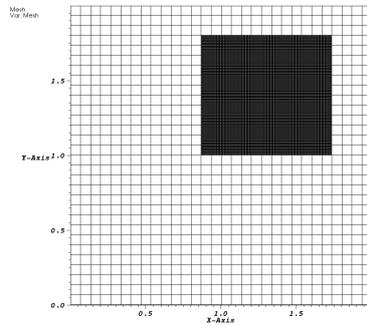
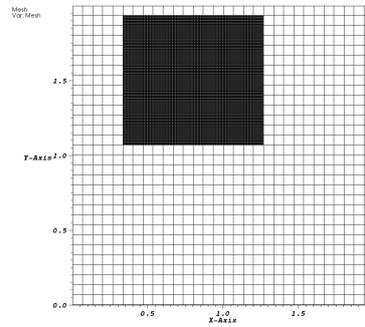
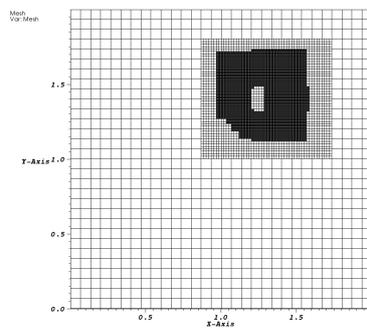
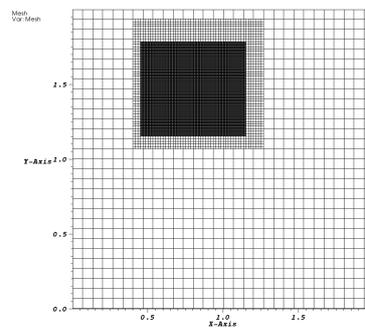
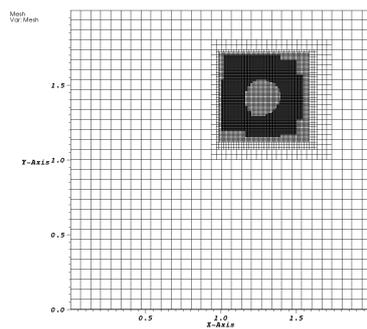
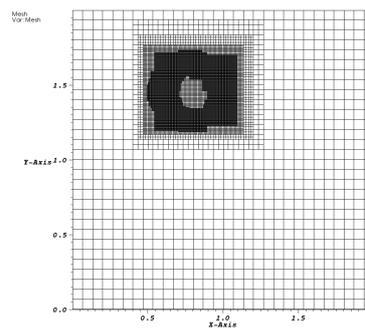
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$ (b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$ (c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$ (d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$ (e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$ (f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

Fig. IV.6: Maillages adaptatifs obtenus avec 2, 3 et 5 niveaux de raffinement

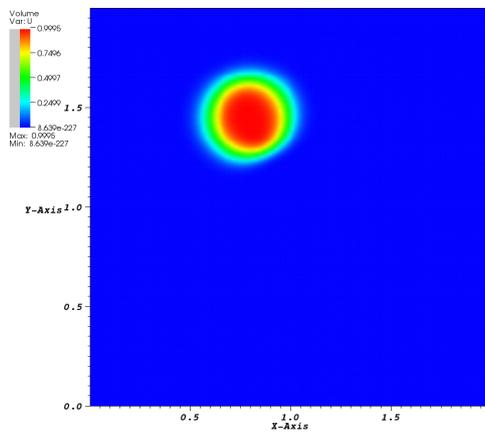


Fig. IV.7: Solution fine à $t = 2$

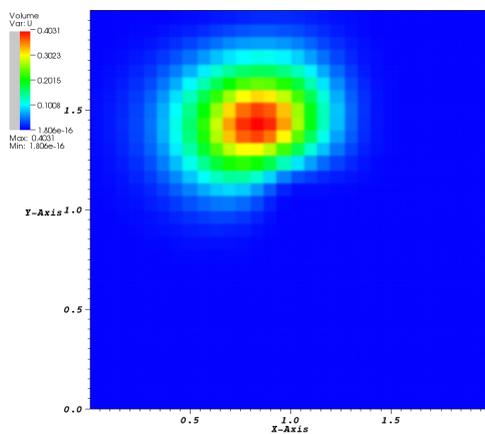


Fig. IV.8: Solution grossière à $t = 2$

5.3 Cas système

5.3.1 Présentation du problème

$$\begin{cases} \partial_t u + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \partial_1 u + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_2 u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, T) = [0, 10] \times [0, 10] \times [0, 2] \\ u_1(\cdot, 0) = u_2(\cdot, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 4 \leq x \leq 6 \text{ et } 4 \leq y \leq 6, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

Le schéma volumes finis sur un maillage cartésien uniforme de pas d'espace Δx s'écrit :

$$v_K^{n+1} = v_K^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{e \in \mathcal{E}(K)} g_{K,e}^n(v_K^n, v_{Ke}^n),$$

avec

$$g_{K,e}^n(v_K^n, v_{Ke}^n) = (A_{K,e}^n)^- v_{Ke}^n + (A_{K,e}^n)^+ v_K^n.$$

Les première et deuxième composantes du flux numérique sont respectivement :

$$g_{K,e,1}^n = \begin{cases} v_{K,1}^n & \text{si } n_{K,e} = (1, 0)^\top, \\ \frac{1}{2}v_{K,1}^n + \frac{1}{2}v_{K,2}^n - \frac{1}{2}v_{Ke,1}^n + \frac{1}{2}v_{Ke,2}^n & \text{si } n_{K,e} = (0, 1)^\top, \end{cases}$$

$$g_{K,e,2}^n = \begin{cases} -v_{Ke,2}^n & \text{si } n_{K,e} = (1, 0)^\top, \\ \frac{1}{2}v_{K,1}^n + \frac{1}{2}v_{K,2}^n + \frac{1}{2}v_{Ke,1}^n - \frac{1}{2}v_{Ke,2}^n & \text{si } n_{K,e} = (0, 1)^\top. \end{cases}$$

5.3.2 Expression de $C_{e,K}^n$

Ici $A^1(x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^2(x, t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Nous avons alors :

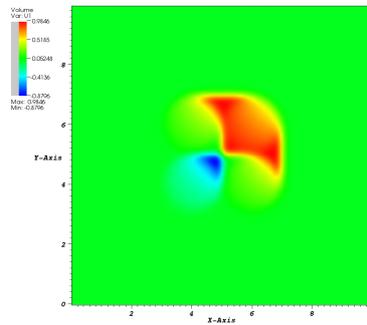
$$C_{e,K}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n_{K,e} = (1, 0)^\top \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} & \text{si } n_{K,e} = (0, 1)^\top. \end{cases}$$

5.3.3 Résultats numériques

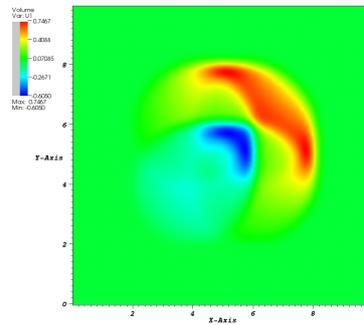
Nous reprenons $\Delta x_0 = \frac{1}{30}$ comme pas d'espace le plus grossier. La condition de CFL est égale à 1 et le seuil ϵ relatif à l'estimateur est fixé à 10^{-3} . Les solutions obtenues par la technique de raffinement de maillage adaptatif avec respectivement 2, 3 et 5 niveaux de grille, aux temps $t = 0$ et $t = 2$, sont représentées sur les Figures IV.9 et IV.10.

La Figure IV.11 donne les maillages correspondants. La même simulation a été réalisée sur le maillage le plus fin ($\Delta x_F = \frac{1}{480}$) (voir Figure IV.12) et la Figure IV.13 donne la solution sur le maillage le plus grossier.

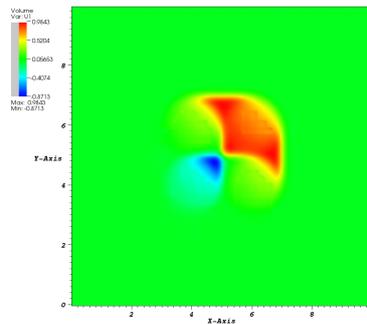
Sur le tableau IV.7 sont représentés les nombres cumulés de cellules obtenus pour chacun des tests numériques. Le cumulé du nombre de pas de temps ainsi que le nombre moyen de mailles par pas de temps, pour chacune des grilles, sont donnés dans le tableau IV.8 .



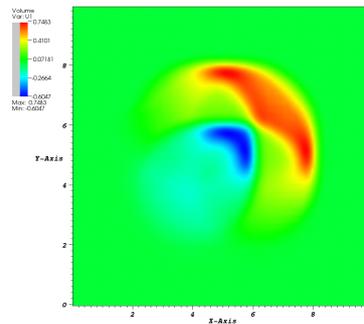
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$



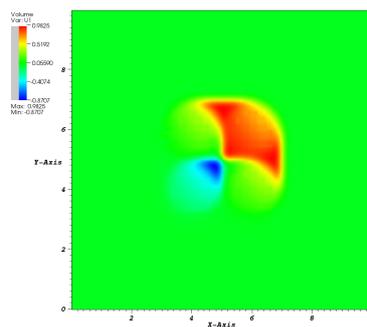
(b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$



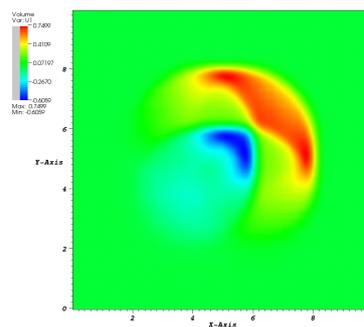
(c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$



(d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$



(e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$



(f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

Fig. IV.9: Solutions obtenues avec un raffinement de maillage adaptatif sur 2, 3 et 5 niveaux (première composante)

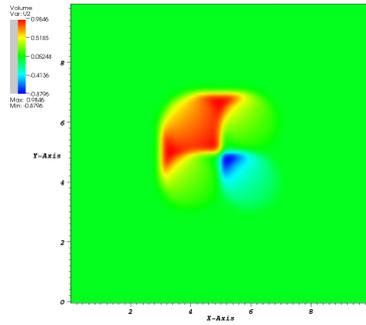
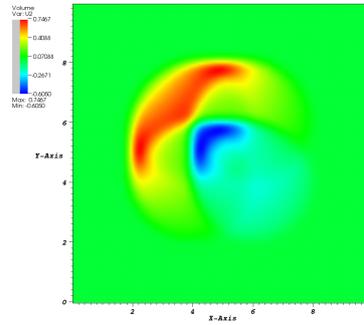
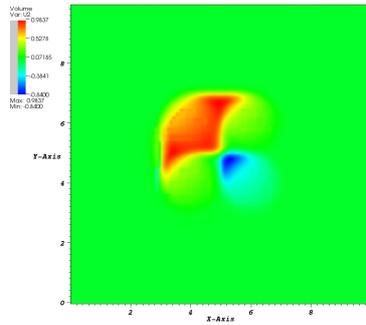
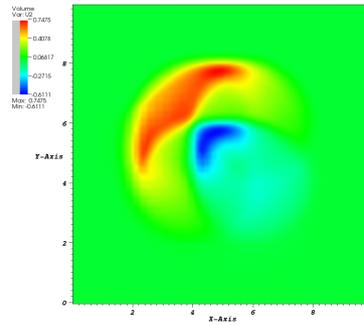
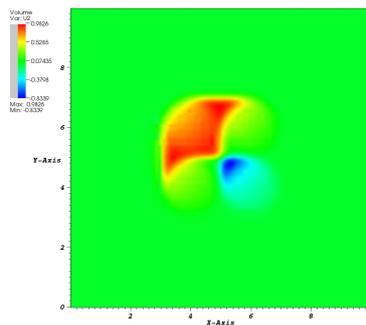
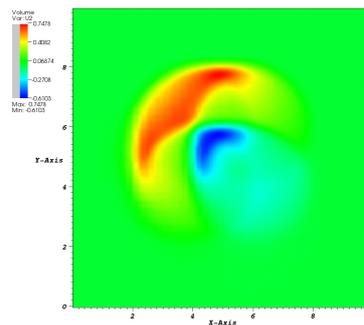
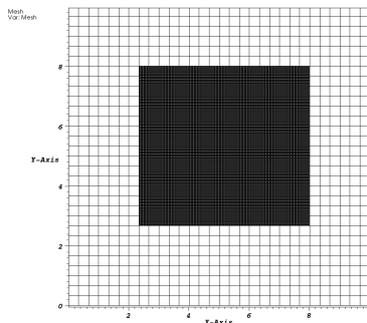
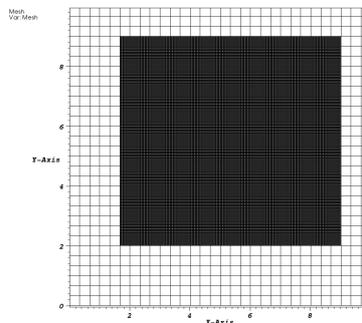
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$ (b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$ (c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$ (d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$ (e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$ (f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

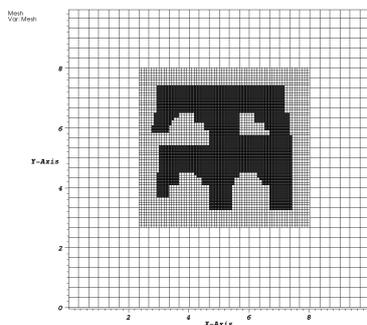
Fig. IV.10: Solutions obtenues avec un raffinement de maillage adaptatif sur 2, 3 et 5 niveaux (deuxième composante)



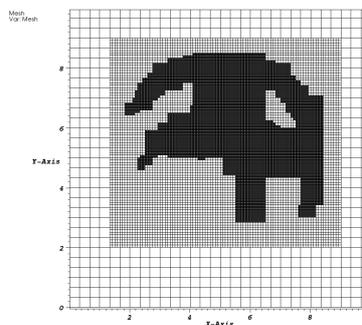
(a) 2 niveaux de grille, à $t = 1$



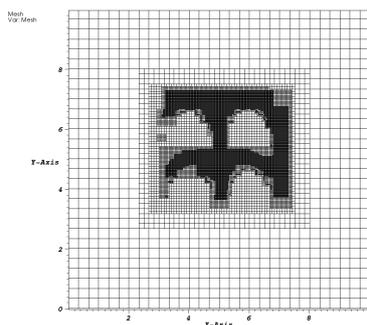
(b) 2 niveaux de grille, à $t = 2$



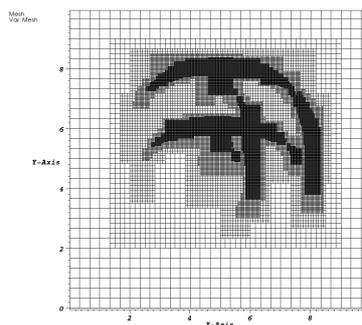
(c) 3 niveaux de grille, à $t = 1$



(d) 3 niveaux de grille, à $t = 2$

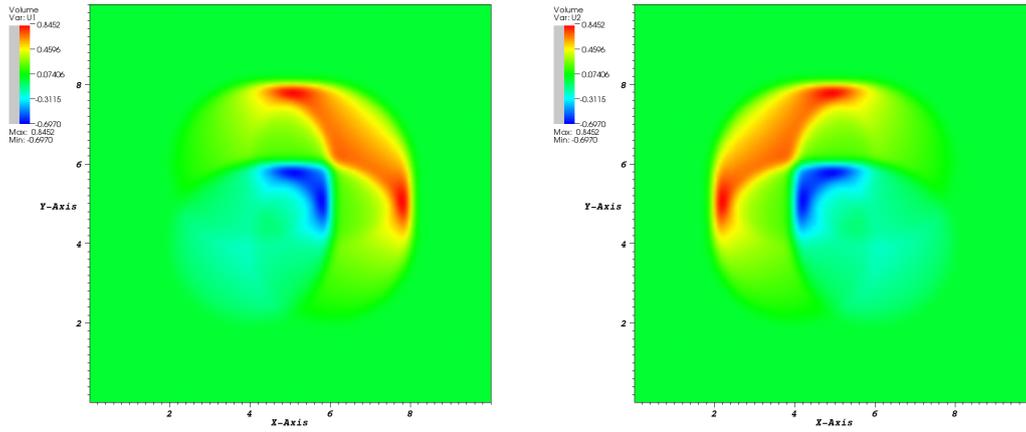
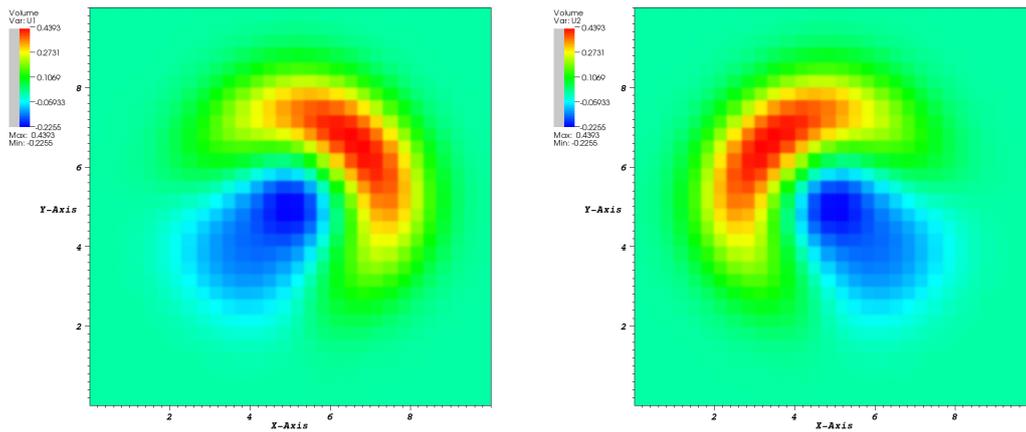


(e) 5 niveaux de grille, à $t = 1$



(f) 5 niveaux de grille, à $t = 2$

Fig. IV.11: Maillages adaptatifs obtenus avec 2, 3 et 5 niveaux de grille

Fig. IV.12: Solution fine à $t = 2$ Fig. IV.13: Solution grossière à $t = 2$

maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
24 300	98 380 800	29 642 476	13 436 844	9 090 580

Tab. IV.7: Cumulé du nombre de mailles au temps final

	maillage grossier M_0	maillage fin M_5	maillage adaptatif $M_{ad,2}$	maillage adaptatif $M_{ad,3}$	maillage adaptatif $M_{ad,5}$
nombre total de pas de temps	27	427	459	567	837
nombre moyen de mailles par pas de temps	900	214 337	64 581	23 698	10 861

Tab. IV.8: Cumulé du nombre de pas de temps et nombre moyen de mailles par pas de temps

Pour ce problème, nous n'avons pas calculé la solution exacte. Toutefois, les résultats obtenus avec les différents maillages adaptatifs semblent être précis. Tout comme pour les deux exemples précédents, on augmente l'efficacité de la méthode en augmentant le nombre de niveaux de grille. Par ailleurs, on observe qu'en diminuant le nombre de niveaux de grilles on augmente sensiblement le nombre de mailles par pas de temps.

Conclusion

L'objectif principal de cette thèse est la définition de critères de raffinement, sur la base d'estimateur d'erreur *a posteriori*, pour piloter le raffinement de maillage adaptatif avec une application à la simulation du procédé thermique SAGD.

Nous avons vu au chapitre 1 le principe de fonctionnement du procédé SAGD et un exemple de simulation dans un cas simplifié. Sur cet exemple nous avons constaté qu'en pratique la zone d'écoulement de l'huile était relativement fine et se situait dans une tranche comprise entre la chambre de vapeur et l'huile froide du réservoir. Nous nous sommes également rendus compte qu'un grossissement du maillage pouvait détériorer les profils de production.

Nous en avons alors conclu qu'effectivement un raffinement de maillage adaptatif au niveau de la zone d'écoulement pouvait permettre de réduire les temps de calculs, tout en maintenant une bonne précision des résultats.

Nous avons décrit au chapitre 2 le générateur de maillage adaptatif développé ces dernières années à l'IFP et montré ses limitations. Nous avons vu en particulier que le critère de raffinement basé sur des seuils de température n'était pas optimal. En effet, on constate un étalement du front de température au cours du temps et donc une extension de la zone raffinée, ce qui limite l'efficacité de la méthode. De plus, nous avons remarqué que ce front de chaleur ne coïncidait pas forcément avec la zone d'écoulement en milieu hétérogène. Avec cette méthode la réduction du nombre de mailles est en moyenne de 58% et le gain cumulé moyen en temps est de 4.5 .

Nous avons ensuite montré au chapitre 3 comment construire un nouveau critère de raffinement sur la base d'une étude d'estimateur d'erreur *a posteriori* faite sur une équation scalaire hyperbolique discrétisée à l'aide d'un schéma volumes finis. En appliquant ce critère à la saturation d'huile, nous avons observé que le générateur effectuait un raffinement du maillage dans les zones de fort gradient et déraffinaient éventuellement l'intérieur de la zone d'écoulement là où la solution est plus régulière. De plus, en milieu hétérogène, les interfaces liées aux changements de roche sont raffinées uniquement si de l'eau et de l'huile coulent autour d'elles. Ceci a permis de réduire davantage le nombre de mailles (en moyenne de 70% en milieu homogène et de 58% en milieu hétérogène) et donc d'obtenir de meilleurs gains en terme de temps CPU (les gains moyens sont respectivement de 6 et de 2).

Bien que le nombre de mailles soit diminué de façon significative, on ne réduit pas pour autant de façon très importante les temps de calculs car les pas de temps restent petits (1 ou 2 jours). Une perspective serait alors de mettre au point de nouvelles méthodes pour augmenter la taille des pas de temps. L'objectif majeur étant de simuler des cas réels d'exploitation par SAGD, il est important d'étendre les champs d'application de la méthode comme, par exemple, simuler des cas 3D hétérogènes avec plusieurs doublets de puits. Par ailleurs, comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la combustion in situ est un autre procédé thermique de récupération pour les bruts lourds.

Les simulations de ce procédé font apparaître des fronts raides autour de la zone d'écoulement. En présence de grosses mailles, les fronts sont lissés ; l'utilisation de la stratégie de raffinement de maillage pour reconstituer ces fronts paraît alors intéressant.

Nous avons enfin montré au chapitre 4 comment construire un critère de raffinement basé sur l'expression des flux numériques et sur une estimation d'erreur *a posteriori* faite pour des systèmes hyperboliques de Friedrichs discrétisés à l'aide d'un schéma volumes finis. Nous avons défini une stratégie d'adaptation de maillage que nous avons validée sur des test numériques en 2D. Sur ces exemples académiques, on constate que l'algorithme adaptatif permet d'obtenir une erreur similaire à celle obtenue sur grille fine. Il serait alors intéressant de tester cette stratégie de raffinement sur des systèmes de Friedrichs moins académiques.

ANNEXES

A. Les perméabilités relatives

Chaque courbe de perméabilités relatives est définie par sa forme et par ses points limites. Ces points limites sont :

- S_{wir} , la saturation en eau irréductible,
- S_{orw} , la saturation en huile résiduelle après un balayage à l'eau,
- S_{org} , la saturation en huile résiduelle après un balayage au gaz,
- k_{rwmax} , la perméabilité relative à l'eau maximale,
- k_{rowmax} , la perméabilité relative à l'huile maximale,
- k_{rgmax} , la perméabilité relative à la vapeur maximale.

Par ailleurs, elles dépendent de la nature des écoulements (imbibition ou drainage).

En drainage, c'est le fluide non mouillant qui déplace le fluide mouillant ; par exemple, pour une roche mouillable à l'eau, l'huile déplace l'eau.

Pour le déplacement de l'eau par l'huile, la saturation en eau décroît au cours du temps jusqu'à sa valeur minimale qui est la saturation en eau irréductible, S_{wi} . Si la saturation en eau est inférieure ou égale à la saturation en eau irréductible, la perméabilité relative à l'eau est nulle (voir la Figure A.1). Elle est à sa valeur maximale, k_{rwmax} , pour une saturation en eau égale à 1. Pour des saturations comprises entre S_{wi} et 1, la perméabilité relative à l'eau est croissante.

La perméabilité relative à l'huile est quant à elle, maximale à la saturation en eau irréductible et minimale pour une saturation en eau égale à 1.

Si les valeurs de saturation en eau sont inférieures à la saturation en eau irréductible, on interpole de k_{rowmax} jusqu'à 1.

Pour le déplacement de l'huile par le gaz, la saturation en gaz augmente au cours du temps jusqu'à la saturation en gaz égale à $1 - S_{org} - S_{wi}$ (l'huile est alors à sa saturation résiduelle après un balayage au gaz en présence d'eau irréductible). La perméabilité relative au gaz croît de sa valeur minimale, atteinte à la saturation en gaz critique ($k_r(S_{gc}) = 0$), à sa valeur maximale, atteinte pour la valeur $1 - S_{org} - S_{wi}$ ($k_{rg}(1 - S_{org} - S_{wi}) = k_{rgmax}$). Si les valeurs de saturation en gaz sont inférieures à la saturation en gaz critique, on interpole de k_{rogmax} jusqu'à k_{rowmax} .

L'imbibition correspond à la situation inverse où c'est le fluide mouillant qui déplace le fluide non mouillant ; l'eau déplace alors l'huile pour une roche mouillable à l'eau.

Pour le déplacement de l'huile par l'eau, la perméabilité relative à l'eau croît de la saturation en eau irréductible, S_{wi} à la saturation $1 - S_{orw}$. Si la saturation en eau est inférieure ou égale à la saturation en eau irréductible, la perméabilité relative à l'eau est nulle (voir la Figure A.2). Elle est à sa valeur maximale, k_{rwmax} , pour une saturation en eau égale à $1 - S_{orw}$.

La perméabilité relative à l'huile est quant à elle, maximale à la saturation en eau irréductible et minimale à la saturation $1 - S_{orw}$.

Si les valeurs de saturation en eau sont inférieures à la saturation en eau irréductible, on interpole de k_{rowmax} jusqu'à 1.

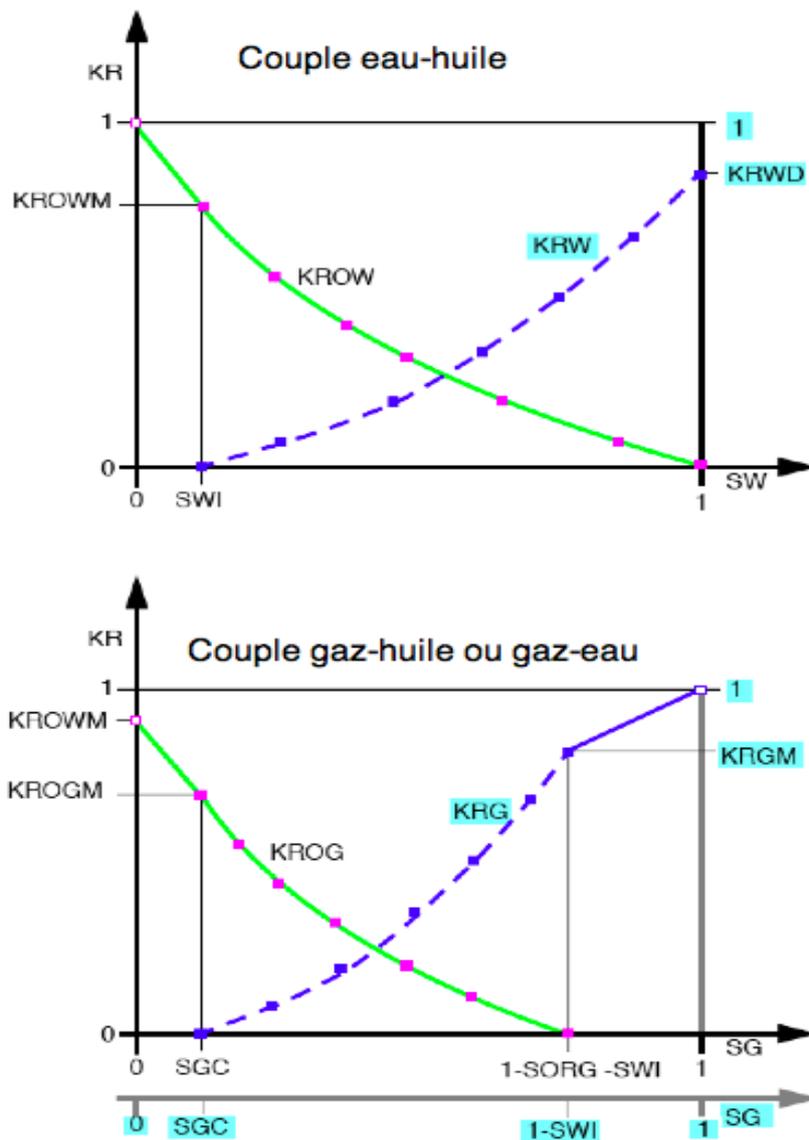


Fig. A.1: Courbes de perméabilités relatives eau-huile et gaz-huile en drainage

Pour le déplacement du gaz par l'huile, la saturation en gaz diminue au cours du temps jusqu'à la saturation en gaz résiduelle S_{gr} . La perméabilité relative au gaz croît de la saturation en gaz résiduelle ($k_r(S_{gr}) = 0$) à sa valeur maximale, atteinte pour la valeur $1 - S_{org} - S_{wi}$ ($k_{rg}(1 - S_{org} - S_{wi}) = k_{rgmax}$). La perméabilité relative à l'huile décroît de la saturation en gaz résiduelle à la saturation en gaz égale à $1 - S_{org} - S_{wi}$. Si les valeurs de saturation en gaz sont inférieures à la saturation en gaz résiduelle, on interpole de k_{rogmax} jusqu'à k_{rowmax} .

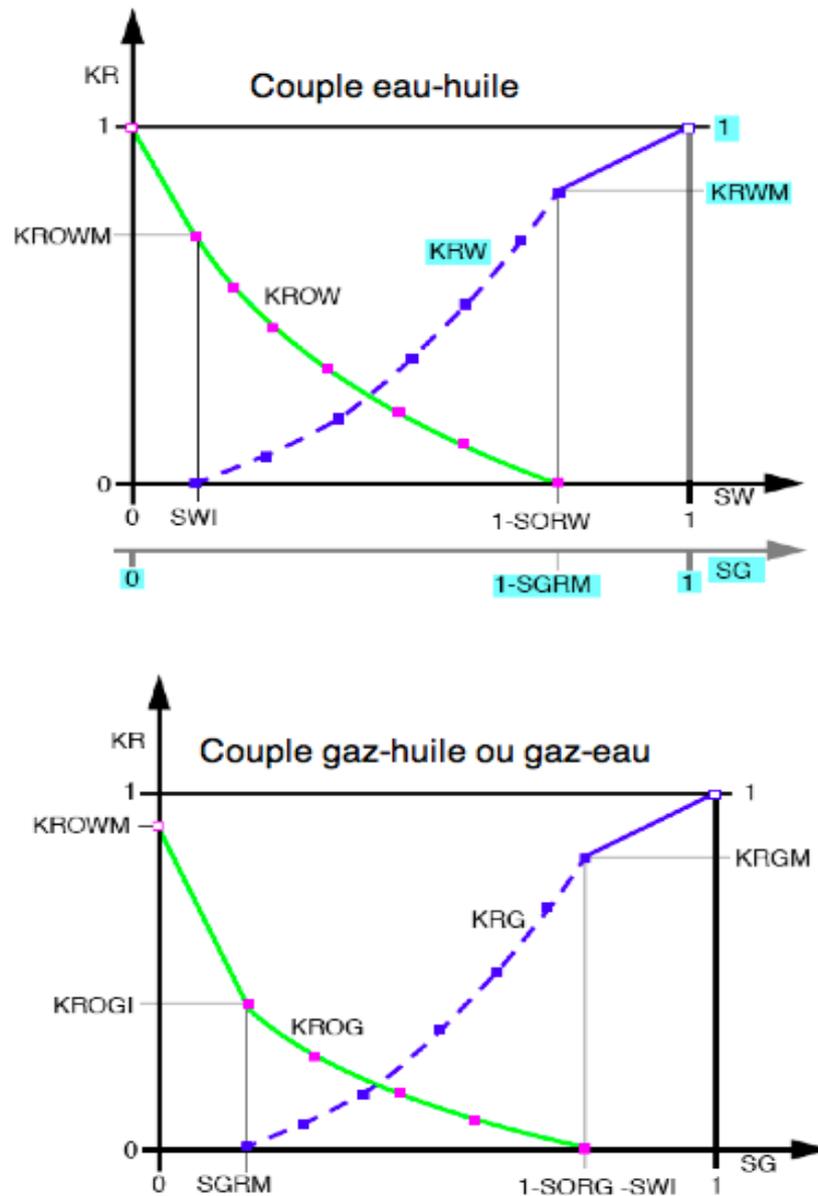


Fig. A.2: Courbes de perméabilités relatives eau-huile et gaz-huile en imbition

Hystérésis des perméabilités relatives

Suivant le procédé de récupération utilisé, au cours de l'exploitation, la nature de l'écoulement peut changer et ainsi passer du drainage à l'imbition (ou inversement) dans certaines zones du réservoir.

Pour cela, des courbes de perméabilités relatives intermédiaires sont construites par pondération entre les courbes de drainage et d'imbition, initialement fournies sous formes de tables ou par des expressions analytiques de type lois de Corey.

Les modèles les plus communément utilisés pour construire ces courbes de perméabilité relatives intermédiaires sont les modèles de Killough [27] et de Carlson [6].

B. Les pressions capillaires

Pour compléter le modèle mathématique d'un écoulement triphasique gaz-huile-eau, il faut généralement introduire les pressions capillaires existant aux interfaces gaz-huile et eau-huile.

La pression capillaire est par définition égale à la différence de pression existant entre deux points situés de part et d'autre de l'interface séparant le fluide non mouillant du fluide mouillant.

Il y a ainsi, en présence d'eau et d'huile, une pression capillaire eau-huile :

$$P_{cw} = P_o - P_w,$$

et en présence de gaz et d'huile, une pression capillaire gaz-huile :

$$P_{cg} = P_g - P_o.$$

Les pressions capillaires, déterminées en laboratoire par couple de phase, sont définies comme une fonction de la saturation S et de la porosité ϕ . Ces courbes ne sont pas uniques : à une saturation et une porosité données peuvent correspondre différentes valeurs de la pression capillaire suivant la façon dont les fluides envahissent le milieu poreux.

Elles dépendent de plus, comme les perméabilités relatives, de la nature de l'écoulement, qu'il soit en mode drainage ou en mode imbibition.

En drainage eau-huile, la saturation en eau diminue au cours temps de 1 à la saturation en eau irréductible, S_{wi} . La pression capillaire eau-huile croît à mesure que la saturation en eau décroît ; elle atteint alors sa valeur maximale, P_{cwmax} , à la saturation en eau irréductible, comme le montre la Figure B.1.

En drainage gaz-huile, la saturation en gaz augmente au cours du temps jusqu'à la saturation $S_g = 1 - S_{org} - S_{wi}$ (l'huile est à sa saturation résiduelle après un balayage au gaz en présence d'eau interstitielle). La pression capillaire gaz-huile augmente elle aussi, de sa valeur minimale, P_{cgmid} atteinte pour une saturation en gaz nulle, à sa valeur maximale, P_{cgmax} , atteinte pour la saturation en gaz $S_g = 1 - S_{org} - S_{wi}$ (voir la Figure B.1).

En imbibition, la saturation en eau augmente au cours du temps de la saturation en eau irréductible à la saturation $S_w = 1 - S_{orw}$ (l'huile est à sa saturation résiduelle après un balayage à l'eau). La pression capillaire eau-huile diminue à mesure que la saturation en eau augmente ; elle atteint alors sa valeur maximale, P_{cwmax} , pour une saturation en eau égale à la saturation en eau irréductible. Sa valeur minimale, P_{cwmii} , est obtenue pour la valeur $S_w = 1 - S_{orw}$. La valeur de P_{cwmii} peut être positive ou nulle si la roche est mouillable à l'eau, ou négative, si la roche est de mouillabilité intermédiaire ou mouillable à l'huile (voir la Figure B.2).

Pour le couple gaz-huile, la saturation en gaz diminue, alors que la pression capillaire augmente de la saturation en gaz résiduelle, S_{gr} , à la saturation $S_g = 1 - S_{org} - S_{wi}$.

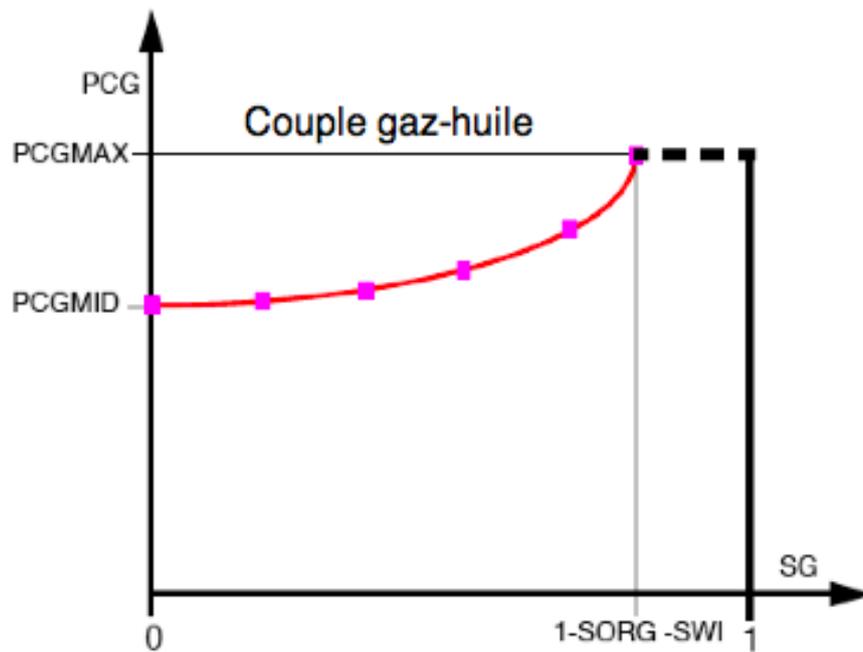
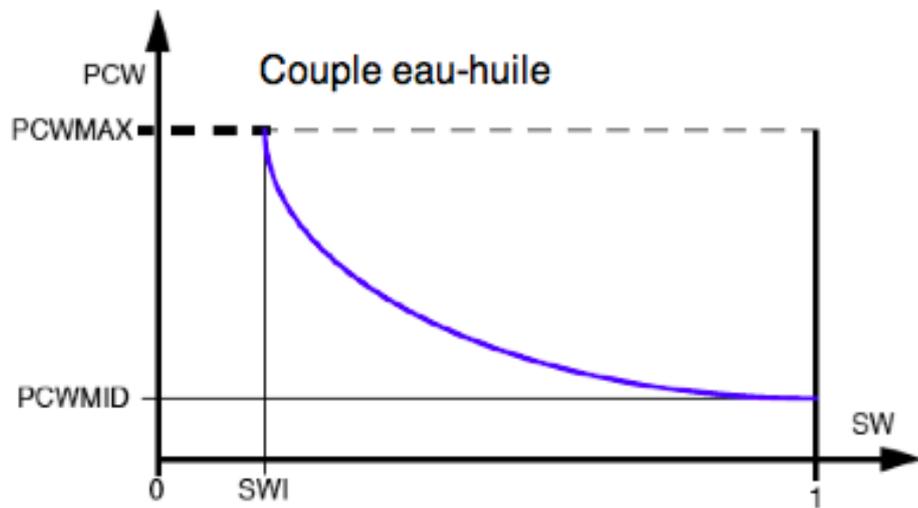


Fig. B.1: Pressions capillaires eau-huile et gaz-huile en drainage

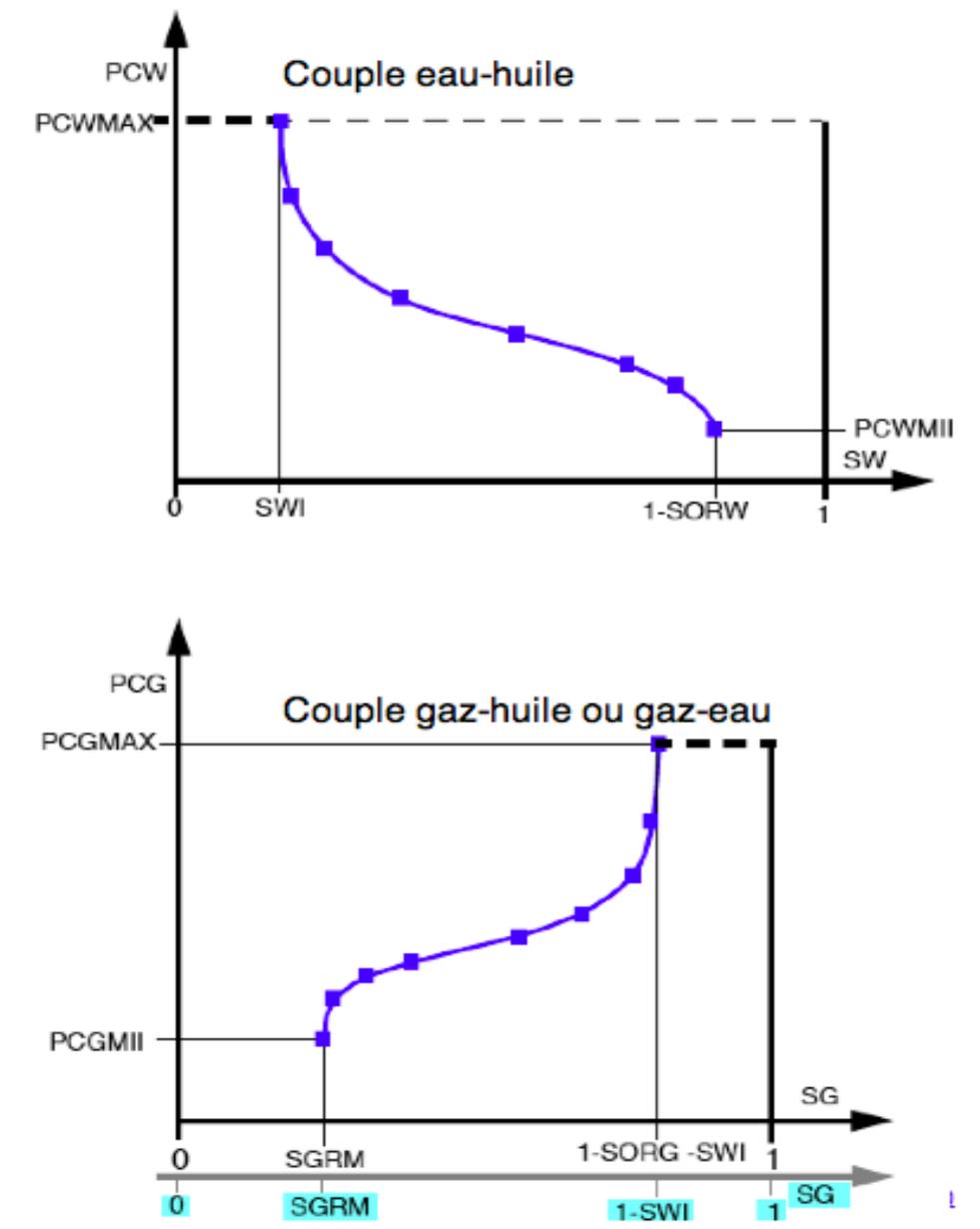


Fig. B.2: Pressions capillaires eau-huile et gaz-huile en imbibition

Hystérésis des pressions capillaires

Comme pour les perméabilités relatives, on construit des courbes de pressions capillaires intermédiaires pour tenir compte des changements de mouillabilité des écoulements (du drainage à l'imbibition, et/ou inversement). On pondère entre les courbes de drainage et d'imbibition, initialement fournies sous formes de tables.

Le modèle principalement utilisé pour construire ces courbes de pressions capillaires intermédiaires est le modèle de Killough [27].

C. Description du simulateur de réservoir du groupe IFP : *Puma*^{FLOW}

Le logiciel *Puma*^{FLOW} est utilisé pour la simulation de divers procédés de récupération d'huiles ou de gaz présents dans les réservoirs.

Il est capable de modéliser différents procédés dans des contextes géologiques différents : les réservoirs peuvent être avec ou sans fractures et il peut également y avoir des perméabilités variables. Ce simulateur prend en compte de nombreux types de phénomènes physiques comme les effets thermiques et gère également des maillages non uniformes.

Le modèle s'organise en trois modules liés à la structure du fichier de données qui lui est associé. On trouve communément :

- le module de lecture des données et d'initialisation (pré-processing)
- le module de simulation (processing)
- le module d'extraction (post-processing).

Le module de pré-processing

Le module de pré-processing prend en compte les données dites "statiques" qui sont relatives aux caractéristiques de la roche (porosité, perméabilité), aux propriétés physiques des fluides mis en jeu (viscosité, etc.) et aux valeurs initiales des température, saturation et pression du réservoir.

Ces informations sont listées en début du fichier de données et se terminent par le mot clef "IN-DATE" qui caractérise la fin de l'initialisation et le début de la simulation. Afin de mettre ce module en action, il est nécessaire de lui associer le fichier de données d'extension ".edo". De là, un fichier d'extension ".edi" est généré; celui-ci rappelle les données de l'initialisation et présente les éventuelles erreurs de compilation. Un autre fichier, d'extension ".eli", sera créé en tant que copie commentée du fichier de données. Si le fichier de données convient, un troisième fichier contenant toutes les informations de la simulation (d'extension ".fad") sera créé.

À l'exécution de ce module, la simulation par le modèle n'a pas encore débuté; c'est avec le suivant qu'elle s'enclenche.

Le module de processing

Le module de processing réalise la simulation dynamique avec pour contraintes des données dites "dynamiques", susceptibles d'évoluer au fil de la simulation et relatives au schéma numérique, à la précision des calculs, au contrôle du nombre d'itérations ou encore aux contraintes de pression.

La simulation présente, suivant le choix de l'utilisateur, un découpage d'une ou plusieurs périodes. Ces périodes peuvent constituer les différentes phases du comportement d'un procédé. Elles comportent les conditions sur les puits (ouverts ou fermés), les pressions à leur positions respectives ou en surface, le contrôle du débit, la production d'huile et les valeurs des propriétés physiques à différents pas de temps.

Une période est définie par le mot clef “TIME” auquel on associe un moment en jours :

```
TIME = 150
...
...
TIME = 180
```

On définit ainsi une période de 30 jours. Les fichiers d’entrée exploités par le module sont les fichiers “.edo” et “.fad” et les fichiers générés sont d’extension “.odi” et “.oli”. Le premier représente un bilan numérique et le deuxième n’est autre qu’un compte-rendu de production.

Le module d’extraction

À partir d’un fichier de type “.sdo” (fichier de données), l’utilisateur précise par mots-clefs les résultats qu’il souhaite récupérer de la simulation. Le module d’extraction, tout en compilant ce fichier, interprète le fichier “.fad” pour y extraire les informations demandées.

Le module génère à son tour deux fichiers, l’un d’extension “.sdi” commentant le “.sdo” en y notant les erreurs de compilation s’il y en a, l’autre d’extension “.sli” où les résultats attendus sont listés. De plus, un fichier d’extension “.int1” est créé spécialement pour l’interface graphique associée à *Puma^{FLOW} : Simview*.

D. Données utilisées pour les simulations du procédé SAGD

DONNÉES PÉTROPHYSIQUES DE LA ROCHE RÉSERVOIR	
Perméabilité horizontale, Darcy	2
Perméabilité verticale, Darcy	1
Porosité, %	35
Capacité calorifique de la roche, J/CM3/K	2.34
Conductivité thermique, W/M.DEGC	2.7
Compressibilité de la roche, 1/Bar	3.10^{-4}
Saturation en eau irréductible, SWI	0.15
Saturation en huile initiale	0.85
SORW	0.2
SORG	0.1
SGC	0
Krwmax	0.2104
Krgmax	1.0
Krogmax	0.9
Krowmax	0.9

Tab. D.1: Données pétrophysiques

DONNÉES THERMODYNAMIQUES	
Modèle simulé	Black Oil
Masse molaire de l'huile, G	500
Température de référence pour les enthalpies, DEGC	0
Masse volumique de référence de l'huile, G/CM3	0.97
Masse volumique de l'huile dans les conditions STD, G/CM3	0.97
Pression de référence, Bar	1.013
Température de référence, DEGC	15
Température initiale du réservoir, DEGC	27
Compressibilité de l'huile, 10^{-4} 1/Bar	2.17
Coefficient d'expansion thermique, 10^{-4} 1/DEGC	8.5
Salinité	40.10^{-3}
Pas de perte de chaleur au niveau des épontes	

Tab. D.2: Données thermodynamiques

DONNÉES AUX PUIITS	
Position des puits en bordure de domaine	en bas à gauche
Axe de perforation pour l'injecteur I	Y
Axe de perforation pour le producteur P	Y
Rayon de I, CM	11
Rayon de P, CM	11
Pression limite en bas de puits (BHP) avec I fermé, Bar	55
Pression limite en bas de puits (BHP) avec P fermé, Bar	40
Pression limite en bas de puits (BHP) avec I ouvert, Bar	59
Pression limite en bas de puits (BHP) avec P ouvert, Bar	25
Débit min et max en fonction des conditions de surface pour I, M3/D	20 250
Débit min et max en fonction des conditions de surface pour P, M3/D	20 250
Skin coefficient des perforations	0
Qualité de la vapeur en bas du puits I	0.8
Température d'injection, DEGC	260

Tab. D.3: Données aux puits

E. Publications et communications à congrés

- **ECMOR XI, European Conference on Mathematics for Oil recovery, Norway, 2008.**
M. Mamaghani, C. Chainais and G. Enchéry, *Study of a New Refinement Criterion for Adaptive Mesh Refinement in SAGD Simulation.*
- **IEA, International Energy Association Conference, Australia, 2009.**
M. Mamaghani, C. Chainais and G. Enchéry, *Study of a New Refinement Criterion for Adaptive Mesh Refinement in SAGD Simulation.*
- **Computational Geosciences Journal, Article soumis en 2009.**
M. Mamaghani, C. Chainais and G. Enchéry, *Development of a refinement criterion for adaptive mesh refinement in Steam Assisted Gravity Drainage simulation.*

Bibliographie

- [1] V. Artus, B. Noetinger, and L. Ricard. Dynamic of the water oil front for two-phase immiscible flow in heterogeneous media. *Transport in porous media*, 56 :305–328, 2004.
- [2] K. Aziz and A. Settari. *Petroleum Reservoir Simulation*. Applied Science Publishers, London, UK, 1979.
- [3] S. Benzoni-Gavage and D. Serre. *Multi-dimensional hyperbolic partial differential equations. First order systems and applications*. Oxford Science Publications, 2007.
- [4] M.J. Berger and P. Collela. Local adaptive mesh refinement for shocks hydrodynamics. *J. of Comp. Phy.*, (82), 1989.
- [5] R.M. Butler. *Thermal Recovery of oil and bitumen*. Prentice-Hall, Inc., February 1997.
- [6] F.M. Carlson. Simulation of relative permeability hysteresis to the nonwetting phase. *Soc. Pet. Eng.*, (10157), 1981.
- [7] C. Chainais-Hillairet. *Schémas volumes finis pour des problèmes hyperboliques : convergence et estimation d'erreur*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1998.
- [8] C. Chainais-Hillairet. Finite volume schemes for nonlinear hyperbolic equations. convergence towards the entropy solution and error estimate. *M2AN*, 33(1) :129–156, 1999.
- [9] C. Chainais-Hillairet and S. Champier. Finite volume schemes for nonhomogeneous scalar conservation laws : error estimate. *Numer. Math.*, 88(4) :607–639, 2001.
- [10] J.R. Christensen, G. Darche, B. Déchelette, H. Ma, and P.H. Sammon. Applications of dynamic gridding to thermal simulations. *Soc. of Pet. Eng.*, (86969), 2004.
- [11] B. Cockburn, F. Coquel, and P.G Le Floch. An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws. *Math. of Comp.*, 63(207) :77–103, 1994.
- [12] B. Cockburn, F. Coquel, and P.G. LeFloch. Convergence of the finite volume method for multidimensional conservation laws. *SIAM J. Num. Anal.*, 32(3) :687–705, 1995.
- [13] B. Cockburn and H. Gau. A posteriori error estimates for general numerical methods for scalar conservation laws. *Comp. Appl. Math.*, 14 :37–47, 1995.
- [14] P. Colella, D. T. Graves, N. D. Keen, T. J. Ligoeki, D. F. Martin, P. W. McCorquodale, D. Modiano, P. O. Schwartz, T. D. Sternberg, and B. Van Straalen. *Chombo Software Package for AMR Applications Design Document*. Lawrence Berkeley National Laboratory, Berkeley, CA, avril 2009.
- [15] R. Cossé. *Le gisement*. Technip, 1988.
- [16] J. Droniou and R. Eymard. A mixed volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid. *J. Numer. Math.*, 105(1), 2006.
- [17] L. Durlofsky. Upscaling of geocellular models for reservoir flow simulation : A review of recent progress. 7th International Forum on Reservoir Simulation, 23-27 June 2003.

- [18] N.R. Edmunds. Investigation of sagd steam trap control in two and three dimensions. *Soc. of Pet. Eng.*, (50413-MS), 1998.
- [19] P. Egermann. Sagd performance optimization through numerical simulations : methodology and field case example. *Soc. of Pet. Eng., International Thermal Operations and Heavy Oil Symposium*, (69690), 2001.
- [20] www.planete-energies.com.
- [21] R. Eymard, T. Gallouët, M. Ghilani, and R. Herbin. Error estimates for the approximate solutions of a nonlinear hyperbolic equation given by finite volume schemes. *IMA J. of Num. Anal.*, 18(4) :563–594, 1998.
- [22] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. Existence and uniqueness of the entropy solution to a nonlinear hyperbolic equation. *Chin. Ann. of Math.*, 16B(1) :1–14, 1995.
- [23] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin. *Convergence of a finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation*. Proceedings of the third colloquium on numerical analysis, 1995. 61-70.
- [24] K.O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 7 :345–392, 1954.
- [25] IFP. *Manuel de référence du logiciel FIRST-RS*, février 2005.
- [26] V. Jovanović and C. Rohde. Finite-volume schemes for friedrichs systems in multiple space dimensions : a priori and a posteriori error estimates. *Wiley Interscience*, DOI 10.1002(20026), 2004.
- [27] J. Killough. Reservoir simulation with hystory-dependent saturation functions. *Soc. Pet. Eng.*, 16(1) :37–48, 1976.
- [28] D. Kröner and M. Ohlberger. A posteriori error estimates for upwind finite volume schemes for nonlinear conservation laws in multidimensions. *Math. comput.*, 69(229) :25–39, 2000.
- [29] S.N. Kruzkov. First order quasilinear equations in several independent variables. *Math. USSR Sbornik*, 10 :217–243, 1970.
- [30] S. Lacroix, P. Lemonnier, G. Renard, and C. Taieb. Enhanced numerical simulations of eor processes through dynamic sub-gridding. Technical report, Canadian International petroleum conference, 2003.
- [31] M. Latil. Modélisation des procédés thermiques dans athos. Technical Report version 4.0, IFP, mars 2000.
- [32] P. Lemonnier. Les modèles de simulation numérique de réservoir. Technical Report 61020, IFP, juillet 2009.
- [33] P. Lemonnier, S. Lacroix, and G. Renard. Modelling rapidly changing phenomena in medium, such as fluids in deposit between area heated by steam injection through one... Patent, September 2004.
- [34] P. Li and R.J. Chalaturnyk. Discussion of sagd and geomechanics. *J. of Canadian Pet. Tech.*, 42(9) :37–45, 2003.
- [35] D.W. Peaceman. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonspace grid blocks and anisotropic permeability. *Soc. Pet. Eng.*, 23(3), 1983.
- [36] A. Pfortzel. *Sur quelques schémas numériques pour la résolution des écoulements multiphasiques en milieu poreux*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1987.

- [37] P. Quandalle and P. Besset. Reduction of grid effects due to local sub-gridding in simulations using a composite grid. *Soc. Pet. Eng.*, (13527), 1985.
- [38] P. Quandalle and J.C. Sabathier. Typical features of a multipurpose reservoir simulator. *Soc. Pet. Eng.*, 4(4) :475–480, 1989.
- [39] P. Renard and G. De Marsily. Calculating the equivalent permeability : a review. *Adv. Water Ressources*, 20 :253–278, 1997.
- [40] P. Saffman and G. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or heleshaw cell containing a more viscous liquid. *Proceedings of the Royal Society A*, 245 :312–329, 1958.
- [41] P.H. Sammon. Dynamic grid refinement and amalgamation for compositional simulation. *Soc. of Pet. Eng., Reservoir Simulation Symposium*, (79683), 2003.
- [42] E. Schmidt and U. Grigull. Properties of water and steam in si-units. *Springer-Verlag, Berlin*, 1969.
- [43] www.beicip.com.
- [44] J.P. Vila. Convergence and error estimate in finite volume schemes for general multidimensional conservation laws. *M2AN*, 28 :267–285, 1994.
- [45] J.P. Vila and P. Villedieu. Convergence of an explicit finite volume scheme for first order symmetric systems. *Numer. Math.*, 94 :573–602, 2003.
- [46] X.H. Wang, M. Quintard, and G. Darche. Adaptive mesh refinement for one dimensional three-phase flow with phase change in porous media. *Numerical Heat Transfert*, 50 :231–268, 2006.
- [47] R.M. Weinbrandt, Jr. Ramey, and F.J. Casse. Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonspace grid blocks and anisotropic permeability. Technical report, Soc. of Pet. Eng., October 1975.

Development of a refinement criterion for adaptive mesh refinement in Steam Assisted Gravity Drainage simulation

Steam Assisted Gravity Drainage (SAGD) is an enhanced oil recovery process for heavy oils and bitumens. Numerical simulations of this thermal process allow us to estimate the retrievable volume of oil and to evaluate the benefits of the project.

As there exists a thin flow-interface (compared to the reservoir dimensions), SAGD simulations are sensitive to the grid size. Thus, to obtain precise forecasts of oil production, very small-sized cells have to be used, which leads to prohibitive CPU times. To reduce these computation times, one can use an adaptive mesh refinement technique, which will only refine the grid in the interface area and use coarser cells outside.

To this end, in this work we introduce new refinement criteria, which are based on the work achieved by Kröner and Ohlberger on a posteriori error estimators for finite-volume schemes for hyperbolic equations. Through numerical experiments we show that they enable us to decrease in a significant way the number of cells (and then CPU times) while maintaining a good accuracy in the results.

Suivi de fronts par des méthodes de raffinement de maillage adaptatif et application à la simulation du procédé de récupération Steam Assisted Gravity Drainage

Le Steam Assisted Gravity Drainage (SAGD) est le procédé de récupération thermique sur lequel plusieurs compagnies pétrolières fondent de grands espoirs. Il consiste en deux puits horizontaux forés l'un au dessus de l'autre à quelques mètres d'écart. De la vapeur est injectée dans le réservoir par le puits supérieur ce qui provoque la formation d'une chambre. L'huile au voisinage des parois de la chambre se réchauffe et descend ensuite par gravité vers le puits producteur avec l'eau liquide issue de la condensation de la vapeur.

La simulation numérique de ce procédé est un outil qui permet de comprendre les mécanismes physiques, d'estimer la production et d'évaluer les investissements ainsi que les risques associés. Cependant, les simulations numériques du SAGD présentent des inconvénients : la zone d'écoulement est peu épaisse comparée aux dimensions du réservoir. La discrétisation en espace doit être assez fine si l'on souhaite prédire de façon précise la production, ce qui peut amener à des simulations à plusieurs millions de mailles dans des cas réels et donc à des temps de simulation extrêmement longs.

A l'IFP, un générateur de maillages adaptatifs permet de mettre à jour le maillage au cours de la simulation en raffinant localement les mailles situées dans la zone d'écoulement.

Basés sur des estimateurs d'erreur a posteriori pour des schémas volumes finis pour des équations hyperboliques non linéaires, les nouveaux critères de raffinement que nous proposons ont la particularité de dépendre uniquement des données initiales du problème. De plus, en milieux homogène et hétérogène, ils permettent d'éviter un raffinement trop important.