



**HAL**  
open science

## De la pénétration en milieu granulaire

Antoine Seguin

► **To cite this version:**

Antoine Seguin. De la pénétration en milieu granulaire. Mécanique des matériaux [physics.class-ph].  
Université Paris Sud - Paris XI, 2010. Français. NNT: . tel-00727081

**HAL Id: tel-00727081**

**<https://theses.hal.science/tel-00727081>**

Submitted on 1 Sep 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD 11

*Pour obtenir le grade de*

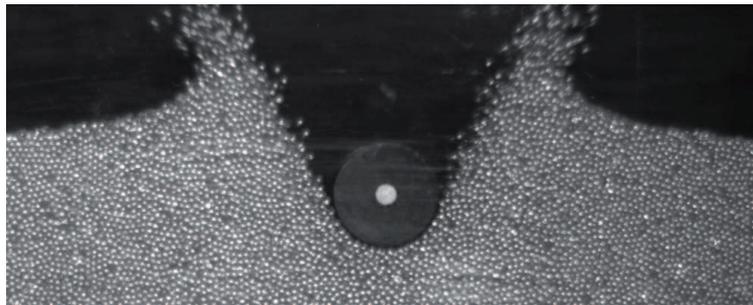
**DOCTEUR de  
L'UNIVERSITÉ de PARIS-SUD 11**

*Présentée par*

**Antoine Seguin**

Sujet de la thèse :

**De la pénétration en milieu granulaire**



Soutenue le :  
23 septembre 2010

Devant le jury composé de :

**John Hinch** ..... Rapporteur  
**Olivier Pouliquen** ..... Rapporteur  
**François Chevoir** ..... Président de jury  
**Éric Clément** ..... Examineur  
**Emmanuel Trizac** ..... Examineur  
**Yann Bertho** ..... Co-directeur de Thèse  
**Philippe Gondret** ..... Directeur de Thèse  
**Jérôme Crassous** ..... Invité



## Remerciements

Aussi anachronique qu'il y paraisse, le point final de la rédaction d'une thèse est d'en rédiger le début. Un début pour vous lecteur, une fin pour moi. La petite difficulté est que Philippe ne m'apporte pas son aide!

Philippe Gondret, que j'appelais singulièrement et respectueusement « Chef! », a dirigé avec Yann Bertho cette thèse dans la continuité de mon stage de Master 2. Tout au long de ces trois années, ils ont su orienter mes recherches aux moments opportuns, pour me permettre d'approfondir mes connaissances sur les milieux granulaires : une aide précieuse et indispensable sur le plan scientifique. Tous deux ont témoigné d'une grande disponibilité, d'une grande capacité d'écoute, de confiance et de sympathie. Je leur adresse mes plus sincères remerciements. L'association de ces deux physiciens de talent au mécanicien junior que je suis a constitué, je pense, une expérience enrichissante pour chacun d'entre nous. Au-delà, il s'agit même d'une relation d'amitié sincère qui s'est installée.

Je tiens à saluer également Jérôme Crassous, rencontré au début de ma seconde année de thèse. Très vite nous nous sommes trouvés des points communs. Sa contribution fut déterminante puisqu'elle constitue le cœur de cette thèse. Merci Jérôme pour ton efficacité, ton engouement à nourrir la réflexion, pour ta collaboration très agréable!

À John Hinch et Olivier Pouliquen, j'adresse un remerciement appuyé. Ils m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse. J'éprouve un profond respect pour leur travail et leur parcours. Leur regard critique, juste et avisé porté sur mes travaux ne peut que m'encourager à être encore plus perspicace et engagé dans mes recherches. Je remercie aussi les autres membres du jury : François Chevoir, Eric Clément et Emmanuel Trizac. Ensemble, ils ont constitué un jury d'experts de classe internationale dans les milieux granulaires, un jury émérite.

Le laboratoire FAST était un cadre privilégié pour effectuer ma thèse. Les conditions participent à la réussite des travaux. Mais, je soulignerai surtout les qualités humaines de tous les chercheurs présents : Jean-Pierre Hulin, Marc Rabaud, Dominique Salin... la liste est longue pour les citer tous. Aussi, je remercie l'ensemble des ITA, ceux qui étaient là, ceux qui sont arrivés et même ceux qui sont partis pendant ma thèse. Nous avons partagé de bons moments, de franche camaraderie, des rires. A ce titre, j'adresse un salut particulier à Alban Aubertin, Christian Borget et à Rafaël Pidoux (même si, sa modestie légendaire l'encouragerait à me dire de ne pas le citer). Enfin, une pensée émue pour les autres thésards côtoyés pendant ces trois années : le "cousin" Mourad, Nolwenn, Raphaël, Fahmi, Angélique, Benoît...

Je n'oublierai pas non plus toute l'équipe pédagogique qui m'a permis d'accomplir mon monitorat dans des conditions optimales.

En résumé, cette thèse est le premier pas d'une expérience professionnelle. Et comme tout premier pas, il restera inoubliable. Trois années fortes en émotion, notamment la dernière, car accessoirement à mon titre de Docteur en Physique, j'ai aussi été couronné par un titre de Champion de France de Tarot. Tant les bons moments passés, que les rencontres ou encore tous les soutiens feront de ces trois années au sein du laboratoire FAST, un livre de souvenirs empreints de bonheur.

Pour terminer, et parce qu'il est de tradition d'avoir une pensée très personnelle. Elle sera pour celle que j'avouerai comme la rencontre la plus exceptionnelle au cours de ma thèse. Toujours à mes côtés, j'espère qu'elle le restera : à ma dame de cœur!



# Sommaire

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>5</b>
1.1 Impacts sur les milieux granulaires	5
1.1.1 Éjections de grains	5
1.1.2 Morphologie des cratères d'impact	8
1.1.3 Profondeur de pénétration $\delta$	9
1.1.4 Temps d'arrêt du projectile $t_s$	12
1.1.5 Forces sur un projectile	14
1.2 Mouvement de grains autour d'un objet	18
1.2.1 Cinématique du milieu granulaire	18
1.2.2 Force sur l'objet	22
1.3 Modélisation d'un milieu granulaire	26
1.3.1 Théorie cinétique	26
1.3.2 Théorie du $\mu(I)$	30
<b>2 Dispositifs expérimentaux et numériques</b>	<b>33</b>
2.1 Dispositifs expérimentaux	33
2.1.1 Description des montages	33
2.1.2 Mesures de trajectoires	40
2.1.3 Mesures de champ de vitesse et température granulaire	42
2.1.4 Mesures de forces	47
2.2 Dispositifs numériques	47
2.2.1 Description du code de dynamique moléculaire	48
2.2.2 Code de résolution des équations de conservation	56
2.3 Bilan	59
<b>3 Vitesse imposée</b>	<b>61</b>
3.1 Mesure de forces	61
3.2 Champ de vitesse dans le milieu granulaire	64
3.2.1 Stationnarité du champ de vitesse	64
3.2.2 Dépendance radiale et azimutale de la vitesse	65
3.2.3 Champ de température granulaire $T$	70
3.2.4 Influence de la vitesse de pénétration $V_0$	72
3.2.5 Influence du diamètre du cylindre $d$	74
3.2.6 Influence du diamètre des grains $d_g$	76
3.3 Bilan et Problématique	78

<b>4</b>	<b>Théorie Hydrogranulaire</b>	<b>79</b>
4.1	Modélisation de l'écoulement . . . . .	79
4.2	Analyse des résultats . . . . .	83
4.2.1	Champ de vitesse . . . . .	83
4.2.2	Cartographie de la température granulaire . . . . .	84
4.2.3	Cartographie de la pression . . . . .	85
4.2.4	Cartographie de la viscosité . . . . .	86
4.3	Influence des paramètres . . . . .	88
4.3.1	Influence de la vitesse . . . . .	88
4.3.2	Influence de la pression . . . . .	90
4.3.3	Influence de la taille du disque . . . . .	92
4.3.4	Influence de la taille des grains . . . . .	97
4.4	Nombre de Reynolds Granulaire . . . . .	100
4.5	Force de traînée . . . . .	101
4.6	Bilan . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Impact</b>	<b>107</b>
5.1	Calcul du nombre Reynolds instantané . . . . .	107
5.2	Champ de vitesse des grains . . . . .	108
5.3	Étude des profils de vitesses . . . . .	110
5.3.1	Influence de la vitesse d'impact $V_i$ . . . . .	110
5.3.2	Influence de la taille du projectile $d$ . . . . .	111
5.3.3	Influence de la taille des grains $d_g$ . . . . .	112
5.4	Étude numérique 2D . . . . .	113
5.4.1	Force exercée par le milieu granulaire sur le projectile . . . . .	120
5.4.2	Temps d'arrêt du projectile . . . . .	121
5.5	Profondeur de pénétration et temps d'arrêt 3D . . . . .	122
5.5.1	Impact en milieu infini . . . . .	127
5.5.2	Influence du confinement latéral . . . . .	128
5.6	Bilan . . . . .	129
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>131</b>
	<b>Annexe A Modèle Géométrique</b>	<b>133</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>136</b>

# Introduction Générale

LA nature regorge de milieux granulaires. Le sable des déserts constitue plus de 10% de la surface émergée de la Terre, alors que les sédiments des fonds marins représentent une source de matériau inépuisable pour notre planète [34]. Étant donnée cette omniprésence, leur connaissance et leur maîtrise est un atout scientifique non négligeable dans le développement de technologies nouvelles. L'étude des milieux granulaires se positionne aussi naturellement dans une problématique plus générale qui est celle du développement durable.

Cette thèse s'intéresse aux aspects de la pénétration d'objets dans un milieu granulaire sec. La pénétration en milieu granulaire concerne de nombreux domaines scientifiques et techniques à différentes échelles. Les problématiques associées sont diverses et variées.

Dans le domaine du génie civil, la connaissance des milieux granulaires est fondamentale. Leur maîtrise est essentielle pour la sécurité des biens et des personnes. La caractérisation des sols par des essais de pénétrométrie (enfouissement dans le sol d'une pointe métallique : la résistance de la pointe est alors directement liée à la contrainte de rupture du sol) représente un enjeu fondamental en mécanique des sols. La connaissance d'un terrain permet d'éviter des catastrophes telles l'enfoncement d'ouvrages (Fig. I.1a) ou les chutes de blocs [16]. On peut également citer tous les problèmes d'enfouissement de canalisations ou de déchets.

Dans le domaine maritime, le problème d'ancrage de bateau dans les fond marins est un problème conséquent. La masse de l'ancre n'est pas le seul élément clé. En effet, une masse élevée permet une accroche meilleure dans les sols durs mais la manipulation en est réduite. Il vaut mieux alors privilégier l'enfouissement dans les fond marins. Il existe de nombreuses formes différentes d'ancres adaptées à la fonction du bateau.

Depuis plusieurs siècles déjà, la pénétration en milieu granulaire intéressait les scientifiques. Au 18ème siècle, Voltaire et la scientifique Emilie du Chatelet ont réalisé des impacts de billes métalliques dans de la boue pour vérifier la loi de Newton [35]. La science de la balistique a aussi souvent été encouragée par les militaires. La naissance de la science balistique est attribuée à Benjamin Robins qui testait l'efficacité des poudres à canons [73]. Il est l'inventeur du pendule balistique qui est un dispositif permettant de déterminer la vitesse d'un projectile. Ce projectile est envoyé dans un bloc de masse beaucoup plus grande que celle du projectile. Le bloc est suspendu par deux tiges de même longueur et de masse négligeable. Après le choc le bloc se met à osciller, et on peut lier l'amplitude de ces oscillations à la vitesse du projectile.

Depuis des milliards d'années, des milliers de météorites se sont écrasées sur la Terre, Mars et la Lune, en éjectant de la roche à des vitesses prodigieuses et en formant des cratères de plusieurs centaines de mètres de diamètre : les conséquences biologiques et géophysiques ont parfois été importantes (on leur attribue la disparition d'espèces ou encore la formation de lunes). Ces collisions sont ainsi capables de



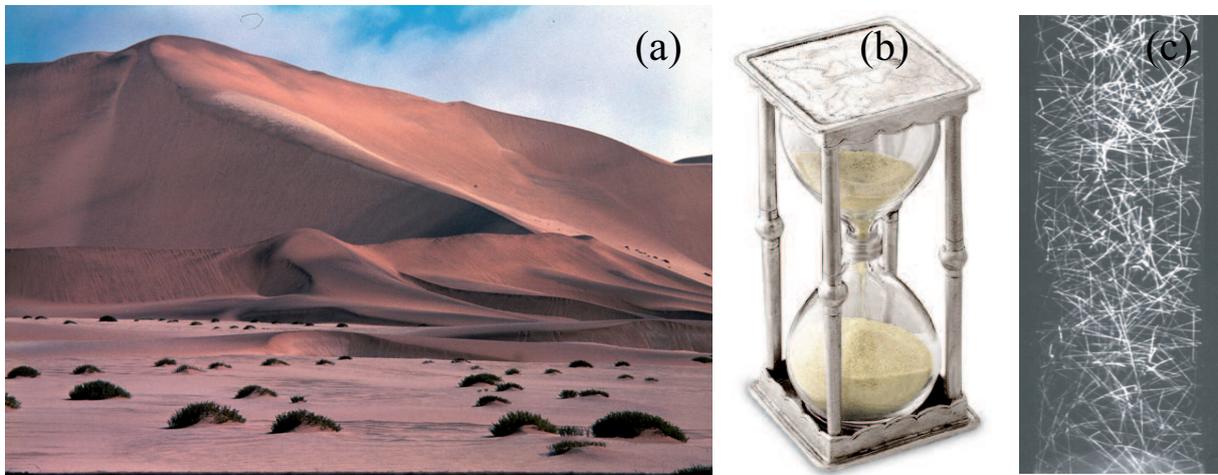
**Figure I.1** – (a) Tour de pise (b) Le Meteor Crater (appelé aussi Cratère Barringer) est situé dans l'état de l'Arizona des États-Unis d'Amérique. Son diamètre est de 1200 m et sa profondeur est de 180 m (Source : USGS). (c) Tycho est un cratère lunaire d'impact localisé dans les montagnes lunaires du sud. Son diamètre est de 86 km et sa profondeur est de 4800 m (Source : NASA).

faire plus de ravages qu'une bombe atomique. Les cratères d'impact sont des structures d'une importance considérable (Fig. I.1b). Ce sont des dépressions généralement circulaires qui résultent de l'impact d'un corps d'origine météoritique avec la surface d'un corps de grande taille. Ils constituent les reliefs les plus abondants à la surface des planètes ou des satellites comme la Lune (Fig. I.1c). Ces cratères font encore l'objet de nombreuses études dans le domaine géophysique [60].

Dans ce manuscrit, on appellera milieu granulaire un milieu formé d'un ensemble de particules macroscopiques de taille supérieure à  $100 \mu\text{m}$ . Les milieux granulaires peuvent exister sous trois formes : solide, liquide et gaz [46]. L'état solide est un état statique du milieu granulaire comme par exemple un tas de sable qui repose sur le sol (Fig. I.2a). L'état liquide est un état du milieu granulaire en mouvement où les grains interagissent à la fois par collision et contacts frictionnels de longue durée comme par exemple le cas de l'écoulement de grains de sable dans un sablier (Fig. I.2b). Enfin, l'état gazeux est un état plus dilué où les particules constituant le milieu se meuvent dans tous les sens et qui interagissent entre elles par collisions successives : c'est l'exemple des milieux granulaires vibrés (Fig. I.2c). Il existe un quatrième état pour les milieux granulaires : l'état vitreux [53, 42]. Dans cet état, le milieu granulaire possède une dynamique très lente devant la durée typique d'une expérience.

On verra dans la suite du manuscrit que c'est l'état liquide du milieu granulaire qui va nous intéresser et sur lequel on va se concentrer. De plus, les milieux granulaires que nous décrirons ou que nous utiliserons seront des milieux granulaires dit "secs", c'est-à-dire que les grains ne subissent aucune force résultant de la présence d'un fluide interstitiel entre grains qui dans notre cas est l'air. Il est aussi important de noter qu'il n'existe pas de force de cohésion dans notre milieu granulaire, telles que les forces électrostatiques par exemple.

À travers ce manuscrit, nous allons mettre en place les éléments constituant la dynamique de pénétration mais aussi regarder plus attentivement comment l'écoulement de grains évolue autour d'un objet le pénétrant, de manière expérimentale mais aussi de manière numérique et théorique, tout cela dans le but de donner de nouvelles clés pour la compréhension des forces mises en jeu, par exemple dans le problème de l'impact. Ce manuscrit se décompose en cinq chapitres. Dans le premier chapitre, nous faisons un bref état de l'art sur le sujet qui nous préoccupe ici. Dans le deuxième chapitre, nous présentons les divers dispositifs expérimentaux et numériques employés pour réaliser notre étude. Dans



**Figure I.2** – Les trois états des matériaux granulaires. (a) Solide, une dune du désert de Namibie (Source : USGS). (b) Liquide, écoulement de grains dans un sablier. (c) Gaz, milieu granulaire soumis à des vibrations verticales.

le troisième, nous exposerons les résultats expérimentaux de pénétration à vitesse constante d'un objet dans un milieu granulaire de manière expérimentale. Dans le quatrième chapitre, nous développons une théorie s'inspirant de la mécanique des fluides qui modélise ce phénomène de pénétration. Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, nous aborderons le problème de l'impact en milieu granulaire, phénomène instationnaire de pénétration à force constante.



# Chapitre 1

## État de l'art

DANS ce chapitre, nous allons dresser un bref état de l'art en résumant les différents résultats d'études déjà obtenus sur la pénétration d'objets dans les milieux granulaires et qui nous seront utiles dans la suite de ce manuscrit. Dans le phénomène de pénétration en milieu granulaire, on peut étudier l'évolution dynamique de l'objet qui pénètre dans le milieu granulaire ainsi que les actions mécaniques qui sont exercées sur celui-ci. On peut aussi étudier l'évolution dynamique du milieu granulaire et son comportement face à la sollicitations mécanique générée par l'objet le pénétrant.

### 1.1 Impacts sur les milieux granulaires

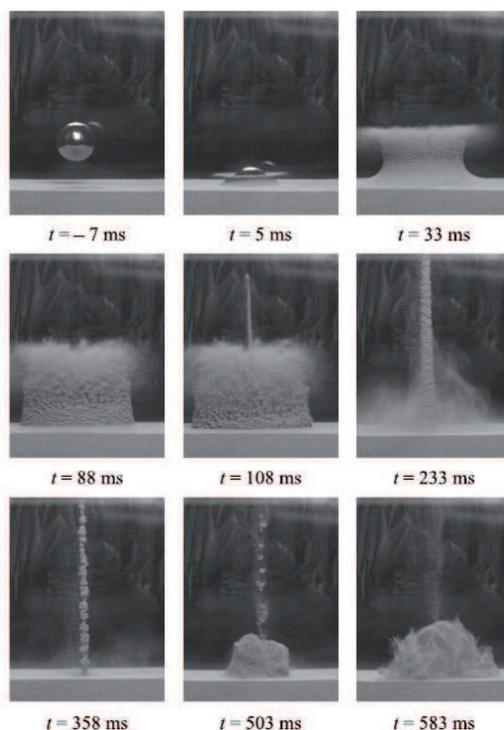
Les impacts en milieu granulaire ont fait l'objet de nombreuses études diverses et variées. Ces études concernent différents aspects de l'impact tels que la dynamique d'éjection des grains, la formation du cratère, la profondeur de pénétration du projectile et le temps qu'il met pour s'enfoncer ou bien encore la force exercée par le milieu granulaire pendant la pénétration. Dans cette partie, nous allons revenir sur ces différents aspects en rappelant les résultats principaux de ces études.

#### 1.1.1 Éjections de grains

Lors de l'impact d'un projectile dans un milieu granulaire, une partie de l'énergie cinétique du projectile est transmise aux grains constituant le milieu granulaire. Cette énergie transmise est à l'origine du phénomène d'éjection des grains. Ces éjections peuvent être spectaculaires ; les grains au départ immobiles sont éjectés à des vitesses prodigieuses après impact du projectile. De plus, les grains peuvent être éjectés de différentes manières selon les conditions de l'impact. Au cours des années, plusieurs études ont montré que les types d'éjections de grains que l'on observait variaient selon la compacité du milieu granulaire.

Tout d'abord, en 1967, Cook et Mortensen se sont intéressés au volume du cratère d'impact et à l'éjection des grains [25]. Ils ont rapporté la formation d'un spectaculaire jet granulaire vertical pour les petites tailles de grains, alors que pour les grandes tailles de grains ils n'ont pas observé de jet mais la formation d'une couronne.

Ce jet granulaire a été étudié plus précisément par plusieurs équipes ces dix dernières années. En 2001, Thoroddsen et Shen ont montré qu'une sphère impactant un milieu granulaire crée une cavité cylindrique dans son sillage, qui s'effondre ensuite radialement à cause de la pression de type "hydrostatique" dans le milieu granulaire [82]. Les grains convergent alors vers le centre de la cavité. À cause de la faible



**Figure 1.1** – Séquence de photos d’un projectile sphérique de 25 mm de diamètre impactant à une vitesse de  $2.43 \text{ m.s}^{-1}$  un lit granulaire constitué de billes de verre de  $40 \mu\text{m}$  de diamètre et de compacité 0.41 (figure extraite de [54]).

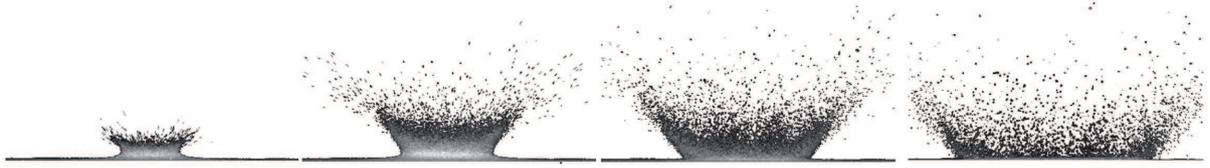
compressibilité du milieu granulaire, la vitesse des grains diverge lorsque la cavité se referme, ce qui crée ce jet qui remonte verticalement. Ce jet granulaire est semblable à celui que l’on observe pour les impacts dans les liquides avec le même type d’explication physique.

En 2004, Lohse et son équipe ont modélisé la formation de cette cavité [54]. Ils sont arrivés à mettre en avant les différentes phases d’éjections de grains pendant l’impact (Fig. 1.1), de la création de la couronne d’éjection (photo à  $t = 33 \text{ ms}$ ) à la création du jet granulaire (photo à  $t = 233 \text{ ms}$ ).

En 2007, Caballero *et al.* ont montré que l’air ambiant joue un rôle indirect en modifiant la trajectoire du projectile dans le milieu granulaire [18]. La même année, Royer *et al.* ont caractérisé quantitativement l’influence de la pression atmosphérique sur le jet granulaire [74] et mis en évidence que plus la pression atmosphérique est faible, moins le jet granulaire est important.

En 2008, Marston *et al.* ont enfin étudié l’influence de la compacité du milieu granulaire sur le jet [58]; en constatant que plus le milieu granulaire est compact, plus le jet granulaire possède une large épaisseur.

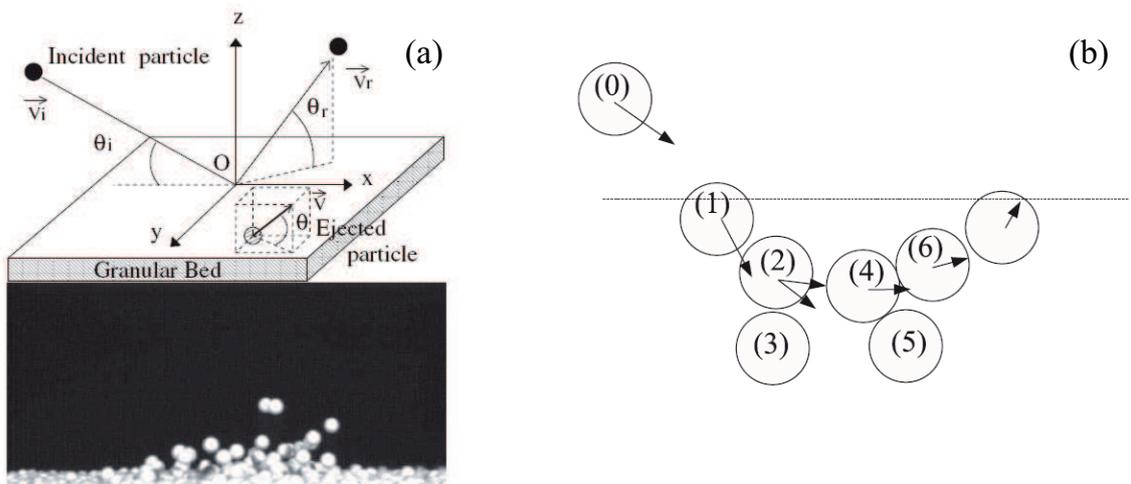
En 2009, Deboeuf *et al.* ont étudié expérimentalement en détail la dynamique de formation de la couronne d’éjection des grains observée dans le cas d’impact dans un milieu granulaire dense [33]. Un



**Figure 1.2** – Séquence de photos espacées de 30 ms d'un projectile sphérique de 13.5 mm de diamètre impactant à une vitesse de  $2.45 \text{ m.s}^{-1}$  (figure extraite de [33]).

modèle balistique a été mis en place pour modéliser l'éjection des grains et en particulier caractériser la croissance de la couronne d'éjection des grains avec le temps (Fig. 1.2). Des lois d'échelles ont été établies reliant le nombre et la vitesse des grains éjectés en fonction de l'énergie d'impact, et qui se comparent avec celles établies par d'autres auteurs sur le diamètre et la profondeur du cratère. Par ailleurs, il a été mis en évidence que seulement 3% de l'énergie d'impact se retrouve dans les éjectas, le reste étant dissipée dans le volume.

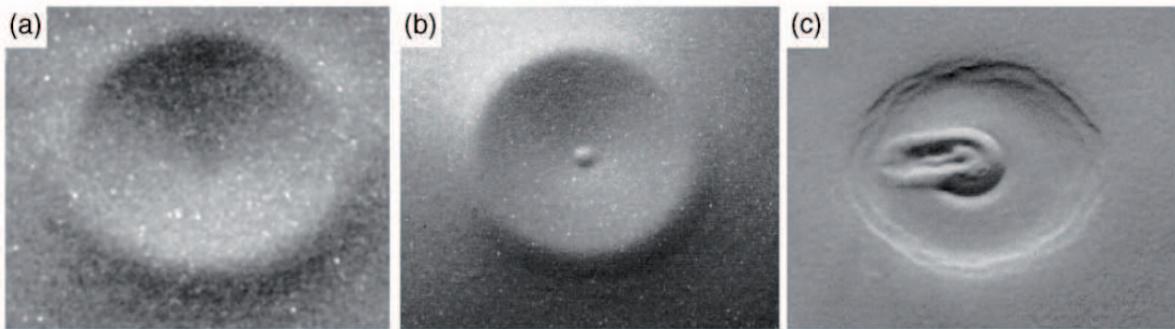
Dans le cas limite de l'impact d'un grain unique sur un lit de grains de mêmes diamètres sous incidence variable qui est essentiel dans le processus de saltation par exemple, des études expérimentales ont été menées par Rioual *et al.* [71, 72] et modélisées par Crassous *et al.* [28] (Fig. 1.3a) : le transfert d'énergie du grain incident y est décrit par une succession de collisions binaires entre grains dans un milieu granulaire dense qui semble bien rendre compte des observations expérimentales. Cette modélisation est inspirée du célèbre pendule de Newton et des travaux de Hinch et Saint-Jean qui ont étudié la dynamique de ce système [44], Hinch et Saint-Jean ont été capables de déterminer les vitesses et les directions des différentes particules constituant la chaîne de collision. La figure 1.3b présente une chaîne de collision binaire menant à l'éjection d'un grain.



**Figure 1.3** – (a) Schéma du principe de collision et photo d'une expérience. (b) Chaîne de collisions binaires menant à l'éjection d'un grain. Ces figures sont extraites de [28].

Enfin, dans le domaine du génie civil, Bourrier s'est intéressé dans sa thèse à l'impact de blocs rocheux sur des sols constitués de granulats [16, 17]. Il modélise le sol comme un milieu granulaire constitué de sphères ou de "clumps" (agglomérats insécables de particules sphériques). Il se pose la question du rebond du projectile sur le sol pour l'appliquer à la trajectographie des chutes de blocs.

### 1.1.2 Morphologie des cratères d'impact



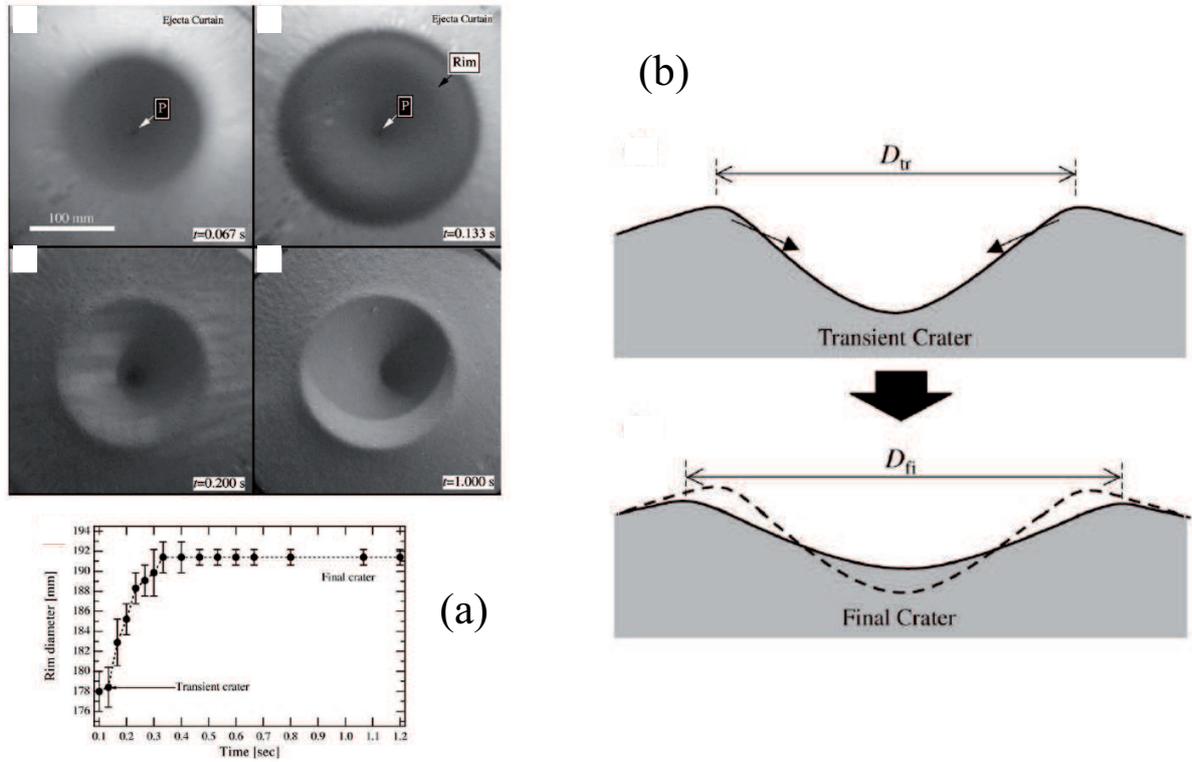
**Figure 1.4** – Différentes morphologies observées pour l'impact d'une bille de diamètre 25.4 mm (figures extraites de [86]) : (a) cratère simple, (b) cratère simple avec un pic central et (c) cratère complexe.

Les dimensions des cratères d'impact ont aussi fait l'objet de nombreuses études.

En 2003, dans des expériences de laboratoire, Walsh *et al.* font le lien entre les dimensions d'un cratère d'impact et l'énergie du projectile  $E$  [86]. Ils ont surtout montré que leurs expériences sont pertinentes pour représenter les morphologies que l'on observe dans les cratères de météorites malgré des différences existantes entre les impacts de météorites et les expériences de laboratoire (il y a environ seize ordre de grandeur dans les énergies d'impact, les vitesses d'éjections étant de l'ordre du  $\text{km.s}^{-1}$  pour les météorites et de l'ordre du  $\text{m.s}^{-1}$  dans le laboratoire). Tout d'abord, Walsh présente les différentes formes de cratères observées (Fig. 1.4). La figure 1.4a présente un cratère d'impact formé à basse énergie : un léger affaissement du milieu granulaire est observé à l'endroit où le projectile est passé et une dune circulaire de sable en périphérie de cet affaissement. La figure 1.4b présente un cratère d'impact formé à moyenne énergie. La forme est semblable au cratère de basse énergie sauf qu'un léger monticule de grains est visible au centre du cratère. La figure 1.4c présente un cratère d'impact formé à haute énergie. Cette forme plus complexe est difficile à décrire : la dune circulaire n'est plus aussi bien marquée, elle est plus chaotique et le pic central a bavé sur les cotés. Ceci est dû au jet granulaire qui est monté haut et n'est pas retombé exactement au centre du cratère. Dans cette étude, Walsh *et al.* montrent que le diamètre du cratère  $w$  évolue selon  $w \propto E^{1/4}$ .

En 2006, Yamamoto *et al.* s'intéressent à la formation du cratère dans le régime transitoire [87]. Pour cela, ils regardent l'évolution du diamètre de l'anneau extérieur de grains en fonction du temps, c'est-à-dire l'évolution du cratère transitoire par rapport au cratère final (Fig. 1.5).

En 2007, de Vet et de Bruyn ont étudié plus précisément la forme du cratère [32]. À l'aide d'un profilomètre laser, ils ont déterminé la forme des cratères comme hyperbolique, sans tenir compte du pic central (Fig. 1.6) et mis en évidence des lois d'échelles pour le volume du cratère en fonction de l'énergie d'impact. Ces lois d'échelle sont celles qui ont été ensuite confirmées par Deboeuf *et al.* dans leur étude



**Figure 1.5** – (a) Séquence de photos de la formation dynamique d'un cratère et évolution du cratère en fonction du temps. (b) Schéma de la formation d'un cratère. Après impact, des avalanches de grains viennent s'effondrer vers le centre du cratère. Ces figures sont extraites de [87].

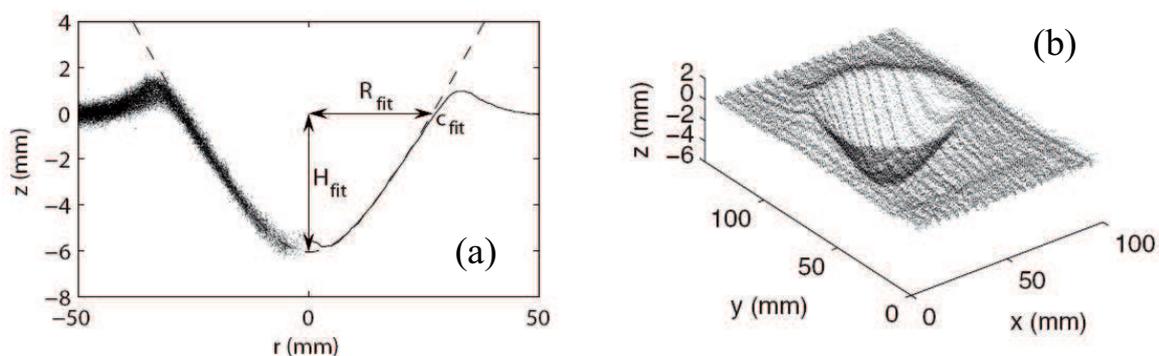
des éjectas [33].

À l'aide d'une géométrie différente, pendant l'année 2006, Boudet étudie la dynamique d'impact d'un projectile dans un milieu granulaire de faible profondeur (inférieure au diamètre du projectile) [15]. Il arrive à déterminer le diamètre du cratère pendant la phase d'impact. Il distingue deux phases : la phase d'ouverture du cratère qui possède une dynamique rapide, bien modélisée par un comportement exponentiel, puis, la phase de fermeture à dynamique plus lente, gouvernée par les avalanches de grains.

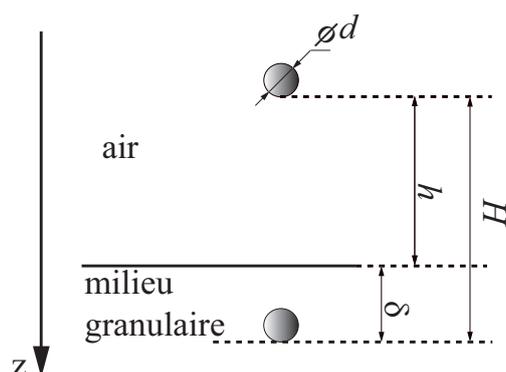
### 1.1.3 Profondeur de pénétration $\delta$

La profondeur de pénétration  $\delta$  d'un projectile impactant un milieu granulaire a fait l'objet de nombreuses études 3D [84, 7, 6]. Ces études présentent l'évolution de la profondeur de pénétration  $\delta$  à travers l'influence de paramètres tels que la hauteur de chute  $h$ , le diamètre  $d$  et la masse volumique  $\rho_p$  du projectile (Fig. 1.7).

En 2003, Uehara *et al.* se sont intéressés à la profondeur de pénétration  $\delta$  d'une sphère lâchée d'une hauteur de chute  $h$  [84]. Ils ont mis en avant que l'énergie dissipée  $E$  se fait selon la hauteur totale de chute du projectile  $H$  ( $H = h + \delta$ ), d'où  $E = mgH$ . Ils supposent que la force dissipative est d'origine



**Figure 1.6** – (a) Profil d'un cratère : la partie gauche est une moyenne des profils mesurés et la partie droite est un ajustement hyperbolique. (b) Surface digitalisée d'un cratère d'impact par profilomètre laser. Ces figures sont extraites de [32].



**Figure 1.7** – Paramétrage de la modélisation.

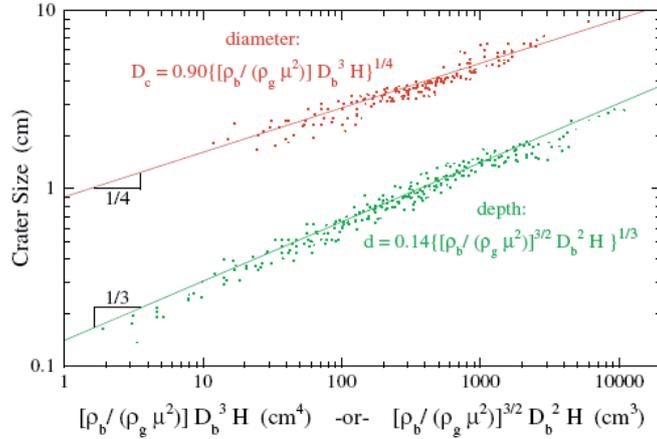
frictionnelle et proposent alors un scaling de la profondeur de pénétration  $\delta$  en fonction des paramètres du problème (Fig. 1.8) selon

$$\delta = \frac{0.16}{\mu} \left( \frac{\rho_p}{\rho_g} \right)^{1/2} d^{2/3} H^{1/3}, \quad (1.1)$$

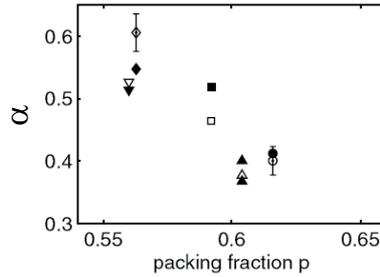
où  $\mu$  est le coefficient de friction entre grains.

En 2004, de Bruyn et Walsh ont montré que la relation déterminée par Uehara est incomplète [31]. En effet, ils ont mis en évidence que la valeur de  $\alpha$  dans la loi d'échelle  $\delta \propto H^\alpha$  décroît lorsque la compacité  $\varphi$  du milieu granulaire augmente, signifiant par là une diminution de la profondeur de pénétration (Fig. 1.9).

En 2005, l'équipe de Durian a proposé un autre scaling pour la profondeur de pénétration qui utilise cette fois-ci la vitesse d'impact  $V_i$ , ou plutôt la hauteur de chute  $h$  ( $V_i = \sqrt{2gh}$ ) [7]. En introduisant la profondeur de pénétration minimale  $\delta_0$  lorsque le projectile placé juste à la surface du milieu granulaire



**Figure 1.8** – Profondeur de pénétration  $\delta$  (en vert) et diamètre du cratère (en rouge) en fonction de la hauteur totale de chute  $H$  pour une sphère de diamètre  $D_b$  et de coefficient de friction  $\mu$  (figure extraite de [84]).



**Figure 1.9** – Influence de la compacité du milieu granulaire sur l'exposant  $\alpha$  de la loi d'échelle de la profondeur de pénétration  $\delta \propto H^\alpha$  (figure extraite de [31]).

s'enfonce sous son propre poids ( $h = 0$ ), ils ont proposé alors la loi d'échelle suivante

$$\delta - \delta_0 \propto \rho_p^{1/2} d^{2/3} h^{1/2}. \quad (1.2)$$

Toutes ces lois d'échelles peuvent être comparées à une loi issue d'un modèle simple en considérant que la dissipation est causée par l'existence d'une force frictionnelle et que le travail de cette force est égal à l'énergie potentielle de pesanteur. Considérons une sphère de diamètre  $d$  et de masse  $m \propto \rho d^3$  qui s'enfoncé dans un milieu granulaire. On veut calculer la profondeur de pénétration  $\delta$  de la sphère (Fig. 1.7). La pression dans le milieu granulaire est supposée hydrostatique s'il n'y a pas de parois latérales. Si  $\rho_g$  est la masse volumique de l'empilement de grains, la pression  $P(z_p)$  à la profondeur  $z_p$  s'écrit [83] :

$$P(z_p) \propto \rho_g g z_p. \quad (1.3)$$

Modélisons la force exercée  $F(z_p)$  par le milieu granulaire sur la sphère comme une force frictionnelle. Si  $S$  est le maître-couple de la sphère ( $S \propto d^2$ ), on obtient :

$$F(z_p) \propto P(z_p)S \propto \rho_g g z_p d^2. \quad (1.4)$$

Avec un raisonnement énergétique, cette force doit dissiper l'énergie potentielle de pesanteur  $E = mgH$ . Son travail s'écrit :

$$W = \int_0^\delta F(z_p) dz_p \propto \rho_g g \delta^2 d^2. \quad (1.5)$$

D'où le bilan énergétique :

$$W = E \implies \rho d^3 g H \propto \rho_g g \delta^2 d^2. \quad (1.6)$$

Après simplification, il reste :

$$\frac{\delta}{d} \propto \left( \frac{\rho_p}{\rho_g} \right)^{1/2} \left( \frac{H}{d} \right)^{1/2}. \quad (1.7)$$

On voit que ce modèle est à comparer aux résultats expérimentaux de l'équipe de Durian [7] :

$$\delta \propto \rho_p^{1/2} d^{2/3} H^{1/3} \quad (1.8)$$

Ce modèle est bien sûr un peu trop simple pour décrire toute la complexité du phénomène. Ceci provient du fait que la modélisation de la force  $F(z_p)$  n'est pas assez complète pour décrire la force réelle. Considérer une force dissipative uniquement d'origine frictionnelle n'est pas suffisant pour obtenir une loi d'échelle comparable aux résultats expérimentaux. Cependant ce modèle basique n'est pas tant éloigné que cela des valeurs expérimentales.

On notera que l'étude de la profondeur de pénétration ne se limite pas à des projectiles sphériques ou cylindriques [63]. Il y a eu des études où l'objet privilégié est un disque par exemple [38, 27].

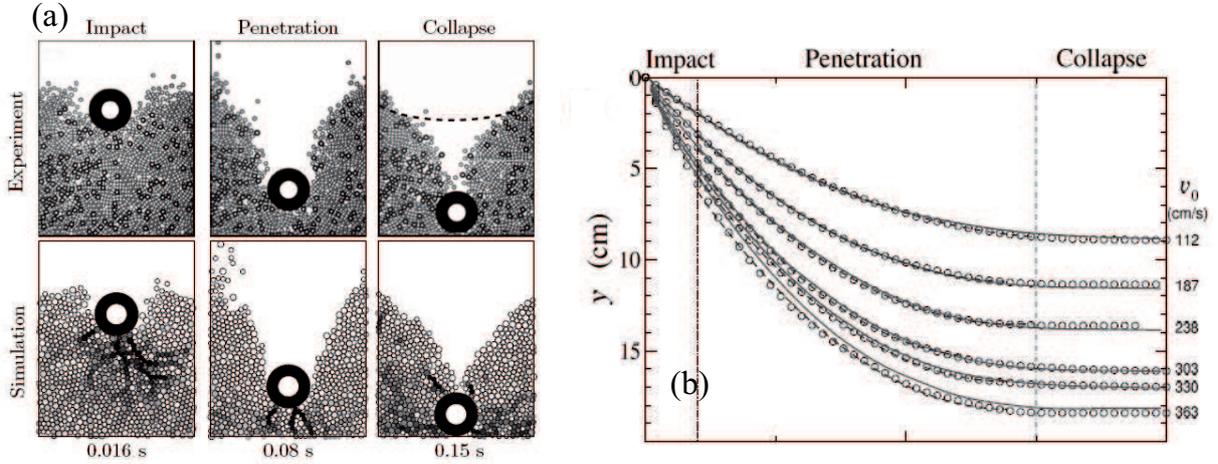
#### 1.1.4 Temps d'arrêt du projectile $t_s$

Une autre quantité intéressante dans l'impact de projectile est le temps d'arrêt  $t_s$  de ce projectile. Quelques études ont été menées sur ce sujet. On mentionnera ici les plus récentes.

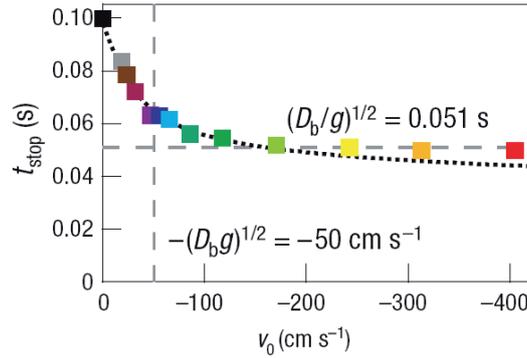
En 2004, l'équipe de Swinney mène une étude de trajectoire dans un milieu 2D, où un cylindre de diamètre  $d$  impacte un milieu granulaire constitué de grains cylindriques entre deux plaques de verre [66]. En visualisant la trajectoire du projectile expérimentalement et en comparant à des simulations numériques par code de dynamique moléculaire (Fig. 1.10), ils ont trouvé que le temps d'arrêt  $t_s$  d'un projectile est indépendant de la vitesse d'impact  $V_i$ , ce qui est un résultat surprenant.

En 2005, Hou *et al.* ont étudié la trajectoire d'un projectile dans un milieu granulaire 2D [45] et ont constaté que le temps d'arrêt décroît avec la vitesse du projectile, ce qui est contraire à l'observation précédente et non trivial également.

En 2007, Katsuragi et Durian ont aussi mesuré le temps d'arrêt d'un projectile sphérique dans un milieu granulaire [49]. Pour réaliser cette mesure et obtenir toute la trajectoire, ils ont fixé une tige graduée à l'extrémité supérieure de la sphère dont une partie reste en permanence à l'extérieur du milieu granulaire. En filmant cette tige, ils ont ainsi reconstitué la dynamique d'arrêt du projectile. En définissant la vitesse caractéristique  $V_c = \sqrt{dg}$  et le temps caractéristique  $\tau_c = \sqrt{d/g}$ , ils ont montré que plus la vitesse



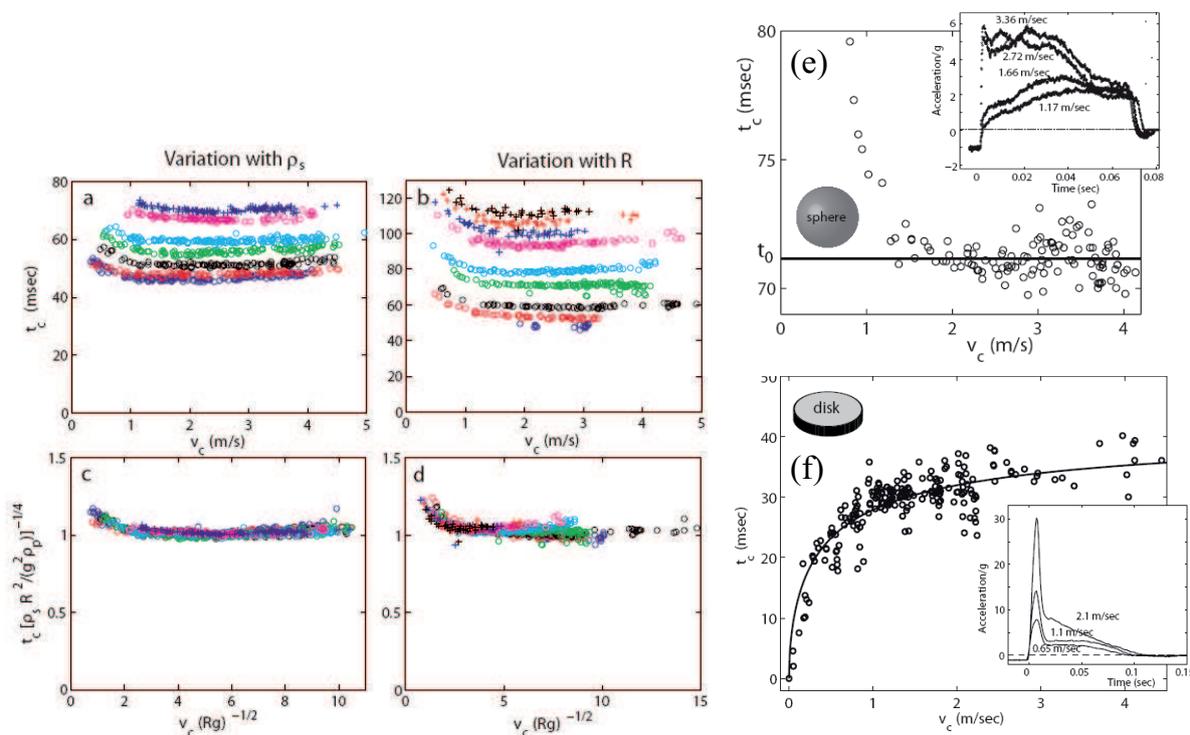
**Figure 1.10** – (a) Séquence de photo de l’impact 2D d’un projectile pour expériences et simulations. (b) Position du projectile pour différentes vitesses d’impact pour expériences ( $\circ$ ) et simulations ( $-$ ). Ces figures sont extraites de [66].



**Figure 1.11** – Évolution du temps d’arrêt d’une sphère en fonction de sa vitesse d’impact (figure extraite de [49]).

d’impact est élevée, plus le projectile s’arrête rapidement, avec un comportement asymptotique  $t_s = \tau_c$  quand  $V_i > V_c$  (Fig. 1.11).

Enfin, en 2008, Goldman et Umbanhowar ont établi un scaling plus complet pour le temps d’arrêt du projectile [38]. Pour mesurer la dynamique du projectile, ils ont collé un accéléromètre sur le haut du projectile, ce qui leur permet d’obtenir le temps d’arrêt. Ils ont utilisé deux types de projectile : le premier est un projectile sphérique et le deuxième est un disque. Ils ont constaté eux aussi que le temps d’arrêt de la sphère décroît lorsque la vitesse d’impact augmente (Fig. 1.12e), alors que le temps d’arrêt du disque croît (Fig. 1.12f). De plus, sur l’insert de la figure 1.12e, on observe clairement l’arrêt du projectile à accélération non nulle. Ils ont aussi étudié l’influence du diamètre  $d$  du projectile ainsi que la masse volumique  $\rho_p$  de celui-ci sur le temps d’arrêt (Figs. 1.12a, 1.12b, 1.12c et 1.12d). En introduisant la même vitesse caractéristique  $\sqrt{gd}$  que Katsuragi et Durian mais un temps caractéristique différent



**Figure 1.12** – Influence de (a) la masse volumique du projectile et du (b) diamètre du projectile sur le temps d'arrêt. Mise en place d'une loi d'échelle pour (c) la masse volumique et (d) le diamètre. Évolution du temps d'arrêt du projectile en fonction de la vitesse d'impact pour (e) une sphère et (f) un disque. Ces figures sont extraites de [38].

$[\rho_p d^2 / (\rho_p g^2)]^{1/4}$ , ils ont montré que les mesures de temps d'arrêt se trouvent sur une courbe maîtresse dans le diagramme  $t_s / [\rho_p d^2 / (\rho_p g^2)]^{1/4}$  en fonction de  $V_i / \sqrt{gd}$ .

### 1.1.5 Forces sur un projectile

Bien que la force exercée sur une sphère se déplaçant dans un fluide newtonien sous son propre poids soit bien connu depuis des années de manière théorique et de manière expérimentale [39], ce problème reste encore incompris lorsque l'on remplace le fluide par un milieu granulaire.

Depuis le 18ème siècle, la force exercée sur un projectile dans un milieu granulaire a fait l'objet de nombreuses études balistiques, ces études ayant été commandées à des fins militaires [73]. Dès cette période, on essayait de mettre en place une équation pour modéliser la pénétration d'un projectile dans un milieu granulaire. Dans les années 1950, toujours pour des études militaires, Allen *et al.* tiraient des balles de mitrailleuse dans le sable [3]. Ils modélisaient la force exercée sur un projectile de masse  $m$  par la somme d'une force constante et d'une force proportionnelle au carré la vitesse du projectile  $v_p^2$  selon le modèle de Poncelet [67],

$$-\frac{dv_p}{dt} = \beta v_p^2 + \gamma, \quad (1.9)$$

où  $\beta v_p^2$  correspond à une force de traînée similaire aux forces de traînée que l'on observe en aérodynamique et  $\gamma$  correspond à une force nécessaire pour tirer un objet dans le sable à des vitesses faibles. Cependant, Allen *et al.* décrivaient l'existence de deux régimes. Tout d'abord, il y a un régime haute vitesse, où  $v_p$  est supérieure à une vitesse critique  $v_c$  ( $v_p > v_c$ ), et pour lequel  $\gamma = 0$ . Puis, il y a un régime à basse vitesse ( $v_p < v_c$ ), pour lequel  $\gamma = cste \neq 0$ .

Ensuite, en 2004, dans un milieu granulaire lâche (compacité  $\varphi = 41\%$ ), Lohse *et al.* ont étudié les impacts à vitesse d'impact nulle en lâchant une bille à la surface d'un milieu granulaire [55]. Pour décrire la pénétration  $z_p$  de la bille dans le milieu granulaire, ils ont modélisé la force exercée par le milieu granulaire par une simple force de rappel  $kz_p$  en écrivant l'équation

$$(m + m_A) \frac{d^2 z_p}{dt^2} = mg - kz_p, \quad (1.10)$$

où  $m$  est la masse de la bille et  $m_A$  est la masse ajoutée, c'est-à-dire la masse de sable que la bille entraîne avec elle lors de sa pénétration dans le milieu granulaire. Stone *et al.* ont décrit cette force de rappel  $kz_p$  comme une force hydrodynamique [81, 80].

En 2005, Tsimring et Volfson ont considéré un modèle de Poncelet généralisé pour une étude numérique [83]. Le modèle de Poncelet décrit bien les impacts à grande vitesse mais décrit mal les impacts à petite vitesse. La force exercée par le milieu granulaire est composée d'une force de friction dynamique  $\alpha v_p^2$  et d'une résistance due à la friction solide  $F_s$ . Ils ont écrit alors l'équation de la pénétration

$$m \frac{dv_p}{dt} = mg - F_s - \alpha v_p^2. \quad (1.11)$$

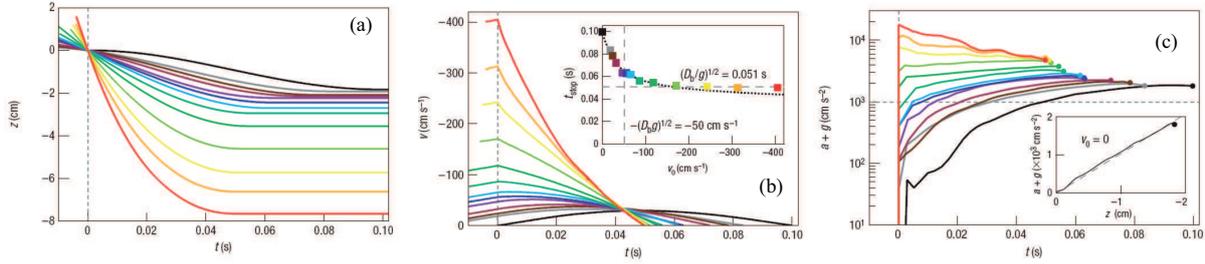
Dans le cas 3D, ils ont choisi alors de décrire  $F_s = cste$  lorsque  $z_p \gg d$  et  $F_s \propto z_p^2$  lorsque  $z_p \ll d$ . Avec ce modèle, ils ont retrouvé les scalings de la profondeur de pénétration  $\delta$ .

Encore en 2005, Ambroso *et al.* ont proposé une expression complexe pour la force  $F_s(z_p)$  décrite par Tsimring et Volfson dans l'équation (1.11) [6]. Ils ont écrit

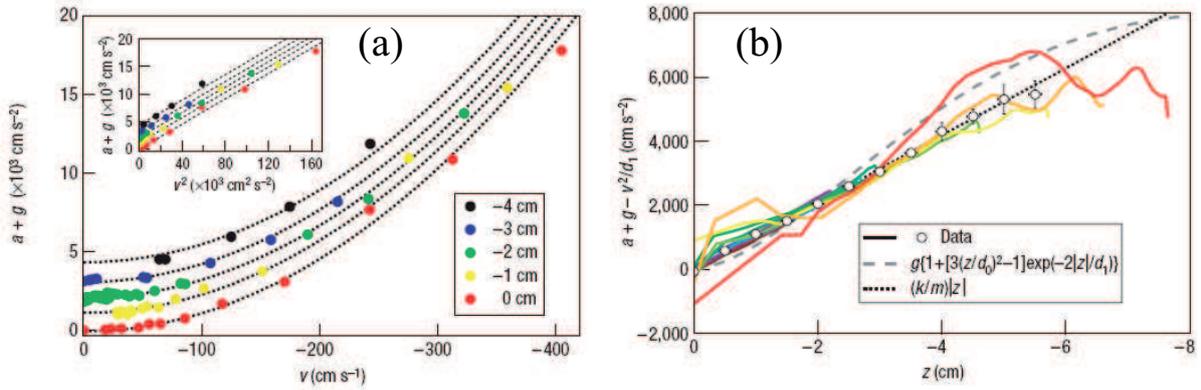
$$\frac{F_s(z_p)}{mg} = \left[ 3 \left( \frac{z_p}{\delta_0} \right)^2 - 1 \right] \exp \left( -2 \frac{|z_p|}{d_1} \right) + 1, \quad (1.12)$$

où  $\delta_0$  est la profondeur de pénétration finale à vitesse d'impact nulle et  $d_1$  est une longueur caractéristique telle que  $d_1 = m/\alpha$ . Cette expression de  $F_s$  a été obtenue en réécrivant l'équation 1.11 pour l'énergie cinétique et résolue à l'aide d'un facteur d'intégration  $\exp(-2z/d_1)$ . Cette expression de  $F_s$  est constante pour les grandes profondeurs de pénétration et tend vers 0 pour les faibles profondeurs.

En 2007, Katsuragi et Durian ont déterminé la force exercée sur un projectile pendant sa pénétration [49], en dérivant deux fois le signal de position  $z_p$  (Fig.1.13). Ils ont utilisé les travaux de Tsimring et Volfson pour déterminer l'existence de la force en  $v_p^2$  et ont validé ce modèle de force (Fig.1.14a). Ils ont remarqué aussi l'existence d'une force qui dépend de la profondeur de pénétration  $z_p$  et qui pouvait être modélisée par une force de rappel en  $k|z_p|$  (Fig.1.14b). Finalement, Katsuragi et Durian ont construit un modèle de force issu du modèle de Poncelet en le complétant avec la force de rappel : ils ont conservé l'existence du terme en  $v_p^2$  mais ont rajouté un terme de force proportionnel à la profondeur  $z_p$  du projectile dans le cas d'un projectile sphérique. Finalement, l'équation de la pénétration s'écrit alors



**Figure 1.13** – (a) Position, (b) vitesse et (c) accélération d'un projectile sphérique au cours du temps pour différentes vitesses d'impact (figures extraites de [49]).



**Figure 1.14** – Influence de (a) la vitesse du projectile et (b) la profondeur d'un projectile sur la force exercée par le milieu granulaire sur un projectile sphérique (figures extraites de [49]).

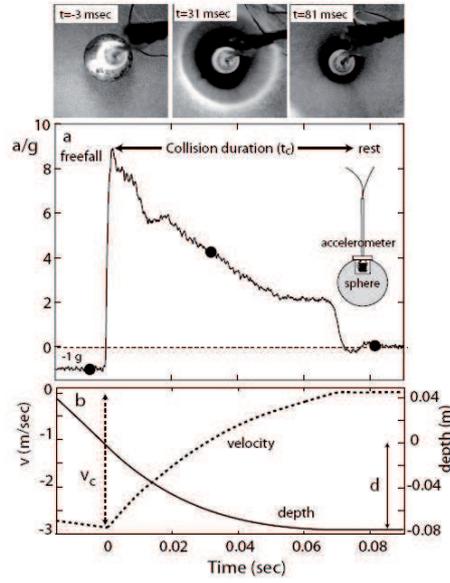
$$m \frac{dv_p}{dt} = mg - k|z_p| - \frac{m}{d_1} v_p^2, \quad (1.13)$$

où  $k$  est une raideur et  $d_1$  une longueur caractéristique. Cependant, le coefficient  $k$  qui est lié au coefficient de friction de Coulomb  $\mu$  donne une valeur de  $\mu$  environ dix fois plus important que les valeurs attendues [49].

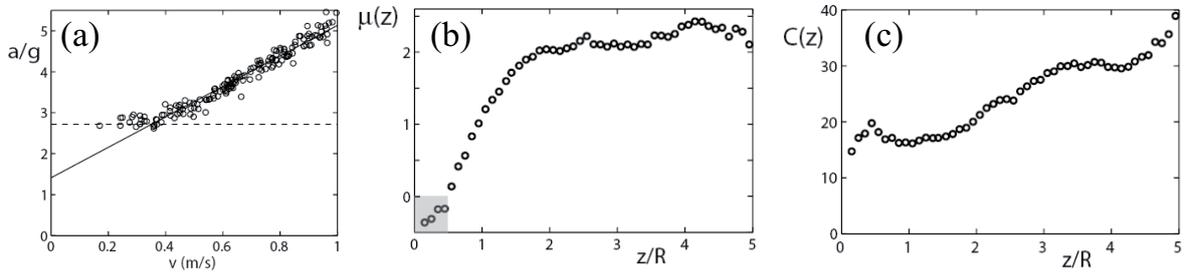
Enfin, en 2008, Goldman et Umbanhowar font une étude dynamique de la pénétration d'un objet (sphère et disque) dans un milieu granulaire [38]. Ils ont placé un accéléromètre à l'intérieur du projectile pour mesurer directement la force sans avoir de bruit généré par la dérivation du signal de position (Fig. 1.15). Il ont mis en place une force empirique  $F$  qu'exerce le milieu granulaire selon la forme

$$F = \mu(z_p)mg + C(z_p) \left(\frac{d}{2}\right)^{5/2} \rho_g \sqrt{g} v_p + \alpha' \left(\frac{d}{2}\right)^2 v_p^2, \quad (1.14)$$

où  $\mu(z_p)$ ,  $C(z_p)$  sont des fonctions de la profondeur d'enfoncement  $z_p$  et  $\alpha'$  est une constante indépendante



**Figure 1.15** – Séquence de photos de l’impact d’un projectile sphérique. (a) Accélération et (b) vitesse du projectile au cours du temps. Ces figures sont extraites de [38].



**Figure 1.16** – (a) Évolution de l’accélération d’un projectile sphérique en fonction de sa vitesse. Coefficients (b)  $\mu(z)$  et (c)  $C(z)$  de l’équation 1.14. Ces figures sont extraites de [38].

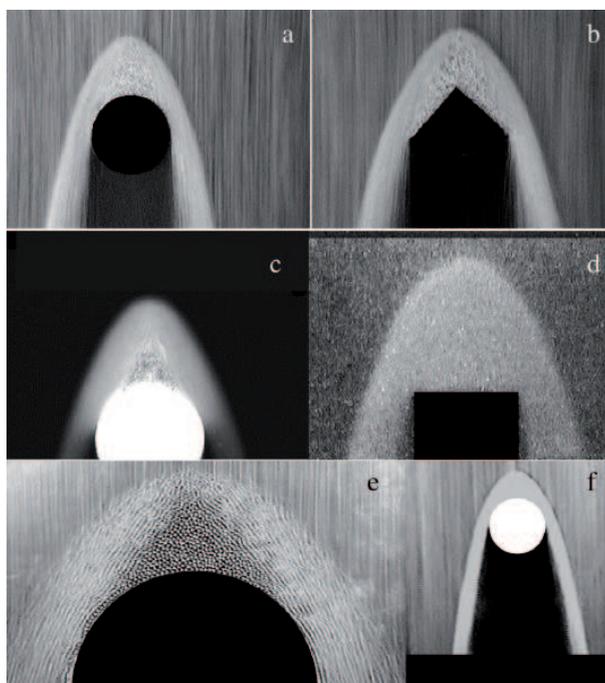
de la profondeur  $z_p$ .  $\mu(z_p)$  est assimilable à un coefficient de friction solide et  $C(z_p)$  est un coefficient de traînée. La figure 1.16a fait apparaître l’existence du terme en  $v_p$  pour les grandes profondeurs de pénétration. La figure 1.16b présente l’évolution de  $\mu(z_p)$ , on constate que  $\mu$  semble croître linéairement aux faibles  $z_p$  avant de saturer comme dans le modèle de Tsimring et Volfson [83]. La figure 1.16c présente l’évolution de  $C(z_p)$  où l’on constate que  $C(z_p)$  augmente avec la profondeur de pénétration  $z_p$ .

## 1.2 Mouvement de grains autour d'un objet

Un certain nombre d'études ont été menées sur le mouvement des grains autour d'un objet (parfois appelé intrus) en mouvement relatif. Contrairement au cas de l'impact, l'objet reste immobile et on déplace le milieu granulaire. Deux aspects essentiels ont été mis en avant dans ces études. Tout d'abord, on a cherché à déterminer quelle était la force ressentie par l'objet fixe mais on a aussi cherché à caractériser l'écoulement des grains autour de l'objet. En France, deux thèses ont été réalisées très récemment sur ce sujet dans un régime d'écoulement lent, quasi-statique [24, 20].

### 1.2.1 Cinématique du milieu granulaire

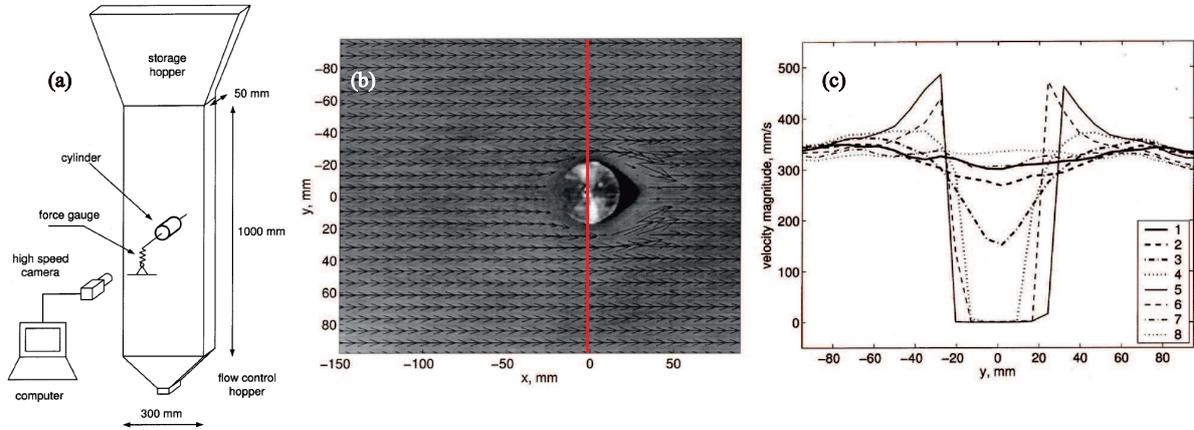
En 2001, Amarouchene *et al.* ont observé l'écoulement de grains autour d'un disque dans une cellule de Hele-Shaw [4]. Ils ont observé une géométrie particulière de l'écoulement, avec une "dune triangulaire" immobile à l'amont de l'écoulement de l'objet (Fig. 1.17).



**Figure 1.17** – Photos de l'écoulement de grains autour d'un disque dans cellule de Hele-Shaw (figure extraite de [4]).

En 2003, Chehata *et al.* ont observé l'écoulement de grains autour d'un cylindre fixe immergé dans un milieu granulaire [23]. Dans un canal rectangulaire quasi 2D, ils ont déterminé le champ de vitesse des grains autour de l'obstacle et extrait des profils de vitesses (Fig. 1.18). Ils ont travaillé avec des vitesses d'écoulement moyen allant jusqu'à  $470 \text{ mm.s}^{-1}$  et une compacité de l'ordre de 64%. Ils ont notamment observé une survitesse non négligeable des grains près de l'objet par rapport à la vitesse moyenne de l'écoulement amont.

En 2007, Levy et Sayed ont effectué des simulations numériques 2D pour observer l'écoulement d'un

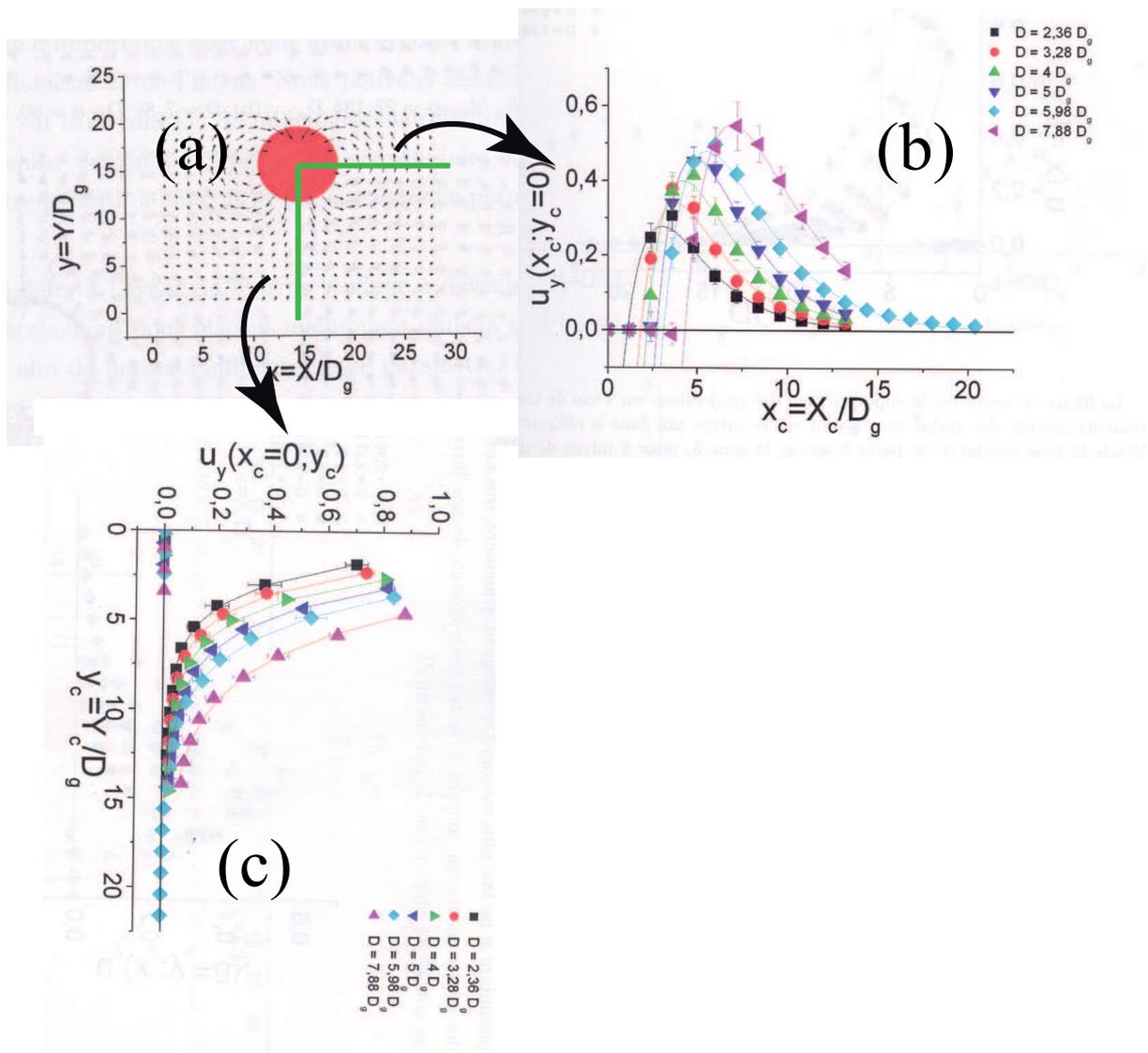


**Figure 1.18** – (a) Schéma du dispositif utilisé par Chehata *et al.* (b) Champ de vitesse observé autour d'un cylindre. (c) Profil transverse de vitesse  $v_x$  extrait selon la ligne rouge. Ces figures sont extraites de [23].

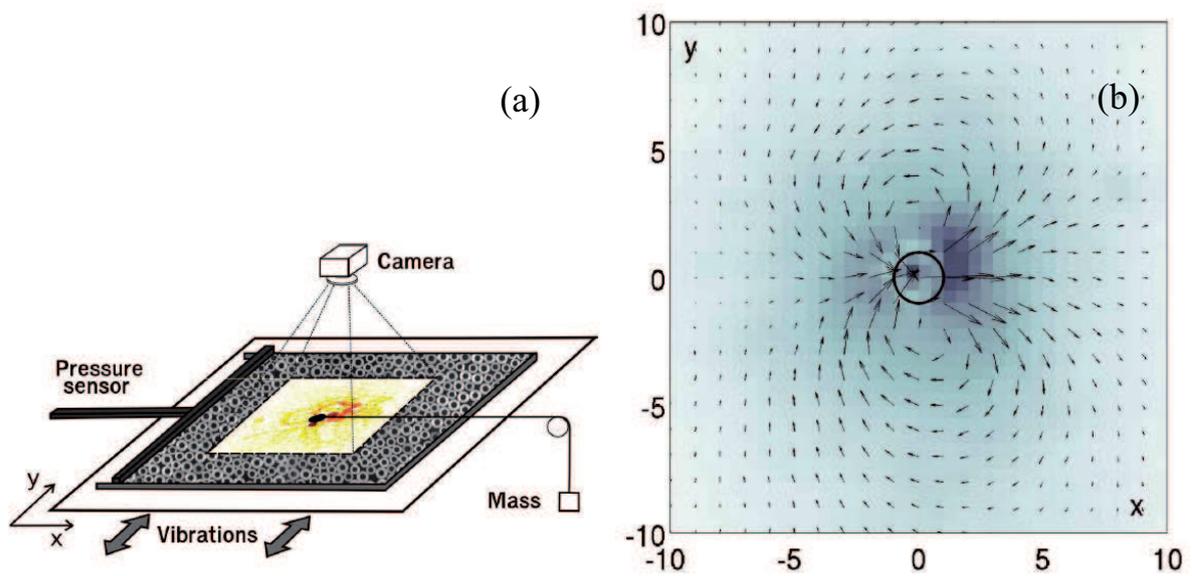
milieu granulaire autour d'un disque [52]. Ils ont constaté la présence d'une onde de choc granulaire à l'amont du disque.

En 2009, Cixous a aussi pu observer le champ de déplacement d'un milieu granulaire [24]. Dans son manuscrit, il utilise un dispositif horizontal 2D où il déplace un milieu granulaire à vitesse constante constitué de cylindre creux autour d'un cylindre fixe. La vitesse de déplacement du milieu varie de  $16.7 \mu\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$  à  $1.67 \text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$  pour des compacités variant de 80% à 83%. Il a remarqué dans son système que la vitesse de déplacement du milieu n'a aucune influence sur les quantités qu'il observe. Il a été capable de calculer un champ de vitesse des grains (Fig. 1.19a). De ce champ de vitesse, il a extrait des profils de vitesse en coordonnées cartésiennes, avec des allures très proches de celles de Chehata *et al.* [23]. Il a observé un maximum de la vitesse localisé près de l'intrus (Fig. 1.19b) et une décroissance rapide de la vitesse en amont de l'intrus (Fig. 1.19c).

Dans le même temps, Candelier a mené des essais de déplacement d'intrus similaires mais dans un milieu granulaire agité [20, 21, 22], en suivant le déplacement des disques et de l'intrus en mouvement (Fig. 1.20a). Pour les disques, il a observé la présence de deux tourbillons de recirculation de chaque côté du cylindre (Fig. 1.20b). En appliquant une force constante sur l'intrus, il constate que lorsque la compacité du milieu est faible, le mouvement de l'intrus est continu mais devient intermittent au delà d'une compacité critique. En 2010, toujours dans des milieux granulaires vibrés, Harich caractérise la mobilité granulaire en définissant la diffusivité effective qui existe dans le milieu [42].



**Figure 1.19** – (a) Champ de vitesse autour d'un cylindre en mouvement suivant  $y$ . Profils de vitesse (b)  $v_y(y)$  et (c)  $v_y(x)$  extraits selon les lignes vertes. Ces figures sont extraites de [24].



**Figure 1.20** – (a) Schéma du dispositif de milieu granulaire vibré utilisé par Candelier. (b) Champ de déplacement des grains observé par Candelier. Ces figures sont extraites de [21].

### 1.2.2 Force sur l'objet

Dès 1999, des études se sont concentrées sur la force ressentie par un objet fixe dans un milieu granulaire mobile. Tout d'abord, Albert *et al.* de l'équipe de Schiffer, ont plongé une barre dans un tambour tournant vertical contenant un milieu granulaire pour étudier l'évolution de la force de traînée sur la barre [2, 1]. La figure 1.21a présente des schémas du dispositif utilisé. L'équipe a mesuré la force de traînée sur des objets de formes variables, et a montré que la vitesse de déplacement du milieu granulaire n'avait pas d'influence sur la force de traînée mesurée [2]. Puis, la force mesurée sur une sphère de diamètre  $d$  a été caractérisée (Fig. 1.21b et 1.21c). Sur la figure 1.21c, un ajustement en loi puissance fait apparaître que la force mesurée varie comme  $d^2$ . Sur la figure 1.21b, on constate que la force varie comme l'enfoncement  $z$  de l'objet de manière quasi linéaire. L'insert de la figure 1.21b montre que la rugosité de l'objet n'a pas d'influence sur la force mesurée. Ensuite, Albert *et al.* se sont intéressés à la force mesurée sur un cylindre (Fig. 1.21d). On observe une augmentation linéaire de la force mesurée avec la longueur  $b$  du cylindre. L'ensemble de cette étude suggère que la force exercée sur un objet dans un milieu granulaire est proportionnelle à la surface (ou la surface projetée) de cet objet.

En 2003, Chehata *et al.* ont examiné la force de traînée d'un cylindre immobile dans un milieu granulaire en chute dans un canal dans le dispositif déjà décrit au paragraphe précédent [23]. Ils ont constaté que cette force est indépendante de la vitesse des grains mais aussi que cette force de traînée augmente avec le diamètre du cylindre  $d$  et diminue avec la taille des grains  $d_g$ .

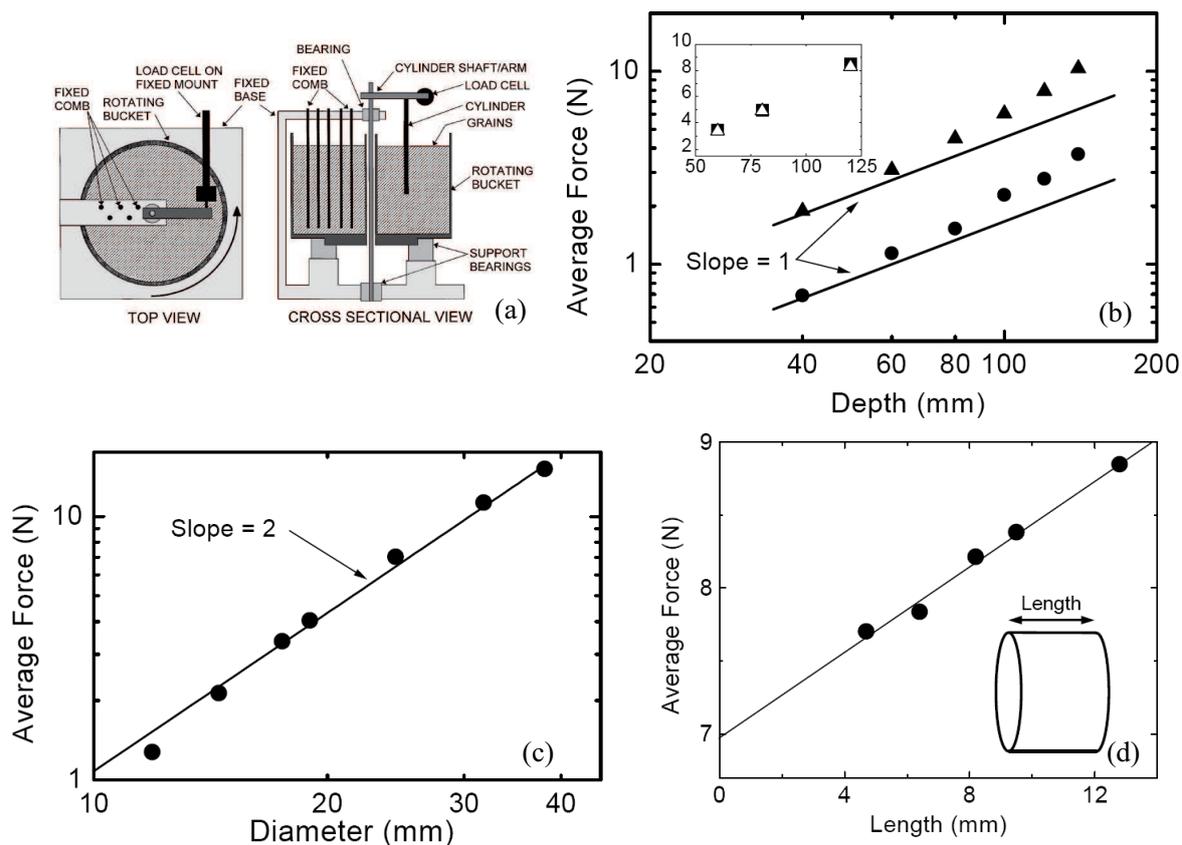
En 2004, Stone *et al.* ont mesuré la force requise pour pousser verticalement un disque horizontal dans un milieu granulaire [81, 80] (Fig. 1.22a). Ils ont observé que la force nécessaire varie linéairement avec la profondeur de pénétration  $z_p$  puis l'évolution devient exponentielle lorsque l'on s'approche du fond du récipient contenant le milieu granulaire (Fig. 1.22b). Ils décrivent la partie linéaire comme une force hydrostatique et ils constatent aussi une indépendance de la vitesse de pénétration (variant de  $0.0625 \text{ mm.s}^{-1}$  à  $5 \text{ mm.s}^{-1}$ ) sur la force mesurée.

En 2008, Costantino *et al.*, de l'équipe de Schiffer, avec le même dispositif que Stone [81, 80] ont cherché à caractériser l'influence du diamètre  $d$  du disque sur la force minimale  $F_{ini}$  nécessaire le mettre en mouvement (Fig. 1.22a) [27]. Ils ont modélisé cette force sous la forme

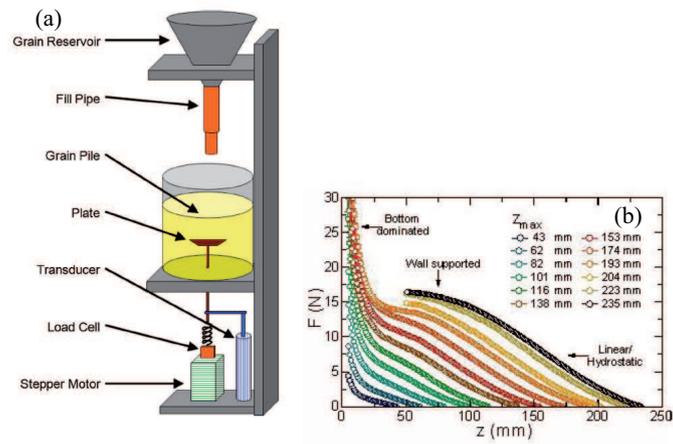
$$F = Ad + Bd^2, \quad (1.15)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux coefficients d'ajustement. Ils ont constaté que la taille des grains  $d_g$  n'a pas d'influence sur le coefficient  $B$  alors qu'elle a une influence sur le coefficient  $A$ .

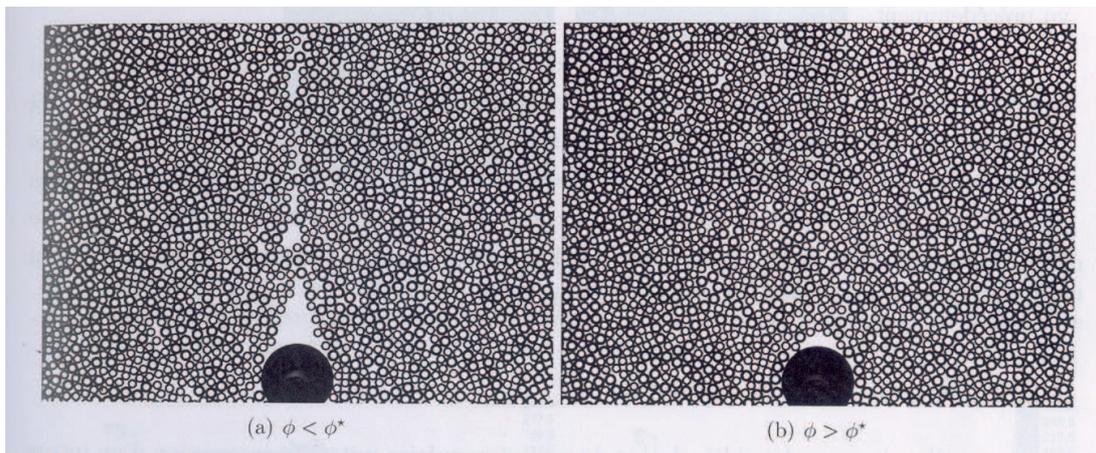
En 2009, Cixous a étudié le blocage et l'écoulement d'un milieu granulaire dense et désordonné autour d'un obstacle rigide avec le même dispositif décrit précédemment [24]. Il a regardé en particulier l'évolution du sillage derrière l'intrus laissé par le déplacement du milieu (Fig. 1.23) et a constaté que plus la fraction d'empilement  $\varphi$  est importante, plus le vide laissé par le passage de l'intrus au sein du milieu granulaire est petite. Il s'est intéressé aussi à la fluctuation de la force ressentie par l'intrus et a observé qu'elle diverge lorsque la fraction d'empilement  $\varphi$  se rapproche de la fraction d'empilement critique  $\varphi_c$  (Fig. 1.24).



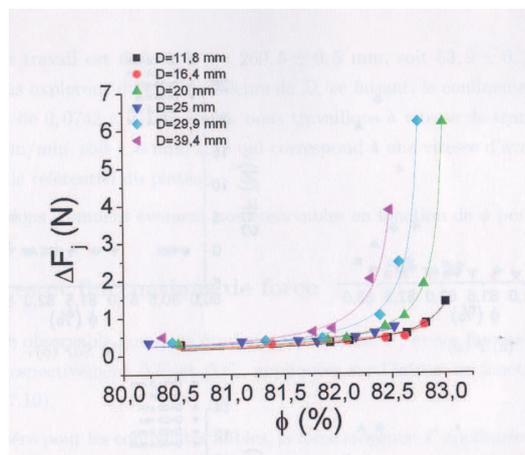
**Figure 1.21** – (a) Schéma du dispositif utilisé par Albert (figure extraite de [2]). (b) Force mesurée sur une sphère en fonction de l'enfoncement  $z_p$  de l'objet pour deux diamètres différents  $d = 25.4$  mm ( $\Delta$ ) et  $d = 14.2$  mm ( $\bullet$ ). L'insert montre l'influence de la rugosité de la sphère pour un métal rugueux ( $\square$ ) et une sphère lisse en teflon ( $\Delta$ ) (figure extraite de [1]). (c) Force mesurée sur une sphère (figure extraite de [1]). (d) Force mesurée sur un cylindre en fonction de la longueur  $b$  de celui-ci (figure extraite de [1]).



**Figure 1.22** – (a) Schéma du dispositif expérimental utilisé par Stone *et al.* (figure extraite de [27]). (b) Dépendance de la force de pénétration avec la profondeur  $z$  de l'objet (figure extraite de [80]).



**Figure 1.23** – Évolution de la forme du sillage laissée par l'intrus pour une fraction d'empilement de (a) 81,3% et de (b) 82,4% (figure extraite de [24]).



**Figure 1.24** – Influence de la compacité du milieu granulaire sur la force de traînée (figure extraite de [24]).

### 1.3 Modélisation d'un milieu granulaire

La description d'un milieu granulaire est toujours un problème d'actualité. Dans les écoulements rapides et dilués de grains, le milieu granulaire est assimilable à un gaz et les interactions entre grains se font par des collisions binaires. Dans les écoulements très lents présents en mécanique des sols, le milieu granulaire est assimilable à un solide et la friction joue un rôle prépondérant dans ces écoulements. Il existe un régime d'écoulement intermédiaire qui est l'écoulement dense de grains assimilable à l'écoulement d'un fluide qui a fait l'objet de plusieurs théories pour être décrit. Nous allons exposer ici les fondements de deux d'entre elle.

#### 1.3.1 Théorie cinétique

L'analogie d'un milieu granulaire avec un gaz est due à Ogawa [64]. En 1983, Haff propose un modèle de théorie cinétique des milieux granulaires [40]. Dans cette théorie, le milieu granulaire est supposé se comporter comme un gaz dissipatif, où les particules interagissent les unes avec les autres par des collisions binaires. Le théorie cinétique fournit des équations constitutives pour ces écoulements. Dans un milieu granulaire, les fluctuations thermiques sont négligeables, car les grains sont trop gros pour subir un mouvement Brownien d'agitation thermique. Du coup, on ne considère pas la température thermodynamique dans la modélisation des écoulements granulaire. Cependant, on utilise la notion de «température granulaire» définie comme le carré de la fluctuation de vitesse  $T = \langle \|\underline{v} - \langle \underline{v} \rangle\|^2 \rangle$ . Dans ce cadre  $\sqrt{T}$  est donc l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesses.

Les gaz granulaires ont fait l'objet de nombreux travaux expérimentaux et théoriques [12]. La température est une quantité qui est utilisée par exemple dans les milieux granulaires vibrés. Il existe un équivalent de l'effet Leidenfrost pour les milieux granulaires mis en évidence par Eshuis *et al.* [36]. Il est possible de reproduire l'expérience du démon de Maxwell pour les gaz granulaires : un ensemble des particules suffisamment important est divisé dans deux compartiments identiques qui ne peuvent communiquer que par un trou. Pendant l'agitation de la boîte, on observe un déséquilibre entre la répartition de population. Des simulations de dynamique moléculaire ont été effectuées par Barrat et Trizac pour reproduire ce phénomène [11]. Barrat et Trizac ont aussi travaillé sur les températures granulaires d'un mélange binaire de grains [10]. Ils ont montrés que le rapport de température dépend très peu de la masse relative entre les grains alors qu'il dépend fortement du diamètre relatif. Un autre exemple est l'apparition des rouleaux d'auto-convection lors d'un écoulement rapide de grains sur un plan incliné (Fig.1.25), cette instabilité peut être expliquée par la théorie cinétique en tenant compte d'un couplage température-écoulement [37].

Nous allons présenter ici les équations de la théorie cinétique des milieux granulaires appliquée aux milieux denses. La fraction volumique du milieu est  $\varphi$ ; elle est définie à partir de la distance interparticulaire  $s$ , sous la forme  $\varphi/\varphi_0 = (1 + s/d_g)^{-3}$ , où  $\varphi_0$  est la valeur maximale correspondant à un empilement compact et  $d_g$  est la taille des grains. Dans les milieux denses,  $s \ll d_g$ , le milieu granulaire est considéré comme incompressible. Ainsi, le milieu granulaire est alors considéré comme un milieu continu fluide avec la loi de comportement suivante :

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\eta\underline{\underline{D}}, \quad (1.16)$$

où  $p$  est la pression dans le milieu,  $\eta$  la viscosité dynamique,  $\underline{\underline{1}}$  le tenseur identité et  $\underline{\underline{D}}$  le tenseur taux de déformation. Le tenseur taux de déformation  $\underline{\underline{D}}$  est défini à partir du champ de vitesses des grains  $\underline{v}$  par

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{v} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{v}^T). \quad (1.17)$$

Avec tout cela, on peut écrire les équations de conservation (masse, quantité de mouvement et énergie)

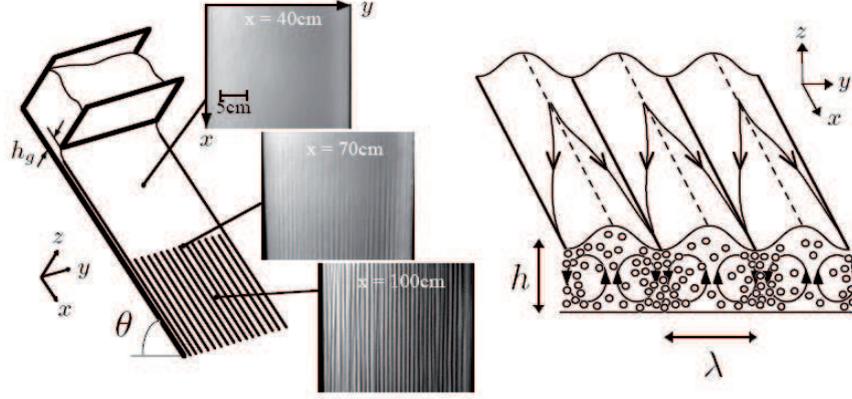


Figure 1.25 – Auto-convection dans les écoulements sur plan incliné (figure extraite de [37]).

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \text{Tr}(\underline{\underline{D}}), \\ \rho_g \frac{dv}{dt} = \text{Div} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_v, \\ \rho_g \frac{dT}{dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} + \text{div}(\kappa \text{grad} T) - \varepsilon. \end{array} \right. \quad (1.18)$$

où  $\kappa$  est la diffusivité thermique,  $\varepsilon$  le taux de dissipation et  $\underline{f}_v$  d'éventuelles forces volumiques. Il reste alors à écrire les lois d'état pour fermer le système d'équations. Nous allons présenter le calcul heuristique de la pression et des coefficients de transport d'après le cours de Pouliquen [68]. Comme  $\sqrt{T}$  est l'ordre de grandeur des fluctuations de vitesse, le temps entre deux collisions vaut  $s/\sqrt{T}$ , et le nombre de collisions par unité de temps vaut donc  $\sqrt{T}/s$  (appelé taux de collisions). La surface caractéristique d'une collision est  $d_g^2$  et le volume caractéristique d'une collision est  $d_g^3$ .

Dans un milieu sans écoulement moyen, un grain s'agitant transfère la quantité de mouvement  $\rho_g d_g^3 \sqrt{T}$  à ses voisins. La pression  $p$  représente ces transferts et s'écrit

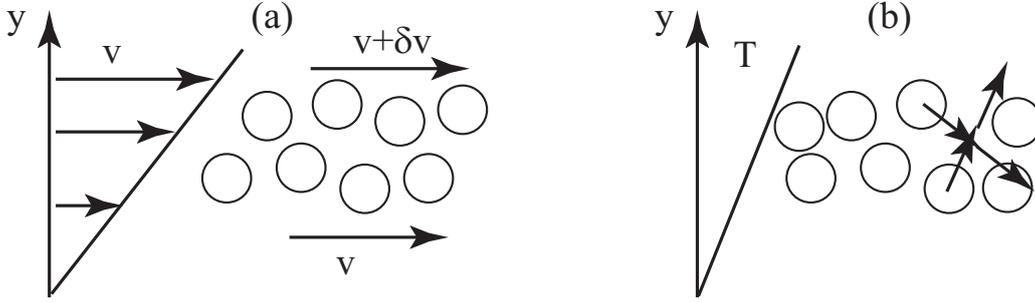
$$p = \frac{\text{transfert qdm par collision} \times \text{taux de collisions}}{\text{surface caractéristique d'une collision}} \propto \frac{\rho_g d_g T}{s}. \quad (1.19)$$

Si on considère un cisaillement moyen  $dv/dy$  de couches de grains (Fig. 1.26a), la couche supérieure possède une vitesse relative  $\delta v = d_g dv/dy$  par rapport à la couche inférieure et transfère sa quantité de mouvement  $\rho_g d_g^3 \delta v$ . La contrainte tangentielle  $\tau = \eta dv/dy$  vaut

$$\tau = \frac{\text{transfert qdm par collision} \times \text{taux de collisions}}{\text{surface caractéristique d'une collision}} \propto \frac{\rho_g d_g^2 \sqrt{T}}{s} \frac{dv}{dy}, \quad (1.20)$$

soit,

$$\eta \propto \frac{\rho_g d_g^2 \sqrt{T}}{s}. \quad (1.21)$$



**Figure 1.26** – (a) Gradient de vitesse uniforme pour le calcul de la viscosité  $\eta$ . (b) Gradient de température uniforme pour le calcul de la conductivité  $\kappa$ . Ces figures sont extraites de [68].

Si on considère maintenant un gradient uniforme de température  $dT/dy$ , une particule de la couche supérieure avec une fluctuation de vitesse percute une particule de la couche inférieure avec une fluctuation de vitesse. Après le choc, il y a échange des fluctuations. Au cours de la collision, il y a un transfert d'énergie cinétique du haut vers le bas qui vaut  $\delta T = d_g dT/dy$ . Le flux d'énergie transférée  $Q = \kappa dT/dy$  s'écrit

$$Q = \frac{\text{transfert d'énergie par collision} \times \text{taux de collisions}}{\text{surface caractéristique d'une collision}} \propto \frac{\rho_g d_g^2 \sqrt{T}}{s} \frac{dT}{dy}, \quad (1.22)$$

soit,

$$\kappa \propto \frac{\rho_g d_g^2 \sqrt{T}}{s}. \quad (1.23)$$

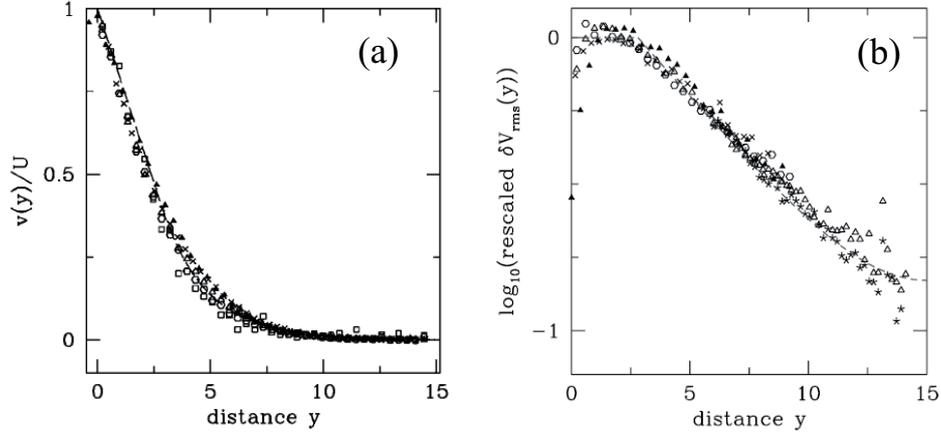
Enfin, il reste à déterminer le terme de dissipation  $\varepsilon$  qui représente l'énergie dissipée par unité de temps et par unité de volume lors des collisions. L'énergie perdue lors d'une collision s'écrit  $\rho_g(1 - e^2)T/4$ , où  $e$  est le coefficient de restitution des grains. On a donc

$$\varepsilon = \frac{\text{énergie perdue par collision} \times \text{taux de collisions}}{\text{volume caractéristique d'une collision}} \propto \frac{\rho_g(1 - e^2)T^{3/2}}{4s}. \quad (1.24)$$

On peut choisir d'exprimer la distance interparticulaire  $s$  en fonction de la pression  $p$  et de substituer cela dans l'expression des coefficients de transport  $\eta$  et  $\kappa$  ainsi que la dissipation  $\varepsilon$ . Ceci fournit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\rho_g} \propto \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\kappa}{\rho_g} \propto \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\varepsilon}{\rho_g} \propto \frac{p}{\rho_g} \frac{1}{d_g} T^{1/2} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Jenkins a donné les expressions complètes des préfacteurs dans l'expression des coefficients de transport  $\eta$  et  $\kappa$  et dans le terme de dissipation  $\varepsilon$  [47]. On obtient alors l'expression complète des coefficients selon



**Figure 1.27** – Profil de (a) vitesse et (b) température granulaire selon la distance par rapport au cylindre intérieur. Les différents symboles sont issus des expériences et les traits pointillés sont les résultats issus de la résolution des équations (figures extraite de [56]).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\rho_g} = \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{30} \left( 1 + \frac{12}{\pi} \right) \right] \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} = \eta_0 \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\kappa}{\rho_g} = \left[ \frac{9}{32} \sqrt{\pi} \left( 1 + \frac{32}{9\pi} \right) \right] \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} = \kappa_0 \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\varepsilon}{\rho_g} = \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi}} (1 - e) \right] \frac{p}{\rho_g} \frac{1}{d_g} T^{1/2} = \varepsilon_0 \frac{p}{\rho_g} \frac{1}{d_g} T^{1/2} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

où  $\eta_0 = 0.28$ ,  $\kappa_0 = 1.06$  et  $\varepsilon_0 = 0.34$  sont des coefficients numériques sans dimension.

Les équations de conservation (1.18) et les équations phénoménologiques (1.26) constituent un système fermé pour les écoulements granulaires denses.

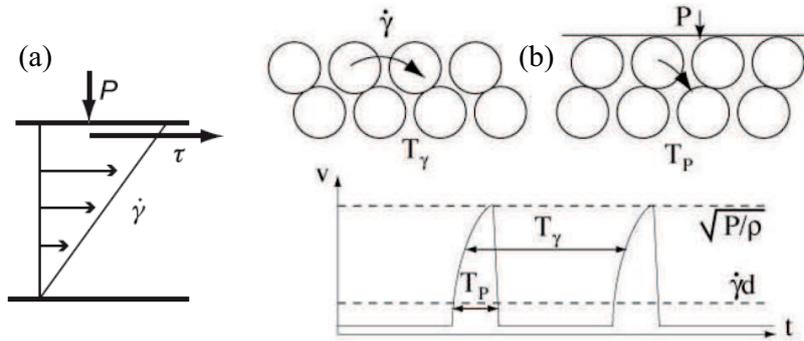
Bocquet *et al.* ont utilisé cette théorie cinétique des gaz pour modéliser l'écoulement dense de grains dans une géométrie de type Couette [14, 56]. Ils arrivent à obtenir un bon accord entre les résultats expérimentaux et cette théorie sur les profils de vitesse et de température granulaire (Fig. 1.27). Ils constatent que ces profils sont normalisés par la vitesse du cylindre intérieur. Ils observent l'existence d'un plateau de température constant suivi d'une décroissance exponentielle de cette température.

Cependant, la théorie cinétique possède certaines limites. En particulier, elle repose sur une hypothèse de collisions binaires et dans la limite des milieux denses, on peut remettre en question ce fait.

Dans le chapitre 4, on reprendra cette théorie pour l'appliquer à nos problèmes.

### 1.3.2 Théorie du $\mu(I)$

Dans les écoulements denses de grains, les grains interagissent les uns avec les autres avec des contacts mais aussi des collisions. En 2005, Da Cruz *et al.* ont mis en place les éléments de la théorie du  $\mu(I)$  dans des simulations 2D d'empilements denses de disques [29]. Ces travaux seront repris dans l'article collectif du GDR MiDi [61]. En 2006, Jop *et al.* ont proposé l'extension 3D de cette rhéologie des milieux granulaires pour les écoulements denses [48]. On va reprendre ici quelques éléments clés de cette théorie.



**Figure 1.28** – (a) Définition de la pression  $p$ , du cisaillement  $\tau$  et du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  dans le cas d'un milieu granulaire cisailé (figure extraite de [48]). (b) Signification physique du temps de déformation  $T_\gamma$  et de l'échelle de temps de confinement  $T_p$  (figure extraite de [61]).

Cette théorie est basée sur le fait qu'un milieu granulaire soumis à une contrainte normale  $p$  va se déformer sous cisaillement  $\tau$ . Il existe alors un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  non nulle (Fig. 1.28a). On établit alors une relation simple entre  $p$  et  $\tau$

$$\tau = \mu(I)p \quad (1.27)$$

où  $\mu(I)$  peut être vu comme un coefficient de friction dépendant d'un nombre sans dimension  $I$  appelé nombre d'inertie. Le nombre  $I$  est construit selon

$$I = \dot{\gamma}d_g \left( \frac{\rho_g}{p} \right)^{1/2}, \quad (1.28)$$

où  $d_g$  est la taille des grains,  $\rho_g$  leur masse volumique. Le nombre  $I$  peut être interprété comme le rapport de deux temps caractéristiques  $I = T_p/T_\gamma$ . Le temps  $T_\gamma = 1/\dot{\gamma}$  est le temps typique de déformation du milieu granulaire, c'est-à-dire le temps que met une couche de grains pour se déplacer d'un grain au-dessus d'une autre couche de grains sous l'effet de la contrainte de cisaillement (Fig. 1.28b).  $T_p = d_g \sqrt{\rho_g/p}$  est l'échelle de temps de confinement qui peut être interprété comme le temps que met un grain d'une couche pour se déplacer dans la couche d'en dessous sous l'effet de la pression (Fig. 1.28b). La figure 1.28b présente l'évolution schématique de la vitesse typique en fonction du temps selon les deux échelles de temps caractéristiques.

Dans le cas d'écoulements granulaires simples sur plan incliné, Jop *et al.* ont montré que  $\mu$  évoluait de la valeur critique  $\mu_s$  (qui correspond à un cisaillement nulle) jusqu'à une valeur limite  $\mu_2$  (à haut  $I$ ) selon la loi de friction suivante

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{\frac{I_0}{I} + 1}, \quad (1.29)$$

où les paramètres  $\mu_s$ ,  $\mu_2$  et  $I_0$  sont des paramètres rhéologiques des matériaux constituant le milieu granulaire.

On considère le milieu granulaire, avec le tenseur taux de déformations  $\underline{\underline{D}}$  du champ de vitesses des grains  $\underline{v}$  par la relation (1.17), comme un fluide incompressible ( $Tr\underline{\underline{D}} = 0$ ).

Ainsi, le milieu continu suit la loi de comportement suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\eta\underline{\underline{D}}, \quad (1.30)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes et  $\eta$  la viscosité effective. La loi d'état s'écrit d'après ce qui a été décrit plus haut [Eq. (1.29)]

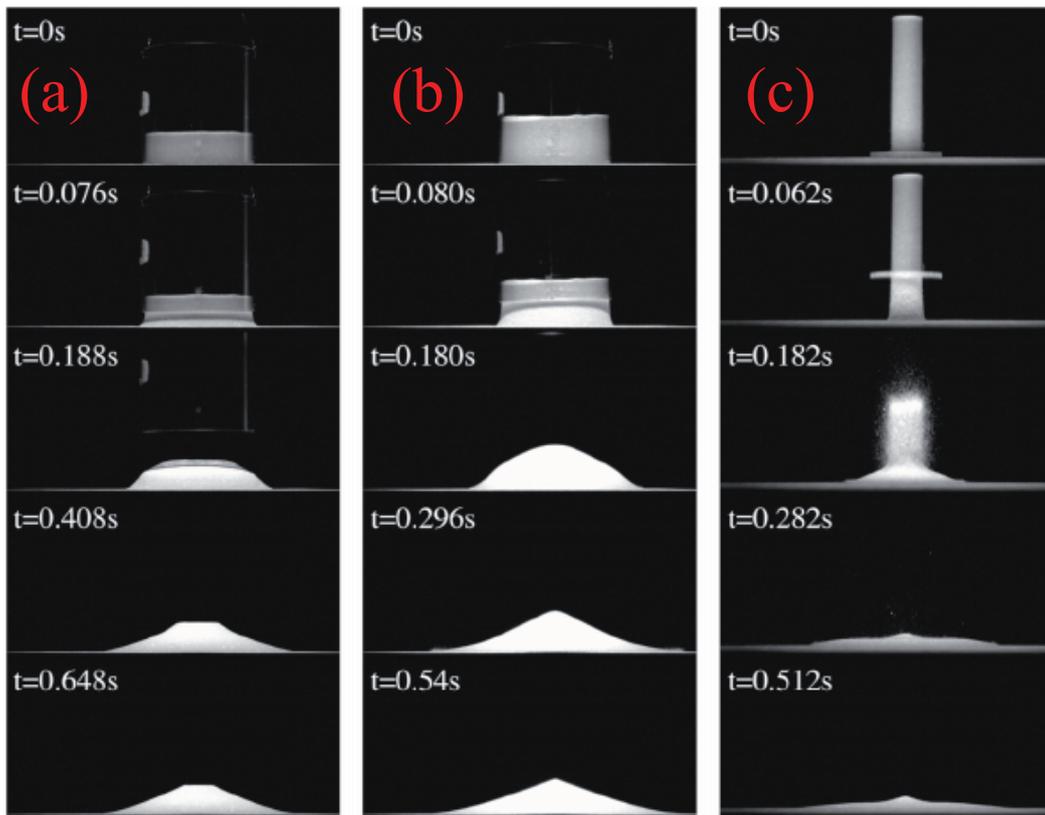
$$\eta = \frac{\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|}, \quad (1.31)$$

où  $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2}\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}}}$  est le second invariant de  $\underline{\underline{D}}$ .

Cette théorie a été appliquée pour modéliser l'effondrement d'une colonne cylindrique 3D de grains. Les travaux expérimentaux ont été réalisés par Lajeunesse *et al.* [51]. Ils observent différents régimes d'effondrement selon le rapport d'aspect initial de la colonne de grains (Fig. 1.29). Lacaze et Kerswell ont modélisé cet effondrement avec la théorie du  $\mu(I)$  et trouvent un bon accord avec les résultats expérimentaux [50].

Elle a aussi été utilisée pour confronter les résultats des simulations numériques d'écoulements de grains en tambour tournant [26].

La théorie du  $\mu(I)$  présente une rhéologie locale des milieux granulaire et ne prédit pas cependant la transition liquide-solide et certains phénomènes locaux tels que les chaînes de forces.



**Figure 1.29** – Trois séquences de photos de colonnes de grains s’effondrant : (a) et (b) pour les faibles rapports d’aspect et (c) pour un grand rapport d’aspect (figure extraite de [51]).

## Chapitre 2

# Dispositifs expérimentaux et numériques

DANS ce chapitre, nous présentons l'ensemble des moyens expérimentaux et numériques qui ont été mis en œuvre pour mener ce travail. D'une manière générale, on distingue deux types de dispositifs : les dispositifs à force imposée via le poids de l'objet qu'on appellera aussi dispositifs d'impact et les dispositifs à vitesse imposée où l'on déplace l'objet à vitesse constante. Dans un premier temps, nous décrirons l'ensemble des montages expérimentaux ainsi que les quantités mesurables et les moyens de mesures. Puis, dans un second temps, nous décrirons les outils de simulations numériques utilisés en complément des expériences pour élargir l'observation des phénomènes physiques et approfondir leur modélisation.

### 2.1 Dispositifs expérimentaux

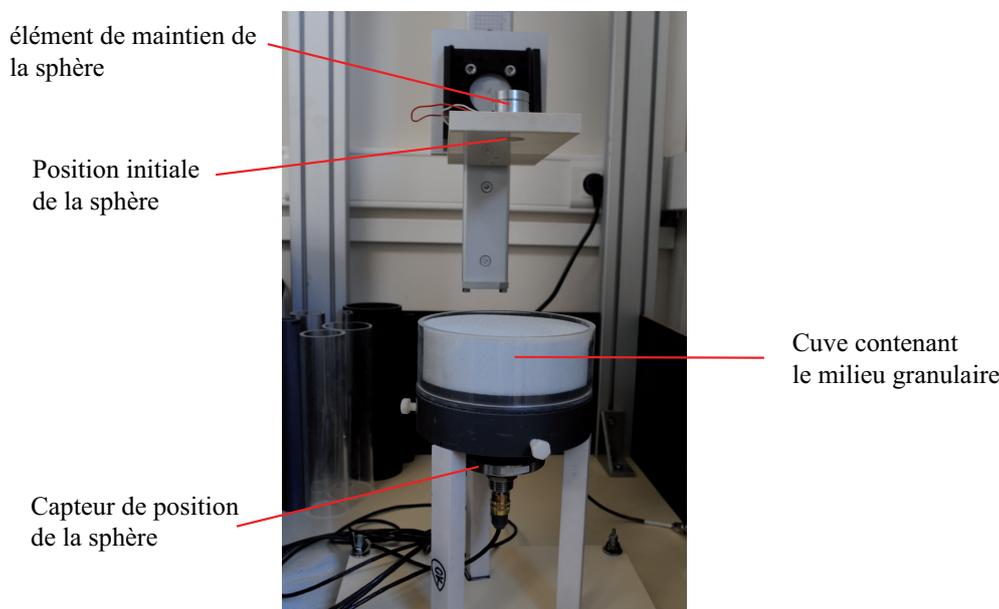
Trois dispositifs expérimentaux ont été développés. Le premier dispositif est un montage en trois dimensions (3D) permettant d'étudier l'impact d'une sphère dans un milieu granulaire. Le second est un montage quasi bidimensionnel (2D) d'impact d'un cylindre dans un milieu granulaire. Ces deux dispositifs permettent de travailler avec un objet pénétrant à force constante dans le milieu granulaire, car le poids de l'objet reste le même tout au long de la pénétration. Enfin, le troisième dispositif est un dispositif quasi bidimensionnel (2D) de pénétration à vitesse constante d'un cylindre dans un milieu granulaire.

#### 2.1.1 Description des montages

##### Impact 3D

On s'intéresse ici à la situation de pénétration d'une sphère solide de diamètre  $d$  ( $5 \text{ mm} \leq d \leq 40 \text{ mm}$ ), de masse volumique  $\rho_p$  ( $1.1 \text{ kg.m}^{-3} \cdot 10^3 \leq \rho_p \leq 14.9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ), donc de masse  $m = \pi \rho d^3 / 6$ , venant impacter un milieu granulaire dont les caractéristiques seront précisés ci-après. La figure 2.1 montre une photo du dispositif avec les différents éléments le constituant : la cuve contenant le milieu granulaire et le dispositif de lâcher.

Pour des raisons de simplicité, on choisit de lâcher la bille en chute libre d'une hauteur  $h$  ( $0 \text{ mm} \leq h \leq 300 \text{ mm}$ ) et sans vitesse initiale. La bille vient impacter le milieu granulaire avec une vitesse d'impact  $V_i = \sqrt{2gh}$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur. Afin de mesurer la profondeur de pénétration  $\delta$  de la bille, nous enfonçons délicatement une tige graduée dans le milieu granulaire pour repérer le sommet de la bille et ainsi effectuer la mesure. Il est intéressant de faire apparaître la hauteur totale de chute



**Figure 2.1** – Dispositif d'impact 3D.

$H = h + \delta$ , puisque c'est cette quantité qui apparaît lorsque l'on considère l'énergie  $E$  totale dissipée finalement jusqu'à l'arrêt (chute libre dans l'air puis pénétration dans le milieu granulaire).

Le milieu granulaire est constitué de petites billes de verre de 300 à 400  $\mu\text{m}$  de diamètre, de masse volumique  $\rho_g = 2520 \text{ kg.m}^{-3}$ . Il est placé dans un cylindre de diamètre  $D$  ( $24 \text{ mm} \leq D \leq 190 \text{ mm}$ ) et de profondeur  $B$  ( $23 \text{ mm} \leq B \leq 300 \text{ mm}$ ). De façon à obtenir des expériences reproductibles, le milieu granulaire est préparé suivant la même procédure avant chaque lâcher de bille. Cette procédure consiste à brasser le milieu de manière à le décompacter ; ce processus est répété un grand nombre de fois de façon à ce que l'empilement de grains puisse être considéré comme aléatoire. Même si le milieu n'est pas exactement dans le même état entre chaque crash la compacité de l'empilement aléatoire obtenu est sensiblement constante. Puis, on vient racler l'excédent de grains de la surface du milieu granulaire au niveau du cylindre pour obtenir une surface plane. Avec cette procédure, la compacité du milieu granulaire est proche de 63%. L'ensemble des paramètres utilisés est précisé sur la figure 2.2.

Le processus d'expérimentation comporte plusieurs sources d'erreurs. Tout d'abord, le positionnement du système. La surface du lit granulaire initiale n'est pas exactement normale à la direction de chute libre (erreur d'angle de l'ordre d'un degré). De plus, la hauteur  $h$  de lâcher de la bille est mesurée avec une précision de  $\pm 1 \text{ mm}$ . Ensuite, des erreurs peuvent provenir de lecture sur la tige. En effet, lorsqu'on enfonce la tige, on peut ne pas toucher exactement le sommet de la bille (celle-ci peut d'ailleurs bouger très légèrement à son contact). Si la bille dépasse de la surface du milieu granulaire, on estime la profondeur de l'impact d'après une photographie agrandie du résultat. Combinée à l'erreur de lecture sur la tige ou sur la photo, on estime que la mesure se fait finalement à 2 mm près pour une bille de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$ . Compte tenu des fluctuations inhérentes au dispositif expérimental, on réalise au moins huit fois la même expérience pour ne conserver que la moyenne de ces résultats et l'écart-type. Enfin, il faut que le cratère formé après l'impact soit correctement centré par rapport au cylindre  $D$ . Si cette condition n'est pas vérifiée, l'essai n'est pas validé (Fig. 2.3).

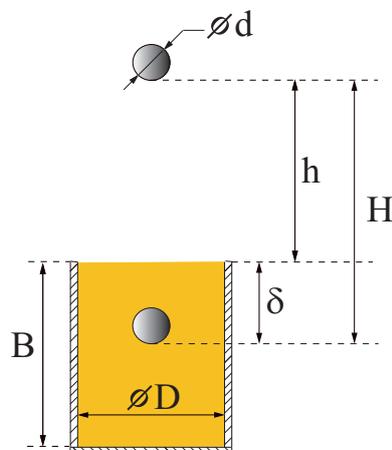


Figure 2.2 – Schéma de l'expérimentation.

Afin de pouvoir lâcher la bille en chute libre d'une hauteur  $h$ , sans vitesse initiale et sans rotation, on utilise deux méthodes selon la nature du matériau constituant la sphère. Pour les matériaux aimantables, la bille est maintenue à l'aide d'un aimant et d'un coulisseau puis chute lorsque l'aimant est retiré (Fig. 2.4).

Pour les matériaux non aimantables, on vient créer une dépression au dessus de la bille que l'on commande à l'aide d'une trompe à eau (Fig. 2.4). Ainsi, la bille est lâchée sans vitesse initiale et impacte le milieu granulaire après chute libre.

Durant la campagne d'essais, la température et le taux d'hygrométrie ont peu varié (respectivement de  $20^{\circ}\text{C}$  à  $24^{\circ}\text{C}$  et de 35% à 42%). Il semblerait que ces deux paramètres dans la faible gamme de variation mesurée n'ont eu aucune influence sur les mesures, car comme nous le verrons ci-après, celles-ci se sont révélées très reproductibles.

En association avec tous ces dispositifs de mesure, on ajoute à ce montage un capteur à courant de Foucault dédié à l'obtention de la position  $z_p(t)$  du projectile au cours du temps depuis l'instant où il impacte le milieu granulaire jusqu'à son arrêt à la profondeur  $\delta$ . Ce capteur dont le fonctionnement est détaillé au paragraphe §2.1.2 est situé sous le montage (c'est-à-dire fixé sous le cylindre contenant le milieu granulaire) (Fig. 2.1), et permet d'enregistrer le déplacement d'un projectile sphérique en acier dans le milieu granulaire.

Dans ce dispositif expérimental, pour résumer, on a la possibilité de faire varier

- la hauteur  $h$  de lâcher du projectile  $0 \text{ mm} \leq h \leq 300 \text{ mm}$ ,
- le diamètre  $d$  du projectile :  $5 \text{ mm} \leq d \leq 40 \text{ mm}$ ,
- la masse volumique  $\rho_p$  du projectile :  $1.1 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \leq \rho_p \leq 14.9 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,
- le diamètre  $D$  du container de grains :  $24 \text{ mm} \leq D \leq 190 \text{ mm}$ ,
- la profondeur  $B$  du container de grains :  $23 \text{ mm} \leq B \leq 300 \text{ mm}$ .

### Impact 2D

En complément du dispositif expérimental 3D d'impact, on a choisi de construire une expérimentation d'impact en milieu granulaire à deux dimensions (Fig. 2.5) pour visualiser à la fois le mouvement du

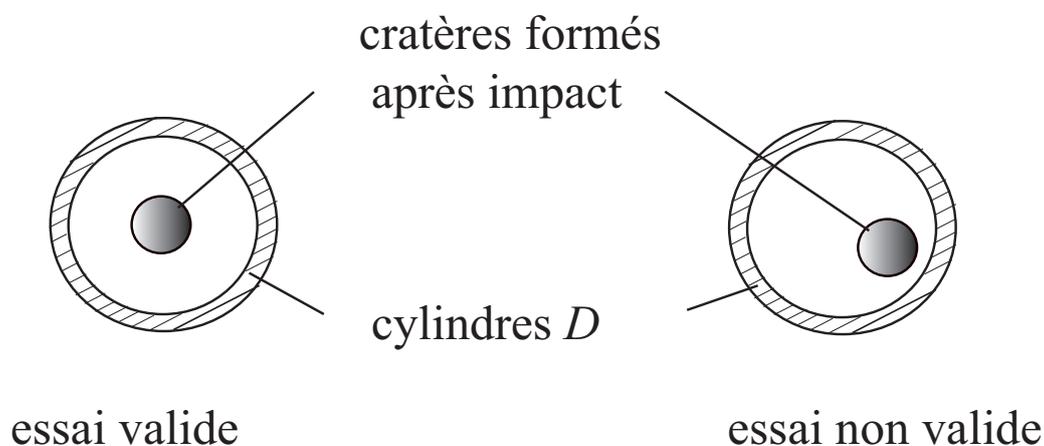


Figure 2.3 – Centrage de l'essai.

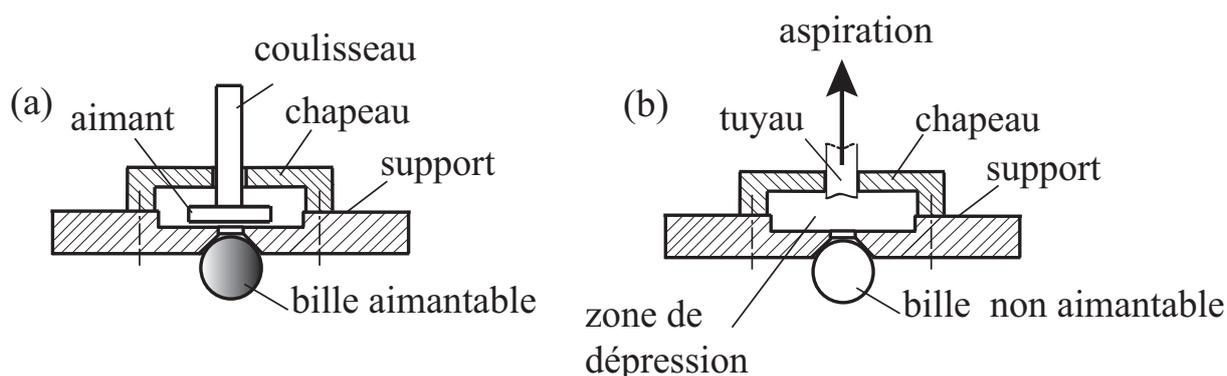
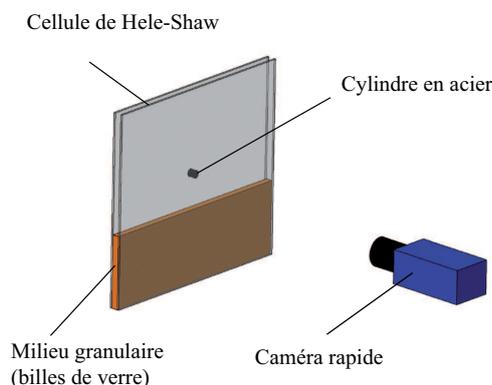


Figure 2.4 – Dispositif de lâcher des billes. (a) Dispositif à aimantation pour billes aimantables et (b) dispositif à dépression pour billes non aimantables.

projectile et celui des grains. Le milieu granulaire est alors placé entre deux plaques de verre, de dimensions  $400 \text{ mm} \times 470 \text{ mm}$  parallèles et séparés de la distance  $b = 15 \text{ mm}$ . Le projectile est un cylindre en acier de diamètre  $d$  et de longueur juste inférieure à l'écartement entre plaques  $b$ . Le système de maintien et de lâcher du projectile est constitué d'un aimant, analogue au dispositif 3D d'impact. La masse volumique effective est artificiellement varié en évitant plus ou moins le cylindre d'acier. À l'aide d'une caméra rapide, on peut suivre l'évolution du cylindre à travers le milieu granulaire. L'enregistrement est effectué à la fréquence d'acquisition maximale de la caméra  $f = 1642 \text{ Hz}$  en résolution maximale. De façon à obtenir des expériences reproductibles, le milieu granulaire est préparé avant chaque lâcher de bille. La préparation du milieu granulaire est identique à celle du dispositif 3D d'impact avec une compacité moyenne résultante identique.

La plus grande difficulté de ce montage réside dans la gestion des jeux fonctionnels entre les parois en verre, le cylindre en acier et les grains. En effet, si des précautions lors de l'usinage et le montage ne sont pas prises, il y a une très forte probabilité pour qu'un grain vienne se coincer entre la paroi en verre et le projectile (Fig. 2.6). Ce phénomène mécanique peut bloquer complètement le cylindre et



**Figure 2.5** – Schéma du dispositif expérimental 2D d'impact.

nuire considérablement à la qualité et la reproductibilité des expériences. En réalité, à cause des défauts d'usinage et de montage, l'écartement entre les parois est  $b + \delta b$  et la longueur du cylindre est  $b + \delta l$ . On ne prend pas ici en compte le défaut sur le diamètre  $d$  du cylindre car cette longueur n'intervient pas dans ce problème. Pour un usinage parfait, on aurait  $\delta b = \delta l = 0$ , ce qui n'est pas réalisable dans la pratique. Dans le cas où  $\delta b < \delta l$ , le cylindre ne peut pas pénétrer entre les parois en verre. Ainsi, la valeur  $\delta b$  étant conditionnée par le montage, il faut s'assurer que pendant toute la pénétration on obtienne  $\delta b > \delta l$ . Dans le cas de bon fonctionnement ( $\delta b > \delta l$ ), le cylindre peut basculer légèrement et se mettre en travers. Il va alors toucher les parois en deux points (Fig. 2.6). Le frottement entre les parois en verre et le cylindre en acier se limitant à ces deux points, on le négligera et on considérera que le projectile est en chute libre (cette hypothèse sera justifiée a posteriori). Lorsque le cylindre est en travers dans la cellule, un grain risque de se coincer entre le projectile et la paroi ; la figure 2.6 schématise ce cas lorsque le jeu fonctionnel  $\delta b - \delta l$  est trop important. Finalement, afin qu'un grain ne vienne pas se coincer, il faut que l'espacement généré par le basculement du cylindre soit inférieur à un demi-diamètre de grain, soit la condition (en prenant un coefficient de sécurité, c'est à dire un quart de diamètre de grain)

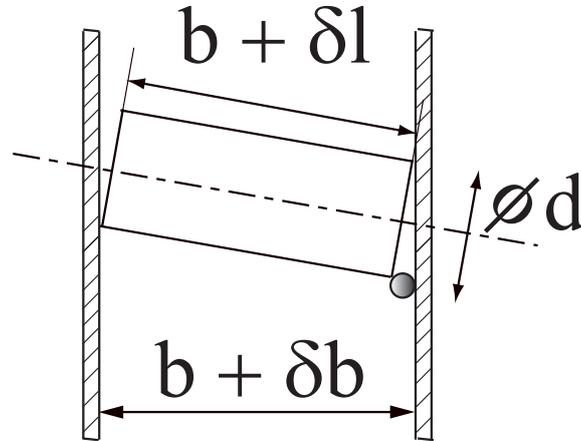
$$b + \delta b - \frac{d_g}{4} = (b + \delta l) \sqrt{1 - \frac{d_g^2}{4d^2}}. \quad (2.1)$$

À titre d'exemple, pour un cylindre de longueur  $b = 15$  mm et de diamètre  $d = 20$  mm, si la précision du montage assure  $\delta b = 0.2$  mm, on a alors  $-0.05$  mm  $< \delta l < 0.2$  mm. On voit tout de suite la difficulté d'usiner à des précisions aussi faibles. Le montage de la cellule et l'usinage du cylindre sont intimement liés. Cette condition impose aussi de ne pas choisir des grains de diamètre  $d_g$  trop petit car plus les grains sont petits plus le montage est exigeant. Pour éviter les blocages, on choisit de travailler toujours avec des grains de diamètre  $d_g > 0.5$  mm.

Dans ce dispositif expérimental, les cylindres lâchés sont tous en acier de masse volumique  $\rho_p = 7800$  kg.m<sup>-3</sup> mais dont la masse volumique apparente peut être artificiellement variée, en évidant le cylindre, de manière symétrique afin de conserver son équilibrage. On obtient alors une masse volumique apparente du cylindre inférieure à celle de l'acier.

Dans ce dispositif expérimental, pour résumer, on a la possibilité de faire varier

- la hauteur  $h$  de lâcher du projectile  $0$  mm  $\leq h \leq 300$  mm,
- le diamètre  $d$  du projectile :  $10$  mm  $\leq d \leq 40$  mm,



**Figure 2.6** – Cas pathologique d’un grain se coinçant entre le cylindre et les parois pendant la pénétration.

- la masse volumique  $\rho_p$  du projectile :  $4.7 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3} \leq \rho_p \leq 7.8 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,
- le diamètre  $d_g$  des grains :  $1 \text{ mm} \leq d_g \leq 4 \text{ mm}$ .

### Pénétration à vitesse imposée 2D

Le dispositif mis en place pour les expériences de pénétration à vitesse imposée est similaire au dispositif expérimental d’impact 2D. On place un milieu granulaire dans une cellule de Hele-Shaw constituée de deux plaques de verre de dimensions  $230 \text{ mm} \times 130 \text{ mm}$  et distantes de  $b = 40 \text{ mm}$ . Un cylindre fixe de longueur  $b$  et de diamètre  $d$  est relié par une tige filetée en acier de  $6 \text{ mm}$  de diamètre et de  $30 \text{ mm}$  de long à un capteur de force situé au-dessus du montage (Fig. 2.7). Le milieu granulaire est préparé avant chaque essai de la même manière que pour les impacts. La grande différence est que la vitesse de pénétration  $V_0$  est imposée. Pour cela, un moteur équipé d’une table de translation fait monter la cellule de Hele-shaw à vitesse constante  $V_0$  alors que le cylindre reste fixe. Le moteur est un moteur pas à pas de type BLS-55 fabriqué par la société MAVILOR, sa vitesse nominale de rotation est de  $3000 \text{ tr.min}^{-1}$ . La table de translation est de type TMF3 fabriqué par la société Schneeberger, elle possède une course de  $200 \text{ mm}$ . Cependant, la vitesse imposée délivrée par le moteur n’est pas exactement égale à la vitesse de consigne mais cet inconvénient est sans conséquence sur les résultats expérimentaux. On filme la pénétration du cylindre à l’aide d’une caméra rapide, dans le référentiel du laboratoire fixe par rapport au projectile. Le capteur de force permet de mesurer la résultante des contraintes sur le projectile pendant la pénétration. On verra que l’influence de la tige filetée est négligeable sur la mesure de force.

Pour réaliser ce montage, on a dû respecter les contraintes de montage et d’usinage semblables à celles précédemment définies en impact. En plus de ces contraintes, il y a un guidage précis du cylindre entre les parois à réaliser. Si on laisse le projectile fixe et que l’on monte la cellule verticalement à vitesse constante, on risque en effet d’obtenir un montage hyperstatique. Encore une fois ici, les défauts de montage sont susceptibles de créer de l’arc-boutement et d’endommager irrémédiablement la cellule. Il faut donc fabriquer un montage isostatique pour assurer un bon fonctionnement lors de la pénétration car le moteur assure une vitesse constante avec une force qui peut devenir très grande. Pour cela, on utilise le léger rotulage existant dans la liaison entre le cylindre et le bâti (Fig. 2.8). Il reste alors à rajouter une liaison glissière transverse à déplacement limité entre la cellule et la sortie du vérin électrique piloté par le moteur. On construit ainsi un montage isostatique qui n’endommage pas le matériel. Les mesures

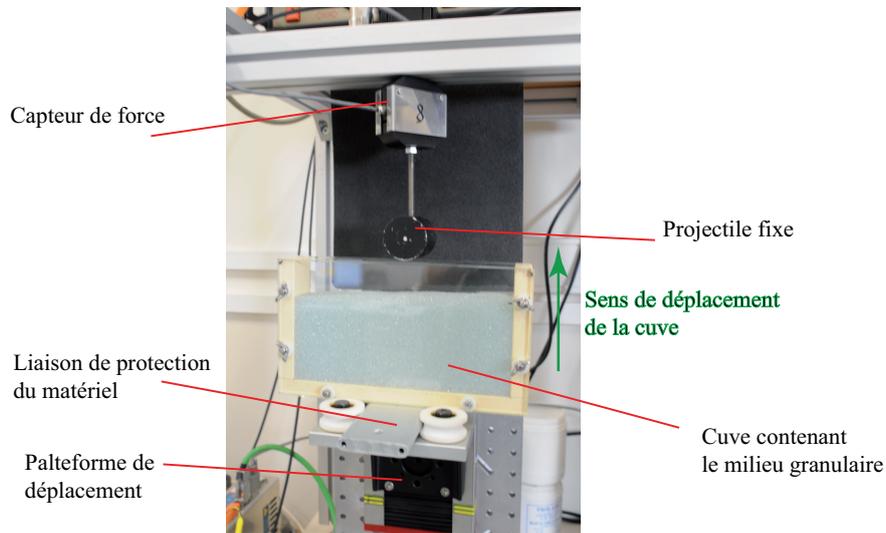


Figure 2.7 – Dispositif 2D de pénétration à vitesse imposée.

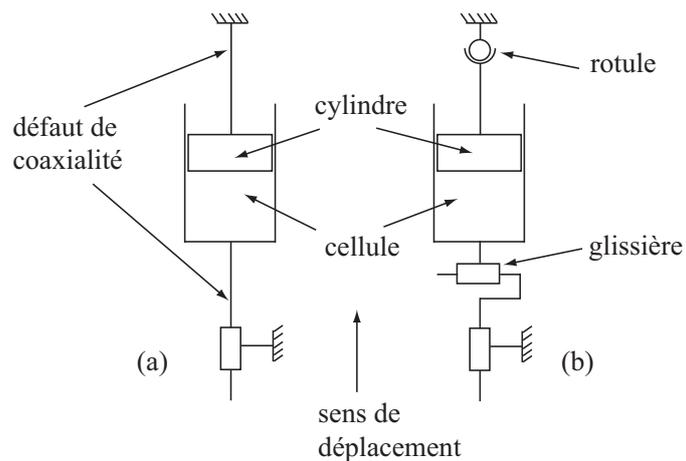


Figure 2.8 – Schémas d'architecture représentant la cinématique des montages (a) hyperstatique et (b) isostatique assurant le non-endommagement du matériel.

effectuées dans le référentiel du laboratoire permettent de visionner l'écoulement du milieu granulaire dans le référentiel du cylindre (puisque celui-ci est fixe). On verra par la suite que ce sera notre référentiel de travail.

Dans ce dispositif expérimental, pour résumer, nous avons fait varier les paramètres dans les gammes suivantes :

- la vitesse  $V_0$  de déplacement de la cellule  $0.4 \text{ mm.s}^{-1} \leq h \leq 50 \text{ mm.s}^{-1}$ ,
- le diamètre  $d$  du projectile :  $10 \text{ mm} \leq d \leq 40 \text{ mm}$ ,
- le diamètre  $d_g$  des grains :  $0.5 \text{ mm} \leq d_g \leq 4 \text{ mm}$ .

### 2.1.2 Mesures de trajectoires

On cherche à obtenir la position  $z_p(t)$  et la vitesse du projectile  $v_p(t)$ .

#### Trajectoires en expérimentations 3D d'impact

Dans les expérimentations 3D d'impact, la sphère n'étant pas visible pendant sa pénétration dans le milieu granulaire, nous avons utilisé un capteur à courant de Foucault (Fig. 2.1), qui est capable de déterminer la position  $z_p$  du projectile en fonction du temps. Ce système de mesure sans contact est fabriqué par la société PM Instrumentation. Il est constitué d'une bobine parcourue par un courant de haute fréquence qui produit, dans l'espace environnant ses extrémités, un champ électromagnétique variable. Un objet métallique placé dans cette zone est le siège de courants induits appelés courants de Foucault. Ces courants s'opposent à la cause qui leur a donné naissance. Ils créent donc une induction de sens contraire à l'induction de la bobine ce qui entraîne une réduction du coefficient d'auto-induction de la bobine excitatrice. Dans le cas des matériaux ferromagnétiques, une perte additionnelle est due à l'effet d'hystérésis lors de la magnétisation du métal par le champ de la bobine excitatrice. Cela se traduit par un signal d'amplitude réduite au niveau de la bobine excitatrice. C'est cette baisse d'amplitude qui est détectée par l'analyseur de signal. Pour le bon fonctionnement de ce capteur, il a été nécessaire de l'étalonner. Le comportement de ce capteur est linéaire avec un gain de  $5,73 \text{ mm.V}^{-1}$  et il existe un offset dû à la présence du milieu granulaire. La fréquence d'échantillonnage du capteur est de 500Hz.

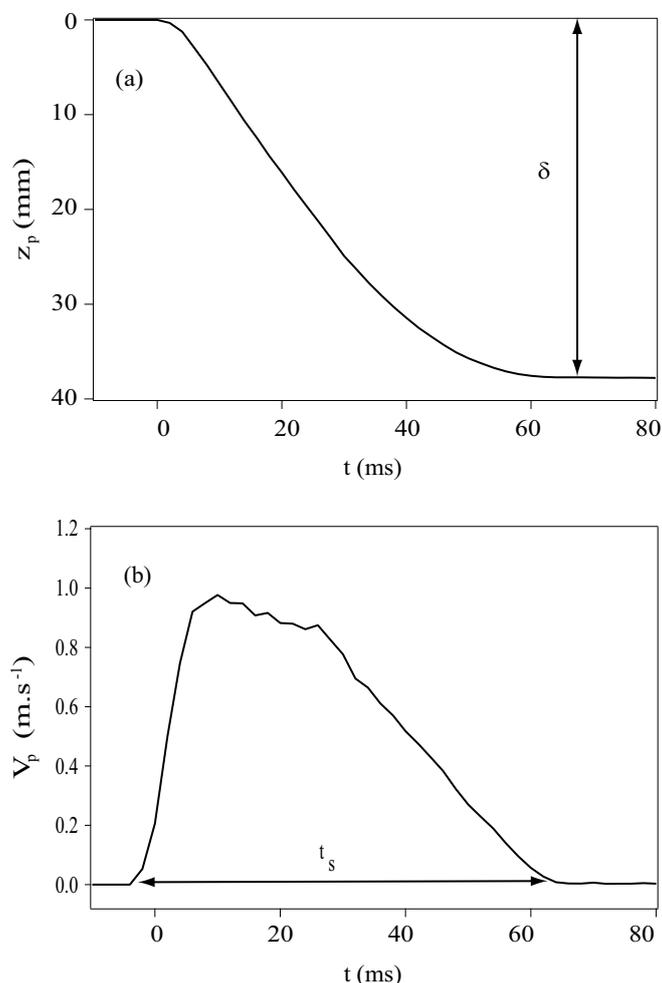
Afin d'obtenir des signaux moins bruités que les signaux bruts, on réalise six fois la même mesure en moyennant les essais et on filtre le signal avec une moyenne glissante sur trois points. Enfin, afin de synchroniser le début de l'acquisition et le lâcher, la sphère est maintenue à l'instant initial à l'aide d'un électro-aimant dont on coupe le courant lorsque l'on démarre l'acquisition. La figure 2.9a présente une courbe typique de  $z_p(t)$  donnée par le capteur. Pour cet essai, le diamètre de la sphère est  $d = 30 \text{ mm}$  et la hauteur de lâcher est  $h = 60 \text{ mm}$ . Comme  $h/d = 2$ , on considère que la hauteur de chute est petite. La figure 2.9a montre comment la profondeur de pénétration augmente avec le temps pour atteindre un plateau qui est la profondeur finale de pénétration  $\delta$ . L'instant  $t = 0$  est l'instant où la sphère entre en contact avec le milieu granulaire. Cette mesure de la profondeur de pénétration  $\delta$  est trouvée en bon accord avec la mesure manuelle par la tige graduée que l'on a réalisé par ailleurs. La figure 2.9b montre l'évolution de la vitesse de pénétration  $v_p(t)$  de la sphère au cours du temps. La vitesse  $v_p(t)$  est obtenue par dérivation de la courbe de position  $z_p$  par rapport au temps. On constate que  $v_p$  croît au début de la pénétration, signe que la sphère continue d'accélérer alors qu'elle se situe dans le milieu granulaire, puis passe par un maximum avant de décroître jusqu'à une vitesse nulle, signe de l'arrêt complet de la sphère. Il est possible d'avoir accès à la durée de la pénétration  $t_s$  que l'on appellera aussi par la suite temps d'arrêt. La durée de pénétration  $t_s$  est obtenue quand la vitesse du projectile devient à nouveau nulle.

Les mesures de trajectoires de l'expérimentation 3D d'impact ont été réalisées par Nadine Valade lors de son stage de L3 en juin 2008 que j'ai participé à encadrer [85].

#### Trajectoires en expérimentations 2D d'impact

Dans les expériences 2D d'impact, la trajectoire du cylindre pendant sa pénétration dans le milieu granulaire est obtenue par visualisation afin de mieux repérer le cylindre au cours du temps. Une pastille blanche est collée sur le cylindre peint en noir (Fig. 2.10). À l'aide du logiciel Igor Pro, on a pu déterminer par un traitement numérique adapté la position  $z_p(t)$  du cylindre au cours de sa chute. Puis par dérivation numérique, on obtient sa vitesse  $v_p(t)$ .

La figure 2.11a nous donne la position  $z_p(t)$  du projectile à chaque instant pour un projectile en acier de diamètre  $d = 10 \text{ mm}$ , de longueur  $b = 15 \text{ mm}$  lâché d'une hauteur  $h = 305 \text{ mm}$ . Dans cet essai, le rapport  $h/d = 30.5$  indique que le projectile a été lâché d'une valeur haute. Cette figure est obtenue en faisant la moyenne sur trois essais semblables d'impact. En fait, on observe une très bonne reproductibilité des essais. On voit que la position  $z_p(t)$  croît au cours du temps. Deux régions existent : la phase de chute

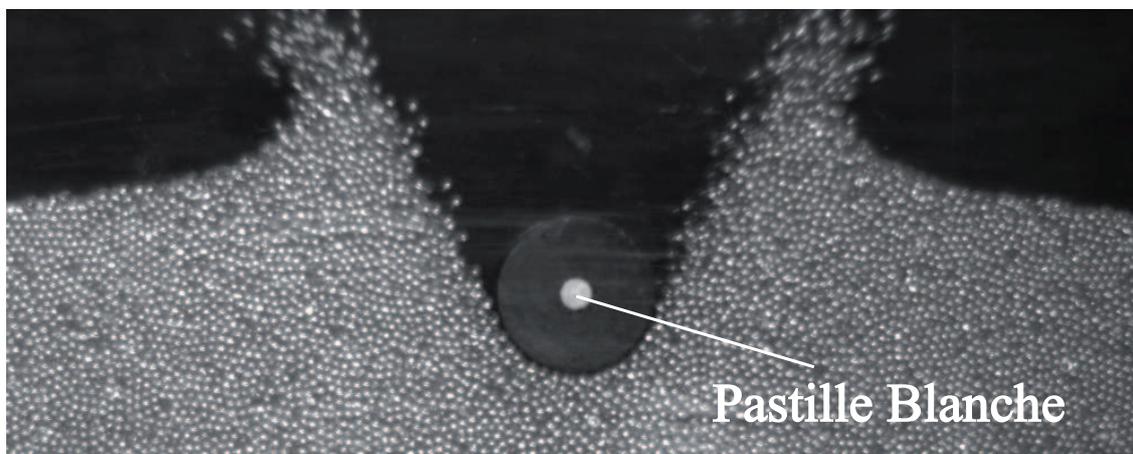


**Figure 2.9** – Position (a)  $z_p$  et vitesse (b)  $v_p$  du projectile avec le dispositif d'impact 3D pour une sphère en acier de diamètre  $d = 30\text{mm}$  lâchée d'une hauteur  $h = 60\text{mm}$ .

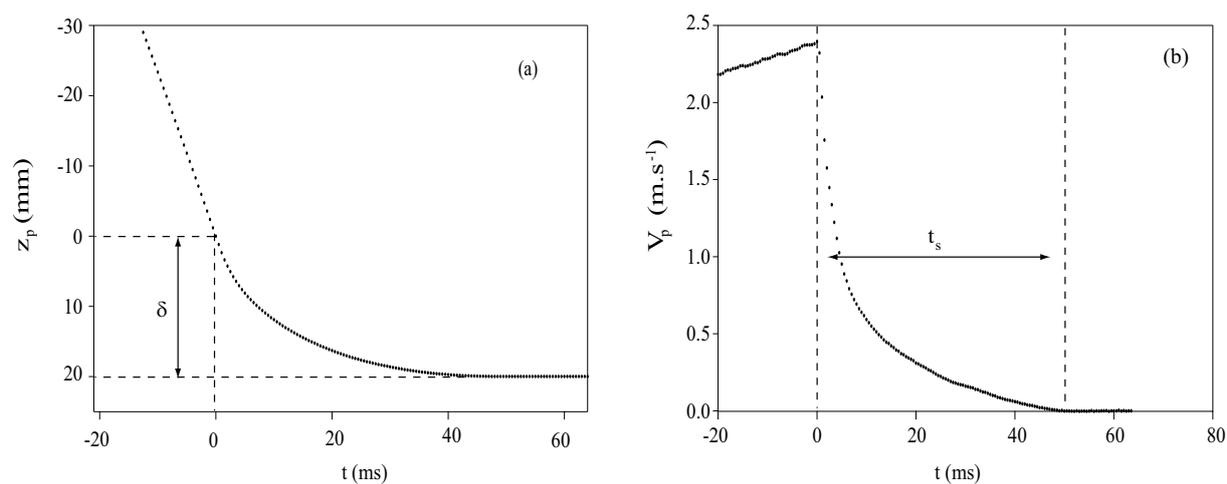
libre entre les plaques et la pénétration dans le milieu granulaire mais la limite entre ces deux régions n'est pas facilement discernable.

Ces deux phases bien distinctes sont par contre bien visible sur la courbe de vitesse (Fig. 2.11b) : la vitesse croît, passe par un maximum avant de décroître rapidement. La première partie de la courbe (augmentation linéaire) correspond à la phase de chute libre du cylindre pour laquelle la pente positive et constante correspond à la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g \simeq 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ . Les légères différences obtenues en rapport avec la valeur réelle de  $g$  sont dans les barres d'erreur. La deuxième phase de cette courbe (décroissance de la vitesse) correspond à la pénétration du cylindre dans le milieu granulaire. Avec ces deux courbes, il est facile de remonter aux quantités telles que la profondeur finale de pénétration  $\delta$  et la durée de la pénétration ou temps d'arrêt  $t_s$  (Fig. 2.11).

Il y a cependant une légère erreur commise lors de la distinction des phases de chute libre et de pénétration. En effet, il se peut que le projectile continue d'accélérer lorsqu'il est en contact avec le milieu



**Figure 2.10** – Visualisation d'une expérience 2D d'impact : le cylindre peint en noir est repéré par une pastille blanche.

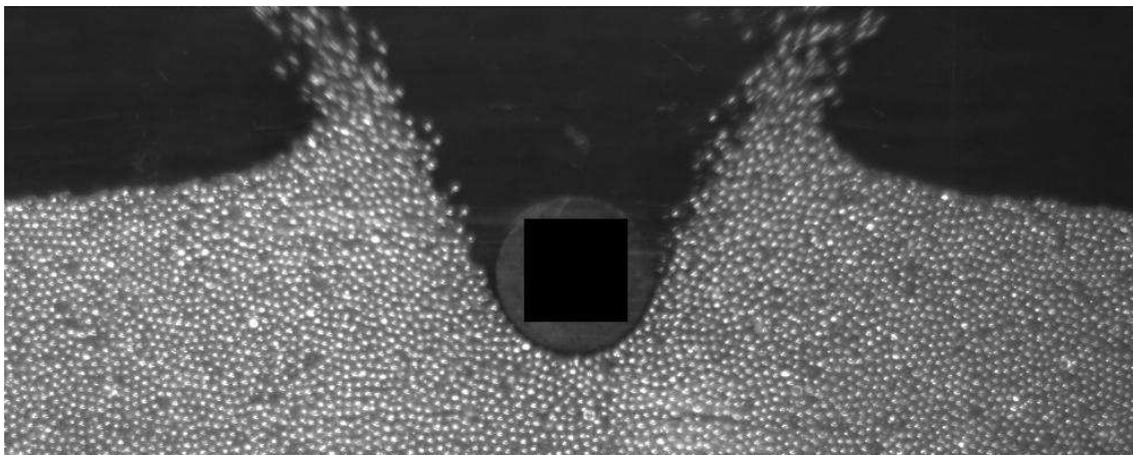


**Figure 2.11** – Position (a)  $z_p$  et vitesse (b) du projectile avec le dispositif d'impact 3D pour un cylindre en acier de diamètre  $d = 10$  mm lâché d'une hauteur  $h = 305$  mm dans une cellule de Hele-Shaw de largeur  $b = 15$  mm.

granulaire dans les tous premiers instants de la pénétration. Mais les erreurs commises sur l'estimation du temps d'arrêt du projectile  $t_s$  et sur la profondeur de pénétration  $\delta$  sont faibles et comprises dans les barres d'erreur.

### 2.1.3 Mesures de champ de vitesse et température granulaire

Dans les expériences 2D d'impact et de vitesse constante où la visualisation est possible, nous avons obtenu la vitesse instantanée des grains par une technique de corrélation d'images (PIV) avec le même film qui a permis d'obtenir la vitesse du projectile. La PIV (Particle Image Velocimetry) est une méthode de visualisation non intrusive permettant de déterminer le champ de vecteur vitesse d'un écoulement. Cette



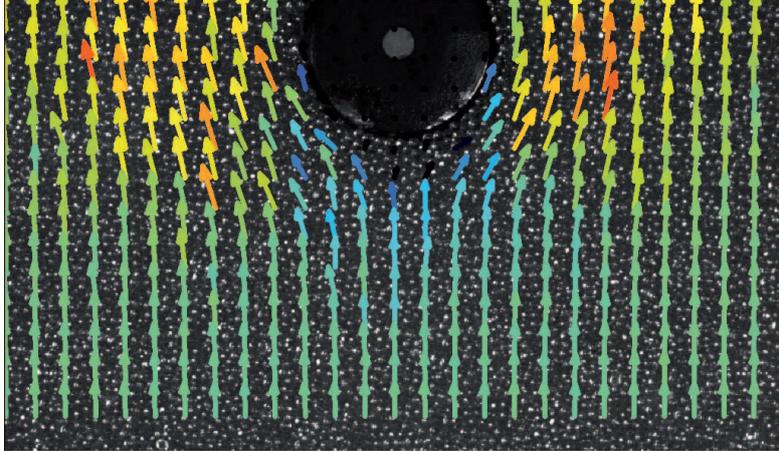
**Figure 2.12** – Image typique extraite du film de pénétration de cylindre par impact avec masque sur le cylindre pour traitement PIV et mesure du champ de vitesse des grains.

méthode calcule un champ de vecteur vitesse à partir de la différenciation de deux images successives d'un film constituant un écoulement. Une image étant constituée d'objets caractéristiques de taille finie (traceurs), l'algorithme de PIV va déterminer le déplacement local de ces objets d'un instant à l'autre. Dans le cas des milieux granulaires, les grains font office de traceurs. Contrairement au fluide classique, il n'est pas nécessaire d'utiliser une nappe laser mais cela nécessite un éclairage suffisant des grains. Contrairement à la PIV classique dans un fluide, on utilise ici les grains eux-mêmes comme traceurs. Pour avoir suffisamment de lumière, deux lampes placées frontalement au dessus de la caméra éclairent le milieu granulaire par le devant. Ensuite, la partie supérieure des images du film est supprimée pour ne pas avoir le reflet des lampes dans l'image. Afin d'améliorer le contraste et pouvoir isoler les grains, un fond noir est placé derrière le dispositif expérimental. Afin d'avoir uniquement la vitesse des grains nous supprimons artificiellement le projectile dans les films : le projectile étant initialement peint en noir et repéré uniquement par sa pastille blanche, on remplace cette pastille par un carré noir (Fig. 2.12), rendant le projectile invisible lors du calcul PIV.

Le logiciel de PIV DAVIS que nous avons utilisé fournit la vitesse des grains au cours du temps (Fig. 2.13). Plus précisément le logiciel utilise deux images (deux matrices) de taille  $N \times M$  pixels et estime le déplacement entre deux sous-divisions par corrélation. Il produit ensuite deux matrices de taille  $N^* \times M^*$ , une pour la composante verticale et une pour la composante horizontale de la vitesse. Les dimensions  $N^*$  et  $M^*$  dépendent de la taille des boîtes sur lesquelles sont calculées les corrélations. Au final, ce logiciel fournit un champ de vitesse cartésien avec une résolution spatiale qui dépend du calcul effectué.

On utilise ensuite le logiciel IGOR Pro pour extraire des profils de vitesses selon n'importe quelle ligne de l'espace. Ainsi le champ de vitesse des grains  $\underline{v}$  se décompose dans un espace cartésien sous la forme  $\underline{v}(x, z, t) = v_x(x, z, t)\underline{e}_x + v_z(x, z, t)\underline{e}_z$  (Fig. 2.14). Un exemple de traitement est illustré sur la figure 2.14 (cas 2D à vitesse imposée). La ligne rouge de la figure 2.14a indique la ligne le long de laquelle les profils de vitesse  $v_x$  et  $v_z$  sont extraits tandis que la tâche noire représente le projectile (Fig. 2.14b et 2.14c). On constate que les points correspondant au projectile, dont la vitesse est nulle par construction du montage (tandis que la vitesse des grains est non nulle) correspondent aux vitesses  $v_x = 0$  et  $v_z = 0$ . De plus, on constate que la composante de vitesse  $v_z$  est paire et que sa valeur décroît lorsqu'on s'éloigne du projectile tandis que la composante de vitesse  $v_x$  est impaire et décroît quand on s'éloigne du projectile.

Pour avoir une idée de la compressibilité ou de l'incompressibilité de l'écoulement granulaire, nous



**Figure 2.13** – Champ de vitesse typique des grains obtenu par traitement d’images PIV dans une expérience 2D à vitesse imposée. L’amplitude de la vitesse est codée en couleur.

avons calculé la divergence du champ de vitesse  $\underline{v}$ . Or, il est clair que loin du projectile la vitesse des grains les uns par rapport aux autres est nulle. On peut alors considérer que le milieu granulaire qui n’est pas ou très peu sollicité possède une divergence nulle. Cependant, lors du calcul DAVIS de la divergence, le logiciel trouve une valeur de la divergence non nulle (mais faible). La vitesse du son dans un milieu granulaire constitué de billes de verre de 1 mm est de l’ordre de  $0.1 \text{ m.s}^{-1}$  [5]. En utilisant le nombre de Mach, on constate a posteriori que l’écoulement est à nombre de Mach élevé au début de la pénétration (là où les vitesses sont importantes, c’est-à-dire à l’impact) et à nombre de Mach faible à la fin de la pénétration. Dans la suite, on ne tiendra pas compte de cet impact. Maintenant, en étudiant de plus près la divergence dans la zone proche du projectile, c’est-à-dire la zone la plus sollicitée mécaniquement, on constate que la valeur de la divergence est de moins d’un ordre de grandeur supérieure à la valeur de la divergence du bruit expérimental. On considérera donc par la suite le milieu granulaire comme un milieu incompressible qui vérifie

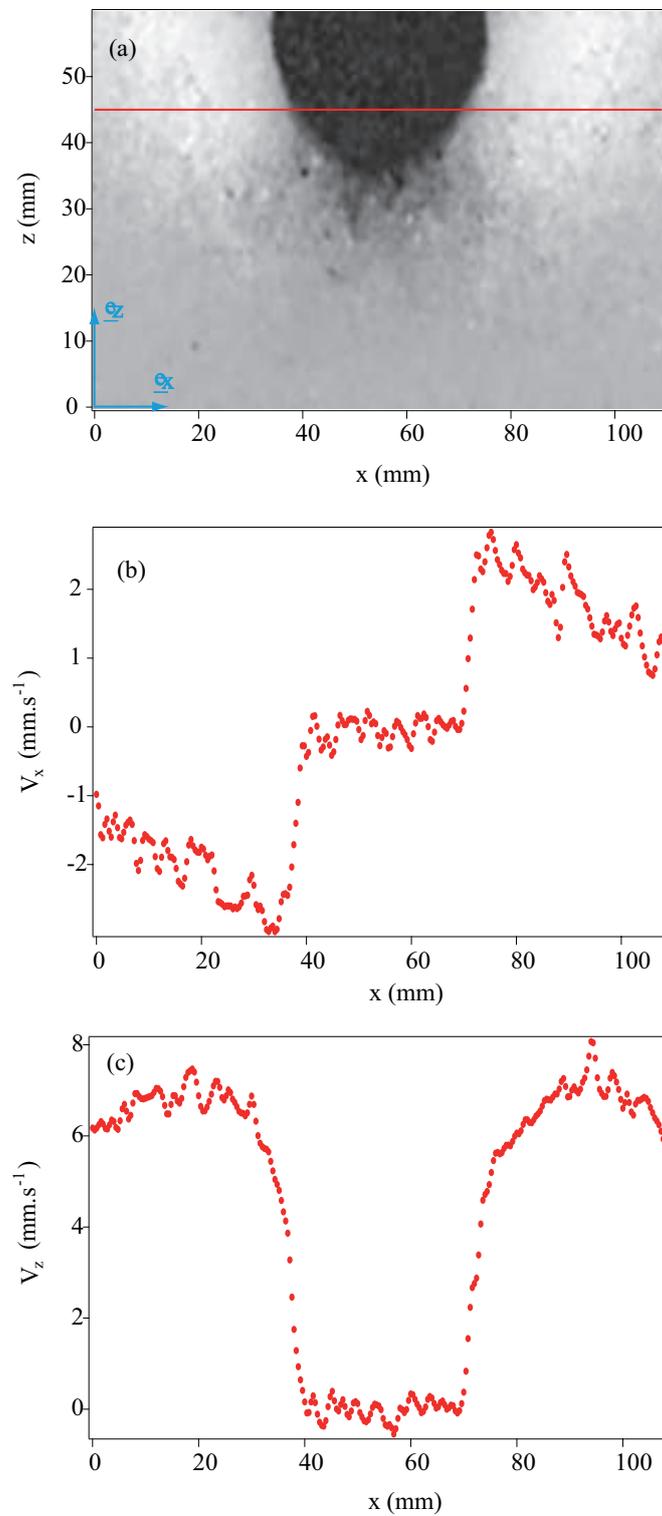
$$\text{div } \underline{v} = 0. \quad (2.2)$$

Cette approximation est vraie pour les expérimentations 2D à vitesse imposée et nous avons constaté qu’elle est aussi vraie pour les expérimentations 2D avec impact mais seulement dans la zone dite dense de l’impact. Cette phase dense est située sous le projectile, elle est à opposer à la phase lâche qui est la phase où les grains commencent à être éjectés au dessus du projectile. D’une autre manière, finalement, on peut présenter la phase dense de l’impact comme la zone de grains où la divergence du champ de vitesse est nulle.

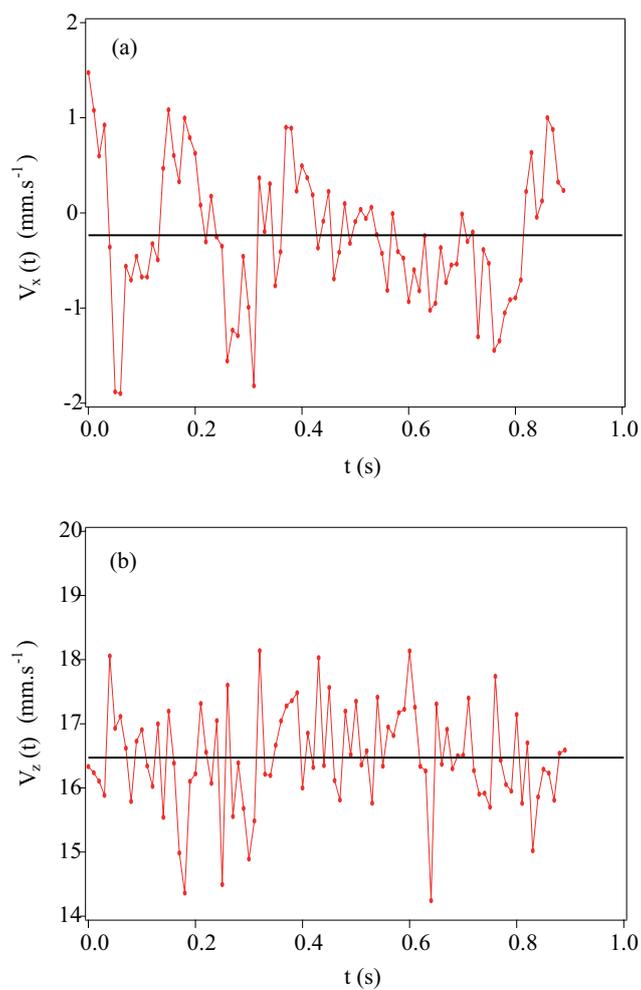
Dans nos expériences 2D à vitesse imposée en régime stationnaire, la température granulaire  $T$  est définie comme la moyenne du carré des fluctuations de vitesse. Si on regarde l’évolution de la vitesse en un point de la phase dense au cours du temps (Fig. 2.15), on voit que les composantes de la vitesse  $v_z$  fluctuent dans le temps autour d’une valeur moyenne  $\langle \underline{v} \rangle$ . Il est alors possible de définir une vitesse moyenne temporelle et de calculer la température granulaire en tout point de l’espace définie par

$$T(x, z) = \langle \|\underline{v}(x, z, t) - \langle \underline{v}(x, z, t) \rangle\|^2 \rangle. \quad (2.3)$$

Dans les expériences d’impact, le mouvement étant très instationnaire, il n’est pas facile de définir une vitesse moyenne temporelle et donc les fluctuations de vitesses et ainsi une température granulaire  $T$ .



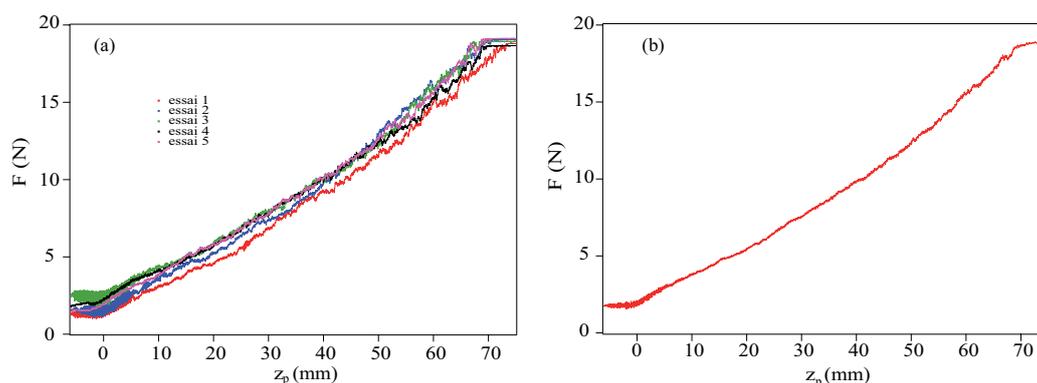
**Figure 2.14** – Profils de vitesse  $v_x$  et  $v_z$  extraits après calcul PIV le long de la ligne matérialisée en rouge dans le cas d'une expérience de pénétration quasi 2D ( $V_0 = 17$  mm.s<sup>-1</sup>, cylindre  $d = 40$  mm, de longueur  $b = 40$  mm et  $d_g = 1$  mm).



**Figure 2.15** – Évolution temporelle de la vitesse  $v_x$  (a) et  $v_z$  (b) en un point ( $x = 40$  mm,  $z = 20$  mm) dans une expérience de pénétration 2D à vitesse imposée ( $V_0 = 17$  mm.s<sup>-1</sup>, cylindre  $d = 40$  mm, de longueur  $b = 40$  mm et  $d_g = 1$  mm). On obtient les vitesses moyennes  $\langle v_x \rangle = 0.2$  mm.s<sup>-1</sup> et  $\langle v_z \rangle = 16.4$  mm.s<sup>-1</sup> et les fluctuations de vitesses  $\delta v_x = 0.075$  mm.s<sup>-1</sup> et  $\delta v_z = 0.084$  mm.s<sup>-1</sup>.

### 2.1.4 Mesures de forces

À partir du capteur d'effort placé sur le dispositif expérimental 2D à vitesse imposée, nous mesurons la force exercée par le milieu granulaire sur le projectile. Ce capteur de force, modèle FN3030 fabriqué par la société FGP Sensor, est un capteur de traction-compression avec un corps d'épreuve en «S». Son étendue de mesure permet des forces allant jusqu'à 50 N avec une précision de 0.1%. Après étalonnage de ce capteur, le gain de celui-ci est  $90.5 \text{ N.mV}^{-1}$ . Pour un cylindre en acier de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  et de longueur  $b = 40 \text{ mm}$  (donc de masse  $m = 98 \text{ g}$ ), le chargement initial cylindre-tige-capteur ressenti par le capteur alors en traction est de 1.75 N. Ensuite, en enfonçant le projectile dans le milieu granulaire, le capteur passe d'un état de traction à un état de compression. Pour chaque choix de vitesse imposée, on a réalisé cinq essais semblables en pratiquant la même méthode de préparation du milieu granulaire. La figure 2.16a représente un exemple de 5 essais d'évolution de la force exercée par le milieu granulaire sur le cylindre en fonction de sa profondeur  $z_p$ . Pour obtenir la force exercée sur le projectile, on retranche la valeur du chargement initial. À  $z_p = 0$ , le cylindre entre en contact avec le milieu granulaire. On remarque que les mesures correspondants à ces différents essais sont bien reproductibles, avec peu de fluctuations par rapport à la moyenne. Dans la suite, on prendra comme mesure de la force la moyenne des résultats des cinq essais correspondant à une configuration donnée 2.16b. Pour  $z_p < 0$ , on remarque que la force est légèrement positive au lieu d'être nulle. Cette force résiduelle est la force de frottement due aux parois en verre sur le cylindre. Dans le cas d'un cylindre de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  et de longueur  $b = 40 \text{ mm}$ , cette force de frottement est évaluée à 2.3 N. Dès que le cylindre s'enfonce dans le milieu granulaire, cette force de frottement aux parois devient négligeable devant la force exercée par le milieu granulaire.



**Figure 2.16** – Force  $F$  mesurée sur le cylindre en fonction de la profondeur de pénétration  $z_p$  (a) pour 5 essais semblables et (b) moyennée sur ces 5 essais.

## 2.2 Dispositifs numériques

En parallèle des dispositifs expérimentaux décrits précédemment, nous avons utilisé deux codes numériques. Le premier code qui simule l'impact d'un projectile en milieu granulaire, est un code de dynamique moléculaire à deux dimensions, où le milieu granulaire est modélisé comme un ensemble de particules discrètes qui interagissent les unes avec les autres selon des lois de collision. Dans le second code, nous avons modélisé le milieu granulaire comme un milieu continu et mis alors en place la résolution des équations de la mécanique des milieux continus à deux dimensions, pour simuler le déplacement de cylindre à vitesse constante. Ces deux codes numériques ont été développés en collaboration avec Jérôme Crassous de l'Institut de Physique de Rennes et sont présentés ci-dessous.

### 2.2.1 Description du code de dynamique moléculaire

Étant donné le caractère discret du milieu granulaire impacté, il apparaît naturel d'utiliser une méthode discrète pour simuler l'impact d'un projectile dans un milieu granulaire. La méthode discrète utilisée ici est de type dynamique moléculaire [19]. On considère ici que les particules sont des sphères molles, qui se déforment élastiquement sous les actions mécaniques. Sous ces actions mécaniques, la surface de contact entre les particules évolue : une loi de comportement régulière permet de lier la déformation des particules à l'action mécanique subie. Nous avons choisi d'adopter une méthode de dynamique moléculaire pour sa simplicité de mise en œuvre. La particularité de cette méthode est qu'elle ne fait pas intervenir le coefficient de friction microscopique  $f$  entre les grains. Il reste bien sûr une friction macroscopique qui peut être vue comme la gêne stérique entre grains.

#### Description de la méthode

Pour intégrer les équations du mouvement, nous avons utilisé l'algorithme de Verlet. Les particules constituant le milieu granulaire sont repérées par les coordonnées de leur centre au cours du temps, notées par le vecteur position  $\underline{r}(t)$ . Pour le calcul de la position au pas de temps suivant, on utilise un développement de Taylor autour de  $t$  :

$$\underline{r}(t + \Delta t) = \underline{r}(t) + \underline{v}(t)\Delta t + \frac{\underline{F}(t)}{2m}\Delta t^2 + \frac{\Delta t^3}{3!}\frac{d^3\underline{r}}{dt^3} + o(\Delta t^3), \quad (2.4)$$

où  $\underline{v}(t) = d\underline{r}/dt$  est la vitesse de la particule et  $\underline{F}(t)/m = d^2\underline{r}/dt^2$  son accélération avec  $\underline{F}(t)$  la force exercée sur la particule à l'instant  $t$ . En faisant la somme des positions aux pas de temps suivant et précédent, les termes impairs en  $\Delta t$  et  $\Delta t^3$  s'annulent :

$$\underline{r}(t + \Delta t) + \underline{r}(t - \Delta t) = 2\underline{r}(t) + \frac{\underline{F}(t)}{m}\Delta t^2 + o(\Delta t^3), \quad (2.5)$$

soit,

$$\underline{r}(t + \Delta t) \simeq 2\underline{r}(t) - \underline{r}(t - \Delta t) + \frac{\underline{F}(t)}{m}\Delta t^2. \quad (2.6)$$

En faisant au contraire la différence des positions successives, on fait apparaître la vitesse :

$$\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t - \Delta t) = 2\underline{v}(t)\Delta t + o(\Delta t^2), \quad (2.7)$$

ce qui donne pour la vitesse :

$$\underline{v}(t) \simeq \frac{\underline{r}(t + \Delta t) - \underline{r}(t - \Delta t)}{2\Delta t}. \quad (2.8)$$

La vitesse est donc obtenue par un schéma centré [Eq. (2.8)] au contraire de la position. Les équations (2.6) et (2.8) constituent l'algorithme de Verlet. Il reste alors à déterminer la force  $\underline{F}$  pour pouvoir utiliser l'algorithme de Verlet.

Nous prendrons comme force de contact entre deux particules la force répulsive normale donnée par la théorie de Hertz :

$$F_n = -ka^{\frac{3}{2}} \quad (2.9)$$

où  $a$  est la profondeur d'interpénétration entre les sphères, et  $k$  un coefficient de raideur qui dépend des propriétés élastiques du matériau constituant les sphères. En notant  $E$  le module d'Young,  $\nu_p$  le coefficient de Poisson et  $R$  le rayon des sphères, le coefficient de raideur  $k$  s'écrit, pour deux sphères identiques et de même matériau

$$k = \frac{\sqrt{RE}}{3(1 - \nu_p^2)}. \quad (2.10)$$

Finalement, on peut exprimer :

$$k \sim \sqrt{RE}. \quad (2.11)$$

Pour intégrer la force dans le calcul, il est nécessaire d'utiliser un pas de temps numérique suffisamment petit par rapport au temps de collision  $\tau$  afin de garantir que le phénomène de collision a bien été capturé par le code. Le temps de collision  $\tau$  peut être vu comme le temps que va mettre la particule impactante (grains) à transformer l'énergie cinétique initiale en énergie élastique. Pour cela, on fait un bilan énergétique. L'énergie cinétique est :

$$E_c \sim mv_i^2, \quad (2.12)$$

où  $m$  est la masse d'une particule et  $v_i$  sa vitesse. L'énergie élastique peut être vue comme le travail de  $F_n$  pendant l'interpénétration des particules :

$$E_e \sim \int_0^a \sqrt{RE}x^{\frac{3}{2}} dx, \quad (2.13)$$

soit,

$$E_e \sim \sqrt{RE}a^{\frac{5}{2}}. \quad (2.14)$$

En écrivant l'équilibre énergétique entre l'énergie élastique maximale atteinte lorsque que l'interpénétration est maximale ( $a = a_{max}$ ) et l'énergie cinétique initiale, on obtient :

$$mv_i^2 \sim \sqrt{RE}a_{max}^{\frac{5}{2}}. \quad (2.15)$$

L'ordre de grandeur de la durée de collision est donné par  $\tau \sim a_{max}/v_i$  et en l'injectant, il vient :

$$\tau \sim \left( \frac{m^2}{Rv_iE^2} \right)^{\frac{1}{5}}. \quad (2.16)$$

Le pas de temps  $\Delta t$  de l'algorithme de Verlet doit être choisi assez petit devant le temps de collision  $\tau$  afin que l'on puisse bien calculer les collisions.

L'inconvénient de ce modèle de force purement élastique est de ne pas prendre en compte une éventuelle dissipation dans la collision. Pour cela on implémente dans le modèle de Hertz un terme de dissipation visqueuse, tel que la force s'écrive alors :

$$F_n = -ka^{\frac{3}{2}} - \lambda_d \frac{da}{dt} \quad (2.17)$$

Le coefficient  $\lambda_d$  est relié au coefficient de restitution  $e_n$  par la relation

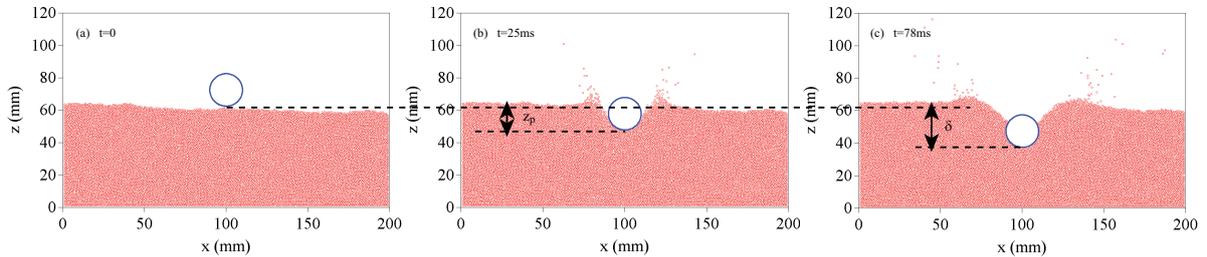
$$e_n = \exp\left(-\frac{\lambda_d}{m}\tau\right). \quad (2.18)$$

Par un développement limité de 2.18, on constate que le coefficient de restitution  $e_n$  est lié à la vitesse d'impact  $V_i$  par une relation du type  $(1 - e_n) \propto V_i^{1/5}$  : pour des vitesses normales de collision de l'ordre du  $\text{m.s}^{-1}$ , on a  $e_n \simeq 0.9$  [76].

On rappelle que le milieu granulaire des expérimentations est constitué de billes de verre de rayon  $R = d_g/2 = 0.5$  mm et masse volumique  $\rho_g = 2500$  kg.m<sup>-3</sup>. La masse d'un grain est  $m_g = 4\pi\rho_p R^3/3 = 1.3 \times 10^{-6}$  kg. On utilise comme valeur du module d'Young celui du verre  $E = 69000$  MPa. Le projectile est un disque de masse volumique  $\rho$  et de diamètre  $d$ . La boîte contenant l'ensemble du milieu granulaire est une boîte carrée dont le coté peut varier de  $100d_g$  à  $1600d_g$ . Il peut être nécessaire d'augmenter la taille de cette boîte dans le cas d'impacts à grande vitesse pour lesquels les projectiles s'enfoncent profondément. De plus, cette boîte est fermée : aucun grain ne peut s'en échapper, et les grains éjectés retombent sur le milieu granulaire.

Avant de réaliser un essai numérique, il est nécessaire de créer l'empilement de grains sur lequel le projectile va venir impacter. Pour créer cet empilement initial, on laisse sédimenter par gravité une masse en suspension de particules, avec une compacité très faible  $\phi = 0.085$  (les grains ne sont pas en contact les uns avec les autres). Les particules ne sont pas choisies monodisperses mais légèrement polydisperses pour éviter une structure cristalline du milieu. Les rayons des particules sont compris entre  $R + \Delta R$  et  $R - \Delta R$  ( $\Delta R/R$  est ici un nombre sans dimension en général pris à 0.2). Le choix initial du rayon de chaque particule est fait de manière aléatoire. La compacité initiale du milieu ainsi obtenu est  $\phi = 0.83$ . En raison de la faible polydispersité, cette valeur est légèrement plus élevée que pour l'empilement aléatoire de disques monodisperses ( $\phi = 0.82$ ) mais très inférieure à celle de l'empilement régulier compact ( $\phi = 0.90$ ).

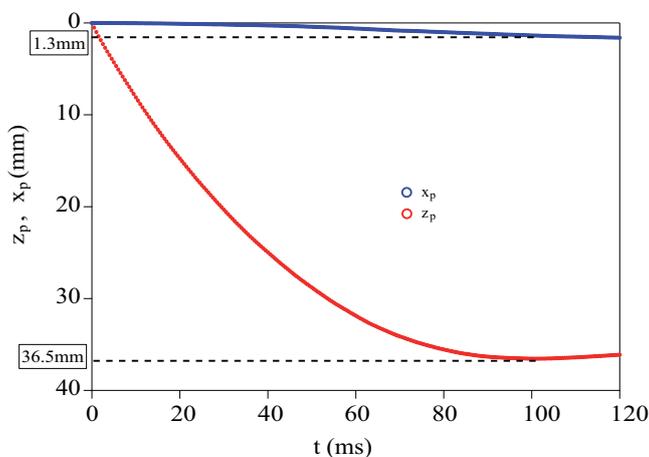
Il suffit maintenant de placer un projectile dans cette configuration de référence. On choisit la vitesse d'impact  $V_i$  du projectile. On impose aussi le diamètre du projectile  $d$  et la masse  $M_p$  de celui-ci en imposant les rapports  $d/(2R)$  et  $M_p/m$ . Le code donne au pas de temps souhaité les positions de chaque élément (projectile et grains). La figure 2.17 montre les positions des grains et du projectile à un instant donné, issues de notre code de dynamique moléculaire.



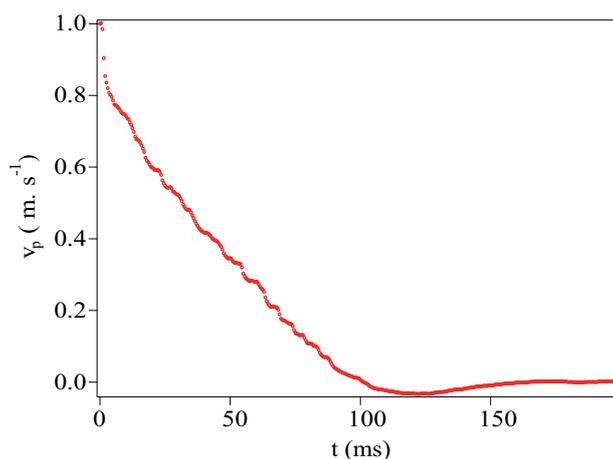
**Figure 2.17** – Instantanés (a) initial ( $t = 0$ ), (b) courant ( $t = 25$  ms) et (c) final ( $t = 78$  ms) de l'impact d'un projectile ( $d = 10$  mm,  $\rho/\rho_g = 1$ ) à vitesse d'impact  $V_i = 1$  m.s<sup>-1</sup> dans un milieu granulaire simulé par un code de dynamique moléculaire.

### Position du projectile

Dans le code numérique, on repère la position du projectile par les coordonnées  $z_p$  et  $x_p$  de son point bas en fonction du temps, où  $z_p$  est donc la distance entre la surface libre initiale horizontale du milieu granulaire et le point le plus bas du projectile, et où  $x_p$  est la déviation latérale du projectile par rapport à sa position initiale dans le milieu granulaire. La pénétration augmente avec le temps jusqu'à atteindre son maximum  $\delta$  au temps  $t_s$  pendant que le projectile dévie faiblement mais continûment dans un sens (Fig. 2.18). On remarque qu'il y a une remontée du projectile à la fin de la pénétration. On peut attribuer cet effet à l'absence de frottement microscopique dans la relation de comportement et au fait que la cellule est fermée. En effet, les grains éjectés pendant le processus de collision sont redéposés à la surface du milieu granulaire, exerçant ainsi une légère surpression sur les cotés et faisant remonter le



**Figure 2.18** – Profondeur de pénétration  $z_p$  en fonction du temps  $t$  en comparaison avec la dérive radiale du projectile  $x_p$ .



**Figure 2.19** – Vitesse du projectile  $v_p(t)$  en fonction du temps.

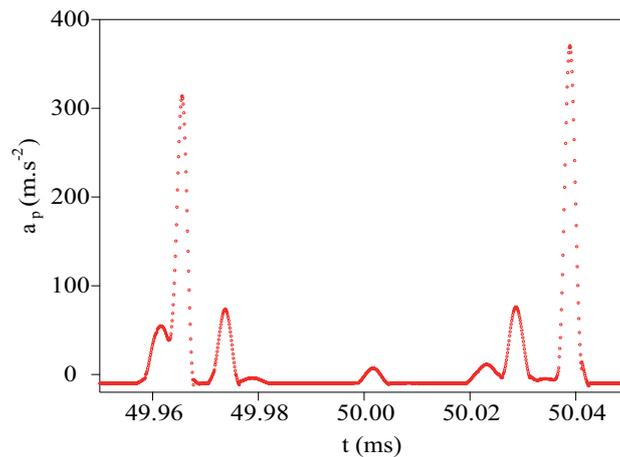
projectile. Dans la suite, nous considérons que le maximum de pénétration correspond à la valeur finale de la pénétration et que  $t_s$  est le temps d'arrêt correspondant. Si l'on regarde de plus près l'empilement initial, on remarque que celui n'est pas tout à fait symétrique (Fig. 2.17). Il y a plus de grains à gauche du projectile qu'à droite. Cette non-horizontalité du milieu initial est sans doute à l'origine du déplacement latéral du projectile. A l'arrêt, le projectile se trouve en  $\delta = z_p(t_s)$  et  $x_p(t_s)$ , avec un rapport  $x_p(t_s)/z_p(t_s)$  inférieur à 4% dans tous les cas. On peut donc considérer cette déviation comme négligeable et que la valeur de  $\delta$  n'est pas affectée par le faible déplacement latéral.

Il est possible d'obtenir aussi la vitesse  $v_p(t)$  du projectile au cours du temps. Pour cela, il suffit de faire une dérivée numérique de la position  $z_p(t)$  (Fig. 2.19). On constate que la vitesse décroît au cours du temps. La partie de la courbe où la vitesse est négative correspond à la remontée du projectile discutée plus haut.

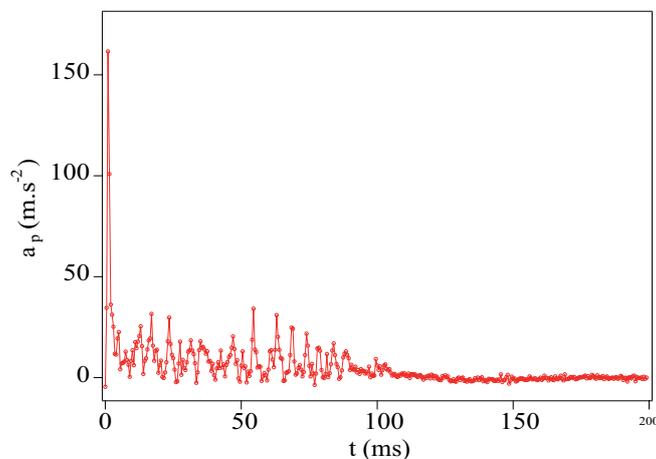
### Accélération du projectile

La détermination de l'accélération du projectile est importante puisque qu'elle est directement reliée à la force exercée par le milieu granulaire sur le projectile via le principe fondamental de la dynamique. Il est possible de sauvegarder la position du projectile à chaque instant. La figure 2.20 montre l'accélération du projectile pendant la phase de pénétration pendant 0.21 ms. On remarque que cette courbe est composée d'une alternance entre des pics d'accélération et des phases où l'accélération semble être égale à la gravité  $g = -9.81 \text{ m.s}^{-2}$ . Ces pics correspondent aux collisions du projectile avec les grains. Lorsqu'il n'y a pas de collision avec des grains, le projectile est soumis uniquement à la gravité. Le choix du pas de temps numérique de  $0.1 \mu\text{s}$  permet de capturer complètement la collision, une collision se faisant alors environ en 60 pas de temps. Cependant, l'ordre de grandeur de la durée d'une simulation étant de l'ordre du million de pas de temps, il n'est pas possible de garder l'accélération du projectile à chaque instant sur toute la durée de la pénétration pour des problèmes de stockage, les fichiers devenant beaucoup trop lourds et difficiles à gérer. L'algorithme de Verlet donnant directement la position du projectile et des grains à chaque instant, nous stockons ces données tous les 5000 pas de temps. En dérivant la position  $z_p$  du projectile deux fois, on retrouve l'accélération moyenne du projectile sur 5000 pas de temps, soit 0.5 ms. La figure 2.21 présente cette accélération moyenne du projectile sur toute la durée de la pénétration. Ce signal est très piqué lui aussi. Après le fort pic correspondant à l'impact, on remarque que l'accélération devient plus faible mais reste très fluctuante jusqu'à l'arrêt.

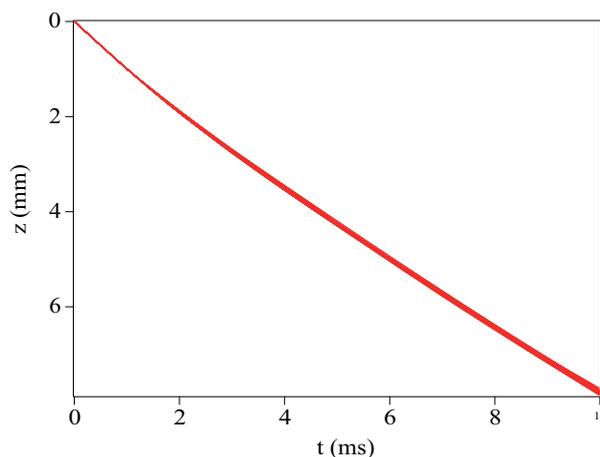
On peut comparer ce signal aux signaux d'accélération mesurés expérimentalement par Goldman et Umbanhowar [38] à l'aide d'un accéléromètre disposé dans le projectile (Fig. 1.15). L'allure donnée par leur accéléromètre semble relativement différente de la courbe que nous obtenons. Cependant, leur courbe expérimentale est obtenue pour un dispositif expérimental 3D (le projectile et les grains sont sphériques) sont 2D (le projectile et les grains sont disques). Pour comparer les deux, il faut tenir compte de cette différence 2D/3D. Dans nos simulations 2D, le projectile est de diamètre  $d = 30d_g$  et de masse volumique  $\rho = \rho_g$  avec la vitesse d'impact  $V_i = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . Si notre dispositif 2D ne représente qu'une tranche du dispositif 3D, alors le nombre de collisions sera  $d/(\phi d_g) = 30/(0.83 * 1) \simeq 40$  fois plus grand en 3D. Afin de représenter au mieux un essai 3D, il faut donc simuler une quarantaine d'essais 2D et les moyenner temporellement. Pour effectuer ces essais, on réalise des lâchers à différentes positions en  $x$  du projectile ( $\Delta x = 0.5 \text{ mm}$ ). La figure 2.22 montre que le projectile s'enfonce toujours de la même manière quelle



**Figure 2.20** – Accélération du projectile en fonction du temps sur un très court intervalle de temps ( $\Delta t = 0.08 \text{ ms}$ ) au cours de la pénétration.

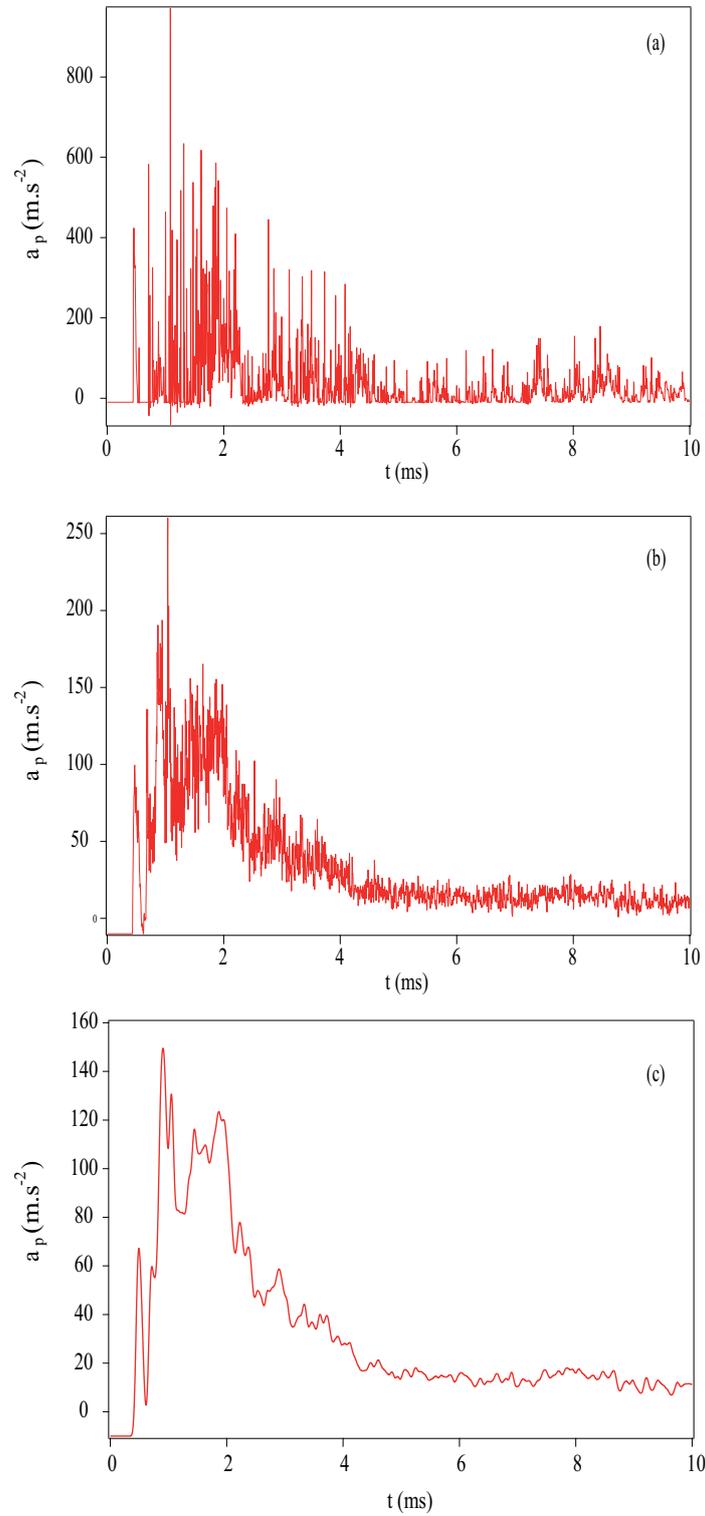


**Figure 2.21** – Accélération moyennée du projectile en fonction du temps sur toute la pénétration.



**Figure 2.22** – Profondeur de pénétration  $z_p$  en fonction du temps pour 40 essais similaires avec des positions initiales de projectile légèrement différentes en  $x$ .

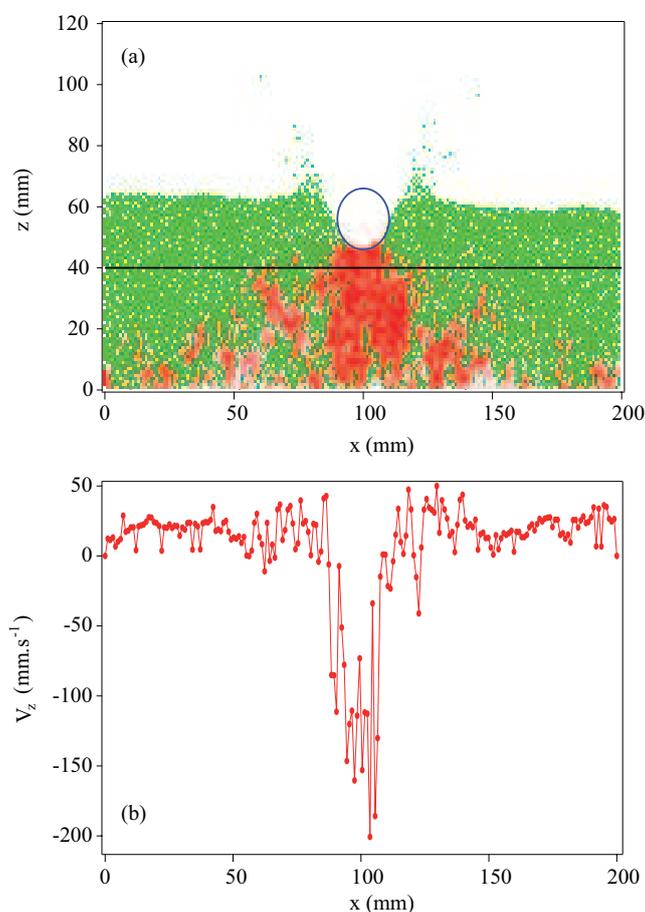
que soit la position de lâcher en  $x$ . La figure 2.23a présente le signal d'accélération brut d'un essai. La figure 2.23b montre la moyenne calculée sur les 40 essais. On voit qu'elle reste assez bruitée avec une allure assez différente de celle obtenue expérimentalement par Goldman et Umbanhowar [38]. Cependant, leur signal d'accélération est filtrée par un filtre de Bessel à deux pôles (filtre passe-bas). La figure 2.23c donne le signal d'accélération après réalisation d'une moyenne glissante du signal sur 2000 points (c'est aussi un filtre passe-bas). On voit que ce signal est maintenant comparable aux signaux expérimentaux d'accélération observés par Goldman et Umbanhowar [38]. Cependant dans la suite du travail, il n'était pas possible d'utiliser cette méthode à chaque fois pour obtenir le signal d'accélération car ce procédé nécessite un temps de calcul supérieur à celui d'une thèse ! C'est pour cela qu'on utilise la dérivée seconde de la position comme signal d'accélération pour chaque essai sur 5000 pas de temps.



**Figure 2.23** – (a) Accélération brute en fonction du temps pour un essai. (b) Accélération moyennée sur 40 essais similaires. (c) Accélération moyenne filtrée.

### Profils de vitesses

Étant donné que le code fournit la position du projectile mais aussi de tous les grains entre deux pas de temps, il est possible de reconstituer le champ de vitesse des grains  $\underline{v}$ . Pour cela, on calcule la vitesse des grains par la simple dérivation de leur position. De la même façon que pour les expérimentations 2D, il est possible d'extraire des profils de vitesses selon n'importe quelle ligne de l'espace. Comme il a été observé expérimentalement, le champ de vitesse des grains  $\underline{v}$  se décompose dans un espace cartésien sous la forme  $\underline{v}(x, z, t) = v_x(x, z, t)\underline{e}_x + v_z(x, z, t)\underline{e}_z$  et peut être analysé avec IGOR comme présenté sur la figure 2.24. Sur la figure 2.24, on présente la composante  $v_z$  : lorsque  $v_z > 0$ , le champ est de couleur verte, lorsque  $v_z < 0$ , le champ est de couleur rouge. On voit que l'on peut extraire des profils selon une ligne choisie dans l'image, cette ligne est en noire sur la figure. On extrait alors les profils de vitesse  $v_z$  selon cette ligne. On peut réaliser le même travail avec la composante  $v_x$ .



**Figure 2.24** – Résultats obtenus pour les paramètres  $V_i = 1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $d/d_g = 20$ . (a) Position des grains et du projectile à un instant  $t = 50$  ms : les points verts indiquent une vitesse verticale positive, les points rouges indiquent une vitesse négative. (b) Profil de vitesse  $v_z$  extrait le long de la ligne noire sur la figure (a).

### 2.2.2 Code de résolution des équations de conservation

Dans le chapitre 1, nous avons présenté les équations de la théorie cinétique pour les milieux granulaires [Eq. (1.18) et (1.26)]. Le milieu granulaire est alors vu comme un fluide avec une rhéologie particulière. Dans cette partie nous allons exposer les éléments qui permettent de résoudre les équations de la mécanique des milieux continus stationnaires [Eq. (1.18)] mais sans tenir compte du terme de production de chaleur provoqué par l'écoulement dans l'équation de la chaleur ( $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$ ) et sans considérer les équations phénoménologiques de la théorie cinétique [Eq. (1.26)].

#### Résolution de l'équation de quantité de mouvement

On souhaite résoudre ici l'écoulement stationnaire à deux dimensions d'un fluide newtonien de vitesse  $V_0$  autour d'un cylindre immobile. Cet écoulement est décrit par l'équation de Navier-Stokes qui peut se mettre sous la forme

$$\rho_g (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{v}) \underline{v} = \underline{\underline{\text{Div}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (2.19)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes. Le fluide étant newtonien, il obéit à la loi de comportement suivante

$$\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{1}} + 2\eta\underline{\underline{D}}, \quad (2.20)$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique constante et  $\underline{\underline{D}}$  est le tenseur taux de déformations. On rappelle que

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{v} + \underline{\underline{\text{Grad}}} \underline{v}^T), \quad (2.21)$$

avec l'hypothèse supplémentaire d'incompressibilité  $Tr(\underline{\underline{D}}) = 0$ . L'objet autour duquel s'écoule le fluide est un cylindre de diamètre  $d$ . Les conditions limites sont  $\underline{v} = V_0 \underline{e}_z$  sur les bords du domaine de calcul (qui est une boîte carrée) et  $\underline{v} = \underline{0}$  sur la surface de du cylindre.

Pour résoudre ces équations, on va utiliser une méthode de Boltzmann sur réseau (appelé aussi Lattice-Boltzmann) [57, 70, 88]. La méthode Lattice-Boltzmann fait intervenir des fonctions de distributions capables de représenter les quantités macroscopiques telles que la densité de particules  $n_p$  et la vitesse  $\underline{v}$ . Ces distributions sont définies sur l'espace des positions  $\underline{x}$  et l'espace des vitesses  $\underline{c}$ , elles sont donc de la forme  $f(\underline{x}, \underline{c}, t)$ . Lors de la discrétisation, l'espace des vitesses est découpé selon un ensemble de directions privilégiées finies à laquelle on associe une fonction de distribution  $f_k = f_k(\underline{x}, t)$  où  $k$  représente une de ces directions de l'espace. Les vecteurs vitesse utilisés dans le cas discret représentent la relation spatiale entre une cellule du réseau et ses plus proches voisins. À deux dimensions, on utilise par exemple fréquemment le réseau D2Q9i qui contient neuf vecteurs, un pour chacun des huit voisins, et un pour le vecteur nul représentant des particules au repos ne quittant pas la cellule (Fig. 2.25). L'algorithme de Lattice-Boltzmann se fait en deux étapes. La première étape est une étape de propagation du flux de particules d'un nœud du réseau  $\underline{x}_{ij}$  vers les nœuds voisins. Cette équation de propagation s'écrit

$$f_k(\underline{x}_{ij} + \underline{c}_k, t + 1) - f_k(\underline{x}_{ij}, t) = \Omega_k(\underline{x}_{ij}, t), \quad (2.22)$$

où  $\Omega$  représente l'opérateur de collision entre particules. La deuxième étape est celle de l'équilibre, la collision entre particules s'écrit comme la relaxation vers un équilibre local (méthode BGK). Dans ce cas l'opérateur de collision  $\Omega$  s'écrit

$$\Omega_k(\underline{x}_{ij}, t) = -\omega(\underline{x}_{ij}, t) (f_k(\underline{x}_{ij}, t) - f_k^{eq}(\underline{x}_{ij}, t)) \quad (2.23)$$

où  $f_k^{eq}$  est une version discrète de la distribution de Maxwell-Boltzmann et qui ne dépend que des quantités macroscopiques sous la forme

$$f_k^{eq} = t_k \left( n_p + \frac{1}{c_s^2} (c_k \cdot v) + \frac{1}{2c_s^4} (c_k \cdot v)^2 - \frac{1}{2c_s^2} \|v\|^2 \right) \quad (2.24)$$

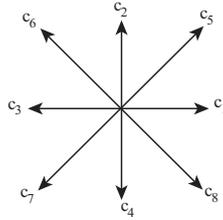
où  $c_s = 1/\sqrt{3}$  est la vitesse du son et  $t_k$  sont les coefficient de la distribution d'équilibre à  $v = \underline{0}$ . Le paramètre de relaxation est relié à la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide selon la relation

$$\nu = \frac{1}{6} \left( \frac{2}{\omega} - 1 \right). \quad (2.25)$$

On peut reconstituer les quantités macroscopiques grâce aux fonctions de distributions. Ainsi, on obtient

$$n_p = \sum f_k \quad \text{et} \quad v = \sum c_k f_k \quad (2.26)$$

Dans le cas d'un fluide incompressible, il existe une relation entre la densité de particules et la pression  $p/\rho_g = c_s^2 n_p$ .



**Figure 2.25** – Représentation des directions de propagation d'un nœud du réseau pour un modèle Lattice-Boltzmann D2Q9.

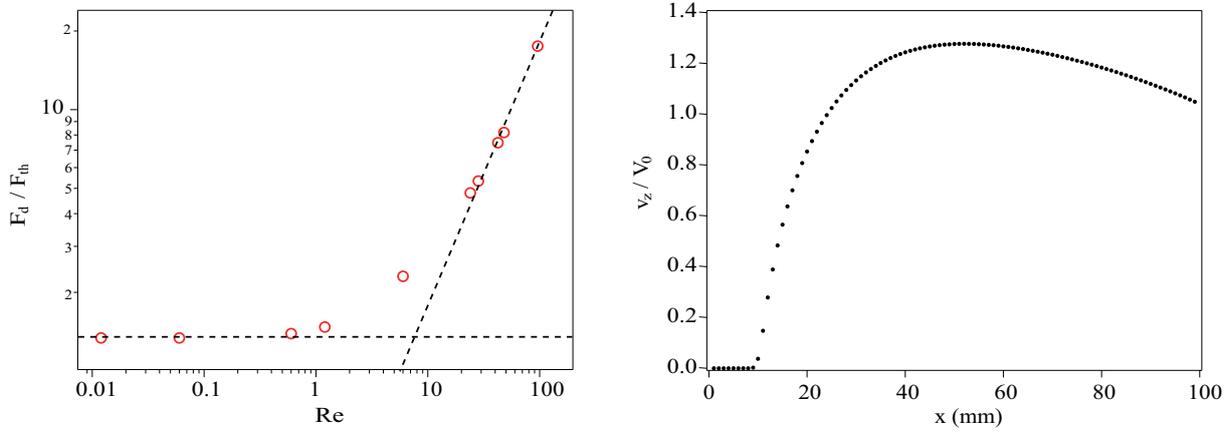
Afin de valider le code, nous avons d'abord réalisé des cas simples et connus en modélisant des fluides incompressibles de masse volumique  $\rho_f$  et de viscosité dynamique  $\eta_f$ . Nous avons ainsi regardé l'influence du nombre de Reynolds  $Re$  sur la force de traînée  $F_d$  d'un cylindre de diamètre  $d$ . On rappelle que le nombre de Reynolds représente le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses, il s'écrit  $Re = \rho_f V_0 d / \eta$ . La force de traînée est calculée en intégrant le profil de vitesse sur le volume de contrôle, soit

$$F_d = \frac{1}{3V_0} \int_{amont}^{aval} n_p v_y dx. \quad (2.27)$$

On compare cette force à une force théorique  $F_{th}$  pour les bas nombres de Reynolds ( $Re \ll 1$ ). Cependant, le calcul théorique de la force n'est pas simple puisque dans le cas de l'écoulement autour d'un cylindre, on ne peut jamais s'affranchir de la présence des parois. La géométrie d'un cylindre dans une boîte carré étant complexe d'un point de vue théorique, on connaît seulement l'expression théorique de la force au cas d'un fluide contenu dans un cylindre de diamètre  $B$  s'écoulant autour d'un cylindre de diamètre  $d$  (plus complexe d'un point de vue résolution numérique) par un développement limité [41]

$$F_{th} = 4\pi\eta \frac{V_0}{\ln\left(\frac{B}{d}\right) - 1}. \quad (2.28)$$

La figure 2.26a montre l'évolution du rapport  $F_d/F_{th}$  en fonction de  $Re$ . On constate que pour les faibles nombres de Reynolds, le rapport  $F_d/F_{th}$  vaut environ 1.2 au lieu de 1. Ces 20% d'écart sont à



**Figure 2.26** – (a) Rapport de force  $F_d/F_{th}$  en fonction de nombre de Reynolds  $Re$ . Points expérimentaux (○) et ajustement linéaire (---). (b) Profil de vitesse typique  $v_z/V_0$  à faible Reynolds ( $Re = 0.6$ ).

mettre dans la différence de configuration géométrique (la simulation se place dans le cadre d'un fluide contenu dans un boîte carrée s'écoulant autour d'un cylindre) et dans le fait que  $F_{th}$  est issue d'un développement limité. Pour les grands nombre de Reynolds, le rapport  $F_d/F_{th}$  augmente avec  $Re$  pour tendre vers une évolution linéaire de  $F_d/F_{th}$  avec  $Re$ . Ce comportement tel que  $F_d \propto V_0^2$  est bien le comportement aux grands nombres de Reynolds. Le profil de vitesse  $v_z/V_0$ , tracé pour les  $x$  croissants à partir du centre du cylindre 2.26b, ressemble à profil de Poiseuille décentré, dû aux conditions limites sur le cylindre et le bord avec une survitesse à cause de la conservation du débit sur une section plus faible au niveau du cylindre.

La résolution avec une méthode BGK ne s'imposait pas ici. Cependant, la méthode BGK est une méthode utilisée pour résoudre les écoulements instationnaires. Dans un premier temps, on s'est contenté de l'utiliser pour résoudre des équations stationnaires dans l'espoir de pouvoir l'étendre plus tard à des équations instationnaires et donc modéliser l'impact d'un projectile en milieu granulaire.

### Résolution de l'équation de la chaleur

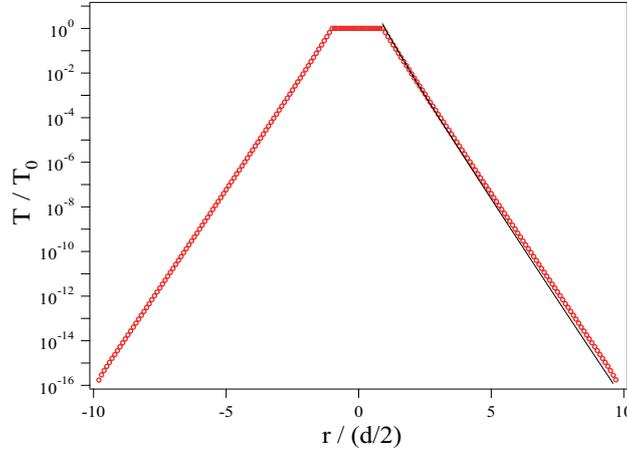
On souhaite résoudre ici l'équation de la chaleur dans le cas d'une sphère chaude dans un fluide immobile avec un terme de dissipation qui évolue linéairement avec la température. Dans ce cas, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\rho_g \frac{dT}{dt} = \text{div}(\kappa \underline{\text{grad}} T) - \gamma T \quad (2.29)$$

où  $\kappa$  est la conductivité thermique et  $\gamma$  un coefficient de dissipation volumique de chaleur ( $\kappa$  et  $\gamma$  sont constants). Dans un fluide immobile, si on cherche une solution stationnaire pour un écoulement 2D axisymétrique, l'équation devient

$$0 = \kappa \Delta T - \gamma T. \quad (2.30)$$

Cette équation est une équation de Helmholtz. En considérant les conditions limites : la température doit être nulle loin de la sphère (quand  $r \rightarrow 0$ ,  $T(r) \rightarrow 0$ ) et vaut  $T_0$  sur la sphère (en  $r = d/2$ ). L'équation a pour solution (en coordonnées sphériques)



**Figure 2.27** – Profil radial de température  $T/T_0$  selon  $r/d$  passant par le centre du projectile (o) et profil théorique (–) pour  $\kappa/\gamma = 6.2 \text{ mm}^2$ .

$$T(r) = T_0 \frac{d}{2r} \exp\left(-\sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}} \left(r - \frac{d}{2}\right)\right). \quad (2.31)$$

La figure 2.27 présente un profil radial de température  $T$  (en rouge) issu de la simulation pour une sphère de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  et  $\kappa/\gamma = 6.2 \text{ mm}^2$ . On compare ce résultat à la solution théorique (en noire) [Eq. (2.31)]. On constate qu'il y a un bon accord entre la théorie et la simulation, ce qui nous permet de valider le code.

### Couplage des équations

Le problème complet de la pénétration d'un objet dans un milieu granulaire sera modélisé par les équations de conservations [Eq. (1.18)] et les équations phénoménologiques [Eq. (1.26)]. On verra que ce problème peut être vu comme l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère chaude. Le couplage des équations se fait par la modification des coefficients de transport  $\kappa$  et  $\eta$  et du coefficient de dissipation volumique  $\varepsilon$  qui ne sont pas constant dans le cas d'un milieu granulaire [Eq. (1.26)]. Il nous faudra aussi prendre en compte le terme  $\underline{\underline{\sigma}}$  :  $\underline{\underline{D}}$  de production de chaleur provoqué par l'écoulement dans l'équation de la chaleur.

## 2.3 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté l'ensemble des outils expérimentaux, numériques et théoriques pour travailler sur l'impact d'un projectile en milieu granulaire. La mise en place des techniques de montage et d'acquisition de données ainsi que leur post-traitement représentent un travail assez conséquent qui doit être effectué avec rigueur pour pouvoir isoler les phénomènes physiques et les comprendre. Les quantités essentielles auxquelles on a accès expérimentalement concernant le projectile sont sa trajectoire et sa vitesse ainsi que la force exercée par le milieu granulaire. Quant aux grains, la donnée expérimentale la plus importante est leur champ de vitesse. En complément de ces expérimentations, on a mis en place des expériences numériques donnant toutes les informations nécessaires telle que la pénétration du projectile, le champ de vitesse des grains et la force exercée par le milieu granulaire sur le projectile. Nous

verrons dans la suite comment les modèles mis en place dans les codes numériques se comparent avec les résultats expérimentaux.

## Chapitre 3

# Vitesse imposée

Ce chapitre porte sur les résultats de pénétration d'un cylindre à vitesse imposée dans un milieu granulaire obtenus avec le dispositif décrit au chapitre 2. Dans un premier temps, nous présenterons les résultats de mesure de forces, puis dans un second temps, les champs de vitesse. Mais tout d'abord, nous allons mettre en place la définition des notations employées (Fig. 3.1). Un point  $M$  du milieu granulaire est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $(x, z)$  ou ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  par rapport au centre du cylindre.

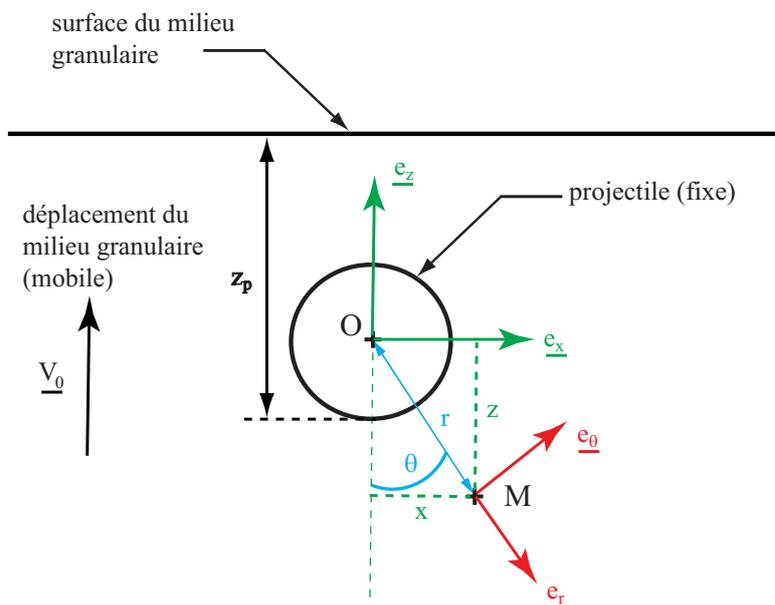
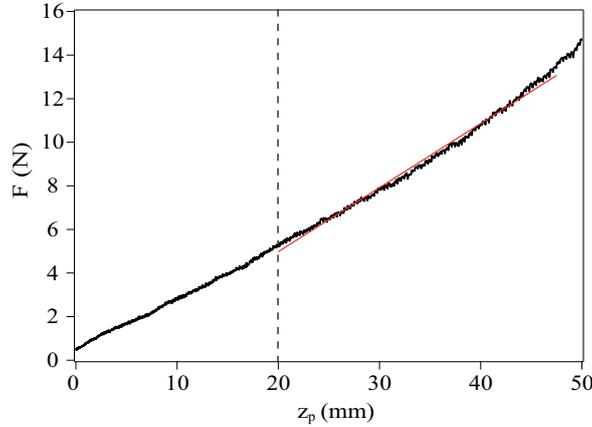


Figure 3.1 – Définition des systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques.

### 3.1 Mesure de forces

À l'aide du système de mesure de force installé sur le dispositif expérimental 2D à vitesse imposée décrit dans le chapitre 3, il est possible de déterminer l'évolution de la force exercée par le milieu granulaire



**Figure 3.2** – Mesure de force sur un cylindre de diamètre  $d = 20$  mm et de longueur  $b = 40$  mm en fonction de sa profondeur  $z_p$  de pénétration à vitesse constante  $V_0 = 5$  mm.s<sup>-1</sup> dans un milieu granulaire constitué de billes de verre de diamètre  $d_g = 1$  mm. Points expérimentaux (en noir) et ajustement linéaire  $F \propto z_p$  (en rouge) pour  $z_p < d$  avec  $k = 0.3 \pm 0.03$  N.mm<sup>-1</sup> et  $a = -1.3 \pm 0.6$  N.

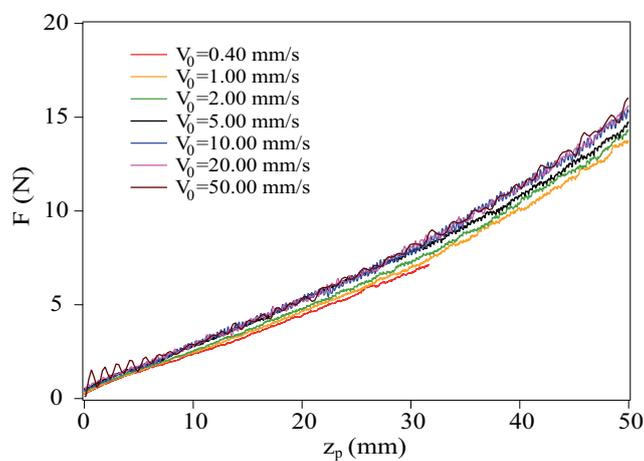
sur le cylindre au cours de sa pénétration. Dans l'ensemble des mesures présentées ici, le diamètre du cylindre est  $d = 20$  mm, sa longueur  $b = 40$  mm et le diamètre des grains est  $d_g = 1$  mm. La figure 3.2 présente l'évolution de la force  $F$  ressentie par le cylindre pendant sa pénétration à vitesse imposée  $V_0 = 1$  mm.s<sup>-1</sup> dans le milieu granulaire. D'une manière générale, on constate que la force  $F$  augmente lorsque la profondeur de pénétration  $z_p$  croît, de manière quasi-linéaire ( $F \propto z_p$ ) à partir du moment où le projectile est immergé ( $z_p > d$ ). On réalise l'ajustement des données dans cette zone de la forme  $F = kz_p + a$  (Fig. 3.2). On peut expliquer cette croissance quasi-linéaire par l'existence d'une pression  $p$  de type hydrostatique dans le milieu granulaire  $p \propto \rho_g g z_p$ .

En variant la vitesse de pénétration  $V_0$  sur plus de deux décades ( $0.4$  mm.s<sup>-1</sup>  $< V_0 < 50$  mm.s<sup>-1</sup>) on observe néanmoins une légère variation de  $F$  avec  $V_0$  (Fig. 3.3), mais d'autres campagnes d'essais similaires peuvent montrer la tendance inverse. En conclusion, en moyennant les différentes acquisitions effectuées, on trouve que la force  $F$  est indépendante de la vitesse  $V_0$  :  $F = kz_p + a$  avec  $k = 0.3 \pm 0.03$  N.mm<sup>-1</sup> et  $a = -1.3 \pm 0.6$  N.

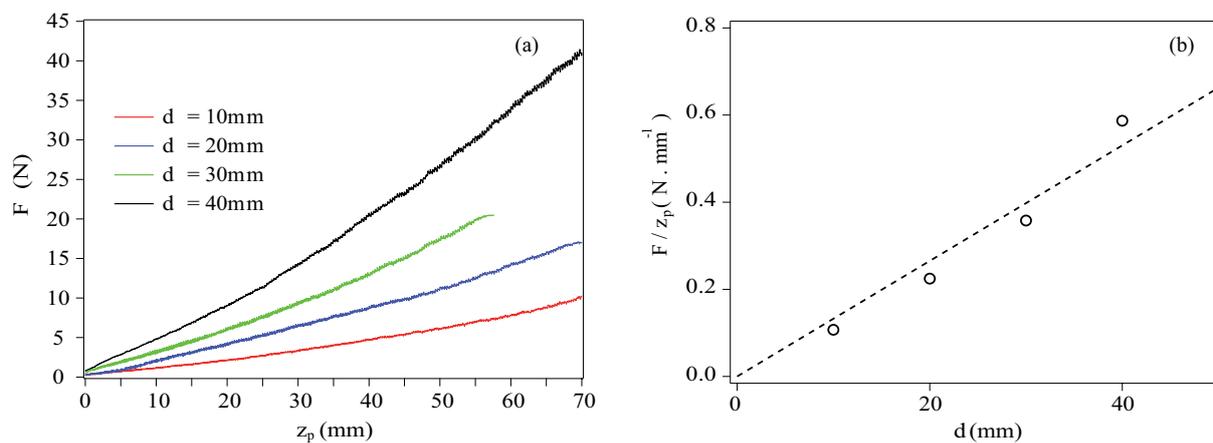
La figure 3.4a présente l'influence du diamètre du cylindre  $d$  sur la force mesurée au cours des pénétrations à  $V_0 = 5$  mm.s<sup>-1</sup>. On constate qu'à une profondeur donnée, la force exercée par le milieu granulaire augmente quand le diamètre  $d$  du cylindre augmente. Afin de caractériser l'influence de  $d$  sur  $F$ , on trace l'évolution de  $F/z_p$  en fonction de  $d$  (Fig. 3.4b). On voit que l'évolution est linéaire  $F/z_p \propto d$ . Ceci peut se comprendre par le fait que plus le cylindre a un diamètre important, plus la surface de contact entre les grains et le cylindre est importante ( $S = \pi bd$ ), et plus la force exercée est importante ( $F \propto S \propto d$ ).

La figure 3.5a présente l'influence de la taille des grains  $d_g$  sur la force mesurée au cours de la pénétration pour un cylindre de longueur  $b = 40$  mm et de diamètre  $d = 40$  mm, pour une vitesse de pénétration  $V_0 = 5$  mm.s<sup>-1</sup>. On remarque que plus la taille des grains est petite, plus la force exercée sur le cylindre par les grains est grande, surtout pour les plus petits grains ( $d_g = 0.5$  mm). Quand on trace l'évolution de  $F/z_p$  en fonction de  $d_g$  (Fig. 3.5b), on remarque que la force décroît d'abord significativement aux plus petites tailles de grains avant de tendre vers une valeur sensiblement constante pour les plus grandes valeurs de  $d_g$ .

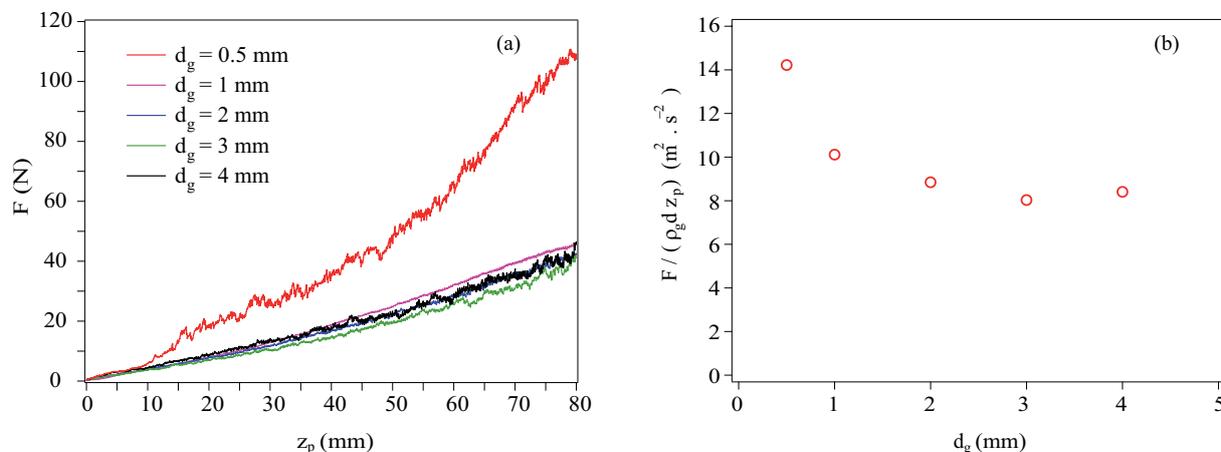
Certains de ces résultats ont été obtenus en juin 2010 lors du stage de M2 de Francisco Martinez [59].



**Figure 3.3** – Mesure de force sur un cylindre de diamètre  $d = 20$  mm et de longueur  $b = 40$  mm en fonction de sa profondeur  $z_p$  de pénétration pour différentes vitesses de pénétration constantes dans un milieu granulaire constitué de billes de verre de diamètre  $d_g = 1$  mm.



**Figure 3.4** – (a) Influence du diamètre  $d$  du cylindre sur la force exercée par le milieu granulaire ( $d_g = 1$  mm) sur le cylindre ( $b = 40$  mm en fonction de la pénétration  $z_p$  à  $V_0 = 5$  mm.s<sup>-1</sup>. (b) Evolution de  $F/z_p$  en fonction de  $d$ , points expérimentaux ( $\circ$ ) et ajustement linéaire  $F/z_p \propto d$ .



**Figure 3.5** – (a) Influence du diamètre  $d_g$  des grains sur la force exercée par le milieu granulaire sur un cylindre de diamètre  $d = 40$  mm et de longueur  $b = 40$  mm en fonction de sa profondeur de pénétration à vitesse constante  $V_0 = 5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . (b) Evolution de  $F/(\rho_g d z_p)$  en fonction de  $d_g$ .

## 3.2 Champ de vitesse dans le milieu granulaire

Le référentiel de travail est ici le référentiel du cylindre. Dans ce référentiel, le champ de vitesse des grains s'écrit dans un repère cartésien

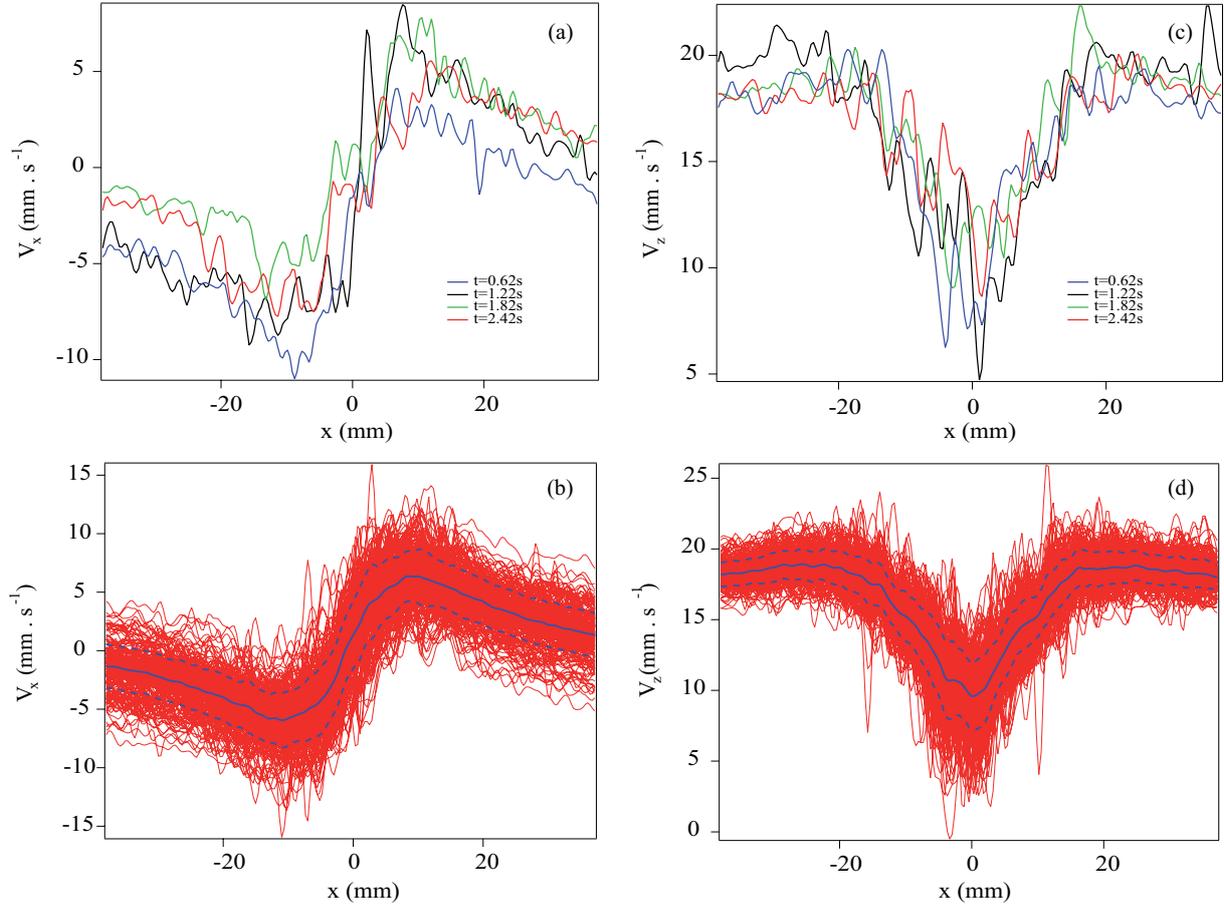
$$\underline{v}(x, z, t) = v_x(x, z, t)\underline{e}_x + v_z(x, z, t)\underline{e}_z, \quad (3.1)$$

où  $v_x$  est la composante horizontale du vecteur vitesse  $\underline{v}$  et  $v_z$  la composante verticale (Fig. 3.1). Ce champ dépend a priori de l'espace  $(x, z)$  et du temps  $t$ .

### 3.2.1 Stationnarité du champ de vitesse

Les figures 3.6a et 3.6c représentent quatre profils de vitesse  $v_x$  et  $v_z$  extraits selon une ligne horizontale ( $z = -15$  mm) à différents instants séparés de 0.6 s. Si l'allure générale est la même on observe des variations d'un profil à l'autre pouvant aller jusqu'à  $3 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . Lorsque l'on moyenne sur une période de temps plus longue (Fig. 3.6b et 3.6d), on constate que les profils varient autour d'une moyenne temporelle (ligne continue sur les figures 3.6b et 3.6d) avec une dispersion de l'ordre de  $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ . En faisant des moyennes glissantes temporellement tous les 20 profils, on constate que les moyennes sont égales. On en déduit que l'écoulement est stationnaire. On considérera donc que les profils sont indépendants du temps et on utilisera par la suite une moyenne temporelle de ces profils sur au moins 100 profils. La stationnarité de l'écoulement n'était pas forcément attendue puisque nous avons précisé plus haut (section 3.1) que la force ressentie par le cylindre augmentait avec la profondeur de pénétration  $z_p$  et donc avec le temps.

Le système possédant une géométrie cylindrique, il est logique que la composante  $v_z$  du champ de vitesse soit paire et que la composante  $v_x$  soit impaire. On voit aussi que le champ de vitesse tend vers le vecteur  $V_0 \underline{e}_z$  lorsqu'on s'éloigne du cylindre. La composante  $v_x$  possède ses maxima près du projectile :  $v_x$  est nulle à l'aplomb du cylindre, augmente, passe par un maximum puis décroît pour tendre vers 0 à grande distance du cylindre. La composante  $v_z$  possède un minimum à l'aplomb du cylindre. À partir de ce minimum la fonction croît pour atteindre la valeur  $V_0$  loin du cylindre.



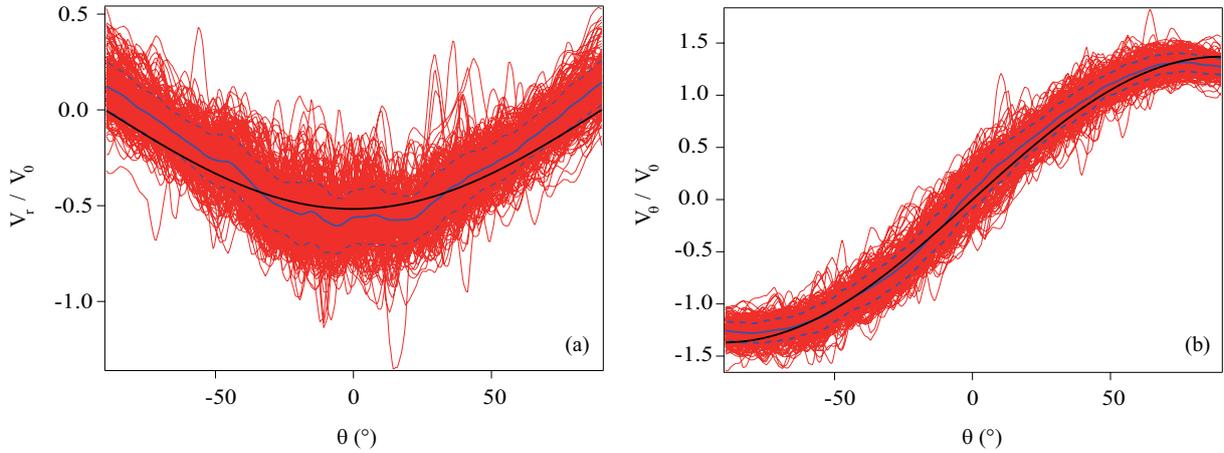
**Figure 3.6** – Profils de vitesse  $v_x$  et  $v_z$  extraits pour quatre instants de la pénétration (a,c) et pour l'ensemble des instants de la pénétration (b,d) d'un cylindre de diamètre  $d = 20$  mm et  $b = 40$  mm pénétrant le milieu granulaire ( $d_g = 1$  mm) à la vitesse  $V_0 = 20$  mm.s $^{-1}$ . Les profils sont tous extraits le long de la ligne horizontale située à  $z = -15$  mm du centre du projectile. Les courbes en traits épais plein et pointillé (b,d) indiquent respectivement la moyenne et l'écart type de l'ensemble des profils.

### 3.2.2 Dépendance radiale et azimutale de la vitesse

Étant donnée la géométrie du système, celle d'un cylindre se déplaçant dans un milieu infini, on va donc travailler dans un repère cylindrique avec les variables d'espace  $(r, \theta)$ . La figure 3.1 présente le paramétrage employé dans toute la suite des études. Ainsi le champ de vitesse des grains  $\underline{v}$  s'écrit

$$\underline{v}(r, \theta) = v_r(r, \theta)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta)\underline{e}_\theta, \quad (3.2)$$

où  $v_r$  est la composante radiale du vecteur vitesse  $\underline{v}$  et  $v_\theta$  la composante azimutale. La figure 3.7 montre l'ensemble des profils de vitesses  $v_r$  et  $v_\theta$  normalisés par la vitesse de pénétration  $V_0$  en fonction de  $\theta$  à la distance radiale  $r = 15$  mm donc proche du cylindre. On constate que l'évolution moyenne de  $v_\theta(\theta)/V_0$  est très proche d'un sinus. On choisit alors de faire un ajustement de la forme  $A_\theta \sin \theta$  où  $A_\theta$  est l'amplitude qui dépend de  $r$ . Pour  $v_r(\theta)/V_0$ , la courbe moyenne est proche d'un cosinus et on choisit un ajustement de la forme  $-A_r \cos \theta$  où  $A_r$  est l'amplitude qui dépend de  $r$ . Ainsi, nous considérons que



**Figure 3.7** – Profils de vitesse adimensionnés (a)  $v_r/V_0$  et (b)  $v_\theta/V_0$  avec leur moyenne (trait plein bleu) et écart type correspondants (trait pointillé bleu) et les ajustement (trait plein noir) de ces moyennes en (a)  $-A_r \cos \theta$  et (b)  $A_\theta \sin \theta$  avec  $A_r = 0.51$  et  $A_\theta = 1.38$ .

le champ de vitesse des grains peut se mettre sous la forme

$$\underline{v}(r, \theta) = -V_0 A_r(r) \cos \theta \underline{e}_r + V_0 A_\theta(r) \sin \theta \underline{e}_\theta, \quad (3.3)$$

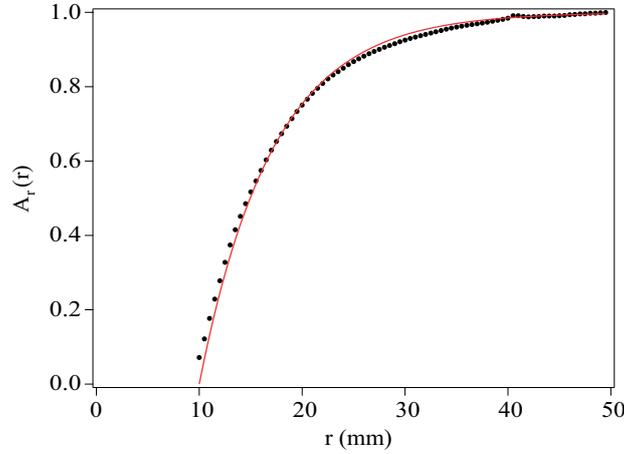
où  $A_r$  et  $A_\theta$  sont des fonctions d'amplitude à déterminer. Cette décomposition du champ de vitesse des grains en fonctions séparables de  $r$  et  $\theta$  est bien sûr discutable, et le choix des fonctions trigonométriques simples l'est aussi. La vitesse radiale  $v_r$  ne tend pas vers 0 lorsque qu'on tend vers  $\theta = 90^\circ$  et l'ajustement en cosinus sous évalue son maximum d'amplitude en  $\theta = 0^\circ$ . Néanmoins, cette décomposition simple est utile pour analyser les résultats.

### Dépendance radiale de la vitesse radiale : détermination de $A_r(r)$

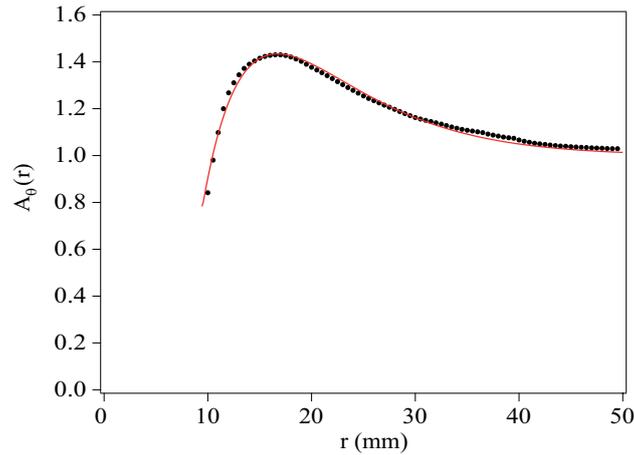
Il est maintenant possible de déterminer la fonction d'amplitude  $A_r$  en faisant varier la distance  $r$  à laquelle on réalise l'ajustement en cosinus. La figure 3.8 présente l'allure caractéristique obtenue  $A_r(r)$ . On remarque que l'amplitude croît de plus en plus lorsqu'on s'éloigne du cylindre pour atteindre une valeur plateau égale à 1. Cela est cohérent avec le fait que les grains loin du cylindre ne ressentent pas la présence de celui-ci et se déplacent à la vitesse  $V_0$ . De plus, on constate qu'en  $r = d/2$ , cette fonction d'amplitude  $A_r$  est nulle. Ceci semble indiquer un point d'arrêt, ce qui n'est pas surprenant compte tenu de la non-interpénétrabilité du cylindre vis-à-vis des grains. La courbe a une allure exponentielle, on choisit alors un ajustement de la forme

$$A_r(r) = 1 - \exp\left(-\frac{2r - d}{2\lambda}\right) \quad (3.4)$$

faisant apparaître ainsi une longueur caractéristique d'évolution du champ de vitesse  $\lambda = 7.1$  mm (voir ajustement sur la figure 3.8). On peut développer un modèle géométrique simple pour rendre compte de cette évolution (voir annexe Annexe A).



**Figure 3.8** – Fonction d’amplitude  $A_r$  de la vitesse radiale (●) et ajustement  $A_r(r) = 1 - \exp[-(2r - d)/2\lambda]$  avec  $\lambda = 7.1$  mm (—).



**Figure 3.9** – Fonction d’amplitude  $A_\theta$  de la vitesse azimutale (●) et ajustement (—) par l’équation (3.8) avec  $\lambda_{\theta 1} = 6.1$  mm,  $\lambda_{\theta 2} = 6.9$  mm et  $\lambda_{\theta 3} = 10.1$  mm.

#### Dépendance radiale de la vitesse azimutale : détermination de $A_\theta(r)$

La figure 3.9 présente l’évolution de l’amplitude  $A_\theta$  en fonction de  $r$ . On constate que l’allure est assez différente de  $A_r$ , avec une variation non-monotone qui tend cependant aussi vers une valeur plateau égale 1 lorsque  $r$  tend vers l’infini, signe que les grains loin du cylindre se déplacent à la vitesse  $V_0$ . Il est moins évident ici que l’amplitude de la vitesse des grains placés contre le cylindre (en  $r = d/2$ ) soit nulle car il peut y avoir un glissement relatif mais la méthode PIV ne permet pas de bien distinguer la frontière entre le cylindre et le milieu granulaire. La grande différence par rapport à  $A_r$  est la présence de ce dépassement de l’amplitude de la vitesse, avec une vitesse des grains supérieure d’environ 40% à la vitesse  $V_0$ , ce qui n’est pas négligeable. L’autre caractéristique de cette courbe est le point d’inflexion qui se situe après le dépassement lié à la présence d’une asymptote horizontale pour les  $r$  grands. Cette allure est assez

différente de celle obtenue pour l'écoulement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre. En effet, dans le cas fluide, on obtient aussi un dépassement mais réparti de manière plus uniforme sur l'espace (ceci est dû à la conservation du débit) et on n'observe pas de point d'inflexion ni d'asymptote horizontale loin du cylindre (chapitre 2). Cette allure de  $A_\theta$  est donc très particulière et propre aux milieux granulaires.

Le type de profils obtenu peut s'expliquer en considérant l'hypothèse de conservation de la masse avec divergence du champ de vitesse nulle. Cette hypothèse a été abordée dans le chapitre 2 pour la phase dense située sous le projectile. En écrivant  $\text{div} \underline{v} = 0$  qui se traduit en coordonnées cylindriques :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad (3.5)$$

En introduisant les fonctions d'amplitudes  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ , l'équation (3.5) devient :

$$\frac{\partial(rA_r(r))}{\partial r} - A_\theta(r) = 0, \quad (3.6)$$

ce qui donne en remplaçant  $A_r(r)$  par le modèle défini plus haut [Eq.(A.15)]

$$A_\theta(r) = 1 + \frac{r - \lambda}{\lambda} \exp\left(-\frac{2r - d}{2\lambda}\right). \quad (3.7)$$

Ce modèle est trop restrictif pour être appliqué au calcul expérimental de  $A_\theta(r)$ . En effet, la présence d'une seule longueur caractéristique n'est pas respectée pour l'essai. Ce modèle ne tient pas compte d'un glissement relatif pouvant exister entre les grains et le cylindre en  $r = d/2$ . Cependant, l'allure définie en  $r \exp(-r/(d/2))$  semble particulièrement appropriée pour décrire les résultats simplement.

### Nouveau modèle pour le champ de vitesse

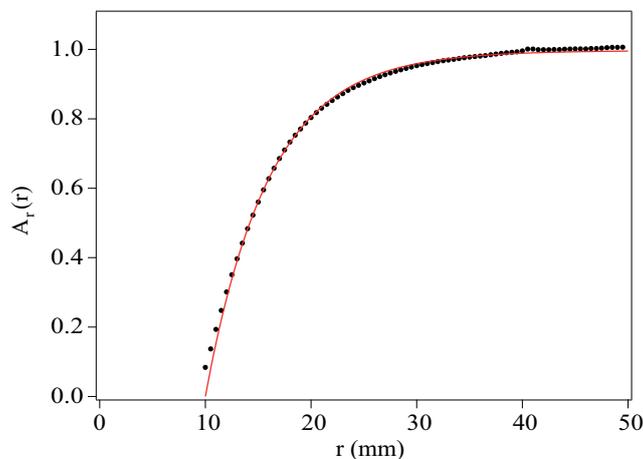
Après l'analyse effectuée plus haut, on peut construire un modèle plus complexe qui va prendre en compte le glissement relatif entre les grains et le cylindre en  $r = d/2$  et qui va aussi respecter la condition de divergence nulle du champ de vitesse. Pour donner plus de souplesse au modèle, on garde la même forme analytique pour  $A_\theta$  en séparant les valeurs des trois endroits où apparaît la constante  $\lambda$  soit

$$A_\theta(r) = 1 + \frac{r - \lambda_{\theta 3}}{\lambda_{\theta 1}} \exp\left(-\frac{r - d/2}{\lambda_{\theta 2}}\right), \quad (3.8)$$

où  $\lambda_{\theta 1}$ ,  $\lambda_{\theta 2}$  et  $\lambda_{\theta 3}$  sont trois longueurs caractéristiques de l'évolution dans l'espace du champ de vitesse. La longueur  $\lambda_{\theta 3}$  est ici la longueur de glissement. En appliquant la condition de divergence nulle [Eq. (3.6)] et la condition de non-interpénétrabilité du cylindre ( $A_r(r = d/2) = 0$ ), on écrit que

$$A_r(r) = 1 - \frac{d}{2r} \left(1 - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2}\right) - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{r + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{r} \exp\left(-\frac{r - d/2}{\lambda_{r2}}\right) \quad (3.9)$$

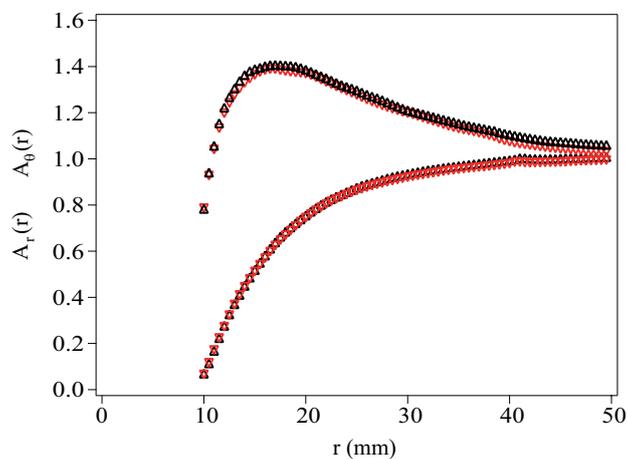
et on obtient alors des conditions supplémentaires  $\lambda_{r1} = \lambda_{\theta 1} = \lambda_1$ ,  $\lambda_{r2} = \lambda_{\theta 2} = \lambda_2$  et  $\lambda_{r3} = \lambda_{\theta 3} = \lambda_3$ . Ensuite, on remarque que la nouvelle forme de  $A_r$  n'est pas si éloignée d'une exponentielle. Dès que  $r$  croît, la fraction rationnelle devant le facteur de l'exponentielle devient équivalente à 1 et le terme en  $1/r$  est négligeable devant l'exponentielle. Finalement, on obtient une forme un peu plus complexe qu'une simple exponentielle mais pour  $r$  grand, on retrouve le même comportement qu'une exponentielle simple. Si on applique ce modèle à nos résultats expérimentaux (Figs. 3.9 et 3.10), celui-ci fournit  $\lambda_{r1} = 5.3$  mm,  $\lambda_{\theta 1} = 6.1$  mm et  $\lambda_{r2} = 6.9$  mm,  $\lambda_{\theta 2} = 6.9$  mm et  $\lambda_{r3} = 9.1$  mm,  $\lambda_{\theta 3} = 10.1$  mm. Les ajustements de  $A_r$  sur les figures 3.8 et 3.10 sont très proches même si celui donné par l'équation (3.9) est un peu meilleur. On voit que ces longueurs sont du même ordre de grandeur et donc on considérera dorénavant les mêmes  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  pour décrire à la fois  $A_r$  et  $A_\theta$ .



**Figure 3.10** – Fonction d’amplitude  $A_r$  de la vitesse radiale ( $\bullet$ ) et ajustement ( $-$ ) par l’équation (3.9) avec  $\lambda_{r1} = 5.3$  mm,  $\lambda_{r2} = 6.9$  mm et  $\lambda_{r3} = 9.1$  mm.

### Reproductibilité du champ de vitesse

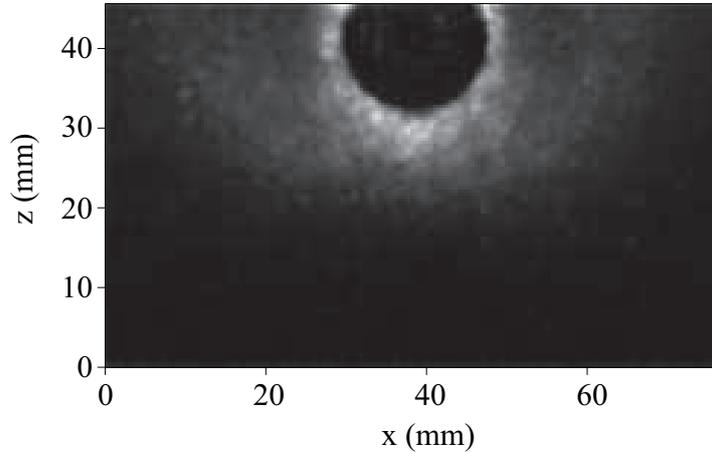
La figure 3.11 présente les fonctions d’amplitude pour deux essais semblables. On voit clairement que les résultats sont similaires et donc reproductibles. Dans la suite des études, nous décrivons le champ de vitesse à l’aide des fonctions d’amplitude  $A_r$  et  $A_\theta$  et en particulier des longueurs caractéristiques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Même si le modèle correspondant est discutable, il permet de facilement caractériser l’influence des paramètres sur le système.



**Figure 3.11** – Fonctions d’amplitude  $A_r$  et  $A_\theta$  de la vitesse pour deux essais ( $\Delta$ ) et ( $\nabla$ ).

### 3.2.3 Champ de température granulaire $T$

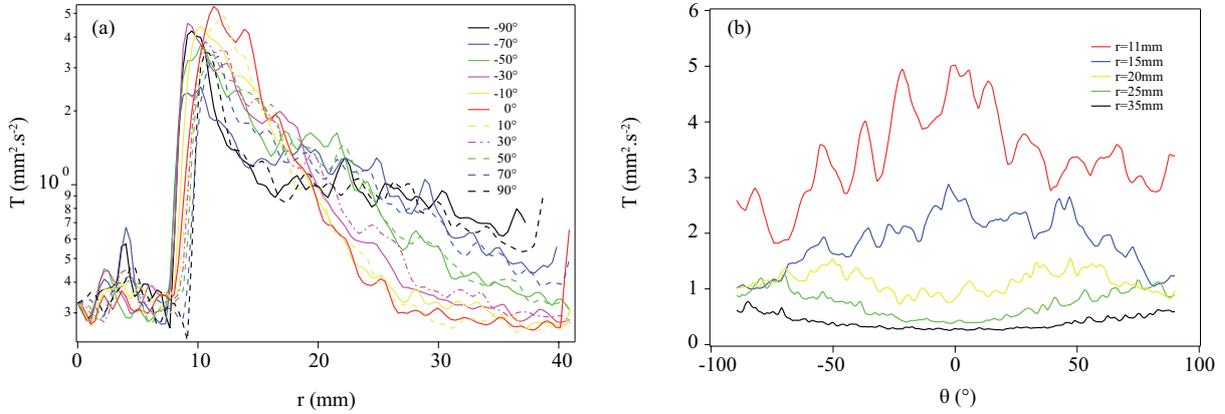
Comme l'écoulement autour du cylindre est un écoulement stationnaire, il est possible de calculer une température granulaire  $T$  en tout point de l'espace (voir chapitre 3). La figure 3.12 présente une image du champ de température granulaire  $T$  autour d'un cylindre pour l'essai de pénétration à  $V_0 = 10 \text{ mm.s}^{-1}$  d'un cylindre de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  dans un milieu granulaire dont le diamètre des grains est  $d_g = 1 \text{ mm}$ . Les zones de température granulaire basse sont en noir, les zones de haute température granulaire sont en blanc. Le cylindre reconnaissable par sa géométrie est lui aussi en noir pour des raisons de traitement de données. On observe sur cette figure qu'existe une zone de haute température au voisinage immédiat du cylindre.



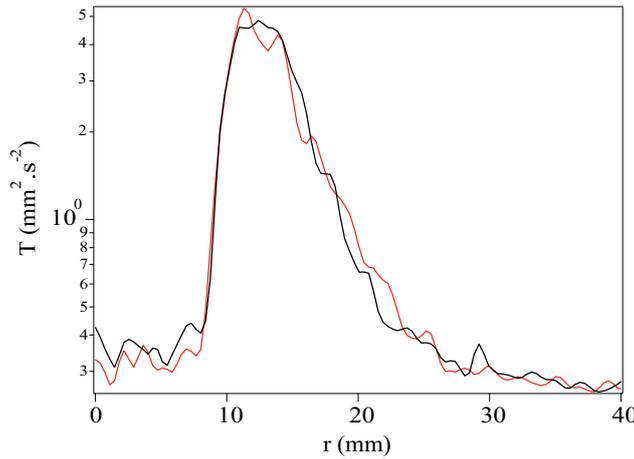
**Figure 3.12** – Cartographie du champ de température granulaire pour  $V_0 = 10 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ . La température est codée en niveaux de gris (blanc : température élevée; noir : température faible).

Pour avoir une vision plus quantitative de la variation radiale et azimutale de la température granulaire, nous avons tracé  $T(r)$  pour différentes valeurs de  $\theta$  (Fig. 3.13a) et  $T(\theta)$  pour différentes valeurs de  $r$  (Fig. 3.13b). Sur la figure 3.13a, les profils sont extraits sur des demi-droites qui ont pour origine le centre du cylindre avec une direction donnée par l'angle  $\theta$ . On constate effectivement que d'une manière générale, plus on s'éloigne du cylindre, plus la température diminue. Il y a une symétrie gauche-droite du champ de température ( $T(\theta) = T(-\theta)$ ) mais le champ de température n'est pas axisymétrique. Tout d'abord la température est maximale au voisinage du cylindre puis décroît quand on s'éloigne du cylindre. Au voisinage du cylindre, la décroissance de la température est quasiment nulle : la température semble constante. Sur la figure 3.13b, les profils de température sont extraits sur des cercles concentriques au cylindre à différentes valeurs de  $r$ . On constate effectivement la symétrie gauche droite, les courbes sont paires. Proche du cylindre, la température est maximale à la verticale du cylindre ( $\theta = 0^\circ$ ) et décroît ensuite lentement lorsque  $\theta$  augmente. Lorsqu'on s'éloigne du cylindre, il semblerait que il y ait une inversion de concavité de la courbe même si on approche ici dans les limites de mesures du système. Cependant, dans la suite des études, nous nous concentrerons sur le profil de température  $T(r, 0)$  situé à l'aplomb du cylindre en  $\theta = 0^\circ$ .

La figure 3.14 montre deux champs de température pour deux essais dans les mêmes conditions, à  $V = 10 \text{ mm.s}^{-1}$ . On constate que les 2 essais donnent des résultats très semblables. Ceci montre la bonne reproductibilité des résultats et du protocole de l'expérience. Afin de limiter les fluctuations des mesures, on réalise une moyenne de trois essais pour obtenir le champ de température (Fig. 3.14).



**Figure 3.13** – Profils radiaux et azimutaux de température granulaire  $T(r, \theta)$  : (a)  $T(r, 0)$  à différents  $\theta$  et (b)  $T(0, \theta)$  à différents  $r$ .

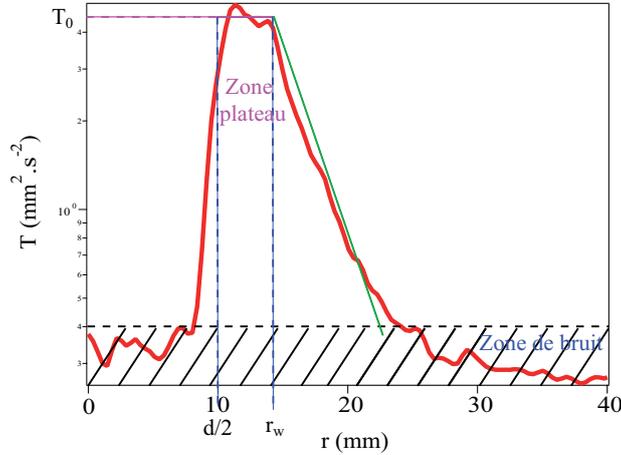


**Figure 3.14** – Profil radial de température granulaire  $T(r, 0)$  pour deux essais ( $V_0 = 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $d = 20 \text{ mm}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).

La figure 3.15 présente les différentes zones de variations de  $T$  par rapport à la distance  $r$  au centre du projectile. Pour  $r < d/2$ , on constate que la température granulaire mesurée est très faible. En fait, idéalement, étant dans le projectile, cette température devrait être nulle. Ceci nous permet cependant de quantifier le niveau de bruit qui est ici de l'ordre de  $T = 4 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Le domaine de bruit est signalé en zone hachurée sur la figure 3.15. Ensuite, on observe un plateau jusqu'à la distance  $r_w$  où la température est sensiblement constante. Dans cette zone ( $d/2 < r < r_w$ ), la température granulaire sera notée  $T_0$ . Enfin, au-delà, pour  $r > r_w$ , on remarque que la température granulaire décroît rapidement jusqu'à la limite du mesurable, avec une décroissance de type exponentiel. Afin de modéliser cette décroissance, on prendra un ajustement de la forme :

$$T(r) = T_0 \exp\left(-\frac{r - r_w}{\lambda_T}\right), \quad (3.10)$$

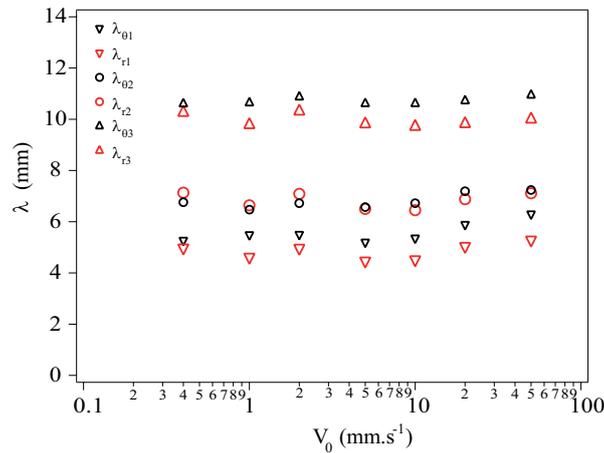
avec la longueur caractéristique de décroissance  $\lambda_T$ .



**Figure 3.15** – Mise en évidence des différents domaines de la température granulaire  $T$ . Ajustement constant du plateau de température (trait plein rose), on trouve  $T_0 = 4.4 \cdot 10^{-6} \text{ mm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Ajustement exponentiel de la décroissance de  $T$  par l'équation 3.10 (trait plein vert), avec  $r_w = 14.2 \text{ mm}$  et  $\lambda_T = 3.2 \text{ mm}$ .

### 3.2.4 Influence de la vitesse de pénétration $V_0$

On s'intéresse ici à l'influence de la vitesse de pénétration imposée  $V_0$  sur les fonctions d'amplitude  $A_r$  et  $A_\theta$  ainsi que sur la température granulaire  $T$ . La figure 3.16 présente l'évolution des longueurs caractéristiques  $\lambda_{r1}$ ,  $\lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2}$ ,  $\lambda_{\theta2}$ ,  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta3}$  avec  $V_0$  pour la pénétration d'un cylindre de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  dans un milieu granulaire dont le diamètre des grains est  $d_g = 1 \text{ mm}$ . On constate une faible variation des coefficients avec la vitesse  $V_0$  mais surtout que  $\lambda_{r1} \simeq \lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2} \simeq \lambda_{\theta2}$  et  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3}$ .



**Figure 3.16** – Longueurs caractéristiques  $\lambda_{r_i}$  et  $\lambda_{\theta_j}$  d'évolution de la vitesse en fonction de  $V_0$  ( $d = 20 \text{ mm}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).

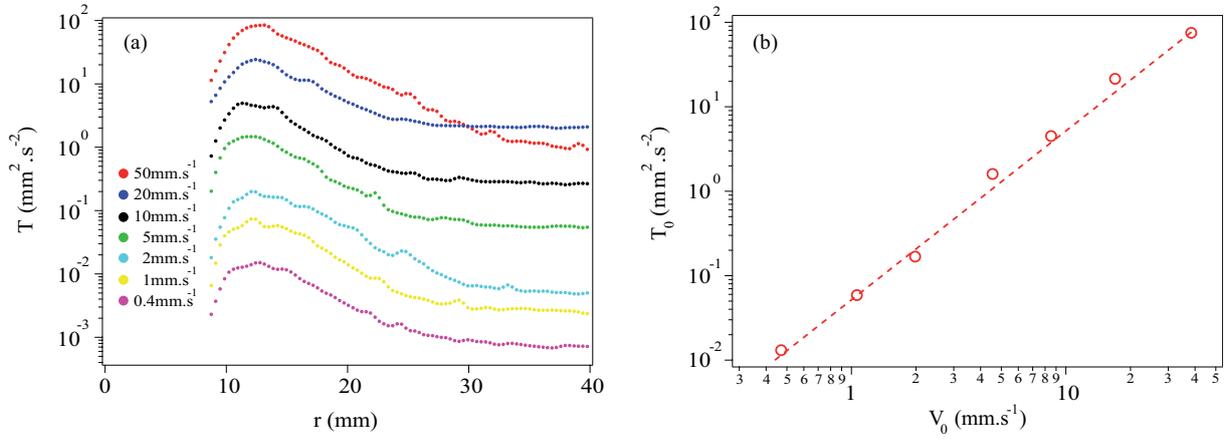
La figure 3.17a représente les profils de  $T(r, 0)$  pour différentes valeurs de la vitesse de pénétration  $V_0$ . On constate que les profils sont identiques à une translation près et donc à un coefficient multiplicateur

près que nous allons déterminer. La valeur plateau  $T_0$  de cette température est tracée en fonction de  $V_0$  dans un diagramme log-log sur la figure 3.17b. La valeur de  $T_0$  augmente selon une loi de puissance quand  $V_0$  augmente : ainsi,  $T_0$  varie comme  $V_0^2$ , signifiant que l'amplitude des fluctuations de vitesses est proportionnelle au carré de la vitesse et fournissant la loi d'échelle attendue

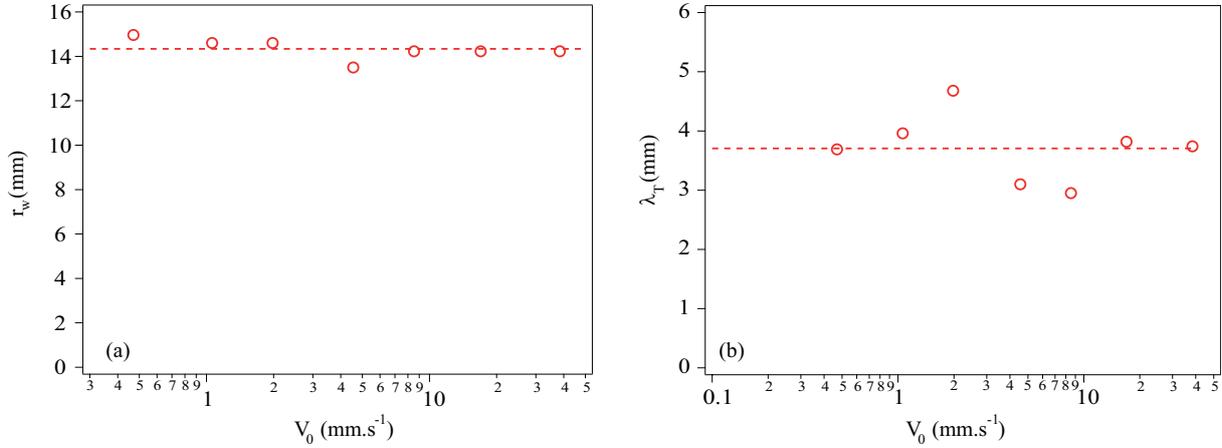
$$T_0 \propto V_0^2. \quad (3.11)$$

Sur les figures 3.18a et 3.18b sont tracées les autres quantités caractéristiques  $r_w$  et  $\lambda_T$  de l'évolution de la température granulaire  $T$  avec la vitesse  $V_0$ , où l'on constate que  $r_w$  et  $\lambda_T$  ne dépendent pas de  $V_0$ , avec les valeurs moyennes  $r_w = 14.3 \pm 0.2$  mm et  $\lambda_T = 3.7 \pm 0.3$  mm.

Certains de ces résultats ont été obtenus en juin 2009 lors du stage de M1 de Quentin Ruppert que j'ai participé à encadrer [75].



**Figure 3.17** – (a) Profil radial de température granulaire  $T$  pour différentes vitesses de pénétration  $V_0$ . (b) Plateau de température  $T_0$  en fonction de la vitesse de pénétration  $V_0$ . (—) Ajustement en loi de puissance  $T_0 \propto V_0^2$ .



**Figure 3.18** – (a) Longueur  $r_w$  de plateau et (b) longueur  $\lambda_T$  de décroissance radiale de température en fonction de la vitesse de pénétration  $V_0$ . Données expérimentales (o) et valeurs moyennes (—) avec  $r_w = 14.3$  mm  $\lambda_T = 3.7$  mm.

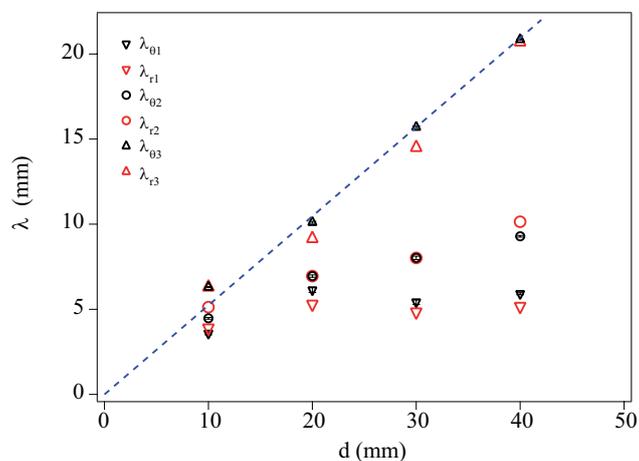
### 3.2.5 Influence du diamètre du cylindre $d$

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence du diamètre du cylindre  $d$  sur l'ensemble des quantités extraites du problème. La figure 3.19 présente l'évolution des longueurs caractéristiques  $\lambda_{r1}$ ,  $\lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2}$ ,  $\lambda_{\theta2}$ ,  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta3}$  (on garde ici l'ensemble des longueurs pour avoir de la souplesse dans les ajustements) en fonction du diamètre du cylindre  $d$  à  $V = 50$  mm.s<sup>-1</sup> et  $d_g = 1$  mm. On remarque que  $\lambda_{r1} \simeq \lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2} \simeq \lambda_{\theta2}$  et  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3}$ . On remarque aussi que  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta3}$  augmentent linéairement avec  $d$ . De plus, un ajustement linéaire donne une pente de 0.5 : on a donc  $\lambda_{r3} = \lambda_{\theta3} = \lambda_3 = d/2$ . Ceci est caractéristique d'un glissement total des grains à la paroi du cylindre. De plus, on remarque que  $\lambda_{r1} \simeq \lambda_{\theta1}$  et que ces longueurs ne sont pas influencées par le diamètre du cylindre  $d$ . Enfin, on remarque que  $\lambda_{r2} \simeq \lambda_{\theta2}$  et que ces longueurs augmentent de manière affine avec le diamètre du cylindre  $d$ .

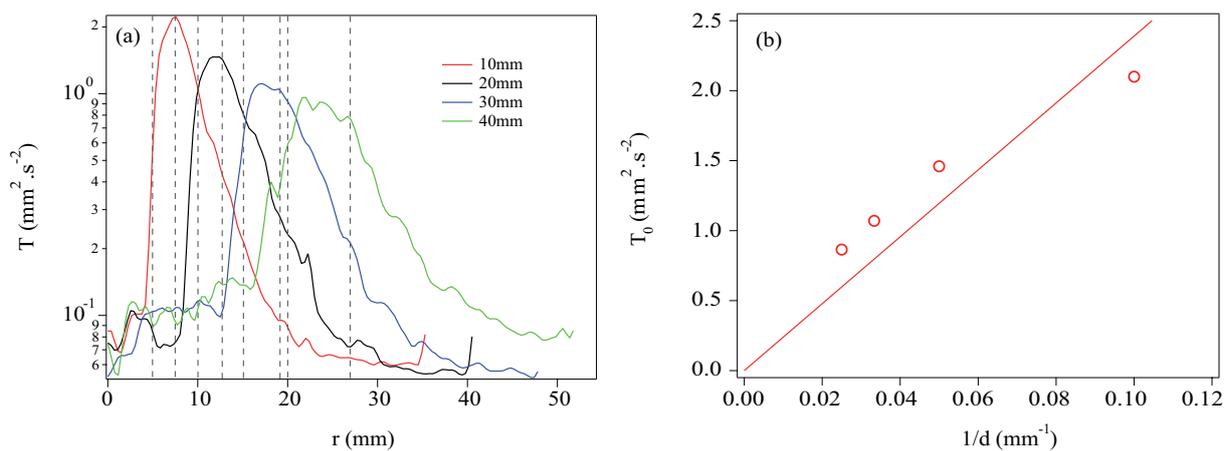
Si on s'intéresse maintenant à la température granulaire  $T$ , on remarque que le diamètre du cylindre  $d$  joue aussi un rôle important (Fig. 3.20a). La figure 3.20b montre l'évolution du plateau de température  $T_0$  en fonction de  $1/d$  avec un ajustement linéaire. Cet ajustement est discutable mais pour des raisons dimensionnelles d'après les lois d'échelle données par la relation (3.11) déjà établi et la relation (3.13) à suivre, on considérera que  $T_0 \propto 1/d$ , et donc que

$$T_0 \propto \frac{V_0^2}{d}. \quad (3.12)$$

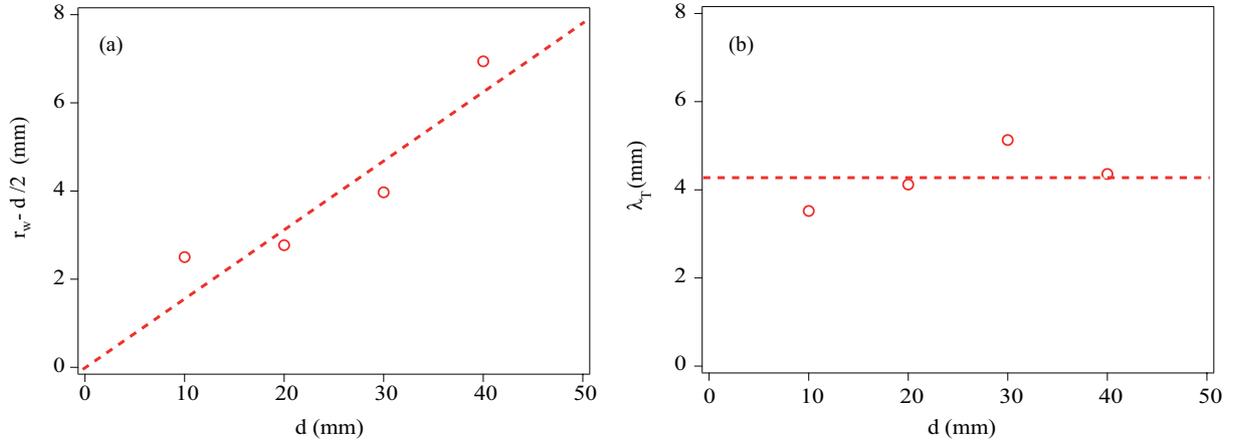
Les figures 3.21a et 3.21b présentent les évolutions de  $r_w - d/2$  et  $\lambda_T$  avec  $d$ . On constate que  $r_w - d/2$  augmente avec  $d$  de manière linéaire ou plus complexe et que  $d$  n'a pas d'influence sur  $\lambda_T$  ( $\lambda_T = 4.3 \pm 0.3$  mm).



**Figure 3.19** – Longueurs caractéristiques  $\lambda_{r1}$ ,  $\lambda_{\theta 1}$ ,  $\lambda_{r2}$ ,  $\lambda_{\theta 2}$ ,  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta 3}$  d'évolution radiale de la vitesse en fonction de  $d$  pour  $V = 50 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ . Points expérimentaux ( $\circ$ ), ( $\Delta$ ), ( $\nabla$ ) et ajustement linéaire (---)  $\lambda = d/2$  sur  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta 3}$ .



**Figure 3.20** – Évolutions (a) du profil  $T(r, 0)$  et (b) du plateau  $T_0$  de température en fonction de  $d$ .

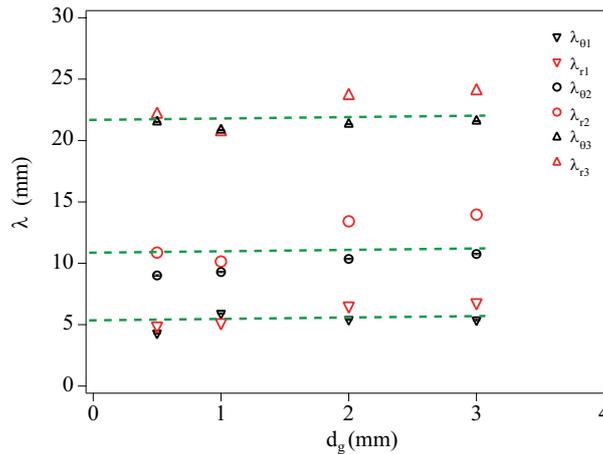


**Figure 3.21** – Évolutions (a) des longueurs de plateau  $r_w - d/2$  et (b) de décroissance radiale de température  $\lambda_T$  en fonction de  $d$ . Points expérimentaux ( $\circ$ ) et ajustements ( $---$ ) linéaire (a) et constant (b).

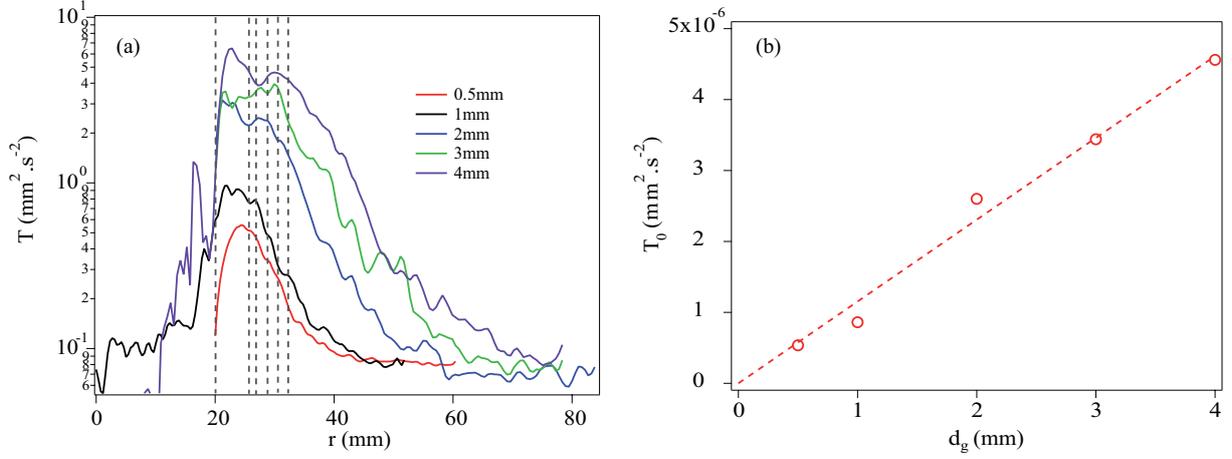
### 3.2.6 Influence du diamètre des grains $d_g$

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence du diamètre des grains  $d_g$  sur l'ensemble des grandeurs caractéristiques du problème. La figure 3.22 présente l'évolution des longueurs caractéristiques  $\lambda_{r1}$ ,  $\lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2}$ ,  $\lambda_{\theta2}$ ,  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta3}$  à  $V = 50 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $d = 40 \text{ mm}$  pour différents diamètres de grains  $d_g$ . On constate avant tout  $\lambda_{r1} \simeq \lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2} \simeq \lambda_{\theta2}$  et  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3}$  et d'autre part que  $d_g$  n'a pas d'influence significative sur ces longueurs caractéristiques.

Cependant, on remarque que le diamètre des grains  $d_g$  a une influence notable sur la température granulaire  $T$  comme le montre la figure 3.23a. La figure 3.23b précise l'évolution du plateau de température



**Figure 3.22** – Longueurs caractéristiques  $\lambda_{r1}$ ,  $\lambda_{\theta1}$ ,  $\lambda_{r2}$ ,  $\lambda_{\theta2}$ ,  $\lambda_{r3}$  et  $\lambda_{\theta3}$  d'évolution de la vitesse radiale et azimutale en fonction de  $d_g$  pour  $V = 50 \text{ mm.s}^{-1}$  et  $d = 40 \text{ mm}$ . Points expérimentaux ( $\circ$ ), ( $\Delta$ ), ( $\nabla$ ) et valeurs moyennes ( $---$ )  $\lambda_{r1} \simeq \lambda_{\theta1} \simeq 5.5 \pm 0.3 \text{ mm}$ ,  $\lambda_{r2} \simeq \lambda_{\theta2} \simeq 11 \pm 0.6 \text{ mm}$  et  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3} \simeq 22 \pm 0.6 \text{ mm}$

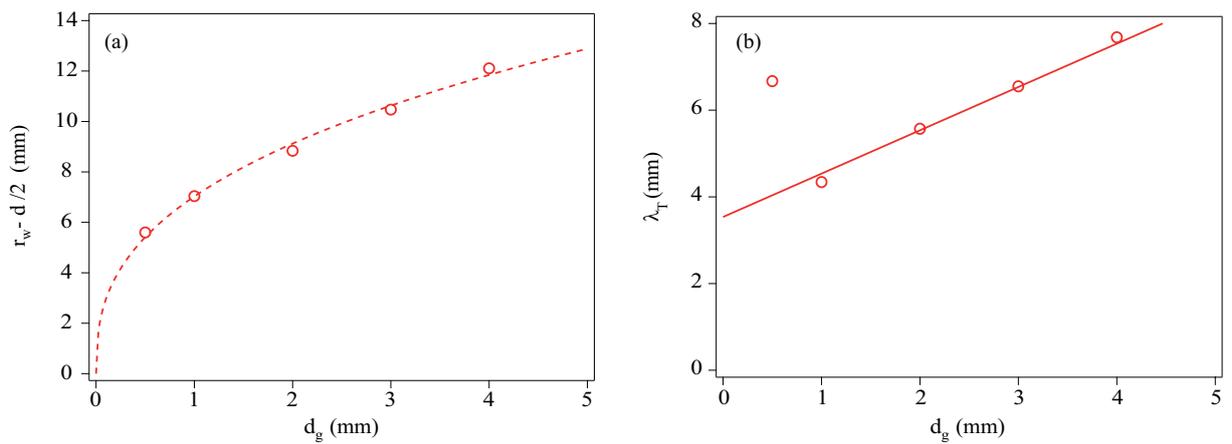


**Figure 3.23** – Évolutions (a) du profil  $T(r,0)$  et (b) du plateau  $T_0$  en fonction de  $d_g$ .

$T_0$  en fonction de  $d_g$ . On constate que le plateau de température  $T_0$  croît linéairement avec le diamètre des grains  $d_g$  donnant la loi d'échelle globale suivante pour  $T_0$

$$T_0 \propto \frac{d_g}{d} V_0^2. \quad (3.13)$$

Les figures 3.24a et 3.24b présentent les évolutions des longueurs caractéristiques  $r_w$  et  $\lambda_T$  avec  $d_g$ .  $r_w$  augmente lorsque la taille des grains  $d_g$  augmente mais il est difficile de préciser comment ; on choisit de caractériser l'évolution de  $\lambda_T$  par un comportement affine lorsque  $d_g$  augmente à l'exception du point à  $d_g = 0.5$  mm qui semble être aberrant, même si cela est discutable ( $\lambda_T = 1.1d_g + 3.3$  mm).



**Figure 3.24** – Évolutions (a) de  $r_w$  et (b) de  $\lambda_T$  en fonction de  $d_g$ . Point expérimentaux ( $\circ$ ), ajustement affine  $\lambda_T = 1.1d_g + 3.3$  mm (—) et guide pour les yeux pour  $r_w$  (---).

### 3.3 Bilan et Problématique

De l'ensemble de ces expérimentations 2D à vitesse imposée se dégagent plusieurs conclusions et plusieurs questions. Comme d'autres auteurs avant nous [1], nous avons observé que la force exercée par le milieu granulaire ne dépend pas de la vitesse mais est proportionnelle à la profondeur et au diamètre du cylindre. Ce comportement est très différent du cas d'un fluide newtonien visqueux où la force est proportionnelle à la vitesse mais indépendante de la profondeur. Nous avons par ailleurs mis en évidence que, si l'influence du diamètre des grains est négligeable lorsqu'ils sont suffisamment gros, la force augmente significativement pour des grains de plus en plus petits.

Nous avons d'autre part caractérisé en détail le champ de vitesse des grains autour du cylindre. Dans notre configuration de pénétration, nous avons montré que ce champ de vitesse est stationnaire et ne dépend donc pas de la profondeur. Ce champ de vitesse est très localisé près du cylindre avec une allure caractéristique très différente du cas newtonien : les variations spatiales sont de type exponentielles. Les longueurs caractéristiques de ces variations radiales et azimutales dépendent principalement du diamètre du cylindre  $d$  et faiblement de la taille des grains  $d_g$ . Nous avons aussi caractérisé le champ de température granulaire et montré qu'il existait une zone chaude localisée au voisinage du cylindre avec une décroissance radiale également exponentielle.

Pour comprendre ce comportement caractéristique d'un milieu granulaire, nous présentons au chapitre suivant un modèle hydrogranulaire basé sur la théorie cinétique.

## Chapitre 4

# Théorie Hydrogranulaire

LA pénétration à vitesse constante d'un cylindre dans un milieu granulaire est un phénomène complexe, que nous allons tenter de mieux comprendre en le modélisant. La modélisation consiste à considérer le milieu granulaire en écoulement comme un milieu continu fluide avec une rhéologie non-newtonienne adaptée ici de la théorie cinétique. Nous verrons qu'elle donne une vision et des résultats intéressants dans le régime d'écoulement dense qui nous préoccupe ici.

### 4.1 Modélisation de l'écoulement

On utilise ici la théorie cinétique pour modéliser l'écoulement dense de grains 2D autour d'un disque. Cette théorie a été décrite au chapitre 1. On choisit ici de modéliser le milieu granulaire comme un milieu continu. Soit  $\underline{v}$  le champ de vitesse des grains dans le milieu, soit  $\underline{\sigma}$  le tenseur des contraintes dans le milieu granulaire et  $\underline{\mathbb{D}}$  le tenseur taux de déformation, on rappelle que

$$\underline{\mathbb{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\text{Grad}} \underline{v} + \underline{\text{Grad}} \underline{v}^T). \quad (4.1)$$

Le milieu continu étant assez dense, on peut considérer l'écoulement comme incompressible ( $\text{Tr}(\underline{\mathbb{D}}) = 0$ ). Ainsi, le milieu continu est considéré comme un fluide avec la loi de comportement suivante :

$$\underline{\sigma} = -p\underline{\mathbb{1}} + 2\eta\underline{\mathbb{D}}, \quad (4.2)$$

où  $p$  est la pression dans le milieu et  $\eta$  la viscosité dynamique.

On écrit tout d'abord un premier système d'équation formé des équations de conservation (masse, quantité de mouvement et chaleur)

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \text{Tr}(\underline{\mathbb{D}}), \\ \rho_g \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{\text{Div}} \underline{\sigma}, \\ \rho_g \frac{dT}{dt} = \underline{\sigma} : \underline{\mathbb{D}} + \text{div}(\kappa \underline{\text{grad}} T) - \varepsilon, \end{array} \right. \quad (4.3)$$

où  $\kappa$  indique la conductivité thermique et  $\varepsilon$  représente le taux de dissipation volumique.

Ensuite, la théorie cinétique fournit des équations phénoménologiques propres au milieu granulaire dense pour les coefficients de transport  $\eta$  et  $\kappa$  et la dissipation volumique  $\varepsilon$  selon

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\eta}{\rho_g} = \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{30} \left( 1 + \frac{12}{\pi} \right) \right] \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} = \eta_0 \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\kappa}{\rho_g} = \left[ \frac{9}{32} \sqrt{\pi} \left( 1 + \frac{32}{9\pi} \right) \right] \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} = \kappa_0 \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \\ \frac{\varepsilon}{\rho_g} = \left[ \frac{6}{\sqrt{\pi}} (1 - e) \right] \frac{p}{\rho_g} \frac{1}{d_g} T^{1/2} = \varepsilon_0 \frac{p}{\rho_g} \frac{1}{d_g} T^{1/2} \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où  $\eta_0 = 0.28$ ,  $\kappa_0 = 1.06$  et  $\varepsilon_0 = 0.34$  sont des coefficients numériques sans dimension ( $e = 0.9$  est le coefficient de restitution des billes de verre). Il est possible de définir le nombre de Prandlt de l'écoulement en écrivant le rapport

$$Pr = \frac{\eta}{\kappa} = \frac{\eta_0}{\kappa_0} = 0.27, \quad (4.5)$$

on constate que le nombre de Prandlt est indépendant des paramètres d'écoulement et  $Pr < 1$ , ceci montre que les profils de vitesses et de température sont couplés.

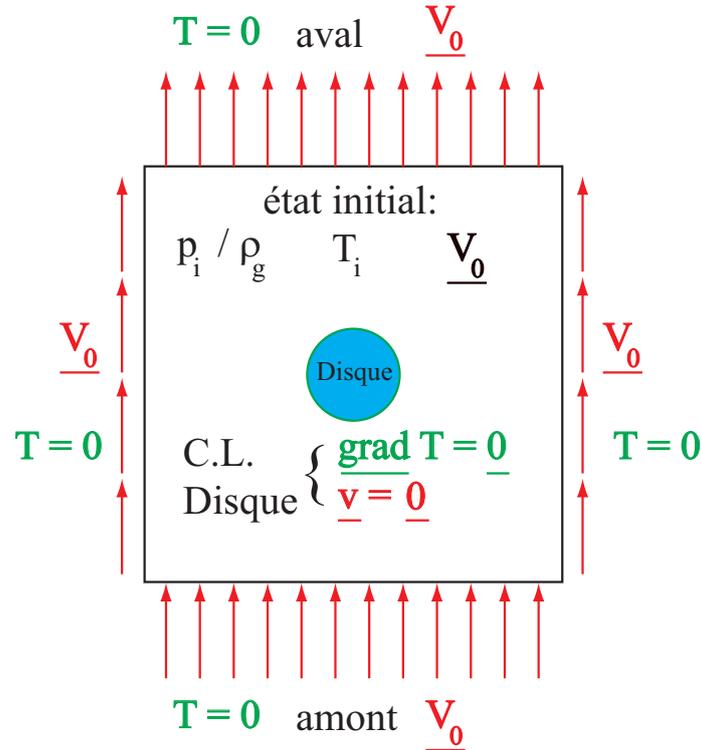


Figure 4.1 – Conditions limites et initiales du problème.

La géométrie que l'on va modéliser avec les équations (4.3) et (4.4) est un fluide en mouvement autour d'un disque immobile de diamètre  $d$  dans une boîte carrée de côté  $10d$  (Fig. 4.1). La définition du système de coordonnées est la même que pour les expérimentations (Fig. 3.1).

Pour les conditions initiales (Fig. 4.1), le fluide possède une vitesse initiale uniforme  $V_0 \underline{e}_z$  et il règne une pression homogène  $p_i$  dans le milieu. On fixe également une température initiale uniforme  $T_i$  dans le milieu, arbitrairement choisie à  $T_i = (V_0/10)^2$ . Cette valeur n'est pas critique puisque quel que soit le choix de la valeur initiale de  $T_i$ , les résultats obtenus sont les mêmes.

Pour les conditions limites (Fig. 4.1), on choisit d'imposer pour le champ de vitesse  $\underline{v}$  la condition  $\underline{v} = V_0 \underline{e}_z$  sur les bords de la boîte. Sur le disque, on impose une condition classique de non-glissement ( $\underline{v} = \underline{0}$ ) car c'est la plus simple à mettre en œuvre, même si elle n'est pas en total accord avec les observations expérimentales. Pour le champ de température, on fixe la condition de température nulle ( $T = 0$ ) sur les bords de la boîte. Sur le disque, on choisit une condition de flux nul ( $\underline{\text{grad}}T = \underline{0}$ ). Il n'y a pas de conditions limites en pression.

On voit que la résolution de ce problème passe par la résolution de deux équations couplées : l'équation de la conservation de la quantité de mouvement et l'équation de la chaleur. Avec ces conditions initiales et limites, on impose une viscosité cinématique initiale  $\nu(p_i/\rho_g, T)$ . Avec une méthode de résolution de type lattice-Boltzmann [70, 88] décrite dans le chapitre 3, on résout l'équation de conservation de la quantité de mouvement et obtenons ainsi un nouveau champ de vitesse  $\underline{v}$  et un nouveau champ de pression  $p/\rho_g$ . On injecte ce résultat dans l'équation de la chaleur (4.4) que l'on résout grâce à une méthode SOR [69] pour trouver le nouveau champ de température  $T$  correspondant. La différence par rapport au calcul du chapitre 2 provient de la présence de termes de couplage. On calcule alors la nouvelle valeur de  $\nu$  associée, puis on réinjecte le tout dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement et ainsi de suite jusqu'à atteindre une solution stationnaire (Fig. 4.2).

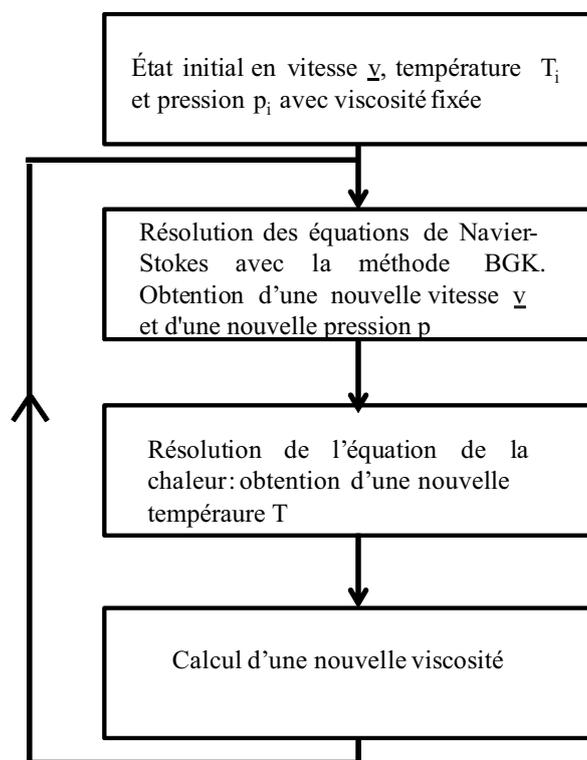


Figure 4.2 – Algorithme utilisé pour obtenir une solution stationnaire.

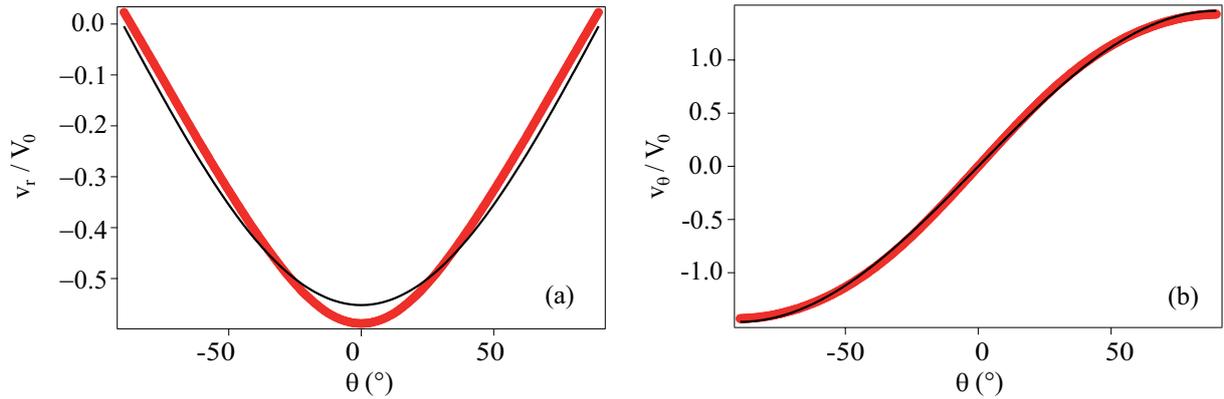
## 4.2 Analyse des résultats

Par la procédure itérative décrite dans la partie précédente, nous sommes capables de déterminer une solution stationnaire à ce problème pour des conditions limites données (choix de  $V_0$ ) et un diamètre de disque  $d$ . Dans cette partie, nous allons présenter les résultats dans le cas d'un milieu granulaire constitué de billes de verre ( $d_g = 1$  mm) se déplaçant à une vitesse  $V_0 = 50$  mm.s<sup>-1</sup> autour d'un disque de diamètre  $d = 20$  mm avec la condition de pression initiale à  $p_i/\rho_g = 1$  m<sup>2</sup>.s<sup>-2</sup>. Cette condition de pression correspond à une profondeur du milieu de l'ordre de  $p_i/(\rho_g g) \sim 10$  mm, qui est de l'ordre de grandeur des essais expérimentaux.

### 4.2.1 Champ de vitesse

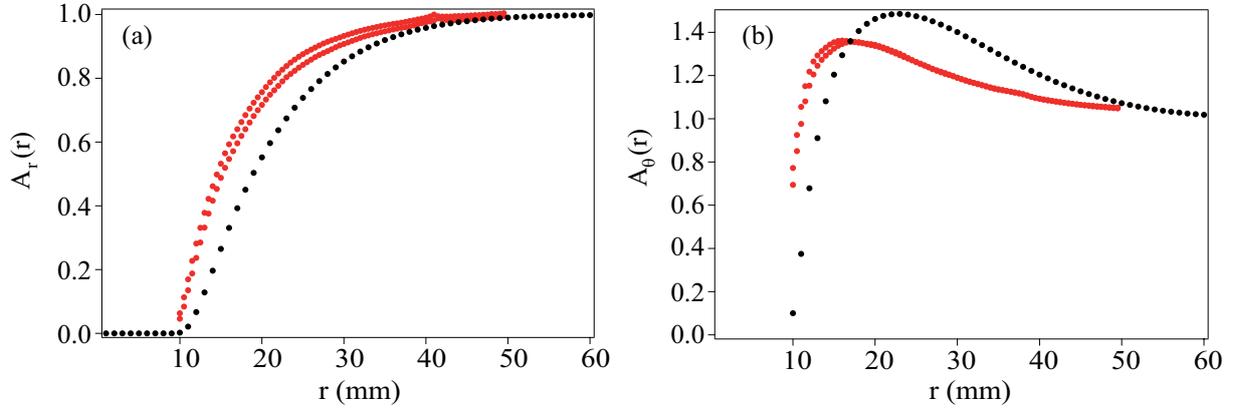
Le champ de vitesse  $\underline{v}$  de l'écoulement d'un fluide newtonien autour d'un cylindre en régime de Stokes à faible nombre de Reynolds se décompose en coordonnées cylindriques selon une fonction  $\cos\theta$  sur  $\underline{e}_r$  et une fonction  $\sin\theta$  selon  $\underline{e}_\theta$  [62]. Comme nous l'avons déjà vu expérimentalement, cette décomposition reste valable dans le cas d'un milieu granulaire. Dans le cadre de nos simulations, la figure 4.3 montre la légitimité de cette décomposition du champ de vitesse sous la forme

$$\begin{cases} v_r(r, \theta) = -V_0 A_r(r) \cos \theta \\ v_\theta(r, \theta) = V_0 A_\theta(r) \sin \theta \end{cases} \quad (4.6)$$



**Figure 4.3** – Profil de la vitesse (a)  $v_r(r, \theta)$  et (b)  $v_\theta(r, \theta)$  en fonction de  $\theta$  ( $V_0 = 50$  mm.s<sup>-1</sup>,  $d_g = 1$  mm et  $d = 20$  mm).

On constate en effet que l'ajustement de la vitesse azimutale en sinus est très bon (Fig. 4.3b) et que celui de la vitesse radiale en cosinus est moins bon en sous évaluant légèrement le maximum du champ de vitesse au voisinage de  $\theta = 0^\circ$  et en surévaluant au contraire pour  $|\theta| = 45^\circ$  (Fig. 4.3a). Ce petit désaccord est semblable à celui trouvé dans les champs de vitesses expérimentaux. Les allures de ces deux fonctions d'amplitude extraites  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  ressemblent fortement aux allures obtenues expérimentalement (Figs. 4.4a et 4.4b) : (i) la fonction d'amplitude  $A_r$  est monotone croissante avec un comportement exponentiel ; (ii) la fonction  $A_\theta$  est non-monotone avec un maximum très localisé au voisinage du disque. La comparaison des courbes expérimentales et théoriques est faite sur les figures 4.4a et 4.4b. On constate sur les courbes d'amplitudes  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  que les longueurs caractéristiques sont plus importantes dans le cas théorique que dans le cas expérimental. L'allure des fonctions d'amplitude est toujours très particulière, propre au milieu granulaire. Quand on regarde attentivement la fonction  $A_\theta$ , on voit que la fonction croît pour atteindre un maximum. Il y a un dépassement (environ 40% plus grand que



**Figure 4.4** – Comparaison des profils théoriques (en noir) et expérimentaux (en rouge) de (a)  $A_r$  et (b)  $A_\theta$  ( $V_0 = 50 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

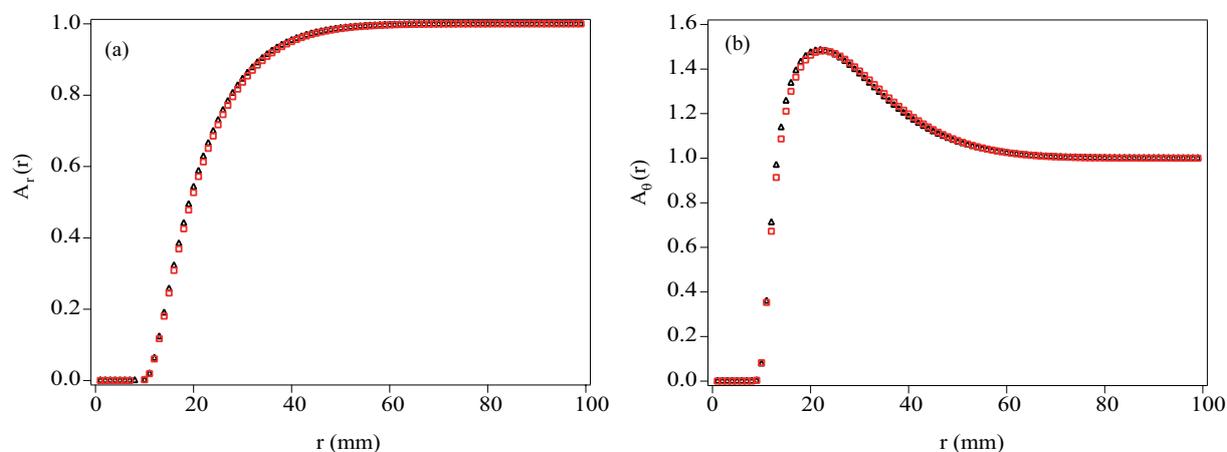
la valeur finale) non négligeable qui a lieu à faible distance du centre du projectile. Il y a ensuite un point d'inflexion et à  $r$  grand et la fonction  $A_\theta$  tend asymptotiquement vers 1. Cette allure est complètement différente des fluides newtoniens classiques car il n'y a pas de point d'inflexion le long de  $r$  ni d'asymptote horizontale à grand  $r$  (chapitre 2). Pour un fluide newtonien, le dépassement dû à la conservation du débit de fluide est moins important et réparti de manière plus homogène suivant  $r$  (Fig. 2.26). Il ne faut pas oublier que les conditions à la limite sur le disque en vitesse sont différentes numériquement (condition de non-glissement) et dans le cas expérimental (condition proche d'un glissement total).

Il est ici possible de comparer les profils  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  entre l'amont du disque (qui sont comparable à ceux obtenus expérimentalement) et l'aval du disque (que nous n'avons pas expérimentalement). On constate sur les figures 4.5a et 4.5b que ces deux profils sont identiques, qui montre que l'écoulement est symétrique amont-aval. Ceci nous indique que le terme  $(\text{Grad } \underline{v}) \cdot \underline{v}$  est négligeable dans l'équation de conservation de quantité de mouvement. En comparaison avec la mécanique des fluides newtoniens, tout se passe comme si on était en présence d'un écoulement visqueux de Stokes caractéristique d'un faible nombre de Reynolds.

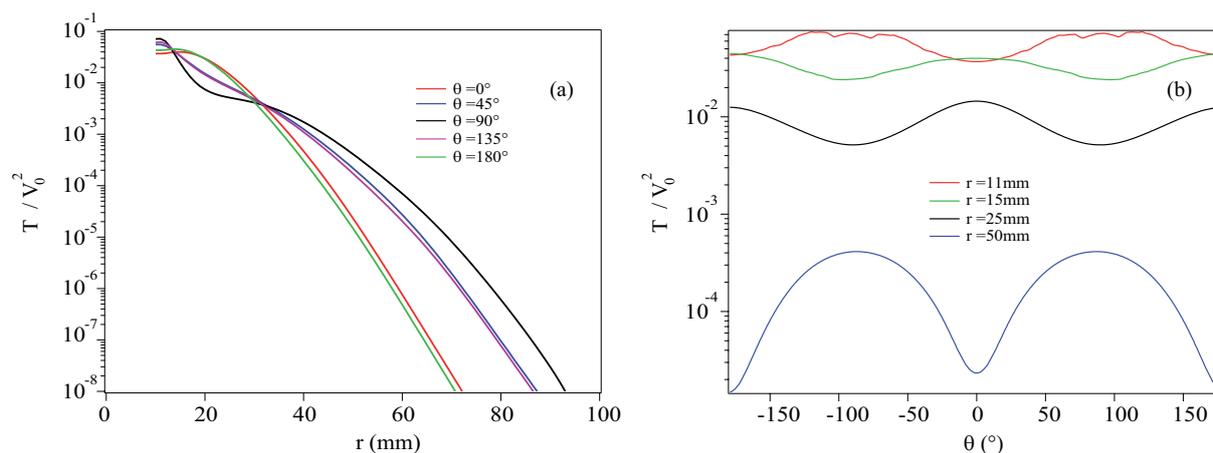
### 4.2.2 Cartographie de la température granulaire

La figure 4.6 montre les profils de température granulaire radiaux et azimutaux par rapport à la sphère dans des diagrammes semi-logarithmiques car la température varie sur plusieurs décades. On constate d'une manière générale que la température décroît lorsque l'on s'éloigne du cylindre. De plus, le champ de température granulaire n'est pas axisymétrique mais il existe une symétrie amont-aval comme pour le champ de vitesse. Il y a aussi une symétrie par rapport à la droite  $\theta = 0^\circ$  (symétrie gauche-droite), cette symétrie est tout à fait attendue car la géométrie du problème possède cette symétrie et les conditions limites en température et en vitesse possèdent aussi cette symétrie gauche-droite.

Dans le chapitre précédent, on a vu que l'on pouvait normaliser la température granulaire par le carré de la vitesse imposée  $V_0^2$ . La figure 4.7 présente l'évolution de la température granulaire normalisée  $T/V_0^2$  en fonction de la distance  $r$  au centre du projectile (pour  $\theta = 0^\circ$ ) expérimentalement et numériquement. On remarque que les deux profils ont la même allure : un plateau de température  $T_0$  proche du disque puis une décroissance exponentielle de longueur caractéristique  $\lambda_T$ .



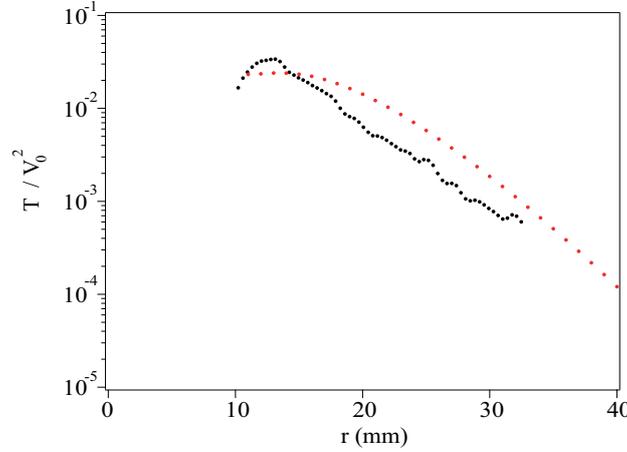
**Figure 4.5** – Comparaison des profils en amont ( $\triangle$ ) et aval ( $\square$ ) du cylindre de (a)  $A_r$  et (b)  $A_\theta$  ( $V_0 = 50 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



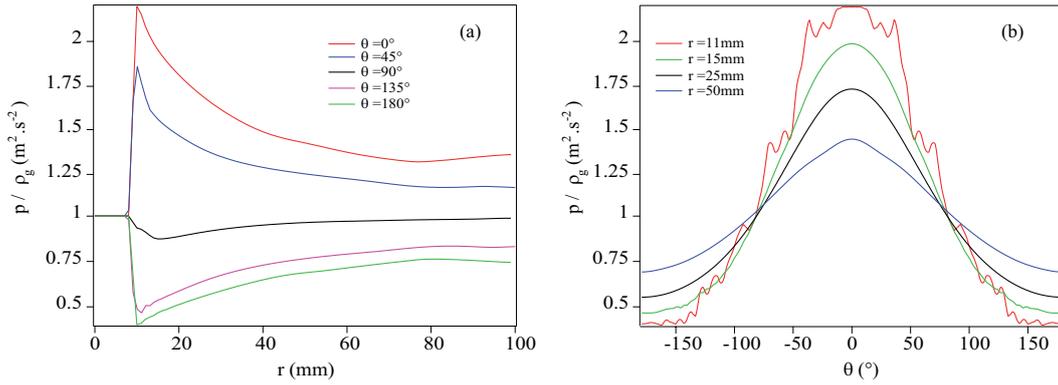
**Figure 4.6** – (a) Profils radiaux de température  $T(r)/V_0^2$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . (b) Profils azimutaux de température  $T(\theta)/V_0^2$  pour différentes valeurs de  $r$  ( $V_0 = 100 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

### 4.2.3 Cartographie de la pression

La figure 4.8 montre les profils de pression radiale et azimuthal autour du cylindre. On constate que même s'il existe toujours une symétrie droite-gauche, la pression n'est pas symétrique amont-aval. Il existe une surpression en amont de l'objet et une dépression en aval par rapport à la pression moyenne dans le milieu. Loin de l'objet, on tend à retrouver une pression constante et uniforme. Numériquement, si on moyenne la pression dans l'espace, on retrouve la pression initiale du milieu. La valeur de cette différence de pression est importante dans la force exercée par le milieu granulaire sur l'objet.



**Figure 4.7** – Comparaison des profils théoriques (en rouge) et expérimentaux (en noir) pour la température granulaire normalisée  $T/V_0^2$  à  $\theta = 0^\circ$  ( $V_0 = 50 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

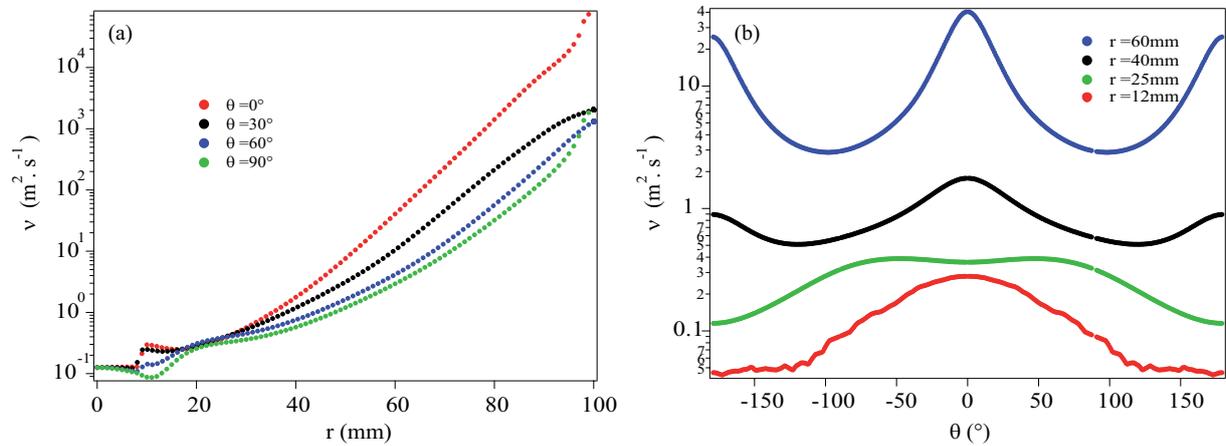


**Figure 4.8** – (a) Profils radiaux de pression  $p/\rho_g$  pour différentes valeurs de  $\theta$ . (b) Profils orthoradiaux de pression  $p/\rho_g$  pour différentes valeurs de  $r$  ( $V_0 = 100 \text{ mm.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

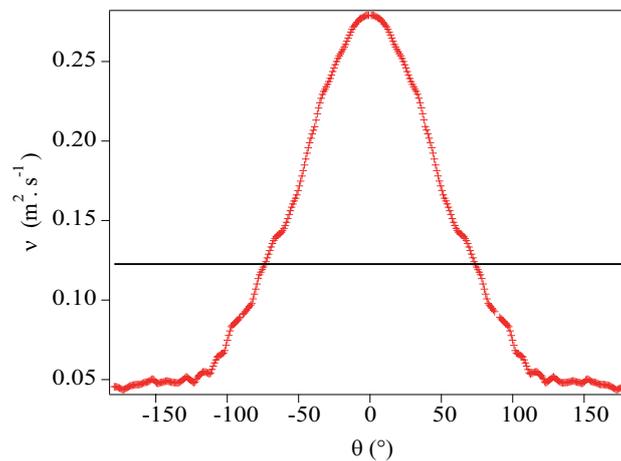
#### 4.2.4 Cartographie de la viscosité

Étant donné que l'on modélise le milieu granulaire par un fluide visqueux (avec viscosité variable spatialement), il devient intéressant de tracer une évolution spatiale caractéristique de la viscosité (Fig. 4.9). La zone où la viscosité est la plus faible est la zone au voisinage du disque, et la viscosité augmente lorsque l'on s'éloigne de l'objet. Ce n'est pas surprenant car  $\nu \propto T^{-1/2}$  et la température diminue lorsqu'on s'éloigne de l'objet qui lui est « chaud ». On constate aussi que la viscosité n'est pas non plus axisymétrique car fonction de la pression et la température.

C'est dans la zone de faible viscosité que les gradients de vitesses sont les plus importants (l'écoulement est le plus cisailé). À l'infini, la viscosité tend vers l'infini et les gradients de vitesses tendent vers 0. On définit ici une viscosité locale  $\nu_s$  en prenant une viscosité moyenne autour du disque (Fig. 4.10). La diminution de la viscosité avec l'augmentation des gradients de vitesse définit le milieu comme un fluide rhéofluidifiant, et non pas newtonien.



**Figure 4.9** – Profils radiaux à différents  $\theta$  (a) et orthoradiaux (b) à différents à différents  $r$  de viscosité cinématique  $\nu$  ( $V_0 = 100 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.10** – Profil de viscosité autour du disque en son voisinage. Résultats numériques (+) et valeur moyenne (–)  $\nu_s = 0.12 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

### 4.3 Influence des paramètres sur les champs de vitesse, température granulaire et pression

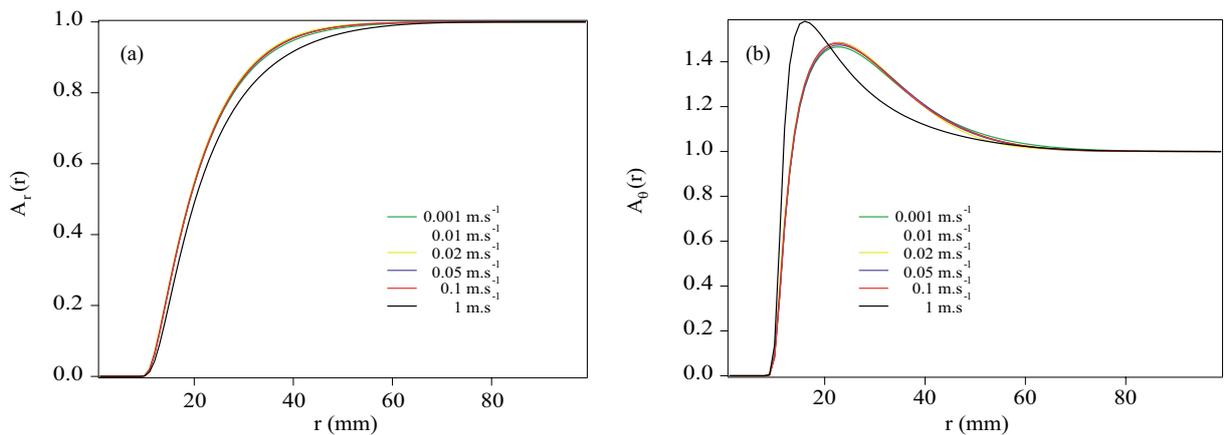
Afin de pouvoir confronter les résultats expérimentaux aux résultats issus de ce modèle hydrogranulaire, il faut à présent étudier l'influence de certains paramètres sur l'écoulement, tels que la vitesse  $V_0$ , la pression  $p/\rho_g$ , le diamètre du disque  $d$ , la taille des grains  $d_g$ .

#### 4.3.1 Influence de la vitesse

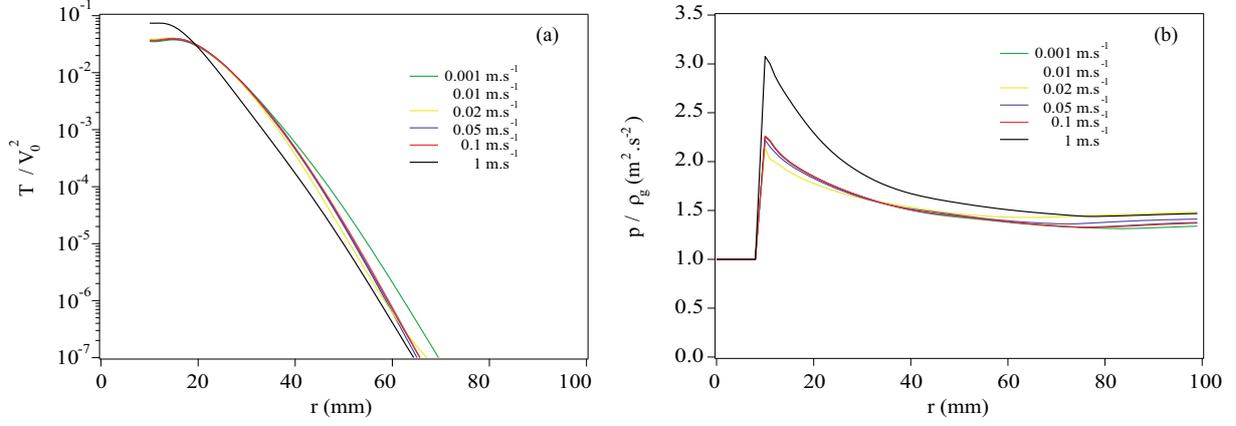
Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence de la vitesse  $V_0$  sur les différentes quantités. Les essais sont réalisés avec un état initial de pression  $p_i/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , un disque de diamètre  $d = 20 \text{ mm}$  et un milieu granulaire est constitué de billes de verre de  $d_g = 1 \text{ mm}$ . Les figures 4.11 et 4.12 présentent les profils de vitesses  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ , la température  $T$  et la pression  $p/\rho_g$ . On remarque que tant que la vitesse  $V_0$  est inférieure à  $1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ , les profils de vitesse, de température et de pression se superposent et sont donc indépendants de la vitesse  $V_0$ . Cependant, lorsque  $V_0 = 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ , les profils ne se superposent plus : on observe une surpression bino plus grande à l'amont du cylindre et une température plus importante dans la zone plateau proche du cylindre.

Les figures 4.13a et 4.13b présentent les cartographies de température pour deux vitesses  $V_0$  très différentes. L'écoulement qui présentait une symétrie amont-aval du point de vue de la vitesse et de la température à basse vitesse ( $V_0 < 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ ) (Fig. 4.13a) perd cette symétrie à plus grande vitesse ( $V_0 \geq 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ ) (Fig. 4.13b), comme c'est le cas pour la transition entre le régime visqueux (symétrique) et le régime inertiel (asymétrique) pour un fluide newtonien, qui est gouvernée par le nombre de Reynolds. Afin de déterminer si l'analogie est pertinente, on peut calculer dans notre cas un nombre de Reynolds caractéristique de l'écoulement granulaire en prenant comme viscosité la moyenne  $\nu_s$  de la viscosité au voisinage du cylindre.

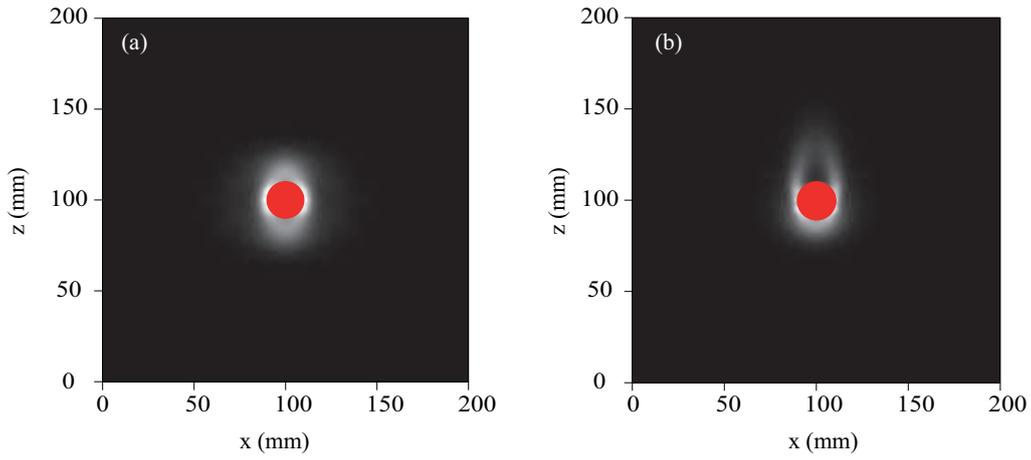
La figure 4.14 présente l'évolution du nombre de Reynolds  $Re = V_0 d / \nu_s$  en fonction de  $V_0$ . Un ajustement en loi puissance de ces points permet de constater que  $Re \propto V_0^2$ . De plus, on constate que le point correspondant à  $V_0 = 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$  correspond à un nombre de Reynolds  $Re > 1$ . Pour les autres points (là où les courbes se superposent pour  $V_0 < 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$ ), le nombre de Reynolds est  $Re < 1$ . Ceci



**Figure 4.11** – Profil radial de vitesse (a)  $A_r$  (b)  $A_\theta$  à différentes vitesses  $V_0$  ( $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

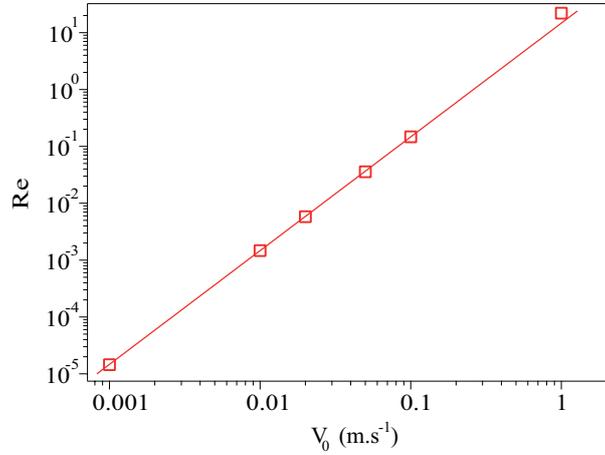


**Figure 4.12** – Profil radial de (a) température  $T(r, \theta = 0)$  et (b) pression  $p/\rho_g(r, \theta = 0)$  à différentes vitesses  $V_0$  ( $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.13** – Cartographie du champ de température à basse vitesse  $V_0 = 0.01 \text{ m}.\text{s}^{-1}$  (a) et à haute vitesse  $V_0 = 1 \text{ m}.\text{s}^{-1}$  (b) ( $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

tend à montrer qu'il existe différents régimes dans l'écoulement de grains autour du disque. Il y a donc un régime à bas nombres de Reynolds ( $Re < 1$ ) où l'écoulement de grains est symétrique et tous les profils de vitesse, de température (renormalisés par la vitesse) se superposent. Dans le régime à hauts nombres de Reynolds ( $Re > 1$ ), l'écoulement de grains n'est plus symétrique amont-aval et on observe des comportements différents pour les différentes quantités. Dans la suite du manuscrit, on s'intéressera au régime à bas nombres de Reynolds, dont on montrera qu'il correspond à nos expériences.



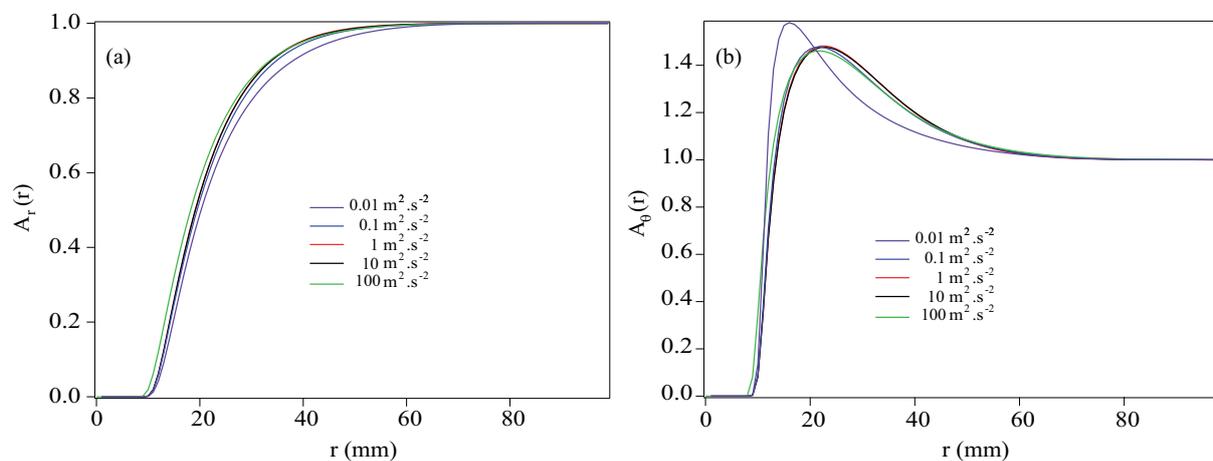
**Figure 4.14** – Évolution du nombre de Reynolds  $Re$  en fonction de la vitesse  $V_0$ . Point numériques ( $\square$ ) et ajustement en loi puissance  $Re = 14.7V_0^2$  ( $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

### 4.3.2 Influence de la pression

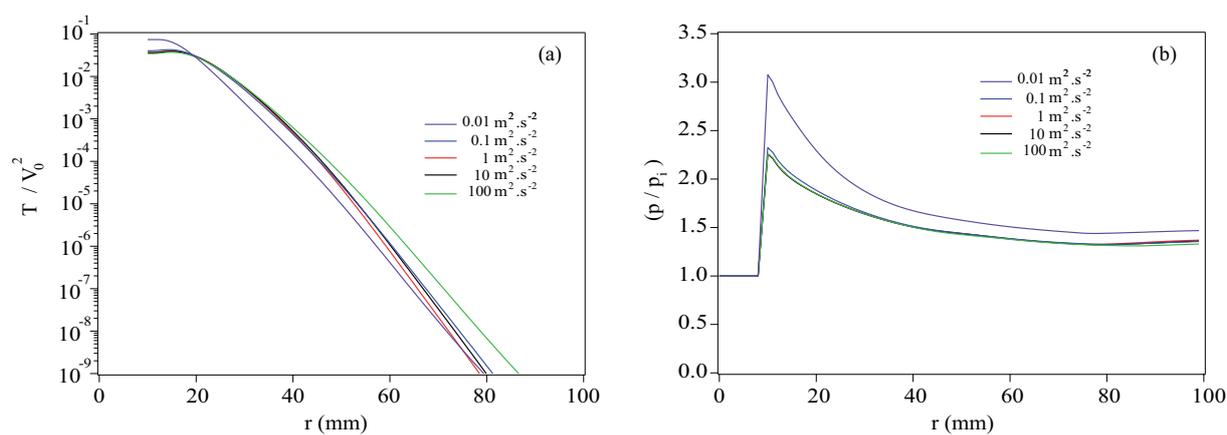
Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence de la pression  $p/\rho_g$  sur les différentes quantités. Les simulations sont réalisées avec  $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ , un diamètre de cylindre  $d = 20 \text{ mm}$  et un milieu granulaire constitué de billes de verre de  $d_g = 1 \text{ mm}$ . Les figures 4.15 et 4.16 présentent les profils de vitesses  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ , de température granulaire  $T$  et de pression  $p/\rho_g$ . On remarque que tant que la pression  $p/\rho_g$  est supérieure à  $0.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , les profils de vitesse, de température et de pression se superposent et sont indépendants de la pression  $p/\rho_g$ . Cependant, lorsque  $p/\rho_g < 0.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , les profils ne se superposent plus.

En calculant le nombre de Reynolds  $Re$ , on voit que celui-ci augmente quand la pression diminue et un ajustement en loi de puissance permet de constater que  $Re \propto 1/p$  (Fig. 4.17). Les tracés précédents montrent qu'une différence de comportement apparaît pour des valeurs de la pression  $p/\rho_g$  comprises entre  $0.01 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $0.1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  ce qui correspond à des nombres de Reynolds compris entre 1 et 10. Ainsi, on constate que l'on observe à nouveau deux régimes en fonction du nombre de Reynolds avec une transition pour un Reynolds de l'ordre de l'unité. Il existe un premier régime visqueux à faible Reynolds pour les hautes pressions où l'écoulement est symétrique, avec des profils de vitesse et température indépendants de la pression et un régime à haut Reynolds pour lequel les profils de vitesse et de température sont différents et dépendent de la pression.

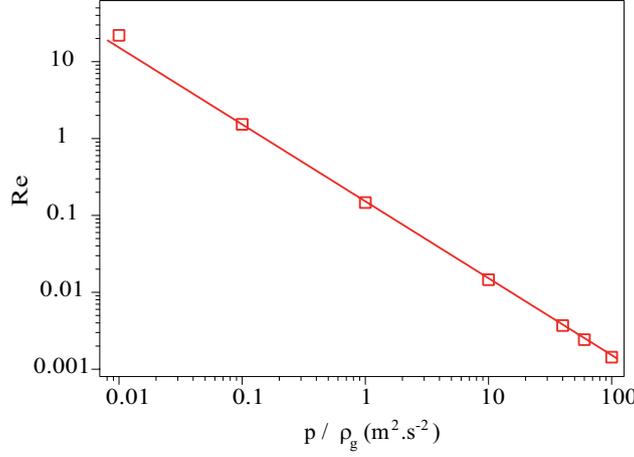
Expérimentalement, comme la pression  $p/\rho_g$  croît avec la profondeur de pénétration de l'objet, on a pratiquement dès les premiers instants  $p/\rho_g > 0.15 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$ , soit  $Re < 1$ . Il est donc peu aisé d'observer des régimes à  $Re > 1$ . Par conséquent, notre étude expérimentale se situe dans le régime "visqueux" à  $Re < 1$ .



**Figure 4.15** – Influence de la pression  $p$  sur le profil de vitesse (a)  $A_r$  et (b)  $A_\theta$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.16** – (a) Influence de la pression initiale  $p_i$  sur le profil de température  $T(r, \theta = 0)$ . (b) Influence de la pression  $p_i$  sur le profil de pression  $p(r, \theta = 0)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.17** – Évolution du nombre de Reynolds  $Re$  en fonction de la pression  $p$ . (□) Point numériques, (–) ajustement en loi puissance  $Re = 0.15\rho_g/p$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

### 4.3.3 Influence de la taille du disque

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence de la taille du projectile  $d$  que nous avons fait varier de 5 mm à 80 mm. Les figures 4.18c et 4.18d présentent l'évolution des profils de vitesse  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  en fonction de la distance adimensionnée au centre du disque  $(r - d/2)/d$ , alors que les figures 4.18a et 4.18b présente une évolution en fonction de  $r - d/2$ . D'une manière générale, les longueurs caractéristiques des profils de vitesse augmentent quand  $d$  augmente. Pour une caractérisation quantitative de ces longueurs caractéristiques, nous avons considéré comme pour l'analyse des résultats expérimentaux (cf § 3.2.2) que  $A_r$  et  $A_\theta$  pouvaient être ajustés de la façon suivante

$$A_r(r) = 1 - \frac{d}{2r} \left( 1 - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2} \right) - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{r + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{r} \exp\left(-\frac{r - d/2}{\lambda_{r2}}\right), \quad (4.7)$$

$$A_\theta(r) = 1 + \frac{r - \lambda_{\theta3}}{\lambda_{\theta1}} \exp\left(-\frac{r - d/2}{\lambda_{\theta2}}\right), \quad (4.8)$$

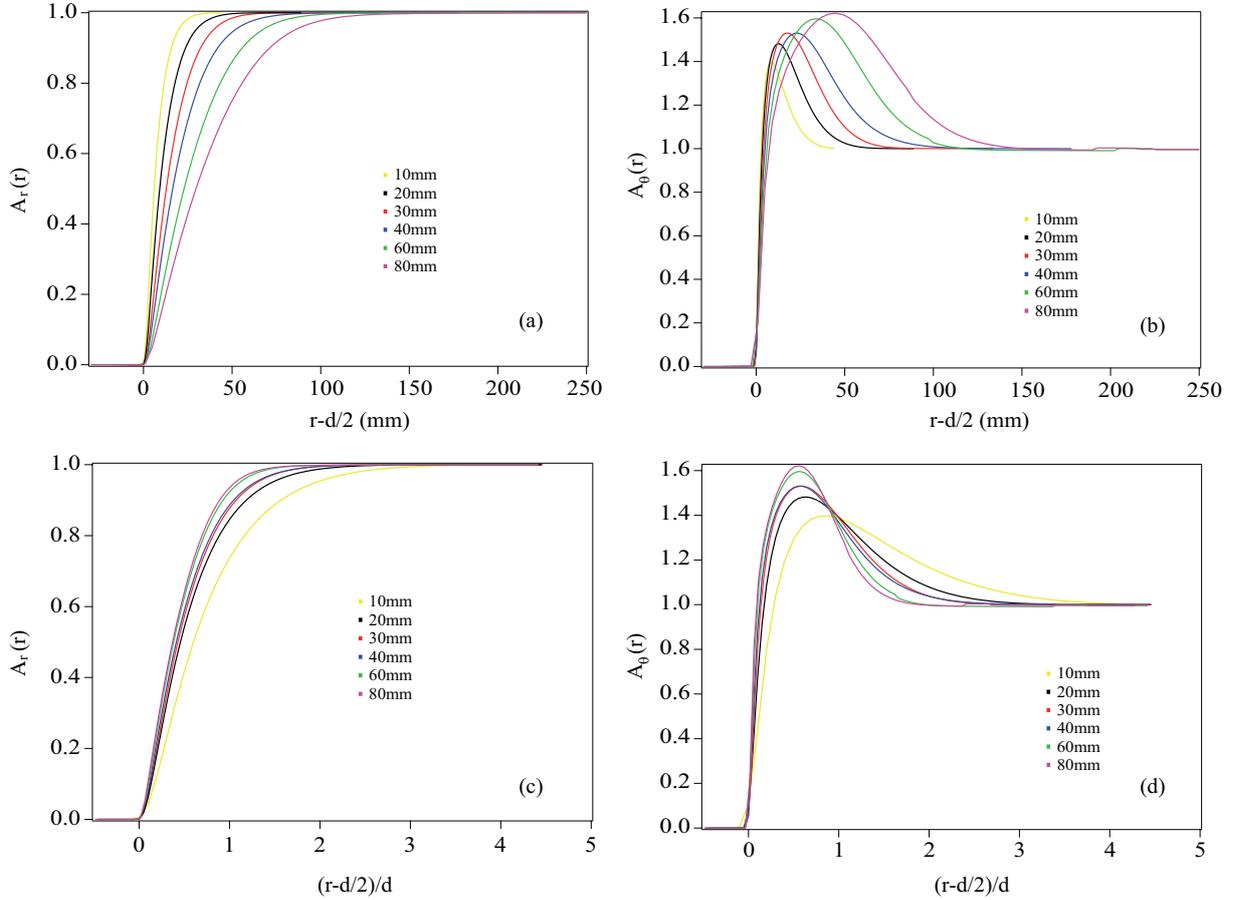
où les longueurs caractéristiques  $\lambda_{r_i}$  et  $\lambda_{\theta_j}$  sont les paramètres d'ajustement. Le résultat est moins probant que pour les profils expérimentaux. Les valeurs des longueurs caractéristiques  $\lambda_{r_i}$  et  $\lambda_{\theta_j}$  sont regroupées sur la figure 4.19. On remarque que les valeurs des  $\lambda$  augmentent linéairement avec le diamètre  $d$  du projectile.

De plus, la figure 4.20 présente les quantités  $\lambda_{\theta3} - \lambda_{\theta1}$  et  $\lambda_{r3} - \lambda_{r1}$  en fonction du diamètre de l'objet  $d$ . On constate que  $\lambda_{r3} - \lambda_{r1} = \lambda_{\theta3} - \lambda_{\theta1} = d/2$ . Cette relation signifie que la vitesse à la paroi de l'objet est nulle puisque

$$A_\theta(d/2) = 1 + \frac{d/2 - \lambda_{\theta3}}{\lambda_{\theta1}}, \quad (4.9)$$

$$A_r(d/2) = 1 - \left( 1 - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2} \right) - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2} = 0. \quad (4.10)$$

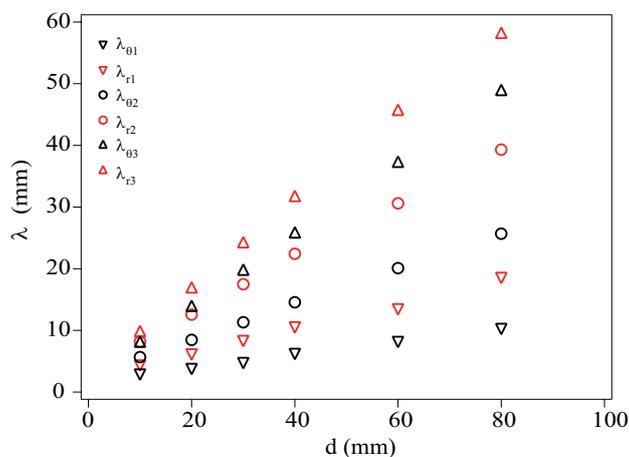
Ceci est cohérent avec la condition de non glissement imposée mais différent des résultats expérimentaux où  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3} \simeq d/2$ , qui est caractéristique d'un glissement quasi total des grains à la paroi du disque.



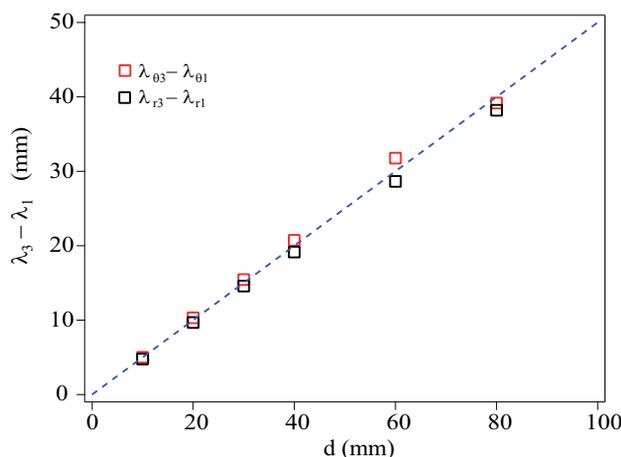
**Figure 4.18** – Influence du diamètre  $d$  du disque sur les profils de vitesses (a)  $A_r(r - d/2)$  et (b)  $A_\theta(r - d/2)$  ainsi que (c)  $A_r((r - d/2)/d)$  et (d)  $A_\theta((r - d/2)/d)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-2}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).

Finalement, les longueurs  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3}$  sont faciles à interpréter : elles vont représenter la longueur de glissement des grains à la paroi. Expérimentalement, on a une condition de glissement quasi total sur le cylindre soit  $\lambda_{r3} \simeq \lambda_{\theta3} \simeq d/2$  et numériquement, on a une condition de non-glissement sur l'objet soit  $\lambda_{r3} = d/2 + \lambda_{r1}$  et  $\lambda_{\theta3} = d/2 + \lambda_{\theta1}$ .

La figure 4.21 présente l'évolution de la pression  $p/\rho_g$  en amont du disque. À travers la figure 4.21a, on constate que la taille de l'objet a une influence sur le champ de pression mais il existe une renormalisation spatiale des champs de pression (en  $(r - d/2)/d$ ). La figure 4.22 présente l'évolution de la température granulaire  $T$ . Si les allures sont semblables à celles observées lorsqu'on a fait varier la vitesse  $V_0$  et la pression  $p/\rho_g$ , on constate que pour les grands diamètres  $d$  le plateau n'est pas aussi bien marqué et qu'il y a une légère croissance de la température granulaire avant la décroissance exponentielle. On peut cependant extraire la valeur maximale de ce profil et l'assimiler à  $T_0$ . Enfin, la figure 4.23a présente l'évolution du plateau de température  $T_0$  en fonction du diamètre de disque  $d$  :  $T_0$  diminue fortement quand  $d$  augmente et un ajustement en loi puissance nous permet de constater que  $T_0 \propto d^{-1}$ . On s'attend par ailleurs à ce que la décroissance exponentielle  $\lambda_T$  de la température soit indépendante du diamètre  $d$  de l'objet (Fig. 4.23b). En effet, d'après l'équation de la chaleur, loin du projectile, l'équilibre va se faire



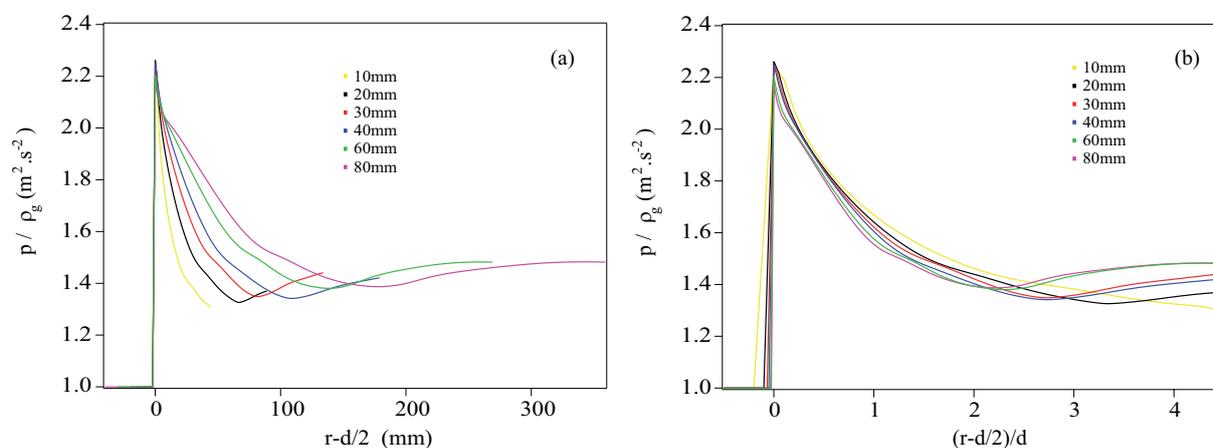
**Figure 4.19** – Influence du diamètre  $d$  du disque sur les longueurs caractéristiques  $\lambda$  de la vitesse ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).



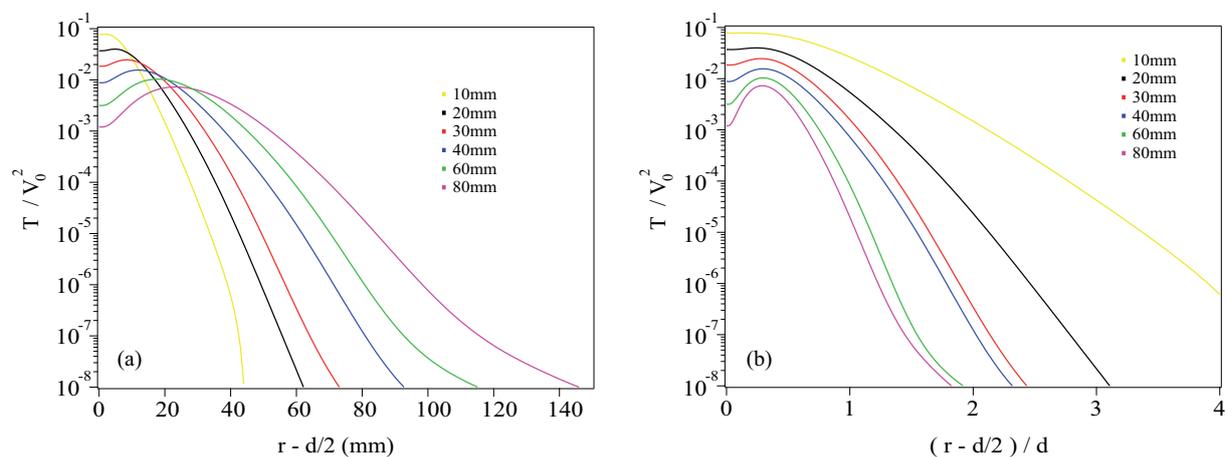
**Figure 4.20** – Évolution de la quantité  $\lambda_3 - \lambda_1$  en fonction du diamètre de l'objet  $d$ ; (- -) Droite de pente 0.5 ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).

entre la quantité  $\text{div}(\kappa \text{ grad } T)$  et le terme de dissipation volumique  $\varepsilon$  [Eq. (4.3)]. Or le diamètre  $d$  du disque n'intervient pas dans cet équilibre. La légère croissance de la valeur de  $\lambda_T$  avec  $d$  peut s'expliquer par le fait que les codes n'ont pas calculé assez longtemps pour effacer ce problème. Expérimentalement, on avait observé que  $\lambda_T$  était indépendant de  $d$  (cf §3.2.5).

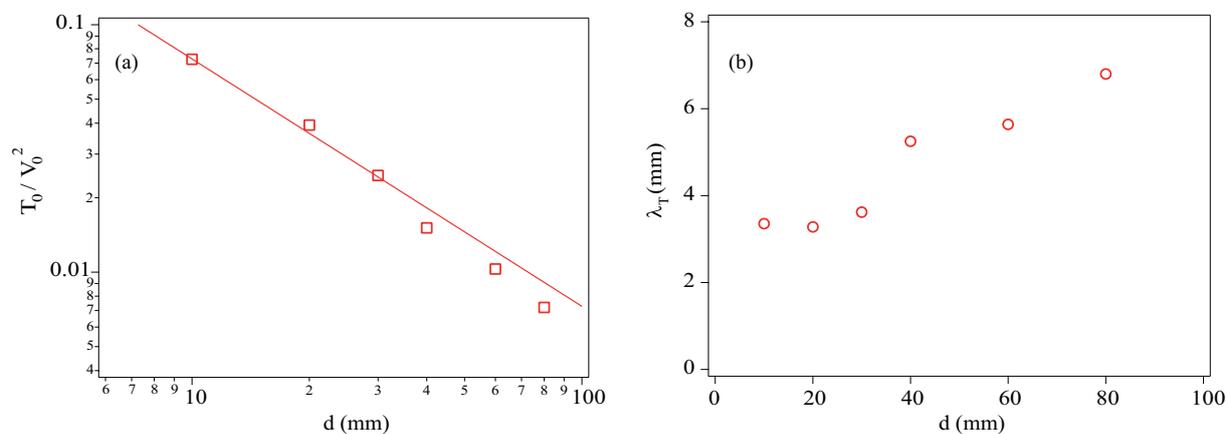
Si on suit l'évolution de nombre de Reynolds, on voit qu'il augmente avec le diamètre du disque  $d$  (Fig. 4.24). Un ajustement en loi puissance  $Re \propto \sqrt{d}$  est compatible avec les données. Pour un fluide newtonien à viscosité constante, le nombre de Reynolds varie linéairement avec le diamètre  $d$  du cylindre par définition. Puisqu'ici la température granulaire et donc la viscosité varie avec  $d$ , il n'est pas surprenant d'avoir une loi différente.



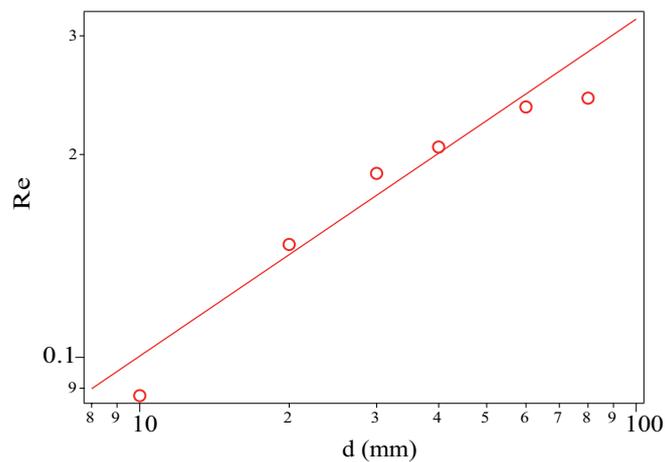
**Figure 4.21** – Influence du diamètre  $d$  du projectile sur le profil de pression (a)  $p(r - d/2, \theta = 0)$  et sur le profil renormalisé (b)  $p((r - d/2)/d, \theta = 0)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.22** – Influence du diamètre  $d$  du projectile sur le profil de température (a)  $T(r - d/2, \theta = 0)$  et sur le profil renormalisé (b)  $T((r - d/2)/d, \theta = 0)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d_g = 1 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.23** – Évolution de  $T_0/V_0^2$  en fonction de  $d$ . Points numériques ( $\square$ ) et ajustement en loi puissance  $T_0/V_0^2 = 0.72d^{-1}$ . (b) Évolution de  $\lambda_T$  en fonction de  $d$ .



**Figure 4.24** – Évolution du nombre de Reynolds  $Re$  en fonction du diamètre du disque  $d$ . Points numériques ( $\circ$ ) et ajustement en loi de puissance  $Re \propto \sqrt{d}$ .

### 4.3.4 Influence de la taille des grains

Dans cette partie, on s'intéresse à l'influence du diamètre des grains  $d_g$  que nous avons fait varier de 0.5 mm à 4 mm. Il est facile de changer ce paramètre dans les équations, car  $d_g$  ne dépend que de la nature du milieu. Il suffit donc d'intégrer les dépendances de  $d_g$  dans les constantes  $\eta_0$ ,  $\kappa_0$  et  $\varepsilon_0$ . Les essais sont réalisés avec  $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$  comme conditions initiales du code théorique. On remarque que les profils de vitesse sont tous sensiblement différents et que le diamètre des grains  $d_g$  intervient donc dans les longueurs de décroissance caractéristiques des profils de vitesses  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ . Ces longueurs  $\lambda_{r_i}$  et  $\lambda_{\theta_j}$  de variations extraites des ajustements de  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  par les équations (4.9) et (4.10) apparaissent sur la figure 4.25. On constate qu'il n'y a pas de dépendance forte des longueurs caractéristiques avec la taille des grains mais il y a cependant une légère augmentation de type affine.

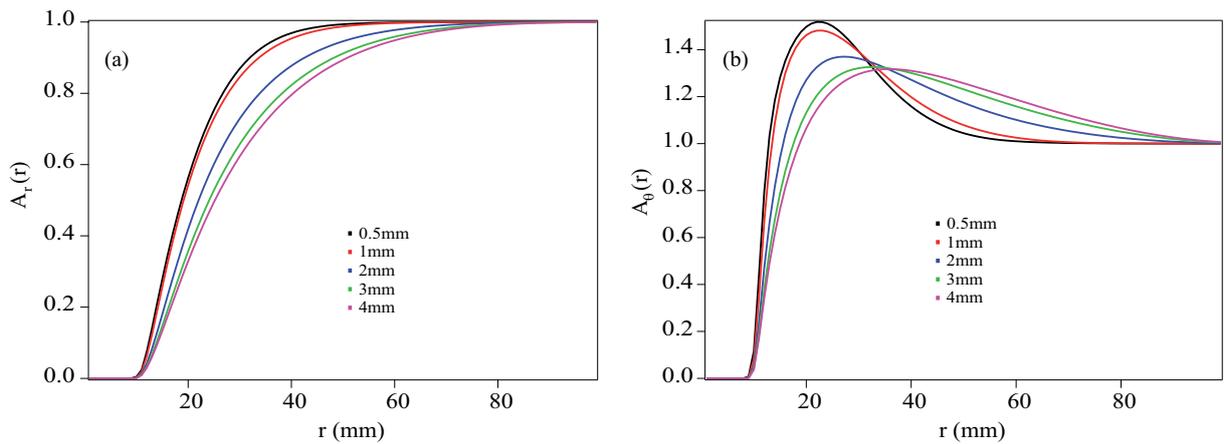
Les figures 4.27 et 4.28a montrent les profils radiaux de la pression  $p/\rho_g$  et de la température granulaire  $T$  pour différents  $d_g$ . On constate sur le profil de pression que la surpression en amont du disque est d'autant plus importante que la taille des grains est petite. Au contraire, lorsque la taille des grains augmente, la surpression est plus faible et semble tendre vers une limite. Pour la température granulaire  $T$ , on constate que la valeur de température du plateau  $T_0$  est liée à  $d_g$  avec un comportement linéaire :  $T_0 \propto d_g$  (Fig. 4.28). D'une manière générale, on remarque que quand le diamètre des grains devient faible ( $d_g < 1 \text{ mm}$ ), les variations observées dans les profils de température et de pression sont plus importantes.

La figure 4.29 montre la longueur  $\lambda_T$  caractéristique de la décroissance exponentielle de  $T(r)$ . On remarque que  $\lambda_T$  croît linéairement avec la taille des grains  $d_g$  :  $\lambda_T \simeq 5.7d_g$ . Expérimentalement, on avait plutôt une croissance affine de  $\lambda_T$  avec la taille des grains. On peut expliquer ce comportement linéaire en analysant l'équation de la chaleur. Loin du projectile, le terme de dissipation volumique et le terme de diffusion thermique s'équilibrent :

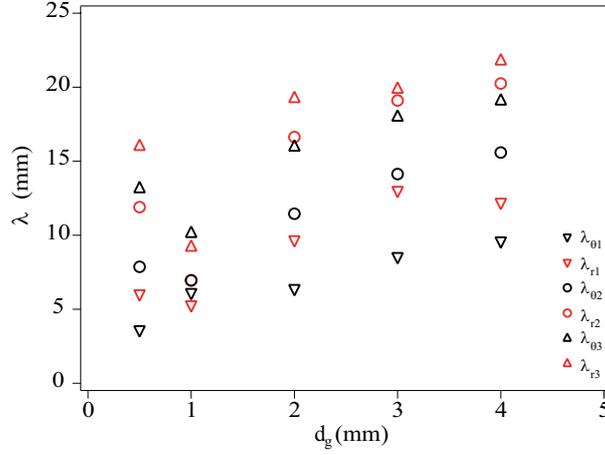
$$\text{div} \left( \kappa_0 \frac{p}{\rho_g} d_g \frac{1}{T^{1/2}} \underline{\text{grad}} T \right) - \varepsilon_0 \frac{1}{d_g} \frac{p}{\rho_g} T^{1/2} = 0. \quad (4.11)$$

En développant le premier terme, on peut écrire

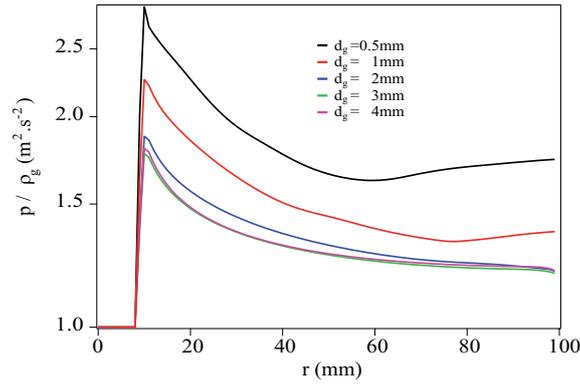
$$2\kappa_0 d_g \frac{p}{\rho_g} \left( \Delta T^{1/2} + \underline{\text{grad}} T^{1/2} \cdot \underline{\text{grad}} \frac{p}{\rho_g} \right) - \varepsilon_0 \frac{1}{d_g} \frac{p}{\rho_g} T^{1/2} = 0. \quad (4.12)$$



**Figure 4.25** – Influence du diamètre des grains  $d_g$  sur les profils de vitesse  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.26** – Influence du diamètre du disque sur les longueurs caractéristiques  $\lambda$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).



**Figure 4.27** – Influence de la taille des grains  $d_g$  sur le profil radial de pression  $p(r, \theta = 0)$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ).

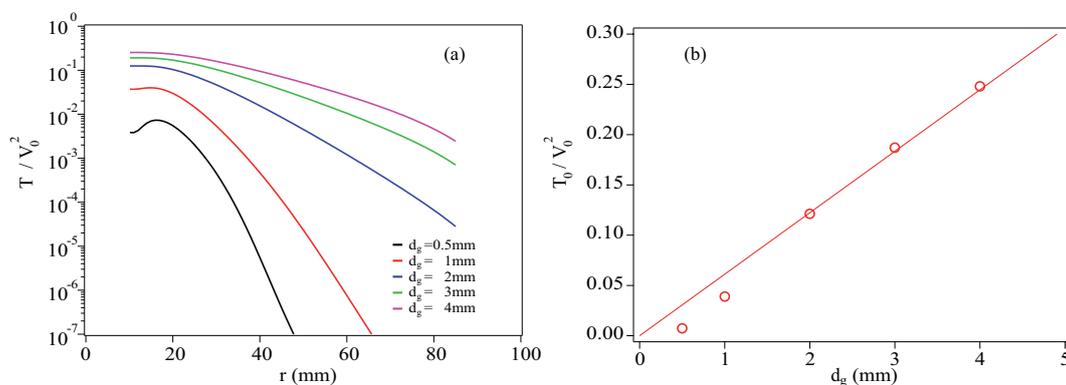
Or loin du projectile, on peut faire l'hypothèse que la pression est quasiment uniforme et donc que son gradient est nulle. L'équilibre devient alors

$$\Delta T^{1/2} - \frac{\varepsilon_0}{2\kappa_0 d_g^2} T^{1/2} = 0. \quad (4.13)$$

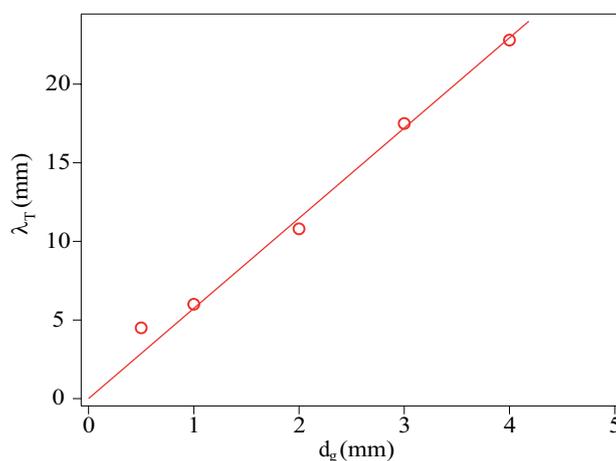
De cette équation, on trouve une longueur caractéristique  $\lambda_T$

$$\lambda_T = \sqrt{\frac{2\kappa_0}{\varepsilon_0}} d_g \simeq 2.5 d_g. \quad (4.14)$$

Ce comportement explique la croissance linéaire de  $\lambda_T$  avec  $d_g$ . Cependant, la valeur du préfacteur numérique (ici 2.5) est différente dans les simulations (on trouve 5.7). Dans les expériences, nous avons observé une évolution affine de  $\lambda_T$  ( $\lambda_T = 1.1 d_g + 3.3 \text{ mm}$ ) (Fig 3.24b), le comportement diffère ici des simulations numériques.

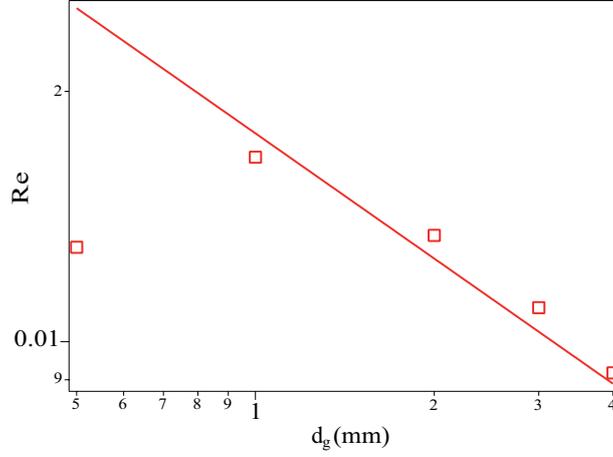


**Figure 4.28** – Influence de la taille des grains  $d_g$  sur (a) le profil radial de température  $T(r, \theta = 0)$  et (b) le plateau de température  $T_0$  ( $V_0 = 0.1 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $p/\rho_g = 1 \text{ m}^2.\text{s}^{-2}$  et  $d = 20 \text{ mm}$ ). Points numériques (o) et ajustement en loi puissance  $T_0/V_0^2 = 0.06d_g$



**Figure 4.29** – Évolution de la longueur caractéristique  $\lambda_T$  du profil de vitesse  $A_r$  en fonction du diamètre des grains  $d_g$ . Points numériques (o) et ajustement linéaire  $\lambda_T = 5.7d_g$  (–).

On peut aussi tracer l'évolution du nombre de Reynolds en fonction de la taille des grains : si on excepte le point correspondant à  $d_g = 0.5 \text{ mm}$ , on observe un ajustement en loi puissance tel que  $Re \propto 1/\sqrt{d_g}$  (Fig 4.30).



**Figure 4.30** – Évolution du nombre de Reynolds  $Re$  en fonction du diamètre des grains  $d_g$ . ( $\square$ ) Points numériques, (–) ajustement en loi de puissance  $Re \propto d_g^{-1/2}$ .

#### 4.4 Nombre de Reynolds Granulaire

Dans le cadre de notre modélisation hydrodynamique, l'analyse de l'influence des différents paramètres nous fournit de précieuses informations sur les régimes d'écoulement d'un milieu granulaire autour d'un disque caractérisé par le nombre de Reynolds granulaire  $Re_g = V_0 d / \nu_s$ . La viscosité s'écrit suivant le modèle de théorie cinétique  $\nu = \eta_0 p d_g / (\rho_g T^{1/2})$ , d'après la loi de comportement [Eq. (4.4)]. La viscosité pertinente  $\nu_s$  est moyennée autour du disque et la température  $T$  à considérer est celle du plateau  $T_0$ . Le nombre de Reynolds devient alors :

$$Re_g = \frac{\rho_g}{p} \frac{d}{d_g} \frac{V_0 T_0^{1/2}}{\eta_0}. \quad (4.15)$$

Or, nous avons montré que  $T_0$  dépend des paramètres de la façon suivante :

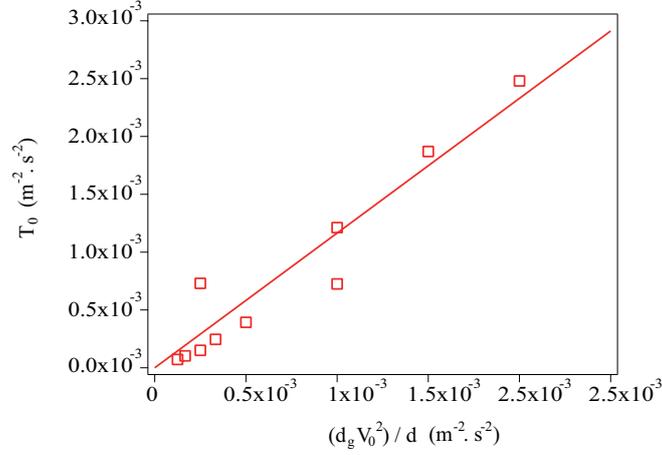
$$T_0 = \alpha_{T_0} \frac{d_g}{d} V_0^2. \quad (4.16)$$

où  $\alpha_{T_0} = 1.16$  est un préfacteur numérique (Fig 4.31). Le nombre de Reynolds granulaire  $Re_g$  s'écrit

$$Re_g = \frac{\rho_g}{p} \left( \frac{d}{d_g} \right)^{1/2} \frac{V_0^2}{\eta_0}. \quad (4.17)$$

Néanmoins, il existe un préfacteur numérique qui est  $\sqrt{\alpha_{T_0}} \simeq 1.08$  mais étant donnée sa valeur très proche de 1, on choisit de ne pas en tenir compte. Dans la configuration expérimentale de pénétration verticale à partir de la surface en considérant une variation hydrostatique de la pression  $p/\rho_g = gz$  avec la profondeur  $z$ , le nombre de Reynolds  $Re = V_0^2 (d/d_g)^{1/2} / (\eta_0 gz)$  diminue lors de la pénétration. Quels que soient les paramètres, il existe donc une profondeur  $z_c$  à partir de laquelle le nombre de Reynolds est inférieur à 1 :  $Re_g(z) < 1$  pour  $z > z_c$  avec

$$z_c = \frac{V_0^2}{\eta_0 g} \left( \frac{d}{d_g} \right)^{1/2}. \quad (4.18)$$



**Figure 4.31** – Plateau de température  $T_0$  en fonction de  $d_g V_0^2 / d$ . ( $\square$ ) Points numériques, (–) ajustement linéaire  $T_0 = 1.16 d_g V_0^2 / d$ .

Cette profondeur critique  $z_c$  est d'autant plus grande que  $V_0$  est grand,  $d$  grand et  $d_g$  petit. La valeur la plus grande atteinte expérimentalement est  $z_c = 6$  mm avec  $V_0 = 50$  mm.s $^{-1}$ ,  $d = 40$  mm et  $d_g = 1$  mm. Comme  $z_c < d$ , nous sommes expérimentalement toujours à  $Re_g < 1$ , dans un régime d'écoulement de type visqueux avec une symétrie d'écoulement amont/aval et une invariance des profils de vitesses avec le nombre de Reynolds et donc la profondeur. Le régime d'écoulement étant maintenant bien caractérisé, intéressons-nous à la prédiction de la force de traînée sur le disque par notre théorie hydrogranulaire.

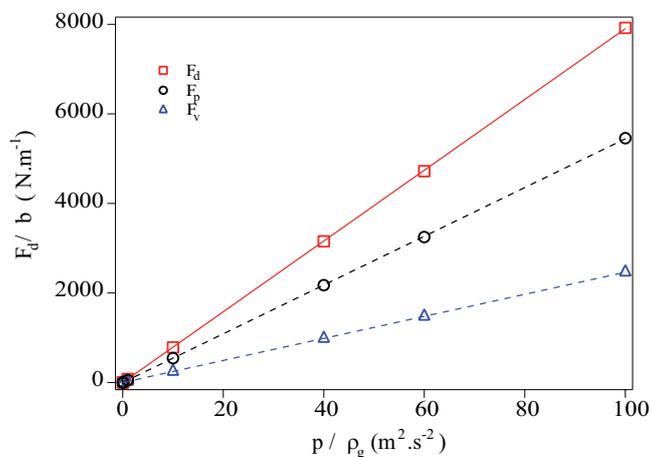
## 4.5 Force de traînée

La force exercée par le milieu granulaire sur le disque peut être calculée de deux manières différentes. La première manière consiste en l'intégration du profil de vitesse et de pression entre l'amont et l'aval de la boîte issue du théorème du transport de Reynolds (2.27). La seconde manière consiste à calculer directement la force sur le disque par intégration du vecteur contrainte. Nous avons vérifié que ces manières donnaient le même résultat. Nous avons choisi d'utiliser la deuxième manière car elle permet de calculer séparément la contribution de pression  $p$  et celle de la viscosité dans le calcul de la force. Cette force s'exprime

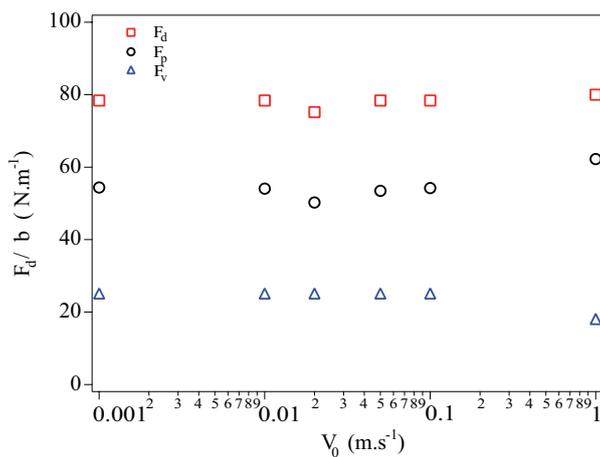
$$\underline{F} = \frac{bd}{2} \int_0^{2\pi} \underline{\underline{\sigma}} \underline{e}_r d\theta = \frac{bd}{2} \int_0^{2\pi} -p \underline{e}_r d\theta + \frac{bd}{2} \int_0^{2\pi} 2\eta \underline{\underline{D}} \underline{e}_r d\theta = \underline{F}_p + \underline{F}_v. \quad (4.19)$$

Comme l'écoulement possède une symétrie gauche-droite aussi bien numériquement qu'expérimentalement, la force sur le disque se réduit à la force de traînée  $F_d$  la composante selon  $z$ , telle que  $F_d = \underline{F} \cdot \underline{e}_z$ . Cette force  $F_d$  est issue de la somme de deux termes d'après l'équation (4.19) : le terme issu de la pression va donner une contribution de force  $F_p$ , telle que  $F_p = \underline{F}_p \cdot \underline{e}_z$ , et le terme provenant du tenseur des contraintes visqueuses va donner une contribution de force  $F_v$ , telle que  $F_v = \underline{F}_v \cdot \underline{e}_z$ .

La figure 4.32 présente l'évolution de force totale par unité de longueur  $F_d/b$  et ses deux composantes  $F_p/b$  et  $F_v/b$  en fonction de la pression  $p/\rho_g$  à  $V_0$  fixée,  $d = 20$  mm et  $d_g = 1$  mm. On remarque que la force  $F_d/b$  croît linéairement avec la pression, que  $F_p/b$  aussi mais surtout que  $F_v/b$  aussi, ce qui n'est pas trivial. Ce résultat est cohérent avec les expériences menées. La figure 4.33 présente l'évolution des forces par unité de longueur  $F_d/b$ ,  $F_p/b$  et  $F_v/b$  en fonction de la vitesse  $V_0$  à  $p/\rho_g$  fixé,  $d = 20$  mm et



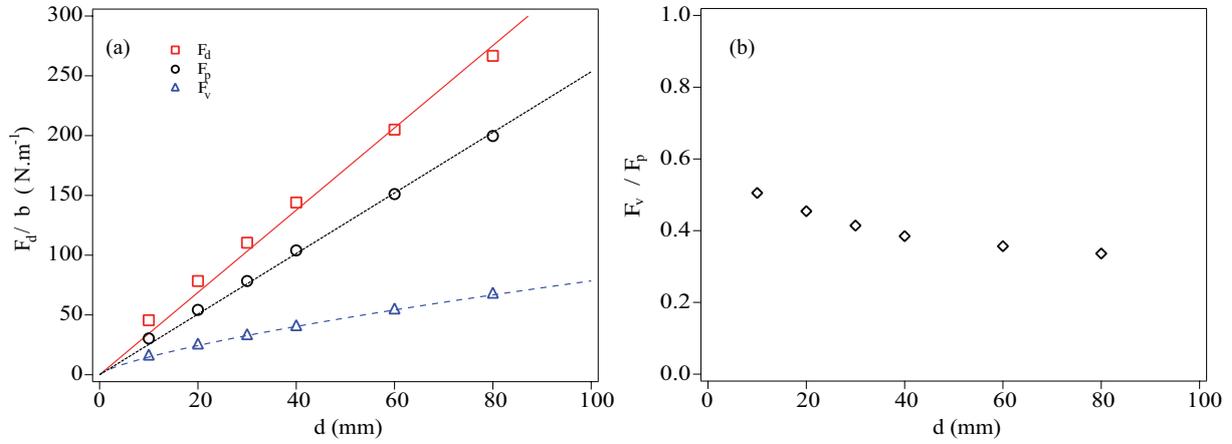
**Figure 4.32** – Évolution de la force de traînée globale  $F_d$  ( $\square$ ) et ajustement linéaire  $F_d \propto p$ , de la force de traînée de pression  $F_p$  ( $\circ$ ), de la traînée de viscosité  $F_v$  ( $\triangle$ ) en fonction de la pression  $p$  et ajustements linéaires.



**Figure 4.33** – Évolution de la force de traînée globale  $F_d$  ( $\square$ ), et des contributions de pression  $F_p$  ( $\circ$ ) et de viscosité  $F_v$  ( $\triangle$ ) en fonction de la vitesse  $V_0$ .

$d_g = 1\text{mm}$ . On peut considérer que la force  $F_d$  ne dépend pas de la vitesse  $V_0$  pour les faibles nombres de Reynolds  $Re_g$ , ce qui est encore observé expérimentalement.

Ces résultats s'expliquent de la façon suivante. Dans l'équation (4.19), la quantité  $\underline{\underline{D}}$  représentant le tenseur taux de déformations est proportionnelle au gradient des vitesses. De plus le champ de vitesse  $\underline{v}$  est proportionnel à  $V_0$ . On en déduit que  $\|\underline{\underline{D}}\| \propto V_0$ . De plus, d'après l'équation (4.4),  $\eta \propto p/T^{1/2}$  et comme  $T \propto V_0^2$ , on en déduit que  $\eta \propto p/V_0$ . Ainsi, le terme  $\eta \underline{\underline{D}} \cdot \underline{e}_r$  est indépendant de  $V_0$  mais évolue linéairement avec  $p$ . Les deux termes évoluant linéairement avec  $p$  mais indépendamment de  $V_0$ , il en est de même pour  $F_d/b$ .



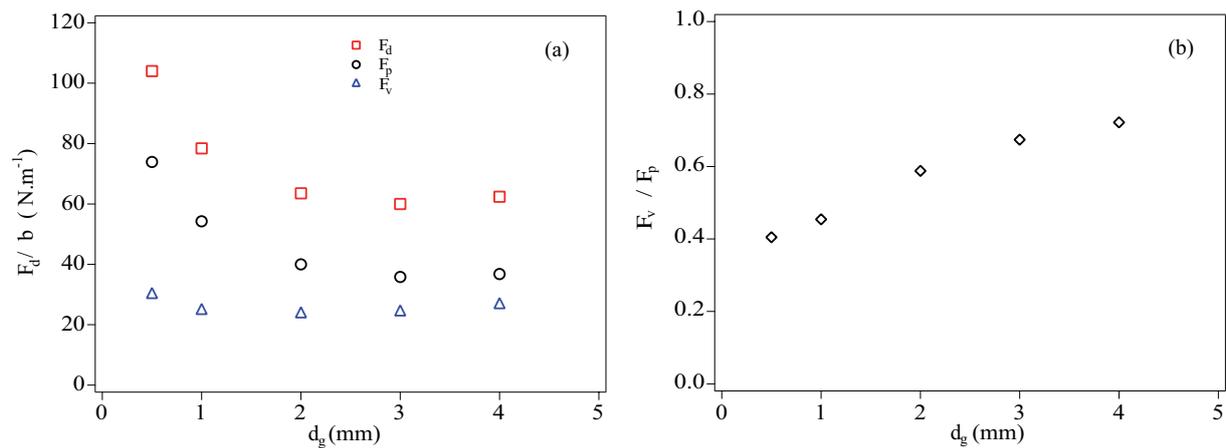
**Figure 4.34** – (a) Force de traînée  $F_d$  ( $\square$ ) et contributions de pression  $F_p$  ( $\circ$ ) et de viscosité  $F_v$  ( $\triangle$ ) en fonction du diamètre du disque  $d$ . (–) et (– –) ajustements linéaires pour  $F_d$  et  $F_p$ , (– –) ajustement en loi puissance  $F_v \propto d^{0.7}$ . (b) Rapport  $F_v/F_p$  en fonction du diamètre du disque  $d$ .

Regardons maintenant l'évolution de la force de traînée  $F_d$  en fonction de  $d$ . La figure 4.34a montre que la force évolue linéairement avec  $d$ , comme observé expérimentalement. La composante  $F_p$  croît linéairement avec  $d$ , mais la dépendance de  $F_v$  semble plus faible, du type  $d^{0.7}$ . Pour  $F_p$ , la valeur de la pression  $p/\rho g$  ne dépendant pas de la taille du disque  $d$  (Fig. 4.21), l'intégration de cette pression sur la surface donne en conséquence  $F_p \propto d$ . Cependant, pour  $F_v$ , ce n'est pas aussi simple. En effet, comme les champs de vitesses dépendent de  $d$ , les gradients de vitesses et la viscosité dépendent aussi de  $d$ . Étant donné que les longueurs caractéristiques des profils de vitesses sont proportionnelles à  $d$ , on obtient  $\|\underline{D}\| \propto d^{-1}$ . De plus, nous avons  $T_0 \propto 1/d$ , on en déduit  $\eta \propto d^{1/2}$ . En combinant ces deux résultats, on s'attend à ce que  $F_v \propto \eta \|\underline{D}\| \propto d^{1/2}$ , ce qui est presque ce que l'on obtient. Cependant, on constate que si l'on augmente la taille de l'objet, la contribution  $F_p$  devient plus importante que la contribution  $F_v$  et, c'est le comportement de  $F_p$  qui l'emporte et qui explique la dépendance quasi-linéaire de  $F_d$  avec  $d$ . Le rapport des composantes  $F_v/F_p$  n'est pas constant : il diminue quand  $d$  augmente (Fig. 4.34b). Ces résultats sont aussi cohérents avec les résultats expérimentaux qui présentaient une croissance linéaire de la force de traînée avec  $d$ .

L'évolution de la force de traînée  $F_d$  en fonction du diamètre des grains  $d_g$  est tracée sur la figure 4.35a. On constate que  $F_d$  et ses deux composantes  $F_p$  et  $F_v$  décroissent de manière non-linéaire lorsque  $d_g$  augmente. Le rapport des composantes  $F_v/F_p$  n'est pas constant : il augmente quand  $d_g$  augmente (Fig. 4.35b). Lorsque  $d_g$  augmente, il n'a pratiquement plus d'influence sur  $F_d$  et ses composantes. Ce résultat est similaire aux résultats expérimentaux (Fig. 3.5). En comparant maintenant quantitativement les résultats théoriques et les mesures expérimentales de force de traînée, on constate que les dépendances par rapport aux paramètres ( $V_0, p, d, d_g$ ) sont identiques, mais que la force expérimentale est environ 20 fois supérieure à la force théorique.

Quelle est la raison d'un tel écart ? Dans la modélisation numérique n'est pas prise en compte la friction solide entre grains, mais celle-ci ne pourra rendre compte d'un facteur 20. Le calcul d'un coefficient de friction effectif  $\mu = F_d/(\pi\rho_g g z b d)$  donne expérimentalement des valeurs de l'ordre de 10 dans nos expériences comme dans celles d'autres études [49], très supérieures aux coefficients de friction solide-solide classiques ( $\mu \simeq 0.5$ ) [65] ou même aux coefficients de friction effectifs granulaires ( $0.3 \leq \mu \leq 0.7$ ) [48]. Dans la modélisation numérique n'est également pas prise en compte la gravité et l'existence d'un gradient

de pression statique, les calculs étant réalisés en partant d'un champ de pression statique uniforme. Cette simplification numérique semblait raisonnable au regard de la force d'Archimède, très inférieure aux valeurs expérimentales de forces de traînée. Pourtant, il semble exister une différence importante entre les valeurs de force mesurées dans le cas de la pénétration et dans le cas de l'extraction [43, 77]. Le rôle du sens du mouvement par rapport à la gravité d'une part et aux parois/surface libre d'autre part doit être exploré en détail pour mieux comprendre l'origine du désaccord quantitatif actuel.



**Figure 4.35** – (a) Force de traînée  $F_d$  ( $\square$ ) et contributions de pression  $F_p$  ( $\circ$ ) et de viscosité  $F_v$  ( $\triangle$ ) en fonction du diamètre des grains  $d$ . (b) Rapport  $F_v/F_p$  en fonction du diamètre des grains  $d_g$ .

## 4.6 Bilan

À travers ce chapitre, une théorie hydrogranulaire a été mise en place pour modéliser le phénomène de pénétration d'un objet dans un milieu granulaire. Cette théorie donne une bonne allure des champs de vitesse comparativement aux expérimentations, avec la prédiction de la localisation de ce champ de vitesse autour de l'objet. Dans ce modèle, le milieu granulaire se comporte comme un fluide rhéofluidifiant. En définissant un nombre de Reynolds granulaire  $Re_g$ , basé sur la viscosité  $\nu_s$  au voisinage de l'objet, nous avons mis en évidence un écoulement à bas nombre de Reynolds ( $Re_g < 1$ ) assimilable à l'écoulement de Stokes pour un fluide newtonien. Ce modèle prédit aussi de bonnes dépendances de la force de traînée par rapport aux différents paramètres : indépendance par rapport à la vitesse  $V_0$ , proportionnalité par rapport à la pression  $p$  et au diamètre  $d$  de l'objet, dépendance faible par rapport au diamètre des grains  $d_g$ .

La localisation du champ de vitesse pour un écoulement autour d'un objet est aussi observée dans des fluides non-newtoniens visco-plastiques (fluides à seuil) de type Bingham [13] ou Herschel-Bulkley [9]. Une approche théorique frictionnelle de type  $\mu(I)$  où le milieu granulaire est vu comme un fluide visco-plastique devrait donc aussi prédire cette localisation mais sous-estimera sans doute aussi de manière importante la force de pénétration. Ce désaccord quantitatif important pour la force reste un point à éclaircir.



# Chapitre 5

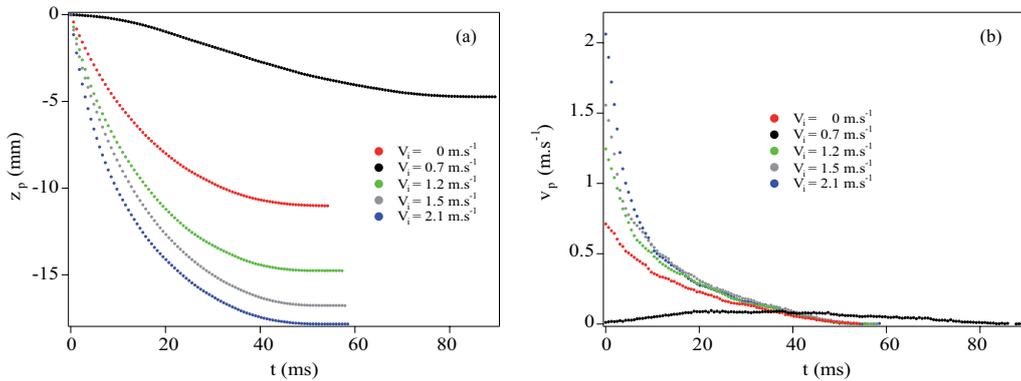
## Impact

DANS ce chapitre, nous nous intéressons à l'impact d'un projectile sur un milieu granulaire aussi bien dans une situation 2D que 3D. Comparativement à la pénétration d'un projectile à vitesse imposée  $V_0$  dans un milieu granulaire, le cas de l'impact correspond cette fois-ci à la pénétration d'un projectile dans un milieu granulaire à force imposée (ici le poids du projectile) avec une vitesse d'impact  $V_i$ .

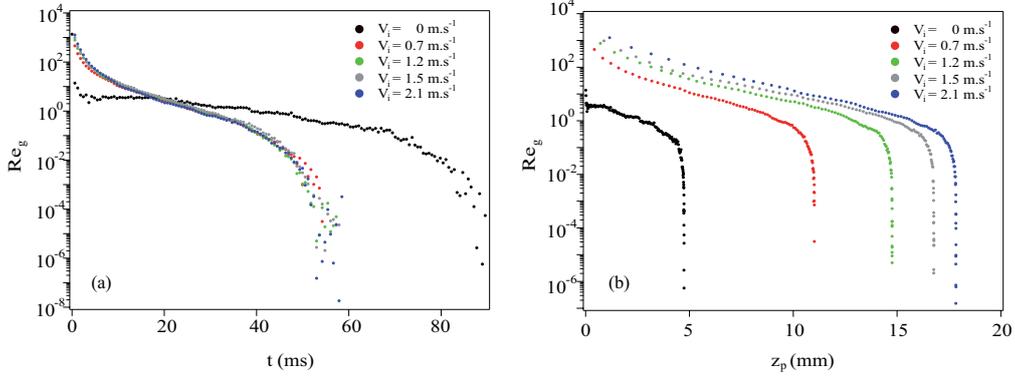
### 5.1 Calcul du nombre Reynolds instantané

Avec le dispositif 2D d'impact décrit dans le chapitre 2, nous mesurons la position  $z_p(t)$  et la vitesse  $v_p(t)$  du projectile tout au long de sa pénétration dans le milieu granulaire pour différentes vitesses d'impact  $V_i$  (Fig. 5.1). Avec ces deux mesures instantanées et les loi de viscosité effective établies au chapitre 4, il est alors possible de déterminer un nombre de Reynolds granulaire instantané  $Re_g(t)$ , caractéristique de l'écoulement granulaire autour du projectile. En supposant la pression hydrostatique,  $p/\rho_g = gz_p$  dans le milieu, où  $\rho_g$  est la masse volumique du milieu granulaire et  $g$  l'accélération de la pesanteur, le nombre de Reynolds granulaire instantané s'écrit

$$Re_g(t) = \frac{v_p(t)^2}{\eta_0 g z_p(t)} \left( \frac{d}{d_g} \right)^{1/2} \quad (5.1)$$



**Figure 5.1** – (a) Profondeur  $z_p$  et (b) vitesse de pénétration d'un cylindre à différentes vitesses d'impact  $V_i = (0; 0.7; 1.2; 1.5; 2.1 \text{ m.s}^{-1})$  pour  $d = 16 \text{ mm}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ .



**Figure 5.2** – Évolution du Nombre de Reynolds granulaire instantané  $Re_g$  en fonction du temps  $t$  (a) et selon la profondeur  $z_p$  à différentes vitesses d'impact  $V_i = (0; 0.71; 1.2; 1.6; 2.1 \text{ m.s}^{-1})$  pour  $d = 16 \text{ mm}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ .

La figure 5.2 présente le calcul du nombre de Reynolds instantané en fonction du temps dans un diagramme semi-logarithmique pour un projectile de diamètre  $d = 16 \text{ mm}$  en acier, impactant le milieu granulaire ( $d_g = 1 \text{ mm}$ ) à différentes vitesses d'impact  $V_i = v_p(t = 0)$ . On remarque que le nombre de Reynolds décroît rapidement au cours de la pénétration en raison des effets conjoints de diminution de vitesse et d'augmentation de la profondeur. On constate aussi qu'au début de la pénétration, on part d'un régime à haut Reynolds  $Re_g > 1$  (si la hauteur de lâcher n'est pas nulle) et qu'on transite ensuite vers un régime à bas Reynolds  $Re_g < 1$ . On constate ainsi qu'expérimentalement, les deux régimes existent.

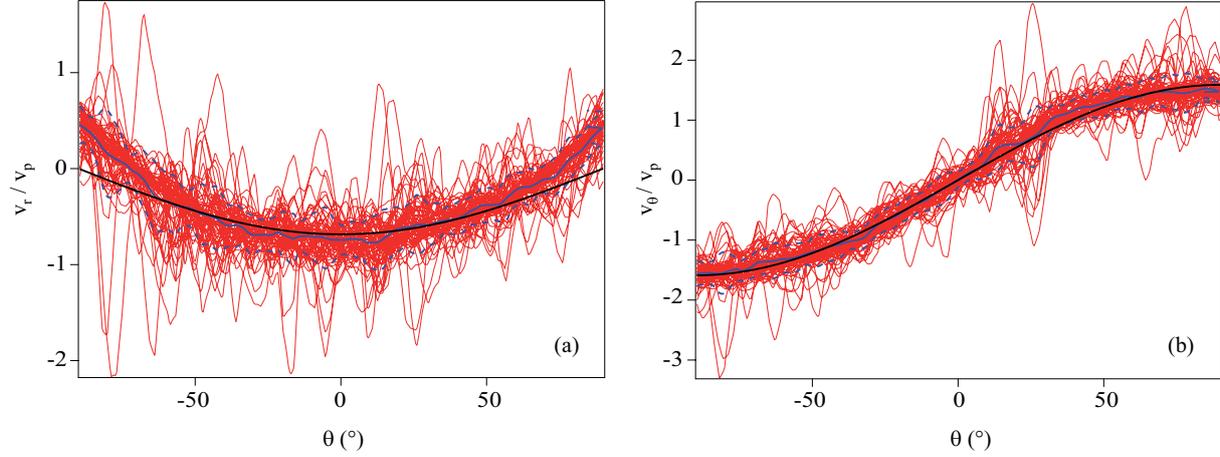
## 5.2 Champ de vitesse des grains

Étant donnée la géométrie du problème et les études menées dans les chapitres 3 et 4, nous travaillons ici aussi dans le référentiel du projectile en coordonnées cylindriques. Pour cela, le champ de vitesse des grains  $\underline{v}$  va se déduire du champ de vitesse des grains calculé par le logiciel de PIV à un instant  $t$  en retranchant la vitesse du projectile  $v_p$  au même instant  $t$ . L'écoulement de grains autour du projectile n'étant plus stationnaire, le champ de vitesse des grains dans le référentiel du projectile va s'écrire :

$$\underline{v}(r, \theta, t) = v_r(r, \theta, t)\underline{e}_r + v_\theta(r, \theta, t)\underline{e}_\theta, \quad (5.2)$$

où  $v_r$  est la composante radiale du vecteur vitesse  $\underline{v}$  et  $v_\theta$  la composante orthoradiale. La figure 5.3 présente les profils de vitesses  $v_r$  et  $v_\theta$  à l'instant  $t$  normalisés par la vitesse du projectile  $v_p(t)$  au long de la pénétration, à une distance  $r$  donnée du projectile. On constate que tous les profils  $v_r(t)/v_p(t)$  et  $v_\theta(t)/v_p(t)$  se superposent sur la même courbe maîtresse (Fig. 5.3). Ces profils sont similaires à ceux obtenus en vitesse imposée. Ce résultat montre l'autosimilarité du champ de vitesse des grains  $\underline{v}$ . Cependant cette condition d'autosimilarité n'est vraie que pour les faibles nombres de Reynolds, ainsi pour le tracé des profils de vitesse (Fig. 5.3) nous n'avons pas pris en compte les tous premiers instants de l'impact. D'autre part pour la moyenne temporelle des profils, nous ne prenons pas en compte les instants finaux où la vitesse du projectile tend vers 0. De la même manière que pour les expérimentations à vitesse imposée, on choisit alors de modéliser la dépendance en  $\theta$  des profils  $v_r/v_p$  par un cosinus et celle des profils  $v_\theta/v_p$  par un sinus (Fig. 5.3), avec une dépendance en  $r$  séparée.

Le champ de vitesse instantané des grains sera donc écrit :



**Figure 5.3** – (a) Profils azimutaux normalisés de la vitesse (a) radiale  $v_r/v_p(r, \theta, t)$  et (b) azimutale  $v_\theta/v_p(r, \theta, t)$  à  $r = 15$  mm. Profils instantanés (traits fins rouges), moyenne temporelle (trait épais bleu), écart type (traits pointillés bleu) et ajustements (trait épais noir) en (a)  $-A_r \cos \theta$  et (b)  $A_\theta \sin \theta$  avec  $A_r = 0.7$  et  $A_\theta = 1.6$ .

$$\underline{v}(r, \theta, t) = -v_p(t) \cos \theta A_r(r) \underline{e}_r + v_p(t) \sin \theta A_\theta(r) \underline{e}_\theta, \quad (5.3)$$

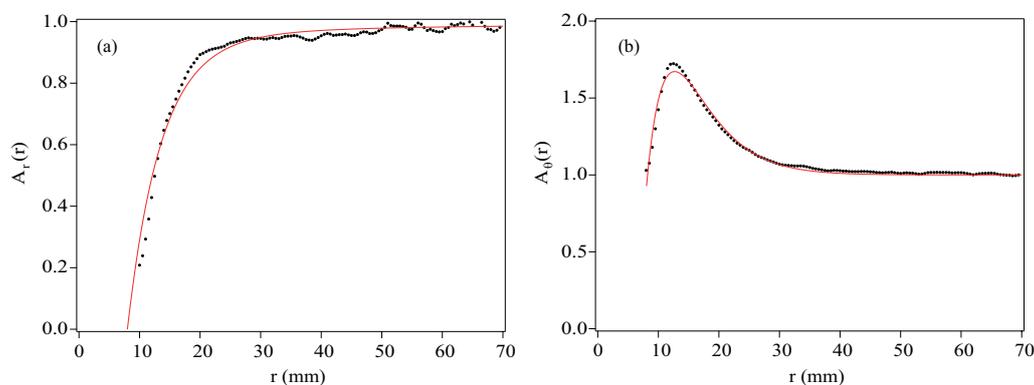
où  $A_r$  et  $A_\theta$  sont des fonctions d'amplitude qui ne dépendent que de la distance  $r$  au centre du projectile.

Les figures 5.4a et 5.4b présentent les fonctions d'amplitude  $A_r$  et  $A_\theta$  pour pour l'impact d'un cylindre de diamètre  $d = 16$  mm et de longueur  $b = 15$  mm en acier, sur le milieu granulaire ( $d_g = 1$  mm) à une vitesse d'impact  $V_i = 1.5$  m.s<sup>-1</sup>. On constate que ces fonctions d'amplitude sont similaires aux essais à vitesse imposée (Figs. 3.10 et 3.9). L'allure de  $A_r$  est exponentielle et la fonction  $A_\theta$  possède un dépassement localisé vers le cylindre puis un point d'inflexion pour tendre doucement vers la valeur asymptotique à l'infini. Étant donné que les allures sont comparables, il semble raisonnable de réaliser des ajustements similaires des données. On utilise donc les ajustements mis en place dans le chapitre 3, avec les équations suivantes rappelées ici pour mémoire :

$$A_\theta(d/2) = 1 + \frac{d/2 - \lambda_{\theta 3}}{\lambda_{\theta 1}}, \quad (5.4)$$

$$A_r(d/2) = 1 - \left( 1 - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2} \right) - \frac{\lambda_{r2}}{\lambda_{r1}} \frac{d/2 + \lambda_{r2} - \lambda_{r3}}{d/2} = 0. \quad (5.5)$$

Les figures 5.4a et 5.4b présentent les ajustements réalisés sur les données expérimentales avec un bon accord.



**Figure 5.4** – Fonctions d’amplitudes de vitesse radiale (a)  $A_r(r)$  et azimutal (b)  $A_\theta$  en fonction de  $r$ . Points expérimentaux  $\bullet$  et ajustements par les équations 5.5 et 5.4 (–) ( $V_i = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $d = 16 \text{ mm}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ ).

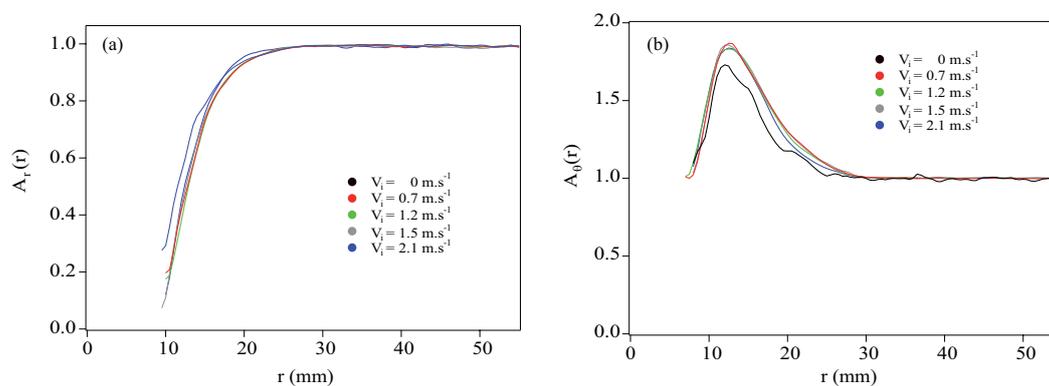
### 5.3 Étude des profils de vitesses

Dans cette partie, on s’intéresse à l’influence de différents paramètres tels que la vitesse d’impact  $V_i$ , puis les dimensions du cylindre (diamètre  $d$  et longueur  $b$ ) et enfin la taille des grains  $d_g$  sur les profils de vitesse. Le cylindre est toujours en acier ( $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ ).

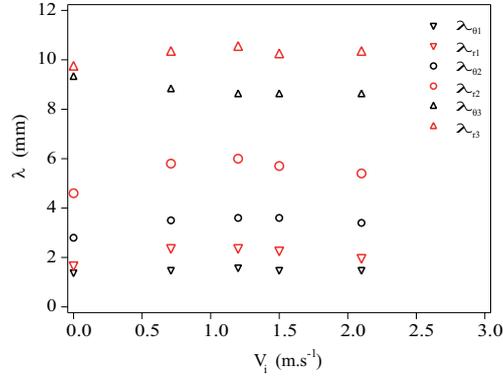
#### 5.3.1 Influence de la vitesse d’impact $V_i$

On s’intéresse ici à l’influence de la vitesse d’impact qui est désigné par le paramètre  $V_i$ . Pour cela on réalise plusieurs lâchers à des vitesses d’impact différentes, et on regarde son influence sur les fonctions d’amplitudes  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$  (Fig. 5.5).

Sur ces figures, on constate que les courbes se superposent très bien, ce qui montre qu’il n’y a pas d’influence de la vitesse d’impact  $V_i$  sur les longueurs caractéristiques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  (Fig. 5.6). Ce résultat conforte les observations du paragraphe précédent, les profils de vitesse instantanés se superposent



**Figure 5.5** – Fonctions d’amplitudes de vitesse radiale (a)  $A_r(r)$  et azimutale (b)  $A_\theta(r)$  pour différentes vitesses d’impact  $V_i$  ( $d = 16 \text{ mm}$ ,  $d_g = 1 \text{ mm}$  et  $b = 15 \text{ mm}$ ).



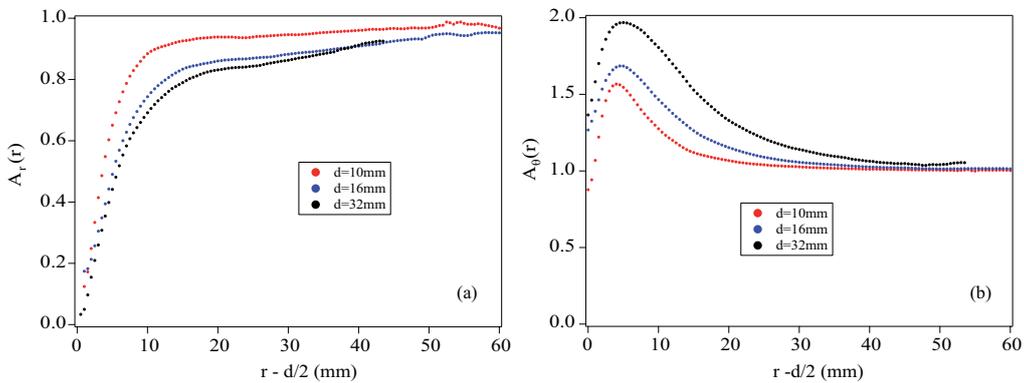
**Figure 5.6** – Longueurs caractéristiques de vitesse  $\lambda_{r_i}$  et  $\lambda_{\theta_j}$  en fonction de la vitesse d'impact  $V_i$  ( $d = 16$  mm,  $d_g = 1$  mm et  $b = 15$  mm).

sur une même courbe maîtresse lorsqu'ils sont renormalisés par la vitesse du projectile.

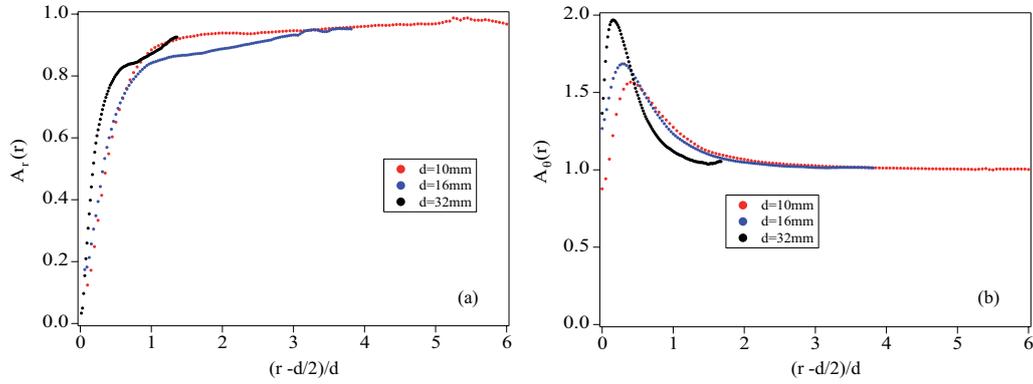
### 5.3.2 Influence de la taille du projectile $d$

On s'intéresse ici à l'influence du diamètre  $d$  du projectile sur les fonctions d'amplitude  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ . Trois diamètres de projectile différents ( $d = 10$  mm,  $16$  mm et  $32$  mm) ont été utilisés dans des grains de taille  $d_g = 1$  mm.

Lorsque l'on regarde les évolutions de  $A_r$  et  $A_\theta$  pour les différents  $d$  (Fig. 5.7a et 5.7b), on constate qu'il y a une variation de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  en fonction de  $d$ . Même s'il est difficile d'établir la variation précise de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec  $d$  (nous ne possédons que trois points), on constate que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  croissent lorsque  $d$  augmente. Dans les expérimentations à vitesse imposée, il semblait que  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  variaient comme  $d$ . La figure 5.8a présente le tracé de  $A_r$  en fonction de  $(r - d/2)/d$  sur les différents essais qui semble correct et qui porterait à croire que  $\lambda_1$  varie comme  $d$ . Cependant, ceci semble infirmé par la figure 5.8b où les mêmes tracés de  $A_\theta$  ne se superposent pas. Une des premières raisons qui peut expliquer cette différence de comportement est le confinement axial du cylindre (rapport d'aspect  $d/b$ ). Dans les expérimentations



**Figure 5.7** – Fonctions d'amplitude de vitesse (a) radiale  $A_r(r - d/2)$  et (b) azimutale  $A_\theta(r - d/2)$  pour différents diamètres de projectile  $d$  ( $V_i = 1.5$  m.s $^{-1}$ ,  $d_g = 1$  mm et  $b = 15$  mm).

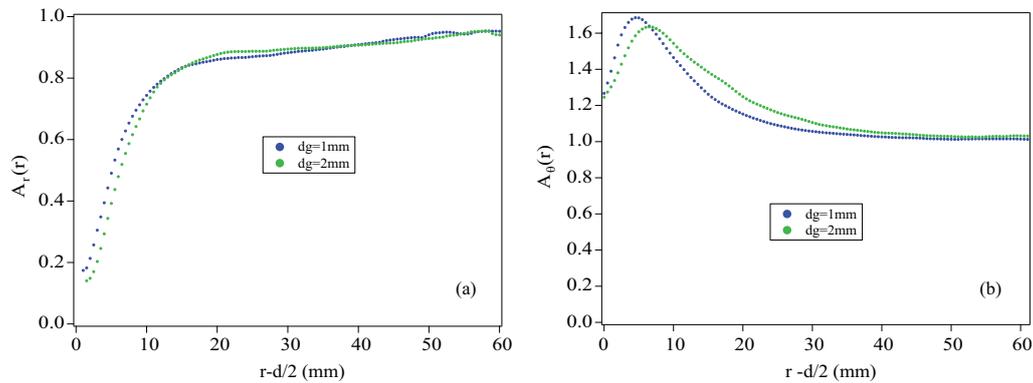


**Figure 5.8** – Fonctions d’amplitude de vitesse (a) radiale  $A_r((r-d/2)/d)$  et (b) azimutale  $A_\theta((r-d/2)/d)$  pour différents diamètres de projectile  $d$  ( $V_i = 1.5\text{m.s}^{-1}$ ,  $d_g = 1\text{ mm}$  et  $b = 15\text{ mm}$ ).

à vitesse imposée, nous avons toujours la conditions  $d < b$ . Ici, la longueur du cylindre est  $b = 15\text{ mm}$  : or pour le petit diamètre ( $d = 10\text{ mm}$ ), on a  $d < b$ , pour le diamètre moyen ( $d = 16\text{ mm}$ ), on a  $d \simeq b$  et pour le grand diamètre ( $d = 32\text{ mm}$ ), on a  $d > b$ . On passe donc ici du "cylindre" au "disque", ceci pouvant influencer sur les résultats

### 5.3.3 Influence de la taille des grains $d_g$

On s’intéresse ici à l’influence de la taille des grains sur les fonctions d’amplitude  $A_r(r)$  et  $A_\theta(r)$ , en prenant deux tailles de grains différentes  $d_g = 1\text{ mm}$  et  $d_g = 2\text{ mm}$  (Fig. 5.9). Cependant, à la vue des résultats, il est difficile de dégager s’il y a effet ou non de  $d_g$  sur les longueurs caractéristiques  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Les variations sont trop faibles pour pouvoir conclure. Il faudrait faire d’autres expérimentations avec une gamme de  $d_g$  plus importante. Il n’y a cependant pas de dépendances fortes constatées de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  avec  $d_g$  comme dans les expérimentations à vitesse imposée et comme le prévoit la théorie hydrogranulaire.



**Figure 5.9** – Fonctions d’amplitude de vitesse (a) radiale  $A_r(r-d/2)$  et (b) azimutale  $A_\theta(r-d/2)$  pour différentes tailles de grains  $d_g$  ( $V_i = 1.5\text{m.s}^{-1}$ ,  $d = 16\text{ mm}$  et  $b = 15\text{ mm}$ ).

## 5.4 Étude numérique 2D

Dans le cas de l'impact, une étude numérique 2D a été menée pour comparer les forces mises en jeu lors de la pénétration d'un projectile en milieu granulaire. Cette étude a fait en 2009 l'objet d'une publication dans *Europhysics Letters* [79] qui est reproduite en l'état ci-après. Cet article présente les résultats issus de simulations numériques 2D d'impact effectuées par un code de dynamique moléculaire. On y décrit dans un premier temps la méthode employée (présentée également dans le chapitre 2), puis on décrit l'ensemble des résultats obtenus. Les résultats concernent trois aspects de la pénétration : la profondeur finale de pénétration  $\delta$ , la force exercée par le milieu granulaire sur le projectile et enfin le temps d'arrêt  $t_s$  du projectile dans le milieu granulaire. Nous allons compléter cet article par une discussion dans les paragraphes suivants.

# Sphere penetration by impact in a granular medium: A collisional process

A. SEGUIN<sup>1</sup>, Y. BERTHO<sup>1</sup>, P. GONDRET<sup>1</sup> and J. CRASSOUS<sup>2(a)</sup>

<sup>1</sup> *Univ Paris-Sud, Univ Paris 6, CNRS, Lab FAST - Bât. 502, Campus Univ, F-91405 Orsay, France, EU*

<sup>2</sup> *Institut de Physique de Rennes, UMR UR1-CNRS 6251, Université Rennes 1 - Campus Beaulieu, Bât. 11A, F-35042 Rennes, France, EU*

received 20 July 2009; accepted in final form 6 November 2009  
published online 3 December 2009

PACS 45.70.-n – Granular systems

PACS 45.50.-j – Dynamics and kinematics of a particle and system of particles

PACS 96.15.Qr – Impact phenomena

**Abstract** – The penetration by a gravity-driven impact of a solid sphere into a granular medium is studied by two-dimensional simulations. The scaling laws observed experimentally for both the final penetration depth and the stopping time with the relevant physical parameters are here recovered numerically without the consideration of any microscopic solid friction but with dissipative collisions only. Dissipative collisional processes are thus found as essential in catching the penetration dynamics in granular matter whereas microscopic frictional processes can only be considered as secondary effects.

Copyright © EPLA, 2009

**Introduction.** – A better knowledge of the impact of a solid object into a granular target has many applied interests from both geologist and ballistic point of view [1,2]. Since a few years, numerous studies have been carried out by physicists interested in the ejection process [3–8], the crater morphology [9–12] and the penetration dynamics [4, 13–20], searching for scaling laws for the crater size [9–12] and penetration depth [13–23]. For the ejection process, a spectacular thin granular jet raising very high can be observed after the impact on small grains of rather low packing fraction [3–7] whereas an opening granular corona is seen for larger grains of rather high packing fraction [8]: the effect of air is crucial in the former case [5,6] whereas it is negligible in the latter one. For the crater morphology, the scaling laws found for high energy impacts of planetary interest [1] stand for low energy impacts of small scale laboratory experiments [9–12], indicating some universal physical processes involved in the crater formation. For the penetration dynamics, the observed deceleration of the impacting sphere towards its final stop is usually explained by a complex drag force resulting from frictional and collisional processes and involving several terms: a linear depth-dependent term [17] arising from solid friction and velocity-dependent terms of linear or

quadratic form arising from the ballistic [14,17,18] or the fluid mechanics point of view [21]. Such different force terms are not easy to extract from the sphere trajectory usually tracked by video means [13–17], but recently direct force measurements with an accelerometer inside the impacting sphere [19] reveal that a force proportional to the velocity squared is indeed experienced by the impacting sphere at least during its first penetration stage at high velocity and shallow depth. The stopping time of the sphere has been studied in different experimental works and displays a striking and rather counter-intuitive behaviour: it is a decreasing function of the impact velocity with an asymptotic plateau for large enough impact velocities [13,17,19]. The characteristic time scaling for the plateau value was proposed to be  $\tau = (d/g)^{1/2}$  [13,17] or  $\tau = (\rho/\rho_g)^{1/4}(d/g)^{1/2}$  [19] for a velocity larger than the typical characteristic velocity  $V = (gd)^{1/2}$  [17,19], where  $\rho_g$  is the density of the grains,  $d$  and  $\rho$  are the diameter and the density of the sphere. The observed scaling law for the final penetration depth  $\delta$  that may be written as  $\delta/d \propto (\rho/\rho_g)^\beta (H/d)^\alpha$ , where  $H$  is the total falling distance covered from release to rest, is not yet satisfactorily explained, as well as the values of the two power exponents  $\alpha$  and  $\beta$  found to be around 1/2 in experimental or numerical works [10,14,18,20–22]. Experiments are essentially 3D (except the real 2D experiment of Ciamarra *et al.* [13])

<sup>(a)</sup>E-mail: jerome.crassous@univ-rennes1.fr

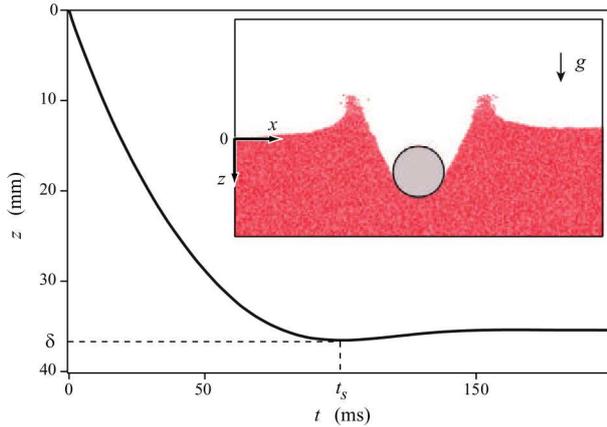


Fig. 1: (Colour on-line) Time evolution of the penetration  $z$  of a sphere impacting the granular medium, where  $z = 0$  corresponds to the initial surface of the grain piling. The projectile of diameter  $d = 30 d_g = 30$  mm and of density  $\rho = \rho_g = 2520 \text{ kg m}^{-3}$  hits the grains at the velocity  $v_i = 1 \text{ m s}^{-1}$ . Inset: snapshot during penetration by impact.

whereas the numerical simulations are 2D with similar values for the power exponents. The existence of a finite penetration depth  $\delta$  is always referred to the existence of a non-zero solid friction  $\mu$  in contrast to the case of simple fluids where the sphere would not stop but reach a limit velocity in the absence of solid friction. The  $\mu$ -dependence of  $\delta$  was proposed to be  $\delta \propto \mu^{-1}$  [10] (the penetration depth would thus be no more finite for zero solid friction) from experimental investigation varying the grain material. But experimentally, it is hard to change the coefficient of solid friction in a large range and without changing other crucial parameters such as the coefficient of restitution and the solid fraction.

In the present paper, we show by numerical simulations that no microscopic solid friction is necessary to explain a finite penetration depth for a sphere impacting on granular matter. Furthermore, we show that the scaling law  $\delta/d \propto (\rho/\rho_g)^\beta (H/d)^\alpha$  observed experimentally or numerically with non-zero microscopic solid friction still stands in the zero microscopic solid friction limit. We also recover that the stopping time  $t_s$  is constant at large enough impact velocities and show that it scales as  $t_s \simeq \tau = (\rho d / \rho_g g)^{1/2}$  for impact velocities larger than the typical characteristic velocity  $V = (\rho g d / \rho_g)^{1/2}$ . These scalings clarify the previous scalings discussed above. The numerical results will be shown and discussed after having presented the 2D numerical method used in the present paper.

**Numerical method.** – We use the method of molecular dynamics to perform two-dimensional simulations in the geometry shown in the inset of fig. 1. The granular target is prepared by the sedimentation of an initial dilute configuration under the action of the gravity acceleration  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ . The grains are modeled as a random packing of spheres of mean diameter  $d_g$ , mass  $m_g$  and density  $\rho_g$

contained in a rectangular box bounded by hard walls. In order to avoid any crystallization of the packing, a slight dispersion in the grain diameter is introduced, with a uniform distribution in the range  $0.8d_g$  to  $1.2d_g$ . Before the impact, the packing fraction in the granular medium is  $\phi \simeq 0.83$ . The projectile is a sphere of diameter  $d$ , mass  $m$  and density  $\rho$  which is dropped onto the granular packing. The projectile is thrown downwards at the velocity required, and its value at impact will be noted  $v_i$ . This is equivalent to the usual experimental situation where the sphere is dropped from the height  $h$  and impacts the granular surface with the velocity  $v_i = \sqrt{2gh}$ . Note that the box containing the granular medium is large enough ( $> 8d$ ) so that the projectile is not affected by the surrounding walls and the layer of grains is high enough to avoid any bottom wall effects during the penetration [22]. The number of grains in the simulations ranges from  $10^4$  for small boxes to  $10^5$  for largest ones.

As the goal of this paper is to show that microscopic solid friction is not essential in explaining the finite penetration of a projectile into a granular material, we do not take into account any static nor dynamic friction between the grains. The interaction forces are thus taken as purely normal with no tangential components. The interaction force between two grains, or between one grain and the projectile or the bounded walls, is modeled as a dissipative Hertz law [24] such as

$$F_n = -k\xi^{3/2} - \gamma \frac{d\xi}{dt}, \quad (1)$$

where  $k$  is the non-linear stiffness,  $\gamma$  is a damping coefficient, and  $\xi$  and  $d\xi/dt$  are respectively the interpenetration and the velocity of interpenetration of the grains. For two identical spherical grains of diameter  $d_g$ , Young modulus  $E$  and Poisson coefficient  $\nu$ , the non-linear stiffness  $k$  is given by  $k = 2E\sqrt{2d_g}/3(1-\nu^2)$ . The collision time for a non-dissipative contact ( $\gamma = 0$ ) between two grains is

$$\tau_c \approx 3.21 \left( \frac{m_{\text{eff}}}{k} \right) v_n^{-1/5}, \quad (2)$$

where  $v_n$  is the relative normal velocity and  $m_{\text{eff}} = m_g/2$  the effective mass for two identical colliding grains. The collision time is not very different in the case of a non-zero dissipation ( $\gamma \neq 0$ ). The equations of motion for the grains are integrated using a standard second order Verlet algorithm. The choice for the numerical time step  $\Delta t$  must be such that  $\Delta t \ll \tau_c$  in order to ensure numerical accuracy.

In the following, we present numerical simulations for a granular material composed of glass spheres (density  $\rho_g = 2520 \text{ kg m}^{-3}$ ) with an effective elastic modulus  $E^* = E/(1-\nu^2) = 69 \times 10^9 \text{ Pa}$  and of mean diameter  $d_g = 1 \text{ mm}$  (mass  $m_g = 1.3 \text{ mg}$ ). The non-linear stiffness is thus  $k = 2 \times 10^9 \text{ N m}^{3/2}$  and the collision time for a typical collision velocity  $v_n = 1 \text{ m s}^{-1}$  is  $\tau_c = 2.7 \mu\text{s}$ . The time step is chosen as  $\Delta t = 0.1 \mu\text{s} \ll \tau_c$ . For a non-zero damping coefficient  $\gamma$ , the coefficient of normal restitution for normal incidence

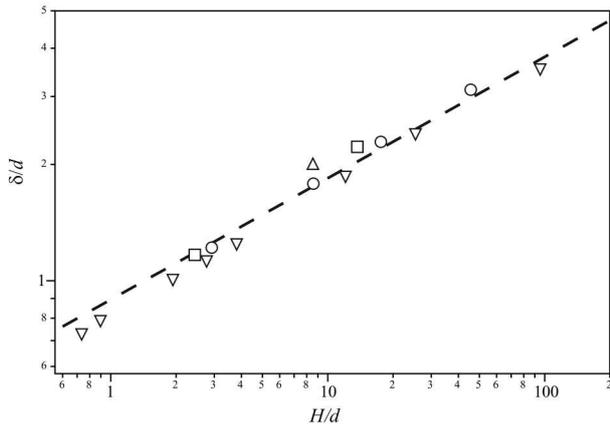


Fig. 2: Normalized penetration depth  $\delta/d$  of the sphere as a function of the normalized total falling distance  $H/d$  for different projectile diameters:  $d = 20d_g$  ( $\nabla$ ),  $d = 30d_g$  ( $\circ$ ),  $d = 40d_g$  ( $\square$ ) and  $d = 70d_g$  ( $\triangle$ ). The sphere/grains density ratio is  $\rho/\rho_g = 1$ . Dashed line: power law fit  $\delta/d \propto (H/d)^\alpha$ , with  $\alpha \simeq 0.31$ .

$e_n = -v_n^f/v_n^i$ , which is the ratio of the relative normal velocity after an impact over the velocity before the impact, is smaller than the ideal limit value 1 for perfect elastic collisions. More precisely, with model eq. (1),  $e_n$  decreases slowly with the collision velocity as  $(1 - e_n) \propto (v_n^i)^{-1/5}$  [24]. With the damping value  $\gamma = 0.065 \text{ kg s}^{-1}$ , the restitution coefficient is  $e_n = 0.9$  for  $v_n^i = 1 \text{ m s}^{-1}$ . It should be stressed that the following results are qualitatively only weakly dependent on the damping factor value.

**Numerical results and discussion.** – Figure 1 displays the time evolution of the position  $z(t)$  of the projectile during its penetration through the grains, where  $z$  is the distance between the initial horizontal free surface of the granular medium and the bottom of the impacting sphere. The penetration increases with time up to a maximum depth  $\delta$  at the time  $t_s$ . Note that a small rise of the sphere, of typically a few percent of the total penetration, is observed at the end of most of the runs. We attribute this effect to the absence of microscopic static friction in the interaction law (eq. (1)). Indeed, the grains ejected during the collision process are redeposited on the granular material and exert an increasing pressure on it, inducing a downwards motion of the granular material. This small effect was not reported in numerical simulations including microscopic solid friction [18]. In the following, we shall consider this maximum penetration  $\delta$  as the final penetration depth and the corresponding time  $t_s$  as the stopping time. Note that dropping the sphere from slightly different  $x$ -positions gives very similar  $z(t)$  even if the acceleration signals are quite different.

*Penetration depth.* Figure 2 shows the evolution of the normalized penetration depth  $\delta/d$  as a function of the normalized total falling distance  $H/d$ , where  $H = h + \delta$  is the sum of the free-fall height  $h = v_i^2/2g$  and the penetration depth. The diameter of the impacting sphere

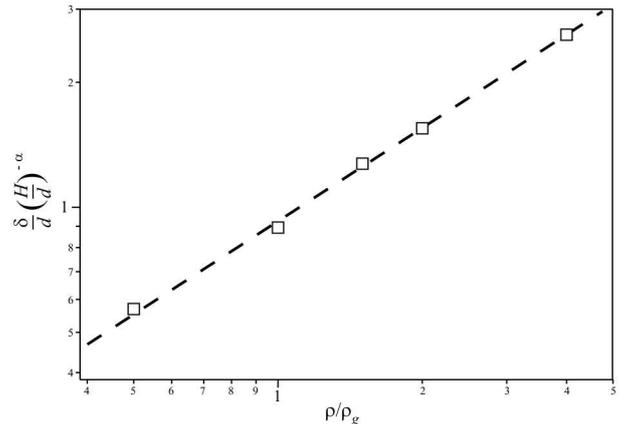


Fig. 3:  $(\delta/d)(H/d)^{-\alpha}$  as a function of the sphere/grains density ratio  $\rho/\rho_g$ . Dashed line: power law fit  $(\delta/d)(H/d)^{-\alpha} \propto (\rho/\rho_g)^\beta$ , with  $\beta \simeq 0.74$ .

ranges from  $d = 20d_g$  to  $70d_g$ , and its density is here kept constant and equalled to the grain density ( $\rho = \rho_g$ ). In the log-log plot of fig. 2, the data are aligned along a straight line of slope  $\alpha = 0.31 \pm 0.02$  meaning that the penetration depth  $\delta$  varies with  $H$  following a power law  $\delta/d \propto (H/d)^\alpha$ . The variation of the penetration depth with the density (*i.e.* with the mass) of the projectile is shown in fig. 3, where  $(\delta/d)/(H/d)^{-\alpha}$  is plotted as a function of the density ratio  $\rho/\rho_g$  between the projectile and the grains. The penetration depth is found to depend on  $\rho/\rho_g$  with a power law of the form  $\delta/d \propto (\rho/\rho_g)^\beta$ , with  $\beta = 0.74 \pm 0.02$ . Finally, grouping the fall height and the mass dependencies, one obtains

$$\frac{\delta}{d} = A \left( \frac{\rho}{\rho_g} \right)^\beta \left( \frac{H}{d} \right)^\alpha, \quad (3)$$

with  $A = 0.92 \pm 0.02$ . This power law scaling for the penetration depth is observed in various experimental and numerical studies [10,14,18,20–22]. The value of the exponent  $\alpha \simeq 0.31$  is close to the commonly reported values between 0.33 and 0.40, and the exponent  $\beta \simeq 0.74$  characterizing the dependence with the density ratio is not far from the reported values ranging from 0.50 to 0.61. Thus, the impacting sphere stops at a finite depth without any microscopic friction and the scaling laws for the penetration depth are in agreement with those observed experimentally or numerically with friction.

*Forces.* Let us now examine the forces undergone by the sphere after the impact, to extract the main ingredients leading to its stop. The force exerted by the grains on the sphere depends mainly on the penetration depth  $z$  and on the velocity  $v$  of the projectile [17–19]. For dense packings, experimental results show that this resistance force may be separated into two independent functions of position  $F_z(z)$  and velocity  $F_v(v)$  so that the Newton law for the sphere motion can be written as

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{F_z(z)}{m} - \frac{F_v(v)}{m}. \quad (4)$$

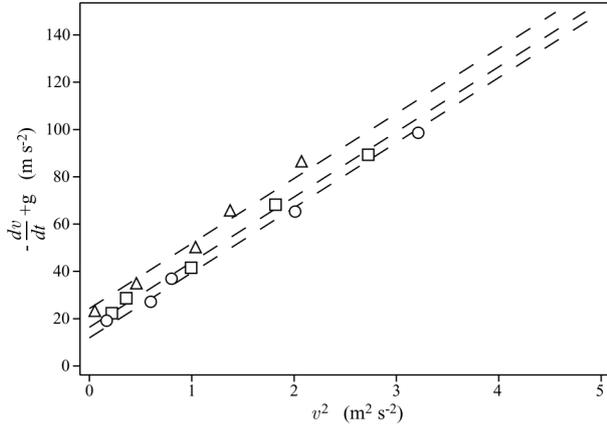


Fig. 4: Reduced acceleration  $-dv/dt + g$  of the impacting sphere (diameter  $d = 20d_g$ , density  $\rho = \rho_g$ ) as a function of its velocity squared  $v^2$ , at a specific depth:  $z = 30$  mm ( $\circ$ ),  $z = 40$  mm ( $\square$ ) and  $z = 50$  mm ( $\triangle$ ). Dashed lines: linear trends of the data by  $-dv/dt + g = F_z(z)/m + v^2/d_1$ , with  $d_1 \simeq 36.4$  mm.

$F_z$  is usually attributed to solid friction [4,17] and  $F_v$  is considered of collisional or inertial origin [17–19].

Figure 4 displays the reduced acceleration of the sphere as a function of its velocity at a given penetration depth ( $z = 30$  mm) and suggests that the drag force  $F_v$  is proportional to  $v^2$ , in agreement with the expression  $mv^2/d_1$  proposed recently by Katsuragi and Durian [17], where  $d_1$  is a characteristic dissipative length. Note that the reduced force is non-zero at vanishing velocity as there is still a non-zero depth-dependent force term  $F_z(z)$ . This behavior is observed with different sphere diameters in the range  $20 \text{ mm} < d < 100 \text{ mm}$  and different density ratio in the range  $1 < \rho/\rho_g < 10$ . Figure 5a shows that  $d_1$  does not depend on the depth of the projectile  $z$  and thus  $F_v$  does not depend on  $z$  as found experimentally [17], which justify the writing of eq. (4). Figures 5b and c show that  $d_1$  is proportional both to the projectile diameter  $d$  and to the density ratio  $\rho/\rho_g$  leading to  $d_1 \propto \rho d/\rho_g$ . The velocity-dependent force term  $F_v(v)$  thus scales as  $F_v/m \propto \rho_g v^2/\rho d$  indicating its inertial or collisional origin.

Plotting now in fig. 6a the force term at vanishing velocity  $v$  as a function of  $z$  shows that the simple dependence  $F_z \propto z$  proposed by Katsuragi and Durian [17] is compatible with our data despite the high scattering at low  $z$  ( $z \lesssim d$ ) where the sphere is not fully immersed in the granular medium. Figures 6b and c show that  $F_z/m$  is proportional to  $1/d$  and  $\rho_g/\rho$ . The depth-dependent force term  $F_z$  thus scales as  $F_z(z)/m \propto \rho_g g z/\rho d$ . This force term linear in  $z$  has been previously proposed and seen by various authors [17–19] with a solid friction origin, but the extracted coefficient of friction necessary to fit the data was far from the standard values [17]. Here, the  $F_z(z)$  force term does not come from microscopic solid friction as there is no microscopic solid friction in our numerical simulations. The depth-dependent term  $F_z(z)$  can thus simply viewed as a hydrostatic term as already

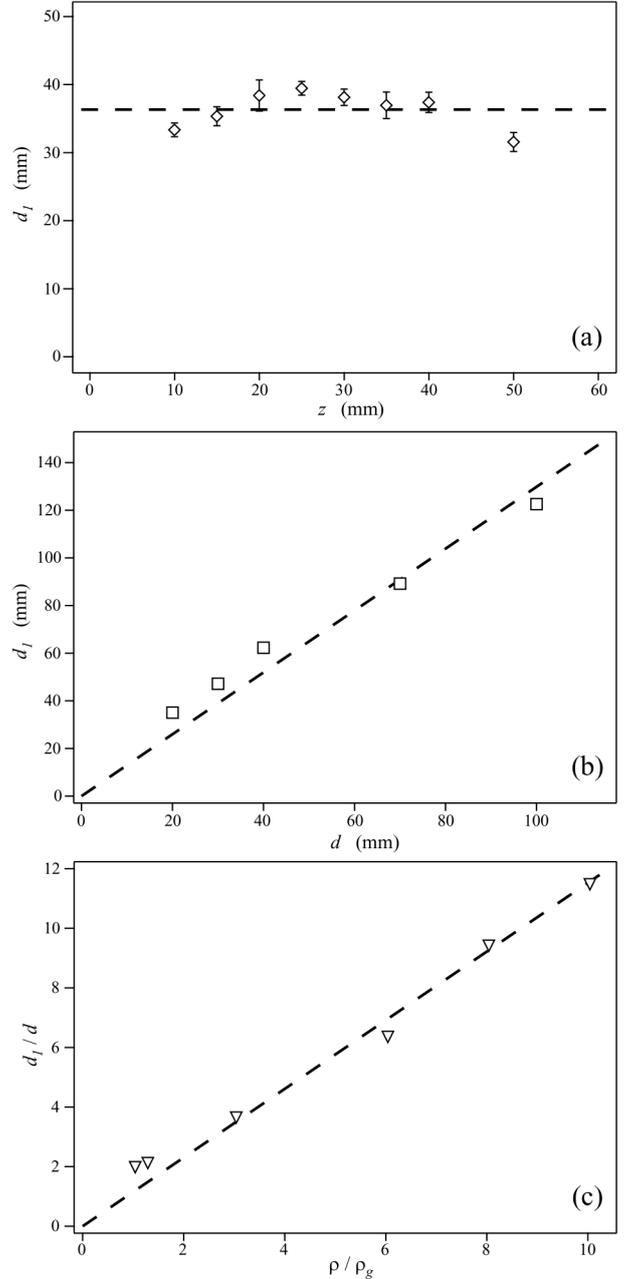


Fig. 5: (a) Characteristic length  $d_1$  as a function of the depth  $z$  of the projectile. Dashed line: constant fit  $d_1 = 36.4$  mm. (b) Characteristic length  $d_1$  as a function of the diameter  $d$  of the projectile (density  $\rho = \rho_g$ ) at a depth  $z = 20$  mm. Dashed line: linear fit  $d_1 = 1.3d$ . (c) Characteristic length  $d_1/d$  as a function of the density ratio  $\rho/\rho_g$  at  $z = 30$  mm for a projectile of diameter  $d = 20d_g$ . Dashed line: linear fit  $d_1/d = 1.2\rho/\rho_g$ .

suggested in [25] for the experimental penetration of flat plates and in [4] for an impacting sphere in very loose sand. The pressure increases linearly with the depth as  $\rho_g g z$  and so is the force  $F_z$  on the sphere. This “hydrostatic” force term is not Archimedean as the penetrating sphere is never immersed in the granular packing before it stops as can be seen here numerically (see the inset snapshot of fig. 1) and experimentally [19]. It follows that Newton’s law for the

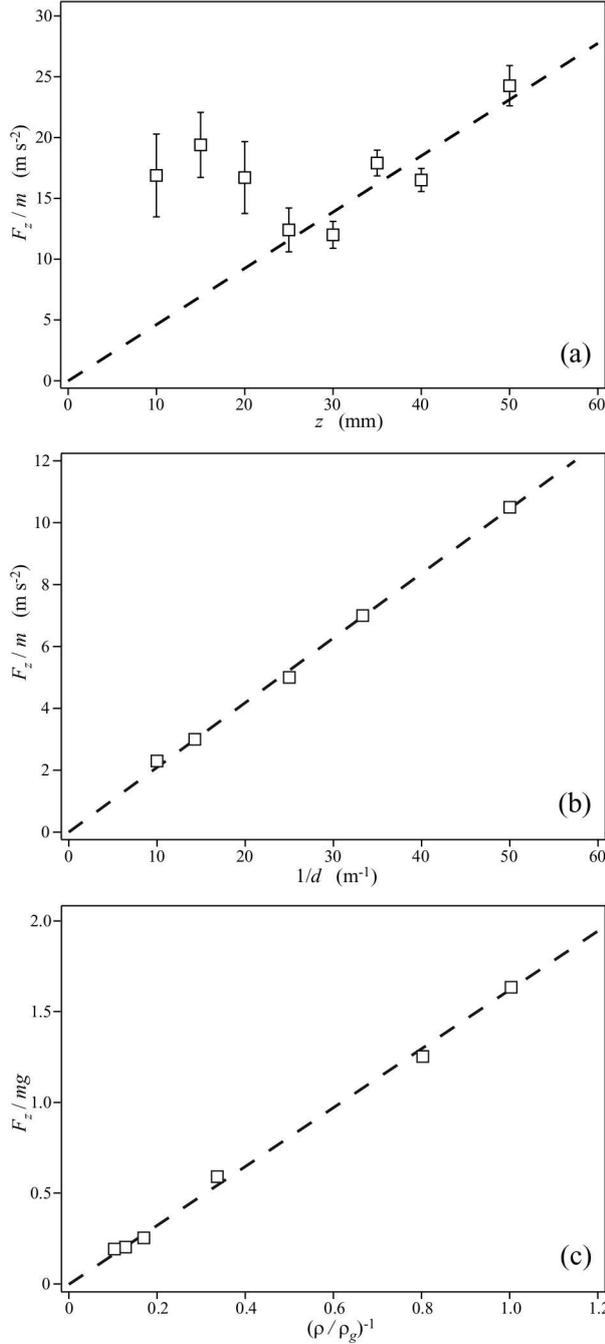


Fig. 6: (a)  $F_z/m$  as a function of the depth  $z$  of the projectile (diameter  $d = 20d_g$ , density  $\rho = \rho_g$ ); (b)  $F_z/m$  as a function of the inverse of the diameter  $1/d$  of the projectile (density  $\rho = \rho_g$ ) at a depth  $z = 20$  mm; (c)  $F_z/mg$  as a function of the inverse of the density ratio  $(\rho/\rho_g)^{-1}$  at  $z = 30$  mm for a projectile of diameter  $d = 20d_g$ . Dashed lines: linear fits of numerical data.

projectile during its penetration may be written as

$$\frac{dv}{dt} = g - a_z \frac{\rho_g g}{\rho d} z - a_v \frac{\rho_g v^2}{\rho d}, \quad (5)$$

where  $a_z = 1 \pm 0.1$  and  $a_v = 0.8 \pm 0.1$  are numerical prefactors.

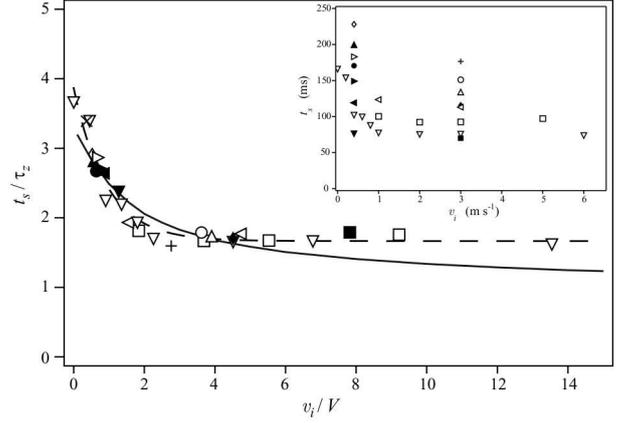


Fig. 7: Normalized stopping time  $t_s/\tau$  as a function of the normalized impact velocity  $v_i/V$ , for:  $\rho/\rho_g = 0.5$  and  $d = 20$  mm ( $\blacktriangledown$ ),  $d = 30$  mm ( $\blacksquare$ ),  $d = 40$  mm ( $\blacktriangleleft$ ),  $d = 60$  mm ( $\blacktriangleright$ ),  $d = 80$  mm ( $\bullet$ ),  $d = 100$  mm ( $\blacktriangle$ );  $\rho/\rho_g = 1$  and  $d = 20$  mm ( $\nabla$ ),  $d = 30$  mm ( $\square$ ),  $d = 40$  mm ( $\triangleleft$ ),  $d = 70$  mm ( $\circ$ );  $\rho/\rho_g = 1.5$  and  $d = 30$  mm ( $\blacklozenge$ );  $\rho/\rho_g = 2$  and  $d = 20$  mm ( $\triangleright$ ),  $d = 30$  mm ( $\triangle$ );  $\rho/\rho_g = 3$  and  $d = 20$  mm ( $\diamond$ );  $\rho/\rho_g = 4$  and  $d = 30$  mm ( $+$ );  $\rho/\rho_g = 6$  and  $d = 20$  mm ( $\times$ ). Dashed line: guideline for the eyes. Solid line: calculated stopping time from model eq. (5). Inset: stopping time  $t_s$  as a function of the impact velocity  $v_i$  for the same set of data.

*Stopping time.* Let us now focus on the stopping time. The inset of fig. 7 displays the stopping time  $t_s$  of the projectile as a function of its impact velocity  $v_i$ . Numerical data are observed to be very scattered depending on the velocity, diameter and density of the projectile. More precisely,  $t_s$  decreases with the impact velocity  $v_i$  for any given size and density of the projectile and increases with the projectile diameter  $d$  and with its density ratio  $\rho/\rho_g$ . Two time scales can be extracted from the non-linear differential equation (5) by considering independently the two force terms. Considering only the depth-dependent force term, the characteristic time  $\tau_z$  for the stopping time is

$$\tau_z = \left( \frac{\rho d}{\rho_g g} \right)^{1/2}, \quad (6)$$

which is independent of the impact velocity. Considering now only the non-linear velocity-dependent force term in eq. (5) leads to the characteristic time

$$\tau_v = \frac{\rho d}{\rho_g v_i}, \quad (7)$$

which depends on the impact velocity  $v_i$ . As both force terms play a non-negligible role in the penetration (the velocity-dependent force term decreases from its maximal value at impact to zero at the stop whereas the depth-dependent force term increases from zero at impact to its maximal value at the stop), the total stopping time  $t_s(\tau_z, \tau_v)$  is a combination of the two characteristic time scales  $\tau_z$  and  $\tau_v$ , and can thus be expressed as  $t_s/\tau_z = f(\tau_z/\tau_v)$ . Note that the time scale ratio is  $\tau_z/\tau_v = v_i(\rho_g/\rho g d)^{1/2}$ , which corresponds also to the velocity ratio

$v_i/V$  of the impact velocity  $v_i$  to the characteristic velocity  $V = (\rho g d / \rho_g)^{1/2}$ .

By using the characteristic time scale  $\tau_z$  and velocity scale  $V$ , *i.e.* by plotting  $t_s/\tau_z$  as a function of  $v_i/V$ , all the data collapse on the same master curve with two distinct parts (fig. 7): i) for low enough impact velocities ( $v_i/V \lesssim 2$ ), the stopping time decreases with increasing impact velocity; ii) for large enough impact velocities ( $v_i/V \gtrsim 2$ ), a plateau is reached, so that the stopping time does not depend on the impact velocity and tends to the constant value  $t_s/\tau_z \simeq 1.7$ . The existence of a single curve in the normalized plot  $t_s/\tau_z$  *vs.*  $v_i/V$ , and the critical values  $v_i/V \simeq 2$  and  $t_s/\tau_z \simeq 1.7$  close to 1 indicate that the typical velocity scale  $V$  and time scale  $\tau_z$  are relevant physical parameters for the problem, which validate the two independent model forces acting on the penetrating sphere. The stopping time calculated by eq. (5) with a stop condition at  $v=0$  agrees with the simulation data to within 20% (fig. 7). The calculated penetration depth  $\delta/d$  obtained by solving eq. (5) deviates from the data by as much as 50% since small errors in the force terms in the approximated model equation have a more important effect on the integrated position than on the stopping time.

**Conclusion.** – By performing numerical simulations for an impacting sphere in a frictionless granular material, one obtains the same scaling law for the penetration depth as in simulations with solid friction or real experiments. This shows that dissipation by microscopic solid friction can be ignored and dissipation by collisions is sufficient to catch the penetration dynamics in granular matter. Analysing the forces reveals that besides a velocity squared force term from collisional origin, exists a depth-dependent force term. This pressure increasing term with the depth is sufficient to stop the sphere, and steric hindrance with dissipation prevents the sphere from settling, by contrast to simple liquids. The scalings found for the two force terms allow for the prediction of the scaling of the stopping time which is indeed observed: a plateau value at high impact velocity and an increasing value at decreasing velocity. This scaling for the stopping time without any microscopic solid friction is also in agreement with what was observed previously. If microscopic solid friction appears needless to explain the scaling laws for both the final penetration depth and the stopping time of the projectile, it would certainly affect their precise value from a quantitative point of view.

\*\*\*

The authors thank J. HINCH and M. RABAUD for fruitful discussions.

## REFERENCES

- [1] MELOSH H. J., *Impact Cratering: A Geologic Process* (Oxford University Press, New York) 1989.
- [2] ZUKAS J. A. (Editor), *High Velocity Impact Dynamics* (Wiley, New York) 1990.
- [3] THORODDSEN S. T. and SHEN A. Q., *Phys. Fluids*, **13** (2001) 4.
- [4] LOHSE D., RAUHE R., BERGMANN R. and VAN DER MEER D., *Nature*, **432** (2004) 689.
- [5] ROYER J. R., CORWIN E. I., ENG P. J. and JAEGER H. M., *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 038003.
- [6] CABALLERO G. A., BERGMANN R. P., VAN DER MEER D., PROSPERETTI A. and LOHSE D., *Phys. Rev. Lett.*, **99** (2007) 018001.
- [7] MARSTON J. O., SEVILLE J. P. K., CHEUN Y.-V., INGRAM A., DECENT S. P. and SIMMON M. J. H., *Phys. Fluids*, **20** (2008) 023301.
- [8] DEBOEUF S., GONDRET P. and RABAUD M., *Phys. Rev. E*, **79** (2009) 041306.
- [9] WALSH A. M., HOLLOWAY K. E., HABDAS P. and DE BRUYN J. R., *Phys. Rev. Lett.*, **91** (2003) 104301.
- [10] UEHARA J. S., AMBROSO M. A., OJHA R. P. and DURIAN D. J., *Phys. Rev. Lett.*, **90** (2003) 194301; **91** (2003) 149902 (E).
- [11] ZHENG X. J., WANG Z. T. and QIU Z. G., *Eur. Phys. J. E*, **13** (2004) 321.
- [12] DE VET S. J. and DE BRUYN J. R., *Phys. Rev. E*, **76** (2007) 041306.
- [13] CIAMARRA M. P., LARA A. H., LEE A. T., GOLDMAN D. I., VISHIK I. and SWINNEY H. L., *Phys. Rev. Lett.*, **92** (2004) 194301.
- [14] AMBROSO M. A., SANTORE C. R., ABATE A. R. and DURIAN D. J., *Phys. Rev. E*, **71** (2005) 051305.
- [15] AMBROSO M. A., KAMIEN R. D. and DURIAN D. J., *Phys. Rev. E*, **72** (2005) 041305.
- [16] HOU M., PENG Z., LIU R., LU K. and CHAN C. K., *Phys. Rev. E*, **72** (2005) 062301.
- [17] KATSURAGI H. and DURIAN D. J., *Nat. Phys.*, **3** (2007) 420.
- [18] TSIMRING L. S. and VOLFSOON D., in *Proceedings of Powders and Grains* (A. A. Balkema Publishers, Stuttgart) 2005, p. 1215.
- [19] GOLDMAN D. I. and UMBANHOWAR P., *Phys. Rev. E*, **77** (2008) 021308.
- [20] BOURRIER F., NICOT F. and DARVE F., *Granular Matter*, **10** (2008) 6.
- [21] DE BRUYN J. R. and WALSH A. M., *Can. J. Phys.*, **82** (2004) 439.
- [22] SEGUIN A., BERTHO Y. and GONDRET P., *Phys. Rev. E*, **78** (2008) 010301.
- [23] NEWHALL K. A. and DURIAN D. J., *Phys. Rev. E*, **68** (2003) 060301.
- [24] SCHÄFER J., DIPPEL S. and WOLF D. E., *J. Phys. I*, **6** (1996) 5.
- [25] STONE M. B. *et al.*, *Phys. Rev. E*, **70** (2004) 041301; *Nature*, **427** (2004) 503.

### 5.4.1 Force exercée par le milieu granulaire sur le projectile

Comme d'autres auteurs, nous avons décomposé la force exercée par le milieu granulaire sur le projectile en deux termes séparés, l'un fonction de la profondeur, l'autre fonction de la vitesse, ce qui donne l'équation de la pénétration définie dans l'article et qu'on rappelle ici pour mémoire :

$$\frac{dv_p}{dt} = g - \frac{F_z(z_p)}{m} - \frac{F_v(v_p)}{m}, \quad (5.6)$$

où  $z_p$  est la position du projectile dans le milieu,  $v_p$  sa vitesse et  $m$  sa masse. Nous avons montré par nos simulations numériques (Figs. 4, 5 et 6 de l'article) que les expressions des deux termes de forces étaient les suivantes :

$$\frac{F_z(z_p)}{m} \propto \frac{\rho_g g z_p}{\rho d} \quad \text{et} \quad \frac{F_v(v_p)}{m} \propto \frac{\rho_g v_p^2}{\rho d}. \quad (5.7)$$

La composante  $F_z$  est décrite dans l'article comme une force de type hydrostatique issue de la pression  $p = \rho_g g z_p$ . On peut préciser cette vision à partir des résultats de théorie cinétique exposés au chapitre 4. Si l'on souhaite comparer cette force à la force trouvée pour un cylindre en mouvement stationnaire dans le cadre de la théorie hydrogranulaire, on peut réécrire cette force en prenant  $m \propto \rho b d^2$  pour un projectile cylindrique, sous la forme :

$$\frac{F_z}{b} \propto p d. \quad (5.8)$$

On voit que cette expression est en accord avec celle fournie par la théorie hydrogranulaire : il n'y a pas de dépendance avec la vitesse mais seulement une dépendance linéaire en pression  $p$  et en diamètre de projectile  $d$ . Néanmoins, le code de dynamique moléculaire n'est pas en mesure de prédire une dépendance avec la taille des grains bien que celle-ci est observée aussi bien dans la théorie hydrogranulaire qu'expérimentalement (Fig. ??).

La composante  $F_v$  est décrite comme une force de traînée proportionnelle à  $v_p^2$ . La théorie hydrogranulaire ne fait pas état de l'existence de cette force, dans le régime de suffisamment basse vitesse c'est-à-dire bas nombre de Reynolds granulaire ( $Re_g < 1$ ).

L'équation (5) de l'article où les deux forces  $F_z$  et  $F_v$  apparaissent de l'article est l'équation rendant compte de la pénétration du projectile dans le milieu granulaire. Au début de la pénétration, l'enfoncement  $z_p$  du projectile est faible et sa vitesse  $v_p$  est importante. Il semble alors raisonnable de penser que c'est le terme  $F_v$  qui prédomine dans l'équation. À la fin de la pénétration, la vitesse  $v_p$  est faible et l'enfoncement  $z_p$  est important. La présence de ces deux régimes peut s'expliquer par le nombre de Reynolds granulaire défini dans la théorie hydrogranulaire. À faible nombre de Reynolds  $Re_g < 1$  qui caractérise la fin de la pénétration, le terme  $F_z$  prédomine et l'on retrouve cette force que nous avons caractérisé dans la théorie aux petits nombres de Reynolds. À grand nombre de Reynolds  $Re_g > 1$  c'est-à-dire au début de la pénétration, le terme  $F_v$  prédomine. Si on fait le rapport des forces  $F_v/F_z = v_p^2/gz_p$  et qu'on le compare au nombre de Reynolds [Eq. (5.1)], on retrouve que

$$\frac{F_v}{F_z} \propto Re_g \left( \frac{d_g}{d} \right)^{1/2}. \quad (5.9)$$

Ce rapport de force n'est pas exactement le nombre de Reynolds mais pondéré par la racine du rapport des diamètres. Ce constat permet aussi de comprendre la difficulté à déterminer la force  $F_z$  pour les faibles  $z$  (Fig. 6a de l'article) : dans la zone à faible  $z$ , l'ajustement linéaire n'est pas en bon accord avec les points numériques. Lorsque le terme  $F_v$  est très grand devant le terme  $F_z$ , il est alors difficile d'extraire  $F_z$  correctement, sans parler du fait que le projectile de diamètre  $d = 20$  mm n'a pas complètement pénétré

dans le milieu granulaire. Nous n'avons pas abordé ce régime dans le chapitre 4 sur la théorie cinétique. Une étude complémentaire resterait à faire par la théorie cinétique pour déterminer l'expression de la force de traînée à grand nombre de Reynolds ( $Re_g > 1$ ). Il est clair qu'une expression du type inertielle comme celle de  $F_v$  (Eq. (5.7)) est attendue.

### 5.4.2 Temps d'arrêt du projectile

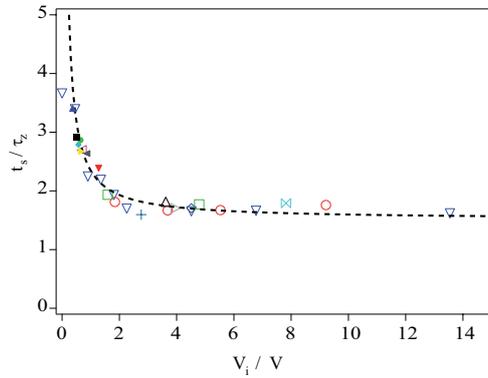
Compte tenu des deux termes de forces  $F_z$  et  $F_v$ , nous avons mis en évidence dans l'article deux temps caractéristiques associés  $\tau_z$  et  $\tau_v$  donnés par les expressions suivantes (Eqs. (6) et (7) de l'article [79]) :

$$\tau_z = \left( \frac{\rho d}{\rho_g g} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \tau_v = \left( \frac{\rho d}{\rho_g v_i} \right), \quad (5.10)$$

et expliqué que le temps d'arrêt  $t_s$  d'un projectile est une fonction de ces deux temps :  $t_s(\tau_z, \tau_v)$ . Ainsi, il est possible de donner un exemple de la fonction  $f$  définie dans l'article, en prenant une simple combinaison linéaire de la forme

$$\frac{t_s}{\tau_z} = b_z + b_v \frac{V}{V_i}, \quad (5.11)$$

où  $b_z = 1.5 \pm 0.1$  et  $b_v = 0.8 \pm 0.1$  sont deux coefficients numériques d'ajustement (Fig. 5.10). Il est clair que cet ajustement n'est pas physiquement satisfaisant puisque le temps  $t_s$  tend vers l'infini pour  $V_i = 0$ . Cependant, il reste acceptable pour  $V_i/V \geq 0.4$ , ce qui n'est pas si mal comme domaine de prédiction du temps d'arrêt.



**Figure 5.10** – Temps d'arrêt normalisé  $t_s/\tau_z$  en fonction de la vitesse d'impact normalisée  $V_i/(\rho g d/\rho_g)^{1/2}$ . Points numériques ( $\nabla$ ,  $\square$ ,  $\triangleleft$ ,  $\triangleright$ ,  $\triangle$ ,  $\bullet$ ,  $\circ$ ,  $\diamond$ ) et ajustement (---) de la forme  $t_s/\tau_z = b_z + b_v V/V_i$  avec  $b_z = 1.5 \pm 0.1$  et  $b_v = 0.8 \pm 0.1$ .

## 5.5 Étude de la profondeur de pénétration et du temps d'arrêt du projectile pour les essais 3D

Une étude expérimentale 3D a été menée pour caractériser l'influence du confinement lors de la pénétration d'un objet dans un milieu granulaire. Cette étude a fait l'objet d'une publication en 2008 dans la revue *Physical Review E* [78] qui est reproduite en l'état ci-après. Cet article présente dans un premier temps l'analyse des lois d'échelle de la profondeur de pénétration en fonction des différents paramètres de l'impact. Puis, il se consacre à la description de l'influence du confinement radial et normal lors de la pénétration du projectile. Dans les paragraphes suivants, nous revenons sur certains aspects de cet article en les complétant.

## Influence of confinement on granular penetration by impact

Antoine Seguin, Yann Bertho, and Philippe Gondret

*Univ Paris-Sud, Univ Paris 6, CNRS, Lab FAST, Bât. 502, Campus Univ, F-91405 Orsay, France*

(Received 28 March 2008; published 8 July 2008)

We study experimentally the influence of confinement on the penetration depth of impacting spheres into a granular medium contained in a finite cylindrical vessel. The presence of close lateral walls reduces the penetration depth, and the characteristic distance for these lateral wall effects is found to be of the order of one sphere diameter. The influence of the bottom wall is found to have a much shorter range.

DOI: [10.1103/PhysRevE.78.010301](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.010301)

PACS number(s): 45.70.-n, 45.50.-j, 83.80.Fg

### I. INTRODUCTION

The motion of a solid sphere falling under its own weight into an unbounded viscous fluid has been known for more than one century to be characterized by the limiting Stokes velocity, and the influence of a confinement by close walls on the sphere velocity has been also known for many years both theoretically [1–3] (see Ref. [4] for a review) and experimentally [5,6]. This wall influence, due to the long range of hydrodynamic forces for low Reynolds number flows, results in a larger fluid friction force on the sphere. The velocity of a sedimenting sphere is thus known to be reduced near a wall either parallel or perpendicular to the sphere motion by a correction factor that is linear with  $d/l$  at low  $d/l$  ( $d/l < 1$ ), where  $d$  is the sphere diameter and  $l$  is the distance from the wall. In all these cases, the well-known equations of classical fluid mechanics serve as a reliable support to understand and predict the corresponding motions with a fluid friction always proportional to velocity at small Reynolds numbers.

Considering now the motion of a falling sphere into granular matter, the existence of a nonzero solid friction force at vanishing velocity explains that the sphere driven by its own weight cannot reach a constant limit velocity but stops suddenly at a given depth. As the precise rheology of granular matter is far from being well understood and does not benefit from well-accepted equations despite recent important progress [7], the predictions for the stopping distance are far from easy. Many studies have been performed on the penetration depth  $\delta$  of an impacting sphere into a granular medium. It emerges from those studies [8–10] that  $\delta$  follows a power law of the form  $\delta/d \propto (\rho/\rho_g)^\beta (H/d)^\alpha$ , where  $\rho_g$  is the density of the grains,  $d$  and  $\rho$  are, respectively, the diameter and the density of the sphere, and  $H$  is the total falling distance covered from release to rest. The first power exponent is  $\beta \approx 0.5$ , whereas the second,  $\alpha$ , varies between 0.3 and 0.5 depending mainly on the range of impact velocities and slightly on the packing fraction of the layer [8–10]. Indeed, as the packing varies from dense to loose random packing, the packing density does not vary so much, but the contact network and force network do vary significantly.

The knowledge and the expression of the forces exerted by the granular medium, and responsible for the sphere deceleration and stop, are still the subject of an intense debate [11,12], with different terms of frictional and collisional origins. Recently, the effect of a solid wall normal to a slow

disk motion was shown to account for an exponential increase of the force on the disk in the close vicinity of the wall [13,14].

To our knowledge, no study deals in detail with the influence of close walls on the granular penetration, except the first results of Refs. [15,16]. In the present paper, after checking the usual “unbounded” case, we investigate experimentally the influence of the walls, either parallel or perpendicular to the sphere motion, for a sphere dropped onto a granular layer. In some situations, a coupling between the effects of parallel and normal walls may exist, but to understand their respective roles, each is studied separately in this paper.

### II. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup is sketched in Fig. 1. The penetration depth  $\delta$  is investigated by dropping a spherical projectile of diameter  $d$  and density  $\rho$  onto a fine granular material in a cylindrical container of diameter  $D$  and height  $b$ . The granular medium consists of glass beads (density  $\rho_g \approx 2.5 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) slightly polydisperse in size, with a diameter range of 300–400  $\mu\text{m}$ . Before each drop, the granular medium is prepared by gently stirring the grains with a thin rod. The container is then overfilled and the surface leveled using a straight edge. We have checked that this preparation leads

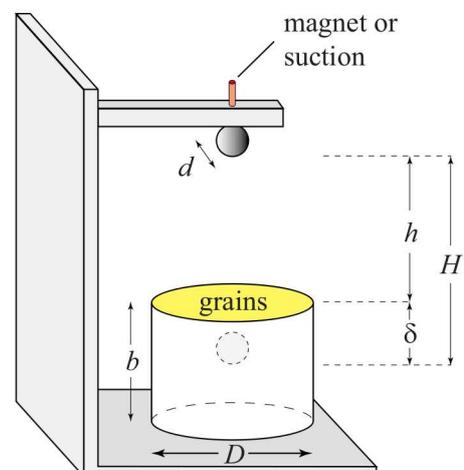


FIG. 1. (Color online) Sketch of the experimental setup and notations.

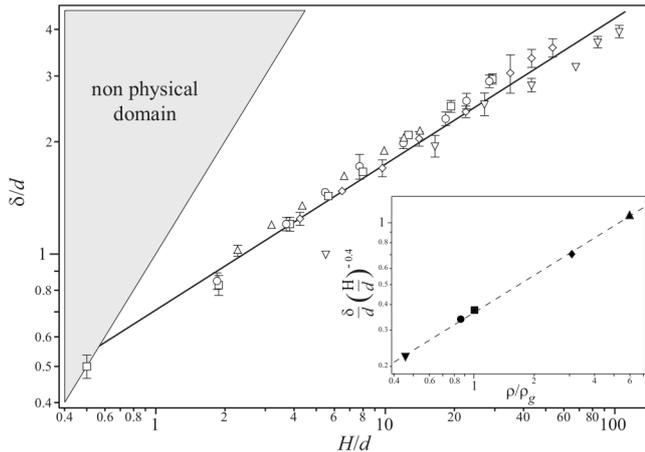


FIG. 2. Normalized penetration depth  $\delta/d$  as a function of the normalized total falling distance  $H/d$ . Experimental data for steel spheres ( $\rho \approx 7.8 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ ) of different diameters: ( $\nabla$ )  $d = 5$  mm, ( $\diamond$ )  $d = 10$  mm, ( $\square$ )  $d = 19$  mm, ( $\circ$ )  $d = 20$  mm, and ( $\triangle$ )  $d = 40$  mm. (—) Power law fit  $(\delta/d) \propto (H/d)^\alpha$  with  $\alpha = 0.4$ . The shaded region corresponding to  $H < \delta$  is by definition not allowed. Inset:  $(\delta/d)(H/d)^{-0.4}$  as a function of the density ratio  $\rho/\rho_g$  for spheres of diameter  $d = 20$  mm and of different materials: ( $\nabla$ ) polyamide, ( $\bullet$ ) Teflon, ( $\blacksquare$ ) glass, ( $\blacklozenge$ ) steel, and ( $\blacktriangle$ ) tungsten carbide. (---) Power law fit  $(\delta/d)(H/d)^{-0.4} \propto (\rho/\rho_g)^\beta$  with  $\beta = 0.61$ .

to reproducible results with only small variations. The grain size is much smaller than the falling sphere diameter  $d$  so that the granular medium can be considered as a continuum medium.

Different sphere materials and sizes have been used to bring out the influence of the sphere density  $\rho$  and of the sphere diameter  $d$  on the penetration depth  $\delta$ . Steel spheres are initially maintained by a magnet at a distance  $h$  above the granular surface. Nonmetallic spheres are held by creating locally a vacuum at the top of the sphere. Both apparatus allow one to drop the spheres without any initial velocity nor spinning motion. The sphere is released directly above the center of the container and falls along the container axis. The penetration depth  $\delta$  is then measured with a thin probe by locating the top of the sphere with a precision better than 1 mm. The impact speed is tuned by varying the drop height  $h$  from 0 to 0.5 m; the corresponding velocity  $v$  at impact, given by  $v = \sqrt{2gh}$  where  $g$  is the gravitational acceleration, thus ranges from 0 to 3 m s<sup>-1</sup>. In the following, the results will be analyzed using the total falling distance  $H = h + \delta$  (Fig. 1).

### III. THE UNBOUNDED CASE

We first present briefly our results obtained in the usual unconfined case: the container is large enough ( $D = 190 \text{ mm} \gg d$ ) so that the sphere is not affected by the surrounding walls and also high enough ( $b = 300 \text{ mm} \gg \delta$ ) to avoid any bottom wall effect as we shall see in the next sections. The influence of the different parameters on the penetration depth is shown in Fig. 2 for five different sphere materials with a density ranging from  $1.14 \times 10^3$  (polyamide) to  $14.97 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  (tungsten carbide) and different sphere

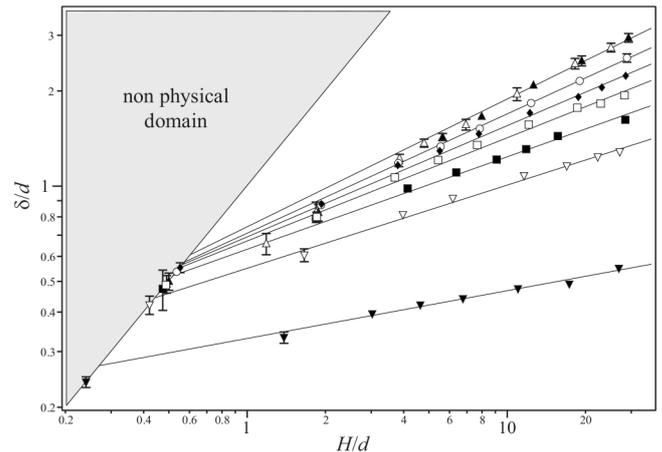


FIG. 3. Normalized penetration depth  $\delta/d$  for a steel sphere ( $d = 19$  mm) as a function of the normalized total falling distance  $H/d$  for different cylindrical vessel diameters: ( $\blacktriangledown$ )  $D = 24$  mm, ( $\nabla$ )  $D = 35$  mm, ( $\blacksquare$ )  $D = 40$  mm, ( $\square$ )  $D = 50$  mm, ( $\blacklozenge$ )  $D = 62$  mm, ( $\circ$ )  $D = 80$  mm, ( $\blacktriangle$ )  $D = 128$  mm, and ( $\triangle$ )  $D = 190$  mm.

diameters  $d$  ranging from 5 to 40 mm. Note that each point corresponds to an average of about ten experiments, and error bars corresponding to the standard deviation are displayed only when larger than the symbol size. The penetration depth is larger for larger falling distance and larger projectile density. The data are well fitted by power laws of the form

$$\frac{\delta}{d} = A \left( \frac{\rho}{\rho_g} \right)^\beta \left( \frac{H}{d} \right)^\alpha, \quad (1)$$

with  $A = 0.37 \pm 0.01$ ,  $\beta = 0.61 \pm 0.02$ , and  $\alpha = 0.40 \pm 0.04$ . The values of  $\alpha$  and  $\beta$  are in close agreement with the previous studies already mentioned [9,10].

### IV. INFLUENCE OF LATERAL CONFINEMENT

We are now interested in the influence of a lateral confinement on the penetration depth, using cylindrical containers of large height ( $b = 300$  mm), but with smaller diameters  $D$  ranging from 128 down to 24 mm. The penetration depth  $\delta$  is displayed in Fig. 3 as a function of the total falling distance  $H$ , for a steel projectile of diameter  $d = 19$  mm falling in the different vessels. The two data sets corresponding to the two largest containers ( $D = 128$  mm and  $D = 190$  mm) coincide, suggesting that for large enough vessel diameters the influence of the surrounding walls becomes negligible and the medium can be considered as unbounded in the radial direction. For smaller diameters  $D$ , data still fall into straight lines in the log-log plot of Fig. 3 but with smaller slope values suggesting that Eq. (1) remains valid with smaller  $\alpha$  values. The  $A$  and  $\alpha$  values extracted from the fit of the data of Fig. 3 by Eq. (1) are reported in Figs. 4 and 5.

The inset of Fig. 4 displays  $\alpha$  as a function of  $D$  for the steel sphere of diameter  $d = 19$  mm ( $\bullet$ ). A constant plateau value appears at large enough diameters  $D$  ( $D \geq 100$  mm) with the constant value  $\alpha \approx 0.4$ . At smaller  $D$ ,  $\alpha$  decreases significantly with  $D$  and seems to tend toward zero when  $D$

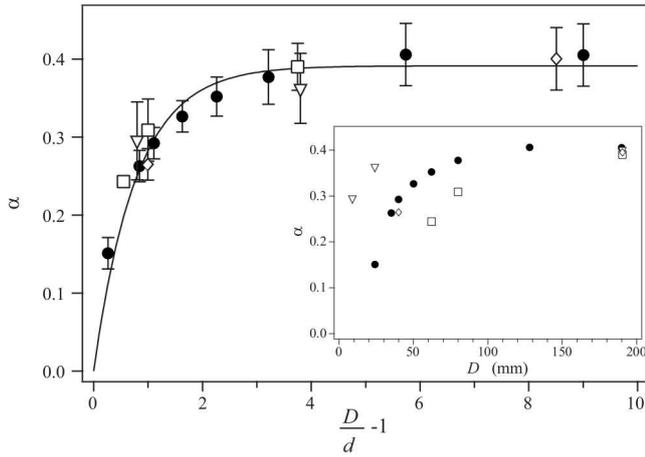


FIG. 4. Power exponent  $\alpha$  of Eq. (1) as a function of  $(D/d - 1)$  for steel sphere of diameter ( $\nabla$ )  $d=5$  mm, ( $\bullet$ )  $d=19$  mm, and ( $\square$ )  $d=40$  mm, and ( $\diamond$ ) tungsten carbide sphere of diameter  $d=40$  mm. (—) Best fit by Eq. (2) with  $\alpha_\infty \approx 0.39$  and  $\lambda_\alpha \approx 0.8$ . Inset: same data as a function of  $D$ .

approaches the sphere diameter  $d=19$  mm, as no deep penetration (larger than  $d/2$ ) would be possible for  $D < d$ . Data for different sphere diameters do not collapse in the  $\alpha$  vs  $D$  plot, but they do collapse in the  $\alpha$  vs  $(D/d - 1)$  plot, as shown in Fig. 4. In this plot, data are well fitted by the exponential law

$$\alpha = \alpha_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{D-d}{\lambda_\alpha d}\right) \right], \quad (2)$$

where  $\alpha_\infty \approx 0.4$  corresponds to the “infinite” (unbounded) case and  $\lambda_\alpha \approx 0.8$  characterizes the range of wall effects. The characteristic distance  $\lambda_\alpha d$  of lateral wall effects is thus found here a little smaller than one sphere diameter, which is rather small. Hence, for  $D/d \lesssim 5$ , the surrounding walls play a key part and prevent a deep penetration of the projectile. For  $D/d \gtrsim 5$ , the container has a vanishing influence and the

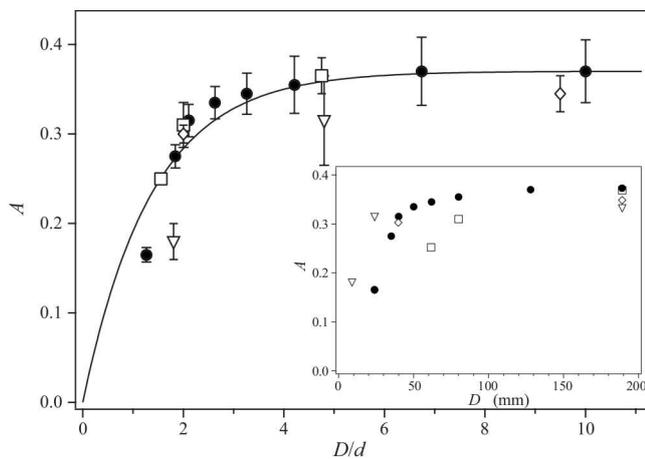


FIG. 5. Prefactor  $A$  of Eq. (1) as a function of  $D/d$  with the same notations as in Fig. 4. (—) Best fit by Eq. (3) with  $A_\infty \approx 0.37$  and  $\lambda_A \approx 0.7$ . Inset: same data as a function of  $D$ .

sphere reaches a limiting penetration depth independent of  $D$ .

The prefactor  $A$  follows the same kind of decrease for decreasing container diameters  $D$  (see Fig. 5), but we believe that the relevant parameter for the lateral confinement is here  $D/d$  rather than  $(D/d - 1)$ , as  $A$  must vanish for vanishing  $D/d$ . The  $A$  variation is quite well fitted by the exponential law

$$A = A_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{D}{\lambda_A d}\right) \right], \quad (3)$$

where  $A_\infty \approx 0.37$  corresponds to the unbounded case and  $\lambda_A \approx 0.7$  characterizes the range of wall effects. Note that the  $\lambda_\alpha$  and  $\lambda_A$  values are about the same as these two parameters characterize the same wall effect.

Besides, the power exponent  $\beta$  for the density ratio [Eq. (1)] does not depend on the lateral confinement but may be considered as constant, as data points for tungsten carbide ( $\diamond$ ) twice denser than steel fall on the same curve in both Figs. 4 and 5.

The reduction of the penetration depth by a lateral confinement is clearly due to an enhanced blocking effect by the walls (less radial dilatancy). The precise mechanisms responsible for this reduction remain to be understood. For instance, the nonlinear “pressure” evolution inside the granular packing due to the well-known Janssen effect, and valid both in static and dynamic situations [17], fails in explaining an enhanced force on the sphere in the confined case.

## V. INFLUENCE OF NORMAL CONFINEMENT

Let us now discuss the influence of a normal confinement by a close bottom wall. We investigate this effect by varying the thickness  $b$  of the granular layer contained in a vessel of large enough diameter  $D$  to avoid the lateral wall effects discussed before. As we are interested in the sphere penetration inside the granular material, we restrict, however, our study to thick enough layers with  $b > d$ . The normalized penetration depth  $\delta/d$  of the steel sphere of diameter  $d=19$  mm is displayed in Fig. 6 as a function of the normalized total drop distance  $H/d$  for three layer heights  $b$  ranging from 23 to 50 mm ( $1.2 \leq b/d \leq 2.6$ ) together with the unbounded case  $b=300$  mm ( $b/d=15.8$ ). The penetration depth remains unchanged by the presence of the bottom wall until the projectile approaches at a very short distance from the wall:  $\delta$  follows the unbounded curve until the sphere impacts the bottom wall indicated by the dashed lines in Fig. 6. This very short range effect is consistent with recent measurements of the force on a flat plate approaching in a *quasi-static* way the solid bottom boundary of a granular sample, indicating that the penetration resistance increases exponentially near the boundary [13,14]. At a high enough falling height, the sphere impacts the wall (a characteristic shock sound can be heard) and bounces back leaving a crater below. For thin enough layers as already studied in Ref. [18], the opened crater does not become filled enough by inward avalanches so that no grains are at the center and the final rest position of the sphere corresponds to  $\delta=b$  as the sphere comes to rest on the bottom “dry” wall [see ( $\nabla$ ) in Fig. 6].

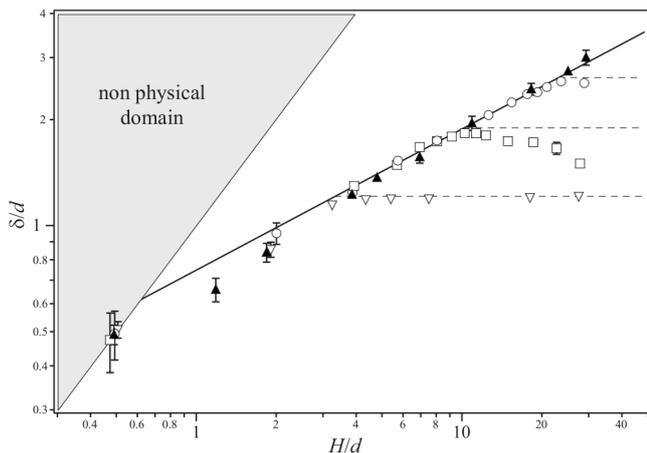


FIG. 6. Normalized penetration depth  $\delta/d$  of a steel sphere ( $d = 19$  mm) as a function of the normalized total drop height  $H/d$ , for different heights  $b$  of the granular layer: ( $\nabla$ )  $b/d=1.2$ , ( $\square$ )  $b/d=1.9$ , ( $\circ$ )  $b/d=2.6$ , ( $\blacktriangle$ )  $b/d=15.8$ . Each horizontal dashed line corresponds to each initial height  $b$  of the granular layer. (—) Power law fit  $(\delta/d) \propto (H/d)^\alpha$  with  $\alpha=0.4$ , for the unbounded case ( $b/d=15.8$ ).

For thicker granular layers, inward avalanches are large enough to bring back grains down to the crater center so that the sphere comes back at rest at  $\delta < b$  [see ( $\square$ ) in Fig. 6]. In that case, the larger the falling height, the longer the rebound time and thus the time for avalanche, so that the thicker the layer of back grains at the crater center: this explains the

decreasing value of  $\delta$  for an increasing falling height in this part of the curve. Data for  $b/d=2.6$  ( $\circ$ ) would also display such a behavior for larger falling heights.

## VI. CONCLUSION

We have measured the penetration depth  $\delta$  of spheres of diameter  $d$  impacting a granular medium contained in a cylindrical vessel of diameter  $D$ . This penetration depth may be strongly affected by the presence of surrounding walls. The presence of a bottom wall perpendicular to the sphere motion has a very short range influence on  $\delta$  as the sphere is only affected when the distance from the wall has reached a few grain diameters. On the other hand, the presence of lateral walls parallel to the sphere motion has a larger range influence with a typical characteristic distance  $\lambda \approx d$ . For  $D/d \lesssim 5$ , the walls have a strong influence and reduce significantly the penetration depth. For  $D/d \gtrsim 5$ , they have a vanishing influence. The two (bottom and lateral) wall effects have been studied independently, but it could be a hard coupling between them for geometrically strongly hindered grain motions.

## ACKNOWLEDGMENTS

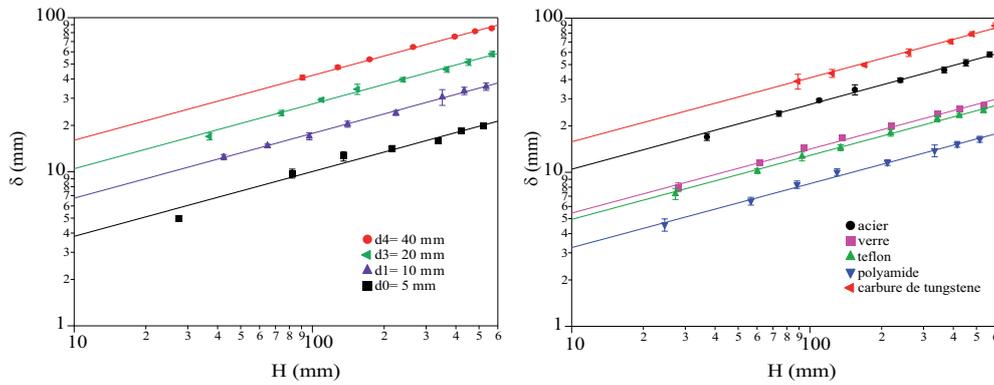
We wish to thank M. Salloum for preliminary experiments and J.-P. Hulin and M. Rabaud for a thoughtful reading of the manuscript.

- 
- [1] H. A. Lorentz, *Abhandl. Theoret. Phys.* **1**, 23 (1906).
  - [2] H. Faxen, *Ark. Mat., Astron. Fys.* **17**, 27 (1923).
  - [3] H. Brenner, *Chem. Eng. Sci.* **16**, 242 (1961).
  - [4] J. Happel and H. Brenner, *Low Reynolds Number Hydrodynamics* (Kluwer, Dordrecht, 1986).
  - [5] G. D. M. MacKay, M. Suzuki, and S. G. Mason, *J. Colloid Sci.* **18**, 103 (1963).
  - [6] A. Ambari, B. Gauthier-Manuel, and E. Guyon, *J. Fluid Mech.* **149**, 235 (1984).
  - [7] GDR MiDi, *Eur. Phys. J. E* **14**, 341 (2004).
  - [8] J. R. de Bruyn and A. M. Walsh, *Can. J. Phys.* **82**, 439 (2004).
  - [9] J. S. Uehara, M. A. Ambroso, R. P. Ojha, and D. J. Durian, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 194301 (2003).
  - [10] M. A. Ambroso, C. R. Santore, A. R. Abate, and D. J. Durian, *Phys. Rev. E* **71**, 051305 (2005).
  - [11] M. Hou, Z. Peng, R. Liu, K. Lu, and C. K. Chan, *Phys. Rev. E* **72**, 062301 (2005).
  - [12] H. Katsuragi and D. J. Durian, *Nat. Phys.* **3**, 420 (2007).
  - [13] M. B. Stone *et al.*, *Nature (London)* **427**, 503 (2004).
  - [14] M. B. Stone *et al.*, *Phys. Rev. E* **70**, 041301 (2004).
  - [15] D. I. Goldman and P. Umbanhowar, *Phys. Rev. E* **77**, 021308 (2008).
  - [16] E. L. Nelson, H. Katsuragi, P. Mayor, and D. J. Durian, e-print arXiv:0803.3030.
  - [17] Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné, and J.-P. Hulin, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 144301 (2003).
  - [18] J.-F. Boudet, Y. Amarouchene, and H. Kellay, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 158001 (2006).

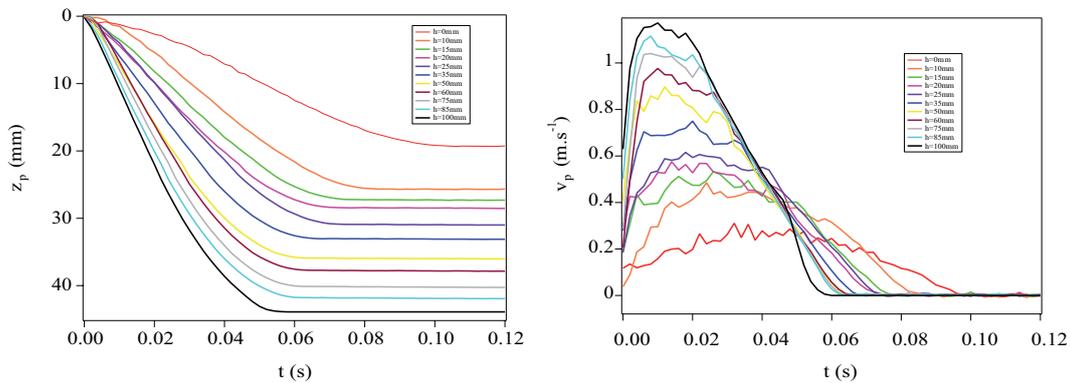
### 5.5.1 Impact en milieu infini

La figure 5.11 montre l'influence du diamètre du projectile ainsi que de sa masse volumique sur la profondeur de pénétration  $\delta$  dans un diagramme log-log. Les points expérimentaux ainsi que leur ajustement par une loi puissance tend à montrer que ces courbes sont parallèles. C'est ce parallélisme qui nous a incité à normaliser les quantités  $\delta$  et  $H$  par le diamètre du projectile  $d$ . On a alors obtenu la loi d'échelle  $\delta/d \propto (H/d)^\alpha$  de l'article.

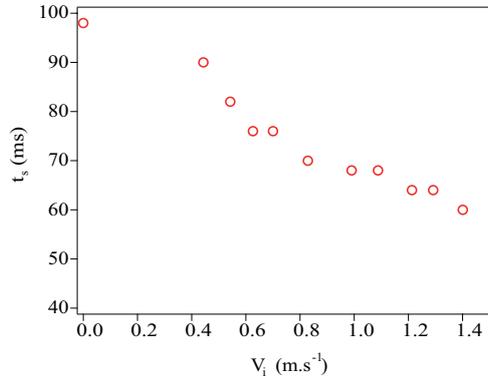
Grâce au capteur à courant de Foucault décrit dans le chapitre 2, nous avons mesuré la position instantanée  $z_p(t)$  du projectile et par dérivation on obtient sa vitesse  $v_p(t)$  pendant sa pénétration dans le milieu granulaire (Fig 5.12). Nous avons effectué des mesures uniquement pour un projectile de diamètre  $d = 30$  mm en acier dans un milieu similaire à celui de l'article. La figure 5.13 présente l'évolution du temps d'arrêt du projectile pour différentes vitesses d'impact. On constate toujours que plus la vitesse d'impact  $V_i$  est importante, plus le temps d'arrêt  $t_s$  est court. Ce résultat va dans le même sens que la campagne numérique 2D même si les résultats sont plus bruités.



**Figure 5.11** – Profondeur de pénétration  $\delta$  en fonction de la hauteur totale de chute  $H$  pour (a) différents diamètres de projectile  $d$  et (b) différentes masse volumique de projectile  $\rho$ . Les ajustements sont des lois puissances de la forme  $\delta = AH^\alpha$ .



**Figure 5.12** – Evolution de (a) la position  $z_p$  du projectile et de (b) sa vitesse  $v_p$  pour différentes vitesse d'impact  $V_i = (0; 0.4; 0.5; 0.6; 0.7; 0.8; 1; 1.2; 1.3; 1.4 \text{ m.s}^{-1})$ .



**Figure 5.13** – Evolution du temps d'arrêt du projectile  $t_s$  en fonction de la vitesse d'impact du projectile  $V_i$ .

### 5.5.2 Influence du confinement latéral

L'article montre que le confinement normal n'a pas d'influence à longue portée sur la profondeur de pénétration  $\delta$ . Au contraire, le confinement latéral agit considérablement sur la profondeur de pénétration du projectile : l'exposant  $\alpha$  et  $A$  suivent des lois exponentielles de la forme

$$\alpha = \alpha_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{D-d}{\lambda_\alpha d}\right) \right] \quad (5.12)$$

$$A = A_\infty \left[ 1 - \exp\left(-\frac{D}{\lambda_A d}\right) \right] \quad (5.13)$$

où  $\alpha_\infty$  et  $A_\infty$  correspondent au cas non-confiné et  $\lambda_\alpha$  et  $\lambda_A$  sont des longueurs caractérisant les effets des parois latérales. Lors des différentes expérimentations, on a été capable de déduire le champ de vitesse des grains par deux fonctions d'amplitudes  $A_r$  et  $A_\theta$ . Ces fonctions d'amplitude possèdent un ensemble de longueurs caractéristiques qui sont susceptibles d'être influencées par le confinement latéral. Notamment, l'existence du dépassement sur la fonction  $A_\theta$  risque d'être modifié par les parois. En effet, si les parois sont trop proches pour que ce dépassement puisse s'effectuer pleinement, l'écoulement de grains risque de s'en trouver modifié, comme par exemple dans le cas d'un fluide non-newtonien [9]. Ainsi, l'écoulement de grains, le champ de vitesse et donc la fonction d'amplitude  $A_\theta$  va être modifiée et la profondeur finale de pénétration va diminuer. Cependant, il est difficile de quantifier plus précisément ces changements puisque les études expérimentales des mesures directes de champ de vitesse en présence de confinement latéral n'ont pas été menées.

## 5.6 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact d'un projectile sur un milieu granulaire sous plusieurs angles. Tout d'abord, expérimentalement, nous avons exploré la cinématique de l'impact. Nous avons distingué deux zones, la zone de haut Reynolds et la zone de bas Reynolds. La zone de bas Reynolds peut être vue comme un ensemble d'état quasi statique à vitesse imposée et le problème est assimilable aux expérimentations à vitesse imposée. L'étude de la zone à haut Reynolds reste à faire pour pouvoir modéliser cette phase de l'impact. Ensuite numériquement, d'un point de vue dynamique, on distingue deux types de forces qui s'appliquent sur le projectile pendant sa pénétration dans le milieu granulaire, mis à part son propre poids. Une force quadratique en vitesse du projectile qui va agir essentiellement au début de la pénétration (à  $Re_g > 1$ ) et une force indépendante de la vitesse et proportionnelle à la profondeur du projectile qui va agir à la fin de la pénétration. De l'étude de ces deux forces, nous avons été capables d'extraire des temps caractéristiques qui sont directement liés à la durée de la pénétration du projectile.

Enfin, nous avons mené une étude sur le confinement dans des expérimentations 3D où nous avons constaté que l'influence d'un fond solide n'a pas d'influence alors que des parois latérales diminuent significativement la profondeur de pénétration. Cependant, les mécanismes associés à ce comportement restent encore incompris.



# Conclusion Générale

L'objectif de ce travail de thèse était de mieux comprendre la dynamique de pénétration d'un objet dans un milieu granulaire.

Nous avons conçu plusieurs dispositifs expérimentaux, de pénétration par impact et à vitesse imposée. Avec les dispositifs quasi-2D, nous avons caractérisé le champ de vitesse des grains autour d'un cylindre en pénétration dans un milieu granulaire. Nous avons observé que le cisaillement est très localisé près du cylindre avec des variations exponentielles et avons étudié les longueurs caractéristiques en fonction des différents paramètres du problème : celles-ci sont indépendantes de la vitesse, de la taille des grains et tendent à être proportionnelles au diamètre du cylindre. Nous avons aussi caractérisé le profil de température granulaire avec un plateau proche du cylindre (dans la zone de cisaillement localisé) suivi d'une décroissance exponentielle. Nous avons enfin mesuré la force exercée par le milieu granulaire sur le cylindre en pénétration à vitesse imposée. Nous avons mis en évidence que cette force est indépendante de la vitesse, proportionnelle à la pression (donc à la profondeur de pénétration), proportionnelle au diamètre du cylindre, et qu'elle décroît de manière non-linéaire lorsque la taille des grains augmente.

Pour comprendre ces résultats expérimentaux de profils de vitesse et force de traînée, nous avons entrepris une modélisation de l'écoulement par la théorie cinétique granulaire où le milieu est vu comme un milieu continu dont les coefficients de transport (dont la viscosité) dépendent de la température granulaire, elle-même fonction de la vitesse. Les résultats montrent clairement une localisation du cisaillement près du cylindre. La vision est ainsi semblable à celle obtenue pour une sphère chaude en mouvement dans un fluide newtonien de viscosité dépendant de la température, étudiée dans la configuration pratique de l'ascension de magma chaud dans le manteau terrestre [8, 30]. Les variations de l'extension spatiale du champ de vitesse avec les paramètres du problème (vitesse, pression, diamètre du cylindre et diamètre des grains) sont aussi bien représentées par la théorie cinétique en comparaison des résultats expérimentaux. Les variations de la force de traînée par rapport aux différents paramètres sont également bien reproduites, mais il reste à comprendre l'écart quantitatif important avec les valeurs expérimentales mesurées dans le cas de la pénétration.

En définissant un nombre de Reynolds granulaire  $Re_g$ , nous avons pu mettre en évidence par la théorie cinétique que le régime expérimental correspond à l'équivalent d'un régime visqueux de Stokes à petit  $Re_g$ . Dans ce régime, pour un milieu granulaire, la force de traînée est proportionnelle à la pression et est indépendante de la vitesse alors que pour un fluide newtonien, la force de traînée est proportionnelle à la vitesse et indépendante de la pression. Il existe sans doute une transition vers un autre régime à plus grand  $Re_g$  ( $Re_g \gtrsim 1$ ) où les profils de vitesses perdent leur symétrie amont-aval et la force de traînée change sans doute d'expression. Il serait intéressant de voir si le régime à grand Reynolds correspond à un régime inertiel pour lequel la force de traînée deviendrait dépendante de la vitesse, par exemple proportionnelle au carré de la vitesse.

Les résultats obtenus dans nos expériences et modélisation à vitesse imposée nous ont ensuite permis

de mieux comprendre les résultats de pénétration par impact où la force est la somme de deux termes, l'un proportionnel à la profondeur et l'autre proportionnel au carré de la vitesse [79]. Le premier terme correspond au régime à petit Reynolds valable à faible vitesse et grande profondeur en fin de pénétration, tandis que le deuxième terme correspond sans doute au régime à haut Reynolds à grande vitesse et petite profondeur en début de pénétration, qu'il reste à caractériser finement. Nous avons montré que les deux contributions de forces donnent lieu à deux temps caractéristiques et que le temps d'arrêt est une fonction de ces deux temps, expliquant l'observation d'un temps d'arrêt plus court pour une vitesse d'impact plus grande.

Cependant, malgré tous les progrès effectués sur la compréhension du phénomène de pénétration en milieu granulaire, il reste encore des points nébuleux et des questions sans réponse. Nous avons présenté une théorie hydrogranulaire qui ne considérait pas la friction microscopique entre grains. On peut alors se demander ce que donnerait une théorie de type  $\mu(I)$ . Dans la théorie  $\mu(I)$ , le milieu granulaire est vu comme un fluide visco-plastique et la modélisation de l'écoulement par une telle théorie devrait aussi prédire cette localisation [9, 13] mais il serait intéressant de voir si cette théorie donne les bonnes dépendances de longueurs caractéristiques des champs de vitesse et de la force de traînée avec les paramètres de vitesse, de pression, de diamètre de cylindre et de diamètre des grains.

Dans le cas de l'impact, nous avons déterminé expérimentalement des lois d'échelle pour la profondeur de pénétration du projectile en fonction des paramètres de l'impact mais nous n'avons pas fait le lien entre ces lois d'échelle et la théorie hydrogranulaire. Il serait intéressant de retrouver ces lois d'échelle ou quelque chose d'équivalent. Ensuite, toujours dans le cas de l'impact, nous avons montré et quantifié l'influence du confinement [78] mais il n'existe pas à ce jour de modèle pouvant expliquer ce phénomène. Il est certain que les longueurs caractéristiques des champs de vitesse vont être affectées par la présence de parois latérales, modifiant ainsi la force de traînée sur le projectile.

## Annexe A

# Modèle Géométrique

On cherche ici à établir un modèle simple pouvant décrire l'évolution de  $A_r(r)$ . Pour cela, on va s'intéresser aux grains situés sous le projectile (on se place à  $\theta = 0^\circ$ ). On fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de frottement entre les grains et qu'il n'y a pas de pertes d'énergie lors d'un choc éventuel entre grains. Ces deux hypothèses sont certes grossières mais elles ont le mérite de simplifier le problème. On fait également l'hypothèse d'un empilement 2D régulier de grains (il y a alors un angle  $\alpha$  entre grains). Pour l'instant, on va raisonner sans considérer la vitesse d'entraînement des grains  $V_0 \underline{e}_z$  due à la montée du plateau et on va travailler uniquement avec les vitesses relatives. Considérons que sous le cylindre, la vitesse du grain  $i$  est  $\underline{v}_i$ . Il faut alors déterminer la relation entre  $\underline{v}_i$  et  $\underline{v}_{i+1}$  (Fig. A.1).

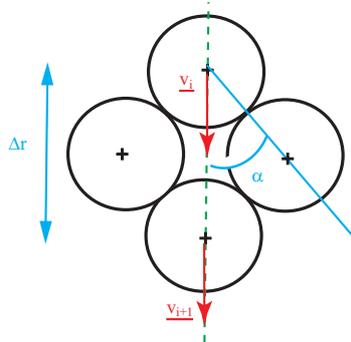
$$\underline{v}_i = v_i \underline{e}_r(0) \quad (\text{A.1})$$

Avec les hypothèses précédentes, une partie de la vitesse du grain incident se transmet au grain adjacent (Fig. A.2) :

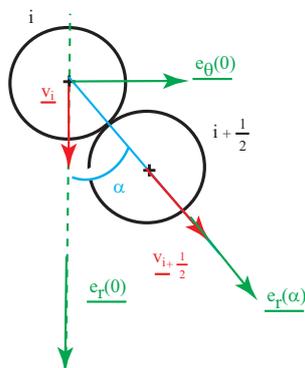
$$v_{i+\frac{1}{2}} = v_i \cos(\alpha) \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{v}_{i+\frac{1}{2}} = v_i \cos(\alpha) \underline{e}_r(\alpha) \quad (\text{A.3})$$

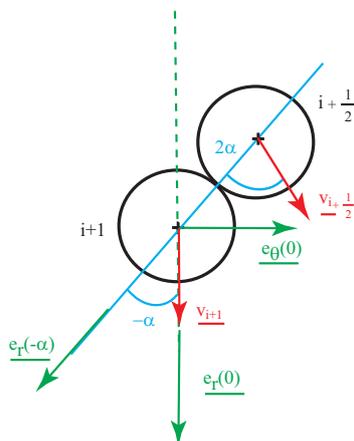
$$\underline{v}_{i+\frac{1}{2}} = v_i \cos^2(\alpha) \underline{e}_r(0) + v_i \cos(\alpha) \sin(\alpha) \underline{e}_\theta(0) \quad (\text{A.4})$$



**Figure A.1** – Modélisation des grains sous le projectile. Mise en place du paramétrage.



**Figure A.2** – Modélisation des grains sous projectile. Première transmission de la vitesse au grain suivant.



**Figure A.3** – Modélisation des grains sous projectile. Deuxième transmission de la vitesse au grain suivant.

Puis, la vitesse est transmise au grain  $i + 1$  (Fig. A.3).

$$\underline{v}_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} \cos(2\alpha) \underline{e}_r(-\alpha) \quad (\text{A.5})$$

Ici, il ne faut pas oublier de considérer le grain symétrique  $i - \frac{1}{2}$  qui va imposer la condition  $\underline{v}_{i+1}$  colinéaire à  $\underline{e}_r(0)$ . D'où

$$\underline{v}_{i+1} = v_{i+\frac{1}{2}} \cos(2\alpha) \cos(\alpha) \underline{e}_r(0) \quad (\text{A.6})$$

Finalement, on obtient la relation souhaitée entre  $\underline{v}_i$  et  $\underline{v}_{i+1}$  :

$$\underline{v}_{i+1} = v_i \cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) \underline{e}_r(0) \quad (\text{A.7})$$

En écrivant avec les normes, on obtient :

$$v_{i+1} = v_i \cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) \quad (\text{A.8})$$

Soit,

$$\Delta v = v_{i+1} - v_i = (\cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) - 1)v_i \quad (\text{A.9})$$

De plus, on peut rajouter le fait que  $\Delta r = 2d_g \cos(\alpha)$  (Fig. A.1). On a alors :

$$\frac{\Delta v}{\Delta r} = \frac{\cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) - 1}{2d_g \cos(\alpha)} v_i. \quad (\text{A.10})$$

En utilisant une hypothèse de milieu continu, on obtient :

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) - 1}{2d_g \cos(\alpha)} v. \quad (\text{A.11})$$

Comme  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ , on pose

$$-\frac{1}{\lambda} = \frac{\cos(2\alpha) \cos^2(\alpha) - 1}{2 \cos(\alpha)} \frac{1}{d_g}, \quad (\text{A.12})$$

et en rajoutant la vitesse d'entraînement  $V_0 \underline{e}_z$  que l'on avait volontairement omise, l'équation (A.11) devient

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\lambda}(v - V_0). \quad (\text{A.13})$$

Pour résoudre cette équation, on rajoute la condition initiale de vitesse de grain nulle au contact du projectile (point d'arrêt) qui se traduit par  $v = 0$  à  $r = d/2$ . De plus, on a aussi la condition exprimant le fait que lorsque  $r$  tend vers l'infini, la vitesse des grains doit être égale à  $v = V_0$ . L'équation A.13 a pour solution

$$v = V_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2r - d}{2\lambda}\right) \right], \quad (\text{A.14})$$

où l'on reconnaît

$$A_r(r) = 1 - \exp\left(-\frac{2r - d}{2\lambda}\right). \quad (\text{A.15})$$

Ce modèle fait naturellement apparaître une longueur caractéristique  $\lambda$  qui peut être vue comme la longueur caractérisant la portée des effets de la vitesse du projectile sur le milieu granulaire. Au-delà de cette longueur la vitesse des grains n'est pas affectée par le projectile.

On peut décider d'appliquer ce modèle directement sur notre essai. On rappelle que  $d_g = 1$  mm et  $d = 20$  mm. On réalise un ajustement de la forme donnée par l'équation (A.15). Cet ajustement qui semble être bien adapté fournit une longueur caractéristique  $\lambda = 7.1$  mm (Fig. 3.8).

Cependant, l'équation (A.12) prévoit une valeur de 2.77 mm si on considère un angle entre grains dans l'empilement  $\alpha = 30^\circ$ . En ce qui concerne la valeur de  $\lambda$ , le modèle semble insuffisant pour décrire le champ de vitesse des grains.

Cependant, l'hypothèse d'un modèle 2D fait surestimer la valeur de  $\alpha$ , dans un empilement 3D, la valeur de  $\alpha$ . De plus, le modèle indique que  $\lambda$  est indépendant de la taille du projectile, on montrera que ce n'est pas vrai dans les chapitres ultérieurs. Malgré tout cela, ce modèle a le mérite de rendre compte d'une croissance exponentielle du champ de vitesse qui semble être vérifiée expérimentalement.



# Bibliographie

- [1] I. Albert, J. G. Sample, A. J. Morss, S. Rajagopalan, A.-L. Barabási, and P. Schiffer. Granular drag on a discrete object : Shape effects on jamming. *Physical Review E*, 64(6) :061303–+, December 2001.
- [2] R. Albert, M. A. Pfeifer, A.-L. Barabási, and P. Schiffer. Slow Drag in a Granular Medium. *Physical Review Letter*, 82 :205–208, January 1999.
- [3] W. A. Allen, E. B. Mayfield, and H. L. Morrison. Dynamics of a Projectile Penetrating Sand. *Journal of Applied Physics*, 28 :370–376, March 1957.
- [4] Y. Amarouchene, J. F. Boudet, and H. Kellay. Dynamic Sand Dunes. *Physical Review Letter*, 86 :4286–4289, May 2001.
- [5] Y. Amarouchene and H. Kellay. Speed of sound from shock fronts in granular flows. *Physics of Fluids*, 18(3) :031707–+, March 2006.
- [6] M. A. Ambroso, R. D. Kamien, and D. J. Durian. Dynamics of shallow impact cratering. *Physical Review E*, 72(4) :041305–+, October 2005.
- [7] M. A. Ambroso, C. R. Santore, A. R. Abate, and D. J. Durian. Penetration depth for shallow impact cratering. *Physical Review E*, 71(5) :051305–+, May 2005.
- [8] A. Ansari and S. Morris. The effects of a strongly temperature-dependent viscosity on Stokes’s drag law : experiments and theory. *Journal of Fluid Mechanics*, 159 :459–476, 1985.
- [9] D. D. Atapattu, R. P. Chhabra, and P. H. T. Uhlherr. Creeping sphere motion in herschel-bulkley fluids : flow field and drag. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59(2-3) :245 – 265, 1995.
- [10] A. Barrat and E. Trizac. Lack of energy equipartition in homogeneous heated granular mixtures. *Granular Matter*, 2002.
- [11] A. Barrat and E. Trizac. A molecular dynamics ‘Maxwell Demon’ experiment for granular mixtures. *Molecular Physics*, 101 :1713–1719, January 2003.
- [12] A. Barrat, E. Trizac, and M. H. Ernst. Granular gases : dynamics and collective effects. *Journal of Physics Condensed Matter*, 17 :2429–+, June 2005.
- [13] A. N. Beris, J. A. Tsamopoulos, R. C. Armstrong, and R. A. Brown. Creeping motion of a sphere through a bingham plastic. *Journal of Fluid Mechanics*, 158(-1) :219–244, 1985.
- [14] L. Bocquet, W. Losert, D. Schalk, T. C. Lubensky, and J. P. Gollub. Granular shear flow dynamics and forces : Experiment and continuum theory. *Physical Review E*, 65(1) :011307–+, January 2002.
- [15] J. F. Boudet, Y. Amarouchene, and H. Kellay. Dynamics of Impact Cratering in Shallow Sand Layers. *Physical Review Letter*, 96(15) :158001–+, April 2006.
- [16] F. Bourrier. *Modélisation de l’impact d’un bloc rocheux sur un terrain naturel, application à la trajectographie des chutes de blocs* . PhD thesis, Institut Polytechnique de Grenoble, (2008), 2008.
- [17] F. Bourrier, F. Nicot, and F. Darve. Physical processes within a 2D granular layer during an impact. *Granular Matter*, 10(6) :415–437, June 2008.

- [18] G. Caballero, R. Bergmann, D. van der Meer, A. Prosperetti, and D. Lohse. Role of Air in Granular Jet Formation. *Physical Review Letter*, 99(1) :018001–+, July 2007.
- [19] B. Cambou and M. Jean. *Micromécanique des matériaux granulaires*. 2001.
- [20] R. Candelier. *Dynamique et structure auour de la transition vitreuse et de la transition de blocage*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2009.
- [21] R. Candelier and O. Dauchot. Creep Motion of an Intruder within a Granular Glass Close to Jamming. *Physical Review Letter*, 103(12) :128001–+, September 2009.
- [22] R. Candelier and O. Dauchot. Journey of an intruder through the fluidization and jamming transitions of a dense granular media. *Physical Review E*, 81(1) :011304–+, January 2010.
- [23] D. Chehata, R. Zenit, and C. R. Wassgren. Dense granular flow around an immersed cylinder. *Physics of Fluids*, 15 :1622–1631, June 2003.
- [24] P. Cixous. *Blocage et écoulement d'un milieu granulaire dense et désordonné autour d'un obstacle rigide*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 2009.
- [25] M. A. Cook and K. S. Mortensen. Impact Cratering in Granular Materials. *Journal of Applied Physics*, 38 :5125–5128, December 1967.
- [26] P.-P. Cortet, D. Bonamy, F. Daviaud, O. Dauchot, B. Dubrulle, and M. Renouf. Relevance of viscoplastic theory in a multi-directional inhomogeneous granular flow. *Europhysics Letters*, 88 :14001–+, October 2009.
- [27] D. J. Costantino, T. J. Scheidemantel, M. B. Stone, C. Conger, K. Klein, M. Lohr, Z. Modig, and P. Schiffer. Starting to Move through a Granular Medium. *Physical Review Letter*, 101(10) :108001–+, September 2008.
- [28] J. Crassous, D. Beladjine, and A. Valance. Impact of a Projectile on a Granular Medium Described by a Collision Model. *Physical Review Letter*, 99(24) :248001–+, December 2007.
- [29] F. da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. Chevoir. Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Physical Review E*, 72(2) :021309–+, August 2005.
- [30] S. F. Daly and A. Raefsky. On the penetration of a hot diapir through a strongly temperature-dependent viscosity medium. *Geophysical Journal*, 83 :657–681, December 1985.
- [31] J. R. de Bruyn and A. M. Walsh. Penetration of spheres into loose granular media. *Canadian Journal of Physics*, 82 :439–446, June 2004.
- [32] S. J. de Vet and J. R. de Bruyn. Shape of impact craters in granular media. *Physical Review E*, 76(4) :041306–+, October 2007.
- [33] S. Deboeuf, P. Gondret, and M. Rabaud. Dynamics of grain ejection by sphere impact on a granular bed. *Physical Review E*, 79(4) :041306–+, April 2009.
- [34] J. Duran. *Sables, poudres et grains*. 1995.
- [35] A. Emch-Dériaz and G. Emch. Émilie du Châtelet, Minerve des Lumières. *Les Génies de la science*, 27, July 2006.
- [36] P. Eshuis, K. van der Weele, D. van der Meer, and D. Lohse. Granular Leidenfrost Effect : Experiment and Theory of Floating Particle Clusters. *Physical Review Letter*, 95(25) :258001–+, December 2005.
- [37] Y. Forterre and O. Pouliquen. Longitudinal Vortices in Granular Flows. *Physical Review Letter*, 86 :5886–5889, June 2001.
- [38] D. I. Goldman and P. Umbanhowar. Scaling and dynamics of sphere and disk impact into granular media. *Physical Review E*, 77(2) :021308–+, February 2008.
- [39] E. Guyon, J. P. Hulin, and L. Petit. *Hydrodynamique physique*. 2001.

- [40] P. K. Haff. Grain flow as a fluid-mechanical phenomenon. *Journal of Fluid Mechanics*, 134 :401–430, 1983.
- [41] J. Happel and H. Brenner. *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. 1986.
- [42] R. Harich. *Étude expérimentale de la transition de blocage dans un milieu granulaire vibré*. PhD thesis, Université Paris 6, (2010), 2010.
- [43] G. Hill, S. Yeung, and S. A. Koehler. Scaling vertical drag forces in granular media. *Europhysics Letters*, 72 :137–143, October 2005.
- [44] E. J. Hinch and S. Saint-Jean. The fragmentation of a line of balls by an impact. *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 455(1989) :3201–3220, 1999.
- [45] M. Hou, Z. Peng, R. Liu, Y. Wu, Y. Tian, K. Lu, and C. Chan. Projectile impact and penetration in loose granular bed. *Science and Technology of Advanced Materials*, 6 :855–859, October 2005.
- [46] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. Granular solids, liquids, and gases. *Reviews of Modern Physics*, 68 :1259–1273, October 1996.
- [47] J. T. Jenkins. *Kinetic theory for nearly elastic spheres*. 1998.
- [48] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441 :727–730, June 2006.
- [49] H. Katsuragi and D. J. Durian. Unified force law for granular impact cratering. *Nature*, 3 :420–423, June 2007.
- [50] L. Lacaze and R. R. Kerswell. Axisymmetric Granular Collapse : A Transient 3D Flow Test of Viscoplasticity. *Physical Review Letter*, 102(10) :108305–+, March 2009.
- [51] E. Lajeunesse, A. Mangeney-Castelnau, and J. P. Vilotte. Spreading of a granular mass on a horizontal plane. *Physics of Fluids*, 16 :2371–2381, July 2004.
- [52] A. Levy and M. Sayed. Numerical simulations of granular materials flow around obstacles : The role of the interstitial gas. *Physics of Fluids*, 19(2) :023302–+, February 2007.
- [53] A. J. Liu and S. R. Nagel. Nonlinear dynamics : Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396 :21–22, November 1998.
- [54] D. Lohse, R. Bergmann, R. Mikkelsen, C. Zeilstra, D. van der Meer, M. Versluis, K. van der Weele, M. van der Hoef, and H. Kuipers. Impact on Soft Sand : Void Collapse and Jet Formation. *Physical Review Letter*, 93(19) :198003–+, November 2004.
- [55] D. Lohse, R. Rauhé, R. Bergmann, and D. van der Meer. Granular physics : Creating a dry variety of quicksand. *Nature*, 432 :689–690, December 2004.
- [56] W. Losert, L. Bocquet, T. C. Lubensky, and J. P. Gollub. Particle Dynamics in Sheared Granular Matter. *Physical Review Letter*, 85 :1428–1431, August 2000.
- [57] J. Lätt. *Hydrodynamic Limit of Lattice Boltzmann Equations*. PhD thesis, Université de Genève, (2010), 2007.
- [58] J. O. Marston, J. P. K. Seville, Y.-V. Cheun, A. Ingram, S. P. Decent, and M. J. H. Simmons. Effect of packing fraction on granular jetting from solid sphere entry into aerated and fluidized beds. *Physical Review Letter*, 20(2) :023301–+, February 2008.
- [59] F. Martinez. *Rapport de stage de M2 : Dynamique d’enfoncement dans un milieu granulaire*. 2010.
- [60] H. J. Melosh. *Impact cratering : A geologic process*. 1989.
- [61] G. Midi. On dense granular flows. *European Physical Journal E*, 14 :341–365, August 2004.
- [62] H.K. Moffatt. *Fluid Dynamics : Microhydrodynamics*. 1995.
- [63] K. A. Newhall and D. J. Durian. Projectile-shape dependence of impact craters in loose granular media. *Physical Review E*, 68(6) :060301–+, December 2003.

- [64] S. Ogawa. Multitemperature theory of granular materials.
- [65] B. N. J. Persson. *Sliding Friction Physical Principles and Applications*. August 2000.
- [66] M. Pica Ciamarra, A. H. Lara, A. T. Lee, D. I. Goldman, I. Vishik, and H. L. Swinney. Dynamics of Drag and Force Distributions for Projectile Impact in a Granular Medium. *Physical Review Letter*, 92(19) :194301–+, May 2004.
- [67] J. V. Poncelet. *Introduction a la mecanique industrielle, physique et experimentale*. 1841.
- [68] O. Pouliquen. *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. 2001.
- [69] W. H. Press. *Numerical recipes in C++ : the art of scientific computing*. 2002.
- [70] Y. H. Qian, D. D’Humières, and P. Lallemand. Lattice BGK models for Navier-Stokes equation. *Europhysics Letters*, 17 :479–+, February 1992.
- [71] F. Rioual, A. Valance, and D. Bideau. Experimental study of the collision process of a grain on a two-dimensional granular bed. *Physical Review E*, 62 :2450–2459, August 2000.
- [72] F. Rioual, A. Valance, and D. Bideau. Collision process of a bead on a two-dimensional bead packing : Importance of the inter-granular contacts. *Europhysics Letters*, 61 :194–200, January 2003.
- [73] B. Robins. *New Principles of Gunnery*. 1742.
- [74] J. R. Royer, E. I. Corwin, P. J. Eng, and H. M. Jaeger. Gas-Mediated Impact Dynamics in Fine-Grained Granular Materials. *Physical Review Letter*, 99(3) :038003–+, July 2007.
- [75] Q. Ruppert. *Rapport de stage de M1 : Pénétration d’un projectile dans un lit granulaire*. 2009.
- [76] J. Schäfer, S. Dippel, and D. E. Wolf. Forces schemes in Simulations of Granular Materials. *Journal de Physique 1 France*, 5 :5–20, January 1996.
- [77] M. Schröter, S. Nägle, C. Radin, and H. L. Swinney. Phase transition in a static granular system. *Europhysics Letters*, 78 :44004–+, May 2007.
- [78] A. Seguin, Y. Bertho, and P. Gondret. Influence of confinement on granular penetration by impact. *Physical Review E*, 78(1) :010301–+, July 2008.
- [79] A. Seguin, Y. Bertho, P. Gondret, and J. Crassous. Sphere penetration by impact in a granular medium : A collisional process. *Europhysics Letters*, 88 :44002–+, November 2009.
- [80] M. B. Stone, R. Barry, D. P. Bernstein, M. D. Pelc, Y. K. Tsui, and P. Schiffer. Local jamming via penetration of a granular medium. *Physical Review E*, 70(4) :041301–+, October 2004.
- [81] M. B. Stone, D. P. Bernstein, R. Barry, M. D. Pelc, Y.-K. Tsui, and P. Schiffer. Stress propagation : Getting to the bottom of a granular medium. *Nature*, 427 :503–504, February 2004.
- [82] S. T. Thoroddsen and A. Q. Shen. Granular jets. *Physics of Fluids*, 13 :4–6, January 2001.
- [83] L. S. Tsimring and D. Volfson. Modeling of impact cratering in granular media.
- [84] J. S. Uehara, M. A. Ambroso, R. P. Ojha, and D. J. Durian. Low-Speed Impact Craters in Loose Granular Media. *Physical Review Letter*, 90(19) :194301–+, May 2003.
- [85] N. Valade. *Rapport de stage de L3 : Étude de trajectoire lors de l’impact d’un projectile dans un milieu granulaire*. 2008.
- [86] A. M. Walsh, K. E. Holloway, P. Habdas, and J. R. de Bruyn. Morphology and Scaling of Impact Craters in Granular Media. *Physical Review Letter*, 91(10) :104301–+, September 2003.
- [87] S. Yamamoto, K. Wada, N. Okabe, and T. Matsui. Transient crater growth in granular targets : An experimental study of low velocity impacts into glass sphere targets. *Icarus*, 183 :215–224, July 2006.
- [88] Q. Zou and X. He. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Physics of Fluids*, 9 :1591–1598, June 1997.



**Résumé :** L'objectif de ce travail réside dans la compréhension de la force sur un objet pénétrant un milieu granulaire. À partir de mesures de forces sur un cylindre en pénétration à vitesse constante, nous avons caractérisé cette force qui est indépendante de la vitesse imposée, proportionnelle au diamètre du cylindre et varie non-linéairement avec la taille des grains. En complément, nous avons mesuré le champ de vitesse des grains : celui-ci est stationnaire et l'écoulement est incompressible. On observe une localisation du cisaillement dans une zone proche du cylindre avec une dépendance spatiale exponentielle gouvernée par le diamètre du cylindre. Un modèle hydrodynamique s'appuyant sur la théorie cinétique étendue aux régimes d'écoulements denses reproduit correctement cette localisation et fournit des lois d'échelles pour la force similaires aux résultats expérimentaux. En définissant un nombre de Reynolds granulaire, nous avons montré que ce régime est l'équivalent d'un régime visqueux de Stokes à petit nombre de Reynolds. Il existe une transition vers un autre régime à grand Reynolds où les profils de vitesses perdent leur symétrie amont-aval et la force change sans doute d'expression. Enfin, le cas de l'impact d'un projectile où ces deux régimes existent successivement a aussi été étudié expérimentalement et numériquement. L'existence d'un terme supplémentaire de force proportionnelle au carré de la vitesse est sans doute issue du régime à grand Reynolds. Les deux termes donnent lieu à deux temps caractéristiques dont le temps d'arrêt est fonction et à l'origine d'un temps d'arrêt plus court pour une vitesse d'impact plus grande.

**Abstract :** The aim of this work is the understanding of the force penetrating in a granular medium. Using force measurements on a cylinder penetrating at constant velocity, this force is found independent of the imposed velocity, proportional to the cylinder diameter and depends non-linearly on the grain size. Besides, the velocity field of the grains has been measured. The flow is found stationary and incompressible. Shear localization is observed close to the cylinder with an exponential spatial dependence ruled by cylinder diameter. An hydrodynamic model based on extended kinetic theory for dense granular flow reproduces well this flow localization and gives force scaling laws in agreement with the experimental results. Defining a granular Reynolds number, we have shown that this regime is equivalent to a Stokes viscous regime for low Reynolds number. A transition to another regime at higher Reynolds number exists where downstream and upstream flows are not symmetrical anymore and both the force scalings changes certainly. At last, the case of the impact of a projectile where these two regimes are present successively is studied both experimentally and numerically. The existence of a supplement force term proportional to velocity square is likely coming from high Reynolds regime. These two terms provide two characteristic times related to the stopping time and adducing arguments for shorter stopping time for high impact velocities.