

Lieu singulier des variétés duales : approche géométrique et applications aux variétés homogènes.

Holweck Frédéric

▶ **To cite this version:**

Holweck Frédéric. Lieu singulier des variétés duales : approche géométrique et applications aux variétés homogènes.. Géométrie algébrique [math.AG]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2004. Français. NNT : . tel-00737441

HAL Id: tel-00737441

https://theses.hal.science/tel-00737441

Submitted on 1 Oct 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée en vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université Paul Sabatier
Toulouse III
Spécialité : Mathématiques Pures
par

Frédéric Holweck

Lieu singulier des variétés duales : approche géométrique et applications aux variétés homogènes.

Soutenue le 10 septembre 2004 devant le jury composé de :

Philippe Essydieux	Chargé de recherche, Université Paul Sabatier	Examinateur
Joseph Landsberg	Professeur, Texas A & M University	Directeur
Thomas Fiedler	Professeur, Université Paul Sabatier	Examinateur
Adam Parusiǹski	Professeur, Université d'Angers	Examinateur
Christian Peskine	Professeur, Institut de Mathémétiques de Jussieu	Examinateur
Fyodor Zak	Professeur, Académie des Sciences Russe	Rapporteur

Au vu des rapports de **Laurent Manivel** (Directeur de recherche, Institut Fourier) et **Fyodor Zak**.

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.

Remerciements

C'est avec grand plaisir que je souhaite adresser ici toute ma reconnaissance à Joseph Landsberg pour ces quatre années pendant lesquelles il a été mon directeur de thèse. Je le remercie particulièrement de m'avoir fait découvrir de belles mathématiques où différents domaines pouvaient se méler et se compléter. Joseph m'a incité à faire preuve de liberté dans l'orientation de mes recherches et a su m'encourager avec son enthousiasme naturel. Il a aussi accepté de poursuivre ce travail lorsque j'étais en France et lui aux Etats-Unis. Superviser une thèse à distance n'est pas chose facile et pourtant Joseph n'a jamais douté que nous en verrions un jour la fin. Pour tout cela donc un grand merci.

En mars 2004 j'ai été ravi d'apprendre que Laurent Manivel et Fyodor Zak avaient accepté de rapporter mon travail. J'ai eu l'opportunité d'échanger avec Laurent lors des écoles d'été qu'il a animé à Trieste et Cortone avec Joseph en février et juillet 2003. Ses encouragements ont été bénéfiques. Je tiens aussi à le remercier de m'avoir invité à Grenoble en janvier 2004. Ce passage à l'institut Fourier fut très positif puisque c'est en rentrant de Grenoble que j'ai achevé la classification du théorème 3.2.5. De plus la relecture précise de ma thèse par Laurent a permis d'en améliorer la qualité rédactionnelle.

J'ai fait la connaissance de Fyodor en juin 2004 à Sienne, mais je dois dire ici que son influence sur mon travail est antécédente à notre rencontre. Son article *Some properties of dual varieties and their applications in projective geometry* ainsi que l'ensemble de son travail sur les variétés des tangentes et des sécantes ont considérablement inspiré cette thèse. Fyodor m'a proposé à la suite de son rapport un certain nombre de questions qui devraient prolonger mes recherches. J'ai répondu à certaines d'entre elles (théorème 3.4.1) mais l'interprétation de mon théorème de classification en terme de série englobant la variété de type G_2 reste encore un mystère qui va m'occuper quelque temps.

Je remercie donc vivement Laurent et Fyodor de s'être penché avec autant d'attention sur mon travail.

Adam Parusiǹski et Christian Peskine viennent respectivement d'Angers et de Paris pour prendre part à ce jury de thèse. Curieusement j'ai plus souvent discuté avec Adam à Atlanta qu'en France. Quant à Christian Peskine nous nous sommes croisés à l'occasion de la conférence en géométrie algébrique donnée en son honneur en juillet 2004 à Paris. Je les remercie sincèrement de faire le déplacement jusqu'à Toulouse.

Philippe Essydieux et Thomas Fiedler ont eux aussi accepté d'être membres du jury. Lors de mes séjours à Toulouse, Philippe a toujours manifesté une curiosité encourageante à l'égard de mes recherches. En maitrise, Thomas a encadré mon mémoire sur le nombre de Milnor. Ce premier travail a sans doute contribué à orienter une partie de ma thèse sur la théorie des singularités. Je suis donc très content de leur présence et je les en remercie.

Durant ces quatre dernières années j'ai été à maintes reprises acceuilli au Georgia Institute of Technology à Atlanta pour y travailler avec Joseph. Ces séjours américains ont été riches en rencontres et expériences. Je tiens donc ici à témoigner mon amitié à toutes les personnes qui ont rendu ma vie américaine tout à fait supportable. Je pense en particulier à mes amis John, Mickael, Daniel et Andréa. Etant très peu en France au début de ma thèse j'ai fait connaissance un peu tard avec les thésards du laboratoire Picard. L'ambiance y est sympathique et j'ai pu bénéficier de l'expertise de certains pros de LaTex lorsque j'étais en pleine rédaction. Sur une échelle de temps un peu plus longue je voudrais signaler que je garderai un très bon souvenir de mon passage à l'Université Paul Sabatier. J'ai eu le plaisir d'y rencontrer des personnes comme Sonia, Guy, et Benoit dont l'amitié m'est précieuse.

Bien que les mathématiques soient une passion absorbante, j'ai pu continuer pendant ma thèse à pratiquer la musique de façon soutenue. Les membres des groupes avec qui j'ai partagé de bon souvenirs de scènes ces quatre dernières années (*Knutsen, Dralha, Mayanob* et *the atomic steel band orchestra of Lalbenque*) ont sans le savoir amélioré la qualité de ma vie et je les en remercie.

Mes parents ont enfin en main avec cette thèse un justificatif de mon activité de ces quatre dernières années, les voilà rassurés j'espère. Je leur témoigne ainsi qu'à ma soeur Marie toute mon affection.

A l'époque du lycée, Jean-Pierre Guy fut une des rares personnes du corps enseignant à promouvoir les études universitaires. Je ne regrette pas aujourd'hui d'avoir suivi son conseil.

Merci enfin à Laure.

Introduction

Dualité projective

Genèse du concept de dualité

Le terme de dualité en géométrie projective apparaît pour la première fois au XIX$^{\text{ème}}$ siècle dans les travaux de Gergonne. Les mathématiciens d'alors, qui s'intéressaient à la géométrie projective, avaient observé que les théorèmes, concernant des figures géométriques dans le plan, gardaient un sens et restaient vrais lorsque l'on remplaçait le mot "point" par "droite" et le mot "droite" par "point". Gergonne publia en 1825 une version duale du théorème de Desargues en présentant les énoncés de la façon suivante :

Théorème [Desargues]. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles projectifs sans points communs. Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, alors les points $A_1 = (BC) \cap (B'C')$, $B_1 = (AC) \cap (A'C')$ et $C_1 = (AB) \cap (A'B')$ sont alignés.*

Théorème [Version duale]. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles projectifs sans points communs. Si les points $A_1 = (BC) \cap (B'C')$, $B_1 = (AC) \cap (A'C')$ et $C_1 = (AB) \cap (A'B')$ sont alignés alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.*

Ici l'énoncé dual n'est autre que la réciproque du théorème de Desargues.

Si le terme de dualité est attribué à Gergonne, il n'est pas clair qu'il fut à l'origine de l'idée même de dualité. En effet, Poncelet rédigea en 1824 un mémoire sur la théorie générale des figures réciproques dans lequel il développa les idées de Monge sur les transformations polaires.

La controverse pris fin avec les travaux de Plücker qui définit correctement la notion de courbe duale. C'est l'introduction de coordonnées homogènes et de la relation d'incidence entre un point $p = (p_0, p_1, p_2)$ et une droite qui le contient $d = (l_0, l_1, l_2)$:

$$p_0 l_0 + p_1 l_1 + p_2 l_2 = 0$$

qui permis à Plücker de montrer qu'une courbe pouvait-être aussi bien décrite par une équation reliant les coordonnées de ses points que par une équation reliant les coordonnées de ses droites tangentes. Il définit ainsi pour une courbe $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ sa courbe duale, $\mathcal{C}^* :=$

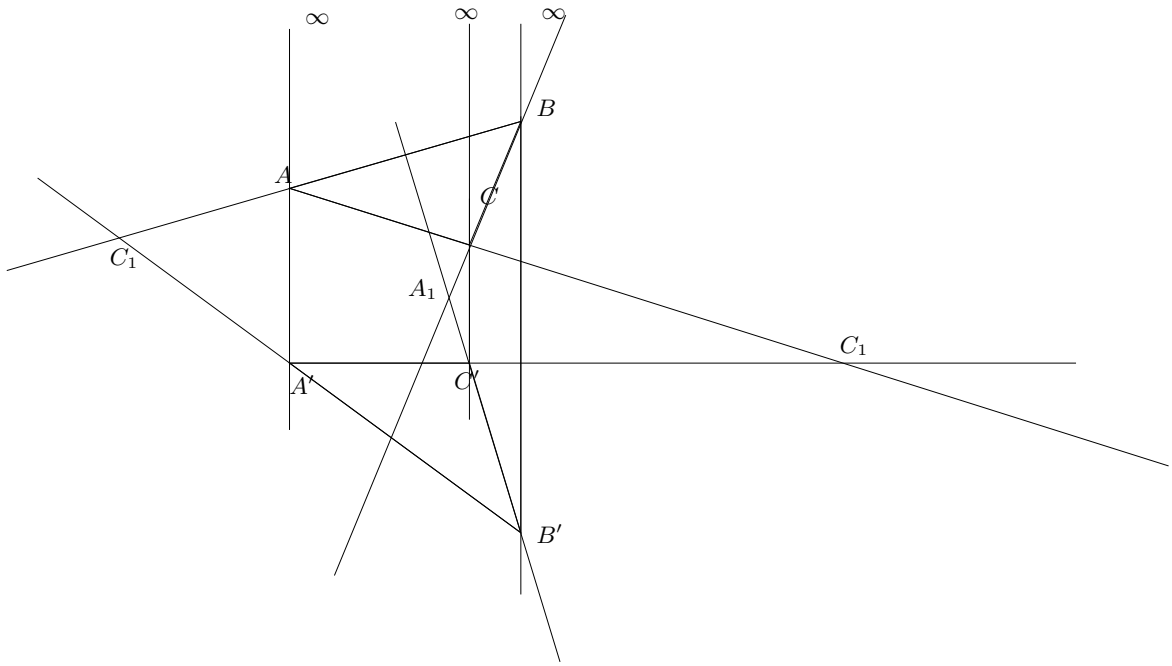


FIG. 1 – théorème de Desargues

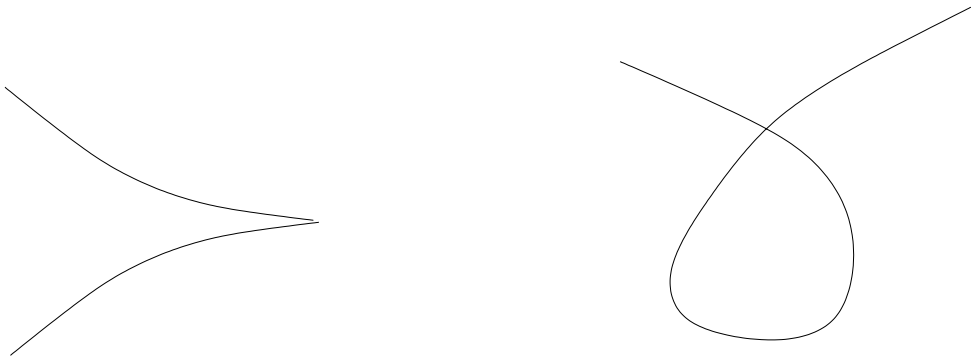
$\overline{\{d \in \mathbb{P}^{2*} | \exists x \in \mathcal{C}, d = T_x\mathcal{C}\}} \subset \mathbb{P}^{2*}$, et prouva en 1830 le théorème de réciprocité pour les courbes, i.e. $(\mathcal{C}^*)^* = \mathcal{C}$.

En 1834, Plücker s'intéressa aux relations entre le degré d de $\mathcal{C}$, le degré d^* de $\mathcal{C}^*$ (appelé aussi classe de $\mathcal{C}$) et les singularités simples de ces deux courbes. Une singularité simple pour une courbe est soit un point double, soit un point cuspidal (voir figure 2). L'existence d'un tel point singulier pour $\mathcal{C}$ (ou pour $\mathcal{C}^*$) entraîne l'existence d'un point d'inflexion ou d'une bitangente pour la courbe duale (voir figure 3).

En notant par c (resp. n, i, b) le nombre de points cuspidaux (resp. le nombre de points doubles, le nombre de points d'inflexions, et le nombre de bitangentes) de $\mathcal{C}$ on peut exprimer les classiques formules de Plücker :

$$\begin{array}{ll} d^* = d(d-1) - 2n - 3c & d = d^*(d^*-1) - 2b - 3i \\ i = 3d(d-2) - 6c - 8n & c = 3d^*(d^*-2) - 6b - 8i. \end{array}$$

Ainsi, si $\mathcal{C}$ est une courbe lisse de degré d alors $d^* = d(d-1)$, $i = 3d(d-2)$ et $b = \frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$. L'existence de ces i points d'inflexions et des b bitangentes, implique pour la courbe duale la présence de $3d(d-2)$ points cuspidaux et de $\frac{1}{2}d(d-2)(d^2-9)$ points doubles. Une courbe lisse $\mathcal{C}$ a donc pour courbe duale une courbe de degré "élévé" ayant "beaucoup" de points singuliers.



Point cuspidal Point double

FIG. 2 – Singularités simples de $\mathcal{C}$

Approche moderne

La définition de Plücker se généralise pour une variété projective $X \subset \mathbb{P}(V)$, plongée, et on définit ainsi X^*, la variété duale de X :

$$X^* = \overline{\{H \in \mathbb{P}V^* | \exists\ x \in X_{\text{lisse}} \text{ tel que } \tilde{T}_x X \subseteq H\}}.$$

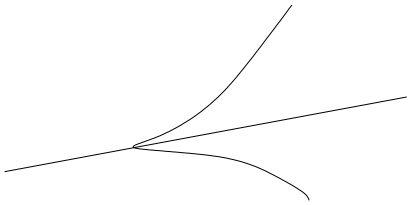
($\tilde{T}_x X$ est la notation que l'on prendra pour l'espace tangent plongé.)
En caractéristique nulle, le théorème de bidualité assure que

$$(X^*)^* = X.$$

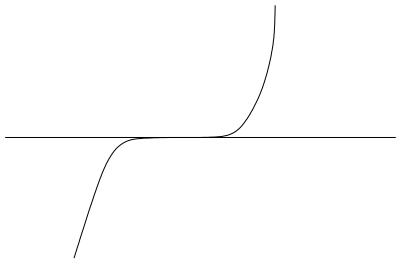
La relation d'incidence entre points et droites devient maintenant une relation d'incidence entre points et hyperplans que l'on présente en introduisant la variété conormale $C(X)$:

$$\begin{array}{ccc} C(X) := \overline{\{(x,H) |\ H \in \mathbb{P}V^*, \tilde{T}_x X \subseteq H\}} & & \\ \pi \swarrow & \searrow \rho & \\ X & & X^* \end{array}$$

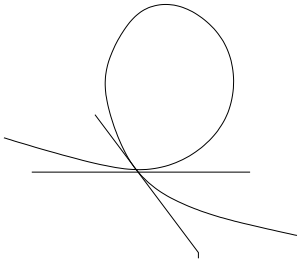
Le théorème de réflexivité nous invite à penser que les attributs (dimension, degré, singularités) de la variété duale vont se traduire en propriétés géométriques de notre variété initiale. Il est donc naturel de s'intéresser à ces attributs. Dans cette thèse c'est *le lieu singulier de* X^* qui retiendra toute notre attention. Nous supposerons toujours être dans la situation suivante, $V = \mathbb{C}^{n+a+1}$ et $X^n \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n+a}$ est une variété projective complexe.



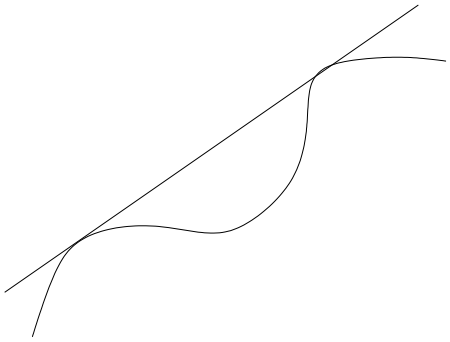
Présence d'un point cuspidal pour $\mathcal{C}$



Existence d'un point d'inflexion pour $\mathcal{C}^*$



Présence d'un point double sur sur $\mathcal{C}$



Existence d'une bitangente pour $\mathcal{C}^*$

FIG. 3 – Conséquences pour $\mathcal{C}^*$

Le problème A-D-E (chapitre 1)

Dans le chapitre 1 on étudie en détail les variétés duales de variétés homogènes particulières. Notre intérêt pour ces variétés duales (les variétés duales des variétés adjointes), est lié à l'étrange correspondance qui existe entre *singularités simples* et *algèbres de Lie simples* :

De l'antiquité aux diagrammes de Dynkin

La classification des polyèdres réguliers de $\mathbb{R}^3$ est connue depuis l'antiquité grecque. A chaque polyèdre on associe son groupe de symétrie que l'on préfère regarder comme un sous-groupe de $SL_2(\mathbb{C})$ (en utilisant le revêtement double de $SO_3(\mathbb{R})$ par $SU_2(\mathbb{C})$). On obtient ainsi trois groupes finis, le groupe tétraédral $\mathbf{T}_{24}$ qui laisse invariant le tétraèdre, le groupe octaédral $\mathbf{O}_{48}$ qui laisse invariant l'octaèdre et le cube, et enfin le groupe icosaédral $\mathbf{I}_{120}$ qui laisse invariant l'icosaèdre et le dodécaèdre. La classification des sous-groupes finis,

à conjugaison près, de $SL_2(\mathbb{C})$ s'achève lorsqu'on ajoute à cette liste de trois groupes, les deux séries de groupes suivants : $\mathbf{Z}_n$, groupe cyclique d'ordre n, et le groupe $\mathbf{D}_n = \mathbf{Z}_n \rtimes \mathbf{Z}_2$, groupe diédral (produit semi-direct de $\mathbf{Z}_n$ et $\mathbf{Z}_2$). On doit à F. Klein [Kl 1884], l'étude du quotient $S = \mathbb{C}^2/F$ lorsque F est un sous-groupe fini de $SL_2(\mathbb{C})$.

Klein montre que S est une surface ayant un unique point singulier. La résolution minimale de la singularité de S conduit, lorsqu'on représente les diviseurs exceptionnels par des sommets et les intersections transverses par des arêtes, aux diagrammes de Dynkin.

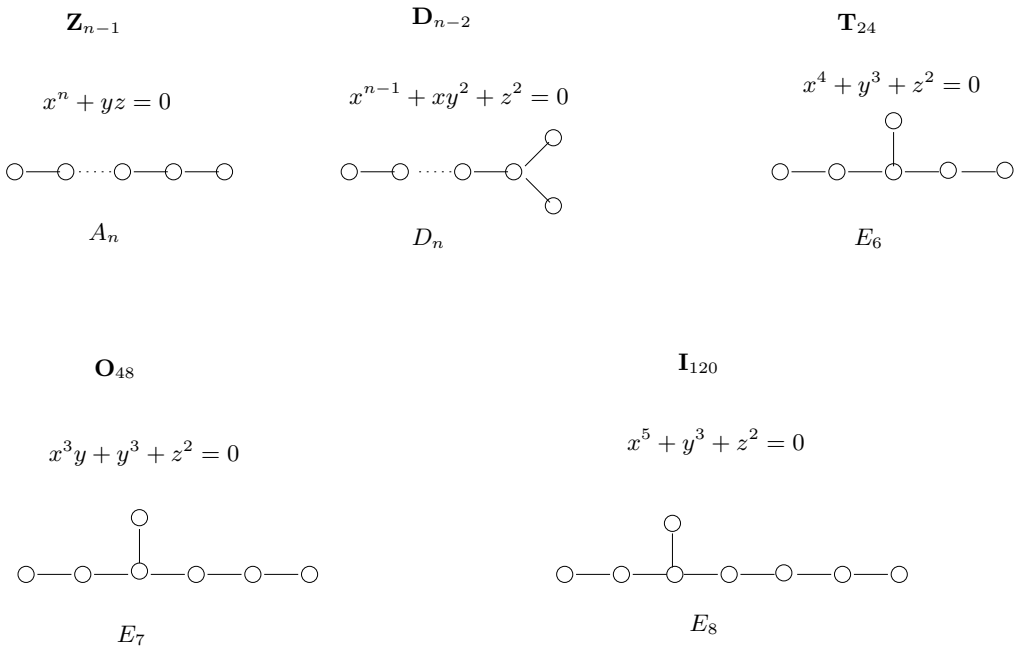


FIG. 4 – Sous groupes finis, surfaces de Klein, diagrammes de Dynkin

En langage moderne si $\pi : \tilde{S} \longmapsto S$ est la résolution minimale et $H = H_2(\tilde{S}, \mathbb{Z})$ le 2-ème groupe d'homologie, la forme d'intersection $I : H \times H \longmapsto \mathbb{Z}$ correspond, au signe près, à une matrice de Cartan associée à un diagramme de Dynkin.

Cette construction est la première connue établissant une correspondance entre singularités de Klein, ou singularités simples (voir définition au chapitre 1), et les diagrammes de Dynkin des algèbres de Lie simples de type $A - D - E$.

Comme il en a été fait la remarque dans plusieurs textes [Sl 1993, A-G-L-V 1998], cette coïncidence de listes cache certainement un lien profond entre ces différentes théories. C'est un problème posé dans [Ar 1983] que d'expliquer le lien entre singularités simples et algèbres de Lie simples de même type.

Il existe à ce jour deux constructions qui permettent d'obtenir une singularité simple directement à partir de l'algèbre de Lie (et non à partir du diagramme de Dynkin associé).

Construction de Brieskorn

La première construction est due à Brieskorn [Br 1970, Sl 1980]. Brieskorn prouva le résultat suivant conjecturé par Grothendieck :

Théorème [Brieskorn]. *Soit G un groupe de Lie complexe et simple de type A_n, D_n, E_n. Soient $T \subset G$ un tore maximal, $W = N_G(T)/T$ le groupe de Weyl correspondant, $\chi : G \longmapsto T/W$ le quotient pour l'action adjointe de G sur lui-même et $S \subset G$ une section transverse à l'unique orbite unipotente sous-régulière. Alors la restriction de χ à S réalise une déformation miniverselle de la singularité simple du même type.*

En particulier ce théorème dit que $S \cap (\chi^{-1}(\chi(1)))$ est une surface de Klein du même type que G. La variété $\chi^{-1}(\chi(1))$ est l'ensemble des éléments unipotents de G. C'est la fermeture d'une orbite maximale, dite régulière. Le complément de cette orbite correspond à la fermeture de l'orbite sous-régulière unipotente du théorème.

Ce théorème admet une version "extrinsèque" que l'on trouve dans [Po 2002] :
Pour les algèbres de Lie, l'équivalent de la notion d'élément régulier unipotent est la notion d'élément régulier nilpotent. Notons $h_0 \in \mathfrak{g}$ un élément régulier nilpotent (voir chapitre 1). L'orbite $G.h_0 \subset \mathfrak{g}$ est conique, on peut donc considérer $Y = \mathbb{P}(\overline{G.h_0}) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. La variété Y est la projectivisation des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}$ (en d'autres termes $Y = \mathbb{P}(\mathfrak{N}(\mathfrak{g}))$, où $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$ est le nilcône de $\mathfrak{g}$). Cette variété Y est singulière le long d'une sous-variété de codimension 2, et $Y_{\text{sing}} = \mathbb{P}(\overline{G.h_1})$ où h_1 est un élément sous-régulier nilpotent. Le théorème de Brieskorn devient alors,

Théorème [Brieskorn]. *Soit $Y \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ la variété des éléments nilpotents, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de rang r. On considère une section générique S de dimension $r+2$, transverse à Y_{sing}, alors $Y \cap S$ a un point singulier unique qui est de type simple. De plus si $\mathfrak{g}$ est de type $A-D-E$, alors la singularité de $Y \cap S$ est de même type.*

Construction de Knop

La deuxième construction, plus récente, est due à Friedrich Knop. Dans [Kn 1987], l'auteur réalise une hypersurface ayant un unique point singulier de type simple, comme section hyperplane d'une certaine variété homogène pour un groupe de Lie simple (c'est la variété adjointe qui sera définie au chapitre 1). Une des ambitions de notre travail était d'éclairer le résultat de F. Knop, en expliquant pourquoi la construction considérée etait la bonne. Pour cela nous avons cherché à comprendre la géométrie des variétés duales aux variétés adjointes. En particulier nous énonçons et prouvons une version duale du

théorème de Knop. En effet, nous donnons une construction qui permet de retrouver le discriminant d'une singularité simple (noté Δ) à partir du dual de la variété adjointe.

Pour un groupe de Lie G de rang r, notons Γ son diagramme de Dynkin et Γ^* le sous-diagramme des racines longues. On note r le nombre de noeuds du diagramme Γ et n celui du diagramme Γ^*. Quelque soit Γ, Γ^* est toujours de type $A-D-E$. En reprenant la présentation de Gergonne, nous pouvons formuler :

Théorème [Knop]. *Soit $X_G \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ la variété adjointe pour le groupe de Lie simple G. Soit H un hyperplan orthogonal pour la forme de Killing à un élément régulier nilpotent. Alors $X_G \cap H$ a un unique point singulier de type Γ^*.*

Théorème 1.2.2 [Version duale]. *Soit $\hat{X}_G^* \subset \mathfrak{g}^*$ le cône au-dessus de la variété duale de X_G, et soit l'application quotient, $\Phi : \mathfrak{g}^* \longmapsto \mathfrak{g}^*//G \simeq \mathbb{C}^r$. Alors il existe une section lineaire L de dimension n, telle que $\Phi(\hat{X}_G^*) \cap L = \Delta_{\Gamma^*} \subset \mathbb{C}^n$.*

On précisera au chapitre 1 comment est construite la section L.

A l'aide de notre version duale nous donnons une interprétation géométrique de l'hyperplan considéré par Knop dans sa construction. De plus en complétant ce travail par des calculs, certes peu élégants, mais élémentaires, nous proposons une nouvelle preuve du théorème de Knop. Enfin nous concluons le chapitre 1 avec des remarques sur de possibles liens entre les constructions de Brieskorn et Knop.

Sections singulières de X et singularités de X^* (chapitre 2)

Le théorème de Knop, et la version duale que nous en proposons, illustrent le fait suivant : étudier les singularités de X^*, ou les singularités des sections hyperplanes de X sont deux problèmes intimement liés.

Dans le chapitre 2 nous nous posons la question : étant donné une variété lisse $X \subset \mathbb{P}(V)$ et H un hyperplan tangent à X, comment la géométrie de X détermine-t-elle les singularités de $X \cap H$?

Cycles évanescents

Cette question a du sens lorsqu'on s'intéresse à la topologie de X. Soit $l = \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}(V^*)$, une droite générique de l'espace projectif dual, ou encore un pinceau de Lefschetz d'hyperplans. Considérons $L \in l$ tel que $X \cap L$ soit une section singulière. Soit H un point de l, dans un voisinage de L, tel que $X \cap H$ soit lisse. L'application de rétraction $r : X \cap H \longmapsto X \cap L$ induit des applications au niveau de l'homologie : $r_i : H_i(X \cap H) \longmapsto H_i(X \cap L)$. Ces applications sont des isomorphismes pour $i < n-1$ et pour $i = n-1$, r_{n-1} est surjective. Le

noyau de r_{n-1} est engendré par des *cycles évanescents*. Lorsque $X \cap L$ est une singularité de Morse on a coutume de représenter la situation de la façon suivante :

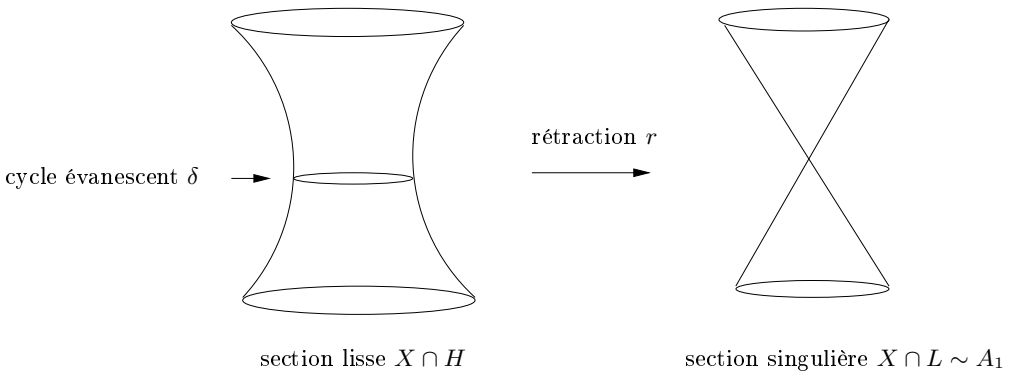


FIG. 5 – Cycles évanescents

On sait par le théorème de Lefschetz que si X est une variété projective lisse et H un hyperplan générique, $j_i : H_i(X \cap H, \mathbb{Z}) \longmapsto H_i(X, \mathbb{Z})$ est un isomorphisme pour $1 \leq i \leq n-2$, et est surjectif pour $i = n-1$. De plus, le noyau de j_{n-1} est engendré par les cycles évanescents obtenus à partir des sections singulières d'un pinceau de Lefschetz.

On note $Van(X)$ le groupe des cycles évanescents. En général si X est une variété projective lisse, alors $Van(X) \neq 0$. F. Zak a classifié dans [Zak 1973] les surfaces lisses telles que $Van(X) = 0$. Pour ce faire, il montre en particulier que l'existence d'une section $X \cap L$ avec une singularité isolée telle que $(X \cap L, x) \not\sim A_1$ (i.e. la singularité est isolée mais ne correspond pas à une quadrique ordinaire) implique que $Van(X) \neq 0$.

Nous allons donc chercher des conditions sur X qui, à priori, impliquent l'existence de sections singulières dont les singularités isolées ne sont pas réduites à un unique point double.

Strates de X^*

Ce problème est lié à l'étude du lieu singulier de X^*. Lorsque X est lisse et X^* est une hypersurface, un point $H \in X^*_{\text{lisse}}$ est caractérisé par la propriété suivante : $X \cap H$ a un unique point singulier de type singularité de Morse. De façon similaire, nous allons décrire des composantes, ou strates, de X^*_{sing} et chercher à caractériser un point général H d'une composante en fonction des singularités de la section correspondante $X \cap H$. L'existence des sections singulières décrites se résume à montrer que les strates de X^* associées ont la dimension attendue. Cette stratification de X^* se fait en introduisant des variétés auxilliaires à X, la variété des tangentes, $\tau(X)$, et la variété des sécantes, $\sigma(X)$. En notant $|II_{X,x}|$ l'image de la seconde forme fondamentale en un point x *général* (le

sens de *général* sera défini au chapitre 2) et $\tilde{T}_x^{(2)}X$ le second espace osculateur plongé, on obtient ainsi les conditions suffisantes suivantes :

Théorème 2.2.3. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété lisse telle que X^* soit une hypersurface, et telle que la variété des sécantes $\sigma(X)$ soit non dégénérée :*

- On suppose que pour x un point général, et $\forall\ v \in (T_xX)_{\text{générique}}\ \exists\ q \in |II_{X,x}|$ telle que $\ker(q) =< v >$, alors de façon équivalente on a

a) $\exists\ H$, tel que $(X \cap H, x) \sim A_2$ et q est la partie quadratique de la singularité.

b) La sous-variété $\tau(X)^*$ est de codimension 1 dans X^*.

- On suppose que pour $(x, y) \in (X \times X)_{\text{général}}$, $\tilde{T}_x^{(2)}X \cap \tilde{T}_yX = \emptyset$, alors de façon équivalente on a

a) $\exists\ H$, tel que $(X \cap H, x) \sim A_1$ et $(X \cap H, y) \sim A_1$.

b) La sous-variété $\sigma(X)^*$ est de codimension 1 dans X^*.

Normalité des discriminants (chapitre 3)

Enfin dans le chapitre 3, on donne un théorème de classification pour les variétés homogènes dont le dual est une variété normale.

Dimension, degré et singularités de X^*

Typiquement, si X est une variété projective lisse alors X^* est une hypersurface de degré élevé très singulière (i.e. singulière en codimension 1). Ces trois propriétés sont vérifiées dès que X est une intersection complète autre qu'une quadrique lisse. Dès lors trois questions se posent :

Question 1 : Quelles sont les X lisses telles que X^* ne soit pas une hypersurface ?

Question 2 : Quelles sont les X lisses telles que $\deg(X^*)$, appelé aussi codegré de X, soit petit ?

Question 3 : Quelles sont les X lisses telles que X^* ne soit pas singulière en codimension 1 ?

Ces trentes dernières années, l'étude des variétés duales a inspiré des recherches dans différentes branches des mathématiques. Des constructions géométriques de Fyodor Zak à l'approche combinatoire des hyperdéterminants de I. M. Gelfand, M. M. Kapranov et A. V. Zelevinsky, les récents développements de la théorie ont donné naissance à des résultats aux saveurs différentes.

Une conséquence du fameux théorème des tangences de Zak est le résultat suivant :

Théorème [Zak 1993]. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse non dégénérée. Alors $dim(X^*) \geq dim(X)$. De plus si X^* est lisse alors* $\dim(X) = dim(X^*)$.

Ce théorème constitue une première étape pour étudier la question 1. On appelle défaut de la variété duale la quantité $\delta_{X^*} := n + a - 1 - dim(X^*)$. Pour X lisse, le théorème des tangences nous dit que $\delta_{X^*} \leq a - 1$. Dans [Ein 1986, Ein 1985], Lawrence Ein s'est intéressé au cas $\delta_{X^*} = a - 1$.

Théorème [Ein 1986, Ein 1985]. *Soit $X^n \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n+a}$ une variété projective lisse telle que $a \geq \frac{n}{2}$ alors $dim(X^*) = dim(X)$ si et seulement si X est l'une des variétés suivantes :*

$\mathbb{Q}^1 \subset \mathbb{P}^2,\ \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{2n-1},\ G(2,5) \subset \mathbb{P}^9,\ \mathbb{S}_5^{10} \subset \mathbb{P}^{15}$.

Ces variétés sont toutes auto-duales. Ce résultat, sous des hypothèses de codimension assez grande, classifie les variétés lisses telles que δ_{X^*} soit maximal (question 1) et telles que X^* soit lisse (question 3).

Roberto Muñoz dans [Mun 1997, Mun 1999] a classifié, sous les mêmes hypothèses de codimension assez grande, les variétés lisses telles que $\delta_{X^*} = a - 2$ et $\delta_{X^*} = a - 3$. La condition sur la codimension est liée à la célèbre conjecture de Hartshorne sur les intersections complètes. Une réponse positive à cette conjecture impliquerait que le théorème de Ein classifie toutes les variétés lisses auto-duales.

La question 2 sur les variétés de faible codegré fut étudiée par F. Zak [Zak 1993, Zak 2004]. Rappelons que si $X \subset \mathbb{P}(V)$ est une variété lisse telle que $\deg X^* = 2$ alors X est une quadrique lisse. F. Zak classifia les variétés de codegré 3 :

Théorème [Zak 1993]. *Il existe exactement* 10 *variétés projectives lisses non-dégénérées telles que $codeg(X) = 3$. Ces variétés sont :*

- $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^5$.
- $\mathbb{F}_1 = (\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2) \cap H \subset \mathbb{P}^4$, *une section hyperplane de la variété précédente.*
- *Les variétés de Severi (i.e. $v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5, \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8, G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}, \mathcal{E}_6 = E_6/P_1 \subset \mathbb{P}^{26}$)*
- *Les projections des variétés de Severi à partir d'un point générique.*

La classification des variétés lisses telles que $\operatorname{codeg}(X) = 4$ est encore aujourd'hui une conjecture [Zak 2004].

Cas des variétés homogènes

On obtient des résultats plus complets en se restreignant à l'étude des variétés homogènes. Bien souvent on peut traduire une question géométrique en un calcul sur les racines et poids qui définissent la représentation où vit notre variété.

Ainsi Knop et Menzel [K-M 1987] ont classifié les variétés homogènes $X = G/P$ telles que X^* soit défective, i.e. n'est pas une hypersurface. Leur résultat fut aussi démontré par Snow.

Bien que se limiter aux variétés homogènes ne soit pas satisfaisant du point de vue de la géométrie, il convient de noter que bien souvent les variétés homogènes apparaissent comme exemples très pathologiques lorsque l'on étudie une propriété donnée de X. De plus des articles récents ont montré que l'étude géométrique des variétés homogènes donnait de nouvelles perspectives en théorie des représentations ([L-M 2004]).

Il existe un cas très particulier de variétés duales (obtenues comme variétés duales de variétés homogènes) où la réponse aux questions 1, 2, 3 est connue. Il s'agit des hyperdéterminants étudiés essentiellement par Gelfand-Kapranov-Zelevinsky ([G-K-Z 1992, G-K-Z 1994]). Considérons $X = \mathbb{P}^{k_1} \times \mathbb{P}^{k_2} \times \cdots \times \mathbb{P}^{k_r} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}^{k_1+1} \otimes \mathbb{C}^{k_2+1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^{k_r+1})$ le produit de Segré de r espaces projectifs. Pour $r = 2$ et $k_1 \geq k_2 = n$, la variété X correspond à la projectivisation de la variété des matrices de rang 1. Après identification, $V \otimes W^* \simeq V^* \otimes W$, X^* s'interprète comme la projectivisation de la variété des matrices de rang inferieur ou égal à n. Ainsi l'équation qui définit X^* n'est autre que le déterminant. Pour $r \geq 3$ on peut interpréter X comme la variété des multimatrices de rang 1, et si X^* est une hypersurface on appelle hyperdéterminant l'équation de X^*. On parlera alors d'hyperdéterminant de format $(k_1 + 1) \times \cdots \times (k_r + 1)$ (voir [G-K-Z 1994]).

Dans [G-K-Z 1992] les auteurs présentent les premières propriétés des hyperdéterminants. Le terme ayant un sens seulement lorsque X^* est un hypersurface, ils classifient les produits de Segré tels que $\delta_{X^*} = 0$. C'est le théorème 1.3 de [G-K-Z 1992] qui n'est qu'un cas particulier des résultats de Knop-Menzel. Avec leur théorème 3.1, les auteurs donnent une formule récursive pour calculer le degré de X^*. Enfin dans [W-Z 1996] J. Weyman et A. Zelevinsky étudient les singularités de X^*. Leur motivation première était de classifier les hyperdéterminants qui ne sont pas singuliers en codimension 1. On résume ces trois points qui répondent aux questions 1, 2, 3, dans le théorème suivant :

Théorème [théorème 1.3, théorème 3.1 [G-K-Z 1992] et conséquences du théorème principal de [W-Z 1996]].

1) L'hyperdéterminant de format $(k_1 + 1) \times \cdots \times (k_r + 1)$ *existe si et seulement si*

$$k_l \leq \sum_{j \neq l} k_j, \forall\ l = 1, \ldots, r.$$

2) Soit $d(k_1, \ldots, k_r)$ *le degré de l'hyperdéterminant de format* $(k_1 + 1) \times \cdots \times (k_r + 1)$ *alors* $\sum_{k_1,\ldots,k_r \leq 0} d(k_1, \ldots, k_r) z_1^{k_1} \ldots z_r^{k_r} = (1 - \sum_{i=2}^{r} (i-1) e_i(z_1, ..., z_r))^{-2}$ *où* $e_i(z_1, \ldots, z_r)$ *est le* i*-ème polynôme symétrique élémentaire.*

3) Soit Δ_X *un hyperdéterminant de format* $(k_1 + 1) \times \cdots \times (k_r + 1)$*, avec* $r \geq 3$ *tel que l'hypersurface* $\Delta_X = 0$ *ne soit pas singulière en codimension* 1 *alors le format est* $(2, 2, 2)$*, i.e.* $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*.*

Après le théorème de Knop-Menzel, le problème naturel qui se pose est de classifier les variétés homogènes dont les variétés duales sont des hypersurfaces dégénérées pour le lieu singulier (i.e. le lieu singulier est de dimension inférieure à la dimension attendue). Comme nous l'avons dit, lorsque X^* est une hypersurface, X^*_{sing} est, en général, une sous-variété de codimension 1 dans X^*. Nous avons donc cherché à classifier les variétés homogènes dont les variétés duales étaient des hypersurfaces normales (X^* étant une hypersurface, on a l'équivalence entre X^* est normale et X^* est singulière en codimension 2, voir [Mum 1968]).

Dans le deuxième chapitre, les conditions que l'on obtient pour l'existence des sections singulières, sont aussi des conditions suffisantes pour que les strates de X^* correspondantes soient de dimension maximale. Une de ces conditions est appliquée au cas des variétés homogènes dans le chapitre 3. Ce faisant, on obtient une première liste de variétés homogènes dont le dual est une hypersurface non nécessairement singulière en codimension 1. En complétant ce travail par des calculs basés sur un critère de F. Zak, nous classifions les discriminants des variétés homogènes pour un groupe de Lie semi-simple, qui correspondent à des hypersurfaces singulières en codimension 2. Ce résultat généralise donc à toutes les variétés homogènes le résultat conjecturé dans [G-K-Z 1992, G-K-Z 1994] puis démontré par [W-Z 1996] pour les produits de Segré :

Théorème 3.2.5. *Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété rationnelle homogène pour un groupe de Lie semi-simple G. On suppose que X^* est une hypersurface. Alors X^* est normale si et seulement si X est l'une des variétés suivantes,*

$X = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$, la quadrique lisse.

$X = v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1}$, $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$, $G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$, $\mathcal{E}_6 = \mathbb{OP}^2 \subset \mathbb{P}^{26}$, une variété de Scorza.

$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{2(n+2)-1}$, $n > 1$, $G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$, $G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$, $\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$, $\mathcal{E}_7 = E_7/P_7 \subset \mathbb{P}^{55}$, une variété sous-adjointe, minimalement plongée, obtenue à partir d'une variété adjointe fondamentale.

$X = X_{G_2} \subset \mathbb{P}^{13}$, la variété adjointe pour le groupe de Lie $G = G_2$.

Après avoir donné la classification des variétés homogènes dont la variété duale est une hypersurface normale on peut se poser la question du cas des variétés duales défectives. Nous concluons cette thèse avec le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété rationelle homogène pour un groupe de Lie semi-simple G. La variété duale X^* est normale si et seulement si X est l'une des variétés suivantes,*

X est une variété du théorème 3.2.5.

$X = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^{(k+1)\times(l+1)-1}$, $k > l$, $G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{(2n+1)n-1}$, une "fausse" variété de Scorza.

$X = \mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$.

$X = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$, $m > 1$.

Certaines de nos preuves du premier chapitre ont necessité des calculs sur ordinateurs (Maple). Les commandes de ces calculs sont reproduites dans l'annexe A. Enfin dans notre nouvelle preuve du théorème de Knop, il a fallu écrire des "chaînes de poids" qui codent l'agencement des racines correspondant aux vecteurs tangents de X_G. Nous avons reproduit ces chaînes pour les algèbres de Lie exceptionnelles dans l'annexe B. Enfin dans l'annexe **??** nous avons résumé sous forme de tableau les propriétés géométriques élémentaires des variétés des théorèmes 3.2.5 et 3.4.1.

Table des matières

Introduction **i**

1 Sur un théorème de Knop **1**
1.1 Diagrammes de Dynkin 1
1.1.1 Singularités simples 1
1.1.2 Le théorème de Knop 3
1.2 Variétés duales 5
1.2.1 Discriminants des variétés adjointes 5
1.2.2 Version duale du théorème de Knop 12
1.3 Une nouvelle preuve du théorème de Knop 14
1.3.1 Preuve 14
1.3.2 Singularités & algèbres de Lie simples 22

2 Sing (X^*) **&** **Sing** $(X \cap H)$ **25**
2.1 Généralités et premiers exemples 25
2.1.1 Variétés adjointes 29
2.2 Variété des tangentes et variété des sécantes 30
2.2.1 Définitions, outillage (repère mobile) et stratégie 30
2.2.2 Variété des tangentes et sections hyperplanes de X 36
2.2.3 Variété des sécantes et sections hyperplanes de X 39
2.2.4 Théorème sur les sections hyperplanes de X 41
2.3 Dimensions de $\sigma(X)^*$ 43

3 Applications aux variétés homogènes **45**
3.1 Dimension de $\sigma(G/P)^*$ pour G groupe de Lie simple 45
3.2 Normalité de $\Delta_{(G/P)}$ 60
3.2.1 Quelques variétés homogènes dont le dual est une hypersurface normale 60
3.2.2 Résultats de Zak sur la normalité de X^* 64
3.2.3 Normalité de X^* pour les variétés homogènes 66
3.3 Le lieu singulier de $X^*_{G_2}$ 72

3.4 Normalité de $(G/P)^*$ 73

A Calcul sur le discriminant de F_4 **77**

B Calcul des directions dégénérées de $Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}$ **79**
B.1 Notations 79
B.2 F_4 80
B.3 E_6 81
B.4 E_7 82
B.5 E_8 84

Chapitre 1

Sur un théorème de Knop

Dans ce chapitre nous présentons un théorème de Friedrich Knop sur les sections hyperplanes des variétés adjointes. Nous introduisons au cours de cette étude les différents concepts qui seront essentiels dans le cadre de cette thèse : singularités simples, varietés homogènes, variétés duales. Nous explicitons l'équation du discriminant des variétés adjointes pour un groupe de Lie classique (proposition 1.2.1) ce qui nous conduit à formuler une version "duale" du théorème de Knop. Ce résultat (théorème 1.2.2) se déduit du théorème de Brieskorn pour les diagrammes de type $A-D-E$ et s'obtient par le calcul pour les diagrammes $B-C-F-G$. Enfin nous donnons une nouvelle preuve du théorème de Knop à partir de notre version duale.

1.1 Diagrammes de Dynkin

1.1.1 Singularités simples

Soit $(f,0)$ le germe en zéro d'une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$. On appellera *singularité* la donnée, à transformation biholomorphe près, d'un tel germe lorsque $\partial_i f(0) = 0$ pour tout i, où ∂_i représente la dérivé par rapport à la i-ème variable. Introduisant une telle relation, il est naturel de considérer $\mathcal{O}_n$ l'espace des germes de fonctions $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}$ muni de l'action du groupe $\mathcal{D}_n$, où $\mathcal{D}_n$ est le groupe des germes de biholomorphismes qui fixent 0. Une *singularité* est donc une $\mathcal{D}_n$-orbite dans $\mathcal{O}_n$ distincte de l'orbite lisse et dense des germes non singuliers en zéro.

Définition 1.1.1. *Une singularité est dite non dégénérée, où de type Morse, où encore de type quadratique ordinaire lorsque la partie quadratique de $(f,0)$ est de rang n.*

Le classique Lemme de Morse ([Mi 1963]) nous dit qu'une singularité non dégénérée appartient à l'orbite de $f(z_1,...,z_n) = z_1^2 + ... + z_n^2$. Cette orbite est dense parmi les orbites

de germes singuliers. Adoptons pour l'ensemble des orbites de germes singuliers la notation $\mathcal{S}_n = \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_{n,\text{ lisse}}$.

La définition d'une singularité implique que le corang est un invariant et, dans le cas particulier où celui-ci est nul, il la caractérise complètement. Il existe une version généralisée du Lemme de Morse ([Mi 1963, Ar 1972]) que l'on peut formuler de la manière suivante : une singularité $[(f,0)] \in \mathcal{S}_n/\mathcal{D}_n$ de corang k, correspond à l'orbite d'une fonction de type $g(z_1,...,z_k)+z_{k+1}^2+...+z_n^2$. On définit une relation d'équivalence entre singularités qui n'ont pas le même nombre de variables, en rajoutant des termes quadratiques. Ainsi on dira que $(f,0)$ et $(g,0)$ sont *stablement équivalentes.*

Un invariant essentiel dans l'étude des singularités est le nombre de Milnor, μ. Rappelons ici sa définition algébrique :

Soit $I_{\Lambda f} = \mathcal{O}_n < \partial_1 f,...,\partial_n f >$ l'idéal gradient de f, alors

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / I_{\Lambda f}$$

Remarque 1.1.1. *Pour une définition et une approche topologique de μ voir [Mi 1968].*

Il est bien connu ([A-G-L-V 1998]) que

$$\mu(f,0) < \infty \Leftrightarrow (f,0) \text{ est une singularité isolée.}$$

Les singularités de Morse sont les singularités les moins complexes que l'on puisse imaginer. Elles sont complètement caractérisées par la hessienne d'un représentant de la classe et forment une orbite dense parmi les autres classes de singularités. En particulier si $(f,0)$ est un point de l'orbite des singularités de Morse, un voisinage suffisament petit de $(f,0)$ dans $\mathcal{S}_n$ est toujours contenu dans l'orbite de $(f,0)$. En d'autres termes, perturber $(f,0)$ dans $\mathcal{S}_n$ ne change pas la classe de $(f,0)$. Les singularités *simples* au sens d'Arnold sont les singularités qui peuvent changer de classe après perturbation, mais seulement un nombre fini de fois.

Définition 1.1.2. $[(f,0)]$ *est une singularié* simple *lorsque tout voisinage suffisament petit de* $[(f,0)]$ *intersecte seulement un nombre fini d'orbites disctinctes de* $[(f,0)]$.

Il existe bien des façons de définir et d'introduire les singularités simples ([Du 1979]). Nous avons choisi l'approche d'Arnold car nous utiliserons, lorsque nous proposerons une nouvelle preuve du théorème de Knop, la caractérisation qu'il introduit dans [Ar 1972].

En effet, Arnold classifie les singularités simples en montrant qu'être simple implique des restrictions sur μ, sur le corang de $Hess(f,0)$ et sur les termes cubiques de $(f,0)$. Plus précisément il montre que :

- le corang ne peut exéder 2,
- dans le cas où le corang est égal à 2 le terme cubique ne peut être nul,

- μ doit être fini (avec $\mu < 9$ lorsque le terme cubique est un cube).

Réciproquement Arnold montre que les germes ainsi caractérisés sont simples.
Ceci conduit à la liste des formes normales :

A_n	D_n	E_6	E_7	E_8
x^{n+1}	$x^{n-1}+xy^2$	x^3+y^4	x^3+xy^3	x^3+y^5
$\mu = n$	n	6	7	8

Ces formes normales sont bien stablement équivalentes aux surfaces de Klein.

La dernière notion, que nous voulons rappeler, est celle de discriminant d'une singularité. Soit $(f,0)$ une singularité et I_{Λ_f} son idéal gradiant. Notons par $g_1,...,g_\mu$ une base de $\mathcal{O}_n/I_{\Lambda_f}$. On peut déformer notre singularité de la façon suivante :

$$F(x,\lambda) = f(x) + \Sigma_{i=1}^{\mu}\lambda^i g_i(x)$$

Une telle déformation est dite *miniverselle* ([Ar 1975, A-G-L-V 1998]). Maintenant considérons $\Delta_f(\lambda_1,...,\lambda_\mu) = \Delta(F(x,\lambda))$ le discriminant de $F(x,\lambda)$. L'hypersurface définie par Δ_f paramétrise les déformations singulières de $(f,0)$ et caractérise ainsi $(f,0)$ (un résultat de Wirthmüller [Wu 1980] montre qu'une singularité isolée d'hypersurface est déterminée, à transformation biholomorphe près, par le discriminant de sa déformation miniverselle). Retenons l'exemple suivant :

Exemple 1.1.1. *Soit $(f,0)$ une singularité simple de type A_n. C'est à dire $f \sim x^{n+1}$. $\mathcal{O}_1/I_{\Lambda_{x^{n+1}}} =< 1,x,..,x^{n-1} >$, donc une déformation de x^{n+1} est $x^{n+1}+\lambda_1 x^{n-1}+...+\lambda_n$. Son discriminant est alors donné par l'équation :*

$$\Delta(x^{n+1}+\lambda_1 x^{n-1}+...+\lambda_n) = 0. \tag{1.1}$$

On notera Σ_{A_n} l'hypersurface definie par $\Delta_{x^{n+1}}$.

1.1.2 Le théorème de Knop

La théorie des représentations des groupes et algèbres de Lie a pour pendant géométrique l'étude des variétés homogènes. A G un groupe de Lie semi-simple complexe de rang r et V_λ une représentation irréductible de dimension finie, définie par le poids λ, on associe une variété projective irréductible de la façon suivante : notons $v_\lambda \in V_\lambda$ un vecteur de plus haut poids de la représentation, alors $G.v_\lambda \subset V_\lambda$ est une orbite fermée et conique (ces propriétés caractérisent l'orbite). On obtient ainsi une variété projective homogène $X_\lambda = G.[v] = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ qui ne dépend que de $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie de G.

Lorsque G est un groupe de Lie simple complexe et $V_\lambda = \mathfrak{g}$, i.e. on considère la représentation adjointe de G, on obtient la variété $X_G = G.[v_\lambda] \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Cette variété projective est appelée *variété adjointe* de G.



FIG. 1.1 – discriminant pour la courbe $y = x^3$

Soit $h_0 \in \mathfrak{g}$ un élément régulier nilpotent, c'est à dire un élément nilpotent tel que $\dim \mathfrak{g}^{h_0} = \dim(\{Z \in \mathfrak{g} | [Z, h_0] = 0\}) = r$ et soit $B(,)$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On considère l'hyperplan de $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ défini comme suit :

$$H_0 = \{[u] \in \mathbb{P}(\mathfrak{g}), B(u, h_0) = 0\}$$

On note enfin Γ le type de G. Le théorème de Knop s'énonce alors :

Théorème 1.1.1 (Knop [Kn 1987] Théorème 3.1). *Soit Γ^* le sous-diagramme des racines longues de Γ. La section hyperplane $X_G \cap H_0 \subset X_G \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ a un unique point singulier, et c'est une singularité simple de type Γ^*.*

En particulier si G est de type A_n (resp, D_n, E_6, E_7, E_8), alors la section hyperplane correspondante a un unique point singulier de type A_n (resp, D_n, E_6, E_7, E_8). De plus Knop montre aussi (théorème 4.7) qu'il existe une correspondance préservant le type, entre les sections hyperplanes de X_G dont les singularités sont isolées, et les sous-diagrammes de Γ^*.

Knop prouve son théorème en introduisant des invariants qui caractérisent les singularités simples (caratérisation de Saïto [Sa 1971]) et en calculant au cas par cas la valeur de ces invariants pour la section hyperplane $X \cap H_0$. En essayant de donner une nouvelle preuve de ce théorème nous avions trois objectifs :

1) prouver uniformément le théorème, c'est à dire éviter le calcul au cas par cas.

2) comprendre géométriquement pourquoi H_0 est le bon hyperplan dans la construction de Knop.

3) comprendre un peu mieux les liens entre singularités et algèbres de Lie de même type.

Comme nous le verrons notre preuve ne peut se passer du calcul au cas par cas dans sa dernière étape, mais nous avons pu remplacer l'utilisation d'invariants sophistiqués par des calculs élémentaires. De plus ces calculs nous apportent des informations nouvelles sur le noyau de la partie quadratique de $X \cap H_0$. Pour ce qui est du point 2), nous allons donner une construction qui nous permettra d'interpréter géométriquement H_0. Enfin à la fin du chapitre nous ferons des commentaires sur le point 3).

1.2 Variétés duales

Comme nous l'avons rappelé dans l'introduction, la variété duale est en général une hypersurface. Lorsque c'est le cas, l'équation Δ_X qui définit X^* est appelée discriminant de X ([G-K-Z 1994]). Cette terminologie met en avant le fait suivant : lorsque X est une variété lisse, alors X^* paramétrise exactement les sections hyperplanes singulières de X. En effet par définition de X^*, $H \in X^*$ implique que la section $X \cap H$ est singulière. Si on suppose X lisse alors comme $H \notin X^*$ implique H intersecte X transversalement on obtient $X \cap H$ est une section lisse si et seulement si $H \notin X^*$.

1.2.1 Discriminants des variétés adjointes

Dans cette section nous allons expliciter le discriminant des variétés adjointes pour les algèbres de Lie classiques. En particulier nous établissons pour les types A_n et D_n une relation entre $\hat{X}_G^*$ et Σ_G (où par abus de notation Σ_G est le discriminant d'une singularité simple de même type que le groupe de Lie G).

Le cas A_n

Dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$ la variété adjointe est :

$$X_{SL_{n+1}\mathbb{C}} = (\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \cap H_{\text{trace}=0} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}).$$

X_{A_n} s'interprète comme l'ensemble des matrices de trace nulle et de rang 1. La forme de Killing est définie par $B(C, D) = tr({}^tCD)$. On identifie ainsi $\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$ et son dual.

Cherchons une expression du dual de X_{A_n}. Pour cela notons $x = e \otimes f^*$ un point de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(V \otimes V^*)$. La condition de trace nulle revient à dire que $f^*(e) = 0$. Maintenant que nous savons décrire un point de X_{A_n} nous pouvons calculer l'espace tangent de X_{A_n} au point x en utilisant la règle de Leibniz :

$d(e \otimes f^*) = v \otimes f^* + e \otimes w^*$, où v est un vecteur quelconque de $\ker(f^*)$ et w^* un vecteur quelconque de $e^\perp \subset V^*$. Sous forme matricielle on a donc pour un choix d'une certaine base :

$$x = \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & ... & 0 & 0 \\ . & ... & . & . \\ 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{T}_x X_{A_n} = \begin{pmatrix} a & ... & * & * \\ 0 & ... & 0 & * \\ . & ... & . & . \\ 0 & ... & 0 & -a \end{pmatrix}$$

H tangent en x, impose les conditions suivantes :

$$trace({}^tHx) = 0$$

$$trace({}^tHy) = 0, \forall\ y \in \hat{T}_x X_{A_n}.$$

En particulier si H est une matrice de trace nulle admettant une valeur propre double alors $H \in X^*_{A_n}$. Or l'ensemble des matrices de trace nulle ayant une valeur propre double est une hypersurface : les valeurs propres de H sont les racines du polynôme caractéristique $Q_H = det(H - \lambda Id)$, et ce polynôme a une racine double si et seulement si son discriminant est nul, $\Delta(Q_H) = \Delta(det(\lambda^{n+1}Id + H)) = 0$. Comme $X^*_{A_n}$ est irréductible, les deux hypersurfaces coïncident. Nous avons donc pour équation de $X^*_{A_n}$:

$$\Delta_{X_{A_n}}(H) = \Delta(Q_H) = \Delta(det(\lambda^{n+1}I_d + H))) = 0$$

ce qui donne en développant

$$\Delta_{X_{A_n}}(H) = \Delta(\lambda^{n+1} + P_2(H)\lambda^{n-1} + ... + P_{n+1}(H)) = 0 \tag{1.2}$$

où les P_i sont les sommes des $i \times i$ principaux mineurs de H (P_1 étant la trace, ici nulle, et P_{n+1} le déterminant). Rappelons enfin que les P_i sont les générateurs de l'algèbre des polynômes SL_{n+1}-invariants sur $\mathfrak{sl}_{n+1}$, i.e. $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_{n+1}]^{SL_{n+1}} = \mathbb{C}[P_2, ..., P_{n+1}]$.

Par la suite nous allons exploiter la "ressemblance" entre les expressions (1.1) et (1.2). Plus précisément nous remarquons la chose suivante, il existe une application SL_{n+1}-invariante (le quotient de $\mathfrak{sl}_{n+1}$ par le groupe SL_{n+1}),

$$\Phi : \mathfrak{sl}_{n+1} \longmapsto \mathbb{C}^n = \mathfrak{sl}_{n+1}//SL_{n+1}$$

définie par les générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{sl}_{n+1}]^{SL_{n+1}}$,

$$\Phi(x) = (P_2(x), ..., P_{n+1}(x))$$

avec

$$\Phi(\hat{X}^*_{A_n}) = \Sigma_{A_n}.$$

Le discriminant des variétés adjointes (pour les groupes de Lie classiques)

Revenons au cas où $X = X_G \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ est une variété adjointe pour un groupe de Lie simple complexe G. Ici nous suivons la présentation de [Te 2004] pour décrire le discriminant de X_G. Soit $x \in \mathfrak{g}$, le polynôme caractéristique de l'opérateur adjoint $ad(x) = [x, .]$ est,

$$Q_x = det(tId - ad(x)) = \sum_{i=0}^{dim(\mathfrak{g})} t^i D_i(x).$$

Si r est le rang de $\mathfrak{g}$ alors on a pour tout x, $\dim\mathfrak{g}^x \geq r$. Donc l'opérateur $ad(x)$ admet 0 comme valeur propre avec multiplicité au moins r. En particulier cela implique $D_0(x) = D_1(x) = ... = D_{r-1}(x) = 0$. Le premier polynôme non nul est donc D_r.

Nous avons $D_r(x) \neq 0$ si et seulement si x est régulier semi-simple. Or un élément x semi-simple est régulier si et seulement $\forall\ \alpha \in R$ on a $\alpha(x) \neq 0$, où R est l'ensemble des racines de $\mathfrak{g}$. Ceci permet, sous l'isomorphisme de Chevalley, $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{h}]^W$, de reconnaître D_r comme le produit des racines

$$D_{r|\mathfrak{h}} = \prod_{\alpha \in R} \alpha = \pm(\prod_{\alpha \in R^+} \alpha)^2 \text{ à scalaire multiplicatif près.}$$

Sous l'action du groupe de Weyl, W, ce polynôme n'est pas irréductible lorsque le diagramme de Dynkin Γ de G admet des racines longues et courtes. On a donc

$$D_{r|\mathfrak{h}} = D_{l|\mathfrak{h}} D_{c|\mathfrak{h}} = \prod_{\alpha \in R_l} \alpha \prod_{\alpha \in R_c} \alpha$$

où R_l est l'ensemble des racines longues de $\mathfrak{g}$ et R_c l'ensemble des racines courtes. Le lien avec le discriminant de X_G est le suivant

Théorème 1.2.1 (Tevelev [Te 2004], Omoda [Om 2000]). *Après avoir identifié $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ via la forme de Killing, on a*

$$\Delta_{X_G} = D_l.$$

On propose une nouvelle preuve de ce théorème que l'on déduit du lemme suivant. Ce lemme simplifie les arguments de [Te 2004] et [Om 2000], et donne en plus des informations supplémentaires pour les autres orbites nilpotentes :

Lemme 1. *Soit $v \in \mathfrak{g}$ un vecteur nilpotent, on note $X_v = \mathbb{P}(\overline{G.v}) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$. Après avoir identifié $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}^*$ par la forme de Killing, on note $Y \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ l'hypersurface définie par $D_r = 0$, alors $X_v^* \subset Y$.*

Démonstration. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$, et soit v un élément nilpotent. A conjugaison près on peut supposer $v \in \oplus_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}_\alpha$, où R_+ est l'ensemble des racines positives. Donc il existe des vecteurs propres $\{Z_{\alpha_i}\}_{i \in I}$ pour des racines positives, α_i, tels que $v = \sum_{i \in I} Z_{\alpha_i}$. Soit $i \in I$, alors $[Z_{-\alpha_i}, v] \in \tilde{T}_v X_v$. Cet élément de $\mathfrak{g}$ a pour partie semi-simple $h_{\alpha_i} = [Z_{-\alpha_i}, Z_{\alpha_i}]$. Soit $H \in X_v^*$, alors $\tilde{T}_v X_v \subset H$ et donc $[Z_{-\alpha_i}, v] \in H$. En notant $H = B(h, .)$, il vient $B(h, [Z_{-\alpha_i}, v]) = 0$. Pour les parties semi-simples de h et $[Z_{-\alpha_i}, v]$, la dernière égalité implique $\alpha_i(h_s) = 0$, ce qui signifie $D_r(h_s) = 0$, i.e. $H \in Y$. □

Démonstration. (du théorème) On applique le lemme à l'orbite définie par le vecteur de plus haut poids, $v = Z_{\tilde{\alpha}}$. Donc on obtient $\tilde{\alpha}(h_s) = 0$. Le plus haut poids est une racine longue, d'où cette fois $D_l(h_s) = 0$. Enfin pour les variétés adjointes on sait que X_G^* est une hypersurface, donc $X_G^* \subset Y$ implique l'égalité.□

Déduisons de ce théorème une expression du discriminant de X_G, lorsque G est une algèbre de Lie classique.

Les algèbres de Lie classiques peuvent se décrire comme suit :

$$\mathfrak{sl}_n\mathbb{C} = Mat_n^0(\mathbb{C}) := \{A \in Mat_n(\mathbb{C}) | \text{trace } A = 0\}$$

$$\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C} = \{ \begin{pmatrix} A & B & G \\ C & -A^T & H \\ E & F & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2n+1}^0(\mathbb{C})$$
$$| A, B, C \in Mat_n(\mathbb{C}), B^T = -B, C^T = -C, E^T = -G, F^T = -H\}$$

$$\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C} = \{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in Mat_{2n}^0(\mathbb{C}) | A, B, C \in Mat_n(\mathbb{C}), B^T = B, C^T = C\}$$

$$\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C} = \{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A^T \end{pmatrix} \in Mat_{2n}^0(\mathbb{C}) | A, B, C \in Mat_n(\mathbb{C}), B^T = -B, C^T = -C\}$$

On peut donc parler de la restriction des P_i = somme des $i \times i$ principaux mineurs. Pour chaque algèbre de Lie classique ces polynômes engendrent $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ (voir [Po 2002]). Dans le cas particulier de D_n, P_{2n} le déterminant n'est pas irréductible, $P_{2n} = Pf^2$ et le polynôme Pf est appelé Pfaffien.

On obtient alors,

Proposition 1.2.1. *Une équation pour le discriminant de X_G est :*
Type A_n, $\Delta_{X_{A_n}}(x) = \Delta(t^{n+1} + P_2(x)t^{n-2} + ... + det(x)) = 0$
Type B_n, $\Delta_{X_{B_n}}(x) = \Delta(t^n + P_2(x)t^{n-1} + ... + P_{2n}(x)) = 0$
Type C_n, $\Delta_{X_{C_n}}(x) = \Delta(t^2 + det(x)) = 0$
Type D_n, $\Delta_{X_{D_n}}(x) = \Delta(t^n + P_2(x)t^{n-2} + ... + P_{2n-2}(x)t + Pf^2(x)) = 0$.

Démonstration. Le cas A_n a été traité, voir l'équation (1.2).

Le cas C_n se traite aisément. En effet, soit V un espace vectoriel complexe de dimension n, alors $\mathfrak{sp}_{2n} \simeq S^2(V)$. Sous cet isomorphisme, la variété adjointe $X_{Sp_{2n}}$ s'identifie à $v_2(\mathbb{P}^{n-1})$ la variété des matrices symétriques de rang 1. Sa variété duale correspond alors à la variété des matrices symétriques de rang au plus n dont une équation est donnée par le déterminant. Or $\Delta(t^2 + det(x)) = 0$ est une autre façon d'écrire $det(x) = 0$.

Pour le cas B_n nous adoptons les notations de [Fu-Ha 1991]. Soit $M \in \mathfrak{so}_{2n+1}$, à conjugaison près, on peut par la décomposition de Jordan écrire M_s la partie semi-simple de M sous la forme,

$$M_s = \{ \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & -A^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Mat^0_{2n+1} | A \in Mat_n, A = diag(\lambda_1, ...\lambda_n)\}.$$

Soit α une racine longue, d'après la déscription donnée de $\mathfrak{so}_{2n+1}$ et celle de ses racines donnée dans [Fu-Ha 1991], on a

$$\alpha(M_s) = \lambda_i \pm \lambda_j.$$

Donc l'équation du discriminant que l'on a par le théorème est

$$D_l(M_s) = \prod_{1 \leq i < j \leq n,\ i \neq j} (\lambda_i \pm \lambda_j)^2.$$

Considérons maintenant P_M le polynôme caractéristique de M :

$$det(M + tId) = t^{2n+1} + P_1(M)t^{2n-1} + P_2(M)t^{2n-2} + ... + P_{n-1}(M)t$$

(rappel $trace = 0$, et $P_n = det = 0$). Ce polynôme admet 0 comme racine puisque $det(M) = 0$. Si on considère

$$t^{2n} + P_1(M)t^{2n-2} + P_2(M)t^{2n-2} + ... + P_{n-1}(M),$$

on obtient un polynôme qui a comme valeurs propres $\lambda_i, -\lambda_i$. Faisons le changement de variable $T = t^2$, on obtient un nouveau polynôme,

$$T^n + P_1(M)T^{n-1} + P_2(M)T^{n-2} + ... + P_{n-1}(M)$$

qui a comme valeurs propres λ_i^2, et donc si on considère son discriminant (produit du carré de la différence des racines), on obtient

$$\Delta(T^n + P_1(M)T^{n-1} + P_2(M)T^{n-2} + ... + P_{n-1}(M)) =$$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n,\ i \neq j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2 = \prod_{1 \leq i < j \leq n,\ i \neq j} (\lambda_i \pm \lambda_j)^2 = D_l(M_s).$$

Pour $M \in \mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$, on note M_s sa partie semisimple,

$$M_s = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^T \end{pmatrix} \in Mat^0_{2n} | A \in Mat_n, A = diag(\lambda_1, ...\lambda_n)\}.$$

Soit α une racine, d'après la déscription donnée de $\mathfrak{so}_{2n}$, on a

$$\alpha(M_s) = \lambda_i \pm \lambda_j.$$

Le théorème implique,

$$D(M_s) = \prod_{1 \leq i < j \leq n,\ i \neq j} (\lambda_i \pm \lambda_j)^2.$$

Considérons maintenant P_M le polynôme caractéritisque de M :

$$det(M + tId) = t^{2n} + P_2(M)t^{2n-2} + P_4(M)t^{2n-4} + ... + Pf^2(M)$$

(naturellement pour i impair on a $P_i(M) = 0$). Ce polynôme a pour valeurs propres λ_i et $-\lambda_i$. En faisant le même changement de variables que précédemment on a un nouveau polynôme,

$$T^n + P_2(M)t^{n-1} + P_4(M)t^{n-2} + ... + Pf^2(M),$$

dont les racines sont λ_i^2, d'où

$$\Delta(T^n + P_2(M)T^{n-1} + P_4(M)T^{n-2} + ... + Pf^2(M)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n, i \neq j} (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^2$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n, i \neq j} (\lambda_i \pm \lambda_j)^2 = D(M_s).\square$$

Le cas D_n

Nous voulons faire ici les mêmes observations pour les discriminants (au sens d'équation d'une variété duale et au sens de discriminant d'une singularité) de type D_n que pour les discriminants de type A_n. Nous allons mettre en évidence une application SO_{2n}-invariante de $\mathfrak{so}_{2n}$ dans $\mathbb{C}^n$ avec les propriétés voulues.

Le discriminant de $X_{SO_{2n}}$ est d'après ce qui précède $\Delta(t^n + P_2(x)t^{n-2} + ... + P_{2n-2}(x)t + Pf^2(x)) = 0$ où les P_{2i}, $0 < i < n$ et le Pffafien Pf sont les générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{so}_{2n}]^{SO_{2n}}$.

L'application Φ devient,

$$\Phi : \mathfrak{so}_{2n} \longmapsto \mathbb{C}^n$$

$$\Phi(x) = (P_2(x), P_4(x), ..., P_{2n-2}(x), \frac{1}{2}Pf(x))$$

L'image par Φ de $\hat{X}^*_{SO_{2n}}$ est une hypersurface Σ définie par

$$\Delta(t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_{n-1}t + (\frac{1}{2}a_n)^2) = 0.$$

Ainsi Σ est caractérisée par,

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma \Leftrightarrow \exists\ t \text{ tel que } \begin{cases} t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_{n-1}t + (\frac{1}{2}a_n)^2 = 0 \\ nt^{n-1} + (n-1)a_1 t^{n-2} + ... + a_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

Une singularité de type D_n a pour forme normale $x^{n-1} + xy^2$, et une déformation miniverselle est donnée par,

$$F(x, y, a_1, ..., a_n) = x^{n-1} + xy^2 + a_1 x^{n-2} + ... + a_{n-2}x + a_{n-1} + a_n y$$

donc une équation pour $\Sigma_{x^{n-1}+xy^2}$ est

$$\Delta(x^{n-1} + xy^2 + a_1 x^{n-2} + ... + a_{n-2}x + a_{n-1} + a_n y) = 0.$$

On obtient ainsi comme caractérisation de $\Sigma_{x^{n-1}+xy^2}$,

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma_{x^{n-1}+xy^2} \Leftrightarrow \exists\ (x, y) \text{ tel que}$$

$$\begin{cases} x^{n-1} + xy^2 + a_1 x^{n-2} + ... + a_{n-2}x + a_{n-1} + a_n y = 0 \\ (n-1)x^{n-2} + y^2 + (n-2)a_1 x^{n-3} + ... + a_{n-2} = 0 \\ 2xy + a_n = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Montrons que $\Sigma = \Sigma_{x^{n-1}+xy^2}$.

On suppose $a_n \neq 0$. Soit $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \Sigma$, et notons par t_0 la valeur de t telle que les conditions (1.3) soient vérifiées. On a $t_0 \neq 0$ puisque l'on suppose $a_n \neq 0$. Alors pour le couple $(x, y) = (t_0, -\frac{a_n}{2t_0})$, $(a_0, ..., a_n)$ satisfait les conditions (1.4). Réciproquement si (x_0, y_0) est une solution de (1.4) alors comme $a_n \neq 0$, nécessairement $y_0 = -\frac{a_n}{2x_0}$ et on peut montrer que pour $t = x_0$, $(a_1, \ldots, a_n)$ est solution de (1.3). Ceci montre l'égalité lorsque $a_n \neq 0$.

Supposons maintenant $a_n = 0$, alors si $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma$ pour $t = t_0$ on a $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \Sigma_{x^{n-1}+xy^2}$ pour $(x, y) = (t_0, 0)$. Réciproquement on suppose $(a_1, \ldots, a_n)$ satisfait (1.4) pour un couple (x_0, y_0), avec $a_n = 0$. On peut supposer $a_{n-1} \neq 0$, sinon pour $t = 0$ $(a_1, \ldots, a_n)$ satisfait (1.3). Donc si $a_{n-1} \neq 0$, alors $y_0 = 0$ et pour $t = x_0$ on montre que $(a_1, \ldots, a_n) \in \Sigma$. Ce qui donne $\Sigma = \Sigma_{x^{n-1}+xy^2}$.

Remarque 1.2.1. *On voit dans l'exemple D_n que le fait que le Pfaffien soit un des générateurs de l'algèbre des polynômes invariants est primordial pour les rapprochements que l'on souhaite mettre en évidence. En effet si l'invariant de plus haut degré etait le déterminant alors il n'y aurait pas de terme au carré dans le discriminant qui définit Σ. Or c'est la présence de ce terme qui permet d'identifier Σ et Σ_{D_n}.*

1.2.2 Version duale du théorème de Knop

Comme nous l'avons vu le théorème de Knop permet de construire une singularité simple à partir d'une variété adjointe. Le type de cette singularité correspond alors au type du sous-diagramme des racines longues de l'algèbre de Lie considérée. Le théorème que nous allons énoncer permet, comme cela vient d'être montré dans les cas A_n et D_n, de construire le discriminant d'une singularité simple à partir du discriminant de la variété adjointe. Là encore la singularité simple, dont on obtient le discriminant, a le même type que le sous-diagramme des racines longues. Avant d'énoncer le théorème nous devons faire quelques rappels sur le quotient de $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe de G.

Le quotient $\mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}//G$ est obtenu comme morphisme dual au morphisme d'inclusion $\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \hookleftarrow \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$. L'algèbre des polynômes G-invariants sur $\mathfrak{g}$ est engendrée par r polynômes G-invariants et algébriquement indépendants, $P_1, \ldots, P_r$. On peut donc identifier l'application quotient avec l'application polynômiale suivante,

$$\Phi : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{C}^r \simeq \mathfrak{g}//G$$
$$\Phi(Z) = (P_1(Z), P_2(Z), \ldots, P_r(Z)).$$

Les P_i ne sont, en général, pas définis de manière unique. Pour un autre choix de générateurs on identifie l'application quotient avec une nouvelle application polynômiale $\Psi : \mathfrak{g} \longmapsto \mathbb{C}^r$. L'existence d'un changement de base au niveau des générateurs implique l'existence d'un difféomorphisme tel que $\mathbb{C}^r_\Phi \simeq_{diff} \mathbb{C}^r_\Psi$. Ainsi les images de Φ sont définies de manière unique à une certaine classe de difféomorphismes près (i.e. les diffeomorphismes qui sont construit à partir d'un changement de bases sur les générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$). Dans le cadre du théorème qui suit, ceci n'est pas une restriction pusique Σ_{Γ^*} n'est définie qu'à difféomorphisme près.

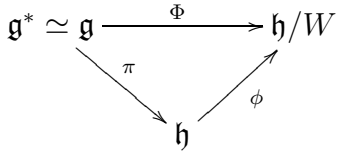
Enfin on ordonne les P_i pour le degré, i.e. $i \leq j \Rightarrow \deg P_i \leq \deg P_j$, et si Γ contient n racines longues, on considère $L = \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^r \simeq \mathfrak{g}//G$ l'espace linéaire correspondant aux $r - n$ premières coordonnées égales à 0.

Théorème 1.2.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de type Γ et soit Γ^* le sous-diagramme des racines longues. Soit $X_G \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ la variété adjointe et $X_G^* \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}^*)$ sa variété duale. En identifiant $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ par la forme de Killing, on considère le cône $\hat{X}_G^* \subset \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$, et son image via l'application quotient $\Phi(\hat{X}_G^*) \subset \mathbb{C}^r$. Alors,*

$$\Phi(\hat{X}_G^*) \cap L = \Sigma_{\Gamma^*} \subset \mathbb{C}^n.$$

Preuve du théorème pour les diagrammes $A-D-E$

Toutes les racines du diagramme Γ étant longues, on a $\Gamma = \Gamma^*$ et donc $L = \mathbb{C}^r$.
Le théorème de Chevalley conduit à l'interprétation de Φ suivante (voir [Kos 1963]) :



où π envoie un élément $x \in \mathfrak{g}$ sur sa partie semi-simple et ϕ est l'application quotient de $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^r$ dans son quotient par le groupe de Weyl W. Une W-orbite dans $\mathfrak{h} \simeq \mathbb{C}^r$ est régulière lorsqu'elle contient le nombre maximal possible de points. On a au sujet de cette dernière application, le résultat suivant attribué à Brieskorn [Br 1970, Sl 1983] :

Théorème 1.2.3. *La variété des orbites irrégulières pour un groupe de réflexion W de type $A-D-E$ agissant sur $\mathbb{C}^r$ est isomorphe à l'hypersurface donnée par le discriminant associé à une singularité simple de même type que W.*

Remarque 1.2.2. *Comme nous l'expliquerons dans la section 1.3.2, ce théorème est une conséquence du théorème de Brieskorn cité en introduction [Sl 1993].*

Par définition $h \in \mathfrak{h}$ vérifie $\alpha(h) = 0$ pour une racine $\alpha \in R$, si et seulement si $W(h)$ n'est pas une orbite régulière. Plus précisément, les orbites irrégulières sont du type $W(h)$ lorsque h appartient à un hyperplan définissant une symétrie $s_\alpha \in W$. I.e. l'ensemble des orbites irrégulières de $\mathfrak{h}$ correspond à la reunion des hyperplans définis par $\alpha = 0$, $\alpha \in R$. Donc $\phi(\cup_{\alpha \in R}\{\alpha = 0\}) = \Sigma_W$, où Σ_W est le discriminant d'une singularité simple de même type que W.

D'après la déscription que le théorème 1.2.1 donne du discriminant, on a $\pi(\hat{X}^*_G) = \cup_{\alpha \in R}\{\alpha = 0\}$. On obtient donc comme conséquence du théorème 1.2.3,

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de type $A-D-E$ et de rang r. Notons $\Sigma_G \subset \mathbb{C}^r$ l'hypersurface donnée par le discriminant associé à une singularité simple du même type que G. Alors en identifiant $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ l'application quotient, $\Phi : \mathfrak{g}^* \longmapsto \mathbb{C}^r$, donne $\Phi(\hat{X}^*_G) \simeq \Sigma_G$.*

Preuve du théorème 1.2.2 pour les diagrammes $B-C-F-G$

Nous allons procéder au cas par cas. Considérons d'abord le type B_r et C_r. Les équations des variétés duales sont respectivement $\Delta(t^r + P_2(x)t^{r-1} + ... + P_{2r}(x)) = 0$ et $\Delta(t^2 + det(x)) = 0$. Ces deux équations définissent une hypersurface dans $\mathbb{C}^r$ via l'application quotient Φ. En notant λ_i les coordonnées de $\mathbb{C}^r$, on obtient les hypersurfaces définies par $\Delta(t^r + \lambda_1 t^{r-1} + ... + \lambda_r) = 0$ et $\Delta(t^2 + \lambda_r) = 0$. Le diagramme B_r a une seule racine courte, on doit alors considérer l'hyperplan $\lambda_1 = 0$ et donc l'équation de

$\Phi(\hat{X}^*_{B_n}) \cap L \subset L$ est donnée par $\Delta(t^r + \lambda_2 t^{r-2} + ... + \lambda_r) = 0$ qui est bien l'équation de $\Sigma_{A_{r-1}}$. Le diagramme C_r a $r-1$ racines courtes, L correspond alors au sous-espace de $\mathbb{C}^r$ défini par $\lambda_1 = ... = \lambda_{r-1} = 0$. Ainsi $\Phi(\hat{X}^*_{C_r}) \cap L \subset L$ est donnée par l'équation $\Delta(t^2 + \lambda_r) = 0$ dans $\mathbb{C}^1_{\lambda_r}$ ce qui correspond bien à Σ_{A_1}.

Le cas G_2 se résume aussi à une astuce comme le cas C_r. En effet l'équation du théorème 1.2.1 nous dit que Δ_{G_2} est un polynôme G_2-invariant, irréductible et de degré 6. Or d'après les tables de [Bou 1968, P-V 1989] nous savons que l'algèbre des polynômes invariants $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_2]^{G_2}$ est engendrée par un polynôme de degré 2 (la forme de Killing) et un polynôme de degré 6. On peut donc choisir (toujours après identification $\mathfrak{g}_2 \simeq \mathfrak{g}_2^*$), pour P_2 le polynôme Δ_{G_2}. Ainsi $\Phi : \mathfrak{g}_2^* \simeq \mathfrak{g}_2 \longmapsto \mathbb{C}^2$ est donnée par $\Phi(x) = (P_1(x), P_2(x))$, et $\Phi(\hat{X}^*_{G_2})$ correspond à la droite de $\mathbb{C}^2$ définie par $\lambda_2 = 0$. Le diagramme G_2 a une seule racine courte, donc $L = \mathbb{C}^1_{\lambda_2}$. Ainsi $\Phi(\hat{X}^*_{G_2}) \cap L = \{0\} \in \mathbb{C}^1$, ce qui encore une fois correspond à Σ_{A_1}.

Pour le cas F_4 il faut faire un peu plus de calcul. Soient P_1, P_2, P_3, P_4, 4 générateurs de $\mathbb{C}[\mathfrak{f}_4]^{F_4}$ tels que $\deg(P_1) = 2$, $\deg(P_2) = 6$, $\deg(P_3) = 8$, $\deg(P_4) = 12$. Comme dans [Fr-Hu 1999] où des calculs similaires ont été fait (les auteurs ont ainsi calculé une expression pour le dual de la quintique invariante de $\mathbb{C}[\mathfrak{e}_6]^{E_6}$), on peut choisir

$$P_1 = \sum_{\alpha \in R} \alpha^2,\ P_2 = \sum_{\alpha \in R} \alpha^6,\ P_3 = \sum_{\alpha \in R} \alpha^8,\ P_4 = \sum_{\alpha \in R} \alpha^{12}.$$

Ce sont bien des polynômes irréductibles et invariants sous le groupe de Weyl et ils ont le degré voulu. Le diagramme F_4 a deux racines courtes, ainsi pour connaître $\Phi(\hat{X}^*_{F_4}) \cap L$ il nous faut calculer $\prod_{\alpha \in R_l} \alpha$ en fonction des P_i puis éliminer tous les facteurs contenant P_1 ou P_2

Lemme 2. *Sous les hypothèses précédentes et en supposant que $P_1 = P_2 = 0$ nous avons $\prod_{\alpha \in R_l} \alpha = mP_3^3 + nP_4^2$, avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$.*

La preuve de ce lemme utilise des calculs fait par Maple avec le package Gröbner. Nous les avons reproduit dans l'annexe A.

Ce lemme implique donc $\Phi(\hat{X}^*_{F_4}) \cap L = \{(\lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^2 | m\lambda_2^3 + n\lambda_3^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$, avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$. Or on a vu avec la figure (1.1.1) que Σ_{A_2} était définie par $27\lambda_3^2 + 4\lambda_2^3 = 0$ donc à un changement de variables près on a bien, $\Phi(\hat{X}^*_{F_4}) \cap L = \Sigma_{A_2}$. Ce qui achève la preuve du théorème. □

1.3 Une nouvelle preuve du théorème de Knop

1.3.1 Preuve

Pour finir nous allons utiliser le théorème 1.2.2 pour redémontrer le théorème de Knop. Comme nous l'avons dit au tout début de ce chapitre, Arnold a montré qu'une singularité

simple $(f,0)$ était définie par μ son nombre de Milnor, le corang de $Hess(f,0)$ et par la partie cubique de sa restriction sur le noyau de $Hess(f,0)$. Notre stratégie est donc de calculer successivement, le nombre de Milnor, la partie quadratique et la restriction de la partie cubique de l'équation qui définit $X \cap H_0$.

Lorsqu'une section hyperplane $X \cap H$ a un nombre fini de points singuliers, on définit son nombre de Milnor comme suit,

$$\mu(X \cap H) = \sum_{x_i \in (X \cap H)_{\text{sing}}} \mu(X \cap H, x_i).$$

Le lien avec les variétés duales est exprimé par le résultat suivant :

Théorème 1.3.1 (Dimca [Di 1986], Parusiǹski [Pa 1991]).
Sous les hypothèses précédentes,

$$\mu(X \cap H) = mult_H X^*$$

où $mult_H X^*$ correspond à la multiplicité de X^* au point H.

Remarque 1.3.1. *Il existe une défintion plus générale de $\mu(X \cap H)$ qui reste valide lorsque les singularités ne sont pas isolées, voir [Pa 1988, Pa 1991]. Le théorème précédent a été aussi généralisé par A. Parusiǹski au cas des sections dont le lieu singulier est non isolé.*

- Calcul de $\mu(X_G \cap H_0)$

Lemme 3. *Soit $X_G \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ une variété adjointe. Soit H_0 un hyperplan défini par un élément régulier nilpotent h_0. Alors $X \cap H_0$ a un unique point singulier.*

Démonstration. Un élément régulier nilpotent h_0 est contenu dans un unique borel $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ (rappelons que pour un choix d'ordre sur les racines on définit une sous-algèbre de borel de $\mathfrak{g}$ en posant $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus (\oplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_\alpha)$). Or le centre du nilradical d'un borel est de dimension 1 ([Hu 1995, Kna 1996]). Donc il existe un unique, à un scalaire près, vecteur v tel que $B([\mathfrak{g}, h_0], v) = 0$ (où $B(,)$ est la forme de Killing). Par invariance de la forme de Killing, on a $B(h_0, [\mathfrak{g}, v]) = 0$. Donc H_0 est tangent à la variété $\overline{G.[v]}$ en un unique point $[v]$. Il reste à voir que v est un vecteur de plus haut poids pour identifier $\overline{G.[v]}$ et X_G. Pour cela on choisit une base de racines simples, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ avec pour vecteurs propres correspondants $Z_{\alpha_1}, ..., Z_{\alpha_n}$, on note $\tilde{\alpha}$ la plus haute racine de $\mathfrak{g}$ et son vecteur propre associé $v_{\tilde{\alpha}}$. L'élément $h_0 = Z_{\alpha_1} + ... + Z_{\alpha_n}$ est régulier nilpotent, et on a bien $B(h_0, [\mathfrak{g}, v_{\tilde{\alpha}}]) = 0$ puisque $[\mathfrak{g}, v_{\tilde{\alpha}}] \subset \mathfrak{b}$. □

Nous noterons $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ l'ensemble des éléments réguliers de $\mathfrak{g}$. C'est à dire que $x \in \mathfrak{r} \Leftrightarrow \dim(\mathfrak{g}^x) = r$.

Lemme 4. *Soit $\mathcal{H} \subset \mathbb{C}^r$ une hypersurface quelconque définie par $f = 0$, soit $\tilde{\mathcal{H}} \subset \mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ l'hypersurface donnée par $f \circ \Phi = 0$. Alors on a pour $x \in \tilde{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{r}$, régulier, $mult_x \tilde{\mathcal{H}} = mult_{\Phi(x)} \mathcal{H}$.*

Démonstration. On suppose $x \in \tilde{\mathcal{H}} \cap \mathfrak{r}$ et on note $y = \Phi(x)$. La règle de la chaîne donne $\partial_i(f \circ \Phi)(x) = \sum_j \partial_j f(y).DP_{i,j}(x)$ où $DP_{i,j} = (\partial_i P_j)_{ij}$. Un théorème de Kostant ([Kos 1963], Theorem 0.1) assure que $DP_{i,j}(x)$ est de rang maximum si et seulement si $x \in \mathfrak{r}$. On en déduit que x est singulier pour $f \circ \Phi$ si et seulement si $y = \Phi(x)$ est singulier pour f. Supposons maintenant que y soit de multiplicité k, en prenant les dérivés successives de $f \circ \Phi$ on a bien que x est aussi de multiplicité k. □

Lemme 5. *Soit $\hat{X}^*_G \subset \mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ et soit $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{N}(\mathfrak{g}^*)$ le nilcône de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie simple de type Γ dont le diagramme posséde n racines longues alors $mult_{\mathfrak{N}(\mathfrak{g}^*)_{\text{lisse}}} \hat{X}^*_G = n$.*

Remarque 1.3.2. *On a bien $\mathfrak{N}(\mathfrak{g}^*) \subset \hat{X}^*_G$ puisque par définition si $x \in \mathfrak{N}(\mathfrak{g}^*)$ alors x et nilpotent et donc sa partie semi-simple x_s est nulle. Il vient alors $\Delta(x) = \prod_{\alpha \in R_l} \alpha(0) = 0$.*

Démonstration. Il suffit de rappeler que $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})$ est défini par $P_1 = ... = P_r = 0$ et que de plus $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})_{\text{lisse}} = \mathfrak{N}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{r}$. On applique le lemme précédent au point $(0, 0, ..., 0) = \Phi(\mathfrak{N}(\mathfrak{g})) \in \Phi(\hat{X}^*_G) = \mathcal{H}$. Lorsque G est de type $A-D-E$, alors $\Phi(\hat{X}^*_G) = \Sigma_G$ et Σ_G étant le discriminant d'une singularité simple telle que $\mu = n$, on en déduit que $mult_{(0,...,0)} \Sigma_G = n$. Lorsque G est de type $B-C-F-G$ on a aussi $mult_{(0,...,0)} \mathcal{H} = n$. En effet, $\mathcal{H}$ est donnée par un polynôme en $\lambda_1, ..., \lambda_r$ et Σ_{Γ^*} est la section de $\mathcal{H}$ obtenue en prenant $\lambda_1 = ... = \lambda_{r-n} = 0$. Or les λ_i pour $i \leq r-n$ viennent de polynômes invariants de degrés inférieurs aux polynômes P_j pour $j > r-n$. Le polynôme Δ_{X_G} étant homogène, les monômes faisant intervenir des λ_i avec $i \leq r-n$ seront toujours de degré supérieurs aux monômes ne faisant intervenir que des λ_j pour $j > r-n$ (de tels monômes existent pour les polynômes que l'on considère ici). Ainsi pour un tel polynôme, on ne change pas la multiplicité de l'origine en imposant $\lambda_1 = \ldots \lambda_{r-n} = 0$. Donc $mult_{(0,...,0)} \mathcal{H} = mult_{(0,...,0)} \Sigma_{\Gamma^*} = n$ □

Rappelons que si h_0 est un élément régulier nilpotent, alors $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})_{\text{lisse}} = G.h_0$. En combinant les lemmes ci-dessus on obtient grâce au théorème 1.3.1,

$$\mu(X \cap H_0, x) = n.$$

Remarque 1.3.3. *Ce calcul de $\mu(X \cap H_0, x)$ explique pourquoi H_0 est le "bon" hyperplan dans la construction de Knop. C'est en effet l'élément régulier dont l'orbite est envoyée sur le point le plus singulier de Σ_G.*

- Calcul de la partie quadratique de $X \cap H_0$

Considérons $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective munie de coordonnées locales au point $x \in X$, telles que X soit donnée par

$(x_1, x_2, ..., x_n, f^{n+1}(x_1, ..., x_n), ..., f^{n+a}(x_1, ..., x_n))$, avec $x = (0, ..., 0)$.

On a alors $T_x X = \{\partial_{x_i}\}$ et $N_x^* X = \{df^\mu\}$, et on définit la seconde forme fondamentale de X en x en coordonnées par,

$$II_{X,x} = \frac{\partial^2 f^\mu}{\partial_i \partial_j}|_x dx_i \circ dx_j \otimes \partial_{f^\mu} \in S^2 T_x^* X \otimes N_x X.$$

On envisagera souvent par la suite $II_{X,x}$ comme l'application,

$$II_{X,x} : N_x^* X \longmapsto S^2 T_x^* X$$
$$II_{X,x}(H) = Q_x^H.$$

Ici Q_x^H est la partie quadratique de $X \cap H$ au point x et H représente à la fois un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ ainsi que la forme linéaire correspondante. Le rang de $II_{X,x}(H_0)$ est donc le premier invariant de $X \cap H_0$ qu'il nous faut calculer. Pour cela on utilise la filtration par les espaces osculateurs,

$$\hat{x} \subset \hat{T}_x X \subset \hat{T}_x^{(2)} X \subset ... \subset \hat{T}_x^{(k)} X \subset \hat{T}_x^{(k+1)} X = V.$$

Lorsqu'on a une représentation de groupe (V_λ, G) et que $X = G/P = G.[v_\lambda]$, cette filtration s'explicite à l'aide de l'identification suivante,

$$\hat{T}_{v_\lambda}^{(i)} X = \mathfrak{g}^{(i)} v_\lambda$$

où $\mathfrak{g}^{(i)} = \mathfrak{g}^{\otimes i} / \{x \otimes y + y \otimes x - [x, y] | x, y \in \mathfrak{g}\}$ pour $i \geq 2$ et $\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}$.

Ainsi $II_{G/P, v_\lambda}(N_{v_\lambda}^* G/P) = \mathfrak{g}^{(2)} v_\lambda \bmod \mathfrak{g} v_\lambda$. Dans notre situation où $X = X_G$ est la variété adjointe, notons $\tilde{\alpha}$ la plus haute racine, on a

$$II_{X_G, v_{\tilde{\alpha}}}(H_0)(Z_1 v_{\tilde{\alpha}}, Z_2 v_{\tilde{\alpha}}) = B(h_0, Z_1 Z_2 v_{\tilde{\alpha}}).$$

Supposons que $Z_1 v_{\tilde{\alpha}} = [Z_1, v_{\tilde{\alpha}}]$ soit une direction dégénérée pour $Q_{v_{\tilde{\alpha}}}^{H_0} = II_{X_G, v_{\tilde{\alpha}}}(H_0)$, alors on doit avoir pour tout $Z \in \mathfrak{g}$,

$$B(h_0, [Z, [Z_1, v_{\tilde{\alpha}}]]) = 0$$

ce qui par invariance de la forme de Killing revient à dire que $\forall\ Z \in \mathfrak{g}$,

$$B(Z, [h_0, [Z_1, v_{\tilde{\alpha}}]]) = 0.$$

Mais la forme de Killing est non dégénérée donc l'égalité précédente implique

$$[h_0, [Z_1, v_{\tilde{\alpha}}]] = 0.$$

On en déduit une caractérisation des directions dégénérées de $Q_{v_{\tilde{\alpha}}}^{H_0}$,

$$\ker(Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}) = \mathfrak{g}^{h_0} \cap \hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} X_G.$$

En adoptant les notations [Bou 1968] pour les systèmes de racines des algèbres de Lie simples, on prouve

Lemme 6. *Si* $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ *alors*
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_1+\omega_n}}) =< (Z_{-\alpha_1} - Z_{-\alpha_n})v_{\omega_1+\omega_n} >$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n+1}$ *alors*
$\ker Q^{H_0}_{v_{\omega_2}} =< (Z_{\epsilon_1} - Z_{\epsilon_2})v_{\omega_2} >$ *avec* $\epsilon_1 = -\alpha_2 - \alpha_1$ *et* $\epsilon_2 = -\alpha_2 - \alpha_3$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}_{2n}$ *alors*
$\ker Q^{H_0} = \{0\}$

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{2n}$ *alors*
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_2}}) =< (Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})v_{\omega_2}, (Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4})v_{\omega_2} >$, *avec* $\lambda_1 = -\alpha_2 - \alpha_1$, $\lambda_2 = -\alpha_2 - \alpha_3$, $\lambda_3 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - ... - \alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}$, $\lambda_4 = -\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - ... - \alpha_{n-2} - \alpha_n$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_6$ *alors*
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_2}}) =< (Z_{\mu_1} - Z_{\mu_2})v_{\omega_2}, (Z_{\mu_3} + Z_{\mu_4} - Z_{\mu_5})v_{\omega_2} >$, *avec* $\mu_1 = -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_3$, $\mu_2 = -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5$, $\mu_3 = -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_1$, $\mu_4 = -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6$ *et* $\mu_5 = -\alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_3 - \alpha_5$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_7$ *alors*
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_1}}) =< (Z_{\nu_1} - Z_{\nu_2})v_{\omega_1}, (Z_{\nu_3} + Z_{\nu_4} - Z_{\nu_5})v_{\omega_1} >$, *avec* $\nu_1 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5$, $\nu_2 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_2$, $\nu_3 = -\alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7$, $\nu_4 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 4\alpha_4 - \alpha_5$ *et* $\nu_5 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}_8$ *alors*
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_8}}) =< (Z_{\rho_1} - Z_{\rho_2})v_{\omega_8}, (Z_{\rho_3} + Z_{\rho_4} - Z_{\rho_5})v_{\omega_8} >$, *avec* $\rho_1 = -\alpha_8 - \alpha_7 - \alpha_6 - \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_3$, $\rho_2 = -\alpha_8 - \alpha_7 - \alpha_6 - \alpha_5 - \alpha_4 - \alpha_2$, $\rho_3 = -\alpha_8 - \alpha_7 - \alpha_6 - \alpha_5 - 2\alpha_4 - \alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_1$, $\rho_4 = -\alpha_8 - \alpha_7 - 2\alpha_6 - 2\alpha_5 - 2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3$, $\rho_5 = -\alpha_8 - \alpha_7 - \alpha_6 - 2\alpha_5 - 2\alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_1$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{f}_4$,
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_1}}) =< (Z_{\delta_1} - Z_{\delta_2})v_{\omega_1} >$, *avec* $\delta_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3$ *et* $\delta_2 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4$.

Si $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2$,
$\ker(Q^{H_0}_{v_{\omega_2}}) = \{0\}$.

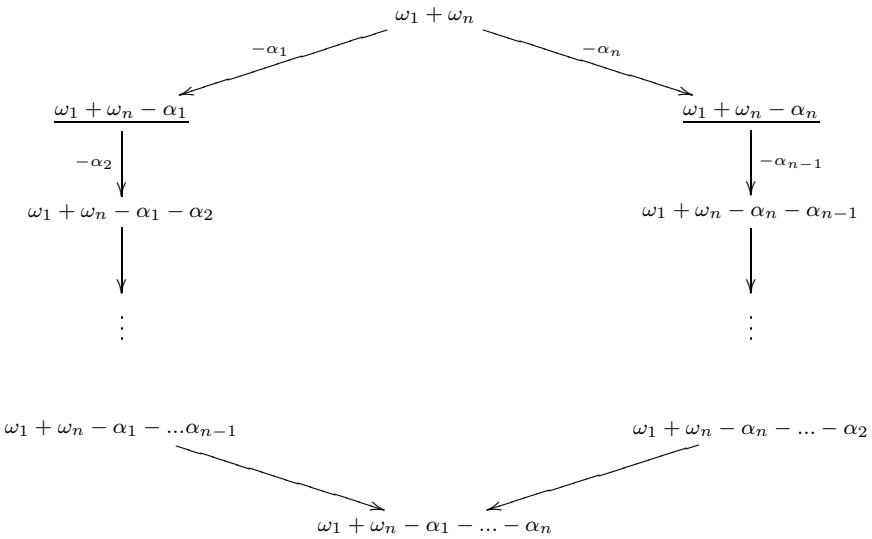
Démonstration. On peut décrire l'espace tangent $\hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} X$, comme l'espace engendré par les vecteurs de la forme $[Z_\lambda, v_{\tilde{\alpha}}]$, où λ est une racine négative, somme de racines simples négatives $\lambda = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$. En reprenant les termes de [Fu-Ha 1991], nous dirons que la

représentation adjointe agit par "translation", puisque le vecteur $[Z_\lambda, v_{\tilde{\alpha}}]$ a pour poids $\lambda + \tilde{\alpha}$. Appliquons maintenant $h_0 = Z_{\alpha_1} + \cdots + Z_{\alpha_n}$,

$$[h_0, [Z_\lambda, v_{\tilde{\alpha}}]] = \sum_{i=1}^{n} [Z_{\alpha_i}, [Z_\lambda, v_{\tilde{\alpha}}]].$$

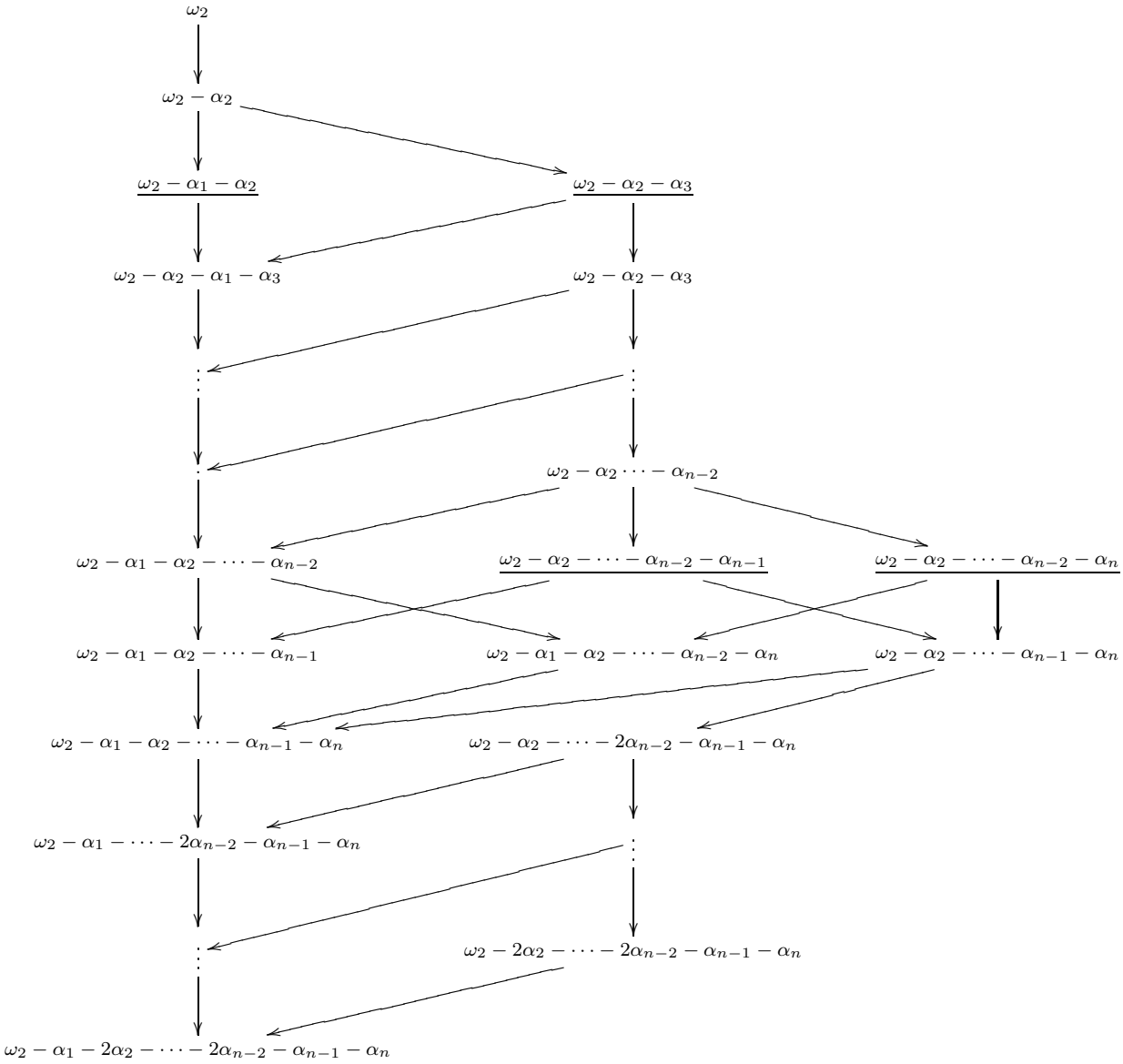
Chaque vecteur $[Z_{\alpha_i}, [Z_\lambda, v_{\tilde{\alpha}}]]$ a pour poids $\tilde{\alpha} - (m_i - 1)\alpha_i - \sum_{j\neq i, j=1}^{n} m_i \alpha_i$. Représentons les vecteurs de $\hat{T}_{\tilde{\alpha}} X$ par les poids correspondants. On commence par le poids $\tilde{\alpha}$, associé au vecteur $v_{\tilde{\alpha}}$, et on translate successivement par les $-\alpha_i$ (ceci revient à regarder le réseau des poids de la représentation de $H \subset P$, partie semi-simple du groupe parabolique P qui définit $X = G/P$, agissant sur $T_{v_{\tilde{\alpha}}} X$). On obtient ainsi une chaîne de poids à partir de laquelle on peut lire, à constante de structure près, l'action de h_0 sur les vecteurs correspondants. En effet pour connaître l'action de h_0 il suffit maintenant de translater par α_i. On remarque que si plusieurs poids sont translatés par h_0 sur un même, on peut former des directions dégénérées :

Prenons pour commencer le cas $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$, alors comme le montre la chaîne de poids, les poids $\omega_1 + \omega_n - \alpha_1$ et $\omega_1 + \omega_n - \alpha_n$ sont tous les deux envoyés sur $\omega_1 + \omega_n$ lorsqu'on translate par les α_i. Les vecteurs correspondants $[X_{-\alpha_1}, v_{\omega_1+\omega_n}]$ et $[X_{-\alpha_n}, v_{\omega_1+\omega_n}]$ sont dans l'espace tangent et vérifient tous les deux, $[h_0, [X_{-\alpha_1}, v_{\omega_1+\omega_n}]] = v_{\omega_1+\omega_n}$ et $[h_0, [X_{-\alpha_n}, v_{\omega_1+\omega_n}]] = v_{\omega_1+\omega_n}$. On en déduit que $[X_{-\alpha_1} - X_{-\alpha_n}, v_{\omega_1+\omega_n}]$ est bien une direction dégénérée pour $Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}$. La chaîne des poids montre de même que c'est le seul vecteur qui vérifie cette propriété.



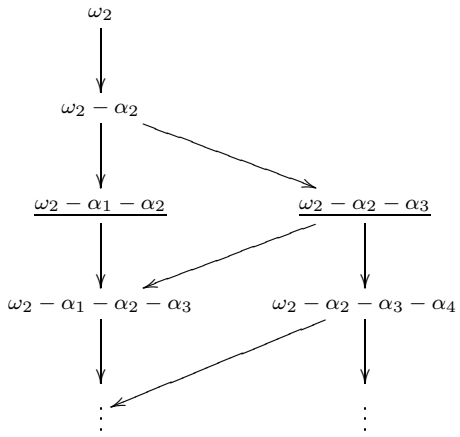
(on souligne les poids qui sont translatés sur le même poids).

Pour le cas D_n la chaîne des poids qui correspondent aux vecteurs $v \in \hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} X_{SO_{2n}}$ est la suivante,



Ce qui nous permet de calculer les vecteurs poids qui vérifient la propriété voulue.

Pour B_n nous avons la chaîne suivante,



Pour C_n et G_2 on sait que le nombre de Milnor $\mu(X_G \cap h_0) = 1$ donc nécessairement la quadrique est de rang maximum.

Enfin on a représenté les chaînes correspondantes aux cas $\mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8$ dans l'annexe B. □

• Calcul du terme cubique de $X_G \cap H_0$ restreint à $\ker Q^{H_0}$

Pour achever notre preuve du théorème de Knop il reste à calculer le terme cubique de $(X_G \cap H_0)_{|\ker Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}}$. Ce calcul se fait directement grâce à la donnée des directions dégénérées obtenues au lemme précédent. Avant de calculer remarquons que dans le lemme les poids des vecteurs en jeu sont tels que $Z_{\lambda_i} Z_{\lambda_i} v_{\omega_2} = 0$, $Z_{\mu_i} Z_{\mu_i} v_{\omega_2} = 0$, $Z_{\nu_i} Z_{\nu_i} v_{\omega_1} = 0$ et $Z_{\rho_i} Z_{\rho_i} v_{\omega_8} = 0$ d'une part et d'autre part $[Z_{\lambda_i}, Z_{\lambda_j}] = 0$, $[Z_{\nu_i}, Z_{\nu_j}] = 0$, $[Z_{\mu_i}, Z_{\mu_j}] = 0$, $[Z_{\rho_i}, Z_{\rho_j}] = 0$.

Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_{2n}$, on a $(Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4}) v_{\omega_2} = -2 Z_{\lambda_1} Z_{\lambda_3} Z_{\lambda_4} v_{\omega_2} + 2 Z_{\lambda_2} Z_{\lambda_3} Z_{\lambda_4} v_{\omega_2}$. Or $\omega_2 + \lambda_4 + \lambda_3 + \lambda_2$ n'est pas une racine et $\omega_2 + \lambda_4 + \lambda_3 + \lambda_1 = -\alpha_2$ avec à chaque étape $\omega_2 + \lambda_4 = \omega_2 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-2} - \alpha_n$ est bien une racine et $\omega_2 + \lambda_4 + \lambda_3 = \omega_2 - 2\alpha_2 - \cdots - 2\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1} - \alpha_n$ est encore une racine, donc $(Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4}) v_{\omega_2} = 2 Z_{-\alpha_2}$, d'où $B(h_0, (Z_{\lambda_1} - Z_{\lambda_2})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4})(Z_{\lambda_3} - Z_{\lambda_4}) v_{\omega_2}) \neq 0$. Il y a donc un terme cubique de type xy^2 ce qui prouve que $(X_{SO_{2n}} \cap H_0, v_{\omega_2})$ est bien de type D_n.

Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_6$, on a $(Z_{\mu_3} + Z_{\mu_4} - Z_{\mu_5})^3 v_{\omega_2} = -6 Z_{\mu_3} Z_{\mu_4} Z_{\mu_5} v_{\omega_2}$. Or $\omega_2 + \mu_3 + \mu_4 + \mu_5 = -\alpha_2$, donc $B(h_0, (Z_{\mu_3} + Z_{\mu_4} - Z_{\mu_5})^3 v_{\omega_2}) \neq 0$ (on vérifie directement sur les diagrammes de l'annexe B que $\omega_2 + \mu_5$ et $\omega_2 + \mu_5 + \mu_4$ sont bien des racines de $\mathfrak{e}_6$). Il y a donc bien un terme cubique de type x^3 ce qui prouve que $(X_{E_6} \cap H_0, v_{\omega_2})$ est bien de type E_6 puisque $\mu(X_{E_6} \cap H_0, v_{\omega_2}) = 6$.

Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_7$, on a $(Z_{\nu_3}+Z_{\nu_4}-Z_{\nu_5})^3 v_{\omega_1} = -6Z_{\nu_3}Z_{\nu_4}Z_{\nu_5}v_{\omega_1}$. Or $\omega_1+\nu_3+\nu_4+\nu_5 = -\alpha_1$ (comme précedemment on vérife que $\omega_1+\nu_5$ et $\omega_1+\nu_5+\nu_4$ sont bien des racines), donc $B(h_0,(Z_{\nu_3}+Z_{\nu_4}-Z_{\nu_5})^3 v_{\omega_1}) \neq 0$. Comme $\mu(X_{E_7}\cap H_0, v_{\omega_1}) = 7$, la présence d'un terme cubique de type x^3 implique alors que $(X_{E_7}\cap H_0, v_{\omega_1}) \sim E_7$.

Pour l'algèbre de Lie $\mathfrak{e}_8$, on a $(Z_{\rho_3}+Z_{\rho_4}-Z_{\rho_5})^3 v_{\omega_8} = -6Z_{\rho_3}Z_{\rho_4}Z_{\rho_5}v_{\omega_8}$. Or $\omega_8+\rho_3+\rho_4+\rho_5 = -\alpha_8$ (là aussi on vérifie à partir des diagrammes de l'annexe B que $\omega_8+\rho_5$ et $\omega_8+\rho_5+\rho_4$ sont bien des racines), donc $B(h_0,(Z_{\rho_3}+Z_{\rho_4}-Z_{\rho_5})^3 v_{\omega_8}) \neq 0$. La présence d'un terme cubique de type x^3 implique encore une fois $(X_{E_8}\cap H_0, v_{\omega_8}) \sim E_8$ ($\mu(X_{E_8}\cap H_0, v_{\omega_8}) = 8$).

1.3.2 Singularités & algèbres de Lie simples

Cette nouvelle preuve du théorème de Knop ne satisfait pas nos ambitions initiales puisque l'on ne peut pas se passer de l'argument au cas par cas (sauf pour le calcul de μ). Par contre, pour conclure notre travail, nous pouvons formuler des observations sur les possibles rapprochements entre la construction de Brieskorn et la construction de Knop, et plus généralement entre singularités simples et algèbres de Lie simples.

L'application de Kostant.
Dans notre version duale du théorème de Knop, nous utilisons l'application quotient de Kostant, $\Phi : \mathfrak{g} \longmapsto \mathfrak{g}//G$. Cette application n'apparaît pas dans la preuve de Knop. Cependant elle apparaît dans les travaux de Brieskorn et Slodowy. En effet, l'application $\chi : G \longmapsto T/W$, dans la version intrinsèque du théorème de Brieskorn, est l'application correspondant à Φ au niveau des groupes de Lie. Ainsi le théorème de Brieskorn dit au niveau de l'algèbre de Lie, que si S est un section génériquement transverse à l'orbite sous-régulière, de dimension $n+2$ dans $\mathfrak{g}$, alors,

1) $\mathfrak{N}(\mathfrak{g})\cap S$ est une surface de Klein de même type que $\mathfrak{g}$

2) $\Phi_{|S} : S \longmapsto \mathfrak{h}/W = \mathfrak{g}//G$ réalise une déformation miniverselle de $\Phi_{|S}^{-1}(0)$.

En particulier l'image par Φ du lieu de ramification de $\Phi_{|S}$ est le discriminant, Σ_G, d'une singularité simple de même type que G. Mais l'application quotient, restreinte à S, se factorise par $\mathfrak{h}$, et par généricité de S, $\pi : S \longmapsto \mathfrak{h}$ est un morphisme surjectif (la généricité de S assure que toute orbite régulière de $\mathfrak{g}$ intersecte S en au moins un point). On voit donc que le théorème 1.2.3 est un corollaire du théorème de Brieskorn.

En particulier on peut donc établir que le théorème de Brieskorn implique la version duale du théorème de Knop pour les diagrammes $A-D-E$.

Question 1. *Le théorème de Brieskorn (extrinsèque), traite de sections de l'orbite nilpotente de plus grande dimension $Y = \mathbb{P}(\mathfrak{N}(\mathfrak{g}))$, alors que le théorème de Knop concerne*

les sections de l'orbite nilpotente de dimension minimale. Existe-t-il une dualité entre ces deux constructions ? Plus précisément, peut-on montrer, via l'application de Kostant, que ces théorèmes sont équivalents ?

Avec notre version duale du théorème de Knop, nous donnons des arguments en faveur d'une implication : le théorème de Brieskorn $\Rightarrow$ la version duale du théorème de Knop. Enfin la version duale, modulo quelques calculs, permet de retrouver le théorème de Knop.

Singularités simples et polynômes de degré trois.
La construction de Brieskorn permet de construire des surfaces de Klein. Ce sont des singularités simples exprimées par des polynômes à trois variables. Par contre en prenant des sections hyperplanes, Knop obtient des hypersurfaces de dimensions bien supérieures à 2. Les singularités simples du théorème de Knop sont des polynômes à $2n-1$ variables pour le type A_n, $4n-7$ variables pour le type D_n, 21 variables pour le type E_6, 33 variables pour le type E_7 et enfin 57 variables pour le type E_8. On peut montrer en paramétrisant les variétés adjointes, par exemple avec l'algorithme adjoint de [L-M 2002], que les hypersurfaces de Knop sont données par des polynômes de degré 3. Ainsi ces hypersurfaces qui sont loin d'avoir le nombre minimal de variables, ont par contre le degré minimum possible pour définir une singularité simple.

Question 2. *Sous l'hypothèse d'une équivalence claire entre les constructions de Brieskorn et Knop, peut-on expliquer la correspondance entre les surfaces de Klein, et les polynômes de degré trois représentants de singularités simples dans le théorème de Knop ?*

Formule de dimension.
Enfin notre calcul des directions dégénérées pour notre preuve du théorème de Knop, permet d'établir un lien original entre le théorème de Knop et les récents travaux de J. Landsberg et L. Manivel. Dans [L-M 2004], les auteurs présentent une formule universelle pour le calcul de la dimension des puissances de Cartan de la représentation adjointe des algèbres de Lie semi-simples. Un de leur argument (Proposition 4.1) passe par l'analyse de chaînes de poids qui correspondent aux chaînes de poids considérées dans notre preuve.

Chapitre 2

Sing (X^*) & Sing $(X \cap H)$

On cherche maintenant à comprendre comment la géométrie de X peut déterminer l'existence de sections singulières d'un type donné. On considère X une variété projective lisse et on suppose le plus souvent $\delta_{X^*} = 0$. Les sections singulières auxquelles on s'intéresse, sont celles ayant des singularités isolées. Comme lors de notre étude des résultats de Knop, l'accent est mis sur le rôle joué par la variété duale de X.

Dans un premier temps, nous établissons des correspondances élémentaires entre l'existence de certaines singularités pour les sections linéaires $X \cap H$ et la dimension de composantes de X^*_{sing}. Comme application nous donnons la dimension des composantes du lieu singulier de X^*_G comme conséquence des résultats de Knop.

Dans un second temps, nous introduisons des variétés auxiliaires à X, variété des tangentes et variété des sécantes, que nous utilisons pour étudier X^*_{sing}. Nous obtenons alors des conditions suffisantes à l'existence de certaines strates de X^* et par conséquent de certaines singularités de $X \cap H$. Nous concluons ce chapitre en regardant de plus près la dimension du dual de la variété des sécantes $\sigma(X)^*$ (dont nous rappellerons la définition), on ne suppose plus alors $\delta_{X^*} = 0$. Cette dernière remarque prépare le chapitre 3.

2.1 Généralités et premiers exemples

Exemple 2.1.1. *Soit $X = \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}(V^* \otimes V)$, la variété des matrices de rang 1. Alors X^* est l' hypersurface définie par $\det = 0$. L'hypersurface des matrices de rang n admet pour lieu singulier l'ensemble des matrices de rang $n-1$. Cette sous-variété de X^* est donnée par l'annulation des $(n-1) \times (n-1)$ mineurs. On a alors $codim_{X^*} X^*_{\text{sing}} \geq 2$. Ce qui signifie que cette variété présente une "pathologie" par rapport au comportement générique décrit dans l'introduction.*

Voyons comment cela se traduit en termes de sections hyperplanes. Soit $H \in X^*$, alors si H est un point lisse on sait que $X \cap H$ a un unique point singulier de type A_1. Supposons

que $H \in X^*_{\text{sing}}$*, alors* H *est une matrice de rang au plus* $n-1$*. Il existe donc une base* $e_1, \ldots, e_{n+1}$ *de* V *telle que* $H = e^3 \otimes e_3 + \ldots + e^{n+1} \otimes e_{n+1}$*. Il est clair que* H *est tangent le long de la droite* $e^1 \otimes (se_1 + te_2)$*. Ainsi la variété* X *admet pour seule section singulière de type isolé les sections* $X \cap H$ *ayant un unique point de tangence de type* A_1*.*

Pour étudier X^*_{sing} nous reprenons la décomposition du lieu singulier utilisée dans [W-Z 1996] pour les hyperdéterminants. Une définition valide pour toute variété X lisse est :

Définition 2.1.1. *Soit* $X \subset \mathbb{P}(V)$ *une variété projective lisse telle que* $\delta_{X^*} = 0$*. On définit les composantes* node *et* cusp *de* X^*_{sing} *de la manière suivante,*

$X^*_{\text{node}} := \overline{\{H \in X^* | \exists\ (x,y) \in X \times X, x \neq y, \tilde{T}_x X \subset H, \tilde{T}_y X \subset H\}}$
et
$X^*_{\text{cusp}} := \{H \in X^* | \exists x \in X, \tilde{T}_x X \subset H, rang(II_{X,x}(H)) < n\}$

Dans [W-Z 1996] les auteurs montrent pour les hyperdéterminants que l'union de ces deux composantes est bien le lieu singulier de X^* (égalité (0.4) dans [W-Z 1996]). Ce résultat se généralise aisément dans notre contexte :

Proposition 2.1.1. *Soit* X *une variété projective lisse, telle que* $\delta_{X^*} = 0$*. Alors,*

$$X^*_{\text{sing}} = X^*_{\text{node}} \cup X^*_{\text{cusp}}$$

Démonstration. X^* est une hypersurface, donc les points lisses de X^* sont caractérisés par la propriété suivante :

$H \in X^*_{\text{lisse}} \Leftrightarrow$ la section hyperplane $X \cap H$ a un unique point singulier de type A_1.

Donc H n'est pas un point lisse si et seulement si $X \cap H$ a plusieurs points singuliers et/ou $X \cap H$ admet une singularité qui n'est pas de type A_1. La première condition équivaut à $H \in X^*_{\text{node}}$, la seconde à $H \in X^*_{\text{cusp}}$. □

Afin d'énoncer des résultats faisant intervenir la géométrie globale de X, il est préférable de se restreindre aux points généraux de la variété.

Définition 2.1.2. *Soit* $X \subset \mathbb{P}(V)$ *une variété projective. On dira que* $x \in X$ *est un point général de* X *si tous les invariants différentiels à valeur entière sont localement constants dans un voisinage* U *de* x*. On note* $X_{\text{général}}$ *les points généraux de* X*.*

Remarque 2.1.1. *Le rang d'une quadrique générique de* $|II_{X,x}|$ *est un invariant différentiel à valeur entière, de même que la dimension de* $|II_{X,x}|$*.*

Exemple 2.1.2. *Considérons la courbe plane* $y = x^3$*. Alors tous les points de la courbe sont des points généraux excepté l'origine qui est un point d'inflexion (la seconde forme fondamentale s'annule en ce point).*

Les points généraux de X forment un ouvert de Zarisky non-vide de X.

On peut donc reformuler les définitions ci-dessus :

Définition 2.1.3. *Soit $X^n \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n+a}$ une variété projective lisse telle que $\delta_{X^*} = 0$. On définit les composantes* g-node *et* g-cusp *de X^*_{sing} de la manière suivante :*

$$X^*_{\text{g-node}} := \overline{\{H \in X^* | \exists\ (x,y) \in X_{\text{général}} \times X_{\text{général}}, \tilde{T}_x X \subset H, \tilde{T}_y X \subset H\}}$$

et

$$X^*_{\text{g-cusp}} := \overline{\{H \in X^* | \exists\ x \in X_{\text{général}}, \tilde{T}_x X \subset H, rang(II_{X,x}(H)) < n\}}$$

Remarque 2.1.2. *Bien entendu pour les variétés homogènes on aura $X^*_{\text{g-node}} = X^*_{\text{node}}$ et $X^*_{\text{g-cusp}} = X^*_{\text{cusp}}$.*

Les deux propositions suivantes caractérisent la dimension de $X^*_{\text{g-node}}$ et $X^*_{\text{g-cusp}}$ en fonctions des sections hyperplanes de X.

Proposition 2.1.2. *Soit $X^n \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n+a}$ une variété projective lisse telle que $\delta_{X^*} = 0$. Supposons $a > n+1$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) il existe un hyperplan H tel que $(X_{\text{général}} \cap H)_{\text{sing}}$ soit une collection finie de points telle qu'il existe $x \neq y$ satisfaisant $x, y \in (X_{\text{général}} \cap H)_{\text{sing}}$.

b) $X^*_{\text{g-node}}$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

Proposition 2.1.3. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse telle que $\delta_{X^*} = 0$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) il existe un hyperplan H, tel que $(X_{\text{général}} \cap H)$ soit une collection finie de points et il existe $x \in (X_{\text{général}} \cap H)_{\text{sing}}$ avec $(X \cap H, x) \not\sim A_1$.

b) $X^*_{\text{g-cusp}}$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

Démonstration. Pour la composante node, on considère la variété d'incidence suivante

$$\mathfrak{I}_{\text{g-node}} := \overline{\{(x,y,H) | x \in X_{\text{général}}, y \in X_{\text{général}}, H \in \mathbb{P}V^*, \tilde{T}_x X \subseteq H, \tilde{T}_y X \subseteq H\}}$$

$$\begin{array}{ccc} & \rho_1 \swarrow \quad \searrow \rho_2 & \\ X & & \mathbb{P}V^* \end{array}$$

Calculons la dimension de $\mathfrak{I}_{\text{g-node}}$. On a $(x,y,H) \in \mathfrak{I}_{\text{g-node}}$ si et seulement si $H \in \mathbb{P}(N^*_x X) \cap \mathbb{P}(N^*_y X)$. Or $\dim(\mathbb{P}(N^*_x X) \cap \mathbb{P}(N^*_y X)) \geq 2a - 2 - (n+a) = a + n - 2$. Donc sous l'hypothèse $a > n+1$ on obtient que $\dim(\mathfrak{I}_{\text{g-node}}) \geq 2n + a - n - 2 = n + a - 2$. Si $\dim(\mathfrak{I}_{\text{g-node}}) > n + a - 2$ alors les assertions a) et b) sont simultanément non vérifiées. En effet on factorise ρ_2 en projetant sur la variété conormale, $\tilde{\rho} : \mathfrak{I}_{\text{g-node}} \longmapsto C(X)$ avec $\tilde{\rho}(x,y,H) = (x,H)$. L'image de $\tilde{\rho}(\mathfrak{I}_{\text{g-node}})$ est alors de dimension au plus $n + a - 2$ et donc la fibre de cette projection est de dimension strictement positive. On projette maintenant par $\rho : C(X) \longmapsto X^*$. Les points x et y jouant des rôles symétriques la fibre de cette projection est encore de dimension strictement positive (contredisant a)), ainsi

$\rho(\tilde{\rho}(\mathfrak{I}_{g-node})) = \rho_2(\mathfrak{I}_{g-node}) = X^*_{\text{g-node}}$ est de codimension au moins 2 dans X^* (contredisant b)). Supposons maintenant que $\dim(\mathfrak{I}_{\text{g-node}}) = n + a - 2$. Alors $\dim(\rho_2(\mathfrak{I}_{\text{g-node}})) = \dim X^*_{\text{g-node}} = n + a - 2$ (condition b)) si et seulement si la fibre de ρ_2 est finie (condition a)).

Pour la composante cusp on considère,

$$\mathfrak{I}_{\text{g-cusp}} := \overline{\{(x,H) | (x,H) \in X_{\text{général}} \times \mathbb{P}V^*, \tilde{T}_x X \subseteq H, \text{rang}(II_{X,x}(H)) < n\}}$$

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1 \swarrow \quad \searrow \pi_2 & \\ X & & \mathbb{P}V^* \end{array}$$

Soit $x \in X$ un point général, la fibre s'interprète de la façon suivante : $\pi_1^{-1}(x) = \mathbb{P}(N_x^* X) \cap II^{-1}_{X,x}(det^{-1}(0))$. La dimension de la projectivisation de l'espace conormal en x étant $a - 1$, on obtient $\dim(\pi_1^{-1}(x)) = a - 2$. La dimension de la variété $\mathfrak{I}_{\text{g-cusp}}$ est donc $n + a - 2$. Regardons la dimension de $X^*_{\text{g-cusp}} (= \pi_2(\mathfrak{I}_{\text{g-cusp}}))$. La condition $a) \Rightarrow \exists\, H \in (X^*_{\text{g-cusp}})_{\text{général}}$ tel que $\dim(\pi_2^{-1}(H)) = 0$ et donc $\dim(X^*_{\text{g-cusp}}) = n + a - 2$ i.e. b) est vérifiée. Réciproquement si $X^*_{\text{g-cusp}}$ est une variété de dimension $n + a - 2$, la fibre doit être de dimension 0 ce qui implique a). □

L'exemple suivant, comme nous le verrons au chapitre 3, peut se traiter de façon plus unifiée mais nous l'abordons ici pour illustrer les propositions 2.1.2 et 2.1.3.

Exemple 2.1.3. *Soit $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^n$ un espace projectif et considérons $X = v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}(S^2 V^{n+1})$ son second plongement de Veronese. Son dual $v_2(X)^*$ est une hypersurface qui correspond après déshomogénisation au discriminant classique de l'ensemble des polynômes de degré 2 en n variables. L'application de Veronese nous donne une paramétrisation de X :*

$$v_2 : \mathbb{P}^n \longmapsto \mathbb{P}^N$$
$$[x_0, x_1, \ldots, x_n] \longmapsto [\ldots x^I \ldots]$$

où x^I représente à tour de rôle tous les monômes de degré 2 en les variables $x_0, ..., x_n$.

Une section hyperplane de X correspond donc à la donnée d'un polynôme de degré 2. Or un tel polynôme est soit lisse, soit possède un unique point singulier de type A_1, soit admet un lieu singulier non isolé. Donc aucune des propriétés a) des deux propositions précédentes ne peut être vérifiée. On en conclut que X^*_{sing} est une sous-variété de codimension au moins 2 dans X^*.

La situation change complètement si on prend maintenant $X = v_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}(S^d V^{n+1})$ avec $d > 2$. Par l'application de Veronese, on peut maintenant identifier les sections hyperplanes avec les polynômes de degré d en n variables. Or si $d > 2$, on peut toujours construire un polynôme ayant un point isolé de type A_2 et un polynôme ayant deux points

singuliers isolés. Donc dès que $d > 2$, $v_d(\mathbb{P}^n)^*_{\text{cusp}}$ *et* $v_d(\mathbb{P}^n)^*_{\text{node}}$ *sont des hypersurfaces de* $v_d(\mathbb{P}^n)^*$.

2.1.1 Variétés adjointes

Comme application des propositions 2.1.2, 2.1.3, nous utilisons les résultats de Knop pour décrire les dimensions des composantes X^*_{node} et X^*_{cusp} lorsque X est une variété adjointe.

Proposition 2.1.4. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie de diagramme de Dynkin* Γ *et* $X_\Gamma \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ *la variété adjointe correspondante. Alors,*

- si $\Gamma = A_n$ $(n > 1)$, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, $X^*_{\Gamma_{\text{cusp}}}$ *est une sous-variété de codimension* 1 *dans* X^*_Γ.

- si $\Gamma = C_n$, G_2, $X^*_{\Gamma\ \text{cusp}}$ *est une sous-variété de codimension au moins* 2 *dans* X^*_Γ.

- si $\Gamma = A_n$ $(n > 2)$, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, $X^*_{\Gamma_{\text{node}}}$ *est une sous-variété de codimension* 1 *dans* ${X_\Gamma}^*$.

- si $\Gamma = C_n$, F_4, G_2, $X^*_{\Gamma_{\text{node}}}$ *est une sous-variété de codimension au moins* 2 *dans* X^*_Γ.

Démonstration. Le théorème de Knop décrit les singularités isolées des sections hyperplanes de X_Γ en fonction du sous-diagramme Γ^*.

En particulier si $\#\Gamma^* \geq 2$ alors on sait qu'il existe une section hyperplane ayant un unique point singulier qui ne soit pas un A_1. Ce qui implique grâce à la proposition 2.1.3 que la composante cusp est de codimension 1 dans la variété duale.

De même si $\#\Gamma^* \geq 3$, alors on peut construire deux sous-diagrammes de Γ^*. Ce qui implique l'existence d'une section hyperplane ayant exactement deux points singuliers (Théorème 4.7 de [Kn 1987]). D'où, d'après la proposition 2.1.2, on en déduit que la composante node est de codimension 1 dans la variété duale.

Pour les diagrammes G_2 et C_n, Γ^* correspond au diagramme A_1 et donc les seules sections hyperplanes ayant des singularités isolés sont des sections ayant un unique point singulier de type A_1 (cela correspond donc à des points lisses de la variétés duales). Les conditions a) des propositions 2.1.3 et 2.1.2 ne sont donc pas vérifiées pour ces diagrammes. Enfin pour le diagramme F_4, Γ^* est un diagramme de type A_2. En effaçant un noeud quelconque du diagramme A_2 on obtient un diagramme connexe, ce qui signifie que les hyperplans tangents de X_{F_4} avec singularités isolés ont un unique point de tangence. □

Remarque 2.1.3. *La proposition précédente implique en particulier que* $codim_{X^*_G} Sing(X^*_G) \geq 2$ *si et seulement si* $G = G_2$ *ou* $G = Sp_{2n}$. *On peut retrouver ce résultat en utilisant le théorème dual que nous avons démontré au chapitre 1. En effet le seul discriminant* Σ_{Γ^*} *qui ne soit pas une hypersurface singulière en codimension* 1 *est* Σ_{A_1}. *Ainsi dès que* $G \neq G_2$, Sp_{2n}, *on sait, par l'application* Φ *que* X^*_G *sera singulière en codimension* 1. *Maintenant si* $G = Sp_{2n}$, *on sait que* $X_G \simeq v_2(\mathbb{P}^n)$. *Donc d'après*

l'exemple 2.1.3, on a bien une hypersurface singulière en codimension 2. *Pour* $G = G_2$, *les éléments singuliers de* X^*_G *ne sont pas des éléments réguliers. Or* $codim_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g} - \mathfrak{r}) = 3$ *(voir [Br 1970]). Ce qui prouve que* $X^*_{G_2}$ *est une hypersurface singulière en codimension au moins* 2.

Remarque 2.1.4. *Une question naturelle que l'on peut se poser après avoir pris connaissance du théorème de Knop est de savoir quel est le type singulier des sections hyperplanes de* G/P *pour d'autre représentations que la représentation adjointe. Par exemple on peut se demander :*

1) quelles sont les autres variétés homogènes telles que les sections avec singularités isolées soient toutes de type simple ?

2) quelles sont les variétés homogènes telles que les sections avec singularités isolées correspondent uniquement aux points lisses de X^* *(en d'autres termes quelles sont les* G/P, *telles que* $Sing((G/P) \cap H)$ *isolé* $\Leftrightarrow$ $((G/P) \cap H, x) \sim A_1$ *et* x *est l'unique point singulier de* $(G/P) \cap H$*).*

Une conséquence des propositions 2.1.2, 2.1.3 est que la classification des variétés homogènes qui vérifient le point 2) revient à classifier les variétés homogènes telles que $(G/P)^*$ *soit une hypersurface singulière en codimension* 2 *(voir chapitre 3).*

2.2 Variété des tangentes et variété des sécantes

Nous abordons maintenant l'approche géométrique de X^*_{sing}. Nous introduisons la variété des tangentes, puis la variété des sécantes, de X et mettons en avant le rôle que ces variétés jouent dans l'étude de X^*_{sing}. Nous en déduisons finalement des conditions suffisantes à l'existence de sections singulières de X pour des singularités isolées données.

2.2.1 Définitions, outillage (repère mobile) et stratégie

La variété duale de X est une variété auxiliaire de X en ce sens qu'elle a été construite à partir de l'information géométrique qui définit X (en l'occurence ses hyperplans tangents). Etudier les propriétés géométriques d'une variété auxiliaire permet d'étudier indirectement la géométrie de X. Voici maintenant deux nouvelles variétés auxiliaires.

Tout d'abord la *variété des tangentes* :

Définition 2.2.1. *Soit* $X \subset \mathbb{P}(V)$ *une variété lisse, on définit* $\tau(X) \subset \mathbb{P}(V)$ *par,*

$$\tau(X) := \bigcup_{x \in X} \tilde{T}_x X.$$

On appelle $\tau(X)$ *la variété des tangentes de* X.

Puis *la variété des sécantes* :

Définition 2.2.2. *Etant donnés deux points distincts $x, y \in \mathbb{P}(V)$, notons $\mathbb{P}^1_{xy}$ l'unique droite passant par x et y. Alors pour $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective, on définit la variété des sécantes de X par,*

$$\sigma(X) = \overline{\bigcup_{x,y \in X, x \neq y} \mathbb{P}^1_{xy}} \subset \mathbb{P}(V).$$

Remarque 2.2.1. *Il est possible de définir $\tau(X)$ lorsque X n'est pas lisse. Pour cela on a besoin d'une notion plus faible d'espace tangent, l'* espace tangent étoile *noté comme il se doit $T^\star_x X$, voir [I-L 2003, Zak 1993].*

Rappelons comment se calcule la dimension de ces deux variétés. Pour ce faire nous allons utiliser les techniques du repère mobile. Il convient donc de se rafraîchir la mémoire :

Détour : la seconde forme fondamentale et le repère mobile

L'introduction du repère mobile remonte aux travaux d' Elie Cartan. Plus tard ces techniques furent remises au goût du jour par l'article de P. Griffiths et J. Harris [G-H 1979]. La présentation qui suit est tirée du livre de T. Ivey et J. Landsberg [I-L 2003].

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension $N+1$, et soit $\mathcal{F}$ l'espace des bases de V. Un élément de $f \in \mathcal{F}$ correspond à la donnée de $N+1$ vecteurs indépendants $f = (e_0, ..., e_N)$. On considère la projection suivante,

$$\pi : \mathcal{F} \longmapsto \mathbb{P}(V)$$
$$\pi(f) = \pi((e_0, ..., e_N)) = [e_0].$$

Le groupe de Lie $GL(V) = \mathcal{F}$ possède une 1-forme naturelle à valeurs dans son algèbre de Lie : la forme de Maurer-Cartan.

Comme $GL(V)$ est un groupe de Lie matriciel, on peut expliciter la forme de Maurer-Cartan. Soit $f \in \mathcal{F}$, $f = (f^i_j)_{0 \leq i \leq j \leq N}$, chaque $f^i_j : \mathcal{F} \longmapsto \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe. La matrice (f^i_j) définit une fonction de $\mathcal{F}$ à valeur dans $Mat_{(N+1)\times(N+1)} \simeq Lie(\mathcal{F})$, l'espace des matrices de taille $N+1$ à coefficients complexes. On peut donc écrire $(df^i_j)|_g$ qui est une 1-forme sur $GL(V)$ à valeur dans $T_f GL(V)$. La forme de Maurer-Cartan est alors $\omega_f = f^{-1} df$. En particulier,

$$df = f\omega_f \tag{2.1}$$

Cette forme ω va nous permettre d'étudier la variation des déplacements de $\pi(f) = [e_0]$. Plus précisément l'équation (2.1) donne,

$$d(e_0, ..., e_N) = (e_0, ..., e_N)\omega$$

et donc,

$$de_0 = \omega^0_0 e_0 + ... + \omega^N_0 e_N.$$

On dit ainsi que ω_0^j mesure le déplacement infinitésimal de e_0 vers e_j. En exploitant l'égalité $0 = d(f^{-1}f) = fdf^{-1} + (df)f^{-1}$, on obtient la fameuse équation de Maurer-Cartan à laquelle la forme ω est soumise,

$$d\omega = -\omega \wedge \omega.$$

Une idée centrale dans la technique du repère mobile et d'adapter le repère à la géométrie de la variété que l'on étudie. Puis, lorsque cette adaptation est faite, on observe comment a été modifiée notre forme ω.

Considérons maintenant $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse et $\mathcal{F}_X^0 := \mathcal{F}|_{\pi^{-1}(X)}$, c'est le fibré des repères de X adaptés à l'ordre 0. Ils satisfont la propriété suivante, $f \in \mathcal{F}_X^0$, si et seulement si $\pi(f) \in X$.

Continuons notre adaptation : soit x un point général et considérons le drapeau suivant,

$$\hat{x} \subset \hat{T}_x X \subset V.$$

Cette fois-ci on regarde $\mathcal{F}_X^1 = \{(e_0, ..., e_{n+a}) | [e_0] \in X, \hat{T}_{[e_0]}X =< e_0, ..., e_n >\}$. C'est le fibré des repères adaptés au premier ordre. Notons encore par ω la restriction de la forme de Maurer-Cartan sur $\mathcal{F}_X^1$. En utilisant les indices $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ et $n+1 \leq \mu, \nu \leq n+a$,

$$de_0 = \omega_0^0 e_0 + ... + \omega_0^N e_N,$$

implique $\omega_0^\mu = 0$ sur $\mathcal{F}_X^1$ puisque par construction $de_0 = 0 \mod \{e_0, ..., e_n\}$ sur $\mathcal{F}_X^1$.

Il s'agit maintenant d'exploiter la modification de ω, c'est à dire tirer parti de $\omega_0^\mu = 0$. D'après l'équation de Maurer-Cartan on obtient,

$$0 = d\omega_0^\mu = -\omega_0^\mu \wedge \omega_0^0 - \omega_\beta^\mu \wedge \omega_0^\beta - \omega_\nu^\mu \wedge \omega_0^\nu.$$

(avec somme sur les indices qui se répètent en haut et en bas). D'où $\omega_\beta^\mu \wedge \omega_0^\beta = 0$, ce qui entraîne, par le Lemme de Cartan ([I-L 2003]), l'existence de fonctions $q_{\alpha\beta}^\mu = q_{\beta\alpha}^\mu$ définies sur $\mathcal{F}_X^1$ telles que

$$\omega_\beta^\mu = q_{\alpha\beta}^\mu \omega_0^\alpha.$$

On peut alors définir un tenseur invariant le long des fibres de la projection :

$$II_{X,e_0} \in S^2 T_{e_0}^* X \otimes N_{e_0} X, \text{ où } N_{e_0} X = V / \hat{T}_{e_0} X$$

$$II_{X,e_0} = q_{\alpha\beta}^\mu \omega_0^\alpha \omega_0^\beta \otimes (e_\mu \otimes e^0 \mod \hat{T} \otimes e^0).$$

On obtient ainsi une section, $II_X \in S^2 T^* X \otimes NX$, c'est la seconde forme fondamentale de X.

Remarque 2.2.2. *Pour des raisons pratiques on fera souvent l'abus de notation suivant : on notera* $\underline{e_\mu} = e_\mu \otimes e^0$ *mod* $\hat{T} \otimes e^0$. *Cette notation a pour conséquence d'ignorer les* twists *par le fibré en droites lorsque l'on considère une section du fibré des repères. Cet abus n'a pas d'incidence puisque que l'on regarde nos invariants différentiels en un point fixe* e_0 *et que l'on s'intéresse aux propriétés en ce point.*

Remarque 2.2.3. *Nous avons à présent utilisé trois types différents d'espaces tangents : l'espace tangent affine* $\hat{T}_x X = T_v \hat{X}$ *(où* $v \in \hat{X}$ *tel que* $[v] = x$*), l'espace tangent plongé,* $\tilde{T}_x X$ *et l'espace tangent intrinsèque* $T_x X$. *Ces trois notions sont liées l'une à l'autre de la façon suivante,* $\tilde{T}_x X = \mathbb{P}(\hat{T}_x X)$ *et* $T_x X \simeq \hat{x}^* \otimes (\hat{T}_x X / \hat{x})$.

Remarque 2.2.4. *Au chapitre 1, nous avons vu notre tenseur* $II_{X,x} \in S^2 T_x^* X \otimes N_x X$, *comme une appliquation* $II_{X,x} : N_x^* X \longmapsto S^2 T_x X$. *On peut également regarder la seconde forme fondamentale comme une application,* $II_{X,x} : S^2 T_x X \longmapsto N_x X$. *Ainsi* $\hat{II}_{X,x}(S^2 T_x X) \subset V / \hat{T}_x X$, *et on peut définir* $\hat{T}_x X + \hat{II}_{X,x}(S^2 T_x X) \subset V$. *Ce sous-espace de* V *correspond au second espace osculateur,* $\hat{T}_x^{(2)} X = \hat{T}_x X + \hat{II}_{X,x}(S^2 T_x X) \subset V$. *Lorsque* $\hat{T}_x^{(2)} X \neq V$ *on peut adapter le fibré des repères au second ordre. Cela conduit à la construction d'un nouveau tenseur, la troisième forme fondamentale,* $III_{X,x} \in S^3 T_x X \otimes N_{2x} X$, *où* $N_{2x} X = T_x \mathbb{P}(V) / T_x^{(2)} X$.

Retour à la dimension de $\tau(X)$ et $\sigma(X)$

Nous continuons de suivre [I-L 2003]. Afin de connaître la dimension de $\tau(X)$ nous allons calculer la dimension de son espace tangent en un point général. Pour faire ce calcul on peut utiliser le fibré des repères $\mathcal{F}_X^1$ muni de la projection suivante,

$$(e_0, ..., e_{n+a}) \longmapsto [e_1].$$

Ici $e_1 \in \hat{T}_{e_0} X$ est un vecteur générique. Dans tout ce qui suit un vecteur de l'espace tangent sera dit générique si il est générique par rapport à la seconde forme fondamentale. Ainsi,

$$de_1 = \omega_1^0 e_0 + \omega_1^\alpha e_\alpha + \omega_1^\mu e_\mu.$$

Les $n+1$ formes ω_1^0, ω_1^α sont linéairement indépendantes par généricité de e_1. Quant aux formes ω_1^μ on a $\omega_1^\mu \underline{e_\mu} = II_{X,e_1}(e_1, .)$. Donc après avoir choisi une section (et ignoré les twists), le nombre de ω_1^μ indépendantes correspond au rang de $II_{X,e_1}(e_1, .) : T_{e_0} X \longmapsto N_{e_0} X$. On obtient $\dim(\tau(X)) = n+1+$ rang $II_{X,e_0}(e_1, .) - 1$. Soit en notant, rang $II_{X,e_0}(e_1, .)$ = rang II_{e_1},

$$\dim(\tau(X)) = n + \text{rang } II_{e_1}.$$

Il s'en suit que $\dim(\tau(X)) \leq 2n$ et $\dim(\tau(X)) = 2n$ lorsqu'une quadrique de $|II_{X,x}|$ évaluée en un vecteur général donne une application linéaire de rang n (situation géné-

rique). On peut ainsi définir pour les variétés des tangentes une notion de défaut comme pour les variétés duales.

Définition 2.2.3. *Soit $\delta_{\tau(X)}$ la quantité,*

$$\delta_{\tau(X)} = 2n - \dim(\tau(X)).$$

On dira que $\tau(X)$ est dégénérée, ou défective, si $\delta_{\tau(X)} > 0$.

Calculons maintenant la dimension de $\sigma(X)$. Soit $z \in \sigma(X)$ un point lisse, alors il existe $(x, y) \in (X \times X)_{\text{lisse}}$ tels que $z = [\hat{x} + \hat{y}]$. Soient $x(t)$ et $y(t)$ deux germes de courbes de X telles que $x(0) = x$ et $y(0) = y$, on obtient en dérivant les courbes $x + y(t)$ et $x(t) + y$ que $\hat{T}_x X + \hat{T}_y X \subset \hat{T}_z \sigma(X)$. En supposant de plus z général, on retrouve le Lemme de Terracini :

Lemme 7 (Lemme de Terracini). *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective et soit $u \in \mathbb{P}^1_{xy}$,*

a) $(x, y) \in X \times X$, alors $< \tilde{T}_x X, \tilde{T}_y X > \subset \tilde{T}_u \sigma(X)$.

b) Si $(x, y) \in (X \times X)_{\text{général}}$, et u un point général de $\mathbb{P}^1_{xy}$ alors $< \tilde{T}_x X, \tilde{T}_y X > = \tilde{T}_u \sigma(X)$.

Comme précédemment on peut définir une notion de défaut. Les espaces tangents $\hat{T}_x X$ et $\hat{T}_y X$ étant de dimension $n + 1$ on attend génériquement $\dim < \hat{T}_x X, \hat{T}_y X > = 2n + 2$, soit $\dim(\sigma(X)) = 2n + 1$.

Définition 2.2.4. *Soit $\delta_{\sigma(X)}$ la quantité,*

$$\delta_{\sigma(X)} = 2n + 1 - \dim(\sigma(X)).$$

On dira que $\sigma(X)$ est dégénérée, ou défective, si $\delta_{\sigma(X)} > 0$.

Par la suite on aura besoin d'un critère calculatoire pour décider si $\delta_{\sigma(X)} > 0$. On fera alors appel à (voir [Lan 1996, I-L 2003]) :

Proposition 2.2.1. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété lisse et $x \in X$ un point général, alors*

$$\delta_{\sigma(X)} > 0 \Rightarrow III_{X,x} = 0.$$

Remarque essentielle

Achevons les présentations de $\tau(X)$ et $\sigma(X)$ avec la proposition suivante qui justifie l'introduction de ces variétés auxiliaires dans l'étude de notre problème.

Proposition 2.2.2. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse, alors*

a) $\tau(X)^* \subset X^*_{\text{g-cusp}}$

b) $\sigma(X)^* \subset X^*_{\text{g-node}}$.

Démonstration. *a*) on suppose ici que $\tau(X) \neq \mathbb{P}(V)$, sinon $\tau(X)^* = \emptyset$ et il n'y a rien à montrer. Reprenons l'équation qui nous a permis de calculer la dimension de $\tau(X)$,

$$de_1 = \omega_1^0 e_0 + \omega_1^\alpha e_\alpha + \omega_1^\mu e_\mu.$$

A partir de cette expression, on voit que $\tilde{T}_{e_1}\tau(X) \subset H$ implique,
d'une part $< e_0, ..., e_n >= \hat{T}_{e_0}X \subset \hat{H}$, i.e. $H \in X^*$,
et d'autre part $\omega_1^H = 0$ ce qui signifie que la forme quadratique $II_{X,e_0}(H) = q^H_{\alpha\beta}\omega_0^\alpha\omega_0^\beta$, correspondant à la partie quadratique de la singularité $(X \cap H, e_0)$, est dégénérée et donc à ce titre $H \in X^*_{\text{cusp}}$.

b) pour les mêmes raisons qu'en *a*) on suppose que $\sigma(X) \neq \mathbb{P}(V)$. L'argument est encore plus simple puisque le Lemme de Terracini nous dit que $\tilde{T}_x X \subset H$ et $\tilde{T}_y X \subset H$ lorsque $H \in \sigma(X)^*$. □

Nous allons donner deux exemples où ces inclusions sont strictes, pour cela il nous faut rappeler un théorème de Fulton et Hansen.

Théorème 2.2.1 ([Fu-Han 1979]). *$X^n \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{n+a}$, une variété projective, alors soit*

- $dim(\sigma(X)) = 2n + 1$ et $dim(\tau(X)) = 2n$

ou bien

- $\sigma(X) = \tau(X)$.

Voici donc les deux exemples :

Exemple 2.2.1. *Si X est la variété adjointe pour le groupe de Lie G. Alors $X^*_{\text{g-cusp}} = X^*_{\text{cusp}}$ puisque X est homogène. Les variétés adjointes sont toutes $\delta_{\sigma(X)}$-défectives de défaut 1 (voir par exemple [KOY 1999]), ce qui a pour conséquence que $\tau(X) = \sigma(X)$ (par le théorème que l'on vient de rappeler) et donc $\tau(X)^* = \sigma(X)^*$. Ainsi $H \in \tau(X)^*$ est aussi un point de $\sigma(X)^*$. Donc par définition de $\sigma(X)^*$, H aura au moins deux points de tangences (en fait dans cette situation H est tangent le long d'une sous-variété de dimension strictement positive). Or si $G \neq Sp_{2n}$ ou G_2, on sait, par le théorème de Knop, qu'il existe un hyperplan H_0 tel que $X \cap H_0$ ait un unique point singulier qui ne soit pas de type A_1. Ainsi $H_0 \in X^*_{\text{cusp}}$ et $H_0 \notin \tau(X)^*$.*

Exemple 2.2.2. *Les résultats de [W-Z 1996] montrent que la composante X^*_{node} des hyperdéterminants n'est pas toujours irréductible. C'est le cas lorsque $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^2$, ou $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Or $\sigma(X)$ étant irréductible (car X l'est), on a que $\sigma(X)^*$ est toujours une composante irréductible de $X^*_{\text{g-node}}$. Dans les deux cas d'hyperdéterminants que l'on vient de mentionner on a alors $\sigma(X)^* \neq X^*_{\text{node}}$.*

Dans les sections qui suivent nous allons étudier la dimension des variétés $\tau(X)^*$ et $\sigma(X)^*$. Pour calculer ces dimensions nous allons utiliser le résultat classique suivant (voir [G-H 1979, I-L 2003]) :

Théorème 2.2.2. *Soit $Y \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective, non nécessairement lisse, et $y \in Y$ un point général. Notons $r = max_{Q \in |II_{Y,y}|}$ rang Q (c'est à dire r est le rang générique d'un quadrique dans la seconde forme fondamentale), alors*

$$dimY^* = r + codimY - 1.$$

2.2.2 Variété des tangentes et sections hyperplanes de X

Commençons avec $\tau(X) \subset \mathbb{P}(V)$. Pour formuler la proposition qui suit nous aurons besoin de la notation suivante, soit $v \in T_xX$ un vecteur tangent à X en x, alors $Ann(v) \subset |II_{X,x}|$ est l'ensemble des quadriques dans la seconde forme fondamentale qui sont dégénérées pour la direction v, i.e. $q \in Ann(v)$ si et seulement si $q(v, w) = 0, \forall\, w \in T_xX$. Nous prouvons,

Proposition 2.2.3.

Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse telle que $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma(X)} = 0$. Soit $x \in X$ un point général de X et soit $v \in T_xX$ un vecteur générique. On suppose qu'il existe $q \in Ann(v)$ tel que rang $q = n - 1$, alors on a de manière équivalente :

a) il existe un hyperplan H tel que $(X \cap H, x)$ soit une singularité isolée de type A_2 et q est la partie quadratique de $(X \cap H, x)$.

b) $\tau(X)^*$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

Remarque 2.2.5. *Cette proposition nous dit en particulier que X^*_{cusp} est de codimension* 1 *dans X^*.*

Pour prouver le résultat nous allons calculer la seconde forme fondamentale de $\tau(X)$. Ce calcul a déja été fait dans [Lan 1996] dans le cas où $\tau(X)$ est dégénérée. Pour mener à bien ce calcul il nous faut compléter notre introduction aux invariants différentiels en présentant la 3-*ème forme de Fubini.*

Nous avons vu qu'un repère adapté au premier ordre nous permet de trouver des fonctions symétriques $q^\mu_{\alpha\beta}$ qui vérifient l'équation

$$\omega^\mu_\alpha = q^\mu_{\alpha\beta}\omega^\beta_0$$

En dérivant cette dernière expression on obtient,

$$d(\omega^\mu_\alpha - q^\mu_{\alpha\beta}\omega^\beta_0) = 0$$

$$(-dq^\mu_{\alpha\beta} - q^\mu_{\alpha\beta}\omega^0_0 - q^\nu_{\alpha\beta}\omega^\mu_\nu + q^\mu_{\alpha\delta}\omega^\delta_\beta + q^\mu_{\beta\delta}\omega^\delta_\alpha) \wedge \omega^\beta_0 = 0.$$

Le Lemme de Cartan permet alors de définir des fonctions sur $\mathcal{F}^1$, $r^\mu_{\alpha\beta\gamma}$, symétriques en α, β, γ, telles que

$$r^\mu_{\alpha\beta\gamma}\omega^\gamma_0 = -dq^\mu_{\alpha\beta} - q^\mu_{\alpha\beta}\omega^0_0 - q^\nu_{\alpha\beta}\omega^\mu_\nu + q^\mu_{\alpha\delta}\omega^\delta_\beta + q^\mu_{\beta\delta}\omega^\delta_\alpha. \tag{2.2}$$

On a ainsi un nouveau tenseur $F_3 \in \pi^*(S^3T^*X \otimes NX)$ défini par

$$F_3 = r^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}\omega_0^{\alpha}\omega_0^{\beta}\omega_0^{\gamma} \otimes e_{\mu}.$$

Ce nouveau tenseur n'est pas bien défini au-dessus de X. On dit que F_3 est un invariant relatif. La variation de F_3, susceptible d'affecter le tenseur, se calcule de la façon suivante, considérons, $\tilde{e}_{\alpha} = e_{\alpha} + g^0_{\alpha}e_0$ et $\tilde{e}_{\mu} = e_{\mu} + g^0_{\mu}e_0 + g^{\alpha}_{\mu}e_{\alpha}$. Alors pour $\tilde{f} = (e_0, \tilde{e}_{\alpha}, \tilde{e}_{\mu})$, on a $F_{3,\tilde{f}} = \tilde{r}^{\mu}_{\alpha\beta\gamma}\omega_0^{\alpha}\omega_0^{\beta}\omega_0^{g} \otimes e_{\mu}$, avec

$$\tilde{r}^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} = r^{\mu}_{\alpha\beta\gamma} + \Sigma_{\alpha\beta\gamma}(g^0_{\alpha}q^{\mu}_{\beta\gamma} + g^{\delta}_{\nu}q^{\nu}_{\alpha\beta}q^{\mu}_{\gamma\delta}).$$

On voit en particulier que si $q^{\mu}_{\alpha\beta}\omega_0^{\alpha}\omega_0^{\beta} \in Ann(v)$ alors les coefficients $r^{\mu}_{\alpha\beta\gamma\in Sing(Ann(v))}$ sont, eux, bien définis lorsque e_{α}, e_{β} et $e_{\gamma} \in Sing(Ann(v))$.

Pour calculer $II_{\tau(X),e_1}$ nous allons préciser notre repère. Soit $\mathcal{F}^1$, le fibré des repères adaptés au premier ordre au-dessus de X qui préservent le drapeau $\{e_0 = \hat{x}\} \subset \{e_0, e_{\alpha}\} = \hat{T}_xX \subset V$. En utilisant la projection $\mathcal{F}^1 \longmapsto \tau(X)$, $(e_0, e_1, \ldots, e_{n+a}) \longmapsto [e_1]$ on a vu que :

$$de_1 = \omega_1^0 e_0 + \omega_1^{\alpha}e_{\alpha} + \omega_1^{\lambda}e_{\lambda} \text{ mod } [e_1]. \tag{2.3}$$

On suppose $\tau(X)$ non dégénérée, on pose $n+1 \leq \lambda \leq 2n$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta \leq n$, et $2n+1 \leq \mu \leq n+a$. On adapte le fibré des repères au-dessus de X, comme suit :

$\mathcal{F}^1_{\tau}$ est le fibré des repères qui preservent le drapeau $\{e_0\} \subset \{e_0, e_{\alpha}\} \subset \{e_0, e_{\alpha}, e_{\lambda}\} \subset \{e_0, e_{\alpha}, e_{\lambda}, e_{\mu}\}$, avec $[e_0] = x$ un point général de X, $\hat{T}_xX = \{e_0, e_{\alpha}\}$, $[e_1]$ un point général de $\tau(X)$, $\hat{T}_{e_1}\tau(X) = \{e_0, e_{\alpha}, e_{\lambda}\}$.

Pour calculer la seconde forme fondamentale on dérive les vecteurs qui apparaissent dans de_1,

$$II_{\tau(X),e_1} = (\omega_1^{\alpha}\omega_{\alpha}^{\mu} + \omega_1^{\lambda}\omega_{\lambda}^{\mu})e_{\mu} \otimes e^1 \text{ mod } [\hat{T}_{e_1}\tau(X)].$$

Observons, pour simplifier l'expression, que

$$\omega_1^{\lambda} = q^{\lambda}_{1\beta}\omega_0^{\beta},$$

$$\omega_{\alpha}^{\mu} = q^{\mu}_{\alpha\beta}\omega_0^{\beta},$$

$$-q^{\lambda}_{1\beta}\omega_{\lambda}^{\mu} + q^{\mu}_{\beta\delta}\omega_1^{\delta} = r^{\mu}_{1\beta\gamma}\omega_0^{\gamma} \text{ car } q^{\mu}_{1\beta} = 0.$$

On obtient ainsi,

$$II_{\tau(X),e_1} = (2q^{\mu}_{\alpha\beta}\omega_1^{\alpha}\omega_0^{\beta} - r^{\mu}_{1\beta\gamma}\omega_0^{\gamma}\omega_0^{\beta})\underline{e_{\mu}}.$$

Nous avons vu (équation 2.3) qu'une base de $T^*_{e_1}\tau(X)$ est donnée par les formes

$$\{s^*(\omega_0^1), ..., s^*(\omega_0^n), s^*(\omega_1^0), s^*(\omega_1^2), ..., s^*(\omega_1^n)\},$$

où $s : X \longmapsto \mathcal{F}^1_\tau$ est une section locale du fibré des repères (ceci car les ω_1^λ sont n formes indépendantes sur $\mathcal{F}^1$ et qu'on a les relations $\omega_1^\lambda = q_{1\beta}^\lambda \omega_0^\beta$). Dans une telle base une quadrique $Q^\mu \in |II_{\tau(X),e_1}|$ est de la forme,

$$Q^\mu = \begin{pmatrix} r^\mu_{111} & \dots & r^\mu_{11n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 2q^\mu_{\alpha\beta} & \\ r^\mu_{1n1} & \dots & r^\mu_{1nn} & 0 & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 2q^\mu_{\alpha\beta} & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

puisque par construction $q^\mu_{1\beta} = 0$, et qu'il n'y a pas de coefficients non nuls pour les carrés du type $\omega_1^0 \omega_0^\beta$. Donc on a bien rang $Q^\mu \leq 2n-1$ (ce qui est conforme à notre attente puisque $\tau(X)^* \subset X^*$).

Q^μ sera de rang maximum si et seulement si $(q^\mu_{\alpha\beta})_{\alpha\beta}$ est de rang $n-1$ et si $r^\mu_{111} \neq 0$. Posons $v = e_1 \otimes e^0 \bmod e_0 \otimes e^0$, $v \in T_xX$ et v est général par construction. La première condition nous dit qu'il existe $q^\mu \in Ann(v)$ de rang $n-1$ et la seconde est équivalente, pour X lisse, au fait que $\sigma(X)$ soit non dégénérée (car e_1 est générique, voir [I-L 2003] page 130).

On a donc prouvé pour $X \subset \mathbb{P}(V)$, une variété lisse, et $x \in X$ un point général que :

$$\begin{gathered} \tau(X)^* \text{ est de codimension 1 dans } X^*. \\ \Leftrightarrow \\ \sigma(X) \text{ non dégénérée et } \forall\ v \in (T_xX)_{\text{générique}},\ \exists\ q \in Ann(v) \text{ de rang } n-1 \end{gathered}$$

Cette dernière condition nous dit que pour un hyperplan $H \in \tau(X)^*_{\text{général}}$, les conditions suivantes sont réalisées :

$$\begin{gathered} q^H \text{ est de rang } n-1, \\ r^H_{vvv} \neq 0 \text{ pour } v = (q^H)_{\text{sing}}. \end{gathered}$$

Cela se traduit en coordonnées pour la section hyperplane par :

$$\begin{aligned} (X \cap H, x) &\sim x_2^2 + ... + x_n^2 + x_1^3 + ... = 0 \\ &\sim x_1^3 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 0. \end{aligned}$$

C'est à dire $(X \cap H, x) \sim A_2$. Ce qui achève la preuve de la proposition. □

Remarque 2.2.6. *La condition relative à l'existence d'une quadrique de rang $n-1$ admettant une direction générique de T_xX pour noyau est en pratique difficile à vérifier. Dans l'exemple qui suit on peut montrer qu'une telle quadrique n'existe pas.*

Exemple 2.2.3. *Soit $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$. Le calcul de la seconde forme fondamentale montre que $|II_{X,x}|$ admet la descritption suivante :*

$$|II_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1,x}| = \{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C}\}.$$

Si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ est une direction dégénérée pour une quadrique de $|II|$, on montre par le calcul que nécessairement un des coefficients v_i est nul, i.e. v n'est pas générique. On en déduit donc que $\tau(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$ est de codimension au moins deux dans $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$. En fait si on se reporte à la description d'une quadrique de $|II_{\tau(X),v}|$, pour v générique, que l'on a donné dans la preuve de la proposition, on peut montrer que $\tau(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$ est de codimension au moins trois dans $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$. On verra au chapitre 3 que $\tau(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$ est de codimension exactement trois dans $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$.

2.2.3 Variété des sécantes et sections hyperplanes de X

Passons à la variété des sécantes. Nous allons établir une relation entre la dimension attendue de $\sigma(X)^*$ et les sections hyperplanes de X.

Soit $z \in \sigma(X)$ un point général, et $(x, y) \in (X \times X)_{\text{général}}$ une paire de points générale. Le Lemme de Terracini, nous dit que $\tilde{T}_z\sigma(X) =< \tilde{T}_x X, \tilde{T}_y X >$, en particulier, $\tilde{T}_z\sigma(X)$ est tangent à $\sigma(X)$ le long de la doite $\mathbb{P}^1_{xy}$. On suppose maintenant que $\delta_{X^*} = 0$. On a vu que $\sigma(X)^*$ est de codimension au moins 2 dans $\mathbb{P}(V^*)$. Supposons $codim_{\mathbb{P}(V^*)}\sigma(X)^* > 2$. Soit H un point général de $\sigma(X)^*$, alors H est tangent à $\sigma(X)$ le long d'un $\mathbb{P}^2$. Donc il existe une courbe $z(t) = x(t)+y(t)$, telle que $z(t) \not\subset \mathbb{P}^1_{xy}$ et telle que H soit tangent à $\sigma(X)$ le long de $z(t)$. Comme $z(t) \not\subset \mathbb{P}^1_{xy}$, on peut supposer que $x(t)$ n'est pas la courbe constante. En appliquant le Lemme de Terracini, on en déduit que H est tangent à X le long de $x(t)$. On a alors nécessairement $\text{rang}(II_{X,x}(H)) < n$. On vient de montrer que si (x, y) est une paire générale et s'il existe un hyperplan H tel que $\text{rang}(II_{X,x}(H)) = n$ et $\text{rang}(II_{X,y}(H)) = n$, alors $\sigma(X)^*$ est de codimension 2 dans $\mathbb{P}(V^*)$. En d'autres termes, pour $z = x+y \in \sigma(X)$, $\text{rang}(II_{X,x})(H) = n$ et $\text{rang}(II_{X,y}(H)) = n \Rightarrow \text{rang}(II_{\sigma(X),x+y}(H)) = 2n$.

Plus précisément, les inclusions $\tilde{T}_x X \subset \tilde{T}_{x+y}\sigma(X)$ et $\tilde{T}_y X \subset \tilde{T}_{x+y}\sigma(X)$ nous permettent d'interpréter $II_{\sigma(X),x+y}$ de la façon suivante,

Lemme 8. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective telle que $\sigma(X)$ ne soit pas défective.*

$$II_{\sigma(X),x+y} : N^*_{x+y}\sigma(X) \hookrightarrow N^*_x X \times N^*_y X \xrightarrow{II_{X,x}\times II_{X,y}} S^2T^*_x X \times S^2T^*_y X \hookrightarrow S^2T^*_{x+y}\sigma(X).$$

La première fléche étant l'inclusion et la dernière correspond à la somme des formes quadratiques.

Démonstration. On utilse la présentation de la seconde forme fondamentale donnée dans [Il-Lan 1999]. Soit $<,>$, la forme bilinéaire naturelle $<,>: V \times V^* \longmapsto \mathbb{C}$. Etant donné $Z \subset \mathbb{P}(V)$ on note $\hat{Z} \subset V$ le cône au dessus de la variété Z et on considère $z \in Z$ un point de la variété. Considérons maintenant $H \in \mathbb{P}(V^*)$, alors z appartient à l'hyperplan si et seulement si $< \hat{z}, \hat{H} >= 0$. La condition de tangence de H à Z en z s'exprime de la façon suivante, $\forall\ z(t) \subset Z$ germe de courbe tel que $z(0) = z$ alors,

$$< \hat{z}(0), \hat{H} >= 0$$

$$< \hat{z}'(0), \hat{H} >= 0.$$

Fixons maintenant une direction $v \in T_z Z$. La seconde forme fondamentale mesure le contact au deuxième ordre de H en z pour la direction v, ainsi

$$II_{Z,z}(H)(v,v) = Q_z^H(v,v) =< z''(0), H > .$$

Revenons à la situation qui nous intéresse, à savoir $Z = \sigma(X)$. Soit $z(t) = x(t) + y(t)$ un germe de courbe passant par z. On a supposé $\sigma(X)$ non-défective donc $\hat{T}_z\sigma(X) = \hat{T}_x X \oplus \hat{T}_y X$. Ainsi un vecteur tangent $v \in T_z\sigma(X)$ se décompose de manière unique en somme de deux vecteurs $v = v_1 + v_2$ avec $v_1 \in T_x X$ et $v_2 \in T_y X$. Soit H un hyperplan tangent en z à $\sigma(X)$ (et donc tangent à X en x et y) on obtient alors

$$II_{\sigma(X),z}(v,v) =< \hat{z}''(0), \hat{H} >=< \hat{x}''(0) + \hat{y}''(0), \hat{H} >$$

$$=< \hat{x}''(0), \hat{H} > + < \hat{y}''(0), \hat{H} >= II_{X,x}(H)(v_1,v_1) + II_{X,y}(H)(v_2,v_2).$$

□

Sous l'hypothèse $\delta_{X^*} = 0$, une quadrique de rang maximum dans $|II_{\sigma(X),x+y}|$ sera une quadrique de rang $2n$. Une telle quadrique existe si et seulement si il existe un hyperplan H tangent à x et y tel que $II_{X,x}(H)$ et $II_{X,y}(H)$ soient de rang n. On vient d'établir :

Lemme 9. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse telle que $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma(X)} = 0$ et de plus on suppose que $\sigma(X) \neq \mathbb{P}(V)$. Alors on a,*

$\sigma(X)^*$ est une sous-variété de codimension 1 dans $X^* \Leftrightarrow \forall\ (x,y) \in (X \times X)_{\text{général}}$, $\exists$ un hyperplan H tel que $(X \cap H, x) \sim A_1$ et $(X \cap H, y) \sim A_1$.

Nous pouvons comme pour la variété des tangentes établir une condition suffisante, où la géométrie globale de X nous informe sur ses sections hyperplanes :

Proposition 2.2.4. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété lisse telle que $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma(X)} = 0$. On suppose que $\forall\ (x,y) \in (X \times X)_{\text{général}}\ \tilde{T}_x^{(2)} X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$, alors on a de façon équivalente :*

a) $\exists\ H$ tel que $(X \cap H, x) \sim A_1$ et $(X \cap H, y) \sim A_1$.

b) $\sigma(X)^*$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

Démonstration. Nous allons montrer que sous les hypothèses de la proposition, $\sigma(X)^*$ est de codimension 1 dans X^*. Ceci revient à montrer l'existence d'une quadrique de rang $2n$ dans $|II_{\sigma(X),[\hat{x}+\hat{y}]}|$. Avant de commencer les calculs on remarquera que $\tilde{T}_x^{(2)}X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$ et $\delta_{\sigma(X)} = 0$ impliquent en particulier que $\sigma(X) \neq \mathbb{P}(V)$, donc $\sigma(X)^*$ est bien une sous variété non vide de X^*.

$|II_{X,x}| = N_x^{(2)*}X = (\hat{T}_x^{(2)}X/\hat{T}_x X)^*$ et $N^*_{[x+y]}\sigma(X) = (V/(\hat{T}_x X + \hat{T}_y X))^*$. La condition $\tilde{T}_x^{(2)}X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$ nous dit que $N_x^{(2)*}X \simeq N_x^{(2)*}X/(\hat{T}_y X)^* \subset N^*_{x+y}\sigma(X)$. En d'autres termes étant donnée une quadrique Q dans $|II_{X,x}|$ il existe un hyperplan H tel que H soit tangent à x et y, et de plus $II_{X,x}(H) = Q$.

Comme $\delta_{X^*} = 0$, on peut donc choisir Q de rang n. En inversant les rôles de x et y, on montre de même qu'il existe un hyperplan H' tel que H' soit tangent à x et y et que de plus $II_{X,y}(H')$ soit une quadrique de rang n. Considérons à présent $l_1 = \mathbb{P}^1_{HH'}$ comme une droite de $\mathbb{P}(N_x^*X)$ et $l_2 = \mathbb{P}^1_{HH'}$ comme une droite de $\mathbb{P}(N_y^*X)$. L'ensemble des directions conormales dans $\mathbb{P}(N_x^*X)$ (resp. dans $\mathbb{P}(N_y^*X)$) qui correspondent à des formes quadratiques dégénérées est une hypersurface $Y_1 \subset \mathbb{P}(N_x^*X)$ (resp. $Y_2 \subset \mathbb{P}(N_y^*X)$). Or on a construit H (resp. H') de telle sorte que $II_{X,x}(H)$ (resp. $II_{X,y}(H')$) soit de rang maximum. Il s'en suit que l_1 (resp. l_2) intersecte Y_1 (resp. Y_2) en un nombre fini de points. On choisit alors $H'' \in l_1 = l_2$ tel que $H'' \notin l_1 \cap Y_1$ et $H'' \notin l_2 \cap Y_2$. On a donc trouvé $H'' \in N^*_{x+y}\sigma(X)$, tel que $II_{\sigma(X),x+y}(H'')$ soit de rang $2n$. □

2.2.4 Théorème sur les sections hyperplanes de X

On regroupe les propositions 2.2.3 et 2.2.4 pour formuler le théorème suivant :

Théorème 2.2.3. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété lisse telle que $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma(X)} = 0$, alors :*

- Soit x un point général, on suppose que $\forall\ v \in (T_x X)_{\text{générique}}\ \exists\ q \in Ann(v) \subset |II_{X,x}|$ de rang $n-1$, alors on a de façon équivalente :

a) $\exists\ H$ tel que $(X \cap H, x) \sim A_2$ et q correspond à la partie quadratique de $(X \cap H, x)$.

b) $\tau(X)^*$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

- Soit $(x,y) \in (X \times X)_{\text{général}}$ on suppose que $\tilde{T}_x^{(2)}X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$, alors on a de façon équivalente :

a) $\exists\ H$ tel que $(X \cap H, x) \sim A_1$ et $(X \cap H, y) \sim A_1$.

b) $\sigma(X)^*$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.

On obtient alors aisément les corollaires suivant :

Corollaire 2. *Soient $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété lisse et $d > 1$ un entier tels que $(X,d) \neq (\mathbb{P}^n, 2)$. Considérons $Z = v_d(X) \subset \mathbb{P}(S^d V)$ le d-ième plongement de Veronese, alors $\forall\ z \in Z_{\text{général}}$ il existe un hyperplan H tel que $(Z \cap H, z) \sim A_2$ et $\tau(v_d(X))^*$ est une sous-variété de $v_d(X)^*$ de codimension 1.*

Démonstration. . Sous les hypothèses du corollaire, vérifions que l'on peut appliquer le théorème à $v_d(X) \subset \mathbb{P}(S^dV)$. Tout d'abord il faut rappeler que si x^d est un point général de $v_d(X)$ alors $|II_{v_d(X),x^d}| \simeq S^2T^*_{x^d}v_d(X)$ (voir par exemple [G-H 1979]). En d'autres termes la seconde forme fondamentale est le système complet de quadriques sur $T_{x^d}v_d(X)$. Donc si $v \in (T_{x^d}v_d(X))_{\text{général}}$, il existe une quadrique $Q \in S^2T^*_{x^d}v_d(X)$ de rang $n-1$, dégénérée le long de la direction v. De plus il est connu que si $(X,d) \neq (\mathbb{P}^n, 2)$ alors $\sigma(v_d(X))$ est non dégénérée. On peut donc appliquer le théorème. □

Corollaire 3. *Soient $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse et d un entier tels que $(X,d) \neq (\mathbb{P}^n, 2)$. On considère $Z = v_d(X) \subset \mathbb{P}(S^dV)$ le d-ème plongement de Veronese de X. Alors $\forall\ (z_1, z_2) \in (Z \times Z)_{\text{général}}\ \exists\ H$ tel que $(Z \cap H, z_1) \sim A_1$ et $(Z \cap H, z_2) \sim A_1$ et $\sigma(v_d(X))^*$ est une sous-variété de $v_d(X)^*$ de codimension 1.*

Démonstration. On considère $(z_1 = x^d, z_2 = y^d)$ une paire de points générale de $Z \times Z$. Montrons que $\hat{T}^{(2)}_{z_1}Z \cap \hat{T}_{z_2}Z = 0$. Par la règle de Leibniz on obtient que d'une part $\hat{T}^{(2)}_{z_2}v_d(X) = x^{d-2} \circ \hat{T}^{(2)}_x X + x^{d-1} \circ \hat{T}_x X$, et d'autre part $\hat{T}_{z_2}Z = y^{d-1} \circ \hat{T}_y X$. Si $d > 2$ alors cette description implique $\hat{T}^{(2)}_{z_1}Z \cap \hat{T}_{z_2}Z = 0$. Si $d = 2$ alors il faut supposer que $x \notin \hat{T}_y X$ et $y \notin \hat{T}_x X$ mais ceci est vérifié dès que $X \neq \mathbb{P}^n$. □

Corollaire 4. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ et $Y \subset \mathbb{P}(W)$ deux variétés lisses. On suppose $X \neq \mathbb{P}^N$, et on considère la variété $Z = Seg(X \times Y) \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$, produit de Segre. Si $\sigma(X)$ est non dégénérée ou bien $Y \neq \mathbb{P}^n$ alors $\forall\ (z_1, z_2) \in (Z \times Z)_{\text{général}}\ \exists\ H$ tel que $(Z \cap H, z_1) \sim A_1$ et $(Z \cap H, z_2) \sim A_1$ et de plus $\sigma(X \times Y)^*$ est une sous-variété de X^* de codimension 1.*

Démonstration. Ici encore on veut montrer que $\hat{T}^{(2)}_{z_1}Z \cap \hat{T}_{z_2}Z = 0$. Pour cela on écrit $z_1 = x \otimes y$ et $z_2 = w \otimes u$. On obtient d'une part $\hat{T}^{(2)}_{z_1}Z = \hat{T}^{(2)}_x \otimes y + x \otimes \hat{T}^{(2)}_y Y + \hat{T}_x X \otimes \hat{T}_y Y$ et d'autre part $\hat{T}_{z_2}Z = \hat{T}_w X \otimes u + w \otimes \hat{T}_u Y$. Comme on a supposé (z_1, z_2) général on a que $y \neq v$ et $x \neq u$. Donc $\hat{T}^{(2)}_{z_1}X \cap \hat{T}_{z_2}X = 0$ si et seulement si $(\hat{T}_x X \otimes \hat{T}_y Y) \cap (\hat{T}_w X \otimes u + w \otimes \hat{T}_u Y) = 0$. Or $X \neq \mathbb{P}^n$ implique que $u \notin \hat{T}_x X$. De plus $\sigma(X)$ non dégénérée implique $\hat{T}_x X \cap \hat{T}_u X = 0$. Ce qui prouve la première partie du corollaire. Enfin si on suppose $Y \neq \mathbb{P}^m$ alors $v \notin \hat{T}_y Y$ et le résultat suit. □

Résumons les résultats de ce chapitre. On suppose $X \subset \mathbb{P}(V)$ est une variété lisse, x est un point général de X, v un vecteur générique de $T_x X$, et $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma(X)} = 0$,

$$\begin{array}{c} \exists\ q \in Ann(v) \text{ de rang } n-1 \\ \Downarrow \\ \exists\ H \text{ tangent à } x \\ \text{tel que } (X \cap H, x) \sim A_2 \\ \Downarrow \\ Van(X) \neq \emptyset \end{array} \qquad \begin{array}{c} \exists\ q \in Ann(v) \text{ de rang } n-1 \\ \Downarrow \\ \tau(X)^* \text{ est de codimension 1} \\ \text{dans } X^* \\ \Downarrow \\ X^*_{\text{g-cusp}} \text{ est de codimension 1 dans } X^* \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \forall\ (x,y) \in (X \times X)_{\text{général}} \\ \tilde{T}_x^{(2)} X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset \\ \Downarrow \\ \exists\ H \text{ tangent à } x \text{ et } y \\ \text{tel que } (X \cap H, x) \sim A_1 \\ \text{et } (X \cap H, y) \sim A_1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \forall\ (x,y) \in (X \times X)_{\text{général}} \\ \tilde{T}_x^{(2)} X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset \\ \Downarrow \\ \sigma(X)^* \text{ est de codimension 1} \\ \text{dans } X^* \\ \Downarrow \\ X^*_{\text{g-node}} \text{ est de codimension 1 dans } X^* \end{array}$$

Remarque 2.2.7. *Il ressort de ce chapitre que lorsque la codimension est assez grande, la situation générale est la suivante : X^*_{sing} est une sous-variété de codimension 1 dans X^* qui n'est pas irréductible. En effet, lorsque la dimension est assez grande, on attend génériquement que $\sigma(X)$ soit non dégénérée et qu'il existe des quadriques de rang $n-1$ dans $Ann(v)$, lorsque v est générique. Ceci implique que $\tau(X)^*$ est une composante de X^*_{sing} de dimension maximale. On s'attend aussi à ce que $\tilde{T}_x^{(2)} X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$, et donc $\sigma(X)^*$ est aussi une composante de X^*_{sing} de dimension maximale. Enfin $\sigma(X)$ non dégénérée implique, par le théorème de Fulton-Hansen, que $\tau(X) \neq \sigma(X)$, donc les variétés $\tau(X)^*$ et $\sigma(X)^*$ sont deux composantes disctinctes de X^*_{sing}.*

Question 3. *A-t-on en général, en codimension assez grande, $X^*_{\text{sing}} = \tau(X)^* \cup \sigma(X)^*$?*

2.3 Dimensions de $\sigma(X)^*$

Pour conclure ce chapitre on propose une relecture des résultats que l'on vient d'établir, concernant $\sigma(X)^*$, en s'affranchissant de l'hypothèse $\delta_{X^*} = 0$.

Nous avons calculé précédemment la seconde forme fondamentale de $\sigma(X)$, sous l'hypothèse $\delta_{\sigma(X)} = 0$, en un point général $z = [\hat{x} + \hat{y}] = x + y$:

$$II_{\sigma(X),x+y} = II_{X,x} + II_{X,y}.$$

En toute généralité le rang maximum d'une quadrique de $|II_{\sigma(X),x+y}|$ est $2(n - \delta_{X^*})$. Donc la dimension attendue de $\sigma(X)^*$ est $2n - 2\delta_{X^*} + codim(\sigma(X)) - 1$.

Pour la suite définissons une notion de défaut :

Définition 2.3.1. *Soit δ_{σ^*} la quantité,*

$$\delta_{\sigma^*} = 2n - 2\delta_{X^*} + codim(\sigma(X)) - 1 - dim(\sigma(X)^*).$$

On dira qu'une variété $X \subset \mathbb{P}(V)$, telle que $\delta_{\sigma(X)} = 0$, est δ_{σ^*}-défective, si $\delta_{\sigma^*} > 0$.

Bien qu'un tant soit peu artificielle cette définition nous sera d'un intérêt pratique puisque afin de classifier les variétés homogènes X telles que X^* soit une hypersurface normale, nous allons dans un premier temps étudier les variétés potentiellement δ_{σ^*}-défectives.

Remarque 2.3.1. *Dans un article de L. Chiantini et C. Ciliberto, [Ch-Ci 2001], la notion de k-faiblement défective est définie pour une variété projective. Cette notion est la suivante,* une variété projective X, est k-défective, si un hyperplan général tangent en $(k+1)$ points en position générale, a un lieu de contact $(=Sing(X \cap H))$ de dimension strictement positive. *Au vu de notre calcul de la dimension de* $\sigma(X)^*$*, il est clair que si on suppose* $\delta_{X^*} = 0$ *et* $\delta_{\sigma(X)} = 0$*, les variétés* 1*-défectives sont les variétés* δ_{σ^*}*-défectives. Le théorème 1.1 de [Ch-Ci 2001] assure que si la variété des sécantes de* X *est défective alors* X *est* 1*-défective. En particulier cela implique que* $\sigma(X)^*$ *sera de codimension au moins* 2 *dans la variété duale. On adopte alors la convention suivante* si $\delta_{\sigma(X)} \neq 0$ alors X sera aussi considérée comme δ_{σ^*}-défective. *L'exemple qui suit montre que l'on peut avoir* $\delta_{\sigma(X)} > 0$ *et* $\delta_{\sigma^*} > 0$.

Exemple 2.3.1. *Soit* $X = \mathbb{P}^{k_1} \times \mathbb{P}^{k_2} \subset \mathbb{P}^{(k_1+1)(k_2+1)-1}$*, la projectivisation de la variété des matrices de taille* $(k_1+1) \times (k_2+1)$ *et de rang* 1*. On suppose* $k_1 \geq k_2$*, ce qui donne* $\delta_{X^*} = k_1 - k_2$*. Ainsi on s'attendrait à avoir* $\sigma(X)^*$ *de codimension* $2(k_1-k_2)+2$ *dans* $\mathbb{P}(V^*)$*. La variété* X^* *s'identifie naturellement à la variété des matrices de rang au plus* k_2*, et de même* $\sigma(X)^*$ *s'identifie à la variété des matrices de rang au plus* $k_2 - 1$*. C'est à dire* $\sigma(X)^*$ *coincide avec le lieu des zéros des* $k_2 \times k_2$ *mineurs. Cette variété est de codimension* $1+2(k_1-k_2+1)$*. On a donc bien que* $codim_{\mathbb{P}(V^*)}\sigma(X)^* = 1+2(k_1-k_2+1) < 2(k_1-k_2)+2$*. Plus précisément nous avons* $\delta_{\sigma^*} = 1$.

Remarque 2.3.2. *Le cas* $\sigma(X) = \mathbb{P}(V)$ *est une autre cas où* X *est* δ_{σ^*}*-défective.*

Notre critère (proposition 2.2.4) devient alors,

Proposition 2.3.1. *Soit* $X \subset \mathbb{P}(V)$ *une variété projective lisse, telle que* $\delta_{\sigma(X)} = 0$*. Soit* (x, y) *un couple général de points de* X *et on suppose* $\tilde{T}_x^{(2)} X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$*. Alors* $\delta_{\sigma^*} = 0$.

Exemple 2.3.2. *Soit* $X = \mathbb{P}^{k_1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{k_r}$ *avec* $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_r$*,* $r \geq 3$ *et notons par* ∇ *la variété duale* X^* *pour suivre les notations de [W-Z 1996]. Dans leur décomposition de* ∇_{node}*, J. Weyman et A. Zelevinsky introduisent une composante appelée* $\nabla_{\text{node}}(\emptyset)$*. Il s'agit des multimatrices* $A \in \nabla$*, annulées par l'hyperdéterminant, et telles qu'il existe deux points distincts* $(x, y) \in (X \times X)_{\text{général}}$ *tels que* $(A, x) = (A, y) = 0$*. En d'autres termes* $\nabla_{\text{node}}(\emptyset) = \sigma(X)^*$*. Le théorème (0.3) de [W-Z 1996] dit que la composante* $\nabla_{\text{node}}(\emptyset)$ *de l'hyperdéterminant est de codimension* 1 *dans* ∇ *dès que* $X \neq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

Si l'on ne suppose plus $k_1 \leq k_2 + \cdots + k_r$ *(i.e. on s'autorise* $\delta_{X^*} \neq 0$*), alors une adaptation de la preuve du corollaire 4 implique, pour* $r > 3$*, que* $\sigma(X)^*$ *est de codimension* $1 + min(0, k_1 - \sum_{i=2}^{r} k_i)$ *dans* X^**. On retrouve que le cas* $r = 3$ *est le seul susceptible de présenter des cas de variétés* δ_{σ^*}*-défectives.*

Chapitre 3

Applications aux variétés homogènes

Pour finir, nous classifions les discriminants $\Delta_{G/P}$ pour les variétés homogènes, sous un groupe de Lie semi-simple, qui correspondent à des hypersurfaces singulières en codimension 2.

Pour obtenir ce résultat, nous étudions les variétés homogènes pour un groupe de Lie simple qui sont potentiellement δ_{σ^*}-défectives. En effet, lorsque X^* est une hypersurface et $\delta_{\sigma^*} = 0$, nous avons vu que $\sigma(X)^*$ était de codimension 1 dans X^*. Ceci entraîne que X^* est singulière en codimension 1. Lorsque nous avons une première liste de variétés potentiellement δ_{σ^*}-défectives, nous appliquons un critère dû à F. Zak pour affiner notre liste et aussi l'étendre au cas des groupes semi-simples. On se ramène alors à une liste de variétés duales X^* que l'on sait être singulières en codimension 2. Ce qui permet de prouver la classification. Pour compléter cette classification nous traitons en fin de chapitre le cas des variétés homogènes dont la variété duale est défective. On obtient alors la classification des variétés homogènes pour un groupe de Lie semi-simple dont la variété duale est normale.

3.1 Dimension de $\sigma(G/P)^*$ pour G groupe de Lie simple

Dans un premier temps nous voulons classifier les variétés homogènes pour un groupe de Lie simple qui ne satisfont pas les hypothèses de la proposition 2.3.1. Soit G un groupe de Lie simple et V_λ une représentation irréductible de plus haut poids λ. On peut choisir comme paire générale de points le couple (v_λ, v_μ), où v_λ est le vecteur de plus haut poids de la représentaton et v_μ le vecteur de plus bas poids.

L'hypothèse $\tilde{T}_x^{(2)}X \cap \tilde{T}_y X = \emptyset$, équivaut à $\mathfrak{g}^{(2)}v_\lambda \cap \mathfrak{g}v_\mu = 0$. Nous allons traduire cette propriété en une relation sur les poids λ et μ, et les racines α, de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notre variété X est l'orbite de v_λ vecteur de plus haut poids pour le G-module V_λ. En d'autres termes il existe un sous-groupe $P \subset G$, dit parabolique (dont la définition est : P contient

un sous-groupe de Borel), tel que $X = G/P = G.[v_\lambda] \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$. Notons $V_{(\rho)} \subset V$ le sous espace propore associé au poids ρ et désignons par R_+ l'ensemble des racines positives de $\mathfrak{g}$.

On a alors,

$$\mathfrak{g}^{(2)}v_\lambda \subset v_\lambda \oplus (\oplus_{\alpha\in R_+} V_{(\lambda-\alpha)}) \oplus (\oplus_{\alpha,\beta\in R_+} V_{(\lambda-\alpha-\beta)}),$$

et,

$$\mathfrak{g}v_\mu \subset v_\mu \oplus (\oplus_{\gamma\in R_+} V_{(\mu+\gamma)}).$$

Notre condition $\mathfrak{g}^{(2)}v_\lambda \cap \mathfrak{g}v_\mu = 0$ est donc vérifiée lorsque,

$$\lambda - \alpha - \beta \neq \mu + \gamma,\ \forall\alpha,\ \beta,\ \gamma \in R_+.$$

Nous allons chercher à déterminer pour quelles représentations l'inégalité précédente est fausse. C'est à dire que nous allons résoudre, pour tout groupe de Lie simple G, l'équation

$$\lambda - \alpha - \beta = \mu + \gamma,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in R_+.$$

En notant par w_0 l'involution qui transforme R_+ en R_- on obtient :

$$\lambda - w_0(\lambda) = \alpha + \beta + \gamma \tag{3.1}$$

Comme il en a été fait la remarque dans [Ch 2003], la résolution de l'équation $\lambda - w_0(\lambda) = \alpha + \beta$ permet de retrouver la classification des variétés homogènes pour un groupe de Lie simple dont la variété des sécantes est dégénérée (cf. le résultat de H. Kaji [Ka 1999]). En suivant les notations de [Bou 1968] nous allons discuter au cas par cas les solutions de (3.1). L'espace vectoriel réel sur lequel est défini le système de racines sera noté V et muni d'une base orthonormée (ϵ_i) pour un produit scalaire $(,)$. Pour tout élément de $v \in V$, tel que $v = \sum_{i=1}^{\dim(V)} a_i\epsilon_i$ dans la base orthonormée, on définit une norme sur V de la manière suivante $||v|| = \sum_{i=1}^{\dim(V)} |a_i|$. Comme nous le verrons dans les calculs qui suivent cette norme se comporte additivement "bien" lorsqu'on considère des combinaisons linéaires de poids fondamentaux.

Type A_n

On considère l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^{n+1}$ muni d'une base orthonormée $\epsilon_i,\ i = 1, ..., n+1$. Les racines positives du système A_n sont données dans V par les vecteurs $\epsilon_i - \epsilon_j$, $1 \leq i < j \leq n+1$. Les poids fondamentaux sont

$$\omega_i = \epsilon_1 + ... + \epsilon_i - \frac{i}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\epsilon_i$$

et w_0 l'involution sur le système de racines R est définie par $w_0(\epsilon_i) = \epsilon_{n+2-i}$. On obtient donc $\omega_i - w_0(\omega_i) = \epsilon_1 + ... + \epsilon_i - \epsilon_{n+2-i} - ... - \epsilon_{n+1}$ si $i \leq \frac{n+1}{2}$ et $\omega_{n+1-i} - w_0(\omega_{n+1-i}) = \omega_i - w_0(\omega_i)$.

On a $||\epsilon_i - \epsilon_j|| = 2$, et si on suppose que $\alpha + \beta + \gamma$ n'est pas une somme de deux racines :

$$||\alpha + \beta + \gamma|| = 6.$$

D'autre part,

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = 2i.$$

La restriction sur la norme donne comme candidat à la solution de (3.1) :
$\lambda = 3\omega_1$ et $\lambda = \omega_n$, $X = v_3(\mathbb{P}^n)$.
$\lambda = \omega_1 + \omega_2$ et $\omega_{n-1} + \omega_n$, $X = \mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1})$.
$\lambda = \omega_1 + \omega_{n-1}$ et $\omega_2 + \omega_n$, $X = \mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1})$.
$\lambda = \omega_3$ et $\lambda = \omega_{n-2}$, $X = G(3, n+1)$.

Il nous reste à vérifier que pour chaque λ considéré, on a bien $\lambda - w_0(\lambda)$ comme somme de trois racines positives.
$3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 3\epsilon_1 - 3\epsilon_{n+1} = 3(\epsilon_1 - \epsilon_{n+1})$.
$\omega_1 + \omega_2 - w_0(\omega_1 + \omega_2) = 2\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_n - 2\epsilon_{n+1} = 2(\epsilon_1 - \epsilon_{n+1}) + \epsilon_2 - \epsilon_n$.
$\omega_1 + \omega_{n-1} - w_0(\omega_1 + \omega_{n-1}) = 2(\epsilon_1 - \epsilon_{n+1}) + \epsilon_2 - \epsilon_n$.
$\omega_3 - w_0(\omega_3) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_{n-1} - \epsilon_n - \epsilon_{n+1} = \epsilon_1 - \epsilon_{n+1} + \epsilon_2 - \epsilon_n + \epsilon_3 - \epsilon_{n-1}$.

On peut donc résumer cette étude sous forme de proposition :

Proposition 3.1.1. *Soit $X = SL_{n+1}/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogènes sous le groupe de Lie $SL_{n+1}\mathbb{C}$ dans son plongement minimal. Si*
$X \neq \mathbb{P}^n$, $G(2, n+1)$, $v_2(\mathbb{P}^n)$ (variétés dont la sécante est dégénérée [Ka 1999]) et,
$X \neq v_3(\mathbb{P}^n)$, $\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1})$, $\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1})$, $G(3, n+1)$,
alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Type B_n, $n \geq 2$

On considère maintenant $V = \mathbb{R}^n$. Les racines positives sont les ϵ_i et les $\epsilon_i \pm \epsilon_j$, pour $1 \leq i < j \leq n$. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_i = \epsilon_1 + ... + \epsilon_i, i < n$$

et

$$\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + ... + \epsilon_n).$$

L'involution w_0 transforme ϵ_i en $-\epsilon_i$, d'où on obtient $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$. Calculons les normes,

$||\epsilon_i|| = 1, ||\epsilon_i \pm \epsilon_j|| = 2$, donc

$$||\alpha + \beta + \gamma|| = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{cases}$$

par ailleurs

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = ||2\omega_i|| = 2i, \ i < n$$

et,

$$||\omega_n - w_0(\omega_n)|| = n.$$

Le choix que nous avons fait pour la norme, implique que si les a_i sont des constantes positives alors $||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum_i a_i||\omega_i||$.

Distinguons deux cas, $n > 6$ et $n \leq 6$.

•$n > 6$

Alors les poids λ susceptibles d'être solutions de (3.1) sont,
$\lambda = 2\omega_1, 3\omega_1$
$\lambda = \omega_1 + \omega_2$,
et
$\lambda = \omega_3$.

Vérifions si ces poids sont solutions de (3.1) :
$2\omega_1 - w_0(2\omega_1) = 4\omega_1 = 4\epsilon_1$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines, de même $3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 6\omega_1 = 6\epsilon_1$ ne peut être somme de trois racines.
$\omega_1 + \omega_2 - w_0(\omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1 + 2\omega_2 = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 = 4\epsilon_1 + 2\epsilon_2$, ne peut pas être égal à la somme de trois racines.
$\omega_3 - w_0(\omega_3) = 2\omega_3 = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_3$ est la seule solution pour $n > 6$.

•$n \leq 6$

Pour $n = 6, 5, 4, 3$, les seuls candidats sont
$\lambda = \omega_3$ et $\lambda = \omega_n$. Nous venons de voir que $\omega_3 - w_0(\omega_3)$ était bien somme de trois racines positives, regardons à présent $\omega_n - w_0(\omega_n)$,

$$\omega_n - w_0(\omega_n) = \epsilon_1 + ... + \epsilon_n = \begin{cases} (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4) + (\epsilon_5 + \epsilon_6), \text{ si } n = 6 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4) + \epsilon_5, \text{ si } n = 5 \end{cases}$$

Lorsque $n = 3$, ou $n = 4$ alors $\omega_n - w_0(\omega_n)$ est somme de deux racines et on se ramène à la classification des variétés homogènes dont la variété des sécantes est dégénérée. Il en va de même pour $n = 2$.

A l'instar de la proposition 3.1.1 résumons ce qui précède :

Proposition 3.1.2. *Soit $X = SO_{2n+1}/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène pour le groupe de Lie simple $SO_{2n+1}\mathbb{C}$ dans son plongement minimal. Si*
$X \neq \mathbb{Q}^{2n-1}$, $\mathbb{S}_3 = \mathbb{P}^3$, $\mathbb{S}_4$, $\mathbb{S}_5$, $v_2(\mathbb{P}^3)$, $\mathbb{F}_1(\mathbb{Q}^{2n-1})$ *(variétés dont la sécante est dégénérée [Ka 1999]) et,*
$X \neq \mathbb{S}_6$, $\mathbb{S}_7$, $G_Q(3, 2n+1)$,
alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Type C_n, $n \geq 3$

Ici l'espace vectoriel considéré est encore $V = \mathbb{R}^n$. Les racines positives sont les $2\epsilon_i$ et les $\epsilon_i \pm \epsilon_j$, $(i < j)$. Les poids fondamentaux sont

$$\omega_i = \epsilon_1 + ... + \epsilon_i, \ (i \leq n).$$

L'involution w_0 est la même que pour le type B_n, à savoir $w_0(\epsilon_i) = -\epsilon_i$. D'où $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$. Le calcul des normes donne $||2\epsilon_i|| = 2$ et $||\epsilon_i \pm \epsilon_j|| = 2$. Donc

$$||\alpha + \beta + \gamma|| = 6,$$

sous l'hypothèse que la somme n'est pas égale à la somme de deux racines. D'autre part,

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = ||2\omega_i|| = 2i.$$

Par le choix que l'on a fait pour la norme, on voit que si a_i sont des constantes positives alors $||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum_i a_i||\omega_i||$. On obtient donc comme poids possibles,
$\lambda = 3\omega_1$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_2$,
$\lambda = \omega_3$.
Vérifions si, pour ces poids, $\lambda - w_0(\lambda)$ est la somme de trois racines :
$3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 6\omega_1 = 6\epsilon_1 = 3(2\epsilon_1)$ est bien somme de trois racines.
$\omega_1 + \omega_2 - w_0(\omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1 + 2\omega_2 = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 = 2\epsilon_1 + 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ est bien somme de trois racines.
$\omega_3 - w_0(\omega_3) = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_1 + \epsilon_3) + (\epsilon_2 + \epsilon_3)$ est aussi somme de trois racines.

D'où finalement,

Proposition 3.1.3. *Soit $X = Sp_{2n}/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène pour le groupe de Lie simple $Sp_{2n}\mathbb{C}$ dans son plongement minimal. Si*

$X \neq \mathbb{P}^{2n-1}$, $G_\omega(2,2n)$, $v_2(\mathbb{P}^{2n-1})$ (variétés dont la sécante est dégénérée [Ka 1999]) et,

$X \neq v_3(\mathbb{P}^{2n-1})$, $\mathbb{F}_{1,2,\omega}$, $G_\omega(3,2n)$, alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Type D_n $n \geq 4$

Dans $V = \mathbb{R}^n$, les racines positives s'écrivent $\epsilon_i \pm \epsilon_j$ pour $i < j$. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_i = \epsilon_1 + ... + \epsilon_i \text{ pour } i < n-1.$$

$$\omega_{n-1} = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + ... + \epsilon_{n-1} - \epsilon_n).$$

$$\omega_n = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + ... + \epsilon_{n-1} + \epsilon_n).$$

Si n est pair $w_0(\epsilon_i) = -\epsilon_i, \forall\, i$, et, si n est impair $w_0(\epsilon_i) = -\epsilon_i$ pour $i \neq n$ et $w_0(\epsilon_n) = \epsilon_n$.

Donc si n est pair $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$.

Si n est impair et $i < n-1$, alors $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$, pour $i = n-1$ et $i = n$, $\omega_{n-1} - w_0(\omega_{n-1}) = \omega_n - w_0(\omega_n) = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{n-1}$.

Calculons la norme,

$$||\alpha + \beta + \gamma|| = 6$$

et

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = ||2\omega_i|| = 2i$$

pour $i < n-1$. Si n est pair et $i = n-1$ ou $i = n$ alors

$$||\omega_{n-1} - w_0(\omega_{n-1})|| = ||\omega_n - w_0(\omega_n)|| = ||2\omega_n|| = n$$

et si n est impair et $i = n-1$ ou $i = n$,

$$||\omega_{n-1} - w_0(\omega_{n-1})|| = ||\omega_n - \omega_n|| = ||e_1 + \ldots \epsilon_{n-1}|| = n-1.$$

Pour le choix de la norme que nous avons fait on voit que si a_i sont des constantes positives alors $||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum a_i||\omega_i||$. Distinguons deux cas $n > 7$ et $n \leq 7$.

•$n > 7$

On obtient ainsi les possibilités suivantes,
$\lambda = 3\omega_1$.
$\lambda = \omega_1 + \omega_2$.
$\lambda = \omega_3$.
Vérifions si l'on obtient une somme de trois racines pour $\lambda - w_0(\lambda)$:
$3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 6\epsilon_1$, ne peut s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_1 + \omega_2 - w_0(\omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1 + 2\omega_2 = 4\epsilon_1 + 2\epsilon_2$, ne peut s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_3 - w_0(\omega_3) = 2\omega_3 = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_1 + \epsilon_3) + (\epsilon_2 + \epsilon_3)$.

•$n \leq 7$

Pour $n = 7, 6, 5, 4$, les candidats sont $\lambda = \omega_3$, $\lambda = \omega_n$ et $\lambda = \omega_{n-1}$. Le poids $\omega_3 - w_0(\omega_3)$ est bien une somme de trois racines. Regardons $\omega_n - w_0(\omega_n)$,

$$\omega_{n-1} - w_0(\omega_{n-1}) = \omega_n - w_0(\omega_n) = \begin{cases} (\epsilon_1 + e_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4) + (\epsilon_5 + \epsilon_6), \text{ si } n = 7 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4) + (\epsilon_5 + \epsilon_6), \text{ si } n = 6 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4), \text{ si } n = 5 \\ (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_3 + \epsilon_4), \text{ si } n = 5 \end{cases}$$

D'où pour le type D_n,

Proposition 3.1.4. *Soit $X = SO_{2n}/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène pour le groupe de Lie simple $SO_{2n}\mathbb{C}$ dans son plongement minimal. Si*
$X \neq \mathbb{Q}^{2l-2}$, $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{S}_4$, $\mathbb{S}_5$, $G_Q(2, 2n)$ (variétés dont la sécante est dégénérée [Ka 1999]) et,
$X \neq \mathbb{S}_6$, $\mathbb{S}_7$, $G_Q(3, 2n)$,
alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Type F_4

On considère maintenant $V = \mathbb{R}^4$, les racines positives sont les ϵ_i, $\epsilon_i - \epsilon_j$ $(i < j)$, et $\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm e_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)$. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_1 = \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

$$\omega_2 = 2\epsilon_1 + \epsilon_2.$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}(3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4).$$

$$\omega_4 = \epsilon_1.$$

L'involution w_0 envoie ϵ_i sur $-\epsilon_i$ et on a donc,

$$\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i.$$

Par ailleurs $||e_i|| = 1, ||\epsilon_i - \epsilon_i|| = 2$ $(i < j)$, et $||\frac{1}{2}(\epsilon_1 \pm e_2 \pm \epsilon_3 \pm \epsilon_4)|| = 2$.

$$||\alpha + \beta + \gamma|| = \begin{cases} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6. \end{cases}$$

et

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = \begin{cases} 4 \text{ si } i = 1 \\ 8 \text{ si } i = 2 \\ 4 \text{ si } i = 3 \\ 2 \text{ si } i = 4 \end{cases}$$

Enfin comme précédemment notre choix de norme implique que si on a des coefficients positifs a_i alors $||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum a_i||\omega_i||$.

Alors les solutions possibles de (3.1) sont,

$\lambda = 3\omega_4, 2\omega_4$,

$\lambda = \omega_3$,

$\lambda = \omega_3 + \omega_4$,

$\lambda = \omega_1$,

$\lambda = \omega_1 + \omega_4$,

Il nous faut vérifier si $\lambda - w_0(\lambda)$ est bien la somme de trois racines :

$3\omega_4 - w_0(3\omega_4) = 6\epsilon_1$ ne peut pas être la somme de trois racines positives.

$2\omega_4 - w_0(2\omega_4) = 4\epsilon_1$ ne peut pas être la somme de trois racines positives.

$\omega_3 - w_0(\omega_3) = 3\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 = (\epsilon_1 + \epsilon_2) + (\epsilon_1 + \epsilon_3) + (\epsilon_1 + \epsilon_4)$ est bien la somme de trois racines.

$\omega_3 + \omega_4 - w_0(\omega_3 + \omega_4) = 5\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$ ne peut pas être la somme de trois racines.

$\omega_1 - w_0(\omega_1) = 2\epsilon_1 + 2\epsilon_2 = 2(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ est somme de deux racines et est donc traité par le résultat de Kaji [Ka 1999].

$\omega_1 + \omega_4 - w_0(\omega_1 + \omega_4) = 4\epsilon_1 + 2\epsilon_2$ ne peut pas être la somme de trois racines.

D'où

Proposition 3.1.5. *Soit $X = F_4/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène pour le groupe de Lie simple F_4 dans son plongement minimal. Si*

$X \neq X^{16} \cap H = (E_6/P_1) \cap H = F_4/P_4$, $X^{15} = X_{F_4} = F_4/P_1$ (variétés dont la sécante est dégénérée [Ka 1999]) et,

$X \neq F_4/P_3$,

alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Type E_8

On se place maintenant dans $\mathbb{R}^8$, les racines positives sont $\pm e_i + e_j$ pour $i < j$ et les $\frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)$ avec $\sum_{i=1}^{7}\nu(i)$ est pair. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_1 = 2\epsilon_8$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 5\epsilon_8)$$
$$\omega_3 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 7\epsilon_8)$$
$$\omega_4 = \frac{1}{2}(\epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 5\epsilon_8)$$
$$\omega_5 = \frac{1}{2}(\epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 4\epsilon_8)$$
$$\omega_6 = \frac{1}{2}(\epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 3\epsilon_8)$$
$$\omega_7 = \frac{1}{2}(\epsilon_6 + \epsilon_7 + 2\epsilon_8)$$
$$\omega_8 = \frac{1}{2}(\epsilon_7 + \epsilon_8).$$

L'involution w_0 envoie ϵ_i sur $-\epsilon_i$ et donc $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$.

Par ailleurs $|| \pm e_i - e_j|| = 2$ $(i < j)$, et $||\frac{1}{2}(\epsilon_8 + \sum_{i=1}^{7}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)|| = 4$ avec $\sum_{i=1}^{7}\nu(i)$ est pair.

$$||\alpha + \beta + \gamma|| \leq 12.$$

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = \begin{cases} 4 \text{ si } i = 1 \\ 12 \text{ si } i = 2 \\ 14 \text{ si } i = 3 \\ 20 \text{ si } i = 4 \\ 16 \text{ si } i = 5 \\ 12 \text{ si } i = 6 \\ 8 \text{ si } i = 7 \\ 4 \text{ si } i = 8 \end{cases}$$

De plus pour le choix de la norme que l'on a fait on a, pour des entiers a_i positifs :
$||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum_{i\neq 2, i\neq 3} a_i||\omega_i|| + \frac{1}{2}|a_2 - a_3| + \frac{11}{2}a_2 + \frac{13}{2}a_3$.
D'où les candidats possibles sont,
$\lambda = \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_7$,

$\lambda = \omega_1 + \omega_8$,
$\lambda = 2\omega_1 + \omega_8$,
$\lambda = \omega_1 + 2\omega_8$,
$\lambda = \omega_2$,
$\lambda = \omega_6$,
$\lambda = \omega_7$,
$\lambda = \omega_7 + \omega_8$,
$\lambda = \omega_8, 2\omega_8, 3\omega_8$.

Cherchons parmi tous ces poids ceux tels que $\lambda - w_0(\lambda)$ s'écrive comme somme de trois racines :
$\omega_1 - w_0(\omega_1) = 4\epsilon_8$ ne s'écrit pas comme somme de trois racines, de même que $2\omega_1 - w_0(2\omega_1) = 8\epsilon_8$ et $3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 12\epsilon_8$.
$\omega_1 + \omega_7 - w_0(\omega_1 + \omega_7) = 8\epsilon_8 + 2\epsilon_6 + 2\epsilon_7$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_1 + \omega_8 - w_0(\omega_1 + \omega_8) = 6\epsilon_8 + 2\epsilon_7$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$2\omega_1 + \omega_8 - w_0(2\omega_1 + \omega_8) = 10\epsilon_8 + 2\epsilon_7$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_1 + 2\omega_8 - w_0(\omega_1 + 2\omega_8) = 8\epsilon_8 + 4\epsilon_7$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_2 - w_0(\omega_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 + \epsilon_7 + 5\epsilon_8$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_6 - w_0(\omega_6) = 2\epsilon_5 + 2\epsilon_6 + 2\epsilon_7 + 6\epsilon_8$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_7 - w_0(\omega_7) = 2\epsilon_6 + 2\epsilon_7 + 4\epsilon_8$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_7 + \omega_8 - w_0(\omega_7 + \omega_8) = 2\epsilon_6 + 4\epsilon_7 + 6\epsilon_8$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_8 - w_0(\omega_8) = 2\epsilon_7 + 2\epsilon_8 = 2(\epsilon_7 + \epsilon_8)$, est une somme de deux racines.

Proposition 3.1.6. *Soit $X = E_8/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène sous E_8 dans son plongement minimal, telle que $X \neq X_{E_8}$ (i.e. X n'est pas l'orbite associée à la représentation adjointe de E_8). Alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.*

Type E_7

Considérons $V = \mathbb{R}^8$, les racines positives sont les $\pm\epsilon_i + e_j$, pour $1 \leq i < j \leq 6$, $-\epsilon_7 + \epsilon_8$, et $\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 \sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)$ avec $\sum_{i=1}^{6}\nu(i)$ est impair. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_1 = \epsilon_8 - \epsilon_7$$
$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_8)$$
$$\omega_3 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - 3\epsilon_7 + 3\epsilon_8)$$
$$\omega_4 = \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_8$$
$$\omega_5 = \epsilon_4 + \epsilon_5 + \epsilon_6 - \frac{3}{2}\epsilon_7 + \frac{3}{2}\epsilon_8$$

$$\omega_6 = \epsilon_5 + \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8$$
$$\omega_7 = \epsilon_6 - \frac{1}{2}\epsilon_7 + \frac{1}{2}\epsilon_8.$$

L'involution w_0 envoie ϵ_i sur $-\epsilon_i$ et donc $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$. Regardons la norme, $||\pm\epsilon_i + e_j|| = 2$, $||-\epsilon_7+\epsilon_8|| = 2$ et $||\frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7\sum_{i=1}^{6}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)|| = 4$ avec $\sum_{i=1}^{6}\nu(i)$ est impair. Donc encore une fois on a d'une part,

$$||\alpha+\beta+\gamma|| \leq 12.$$

Et d'autre part,

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = \begin{cases} 4 \text{ si } i=1 \\ 10 \text{ si } i=2 \\ 12 \text{ si } i=3 \\ 16 \text{ si } i=4 \\ 12 \text{ si } i=5 \\ 8 \text{ si } i=6 \\ 4 \text{ si } i=7 \end{cases}$$

De plus pour la norme choisie, si a_i sont des entiers positifs, on a :
$||\sum_i a_i\omega_i|| = \sum_{i\neq 2, i\neq 3} a_i||\omega_i|| + \frac{1}{2}|a_2 - a_3| + \frac{9}{2}a_2 + \frac{11}{2}a_3$.

D'où les poids λ possibles sont :
$\lambda = \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_6$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_7$,
$\lambda = 2\omega_1 + \omega_7$,
$\lambda = \omega_1 + 2\omega_7$,
$\lambda = \omega_2$,
$\lambda = \omega_3$,
$\lambda = \omega_5$,
$\lambda = \omega_6$,
$\lambda = \omega_6 + \omega_7$,
$\lambda = \omega_7, 2\omega_7, 3\omega_7$.

Cherchons parmi ces poids ceux qui vérifient $\lambda - w_0(\lambda)$ est une somme de trois racines positives :
$\omega_1 - w_0(\omega_1) = 2\omega_1 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 = 2(\epsilon_8 - \epsilon_7)$, c'est une somme de deux racines.
$2\omega_1 - w_0(2\omega_1) = 4\omega_1 = 4\epsilon_8 - 4\epsilon_7$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines, de même que $3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 6\omega_1 = 6\epsilon_8 - 6\epsilon_7$.
$\omega_1+\omega_6 - w_0(\omega_1+\omega_6) = 2\omega_1+2\omega_6 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_5 + 2\epsilon_6 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_8 = 4\epsilon_8 - 4\epsilon_7 + 2\epsilon_5 + 2\epsilon_6$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_1 + \omega_7 - w_0(\omega_1+\omega_7) = 2\omega_1 + 2\omega_7 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8 = 3\epsilon_8 - 3\epsilon_7 + 2\epsilon_6$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.

$2\omega_1+\omega_7-w_0(2\omega_1+\omega_7)=4\omega_1+2\omega_7=4\epsilon_8-4\epsilon_7+2\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8=5\epsilon_8-5\epsilon_7+2\epsilon_6$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_1+2\omega_7-w_0(\omega_1+2\omega_7)=2\omega_1+4\omega_7=2\epsilon_8-2\epsilon_7+4\epsilon_6-2\epsilon_7+2\epsilon_8=4\epsilon_8-4\epsilon_7+4\epsilon_6$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_2-w_0(\omega_2)=2\omega_2=\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6-2\epsilon_7+2\epsilon_8=\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)+\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)+(-\epsilon_7+\epsilon_8)$, est bien la somme de trois racines.
$\omega_3-w_0(\omega_3)=3\omega_2=-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5+\epsilon_6-3\epsilon_7+3\epsilon_8$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_5-w_0(\omega_5)=2\omega_5=2\epsilon_4+2\epsilon_5+2\epsilon_6+3(\epsilon_8-\epsilon_7)$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_6-w_0(\omega_6)=2\omega_6=2\epsilon_5+2\epsilon_6-2\epsilon_7+2\epsilon_8$, ne peut s'écrire comme somme de trois racines.
$\omega_6+\omega_7-w_0(\omega_6+\omega_7)=2\omega_6+2\omega_7=2\epsilon_5+2\epsilon_6-2\epsilon_7+2\epsilon_8+2\epsilon_6+\epsilon_8-\epsilon_7=2\epsilon_5+4\epsilon_6-3\epsilon_7+3\epsilon_8$, n'est pas la somme de trois racines.
$\omega_7-w_0(\omega_7)=2\omega_7=2\epsilon_6+\epsilon_8-\epsilon_7=(\epsilon_8-\epsilon_7)+(\epsilon_6-\epsilon_1)+(\epsilon_6+\epsilon_1)$, est bien la somme de trois racines.
$2\omega_7-w_0(2\omega_7)=4\omega_7=4\epsilon_6+2\epsilon_8-2\epsilon_7$, n'est pas somme de trois racines, de même que $3\omega_7-w_0(3\omega_7)=6\omega_7=6\epsilon_6+3\epsilon_8-3\epsilon_7$.

On obtient alors pour E_7,

Proposition 3.1.7. *Soit $X=E_7/P\subset\mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène sous E_7 dans son plongement minimal, telle que $X\neq X_{E_7}$, $X\neq E_7/P_2$ (orbite de E_7 pour la représentation $\lambda=\omega_2$) et $X\neq E_7/P_7$ (orbite de E_7 pour la représentation $\lambda=\omega_7$). Alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.*

Type E_6

Soit $V=\mathbb{R}^8$, les racines positives sont les $\pm\epsilon_i+\epsilon_j$, pour $1\leq i<j\leq 5$, et $\frac{1}{2}(\epsilon_8-\epsilon_7-\epsilon_6\sum_{i=1}^5(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)$ avec $\sum_{i=1}^5\nu(i)$ est pair. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_1=\frac{2}{3}(\epsilon_8-\epsilon_7)$$

$$\omega_2=\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\frac{5}{3}\epsilon_6-\frac{5}{3}\epsilon_7+\frac{5}{3}\epsilon_8)$$

$$\omega_4=\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8$$

$$\omega_5=\epsilon_4+\epsilon_5-\frac{2}{3}\epsilon_6-\frac{2}{3}\epsilon_7+\frac{2}{3}\epsilon_8$$

$$\omega_6=\epsilon_5-\frac{1}{3}\epsilon_6-\frac{1}{3}\epsilon_7+\frac{1}{3}\epsilon_8$$

L'involution w_0 est définie par la symétrie du diagramme E_6, à savoir $w_0(\omega_1) = -\omega_6$, $w_0(\omega_3) = -\omega_5$, $w_0(\omega_4) = -\omega_4$ et $w_0(\omega_2) = -\omega_2$.

Du point de vue de la norme on a $||\pm\epsilon_i+\epsilon_j|| = 2$, et $||\frac{1}{2}(\epsilon_8-\epsilon_7-\epsilon_6\sum_{i=1}^{5}(-1)^{\nu(i)}\epsilon_i)|| = 4$, donc

$$||\alpha + \beta + \gamma|| \leq 12.$$

D'autre part,

$$||\omega_i - w_0(\omega_i)|| = \begin{cases} 4 \text{ si } i = 1 \\ 8 \text{ si } i = 2 \\ 9 \text{ si } i = 3 \\ 12 \text{ si } i = 4 \\ 9 \text{ si } i = 5 \\ 4 \text{ si } i = 6 \end{cases}$$

De plus pour la norme choisie, si a_i sont des entiers positifs, on a :
$||\sum_i a_i(\omega_i - w_0(\omega_i))|| = \sum_{i\neq 2, i\neq 3} ||\omega_i - w_0(\alpha_i)|| + \frac{1}{2}|a_2 - a_3| + \frac{7}{2}a_2 + \frac{9}{2}a_3$.
D'où la liste suivante de poids :
$\lambda = \omega_1, 2\omega_1, 3\omega_1$
$\lambda = \omega_1 + \omega_2$,
$\lambda = \omega_1 + \omega_6$,
$\lambda = 2\omega_1 + \omega_6$,
$\lambda = \omega_1 + 2\omega_6$,
$\lambda = \omega_2$,
$\lambda = \omega_3$,
$\lambda = \omega_4$,
$\lambda = \omega_5$,
$\lambda = \omega_6, 2\omega_6, 3\omega_6$
$\lambda = \omega_6 + \omega_2$.

Déterminons parmi ces λ ceux qui vérifient l'équation (3.1) :
$\omega_1 - w_0(\omega_1) = \omega_1 + \omega_6 = \epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1) + \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$, s'écrit comme somme de deux racines.
$2\omega_1 - w_0(2\omega_1) = 2\omega_1 + 2\omega_6 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6 + 2\epsilon_5$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines, de même que $3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 3\omega_1 + 3\omega_6 = 3\epsilon_8 + -3\epsilon_7 - 3\epsilon_6 + 3\epsilon_5$.
$\omega_1+\omega_2-w_0(\omega_1+\omega_2) = \omega_1+\omega_6+2\omega_2 = \epsilon_8-\epsilon_7-\epsilon_6+\epsilon_5+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6 + 2\epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.
$\omega_1+\omega_6-w_0(\omega_1+\omega_6) = 2\omega_1+2\omega_6 = 2\epsilon_8-2\epsilon_7-2\epsilon_6+2\epsilon_5$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines de même que $2\omega_1+\omega_6-w_0(2\omega_1+\omega_6) = 3\omega_1+3\omega_6 = 3\epsilon_8-3\epsilon_7-3\epsilon_6+3\epsilon_5$ et $\omega_1+2\omega_6-w_0(\omega_1+2\omega_6) = 3\omega_1+3\omega_6 = 3\epsilon_8-3\epsilon_7-3\epsilon_6+3\epsilon_5$.
$\omega_2 - w_0(\omega_2) = 2\omega_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 + \epsilon_5 - \epsilon_6 - \epsilon_7 + \epsilon_8 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1) + \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1)$, s'écrit comme somme de deux racines.

$\omega_3 - w_0(\omega_3) = \omega_3 + \omega_5 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+3\epsilon_4+3\epsilon_5-3\epsilon_6-3\epsilon_7+3\epsilon_8) = \frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)+\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+3\epsilon_8)+\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)$, est bien la somme de trois racines.
$\omega_4 - w_0(\omega_4) = 2\omega_4 = 2\epsilon_3 + 2\epsilon_4 + 2\epsilon_5 - 2\epsilon_6 - 2\epsilon_7 + 2\epsilon_8$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.

Puis par symétrie on a aussi :
$\omega_5 - w_0(\omega_5) = \omega_5 + \omega_3 = \frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+3\epsilon_4+3\epsilon_5-3\epsilon_6-3\epsilon_7+3\epsilon_8) = \frac{1}{2}(-\epsilon_1-\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)+\frac{1}{2}(-\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+3\epsilon_8)+\frac{1}{2}(\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8)$, est bien la somme de trois racines.
$\omega_6 - w_0(\omega_6) = \omega_6 + \omega_1 = \epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 = \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1) + \frac{1}{2}(\epsilon_8 - \epsilon_7 - \epsilon_6 + \epsilon_5 - \epsilon_4 - \epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1)$, s'écrit comme somme de deux racines.
$2\omega_6 - w_0(2\omega_6) = 2\omega_6 + 2\omega_1 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6 + 2\epsilon_5$, ne peut pas s'écrire comme somme de trois racines, de même que $3\omega_6 - w_0(3\omega_6) = 3\omega_6 + 3\omega_1 = 3\epsilon_8 + -3\epsilon_7 - 3\epsilon_6 + 3\epsilon_5$.
$\omega_6+\omega_2-w_0(\omega_6+\omega_2) = \omega_1+\omega_6+2\omega_2 = \epsilon_8-\epsilon_7-\epsilon_6+\epsilon_5+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3+\epsilon_4+\epsilon_5-\epsilon_6-\epsilon_7+\epsilon_8 = 2\epsilon_8 - 2\epsilon_7 - 2\epsilon_6 + 2\epsilon_5 + \epsilon_4 + \epsilon_3 + \epsilon_2 + \epsilon_1$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines.

Ainsi,

Proposition 3.1.8. *Soit $X = E_6/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène sous E_6 dans son plongement minimal, telle que $X \neq X_{E_6} = E_6/P_2$, $X \neq E_6/P_1 = E_6/P_6$ (orbite de E_6 pour la représentation $\lambda = \omega_6$) et $X \neq E_6/P_3 = E_6/P_5$ (orbite de E_6 pour la représentation $\lambda = \omega_5$). Alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.*

Type G_2

On considère maintenant $V = \mathbb{R}^3$, les racines positives du système G_2 sont les $\epsilon_1 - \epsilon_2$, $-\epsilon_1 + \epsilon_3$, $-\epsilon_2 + \epsilon_3$, $-2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$, $-2\epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_3$, $2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2$. Les poids fondamentaux sont,

$$\omega_1 = -\epsilon_2 + \epsilon_3$$

$$\omega_2 = -\epsilon_1 - \epsilon_2 - 2\epsilon_3$$

L'involution w_0 envoie ω_i sur $-\omega_i$ et donc $\omega_i - w_0(\omega_i) = 2\omega_i$. De plus on a $||\alpha + \beta + \gamma|| \leq 12$. Or si a_1 et a_2 sont deux nombres positifs, $||a_1\omega_1 + a_2\omega_2 - w_0(a_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2)|| = ||2a_1\omega_1 + 2a_2\omega_2|| = 2a_2 + 2(a_1 + a_2) + 2|2a_2 - a_1|$.

Si on suppose de plus a_i entier, alors $2a_2 + 2(a_1 + a_2) + 2|2a_2 - a_1| \leq 12$ implique $(a_1, a_2) = (1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1)$.

Déterminons alors les $\lambda = a_1\omega_1 + a_2\alpha_2$ qui satifont l'équation (3.1) :
$\omega_1 - w_0(\omega_1) = 2\omega_1 = -2\epsilon_2 + 2\epsilon_3$ est bien la somme de deux racines.
$2\omega_1 - w_0(2\omega_1) = 4\omega_1 = -4\epsilon_2 + 4\epsilon_3 = (2\epsilon_3 - \epsilon_2 - \epsilon_1) + (-2\epsilon_2 + \epsilon_1 + \epsilon_3) + (\epsilon_3 - \epsilon_2)$ est bien somme de trois racines.
$3\omega_1 - w_0(3\omega_1) = 6\omega_1 = -6\epsilon_2 + 6\epsilon_3$ ne s'écrit pas comme somme de trois racines.

$\omega_2 - w_0(\omega_2) = 2\omega_2 = 4\epsilon_3 - 2\epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 2(2\epsilon_3 - \epsilon_1 - \epsilon_2)$ s'écrit comme somme de deux racines.
$\omega_1 + \omega_2 - w_0(\omega_1 + \omega_2) = 2\omega_1 + 2\omega_2 = -2\epsilon_2 + 2\epsilon_3 + 4\epsilon_3 - 2\epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 6\epsilon_3 - 4\epsilon_2 - 2\epsilon_1$, ne s'écrit pas comme somme de trois racines, de même $2\omega_1+\omega_2-w_0(2\omega_1+\omega_2) = 4\omega_1+2\omega_2 = -4\epsilon_2 + 4\epsilon_3 + 4\epsilon_3 - 2\epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 8\epsilon_3 - 6\epsilon_2 - 2\epsilon_1$, et $3\omega_1 + \omega_2 - w_0(3\omega_1 + \omega_2) = 6\omega_1 + 2\omega_2 = -6\epsilon_2 + 6\epsilon_3 + 4\epsilon_3 - 2\epsilon_1 - 2\epsilon_2 = 10\epsilon_3 - 8\epsilon_2 - 2\epsilon_1$, ne sont pas somme de trois racines.

Ainsi,

Proposition 3.1.9. *Soit $X = G_2/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène sous G_2 dans son plongement minimal, telle que $X \neq X_{G_2} = G_2/P_2$, $X \neq G_2/P_1$ (orbite de G_2 pour la représentation $\lambda = \omega_1$) et $X \neq v_2(G_2/P_1)$ (orbite de G_2 pour la représentation $\lambda = 2\omega_1$).*

Alors X n'est pas δ_{σ^*}-défective.

Liste des hypersurfaces $(G/P)^*$, pour G groupe de Lie simple, potentiellement normales

Avec nos calculs, nous avons établi, pour chaque groupe de Lie simple, une liste de variétés potentiellement δ_{σ^*}-défectives. Lorsque $\delta_{X^*} = 0$ et $\delta_{\sigma^*} = 0$, X^* est une hypersurface et $\sigma(X)^*$ est une composante du lieu singulier de X^* de codimension 1. Ainsi $\delta_{X^*} = \delta_{\sigma^*} = 0 \Rightarrow X^*$ n'est pas une hypersurface normale. Si on considère les variétés obtenues par ces calculs, i.e. variétés homogènes telles que $\delta_{\sigma^*} \neq 0$, alors on a une liste de variétés homogènes qui contient nécessairement toutes les variétés homogènes pour un groupe de Lie simple, dont le dual est une hypersurface normale. Cette liste peut être encore réduite en demandant $\delta_{X^*} = 0$ et en tenant compte des résultats du chapitre 2. En effet nous avions montré comme application du théorème de Knop que les variétés duales des variétés adjointes, pour $G \neq Sp_{2n}$ et $G \neq G_2$, étaient des hypersurfaces singulières en codimension 1. De même le corollaire 3 nous dit que, pour $d > 2$, $v_d(\mathbb{P}^n)^*$ est singulière en codimension 1 (et même plus précisément $\delta_{\sigma^*} = 0$). Du même corollaire on obtient que $v_2(G_2/P_1)^* = v_2(\mathbb{Q}^5)^*$ est singulière en codimension 1.

On a donc la liste suivante :

Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène pour un groupe de Lie simple telle que $\delta_{X^*} = 0$, alors si X^* est normale, X appartient à la liste suivante,

$G(2, 2n)$	$v_2(\mathbb{P}^n)$	$\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1})$	$\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1})$	$G(3, n+1)$
$\mathbb{Q}^n$	$\mathbb{S}_6$	$\mathbb{S}_7$	$G_Q(3, n)$	
$G_\omega(2, 2n)$	$\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n})$	$G_\omega(3, 2n)$		
F_4/P_3	F_4/P_4			
E_7/P_2	E_7/P_7			
E_6/P_1	E_6/P_3			
G_2/P_2.				

Pour obtenir une classification des discriminants, pour les variétés homogènes, qui correspondent à des hypersurfaces normales, il faut encore prouver que certaines variétés dans la liste ont des variétés duales singulières en codimension 1. Nous allons donc dans les prochaines sections préciser ce résultat et l'étendre aux variétés homogènes sous l'action d'un groupe de Lie semi-simple.

3.2 Normalité de $\Delta_{(G/P)}$

Rappelons quelques exemples connus de variétés homogènes dont le dual est une hypersurface normale.

3.2.1 Quelques variétés homogènes dont le dual est une hypersurface normale

Exemple 3.2.1. *Reprenons l'exemple de $X = v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}(S^2(\mathbb{C}^{n+1}))$. On peut identifier X à la projectivisation de l'orbite des matrices de rang 1 dans l'algèbre des matrices symétriques. Comme nous l'avons déja évoqué X^* est donnée par l'équation $\{det = 0\}$, et est donc isomorphe à la projectivisation des matrices symétriques de rang au plus n. Le lieu singulier de $\{det = 0\}$ est l'ensemble des matrices de rang au plus $n-1$. Mais l'espace des matrices symétriques de rang $n+1-i$ est de codimension $\frac{i(i+1)}{2}$ dans $S^2(\mathbb{C}^{n+1})$. On obtient ainsi $codim_{X^*} X^*_{\text{sing}} = 2$.*

Avant de proposer le prochain exemple, il nous faut introduire les variétés *sous-adjointes* en reprenant la terminologie de [L-M 2003, L-M 2001]. Expliquons briévement cette notion : soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de plus haute racine $\tilde{\alpha}$. Supposons de plus que $\tilde{\alpha} = \omega_i$ soit un poids fondamental, et considérons $X_G = G/P_{\alpha_i} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g})$ sa variété adjointe. Soit $H \subset P_{\alpha_i}$ le sous-groupe de Lie semi-simple obtenu à partir de G en effaçant le noeud correspondant au poids fondamental ω_i. L'espace tangent $\hat{T}_{x_{\tilde{\alpha}}} X_G = \mathfrak{g} x_{\tilde{\alpha}}$ se décompose en somme de H-module irréductibles,

$$\hat{T}_{x_{\tilde{\alpha}}} X_G = \hat{T}_1 + \hat{T}_2.$$

Avec $\hat{T}_1 = \bigoplus_{\beta \in \mathfrak{g}, m_i(\beta)=1} \mathfrak{g}_{-\beta} x_{\tilde{\alpha}}$, et $\hat{T}_2 =< x_{\tilde{\alpha}}, [x_{-\tilde{\alpha}}, x_{\tilde{\alpha}}] >$. Le H-module $\hat{T}_1$ est la représentation obtenue en marquant les noeuds du diagramme du groupe semi-simple H qui étaient adjacents au noeud correspondant à ω_i pour le diagramme du groupe G. Soit maintenant $Y \subset \mathbb{P}(T_1)$ l'orbite fermée pour H. C'est cette variété que l'on définit comme variété sous-adjointe. Le lien entre cette sous-orbite très spéciale et les invariants différentiels de X^*_G est exploité dans [L-M 2003]. Ce lien est le suivant : $Y = Base|II_{X_G, x_{\tilde{\alpha}}}|$.

Schématiquement on retrouve cette orbite de la façon suivante :

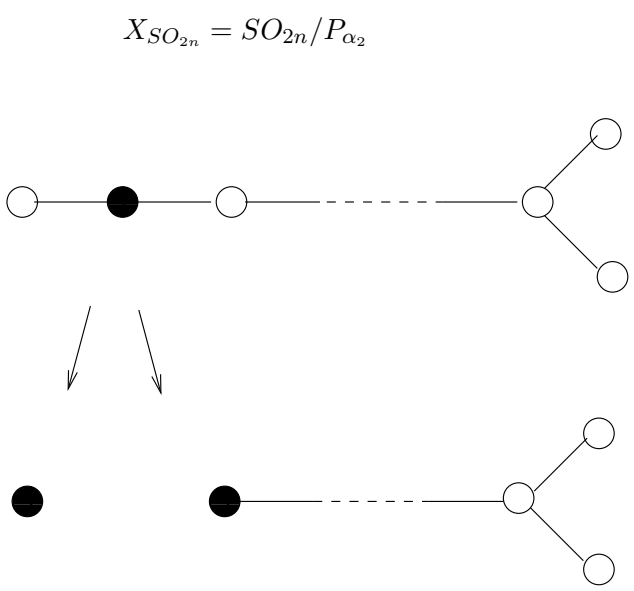


FIG. 3.1 – Description schématique de $Y_{SL_2\times SO_{2n-4}} \subset T_{x_{\omega_2}} X_{SO_{2n}}$

Exemple 3.2.2. *$X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ est la variété sous-adjointe de $X_{D_4} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{so}_8\mathbb{C})$. Plus généralement $X = \mathbb{Q}^n \times \mathbb{P}^1$ est la variété sous-adjointe de X_{B_m} si $m = \frac{n+5}{2}$ où de X_{D_m} si $m = \frac{n+6}{2}$.*

Proposition 3.2.1. *$(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{P}^1)^*$ n'est pas singulière en codimension 1 si et seulement si $n > 1$.*

Les projectivisations des $SO_{n+1} \times SL_2$-orbites de $\mathbb{C}^{n+1} \otimes \mathbb{C}^2$ ont été décrites dans [L-M 2001]. Pour $n > 2$ on a :

$$\mathbb{Q}^n \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^1 \cup \{[b \otimes e + c \otimes f] | b \wedge c \in G_Q(2, \mathbb{C}^{n+2})\ e, f \in \mathbb{P}^1\} \subset \tau(X) \subset \mathbb{P}^{2n+3}.$$

On peut alors montrer que $\tau(X) \simeq X^*$. La reunion des orbites $\mathbb{P}^{n+1} \times \mathbb{P}^1 \cup \{[b \otimes e + c \otimes f] | b \wedge c \in G_Q(2, \mathbb{C}^{n+2})\ e, f \in \mathbb{P}^1\}$ correspond au lieu singulier de $\tau(X)^*$. Pour $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (cas $n = 2$) une description similaire existe mais le lieu singulier de $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)^*$ se décompose en trois composantes irréductibles de codimension 2 (voir aussi [W-Z 1996]). Enfin si on considère le produit de Segre d'une conique et d'une droite, $\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^5$ alors $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \subset \tau_{\text{sing}}(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^1)$ est de codimension 1.

Les variétés de Scorza (voir [Zak 1993])

Les variétés de Scorza furent introduites et classifiées par F. Zak [Zak 1993]. Ces variétés généralisent les variétés de Severi qui s'obtiennent comme cas limite du théorème suivant :

Théorème 3.2.1 (Zak). *Soit $X^n \subset \mathbb{P}^{n+a}$ une variété lisse non dégénérée, telle que $a < \frac{n}{2} + 2$, alors $\sigma(X) = \mathbb{P}^{n+a}$.*

La définition des variétés de Severi est donc,

Définition 3.2.1. *On appelle variété de Severi, une variété $X^n \subset \mathbb{P}^{n+a}$ lisse et non dégénérée telle que $\sigma(X) \neq \mathbb{P}^{n+a}$ et $a = \frac{n}{2} + 2$.*

Il existe quatre variétés de Severi qui sont :

$$v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5 \quad \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8 \quad G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14} \quad \mathcal{E}_6 = E_6/P_1 \subset \mathbb{P}^{26}.$$

Pour définir les variétés de Scorza, il faut introduire les sécantes de dimension supérieures.

Définition 3.2.2. *Etant donnés $k+1$ points, $x_1, ..., x_{k+1}$, notons par $\mathbb{P}^k_{x_1 \ldots x_{k+1}}$ le k-plan passant par ces points. Alors pour $X \subset \mathbb{P}(V)$, on définit la k-ième variété des sécantes de X par,*

$$\sigma^k(X) = \overline{\bigcup_{x_1,\ldots,x_{k+1} \in X} \mathbb{P}^k_{x_1 \ldots x_{k+1}}}.$$

Comme pour les variétés des sécantes il existe une notion de défaut. On s'attend à avoir $\dim\sigma_i(X) = \dim X + \dim\sigma_{i-1}(X) + 1$ et on peut définir ainsi un défaut d'ordre i, $\delta_i = \dim X + \dim\sigma_{i-1}(X) + 1 - \dim\sigma_i(X)$, avec $\delta_1 = \delta_\sigma$.

Les résultats suivant dus à Zak conduisent à la définition des variétés de Scorza. Notons par k_0 le plus petit entier k tel que $\sigma_k(X) = \mathbb{P}^{n+a}$.

Théorème 3.2.2 (Zak). *Si $1 \leq i \leq k_0$, alors $\delta_i \geq \delta_{i-1} + \delta_1$.*

Corollaire 5 (Zak). $k_0 \leq \frac{n}{\delta_1}$.

Comme pour les variétés de Severi, Zak définit les variétés de Scorza comme cas limite de ses précédents résultats,

Définition 3.2.3. *Une variété $X^n \subset \mathbb{P}^{n+a}$ est de Scorza si elle est lisse, non dégénérée et que d'une part $k_0 = [\frac{n}{\delta_1}]$ et d'autre part $\delta_i = i\delta_1$.*

On parle de k-variété de Scorza pour préciser la valeur de $k_0 = k$.

Les variétés de Scorza sont :

$$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}(S^2V^{n+1}) \quad \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{n^2+2n} \quad G(2,2n) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V^{2n}) \quad \mathcal{E}_6 = E_6/P_1 \subset \mathbb{P}^{26}.$$

Les 2-variétés de Scorza sont les variétés de Severi.

Les k-variétés de Scorza sont toutes homogènes et correspondent aux variétés projectives des matrices de rang 1 dans des algèbres de Jordan de rang $k+1$. Ce lien étroit entre variétés de Scorza et algèbres de Jordan a été étudié en détails par P.E. Chaput [Ch 2003].

Pour X une variété projective, on peut regarder la stratification de X^* induite par la multiplicité, $X^*_k = \{H \in X^* | mult_H \geq k\}$. La description des variétés de Scorza comme variétés de matrices de rang 1 conduit aux isomorphismes suivants,

si X est une k-variété de Scorza alors (voir [Zak 2004]),

$$X^*_i \simeq \sigma_{k-i}(X).$$

Cela implique en particulier que si X est une variété de Scorza, alors $codim_{X^*} X^*_{\text{sing}} \geq 2$.

Les variétés sous-adjointes dans le carré magique de Freudenthal

Dans [L-M 2001], J.M. Landsberg et L. Manivel ont considéré la géométrie du carré magique de Freudenthal. Les auteurs ont étudié la structure infinitésimale des variétés adjointes (variétés sous-adjointes). Les variétés sous-adjointes ainsi obtenues sont des *variétés minuscules* Y (voir [L-M 2001]), et lorsque $Base|II_{Y,y}| \neq \emptyset$ on peut réitérer le procédé et construire des *variétés sous-minuscules*. Pour les variétés adjointes X_G lorsque $G = F_4,\ E_6,\ E_7,\ E_8$ les variétés sous-minuscules obtenues après deux étapes sont les variétés de Severi. Or une section générale d'une variété de Severi est encore une variété homogène. Ces considérations conduisent au carré suivant,

$v_2(\mathbb{Q}^1)$	$\mathbb{P}(T\mathbb{P}^2)$	$G_\omega(2,6)$	$\mathbb{OP}^2 \cap H$	section hyperplane $Z \cap H$
$v_2(\mathbb{P}^2)$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$G(2,6)$	$\mathbb{OP}^2$	variété de Severi $Z = Base\|II_Y\|$
$G_\omega(3,6)$	$G(3,6)$	$\mathbb{S}_6$	E_7/P_7	variété sous-adjointe $Y = Base\|II_{X_G}\|$
X_{F_4}	X_{E_6}	X_{E_7}	X_{E_8}	variété adjointe

Ces variétés sont des variétés homogènes dont les algèbres de Lie sont,

$\mathfrak{so}_3$	$\mathfrak{sl}_3$	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathfrak{f}_4$
$\mathfrak{sl}_3$	$\mathfrak{sl}_3 \times \mathfrak{sl}_3$	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathfrak{e}_6$
$\mathfrak{sp}_6$	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathfrak{so}_{12}$	$\mathfrak{e}_7$
$\mathfrak{f}_4$	$\mathfrak{e}_6$	$\mathfrak{e}_7$	$\mathfrak{e}_8$

C'est le *carré magique de Freudenthal* d'algèbres de Lie semi-simples. La version de Freudenthal et Tits repose sur une construction d'algèbre de Lie semi-simple à partir d'une paire $(\mathbb{K}_1, \mathbb{K}_2)$ où $\mathbb{K}_i = \mathbb{R} \otimes \mathbb{C}, \mathbb{C} \otimes \mathbb{C},\ \mathbb{H} \otimes \mathbb{C},\ \mathbb{O} \otimes \mathbb{C}$ est la complexification de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, des quaternions $\mathbb{H}$ ou des octaves $\mathbb{O}$.

Les auteurs étudient en détails les orbites des représentations associées aux variétés de la troisième ligne et en donnent une déscription unifiée. La proposition suivante s'obtient en regroupant les propositions 5.8, 5.10 et 5.11 de [L-M 2001].

Proposition 3.2.2. (Landsberg-Manivel) *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété issue de la troisième ligne du carré magique homogène sous l'action de G.*

- V a exactement 4-orbites côniques sous l'action de G distinctes de $\{0\}$, et qui sont ordonnées pour l'inclusion,

$$X = X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \mathbb{P}(V).$$

- $X_1^* \simeq X_3$.
- $X_2 \simeq X_{1\text{sing}}^*$.
- $codim_{X_3} X_2 \geq 2$ (voir [L-M 2001] pour un calcul précis des dimensions des orbites).

Ainsi les variétés de la troisième ligne du carré magique ont pour variété duale une hypersurface normale. Il convient de noter ici que $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, traité dans l'exemple 3.2.2, s'interprète aussi comme une variété de la troisième ligne pour une version étendue du carré magique. Les résultats précédents sont alors vrais pour $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

3.2.2 Résultats de Zak sur la normalité de X^*

Nous rappelons dans cette section deux théorèmes dus à Zak ([Zak 1989, Ro 1994, Te 2004]). Nous déduisons du premier que si $X = G_\omega(2, 2n)$ ou $X = F_4/P_1$, alors X^* n'est pas une hypersurface normale. A partir du second théorème, nous traitons le cas des variétés homogènes pour un groupe de Lie semi-simple.

Avant d'énoncer le premier théorème, nous avons besoin d'une définition.

Définition 3.2.4. *On dira qu'une variété lisse $X^n \subset \mathbb{P}^{n+a}$ admet une extension, si il existe une variété $\tilde{X}^{n+1} \subset \mathbb{P}^{n+a+1}$ non dégénérée et un hyperplan $H \in \mathbb{P}^{n+a+1*}$ tels que $X = \tilde{X} \cap H$.*

Théorème 3.2.3 (Zak). *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse. Alors X^* est normale $\Rightarrow$ X n'admet pas d'extension.*

Application aux variétés (C_n, ω_2) et (F_4, ω_1).

La variété $X = G_\omega(2, n) = Sp_{2n}/P_2$ admet une extension. En effet si on considère ω comme une forme linéaire sur $\bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n}$, la variété X s'écrit alors $X = G(2, 2n) \cap H_{\omega=0}$. Il est aussi bien connu (voir [L-M 2001]) que la variété $X^{(15)} = F_4/P_1$ s'obtient comme section hyperplane de la variété de Severi E_6/P_1.

Ainsi les variétés duales $(Sp_{2n}/P_2)^*$, $(F_4/P_1)^*$, qui étaient potentiellement des hypersurfaces normales, ne le sont pas.

Le second théorème va nous permettre de traiter le cas des groupes de Lie semi-simples.

Théorème 3.2.4 (Zak). *Soit X une variété projective lisse telle que X^* soit normale, alors soit $\sigma(X)$ est dégénérée soit $\forall\ x \in X_{\text{général}}$, $dim_{\mathbb{P}(S^2T_xX)}|II_{X,x}| = n-1$.*

Application aux variétés homogènes sous l'action d'un groupe de Lie semi-simple.

Afin d'appliquer le théorème de Zak, prouvons le lemme suivant,

Lemme 10. *Soit $X^n \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective lisse non dégénérée, $X \neq \mathbb{P}^n$. Alors $\sigma(v_d(X))$ est non dégénérée dès que $d \geq 2$ et $dim|II_{v_d(X),x^d}| \neq n-1$.*

Soit $Y^m \subset \mathbb{P}(W)$ une autre variété projective lisse, alors $\sigma(X \times Y) \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$ est non dégénérée et $dim|II_{X\times Y,x\otimes y}| \neq n+m-1$ si et seulement si

-$X \times Y \neq \mathcal{C} \times \mathbb{P}^m$, où $\mathcal{C}$ est une courbe lisse,

-$X \times Y \neq X \times \mathbb{P}^1$ avec $dim|II_{X,x}| = 0$.

Remarque 3.2.1. *On trouve dans la littérature des preuves d'assertions contenues dans ce lemme. Par exemple $\sigma(v_d(X))$ non dégénérée est prouvé dans [I-L 2003, Lan 1996], et $\sigma(X \times Y)$ non dégénérée, est prouvé dans [Zak 1993].*

Démonstration. Soit $\mathcal{F}^1_X$ un fibré des repères adaptés au premier ordre pour X, i.e. qui respectent le drapeau, $\{e_0\} \subset \{e_0, e_\alpha\} \subset \{e_0, e_\alpha, e_\mu\}$. Le calcul de $II_{v_d(X)e_0^d}$ donne,

$$II_{v_d(X),e_0^d} = \omega^\mu_\alpha \omega^\alpha_0 \underline{e_\mu e_0^{d-1}} + \omega^\alpha_0 \omega^\beta_0 \underline{e_\alpha e_\beta e_0^{d-2}}.$$

Ceci implique $\dim|II_{v_d(X),e_0^d}| > n-1$. Si on dérive encore une fois on obtient $III_{v_d(X),e_0^d} \neq 0$ qui implique $\sigma(v_d(X))$ est non dégénérée.

Soit maintenant $\mathcal{G}^1_Y$ un fibré des repères adapatés au premier ordre au-dessus de Y. Le drapeau correspondant est $\{f_0\} \subset \{f_0, f_\epsilon\} \subset \{f_0, f_\epsilon, f_\rho\}$. En notant (ϕ^i_j) la forme de Maurer-Cartan pour le fibré $\mathcal{G}$, le calcul de $II_{X\times Y,e_0\otimes f_0}$ donne,

$$II_{X\times Y,e_0\otimes f_0} = \omega^\alpha_0 \phi^\epsilon_0 \underline{e_\alpha \otimes f_\epsilon} + \omega^\mu_\alpha \omega^\alpha_0 \underline{e_\mu \otimes f_0} + ...$$

L'hypothèse $X \neq \mathbb{P}^n$ implique $\omega^\mu_\alpha \neq 0$ et donc $\dim|II_{X\times T,e_0\otimes f_0}| \geq mn$. En dérivant une fois de plus, on obtient $III_{X\times Y,e_0\otimes f_0} \neq 0$. Ce qui implique $\sigma(X \times Y)$ est non dégénérée. $\dim|II_{X\times T,e_0\otimes f_0}| > \dim X + \dim Y - 1$ si $nm > n+m-1$. Cette dernière égalité est vraie lorsque $n > 1$ et $m > 1$.

Traitons le cas $n = 1$, on a

$$II_{\mathcal{C}\times Y,e_0\otimes f_o} = \omega^1_0 \phi^\epsilon_0 \underline{e_1 \otimes f_\epsilon} + \omega^\mu_1 \omega^1_0 \underline{e_\mu \otimes f_0} + \phi^\rho_\epsilon \phi^\epsilon_0 \underline{e_0 \otimes f_\rho}.$$

Si Y n'est pas un espace projectif, ce calcul implique alors que $\dim|II_{\mathcal{C}\times Y^m,e_0\otimes f_0}| > m-1$. Si $Y = \mathbb{P}^m$ alors $\dim|II_{\mathcal{C}\times Y^m,e_0\otimes f_0}| > m-1$ dès que $\dim|II_{\mathcal{C},e_0}| > 0$. Pour le cas $m = 1$,

il faut supposer $Y = \mathbb{P}^1$ sinon c'est le cas précédent. Un calcul similaire montre alors que $\dim|II_{X\times\mathbb{P}^1,e_0\otimes f_0}| > n$ dès que $\dim|II_{X,e_0}| > 0$. □

La seule variété homogène qui vérifie $\dim|II_{X,x}| = 0$ est la quadrique lisse $X = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$. Ainsi d'après le lemme, la seule variété homogène pour l'action d'un groupe semi-simple (mais pas simple), dont la variété duale puisse être une hypersurface normale, est $X = \mathbb{Q}^n \times \mathbb{P}^1$. Or $(\mathbb{Q}^n \times \mathbb{P}^1)^*$ est bien une hypersurface normale comme nous l'avons vu dans la proposition 3.2.1.

3.2.3 Normalité de X^* pour les variétés homogènes

Il nous reste à traiter le cas des variétés $\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1})$, $\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1})$, $\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n})$, $G(3,n)$, $G_Q(3,n)$, $G_\omega(3,2n)$, $\mathbb{S}_7$, E_6/P_3, E_7/P_2 et F_4/P_3 afin d'obtenir une classification complète des variétés homogènes dont le dual est une hypersurface normale.

Pour cela nous allons appliquer le critère de F. Zak (théorème 3.2.4) et donc calculer la dimension de $|II_{X,x}|$ pour ces variétés.

Les variétés $\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1})$, $\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1})$ et $\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n})$

Lemme 11. *$(\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1}))^*$, $(\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1}))^*$) et $(\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n}))^*$ ne sont pas des hypersurfaces normales.*

Démonstration. Ces trois variétés ne sont pas $\delta_{\sigma(X)}$-défectives dès que $n > 2$. Si $n = 2$, on se trouve dans le cas $X = X_{A_2}$ qui a été traité au chapitre 2. Pour prouver le lemme, nous allons calculer la seconde forme fondamentale et prouver que $\dim|II_{\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1}),x}| \geq \dim(\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^{n+1}))$ et $\dim|II_{\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1}),x}| \geq \dim(\mathbb{F}_{1,n-1}(\mathbb{C}^{n+1}))$.

Nous allons faire le calcul pour $X = \mathbb{F}_{p,q}(\mathbb{C}^{n+1})$, $p < q$. On rappelle que $\mathbb{F}_{p,q}(\mathbb{C}^{n+1}) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^p \mathbb{C}^{n+1} \otimes \bigwedge^q \mathbb{C}^{n+1})$. On note par $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$, une base de $\mathbb{C}^{n+1}$ et on pose $E = e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ et $F = e_1 \wedge \cdots \wedge e_q$. On écrira $E_s^i = e_1 \wedge \cdots \wedge e_{i-1} \wedge e_s \wedge e_{i+1} \wedge \cdots \wedge e_p$, en gardant la même notation pour F_s^i, E_{st}^{ij}, F_{st}^{ij}. Enfin (ω) sera la forme de Maurer-Cartan associée au SL_n-fibré des repères.

Calculons la dimension de l'espace tangent de X au point $E \otimes F$:

$$d(E\otimes F) = \sum_{1\leq i\leq p, q<s\leq n+1} \omega_i^s(E_s^i \otimes F + E \otimes F_s^i)$$

$$+ \sum_{p<i\leq q} \omega_i^s E \otimes F_s^i + \sum_{1\leq i\leq p, p<s\leq q} \omega_i^s E_s^i \otimes F.$$

D'où on déduit que $dim X = (n+1-q)q + p(q-p)$.

Pour obtenir la seconde forme fondamentale, nous dérivons les termes qui apparaissent dans l'expression $d(E \otimes F)$,

$$II_{\mathbb{F}_{p,q},E\otimes F} = \sum_{1\leq i\neq j\leq q} \omega_i^s\omega_j^t \underline{E\otimes F_{st}^{ij}}$$

$$+ \sum_{1\leq i\neq j\leq p} \omega_i^s\omega_j^t \underline{E_{st}^{ij}\otimes F} + \sum_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq q} \omega_i^s\omega_j^t \underline{E_s^i\otimes F_t^j}.$$

Ce que l'on peut écrire dans un langage plus invariant,

$$|II_{\mathbb{F}_{p,q},E\otimes F}| = \bigwedge^2 \mathbb{C}^p\otimes\bigwedge^2\mathbb{C}^{n+1-p} + \bigwedge^2\mathbb{C}^q\otimes\bigwedge^2\mathbb{C}^{n+1-q} + (\mathbb{C}^p\otimes\mathbb{C}^{n+1-p})\otimes(\mathbb{C}^q\otimes\mathbb{C}^{n+1-q}).$$

Donc on a $\dim|II_{\mathbb{F}_{p,q}}| = p(n+1-p)q(n+1-q) + \frac{1}{4}p(p-1)(n+1-p)(n-p) + \frac{1}{4}q(q-1)(n+1-q)(n-q)$.

On obtient alors les inégalités voulues pour $(p,q)=(1,2)$ et $(p,q)=(1,n-1)$.

On utilise le calcul que l'on vient de faire pour montrer que la variété duale de $\mathbb{F}_{1,2,\omega}$ n'est pas normale. Le calcul est le même sauf que cette fois-ci la forme de Maurer-Cartan ω est une forme sur le Sp_{2n}-fibré des repères, à valeur dans $\mathfrak{sp}_{2n}$. En utilisant $(p,q)=(1,2)$ il faut tenir compte de la relation $\omega_1^{n+2}=\omega_2^{n+1}$. Pour la dimension de $\mathbb{F}_{1,2,\omega}$ on obtient $\dim(\mathbb{F}_{1,2,\omega}) = 2(2n-1)$. Pour la dimension de $|II_{\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n}),e_1\otimes e_1\wedge e_2}|$ on a

$$II_{\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n}),e_1\otimes e_1\wedge e_2} = \omega_1^s\omega_2^t e_1\otimes e_s\wedge e_t + \omega_1^s\omega_1^t e_s\otimes e_t\wedge e_2 + \omega_1^s\omega_2^t e_s\otimes e_1\wedge e_t$$

$$= \omega_1^2\omega_2^t\otimes e_s\otimes e_1\wedge e_t + \omega_1^t\omega_2^t e_t\otimes e_1\wedge e_t$$
$$+\omega_1^s\omega_2^t(e_1\otimes e_s\wedge e_t + e_s\otimes e_1\wedge e_t) + \omega_1^s\omega_1^t e_s\otimes e_t\wedge e_2.$$

On compte alors $2n-3+2n+3+\frac{(2n-3)(2n-4)}{2}+4(n-3)^2$ quadriques, mais les quadriques $\omega_1^s\omega_2^{n+1} = \omega_1^s\omega_1^{n+2}$ ont été compté deux fois. On en déduit $\dim(|II_{\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n},e_1\otimes e_1\wedge e_2)}|) = (2n-3)(3n-4)$. Pour $n\geq 3$ on a $\dim(|II_{\mathbb{F}_{1,2,\omega}(\mathbb{C}^{2n},e_1\otimes e_1\wedge e_2)}|) > \dim(\mathbb{F}_{1,2,\omega}) = 2(2n-1)$.
□

Les variétés $G(3,n)$, $G_Q(3,n)$, $G_\omega(3,2n)$ et $\mathbb{S}_7$

Ces variétés ont été étudiées dans [L-M 2003] (pour la grassmanienne $G(k,n)$ on peut aussi voir [G-H 1979]). En particulier la structure de H-module (H étant toujours la partie semi-simple de P, $X=G/P$) de leur espace normal est décrite. Tout comme pour l'espace tangent, cette décomposition donne des composantes irréductibles de natures différentes. La première composante, notée N_2 s'identifie à $\mathfrak{g}^{(2)}v_\lambda$ mod $\mathfrak{g}v_\lambda$ (proposition 2.3 dans [L-M 2003]), ce qui, en d'autres termes, revient à dire, $N_2\simeq|II_{X,x}|$. Les résultats de [L-M 2003] pour $G/P=G(3,n)$ sont,

$$N_2 \simeq \bigwedge^2 \mathbb{C}^3 \otimes \bigwedge^2 \mathbb{C}^{n-3}$$

d'où $\dim|II_{G(3,n)}| = \frac{3}{2}(n-4)(n-3)$.

Pour $X = G_Q(3,n)$,

$$N_2 \simeq (\bigwedge^2 \mathbb{C}^3 \otimes \bigwedge \mathbb{C}^{n-6} \oplus S^2\mathbb{C}^3) \oplus (\bigwedge \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{n-6}) \oplus (S_{22}\mathbb{C}^3),$$

d'où $\dim|II_{G_Q(3,n)}| = 3(n-6)+6+9(n-6)+6$.

Quant à $G/P = G_\omega(3,2n)$,

$$N_2 \simeq \bigwedge^2 \mathbb{C}^3 \otimes \bigwedge^{<2>} \mathbb{C}^{2n-6} \oplus S_{21}\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^{2n-6} \oplus S_{22}\mathbb{C}^3.$$

ce qui donne
$\dim|II_{G_\omega(3,2n)}| = 3(\frac{(2n-6)(2n-7)}{2} - 1) + 10(2n-6) + 6$.
Enfin pour $X = \mathbb{S}_7$ on a $N_2 \simeq \bigwedge^4 \mathbb{C}^7$, donc $\dim(|II_{\mathbb{S}_7,x}|) = \frac{7\times6\times5}{3!} = 30$. On en conclut donc,

Lemme 12. *Les variétés $G(3,n)^*$, pour $n \geq 7$, $G_Q(3,n)$, pour $n \geq 6$ et $G_\omega(3,2n)^*$, pour $n \geq 4$ et $\mathbb{S}_7^*$ ne sont pas normales.*

Démonstration. Les variétés des sécantes $\sigma(G(3,n))$, $\sigma(G_Q(3,n))$, $\sigma(G_\omega(3,2n))$ et $\sigma(\mathbb{S}_7)$ ne sont pas défectives, de plus $\dim(G(3,n)) = 3(n-3)$, $\dim(G_Q(3,n)) = 3(n-6)+3$, $\dim(G_\omega(3,2n) = 3(2n-6)+6$ et $\dim(\mathbb{S}_7) = 21$ ce qui permet de conclure. □.

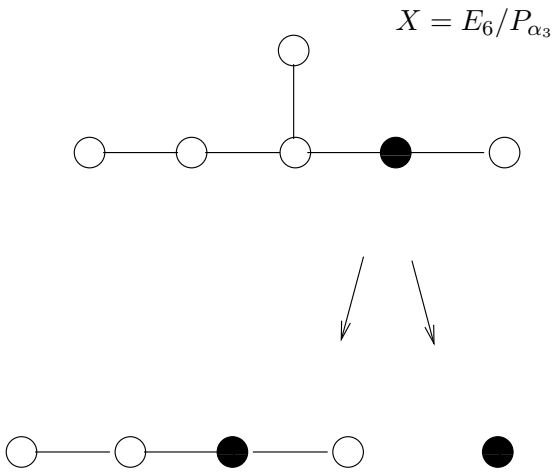
Les variétés E_6/P_3 et E_7/P_2

Pour calculer la dimension de $|II_{X,x}|$ dans le cas où $X = E_6/P_3$ et $X = E_7/P_2$, nous allons utiliser le résultat qui est une conséquence du théorème de Borel-Weil (voir [I-L 2003] page 84 pour plus de détails),

Proposition 3.2.3. *Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété homogène obtenue comme orbite du vecteur de plus haut poids $v_\lambda \in V_\lambda$. Alors $I_2(G/P) = V_{2\lambda}^\perp \subset S^2V^*$.*

Comme lorsque nous avons introduit les variétés sous-adjointes, nous pouvons construire de nouvelles variétés au niveau infinitésimal à partir de G/P_{α_i} si α_i est une racine longue. L'espace tangent se décompose alors en une "somme" de H-modules irréductibles où H est la partie semi-simple de P. En particulier l'orbite fermée $Y = H/Q \subset \mathbb{P}(T_1)$ est exactement le lieu de base de la seconde forme fondamentale de G/P ([L-M 2003] Théorème 2.19). Ainsi $I_2(H/Q) \subset |II_{G/P,x}|$. Sur les figures 3.2 et 3.3, on détermine schématiquement

la variété Y comme pour les variétés sous-adjointes,



$$Y_{SL_5\times SL_2} = SL_5/P_{\alpha_2} \times SL_2/P_{\alpha_1} = G(2,5) \times \mathbb{P}^1$$

FIG. 3.2 – Description schématique de $Y_{SL_5\times SL_2} \subset T_{x_{\omega_3}} E_6/P_3$

En utilisant la proposition précédente pour Y, on obtient

Lemme 13. *$(E_6/P_3)^*$ et $(E_7/P_2)^*$ ne sont pas des hypersurfaces normales.*

Démonstration. Comme ces variétés ne sont pas $\delta_{\sigma(X)}$-défectives, nous allons montrer que $\dim|II_{E_6/P_3,x}| \geq \dim(E_6/P_3)$ et $\dim|II_{E_7/P_2,x}| \geq \dim(E_7/P_2)$. Tout d'abord rappelons que $\dim(E_6/P_3) = 25$, et $\dim(E_7/P_2) = 42$. Il s'agit de calculer $\dim I_2(Y)$ pour obtenir un minorant de $\dim|II_{G/P,x}|$.

Notons $V \simeq \mathbb{C}^2$ et $W \simeq \mathbb{C}^5$. Pour $X = E_6/P_3$, Y est l'orbite fermée pour le $SL_2 \times SL_5$-module $V_{\omega_1} \otimes W_{\omega_3}$. Le module $\bigwedge^2 V_{\omega_1} \otimes \bigwedge^2 W_{\omega_5} \subset S^2(V_{\omega_1} \otimes W_{\omega_3})$ vit dans le complémentaire de $V_{2\omega_1} \otimes V_{2\omega_2} \subset S^2(V_{\omega_1}) \otimes S^2(W_{\omega_5})$. On en déduit $\dim|II_{E_6/P_3,x}| \geq \dim(\bigwedge^2 V_{\omega_1} \otimes \bigwedge^2 W_{\omega_5}) = 45$, ce qui implique $\dim|II_{E_6/P_3,x}| \geq \dim(E_6/P_3)$.

Posons $U_{\omega_1} = \mathbb{C}^7$ la représentation standard de $SL_6(\mathbb{C})$. Pour $X = E_7/P_2$ l'orbite fermée Y est homogène pour le groupe $SL_6(\mathbb{C})$, ce groupe agissant sur U_{ω_3}. $\dim S^2(U_{\omega_3}) = 630$, or $\dim U_{2\omega_3} = 490$ d'où $\dim I_2(Y) = 140$ ce qui implique le résultat. □

La variété F_4/P_3

La racine α_3 du diagramme F_4 est une racine courte ce qui invalide les raisonnements précédents. Plus précisément, il a été montré dans [L-M 2003] que la variété $Base|II_{F_4/P_3,x}|$

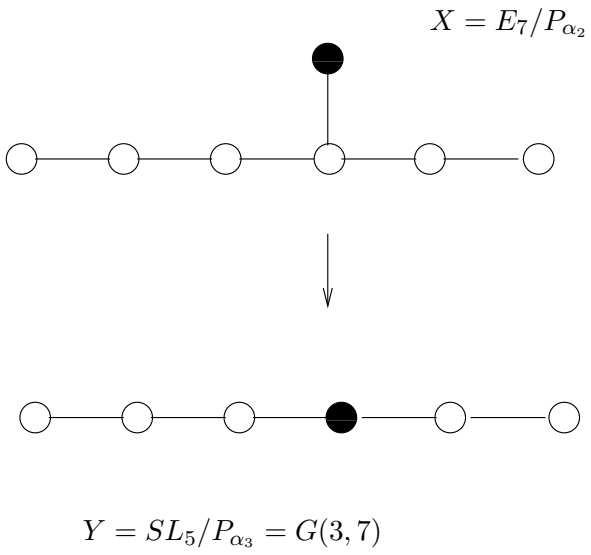


FIG. 3.3 – Description schématique de $Y_{SL_7} \subset T_{x_{\omega_2}} E_7/P_2$

n'était pas homogène. Cependant, en analysant le réseau des poids du F_4-module V_{ω_3}, nous allons minorer la dimension de $|II_{F_4/P_3,x}|$.

Rappelons ici que $\dim(F_4/P_3) = 20$. En notant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ un système de racines positives simples, on peut écrire l'ensemble des racines positives de F_4 de la façon suivante,

α_1	α_2	α_3	α_4
$\alpha_1 + \alpha_2$	$\alpha_2 + \alpha_3$	$\alpha_3 + \alpha_4$	
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$	$\alpha 2 + 2\alpha_3$	$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	
$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$	$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$	
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3$	$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$	
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$		
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4$	$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$		
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4$			
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$			
$\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$			
$2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$			

Les poids de V_{ω_3} sont définis comme les poids étant à la fois congrus à ω_3 modulo le réseau des racines et à la fois dans l'enveloppe convexe délimitée par les images de ω_3 sous l'action du groupe de Weyl.

Ces poids sont contenus dans le cône $\omega_3 + C^-_{\alpha_3}$ où $C^-_{\alpha_3} =< \beta \in R_- | m_3(\beta) \neq 0 >$ ($C^-_{\alpha_3}$ est le cône engendré par les racines négatives qui s'écrivent $\sum_{i=1}^4 m_i \alpha_i$ avec $m_3 \neq 0$).

Les racines qui contiennent α_3 se decomposent en 4 groupes,

$$(I)\ \begin{matrix} \alpha_3 & \alpha_2+\alpha_3 & \alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 & \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4 \end{matrix}$$

$$(II)\ \begin{matrix} \alpha_2+2\alpha_3 & \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3 & \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 & \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3 & \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4 & \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4 \end{matrix}$$

$$(III)\ \begin{matrix} \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4 \\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4 \end{matrix}$$

$$(IV)\ \begin{matrix} \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3 \\ \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4 \\ 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4 \end{matrix}$$

Il s'en suit de cette décomposition que $T_{v_{\omega_3}}F_4/P_3 = \bigoplus_{\beta\in(I),(II),(III),(IV)} \mathfrak{g}_{-\beta}v_{\omega_3}$. Pour les groupes $(II),(III),(IV)$, nous avons $m_3(\beta)\geq 2$, ce qui implique $X_{-\beta}X_{-\beta}v_{\omega_3}\neq 0$. On construit ainsi 14 quadriques indépendentes dans $|II_{F_4/P_3,x}|$. Posons $\gamma=\alpha_1+2\alpha_3+\alpha_4$, et $\beta\in(I)$, alors $X_{-\beta}X_{-\gamma}v_{\omega_3}\neq 0$ donne 6 nouvelles quadriques. Enfin $\delta=2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4$ et $\epsilon=\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4$ permet de définir une quadrique supplémentaire $X_{-\epsilon}X_{-\delta}v_{\omega_3}$.

Ceci nous conduit à,

Lemme 14. *$(F_4/P_3)^*$ n'est pas une hypersurface normale.*

Démonstration. (F_4/P_3) n'est pas $\delta_{\sigma(X)}$-défective, or on vient de montrer que $\dim|II_{F_4/P_3,x}|\geq \dim(F_4/P_3)$, et donc d'après le théorème 3.2.4 $(F_4/P_3)^*$ ne peut être normale. □

Classification des G/P telles que $(G/P)^*$ soit une hypersurface normale

En regroupant les résultats de ce chapitre on obtient :

Théorème 3.2.5. *Soit $X=G/P\subset\mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété rationnelle homogène pour un groupe de Lie semi-simple G. On suppose que X^* est une hypersurface. Alors X^* est normale si et seulement si X est l'une des variétés suivantes,*

$X=\mathbb{Q}^n\subset\mathbb{P}^{n+1}$, la quadrique lisse.

$X=v_2(\mathbb{P}^n)\subset\mathbb{P}^{\frac{(n+2)(n+1)}{2}-1}$, $\mathbb{P}^n\times\mathbb{P}^n\subset\mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$, $G(2,2n)\subset\mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$, $\mathcal{E}_6=\mathbb{OP}^2\subset\mathbb{P}^{26}$, une variété de Scorza.

$X=\mathbb{P}^1\times\mathbb{Q}^n\subset\mathbb{P}^{2(n+2)-1}$, $n>1$, $G_\omega(3,6)\subset\mathbb{P}^{13}$, $G(3,6)\subset\mathbb{P}^{19}$, $\mathbb{S}_6\subset\mathbb{P}^{31}$, $\mathcal{E}_7=E_7/P_7\subset\mathbb{P}^{55}$, une variété sous-adjointe, minimalement plongée, obtenue à partir d'une variété adjointe fondamentale.

$X=X_{G_2}\subset\mathbb{P}^{13}$, la variété adjointe pour le groupe de Lie $G=G_2$.

3.3 Le lieu singulier de $X^*_{G_2}$

La classification que nous avons obtenue avec le théorème 3.2.5 fait intervenir des variétés remarquables à bien des égards. Commme nous l'avons rappelé les trois permiers types (quadriques, Scorza et sous-adjointe d'une variété adjointe fondamentale) apparaissent dans différents problèmes de classification [L-M 2001, Om 2000, Zak 1993]. Ces variétés ont donc été étudiées en détail et il existe en particulier des descriptions du lieu singulier des variétés duales correspondantes.

- Si $X = \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$ alors $X^*_{\text{sing}} = \emptyset$.

- Si X est une k-variété de Scorza, alors $X^*_{\text{sing}} = \sigma(X)^* \simeq \sigma_{k-2}(X)$.

- Si X est une variété sous-adjointe minimalement plongée, obtenue à partir d'une variété adjointe fondamentale, alors $X^*_{\text{sing}} = \sigma_+(X)$ où la variété $\sigma_+(X)$ peut-être décrite comme le lieu singulier de $\tau(X)$ ou comme le lieu des points sur une droite tangente pour la distribution $\sigma(Base(II_{X,x})) \subset T_xX$ (voir [L-M 2001] proposition 5.11). De plus on a $X^*_{\text{sing}} \simeq (X^*_{\text{sing}})^*$.

Quelle description pouvons-nous donner de $(X^*_{G_2})_{\text{sing}}$? Rappelons que $X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2) = \mathbb{P}^{13}$ est une variété de dimension 5 dont la sécante est défective de défaut 1. On adopte ici les notations de [Fu-Ha 1991] où le système de racines de $\mathfrak{g}_2$ et sa "table de multiplication" pour l'action adjointe sont donnés explicitement (pages 339-346). Notons alors $\alpha_6 = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$ la plus longue racine.

On identifie $\mathfrak{g}_2$ et $\mathfrak{g}_2^*$ par la forme de Killing :

Proposition 3.3.1. *Soit $X^*_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ la variété duale de la variété adjointe de type G_2. Alors $(X^*_{G_2})_{\text{sing}} = \sigma(X_{G_2})^* \simeq \sigma(X_{G_2})$. En particulier le lieu singulier de $X^*_{G_2}$ est irreductible et auto-dual.*

Soit $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2$ la plus grande racine courte du système de racine G_2, on note $H_4 = [x_{-\alpha_4}, x_{\alpha_4}]$. Nous allons utiliser la variété $Y = \mathbb{P}(\overline{G.H_4}) \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ comme variété "intermédiaire".

Lemme 15. $\dim(Y) = 10$.

Démonstration. Rappelons que $T_{H_4}\overline{G.H_4} = [\mathfrak{g}, H_4]$, on en déduit $T_{H_4}\hat{Y} = \mathbb{C}x_{\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{3\alpha_1+\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{3\alpha_1+2\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{\alpha_1} \oplus \mathbb{C}[x_{-\alpha_4,x_{\alpha_4}}] \oplus \mathbb{C}x_{-\alpha_1} \oplus \mathbb{C}x_{-\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{-3\alpha_1-\alpha_2} \oplus \mathbb{C}x_{-3\alpha_1-2\alpha_2} \oplus \mathbb{C}_{-\alpha_4=-2\alpha_1-\alpha_2}$, ce qui prouve $\dim(Y) = 10$.□

Démonstration. (de la proposition). Montrons que $(X^*_{G_2})_{\text{sing}} \subset Y$. Soit $x \in (X^*_{G_2})_{\text{sing}}$, on écrit x dans sa décomposition de Jordan $x = x_s + x_n$ avec $[x_s, x_n] = 0$. Une base de $\mathfrak{h}$ est $H_1 = [x_{\alpha_1}, x_{-\alpha_1}]$ et $H_2 = [x_{\alpha_2}, x_{-\alpha_2}]$, ainsi $x_s = aH_1 + bH_2$. L'équation de $X^*_{G_2}$ est donnée

par le produit des racines longues, i.e. $\Delta_{X_{G_2}}(x) = \prod \alpha_2^2(x_s)\alpha_5^2(x_s)\alpha_6^2(x_s) = 0$, de plus nous avons vu que pour $x \in X^*_{G_2}$, x est singulier si et seulement si x n'est pas un élément régulier de $\mathfrak{g}_2$. La condition $x \in X^*_{G_2}$ est équivalente à l'une des conditions suivantes :

$\alpha_2(aH_1 + bH_2) = 0$, i.e. $-3a + 2b = 0$ i.e. $x_s = kH_4$, $k \neq 0$

$\alpha_5(aH_1 + bH_2) = 0$ i.e. $3a - b = 0$ i.e. $H = kH_3$, $k \neq 0$

$\alpha_6(aH_1 + bH_2) = 0$ i.e. $b = 0$ i.e. $H = kH_1$, $k \neq 0$.

Les éléments semi-simples H_i pour $i = 1, 3, 5$ correspondent à des racines courtes, ils appartiennent à la même orbite. On peut alors supposer $x_s = H_4$. L'hypothèse x n'est pas un élément régulier de $\mathfrak{g}_2$ implique $\dim(\mathfrak{g}_2^x = \{y \in \mathfrak{g}_2, [x, y] = 0\}) \geq 3$. Donc $\dim T_x\mathbb{P}(\overline{G.x}) \leq 10$. Or $x_s = H_4$ est dans l'adhérence de $G.x$, on en déduit $Y \subset \mathbb{P}(\overline{G.x})$. Mais les calculs de dimension impliquent alors $Y = \mathbb{P}(\overline{G.x})$, et donc $x \in Y$. On vient d'établir $(X^*_{G_2})_{\text{sing}} \subset Y$.

Nous avons aussi d'une part l'inclusion $\sigma(X_{G_2})^* \subset (X^*_{G_2})_{\text{sing}}$, et d'autre part l'inclusion $\sigma(X_{G_2}) \subset \sigma(X_{G_2})^*$ (en appliquant la proposition 1 de [Po 2002]). Donc nous obtenons

$$\sigma(X_{G_2}) \subset \sigma(X_{G_2})^* \subset (X^*_{G_2})_{\text{sing}} \subset Y,$$

et les variétés $\sigma(X_{G_2})$, $\sigma(X_{G_2})^*$ et Y sont toutes irréductibles et de dimension 10, ceci achève la preuve de la proposition.□

3.4 Normalité de $(G/P)^*$

On peut maintenant sans trop de difficultés étendre le théorème 3.2.5 en s'affranchissant de l'hypothèse $\delta_{X^*} = 0$. C'est à dire que nous proposons de classifier toutes les variétés homogènes pour un groupe de Lie semi-simple dont la variété duale est normale. Il reste donc à traiter le cas des variétés homogènes dont la variété duale est dégénérée. D'après les résultats de Knop-Menzel ([K-M 1987]) ces variétés, pour un groupe de Lie simple G, sont

G	V	$X = G/P$	$\dim(G/P)$	δ_{X^*}
SL_n	$\mathbb{C}^n$	$\mathbb{P}^{n-1}$	$n-1$	$n-1$
SL_{2n+1}	$\bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n+1}$	$G(2, 2n+1)$	$2(2n-1)$	2
$Spin_9$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{S}_5$	10	4
$Spin_{10}$	$\mathbb{C}^{16}$	$\mathbb{S}_5$	10	4

Pour le cas semi-simple, il suffit de rappeler le calcul suivant pour le défaut de $Seg(X \times Y) \subset \mathbb{P}(V \otimes W)$ avec $X \subset \mathbb{P}(V)$ et $Y \subset \mathbb{P}(W)$:

$$\delta_{(X\times Y)^*} = \max(0, \delta_{X^*} - \dim(Y), \delta_{Y^*} - \dim(X)).$$

On souhaite encore une fois appliquer le critère de Zak (théorème 3.2.4). Le lemme 10 implique directement la proposition suivante :

Proposition 3.4.1. *Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V)$ une variété rationelle homogène minimalement plongée pour un groupe de Lie semi-simple G telle que $\delta_{X^*} > 0$. On suppose X^* est normale, alors nécessairement X est l'une des variétés suivantes,*

-$X = \mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$
-$X = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^{(k+1)(l+1)-1}$, $k \neq l$
-$X = G(2, 2n+1) \subset \mathbb{P}(\bigwedge^2 \mathbb{C}^{2n+1})$
-$X = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}(S^2\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{m+1})$, $m > 1$

Il nous faut maintenant vérifier si les variétés duales des variétés de la proposition sont normales. La variété $\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$ est autoduale d'après les resultats de Ein cités en introduction, sa variété duale est donc lisse et en particulier normale.

Pour traiter les autres cas nous rappelons la définition des variétés qui satisfont la propriété d'être Cohen-Macaulay afin d'introduire une version forte du critère de normalité de Serre. On renvoie à [Ha 1977] pages 184-186 pour les définitions et la proposition qui suivent.

Un anneau local A possède une séquence régulière d'éléments de son idéal maximal $\mathfrak{m}$ $x_1, \dots x_n$, lorsque x_1 n'est pas un diviseur de A et pour tout $i = 2, \dots, n$, x_i n'est pas un diviseur de $A/(x_1, \dots, x_{i-1})A$.

Définition 3.4.1. *Soit r le plus grand entier tel que A possède une séquence régulière de r éléments dans son idéal maximal. Alors A est Cohen-Macaulay si* $\dim(A) = r$.

Définition 3.4.2. *Une variété projective $X \subset \mathbb{P}(V)$ est (arithmétiquement) Cohen-Macaulay si et seulement si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ en tout point $x \in X$ est Cohen-Macaulay.*

On peut maintenant rappeler la version forte du critère de Serre.

Proposition 3.4.2. *Soit $X \subset \mathbb{P}(V)$ une variété projective, qui est arithmétiquement Cohen-Macaulay et telle que X soit singulière en codimension au moins 2. Alors X est normale.*

On étudie séparement les variétés $\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^{(k+1)(l+1)-1}$ $k > l$, $G(2, 2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$ et la variété $\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$, $m > 1$.

Lemme 16. *Les variétés $(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l)^* \subset \mathbb{P}^{(k+1)(l+1)-1}$, $k > l$ et $G(2, 2n+1)^* \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$ sont normales.*

Démonstration. On rappelle que ces variétés satisfont aux isomorphismes suivants, $(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l)^* \simeq \sigma_{l-1}(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l)$ (la variété duale s'identifie à la projectivisation de la variétés des matrices de taille $(k+1)\times(l+1)$ et de rang au plus $l-1$) et $G(2, 2n+1)^* \simeq \sigma_{n-1}(G(2, 2n+1))$ (là encore la variété duale s'identifie à la projectivization des matrices antisymmétriques de taille $(2n+1) \times (2n+1)$ et de rang au plus $2n-2$). Il est bien connu (voir par exemple [Ke 1976]) que ces variétés sont Cohen-Macaulay. Enfin le lieu singulier de $(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l)^*$ est

isomorphe à $\sigma_{l-1}(\mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l)$ (matrices de rang au plus $l-2$) et le lieu singulier de $G(2, 2n+1)^*$ est isomorphe à $\sigma_{n-2}(G(2, 2n+1))$ (matrices antisymmétriques de rang au plus $2n-4$) ce qui implique que ces variétés duales sont bien singulières en codimension au moins 2.□

Il reste maintenant à traiter le cas $X = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$, $m > 1$.

Lemme 17. *Nous avons l'isomorphisme suivant* $(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^* \simeq \tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)$.

Démonstration. La variété $X = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$ correspond à la projectivisation de l'orbite minimale de $G = SL_2 \times SL_{m+1}$ agissant sur la représentation $S^2\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{m+1}$. On note e_0, e_1 une base de $\mathbb{C}^2$ et $f_0, \dots f_m$ une base de $\mathbb{C}^{m+1}$. Le vecteur e_0 (resp. f_0) étant le vecteur de plus haut poids pour la représentation standard de SL_2 (resp. SL_{m+1}), on a $e_0^2 \otimes f_0$ est le vecteur de plus haut poids.

En identifiant $V = S^2\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^{m+1}$ et son espace dual, la variété duale X^* coïncide avec la projectivisation de l'orbite $\overline{G((\mathfrak{g}e_0^2 \otimes f_0)^\perp)}$.

$\mathfrak{g}(e_0^2 \otimes f_0) =< e_0^2 \otimes f_0, e_0e_1 \otimes f_0, e_0^2 \otimes f_i >,\ i = 1, \dots, m$. On remarque en particulier que

$\hat{T}_{e_1^2 \otimes f_m} X =< e_1^2 \otimes f_m, e_0e_1 \otimes f_m, e_1^2 \otimes f_i >,\ i = 0, \dots, m-1$ vérifie $\hat{T}_{e_1^2 \otimes f_m} X \subset (\mathfrak{g}(e_0^2 \otimes f_0))^\perp$. On en déduit donc l'inclusion d'orbite $\overline{G(\hat{T}_{e_1^2 \otimes f_m} X)} \subset \overline{G(\mathfrak{g}(e_0^2 \otimes f_0)^\perp}$. La variété des tangentes $\tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)$ se décrit comme la projectivisation de l'orbite $\overline{G(T_x X)}$. On vient donc de montrer, après identification $V \simeq V^*$, l'inclusion $\tau(X) \subset X^*$. Calculons les dimensions de ces variétés. La variétés des sécantes de X étant non défective (on peut vérifier que la troisième forme fondamentale est non nulle) il s'en suit que $\dim(\tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)) = 2(m+1)$. La variété X est réglée par des espaces linéaires de type $e^2 \times \mathbb{P}^{m-1}$, on en déduit que $\delta_{X^*} \geq m-1$ ce qui implique $\dim(X^*) \leq 2m+2$. L'inclusion que l'on a précédemment démontrée force l'égalité et montre l'isomorphise $\tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m) \simeq (\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^*$. □

Lemme 18. *Il existe exactement 4 orbites, après projectivisation, incluses dans* $\tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)$, $m > 1$, *qui sont*

$$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^m \cup \sigma(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^* \subset \tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m).$$

On a de plus $\tau(X)_{\text{sing}} = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^m \cup \sigma(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^*$ *est de codimension* m *dans* $\tau(X)$.

Démonstration. Comme nous l'avons rappelé la variété des tangentes se décrit comme $\mathbb{P}(GT_xX)$. Ainsi une orbite contenue dans $\tau(X)$ provient d'une H-orbite de T_xX où H est la partie semi-simple de P. Ici $H = \mathbb{C}^* \times SL_m$ et l'espace tangent $T_{e_0 \otimes f_0}\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$ est l'union disjointe de $T_{e_0^2}\mathbb{Q}^1 \otimes f_0$ et $e_0^2 \otimes T_{f_0}\mathbb{P}^m$. On distingue alors 4 H-orbites dans $\hat{T}_{e_0^2 \otimes f_0}\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$ qui sont $< e_0^2 \otimes f_0 >$, $< (\hat{T}_{e_0^2}\mathbb{Q}^1) \otimes f_0 >$, $< e_0^2 \otimes \hat{T}_{f_0}\mathbb{P}^m >$, et l'orbite dense $< (\hat{T}_{e_0^2}\mathbb{Q}^1) \otimes f_0 > \cup < e_0^2 \otimes \hat{T}_{f_0}\mathbb{P}^m >$. Cette description de l'action de H sur T_xX implique

qu'il existe au plus 4 orbites incluses dans $\tau(X)$. On conclu en observant que les variétés du lemme sont bien incluses dans $\tau(X)$. Il est clair que la variété $\sigma(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^*$ est incluse dans $\tau(X)$ car c'est une composante de X^*_{sing}, on montre de même que $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^m \subset X^*_{\text{sing}}$ en calculant une section hyperplane et en montrant que celle-ci n'est pas un espcace linéaire de dimension $m-1$.□

On peut maintenant en finir avec $(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^*$:

Lemme 19. *Pour $m > 1$, la variété $(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^*$ est normale.*

Démonstration. La variété $X = G/P = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$ étant minuscule on a que T_xX est un P-module irréductible. On peut alors appliquer les résultats de Kempf [Ke 1976] et en déduire que $\mathbb{P}(\overline{G(T_xX)}) = \tau(X)$ est Cohen-Macaulay. De plus la stratification de $\tau(X)$ implique que le lieu singulier de $\tau(X)$ est de codimension $m \geq 2$ dans $\tau(X)$. La variété $\tau(X) \simeq X^*$ est une bien variété normale.□

On peut donc conclure cette section avec une généralisation de la classification donnée par le théorème 3.2.5.

Théorème 3.4.1. *Soit $X = G/P \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ une variété rationelle homogène pour un groupe de Lie semi-simple G. La variété duale X^* est normale si et seulement si X est l'une des variétés suivantes,*

X est une variété du théorème 3.2.5.
$X = \mathbb{P}^k \times \mathbb{P}^l \subset \mathbb{P}^{(k+1)\times(l+1)-1}$, $k > l$.
$X = G(2, 2n+1) \subset \mathbb{P}^{(2n+1)n-1}$.
$X = \mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$.
$X = \mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$, $m > 1$.

Annexe A

Calcul sur le discriminant de F_4

On reproduit dans cette annexe le calcul que nous avons mené à l'aide de *Maple* pour prouver le lemme 2. Rappelons le but de ce calcul : on souhaite décrire certains monômes de Δ_{F_4}, le discriminant de X_{F_4}, en fonction des générateurs de l'algèbre des polynômes invariants sous l'action du groupe de Weyl.

Tout d'abord on entre le système de racines en commencant par les racines positives courtes,

$> u := 1$
$>$ for i from 1 to 4 do $a[u] := x[i]; u := u + 1$ od :
for i from 0 to 1 do for j from 0 to 1 do for k from 0 to 1 do $a[u] := (1/2) * (x[1] + ((-1)^i) * x[2] + ((-1)^j) * x[3] + ((-1)^k) * x[4]); u := u + 1$ od od od :

On entre maintenant les racines longues,

$>$ for i from 1 to 3 do for j from $i + 1$ to 4 do $a[u] := x[i] + x[j]; a[u + 12] := x[i] - x[j]$ od od :

Puis on calcule les racines négatives,

$>$ for i from 1 by 1 to 24 do $a[i + 24] := -a[i]$ od :

On introduit les 4 polynômes invariants,

$> R := sum('a[k]^2', ' k' = 1..48)$:
$> S := sum('a[k]^6', ' k' = 1..48)$:
$> T := sum('a[k]^8', ' k' = 1..48)$:
$> U := sum('a[k]^12', ' k' = 1..48)$:

Le discriminant s'obtient comme produit des racines longues,

$P := product(a[x], x = 13..24) * product(a[y], y = 37..48) :$

Maintenant on peut effectuer a proprement dit les cacluls. Pour cela à chaque étape on choisit une famille de polynômes parmi R, S, T, U. On construit une base de Gröbner ordonnée pour l'ordre lexicographique, puis on réduit P par l'idéal engendré par cette base.

Pour commencer on vérifie bien que $P \in \mathbb{C}[R, S, T, U]$

$> with(Grobner) :$
$> G := [R, S, T, U] :$
$> GB := gbasis(G, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4)) :$
$> normalf(P, GB, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4));$

L'ordinateur retourne alors la réponse,

$$0$$

Maintenant montrons que P modulo l'idéal engendré par R, S, T est non nul,

$> GU := [R, S, T,] :$
$> GBU := gbasis(GU, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4)) :$
$> normalf(P, GBU, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4));$

On obtient,

$$7958720(x_2^2x_3^2 + x_2^2x_4^2 + x_3^4 + x_4^2x_3^2 + x_2^4)x_4^{20} + 57344x_4^{24}$$

On fait le même calcul pour montrer que P modulo l'ideal engendré par R, S, U est non nul,

$> GT := [R, S, U] :$
$> GBT := gbasis(GT, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4)) :$
$> normalf(P, GBT, tdeg(x_1, x_2, x_3, x_4));$

l'ordinateur donne alors,

$$541120(x_2^8 + x_3^6x_2^2 + x_3^8 + x_3^4x_2^2x_4^2 + x_3^6x_4^2)x_4^{16} + 525440x_4^{20}x_2^4 + 1066560(x_2^2x_3^2 + x_3^4 + x_2^2x_4^2 + x_4^2x_3^2)x_4^{20} - 15936x_4^{24}$$

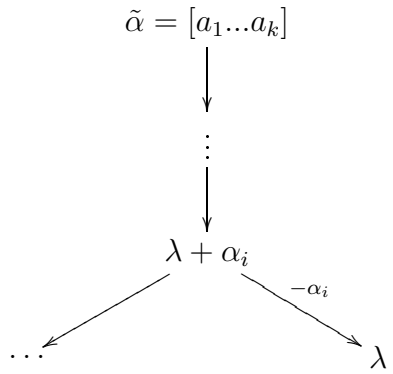
Ce calcul montre bien que $P = mT^i + nU^j + ...$, avec $m \neq 0$ et $n \neq 0$, or on sait que $deg(T) = 8$, $deg(U) = 12$ et $deg(P) = 24$. Il s'en suit $i = 3$ et $j = 2$.

Annexe B

Calcul des directions dégénérées de $Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}$

B.1 Notations

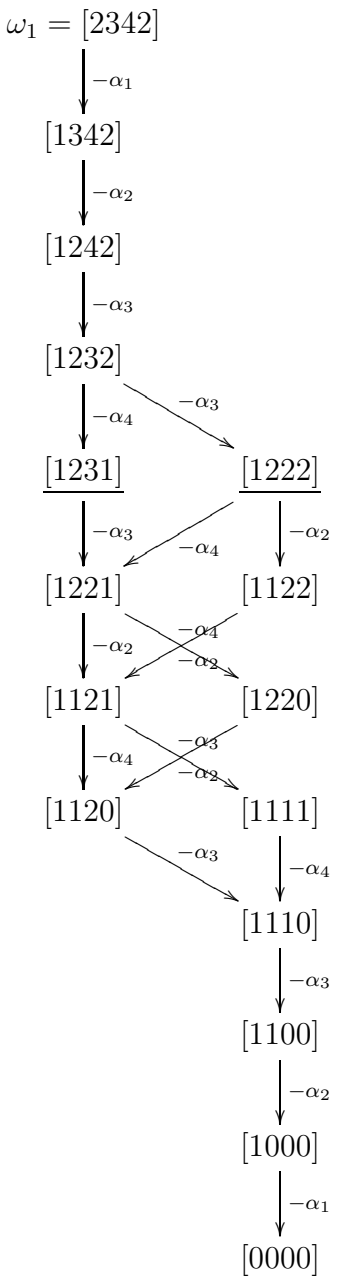
On adopte la notation suivante : $[a_1 a_2 ... a_k]$ correspond à la racine $a_1\alpha_1 + ...a_k\alpha_k$, où les α_i sont les racines simples de l'algèbre de Lie considérée. Soit $v_\lambda \in \hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}}X$ un vecteur tangent de poids λ, on représente les poids des vecteurs tangent comme suit,



Chaque flèche correspond à la diminution par 1 d'un des coefficients α_i. Ainsi l'action de h_0 se déduit de cette disposition en chaîne, de la façon suivante $[h_0, v_\lambda] = v_{\lambda+\alpha_i}$. Ainsi on retrouve les directions dégénérées de $Q^{H_0}_{v_{\tilde{\alpha}}}$ en identifiant les poids qui sont envoyés, par $[h_0,]$, sur le même poids. Par abus de notation $[0, \ldots, 0]$ représente le "poids" du vecteur $[v_{-\lambda}, v_\lambda]$.

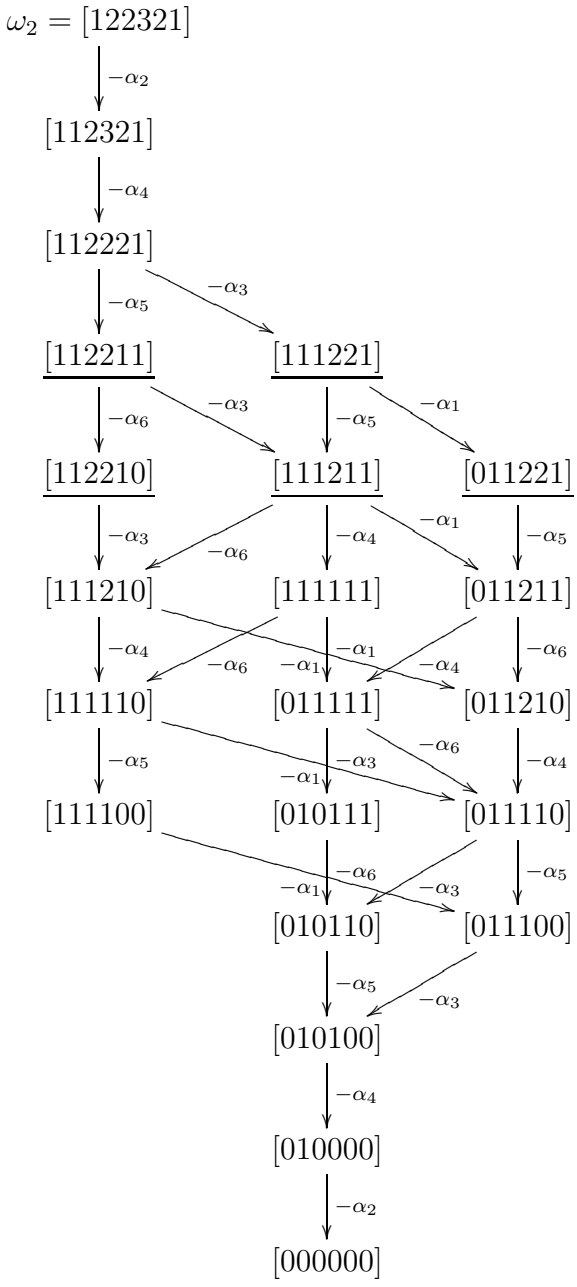
B.2 F_4

La chaîne des poids de $\mathfrak{f}_4$ correspondants aux vecteurs de $\hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} F_4/P_1$ est,



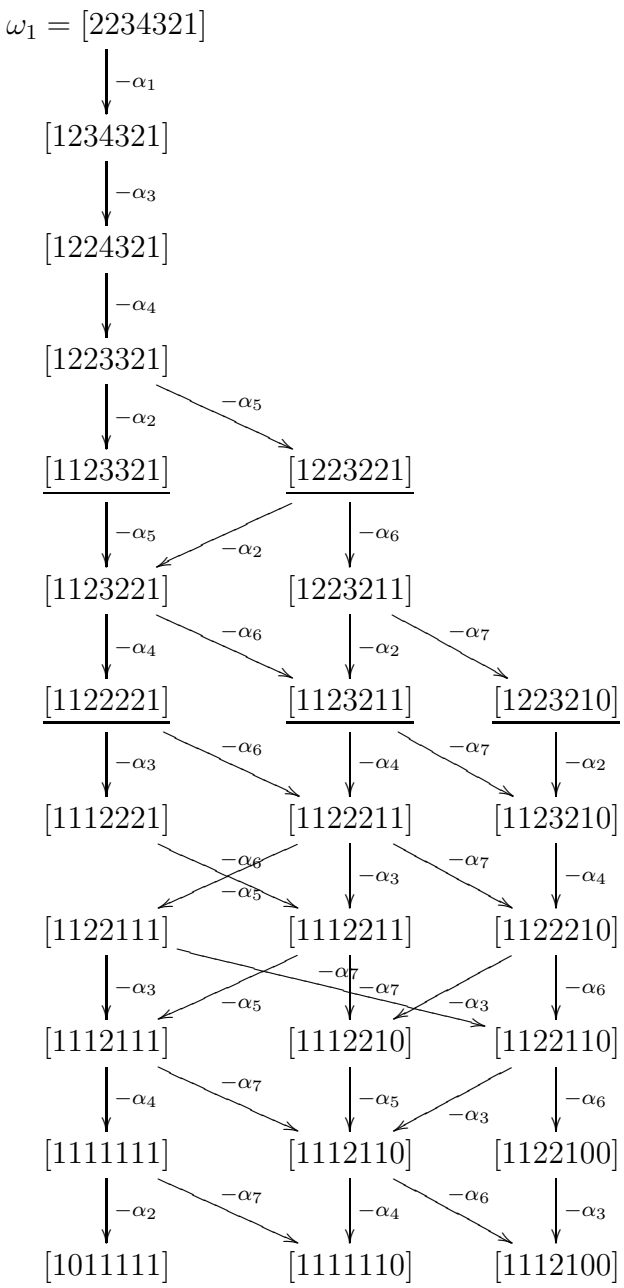
B.3 E_6

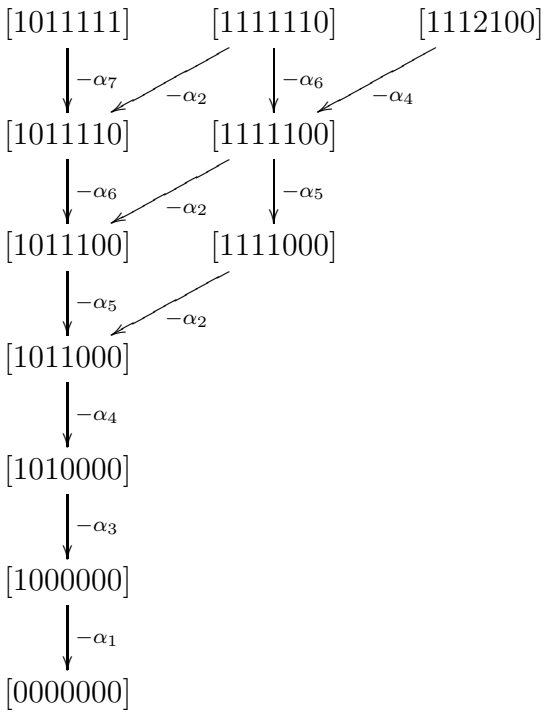
La chaîne des poids de $\mathfrak{e}_6$ correspondants aux vecteurs de $\hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} E_6/P_2$ est,



B.4 E_7

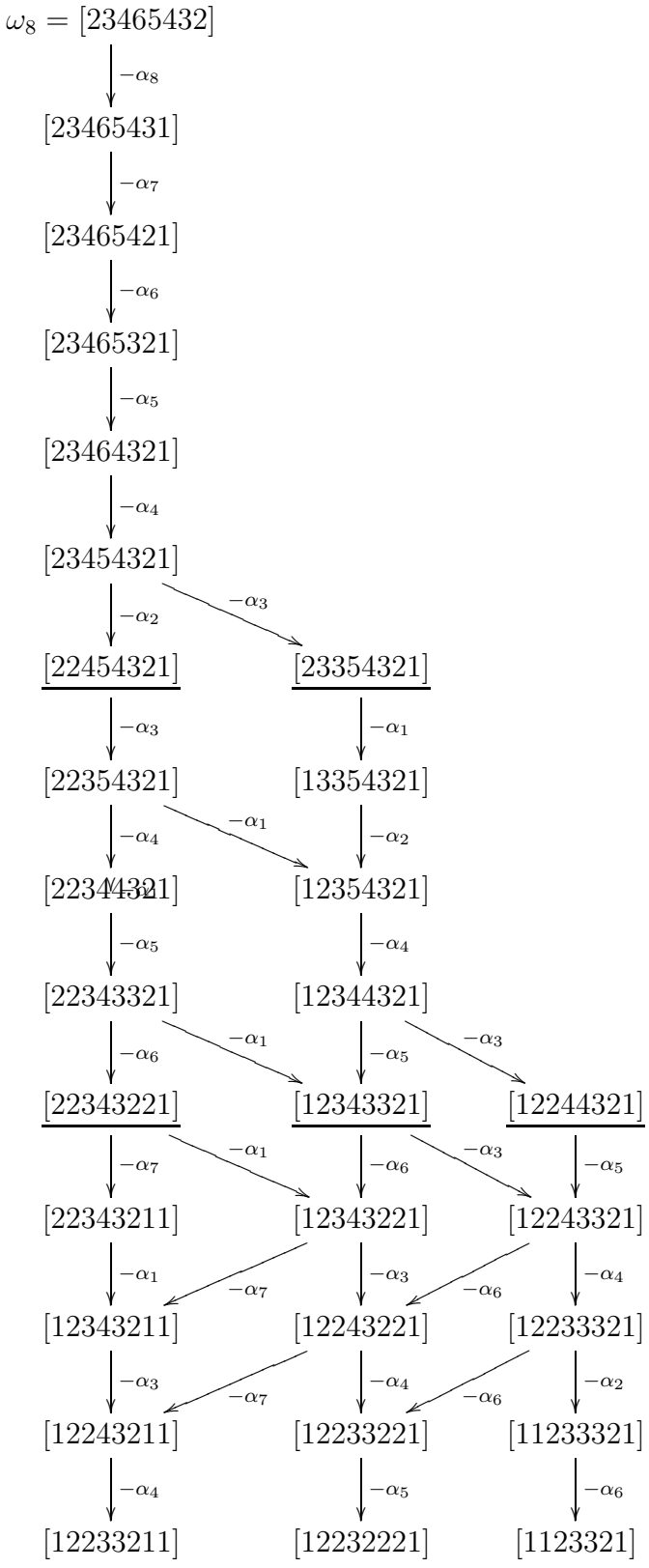
Voici la chaîne des poids de $\mathfrak{g}$ correspondants à des vecteurs de $\hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} E_7/P_1$

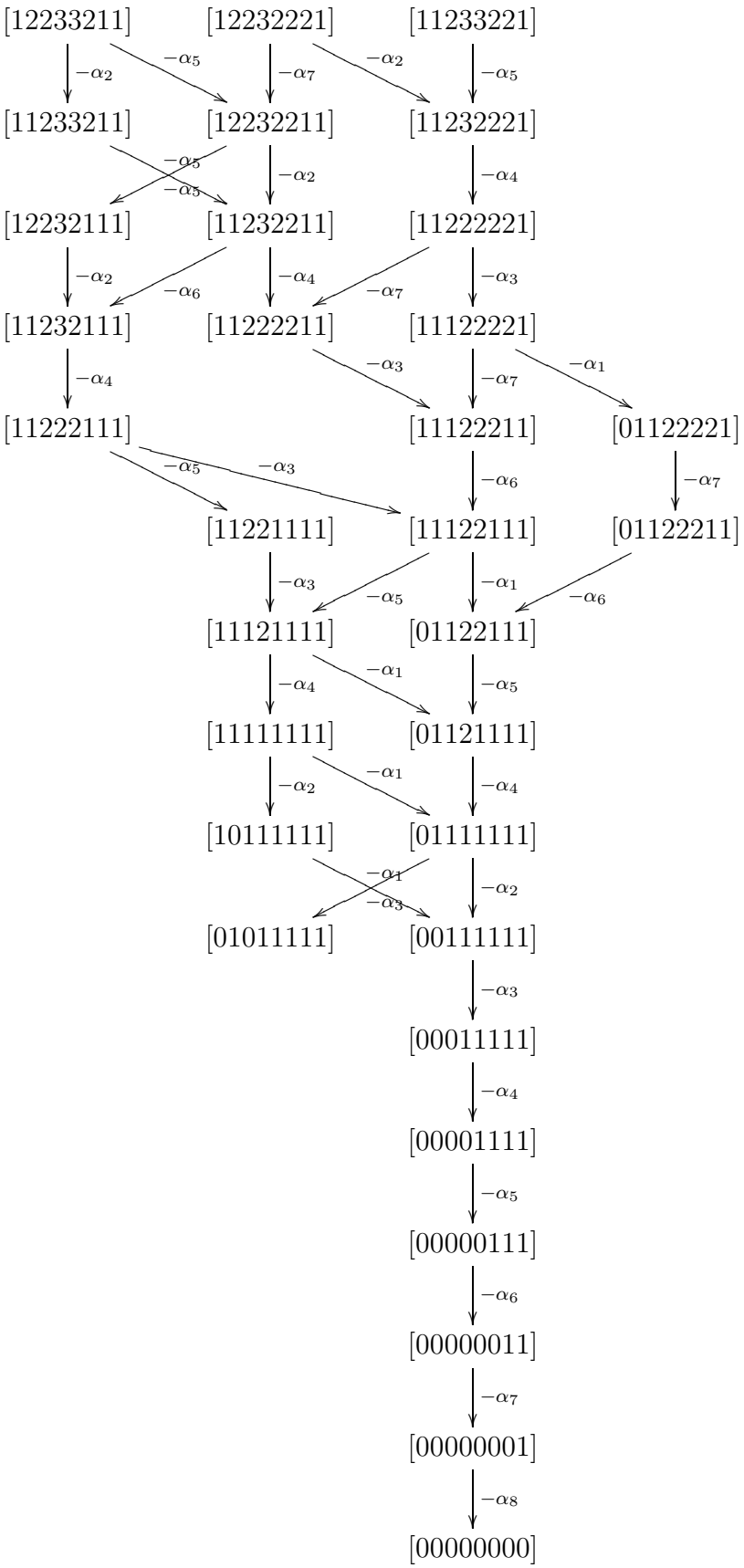



[1011111]
[1111110]
[1112100]
$-\alpha_7$
$-\alpha_2$
$-\alpha_6$
$-\alpha_4$
[1011110]
[1111100]
$-\alpha_6$
$-\alpha_2$
$-\alpha_5$
[1011100]
[1111000]
$-\alpha_5$
$-\alpha_2$
[1011000]
$-\alpha_4$
[1010000]
$-\alpha_3$
[1000000]
$-\alpha_1$
[0000000]

B.5 E_8

Voici la chaîne des poids de $\mathfrak{g}$ correspondants à des vecteurs de $\hat{T}_{v_{\tilde{\alpha}}} E_8/P_8$




[12233211]
[12232221]
[11233221]
[11233211]
[12232211]
[11232221]
[12232111]
[11232211]
[11222221]
[11232111]
[11222211]
[11122221]
[11222111]
[11122211]
[01122221]
[11221111]
[11122111]
[01122211]
[11121111]
[01122111]
[11111111]
[01121111]
[10111111]
[01111111]
[01011111]
[00111111]
[00011111]
[00001111]
[00000111]
[00000011]
[00000001]
[00000000]
$-\alpha_1$
$-\alpha_2$
$-\alpha_3$
$-\alpha_4$
$-\alpha_5$
$-\alpha_6$
$-\alpha_7$
$-\alpha_8$

Annexe C

Sur la géométrie des variétés des théorèmes 3.2.5 et 3.4.1

On résume sous forme de tableaux un certain nombre de données bien connues, ou mises en évidence dans cette thèse, concernant les variétés en jeu dans nos théorèmes de classification 3.2.5 et 3.4.1.

C.1 Les variétés auto-duales

La quadrique lisse de dimension n et la variété spinorielle de dimension 12 sont toutes deux auto-duales ainsi que la Grassmanienne des plans dans un espace vectoriel de dimension 5 et le produit de Segré d'une droite projective et d'un espace projectif de dimension m. Le groupe noté $Spin_{10}$ correspond au revètement double de SO_{10}.

Généralités

G	poids	X	$\dim(X)$	$\deg(X)$
SO_{2n+1}	ω_1	$\mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{2n}$	$2n-1$	2
SO_{2n}	ω_1	$\mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$	$2n-2$	2
$Spin_{10}$	ω_5	$\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$	10	12
SL_5	ω_2	$G(2,5) \subset \mathbb{P}^9$	6	5
$SL_2 \times SL_{n+1}$	$\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{2n-1}$	$n+1$	$n+1$

Le lieu de base de la seconde forme fondamentale

Le lieu de base de la seconde forme fondamentale au point $x \in X$ paramétrise la famille des droites ayant un contact d'ordre 2 en ce point. L'idéal d'une variété homogène

$G/P \subset \mathbb{P}(V)$ est engendré en degré 2. Ainsi le lieu de base de la seconde forme fondamentale pour une variété homogène G/P paramétrise les droites passant par un point $x \in G/P$ et contenues dans G/P.

X	$Base\|II_{X,x}\|$
$\mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{2n}$	$\mathbb{Q}^{2n-3} \subset \mathbb{P}^{2n-2}$
$\mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$	$\mathbb{Q}^{2n-4} \subset \mathbb{P}^{2n-3}$
$\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$	$G(2,5)$
$G(2,5) \subset \mathbb{P}^{13}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^n$	$\mathbb{P}^0 \sqcup \mathbb{P}^{n-1}$

Application rationnelle

Les variétés des sections **??**, **??**, **??** sont toutes des variétés minuscules. On peut décrire explicitement l'application qui en fait des variétés rationnelles à partir du lieu de base de la seconde forme fondamentale. Cette application provient d'un algorithme présenté par [L-M 2002] qui permet de reconstruire toutes les variétés minuscules.

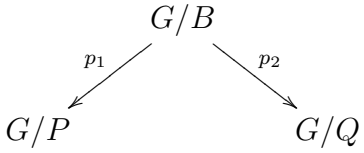
On suppose que X est une variété minuscule minimalement plongée (X n'est pas un produit de Segré ni un replongement de Veronese). Soit d le plus petit entier tel que $\sigma_{d-1}(Base|II_{X,x}|) \neq \mathbb{P}^{n-1}$ et $\sigma_d(Base|II_{X,x}|) = \mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{P}(T)$. On considère le plongement $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ donné par $\{x_0 = 0\}$. L'application rationelle est la suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^N \subset \mathbb{P}(S^d\mathbb{C}^{n+1*}) \\ & [x_0,\ldots,x_n] & \longmapsto & [x_0^d, x_0^{d-1}\mathcal{B}(T^*), x_0^{d-2}I_2(Base|II_{X,x}|), x_0^{d-3}I_3(Base|II_{X,x}|), \\ & & & \ldots, I_d(\sigma_{d-1}(Base|II_{X,x}|)] \end{array}$$

Avec comme notations : $\mathcal{B}(T^*)$ correspond à la donnée d'une base de T^* et $I_k(Z)$ correspond à la donnée d'un ensemble de générateur de l'idéal en degré k de Z. Le résultat de cette application étant bien entendu $\phi(\mathbb{P}^n) = X$.

Correspondance de Tits

La correspondance de Tits (voir [L-M 2003]) décrit des familles de variétés qui recouvrent X lorsque ces familles sont paramétrisées par des variétés homogènes. Soit $B \subset G$ un sous-groupe de Borel et soient P et Q deux sous-groupes paraboliques (i.e. $B \subset P$ et $B \subset Q$). La correspondance de Tits permet de parametriser des sous-variétés homogènes de G/P par G/Q de la façon suivante :



Les sous-variétés de G/P sont $Y = p_1(p_2^{-1}(x))$ pour $x \in G/Q$. On décrit ici les familles d'espaces projectifs et de quadriques de dimension maximales obtenues par la correspondance de Tits :

X	$\mathbb{P}^k \subset X$	paramètre	$\mathbb{Q}^l \subset X$	paramètre
$\mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{2n}$	$k = n-1$	$\mathbb{S}_n$	$l = 2n-1$	G/G
$\mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$	$k = n-1$	$\mathbb{S}_n$	$l = 2n-2$	G/G
$\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$	$k = 4$	$\mathbb{S}_5$	$l = 6$	$\mathbb{Q}^8$

C.2 Les variétés de Scorza & les "fausses" variétés de Scorza

Les références les plus complètes sur la géométrie des variétés de Scorza sont [Zak 1993, Ch 2003]. On appelle "fausses" variétés de Scorza les plongements de Segré de deux espaces projectifs de dimensions différentes et les Grassmaniennes de plan dans un espace vectoriel complexe de dimension impaire.

Généralités

On suppose $n \neq m$:

G	poids	X	$\dim(X)$	$\deg(X)$
SL_{n+1}	$2\omega_1$	$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$	n	2^n
$SL_{n+1} \times SL_{n+1}$	$\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$2n$	$\binom{2n}{n}$
SL_{2n}	ω_2	$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	$2(2n-2)$	$\frac{(2(2n-2))!}{(2n-2)!(2n-1)!}$
E_6	ω_1	$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$	16	78
$SL_{n+1} \times SL_{m+1}$	$\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$	$m+n$	$\binom{n+m}{n}$
SL_{2n+1}	ω_2	$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	$2(2n-1)$	$\frac{(2(2n+1-2))!}{(2n-1)!(2n)!}$

Le lieu de base de la seconde forme fondamentale

X	$Base\|II_{X,x}\|$
$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$	$\emptyset$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$\mathbb{P}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$
$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{2n-3}$
E_6	$\mathbb{S}_5 \subset \mathbb{P}^{15}$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$	$\mathbb{P}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}^{m-1} \subset \mathbb{P}^{n+m-1}$
$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{2n-2}$

Correspondance de Tits

On suppose $n > m$:

X	$\mathbb{P}^k \subset X$	paramètre	$\mathbb{Q}^l \subset X$	paramètre
$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$	$k=0$	$v_2(\mathbb{P}^n)$	$l=1$	$G(2,n+1)$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$k=n$	$\mathbb{P}^n$	$l=2$	$G(2,n+1) \times G(2,n+1)$
$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	$k=2n-2$	$\mathbb{P}^{2n-1}$	$l=4$	$G(4,2n)$
$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$	$k=5$	E_6/P_2	$l=8$	$\mathcal{E}_6$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$	$k=n$	$\mathbb{P}^m$	$l=2$	$G(2,n+1) \times G(2,m+1)$
$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	$k=2n-1$	$\mathbb{P}^{2n}$	$l=4$	$G(4,2n+1)$

La variété duale X^*

Un résultat de F. Zak identifie les k-variétés de Scorza aux variétés projectives des matrices de rang 1 dans les algèbres de Jordan simples de rang $k+1$. Le discriminant Δ_X correspond alors au déterminant de ces algèbres. Les variétés duales des "fausses" variétés de Scorza étant défectives leur codegré est égal à zéro.

X	$\mathrm{codeg}(X)$	X^*	X^*_{sing}
$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+2}{2}-1}$	$n+1$	$\sigma_n(v_2(\mathbb{P}^n))$	$\sigma_{n-1}(v_2(\mathbb{P}^n))$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$n+1$	$\sigma_n(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$	$\sigma_{n-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n))$
$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	n	$\sigma_{n-1}(G(2,2n))$	$\sigma_{n-2}(G(2,2n))$
$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$	3	$\sigma_2(\mathcal{E}_6)$	$\mathcal{E}_6$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$	0	$\sigma_m(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$	$\sigma_{m-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$
$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	0	$\sigma_{n-1}(G(2,2n+1))$	$\sigma_{n-2}(G(2,2n+1))$

Stratification de X^*_{sing} et sections hyperplanes

L'interprétation des variétés de Scorza comme variétés des éléments de rang 1 dans le projectivisé d'une algèbre de Jordan conduit à la stratification par rang (ou de manière

équivalente par sécantes successives). Cette stratification reste la même pour les "fausses" variétés de Scorza.

X	Stratification de X^*_{sing}
$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$	$\sigma_{n-1}(v_2(\mathbb{P}^n)) \supset \sigma_{n-2}(v_2(\mathbb{P}^n)) \supset \cdots \supset \sigma_2(v_2(\mathbb{P}^n)) \supset v_2(\mathbb{P}^n)$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$\sigma_{n-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \supset \sigma_{n-2}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \supset \cdots \supset \sigma_2(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \supset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$
$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	$\sigma_{n-2}(G(2,2n)) \supset \sigma_{n-3}(G(2,2n)) \supset \cdots \supset \sigma_2(G(2,2n)) \supset G(2,2n)$
$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$	$\mathcal{E}_6$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$	$\sigma_{m-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \supset \cdots \supset \sigma_2(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \supset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$
$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	$\sigma_{n-2}(G(2,2n+1)) \supset \cdots \supset \sigma_2(G(2,2n+1)) \supset G(2,2n+1)$

Dans le tableau qui suit nous décrivons le lieu de tangence d'un hyperplan singulier en fonction de la strate à laquelle l'hyperplan appartient :

X	$(X \cap H)_{\text{sing}}$, $H \in (X^*_{\text{sing}})_{\text{général}}$	$(X \cap H)_{\text{sing}}$, $H \in \sigma_{n-i}(X)$
$v_2(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d}-1}$	$v_2(\mathbb{P}^1) \simeq \mathbb{Q}^1$	$v_2(\mathbb{P}^{i-1})$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \subset \mathbb{P}^{(n+1)^2-1}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{Q}^2$	$\mathbb{P}^{i-1} \times \mathbb{P}^{i-1}$
$G(2,2n) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n}{2}-1}$	$G(2,4) \simeq \mathbb{Q}^4$	$G(2,2i)$
$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$	$\mathbb{Q}^8$	$*$
$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{nm+n+m}$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-m+1}$	$\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^{n-m+i}$
$G(2,2n+1) \subset \mathbb{P}^{\binom{2n+1}{2}-1}$	$G(2,5)$	$G(2,2i+1)$

C.3 Les variétés sous-adjointes (ou séries des variétés Legendriennes spéciales) & produit d'une conique et d'un espace projectif de dimension $m > 1$

Les variétés sous-adjointes apparaissent dans les travaux de [L-M 2001, Om 2000, Mu 1996]. Nous ajoutons a cette série la variété $\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$ qui apparait au théorème 3.4.1.. Nous associons ces deux types de variétés à cause de l'identification de leurs variétés duales avec leurs variétés des tangentes.

Généralités

G	poids	X	$\dim(X)$	$\deg(X)$
$SL_2 \times SO_{2n}$	$\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{4n-1}$	$2n-1$	$2(2n-1)$
$SL_2 \times SO_{2n+1}$	$\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{4n+1}$	$2n$	$4n$
Sp_6	ω_3	$G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$	6	16
SL_6	ω_3	$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	9	42
SO_{12}	ω_6	$\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$	15	286
E_7	ω_7	$\mathcal{E}_7 \subset \mathbb{P}^{55}$	27	4370
$SL_2 \times SL_m$	$2\omega_1 \times \omega_1$	$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$	$m+1$	$2(m+1)$

Lieu de base de la seconde forme fondamentale

X	$Base\|II_{X,x}\|$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{4n-1}$	$\mathbb{P}^0 \sqcup \mathbb{Q}^{2n-4} \subset \mathbb{P}^{2n-2}$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{4n+1}$	$\mathbb{P}^0 \sqcup \mathbb{Q}^{2n-3} \subset \mathbb{P}^{2n-1}$
$G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$	$v_2(\mathbb{P}^2) \subset \mathbb{P}^5$
$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$
$\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$	$G(2,6) \subset \mathbb{P}^{14}$
$\mathcal{E}_7 \subset \mathbb{P}^{55}$	$\mathcal{E}_6 \subset \mathbb{P}^{26}$
$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$	$2\{p\} \sqcup \mathbb{P}^{m-1}$

Correspondance de Tits

Comme précedemment on donne les espaces projectifs et les quadriques de dimensions maximales qui font de X une variété uniréglée.

X	$\mathbb{P}^k$	paramètre	$\mathbb{Q}^l$	paramètre
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-2} \subset \mathbb{P}^{4n-1}$	$k = n-1$	$\mathbb{S}_n$	$l = 2n-2$	$\mathbb{P}^1$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^{2n-1} \subset \mathbb{P}^{4n+1}$	$k = n-1$	$\mathbb{S}_n = B_n/P_n$	$l = 2n-1$	$\mathbb{P}^1$
$G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$	$k = 0$	$G_\omega(3,6)$	$l = 1$	X_{C_3} variété adjointe
$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	$k = 3$	$\mathbb{F}_{1,2}(\mathbb{C}^6)$	$l = 4$	X_{SL_6} variété adjointe
$\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$	$k = 5$	$\mathbb{S}_6$	$k = 6$	X_{SO_6} variété adjointe
$\mathcal{E}_7 \subset \mathbb{P}^{55}$	$k = 6$	E_7/P_2	$l = 10$	X_{E_7} variété adjointe
$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$	$k = m$	$\mathbb{Q}^1$	$l = 1$	$\mathbb{P}^m$

La variété duale X^*

Pour la série des variétés Legendriennes spéciale, il existe comme pour les variétés de Scorza une description uniforme du discriminant Δ_X. Dans les travaux de [L-M 2001, Mu 1996] ce discriminant est présenté comme une généralisation du discriminant classique

pour les polynômes complexes de degré trois. Cette généralisation est obtenue en remplaçant le corps des complexes par une algèbre de Jordan de rang 3 sur $\mathbb{C}$. Par exemple la variété $\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$ correspond à la "courbe cubique" $v_3(\mathfrak{J}) \subset \mathbb{P}(S^3\mathfrak{J})$ où $\mathfrak{J}$ est l'algèbre des matrices antisymétriques de taille 6. Cette analogie avec le discrimiant de $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ vient de l'observation suivante : $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ est la variété sous-adjointe de $X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$.

X	$\mathrm{codeg}(X)$	X^*
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{2(n+2)-1}$	4	$\tau(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^n)$
$G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$	4	$\tau(G_\omega(3,6))$
$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	4	$\tau(G(3,6))$
$\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$	4	$\tau(\mathbb{S}_6)$
$\mathcal{E}_7 \subset \mathbb{P}^{55}$	4	$\tau(\mathcal{E}_6)$
$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{3m+2}$	0	$\tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)$

Stratification de X^*_{sing} et sections hyperplanes

Nous avons déja rappelé la description uniforme des orbites données dans [L-M 2001]. Nous l'écrivons à nouveau ici :

$$X \subset \sigma_+(X) \subset \tau(X) \subset \mathbb{P}(V).$$

La variété $\sigma_+(X)$ correspond au lieu singulier de $\tau(X)$. C'est aussi le lieu des droites sécantes isotropiques. Notons que $\sigma_+(X)$ est irréductible, sauf pour $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^n$ où on dénombre deux composantes pour $n > 1$ et trois pour $n = 1$.

Donnons à présent une description du lieu de tangence d'un hyperplan singulier en fonction de la strate à laquelle appartient l'hyperplan :

X	$(X \cap H)_{\mathrm{sing}}$, $H \in \sigma_+(X)$	$(X \cap H)_{\mathrm{sing}}$, $H \in X$
$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{Q}^n \subset \mathbb{P}^{2(n+2)-1}$	$\mathbb{Q}^{n-1}$	$\mathbb{P}^1 \vee \mathbb{Q}^{n-1}$
$G_\omega(3,6) \subset \mathbb{P}^{13}$	$\mathbb{Q}^2$	$\mathrm{Cône}(v_2(\mathbb{P}^2), H)$
$G(3,6) \subset \mathbb{P}^{19}$	$\mathbb{Q}^3$	$\mathrm{Cône}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, H)$
$\mathbb{S}_6 \subset \mathbb{P}^{31}$	$\mathbb{Q}^5$	$\mathrm{Cône}(G(2,6), H)$
$\mathcal{E}_7 \subset \mathbb{P}^{55}$	$\mathbb{Q}^9$	$\mathrm{Cône}(\mathcal{E}_6, H)$

Quant à la variété $\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m$ nous proposons dans la thèse la stratification suivante :

$$\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^m \cup \sigma(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m)^* \subset \tau(\mathbb{Q}^1 \times \mathbb{P}^m) \subset \mathbb{P}^{3m+2}.$$

C.4 La variété adjointe de type G_2

Généralités

G	poids	X	$\dim(X)$	$\deg(X)$	$Base\|II_{X,x}\|$
G_2	ω_1	$X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$	5	18	$v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$

Le lieu de base de la seconde forme fondamentale

X	$Base\|II_{X,x}\|$
$X_{G_2} \subset \mathbb{P}^{13}$	$v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$

Application rationnelle

Comme pour les variétés des sections précédentes on peut reconstruire la variété adjointe X_{G_2} à partir de la connaissance du lieu de base de la seconde forme fondamentale. On trouve en effet dans les travaux de [L-M 2002] un algorithme permettant de construire les variétés adjointes fondamentales. Cet algorithme repose sur l'écriture explicite des applications rationelles conduisant aux variétés adjointes. Dans le cas de X_{G_2}, le lieu de base de la seconde forme fondamentale est $v_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(T_1)$. En plongeant $\mathbb{P}^3$ dans $\mathbb{P}^5$ par $\{x_0 = 0\}$ et $\{x_n = 0\}$ et en écrivant $\mathcal{B}(T_1^*)$ pour une base de T_1^*, nous avons :

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \mathbb{P}^5 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{13} \\ & [x_0, \ldots, x_5] & \longmapsto & [x_0^4, x_0^3\mathcal{B}(T_1^*), x_0^3 x_n, x_0^2 I_2(v_3(\mathbb{P}^1)), x_0^2 x_n \mathcal{B}(T_1^*) - x_0 I_3(\tau(v_3(\mathbb{P}^1))_{\text{sing}}, \\ & & & x_0^2 x_n^2 - I_4(\tau(v_3(\mathbb{P}^1)))] \end{array}$$

Avec $\phi(\mathbb{P}^5) = X_{G_2}$.

Correspondance de Tits

Dans le cas de $X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$ la correspondance de Tits ne donne pas de variétés homogènes qui paramétrisent la famille des espaces projectifs ou des quadriques contenues dans X_{G_2}. Cependant on peut recouvrir X_{G_2} par des courbes :

X	$Y_i \subset X_{G_2}$	paramètre
$X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$	$v_3(\mathbb{P}^1)$	$\mathbb{Q}^5$

La variété duale X^*

Le discriminant de la variété adjointe X_{G_2} correspond au produit des racines longues de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_2$.

X	$\text{codeg}(X)$	X^*_{sing}	$(X \cap H)_{\text{sing}}$
$X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$	6	$\sigma(X_{G_2}) \simeq \sigma(X_{G_2})^*$	$\mathbb{Q}^1$

Stratification de X^*_{sing}

La stratification du lieu singulier de $X^*_{G_2}$ est déduite de celle donnée pour $\sigma(X_G)$ dans [KY 2000]. Les notations pour les orbites intermédiaires sont celles de Bala-Carter.

X	Stratification de X^*_{sing}
$X_{G_2} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{g}_2)$	$\sigma(X_{G_2}) \supset \mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1))^9 \supset \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\tilde{A}_1})^7 \supset X_{G_2}$

Ces orbites intermédiaires ont l'interprétation géométrique suivante (voir [L-M 2001]) :

-$\mathbb{P}(\mathcal{O}(a_1)) = \sigma_{(1)}(X_{G_2}) = \sigma(X_{G_2}) \cap \mathbb{Q}^{12}_{\text{Killing}}$, où $\mathbb{Q}^{12}_{\text{Killing}}$ est l'hypersurface quadratique défine par la forme de Killing.

-$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\tilde{A}_1}) = \sigma_{(3)}(X_{G_2})$ est la fermeture de l'orbite des points sur une famille unidimensionelle de droites tangentes à la distribution $\tilde{\tau}(v_3(\mathbb{P}^1)) \subset \tilde{T}_x X_{G_2}$.

Bibliographie

[Ar 1972] V.I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, The Weyl groups of A_k, D_k, E_k and Lagrangian singularities*, Funk. Anal. **6** (1972), 254-272.

[Ar 1975] V.I. Arnol'd, *Critical point of smooth functions and their normal forms* , Russian Math. Surveys **30** (1975), no. 5, 1-75.

[Ar 1983] V.I. Arnol'd, *Some open problems in the theory of singularities*, Proceedings in Pure Mathematics **40**, Singularities part 1 (1983), 57-69.

[A-G-L-V 1998] V.I. Arnol'd, V.V. Goryunov, O.V. Lyashko, V.A. Vasil'ev *Singularity Theory I*, Springer 1998.

[Bou 1968] N. Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann 1968.

[Br 1970] E. Brieskorn, *Singular elements of semi-simple algebraic groups*, Actes Congres intern. Math. Nice **2** (1970), 272-284.

[Ch-Ci 2001] L. Chiantini, C. Ciliberto, *Weakly defective varieties*, Trans. of the A.M.S., **354** (2001), no. 1, 151-178.

[Ch 2003] P.E Chaput, *Géométrie de quelques algèbres et théorèmes d'annulation*, Thèse de doctorat, Grenoble (2003).

[Di 1986] A. Dimca, *Milnor numbers and multiplicities of dual varieties*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **31** (1986), 535-538.

[Du 1979] A.H Durfee, *Fifteen characterisations of rational double points and simple critical points*, Eins. Math, II. Ser. **25**, (1979), no. 1-2, 131-163.

[Ein 1986] L. Ein, *Varieties with small dual varieties I*, Invent. Math. **86** (1986), no.1, 63-74.

[Ein 1985] L. Ein, *Varieties with small dual varieties II*, Duke Math. J. **52** (1985), no. 4, 895-907.

[Fu-Han 1979] W. Fulton, J. Hansen, *A connectedness theorem for projective varieties, with applications to intersections and singularities of mappings*, Ann. of Math. (2) **110** (1979), 159-166.

[Fu-Ha 1991] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Graduate Text in Mathematics, Springer 1991

[Fr-Hu 1999] E. Freitag, B. Hunt, *The dual of the invariant quintic*, Experimental Math. **8** (1999), no. 2, 151-154.

[G-H 1979] P. Griffiths J. Harris, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. **12** (1979), 355-452.

[G-H 1978] P. Griffiths J. Harris, *Principle of Algebraic Geometry*, Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience[John Wiley and Sons], New York, 1978.

[G-K-Z 1992] I.M. Gelfand M.M. Kapranov A.V. Zelevinsky, *Hyperdeterminants*, Advances in Math. **96**, (1992), 226-263.

[G-K-Z 1994] I.M. Gelfand M.M. Kapranov A.V. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser 1994.

[Ha 1977] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, no **52**, Springer-Verlag (1977)

[Hu 1995] J. Humphreys, *Congugacy classes in semisimple algebraic groups* , Mathematical surveys and monographs **43** AMS 1995.

[Il-Lan 1999] B. Ilic, J.M. Landsberg, *On symetric degeneracy, space of symmetric matrices of constant rank and dual varieties*, Math. Ann. **314 (1999), 159-174.** 2003.

[I-L 2003] T. Ivey, J.M. Landsberg, *Cartan for beginners : Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems* , Graduate Studies in Mathematics **61** 2003.

[KOY 1999] H.Kaji, M. Ohno, O. Yasukura, *Adjoint varieties and their secant varieties.* , Indag. Math. **10** (1999), no. 1, 45-47.

[KY 2000] H.Kaji, O. Yasukura, *Secant varieties of Adjoint varieties : orbit decomposition.* , Journal of Algebra **227** (2000), 26-44.

[Ka 1999] H.Kaji, *Homogeneous projective varieties with degenerate secants*, Trans. Amer. Soc. **351** (1999), no. 2, 533-545.

[Ke 1976] G. Kempf, *On the collapsing of homogeneous bundles*, Invent. Math. **37** (1976), 229-239

[Kl 1884] F. Klein, *Vorlesungen uber das Ikosaeder und die Auflosung des Gleichungen vom Funften Grade* ,Teubner : Leipzig (1884).

[Kna 1996] Knapp, *Lie groups and Lie algebras, beyond an introduction*, Birkhäuser 1996.

[Kn 1987] F. Knop, *Ein neuer Zusammenhang zwischen einfachen Gruppen und einfachen Singularitaten*, Inventiones mathematicae **90** (1987), no.3, 579-604.

[K-M 1987] F. Knop, G. Menzel, *Duale Varietäten von Fahnenvarietäten* , Comment. Math. Helv. **62** (1987), 38-61

[Kos 1963] B. Kostant, *Lie group representations on polynomial rings* , Amer. J. Math. **86** (1963), 327-404.

[Lan 1996] J.M Landsberg, *On degenerate secant and tangential varieties and local differential geometry*, Duke Mathematical Journal **86** (1996), 605-634.

[L-M 2001] J. Landsberg L. Manivel, *The projective geometry of the Freudenthal's magic square*, J. Algebra 239, 477-512 (2001)

[L-M 2002] J. Landsberg L. Manivel, *Construction and classification of complex simple Lie algebras*, Selecta Math. **8** (2002), 137-159.

[L-M 2003] J. Landsberg L. Manivel, *On the projective geometry of homogeneous varieties*,Commentari Math. Helv. **78** (2003) 65-100.

[L-M 2004] J. Landsberg L. Manivel, *A universal dimension formula for simple Lie algebras*, preprint Arxiv math.RT/0402157.

[L-M 2004] J. Landsberg L. Manivel, *Representation theory and projective geometry*, Algebraic Transformations Groups and Algebraic Varieties, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 132, subseries Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, Vol III. Springer-Verlag, (2004), 71-122.

[Mi 1963] J. Milnor, *Morse Theory* , Ann. Math. Stud. **51**. Princeton Univ. Press : Princeton 1963.

[Mi 1968] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Ann. Math. Stud. **61**. Princeton Univ. Press : Princeton 1968.

[Mu 1996] S. Mukai, *Simple Lie algebra and Legendre variety*, traduit de Nagoya Suri Forum **31** (1996) 1-12.

[Mum 1968] D. Mumford, *Algebraic Geometry I : Complex Projective Varieties*, Grundlehren der math. Wissenschaften 221, Springer-Verlag 1976.

[Mun 1997] R. Muñoz, *Varieties with low-dimensional dual varieties* Manuscripta Math. **94** (1997) no. 4 427-435.

[Mun 1999] R. Muñoz, *Varieties with almost maximal defect* Inst. Lombardo. Accad. Sci. Lett. Rend. A. **133** (1999) no. 2 103-114.

[Om 2000] Yasuhiro Omoda, *On Freudenthal's geometry and generalized adjoint varieties* , J. Math. Kyoto Univ. **40** (2000), no. 1, 137-153.

[Pa 1988] A. Parusiński, *A generalization of the Milnor number*, Math. Ann. **281** (1988), 247-254.

[Pa 1991] A. Parusiński, *Multiplicity of dual variety*, Bull. London Math. Soc. **23** (1991), 429-435.

[Po 2002] V.L. Popov, *Self-dual algebraic varieties and nilpotent orbits*, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math. **16** (2002), 509-533.

[P-V 1989] V.L. Popov, E.B. Vinberg *Invariant Theory, Algebraic Geometry IV*, Encylopaedia of Mathematical Sciences **55**, Springer Verlag, Eds Parshin, Shafarevich 1989.

[Ro 1994] E. Rogora, *Elementary projective geometry* a course taught by F. Zak at the University of Rome,1-5 June 1992, in Projective varieties, linear systems and vector bundles notes of courses by L. Ein, Ph Ellia, F. Zak, Instituto Nationale di Alta Matematica 'F.Severi' 1994.

[Sa 1971] K. Saito, *Einfach-elliptishe Singularitaten*, Invent. Math. **14** (1971), 123-142.

[Sl 1980] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lect. Notes in Math. **815**, Springer Verlag 1980.

[Sl 1983] P. Slodowy, *Platonic solids, Kleinian singularities and Lie groups* , in "Algebraic Geometry" Proc. Ann Arbor 1981, Ed. I. Dolgachev, Lecture Notes in Math. **1008**, Springer Verlag (1983), 102-138.

[Sl 1993] P. Slodowy, *Groups and special singularities* , Singularity Theory, International Center for Theoretical Physics, Editors D.T Lê, K. Saito, B. Teissier (1993) 731-799.

[Te 2004] E. Tevelev, *Projectively Dual Varieties* , Encyclopaedia of Mathematical Sciences, subseries Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups to appear Springer Verlag, arXiv :math.AG/0112028v1.

[W-Z 1996] J. Weyman, A. Zelevinsky, *Singularities of Hyperdeterminants*, Annales de l'Institut Fourier **46** (1996), 591-644.

[Wu 1980] K. Wirthmüller, *Singularities determined by their discriminant*, Math. Annalen **252** (1980), 231-245.

[Zak 1973] F. Zak, *On surfaces with zero Lefschetz cycles*, Mat. Zametki **13** (1973), 869-880 ; English transl. in : Math. Notes **13**, 520-525.

[Zak 1989] F. Zak, *Some properties of dual varieties and their applications to geometry*, Algebraic Geometry, Chicago Il 1989, Lect. Notes in Math. **1479**, Springer Verlag (1991), 273-280.

[Zak 1993] F. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, AMS Translations of mathematical monographs **127** 1993.

[Zak 2004] F. Zak, *Determinants of projectives varieties and their degrees*, Algebraic Transformations Groups and Algebraic Varieties, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol. 132, subseries Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups, Vol III. Springer-Verlag, 2004, 207-238.