



**HAL**  
open science

# Contributions à l'étude de discrétisation des processus avec sauts, du risque de liquidité, et du risque de saut dans les marchés financiers

Peter Tankov

► **To cite this version:**

Peter Tankov. Contributions à l'étude de discrétisation des processus avec sauts, du risque de liquidité, et du risque de saut dans les marchés financiers. Probabilités [math.PR]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2010. tel-00712732

**HAL Id: tel-00712732**

**<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00712732>**

Submitted on 28 Jun 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contributions à l'étude de discrétisation  
des processus avec sauts, du risque de liquidité,  
et du risque de saut dans les marchés financiers

Résumé des travaux présenté en vue d'obtention  
d'une Habilitation à Diriger les Recherches

Soutenue le 9/12/2010 par Peter Tankov devant le jury composé de

Rama Cont  
Nicole El Karoui  
Jean Jacod (président)  
Damien Lambertson (rapporteur)  
Huyên Pham (rapporteur)  
Philip Protter (rapporteur)  
Denis Talay



# Chapter 1

## Introduction

Ce document synthétise mes contributions à l'étude de discrétisation des processus avec sauts, et à la modélisation du risque de liquidité et du risque de saut dans les marchés financiers.

Chapitre 2 regroupe les résultats plus théoriques dans le domaine de discrétisation des processus stochastiques avec sauts, avec notamment une étude de l'erreur de discrétisation des stratégies de couverture, et des nouveaux schémas de simulation des EDS dirigées par des processus de Lévy. Chapitre 3 présente et étudie via le contrôle stochastique un problème d'optimisation d'investissement et de consommation dans les marchés financiers illiquides. Chapitre 4 contient des travaux plus appliqués sur la modélisation du risque de saut dans les stratégies d'assurance de portefeuille, les produits dérivés, et les marchés d'électricité.

Par souci de cohérence et de lisibilité nous avons choisi de limiter la présentation aux articles [7, 11, 13, 38, 44, 45, 46, 55, 56]. Certains autres travaux récents et / ou projets en cours seront brièvement mentionnés dans les sections 'perspectives' de chaque chapitre, et une liste exhaustive de publications est donné en annexe de ce document.

Pour alléger l'exposé, nous ne présentons que les principaux résultats sous les hypothèses parfois simplifiées, et quelques simulations numériques les plus essentielles. Pour les preuves détaillées, les illustrations numériques additionnelles et les revues de la littérature, le lecteur est prié de consulter les articles donnés en référence.



## Chapter 2

# Discrétisation des processus avec sauts

La discrétisation des processus stochastiques en temps continu est l'un des sujets les plus importants en probabilités appliquées, qui apparaît dans (au moins) trois classes de problèmes différentes.

- En probabilités numériques, on cherche à évaluer des fonctionnelles de processus définis par une équation différentielle stochastique (EDS). En l'absence de solution explicite, la solution de l'EDS

$$dX_t = f(X_{t-})dZ_s \quad (2.1)$$

peut être approchée par exemple au moyen d'une discrétisation par le schéma d'Euler

$$\hat{X}_{T_{i+1}}^n = \hat{X}_{T_i}^n + f(\hat{X}_{T_i}^n)(Z_{T_{i+1}} - Z_{T_i}), \quad 0 = T_0 < T_1 < \dots < T_n = T. \quad (2.2)$$

Un exemple d'EDS très utilisé en mathématiques financières et qui n'a pas de solution explicite est donné par les équations d'évolution des taux Libor forward dans le modèle Libor Market Model (2.45). Pour calculer le prix d'une option dans ce modèle il faut alors simuler la dynamique des Libors en discrétisant les EDS correspondantes.

- En mathématiques financières, un problème de base est la couverture d'un actif contingent. Les stratégies optimales pour ce problème sont typiquement des processus à variation infinie. En raison de présence de coûts de transaction, ces stratégies ne sont pas réalisables en pratique, et doivent être discrétisées. Le portefeuille de couverture optimal

$$V_T = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t,$$

où  $\phi$  est la stratégie optimale et  $S$  le processus de prix sous-jacent, est remplacé par un portefeuille réalisable

$$\hat{V}_T^n = V_0 + \int_0^T \hat{\phi}_t^n dS_t,$$

où  $\hat{\phi}^n$  est une stratégie constante sur chaque intervalle  $(T_i, T_{i+1}]$ , et  $n$  est le nombre de dates de discrétisation.

- En statistique de processus, on cherche à estimer des quantités qui dépendent de toute la trajectoire du processus  $X$ , telles que la variation quadratique, à partir des observations discrètes  $X_{T_0}, X_{T_1}, \dots, X_{T_n}$ .

Il existent bien entendu des liens étroits entre ces trois problèmes. Par exemple, le problème d'approximation des intégrales stochastiques (couverture) est relié au problème d'estimation de la variation quadratique via la formule d'intégration par parties

$$X_T^2 = X_0^2 + 2 \int_0^T X_t dX_t + [X]_T,$$

et sa version discrète

$$X_T^2 = X_0^2 + 2 \sum_{i=0}^{n-1} X_{T_i} (X_{T_{i+1}} - X_{T_i}) + \sum_{i=0}^{n-1} (X_{T_{i+1}} - X_{T_i})^2.$$

L'erreur de discrétisation de la variation quadratique  $[X]_T$  est alors égale à 2 fois l'erreur de discrétisation de l'intégrale  $\int_0^T X_t dX_t$ .

Cependant, ces problèmes ont également des différences fondamentales. Tout d'abord, le type de convergence du processus discrétisé vers le processus continu qu'on cherchera à démontrer, et donc a fortiori la vitesse de convergence ne seront pas les mêmes pour les trois problèmes. Dans le cadre de discrétisation d'une EDS, on cherche souvent la convergence 'faible', c'est-à-dire, la convergence de  $E[f(\hat{X}_T^n)]$  vers  $E[f(X_T)]$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , avec  $f$  une fonction régulière. Pour la discrétisation des stratégies de couverture, la convergence faible ne suffit pas, car on s'intéresse à la performance de la stratégie sur une seule trajectoire plutôt qu'en moyenne. On étudie alors la convergence en probabilité de  $\hat{V}_T^n$  vers  $V_T$ , ou bien la convergence vers zéro du risque  $L^2$  de couverture défini par  $E[(\hat{V}_T^n - V_T)^2]$ . En statistique de processus, on s'intéresse également à la convergence en probabilité des estimateurs, ainsi qu'à leurs lois asymptotiques, qui permettent d'établir des intervalles de confiance.

Une autre différence fondamentale entre les trois problèmes est liée au choix des instants de discrétisation. Même si la plupart de travaux considèrent la discrétisation uniforme, ce choix n'est pas nécessairement optimal. Pour des processus sans partie martingale continue, la vitesse de convergence peut être améliorée en choisissant les instants de discrétisation adaptés. Ce choix n'est pas toujours possible et n'est pas le même pour les trois problèmes décrits ci-dessus. En statistique de processus, les instants d'observation sont imposés par le problème; le plus souvent c'est la discrétisation uniforme, mais dans certaines situations comme par exemple dans le cas de données financières très haute fréquence, les instants sont aléatoires. Dans le problème de discrétisation des EDS, il est possible de choisir les points de discrétisation à condition de pouvoir les simuler. Par exemple, il est facile de simuler le temps du premier saut d'une taille donnée d'un processus de Lévy, mais il est extrêmement difficile de simuler le premier instant de sortie d'un domaine. Dans les problèmes de couverture, la liberté de choix des instants de discrétisation est la plus grande, parce que le processus de prix est observé en continu, et ce ne sont que les changements effectifs de la stratégie qui sont coûteux.

Dans mes travaux dédiés aux problèmes de discrétisation, je me suis intéressé aux trois problèmes décrits ci-dessus dans le cadre de processus avec sauts (processus de Lévy ou sémimartingales plus générales). Les sujets qui m'intéressent particulièrement sont le choix des instant de discrétisation et l'influence du comportement des petits sauts du processus (indice de Blumenthal-Gettoor) sur la vitesse de convergence.

L'article [56] est consacré à l'analyse asymptotique des stratégies de couverture dans les modèles avec sauts, en utilisant la convergence en probabilité, et essentiellement pour les processus ayant une partie martingale continue. Le travail [7] étudie le cas des processus sans composante de diffusion et notamment le lien de l'indice de Blumenthal-Gettoor et de la régularité du pay-off avec la vitesse de convergence en norme  $L^2$ . Dans [38], nous proposons un nouveau schéma de discrétisation des EDS dirigées par un processus de Lévy, fondé sur les instants des grands sauts du processus, et étudions la vitesse de convergence faible. Finalement, dans un travail en cours avec M. Rosenbaum, dont le contenu sera brièvement exposé dans la section 'Perspectives', nous développons des procédures

d'estimation statistique pour des processus de Lévy observés aux temps de sortie d'un domaine. Cette situation apparaît notamment dans la modélisation de microstructure de marché, lorsque le processus de prix est observé aux moments de franchissement des bornes bid/ask.

## 2.1 Couverture discrète dans les modèles avec sauts

La couverture d'une option dans un marché incomplet, et en particulier, dans un marché où les trajectoires des prix ne sont pas continues, est l'un des sujets les mieux explorés en mathématiques financières. Cependant, la plupart d'articles font l'hypothèse de réajustement continu du portefeuille de couverture, qui n'est jamais vérifiée en pratique, en raison de présence des coûts de transaction (même si dans les marchés très liquides cela peut être une bonne approximation).

L'erreur liée à la discrétisation des stratégies de couverture, définie par

$$\varepsilon_T^n := \hat{V}_T^n - V_T,$$

a été analysé par différents auteurs dans le cadre de modèles de diffusion ou processus d'Itô continus. Bertsimas, Kogan et Lo [4] (pour les modèles de diffusion) et plus tard Hayashi et Mykland [28] (pour les semimartingales continues) ont montré que pour la couverture d'une option européenne avec des dates de réajustement équireparties, l'erreur de couverture renormalisée  $\sqrt{n}\varepsilon_T^n$  converge faiblement vers une loi non-dégénérée lorsque le nombre de dates de discrétisation  $n$  tend vers l'infini. La vitesse de convergence en norme  $L^2$  a été étudié par Zhang [59] pour les options européennes de type Call/Put et par Gobet et Temam [27] et Geiss [24, 23] pour des pay-offs irréguliers.

### 2.1.1 Convergence faible de l'erreur de couverture

Dans le travail joint avec E. Voltchkova [56], nous avons étendu les résultats de Hayashi et Mykland sur la convergence faible de l'erreur de couverture renormalisée aux modèles où le processus de prix de sous-jacent et la stratégie de couverture sont des semimartingales régulières, parfois appelés processus de Lévy-Itô.

**Notation et principales hypothèses** Dans cette section nous nous plaçons sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , sur lequel sont définis un mouvement Brownien standard  $W$  sur  $[0, T]$  et une mesure aléatoire de Poisson  $J$  sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$  d'intensité  $dt \times \nu(dx)$ , où  $\nu$  est une mesure positive sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \nu(dx) < \infty$ . La version compensée de  $J$  sera notée  $\hat{J}$ :

$$\hat{J}(dt \times dz) = J(dt \times dz) - dt \times \nu(dz).$$

Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  la filtration naturelle de  $W$  et  $J$  complétée par les ensembles de mesure nulle.

**Définition 1.** *Un processus de Lévy-Itô est un processus admettant la représentation*

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \int_{|z| \leq 1} \gamma_s(z) \hat{J}(ds \times dz) + \int_0^t \int_{|z| > 1} \gamma_s(z) J(ds \times dz). \quad (2.3)$$

où  $\mu$  et  $\sigma$  sont càdlàg  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptés et  $\gamma : \Omega \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $(\omega, z) \mapsto \gamma_t(z)$  est  $\mathcal{F}_t \times \mathcal{B}(\mathbb{R})$ -mesurable pour tout  $t$  et  $t \rightarrow \gamma_t(z)$  est càglàd pour tous  $\omega$  et  $z$ . De plus,  $\gamma_t$  vérifie

$$\gamma_t(z)^2 \leq A_t \rho(z)$$

pour tout  $z$ , où  $\rho$  est une fonction déterministe positive décroissante sur  $(-\infty, 0)$  et croissante sur  $(0, \infty)$  avec  $\int_{|z| \leq 1} \rho(z) \nu(dz) < \infty$  et  $A$  est un processus càglàd  $(\mathcal{F}_t)$ -adapté.



Dans cette section nous supposons que le processus de prix du sous-jacent  $S$  est un processus de Lévy-Itô avec les coefficients  $\mu, \sigma, \gamma$ . Nous supposons également qu'il existe une stratégie  $F$  que l'agent utiliserait si le réajustement continu du portefeuille était possible. Dans les marchés incomplets, cette stratégie ne conduit pas à une réplcation exacte et peut être choisie de plusieurs manières différentes; nous ne nous attardons pas sur les avantages et les inconvénients des différents choix de  $F$  (voir par exemple [12]), et admettons simplement qu'elle est donnée par un autre processus de Lévy-Itô de coefficients  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}, \tilde{\gamma}$ . Nous supposons ensuite que, face à l'impossibilité de réajuster le portefeuille continûment, l'agent applique la même stratégie  $F$  aux dates équireparties  $T_i = iT/n$ ,  $i = 0, \dots, n$ , et nous noterons par  $h := T/N$  l'intervalle entre deux dates de réajustement. La stratégie de couverture est alors constante par morceaux et donnée par  $F_{\underline{\eta}(t)}$ , où l'on note, pour  $t \in (0, T]$ ,

$$\underline{\eta}(t) = \sup\{T_i, T_i < t\}, \quad \bar{\eta}(t) = \inf\{T_i, T_i \geq t\}.$$

Finalement,  $F_t^h$  est la différence continue à gauche entre la stratégie continue et la stratégie discrète:  $F_t^h := F_{t-} - F_{\underline{\eta}(t)}$ .

**Principaux résultats** Puisque dans le cadre de ce travail le processus de prix  $S$  et la stratégie de couverture  $F$  ont des parties martingales continues, le facteur de renormalisation est le même que dans les modèles de diffusion, c'est-à-dire,  $\sqrt{n}$  ou  $\frac{1}{\sqrt{h}}$ . L'erreur de couverture renormalisée est donc donnée par

$$Z_t^n = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^t F_{s-}^h dS_s. \quad (2.4)$$

et sa version constante par morceaux par

$$\bar{Z}_t^n = Z_{\underline{\eta}(t)}^n.$$

Pour décrire la loi limite de  $Z^n$  et  $\bar{Z}^n$ , nous supposons que sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  sont définis, en plus de  $W$  et  $J$ , quatre objets aléatoires indépendants entre eux et de  $W$  et  $J$ : un mouvement Brownien standard  $\bar{W}$ , deux suites de v.a. indépendantes gaussiennes centrées réduites  $(\xi_k)_{k \geq 1}$  et  $(\xi'_k)_{k \geq 1}$  et une suite  $(\zeta_k)_{k \geq 1}$  de v.a. indépendantes uniformes sur  $[0, 1]$ . Soit  $Z$  un processus défini par

$$Z_t = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^t \sigma_s \tilde{\sigma}_s d\bar{W}_s + \sum_{i: \tau_i \leq t} \Delta F_{\tau_i} \sqrt{\zeta_i} \xi_i \sigma_{\tau_i} + \sum_{i: \tau_i \leq t} \Delta S_{\tau_i} \sqrt{1 - \zeta_i} \xi'_i \tilde{\sigma}_{\tau_i-},$$

où  $(\tau_i)_{i \geq 1}$  sont les temps de saut de  $J$  (dans un ordre quelconque).

Rappelons la définition de la convergence stable en loi. Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. aux valeurs dans un espace polonais  $E$ , toutes définies sur le même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . On dit que  $X_n$  converge vers  $X$  au sens de la convergence stable en loi si  $X$  est une v.a. définie sur une extension  $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{P}})$  de l'espace initial, et

$$\lim_n E[Uf(X_n)] = \tilde{E}[Uf(X)]$$

pour toute  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée et pour toute v.a. bornée  $U$ .

### **Théorème 1.**

- (a) *Le processus  $\bar{Z}^n$  converge vers  $Z$  au sens de la convergence stable en loi dans la topologie de Skorohod sur  $\mathbb{D}([0, T])$ .*
- (b) *Le processus  $Z^n$  converge vers  $Z$  au sens de la convergence stable en lois fini-dimensionnelles.*
- (c) *Supposons que la stratégie  $F$  et le processus de prix  $S$  n'ont pas de partie martingale continue:  $\sigma \equiv \tilde{\sigma} \equiv 0$ . Alors  $Z_t^n \rightarrow 0$  et  $\bar{Z}_t^n \rightarrow 0$  en probabilité, uniformément en  $t \in [0, T]$ .*

*Remarque 1.* Un processus limite similaire apparaît dans l'étude du comportement asymptotique de la variation quadratique [30, Theorem 2.11], à cause du lien qui existe entre l'intégrale stochastique  $\int X_t dX_t$  et la variation quadratique  $[X, X]$  via la formule d'intégration par parties.

**Exemple: couverture discrète dans un modèle de diffusion avec sauts** Pour illustrer notre résultat dans un cadre plus appliqué, nous étudions le cas de couverture en delta dans un modèle de type 'diffusion+sauts'. Sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ ,

$$S_t = S_0 e^{X_t} \quad X_t = bt + \Sigma W_t + \int_{[0,t] \times \mathbb{R}} z J(ds \times dz)$$

où  $\Sigma > 0$  et  $J$  est une mesure aléatoire de Poisson d'intensité  $ds \times \nu(dz)$  avec  $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ . Cela implique:

$$\mu_t = S_t \left( b + \Sigma^2/2 + \int_{|z| \leq 1} (e^z - 1) \nu(dz) \right), \quad \sigma_t = \Sigma S_t, \quad \gamma_t = S_t (e^z - 1).$$

Nous supposons que le prix de l'option peut être calculé comme l'espérance du pay-off sous une probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , sous laquelle  $X$  est encore un processus de Lévy, et pour simplifier nous admettons que  $X$  a la même mesure de Lévy sous  $\mathbb{Q}$  et sous  $\mathbb{P}$ . Le prix à l'instant  $t$  de l'option de pay-off  $G_T = G(S_T)$  est alors une fonction déterministe de  $t$  et  $S_t$ , donnée par

$$C(t, S) = E^{\mathbb{Q}}[G(S_T) | S_t = S] = E^{\mathbb{Q}}[G(S e^{X_{T-t}})] \quad (2.5)$$

Nous étudions la couverture de cet option en utilisant la stratégie de couverture en delta

$$F_t = \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial S} \quad (2.6)$$

qui est la stratégie la plus utilisée en pratique même si elle n'est pas optimale en présence de sauts. Les coefficients  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\gamma}$  de la stratégie s'obtiennent alors par la formule d'Itô et la seule difficulté technique est de montrer que ces processus ont des limites à gauche en  $T$  même lorsque le pay-off est irrégulier. Pour pouvoir prouver l'existence des limites, nous imposons des conditions assez fortes sur la mesure de Lévy. En particulier, nos hypothèses sont vérifiées dans le cas de couverture d'une option digitale dans le modèle de Merton (diffusion plus sauts gaussiens).

**Proposition 1.** *Supposons que*

- La fonction pay-off  $G$  est bornée et  $C^\infty$  par morceaux, avec au plus un nombre fini de discontinuités;
- Le coefficient de diffusion est positif:  $\Sigma > 0$ ;
- La mesure de Lévy possède une densité  $C^\infty$  bornée (également notée par  $\nu$ ), qui vérifie  $\int_{\mathbb{R}} |x| \nu(x) dx < \infty$  et  $\int_{\mathbb{R}} |\nu^{(k)}(x)| dx < \infty$  pour tout  $k \geq 0$ .

Alors l'erreur de couverture renormalisée (2.4) converge vers le processus

$$Z_t = \sqrt{\frac{1}{2}} \int_0^t \Sigma^2 S_s^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} d\bar{W}_s + \sum_{s \leq t: \Delta S_s \neq 0} \left( \frac{\partial C}{\partial S}(s, S_s) - \frac{\partial C}{\partial S}(s, S_{s-}) \right) \sqrt{\zeta_i \xi_i} \Sigma S_s + \sum_{s \leq t: \Delta S_s \neq 0} \Delta S_s \sqrt{1 - \zeta_i \xi_i} \Sigma S_{s-} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(s, S_{s-}) \quad (2.7)$$

au sens de la convergence stable en lois fini-dimensionnelles.

### 2.1.2 Convergence en norme $L^2$ de l'erreur de couverture

La limite faible de l'erreur de couverture, qui a été calculé dans la section précédente, permet d'estimer des fonctionnelles bornées de l'erreur. En pratique le risque d'une stratégie de couverture est plus souvent mesuré par la norme  $L^2$ . Dans l'article [7], nous nous sommes donc intéressés à la vitesse de convergence de l'erreur de discrétisation vers zéro en norme  $L^2$ . Ce type de convergence, plus simple à analyser que la convergence fonctionnelle, nous a permis notamment d'étudier le lien entre l'erreur de discrétisation et le comportement des petits sauts du processus (indice de Blumenthal-Gettoor).

Les principales conclusions de [7] sont les suivantes. Premièrement, la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} nE[(\varepsilon_T^n)^2]$  est toujours positive, même pour des processus n'ayant pas de partie martingale continue, pour lesquels comme on vient de voir,  $\sqrt{n}\varepsilon_T^n$  converge vers zéro en probabilité. Pour les processus de Lévy sans composante de diffusion, la vitesse de convergence en norme  $L^2$  est donc différente de la vitesse de convergence en probabilité, parce que les grands sauts du processus contribuent à la limite en norme  $L^2$  mais pas à celle en probabilité.

Deuxièmement, la vitesse de convergence en norme  $L^2$  dépend de la stratégie de couverture utilisée. Dans [7] nous avons analysé et comparé deux stratégies spécifiques: la couverture quadratique, qui est la stratégie optimale pour le critère  $L^2$ , et la couverture en delta. Pour les options dont la fonction pay-off est régulière, les deux stratégies ont des erreurs de discrétisation similaires, et qui convergent vers zéro avec la même vitesse, mais dans le cas de pay-offs irréguliers, la couverture en delta conduit à des erreurs beaucoup plus importantes, qui convergent vers zéro moins vite (et dans certains cas pas du tout).

Finalement, pour les pay-offs irréguliers, tels que les options digitales, la vitesse de convergence de l'erreur dépend du comportement de la mesure de Lévy au voisinage de zéro. Sous l'hypothèse que les petits sauts du processus se comportent comme ceux d'un processus  $\alpha$ -stable, nous caractérisons la vitesse de convergence en fonction de  $\alpha$ .

**Le modèle et les principales hypothèses** Dans cette section nous supposons que le sous-jacent suit un modèle exponentielle-Lévy:  $S_t = e^{X_t}$ , où  $X$  est un processus de Lévy<sup>1</sup> de triplet caractéristique  $(a^2, \nu, \gamma)$ . Ceci permet d'utiliser les méthodes de transformée de Fourier pour le calcul des prix d'options et des ratios de couverture (cf [40] pour une introduction générale aux méthodes de Fourier pour la valorisation d'options, et [35] pour leur application à la couverture).

Notons par  $\phi_t$  la fonction caractéristique de  $X_t$ , et par  $\psi(u) = \log \phi_1(u)$  l'exposant caractéristique. Nous supposons qu'il existe une probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$  sous laquelle les prix de tous les actifs sont des martingales, et sous laquelle  $X$  est encore un processus de Lévy, avec peut-être une mesure de Lévy différente, notée par  $\bar{\nu}$ . De même, la fonction et l'exposant caractéristique de  $X$  sous  $\mathbb{Q}$  sont notées  $\bar{\phi}_t$  et  $\bar{\psi}$ .

Dans un premier temps, supposons que la stratégie de couverture est donné par un processus de Lévy-Itô (2.3) avec coefficients  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\gamma}$ . Plus tard, nous spécialiserons les résultats pour la couverture en delta et la couverture quadratique.

**Résultat général sur la convergence en norme  $L^2$**  Soit  $r(h) : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  avec  $\lim_{h \downarrow 0} r(h) = 0$ . Cette fonction correspond à la vitesse de la convergence vers 0 de l'erreur  $L^2$

<sup>1</sup>Rappelons qu'un processus de Lévy est un processus aux accroissements indépendants et stationnaires, continu en probabilité. La loi d'un processus de Lévy  $X$  sur  $\mathbb{R}^d$  est complètement déterminée par son *triplet caractéristique*  $(A, \nu, \gamma)$ : une matrice  $A$  définie positive de taille  $d \times d$ , une mesure positive  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^d$  vérifiant  $\int_{\mathbb{R}^d} 1 \wedge \|x\|^2 \nu(dx) < \infty$  et un vecteur  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ .

$$E[e^{i\langle u, X_t \rangle}] = e^{t\psi(u)}, \quad \psi(u) = -\frac{\langle Au, u \rangle}{2} + i\langle \gamma, u \rangle + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle u, z \rangle} - 1 - i\langle u, h(z) \rangle) \nu(dz), \quad (2.8)$$

où  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la fonction de troncature des petits sauts. Le vecteur  $\gamma$  dépend du choix de  $h$ , mais  $A$  et  $\nu$  n'en dépendent pas. Dans la suite on va utiliser la fonction  $h(x) = x1_{|x| \leq 1}$  sauf mention contraire.

de couverture. Le résultat suivant donne un critère 'prévisible' de convergence  $L^2$  de l'erreur de couverture avec une vitesse donnée.

**Théorème 2.** *Supposons que*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{h}{r(h)} E \left[ \int_0^T S_t^2 (\bar{\eta}(t) - t) \left( \tilde{\mu}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t^2(z) \nu(dz) \right) dt \right] = 0. \quad (2.9)$$

Alors

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{r(h)} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \lim_{h \downarrow 0} \frac{A}{r(h)} E \left[ \int_0^T S_t^2 (\bar{\eta}(t) - t) \left( \tilde{\sigma}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t^2(z) e^{2z} \nu(dz) \right) dt \right], \quad (2.10)$$

dès que la limite dans la partie droite existe, avec  $A = a^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \nu(dx)$ .

De ce théorème, on déduit immédiatement le comportement de l'erreur  $L^2$  dans les cas réguliers:

**Corollaire 1.** *Supposons que (2.9) est vérifiée et de plus,*

$$E \left[ \int_0^T S_t^2 \left( \tilde{\sigma}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t^2(z) e^{2z} \nu(dz) \right) dt \right] < \infty. \quad (2.11)$$

Alors

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{A}{2} E \left[ \int_0^T S_t^2 \left( \tilde{\sigma}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t^2(z) e^{2z} \nu(dz) \right) dt \right].$$

Si la condition (2.11) n'est pas vérifiée, la limite dans (2.10) ne peut exister qu'avec une vitesse de convergence inférieure à  $r(h) = h$ . La meilleure vitesse de convergence possible en norme  $L^2$  est donc  $r(h) = h$ , mais pour des fonctions pay-off irrégulières la vitesse peut être moins bonne.

**Les options et les stratégies** Dans la suite de cette section nous allons étudier le comportement de l'erreur de discrétisation en norme  $L^2$  pour des options et des stratégies spécifiques. On considère une option européenne de pay-off  $G(S_T)$  à la date  $T$ , et on note  $g(x) := G(e^x)$ . Le prix en  $t$  d'une telle option est notée  $C(t, S_t)$ . Nous utiliserons la transformée de Fourier du log-pay-off qui sera notée  $\hat{g}(u) := \int_{\mathbb{R}} e^{iux} g(x) dx$  pour les valeurs (complexes) de  $u$  pour laquelle elle existe.

Nous travaillerons sous deux hypothèses alternatives sur le log-pay-off  $g$ :

- Pay-offs réguliers:  $g$  est différentiable et il existe  $R \in \mathbb{R}$  tel que

$$x \mapsto g'(x) e^{-Rx} \quad \text{est de variation finie sur } \mathbb{R} \text{ et appartient à } L^1(\mathbb{R}), \quad (2.12)$$

$$x \mapsto g(x) e^{-Rx} \in L^1(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

Par exemple, l'option call de pay-off  $G(S) = (S - K)^+$  vérifie cette condition pour tout  $R > 1$ .

- Pay-offs irréguliers: il existe  $R \in \mathbb{R}$  tel que

$$x \mapsto g(x) e^{-Rx} \quad \text{est de variation finie sur } \mathbb{R} \text{ et appartient à } L^1(\mathbb{R}). \quad (2.14)$$

L'exemple typique est l'option digitale de pay-off  $G(S) = 1_{S \geq K}$ , qui vérifie cette condition pour tout  $R > 0$ .

La stratégie de couverture en delta est définie par (2.6) et la stratégie de couverture quadratique, qui minimise l'erreur  $L^2$  de couverture sous la probabilité martingale

$$E^Q \left[ \left( G(S_T) - C(0, S_0) - \int_0^T F_t dS_t \right)^2 \right],$$

est donnée par

$$F_t = \frac{d\langle C, S \rangle_t^Q}{d\langle S, S \rangle_t^Q}, \quad (2.15)$$

où l'on écrit  $C_t := C(t, S_t)$ . Les coefficients de décomposition (2.3) pour ces deux stratégies sont

$$\tilde{\mu}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) (-iu) S_t^{-1-iu} (\psi(u+i) - \bar{\psi}(-u)) du, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\sigma}_t = \frac{a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) (-iu) (-1-iu) S_t^{-1-iu} du, \quad (2.17)$$

$$\tilde{\gamma}_t(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) (-iu) S_t^{-1-iu} (e^{(-1-iu)z} - 1) du. \quad (2.18)$$

pour la couverture en delta et

$$\tilde{\mu}_t = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) \Upsilon(u) S_t^{-1-iu} (\psi(-u+i) - \bar{\psi}(-u)) du, \quad (2.19)$$

$$\tilde{\sigma}_t = \frac{a}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) \Upsilon(u) (-1-iu) S_t^{-1-iu} du, \quad (2.20)$$

$$\tilde{\gamma}_t(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}+iR} \hat{g}(u) \bar{\phi}_{T-t}(-u) \Upsilon(u) S_t^{-1-iu} (e^{(-1-iu)z} - 1) du. \quad (2.21)$$

pour la couverture quadratique, où

$$\Upsilon(u) = \frac{\bar{\psi}(-u-i) - \bar{\psi}(-u) - \bar{\psi}(-i)}{\bar{\psi}(-2i) - 2\bar{\psi}(-i)}.$$

Ces coefficients s'obtiennent à partir des représentations par transformée de Fourier pour les prix d'option, en appliquant la formule d'Itô sous le signe d'intégrale puis le théorème de Fubini stochastique.

**Résultats pour les stratégies spécifiques** Commençons par énoncer les différentes hypothèses sur la mesure de Lévy de  $X$  sous  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  qui seront utilisées dans la suite. Le paramètre  $R$  ci-dessous est le même que dans les équations (2.12)–(2.14).

Pour analyser la couverture en delta, nous travaillerons sous l'hypothèse d'intégrabilité suivante:

$$\int_{|x|>1} e^{Rx} \bar{\nu}(dx) < \infty, \quad \int_{|x|>1} e^{2(Rx \vee x)} \nu(dx) < \infty, \quad \text{et} \quad \int_{|x|>1} e^{2(R-1)x} \nu(dx) < \infty. \quad (2.22)$$

La première condition assure que le pay-off de l'option est intégrable sous  $\mathbb{Q}$ , la deuxième garantit que les prix de l'option et du sous-jacent sont de carré intégrable sous  $\mathbb{P}$  (pour définir la norme  $L^2$  de l'erreur de discrétisation), et la troisième condition est nécessaire pour construire la représentation de type Lévy-Itô de la stratégie de couverture.

Pour analyser la couverture quadratique, les prix de l'option et du sous-jacent doivent aussi être de carré intégrable sous  $\mathbb{Q}$ .

$$\int_{|x|>1} e^{2(Rx \vee x)} \bar{\nu}(dx) < \infty, \quad \int_{|x|>1} e^{2(Rx \vee x)} \nu(dx) < \infty, \quad \text{et} \quad \int_{|x|>1} e^{2(R-1)x} \nu(dx) < \infty. \quad (2.23)$$

Les hypothèses alternatives suivantes déterminent la décroissance de la fonction caractéristique à l'infini.

(H1) La mesure de Lévy  $\nu$  est de la forme  $\nu = \nu_0 + \nu_1$  où  $\nu_0$  est une mesure finie sur  $\mathbb{R}$  et  $\nu_1$  a une densité positive

$$\nu_1(x) = \frac{k(x)}{|x|},$$

où la fonction  $k > 0$  est continue à droite et croissante sur  $(-\infty, 0)$  et continue à gauche et décroissante sur  $(0, \infty)$ .

(H2- $\alpha$ ) La mesure de Lévy  $\nu$  vérifie

$$\limsup_{r \rightarrow 0} r^{\alpha-2} \int_{[-r,r]} x^2 \nu(dx) > 0.$$

(H3- $\alpha$ ) La mesure de Lévy  $\nu$  vérifie

$$\int_{[-1,1]} |x|^\alpha \nu(dx) < \infty.$$

(H4- $\alpha$ ) La mesure de Lévy  $\nu$  a une densité qui vérifie

$$\nu(x) = \frac{f(x)}{|x|^{1+\alpha}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f_+, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f_-$$

pour deux constantes  $f_- > 0$  and  $f_+ > 0$ .

L'hypothèse H1 implique la décroissance de la fonction caractéristique  $\phi_t(u)$  au moins comme une puissance négative de  $|u|$  quand  $|u| \rightarrow \infty$ . Elle est vérifiée par la plupart de modèles paramétriques d'intensité de sauts infinie.

Les hypothèses H2- $\alpha$ , H3- $\alpha$  et H4- $\alpha$  avec  $0 < \alpha < 2$  traduisent les différents aspects du fait que la mesure de Lévy se comporte comme celle d'un processus  $\alpha$ -stable. Elles sont vérifiées par le modèle CGMY (2.33), le modèle NIG (2.44) (avec  $\alpha = 1$ ) ainsi que la loi hyperbolique généralisée (avec  $\alpha = 1$ ), mais pas par le modèle variance gamma.

Nous commençons notre analyse par des pay-offs réguliers, pour lesquels la vitesse de convergence est  $r(h) = h$ .

**Théorème 3** (Pay-offs réguliers). *Soit  $R \in \mathbb{R}$  tel que la fonction pay-off vérifie les conditions (2.12)–(2.13). Supposons que*

- soit la stratégie de couverture est donnée par (2.6) (couverture en delta) et la condition (2.22) est vérifiée,
- soit la stratégie de couverture est donnée par (2.15) (couverture quadratique) et la condition (2.23) est vérifiée.

*Supposons que l'une des trois conditions alternatives est vérifiée:*

- La condition H1 et  $a = 0$ ;
- La condition H2- $\alpha$  avec  $\alpha \in (0, 2)$  et  $a = 0$ ;

- $a > 0$ .

Alors

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{A}{2} E \left[ \int_0^T S_t^2 \left( \tilde{\sigma}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t(z) e^{2z} \nu(dz) \right) dt \right]. \quad (2.24)$$

Dans le cas des pay-offs irréguliers, la vitesse de convergence de l'erreur de discrétisation vers zéro n'est pas nécessairement  $r(h) = h$ , mais peut dépendre des propriétés de la mesure de Lévy de  $X$ . Il faut donc faire des hypothèses précises sur cette mesure de Lévy pour pouvoir calculer la vitesse de convergence exacte. Pour la même raison, il est nécessaire de choisir un pay-off spécifique.

**Théorème 4** (Couverture en delta, options digitales). *Supposons que la fonction pay-off est  $G(S_T) = 1_{S_T \geq K}$ , que la condition (2.22) est vérifiée pour un  $R > 0$ , et que la stratégie de couverture est donnée par (2.6).*

1. Si  $a = 0$  et  $\nu$  satisfait  $H4-\alpha$  avec  $\alpha \in (1, 2)$ , alors l'erreur de couverture vérifie

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{r(h)} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{AD_\alpha}{2\pi(f_+ + f_-)^{1/\alpha}} p_T(\log K),$$

avec  $r(h) = h^{1-1/\alpha}$ , où  $D_\alpha$  est une constante donnée explicitement par

$$D_\alpha := \frac{1}{(2\Gamma(-\alpha) \cos(\pi(2-\alpha)/2))^{1/\alpha}} \int_{\mathbb{R}} dv \frac{1 - e^{-|v|^\alpha} - |v|^\alpha e^{-|v|^\alpha}}{|v|^\alpha (1 - e^{-|v|^\alpha})}$$

et  $p_T$  est la densité de  $X_T$ , qui peut être calculée à partir de la fonction caractéristique via

$$p_T(\log K) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dv e^{-iv \log K} e^{T\psi(v)}.$$

2. Si  $a > 0$  alors l'erreur de couverture vérifie

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{AD}{2\pi a} p_T(\log K),$$

avec

$$D := \int_{\mathbb{R}} dv \frac{1 - e^{-v^2} - v^2 e^{-v^2}}{v^2 (1 - e^{-v^2})}. \quad (2.25)$$

Ainsi, la vitesse de convergence vers 0 de l'erreur de discrétisation de la couverture en delta s'améliore lorsque l'indice de Blumenthal-Gettoor croît, et le processus se rapproche plus d'une diffusion. Dans tous les cas, la vitesse de convergence en norme  $L^2$  est moins bonne que la vitesse de convergence en probabilité donnée par Proposition 1. Pour des valeurs de  $\alpha$  inférieurs à 1, l'erreur de discrétisation ne converge pas vers zéro avec une vitesse en loi de puissance. Le comportement de la couverture quadratique pour les pay-offs irréguliers est très différent: la vitesse de convergence s'améliore quand l'indice de Blumenthal-Gettoor décroît, et dans certaines conditions la convergence a lieu en régime régulier même pour les options digitales.

**Théorème 5** (Couverture quadratique, options digitales, régime régulier). *Soit  $R \in \mathbb{R}$  tel que les conditions (2.14) et (2.23) sont vérifiées. De plus, supposons que l'une des conditions alternatives suivantes est vrai:*

- $a = 0$  et  $\nu$  vérifie  $H1$  et  $H3-\alpha_+$  pour  $\alpha_+ \in (0, 1]$ .
- $a = 0$  et  $\nu$  vérifie  $H2-\alpha_-$  et  $H3-\alpha_+$  avec  $0 < \alpha_- \leq \alpha_+ < \frac{3}{2}$ .

Alors pour la stratégie de couverture donnée par 2.15,

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{A}{2} E \left[ \int_0^T S_t^2 \left( \tilde{\sigma}_t^2 + \int_{\mathbb{R}} \tilde{\gamma}_t(z) e^{2z} \nu(dz) \right) dt \right].$$

**Théorème 6** (Couverture quadratique, options digitales, régime irrégulier). *Supposons que la fonction pay-off est  $G(S_T) = 1_{S_T \geq K}$ , que la condition (2.23) est vérifiée pour un  $R > 0$ , et que la stratégie de couverture est donnée par (2.15).*

1. Si  $a = 0$  et  $\nu$  satisfait  $H4-\alpha$  avec  $\alpha \in (\frac{3}{2}, 2)$ , alors l'erreur de couverture vérifie

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{r(h)} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{1}{2\pi} A Q_\alpha \frac{\gamma_+ \gamma_-}{A^2} (f_+ + f_-)^{\frac{3}{\alpha} - 2} p_T(\log K)$$

avec  $r(h) = h^{\frac{3}{\alpha} - 1}$ , où  $Q_\alpha$  est une constante donnée par

$$Q_\alpha := \left( 2\Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\pi(2-\alpha)}{2}\right) \right)^{\frac{3}{\alpha} - 2} \int_{\mathbb{R}} dv \frac{1 - e^{-|v|^\alpha} - |v|^\alpha e^{-|v|^\alpha}}{|v|^{4-\alpha} (1 - e^{-|v|^\alpha})},$$

$\bar{A} = a^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)^2 \bar{\nu}(dx)$  et les constantes  $\gamma_+, \gamma_-$  sont données par

$$\begin{aligned} \gamma_+ &= \Gamma(1-\alpha) \{ f_+ e^{-i\pi(1-\alpha)/2} - f_- e^{i\pi(1-\alpha)/2} \}, \\ \gamma_- &= \Gamma(1-\alpha) \{ f_+ e^{i\pi(1-\alpha)/2} - f_- e^{-i\pi(1-\alpha)/2} \}. \end{aligned}$$

2. Si  $a > 0$  alors l'erreur de couverture vérifie

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} E \left[ \left( \int_0^T F_t^h dS_t \right)^2 \right] = \frac{AD}{2\pi a} p_T(\log K) \frac{a^4}{A^2}$$

avec  $D$  donné par (2.25).

## 2.2 Discrétisation des EDS dirigées par des processus de Lévy

L'évolution de systèmes stochastiques ou bruités peut souvent être représentée par une équation différentielle stochastique de type (2.1). Les cas où on peut trouver la solution explicite d'une EDS étant bien rares, la simulation numérique devient incontournable. Lorsque  $Z$  est un mouvement Brownien ou un mouvement Brownien avec drift, la méthode traditionnelle est le schéma d'Euler à pas constant (2.2), qui a une vitesse de convergence faible de  $\frac{1}{n}$ . Dans le cas où  $Z$  est un processus de Lévy, le schéma d'Euler peut aussi être appliqué, et il a été étudié par [48, 32, 31]. Dans ce cas cependant, se schéma rencontre deux difficultés majeures: premièrement, les accroissements d'un processus de Lévy, à la différence de ceux du mouvement Brownien, sont difficiles à simuler, et deuxièmement, un grand saut de  $Z$  qui arrive au milieu d'un intervalle de discrétisation peut donner lieu à une erreur importante.

Une idée naturelle due à S. Rubenthaler [51] qui permet de contourner ces difficultés, est d'approcher  $Z$  par un processus  $Z^\varepsilon$  constant par morceaux, et de placer les points de discrétisation



à tous les instants de saut de ce processus. La vitesse de convergence du schéma est alors déterminée en fonction de l'intensité de sauts de  $Z^\varepsilon$ , qui correspond à la complexité moyenne de simulation d'une trajectoire. Cette approximation ne nécessite pas de simuler les accroissements de  $Z$  mais elle est assez grossière lorsque les sauts de  $Z$  sont concentrés autour de zéro (e.g., dans le cas d'un processus  $\alpha$ -stable avec  $\alpha$  proche de 2) et peut converger très lentement.

Dans un travail joint avec Arturo Kohatsu-Higa [38], nous proposons deux extensions du schéma de Rubenthaler pour les EDS dirigés par un processus de Lévy sans partie brownienne, qui, comme le schéma de Rubenthaler, ne nécessitent pas de simuler les accroissements mais ont des vitesses de convergence comparables au schéma d'Euler classique (et dans certains cas bien meilleures). Le premier algorithme, un peu plus rapide et facile à implémenter, s'applique aux EDS unidimensionnelles, et le deuxième couvre le cas général.

Notre méthode est basée sur trois approximations:

- Comme suggéré par Rubenthaler, la première étape est de tronquer les sauts de  $Z$  plus petits en valeur absolue qu'un certain niveau  $\varepsilon$ . Les points de discrétisation du schéma sont placés aux instants de tous les sauts qui sont plus grands que  $\varepsilon$ .
- Pour prendre en compte les sauts plus petits que  $\varepsilon$ , suivant une idée de Asmussen et Rosinski [2], nous les remplaçons par un mouvement Brownien  $\sigma_\varepsilon W$ , où  $\sigma_\varepsilon$  est l'écart-type du processus associé aux petits sauts. Nous obtenons ainsi une EDS continue entre les dates de grands sauts de  $Z$ .
- Finalement, une approximation de la solution de l'EDS continue est construite comme une perturbation autour de la solution de l'EDO déterministe, qui correspond à enlever les sauts complètement. Cet EDO peut être résolu soit explicitement soit avec une méthode de type Runge-Kutta.

**Notation** Soit  $Z$  un processus de Lévy en dimension  $d$  sans composante de diffusion, c'est-à-dire,

$$Z_t = \gamma t + \int_0^t \int_{|y| \leq 1} y \widehat{J}(ds \times dy) + \int_0^t \int_{|y| > 1} y J(ds \times dy), \quad t \in [0, 1],$$

où  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ ,  $J$  est une mesure aléatoire de Poisson sur  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$  d'intensité  $\nu$  qui vérifie  $\nu(\mathbb{R}) = \infty$  et  $\int |y|^2 \nu(dy) < \infty$  et  $\widehat{J}(ds \times dy) = J(ds \times dy) - ds \nu(dy)$  est la version compensée de  $J$ . Soit  $X$  un processus stochastique à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , unique solution de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t h(X_{s-}) dZ_s, \quad t \in [0, 1], \quad (2.26)$$

où  $h$  prend ses valeurs dans l'ensemble de matrices  $n \times d$ .

La mesure de Lévy infinie  $\nu$  sera approchée par les mesures finies  $1_{|y| > \varepsilon} \nu(dy)$  avec  $\varepsilon \downarrow 0$ . Dans [38] nous considérons également d'autres schémas pour tronquer les petits sauts qui peuvent être utiles pour simplifier la procédure de simulation des grands sauts. Nous prendrons toujours sans perte de généralité  $\varepsilon \leq 1$ .

Le processus  $Z$  est représenté en loi comme suit:

$$\begin{aligned} Z_t &\stackrel{d}{=} \gamma_\varepsilon t + Z_t^\varepsilon + R_t^\varepsilon, \\ \gamma_\varepsilon &= \gamma - \int_{\varepsilon < |y| \leq 1} y \nu(dy), \\ Z_t^\varepsilon &= \int_0^t \int_{|y| > \varepsilon} y J(ds \times dy), \\ R_t^\varepsilon &= \int_0^t \int_{|y| \leq \varepsilon} y \widehat{J}(ds \times dy). \end{aligned}$$

Nous designons par  $\lambda_\varepsilon = \int_{|y|>\varepsilon} \nu(dy)$  l'intensité de  $Z^\varepsilon$  et par  $\Sigma^\varepsilon$  la matrice de variance-covariance de  $R_1^\varepsilon$ :

$$\Sigma_{ij}^\varepsilon = \int_{|y|\leq\varepsilon} y_i y_j \nu(dy).$$

Dans le cas unidimensionnel ( $d = 1$ ) on pose  $\sigma_\varepsilon^2 := \Sigma_{11}^\varepsilon$ .

Les temps de sauts de  $Z^\varepsilon$  sont notées par  $T_i^\varepsilon$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , avec  $T_0^\varepsilon = 0$ , et  $(N_t^\varepsilon)$  est le processus de comptage correspondant (processus de Poisson).

Finalement, la filtration de  $J$  et du mouvement brownien  $W$  utilisé pour l'approximation des petits sauts sera notée  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ .

### 2.2.1 Schéma pour EDS unidimensionnelles

Pour notre premier algorithme, posons  $d = n = 1$ . L'équation différentielle ordinaire qui correspond à notre EDS,

$$dX_t = h(X_t)dt, \quad X_0 = x. \quad (2.27)$$

peut être résolue formellement comme

$$X_t := \theta(t; x) = F^{-1}(t + F(x)),$$

où  $F$  est la primitive de  $\frac{1}{h(x)}$ . Une autre possibilité est d'utiliser un schéma de discrétisation d'ordre élevé (tel que Runge-Kutta, voir Proposition 2).

Le schéma de discrétisation est défini par récurrence, posant  $\hat{X}(0) = X_0$  et pour  $i \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \hat{X}(T_{i+1}^\varepsilon -) &= \theta(\gamma_\varepsilon(T_{i+1}^\varepsilon - T_i^\varepsilon) + \sigma_\varepsilon(W(T_{i+1}^\varepsilon) - W(T_i^\varepsilon)) \\ &\quad - \frac{1}{2}h'(\hat{X}_{T_i^\varepsilon})\sigma_\varepsilon^2(T_{i+1}^\varepsilon - T_i^\varepsilon); \hat{X}(T_i^\varepsilon)) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\hat{X}(T_{i+1}^\varepsilon) = \hat{X}(T_{i+1}^\varepsilon -) + h(\hat{X}(T_{i+1}^\varepsilon -))\Delta Z(T_{i+1}^\varepsilon). \quad (2.29)$$

De même, pour un point arbitraire  $t$ ,

$$\hat{X}(t) = \theta(\gamma_\varepsilon(t - \eta_t) + \sigma_\varepsilon(W(t) - W(\eta_t)) - \frac{1}{2}h'(\hat{X}(\eta_t))\sigma_\varepsilon^2(t - \eta_t); \hat{X}(\eta_t)), \quad (2.30)$$

où  $\eta_t := \sup\{T_i^\varepsilon : T_i^\varepsilon \leq t\}$ .

L'idée du schéma consiste donc à remplacer l'équation initiale par une approximation de type Asmussen-Rosinski, qui est résolue explicitement entre les temps de grands sauts, et qui coïncide avec la solution exacte pour tout  $h$  si le processus  $Z$  est déterministe et pour  $h$  affine dans tous les cas. Le principe de la construction est clarifié par le lemme suivant.

**Lemme 1.** *Soit  $h \in C^1(\mathbb{R})$ . Le processus  $\hat{X}$  donné par (2.28)–(2.30) est la solution de l'EDS*

$$d\hat{X}_t = h(\hat{X}_{t-}) \left\{ dZ_t^\varepsilon + \sigma_\varepsilon dW_t + \gamma_\varepsilon dt + \frac{1}{2}(h'(\hat{X}_t) - h'(\hat{X}_{\eta(t)}))\sigma_\varepsilon^2 dt \right\}. \quad (2.31)$$

L'équation (2.31) fait clairement apparaître les deux sources de l'erreur d'approximation du schéma (2.28)–(2.30): le remplacement des petits sauts  $R^\varepsilon$  par le mouvement brownien  $\sigma^\varepsilon W$  et le terme additionnel  $\frac{1}{2}(h'(\hat{X}_t) - h'(\hat{X}_{\eta(t)}))\sigma_\varepsilon^2 dt$ , qui permet la résolution explicite de l'équation (2.31).

Pour l'analyse de convergence, nous aurons besoin de conditions suivantes de régularité (paramétrées par un entier  $n$ ):

**(H<sub>n</sub>)**  $f \in C_b^n$ ,  $h \in C_b^n$  et  $\int |z|^{2n} \nu(dz) < \infty$ , où  $C_b^n$  est l'espace des fonctions bornées, continûment différentiables  $n$  fois avec dérivées bornées;

( $\mathbf{H}'_n$ )  $f \in C^n$ ,  $h \in C'_b$ ,  $f^{(k)}$  ont une croissance au plus polynomiale pour  $1 \leq k \leq n$  et  $\int |z|^k \nu(dz) < \infty$  pour tous  $k \geq 1$ .

**Théorème 7.**

(i) Sous la condition ( $\mathbf{H}_3$ ) ou ( $\mathbf{H}'_3$ ), on a

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon^2 + |\gamma_\varepsilon|) + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^3 \nu(dy) \right).$$

(ii) Sous la condition ( $\mathbf{H}_4$ ) ou ( $\mathbf{H}'_4$ ), si  $\gamma_\varepsilon$  est borné uniformément en  $\varepsilon$  et  $\nu$  vérifie

$$\left| \int_{|y| \leq \varepsilon} y^3 \nu(dy) \right| \leq C \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 \nu_0(dy) \quad (2.32)$$

pour une mesure de Lévy  $\nu_0$  et une constante  $C > 0$ , on a

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon^2 + |\gamma_\varepsilon|) + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 (\nu_0 + \nu)(dy) \right)$$

et en particulier,

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 (\nu_0 + \nu)(dy) \right).$$

*Remarque 2.* La condition (2.32) correspond à la situation où  $\nu$  est 'localement symétrique' près de zéro. Elle est vérifiée, par exemple, si  $\nu$  est une mesure symétrique mais aussi si  $\nu(dy) = (1 + \xi(y))\nu_0(dy)$ , où  $\nu_0$  est une mesure symétrique vérifiant les conditions d'intégrabilité et  $\xi(y) = O(y)$  pour  $y \rightarrow 0$ . Cette dernière situation apparaît par exemple pour le processus CGMY dont la densité de Lévy est

$$\nu(x) = \frac{C e^{-\lambda_- |x|}}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{x < 0} + \frac{c e^{-\lambda_+ |x|}}{|x|^{1+\alpha}} \mathbf{1}_{x > 0}. \quad (2.33)$$

Dans ce cas on peut prendre par exemple

$$\nu_0(x) = \frac{C e^{-(\lambda_+ + \lambda_-)|x|/2}}{|x|^{1+\alpha}}.$$

**Corollaire 2** (Les vitesses de convergence minimales). *Sous les conditions de la partie (i) du Théorème 7,*

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| = o(\lambda_\varepsilon^{-\frac{1}{2}}),$$

et sous les conditions de la partie (ii),

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| = o(\lambda_\varepsilon^{-1}).$$

*Exemple 1* (Comportement 'stable-like'). Supposons que la mesure de Lévy se comporte comme celle d'un processus  $\alpha$ -stable, c'est-à-dire qu'elle a une densité  $\nu(y)$  qui vérifie

$$\nu(y) = \frac{g(y)}{|y|^{1+\alpha}}, \quad (2.34)$$

où  $\alpha \in (0, 2)$  et  $g$  a des limites positives à gauche et à droite de zéro et vérifie des conditions d'intégrabilité appropriées. C'est le cas par exemple pour le processus CGMY. Sous cette hypothèse, pour  $k \neq \alpha$

$$\int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^k \nu(dy) = O(\varepsilon^{k-\alpha}) \quad \text{et} \quad \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^\alpha \nu(dy) = O(\log(\varepsilon)).$$

Donc en particulier  $\lambda_\varepsilon = O(\varepsilon^{-\alpha})$ ,  $\sigma_\varepsilon^2 = O(\lambda_\varepsilon^{1-\frac{2}{\alpha}})$  et  $\gamma_\varepsilon = \gamma + O(\lambda_\varepsilon^{1-\frac{1}{\alpha}})$

On a alors pour tout  $\alpha \in (0, 2)$

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| = O(\lambda_\varepsilon^{(1-\frac{3}{\alpha}) \vee (-\frac{2}{\alpha})}).$$

Pour comparaison, dans le même cadre, Rubenthaler [51] obtient une vitesse strictement inférieure de  $O(\lambda_\varepsilon^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{\alpha}) \vee (-1)})$ . Si la mesure de Lévy est localement symétrique près de zéro (ce qui est le cas pour CGMY), on obtient la vitesse améliorée

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| = O(\lambda_\varepsilon^{-\frac{2}{\alpha}})$$

pour tout  $\alpha \in (0, 2)$ .

**Discrétisation de l'ODE** Les vitesses de convergence du Théorème 7 ont été obtenues en utilisant la solution exacte de (2.27). Maintenant supposons qu'un schéma de discrétisation (tel que Runge-Kutta) est utilisé. Soit  $\theta^d(t; x)$  la solution approchée de (2.27) à l'instant  $t$  avec condition initiale  $X_0 = x$ , obtenu avec un seul pas de ce schéma de discrétisation. Nous admettons qu'il existent  $q \geq 1$  et  $C < \infty$ , tels que

$$|\theta^d(t; x) - \theta(t; x)| \leq C|t|^{q+1}, \quad \forall x, \forall t. \quad (2.35)$$

Par exemple, le schéma de Runge-Kutta classique d'ordre  $q$  vérifie la condition (2.35) pourvu que la fonction  $h$  et ses dérivées sont bornées.

En utilisant la solution approchée de l'ODE au lieu de la solution exacte, notre schéma de discrétisation prend la forme suivante:  $\hat{X}^d(0) = X_0$  et pour  $i \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \hat{X}^d(T_{i+1}^\varepsilon -) &= \theta^d(\gamma_\varepsilon(T_{i+1}^\varepsilon - T_i^\varepsilon) + \sigma_\varepsilon(W(T_{i+1}^\varepsilon) - W(T_i^\varepsilon))) \\ &\quad - \frac{1}{2}h'(\hat{X}^d(T_i^\varepsilon))\sigma_\varepsilon^2(T_{i+1}^\varepsilon - T_i^\varepsilon); \hat{X}^d(T_i^\varepsilon)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

$$\hat{X}^d(T_i^\varepsilon) = \hat{X}^d(T_i^\varepsilon -) + h(\hat{X}^d(T_i^\varepsilon -))\Delta Z(T_i^\varepsilon). \quad (2.37)$$

Il n'y a donc pas de points de discrétisation additionnels entre les temps de saut de  $Z^\varepsilon$ . Nous verrons que ce n'est pas nécessaire si l'ordre du schéma de discrétisation d'ODE est suffisamment élevé.

De même, pour un point  $t$  arbitraire, on a

$$\hat{X}^d(t) = \theta^d(\gamma_\varepsilon(t - \eta_t) + \sigma_\varepsilon(W(t) - W(\eta_t)) - \frac{1}{2}h'(\hat{X}^d(\eta_t))\sigma_\varepsilon^2(t - \eta_t); \hat{X}^d(\eta_t)). \quad (2.38)$$

Pour le schéma (2.36)–(2.37) Théorème 7 prend la forme suivante:

**Proposition 2.** (i) Sous les conditions **(H<sub>3</sub>)** et (2.35), on a

$$|E[f(\hat{X}_1^d) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon^2 + |\gamma_\varepsilon|) + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^3 \nu(dy) + \frac{|\gamma_\varepsilon|^{q+1} + 1}{\lambda_\varepsilon^q} + \frac{\sigma_\varepsilon^{q+1}}{\lambda_\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}} \right).$$

(ii) Sous les conditions  $(\mathbf{H}_4)$  et (2.35), si  $\gamma_\varepsilon$  est borné et  $\nu$  vérifie (2.32), on a

$$|E[f(\hat{X}_1^d) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} (\sigma_\varepsilon^2 + |\gamma_\varepsilon|) + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 (\nu_0 + \nu)(dy) + \frac{1}{\lambda_\varepsilon^q} + \frac{\sigma_\varepsilon^{q+1}}{\lambda_\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}} \right)$$

et en particulier,

$$|E[f(\hat{X}_1^d) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\lambda_\varepsilon} + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 (\nu_0 + \nu)(dy) + \frac{1}{\lambda_\varepsilon^q} + \frac{\sigma_\varepsilon^{q+1}}{\lambda_\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}} \right).$$

*Remarque 3* (Choix de l'ordre du schéma de discrétisation). Pour comprendre l'effet de l'ordre  $q$  du schéma de discrétisation de l'ODE sur les vitesses de convergence de Proposition 2, nous allons calculer ces vitesses pour une mesure de Lévy de la forme (2.34). Soit  $\varepsilon^c$  la borne supérieure de l'erreur donnée par Théorème 7 (partie i. ou ii., selon le contexte) et  $\varepsilon^d$  la borne supérieure de l'erreur additionnelle introduite par la discrétisation de l'ODE:

$$\varepsilon^d = \frac{|\gamma_\varepsilon|^{q+1} + 1}{\lambda_\varepsilon^q} + \frac{\sigma_\varepsilon^{q+1}}{\lambda_\varepsilon^{\frac{q-1}{2}}}.$$

Un calcul simple donne alors:  $\varepsilon^d = O(\lambda_\varepsilon^{-q})$  pour  $0 < \alpha < 1$ ,  $\varepsilon^d = O\left(\frac{(\log \lambda_\varepsilon)^{q+1}}{\lambda_\varepsilon^q}\right)$  pour  $\alpha = 1$  et  $\varepsilon^d = O(\lambda_\varepsilon^{1 - \frac{q+1}{\alpha}})$  pour  $1 < \alpha < 2$ . En particulier pour avoir les mêmes vitesses minimales (quand  $\alpha \rightarrow 2$ ) pour  $\varepsilon^d$  et  $\varepsilon^c$  il faut prendre  $q \geq 2$  dans le cas général et  $q \geq 3$  dans le cas localement symétrique.

## 2.2.2 Schema pour EDS générales

Dans cette section nous décrivons un schéma alternatif, qui a les mêmes vitesses de convergence que le schéma précédent, mais peut être utilisé pour des EDS multidimensionnels. L'inconvénient est qu'il est un peu plus difficile à implémenter, et même si la vitesse de convergence est la même, empiriquement la constante est plus grande que pour le schéma (2.28)–(2.29).

Nous commençons par remplacer les petits sauts de  $Z$  par un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel  $W^\varepsilon$  de matrice de covariance  $\Sigma^\varepsilon$  indépendant de  $Z$ , ce qui donne l'EDS

$$d\bar{X}_t = h(\bar{X}_{t-})\{\gamma_\varepsilon dt + dW_t^\varepsilon + dZ_t^\varepsilon\}. \quad (2.39)$$

Ce processus peut aussi être réécrit comme

$$\begin{aligned} \bar{X}(t) &= \bar{X}(\eta_t) + \int_{\eta_t}^t h(\bar{X}(s)) dW^\varepsilon(s) + \int_{\eta_t}^t h(\bar{X}(s)) \gamma_\varepsilon ds, \\ \bar{X}(T_i^\varepsilon) &= \bar{X}(T_i^\varepsilon -) + h(\bar{X}(T_i^\varepsilon -)) \Delta Z(T_i^\varepsilon). \end{aligned}$$

L'idée est alors de représenter la solution de (2.39) entre les temps de saut de  $Z^\varepsilon$  comme une perturbation de la solution du système dynamique déterministe (2.27) suivant l'approche de chapitre 2 de [20].

Supposons que le coefficient  $h$  est Lipschitz et introduisons une famille de processus  $(Y^\alpha)_{0 \leq \alpha \leq 1}$ :

$$Y^\alpha(t) = \bar{X}(\eta_t) + \alpha \int_{\eta_t}^t h(Y^\alpha(s)) dW^\varepsilon(s) + \int_{\eta_t}^t h(Y^\alpha(s)) \gamma_\varepsilon ds$$

L'idée est de remplacer le processus  $\bar{X} := Y^1$  par son développement en série de Taylor d'ordre 1 autour de la valeur  $\alpha = 0$ :

$$\bar{X}(t) \approx Y^0(t) + \frac{\partial}{\partial \alpha} Y^\alpha(t)|_{\alpha=0}.$$

La nouvelle approximation  $\tilde{X}$  est donc définie par

$$\tilde{X}(t) = Y_0(t) + Y_1(t), \quad t > \eta_t, \quad (2.40)$$

$$\tilde{X}(T_i^\varepsilon) = \tilde{X}(T_i^\varepsilon -) + h(\tilde{X}(T_i^\varepsilon -))\Delta Z(T_i^\varepsilon),$$

$$Y_0(t) = \tilde{X}(\eta_t) + \int_{\eta_t}^t h(Y_0(s))\gamma_\varepsilon ds \quad (2.41)$$

$$Y_1(t) = \int_{\eta_t}^t \frac{\partial h}{\partial x_i}(Y_0(s)) Y_1^i(s) \gamma_\varepsilon ds + \int_{\eta_t}^t h(Y_0(s)) dW^\varepsilon(s) \quad (2.42)$$

où nous avons utilisé la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés. Conditionnellement à  $T_i^\varepsilon$ ,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $t \in (T_j^\varepsilon, T_{j+1}^\varepsilon)$  et  $\tilde{X}(T_j^\varepsilon)$ , le vecteur aléatoire  $Y_1(t)$  est gaussien centré de matrice de covariance conditionnelle  $\Omega(t)$ , qui vérifie l'équation linéaire matricielle

$$\Omega(t) = \int_{\eta_t}^t (\Omega(s)M(s) + M^\perp(s)\Omega^\perp(s) + N(s))ds \quad (2.43)$$

où  $M^\perp$  est la matrice transposée de  $M$  et

$$M_{ij}(t) = \frac{\partial h_{jk}(Y_0(t))}{\partial x_i} \gamma_\varepsilon^k \quad \text{et} \quad N(t) = h(Y_0(t))\Sigma^\varepsilon h^\perp(Y_0(t)).$$

Pour simuler  $\tilde{X}(t)$  à partir de  $\tilde{X}(\eta_t)$  il faut alors résoudre les ODE (2.41) et (2.43) entre  $\eta_t$  et  $t$ . Ici à nouveau, la méthode de Runge-Kutta peut être utilisée.

### Théorème 8.

(i) Sous la condition  $(\mathbf{H}_3)$  ou  $(\mathbf{H}'_3)$ , on a

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\|\Sigma_\varepsilon\|}{\lambda_\varepsilon} (\|\Sigma_\varepsilon\| + |\gamma_\varepsilon|) + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^3 \nu(dy) \right).$$

(ii) Sous la condition  $(\mathbf{H}_4)$  or  $(\mathbf{H}'_4)$ , si  $\gamma_\varepsilon$  est borné et  $\nu$  vérifie la condition

$$\int_{|y| \leq \varepsilon} y_i y_j y_k \nu(dy) \leq C \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 \nu_0(dy)$$

pour une mesure de Lévy  $\nu_0$  pour tout  $i, j, k$  et tout  $\varepsilon$  suffisamment petit, on a

$$|E[f(\hat{X}_1) - f(X_1)]| \leq C \left( \frac{\|\Sigma_\varepsilon\|}{\lambda_\varepsilon} + \int_{|y| \leq \varepsilon} |y|^4 (\nu_0 + \nu)(dy) \right).$$

### 2.2.3 Exemples et applications

Dans cette section nous présentons deux exemples d'utilisation de nos schémas. Le premier exemple, purement illustratif, vérifie toutes les hypothèses des théorèmes de convergence, et permet de comparer empiriquement les deux algorithmes proposés. Dans le deuxième exemple plus appliqué, nous utilisons le schéma multidimensionnel pour calculer les prix d'options dans le modèle Libor Market Model. Dans cet exemple, la fonction pay-off ne vérifie pas toutes les hypothèses de régularité, mais la convergence observée empiriquement est très bonne, ce qui indique que notre algorithme est applicable dans un cadre plus grand que celui des théorèmes de convergence.

**Convergence faible pour une EDS dirigé par le processus de Lévy NIG** Dans notre premier exemple nous vérifions les résultats théoriques pour une EDS dirigé par le processus de Lévy "Normal Inverse Gaussian" (NIG), dont la fonction caractéristique est

$$\phi_t(u) := E[e^{iuZ_t}] = \exp \left\{ -\delta t \left( \sqrt{\alpha^2 - (\beta - iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \right) \right\}, \quad (2.44)$$

où  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in (-\alpha, \alpha)$  et  $\delta > 0$  sont des paramètres. La densité de Lévy du processus NIG se comporte comme  $\nu(x) \sim \frac{const}{|x|^2}$  pour  $x \rightarrow 0$ . Nous sommes donc dans le cadre de l'exemple 1 avec  $\alpha = 1$ . De plus, il existe un algorithme simple et rapide pour la simulation des accroissements de ce processus, ce qui nous permet de comparer nos algorithmes avec le schéma d'Euler standard.

Dans cet exemple, nous avons choisi de résoudre l'EDS

$$dX_t = \sin(aX_t)dZ_t,$$

où  $Z$  est un processus NIG. La solution de l'ODE déterministe correspondante

$$dX_t = \sin(aX_t)dt, \quad X_0 = x$$

est donnée explicitement par

$$X_t = \theta(t; x) = \frac{1}{a} \arccos \frac{1 + \cos(ax) - e^{2at}(1 - \cos(ax))}{1 + \cos(ax) + e^{2at}(1 - \cos(ax))}$$

Nous comparons la performance de notre premier schéma avec la version unidimensionnelle du deuxième schéma et avec le schéma d'Euler. Pour les détails d'implémentation des trois schémas, voir [38]. Pour cela, nous calculons l'estimateur Monte Carlo de  $E[f(X_1)]$  avec

$$f(x) = 2 - 2 \cos(x - X_0).$$

L'idée est d'avoir une fonction qui ressemble à  $x^2$  mais avec des dérivées bornées.

Graphique (2.1) présente les estimateurs Monte Carlo et les erreurs correspondantes pour les trois schémas. Les estimateurs et les erreurs sont tracés en fonction du paramètre  $N$ , qui est égal au nombre de points de discrétisation pour le schéma d'Euler et à la complexité moyenne de simulation d'une trajectoire  $\lambda_\varepsilon$  pour les autres schémas. Pour  $N$  donné, le temps de calcul pour les deux algorithmes présentés dans ce travail est à peu près 2.5 fois plus grand que celui du schéma d'Euler. Nous avons simulé  $10^6$  trajectoires, ce qui correspond à un écart type de  $3 \times 10^{-4}$  pour chacune des valeurs (l'écart type est presque indépendant de  $N$ ).

La performance des deux schémas présentés paraît largement supérieure à celle du schéma d'Euler, et le schéma (2.28)–(2.29) a une meilleure performance que le schéma (2.40)–(2.42).

Le graphique en coordonnées logarithmiques permet d'identifier la vitesse usuelle de  $\frac{1}{N}$  pour le schéma d'Euler, alors que pour les deux autres schémas la convergence est beaucoup plus rapide et ressemble plus à  $\frac{1}{N^2}$ , ce qui confirme le résultat théorique des théorèmes 7 et 8 (voir exemple 1).

**Application financière: modèle Libor Market Model avec sauts** Dans cet exemple, les résultats théoriques sur la convergence des schémas (2.28)–(2.29) et (2.40)–(2.42) ne peuvent pas formellement être appliqués, parce que la fonction  $f$  n'est pas suffisamment différentiable. Cependant, les schémas eux-même peuvent être appliqués, et les expériences numériques montrent que l'erreur faible converge vers zéro très rapidement, ce qui suggère que notre méthodologie de simulation s'applique dans un cadre plus large.

Soit  $T_i = T_1 + (i - 1)\delta$ ,  $i = 1, \dots, n + 1$  un ensemble de dates (appelées dates tenors). Le taux LIBOR  $L_t^i$  est le taux d'intérêt forward, défini à la date  $t$  pour la période  $[T_i, T_{i+1}]$ . Si  $B_t(T)$  est le prix à la date  $t$  d'un zéro-coupon d'échéance  $T$ , les taux Libor sont donnés par

$$L_t^i = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B_t(T_i)}{B_t(T_{i+1})} - 1 \right)$$

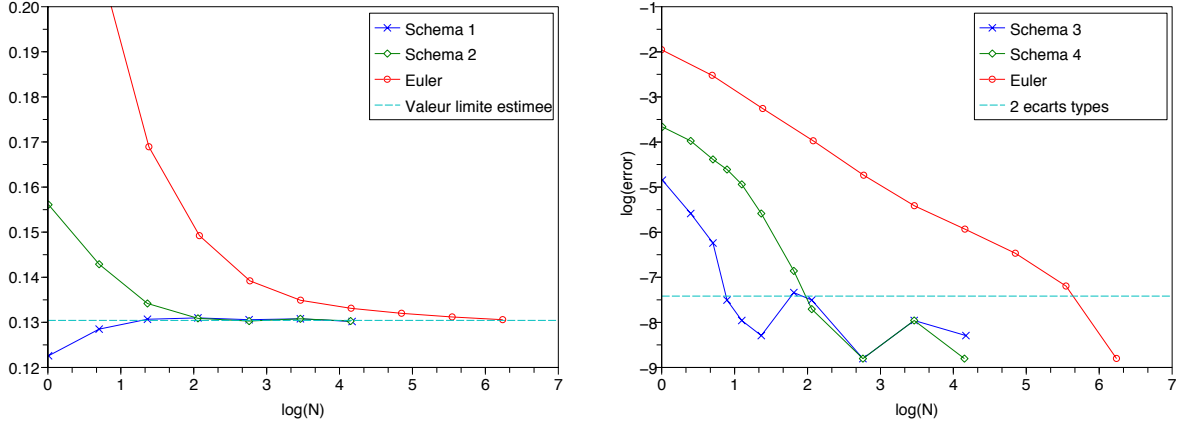


Figure 2.1: Comparaison numérique du schéma (2.28)–(2.29) (courbe bleue), schéma (2.40)–(2.42) (courbe verte) et le schéma d’Euler classique (courbe rouge). Graphique de gauche: estimateur Monte Carlo de  $E[f(X_1)]$ . Graphique de droite: erreur absolue en coordonnées logarithmiques. La ligne pointillée correspond à deux écarts types de l’estimateur.

Dans cet exemple nous utilisons une version simplifiée du modèle LMM semimartingale général introduit par [33]. Nous supposons que les taux Libor sont dirigés par un processus de Lévy  $d$ -dimensionnel sans composante brownienne. Sous l’hypothèse d’absence d’arbitrage sur le marché, la dynamique de  $L_t^1, \dots, L_t^n$  est donnée par la solution d’une EDS multidimensionnelle

$$\frac{dL_t^i}{L_t^i} = \sigma^i(t) dZ_t - \int_{\mathbb{R}^d} \sigma^i(t) z \left[ \prod_{j=i+1}^n \left( 1 + \frac{\delta L_t^j \sigma^j(t) z}{1 + \delta L_t^j} \right) - 1 \right] \nu(dz) dt, \quad (2.45)$$

où  $Z$  est un processus de Lévy martingale de mesure de Lévy  $\nu$  et  $\sigma^i(t)$  sont des fonctions de volatilité déterministes.

L’équation (2.45) donne la dynamique des Libors sous la mesure terminale, qui correspond à utiliser le dernier zéro-coupon  $B_t(T_{n+1})$  comme numéraire. Le prix à l’instant  $t$  d’une option de pay-off  $H = h(L_{T_1}^1, \dots, L_{T_1}^n)$  à la date  $T_1$  est alors donné par

$$\begin{aligned} \pi_t(H) &= B_t(T_{n+1}) E \left[ \frac{h(L_{T_1}^1, \dots, L_{T_1}^n)}{B_{T_1}(T_{n+1})} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= B_t(T_{n+1}) E \left[ h(L_{T_1}^1, \dots, L_{T_1}^n) \prod_{i=1}^n (1 + \delta L_{T_1}^i) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \frac{B_t(T_1)}{\prod_{i=1}^n (1 + \delta L_t^i)} E \left[ h(L_{T_1}^1, \dots, L_{T_1}^n) \prod_{i=1}^n (1 + \delta L_{T_1}^i) \middle| \mathcal{F}_t \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

Si on introduit un processus d’état  $n+1$ -dimensionnel  $X_t$  avec  $X_t^0 \equiv t$  et  $X_t^i = L_t^i$  pour  $1 \leq i \leq n$ , un processus de Lévy  $d+1$ -dimensionnel  $\tilde{Z}_t = (t \quad Z_t)^\perp$ , et une fonction  $(n+1) \times (d+1)$ -dimensionnelle  $h(x)$  définie par  $h_{11} = 1$ ,  $h_{1j} = 0$  pour  $j = 2, \dots, d+1$ ,  $h_{i1} = f^i(x)$  et  $h_{ij} = \sigma_{j-1}^i(x_0)$  avec

$$f^i(x) := - \int_{\mathbb{R}^d} \sigma^i(x_0) z \left[ \prod_{j=i+1}^n \left( 1 + \frac{\delta x_j \sigma^j(x_0) z}{1 + \delta x_j} \right) - 1 \right] \nu(dz),$$



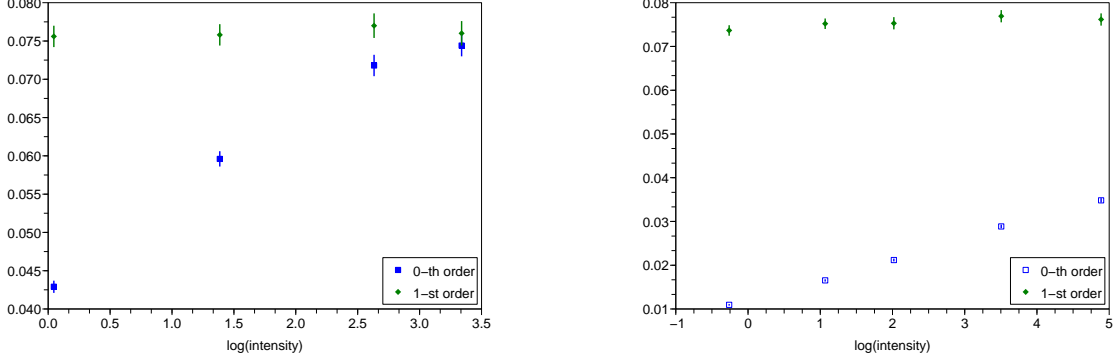


Figure 2.2: Estimation du prix d'une swaption 'receiver' à la monnaie de maturité 5 ans dans Cas 1 (gauche) et Cas 2 (droite). Les bars correspondent à 1 écart type. La simulation Monte Carlo a été effectuée avec  $10^5$  trajectoires. 1-st order: schéma (2.40)–(2.42). 0-th order: on prend simplement  $\tilde{X}(t) = Y^0(t)$ .

on voit que l'équation (2.45) prend la forme homogène  $dX_t = h(X_{t-})d\tilde{Z}_t$ , à laquelle on peut appliquer le schéma (2.28)–(2.29) directement.

Pour l'illustration numérique, nous avons simplifié le modèle au maximum, en prenant  $d = 1$  et  $\sigma^i(t) \equiv 1$ . Le processus de Lévy sous-jacent suit le modèle CGMY (2.33).

Nous avons utilisé deux ensembles de paramètres:  $\alpha = 0.5$  et  $C = 1.5$  (Cas 1) et  $\alpha = 1.8$  et  $C = 0.01$  (Cas 2). Dans les deux cas,  $\lambda_+ = 10$  et  $\lambda_- = 20$ . Les dates tenors pour le modèle LMM sont  $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , ce qui correspond à une EDS en dimension 5. Les valeurs initiales de tous les taux sont de 15% (nous avons pris un taux élevé pour augmenter les effets non-linéaires).

Nous calculons le prix d'une swaption "receiver", qui donne à son détenteur le droit d'entrer dans un swap de taux d'intérêt au taux fixé  $K$  à la date  $T_1$ , pour recevoir le taux variable et payer le taux fixe. Le pay-off est alors donné par

$$\begin{aligned} h(L_{T_1}^1, \dots, L_{T_1}^n) &= \left( 1 - B_{T_1}(T_{n+1}) - K\delta \sum_{i=1}^n B_{T_1}(T_{i+1}) \right)^+ \\ &= \left( \prod_{i=1}^n (1 + \delta L_{T_1}^i)^{-1} - 1 - K\delta \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^i (1 + \delta L_{T_1}^j)^{-1} \right)^+. \end{aligned}$$

Graphique (2.2) montre le prix de ce produit avec  $K = 15\%$  calculé avec le schéma (2.40)–(2.42), comparé avec le schéma d'ordre zéro (c'est-à-dire qu'au lieu de (2.40) on utilise simplement  $\tilde{X}(t) = Y_0(t)$ ). Ceci permet de comprendre l'effet de l'approximation des petits sauts par le mouvement Brownien). Bien que la fonction pay-off n'est pas différentiable dans ce cas, la convergence du schéma est très rapide.

## 2.3 Perspectives

Dans la suite de mes travaux sur la discrétisation des processus avec sauts, j'envisage d'étudier le cadre où les dates de discrétisation sont endogènes, et plus particulièrement le cas où la prochaine

date de discrétisation est donnée par le temps de sortie d'un domaine par le processus sous-jacent. Cette situation apparaît par exemple dans les problèmes d'estimation statistique sur les données haute fréquence, ou dans les marchés illiquides, où les prix ne sont observés qu'aux dates de transaction (voir également le chapitre suivant). Les dates de transaction peuvent être modélisées de manière endogène comme les instants de sortie des bornes bid-ask par le processus de prix latent inobservable. Dans l'étude des stratégies de couverture ou des stratégies dynamiques de portefeuille il est également important de pouvoir traiter les dates de discrétisation endogènes, car le portefeuille est souvent réajusté lorsque le prix du sous-jacent sort d'une bande prédéfinie.

L'étude des temps de sortie pour les processus avec sauts et en particulier pour les processus de Lévy est un sujet qui a beaucoup été étudié mais reste très difficile, car la grande majorité des résultats obtenus concerne les cas particuliers comme par exemple les processus de Lévy spectralement positifs (qui sautent dans une seule direction) ou les temps de sortie d'un demi-axe (voir [39] pour une bonne introduction à cette littérature). Cependant dans un travail un cours (mais déjà bien avancé) avec M. Rosenbaum [50], nous avons obtenu des résultats assez explicites pour les temps de sortie d'un intervalle *asymptotiquement petit* (de la forme  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  avec  $\varepsilon \downarrow 0$ ). Dans le reste de cette section je décris brièvement les principaux résultats de ce travail.

**Le modèle** Soit  $Y_t = X_{S_t}$ , où  $X$  est un processus de Lévy sur  $\mathbb{R}$  de triplet caractéristique  $(A, \nu, \gamma)$  par rapport à une fonction de troncature  $h$  (voir (2.8)), et  $S$  est un changement de temps continu, croissant et indépendant de  $X$ . Nous supposons que les valeurs de  $Y_t$  sont observées sur l'intervalle  $[0, T]$  aux dates  $(T_i^\varepsilon)_{i \geq 0}$  avec  $T_i^\varepsilon = 0$  et  $T_{i+1}^\varepsilon = \inf\{t > T_i^\varepsilon : |Y_t - Y_{T_i^\varepsilon}| \geq \varepsilon\}$  pour  $i \geq 0$ . L'objectif est d'estimer le changement de temps et (dans la mesure du possible) les caractéristiques du processus  $X$  lorsque  $T$  reste constant et  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Les modèles de Lévy changés de temps ont été introduits dans la littérature financière par [9] et le problème d'estimation pour ces modèles (avec des dates d'observation équidistantes) a été récemment étudié par [17, 18].

Dans ce travail nous étudions la classe des processus de Lévy qui convergent vers un processus  $\alpha$ -stable après une renormalisation bien choisie. Pour  $\alpha \in (0, 2]$ , le processus renormalisé  $X^\varepsilon$  est défini par  $X_t^\varepsilon = \varepsilon^{-1} X_{\varepsilon^\alpha t}$ ,  $t \geq 0$ . Le premier temps de sortie de l'intervalle  $(-1, 1)$  par le processus renormalisé sera noté  $\tau_1^\varepsilon := \inf\{t \geq 0 : |X_t^\varepsilon| \geq 1\}$ . Ce temps est relié au temps de sortie par le processus  $X$  de l'intervalle  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ :

$$\inf\{t \geq 0 : |X_t| \geq \varepsilon\} = \varepsilon^\alpha \tau_1^\varepsilon.$$

De la même manière,  $X_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon$  est égal à  $\varepsilon$  fois la valeur de  $X$  au premier temps de sortie de  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ .

L'hypothèse suivante sera (parfois) imposée dans la suite.

(H- $\alpha$ ) La mesure de Lévy  $\nu$  a une densité  $\nu(x) = \frac{g(x)}{|x|^{1+\alpha}}$ , où  $g$  est une fonction positive mesurable possédant des limites à gauche et à droite de zéro:

$$c^+ := \lim_{x \downarrow 0} g(x), \quad c^- := \lim_{x \uparrow 0} g(x),$$

avec  $c_+ + c_- > 0$ .

**Convergence du processus renormalisé** Le résultat suivant donne des conditions alternatives pour la convergence du processus renormalisé. Dans cette étude nous travaillerons toujours sous l'une de ces conditions.

**Proposition 3.**

1. Soit  $\alpha = 2$  et  $A > 0$ . Alors le processus  $X^\varepsilon$  converge en loi vers le processus  $X^*$  de triplet caractéristique  $(A, 0, 0)$ , i.e., vers le mouvement brownien de variance  $A$  à l'instant  $t = 1$ .

2. Soit  $\alpha = 1$  et supposons que  $X$  est de variation finie (i.e.,  $A = 0$  et  $\int_{|x| \leq 1} |x| \nu(dx) < \infty$ ) et a un drift non nul:  $\gamma_0 := \gamma - \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu(dx) \neq 0$ . Alors le processus  $X^\varepsilon$  converge en loi vers le processus de Lévy (déterministe)  $X^*$  de triplet caractéristique  $(0, 0, \gamma_0)$ .
3. Soit  $1 < \alpha < 2$  et supposons que  $A = 0$  et que la mesure de Lévy  $\nu$  vérifie la condition **(H- $\alpha$ )**. Alors le processus  $X^\varepsilon$  converge en loi vers un processus  $\alpha$ -stable strict  $X^*$  de densité de Lévy

$$\nu^*(x) = \frac{c_+ \mathbf{1}_{x>0} + c_- \mathbf{1}_{x<0}}{|x|^{1+\alpha}}. \quad (2.47)$$

4. Soit  $\alpha = 1$  et supposons que  $A = 0$  et que la mesure de Lévy  $\nu$  vérifie la condition **(H- $\alpha$ )** avec  $c^+ = c^- := c$  et avec la fonction  $g$  telle que

$$\int_0^1 \frac{|g(x) - g(-x)| dx}{x} < \infty.$$

Alors le processus  $X^\varepsilon$  converge en loi vers le processus de Lévy  $X^*$  de triplet caractéristique  $(\gamma^*, \nu^*, 0)$ , où  $\gamma^* = \gamma - \int_0^\infty \frac{g(x) - g(-x)}{x^2} h(x) dx$  et  $\nu^*$  a la densité de Lévy

$$\nu^*(x) = \frac{c}{|x|^2},$$

c'est-à-dire vers un processus 1-stable strict.

5. Soit  $0 < \alpha < 1$  et supposons que  $A = 0$ , le processus a un drift nul:  $\gamma - \int_{\mathbb{R}} h(x) \nu(dx) = 0$  et la mesure de Lévy  $\nu$  vérifie la condition **(H- $\alpha$ )**. Alors le processus  $X^\varepsilon$  converge en loi vers un processus  $\alpha$ -stable strict  $X^*$  de densité de Lévy (2.47).

*Remarque 4.* Ces différents cas alternatifs contiennent tous (ou presque tous) les modèles paramétriques utilisés en finance:

- Tous les modèles avec une composante brownienne vérifient la condition 1;
- Le modèle variance gamma (avec drift non nul) vérifie la condition 2;
- Le processus normal inverse gaussian (NIG) et le modèle hyperbolique généralisé vérifient la condition 4;
- Le processus CGMY (2.33), vérifie la condition 3 si  $1 < \alpha < 2$ , la condition 4 si  $\alpha = 1$ , la condition 2 si  $\alpha < 1$  et le processus a un drift non nul, et la condition 5 si  $\alpha < 1$  et le drift est nul.

La résultat suivant montre que la convergence s'étend aux temps de sortie et aux overshoots.  $\tau_1^*$  désigne le premier instant de sortie de l'intervalle  $(-1, 1)$  par le processus limite  $X^*$ . Dans les cas 1 et 2 de proposition 4, ou lorsque le processus limite est un processus stable symétrique, les moments de  $\tau_1^*$  sont connus explicitement, et dans les autres cas, ils peuvent facilement être calculés numériquement.

**Proposition 4.** *Soit  $X$  un processus de Lévy vérifiant l'une des conditions de Proposition 3. Alors*

1.  $\tau_1^\varepsilon$  converge en loi vers  $\tau_1^*$  lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ .
2.  $X_{\tau_1^\varepsilon}^\varepsilon$  converge en loi vers  $X_{\tau_1^*}^*$  lorsque  $\varepsilon \downarrow 0$ .
3.  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E[(\tau_1^\varepsilon)^k] = E[(\tau_1^*)^k]$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Procédures d'estimation** Dans notre modèle, le changement de temps peut être retrouvé simplement à partir des temps  $(T_i^\varepsilon)$  sans utiliser les observations du processus. Introduisons le processus de comptage d'observations:

$$N_t^\varepsilon = \sum_{i \geq 1} 1_{T_i \leq t}.$$

**Proposition 5.** *Soit  $X$  un processus de Lévy, vérifiant l'une des conditions 1–5 de Proposition 3. Alors,*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\alpha N_t^\varepsilon = \frac{S_t}{E[\tau_1^*]} \quad (2.48)$$

en probabilité uniformément sur les compacts en  $t$ .

Celles des caractéristiques du processus  $X$  qui se retrouvent dans le processus limite  $X^*$  (e.g.,  $\alpha$ ) peuvent être estimés à partir des observations de  $Y$ . Introduisons le processus

$$V^\varepsilon(f)_t = \sum_{T_i^\varepsilon \leq t} f(\varepsilon^{-1}(Y_{T_i^\varepsilon} - Y_{T_{i-1}^\varepsilon})).$$

pour une fonction mesurable bornée  $f$ . Le résultat suivant étudie la convergence de  $V^\varepsilon(f)$ .

**Proposition 6.** *Soit  $X$  un processus de Lévy vérifiant l'une des conditions 1–5 de proposition 3. Alors*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon^\alpha V^\varepsilon(f)_t = \frac{S_t E f[(X_{\tau_1^*}^*)]}{E[\tau_1^*]} \quad (2.49)$$

en probabilité uniformément sur les compacts en  $t$ .

L'article [50] établit également, sous des hypothèses un peu plus strictes, les vitesses de convergence pour ces estimateurs, et, dans certaines situations, leur normalité asymptotique.

Nous terminons cette section par un exemple qui illustre la procédure d'estimation dans le cadre du modèle CGMY.

*Exemple 2* (Estimation pour le processus CGMY changé de temps). Soit  $X$  le processus CGMY, c'est-à-dire, processus de Lévy sans composante brownienne et avec la densité de Lévy (2.33). En intégrant la constante  $C$  dans le changement de temps, on peut poser  $C = 1$  sans perte de généralité. Dans ce cas, le processus limite  $X^*$  est un processus  $\alpha$ -stable symétrique et a la densité de Lévy  $\nu^*(x) = \frac{1}{|x|^{1+\alpha}}$ . Notre méthode permet donc d'estimer l'indice de Blumenthal-Gettoor  $\alpha$  du processus et le changement de temps. Les coefficients  $\lambda_+$  et  $\lambda_-$  ne peuvent pas être identifiés à partir des observations du processus sur un intervalle finie, même dans le cas d'observation continue.

La loi du processus stable symétrique au premier instant de sortie d'un intervalle est bien connue dans la littérature [6, 26]:  $X_{\tau_1^*}^*$  a une densité

$$\mu(y) = \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) |y|^{-1} (y^2 - 1)^{-\frac{\alpha}{2}}, \quad |y| \geq 1.$$

et

$$E[\tau_1^*] = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\alpha \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)}. \quad (2.50)$$

Avec  $f(x) = \frac{1}{|x|^\beta} \wedge 1$ ,  $\beta \geq 0$  on obtient facilement

$$E[f(X_{\tau_1^*}^*)] = \int_{|y| \geq 1} \frac{\mu(y)}{|y|^\beta} dy = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)}$$

et en particulier pour  $\beta = 2$ ,  $E[(X_{\tau_1^*}^*)^{-2}] = \frac{\alpha}{2}$ .

En combinant (2.48) et (2.49), nous obtenons donc un estimateur convergent de  $\alpha$ :

$$\alpha = 2 \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{V^\varepsilon(f)_t}{N_t^\varepsilon}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \wedge 1.$$

Une fois la valeur de  $\alpha$  estimée, nous pouvons calculer (2.50) et utiliser l'estimateur (2.48) pour estimer le changement de temps.

A moyen terme notre objectif est d'éteindre les outils développés dans le cadre de processus de Lévy changés de temps aux semimartingales plus générales, pour pouvoir étudier les schémas de discrétisation pour les stratégies de couverture et les stratégies de gestion de portefeuille. La prochaine étape serait d'introduire dans l'analyse la notion d'optimalité asymptotique, qui a été récemment introduite dans le cadre de semimartingales continues dans [22], et qui permettrait de trouver des stratégies qui minimisent, asymptotiquement, l'erreur de discrétisation.

## Chapter 3

# Une étude de l'illiquidité via le contrôle stochastique

La liquidité du marché, c'est-à-dire, la possibilité d'acheter ou de vendre des actifs immédiatement, sans frais de transaction, et pour un prix qui ne dépend pas de volume est une hypothèse sous-jacente de tous les résultats de base de mathématiques financières. Or, le passé récent montre que l'illiquidité est l'une des caractéristiques les plus essentielles des marchés. La crise des subprimes nous a appris qu'un simple changement de perception de la qualité d'un produit par des investisseurs peut transformer un marché dynamique et liquide en un entrepôt d'actifs pourris dont tout le monde veut se débarrasser mais personne ne connaît le prix. Même les actifs les plus liquides ne sont pas à l'abri de crises d'illiquidité: l'annonce par Porsche le 26 octobre 2008 que cette société détenait 42.3% d'actions de Volkswagen et possédait les options d'achat pour encore 31.5% a provoqué un 'short squeeze' (les hedge funds qui avaient vendu à découvert les actions Volkswagen ont été forcés de les racheter à un prix très élevé), à la suite duquel le cours de Volkswagen a été multiplié par 5 en l'espace de 2 jours.

De manière moins spectaculaire, mais peut-être plus importante encore en pratique, l'apparition d'échanges électroniques et l'émergence des activités de trading de très haute fréquence nécessite de modéliser le comportement des marchés financiers à des échelles de temps très courtes. A ces échelles l'hypothèse de liquidité n'a quasiment aucun sens, car la notion de prix unique n'existe plus. Elle est remplacée par la notion du carnet d'ordre qui regroupe tous les ordres d'achat et de vente pour un actif donné, avec les prix et les volumes associés. Dans la modélisation 'microscopique' des carnets d'ordre, les différents phénomènes d'illiquidité tels que la fourchette bid-ask, la dépendance du prix de transaction du volume acheté/vendu, l'impact de grandes transactions sur les prix, la nécessité d'un temps fini pour liquider un portefeuille, etc., apparaissent naturellement, mais au prix de difficultés techniques beaucoup plus importantes que dans les approches plus classiques. Malgré la présence d'une littérature déjà abondante sur le sujet d'illiquidité de marchés, il est clair que dans les années à venir, une grande partie des activités de recherche en mathématiques financières sera consacré à la modélisation de ce phénomène, et à l'étude de son impact sur les problèmes classiques tels que la valorisation d'options, la couverture et la gestion de portefeuille.

Dans les articles [45, 46, 13], nous nous sommes intéressés au problème de gestion de portefeuille en temps continu (problème de Merton) dans les conditions de liquidité faible. Ce travail concerne uniquement l'aspect temporel de l'illiquidité, c'est-à-dire l'impossibilité d'effectuer une transaction immédiatement, sans étudier les effets de prix et de volume. Cette formulation conduit à un problème de contrôle stochastique nontrivial and nonstandard, avec un couplage fort entre les aspects continus et discrets, qui a son propre intérêt mathématique.

## 3.1 Un problème de contrôle mixte discret-continu

### 3.1.1 Modélisation

Nous supposons que le prix d'un actif risqué illiquide  $S$  n'est observé et les transactions ne sont possibles qu'aux dates aléatoires  $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$ , qui représentent les instants d'arrivée des ordres sur le marché. Ce cadre est motivé par les articles [49, 42] où le prix est cependant observé en continu, et [14, 21], qui étudient l'estimation de volatilité à partir des prix observés aux dates aléatoires. A chaque date  $\tau_k$ , l'investisseur peut acheter ou vendre la quantité souhaitée de l'actif au prix  $S_{\tau_k}$ . L'investisseur peut consommer en continu entre ces dates et cherche à optimiser sa stratégie d'investissement et de consommation.

Ce modèle correspond à la situation d'un petit investisseur dans un marché illiquide: l'investisseur subit l'illiquidité mais n'influence pas les prix, et les ordres qui arrivent sur le marché sont beaucoup plus grands que les ordres de l'investisseur: il n'y a pas de contraintes de volume. L'illiquidité peut aussi venir des contraintes propres à l'investisseur dans un marché par ailleurs très liquide, par exemple, on peut penser à un investisseur passif (un particulier) qui n'intervient que ponctuellement en bourse, et qui n'a pas le temps pour suivre les prix tous les jours.

Soient

$$Z_k = \frac{S_{\tau_k} - S_{\tau_{k-1}}}{S_{\tau_{k-1}}}$$

les rendements de l'actif risqué entre les dates de trading. Nous introduisons la filtration d'observation continue  $\mathbb{G}^c = (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$  avec

$$\mathcal{G}_t = \sigma\{(\tau_k, Z_{\tau_k}) : \tau_k \leq t\},$$

et la filtration discrète  $\mathbb{G}^d = (\mathcal{G}_{\tau_k})_{k \geq 0}$ . Une stratégie de contrôle est un couple  $(\alpha, c)$  où  $\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1}$  est  $\mathbb{G}^d$ -prévisible, i.e.,  $\alpha_k$  est  $\mathcal{G}_{\tau_{k-1}}$ -mesurable, et  $c = (c_t)_{t \geq 0}$  est un processus positif  $\mathbb{G}^c$ -prévisible.  $\alpha_k$  est le montant investi en l'actif risqué à l'instant  $\tau_{k-1}$  (après avoir observé le prix  $S_{\tau_{k-1}}$ ) pour la période  $(\tau_{k-1}, \tau_k]$  et  $c_t$  est le taux de consommation à l'instant  $t$ . Pour un contrôle  $(\alpha, c)$  donné, la richesse de l'investisseur à l'instant  $\tau_k$  est

$$X_k^x = x - \int_0^{\tau_k} c_t dt + \sum_{i=1}^k \alpha_i Z_i, \quad k \geq 1, \quad X_0^x = x. \quad (3.1)$$

La richesse n'est définie qu'aux instants de trading  $\{\tau_k\}_{k \geq 0}$  car le prix de l'actif risqué n'est pas observable en dehors de ces dates. Pour  $x \geq 0$ , un contrôle est dit admissible, noté  $(\alpha, c) \in \mathcal{A}(x)$ , si  $X_k^x \geq 0$  p.s. pour tout  $k \geq 0$ .

Nous étudions le problème d'investissement / consommation optimale

$$v(x) = \sup_{(\alpha, c) \in \mathcal{A}(x)} E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c_t) dt \right], \quad (3.2)$$

où  $\rho > 0$  est un facteur d'actualisation et  $U$  est une fonction d'utilité.

Dans la suite, on travaillera toujours sous l'hypothèse suivante sur  $U$ :

**(H1)**  $U : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  avec  $U(0) = 0$ . Elle est strictement croissante, strictement concave,  $C^1$  sur  $(0, \infty)$ , et vérifie les conditions d'Inada  $U'(0^+) = \infty$  et  $U'(\infty) = 0$ . De plus,  $U$  est supposée bornée par une fonction puissance: il existe  $\gamma \in (0, 1)$  tel que

$$U(x) \leq K_1 x^\gamma, \quad x \geq 0. \quad (3.3)$$

On note  $\tilde{U}(y) := \max_{x > 0} [U(x) - xy]$  la transformée de Fenchel de  $U$  et  $I(y) := \arg \max_{x > 0} [U(x) - xy]$

Les autres ingrédients du modèle vérifieront les hypothèses suivantes:

- (H2)**  $\{\tau_k\}_{k \geq 1}$  est une suite des temps de saut d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .
- (H3)** (i) Pour tout  $k \geq 1$ , conditionnellement à  $t := \tau_k - \tau_{k-1}$ ,  $Z_k$  est indépendant de  $\{\tau_i, Z_i\}_{i < k}$  et a la loi  $p(t, dz)$ .
- (ii) Pour tout  $t \geq 0$ , le support de  $p(t, dz)$  est
- \* Soit un intervalle  $(-\underline{z}, \bar{z})$ ,  $\underline{z} \in (0, 1]$  et  $\bar{z} \in (0, \infty]$ .
  - \* Soit fini égal à  $\{-\underline{z}, \dots, \bar{z}\}$   $\underline{z} \in (0, 1]$  et  $\bar{z} \in (0, \infty]$ .
- (H4)**  $\int zp(t, dz) \geq 0$  et il existe  $\kappa \in [0, \infty)$  et  $b \in [0, \infty)$  tels que

$$\int (1+z)p(t, dz) \leq \kappa e^{bt}, \quad \forall t \geq 0,$$

ou autrement dit, pour tout  $k \geq 0$ ,

$$1 \leq E \left[ \frac{S_{\tau_k}}{S_{\tau_{k-1}}} \mid \tau_k - \tau_{k-1} = t \right] \leq \kappa e^{bt}, \quad \forall t \geq 0.$$

*Exemple 3.* L'exemple de base pour les hypothèses **(H3)** et **(H4)** est le modèle de Black-Scholes observé aux dates aléatoires:  $dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t$  avec  $b \geq 0$ . Dans ce cas,  $p(t, dz)$  est la loi de

$$Z(t) = \exp \left[ \left( b - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right] - 1. \quad (3.4)$$

### 3.1.2 Résolution par programmation dynamique

Le point de départ pour l'étude du problème (3.2) est le principe de programmation dynamique suivant, démontré rigoureusement dans [46]:

$$v(x) = \sup_{(\alpha, c) \in \mathcal{A}(x)} E \left[ \int_0^{\tau_1} e^{-\rho t} U(c_t) dt + e^{-\rho \tau_1} v(X_1^x) \right]. \quad (3.5)$$

Les conditions de mesurabilité sur les contrôles (avant la première date de trading la stratégie de contrôle ne peut être que déterministe) et l'équation de la richesse (3.1) impliquent que (3.5) peut être réécrit en termes de contrôles déterministes:

$$v(x) = \sup_{(a, c) \in \mathcal{A}_d(x)} E \left[ \int_0^{\tau_1} e^{-\rho t} U(c_t) dt + e^{-\rho \tau_1} v(x - \int_0^{\tau_1} c_t dt + aZ_1) \right], \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{A}_d(x)$  est l'ensemble de couples  $(a, c)$  telles que  $a$  est une constante déterministe et  $c$  est un processus déterministe positif, et

$$x - \int_0^t c_u du + az \geq 0, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall z \in (-\underline{z}, \bar{z}). \quad (3.7)$$

La condition (3.7) vient du fait que la prochaine date de trading est un t.a. totalement inaccessible. Pour assurer que la richesse à la date  $\tau_1$  reste positive, il faut donc choisir  $a$  et  $c_t$  tels que  $x - \int_0^t c_u du + az \geq 0$  quel que soit la valeur de  $z$  sur le support de  $p$ . En particulier on doit toujours avoir  $x + az \geq 0$ ,  $\forall z \in (-\underline{z}, \bar{z})$ , ce qu'on peut réécrire comme  $x \geq l(a)$  avec  $l(a) = \max(a\underline{z}, -a\bar{z})$ .  $l(a)$  joue ainsi le rôle de la richesse minimale nécessaire pour pouvoir appliquer la politique d'investissement  $a$ . En particulier, si  $\underline{z} = +\infty$  alors  $l(a) = +\infty$  pour tout  $a < 0$ : la vente à découvert n'est pas possible si le support de  $p$  n'est pas borné supérieurement. Pour  $x \geq l(a)$ , on note par  $\mathcal{C}_a(x)$  l'ensemble de processus déterministes positifs qui vérifient (3.7).



Sous les conditions **(H2)** et **(H3)**, l'équation (3.6) se réécrit sous une forme complètement déterministe:

$$v(x) = \sup_{\substack{a \in \left[-\frac{x}{\bar{z}}, \frac{x}{\underline{z}}\right] \\ c \in \mathcal{C}_a(x)}} \int_0^\infty e^{-(\rho+\lambda)t} \left[ U(c_t) + \lambda \int v(x - \int_0^t c_s ds + az) p(t, dz) \right] dt. \quad (3.8)$$

Soit

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} \quad \text{with } \mathcal{X} = \{(x, a) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : x \geq l(a)\}. \quad (3.9)$$

Introduisons un problème de contrôle auxiliaire: pour  $(t, x, a) \in \mathcal{D}$ ,

$$\hat{v}(t, x, a) = \sup_{c \in \mathcal{C}_a(t, x)} \int_t^\infty e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} \left[ U(c_s) + \lambda \int v(Y_s^{t, x} + az) p(s, dz) \right] ds, \quad (3.10)$$

où

$$Y_s^{t, x} = x - \int_t^s c_u du, \quad s \geq t$$

et  $\mathcal{C}_a(t, x)$  est l'ensemble de processus déterministes positifs  $c = (c_s)_{s \geq t}$  tels que

$$Y_s^{t, x} + az \geq 0, \quad \forall s \geq t, \forall z \in (-\underline{z}, \bar{z}). \quad (3.11)$$

La fonction valeur initiale  $v$  est alors reliée à ce problème auxiliaire via

$$v = \mathcal{H}\hat{v}, \quad (3.12)$$

où l'opérateur  $\mathcal{H}$  est simplement

$$\mathcal{H}\hat{w}(x) = \sup_{a \in [-x/\bar{z}, x/\underline{z}]} \hat{w}(0, x, a).$$

Le problème de contrôle déterministe (3.10) peut maintenant être étudiée par les méthodes standards de programmation dynamique: l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman associée est

$$\sup_{c \geq 0} \left[ -(\rho + \lambda)\hat{v} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - c \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} + U(c) + \lambda \int v(x + az) p(t, dz) \right] = 0, \quad (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.13)$$

ou encore

$$-(\rho + \lambda)\hat{v} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} + \tilde{U} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) + \lambda \int v(x + az) p(t, dz) = 0, \quad (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.14)$$

Ces arguments heuristiques sont validés par le résultat de vérification suivant, démontré dans [46]:

**Théorème 9.** *Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, **(H3)**, **(H4)** et*

$$\rho > b\gamma + \lambda \left( \frac{\kappa^\gamma}{\underline{z}^\gamma} - 1 \right) \quad (\mathbf{H5})$$

*supposons qu'il existe une fonction  $\hat{w} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , continûment différentiable par rapport à  $(t, x)$ , et vérifiant la condition de croissance*

$$\hat{w}(t, x, a) \leq K(e^{bt}x)^\gamma, \quad \forall (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.15)$$

pour une constante positive  $K$ , et une fonction continue  $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , telles que

$$-(\rho + \lambda)\hat{w} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial t} + \tilde{U} \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \right) + \lambda \int w(x + az)p(t, dz) = 0, \quad (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.16)$$

$$w = \mathcal{H}\hat{w}. \quad (3.17)$$

Introduisons une fonction mesurable positive

$$\hat{c}(t, x, a) = I \left( \frac{\partial \hat{w}}{\partial x}(t, x, a) \right), \quad (3.18)$$

et supposons que pour tout  $(t, x, a) \in \mathcal{D}$ , il existe une solution, notée  $\hat{Y}_s(t, x, a)$ ,  $s \geq t$ , à:

$$dY_s = -\hat{c}(s - t, Y_s, a)ds, \quad s \geq t, \quad Y_t = x, \quad (3.19)$$

telle que  $(s, \hat{Y}_s(t, x, a), a) \in \mathcal{D}$ , pour  $s \geq t$ .

Alors on a  $v = w$ , et une politique de contrôle optimale pour  $v(x)$  est donnée par:

$$\alpha_{k+1}^* \in \arg \max_{-\frac{x_k^x}{z} \leq a \leq \frac{x_k^x}{z}} \hat{w}(0, X_k^x, a), \quad k \geq 0, \quad (3.20)$$

$$c_t^* = \hat{c}(t - \tau_k, \hat{Y}_t(\tau_k, X_k^x, \alpha_{k+1}^*), \alpha_{k+1}^*), \quad \tau_k < t \leq \tau_{k+1}. \quad (3.21)$$

*Remarque 5* (Cas stationnaire). Si la loi des rendements  $p(t, dz)$  ne dépend pas de  $t$ :  $p(t, dz) = p(dz)$ , alors  $\hat{v}$  est aussi indépendant de  $t$ , et le système (3.12)–(3.14) se réduit à une équation (intégré)-différentielle ordinaire couplée à un problème d'optimisation:

$$-(\rho + \lambda)\hat{v} + \tilde{U} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) + \lambda \int v(x + az)p(dz) = 0, \quad (x, a) \in \mathcal{X}, \quad (3.22)$$

$$v(x) = \sup_{a \in [-x/\bar{z}, x/\underline{z}]} \hat{v}(x, a), \quad (3.23)$$

où

$$\hat{v}(x, a) = \sup_{c \in \mathcal{C}_a(x)} \int_0^\infty e^{-(\rho+\lambda)s} \left[ U(c_s) + \lambda \int v(Y_s^x + az)p(dz) \right] ds, \quad (3.24)$$

*Remarque 6* (Cas de fonction d'utilité puissance). Si  $U(x) = K_1 x^\gamma$ ,  $0 < \gamma < 1$ , on obtient facilement à partir du principe de programmation dynamique (3.5) une relation de scaling pour la fonction valeur  $v$  et la fonction valeur auxiliaire  $\hat{v}$ :

$$\hat{v}(t, \beta x, \beta a) = \beta^\gamma \hat{v}(t, x, a), \quad v(\beta x) = \beta^\gamma v(x), \quad \beta > 0.$$

Ceci montre que la fonction valeur a la même forme que dans le modèle de Merton:  $v(x) = \vartheta_1 x^\gamma$ , et que la politique d'investissement optimale consiste à investir une proportion fixe de la richesse en l'actif risqué.

## 3.2 Etude de l'équation HJB

Pour appliquer le théorème de vérification, il faut démontrer que le système (3.16)–(3.17) admet une solution régulière. Dans l'article [46] nous avons d'abord établi une caractérisation de la fonction valeur comme l'unique solution de (3.16) au sens de viscosité, ce qui ne nécessite pas de prouver sa régularité. Dans un article suivant [13] nous avons pu démontrer, en utilisant la caractérisation de viscosité, que l'équation (3.16) possède des solutions régulières, ce qui a permis de donner une caractérisation des stratégies optimales.<sup>1</sup> Dans le reste de ce chapitre nous présenterons les deux approches.

<sup>1</sup>L'idée initiale de la preuve de régularité est due à F. Gozzi.

### 3.2.1 Caractérisation de la fonction valeur comme solution au sens de viscosité

La définition suivante adapte la notion de solution de viscosité à notre contexte.

**Définition 2.** *Un couple de fonctions  $(w, \hat{w}) \in C(\mathbb{R}_+) \times C(\mathcal{D})$  est une solution de viscosité de*

$$(\rho + \lambda)\hat{v} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial t} - \tilde{U} \left( \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) - \lambda \int v(x + az)p(t, dz) = 0, \quad (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.25)$$

$$v = \mathcal{H}\hat{v}. \quad (3.26)$$

s'il possède les deux propriétés suivantes:

(i) *propriété de sursolution* :  $w \geq \mathcal{H}\hat{w}$ , et pour tout  $a$ ,

$$(\rho + \lambda)\hat{w}(\bar{t}, \bar{x}, a) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{U} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}) \right) - \lambda \int w(\bar{x} + az)p(\bar{t}, dz) \geq 0,$$

pour toute fonction test  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times (\ell(a), \infty))$ , et tout couple  $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}_+ \times (\ell(a), \infty)$ , qui est un point de minimum local de  $(\hat{w}(\cdot, \cdot, a) - \varphi)$ .

(ii) *propriété de sous-solution* :  $w \leq \mathcal{H}\hat{w}$ , et pour tout  $a$ ,

$$(\rho + \lambda)\hat{w}(\bar{t}, \bar{x}, a) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\bar{t}, \bar{x}) - \tilde{U} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\bar{t}, \bar{x}) \right) - \lambda \int w(\bar{x} + az)p(\bar{t}, dz) \leq 0,$$

pour toute fonction test  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}_+ \times (\ell(a), \infty))$ , et tout couple  $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R}_+ \times (\ell(a), \infty)$ , qui est un point de maximum local de  $(\hat{w}(\cdot, \cdot, a) - \varphi)$ .

Pour caractériser la fonction valeur comme une solution de viscosité, nous avons besoin de l'hypothèse de continuité suivante sur le noyau  $p(t, dz)$ :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \int w(z)p(t, dz) = \int w(z)p(t_0, dz), \quad \forall t_0 \geq 0 \quad (\mathbf{H6})$$

pour toute fonction mesurable  $w$  à croissance au plus linéaire.

**Théorème 10.** *Sous les hypothèses **(H1)**–**(H6)**, le couple  $(v, \hat{v})$  défini par (3.2) et (3.10) est l'unique solution de viscosité de (3.25)–(3.26) vérifiant les conditions de croissance*

$$\hat{v}(t, x, a) \leq K(e^{bt}x)^\gamma, \quad v(x) \leq Kx^\gamma$$

et la condition au bord

$$\hat{v}(t, x, a) = \lambda \int_t^\infty e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} \int v(x + az)p(s, dz) ds, \quad t \geq 0, (x, a) \in \partial\mathcal{X}.$$

### 3.2.2 Régularité des solutions

Nous commençons par le cas stationnaire où la régularité est plus simple à analyser.

**Théorème 11.** *Sous les hypothèses **(H1)**–**(H5)**, si  $p(t, dz)$  ne dépend pas de  $t$ , alors le couple  $(v, \hat{v})$  défini par (3.2) et (3.24) vérifie*

- $v \in C^1((0, \infty))$  avec  $v'(0+) = +\infty$  et pour tout  $x > 0$ , tout point de maximum dans (3.23) est un point intérieur.
- Pour tout  $a$ ,  $\hat{v}(\cdot, a) \in C^2((l(a), +\infty))$  et  $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(l(a), a) = +\infty$ .

La preuve de la régularité  $C^1$  de la fonction  $\hat{v}$  est fondée sur l'interaction entre la stricte convexité en  $x$  de la fonction  $\hat{v}$ , qui découle de la stricte convexité de la fonction d'utilité  $U$ , et sa propriété de sous-solution de viscosité. On montre que si la sous-différentielle  $D_x^+ \hat{v}(x, a)$  ne se réduit pas à un singleton, alors il y a une contradiction entre les deux propriétés. La différentiabilité de  $v$  découle alors de celle de  $\hat{v}$  et le fait que  $\hat{v}(\cdot, a) \in C^2((l(a), +\infty))$  est une conséquence de l'équation (3.22). Voir [13] pour les détails.

Pour démontrer la régularité dans le cas général, une hypothèse additionnelle s'avère nécessaire.

**Définition 3.** Une fonction  $u : \mathbb{R}^d \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  est dite *semiconcave* s'il existe une fonction croissante semi-continue supérieurement  $\omega : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \omega(\rho) = 0$  et

$$\eta u(x_1) + (1 - \eta)u(x_2) - u(\eta x_1 + (1 - \eta)x_2) \leq \eta(1 - \eta)|x_1 - x_2|\omega(|x_1 - x_2|), \quad (3.27)$$

pour tout couple  $x_1, x_2$  tel que le segment  $[x_1, x_2]$  est dans  $S$  et tout  $\eta \in [0, 1]$ . Une fonction est localement semiconcave si elle est semiconcave sur tout sous-ensemble compact de son domaine de définition.

En particulier, toute fonction concave ainsi que toute fonction  $C^1$  est toujours semiconcave.

**Théorème 12.** Sous les hypothèses (H1)–(H6), supposons que pour tout  $a \neq 0$ , la fonction

$$(t, x) \mapsto \int w(x + az)p(t, dz)$$

est localement semiconcave pour  $(t, x) \in (0, +\infty) \times (l(a), +\infty)$  et toute fonction continue  $w$  à croissance au plus linéaire.

Alors le couple  $(v, \hat{v})$  défini par (3.2) et (3.10) vérifie

- $v \in C^1((0, \infty))$  avec  $v'(0+) = +\infty$  et pour tout  $x > 0$ , tout point de maximum dans (3.12) est un point intérieur.
- Pour tout  $a$ ,  $\hat{v}(\cdot, a) \in C^1([0, +\infty) \times (l(a), +\infty))$  et  $\frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(t, l(a)^+, a) = +\infty$  pour tout  $t \geq 0$ .

L'hypothèse de semiconcavité est vérifiée, en particulier, par le modèle de l'exemple 3 (voir [13]).

Le fait que  $\hat{v}$  est continûment différentiable en  $x$  permet de montrer qu'il existe une stratégie optimale, et qu'elle s'écrit sous la forme "feedback" du théorème 9. La régularité permet aussi de mieux comprendre le comportement de la consommation optimale entre les dates de trading, particulièrement dans le cas stationnaire.

**Proposition 7** (Consommation optimale, cas stationnaire). *Supposons que  $p(t, dz)$  ne dépend pas de  $t$  et soit  $(\bar{c})$  la consommation optimale pour le problème auxiliaire (3.10), et  $(\bar{Y})$  la consommation intégrée correspondante avec point de départ  $(t, x)$ . Si  $x = l(a)$  alors  $\bar{c} \equiv 0$  et donc  $\bar{Y} \equiv l(a)$ . Si  $x > l(a)$  alors  $\bar{c}$  est continu, strictement positif et strictement décroissant;  $\bar{Y}$  est strictement décroissant et strictement convexe;  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{c}_t = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{Y}_t = l(a)$ .*

Dans le cas stationnaire, entre les dates de trading, l'investisseur consomme en continu, avec un taux de consommation décroissant, et s'il ne peut pas effectuer des transactions pendant une période suffisamment longue, il consommera toute la richesse qu'il peut sans compromettre sa solvabilité.

Dans le cas non stationnaire, on retrouve tous les résultats de Proposition 7 sauf la monotonie de  $\bar{c}$ , parce qu'on ne connaît pas a priori le comportement de la fonction valeur  $\hat{v}$  en fonction de  $t$ . Les simulations numériques suggèrent cependant que dans le modèle de l'exemple 3 la politique de consommation est toujours strictement décroissante en  $t$ .

### 3.2.3 Evaluation numérique de la fonction valeur

La principale difficulté pour la résolution du système (3.25)–(3.26) est liée à la présence d'un terme intégral-différentiel faisant intervenir  $\mathcal{H}v$ . Pour contourner cette difficulté, nous avons proposé dans [45] une procédure itérative de découplage. Nous commençons par une fonction valeur du problème sans trading  $v_0$ , défini par

$$v_0(x) = \sup_{c \in \mathcal{C}(x)} \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c_t) dt$$

où  $\mathcal{C}(x)$  est l'ensemble des processus positifs  $(c_t)_{t \geq 0}$  tels que  $x - \int_0^t c_s ds \geq 0$  pour tout  $t \geq 0$ .  $v_0$  est l'unique solution à croissance sous-linéaire de l'ODE

$$\rho v_0 - \tilde{U} \left( \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) = 0, \quad x > 0$$

avec la condition à bord  $v_0(0+) = 0$ . Nous pouvons alors construire deux suites de fonctions  $(\hat{v}_n(t, x, a))_{n \geq 1}$  et  $(v_n(x))_{n \geq 1}$  définies récursivement par

$$\begin{aligned} \hat{v}_{n+1}(t, x, a) &= \sup_{c \in \mathcal{C}_a(t, x)} \int_t^\infty e^{-(\rho+\lambda)(s-t)} \left[ U(c_s) + \lambda \int v_n(Y_s^{t,x} + az) p(s, dz) \right] ds \\ v_{n+1} &= \mathcal{H}\hat{v}_{n+1}, \quad n \geq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Par les mêmes arguments que plus haut on peut démontrer que  $\hat{v}_{n+1}$  est une solution de l'EDP suivante:

$$-(\rho + \lambda)\hat{v}_{n+1} + \frac{\partial \hat{v}_{n+1}}{\partial t} + \tilde{U} \left( \frac{\partial \hat{v}_{n+1}}{\partial x} \right) + \lambda \int v_n(x + az) p(t, dz) = 0, \quad (t, x, a) \in \mathcal{D}, \quad (3.29)$$

Pour chaque  $n$  fixé, cette EDP peut être résolue par des méthodes standards (différences finies) car le terme intégral-différentiel ne contient plus la fonction inconnue.

Pour démontrer la convergence de  $v_n$  vers  $v$  et  $\hat{v}_n$  vers  $\hat{v}$ , nous avons utilisé une représentation probabiliste autonome pour  $v_n$ . Soit  $\mathcal{A}_n(x)$  le sous-ensemble de contrôles  $(\alpha, c) \in \mathcal{A}(x)$  tels que  $\alpha_k = 0$  pour  $k \geq n + 1$ . Il est alors facile de voir que pour  $n \geq 0$ ,

$$v_n(x) = \sup_{(\alpha, c) \in \mathcal{A}_n(x)} E \left[ \int_0^\infty e^{-\rho t} U(c_t) dt \right]$$

Puisque,  $\mathcal{A}_n(x) \subset \mathcal{A}_{n+1}(x) \subset \mathcal{A}(x)$ , on a immédiatement que les suites  $\{v_n\}$  et  $\{\hat{v}_n\}$  sont croissantes. Plus précisément, l'erreur d'approximation admet la majoration exponentielle suivante:

**Théorème 13.** *Sous les hypothèses (H1)–(H5), la suite  $(\hat{v}_n, v_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $\mathcal{D}$  et  $\mathbb{R}_+$  vers  $(\hat{v}, v)$ . Plus précisément, pour tous compacts  $F \subset \mathcal{D}$  et  $G \subset \mathbb{R}_+$ , il existent des constantes  $C_F$  et  $C_G$  telles que*

$$0 \leq \sup_F (\hat{v} - \hat{v}_n) \leq C_F \delta^n, \quad (3.30)$$

$$0 \leq \sup_G (v - v_n) \leq C_G \delta^n, \quad (3.31)$$

où

$$\delta := \frac{\lambda}{\rho - b\gamma + \lambda} \frac{\kappa^\gamma}{z^\gamma} < 1$$

par hypothèse (H5).

$\lambda$	0 (pas de trading)	1	5	40
$\pi(1)$	0.6671	0.2749	0.1214	0.0539

Table 3.1: Coût de l'illiquidité  $\pi(1)$  en fonction de  $\lambda$ .

Cette méthode numérique nous a permis dans [45] d'étudier les fonctions valeur dans le marché illiquide et notamment de quantifier l'effet de l'illiquidité, en comparant la fonction valeur de notre modèle à celle du modèle classique de Merton. L'effet de l'illiquidité peut être défini en termes monétaires comme la richesse additionnelle  $\pi(x)$  nécessaire pour atteindre, dans un marché illiquide, le même niveau d'utilité que dans le modèle de Merton. Pour la fonction d'utilité puissance,  $\pi(x)$  est proportionnelle à  $x$ , et il suffit donc d'étudier  $\pi(1)$ . Le tableau 3.1 montre le coût de l'illiquidité pour différentes valeurs de  $\lambda$  dans le modèle de l'exemple 3 avec  $b = 0.4$ ,  $\sigma = 1$  et  $\rho = 0.2$  pour la fonction d'utilité  $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$ . On voit qu'il n'est pas très important d'avoir une fréquence de trading très grande, car même avec une transaction par an en moyenne on réduit déjà de plus que la moitié le coût de l'illiquidité.

### 3.3 Généralisations et perspectives

Le modèle présenté dans ce chapitre s'applique au cas d'un petit investisseur soumis à des contraintes très fortes sur les dates des transactions. Pour que cela ait un sens d'optimiser la consommation entre les dates de trading, ces dates doivent être suffisamment espacées, avec au plus quelques transactions par année. Les résultats de l'étude sont donc intéressants pour comprendre le coût de l'illiquidité pour les investisseurs, mais ils ne vont pas être effectivement appliqués par des agents économiques pour optimiser leur stratégies, car les petits investisseurs ne consomment pas selon des stratégies optimales.

Dans la continuation de ce travail j'envisage d'étudier les problèmes dont l'échelle de temps est beaucoup plus courte, tels que la liquidation optimale d'un portefeuille d'actions, ou la couverture des transactions faisant intervenir des actifs illiquides avec des actifs liquides. Dans ces problèmes, les effets de liquidité se font sentir même dans les marchés bien développés, et les praticiens qui travaillent sur ces problèmes utilisent déjà des méthodes quantitatives, ce qui signifie que les résultats d'une étude théorique ont plus de chances d'être appliqués en pratique.

La modélisation mathématique de l'exécution optimale d'ordres de bourse est un domaine en plein développement, et des dizaines d'articles ont déjà été écrits sur ce sujet (voir par exemple [1, 47]). Les méthodes de contrôle stochastique pour les systèmes couplés temps discret – temps continu, exposées dans ce chapitre permettront de contribuer à cette littérature en prenant explicitement en compte la nature discrète du flux d'ordres et les effets de volume. A titre d'exemple, je présente un modèle simplifié pour l'écoulement optimal d'un portefeuille d'actions, tiré d'un travail un cours avec H. Pham et M. Sirbu.

**Un modèle d'exécution optimale** On considère le problème d'un courtier qui a reçu l'ordre de vendre avant l'échéance  $T$  un portefeuille de  $K$  unités d'un actif illiquide. L'objectif du courtier est de liquider le portefeuille aussi vite que possible et à un prix qui est aussi proche que possible du prix mid-quote initial  $X_0$ . Les hypothèses du modèle sont les suivantes:

- Les transactions ne sont possibles qu'aux dates  $(\tau_i)_{i \geq 1}$  (dates auxquelles les ordres arrivent sur le marché). Dans la modélisation simplifiée on peut supposer que ces dates sont les temps de saut d'un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ .
- A chaque date  $\tau_i$ , un volume fini  $Z_i$  est disponible sur le marché à l'achat ou à la vente, et le courtier peut acheter/vendre l'actif illiquide dans les limites du volume disponible. On note  $\eta_i$  la quantité acheté / vendu par le courtier.

- Le prix auquel l'actif peut être acheté / vendu à la date  $\tau_i$  est donné par  $X_{\tau_i} + U_i$ , où  $(X_t)$  est le processus de mid-quote et  $U_i$  est la 'prime d'illiquidité', qui peut être corrélée avec le volume disponible. On suppose que les couples  $(Z_i, U_i)$  pour différentes valeurs de  $i$  sont i.i.d., et on note  $\mu(dz \times du)$  la loi de  $(U_i, Z_i)$ .

Introduisons le processus du 'volume restant à liquider'

$$V_t = K - \sum_{i:\tau_i \leq t} \eta_i$$

et le montant total des ventes jusqu'à la date  $t$  qui est donné par

$$P_t = \sum_{i:\tau_i \leq t} \eta_i (X_{\tau_i} + U_i)$$

La différence à la date  $T$  entre le résultat des transactions effectivement réalisées et le montant qu'on aurait obtenu si toutes les transactions avaient eu lieu au prix  $X_0$ , est donnée par

$$P_T - X_0(K - V_T) = \sum_{j:\tau_j \leq T} \eta_j U_j + \sum_{j:\tau_j \leq T} (X_{\tau_j} - X_{\tau_{j-1}}) V_{\tau_{j-1}} - V_T (X_{\tau_{max}} - X_0), \quad (3.32)$$

où  $\tau_{max} = \max\{\tau_i : \tau_i \leq T\}$ . Dans la mesure où  $V_T$  est proche de 0 (on cherche à liquider tout le portefeuille à la date  $T$ ), on peut remplacer la quantité (3.32) par

$$Q_T := \sum_{j:\tau_j \leq T} \eta_j U_j + \sum_{j:\tau_j \leq T} (X_{\tau_j} - X_{\tau_{j-1}}) V_{\tau_{j-1}},$$

qui a une interprétation économique du coût global de liquidation lié aux frais de transactions et aux fluctuations du prix.

Le courtier cherche alors à résoudre le problème

$$\min_{\eta_i} E[l(Q_T) + L(V_T)], \quad (3.33)$$

sous la contrainte de volume  $\min(Z_i, 0) \leq \eta_i \leq \max(Z_i, 0)$ , où  $l$  et  $L$  sont deux fonctions de pénalisation. La fonction  $L$  a un minimum en 0 pour forcer la liquidation du portefeuille à la date  $T$ , et la fonction  $l$  peut soit avoir un minimum en 0 si l'objectif est de minimiser le coût de l'opération en valeur absolue, soit être décroissante pour inciter le courtier à vendre les actifs à un prix plus élevé.

L'aléa du modèle est décrit par un processus stochastique en temps continu  $X$  (étant donné que l'échelle de temps est courte pour ce genre de problèmes, on peut supposer que c'est un mouvement Brownien avec  $dX_t = \sigma dW_t$ ), et une mesure aléatoire de Poisson  $J$  sur  $[0, \infty) \times \mathbb{R}^2$  qui décrit les dates de transaction, les volumes disponibles et les primes de liquidité:  $J = \sum_{i \geq 1} \delta_{(\tau_i, Z_i, U_i)}(dt \times dz \times du)$ . Une caractéristique particulière intéressante est que la stratégie  $\eta_i$  est choisie après avoir observé le volume  $Z_i$  et la prime  $U_i$ . Elle n'est donc pas prévisible, en tant que processus, dans la filtration engendrée par  $J$ . Pour modéliser ce type de contrôle en temps continu, on peut représenter  $\eta$  comme une *fonction aléatoire*  $\eta_t(z, u)$ , qui sera prévisible dans la filtration de  $J$ , car on peut prévoir la stratégie pour les valeurs données de  $Z_i$  et  $U_i$ . La dynamique contrôlée de  $Q$  et  $V$  s'écrit alors en temps continu comme

$$\begin{aligned} Q_s^{(t,q,v)} &= q + \int_t^s \int_{\mathbb{R}^2} \eta_r(z, u) u J(dr \times dz \times du) + \int_t^s V_r^{(t,q,v)} \sigma dW_t, \\ V_s^{(t,q,v)} &= v - \int_t^s \int_{\mathbb{R}^2} \eta_r(z, u) J(dr \times dz \times du). \end{aligned}$$

En introduisant la fonction valeur du problème (3.33),

$$w(t, q, v) = \min_{\eta \in \mathcal{A}} E[l(Q_T^{(t,q,v)}) + L(V_T^{(t,q,v)})],$$

où l'ensemble d'admissibilité  $\mathcal{A}$  correspond à la contrainte de volume, on peut écrire (formellement) l'équation HJB

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2\sigma^2\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + \lambda \int \mu(dz, du) \min_{\min(z,0) \leq \eta_i \leq \max(z,0)} w(t, q + u\eta, v - \eta) = 0, \quad (3.34)$$

où  $\mu$  est la loi de  $(Z_i, U_i)$ . Remarquons que cette équation a une structure similaire à (3.14) avec un opérateur de minimisation sous le signe de l'intégrale. Ceci traduit le fait que la stratégie est choisie après avoir observé le volume et la prime de liquidité (dans le cas de (3.34)) ou le rendement (dans le cas de (3.14)) et suggère que les méthodes développées pour (3.14) pourraient être transposées à (3.34) et des problèmes similaires.

Les généralisations de ce cadre simplifié que j'envisage de développer sont notamment

- L'introduction d'un deuxième actif liquide corrélé avec  $X$ , qui permettrait au courtier de couvrir son exposition à l'actif risqué pendant la liquidation, ce qui est une pratique courante dans les marchés.
- L'introduction de la rétroaction de la stratégie  $\eta$  sur la dynamique de  $X$  et l'intensité de la mesure de Poisson  $\lambda$ , qui deviendrait alors stochastique, pour modéliser l'impact d'un gros investisseur sur le marché.





## Chapter 4

# Risque de saut dans les marchés financiers

Dans ce chapitre nous présentons trois applications des processus avec sauts à la modélisation des risques dans les marchés financiers. Chacun de ces travaux résulte d'une collaboration ou une interaction avec des praticiens. L'étude de la stratégie CPPI en présence de sauts [11] a été motivée par des discussions avec des gérants de fonds de la banque BBVA lors d'une formation sur les techniques quantitatives de gestion organisée à Madrid en 2006, et dont j'étais l'un des intervenants. Le travail sur les 'gap options' [55] a été initiée par des échanges avec des quants de Credit Suisse et Natixis. Finalement, l'étude de modélisation des pics dans les marchés d'électricité [44] n'aurait pas été possible sans les discussions que j'ai eu avec les chercheurs d'EDF R&D lors de plusieurs contrats de recherche avec cette société.

### 4.1 Mesures des risque pour les stratégies d'assurance de portefeuille

Le terme 'assurance de portefeuille' regroupe les méthodes de gestion d'actifs qui ont comme objectif de garantir à l'investisseur un rendement minimal à l'échéance, tout en gardant un potentiel de croissance en cas d'un mouvement favorable du marché. Une stratégie populaire d'assurance de portefeuille est la stratégie dite 'de coussin', appelée Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) en anglais, introduite par Black et Perold [5]. L'idée est d'investir en l'actif risqué une proportion fixe du coussin, c'est-à-dire, de la différence entre la valeur du portefeuille et la valeur actualisée de la garantie (appelée plancher). De cette manière, si le cours de l'actif risqué baisse et la valeur du portefeuille s'approche du plancher, l'exposition à l'actif risque est progressivement diminuée, et si le plancher est touché de manière continue, le portefeuille devient complètement sans risque et l'investisseur est assuré de récupérer la garantie à l'échéance. Ainsi, dans les modèles à trajectoires continues, le risque de ne pas pouvoir rembourser la garantie à l'investisseur, est complètement absent. En pratique, ce risque est bien présent, car il peut être impossible pour le gérant du fonds de liquider le portefeuille à temps, soit parce que le plancher est franchi par un saut de taille finie, soit à cause d'un assèchement de liquidité sur le marché en cas d'un effondrement des cours. Non seulement le risque est présent, mais les caractéristiques de la stratégie sont souvent choisis en fonction de la tolérance au risque, un problème que ne peut évidemment pas être résolu sans introduire les sauts dans le modèle.

Dans l'article [11] nous proposons un modèle pour le risque de la stratégie CPPI, fondé sur des processus de Lévy, et développons des formules explicites et des méthodes numériques pour le calcul des mesures de risque (probabilité de perte, espérance de perte, VaR). Dans ce recueil

nous présentons seulement le modèle et les formules de base pour les mesures de risque. Pour les différentes extensions (volatilité stochastique, multiplicateur variable, valorisation et couverture des options associées aux stratégies CPPI etc.) et des exemples numériques, voir [11].

#### 4.1.1 Description formelle de la stratégie et modélisation

La stratégie CPPI est une stratégie de gestion, où le gérant distribue dynamiquement la richesse du fonds entre l'actif risqué  $S$  et l'actif dit 'de réserve', typiquement un zéro-coupon de nominal  $N$  (montant de garantie) et échéance  $T$ , dont le prix est noté  $B$ . L'exposition à l'actif risqué est une fonction du 'coussin'  $C_t$ , défini par

$$C_t = V_t - B_t.$$

A toute date  $t \leq T$ ,

- Si  $V_t > B_t$ , la richesse investie en actif risqué est  $mC_t = m(V_t - B_t)$ , où  $m > 1$  est un multiplicateur constant.
- Si  $V_t \leq B_t$ , toute la richesse est investie en zéro-coupon.

Nous supposons que les processus de prix de l'actif risqué et du zéro-coupon sont solutions de

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = dZ_t \quad \frac{dB_t}{B_{t-}} = dR_t,$$

où  $Z$  et  $R$  sont des semimartingales (qui peuvent ne pas être continues). Un exemple simple est de supposer que  $Z$  est un processus de Lévy et  $R_t = rt$  avec  $r$  un taux d'intérêt constant. Dans la suite nous allons faire les hypothèses suivantes:

- $\Delta Z_t > -1$  p.s.
- Le prix du zéro-coupon  $B_t$  est continu p.s.

La première hypothèse garantit la positivité du processus de prix, et la deuxième permet de nous concentrer sur les sauts dans l'actif risqué.

Soit  $\tau := \inf\{t : V_t \leq B_t\}$ . Puisque la stratégie CPPI est autofinancante, avant la date  $\tau$ , le coussin  $C_t = V_t - B_t$  vérifie

$$\frac{dC_t}{C_{t-}} = m dZ_t + (1 - m) dR_t.$$

Pour simplifier encore plus, introduisons le coussin actualisée  $C_t^* = \frac{C_t}{B_t}$ . En appliquant la formule d'Itô, on trouve

$$\frac{dC_t^*}{C_{t-}^*} = m(dZ_t - d[Z, R]_t - dR_t + d[R]_t).$$

Si on pose  $L_t := dZ_t - d[Z, R]_t - dR_t + d[R]_t$ , cette équation se réécrit sous une forme plus compacte

$$C_t^* = C_0^* \mathcal{E}(mL)_t,$$

où  $\mathcal{E}$  est l'exponentielle de Doléans. Après la date  $\tau$  tout le portefeuille est investi en l'actif sans risque, ce qui veut dire que  $C^*$  reste constant, et donc

$$C_t^* = C_0^* \mathcal{E}(mL)_{t \wedge \tau}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.1)$$

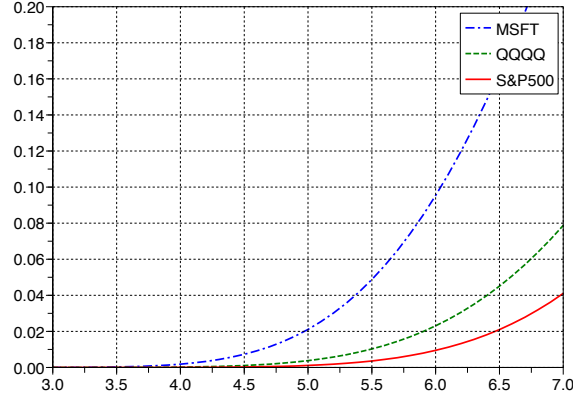


Figure 4.1: Probabilité de perte à horizon de 5 ans en fonction du multiplicateur  $m$  pour les stratégies CPPI utilisant les actions de Microsoft (MSFT) l'indice NASDAQ (QQQQ) et l'indice S&P 500 comme actif risqué.

#### 4.1.2 Calcul de mesures de risque

**Probabilité de perte** Un portefeuille CPPI enregistre une perte (on dit que le plancher est percé) si, pour un  $t \in [0, T]$ ,  $V_t \leq B_t$ . L'événement  $V_t \leq B_t$  est le même que  $C_t^* \leq 0$  et puisque  $R$  est continu et  $\mathcal{E}(X)_t = \mathcal{E}(X)_{t-}(1 + \Delta X_t)$ ,  $C_t^* \leq 0$  pour un  $t \in [0, T]$  si et seulement si  $m\Delta L_t \leq -1$  pour un  $t \in [0, T]$ . Ceci nous conduit au résultat suivant:

**Proposition 8.** Soit  $L = L^c + L^j$ , où  $L^c$  est un processus continu et  $L^j$  est un processus de Lévy indépendant de  $L^c$ , de mesure de Lévy  $\nu$ . La probabilité que la valeur du portefeuille passe sous le plancher est alors donnée par

$$P[\exists t \in [0, T] : V_t \leq B_t] = 1 - \exp\left(-T \int_{-\infty}^{-1/m} \nu(dx)\right). \quad (4.2)$$

Ce résultat permet de calculer la probabilité de perte d'une stratégie en fonction du multiplicateur  $m$ , et par conséquent de choisir le multiplicateur en fonction du niveau du risque visé. Graphique 4.1 trace la probabilité de perte calculée par la formule (4.2) avec les paramètres estimés sur les données historiques de 3 sous-jacents différents: les actions de Microsoft (MSFT) le tracker qui réplique l'indice NASDAQ (QQQQ) et l'indice S&P 500. Pour une probabilité de perte de 2% sur 5 ans, on trouve  $m \approx 5$  pour MSFT,  $m \approx 6$  pour QQQQ, et  $m \approx 6.5$  pour S&P 500. Pour comparaison, les valeurs de  $m$  utilisées en pratique par les gestionnaires de fonds sont typiquement comprises entre 4 et 6.

**Espérance de perte** Pour obtenir des formules explicites, nous supposons maintenant que le processus  $L$ , qui apparaît dans l'exponentielle stochastique dans (4.1) est un processus de Lévy, de mesure de Lévy  $\nu$ . Ce processus peut être représenté comme  $L = L^1 + L^2$  où  $L^2$  est un processus constant par morceaux dont les sauts vérifient  $\Delta L_t^2 \leq -1/m$  et  $L^1$  est un processus dont les sauts vérifient  $\Delta L_t^1 > -1/m$ . Soit  $\lambda^* := \nu((-\infty, -1/m])$  l'intensité de sauts de  $L^2$ ,  $\tau$  l'instant du premier saut de  $L^2$  (variable exponentielle de paramètre  $\lambda^*$ ), et  $\tilde{L}^2 = \Delta L_\tau^2$  la taille du premier saut de  $L^2$ . La fonction caractéristique du processus de Lévy  $\log \mathcal{E}(mL^1)_t$  sera notée  $\phi_t$  et nous allons poser  $\psi(u) = \frac{1}{t} \log \phi_t(u)$ . Finalement, nous supposons sans perte de généralité que le coussin actualisé vérifie  $C_0^* = 1$ .

Nous commençons par calculer l'espérance de perte.

**Proposition 9.** *Supposons que*

$$\int_1^\infty x\nu(dx) < \infty.$$

Alors l'espérance de perte conditionnellement au fait que le plancher est percé est donnée par

$$E[C_T^* | \tau \leq T] = \frac{\lambda^* + m \int_{-1}^{-1/m} x\nu(dx)}{(1 - e^{-\lambda^* T})(\psi(-i) - \lambda^*)} (e^{-\lambda^* T} \phi_T(-i) - 1),$$

et l'espérance de perte non-conditionnelle vérifie

$$E[C_T^* 1_{\tau \leq T}] = \frac{\lambda^* + m \int_{-1}^{-1/m} x\nu(dx)}{(\psi(-i) - \lambda^*)} (e^{-\lambda^* T} \phi_T(-i) - 1). \quad (4.3)$$

**Distribution de perte** Pour calculer les mesures de risque telles que la VaR ou la CVaR, nous avons besoin de connaître la fonction de répartition de la perte, sachant que le plancher est percé, c'est-à-dire, la quantité

$$P[C_T^* < x | \tau \leq T].$$

pour  $x < 0$ . Suivant l'approche de Carr et Madan [10], nous calculons la fonction caractéristique de cette loi conditionnelle, ce qui permet de retrouver la fonction de répartition par inversion numérique de la transformée de Fourier. Dans le théorème qui suit,

$$\tilde{\phi}(u) := \frac{1}{\lambda^*} \int_{-\infty}^{-1/m} e^{iu \log(-1-mx)} \nu(dx)$$

est la fonction caractéristique de  $\log(-1 - m\tilde{L}^2)$ , et  $X^*$  est une v.a. auxiliaire qui est nécessaire seulement pour rendre la fonction caractéristique intégrable. On peut par exemple prendre une loi gaussienne centrée réduite.

**Théorème 14.** *Soit  $X^*$  une v.a. avec fonction caractéristique  $\phi^*$ , telle que  $E[|X^*|] < \infty$  et  $\frac{|\phi^*(u)|}{1+|u|} \in L^1$ . Si*

$$\frac{|\tilde{\phi}(u)|}{(1+|u|)|\lambda^* - \psi(u)|} \in L^1 \quad (4.4)$$

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]} |\log|1+mx|| \nu(dx) < \infty \quad (4.5)$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, alors pour tout  $x < 0$ ,

$$P[C_T^* < x | \tau \leq T] = P[-e^{X^*} < x] + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iu \log(-x)} \left( \frac{\lambda^* \tilde{\phi}(u)}{iu(\lambda^* - \psi(u))} \frac{1 - e^{-\lambda^* T + \psi(u)T}}{1 - e^{-\lambda^* T}} - \frac{\phi^*(u)}{iu} \right) du. \quad (4.6)$$

## 4.2 Produits dérivés sensibles au risque de saut

Bien que les premiers articles sur l'utilisation des processus de Lévy en finance datent des années 60–70 [41, 43], et que les années 90 ont vu une véritable explosion de la littérature sur ce sujet, ces modèles ont eu du mal à s'établir dans les équipes de recherche des établissements financiers, surtout en ce qui concerne la valorisation d'options. Même si on peut partiellement expliquer

cela par la difficulté technique supérieure de modèles avec sauts, et par une certaine 'aversion à l'incomplétude des marchés', la principale raison est que pour la plupart d'options, l'apport des modèles avec sauts en comparaison avec des modèles plus classiques comme celui de Heston [29], n'est pas clair.

W. Schoutens et al. [53] comparent les différents modèles avec sauts proposés dans la littérature au modèle de Heston en termes de qualité de calibration et du pricing d'options exotiques. Ils trouvent que l'inclusion des sauts dans le modèle ne conduit pas à une amélioration spectaculaire de la qualité de calibration, et que les différences des prix des options exotiques peuvent être plus grandes entre deux modèles avec sauts, qu'entre le modèle de Heston et un modèle avec sauts. Pour des options exotiques telles que les options à barrière, les options digitales et les cliquets, l'inclusion de sauts ne conduit pas à un changement très important du prix, sous condition qu'à la fois le modèle sans sauts et le modèle avec sauts sont calibrés au marché. Ceci montre que ces options ne sont pas très sensibles au risque de saut (c'est-à-dire, l'effet d'un saut sur le P&L est difficile à distinguer de l'effet d'un mouvement continu d'une grande amplitude).

Cependant, au milieu des années 2000, de nouvelles options avec une sensibilité beaucoup plus grande au risque de saut sont apparues sur les marchés. Il s'agit de produits comme *gap option*, qui a un pay-off non-nul si le rendement négatif *journalier* du sous-jacent dépasse une valeur de référence; *guaranteed stop loss*, qui offre à l'acheteur la garantie de liquider ces actifs à un prix donné  $K$  dès que le cours atteint cette valeur; ainsi que les différents produits avec l'effet de levier, tels que *leveraged credit-linked note*. Pour tous ces produits, les prix dans les modèles aux trajectoires continues sont irréalistes, ou carrément nuls, et l'inclusion de sauts conduit à un changement très important du prix et permet en général d'atteindre une valeur réaliste. Dans l'article [55] dont le contenu est détaillé ci-dessous, nous illustrons l'effet très important de sauts sur l'exemple de *gap option*, et présentons des méthodes de pricing et de couverture pour ce produit, dans ses versions mono-sousjacent et multi-sousjacent.

### 4.2.1 Description du produit et modélisation

Une *gap option* est typiquement un contrat entre deux parties, dont l'une cherche à se protéger contre le risque de saut (acheteur de la protection) et l'autre cherche un rendement amélioré en échange d'une prise de risque (vendeur de la protection). Le pay-off d'une *gap option* est lié à l'occurrence d'un *événement de gap*, c'est-à-dire, un mouvement négatif d'une taille suffisante qui se produit pendant une seule journée. Le produit suivant a été commercialisé par une grande banque internationale en 2007.

*Exemple 4* (Gap option mono-sousjacent).

- Le vendeur de la protection verse le montant nominal à l'acheteur à la signature du contrat, et reçoit un paiement mensuel (Libor plus spread) jusqu'à l'échéance du contrat, ou la première occurrence de l'événement de gap. Si l'événement de gap n'a pas eu lieu, il reçoit aussi le montant nominal à l'échéance du contrat.
- L'événement de gap est défini comme un mouvement négatif de l'indice DJ Euro Stoxx 50 de plus de 10%, enregistré pendant une journée (on regarde la différence entre deux prix de clôture consécutifs).
- Si l'événement de gap a lieu entre dates  $t - 1$  et  $t$ , le vendeur de la protection reçoit un paiement immédiat de  $N(1 - 10 \times (0.9 - R))$ , où  $R = S_t/S_{t-1}$  est la performance de l'indice dans la journée où l'événement de gap a été enregistré, et le contrat se termine.

Le pay-off d'une *gap option* multi-sousjacent est déterminé par le nombre total d'événements de gap dans un panier d'actifs pendant une période de référence. L'exemple suivant permet de comprendre le principe.

*Exemple 5* (Gap option multi-sousjacent).

- Le vendeur de la protection verse le montant nominal à l'acheteur à la signature du contrat, et reçoit un paiement mensuel jusqu'à l'échéance du contrat.
- L'événement de gap est défini comme un mouvement négatif de plus de 20% pendant une journée dans l'un de sous-jacent parmi les 10 noms du panier.
- A l'échéance du contrat, le vendeur de la protection reçoit le montant  $kN$ , ou le pourcentage  $k$  est déterminé en fonction du nombre total d'événements de gap un utilisant le tableau suivant:

$M$	0	1	2	3	$\geq 4$
$k$	1	1	1	0.5	0

### 4.2.2 Pricing dans le cas mono-sousjacent

Dans la suite, nous utiliserons la définition formelle suivante de la gap option mono-sousjacent. Nous supposons que le temps restant jusqu'à la maturité de l'option est divisé en  $N$  périodes de longueur  $\Delta$ :  $T = N\Delta$ . Le rendement de la  $k$ -ième période sera noté  $R_k^\Delta = S_{k\Delta}/S_{(k-1)\Delta}$ .

**Définition 4** (Gap option). *Soit  $\alpha$  le niveau de rendement nécessaire pour l'occurrence de l'événement de gap, et  $k^*$  l'instant du premier événement de gap exprimé en unités de  $\Delta$ :  $k^* := \inf\{k : R_k^\Delta \leq \alpha\}$ . La gap option est une option qui paie à son acheteur le montant  $f(R_{k^*}^\Delta)$  à l'instant  $\Delta k^*$  si  $k^* \leq N$  et zéro sinon.*

Dans le cas où les log-rendements du sous-jacent sont i.i.d., le prix d'une gap option s'obtient facilement comme l'espérance du pay-off sous la probabilité risque-neutre.

**Proposition 10.** *Supposons que les rendements  $(R_k^\Delta)_{k=1}^N$  sont i.i.d., et soit  $p_\Delta(dx)$  la loi de  $\log R_1^\Delta$  sous la probabilité risque-neutre. Alors le prix d'une gap option (Définition 4) est donné par*

$$G^\Delta = e^{-r\Delta} \int_{-\infty}^{\beta} f(e^x) p_\Delta(dx) \frac{1 - e^{-rT} \left( \int_{\beta}^{\infty} p_\Delta(dx) \right)^N}{1 - e^{-r\Delta} \int_{\beta}^{\infty} p_\Delta(dx)}, \quad (4.7)$$

avec  $\beta := \log \alpha < 0$ .

La loi des rendements sous la probabilité risque-neutre peut être estimée à partir des prix de puts européennes de courte maturité sur le même indice, qui sont sensibles au même risque des grands sauts négatifs que les gap options (voir [55] pour la description détaillée de la procédure de calibration). Une fois la loi  $p_\Delta$  estimée, et si sa fonction caractéristique  $\phi_\Delta$  est connue explicitement, les intégrales dans (4.7) peuvent être calculées par inversion numérique de la transformée de Fourier (voir [10, 40]). Pour l'évaluation numérique, le domaine d'intégration doit être tronqué à un intervalle fini  $[-L, L]$ . Puisque  $\Delta$  est petit, la fonction caractéristique  $\phi_\Delta(u)$  décroît très lentement quand  $|u| \rightarrow \infty$ , ce qui signifie que le calcul numérique des intégrales sera assez coûteux. Ce problème peut être contourné avec une approximation fondée sur le développement de  $G^\Delta$  en série de Taylor autour de la valeur  $\Delta = 0$ . Autrement dit, au lieu d'une méthode numérique dont la complexité de calcul augmente quand  $\Delta$  devient petit, nous proposons une formule explicite approchée dont la précision s'améliore quand  $\Delta \rightarrow 0$ .

Pour calculer la limite  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} G^\Delta$ , nous supposons que le sous-jacent suit un modèle exponentielle-Lévy:  $S_t = S_0 e^{X_t}$ . La loi  $p_\Delta$  correspond alors à la loi de  $X_\Delta$ , et on sait que pour  $\beta < 0$  et pour une fonction  $g$  vérifiant des hypothèses d'intégrabilité appropriées (voir [16, 52]),

$$\int_{-\infty}^{\beta} g(x) p_\Delta(dx) \sim \Delta \int_{-\infty}^{\beta} g(x) \nu(dx),$$

Ceci permet de démontrer que

$$G^0 := \lim_{\Delta \rightarrow 0} G^\Delta = \int_{-\infty}^{\beta} f(e^x) \nu(dx) \frac{1 - e^{-rT - T \int_{-\infty}^{\beta} \nu(dx)}}{r + \int_{-\infty}^{\beta} \nu(dx)}, \quad (4.8)$$

avec  $\beta = \log \alpha$ . L'erreur d'approximation de  $G^\Delta$  par  $G^0$  décroît comme  $O(\Delta)$  quand  $\Delta \rightarrow 0$ . Une estimation plus précise de l'erreur est donnée dans [55]. Une étude empirique montre que la formule (4.8) garantit une précision suffisante dans des conditions typiques de marché.

La formule approchée (4.8) peut en outre être interprétée comme le prix exact d'une gap option modifiée, ce qui donne une meilleure compréhension des risques de ce produit.

**Définition 5** (Gap option, définition simplifiée). *Soit  $\tau = \inf\{t : \Delta X_t \leq \beta\}$  le temps du premier saut de  $X$  plus petit que  $\beta$ . La gap option est un produit qui paie à son acheteur le montant  $f(S_\tau/S_{\tau-}) = f(e^{\Delta X_\tau})$  si  $\tau \leq T$  et zéro sinon.*

Le prix de ce produit est donné par

$$E^Q[e^{-r\tau} f(e^{\Delta X_\tau}) 1_{\tau \leq T}] = G^0.$$

Avec cette nouvelle définition que nous utiliserons désormais, il est clair que la gap option est un pari sur le risque de saut pur, qui n'est pas sensible aux petites fluctuations du sous-jacent, et dont le delta est par conséquent égal à zéro.

### 4.2.3 Couverture avec des options européennes

Comme on vient de remarquer, la gap option a un delta nul, ce qui veut dire qu'elle ne peut pas être couverte en delta, et plus généralement, elle ne peut pas être couverte avec le sous-jacent. Pour couvrir une gap option, il faut trouver un produit liquide qui a un profil de risque similaire, c'est-à-dire qu'il est sensible aux grands sauts négatifs, et qu'il a très peu de sensibilité aux petits mouvements quotidiens. Un exemple naturel est donné par les puts hors-la-monnaie. Avec des puts ayant 1 jour jusqu'à l'expiration on pourrait en effet construire une couverture parfaite pour une gap option, mais les options d'une si courte maturité ne sont pas liquides. Notre objectif est alors de calculer le ratio de couverture optimal pour la couverture approchée d'une gap option avec des puts hors-la-monnaie ayant entre 1 et 2 semaines jusqu'à l'expiration, qui sont assez liquides. Nous allons calculer le ratio qui minimise l'erreur  $L^2$  de réplication, en supposant, suivant [12] que cette erreur est calculé sous la probabilité martingale. Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'un modèle exponentielle-Lévy  $S_t = S_0 e^{X_t}$ , et notons par  $J$  la mesure de sauts de  $X$  et par  $\hat{J}$  sa version compensée. Soit  $G_t$  le prix d'une gap option (définition 5) calculé à l'instant  $t$  (à partir de maintenant nous allons omettre l'indice supérieur qui correspond à l'intervalle de discrétisation et qui sera toujours égal à 0). Ce prix peut alors être exprimé comme une intégrale stochastique par rapport à  $\hat{J}$ :

$$G_t = G_0 + \int_0^t \int_{-\infty}^{\beta} 1_{s \leq \tau} e^{-\lambda^*(T-s)} f(e^x) \hat{J}(ds \times dx),$$

avec  $\lambda^* = \nu((-\infty, \beta])$ . Soit  $P(t, S)$  le prix à l'instant  $t$  du put européen utilisé pour la couverture:

$$P(t, S) = E^Q[(K - S_T)^+ | S_t = S].$$

En utilisant la formule d'Itô,  $P(t, S_t)$  peut également être exprimé comme intégrale stochastique:

$$\begin{aligned} P_t \equiv P(t, S_t) &= P(0, S_0) + \int_0^t \sigma S_u \frac{\partial P(u, S_u)}{\partial S} dW_u \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \{P(u, S_{u-e^z}) - P(u, S_{u-})\} \hat{J}(du \times dz). \end{aligned}$$

Le résultat suivant découle alors de Proposition 4 dans [12].



**Proposition 11.** *La stratégie  $(\hat{c}, \hat{\phi})$  qui minimise l'erreur  $L^2$  de couverture sous la probabilité martingale*

$$E^Q \left[ \left( c + \int_0^T \phi_t dP_t - G_T \right)^2 \right]$$

est donné par

$$\hat{c} = E^Q[G_T] = G_0. \quad (4.9)$$

$$\hat{\phi}_t = 1_{t \leq \tau} \frac{\int_{-\infty}^{\beta} \nu(dz) f(e^z) e^{-\lambda^*(T-t)} \{P(t, S_t e^z) - P(t, S_t)\}}{\sigma^2 S_t^2 \left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)^2 + \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) \{P(t, S_t e^z) - P(t, S_t)\}^2}. \quad (4.10)$$

L'étude numérique présentée dans [55] montre que cette stratégie reste assez efficace même avec des puts ayant 2 semaines jusqu'à l'expiration, surtout en termes de réduction de la Value at Risk du portefeuille.

#### 4.2.4 Les gap options multi-sous-jacents

Pour calculer le prix d'une gap option écrite sur un panier de  $M$  sous-jacents, nous supposons que la dynamique de ces actifs est donnée par un modèle exponentielle-Lévy multidimensionnel, c'est-à-dire,  $S_t^i = S_0^i e^{X_t^i}$ ,  $i = 1, \dots, M$ , où  $(X^1, \dots, X^M)$  est un processus de Lévy en dimension  $M$  de mesure de Lévy  $\nu$ . Nous allons dès le départ simplifier le problème en supposant qu'un événement de gap correspond à un saut négatif inférieur à une valeur donné  $\beta$  dans l'un des actifs du panier plutôt qu'à un rendement journalier inférieur à  $\alpha$ . Introduisons le processus de comptage des événements de gap jusqu'à une date donnée  $t$ :

$$N_t = \sum_{i=1}^M \#\{s : s \leq t \text{ et } \Delta X_s^i \leq \beta\} \quad (4.11)$$

et une gap option multi-soujacent est une option qui paie à son acheteur le montant  $f(N_T)$  à la date  $T$ , où  $f$  est une fonction donnée.

La principale difficulté au niveau de modélisation est alors de décrire la dépendance entre les événements de gap simultanés dans les différents actifs (l'hypothèse du processus de Lévy  $M$ -dimensionnel fait que les événements de gap non-simultanés sont toujours indépendants). Les notions d'intégrale de queue d'un processus de Lévy et de copule de Lévy, introduites dans [54, 36] fournissent un outil adapté pour ce problème. Pour une mesure de Lévy  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^M$ , l'intégrale de queue est défini par

$$U(z_1, \dots, z_M) = \nu(\{x \in \mathbb{R}^M : x_1 \leq z_1, \dots, x_M \leq z_M\}), \quad z_1, \dots, z_M < 0. \quad (4.12)$$

L'intégrale de queue peut aussi être définie pour  $z$  positifs, mais ici on ne s'intéresse qu'aux sauts négatifs. De même, pour décrire l'intensité de sauts dans un sous-ensemble des composantes de  $X$ , l'intégrale de queue marginale peut être utilisée: pour  $m \leq M$  et  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq M$ , l'intégrale de queue  $(i_1, \dots, i_m)$ -marginale de  $\nu$  est définie par

$$U_{i_1, \dots, i_m}(z_1, \dots, z_m) = \nu(\{x \in \mathbb{R}^M : x_{i_1} \leq z_1, \dots, x_{i_m} \leq z_m\}), \quad z_1, \dots, z_m < 0. \quad (4.13)$$

Le résultat suivant décrit la structure du processus de comptage des événements de gap à travers les intégrales de queue marginales de  $\nu$ :

**Lemme 2.** *Le processus de comptage des événements de gap  $N$  est un processus de Lévy ayant des sauts de tailles entières  $1, \dots, M$  uniquement, avec les intensités correspondantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_M$*

données par

$$\lambda_m = \sum_{k=m}^M (-1)^{k-m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq M} C_m^k U_{i_1, \dots, i_k}(\beta, \dots, \beta), \quad 1 \leq m \leq M, \quad (4.14)$$

où  $C_m^k$  est le coefficient binomial et la deuxième somme est calculé sur tous les ensembles de  $k$  entiers vérifiant  $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq M$ .

Une fois les intensités  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  calculées, le prix de la gap option peut être évalué via

$$E[f(N_T)] = e^{-\lambda T} \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} f\left(\sum_{k=1}^M kn_k\right) \prod_{i=1}^M \frac{(\lambda_i T)^{n_i}}{n_i!}, \quad (4.15)$$

où  $\lambda := \sum_{i=1}^M \lambda_i$ . En pratique, cette somme ne contient souvent qu'un nombre fini de termes. Dans l'exemple 5,  $f(n) = 0$  pour  $n \geq 4$  et

$$E[f(N_T)] = e^{-\lambda T} \left\{ 1 + \lambda_1 T + \frac{(\lambda_1 T)^2}{2} + \lambda_2 T + \frac{(\lambda_1 T)^3}{12} + \frac{\lambda_1 \lambda_2 T^2}{2} + \frac{\lambda_3 T}{2} \right\}. \quad (4.16)$$

Pour utiliser la formule (4.14), il faut calculer l'intégrale de queue de  $\nu$  et toutes les intégrales de queue marginales. Ces objets sont déterminés par les intensités de saut de chacune des composantes de  $X$  et par la dépendance entre les différentes composantes. Pour des fins de modélisation, la dépendance peut être séparée des lois de composantes individuelles moyennant la notion de copule de Lévy, qui est une notion parallèle à la copule, mais définie pour les mesures de Lévy plutôt que les mesures de probabilité. Plus précisément, nous utiliserons les copules de Lévy positives, qui décrivent la dépendance entre les sauts d'une signe donnée (dans ce cas, négatifs) d'un processus de Lévy.

Une fonction  $F : [0, \infty]^d \rightarrow [0, \infty]$  est une *copule de Lévy positive* si elle vérifie les conditions suivantes:

1.  $F(u_1, \dots, u_d) = 0$  si  $u_i = 0$  pour au moins un  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,
2.  $dF$  est une mesure positive,
3.  $F_i(u) = u$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $u \in [0, \infty]$ , où  $F_i : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$  est la fonction marginale uni-dimensionnelle de  $F$ , obtenue en remplaçant tous les arguments sauf le  $i$ -ème par  $\infty$ :

$$F_i(u) = F(u_1, \dots, u_d)_{u_i=u, u_j=\infty \forall j \neq i}.$$

De la même manière, on définit les fonctions marginales d'une copule de Lévy d'une dimension supérieure:

$$F_{i_1, \dots, i_m}(u_1, \dots, u_m) = F(v_1, \dots, v_d)_{v_{i_k}=u_k, k=1, \dots, m; v_j=\infty, j \notin \{i_1, \dots, i_m\}}.$$

La copule de Lévy relie l'intégrale de queue  $M$ -dimensionnelle aux intégrales de queue marginales uni-dimensionnelles:

**Proposition 12.**

- Soit  $X = (X^1, \dots, X^d)$  un processus de Lévy dans  $\mathbb{R}^d$ . Il existe une copule de Lévy positive  $F$  telle que les intégrales de queue de  $X$  vérifient

$$U_{i_1, \dots, i_m}(x_1, \dots, x_m) = F_{i_1, \dots, i_m}(U_{i_1}(x_1), \dots, U_{i_m}(x_m)) \quad (4.17)$$

pour tout ensemble non-vide d'indices  $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, d\}$  et tous  $(x_1, \dots, x_m) \in (-\infty, 0)^m$ .

- Soit  $F$  une copule de Lévy positive en dimension  $d$  et  $U_i, i = 1, \dots, d$  les intégrales de queue de processus de Lévy unidimensionnels. Il existe un processus de Lévy  $X$  dans  $\mathbb{R}^d$  dont les composantes ont les intégrales de queue  $U_i, i = 1, \dots, d$  et dont les intégrales de queue marginales vérifient l'équation (4.17) pour tout ensemble non-vide d'indices  $\{i_1, \dots, i_m\} \subseteq \{1, \dots, d\}$  et tous  $(x_1, \dots, x_m) \in (-\infty, 0)^m$ .

En termes de la copule de Lévy  $F$  de  $X$  et des intégrales de queue unidimensionnelles, la formule (4.14) se réécrit comme

$$\lambda_m = \sum_{k=m}^M (-1)^{k-m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq M} C_m^k F_{i_1, \dots, i_k}(U_{i_1}(\beta), \dots, U_{i_k}(\beta))$$

Pour calculer les intensités  $\lambda_i$  et le prix de la gap option, il suffit donc de connaître les intensités de gap individuelles  $U_i(\beta)$ , qui peuvent être estimées à partir des prix de put de courte maturité, et la copule de Lévy  $F$ , qui peut être choisie dans une famille paramétrique. Une possibilité est de prendre la copule de Lévy de Clayton, donnée par

$$F^\theta(u_1, \dots, u_M) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_M^{-\theta})^{-1/\theta}, \quad (4.18)$$

où  $\theta$  est le paramètre de dépendance ( $\theta = 0$  correspond à l'indépendance et  $\theta \rightarrow \infty$  correspond à la dépendance complète quand toutes les composantes sautent en même temps).

Pour la copule de Lévy de Clayton, l'équation (4.14) se simplifie à

$$\lambda_m = \sum_{k=m}^M (-1)^{k-m} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq M} C_m^k (U_{i_1}(\beta)^{-\theta} + \dots + U_{i_k}(\beta)^{-\theta})^{-1/\theta}.$$

Pour les très grands paniers d'actifs (plus que 20 noms par exemple) la complexité de calcul avec cette formule devient trop importante, mais si on suppose que l'intensité de sauts qui conduit à l'événement de gap est la même pour tous les actifs, c'est-à-dire,  $U_i(\beta) = U_1(\beta)$  pour tout  $i$ , la somme à l'intérieur se calcule explicitement et on obtient finalement le résultat suivant:

**Proposition 13.** *Supposons que les prix des  $M$  sous-jacents suivent un modèle exponentielle-Lévy. Si toutes les composantes du panier ont la même intensité de gap et la structure de dépendance est décrite par la copule de Lévy de Clayton avec paramètre  $\theta$ , alors le prix d'une gap option multi-sous-jacent est donné par*

$$E[f(N_T)] = e^{-\lambda T} \sum_{n_1, \dots, n_M=0}^{\infty} f\left(\sum_{k=1}^M k n_k\right) \prod_{i=1}^M \frac{(\lambda_i T)^{n_i}}{n_i!},$$

où

$$\lambda_m = U_1(\beta) C_m^M \sum_{j=0}^{M-m} \frac{(-1)^j C_j^{M-m}}{(m+j)^{1/\theta}} \quad (4.19)$$

### 4.3 Modélisation des pics de prix dans les marchés d'électricité

Parmi toutes les données économiques, dans les prix spot d'électricité les effets non-gaussiens sont peut-être les plus flagrants. L'impossibilité de stocker cette énergie à un coût raisonnable fait que, depuis la libéralisation des marchés dans les années 1990, des pics très importants de prix ont souvent été enregistrés. Un pic est un mouvement rapide du prix à la hausse, provoqué par

un déséquilibre temporaire entre l'offre et la demande, dont l'amplitude peut atteindre jusqu'à 20 fois le prix initial, et qui est suivi, au bout de quelques heures ou quelques jours, par un retour vers le niveau d'avant le pic. Dans la littérature, les pics ont été modélisés par des modèles structurels avec un profil de l'offre en 'bâton de hockey' [37] ou par des modèles phénoménologiques de type 'diffusion avec sauts' [25] ou à changement de régime [15, 57]. Dans l'article [44] coécrit avec T. Meyer-Brandis, nous passons en revue les 'faits stylisés' de prix d'électricité dans les marchés américains et européens, puis proposons un modèle phénoménologique construit à partir de plusieurs facteurs de type Ornstein-Uhlenbeck non-gaussiens, qui permet de prendre en compte ces faits stylisés. L'estimation du modèle et notamment la détection et le filtrage des pics dans les données est étudiée en détail. Une fois estimé, ce modèle permet de simuler des trajectoires réalistes des prix spot d'électricité pour calculer les mesures de risque, tester les stratégies de couverture et évaluer les politiques d'investissement.

### 4.3.1 Faits stylisés et modélisation

Pour notre étude des faits stylisés (propriétés récurrentes) des prix spots d'électricité, nous avons utilisé 6 indices de prix spot d'électricité: 2 indices américains, Dow Jones California Oregon border (COB) et Dow Jones Mead/Marketplace (MEAD), et 4 indices des marchés organisés européens, European Power Exchange Phelix Base (EEX), Amsterdam Power Exchange daily average (APX), United Kingdom Power Exchange daily average (UKPX) et Nord Pool System Price daily average (NP).

Les principales caractéristiques observées de ces séries, qui les distinguent des séries financières plus traditionnelles sont

- Saisonnalité annuelle et tendance affine. A la fois la saisonnalité et la tendance sont statistiquement significatives pour toutes les séries considérées mais contribuent assez peu à la variance. La saisonnalité est due au fait que le profil de consommation d'électricité n'est pas le même en hiver et en été. Cette saisonnalité se modélise assez bien par une somme de deux sinusoides de périodes 6 mois et 12 mois.
- Stationnarité et retour à la moyenne. Contrairement aux prix des actions, les prix d'électricité ont un comportement stationnaire, et l'hypothèse de racine unité est rejetée pour toutes les séries avec un niveau de confiance élevé. Comme les autres marchandises, les prix d'électricité oscillent autour d'une moyenne qui peut elle-même avoir des variations stochastiques lentes.
- Présence de pics. Une propriété fondamentale des prix d'électricité, observée dans les 6 séries que nous avons étudiées, est la présence de pics de prix, c'est-à-dire, mouvements rapides à la hausse suivis d'un retour rapide vers le niveau de départ. Graphique 4.2 (gauche) montre les pics dans la série Nord Pool.
- Autocorrélation multiéchelle. La fonction d'autocorrélation de plusieurs séries analysées (APX, EEX et UKPX) présente un profil très particulier avec une composante à décroissance rapide et une à décroissance lente. La structure observée peut être décrite très précisément avec une somme de deux exponentielles:

$$\rho(h) = w_1 e^{-h/\lambda_1} + w_2 e^{-h/\lambda_2}. \quad (4.20)$$

Graphique 4.2 (droite) montre la bonne qualité de calage. Ce type de structure de corrélation apparaît dans un modèle où le prix est la somme de deux composantes stationnaires indépendantes avec des vitesses de retour à la moyenne différentes. Notre hypothèse est que la longueur de corrélation courte (entre 3 et 5 jours) correspond à la régime de pics, alors que la longueur élevée (de l'ordre de 100 jours) correspond à l'évolution normale.

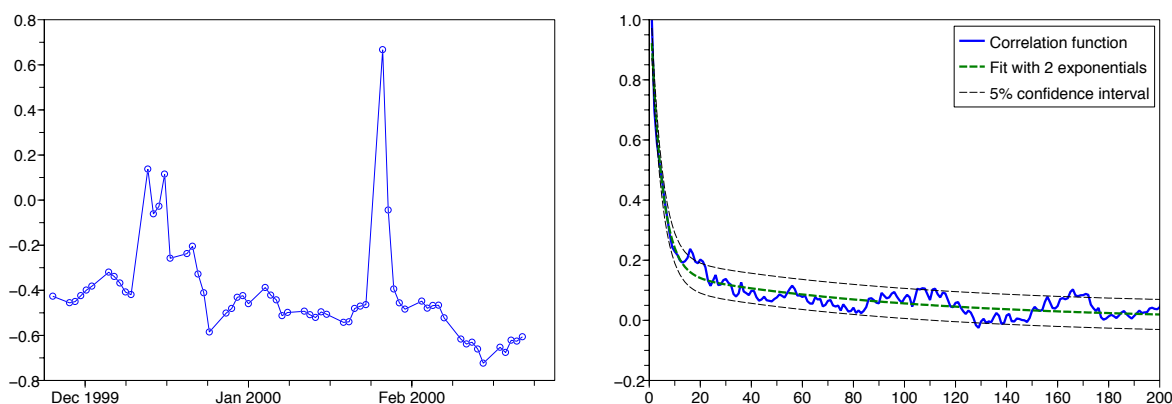


Figure 4.2: Gauche: pics dans la série NordPool (après désaisonnalisation et transformation logarithmique). Droite: autocorrélation multiéchelle dans la série EEX.

- Distribution non-gaussienne des rendements. Les mouvements de grande amplitude et de faible probabilité tels que les pics ne peuvent clairement pas apparaître dans le cadre gaussien. Pour les 6 séries que nous avons étudiées, la loi des rendements logarithmiques journaliers a un excès de kurtosis très élevé (entre 9 et 29, à comparer avec 3 pour l'indice S&P 500). Une analyse détaillée montre que les queues de distribution de la loi des rendements sont plus épaisses qu'exponentielles et que la fonction de répartition se comporte plutôt comme  $1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x)$  pour  $x \rightarrow \infty$ , où  $L$  est une fonction à variation lente et  $\alpha$  est entre 2 et 3 (l'étude a été effectuée en utilisant l'estimateur de Hill).

**Modélisation** Pour tenir compte des faits stylisés décrits ci-dessus, nous proposons un modèle non-gaussien à deux facteurs de type Ornstein-Uhlenbeck pour la série désaisonnalisée (éventuellement, après transformation logarithmique):

$$X(t) = Y_1(t) + Y_2(t) \quad (4.21)$$

$$dY_i(t) = -\lambda_i^{-1}Y_i(t)dt + dL_i(t), \quad i = 1, 2. \quad (4.22)$$

Le facteur  $Y_2$  décrit les pics; il est dirigé par un processus de Poisson composé  $L_2$  (on peut éventuellement prendre un processus additif à intensité variable, pour décrire la saisonnalité dans l'intensité des pics). Le facteur  $Y_1$  décrit les fluctuations quotidiennes du prix, il peut être choisi gaussien.

### 4.3.2 Filtrage des pics et estimation du modèle

Pour estimer le modèle (4.21)–(4.22), nous avons choisi dans un premier temps de séparer les deux composantes du signal. Puisque nous voulons détecter les pics (saut à la hausse puis retour rapide vers le bas) et non simplement les sauts, les méthodes classiques de seuil ne sont pas applicables. De même, le filtre de Kallman ne peut pas être utilisé hors du cadre gaussien, et les méthodes de filtrage particulière ne sont pas adaptées à ce problème.

Nous avons donc choisi d'adapter les méthodes de statistique nonparamétrique (détection de contours), en représentant notre série comme un signal déterministe (pics) perturbé par un bruit

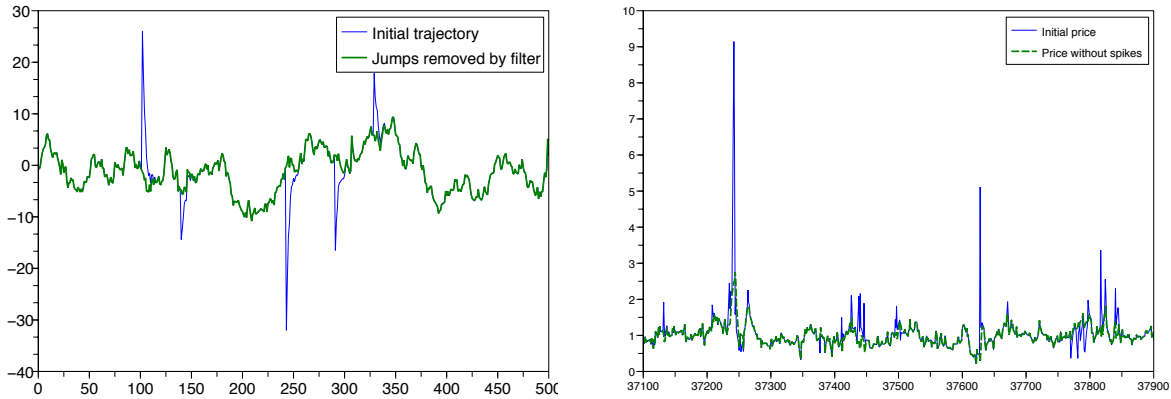


Figure 4.3: Performance de l'algorithme 'hard thresholding' sur les données simulées (gauche) et sur les données de la série EEX (après désaisonnalisation mais sans la transformation logarithmique).

gaussien autorégressif:

$$X(t) = Y_1(t) + f(t)$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i 1_{t \geq \tau_i} e^{-(t-\tau_i)/\lambda_2},$$

où  $M$  est le nombre de pics,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  sont les tailles de pics et  $\tau_i \in \mathbb{R}^+$  sont les dates de début de pics.

Nous avons comparé deux méthodes pour la détection des pics: le 'hard thresholding' qui essaie de placer les pics un par un, à chaque fois par la méthode de moindres carrés, jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint, et le 'adapted Potts filter' [58] qui est un algorithme rapide pour résoudre le problème de placement de pics par moindres carrés, avec une pénalisation par le nombre total des pics. Voir [44] pour la description détaillée des algorithmes. Les deux algorithmes ont une performance similaire, et nous avons donc retenu le 'hard thresholding' qui est plus simple à implémenter. Le graphique 4.3 montre la performance de cet algorithme sur les données simulées à partir du modèle (4.21)–(4.22) (gauche) et sur les données réelles.

**Résumé de la méthode** Au final, nous proposons la procédure suivante pour le calage du modèle (4.21)–(4.22) à une série de prix d'électricité.

- Désaisonnalisation des données:

$$X_t^{des} = \frac{X_t}{eg(t)},$$

où  $g$  est une fonction de saisonnalité déterministe (combinaison linéaire de deux sinusoides de périodes 6 et 12 mois), calibré par moindres carrés sur la série des prix logarithmique.

- Séparation des composantes par la méthode 'hard thresholding' comme décrit ci-dessus. Les longueurs de corrélation, nécessaires pour l'algorithme sont estimées en calibrant la forme paramétrique (4.20) à la fonction d'autocorrélation.
- Estimation du modèle de base. On calibre un modèle AR(1) standard (équivalent discret d'un Ornstein-Uhlenbeck) sur la série de prix sans pics.

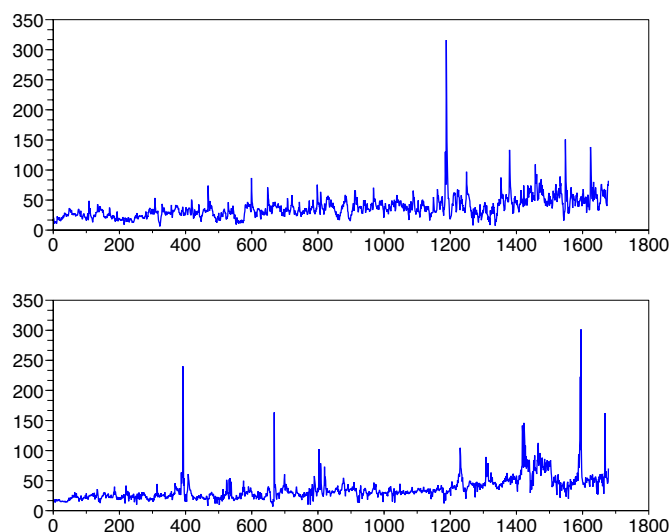


Figure 4.4: Comparaison d'une trajectoire de prix simulée avec la série EEX sur laquelle les paramètres ont été estimés (graphique du bas).

- Estimation du modèle pour les pics. Si l'intensité est supposée constante, elle peut être estimée simplement comme

$$I = \frac{\text{nombre de pics détectés}}{\text{nombre de données}}.$$

Pour une intensité déterministe non-constante, un estimateur de maximum de vraisemblance est facile à écrire [44]. Pour modéliser la loi des tailles de pics, nous avons choisi la loi de Pareto:

$$P(Z > z) = \left(\frac{z}{z_0}\right)^{-\alpha},$$

où le paramètre  $\alpha$  peut être estimé à partir de la fonction caractéristique empirique des tailles de pics détectés.

Graphique 4.4 compare une trajectoire des prix simulée avec notre modèle avec la série EEX sur laquelle le modèle a été estimé.

## 4.4 Perspectives

Dans la suite de mes travaux j'envisage de continuer à étudier les problèmes appliqués motivés par les échanges avec des praticiens, mais aussi les questions plus théoriques qui peuvent éventuellement en découler. L'interaction avec les praticiens de la finance est maintenant facilitée par la présence des chaires dans les différents établissements de la région parisienne. Je participe notamment aux activités de la chaire 'Risques Financières' qui est un projet commun de l'Ecole Polytechnique, l'Ecole des Ponts et Chaussées et la Société Générale. Nous organisons des séminaires communs avec l'équipe de recherche de la Société Générale une fois par trimestre. L'étude [34] sur les opportunités d'arbitrage dans les modèles à volatilité stochastique misspecifiés a été effectuée dans le cadre de cette chaire.

La collaboration avec EDF R&D continue à porter ces fruits. Les produits dérivés négociés sur les marchés d'énergie présentent des caractéristiques particulières qui posent des problèmes

intéressants du point de vue mathématique. Le cas le plus connu est celui de l'option swing (voir e.g., [8]), qui est une variante de l'option américaine permettant des exercices multiples. Dans le cadre de la thèse de Marie Bernhart (CIFRE avec EDF, coencadrement avec H. Pham) nous avons proposé un nouvel algorithme pour la valorisation des options swing en utilisant les EDSR avec sauts [3], et travaillons actuellement sur les méthodes de pricing pour les options américaines dont le pay-off fait intervenir la moyenne mobile du sous-jacent.

L'étude des stratégies d'assurance de portefeuille continue dans le cadre de la thèse de Carmine de Franco, consacrée à l'assurance de portefeuille sous la contrainte de mesure de risque. Les résultats de [11] montrent que si le processus du prix du sous-jacent  $S_t$  peut sauter, et si toutes les tailles de sauts sont possibles (i.e., le support de la distribution de  $\Delta S_t$  est égal à  $(-1, +\infty)$ ), un fonds garanti géré avec la stratégie CPPI avec un multiplicateur  $m > 1$  a toujours un risque non-négligeable de ne pas pouvoir rembourser le montant de la garantie à l'investisseur. Il n'est donc pas réaliste d'imposer la garantie d'assurance de manière presque sûre, ce qui nous a motivé pour considérer les garanties permettant une certaine prise de risque.

Nous étudions le problème d'un gestionnaire de fonds, qui s'est engagé à payer à l'investisseur le montant  $X_T \vee K$ , où  $X_T$  est la valeur du fonds à la date terminale  $T$  et  $K$  est la valeur de la garantie. Si,  $X_T$  est inférieur à  $K$ , un tiers (typiquement, la banque à laquelle appartient le fonds) rembourse la différence à l'investisseur. Pour contrôler ses pertes potentielles, la banque impose la contrainte sur l'exposition du fonds:

$$\rho(-(X_T - K)^-) \leq \rho_0, \quad (4.23)$$

où  $\rho$  est une mesure de risque convexe telle que la CVaR (voir [19]). L'appétit aux gains de l'investisseur est modélisé avec une fonction d'utilité concave  $U$ . Le gestionnaire cherche alors à résoudre le problème de maximisation d'utilité du gain de l'investisseur  $U((X_T - K)^+)$  sous la contrainte budgétaire et la contrainte (4.23). Ce problème est étudié dans le marché complet et incomplet. Le fait que la fonction d'utilité est appliqué uniquement à la partie positive du gain, et la mesure de risque uniquement à la partie négative, rend la modélisation plus réaliste mais en même temps le problème devient plus difficile à résoudre, car il n'est plus convexe.





# Références

- [1] A. ALFONSI, A. FRUTH, AND A. SCHIED, *Optimal execution strategies in limit order books with general shape functions*, Quantitative Finance, 10 (2010), pp. 143–157.
- [2] S. ASMUSSEN AND J. ROSIŃSKI, *Approximations of small jumps of Lévy processes with a view towards simulation*, J. Appl. Probab., 38 (2001), pp. 482–493.
- [3] M. BERNHART, *Using BSDE with jumps to value American style options*, in Workshop on numerical methods in finance, INRIA, 1-2 Juin 2010, 2010.
- [4] D. BERTSIMAS, L. KOGAN, AND A. W. LO, *When is time continuous*, J. Financ. Econ., 55 (2000), pp. 173–204.
- [5] F. BLACK AND A. PEROLD, *Theory of constant proportion portfolio insurance*, The Journal of Economics, Dynamics and Control, 16 (1992), pp. 403–426.
- [6] R. M. BLUMENTHAL, R. K. GETOOR, AND D. B. RAY, *On the distribution of first hits for symmetric stable processes*, T. Am. Math. Soc., 99 (1961), pp. 540–554.
- [7] M. BRODÉN AND P. TANKOV, *Tracking errors from discrete hedging in exponential Lévy models*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 14 (2011), pp. 1–35.
- [8] R. CARMONA AND N. TOUZI, *Optimal multiple stopping and valuation of swing options*, Mathematical Finance, 18 (2008), p. 239.
- [9] P. CARR, H. GEMAN, D. MADAN, AND M. YOR, *Stochastic volatility for Lévy processes*, Math. Finance, 13 (2003), pp. 345–382.
- [10] P. CARR AND D. MADAN, *Option valuation using the fast Fourier transform*, J. Comput. Finance, 2 (1998), pp. 61–73.
- [11] R. CONT AND P. TANKOV, *Constant proportion portfolio insurance in the presence of jumps in asset prices*, Mathematical Finance, 19 (2009), pp. 379–401.
- [12] R. CONT, P. TANKOV, AND E. VOLTCHKOVA, *Hedging with options in models with jumps*, in Stochastic Analysis and Applications - the Abel Symposium 2005, Springer, 2007.
- [13] A. CRETAROLA, F. GOZZI, H. PHAM, AND P. TANKOV, *Optimal consumption policies in illiquid markets*, Finance and Stochastics, 15 (2011), pp. 85–116.
- [14] J. CVITANIĆ, R. LIPTSER, AND B. ROZOVSKII, *A filtering approach to tracking volatility from prices observed at random times*, The Annals of Applied Probability, (2006), pp. 1633–1652.
- [15] S. DENG, *Stochastic models of energy commodity prices and their applications: Mean-reversion with jumps and spikes*. POWER working paper, 1999.

- [16] J. FIGUEROA-LÓPEZ AND C. HOUDRÉ, *Small-time expansions for the transition distributions of Lévy processes*, Stochastic Processes and Their Applications, 119 (2009).
- [17] J. E. FIGUEROA-LOPEZ, *Nonparametric estimation of time-changed Lévy models under high-frequency data*, Adv. Appl. Probab., 41 (2009), pp. 1161–1188.
- [18] ———, *Central limit theorems for the non-parametric estimation of time-changed Lévy models*. preprint, 2010.
- [19] H. FÖLLMER AND A. SCHIED, *Stochastic Finance*, De Gruyter, Berlin, 2002.
- [20] M. I. FREIDLIN AND A. D. WENTZELL, *Random perturbations of dynamical systems*, vol. 260 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, New York, second ed., 1998.
- [21] R. FREY AND W. RUNGALDIER, *A nonlinear filtering approach to volatility estimation with a view towards high frequency data*, International Journal of Theoretical and Applied Finance, 4 (2001), pp. 199–210.
- [22] M. FUKASAWA, *Discretization error of stochastic integrals*. preprint, 2009.
- [23] C. GEISS AND S. GEISS, *On an approximation problem for stochastic integrals where random time nets do not help*, Stochastic Process. Appl., 116 (2006), pp. 407–422.
- [24] S. GEISS, *Quantitative approximation of certain stochastic integrals*, Stoch. Stoch. Rep., 73 (2002), pp. 241–270.
- [25] H. GEMAN AND A. RONCORONI, *Understanding the fine structure of electricity prices*, J. Bus., 79 (2006).
- [26] R. K. GETTOOR, *First passage times for symmetric stable processes in space*, T. Am. Math. Soc., 101 (1961), pp. 75–90.
- [27] E. GOBET AND E. TEMAM, *Discrete time hedging errors for options with irregular pay-offs*, Finance and Stochastics, 5 (2001), pp. 357–367.
- [28] T. HAYASHI AND P. A. MYKLAND, *Hedging errors: an asymptotic approach*, Mathematical Finance, 15 (2005), pp. 309–343.
- [29] S. HESTON, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Rev. Fin. Studies, 6 (1993), pp. 327–343.
- [30] J. JACOD, *Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales*, Stoch. Proc. Appl., 118 (2008), pp. 517–559.
- [31] J. JACOD, T. G. KURTZ, S. MÉLÉARD, AND P. PROTTER, *The approximate Euler method for Lévy driven stochastic differential equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., 41 (2005), pp. 523–558.
- [32] J. JACOD AND P. PROTTER, *Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations*, Ann. Probab., 26 (1998), pp. 267–307.
- [33] F. JAMSHIDIAN, *LIBOR market models with semimartingales*, tech. rep., NetAnalytics Ltd., 1999.
- [34] R. P. JENA AND P. TANKOV, *Arbitrage opportunities in misspecified stochastic volatility models*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 2 (2011), pp. 317–341.

- [35] J. KALLSEN, F. HUBALEK, AND L. KRAWCZYK, *Variance-optimal hedging for processes with stationary independent increments*, The Annals of Applied Probability, 16 (2006), pp. 853–885.
- [36] J. KALLSEN AND P. TANKOV, *Characterization of dependence of multidimensional Lévy processes using Lévy copulas*, Journal of Multivariate Analysis, 97 (2006), pp. 1551–1572.
- [37] T. KANAMURA AND K. OHASHI, *A structural model for electricity prices with spikes: Measurement of spike risk and optimal policies for hydropower plant operation*, Energy economics, 29 (2007), pp. 1010–1032.
- [38] A. KOHATSU-HIGA AND P. TANKOV, *Jump-adapted discretization schemes for Lévy-driven SDEs*, Stoch. Proc. Appl., 120 (2010), pp. 2258–2285.
- [39] A. KYPRIANOU, *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*, Springer, 2006.
- [40] R. W. LEE, *Option pricing by transform methods: extensions, unification and error control*, J. Comput. Finance, 7 (2004).
- [41] B. B. MANDELBROT, *The variation of certain speculative prices*, Journal of Business, XXXVI (1963), pp. 392–417.
- [42] K. MATSUMOTO, *Optimal portfolio of low liquid assets with a log-utility function*, Finance and Stochastics, 10 (2006), pp. 121–145.
- [43] R. MERTON, *Option pricing when underlying stock returns are discontinuous*, J. Financ. Econ., 3 (1976), pp. 125–144.
- [44] T. MEYER-BRANDIS AND P. TANKOV, *Multi-factor jump-diffusion models of electricity prices*, Int. J. Theor. Appl. Finance, 11 (2008), pp. 503–528.
- [45] H. PHAM AND P. TANKOV, *A model of optimal consumption under liquidity risk with random trading times*, Mathematical Finance, 18 (2008), pp. 613–627.
- [46] H. PHAM AND P. TANKOV, *A coupled system of integrodifferential equations arising in liquidity risk model*, Applied Mathematics and Optimization, 59 (2009), pp. 147–173.
- [47] S. PREDOIU, G. SHAIKHET, AND S. SHREVE, *Optimal Execution in a General One-Sided Limit-Order Book*. <http://papers.ssrn.com>, 2010.
- [48] P. PROTTER AND D. TALAY, *The Euler scheme for Lévy driven stochastic differential equations*, Ann. Probab., 25 (1997), pp. 393–423.
- [49] L. ROGERS AND O. ZANE, *A simple model of liquidity effects*, Advances in finance and stochastics: essays in honour of Dieter Sondermann, (2002), pp. 161–176.
- [50] M. ROSENBAUM AND P. TANKOV, *Asymptotic results for time-changed Lévy processes sampled at hitting times*, Stoch. Proc. Appl., 121 (2011), pp. 1607–1632.
- [51] S. RUBENTHALER, *Numerical simulation of the solution of a stochastic differential equation driven by a Lévy process*, Stoch. Proc. Appl., 103 (2003), pp. 311–349.
- [52] L. RÜSCHENDORF AND J. H. WOERNER, *Expansion of transition distributions of Lévy processes in small time*, Bernoulli, 8 (2002), pp. 81–96.
- [53] W. SCHOUTENS, E. SIMONS, AND J. TISTAERT, *A perfect calibration ! now what ?*, Wilmott Magazine, March (2004).

- [54] P. TANKOV, *Lévy Processes in Finance: Inverse Problems and Dependence Modelling*, PhD thesis, Ecole Polytechnique, France, 2004.
- [55] P. TANKOV, *Pricing and hedging gap risk*, The Journal of Computational Finance, 13 (2009).
- [56] P. TANKOV AND E. VOLTCHKOVA, *Asymptotic analysis of hedging errors in models with jumps*, Stochastic processes and their applications, 119 (2009), pp. 2004–2027.
- [57] R. WERON, *Heavy tails and electricity prices*, in The Deutsche Bundesbank’s 2005 Annual Fall Conference, 2005.
- [58] G. WINKLER AND V. LIEBSCHER, *Smoothers for discontinuous signals*, Nonparametric Statistics, 14 (2002), pp. 203–222.
- [59] R. ZHANG, *Couverture approchée des options Européennes.*, PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1999.