HAL open science

Temps de transitions métastables pour des systèmes dynamiques stochastiques fini et infini-dimensionnels

Florent Barret

To cite this version:

Florent Barret. Temps de transitions métastables pour des systèmes dynamiques stochastiques fini et infini-dimensionnels. Probabilités [math.PR]. Ecole Polytechnique X, 2012. Français. NNT : . tel-00715787

HAL Id: tel-00715787

https://theses.hal.science/tel-00715787

Submitted on 9 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Polytechnique
École Doctorale de l'École Polytechnique

Thèse pour l'obtention du titre de docteur de l'École Polytechnique
spécialité : **Mathématiques Appliquées**
présentée par

Florent Barret

Temps de transitions métastables pour des systèmes dynamiques stochastiques fini et infini-dimensionnels

Composition du jury :

M	Anton Bovier	Directeur
M	Arnaud Debussche	Examinateur
M	Arnaud Guillin	Rapporteur
M	Martin Hairer	Rapporteur
Mme	Sylvie Méléard	Directrice
Mme	Annie Millet	Examinatrice
M	Etienne Pardoux	Examinateur

Soutenue le 6 juillet 2012 à l'École Polytechnique.

Centre de Mathématiques Appliquées de l'École Polytechnique – UMR 7641

Table des matières

Table des matières **3**

Remerciements **5**

Introduction **7**
Métastabilité 7
Différentes approches 17
Résultats sur la dimension finie 24
Résultats sur les équations aux dérivées partielles stochastiques . . . 26
Plan 34

1 Diffusion en dimension finie **35**
1.1 Théorie du potentiel pour les diffusions 35
1.2 Calculs des capacités en dimension finie 43
1.3 Applications 58

2 Équation aux dérivées partielles stochastiques, discrétisation **71**
2.1 Équation aux dérivées partielles stochastique 73
2.2 Équation en dimension finie 77
2.3 Convergence vers l'EDPS 90
2.4 Convergence des temps de transition 101

3 Estimations uniformes des capacités **105**
3.1 Introduction 105
3.2 Preliminaries 107
3.3 Large N limit 111
3.4 Estimates on capacities 114

4 Formule d'Eyring-Kramers en dimension infinie **127**
4.1 Introduction 127
4.2 Results 131
4.3 Discretization 139
4.4 Initial condition 145
4.5 Approximation of the potential 148
4.6 Estimates 155

5 Exemple et perspectives **167**
5.1 Exemple pour Allen-Cahn dans les cas Dirichlet et Neumann . 167
5.2 Perspective sur le cas périodique 171

5.3 Perspectives sur la dimension supérieure 176

A Équations aux dérivées partielles stochastiques 183
A.1 Rappels sur le bruit blanc 183
A.2 Preuve de l'équivalence entre solution faible et forte 189
A.3 Construction de la solution de l'EDPS 194

B Estimations des semi-groupes 205
B.1 Théorème et inégalités utilisées 205
B.2 Semi-groupe du Laplacien en dimension 1 207
B.3 Semi-groupe discrétisé 222
B.4 Convergence du semi-groupe 233

C Système dynamique en dimension infinie 241
C.1 Points stationnaires 241
C.2 Hyperbolicité 242
C.3 Attracteur global 244
C.4 Constructions des Solutions Stationnaires 245
C.5 Structure de l'attracteur 253
C.6 Construction géométrique de l'attracteur 255

Remerciements

Au moment de conclure ce mémoire, je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé et ont compté durant ma thèse.

Avant tout, je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes deux directeurs, Sylvie Méléard et Anton Bovier qui m'ont extrêmement soutenu et accompagné. Merci donc à Anton qui m'a accueilli tout d'abord à Berlin pour mon stage de M2, et de très nombreuses fois à Bonn durant ces quatre années tant à son bureau qu'à sa table. Il m'a offert ses précieux conseils, m'a permis de développer mon travail et a toujours su orienter ma curiosité. Merci à Sylvie qui a été d'une force et d'un soutien exemplaire. Elle m'a offert toute son expertise et son savoir sur de très nombreux sujets. Je lui dois mon intérêt pour les probabilités et l'écologie (à travers un exposé qu'elle avait fait à l'ENS de Cachan et son cours de M2 à l'Université Pierre et Marie Curie) et ma rencontre avec Anton pour mon stage de M2. Je ne doute pas que sans sa présence mon avenir aurait été bien différent. Je les remercie de leur écoute constante et attentive, du temps qu'ils ont su me consacrer sans compter et de leur confiance. Enfin, je leur dois une ouverture à des thématiques très larges, à des domaines qui compteront, j'espère, dans la suite de mes aventures mathématiques.

Je suis extrêmement reconnaissant à Arnaud Guillin et Martin Hairer d'avoir accepté de rapporter cette thèse et d'avoir bien voulu se plonger dans mon travail. Je suis redevable à Arnaud Guillin pour ses conseils et remarques sur ma thèse. Je remercie aussi Martin Hairer pour les très fructueux échanges que j'ai pu avoir avec lui, et qui j'espère continueront. Ma rencontre avec eux date d'une école thématique à Oberwolfach qu'ils avaient organisée (avec Jonathan Mattingly et Luc Rey-Bellet) et qui m'avait été très enrichissante. Je remercie aussi Annie Millet, Arnaud Debussche et Étienne Pardoux qui ont accepté de faire partie de mon jury. Merci à Annie Millet qui a très gentiment accepté de répondre à des questions que j'avais sur certains de ses travaux et qui m'a permis de les utiliser au mieux. Merci à Arnaud Debbusche pour les références qu'il m'a fournies et ses questions qui ont éclairci certains des points qui me posaient problème. Merci enfin à Étienne Pardoux qui à travers ses notes de cours et ses articles que j'ai intensivement travaillé, m'a permis d'apprendre tant de choses.

Ayant voyagé entre deux pays, deux villes, deux laboratoires tout au long de ma thèse, j'ai pu comparer les manières et multiplier les échanges. Merci donc au Hausdorff Center for Mathematics et à l'Université de Bonn pour avoir permis ces nombreux séjours. Je tiens à remercier ceux avec qui j'ai pu discuter, apprendre, qui m'ont toujours chaleureusement accueilli et que je ne doute pas de recroiser : Evangelia Petrou, Nicola Kistler, Frank den Hollander,

Patrick Ferrari, Hendrik Weber, Jan Maas, Adela Svejda, Giacomo Di Gesu, Shi-Dong Wang et l'indispensable Mei-Ling Wang, ainsi que tous ceux que j'ai pu oublier, qu'ils me pardonnent. Je remercie également tous ceux qui m'ont accueilli et invité lors de présentations, d'échanges et qui se sont intéressés à mes travaux : Nils Berglund, Véronique Gayrard, Barbara Gentz, Dima Ioffe (qui m'a accueilli près de trois semaines en Israël), Tony Lelièvre, Pierre Picco. Merci aussi à tous les participants et organisateurs des réunions et rencontres de l'ANR MANEGE et de la chaire MMB auxquelles j'ai pu assister. Je les remercie pour leurs exposés, les questions et discussions très enrichissantes qu'ils suscitaient.

Je tiens aussi à remercier tous les chercheurs du CMAP qui rendent ce laboratoire si fructueux. Particulièrement, je remercie pour leur aide et leurs échanges Carl Graham, Pierre Collet, Vincent Bansaye, Christophe Giraud, Amandine Véber, Anne de Bouard, Stéphanie Allassonnière, François Alouges, Antonin Chambolle. Je remercie aussi pour leur aide durant mon enseignement de monitorat Caroline Hillairet, Florent Benaych-Georges, Emmanuel Gobet, Noufel Frikha. Enfin je tiens à remercier mes compagnons durant ces quelques années : mes co-encadrés Denis Villemonais, Clément Fabre, Camille Coron, Charline Smadi-Lasserre, Manon Costa, Hélène Leman. Je tiens aussi à saluer les doctorants pour tant de bons moments passés au et hors du bureau : Khalil Al-Dayri, Soledad Aronna, Zhihao Cen, Sylvie Detournay, Xavier Dupuis, Emilie Fabre, Maxime Gazeau, Michael Goldman, Khalid Jalazai, Zixian Jiang, Laurent Pfeiffer, Francisco Silva, Gilles Thouroude. Je remercie enfin les indispensables Nasséra Naar, Nathalie Hurel, Alexandra Noiret, Sandra Schnakenbourg, Christian Feeley qui m'ont aidé dans toutes mes démarches administratives.

Enfin d'un point de vue plus personnel, je tiens à remercier les amis qui m'ont soutenu et motivé durant cette période, mes camarades de Cachan : Antoine Coutant, Xavier Venel, Olivier Roussel, Guillaume Dufour, Julien Poisat, Benjamin Boutin ainsi que les musiciens des Planches À Musique : Mathias Szpirglas, Céline Lamade, Jérémy Neveu, Tom Kristensen, Cécile Repellin, Émilien Chapon, Marc Rébillat, Mélanie Chevance, Guilhem Lecouteux, Baptiste Morisse, Benjamin Moubêche, Pierre Lissy, Grégoire Binois et tous ceux que j'ai pu oublier.

Pour finir, je tiens à exprimer mes remerciements à toute ma famille, mes parents, mon frère, mes grands-parents et tous les autres qui ont toujours montré le plus vif et sincère intérêt pour mon travail et dont l'aide et l'encouragement ont toujours été des plus constants.

Introduction

Métastabilité

Dans cette thèse, nous nous sommes consacrés à l'étude de la métastabilité de certaines diffusions fini- et infini-dimensionnelles.

Le concept de phénomène métastable est très large et peut être compris de beaucoup de manières différentes. Succinctement, on peut parler de métastabilité d'un système (pas nécessairement aléatoire) lorsque celui-ci reste dans des régimes stationnaires apparents et différents suivant les échelles de temps considérées. Dans les cas qui nous intéressent, ces régimes différents sont de vrais états d'équilibre stables pour une équation différentielle (ordinaire ou aux dérivées partielles) entre lesquels le processus effectue des transitions dues à la présences de perturbations stochastiques d'intensité faible.

L'état du modèle change alors d'équilibre suivant la fenêtre temporelle utilisée. Ces transitions se produisent très brusquement et sont imprévisibles, propriété issue du caractère markovien des modèles que nous considérons. Pour mieux comprendre la spécificité du comportement métastable, on peut comparer ce qui se passe pour un système "classique" ayant un équilibre stable et un système métastable.

Pour un système classique qui atteint un équilibre stable, son histoire peut se résumer en une échelle de temps. En temps court, on observe un régime transitoire : initialement hors-équilibre, le système atteint le point d'équilibre stable et se retrouve fixé dans ce régime stationnaire. On parle notamment d'un phénomène de relaxation. Dans une échelle beaucoup plus longue, le système reste à l'équilibre.

Exemple 1. Ainsi pour l'équation différentielle $\dot{y} = -\lambda y$ pour $\lambda > 0$, la solution est simplement $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ et 0 est le seul équilibre stable. On peut voir que dans un temps $T = \frac{5}{\lambda}$, le régime stable est quasiment atteint puisque $\frac{y(T)}{y_0} \leqslant e^{-5} \approx 0,007$. Puis l'état du système ne change plus et s'approche de 0.

Un système métastable, en revanche, va exhiber une échelle (ou plusieurs) de temps intermédiaire qui s'intercale entre une échelle très courte transitoire nécessaire pour atteindre un premier équilibre et l'échelle la plus longue correspondant par exemple à un équilibre final. Après un régime transitoire initial correspondant à la relaxation, l'état du modèle reste apparemment à l'équilibre pour des temps très longs puis abruptement, le système subit une transition d'un équilibre à un autre. Un système métastable peut ainsi se décrire par une succession de régimes différents présents à des échelles de temps distinctes.

Les propriétés communes à la métastabilité sont :

– la succession de régimes d'équilibre apparents,

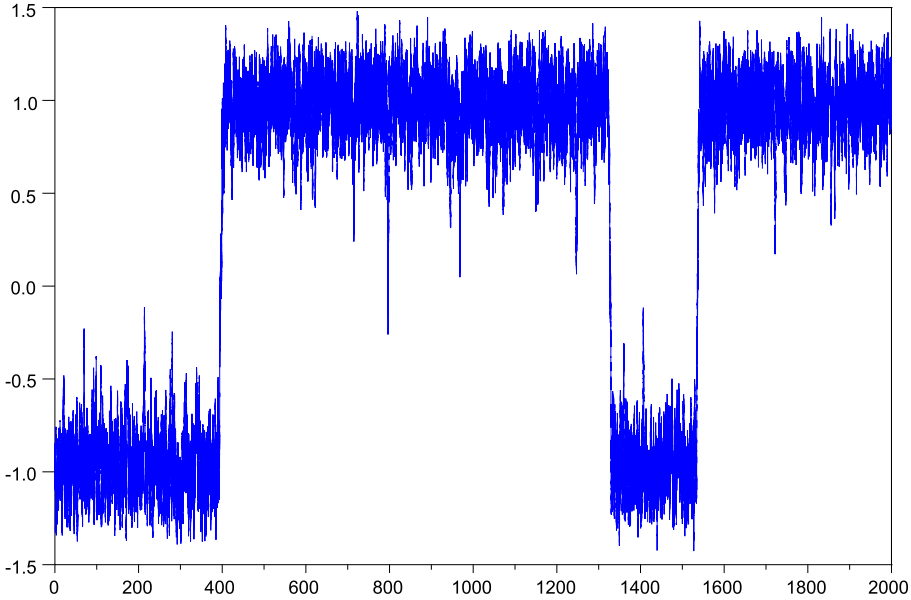


FIGURE 1: Simulation d'une diffusion dans un double puits symétrique

- les échelles de temps distinctes entre ces équilibres
- la rapidité des transitions d'un régime à un autre
- l'imprévisibilité de la transition.

On verra dans quelques exemples tirés de la littérature qu'il s'agit d'un phénomène très courant dans les systèmes "naturels", en physique, en chimie, en écologie (où on peut rapprocher cette notion de la résilience d'un écosystème), en climatologie. Les principales questions que l'on peut choisir de poser pour ces systèmes sont :

- Quels sont les états (régimes) métastables ?
- Quels sont les échelles de temps mises en jeu ?
- Comment les calculer ?

Nous nous sommes intéressés plus spécifiquement au calcul des espérances des temps des transitions (donc des échelles de temps). Nous avons montré que pour une classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques on peut calculer ces espérances en utilisant une discrétisation en espace, c'est-à-dire en se ramenant à la dimension finie. Puis en prenant la limite du pas de discrétisation tendant vers 0 tout en contrôlant les erreurs, on peut calculer les temps de transitions. Ce calcul utilise des résultats de théorie du potentiel. Nous proposons aussi une généralisation en dimension finie du calcul des temps de transition, elle s'applique à la dimension infinie.

Ce travail a donné lieu à trois articles :

1. un article en collaboration avec Anton Bovier et Sylvie Méléard intitulé *Uniform estimates for metastable transition times in a coupled bistable system*, publié dans *Electronic Journal of Probability*, Vol. 15, pp. 323-345, 2010 ([4]). Cet article constitue le chapitre 3 et est la base nécessaire au calcul des espérances en dimension infinie.
2. un article intitulé *Sharp asymptotics of metastable transition times for*

one dimensional SPDEs, soumis à publication aux *Annales Henri Poincaré : Probabilités et Statistiques*, [2]. Cet article constitue le chapitre 4 et réalise effectivement le calcul des temps de transition en dimension infinie.

3. un article en collaboration avec Anton Bovier, en fin de préparation, intitulé *Sharp metastable estimates for degenerated cases of gradient drift diffusion*, [3]. Le chapitre 1 reprend cet article.

Les deux premiers articles sont consacrés à la dimension infinie tandis que le troisième est une généralisation des résultats de [21] en dimension finie.

Systèmes markoviens

Dans le cadre décrit, la métastabilité est un phénomène apparaissant en présence de perturbations qui seront pour nous aléatoires. Les modèles décrits seront de plus markoviens. Afin de comprendre le mécanisme commun à l'œuvre derrière ce modèle on se propose d'exposer un premier exemple de chaîne de Markov ayant un comportement métastable.

Exemple Considérons une chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en temps discret, sur un espace d'état fini $\mathcal{S}$, irréductible, réversible et apériodique de matrice de transition P. Construisons une autre chaîne de Markov Y^ε, pour $\varepsilon > 0$, à partir de X en posant

$$Y_n^\varepsilon = (\delta_n, X_n) \in \{0,1\} \times \mathcal{S}$$

avec la matrice de transition Q_ε, pour tout $\delta \in \{0,1\}$ et $x, y \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon((\delta,x),(1-\delta,y)) &= \varepsilon P(x,y) \\ Q_\varepsilon((\delta,x),(\delta,y)) &= (1-\varepsilon)P(x,y) \end{aligned}$$

Ainsi on crée artificiellement deux copies de l'ensemble des états $\mathcal{S}_0 = \{0\} \times \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_1 = \{1\} \times \mathcal{S}$ qui vont être parcourues par le processus X, avec à chaque pas de temps une probabilité ε de changer de copie. Chaque copie, codée dans le processus par la première variable 0 ou 1, est nécessairement parcourue. Posons alors $\tau = \inf\{n, Y_n^\varepsilon \in \mathcal{S}_1\}$. Conditionnellement à $\{Y_0^\varepsilon \in \mathcal{S}_0\}$, τ suit une loi géométrique de paramètre ε

$$\mathbb{P}[\tau = k+1 | Y_0^\varepsilon \in \mathcal{S}_0] = \varepsilon(1-\varepsilon)^k \quad \mathbb{E}[\tau | Y_0^\varepsilon \in \mathcal{S}_0] = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Or la chaîne X étant irréductible apériodique, elle possède une unique probabilité invariante π. Soit π_0 la probabilité sur $\{0,1\} \times \mathcal{S}$ valant π sur $\mathcal{S}_0$ et nulle sur $\mathcal{S}_1$. On définit π_1 de même.

Si ε est suffisamment petit, le temps nécessaire pour changer de copie (passer de $\mathcal{S}_0$ à $\mathcal{S}_1$ par exemple) sera très long, et la chaine Y^ε va se comporter comme une simple copie de X sur $\mathcal{S}_0$ et donc approcher la mesure stationnaire sur cet ensemble. Tout dépend du temps d'approximation de la chaîne X à la mesure stationnaire π.

Le temps de mélange permet de quantifier cette approche de la distribution à l'équilibre. En particulier, on peut le relier au trou spectral [1]. En effet, d'après

1. D'après des notes de cours de Nathanaël Berestycki, lors d'une série d'exposé au CMAP, et disponible à l'adresse `http://www.statslab.cam.ac.uk/~beresty`

le théorème de Perron-Frobenius, la valeur propre (à droite) 1 de la matrice de transition P associé à la mesure π est unique et maximale en valeur absolue. Comme le nombre de valeurs propres est fini, on appelle trou spectral ν

$$\nu = 1 - \lambda^*$$

où $\lambda^* = \max\{|\lambda| \, |\lambda \text{ valeur propre de } P, \lambda \neq 1\}$. En particulier, comme X est réversible, le théorème spectral permet de déduire

$$\sup_{x \in \mathcal{S}} \|\pi - \mathbb{P}_x[X_n \in \cdot]\|_{TV} \leqslant \frac{e^{-n\nu}}{2\sqrt{\min_{x \in \mathcal{S}} \pi(x)}}$$

où $\| \, \|_{TV}$ désigne la norme en variation totale. En particulier, si $\varepsilon << \nu = 1 - \lambda^*$, la chaîne Y^ε reste, en moyenne, suffisamment longtemps dans $\mathcal{S}_0$ pour atteindre la mesure π_0 avant de sauter sur $\mathcal{S}_1$. On a alors bien deux échelles distinctes ($T_{meta} = \varepsilon^{-1}$ et $T_{relax} = \nu^{-1}$) qui sont bien séparées : $T_{meta} >> T_{relax}$ et sur lesquelles les comportements sont très différents. Dans une échelle de temps $T_{stat} >> T_{meta}$ correspondant à la mesure stationnaire de la chaîne Y (la probabilité stationnaire étant $\Pi = \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1$), on ne voit plus distinctement les passages de $\mathcal{S}_0$ à $\mathcal{S}_1$, ils deviennent trop rapides.

Remarque 1. Cet exemple appelle quelques remarques.

1. Notons que dans cet exemple, le système n'atteint pas à proprement parler un équilibre mais un régime, caractérisé par une distribution, qui reste constant. De même, imaginons que ce soit en fait une trajectoire périodique, par exemple, ce qui peut être le cas si on considère un système de Lotka-Volterra (proie/prédateur). Dans cette situation, on préfère plutôt parler de changement de régime plutôt que d'équilibre, qui sous-entend un point unique.
2. Cet exemple pourrait être complexifié en ajoutant des échelles de temps complémentaires en répétant cette construction (donc avec quatre copies de l'espace d'état initial) avec cette fois un taux de saut de l'ordre ε^2. Pour $\varepsilon << 1$ on aurait ainsi $T_{relax} << T_{meta} = \varepsilon^{-1} << T_{meta}^2 = \varepsilon^{-2}$. On a ainsi deux comportements métastables à des échelles de temps différentes.
3. Dans cet exemple, on peut partitionner notre ensemble (de manière très simple en $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$) de telle sorte que le temps de sortie d'un ensemble, de l'ordre de T_{meta}, soit beaucoup plus long que le temps nécessaire pour atteindre, à l'intérieur d'un des ensembles, un équilibre. C'est une approche possible de la métastabilité qui consiste à distinguer des ensembles d'état qui vont constituer des régions métastables (voir par exemple [72, 13, 71]) .

Le principal mécanisme derrière cet exemple est bien sûr l'idée que certaines des transitions de la chaine Y^ε sont extrêmement petites. Ainsi, mécaniquement, la chaîne parcourt des transitions d'ordre $O(1)$ tandis que les transitions très faibles d'ordre $O(\varepsilon)$ sont beaucoup moins empruntées. Mais cela ne suffit pas, il faut aussi que les petites transitions soient judicieusement placées pour être les seuls passages entre deux groupes d'états bien distincts (dans cet exemple nos deux copies $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$). Ces deux caractéristiques, à savoir

- des transitions infiniment faibles
- entre des sous-ensembles d'états disjoints,

sont présentes dans les modèles que nous examinerons ce qui explique la concordance des résultats et des comportements.

Une très large littérature existe sur la métastabilité pour des modèles différents, dans des cadres différents, en utilisant des approches assez distinctes. Être exhaustif sur ce sujet est une tâche hors de portée de cette thèse. Nous souhaitons malgré tout donner une image de ce qu'est la métastabilité, et comment nous la comprenons dans notre cadre. Dans un premier temps, j'insisterai donc sur les points communs entre des modèles a priori dissemblables et développés pour des applications différentes qui exhibent cependant des caractéristiques communes et partent du même point de vue. Ensuite je détaillerai plus spécifiquement le modèle fini-dimensionnel, les résultats obtenus par diverses approches notamment les grandes déviations. Enfin j'introduirai les résultats démontrés dans cette thèse, principalement sur la métastabilité de certaines équations aux dérivées partielles stochastiques.

Énergie et potentiel

Initialement, la métastabilité a notamment concerné des modèles en physique statistique et en mécanique statistique et reposant sur des notions de thermodynamique. Une des quantités principales permettant la description thermodynamique de systèmes est l'énergie libre. La modélisation de ses systèmes passe donc par l'idée que au cours du temps leur énergie diminue à la manière d'une énergie potentielle en mécanique. Mais à cause d'aléas dus à la température non nulle du système, cette minimisation n'est pas constante et des transitions se produisent.

Le caractère métastable du système peut alors être vu comme la multiplicité des minima locaux de cette énergie libre. Cette vision d'un système caractérisé par une énergie est au cœur des modèles. Au cours du temps, cette énergie diminue en moyenne mais peut, par faute de la température, augmenter de manière imprévisible et donner alors lieu à des transitions.

Modèle d'Ising Même si les modèles qui nous concerneront sont des diffusions, donc à espace d'état continu, mentionnons un modèle à espace d'état discret qui suit la même idée : le modèle d'Ising. Il s'agit simplement d'une chaîne de Markov dont les transitions sont choisies en privilégiant celles qui diminuent une énergie H donnée. Une température $\varepsilon > 0$ permet de donner, malgré tout, une probabilité plus ou moins forte de remonter en énergie. La littérature est extrêmement vaste sur ce sujet et ses nombreuses ramifications (pour n'en citer que quelques unes [17, 82, 93]). Ce modèle exhibe de nombreux comportements très divers et peut être utilisé pour modéliser des phénomènes de condensation (nucléation) de transition spontanée (comme l'hystérésis). Il sert tant à rendre compte du comportement microscopique d'un ensemble d'aimants ou pour des gaz raréfiés à très basses températures. De nombreuses variantes sont possibles.

Les minima (locaux) de H fournissent alors des candidats naturels à être des états métastables. L'étude de la métastabilité de ce modèle consiste donc notamment à comprendre les transitions d'un minimum de l'énergie à un autre. Pour reprendre les critères développés à travers l'exemple déterministe 1, des voisinages des minima vont ainsi constituer des sous-ensembles que la chaîne parcourt classiquement, de manière normale, tandis que dans la limite où la

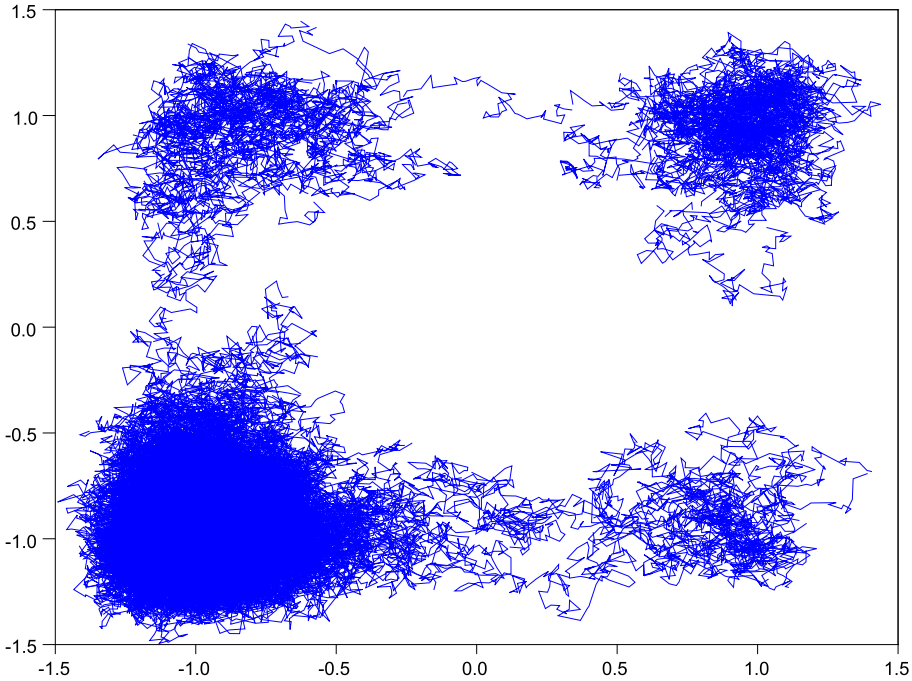


FIGURE 2: Diffusion dans un potentiel

température tend vers 0, les probabilités pour réaliser une transition vont être exponentiellement petites. Les états métastables sont en effet séparés par une *barrière d'énergie*. On retrouve le même mécanisme que dans l'exemple de la chaîne de Markov Y^ε : les états métastables sont isolés par des probabilités de passage de l'un à l'autre très faibles. La mesure invariante de la chaîne de Markov est alors la mesure dite de Gibbs

$$\mu(\omega) = \frac{\exp\left(-\beta H(\omega)\right)}{Z}$$

où Z est la constante de normalisation appelée fonction de partition. La métastabilité du processus est alors équivalente au fait que cette mesure va avoir plusieurs modes (maxima locaux de la densité) séparés pas des plateaux de très faible probabilité.

Diffusion en dimension finie Le modèle qui va nous concerner directement dans toute la suite vient initialement de la modélisation de réactions chimiques [41, 68, 57]. On se donne un potentiel F décrivant un paysage dans lequel diffuse une particule. Le processus X est alors solution de l'équation

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla F(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}W_t \tag{0.1}$$

où W_t est un terme de bruit (dans la suite un mouvement brownien). Le terme ε est encore ici la température et représente l'agitation thermique du processus.

Remarque 2. L'idée centrale de ce modèle repose encore sur l'existence d'une énergie potentielle (F). La partie déterministe de la dynamique tend à mini-

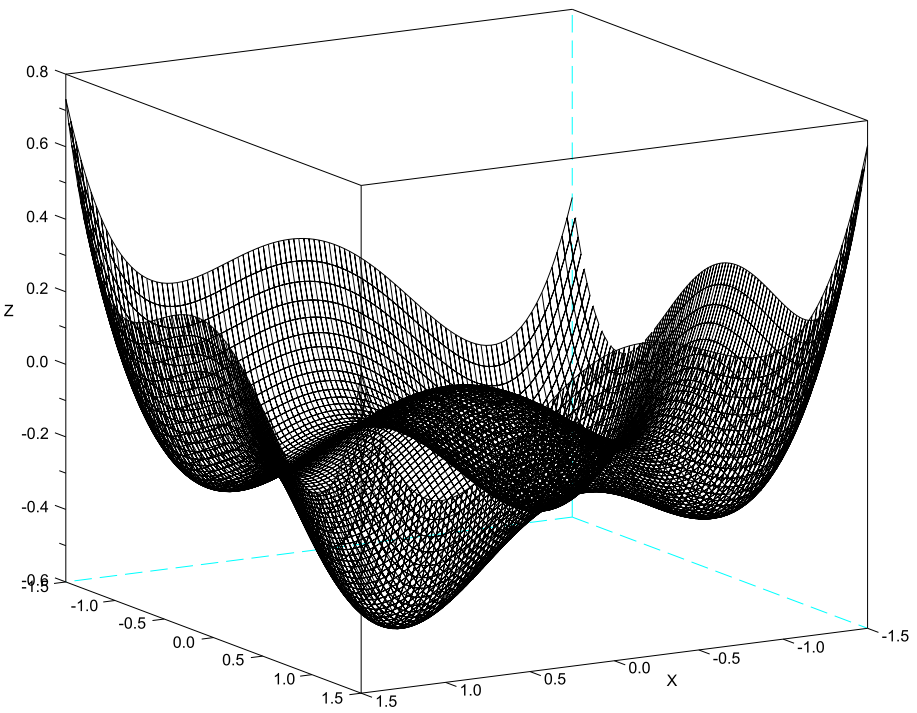


FIGURE 3: Potentiel F associé à la diffusion

miser cette énergie. Cette diffusion prend parfois le nom de diffusion de Smoluchowski [32] ou d'équation de Langevin sur-amortie [72]. L'équation de Langevin complète régit le mouvement véritable d'une particule soumise à une force dérivant d'un potentiel et d'un terme aléatoire (via les lois de Newton), la diffusion décrit alors l'évolution de la vitesse V et de la position X de la particule

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X_t &= V_t \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}V_t &= -\beta V_t \mathrm{d}t - \nabla F(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}W_t \end{aligned} \tag{0.2}$$

où β est un paramètre d'amortissement. Le cas sur-amorti s'obtient en considérant β tendant vers l'infini. La diffusion (0.1) est une simplification de ce modèle dans le cas d'un amortissement infini (et via un changement de temps).

Le processus défini par l'équation (0.1) possède lui aussi une mesure invariante, la mesure de Gibbs,

$$\mu_\varepsilon(\mathrm{d}x) = \frac{1}{Z_\varepsilon} \exp\left(-\frac{F(x)}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}x.$$

De plus le processus stationnaire est réversible.

Modèles et Applications Outre son intérêt intrinsèque pour comprendre des phénomènes de métastabilité, cette équation est extrêmement utilisée comme modèle pour des problèmes de conformations de molécules (repliement de

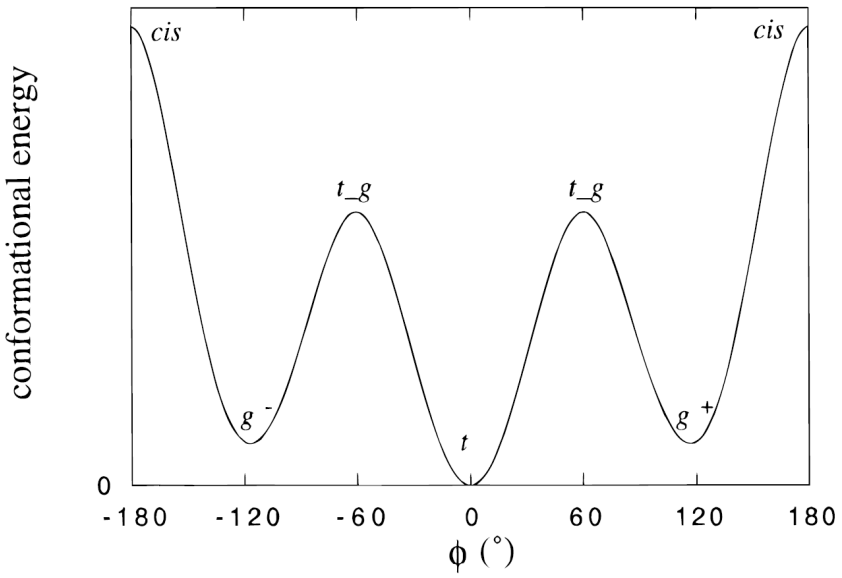


FIGURE 4: Représentation schématique de l'énergie de conformation d'une séquence de quatre atomes de carbones en fonction de l'angle de liaison (extrait de [90])

protéines par exemple). Ainsi, suivant divers paramètres (positions des atomes, angles relatifs entre liaisons), on peut décrire une énergie dont les minima correspondent à des configurations stables du composé. Par exemple dans l'article [90] par Smith et Jaffe, les auteurs donnent l'énergie de la chaîne alcane de quatre carbones $C-C-C-C$ en fonction de l'angle entre la dernière liaison carbone et le plan formé par les trois premiers (voir figure 4). Dans ce cas, le potentiel en jeu contient trois puits dont un plus profond correspondant à la configuration plane de la chaîne plus stable. Le même phénomène a lieu, dans des dimensions bien plus complexes avec le problème de repliement des protéines. À noter que souvent le potentiel F est calculé de manière très complexe et le problème consiste d'abord à l'explorer et le décrire pour connaître ses minima.

La métastabilité est très présente dans des systèmes physico-chimiques comme les changements d'états comme par exemple la surfusion. Dans des conditions normales de température et de pression, l'eau se présente à l'état liquide, cependant en refroidissant, il peut arriver que l'eau reste à l'état liquide sous $0°C$ alors qu'elle devrait se solidifier, devenir de la glace. On appelle ce phénomène la surfusion. Il suffit ensuite d'un simple choc, ou une perturbation pour que l'eau se fige d'un seul coup abruptement [2].

D'autres substances peuvent aussi subir la surfusion : exemple de l'acétate

2. d'un point de vue plus littéraire, l'histoire du Lac de Ladoga, présente dans *Kaputt* de Malaparte, raconte un tel évènement à l'échelle d'un lac qui prend prisonnier dans ses glaces une harde de chevaux, Folio, p.68

de sodium[3] (formule CH_3COONa) qui a un point de fusion à $58°C$, mais la solution aqueuse sursaturée peut rester liquide (donc en surfusion) jusqu'à des températures très basses ($-120°C$ paraît-il). La cristallisation a lieu en provoquant un noyau de nucléation (une plaque métallique que l'on tord) ce qui entraine un dégagement de chaleur (la chaleur latente entre la phase liquide et solide). Ce phénomène est utilisé pour créer des chaufferettes.

Ce même paradigme sert aussi à modéliser les réactions chimiques afin de calculer leur taux de transition via la théorie du complexe activé [41, 68]. On associe aux divers composés une énergie potentielle. De manière simple, les réactifs possèdent une énergie supérieure à l'énergie des produits. Cependant pour que la réaction se produise, le mécanisme de réaction est déterminé et les composés doivent passer par un intermédiaire de réaction (le complexe activé) associé à une énergie plus élevée, ce qui se passe très rarement de manière spontanée. Le phénomène de réaction peut alors dans ces cas s'apparenter à la métastabilité dans le sens où on a deux régimes stables (les réactifs, les produits) séparés par une barrière de potentiel. Le calcul du taux de réaction dans ce modèle a été fait donnant naissance à la formule d'Eyring-Kramers qui a depuis subi de multiples utilisations et généralisations (voir par exemple [57]).

Cette vision en terme d'exploration d'un paysage donné par une fonction potentiel est présente dans un très grand nombre de domaines (voir par exemple la série d'articles [89, 14, 69, 64, 8]). Précisons quelques applications courantes de la métastabilité.

En magnétisation, mentionnons aussi le problème des micro-aimants et de leur importance dans les disque durs (voir par exemple l'article de R. Kohn, M. Reznikoff, E. Vanden-Eijnden [67]). En effet, ces aimants sont soumis à des changements d'états très fréquents correspondant à l'enregistrement de données. Il est alors souvent capital d'estimer le taux de changement de magnétisation spontanée afin de limiter la perte de données. À noter que l'équation régissant ce phénomène est très proche de (0.1), les auteurs de [67] obtiennent en effet une diffusion $X = (\theta, z)$ en dimension 2 en coordonnées polaires :

$$\mathrm{d}X_t = -K\nabla E(X_t)\mathrm{d}t + \varepsilon c(X_t) + \sqrt{2\varepsilon}\sigma(X_t)\mathrm{d}W_t$$

où K et σ sont des matrices de taille 2, telles que $\sigma\sigma^*$ et égale à la partie symétrique de K et la partie antisymétrique de K est constante. Le paramètre $\varepsilon > 0$ s'interprète toujours comme une température. L'énergie E est alors donnée, pour $X = (\theta, z)$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$ et $z \in [-1, 1]$, par

$$E(\theta, z) = \beta_2(1 - z^2)\sin^2(\theta) + \beta_3 z^2 - \sqrt{1 - z^2}(H_1\cos(\theta) + H_2\sin(\theta))$$

où $\beta_2, \beta_3 > 0$ et $H_1, H_2 \in \mathbb{R}$ sont des constantes du modèle.

La métastabilité se rapproche aussi de la résilience en écologie (voir par exemple les travaux de Holling [60], Levin [73] ou Walker, Holling, Carpenter et Kinzig [95]). Cette notion cherche à décrire qualitativement la réaction d'un écosystème aux changements de l'environnement d'origine interne ou externe. Pour résumer, un écosystème peut être caractérisé par une résistance au changement : son état reste sensiblement identique en s'adaptant aux modifications de l'environnement. Cependant, si les bouleversements sont trop brusques, trop

3. D'après *Pour la science*, Décembre 2008, pp. 108-110

importants l'écosystème peut perdre son équilibre et changer complètement de régime. Ainsi [60] (pp.7-10) cite des exemples de lacs et de l'évolution de leur flore en fonction de la concentration en nutriments, ces études observent des changements de turbidité brusques dus aux bouleversements environnementaux.

Dans la dynamique des populations aussi des approches sont initiées afin de comprendre l'extinction de populations comme des phénomènes métastables (par exemple Assaf et Meerson [7]). L'extinction étant vue comme un état final stable (car absorbant) tandis que la présence d'une population est un état persistant mais fondamentalement transitoire. Un lien assez fort doit ici pouvoir être fait avec les distributions quasi-stationnaires qui sont aussi très utilisées pour comprendre l'extinction de populations (voir pour une introduction aux distributions quasi-stationnaires l'article de revue par S. Méléard et D. Villemonais [79])

Équations aux dérivées partielles stochastiques La classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques que nous allons examiner est directement une généralisation à la dimension infinie du modèle précédent. Il s'agit d'équations de réaction-diffusion (au sens des équations aux dérivées partielles) sur un intervalle borné et perturbée par un bruit blanc espace-temps d'intensité $\varepsilon > 0$.

L'équation s'écrit

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial_x^2 u(x,t) - V'(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W, \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \tag{0.3}$$

où W est un bruit blanc espace-temps, $\gamma > 0$ un paramètre de couplage. On suppose aussi que u vérifie des conditions au bord (Dirichlet, Neumann ou périodiques). V est une fonction à valeurs réelles jouant le rôle d'un potentiel local. Cependant il existe un potentiel fonctionnel S (aussi appelé l'action), défini pour $\phi \in C^2$ et vérifiant les mêmes conditions au bord que l'équation (0.3) par

$$S(\phi) = \int_0^1 \left[\frac{\gamma}{2} \phi'(x)^2 + V(\phi(x)) \right] \mathrm{d}x. \tag{0.4}$$

L'équation (0.3) prend alors une forme analogue à l'équation de la diffusion (0.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\frac{\delta S}{\delta u}(u)(x,t) + \sqrt{2\varepsilon} W. \tag{0.5}$$

$\frac{\delta S}{\delta u}$ désigne la dérivée au sens de Fréchet du potentiel S.

À notre connaissance le premier article à s'intéresser à la métastabilité de ce genre d'équation est écrit par Faris et Jona-Lasinio en 1982 [42]. Ils considèrent l'équation d'Allen-Cahn en dimension 1 en prenant pour V la fonction

$$V(u) = \frac{u^4}{4} - \frac{u^2}{2} \tag{0.6}$$

qui est un double puits symétrique. Ils prouvent alors les premières estimations sur le comportement métastable de l'équation (0.3) qui prend alors la forme

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial_x^2 u(x,t) - u^3(x,t) + u(x,t) + \sqrt{2\varepsilon} W. \tag{0.7}$$

L'équation (0.3) peut être interprétée comme modélisant le mouvement d'une corde dans un environnement stochastique aléatoire [49]. Elle est aussi notamment utilisée en théorie quantique des champs (voir par exemple [42, 28], bien que les modèles intéressants soient situés en dimension supérieure en espace) et en tant qu'équation de réaction-diffusion pour modéliser des transitions de phases et l'évolution des interfaces entre ces phases (voir Brassesco et Buttà [23, 24] voir aussi Vanden-Eijnden et Westdickenberg [94]).

Tous ces modèles présentent ce même caractère conduisant en temps court à la minimisation d'une énergie, qui correspond au phénomène de relaxation décrit dans le premier exemple. Ensuite la perturbation stochastique (qu'elle soit due à la présence d'un aléa dans la transition ou à un mouvement brownien, c'est-à-dire un bruit blanc fini ou infini dimensionnel) permet au système d'opérer des transitions d'un minimum de l'énergie à un autre. Dans cette approche, le système se stabilise dans un premier temps au voisinage d'un minimum local correspondant au bassin d'attraction dans lequel il se trouve, puis au bout d'un nombre important de tentatives, le processus va opérer une transition de ce minimum vers un autre minimum local de moindre énergie. C'est le nombre de tentatives nécessaire à l'exécution d'une transition qui permet l'oubli de la condition initiale du processus et conduit à l'imprévisibilité de la transition.

Différentes approches

Les quantités qui nous intéressent sur les modèles de diffusions fini et infini dimensionnelles sont les temps de transition d'un minimum à un autre. En dimension finie $d \geqslant 2$, la diffusion définie par (0.1) ne peut pas atteindre précisément un point. On considère une boule de rayon $\rho > 0$ et de centre y un minimum local de F, notée $B_\rho(y)$. Le temps d'atteinte, qui est un temps d'arrêt, noté $\tau(B_\rho(y))$, est défini par

$$\tau(B_\rho(y)) = \inf\{t > 0, X_t \in B_\rho(y)\}.$$

En particulier on s'intéresse à la loi et l'espérance de $\tau(B_\rho(y))$ partant de la condition initiale $X_0 = x$ où x est un minimum de F.

Résumons quelques résultats sur les temps d'atteinte (voir par exemple Freidlin et Wentzell [47], Olivieri et Vares [82]). Sous la condition $F(x) > F(y)$, $\tau(B_\rho(y))$ est finie presque sûrement.

1. Définissons C_ε une constante telle que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_x[\tau(B_\rho(y)) > C_\varepsilon] = e^{-1}$$

   alors la variable aléatoire, conditionnée à $X_0 = x$, $C_\varepsilon^{-1}\tau(B_\rho(y))$ converge en loi vers une variable exponentielle de paramètre 1 :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_x[\tau(B_\rho(y)) > tC_\varepsilon] = e^{-t}$$

2. La constante C_ε vérifie l'asymptotique (voir par exemple Bovier, Eckhoff, Gayrard, Klein [21])

$$C_\varepsilon = A_\varepsilon e^{B/\varepsilon} \left(1 + O\left(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2}\right)\right) \tag{0.8}$$

A_ε s'appelle le préfacteur, dépend au plus de manière polynomiale de ε et B est une constante appelé énergie d'activation. Cette formule prend le nom d'Eyring-Kramers et peut se calculer en fonction des caractéristiques locales du potentiel F.

Notre but a été de prouver la formule d'Eyring-Kramers (0.8), d'abord pour un cas un peu plus général de la diffusion (0.1) et pour des équations aux dérivées partielles stochastiques de la forme (0.3) qui sont une généralisation à la dimension infinie de diffusion de la forme (0.1). Il faut cependant faire attention au voisinage des minima que l'on considère. Alors que les boules en dimension finie (donnés par une norme) sont toutes équivalentes, ce n'est pas le cas en dimension infinie.

Rappelons les différentes approches qui existent pour traiter ce genre de problème. D'un point de vue probabiliste, le temps de transition d'un minima à un autre est tout simplement un temps d'atteinte d'un ensemble ou le temps de sortie de son complémentaire. On peut distinguer trois méthodes qui ont été utilisées : les grandes déviations, des estimations spectrales et variationnelles et la théorie du potentiel liée à une conception plus proche des équations aux dérivées partielles. Il est bien sûr difficile de séparer clairement ces trois approches, chacune offrant un degré de généralité ou des résultats différents mais complémentaires.

Les deux approches qui nous intéressent le plus et avec lesquelles nous sommes le plus familier sont les grandes déviations et la théorie du potentiel. D'autres techniques utilisant la théorie spectrale (Laplacien de Witten par exemple) existent aussi.

Une limite de toutes ces méthodes est malgré tout le fait qu'elles ne sont valables que dans la limite où ε tend vers 0 c'est-à-dire à petite température. Réussir à calculer la loi et l'espérance du temps d'atteinte à température finie est un problème qui semble bien plus compliqué.

Calculs heuristiques

Dès les années 1930, dans le cadre de la modélisation de taux de réaction, des auteurs ont cherché à calculer les temps de transition. Les premiers travaux de Eyring [41] et surtout de Kramers [68] ont donné leurs noms à la formule et les premières méthodes pour calculer l'espérance du temps d'atteinte. La méthode n'est cependant exposée qu'en dimension 1 et repose sur une formulation à l'aide de l'équation de Fokker-Planck. De multiples raffinements ont été réalisés, voir notamment l'article de Hänggi, Talkner et Borkovec [57] qui fait une revue de la formule d'Eyring-Kramers et de sa descendance.

Grandes déviations

La théorie des grandes déviations a donné les premières démonstrations rigoureuses sur les asymptotiques des temps d'atteinte. Ces résultats sont issus principalement des travaux de Freidlin et Wentzell (voir le livre [47] et le livre d'Olivieri et Vares [82] qui reprend en partie leurs résultats) et permet de donner des estimations asymptotiques exponentielles des quantités en jeu (probabilités de transition, temps de transition). Leur approche repose sur les

grandes déviations associées à la diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}X_t^\varepsilon = b(X_t^\varepsilon)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\sigma(X_t^\varepsilon)\mathrm{d}W_t \tag{0.9}$$

avec $a(x) = \sigma(x)\sigma^t(x) > c > 0$ au sens des matrices définies positives et W un mouvement brownien.

Le principe de grandes déviations vérifié est le suivant.

Proposition 0.0.1 ([47] Théorème 3.1 Chap. 5 p.155)**.** *Pour tout $T > 0$, le processus X^ε vérifie un principe de grande déviation dans $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ muni de la norme uniforme, uniformément par rapport à la condition initiale $X_0^\varepsilon = x$, de vitesse ε et de fonction de taux I_T^x définie pour $\phi \in C([0,T],\mathbb{R}^d)$ absolument continue et vérifiant $\phi(0) = x$, par*

$$I_T^x(\phi) = \frac{1}{4}\int_0^T \left\|\sigma^{-1}(\phi(t))[\phi'(t) - b(\phi(t))]\right\|_2^2 \mathrm{d}t$$

si l'intégrale est bien définie et $I_T^x(\phi) = +\infty$ sinon.

Remarque 3. La preuve de cette proposition utilise dans le cas où σ est constant, un théorème de contraction (par exemple [47] Théorème 3.1 Chap. 3) et le fait que le mouvement brownien vérifie un principe de grandes déviations dans les mêmes conditions, de fonction de taux

$$I_T^0(\phi) = \frac{1}{4}\int_0^T \|\phi'(t)\|_2^2 \,\mathrm{d}t.$$

Si σ n'est pas constant, la preuve est un peu plus complexe car on ne peut pas utiliser directement le principe de contraction à cause du manque de continuité (dans la topologie uniforme) de l'application $\varepsilon W \mapsto X^\varepsilon$. Voir notamment [82], Chap. 2.5 p.98.

En particulier, le principe de grandes déviations uniforme permet de donner les asymptotiques exponentielles de certaines probabilités ([82] Corollaire 2.27 p. 97).

Le principe des grandes déviations permet de quantifier précisément l'écart du processus X^ε par rapport à son analogue déterministe d'équation $z' = b(z)$. Une grande partie de l'analyse repose alors sur une connaissance assez précise du comportement de ce système dynamique. Pour $x, y \in \mathbb{R}^d$, Freidlin et Wentzell [47] définissent le quasi-potentiel $\mathcal{V}(x,y)$

$$\mathcal{V}(x,y) = \inf_{T>0} \inf_{\phi,\phi(0)=x,\phi(T)=y} I_T^x(\phi)$$

Cette quantité représente la difficulté à passer d'un voisinage de x à un voisinage de y pour le processus X^ε. On peut voir que s'il existe une orbite du système dynamique $z' = b(z)$ conduisant de x à y, alors $\mathcal{V}(x,y) = 0$.

Freidlin et Wentzell [47] montrent que l'on peut approximer la diffusion X^ε par une chaîne de Markov à valeurs dans les voisinages des ensembles métastables. On peut alors en déduire des théorèmes sur le comportement du processus X^ε, comprendre les attracteurs parcourus, dans quel ordre et surtout les temps moyens de transitions. Le quasi-potentiel $\mathcal{V}$ permet de calculer les asymptotiques exponentielles des temps de transitions. On renvoie pour le reste de ces résultats à [47] ou aux chapitres 2 et 5 de [82].

Cas gradient Dans le cas qui nous intéresse, $\sigma = \mathrm{Id}$ et $b(x) = -\nabla F(x)$, pour une fonction F à valeurs dans $\mathbb{R}$. On se place de plus dans le cas où F ne possède qu'un nombre fini de points stationnaires. Les ensembles K_i sont nécessairement constitués de singletons de points stationnaires (c'est-à-dire vérifiant $\nabla F(x) = 0$). Les ensembles stables étant alors les minima de F.

Si x et y sont des minima de F, on note $\widehat{F}(x,y)$, la hauteur minimale à franchir pour aller de x à y

$$\widehat{F}(x,y) = \min_{\phi,\phi(0)=x,\phi(1)=y} \max_{t\in[0,1]} F(\phi(t)).$$

En particulier si F est régulière (au moins C^2), la valeur $\widehat{F}(x,y)$ est atteinte en un des points selles de F. De plus dans le cas de points selles multiples, la trajectoire réalisant le minimum peut passer par plusieurs points selles de hauteur commune $\widehat{F}(x,y)$. Le quasi-potentiel s'exprime en fonction du potentiel

$$\mathcal{V}(x,y) = \widehat{F}(x,y) - F(x).$$

Remarque 4. La borne inférieure de cette égalité se prouve comme suit : soit ϕ telle que $\phi(0) = x$ et $\phi(T) = y$, on a, pour tout $0 \leqslant t < T$

$$\begin{aligned} I_T^x(\phi) &= \frac{1}{4}\int_0^T |\phi'(s) + \nabla F(\phi(s))|^2 \,\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{4}\int_0^t |\phi'(s) - \nabla F(\phi(s))|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\geqslant \frac{1}{4}\int_0^t |\phi'(s) + \nabla F(\phi(s))|^2 \,\mathrm{d}s - \int_0^t \nabla F(\phi(s)) \cdot \phi'(s)\mathrm{d}s \\ &\geqslant F(\phi(t)) - F(\phi(0)) = F(\phi(t)) - F(x). \end{aligned} \tag{0.10}$$

Il suffit alors de maximiser sur t puis de minimiser sur ϕ.

En utilisant le principe de grandes déviations, on en déduit les asymptotiques des temps d'atteinte. Pour x et y deux minima de F, le temps moyen $\mathbb{E}_x[\tau(B_\rho(y))]$, pour $B_\rho(y)$ la boule de centre y de rayon ρ, vérifie

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon \ln \mathbb{E}_x[\tau(B_\rho(y))] = \widehat{F}(x,y) - F(x)$$

Les grandes déviations permettent donc de connaître l'asymptotique exponentielle du temps de transition. Ce temps dépend directement de la valeur de la barrière de potentiel à franchir.

Une conséquence importante de cette propriété est le fait que si $F(x) < F(y)$ la transition de x vers y n'est pas visible car la transition de y vers x se produit dans une échelle de temps beaucoup plus courte et est donc absorbée. Les échelles de temps distinctes arrivent naturellement en fonction des valeurs de $\widehat{F}(x,y) - F(x)$ pour x, y décrivant les minima de F. Ainsi, si on considère le processus renormalisé en temps par un facteur $e^{H/\varepsilon}$, suivant les valeurs de H on sera capable ou non de voir des transitions. Posons $Y_t^\varepsilon = X^\varepsilon_{te^{H/\varepsilon}}$, si on examine le processus $(Y_t^\varepsilon)_{t\in[0,T]}$ dans la limite où ε tend vers 0, toutes les transitions $(x \to y)$ pour lesquelles $H > \widehat{F}(x,y) - F(x)$ seront absorbés (se produisant beaucoup plus rapidement que l'échelle considérée). Tandis que, inversement, les transitions pour lesquelles $H < \widehat{F}(x,y) - F(x)$ ne se produiront jamais car, à horizon fini pour Y^ε, ces transitions sont beaucoup trop longues

à apparaître. Seules les transitions pour lesquelles $H = \widehat{F}(x,y) - F(x)$ ont une chance de se produire. Mais il faut alors faire attention dans ce cas à la correction subexponentielle qui n'est pas forcément constante : le préfacteur A_ε dans (0.8). C'est une des motivations qui nous pousse à calculer ce préfacteur.

Ces considérations sont détaillés dans le chapitre 6.6 de [47] et le chapitre 5.4 de [82] dans le cas général. Une preuve de la convergence de Y^ε vers un processus de Markov à saut pur en fonction de la renormalisation est donné dans [92].

Loi exponentielle La démonstration de la loi exponentielle du temps de transition peut se montrer en utilisant la propriété d'oubli de la condition initiale. D'après les travaux de Martinelli, Olivieri et Scoppola [78] et repris dans [82] avec une preuve différente, on a en effet la propriété suivante dite d'oubli de la condition initiale. Pour y un minimum local de F, on considère le temps d'atteinte, $\tau(B_\rho(y))$, de la boule $B_\rho(y)$. Soit x^* un minimum de F, tel que la matrice hessienne de F en x^* soit définie positive.

Lemme 0.0.2 ([82] Lemme 5.22 p.321)**.** *Il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{x\in\bar{B}_\delta(x^*)} \sup_{t>\varepsilon^{-3}} |\mathbb{P}_x(\tau(B_\rho(y)) > t) - \mathbb{P}_{x^*}(\tau(B_\rho(y)) > t)| = 0$$

On parle d'oubli de la condition initiale car cette propriété énonce que partir du minimum ou d'un point voisin de ce minimum ne change pas la loi du temps de transition. Ce résultat est prouvé dans [82] à l'aide d'un couplage entre les diffusions partant de x et x^*. Dans [78], qui est le résultat que nous utiliserons en dimension infinie, la preuve repose sur la contraction exponentielle des solutions au voisinage des minima (dont la matrice hessienne est définie positive).

On définit C_ε la constante telle que

$$\mathbb{P}_x[\tau(B_\rho(y)) > C_\varepsilon] = e^{-1}.$$

On a le théorème suivant

Théorème 0.0.3 ([82] Théorème 5.21 p.320)**.** *Soit $\delta > 0$ tel que $B_\delta(x^*)$ soit contenu dans le bassin d'attraction de x^*. On a*

1. $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}_x(\tau(B_\rho(y)) > tC_\varepsilon) = e^{-t}$ *pour tout $t > 0$ et tout $x \in B_\delta(x^*)$.*
2. $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\mathbb{E}_x(\tau(B_\rho(y)))}{C_\varepsilon} = 1$ *pour tout $x \in B_\delta(x^*)$.*

Théorie du potentiel

Les grandes déviations donnent des résultats très nombreux et généraux mais nous sommes limités à des asymptotiques exponentielles. Pour aller plus loin dans la description des transitions et des temps d'atteinte, un autre approche initiée par Bovier, Eckhoff, Gayrard et Klein dans [21, 22] repose sur la théorie du potentiel. Le chapitre 1 commencera par les éléments de théorie du potentiel utilisés.

Brièvement, l'idée de cette approche repose sur une formulation de la fonction $w(x) = \mathbb{E}_x[\tau_A]$, pour A un ouvert simplement connexe comme solution d'un problème de Dirichlet :

$$\begin{aligned} L_\varepsilon w_A &= 1 \text{ sur } A^c \\ w_A &= 0 \text{ sur } A. \end{aligned}$$

où $-L_\varepsilon$ est l'opérateur infinitésimal de la diffusion (le signe $-$ est là pour considérer un opérateur positif). L'estimation de w_A, pour x un minimum de F et A une boule autour d'un autre minima repose sur la formule suivante

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_\rho(x),A}}(\tau_A) = \frac{\int_{A^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A}(y)\mathrm{d}y}{\mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A)} \tag{0.11}$$

où $\nu_{B_\rho(x),A}$ est une probabilité sur le bord de l'ensemble de départ $B_\rho(x)$ et $h_{B_\rho(x),A}(y) = \mathbb{P}_y(\tau(B_\rho(x)) < \tau_A)$ est le potentiel d'équilibre. La capacité $\mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A) = \Phi(h_{B_\rho(x),A})$ est alors l'énergie du potentiel d'équilibre pour la forme de Dirichlet, Φ, associé à L_ε :

$$\Phi(h) = \int_{\mathbb{R}^d} h(x) L_\varepsilon h(x) e^{-F(x)/\varepsilon}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla h(x)\|^2 e^{-F(x)/\varepsilon}\mathrm{d}x. \tag{0.12}$$

Le calcul de l'espérance d'après la formule (0.11) se fait par l'application de la méthode de Laplace pour le numérateur et dénominateur. Nous détaillerons au chapitre 1 cette approche que nous utilisons principalement.

Références La théorie du potentiel a d'abord été développée et utilisée pour des problèmes liées à des modèles discrets, des chaînes de Markov (voir les travaux de Bovier, Eckhoff, Gayrard, Klein [20, 17]). Citons notamment les applications au modèles d'Ising (notamment [19] par Bovier, den Hollander, et Spitoni), de Curie-Weiss [12] par Bovier, Bianchi et Ioffe, avec les dynamiques de Glauber ou de Kawasaki. Le développement de la théorie du potentiel dans le cadre continu afin de comprendre la métastabilité a été initié dans [21, 22], même si la théorie est présente depuis longtemps.

Historiquement, les notions de théorie du potentiel ont été très largement développées en théorie des probabilités. Les travaux de Doob [39], de Dellacherie et Meyer [38] reprennent et tressent des liens importants entre ces deux mondes. La vision développée dans ces ouvrages insiste sur un traitement très abstrait de la théorie du potentiel et de son utilisation pour décrire des propriétés des processus stochastiques généraux. Les relations sont naturelles entre martingales, sur-martingales, sous-martingales et fonctions harmoniques, sur-harmoniques, sous-harmoniques. De même, les capacités de Choquet sont utilisées pour comprendre les points atteints par le processus. Une "quasi"-topologie, relative au capacités et adaptée aux processus a été développée. La théorie du potentiel a une longue histoire qui remonte notamment à Gauss pour traiter l'électrostatique. Dans ce cadre, le potentiel est une façon de résoudre les équations régissant les champs électriques statiques. Le mouvement brownien est alors l'objet probabiliste correspondant (voir par exemple l'ouvrage de Port et Stone [85]). Toutes les quantités qui nous intéressent, comme les probabilités d'équilibre, les mesures d'équilibre, les capacités ou les temps d'atteinte ont des analogues classiques comme le champ électrique, les charges de surfaces, la charge totale.

Un des outils principaux de la théorie du potentiel est la forme de Dirichlet. Comme la résolvante, le générateur infinitésimal ou le semi-groupe, la forme de Dirichlet permet une construction de processus de Markov généraux. On peut consulter le livre de Fukushima, Oshima et Takeda [48] ou de Chung et Walsh [31]. Une autre référence classique est le livre de Ma et Röckner [75] qui détaille le cas des formes de Dirichlet non symétriques. Cet apport permet

de traiter alors les notions de processus duaux ou co-associés. Les processus associés à des formes de Dirichlet symétriques (comme le cas gradient avec variance constante) sont eux-mêmes symétriques (c'est-à-dire réversibles). La théorie des formes de Dirichlet non symétriques serait sans doute une étape importante afin de développer une formulation des temps d'atteinte pour des diffusions générales. Toutes ces théories complémentaires illustrent les liens profonds qui existent entre certaines équations aux dérivées partielles et les diffusions.

Théorie spectrale

Enfin la dernière approche que nous allons esquisser mais qui ne nous sera pas directement utile repose sur les liens entre les temps de transition, les minima de F et les premières valeurs propres du générateur infinitésimal L_ε. Ces liens notamment explicités dans [47] ont aussi été développés dans ce but dans l'article [92] de Sugiura. Étant donné un domaine borné D et une diffusion X de générateur infinitésimal L_ε sur D, on note $\tau(D)$ le temps de sortie de D. De manière informelle, il existe un compact F de D et $r > 0$, tel que pour tout x de F

$$|\lambda^\varepsilon \mathbb{E}_x[\tau(D)] - 1| \leqslant e^{-r/\varepsilon} \tag{0.13}$$

où λ^ε est la plus petite valeur propre du générateur $L_\varepsilon = -\varepsilon\Delta + \nabla F \cdot \nabla$ avec les conditions de Dirichlet au bord de D. Il s'agit du Théorème 4.1 dans [92]. Malheureusement, la preuve précise de ce résultat n'est pas donnée et l'article fait référence à une prépublication de l'auteur introuvable. On retrouve ces résultats notamment dans [22]. Ce lien permet d'attaquer le calcul des temps d'atteinte en calculant les valeurs propres associées à un l'opérateur L_ε.

L'article de Sugiura [92] est aussi intéressant car c'est le premier à notre connaissance à énoncer clairement (Théorème 3 et son corollaire) la convergence de la diffusion X^ε renormalisée en temps d'un facteur $\varepsilon^\alpha e^{H/\varepsilon}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, vers un processus de Markov à saut pur entre les voisinages des minima, en donnant les taux de transition. Cependant, l'auteur fait une hypothèse importante que nous ne ferons pas, qui est que les minima entre lesquels il calcule les transitions sont tous de même hauteur (fin de la page 757 après la remarque 2.1).

Le résultat de [22] prolonge les résultats précédents de Freidlin et Wentzell ([47] chapitre 6.7). En effet contrairement à [92] qui ne s'intéresse qu'à la première valeur propre, les résultats de Bovier, Gayrard et Klein montrent la correspondance exacte existant entre les premières valeurs propres les plus basses du spectre, les minima de F et les temps de transitions. De plus les fonctions propres associées sont des approximations des potentiels d'équilibre (correctement renormalisés), voir Théorèmes 1.2 et 1.3 de [22]. Citons aussi l'article de Eckhoff [40] qui traite des chaînes de Markov.

Une autre approche a aussi été développée par Helffer, Klein et Nier (par exemple [58] et [59]) et repose sur la construction du complexe de Witten et l'analyse semi-classique. Cette méthode a permis de donner des développements plus précis des petites valeurs propres du générateur.

Nous allons maintenant énoncer nos résultats obtenus.

Résultats sur la dimension finie

Dans le chapitre 1, nous étendons les résultats de [21] pour permettre le calcul de la formule d'Eyring-Kramers dans des cas un peu plus généraux. Nous avons ensuite appliqué ce théorème à un modèle d'oscillateurs couplés dans un potentiel bistable. Cette partie fait l'objet d'un article en préparation [3].

Une extension de la formule d'Eyring-Kramers

On considère la diffusion donné par l'équation (0.1) sur $\mathbb{R}^d$

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla F(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}W_t. \tag{0.14}$$

On appelle indice d'un point stationnaire ($\nabla F(x) = 0$) le nombre de valeurs propres strictement négatives de la matrice hessienne associée. On parle de minimum pour un point stationnaire d'indice 0 et de point-selle pour un point stationnaire d'indice 1.

Les hypothèses sur F seront les suivantes :

- la fonction F est de classe C^3 sur le domaine D.
- $\underline{\lim}_{x\to\infty} F(x) = +\infty$,
- $\underline{\lim}_{x\to\infty} |\nabla F(x)| = +\infty$,
- $\underline{\lim}_{x\to\infty}(|\nabla F(x)| - 2\Delta F(x)) = +\infty$.
- L'ensemble des minima locaux et des points selles de F est fini.
- La matrice hessienne de F en chaque minima et point selle est non-dégénérée (n'a pas de valeurs propres nulles).

On a vu que l'application de la théorie de Freidlin-Wentzell à cette diffusion donnait de nombreux résultats mais ne permettait pas d'obtenir d'autres asymptotiques que exponentielles des temps de transition. Notons les minima de F, $x_1, ...x_n$, ordonnés de tel sorte que $F(x_1) \leqslant F(x_2) \leqslant \cdots \leqslant F(x_n)$. On suppose de plus que ces minima sont non dégénérés, c'est-à-dire que la matrice hessienne est définie positive. On pose alors $S_\rho^j = \cup_{k\leqslant j} B_\rho(x_k)$. La formule d'Eyring-Kramers s'écrit, pour $i > j$ et pour ρ suffisamment petit

$$\mathbb{E}_{x_i}[\tau(S_j)] = \frac{2\pi}{C(x_i, S_j)\sqrt{\det \nabla^2 F(x_i)}} e^{\left(\widehat{F}(x_i,S_j)-F(x_i)\right)/\varepsilon}(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})) \tag{0.15}$$

où $\det \nabla^2 F(x_i)$ désigne le déterminant de la matrice hessienne en x_i et $\widehat{F}(x_i, S_j)$ est la hauteur minimale à franchir pour passer de x_i à S_j.

La constante $C(x_i, S_j)$ est la capacité et se calcule comme suit. On construit à partir du potentiel F un circuit électrique dont les sommets sont les minima de F et les arêtes sont les points selles d'indice 1, z, de hauteur $\widehat{F}(x_i, S_j)$ reliant deux vallées (données par leurs minima respectifs). On réalise alors un réseau électrique en associant à chaque arête une conductance valant

$$C(z) = \frac{|\lambda^-(z)|}{\sqrt{|\det \nabla^2 F(z)|}}. \tag{0.16}$$

La capacité $C(x_i, S_j)$ est alors la conductance équivalente du réseau entre x_i et l'ensemble des x_k pour $k \leqslant l$.

Ces résultats sont précisés et démontrés en détail dans le chapitre 1. Il s'agit respectivement des Théorèmes 1.2.9 et 1.2.8. Une conséquence directement issue de la correspondance avec le réseau électrique est le calcul approché du potentiel d'équilibre $h(x) = \mathbb{P}_x(\tau(B_\rho(x_i)) < \tau(S_j))$ au voisinage des minima en fonction d'un potentiel sur le réseau électrique. Ce résultat constitue le Théorème 1.2.10.

Remarque 5. D'autres raffinements sont possibles pour le calcul de la formule d'Eyring-Kramers, notamment, le cas de points selles ou de minima dégénérés (ayant des valeurs propres nulles mais restant malgré tout des points isolés) est traité par Berglund et Gentz dans [11]. Dans [92], Sugiura avait traité le cas où les points selles ou les minima formaient des sous-variétés (lignes ou surfaces par exemple). Ces différents cas amènent des corrections supplémentaires sous-exponentielles aux temps de transition.

Remarque 6. Il faut aussi mentionner les travaux de Imkeller et Pavlyukevich [62, 63] qui ont traité le cas où la perturbation aléatoire est un processus de Lévy stable symétrique. Le temps de transition est alors polynomial en ε et dépend directement de l'indice de stabilité du processus. L'idée de la preuve repose sur la distinction entre les grands sauts et les petits sauts du processus de Lévy.

Exemple conduisant à une équation aux dérivées partielles

Dans la suite du chapitre 1, nous appliquons le raffinement démontré à un cas particulier d'oscillateurs couplés dans un potentiel bistable. Ce modèle est issu des articles de Berglund, Fernandez et Gentz [9, 10] qui décrivent en détail le comportement et les bifurcations du système déterministe afin de calculer les asymptotiques exponentielles des temps de transition à l'aide des grandes déviations. Appliquant nos résultats (Théorèmes 1.2.9 et 1.2.8), nous sommes capables d'aller plus loin et de donner des asymptotiques précises des temps de transition.

On a $N \geq 2$ particules, indexés par $\Lambda = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Chaque particule évolue sur $\mathbb{R}$ et subit individuellement un potentiel bistable

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2. \tag{0.17}$$

Ainsi chaque particule a deux positions stables ($x = 1$ et $x = -1$) et une position instable ($x = 0$). L'interaction entre ces particules est donnée par un Laplacien discrétisé d'intensité $\gamma/2$, avec $\gamma \geq 0$. Un mouvement brownien indépendant agit sur chaque particule avec intensité $\sqrt{2\epsilon}$.

On obtient alors le système d'équations différentielles stochastiques, pour tout i

$$\mathrm{d}X_i(t) = -f'(X_i(t))\mathrm{d}t + \frac{\gamma}{2}[X_{i+1}(t) - 2X_i(t) + X_{i-1}(t)]\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_i(t). \tag{0.18}$$

On définit alors pour $x \in \mathcal{X}$

$$F_\gamma(x) = \sum_{i\in\Lambda} f(x_i) + \frac{\gamma}{4}\sum_{i\in\Lambda}(x_i - x_{i+1})^2, \tag{0.19}$$

ce qui permet de mettre le système sous une forme gradient.

$$\mathrm{d}X_\varepsilon(t) = -\nabla F_\gamma(X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B(t). \tag{0.20}$$

Nous sommes dans le cas de la diffusion (0.1). Les figures 3 et 2 illustrent le cas $N = 2$, $\gamma = 0.05$ et $\varepsilon = 0.01$. On y distingue bien les quatre minima du potentiel ($(1,1),(-1,-1)$ minima globaux et $(1,-1),(-1,1)$ minima locaux).

Les états métastables qui nous intéressent sont les deux états constants -1, noté I_-, et $+1$, noté I_+. On souhaite calculer le temps de transition de l'un à l'autre. Dans le cas $0 < \gamma < \gamma^*$ où γ^* est une constante vérifiant $\gamma^* > 1/4$, il est démontré (par Berglund, Fernandez et Gentz dans [9]) que le potentiel F_γ a 3^N points stationnaires. Nous arrivons, moyennant une conjecture sur la structure du potentiel que nous avons dû faire, au résultat suivant.

Proposition 0.0.4 (Corollaire 1.3.3)**.** *Soient $\rho > \varepsilon$, $\gamma < \gamma^*$, et $B_\pm = B_\rho(I_\pm)$: il existe V_N*

$$V_N(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3\gamma}{2} + O(\gamma^2) & \textit{pour } N \geq 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} + O(\gamma^2) & \textit{pour } N = 2 \end{cases} \tag{0.21}$$

tel que

$$\mathbb{E}_{I_-}\tau_{B_+} = A_N(\gamma)e^{V_N(\gamma)/\varepsilon}(1 + O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2})) \tag{0.22}$$

avec

$$A_N(\gamma) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}\pi}{2N}(1-2\gamma) + O(\gamma^2) & \textit{si } N \textit{ est impair} \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{N}(1-2\gamma) + O(\gamma^2) & \textit{si } N \textit{ est pair.} \end{cases} \tag{0.23}$$

Remarque 7. On voit la différence dans facteur $\frac{1}{2}$ entre les cas N pair ou impair, cette différence est purement due à la configuration géométrique différente du potentiel F_γ en fonction de la dimension. Notons que nous n'avons pas de conditions sur les grandeurs relatives de γ et ε. L'équation (0.22) exprime le temps de transition dans l'asymptotique $\varepsilon \to 0$ et on donne les développements limités en $\gamma = 0$ du préfacteur et du facteur exponentiel.

L'étude de ce potentiel a été aussi motivée par le fait que ce modèle est aussi une approximation d'une équation aux dérivées partielles stochastique. Nous détaillons cet aspect dans la suite.

Résultats sur les équations aux dérivées partielles stochastiques

Nous allons maintenant décrire nos résultats obtenus dans le cadre des équations aux dérivées partielles stochastiques qui occupent les chapitres 2, 3, 4. Un article a déjà été publié sur le calcul de la capacité pour la dimension infinie [4] qui constitue le chapitre 3. Un autre article [2] prouvant les résultats des temps de transitions pour l'équation (0.3) a été soumis et constitue le chapitre 4.

Équation

Nous démontrons une version de la formule dite d'Eyring-Kramers (équation (0.8)) pour un type d'équation aux dérivées partielles stochastiques (ci-après

EDPS). Rappelons le type d'EDPS qui nous intéresse :

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial_x^2 u(x,t) - V'(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \tag{0.24}$$

avec comme condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1] \tag{0.25}$$

où u_0 est une fonction continue sur $[0,1]$ et γ un paramètre strictement positif. W est un bruit blanc en espace et en temps, le paramètre $\varepsilon > 0$ quantifie la variance du bruit. Les hypothèses sur la fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les suivantes.

Hypothèses 0.0.5. 0n suppose que la fonction V vérifie les hypothèses suivantes.

(H_1) V est de classe C^3.

(H_2) V est convexe à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe $R_0 > 0$ et $\lambda > 0$ tel que

$$V''(x) > \lambda > 0, \quad \forall |x| > R_0. \tag{0.26}$$

(H_3) Il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que

$$V(x) \leqslant C(|x|^\alpha + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{0.27}$$

En particulier d'après (H_2), on sait que $\alpha \geqslant 2$.

Nous nous intéressons à trois types de conditions au bord de $[0,1]$ (c'est-à-dire en 0 et en 1)

– conditions de Dirichlet :

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{0.28}$$

– conditions de Neumann :

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{0.29}$$

– conditions périodiques :

$$u(0,t) = u(1,t) \qquad \partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t), \quad \forall t \geqslant 0. \tag{0.30}$$

On mettra *bc* en indice d'un espace de fonction pour désigner les fonctions vérifiant les conditions au bord.

Remarque 8. L'équation (0.24) est donc qualifiée de

– *équation aux dérivées partielles* : l'inconnue est une fonction du couple (x,t) de l'espace $[0,1]$ et du temps $\mathbb{R}^+$ vérifiant une relation entre ses "dérivées partielles" (qui n'existent pas au sens classique) ;
– *stochastique* : la présence d'un terme de perturbation aléatoire, le bruit blanc ;
– *semi-linéaire* : la partie différentielle d'ordre maximale, ici 2 est linéaire, la partie non-linéaire ne dépend que de u à travers sa valeur au point (x,t) ;
– *parabolique* : l'opérateur différentiel $(\partial_t - \gamma \partial_{xx}^2)$ est d'ordre 1 en temps et 2 en espace (ici le Laplacien).

Il s'agit d'une équation d'évolution (la relation nous donne la dérivée première en temps) et avec un bruit additif (il ne dépend pas de la fonction inconnue u). La fonction V est qualifiée de potentiel car $V(u(x,t))\mathrm{d}x$ représente l'énergie potentielle infinitésimale du système (représenté par la fonction u) au point x.

Notons qu'en effectuant le changement de variable $x = y\sqrt{\gamma}$ on se ramène à l'équation, avec W un bruit blanc sur $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]$

$$\partial_t v(y,t) = \partial^2_{yy} v(y,t) - V'(v(y,t)) + \sqrt{2\varepsilon\sqrt{\gamma}}W, \quad \forall (y,t) \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right] \times \mathbb{R}^+. \tag{0.31}$$

Donc on se ramène au cas $\gamma = 1$ en changeant l'intervalle $[0,1]$ par un intervalle de taille $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

Un des premiers articles à considérer l'équation (0.24) est l'article [42] de Faris et Jona-Lasinio. Les auteurs ont obtenu les asymptotiques exponentielles des temps de transitions en utilisant les grandes déviations.

But

Notre but est de prouver une asymptotique précise – quand ε tend vers 0 – du temps de transition d'un état métastable à un autre. Comme nous l'avons déjà remarqué (équation (0.5)), l'équation (0.24) se met sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = -\frac{\delta S}{\delta u}(u)(x,t) + \sqrt{2\varepsilon}W \tag{0.32}$$

où S est donné par l'équation (0.4). La quantité $\frac{\delta S}{\delta u}$ est formellement la dérivée de la fonctionnelle au sens de Fréchet

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\phi)(x) = -\gamma\phi''(x) + V'(\phi(x)), \forall x \in [0,1] \tag{0.33}$$

pour $\phi \in C^2_{bc}([0,1])$. Plus précisement, soient ϕ et h fonctions de $C^2_{bc}([0,1])$, on a

$$S(\phi + h) - S(\phi) = \int_0^1 \frac{\delta S}{\delta u}(\phi)(x)h(x)\mathrm{d}x + o(\|h\|_{C^2}) \tag{0.34}$$

où la norme sur $C^2_{bc}([0,1])$ est simplement

$$\|h\|_{C^2} = \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty + \|h''\|_\infty . \tag{0.35}$$

L'équation (0.24) s'interprète alors comme un flot de gradient en dimension infinie perturbé par un bruit additif.

Heuristique

Le comportement de ce système s'analyse de manière similaire au cas de la dimension finie (0.1). L'action S_N peut avoir de multiples minima (voir l'exemple détaillé qu chapitre 5), ce sont les états métastables. Après avoir atteint un premier minimum, à cause du terme aléatoire, le système peut brutalement changer d'équilibre et se produit alors ce que l'on nomme une transition. Le processus quitte le voisinage d'un minimum pour atteindre le voisinage d'un autre minimum. Le temps de transition suit, dans l'asymptotique du bruit

faible ($\varepsilon \to 0$), une loi exponentielle (résultat de Martinelli, Olivieri Scoppola [78]). Notre but est d'obtenir une formule de la forme (0.8) qui nous permet de calculer l'espérance du temps de transition dans l'asymptotique du bruit faible. Maier et Stein dans [76] ont prouvé formellement cette formule pour l'équation d'Allen-Cahn. Sur ce même modèle, Vanden-Eijnden et Westdickenberg [94] ont utilisé des résultats comparables pour montrer la convergence sur un domaine spatial tendant vers $+\infty$ de l'équation vers un système limite de nucléation et de croissance des domaines (dit modèle JMAK : Johnson-Mehl-Avrami-Kolmogorov).

Résultat

Nous décrivons maintenant, dans le cas le plus simple, la formule dite d'Eyrig-Kramers. Supposons que le potentiel V satisfasse les hypothèses 0.0.5 (principalement il faut que V soit suffisamment régulière, croissant assez rapidement et non dégénérée). Supposons de plus que l'action S a seulement trois points stationnaires solutions de

$$\frac{\delta S}{\delta u}(\phi)(x) = -\gamma\phi''(x) + V'(\phi(x)) = 0 \quad x \in [0,1]. \tag{0.36}$$

Imaginons de plus que parmi ces trois points stationnaires, deux, ϕ_+ et ϕ_-, sont des minima avec $S(\phi_-) < S(\phi_+)$, et le troisième est un point selle de degré un, $\hat{\phi}$, c'est-à-dire ne possédant qu'une seule valeur propre négative. Soit B_ρ^- une boule, pour une distance à préciser, de rayon $\rho > 0$ autour de ϕ_-. Dans ce cas, notre résultat prend la forme suivante :

$$\mathbb{E}_{\phi_+}\left[\tau_\varepsilon\left(B_\rho^-\right)\right] = \frac{1}{\left|\lambda^-(\hat{\phi})\right|}\sqrt{\left|\frac{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\hat{\phi}}S}{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_+}S}\right|}e^{\Delta S/\varepsilon}\left(1+\Psi(\varepsilon)\right) \tag{0.37}$$

où

$$\tau_\varepsilon(A) = \inf\{t > 0, u(t) \in A\} \tag{0.38}$$

est le temps d'atteinte de l'ensemble A, $\Delta S = S(\hat{\phi}) - S(\phi_+)$ est la différence de potentiel à franchir pour aller de ϕ_+ à ϕ_-. $\mathcal{H}_\phi S$ désigne l'opérateur Hessien de l'action S au point ϕ, c'est-à-dire la dérivée seconde au sens de Fréchet, il s'agit simplement d'un opérateur de Sturm-Liouville sur les fonctions $C^2_{bc}([0,1])$:

$$\frac{\delta^2 S}{\delta u^2}(\phi)f(x) = \mathcal{H}_\phi S f(x) = -\gamma f''(x) + V''(\phi(x))f(x). \tag{0.39}$$

De manière précise, pour $h \in C^3_{bc}([0,1])$, on a

$$S(\phi+h) = S(\phi) + \int_0^1 \frac{\delta S}{\delta u}(\phi)(x)h(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 h(x)\mathcal{H}_\phi S h(x)\mathrm{d}x + o(\|h\|^2_{C^2}), \tag{0.40}$$

et si ϕ est un point stationnaire, on a

$$S(\phi+h) = S(\phi) + \int_0^1 h(x)\mathcal{H}_\phi S h(x)\mathrm{d}x + o(\|h\|^2_{C^2}). \tag{0.41}$$

Notons $\lambda_k(\phi)$ les valeurs propres de l'opérateur $\mathcal{H}_\phi S$ et $\lambda_-(\hat{\phi})$ l'unique valeur propre négative de $\mathcal{H}_{\hat{\phi}}S$. Nous allons voir que la $k$ième valeur propre d'un

opérateur de Sturm-Liouville est d'ordre k^2, on ne peut donc pas définir de déterminant pour l'opérateur $\mathcal{H}_\phi S$ de manière naïve (comme produit infini des valeurs propres), mais on peut définir le rapport de deux déterminants comme produit infini des rapports des valeurs propres. On dispose de nombreux résultats sur les asymptotiques des valeurs propres de problèmes de Sturm-Liouville (voir par exemple Courant Hilbert [33] et Fix [46]. Nous définissons donc

$$\frac{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\hat{\phi}} S}{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_+} S} = \prod_{k \geqslant 1} \frac{\lambda_k(\hat{\phi})}{\lambda_k(\phi_+)}. \tag{0.42}$$

Ce produit peut s'exprimer de manière intéressante en utilisant des résultats de l'analyse complexe et de l'analyse fonctionnelle (voir par exemple [74] par Levit et Smilansky ou [66] par Kirsten et McKane). On obtient, dans le cas des conditions au bord de Dirichlet

$$\frac{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\hat{\phi}} S}{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_+} S} = \frac{\hat{f}(1)}{f_+(1)} \tag{0.43}$$

où $\hat{f}$ et f_+ sont solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\hat{\phi}} S \hat{f} &= 0 & \hat{f}(0) &= 0 & \hat{f}'(0) &= 1 \\ \mathcal{H}_{\phi_+} S f_+ &= 0 & f_+(0) &= 0 & f_+'(0) &= 1. \end{aligned} \tag{0.44}$$

Cela nous amène à poser pour la suite

$$\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\hat{\phi}} S = \hat{f}(1). \tag{0.45}$$

Des propriétés équivalentes existent dans le cas des conditions au bord de Neumann et périodiques et même dans les cas de conditions au bord mixtes (ou de Robin) que nous ne traitons pas ici.

Cas général Dans le cas général, les hypothèses sur S sont les suivantes.

Hypothèses 0.0.6. Nous supposons que
- S a un nombre fini de points selles et de minima.
- Tous les minima et les points selles de S sont hyperboliques : l'opérateur Hessien associé n'a aucune valeur propre nulle.

Ces hypothèses 0.0.6 portent sur la structure géométrique du potentiel S. Le nombre fini de points selles est une généralisation assez simple du cas d'un unique point selle. Quant à l'hypothèse sur l'hyperbolicité elle est importante car elle nous permet d'approximer le potentiel par sa partie quadratique, comme en dimension finie. Dans le cas contraire, on aurait sans doute une dépendance subexponentielle du préfacteur en ε. Notons que ces hypothèses ne peuvent pas être vérifiées dans le cas des conditions au bord périodiques car dans ce cas, les points stationnaires non constants sont nécessairement dégénérés à cause de l'invariance par rotation.

De plus, les connections entre les hypothèses 0.0.5 et 0.0.6 ne sont pas forcément directes. La preuve qu'un potentiel S donné vérifie les hypothèses 0.0.6 n'est pas forcément évidente, la situation est encore plus complexe si on cherche à comprendre les bifurcations qui peuvent se produire en fonction de γ, et les hypothèses 0.0.6 ne sont alors plus vérifiées pour certaines valeurs de γ.

Cependant de nombreux articles ont étudiés le système dynamique déterministe associé à l'équation (0.24). Ainsi, Brunovsky, Fiedler et Rocha (dans [26, 43]) ont prouvé que ce système dynamique a une structure de Morse-Smale sous ces hypothèses 0.0.6 et 0.0.5. De plus des résultats existent sur la généralité de cette structure en fonction de V et γ (voir par exemple Angenent [6]).

La structure de Morse-Smale signifie en particulier que l'attracteur du système dynamique est constitué des points stationnaires et des orbites (exclusivement hétéroclines) qui les relient. Des méthodes ont été construites afin de trouver les points-stationnaires et leur indice (minima ou point-selle) par Fiedler, Rocha et Wolfrum (voir [43, 97]). Dans le chapitre 5, nous exposerons leurs méthodes afin de traiter des exemples et nous discuterons le cas périodique.

Cette structure particulière de l'attracteur nous permet alors de procéder comme dans le chapitre 1 pour calculer les capacités en correspondance avec un réseau électrique.

On utilise les mêmes formulation que dans la section précédente sur la dimension finie. Posons les minima de S, $\phi_1, ...\phi_n$, ordonnés de tel sorte que $S(\phi_1) \leqslant S(\phi_2) \leqslant \cdots \leqslant S(\phi_n)$. On pose alors $\Sigma_j = \cup_{k \leqslant j} B_\rho(\phi_k)$.

Le théorème obtenu (démontré dans [2] repris dans le chapitre 4) est alors le suivant

Théorème 0.0.7. *Pour tout minima ϕ_i de S, et pour tout $j < i$, il existe ρ_0 tel que pour $\rho_0 > \rho > 0$*

$$\mathbb{E}_{\phi_i}[\tau(B_\rho(\Sigma_j))] = \frac{2\pi e^{\widehat{S}(\phi_i,\Sigma_j)/\varepsilon}}{C(\phi_i,\Sigma_j)\sqrt{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_i}S}}(1+\Psi(\varepsilon)) \tag{0.46}$$

avec le terme d'erreur vérifiant $\Psi(\varepsilon) = O(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})$.

La constante $C(\phi_i, \Sigma_j)$ est la capacité et se calcule comme dans le cas de la dimension finie. On construit à partir du potentiel S un circuit électrique dont les sommets sont les minima de S et les arêtes sont les points selles d'indice 1, ψ, de hauteur $\widehat{S}(\phi_i, \Sigma_j)$ reliant deux vallées (données par leurs minima respectifs). On réalise alors un réseau électrique en associant à chaque arête une conductance valant

$$C(\psi) = \frac{|\lambda^-(\psi)|}{\sqrt{|\mathrm{Det}\mathcal{H}_\psi S|}} \tag{0.47}$$

où $\lambda^-(\psi)$ est l'unique valeur propre négative de $\mathcal{H}_\psi S$. La capacité $C(\phi_i, S_j)$ est alors la conductance équivalente du réseau entre ϕ_i et l'ensemble des ϕ_k pour $k \leqslant j$.

Approximation par différences finies

La formule (0.37) est exactement un analogue de la formule d'Eyring-Kramers mais dans le cas d'EDPS de type (0.24). La preuve que nous utilisons ici est assez naturelle et repose sur une approximation par différence finie de l'EDPS par couplage. Nous obtenons donc un système d'équations différentielles stochastiques auquel nous pouvons appliquer les estimations obtenues par [21, 22]. Cependant, la principale difficulté réside dans le fait d'obtenir des estimations avec des erreurs qui ne dépendent pas de la dimension

(égale au nombre de points de discrétisation). C'est une des tâches principales. Une partie a été réalisée dans [4] dans le cas des conditions au bord de Dirichlet. Détaillons notre système obtenu par différences finies et couplage. Pour N un entier positif, on définit le système suivant

$$\mathrm{d}X_t^i = \frac{N\gamma}{2}\left[X_t^{i+1} - 2X_t^i + X_t^{i-1}\right]\mathrm{d}t - \frac{1}{N}V'(X_t^i)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_t^i \quad \forall 1 \leqslant i \leqslant N \tag{0.48}$$

où $(B_t)_t$ est un mouvement brownien en dimension N défini en fonction du bruit blanc W. Construire le mouvement brownien B en fonction de W permet de définir un couplage et de montrer des convergences fortes du système discrétisé vers l'équation aux dérivées partielles stochastique.

Ce système correspond à prendre une discrétisation en espace de pas $\frac{1}{N}$. Les conditions aux bords sont alors données par les valeurs de X^0 et X^{N+1} :

– pour des conditions au bord de Dirichlet (cas D_N) :

$$X_t^0 = X_t^{N+1} = 0 \quad \forall t \geqslant 0 \tag{0.49}$$

– pour des conditions aux bords de type Neumann (cas Ne_N) :

$$X_t^0 = X_t^1 \qquad\qquad X_t^{N+1} = X_t^N \quad \forall t \geqslant 0 \tag{0.50}$$

– pour des conditions aux bords périodique (cas P_N) :

$$X_t^0 = X_t^N \qquad\qquad X_t^{N+1} = X_t^1 \quad \forall t \geqslant 0. \tag{0.51}$$

Remarquons alors que le système (0.48) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla S_N(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_t \tag{0.52}$$

où S_N est l'action discrétisée

$$S_N(u) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\gamma}{2}N^2(u_{i+1} - u_i)^2 + V(u_i). \tag{0.53}$$

où u_0 et u_{N+1} prennent des valeurs correspondant aux conditions au bord considérées. Notons que formellement, si on considère que $u_i = \varphi(\frac{i}{N})$ où φ est une fonction C^1, on a

$$S_N(u) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\gamma}{2}\varphi'(x)^2 + V(\varphi(x))\mathrm{d}x = S(\varphi). \tag{0.54}$$

Pour ce type de diffusions on connaît déjà l'espérance du temps de transition dans la limite où ε tend vers 0. On prouve donc un théorème de commutativité des limites $N \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$.

Remarque 9. L'idée d'utiliser une discrétisation pour approcher la solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique est très classique. L'une des premières références est un article de [49], ensuite de nombreux autres résultats on été prouvés notamment par Gyöngy [52, 53] et Gyöngy et Millet [54].

Structure de la preuve

La preuve est assez longue et utilise de nombreux résultats. Dans le cadre le plus simple énoncé précédemment, on propose de prouver successivement :

1. à ε fixé, de montrer que l'espérance du temps d'atteinte pour le système (0.48) converge vers celle pour (0.24).
$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\phi_+^N}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B_\rho^-\right)\right] = \mathbb{E}_{\phi_+}\left[\tau_\varepsilon\left(B_\rho^-\right)\right]. \tag{0.55}$$
On montre pour cela que le système X^N approche la solution u de l'EDPS.
2. à N fixé, on utilise la limite $\varepsilon \to 0$ pour calculer une asymptote $a_N(\varepsilon)$ du temps de transition uniformément en N. Nous obtenons alors
$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\phi_+^N}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B_\rho^-\right)\right] - 1\right| = \psi(\varepsilon, N) < \Psi(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|) \tag{0.56}$$
avec $\Psi(\varepsilon)$ ne dépendant pas de N.
3. Puis la limite $N \to \infty$ permet le calcul de la limite de $a_N(\varepsilon)$ qui est le candidat pour notre asymptote.
$$a(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} a_N(\varepsilon). \tag{0.57}$$

Nous obtenons alors
$$\left|\frac{1}{a(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\phi_+}\left[\tau_\varepsilon\left(B_\rho^-\right)\right] - 1\right| \leqslant \Psi(\varepsilon) \tag{0.58}$$
ou écrit plus simplement
$$\mathbb{E}_{\phi_+}\left[\tau_\varepsilon\left(B_\rho^-\right)\right] = a(\varepsilon)(1+\Phi(\varepsilon)) = a(\varepsilon)(1+o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|)). \tag{0.59}$$
Notons que cette dernière écriture a le désavantage de cacher la limite en ε dans le $o(\varepsilon)$, ce qui simplifie la notation mais demande de faire attention quand on manipule cette expression. De plus nous n'avons pas une limite mais une asymptote, $a(\varepsilon)$ tend vers l'infini quand ε tend vers 0. Cependant on ne peut pas prouver (0.56) directement, la preuve se décompose en deux parties différentes.

1. Nous établissons la convergence mais partant d'une probabilité sur le bord du voisinage
$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\nu_+^N}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B_\rho^-\right)\right] - 1\right| = \psi_1(\varepsilon, N) < \Psi_1(\varepsilon) \tag{0.60}$$
où ν_+^N est une mesure de probabilité portée par le bord de $B_N^+(\rho)$ et $\Psi_1(\varepsilon) = o(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})$.
2. Pour obtenir une estimation partant du point ϕ_+, on prouve le résultat suivant
$$\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\left|\mathbb{E}_{\nu_+^N}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B_\rho^-\right)\right] - \mathbb{E}_{\phi_+^N}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B_\rho^-\right)\right]\right| = \psi_2(\varepsilon, N) < \Psi_2(\varepsilon) \tag{0.61}$$
avec $\Psi_2(\varepsilon) = o(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})$. Il s'agit d'un résultat d'oubli de la condition initiale [78] comparable au lemme 0.0.2.

Plan

Le reste de la thèse est organisé par chapitre. Le chapitre 1 est consacré à la diffusion en dimension finie (0.1) et contient des résultats repris dans un article en préparation écrit en collaboration avec Anton Bovier [3]. Il comprend d'abord des rappels sur la théorie du potentiel puis une généralisation du calcul des capacités par rapport au cas prouvé dans [21]. Enfin nous avons appliqué ce calcul à des exemples.

Les chapitres suivants sont consacrés à la dimension infinie. Le chapitre 2 montre la bonne définition de l'EDPS (0.3), la définition de l'approximation, la convergence de cette approximation et la convergence des temps d'atteinte (c'est-à-dire la convergence (0.55)).

Le chapitre 3 reprend l'article écrit [4] en collaboration avec Anton Bovier et Sylvie Méléard et publié à *Electronic Journal of Probability*. Nous prouvons le contrôle uniforme en la dimension des capacités (correspondant à l'équation et la convergence du préfacteur (0.57) pour le cas particulier de l'équation d'Allen-Cahn (avec le potentiel V (0.6)).

Le chapitre 4 reprend un article [2] soumis à publication. Nous prouvons la formule de Eyring-Kramers sous les hypothèses 0.0.5 et 0.0.6 pour l'équation (0.32) pour les conditions au bord de Dirichlet et Neumann. Nous adaptons les calculs de capacité du chapitre précédent et montrons les différentes étapes de preuve énoncées.

Le chapitre 5 est consacré au traitement complet de l'équation (0.7) et à la discussion du cas des conditions périodiques. Enfin nous concluons par l'analyse des problèmes qui se posent pour l'équation (0.24) sur un domaine en dimension supérieure.

Chapitre 1

Diffusion en dimension finie

Dans ce chapitre, nous allons rappeler la théorie du potentiel et son utilisation pour la métastabilité. Le but n'est pas de redémontrer toute la théorie mais de reprendre en détail les idées principales et les différents éléments qui la composent. Nous montrerons une généralisation de la formule d'Eyring-Kramers prouvée en collaboration avec A. Bovier, dans le cas d'une diffusion en dimension finie avec un potentiel ayant une structure plus compliquée et une application.

1.1 Théorie du potentiel pour les diffusions

On procède aux rappels suivants sur les diffusions et la théorie du potentiel (voir Bovier, Eckhoff, Gayrard, Klein [21]).

1.1.1 Générateur infinitésimal, mesure invariante

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et W, muni de sa filtration $(\mathcal{F}_t)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On se donne aussi un domaine $D \subset \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire un ensemble ouvert connexe. Nous nous intéressons à la théorie du potentiel pour le processus $(X_t)_{t\geqslant 0}$ à valeur dans D défini par

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla F(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}W_t \tag{1.1}$$

où $\varepsilon > 0$ est un paramètre quantifiant le bruit. La fonction F, dénommée aussi potentiel puisqu'elle représente l'énergie potentielle du modèle, va de D dans $\mathbb{R}$ et vérifie des hypothèses assurant la bonne définition du processus X (notamment F est choisie dans $C^2(D)$).

Le processus X est markovien et possède un générateur infinitésimal qui prend la forme pour $f \in C_c^2(D)$ (ensemble des fonctions C^2 à support compact sur D), pour tout $x \in D$

$$L_\varepsilon f(x) = -\varepsilon\Delta f(x) + \langle \nabla F(x), \nabla f(x)\rangle = -\varepsilon e^{F(x)/\varepsilon}\nabla\cdot\left(e^{-F(x)/\varepsilon}\nabla f(x)\right). \tag{1.2}$$

L'existence et l'unicité d'une solution forte continue à l'équation (1.1) (au moins jusqu'à un temps d'explosion) est classique et ne pose pas de problème

(voir parmi les nombreuses possibilités le livre [61]). Le calcul du générateur infinitésimal se fait via la formule d'Itô. Pour $f \in C_c^2(D)$, on a

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) - \int_0^t \langle \nabla F(X_s), \nabla f(X_s) \rangle - \varepsilon \Delta f(X_s) \mathrm{d}s \\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \mathrm{d}W_s^i \qquad (1.3) \\ &= f(X_0) - \int_0^t L_\varepsilon f(X_s) \mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon} \sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) \mathrm{d}W_s^i. \qquad (1.4) \end{aligned}$$

Pour assurer la non-explosion du processus X et donc son existence en tout temps nous faisons des hypothèses sur F.

Hypothèses 1.1.1. Nous supposons que F satisfait les propriétés suivantes :
- (i) la fonction F est de classe C^3 sur le domaine D.
- (ii) Pour un domaine D non borné, on suppose les propriétés suivantes
  - $(ii.0)$ $\underline{\lim}_{x\to\infty} F(x) = +\infty$,
  - $(ii.1)$ $\underline{\lim}_{x\to\infty} |\nabla F(x)| = +\infty$,
  - $(ii.2)$ $\underline{\lim}_{x\to\infty} (|\nabla F(x)| - 2\Delta F(x)) = +\infty$.
- (iii) Dans le cas où D possède un bord non vide, on suppose aussi que pour toute suite de points (x_i) convergeant vers le bord de D, on a $\lim_{i\to\infty} F(x_i) = +\infty$.

Remarque 10. Nous faisons ces hypothèses sur F pour s'assurer plusieurs propriétés :
- la régularité de F permet de s'assurer que les dérivées de F et hessienne sont bien définies.
- La fermeture (sur $L^2(D)$) du générateur L_ϵ est à résolvante compacte pour ϵ assez petit.
- F a aussi des ensembles de niveau exponentiel (ce qui est utile ensuite pour contrôler certains restes d'intégrales)

$$\forall a \in \mathbb{R}, \int_{y|F(y)\geq a} e^{-F(y)/\epsilon} dy \leq C e^{-a/\epsilon}, \qquad (1.5)$$

  avec $C = C(a) < +\infty$ iune constante uniforme en $\epsilon \leq 1$.

La preuve que le processus (X_t) n'explose pas en temps fini et existe donc pour tout temps vient du fait que

$$-\nabla F(x) \cdot x \leq C \qquad (1.6)$$

pour une constante C. En effet, le drift ∇F peut ne pas être globalement lipschitzien notamment dans le cas intéressant le plus simple

$$F(x) = \frac{1}{4} \|x\|_4^4 - \frac{1}{2} \|x\|_2^2 . \qquad (1.7)$$

Un tel critère est très classique et se trouve notamment dans [91], théorème 10.2.2 (p 255).

Pour un domaine D dans $\mathbb{R}^d$ et μ une mesure (on note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$) sur D, on note $H^m(D, \mu)$ $(m \geq 0)$ l'espace de Sobolev constitué

des fonctions à valeurs réelles dont les m premières dérivées sont dans $L^2(D,\mu)$. La convention usuelle est que la dérivée d'ordre 0 est la fonction elle-même. De même on note $H_0^m(D,\mu)$ la fermeture de $C_c^m(D)$ (ensemble des fonctions de classe C^m à support compact) dans $H^m(D,\mu)$. Ce sont donc des fonctions dont la trace sur ∂D est nulle dans L^2 ([25], p171, Chap. IX.4).

On résume les propriétés du processus X et de son générateur infinitésimal dans la proposition suivante.

Proposition 1.1.2. *Supposons que F vérifie les hypothèses* 1.1.1. *Soit X le processus défini sur D par l'équation* (1.1) *sur $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ muni de la filtration $(\mathcal{F}_t)$, alors X est un processus fortement markovien, de Feller sur D. Le générateur infinitésimal est L_ε.L'adjoint est formellement donné, pour $f\in C_c^2(D)$, par*

$$\begin{aligned} L_\varepsilon^* f(x) &= -\varepsilon\Delta f(x) - \nabla F(x)\cdot\nabla f(x) - f(x)\Delta F(x) \\ &= -\varepsilon\nabla\cdot e^{F(x)/\varepsilon}\nabla\left(e^{-F(x)/\varepsilon}f(x)\right). \end{aligned} \tag{1.8}$$

De plus la diffusion X est réversible par rapport à une mesure invariante $\mu_\varepsilon(\mathrm{d}x)=e^{-F(x)/\varepsilon}\mathrm{d}x$ (dite mesure de Gibbs) solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck. Notamment, L_ε est symétrique dans $H_0^2(D,\mu_\varepsilon)$.

Le calcul de l'adjoint et la démonstration de la symétrie du générateur infinitésimal dans $H_0^2(D,\mu_\varepsilon)$ reposent sur une intégration par partie (ou formule de Green) [51][p13].

Lemme 1.1.3 (Formule de Green)**.** *Soient u et v deux fonctions dans $H^2(D)$, alors*

$$\int_D v\nabla u\mathrm{d}\lambda = \int_{\partial D} uv\mathbf{n}_{\mathrm{ext}}\mathrm{d}\sigma - \int_D u\nabla v\mathrm{d}\lambda \tag{1.9}$$

où n_{ext} est la normale extérieure au domaine D et $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure de Lebesgue sur la surface ∂D.

En particulier la mesure de Gibbs définie par $m_\varepsilon(\mathrm{d}x)=\exp(-F(x)/\varepsilon)\mathrm{d}x$ est bien de masse finie d'après les hypothèses sur F. Elle est de plus invariante pour notre processus puisque $L_\varepsilon^*(\exp(-F(x)/\varepsilon))=0$. La mesure de probabilité associée est μ_ε, définie par

$$\mu_\varepsilon(\mathrm{d}x) = \frac{m_\varepsilon(x)}{\int_{\mathbb{R}^d} m_\varepsilon}\mathrm{d}x \tag{1.10}$$

est donc une distribution invariante du processus X.

La réversibilité du processus X par rapport à la distribution μ_ε signifie que, pour tout $T>0$, $(X_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$ avec X_0 de loi μ_ε, suit la même loi que $(X_{T-t})_{0\leqslant t\leqslant T}$.

On se place donc dorénavant dans des espaces de Sobolev par rapport à la mesure invariante afin d'utiliser la symétrie du générateur infinitésimal.

1.1.2 Semi-groupe

On définit le semi-groupe P_t associé à la diffusion X : pour tout $t\geqslant 0$ et f fonction continue,

$$P_t f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_t)] = f(x) + \int_0^t P_s L_\varepsilon f(x)\mathrm{d}s = f(x) + \int_0^t L_\varepsilon P_s f(x)\mathrm{d}s. \tag{1.11}$$

On a notamment la proposition suivante.

Proposition 1.1.4. *Le générateur infinitésimal L_ε possède une extension qui engendre le semi-groupe $(P_t)_t$. Le semi-groupe possède une densité $p_t(x,y)$, c'est-à-dire*

$$P_t f(x) = \int_D p_t(x,y) f(y) \mathrm{d}y. \tag{1.12}$$

La densité du semi-groupe est en fait la solution élémentaire de l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t u(x,t) = L_\varepsilon u(x,t) = \varepsilon \Delta u(x,t) - \nabla F(x) \cdot \nabla u(x,t). \tag{1.13}$$

Le preuve de ce résultat peut se trouver dans Davies [36]. Beaucoup de résultats existent sur ce semi-groupe. On peut notamment mentionner les résultats d'ultracontractivité et de hypercontractivité [65] ou d'inégalité de Sobolev logarithmiques [5] qui donnent des estimations du semigroupe et de la fonction de Green.

1.1.3 Noyau de Green et Problème de Poisson

Le problème de Poisson est donné par l'équation suivante sur le domaine D

$$L_\varepsilon u = f \text{ sur } D \tag{1.14}$$

$$u \in H_0^2(D, \mu_\varepsilon) \tag{1.15}$$

La fonction de Green g associée est simplement la solution élémentaire (c'est-à-dire formellement pour $f = \delta_x$) de cette équation. La solution u est alors donnée par :

$$u(x) = \int_D g(x,y) f(y) \mathrm{d}y \tag{1.16}$$

Il existe plusieurs constructions possibles de cette fonction de Green, le principal problème ici est le fait que le domaine D peut être non borné. Mais les hypothèses sur F font que L_ε est à résolvante compacte et donc on peut définir G via le semi-groupe P_t. On pose en effet la résolvante G_λ, pour $\lambda > 0$,

$$G_\lambda f(x) = \int_0^t e^{-\lambda s} P_s f(x) \mathrm{d}s = \mathbb{E}_x[\int_0^t e^{-\lambda s} f(X_s) \mathrm{d}s]. \tag{1.17}$$

Le potentiel, ou noyau de Green, G, est donc la limite, si elle existe, de cet opérateur lorsque λ tend vers 0 (avec son domaine). Formellement, pour f fonction continue sur D, on a

$$G f(x) = \int_0^{+\infty} P_s f(x) \mathrm{d}s \tag{1.18}$$

ou en terme de densité :

$$g(x,y) = \int_0^{+\infty} p_s(x,y) \mathrm{d}s. \tag{1.19}$$

Pour des constructions purement analytiques, on peut soit construire directement la solution au problème de Poisson, via une approche variationnelle, ou bien la construire sur une suite de domaines croissant vers le domaine D ("exhaustion domains").

1.1.4 Problème de Dirichlet et noyau de Dirichlet

L'autre problème classique auquel nous sommes confrontés est le suivant. Il s'agit de trouver une fonction u telle que pour h définie sur ∂D

$$L_\varepsilon u = 0 \text{ sur } D \tag{1.20}$$

$$u = f \text{ sur } \partial D. \tag{1.21}$$

On cherche donc une fonction L_ε-harmonique ayant une valeur prescrite au bord du domaine.

On a notamment la proposition suivante.

Proposition 1.1.5. *Pour h dans $H^1(\partial D)$, l'équation* (1.20) *possède une solution qui se met sous la forme suivante en fonction du noyau de Green associé au problème de Dirichlet,*

$$u(x)e^{-F(x)/\varepsilon} = -\varepsilon \int_{\partial D} f(y)e^{-F(y)/\varepsilon}\partial_{\mathbf{n}_{\text{ext}}(y)}G_D(y,x)\sigma(\mathrm{d}y) \tag{1.22}$$

où σ est la mesure de Lebesgue sur ∂D et $\partial_{\mathbf{n}_{\text{ext}}(y)}G_D(y,x)$ désigne la dérivation dans la direction de la normale extérieure par rapport à y.

Démonstration. En intégrant par partie, on a, pour $u, v \in H^2(D, \mu_\varepsilon)$.

$$\int_D uL_\varepsilon v\mathrm{d}\mu_\varepsilon = \int_D vL_\varepsilon u\mathrm{d}\mu_\varepsilon - \varepsilon\int_{\partial D} ue^{-F/\varepsilon}\partial_{\mathbf{n}_{\text{ext}}}v\mathrm{d}\sigma + \varepsilon\int_{\partial D} ve^{-F/\varepsilon}\partial_{\mathbf{n}_{\text{ext}}}u\mathrm{d}\sigma. \tag{1.23}$$

Donc, pour u solution de (1.20) et $v(y) = G(y,x)$, on obtient l'expression de la proposition 1.1.5 puisque $u_{|\partial D} = 0$, $L_\varepsilon u = 0$ et par définition $v_{|\partial D} = 0$. □

1.1.5 Potentiel d'équilibre, mesure d'équilibre

Tous ces rappels nous sont nécessaires afin de formuler convenablement les éléments de théorie du potentiel dont nous avons besoin. En effet toutes ces quantités sont solutions de problèmes de Dirichlet ou de Poisson associés à l'opérateur L_ε.

On se donne deux domaines réguliers, qui seront dans les calculs et les applications tout simplement des boules, A, dit ensemble de départ et B, ensemble d'arrivée. Le but est d'étudier le temps mis par le processus X pour passer de A à B.

On introduit les temps d'atteintes des ensembles A et B, τ_A et τ_B, qui sont des temps d'arrêts

$$\tau_A = \inf\{t > 0, X_t \in A\}. \tag{1.24}$$

Notons que, si A est suffisamment régulier, comme X est un processus continu presque surement, τ_A est bien un temps d'arrêt.

Définition 1.1.6. On définit la fonction suivante sur D, dépendant de A et B par

$$h_{A,B}(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \tau_B). \tag{1.25}$$

$h_{A,B}$ est appelée le potentiel d'équilibre pour les ensembles (A, B).

On peut remarquer qu'il est immédiat, d'après les propriétés de continuité de X et des ensembles A et B, que

$$h_{A,B}(x) = 1 - h_{B,A}(x). \tag{1.26}$$

De plus, on a $0 \leqslant h_{A,B}(x) \leqslant 1$, pour tout x.

Proposition 1.1.7. *La fonction $h_{A,B}$ est solution du problème de Dirichlet*

$$L_\varepsilon h_{A,B} = 0, \ \textit{sur } (A \cup B)^c \cap D \tag{1.27}$$
$$h_{A,B} = 1, \ \textit{sur } A \tag{1.28}$$
$$h_{A,B} = 0, \ \textit{sur } B. \tag{1.29}$$

Elle s'exprime sous la forme

$$h_{A,B}(x) = -\varepsilon e^{F(x)/\varepsilon} \int_{\partial A} e^{-F(y)/\varepsilon} \partial_{\mathbf{n}_{\text{ext}}(y)} G_{(A\cup B)^c}(y,x)\sigma(\mathrm{d}y). \tag{1.30}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 1.1.5. □

Remarque 11. Le potentiel d'équilibre sera très important dans la suite et donne une idée des bassins d'attraction. En effet, par définition le potentiel d'équilibre sera proche de 1 en un point x si partant de ce point la diffusion atteint de façon dominante l'ensemble A et au contraire sera proche de 0 si on atteint plus largement B. Plus le paramètre ε est petit et plus ce phénomène est accentué. On s'attend notamment à ce que $h_{A,B}$ converge lorsque ε tend 0, vers une constante (certainement 0 ou 1 dans les cas généraux). Cependant il peut être difficile de donner de bonnes estimations de ces convergences, cela repose souvent sur une comparaison avec le processus déterministe.

Définition 1.1.8 (Mesure d'équilibre)**.** On appelle mesure d'équilibre, notée $e_{A,B}$, la mesure portée par ∂A telle que, pour tout $x \in D$

$$h_{A,B}(x) = \int_A G_{B^c}(x,y) e_{A,B}(\mathrm{d}y). \tag{1.31}$$

D'après la proposition précédente, on voit que la mesure d'équilibre est en fait portée par le bord de l'ensemble A admet la représentation suivante. En interprétant le générateur L_ε comme un opérateur de $H^1(D)$ dans $H^{-1}(D)$ on a

$$e_{A,B} = L_\varepsilon h_{A,B}. \tag{1.32}$$

La mesure d'équilibre possède une interprétation probabiliste, on peut notamment écrire

$$e_{A,B}(\mathrm{d}y) = \lim_{t\to 0^+} t^{-1} \mathbb{E}_y \mathbb{P}_{X_\varepsilon(t)}[\tau_B < \tau_A]\mathrm{d}y \quad y \in \partial A. \tag{1.33}$$

1.1.6 Capacité et forme de Dirichlet

Définition 1.1.9 (Capacité)**.** On définit la capacité du couple d'ensembles (A, B), notée $\mathrm{cap}\,(A, B)$, comme étant la masse totale de la mesure d'équilibre $e_{A,B}$:

$$\mathrm{cap}\,(A,B) = e_{A,B}(D) = e_{A,B}(\partial A) \tag{1.34}$$

La capacité représente la charge totale sur le bord de A pour créer le potentiel $h_{A,D}$. En particulier, on définit la probabilité d'équilibre $\nu_{A,B}$ sur le bord de l'ensemble A comme étant la mesure de probabilité associée à $e_{A,B}$:

$$\nu_{A,B} = \frac{e_{A,B}}{\operatorname{cap}(A,B)} \tag{1.35}$$

La probabilité d'équilibre représente la distribution sur ∂A du processus X à la dernière sortie de A avant d'atteindre B.

Définition 1.1.10. On définit la forme de Dirichlet, par rapport aux ensembles A et B, pour $h \in H^1(D, \mu_\varepsilon)$,

$$\Phi_{(A\cup B)}(h) = \varepsilon \int_{(A\cup B)^c} \|\nabla h\|_2^2 \,\mathrm{d}\mu_\varepsilon = \varepsilon \int_{(A\cup B)^c} e^{-F(x)/\varepsilon} \|\nabla h(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x. \tag{1.36}$$

La forme de Dirichlet permet de calculer la capacité en utilisant un principe variationnel.

Proposition 1.1.11. *Pour A, et B deux domaines réguliers, on a*

$$\operatorname{cap}(A,B) = \Phi_{(A\cup B)}(h_{A,B}) \tag{1.37}$$

$$= \inf_{h\in\mathscr{H}_{A,B}} \Phi_{(A\cup B)}(h), \tag{1.38}$$

avec

$$\mathscr{H}_{A,B} = \{h \in H^1(D) | h_{|B} = 0,\ h_{|A} = 1\}. \tag{1.39}$$

Cette proposition constitue le principe de base pour calculer une borne supérieure à la capacité.

1.1.7 Espérance des temps d'atteinte

Le lien entre ces quantités de la théorie du potentiel (capacité, mesure d'équilibre) et l'espérance des temps d'atteinte se fait en combinant les différentes formulations. On note $B_\rho(x)$ la boule de centre x et de rayon ρ. La fonction $w_{A,B}(x) = \mathbb{E}_x(\tau_A \mathbb{1}_{\tau_A<\tau_B})$ est solution du problème de Dirichlet suivant

$$L_\varepsilon w_{A,B} = h_{A,B} \text{ sur } (A\cup B)^c \tag{1.40}$$

$$w_{A,B} = 0 \text{ sur } A\cup B. \tag{1.41}$$

Pour $B = \varnothing$, on obtient simplement $w_A(x) = \mathbb{E}_x(\tau_A)$ qui vérifie aussi

$$L_\varepsilon w_A = 1 \text{ sur } A^c \tag{1.42}$$

$$w_A = 0 \text{ sur } A. \tag{1.43}$$

En utilisant la représentation avec la fonction de Green, on obtient respectivement :

$$\mathbb{E}_x(\tau_A \mathbb{1}_{\tau_A<\tau_B}) = w_{A,B}(x) = \int_{(A\cup B)^c} G_{(A\cup B)^c}(x,y) h_{A,B}(y)\mathrm{d}y$$

$$\mathbb{E}_x(\tau_A) = w_A(x) = \int_{A^c} G_{A^c}(x,y)\mathrm{d}y. \tag{1.44}$$

On définit alors les intégrales suivantes

$$T_{B_\rho(x)}(A) = \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(z)/\varepsilon} \mathbb{E}_z(\tau_A) e_{B_\rho(x),A}(\mathrm{d}z) \tag{1.45}$$

$$T_{B_\rho(x)}(A,B) = \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(z)/\varepsilon} \mathbb{E}_z(\tau_A \mathbb{1}_{\tau_A<\tau_B}) e_{B_\rho(x),A\cup B}(\mathrm{d}z) \tag{1.46}$$

En faisant intervenir les probabilités d'équilibre $\nu_{B_\rho(x),A}$ et $\nu_{B_\rho(x),A\cup B}$, on a :

$$T_{B_\rho(x)}(A) = \mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A)\, \mathbb{E}_{\nu_{B_\rho(x),A}}(\tau_A) \tag{1.47}$$

$$T_{B_\rho(x)}(A,B) = \mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A\cup B)\, \mathbb{E}_{\nu_{B_\rho(x),A\cup B}}(\tau_A \mathbb{1}_{\tau_A<\tau_B}) \tag{1.48}$$

D'un autre côté, en combinant les différentes formulations obtenues, pour $\rho > 0$, on a

$$\begin{aligned} T_{B_\rho(x)}(A) &= \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(z)/\varepsilon} w_A(z) e_{B_\rho(x),A}(\mathrm{d}z) \\ &= \int_{\partial B_\rho(x)} \int_{A^c} e^{-F(z)/\varepsilon} G_{A^c}(z,y) e_{B_\rho(x),A}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y \\ &= \int_{A^c} \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(y)/\varepsilon} G_{A^c}(y,z) e_{B_\rho(x),A}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y \\ T_{B_\rho(x)}(A) &= \int_{A^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A}(y)\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{1.49}$$

par utilisation la symétrie de la fonction de Green et du théorème de Fubini. On a aussi de la même manière

$$\begin{aligned} T_{B_\rho(x)}(A,B) &= \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(z)/\varepsilon} w_{A,B}(z) e_{B_\rho(x),A\cup B}(\mathrm{d}z) \\ &= \int_{(A\cup B)^c} \int_{\partial B_\rho(x)} e^{-F(z)/\varepsilon} G_{(A\cup B)^c}(z,y) e_{B_\rho(x),A\cup B}(\mathrm{d}z)\mathrm{d}y \\ &= \int_{(A\cup B)^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A\cup B}(y) h_{A,B}(y)\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{1.50}$$

Finalement, on a donc les formules exactes suivantes qui nous permettent de relier la capacité, le potentiel d'équilibre et les temps d'atteinte (partant de la probabilité d'équilibre)

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_\rho(x),A}}(\tau_A) = \frac{\int_{A^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A}(y)\mathrm{d}y}{\mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A)} \tag{1.51}$$

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_\rho(x),A\cup B}}(\tau_A \mathbb{1}_{\tau_A<\tau_B}) = \frac{\int_{(A\cup B)^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A\cup B}(y) h_{A,B}(y)\mathrm{d}y}{\mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A\cup B)} \tag{1.52}$$

La seconde formule ne nous est pas directement utile. En revanche, la première formule nous servira à estimer les espérances des temps de transition $\mathbb{E}_x(\tau_A)$ quand ε tend vers 0. En effet, si ρ est suffisamment petit, on s'attend, pour tout $z \in \partial B_\rho(x)$, à ce que les temps d'atteinte partant de z et x soient proches :

$$\mathbb{E}_z(\tau_A) \simeq \mathbb{E}_x(\tau_A). \tag{1.53}$$

Le temps d'atteinte peut alors se mettre sous la forme :

$$\mathbb{E}_x(\tau_A) \simeq \frac{\int_{A^c} e^{-F(y)/\varepsilon} h_{B_\rho(x),A}(y)\mathrm{d}y}{\mathrm{cap}\,(B_\rho(x), A)}.$$

Toute la difficulté consiste donc à rendre cette approximation rigoureuse et à calculer le numérateur et le dénominateur. Le premier peut se calculer en estimant le potentiel d'équilibre $h_{A,B}$ sur des voisinages bien choisis des minima de F. La calcul des asymptotiques des capacités se fait en obtenant une borne supérieure via la formulation variationnelle de la capacité et une borne inférieure en utilisant des fonctions tests. L'erreur faite par l'approximation de l'équation (1.53) peut se réaliser soit de manière analytique (via l'inégalité de Harnack) soit de manière probabiliste (via une propriété de contraction des trajectoires).

1.2 Calculs des capacités en dimension finie

Nous énonçons maintenant les résultats que nous avons obtenus en dimension finie en collaboration avec Anton Bovier.

1.2.1 Géométrie du potentiel

Pour la suite on a besoin de définir les notions suivantes.

Définition 1.2.1. Pour A et B deux ensembles de D, la hauteur du passage entre A et B est définie par :

$$\widehat{F}(A,B) = \inf_{\omega\in\mathcal{P}(A,B)} \sup_{t\in[0,1]} F(\omega(t)), \tag{1.54}$$

où $\mathcal{P}(A,B) = \{\omega \in C([0,1],D) | \omega(0) \in A, \omega(1) \in B\}$ contient les chemins continus de A à B.

On définit l'ensemble des points selles qui sont les points réalisant la hauteur minimale pour une trajectoire reliant A à B.

Définition 1.2.2. Définissons :

$$\mathcal{G}(A,B) = F^{-1}(\widehat{F}(A,B)), \tag{1.55}$$

$$\widehat{\mathcal{P}}(A,B) = \{\omega \in \mathcal{P}(A,B) | \max_{t\in[0,1]} F(\omega(t)) = \widehat{F}(A,B)\}. \tag{1.56}$$

Les **portes** entre A et B sont alors les plus petits ensembles $\mathscr{P}_i$ de $\mathcal{G}(A,B)$ au sens de l'inclusion qui vérifient :

$$\forall \omega \in \widehat{\mathcal{P}}(A,B) \qquad \omega([0,1]) \cap \mathscr{P}_i \neq \varnothing. \tag{1.57}$$

Les points selles entre A et B sont alors l'ensemble de ces portes

$$\mathcal{S}(A,B) = \bigcup \mathscr{P}_i. \tag{1.58}$$

Remarque 12. On peut voir que ces définitions prennent sens pour tous les ensembles A et B. L'ensemble des portes n'est pas aussi nécessairement unique. Plusieurs ensembles $\mathscr{P}_i$ peuvent avoir des points en communs.

Hypothèses On fait l'hypothèse suivante sur la non-dégénérescence du potentiel F.

Hypothèses 1.2.3. F vérifie les propriétés suivantes :

(i) L'ensemble $\mathcal{M}$ des minima locaux de F est fini et pour tous les couples de minima x, y, l'ensemble des points selles $\mathcal{S}(x,y)$ est fini et ne contient donc que des points isolés notés $z_i^*(x,y)$.

(ii) La matrice hessienne de F en chaque minimum $x_i \in \mathscr{M}$ et tout point selle z_i^* est non-singulière (c'est-à-dire n'a pas de valeurs propres nulles)

Remarque 13. Dans l'article [21] par Bovier, Eckhoff, Gayrard et Klein, les auteurs supposaient que l'ensemble des portes est unique et coïncide avec l'ensemble des points selles. C'est-à-dire qu'ils faisaient l'hypothèse suivante : il existe une unique sous-ensemble fini et minimal de $\mathcal{G}(A,B)$, tel que pour tout $\omega \in \widehat{\mathcal{P}}(A,B)$

$$\omega([0,1]) \cap \mathscr{P} \neq \varnothing. \tag{1.59}$$

Le potentiel est alors nécessairement avec une certaine structure. Notons par exemple que cette hypothèse n'est pas vérifiée dans le cas du potentiel illustré dans l'introduction par la figure 3.

Les résultats donnés permettent de calculer le temps moyen de transition d'un minimum x_i de F. Le calcul des temps de transition se fait en suivant [21] en utilisant la formule (1.51). Plus précisément, le calcul du numérateur et de l'approximation sont identiques. Seul le calcul de la capacité (le dénominateur de (1.51)) est différent. Le théorème suivant permet de faire le lien entre capacités et temps de transition, [21] Théorème 6.2.

Théorème 1.2.4. *Soient $(x_j)_{j=1}^n$ l'ensemble des minima locaux de F. On considère aussi $S_k = \cup_{i=1}^k B_\rho(x_i)$ la famille de boules de rayon $\rho > \epsilon$ suffisamment petit pour ne contenir aucun autre point selle ni minimum (hors leurs centres). De plus, supposons que pour j fixé, et tout $i > k$, avec $i \neq j$, soit*

$$\widehat{F}(x_i,x_j) - F(x_j) > \widehat{F}(x_i,S_k) - F(x_i) \tag{1.60}$$

ou bien

$$\widehat{F}(x_i,x_j) < \widehat{F}(x_i,S_k). \tag{1.61}$$

Alors, pour tout $j > k$

$$\mathbb{E}_{x_j}\left[\tau_{S_k}\right] = \frac{(2\pi\epsilon)^{d/2}}{\mathrm{cap}_{B_\rho(x_j)}(S_k)} \cdot \sum_{i|\widehat{F}(x_i,x_j)<\widehat{F}(x_i,S_k)} \frac{e^{-F(x_i)/\epsilon}}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F(x_i^*))|}}(1+O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|\,,\epsilon^{\alpha/2})), \tag{1.62}$$

avec $\alpha > 0$. Si x_j est un minimum de F tel que $F(x_i) > F(x_j)$ pour tout $i > k$, on a alors

$$\mathbb{E}_{x_j}\tau_{S_k} = \frac{(2\pi\epsilon)^{d/2}}{\mathrm{cap}_{B_\rho(x_j)}(S_k)} \frac{e^{-F(x_j)/\epsilon}}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F(x_j^*))|}}(1+O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|\,,\epsilon^{\alpha/2})). \tag{1.63}$$

Ce théorème repose sur deux éléments : une estimation du potentiel d'équilibre au voisinage des minima pertinents (celui de départ et d'arrivée) et le contrôle de l'erreur faite en remplaçant le temps moyen de transition partant de la mesure d'équilibre pas celui partant de du minimum ponctuel.

1.2.2 Correspondance avec un réseau électrique

Afin d'énoncer et de prouver le résultat pertinent pour l'estimation de la capacité, on va maintenant expliciter les hypothèses et leur conséquence sur F.

Le fait de supposer comme dans [21] (voir remarque 13) que l'ensemble des portes est unique oblige à une configuration très particulière des points selles permettant le passage de x vers y. Dans ce cas, ces points selles doivent être tous en parallèle, c'est-à-dire qu'ils doivent former une barrière entre les bassins de x et y. Ils mettent directement en contact ces bassins. Comme par exemple dans le cas suivant

$$\begin{tikzcd}
 & z_1^* \arrow[dr] & \\
 & z_2^* \arrow[dr] \arrow[d, dotted, no head] & \\
x \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & & y \\
 & z_{M-1}^* \arrow[ur] & \\
 & z_M^* \arrow[uur] &
\end{tikzcd} \tag{1.64}$$

Dans ce cadre la capacité totale entre deux boules suffisamment petites entre x et y se décompose comme la somme de contributions élémentaires attachées à chaque point selle ([21] Théorème 3.1). On a ainsi dans le cas ci-dessus :

$$\operatorname{cap}(B_\rho(x), B_\rho(y)) = e^{-\widehat{F}(x,y)/\epsilon} \frac{(2\pi\epsilon)^{d/2}}{2\pi} \sum_{i=1}^{k} C_{z_i^*}(1 + O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|)) \tag{1.65}$$

avec

$$C_{z_i^*} = \frac{|\lambda^*(z_i^*)|}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F(z_i^*))|}}, \tag{1.66}$$

où $\lambda^*(z_i^*)$ est l'unique valeur propre négative de la hessienne de F en z_i^* et $\det(\nabla^2 F(z_i^*))$ est le déterminant de la hessienne en ce même point. Par définition on a $\widehat{F}(x,y) = F(z_i^*)$, pour tout i, la hauteur commune des points selles.

Maintenant dans le cas où l'ensemble des portes n'est pas unique, on peut avoir une structure plus compliquée. Cela signifie en effet que certains chemins optimaux $\omega \in \widehat{\mathcal{P}}(A,B)$ doivent passer par au moins deux points selles distincts :

$$x \longrightarrow z^* \longrightarrow z'^* \longrightarrow y \tag{1.67}$$

Notre résultat donne pour la capacité totale $C = \mathrm{cap}\,(B_\rho(x), B_\rho(y))$ une expression en fonction des capacités élémentaires attachées aux deux points selles (ici $c = C_{z^*}$ pour z^* et $c' = C_{z'^*}$ pour z'^*). La capacité totale est en effet la capacité équivalente obtenue pour un réseau électrique de même géométrie. Ainsi, dans le cas précédent on a

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c'}. \tag{1.68}$$

Considérons en effet $F^{-1}(]-\infty, \widehat{F}(x,y)[)$, il s'agit d'un ouvert borné de D. Cet ensemble se décompose en un nombre fini de composantes connexes puisque F possède un nombre fini de minima locaux. On associe alors à chaque composante connexe son minimum absolu

D'après l'hypothèse 1.2.3, pour chaque $z \in \mathcal{S}(x,y)$, il existe δ assez petit tel que $B_\delta(z)$ intersecte au plus deux $(\Gamma_i)_i$. On note les indices de ces composantes (Γ_i) par z^+ et z^- arbitrairement. Donc tous les ponts selles sont des passages entre un $\Gamma_i = \Gamma_{z^-}$ vers un autre $\Gamma_j = \Gamma_{z^+}$. On associe alors le graphe non-orienté avec des poids sur les arêtes (dénommées conductances) $\mathscr{G}(x,y)$:

- les sommets sont les minima $(x_j)_{j=0}^m$ des différentes composantes.
- les arêtes sont les points selles $z \in \mathcal{S}(x,y)$ avec des poids (conductances) C_z.
- l'arête $z \in \mathcal{S}(x,y)$ relie les sommets x_{z^+} et x_{z^-}.

Il est bien sûr possible d'avoir plusieurs arêtes avec des conductances différentes entre les mêmes sommets. La conductance totale C_{ij} entre x_i et x_j est définie par

$$C_{ij} = \sum_{z|\{i,j\}=\{z^+,z^-\}} C_z = C_{ji}. \tag{1.69}$$

Par convention si la somme est vide on a $C_{ij} = 0$.

Considérons les fonctions u définies sur les sommets $(x_j)_{j=0}^m$ du réseau $\mathscr{G}(x,y)$ à valeur dans $\mathbb{R}$. Pour une telle fonction u, on lui associe son flot (f_{ij}) définie par

$$f_{ij} = C_{ij}\,(u(x_i) - u(x_j)) = -f_{ji}. \tag{1.70}$$

On définit alors le flux extérieur $f_{(i)}$, en i, par

$$f_{(i)} = \sum_j f_{ij}. \tag{1.71}$$

En termes de quantités électriques, u est en fait une tension et f correspond au courant associé. La loi de Kirchoff s'exprime alors par $f_{(i)} = 0$ on dit alors que la fonction u associée est harmonique pour l'opérateur $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}u(x_i) = \frac{\sum_j C_{ij}\,(u(x_j) - u(x_i))}{\sum_j C_{ij}}. \tag{1.72}$$

On peut lui associer une énergie (ou forme de Dirichlet discrète) en posant

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} C_{ij}(u(x_i) - u(x_j))^2 = \sum_{z\in\mathcal{S}(x,y)} C_z(u(x_{z^+}) - u(x_{z^-}))^2. \tag{1.73}$$

La sommation peut ainsi se faire soit sommet par sommet soit arête par arête. La conductance effective entre les sommets $x = x_0$ et $y = x_m$ peut alors être correctement définie.

Définition 1.2.5. On définit alors la conductance équivalente par

$$C(x \to y) = \frac{f_{(x)}}{u(x) - u(y)} \tag{1.74}$$

où u est harmonique pour $\mathcal{L}$ sauf en x et y avec $u(x) \neq u(y)$ et f est le courant associé.

La proposition suivante justifie la définition.

Proposition 1.2.6. *La conductance équivalente ne dépend pas du choix de la fonction u. En particulier, si u^* est la solution de*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u^*(x_i) & = 0 \qquad for\, 1 \leq i \leq m-1 \\ u^*(x) & = 1 \\ u^*(y) & = 0 \end{cases} \tag{1.75}$$

on a

$$C(x \to y) = f^*_{(x)} \tag{1.76}$$

avec f^* le courant associé. De plus, on a la formulation variationnelle suivante

$$C(x \to y) = \min_{\substack{a_k \in [0,1] \\ a_0 = 1\, a_m = 0}} \mathcal{E}(a) = \min_{\substack{a_k \in [0,1] \\ a_0 = 1\, a_m = 0}} \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^{m} (a_i - a_j)^2 C_{i,j} \tag{1.77}$$

le minimum étant atteint pour $a_i = u^*(x_i)$. Enfin

$$C(x \to y) = C(y \to x) = C(x \leftrightarrow y). \tag{1.78}$$

La solution u^* peut être appelée un potentiel d'équilibre discret, on verra (théorème 1.2.10) que u^* est une version discrète de $h^*_{B_\rho(x), B_\rho(y)}$. Avant de prouver la proposition suivante, on démontre le lemme suivant qui est un principe du maximum pour les fonctions harmoniques u.

Lemme 1.2.7. *Soit u une fonction harmonique (solution de $\mathcal{L}u = 0$ sauf en x_0 et x_m). Alors u atteint son minimum et son maximum en x_0 et x_m.*

Démonstration. Si u est constante, alors il n'y a rien à prouver. Sinon, on pose k tel que

$$u(x_k) = \max_i u(x_i) \tag{1.79}$$

et supposons qu'il existe j tel que $C_{kj} > 0$ et $u(x_j) < u(x_k)$. Nécessairement, il doit exister k et j, dans le cas contraire u est constant. Alors si $k \neq 0, m$, on a

$$\sum_i C_{ik} u(x_k) = \sum_i C_{ik} u(x_i). \tag{1.80}$$

D'où

$$u(x_k) \leq \frac{C_{jk}}{\sum_i C_{ik}} u(x_j) + \left(1 - \frac{C_{jk}}{\sum_i C_{ik}}\right) u(x_k) \tag{1.81}$$

ce qui implique $u(x_k) \leq u(x_j)$, on obtient une contradiction. Le résultat sur le minimum s'obtient en appliquant le raisonnement précédent à $-u$. □

On en déduit en particulier que l'équation

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x_i) &= 0 \qquad \text{for } 1 \leq i \leq m-1 \\ u(x_0) &= a \\ u(x_m) &= b \end{cases} \tag{1.82}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ donnés, a une unique solution. Il suffit en effet d'appliquer ce lemme à la différence de deux solutions.

Preuve de la Proposition 1.2.6. Pour $a \in \mathbb{R}^{m+1}$, la forme de Dirichlet discrète est une simple forme quadratique

$$\mathcal{E}(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}(a_i - a_j)^2. \tag{1.83}$$

Alors pour $h \in \mathbb{R}^{m+1}$ on a

$$\mathcal{E}(a+h) = \mathcal{E}(a) + 2h \cdot \mathcal{L}a + \mathcal{E}(h) \tag{1.84}$$

avec $\mathcal{L}$ l'opérateur associée.

On montre l'existence d'un potentiel discret u^*, c'est-à-dire une solution de $\mathcal{L}u^* = 0$. On considère alors la forme quadratique $\mathcal{E}$ sur l'ensemble $\{a_0 = 1,\ a_m = 0\}$. Cette forme quadratique est par définition positive et possède donc un minimum atteint en un point $a^* \in \mathbb{R}^{m+1}$ avec $a_0^* = 1$ et $a_m^* = 0$. Alors, d'après l'équation (1.84), on voit que pour $1 \leq k \leq m-1$

$$\mathcal{L}(a^*)_k = 0. \tag{1.85}$$

a^* est donc harmonique en tout point sauf en x_0 et x_m. Le lemme 1.2.7 nous assure donc que la fonction a^* construite précédemment est unique et caractérisée par $a_0^* = 1$ et $a_m^* = 0$. Pour une fonction harmonique u l'unicité permet d'écrire

$$u(x_i) = a^*(x_i)\,(u(x_0) - u(x_m)) + u(x_m). \tag{1.86}$$

Le flot de u est alors donné par

$$f_{(i)} = \sum_j C_{ij}(u(x_i) - u(x_j)) = f^*_{(i)}(u(x_0) - u(x_m)) \tag{1.87}$$

où f^* est le flot unitaire associé à a^*. En particulier,

$$\frac{f_{(0)}}{u(x_0) - u(x_m)} = f^*_{(0)} \tag{1.88}$$

et donc la constante $C(x \to y)$ ne dépend pas du choix particulier de u.

La dernière expression provient d'un simple calcul

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(a^*) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}(a_i^* - a_j^*)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_i^* C_{ij}(a_i^* - a_j^*) - \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_j^* C_{ij}(a_i^* - a_j^*) \\ &= \sum_{i,j} a_i^* C_{ij}(a_i^* - a_j^*) = \sum_i a_i^* f^*_{(i)} = a_0^* f^*_{(0)} + a_m^* f^*_{(m)} = f^*_{(0)}. \end{aligned} \tag{1.89}$$

Donc

$$\min_{a_0=1, a_m=0} \mathcal{E}(a) = \mathcal{E}(a^*) = f^*_{(0)} = C(x \to y). \tag{1.90}$$

Enfin on en déduit que

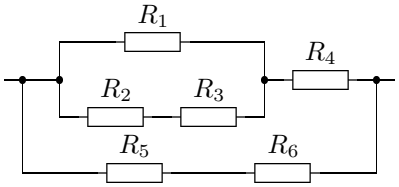
$$C(x \to y) = \mathcal{E}(a^*) = \mathcal{E}(1 - a^*) = C(y \to x). \tag{1.91}$$

□

Exemple Présentons une illustration simple de cette équivalence. La correspondance entre la structure du potentiel et le graphe électrique se fait simplement en plaçant une capacité pour chaque point selle entre deux bornes représentant les composantes connexes de $F^{-1}(]-\infty, \widehat{F}(x,y)[)$. Prenons le graphe stylisé des chemins optimaux $\widehat{\mathcal{P}}(x,y)$, où on a représenté que les points selles de passage

$$\begin{tikzcd}
 & & z_1^* \arrow[dr] & & \\
x \arrow[urr] \arrow[r] \arrow[dr] & z_2^* \arrow[r] & z_3^* \arrow[r] & z_4^* \arrow[r] & y \\
 & z_5^* \arrow[rr] & & z_6^* \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Le circuit électrique correspondant est



où la capacité élémentaire est donnée par

$$\frac{1}{R_i} = C_i = \frac{|\lambda^*(z_i^*)|}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F(z_i^*))|}}. \tag{1.92}$$

1.2.3 Calcul de la capacité

Le calcul de la capacité peut s'exprimer par le théorème suivant.

Théorème 1.2.8. *Supposons vérifiées les hypothèses 1.1.1, et 1.2.3, alors pour x et y des minima locaux de F et $\rho > \epsilon$:*

$$\mathrm{cap}_{B_x}(B_y) = \frac{(2\pi\epsilon)^{N/2}}{2\pi} C(x \leftrightarrow y) e^{-\widehat{F}(x,y)/\epsilon} \Big(1 + O(\sqrt{(\epsilon)}\,|\ln \epsilon|)\Big), \tag{1.93}$$

où $C(x \leftrightarrow y)$ est la conductance équivalente entre x et y du réseau électrique $\mathscr{G}(x,y)$. La capacité élémentaire de chaque arête est donnée par

$$C_{z^*} = \frac{|\lambda^*(z^*)|}{\sqrt{\det \nabla^2 F(z^*)}}. \tag{1.94}$$

$\lambda^*(z^*)$ est l'unique valeur propre négative de la hessienne de F au point selle z^*.

De ce théorème, on en déduit alors l'espérance du temps de transition de x à y.

Corollaire 1.2.9. *Soit $\varepsilon > 0$ suffisamment petit fixé, on suppose que les hypothèses du théorème 1.2.8 sont vérifiées. De plus, soient x et y deux minima tels que pour chaque minimum $(x_i)_{i=1}^{m-1}$*

$$F(x_i) > F(x). \tag{1.95}$$

Alors, pour $\rho > \varepsilon$ suffisamment petit

$$\mathbb{E}_x \tau_{B_\rho(y)} = \frac{2\pi}{C(x \leftrightarrow y)\sqrt{\det \nabla^2 F(x)}} e^{\left(\widehat{F}(x,y) - F(x)\right)/\varepsilon} (1 + O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln \varepsilon|^{3/2}, \varepsilon^\alpha)), \tag{1.96}$$

pour $\alpha > 0$. La constante $C(x \leftrightarrow y)$ est donnée par le théorème 1.2.8.

Remarque 14. L'hypothèse additionnelle dans le corollaire est faite pour s'assurer que il n'y a pas de pièges entre x et y. En effet, si l'un des x_i est plus bas que x, la transition pertinente qui s'effectue est $x_i \to y$ et non pas $x \to y$.

Une conséquence indirecte de la correspondance avec le réseau électrique est l'approximation du potentiel d'équilibre aux voisinages des minima intermédiaires.

Théorème 1.2.10. *Sous les hypothèses du théorème 1.2.8, pour chaque x_i*

$$\mathbb{P}_{x_i}(\tau_{B_\rho(x)} < \tau_{B_\rho(y)}) = h_{B_\rho(x), B_\rho(y)}(x_i) = u^*(x_i) + O\left(\left(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2}\right)^{1/2}\right) \tag{1.97}$$

où u^* est le potentiel d'équilibre discret associé au réseau $\mathscr{G}(x, y)$.

Nous allons maintenant prouver ces théorèmes.

1.2.4 Preuve du théorème 1.2.8

La preuve du théorème 1.2.8 suit la procédure utilisé dans [21] : elle va nous permettre d'illustrer la méthode qui sera ensuite utilisée aussi pour la dimension infinie. Soit donc le potentiel F donné, choisissons deux minima x et y vérifiant les hypothèses précédentes. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, on se donne donc :

- soit $\rho > \varepsilon > 0$,
- $B_x = B_\rho(x)$ et $B_y = B_\rho(y)$,
- les points selles $\mathcal{S}(x, y) = (z_i^*)_{i=1}^n$ et on définit alors $i_\pm$ par $z_i^{*\pm} = z_{i_\pm}$,
- les composantes connexes $F^{-1}(]-\infty, \widehat{F}(x, y)[) = \cup_{i=0}^m \Gamma_i$.

Pour utiliser la formulation variationnelle de la capacité, on se donne la forme de Dirichlet :

$$\operatorname{cap}(B_x, B_y) = \min_{h \in \mathcal{H}} \Phi(h) \tag{1.98}$$

avec

$$\Phi(h) = \varepsilon \int_{(B_x \cup B_y)^c} e^{-F(x)/\varepsilon} \|\nabla h(x)\|_2^2 \, \mathrm{d}x \tag{1.99}$$

et

$$\mathcal{H} = \left\{ h \in W^{1,2}(\mathbb{R}^d, e^{-F(x)/\varepsilon} \mathrm{d}x) \,\middle|\, \forall z \, h(z) \in [0, 1] \, h_{|B_x} = 1 \, h_{|B_y} = 0 \right\}. \tag{1.100}$$

Dans la suite de cette section, on note A_i des constantes positives.

1.2.4.1 Borne supérieure

Proposition 1.2.11. *Sous les hypothèses du théorème 1.2.8, on a la borne supérieure*

$$\operatorname{cap}(B_x, B_y) \leq e^{-\widehat{F}(x,y)/\varepsilon} \frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi} \min_{\substack{a_j \in [0,1] \\ a_0=1,\, a_m=0}} \sum_{i=1}^{n} C_{z_i^*} (a_{i_+} - a_{i_-})^2 \left(1 + \psi(\varepsilon)\right) \tag{1.101}$$

avec $\psi(\varepsilon) = O(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})$

$$C_{z_i^*} = \frac{|\lambda^-(z_i^*)|}{\sqrt{|\det \nabla^2 F(z_i^*)|}}. \tag{1.102}$$

Démonstration. Le calcul de la borne supérieure se fait par l'estimation de la forme de Dirichlet sur une bonne fonction test. Autour de chaque point selle, on se place dans les coordonnées locales qui permettent de diagonaliser la matrice hessienne, la première coordonnée correspondant à l'unique valeur propre négative. Pour $\delta > 0$, on définit alors un voisinage pour chaque point selle $z^* \in \mathcal{S}(x,y)$ en fonction de ces valeurs propres :

$$\begin{aligned} C_\delta(z^*) &= \left[\frac{-\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z^*)|}}, \frac{\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z^*)|}}\right] \times \prod_{k=2}^{N} \left[\frac{-2\delta}{\sqrt{\lambda_k(z^*)}}, \frac{2\delta}{\sqrt{\lambda_k(z^*)}}\right] \\ C_\delta(z^*) &= I_\delta(z^*) \times \widetilde{C}_\delta(z^*). \end{aligned} \tag{1.103}$$

Définnissons aussi $S_\delta = F^{-1}([\widehat{F}(x,y) + \delta^2, +\infty[)$. Pour tout $z = (z_1, z') \in I_\delta(z^*) \times \partial\widetilde{C}_\delta(z^*)$ dans les coordonnées locales (qui dépendent donc du point selle z^*), on obtient en utilisant un développement de Taylor :

$$\begin{aligned} F(z) - \widehat{F}(x,y) &= F(z) - F(z^*) = -\frac{1}{2}|\lambda_1(z^*)|\, z_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N} \lambda_k(z^*) z_k^2 + O(\delta^3) \\ F(z) - \widehat{F}(x,y) &\geq -\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 - A_1\delta^3 \geq \delta^2, \end{aligned} \tag{1.104}$$

pour δ suffisamment petit. Donc, on peut garantir que $I_\delta(z^*) \times \partial\widetilde{C}_\delta(z^*)$ est inclus dans S_δ. De même, en choisissant δ assez petit, on garantit que pour les autres points selles $z^* \notin \mathcal{S}(x,y)$, $|F(z^*) - \widehat{F}(x,y)| > \delta$ (puisque en nombre fini). Enfin, ε doit être suffisamment petit afin que B_x, B_y soient disjoints de $\cap S_\delta$.

Avec ces conditions sur δ, on pose

$$\left(S_\delta \cup \bigcup_{i=1}^{n} C_\delta^i\right)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{j=0}^{m} \widetilde{\Gamma}_j, \tag{1.105}$$

où $(\widetilde{\Gamma}_j)_j$ sont les composantes connexes, avec $x \in \widetilde{\Gamma}_0$ et $y \in \widetilde{\Gamma}_m$. Remarquons que pour chaque point selle z_i^*, la variété instable de dimension 1 (tangente à $\{(z_1, 0) | z_1 \in \mathbb{R}\}$ en coordonnées locales) relie un ensemble noté $\widetilde{\Gamma}_{i_+}$ (pour $z_1 > 0$) et un ensemble noté $\widetilde{\Gamma}_{i_-}$ (pour $z_1 < 0$).

Nous définissons alors la fonction test h^+,

$$h^+(z) = \begin{cases} a_j \text{ pour } z \in \widetilde{\Gamma}_j \\ f_i(z_1) \text{ pour } z \in C_\delta(z_i^*) \text{ dans les coordonnées locales de } z_i^* \\ \text{arbitraire ailleurs avec } \|\nabla h^+\| \leq c/\delta. \end{cases} \tag{1.106}$$

Les constantes a_j sont choisies arbitrairement dans $[0,1]$ avec la condition $a_0 = 1$ et $a_m = 0$. f_i est choisie pour minimiser l'intégrale de la forme de Dirichlet

$$\int_{-\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}^{\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}} [f_i'(z_1)]^2 \, e^{-\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)|z_1^2} \mathrm{d}z_1 \tag{1.107}$$

avec la condition suivante au bord

$$f_i\left(\frac{-\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}\right) = a_{i_-} \; ; \; f_i\left(\frac{\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}\right) = a_{i_+}. \tag{1.108}$$

On montre facilement que f_i est solution de

$$\begin{cases} \varepsilon f_i''(z_1) + z_1 \, |\lambda_1(z_i^*)| \, f_i' & = 0 \\ f_i(-\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}) & = a_{i_-} \\ f_i(\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}) & = a_{i_+} \end{cases} \tag{1.109}$$

Donc

$$f_i(z_1) = (a_{i_-} - a_{i_+}) \frac{\int_{z_1}^{\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)|t^2} \mathrm{d}t}{\int_{-\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}^{\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)|t^2} \mathrm{d}t} + a_{i_+}. \tag{1.110}$$

On en déduit alors

$$\Phi(h^+) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \int_{C_\delta^i} e^{-F(z)/\varepsilon} f_i'(z_1)^2 \mathrm{d}z + \varepsilon \int_{S_\delta} e^{-F(z)/\varepsilon} \left\|\nabla h^+(z)\right\|_2^2 \mathrm{d}z. \tag{1.111}$$

L'hypothèse 1.1.1 sur F permet de majorer le second terme. Soit $\mathcal{K}_\delta = \{z | F(z) \geq \delta^2 + \widehat{F}(x,y)\}$, on obtient alors une constante A_2 telle que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}_\delta} e^{-F(z)/\varepsilon} \left\|\nabla h^+(z)\right\|_2^2 \mathrm{d}z &\leq c\frac{\varepsilon}{\delta^2} e^{-(\widehat{F}(x,y)+\delta^2)/\varepsilon} \int_{\mathcal{K}_\delta} e^{-(F(z)-\delta^2-\widehat{F}(x,y))} \mathrm{d}z \\ &\leq cA_2 \frac{\varepsilon}{\delta^2} e^{-(\widehat{F}(x,y)+\delta^2)/\varepsilon}. \end{aligned} \tag{1.112}$$

Pour le premier terme de (1.111) on a alors

$$\int_{C_\delta(z_i^*)} e^{-F(z)/\varepsilon} f_i'(z_1)^2 \mathrm{d}z = (a_{i_+} - a_{i_-})^2 \frac{\int_{C_\delta(z_i^*)} e^{-(F(z)+|\lambda_1(z_i^*)|z_1^2)/\varepsilon} \mathrm{d}z}{\left(\int_{-\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}^{\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}} e^{-|\lambda_1(z_i^*)|t^2/2\varepsilon} \mathrm{d}t\right)^2}. \tag{1.113}$$

En utilisant un développement de Taylor et la borne sur $z \in C_\delta(z_i^*)$, on obtient une constante $A_3 > 0$ telle que

$$-F(z) - |\lambda_1(z_i^*)|\, z_1^2 \leq -\frac{1}{2}\,|\lambda_1(z_i^*)|\, z_1^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{N} \lambda_k(z_i^*) z_k^2 + A_3\delta^3. \tag{1.114}$$

En utilisant 1.114, le numérateur peut alors être borné par

$$\begin{aligned}
\int_{C_\delta(z_i^*)} e^{-(F(z)+|\lambda_1(z_i^*)|z_1^2)/\varepsilon}\mathrm{d}z &\leq e^{A_3\delta^3/\varepsilon}\int_{C_\delta(z_i^*)} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N}|\lambda_k(z_i^*)|z_k^2}\mathrm{d}z \\
&\leq e^{A_3\delta^3/\varepsilon}\prod_{k=1}^{N}\int_{-\delta/\sqrt{|\lambda_k(z_i^*)|}}^{\delta/\sqrt{|\lambda_k(z_i^*)|}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_k(z_i^*)|z_k^2}\mathrm{d}z_k \\
\int_{C_\delta(z_i^*)} e^{-(F(z)+|\lambda_1(z_i^*)|z_1^2)/\varepsilon}\mathrm{d}z &\leq e^{A_3\delta^3/\varepsilon}\frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}^N}{|\det(\nabla^2 F(z_i^*))|}. \qquad (1.115)
\end{aligned}$$

Quant au dénominateur, on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}^{\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}} e^{-|\lambda_1(z_i^*)|t^2/2\varepsilon}\mathrm{d}t\right)^{-2} &= |\lambda_1(z_i^*)|\,\varepsilon^{-1}\left(\int_{-\delta/\sqrt{\varepsilon}}^{\delta/\sqrt{\varepsilon}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\right)^{-2} \\
&= \frac{1}{2\pi\,|\lambda_1(z_i^*)|}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{\delta/\sqrt{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u\right)^{-2} \\
&\leq \frac{1}{2\pi\,|\lambda_1(z_i^*)|}\left(1 - \frac{2e^{-\delta^2/2\varepsilon}}{\sqrt{2\pi}\delta\varepsilon^{-1/2}}\right)^{-2}. \qquad (1.116)
\end{aligned}$$

Ceci donne la borne supérieure attendue en choisissant $\delta = A_4\sqrt{\varepsilon\,|\ln\varepsilon|}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(h^+) \leq\ & e^{-\widehat{F}(x,y)/\varepsilon}\frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi} \\
& \sum_{i=1}^{n}(a_{i_+} - a_{i_-})^2\frac{|\lambda_1(z_i^*)|}{\sqrt{\det\nabla^2 F(z_i^*)}}\left(1 + O\left(\left|\varepsilon\ln^3\varepsilon\right|^{1/2}\right)\right), \qquad (1.117)
\end{aligned}$$

qui est vraie pour tout choix des $(a_j)_{0\leq j\leq m} \in [0,1]^m$ avec $a_0 = 1$ et $a_m = 0$. En particulier,

$$\Phi(h^+) \leq e^{-\widehat{F}(x,y)/\varepsilon}\frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi}\min_{\substack{a_j\in[0,1]\\ a_0=1,\, a_m=0}}\sum_{i=1}^{n} C_{z_i^*}(a_{i_+} - a_{i_-})^2\left(1 + O\left(\left|\varepsilon\ln^3\varepsilon\right|^{1/2}\right)\right) \tag{1.118}$$

ce qui termine la preuve. □

1.2.4.2 Borne inférieure

Proposition 1.2.12. *Sous les hypothèses su théorème 1.2.8, on a la minoration :*

$$\operatorname{cap}(B_x, B_y) \geq e^{-\widehat{F}(x,y)/\varepsilon} \frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi} \min_{\substack{a_j \in [0,1] \\ a_0=1,\, a_m=0}} \sum_{i=1}^{n} C_{z_i^*} (a_{i_+} - a_{i_-})^2 \left(1 + O\left(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2}\right)\right). \quad (1.119)$$

Démonstration. La minoration s'obtient en réduisant le domaine d'intégration de la forme de Dirichlet et en minimisant cette nouvelle forme. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en coordonnées locales, on définit

$$\widehat{C}_\delta(z_i^*) = \left[\frac{-2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, \frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}\right] \times \prod_{k=2}^{N} \left[\frac{-\delta}{\sqrt{(N-1)\lambda_k(z_i^*)}}, \frac{\delta}{\sqrt{(N-1)\lambda_k(z_i^*)}}\right]$$

$$\widehat{C}_\delta(z_i^*) = J_\delta^i \times \widehat{C_\delta^i}^{\perp}, \quad (1.120)$$

et $\widehat{C}_\delta = \bigcup_{i=1}^n \widehat{C}_\delta^i$. On restreint alors le domaine d'intégration et on minore l'intégrant : pour $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \Phi(h) \geq \Phi_{\widehat{C}_\delta}(h) &= \varepsilon \int_{\widehat{C}_\delta} e^{-F(z)/\varepsilon} \|\nabla h(z)\|_2^2 \, \mathrm{d}z \\ &\geq \bar{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(h) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \int_{\widehat{C}_\delta^i} e^{-F(z)/\varepsilon} \left[\frac{\partial h(z)}{\partial z_1}\right]^2 \mathrm{d}z. \end{aligned} \quad (1.121)$$

De même, par un développement de Taylor, on a une constante A_5 telle que pour δ suffisamment petit, pour tout $z \in \widehat{C}_\delta(z_i^*)$

$$\left| F(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \lambda_k(z_i^*) z_k^2 \right| \leq A_5 \delta^3. \quad (1.122)$$

En remplaçant la fonction h par le potentiel h^*, minimisant la forme de Dirichlet, on obtient en intégrant sur J_δ^i :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{C}_\delta^i} e^{-F(z)/\varepsilon} \left(\frac{\partial h^*(z)}{\partial z_1}\right)^2 \mathrm{d}z &\geq e^{-A_5\delta^3/\varepsilon} \int_{\widehat{C}_\delta^i} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^N \lambda_k(z_i^*) z_k^2} \left[\frac{\partial h^*(z)}{\partial z_1}\right]^2 \mathrm{d}z \\ &\geq e^{-A_5\delta^3/\varepsilon} \int_{\widehat{C_\delta^i}^{\perp}} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=2}^N \lambda_k(z_i^*) z_k^2} \\ &\quad \cdot \int_{J_\delta^i} \left[\frac{\partial h^*(z)}{\partial z_1}\right]^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)| z_1^2} \mathrm{d}z_1 \mathrm{d}z_\perp. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Or, $J_\delta^i = \left[-2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}, 2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}\right]$. On peut alors minimiser la forme précédente suivant z_1 en suivant (1.107). on obtient alors

$$\int_{J_\delta^i} \left[\frac{\partial h^*(z)}{\partial z_1}\right]^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)| z_1^2} \mathrm{d}z_1 \geq \int_{J_\delta^i} \left[f_i'(z_1)\right]^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)| z_1^2} \mathrm{d}z_1. \quad (1.124)$$

La fonction f_i est alors la solution de

$$\left\{\begin{array}{rl} \varepsilon f_i''(z_1) + z_1 \left|\lambda_1(z_i^*)\right| f_i' & = 0 \\ f_i(-2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}) & = h^*\left(\frac{-2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right) \\ f_i(2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}) & = h^*\left(\frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right). \end{array}\right. \tag{1.125}$$

La même procédure suivie de (1.113) à (1.116) donne

$$\int_{J_\delta^i}\left(\frac{\partial h^*(z)}{\partial z_1}\right)^2 e^{\frac{1}{2\varepsilon}|\lambda_1(z_i^*)|z_1^2}\mathrm{d}z_1 \geq \frac{\sqrt{\varepsilon\left|\lambda_1(z_i^*)\right|}}{\sqrt{2\pi}} \cdot\left[h^*\left(\frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right) - h^*\left(\frac{-2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right)\right]^2. \tag{1.126}$$

D'où

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}(B_x, B_y) \geq \varepsilon e^{-A_5\frac{\delta^3}{\varepsilon}} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\varepsilon\left|\lambda_1(z_i^*)\right|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\widehat{C_\delta^i}^\perp} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=2}^N \lambda_k(z_i^*)z_k^2} \\ \cdot\left[h^*\left(\frac{-2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right) - h^*\left(\frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right)\right]^2 \mathrm{d}z_\perp. \end{aligned} \tag{1.127}$$

Le problème revient alors à estimer correctement h^* au bord de l'ensemble pour avoir une minoration utile. L'idée est alors de contrôler la valeur du potentiel d'équilibre h^* entre le bord du voisinage $\widehat{C}_\delta(z_i^*)$ et le fond de la composante connexe Γ_i. Pour cela, on a le lemme suivant.

Lemme 1.2.13. *Pour x_j distinct de x, y (minimum global de Γ_i) on a, pour tout $w \in \Gamma_j$ avec $d(w, \partial\Gamma_j) > \eta$ et $\eta > 0$,*

$$|h^*(x_j) - h^*(w)| \leq \Phi(\varepsilon) \tag{1.128}$$

avec $\Phi(\varepsilon) = O(\varepsilon^\beta)$ pour tout $\beta > 0$.

Supposons, pour l'instant, ce résultat prouvé. Pour $z \in \partial J_\delta^i \times \widehat{C_\delta^i}^\perp$, on obtient en utilisant un développement de Taylor :

$$F(z) - \widehat{F}(x, y) \leq -\delta^2 + C\delta^3 < -\frac{\delta^2}{2} < -A_6 \tag{1.129}$$

pour δ assez petit. D'où,

$$\begin{aligned} \left\{-2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}\right\} \times \widehat{C_\delta^i}^\perp &\subset \Gamma_{i_-} \\ \left\{2\delta/\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}\right\} \times \widehat{C_\delta^i}^\perp &\subset \Gamma_{i_+}. \end{aligned}$$

On peut alors utiliser le Lemme 1.2.13 uniformément sur ces ensembles. Uniformément en $z_\perp \in \widehat{C}^i_{\delta^\perp}$, il existe $\beta > 1/2$ tel que

$$\begin{aligned} \left| h^*(x_{i_+}) - h^*\left(\frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right)\right| &\leq \quad A_7\varepsilon^\beta \\ \left| h^*(x_{i_-}) - h^*\left(-\frac{2\delta}{\sqrt{|\lambda_1(z_i^*)|}}, z_\perp\right)\right| &\leq \quad A_7 e^\beta. \end{aligned}$$

Cette minoration donne alors avec (1.127)

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(h^*) \geq \frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi}&\left(1 - \frac{\sqrt{\varepsilon(N-1)}}{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{2(N-1)\varepsilon}}\right)^{N-1} \\ &\cdot e^{-A_5\frac{\delta^3}{\varepsilon}} \sum_{i=1}^n C_{z_i^*}\left(\left|h^*(x_{i_-}) - h^*(x_{i_+})\right| - 2A_7\varepsilon^\beta\right)^2 \end{aligned} \tag{1.130}$$

en choisissant $\delta^2 = A_8\varepsilon\,|\ln\varepsilon|$. Posons alors $a_j = h^*(x_j)$, on obtient donc

$$\bar{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(h^*) \geq \frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi} \sum_{i=1}^n C_{z_i^*}(a_{i_-} - a_{i_+})^2 \left(1 + O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2})\right). \tag{1.131}$$

D'où

$$\bar{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(h^*) \geq \frac{(2\pi\varepsilon)^{N/2}}{2\pi} \min_{\substack{a_j\in[0,1]\\ a_0=1,\, a_m=0}} \sum_{i=1}^n C_{z_i^*}\left(a_{i_-} - a_{i_+}\right)^2 \left(1 + O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|^{3/2})\right) \tag{1.132}$$

ce qui conclut la preuve. □

On prouve maintenant l'approximation du potentiel d'équilibre (Lemme 1.2.13).

Démonstration. Pour $\delta > 0$ tel que $B_\delta(x_j) \subset \Gamma_j$, définissons $\tau_{B_\delta(x_j)} = \tau^\delta_{x_j}$. Alors, pour $w \in \Gamma_j$ avec $d(w, \partial\Gamma_j) > \eta$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y}) = \quad & \mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y} | \tau^\delta_{x_j} < \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y})\mathbb{P}_w(\tau^\delta_{x_j} < \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y}) \\ & + \mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y} | \tau^\delta_{x_j} > \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y})\mathbb{P}_w(\tau^\delta_{x_j} > \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y}). \end{aligned}$$

Posons $\mu = \mathbb{P}_w(\tau^\delta_{x_j} > \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y}) = h^*_{B_x\cup B_y, B_\delta(x_j)}(w)$. En utilisant le corollaire 4.8 de [21], on obtient une constante A_8 telle que

$$0 \leq \mu \leq A_9\varepsilon^{-1/2}\exp(-(\widehat{F}(x,y) - F(w))/\varepsilon) \leq A_9\varepsilon^{-1/2}\exp(-\sigma/\varepsilon) \tag{1.133}$$

avec σ tel que $\widehat{F}(x,y) - F(w) \geq \sigma > 0$ pour tout $w \in \Gamma_j$ avec $d(w, \partial\Gamma_j) > \eta$.

D'autre part, en utilisant la propriété de Markov forte, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y} | \tau^\delta_{x_j} < \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y}) = \quad & \mathbb{E}_w[\mathbb{P}_{X_{\tau^\delta_{x_j}}}(\tau_{B_x} < \tau_{B_y})] \\ = \quad & \mathbb{E}_w[h^*_{B_x,B_y}(X_{\tau^\delta_{x_j}})] \end{aligned} \tag{1.134}$$

et $X_{\tau^\delta_{x_j}} \in \overline{B_\delta(x_j)}$ par continuité du processus. Or, le potentiel d'équilibre $h^*_{B_x,B_y}$ est solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique, on peut alors utiliser une estimation d'Hölder pour comparer la valeur du potentiel d'équilibre près de x_j et précisément à x_j.

On rappelle cette estimation. Soit $L = a_{ij}(x)D_{ij} + b_i(x)D_i$ un opérateur différentiel du second ordre, avec $a_{ij} \in C^0(D)$, $b_i \in L^\infty(D)$. On suppose de plus que L est uniformément elliptique c'est-à-dire qu'il existe $0 < \lambda \leqslant \Lambda < \infty$ tel que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$0 < \lambda \left|\xi\right|^2 \leq (\xi, a(x)\xi) \leq \Lambda \left|\xi\right|^2. \tag{1.135}$$

On pose alors $\gamma = \Lambda/\lambda$, et $\nu \geq \|b(x)\|_2^2/\lambda^2$. On a le Lemme suivant.

Lemme 1.2.14 (Corollary 9.24 [51])**.** *Si $u \in W^{2,n}(D)$ est une fonction positive et vérifie $Lu = 0$ sur une boule $B_{R_0}(x) \subset D$, alors pour tout $R \leq R_0$,*

$$\underset{B_R(x)}{osc}\, u \leq K \left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \underset{B_{R_0}(x)}{osc}\, u, \tag{1.136}$$

où $\mathrm{osc}_A u = \sup_A u - \inf_A u$. Les constantes $K = K(n, \gamma, \nu R_0^2) < \infty$ et $\alpha = \alpha(n, \gamma, \nu R_0^2) > 0$ ne dépendent que de γ et νR_0^2.

On applique alors ce lemme avec $L = L_\varepsilon$. Soit $r_0 > 0$ fixé et assez petit pour que $B_{r_0}(x_j)$ soit disjoint de B_x et B_y. Alors $h^*_{B_x,B_y}$ est solution de $L_\varepsilon u = 0$ sur $B_{r_0}(x_j)$. La constante ν prend alors la valeur $\nu = \sup_{B_{r_0}} \|\nabla F\|_2^2/\varepsilon^2$. Donc afin de rendre uniformes les constantes en ε, une solution est de choisir $R_0 = c\varepsilon > R = c\varepsilon^2 = \delta$ où $c > 0$ est une constante telle que $R_0 < r_0$. Pour $z \in B_{c\varepsilon^2}(x_j)$, on obtient alors une constante A_{10} telle que

$$\left|h^*_{B_x,B_y}(z) - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| \leqslant 2A_{10}\varepsilon^\alpha \tag{1.137}$$

où on a utilisé

$$\underset{B_{R_0}(x)}{osc}\, h^*_{B_x,B_y} \leq 2. \tag{1.138}$$

D'où

$$\left|\mathbb{E}_w[h^*_{B_x,B_y}(X_{\tau_{x_j}})] - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| \leq 2A_{10}\varepsilon^\alpha. \tag{1.139}$$

Donc en combinant (1.133) et (1.134), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y}) - \mathbb{P}_{x_j}(\tau_{B_x} < \tau_{B_y}) &= \mathbb{E}_w[h^*_{B_x,B_y}(X_{\tau_{x_j}})](1-\mu) - h^*_{B_x,B_y}(x_j) \\ &\quad + \mu\mathbb{P}_w(\tau_{B_x} < \tau_{B_y} | \tau_{x_j} > \tau_{B_x} \wedge \tau_{B_y}).\end{aligned} \tag{1.140}$$

On a alors

$$\begin{aligned}\left|h^*_{B_x,B_y}(w) - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| &\leq \left|\mathbb{E}_w[h^*_{B_x,B_y}(X_{\tau_{x_j}})] - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| + 2\mu \\ \left|h^*_{B_x,B_y}(w) - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| &\leq 2A_{10}\varepsilon^\alpha + 2A_9\varepsilon^{-1/2}e^{-\sigma/\varepsilon} = B_1(\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha).\end{aligned} \tag{1.141}$$

En réinjectant cette dernière estimation dans (1.138) afin d'avoir un meilleur contrôle, on a

$$\underset{B_{R_0}(x)}{osc}\, h^*_{B_x,B_y} \leq 2B_1(\varepsilon). \tag{1.142}$$

L'équation (1.141) devient alors

$$\left|h^*_{B_x,B_y}(w) - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| \leq 2A_{10}\varepsilon^{\alpha}B_1(\varepsilon) + 2A_9\varepsilon^{-1/2}e^{-\sigma/\varepsilon} = B_2(\varepsilon) = O(\varepsilon^{2\alpha}). \tag{1.143}$$

En itérant cette procédure, on démontre donc que

$$\left|h^*_{B_x,B_y}(w) - h^*_{B_x,B_y}(x_j)\right| \leq \Phi(\varepsilon) \tag{1.144}$$

avec $\Phi(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\beta})$ pour tout $\beta > 0$. □

1.2.4.3 Preuve du théorème 1.2.10

Démonstration. D'après l'estimation de la capacité, on en déduit l'existence de Ψ_1, Ψ_2 fonction bornées en 0 telle que

$$\mathcal{E}(a^*)(1 + \sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2}\,\Psi_1(\varepsilon)) \geq \mathrm{cap}\,(B_x, B_y) \geq \mathcal{E}(h^*)(1 + \sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2}\,\Psi_2(\varepsilon)). \tag{1.145}$$

où a^* minimise la forme de Dirichlet discrète avec $a^*_0 = 1$ et $a^*_m = 0$, et h^* est le potentiel d'équilibre. On obtient alors une fonction borné en 0, Ψ_3 telle que

$$|\mathcal{E}(a^*) - \mathcal{E}(h^*)| \leq \sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2}\,\Psi_3(\varepsilon). \tag{1.146}$$

Or a^* est harmonique et $(a^* - h^*)_0 = (a^* - h^*)_m = 0$, on en déduit

$$\mathcal{E}(a^*) - \mathcal{E}(h^*) = 2(a^* - h^*)\mathcal{L}a^* + \mathcal{E}(a^* - h^*) = \mathcal{E}(a^* - h^*). \tag{1.147}$$

Comme $\mathcal{E}$ restreinte à $H = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}$ est une forme quadratique définie positive, $\mathcal{E}^{1/2}$ est une norme sur H. On a donc en particulier une constante A_{11} telle que, pour $\xi \in H$

$$\max_{j=1,m} |\xi_j| = \|\xi\|_{\infty} \leq A_{11}\mathcal{E}(\xi)^{1/2}. \tag{1.148}$$

Pour tout $1 \leq i \leq m-1$, on a alors

$$|a^*_i - h^*(x_i)| \leq (\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2})^{1/2}\Psi(\varepsilon) \tag{1.149}$$

avec Ψ une fonction bornée. □

1.3 Applications

1.3.1 Exemple simple

Introduisons tout d'abord la fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}. \tag{1.150}$$

On a alors $g'(x) = x^3 - x$. Considérons l'exemple avec le potentiel $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$

$$F(x_1, x_2, x_3) = g(x_1)g(x_2)g(x_3). \tag{1.151}$$

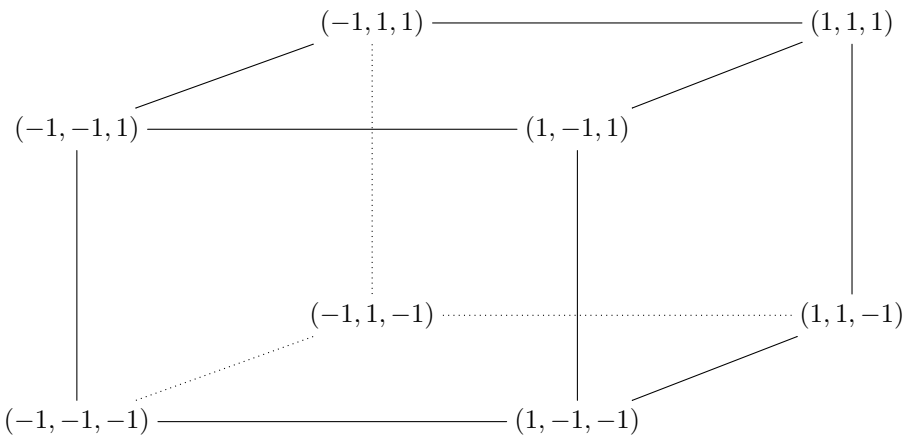
Le calcul des points stationnaires donne donc

$$\nabla F(x) = 0 \Longleftrightarrow g'(x_1) = 0 \text{ et } g'(x_2) = 0 \text{ et } g'(x_3) = 0. \tag{1.152}$$

L'ensemble des points stationnaires est donc $\{+1, 0, -1\}^3$. Le calcul de la matrice hessienne va nous permettre de déterminer quels sont les minima, les points selles d'indice 1. On a en effet, pour un point stationnaire $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$

$$\nabla^2 F(x^*) = \begin{pmatrix} g''(x_1^*)g(x_2^*)g(x_3^*) & 0 & 0 \\ 0 & g(x_1^*)g''(x_2^*)g(x_3^*) & 0 \\ 0 & 0 & g(x_1^*)g(x_2^*)g''(x_3^*) \end{pmatrix} \tag{1.153}$$

Or $g''(x) = 3x^2 - 1$, donc l'ensemble des minima de F est $\{-1, +1\}^3$ et les points selles ont une unique coordonnée nulle. Le graphe des minima et des points selles d'indice 1 s'organise suivant un cube en dimension 3 :



Chaque arête portant une capacité élémentaire valant

$$C = \frac{|g''(0)|\, g(1)^2}{\sqrt{g(1)^4 g(0)^2\, |g''(0)|\, g''(1)^2}} = 1. \tag{1.154}$$

On peut alors se demander quels sont les espérances des temps de transition pour passer d'un minima à un autre (ils sont en effet tous à la même hauteur). On a trois types différents de transitions (à cause des symétries) soit de $x_0 = (1, 1, 1)$ vers $x_1 = (-1, 1, 1)$ ou vers $x_2 = (-1, -1, 1)$ ou bien vers $x_3 = (-1, -1, -1)$. On trouve alors, en calculant les capacités équivalentes :

$$\operatorname{cap}(B_\rho(x_0), B_\rho(x_1)) = \frac{12}{7} \tag{1.155}$$

$$\operatorname{cap}(B_\rho(x_0), B_\rho(x_2)) = \frac{4}{3} \tag{1.156}$$

$$\operatorname{cap}(B_\rho(x_0), B_\rho(x_3)) = \frac{6}{5}. \tag{1.157}$$

On obtient alors en appliquant le corollaire 1.2.9 les temps de transition

$$\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{B_\rho(x_1)}] = \frac{7}{12}2^5\sqrt{2}\pi e^{1/64\varepsilon} \tag{1.158}$$

$$\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{B_\rho(x_2)}] = \frac{3}{4}2^5\sqrt{2}\pi e^{1/64\varepsilon} \tag{1.159}$$

$$\mathbb{E}_{x_0}[\tau_{B_\rho(x_3)}] = \frac{5}{6}2^5\sqrt{2}\pi e^{1/64\varepsilon}. \tag{1.160}$$

1.3.2 Particules couplées

On se propose de calculer les temps de transition à un modèle de particules en interaction. Ce modèle a été décrit par Berglund, Fernandez et Gentz dans les articles [9, 10]. Nous l'avons déjà décrit dans l'introduction (équation (0.18). On a $N \geq 2$ particules couplées aux plus proches voisins. Chaque particule évolue sur $\mathbb{R}$, subit individuellement un potentiel bistable

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2. \tag{1.161}$$

Le système obtenu est

$$\mathrm{d}X_\varepsilon(t) = -\nabla F_\gamma(X_\varepsilon(t))\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B(t). \tag{1.162}$$

Le potentiel F_γ est donné par (0.19). B est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^N$.

Le potentiel F_γ est invariant par de nombreuses symétries ce qui rend l'ensemble des points selles aussi invariant par ces symétries et ne vérifie pas l'hypothèse de la remarque 13. En conséquence, on ne peut pas appliquer directement les résultats de [21]. On a besoin de la généralisation du calcul des capacités par le théorème 1.2.8 pour conclure.

1.3.2.1 Description du potentiel

Afin de calculer le temps de transition métastable il nous faut déterminer les minima, les points selles du potentiel F et des matrices hessiennes en ces points. Ainsi, pour $\gamma = 0$, l'interaction entre les particules disparait, on se retrouve avec un ensemble de N particules indépendantes diffusant dans un potentiel bistable. Les points stationnaires (i.e. tels que $\nabla F(x) = 0$) sont

$$x^* = (\xi_1, \dots, \xi_N) \quad \forall i \in [\![1, N]\!],\ \xi_i \in \{-1, 0, 1\}. \tag{1.163}$$

Pour chacun on obtient alors

$$F_0(x^*) = -\frac{N-j}{4} \quad \text{où } j = \#\{i|\xi_i = 0\} \tag{1.164}$$

$$\nabla^2 F_0(x^*) = \begin{pmatrix} 3\xi_1^2 - 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 3\xi_2^2 - 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3\xi_N^2 - 1 \end{pmatrix}. \tag{1.165}$$

On voit donc que clairement les minima sont les points sans aucune coordonnée nulle tandis que chaque coordonnée valant 0 donne une valeur propre négative. Les points selles d'indice 1 ont donc une unique coordonnée nulle. Lorsque $\gamma > 0$ croît, les auteurs de [9] prouvent que l'ensemble des points stationnaires reste dans la même configuration jusqu'à une première bifurcation ayant lieu pour un paramètre $\tilde{\gamma}_1 > 1/4$ (Théorème 2.1 de [9]). Malgré cela, on peut remarquer que les points

$$I_\pm = \pm(1, 1, \cdots, 1) \quad O = (0, 0, \cdots, 0) \tag{1.166}$$

sont toujours stationnaires. De plus $I_\pm$ sont toujours des minima, alors que O change d'indice lorsque γ s'accroît. En effet la matrice hessienne de F en O est

$$\nabla^2 F_\gamma(O) = \begin{pmatrix} -1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & -1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & & & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} & -1+\gamma \end{pmatrix}. \tag{1.167}$$

Les valeurs propres de cette matrices sont donc

$$\lambda_k = -\left(1 - 2\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right) \quad \forall k \in [\![0, N-1]\!]. \tag{1.168}$$

En particulier, on peut noter pour tout $\gamma > 0$ et k entier entre 1 et $\lfloor N/2 \rfloor$:

$$\lambda_k = \lambda_{N-k} = -\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_k}\right) \qquad \text{avec } \gamma_k = \frac{1}{2\sin^2(k\pi/N)} \tag{1.169}$$

et $\lambda_0 = -1$. Comme $(\gamma_k)_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor}$ est décroissant en k, pour $\gamma > \gamma_1$, O devient un point selle. De plus, en utilisant une fonction de Lyapunov, Berglund, Fernandez et Gentz ont prouvé dans [9] (Proposition 3.1) que dans ce cas, $I_\pm$ et O sont les seuls points stationnaires. Dans cette configuration, les particules sont dites synchronisées car le couplage entre les particules fait que la transition de I_- à I_+ se fait d'un mouvement commun en passant au voisinage de 0.

Le potentiel F est en effet invariant par de nombreuses symétries (rotation R, symétrie axiale S, et changement de signe C) :

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad Rx = \left(x^{(2)}, x^{(3)}, \cdots, x^{(N)}, x^{(1)}\right) \tag{1.170}$$

$$Sx = \left(x^{(N)}, x^{(N-1)}, \cdots, x^{(2)}, x^{(1)}\right) \tag{1.171}$$

$$Cx = \left(-x^{(1)}, -x^{(2)}, \cdots, -x^{(N-1)}, -x^{(N)}\right). \tag{1.172}$$

En particulier chaque expression est vérifiée pour toute l'orbite, notée $\mathcal{O}(x)$, du point x sous l'action de ces symétries. On se restreint au cas où $\gamma = o(1)$ est très proche de 0 mais positif. Dans cette situation, le nombre de points selles est important (l'ensemble des $x_0 = (0, \pm 1, \cdots, \pm 1)$ et leurs orbites) de même que les minima (l'ensemble des $x_0 = (\pm 1, \cdots, \pm 1)$). Pour $\gamma < \gamma^*$, la valeur

de la première bifurcation, la configuration reste presque identique, seules les valeurs du potentiel aux minima ou aux points selles évoluent. On effectue un développement asymptotique en γ : pour x point stationnaire de F (c'est-à-dire tel que $\nabla F_\gamma(x) = 0$) il existe x_0 tel que $\nabla F_0(x_0) = 0$ avec $x = x_0 + O(\gamma)$ et

$$F_\gamma(x) = F_\gamma(x_0) + O(\gamma^2) = -\frac{N-j}{4} + \frac{\gamma}{4}(4k+l) + O(\gamma^2), \tag{1.173}$$

où $x_0 = (\xi_1, \cdots, \xi_N)$, $\xi_i \in \{-1, 0, 1\}$ et

$$j = \mathrm{card}\{i | \xi_i = 0\} \tag{1.174}$$
$$k = \mathrm{card}\{i | \xi_i \xi_{i+1} < 0\} = \mathrm{card}\{i | \xi_i = \pm 1, \xi_{i+1} = \mp 1\} \tag{1.175}$$
$$l = \mathrm{card}\{i | \xi_i \xi_{i+1} = 0, \xi_1 + \xi_{1+1} \neq 0\}. \tag{1.176}$$

On va ainsi réussir à déterminer la géométrie des chemins de moindre potentiel pour passer de I_- à I_+. Les points selles qui optimisent le passage de I_- à I_+ sont donc de la forme

$$F_\gamma(x) = -\frac{N-1}{4} + \frac{\gamma}{4}(4k+l) + O(\gamma^2). \tag{1.177}$$

On doit cependant encore minimiser les valeurs de k, l qui donnent le nombre de contacts directs entre ± 1 et ∓ 1 et entre 0 et ± 1. On en déduit donc que les points selles minimaux sont caractérisés par $k = 2$, $l = 1$ comme par exemple : $(0, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1))$. Les plus hauts points selles (à l'ordre 1 en γ) sont ceux qui ont au moins une coordonnée valant ± 1, une valant ∓ 1 et exactement une seule valant 0. Cependant si on va chercher les corrections aux ordres plus élevés (en γ), une sélection des points selles s'opère et à l'ordre $\lfloor N/2 \rfloor$ les seuls restant sont les points selles situés au milieu du chemin. Ainsi au second ordre, on a :

$$x = x_0 + x_1\gamma + O(\gamma^2) \quad \text{avec } x_1^{(i)} = -\frac{1}{2\Big((3x_0^{(i)})^2 - 1\Big)}\Big(2x_0^{(i)} - x_0^{(i-1)} - x_0^{(i+1)}\Big) \tag{1.178}$$

$$F_\gamma(x) = -\frac{N-1}{4} + \frac{3\gamma}{2} + c_2\gamma^2 + O(\gamma^3) \tag{1.179}$$

avec

$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda}\left(2(x_1^{(i)})^2\Big((3x_0^{(i)})^2 - 1\Big) + 2(x_1^{(i)} - x_1^{(i+1)})(x_0^{(i)} - x_0^{(i+1)})\right). \tag{1.180}$$

Le calcul effectif du coefficient c_2 donne

$$x_0 = (0, \underbrace{1, \cdots, 1}_{N_1}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{N_2}) \quad c_2 = \begin{cases} -\frac{5}{8} & \text{for } N_1, N_2 \geq 2 \\ -\frac{7}{8} & \text{for } N_1 = 1 \text{ or } N_2 = 1 \end{cases}, \tag{1.181}$$

où $N_1 + N_2 = N - 1$.

Un exemple de trajectoire minimale de I_- à I_+ peut être :

$$
\begin{tikzcd}
I_- \arrow[d] & & F_\gamma = -\frac{N}{4} + O(\gamma^2) \\
(0,-1,\cdots,-1) \arrow[d] & & F_\gamma = -\frac{N-1}{4} + \frac{\gamma}{2} + O(\gamma^2) \\
(1,-1,\cdots,-1) \arrow[d] \arrow[dr] & & F_\gamma = -\frac{N}{4} + 2\gamma + O(\gamma^2) \\
(1,0,-1,\cdots,-1) \arrow[d, dotted] & (1,-1,\cdots,-1,0) & F_\gamma = -\frac{N-1}{4} + \frac{3\gamma}{2} + O(\gamma^2) \arrow[d, dotted] \\
(1,\cdots,1,0,-1) \arrow[d] & (0,1,\cdots,1,-1) \arrow[dl] & F_\gamma = -\frac{N-1}{4} + \frac{3\gamma}{2} + O(\gamma^2) \\
(1,\cdots,1,-1) \arrow[d] & & F_\gamma = -\frac{N}{4} + 2\gamma + O(\gamma^2) \\
(1,\cdots,1,0) \arrow[d] & & F_\gamma = -\frac{N-1}{4} + \frac{\gamma}{2} + O(\gamma^2) \\
I_+ & & F_\gamma = -\frac{N}{4} + O(\gamma^2)
\end{tikzcd}
\tag{1.182}
$$

On a aussi la formule pour la correction aux ordres supérieurs, mais en déduire les points selles pertinents est difficile : pour tout $k \geq 0$

$$x = x_0 + x_1\gamma + x_2\gamma^2 + \cdots + x_k\gamma^k + O(\gamma^{k+1}) \tag{1.183}$$

$$F_\gamma(x) = c_0 + c_1\gamma + c_2\gamma^2 + \cdots + c_k\gamma^k + O(\gamma^{k+1}), \tag{1.184}$$

et pour tout $k \geq 0, i \in \Lambda$

$$x_k^{(i)} = -\frac{1}{3\left(x_0^{(i)}\right)^2 - 1}\left[\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1,k_2,k_3 \leq k-1}} x_{k_1}^{(i)} x_{k_2}^{(i)} x_{k_3}^{(i)} + \frac{1}{2}\left(2x_{k-1}^{(i)} - x_{k-1}^{(i+1)} - x_{k-1}^{(i-1)}\right)\right] \tag{1.185}$$

$$x_k^{(i)} = f_k^{(i)}(x_0). \tag{1.186}$$

On a aussi

$$c_k = \sum_{i\in\Lambda}\Bigg[\frac{1}{4}\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3+k_4=k\\ k_1,k_2,k_3,k_4\leq k-1}} x_{k_1}^{(i)}x_{k_2}^{(i)}x_{k_3}^{(i)}x_{k_4}^{(i)} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{k_1+k_2=k\\ k_1,k_2\leq k-1}} x_{k_1}^{(i)}x_{k_2}^{(i)} + \frac{1}{4}\sum_{k_1+k_2=k-1}\left(x_{k_1}^{(i)}-x_{k_1}^{(i+1)}\right)\left(x_{k_2}^{(i)}-x_{k_2}^{(i+1)}\right)\Bigg] \tag{1.187}$$

$$c_k = f_k(x_0), \tag{1.188}$$

D'après les symétries et les corrections à l'ordre 0 et 1, on sait que les points selles pertinents sont de la forme $x_0 = (0, \underbrace{1,\cdots,1}_{N_1}, \underbrace{-1,\cdots,-1}_{N_2})$. On note alors le coefficient $c_k = f_k(x_0) = c_k(N_1)$ pour $0 \leq N_1 \leq \frac{N-1}{2}$.

Nous n'avons pas été capables de prouver qu'effectivement les plus hauts points selles sont au milieu. Nous formulons donc une conjecture.

Conjecture 1.3.1. *Soit $N \geq 2$, pour $0 < \gamma < \frac{1}{4}$:*

- *si $N = 2P+1$ est impair,*

$$\mathcal{S}(I_-, I_+) = \mathcal{O}(x^*) = \{x^*, Rx^*, \cdots, R^{N-1}x^*, Sx^*, RSx^*, \cdots, R^{N-1}Sx^*\}, \tag{1.189}$$

où

$$x^* = (0, \underbrace{1,\cdots,1}_{P}, \underbrace{-1,\cdots,-1}_{P}) + o(\gamma). \tag{1.190}$$

- *si $N = 2P+2$ est impair,*

$$\mathcal{S}(I_-, I_+) = \mathcal{O}(x_+) = \mathcal{O}(x_-) \tag{1.191}$$

$$\mathcal{S}(I_-, I_+) = \{x^+, Rx^+, \cdots, R^{N-1}x^+, x^-, Rx^-, \cdots, R^{N-1}x^- \\ Sx^+, RSx^+, \cdots, R^{N-1}Sx^+, Sx^-, RSx^-, \cdots, R^{N-1}Sx^-\}. \tag{1.192}$$

où

$$x^+ = (0, \underbrace{1,\cdots,1}_{P+1}, \underbrace{-1,\cdots,-1}_{P}) + o(\gamma) \tag{1.193}$$

$$x^- = (0, \underbrace{1,\cdots,1}_{P}, \underbrace{-1,\cdots,-1}_{P+1}) + o(\gamma). \tag{1.194}$$

Remarque 15. En fonction des coefficients $c_k(N_1)$, cela signifie que

$$\forall k \leq \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor \quad c_k(k-1) \leq c_k(N_1) \quad k \leq N_1 \leq \lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor. \tag{1.195}$$

On suppose que cette conjecture est valide dans la suite du chapitre. Le théorème suivant est donc l'application des calculs de capacité dans ce cas.

1.3.2.2 Espérance des temps de transition

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème 1.2.8 afin de calculer les capacités pour ce modèle.

Proposition 1.3.2. *Soit $\rho > 0$ et $B_\pm = B_\rho(I_\pm)$:*
- *si N est impair :*

$$\operatorname{cap}(B_+, B_-) = 2NC(\gamma, N)(2\pi\varepsilon)^{N/2} e^{-F_\gamma(x_\gamma)/\varepsilon} \left(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})\right), \tag{1.196}$$

- *si N est pair :*

$$\operatorname{cap}(B_+, B_-) = NC(\gamma, N)(2\pi\varepsilon)^{N/2} e^{-F_\gamma(x_\gamma)/\varepsilon} \left(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})\right), \tag{1.197}$$

avec

$$C(\gamma, N) = \frac{1}{2^{(N-1)/2}} \left(1 - \frac{\gamma}{4}(N-8)\right) + O(\gamma^2). \tag{1.198}$$

On peut alors en déduire les temps de transition.

Corollaire 1.3.3. *Soit $\rho > \varepsilon$, et $B_\pm = B_\rho(I_\pm)$: pour $N \geq 3$ il existe V_N*

$$V_N(\gamma) = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{3\gamma}{2} + O(\gamma^2) & \text{pour } N \geq 3 \\ \frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2} + O(\gamma^2) & \text{pour } N = 2 \end{cases} \tag{1.199}$$

tel que

$$\mathbb{E}_{I_-} \tau_{B_+} = A_N(\gamma) e^{V_N(\gamma)/\varepsilon} (1 + O(\sqrt{\varepsilon}\, |\ln \varepsilon|^{3/2})) \tag{1.200}$$

avec
- *si N est impair :*

$$A_N(\gamma) = \frac{2\pi}{2NC(\gamma, N)\sqrt{|\det(\nabla^2 F_\gamma(I_-))|}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2N}(1-2\gamma) + O(\gamma^2) \tag{1.201}$$

- *si N est pair :*

$$A_N(\gamma) = \frac{2\pi}{NC(\gamma, N)\sqrt{|\det(\nabla^2 F_\gamma(I_-))|}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{N}(1-2\gamma) + O(\gamma^2). \tag{1.202}$$

Remarque 16. On peut remarquer que la différence entre les deux cas n'est que d'un facteur 1/2. Cette différence ne tient que à la géométrie différente entre N pair et impair.

Preuve de la Proposition 1.3.2. Pour N impair, le potentiel est assez simple, les points selles forment une barrière entre I_- et I_+. Ils sont en effet tous de la forme $R^k S^i x_0$, avec $k \in \Lambda$ et $i \in \{0, 1\}$. La configuration des chemins peut se

représenter par

$$\begin{tikzcd}
 & & x_\gamma \arrow[dd, dotted, no head] \arrow[ddrr] & & \\
 & & & & \\
 & & R^{N-1}x_\gamma \arrow[drr] & & \\
I_- \arrow[uurr] \arrow[urr] \arrow[rr] \arrow[drr] & & Sx_\gamma \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, no head] & & I_+. \\
 & & & & \\
 & & R^{N-1}Sx_\gamma \arrow[urr] & &
\end{tikzcd} \tag{1.203}$$

On obtient donc par un cas particulièrement simple du théorème 1.2.8

$$\operatorname{cap}(B_+, B_-) = 2NC(\gamma, N)\left(1 + O\left(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2}\right)\right) \tag{1.204}$$

avec

$$C(\gamma, N) = \frac{|\lambda^-|}{|\det(\nabla^2 F_\gamma(x_\gamma))|^{1/2}}. \tag{1.205}$$

puisque par symétrie, tous les points selles dans $\mathcal{S}(I_-, I_+)$ ont la même matrice hessienne. Nous avons donc besoin de calculer la valeur du déterminant de la matrice hessienne de F_γ au point x_γ, et l'unique valeur propre négative, λ^-, de cette même matrice. On fera tout ces calculs en se limitant au premier ordre en γ. La matrice hessienne se met sous la forme, pour tout x dans $\mathbb{R}^N$,

$$\nabla^2 F_\gamma(x) = \nabla^2 F_0(x) + \frac{\gamma}{2}\Delta, \tag{1.206}$$

où Δ est la matrice associée au laplacien discrétisé en N pas, avec des conditions au bord périodiques.

$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.207}$$

La matrice $\nabla^2 F_0(x)$ est une simple matrice diagonale avec pour coefficients sur sa diagonale $3\left[x^i\right]^2 - 1$. On peut alors injecter la correction au premier ordre

du point selle : $x_\gamma = x_0 + x_1\gamma + O(\gamma^2)$. On a alors

$$\nabla^2 F_\gamma(x_\gamma) = \begin{pmatrix} -1+\gamma e_1 & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 2+\gamma e_2 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 2+\gamma e_{N-1} & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} & 2+\gamma e_N \end{pmatrix} + O(\gamma^2) I_N \tag{1.208}$$

où l'on a noté $e_i = 1 + 6x_0^i x_1^i$. Le plus facile pour trouver les quantités nous intéressant est de calculer les valeurs propres. Pour cela on se propose de calculer le polynôme caractéristique, χ, de la matrice. En développant le déterminant suivant la première ligne, on a

$$\begin{aligned} \chi &= \det\left(X - \nabla^2 F_\gamma(x_\gamma)\right) \qquad (1.209) \\ &= (X + 1 - \gamma e_1 + O(\gamma^2)) \det(X - A_1) + \frac{\gamma}{2}(\det(A_2) + (-1)^N \det(A_3)) \end{aligned}$$

où A_1 est la matrice $\nabla^2 F_\gamma(x_\gamma)$ sans la première ligne et la première colonne, A_2 (A_3 resp.) est la sous matrice sans la seconde colonne (resp. la dernière colonne) et la première colonne. En particulier, $\det(A_2) = O(\gamma)$ et $\det(A_3) = O(\gamma)$. Par récurrence, on a donc

$$\chi = (X + 1 - \gamma e_1 + O(\gamma^2)) \prod_{k=2}^{N} (X - 2 - \gamma e_k + O(\gamma^2)) + O(\gamma^2) \tag{1.210}$$

$$\begin{aligned} &= (X+1)(X-2)^{N-1} - \gamma \left[e_1(X-2) + \sum_{k=2}^{N} e_k (X+1) \right] (X-2)^{N-2} \\ &\quad + O(\gamma^2). \end{aligned} \tag{1.211}$$

En remplaçant λ sous la forme $\lambda_- = -1 + a\gamma + O(\gamma^2)$, on cherche a tel que $\chi(\lambda_-) = O(\gamma^2)$, ce qui est équivalent à

$$(-3)^{N-1} a\gamma - \gamma(-3e_1 + \sum_{k=2}^{N} e_k a\gamma)(-3)^{N-2} = O(\gamma^2) \Longleftrightarrow a = e_1. \tag{1.212}$$

Le calcul du déterminant s'effectue pareillement, on obtient alors

$$\begin{aligned} \det(\nabla^2 F_\gamma(x_\gamma)) &= (-1 + \gamma e_1 + O(\gamma^2)) \prod_{k=2}^{N} (2 + \gamma e_k + O(\gamma^2)) + O(\gamma^2) \\ &= -2^{N-1} + \gamma 2^{N-2} \left(2e_1 - \sum_{k=2}^{N} e_k \right) + O(\gamma^2). \end{aligned} \tag{1.213}$$

Pour $x_0 = (0, 1, \cdots, 1, -1, \cdots, -1)$, on calcule effectivement la correction à l'ordre 1 : $x_\gamma = x_0 + \gamma x_1 + O(\gamma^2)$, on a

$$x_1 = (0, -\frac{1}{4}, 0, \cdots, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0, \frac{1}{4}). \tag{1.214}$$

On obtient alors, pour $e_i = 1 + 6x_0^i x_1^i$, $e_1 = 1$ et $\sum_{k=2}^N e_k = N - 10$. D'où

$$\begin{aligned} \lambda_- &= -1 + \gamma + O(\gamma^2) \\ \det \nabla^2 F_\gamma(x_\gamma) &= -2^{N-1}\left(1 - \frac{\gamma}{2}(12 - N)\right) + O(\gamma^2). \end{aligned} \tag{1.215}$$

Donc, on a finalement

$$C(\gamma, N) = \frac{1}{2^{(N-1)/2}}\left(1 - \frac{\gamma}{4}(N-8)\right) + O(\gamma^2). \tag{1.216}$$

Pour N impair, la configuration est légèrement différente. Le point stationnaire au milieu des trajectoires optimales n'est pas un point selle mais un minimum situé dans l'orbite de

$$z_\gamma = (\underbrace{1, \cdots, 1}_{N/2}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{N/2}) + o(\gamma). \tag{1.217}$$

lequel est en contact avec quatre points selles distincts on a alors

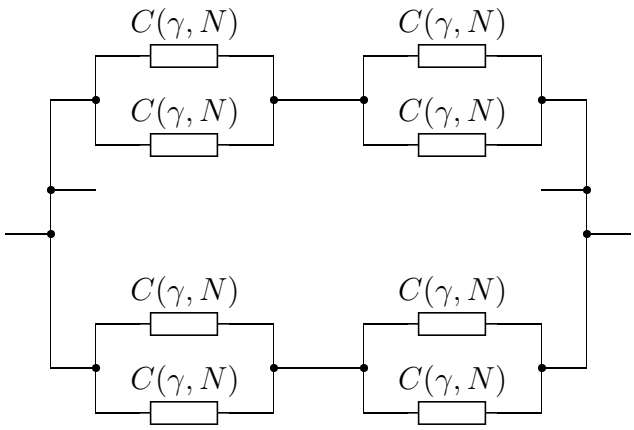
$$\mathcal{S}(I_-, I_+) = \{x_\gamma^\pm, Rx_\gamma^\pm, \cdots, R^{N-1}x_\gamma^\pm, Sx_\gamma^\pm, RSx_\gamma^\pm, \cdots, R^{N-1}Sx_\gamma^\pm\}. \tag{1.218}$$

On peut représenter les trajectoires typiques par

(1.219)

$$\begin{tikzcd}
 & x_- \arrow[dr] & & R^{\frac{N}{2}}Sx_\gamma^+ \arrow[dr] & \\
 & R^{\frac{N}{2}+1}Sx_\gamma^- \arrow[r] \arrow[u] & z_\gamma \arrow[r] \arrow[ur] & Rx_\gamma^+ \arrow[dr] & \\
I_- \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[ddr] & \vdots & \vdots & \vdots & I_+. \\
 & R^{N-1}x_\gamma^- \arrow[r] & R^{N-1}z_\gamma \arrow[r] \arrow[dr] & R^{\frac{N}{2}-1}Sx_\gamma^+ \arrow[ur] & \\
 & R^{\frac{N}{2}-1}Sx_\gamma^- \arrow[ur] & & R^{N-1}x_\gamma^+ \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

Le réseaux électrique équivalent prend alors la forme



où les N branches en parallèles sont identiques. La conductance équivalente d'une seule branche est alors

$$\left(\frac{1}{C+C}+\frac{1}{C+C}\right)^{-1} = C(\gamma, N). \tag{1.220}$$

L'application du théorème 1.2.8 nous donne

$$\operatorname{cap}(B_+, B_-) = NC(\gamma, N)\left(1 + O\left(\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2}\right)\right). \tag{1.221}$$

On peut alors directement utiliser les calculs réalisés dans le cas N impair. En effet, les corrections pour x_γ sont les mêmes que pour $x_\gamma^\pm$. On obtient

$$C(\gamma, N) = \frac{1}{2^{(N-1)/2}}\left(1 - \frac{\gamma}{4}(N-8)\right) + O(\gamma^2). \tag{1.222}$$

ce qui conclue la preuve □

Preuve du corollaire 1.3.3. On applique le théorème 1.2.9. Le calcul du déterminant de la matrice hessienne de F_γ en I_- se fait de la même manière que dans la proposition précédente. On a

$$\det \nabla^2 F_\gamma(I_-) = (2+\gamma)^N + O(\gamma^2) = 2^N + N2^{N-1}\gamma + O(\gamma^2). \tag{1.223}$$

□

Chapitre 2

Équation aux dérivées partielles stochastiques, discrétisation

Á partir de ce chapitre nous nous consacrons à la dimension infinie c'est-à-dire aux équations aux dérivées partielles stochastique déjà introduite dans le chapitre introductif. Notre but est donc de calculer les temps de transition métastable pour une classe d'équations aux dérivées partielles stochastiques (du type (0.24)) : nous obtenons la formule d'Eyring-Kramers (4.32). Afin de prouver ce résultat, nous procédons d'abord à une discrétisation en espace de l'équation (avec un couplage) auquel nous allons appliquer les estimations de la dimension finie (donnant lieu à des calculs proches de ceux exposés au chapitre précédent).

Dans ce chapitre, nous procédons à la discrétisation et à la preuve de la convergence du système discrétisé. Nous reprenons rapidement les notations introduites dans l'introduction (équation (0.24) et suivantes). Rappelons l'équation qui nous intéresse, pour $\gamma > 0$:

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial_x^2 u(x,t) - V'(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \tag{2.1}$$

où W est un bruit blanc sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ et V est une fonction à valeurs réelles, le potentiel local. On rappelle que l'on considère trois types de conditions au bord : Dirichlet, Neumann ou périodiques.

Rappelons que nous notons $C^k_{bc}[0,1]$ les espaces de fonctions de classe C^k sur $[0,1]$ vérifiant les conditions aux bords (Dirichlet (0.28), Neumann (0.29) et périodique (0.30)). $Eq(u_0, V)$ désigne le problème (2.1) avec pour condition initiale $u_0 \in C^1_{bc}[0,1]$ et les conditions aux bords correspondantes. La condition initiale u_0 est une fonction continue qui vérifie les conditions aux bords.

Les hypothèses sur la fonction $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les suivantes (hypothèses 0.0.5)

Hypothèses 2.0.4. 0n suppose que la fonction V vérifie les hypothèses suivantes.

(H_1) V est de classe C^3.

(H_2) V est convexe à l'infini, c'est-à-dire qu'il existe $R_0 > 0$ et $\lambda > 0$ tel que

$$V''(x) > \lambda > 0, \quad \forall |x| > R_0. \tag{2.2}$$

(H_3) Il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que

$$V(x) \leqslant C(|x|^\alpha + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

En particulier d'après (H_2), on sait que $\alpha \geqslant 2$.

Rappelons la fonctionelle S associée (équation (0.4)), pour $\phi \in C^1_{bc}([0,1])$,

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2} |\phi'(x)|^2 + V(\phi(x))\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Nous définissons la discrétisation u^N de la solution u de la manière suivante pour N entier positif. On considère la discrétisation S_N (définie par l'équation (0.53)) de l'action S. Définissons la diffusion X^N solution de l'équation (0.52) :

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla S_N(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_t \tag{2.5}$$

où B est un mouvement brownien défini en fonction du bruit blanc W. La discrétisation est définie via un changement de temps et un interpolation linéaire. Ainsi dans le cas Dirichlet, u^N est l'interpolation linéaire en espace entre les points $x_i = \frac{i}{N+1}$, pour $i = 0 \cdots N+1$, avec

$$u^N(x_i, t) = X^i_{t(N+1)}. \tag{2.6}$$

X^0 et X^{N+1} sont nulles (données par les conditions au bord). La valeur en $t = 0$ est simplement la discrétisation de la condition initiale suivant le même schéma.

On obtient alors un couplage entre le système discrétisé et l'équation aux dérivées partielles stochastique. Le théorème suivant nous permet de justifier l'approximation du système infini-dimensionnel par des processus fini-dimensionnels.

Théorème 2.0.5. *Pour toute condition initiale $u_0 \in C^3_{bc}([0,1])$, la solution discrétisée u^N converge uniformément sur tout compact presque sûrement et dans L^p (avec $p > p_0$), vers la solution u de l'équation* (2.1)*. Ainsi, pour tout ε, γ et pour $T > 0$*

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad p.s. \qquad \mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|^p_{\infty,T}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.7}$$

où on a noté

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} = \sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} \left|u^N(x,t) - u(x,t)\right|. \tag{2.8}$$

Remarque 17. Prendre u_0 de classe C^3 peut sembler restrictif, et il est probable que l'on puisse améliorer cette condition mais pour nous dans la suite cela ne posera pas de problème. En effet la condition initiale u_0 que nous prendrons sera un minimum local de notre fonctionnelle (2.4), et donc solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$\gamma u_0''(x) - V'(u_0(x)) = 0. \tag{2.9}$$

Elle est donc suffisamment régulière.

Le théorème 2.0.5 nous permet ensuite de montrer la convergence des temps de transition pour le système discrétisé vers l'EDPS.

Nous devons d'abord expliciter dans quel sens il faut comprendre l'équation (2.1) puis quelles sont les propriétés des solutions (section 2.1). Dans un deuxième temps, nous faisons la même chose pour le système en dimension finie c'est-à-dire le système discrétisé (section 2.2). Enfin nous montrons la convergence du second vers le premier (section 2.3). Un grand nombre de rappels, mises au point et d'estimations sont renvoyés en annexe (annexes A et B).

Remarque 18. Hors la convergence des temps de transition qui est naturelle mais ne semble pas avoir été faite, les résultats sur la bonne définition d'une solution à l'équation (2.1), la construction de la solution discrétisée et la convergence de la discrétisation vers la solution de l'équation (2.1). Nous avons notamment utilisé :

- sur le bruit blanc espace-temps et la solution de l'équation, le cours de J.B. Walsh [96], le cours de É. Pardoux [83] et les articles de I. Gyöngy et É. Pardoux [55]
- sur la construction du système discrétisé et la convergence de la solution, les articles de T. Funaki [49], de I. Gyöngy [52, 53], I. Gyöngy et A. Millet [54] et A. Millet et P. Morien [80].

Nous avons cependant rappelé les preuves des propositions par souci pédagogique et pour lever certaines ambiguïtés qui pouvaient exister du fait que le drift local V' n'est pas globalement lipschitzien et n'est pas à croissance au plus linéaire. Une grande partie de la construction du bruit blanc, des théorèmes utilisés (théorème de Kolmogorov, théorème de comparaison...) et des estimations sur les semi-groupe sont rappelés en appendices A, B.

2.1 Équation aux dérivées partielles stochastique

2.1.1 Définition des solutions

Il convient de donner un sens à une solution du problème $Eq(u_0, V)$ (2.1). En effet, vue la régularité du drap Brownien qui n'est pas dérivable, on ne peut espérer avoir des solutions dérivables en temps et en espace, c'est-à-dire des solutions fortes (au sens des équations aux dérivées partielles). On utilise donc une solution faible (dans un sens EDP) associée à notre équation. Considérons $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré muni de W un bruit blanc adapté à la filtration (on rappelle des éléments sur le bruit blanc espace-temps dans l'appendice A.1).

Définition 2.1.1 (Solution faible)**.** Une solution faible de l'équation (2.1) est un champ aléatoire $u = \{u(x,t), x \in [0,1], t \geqslant 0\}$ vérifiant

1. u est presque sûrement continue, $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurable,
2. pour tout $\phi \in C^2_{bc}[0,1]$ et tout $t \geqslant 0$, on a

$$\int_0^1 u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 u_0(x)\phi(x)\mathrm{d}x + \gamma \int_0^t \int_0^1 u(x,s)\phi''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \int_0^1 V'(u(x,s))\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 \phi(x) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \quad (2.10)$$

Remarque 19. La solution recherchée est faible au sens fonctionnel mais forte (car trajectorielle) en probabilité, et non par exemple solution d'un problème de martingale.

Formellement le lien entre cette formulation faible et l'équation (formelle) vient de deux intégrations par partie. Si u était une solution forte, en multipliant l'équation par ϕ et en intégrant sur $[0,1]\times[0,t]$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_0^1 \phi(x)\partial_s u(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s &= \gamma\int_0^t\int_0^1 \phi(x)\partial_{xx}u(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \\ &\quad -\int_0^t\int_0^1 \phi(x)V'(u(x,s))\mathrm{d}x\mathrm{d}s \quad +\sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 \phi(x)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Deux intégrations par parties en espace pour le premier terme donnent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi(x)\partial_{xx}u(x,s)\mathrm{d}x &= [\phi(x)\partial_x u(x,s)]_0^1 - \int_0^1 \phi'(x)\partial_x u(x,s)\mathrm{d}x \\ &= [\phi(x)\partial_x u(x,s)]_0^1 - [\phi'(x)u(x,s)]_0^1 + \int_0^1 \phi''(x)u(x,s)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Comme u et ϕ vérifient les conditions au bord, les accroissements sont toujours nuls. Pour le membre de gauche, on a tout simplement

$$\int_0^t\int_0^1 \phi(x)\partial_s u(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_0^1 \phi(x)u(x,t)\mathrm{d}x - \int_0^1 \phi(x)u_0(x)\mathrm{d}x. \tag{2.13}$$

Ce qui justifie la définition de solution faible employée.

Une autre formulation de la solution est la formulation intégrale ou formulation mild. On pose $g_t(x,y)$ la solution fondamentale (ou fonction de Green) de l'équation de la chaleur associée aux conditions au bord adéquates. Pour tout $\phi_0 \in C^2_{bc}([0,1])$ vérifiant les conditions au bord, la solution $\Phi(x,t)$ de

$$\begin{aligned}\partial_t\Phi &= \gamma\partial_{xx}\Phi \\ \Phi(x,0) &= \phi_0(x)\end{aligned} \tag{2.14}$$

avec les bonnes conditions au bord, sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ s'écrit

$$\Phi(x,t) = g_t\phi_0(x) = \int_0^t\int_0^1 g_t(x,y)\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{2.15}$$

Définition 2.1.2 (Solution intégrale)**.** Le champ aléatoire u est une solution intégrale de l'équation (2.1) si

1. u est presque sûrement continue, $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}([0,1])$ mesurable,
2. pour tout $(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}u(x,t) = \int_0^1 g_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s &- \int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(x,y)V'(u(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &+\sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{2.16}$$

A priori, on définit ainsi deux types de solutions différentes, néanmoins, dans notre cas les deux notions sont équivalentes comme prouvée en Proposition 2.1.3. On travaille avec la solution sous forme intégrale.

Proposition 2.1.3. *Soit u_0 une fonction continue sur $[0,1]$. u est une solution faible si et seulement si u est une solution intégrale.*

On renvoie à l'annexe A.2 pour la preuve précise de cette proposition classique.

On dispose notamment des estimations suivantes sur la fonction de Green g suivant les différentes conditions au bord.

Lemme 2.1.4. *Pour tous les cas de conditions au bord on a :*

$$|g_t(x,y)| \leqslant 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{16\gamma t}}. \tag{2.17}$$

En norme L^1, on a

$$\int_0^1 |g_t(x,y)|\,\mathrm{d}y \leqslant 1. \tag{2.18}$$

Dans L^2, on a

– *pour les conditions au bord de Dirichlet*

$$\int_0^1 g_t(x,y)^2\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{2.19}$$

$$\int_0^1\int_0^1 g_t(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{2.20}$$

$$\int_0^t\int_0^1 g_s(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{\gamma\pi^2}\min(1,\sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{2.21}$$

$$\int_0^t\int_0^1\int_0^1 g_s(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{2\gamma\pi^2}\min(1,\sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{2.22}$$

– *pour des conditions au bord de type Neumann ou périodique*

$$\int_0^1 (g_t(x,y)-1)^2\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{2.23}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (g_t(x,y)-1)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{2.24}$$

$$\int_0^t\int_0^1 (g_s(x,y)-1)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{\gamma\pi^2}\min(1,\sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{2.25}$$

$$\int_0^t\int_0^1\int_0^1 (g_s(x,y)-1)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{2\gamma\pi^2}\min(1,\sqrt{2t\gamma\pi^2}). \tag{2.26}$$

La section B.2 expose la preuve et d'autres contrôles nécessaires à prouver les propriétés de la solution u.

2.1.2 Description des solutions

2.1.2.1 Existence et Unicité

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant.

Proposition 2.1.5. *Pour toute condition initiale $u_0 \in C_{bc}([0,1])$, l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\begin{cases} u(x,t) & = \int_0^1 u_0(y) g_t(x,y)\mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s)) g_{t-s}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ & \quad + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{2.27}$$

a une unique solution continue et $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurable. De plus, pour tout $T > 0$ et $p \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}[\sup_{[0,T]\times[0,1]} |u(x,t)|^p] \leqslant C(T,p). \tag{2.28}$$

Ce résultat est prouvé dans [55] mais nous allons résumer la preuve pour introduire des notations qui nous serviront ensuite. Quelques détails sont donnés en annexe A.

La difficulté ici réside dans le fait que le drift $V'(u)$ ne vérifie pas de condition de Lipschitz globale ni de condition de croissance au plus linéaire. Cependant cela n'a que peu d'importance car d'après les Hypothèses 2.0.4, V est au moins C^2 et V est convexe à l'infini, V' varie donc "dans le bon sens" et procure une force de rappel qui contraint le processus à rester autour de 0. La preuve de l'existence repose sur une localisation et un théorème de comparaison. Considérons alors un drift tronqué dépendant d'un paramètre $R > 0$.

$$b_R(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R,R]} + V'(R)\mathbb{1}_{]R,+\infty[} + V'(-R)\mathbb{1}_{]-\infty,-R[}. \tag{2.29}$$

Remarquons que b_R est continue, bornée et globalement lipschitzienne. On note M_R et L_R des constantes telles que

$$|b_R(u)| \leqslant M_R \qquad |b_R(u) - b_R(v)| \leqslant L_R\,|u-v| \qquad \forall u,v \in \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

On note alors u_R la solution de l'EDPS associée à l'équation (2.1) avec la même condition initiale, les mêmes conditions au bord et le drift b_R au lieu de V'. De manière évidente, si on a l'existence et unicité de la solution u_R, on a pour tout $t \leqslant \tau_R$

$$u(x,t) = u_R(x,t), \forall x \in [0,1]. \tag{2.31}$$

On va donc définir

$$\tau_R = \inf\{t, \|u_R(t)\|_\infty > R\} = \inf\{t, \exists x, |u_R(x,t)| > R\}. \tag{2.32}$$

Notons que ce sont bien des temps d'arrêt car le processus continu (non markovien) $\|u_R(t)\|_\infty$ est $\mathcal{F}_t$-adapté.

La preuve de l'existence de la solution u_R peut se faire très classiquement par itération de Picard. L'unicité vient aussi très naturellement par le caractère lipschitzien du drift b_R. La borne uniforme des moments de u_R permet de contrôler les moments de la solution u. Pour tout u_0 continue avec les bonnes conditions au bord, on a, pour tout T, R, $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_R(x,t)|^p\right] < C(p,T,R) < +\infty. \tag{2.33}$$

La preuve de ce résultat procède aussi de manière classique en montrant d'abord l'existence de moment borné uniformément :

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[|u_R(x,t)|^p\right] < +\infty. \tag{2.34}$$

Puis l'utilisation de la régularité (par le théorème de Kolmogorov A.3.2) permet d'obtenir des moments uniformes. L'idée est alors d'utiliser un théorème de comparaison A.3.6 pour contrôler la solution u par la solution u_R.

2.2 Équation en dimension finie

Nous détaillons dans cette partie la construction de la discrétisation u^N.

2.2.1 Formulation par différences finies

On se donne un bruit blanc espace-temps W sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ avec un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Pour simplifier les notations dans la suite, on choisit des différences fines avec des points différents suivant les conditions au bord.

- Pour les conditions au bord de Dirichlet on prend les points de discrétisation
$$x_i = \frac{i}{N+1}, \qquad \forall 0 \leqslant i \leqslant N+1. \tag{2.35}$$
- Pour les conditions au bord de Neumann, on prend
$$x_i = \frac{i}{N} - \frac{1}{2N}, \qquad \forall 0 \leqslant i \leqslant N+1. \tag{2.36}$$
- Pour les conditions au bord périodiques, on prend
$$x_i = \frac{i}{N}, \qquad \forall 0 \leqslant i \leqslant N. \tag{2.37}$$

On pose dans chaque cas $x_{i-\frac{1}{2}}$ le milieu de $[x_{i-1},x_i]$.

Remarquons que le pas h_N de discrétisation est différent suivant les conditions au bord, on a

$$h_N = \frac{1}{N+1} \text{ pour les conditions de Dirichlet} \tag{2.38}$$

$$h_N = \frac{1}{N} \text{ pour les conditions de Neumann et périodiques.} \tag{2.39}$$

On construit un mouvement brownien $(B^i)_i$ en utilisant le bruit blanc W. On choisit alors, pour $1 \leqslant i \leqslant N$

$$B_t^i = \frac{1}{\sqrt{h_N}} W\left(\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}\right] \times [0,t]\right) \tag{2.40}$$

avec $x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{i}{N+1} - \frac{1}{2(N+1)}$. On obtient bien N mouvements browniens indépendants d'après la définition du bruit blanc W. La construction du mouvement brownien à partir du bruit blanc permet d'obtenir un couplage et donc d'avoir une convergence forte vers la solution de l'équation (2.1).

Soit N un entier strictement positif, le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ approchant l'équation (2.1), est défini par l'équation (2.5)

Les conditions au bord sont prises en spécifiant les valeurs de X^0 et X^{N+1} :

– condition au bord de Dirichlet :

$$X_t^0 = X_t^{N+1} = 0, \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{2.41}$$

– condition au bord de Neumann :

$$X_t^0 = X_t^1 \qquad X_t^{N+1} = X_t^N, \qquad \forall t \geqslant 0 \tag{2.42}$$

– condition au bord périodique :

$$X_t^0 = X_t^N \qquad X_t^{N+1} = X_t^1, \qquad \forall t \geqslant 0. \tag{2.43}$$

On réalise alors le changement de temps $Y_t = X_{\frac{t}{h_N}}$. u^N est alors définie par interpolation linéaire entre les points (x_i, t) par

$$u^N(x_i, t) = Y_t^i. \tag{2.44}$$

Y vérifie l'équation de diffusion dans $\mathbb{R}^N$

$$\mathrm{d}Y_t^i = -\frac{1}{h_N}\nabla S_N(X_t)^i \mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}}\mathrm{d}B_t^i \tag{2.45}$$

où S_N est le potentiel discrétisé (équation (0.53)).

L'idée est de mettre le processus X sous une forme identique à celle sous laquelle on a résolu l'EDPS. On montre alors

$$u^N(x,t) = \int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \tag{2.46}$$

$$+ \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y))W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \tag{2.47}$$

$$- \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y))V'(u^N(\kappa_N(y), s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{2.48}$$

où g^N est une version affine par morceaux du semi-groupe du Laplacien discrétisée (dépendant des conditions initiales) et κ_N proche de l'identité, définie pour chaque cas de conditions au bord.

Il s'agit simplement d'un changement d'écriture du système (3.1). On renvoit à l'annexe B.3 pour les calculs sur le semi-groupe g^N.

2.2.1.1 Cas Dirichlet

Dans le cas des conditions de Dirichlet, le pas de discrétisation est $h_N = \frac{1}{N+1}$. g^N est le semi-groupe associé au Laplacien discrétisé. Considérons la matrice

$$p^N(t) = (N+1)e^{t\gamma\Delta^N} \tag{2.49}$$

avec

$$\Delta^N = (N+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.50}$$

$p^N(t)_{i,j}$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p^N(t)_{i,j} & = \gamma(\Delta^N p^N(t))_{i,j} \\ p^N(0)_{i,j} & = (N+1)\delta_{ij}. \end{cases} \tag{2.51}$$

Le semi-groupe g^N défini sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1] \times [0,1]$ en linéarisant par morceaux dans les deux dimensions p^N, pour $(x,y) \in [x_i, x_{i+1}] \times [x_j, x_{j+1}]$ avec $i,j \in \{0,...,N\}$ on a

$$\begin{aligned} g_t^N(x,y) = h_N^{-2} p^N(t)_{i+1,j+1}(x-x_i)(y-x_j) - h_N^{-2} p^N(t)_{i,j+1}(x-x_{i+1})(y-x_j) \\ - h_N^{-2} p^N(t)_{i+1,j}(x-x_i)(y-x_{j+1}) + h_N^{-2} p^N(t)_{i,j}(x-x_{i+1})(y-x_{j+1}) \end{aligned} \tag{2.52}$$

où on a étendu p^N avec les conditions au bord $p_t^N(i,j) = 0$ dès que i ou $j \in \{0, N+1\}$. Mais il faut noter que les conditions au bord sont déjà présentes dans la matrice p^N.

Cependant g^N n'est pas réellement un semi-groupe, c'est-à-dire qu'il ne vérifie pas

$$g_{t+s}(x,y) = \int_0^1 g_t(x,z) g_s(z,y) \mathrm{d}z. \tag{2.53}$$

Il faut en effet "intégrer sur les points de discrétisation". Notons alors

$$\kappa_N(x) = \frac{\lfloor (N+1)x + \frac{1}{2} \rfloor}{N+1} \tag{2.54}$$

qui donne l'unique nombre de la forme $\kappa_N(x) = \frac{i}{N+1} = x_i$ tel que

$$x \in \left[\kappa_N(x) - \frac{h_N}{2}, \kappa_N(x) + \frac{h_N}{2} \right[= \left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right[. \tag{2.55}$$

Pour $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, $\kappa_N(x) = x_i$. On a alors, une quasi-relation de semi-groupe

$$g_{t+s}(x,y) = \int_0^1 g_t(x, \kappa_N(z)) g_s(\kappa_N(z), y) \mathrm{d}z. \tag{2.56}$$

Le lemme qui suit justifie la réécriture réécriture de notre système d'équations en dimension finie sous une forme intégrale (équation (2.46)).

Lemme 2.2.1. *Pour tout $u_0 \in C_{bc}([0,1])$ et tout N entier positif, la fonction u^N définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ par interpolation linéaire avec, pour $0 \leqslant i \leqslant N$, $u(x_i,t) = X_t^i$ vérifie l'équation*

$$\begin{aligned} u^N(x,t) = \int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y)) u_0(\kappa_N(y)) \mathrm{d}y \\ + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\ - \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) V'(u^N(\kappa_N(y), s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Démonstration. On a pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$,

$$X_t^i = X_0^i + \frac{\gamma}{h_N^2}\int_0^t (X_s^{i+1} - 2X_s^i + X_s^{i-1})\mathrm{d}s - \int_0^t V'(X_s^i)\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}}W_t^i \quad (2.58)$$

c'est-à-dire, puisque $X_0^i = u_0(x_i)$

$$u^N(x_i,t) = u_0(x_i) + \frac{\gamma}{h_N^2}\int_0^t (u^N(x_{i-1},s) - 2u^N(x_i,s) + u^N(x_{i+1},s))\mathrm{d}s - \int_0^t V'(u^N(x_i,s))\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}}W_t^i. \quad (2.59)$$

Posons alors

$$B^N(x,t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{h_N}W_t^i \mathbb{1}_{[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}[}(x) \quad (2.60)$$

$$= \sum_{i=1}^N W([x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}[\times[0,t])\mathbb{1}_{[x_{i-\frac{1}{2}},x_{i+\frac{1}{2}}[}(x) \quad (2.61)$$

l'approximation du drap brownien. Pour tout $t \geqslant 0$ et $x \in [x_{\frac{1}{2}}, x_{N+\frac{1}{2}}[$, d'après la définition de κ_N, on a

$$u^N(\kappa_N(x),t) = u_0^N(\kappa_N(x)) - \int_0^t V'(u^N(\kappa_N(x),s))\mathrm{d}s + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}}B^N(x,t) + \frac{\gamma}{h_N^2}\int_0^t \left[u^N(\kappa_N(x+h_N),s) - 2u^N(\kappa_N(x),s) + u^N(\kappa_N(x-h_N),s)\right]\mathrm{d}s. \quad (2.62)$$

Pour $x \in [0, x_{\frac{1}{2}}[$ et $x \in [x_{N+\frac{1}{2}}, 1]$, on a par définition $u^N(\kappa_N(x),t) = 0$.

Soit ϕ_N définie sur $[0,1]$ et linéaire par morceaux sur les intervalles du type $[x_i, x_{i+1}[$ avec $\phi_N(x_i) = a_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant N+1$, et vérifiant les conditions au bord $a_0 = 0$ et $a_{N+1} = 0$. On a pour tout $t \geqslant 0$

$$\int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x))u^N(\kappa_N(x),t)\mathrm{d}x = h_N\sum_{i=1}^N a_i X_t^i$$
$$= h_N\sum_{i=1}^N a_i X_0^i + \frac{\gamma}{h_N}\sum_{i=1}^N\int_0^t a_i(X_s^{i+1} - 2X_s^i + X_s^{i-1})\mathrm{d}s - h_N\sum_{i=1}^N\int_0^t a_i V'(X_s^i)\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon h_N}\sum_{i=1}^N a_i W_t^i. \quad (2.63)$$

D'après la proposition A.1.7 et le choix de W_t^i

$$\sqrt{2\varepsilon h_N}\sum_{i=1}^N a_i W_t^i = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{h_N}\int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x))B^N(x,t)\mathrm{d}x = \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x))W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s). \quad (2.64)$$

Pour le premier terme de l'équation (2.63), on réalise une intégration par partie discrète (transformation d'Abel) en utilisant les conditions au bord ($a_0 = a_{N+1} = 0 = X_s^0 = X_s^{N+1}$). On a alors

$$\begin{aligned} h_N \sum_{i=1}^{N} \int_0^t a_i (X_s^{i+1} - 2X_s^i + X_s^{i-1}) \mathrm{d}s &= h_N \sum_{i=1}^{N} \int_0^t X_s^i (a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1}) \mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \int_0^1 u^N(\kappa_N(x), s) \Big[\phi_N(\kappa_N(x + h_N)) - 2\phi_N(\kappa_N(x)) \\ &\qquad + \phi_N(\kappa_N(x - h_N)) \Big] \mathrm{d}x \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{2.65}$$

De même, on a

$$h_N \sum_{i=1}^{N} a_i X_0^i = \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) u_0(\kappa_N(x)) \mathrm{d}x \tag{2.66}$$

$$h_N \sum_{i=1}^{N} \int_0^t a_i V'(X_s^i) \mathrm{d}s = \int_0^t \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) V'(u^N(\kappa_N(x), s)) \mathrm{d}x \mathrm{d}s. \tag{2.67}$$

On a donc la version faible discrète suivante, qui est simplement un changement d'écriture,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) u^N(\kappa_N(x), t) \mathrm{d}x = \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) u_0(\kappa_N(x)) \mathrm{d}x \\ &- \int_0^t \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) V'(u^N(\kappa_N(x), s)) \mathrm{d}x \mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x)) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \\ &\qquad + \frac{\gamma}{h_N^2} \int_0^t \int_0^1 u^N(\kappa_N(x), s) \Big[\phi_N(\kappa_N(x + h_N)) - 2\phi_N(\kappa_N(x)) \\ &\qquad\qquad + \phi_N(\kappa_N(x - h_N)) \Big] \mathrm{d}x \mathrm{d}s \end{aligned} \tag{2.68}$$

De la même manière, que dans le cas continu, on va maintenant obtenir une version intégrale de cette équation. Pour cela comme dans la preuve du Lemme 2.1.3, montrons une forme faible pour une fonction ϕ_N dépendant de (x, t). On fait donc dépendre les coefficients a_i du temps. En appliquant la formule d'Itô à $a_i(t) X_t^i$, on obtient

$$\mathrm{d}(a_i(t) X_t^i) = a_i'(t) X_t^i \mathrm{d}t + a_i(t) \mathrm{d}X_t^i. \tag{2.69}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x), t) u^N(\kappa_N(x), t) \mathrm{d}x &= \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x), 0) u_0(\kappa_N(x)) \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 u^N(\kappa_N(x), s) \big[\partial_s \phi_N(\kappa_N(x), s) \\ &\quad + \frac{\gamma}{h_N^2} \left[\phi_N(\kappa_N(x + h_N), s) - 2\phi_N(\kappa_N(x), s) + \phi_N(\kappa_N(x - h_N), s) \right] \big] \mathrm{d}x \mathrm{d}s \\ &\quad - \int_0^t \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x), s) V'(u^N(\kappa_N(x), s)) \mathrm{d}x \mathrm{d}s \\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 \phi_N(\kappa_N(x), s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{2.70}$$

Prenons alors $\phi_N(y,s) = g^N_{t-s}(x_i,y)$ avec t fixé. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 \phi_N(\kappa_N(y),t)u^N(\kappa_N(y),t)\mathrm{d}y &= \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \phi_N(x_j,t)u^N(x_j,t)\mathrm{d}y \\ &= (N+1)\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u^N(x_i,t)\mathrm{d}y = u^N(x_i,t)\end{aligned} \tag{2.71}$$

et comme g^N est le semi-groupe de Δ^N, on a

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{h_N^2}(\phi_N(\kappa_N(y+h_N),s) - 2\phi_N(\kappa_N(y),s) + \phi_N(\kappa_N(y-h_N),s)) \\ + \partial_s\phi_N(\kappa_N(y),s) = 0.\end{aligned} \tag{2.72}$$

On a donc

$$\begin{aligned}u^N(x_i,t) = &\int_0^1 g^N_t(x_i,\kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \\ &+ \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 g^N_{t-s}(x_i,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \\ &- \int_0^t\int_0^1 g^N_{t-s}(x_i,\kappa_N(y))V'(u^N(\kappa_N(y),s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s.\end{aligned} \tag{2.73}$$

Avec l'interpolation linéaire on obtient un équivalent de la formulation intégrale pour les EDPS ce qui finit la preuve. Le calcul du semi-groupe g_N se fait en calculant l'exponentielle via la diagonalisation de Δ^N, cela est fait dans l'annexe B.3.1. □

2.2.1.2 Cas Neumann

Dans le cadre Neumann, on adapte légèrement les interpolations linéaires mais le raisonnement est exactement le même. On note encore g^N le semi-groupe associé au Laplacien discrétisé. Considérons la matrice

$$p^N(t) = Ne^{t\gamma\Delta^N}, \tag{2.74}$$

avec

$$\Delta^N = N^2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.75}$$

$p^N(t)_{i,j}$ est solution de

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p^N(t)_{i,j} &= \gamma(\Delta^N p^N(t))_{i,j} \\ p^N(0)_{i,j} &= (N+1)\delta_{ij}. \end{cases} \tag{2.76}$$

On considère alors le semi-groupe g^N défini sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1] \times [0,1]$ en linéarisant par morceaux dans les deux dimensions p^N suivant les conditions au bord discrètes. Le calcul du semi-groupe se fait en calculant l'exponentielle via la diagonalisation de Δ^N.

On pose

$$\kappa_N(x) = \frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N} - \frac{1}{2N} \tag{2.77}$$

qui donne l'unique nombre de la forme $\frac{i}{N} - \frac{1}{2N} = x_i$ avec $1 \leqslant i \leqslant N$, tel que

$$x \in \left[\kappa_N(x) - \frac{1}{2N}, \kappa_N(x) + \frac{1}{2N}\right[= \left[\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right[. \tag{2.78}$$

En particulier, on a pour $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, $\kappa_N(x) = x_i$.

On montre alors le lemme qui est une simple réécriture de notre système d'équation en dimension finie sous une forme intégrale discrétisée.

Lemme 2.2.2. *Pour tout $u_0 \in C_{bc}([0,1])$ et tout N entier positif, la fonction u^N définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ par interpolation linéaire entre les points, pour $0 \leqslant i \leqslant N$*

$$u(x_i, t) = X_t^i \tag{2.79}$$

vérifie l'équation

$$\begin{aligned} u^N(x,t) = &\int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y)) u_0(\kappa_N(y)) \mathrm{d}y \\ &- \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) V'(u^N(\kappa_N(y), s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\ &+ \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{2.80}$$

La preuve est exactement la même que dans le cas Dirichlet.

2.2.1.3 Cas périodique

On note encore g^N le semigroupe associé au Laplacien discrétisé. Considérons la matrice

$$p^N(t) = N e^{t\gamma\Delta^N} \tag{2.81}$$

avec

$$\Delta^N = N^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

On considère alors le semi-groupe g^N défini sur $\mathbb{R}^+ \times [0,1] \times [0,1]$ en linéarisant par morceaux dans les deux dimensions p^N où on a étendu p^N avec les conditions au bord. Mais il faut noter que les conditions au bord sont déjà présentes dans la matrice p^N. Le calcul du semi-groupe se fait en calculant l'exponentielle via la diagonalisation de Δ^N.

Définissons

$$\kappa_N(x) = \frac{1}{N}\left\lfloor Nx + \frac{1}{2}\right\rfloor \tag{2.83}$$

qui donne l'unique nombre de la forme $x_i = \frac{i}{N}$ avec $1 \leqslant i \leqslant N-1$, tel que

$$x \in [\kappa_N(x) - \frac{1}{2N}, \kappa_N(x) + \frac{1}{2N}[. \tag{2.84}$$

En particulier pour $x \in [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$, $\kappa_N(x) = x_i$. On définit aussi pour le bord

- pour $x \in [0, \frac{1}{2N}[$, on prend $\kappa_N(x) = 0$
- pour $x \in [1 - \frac{1}{2N}, 1]$, $\kappa_N(x) = 1$.

Le lemme suivant est une réécriture de notre système d'équations en dimension finie sous une forme intégrale.

Lemme 2.2.3. *Pour tout $u_0 \in C_{bc}([0,1])$ et tout N entier positif, la fonction u^N définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ par interpolation linéaire entre les points, pour $0 \leqslant i \leqslant N$*

$$u(x_i, t) = X_t^i \tag{2.85}$$

vérifie l'équation

$$\begin{aligned} u^N(x,t) = &\int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y)) u_0(\kappa_N(y)) \mathrm{d}y \\ &- \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) V'(u^N(\kappa_N(y), s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\ &+ \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{2.86}$$

2.2.2 Contrôle sur le semi-groupe

Lemme 2.2.4. *Pour les estimations en norme L^2 on a*

- *dans le cas des conditions de bord de Dirichlet*

$$\int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{2.87}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{2.88}$$

$$\int_0^t \int_0^1 g_s^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t} \wedge 1) \tag{2.89}$$

$$\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 g_s^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}x \mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t} \wedge 1) \tag{2.90}$$

– *dans le cas des conditions de bord de Neumann ou périodique*

$$\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{2.91}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{2.92}$$

$$\int_0^t\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t}\wedge 1) \tag{2.93}$$

$$\int_0^t\int_0^1\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t}\wedge 1). \tag{2.94}$$

La preuve de ce lemme reposant principalement sur le calcul des vecteurs propres et valeurs propres de Δ^N est dans l'appendice (Lemme B.3.3).

2.2.3 Existence et unicité de la solution

L'existence et l'unicité de la diffusion $(X_t)_t$ pour tout temps ne posent pas de problème car on a simplement

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{1}{h_N}\nabla S_N(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}}\mathrm{d}W_t \tag{2.95}$$

avec

$$S_N(u) = h_N\sum_{i=1}^N \frac{\gamma}{2h_N^2}(u_{i+1}-u_i)^2 + V'(u_i). \tag{2.96}$$

D'où la dérive b de la diffusion est de la forme

$$b(u)_i = -N\nabla S_N(u)_i = \gamma N^2(u_{i+1}-2u_i+u_{i+1}) - V'(u_i) \tag{2.97}$$

et d'après les hypothèses 2.0.4 sur V, on a pour tout $u\in\mathbb{R}^N$

$$u\cdot b(u) \leqslant C(N)(1+\|u\|_2^2). \tag{2.98}$$

On peut alors utiliser un critère classique (voir par exemple [61]).

2.2.4 Moments uniformes

On montre aussi une estimation sur les moments uniformes de notre système discrétisé, par localisation puis ensuite par comparaison comme dans le cas du système infini dimensionnel. On obtient la proposition suivante.

Proposition 2.2.5. *On a pour $p\geqslant 1$ et tout $T>0$,*

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^N(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T) < +\infty. \tag{2.99}$$

De manière classique, on prouve les moments uniformes pour la solution localisée u_R^N (où on a remplacé le drift V' par le drift tronqué b_R). Puis, on utilise un théorème de comparaison 2.2.8 pour contrôler la solution u^N. On procède comme pour la dimension infinie détaillée en annexe A.

On prouve d'abord le lemme suivant.

Lemme 2.2.6. *n Pour tout T, tout $p > 1$, il existe une constante $C(p, T, R)$ indépendante de N, telle que*

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|u_R^N(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R) < +\infty \tag{2.100}$$

Démonstration. Notons d'abord $u_R^N(x,t) = v^N(x,t) + w_R^N(x,t)$ où

$$v^N(x,t) = \int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y)) u_0(\kappa_N(y)) \mathrm{d}y \tag{2.101}$$

$$w_R^N(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) b_R(u^N(\kappa_N(y), s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \tag{2.102}$$

$$+ \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s). \tag{2.103}$$

Pour la solution homogène v^N linéaire par morceaux, on obtient

$$\sup_{[0,1]} \left|v^N(x,t)\right| = \sup_{1\leqslant i\leqslant N} \left|v^N(x_i,t)\right| = \sup_{1\leqslant i\leqslant N} \left|(e^{-\gamma\Delta^N} u_0^N)_i\right| \leqslant \left\|e^{-\gamma\Delta^N}\right\|_\infty \left\|u_0^N\right\|_\infty$$

où u_0^N désigne la condition initiale. Or, la norme d'opérateur $\| \|_\infty$ vérifie $\left\|e^{-\gamma\Delta^N}\right\|_\infty \leqslant \left\|e^{-\gamma\Delta^N}\right\|_2 \leqslant 1$ puisque la matrice Δ^N est positive et son exponentielle a donc toutes ses valeurs propres bornées par 1. Pour tout t, on a

$$\sup_{[0,1]} \left|v^N(x,t)\right| \leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant N+1} |u_0(x_i)| \leqslant \sup_{[0,1]} |u_0(x)|. \tag{2.104}$$

Pour le terme w_R^N, on a, pour tout $t < T$

$$\mathbb{E}[\left|w_R^N(x,t)\right|^p] \leqslant 2^p(I_1 + I_2) \tag{2.105}$$

avec

$$I_1 = \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) b_R(u^N(\kappa_N(y), s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s\right|^p\right] \tag{2.106}$$

$$I_2 = \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)\right|^p\right]. \tag{2.107}$$

D'un côté en utilisant la borne sur b_R (inégalité (2.30)), l'inégalité de Cauchy-Schwartz et la majoration (2.89) du Lemme 2.2.4, on a

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant M_R^p \left|\int_0^t \int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y))\right| \mathrm{d}y \mathrm{d}s\right|^p \\ &\leqslant M_R^p T^{\frac{p}{2}} \left|\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}s\right|^{\frac{p}{2}} \leqslant M_R^p T^{\frac{p}{2}} \left(T + \frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Pour l'autre terme, en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy et la même majoration (2.89) du Lemme 2.2.4, on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)\right|^p\right] \\ &\leqslant C_p \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}s\right|^{\frac{p}{2}}\right] \leqslant C_p \left(T + \frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

On obtient donc bien

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[\left|u_R^N(x,t)\right|^p] \leqslant 2^p \left\|u_0\right\|_\infty^p + 4^p(M_R^p T^{\frac{p}{2}} + C_p)\left(T + \frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}}$$

Remarquons que la constante obtenue est uniforme en N. □

En utilisant les résultats de régularité, on obtient le résultat suivant.

Lemme 2.2.7. *Pour tout T, tout $p > 1$, il existe une constante $C(p,T,R)$ indépendante de N, telle que*

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u_R^N(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R) < +\infty \tag{2.110}$$

Démonstration. D'après le Lemme B.3.5, on a, pour tout $p > 24$ et $\frac{1}{4} > \eta > \frac{6}{p}$

$$\sup_{s,s'\in[t,t']} \sup_{y,y'\in[x,x']} \left|w_R^N(y,s) - w_R^N(y',s')\right| \leqslant Y_N\left[|x-x'|^{1/2-\eta} + |t-t'|^{1/4-\eta}\right] \tag{2.111}$$

où Y_N est une variable aléatoire dans $L^{\frac{1}{p}}$, de norme bornée indépendamment de N. En utilisant le Lemme 2.2.6 et en découpant le temps en intervalles de taille $\frac{T}{n}$ comme pour les lemmes B.2.6 et B.3.6, on obtient, pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left(u_R^N(x,t)\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant \sum_0^{n-1} \mathbb{E}\left[\left|u_R^N\left(\frac{1}{2},\frac{iT}{n}\right)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} + 2\mathbb{E}\left[Y_N^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant n\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|u_R^N(x,t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} + 2\mathbb{E}\left[Y_N^p\right]^{\frac{1}{p}}\right] \leqslant C(R,T,p) < +\infty.\end{aligned}$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant 24$, on utilise l'inégalité de Jensen. □

Mentionnons le théorème sur la comparaison des solutions que nous allons utiliser.

Théorème 2.2.8. *Soit u^N et v^N les solutions des équations suivantes sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$*

$$\begin{aligned}u^N(x,t) &= \int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))b_1(u^N(\kappa_N(y),s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (2.112)\\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \qquad (2.113)\\ v^N(x,t) &= \int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))v_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))b_2(v^N(\kappa_N(y),s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (2.114)\\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \qquad (2.115)\end{aligned}$$

avec les mêmes conditions au bord et supposons que l'une des deux vérifie existence et unicité. Soient u_0 et v_0 des conditions initiales continues. Si $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ et $b_1 \leqslant b_2$ on a alors, pour tous t et x,

$$u^N(x,t) \leqslant v^N(x,t), \qquad p.s. \tag{2.116}$$

Idée de la démonstration. On prouve le résultat sur les processus stochastiques en dimension finie ([50]). □

Via ce théorème de comparaison 2.2.8 on transfère les estimations de moments sur u^N. On définit les fonctions suivantes.

$$b_R^+(u) = V'(u)\mathbb{1}_{]-\infty,R]} + V'(R)\mathbb{1}_{]R,+\infty[} \tag{2.117}$$

$$b_R^-(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R,\infty[} + V'(-R)\mathbb{1}_{]-\infty,-R]} \tag{2.118}$$

et pour $R = R_0$ suffisamment grand, on a, par hypothèse sur V'

$$-b_{R_0}^-(u) \leqslant -b_{R_0}(u) \leqslant -b_{R_0}^+ \quad \text{et} \quad -b_{R_0}^-(u) \leqslant -V'(u) \leqslant -b_{R_0}^+. \tag{2.119}$$

Posons alors u_{N,R_0}^+ et u_{N,R_0}^- les solutions des équations associées. De même que pour V', on a l'existence et l'unicité sur $\mathbb{R}^+$ des solutions u_{N,R_0}^+ et u_{N,R_0}^-.

Proposition 2.2.9. *On a pour tout $T > 0$, $p > p_0$*

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u_{N,R_0}^+(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R_0) < +\infty \tag{2.120}$$

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u_{N,R_0}^-(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R_0) < +\infty. \tag{2.121}$$

Démonstration. Grâce au Théorème de comparaison 2.2.8, on en déduit les encadrements

$$u_{N,R_0}^-(x,t) \leqslant u_{R_0}^N(x,t) \leqslant u_{N,R_0}^+(x,t) \tag{2.122}$$

pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$. Donc en particulier

$$\mathbb{1}_{\left\{u_{N,R_0}^- > 0\right\}} u_{N,R_0}^-(x,t) \leqslant \left|u_{R_0}^N(x,t)\right| \tag{2.123}$$

$$\mathbb{1}_{\left\{u_{N,R_0}^+ < 0\right\}} \left|u_{N,R_0}^+(x,t)\right| \leqslant \left|u_{R_0}^N(x,t)\right|. \tag{2.124}$$

Or d'après la forme de $b_{R_0}^+$ on a

$$\left|b_{R_0}^+(u)\right| \leqslant |V'(u)|\,\mathbb{1}_{]-\infty,R_0]} + M_{R_0}^+ \leqslant M_{R_0}^+[|u|^\alpha\,\mathbb{1}_{u<0} + 1]. \tag{2.125}$$

On en déduit donc

$$\left|u_{N,R_0}^+(x,t)\right|^p \leqslant 3^p[B_1 + B_2 + B_3]. \tag{2.126}$$

On a successivement,

$$B_1 = \left|\int_0^1 u_0^N(y) g_t^N(x,\kappa_N(y))\mathrm{d}y\right|^p \leqslant \sup_{[0,1]} |u_0(y)|^p = \|u_0\|_\infty^p \tag{2.127}$$

puis

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \left| \int_0^t \int_0^1 b^+_{R_0}(u^+_{N,R_0}(\kappa_N(y),s)) g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant \Big| \int_0^t \int_0^1 M^+_{R_0} \left[\left| u^+_{N,R_0}(\kappa_N(y),s) \right|^\alpha \mathbb{1}_{u^+_{N,R_0}(\kappa_N(y),s)<0} + 1 \right] \\
&\quad \times \left| g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) \right| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \Big|^p \qquad (2.128) \\
&\leqslant \left| \int_0^t \int_0^1 M^+_{R_0} [|u_{N,R_0}(\kappa_N(y),t)|^\alpha + 1] \left| g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) \right| \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant \left(M^+_{R_0}\right)^p \left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_{N,R_0}(x,t)|^\alpha + 1 \right]^p \left| \int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant \left(2M^+_{R_0}\right)^p T^{\frac{p}{2}} \left(T + \frac{12}{\gamma} \right)^{\frac{p}{2}} \left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_{N,R_0}(x,t)|^{p\alpha} + 1 \right]. \qquad (2.129)
\end{aligned}
$$

Donc, il existe une constante $C(p,T,R_0)$ indépendante de N

$$
\sup_N \mathbb{E}[\sup_{[0,1]\times[0,T]} B_2(x,t)] < C(p,T,R_0) < +\infty. \qquad (2.130)
$$

Enfin,

$$
B_3 = \left| \int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \right|^p \qquad (2.131)
$$

et d'après le Lemme B.3.6 on a

$$
\sup_N \mathbb{E} \left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} B_3(x,t) \right] < +\infty. \qquad (2.132)
$$

On en déduit alors

$$
\sup_N \mathbb{E} \left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left| u^+_{N,R_0}(x,t) \right|^p \right] < +\infty. \qquad (2.133)
$$

De la même manière en remarquant que

$$
\left| b^-_{R_0}(u) \right| \leqslant |V'(u)| \mathbb{1}_{[-R_0,+\infty[} + C(R_0) \leqslant C(R_0)[|u|^\alpha \mathbb{1}_{u>0} + 1], \qquad (2.134)
$$

on en déduit que

$$
\sup_N \mathbb{E} \left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left| u^-_{N,R_0}(x,t) \right|^p \right] < +\infty. \qquad (2.135)
$$

□

Le théorème de comparaison 2.2.8 permet de montrer la proposition 2.2.5.

Démonstration de la Proposition 2.2.5. On va alors appliquer le Théorème de comparaison 2.2.8 pour

$$
-b^-_{R_0}(u) \leqslant -V'(u) \leqslant -b^+_{R_0}(u). \qquad (2.136)
$$

On a alors les comparaisons suivantes pour tout (x,t)

$$u^-_{N,R_0}(x,t) \leqslant u^N(x,t) \leqslant u^+_{N,R_0}(x,t). \tag{2.137}$$

D'où

$$\left|u^N(x,t)\right| \leqslant \mathbb{1}_{u^N<0}\left|u^-_{N,R_0}(x,t)\right| + \mathbb{1}_{u^N>0}\left|u^+_{N,R_0}(x,t)\right|. \tag{2.138}$$

Donc, on a

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|u^N(x,t)\right|^p \leqslant 2^p\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|u^-_{N,R_0}(x,t)\right|^p + \sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|u^+_{N,R_0}(x,t)\right|^p\right]. \tag{2.139}$$

En particulier pour tout $p \geqslant 1$

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|u^N(x,t)\right|^p\right] < +\infty. \tag{2.140}$$

□

2.3 Convergence vers l'EDPS

On montre alors la convergence de la solution u^N vers la solution u. On reprend pour cela les éléments des articles de Funaki [49], de Gyöngy et Millet [52, 54]. Ces convergences reposent principalement sur la convergence du semi-groupe g^N vers g. Le lemme suivant donne les estimations nécessaires pour ces convergences.

Lemme 2.3.1. *[Gyöngy [52] pour le cas Dirichlet] Pour tous les cas de conditions au bord, pour tout $T>0$, il existe une constante $C(T)$ telle que pour tout $(t,x,y) \in [T,+\infty[\times[0,1]^2$*

$$\left|g^N_t(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right| < \frac{C(T)}{N} \tag{2.141}$$

$$\left|g^N_t(x,y) - g_t(x,y)\right| < \frac{C(T)}{N^2}. \tag{2.142}$$

On en déduit donc que g^N converge uniformément vers g sur $[T,+\infty[\times[0,1]^2$, avec $T>0$. La convergence en $t=0$ est vraie en norme L^2 : il existe une constante C telle que pour tout $x\in[0,1]$ et tout $N \geqslant 1$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g^N_t(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t < \frac{C}{\gamma N} \tag{2.143}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g^N_t(\kappa_N(x),\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t < \frac{C}{\gamma N}. \tag{2.144}$$

La preuve de ce lemme est mise en appendice B.4.2.

2.3.1 Convergence de la solution homogène

Considérons les solutions de l'équation homogène associée dans chaque cas

$$v(x,t) = \int_0^1 g_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y, \qquad v^N(x,t) = \int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y. \tag{2.145}$$

On considère aussi

$$\begin{aligned} w(x,t) &= u(x,t) - v(x,t) \\ &= -\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)V'(u(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (2.146) \\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \qquad (2.147) \\ w^N(x,t) &= u^N(x,t) - v^N(x,t) \\ &= -\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))V'(u^N(\kappa_N(y),s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad (2.148) \\ &\quad + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}^N(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \qquad (2.149) \end{aligned}$$

Tout d'abord, la proposition suivante traite la convergence des solutions du problème homogène données par (2.145), v^N vers v comme dans [52].

Proposition 2.3.2. *[Gyöngy [52] pour le cas Dirichlet] Si u_0 est continue, v^N converge uniformément vers v sur tout compact, en particulier*

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v^N(x,t) - v(x,t)\right| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \tag{2.150}$$

pour tout $T > 0$. De plus, si u_0 est de classe C^3, on a

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v^N(x,t) - v(x,t)\right| \leqslant \frac{C(T)}{\sqrt{N}}. \tag{2.151}$$

De même $v^N(\kappa_N(\cdot),\cdot)$ converge uniformément sur tout compact et si u_0 est de classe C^3, on a en plus

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v^N(\kappa_N(x),t) - v(x,t)\right| \leqslant \frac{C(T)}{\sqrt{N}}. \tag{2.152}$$

Démonstration. Pour toute fonction u_0 de classe C^3, d'après la propriété de semi-groupe de g_t et g_t^N, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_t u_0(x) = \Delta g_t u_0(x) = g_t \Delta u_0(x) \tag{2.153}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g_t^N u_0(x) = \Delta^N g_t^N u_0(x) = g_t^N \Delta^N u_0(x). \tag{2.154}$$

Sans prendre en compte les conditions au bord, on a

$$\Delta^N u_0(y) = \frac{1}{h_N^2}\left[u_0(\kappa_N(y) - h_N) - 2u_0(\kappa_N(y)) + u_0(\kappa_N(y) + h_N)\right]. \tag{2.155}$$

On obtient donc

$$v^N(x,t) = \int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \tag{2.156}$$

$$= \widehat{u_0}(x) + \int_0^t \int_0^1 g_s^N(x,\kappa_N(y))\Delta^N u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{2.157}$$

$$v(x,t) = \int_0^1 g_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y = u_0(x) + \int_0^t \int_0^1 g_s(x,y)\Delta u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{2.158}$$

où $\widehat{u_0}$ est l'interpolation linéaire de u_0 et Δ^N est la version approchée du Laplacien sur $[0,1]$ avec les conditions au bord. D'où

$$\left|v^N(x,t) - v(x,t)\right| \leqslant I_1 + I_2 + I_3 \tag{2.159}$$

avec

$$I_1 = |\widehat{u_0}(x) - u_0(x)| \tag{2.160}$$

$$I_2 = \left|\int_0^t \int_0^1 g_s^N(x,\kappa_N(y))(\Delta^N u_0(y) - \Delta u_0(y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \tag{2.161}$$

$$I_3 = \left|\int_0^t \int_0^1 \left[g_s^N(x,\kappa_N(y)) - g_s(x,y)\right]\Delta u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|. \tag{2.162}$$

Pour u_0 de classe C^3, on a

$$|I_1| \leqslant \|u_0''\|_\infty h_N^2 \tag{2.163}$$

$$\sup_{y\in[0,1]} \left|\Delta^N u_0(y) - \Delta u_0(y)\right| \leqslant \left\|u_0^{(3)}\right\|_\infty h_N \tag{2.164}$$

car la première est une interpolation linéaire de pas h_N (à l'ordre 1) d'une fonction au moins C^2, et la seconde inégailté est une approximation à l'ordre 0 de la dérivée seconde d'une fonction C^3. On obtient donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.89),

$$|I_2| \leqslant \left\|u_0^{(3)}\right\|_\infty \frac{12h_N}{\gamma}. \tag{2.165}$$

Pour I_3, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (2.143), on obtient

$$\begin{aligned} |I_3| &\leqslant \left|\int_0^t \int_0^1 \left[g_s^N(x,\kappa_N(y)) - g_s(x,y)\right]^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{1/2} \sqrt{T\int_0^1 u_0''(y)^2\mathrm{d}y} \\ &\leqslant \frac{C\sqrt{T}\,\|u_0''\|_2}{\sqrt{\gamma N}}. \end{aligned} \tag{2.166}$$

Pour la deuxième approximation (2.152), on a de même

$$\left|v^N(\kappa_N(x),t) - v(x,t)\right| \leqslant I_1' + I_2' + I_3' \tag{2.167}$$

avec

$$I_1' = |\widehat{u_0}(\kappa_N(x)) - u_0(x)| \tag{2.168}$$

$$I_2' = \left|\int_0^t \int_0^1 g_s^N(\kappa_N(x),\kappa_N(y))(\Delta^N u_0(y) - \Delta u_0(y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right| \tag{2.169}$$

$$I_3' = \left|\int_0^t \int_0^1 \left[g_s^N(\kappa_N(x),\kappa_N(y)) - g_s(x,y)\right]\Delta u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|. \tag{2.170}$$

Comme u_0 est au moins C^1, l'approximation $\widehat{u_0}(\kappa_N(x))$ est donc à l'ordre 0 et on a

$$I_1' \leqslant \|u_0'\|_\infty h_N. \tag{2.171}$$

Comme précédemment, on a la même borne que I_2 sur I_2'. Pour I_3', il suffit d'utiliser la convergence (2.144).

Dans le cas où u_0 est seulement continue, il suffit dans les deux cas d'approximer uniformément par une fonction de classe C^3. □

2.3.2 Convergence des processus localisés

Rappelons que l'on note, pour u une fonction sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$, pour tout $T > 0$,

$$\|u\|_{\infty,T} = \sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|. \tag{2.172}$$

On montre la convergence des solutions pour le processus localisé (avec le drift b_R au lieu de V'). On met R en indice pour montrer que l'on considère les processus localisés.

Proposition 2.3.3. *On a, pour tout $T > 0$ et tout $p > 24$*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}&\left[\left\|w_R^N - w_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant C''(p,T,R)\left[N^{-\frac{1}{2}+\frac{4}{p}} + \sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|\right].\end{aligned} \tag{2.173}$$

En particulier si u_0 est au moins C^3, on a

$$\mathbb{E}\left[\left\|w_R^N - w_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C''(p,T,R)}{N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}}. \tag{2.174}$$

Démonstration. On a $\left|w_R^N(x,t) - w_R(x,t)\right|^p \leqslant 2^p(H_1 + H_2)$ avec

$$H_1(x,t) = \Big|\int_0^t\int_0^1 \left[g_{t-s}(x,y)b_R(u_R(y,s)) - g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))\right. \tag{2.175}$$

$$\left.\times\, b_R(u_R^N(\kappa_N(y),s))\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^p \tag{2.176}$$

$$H_2(x,t) = (2\varepsilon)^{\frac{p}{2}}\left|\int_0^t\int_0^1 \left[g_{t-s}(x,y) - g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))\right] W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right|^p. \tag{2.177}$$

On a, tout d'abord

$$H_1(x,t) \leqslant 2^p(H_3(x,t) + H_4(x,t))$$

avec, en utilisant Cauchy-Schwarz et la convergence L^2 du semi-groupe (inégalité (2.143))

$$\begin{aligned}
H_3 &= \left|\int_0^t \int_0^1 [g_{t-s}(x,y) - g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))] b_R(u_R(y,s)) \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p \\
&\leqslant \left|\int_0^t \int_0^1 \left[g_{t-s}(x,y) - g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))\right]^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{\frac{p}{2}} \\
&\quad \times \left|\int_0^t \int_0^1 |b_R(u_R(y,s))|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{\frac{p}{2}} \qquad (2.178)\\
&\leqslant \frac{C^{p/2}}{(\gamma N)^{p/2}} M_R^p T^{p/2}. \qquad (2.179)
\end{aligned}$$

De même en utilisant Cauchy-Schwarz, l'inégalité (2.21) et le fait que b_R est globalement lipschitzien puis l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
H_4 &= \left|\int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)) \left[b_R(u_R(y,s)) - b_R(u^N_R(\kappa_N(y),s))\right] \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p \\
&\leqslant \left|\int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p/2} \\
&\quad \times \left|\int_0^t \int_0^1 \left|b_R(u_R(y,s)) - b_R(u^N_R(\kappa_N(y),s))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p/2} \qquad (2.180)\\
&\leqslant \left(\frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}} L_R^p \left[\int_0^t \int_0^1 \left|u_R(y,s) - u^N_R(\kappa_N(y),s)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]^{p/2} \\
&\leqslant \left(\frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}} L_R^p T^{\frac{p-2}{p}} \int_0^t \int_0^1 \left|u_R(y,s) - u^N_R(\kappa_N(y),s)\right|^p \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\leqslant \left(\frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}} L_R^p T^{\frac{p-2}{p}} 2^p \Big[T \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|^p \\
&\quad + \int_0^t \sup_{[0,1]\times[0,s]} \left|w_R(y,r) - w^N_R(\kappa_N(y),r)\right|^p \mathrm{d}s\Big]. \qquad (2.181)
\end{aligned}$$

On en déduit donc, pour tout $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}
H_1 &\leqslant \frac{C(p,T,R)}{N^{p/2}} + C(p,T,R) \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|^p \\
&\quad + C(p,T,R) \int_0^t \sup_{[0,1]\times[0,s]} \left|w_R(y,r) - w^N_R(\kappa_N(y),r)\right|^p \mathrm{d}s. \qquad (2.182)
\end{aligned}$$

Pour H_2, on a

$$H_2(x,t) = \sqrt{2\varepsilon}^p \left|B(x,t) - B^N(x,t)\right|^p. \qquad (2.183)$$

d'après les Lemmes B.2.6 et B.3.6, pour $p > 24$ il existe donc une variable aléatoire Y_N telle que $\sup_N \mathbb{E}[Y_N^p] < +\infty$ et telle que pour tous x, x' et $t < T$

$$\left|B(x,t) - B^N(x,t) - (B(x',t) - B^N(x',t))\right| < Y_N \left|x - x'\right|^{\frac{1}{2} - \frac{4}{p}}. \qquad (2.184)$$

En procédant comme dans le Lemme B.3.6, en introduisant les points de discrétisation x_i, on a

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|B(x,t) - B^N(x,t)\right| \leqslant \max_{i=1\dots N} \left|B(x_i,t) - B^N(x_i,t)\right| + Y_N h_N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}. \quad (2.185)$$

On obtient alors

$$\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} \left|B(x,t) - B^N(x,t)\right| \leqslant \max_{i=1\dots N} \sup_{[0,T]} \left|B(x_i,t) - B^N(x_i,t)\right| \quad (2.186)$$

$$+ Y_N h_N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}. \quad (2.187)$$

D'où,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} H_2(x,t)\right] \leqslant 2^p \mathbb{E}\left[\max_{i=1\dots N} \sup_{[0,T]} H_2(x_i,t)\right] + 2^p \sqrt{2\varepsilon}^p \mathbb{E}[Y_N^p] h_N^{\frac{p}{2}-4} \quad (2.188)$$

$$\leqslant 2^p N \sup_{[0,1]} \mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]} H_2(x_i,t)\right] + 2^p \sqrt{2\varepsilon}^p \mathbb{E}[Y_N^p] \frac{1}{N^{\frac{p}{2}-4}}. \quad (2.189)$$

Or d'après l'inégalité de Burkholder-Davis-Gundy et l'inégalité (2.143), pour tout $x \in [0,1]$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]} H_2(x,t)\right] \leqslant \sqrt{2\varepsilon}^p \left[\int_0^T \int_0^1 \left|g_{t-s}(x,y) - g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]^{p/2} \quad (2.190)$$

$$\leqslant \frac{C\sqrt{2\varepsilon}^p}{(\gamma N)^{\frac{p}{2}}}. \quad (2.191)$$

Donc en utilisant l'équation (2.188), on obtient

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} H_2(x,t)\right] \leqslant \frac{C 2^p \sqrt{2\varepsilon}^p}{\gamma^{\frac{p}{2}}} \times \frac{1}{N^{\frac{p}{2}-4}} + 2^p \sqrt{2\varepsilon}^p \sup_N \mathbb{E}[Y_N^p] \frac{1}{N^{\frac{p}{2}-4}} \quad (2.192)$$

$$\leqslant \frac{C(p,T)}{N^{\frac{p}{2}-4}}. \quad (2.193)$$

Posons $H(t) = \mathbb{E}\left[\left\|w_R^N - w_R\right\|_{\infty,t}^p\right]$. On obtient alors, pour $p > 24$

$$H(t) \leqslant \frac{C(p,T,R)}{N^{\frac{p}{2}-4}} + C(p,T,R) \sup_{[0,1]\times[0,t]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|^p$$

$$+ C(p,T,R)\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{[0,1]\times[0,s]} \left|w_R(y,r) - w_R^N(\kappa_N(y),r)\right|^p \mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant \frac{C(p,T,R)}{N^{\frac{p}{2}-4}} + C(p,T,R) \sup_{[0,1]\times[0,t]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|^p \quad (2.194)$$

$$+ C(p,T,R) \int_0^t H(s)\mathrm{d}s. \quad (2.195)$$

Donc, en utilisant le Lemme de Gronwall, on en déduit que

$$\begin{aligned} H(T) &= \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|w_R^N(x,s) - w_R(x,s)\right|^p\right] \\ &\leqslant C'(T,p,R)\left[\frac{1}{N^{\frac{p}{2}-4}} + \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|^p\right] \end{aligned} \tag{2.196}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\left\|w_R^N - w_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\qquad \leqslant C''(p,T,R)\left[\frac{1}{N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}} + \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|v(y,s) - v^N(\kappa_N(y),s)\right|\right]. \end{aligned} \tag{2.197}$$

Donc en particulier si u_0 est au moins C^3, on en déduit avec la Proposition 2.3.2,

$$\mathbb{E}\left[\left\|w_R^N - w_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C''(p,T,R)}{N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}}. \tag{2.198}$$

□

On montre donc la convergence de u_R^N vers u_R dans $L^p(\Omega, C([0,1]\times[0,T]))$ pour tout $p > 2$.

Proposition 2.3.4. *Pour toute condition initiale u_0 continue, on a, pour tout $p \geqslant 1$ et $T > 0$,*

$$\mathbb{E}\left[\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.199}$$

En particulier si u_0 est de classe C^3 et $p > 24$

$$\mathbb{E}\left[\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{C(p,T,R)}{N^{\frac{1}{2}-\frac{4}{p}}}. \tag{2.200}$$

Démonstration. On utilise les deux propositions précédentes (2.3.3 et 2.3.2). □

On montre alors que si u_0 est C^3, grâce à la vitesse de convergence, on peut déduire la convergence uniforme presque sure.

Proposition 2.3.5. *Pour tout $R > 0$, $T > 0$ et $0 < \eta < \frac{1}{2}$ et u_0 de classe C^3, il existe ξ_R variable aléatoire finie presque sûrement telle que*

$$\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\xi_R}{N^\eta}. \tag{2.201}$$

En particulier, u_R^N converge uniformément vers u_R presque sûrement.

Démonstration. Définissons la variable aléatoire

$$\xi_R = \sup_N N^\eta \left\| u_R^N - u_R \right\|_{\infty,T} \tag{2.202}$$

alors il suffit de montrer $\xi_R < +\infty$, presque sûrement. Définissons

$$\xi_R^N = N^\eta \left\| u_R^N - u_R \right\|_{\infty,T}. \tag{2.203}$$

Pour tout $p > 24$, on a d'après l'inégalité (2.200)

$$\mathbb{E}[(\xi_R^N)^p] \leqslant \frac{C(p,T,R)}{N^{p(\frac{1}{2}-\eta)-1}} < +\infty. \tag{2.204}$$

En particulier, on en déduit que ξ_R^N est finie presque sûrement. En utilisant l'inégalité de Markov

$$\sum_{N\geqslant 1} \mathbb{P}\left[\xi_R^N \geqslant 1\right] \leqslant \sum_{N\geqslant 1} \mathbb{E}[(\xi_R^N)^p] \leqslant \sum_{N\geqslant 1} \frac{C(R,T,p)}{N^{p(1/2-\eta)-4}} < +\infty$$

pour $p\left(\frac{1}{2}-\eta\right) > 5$. On a alors

$$\sum_{N\geqslant 1} \mathbb{P}\left[\xi_R^N \geqslant 1\right] < +\infty. \tag{2.205}$$

On en déduit en utilisant le Lemme de Borel-Cantelli

$$\mathbb{P}\left[\left(\limsup_{N\to\infty}\{\xi_R^M \geqslant 1\}\right)^c\right] = \mathbb{P}\left[\cup_{N\geqslant 1} \cap_{M\geqslant N} \{\xi_R^M \leqslant 1\}\right] = 1. \tag{2.206}$$

Donc, il existe $N(\omega)$, tel que

$$\forall M \geqslant N(\omega), \xi_R^M(\omega) \leqslant 1 \tag{2.207}$$

et donc

$$\xi_R(\omega) = \max_{1\leqslant k\leqslant N(\omega)} \xi_R^k + \sup_{k\geqslant N(\omega)} \xi_R^k \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant N(\omega)} \xi_R^k + 1 < +\infty. \tag{2.208}$$

□

2.3.3 Convergence uniforme vers la solution

On va maintenant montrer les mêmes résultats pour les processus non localisés u^N et u. On considère dorénavant u_0 de classe C^3. Rappelons les définitions suivantes, pour tout $R > 0$

$$\tau_R = \inf\{t, \|u_R(t)\|_\infty > R\} = \inf\{t, \exists x, |u_R(x,t)| > R\} \tag{2.209}$$

et

$$\tau_R^N = \inf\{t, \left\|u_R^N(t)\right\|_\infty > R\} = \inf\{t, \exists x, \left|u_R^N(x,t)\right| > R\}. \tag{2.210}$$

u_R et u_R^N sont les solutions de nos systèmes avec le drift b_R.

Proposition 2.3.6. *On a, pour tout $T > 0$ et $\delta > 0$*

$$\mathbb{P}[\tau_{R-\delta} < T \text{ ou } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T] \xrightarrow[R\to\infty]{} 0. \tag{2.211}$$

Démonstration. Soit $\eta < \frac{1}{2}$ et $M > 0$. Pour $\omega \in \{\xi_R < M\}$, on a alors d'après le Lemme 2.3.5 pour $N \geqslant N(M) = (\frac{M}{\delta})^{\frac{1}{\eta}}$

$$\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T} < \delta \tag{2.212}$$

donc

$$\left\|u_R^N\right\|_{\infty,T} < \|u_R\|_{\infty,T} + \delta \tag{2.213}$$

Pour $\omega \in \{\tau_{R-\delta} \geqslant T\} = \left\{\|u_R\|_{\infty,T} < R - \delta\right\}$

$$\left\|u_R^N(\omega)\right\|_{\infty,T} < R \tag{2.214}$$

c'est-à-dire $\tau_R^N > T$ pour tout $N > N(M)$, on en déduit alors

$$\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N \geqslant T. \tag{2.215}$$

D'où, par passage au complémentaire pour tout $M > 0$

$$\left\{\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T\right\} \cap \{\xi_R < M\} \subset \{\tau_{R-\delta} < T\} \cap \{\xi_R < M\} \tag{2.216}$$

donc

$$\mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} < T].$$

Or par construction de la solution u, on a $\{\tau_{R-\delta} < T\} \subset \left\{\|u\|_{\infty,T} > R - \delta\right\}$ et donc

$$\mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}\left[\|u\|_{\infty,T} > R - \delta\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\|u\|_{\infty,T}^p\right]}{(R-\delta)^p} \tag{2.217}$$

avec $\mathbb{E}\left[\|u\|_{\infty,T}^p\right] < +\infty$ d'après la Proposition 2.1.5. On obtient finalement

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T \text{ ou } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N \leqslant T] &\leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T] \\ &\quad + \mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] + \mathbb{P}[\xi_R \geqslant M] \qquad (2.218)\\ &\leqslant \frac{2\mathbb{E}[\|u\|_{\infty,T}^p]}{(R-\delta)^p} + \mathbb{P}[\xi_R \geqslant M]. \qquad (2.219)\end{aligned}$$

Or $\xi_R < \infty$ presque surement, donc pour tout R

$$\mathbb{P}[\xi_R \geqslant M] \xrightarrow[M\to\infty]{} 0. \tag{2.220}$$

On a alors en prenant la limite en M puis la limite en R

$$\lim_{R\to\infty} \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T \text{ ou } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N \leqslant T] = 0. \tag{2.221}$$

□

Proposition 2.3.7. *Pour tout $T > 0$ et $0 < \eta < \frac{1}{2}$, il existe Ξ variable aléatoire finie presque surement telle que*

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\Xi}{N^\eta} \tag{2.222}$$

En particulier, on a presque surement la convergence uniforme.

Démonstration. Fixons $1 > \delta > 0$ et posons pour tout $R > 1$

$$\Omega_R = \{\tau_{R-\delta} > T \text{ et } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N > T\} \tag{2.223}$$

D'après la proposition précédente $\mathbb{P}(\Omega_R) \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$. De plus comme les temps τ_R et τ_R^N sont croissant en R, les ensemble Ω_R sont aussi croissant en R. On en déduit

$$\mathbb{P}[\cup_{R>1}\Omega_R] = 1 \tag{2.224}$$

et donc comme $\mathbb{P}[\{\xi_R < \infty\}] = 1$ pour tout R on en déduit

$$\mathbb{P}[\cup_{R>1}^{\infty}\widetilde{\Omega}_R] = 1 \tag{2.225}$$

où $\widetilde{\Omega}_R = \Omega_R \cap \{\xi_R < \infty\}$. Sur $\widetilde{\Omega}_R$ il existe $N_0(\omega)$ tel que

$$\forall N \geqslant N_0(\omega), \tau_R^N > T \text{ et } \tau_{R-\delta} > T. \tag{2.226}$$

D'où pour tout $N \geqslant N_0(\omega)$, d'après la Proposition 2.3.5 et comme ξ_R est finie sur $\widetilde{\Omega}_R$

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} = \left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T} \leqslant \xi_R N^{-\eta}. \tag{2.227}$$

Donc pour tout N, il existe une variable aléatoire ξ'_R finie telle que

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \xi'_R N^{-\eta}. \tag{2.228}$$

Définissons alors pour $R \geqslant 3$

$$\Xi(\omega) = \xi'_R(\omega) \text{ sur } \widetilde{\Omega}_R \setminus \widetilde{\Omega}_{R-1} \tag{2.229}$$

$$\Xi(\omega) = \xi'_2(\omega) \text{ sur } \widetilde{\Omega}_2 \tag{2.230}$$

On a, sur $\cup_{R>1}\widetilde{\Omega}_R$ ensemble de probabilité 1,

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \Xi N^{-\eta} \tag{2.231}$$

ce qui fini la preuve. □

On a pour finir le résultat suivant

Proposition 2.3.8. *Pour tout $T > 0$ et $p > 2$*

$$\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.232}$$

Démonstration. On va utiliser la proposition précédente et le fait que $\left\|u^N\right\|_{\infty,T}$ a des moments uniformes en N (Lemme 2.2.5). Posons comme précédemment

$$\Omega_R = \{\tau_{R-\delta} > T \text{ et } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N > T\} \tag{2.233}$$

$$\Omega_{R,N_0} = \cap_{N\geqslant N_0}\{\tau_{R-\delta} > T \text{ et } \tau_R^N > T\}. \tag{2.234}$$

On a donc

$$\Omega_R = \cup_{N_0}\Omega_{R,N_0}. \tag{2.235}$$

Or on a, pour tout $N \geqslant N_0$

$$\begin{aligned}\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p &= \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}} \left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p + \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}^c} \left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p \\ &= \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}} \left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p + \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}^c} \left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p \end{aligned} \tag{2.236}$$

et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les Propositions 2.1.5 et 2.2.5

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p\right] + \mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c]^{\frac{1}{2}}\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^{2p}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p\right] + C(p,T)\mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.237}$$

Or d'après la convergence de u_R^N, on en déduit

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right] \leqslant C(p,T)\mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.238}$$

Fixons $\eta > 0$. On a vu que $\mathbb{P}[\Omega_R] \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$ et Ω_R est croissant en R. On choisit R tel que

$$\mathbb{P}[\Omega_R^c] \leqslant \eta. \tag{2.239}$$

De même, Ω_{R,N_0} est croissant en N_0, donc

$$\mathbb{P}[\Omega_R^c] = \mathbb{P}[\cap_{N_0}\Omega_{R,N_0}^c] = \lim_{N_0\to\infty} \mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c] \leqslant \eta. \tag{2.240}$$

On choisit alors N_0 tel que

$$\mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c] \leqslant 2\eta. \tag{2.241}$$

On a ainsi montré, pour tout $\eta > 0$

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p] \leqslant C(p,T)\sqrt{2\eta}. \tag{2.242}$$

Cela permet de conclure

$$\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.243}$$

□

Démonstration du Théorème 2.0.5. Il suffit d'appliquer les Propositions 2.3.7 et 2.3.8. □

Notons

$$\|u\|_{q,T} = \sup_{[0,T]} \left[\int_0^1 |u(x,t)|^q \, \mathrm{d}x \right]^{\frac{1}{q}}. \tag{2.244}$$

D'après la remarque que pour $u \in C([0,1] \times [0,T])$

$$\|u\|_{q,T} \leqslant \|u\|_{\infty,T}. \tag{2.245}$$

On a aussi le corollaire suivant.

Corollaire 2.3.9. *Pour tout $u_0 \in C^3_{bc}([0,1])$, pour tout $T > 0$, $p, q \geqslant 1$, u^N converge vers u aux sens suivants*

- *dans $L^p(\Omega, C([0,T], L^q([0,1])))$, c'est-à-dire*

$$\mathbb{E}\left[\left\| u^N - u \right\|_{q,T}^p \right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.246}$$

- *presque surement dans $C([0,T], L^q([0,1]))$: pour tout $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe Ξ_q variable aléatoire finie presque surement telle que*

$$\left\| u^N - u \right\|_{q,T} \leqslant \frac{\Xi_q}{N^\eta}. \tag{2.247}$$

2.4 Convergence des temps de transition

On va maintenant conclure cette partie en montrant la convergence des temps de transition. Fixons u_0 notre condition initiale et $u_f \in C([0,1])$ la fonction au voisinage de laquelle on veut quantifier l'approche. On va considérer par facilité nos voisinages comme des boules ouvertes soit dans $L^q([0,1])$ avec $q \geqslant 1$ ou dans $C([0,1])$ en norme uniforme. On définit donc pour ρ positif donnant la taille de la boule et $q \in [1, +\infty]$

$$\tau(\rho, q) = \inf \left\{ t > 0, \|u(t) - u_f\|_q < \rho \right\} \tag{2.248}$$

$$\tau^N(\rho, q) = \inf \left\{ t > 0, \left\| u^N(t) - u_f^N \right\|_q < \rho \right\} \tag{2.249}$$

où u_f^N est l'approximation linéaire par morceaux de la fonction u_f aux points x_i dépendant des conditions au bord considérées.

On montre le lemme suivant.

Lemme 2.4.1. *Pour tout $\delta > 0$, $T > 0$ et $q \in [1, \infty]$, on a*

$$\tau(\rho+\delta, q) \wedge T \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \wedge T \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \wedge T \leqslant \tau(\rho-\delta, q) \wedge T \qquad p.s. \tag{2.250}$$

Démonstration. D'après le Théorème 2.0.5 et le Corollaire 2.3.9, on a presque surement

$$\left\| u^N - u \right\|_{q,T} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.251}$$

On a aussi, puisque u_f est continue

$$\left\| u_f^N - u_f \right\|_q \xrightarrow[N\to\infty]{} 0. \tag{2.252}$$

Donc il existe $N_0(\omega)$ tel que pour $N \geqslant N_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|u^N(t) - u(t)\right\|_q (\omega) \leqslant \left\|u^N - u\right\|_{q,T} (\omega) < \frac{\delta}{2} \tag{2.253}$$

et

$$\left\|u_f^N - u_f\right\|_q < \frac{\delta}{2}. \tag{2.254}$$

Or, une simple inégalité triangulaire nous donne, pour $t \leqslant \tau(\rho+\delta, q) \wedge T$ et $N \geqslant N_0(\omega)$

$$\begin{aligned}\rho + \delta \leqslant \|u(t) - u_f\|_q \leqslant \left\|u(t) - u^N(t)\right\|_q + \left\|u^N(t) - u_f^N\right\|_q \\ + \left\|u_f^N - u_f\right\|_q \leqslant \delta + \left\|u^N(t) - u_f^N\right\|_q\end{aligned} \tag{2.255}$$

c'est-à-dire que $t \leqslant \tau^N(\rho, q) \wedge T$. On en déduit alors que

$$\tau(\rho+\delta, q) \wedge T \leqslant \liminf_{N\to\infty} [\tau^N(\rho, q) \wedge T]. \tag{2.256}$$

De la même manière, on a pour $t \leqslant \tau^N(\rho, q) \wedge T$ et $N \geqslant N_0(\omega)$

$$\begin{aligned}\rho \leqslant \left\|u^N(t) - u_f^N\right\|_q \leqslant \left\|u^N(t) - u(t)\right\|_q + \|u(t) - u_f\|_q \\ + \left\|u_f - u_f^N\right\|_q \leqslant \delta + \|u(t) - u_f\|_q .\end{aligned} \tag{2.257}$$

On en déduit alors que

$$\limsup_{N\to\infty} [\tau^N(\rho, q) \wedge T] \leqslant \tau(\rho-\delta, q) \wedge T. \tag{2.258}$$

□

Proposition 2.4.2. *Pour tout ρ strictement positif*

$$\tau(\rho, q) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \tau(\rho^-, q). \tag{2.259}$$

où

$$\tau(\rho^-, q) = \lim_{\delta\to 0^+} \tau(\rho-\delta, q). \tag{2.260}$$

Démonstration. Par convergence monotone, on a d'après le Lemme 2.4.1

$$\tau(\rho+\delta, q) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \tau(\rho-\delta, q) \qquad \text{p.s.} \tag{2.261}$$

D'après les définitions de $\tau(\rho, q)$ et $\tau^N(\rho, q)$, on voit que les fonctions $\rho \mapsto \tau(\rho, q)$ et $\rho \mapsto \tau^N(\rho, q)$ sont continue à droite et limitée à gauche. On en déduit donc

$$\tau(\rho, q) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \tau(\rho^-, q). \tag{2.262}$$

□

Théorème 2.4.3. *Pour presque tout $\rho > 0$,*

$$\tau^N(\rho, q) \xrightarrow[N\to\infty]{} \tau(\rho, q) \quad p.s. \tag{2.263}$$

et

$$\mathbb{E}[\tau^N(\rho, q)] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{E}[\tau(\rho, q)]. \tag{2.264}$$

Démonstration. D'après le lemme précédent, en tout point de continuité de $\rho \mapsto \tau(\rho, p)$ on a

$$\tau(\rho, q) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho, q) \leqslant \tau(\rho, q). \tag{2.265}$$

En dehors de $\mathscr{N} \subset \Omega$ un ensemble négligeable, $\rho \mapsto \tau(\rho, q)$ est une fonction càdlàg et croissante, elle a donc au plus un nombre dénombrable de discontinuités. On définit l'ensemble des discontinuités $\mathscr{P}$, pour $\omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}$,

$$\mathcal{D}(\omega) = \left\{\rho \in \mathbb{R}^+, \tau(\rho^-, q) \neq \tau(\rho, q)\right\} \qquad \mathscr{P} = \cup_{\omega\in\mathscr{N}^c} \{\omega\} \times \mathcal{D}(\omega). \tag{2.266}$$

Pour chaque ω, $\mathcal{D}(\omega)$ est au plus dénombrable, donc de mesure de Lebesgue nulle. On définit alors, pour tout $\rho > 0$

$$\mathcal{N}(\rho) = \Pi_\rho(\mathscr{D}) \subset \Omega \tag{2.267}$$

avec Π_ρ la projection sur Ω suivant $\Omega \times \{\rho\}$. $\mathcal{N}(\rho)$ est l'ensemble des ω pour lesquels τ est discontinue en ρ. On a alors

$$\mathscr{P} = \cup_{\omega\in\mathscr{N}^c} \{\omega\} \times \mathcal{D}(\omega) = \cup_{\rho\in\mathbb{R}_*^+} \mathcal{N}(\rho) \times \{\rho\}. \tag{2.268}$$

On a alors par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_*^+} \mathbb{P}[\mathcal{N}(\rho)]\mathrm{d}\rho &= \int_{\mathbb{R}_*^+} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\mathcal{N}(\rho)}]\mathrm{d}\rho \\ &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}_*^+} \mathbb{1}_{\mathscr{P}}(\omega, \rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathscr{N}^c} \int_{\mathbb{R}_*^+} \mathbb{1}_{\mathcal{D}(\omega)}(\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = 0\end{aligned} \tag{2.269}$$

puisque pour tout $\omega \in \mathscr{N}^c$

$$\int_{\mathbb{R}_*^+} \mathbb{1}_{\mathcal{D}(\omega)}(\rho)\mathrm{d}\rho = 0. \tag{2.270}$$

On en déduit alors simplement qu'il existe un ensemble de mesure nulle $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^+$ tel que pour tout $\rho \notin \mathscr{D}$, $\mathbb{P}[\mathcal{N}(\rho)] = 0$. D'où pour tout $\rho \notin \mathscr{D}$ et $\omega \notin \mathcal{N}(\rho)$, on a $\tau(\rho^-, q)(\omega) = \tau(\rho, q)(\omega)$. Donc

$$\tau^N(\rho, q) \xrightarrow[N\to\infty]{} \tau(\rho, q) \quad \omega\text{-p.s., } \rho\text{-p.p.} \tag{2.271}$$

On obtient la convergence des espérances par convergence dominée. On a pour tout $\rho \notin \mathscr{D}$

$$\mathbb{E}[\tau^N(\rho, q)] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{E}[\tau(\rho, q)]. \tag{2.272}$$

□

Chapitre 3

Estimations uniformes des capacités

Cette partie est soumise sous forme d'un article écrit en collaboration avec Anton Bovier et Sylvie Méléard. Il a été publié dans *Electronic Journal of Probability*, Vol. 15, pp.323-345 [4]. Nous prouvons des estimations uniformes en la dimension des capacités et du potentiel d'équilibre qui sont nécessaires à la convergence des temps de transition.

Uniform estimates for metastable transition times in a coupled bistable system

Abstract We consider a coupled bistable N-particle system on $\mathbb{R}^N$ driven by a Brownian noise, with a strong coupling corresponding to the synchronised regime. Our aim is to obtain sharp estimates on the metastable transition times between the two stable states, both for fixed N and in the limit when N tends to infinity, with error estimates uniform in N. These estimates are a main step towards a rigorous understanding of the metastable behavior of infinite dimensional systems, such as the stochastically perturbed Ginzburg-Landau equation. Our results are based on the potential theoretic approach to metastability.

MSC 2000 subject classification: 82C44, 60K35.

Key-words: Metastability, coupled bistable systems, stochastic Ginzburg-Landau equation, metastable transition time, capacity estimates.

3.1 Introduction

The aim of this paper is to analyze the behavior of metastable transition times for a gradient diffusion model, independently of the dimension. Our method is based on potential theory and requires the existence of a reversible invariant probability measure. This measure exists for Brownian driven diffusions with gradient drift.

To be specific, we consider here a model of a chain of coupled particles in a double well potential driven by Brownian noise (see e.g. [9]). I.e., we consider

the system of stochastic differential equations

$$\mathrm{d}X_\epsilon(t) = -\nabla F_{\gamma,N}(X_\epsilon(t))\mathrm{d}t + \sqrt{2\epsilon}\mathrm{d}B(t), \tag{3.1}$$

where $X_\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^N$ and

$$F_{\gamma,N}(x) = \sum_{i\in\Lambda}\left(\frac{1}{4}x_i^4 - \frac{1}{2}x_i^2\right) + \frac{\gamma}{4}\sum_{i\in\Lambda}(x_i - x_{i+1})^2, \tag{3.2}$$

with $\Lambda = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ and $\gamma > 0$ is a parameter. B is a N dimensional Brownian motion and $\varepsilon > 0$ is the intensity of the noise. Each component (particle) of this system is subject to force derived from a bistable potential. The components of the system are coupled to their nearest neighbor with intensity γ and perturbed by independent noises of constant variance ε. While the system without noise, i.e. $\varepsilon = 0$, has several stable fixpoints, for $\varepsilon > 0$ transitions between these fixpoints will occur at suitable timescales. Such a situation is called metastability.

For fixed N and small ε, this problem has been widely studied in the literature and we refer to the books by Freidlin and Wentzell [47] and Olivieri and Vares [82] for further discussions. In recent years, the potential theoretic approach, initiated by Bovier, Eckhoff, Gayrard, and Klein [21] (see [18] for a review), has allowed to give very precise results on such transition times and notably led to a proof of the so-called Eyring-Kramers formula which provides sharp asymptotics for these transition times, for any fixed dimension. However, the results obtained in [21] do not include control of the error terms that are uniform in the dimension of the system.

Our aim in this paper is to obtain such uniform estimates. These estimates constitute a the main step towards a rigorous understanding of the metastable behavior of infinite dimensional systems, i.e. stochastic partial differential equations (SPDE) such as the stochastically perturbed Ginzburg-Landau equation. Indeed, the deterministic part of the system (3.1) can be seen as the discretization of the drift part of this SPDE, as has been noticed e.g. in [10]. For a heuristic discussion of the metastable behavior of this SPDE, see e.g. [76] and [94]. Rigorous results on the level of the large deviation asymptotics were obtained e.g. by Faris and Jona-Lasinio [42], Martinelli et al. [78], and Brassesco [23].

In the present paper we consider only the simplest situation, the so-called synchronization regime, where the coupling γ between the particles is so strong that there are only three relevant critical points of the potential $F_{\gamma,N}$ (3.2). A generalization to more complex situations is however possible and will be treated elsewhere.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2 we recall briefly the main results from the potential theoretic approach, we recall the key properties of the potential $F_{\gamma,N}$, and we state the results on metastability that follow from the results of [21] for fixed N. In Section 3 we deal with the case when N tends to infinity and state our main result, Theorem 3.3.1. In Section 4 we prove the main theorem through sharp estimates on the relevant capacities.

In the remainder of the paper we adopt the following notations:

- for $t \in \mathbb{R}$, $\lfloor t \rfloor$ denotes the unique integer k such that $k \leq t < k+1$;
- $\tau_D \equiv \inf\{t > 0 : X_t \in D\}$ is the hitting time of the set D for the process (X_t);
- $B_r(x)$ is the ball of radius $r > 0$ and center $x \in \mathbb{R}^N$;
- for $p \geq 1$, and $(x_k)_{k=1}^N$ a sequence, we denote the L^P-norm of x by

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p \right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

Acknowledgments. This paper is based on the master thesis of F.B.[1] that was written in part during a research visit of F.B. at the International Research Training Group "Stochastic models of Complex Systems" at the Berlin University of Technology under the supervision of A.B. F.B. thanks the IRTG SMCP and TU Berlin for the kind hospitality and the ENS Cachan for financial support. A.B.'s research is supported in part by the German Research Council through the SFB 611 and the Hausdorff Center for Mathematics.

3.2 Preliminaries

3.2.1 Key formulas from the potential theory approach

We recall briefly the basic formulas from potential theory that we will need here. The diffusion X_ϵ is the one introduced in (3.1) and its infinitesimal generator is denoted by L. Note that L is the closure of the operator

$$L = \varepsilon e^{F_{\gamma,N}/\varepsilon} \nabla e^{-F_{\gamma,N}/\varepsilon} \nabla. \tag{3.4}$$

For A, D regular open subsets of $\mathbb{R}^N$, let $h_{A,D}(x)$ be the harmonic function (with respect to the generator L) with boundary conditions 1 in A and 0 in D. Then, for $x \in (A \cup D)^c$, one has $h_{A,D}(x) = \mathbb{P}_x[\tau_A < \tau_D]$. The equilibrium measure, $e_{A,D}$, is then defined (see e.g. [31]) as the unique measure on ∂A such that

$$h_{A,D}(x) = \int_{\partial A} e^{-F_{\gamma,N}(y)/\varepsilon} G_{D^c}(x,y) e_{A,D}(dy), \tag{3.5}$$

where G_{D^c} is the Green function associated with the generator L on the domain D^c. This yields readily the following formula for the hitting time of D (see. e.g. [21]):

$$\int_{\partial A} \mathbb{E}_z[\tau_D] e^{-F_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} e_{A,D}(dz) = \int_{D^c} h_{A,D}(y) e^{-F_{\gamma,N}(y)/\varepsilon} dy. \tag{3.6}$$

The capacity, $\mathrm{cap}\,(A, D)$, is defined as

$$\mathrm{cap}\,(A,D) = \int_{\partial A} e^{-F_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} e_{A,D}(dz). \tag{3.7}$$

Therefore,

$$\nu_{A,D}(dz) = \frac{e^{-F_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} e_{A,D}(dz)}{\mathrm{cap}\,(A,D)} \tag{3.8}$$

is a probability measure on ∂A, that we may call the equilibrium probability. The equation (3.6) then reads

$$\int_{\partial A} \mathbb{E}_z[\tau_D]\nu_{A,D}(dz) = \mathbb{E}_{\nu_{A,D}}[\tau_D] = \frac{\int_{D^c} h_{A,D}(y)e^{-F_{\gamma,N}(y)/\varepsilon}dy}{\mathrm{cap}\,(A,D)}. \tag{3.9}$$

The strength of this formula comes from the fact that the capacity has an alternative representation through the Dirichlet variational principle (see e.g. [48]),

$$\mathrm{cap}\,(A,D) = \inf_{h\in\mathcal{H}} \Phi(h), \tag{3.10}$$

where

$$\mathcal{H} = \Big\{h \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N, e^{-F_{\gamma,N}(u)/\varepsilon}du) \,|\, \forall z\,, h(z) \in [0,1]\,, h_{|A} = 1\,, h_{|D} = 0\Big\}, \tag{3.11}$$

and the Dirichlet form Φ is given, for $h \in \mathcal{H}$, as

$$\Phi(h) = \varepsilon \int_{(A\cup D)^c} e^{-F_{\gamma,N}(u)/\varepsilon}\, \|\nabla h(u)\|_2^2\, du. \tag{3.12}$$

Remark. Formula (3.9) gives an average of the mean transition time with respect to the equilibrium measure, that we will extensively use in what follows. A way to obtain the quantity $\mathbb{E}_z[\tau_D]$ consists in using Hölder and Harnack estimates [51] (as developed in Corollary 3.2.2)[21], but it is far from obvious whether this can be extended to give estimates that are uniform in N.

Formula (3.9) highlights the two terms for which we will prove uniform estimates: the capacity (Proposition 3.4.3) and the mass of $h_{A,D}$ (Proposition 3.4.9).

3.2.2 Description of the Potential

Let us describe in detail the potential $F_{\gamma,N}$, its stationary points, and in particular the minima and the 1-saddle points, through which the transitions occur.

The coupling strength γ specifies the geometry of $F_{\gamma,N}$. For instance, if we set $\gamma = 0$, we get a set of N bistable independent particles, thus the stationary points are

$$x^* = (\xi_1, \dots, \xi_N) \quad \forall i \in [\![1, N]\!],\ \xi_i \in \{-1, 0, 1\}. \tag{3.13}$$

To characterize their stability, we have to look to their Hessian matrix whose signs of the eigenvalues give us the index saddle of the point. It can be easily shown that, for $\gamma = 0$, the minima are those of the form (3.13) with no zero coordinates and the 1-saddle points have just one zero coordinate. As γ increases, the structure of the potential evolves and the number of stationary points decreases from 3^N to 3. We notice that, for all γ, the points

$$I_\pm = \pm(1, 1, \cdots, 1) \quad O = (0, 0, \cdots, 0) \tag{3.14}$$

are stationary, furthermore $I_\pm$ are minima. If we calculate the Hessian at the point O, we have

$$\nabla^2 F_{\gamma,N}(O) = \begin{pmatrix} -1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & -1+\gamma & -\frac{\gamma}{2} & & & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma}{2} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & -\frac{\gamma}{2} \\ -\frac{\gamma}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{\gamma}{2} & -1+\gamma \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

whose eigenvalues are, for all $\gamma > 0$ and for $0 \le k \le N-1$,

$$\lambda_{k,N} = -\left(1 - 2\gamma \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right)\right). \tag{3.16}$$

Set, for $k \ge 1$, $\gamma_k^N = \frac{1}{2\sin^2(k\pi/N)}$. Then these eigenvalues can be written in the form

$$\begin{cases} \lambda_{k,N} & = \lambda_{N-k,N} = -1 + \frac{\gamma}{\gamma_k^N},\ 1 \le k \le N-1 \\ \lambda_{0,N} & = \lambda_0 = -1. \end{cases} \tag{3.17}$$

Note that $(\gamma_k^N)_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor}$ is a decreasing sequence, and so as γ increases, the number of non-positive eigenvalues $(\lambda_{k,N})_{k=0}^{N-1}$ decreases. When $\gamma > \gamma_1^N$, the only negative eigenvalue is -1. Thus

$$\gamma_1^N = \frac{1}{2\sin^2(\pi/N)} \tag{3.18}$$

is the threshold of the synchronization regime.

Lemma 3.2.1 (Synchronization Regime)**.** *If $\gamma > \gamma_1^N$, the only stationary points of $F_{\gamma,N}$ are $I_\pm$ and O. $I_\pm$ are minima, O is a 1-saddle.*

This lemma was proven in [9] by using a Lyapunov function. This configuration is called the synchronization regime because the coupling between the particles is so strong that they all pass simultaneously through their respective saddle points in a transition between the stable equilibria ($I_\pm$).

In this paper, we will focus on this regime.

3.2.3 Results for fixed N

Let $\rho > 0$ and set $B_\pm \equiv B_\rho(I_\pm)$, where $B_\rho(x)$ denotes the ball of radius ρ centered at x. Equation (3.9) gives, with $A = B_-$ and $D = B_+$,

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_-,B_+}}[\tau_{B_+}] = \frac{\int_{B_+^c} h_{B_-,B_+}(y) e^{-F_{\gamma,N}(y)/\varepsilon} dy}{\operatorname{cap}(B_-, B_+)}. \tag{3.19}$$

First, we obtain a sharp estimate for this transition time for fixed N:

Theorem 3.2.1. *Let $N > 2$ be given. For $\gamma > \gamma_1^N = \frac{1}{2\sin^2(\pi/N)}$, let $\sqrt{N} > \rho \ge \epsilon > 0$. Then*

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_-,B_+}}[\tau_{B_+}] = 2\pi c_N e^{\frac{N}{4\epsilon}}(1 + O(\sqrt{\varepsilon|\ln\varepsilon|^3})) \tag{3.20}$$

with

$$c_N = \left[1 - \frac{3}{2+2\gamma}\right]^{\frac{e(N)}{2}} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left[1 - \frac{3}{2+\frac{\gamma}{\gamma_k^N}}\right] \tag{3.21}$$

where $e(N) = 1$ *if* N *is even and* 0 *if* N *is odd.*

Remark. The power 3 at $\ln \varepsilon$ is missing in [21] by mistake.

Remark. As mentioned above, for any fixed dimension, we can replace the probability measure ν_{B_-,B_+} by the Dirac measure on the single point I_-, using Hölder and Harnack inequalities [21]. This gives the following corollary:

Corollary 3.2.2. *Under the assumptions of Theorem 3.2.1, there exists* $\alpha > 0$ *such that*

$$\mathbb{E}_{I_-}[\tau_{B_+}] = 2\pi c_N e^{\frac{N}{4\epsilon}}(1 + O(\sqrt{\varepsilon|\ln \varepsilon|^3}). \tag{3.22}$$

Proof of the theorem. We apply Theorem 3.2 in [21]. For $\gamma > \gamma_1^N = \frac{1}{2\sin^2(\pi/N)}$, let us recall that there are only three stationary points: two minima $I_\pm$ and one saddle point O. One easily checks that $F_{\gamma,N}$ satisfies the following assumptions:

- $F_{\gamma,N}$ is polynomial in the $(x_i)_{i\in\Lambda}$ and so clearly C^3 on $\mathbb{R}^N$.
- $F_{\gamma,N}(x) \geq \frac{1}{4}\sum_{i\in\Lambda} x_i^4$ so $F_{\gamma,N} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
- $\|\nabla F_{\gamma,N}(x)\|_2 \sim \|x\|_3^3$ as $\|x\|_2 \to \infty$.
- As $\Delta F_{\gamma,N}(x) \sim 3\|x\|_2^2$ ($\|x\|_2 \to \infty$), then $\|\nabla F_{\gamma,N}(x)\| - 2\Delta F_{\gamma,N}(x) \sim \|x\|_3^3$.

The Hessian matrix at the minima $I_\pm$ has the form

$$\nabla^2 F_{\gamma,N}(I_\pm) = \nabla^2 F_{\gamma,N}(O) + 3\mathrm{Id}, \tag{3.23}$$

whose eigenvalues are simply

$$\nu_{k,N} = \lambda_{k,N} + 3. \tag{3.24}$$

Then Theorem 3.1 of [21] can be applied and yields, for $\sqrt{N} > \rho > \epsilon > 0$, (recall the negative eigenvalue of the Hessian at O is -1)

$$\mathbb{E}_{\nu_{B_-,B_+}}[\tau_{B_+}] = \frac{2\pi e^{\frac{N}{4\epsilon}}\sqrt{|\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O))|}}{\sqrt{\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(I_-))}}(1 + O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln \epsilon|^3)). \tag{3.25}$$

Finally, (3.17) and (3.24) give:

$$\begin{aligned}\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(I_-)) = \prod_{k=0}^{N-1} \nu_{k,N} &= 2\nu_{N/2,N}^{e(N)} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \nu_{k,N}^2 \\ &= 2^N(1+\gamma)^{e(N)} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(1 + \frac{\gamma}{2\gamma_k^N}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}\left|\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O))\right| = \prod_{k=0}^{N-1} \lambda_{k,N} &= \lambda_{N/2,N}^{e(N)} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \lambda_{k,N}^2 \\ &= (2\gamma-1)^{e(N)} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_k^N}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Then,

$$c_N = \frac{\sqrt{\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(I_-))}}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O))|}} = \left[1 - \frac{3}{2+2\gamma}\right]^{\frac{e(N)}{2}} \prod_{k=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \left[1 - \frac{3}{2+\frac{\gamma}{\gamma_k^N}}\right] \tag{3.28}$$

and Theorem 3.2.1 is proved. □

Let us point out that the use of these estimates is a major obstacle to obtain a mean transition time starting from a single stable point with uniform error terms. That is the reason why we have introduced the equilibrium probability. However, there are still several difficulties to be overcome if we want to pass to the limit $N \uparrow \infty$.

(i) We must show that the prefactor c_N has a limit as $N \uparrow \infty$.

(ii) The exponential term in the hitting time tends to infinity with N. This suggests that one needs to rescale the potential $F_{\gamma,N}$ by a factor $1/N$, or equivalently, to increase the noise strength by a factor N.

(iii) One will need uniform control of error estimates in N to be able to infer the metastable behavior of the infinite dimensional system. This will be the most subtle of the problems involved.

3.3 Large N limit

As mentioned above, in order to prove a limiting result as N tends to infinity, we need to rescale the potential to eliminate the N-dependence in the exponential. Thus henceforth we replace $F_{\gamma,N}(x)$ by

$$G_{\gamma,N}(x) = N^{-1} F_{\gamma,N}(x). \tag{3.29}$$

This choice actually has a very nice side effect. Namely, as we always want to be in the regime where $\gamma \sim \gamma_1^N \sim N^2$, it is natural to parametrize the coupling constant with a fixed $\mu > 1$ as

$$\gamma^N = \mu \gamma_1^N = \frac{\mu}{2\sin^2(\frac{\pi}{N})} = \frac{\mu N^2}{2\pi^2}(1 + o(1)). \tag{3.30}$$

Then, if we replace the lattice by a lattice of spacing $1/N$, i.e. $(x_i)_{i\in\Lambda}$ is the discretization of a real function x on $[0,1]$ ($x_i = x(i/N)$), the resulting potential converges formally to

$$G_{\gamma^N,N}(x) \underset{N\to\infty}{\to} \int_0^1 \left(\frac{1}{4}[x(s)]^4 - \frac{1}{2}[x(s)]^2\right) ds + \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{[x'(s)]^2}{2} ds, \tag{3.31}$$

with $x(0) = x(1)$.

In the Euclidean norm, we have $\|I_\pm\|_2 = \sqrt{N}$, which suggests to rescale the size of neighborhoods. We consider, for $\rho > 0$, the neighborhoods $B_\pm^N = B_{\rho\sqrt{N}}(I_\pm)$. The volume $V(B_-^N) = V(B_+^N)$ goes to 0 if and only if $\rho < 1/2\pi e$, so given such a ρ, the balls $B_\pm^N$ are not as large as one might think. Let us also observe that

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\|x\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|_{L^2[0,1]} = \int_0^1 |x(s)|^2 ds. \tag{3.32}$$

Therefore, if $x \in B_+^N$ for all N, we get in the limit, $\|x-1\|_{L^2[0,1]} < \rho$.

The main result of this paper is the following uniform version of Theorem 3.2.1 with a rescaled potential $G_{\gamma,N}$.

Theorem 3.3.1. *Let $\mu \in]1,\infty[$, then there exists a constant, A, such that for all $N \geq 2$ and all $\varepsilon > 0$,*

$$\frac{1}{N}\mathbb{E}_{\nu_{B_-^N,B_+^N}}[\tau_{B_+^N}] = 2\pi c_N e^{1/4\varepsilon}(1+R(\varepsilon,N)), \tag{3.33}$$

where c_N is defined in Theorem 3.2.1 and $|R(\varepsilon,N)| \leq A\sqrt{\varepsilon|\ln\varepsilon|^3}$. In particular,

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{N\uparrow\infty}\frac{1}{N}e^{-1/4\varepsilon}\mathbb{E}_{\nu_{B_-^N,B_+^N}}[\tau_{B_+^N}] = 2\pi V(\mu) \tag{3.34}$$

where

$$V(\mu) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\mu k^2-1}{\mu k^2+2}\right] < \infty. \tag{3.35}$$

Remark. The appearance of the factor $1/N$ may at first glance seem disturbing. It corresponds however to the appropriate time rescaling when scaling the spatial coordinates i to i/N in order to recover the pde limit.

The proof of this theorem will be decomposed in two parts:
- convergence of the sequence c_N (Proposition 3.3.1);
- uniform control of the denominator (Proposition 3.4.3) and the numerator (Proposition 3.4.9) of Formula (3.19).

Convergence of the prefactor c_N. Our first step will be to control the behavior of c_N as $N \uparrow \infty$. We prove the following:

Proposition 3.3.1. *The sequence c_N converges: for $\mu > 1$, we set $\gamma = \mu\gamma_1^N$, then*

$$\lim_{N\uparrow\infty} c_N = V(\mu), \tag{3.36}$$

with $V(\mu)$ defined in (3.35).

Remark. This proposition immediately leads to

Corollary 3.3.2. *For $\mu \in]1,\infty[$, we set $\gamma = \mu\gamma_1^N$, then*

$$\lim_{N\uparrow\infty}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{e^{-\frac{1}{4\varepsilon}}}{N}\mathbb{E}_{\nu_{B_-^N,B_+^N}}[\tau_{B_+^N}] = 2\pi V(\mu). \tag{3.37}$$

Of course such a result is unsatisfactory, since it does not tell us anything about a large system with specified fixed noise strength. To be able to interchange the limits regarding ε and N, we need a uniform control on the error terms.

Proof of the proposition. The rescaling of the potential introduces a factor $\frac{1}{N}$ for the eigenvalues, so that (3.25) becomes

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\nu_{B_-^N,B_+^N}}[\tau_{B_+^N}] &= \frac{2\pi e^{\frac{1}{4\epsilon}} N^{-N/2+1}\sqrt{|\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O))|}}{N^{-N/2}\sqrt{\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(I_-))}}(1+O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|^3)) \\ &= 2\pi N c_N e^{\frac{1}{4\epsilon}}(1+O(\sqrt{\epsilon}\,|\ln\epsilon|^3)).\end{aligned}$$

Then, with $u_k^N = \frac{3}{2+\mu\frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N}}$,

$$c_N = \left[1-\frac{3}{2+2\mu\gamma_1^N}\right]^{\frac{\epsilon(N)}{2}} \prod_{k=1}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}\left[1-u_k^N\right]. \tag{3.38}$$

To prove the convergence, let us consider the $(\gamma_k^N)_{k=1}^{N-1}$. For all $k\geq 1$, we have

$$\frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N} = \frac{\sin^2(\frac{k\pi}{N})}{\sin^2(\frac{\pi}{N})} = k^2+(1-k^2)\frac{\pi^2}{3N^2}+o\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{3.39}$$

Hence, $u_k^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} v_k = \frac{3}{2+\mu k^2}$. Thus, we want to show that

$$c_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \prod_{k=1}^{+\infty}(1-v_k) = V(\mu). \tag{3.40}$$

Using that, for $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$,

$$0 < t^2(1-\frac{t^2}{3}) \leq \sin^2(t) \leq t^2, \tag{3.41}$$

we get the following estimates for $\frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N}$: set $a=\left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)$, for $1\leq k\leq N/2$,

$$ak^2 = \left(1-\frac{\pi^2}{12}\right)k^2 \leq k^2\left(1-\frac{k^2\pi^2}{3N^2}\right) \leq \frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N} = \frac{\sin^2(\frac{k\pi}{N})}{\sin^2(\frac{\pi}{N})} \leq \frac{k^2}{1-\frac{\pi^2}{3N^2}}. \tag{3.42}$$

Then, for $N\geq 2$ and for all $1\leq k\leq N/2$,

$$-\frac{k^4\pi^2}{3N^2} \leq \frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N}-k^2 \leq \frac{k^2\pi^2}{3N^2\left(1-\frac{\pi^2}{3N^2}\right)} \leq \frac{k^2\pi^2}{N^2}. \tag{3.43}$$

Let us introduce

$$V_m = \prod_{k=1}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}(1-v_k), \quad U_{N,m} = \prod_{k=1}^{\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor}\left(1-u_k^N\right). \tag{3.44}$$

Then

$$\left|\ln\frac{U_{N,N}}{V_N}\right| = \left|\ln\prod_{k=1}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}\frac{1-u_k^N}{1-v_k}\right| \leq \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{N-1}{2}\rfloor}\left|\ln\frac{1-u_k^N}{1-v_k}\right|. \tag{3.45}$$

Using (3.42) and (3.43), we obtain, for all $1 \leq k \leq N/2$,

$$\left|\frac{v_k - u_k^N}{1 - v_k}\right| = \frac{3\mu \left|\frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N} - k^2\right|}{(-1 + \mu k^2)\left(2 + \mu \frac{\gamma_1^N}{\gamma_k^N}\right)} \leq \frac{\mu k^4 \pi^2}{N^2 (-1 + \mu k^2)(2 + \mu a k^2)} \leq \frac{C}{N^2} \tag{3.46}$$

with C a constant independent of k. Therefore, for $N > N_0$,

$$\left|\ln \frac{1 - u_k^N}{1 - v_k}\right| = \left|\ln\left(1 + \frac{v_k - u_k^N}{1 - v_k}\right)\right| \leq \frac{C'}{N^2}. \tag{3.47}$$

Hence

$$\left|\ln \frac{U_{N,N}}{V_N}\right| \leq \frac{C'}{N} \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.48}$$

As $\sum |v_k| < +\infty$, we get $\lim_{N \to +\infty} V_N = V(\mu) > 0$, and thus (3.40) is proved. □

3.4 Estimates on capacities

To prove Theorem 3.3.1, we prove uniform estimates of the denominator and numerator of (3.9), namely the capacity and the mass of the equilibrium potential.

3.4.1 Uniform control in large dimensions for capacities

A crucial step is the control of the capacity. This will be done with the help of the Dirichlet principle (3.10). We will obtain the asymptotics by using a Laplace-like method. The exponential factor in the integral (3.12) is largely predominant at the points where h is likely to vary the most, that is around the saddle point O. Therefore we need some good estimates of the potential near O.

3.4.1.1 Local Taylor approximation

This subsection is devoted to the quadratic approximations of the potential which are quite subtle. We will make a change of basis in the neighborhood of the saddle point O that will diagonalize the quadratic part.

Recall that the potential $G_{\gamma,N}$ is of the form

$$G_{\gamma,N}(x) = -\frac{1}{2N}(x, [\mathrm{Id} - \Delta]x) + \frac{1}{4N}\|x\|_4^4. \tag{3.49}$$

where the operator Δ is given by $\Delta = \gamma\left[\mathrm{Id} - \frac{1}{2}(\S + \S^*)\right]$ and $(\S x)_j = x_{j+1}$. The linear operator $(\mathrm{Id} - \Delta) = -\nabla^2 F_{\gamma,N}(O)$ has eigenvalues $-\lambda_{k,N}$ and eigenvectors $v_{k,N}$ with components $v_{k,N}(j) = \omega^{jk}$, with $\omega = e^{i2\pi/N}$.
Let us change coordinates by setting

$$\hat{x}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{-jk} x_k. \tag{3.50}$$

Then the inverse transformation is given by

$$x_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \omega^{jk}\hat{x}_j = x_k(\hat{x}). \tag{3.51}$$

Note that the map $x \to \hat{x}$ maps $\mathbb{R}^N$ to the set

$$\widehat{\mathbb{R}}^N = \left\{\hat{x} \in \mathbb{C}^N : \hat{x}_k = \overline{\hat{x}_{N-k}}\right\} \tag{3.52}$$

endowed with the standard inner product on $\mathbb{C}^N$.
Notice that, expressed in terms of the variables $\hat{x}$, the potential (3.2) takes the form

$$G_{\gamma,N}(x(\hat{x})) = \frac{1}{2N^2}\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k,N}|\hat{x}_k|^2 + \frac{1}{4N}\|x(\hat{x})\|_4^4. \tag{3.53}$$

Our main concern will be the control of the non-quadratic term in the new coordinates. To that end, we introduce the following norms on Fourier space:

$$\|\hat{x}\|_{p,\mathcal{F}} = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} |\hat{x}|^p\right)^{1/p} = \frac{1}{N^{1/p}}\|\hat{x}\|_p. \tag{3.54}$$

The factor $1/N$ is the suitable choice to make the map $x \to \hat{x}$ a bounded map between L^p spaces. This implies that the following estimates hold (see [86], Vol. 1, Theorem IX.8):

Lemma 3.4.1. *With the norms defined above, we have*
(i) the Parseval identity,

$$\|x\|_2 = \|\hat{x}\|_{2,\mathcal{F}}, \tag{3.55}$$

and
(ii) the Hausdorff-Young inequalities: for $1 \le q \le 2$ and $p^{-1} + q^{-1} = 1$, there exists a finite, N-independent constant C_q such that

$$\|x\|_p \le C_q\|\hat{x}\|_{q,\mathcal{F}}. \tag{3.56}$$

In particular

$$\|x\|_4 \le C_{4/3}\|\hat{x}\|_{4/3,\mathcal{F}}. \tag{3.57}$$

Let us introduce the change of variables, defined by the complex vector z, as

$$z = \frac{\hat{x}}{N}. \tag{3.58}$$

Let us remark that $z_0 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} x_k \in \mathbb{R}$. In the variable z, the potential takes the form

$$\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) = G_{\gamma,N}\left(x(Nz)\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{k,N}|z_k|^2 + \frac{1}{4N}\|x(Nz)\|_4^4. \tag{3.59}$$

Moreover, by (3.55) and (3.58)

$$\|x(Nz)\|_2^2 = \|Nz\|_{2,\mathcal{F}}^2 = \frac{1}{N}\|Nz\|_2^2. \tag{3.60}$$

In the new coordinates the minima are now given by

$$I_{\pm} = \pm(1, 0, \ldots, 0). \tag{3.61}$$

In addition, $z(B_-^N) = z(B_{\rho\sqrt{N}}(I_-)) = B_\rho(I_-)$ where the last ball is in the new coordinates.

Lemma 3.4.1 will allow us to prove the following important estimates. For $\delta > 0$, we set

$$C_\delta = \left\{ z \in \widehat{\mathbb{R}}^N : |z_k| \leq \delta \frac{r_{k,N}}{\sqrt{|\lambda_{k,N}|}},\ 0 \leq k \leq N-1 \right\}, \tag{3.62}$$

where $\lambda_{k,N}$ are the eigenvalues of the Hessian at O as given in (3.17) and $r_{k,N}$ are constants that will be specified below. Using (3.42), we have, for $3 \leq k \leq N/2$,

$$\lambda_{k,N} \geq k^2 \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) \mu - 1. \tag{3.63}$$

Thus $(\lambda_{k,N})$ verifies $\lambda_{k,N} \geq ak^2$, for $1 \leq k \leq N/2$, with some a, independent of N.

The sequence $(r_{k,N})$ is constructed as follows. Choose an increasing sequence, $(\rho_k)_{k\geq 1}$, and set

$$\begin{cases} r_{0,N} & = 1 \\ r_{k,N} & = r_{N-k,N} = \rho_k, \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor. \end{cases} \tag{3.64}$$

Let, for $p \geq 1$,

$$K_p = \left(\sum_{k\geq 1} \frac{\rho_k^p}{k^p} \right)^{1/p}. \tag{3.65}$$

Note that if K_{p_0} is finite then, for all $p_1 > p_0$, K_{p_1} is finite. With this notation we have the following key estimate.

Lemma 3.4.2. *For all $p \geq 2$, there exist finite constants B_p, such that, for $z \in C_\delta$,*

$$\|x(Nz)\|_p^p \leq \delta^p N B_p \tag{3.66}$$

if K_q is finite, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Proof. The Hausdorff-Young inequality (Lemma 3.4.1) gives us:

$$\|x(Nz)\|_p \leq C_q \|Nz\|_{q,\mathcal{F}}. \tag{3.67}$$

Since $z \in C_\delta$, we get

$$\|Nz\|_{q,\mathcal{F}}^q \leq \delta^q N^{q-1} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{r_{k,N}^q}{\lambda_k^{q/2}}. \tag{3.68}$$

Then

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{r_{k,N}^q}{\lambda_k^{q/2}} = \frac{1}{\lambda_0^{q/2}} + 2 \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{r_{k,N}^q}{\lambda_k^{q/2}} \leq \frac{1}{\lambda_0^{q/2}} + \frac{2}{a^{q/2}} \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{\rho_k^q}{k^q} \leq \frac{1}{\lambda_0^{q/2}} + \frac{2}{a^{q/2}} K_q^q = D_q^q \tag{3.69}$$

which is finite if K_q is finite. Therefore,

$$\|x(Nz)\|_p^p \leq \delta^p N^{(q-1)\frac{p}{q}} C_q^p D_q^p, \tag{3.70}$$

which gives us the result since $(q-1)\frac{p}{q} = 1$. □

We have all what we need to estimate the capacity.

3.4.1.2 Capacity Estimates

Let us now prove our main theorem.

Proposition 3.4.3. *There exists a constant A, such that, for all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and for all N,*

$$\frac{\operatorname{cap}\left(B_+^N, B_-^N\right)}{N^{N/2-1}} = \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} \frac{1}{\sqrt{|\det(\nabla F_{\gamma,N}(0))|}} \left(1 + R(\varepsilon, N)\right), \tag{3.71}$$

where $|R(\varepsilon, N)| \leq A\sqrt{\varepsilon|\ln\varepsilon|^3}$.

The proof will be decomposed into two lemmata, one for the upper bound and the other for the lower bound. The proofs are quite different but follow the same idea. We have to estimate some integrals. We isolate a neighborhood around the point O of interest. We get an approximation of the potential on this neighborhood, we bound the remainder and we estimate the integral on the suitable neighborhood.

In what follows, constants independent of N are denoted A_i.

Upper bound. The first lemma we prove is the upper bound for Proposition 3.4.3.

Lemma 3.4.4. *There exists a constant A_0 such that for all ε and for all N,*

$$\frac{\operatorname{cap}\left(B_+^N, B_-^N\right)}{N^{N/2-1}} \leq \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} \frac{1}{\sqrt{|\det(\nabla F_{\gamma,N}(0))|}} \left(1 + A_0\varepsilon|\ln\varepsilon|^2\right). \tag{3.72}$$

Proof. This lemma is proved in [21] in the finite dimension setting. We use the same strategy, but here we take care to control the integrals appearing uniformly in the dimension.

We will denote the quadratic approximation of $\widetilde{G}_{\gamma,N}$ by F_0, i.e.

$$F_0(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\lambda_{k,N}|z_k|^2}{2} = -\frac{z_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda_{k,N}|z_k|^2}{2}. \tag{3.73}$$

On C_δ, we can control the non-quadratic part through Lemma 3.4.2.

Lemma 3.4.5. *There exists a constant A_1 and δ_0, such that for all N, $\delta < \delta_0$ and all $z \in C_\delta$,*

$$\left|\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) - F_0(z)\right| \leq A_1\delta^4. \tag{3.74}$$

Proof. Using (3.59), we see that

$$\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) - F_0(z) = \frac{1}{4N}\|x(Nz)\|_4^4. \tag{3.75}$$

We choose a sequence $(\rho_k)_{k\geq 1}$ such that $K_{4/3}$ is finite.

Thus, it follows from Lemma 3.4.2, with $A_1 = \frac{1}{4}B_4$, that

$$\left|\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2\right| \leq A_1\delta^4, \tag{3.76}$$

as desired. □

We obtain the upper bound of Lemma 3.4.4 by choosing a test function h^+. We change coordinates from x to z as explained in (3.58). A simple calculation shows that

$$\|\nabla h(x)\|_2^2 = N^{-1}\|\nabla\tilde{h}(z)\|_2^2, \tag{3.77}$$

where $\tilde{h}(z) = h(x(z))$ under our coordinate change.

For δ sufficiently small, we can ensure that, for $z \notin C_\delta$ with $|z_0| \leq \delta$,

$$\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) \geq F_0(z) = -\frac{z_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2 \geq -\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2 \geq \delta^2. \tag{3.78}$$

Therefore, the strip

$$S_\delta \equiv \{x|\, x = x(Nz),\, |z_0| < \delta\} \tag{3.79}$$

separates $\mathbb{R}^N$ into two disjoint sets, one containing I_- and the other one containing I_+, and for $x \in S_d \setminus C_\delta$, $G_{\gamma,N}(x) \geq \delta^2$.

The complement of S_δ consists of two connected components Γ_+, Γ_- which contain I_+ and I_-, respectively. We define

$$\tilde{h}^+(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \in \Gamma_- \\ 0 & \text{for } z \in \Gamma_+ \\ f(z_0) & \text{for } z \in C_\delta \\ \text{arbitrary} & \text{on } S_\delta \setminus C_\delta \text{ but } \|\nabla h^+\|_2 \leq \frac{c}{\delta}. \end{cases}, \tag{3.80}$$

where f satisfies $f(\delta) = 0$ and $f(-\delta) = 1$ and will be specified later.

Taking into account the change of coordinates, the Dirichlet form (3.12) evaluated on h^+ provides the upper bound

$$\begin{aligned}\Phi(h^+) &= N^{\frac{N}{2}-1}\varepsilon\int_{z((B_-^N\cup B_+^N)^c)} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}\left\|\nabla\tilde{h}^+(z)\right\|_2^2 dz \\ &\leq N^{\frac{N}{2}-1}\left[\varepsilon\int_{C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}\left(f'(z_0)\right)^2 dz + \varepsilon\delta^{-2}c^2\int_{S_\delta\setminus C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}dz\right].\end{aligned} \tag{3.81}$$

The first term will give the dominant contribution. Let us focus on it first. We replace $\widetilde{G}_{\gamma,N}$ by F_0, using the bound (3.74), and for suitably chosen δ, we

obtain

$$\int_{C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} \left(f'(z_0)\right)^2 dz \le \left(1 + 2A_1 \frac{\delta^4}{\varepsilon}\right) \int_{C_\delta} e^{-F_0(z)/\varepsilon} \left(f'(z_0)\right)^2 dz$$
$$= \left(1 + 2A_1 \frac{\delta^4}{\varepsilon}\right) \int_{D_\delta} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k,N}|z_k|^2} dz_1 \dots dz_{N-1}$$
$$\times \int_{-\delta}^{\delta} \left(f'(z_0)\right)^2 e^{z_0^2/2\varepsilon} dz_0.$$

Here we have used that we can write C_δ in the form $[-\delta, \delta] \times D_\delta$. As we want to calculate an infimum, we choose a function f which minimizes the integral $\int_{-\delta}^{\delta} \left(f'(z_0)\right)^2 e^{z_0^2/2\varepsilon} dz_0$. A simple computation leads to the choice

$$f(z_0) = \frac{\int_{z_0}^{\delta} e^{-t^2/2\varepsilon} dt}{\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t^2/2\varepsilon} dt}. \tag{3.82}$$

Therefore

$$\int_{C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} \left(f'(z_0)\right)^2 dz \le \frac{\int_{C_\delta} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_{k,N}||z_k|^2} dz}{\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2\varepsilon} z_0^2} dz_0\right)^2} \left(1 + 2A_1 \frac{\delta^4}{\varepsilon}\right). \tag{3.83}$$

Choosing $\delta = \sqrt{K\varepsilon|\ln \varepsilon|}$, a simple calculation shows that there exists A_2 such that

$$\frac{\int_{C_\delta} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{N-1} |\lambda_{k,N}||z_k|^2} dz}{\left(\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1}{2} z_0^2/\varepsilon} dz_0\right)^2} \le \sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} \frac{1}{\sqrt{|\det(\nabla F_{\gamma,N}(0))|}} (1 + A_2\varepsilon). \tag{3.84}$$

The second term in (3.81) is bounded above in the following lemma.

Lemma 3.4.6. *For $\delta = \sqrt{K\varepsilon|\ln(\varepsilon)|}$ and $\rho_k = 4k^\alpha$, with $0 < \alpha < 1/4$, there exists $A_3 < \infty$, such that for all N and $0 < \varepsilon < 1$,*

$$\int_{S_\delta \setminus C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} dz \le \frac{A_3 \sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2}}{\sqrt{|\det\left(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O)\right)|}} \varepsilon^{3K/2+1}. \tag{3.85}$$

Proof. Clearly, by (3.59),

$$\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) \ge -\frac{z_0^2}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k,N}|z_k|^2. \tag{3.86}$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\int_{S_\delta\setminus C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}dz \\
&\qquad\le \int_{-\delta}^{\delta} dz_0 \int_{\exists_{k=1}^{N-1}:|z_k|\ge\delta r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}}} dz_1\dots dz_{N-1} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=0}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2} \\
&\qquad\le \int_{-\delta}^{\delta} e^{+z_0^2/2\varepsilon}dz_0 \sum_{k=1}^{N-1}\int_{|z_k|\ge\delta r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}}} e^{-\lambda_{k,N}|z_k|^2/2\varepsilon}dz_k \\
&\qquad\quad\times \prod_{1\le i\ne k\le N-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_{i,N}|z_i|^2/2\varepsilon}dz_i \\
&\qquad\le 2e^{\delta^2/2\varepsilon}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}}\sqrt{\prod_{i=1}^{N-1}2\pi\varepsilon\lambda_{i,N}^{-1}}\sum_{k=1}^{N-1} r_{k,n}^{-1}e^{-\delta^2 r_{k,N}^2/2\varepsilon}. \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N-1} r_{k,N}^{-1}e^{-\delta^2 r_{k,N}^2/2\varepsilon} &= \sum_{k=1}^{\lfloor\frac{N}{2}\rfloor} r_{k,N}^{-1}e^{-\delta^2 r_{k,N}^2/2\varepsilon} + \sum_{k=\lfloor\frac{N}{2}\rfloor+1}^{N-1} r_{N-k,N}^{-1}e^{-\delta^2 r_{N-k,N}^2/2\varepsilon} \\
&\le 2\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k^{-1}e^{-\delta^2\rho_k^2/2\varepsilon}. \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

We choose $\rho_k = 4k^\alpha$ with $0<\alpha<1/4$ to ensure that $K_{4/3}$ is finite. With our choice for δ, the sum in (3.88) is then given by

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha}\varepsilon^{8Kn^{2\alpha}} \le \frac{1}{4}\varepsilon^{2K}\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{6Kn^{2\alpha}} \le C\varepsilon^{2K}, \qquad (3.89)$$

since the sum over n is clearly convergent. Putting all the parts together, we get that

$$\int_{S_\delta\setminus C_\delta} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}dz \le C\varepsilon^{3K/2+1}\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2}\frac{1}{\sqrt{|\det(\nabla^2 F_{\gamma,N}(O))|}} \qquad (3.90)$$

and Lemma 3.4.6 is proven. □

Finally, using (3.83), (3.81), (3.84), and (3.85), we obtain the upper bound

$$\frac{\Phi(h^+)}{N^{N/2-1}} \le \frac{\varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2}}{\sqrt{|\det(\nabla F_{\gamma,N}(0))|}}(1+A_2\varepsilon)\left(1+2A_1\varepsilon|\ln\varepsilon|^2 + A_3'\varepsilon^{3K/2}\right) \qquad (3.91)$$

with the choice $\rho_k = 4k^\alpha$, $0<\alpha<1/4$ and $\delta = \sqrt{K\varepsilon|\ln\varepsilon|}$. Note that all constants are independent of N. Thus Lemma 3.4.4 is proven. □

Lower Bound The idea here (as already used in [12]) is to get a lower bound by restricting the state space to a narrow corridor from I_- to I_+ that contains the relevant paths and along which the potential is well controlled. We will prove the following lemma.

Lemma 3.4.7. *There exists a constant $A_4 < \infty$ such that for all ε and for all N,*

$$\frac{\operatorname{cap}\left(B_+^N, B_-^N\right)}{N^{N/2-1}} \geq \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} \frac{1}{\sqrt{|\det(\nabla F_{\gamma,N}(0))|}} \left(1 - A_4\sqrt{\varepsilon|\ln\varepsilon|^3}\right). \quad (3.92)$$

Proof. Given a sequence, $(\rho_k)_{k\geq 1}$, with $r_{k,N}$ defined as in (3.64), we set

$$\widehat{C}_\delta = \left\{z_0 \in]-1+\rho, 1-\rho[, |z_k| \leq \delta\ r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}}\right\}. \quad (3.93)$$

The restriction $|z_0| < 1-\rho$ is made to ensure that $\widehat{C}_\delta$ is disjoint from $B_\pm$ since in the new coordinates (3.58) $I_\pm = \pm(1, 0, \ldots, 0)$.

Clearly, if h^* is the minimizer of the Dirichlet form, then

$$\operatorname{cap}\left(B_-^N, B_+^N\right) = \Phi(h^*) \geq \Phi_{\widehat{C}_\delta}(h^*), \quad (3.94)$$

where $\Phi_{\widehat{C}_\delta}$ is the Dirichlet form for the process on $\widehat{C}_\delta$,

$$\begin{aligned}\Phi_{\widehat{C}_\delta}(h) &= \varepsilon \int_{\widehat{C}_\delta} e^{-G_{\gamma,N}(x)/\varepsilon} \|\nabla h(x)\|_2^2 dx \\ &= N^{N/2-1}\varepsilon \int_{z(\widehat{C}_\delta)} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} \|\nabla \tilde{h}(z)\|_2^2 dz. \quad (3.95)\end{aligned}$$

To get our lower bound we now use simply that

$$\|\nabla \tilde{h}(z)\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial z_k}\right|^2 \geq \left|\frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial z_0}\right|^2, \quad (3.96)$$

so that

$$\frac{\Phi(h^*)}{N^{N/2-1}} \geq \varepsilon \int_{z(\widehat{C}_\delta)} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} \left|\frac{\partial \tilde{h}^*}{\partial z_0}(z)\right|^2 dz = \widetilde{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(\tilde{h}^*) \geq \min_{h\in\mathcal{H}} \widetilde{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(\tilde{h}). \quad (3.97)$$

The remaining variational problem involves only functions depending on the single coordinate z_0, with the other coordinates, $z_\perp = (z_i)_{1\leq i\leq N-1}$, appearing only as parameters. The corresponding minimizer is readily found explicitly as

$$\tilde{h}^-(z_0, z_\perp) = \frac{\int_{z_0}^{1-\rho} e^{\widetilde{G}_{\gamma,N}(s,z_\perp)/\varepsilon} ds}{\int_{-1+\rho}^{1-\rho} e^{\widetilde{G}_{\gamma,N}(s,z_\perp)/\varepsilon} ds} \quad (3.98)$$

and hence the capacity is bounded from below by

$$\frac{\operatorname{cap}\left(B_-^N, B_+^N\right)}{N^{N/2-1}} \geq \widetilde{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(\tilde{h}^-) = \varepsilon \int_{\widehat{C}_\delta^\perp} \left(\int_{-1+\rho}^{1-\rho} e^{\widetilde{G}_{\gamma,N}(z_0,z_\perp)/\varepsilon} dz_0\right)^{-1} dz_\perp. \quad (3.99)$$

Next, we have to evaluate the integrals in the r.h.s. above. The next lemma provides a suitable approximation of the potential on $\widehat{C}_\delta$. Note that since z_0 is no longer small, we only expand in the coordinates $z_\perp$.

Lemma 3.4.8. *Let $r_{k,N}$ be chosen as before with $\rho_k = 4k^\alpha$, $0 < \alpha < 1/4$. Then there exists a constant, A_5, and $\delta_0 > 0$, such that, for all N and $\delta < \delta_0$, on $\widehat{C}_\delta$,*

$$\left|\widetilde{G}_{\gamma,N}(z) - \left(-\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{1}{4}z_0^4 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2 + z_0^2 f(z_\perp)\right)\right| \leq A_5\delta^3, \quad (3.100)$$

where

$$f(z_\perp) \equiv \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{N-1}|z_k|^2. \quad (3.101)$$

Proof. We analyze the non-quadratic part of the potential on $\widehat{C}_\delta$, using (3.59) and (3.51)

$$\frac{1}{N}\|x(Nz)\|_4^4 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}|x_i(Nz)|^4 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left|z_0 + \sum_{k=1}^{N-1}\omega^{ik}z_k\right|^4 = \frac{z_0^4}{N}\sum_{i=0}^{N-1}|1+u_i|^4 \quad (3.102)$$

where $u_i = \frac{1}{z_0}\sum_{k=1}^{N-1}\omega^{ik}z_k$. Note that $\sum_{i=0}^{N-1}u_i = 0$ and $u = \frac{1}{z_0}x\left(N(0,z_\perp)\right)$ and that for $z \in \widehat{\mathbb{R}}^N$, u_i is real. Thus

$$\sum_{i=0}^{N-1}|1+u_i|^4 = N + \sum_{i=0}^{N-1}\left(6u_i^2 + 4u_i^3 + u_i^4\right), \quad (3.103)$$

we get that

$$\left|\frac{1}{N}\|x(Nz)\|_4^4 - z_0^4\Big(1 + \frac{6}{N}\sum_{i=0}^{N-1}u_i^2\Big)\right| \leq \frac{z_0^4}{N}\left(4\|u\|_3^3 + \|u\|_4^4\right). \quad (3.104)$$

A simple computation shows that

$$\frac{6}{N}\sum_i u_i^2 = \frac{6}{z_0^2}\sum_{k\neq 0}|z_k|^2. \quad (3.105)$$

Thus as $|z_0| \leq 1$, we see that

$$\left|\frac{1}{N}\|x(Nz)\|_4^4 - z_0^4 - 6z_0^2\sum_{k\neq 0}|z_k|^2\right| \leq \frac{1}{N}\big(4\|x(N(0,z_\perp))\|_3^3 + \|x(N(0,z_\perp))\|_4^4\big). \quad (3.106)$$

Using again Lemma 3.4.2, we get

$$\begin{aligned}\|x(N(0,z_\perp))\|_3^3 &\leq \quad B_3 N\delta^3\\ \|x(N(0,z_\perp))\|_4^4 &\leq \quad B_4 N\delta^4.\end{aligned}$$

Therefore, Lemma 3.4.8 is proved, with $A_5 = 4B_3 + B_4\delta_0$. □

We use Lemma 3.4.8 to obtain the upper bound

$$\int_{-1+\rho}^{1-\rho} e^{\widetilde{G}_{\gamma,N}(z_0,z_\perp)/\varepsilon}dz_0 \leq \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k\neq 0}\lambda_{k,N}|z_k|^2 + \frac{A_5\delta^3}{\varepsilon}\right)g(z_\perp), \quad (3.107)$$

where

$$g(z_\perp) = \int_{-1+\rho}^{1-\rho} \exp\left(-\varepsilon^{-1}\left(\frac{1}{2}z_0^2 - \frac{1}{4}z_0^4 - z_0^2 f(z_\perp)\right)\right) dz_0. \tag{3.108}$$

This integral is readily estimate via Laplace's method as

$$g(z_\perp) = \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}}{\sqrt{1-2f(z_\perp)}}\left(1+O(\varepsilon)\right) = \sqrt{2\pi\varepsilon}\left(1+O(\varepsilon)+O(\delta^2)\right). \tag{3.109}$$

Inserting this estimate into (3.99), it remains to carry out the integrals over the vertical coordinates which yields

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_{\widehat{C}_\delta}(\tilde{h}^-) &\geq \varepsilon \int_{\widehat{C}_\delta^\perp} \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2 - \frac{A_5\delta^3}{\varepsilon}\right)\frac{dz_\perp}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\left(1+O(\varepsilon)+O(\delta^2)\right)\\ &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}\int_{\widehat{C}_\delta^\perp}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2\right)dz_\perp\\ &\quad\times\left(1+O(\varepsilon)+O(\delta^2)+O\left(\frac{\delta^3}{\varepsilon}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.110}$$

The integral is readily bounded by

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{C}_\delta^\perp}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2\right)dz_\perp &\geq \int_{\mathbb{R}^{N-1}}\exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2\right)dz_\perp\\ -\sum_{k=1}^{N-1}\int_{\mathbb{R}}dz_1\ldots\int_{|z_k|\geq\delta r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}}}\ldots\int_{\mathbb{R}}dz_{N-1}\exp&\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{k=1}^{N-1}\lambda_{k,N}|z_k|^2\right)\\ &\geq \sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-1}\prod_{i=1}^{N-1}\sqrt{\lambda_{i,N}}^{-1}\left(1-\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi}}\delta^{-1}\sum_{k=1}^{N-1}r_{k,N}^{-1}e^{-\delta^2 r_{k,N}^2/2\varepsilon}\right)\\ &= \sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-1}\frac{1}{\sqrt{|\det F_{\gamma,N}(O)|}}\left(1+O(\varepsilon^K)\right),\end{aligned}$$

when $\delta = \sqrt{K\varepsilon\ln\varepsilon}$ and $O(\varepsilon^K)$ uniform in N. Putting all estimates together, we arrive at the assertion of Lemma 3.4.7.

□

3.4.2 Uniform estimate of the mass of the equilibrium potential

We will prove the following proposition.

Proposition 3.4.9. *There exists a constant A_6 such that, for all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and all N,*

$$\frac{1}{N^{N/2}}\int_{B_+^{N\,c}} h^*_{B_-^N,B_+^N}(x)e^{-G_{\gamma,N}(x)/\varepsilon}dx = \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}^N\exp\left(\frac{1}{4\varepsilon}\right)}{\sqrt{\det(\nabla F_{\gamma,N}(I_-))}}\left(1+R(N,\varepsilon)\right), \tag{3.111}$$

where $|R(N,\varepsilon)| \leq A_6\sqrt{\varepsilon|\ln\varepsilon|^3}$.

Proof. The predominant contribution to the integral comes from the minimum I_-, since around I_+ the harmonic function $h^*_{B^N_-,B^N_+}(x)$ vanishes.

The proof will go in two steps. We define the tube in the z_0-direction,

$$\widetilde{C}_\delta \equiv \left\{ z : \forall_{k\geq 1} |z_k| \leq \delta r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}} \right\}, \tag{3.112}$$

and show that the mass of the complement of this tube is negligible. In a second step we show that within that tube, only the neighborhood of I_- gives a relevant and indeed the desired contribution. The reason for splitting our estimates up in this way is that we have to use different ways to control the non-quadratic terms.

Lemma 3.4.10. *Let $r_{k,N}$ be chosen as before and let $\delta = \sqrt{K\varepsilon|\ln\varepsilon|}$. Then there exists a finite numerical constant, A_7, such that for all N,*

$$\frac{1}{N^{N/2}} \int_{\widetilde{C}^c_\delta} e^{-G_{\gamma,N}(x)/\varepsilon} dx \leq A_7 \sqrt{2\pi\varepsilon}^N \frac{e^{\frac{1}{4\varepsilon}}}{\sqrt{\det(\nabla F_{\gamma,N}(O))}} \varepsilon^K. \tag{3.113}$$

The same estimate holds for the integral over the complement of the set

$$D_\delta \equiv \{x : |z_0 - 1| \leq \delta \vee |z_0 + 1| \leq \delta\}. \tag{3.114}$$

Proof. Recall that $z_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} x_i$. Then we can write

$$G_{\gamma,N}(x) = -\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{1}{4}z_0^4 + \frac{1}{2N}(x,\Delta x) - \frac{1}{2N}\|x\|_2^2 + \frac{1}{2}z_0^2 + \frac{1}{4N}\|x\|_4^4 - \frac{1}{4}z_0^4. \tag{3.115}$$

Notice first that by applying the Cauchy-Schwartz inequality, it follows that

$$z_0^4 = N^{-4}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i\right)^4 \leq N^{-2}\left(\sum_{i=0}^{N-1} x_i^2\right)^2 \leq N^{-1}\sum_{i=0}^{N-1} x_i^4. \tag{3.116}$$

Moreover, $N^{-1}\|x\|_2^2 = \|z\|_2^2$, so that expressed in the variables z,

$$\begin{aligned} G_{\gamma,N}(x) \geq & \quad -\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{1}{4}z_0^4 + \frac{1}{2N}(x,\Delta x) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} z_k^2 \\ = & \quad -\frac{1}{2}z_0^2 + \frac{1}{4}z_0^4 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{k,N} z_k^2. \end{aligned}$$

Therefore, as in the estimate (3.87),

$$\begin{aligned}\int_{\widetilde{C}_\delta^c} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon}dz &\le \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^{-1}(z_0^4/4-z_0^2/2)}dz_0 \\ &\quad\times \sum_{k=1}^{N-1}\int_{|z_k|\ge\delta r_{k,N}/\sqrt{\lambda_{k,N}}} e^{-\lambda_{k,N}|z_k|^2/2\varepsilon}dz_k \\ &\qquad\times \prod_{1\le i\ne k\le N-1}\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_{i,N}|z_i|^2/2\varepsilon}dz_i \\ &\le \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^{-1}(z_0^4/4-z_0^2/2)}dz_0\delta^{-1}\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\prod_{i=1}^{N-1}2\pi\varepsilon\lambda_{i,N}^{-1}} \\ &\quad\times \sum_{k=1}^{N-1} r_{k,N}^{-1}e^{-\delta^2 r_{k,N}^2/2\varepsilon} \\ &\le \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^{-1}(z_0^4/4-z_0^2/2)}\sqrt{\prod_{i=1}^{N-1}2\pi\varepsilon\lambda_{i,N}^{-1}}C\varepsilon^K. \end{aligned} \tag{3.117}$$

Since clearly,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon^{-1}(z_0^4/4-z_0^2/2)}dz_0 = 2\sqrt{\pi\varepsilon}e^{1/4\varepsilon}(1+\mathcal{O}(\varepsilon)), \tag{3.118}$$

this proves the first assertion of the lemma.

Quite clearly, the same bounds will show that the contribution from the set where $|z_0\pm 1|\ge\delta$ are negligible, by just considering now the fact that the range of the integral over z_0 is bounded away from the minima in the exponent. □

Finally, we want to compute the remaining part of the integral in (3.111), i.e. the integral over $\widetilde{C}_\delta\cap\{x : |z_0+1|\le\delta\}$. Since the eigenvalues of the Hessian at I_-, $\nu_{k,N}$, are comparable to the eigenvalues $\lambda_{k,N}$ for $k\ge 1$ in the sense that there is a finite positive constant, c_μ^2, depending only on μ, such that $\lambda_{k,N}\le\nu_{k,N}\le c_\mu^2\lambda_{k_N}$, and since $\nu_{0,N}=2$, this set is contained in $C_{c_\mu\delta}$, where

$$C_\delta(I_-)\equiv\left\{z\in\widehat{\mathbb{R}}^N : |z_0+1|\le\frac{\delta}{\sqrt{\nu_0}},\ |z_k|\le\delta\frac{r_{k,N}}{\sqrt{\nu_{k,N}}}\ 1\le k\le N-1\right\}. \tag{3.119}$$

It is easy to verify that on $C_\delta(I_-)$, there exists a constant, A_8, s.t.

$$\|z-z(I_-)\|_2^2\le\delta^2\sum_{k=0}^{N-1}\frac{r_{k,N}^2}{\nu_{k,N}}\le\delta^2A_8K_2^2. \tag{3.120}$$

and so, for $\delta=\sqrt{K\varepsilon|\ln\varepsilon|}$, $C_\delta(I_-)\subset z(B_-)$.

On $C_\delta(I_-)$ we have the following quadratic approximation.

Lemma 3.4.11. *For all N,*

$$\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\nu_{k,N}|z_k|^2=R(z) \tag{3.121}$$

and there exists a constant A_9 and δ_0 such that, for $\delta < \delta_0$, on $C_\delta(I_-)$

$$|R(z)| \leq A_9 \delta^3 \tag{3.122}$$

where the constants (ρ_k) are chosen as before such that $K_{4/3}$ is finite.

Proof. The proof goes in exactly the same way as in the previous cases and is left to the reader. □

With this estimate it is now obvious that

$$\begin{aligned}\int_{C_\delta(I_-)} \tilde{h}^*_{B^N_-,B^N_+}(z) e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} dz = & \int_{C_\delta(I_-)} e^{-\widetilde{G}_{\gamma,N}(z)/\varepsilon} dz \\ = & \; e^{1/4\varepsilon} \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}^N}{\sqrt{\det \nabla^2 F_{\gamma,N}(I_-)}} \left(1 + O(\delta^3/\varepsilon)\right),\end{aligned}$$

Using that $\tilde{h}^*_{B^N_-,B^N_+}(z)$ vanishes on B^N_+ and hence on $C_\delta(I_+)$, this estimate together with Lemma 3.4.10 proves the proposition. □

3.4.3 Proof of Theorem 3.3.1

Proof. The proof of Theorem 3.3.1 is now an obvious consequence of (3.19) together with Propositions 3.4.3 and 3.4.9. □

Chapitre 4

Formule d'Eyring-Kramers en dimension infinie

Dans cette partie soumise sous forme d'article, nous prouvons rigoureusement les temps de transition pour une certaine classe d'équations aux dérivées partielles stochastique définie sur un intervalle compact en espace pour les conditions au bord de Dirichlet et Neumann. Il est la prolongation naturelle du chapitre précédent puisque nous y utilisons, en les généralisant un peu, les estimations des capacités uniformément en la dimension. Cet article a été soumis aux *Annales de l'Institut Henri Poincaré : Probabilités et Statistiques.*

Sharp asymptotics of metastable transition times for one dimensional SPDEs

Abstract We consider a class of parabolic semi-linear stochastic partial differential equations driven by space-time white noise on a compact space interval. Our aim is to obtain precise asymptotics of the transition times between metastable states. A version of the so-called Eyring-Kramers Formula is proven in an infinite dimensional setting. The proof is based on a spatial finite difference discretization of the stochastic partial differential equation. The expected transition time is computed for the finite dimensional approximation and controlled uniformly in the dimension.

MSC 2010 subject classification: 82C44; 60H15, 35K57.

Key-words: Metastability, metastable transition time, parabolic stochastic partial differential equations, reaction-diffusion equations, stochastic Allen-Cahn equations, Eyring-Kramers formula.

4.1 Introduction

Metastability is a phenomenon which concerns systems with several stable states. Due to perturbations (either deterministic or stochastic) the system undergoes a shift of regime and reaches a new stable state (see e.g. [27] by Cassandro, Galves, Olivieri and Vares, the book [82] by Olivieri and Vares and the lecture notes [18] by Bovier). Typical examples of metastable behavior can be found in chemistry, physics (for models of phase transition) and ecology.

In this article, our aim is to understand metastability for a class of stochastic partial differential equations. We consider the Allen-Cahn (or Ginzburg-Landau) model which represents the behavior of an elastic string in a viscous stochastic environment submitted to a potential (see e.g. Funaki [49]). This model has other interpretations in quantum field theory (see [42, 28] and the references therein) and in statistical mechanics as a reaction diffusion equation modeling phase transitions and evolution of interfaces (see Brassesco and Buttà [23, 24]).

More precisely, we deal with the following equation, for $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial_{xx} u(x,t) - V'(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W \tag{4.1}$$

where $\gamma > 0$. W is a space-time white noise on $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ in the sense of Walsh [96] and $\varepsilon > 0$ is the intensity of the noise. V is a smooth real valued function on $\mathbb{R}$ called a local potential. We consider two boundary conditions: Dirichlet boundary conditions (for all $t \in \mathbb{R}^+$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$) and Neumann boundary conditions ($\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0$). The initial condition is given by a continuous function u_0 which satisfies the given boundary conditions. Existence and uniqueness of a Hölder-continuous solution in the mild sense have been proved by Gyöngy and Pardoux in [55].

Faris and Jona-Lasinio in [42] were among the first ones to analyze Equation (4.1) for a double well potential

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}. \tag{4.2}$$

In this case, V has only two minima which are $+1$ and -1. One expects that the model (4.1) has several stable states and that a metastable behavior occurs. The authors introduced a functional potential S and interpreted (4.1) as the stochastic perturbation of an infinite dimensional gradient system:

$$\partial_t u = -\frac{\delta S}{\delta \phi} + \sqrt{2\varepsilon} W \tag{4.3}$$

where for ϕ a differentiable function,

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2} \left|\phi'(x)\right|^2 + V(\phi(x)) \mathrm{d}x. \tag{4.4}$$

S represents the free energy. $\frac{\delta S}{\delta \phi}$ is the Fréchet derivative of S i.e. the infinite dimensional gradient of S.

For more general functions V (real valued C^3 functions), we can define a similar potential S as in (4.4) which determines a potential landscape. Under the stochastic perturbation, this potential landscape is explored by the process u defined in (4.1). While the system without noise (i.e. $\varepsilon = 0$) has several stable fixed points (which are the minima of S), for $\varepsilon > 0$ transitions between these fixed points will occur at a suitable timescale. The transition paths go through the lowest saddle points. Thus, minima and saddle points of S have a key role to understand metastability but it is often a hard task, given a potential V (and thus S), to completely compute and comprehend the geometrical structure of the energy landscape. However, some elegant methods exist (see e.g. [43, 97]).

The model (4.3) is an infinite dimensional generalization of the finite dimensional systems investigated by Freidlin and Wentzell [47] and by Bovier, Eckhoff, Gayrard and Klein in [21, 22]. Moreover, we will see that (4.1) is rigorously the limit of a gradient finite dimensional system (via a spatial finite difference approximation).

Our aim is to derive precise asymptotics of the expected transition time i.e. the time needed, starting from a minimum ϕ_0 of S, to hit a set of lower minima. We define the hitting time $\tau_\varepsilon(B)$ by $\tau_\varepsilon(B) = \inf\{t > 0, u(t) \in B\}$ where B is a disjoint union of small ball around some minima of S lower than ϕ_0. We prove that the expected time, $\mathbb{E}_{\phi_0}[\tau_\varepsilon(B)]$, has a very distinctive form known as the Arrhenius equation (Theorem 4.2.1). This expectation reads

$$\mathbb{E}_{\phi_0}[\tau_\varepsilon(B)] = Ae^{E/\varepsilon}(1 + O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2})) \quad (\varepsilon \to 0) \tag{4.5}$$

where E is the activation energy and A is the prefactor. E was computed by Faris and Jona-Lasinio for the double well potential (4.2) using a large deviation approach (Theorem 1.1 [42]). E is exactly the minimum height of potential that a pathway has to overcome to reach B starting from ϕ_0. The prefactor A is a constant (for our set of hypotheses) and depends only on the local geometry of the potential S near the minimum ϕ_0 and near the passes (or saddle points) from ϕ_0 to the set B. The order $O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2})$ of the error term comes directly from the local approximation of the potential S by its quadratic part.

For the double well potential (4.2) with Dirichlet boundary conditions, Faris and Jona-Lasinio proved that S has only two global minima, denoted m and $-m$ (which away from the boundary, correspond roughly to the constant functions 1 and -1 resp.). For some γ, this model has a unique saddle point $\sigma = 0$ (the constant function 0). We deduce from Theorem 4.2.1 that $\mathbb{E}_{-m}[\tau_\varepsilon(B^+)]$, for a small ball B^+ in the suitable norm around m, takes the form (4.5) with $E = S(\sigma) - S(-m)$ and

$$A = \frac{2\pi}{|\lambda^-(\sigma)|}\sqrt{\prod_{k=1}^{+\infty}\frac{|\lambda_k(\sigma)|}{|\lambda_k(-m)|}} \tag{4.6}$$

where $(\lambda_k(\phi))_{k\geqslant 1}$ are the eigenvalues of the second Fréchet derivative of the potential S at a point ϕ and $\lambda^-(\sigma)$ is the unique negative eigenvalue at the saddle point σ. Using asymptotic expansion of the eigenvalues, we prove that the infinite product converges. This quantity is similar to the ratio of the determinants of the Hessian matrices obtained in the finite dimensional case (see [21]). We also mention the fact that this infinite product has a nice expression in terms of solutions of linear differential equations (see e.g. Levit and Smilansky [74]).

Kramers in [68] investigated the case of a one dimensional diffusion as a model for chemical reactions and expresses rates instead of expectations. Previous computations leading to similar rates was made by Eyring in [41]. Their formula is known as the Eyring-Kramers formula. It takes the form (4.5) with the prefactor given by a formula similar to (4.6) but with a single factor in the product (there is only one eigenvalue).

Similar Eyring-Kramers formulas exist through a wide range of reversible Markovian models from Markov chains, stochastic differential equations. For finite dimensional diffusions, Freidlin and Wentzell in [47], proving that these systems obey a large deviation principle, obtained the activation energy in terms of the rate function. In recent years, the potential theory approach initiated by Bovier, Eckhoff, Gayrard and Klein in [21, 22] allowed to give very precise results and led to a proof of the Eyring-Kramers formula for gradient drift diffusions in finite dimension. Moreover, the potential approach was originated from Markov chains (see [15, 16, 18]) and have been refined to obtain metastable transition times for specific models (see e.g. [12, 19]).

Formula (4.6) is then the extension of the Eyring-Kramers formula to a class of one-dimensional SPDEs (4.1). Maier and Stein in [76] obtained heuristically this formula and Vanden-Eijnden and Westdickenberg in [94] conducted similar computations.

Specifically, the system (4.1) and its metastable behavior have been studied for at least thirty years using mainly large deviation principle and comparison estimates between the deterministic process ((4.1) with $\varepsilon = 0$) and the stochastic process defined by (4.1). Cassandro, Olivieri, Picco [28] obtained asymptotics similar to those obtained by Faris and Jona-Lasinio [42] when the size of the space interval is not fixed and goes to infinity as ε goes to 0 sufficiently slowly. These results first prove the existence of a suitable exponential timescale in which the process undergoes a transition.

In the same case as (4.2), Martinelli, Olivieri and Scoppola [78] obtained the asymptotic exponentiality of the transition times (Theorem 4.1 [78]). Also, Brassesco [23] proved that the trajectories of this system exhibit characteristics of a metastable behavior: the escape from the basin of attraction of the minimum $-m$ occurs through the lowest saddle points (Theorem 2.1 [23]) and the process starting from $-m$ spends most of its time before the transition near $-m$ (Theorem 2.2 [23]).

In this paper, we consider a local potential V (satisfying Assumptions 4.2.1 and 4.2.4) and we rigorously prove an infinite dimensional version of the Eyring-Kramers formula. Our method relies on a spatial finite difference approximation of Equation (4.1) introduced by Berglund, Fernandez and Gentz in [9, 10] as a model of coupled particles submitted to a potential. The computation of the expected transition time for the approximated system gives us the prefactor, the activation energy and some error terms. We need to control the behavior of these error terms as the step of discretization goes to 0 (or equivalently as the dimension N of the approximated system goes to $+\infty$). To this aim, we adapt results from [4] by Bovier, Méléard and the author.

As proved by Funaki [49] and Gyöngy [52], the solution of the approximated system converges to the solution of the SPDE. By combining different results from SPDE theory, large deviation theory (from Chenal and Millet [30]) and Sturm-Liouville theory we are able to take the limit of the finite dimensional model in order to retrieve the SPDE (4.1). We also need to adapt estimates on the loss of the memory of the initial condition (from Martinelli, Olivieri, Scoppola and Sbano [78, 77]) uniformly in the dimension.

The use of spatial finite difference approximation is quite natural since we consider our SPDEs in the sense of Walsh [96], limited to the case of space-

time white noise. Other approximations could be possible, notably the Galerkin approximation should lead to similar results for a different class of SPDEs in the framework of Da Prato and Zabczyk (see the book [35]).

The article is organized as follows. In Section 4.2, we present the equation, the assumptions, the main theorem (Theorem 4.2.1) and a sketch of its proof. Then in Section 4.3, we adapt the convergence of the approximations and prove convergence of the approximated transition times. In Section 4.4, we state large deviations estimates by Chenal and Millet [30], contraction results by Martinelli, Olivieri, Scoppola and Sbano [78, 77] and prove a uniform control in the initial condition uniformly in the dimension. In Section 4.5, we recall results about eigenvalues and eigenvectors of Sturm-Liouville problems and prove the convergence of the prefactor. In the last section, we compute the expected transition times uniformly in the dimension.

We will use the following notations henceforth. For a functional space $\mathcal{C}$, equipped with a norm $\|\cdot\|_{\mathcal{C}}$, we denote by $\mathcal{C}_{bc}$ the closed subspace in the $\mathcal{C}$ topology of the functions in $\mathcal{C}$ satisfying the suitable boundary conditions (Dirichlet or Neumann). For $f \in L^\infty([0,1] \times [0,T])$ we set the norm of this space $\|f\|_{\infty,T}$ or simply $\|f\|_\infty$ when $T = +\infty$.

Acknowledgments. I am very grateful to Anton Bovier and Sylvie Méléard for suggesting this topic and for constant help and advice. I am indebted to the Hausdorff Center for Mathematics Bonn for financial support of numerous visits to Bonn. Part of the work in this paper has been realized at the Technion in Haifa at the invitation of Dima Ioffe whom I thank for his kind hospitality. The research on this project was supported by ANR MANEGE.

4.2 Results

4.2.1 The Equation

The assumptions are of two kinds: some on the local potential V, others on the functional potential S. We first start with the hypotheses on V.

Assumption 4.2.1. We suppose that:
- V is C^3 on $\mathbb{R}$.
- V is convex at infinity: there exist $R, c > 0$ such that for $|u| > R$

$$V''(u) > c > 0. \tag{4.7}$$

- V grows at infinity at most polynomially: there exist $p, C > 0$ such that

$$V(u) < C(1 + |u|^p). \tag{4.8}$$

These hypotheses are made to avoid complications for the definition of the solution u of (4.1) and to allow the computations of the derivatives of S. Note that equation (4.7) implies in particular that the drift $-V'$ satisfies a one sided linear growth condition: there exists $C > 0$ such that for all $u \in \mathbb{R}$

$$-uV'(u) < C(1 + u^2). \tag{4.9}$$

Let $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ be a probability space on which we define a space-time white noise W as defined in [96] equipped with a filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ with the usual properties. The integrable processes for the white noise are the predictable measurable processes in $L^2(\Omega \times \mathbb{R}_+ \times [0,1])$. We denote by $g_t(x,y)$ the density of the semi-group generated by $\gamma\partial_{xx}$ on $[0,1]$ with the suitable boundary conditions.

Let us recall that a random field u is a mild solution of (4.1) if

1. u is almost surely continuous on $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ and predictable
2. for all $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$

$$u(x,t) = \int_0^1 g_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)V'(u(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \tag{4.10}$$

We state from [55] the following result on the existence, uniqueness and regularity of the solution (valid under the one sided linear growth condition (4.9)) for Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Proposition 4.2.2 ([55]). *For every initial condition $u_0 \in C_{bc}([0,1])$, the stochastic partial differential equation* (4.1) *has a unique mild solution. Moreover for all $T > 0$ and $p \geqslant 1$,*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]\times[0,1]} |u(x,t)|^p\right] \leqslant C(T,p). \tag{4.11}$$

The random field u is essentially $\frac{1}{2}$-Hölder in space and $\frac{1}{4}$-Hölder in time.

The proof of Proposition 4.2.2 is standard and uses mainly estimates on the density $g_t(x,y)$. The estimate (4.11) is straightforward if the drift is globally Lipschitz and bounded. For our case, it holds via a localization argument and the use of a comparison theorem from [55]. Details can be found in the PhD thesis of the author (Lemma A.3.9).

Remark. The definition of the stochastic convolution (the last expression of the right-hand side of (4.10)) requires the density of the semi-group to be in $L^2([0,1] \times [0,T])$ for every $T > 0$. Unfortunately, that is only true in dimension one. For higher dimensions, the stochastic convolution does not define a classical function but a distribution in a Sobolev space of negative index [96].

4.2.2 Stationary Points

As for the finite dimensional case, the minima and saddle points of S play a crucial role. To this end, we first specify what is the "gradient" (or the Fréchet derivative) of the functional S. Let us recall that S is defined, for $\phi \in H^1_{bc}$, by

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2}\left|\phi'(x)\right|^2 + V(\phi(x))\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

For ϕ, h in $C^2_{bc}([0,1])$ we have a Taylor expansion of S at the second order in h

$$S(\phi + h) = S(\phi) + D_\phi S(h) + \frac{1}{2} D^2_\phi S(h,h) + O(\|h\|^2_{C^2}) \tag{4.13}$$

where $\|h\|_{C^2} = \|h\|_\infty + \|h'\|_\infty + \|h''\|_\infty$. By integration by parts we compute the differentials $D_\phi S$ and $D^2_\phi S$. The first order differential is a linear functional which takes the form

$$D_\phi S(h) = \int_0^1 [-\gamma\phi''(x) + V'(\phi(x))]h(x)\mathrm{d}x. \tag{4.14}$$

The Fréchet derivative is $\frac{\delta S}{\delta \phi} = -\gamma\phi''(x) + V'(\phi(x))$. The second order derivative (the Hessian operator) takes the form

$$D^2_\phi S(h,h) = \int_0^1 h(x)[-\gamma h''(x) + V''(\phi(x))h(x)]\mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

We denote by $\mathcal{H}_\phi S$ the Hessian operator at ϕ:

$$\mathcal{H}_\phi S h(x) = -\gamma h''(x) + V''(\phi(x))h(x). \tag{4.16}$$

The Hessian operator is a Sturm-Liouville operator.

We say that ϕ is a *stationary point* of S if ϕ is solution of the non-linear differential equation

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -\gamma\phi'' + V'(\phi) = 0. \tag{4.17}$$

Let us now fix two points $\phi, \psi \in C_{bc}([0,1])$ and define some quantities.

$$\Gamma(\phi \to \psi) = \{f, f(0) = \phi, f(1) = \psi, f \in C([0,1], C_{bc}([0,1]))\} \tag{4.18}$$

is the set of continuous paths from ϕ to ψ. For $f \in \Gamma(\phi \to \psi)$, $\widehat{f}$ denotes the set of maxima of the path f,

$$\widehat{f} = \left\{ f(t_0), t_0 \in \operatorname*{argmax}_{t\in[0,1]} S(f(t)) \right\}. \tag{4.19}$$

The saddle points are passes from a valley to another one. The definition uses this idea.

Definition 4.2.3 (Saddles)**.** For any $\phi, \psi \in C_{bc}([0,1])$, we define $\widehat{S}(\phi,\psi)$, the minimum height needed to go from ϕ to ψ

$$\widehat{S}(\phi,\psi) = \widehat{S}(\psi,\phi) = \inf \left\{ S(x), x \in \widehat{f}, f \in \Gamma(\phi \to \psi) \right\}. \tag{4.20}$$

For ϕ, ψ such that $\widehat{S}(\phi,\psi) < \infty$, we denote $\mathscr{S}(\phi,\psi)$ the set of admissible saddles: the points which realize the maximum along a minimal pathway

$$\mathscr{S}(\phi,\psi) = \left\{ \sigma \in C_{bc}([0,1]), S(\sigma) = \widehat{S}(\phi,\psi), \exists f \in \Gamma(\phi \to \psi), \sigma \in \widehat{f} \right\}. \tag{4.21}$$

The set of admissible saddle points is very important to compute the prefactor of the mean transition times. Near these points the process spends the most crucial time as it passes from a basin of attraction to another one.

We now present the assumptions on S.

Assumption 4.2.4. We suppose that:
- S has a finite number of minima and saddle points.
- All the minima and saddle points of S are non-degenerate (i.e. hyperbolic): at each point, the Hessian operator has non-zero eigenvalues.

Assumptions 4.2.4 are structural. The finite number of stationary points provides a simple generalization of the case where there is only one saddle point. It also implies that the stationary points are isolated, e.g. we do not consider the case of periodic stable orbits. The non-degeneracy condition is necessary in order to approximate locally at the minima and saddle points the potential by its quadratic part. If this is not the case the prefactor in (4.5) is not a constant but should have a dependence in ϵ.

Connections between Assumptions 4.2.1 and 4.2.4 are not straightforward. Proving that a given potential S satisfies Assumption 4.2.4 is not easy, a precise analysis is often needed. Moreover if we want to investigate the dependence of the potential S on the parameter γ, bifurcations can occur and the landscape do not satisfy Assumption 4.2.4 for some critical values of γ. See Berglund, Fernandez and Gentz [9, 10] for the finite and infinite dimensional cases for the double well potential. However, results exist (see [6] and references therein) on the generality of Assumption 4.2.4.

In addition, under Assumptions 4.2.4 and 4.2.1, the deterministic dynamical system (i.e. (4.1) without the white noise) satisfies a Morse-Smale structure (see [26, 43] and the references therein). This means that the attractor of the dynamical system consists of equilibria and heteroclinic orbits connecting these equilibria. Methods were developed by Fiedler and Rocha in [43], by Wolfrum in [97] to compute the global attractor of the deterministic system.

Remark. H^1 is the convenient functional space for the process since $S(\phi) < +\infty$ if and only if ϕ is in $H^1([0,1])$. In fact from the upper bound (4.8) and lower bound (4.7) on V we get

$$C_1(\|\phi\|_{H^1}^2 - 1) \leqslant S(\phi) \leqslant C_1'(\|\phi\|_{H^1}^2 + \|\phi\|_{H^1}^p + 1). \tag{4.22}$$

Each function in $H^1([0,1])$ is continuous and even α-Hölder continuous (for $0 < \alpha < \frac{1}{2}$).

For each $\phi \in C([0,1])$, we define the quantity $\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\phi S)$:
- for Dirichlet boundary conditions, let f be the solution on $[0,1]$ of

$$\mathcal{H}_\phi S f = 0 \qquad f(0) = 1 \qquad f'(0) = 0 \tag{4.23}$$

  then $\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\phi S) = f(1)$
- for Neumann boundary conditions, let f be the solution on $[0,1]$ of

$$\mathcal{H}_\phi S f = 0 \qquad f(0) = 0 \qquad f'(0) = 1 \tag{4.24}$$

  then $\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\phi S) = f'(1)$.

Let us recall that, as a regular Sturm-Liouville operator, $\mathcal{H}_\phi S$ has a countable number of eigenvalues, all of them real. We denote by $(\lambda_k(\phi))_{k\geqslant 1}$ the sequence of these eigenvalues in the increasing order. The definition of $\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\phi S)$ is justified by the following lemma.

Lemma 4.2.5 ([74]). *For any ϕ and ψ with non-degenerate Hessian operator, the infinite product $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)}$ is convergent and we have*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)} = \frac{\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\phi S)}{\mathrm{Det}(\mathcal{H}_\psi S)}. \tag{4.25}$$

This lemma relates the infinite product of the ratio of eigenvalues to a ratio of terminal values of solutions. We find an elementary proof in [74] by Levit and Smilansky which relies on two different expressions of the Green function associated to the problem $\mathcal{H}_\phi S f = 0$ satisfying the boundary conditions. In fact, the Green function could either be expressed using the spectral decomposition of $\mathcal{H}_\phi S$ or expressed as a linear combination of two well-chosen fundamental solutions (of the second order linear differential equation).

4.2.3 Main results

Before stating the main result, we describe the set of minima and saddle points. In fact, the prefactor depends greatly on the geometry of a graph connecting the minima to each other through the saddle points (so-called the 1-skeleton connection graph by Fiedler and Rocha in [44]). We define this graph and express the prefactor partly as an equivalent conductance on this graph.

We denote by $\mathcal{M}$ the set of minima of S. Since by Assumption 4.2.4, there is a finite number of stationary points, we order the minima by increasing energy. We denote by $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$, $m = |\mathcal{M}|$, the different minima indexed by increasing energy

$$S(\phi_1) \leqslant S(\phi_2) \leqslant \cdots \leqslant S(\phi_m). \tag{4.26}$$

We denote by $\mathcal{M}_l$, the subset of minima $\mathcal{M}_l = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_l\}$ for $1 \leqslant l \leqslant m$.

We consider the transitions from a minimum ϕ_{l_0} to $\mathcal{M}_l$ for $l < l_0$. These are the only visible metastable transitions. We will see from large deviations estimates, that to go from a minimum ϕ to another ψ, it requires a time of order $\exp\left(\left[\widehat{S}(\phi,\psi) - S(\phi)\right]/\varepsilon\right)$. The time required to make the reverse transition is also of order $\exp\left(\left[\widehat{S}(\psi,\phi) - S(\psi)\right]/\varepsilon\right)$. Therefore if $S(\psi) > S(\phi)$, we get

$$\widehat{S}(\phi,\psi) - S(\phi) > \widehat{S}(\psi,\phi) - S(\psi) \tag{4.27}$$

and the time required to go from ϕ to ψ is much larger than for the reverse transition. So we cannot see the reverse transitions since there are absorbed by the direct ones. If some minima have the same potential, we can suitably order them to consider a transition from one minimum to another one at a same height.

Let us now construct the weighted graph of paths from ϕ_{l_0} to $\mathcal{M}_l$. We denote $\widehat{S} = \widehat{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$ the common potential of the saddles. The minima $\mathcal{M}$ are the vertices of the graph, the saddle points in $\mathscr{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$ are the edges. We connect an edge $\widehat{\sigma}$ between two vertices $\phi, \psi \in \mathcal{M}$ if the saddle $\widehat{\sigma}$ is a pass between the valleys of ϕ and ψ: there exists $f \in \Gamma(\phi \to \psi)$ such that $\widehat{f}$ has a unique element and $\widehat{f} = \widehat{\sigma}$. Existence of this graph is ensured by Assumptions 4.2.4 (see [44] and references therein).

Each saddle point in $\mathscr{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$ has a unique negative eigenvalue from the Morse-Smale property and the hyperbolicity of the stationary points. The weight associated to an edge $\widehat{\sigma}$ is defined as

$$w(\widehat{\sigma}) = \frac{|\lambda^-(\widehat{\sigma})|}{\sqrt{|\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\widehat{\sigma}}S|}} \tag{4.28}$$

where $\lambda^-(\widehat{\sigma})$ is the unique negative eigenvalue of $\mathcal{H}_{\widehat{\sigma}}S$.

$\widehat{\sigma}^+$ and $\widehat{\sigma}^-$ denote the two minima connected by a given edge $\widehat{\sigma}$. Let us recall that we have m minima in $\mathcal{M}$. For a real valued vector $a \in \mathbb{R}^m$ indexed by the minima in $\mathcal{M}$, we consider the following quadratic form

$$Q(a) = \sum_{\widehat{\sigma} \in \mathscr{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)} w(\widehat{\sigma})(a(\widehat{\sigma}^+) - a(\widehat{\sigma}^-))^2. \tag{4.29}$$

We define $\mathcal{C}^*(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$ the equivalent conductance of the graph between ϕ_{l_0} and $\mathcal{M}_l$ as

$$\mathcal{C}^*(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l) = \inf\left\{Q(a), a \in \mathbb{R}^m, a(\phi_{l_0}) = 1, a(\phi) = 0, \phi \in \mathcal{M}_l\right\}. \tag{4.30}$$

This conductance is an approximation of the capacity between a neighborhood of ϕ_{l_0} and $\mathcal{M}_l$. In some sense, we replace the continuous landscape defined by S by a graph containing the relevant geometric structure of the landscape.

Let us denote by $\mathcal{B}_\rho(\phi)$, for $\phi \in H^1_{bc}[0,1]$, the ball of center ϕ and radius ρ in H^1_{bc}

$$\mathcal{B}_\rho(\phi) = \left\{\sigma \in H^1_{bc}, \|\sigma - \phi\|_{L^2} \leqslant \rho, \|\sigma\|_{H^1} < A_1\right\} \tag{4.31}$$

where A_1 is a sufficiently large constant. We also define $\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l) = \cup_{\phi \in \mathcal{M}_l} \mathcal{B}_\rho(\phi)$. We choose this kind of neighborhood because in the following we need to control the norm in the uniform norm and in the α-Hölder norm (for $\alpha < \frac{1}{2}$).

We now state our main result describing the dependence in ε of the mean of the hitting time of a union of balls around the points of $\mathcal{M}_l$ starting from ϕ_{l_0}.

Theorem 4.2.1. *Under the assumptions 4.2.1, 4.2.4, for any minimum ϕ_{l_0}, and a set of minima $\mathcal{M}_l$ with $l_0 > l$, there exists ρ_0 such that for any $\rho_0 > \rho > 0$*

$$\mathbb{E}_{\phi_{l_0}}[\tau_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l))] = \frac{2\pi e^{\widehat{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)/\varepsilon}}{\mathcal{C}^*(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)\sqrt{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_{l_0}}S}}(1 + \Psi(\varepsilon)) \tag{4.32}$$

where the error term satisfies $\Psi(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2})$.

For the simple case where we have only three stationary points, two minima and one saddle we have the following corollary.

Corollary 4.2.6. *Let ϕ^+ and ϕ^- be the two minima with $S(\phi^-) \geqslant S(\phi^+)$ and $\widehat{\sigma}$ the unique saddle point. There exists ρ_0 such that for any $\rho_0 > \rho > 0$*

$$\mathbb{E}_{\phi^-}[\tau_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\phi^+))] = \frac{2\pi}{|\lambda^-(\widehat{\sigma})|}\sqrt{\frac{|\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\widehat{\sigma}}S|}{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi^-}S}}e^{(S(\widehat{\sigma}) - S(\phi^-))/\varepsilon}(1 + \Psi(\varepsilon)) \tag{4.33}$$

where the error term is $\Psi(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2})$.

Remark. The double well potential (4.2) ($V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$) with Neumann boundary conditions and for $\gamma > 1/\pi^2$ satisfies the hypotheses of the Corollary 4.2.6. In fact, the stationary points are the functions ϕ defined on $[0,1]$ such that $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ and which are solutions of

$$\gamma\phi''(x) - \phi^3(x) + \phi(x) = 0, \forall x \in [0,1]. \tag{4.34}$$

Then, the three constant solutions ($\phi(x) = 1$, $\phi(x) = -1$ or $\phi(x) = 0$) are stationary points. There are the only stationary points. To prove this, let us define ϕ_α for $\alpha \in \mathbb{R}$, the unique solution of the differential equation (4.34) such that $\phi'_\alpha(0) = 0$ and $\phi_\alpha(0) = \alpha$. ϕ_α is a stationary point if and only if $\phi'_\alpha(1) = 0$. By symmetry, we can restrict our study to $\alpha > 0$. By multiplying (4.34) by ϕ'_α and by integration we obtain, for all $x \in [0,1]$

$$\frac{\gamma}{2}[\phi'_\alpha(x)]^2 - V(\phi_\alpha(x)) = V(\alpha). \tag{4.35}$$

Therefore, the trajectories $(\phi_\alpha(x), \phi'_\alpha(x))_{x\geqslant 0}$ describe a level set in $\mathbb{R}^2$ of the function $\frac{\gamma z^2}{2} - V(y) = V(\alpha)$. Using this, we obtain that for $\alpha > 1$, ϕ'_α is decreasing and thus $\phi'_\alpha(1)$ can not be zero. For $\alpha \in]0,1[$, $\phi'_\alpha(x) = 0$ has a unique positive minimal solution $x(\alpha)$. This first positive solution can be expressed as

$$x(\alpha) = \sqrt{2\gamma}\alpha \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{V(\alpha u) - V(\alpha)}} \tag{4.36}$$

$$= 2\sqrt{2\gamma} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1-u^2)(2-\alpha^2(1+u^2))}}. \tag{4.37}$$

A simple computation shows that $x(\alpha)$ is increasing for $\alpha \in]0,1[$ and that $x(0^+) = \lim_{\alpha\to 0} x(\alpha) = \sqrt{\gamma}\pi$. We have $\phi'_\alpha(1) = 0$ if and only if there exist an integer $k > 0$ such that $kx(\alpha) = 1$. Therefore, if $x(\alpha) > 1$, ϕ_α is not a stationary point. At last, for $\gamma > 1/\pi^2$, since $x(\alpha)$ is increasing, we get that $x(\alpha) > 1$ for all $\alpha \in]0,1[$, which proves that the only possible stationary points are the three constant solutions.

4.2.4 Sketch of proof of Theorem 4.2.1

We first introduce the discretization we consider. The finite dimensional approximation of the SPDE is constructed as in the work of Funaki [49] and the work of Gyöngy[52]. The approximation is defined via a spatial finite difference approximation of Equation (4.1).

We denote by S_N the discretized potential, for $y \in \mathbb{R}^{N+2}$

$$S_N(y) = h_N \sum_{i=0}^{N} \frac{\gamma}{2h_N^2}(y_{i+1} - y_i)^2 + V(y_i) \tag{4.38}$$

where $h_N > 0$ is the step of discretization. We set $X_0^i = u_0(x_i)$ where $u_0 \in C_{bc}([0,1])$ is the initial condition and the x_i are the discretization points on $[0,1]$. Let us denote by $x_{i-1/2}$ the middle point of $[x_{i-1}, x_i]$. We construct an N-dimensional Brownian motion B from the white noise W. Doing so we will

be able to prove the convergence of u^N to u in L^p and almost surely. Thus we define, for $1 \leqslant i \leqslant N$

$$B_t^i = \frac{1}{\sqrt{h_N}} W\left(\left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right] \times [0,t]\right). \tag{4.39}$$

The properties of the white noise imply that (B^i) are independent Brownian motions.

The N-dimensional process $(X_t)_t$ is the solution of

$$\mathrm{d}X_t^i = -\frac{1}{h_N} \nabla S_N(X_t)^i \mathrm{d}t + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{h_N}} \mathrm{d}B_t^i \text{ for } i = 1..N. \tag{4.40}$$

X^0 and X^{N+1} are defined by the boundary conditions

– for Dirichlet boundary conditions:

$$X_t^0 = X_t^{N+1} = 0, \quad \forall t \geqslant 0 \tag{4.41}$$

– for Neumann boundary conditions:

$$X_t^0 = X_t^1 \qquad \text{and} \qquad X_t^{N+1} = X_t^N, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{4.42}$$

The discretized system u^N is the linear interpolation between the points (x_i, X^i). To simplify, it is easier to adapt the parameters to the boundary conditions.

– For Dirichlet boundary conditions, we choose

$$h_N = \frac{1}{N+1}, \qquad x_i = \frac{i}{N+1}, \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant N+1. \tag{4.43}$$

– For Neumann boundary conditions, we choose

$$h_N = \frac{1}{N}, \qquad x_i = \frac{i}{N} - \frac{1}{2N}, \quad \forall 0 \leqslant i \leqslant N+1. \tag{4.44}$$

We set $\tau_\varepsilon^N(B)$ the hitting time of a set B for the discretized system

$$\tau_\varepsilon^N(B) = \inf\left\{t > 0, u^N(N^{-1}t) \in B\right\}. \tag{4.45}$$

We decompose the proof of Theorem 4.2.1 in several steps:

1. for a given ε and a sequence of initial conditions $\phi_{l_0}^N$, each being a minimum of S^N, converging to ϕ_{l_0} (see Proposition 4.5.6), we prove that the expectation of $\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l))$ converges to the expectation of the hitting time for the SPDE:

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\phi_{l_0}^N}[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l))] = \mathbb{E}_{\phi_{l_0}}[\tau_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l))]. \tag{4.46}$$

   To this aim, we use the convergence of u^N to the solution u. This is done in Section 4.3.

2. For a fixed N, we compute the asymptotics of the transition time uniformly on the dimension. We get a prefactor $a_N(\varepsilon)$ such that

$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)} \mathbb{E}_{\phi_{l_0}^N}[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_l))] - 1\right| = \psi(\varepsilon, N) < \Psi(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}) \tag{4.47}$$

   where the error term $\Psi(\varepsilon)$ does not depend on N. This step is the main estimate and is detailed below.

3. The limit $N \to \infty$ of $a_N(\varepsilon)$ gives us the correct asymptotics for the transition time in the infinite dimensional case:
$$a(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} a_N(\varepsilon). \tag{4.48}$$
This is done in Section 4.5.

The estimate (4.47) is proved in two steps.

(i) First we start from a probability measure (the equilibrium probability: ν^N) on the boundary of a chosen neighborhood of the minimum $\phi^N_{l_0}$, which allows us to do the computation of $a_N(\varepsilon)$:
$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\nu^N}[\tau_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_0))] - 1\right| = \psi_1(\varepsilon, N) < \Psi_1(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}). \tag{4.49}$$
This is done in Section 4.6.

(ii) Then we have to control the error made by starting on the boundary of the minimum and not precisely at the minimum:
$$\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\left|\mathbb{E}_{\nu^N}[\tau_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_0))] - \mathbb{E}_{\phi^N_{l_0}}[\tau^N_\varepsilon(\mathcal{B}_\rho(\mathcal{M}_0))]\right| = \psi_2(\varepsilon, N) < \Psi_2(\varepsilon) \tag{4.50}$$
with $\Psi_2(\varepsilon) = O(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2})$. This result comes from the loss of memory of the initial condition adapted from Martinelli in [78]. This is exposed in Section 4.4.

4.3 Discretization

In this section, we present the convergence of the discretization u^N to the solution of the SPDE and prove the convergence of the hitting times.

4.3.1 Finite Dimensional Model

We write the discretized system u^N in a mild form. We define a function κ_N, with $\lfloor x \rfloor$ the integer part of x,
$$\kappa_N(x) = \frac{\lfloor (N+1)x + \frac{1}{2}\rfloor}{N+1}, \qquad \text{for Dirichlet boundary conditions,} \tag{4.51}$$
$$\kappa_N(x) = \frac{\lfloor Nx \rfloor + 1}{N} - \frac{1}{2N}, \qquad \text{for Neumann boundary conditions.} \tag{4.52}$$

We define g^N the semi-group associated with the discretized Laplacian. The discretized Laplacian is an N-dimensional matrix, denoted by Δ^N_d for Dirichlet boundary conditions and by Δ^N_n for Neumann boundary conditions:
$$\Delta^N_d = \frac{1}{h_N^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \Delta^N_n = \frac{1}{h_N^2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.53}$$

We consider the matrix $p^N(t) = h_N^{-1} e^{t\gamma\Delta^N}$. Therefore $p^N(t)_{i,j}$ is the solution of

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} p^N(t)_{i,j} & = (\gamma \Delta^N p^N(t))_{i,j} \\ p^N(0)_{i,j} & = \dfrac{1}{h_N}\delta_{ij}. \end{cases} \tag{4.54}$$

The semi-group g^N is the linear interpolation of $p^N(t)$ on $[0,1]\times[0,1]$ along the discretization points.

Let us now prove the convergence of u^N to the solution of Equation (4.1).

Theorem 4.3.1. *For all initial condition $u_0 \in C^3_{bc}([0,1])$, $T>0$, and $p \geqslant 1$, we get the convergence*

$$u^N \xrightarrow[N\to\infty]{} u \quad \text{on } [0,1]\times[0,T] \tag{4.55}$$

in the following senses:

- *in $L^p(\Omega, C([0,1]\times[0,T]))$, i.e. $\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|^p_{\infty,T}\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$*
- *almost surely in $C([0,1]\times[0,T])$, i.e. for every $\eta \in]0,\frac{1}{2}[$, there exists Ξ a random variable almost surely finite such that*

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\Xi}{N^\eta}. \tag{4.56}$$

Remark. Let us denote

$$\|u\|_{q,T} = \sup_{t\in[0,T]} \left[\int_0^1 |u(x,t)|^q \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}} = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^q}. \tag{4.57}$$

We have $\|u\|_{q,T} \leqslant \|u\|_{\infty,T}$. As a consequence we get convergence in Theorem 4.3.1 in the L^q norm instead of the uniform norm.

The convergence of the finite discretization was proved in [52] if V' is globally Lipschitz. We proved that the result holds in the case that V' satisfies (4.9) via a localization argument. The idea, notably used by Funaki in [49], is to rewrite the finite dimensional system u^N in a "mild form" and prove the convergence of this finite dimensional mild form to the infinite dimensional mild form (4.10).

Lemma 4.3.1. *For every $u_0 \in C_{bc}([0,1])$ and $N>0$, the function u^N defined on $[0,1]\times\mathbb{R}^+$ satisfies the equation*

$$\begin{aligned} u^N(x,t) = &\int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))u_0(\kappa_N(y))\mathrm{d}y \\ &- \int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))V'(u^N(\kappa_N(y),s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &+ \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{4.58}$$

For all $p\geqslant 1$ and $T>0$, we have

$$\sup_N \mathbb{E}\Big[\sup_{[0,T]\times[0,1]} \left|u^N(x,t)\right|^p\Big] \leqslant C(T,p). \tag{4.59}$$

Proof. This lemma is just a reformulation of the system of stochastic differential equations. We use the variation of the constant to integrate the linear part and then interpolate linearly the system to obtain a mild formulation of the function u^N (see [49, 52]). To obtain the uniform moment bound, we proceed classically using a truncation procedure. We define u_R^N and u_R solutions of equations (4.58) and (4.10) in which we have replaced the function V' by b_R defined, for $R > 0$ by

$$b_R(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R,R]} + V'(R)\mathbb{1}_{]R,+\infty[} + V'(-R)\mathbb{1}_{]-\infty,-R[}. \tag{4.60}$$

b_R is continuous, bounded and globally Lipschitz. Firstly, using the uniform estimates of the semi-group and the boundedness of b_R, we prove that for all T, all $p > 1$, there exists $C(p, T, R)$ independent of N such that

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|u_R^N(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R) < +\infty. \tag{4.61}$$

Secondly, there exists $C(p, T, R)$ independent of N, such that

$$\sup_N \mathbb{E}\Big[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u_R^N(x,t)\right|^p\Big] \leqslant C(p,T,R) < +\infty. \tag{4.62}$$

We use regularity of the solution (Kolmogorov's theorem) to prove (4.62). Thirdly, we use a comparison theorem to obtain uniform bounds on u^N from bounds on $u_{R_0}^N$ where R_0 is fixed and sufficiently large. □

We use the convergence of u_R^N to u_R proved in [52].

Proposition 4.3.2. *[[52]] For all $R > 0$, $T > 0$ and $0 < \eta < \frac{1}{2}$ and u_0 in $C_{bc}^3[0,1]$, there exists a random variable ξ_R almost surely finite such that*

$$\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\xi_R}{N^\eta}. \tag{4.63}$$

Proof of Theorem 4.3.1. Let $R > 0$, we define the stopping times

$$\tau_R = \inf\{t, \|u_R(t)\|_\infty > R\} = \inf\{t, \exists x \in [0,1], |u_R(x,t)| > R\} \tag{4.64}$$

$$\tau_R^N = \inf\{t, \left\|u_R^N(t)\right\|_\infty > R\} = \inf\{t, \exists x \in [0,1], \left|u_R^N(x,t)\right| > R\}. \tag{4.65}$$

Let us choose $0 < \delta < 1$. For $R > 1$, we define

$$\Omega_R = \{\tau_{R-\delta} > T \text{ and } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N > T\}. \tag{4.66}$$

First we show that $\mathbb{P}[\Omega_R] \xrightarrow[R\to\infty]{} 1$. Let $M > 0$. For $\omega \in \{\xi_R < M\} \cap \{\tau_{R-\delta} \geqslant T\}$, by Proposition 4.3.2, for N sufficiently large,

$$\left\|u_R^N\right\|_{\infty,T}(\omega) < \|u_R\|_{\infty,T}(\omega) + \delta < R \tag{4.67}$$

which means that $\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N(\omega) \geqslant T$. Then by taking the complement relatively to $\{\xi_R < M\}$ we get

$$\mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} < T]. \tag{4.68}$$

By definition of the time $\tau_{R-\delta}$, we have by the Markov inequality for $p > 1$ and from Equation (4.11)

$$\mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] \leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T] \leqslant \mathbb{P}\left[\|u\|_{\infty,T} \geqslant R-\delta\right] \leqslant \frac{\mathbb{E}\left[\|u\|_{\infty,T}^p\right]}{(R-\delta)^p}. \tag{4.69}$$

Finally we get

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Omega_R^c] &= \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T \text{ or } \liminf_{N\to\infty} \tau_R^N \leqslant T] \\ &\leqslant \mathbb{P}[\tau_{R-\delta} \leqslant T] + \mathbb{P}[\liminf_{N\to\infty} \tau_R^N < T; \xi_R < M] + \mathbb{P}[\xi_R \geqslant M] \\ &\leqslant \frac{2\mathbb{E}[\|u\|_{\infty,T}^p]}{(R-\delta)^p} + \mathbb{P}[\xi_R \geqslant M]. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Since ξ_R is finite almost surely, we take first the limit $M \to +\infty$ then $R \to +\infty$.

Let us define $\widetilde{\Omega}_R = \Omega_R \cap \{\xi_R < \infty\}$. Since τ_R and τ_R^N are increasing in $R \in \mathbb{N}$, the sets Ω_R are also increasing in R. Then we have

$$\mathbb{P}[\cup_{R>1}^{\infty} \widetilde{\Omega}_R] = \mathbb{P}[\cup_{R\in\mathbb{N}} \Omega_R] = \lim_{R\to\infty} \mathbb{P}[\Omega_R] = 1. \tag{4.71}$$

Let $\omega \in \widetilde{\Omega}_R$. By definition of τ_R^N, there exists $N_0(\omega)$ such that for all $N \geqslant N_0(\omega)$, $\tau_R^N(\omega) > T$ and $\tau_{R-\delta}(\omega) > T$. By using the proposition 4.3.2, for all $N \geqslant N_0(\omega)$,

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}(\omega) = \left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}(\omega) \leqslant \xi_R(\omega) N^{-\eta}. \tag{4.72}$$

We define $\xi'_R(\omega)$ by

$$\xi'_R(\omega) = \sup_{N \leqslant N_0(\omega)} N^\eta \left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}(\omega) + \xi_R(\omega). \tag{4.73}$$

$\xi'_R(\omega)$ is finite on $\widetilde{\Omega}_R$ and is such that $\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \xi'_R N^{-\eta}$. Let us define the random variable Ξ by

$$\begin{aligned}&\Xi(\omega) = \xi'_R(\omega) \text{ on } \widetilde{\Omega}_R \setminus \widetilde{\Omega}_{R-1} \text{ for } R \geqslant 2 \\ &\Xi(\omega) = \xi'_1(\omega) \text{ on } \widetilde{\Omega}_1. \end{aligned} \tag{4.74}$$

Then on $\cup_{R\geqslant 1}\widetilde{\Omega}_R$, set of probability 1, Ξ is almost surely finite and we get that $\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \Xi N^{-\eta}$ which finishes the proof of the almost sure convergence.

To conclude, we show that $\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right]$ converges to 0. Since $\left\|u^N\right\|_{\infty,T}$ has moments uniformly bounded in N (Lemma 4.3.1), we define

$$\Omega_{R,N_0} = \cap_{N\geqslant N_0}\{\tau_{R-\delta} > T \text{ and } \tau_R^N > T\}. \tag{4.75}$$

We have $\Omega_R = \cup_{N_0}\Omega_{R,N_0}$. For all $N \geqslant N_0$, we get by definition

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p = \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}} \left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p + \mathbb{1}_{\Omega_{R,N_0}^c} \left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p. \tag{4.76}$$

Thus using Cauchy-Schwarz inequality and the bound (4.59), we get

$$\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\left\|u_R^N - u_R\right\|_{\infty,T}^p\right] + \mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c]^{\frac{1}{2}} C(2p,T)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.77}$$

Using the convergence of u_R^N to u^R (Proposition 4.3.2), we obtain

$$\limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right] \leqslant C(2p,T)^{1/2}\mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.78}$$

Let us fix $\eta > 0$. Since $\mathbb{P}[\Omega_R]$ tends to 1 and Ω_R is increasing, we choose R such that $\mathbb{P}[\Omega_R^c] \leqslant \eta$. Similarly, Ω_{R,N_0} is increasing in N_0, thus $\mathbb{P}[\Omega_R^c] = \lim_{N_0\to\infty} \mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c] \leqslant \eta$. Let us choose N_0 such that $\mathbb{P}[\Omega_{R,N_0}^c] \leqslant 2\eta$. Inserting this bound in (4.78), we obtain the result. □

4.3.2 Convergence of the Transition Times

We conclude this section by proving the convergence of the transition times.

Let us denote by u_0 the initial condition of the solution of Equation (4.1) and ϕ a continuous function. We define the hitting times: for $\rho > 0$

$$\tau_\varepsilon(\rho) = \inf\{t > 0, \|u(t) - \phi\|_\infty < \rho\} \tag{4.79}$$

$$\tau_\varepsilon^N(\rho) = \inf\left\{t > 0, \left\|u^N(t) - \phi^N\right\|_\infty < \rho\right\} \tag{4.80}$$

where ϕ^N is the linear approximation of ϕ.

Proposition 4.3.3. *Suppose that $\left\|\phi^N - \phi\right\|_\infty$ converges to 0 and that there exists ρ_0 such that for every $\rho_0 > \rho > 0$,*

$$\mathbb{E}_{u_0}[\tau_\varepsilon(\rho)] < \infty. \tag{4.81}$$

Then for almost every $\rho > 0$,

$$\tau_\varepsilon^N(\rho) \xrightarrow[N\to\infty]{} \tau_\varepsilon(\rho) \quad \textit{a.s. and} \quad \mathbb{E}_{u_0^N}[\tau_\varepsilon^N(\rho)] \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathbb{E}_{u_0}[\tau_\varepsilon(\rho)]. \tag{4.82}$$

Proof. For the sake of simplicity we omit ε in the proof. First we prove that for all $\delta > 0$, $T > 0$, we have

$$\tau(\rho+\delta)\wedge T \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho)\wedge T \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho)\wedge T \leqslant \tau(\rho-\delta)\wedge T \text{ a.s.} \tag{4.83}$$

From Theorem 4.3.1, $\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}$ converges to 0 almost surely. Therefore with probability 1, there exists $N_0(\omega)$ such that for all $N \geqslant N_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|u^N(t) - u(t)\right\|_\infty(\omega) < \frac{\delta}{2} \qquad \text{and} \qquad \left\|\phi^N - \phi\right\|_\infty < \frac{\delta}{2}. \tag{4.84}$$

Then for $t \leqslant \tau(\rho+\delta)\wedge T$ and $N \geqslant N_0(\omega)$, using the triangle inequality we get

$$\begin{aligned}\rho + \delta \leqslant \|u(t) - \phi\|_\infty &\leqslant \left\|u(t) - u^N(t)\right\|_\infty + \left\|u^N(t) - \phi^N\right\|_\infty + \left\|\phi^N - \phi\right\|_\infty \\ &\leqslant \delta + \left\|u^N(t) - \phi^N\right\|_\infty\end{aligned} \tag{4.85}$$

which means that $t \leqslant \tau^N(\rho)\wedge T$. Thus, we get $\tau(\rho+\delta)\wedge T \leqslant \liminf_{N\to\infty}[\tau^N(\rho)\wedge T]$ almost surely. By the same arguments for $t \leqslant \tau^N(\rho)\wedge T$ and $N \geqslant N_0(\omega)$, we get

$$\rho \leqslant \left\|u^N(t) - \phi^N\right\|_\infty \leqslant \delta + \|u(t) - \phi\|_\infty . \tag{4.86}$$

Therefore $\limsup_{N\to\infty}[\tau^N(\rho)\wedge T] \leqslant \tau(\rho-\delta)\wedge T$ which proves the inequality (4.83).

From the definitions of $\tau(\rho)$ and $\tau^N(\rho)$, the functions $\rho \mapsto \tau(\rho)$ and $\rho \mapsto \tau^N(\rho)$ are left continuous and have right limits. Then using the fact that $\tau(\rho)$ is finite almost surely, we get

$$\tau(\rho^+) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \tau^N(\rho) \leqslant \limsup_{N\to\infty} \tau^N(\rho) \leqslant \tau(\rho) < +\infty \text{ a.s.} \tag{4.87}$$

where $\tau(\rho^+) = \lim_{\delta\to 0^+} \tau(\rho+\delta)$.

At a point of continuity of $\rho \mapsto \tau(\rho)$, we obtain $\tau(\rho) = \lim_{N\to\infty} \tau^N(\rho)$. Let us fix $\rho_1 > 0$. There exists $\mathscr{N} \subset \Omega$ a null set such that for $\omega \notin \mathscr{N}$, $\rho \mapsto \tau(\rho)(\omega)$ is bounded, decreasing, left continuous on $[\rho_1, +\infty[$. We define the set of discontinuities, $\mathscr{P}$:

$$\mathscr{P} = \left\{(\omega,\rho) \in \mathscr{N}^c \times [\rho_1, +\infty[, \tau(\rho^+)(\omega) \neq \tau(\rho)(\omega)\right\} \subset \Omega \times \mathbb{R}. \tag{4.88}$$

Then we consider the projection $\Pi_\omega^{\mathbb{R}}$ from $\Omega \times \mathbb{R}$ on $\mathbb{R}$ along $\{\omega\} \times \mathbb{R}$. For $\omega \in \mathscr{N}^c$ we define

$$\mathcal{D}(\omega) = \Pi_\omega^{\mathbb{R}}(\mathscr{P}) = \left\{\rho \in [\rho_1, +\infty[, \tau(\rho^+)(\omega) \neq \tau(\rho)(\omega)\right\} \subset \mathbb{R}. \tag{4.89}$$

$\mathcal{D}(\omega)$ is at most countable since $\rho \mapsto \tau(\rho)(\omega)$ is a bounded decreasing function.

We define $\mathcal{N}(\rho) = \Pi_\rho^\Omega(\mathscr{P})$ with Π_ρ^Ω the projection from $\Omega \times \mathbb{R}$ on Ω along $\Omega \times \{\rho\}$. $\mathcal{N}(\rho)$ is the set of Ω for which $\tau(\rho)$ is not continuous at ρ. Therefore, we have

$$\mathscr{P} = \cup_{\omega\in\Omega} \{\omega\} \times \mathcal{D}(\omega) = \cup_{\rho>\rho_1} \mathcal{N}(\rho) \times \{\rho\} . \tag{4.90}$$

Then, using Fubini-Tonelli Theorem

$$\int_{\rho_1}^{+\infty} \mathbb{P}[\mathcal{N}(\rho)]\mathrm{d}\rho = \int_\Omega \int_{\rho_1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathscr{P}}(\omega,\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) \tag{4.91}$$

$$= \int_\Omega \int_{\rho_1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathcal{D}(\omega)}(\rho)\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = 0. \tag{4.92}$$

We get a null set $\mathcal{E}(\rho_1)$ on $[\rho_1, +\infty[$ such that $\mathbb{P}[\mathcal{N}(\rho)] = 0$ for all $\rho \in \mathcal{E}(\rho_1)$ i.e. the convergence is almost sure. To conclude, we consider a sequence $(\rho_n)_{n\geqslant 0}$ converging to 0, then $\mathcal{E} = \cup_{n\geqslant 0}\mathcal{E}(\rho_n)$ is a null set of $\mathbb{R}$ on which the convergence is almost sure.

By using dominated convergence, we obtain the convergence of the expectations. □

4.4 Initial condition

4.4.1 Large Deviation Control

For $0 < \alpha < 1$, we set $C^\alpha([0,1])$ the set of α-Hölder continuous functions on $[0,1]$ equipped with the norm $\|\cdot\|_{C^\alpha}$

$$\|f\|_{C^\alpha} = \|f\|_\infty + \sup_{x,y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}. \tag{4.93}$$

We also define $D^\alpha([0,1])$ the separable subset of this Hölder space which is the closure of C^∞ in C^α.

Let $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ and $\rho > 0$, we consider the neighborhood $B^\alpha_\rho(\phi)$ of $\phi \in D^\alpha_{bc}([0,1])$

$$B^\alpha_\rho(\phi) = \{\psi \in D^\alpha_{bc}([0,1]), \|\phi - \psi\|_{C^\alpha} < \rho\}. \tag{4.94}$$

We also have $B^\alpha_\rho(\mathcal{M}_l) = \cup_{\phi \in \mathcal{M}_l} B^\alpha_\rho(\phi)$.

With this large deviation principle, Chenal and Millet [30] derived exponential asymptotic estimates for the exit time of domains with a unique stable stationary point. Using their evaluations and the procedure developed by Freidlin-Wentzell [47] in the finite dimensional case, we have the following result.

Lemma 4.4.1 ([30]). *For $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, there exists ρ_0 such that for all $\rho < \rho_0$, we have for all $\phi \in B^\alpha_\rho(\phi_{l_0})$ and $\eta > 0$*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbb{P}_\phi \left[\exp\left(\varepsilon^{-1}(\widehat{S} + \eta)\right) > \tau_\varepsilon(B^\alpha_\rho(\mathcal{M}_l)) > \exp\left(\varepsilon^{-1}(\widehat{S} - \eta)\right)\right] = 1, \tag{4.95}$$

where $\widehat{S} = \widehat{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$. Let $\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(B^\alpha_\rho(\mathcal{M}_l))$. Then

$$\frac{\tau_\varepsilon}{\mathbb{E}_\phi[\tau_\varepsilon]} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{\mathscr{L}} \mathcal{E} \tag{4.96}$$

where $\mathcal{E}$ is an exponential variable of parameter 1. Moreover for all $\phi \in B^\alpha_\rho(\phi_{l_0})$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}_\phi[\tau_\varepsilon] = \widehat{S} \qquad \text{and} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \log \mathbb{E}_\phi\left[\tau_\varepsilon^2\right] = 2\widehat{S}. \tag{4.97}$$

These estimates are the infinite dimensional version of the Freidlin-Wentzell theory.

4.4.2 Exponential Contractivity

For a given $\psi^N = (\psi_1, \cdots, \psi_N) \in \mathbb{R}^N$, we consider equivalently the point in $\mathbb{R}^N$ and the function in $C([0,1])$ obtained by the linear interpolation between the points (x_i, ψ_i). Reciprocally, for $\psi \in C_{bc}([0,1])$, we let $\widehat{\psi}^N$ be the linear interpolation of ψ along the discretization. $\widehat{\psi}^N$ is the linear interpolation between the points $(x_i, \psi(x_i))$.

We set

$$B^\infty_\rho(\phi) = \{\psi \in C_{bc}([0,1]), \|\psi - \phi\|_\infty < \rho\}. \tag{4.98}$$

We adapt trajectorial results of contractivity for the localized process from Martinelli and Scoppola [78]. We denote $u(\phi), u_R(\phi)$ the solutions of Equation (4.1) with respectively V' and b_R, starting from ϕ. Accordingly, we denote $u^N(\phi^N), u^N_R(\phi^N)$ the solutions of Equation (4.58) with V' and b_R, starting from $\phi^N \in \mathbb{R}^N$.

Lemma 4.4.2. *Let ϕ be a minimum of S and $R \geqslant R_0$. There exists $m, C_R > 0$ and $\varepsilon_0, \rho_0 > 0$, such that for all $\rho < \rho_0$ and every $\psi \in B_\rho^\infty(\phi)$ we have, for all $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$*

$$\mathbb{P}\left[\sup_{N \geqslant N_0} \left\| u_R^N(\widehat{\psi}^N)(t) - u_R^N(\widehat{\phi}^N)(t) \right\|_\infty \leqslant e^{-mt} \left\|\psi - \phi\right\|_\infty, \forall t > 0\right] \geqslant 1 - e^{-\frac{C_R}{\varepsilon}}. \tag{4.99}$$

This result can be proved via an adaptation of the arguments of [77] and [78]. Lemma 4.4.2 asserts that the solutions of Equation (4.1) and (4.58) depend slightly on the initial condition. Moreover, the solutions starting from two functions are exponentially close uniformly in the dimension. Martinelli and Scoppola called that the loss of memory of the initial condition because the specific initial condition is not relevant for the evolution of the process.

4.4.3 Uniformity in the initial condition

Let us recall that ϕ_{l_0} is a minimum and $\mathcal{M}_l$ is a set of lower minima. We denote

$$\begin{aligned} \tau_\varepsilon^N(\phi_{l_0}) &= \tau_\varepsilon^N(B_\rho^\alpha(\phi_{l_0})) = \inf\left\{t, u^N(t) \in B_\rho^\alpha(\phi_{l_0})\right\} \\ \tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l) &= \tau_\varepsilon^N(B_\rho^\alpha(\mathcal{M}_l)) = \inf\left\{t, u^N(t) \in B_\rho^\alpha(\mathcal{M}_l)\right\}. \end{aligned} \tag{4.100}$$

Similarly, we denote by $\tau_\varepsilon^{N,R}$ the hitting time associated with the localized process u_R^N.

Proposition 4.4.3. *For all $\rho_0 > \rho > 0$, there exists $\eta > 0$ such that for a sequence $\phi_{l_0}^N$ of minima of S^N, converging to ϕ_{l_0} in L^2,*

$$\sup_{N \geqslant N_0} \sup_{\left\|\phi^N - \phi_{l_0}^N\right\|_\infty < \rho} \left| \mathbb{E}_{\phi^N}\left[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l)\right] - \mathbb{E}_{\phi_{l_0}^N}\left[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l)\right] \right| \leqslant e^{\frac{\widehat{S}-\eta}{\varepsilon}}. \tag{4.101}$$

For any sequence $\phi_i^N \in H^1$ of minima of S^N converging to $\phi_i \in H^1$ in L^2, we also have

$$\sup_{N \geqslant N_0} \sup_{\left\|\phi_i^N - \phi^N\right\|_\infty < \rho} \left| \mathbb{P}_{\phi_i^N}\left[\tau_\varepsilon^N(\phi_{l_0}) < \tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l)\right] - \mathbb{P}_{\phi^N}\left[\tau_\varepsilon^N(\phi_{l_0}) < \tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l)\right] \right| \leqslant e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}}. \tag{4.102}$$

The proof comes from a comparison between the deterministic process (i.e. $\varepsilon = 0$) and the stochastic process starting from the moment of the hitting time .

Proof. Since the minima are not degenerate, we can assume ρ small enough to get

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \phi}\phi, \phi - \phi_i \right\rangle_{L^2} \leqslant -b \left\|\phi - \phi_i\right\|_{L^2}^2. \tag{4.103}$$

for some $b > 0$, all $1 < i < l$, and all $\phi \in \mathcal{B}_{2\rho}(\phi_i)$.

First, let us prove similar estimates on the expectations of transition times for the localized process u_R^N. We denote by $\sigma^N(\phi^N)$ the hitting time $\tau_\varepsilon^{N,R}(\mathcal{M}_l)$ for the process u_R^N starting from ϕ^N. We set

$$\Omega_R = \left\{ \sup_{N \geqslant N_0} \sup_{\|u_0 - \phi\|_\infty < \rho} \left\| u_N^R(u_0)(t) - u_N^R(\phi)(t) \right\|_\infty \leqslant \rho e^{-mt}, \forall t > 0 \right\}. \tag{4.104}$$

From Lemma 4.4.2, we get $\mathbb{P}(\Omega_R) > 1 - e^{-C_R/\varepsilon}$.

Let us fix $\delta_1 > 0$. We define $T(\varepsilon) = e^{\frac{\hat{S} - \delta_1}{\varepsilon}}$ and we take $\varepsilon < \varepsilon_0$ such that $e^{-mT(\varepsilon)} < \rho$. On the set $\left\{ \sigma^N(\phi_{l_0}) > T(\varepsilon) \right\}$, setting $\psi = u_N^R(\phi)(\sigma^N(\phi_{l_0}))$, we get

$$\left\| \psi - u_N^R(\phi_{l_0})(\sigma^N(\phi_{l_0})) \right\|_\infty < e^{-mT(\varepsilon)} < \rho \tag{4.105}$$

with probability at least $1 - e^{-C_R/\varepsilon}$. Let us suppose that $\sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \geqslant 0$ and that $u_N^R(\phi_{l_0})(\sigma^N(\phi_{l_0})) \in \mathcal{B}_\rho(\phi_i)$.

The deterministic process $u_R^{N,0}$ is the solution of (4.58) for the drift b_R and $\varepsilon = 0$. ϕ_i^N is a minimum of S^N, so ϕ_i^N is an equilibrium point of $u_R^{N,0}$. Then using Equation (4.103), we get for $t \geqslant 0$

$$\left\| u_R^{N,0}(\psi)(t) - \phi_i \right\|_{L^2}^2 \leqslant e^{-bt} \left\| \psi - \phi_i \right\|_{L^2}^2 \leqslant e^{-bt}(e^{-mt}\rho + \rho)^2 \leqslant 4\rho^2 e^{-bt} \tag{4.106}$$

by the triangle inequality. For $t > t_0 = \frac{1}{b}\ln(16)$, we obtain $\left\| u_R^{N,0}(\psi)(t) - \phi_i \right\|_{L^2} \leqslant \frac{\rho}{2}$.

From the large deviation principle, we can compare the deterministic solution with the perturbed one. We obtain $C > 0$ such that

$$\mathbb{P}\left[\left\{ \left\| u_R^{N,0}(\psi^N) - u_R^N(\psi^N) \right\|_{\infty, 2t_0} < \frac{\rho}{3} \right\} \right] \geqslant 1 - e^{-C/\varepsilon}. \tag{4.107}$$

Therefore, with probability at least $1 - e^{-C/\varepsilon} - e^{-C_R/\varepsilon}$, we get

$$\left\| u_R^N(\psi)(2t_0) - \phi_i \right\|_{L^2} < \frac{5\rho}{6} \tag{4.108}$$

which implies

$$(\sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}))_+ \leqslant 2t_0. \tag{4.109}$$

We proceed similarly if $\sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \leqslant 0$. In this case, we stop the process at $\sigma^N(\phi)$. Finally we get $\left| \sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \right| \leqslant 2t_0$ with probability at least $1 - e^{-C'/\varepsilon}$, for some $C' > 0$.

We obtain

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left| \sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \right| \right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\left| \sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \right| \mathbb{1}_{\Omega_R} \mathbb{1}_{\left\{ \sigma^N(\phi_{l_0}) > T(\varepsilon) \right\}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\left| \sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \right| \left(\mathbb{1}_{\Omega_R^c} + \mathbb{1}_{\left\{ \sigma^N(\phi_{l_0}) > T(\varepsilon) \right\}^c} \right) \right] \\
&\leqslant 2t_0(1 - e^{-C'/\varepsilon}) \mathbb{P}\left[\Omega_R \cap \left\{ \sigma^N(\phi_{l_0}) > T(\varepsilon) \right\} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}\left[\left| \sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0}) \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad \times (\mathbb{P}[\Omega_R^c]^{\frac{1}{2}} + \mathbb{P}\left[\left\{ \sigma^N(\phi_{l_0}) \leqslant T(\varepsilon) \right\} \right]^{\frac{1}{2}}).
\end{aligned} \tag{4.110}$$

By using Proposition 4.4.2, we have $\mathbb{P}[\Omega_R^c] < e^{-C_R/\varepsilon}$. From Proposition 4.4.1, we deduce that for $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$

$$\mathbb{P}[\sigma^N(\phi_{l_0}) \leqslant T(\varepsilon)] < 1 - e^{-e^{-\frac{\delta_1}{\varepsilon}}} < e^{-\frac{\delta_1}{\varepsilon}}. \tag{4.111}$$

Moreover, we have for all $\delta_2 > 0$

$$\mathbb{E}\left[\left|\sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0})\right|^2\right] < e^{2\frac{\widehat{S}+\delta_2}{\varepsilon}}. \tag{4.112}$$

So we finally get

$$\mathbb{E}[\left|\sigma^N(\phi) - \sigma^N(\phi_{l_0})\right|] \leqslant 2t_0(1 - e^{-C_R/\varepsilon} - e^{-\frac{\delta_1}{\varepsilon}}) + e^{\frac{\widehat{S}+\delta_2}{\varepsilon}}(e^{-C/2\varepsilon} + e^{-\frac{\delta_1}{2\varepsilon}}) \leqslant e^{\frac{\widehat{S}-\eta}{\varepsilon}}. \tag{4.113}$$

By choosing δ_1, δ_2 and η small enough, we prove the proposition for the localized process.

Let us now choose R such that $\widehat{S}(B_R^\infty(0), B_\rho^\infty(\phi_{l_0})) > \widehat{S} + 1$, then from Proposition 4.4.1, we have

$$\sup_{\phi \in B_\rho^\infty(\phi_{l_0})} \mathbb{P}_\phi[\tau_\varepsilon(B_R^\infty(0)) \leqslant \exp((\widehat{S} + 1 - \delta_3)/\varepsilon) = T_2(\varepsilon)] \leqslant e^{-C/\varepsilon} \tag{4.114}$$

$$\sup_{\phi \in B_\rho^\infty(\phi_{l_0})} \mathbb{P}_\phi[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{M}_l) \geqslant T_2(\varepsilon)] \leqslant e^{-C/\varepsilon}. \tag{4.115}$$

We consider the process u starting from ϕ and ϕ_{l_0}. Before $T_2(\varepsilon)$, with high probability, the processes are in $B_R^\infty(0)$ and coincide with u_R up to this time. Moreover $T_2(\varepsilon)$ is much larger than the transition time, so the transition already occurs when the processes reach $B_R^\infty(0)^c$. Therefore, with very high probability, the transition time for the localized process is exactly the correct transition time.

For Equation (4.102), we follow a similar method, by using Proposition 4.4.2 for the localized process and then comparing the deterministic and stochastic processes in the neighborhood of a minimum. □

4.5 Approximation of the potential

In this section, we prove (or refer to) results about the convergence of the potential and its related quantities.

4.5.1 Convergence of the potential

Let us recall from Section 4.4.2 that for a point $u^N \in \mathbb{R}^N$, we denote also by u^N the linear interpolation between the points (x_i, u_i^N). For a function $u \in C_{bc}([0,1])$, we denote by $\widehat{u}^N$ the linear interpolation between the points $(x_i, u(x_i))$. We say that the sequence $u^N \in \mathbb{R}^N$ converges to $u \in H^1$ if the sequence of linear interpolations associated to u^N (also denoted u^N) converges to u in the H^1 norm.

Let us recall that $HS^N(u^N)$ is the Hessian matrix of S^N at u^N and can be interpreted as a bilinear form. We prove the following proposition.

Proposition 4.5.1. *For any sequence $u^N \in \mathbb{R}^N$ converging to $u \in H^1$, we have*

- $S^N(u^N) \xrightarrow[N\to\infty]{} S(u) < \infty$
- *for any sequence h^N converging to h:* $\nabla S^N(u^N) \cdot h^N \xrightarrow[N\to\infty]{} D_u S(h)$
- *for any sequences h^N, k^N converging to h, k:*

$$HS^N(u^N)(h^N, k^N) \xrightarrow[N\to\infty]{} D_u^2 S(h,k).$$

If u is twice differentiable $D_u S(h) = \int_0^1 \frac{\delta S}{\delta \phi}(u)h$ and if k is twice differentiable $D_u^2 S(h,k) = \int_0^1 h\mathcal{H}_u S k$.

Proof. Let $u^N \in \mathbb{R}^N$ be a sequence converging to $u \in H^1$, then u^N converges uniformly on $[0,1]$ to u, so by dominated convergence,

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N V(u_i^N) \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 V(u(x))\mathrm{d}x. \tag{4.116}$$

The convergence in H^1 directly ensures us that

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N N^2(u_{i+1}^N - u_i^N)^2 = \int_0^1 \left|\left(u^N\right)'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 |u'(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{4.117}$$

Let $h^N \in \mathbb{R}^N$ be some sequence converging to $h \in H^1$ then we have

$$\begin{aligned}
\nabla S^N(u^N) \cdot h^N &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial S^N}{\partial x_i}(u_i^N) h_i^N \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \gamma N^2 (u_{i+1}^N - u_i^N)(h_{i+1}^N - h_i^N) + V'(u_i^N) h_i^N \\
&\xrightarrow[N\to\infty]{} \int_0^1 \gamma u' h' + V'(u)h
\end{aligned} \tag{4.118}$$

by L^2 convergence of the derivatives and dominated convergence. Lastly, the convergence of the Hessian is completely similar. □

4.5.2 Convergence of the eigenvalues

Let us consider a sequence of points $u^N \in \mathbb{R}^N$ converging to u in H^1. We need to estimate the convergence of the eigenvalues $(N\lambda_{k,N})_{1\leqslant k\leqslant N}$ of $N \cdot HS^N(u^N)$ to the eigenvalues $(\lambda_k)_{1\leqslant k}$ of $\mathcal{H}_u S$.

The convergence of a single eigenvalue $N\lambda_{k,N}$ for k fixed, is obvious from Proposition 4.5.1. The control of the convergence for all the eigenvalues is complex because of the higher eigenvalues (e.g. $\lambda_{N,N}$). This problem is closely related to the discrepancy between the eigenvalues of $\frac{\gamma}{N}\Delta^N$ and $\gamma\Delta$, the discrete Laplacian (defined by (4.53)) and the Laplacian. We denote $\lambda_{N,k}^0, \lambda_k^0$ their respective eigenvalues in the increasing order. For Dirichlet boundary conditions, we have

$$e_{k,N} = N\lambda_{N,k}^0 - \lambda_k^0 = \gamma\left[4N^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) - \pi^2 k^2\right]. \tag{4.119}$$

Then $e_{N,N} = \gamma N^2(4-\pi^2)$ does not converge to 0. The following proposition adapted from [37] gives us a control of the approximation of the eigenvalues and eigenvectors.

Proposition 4.5.2. *Let us consider a sequence $u_N \in \mathbb{R}^N$ converging to $u \in C^2$ and such that $\|u_N - u\|_\infty = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$. We have:*

(i) there exist $\alpha \in [0,1[$ and a constant C_1 such that for all N and $k < \alpha N$

$$|N\lambda_{N,k} - \lambda_k - e_{k,N}| \leqslant \frac{C_1}{N^2}, \tag{4.120}$$

(ii) there exists a constant C_2 such that $|e_{N,k}| \leqslant C_2 k^4 N^{-2}$,

(iii) for a fixed $k \leqslant N$, the normalized (in H^1) eigenvector $\phi_{k,N}$ of $HS^N(u^N)$ associated to $\lambda_{k,N}$ converges in H^1 to the eigenvector ϕ_k of $\mathcal{H}_u S$ associated to λ_k and we have, for all k

$$\frac{\|\phi_{k,N}\|_\infty}{\|\phi_{k,N}\|_{2,N}} \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}. \tag{4.121}$$

Proof. The proposition is an adaptation of the results of [37] in our case since $NHS^N(u^N)$ is the finite difference approximation of the Sturm-Liouville operator $\mathcal{H}_u S$. The original statement in [37] concerns an approximating sequence u^N which is precisely the sequence $\widehat{u^N}$ of linear interpolations of u. If we take a sequence u^N, then for all $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} N\left|HS^N(u^N)(y) - HS^N(\widehat{u^N})(y)\right| &= \sum_{i=1}^N \left|V''(u_i^N) - V''(u(x_i))\right| y_i^2 \\ &\leqslant C\left\|u^N - u\right\|_\infty \|y\|_2^2. \end{aligned} \tag{4.122}$$

Since $\|u_N - u\|_\infty = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$, we deduce that the difference between the eigenvalues of $NHS^N(u^N)$ and $NHS^N(\widehat{u^N})$ is bounded by $O(\frac{1}{N^2})$ which gives us the result. A similar control holds for the convergence of the eigenvectors. The last result (4.121) comes from the fact that for the eigenvectors of $\mathcal{H}_u S$ ([33] pp.334-335), we have a constant C such that $\|\phi_k\|_\infty \leqslant C\|\phi_k\|_{L^2}$. Then, since $\phi_{k,N}$ converges in H^1, it converges in L^∞ and L^2, then the result comes from the fact that $\|\phi_{k,N}\|_{2,N} \geqslant C\sqrt{N}\|\phi_{k,N}\|_{L^2}$. □

Remark. The normalized eigenvector $e_N = \frac{\phi_N}{\|\phi_N\|_{2,N}}$ satisfies

$$\|e_N\|_{\infty,N}^2 = \frac{\|\phi_N\|_{\infty,N}^2}{\|\phi_N\|_{2,N}^2} \leqslant \frac{\|\phi_N\|_{L^\infty}^2}{N\|\phi_N\|_{L^2}^2} \leqslant \frac{C}{N}\frac{\|\phi_N\|_{H^1}^2}{\|\phi_N\|_{L^2}^2} \leqslant \frac{C}{N}. \tag{4.123}$$

Thus, this proves that the coordinates of the normalized eigenvectors in $\mathbb{R}^N$ for the euclidean norm are uniformly bounded by $O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$.

The following proposition from [37] states uniform estimates in the function ϕ of the eigenvalues of the Hessian operators $\mathcal{H}_\phi S$ and $HS^N(\phi^N)$.

Proposition 4.5.3. *Let ϕ_1^N, ϕ_2^N be sequences converging in H^1 to ϕ_1, ϕ_2, then for all N, k*

$$\left|\lambda_{k,N}^1 - \lambda_{k,N}^2\right| \leqslant C \qquad \left|\lambda_k^1 - \lambda_k^2\right| \leqslant C \tag{4.124}$$

and $\lambda_k^i = \pi^2 k^2 + \int_0^1 V''(\phi_i(x))\mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ for $i = 1, 2$.

Remark. This proposition shows the convergence of the infinite product of the ratio of eigenvalues denoted by $D(\phi, \psi)$

$$\prod_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)} = \prod_{k=1}^{N} \left[1 + \frac{\lambda_k(\phi) - \lambda_k(\psi)}{\lambda_k(\psi)}\right] \xrightarrow[N\to\infty]{} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)} = D(\phi, \psi) \tag{4.125}$$

since

$$\left|\frac{\lambda_k(\phi) - \lambda_k(\psi)}{\lambda_k(\psi)}\right| \leqslant \frac{C}{k^2}. \tag{4.126}$$

4.5.3 Product of eigenvalues

We show the convergence of the product ratio of the eigenvalues of $HS^N(\phi^N)$ and $HS^N(\psi^N)$ to $D(\phi, \psi)$.

Proposition 4.5.4. *For any ϕ^N, ψ^N converging in H^1 to ϕ, ψ such that $\mathcal{H}S(\psi)$ and $\mathcal{H}S(\phi)$ do not have a zero eigenvalue, and that*

$$\left\|\phi^N - \phi\right\|_\infty \vee \left\|\psi^N - \psi\right\|_\infty \leqslant \frac{C}{N^2}, \tag{4.127}$$

we have the convergence

$$\frac{\det(HS^N(\phi^N))}{\det(HS^N(\psi^N))} \xrightarrow[N\to\infty]{} D(\phi, \psi) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)}. \tag{4.128}$$

Proof. The proof of the convergence comes from the fact that for small k the approximated eigenvalues are close to the continuous ones ($\lambda_{k,N} \approx \lambda_k$) whereas this is not the case for k close to N (Proposition 4.5.2). The eigenvalues $\lambda_{k,N}(\phi)$, $\lambda_{k,N}(\psi)$ are close at the first order in k uniformly on ϕ, ψ (Proposition 4.5.3). Therefore we decompose the product in two parts for small k (i.e. $k < \alpha N$ from Proposition 4.5.2) and large k.

Let us denote $\mu_{k,N}(\phi) = N\lambda_{N,k}(\phi^N) - \lambda_k(\phi) - e_{k,N}$. From Proposition 4.5.2, there exists $0 < \alpha < 1$ such that, for $k \leqslant \alpha N$, $|\mu_{k,N}(\phi)| \leqslant \frac{c}{N^2}$. The same holds for the sequence ψ^N. Then, we get,

$$\frac{N\lambda_{k,N}(\phi)}{\lambda_k(\phi)} \frac{\lambda_k(\psi)}{N\lambda_{k,N}(\psi)} = \frac{1 + \theta_{k,N}(\phi)}{1 + \theta_{k,N}(\psi)} = 1 + \frac{\theta_{k,N}(\phi) - \theta_{k,N}(\psi)}{1 + \theta_{k,N}(\psi)} \tag{4.129}$$

where $\theta_{k,N}(\phi) = \lambda_k(\phi)^{-1}(e_{k,N} + \mu_{k,N}(\phi))$. Let us remark that for $k \leqslant \alpha N$

$$|\theta_{k,N}(\psi)| \leqslant \frac{C}{k^2}\left(\frac{k^4}{N^2} + \frac{1}{N^2}\right) \leqslant C\left(\alpha^2 + \frac{1}{N^2}\right) \tag{4.130}$$

thus if we take α small enough and N large enough, we have $|\theta_{k,N}(\psi)| < \frac{1}{2}$. Hence we obtain

$$\left|\ln \prod_{k=1}^{\alpha N} \frac{N\lambda_{k,N}(\phi)}{\lambda_k(\phi)} \frac{\lambda_k(\psi)}{N\lambda_{k,N}(\psi)}\right| \leqslant 2\sum_{k=1}^{\alpha N} |\theta_{k,N}(\phi) - \theta_{k,N}(\psi)| \leqslant \frac{2C\alpha}{N} \tag{4.131}$$

since from Proposition 4.5.3, $|\theta_{k,N}(\phi) - \theta_{k,N}(\psi)| \leqslant \frac{C}{N^2}$.

For $k > \alpha N$ we proceed similarly. Let us write

$$\frac{N\lambda_{k,N}(\phi)}{\lambda_k(\phi)} \frac{\lambda_k(\psi)}{N\lambda_{k,N}(\psi)} = \frac{1+\theta'_{k,N}}{1+\theta'_k} = 1 + \frac{\theta'_{k,N} - \theta'_k}{1+\theta'_k} \tag{4.132}$$

where $\theta'_{k,N} = \lambda_{k,N}(\psi)^{-1}(\lambda_{k,N}(\phi) - \lambda_{k,N}(\psi))$ and alike for θ'_k. From Proposition 4.5.3, we get for all k and $N > N_0$, that $\left|\theta'_{k,N}\right| \vee |\theta'_k| \leqslant \frac{C}{k^2}$. Thus we obtain

$$\left|\ln \prod_{k=\alpha N}^{N} \frac{N\lambda_{k,N}(\phi)}{\lambda_k(\phi)} \frac{\lambda_k(\psi)}{N\lambda_{k,N}(\psi)}\right| \leqslant \sum_{k=\alpha N}^{N} \frac{C}{k^2}\left(1 + \frac{C}{k^2}\right) \leqslant \frac{C}{N} \tag{4.133}$$

which finishes the proof. □

In fact, we need a slightly different convergence.

Corollary 4.5.5. *Let be ϕ^N, ψ^N converging to ϕ, ψ such that*

$$\left\|\phi^N - \phi\right\|_{L^2} \vee \left\|\psi^N - \psi\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{N}. \tag{4.134}$$

Then we have

$$\frac{\det(HS^N(\phi^N))}{\det(HS^N(\psi^N))} \xrightarrow[N\to+\infty]{} D(\phi,\psi). \tag{4.135}$$

Proof. From the previous proposition, we get that

$$\frac{\det(HS^N(\widehat{\phi}^N))}{\det(HS^N(\widehat{\psi}^N))} \xrightarrow[N\to+\infty]{} D(\phi,\psi) \tag{4.136}$$

where $\widehat{\phi}^N$ (resp. $\widehat{\psi}^N$) is the linear interpolation of ϕ (resp. ψ). So we prove

$$D_N = \frac{\det(HS^N(\widehat{\phi}^N))}{\det(HS^N(\widehat{\psi}^N))}\left[\frac{\det(HS^N(\phi^N))}{\det(HS^N(\psi^N))}\right]^{-1} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1+\theta_k(\phi)}{1+\theta_k(\psi)} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1 \tag{4.137}$$

where $\theta_k(\phi) = \lambda_{k,N}(\phi^N)^{-1}(\lambda_{k,N}(\widehat{\phi}^N) - \lambda_{k,N}(\phi^N))$. From the fact that

$$\left\|\phi^N - \phi\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{N} \tag{4.138}$$

we obtain $\left\|\phi^N - \widehat{\phi^N}\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C'}{N}$. Then for all $y \in \mathbb{R}^N$, we have

$$\begin{aligned}\left|HS^N(\phi^N)(y) - HS^N(\widehat{\phi}^N)(y)\right| &= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|V''(\phi_i^N) - V''(\phi(x_i))\right| |y_i|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{N}\sum_{i=1}^{N}\left|\phi_i^N - \phi(x_i)\right| |y_i|^2 \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}\left\|\phi^N - \widehat{\phi}^N\right\|_{L^2} \|y\|_{4,N}^2 \leqslant \frac{C}{N^{3/2}} \|y\|_{2,N}^2 .\end{aligned}$$

Therefore we get that $\left|\lambda_{k,N}(\phi^N) - \lambda_{k,N}(\widehat{\phi}^N)\right| \leqslant \frac{C}{N^{3/2}}$. The same holds for ψ.

Then, we obtain

$$|\theta_k(\psi)| \leqslant \frac{CN}{k^2} \times \frac{1}{N^{3/2}} \leqslant \frac{C}{k^2\sqrt{N}} \leqslant \frac{1}{2} \tag{4.139}$$

for N sufficiently large.

Thus we get

$$|\ln[D_N]| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{|\theta_k(\phi) - \theta_k(\psi)|}{1+\theta_k(\psi)} \leqslant 2\sum_{k=1}^{N} |\theta_k(\phi)| + |\theta_k(\psi)| \leqslant 4C\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2\sqrt{N}}. \tag{4.140}$$

Then let us fix $\eta > 0$, we have

$$|\ln[D_N]| \leqslant C\sum_{k=1}^{\eta\sqrt[3]{N}} \frac{1}{k^2\sqrt{N}} + C\sum_{k=\eta\sqrt[3]{N}}^{N} \frac{1}{k^2\sqrt{N}} \leqslant C\eta N^{-1/6} + \frac{C}{\eta^2}N^{-1/6}. \tag{4.141}$$

Therefore we get $\limsup_{N\to\infty} |\ln[D_N]| = 0$ which proves the proposition. □

4.5.4 Approximated stationary points

The last property we need to check is that for each stationary point of S, there exists a unique sequence of stationary points of S^N converging to this stationary point. Moreover, to ensure the limit of the ratio of eigenvalues, this convergence has to be fast enough (see Corollary 4.5.5). To this aim, we have the following proposition.

Proposition 4.5.6. *There exist C, N_0, such that for all $N > N_0$, there is for each minimum (resp. saddle point) ϕ of S a minimum (resp. saddle point) ϕ^N of S^N such that*

$$\left\|\phi - \phi^N\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{N}. \tag{4.142}$$

Proof. Since by Assumption 4.2.4, there is a finite number of saddles and stationnary points then we only need to prove the proposition for a given saddle or minimum. Let ϕ be a minimum, we prove that there is sequence ϕ^N of minima of S^N such that

$$\left\|\phi^N - \widehat{\phi^N}\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{N}. \tag{4.143}$$

The result (4.142) follows from (4.143) since we already have that

$$\left\|\phi - \widehat{\phi^N}\right\|_{L^2} \leqslant \left\|\phi - \widehat{\phi^N}\right\|_{\infty} \leqslant \frac{C}{N^2}. \tag{4.144}$$

In order to prove (4.143), we use a fixed point theorem. Let us consider the ball $B_{C/\sqrt{N}}$ of radius $\frac{C}{\sqrt{N}}$ in the $\|\cdot\|_{2,N}$ norm where C is a constant we will fix

later. We want to find $z^0 \in B_{C/\sqrt{N}}$ such that $\nabla S^N(\widehat{\phi^N} + z^0) = 0$. In that case we will have $\phi^N = \widehat{\phi}^N + z$ and

$$\left\|\phi^N - \widehat{\phi^N}\right\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{1}{N}\|z\|_{2,N}^2 \leqslant \frac{C}{N^2}. \tag{4.145}$$

By a Taylor expansion of the gradient we have

$$\nabla S^N(\widehat{\phi^N} + z)_i = \nabla S^N(\widehat{\phi^N})_i + (HS^N(\widehat{\phi^N})z)_i + g_i(z) \tag{4.146}$$

where g_i is the remainder which can take the form

$$g_i(z) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^3 S^N}{\partial z_i^3}(\widehat{\phi^N}+tz)z_i^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{N}\int_0^1 (1-t)V'''(\phi_i+tz_i)z_i^2 \mathrm{d}t. \tag{4.147}$$

Then we have for all $z, y \in B_{C/\sqrt{N}}$

$$|g_i(z)| \leqslant \frac{C_0}{N}z_i^2 \quad \text{and} \quad |g_i(x) - g_i(y)| \leqslant \frac{C_0}{N}\left|z_i^2 - y_i^2\right| \leqslant \frac{2C_0}{N^{3/2}}|z_i - y_i|. \tag{4.148}$$

Let us also remark that since ϕ is a stationary point for the potential S, thus we have $-\gamma\phi''(x_i) + V'(\phi(x_i)) = 0$. Therefore we get

$$\begin{aligned}\left|\nabla S^N(\widehat{\phi^N})_i\right| &= \left|\nabla S^N(\widehat{\phi^N})_i - \frac{1}{N}\left(-\gamma\phi''(x_i) + V''(\phi(x_i))\right)\right| \\ &= \frac{1}{N}\left|\gamma N^2(\phi(x_{i+1}) - 2\phi(x_i) + \phi(x_{i-1})) - \gamma\phi''(x_i)\right| \leqslant \frac{C_1}{N^2}.\end{aligned} \tag{4.149}$$

For N sufficiently large $HS^N(\widehat{\phi^N})$ is not degenerate then z^0 is solution of the fixed point equation

$$z^0 = HS^N(\widehat{\phi^N})^{-1}(-\nabla S^N(\widehat{\phi^N}) - g_i(z^0)) = F(z^0). \tag{4.150}$$

The $(2,N)$-norm of $HS^N(\widehat{\phi^N})^{-1}$ is bounded by the inverse of the smallest eigenvalue (in absolute value). Then $\left\|HS^N(\widehat{\phi^N})^{-1}\right\|_{2,N} \leqslant C_2 N$. For $z \in B_{C/\sqrt{N}}$, we get

$$\begin{aligned}\|F(z)\|_{2,N}^2 &\leqslant \left\|HS^N(\widehat{\phi^N})^{-1}\right\|_2^2 \left(\left\|\nabla S^N(\widehat{\phi^N})\right\|_2^2 + \sum_{i=1}^N |g_i(z)|^2\right) \\ &\leqslant C_2^2 N^2\left(\frac{C_1^2}{N^3} + \frac{C_0^2}{N^2}\|z\|_{4,N}^4\right) \\ &\leqslant C_1'\left(\frac{1}{N} + \|z\|_{2,N}^4\right) \leqslant C_1'\left(\frac{1}{N} + \frac{C^4}{N^2}\right) \leqslant \frac{C^2}{N}\end{aligned} \tag{4.151}$$

for C sufficiently small. Therefore $F(B_{C/\sqrt{N}}) \subset B_{C/\sqrt{N}}$. We also have for $z, y \in B_{C/\sqrt{N}}$, $F(y) - F(z) = HS^N(\widehat{\phi^N})^{-1}(-g_i(y) + g_i(z))$.

Then

$$\|F(y)-F(z)\|_{2,N}^2 \leqslant C_2 N^2 \sum_{i=1}^{N} |-g_i(y)+g_i(z)|^2 \leqslant \frac{C_2'}{N} \|y-z\|_{2,N}^2 .$$

Thus F is a contraction for N sufficiently large. By the fixed point Theorem, there exists $z^0 \in B_{C/\sqrt{N}}$ solution of $z^0 = F(z^0)$ which proves Proposition 4.5.6 □

4.6 Estimates

4.6.1 Description

In this section, we compute uniformly in the dimension the expectation of the transition times. We proceed as in [4] and use the potential theory developed in [21]. Let us consider the N-dimensional diffusion

$$\mathrm{d}Y_t = -\nabla S_N(Y_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_t \tag{4.152}$$

which comes from (4.40) with the time change $Y_{h_N t} = X_t$. We denote by μ^N the invariant measure for the process Y

$$\mu^N(\mathrm{d}x) = e^{-\frac{S^N(x)}{\varepsilon}}\mathrm{d}x. \tag{4.153}$$

Let us consider the norms for $y \in \mathbb{R}^N$ and $p \geqslant 1$

$$\|y\|_{p,N}^p = \sum_{x=1}^{N} |y_i|^p \qquad \|y\|_{\infty,N} = \max_{i=1\cdots N} |y_i| . \tag{4.154}$$

Remark. As in the previous section, we associate to a point $y \in \mathbb{R}^N$ its linear interpolation on $[0,1]$ between the points (x_i, y_i) (x_i is given by (4.43),(4.44)) that we denote by y. Let us consider the L^p norm of y on $[0,1]$, we have for all $p \in [1,+\infty]$

$$\frac{1}{(4N)^{1/p}} \|y\|_{p,N} \leqslant \|y\|_{L^p} = \left[\int_0^1 |y(x)|^p \,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{N^{1/p}} \|y\|_{p,N} . \tag{4.155}$$

This can be done using the Riesz-Thorin Theorem, recalling that

$$\frac{1}{4N} \|y\|_{1,N} \leqslant \|y\|_{L^1} \leqslant \frac{1}{N} \|y\|_{1,N} \qquad \text{and} \qquad \|y\|_{\infty,N} = \|y\|_{L^\infty} . \tag{4.156}$$

In order to introduce the other norms, we need the following a priori estimates on the eigenvalues of the Hessian of S^N. Let us recall the Hessian of S^N at a point $\phi^N \in \mathbb{R}^N$ is

$$HS^N(\phi^N)(h)_j = -\frac{1}{N}(\Delta^N h)_j + \frac{1}{N}V''(\phi^N(x_j))h_j, \text{ for } h \in \mathbb{R}^N \tag{4.157}$$

with the suitable boundary conditions.

Lemma 4.6.1 ([37]). *For all $\phi^N \in \mathbb{R}^N$ such that $\left\|\phi^N\right\|_\infty < A$, the eigenvalues $(\lambda_{k,N}(\phi^N))_{k=1}^N$ of $HS^N(\phi^N)$ arranged in increasing order satisfy the bound*

$$m(A)k^2 - 1 \leqslant N\lambda_{k,N}(\phi^N) \leqslant M(A)k^2 + 1 \tag{4.158}$$

where $m(A)$ and $M(A)$ do not depend on N or ϕ^N (only on A).

Let us fix $\phi^N \in \mathbb{R}^N$. We consider the orthonormal eigenvectors $(v_l)_l$ of $HS^N(\phi^N)$. The decomposition of $h \in \mathbb{R}^N$ in this orthonormal basis is given by $h = \sum_{l=1}^N \widetilde{h}_i v_l$. For $p \in [1, \infty]$, we define the norms $\|h\|_{p,\mathcal{F}}$

$$\|h\|_{p,\mathcal{F}}^p = \sum_{i=1}^N \left|\widetilde{h}_i\right|^p \qquad \|h\|_{\infty,\mathcal{F}} = \max_{i=1\cdots N} \left|\widetilde{h}_i\right|. \tag{4.159}$$

As in [4], these are the norms we use to control the approximations of the potential around our stationary points. Let us note that the norms depend on the point ϕ^N.

Remark. As in Section 4.1.1 in [4], the Hausdorff-Young Theorem can be adapted to the norms $\|\cdot\|_{p,\mathcal{F}}$ and $\|\cdot\|_{p,N}$. For all $2 \leqslant p \leqslant +\infty$ and q such that $q^{-1} + p^{-1} = 1$, we obtain

$$\frac{1}{N}\|x\|_{p,N}^p \leqslant C\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\|x\|_{q,\mathcal{F}}\right)^p. \tag{4.160}$$

In fact, let $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ be the linear mapping $T(y) = \sum_{k=0}^{N-1} y_k v_{N,l}(z_i^*)$. By definition, $\|Ty\|_{p,\mathcal{F}} = \|y\|_{p,N}$. The proof of (4.160) is an application of the Riesz-Thorin Theorem, between $p = 2$ and $p = \infty$. On one hand, we have $\|Ty\|_{2,N}^2 = \|y\|_{2,N}^2$ since the eigenvectors form a orthonormal basis. On the other hand, we have $\|Ty\|_{\infty,N} \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}}\|y\|_{1,N}$ since the coordinates of the eigenvectors of the basis are bounded by $\frac{C}{\sqrt{N}}$ (see Lemma 4.5.2, Equation (4.121)).

Let us recall the infinite dimensional situation. The process u starts from a minimum ϕ_{l_0} of S and reaches the set of minima $\mathcal{M}_l$. We denote by $\widehat{S}_0 = \widehat{S}(\phi_{l_0}, \mathcal{M}_l)$ the height of the saddle points defined by (4.20).

By Assumption 4.2.4, for all N sufficiently large, we have a finite set $\mathcal{M}^N = \{x_i^*\}$ of minima of S^N. From Proposition 4.5.2 and Proposition 4.5.6, we deduce that a sequence of minima $x_{l_0}^*$ converges to ϕ_{l_0}. Similarly, there is a subset $\mathcal{M}_l^N$ of $\mathcal{M}^N$ such that each minimum of $\mathcal{M}_l^N$ converges to a minimum in $\mathcal{M}_l$.

We construct a graph for the finite dimensional case as the graph for the infinite dimensional case in Section 4.2.3. The vertices are the minima $\mathcal{M}^N$. The edges are the saddle points z_k^* of S^N for which $\left|\widehat{S}_0 - S^N(z_k^*)\right| < \eta$ for some fixed $\eta > 0$. We connect the edge z_k^* between the two minima that the saddle point z_k^* connects directly. To each saddle point z_k^*, we associate a weight

$$w_k^* = \frac{\left|\lambda_N^-(z_k^*)\right| e^{-\frac{S^N(z_k^*)}{\varepsilon}}}{\sqrt{|\det HS^N(z_k^*)|}}. \tag{4.161}$$

To each minima x_j^*, we associate a value $a_j = a(x_j^*) \in \mathbb{R}$. We denote by a_{i+} and a_{i-} the two values associated to the minima connected by the saddle point z_i^*.

We associate to this graph a quadratic form $Q^N(a)$, for a a real vector indexed by the minima $\mathcal{M}^N$

$$Q^N(a) = \sum_{z_l^*} w_l^*(a_{l+} - a_{l-})^2. \tag{4.162}$$

The equivalent conductance, $C^*(N,\varepsilon)$, between the sets $x_{l_0}^*$ and $\mathcal{M}_l^N$ is defined by

$$C^*(N,\varepsilon) = \inf\left\{Q^N(a), a(x_{l_0}^*) = 1, a(x_i^*) = 0, x_i^* \in \mathcal{M}_l^N\right\}. \tag{4.163}$$

We recall the fundamental formula (4.166) proved in [21]. The expression of the expectation of the hitting time $\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*))$ is based on two quantities: the equilibrium potential and the capacity with respect to the sets $\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*)$ and $\mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)$. The equilibrium potential, h^*, is defined by $h^*(x) = \mathbb{P}_x[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*)) < \tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N))]$. The Dirichlet form, $\mathscr{E}^N$, associated with the diffusion process Y on $\mathbb{R}^N$ is

$$\mathscr{E}^N(h) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla h(x)\|_{2,N}^2 \, \mu^N(\mathrm{d}x). \tag{4.164}$$

The capacity is the evaluation of the Dirichlet form on h^*. The capacity also satisfies a variational principle. We have

$$\begin{aligned} &\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right) = \mathscr{E}^N(h^*) \\ &= \inf\left\{\mathscr{E}^N(h), h \in H^1(\mathbb{R}^N), h = 1 \text{ on } \mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*), h = 0 \text{ on } \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right\}. \end{aligned} \tag{4.165}$$

The expectation of the hitting time is expressed by

$$\mathbb{E}_{\nu^N}[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N))] = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x)}{\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right)} \tag{4.166}$$

where ν^N is a probability measure on $\partial\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*)$.

4.6.2 Capacity

We prove that the capacity defined in (4.165) can be estimated by the equivalent conductance $C^*(N,\varepsilon)$ defined in (4.163).

Proposition 4.6.2. *For all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and ρ, we have*

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right) = \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} C^*(N,\varepsilon)(1 + \psi_1(\varepsilon,N)) \tag{4.167}$$

where $\limsup_{N\to+\infty} |\psi_1(\varepsilon,N)| < \sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}$ *for all* $N > N_0$.

The proof of this result is an adaptation to the case of a finite number of saddle points of Proposition 4.3 in [4]. The estimate of the capacity is made in two steps: an upper bound and a lower bound.

4.6.2.1 Upper bound

We have the following proposition.

Proposition 4.6.3. *For all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and ρ, we have*

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x_{l_0}^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right) \leqslant \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} C^*(N,\varepsilon)(1+\psi_u(\varepsilon,N)) \tag{4.168}$$

where $\limsup_{N\to\infty} |\psi_u(\varepsilon,N)| < \sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}$.

Proof. The proof of this upper bound follows the proof of Lemma 4.4 in [4]. To obtain an upper bound for the capacity, we just estimate the Dirichlet form on a test function h^+. h^+ is defined on some neighborhood $C_\delta^N(z_i^*)$ of each saddle point z_i^* for some $\delta > 0$ small enough.

In the local orthonormal basis (given by coordinates $y^{(i)} \in \mathbb{R}^N$) of the saddle point z_i^*, the neighborhood $C_\delta^N(z_i^*)$ is defined by

$$C_\delta^N(z_i^*) = \left\{ y^{(i)} \in \mathbb{R}^N : |y_l^{(i)}| \leqslant \delta \frac{r_l}{\sqrt{|\lambda_{N,l}|}},\ 0 \leqslant l \leqslant N-1 \right\} + z_i^* \tag{4.169}$$

where (r_l) is a sequence satifying $\sum_l \frac{r_l^{3/2}}{l^{3/2}} < \infty$ and $(\lambda_{N,l})_l$ are the eigenvalues in the increasing order of $HS^N(z_i^*)$. Let us denote $C_\delta^N = \cup_i C_\delta^N(z_i^*)$.

Let us consider

$$S_{N,\delta} = \left\{x, S^N(x) \geqslant S^N(z_i^*) + c\delta^2, \forall i\right\}. \tag{4.170}$$

The set $(S_{N,\delta} \cup C_\delta^N)^c$ contains a finite number of connected components denoted D_j since each of them contains at least a minimum x_j^* (which are in finite number by Assumption 4.2.4). For each connected component D_j, we define h^+ to be the constant $a_j \in [0,1]$. For a saddle z_i^*, we denote D_{i+} and D_{i-} the connected components attained from z_i^* when $y^{(i)} = (\delta\sigma_0, 0)$ and $y^{(i)} = (-\delta\sigma_0, 0)$ respectively.

On $S_{N,\delta} \setminus C_\delta^N$, we take h^+ of class C^1 and such that $\|\nabla h^+\|_{2,N} \leq \frac{c_1}{\delta}$. Then we define h^+ on each $C_\delta^N(z_i^*)$ in the local coordinates, by $h^+(y^{(i)}) = f_i(y_0^{(i)})$ where

$$f_i(y_0) = (a^{i-} - a^{i+}) \frac{\int_{y_0}^{\delta\sigma_0} e^{-|\lambda_{N,0}|t^2/2\varepsilon} \mathrm{d}t}{\int_{-\delta\sigma_0}^{\delta\sigma_0} e^{-|\lambda_{N,0}|t^2/2\varepsilon} \mathrm{d}t} + a^{i+}. \tag{4.171}$$

Therefore, we have to estimate $\mathcal{E}^N(h^+) = \sum_i I_1(i) + I_2$ with

$$I_1(i) = \varepsilon \int_{C_\delta^N(z_i^*)} \left\|\nabla h^+(x)\right\|_{2,N}^2 e^{-\frac{S^N(x)}{\varepsilon}} \mathrm{d}x \tag{4.172}$$

$$I_2 = \varepsilon \int_{S_{N,\delta} \setminus B_\delta^N} \left\|\nabla h^+(x)\right\|_{2,N}^2 e^{-\frac{S^N(x)}{\varepsilon}} \mathrm{d}x. \tag{4.173}$$

Taking $\delta = K\sqrt{\varepsilon\,|\ln\varepsilon|}$, the integrals $I_1(i)$ give us the right asymptotics and are estimated by an adaptation of Lemma 4.4 from [4]. The quadratic approximation of the potential on the sets $C_\delta^N(z_i^*)$ is a consequence of Remark 4.6.1 and of the choice of the sets $C_\delta^N(z_i^*)$. The integral I_2 is computed by following the same method as in Lemma 4.6 in [4].

Therefore, we obtain that for all $(a_j)_j$, for $N \geqslant N_0(\varepsilon)$

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right) \leqslant \sum_i \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} \frac{(a^{i-} - a^{i+})^2 \, |\lambda_{N,0}| \, e^{-\frac{S^N(z_i^*)}{\varepsilon}}}{\sqrt{|\det(HS^N(z_i^*))|}} \times (1 + A_1\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}). \tag{4.174}$$

Taking the minimum of the right-hand side over a, we get the result (4.168). □

4.6.2.2 Lower bound

We now prove the corresponding lower bound.

Proposition 4.6.4. *For all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and ρ, we have*

$$\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_\rho^N(x^*), \mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)\right) \geqslant \varepsilon\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2} C^*(N,\varepsilon)(1 + \psi_l(\varepsilon, N)) \tag{4.175}$$

where $\limsup_{N\to\infty} |\psi_l(\varepsilon, N)| < \sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}$.

Proof. The proof is adapted from [4]. For a saddle point z_i^*, we take a narrow corridor from one (local) minimum to another one and minimize the Dirichlet form on the union of these corridors. In [4], this corridor was a rectangle because of the particular case considered. In this article, we have to be more precise about their construction. We use the same notations as in the proof of the upper bound.

Let us fix δ_0. We consider the subset of $\mathbb{R}^{N-1}$

$$C_\delta^{N,\perp}(z_i^*) = \left\{ y^{(i)} \in \mathbb{R}^N : |y_l^{(i)}| \leqslant \delta \frac{r_l}{\sqrt{|\lambda_{N,l}|}}, \, 1 \leqslant l \leqslant N-1 \right\}. \tag{4.176}$$

and we define $C_\delta^N(z_i^*) = [-\delta_0, \delta_0] \times C_\delta^{N,\perp}(z_i^*) + z_i^*$. We denote by x_{i-}^* and x_{i+}^* the two minima of the basins surrounding z_i^*.

Let $(\gamma_0(s))_{s\in[-s_-,s_+]}$ be a regular C^2 path from x_{i-} to x_{i+} with $\gamma_0(s) = z_i^* + (s, 0)$ for $s \in [-\delta_0, \delta_0]$. We also suppose that there is $\eta > 0$ for which $S^N(\gamma_0(s)) < S_0^N - 3\eta$ for $|s| \geqslant \delta_0$ and that $\|\gamma_0'(s)\|_{2,N} = 1$. Let, for all s, $A(s)$ be an isomorphism from $\mathbb{R}^{N-1}$ to $\gamma_0'(s)^\perp \subset \mathbb{R}^N$ of class C^1 in s and such that for $|s| < \delta_0$, $A(s)y = (0, y_1, \cdots, y_{N-1})$. Then we construct a family of paths $\gamma(s, y_\perp)$ by

$$\gamma(s, y_\perp) = \gamma_0(s) + A(s)y_\perp. \tag{4.177}$$

Such a construction of a path γ_0 is always possible in the infinite dimensional setting (because of Assumption 4.2.4). Then taking the finite dimensional projection, it gives us a path for the finite dimensional case.

We define the corridor from x_{i-} to x_{i+}, for $\delta > 0$ small enough

$$C_\delta(z_i^*) = \left\{ x = \gamma(s, y_\perp), y_\perp \in C_\delta^{N,\perp}(z_i^*), \forall s \right\}. \tag{4.178}$$

Let h be the equilibrium potential which realizes the minimum of the Dirichlet form and define $a^{i\pm}(y_\perp) = h(x_{i\pm} + A(\pm s_\pm)y_\perp)$, the values near the minimum.

To estimate a lower bound, we are going to restrict the Dirichlet form on the union of the corridors $C_\delta(z_i^*)$:

$$\mathcal{E}^N(h) = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \|\nabla h\|_{2,N}^2 \, \mu^N(\mathrm{d}x) \geqslant \sum_i \varepsilon \int_{C_\delta(z_i^*)} \|\nabla h\|_{2,N}^2 \, \mu^N(\mathrm{d}x) = \varepsilon \sum I_5(i). \tag{4.179}$$

We define the function f_i on $C_\delta(z_i^*)$, by $f_i(s, y_\perp) = h(\gamma(s, y_\perp))$. The change of variable on $C_\delta(z_i^*)$ gives us the Jacobian $g_i(s, y_\perp) = \det(J\gamma)(s, y_\perp)$ and we obtain

$$I_5(i) \geqslant \int_{B_\delta^{N,\perp}(z_i^*)} \int_{-s_-}^{s_+} \left| \frac{\partial f_i}{\partial s} \right|^2 e^{-S^N(\gamma(s,y_\perp))/\varepsilon} g_i(s, y_\perp) \mathrm{d}s \mathrm{d}y_\perp. \tag{4.180}$$

We take $y_\perp$ as a parameter then the second term is bounded below by the minimum over functions f_i of the integral

$$\int_{-s_-}^{s_+} \left| \frac{\partial f_i}{\partial s} \right|^2 e^{-S^N(\gamma(s,y_\perp))/\varepsilon} g_i(s, y_\perp) \mathrm{d}s \tag{4.181}$$

with the conditions $f_i(-s_-, y_\perp) = h(x_{i-} + A(-s_-)y_\perp) = a^{i-}(y_\perp)$ and $f_i(s_+, y_\perp) = h(x_{i+} + A(s_+)y_\perp) = a^{i+}(y_\perp)$. This gives us a lower bound for the capacity.

A simple computation shows that the function f_i realizing this lower bound is

$$f_i(s, y_\perp) = (a^{i+}(y_\perp) - a^{i-}(y_\perp)) \frac{\int_{-s_-}^{s} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s}{\int_{-s_-}^{s_+} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s} + a^{i-}(y_\perp). \tag{4.182}$$

Inserting this function in the integral (4.180), we obtain

$$I_5(i) \geqslant \int_{C_\delta^{N,\perp}(z_i^*)} (a^{i+}(y_\perp) - a^{i-}(y_\perp))^2 \left[\int_{-s_-}^{s_+} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s \right]^{-1} \mathrm{d}y_\perp. \tag{4.183}$$

The end of the proof comes from an upper bound of the integral uniformly for $y_\perp \in C_\delta^{N,\perp}(z_i^*)$. We write

$$\int_{-s_-}^{s_+} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s = I_6(i) + I_7(i) \tag{4.184}$$

where

$$I_6(i) = \int_{-\delta_0}^{\delta_0} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s \tag{4.185}$$

$$I_7(i) = \int_{|s|>\delta_0} e^{S^N(s,y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s. \tag{4.186}$$

As in Lemma 4.8 in [4], we control the quadratic approximation near the saddle z_i^* with the following lemma for which we omit the proof.

Lemma 4.6.5. *For all $y = (s, y_\perp) \in C_\delta^N(z_i^*)$, if the sequence $(r_l)_l$ satisfies $\sum_l \frac{r_l^{3/2}}{l^{3/2}} < \infty$, we have for $\delta_0 \geqslant \delta$*

$$\left| S^N(\gamma(s, y_\perp) + z_i^*) - S^N(\gamma(0, y_\perp) + z_i^*) + \frac{1}{2} |\lambda_{0,N}| s^2 \right| \leqslant A_6 \delta_0^3 \tag{4.187}$$

$$\left| S^N(z_i^* + \gamma(0, y_\perp)) - S^N(z_i^*) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_{N,k} y_k^2 \right| < A_8 \delta^3. \tag{4.188}$$

Following the proof of Lemma 4.7 in [4], we can also prove the existence of a constant A_6 such that for all N and $y_\perp$

$$I_6(i) \leqslant e^{\frac{S^N(z_i^* + (0, y_\perp))}{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\lambda_{N,0}|}} \left(1 + A_6 \frac{\delta_0^3}{\varepsilon}\right). \tag{4.189}$$

In addition, we need to prove an upper bound for the integral $I_7(i)$.

Lemma 4.6.6. *There exists a constant A_7 such that for all N and $y_\perp$*

$$I_7(i) \leqslant A_7 \sqrt{N} e^{\frac{\widehat{S} - 2\eta}{\varepsilon}} \tag{4.190}$$

where $\eta > 0$ is given by the definition of the path γ_0.

Proof. We have to be careful with the change of variable. Let us write the Jacobian matrix $J\gamma(s, y_\perp)$ in the local base $(\gamma_0'(s), \gamma_0'(s)^\perp)$, if we denote P_0 the projection on $Span(\gamma_0'(s))$, we get the Jacobian matrix (written by blocks)

$$J\gamma(s, y_\perp) = \begin{pmatrix} 1 + P_0(A'(s) y_\perp) & 0 \\ * & A(s) \end{pmatrix} \tag{4.191}$$

since $\mathrm{Im} A(s) = \gamma_0'(s)^\perp$. Then, as $A(s)$ is an isometry, we obtain that

$$g_i(s, y_\perp) = |\det(J\gamma(s, y_\perp))| = |1 + P_0(A'(s) y_\perp)| = 1 + O(\delta). \tag{4.192}$$

Thus, for δ sufficiently small,

$$\begin{aligned} I_7(i) &= \int_{|s| > \delta_0} e^{S^N(s, y_\perp)/\varepsilon} g_i(s, y_\perp)^{-1} \mathrm{d}s \leqslant (1 + C\delta) e^{\frac{\widehat{S} - 2\eta}{\varepsilon}} (s_+ + s_-) \\ &\leqslant 2(s_+ + s_-) e^{\frac{\widehat{S} - 2\eta}{\varepsilon}} \end{aligned} \tag{4.193}$$

since $S^N(s, y_\perp) < \widehat{S} - 2\eta$ for all $|s| > \delta_0$, and $y_\perp \in C_\delta^{N,\perp}$. Then by construction of the path we have that

$$s_+ + s_- \leqslant C \left\| x_{i-} - x_{i+} \right\|_{2,N} \leqslant C\sqrt{N} \left\| x_{i-} - x_{i+} \right\|_{L^2}. \tag{4.194}$$

□

We insert (4.189) and (4.190) in Equation (4.183). Then we proceed as in the proof of Lemma 4.7 from [4] and we obtain

$$\begin{aligned} I_5(i) \geqslant \varepsilon \sqrt{\frac{|\lambda_{N,0}|}{2\pi\varepsilon}} \int_{B_\delta^{N,\perp}(z_i^*)} (a^{i+}(y_\perp) - a^{i-}(y_\perp))^2 e^{-\frac{S^N(z_i^* + (0, y_\perp))}{\varepsilon}} \mathrm{d}y_\perp \\ \times \left[1 + A_6 \frac{\delta_0^3}{\varepsilon} + A_7' e^{-\frac{\eta}{\varepsilon}}\right]^{-1}. \end{aligned} \tag{4.195}$$

Using Equation (4.102) from Proposition 4.4.3, we obtain for all $y_\perp$, $\left|a^j(y_\perp) - a^j(0)\right| < e^{-\frac{C}{\varepsilon}}$. Then using the approximation (4.188) and following the proof of Lemma 4.7 in [4], we obtain for $\delta = \sqrt{K\varepsilon\,|\ln\varepsilon|}$ and $\delta_0 = K'\varepsilon\,|\ln\varepsilon|$ with $K' > K$,

$$I_5(i) \geqslant \varepsilon(a^{i-} - a^{i+})^2 e^{-\frac{S^N(z_i^*)}{\varepsilon}} \frac{\sqrt{2\pi\varepsilon}^{N-2}\,|\lambda_{N,0}|}{\sqrt{|\det(HS^N(z_i^*))|}}(1 - A_5\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}). \quad (4.196)$$

Equation (4.175) follows by minimizing along the $(a^j)_j$. □

4.6.3 Uniform estimate of the mass of the equilibrium potential

We prove estimates of the numerator of (4.166). Let us denote $x_{l_0}^* \in \mathbb{R}^N$ to be the closest minimum to ϕ_{l_0} in $L^2([0,1])$. We will prove an adaptation of Proposition 4.9 of [4].

Proposition 4.6.7. *For all $\varepsilon < \varepsilon_0$ and ρ, we have*

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x) = \frac{(2\pi\varepsilon)^N}{\sqrt{\det HS^N(x_{l_0}^*)}} e^{-\frac{S^N(x_{l_0}^*)}{\varepsilon}}(1 + \psi_2(\varepsilon, N)) \quad (4.197)$$

where $|\psi_2(\varepsilon, N)| < \sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}$ for all $N > N_0$.

Proof. As the previous section, we define around the minimum $x_{l_0}^* \in \mathbb{R}^N$ a neighborhood $C_\delta^N(x_{l_0}^*)$. In the local orthonormal basis of the minimum $x_{l_0}^*$, the neighborhood $C_\delta^N(x_{l_0}^*)$ is defined by

$$C_\delta^N(x_{l_0}^*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^N : |y_l| \leqslant \delta \frac{r_l}{\sqrt{|\lambda_{N,l}|}},\ 0 \leqslant l \leqslant N-1 \right\} + x_{l_0}^* \quad (4.198)$$

where (r_l) is a sequence satifying $\sum_l \frac{r_l^{3/2}}{l^{3/2}} < \infty$ and $(\lambda_{N,l})_l$ are the eigenvalues in the increasing order of $HS^N(x_{l_0}^*)$.

We need to estimate

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x). \quad (4.199)$$

Let us remark that for $x \in \partial C_\delta^N(x^*)$, one of the coordinates is precisely $\delta r_k/\sqrt{\lambda_{k,N}}$ thus

$$S^N(x) > S^N(x^*) + \delta^2 r_k^2 - C\delta^3 > S^N(x^*) + c\delta^2. \quad (4.200)$$

We consider S' such that the set $\{\phi, S(\phi) \in]S(\phi_{l_0}), S']\}$ contains no stationary point. Then using Proposition 4.5.1, for all η small enough, there exists N_0 such that for $N > N_0$, $\left\{x, S^N(x) \in [S^N(x^*) + \frac{1}{2}c\delta^2, S' - \eta]\right\}$ contains no stationary point. We define the set $A = \left\{S^N(x) \leqslant S^N(x^*) + c\delta^2\right\} \setminus \mathcal{B}_\rho^N(x^*)$. Note also that for δ small enough, $C_\delta^N(x^*) \subset \mathcal{B}_\rho^N(x^*)$. Hence we decompose (4.199) in three parts:

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x) = I_8 + \int_{S^N(x) \geqslant S^N(x_{l_0}^*) + c\delta^2} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x) + \int_A h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x) \quad (4.201)$$

To estimate the third integral we need a control on the equilibrium potential on the set A.

Lemma 4.6.8. *For all $\rho < \rho_0$ and $\eta > 0$ there exists $\varepsilon_0(\rho)$ such that for $\varepsilon < \varepsilon_0$ and $\delta > 0$, let $x \in A$, we have*

$$h_N^*(x) = \mathbb{P}_x[\tau_\varepsilon^N(B_\rho^N(x^*)) < \tau_\varepsilon^N(B_\rho^N(\mathcal{M}_l^N))] \leqslant e^{-(S'-S^N(x)-2\eta)/\varepsilon}. \tag{4.202}$$

Proof. By definition of the set A all the paths from $x \in A$ to x^* attain a height of $S' - \eta$ at least. To prove this fact, let us take a path from x to x^*, it must attain its maximum $\widehat{S}$ at some time t_0. This maximum must satisfies $\widehat{S} > S^N(x^*) + c\delta^2$, since if it is not the case then from Equation (4.200), the path must stay in $C_\delta^N(x^*)$ which contradicts the fact that x is in A. Then the minimal path from x to x^* must attain its maximum at a stationary point of height greater than $S^N(x^*) + c\delta^2$ thus of height greater than $S' - \eta$. This gives us an easy lower bound for the rate function on the set of transition from $x \in A$ to x^*. Then using the method from [47] and the uniform large deviation principle, we prove that

$$h^*(x) = \mathbb{P}_x[\tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(x^*)) < \tau_\varepsilon^N(\mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N))] \leqslant e^{-(S'-2\eta-S^N(x))/\varepsilon} \tag{4.203}$$

uniformly in N. □

We get from (4.201)

$$\int_{\mathbb{R}^N} h^*(x)\mathrm{d}\mu^N(x) \leqslant I_8 + \int_{S^N(x)\geqslant S^N(x_{l_0}^*)+c\delta^2} e^{-S^N(x)/\varepsilon}\mathrm{d}x \tag{4.204}$$

$$+ \int_{S^N(x)\leqslant S^N(x_{l_0}^*)+c\delta^2} e^{-(S'-2\eta)/\varepsilon}\mathrm{d}x \tag{4.205}$$

where we have used the fact that h^* is bounded by one for the second integral and the previous lemma for the third integral. The integral I_8 gives the main contribution and is estimated as in the proof of Proposition 4.9 of [4] using the quadratic approximation of the potential on $C_\rho^N(x_{l_0}^*)$. The second integral on the right-hand side is estimated as in the proof of Lemma 4.6 in [4].

We bound the third integral by the volume of the set $\left\{S^N(x) \leqslant S^N(x_{l_0}^*) + c\delta^2\right\}$ which is bounded uniformly in N. In fact, from the bound on S^N and the convergence of $S^N(x_{l_0}^*)$ to $S(\phi_{l_0})$, we get for δ sufficiently small

$$\left\{S^N(x) \leqslant S^N(x_{l_0}^*) + c\delta^2\right\} \subset \left\{\left\|\nabla^N x\right\|_{2,N}^2 + \|x\|_{2,N}^2 < N(S(\phi_{l_0}) + c)\right\} \tag{4.206}$$

which is a deformed ball. The computation shows that this quantity is uniformly bounded in N.

We obtain the result since the order of magnitude of the two last integrals $(O\left(e^{-(S'-\eta)/\varepsilon}\right))$ of (4.204) is much smaller than $I_8 = O\left(e^{-S^N(x_{l_0}^*)/\varepsilon}\right)$. □

4.6.4 Finite Dimensional Formula

The finite dimensional formula is now obtained with a uniform control in the dimension. From Proposition 4.5.6, we take $x^* = \phi_{l_0}^N$ where $\phi_{l_0}^N$ is the

unique minimum of S^N such that

$$\left\|\phi_{l_0} - \phi_{l_0}^N\right\|_{L^2} \leqslant \frac{C}{N} \qquad \left\|\widehat{\phi}_{l_0}^N - \phi_{l_0}^N\right\|_\infty \leqslant \frac{C}{\sqrt{N}} \tag{4.207}$$

where $\widehat{\phi}_{l_0}^N$ is the linear interpolation of ϕ_{l_0}.

Proposition 4.6.9. *Let τ_ε^N be the transition time from $\mathcal{B}_\rho^N(\phi_{l_0}^N)$ to $\mathcal{B}_\rho^N(\mathcal{M}_l^N)$, we have uniformly in N*

$$\mathbb{E}_{\phi_{l_0}^N}\left[\tau_\varepsilon^N\right] = \frac{2\pi e^{\frac{S^N(\phi_{l_0}^N)}{\varepsilon}}}{C^*(N,\varepsilon)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)}}(1+\Psi(\varepsilon,N)) \tag{4.208}$$

where $C^*(N,\varepsilon)$ is the equivalent conductance and

$$\limsup_{N\to+\infty} |\Psi(\varepsilon,N)| \leqslant C\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|^{3/2}. \tag{4.209}$$

Proof. Inserting the estimates for the capacity (Proposition 4.6.2) and the numerator (Proposition 4.6.7) in Equation (4.166) we conclude that

$$\mathbb{E}_{\nu^N}[\tau_\varepsilon^N] = \frac{2\pi e^{\frac{S^N(\phi_{l_0}^N)}{\varepsilon}}}{C^*(N,\varepsilon)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)}}(1+\Psi_1(\varepsilon,N)) \tag{4.210}$$

where $\limsup_N |\Psi_1(\varepsilon,N)| < C\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|^{3/2}$ and ν^N is a probability measure on $\partial\mathcal{B}_\rho^N(\phi_{l_0}^N)$. Now we use Proposition 4.4.3 to replace the measure ν^N by the point $\phi_{l_0}^N$. For $y \in \mathcal{B}_\rho^N(\phi_{l_0}^N)$, we have by definition

$$\left\|\phi_{l_0}^N - y\right\|_{L^2}^2 < \rho^2 \qquad \left|S^N(\phi_{l_0}^N) - S^N(y)\right| < \rho. \tag{4.211}$$

Then from Proposition 4.5.6, we have N_0 such that for $N \geqslant N_0$

$$\|\phi_{l_0} - y\|_{L^2}^2 < 2\rho^2 \qquad \left|S(\phi_{l_0}) - S^N(y)\right| < 2\rho. \tag{4.212}$$

Thus since V is regular, we obtain $\left|\left\|\phi_{l_0}'\right\|_{L^2}^2 - \|y'\|_{L^2}^2\right| < C\rho$.

Let $z = y - \phi_{l_0}$, we have by integration by parts

$$\left|\left\|\phi_{l_0}' + z'\right\|_{L^2}^2 - \left\|\phi_{l_0}'\right\|_{L^2}^2\right| = \left|2\left\langle\phi_{l_0}', z'\right\rangle + \|z'\|_{L^2}^2\right| = \left|-2\left\langle\phi_{l_0}'', z\right\rangle + \|z'\|_{L^2}^2\right| < C\rho \tag{4.213}$$

since ϕ_{l_0} is regular as a classical solution of a differential equation. Then we obtain by the Cauchy-Schwarz inequality

$$\|z'\|_{L^2}^2 \leqslant C\rho + 2\left\|\phi_{l_0}''\right\|_{L^2}\|z\|_{L^2} \leqslant (C + 2\left\|\phi_{l_0}''\right\|_{L^2})\rho. \tag{4.214}$$

Thus we get

$$\left\|y - \phi_{l_0}^N\right\|_\infty \leqslant \|y - \phi_{l_0}\|_\infty \leqslant C'\|y - \phi_{l_0}\|_{H^1} = C'\|z\|_{H^1} \leqslant C''\sqrt{\rho}. \tag{4.215}$$

Using Proposition 4.4.3, we get that for all $N \geqslant N_0$

$$\left|\mathbb{E}_{\nu^N}\left[\tau_\varepsilon^N\right] - \mathbb{E}_{\phi_{l_0}{}^N}\left[\tau_\varepsilon^N\right]\right| \leqslant e^{\frac{\widehat{S}-2\eta}{\varepsilon}} \tag{4.216}$$

which gives us (4.208) since the exponential asymptotics of (4.210) is greater than $e^{\frac{\widehat{S}-\eta}{\varepsilon}}$. □

4.6.5 Proof of Theorem 4.2.1

From Proposition 4.6.9 applied to the finite diffusion approximation where the minima and saddle points are given by Proposition 4.5.6, we have

$$\mathbb{E}_{\phi_{l_0}^N}\left[\tau_\varepsilon^N\right] = \frac{2\pi h_N e^{\frac{S^N(\phi_{l_0}^N)}{\varepsilon}}}{C^*(N,\varepsilon)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)}}(1+\Psi(\varepsilon,N)) \tag{4.217}$$

where the factor h_N comes from the time change (Equation (4.40)). Using Proposition 4.5.2 (convergence of the eigenvalues) and Corollary 4.5.5 (convergence of the ratio of eigenvalues), the quadratic forms Q^N converges to Q:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_N}Q^N(a)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)} &= \sum_{\phi^*{}_l^N}\frac{\left|\lambda_N^-(\phi^*{}_l^N)\right|}{h_N}\sqrt{\frac{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)}{\left|\det HS^N(\phi^*{}_l^N)\right|}}e^{-\frac{S^N(\phi^*{}_l^N)}{\varepsilon}} \\
&\qquad \times (a_{l+}-a_{l-})^2 \\
\frac{1}{h_N}Q^N(a)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)} &\xrightarrow[N\to+\infty]{} \sum_{\phi^*{}_l}\left|\lambda^-(\phi^*{}_l)\right|\sqrt{\frac{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_{l_0}}S}{\left|\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_l^*}S\right|}}e^{-\frac{S(\phi^*{}_l)}{\varepsilon}} \\
&\qquad \times (a_{l+}-a_{l-})^2 \\
&= Q(a)e^{-\frac{S(\phi^*{}_l)}{\varepsilon}}\sqrt{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_{l_0}}S}.
\end{aligned} \tag{4.218}$$

where $\phi^*{}_l^N$ are the relevant saddle points given by Proposition 4.5.6. Then the minimizer converges. For all ε, we get

$$\frac{1}{h_N}C^*(N,\varepsilon)\sqrt{\det HS^N(\phi_{l_0}^N)} \xrightarrow[N\to\infty]{} \mathcal{C}^*(\phi_{l_0},\mathcal{M}_l)e^{-\frac{S(\phi^*{}_l)}{\varepsilon}}\sqrt{\mathrm{Det}\mathcal{H}_{\phi_{l_0}}S}. \tag{4.219}$$

Therefore, we obtain the result of Theorem 4.2.1 from Proposition 4.3.3.

Chapitre 5

Exemple et perspectives

5.1 Exemple pour Allen-Cahn dans les cas Dirichlet et Neumann

Nous souhaitons appliquer le théorème 4.2.1 prouvé au chapitre 4 à l'équation d'Allen-Cahn correspondant au choix de potentiel $V(x) = x^4/4 - x^2/2$ dans l'équation (0.3). Il nous faut pour cela décrire en détail la structure de l'action S en appliquant les résultats exposés dans l'annexe C.

Pour une fonction ϕ stationnaire de S et telle que $\mathcal{H}_\phi S$ ne possède pas de valeurs propres nulles, on note $ind(\phi)$ le nombre de valeurs propres strictement négatives de $\mathcal{H}_\phi S$. On note aussi sur le modèle de l'équation (C.40) la demi-période $t(E)$ pour $0 \leqslant E \leqslant 1/4$, par

$$t(E) = \sqrt{2} \int_0^{y+(E)} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{E + V(y)}} \tag{5.1}$$

où $y+(E) \in [0,1]$ est la plus petite solution positive de $V(y) = -E$. On obtient $y^+(E) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - 4E}}$.

On peut prouver par le calcul que

- $t'(E) > 0$ pour $E \in]0, 1/4[$
- $t(E) \xrightarrow[E \to 0]{} \pi$ et $t'(E) \xrightarrow[E \to 0]{} 0$, on prolonge alors t en 0
- $t(E) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} |\ln(1 - 4E)|$.

Les solutions stationnaires sont donc données par les solutions (E, k) de

$$t(E) = \frac{1}{k\sqrt{\gamma}}. \tag{5.2}$$

On définit $k_0 = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\gamma}\pi} \right\rfloor$ qui est le plus petit entier positif tel que l'équation (5.2) ait une solution. Notons que $k_0 > 0$ si et seulement si $\gamma < 1/\pi^2$. Dans le cas des conditions de Dirichlet, en appliquant la Proposition C.4.10, on a la proposition suivante.

Proposition 5.1.1. *Dans le cas Dirichlet, la fonction constante* 0 *est stationnaire, hyperbolique si* $\gamma \neq 1/\pi^2 l^2$ *pour* l *entier positif. Son indice est alors*

$$ind(0) = \begin{cases} 0 \ si \ \gamma > 1/\pi^2 \\ k_0 \ si \ \gamma < 1/\pi^2 \end{cases} \tag{5.3}$$

Pour $\gamma < 1/\pi^2$, on a $k_0 > 0$ et il existe des points stationnaires non constants $\phi_{+,k}, \phi_{-,k}$ associés à (E_k, k) pour $k \leqslant k_0$ solutions de (5.2). Ce sont les solutions de

$$\gamma\phi''(x) - V'(\phi(x)) = 0 \tag{5.4}$$

vérifiant $\phi_{\pm,k}(0) = 0$ et $\phi'_{\pm,k}(0) = \pm\sqrt{\frac{2E_k}{\gamma}}$. Ils sont symétriques l'un de l'autre et de même indice : $k-1$.

Dans le cas des conditions de Neumann, on applique la Proposition C.4.4.

Proposition 5.1.2. *Dans le cas Neumann, les fonctions constantes $0, \pm 1$ sont toujours stationnaires. ± 1 sont toujours hyperboliques, leurs indices sont nuls. 0 est hyperbolique si et seulement si $\gamma \neq 1/\pi^2 l^2$ pour l entier positif. Son indice est alors*

$$ind(0) = \begin{cases} 1 \text{ si } \gamma > 1/\pi^2 \\ k_0 + 1 \text{ si } \gamma < 1/\pi^2 \end{cases} \tag{5.5}$$

Pour $\gamma < 1/\pi^2$, il existe des points stationnaires non constants $\psi_{+,k}, \psi_{-,k}$ associés à (E_k, k) pour $k \leqslant k_0$. Ce sont les solutions de

$$\gamma\psi''(x) - V'(\psi(x)) = 0 \tag{5.6}$$

vérifiant $\psi'_{\pm,k}(0) = 0$ et $\psi_{\pm,k}(0) = \pm\sqrt{1 - \sqrt{1 - 4E_k}}$. Ils sont symétriques l'un de l'autre et de même indice : k.

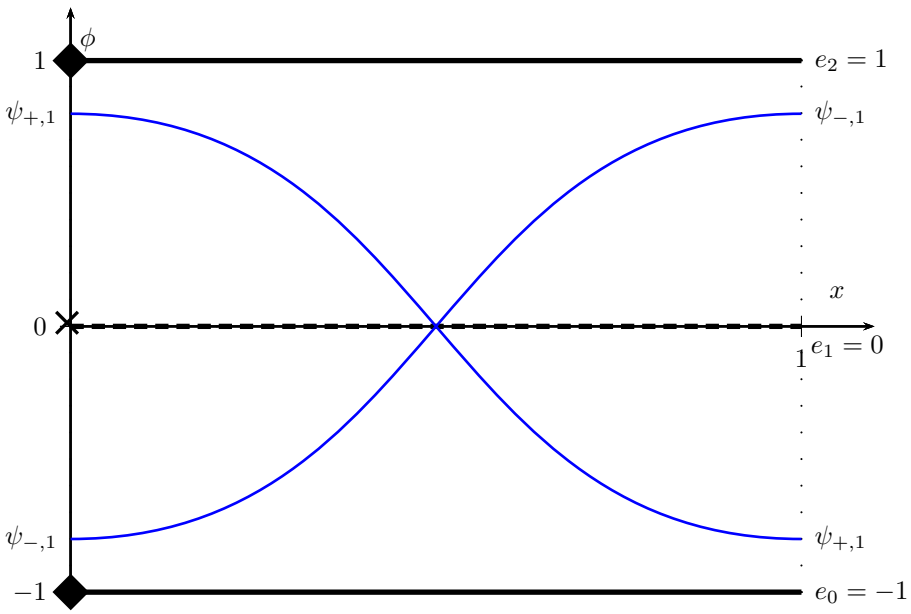


FIGURE 5.1: Points stationnaires dans le cas Neumann : on a deux points selles symétriques d'indice 1, ψ_1^+ et ψ_1^- si $\gamma < \frac{1}{\pi^2}$ et un seul $e_1 = 0$ si $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$

On peut ensuite appliquer la Proposition C.5.2 afin de décrire la géométrie des points selles et des minima.

Proposition 5.1.3. *On a trois cas distincts : pour* $\gamma < \frac{1}{4\pi^2}$, $\frac{1}{4\pi^2} < \gamma < \frac{1}{\pi^2}$ *ou* $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$.

- *Si* $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$, *dans les conditions de Dirichlet, il n'y qu'un seul point stationnaire, le minimum constant* 0, *il ne peut donc pas y avoir de transitions. Dans les conditions de Neumann, les seules fonctions constantes sont stationnaires,* 0 *est d'indice* 1 *et* ± 1 *sont des minima, on a simplement les connexions*
$$-1 \longleftarrow 0 \longrightarrow 1 \tag{5.7}$$
- *Si* $\frac{1}{4\pi^2} < \gamma < \frac{1}{\pi^2}$, *dans les conditions de Neumann et Dirichlet, on a deux minima de même énergie (*± 1 *pour Neumann et* $\phi_{\pm,1}$ *pour Dirichlet). Tandis que nous avons deux points selles* $\psi_{\pm,1}$ *dans les conditions de Neumann, il n'y en qu'un seul dans les conditions de Dirichlet (constant* $e_1 = 0$*). Le cas Dirichlet est donc analogue au cas précédent. Pour les conditions de Neumann, on a en revanche*
$$\begin{tikzcd} & \psi_{+,1} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ -1 & & +1 \\ & \psi_{-,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \tag{5.8}$$
- *Si* $\frac{1}{4\pi^2} > \gamma$, *les conditions de Neumann restent identiques au cas précédent. Pour les conditions de Dirichlet, on a deux points selles non constants qui apparaissent (*$\phi_{\pm,2}$*) et on retrouve la situation des conditions de Neumann.*

Nous appliquons alors, le Théorème 4.2.1, afin de calculer dans chacun des cas l'espérance du temps de transition métastable. On reprend les notations du chapitre 4. Rappelons juste la notation, pour A_1 suffisamment grand, et ϕ régulière
$$\mathcal{B}_\rho(\phi) = \left\{\sigma \in H^1_{bc}, \|\sigma - \phi\|_{L^2} \leqslant \rho, \|\sigma\|_{H^1} < A_1\right\} \tag{5.9}$$
Tous calculs faits, on peut formuler la proposition suivante.

Proposition 5.1.4. *On a alors pour* ε *et* ρ *suffisamment petit, pour les conditions de Neumann :*

- *si* $\gamma < \frac{1}{\pi^2}$
$$\mathbb{E}_{-1}[\tau(\mathcal{B}_\rho(+1))] = \frac{\pi}{|\lambda^-(\psi_{-,1})|}\sqrt{\frac{|s'(1)|}{f'(1)}}e^{\delta_n S/\varepsilon}(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3(\varepsilon)\right|^{1/2})) \tag{5.10}$$
avec $\delta_n S = S(\psi_{-,1}) - S(-1)$ *et* s *(resp.* f*) est la solution du problème de Sturm-Liouville* $\mathcal{H}_{\psi_{-,1}} Ss$ *(resp.* $\mathcal{H}_{-1} Sf$*) avec* $s(0) = 1$ *et* $s'(0) = 0$ *(de même pour* f*) ;*
- *si* $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$
$$\mathbb{E}_{-1}[\tau(\mathcal{B}_\rho(+1))] = \frac{2\pi}{2^{1/4}}\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)}{\sinh\left(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}\right)}}e^{1/4\varepsilon}(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3(\varepsilon)\right|^{1/2})). \tag{5.11}$$

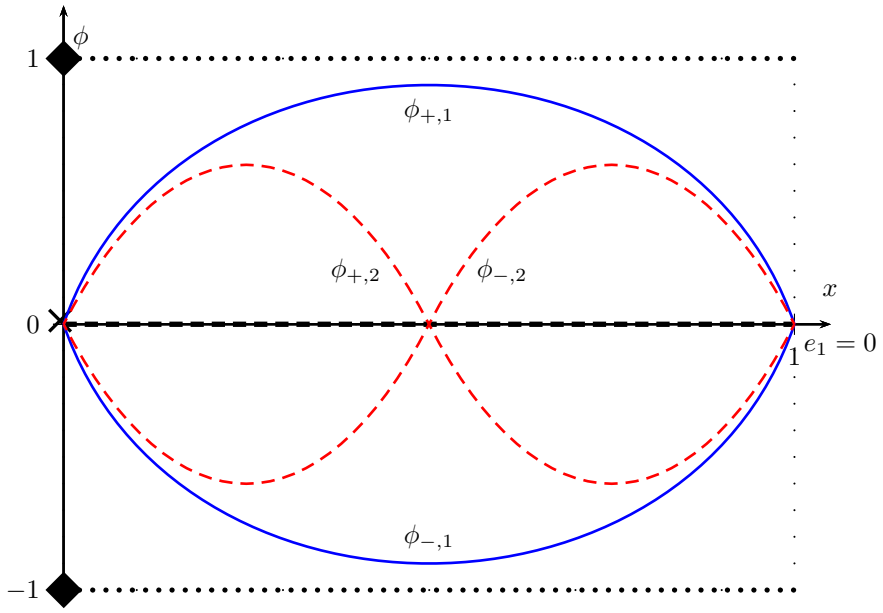


FIGURE 5.2: Allure des points selles et minima d'indices 1 dans les conditions de Dirichlet. Pour $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$, seul e_1 est présent, ensuite si $\frac{1}{\pi^2} > \gamma > \frac{1}{4\pi^2}$, apparaissent les minima $\phi_{\pm,1}$ et enfin si $\frac{1}{4\pi^2} > \gamma$, les points selles sont $\phi_{\pm,2}$.

De même pour les conditions de Dirichlet, on a

- *si* $\gamma < \frac{1}{4\pi^2}$

$$\mathbb{E}_{\phi_{-,1}}[\tau(\mathcal{B}_\rho(\phi_{+,1}))] = \frac{\pi}{|\lambda^-(\phi_{-,2})|}\sqrt{\frac{|s(1)|}{f(1)}}e^{\delta_d S/\varepsilon}(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3(\varepsilon)\right|^{1/2})) \tag{5.12}$$

avec $\delta_d S = S(\phi_{-,2}) - S(\phi_{-,1})$ *et* s *(resp.* f*) est la solution du problème de Sturm-Liouville* $\mathcal{H}_{\phi_{-,2}}Ss$ *(resp.* $\mathcal{H}_{\phi_{-,1}}Sf$*) avec* $s(0) = 0$ *et* $s'(0) = 1$ *(de même pour* f*);*

- *si* $\frac{1}{4\pi^2} < \gamma < \frac{1}{\pi^2}$

$$\mathbb{E}_{\phi_{-,1}}[\tau(\mathcal{B}_\rho(\phi_{+,1}))] = \frac{2\pi}{|\lambda^-(0)|}\sqrt{\frac{|s(1)|}{f(1)}}e^{\delta_d S/\varepsilon}(1 + O(\left|\varepsilon \ln^3(\varepsilon)\right|^{1/2})) \tag{5.13}$$

avec $\delta_d S = S(0) - S(\phi_{-,1})$ *et* s *(resp.* f*) est la solution du problème de Sturm-Liouville* $\mathcal{H}_0 Ss$ *(resp.* $\mathcal{H}_{\phi_{-,1}}Sf$*) avec* $s(0) = 0$ *et* $s'(0) = 1$ *(de même pour* f*).*

Les calculs précis des valeurs propres et des déterminants sont faciles dans le cas Neumann pour $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$ car tous les points stationnaires sont constants. La structure des points selles entre les minima introduit un facteur $\frac{1}{2}$ par rapport à la situation où il n'y aurait qu'un seul point selle.

Remarque 20. On a vu (équation (0.31) au chapitre) via un changement de variable d'espace que on peut choisir de prendre $\gamma = 1$ et auquel cas on est

ramené en espace à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right]$. Regarder la limite $\gamma \to 0$ revient à faire tendre la taille de l'intervalle vers ∞ mais d'après l'équation (0.31) en même temps on fait tendre $\varepsilon\sqrt{\gamma}$ (la variance du bruit blanc) vers 0. Il faudrait pour avoir la vraie limite prendre $\varepsilon\sqrt{\gamma} = \varepsilon' > 0$ fixé, faire une limite conjointe en $(\gamma, \varepsilon = \varepsilon'\gamma^{-1/2})$ pour $\gamma \to 0$.

5.2 Perspective sur le cas périodique

Dans le cas périodique, comme dans les cas Neumann et Dirichlet, les minima sont nécessairement des fonctions constantes à cause de la Proposition C.4.6. Nous exposons un travail en cours sur le cas périodique. La difficulté réside sur le contrôle de l'approximation du potentiel discrétisé sur tout un continuum de points selles.

Il nous faut faire une hypothèse supplémentaire sur la structure de l'attracteur global.

Hypothèses 5.2.1. On fait l'hypothèse que le « 1-squelette »de l'attracteur global, c'est-à-dire l'ensemble des points selles d'indice 1 et des minima et de leurs connexions hétéroclines, est connexe.

Cette hypothèse signifie que entre deux minima le chemin minimal peut ne passer que par des points selles d'indice 1.

On est alors dans la même configuration que pour les conditions de Neumann. Soient deux minima ϕ_-, ϕ_+ entre lesquels on veut calculer le temps de transition. On se donne des voisinages, définis comme dans l'équation (5.9) :

$$\mathcal{B}_{\phi_+}(\rho) = \left\{ f \in H^1_{per}([0,1]), \|f - \phi_+\|_{L^2} < \varepsilon, \|\phi_+ - f\|_{H^1} < A \right\} \tag{5.14}$$

avec A suffisamment grand. On a deux types de points selles d'indice 1 : les points selles constants et les points selles non constants formant des familles translatées les unes des autres. On va aussi supposer dans la suite que seul un point selle est maximal entre ϕ_- et ϕ_+ et on le note ϕ_0.

Rappelons que pour calculer les temps de transition, on a besoin de calculer deux quantités : la capacité, ce qui se fait dans un voisinage du point selle, et la masse du potentiel d'équilibre ce qui se fait dans un voisinage du minimum duquel on part. Le minimum étant toujours constant, cette dernière quantité se calcule comme dans les conditions de Neumann (Proposition 4.6.7). De même pour la capacité dans le cas où le point selle est constant, puisqu'il est alors isolé (Proposition 4.6.2). Le seul point délicat est donc le calcul de la capacité dans le cas où on a une famille de points selles non constants. Le problème vient du fait que les points ne sont plus isolés.

5.2.1 Calcul des approximations

On se ramène toujours en dimension fine par l'approximation définie au chapitre 2. On considère le cas où le point selle est non constant, on note ϕ_0 le point selle de la famille translaté de tel sorte que $\max \phi_0 = \phi_0(0)$. Le potentiel S^N en dimension finie est (équation (0.53))

$$S^N(\phi^N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} N^2 (\phi^N_{i+1} - \phi^N_i)^2 + V(\phi^N_i). \tag{5.15}$$

On a alors pour chaque N, une famille de N points stationnaires translatés les uns des autres par $\frac{1}{N}$, correspondant à $\phi_N^0(\cdot + \frac{1}{N})$ avec ϕ_N^0 approchant à la fonction ϕ^0 (donné par la proposition 4.5.6 avec condition au bord de Neumann). Or, ϕ_N^0 est continue, linéaire par morceaux, on définit alors, pour $\theta \in [0,1]$, $\phi_N^\theta = \phi_N^0(\cdot + \theta)$.

Pour une fonction continue ψ périodique sur $[0,1]$, on définit, de manière générale, $S^N(\psi) = S^N((\psi_i)_{1\leqslant i\leqslant N})$ avec $\psi_i = \psi(i/N)$. On désigne alors par $H_\psi^N S^N$ la hessienne au vecteur $(\psi_i)_i$.

Le hessien de S en ϕ^0 est alors donné par l'opérateur $\mathcal{H}_{\phi^0} S$:

$$\mathcal{H}_{\phi_0} Sh = -\gamma h'' + V''(\phi_0)h \tag{5.16}$$

pour h fonction périodique de classe C^2. Par définition de ϕ_0, $\mathcal{H}_{\phi_0} S$ avec les conditions périodiques a une valeur propre négative (λ_0), une valeur propre nulle ($\lambda_1 = 0$) et toutes les autres positives ($\lambda_k, k \geqslant 2$). Rappelons (remarque 25) que la valeur propre nulle est liée à ϕ_0'.

On a donc N points stationnaires associés aux translatés de ϕ_0^N, pour N suffisamment grand les valeurs propres de $H_{\phi_0^N} S^N$ sont distinctes, ordonnées par ordre croissant $\lambda_0^N, \lambda_1^N, \lambda_2^N$... et convergent vers les valeurs propres associées à ϕ_0 (D'après la Proposition 4.5.2 pour les conditions au bord de Neumann).

Or, λ_1^N est positive (car ϕ_0^N est un point selle d'indice 1 pour les conditions de Neumann) et converge vers 0. On a donc besoin de contrôler cette convergence.

Il nous faut aussi contrôler l'erreur faite le long des points selles. On pose f^N la fonction $f^N(\theta) = S^N(\phi_0^N(\cdot+\theta)) - S^N(\phi_0^N)$, ϕ_0^N étant une fonction linéaire par morceaux.

Lemme 5.2.2. *Il existe des constantes C_1 et C_2 indépendantes de N telles que*

$$\left|\lambda_1^N\right| \leqslant \frac{C_1}{N^2} \tag{5.17}$$

$$0 \leqslant f^N(\theta) \leqslant \frac{C_2}{N}. \tag{5.18}$$

Démonstration. Le vecteur propre associé à la valeur propre nulle est ϕ_0', de même le vecteur propre associé à λ_1^N est proche de la dérivée discrète de ϕ_0^N. En effet, posons $y_i = \phi_0^N(i/N)$, $y = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ est solution de

$$-\gamma N(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \frac{1}{N}V'(y_i) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant N \tag{5.19}$$

avec la convention que $0 = N$ (et donc $N+1 = 1$). On pose alors $\delta y = (\delta y_i)_{1\leqslant i\leqslant N}$ avec $\delta y_i = N(y_{i+1} - y_i)$. On a pour $1 \leqslant i \leqslant N$, en faisant la différence de (5.19) pour i et $i+1$ et en utilisant un développement de Taylor de $V'(y_{i+1})$ à l'ordre 2 en y_i :

$$\begin{aligned}
(H_{\phi_0^N} S^N \delta y)_i &= -\gamma N(\delta y_{i+1} - 2\delta y_i + \delta y_{i-1}) + \frac{1}{N}V''(y_i)\delta y_i \\
&= V'(y_i) + V''(y_i)(y_{i+1} - y_i) - V'(y_{i+1}) \\
&= \frac{1}{2}V'''(\xi_i)(y_{i+1} - y_i)^2 \\
&= \frac{1}{2N^2}V'''(\xi_i)\delta y_i^2
\end{aligned} \tag{5.20}$$

pour un ξ_i entre y_i et y_{i+1}. On choisit les vecteurs propres h_k (associé à λ_k^N) de $H_{\phi_0^N} S^N$ pour qu'ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^N$. L'idée revient à comparer h_1 à δy. En particulier, on a

$$H_{\phi_0^N} S^N h_1 = \lambda_1^N h_1 \tag{5.21}$$

Par unicité des vecteurs propres, avec la bonne renormalisation (ici $\sqrt{N}$) h_1 converge vers ϕ_0' dans H^1 (d'après la Proposition 4.5.2). Par construction, l'interpolation linéaire de δy converge aussi vers ϕ_0' dans H^1. En particulier

$$\left\| \sqrt{N} h_1 \right\|_{L^2([0,1])} \xrightarrow[N\to\infty]{} \|\phi_0'\|_{L^2} \tag{5.22}$$

$$\|\delta y\|_{L^2([0,1])} \xrightarrow[N\to\infty]{} \|\phi_0'\|_{L^2} . \tag{5.23}$$

De plus on a aussi

$$\left(\sqrt{N} h_1, \delta y\right)_{L^2([0,1])} \xrightarrow[N\to\infty]{} \|\phi_0'\|_{L^2}^2 \tag{5.24}$$

On a alors, par symétrie de la hessienne, par Cauchy-Schwarz, et en utilisant (5.20) avec (5.22), (5.23) et l'équation précédente

$$\frac{\lambda_1^N}{\sqrt{N}} \left(\sqrt{N} h_1, \delta y\right)_{L^2([0,1])} = \left(H_{\phi_0^N} S^N h_1, \delta y\right)_{L^2} \tag{5.25}$$

$$= \left(H_{\phi_0^N} S^N \delta y, h_1\right)_{L^2} \tag{5.26}$$

$$\leqslant \frac{C}{N^2\sqrt{N}} \left(\sqrt{N}\, |h_1|, |\delta y|\right)_{L^2([0,1])} \tag{5.27}$$

On en déduit donc que pour N suffisamment grand

$$\left|\lambda_1^N\right| \leqslant \frac{C}{N^2}. \tag{5.28}$$

Par définition, f^N est définie sur $[0,1]$, continue, périodique de période $\frac{1}{N}$, positive et nulle en 0. En particulier, pour N suffisamment grand, on déduit de la convergence de S^N vers S et de la convergence de ϕ_0^N vers ϕ_0

$$0 \leqslant f^N(\theta) \leqslant \frac{C}{N}. \tag{5.29}$$

□

5.2.2 Calcul de la capacité

On se propose de calculer la capacité pour la dimension N autour d'une famille dégénérée de points selles en contrôlant l'erreur en fonction de N. On pose ϕ_0^N un de ces points selles, la famille s'en déduit par translation de $\frac{1}{N}$. On définit $(h_k)_{0\leqslant k\leqslant N}$ les vecteurs propres de $H_{\phi_0^N} S^N$ avec les conditions périodiques de telle sorte qu'ils forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^N$ et ordonnés par ordre croissant de valeurs propres. Alors $(h_{k,\theta})_k = (h_k(\cdot + \theta))_k$ forme bien une base orthonormale qui est la base propre de $H_{\phi_\theta^N} S^N$ pour tout θ multiple entier de $\frac{1}{N}$.

On définit $\psi_{\theta,z} = \phi_\theta^N + \sum_{k\neq 1} z_k h_{k,\theta}$ pour $z = (z_0, z_2, \ldots, z_{N-1})$. On exclut le vecteur propre h_1 associé à la valeur propre λ_1^N qui converge vers 0.

On s'attend alors, en définissant $F^N(\theta, z) = S^N(\psi_{\theta,z})$, que sur un voisinage suffisamment bien choisi de $(\theta, 0)_{\theta\in[0,1]}$ paramétré par $\delta > 0$, on ait

$$F(\theta, z) - S^N(\phi_0^N) = f^N(\theta) + \sum_{0\geqslant k\geqslant N-1, k\neq 1} \lambda_k^N z_k^2 + O(\delta^3) \tag{5.30}$$

avec $O(\delta^3)$ indépendant de N. Cette approximation semble difficile à prouver comme nous allons voir.

5.2.2.1 Borne supérieure

Nous proposons de prendre pour la borne supérieure un voisinage à θ fixé construit sur le même modèle que dans le chapitre 3, équation (3.62).

On va choisir un voisinage autour de l'anneau des points selles. Posons pour θ fixé, dans la base orthonormale $(h_k(\cdot + \theta))_k$, on définit

$$D_\delta = \left[-\frac{\delta\rho_0}{\sqrt{|\lambda_0|}}, \frac{\delta\rho_0}{\sqrt{|\lambda_0|}}\right] \times \prod_{k=2}^{N} \left[-\frac{\delta\rho_k}{\sqrt{\lambda_k}}, \frac{\delta\rho_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right]. \tag{5.31}$$

On définit alors

$$C_\delta = [0, 1] \times D_\delta \tag{5.32}$$

on couvre ainsi l'ensemble discret des points selles d'un anneau sur lequel on va calculer la capacité.

Approximation du potentiel La propriété que l'on aimerait prouver est ainsi : pour tout $(\theta, z) \in C_\delta$

$$F(\theta, z) - S^N(\phi_0^N) = f^N(\theta) + \sum_{0\geqslant k\geqslant N-1, k\neq 1} \lambda_k^N z_k^2 + O(\delta^3) \tag{5.33}$$

avec $O(\delta^3)$ indépendant de N. On sait cependant que cette approximation est vraie si θ est un multiple de $\frac{1}{N}$, il s'agit simplement du Lemme 3.4.5 adapté à la situation car dans ce cas $(h_k(\cdot + \theta))_k$ est bien une base propre. Le problème se pose pour θ entre $\left[0, \frac{1}{N}\right]$, le reste s'en déduisant par symétrie. Plus précisément, soit $\theta \in]0, \frac{1}{N}[$, pour $z \in D_\delta$, on pose $\xi(\theta, z) = \sum_{k\neq 1} z_k h_{k,\theta}$. On a, $\psi_{\theta,z} = \phi_\theta^N + \xi(\theta, z)$, et donc

$$F(\theta, z) = S^N(\phi_\theta^N) + \nabla S^N(\phi_\theta^N)\xi(\theta, z) + \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \tag{5.34}$$

avec

$$f(t) = H_{\phi_\theta^N + t\xi(\theta,z)} S^N(\xi(\theta, z)). \tag{5.35}$$

Il faudrait être capable de contrôler uniformément en N le deuxième et le troisième terme. Le gradient du deuxième terme tend vers 0 en N, cette erreur peut donc être contrôlé. Cependant le troisième pose plus de problèmes car $h_{k,\theta}$ n'est pas forcément une base propre de diagonalisation de $H_{\phi_\theta^N} S^N$ et

donc il n'est pas aisé de contrôler $f(t)$ uniformément en N. La preuve de l'approximation (5.33) revient alors à montrer uniformément en t, en θ, en N

$$\left| f(t) - \sum_{0 \geqslant k \geqslant N-1, k \neq 1} \lambda_k^N z_k^2 \right| < O(\delta^3). \tag{5.36}$$

Nous n'avons pas encore réussi à montrer ce contrôle.

Calcul Supposons cependant que l'approximation (5.33) soit valide. En procédant comme dans le Lemme 3.4.4 ou la Proposition 4.6.3, on peut remplacer dans la forme de Dirichlet le potentiel d'équilibre par une fonction bien choisie (ne dépendant que de z_0) et tout calculs faits

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_{\phi_-}^N(\rho), \mathcal{B}_{\phi_+}^N(\rho)\right) &\leqslant \varepsilon \sqrt{\frac{|\lambda_0^N|}{2\pi\varepsilon}} \prod_{k \geqslant 2} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\lambda_k^N|}} \int_{\theta=0}^1 \exp\left(-\frac{f^N(\theta)}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\theta && (5.37)\\
&\quad \times e^{S^N(\phi_0^N)/\varepsilon}(1 + \frac{\delta^3}{\varepsilon}) && (5.38)\\
&\leqslant \varepsilon \sqrt{\frac{|\lambda_0^N|}{2\pi\varepsilon}} \prod_{k \geqslant 2} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\lambda_k^N|}} e^{S^N(\phi_0^N)/\varepsilon} \left(1 + \frac{\delta^3}{\varepsilon}\right). && (5.39)
\end{aligned}$$

On a utilisé la majoration : $\exp(-f^N(\theta)) \leqslant 1$.

On retrouve donc la même expression que pour les autres conditions au bord sans la valeur propre nulle (et le facteur $\sqrt{2\pi\varepsilon}$ associé).

5.2.2.2 Borne inférieure

La borne inférieure peut se calculer aussi de la même manière en prenant soin de la dégénérescence. On peut utiliser la propriété de Morse-Smale pour obtenir une trajectoire conduisant de ϕ_- à ϕ_+ et passant par ϕ_0. On procède alors de même que dans le cas de la borne inférieure (Proposition 4.6.4 dans le chapitre 4). Cependant on a le même problème que dans la borne supérieure pour contrôler l'approximation 5.33. Sous la même hypothèse que cette approximation est vérifiée, on retrouve alors par le même mécanisme que dans la borne supérieure en maximisant avec la fonction test h

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}\left(\mathcal{B}_{\phi_-}^N(\rho), \mathcal{B}_{\phi_+}^N(\rho)\right) &\geqslant \varepsilon \sqrt{\frac{|\lambda_0^N|}{2\pi\varepsilon}} \prod_{k \geqslant 2} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\lambda_k^N|}} \int_{\theta=0}^1 \exp\left(-\frac{f^N(\theta)}{\varepsilon}\right) \mathrm{d}\theta && (5.40)\\
&\quad \times e^{S^N(\phi_0^N)/\varepsilon} \left(1 - \frac{A\delta^3}{\varepsilon}\right) && (5.41)\\
&\geqslant \varepsilon \sqrt{\frac{|\lambda_0^N|}{2\pi\varepsilon}} \prod_{k \geqslant 2} \sqrt{\frac{2\pi\varepsilon}{|\lambda_k^N|}} e^{S^N(\phi_0^N)/\varepsilon} && (5.42)\\
&\quad \times \exp\left(\frac{S^N(\phi_0^N)}{\varepsilon} - \frac{C}{N\varepsilon}\right) \left(1 - \frac{A\delta^3}{\varepsilon}\right). && (5.43)
\end{aligned}$$

La minoration de $\exp - f^N(\theta)$ étant donné par le Lemme 5.2.2.

5.2.3 Temps d'atteinte

A l'aide du calcul précédent de la capacité et en menant exactement les mêmes calculs que dans le cas Dirichlet ou Neumann pour le potentiel d'équilibre et la mesure d'équilibre, on obtient finalement

$$\mathbb{E}_{\phi_-}\left[\tau(\mathcal{B}^+)\right] = \frac{2\pi\sqrt{2\pi\varepsilon}}{|\lambda_0(\phi_0)|}\sqrt{R}e^{(S(\phi_0)-S(\phi_-))/\varepsilon}(1 + C\left|\varepsilon \ln^3 \varepsilon\right|^{1/2})). \tag{5.44}$$

On a noté

$$R = \frac{\lambda_0(\phi_0)}{\lambda_0(\phi_-)\lambda_1(\phi_-)} \prod_{k\geqslant 2} \frac{\lambda_k(\phi_0)}{\lambda_k(\phi_-)} \tag{5.45}$$

et correspond au rapport des déterminants fonctionnels où on aurait enlevé pour le point selle la valeur propre nulle. Comme dans les cas Neumann et Dirichlet, ce produit peut s'exprimer en terme des solutions homogènes de l'équation différentielle donnée par le hessien (voir l'article Kirsten et McKane [66]). Rappelons que ce résultat dépend de la validité de l'approximation (5.33).

Remarque 21. On constate que le préfacteur n'est plus constant mais est proportionnel à $\sqrt{\varepsilon}$, en particulier, la dégénérescence accélère (par rapport au cas où les points selles seraient isolés, comme Neumann par exemple) la transition. Cela serait en effet logique car le processus a beaucoup plus de possibilités pour s'échapper du minima, il n'est pas contraint de passer par des points selles isolés.

5.3 Perspectives sur la dimension supérieure

Nous considérons dans la suite l'équation (0.3) mais non plus sur un intervalle mais sur un domaine de $\mathbb{R}^d$. Pous simplifier on prend le domaine $[0,1]^d$ et les conditions de Dirichlet. On note $L^2_0([0,1]^d)$ la fermeture des fonctions de classe C^∞ vérifiant les conditions de Dirichlet dans L^2. Idéalement, on voudrait considérer l'équation pour $(x,t) \in [0,1]^d \times \mathbb{R}^+$

$$\partial_t u = \gamma\Delta u - u - V'(u) + \sqrt{2\varepsilon}W \tag{5.46}$$

où W est un bruit blanc espace temps.

5.3.1 Non-définition de la solution

L'équation (5.46) n'a pas de solution en général. En effet pour formuler une solution au sens intégrale (Définition 2.1.2) la résolution demande de définir une convolution stochastique c'est-à-dire donner un sens à

$$z(x,t) = \int_0^t \int_{[0,1]^d} g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}s,\mathrm{d}y) \tag{5.47}$$

où g est la densité du semi-groupe associé à $\gamma\Delta - 1$. Notons que pour les conditions de Dirichlet, les valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^{*d}}$ associées aux vecteurs

propres $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^{*d}}$ de $\gamma\Delta - 1$ sont données par

$$\lambda_k = \gamma\pi^2 |k|^2 + 1 \tag{5.48}$$

$$e_k(x) = \prod_{i=1}^{d} \sqrt{2}\sin(k_i\pi x) \tag{5.49}$$

avec la notation $|k|^2 = \sum_{i=1}^{d} k_i^2$.

La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{N}^{*d}}$ forme une base hilbertienne de $L_0^2([0,1]^d)$. On définit les espaces de Bessel H^s d'indice s pour $s \in \mathbb{R}$. On dit que $f = \sum_{k\in\mathbb{N}^{*d}} \hat{f}_k e_k \in H^s$ si

$$\|f\|_s^2 = \sum_k (1 + |k|^2)^s \left|\hat{f}_k\right|^2 < +\infty. \tag{5.50}$$

Ces espaces constituent une version des espaces de Sobolev adaptée au Laplacien sur le domaine $[0,1]^d$. On dispose de propriétés d'inclusion entre espaces de Bessel comme pour les espaces de Sobolev.

Le bruit blanc en dimension supérieure à 2 ne permet pas de définir une convolution stochastique z suffisamment régulière avec le semi-groupe du Laplacien. Dans le cas des conditions de Dirichlet sur $[0,1]^d$, d'après les propriétés du bruit blanc, on a $z(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^{*d}} \alpha_k(t)e_k(x)$ avec

$$\alpha_k = \int_0^t e^{-(t-s)\lambda_k} \mathrm{d}\beta_t^k \tag{5.51}$$

où $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}^{*d}}$ mouvements browniens indépendants donnés en terme du bruit blanc W

$$\beta_k(t) = W(e_k)_t = \int_0^t \int_{[} 0,1]^d e_k(x) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \tag{5.52}$$

On a alors

$$\mathbb{E}[|\alpha_k|^2] \leqslant \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k} \mathrm{d}t = \frac{1}{2\lambda_k}(1 - e^{-2t\lambda_k}) \leqslant \frac{1}{2\lambda_k}. \tag{5.53}$$

Or les valeurs propres λ_k de $\gamma\Delta - 1$ sont $\gamma\pi^2 |k|^2 + 1$. On a alors

$$\mathbb{E}[\|z(t)\|_s^2] \leqslant \frac{C}{\gamma} \sum_{k\in\mathbb{N}^{*d}} \frac{1}{|k|^{2-2s} + 1} \leqslant \frac{C}{\gamma} \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{r^{2(1-s)} + 1} \mathrm{d}r \tag{5.54}$$

pour C une certaine constante positive. On obtient alors

$$2(1-s) - (d-1) > 1 \Longleftrightarrow s < 1 - \frac{d}{2} \Longleftrightarrow z(t) \in H^s, \forall t, \text{ p.s.} \tag{5.55}$$

Pour $d \geqslant 2$, l'indice s est alors nécessairement négatif. En particulier $z(t)$ est donc au mieux une distribution. On a ainsi

1. Pour $d = 2$, $z \in H^s$ pour $s < 0$
2. Pour $d = 3$, $z \in H^s$ pour $s < -1/2$
3. Pour $d = 4$, $z \in H^s$ pour $s < -1$

La convolution stochastique ne définit donc pas une fonction classique mais au mieux une distribution à cause du fait que l'opérateur $(-\gamma\Delta - 1)^{-1}$ n'est pas à trace finie si $d \geqslant 2$.

On ne peut pas donc pas avoir de bonne définition de la non linéarité $V'(u)$ dès que V est un polynôme par exemple. En effet le sens donné à l'équation (5.46) est un sens intégral : u est solution si $u = z + v$ avec

$$z(x,t) = g_t u_0(x) + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_{[0,1]^d} g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \tag{5.56}$$

$$v(x,t) = g_t u_0(x) - \int_0^t \int_{[0,1]^d} g_{t-s} V'(z(y,s) + v(y,s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s. \tag{5.57}$$

La définition de $V'(z+v)$ pour $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ demanderait de savoir définir des termes du type $z^3(x,t)$ ce qui n'est pas possible pour des distributions.

5.3.2 Non convergence des produits infinis de valeurs propres

Malgré l'obstruction de la section précédente, on peut se demander ce qui se passe pour la discrétisation de l'équation (5.46). Le potentiel S est donné par

$$S(\phi) = \int_{[0,1]^d} \frac{\gamma}{2} |\nabla\phi(x)|^2 + \frac{\phi(x)^2}{2} + V(\phi(x)) \mathrm{d}x. \tag{5.58}$$

En procédant comme dans le chapitre 2, on construit la discrétisation par différence finie en des points, $x_j = (j_1/N, \cdots, j_d/N)$ pour $j \in \{0, \cdots N\}^d$. 0n obtient alors pour $\phi \in \mathbb{R}^{N^d}$,

$$S^N(\phi) = \frac{1}{N^d} \sum_{j \in [[0,N]]^d} \frac{\gamma}{2} \sum_{i=1}^d N^2 (\phi_{j+b_i} - \phi_j)^2 + \frac{\phi_j^2}{2} + V(\phi_i) \tag{5.59}$$

avec (b_i) la base canonique.

Le système en dimension finie est alors

$$\mathrm{d}X_t^j = -\nabla S^N(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_t^j. \tag{5.60}$$

Pour pouvoir y appliquer les résultats en dimension finie et passer à la limite, on doit avoir la convergence du produit des valeurs propres des hessiens associés. Pour deux fonctions ϕ, ψ de classe C^2 sur $[0,1]^d$, on voudrait avoir

$$\prod_{k \in \{0, \cdots N\}^d} \frac{\lambda_k^N(\phi)}{\lambda_k^N(\psi)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \prod_{k \in \mathbb{N}^{*d}} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)} \tag{5.61}$$

où les valeurs propres $\lambda_k^N(\phi)$ sont celles de $-\gamma\Delta^N + 1 + V''(\phi)^N$ et $\lambda_k(\phi)$ celles de $-\gamma\Delta^N + 1 + V''(\phi)$, avec $V''(\phi)^N$ désignant le vecteur $(V''(\phi(x_j)))_j$. Or comme en dimension 1, les valeurs propres de $-\gamma\Delta^N + 1 + V''(\phi)$ vont être de la forme $\lambda_k(\phi) = \gamma\pi^2 |k|^2 + p_k(\phi)$ où p_k est une perturbation d'ordre 1. On a alors

$$D(\phi, \psi) = \prod_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\lambda_k(\phi)}{\lambda_k(\psi)} = \prod_{k \in \mathbb{Z}^d} \left[1 + \frac{p_k(\phi) - p_k(\psi)}{\gamma\pi^2 |k|^2 + p_k(\psi)} \right] \tag{5.62}$$

Ce produit ne peut converger si $p_k(\phi) - p_k(\psi) = O(1)$ puisque

$$\ln(D(\phi,\psi)) \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \frac{p_k(\phi) - p_k(\psi)}{\gamma\pi^2 |k|^2 + p_k(\psi)} \tag{5.63}$$

$$\leqslant C \int_0^\infty \frac{r^{d-1}}{\gamma r^2 + 1} \mathrm{d}r = \infty \tag{5.64}$$

dès que $d \geqslant 2$. On retrouve le problème qui vient du fait que l'opérateur $(-\gamma\Delta + 1)^{-1}$ qui donne le comportement dominant des valeurs propres n'est pas à trace si $d \geqslant 2$.

On a donc deux fois la même obstruction.

5.3.3 Conclusion

Nous avons résumé certains des obstacles qui nous empêchent d'appliquer directement les mêmes méthodes que nous avions en dimension 1 à la dimension supérieure. Résumons les éléments que l'on voudrait avoir pour pouvoir suivre la même procédure qu'en dimension 1 :

1. un modèle en dimension infinie (une équation aux dérivées partielles stochastique) qui ait un sens ;
2. un système en dimension finie (une équation différentielle stochastique) qui converge vers la solution en dimension infinie ;
3. il faut que l'on puisse appliquer les estimations de la dimension finie à notre système ;
4. enfin il faut que ces estimations convergent et que l'on puisse contrôler l'erreur.

En particulier, le point 3 demande que le système en dimension finie soit réversible, que la dérive soit un gradient et que la loi invariante soit connue. Le deuxième point implique donc a priori qu'il en sera de même pour l'équation aux dérivées partielles stochastique limite. De plus, le dernier point implique aussi au minimum que le produit du ratio des valeurs propres du linéarisé de la partie déterministe de l'EDPS en deux points différents soit bien défini.

On a vu que si on essaye naïvement de passer à la dimension supérieure pour Allen-Cahn, l'EDPS n'a pas de solution et le produit des valeurs propres ne converge pas. On peut malgré tout se demander si le système en dimension finie aurait malgré tout une limite (ou un point d'accumulation) fortement, faiblement ou en loi. Des résultats récents (numériques cf. [81] et théoriques [56]) semble confirmer que ce système ne peut que converger en probabilité vers la distribution nulle.

Notre travail en cours consiste à essayer de contourner ces problèmes. Donnons sommairement quelques pistes que nous suivons. On peut envisager au moins trois manières de changer l'équation (5.46) pour lui donner un sens. Chacune correspond à changer un terme de l'équation originale.

Introduire une corrélation en espace On peut envisager de ne pas utiliser le bruit blanc en espace-temps mais un bruit ayant un corrélation en espace et/ou en temps qui tend vers 0. On définit le bruit W_δ comme une mesure L^2 gaussienne de moyenne nulle et d'opérateur de covariance Q_δ, pour $\delta > 0$. On

veut de plus que Q_δ converge vers l'identité pour $\delta \to 0$ (le bruit converge vers un bruit blanc). On peut choisir en particulier un bruit blanc en temps auquel cas Q_δ est un opérateur en espace seulement. Dans leur article [29], Cerrai et Freidlin définissent sur la base hilbertienne associée à Δ :

$$Q_\delta e_k = (1 + \delta\,|k|^2)^{-\beta} e_k \tag{5.65}$$

avec $\beta > (d-2)/4$. Avec ce bruit qui n'est plus blanc en espace, on a

$$z_\delta(x,t) = \int_0^t \int_{[0,1]^d} g_{t-s}(x,y) W_\delta(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) = \sum_k \alpha_k^\delta(t) e_k(x) \tag{5.66}$$

avec

$$\alpha_k^\delta(t) = \int_0^t (1 + \delta\,|k|^2)^{-\beta} e^{-\gamma(t-s)\lambda_k} \mathrm{d}B^k(s) \tag{5.67}$$

où B^k sont des mouvements brownien indépendants. On a alors

$$\mathbb{E}\left[\|z_\delta(t)\|_s^2\right] \leqslant C \sum_k (1 + |k|^2)^{s-2\beta-1} \leqslant C \int_1^\infty k^{2s-4\beta-2+d-1} \mathrm{d}k \tag{5.68}$$

qui est fini si $2(s-2\beta-1)+d-1 < -1$ c'est-à-dire $s < 2\beta + 1 - \frac{d}{2}$ et donc on peut choisir $s > 0$ puisque $\beta > (d-2)/4$. Cela permet de définir une solution intégrale de l'équation (voir [29]) dans $L^p(\Omega, C([0,T], L^2([0,1]^d)))$.

Dans ce cas Cerrai et Freidlin obtiennent un principe de grande déviations de fonction de taux

$$\mathcal{I}_\delta(u) = \left\|Q_\delta^{-1}(\partial_t u - \gamma\Delta u + u + V'(u))\right\|^2_{L^2([0,T]\times[0,1]^d)} \leqslant +\infty. \tag{5.69}$$

Ils montrent ensuite que $\mathcal{I}_\delta$ Γ-converge vers $\mathcal{I}$, qui serait la fonction de taux attendue pour l'équation (5.46) :

$$\mathcal{I}(u) = \|\partial_t u - \gamma\Delta u + V'(u)\|^2_{L^2([0,T]\times[0,1]^d)} \leqslant +\infty. \tag{5.70}$$

Les auteurs obtiennent alors l'asymptotique exponentielle des temps de sortie.

L'approximation possible en dimension finie serait la suivante : soit P_N le projecteur sur les premiers modes : pour $u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{N}^{*d}} u_k(t) e_k(x)$

$$u^N = P_N u = \sum_{|k|\leqslant N} u_k e_k. \tag{5.71}$$

On a envie de prendre pour l'approximation le système

$$\mathrm{d}u^N(t) = \gamma\Delta u^N(t)\mathrm{d}t - P_N V'(u^N(t))\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}B_\delta^N(t). \tag{5.72}$$

Mode par mode, on obtient

$$\mathrm{d}u_k^N(t) = -\gamma\lambda_k u_k^N(t)\mathrm{d}t - \left\langle V'(u^N(t)), e_k\right\rangle \mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}(1 + \delta\,|k|^2)^{-\beta/2}\mathrm{d}B^k(t). \tag{5.73}$$

où B^k sont des mouvements browniens indépendants et

$$B_\delta^N(t) = \sum_{|k|\leqslant N} (1 + \delta\,|k|^2)^{-\beta/2} B^k(t) e_k. \tag{5.74}$$

Le problème qui se pose alors est l'application des estimations en dimension finie qui demandent un bruit additif brownien de matrice de covariance proportionnelle à l'identité et une dérive étant le gradient d'un potentiel. Ce qui n'est pas le cas en général et ne nous permet pas de donner les estimations en dimension finie.

Introduire un opérateur régularisant Une autre manière de définir l'équation (5.46) peut être de modifier la partie linéaire en ajoutant un opérateur régularisant L pour contourner le problème de l'intégrabilité de la densité du semi-groupe dans L^2. On a alors

$$\partial_t u = \delta L u + \gamma \Delta u - V'(u) + \sqrt{2\varepsilon} W \tag{5.75}$$

Ainsi en dimension d, on peut introduire $L = \Delta^{s/2}$ pour lesquels les valeurs propres sont d'ordre $\alpha_k \approx |k|^s$: on a bien

$$\sum_{k \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{\alpha_k} \approx \int_1^\infty r^{d-1-s} \mathrm{d}r \tag{5.76}$$

qui est finie si $s > d$. Donc, l'inverse de l'opérateur linéaire est alors à trace et permet de définir une solution forte avec le bruit blanc espace-temps.

Le produit des valeurs propres des opérateurs $\delta L + \gamma \Delta - V''(\phi)$ en deux points ϕ et ψ devient

$$D_\delta(\phi, \psi) = \prod_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\delta |k|^s + \gamma |k|^2 + c_k(\phi)}{\delta |k|^s + \gamma |k|^2 + c_k(\psi)} = \prod_{k \in \mathbb{Z}^d} \left[1 + \frac{c_k(\phi) - c_k(\psi)}{\delta |k|^s + \gamma |k|^2 + c_k(\psi)} \right] \tag{5.77}$$

les corrections étant d'ordre 1 le produit est convergeant si $s > d$. Cependant quand $\delta \to 0$, on retrouve le problème exposé à la section précédente avec la divergence du produit $D_\delta(\phi, \psi)$.

Renormaliser la non-linéarité Enfin une autre manière de donner un sens à l'équation (5.46) peut être de modifier la non-linéarité et de la renormaliser en utilisant les produits de Wick. Cela permet par exemple de donner un sens à $u^3 - u$. Da Prato et Debussche [34] montrent alors l'existence et l'unicité d'une solution trajectorielle à l'équation :

$$\partial_t u = \gamma \Delta u - :u^3: + u + \sqrt{2\varepsilon} W \tag{5.78}$$

où W est un bruit blanc espace-temps et $:u^3:$ est la renormalisation par le produit de Wick. Dans ce cas, on peut approximer la solution par un système en dimension finie en tronquant les modes suivant la base hilbertienne associée à Δ (approximation de Galerkin, voir par exemple [56]). Notons P_N le projecteur sur les N premiers modes. Cela revient à considérer une approximation de la forme

$$\mathrm{d}u^N(t) = \gamma \Delta u^N \mathrm{d}t - (P_N (u^N)^3 - C_N u^N)\mathrm{d}t + u^N \mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon} \mathrm{d}W_t^N \tag{5.79}$$

où W^N est un mouvement brownien. C_N est une constante dépendant de la dimension de l'approximation qui permet de corriger la divergence du terme u^3 mais qui tend vers l'infini. Cependant à cause de cette correction C_N qui diverge, l'indice des points selles peut changer en fonction de la dimension N. Ainsi, si on linéarise autour de 0, il semble que les valeurs propres vont être de la forme :

$$\lambda_k^N = -\gamma \pi^2 k^2 + 1 + C_N \tag{5.80}$$

À mesure de la prise en compte de modes supplémentaires, le nombre de valeurs propres négatives en 0 augmente. Le genre des points stationnaires (minimum, point selle) change suivant la discrétisation.

Ainsi beaucoup de travail reste sur le cas de la dimension supérieure. D'autres extensions de nos résultats semblent possibles et constituent de futures directions de recherche.

Annexe A

Équations aux dérivées partielles stochastiques

A.1 Rappels sur le bruit blanc

Nous rappelons suivant [96], la définition du bruit blanc et ses différentes propriétés.

Définition A.1.1. Soit $(E, \mathcal{E}, \nu)$ un espace mesuré muni d'une mesure ν positive σ-finie, soit $\mathcal{E}_f = \{A \in \mathcal{E}, \nu(A) < \infty\}$. On appelle bruit blanc sur $(E, \mathcal{E}, \nu)$ la donnée d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et une famille de variables aléatoires réelles W sur $\mathcal{E}_f$ telle que

- pour tout $A \in \mathcal{E}_f$, $W(A)$ est une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $\nu(A)$,
- pour tous $A, B \in \mathcal{E}_f$, avec $A \cap B = \varnothing$, $W(A)$ et $W(B)$ sont des variables indépendantes et on a

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B) \tag{A.1}$$

Remarque 22. D'après les deux propriétés précédentes pour tous $A, B \in \mathcal{E}_f$, on en déduit

$$\mathbb{E}[W(A)W(B)] = \mathbb{E}[W(A \cap B)^2] = \nu(A \cap B). \tag{A.2}$$

Donc si $A \cap B = \varnothing$, alors $W(A)$ et $W(B)$ sont non corrélées donc indépendantes (car gaussiennes). De plus, pour tout A et B,

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B) - W(A \cap B) \tag{A.3}$$

puisque W est une mesure.

L'existence de W est donné par un théorème (par exemple [88], p. 55, Théorème I.24.2) et est une conséquence du Théorème de Daniell-Kolmogorov ([88] p. 124, Théorème II.30.1). W est un processus gaussien indexé par les ensembles de $\mathcal{E}_f$. La loi du processus est donnée par deux fonctions : son espérance μ et sa covariance ρ, définies par

$$\mu(A) = \mathbb{E}(W(A)) = 0 \quad \rho(A, B) = \mathbb{E}(W(A)W(B)) = \nu(A \cap B) \tag{A.4}$$

pour $A, B \in \mathcal{E}_f$. La donnée de μ et ρ définit bien un champ gaussien à la condition nécessaire et suffisante que ρ soit positive au sens où pour tous

$A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}_f$ et n entier, la matrice $(\rho(A_i, A_j))_{i,j}$ est définie positive. Ici, $\mu = 0$ et $\rho(A, B) = \nu(A \cap B)$. Pour montrer la positivité de rho, remarquons que pour $t_1, \ldots, t_n$ réels quelconques

$$\sum_{i,j=1}^{N} t_i t_j \nu(A_i \cap A_j) = \sum_{i,j=1}^{N} t_i t_j \int_E \mathbb{1}_{A_i}(x) \mathbb{1}_{A_j}(x) \nu(\mathrm{d}x)$$
$$= \int_E \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \right)^2 \nu(\mathrm{d}x) \geqslant 0. \quad \text{(A.5)}$$

Le drap Brownien Le cas qui nous intéresse est $E = [0,1] \times \mathbb{R}_+$, la tribu $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}([0,1] \times \mathbb{R}^+)$ et la mesure ν la mesure de Lebesgue λ. On désigne alors dans toute la suite W un bruit blanc sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$. On définit un processus indexé par deux paramètres $(x,t) \in]0,1] \times \mathbb{R}_+^*$ en posant

$$B_{x,t} = W(]0,x] \times]0,t]). \quad \text{(A.6)}$$

Remarquons que par définition, $B_{x,t}$ est une variable gaussienne centrée de variance xt et on a

$$\mathbb{E}(B_{x,t} B_{y,s}) = (x \wedge y)(t \wedge s). \quad \text{(A.7)}$$

B est l'analogue du mouvement Brownien en temps et en espace, ce champ aléatoire est appelé le *drap brownien*. Comme pour le mouvement Brownien, il a des propriétés trajectorielles en tant que fonction de (x,t). On a le résultat :

Proposition A.1.2. *Il existe une modification du drap brownien B telle que*
- *$B : (x,t) \mapsto B_{x,t}$ soit continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}_+$,*
- *pour tout $\delta > 0$, B est $\left(\frac{1}{2} - \delta\right)$-Hölderien en (x,t).*

Démonstration. La preuve de la proposition repose sur le Théorème de Kolmogorov A.3.1. Soit $p \geqslant 1$, pour $0 \leqslant s < t \leqslant T$ et $0 \leqslant y < x \leqslant 1$, on a

$$\mathbb{E}[(B_{x,t} - B_{y,s})^{2p}] = \mathbb{E}[W(]y,x] \times]s,t])^{2p}]$$
$$= C\lambda(]y,x] \times]s,t])^p \leqslant C[T\,|x-y| + |t-s|]^p \quad \text{(A.8)}$$

avec $C = \mathbb{E}[X^{2p}]$ où X suit une loi normale centrée réduite. On obtient donc d'après le Théorème de Kolmogorov-Čentsov que W a une modification continue qui est θ-Hölderienne pour tout $\theta < \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$, or p étant quelconque, on obtient le résultat. □

Dans la suite on utilisera une autre version du Théorème de Kolmogorov qui permettra de distinguer des régularités différentes entre le temps et l'espace. D'autres versions de ce Théorème donnent des termes de corrections supplémentaires pour le module de continuité [96]. Le drap brownien a aussi d'autres propriétés (loi du logarithme itéré, propagation des singularités) qui sont développées notamment dans [96].

On peut penser au drap Brownien comme l'exemple classique d'un processus aléatoire sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$, en particulier montre (formellement) que la solution u de notre EDPS (4.1) n'a aucune chance d'avoir des dérivées en temps et en espace au sens classique. Il faut donc la formuler dans un sens faible fonctionnel (ou EDP).

A.1.1 Intégrales par rapport au bruit blanc

Filtrations Afin de définir ce que nous entendons par une solution de notre EDPS, il nous faut définir un calcul intégral par rapport au bruit blanc. Jusqu'à présent les variables de temps t et d'espace x n'avaient pas de rôles différents. Cependant le temps ne peut pas être traité comme l'espace puisque l'on veut construire une intégrale qui dépend continûment du temps d'intégration. On veut donner un sens au processus dépendant de t

$$F(t) = \int_{[0,1]\times[0,t]} f(x,s)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) \tag{A.9}$$

où f est une fonction aléatoire qui reste à définir proprement.

On considère donc la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, complétion de la tribu engendrée par

$$\begin{aligned}\sigma(W(A), A \in \mathcal{B}([0,1]\times[0,t])) &= \sigma(W(I\times]s,t]), s \leqslant t, I \in \mathcal{B}([0,1])) \\ &= \sigma(B_{x,s}, (x,s) \in [0,1]\times[0,t]). \end{aligned} \tag{A.10}$$

On considère aussi $\mathcal{P}$ la tribu prévisible associée à $\mathcal{F}_t$ c'est-à-dire la plus petite tribu de $\Omega \times \mathbb{R}_+$ qui rend mesurable les processus (considérés comme fonctions de (ω, t)) $\mathcal{F}_t$-adaptés et continus à gauche. Les fonctions f naturellement intégrables par rapport au bruit blanc seront les processus $\mathcal{P}\otimes\mathcal{B}([0,1])$-mesurables et dans $L^2(\Omega\times\mathbb{R}_+\times[0,1])$. Définissons tout d'abord les fonctions simples associées.

Fonctions simples

Définition A.1.3. On dit que $f(\omega,x,t)$ à valeurs réelles est une fonction élémentaire si

$$f(\omega,x,t) = X(\omega)\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_{]a,b]}(t) \tag{A.11}$$

où $X(\omega)$ est une variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_a$-mesurable, $0 \leqslant a < b$ et A est un borélien de $[0,1]$. Une fonction g est dite simple si elle est une somme finie de fonctions élémentaires f_i,

$$g(\omega,x,t) = \sum_{i\in I} f_i(\omega,x,t) \tag{A.12}$$

on note $\mathcal{S}$ l'espace vectoriel des fonctions simples. On définit alors l'intégrale de la fonction élémentaire f notée $f\cdot W_t(B)$ par rapport au bruit blanc W par

$$\int_0^t \int_B f(\omega,x,s)W(\omega)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) = X(\omega)W(]a,b]\cap[0,t]\times A\cap B)(\omega) \tag{A.13}$$

où $B \in \mathcal{B}([0,1])$ et $t \in \mathbb{R}_+$. L'intégrale d'une fonction simple est définie par la somme (finie) des intégrales des fonctions élémentaires.

De la même manière que l'on a défini notre intégrale à partir du bruit blanc, on peut choisir de la définir à partir du drap brownien (voir [96]), ce qui donne des formules très similaires au cas de l'intégrale d'Itô par rapport au mouvement brownien.

La validité de la définition est justifiée par la proposition suivante.

Proposition A.1.4. *On a les propriétés suivantes :*
- *L'intégrale d'une fonction simple est bien définie (c'est-à-dire ne dépend pas de la décomposition en fonctions élémentaires que l'on considère).*
- *L'intégrale est linéaire sur les fonctions simples.*
- *L'intégrale comme processus stochastique est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carré intégrable, et pour des fonctions simples $f, g \in \mathcal{S}$, pour $B \in \mathcal{B}([0,1])$ et $t \geqslant 0$,*

$$\langle f \cdot W(B), g \cdot W(B) \rangle_t = \int_0^t \int_B f(x,s) g(x,s) \mathrm{d}x \mathrm{d}s \tag{A.14}$$

Démonstration. La définition de l'intégrale pour les fonctions simples et la linéarité se prouvent de manière élémentaire. Les propriétés de martingales et la formule des accroissements quadratiques se prouvent aussi facilement à partir des propriétés du mouvement brownien.

□

Extension de l'intégrale L'ensemble des fonctions que l'on va pouvoir intégrer par rapport au bruit blanc est donc la complétion de $(\mathcal{S}, \| \|_2)$ la norme étant simplement la norme euclidienne associée à $L^2(\Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^+)$.

$$\|f\|_2 = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}^+} \int_0^1 f(x,t)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \tag{A.15}$$

Bien entendu, on a aussi une notion d'espace localisé ce qui ici signifie simplement

$$f \in L^2_{loc}(\Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^+) \Longleftrightarrow \mathbb{E}[\int_0^T \int_0^1 f(x,t)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}t] < +\infty, \quad \forall T > 0. \tag{A.16}$$

On a la proposition suivante.

Proposition A.1.5 ([96])**.** *L'espace obtenu par complétion de $(\mathcal{S}, N)$ est l'ensemble des fonctions prévisibles (c'est-à dire $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurables) de $L^2(\Omega \times [0,1] \times \mathbb{R}^+)$, noté $L^2_{\mathcal{P}}([0,1])$. Pour $f \in L^2_{\mathcal{P}}([0,1])$, $B \in \mathcal{B}([0,1])$ et $t \geqslant 0$, on note*

$$f \cdot W_t(B) = \int_0^t \int_B f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \tag{A.17}$$

l'intégrale stochastique de la fonction aléatoire f par rapport au bruit blanc. C'est une $\mathcal{F}_t$-martingale de carrée intégrable et de variation quadratique

$$\left\langle \int_0^{\cdot} \int_B f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \right\rangle_t = \int_0^t \int_B f^2(x,s) \mathrm{d}x \mathrm{d}s. \tag{A.18}$$

On a alors l'isométrie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \int_B f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s)\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_B f^2(x,s) \mathrm{d}x \mathrm{d}s\right] \\ &= \int_0^t \int_B \mathbb{E}\left[f^2(x,s)\right] \mathrm{d}x \mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{A.19}$$

Démonstration. Il suffit de montrer [96] que

1. $L^2_{\mathcal{P}}([0,1])$ est complet ;
2. $\mathcal{S}$ est dense dans $L^2_{\mathcal{P}}([0,1])$;
3. pour $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{S}$ qui converge vers f, il faut montrer que la suite de martingale $(f_n \cdot W.)_n$ converge vers une martingale de carrée intégrable et que la limite ne dépend pas de la suite de Cauchy choisie convergeant vers f.

□

Remarque 23. La donnée d'un bruit blanc est équivalente à la donnée d'un drap Brownien. L'un est simplement la"dérivée" de l'autre en temps et en espace. En connaissant le drap brownien, il est facile de définir le bruit blanc sur des rectangles$([x,y] \times [s,t])$, donc sur des unions finies de rectangles et par conséquent sur la tribu engendrée par ces unions finies, c'est-à-dire les boréliens. Il s'agit de l'analogue de la construction classique de l'intégrale stochastique en partant du mouvement Brownien. On peut d'ailleurs rencontrer la notation pour le bruit blanc

$$W = \ddot{B} = \frac{\partial^2 B}{\partial x \partial t} \tag{A.20}$$

avec B un drap Brownien (la notation $\ddot{B}$ est assez courante même si $\dot{B}'$ serait plus logique).

A.1.2 Propriétés de l'intégrale

On a la proposition suivante.

Proposition A.1.6. *Soit $f \in L^2_{\mathcal{P}}([0,1])$, on pose*

$$M_t = f \cdot W([0,1])_t = \int_0^t \int_0^1 f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \tag{A.21}$$

M_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale. Pour H_t un processus prévisible à variation bornée, tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 H_s^2 f(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] < \infty \tag{A.22}$$

on a alors

$$\int_0^t H_s \mathrm{d}M_s = \int_0^t \int_0^1 H_s f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \tag{A.23}$$

Remarque 24. Dans un cadre déterministe cette propriété signifie juste

$$\int_0^t g(s) F'(s) \mathrm{d}s = \int_0^t \int_0^1 g(s) f(x,s) \mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{A.24}$$

avec

$$F(t) = \int_0^t \int_0^1 f(x,s) \mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{A.25}$$

Démonstration. Posons

$$Y_t = \int_0^t H_s \mathrm{d}M_s \quad \text{et} \quad Z_t = \int_0^t \int_0^1 H_s f(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \tag{A.26}$$

Il suffit de remarquer que,

$$\langle M., Z. \rangle_t = \int_0^t \int_0^1 H_s f(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{A.27}$$

On a donc, par Fubini

$$\langle Y, Z \rangle_t = \int_0^t H_s \mathrm{d} \langle M, Z \rangle_s = \int_0^t \int_0^1 H_s^2 f(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s. \tag{A.28}$$

Ce qui permet de conclure, car $Z_0 = Y_0 = 0$ et

$$\begin{aligned} \langle Y - Z \rangle_t &= \langle Y \rangle_t - 2 \langle Y, Z \rangle_t + \langle Z \rangle_t \\ &= \int_0^t H_s^2 \mathrm{d} \langle M \rangle_s - \int_0^t \int_0^1 H_s^2 f(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s = 0. \end{aligned} \tag{A.29}$$

□

On a aussi une version du théorème de Fubini,

Proposition A.1.7 (Fubini)**.** *Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, f une fonction $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1]) \otimes \mathcal{E}$ mesurable, telle que*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \int_{E^2} |f(x,s,\xi)| \, |f(x,s,\xi')| \, \mu(\mathrm{d}\xi')\mu(\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \right] < \infty. \tag{A.30}$$

On a alors, pour tout $t > 0$

$$\begin{aligned} &\int_0^t \int_0^1 \left[\int_E f(x,s,\xi)\mu(\mathrm{d}\xi) \right] W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \\ &\qquad = \int_E \left[\int_0^t \int_0^1 f(x,s,\xi) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \right] \mu(\mathrm{d}\xi). \end{aligned} \tag{A.31}$$

Démonstration. De la même manière que précédemment, posons

$$M = \int_0^t \int_0^1 g(x,s) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s) \quad \text{et} \quad g(x,s) = \int_E f(x,s,\xi)\mu(\mathrm{d}\xi) \tag{A.32}$$

$$N = \int_E X(\xi)\mu(\mathrm{d}\xi) \quad \text{et} \quad X(\xi) = \int_0^t \int_0^1 f(x,s,\xi) W(\mathrm{d}x, \mathrm{d}s). \tag{A.33}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[MN] &= \int_E \mathbb{E}[MX(\xi)]\mu(\mathrm{d}\xi) = \int_E \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 g(x,s) f(x,s,\xi) \mathrm{d}x\mathrm{d}s \right] \mu(\mathrm{d}\xi) \\ &= \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 \int_E g(x,s) f(x,s,\xi)\mu(\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 g(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \right] \end{aligned} \tag{A.34}$$

De même, on a d'après Fubini par l'équation (A.30)

$$\mathbb{E}[N^2] = \int_{E^2} \mathbb{E}[X(\xi')X(\xi)]\mu(\mathrm{d}\xi)\mu(\mathrm{d}\xi') \tag{A.35}$$

$$= \int_{E^2} \int_0^t \int_0^1 f(x,s,\xi')f(x,s,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}\xi)\mu(\mathrm{d}\xi') \tag{A.36}$$

$$\mathbb{E}[M^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \int_0^1 g(x,s)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right] \tag{A.37}$$

$$= \int_{E^2} \int_0^t \int_0^1 f(x,s,\xi')f(x,s,\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}\xi)\mu(\mathrm{d}\xi'). \tag{A.38}$$

On a donc bien

$$\mathbb{E}[(M-N)^2] = \mathbb{E}[M^2 - 2MN + N^2] = 0. \tag{A.39}$$

□

Mentionnons par ailleurs la version intégrale de l'inégalité de Minkowski.

Lemme A.1.8 (Inégalité de Minkowski)**.** *Soit* (E_1, μ_1) *et* (E_2, μ_2) *deux espaces mesurable* σ*-finis, soit* $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ *une fonction mesurable, alors pour tout* $p > 1$

$$\left|\int_{E_1} \left|\int_{E_2} |F(x,y)|\, \mu_2(\mathrm{d}y)\right|^p \mu_1(\mathrm{d}x)\right|^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{E_2} \left|\int_{E_1} |F(x,y)|^p\, \mu_1(\mathrm{d}x)\right|^{\frac{1}{p}} \mu_2(\mathrm{d}y) \tag{A.40}$$

ou dans les cas ou (E_1, μ_1) *est un espace probabilisé*

$$\left(\mathbb{E}\left|\int_{E_2} |F(y)|\, \mu_2(\mathrm{d}y)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{E_2} |\mathbb{E}[|F(y)|^p]|^{\frac{1}{p}}\, \mu_2(\mathrm{d}y) \tag{A.41}$$

Idée de la démonstration. On réalise l'inégalité pour des fonctions simples (ce qui revient à l'inégalité de Minkowski sur les sommes finies) puis on conclut par densité. □

A.2 Preuve de l'équivalence entre solution faible et forte

On rappelle ici l'équivalence entre formulation faible et formulation intégrale (ou mild) de l'équation (4.1).

Proposition A.2.1. *Soit* u_0 *une fonction continue sur* $[0,1]$*.* u *est une solution faible si et seulement si* u *est une solution intégrale.*

La preuve est assez classique, nous allons juste en donner les éléments.

Démonstration. Montrons tout d'abord que si u est solution faible alors u est solution intégrale. Supposons que u est solution faible en x. Pour tout $\phi \in C^2_{bc}([0,1])$, on a

$$\int_0^1 u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 u_0(x)\phi(x)\mathrm{d}x + \gamma \int_0^t \int_0^1 u(x,s)\phi''(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$- \int_0^t \int_0^1 V'(u(x,s))\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 \phi(x)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) \tag{A.42}$$

On obtient alors une formulation faible pour une fonction test de la forme $\phi(x)\psi(t)$, avec $\psi \in C^1(\mathbb{R}^+)$, en appliquant la formule d'Itô et la proposition A.1.6. On a alors par densité pour tout $\phi \in C^{2,1}_{bc}([0,1]\times\mathbb{R}^+)$,

$$\int_0^1 u(x,t)\phi(x,t)\mathrm{d}x = \int_0^1 u_0(x)\phi(x,0)\mathrm{d}x - \int_0^t\int_0^1 V'(u(x,s))\phi(x,s)\mathrm{d}x\mathrm{d}s$$
$$+\int_0^t\int_0^1 u(x,s)[\partial_t\phi(x,s)+\gamma\partial_{xx}\phi(x,s)]\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 \phi(x,s)W(\mathrm{d}x,\mathrm{d}s) \tag{A.43}$$

qui est une forme faible de notre équation en (x,t). L'idée est donc d'utiliser une fonction ϕ qui permette d'annuler le terme linéaire en ϕ. On prend alors, pour $\varphi_0 \in C^2_{bc}([0,1])$ et t fixés

$$\phi(y,s) = g_{t-s}\varphi_0(y) = \int_0^1 g_{t-s}(y,x)\varphi_0(x)\mathrm{d}x \tag{A.44}$$

donc ϕ résout l'équation de la chaleur en inversant le temps :

$$\begin{aligned}\partial_t\phi(x,s)+\gamma\partial_{xx}\phi(x,s) &= 0\\ \phi(x,t) &= \varphi_0(x)\end{aligned} \tag{A.45}$$

avec les conditions au bord correspondantes. On obtient donc, pour tout $\varphi_0 \in C^2_{bc}([0,1])$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(y,t)\varphi_0(y)\mathrm{d}y = &\int_0^1\int_0^1 u_0(y)g_t(y,z)\varphi_0(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\\ &-\int_0^t\int_0^1\int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}(y,z)\varphi_0(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &+\sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1\int_0^1 g_{t-s}(y,z)\varphi_0(z)\mathrm{d}zW(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\end{aligned}$$

En utilisant la Proposition A.1.7 (Fubini), on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 u(y,t)\varphi_0(y)\mathrm{d}y = &\int_0^1\int_0^1 u_0(y)g_t(y,z)\mathrm{d}y\varphi_0(z)\mathrm{d}z\\ &-\int_0^1\int_0^t\int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\varphi_0(z)\mathrm{d}z\\ &+\sqrt{2\varepsilon}\int_0^1\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(y,z)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\varphi_0(z)\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{A.46}$$

L'utilisation de la Proposition A.1.7 repose sur les estimations (voir Lemme B.2.2) de la densité g du semi-groupe. On a donc ici pour tout $t>0$

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 |g_t(y,z)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z &< +\infty\\ \int_0^t\int_0^1\int_0^1 |g_{t-s}(y,z)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}s &< +\infty\\ \int_0^t\int_0^1\left(\int_0^1 |g_{t-s}(y,z)|\,\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t\int_0^1\int_0^1 |g_{t-s}(y,z)|^2\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}s &< +\infty.\end{aligned} \tag{A.47}$$

On obtient alors, pour tout $\varphi_0 \in C^2_{bc}([0,1])$ presque surement

$$\int_0^1 \Big[u(z,t) - \int_0^1 u_0(y)g_t(y,z)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}(y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ - \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(y,z)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\Big]\varphi_0(z)\mathrm{d}z = 0. \quad \text{(A.48)}$$

On en déduit la formulation intégrale. Il suffit pour cela de montrer que la fonction

$$x \mapsto u(x,t) - \int_0^1 u_0(y)g_t(y,x)\mathrm{d}y + \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ - \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(y,x)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \quad \text{(A.49)}$$

est continue à ω fixé. Par hypothèse u, u_0 et V' sont continues, les fonctions

$$x \mapsto \int_0^1 u_0(y)g_t(y,x)\mathrm{d}y \qquad x \mapsto \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}(y,x)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \quad \text{(A.50)}$$

sont donc aussi continues (car g est continue sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$, Lemme B.2.1). Le dernier terme de (A.49) est continu d'après le Lemme B.2.6. Reste donc à conclure en considérant à la place de φ_0 une suite de fonctions $\varphi_n \in C^2_{bc}([0,1])$ telle que $\varphi_n \rightharpoonup \delta_x$ pour $x \in]0,1[$. On obtient alors la forme faible en inversant x et y en utilisant la symétrie de g_t (Lemme B.2.1). Par continuité la forme intégrale est aussi vérifié en $x = 0$ et $x = 1$, de même pour $t = 0$ (où on a bien $u(x,0) = u_0(x)$).

La réciproque est un peu moins évidente à prouver sans doute. Prenons u une fonction solution de notre équation au sens intégral. Soit donc $\phi_0 \in C^\infty_{bc}([0,1])$, une simple intégration et les Propositions A.1.6 et A.1.7 donnent

$$\int_0^1 u(y,t)\phi_0(y)\mathrm{d}y = \int_0^1 u_0(y)g_t\phi_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s))g_{t-s}\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}\phi_0(y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \quad \text{(A.51)}$$

On considère une subdivision de $[0,t]$, avec $t_i = \frac{it}{n}$, et n entier positif. On a alors

$$\int_0^1 u(y,t)\phi_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 u_0(y)\phi_0(y)\mathrm{d}y \\ = \sum_{i=1}^n \int_0^1 u(y,t_i)\phi_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 u(y,t_{i-1})\phi_0(y)\mathrm{d}y. \quad \text{(A.52)}$$

En utilisant la formulation intégrale pour $t = t_i$ et $t = t_{i-1}$ et les propriétés

de semigroupe de g, on obtient

$$\int_0^1 u(y,t)\phi_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 u_0(y)\phi_0(y)\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{i=1}^n \Big[-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_0^1 V'(u(y,s))g_{t_i-s}\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$
$$+\sqrt{2\varepsilon}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_0^1 g_{t_i-s}\phi_0(y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)+\gamma\int_0^{t/n}\int_0^1 u(y,t_{i-1})\frac{\partial^2}{\partial y^2}g_s\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big] \tag{A.53}$$

et donc quand $n\to\infty$, montrons que le terme de gauche converge presque sûrement vers

$$-\int_0^t\int_0^1 V'(u(y,s))\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \sqrt{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^1 \phi_0(y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)$$
$$+\gamma\int_0^t\int_0^1 u(y,s)\phi_0''(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{A.54}$$

ce qui nous donne bien la formulation faible. Notons I_n la différence du terme précédant et du terme de gauche de l'équation (A.53). On a alors

$$|I_n| \leqslant \sum_{i=1}^n [I_1^i(n)+I_2^i(n)+I_3^i(n)] \tag{A.55}$$

avec

$$I_1^i(n) = \left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_0^1 V'(u(y,s))(\phi_0(y)-g_{t_i-s}\phi_0(y))\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant \sup_{[0,1]\times[0,t]}|V'(u(y,s))|\int_0^{t/n}\int_0^1|\phi_0(y)-g_s\phi_0(y)|\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{A.56}$$

Puisque l'on suppose u continue, on a presque sûrement

$$\sup_{[0,1]\times[0,t]}|V'(u(y,s))| < +\infty. \tag{A.57}$$

Pour $I_2^i(n)$ on a,

$$I_2^i(n) = \left|\sqrt{2\varepsilon}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_0^1[g_{t_i-s}\phi_0(y)-\phi_0(y)]W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right| \tag{A.58}$$

puis par calcul de la variation quadratique, on a

$$\mathbb{E}[(I_2^i)^2] \leqslant 2\varepsilon\left[\int_0^{t/n}\int_0^1[g_s\phi_0(y)-\phi_0(y)]^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]. \tag{A.59}$$

Enfin pour I_3^i

$$I_3^i(n) = \gamma\left|\int_0^{t/n}\int_0^1[u(y,t_{i-1})\frac{\partial^2}{\partial y^2}g_s\phi_0(y)-u(y,s)\phi_0''(y)]\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|$$
$$\leqslant \gamma\sup_{[0,1]\times[0,t]}|u(y,s)|\int_0^{t/n}\int_0^1\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}g_s\phi_0(y)-\phi_0''(y)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{A.60}$$

On en déduit le résultat à l'aide des estimations du Lemme B.2.3 sur les convergences en $t = 0$ du semi-groupe g_t (ce qui nécessite que ϕ_0 soit suffisamment régulière). On a alors pour ϕ_0 de classe C^∞

$$|\phi_0(y) - g_s\phi_0(y)| \leqslant C_1\sqrt{s}, \qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial y^2} g_s\phi_0(y) - \phi_0''(y)\right| \leqslant C_2\sqrt{s} \tag{A.61}$$

ce qui par intégration sur un intervalle de taille $\frac{t}{n}$ permet d'en déduire

$$|I_n| \leqslant Cn\frac{t^{3/2}}{n^{3/2}} + \sum_{i=1}^n I_2^i(n) \tag{A.62}$$

avec

$$C = \gamma \sup_{[0,1]\times[0,t]} |u(y,s)| + \sup_{[0,1]\times[0,t]} |V'(u(y,s))| < +\infty \quad \text{p.s.} \tag{A.63}$$

Or d'après les propriétés d'indépendance du bruit blanc, on a pour $i \neq j$, $\mathbb{E}[I_2^i I_2^j] = 0$, donc

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n I_2^i\right)^2\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\left(I_2^i\right)^2\right] \leqslant 2\varepsilon C_1^2 \sum_{i=1}^n \int_0^{t/n} s\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon C_1^2 \frac{t^2}{n} \tag{A.64}$$

Donc, quitte à extraire, on en déduit que

$$\sum_{i=1}^n I_2^i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{p.s.} \tag{A.65}$$

On obtient alors que

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{p.s.} \tag{A.66}$$

Pour passer à ϕ_0 de classe C^2, on utilise une fonction $\widetilde{\phi}_0$ de classe C^∞ telle que

$$\left\|\widetilde{\phi}_0 - \phi_0\right\|_\infty + \left\|\widetilde{\phi}_0'' - \phi_0''\right\|_\infty < \eta \tag{A.67}$$

Posons alors

$$I(\phi_0) = \int_0^1 u(y,t)\phi_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 u_0(y)\phi_0(y)\mathrm{d}y - \gamma\int_0^t\int_0^1 u(y,s)\phi_0''(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \int_0^t\int_0^1 V'(u(y,s))\phi_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{A.68}$$

On a alors, par la continuité de u, u_0 et V'

$$\left|I(\phi_0) - I(\widetilde{\phi}_0)\right| < C'\eta \tag{A.69}$$

avec

$$C' = \sup_{[0,1]}|u(y,t)| + \sup_{[0,1]}|u_0(y)| + \gamma \sup_{[0,1]\times[0,t]} |u(y,s)| + \sup_{[0,1]\times[0,t]} |V'(u(y,s))| \tag{A.70}$$

qui est finie presque sûrement. Pour la partie stochastique

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\int_0^1 (\phi_0(y) - \widetilde{\phi}_0(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right)^2\right] = \int_0^t\int_0^1 (\phi_0(y) - \widetilde{\phi}_0(y))^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant t\eta^2. \tag{A.71}$$

On en déduit alors la formulation faible. □

A.3 Construction de la solution de l'EDPS

A.3.1 Théorèmes de régularité

Ce premier Théorème de Kolmogorov vient de [88] (p.59, Théorème I.25.2).

Théorème A.3.1. *Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{R}^n}$ un processus stochastique à valeurs dans un espace métrique séparable (S,d). On suppose qu'il existe des constantes $C,p,\eta>0$ telles que, pour tous $t,s\in\mathbb{R}^n$*

$$\mathbb{E}[d(X_t,X_s)^p] < C\,|t-s|^{n+\eta} \tag{A.72}$$

alors il existe une modification continue de $(X_t)_t$. De plus, cette modification est θ-hölderienne pour tout $\theta<\frac{\eta}{p}$.

Cette deuxième version provient de [70], Théorème 1.4.1 p31.

Théorème A.3.2. *Soit u un champ aléatoire sur $[0,1]\times[0,T]$ supposons qu'il existe p, α, β et C avec $\alpha^{-1}+\beta^{-1}<1$ tel que pour tout $x,y\in[0,1]$ et $s,t\in[0,T]$*

$$\mathbb{E}\left[|u(x,t)-u(y,s)|^p\right] \leqslant C\left[|x-y|^\alpha+|s-t|^\beta\right] \tag{A.73}$$

Alors pour tout α',β' vérifiant

$$\alpha' < \frac{\alpha}{p}-\frac{2(\alpha+\beta)}{p\beta} \qquad \beta' < \frac{\beta}{p}-\frac{2(\alpha+\beta)}{p\alpha} \tag{A.74}$$

il existe $Y\in L^p(\Omega)$, tel que

$$|u(x,t)-u(y,s)| < Y\left[|x-y|^{\alpha'}+|s-t|^{\beta'}\right] \tag{A.75}$$

avec

$$\mathbb{E}[Y^p] \leqslant C(p,T,\alpha',\beta',C) \tag{A.76}$$

En particulier pour deux champs qui ont une même constante C, le moment de la variable est borné par la même constante.

Idée de la démonstration. On utilise un lemme d'analyse réelle (voir [96] ou [70]). □

Pour nous les valeurs sont quasiment toujours $\alpha=\frac{p}{2}$ et $\beta=\frac{p}{4}$. On a donc

$$\alpha' < \frac{1}{2}-\frac{6}{p} \qquad \beta' < \frac{1}{4}-\frac{3}{p}. \tag{A.77}$$

Notons que cela nous amène à supposer que $p>6$.

A.3.2 Solution de l'équation

On rappelle dans cette partie la construction d'une solution intégrale pour l'équation (4.1). On se propose de construire d'abord la solution pour un drift tronqué b_R

$$b_R(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R,R]} + V'(R)\mathbb{1}_{]R,+\infty[} + V'(-R)\mathbb{1}_{]-\infty,-R[}. \tag{A.78}$$

Remarquons que b_R est continue, bornée par M_R et lipschitzien de constante L_R. On en déduit l'existence et l'unicité de la solution via un théorème de comparaison.

Proposition A.3.3. *Pour toute condition initiale $u_0 \in C_{bc}([0,1])$, l'équation aux dérivées partielles stochastique*

$$\begin{cases} u_R(x,t) & = \int_0^1 u_0(y) g_t(x,y)\mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 b_R(u_R(y,s)) g_{t-s}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ & \quad + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \quad \forall t \geqslant 0,\ x \in [0,1] \\ u_R(x,0) & = u_0(x) \quad \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{A.79}$$

a une unique solution continue et $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurable. De plus, pour tout $T > 0$ et $p \geqslant 1$,

$$\sup_{[0,T]\times[0,1]} \mathbb{E}[|u_R(x,t)|^p] \leqslant C(R,T,p) < +\infty. \tag{A.80}$$

Démonstration. Soient u_1, u_2 deux solutions continues et $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurables. Par différences des formulations intégrales, on a pour tout $T \geqslant t > 0$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= |u_1(x,t) - u_2(x,t)| \\ &\leqslant \int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y)|\, |b_R(u_2(y,s)) - b_R(u_1(y,s))|\, \mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad \text{(A.81)} \\ &\leqslant L_R \int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y)|\, v(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leqslant L_R \sqrt{\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s} \sqrt{\int_0^t \int_0^1 v(y,s)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s} \\ &\leqslant L_R \left(\frac{3}{\gamma\pi^2} + T \right) \sqrt{\int_0^t \sup_{y\in[0,1]} v(y,s)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s} \qquad \text{(A.82)} \end{aligned}$$

où on a appliqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (B.47) (ou (B.51)). En posant $H(t) = \sup_{x\in[0,1]} v(x,t)^2 = \sup_{x\in[0,1]} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2$, on a alors

$$H(t) \leqslant C(T,R,\gamma) \int_0^t H(s)\mathrm{d}s \tag{A.83}$$

donc en utilisant le Lemme de Gronwall, pour tout $t \leqslant T$

$$H(t) = 0. \tag{A.84}$$

Ce qui prouve l'unicité de la solution, T étant quelconque.

Pour l'existence, on utilise la preuve usuelle par itération de Picard. On construit une suite de fonction u^n approximante en posant

$$u^0(x,t) = \int_0^1 g_t(x,y) u_0(y)\mathrm{d}y + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \tag{A.85}$$

$$\begin{aligned} u^{n+1}(x,t) = &\int_0^1 g_t(x,y) u_0(y)\mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) b_R(u^n(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &+ \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \end{aligned} \tag{A.86}$$

Toutes ces fonctions sont continues et $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}([0,1])$ mesurables d'après les propriétés de l'intégrale classique et du Lemme B.2.6. Considérons alors, pour

$n \geqslant 1$, $t \leqslant T$

$$\begin{aligned}\left|u^{n+1}(x,t)-u^n(x,t)\right| &\leqslant \int_0^t\int_0^1 \left|g_{t-s}(x,y)b_R(u^n(y,s))-b_R(u^{n-1}(y,s))\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\leqslant L_R\int_0^t\int_0^1 |g_{t-s}(x,y)|\left|u^n(y,s)-u^{n-1}(y,s)\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\leqslant L_R\left(\frac{3}{\gamma\pi^2}+T\right)\sqrt{\int_0^t\int_0^1 |u^n(y,s)-u^{n-1}(y,s)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s}\end{aligned} \tag{A.87}$$

en posant $H_{n+1}(t)=\sup_{x\in[0,1]}\left|u^{n+1}(x,t)-u^n(x,t)\right|^2$ pour $n\geqslant 1$, et $H_0(t)=\sup_{x\in[0,1]}\left|u^0(x,t)\right|^2$ on obtient de la même manière que précédement, pour tout $n\geqslant 1$ et $t\leqslant T$

$$H_n(t)\leqslant C(T,R,g)\int_0^t H_{n-1}(s)\mathrm{d}s. \tag{A.88}$$

On a alors par récurrence

$$H_n(t)\leqslant C(T,R,g)^n\int_0^t \frac{(t-s)^n}{n!}H_0(s)\mathrm{d}s. \tag{A.89}$$

D'après l'inégalité (B.44), pour tout $x\in[0,1]$

$$\left|\int_0^1 g_t(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y\right|\leqslant \|u_0\|_\infty \tag{A.90}$$

En utilisant l'inégalité B.136 du Lemme B.2.6, on a $\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}H_0(t)]<C(T)$. On obtient alors

$$\mathbb{E}[\sup_{t\in[0,T]}H_n(t)]\leqslant \frac{C(T,R,g)^nT^{n+1}}{n!}. \tag{A.91}$$

Donc en particulier la suite u^n à valeurs dans l'espace de Banach $L^2(\Omega,C([0,1]\times[0,T]))$ est de Cauchy, on en déduit donc que u^n converge uniformément dans L^2 sur $[0,1]\times[0,T]$ vers une fonction u_R dans $L^2(\Omega,C([0,1]\times[0,T]))$. Il reste à prouver que la fonction u_R est bien une solution, c'est-à-dire vérifie la formulation intégrale (2.16), ce qui revient à montrer que

$$F(u^n)(x,t)\xrightarrow[n\to\infty]{} F(u_R)(x,t) \text{ dans } L^2(\Omega,C([0,1]\times[0,T])) \tag{A.92}$$

où

$$F(u)(x,t)=\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(x,y)b_R(u(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{A.93}$$

Or pour u_1 et u_2 élément de $L^2(\Omega,C([0,1]\times[0,T]))$ on a, pour $(x,t)\in[0,1]\times[0,T]$, en reprenant l'équation (A.81)

$$|F(u_1)(x,t)-F(u_2)(x,t)|^2\leqslant C\sup_{(y,s)\in[0,1]\times[0,T]}|u_1(y,s)-u_2(y,s)|^2.$$

On en déduit donc

$$\mathbb{E}\left[\|F(u_1)-F(u_2)\|_\infty^2\right]\leqslant C\mathbb{E}\left[\|u_1-u_2\|_\infty^2\right]. \tag{A.94}$$

Donc F est Lipschitzienne sur $L^2(\Omega, C([0,1]\times[0,T]))$ donc continue. On en déduit que u_R est bien solution de notre équation. T étant quelconque, on a bien prouvé l'existence d'une solution de notre équation pour tout temps.

Montrons maintenant que pour tout $T > 1$ et $p \geqslant 1$,

$$\sup_{[0,T]\times[0,1]} \mathbb{E}[|u_R(x,t)|^p] \leqslant C(R,T,p) \tag{A.95}$$

pour cela on a

$$\mathbb{E}\,|u_R(x,t)|^p \leqslant 3^p(A_1 + A_2 + A_3) \tag{A.96}$$

avec, par le même application de l'inégalité (B.44), pour $t \leqslant T$

$$A_1 = \left|\int_0^1 u_0(y)g_t(x,y)\mathrm{d}y\right|^p \leqslant \|u_0\|_\infty^p \tag{A.97}$$

puis comme b_R est bornée (équation (2.30)) on a pour $t \leqslant T$

$$A_2 = \mathbb{E}\left|\int_0^t\int_0^1 b_R(u_R(y,s))g_{t-s}(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p \leqslant M_R^p T^p. \tag{A.98}$$

Enfin pour A_3 on applique l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{2\varepsilon}\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right|^p\right] \\ &\leqslant \sqrt{2\varepsilon}C_p\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t\int_0^1 g_{t-s}(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{2}}\right] \qquad (A.99) \\ &\leqslant \sqrt{2\varepsilon}C_pT^{p/2}\left(\frac{3}{\gamma\pi^2}+T\right)^{\frac{p}{2}}. \qquad (A.100) \end{aligned}$$

□

Régularité de u_R Pour montrer la régularité des solutions, on utilise le théorème de Kolmogorov-Čentsov A.3.2. Notre solution sera essentiellement $\frac{1}{2}$-hölderienne en espace et $\frac{1}{4}$-hölderienne en temps.

On a alors la propositions suivante

Proposition A.3.4. *Notons*

$$u_R(x,t) = u_0(x,t) + v_R(x,t) \tag{A.101}$$

où u_0 est la solution de l'équation homogène.

$$u_0(x,t) = \int_0^t\int_0^1 g_s(x,y)u_0(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s. \tag{A.102}$$

Le champ aléatoire v_R vérifie pour tout $p > 24$, et tout $\frac{6}{p} < \delta < \frac{1}{4}$

$$|v_R(x,t) - v_R(y,s)| \leqslant Y_\delta(|x-y|^{\frac{1}{2}-\delta} + |t-s|^{\frac{1}{4}-\delta}) \tag{A.103}$$

avec $Y_\delta \in L^p$. En particulier la solution u_R est essentiellement $\frac{1}{2}$-hölderienne en espace et $\frac{1}{4}$-hölderienne en temps.

Démonstration. On va utiliser le théorème de Kolmogorov, pour cela on a en effet

$$v_R(x,t) = -\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) b_R(u_R(y,s)) \mathrm{d}y \mathrm{d}s + \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s). \tag{A.104}$$

Or comme b_R est bornée, on a pour tout $p > 1$,

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|b_R(u(x,t))|^p] < +\infty. \tag{A.105}$$

On conclut alors tout simplement en appliquant le Lemme B.2.5. La solution homogène étant suffisamment régulière dès que $t > 0$, elle est en particulier hölderienne (on applique le théorème de dérivation sous le signe intégral). □

Moment uniforme On va maintenant énoncer une borne uniforme de la solution u_R.

Proposition A.3.5. *Pour tout u_0 continue avec les bonnes conditions au bord, on a, pour tout T, R, $p \geqslant 1$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_R(x,t)|^p\right] < C(p,T,R) < +\infty. \tag{A.106}$$

Démonstration. Comme précédemment,

$$u_R(x,t) = u_0(x,t) + v_R(x,t) \tag{A.107}$$

où u_0 est la solution de l'équation homogène. Soit T fixé, alors

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_R(x,t)| \leqslant \sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_0(x,t)| + \sup_{[0,1]\times[0,T]} |v_R(x,t)|. \tag{A.108}$$

Pour u_0, sa borne uniforme ne pose pas de problème, on a, en utilisant l'inégalité (B.44) du Lemme B.2.2

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_0(x,t)| \leqslant \|u_0\|_\infty. \tag{A.109}$$

Pour le second terme, on va utiliser la régularité comme dans la preuve du Lemme B.2.6. Soit m un entier positif, on pose $t_i = \frac{iT}{m}$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$,

$$\sup_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} |v_R(x,t)| \leqslant |v_R(1/2,t_i)| + \sup_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} |v_R(x,t) - v_R(1/2,t_i)| \tag{A.110}$$

Or, d'après la régularité holderienne énoncé à la Proposition A.3.4, on a, pour tout $p > 4$

$$\sup_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} |v_R(x,t) - v_R(1/2,t_i)| \leqslant Y_p \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}} + \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{1}{p}}\right) \leqslant (1+T)Y_p \tag{A.111}$$

avec $Y_p \in L^p(\Omega)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |v_R(x,t)|^p\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\max_{i=1\dots m} \sup_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} |v_R(x,t)|^p\right] \\
&\leqslant 2^p \mathbb{E}\left[\max_{i=1\dots m} \left|v_R\left(\frac{1}{2}, t_i\right)\right|^p\right] && \text{(A.112)} \\
&\quad + 2^p \mathbb{E}\left[\max_{i=1\dots m} \sup_{[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} |v_R(x,t) - v_R(1/2,t_i)|^p\right] && \text{(A.113)} \\
&\leqslant 2^p \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[|v_R(1/2,t_i)|^p\right] + 2^p(1+T)^p \mathbb{E}\left[Y_p^p\right] && \text{(A.114)} \\
&\leqslant m 2^p \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|v_R(x,t)|^p] + 2^p(1+T)^p \mathbb{E}[Y_p^p] < +\infty. && \text{(A.115)}
\end{aligned}$$

On obtient donc pour tout $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,T]\times[0,1]} |u_R(x,t)|^p\right] \leqslant C(R,T,p). \tag{A.116}$$

□

On peut remarquer que, dans ce qui précède, grâce au caractère additif du bruit utilisé, nous n'avons pas eu besoin des propriétés du bruit blanc (hors la prévisibilité). Par l'unicité, pour $R_1 > R_0$, pour $t \leqslant \tau_{R_1} \wedge \tau_{R_0}$, u_{R_1} et u_{R_0} coincident car b_{R_1} et b_{R_0} coincident sur $[-R_0, R_0]$. On en déduit que $\tau_{R_1} \geqslant \tau_{R_0}$. On construit donc, par raccordement successif en prenant une suite de niveaux R_n, une fonction u sur l'intevalle aléatoire $[0, \tau[$ où

$$\tau = \lim_{n\to\infty} \tau_{R_n} = \lim_{R\to\infty} \tau_R = \sup_R \tau_R \in [0, +\infty] \tag{A.117}$$

est le temps d'explosion de la solution. τ est bien définie car τ_R est croissant en R. Pour tout $t_0 < \tau$, par définition, il existe R tel que $t_0 < \tau_R$, et donc toujours par définition

$$u(x,t) = u_R(x,t), \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times [0,t_0] \tag{A.118}$$

et donc

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^1 u_0(y) g_t(x,y) \mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 b_R(u_R(y,s)) g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \\
&\quad + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \\
&= \int_0^1 u_0(y) g_t(x,y) \mathrm{d}y - \int_0^t \int_0^1 V'(u(y,s)) g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y \mathrm{d}s \qquad \text{(A.119)} \\
&\quad + \sqrt{2\varepsilon} \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)
\end{aligned}$$

puisque pour tout (x,t) avec $t \leqslant t_0 < \tau_R$, $|u(x,t)| = |u_R(x,t)| \leqslant R$.

On va donc montrer que presque sûrement

$$\tau = +\infty. \tag{A.120}$$

On aura alors bien construit une solution u sur $\mathbb{R}^+$.

A.3.3 Théorèmes de comparaison

Théorème A.3.6. *Soit u et v les solutions des EDPS suivantes sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$*

$$\partial_t u(x,t) = \gamma\partial_x^2 u(x,t) + f(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon}W \tag{A.121}$$

$$\partial_t v(x,t) = \gamma\partial_x^2 v(x,t) + h(v(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon}W \tag{A.122}$$

avec les mêmes conditions au bord et supposons que l'une des deux vérifie existence et unicité. Soit u_0 et v_0 des conditions initiales continues alors si $u_0(x) \leqslant v_0(x)$ et $f \leqslant h$ on a, pour tout t et x,

$$u(x,t) \leqslant v(x,t), \qquad p.s. \tag{A.123}$$

Idée de la démonstration. On prouve le résultat sur des approximations successives, soit par différences finies (voir [50]) ou par la méthode de Galerkin (voir [83]). □

Troncatures partielles On utilise un théorème de comparaison A.3.6 pour montrer l'existence de la solution en tout temps. Ce théorème nous permet de contrôler la norme de u, car le drift V' nous ramène plus vite vers 0 que le drift b_R. Posons alors les fonctions suivantes

$$b_R^+(u) = V'(u)\mathbb{1}_{]-\infty,R]} + V'(R)\mathbb{1}_{]R,+\infty[} \tag{A.124}$$

$$b_R^-(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R,\infty[} + V'(-R)\mathbb{1}_{]-\infty,-R]} \tag{A.125}$$

pour $R = R_0$ suffisamment grand on a par hypothèse sur V'

$$-b_{R_0}^-(u) \leqslant -b_{R_0}(u) \leqslant -b_{R_0}^+ \tag{A.126}$$

$$-b_{R_0}^-(u) \leqslant -V'(u) \leqslant -b_{R_0}^+. \tag{A.127}$$

Le drift b_R^+ va nous permettre de contrôler ce qui se passe du côté positif et b_R^- ce qui se passe du côté négatif. Posons alors $u_{R_0}^+$ et $u_{R_0}^-$ les solutions des équations associées.

Proposition A.3.7. *Pour u_0 continue, il existe une unique solution de l'équation $Eq(b_R^+, u_0)$ (resp. $Eq(b_R^-, u_0)$), notée $u_{R_0}^+$ (resp. $u_{R_0}^-$) et il existe un temps d'arrêt $\tau_{R_0}^+$ (resp. $\tau_{R_0}^-$) tel que $u_{R_0}^+$ (resp. $u_{R_0}^-$) soit définie sur $[0,1]\times[0,\tau_{R_0}^+[$ (resp. $[0,1]\times[0,\tau_{R_0}^-[$).*

Démonstration. Par la même méthode que précédemment, en utilisant une localisation, on peut construire les solutions jusqu'àu temps d'explosion $\tau_{R_0}^+$ et $\tau_{R_0}^-$. On introduit pour cela les drifts que l'on va couper à des niveaux différents à droite et à gauche

$$b_{R_g,R_d}(u) = V'(u)\mathbb{1}_{[-R_g,R_d]} + V'(R_d)\mathbb{1}_{]R_d,+\infty[} + V'(-R_g)\mathbb{1}_{]-\infty,-R_g[}. \tag{A.128}$$

Puisque b_{R_g,R_d} est globalement Lipchitzien et borné, on construit par la même méthode que pour u_R une unique solution u_{R_g,R_d} et on définit les temps d'arrêt

$$\tau_{R_g,R_d}^+ = \inf\{t, \exists x, u_{R_g,R_d}(x,t) < -R_g\} \tag{A.129}$$

$$\tau_{R_g,R_d}^- = \inf\{t, \exists x, u_{R_g,R_d}(x,t) > R_d\}. \tag{A.130}$$

On définit alors, en utilsant les propriétés de croissance de ces temps d'arrêt (en R_g pour le premier et en R_d pour le second),

$$\tau^+_{R_0} = \lim_{R_g \to +\infty} \tau^+_{R_g,R_0} \tag{A.131}$$

$$\tau^-_{R_0} = \lim_{R_d \to +\infty} \tau^-_{R_0,R_d} \tag{A.132}$$

L'existence et l'unicité de u_{R_g,R_d} permet alors de définir les solutions $u^+_{R_0}$ et $u^-_{R_0}$ de façon univoque

$$u^+_{R_0}(x,t) = \lim_{R_g \to +\infty} u_{R_g,R_d}(x,t), \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times [0, \tau^+_{R_0}[\tag{A.133}$$

$$u^-_{R_0}(x,t) = \lim_{R_d \to +\infty} u_{R_g,R_d}(x,t), \quad \forall (x,t) \in [0,1] \times [0, \tau^-_{R_0}[\tag{A.134}$$

□

Proposition A.3.8. *On a pour tout $T > 0$, $p > p_0$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R_0) < +\infty \tag{A.135}$$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^-_{R_0}(x,t)\right|^p\right] \leqslant C(p,T,R_0) < +\infty \tag{A.136}$$

et

$$\tau^+_{R_0} = +\infty \; p.s. \quad \textit{et} \quad \tau^-_{R_0} = +\infty \; p.s. \tag{A.137}$$

Démonstration. On en déduit grâce au Théorème de comparaison A.3.6 les comparaisons suivantes (car u_{R_0} vérifie existence et unicité forte), pour tout $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$

$$u^-_{R_0}(x,t) \leqslant u_{R_0}(x,t) \leqslant u^+_{R_0}(x,t) \tag{A.138}$$

et donc en particulier

$$\mathbb{1}_{\left\{u^-_{R_0}>0\right\}} u^-_{R_0}(x,t) \leqslant |u_{R_0}(x,t)| \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{\left\{u^+_{R_0}<0\right\}} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right| \leqslant |u_{R_0}(x,t)| \,. \tag{A.139}$$

Or d'après la forme de $b^+_{R_0}$ et les Hypothèses 4.2.1 on a

$$\left|b^+_{R_0}(u)\right| \leqslant |V'(u)| \, \mathbb{1}_{]-\infty,R_0]} + C(R_0) \leqslant C(R_0) \left[|u|^\alpha \, \mathbb{1}_{u<0} + 1\right]. \tag{A.140}$$

On en déduit donc

$$\left|u^+_{R_0}(x,t)\right|^p \leqslant 3^p [B_1 + B_2 + B_3]. \tag{A.141}$$

On a successivement pour B_1

$$B_1 = \left|\int_0^1 u_0(y) g_t(x,y) \mathrm{d}y\right|^p \leqslant \|u_0\|^p_\infty \tag{A.142}$$

puis pour B_2, en utilisant l'estimation (B.44), on a

$$\begin{aligned}
B_2 &= \left| \int_0^t \int_0^1 b^+_{R_0}(u^+_{R_0}(y,s)) g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant C(R_0)^p \left| \int_0^t \int_0^1 \left(\left| u^+_{R_0}(y,s) \right|^\alpha \mathbb{1}_{\left\{ u^+_{R_0}(y,s)<0 \right\}} + 1 \right) g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant C(R_0)^p \left| \int_0^t \int_0^1 \left(|u_{R_0}(x,t)|^\alpha + 1 \right) g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant C(R_0)^p \left(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_{R_0}(x,t)|^\alpha + 1 \right)^p \left| \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right|^p \\
&\leqslant C(R_0)^p T^p 2^p \left(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u_{R_0}(x,t)|^{p\alpha} + 1 \right) \qquad \text{(A.143)}
\end{aligned}$$

donc, d'après la Proposition A.3.5

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} B_2(x,t) \right] < +\infty. \qquad \text{(A.144)}$$

Enfin,

$$B_3 = \left| \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \right|^p \qquad \text{(A.145)}$$

et d'après le Lemme B.2.6, de la même manière que précédemment, on a

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} B_3(x,t) \right] < +\infty \qquad \text{(A.146)}$$

ce qui permet de conclure

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left| u^+_{R_0}(x,t) \right|^p \right] < +\infty. \qquad \text{(A.147)}$$

De la même manière en remarquant que, pour tout $u \in \mathbb{R}$

$$\left| b^-_{R_0}(u) \right| \leqslant |V'(u)| \, \mathbb{1}_{[-R_0,+\infty[} + C(R_0) \leqslant C(R_0)[|u|^\alpha \, \mathbb{1}_{u>0} + 1]. \qquad \text{(A.148)}$$

On en déduit aussi

$$\mathbb{E}[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left| u^-_{R_0}(x,t) \right|^p] < +\infty. \qquad \text{(A.149)}$$

Montrons alors que $\tau^+_{R_0} = +\infty$ presque sûrement. On a d'abord

$$\tau^+_{R_g,R_0} = \inf\{t, \exists x, u^+_{R_0}(x,t) < -R_g\} \qquad \text{(A.150)}$$

on obtient, pour $p \geqslant 1$ et pour tout $R_g > 0$, par croissance des temps d'arrêt et en utilisant l'inégalité de Markov

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\tau^+_{R_0} > T] &\geqslant \mathbb{P}\left[\tau^+_{R_g,R_0} > T\right] \\
&\geqslant \mathbb{P}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} (-u^+_{R_0}(x,t)) < R_g\right] \geqslant \mathbb{P}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right| < R_g\right] \\
&\geqslant 1 - \mathbb{P}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right| \geqslant R_g\right] \qquad \text{(A.151)} \\
&\geqslant 1 - \frac{1}{R_g^p}\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right|^p\right]. \qquad \text{(A.152)}
\end{aligned}$$

D'où, en faisant tendre $R_g \to \infty$,

$$\mathbb{P}[\tau^+_{R_0} > T] = 1 \qquad \forall T > 0. \tag{A.153}$$

On peut suivre le même raisonnement pour montrer que $\tau^-_{R_0} = +\infty$ presque sûrement. □

On a alors l'existence pour tout temps et l'unicité forte des solutions associées à $b^+_{R_0}$ et $b^-_{R_0}$.

Existence de la solution sur $\mathbb{R}^+$ On est alors prêt à montrer que u existe pour tout temps.

Lemme A.3.9. *On a pour $p \geqslant 1$*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|^p\right] < +\infty \quad \textit{et} \quad \tau = +\infty \quad \textit{p.s.} \tag{A.154}$$

Démonstration. On applique le Théorème de comparaison A.3.6 encore une fois pour

$$-b^-_{R_0}(u) \leqslant -V'(u) \leqslant -b^+_{R_0}(u). \tag{A.155}$$

On a alors les comparaisons suivantes : pour tout (x,t)

$$u^-_{R_0}(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant u^+_{R_0}(x,t). \tag{A.156}$$

On en déduit

$$|u(x,t)| \leqslant \mathbb{1}_{u^-_{R_0}<0}\left|u^-_{R_0}(x,t)\right| + \mathbb{1}_{u^+_{R_0}>0}\left|u^+_{R_0}(x,t)\right|. \tag{A.157}$$

Donc, on obtient

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|^p \leqslant 2^p\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^-_{R_0}(x,t)\right|^p + \sup_{[0,1]\times[0,T]} \left|u^+_{R_0}(x,t)\right|^p\right] \tag{A.158}$$

En particulier pour tout $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|^p] < +\infty, \qquad \text{p.s.} \tag{A.159}$$

On montre alors que la solution u est donc bien définie pour tout temps. Comme précédemment pour tout $R > R_0$, $p \geqslant 1$ et $T > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tau > T) &\geqslant \mathbb{P}(\tau_R > T)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)| \leqslant R\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)| > R\right) \qquad (A.160)\\ &\geqslant 1 - \frac{\mathbb{E}\left(\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t)|^p\right)}{R^p} \geqslant 1 - \frac{C(R_0,T,p)}{R^p} \xrightarrow[R\to\infty]{} 1. \qquad (A.161)\end{aligned}$$

On en déduit donc que pour tout $T > 0$

$$\mathbb{P}(\tau > T) = 1 \qquad (A.162)$$

ce qui signifie bien que $\tau = +\infty$ presque sûrement. □

Régularité de u

Proposition A.3.10. *Notons*

$$u(x,t) = u_0(x,t) + v(x,t) \qquad (A.163)$$

où u_0 est la solution de l'équation homogène. Le champ aléatoire v vérifie

$$|v(x,t) - v(y,s)| \leqslant Y_\delta(|x-y|^{\frac{1}{2}-\delta} + |t-s|^{\frac{1}{4}-\delta}). \qquad (A.164)$$

En particulier la solution u est essentiellement $\frac{1}{2}$-hölderienne en espace et $\frac{1}{4}$-hölderienne en temps.

Démonstration. On a

$$v(x,t) = -\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)V'(u(y,s))\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \qquad (A.165)$$

Pour le second terme, on a déjà le Lemme B.2.6. Pour le premier terme, on va simplement appliquer le Lemme B.2.5, en effet

$$|V'(u)| \leqslant C(|u|^\alpha + 1) \qquad (A.166)$$

et, pour tout $p \geqslant 1$, d'après le Lemme A.3.9

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|u(x,t)|^p] \leqslant \mathbb{E}[\sup_{[0,1]\times[0,T]} |u(x,t|^p] < +\infty. \qquad (A.167)$$

On a donc

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|V'(u(x,t))|^p] \leqslant 2^p C(\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|u(x,t)|^{\alpha p}] + 1) < +\infty \qquad (A.168)$$

On peut alors appliquer le Lemme B.2.5. La solution homogène étant suffisamment régulière dès que $t > 0$, elle est en particulier hölderienne. □

Annexe B

Estimations des semi-groupes

Dans cette annexe on prouve des estimations sur le semi-groupe de la chaleur dans les trois ces de conditions au bords, pour le semi-groupe continu et discrétisé. On prouve de plus la convergence du semi-groupe discrétisé vers le semi-groupe continu.

B.1 Théorème et inégalités utilisées

On met dans cette section les estimations utilisées de manière répétée.

Lemme B.1.1 (Formule de Poisson)**.** *Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$, pour tout $T > 0$ et $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}\left(\frac{2\pi k}{T}\right) e^{2\pi i \frac{k}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t+nT) \tag{B.1}$$

où $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Démonstration. Il suffit d'écrire l'égalité de la fonction (périodique) de droite avec sa série de Fourier. □

On a aussi le lemme technique suivant

Lemme B.1.2. *Soit $h \geqslant 0$ et $a > 0$, on a les proprités suivantes*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1-e^{-ahk^2}] \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 \wedge ahk^2] \leqslant 3(\sqrt{ah} \wedge 1) \tag{B.2}$$

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1-e^{-ahk^2}]^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 \wedge ahk^2]^2 \leqslant 3(\sqrt{ah} \wedge 1). \tag{B.3}$$

L'inégalité est en fait en deux partie : si h est grand on reste borné, si h est petit, on tend vers 0 comme $\sqrt{h}$.

Démonstration. Montrons la première inégalité, on utilise d'abord le fait que pour l positif, $0 \leqslant 1 - e^{-l} \leqslant 1 \wedge l$, ce qui donne

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1-e^{-ahk^2}] \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 \wedge ahk^2] = \sum_{k\geqslant 1}[k^{-2} \wedge ah]. \tag{B.4}$$

Puis il suffit de voir

$$k^{-2} \wedge ah = \begin{cases} ah & \text{pour } k \leqslant \frac{1}{\sqrt{ah}} \\ k^{-2} & \text{pour } k > \frac{1}{\sqrt{ah}} \end{cases} \tag{B.5}$$

on a alors

$$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 - e^{-ahk^2}] &\leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{\sqrt{ah}}} ah + \sum_{k > \frac{1}{\sqrt{ah}}} k^{-2} \\ &\leqslant a \int_0^{\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{ah}} \right\rfloor} h \mathrm{d}k + \int_{1 \vee (\frac{1}{\sqrt{ah}} - 1)} k^{-2} \mathrm{d}k \end{aligned} \tag{B.6}$$

où on a remplacé les sommes par des intgrales en utilisant la monotonie des fonctions (en k). En utilisant le fait que $\lfloor l \rfloor \leqslant l \wedge l^2$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 - e^{-ahk^2}] &\leqslant (\frac{1}{\sqrt{ah}} \wedge \frac{1}{ah})ah + \frac{1}{1 \vee (\frac{1}{\sqrt{ah}} - 1)} \\ &= (\sqrt{ah} \wedge 1) + \frac{\sqrt{ah}}{\sqrt{ah} \vee (1 - \sqrt{ah})}. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Enfin on conclut en remarquant que pour $l \geqslant 0$

$$\frac{l}{l \vee (1 - l)} \leqslant 2l \wedge 1. \tag{B.8}$$

On a ainsi

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 - e^{-ahk^2}] \leqslant \Big[(\sqrt{ah} \wedge 1) + (2\sqrt{ah} \wedge 1)\Big] \leqslant 3(\sqrt{ah} \wedge 1). \tag{B.9}$$

Pour la seconde inégalité, en utilisant simplement $(1 \wedge l)^2 \leqslant 1 \wedge l$ on a

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 - e^{-ahk^2}]^2 \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 \wedge ahk^2]^2 \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^2}[1 \wedge ahk^2] \leqslant 3(\sqrt{ah} \wedge 1). \tag{B.10}$$

□

Lemme B.1.3. *Pour tout $a, \alpha > 0$, on a*

$$\sum_{k=1}^{N} k^\alpha e^{-ak^2} \leqslant \frac{1}{2a^{\frac{\alpha+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right). \tag{B.11}$$

Démonstration. La fonction $k \mapsto k^\alpha e^{-ak^2}$ étant croissante puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$, on a

$$\sum_{k=1}^{N} k^\alpha e^{-ak^2} \leqslant \int_0^{N+1} k^\alpha e^{-ak^2} \mathrm{d}k \leqslant \int_0^\infty k^\alpha e^{-ak^2} \mathrm{d}k. \tag{B.12}$$

Il suffit de faire un changement de variable pour obtenir le résultat annoncé. □

On a aussi le lemme suivant qui utilise les notations de la section du chapitre 2.

Lemme B.1.4. *Soit une fonction f de classe C^1 sur $[0,1]$ pour tous les cas de condition au bord, on a pour tout N*

$$\int_0^1 |f(\kappa_N(y)) - f(y)|^2 \,\mathrm{d}y \leqslant \frac{h_N^2}{4} \int_0^1 f'(z)^2 \mathrm{d}z \tag{B.13}$$

Démonstration. En utilisant Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(\kappa_N(y)) - f(y)|^2 \,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \left| \int_y^{\kappa_N(y)} f'(z)\mathrm{d}z \right|^2 \mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_0^1 |y - \kappa_N(y)| \left| \int_y^{\kappa_N(y)} f'(z)^2 \mathrm{d}z \right| \mathrm{d}y \qquad \text{(B.14)} \\
&\leqslant \frac{h_N}{2} \int_0^1 \left| \int_y^{\kappa_N(y)} f'(z)^2 \mathrm{d}z \right| \mathrm{d}y. \qquad \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left| \int_y^{\kappa_N(y)} f'(z)^2 \mathrm{d}z \right| \mathrm{d}y \\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{y} f'(z)^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y + \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} \int_y^{x_i} f'(z)^2 \mathrm{d}z\mathrm{d}y \qquad \text{(B.16)} \\
&= \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f'(z)^2 \int_z^{x_{i+\frac{1}{2}}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} f'(z)^2 \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{z} \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&\leqslant \frac{h_N}{2} \sum_{i=0}^{N} \int_{x_i}^{x_{i+\frac{1}{2}}} f'(z)^2 \mathrm{d}z + \frac{h_N}{2} \sum_{i=1}^{N+1} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_i} f'(z)^2 \mathrm{d}z \qquad \text{(B.17)} \\
&\leqslant \frac{h_N}{2} \int_0^1 f'(z)^2 \mathrm{d}z. \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

On obtient bien l'inégalité annoncée. □

B.2 Semi-groupe du Laplacien en dimension 1

B.2.1 Calcul du Semi-Groupe

Comme $-\gamma\partial_{xx}^2$ est un opérateur symétrique positif sur l'espace $C_{bc}^2([0,1])$, le semigroupe engendré par

$$\partial_t u = \gamma \partial_{xx}^2 u \tag{B.19}$$

peut s'écrire sous la forme

$$g_t(x,y) = \sum_{k \geqslant 0} e^{-t\lambda_k} v_k(x) v_k(y) \tag{B.20}$$

où (v_k, λ_k) sont les vecteurs propres et valeurs propres de $-\gamma\partial^2_{xx}$ sur $[0,1]$ avec les conditions au bord adaptées. Les vecteurs propres sont normalisés en norme L^2, ils forment alors une famille orthonormale de $L^2([0,1])$. Pour la suite, on pose les fonctions ψ_k et φ_k pour k entier positif

$$\psi_k(x) = \sqrt{2}\sin(k\pi x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x). \tag{B.21}$$

Lemme B.2.1. *Les éléments propres sont les suivants :*

- *Conditions au bord de Dirichlet : pour $k \geqslant 1$*

$$\begin{cases} \psi_k(x) & = \sqrt{2}\sin(\pi k x) \\ \lambda_k & = \gamma\pi^2 k^2 \end{cases} \tag{B.22}$$

- *Conditions au bord de Neumann : pour $k \geqslant 1$*

$$\begin{cases} \varphi_k(x) & = \sqrt{2}\cos(\pi k x) \\ \lambda_k & = \gamma\pi^2 k^2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi_0(x) & = 1 \\ \lambda_0 & = 0 \end{cases} \tag{B.23}$$

- *Conditions au bord périodiques : dans ce cas, chaque espace propre est de dimension 2, (sauf pour $k = 0$), on considère alors une base orthonormale (ϕ_{2k}, ψ_{2k}) pour chaque espace propre, pour $k \geqslant 1$*

$$\begin{cases} (\varphi_{2k}(x), \psi_{2k}(x)) & = (\sqrt{2}\cos(2\pi k x), \sqrt{2}\sin(2\pi k x)) \\ \mu_k & = \gamma 4\pi^2 k^2 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi_0(x) & = 1 \\ \mu_0 & = 0. \end{cases} \tag{B.24}$$

La densité $g_t(x,y)$ du semi-groupe de la chaleur est, suivant chaque condition au bord, pour $(x,y) \in [0,1]^2$ et $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} g_D(t,x,y) &= 2\sum_{k\geqslant 1} e^{-\gamma\pi^2k^2t}\sin(\pi k x)\sin(\pi k y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(y-x+2n)^2\right) && \text{(B.25)} \\ &\quad - \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(y+x+2n)^2\right) && \text{(B.26)} \\ g_V(t,x,y) &= 1 + 2\sum_{k\geqslant 1} e^{-\gamma\pi^2k^2t}\cos(\pi k x)\cos(\pi k y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(y-x+2n)^2\right) && \text{(B.27)} \\ &\quad + \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(y+x+2n)^2)\right) && \text{(B.28)} \\ g_P(t,x,y) &= 1 + 2\sum_{k\geqslant 1} e^{-4\gamma\pi^2k^2t}[\sin(2\pi k x)\sin(2\pi k y) + \cos(2\pi k x)\cos(2\pi k y)] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{16\gamma t}(y-x+n)^2)\right). && \text{(B.29)} \end{aligned}$$

En particulier g est, dans chacun des cas, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^+_* \times [0,1]^2$.

Démonstration. Il suffit de calculer les valeurs propres et vecteurs propres correspondant aux conditions au bord qui nous intéressent. On veut résoudre (en λ et v)

$$\gamma v''(x) = -\lambda v(x) \tag{B.30}$$

sur $[0,1]$ avec les bonnes conditions au bord. On peut voir facilement que grâce aux conditions au bord, on a

$$\gamma \int_0^1 (v'(x))^2 \mathrm{d}x = -\gamma \int_0^1 v(x)v''(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_0^1 (v(x))^2 \mathrm{d}x \geqslant 0 \tag{B.31}$$

donc $\lambda \geqslant 0$. Si $\lambda = 0$, on a

$$v(x) = A + Bx. \tag{B.32}$$

Pour $\lambda > 0$ les solutions de l'équation différentielle sont

$$v(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}x\right). \tag{B.33}$$

A et B étant des constantes à déterminer. Dans le cas des conditions de Dirichlet ($v(0) = 0$ et $v(1) = 0$), on trouve, si $\lambda = 0$, $A = B = 0$. Pour $\lambda = 0$, il vient

$$v(0) = B = 0 \quad \text{et} \quad v(1) = A\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}}\right) = 0. \tag{B.34}$$

On en déduit donc que $\lambda = \gamma k^2\pi^2$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. On obtient donc le résultat. Les autres conditions au bord se traitent de même. Comme les vecteurs propres sont déterminés à une constante multiplicative près, on choisit cette dernière avec la normalisation. On a en effet pour tout $k, k' \geqslant 0$

$$\int_0^1 \sin(\pi k x)\sin(\pi k' x)\mathrm{d}x = \frac{\delta_{k-k'}}{2} \qquad \int_0^1 \cos(\pi k x)\cos(\pi k' x)\mathrm{d}x = \frac{\delta_{k-k'}}{2} \tag{B.35}$$

$$\int_0^1 \sin(\pi k x)\cos(\pi k' x)\mathrm{d}x = 0 \tag{B.36}$$

avec δ le symbole de Kronecker. On déduit aussi des intégrales précédentes les relations d'orthogonalités entre vecteurs propres.

L'autre formulation du semi-groupe est donnée par la formule de Poisson (Lemme B.1.1) qui est une formule classique de la théorie de Fourier.

On applique le Lemme B.1.1 avec $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$,

$$f(s) = \sqrt{4\pi}e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad t = \frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \tag{B.37}$$

or $\widehat{f}(\xi) = \exp(-\xi^2)$, on obtient alors

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{i\alpha k - \beta k^2} &= \frac{2\pi}{\sqrt{\beta}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp(-\frac{1}{4\beta}(\alpha + 2\pi n)^2) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\beta}(\alpha + 2\pi n)^2\right).\end{aligned} \tag{B.38}$$

Dans le cas Dirichlet, on met la densité sous la forme ci-dessus,

$$\begin{aligned} g_t(x,y) &= 2\sum_{k\geqslant 1} e^{-\gamma\pi^2k^2t}\sin(\pi kx)\sin(\pi ky) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1} e^{-\gamma\pi^2k^2t}(e^{i\pi kx}-e^{-i\pi kx})(e^{i\pi ky}-e^{-i\pi ky}) \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1} e^{-\gamma\pi^2k^2t}[e^{i\pi k(x+y)}+e^{-i\pi k(x+y)}-(e^{i\pi k(x-y)}+e^{-i\pi k(tx-y)})] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\beta k^2}[e^{i\alpha^- k}-e^{i\alpha^+ k}] \end{aligned} \tag{B.39}$$

avec $\alpha^- = \pi(x-y)$, $\alpha^+ = \pi(x+y)$, $\beta = \gamma\pi^2 t$. Alors, d'après (B.38)

$$g_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x-y+2n)^2\right) - \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x+y+2n)^2\right). \tag{B.40}$$

De la même façon, on obtient dans le cas des conditions de Neumann

$$\begin{aligned} g_t(x,y) =& \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-\beta k^2}[e^{i\alpha^- k}+e^{i\alpha^+ k}] \\ =& \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x-y+2n)^2\right) + \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x+y+2n)^2\right) \end{aligned} \tag{B.41}$$

et pour les conditions périodiques

$$g_t(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4\beta k^2}e^{i\alpha^- k} = \frac{1}{4\sqrt{\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{16\gamma t}(x-y+2n)^2\right). \tag{B.42}$$

Le caractère C^∞ du semi-groupe provient simplement de l'application (répétée) du théorème de dérivation sous le signe intégral. □

B.2.2 Estimations du Semi-Groupe

Dans cette partie, on va exposer une série de majoration du semi-groupe qui nous seront utiles dans la suite.

Estimations dans L^1 et L^2

Lemme B.2.2. *Pour tous les cas de conditions au bord on a :*

$$|g_t(x,y)| \leqslant 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{16\gamma t}}. \tag{B.43}$$

En norme L^1, on a

$$\int_0^1 |g_t(x,y)|\,\mathrm{d}y \leqslant 1. \tag{B.44}$$

Dans L^2, on a

– *pour les conditions au bord de Dirichlet*

$$\int_0^1 g_t(x,y)^2 \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.45}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.46}$$

$$\int_0^t \int_0^1 g_s(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{B.47}$$

$$\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 g_s(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{2\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{B.48}$$

– *pour des conditions au bord de type Neumann ou périodique*

$$\int_0^1 (g_t(x,y)-1)^2 \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.49}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 (g_t(x,y)-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.50}$$

$$\int_0^t \int_0^1 (g_s(x,y)-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2t\gamma\pi^2}) \tag{B.51}$$

$$\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 (g_s(x,y)-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{2\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2t\gamma\pi^2}). \tag{B.52}$$

Démonstration. Commençons par montrer les estimations en norme L^2. On considère tout d'abord les conditions au bord de Dirichlet

$$g_t^D(x,y) = \sum_{k\geqslant 1} \exp(-\lambda_k t)\psi_k(x)\psi_k(y). \tag{B.53}$$

Or la famille ψ_k est orthonormale dans $L^2([0,1])$. D'où, d'une part,

$$\int_0^1 g_t^D(x,y)^2 \mathrm{d}y = \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t)\psi_k(x)^2 \leqslant 2\sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t) \tag{B.54}$$

et donc d'autre part

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t). \tag{B.55}$$

Puisque $\lambda_k = \gamma\pi^2 k^2$, on a

$$\sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma\pi^2 k^2 t} \mathrm{d}k = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}}. \tag{B.56}$$

Il suffit ensuite, de reprendre la borne obtenue. Dans le cas Dirichlet,

$$\int_0^1 g_t^D(x,y)^2 \mathrm{d}y \leqslant 2\sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.57}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t^D(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\lambda_k t) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}}. \tag{B.58}$$

Pour les conditions au bord de Neumann, les valeurs propres sont identiques au cas Dirichlet mais la valeur propre 0 est simple, associé au vecteur propre $\varphi_0 = 1$, on a alors

$$\int_0^1 g_t^{Ne}(x,y)^2 \mathrm{d}y - 1 = \int_0^1 (g_t^{Ne}(x,y) - 1)^2 \mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.59}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t^{Ne}(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x - 1 = \int_0^1 \int_0^1 (g_t^{Ne}(x,y) - 1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2\pi\gamma t}}. \tag{B.60}$$

Dans le cas des conditions au bord périodiques, toutes les valeurs propres hormis pour $k = 0$ sont doubles et les valeurs propres sont $\mu_k = \gamma 4\pi^2 k^2 = 4\lambda_k$, on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_t^P(x,y)^2 \mathrm{d}y - 1 &= \int_0^1 (g_t^P(x,y) - 1)^2 \mathrm{d}y \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\mu_k t)(\psi_{2k}(x)^2 + \varphi_{2k}(x)^2) \qquad \text{(B.61)} \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\mu_k t) \qquad \text{(B.62)}\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t^P(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x - 1 = \int_0^1 \int_0^1 (g_t^P(x,y) - 1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\mu_k t). \tag{B.63}$$

Or, on a comme précédemment

$$\sum_{k\geqslant 1} \exp(-2\mu_k t) \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-8\gamma\pi^2 k^2 t} \mathrm{d}k = \frac{1}{4\sqrt{2\pi\gamma t}} \tag{B.64}$$

Par simplicité, on utilise les mêmes estimations que dans les autres cas. Pour obtenir les autres estimations L^2, on intègre sur $[0,t]$ l'équation (B.54). Dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, on obtient en utilisant le Lemme B.1.2

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^1 g_s^D(x,y)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2\lambda_k}(1 - \exp(-2\lambda_k t))\psi_k(x)^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k}(1 \wedge (2\lambda_k t)) \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma\pi^2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}(1 \wedge (2\gamma\pi^2 t k^2)) \leqslant \frac{3}{\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2\gamma\pi^2 t}).\end{aligned} \tag{B.65}$$

Pour l'inégalité (B.48), on réalise la même méthode en intégrant (B.55). Dans les cas Neumann, on a la même chose en remplaçant $g_s(x,y)$ par $g_s(x,y) - 1$ pour éliminer la valeur propre nulle. Dans le cas périodique, on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^1 (g_s^P(x,y) - 1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2\mu_k}(1 - \exp(-2\mu_k t)) \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2\mu_k}(1 \wedge (2\mu_k t)) \leqslant \frac{1}{8\gamma\pi^2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}(1 \wedge (8\gamma\pi^2 t k^2)) \\ &\leqslant \frac{3}{8\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{8\gamma\pi^2 t}) \leqslant \frac{3}{4\gamma\pi^2} \min(1, \sqrt{2\gamma\pi^2 t}).\end{aligned} \tag{B.66}$$

Ce qui implique évidemment les inégalités (B.51) et (B.52).

Pour obtenir une estimation ponctuelle, on utilise l'expression de g_t obtenue avec la formule de Poisson (B.25), (B.27) et (B.29). Il suffit alors de remarquer que pour $x, y \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}(x-y+2n)^2-(x-y)^2 &= 2n(2(x-y)+2n) \geqslant \begin{cases} 4n(n+1) & \text{pour } n \leqslant 0 \\ 4n(n-1) & \text{pour } n > 0 \end{cases} \\ (x+y+2n)^2-(x-y)^2 &= 4(x+n)(y+n) \geqslant \begin{cases} 4n^2 & \text{pour } n \geqslant 0 \\ 4(n+1)^2 & \text{pour } n < 0. \end{cases}\end{aligned} \tag{B.67}$$

On en déduit, pour $t > 0$

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}\left[(x-y+2n)^2-(x-y)^2\right]\right) \\ &\leqslant \sum_{n>0} \exp\left(-\frac{n(n-1)}{\gamma t}\right) + \sum_{n\leqslant 0} \exp\left(-\frac{n(n+1)}{\gamma t}\right) \qquad \text{(B.68)} \\ &\leqslant 1 + 2\sum_{n\geqslant 1} \exp\left(-\frac{n(n-1)}{\gamma t}\right) \leqslant 1 + 2\sum_{n\geqslant 0} \exp\left(-\frac{n^2}{\gamma t}\right) \\ &\leqslant 3 + 2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\gamma t}\right) \mathrm{d}x \leqslant 3 + \sqrt{\pi\gamma t} \qquad \text{(B.69)}\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}\left[(x+y+2n)^2-(x-y)^2\right]\right) \\ &\leqslant \sum_{n<0} \exp\left(-\frac{(n+1)^2}{\gamma t}\right) + \sum_{n\geqslant 0} \exp\left(-\frac{n^2}{\gamma t}\right) \qquad \text{(B.70)} \\ &\leqslant 2\sum_{n\geqslant 0} \exp\left(-\frac{n^2}{\gamma t}\right) \leqslant 2 + 2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{\gamma t}\right) \mathrm{d}x \leqslant 2 + \sqrt{\pi\gamma t}.\end{aligned}$$

Donc, on obtient, pour tout $t > 0$, dans les conditions au bord de Dirichlet et de Neumann

$$0 \leqslant |g_t(x,y)| \leqslant \frac{2\sqrt{\pi\gamma t}+5}{2\sqrt{\gamma\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\gamma t}} \leqslant 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{4\gamma t}}. \tag{B.71}$$

Pour les conditions au bord périodique, on a en reprenant l'équation (B.68)

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{1}{16\gamma t}\left[(x-y+2n)^2-(x-y)^2\right]\right) &\leqslant 3 + 2\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4\gamma t}\right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant 3 + 2\sqrt{\pi\gamma t} \qquad \text{(B.72)}\end{aligned}$$

on en déduit alors d'après l'équation (B.29)

$$0 \leqslant |g_t(x,y)| \leqslant \frac{2\sqrt{\pi\gamma t}+3}{4\sqrt{\gamma\pi t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{16\gamma t}} \leqslant \left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}\right) e^{-\frac{(x-y)^2}{16\gamma t}}. \tag{B.73}$$

Encore par simplicité, on choisit pour tous les cas la borne commune

$$0 \leqslant |g_t(x,y)| \leqslant 3\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma\pi t}}\right)e^{-\frac{(x-y)^2}{16\gamma t}}. \tag{B.74}$$

Pour obtenir une estimation en norme L^1, d'après les équations (B.25) et (B.27), pour les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g_t(x,y)|\,\mathrm{d}y &\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x-y+2n)^2\right) \\
&\quad + \exp\left(-\frac{1}{4\gamma t}(x+y+2n)^2\right)\mathrm{d}y && \text{(B.75)}\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{x+2n-1}^{x+2n+1} \exp\left(-\frac{y^2}{4\gamma t}\right)\mathrm{d}y && \text{(B.76)}\\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{4\gamma\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{4\gamma t}\right)\mathrm{d}y \leqslant 1. && \text{(B.77)}
\end{aligned}$$

De même pour les conditions au bord périodiques

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g_t(x,y)|\,\mathrm{d}y &\leqslant \frac{1}{4\sqrt{\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^1 \exp\left(-\frac{1}{16\gamma t}(x-y+2n)^2\right) \\
&\leqslant \frac{1}{4\sqrt{\gamma\pi t}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_{x+2n-1}^{x+2n} \exp\left(-\frac{y^2}{16\gamma t}\right)\mathrm{d}y && \text{(B.78)}\\
&\leqslant \frac{1}{4\sqrt{\gamma\pi t}}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^2}{16\gamma t}\right)\mathrm{d}y \leqslant 1. && \text{(B.79)}
\end{aligned}$$

□

Contrôle en 0 Pour l'équivalence entre solution faible et intégrale, on a eu besoin du lemme suivant.

Proposition B.2.3. *Pour toutes les conditions au bord considérées, pour* $\phi_0 \in C^\infty_{D,V,P}([0,1])$*, soit* $\Phi(x,t)$ *la solution de*

$$\begin{cases} \partial_t\Phi &= \gamma\partial_{xx}\Phi \\ \Phi(x,0) &= \phi_0(x). \end{cases} \tag{B.80}$$

La solution Φ *est dans* $C^\infty([0,1]\times]0,\infty[)$ *et vérifie pour* $s<1$

$$|\phi_0(y)-\Phi(y,s)| \leqslant C_1\sqrt{s} \quad \textit{et} \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(y,s)-\phi_0''(y)\right| \leqslant C_2\sqrt{s} \tag{B.81}$$

avec

$$C_1 = 2\,\|\phi_0''\|_\infty\left(1+\sqrt{\frac{2}{\gamma\pi^2}}\right) \qquad C_2 = 2\left\|\phi_0^{(4)}\right\|_\infty\left(1+\sqrt{\frac{2}{\gamma\pi^2}}\right). \tag{B.82}$$

Démonstration. On a vu que la solution Φ s'exprimait sous la forme

$$\Phi(x,t) = g_t\varphi_0(x) = \int_0^1 g_t(x,y)\phi_0(y)\mathrm{d}y. \tag{B.83}$$

On a alors, dans tous les cas de conditions au bord

$$|\phi_0(y) - \Phi(y,s)| = \left|\int_0^s \partial_t\Phi(y,u)\mathrm{d}u\right| = \gamma\left|\int_0^s \partial^2_{xx}\Phi(y,u)\mathrm{d}u\right|. \tag{B.84}$$

Or par symétrie, on a

$$\begin{aligned}\partial^2_{yy}g_u(y,z) &= \sum_{k\geqslant 1} e^{-\lambda_k u}\psi_k''(y)\psi_k(z) = -\sum_{k\geqslant 1} e^{-\lambda_k u}\pi^2k^2\psi_k(y)\psi_k(z)\\ &= \sum_{k\geqslant 1} e^{-\lambda_k u}\psi_k(y)\psi_k''(z) = \partial^2_{zz}g_u(y,z)\end{aligned} \tag{B.85}$$

et donc en utilisant une intégration par partie, le crochet s'annule grâce aux conditions au bord.

$$\partial^2_{yy}\Phi(y,u) = \int_0^1 \partial^2_{yy}g_u(y,z)\phi_0(z)\mathrm{d}z = \int_0^1 [\partial^2_{zz}g_u(y,z)]\phi_0(z)\mathrm{d}z \tag{B.86}$$

$$= \int_0^1 g_u(y,z)\phi_0''(z)\mathrm{d}z. \tag{B.87}$$

Donc, pour toutes les conditions au bord de Dirichlet ou de Neumann, on obtient en utilisant le Lemme B.1.2

$$\begin{aligned}|\phi_0(y) - \Phi(y,s)| &\leqslant 2\,\|\phi_0''\|_\infty \int_0^s \sum_k e^{-\lambda_k u}\mathrm{d}u\\ &\leqslant 2\,\|\phi_0''\|_\infty \left(s + \sum_{k>0}\frac{1}{\lambda_k}(1-e^{-\lambda_k s})\right) \qquad \text{(B.88)}\\ &\leqslant 2\,\|\phi_0''\|_\infty \left(s + \sum_{k>0}\frac{1}{\gamma\pi^2k^2}(1-e^{-\gamma\pi^2k^2 s})\right)\\ &\leqslant 2\,\|\phi_0''\|_\infty \left(s + \sqrt{\frac{2s}{\gamma\pi^2}}\right) \leqslant 2\,\|\phi_0''\|_\infty \left(1+\sqrt{\frac{2}{\gamma\pi^2}}\right)\sqrt{s} \qquad \text{(B.89)}\end{aligned}$$

pour $s \leqslant 1$. Dans le cas des conditions au bord périodiques on a les mêmes majorations avec des constantes légèrement différentes. Pour la seconde inégalité, de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(y,s) - \phi_0''(y)\right| &= \left|\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_0^s \partial_u\Phi(y,u)\mathrm{d}u\right| = \gamma\left|\frac{\partial^4}{\partial y^4}\int_0^s \Phi(y,u)\mathrm{d}u\right|\\ &\leqslant \int_0^s\int_0^1 \left|g_u(y,z)\phi_0^{(4)}(z)\right|\mathrm{d}z\mathrm{d}u \qquad \text{(B.90)}\\ &\leqslant 2\left\|\phi_0^{(4)}\right\|_\infty \left(1+\sqrt{\frac{2}{\gamma\pi^2}}\right)\sqrt{s}. \qquad \text{(B.91)}\end{aligned}$$

□

Régularité du semi-groupe Pour la suite, nous avons besoin d'une estimation de la régularité des semigroupes [52].

Lemme B.2.4. *Soit* $(x,t),(x',t') \in [0,1]\times[0,T]$ *avec* $t'>t$, *on a*

$$\int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y)-g_{t-s}(x',y)|^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{24}{\gamma}|x-x'| \tag{B.92}$$

$$\int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y)-g_{t'-s}(x,y)|^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma\pi^2}}\sqrt{t'-t}. \tag{B.93}$$

Démonstration. On utilise g_t sous la forme

$$g_t^D(x,y)=\sum_{k\geqslant 1} e^{-t\lambda_k}\psi_k(x)\psi_k(y) \tag{B.94}$$

où dans le cas Dirichlet

$$\lambda_k=\gamma\pi^2k^2 \qquad \text{et} \qquad \psi_k(x)=\sqrt{2}\sin(\pi k x). \tag{B.95}$$

On a donc, par orthonormalité de la famille de vecteurs propres

$$I_1=\int_0^t\int_0^1 |g_{t-s}(x,y)-g_{t-s}(x',y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{B.96}$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k}|\varphi_k(x)-\varphi_k(x')|^2\,\mathrm{d}s \tag{B.97}$$

$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{2\lambda_k}|\varphi_k(x)-\varphi_k(x')|^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{\gamma\pi^2k^2}(\pi k|x-x'|\wedge 2)^2 \tag{B.98}$$

$$\leqslant \frac{1}{\gamma}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}(k^2|x-x'|^2\wedge 1). \tag{B.99}$$

La dernière inégalité provient de l'inégalité des accroissements finis, du fait que les fonctions propres sont bornées par $\sqrt{2}$ et que $2<\pi$. On a alors simplement

$$\int_0^t\int_0^1 |g_{t-s}(x,y)-g_{t-s}(x',y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{3}{\gamma}|x-x'| \tag{B.100}$$

d'après le Lemme B.1.2. Pour les autres conditions au bord on a les mêmes calculs, dans le cas Neumann, on a

$$g_t(x,y)=\sum_{k\geqslant 0} e^{-t\lambda_k}\varphi_k(x)\varphi_k(y) \tag{B.101}$$

où

$$\lambda_k=\gamma\pi^2k^2 \qquad \varphi_k(x)=\sqrt{2}\cos(\pi k x) \qquad \varphi_0(x)=1. \tag{B.102}$$

Donc

$$\int_0^t\int_0^1 |g_{t-s}(x,y)-g_{t-s}(x',y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \sum_{k\geqslant 1}\int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k}|\psi_k(x)-\psi_k(x')|^2\,\mathrm{d}s \tag{B.103}$$

et les mêmes estimations permettent de conclure. Dans le cas des conditions au bord périodiques, on a tout de suite

$$g_t(x,y) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} e^{-t\mu_k}(\varphi_{2k}(x)\varphi_{2k}(y) + \psi_{2k}(x)\psi_{2k}(y)) \tag{B.104}$$

où

$$\begin{aligned} \varphi_{2k}(x) &= \sqrt{2}\cos(2\pi kx), \qquad \psi_{2k}(x) = \sqrt{2}\sin(2\pi kx) \\ \mu_k &= 4\gamma\pi^2 k^2. \end{aligned} \tag{B.105}$$

On a donc

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y) - g_{t-s}(x',y)|^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \int_0^t e^{-2(t-s)\mu_k} \left(|\varphi_{2k}(x) - \varphi_{2k}(x')|^2 + |\psi_{2k}(x) - \psi_{2k}(x')|^2 \right) \mathrm{d}s \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{2}{\gamma\pi^2 k^2} (2\pi k\,|x-x'| \wedge 2)^2 \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{8}{\gamma k^2} (k\,|x-x'| \wedge 1)^2 \leqslant \frac{24}{\gamma}\,|x-x'| \end{aligned} \tag{B.106}$$

et on conclut de même.

Pour la variation en temps, avec $t' > t$, on a dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, toujours par orthonormalité

$$\begin{aligned} J &= \int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x,y) - g_{t'-s}(x,y)|^2 \,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \int_0^t [e^{-(t-s)\lambda_k} - e^{-(t'-s)\lambda_k}]^2 \varphi_k(x)^2 \mathrm{d}s \qquad \text{(B.107)} \\ &\leqslant 2\sum_{k\geqslant 1} \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k} [1 - e^{-(t'-t)\lambda_k}]^2 \mathrm{d}s \\ &= 2\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2\lambda_k} (1 - e^{-2t\lambda_k})[1 - e^{-(t'-t)\lambda_k}]^2 \qquad \text{(B.108)} \\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\lambda_k} [1 - e^{-(t'-t)\lambda_k}]^2 \leqslant \frac{1}{\gamma\pi^2} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2} [1 - e^{-(t'-t)\gamma\pi^2 k^2}]^2 \qquad \text{(B.109)} \\ &\leqslant \frac{3}{\sqrt{\gamma\pi^2}} \sqrt{2(t'-t)}. \qquad \text{(B.110)} \end{aligned}$$

□

B.2.3 Régularité de la convolution stochastique

On va montrer un lemme nous permettant de montrer la régularité des processus obtenus.

Lemme B.2.5. *Soit $h(x,t)$ un champ aléatoire continu tel que, pour tout $p \geqslant 1$*

$$\sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}[|h(x,t)|^p] \leqslant C_3(T,p) < +\infty \tag{B.111}$$

Posons

$$F(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{B.112}$$

$$H(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y)h(y,s)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \tag{B.113}$$

où g est le semigroupe associé avec l'une des trois conditions au bord. Alors, il existe une constante C_4, telle que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[|F(x,t)-F(y,s)|^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant C_4(|x-y|^{\frac{1}{2}} + |t-s|^{\frac{1}{4}})\\ \mathbb{E}\left[|H(x,t)-H(y,s)|^p\right]^{\frac{1}{p}} &\leqslant C_4(|x-y|^{\frac{1}{2}} + |t-s|^{\frac{1}{4}}).\end{aligned} \tag{B.114}$$

Pour tout $p > 24$, il existe $Y_\delta \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout $\frac{6}{p} < \delta < \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}|F(x,t)-F(y,s)| &\leqslant Y_\delta(|x-y|^{\frac{1}{2}-\delta} + |t-s|^{\frac{1}{4}-\delta})\\ |H(x,t)-H(y,s)| &\leqslant Y_\delta(|x-y|^{\frac{1}{2}-\delta} + |t-s|^{\frac{1}{4}-\delta})\end{aligned} \tag{B.115}$$

pour tout $x, y \in [0,1]$ et $s, t \in [0,T]$.

Démonstration. On va utiliser le théorème de Kolmogorov A.3.2 pour montrer que l'équation (B.114) implique (B.115). Pour cela, soit $p > 1$, montrons qu'il existe une constante C telle que pour tout $h, k > 0$ et $(x,t) \in [0,1] \times [0,T]$

$$\mathbb{E}[|F(x+h,t)-F(x,t)|^p] \leqslant C^p h^{\frac{p}{2}} \qquad \mathbb{E}[|F(x,t+k)-F(x,t)|^p] \leqslant C^p k^{\frac{p}{4}}. \tag{B.116}$$

Commençons par la variation en espace, on a

$$|F(x+h,t)-F(x,t)|^p = \left|\int_0^t \int_0^1 (g_{t-s}(x+h,y) - g_{t-s}(x,y))h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p. \tag{B.117}$$

En utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski A.1.8, Cauchy-Schwarz et l'inégalité (B.92) du Lemme B.2.4

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[|F(x+h,t)-F(x,t)|^p\right]^{\frac{2}{p}}\\ &\quad\leqslant \left|\int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\left[|(g_{t-s}(x+h,y) - g_{t-s}(x,y))h(y,s)|^p\right]^{1/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^2 \qquad \text{(B.118)}\\ &\quad\leqslant \left|\int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x+h,y) - g_{t-s}(x,y)|\,\mathbb{E}[h(y,s)^p]^{1/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^2\\ &\quad\leqslant \int_0^t \int_0^1 |g_{t-s}(x+h,y) - g_{t-s}(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}[h(y,s)^p]^{2/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\quad\leqslant \frac{24T}{\gamma} C_3(p,T)^{2/p}\,|h|. \qquad \text{(B.119)}\end{aligned}$$

Pour la variation en temps on a

$$\begin{aligned}|F(x,t+k)-F(x,t)|^p = \Bigg|&\int_0^t \int_0^1 (g_{t+k-s}(x,y) - g_{t-s}(x,y))h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &+ \int_t^{t+k} \int_0^1 (g_{t+k-s}(x,y)h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Bigg|^p. \qquad \text{(B.120)}\end{aligned}$$

D'où, par l'inégalité triangulaire dans L^p

$$\mathbb{E}[|F(x,t+k)-F(x,t)|^p]^{1/p} \leqslant J_1 + J_2 \tag{B.121}$$

avec, pour J_1, en appliquant comme précédemment, l'inégalité intégrale de Minkowski A.1.8, Cauchy-Schwarz et l'inégalité (B.93) du Lemme B.2.4

$$\begin{aligned} J_1^2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^1 (g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y))h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} \\ &\leqslant \int_0^t\int_0^1 |g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \int_0^t\int_0^1 \mathbb{E}[h(y,s)^p]^{2/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{CT}{\sqrt{\gamma}} C_3(p,T)^{2/p}\,|k|^{1/2} \end{aligned} \tag{B.122}$$

où C est une constante strictement positive. De même pour J_2, en utilisant cette fois l'inégalité (B.47) ou (B.51) suivant les conditions au bord considérées, on a pour $k<1$

$$\begin{aligned} J_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+k}\int_0^1 g_{t+k-s}(x,y)h(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} \\ &\leqslant \left|\int_t^{t+k}\int_0^1 |g_{t+k-s}(x,y)|\,\mathbb{E}\left[|h(y,s)|^p\right]^{1/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^2 \qquad \text{(B.123)} \\ &\leqslant \int_t^{t+k}\int_0^1 |g_{t+k-s}(x,y)|^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s \int_t^{t+k}\int_0^1 \mathbb{E}[|h(y,s)|^p]^{2/p}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{C}{\gamma} C_3(p,T)^{2/p}(k+\sqrt{2k\gamma\pi^2})k \leqslant C'\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) C_3(p,T)^{2/p}k^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(B.124)} \end{aligned}$$

où C et C' sont des constantes strictement positives. On en déduit donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[|F(x,t+k)-F(x,t)|^p\right]^{2/p} &\leqslant (J_1+J_2)^2 \leqslant 2(J_1^2+J_2^2) \\ &\leqslant C''\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)(1+T)C_3(p,T)^{\frac{2}{p}}\,|k|^{\frac{1}{2}}\,. \end{aligned} \tag{B.125}$$

Pour la seconde partie du Lemme concernant des intégrales stochastiques H par rapport au bruit blanc, on utilise les mêmes outils avec en plus l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy. Ainsi, on va montrer, pour tout $p \geqslant 2$

$$\mathbb{E}[|H(x+h,t)-H(x,t)|^p] \leqslant Ch^{\frac{p}{2}} \qquad \mathbb{E}[|H(x,t+k)-H(x,t)|^p] \leqslant Ck^{\frac{p}{4}}. \tag{B.126}$$

Pour la variation en espace, on a pour $p \geqslant 1$, en appliquant l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy, l'inégalité de Minkowski et l'inégalité (B.93) du

Lemme B.2.4

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \mathbb{E}\left[\left|H(x+h,t)-H(x,t)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^1 (g_{t-s}(x+h,y)-g_{t-s}(x,y))h(y,s)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \qquad \text{(B.127)}\\
&\leqslant C_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^1 \left|g_{t-s}(x+h,y)-g_{t-s}(x,y)\right|^2 h(y,s)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C_p\int_0^t\int_0^1 \left|g_{t-s}(x+h,y)-g_{t-s}(x,y)\right|^2 \mathbb{E}\left[\left|h(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{24C_p}{\gamma}\sup_{[0,1]\times[0,T]}\mathbb{E}\left[h(y,s)^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} h \qquad \text{(B.128)}
\end{aligned}
$$

où C_p est la constante venant de l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy. Pour la variation en temps, on utilise aussi l'inégalité Burkholder-Davies-Gundy

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \mathbb{E}\left[\left|H(x,t+k)-H(x,t)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^{t+k}\int_0^1 (g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y)\mathbb{1}_{t-s>0})h(y,s)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&= C_p\mathbb{E}\left[\left|\int_0^{t+k}\int_0^1 \left|g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y)\mathbb{1}_{t-s>0}\right|^2 \left|h(y,s)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant C_p(K_1+K_2) \qquad \text{(B.129)}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'inégalité de Minkowski. On a alors en appliquant les mêmes estimations que précédemment pour F

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t\int_0^1 \left|g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y)\right|^2 \left|h(y,s)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int_0^t\int_0^1 \left|g_{t+k-s}(x,y)-g_{t-s}(x,y)\right|^2 \mathbb{E}\left[\left|h(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad \text{(B.130)}\\
&\leqslant CT\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)C_3(2p,T)^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(B.131)}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
K_2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+k}\int_0^1 \left|g_{t+k-s}(x,y)\right|^2 \left|h(y,s)\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^{p}\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int_t^{t+k}\int_0^1 \left|g_{t+k-s}(x,y)\right|^2 \mathbb{E}\left[\left|h(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad \text{(B.132)}\\
&\leqslant C\left(1+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)C_3(2p,T)^{\frac{1}{p}}k^{\frac{3}{2}}. \qquad \text{(B.133)}
\end{aligned}
$$

Donc on conclut comme pour la variable F. Il suffit alors d'appliquer le Théorème A.3.2 pour en déduire les estimations (B.115). □

On utilise en particulier le résultat du Lemme précédent pour la convolution stochastique, ce qui permet de justifier la Proposition 2.1.3.

Lemme B.2.6. *Notons, pour* $(x,t) \in [0,1] \times \mathbb{R}^+$

$$B(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s). \tag{B.134}$$

Le champ aléatoire B *est continu sur* $[0,1] \times \mathbb{R}^+$ *et pour tout* $p > 24$*, il existe une variable* $Y \in L^p$ *tel que on a*

$$|B(x,t) - B(x',t')| \leqslant Y \left(|x-x'|^{\frac{1}{2}-\frac{6}{p}} + |t-t'|^{\frac{1}{4}-\frac{3}{p}} \right) \tag{B.135}$$

pour tous (x,t) *et* (x',t')*. On a de plus, pour tout* $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]} \left| \int_0^t \int_0^1 g_{t-s}(x,y) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s) \right|^p \right] \leqslant C(p,T) < +\infty. \tag{B.136}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Lemme précédent pour prouver (B.135). Pour prouver la seconde inégalité, on va utiliser la régularité. En choisissant m un entier et $T > 1$, posons $t_i = \frac{iT}{m}$, on a d'après l'inégalité (B.135), pour $p > 24$

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |B(x,t)| &\leqslant \max_{i=1..m} \left| B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right| \\
&\quad + \sup_{(x,t)\in[0,1]\times[t_{i-1},t_i]} \left| B(x,t) - B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right| && \text{(B.137)} \\
&\leqslant \max_{i=1..m} \left| B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right| + Y \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}-\frac{6}{p}}} + \left(\frac{T}{m}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{3}{p}} \right) && \text{(B.138)} \\
&\leqslant \max_{i=1..m} \left| B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right| + (1+T)Y && \text{(B.139)}
\end{aligned}$$

avec $Y \in L^p(\Omega)$. De plus en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy et l'inégalité (B.47) (ou (B.51)) on obtient, pour tout $t \leqslant T$

$$\mathbb{E}\left[\left| B\left(\frac{1}{2}, t\right) \right|^p \right] \leqslant C_p \left[\int_0^t \int_0^1 g_{t-s}\left(\frac{1}{2}, y\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \right]^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p \left(T + \frac{3}{\gamma\pi^2} \right)^{\frac{p}{2}}. \tag{B.140}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |B(x,t)|^p \right] &\leqslant 2^p \mathbb{E}\left[\max_{i=1..m} \left| B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right|^p \right] + 2^p \mathbb{E}[Y^p] \\
&\leqslant 2^p \sum_{i=1}^m \mathbb{E}\left[\left| B\left(\frac{1}{2}, t_i\right) \right|^p \right] + 2^p \mathbb{E}[Y^p] && \text{(B.141)} \\
&\leqslant 2^p m C_p \left(T + \frac{3}{\gamma\pi^2} \right)^{\frac{p}{2}} + 2^p (1+T)^p \mathbb{E}[Y^p] < +\infty. && \text{(B.142)}
\end{aligned}$$

Pour $p \leqslant 24$ on utilise l'inégalité de Jensen, pour $p \leqslant 24 < p'$ on a,

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |B(x,t)|^p\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]} |B(x,t)|^{p'}\right]^{\frac{p}{p'}} < +\infty. \tag{B.143}$$

□

B.3 Semi-groupe discrétisé

B.3.1 Calcul du semi-groupe

Le calcul des semi-groupes discrets repose, comme dans le cas continu, sur le calcul des vecteurs propres et valeurs propres. En effet, si la matrice $-\Delta^N$ a pour éléments propres (v_k^N, λ_k^N), l'exponentielle p^N prend la forme

$$p^N(t)_{i,j} = N \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda_k^N t} v_k^N(i) v_k^N(j). \tag{B.144}$$

La famille de vecteurs propres est orthonormale puisque la matrice Δ^N est réelle symétrique. Rappelons les différentes discrétisations du Laplacien Δ^N utilisées en fonction des conditions au bord considérées, ce sont toutes des matrices de taille N.

– Dans le cas des conditions au bord de Dirichlet :

$$\Delta_D^N = \gamma(N+1)^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{B.145}$$

– Pour les conditions au bord de Neumann :

$$\Delta_V^N = \gamma N^2 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{B.146}$$

– Pour les conditions au bord périodiques :

$$\Delta_P^N = \gamma N^2 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & -2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \tag{B.147}$$

On va exprimer les vecteurs propres en fonction de φ_k et ψ_k

$$\psi_k(x) = \sqrt{2}\sin(\pi k x) \tag{B.148}$$

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\cos(\pi k x). \tag{B.149}$$

Lemme B.3.1. *Les éléments propres de la matrice Δ^N sont*

– *dans les conditions au bord de Dirichlet, pour $1 \leqslant k \leqslant N$*

$$\begin{cases} v_k^N(j) & = \sqrt{\frac{2}{N+1}}\sin(\frac{\pi k j}{N+1}) = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\psi_k(\frac{j}{N+1}) \quad 1 \leqslant j \leqslant N \\ \lambda_k^N & = 4\gamma(N+1)^2\sin^2(\frac{\pi k}{2(N+1)}) \end{cases} \tag{B.150}$$

– *pour les conditions au bord de Neumann, pour $1 \leqslant k \leqslant N-1$*

$$\begin{cases} u_k^N(j) & = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\pi k(\frac{j}{N} - \frac{1}{2N})) = \frac{1}{\sqrt{N}}\varphi_k(\frac{j}{N} - \frac{1}{2N}) \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \\ u_0^N(j) & = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\varphi_0(\frac{j}{N} - \frac{1}{2N}) \\ \nu_k^N & = 4\gamma N^2\sin^2(\frac{\pi k}{2N}) \ \textit{for } 0 \leqslant k \leqslant N-1 \end{cases} \tag{B.151}$$

– *pour les conditions au bord périodiques,*

$$\begin{cases} w_k^N(j) & = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{2\pi k j}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\psi_{2k}(\frac{j}{N}) \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \ \textit{for } 1 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2} \\ r_k^N(j) & = \sqrt{\frac{2}{N}}\sin(\frac{2\pi k j}{N}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\varphi_{2k}(\frac{j}{N}) \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \ \textit{for } 1 \leqslant k < \frac{N}{2} \\ r_0^N(j) & = \frac{1}{\sqrt{N}} \\ \mu_k^N & = 4\gamma N^2\sin^2(\frac{\pi k}{N}) \end{cases} \tag{B.152}$$

Dans le cas périodique, l'espace propre associé à une valeur propre particulière μ_k^N est de dimension 2 (hormis pour $k = 0$ et $k = N/2$ quand N est paire). On choisit alors des vecteurs propres orthonormaux (pour simplicité u_k et v_k). On va maintenant réaliser le semi-groupe discrétisé en réalisant l'interpolation linéaire du vecteur $\sqrt{N}v_k$ dans les différents cas de conditions au bord.

1. Dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, on prend les points d'interpolations $x_i = \frac{i}{N+1}$ pour $i \in \{0, ..., N+1\}$, dans ce cas on a

$$\frac{1}{\sqrt{N+1}}\psi_k^N(x) = (N+1)v_k^N(i+1)(x - x_i) - (N+1)v_k^N(i)(x - x_{i+1}) \tag{B.153}$$

pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$ et où on a prolongé v_k^N en $i = 0$ et $i = N+1$. Par suite, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

$$\psi_k^N(x) = (N+1)\psi_k(x_{i+1})(x - x_i) - (N+1)\psi_k(x_i)(x - x_{i+1}) \tag{B.154}$$

Le semi-groupe est alors

$$g_t^N(x, y) = \sum_{k=1}^{N} e^{-t\lambda_k^N}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y) \tag{B.155}$$

Remarquons que les fonctions $\psi_k^N(\kappa_N(\cdot))$ forment une famille orthonormale

$$\int_0^1 \psi_k^N(\kappa_N(x))\psi_{k'}^N(\kappa_N(x))\mathrm{d}x = (N+1)\sum_{j=1}^{N+1}\frac{1}{N+1}v_k^N(j)v_k'^N(j) = \delta_{k-k'}. \tag{B.156}$$

2. Dans le cas des conditions au bord de Neumann, on prend les points d'interpolations $x_i = \frac{i}{N} - \frac{1}{2N}$ pour $i \in \{0, ..N+1\}$, dans ce cas on a

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\varphi_k^N(x) = Nu_k^N(i+1)(x-x_i) - Nu_k^N(i)(x-x_{i+1}) \text{ pour } x \in [x_i, x_{i+1}] \tag{B.157}$$

où on a prolongé u_k^N en $i=0$ et $i=N+1$ par les conditions au bord. Par suite

$$\varphi_k^N(x) = N\varphi_k(x_{i+1})(x-x_i) - N\varphi_k(x_i)(x-x_{i+1}) \tag{B.158}$$

et $\varphi_0 = 1$. Le semi-groupe est alors

$$g_t^N(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} e^{-t\nu_k^N}\varphi_k^N(x)\varphi_k^N(y) \tag{B.159}$$

Remarquons que de même les fonctions $\varphi_k^N(\kappa_N(\cdot))$ forment une famille orthonormale.

3. Dans le cas des conditions au bord périodique, on prend les points d'interpolations $x_i = \frac{i}{N}$ pour $i \in \{0, ..N\}$, dans ce cas on a, pour les deux vecteurs orthonormés par valeurs propres, pour $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\psi_{2k}^N(x) = Nr_k^N(i+1)(x-x_i) - Nr_k^N(i)(x-x_{i+1}) \tag{B.160}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\varphi_{2k}^N(x) = Nw_k^N(i+1)(x-x_i) - Nw_k^N(i)(x-x_{i+1}) \tag{B.161}$$

où on a prolongé r_k^N et w_k^N en $i=0$ et $i=N+1$ par les conditions au bord. Par suite

$$\psi_{2k}^N(x) = N\psi_{2k}(x_i)(x-x_i) - N\psi_{2k}(x_{i+1})(x-x_{i+1}) \tag{B.162}$$

$$\varphi_{2k}^N(x) = N\varphi_{2k}(x_i)(x-x_i) - N\varphi_{2k}(x_{i+1})(x-x_{i+1}) \tag{B.163}$$

sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$. Le semi-groupe est alors

$$g_t^N(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{N}{2}} e^{-t\mu_k^N}\left[\psi_{2k}^N(x)\psi_{2k}^N(y) + \varphi_{2k}^N(x)\varphi_{2k}^N(y)\right] \tag{B.164}$$

Remarquons que les fonctions $\psi_{2k}^N(\kappa_N(\cdot))$ et $\varphi_{2k}^N(\kappa_N(\cdot))$ forment une famille orthonormale.

B.3.2 Estimations du semi-groupe

Estimations des valeurs propres On a les estimations suivantes sur les valeurs propres et vecteurs propres.

Lemme B.3.2. *Les valeurs propres vérifient les inégalités suivantes :*
- *pour les conditions au bord de Dirichlet, pour tout* $1 \leqslant k \leqslant N$

$$\frac{\gamma k^2}{4} \leqslant \lambda_k^N \leqslant \gamma\pi^2 k^2 \quad \gamma\pi^2 k^2 \left(1 - \frac{\pi^2 k^2}{3(N+1)^2}\right) \leqslant \lambda_k^N \leqslant \gamma\pi^2 k^2 = \lambda_k \tag{B.165}$$

- *pour les conditions au bord de Neumann, pour tout* $0 \leqslant k \leqslant N-1$

$$\frac{\gamma k^2}{4} \leqslant \nu_k^N \leqslant \gamma\pi^2 k^2 \quad \gamma\pi^2 k^2 \left(1 - \frac{\pi^2 k^2}{3N^2}\right) \leqslant \nu_k^N \leqslant \gamma\pi^2 k^2 = \nu_k \tag{B.166}$$

- *pour les conditions au bord périodiques, pour tout* $0 \leqslant k \leqslant N/2$

$$\gamma k^2 \leqslant \mu_k^N \leqslant 4\gamma\pi^2 k^2 \qquad 4\gamma\pi^2 k^2 (1 - \frac{4\pi^2 k^2}{3N^2}) \leqslant \mu_k^N \leqslant 4\gamma\pi^2 k^2 = \mu_k. \tag{B.167}$$

On a donc dans chaque cas

$$0 \leqslant 1 - \frac{\lambda_k^N}{\lambda_k} \leqslant \frac{\pi^2 k^2}{3(N+1)^2} \qquad 0 \leqslant 1 - \frac{\nu_k^N}{\nu_k} \leqslant \frac{\pi^2 k^2}{3N^2} \qquad 0 \leqslant 1 - \frac{\mu_k^N}{\mu_k} \leqslant \frac{4\pi^2 k^2}{3N^2}. \tag{B.168}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer à chaque cas les deux inégalités suivantes, pour tout $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\frac{4t^2}{\pi^2} \leqslant \sin(t)^2 \leqslant t^2 \qquad t^2(1 - \frac{t^2}{3}) \leqslant \sin(t)^2 \leqslant t^2 \tag{B.169}$$

puisque les différentes valeurs propres sont

$$\lambda_k^N = (N+1)^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N+1}\right) \quad \nu_k^N = N^2 \sin^2\left(\frac{\pi k}{N}\right) \quad \mu_k^N = N^2 \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right). \tag{B.170}$$

□

On a aussi des estimations sur les intégrales du semi-groupe comme dans le cas continu.

Lemme B.3.3. *Pour les estimations en norme* L^2 *on a*
- *dans le cas des conditions de bord de Dirichlet*

$$\int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{B.171}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 g_t^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{B.172}$$

$$\int_0^t \int_0^1 g_s^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t} \wedge 1) \tag{B.173}$$

$$\int_0^t \int_0^1 \int_0^1 g_s^N(x, \kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t} \wedge 1) \tag{B.174}$$

– *dans le cas des conditions de bord de Neumann ou périodique*

$$\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{B.175}$$

$$\int_0^1\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{B.176}$$

$$\int_0^t\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t}\wedge 1) \tag{B.177}$$

$$\int_0^t\int_0^1\int_0^1 (g_t^N(x,\kappa_N(y))-1)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}s \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t}\wedge 1). \tag{B.178}$$

Démonstration. Dans le cas des conditions de Dirichlet, comme les familles de vecteurs propres sont orthonormées et en utilisant les estimations (B.165) (resp. (B.166), (B.167))

$$\int_0^1 g_t^N(x,\kappa_N(y))^2 \mathrm{d}y = \sum_{k=1}^N e^{-2\lambda_k^N t}\psi_k^N(x)^2 \tag{B.179}$$

$$= 2\sum_{k=1}^N e^{-2\gamma\lambda_k^N t} \leqslant \sum_{k=1}^N e^{-\gamma k^2 t/2} \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{\gamma t}} \tag{B.180}$$

L'intégration sur $x\in[0,1]$ ne change pas la borne. Pour la dernière inégalité, on a, en utilisant l'encadrement des valeurs propres, et le Lemme B.1.2

$$\int_0^t\int_0^1 g_s^N(x,y)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \int_0^t\sum_{k=1}^N e^{-2\gamma\lambda_k^N s}\psi_k^N(x)^2\mathrm{d}s = \sum_{k=1}^N \frac{\psi_k^N(x)^2}{2\gamma\lambda_N^k}(1-e^{-2\gamma\lambda_k^N t})$$

$$\leqslant \frac{4}{\gamma}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}(1-e^{-2\gamma k^2 t}) \leqslant \frac{12}{\gamma}(\sqrt{2\gamma t}\wedge 1). \tag{B.181}$$

Comme précédemment, l'intégration sur $[0,1]$ ne change pas la borne. □

Régularité du semi-groupe On a aussi besoin dans la suite d'une estimation de la régularité des semigroupes.

Lemme B.3.4. *Soit $(x,t),(x',t')\in[0,1]\times[0,T]$ avec $t'>t$, on a*

$$\int_0^t\int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t-s}^N(x',\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12\pi^2}{\gamma}\,|x-x'| \tag{B.182}$$

$$\int_0^t\int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t'-s}^N(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12\pi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{|t'-t|}. \tag{B.183}$$

Démonstration. Dans le cas Dirichlet, on utilise la forme suivante

$$g_t^N(x,\kappa_N(y)) = \sum_{k=1}^N e^{-t\lambda_k^N}\psi_k^N(x)\psi_k^N(\kappa_N(y)). \tag{B.184}$$

On a donc, par orthonormalité de la famille de vecteurs propres

$$J = \int_0^t \int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t-s}^N(x',\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{B.185}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k^N} \left|\psi_k^N(x) - \psi_k^N(x')\right|^2 \mathrm{d}s \tag{B.186}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^N \frac{1}{2\lambda_k^N} \left|\psi_k^N(x) - \psi_k^N(x')\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^N \frac{4}{\gamma k^2}(\pi k \left|x-x'\right| \wedge 2)^2 \tag{B.187}$$

$$\leqslant \frac{4\pi^2}{\gamma} \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2}(k^2 \left|x-x'\right|^2 \wedge 1). \tag{B.188}$$

La dernière inégalité provient de l'inégalité des accroissements finis, du fait que les fonctions propres sont bornées par $\sqrt{2}$ et que $2 < \pi$. On a alors simplement à l'aide du lemme B.1.2

$$\int_0^t \int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t-s}^N(x',\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \leqslant \frac{12\pi^2}{\gamma} \left|x-x'\right|. \tag{B.189}$$

Pour les autres conditions au bord on a les mêmes calculs, dans le cas Neumann, on a

$$g_t^N(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{N-1} e^{-t\nu_k^N} \varphi_k^N(x)\varphi_k^N(y). \tag{B.190}$$

Donc

$$\int_0^t \int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t-s}^N(x',\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N-1} \int_0^t e^{-2(t-s)\nu_k^N} \left|\varphi_k^N(x) - \varphi_k^N(x')\right|^2 \mathrm{d}s \tag{B.191}$$

et les mêmes estimations permettent de conclure. Dans le cas des conditions au bord périodiques, on a tout de suite

$$g_t^N(x,y) = 1 + \sum_{k=1}^{N/2} e^{-t\mu_k^N} \left(\varphi_{2k}^N(x)\varphi_{2k}^N(y) + \psi_{2k}^N(x)\psi_{2k}^N(y)\right). \tag{B.192}$$

Donc on a de même

$$\int_0^t \int_0^1 \left|g_{t-s}^N(x,\kappa_N(y)) - g_{t-s}^N(x',\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{N/2} \int_0^t e^{-2(t-s)\mu_k^N} \left(\left|\varphi_{2k}^N(x) - \varphi_{2k}^N(x')\right|^2 + \left|\psi_{2k}^N(x) - \psi_{2k}^N(x')\right|^2\right) \mathrm{d}s$$
$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{2\pi^2}{\gamma k^2}(k^2 \left|x-x'\right|^2 \wedge 1) \leqslant \frac{6\pi^2}{\gamma} \left|x-x'\right|. \tag{B.193}$$

Pour la variation en temps, avec $t' > t$, on a dans le cas des conditions au bord de Dirichlet, toujours par orthonormalité

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t \int_0^1 \left|g^N_{t-s}(x,y) - g^N_{t'-s}(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\ &= \sum_{k=1}^N \int_0^t [e^{-(t-s)\lambda_k^N} - e^{-(t'-s)\lambda_k^N}]^2 \varphi_k^N(x)^2 \mathrm{d}s \qquad \text{(B.194)} \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^N \int_0^t e^{-2(t-s)\lambda_k^N}[1 - e^{-(t'-t)\lambda_k^N}]^2 \mathrm{d}s \leqslant 2\sum_{k=1}^N \frac{1}{2\lambda_k^N}[1 - e^{-(t'-t)\lambda_k^N}]^2 \\ &\leqslant \sum_{k\leqslant 1} \frac{4}{\gamma k^2}[1 - e^{-\gamma\pi^2(t'-t)k^2}]^2 \qquad \text{(B.195)} \end{aligned}$$

En utilisant, le Lemme B.1.2, on a

$$I \leqslant \frac{12\pi}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{t'-t}. \qquad \text{(B.196)}$$

Pour les autres conditions au bord on a les mêmes bornes. □

B.3.3 Régularité de la convolution stochastique

On utilise les résultats précédents pour montrer les régularités suivantes uniformément en N.

Lemme B.3.5. *Soit h^N une famille de champs aléatoires tel qu'il existe une constante $C > 0$*

$$\sup_N \sup_{t\leqslant T} \sup_{x\in[0,1]} \mathbb{E}[\left|h^N(x,t)\right|^p] < C. \qquad \text{(B.197)}$$

Alors, les champs aléatoires

$$F^N(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,y)h^N(y,s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad \text{(B.198)}$$

$$H^N(x,t) = \int_0^t \int_0^1 g^N_{t-s}(x,y)h^N(y,s)W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s) \qquad \text{(B.199)}$$

sont bien définis, et pour tout $p \geqslant 1$, et $T > 0$, il existe une constante $C(p,T)$, indépendante de N, telle que

$$\mathbb{E}[\left|F^N(x,t) - F^N(y,s)\right|^p] \leqslant C(p,T)(|t-s|^{1/4} + |x-y|^{1/2})^p \qquad \text{(B.200)}$$

$$\mathbb{E}[\left|H^N(x,t) - H^N(y,s)\right|^p] \leqslant C(p,T)(|t-s|^{1/4} + |x-y|^{1/2})^p. \qquad \text{(B.201)}$$

En particulier on en déduit la régularité des champs F^N et H^N : pour tout $p > 24$, tout $\frac{6}{p} < \delta < \frac{1}{4}$, et $(x,t),(y,s) \in [0,1]\times[0,T]$ on a

$$\left|F^N(x,t) - F^N(y,s)\right| \leqslant Y(p,\delta,N,T)\left[|t-s|^{\frac{1}{4}-\delta} + |x-y|^{\frac{1}{2}-\delta}\right] \qquad \text{(B.202)}$$

$$\left|H^N(x,t) - H^N(y,s)\right| \leqslant Y(p,\delta,N,T)\left[|t-s|^{\frac{1}{4}-\delta} + |x-y|^{\frac{1}{2}-\delta}\right] \qquad \text{(B.203)}$$

où $Y(p,\delta,N,T)$ est une variable aléatoire dans L^p et telle que

$$\mathbb{E}[Y(p,\delta,N,T)^{\frac{1}{\delta}}] \leqslant C(p,T,\delta). \tag{B.204}$$

La borne du moment de Y ne dépend pas de N.

Démonstration. Soit $p>1$, montrons qu'il existe C telle que pour tout $k>0$ et $(x,t)\in[0,1]\times[0,T]$

$$\mathbb{E}[\left|F^N(x+k,t)-F^N(x,t)\right|^p] \leqslant C(p,T,\gamma)k^{\frac{p}{2}} \tag{B.205}$$

$$\mathbb{E}[\left|F^N(x,t+k)-F^N(x,t)\right|^p] \leqslant C(p,T,\gamma)k^{\frac{p}{4}}. \tag{B.206}$$

Commençons par la variation en espace, on a

$$\begin{aligned}&\left|F^N(x+k,t)-F^N(x,t)\right|^p\\ &\quad=\left|\int_0^t\int_0^1(g^N_{t-s}(x+h,\kappa_N(y))-g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p.\end{aligned} \tag{B.207}$$

En utilisant l'inégalité intégrale de Minkowski A.1.8, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité du Lemme B.3.4

$$\begin{aligned}I&=\mathbb{E}\left[\left|F^N(x+k,t)-F^N(x,t)\right|^p\right]^{\frac{2}{p}}\\ &\leqslant\left|\int_0^t\int_0^1\mathbb{E}\left[\left|(g^N_{t-s}(x+k,\kappa_N(y))-g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)))h^N(\kappa_N(y),s)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^2\\ &\leqslant\int_0^t\int_0^1\left|g^N_{t-s}(x+k,\kappa_N(y))-g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))\right|^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\quad\times\int_0^t\int_0^1\mathbb{E}\left[h^N(\kappa_N(y),s)^p\right]^{\frac{2}{p}}\mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad\text{(B.208)}\\ &\leqslant\frac{12\pi^2T}{\gamma}\sup_{[0,1]\times[0,T]}\mathbb{E}\left[h^N(\kappa_N(y),s)^p\right]^{\frac{2}{p}}|k| \qquad\text{(B.209)}\\ &\leqslant\frac{12\pi^2T}{\gamma}\sup_{[0,1]\times[0,T]}\mathbb{E}[h^N(y,s)^p]^{2/p}|k|. \qquad\text{(B.210)}\end{aligned}$$

Pour la variation en temps on a

$$\begin{aligned}&\left|F^N(x,t+k)-F^N(x,t)\right|^p\\ &\quad=\Big|\int_0^t\int_0^1(g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))-g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\\ &\qquad\qquad+\int_t^{t+k}\int_0^1(g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^p.\end{aligned}$$

D'où, par l'inégalité de Minkowski (i.e l'inégalité triangulaire dans L^p)

$$\mathbb{E}\left[\left|F^N(x,t+k)-F^N(x,t)\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant J_1+J_2 \tag{B.211}$$

avec

$$J_1 = \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 (g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{B.212}$$

$$J_2 = \mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+k} \int_0^1 (g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{B.213}$$

Pour J_1, en appliquant comme précédemment, l'inégalité intégrale de Minkowski A.1.8, Cauchy-Schwarz et l'inégalité du Lemme B.3.4

$$\begin{aligned}
J_1^2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_0^t \int_0^1 (g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y)))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant \int_0^t \int_0^1 \left|g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\quad \times \int_0^t \int_0^1 \mathbb{E}\left[h^N(\kappa_N(y),s)^p\right]^{\frac{2}{p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \qquad \text{(B.214)} \\
&\leqslant \frac{12\pi T}{\sqrt{\gamma}} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[h^N(y,s)^p\right]^{\frac{2}{p}} \sqrt{k}. \qquad \text{(B.215)}
\end{aligned}$$

De même pour J_2, en utilisant l'inégalité (B.173), on a

$$\begin{aligned}
J_2^2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+k} \int_0^1 (g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))h^N(\kappa_N(y),s)\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} \\
&\leqslant \int_t^{t+k} \int_0^1 \left|g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s \int_t^{t+k} \int_0^1 \mathbb{E}\left[\left|h^N(\kappa_N(y),s)\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[h^N(y,s)^p\right]^{\frac{2}{p}} |k|^{3/2}. \qquad \text{(B.216)}
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left|F^N(x,t+k) - F^N(x,t)\right|^p\right]^{\frac{2}{p}} &\leqslant (J_1+J_2)^2 \leqslant 2(J_1^2+J_2^2) \\
&\leqslant \frac{12^2 T}{\sqrt{\gamma}} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[h^N(y,s)^p\right]^{\frac{2}{p}} \sqrt{k}.
\end{aligned}$$

Pour la seconde partie du lemme concernant des intégrales stochastiques par rapport au bruit blanc, on utilise les mêmes outils avec en plus l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy. Ainsi, on va montrer, pour tout $p \geqslant 1$

$$K_1 = \mathbb{E}[\left|H^N(x+k,t) - H^N(x,t)\right|^{2p}]^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p,T,\gamma)k \tag{B.217}$$

$$K_2 = \mathbb{E}[\left|H^N(x,t+k) - H^N(x,t)\right|^{2p}]^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p,T,\gamma)\sqrt{k}. \tag{B.218}$$

Pour la variation en espace, on a pour $p \geqslant 1$, en appliquant Burkholder-Davies-Gundy et Minkowski,

$$
\begin{aligned}
K_1 = \mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^t \int_0^1 & (g^N_{t-s}(x+k, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y))) \\
& \times h^N(\kappa_N(y), s) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)\Big|^{2p}\Big]^{\frac{1}{p}} && \text{(B.219)} \\
\leqslant C_p \mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^t \int_0^1 & \left|g^N_{t-s}(x+k, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y))\right|^2 \\
& \times h^N(\kappa_N(y), s)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^{p}\Big]^{\frac{1}{p}} && \text{(B.220)} \\
\leqslant C_p \int_0^t \int_0^1 & \left|g^N_{t-s}(x+k, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y))\right|^2 \\
& \times \mathbb{E}\left[\left|h^N(\kappa_N(y), s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s && \text{(B.221)} \\
\leqslant \frac{C_p 12\pi^2}{\gamma} & \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|h^N(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} k. && \text{(B.222)}
\end{aligned}
$$

Pour la variation en temps, on utilise Burkholder-Davies-Gundy,

$$
\begin{aligned}
K_2 = \mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^{t+k} \int_0^1 & (g^N_{t+k-s}(x, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y)) \mathbb{1}_{t-s>0}) \\
& \times h^N(\kappa_N(y), s) W(\mathrm{d}y, \mathrm{d}s)\Big|^{2p}\Big]^{\frac{1}{p}} && \text{(B.223)} \\
\leqslant C_p \mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^{t+k} \int_0^1 & \left|g^N_{t+k-s}(x, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y)) \mathbb{1}_{t-s>0}\right|^2 \\
& \times \left|h^N(\kappa_N(y), s)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^{p}\Big]^{\frac{1}{p}} && \text{(B.224)} \\
\leqslant C_p(L_1 + L_2) && \text{(B.225)}
\end{aligned}
$$

où on a utilisé l'inégalité de Minkowski. On a alors

$$
\begin{aligned}
L_1 = \mathbb{E}\Big[\Big| \int_0^t \int_0^1 & \left|g^N_{t+k-s}(x, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y))\right|^2 \\
& \times \left|h^N(\kappa_N(y), s)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\Big|^{p}\Big]^{\frac{1}{p}} && \text{(B.226)} \\
\leqslant \int_0^t \int_0^1 & \left|g^N_{t+k-s}(x, \kappa_N(y)) - g^N_{t-s}(x, \kappa_N(y))\right|^2 \mathbb{E}\left[\left|h^N(\kappa_N(y), s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
\leqslant \frac{12\pi^2}{\gamma} & \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|h^N(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \sqrt{k} && \text{(B.227)}
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
L_2 &= \mathbb{E}\left[\left|\int_t^{t+k}\int_0^1 \left|g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))\right|^2 \left|h^N(\kappa_N(y),s)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}s\right|^p\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \int_t^{t+k}\int_0^1 \left|g^N_{t+k-s}(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathbb{E}\left[\left|h^N(\kappa_N(y),s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \mathrm{d}y\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}} \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|h^N(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \sqrt{k}. \qquad \text{(B.228)}
\end{aligned}$$

On a prouvé le résultat voulu puisqu'on a alors

$$K_2 \leqslant 50C_p\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right) \sup_{[0,1]\times[0,T]} \mathbb{E}\left[\left|h^N(y,s)\right|^{2p}\right]^{\frac{1}{p}} \sqrt{k}. \qquad \text{(B.229)}$$

□

Lemme B.3.6. *Notons, pour* $(x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}^+$

$$B^N(x,t) = \int_0^t\int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s). \qquad \text{(B.230)}$$

Le champ aléatoire B^N *est continu sur* $[0,1]\times\mathbb{R}^+$*. De plus soit* $T>0$*, pour tout* $p>24$*,* $\frac{6}{p}<\delta<\frac{1}{4}$*, il existe* $Y_N(p,T,\delta)\in L^p$ *tel que, pour tous* (x,t) *et* (x',t') *de* $[0,1]\times[0,T]$ *on a*

$$\left|B^N(x,t)-B^N(x',t')\right| \leqslant Y_N(p,T,\delta)\left(|x-x'|^{\frac{1}{2}-\delta}+|t-t'|^{\frac{1}{4}-\delta}\right) \qquad \text{(B.231)}$$

où $\sup_N \mathbb{E}[Y_N^p]<C(p,T,\delta)$*, la constante* $C(p,T)$ *est indépendante de* N*. On a de plus, pour tout* $p\geqslant 1$

$$\sup_N \mathbb{E}\left[\sup_{[0,1]\times[0,T]}\left|\int_0^t\int_0^1 g^N_{t-s}(x,\kappa_N(y))W(\mathrm{d}y,\mathrm{d}s)\right|^p\right] \leqslant C(p,T)<+\infty. \qquad \text{(B.232)}$$

Démonstration. On utilise le même schéma de preuve que pour le Lemme B.2.6. Il suffit d'appliquer le lemme précédent pour prouver (B.231). Pour prouver la seconde inégalité, on va utiliser la régularité. Soit $p>24$, m un entier, posons $t_i=\frac{iT}{m}$, on a en utilisant l'inégalité (B.231) et en procédant de même que pour le Lemme B.2.6

$$\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]}\left|B^N(x,t)\right| \leqslant \max_{i=1..m}\left|B^N\left(\frac{1}{2},t_i\right)\right|+(1+T)Y_N$$

avec $Y_N\in L^p(\Omega)$ et $\sup_N\mathbb{E}[Y_N^p]<C(p,T,\delta)$ (voir le Lemme B.3.5). De plus en utilisant l'inégalité de Burkholder-Davies-Gundy et l'inégalité (B.173) (ou (B.177)) on obtient, pour tout $t\leqslant T$

$$\mathbb{E}\left[\left|B^N\left(\frac{1}{2},t\right)\right|^p\right] \leqslant C_p\left[\int_0^t\int_0^1 g^N_{t-s}\left(\frac{1}{2},\kappa_N(y)\right)^2\mathrm{d}y\mathrm{d}s\right]^{\frac{p}{2}} \leqslant C_p\left(T+\frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}}. \qquad \text{(B.233)}$$

On en déduit donc comme dans (B.141)

$$\mathbb{E}\left[\sup_{(x,t)\in[0,1]\times[0,T]}\left|B^N(x,t)\right|^p\right]$$
$$\leqslant 2^p m C_p\left(T+\frac{12}{\gamma}\right)^{\frac{p}{2}}+2^p(1+T)^p\mathbb{E}[Y_N^p]<+\infty.$$

Pour $p\leqslant 24$, on prouve le résultat en utilisant l'inégalité de Jensen. □

B.4 Convergence du semi-groupe

On a d'abord la convergence des vecteurs propres donnés par le Lemme B.3.1.

Lemme B.4.1. *Pour chaque vecteur propre on a les estimations suivantes*
– *pour les conditions au bord de Dirichlet, pour tout* $1\leqslant k\leqslant N$

$$\left|\psi_k^N(x)-\psi_k(x)\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}\pi^2k^2}{(N+1)^2} \tag{B.234}$$

$$\left|\psi_k^N(\kappa_N(x))-\psi_k(x)\right|\leqslant\sqrt{2}\pi k\left|\kappa_N(x)-x\right|\leqslant\frac{\pi k}{\sqrt{2}(N+1)} \tag{B.235}$$

– *pour les conditions au bord de Neumann, pour tout* $0\leqslant k\leqslant N-1$

$$\left|\varphi_k^N(x)-\varphi_k(x)\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}\pi^2k^2}{N^2} \tag{B.236}$$

$$\left|\varphi_k^N(\kappa_N(x))-\varphi_k(x)\right|\leqslant\sqrt{2}\pi k\left|\kappa_N(x)-x\right|\leqslant\frac{\pi k}{\sqrt{2}N} \tag{B.237}$$

– *pour les conditions au bord périodiques, pour tout* $0\leqslant k\leqslant N/2$

$$\left|\varphi_{2k}^N(x)-\varphi_{2k}(x)\right|\vee\left|\psi_{2k}^N(x)-\psi_{2k}(x)\right|\leqslant\frac{4\sqrt{2}\pi^2k^2}{N^2} \tag{B.238}$$

$$\left|\varphi_{2k}^N(\kappa_N(x))-\varphi_{2k}(x)\right|\vee\left|\psi_{2k}^N(\kappa_N(x))-\psi_{2k}(x)\right|\leqslant 4\sqrt{2}\pi k\left|\kappa_N(x)-x\right| \tag{B.239}$$

$$\leqslant\frac{2\sqrt{2}\pi k}{N}. \tag{B.240}$$

Démonstration. Dans le cas Dirichlet, pour $x\in[x_{j-\frac{1}{2}},x_{j+\frac{1}{2}}[$, on a

$$\left|\psi_k(x)-\psi_k^N(\kappa_N(x))\right|=\sqrt{2}\left|\sin(\pi kx)-\sin(\pi kx_j)\right|$$
$$=2\sqrt{2}\left|\cos\left(\frac{\pi k}{2}(x_j+x)\right)\sin\left(\frac{\pi k}{2}(x-x_j)\right)\right| \tag{B.241}$$
$$\leqslant\sqrt{2}\pi k\left|x-x_j\right|=\sqrt{2}\pi k\left|x-\kappa_N(x)\right|. \tag{B.242}$$

Pour $x\in[x_j,x_{j+1}]$, on aussi

$$\left|\psi_k(x)-\psi_k^N(x)\right|$$
$$=\left|\psi_k(x)-[(N+1)\psi_k(x_{i+1})(x-x_i)-(N+1)\psi_k(x_i)(x-x_{i+1})]\right| \tag{B.243}$$
$$=\left|\psi_k(x)-[(N+1)(\psi_k(x_{i+1})-\psi_k(x_i))(x-x_i)+\psi_k(x_i)]\right|. \tag{B.244}$$

D'après le théorème des accroissements finis, on a $\xi_1 \in]x_j, x_{j+1}[$ tel que

$$(N+1)(\psi_k(x_j) - \psi_k(x_{j+1})) = \psi_k'(\xi_1) \tag{B.245}$$

de même on a $\xi_2 \in]x_j, x_{j+1}[$ tel que

$$\psi_k(x_j) - \psi_k(x) = \psi_k'(\xi_2)(x_j - x). \tag{B.246}$$

En réappliquant encore une fois le théorème des accroissements finis, on a $\xi_3 \in]x_j, x_{j+1}[$

$$\left|\psi_k(x) - \psi_k^N(x)\right| = |(\psi_k'(\xi_1) - \psi_k'(\xi_2))(x - x_j)| \tag{B.247}$$

$$= |(\psi_k''(\xi_3)(\xi_1 - \xi_2)(x - x_j)| \leqslant \frac{\sqrt{2}\pi^2 k^2}{(N+1)^2}. \tag{B.248}$$

Les mêmes arguments s'appliquent aussi dans les deux autres cas. □

Nous avons maintenant les estimations de convergence du semi-groupe discrétisé vers le semi-groupe continu.

Lemme B.4.2. *Pour tous les cas de conditions au bord, pour tout $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ telle que pour tout $(t, x, y) \in [T, +\infty[\times[0,1]^2$*

$$\left|g_t^N(x, \kappa_N(y)) - g_t(x, y)\right| < \frac{C(T)}{N} \tag{B.249}$$

$$\left|g_t^N(x, y) - g_t(x, y)\right| < \frac{C(T)}{N^2}. \tag{B.250}$$

On en déduit donc que g^N converge uniformément vers g sur $[T, +\infty[\times[0,1]^2$, avec $T > 0$. La convergence en $t = 0$ est vraie en norme L^2 : il existe une constante C telle que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $N \geqslant 1$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(x, \kappa_N(y)) - g_t(x, y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t < \frac{C}{\gamma N} \tag{B.251}$$

$$\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(\kappa_N(x), \kappa_N(y)) - g_t(x, y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t < \frac{C}{\gamma N}. \tag{B.252}$$

Démonstration. Commençons par les conditions de Dirichlet. Notons donc

$$g_t^N(x, y) = \sum_{k=1}^N \Psi_k^N(t, x, y), \qquad g_t(x, y) = \sum_{k \geqslant 1} \Psi_k(t, x, y) \tag{B.253}$$

avec

$$\Psi_k^N(t, x, y) = e^{-\lambda_k^N t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y), \qquad \Psi_k(t, x, y) = e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y). \tag{B.254}$$

Pour la convergence des Ψ_k^N, on a, en utilisant le Lemme B.4.1

$$\begin{aligned}
\left|\Psi_k^N(t,x,y)-\Psi_k(t,x,y)\right| &= \left|e^{-\lambda_k^N t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y)-e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)\right| \\
&\leqslant \left|e^{-\lambda_k^N t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y)-e^{-\lambda_k t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y)\right| \\
&\quad + \left|e^{-\lambda_k t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(y)-e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k^N(y)\right| \qquad \text{(B.255)} \\
&\quad + \left|e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k^N(y)-e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)\right| \\
&\leqslant 2e^{-\lambda_k^N t}\left|1-e^{-t(\lambda_k-\lambda_k^N)}\right| + \sqrt{2}e^{-\lambda_k t}\left|\psi_k^N(x)-\psi_k(x)\right| \\
&\quad + \sqrt{2}e^{-\lambda_k t}\left|\psi_k^N(y)-\psi_k(y)\right| \qquad \text{(B.256)} \\
&\leqslant 2e^{-4\gamma k^2 t}(1-e^{-t(\lambda_k-\lambda_k^N)}) + 2\sqrt{2}e^{-\gamma\pi^2k^2t}\frac{\sqrt{2}\pi^2k^2}{(N+1)^2}. \qquad \text{(B.257)}
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme B.3.2

$$0 \leqslant \lambda_k - \lambda_k^N \leqslant \lambda_k \frac{\pi^2k^2}{3(N+1)^2} = \frac{\gamma\pi^4k^4}{3(N+1)^2} \qquad \text{(B.258)}$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\Psi_k^N(t,x,y)-\Psi_k(t,x,y)\right| &\leqslant 2e^{-4\gamma k^2 t}\left(1-e^{-\frac{\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2}}\right) \\
&\quad + 2\sqrt{2}e^{-\gamma\pi^2k^2t}\frac{\sqrt{2}\pi^2k^2}{(N+1)^2} \qquad \text{(B.259)} \\
&\leqslant 2e^{-4\gamma k^2 t}\left[(1\wedge\frac{\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2}) + \frac{2\pi^2k^2}{(N+1)^2}\right]. \qquad \text{(B.260)}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\left|g_t^N(x,y)-g_t(x,y)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^N \left|\Psi_k^N(t,x,y)-\Psi_k(t,x,y)\right| + \sum_{k\geqslant N+1}\left|\Psi_k(t,x,y)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^N 2e^{-4\gamma k^2 t}\left[\frac{\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2}+\frac{2\pi^2k^2}{(N+1)^2}\right] \qquad \text{(B.261)} \\
&\quad +2\sum_{k\geqslant N+1} e^{-\gamma\lambda_k t}. \qquad \text{(B.262)}
\end{aligned}$$

D'après le Lemme B.1.3, on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{2\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2}e^{-4\gamma k^2 t} \leqslant \frac{2\gamma t\pi^4}{3(N+1)^2}\times\frac{1}{2(4\gamma t)^{\frac{5}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \leqslant \frac{\pi^4}{100N^2(\gamma t)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \qquad \text{(B.263)}$$

$$\sum_{k=1}^N \frac{4\pi^2k^2}{(N+1)^2}e^{-4\gamma k^2 t} \leqslant \frac{4\pi^2}{(N+1)^2}\times\frac{1}{2(4\gamma t)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \leqslant \frac{\pi^2}{4N^2(\gamma t)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \qquad \text{(B.264)}$$

On a aussi

$$2\sum_{k\geqslant N+1} e^{-\lambda_k t} \leqslant 2\int_N^{+\infty} e^{-\gamma\pi^2k^2t}\mathrm{d}k \leqslant \frac{2}{N^2}\int_0^{+\infty} k^2 e^{-\gamma\pi^2k^2t}\mathrm{d}k$$
$$\leqslant \frac{1}{N^2(\gamma\pi^2 t)^{\frac{3}{2}}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right). \quad \text{(B.265)}$$

On obtient finalement

$$\left|g_t^N(x,y) - g_t(x,y)\right| \leqslant \frac{1}{N^2(\gamma t)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\pi^4}{100}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{\pi^2}{4}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\pi^3}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]$$
$$\leqslant \frac{5}{N^2(\gamma t)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{(B.266)}$$

et donc pour $t > T > 0$

$$\left|g_t^N(x,y) - g_t(x,y)\right| \leqslant \frac{5}{N^2(\gamma T)^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{(B.267)}$$

Dans le cas des autres condition au bord, le même calcul s'applique. On a en effet les mêmes estimations pour la différences $\Psi_k^N - \Psi_k$.

Pour la seconde différence $g_t^N(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)$, on a, à l'aide du Lemme B.4.1

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi_k^N(t,x,\kappa_N(y)) - \Psi_k(t,x,y)\right| \\
&\quad\leqslant \left|e^{-\gamma\lambda_k^N t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(\kappa_N(y)) - e^{-\gamma\lambda_k t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(\kappa_N(y))\right| && \text{(B.268)}\\
&\qquad + \left|e^{-\gamma\lambda_k t}\psi_k^N(x)\psi_k^N(\kappa_N(y)) - e^{-\gamma\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k^N(\kappa_N(y))\right| \\
&\qquad + \left|e^{-\gamma\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k^N(\kappa_N(y)) - e^{-\gamma\lambda_k t}\psi_k(x)\psi_k(y)\right| \\
&\quad\leqslant 2e^{-\gamma\lambda_k^N t}\left|1 - e^{-\gamma t(\lambda_k - \lambda - k^N)}\right| + \sqrt{2}e^{-\gamma\lambda_k t}\left|\psi_k^N(x) - \psi_k(x)\right| \\
&\qquad + \sqrt{2}e^{-\gamma\lambda_k t}\left|\psi_k^N(\kappa_N(y)) - \psi_k(y)\right| && \text{(B.269)}\\
&\quad\leqslant 2e^{-4\gamma k^2 t}\left[\frac{\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2} + \frac{\pi^2k^2}{(N+1)^2} + \frac{\pi k}{2(N+1)}\right]. && \text{(B.270)}
\end{aligned}$$

En suivant la même procédure et en utilisant le résultat (B.266)

$$\begin{aligned}
&\left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right| \\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^N \left|\Psi_k^N(t,x,\kappa_N(y)) - \Psi_k(t,x,y)\right| + \sum_{k\geqslant N+1}\left|\Psi_k(t,x,y)\right| && \text{(B.271)}\\
&\quad\leqslant \sum_{k=1}^N 2e^{-4\gamma k^2 t}\left[\frac{\gamma t\pi^4k^4}{3(N+1)^2} + \frac{\pi^2k^2}{(N+1)^2} + \frac{\pi k}{2(N+1)}\right] + 2\sum_{k\geqslant N+1} e^{-\pi^2\gamma k^2 t}.
\end{aligned}$$

En utilisant le Lemme B.1.3, on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{\pi k}{(N+1)}e^{-4\gamma k^2 t} \leqslant \frac{\pi}{(N+1)} \times \frac{1}{2(4\gamma t)}\Gamma(1) \leqslant \frac{\pi}{8N\gamma t}. \quad \text{(B.272)}$$

On a alors, pour $t > T$

$$\left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right| \leqslant \frac{5}{N^2(\gamma T)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi}{8N\gamma T} \leqslant \frac{C(T)}{N} \tag{B.273}$$

ce qui constitue bien l'estimation (B.249).

Pour la norme L^2, on a

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \qquad \text{(B.274)} \\ &\quad + \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|\sum_{k>N} \Psi_k(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\ &\leqslant 2A_1 + 2A_2 + A_3 \qquad \text{(B.275)} \end{aligned}$$

avec, en utilisant le caractère orthonormal de la famille ψ_k,

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|\sum_{k>N} \Psi_k(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{k>N} e^{-2\lambda_k t}\psi_k(x)^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty} \sum_{k>N} e^{-2\lambda_k t}\mathrm{d}t = 2\sum_{k>N}\frac{1}{2\lambda_k} = \sum_{k>N}\frac{1}{\gamma\pi^2 k^2} \qquad \text{(B.276)} \\ &\leqslant \frac{1}{\gamma\pi^2}\int_N^{+\infty}\frac{\mathrm{d}k}{k^2} = \frac{1}{N\gamma\pi^2} \qquad \text{(B.277)} \end{aligned}$$

et

$$A_1 = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - \sum_{k=1}^N \Psi_k(t,x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \tag{B.278}$$

$$A_2 = \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^N \Psi_k(t,x,\kappa_N(y)) - \Psi_k(t,x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t. \tag{B.279}$$

Pour A_1, par orthogonalité (puisque $\psi_k^N(\kappa_N(\cdot)) = \psi_k(\cdot)$), on a

$$\begin{aligned} A_1 &\leqslant \int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^N \left|e^{-\lambda_k^N t}\psi_k^N(x) - e^{-\lambda_k t}\psi_k(x)\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^N e^{-2\lambda_k t}\left|\psi_k^N(x) - \psi_k(x)\right|^2 \mathrm{d}t + 4\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^N \left|e^{-\lambda_k^N t} - e^{-\lambda_k t}\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \sum_{k=1}^N \frac{\left|\psi_k^N(x) - \psi_k(x)\right|^2}{\lambda_k} + 4\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^N e^{-2\lambda_k^N t}\left|1 - e^{-t(\lambda_k - \lambda_k^N)}\right|^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^N \frac{\pi^2 k^2}{\gamma N^4} + 4\sum_{k=1}^N \int_0^{+\infty} e^{-8\gamma k^2 t}\left[t^2(\lambda_k - \lambda_k^N)^2\right]\mathrm{d}t. \qquad \text{(B.280)} \end{aligned}$$

Or on a, toujours à l'aide du Lemme B.3.2

$$(\lambda_k - \lambda_k^N)^2 \leqslant \lambda_k^2 \frac{\pi^4 k^4}{9(N+1)^4} \leqslant \frac{\gamma^2 \pi^8 k^8}{9N^4}. \tag{B.281}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-8\gamma k^2 t} \left[t^2(\lambda_k - \lambda_k^N)^2\right] \mathrm{d}t &\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\gamma^2 t^2 \pi^8 k^8}{9N^4} e^{-8\gamma k^2 t} \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\gamma^2 \pi^8 k^8}{9N^4} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-8\gamma k^2 t} \mathrm{d}t \qquad \text{(B.282)} \\ &\leqslant \frac{\gamma^2 \pi^8 k^8}{9N^4} \frac{2}{(8\gamma k^2)^3} \leqslant \frac{5k^2}{\gamma N^4} \qquad \text{(B.283)}\end{aligned}$$

puisque, pour $a > 0$

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-at} \mathrm{d}t = \frac{2}{a^3}. \tag{B.284}$$

Ainsi, on obtient

$$A_1 \leqslant 2 \sum_{k=1}^{N} \frac{\pi^2 k^2}{\gamma N^4} + 4 \sum_{k=1}^{N} \frac{5k^2}{\gamma N^4} \leqslant \frac{30}{\gamma N}. \tag{B.285}$$

Enfin pour le dernier terme

$$A_2 = \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \Psi_k(t, x, \kappa_N(y)) - \Psi_k(t, x, y) \right|^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}t. \tag{B.286}$$

On a donc d'après le Lemme B.1.4

$$\begin{aligned}A_2 &\leqslant \frac{1}{4(N+1)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \partial_y \Psi_k(t, x, y) \right|^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{1}{4(N+1)^2} \int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} e^{-\lambda_k t} \psi_k(x) \psi_k'(y) \right|^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}t. \qquad \text{(B.287)}\end{aligned}$$

Or les fonctions $\psi_k'(y) = \pi k \sqrt{2} \sin(\pi k y)$ forment une famille orthogonale de $L^2([0,1])$ de norme $k^2 \pi^2$, donc

$$\begin{aligned}A_2 &\leqslant \frac{1}{4(N+1)^2} \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{N} e^{-2\lambda_k t} \pi^2 k^2 \psi_k(x)^2 \mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\pi^2}{2(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} k^2 \int_0^{+\infty} e^{-2\gamma \pi^2 k^2 t} \mathrm{d}t \qquad \text{(B.288)} \\ &\leqslant \frac{1}{2(N+1)^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\gamma \pi^2} \leqslant \frac{1}{4\gamma \pi^2 N}. \qquad \text{(B.289)}\end{aligned}$$

Ce qui donne bien

$$\int_0^{+\infty} \int_0^1 \left| g_t^N(x, \kappa_N(y)) - g_t(x, y) \right|^2 \mathrm{d}y \mathrm{d}t < \frac{1}{\gamma N} \left[\frac{1}{2\pi^2} + 60 + \frac{1}{\pi^2} \right] < \frac{61}{\gamma N}. \tag{B.290}$$

On a bien montré le résultat (B.251). Pour la dernière convergence (B.252), on a

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(\kappa_N(x),\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(\kappa_N(x),\kappa_N(y)) - g_t^N(x,\kappa_N(y))\right|^2 && \text{(B.291)}\\
&\quad + \left|g_t^N(x,\kappa_N(y)) - g_t(x,y)\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t. && \text{(B.292)}
\end{aligned}
$$

Or on a, par orthogonalité et d'après le Lemme B.4.1

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\int_0^1 \left|g_t^N(\kappa_N(x),\kappa_N(y)) - g_t^N(x,\kappa_N(y))\right|^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}t \\
&\qquad = \int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^N e^{-2\lambda_k^N t}\left[\psi_k^N(\kappa_N(x)) - \psi_k^N(x)\right]^2 \mathrm{d}t && \text{(B.293)}\\
&\qquad = \frac{1}{2\gamma\pi^2}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}\left[\psi_k^N(\kappa_N(x)) - \psi_k^N(x)\right]^2 \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\gamma\pi^2}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}\left[2\pi^2k^2(\kappa_N(x)-x)^2\right] \leqslant \frac{1}{2\gamma}\sum_{k=1}^N \frac{1}{(N+1)^2} && \text{(B.294)}\\
&\qquad \leqslant \frac{1}{2\gamma N}. && \text{(B.295)}
\end{aligned}
$$

Ce qui conclut la démonstration. □

Annexe C

Système dynamique en dimension infinie

Dans cette annexe, on expose et on adapte des résultats d'articles de Angenent [6] de Poláčik [84], de Brunovský et Fiedler [26], de Fiedler et Rocha [43], de Wofrum [97], et des collaborations des auteurs précédents [45] notamment. Nous n'avons choisi que les articles qui étaient les plus adaptés à notre problème, la littérature étant bien plus vaste. Nous allons décrire les relations qui existent entre le potentiel fonctionnel S et le potentiel local V. Cette description permet de donner une méthode, de comprendre quelques exemples et de discuter la formule d'Eyring-Kramers pour le cas périodique (voir le chapitre 5).

C.1 Points stationnaires

Les hypothèses sur V sont les suivantes (Hypothèses 4.2.1).

- V est de classe C^3
- V est convexe à l'infini (V'' est strictement positif en dehors d'un compact)
- V est borné par un polynôme à l'infini.

On rappelle, pour ϕ suffisamment régulier et vérifiant les conditions aux bord

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2} \left|\phi'(x)\right|^2 + V(\phi(x))\mathrm{d}x \tag{C.1}$$

Les points stationnaires ou équilibres de S sont les fonctions ϕ telles que pour tout h, $D_\phi S(h) = 0$. ϕ est alors solution de l'équation différentielle

$$\gamma\phi''(x) - V'(\phi(x)) = 0 \tag{C.2}$$

vérifiant les conditions au bord. Notons que pour les conditions périodiques, si ϕ est stationnaire, alors pour tout θ réel, la fonction $\phi(\cdot+\theta)$ est aussi stationnaire. On a donc pour chaque point stationnaire non constant, une famille de points stationnaires indexée par la phase θ. Dans ce cas on choisit de représenter cette famille par un représentant noté ϕ_0 tel que

$$\phi_0(0) = \max_{[0,1]} \phi_0. \tag{C.3}$$

Pour les conditions au bord de Dirichlet, Neumann ou périodiques, l'étude des points stationnaires de la fonctionnelle S revient à comprendre la structure de l'attracteur, c'est-à-dire l'ensemble des points limites de l'équation

$$\partial_t u(x,t) = -\frac{\delta S}{\delta \phi}(u) = \gamma \partial_{xx} u(x,t) - V'(u(x,t)). \tag{C.4}$$

On rappelle qu'une connexion hétérocline est une solution u de l'équation (C.4) telle que

$$u(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} v \text{ et } u(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} w \tag{C.5}$$

dans $H^2_{bc}([0,1])$, où v, w sont deux points stationnaires distincts de S.

Pour ϕ une fonction de C^1_{bc}, le hessien $\mathcal{H}_\phi S$ avec les conditions au bord est donné par :

$$\mathcal{H}_\phi S h = -\gamma h'' + V''(\phi) h. \tag{C.6}$$

On connait plusieurs résultats sur les valeurs propres et vecteurs propres de $\mathcal{H}_\phi S$ (voir par exemple Courant Hilbert vol.1 [33]) :

- $\mathcal{H}_\phi S$ a un ensemble de valeurs propres dénombrables $(\lambda_k(\phi))_{k\geqslant 0}$ ordonnées par ordre croissant (toutes simples dans les cas Dirichlet et Neumann, certaines de multiplicité double dans le cas périodique).
- Seul un nombre fini de λ_k est négatif, et pour $k \to \infty$

$$\lambda_k = O(k^2) \tag{C.7}$$

- Les vecteurs propres h_k associés à des valeurs propres distinctes (normés dans $L^2([0,1])$) sont orthogonaux dans L^2.
- Pour les valeurs simples, la fonction h_k a k zéros intérieurs, inversement si une fonction propre h a k zéros intérieurs alors h et h_k sont colinéaires.
- Entre deux consécutifs zéros de h_k, il y a un unique zéro de h_{k+1} (pour $\lambda_k < \lambda_{k+1}$.

On rappelle les hypothèses que l'on demande sur S (Hypothèses 4.2.4) :

- S a un nombre fini de points selles et de minima ;
- tous les points selles et minima de S sont non dégénérés (leur hessien n'a pas de valeurs propres nulles).

Les résultats exposés par la suite montrent que ces hypothèses constituent le cas général et sont vérifiées.

C.2 Hyperbolicité

Un élément important permettant de comprendre la structure de l'attracteur est l'hyperbolicité des points stationnaires qui correspond à la deuxième hypothèse sur S.

Définition C.2.1. Dans les cas Dirichlet et Neumann, on dit qu'un point stationnaire est *hyperbolique* si l'opérateur hessien associé $\mathcal{H}_\phi S$ n'a pas de valeurs propres nulles.

Dans le cas périodique, il faut distinguer si ϕ est un point stationnaire constant.

- Si ϕ est constant, ϕ est *hyperbolique* si $\mathcal{H}_\phi S$ n'a pas de valeurs propres nulle.

– Si ϕ est non constant, ϕ est *hyperbolique* si $\mathcal{H}_\phi S$ a une unique valeur propre nulle.

On appelle *indice*, noté $ind(\phi)$, du point stationnaire hyperbolique ϕ le nombre de valeurs propres strictement négative de $\mathcal{H}_\phi S$.

L'indice est bien défini grâce aux propriétés de croissance asymptotique des valeurs propres (équation (C.7)).

Remarque 25. Dans le cas périodique, si ϕ est non constant, on a nécessairement une valeur propre nulle (à cause de la dégénérescence due à la périodicité). En effet ϕ' est périodique et en dérivant l'équation (C.2) on obtient

$$\gamma\phi'^{(3)}(x) - V''(\phi(x))\phi'(x) = 0. \tag{C.8}$$

Donc ϕ' est un vecteur propre associé à la valeur propre nulle de $\mathcal{H}_\phi S$. Dire que ϕ est hyperbolique revient à dire que c'est le seul.

Cas Neumann et Dirichlet Soit $\xi \in \mathbb{R}$, on pose $u(x,\xi)$ la solution du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \gamma\partial_{xx}u(x,\xi) - V'(u(x,\xi)) = 0 \\ u(0,\xi) = p\xi \\ \partial_x u(0,\xi) = (1-p)\xi \end{cases} \tag{C.9}$$

avec $p = 0$ pour les conditions au bord de Dirichlet et $p = 1$ pour les conditions de Neumann. Alors $u(\cdot,\xi_0)$ est un point stationnaire de S si et seulement si

$$(1-p)u(1,\xi_0) + p\partial_x u(1,\xi_0) = 0. \tag{C.10}$$

Le hessien de S correspond à la linéarisation de $\frac{\delta S}{\delta\phi}$. En particulier, si on pose $v(x) = \partial_\xi u(x,\xi_0)$, on a, en dérivant (C.9) par rapport à ξ

$$\begin{cases} \gamma\partial_{xx}v(x) - V''(u(x,\xi_0))v(x) = 0 \\ v(0) = p \\ \partial_x v(0) = (1-p). \end{cases} \tag{C.11}$$

Poláčik a obtenu le résultat suivant.

Lemme C.2.2 (Poláčik [84])**.** *$\phi(x) = u(x,\xi_0)$ est hyperbolique si et seulement si v satisfait la condition au bord en 1 :*

$$(1-p)\partial_\xi u(1,\xi_0) + p\partial_{\xi x}u(1,\xi_0) = (1-p)v(1) + p\partial_x v(1) \neq 0. \tag{C.12}$$

Ce lemme signifie en particulier si $\mathcal{H}_\phi S$ a une valeur propre nulle, v est nécessairement un vecteur propre associé.

Poláčik en déduit que l'ensemble des fonctions V' pour lesquelles tous les points stationnaires de S sont hyperboliques est résiduel (c'est-à-dire une union dénombrable d'ouverts denses) dans $C^1(\mathbb{R})$ pour la topologie faible ou forte dans C^1. Dans ce sens, l'hyperbolicité est donc une propriété générique de S.

Remarque 26. Constatons que le déterminant de l'opérateur hessien tel que défini au chapitre 4 est exactement la valeur de la condition (C.12) :

$$(1-p)v(1) + p\partial_x v(1) = \mathrm{Det}\mathcal{H}_\phi S. \tag{C.13}$$

Si ϕ n'est pas hyperbolique le déterminant est nul.

Cas périodique Le cas des conditions périodiques se traite comme dans le cas Neumann. La fonction ϕ_0 caractérisée par l'équation (C.3) est stationnaire pour S avec les conditions de Neumann. On a alors le résultat suivant.

Lemme C.2.3 (Fiedler, Rocha et Wolfrum [45] Lemme 6.1 (ii))**.** *On suppose ϕ_0 une solution non constante stationnaire pour les conditions périodiques, tel que $\phi_0(0) = \max \phi_0$. ϕ_0 est hyperbolique pour les conditions périodiques si et seulement si ϕ_0 est hyperbolique pour les conditions de Neumann.*

C.3 Attracteur global

On a le résultat général suivant (voir Fiedler et Rocha [43] et leurs références pour Neumann, Fiedler Rocha et Wolfrum [45] pour les conditions périodiques et Brunovský et Fiedler [26] pour Dirichlet).

Proposition C.3.1. *On suppose que l'ensemble des points stationnaires est hyperbolique et que V vérifie les hypothèses 4.2.1. Alors dans tous les cas de condition au bord, l'équation d'évolution C.4 possède un unique ensemble maximal invariant appelé attracteur global. C'est un ensemble compact et connexe de $H^2_{bc}([0,1])$ (espace de Sobolev vérifiant les conditions au bord). De plus, il est constitué des solutions stationnaires et de leurs connexions hétéroclines.*

Un système dynamique possédant un attracteur global avec une telle structure est dit de Morse-Smale. En particulier, ce système est structurellement stable : on ne change pas la dynamique globale de l'équation en perturbant légèrement V (pour la topologie $C^2(\mathbb{R})$). Cette stabilité repose sur le fait que l'hyperbolicité des points stationnaire est générique (voir Poláčik [84]).

Remarque 27. Ce résultat repose principalement sur le fait que S est une fonction de Lyapunov pour (C.4), c'est-à-dire que S décroit le long des solutions :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} S(u(t)) = -\int_0^1 \partial_t u(t,x)[\gamma \partial_{xx} u(x,t) - V'(u(x,t))]\mathrm{d}x \tag{C.14}$$

$$= -\int_0^1 [\gamma \partial_{xx} u(x,t) - V'(u(x,t))]^2 \mathrm{d}x \leqslant 0 \tag{C.15}$$

Remarque 28. Notons que l'existence d'un attracteur global compact est valide pour un ensemble de non-linéarité f beaucoup plus vaste vérifiant des conditions de dissipativité :

$$\partial_t u = \partial_{xx} u + f(x, u, \partial_x u). \tag{C.16}$$

Dans les cas des conditions de Dirichlet et de Neumann, la structure est la même que dans le cas gradient : l'attracteur est constitué des points d'équilibre et des orbites hétéroclines. Dans le cas des conditions périodiques avec f ne dépendant pas de x, on peut avoir de plus des orbites périodiques dans l'attracteur c'est-à-dire des solutions de la forme $u(x,t) = \phi(x - ct)$ où $c \neq 0$ (voir [45]) et les orbites hétéroclines connectant ces équilibres.

C.4 Constructions des Solutions Stationnaires

C.4.1 Solutions stationnaires constantes

Les solutions stationnaires constantes ne sont intéressantes que dans les cas périodiques ou Neumann. Dans le cas Dirichlet seul, 0 peut être une solution stationnaire constante, ce qui est le cas si $V'(0) = 0$. On se limite donc aux cas Neumann et périodiques.

Remarquons que si y est une racine de V', la fonction constante égale à y est stationnaire. L'opérateur hessien est alors

$$\mathcal{H}_y h = -\gamma h'' + V''(y)h. \tag{C.17}$$

Si $V''(y) = 0$, on a dans les conditions périodiques ou Neumann une valeur propre nulle qui correspond au vecteur propre constant, ce qui contredit les hypothèses 4.2.4. On suppose donc que V n'est pas dégénérée, i.e. que V' et V'' n'ont pas de racines communes.

On pose $e_* = e_0 < e_1 < e_2 < \cdots < e_{2n} = e^*$ l'ensemble des racines de V' qui sont forcément en nombre impair, les indices pairs étant des minima de V, les indices impairs étant des maxima locaux. On confond les solutions constantes et les points e_i.

C.4.2 Solutions stationnaires non constantes

On obtient une intégrale première en multipliant (C.2) par ϕ' et en intégrant. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$

$$\frac{\gamma}{2}\phi'(x)^2 - V(\phi(x)) = E \tag{C.18}$$

pour une certaine constante $E \in \mathbb{R}$. En particulier la trajectoire de (ϕ, ϕ') s'inscrit dans l'ensemble de niveau dans l'espace des phases $\mathcal{I}_E = \{I(y, z) = E\}$ où

$$I(y, z) = \frac{\gamma z^2}{2} - V(y). \tag{C.19}$$

Les trajectoires sont décrites dans le sens horaire dans l'espace des phases.

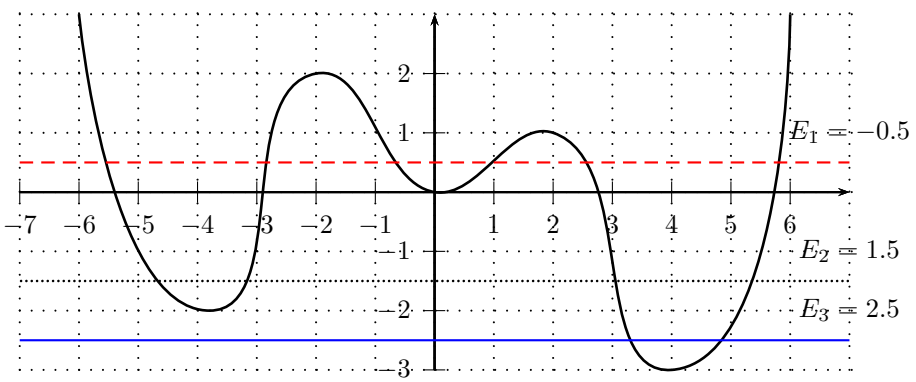


FIGURE C.1: Exemple de potentiel à trois puits, avec trois ensembles de niveau.

Cette courbe de niveau $\mathcal{I}_E$ est symétrique par rapport à l'axe $z = 0$ et de plus

$$I(y_0, z) = E \Leftrightarrow z(E) = \begin{cases} \varnothing & \text{si } E < -V(y_0) \\ 0 & \text{si } E = -V(y_0) \\ \pm\sqrt{2\gamma^{-1}(E + V(y_0))} & \text{si } E > -V(y_0). \end{cases} \tag{C.20}$$

Pour $E > -\min_y V(y) = E_{max}$, $\mathcal{I}_E$ est constituée de deux composantes connexes symétriques n'intersectant pas $\{z = 0\}$. Pour $E < E_{min}$ avec

$$E_{min} = -\max\{V(y), V'(y) = 0\} \tag{C.21}$$

$\mathcal{I}_E$ comprend deux composantes connexes disjointes intersectant chacune une seule fois l'axe $\{z = 0\}$.

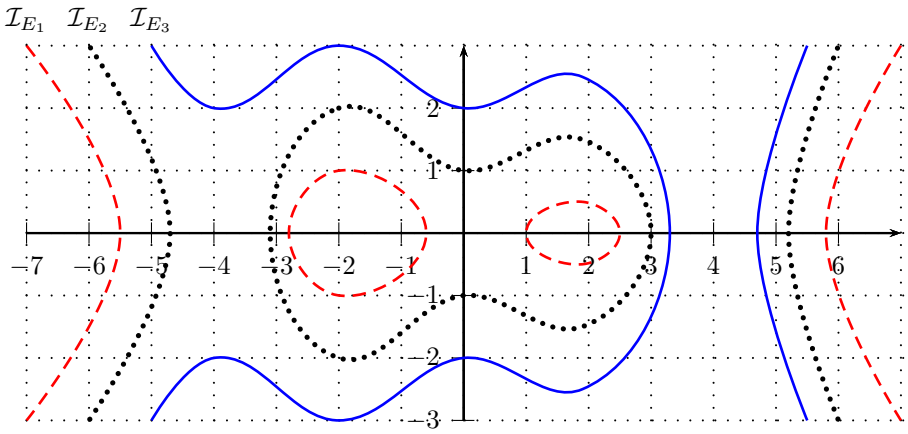


FIGURE C.2: Trois ensembles de niveaux correspondant à l'exemple de la figure C.1

Conditions au bord de Neumann Les points stationnaires pour les conditions au bord de Neumann sont donnés par les intersections entre $\mathcal{I}_E$ et $\{z = 0\}$. En effet les conditions au bord dans ce cas sont $\phi'(0) = \phi'(1) = 0$ ce qui suppose de commencer et de finir la trajectoire sur $\{z = 0\}$. Dans ce cas, on pose $y_- \leqslant y_+$ les points d'intersection d'une composante connexe de $\mathcal{I}_E$ avec l'axe $\{z = 0\}$, le temps mis pour aller de y_- à y_+ est donné par

$$\int_{y_-}^{y_+} \frac{\sqrt{2^{-1}\gamma}\mathrm{d}y}{\sqrt{V(y) - V(y_-)}}. \tag{C.22}$$

Notons que $V(y_-) = V(y_+) = -E$, la trajectoire s'inscrit dans la courbe de niveau $\mathcal{I}_E$. Dans [87], Rocha fait l'étude très précise de la fonction donnant la période en fonction de y_- (ou y_+). Il procède comme suit. On définit d'abord l'ensemble de cyclicité $\mathcal{C}$.

Définition C.4.1. Pour y réel, on définit ϕ_y la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\gamma\phi_y''(x) - V'(\phi_y(x)) = 0 \tag{C.23}$$

$$\phi_y'(0) = 0 \text{ et } \phi_y(0) = y \tag{C.24}$$

On pose alors

$$T(y) = \inf\{t > 0, \phi_y'(t) = 0\}. \tag{C.25}$$

L'ensemble de cyclicité $\mathcal{C}$ est défini par

$$\mathcal{C} = \{y, T(y) < \infty\}. \tag{C.26}$$

Sur $\mathcal{C}$, on définit la fonction $i(y)$ par $i(y) = \phi_y(T(y))$.

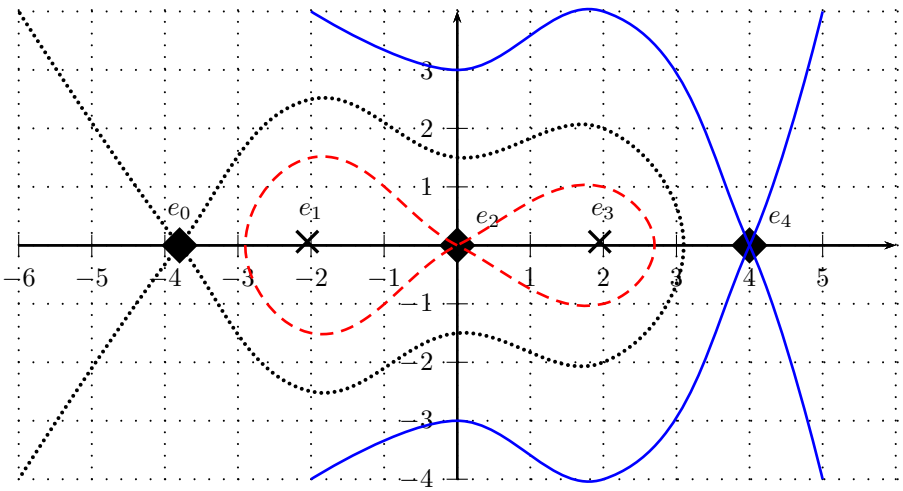


FIGURE C.3: Tracé des séparatrices dans l'espace des phases : les solutions pour les conditions de Neumann ne parcourent que l'intérieure de la courbe fermée en pointillé. Les croix sont les maxima de V, les carrés les minima, correspondant aux solutions constantes stationnaires

Remarquons que pour $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\mathcal{I}_{-V(y)}$ intersecte l'axe $\{z = 0\}$ en $(y, 0)$. Si la composante connexe de $\mathcal{I}_{-V(y)}$ contenant $(y, 0)$ intersecte l'axe $\{z = 0\}$ en un autre point $(y', 0)$ (nécessairement unique), on a alors $i(y) = y'$. On a de plus pour les maxima e_{2i+1} de V, $i(e_{2i+1}) = e_{2i+1}$. En particulier, si $y \notin [e_*, e^*]$, $i(y)$ n'est pas défini. De plus i est une involution.

Posons, pour tout $y \in \mathcal{C}$,

$$t(y) = \int_{(y,i(y))} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(V(u) - V(y))}}. \tag{C.27}$$

On a alors $T(y) = \sqrt{\gamma}t(y)$.

$\mathcal{C}$ est l'union d'intervalles ouverts disjoints (voir Rocha [87]). On note $\mathcal{C} = \cup_{j=1}^{N}]y_j^-, y_j^+[$ la réunion étant disjointe. Au borne de chaque intervalle, la période $t(y)$ diverge forcément vers $+\infty$. On a deux types d'intervalles soit :

1. l'intervalle $]y_j^-, y_j^+[$ contient un maximum de V, on a alors $i(]y_j^-, y_j^+[) =]y_j^-, y_j^+[$;
2. l'intervalle $]y_j^-, y_j^+[$ ne contient aucun point stationnaire de V et alors $i(]y_j^-, y_j^+[) =]y_{j'}^-, y_{j'}^+[$ avec $j \neq j'$.

Lemme C.4.2 (Rocha [87]). *La fonction $t(y)$ vérifie les propriétés suivantes :*
- *$t(y)$ est de classe C^1 sur $\mathcal{C}$*
- *$t(y)$ est strictement positive*
- *$t(y)$ diverge vers $+\infty$ en toute point de $\partial\mathcal{C}$*
- *on a de plus, pour e_{2n+1} un maximum de V :*

$$t(e_{2n+1}) = \frac{\pi}{\sqrt{-V''(e_{2n+1})}} \text{ et } t'(e_{2n+1}) = 0 \tag{C.28}$$

L'ensemble des points stationnaires s'exprime comme l'ensemble des solutions (y, m) de l'équation

$$t(y) = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}} \tag{C.29}$$

avec m entier. Cela correspond en effet à dire que ϕ_y vérifie les conditions au bord de Neumann car $mT(y) = m\sqrt{\gamma}t(y) = 1$. L'hyperbolicité de ϕ_y est alors donnée en fonction de la période $t(y)$.

Lemme C.4.3 (Rocha [87]). *Soit (y, m) une solution de* (C.29). *Alors ϕ_y est un point stationnaire hyperbolique de S si et seulement si $t'(y) \neq 0$.*

Ce lemme nous permet de voir sur le graphique de la fonction t quels sont les points stationnaires non hyperboliques : ils correspondent à un point de tangence entre la droite d'équation $t = t_m = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}}$ et la courbe $t(y)$. Par exemple sur la figure C.4, aucune droite n'est tangente : tous les points stationnaires sont hyperboliques. Si $\gamma = \frac{1}{4}$ on aurait $t_1 = 2$ et ainsi au moins deux points stationnaires seraient dégénérés.

Remarque 29.
1. Remarquons que si (y, m) code une fonction stationnaire alors $(i(y), m)$ code aussi une fonction stationnaire. Ce fait est dû à la simple définition de $i(y)$.
2. L'ensemble des points stationnaires non constants de S est alors codé par une suite finie de couple (y, m) donnant pour chaque fonction sa condition initiale et son nombre de demi-périodes. Rocha ([87]) donne des conditions vérifiées par cette suite de nombres de demi-périodes qui sont nécessaires et suffisantes, c'est-à-dire que pour une suite finie de demi-périodes (vérifiant ces conditions) on peut trouver un potentiel V et $\gamma > 0$ tels que S va avoir des points stationnaires dont les demi-périodes seront exactement cette suite.

On a de plus la proposition suivante sur l'indice des points stationnaires.

Proposition C.4.4 (Fiedler, Rocha et Wolfrum [45]). *On suppose toujours V non dégénérée. Pour les fonctions stationnaires constantes :*
- *si $e \in \mathbb{R}$ est un minimum de V, $ind(e) = 0$;*
- *si $e \in \mathbb{R}$ est un maximum de V,*

$$ind(e) = \left\lfloor \frac{\sqrt{-V''(e)}}{\pi\sqrt{\gamma}} \right\rfloor + 1. \tag{C.30}$$

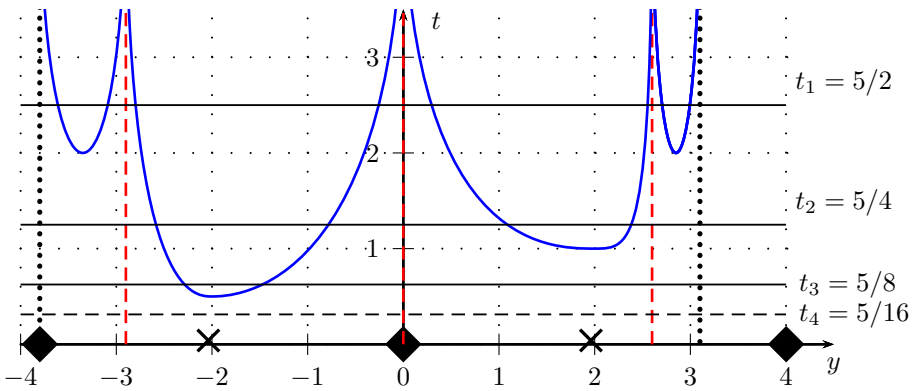


FIGURE C.4: Exemple de période t possible pour les conditions de Neumann. Chaque intersection entre la courbe et une droite d'équation $t = t_k$, $k = 1, 2, 3$ donne un point stationnaire non constant d'indice k ou $k + 1$, ce qui fait un total de 14 points stationnaires auxquels se rajoutent les 5 constants. En ordonnant la suite des points stationnaires par ordre croissant de leur valeur initiale, la suite de leurs indices peut se lire sur le graphique : $0, 1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 1, 0$. Tous sont hyperboliques.

Pour les fonctions stationnaires non constantes ϕ, données par $(\phi(0), m)$, on a $ind(\phi) = ind(\psi)$ où ψ est la fonction stationnaire codée par $(i(\phi(0)), m)$. Pour une fonction stationnaire ϕ de nombre de demi-période m telle que $\phi(0) > i(\phi(0))$ on a

- *si $t'(\phi(0)) > 0$, $ind(\phi) = m$;*
- *si $t'(\phi(0)) < 0$, $ind(\phi) = m + 1$.*

Remarquons que si V a au moins un maximum e, on a (Lemme C.4.2)

$$t(e) = \frac{\pi}{\sqrt{-V''(e)}} \tag{C.31}$$

et donc si

$$\gamma = \frac{-V''(e)}{k^2\pi^2} \tag{C.32}$$

pour k entier non nul, le point stationnaire constant e à une valeur propre nulle et n'est pas hyperbolique.

Conditions au bord périodiques On procède comme dans le cas des conditions au bord de Neumann, sauf que au lieu de décrire éventuellement des demi-périodes, on ne décrit que des périodes entières. On note toujours ϕ_0 le point stationnaire tel que $\phi_0(0)$ est un maximum global de ϕ_0. Dans l'équation (C.29), ϕ_0 est une solution $(\phi_0(0), m)$ avec m pair. On multiplie la fonction période $t(y)$ par 2 : pour tout $y \in \mathcal{C}$

$$t_{per}(y) = 2\int_{(y,i(y))} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(V(u) - V(y))}}. \tag{C.33}$$

L'équation (C.29) reste formellement la même avec t_{per} :

$$t_{per}(y) = \frac{1}{m\sqrt{\gamma}}. \tag{C.34}$$

Lemme C.4.5 (Rocha [87]). *Soit (y, m) une solution de* (C.34) *et $y > i(y)$. Alors la famille engendrée par ϕ_y est un point stationnaire hyperbolique de S avec les conditions au bord périodique si et seulement si $t'_{per}(y) \neq 0$.*

On a l'analogue de la Proposition C.4.4 pour les conditions périodiques.

Proposition C.4.6 (Fiedler, Rocha et Wolfrum [45] Lemme 5.3). *On suppose toujours V non dégénérée. Pour les fonctions stationnaires constantes :*
- *si $e \in \mathbb{R}$ est un minimum de V, $ind(e) = 0$;*
- *si $e \in \mathbb{R}$ est un maximum de V,*

$$ind(e) = 2 \left\lfloor \frac{\sqrt{-V''(e)}}{2\pi\sqrt{\gamma}} \right\rfloor + 1. \tag{C.35}$$

Pour les fonctions stationnaires non constantes ϕ données par $(\phi(0), m)$, avec $\phi(0)$ maximum global de ϕ on a
- *si $t'(\phi(0)) > 0$, $ind(\phi) = 2m - 1$;*
- *si $t'(\phi(0)) < 0$, $ind(\phi) = 2m$.*

Conditions au bord de Dirichlet Les conditions au bord de Dirichlet sont traités dans l'article de Brunovský et Fiedler [26]. On a adapté les résultats au cas gradient qui nous intéresse. Pour les conditions au bord de Dirichlet, on doit vérifier les conditions au bord $\phi(0) = 0$ et $\phi(1) = 0$. Au lieu de partir de l'axe $\{z = 0\}$ et d'y revenir en temps 1, on se place cette fois sur l'axe $\{y = 0\}$ sur lequel on revient en temps 1. On donne alors l'analogue de la définition C.4.1.

Définition C.4.7. Pour z réel, on définit ψ_z la solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\gamma\psi''_z(x) - V'(\psi_z(x)) = 0 \tag{C.36}$$

$$\psi'_z(0) = z \text{ et } \psi_z(0) = 0 \tag{C.37}$$

On pose alors

$$T_D(z) = \inf\{t > 0, \psi_z(t) = 0\}. \tag{C.38}$$

L'ensemble de cyclicité $\mathcal{C}$ est défini par

$$\mathcal{C} = \{z, T_D(z) < \infty\}. \tag{C.39}$$

Sur $\mathcal{C}$, on définit la fonction $i(z)$ par $i(z) = \psi_z(T_D(z))$.

La solution ψ_z est donc simplement la solution de l'équation différentielle partant de 0 et de pente initiale z. Remarquons que, par symétrie, $i(z) = -z$ (si $z \neq 0$). La difficulté vient ici du fait que on peut avoir $T_D(z) < +\infty$ mais $T_D(-z) = \infty$: on ne peut faire qu'une demi-période et ne pas boucler les trajectoires (voir la figure C.5).

Lemme C.4.8. *$\mathcal{C}$ est une réunion finie d'intervalles ouverts et prend l'une des trois formes suivantes :*

1. *soit $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à 0 ;*

2. *soit* $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cup I_+$ *où l'union est disjointe,* $\mathcal{S}$ *est symétrique par rapport à* 0, $I_+ \subset \mathbb{R}^+$ *est une union disjointe finie d'ouverts et* $\partial\mathcal{S} \cap \partial I_+$ *est un singleton ;*
3. *soit* $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cup I_-$ *où l'union est disjointe,* $\mathcal{S}$ *est symétrique par rapport à* 0, $I_- \subset \mathbb{R}^-$ *est une union disjointe finie d'ouverts et* $\partial\mathcal{S} \cap \partial I_-$ *est un singleton.*

Le premier cas correspond au fait que toutes les trajectoires vérifiant les conditions de Dirichlet peuvent boucler : $T_D(-z) < \infty$ pour tout $z \in \mathcal{C}$. Dans les deux autres cas, la partie symétrique correspond comme ci-dessus aux $z \in \mathcal{C}$ tels que $T_D(-z) < \infty$, tandis que I_+ (resp. I_-) correspond aux points $z > 0$ (resp. $z < 0$) tels que $T_D(-z) = \infty$ et $T_D(z) < \infty$.

Si $z > 0$ et $0 < T_D(z) < \infty$ alors il existe $y^+(z) = \psi_z(T_D(z)/2) > 0$ solution de $\psi_z'(y) = 0$ avec $y > 0$. Posons

$$t^+(z) = 2\int_0^{y^+(z)} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(V(u) - V(y^+(z)))}}. \tag{C.40}$$

On a alors comme dans le cas Neumann $T_D(z) = \sqrt{\gamma}t^+(z)$.

De même, pour $z < 0$ tel que $T_D(z) < \infty$, on a nécessairement un point $y^-(z) < 0$ d'annulation de ψ_z'. En posant

$$t^-(z) = 2\int_{y^-(z)}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(V(u) - V(y^-(z)))}}, \tag{C.41}$$

on obtient $T_D(z) = \sqrt{\gamma}t^-(z)$.

La caractérisation donnée par le Lemme C.4.8 revient alors à
- $z \in \mathcal{S}$ si et seulement si $t^+(|z|) + t^-(-|z|) < \infty$;
- $z \in I^+$ si et seulement si $z > 0$, $t^+(z) < \infty$ et $t^-(-z) = \infty$;
- $z \in I^-$ si et seulement si $z < 0$, $t^-(z) < \infty$ et $t^+(-z) = \infty$.

L'étude des temps de demi-période t^+ et t^- est alors tout à fait similaire à l'étude de t dans le cas Neumann. Un point stationnaire de S est alors donné par la valeur de la pente initiale $z \in \mathcal{C}$ et le nombre de demi-périodes positives et négatives (m_+, m_-), avec $|m_+ - m_-| \leqslant 1$ vérifiant les relations suivantes

$$t_{m_+,m_-}(z) = m_+t^+(|z|) + m_-t^-(-|z|) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}. \tag{C.42}$$

Notons que si $z \in I_+$ (resp. $z \in I_-$) nécessairement, si on a une solution, $m_+ = 1$ et $m_- = 0$ (resp. $m_+ = 0$ et $m_- = 1$). De même si $z \in \mathcal{S}$ et $z > 0$ (resp. $z < 0$) on a $m_+ - m_- \in \{0, 1\}$ (resp. $m_- - m_+ \in \{0, 1\}$).

L'hyperbolicité est donnée par la même condition que dans le cas des conditions de Neumann.

Lemme C.4.9. *Le point stationnaire de* S *codé par* (z, m_+, m_-) *est hyperbolique si et seulement si* $t'_{m_+,m_-}(z) \neq 0$.

Les indices des points stationnaires sont alors donnés par la proposition suivante.

Proposition C.4.10. *On suppose* V *non dégénérée. Tout d'abord,* S *a au plus un point stationnaire constant égale à* 0 *si et seulement si* $V'(0) = 0$. *Son indice est alors*

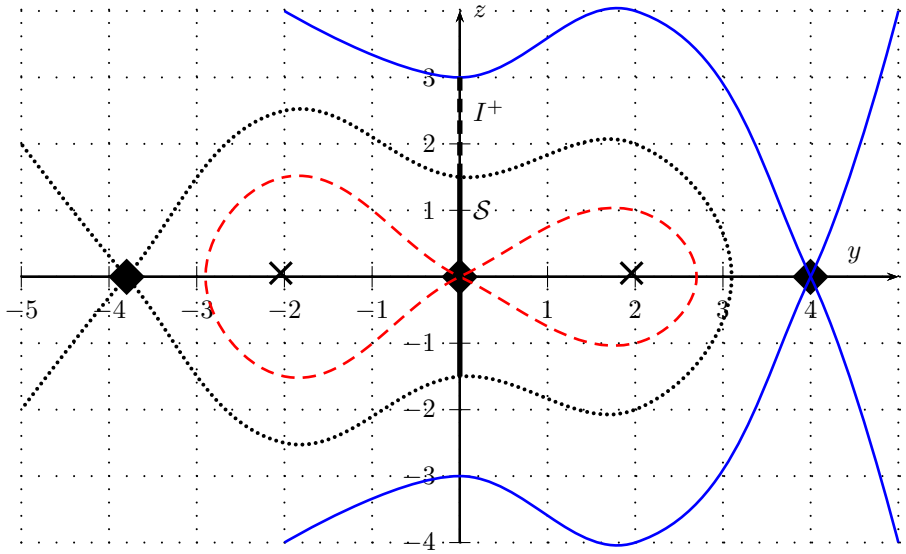


FIGURE C.5: Portrait de phase avec les intervalles $\mathcal{S}$ et I^+ pertinents. Dans ce cas, la courbe en trait plein (bleu) ne se refeme pas, on a donc $I^- = \varnothing$.

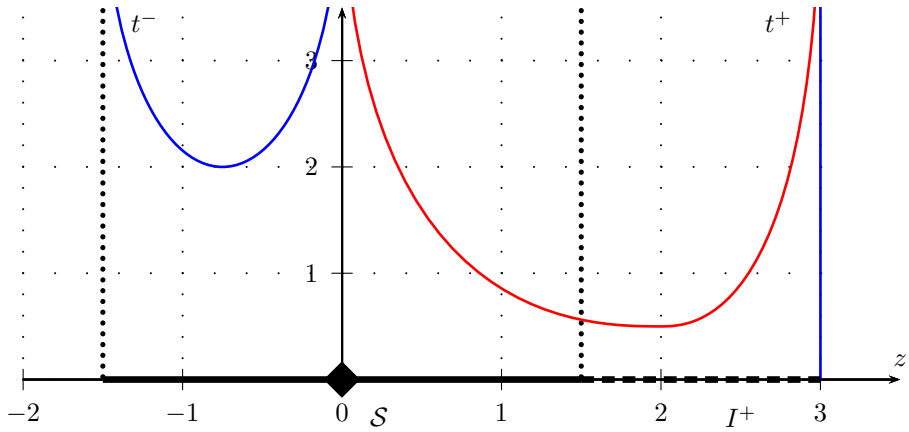


FIGURE C.6: Exemple de demi-périodes t^+ et t^- dans le cas des conditions de Dirichlet.

– *si* 0 *est un minimum de* V, $ind(0) = 0$;
– *si* 0 *est un maximum de* V,

$$ind(0) = \left\lfloor \frac{\sqrt{-V''(0)}}{\pi\sqrt{\gamma}} \right\rfloor . \tag{C.43}$$

Pour les points stationnaires non constants donné par $\phi = (z, m_+, m_-)$, *on a les relations suivantes*
– $ind(\phi) = m_+ + m_- - 1$ *si* z *et* $t'_{m_+,m_-}(z)$ *sont de même signe ;*
– $ind(\phi) = m_+ + m_-$ *si* z *et* $t'_{m_+,m_-}(z)$ *sont de signes contraires.*

Remarque 30. Dans le cas Dirichlet, si 0 est un maximum de V, il peut malgré tout être un minimum de S, mais alors c'est le seul. On va voir que c'est le cas pour Allen-Cahn ($V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$) pour $\gamma > \frac{1}{\pi^2}$ (section 5.1).

C.5 Structure de l'attracteur

D'après les résultats énoncés à la Proposition C.3.1, on sait que l'attracteur est constitué des équilibres (points stationnaires de S) et de leurs connexions hétéroclines (définie par l'équation (C.5)). Une première conditions pour qu'il existe une connexion hétérocline entre deux équilibres ϕ et ψ, propriété notée $\phi \searrow \psi$, est que

$$ind(\phi) > ind(\psi). \tag{C.44}$$

De plus on a un principe de cascade donné par Fiedler et Rocha dans le cas Neumann (Lemme 1.5 dans [43]) et dans le cas Dirichlet par Brunovský et Fiedler ([26] Lemme 3.8). Ce principe s'énonce ainsi : s'il existe une connexion hétérocline entre deux équilibres ϕ et ψ avec $ind(\phi) - ind(\psi) = n > 0$, alors il existe $\phi_1, ...\phi_{n-1}$ équilibres tels que

$$\phi \searrow \phi_1 \searrow \phi_2 \cdots \phi_{n-1} \searrow \psi \tag{C.45}$$

avec $ind(\phi_i) = ind(\phi) - i$. En particulier, pour comprendre les connexions hétéroclines et donc la structure de l'attracteur, il suffit de déterminer les connexions entre points d'équilibre dont l'indice ne diffère que de 1. Ce principe ne semble pas vérifié dans le cas des conditions périodiques à notre connaissance.

Définition C.5.1. Pour tout $\phi \in C^2_{bc}([0,1])$, on définit, pour ϕ non constante $z(\phi)$ le nombre de changement strict de signe de ϕ.

On a alors les critères suivants :

Proposition C.5.2. *Dans le cas Neumann (Lemme 1.7 [43]), pour ϕ et ψ deux équilibres tels que $ind(\phi) > ind(\psi)$, on a une connexion $\phi \searrow \psi$ si et seulement si*

- $z(\phi - \psi) = ind(\psi)$
- *il n'existe pas un troisième équilibre ω tel que $z(\phi - \psi) = z(\omega - \psi) = z(\phi - \omega)$ et $\omega(0)$ est compris entre $\psi(0)$ et $\phi(0)$.*

Dans le cas des conditions périodiques ([45] Théorème 1.3) pour ϕ et ψ deux équilibres tels que $ind(\phi) > ind(\psi)$, on a une connexion $\phi \searrow \psi$ si et seulement s'il n'existe pas un troisième équilibre ω tel que $z(\phi - \psi) = z(\omega - \psi) = z(\phi - \omega)$ et $\max_x \omega(x)$ est compris entre $\max_x \psi(x)$ et $\max_x \phi(x)$.

Dans le cas Dirichlet (Théorème 1.3 [26]), pour ϕ et ψ deux équilibres tels que $ind(\phi) > ind(\psi)$, on a une connexion $\phi \searrow \psi$ si et seulement s'il n'existe pas un troisième équilibre ω tel que $z(\omega - \psi) \geqslant z(\phi - \omega)$ et $\omega'(0)$ est compris entre $\psi'(0)$ et $\phi'(0)$.

Cette proposition permet de construire toutes les connexions hétéroclines et donc la structure globale de l'attracteur.

Remarque 31. Dans l'application du calcul de l'espérance des temps de transitions ce qui nous intéresse est directement le "1-squelette" de l'attracteur : c'est-à-dire le sous graphe ne contenant que les minima (équilibres d'indice 0) et les points selles d'indice 1.

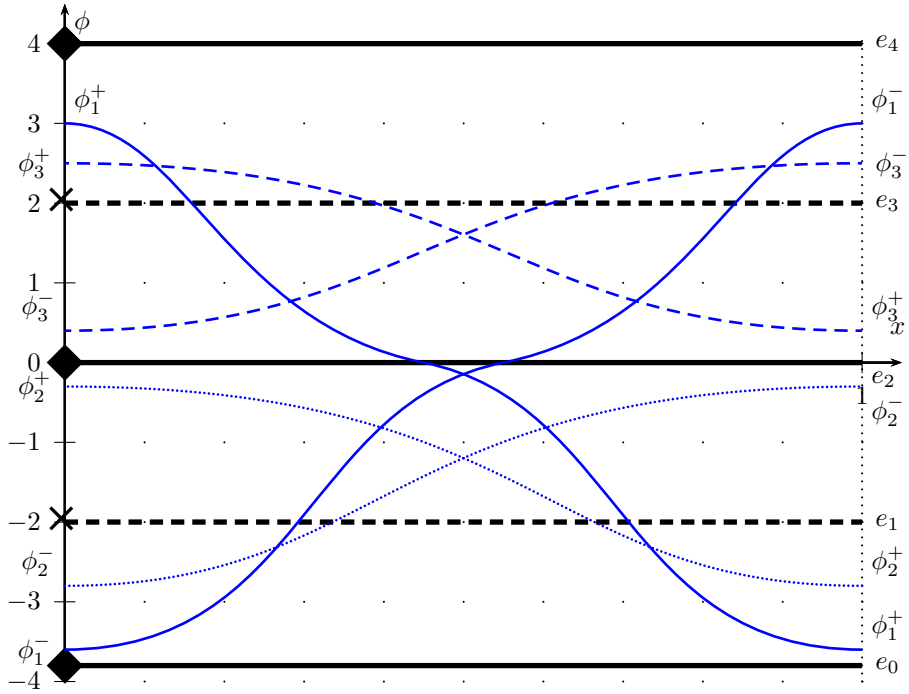


FIGURE C.7: Exemple des points selles d'indice 1 et des points stationnaires constants dans les conditions de Neumann donnés par la figure C.4

Par exemple les connexions sont les suivantes dans le cas décrit par la figure C.7 :

$$\begin{tikzcd}
 & & \phi_1^+ \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
e_0 & & \phi_1^- \arrow[ll] \arrow[rr] & & e_4 \\
 & \phi_2^- \arrow[ul] \arrow[dr] & & \phi_3^- \arrow[ur] & \\
\phi_2^+ \arrow[uu] \arrow[rr] & & e_2 & & \phi_3^+ \arrow[uu] \arrow[ll]
\end{tikzcd} \tag{C.46}$$

Nous avons ainsi, dans cet exemple fictif, déterminé le graphe de connexions entre points selles et minima. Cependant l'application de la formule d'Eyring-Kramers (Théorème 4.2.1 du chapitre 4) demande de trouver ceux de plus basse énergie. D'après la forme du potentiel donné par la figure C.1,

$$S(e_2) = 0 > S(e_0) = -2 > S(e_4) = -3. \tag{C.47}$$

En revanche, nous n'avons *a priori* pas de manière de voir géométriquement quels sont les points-selles pertinents réalisant les hauteurs minimales pour passer d'un minimum à un autre. On peut avoir une formulation un peu différente

de $S(\phi)$, en utilisant l'intégrale première (C.18) on obtient

$$S(\phi) = E + 2\int_0^1 V(\phi(x))\mathrm{d}x \tag{C.48}$$

et dans le cas Neumann $E = -V(\phi(0))$, dans le cas Dirichlet $E = \frac{\gamma}{2}\phi'(0)^2$.

C.6 Construction géométrique de l'attracteur

Fiedler et Rocha [43] montrent comment calculer les indices de chaque point stationnaire et construire le graphe de connexions des trajectoires hétéroclines de manière assez simple. Dans le cadre des conditions de Neumann, on numérote les points stationnaires par ordre croissant de valeur initiale : $\phi_1, \ldots, \phi_k$ avec

$$\phi_1(0) < \phi_2(0) < \cdots < \phi_k(0). \tag{C.49}$$

Les inégalités sont strictes par Cauchy-Lipschitz. Il existe alors une permutation π de $1, \ldots k$ telle que

$$\phi_{\pi(1)}(1) < \phi_{\pi(2)}(1) < \cdots < \phi_{\pi(k)}(1). \tag{C.50}$$

Par symétrie des points stationnaire par $x \mapsto 1-x$ on en déduit que $\pi = \pi^{-1}$. π est donc une involution. De plus π contient toute l'information sur les indices, la structure et les trajectoires hétéroclines.

En effet, si $ind(l)$ désigne l'indice du point ϕ_l, on a les propriétés suivantes

$$ind(1) = ind(k) = 0 \tag{C.51}$$

$$ind(m+1) = ind(m) + (-1)^{m+1}\mathrm{signe}(\pi^{-1}(m+1) - \pi^{-1}(m)). \tag{C.52}$$

On peut donc calculer précisément l'indice de tous les points stationnaires.

La permutation π donnée par l'ordre des points stationnaires est dite "méandrique" ou planaire : si on trace une droite avec des points numérotés dans l'ordre de 1 à k et une courbe qui l'intersecte transversalement en chaque point dans l'ordre donné par la permutation, la courbe tracée ne s'intersecte pas.

On peut alors calculer l'indice de chaque point stationnaire en comptant depuis $ind(1) = 0$, $+1$ les méandres parcourus dans le sens horaire et -1 ceux parcourus dans le sens anti-horaire.

Remarque 32. L'article de Wolfrum [97] précise ce que représente cette courbe : soit $S(x,\xi)$ la surface paramétrée donnée par $(x, u(x,\xi), \partial_x u(x,\xi))_{x,\xi}$ où $u(x,\xi)$ est solution de (C.9). En regardant l'intersection avec le plan $\{x = 1\}$, on obtient une courbe $(u(1,\xi), \partial_x u(1,\xi))$ qui ne s'intersecte pas (par Cauchy-Lipschitz). Cette courbe est exactement la courbe décrite ci-dessus associée à la permutation π.

On a la même caractérisation pour les conditions de Dirichlet, la permutation étant donné par l'ordre des dérivées en 0 et en 1.

Bibliographie

Publications

[1] Florent Barret, *Metastability : Application to a model of sharp asymptotics for capacities and exit/hitting times ; Master thesis.*, 2007.

[2] ———, *Sharp asymptotics of metastable transition times for one dimensional SPDEs*, prépublication CMAP, soumis. (2012).

[3] Florent Barret and Anton Bovier, *Sharp metastable estimates for degenerated cases of gradient drift diffusion*, en préparation. (2012).

[4] Florent Barret, Anton Bovier, and Sylvie Méléard, *Uniform estimates for metastable transition times in a coupled bistable system*, Electronic Journal of Probability **15** (2010), 323–345.

Références

[5] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, and G. Scheffer, *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*, SMF Panoramas et Synthèses, 2000.

[6] Sigurd B. Angenent, *The Morse-Smale property for a semi-linear parabolic equation*, Journal of differential equations **62** (1986), 427–442.

[7] Michael Assaf and Baruch Meerson, *Extinction of metastable stochastic populations*, Physical Review E **81** (2010), no. 2, 021116.

[8] R. Baviera and M.a. Virasoro, *Multiscale analysis of hierarchical landscapes*, Physica D : Nonlinear Phenomena **107** (1997), no. 2-4, 151–155.

[9] Nils Berglund, Bastien Fernandez, and Barbara Gentz, *Metastability in interacting nonlinear stochastic differential equations : I. From weak coupling to synchronization*, Nonlinearity **20** (2007), 2551.

[10] ———, *Metastability in interacting nonlinear stochastic differential equations : II. Large-N behaviour*, Nonlinearity **20** (2007), 2583.

[11] Nils Berglund and Barbara Gentz, *The Eyring-Kramers law for potentials with nonquadratic saddles*, Markov Processes and Related Fields **16** (2010), no. 3, 549–598.

[12] Alessandra Bianchi, Anton Bovier, and Dmitry Ioffe, *Sharp asymptotics for metastability in the random field Curie-Weiss model*, Electronic Journal of Probability **14** (2009), 1541–1603.

[13] Alessandra Bianchi and Alexandre Gaudillière, *Metastable states, quasi-stationary and soft measures, mixing time asymprtotics via variational principles*, Arxiv preprint arXiv :1103.1143 (2011), 1–32.

[14] J.P. Bouchaud and Marc Mézard, *Landscape approach for pinned elastic interfaces*, Physica D : Nonlinear Phenomena **107** (1997), no. 2-4, 174–182.

[15] A. Bovier, M. Eckhoff, V. Gayrard, and M. Klein, *Metastability in stochastic dynamics of disordered mean-field models*, Probab. Theory Related Fields **119** (2001), no. 1, 99—-161.

[16] ———, *Metastability and low lying spectra in reversible Markov chains*, Comm. Math. Phys. **228** (2002), no. 2, 219—-255.

[17] Anton Bovier, *Markov processes and metastability*, Lecture Notes TUB, 2003, pp. 1–75.

[18] ———, *Metastability*, Lecture Notes in Mathematics 1970 (R Kotecký, ed.), Springer-Verlag, 2009, pp. 177—-221.

[19] Anton Bovier, Frank den Hollander, and Cristian Spitoni, *Homogeneous nucleation for Glauber and Kawasaki dynamics in large volumes at low temperatures*, The Annals of Probability **38** (2010), no. 2, 661–713.

[20] Anton Bovier, Michael Eckhoff, Véronique Gayrard, and Markus Klein, *Metastability and small eigenvalues in Markov chains*, Journal of Physics A : Mathematical and General **33** (2000), L447.

[21] ———, *Metastability in reversible diffusion processes I. Sharp asymptotics for capcities and exit times*, Journal of the European Mathematical Society (JEMS) **6** (2004), no. 4, 399–424.

[22] Anton Bovier, Véronique Gayrard, and Markus Klein, *Metastability in reversible diffusion processes II. Precise asymptotics for small eigenvalues*, Jour. Eur. Math. Soc **7** (2005), 69–99.

[23] Stella Brassesco, *Some results on small random perturbations of an infinite dimensional dynamical system*, Stochastic processes and their applications **38** (1991), 33–53.

[24] Stella Brassesco and Paolo Buttà, *Interface Fluctuations for the D = 1 Stochastic Ginzburg – Landau Equation with Nonsymmetric Reaction Term*, Journal of statistical physics **93** (1998), no. 5/6, 1111–1142.

[25] Haïm Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.

[26] P. Brunovsky and Bernold Fiedler, *Connecting orbits in scalar reaction diffusion equations. Pt. 2 The complete solution*, Journal of Differential Equations **81** (1989), 106–135.

[27] Marzio Cassandro, A. Galves, Enzo Olivieri, and M.E. Vares, *Metastable behavior of stochastic dynamics : a pathwise approach*, Journal of statistical physics **35** (1984), no. 5, 603–634.

[28] Marzio Cassandro, Enzo Olivieri, and Pierre Picco, *Small random perturbations of infinite dimensional dynamical systems and nucleation theory*, Annales de l'IHP Physique théorique, vol. 44, Elsevier, 1986, pp. 343–396.

[29] Sandra Cerrai and Mark I. Freidlin, *Approximation of quasi-potentials and exit problems for multidimensional RDEs with noise*, Trans. Amer. Math. Soc **363** (2011), 3853–3892.

[30] F. Chenal and A. Millet, *Uniform large deviations for parabolic SPDEs and applications*, Stochastic Process. Appl. **72** (1997), no. 2, 161—-186.

[31] Kai Lai Chung and John B. Walsh, *Markov processes, Brownian motion, and time symmetry*, Springer-Verlag, 2005.

[32] Francis Comets and Thierry Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusions*, Dunod, Paris, 2006.

[33] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. I*, Interscience Publishers, 1953.

[34] Giuseppe Da Prato and Arnaud Debussche, *Strong solutions to the stochastic quantization equations*, The Annals of Probability **31** (2003), no. 4, 1900–1916.

[35] Giuseppe Da Prato and J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Cambridge University Press, 1992.

[36] E. B. Davies, *Heat kernels and spectral theory*, Cambridge University Press, 1989.

[37] Frank R. de Hoog and Robert S. Anderssen, *Asymptotic formulas for discrete eigenvalue problems in Liouville normal form*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences **11** (2001), no. 1, 43–56.

[38] Claude Dellacherie and Paul-André Meyer, *Probabilités et potentiel. Chapitres XII–XVI.*, Hermann, Paris, 1987.

[39] J.L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Springer-Verlag, 1984.

[40] Michael Eckhoff, *Precise asymptotics of small eigenvalues of reversible diffusions in the metastable regime*, The Annals of Probability **33** (2005), no. 1, 244–299.

[41] H Eyring, *The activated complex in chemical reactions*, The Journal of Chemical Physics **3** (1935).

[42] William G. Faris and G. Jona-Lasinio, *Large fluctuations for a nonlinear heat equation with noise*, J. Phys. A **15** (1982), no. 10, 3025—-3055.

[43] Bernold Fiedler and Carlos Rocha, *Heteroclinic orbits of semilinear parabolic equations*, Journal of differential equations **125** (1996), no. 1, 239–281.

[44] ———, *Connectivity and design of planar global attractors of Sturm type. III : Small and Platonic examples*, Journal of Dynamics and Differential Equations **22** (2010), no. 2, 121–162.

[45] Bernold Fiedler, Carlos Rocha, and Matthias Wolfrum, *Heteroclinic orbits between rotating waves of semilinear parabolic equations on the circle*, Journal of Differential Equations **201** (2004), no. 1, 99–138.

[46] George Fix, *Asymptotic Eigenvalues of Sturm-Liouville Systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **19** (1967), 519–525.

[47] Mark I. Freidlin and AD Wentzell, *Random perturbations of dynamical systems*, grundlehre ed., Springer-Verlag, 1984.

[48] Masatoshi Fukushima, Yoichi Oshima, and Masayoshi Takeda, *Dirichlet forms and symmetric Markov processes*, Walter de Gruyter & Co., 1994.

[49] Tadahisa Funaki, *Random motion of strings and related stochastic evolution equations*, Nagoya Mathematical Journal **89** (1983), 129–193.

[50] Christel Geiss and Ralf Manthey, *Comparison theorems for stochastic differential equations in finite and infinite dimensions*, Stochastic Processes and their Applications **53** (1994), no. 1, 23–35.

[51] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 2001.

[52] István Gyöngy, *Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise I*, Potential Analysis **9** (1998), no. 1, 1—-25.

[53] ———, *Lattice approximations for stochastic quasi-linear parabolic partial differential equations driven by space-time white noise II*, Potential Analysis (1999).

[54] István Gyöngy and Annie Millet, *On discretization schemes for stochastic evolution equations*, Potential Analysis **23** (2005), no. 2, 99–134.

[55] István Gyöngy and Etienne Pardoux, *On quasi-linear stochastic partial differential equations*, Probability theory and related fields **94** (1993), 413–425.

[56] M Hairer, M.D. Ryser, and H Weber, *Triviality of the 2D stochastic Allen-Cahn equation*, Arxiv preprint arXiv :1201.3089 (2012), 1–17.

[57] Peter Hänggi, Peter Talkner, and Michal Borkovec, *Reaction-rate theory : fifty years after Kramers*, Reviews of Modern Physics **62** (1990), no. 2.

[58] Bernard Helffer, Markus Klein, and Francis Nier, *Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach*, Mat. Contemp. **26** (2004), 41–85.

[59] Bernard Helffer and Francis Nier, *Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach : the case with boundary*, Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) **105** (2006), vi+89.

[60] C.S. Holling, *Resilience and stability of ecological systems*, Annual review of ecology and systematics **4** (1973), 1–23.

[61] N. Ikeda and S. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, 1989.

[62] Peter Imkeller and Ilya Pavlyukevich, *First exit times of SDEs driven by stable Lévy processes*, Stochastic Processes and their Applications **116** (2006), no. 4, 611–642.

[63] ———, *Metastable Behaviour of Small Noise Levy-Driven Diffusion*, ESAIM : Probability and Statistics **12** (2008), no. July, 412–437.

[64] Richard Jordan, David Kinderlehrer, and Felix Otto, *Free energy and the Fokker-Planck equation*, Physica D : Nonlinear Phenomena **107** (1997), 265–271.

[65] Otared Kavian, Gérard Kerkyacharian, and Bernard Roynette, *Quelques remarques sur l'ultracontractivité*, Journal of functional analysis **111** (1993), 155–196.

[66] Klaus Kirsten and Alan J. McKane, *Functional determinants for general Sturm–Liouville problems*, Journal of Physics A : Mathematical and General **37** (2004), 4649–4670.

[67] Robert V. Kohn, Maria G. Reznikoff, and Eric Vanden-Eijnden, *Magnetic Elements at Finite Temperature and Large Deviation Theory*, Journal of Nonlinear Science **15** (2005), no. 4, 223–253.

[68] HA Kramers, *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*, Physica (1940).

[69] JA Krumhansl, *Landscapes in physics and biology : A tourist's impression*, Physica D : Nonlinear Phenomena **107** (1997), no. 2-4, 430–435.

[70] Hiroshi Kunita, *Stochastic flows and stochastic differential equations*, reprint ed., Cambridge University Press, 1997.

[71] Claude Le Bris, Tony Lelièvre, M. Luskin, and D. Perez, *A mathematical formalization of the parallel replica dynamics*, preprint arXiv :1105.4636 (2011), no. 1, 1–21.

[72] Tony Lelièvre, *Two mathematical tools to analyze metastable stochastic processes*, Arxiv preprint arXiv :1201.3775 (2012), 1–19.

[73] S.A. Levin, *Ecosystems and the biosphere as complex adaptive systems*, Ecosystems **1** (1998), no. 5, 431–436.

[74] S. Levit and U. Smilansky, *A theorem on infinite products of eigenvalues of Sturm–Liouville type operators*, Proc. Amer. Math. Soc, vol. 65, 1977, pp. 299–302.

[75] Zhi Ming Ma and Michael Röckner, *Introduction to the theory of (non-symmetric) Dirichlet forms*, Springer-Verlag, 1992.

[76] Robert Maier and D. Stein, *Droplet Nucleation and Domain Wall Motion in a Bounded Interval*, Physical Review Letters **87** (2001), no. 27, 2–5.

[77] F. Martinelli, L. Sbano, and E. Scoppola, *Small random perturbation of dynamical systems : recursive multiscale analysis*, Stochastics Stochastics Rep. **49** (1994), no. 3-4, 253—-272.

[78] Fabio Martinelli, Enzo Olivieri, and Elisabetta Scoppola, *Small random perturbations of finite-and infinite-dimensional dynamical systems : unpredictability of exit times*, Journal of Statistical Physics **55** (1989), no. 3, 477–504.

[79] Sylvie Méléard and Denis Villemonais, *Quasi-stationary distributions and population processes*, (2011).

[80] Annie Millet and Pierre-Luc Morien, *On implicit and explicit discretization schemes for parabolic SPDEs in any dimension*, Stochastic Processes and their Applications **115** (2005), no. 7, 1073–1106.

[81] Nilima Nigam, Marc D. Ryser, and Paul F. Tupper, *On the well-posedness of the stochastic Allen-Cahn equation in two dimensions*, Arxiv preprint arXiv :1104.0720 (2011), 1–20.

[82] Enzo Olivieri and Maria Eulália Vares, *Large deviations and metastability*, Cambridge University Press, 2005.

[83] Étienne Pardoux, *Stochastic Partial Differential Equations*, no. April, Fundan Lecture Notes, 2007.

[84] P. Polácik, *Generic hyperbolicity in one-dimensional reaction-diffusion equations with general boundary conditions*, Nonlinear analysis **11** (1987), no. 5, 593–597.

[85] Sidney C. Port and Charles J. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*, Academic Press, 1978.

[86] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics : I Functional Analysis.*, second edi ed., Academic Press, 1980.

[87] Carlos Rocha, *Realization of Period Maps of Planar Hamiltonian Systems*, Journal of Dynamics and Differential Equations **19** (2007), no. 3, 571–591.

[88] L. C. G. Rogers and David Williams, *Diffusions, Markov processes, and martingales. Vol. 1*, Cambridge University Press, 2000.

[89] Peter Schuster, *Landscapes and molecular evolution*, Physica D : Nonlinear Phenomena **107** (1997), no. 2-4, 351–365.

[90] GD Smith and RD Jaffe, *Quantum chemistry study of conformational energies and rotational energy barriers in n-alkanes*, The Journal of Physical Chemistry **3654** (1996), no. 100, 18718–18724.

[91] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan, *Multidimensional diffusion processes*, Springer-Verlag, 1979.

[92] Makoto Sugiura, *Metastable behaviors of diffusion processes with small parameter*, Journal of the Mathematical Society of Japan **47** (1995), no. 4, 755–788.

[93] Michel Talagrand, *Spin glasses : a challenge for mathematicians*, Springer-Verlag, 2003.

[94] Eric Vanden-Eijnden and Maria G. Westdickenberg, *Rare Events in Stochastic Partial Differential Equations on Large Spatial Domains*, Journal of Statistical Physics **131** (2008), no. 6, 1023–1038.

[95] Brian Walker, C.S. Holling, Stephen R. Carpenter, and Ann Kinzig, *Resilience, adaptability and transformability in social–ecological systems*, Ecology and society **9** (2004), no. 2.

[96] J Walsh, *An introduction to stochastic partial differential equations*, Saint-Flour lecture notes (1986).

[97] Matthias Wolfrum, *A Sequence of Order Relations : Encoding Heteroclinic Connections in Scalar Parabolic PDE*, Journal of Differential Equations **183** (2002), no. 1, 56–78.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à la métastabilité de certains systèmes dynamiques stochastiques. Plus précisément, nous avons étudié des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles perturbées par un bruit blanc additif dans l'asymptotique du bruit faible. Nous avons donnée l'expression et le calcul de l'espérance de temps des transitions métastables pour certains types de modèles (formule dite d'Eyring-Kramers).

Dans un premier temps, nous avons généralisé des résultats connus pour des diffusions d'Itô dont la dérive est le gradient d'un potentiel. Nous donnons une équivalence entre la géométrie du paysage décrit par le potentiel et des circuits électriques qui nous permet de donner des expressions simples pour le calcul des temps de transition entre des minima du potentiel. Nous utilisons la théorie du potentiel et les capacités dans le calcul de ces temps.

Le principal résultat de cette thèse concerne des équations aux dérivées partielles stochastiques scalaires, paraboliques, semi-linéaires et perturbées par un bruit blanc espace-temps sur un intervalle borné réel comme l'équation d'Allen-Cahn. Ce modèle constitue un analogue infini-dimensionnel aux diffusions en dimension finie. Nous avons considéré deux types de conditions au bord, Dirichlet et Neumann, et discutons le cas des conditions périodiques. Sous certaines hypothèses, nous donnons l'expression, analogue à la dimension finie, des temps transitions. La preuve utilise une discrétisation par différence finie de l'équation et un couplage nous permettant d'appliquer les estimations pour la dimension finie. Il a fallu notamment contrôler uniformément ces estimations en fonction de la dimension pour passer à la limite et récupérer le système infini-dimensionnel.

Abstract

In this thesis, we work on metastability for some stochastic dynamical systems. More precisely, we study some differential or partial differential equations perturbed by an additive white noise in the small noise asymptotic. We compute the expectation of the transition times for some models (so-called Eyring-Kramers Formula).

First we generalize some known results for Itô diffusions whose drift is given by the gradient of a potential. We give an equivalence between the geometry of the potential and an electrical network which allows a simple computation of the transition times between minima of the potential. To do so, we use potential theory and capacities.

The main result of this thesis is about a class of scalar, parabolic, semi-linear stochastic partial differential equations perturbed by a space-time white noise on a bounded real interval as the Allen-Cahn model. These equations are similar to the gradient drift diffusions but in infinite dimension. We consider Dirichlet or Neumann boundary conditions and discuss the periodic boundary conditions. Under some assumptions, we prove a formula, similar to the finite dimensional case, for the transition times. In the proof, we use a finite difference approximation and a coupling and apply the finite dimensional estimates to the approximation. We prove the uniformity of the estimates in the dimension and then we take the limit to recover the infinite dimensional equation.