



HAL
open science

Commande Robuste des systèmes Linéaires continus à Paramètres Variant dans le temps

Nedia Nedia Aouani

► **To cite this version:**

Nedia Nedia Aouani. Commande Robuste des systèmes Linéaires continus à Paramètres Variant dans le temps. Automatique / Robotique. Université du 7 Novembre à Carthage, 2012. Français. NNT : . tel-00704558

HAL Id: tel-00704558

<https://theses.hal.science/tel-00704558>

Submitted on 14 Jun 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Tunis Carthage

Thèse de Doctorat en Informatique Industrielle

de

Nedia AOUANI

Ingénieur INSAT 2006

**Commande Robuste des systèmes Linéaires
continus à Paramètres Variant dans le temps**

soutenue le 24 Mars 2012 devant le Jury de thèse composé de :

MM. HICHEM KALLEL	Président
MOHAMED CHAABANE	Rapporteur
OLFA BOUBAKER	Rapporteur
ANIS SALLEMI	Examineur

Mr. MEKKI KSOURI	Directeur de thèse
Mr. GERMAIN GARCIA	Co-directeur de thèse

Laboratoire d'Analyse et Commande des systèmes
(LACS-ENIT)- Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des
Systèmes (LAAS-CNRS)

Table des matières

Table des figures	xii
Introduction générale	xv
1 Systèmes linéaires incertains à paramètres invariant dans le temps (LTI)	1
1.1 Introduction	1
1.2 Préliminaires sur les systèmes incertains LTI	1
1.2.1 Histoire et définition	1
1.2.2 Les différentes classes d'incertitudes	3
1.2.2.1 Incertitudes polytopiques	4
1.2.2.2 Incertitudes affines	5
1.2.2.3 Incertitudes bornées en normes	6
1.3 Analyse de stabilité robuste des Systèmes incertains à paramètres invariants dans le temps	6
1.3.1 Seconde Méthode de Lyapunov	9
1.3.2 Concept de stabilité quadratique	11
1.3.3 Utilisation des FLDP pour la stabilité des systèmes incertains LTI	12
1.4 Commande et stabilisabilité robuste des systèmes incertains à Paramètres Invariants dans le Temps	13
1.4.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LTI	17
1.4.2 Synthèse des correcteurs par retour de sortie pour systèmes LTI	17
1.4.2.1 Retour de sortie statique	18
1.4.2.2 Retour de sortie dynamique	18
1.5 Conclusion du chapitre	19
2 Systèmes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV)	21
2.1 Introduction	21
2.2 Systèmes incertains LPV - Intérêts de la modélisation et Histoire	21
2.2.1 Modélisation des systèmes Linéaires à Paramètres temps Variants	23
2.2.1.1 Modélisation des systèmes incertains LPV polytopiques	23
2.2.1.2 Modélisation des systèmes incertains LPV affines	25
2.3 Systèmes incertains LPV - Stabilité robuste et Approches d'analyse	25
2.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov pour systèmes LPV	26
2.3.1.1 Seconde Méthode de Lyapunov	26
2.3.2 Stabilité quadratique pour systèmes LPV	28

2.3.3	Fonctions de Lyapunov Dépendant des paramètres (FLDPs) pour systèmes LPV	29
2.3.3.1	FLDP polytopiques	30
2.3.3.2	FLDP affines	31
2.3.4	Analyse de performance H_2 pour systèmes incertains LPV	32
2.4	Systèmes incertains LPV - Stabilisabilité robuste et approches de synthèse	33
2.4.1	Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LPV	35
2.4.2	Synthèse de correcteurs par retour d'état à gain scheduling pour systèmes LPV	36
2.4.3	Commande H_2 par retour d'état pour systèmes LPV	39
2.4.3.1	Synthèse de performance H_2 par retour d'état statique pour systèmes LPV	39
2.4.3.2	Synthèse de performance H_2 par retour d'état à gain scheduling pour systèmes LPV	40
2.5	Conclusion du chapitre	41
3	Systèmes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV)	
	- Analyse de stabilité robuste	43
3.1	Introduction	43
3.2	Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV polytopiques - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des paramètres à structure polytopique	44
3.2.1	Formulation du problème	44
3.2.2	Première condition de stabilité robuste	44
3.2.2.1	condition de stabilité robuste :	45
3.2.3	Deuxième condition de stabilité robuste	47
3.2.4	Troisième condition de stabilité robuste	49
3.2.5	Exemple numérique :	51
3.3	Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV polytopiques - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres à structure spécifique	52
3.3.1	condition de stabilité robuste	54
3.3.2	Exemple numérique :	56
3.4	Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV affines - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres à structure affine	57
3.4.1	Formulation du problème	58
3.4.2	Condition de stabilité robuste	58
3.4.3	Exemple numérique	60
3.5	Analyse de performances H_2 des systèmes incertains LPV polytopiques	61
3.5.1	Première condition LMIs pour analyse H_2 de systèmes LPV polytopiques	62
3.5.2	Deuxième condition LMIs pour analyse H_2 de systèmes LPV polytopiques	64
3.5.3	Exemple numérique	67
3.6	Conclusion du chapitre	68

4	Systèmes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV)	
	- Synthèse robuste	69
4.1	Introduction	69
4.2	Commande par retour d'état pour systèmes incertains LPV polytopiques	69
4.2.1	Formulation du problème	69
4.2.2	Première condition de synthèse robuste pour systèmes LPV polytopiques :	70
4.2.2.1	Condition de contrôle par retour d'état à gain statique	70
4.2.3	Exemple numérique	71
4.2.4	Deuxième condition de synthèse robuste pour systèmes LPV polytopiques :	72
4.2.4.1	Condition de stabilisabilité	72
4.2.5	Exemple numérique	73
4.3	Commande par retour d'état pour systèmes incertains LPV affine	73
4.3.1	Formulation du problème	73
4.3.2	Condition de stabilisabilité	74
4.3.3	Exemple numérique	74
4.4	Commande H_2 par retour d'état pour systèmes incertains LPV polytopiques	75
4.4.1	Commande H_2 par retour d'état à gain scheduling	75
4.4.2	Exemple numérique :	77
4.5	Conclusion du chapitre	78
	Conclusion et perspectives des travaux	81
	Annexe	83
A.1	Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs	83
A.1.1	Histoire des LMIs	83
A.1.2	Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs	84
A.1.3	Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs paramétrées	84
A.2	Les lemmes et outils mathématiques	85
A.2.1	Complément de Schur	85
A.2.2	Le lemme de Finsler	85
A.2.3	Lemme de projection	85
A.2.4	Lemme dérivant du lemme de projection	86
A.3	Rappel des théorèmes pris d'autres articles	86
A.3.1	Théorème 2 dans ([Xie, 2005])	86
A.3.2	Théorème 2 dans ([Cao et Lin, 2004])	87
A.3.3	Théorème 3 dans ([Cao et Lin, 2004])	87
A.3.4	Théorème 4 dans ([Cao et Lin, 2004])	88
	Bibliographie	89

Table des figures

1.1	Ensemble polytopique	5
1.2	Système deux masses-ressort	5
1.3	Volume ellipsoïdal pour incertitudes bornées en norme	6
1.4	Boucle fermée par un correcteur	14
2.1	Les différents modèles linéaires	23
2.2	Conditions de recouvrement	34
3.1	Limites de stabilité dans le plan (ω, β) d'après le théorème 1 dans [Geromel et Colaneri, 2006] et le théorème (3.3.2) donné ici.	57
4.1	Limites de stabilité dans le plan (ω, β) selon le théorème (4.2.2) selon différentes valeurs de α	73
4.2	Allure de la Loi de commande appliquée au système (3.92)	75
4.3	Allure des composantes de l'état pour le système (3.92)	75
4.4	Réponses du système lors d'une perturbation externe $w(t)$	78

Introduction générale

La commande robuste a concentré l'attention d'un nombre important de chercheurs à la fin des années 70 ; et ceci quand on s'est rendu compte que la commande linéaire quadratique optimale (commande optimale H_2), le retour d'état à travers des observateurs, et d'autres méthodes populaires pour la synthèse de contrôleurs, comme la commande adaptative, manquaient des garanties de stabilité et de performances lorsque le système est soumis à des incertitudes.

Le problème de robustesse dans le cas d'incertitudes paramétriques a suscité un grand intérêt de la part des chercheurs. Par exemple, le théorème de Kharitonov, apparu au milieu des années 1980 dans la littérature à l'ouest a été publié à l'origine en 1978 dans la littérature russe. Avec ce théorème surprenant, le domaine de la commande robuste sous incertitudes paramétriques a été reconsidéré avec ampleur et l'on peut dire que le théorème de Kharitonov est une combinaison importante, généralisant le critère de Routh-Hurwitz. D'importants développements ont suivi le Théorème de Kharitonov notamment dans le domaine de calcul, en 1985 Soh, Berger et Dabke travaillèrent sur le calcul du rayon de ballon de stabilité dans l'espace des coefficients d'un polynôme.

Une branche importante dans le domaine de la commande robuste a débuté dans les années 1990, et concerne les systèmes incertains linéaires à Paramètres temps-Variant. En fait, quelle que soit la nature du système physique, nous ne pouvons caractériser de façon parfaite son comportement. Certaines dynamiques rapides sont négligées et une linéarisation est effectuée ce qui conduit à un modèle mathématique approximatif. Ce modèle est entâché d'incertitudes dans son concept. Les méthodes associées à ces systèmes s'appuient sur la définition de familles de modèles. Il est nécessaire alors d'effectuer des calculs de compensateurs dans l'objectif de garantir la stabilité de la famille de modèles, on parle alors de commande robuste en stabilité. De plus, il est également nécessaire de calculer un compensateur en ayant comme objectif d'assurer certaines performances sur l'ensemble des modèles. On parle dans ce cas de la de commande robuste en performance. En résultent des méthodes de synthèse de contrôleurs robustes, qui tiennent compte de la stabilité d'un certain niveau de performances.

Les modèles considérés dans ce mémoire sont à temps continu. Une étude bibliographique sur les systèmes admettant un modèle incertain linéaire à temps invariant est faite dans une première partie. Dans la mesure où la réalité physique des processus induit des incertitudes, nous faisons référence aux systèmes incertains à temps variant LPV et nous présentons nos contributions dans ce cadre. Ces systèmes sont caractérisés par le fait que leurs caractéristiques dynamiques évoluent au fil du temps en fonction de certains paramètres. Un grand nombre d'approches a été développé par les chercheurs pour analyser la stabilité de ces systèmes, et pour mettre au point des méthodes de synthèse de correcteurs dont les gains peuvent être constants ou variant en fonction du temps.

Comme exemple de paramètres incertains, nous pouvons citer : la raideur, l'inertie, les coefficients de viscosité dans le cas de systèmes mécaniques, les coefficients aérodynamiques dans les commandes de vols ou les valeurs de résistances ou de capacités dans les circuits électriques. En effet, la résolution des équations de Lyapunov relatives à ces systèmes LPV reste un problème non convexe et NP-Hard ; où la problématique principale consiste à trouver une représentation adéquate à dérivée de la matrice de Lyapunov. Nous contribuons dans le présent travail par de nouvelles approches, qui permettent d'une part de séparer les matrices de Lyapunov de celles de l'état, et d'autre part d'apporter de nouvelles modélisations mathématiques au taux de variation de l'incertitude ; ceci nous permet dès lors la résolution des problèmes considérés NP-difficiles au préalable. Dans ce contexte, cette thèse a comme premier objectif de mettre en place des conditions d'analyse et de synthèse robuste pour systèmes LPV à différentes structures. Les conditions que l'on propose exigent de diminuer le conservatisme engendré par certaines conditions données dans la littérature. Également, nous sommes appelés à mettre en place des représentations nouvelles de la dérivée temporelle du paramètre temps-variant et de les intégrer dans nos conditions. Ce manuscrit s'articule par le fait autour de quatre chapitres.

Un premier chapitre dans lequel nous abordons les systèmes incertains Linéaires à Temps Invariant (LTI). Nous évoquons les différentes classes selon les types d'incertitudes : la classe polytopique, la classe affine et la classe bornée en norme. Nous donnons également pour les systèmes LTI différentes notions de stabilité spécialement la notion de stabilité robuste. Diverses approches d'analyse robuste sont présentées par ordre chronologique dans ce contexte : la méthode directe de Lyapunov, le concept de stabilité quadratique (SQ) et l'étude de la stabilité par fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres (FLDP). Concernant les approches de commande, nous focalisons notre intérêt sur le retour d'état et le retour de sortie.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons les mêmes approches et techniques mais pour systèmes incertains Linéaires à Paramètres Variant dans le temps (LPV). En effet, la modélisation LPV recouvre des cas pratiques importants non traités par les modèles linéaires invariants dans le temps. Nous donnons l'historique d'apparition des systèmes LPV. Nous détaillons deux classes qui sont la classe de systèmes LPV à structure polytopique et la classe à structure affine. Nous présentons dans une partie ultérieure les différentes approches d'analyse robuste. Un intérêt particulier est porté sur l'approche de Lyapunov appliquée et nous énumérons également les approches de synthèse pour ces systèmes. En particulier, nous donnons les résultats les plus importants dans le contexte de la commande moyennant les Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres, par retour d'état statique ou par application des techniques de gain scheduling.

Nos contributions pour les systèmes LPV sont présentées dans le troisième et quatrième chapitres.

Le troisième chapitre développe nos principaux résultats sur les conditions de stabilité robuste pour systèmes LPV polytopiques ou affines. Nous proposons une nouvelle approche de représentation de la dérivée du paramètre incertain temps variant.

Le quatrième chapitre est une extension du précédent, nous y présentons des conditions de stabilisabilité robuste pour systèmes LPV polytopiques et affines, formulés en terme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) paramétrées. Des conditions de synthèse H_2 pour les systèmes LPV sont également mises en place.

Nous précisons que toutes les approches présentées dans ce travail ont été testées sur des

exemples et ont fait l'objet d'applications numériques. Ce manuscrit se termine par une conclusion générale où l'on met en relief nos contributions en les situant dans la littérature moderne traitant des systèmes LPV. Nos perspectives et nos aspirations pour des recherches à venir sont également proposées.

Chapitre 1

Systemes linéaires incertains à paramètres invariant dans le temps (LTI)

J'ai seulement eu en vue d'exposer dans cet Ouvrage ce que je suis parvenu à faire en ce moment et ce qui, peut-être, pourra servir de point de départ pour d'autres recherches de même genre. M. A. Lyapunov

1.1 Introduction

Ce chapitre est principalement destiné à étudier les systèmes incertains, ceux pour lesquels les incertitudes ne varient pas dans le temps appelés : systèmes incertains Linéaires à Temps Invariants (LTI). Dans une première partie on donne un aperçu sur ces systèmes incertains d'ordre général, leur apparition, leurs différentes classes selon les types d'incertitudes à savoir la classe polytopique, la classe affine et la classe bornée en norme. Chacune est détaillée et les modélisations mathématiques sont données. Dans le paragraphe qui suit, nous donnons pour les systèmes LTI différentes notions de stabilité mais notre intérêt se porte plus sur la stabilité robuste. Diverses approches d'analyse robuste sont présentées par ordre chronologique dans ce contexte : la méthode directe de Lyapunov, le concept de stabilité quadratique (SQ) et puis les fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres (FLDP). Concernant les approches de commande, nous focalisons notre intérêt sur le retour d'état et le retour de sortie.

1.2 Préliminaires sur les systèmes incertains LTI

1.2.1 Histoire et définition

Souvent, les modèles linéaires ont été considérés comme suffisamment bons et suffisamment précis pour traduire le comportement d'un système donné. En pratique, ceci n'est pas vrai à cause de la notion d'incertitudes dans la modélisation et de la présence de non linéarités.

Un modèle incertain est défini comme modèle approchant un système réel. En effet, un

système se modélise dans l'espace d'état sous la forme $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$. Cette représentation est sensée être la plus complète possible et représenter tous les modes de fonctionnement. C'est de là (avantage d'être une représentation complète) que naquit la modélisation incertaine Linéaire Invariant dans le Temps, comme approche débutante dans l'objectif de représenter le système.

Dans la littérature, on pourra dire que l'un des premiers ouvrages où l'on a pris en compte explicitement une incertitude fut publié par Horowitz en 1960 [Garcia *et al.*, 1997]. Il y a eu synthèse d'une loi de commande robuste pour ces systèmes incertains LTI et pas mal d'autres méthodes ont pu être développées dans ce contexte. Mais, bien que très élégantes de point de vue mathématique, ces techniques ne pouvaient être facilement extensibles au milieu industriel. Les automaticiens trouvaient ces techniques peu réalistes pour représenter les systèmes où les incertitudes étaient fortement présentes. La demande d'une représentation plus fidèle pour être utilisable se faisait réclamer. Cette difficulté a contribué à une baisse importante de l'intérêt porté à ces systèmes pendant les années 1970. C'est pendant la période allant de 1970 à 1980, que l'intérêt pour ces problèmes de robustesse reprit place. Plusieurs résultats importants contribuèrent alors au redeveloppement de la commande robuste. On peut citer le théorème du faible gain donné par Zames en 1966, la généralisation du critère de Nyquist au cas des systèmes multivariables par Rosenbrock en 1974, les résultats sur les marges de stabilité garanties pour le régulateur linéaire quadratique et la théorie de Lyapunov [Garcia *et al.*, 1997]... Aussi, l'avènement des différents types de dépendances paramétriques (affine, polytopique, rationnelle,...) a pu contribuer à un regain d'intérêt aux problèmes robustes traitant des systèmes LTI. Un autre élément non négligeable est l'avancée considérable des techniques numériques comme l'utilisation des valeurs singulières, l'opérateur de Ricatti ou les inégalités matricielles linéaires [Boyd *et al.*, 1994]. La recherche sur les systèmes linéaires est alors relancée dans le contexte de la commande robuste [Zhou *et al.*, 1996], [Bhattacharyya *et al.*, 1995a]...

On définit dans ce qui suit la notion d'incertitudes et on donne les principales raisons qui font qu'on la considère dans un système.

D'après [Daafouz, 1997],[Garcia, 1999], l'origine des incertitudes dans un système serait lié aux trois points cités ci-après :

- Une connaissance imparfaite des valeurs numériques des paramètres du modèle obtenu.
- Les approximations et les erreurs faites (volontairement ou pas) lors de la modélisation du procédé.
- La présence de certains phénomènes dans le comportement du système physique qui ne sont pas pris en compte directement par le modèle.

Comme exemple de paramètres incertains affectant les systèmes on peut citer : la raideur, l'inertie, les coefficients de viscosité pour les systèmes mécaniques, les coefficients aérodynamiques dans les commandes de vols, les valeurs de résistances ou de capacités dans les circuits électriques [Gahinet *et al.*, 1996]. Mais en plus du terrain d'ingénierie, les incertitudes interviennent aussi bien dans les processus écologiques que dans les processus économiques [Weinmann, 1991].

On définit ainsi la robustesse d'un système par l'invariance de certaines propriétés qualitatives de ce système (telles que la stabilité et les performances) vis à vis des incertitudes intervenant sur le modèle.

On dit d'un système qu'il est robuste s'il conserve sa stabilité et des performances accep-

tables malgré la présence des incertitudes [Bachelier, 1998].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la classe des systèmes incertains où l'incertitude est constante. La modélisation de ces systèmes est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t); \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

Où θ représente le paramètre incertain.

Cette modélisation est introduite par Kalman en 1960 [Kalman, 2000] et elle est dite de type équation différentielle vectorielle du premier ordre. En effet, elle décrit la dynamique interne du système à partir de l'évolution d'un vecteur $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, ce vecteur est représentatif des grandeurs intervenant dans le processus. Dans la représentation (1.1), l'incertitude est considérée invariante dans le temps. Il s'agit de la classe des systèmes invariants dans le temps, connus en terminologie anglo-saxonne sous le nom Linear Time Invariant systems (LTI systems). En particulier, on rencontre une utilisation renforcée en analyse et en synthèse robuste des modèles Linéaires Temps Invariant du fait de leur simplicité et vu qu'il existe de nombreux outils de performances associés [Bernussou et Oustaloup, 2001] dont la théorie de Lyapunov, considérée comme fournisseur des outils et des concepts les plus simples (fonctions de Lyapunov quadratiques, grammien d'observabilité et de commandabilité, lemme borné réel, équation de Lyapunov...). De plus amples détails sont donnés dans le paragraphe (1.3.1). Quoiqu'il en soit, le problème d'analyse de stabilité robuste pour ces systèmes aussi bien que celui d'analyse de performance robuste seront abordés dans le cadre de la théorie de Lyapunov. Trois grandes approches peuvent être dégagées dans ce contexte : algébrique, fréquentielle et temporelle.

Pour ces systèmes, il faudra essayer d'estimer quel est le plus vaste domaine d'incertitudes pour lequel le système conserve des propriétés acceptables en stabilité et en performance, il s'agit alors d'analyse robuste. Aussi, des méthodes ont été investiguées pour trouver des contrôleurs par retour tel que le système soit stable pour l'ensemble des incertitudes, et on parle de synthèse, d'où la commande robuste.

En l'occurrence, avant d'analyser un système incertain, il est important de préciser la nature et le type d'incertitudes considérées [Daafouz, 1997]. Dans le paragraphe suivant, nous énumérons les différentes structures d'incertitudes et nous donnons les modélisations mathématiques correspondantes.

1.2.2 Les différentes classes d'incertitudes

La description de l'incertitude peut être : paramétrique/non paramétrique, déterministe/non déterministe, structurée/ non structurée. Ce à quoi nous nous intéressons dans ce mémoire ce sont les incertitudes structurées en particulier.

On considère dans la suite, une description dans l'espace d'état où un système incertain peut globalement s'écrire :

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) \quad (1.2)$$

Où $A(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état. $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état.

Selon la structure de l'incertitude, ces matrices s'écrivent sous une des formes données ci-après (polytopique, affine ou structurée).

Mais d'abord, une définition pour chacune des incertitudes non structurées et structurées est donnée.

Si on suppose que la matrice d'état s'écrit $A(\theta) = A_0 + \Delta A$, la partie qui comprend l'incertitude c'est ΔA .

- Incertitudes non structurées [Chang, 1972] :

Elles ont été introduites par [Chang, 1972]. Pour cette classe, aucune information sur la façon dont elles affectent le système n'est disponible. Toute variation paramétrique et toute dynamique négligée engendre une incertitude dont la structure est totalement inconnue [Garcia, 1999] et contenue dans ΔA . Une majoration d'une norme matricielle de ΔA est alors utilisée et donnée par :

$$\|\Delta A\| \leq \phi \quad (1.3)$$

Où ϕ est un scalaire positif et $\|\cdot\|$ une norme généralement de type H_2 ou H_∞ [Courties, 1999]. La représentation non structurée, bien que peu élaborée, trop simple et considérablement pessimiste pour l'erreur, peut être d'un important intérêt vu qu'elle est capable de représenter toutes sortes d'imprécisions.

- Incertitudes structurées :

Les incertitudes structurées, quand à elles, sont considérées plus représentatives sur la façon dont elles affectent les modèles et ont été considérées un peu plus tard. Leur modélisation mathématique contient alors plus de précision et elle permet de réduire le conservatisme de la modélisation non structurée. La nature du paramètre incertain est plus fidèlement représentée ; et l'on y trouve différentes catégories. Dans les paragraphes qui suivent, on détaille la modélisation mathématique de certaines d'entre elles, celles qui nous intéressent le plus dans ce travail.

1.2.2.1 Incertitudes polytopiques

Cette structure a été considérée en particulier par [Bernussou *et al.*, 1989].

Les incertitudes polytopiques sont des incertitudes paramétriques. La matrice d'état du système est une combinaison linéaire convexe et elle appartient au domaine de type polytopique suivant :

$$A(\theta) \in D_A; \quad D_A = \left\{ A(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i; \quad \theta_i \geq 0; \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1 \right\} \quad (1.4)$$

N étant le nombre de sommets du polyèdre D_A .

En effet chaque sommet du polytope correspond à un domaine de fonctionnement particulier, ce qui permet de considérer les différentes phases de travail d'un processus donné. Ce type de représentation d'incertitudes est adapté au cas où les éléments de la matrice A sont des fonctions multilinéaires des paramètres d'incertitude θ .

De point de vue pratique, cette formulation correspond à une représentation multimodèle du processus où chaque modèle est obtenu pour des conditions de fonctionnement données.

La figure 1.1, donne un exemple de polyèdre D_A où A_1, A_2, \dots, A_N sont les sommets respectifs.

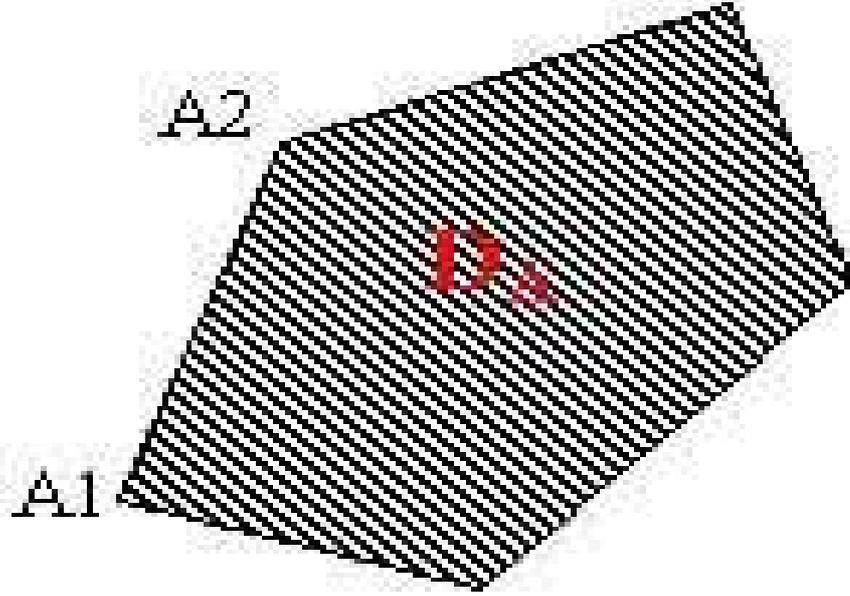


FIGURE 1.1 – Ensemble polytopique

1.2.2.2 Incertitudes affines

Parmi les travaux où cette structure a été traitée on peut citer par exemple [Biannic, 1996] et [Feron *et al.*, 1996].

L'incertitude affine est souvent rencontrée dans la littérature avec la matrice A donnée par :

$$A(\theta) = A_0 + \Delta A \quad \text{avec} \quad \Delta A = \sum_{i=1}^N \theta_i A_i \quad \text{avec} \quad \theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad (1.5)$$

Pour cette représentation, les matrices A_i répartissent l'incertitude sur les différents éléments de la matrice $A(\theta)$. Ce type d'incertitudes définit un hyper-rectangle de dimension N dans l'espace d'état. Les sommets de cet hyper-rectangle, correspondent aux valeurs extrémales de $\theta = [\theta_1 \dots \theta_N]^T$. Ce modèle affine s'obtient à partir des lois de la physique puisqu'un grand nombre de processus pratiques évoluent en fonction de paramètres compris entre une valeur minimale et une valeur maximale. On présente dans ce qui suit un exemple pratique de systèmes incertains où les incertitudes sont affines. Il s'agit d'un exemple emprunté aux travaux de [Wie et Bernstein, 1992], où le système physique est constitué de deux masses (M_1 , M_2) reliées par un ressort de raideur k . Le système est représenté par la figure 1.2. La représentation d'état de ce système est donnée par l'équation(1.6).

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k}{M_1} & \frac{k}{M_1} & 0 & 0 \\ \frac{k}{M_2} & -\frac{k}{M_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t) \quad (1.6)$$

$x(t) = (x_1 \ x_2 \ \dot{x}_1 \ \dot{x}_2)^T$ est le vecteur d'état et $u(t)$ le vecteur de commande. Les masses M_1 , M_2 et la raideur k sont incertaines de structures affines et sont données par :

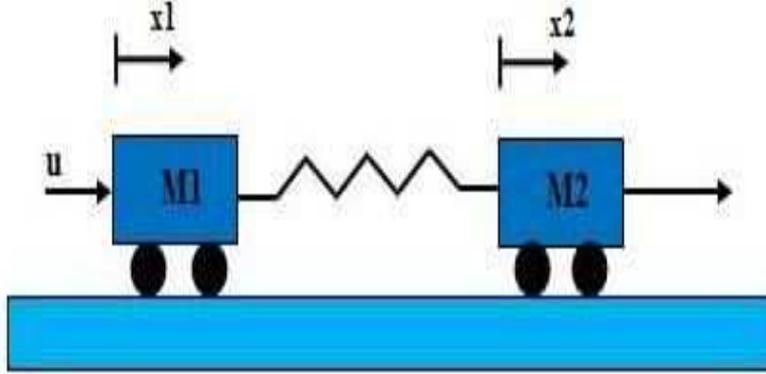


FIGURE 1.2 – Système deux masses-ressort

$$\begin{aligned}
 k &= k_0 + \delta_k, \text{ avec } k_0 = 1 \text{ et } -0.1 \leq \delta_k \leq 0.1 \\
 M_1 &= M_{10} + \delta_{M_1}, \text{ avec } M_{10} = 1.5 \text{ et } 0 \leq \delta_{M_1} \leq 0.2 \\
 M_2 &= M_{20} + \delta_{M_2}, \text{ avec } M_{20} = 1 \text{ et } 0 \leq \delta_{M_2} \leq 0.4
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

En effet, le type de modélisation affine trouve un intérêt notable quand il s'agit de développer des outils d'analyse basés sur la théorie de Lyapunov [Bouali, 2008].

Remarque :

Il est à noter que, sous certaines hypothèses, modèles polytopiques et affines peuvent être équivalents. Le passage d'un modèle à un autre sont bien détaillés dans la thèse de Bouali [Bouali, 2008].

1.2.2.3 Incertitudes bornées en normes

Ce type d'incertitudes a été traité par [Petersen, 1987] et [Zhou et Khargonekar, 1988]. L'incertitude bornée en norme est considérée moins structurée que les deux autres, et elle est définie telle que la matrice $A(\theta)$ est donnée par :

$$A(\theta) = A_0 + \Delta A \text{ ou } \Delta A = DVE, \text{ avec } V^T V \leq I \tag{1.8}$$

Avec $D \in \mathfrak{R}^{n \times r}$ et $E \in \mathfrak{R}^{l \times n}$ des matrices constantes connues, définissant la structure de l'incertitude et la répartissant sur les éléments de la matrice $A(\theta)$.

$V \in \mathfrak{R}^{r \times l}$ représente également une matrice d'incertitudes, et elle appartient au domaine donné par :

$$\vartheta = \{V \in \mathfrak{R}^{r \times l}, V^T V \leq I\} \tag{1.9}$$

Le volume ainsi défini est un volume ellipsoïdal ayant comme centre la matrice nominale $A(\theta)$ (Voir figure 1.3).

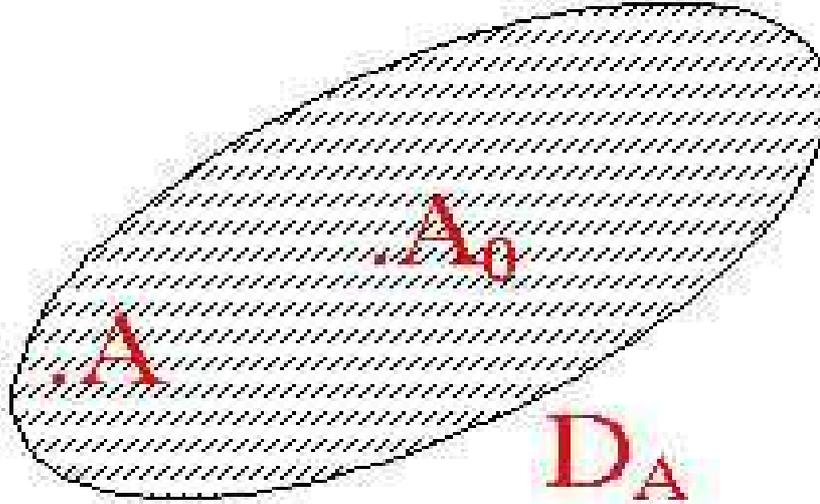


FIGURE 1.3 – Volume ellipsoidal pour incertitudes bornées en norme

Pour cette incertitude, on peut obtenir une forme plus structurée si l'on considère une matrice multi-blocs :

$$\Delta A = \sum_{i=1}^m \Delta A_i \quad \text{avec} \quad \Delta A_i = D_i V_i E_i \quad (1.10)$$

Les matrices d'incertitude V_i vérifient l'inégalité $V_i^T V_i \leq I$.

Cette structure d'incertitudes est investiguée dans plusieurs travaux comme ceux de : [Garcia *et al.*, 1994] ou [Daafouz, 1997].

1.3 Analyse de stabilité robuste des Systèmes incertains à paramètres invariants dans le temps

Le choix d'un modèle incertain étant effectué, une étape importante est l'analyse des propriétés en stabilité et performance robuste du modèle proposé afin d'élaborer une stratégie de commande. Celle-ci une fois obtenue, une nouvelle étape d'analyse du système bouclé intervient afin de tester les propriétés réelles du système corrigé. L'étape d'analyse est donc doublement importante, puisqu'elle va conditionner en partie les choix effectués pour la synthèse, mais également sanctionner les résultats de cette étape.

Pour l'analyse robuste en stabilité, étant donné un modèle LTI et la représentation de l'incertitude associée, il s'agit de tester la stabilité au sens de Lyapunov du système pour l'ensemble des incertitudes admissibles [Bernussou et Oustaloup, 2001].

En effet, les travaux effectués jusque là en analyse robuste des systèmes LTI sont très riches et diversifiés.

Comme exemples de travaux pour systèmes incertains LTI polytopiques, on peut citer [Peres, 1989], [Biannic, 1996], [Courties, 1999], [Cao et Lin, 2004], [Ebihara *et al.*, 2006] et bien d'autres...

Aussi, des conditions d'analyse ont été développées pour des systèmes LTI affines, on peut citer les travaux de [Gahinet *et al.*, 1996], [Oliveira *et al.*, 1999a],[Biannic, 1996] , [Bachelier, 1998], [Fu et Dasgupta, 2000], [Cao et Lin, 2004], [Sato, 2005], [Lim *et al.*, 2006] et d'autres...

Dans ce paragraphe, nous commençons par donner un aperçu sur la notion de stabilité au sens classique ainsi que certaines définitions s'y rapportant. Nous enchaînons en explicitant la notion de stabilité au sens de Lyapunov. La notion de stabilité robuste est présentée juste après. Nous précisons que toutes les études que nous faisons sur les systèmes LTI, dans cette thèse se font sur la base de la théorie de Lyapunov qui se rapporte à l'approche temporelle. C'est dans ce sens que nous parlerons de cette approche ainsi que d'autres (algébrique et fréquentielle) . Nous nous focaliserons néanmoins sur la théorie de Lyapunov appliquée au systèmes LTI, sur l'approche quadratique qui en découle et les fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres en tant qu'outil puissant d'analyse robuste pour ces systèmes.

Stabilité :

La stabilité caractérise ce qui est durable. Elle désigne la constance, ou encore la fermeté. Dans 'le petit Larousse, on trouve la définition de la stabilité donnée par la définition (1.3.1).

Définition 1.3.1. *Stabilité :*

Aptitude d'un élément quantifié à retrouver une valeur donnée lorsqu'il en est momentanément et accidentellement écarté.

Cette définition très simple, n'est pas suffisante pour les systèmes dynamiques, c'est dans ce sens que bien d'autres définitions ont pu être avancées. Celles que nous donnons ci-après sont extraites de l'ouvrage de [Khalil, 1992].

Définition 1.3.2. *Trajectoire d'équilibre :*

Soit le système non autonome suivant :

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (1.11)$$

Ou $f : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue par morceaux en t et localement Lipschitznienne en x sur $[0, \infty) \times D$, et $D \subset \mathbb{R}^n$ est un voisinage de l'origine $x = 0$. L'origine est une trajectoire d'équilibre en 0 si :

$$f(t, 0) = 0, \forall t \geq 0 \quad (1.12)$$

Un équilibre à l'origine peut être une translation d'une trajectoire d'équilibre. De plus amples détails sont donnés dans [Khalil, 1992].

Définition 1.3.3. *Stabilité simple :*

La trajectoire d'équilibre x_e est dite simplement stable, si $\forall t_0 > 0$ et ε scalaire positif, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon, t_0)$, tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.13)$$

x_0 est la trajectoire initiale.

Définition 1.3.4. Stabilité uniforme :

La trajectoire d'équilibre x_e est dite uniformément stable, si $\forall t_0 > 0$ et ε scalaire positif, il existe un scalaire positif $\delta(\varepsilon)$, tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.14)$$

Définition 1.3.5. Convergence :

La trajectoire d'équilibre x_e est dite convergente, si $\forall t > 0$, il existe un scalaire positif $\delta(t_0)$, tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0, t_0) = x_e, \quad \text{quand } t \rightarrow \infty, \quad \forall t_0 \quad (1.15)$$

Ou encore, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $T(\varepsilon, x_0, t_0)$ tel que :

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x_0, t_0) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 + T \quad (1.16)$$

Définition 1.3.6. Stabilité asymptotique uniforme :

La trajectoire d'équilibre x_e est dite uniformément asymptotiquement stable, si :

- la condition de stabilité uniforme est vérifiée.
- La condition de convergence est vérifiée.

Si la propriété de stabilité asymptotique uniforme est vérifiée quel que soit x_0 , alors on parle de stabilité asymptotique uniforme globale.

Nous donnons maintenant, des détails sur la stabilité au sens de Lyapunov.

Stabilité au sens de Lyapunov :

Influencé par les travaux de H. Poincaré (1854-1912), Aleksandar Mikailovich Lyapunov (1857-1918) a étudié dans son mémoire "*Problème général de la stabilité du mouvement*", la notion de la stabilité [Saoud, 2009]. En fait, l'étude des systèmes dynamiques est une branche des mathématiques qui remonte aux travaux de Poincaré présenté en 1881 et intitulés "*Sur les courbes définies par une équation différentielle*". Stabilité veut dire stabilité des points d'équilibre. Le principe s'appuie sur le fait qu'un système mécanique, est stable, en l'absence de forces extérieures, si l'énergie du système décroît de façon continue -quand il est déplacé de sa position d'équilibre- jusqu'à ce qu'elle atteigne son minimum à l'état d'équilibre ou sur sa trajectoire d'équilibre. La décroissance de l'énergie totale est alors considérée comme indicateur de stabilité. La stabilité au sens de Lyapunov signifie que la solution peut être gardée arbitrairement près de l'équilibre si on prend une condition initiale suffisamment proche de ce dernier. La stabilité asymptotique, comme donné dans la définition (1.3.6), signifie que non seulement l'équilibre est stable mais que, de plus, la solution d'une condition initiale appartenant au voisinage d'équilibre, tend vers l'équilibre quand le temps tend vers l'infini. Partant de ces définitions, Lyapunov a proposé deux méthodes pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. La première est une méthode de libéralisation par approximation, pour plus de détails voir [Saoud, 2009]. Cette méthode bien que simple, ne semble pas être très efficace, elle n'est considérée valide que localement autour du point d'équilibre concerné et ne peut être utilisée pour déduire un comportement global. Pour palier à cela, A.M.Lyapunov a proposé une deuxième méthode pour l'étude de la stabilité. Aujourd'hui, connue sous le nom "*Méthode directe de Lyapunov*" ou "*Seconde méthode de Lyapunov*".

1.3.1 Seconde Méthode de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov permet de se prononcer quant à la stabilité d'un état d'équilibre sans avoir recours à la résolution de l'équation d'état [Daafouz, 1997].

Le signe d'une fonction $V(x, \theta)$; ($V(0, \theta) = 0$; $V(\infty, \theta) = \infty$); appelée fonction de Lyapunov, et celui de sa dérivée $\dot{V}(x, \theta) = \frac{dV(x, \theta)}{dt}$ donnent une information sur la stabilité du système.

$V(x, \theta)$ joue le rôle d'une fonction "énergie" fictive pour le système considéré [Daafouz, 1997].

Nous rappelons dans ce qui suit (théorème (1.3.1)), le principal théorème de stabilité issu de cette théorie. Avant, nous dirons que, pour les systèmes LTI, représentés par l'équation d'état (1.1), la stabilité est nécessairement globale et les points d'équilibre sont dans le sous-espace défini par le noyau de $A(\theta)$. Le plus souvent $A(\theta)$ est non singulière et l'équilibre est donc le point unique $x = 0$. La propriété attendue pour le système est la stabilité asymptotique, sachant qu'un système simplement stable est à la limite de stabilité.

On pourra dire que la seconde méthode de Lyapunov, ou méthode directe de Lyapunov, donne une condition suffisante de stabilité asymptotique globale. Elle est énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit le système d'équation donné par (1.1). Ce système est stable (globalement asymptotiquement stable autour de l'origine) si il existe une fonction réelle $V(x, \theta)$ telle que :*

$$\begin{aligned} & i) V(0, \theta) = 0 \\ & ii) V(x, \theta) > 0 \quad \forall x \neq 0 \\ & iii) V(x, \theta) \rightarrow \infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \rightarrow \infty \\ & iv) \dot{V}(x, \theta) < 0 \quad \forall x \neq 0 \end{aligned} \tag{1.17}$$

Où \dot{V} est la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système (1.1).

Une fonction vérifiant les conditions i)-iii) est par définition une fonction candidate de Lyapunov. Si elle vérifie également iv), c'est une fonction de Lyapunov pour le système. Une des définitions importantes de stabilité reste la stabilité robuste.

Stabilité robuste :

Pour un système avec incertitudes, l'étude de stabilité reste une étape fondamentale, et c'est ce qu'on appelle l'analyse de stabilité robuste. Dans la thèse [Bachelier, 1998], l'analyse robuste peut garantir deux objectifs : le premier est d'attester que les propriétés du système sont modifiées dans des proportions tolérables, c'est à dire que le système est robuste, pour une famille redéfinie de modèles donnés. Le deuxième c'est que cette étape estime quel est le plus vaste domaine d'incertitude pour lequel le système conserve des propriétés acceptables.

Dans ce contexte, plusieurs méthodes ont été mises en place dans le but d'étudier la stabilité robuste des systèmes. On trouve les approches fréquentielles, les approches algébriques et les approches temporelles. On donne un aperçu pour chacune de ces approches.

Approche algébrique

Cette approche est principalement basée sur les travaux de Kharitonov [Kharitonov, 1978]. Elle étudie la stabilité en se basant sur l'étude de polynômes caractéristiques des systèmes. La difficulté de cette méthode c'est que les coefficients du polynôme caractéristique sont couplés entre eux, et quand les coefficients dépendent de mêmes paramètres incertains,

l'approche algébrique prend difficilement en compte leur couplage.

Approche fréquentielle

Elle repose sur une représentation fréquentielle des incertitudes. Elle comprend des études portant sur la synthèse LQG/LTR (Linear Quadratic Gaussian/Loop Transfer Recovery), méthode se basant sur la constructions de compensateurs retrouvant les propriétés du retour d'état. Dans le domaine fréquentiel, les modèles incertains peuvent être de type additifs ou multiplicatifs comme suit :

$$G(s) + \Delta(s) \quad G(s)[1 + \Delta(s)] \quad (1.18)$$

Mais aussi, [Doyle et Stein, 1981] et [Doyle, 1982] proposent d'autres formes comme la forme LFT (Transformée Fractionnaire Linéaire). Parmi les méthodes on cite également la commande H_∞ fortement investiguée dans les travaux de [Zames, 1981]. Dans les dernières années, d'autres méthodes fréquentielles sont apparues sur la base des IQC (Contraintes Quadratiques Intégrales) et des multiplieurs [Peaucelle, 2000], méthodes ayant des liens fort étroits avec l'approche temporelle donnée dans ce qui suit.

Approche temporelle

Cette approche a été très utilisée pour l'analyse robuste pendant les dernières années. Elle se base sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov. On peut déduire le résultat suivant de La seconde méthode de Lyapunov, qui aboutit en effet au théorème (1.3.2) pour la stabilité robuste des systèmes incertains LTI. Dans ce contexte, un choix particulier de fonction candidate de Lyapunov est la forme quadratique donnée par :

$$V(x, \theta) = x^T P(\theta) x \quad (1.19)$$

Où $P(\theta)$ est une matrice symétrique définie positive pour toutes les valeurs de θ , soit :

$$P(\theta) = P(\theta)^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0 \quad (1.20)$$

Ce choix de fonction de Lyapunov conduit aux résultat donné dans le théorème suivant :

Théorème 1.3.2. ([Courties, 1999] et références internes, [Peaucelle, 2000]).

Le système LTI incertain (1.1) est robustement stable si et seulement si il existe une matrice symétrique $P(\theta) > 0$ telle que :

$$A^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A(\theta) < 0 \quad (1.21)$$

La LMI obtenue (1.21), fut la première à être utilisée pour l'analyse de la stabilité d'un système dynamique [Boyd *et al.*, 1994]. Étant donné le théorème de Lyapunov, la méthode est largement investiguée dans l'objectif de tester la stabilité robuste des systèmes incertains. Toutefois, les équations qui en résultent ne sont pas facilement résolues par les outils mathématiques disponibles.

L'approche de séparation quadratique est parmi les méthodes utilisées dans l'objectif de réduire la conservatisme engendré . Elle est considérée par [Safari-Shad et Cobb, 1992] pour un système incertain LTI, après par [Iwasaki et Hara, 1998], [Iwasaki et Shibata, 2001] où les auteurs proposent une méthode pour évaluer la stabilité en utilisant le séparateur quadratique. Elle est également utilisée dans [Oliveira *et al.*, 1999a], où les conditions données présentent un découplage entre la matrice de Lyapunov et celles du système. Récemment, l'approche est investiguée par [Ebihara et Hagiwara, 2004], [Peaucelle *et al.*, 2007] où des

conditions de stabilité robuste sont données pour un système LTI de type "descriptor" et [Peaucelle, 2009a] où l'approche est appliquée par introduction de variables additionnelles connues dans la terminologie anglo-saxonne par "slack variables".

Dans le paragraphe suivant, le concept de stabilité quadratique dont la base est la méthode directe de Lyapunov est présenté.

1.3.2 Concept de stabilité quadratique

La notion de stabilité quadratique a été développée en 1980 par Hollot et Barmish [Hollot et Barmish, 1980]. Elle a été la base pour de très nombreux travaux jusqu'à maintenant. Ce concept implique l'existence d'une fonction de Lyapunov unique, indépendante des paramètres incertains et assurant la stabilité du système pour tout le domaine d'incertitudes. Cela constitue probablement un des résultats les plus importants des années 80 dans le contexte de la commande robuste.

La place que prend cette approche dans la littérature puise sa force du fait que, pour tout type d'incertitudes, cette condition est une condition suffisante de stabilité robuste. En particulier, quand on ne dispose d'aucune information sur la vitesse d'évolution des paramètres incertains, l'approche de stabilité quadratique reste la seule possible. Aussi, la stabilité quadratique se caractérise par le fait que la résolution des problèmes qui en découlent se base sur des méthodes convexes désormais classiques.

Concernant les approches convexes, on peut rappeler l'outil LMI détaillé en Annexe A (A.1.2). Et toujours est-il que le coût en terme de calcul numérique est restreint. Autres contributions, la stabilité quadratique reste à l'origine des résultats très importants en stabilisation.

Parmi les travaux portant sur l'analyse robuste se basant sur la stabilité quadratique, on peut citer [Bernussou *et al.*, 1989], [Khargonekar *et al.*, 1990], [Geromel *et al.*, 1991], [Haddad et Bernstein, 1991] ou plus tard [Garcia et Bernussou, 1995], [Ghaoui et Scorletti, 1996], [Schim, 1996], [Peaucelle *et al.*, 1998].

Parmi d'autres résultats pour lesquels la méthode est concluante, on peut citer [Garcia *et al.*, 1997], [Magni *et al.*, 1997], [Ghaoui et Niculescus, 2000] ou récemment [Shorten et Narendra, 2003] et [Henrion *et al.*, 2004]. Et on peut dire que bon nombre de résultats pour l'analyse, contrôle et filtrage robustes, avec des critères de performance H_2 et H_∞ ont pu être développés en l'utilisant [Boyd *et al.*, 1994], [Leite, 2005] et références citées dans ces travaux. Ces conditions formulées en terme d'Inégalités Matricielles Linéaires LMI sont facilement résolues en utilisant des algorithmes de calcul spécialisés.

Finalement, on pourra attester du fait que la stabilité quadratique implique forcément la stabilité robuste mais que l'inverse n'est pas vrai. Toutefois, l'approche de stabilité quadratique s'avère conservatrice et pessimiste spécialement pour le cas d'incertitudes constantes, même si elle permet d'aboutir pour nombre non négligeable de problèmes.

La notion de stabilité quadratique se fonde sur le théorème (1.4.1). En effet, une grande part de recherches réalisées dans les vingt dernières années a consisté à vérifier l'existence d'une fonction de Lyapunov de type (1.19). Ou $P(\theta)$ vérifie (1.20).

Un choix possible pour $P(\theta)$ est :

$$P(\theta) = P \in \mathfrak{R}^{n \times n}, P > 0 \quad (1.22)$$

Où P est fixe et indépendante des valeurs prises par θ .

Quand un système admet une fonction de Lyapunov donnée par (1.19)-(1.20)- (1.22). alors on dit que ce système est quadratiquement stable.

La définition suivante particularise le théorème (1.3.2).

Définition 1.3.7. [Peaucelle, 2000] *Le système incertain (1.1) est quadratiquement stable si et seulement si il existe une matrice unique $P = P^T > 0$ telle que pour toutes les incertitudes θ , l'inégalité (1.23) est vérifiée.*

$$A^T(\theta)P + PA(\theta) < 0 \quad (1.23)$$

La stabilité quadratique est une condition suffisante de stabilité robuste. Pour aller au delà du pessimisme de la stabilité quadratique, les Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres (FLDP) ont été largement étudiées à la fin des années 90.

1.3.3 Utilisation des FLDP pour la stabilité des systèmes incertains LTI

L'utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres est relativement récente dans la littérature [Feron *et al.*, 1996], [Fu et Dasgupta, 1999], [Geromel *et al.*, 1998], [Oliveira *et al.*, 1999a], [Oliveira *et al.*, 1999b], [Mori et Kohaure, 2000], [Troffino, 1999], [Arzelier *et al.*, 2002] et [Ebihara et Hagiwara, 2006]. En effet, dans le cas où les incertitudes ne varient pas dans le temps, ces FLDP sont des fonctions quadratiques où la Fonction de Lyapunov $P(\theta)$ est dépendante des paramètres. Un choix pour cette fonction est donné par la forme (1.20). Dans ce cadre, à $P(\theta)$ peuvent être attribuées une multitude de formes. En fait, en introduisant les Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres, on s'attend à être moins pessimiste que pour la stabilité quadratique.

Nous introduisons ici différentes classes. Une des visions relativement complète des principaux résultats liés à l'utilisation de telles fonctions de Lyapunov a été introduite dans la thèse de Peaucelle [Peaucelle, 2000], où il aborde plusieurs types d'incertitudes comme polytopiques, affines ou LFT mixtes [Peaucelle et Arzelier, 2001]. Il introduit également dans son travail, certains résultats comme [Geromel *et al.*, 1998], [Oliveira *et al.*, 1999a] ayant permis l'introduction des FLDP pour l'analyse robuste en stabilité et en performance. Pour revenir aux structures de $P(\theta)$, on dira que certaines formes bien spécifiques ont pu être étudiées tout au long de la littérature.

On peut citer la classe des FLDP rationnelles (voir [Scorletti et Ghaoui, 1995] et [Lu *et al.*, 1996]), la classe des FLDP à structure LFT données dans [Helmerson, 1999] et [Iwasaki et Hara, 1998].

Également, la classe des FLDP affines est proposée dans [Feron *et al.*, 1996] et [Peaucelle et Arzelier, 2001] et elle a été développée en se basant sur l'idée qu'une paramétrisation affine est nécessaire afin de réduire le conservatisme engendré par l'utilisation de borne supérieure des transformations linéaires fractionnaires. En particulier, dans la dernière décennie, une nouvelle classe de FLDP a fait son apparition, la classe des FLDP polynomiales, largement investiguée par [Chesi *et al.*, 2003], [Chesi *et al.*, 2004a], [Chesi *et al.*, 2004b], [Chesi *et al.*, 2005], [Chesi *et al.*, 2007], [Oliveira *et al.*, 2005], [Oliveira et Peres, 2007]; ces formes polynomiales établissent un lien étroit avec des techniques d'optimisation convexes.

Une condition suffisante de stabilité robuste pour les systèmes LTI est donnée dans la définition (1.3.8).

Définition 1.3.8. *Le système incertain LTI (1.1) est robustement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P(\theta)$ telle que :*

$$A^T(\theta)P(\theta) + P(\theta)A(\theta) < 0 \quad (1.24)$$

Où, selon la structure de la matrice dynamique du système, la Fonction de Lyapunov Dependant des Paramètres peut s'écrire :

$$P(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i P_i, \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0 \quad (1.25)$$

Ou alors

$$P(\theta(t)) = P_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i P_i, \quad \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1; \quad \theta_i \geq 0 \quad (1.26)$$

Ou aussi bien d'autres formes.

La forme donnée dans (1.25) est bien la structure polytopique. Celle donnée par (1.26) est affine. Ainsi, avec l'objectif d'obtenir à chaque fois des conditions d'analyse et de synthèse moins conservatrices, les FLDP sont utilisées et des résultats a priori moins restrictifs que la stabilité quadratique sont proposés.

1.4 Commande et stabilisabilité robuste des systèmes incertains à Paramètres Invariants dans le Temps

Au centre des préoccupations de l'automatique moderne, le problème de la synthèse de compensateurs robustes vis à vis d'incertitudes structurées a suscité un intérêt considérable durant ces dernières années, certains se basent sur l'utilisation des multipliers comme dans [Safonov et Chiang, 1993], ou les séparateurs quadratiques dans [Ghaoui et Niculescus, 2000] ou encore le scaling dans [Zhou *et al.*, 1996]. Cette problématique est toujours largement ouverte puisqu'il n'existe pas actuellement d'approche permettant de l'aborder dans toute sa généralité tout en garantissant une complexité faible des calculs et des performances garanties [Bernussou et Oustaloup, 2001], et que dans la majorité des cas, la prise en compte de l'incertitude implique nécessairement une complexité importante.

En effet, la notion de commande ou contrôle se fonde sur un concept très ancien, celui de contre-réaction plus connu en anglais par : feedback. L'objectif sera toujours de déterminer la commande à appliquer en entrée du système pour obtenir un comportement désiré de celui-ci, ceci tout en considérant les sorties mesurées et l'information disponible sur le système, information généralement contenue dans le modèle qui lui est associé. L'objectif majeur de la commande reste la stabilité du système corrigé, soit comme évoqué précédemment, sa capacité de revenir de lui même à sa position d'équilibre à chaque fois qu'il en est écarté. La plupart du temps, la commande est une fonction qu'assure un système dit de commande. Selon la nature de la tâche à accomplir et l'environnement dans lequel évolue le système commandé, d'autres objectifs peuvent être spécifiés, par exemple, la poursuite d'une référence donnée, la rapidité d'exécution de cette tâche, la minimisation

de l'énergie dépensée [Daafouz *et al.*, 1997]. Tout de même, il n'est pas possible de parfaitement représenter par un seul modèle mathématique le comportement d'un système physique, quel que soit sa nature. Et c'est dans ce sens, qu'il est important de prendre les précautions nécessaires afin de calculer la loi de commande pour le modèle. La plupart du temps, le résultat est très éloigné du résultat attendu. Comme exemples, on peut donner le cas où le système de commande déstabilise le système réel parce que, pour des raisons de simplicité, le modèle ayant servi pour la conception de la loi de commande ne tient pas compte de certains phénomènes tels que les perturbations, les variations de certains paramètres, les dynamiques rapides,.. alors qu'il est important de prendre en compte ces phénomènes pour la synthèse du système de commande.

Dans l'objectif d'assurer un bon contrôle de pareils systèmes et afin de garantir une bonne loi de commande, il sera crucial de considérer une famille de modèles à laquelle le système sera supposé appartenir. Cette famille est généralement constituée d'un modèle nominal et de variations autour de ce modèle, appelées incertitudes. Ainsi, si le correcteur est conçu de sorte à satisfaire les objectifs fixés pour tous les modèles appartenant à cette famille, on a alors la garantie qu'ils le sont également pour le système réel [Daafouz *et al.*, 1997].

Commande robuste

Des principales raisons justifiant le fait d'aborder le problème de stabilisation robuste, sachant que la majorité des systèmes est stable en boucle ouverte, on peut citer les suivantes [Garcia *et al.*, 1997] :

- Les commandes mises en oeuvre sont essentiellement des commandes en boucle fermée et il convient de caractériser la classe des lois de commande en boucle fermée qui stabilisent ou préservent la stabilité, car c'est dans celle-ci que sera sélectionnée la loi qui en plus permettra d'atteindre un certain niveau de performances.
- On peut parfois ramener le problème de performance robuste à un problème de stabilisation robuste.

Le modèle incertain étant défini, il s'agit de calculer une loi de commande adéquate. L'étape de commande pour un système incertain étant la phase où l'on synthétise des compensateurs avec prise en compte des incertitudes, le principe est de réaliser un bouclage des sorties mesurées vers les entrées de commande afin de corriger ou d'améliorer les propriétés de stabilité et de performance. Ceci a permis de résoudre grand nombre de problèmes durant les vingt dernières années, comme l'exemple de commande par retour d'état dans [Bernussou *et al.*, 1989], [Geromel *et al.*, 1999], [Iwasaki, 2005] ou [Xie, 2008] même s'il s'agit plutôt de synthèse de performance et de norme H_∞ , ou de commande par retour de sortie dans [Scherer *et al.*, 1997], [Courties, 1999], ou encore [Arzelier *et al.*, 2003]. Ci-après nous donnons un schéma représentatif de boucle fermée par un correcteur. (Voir figure 1.4).

Le choix des types de lois de commande est fortement dépendant des méthodes d'analyse. Notons que la littérature est abondante mais que l'on cite ci-après les approches les plus utilisées, soit, l'approche fréquentielle et l'approche temporelle comme pour le cas de l'analyse robuste. Elles sont données par :

Approches fréquentielles :

Elles regroupent les méthodes s'intéressant aux incertitudes non structurées, et leur but est de déterminer les lois de commande robuste relatives à des critères de performances spécifiés dans le domaine fréquentiel [Bachelier, 1998]. Parmi ces approches, on peut citer :

- L'approche LQG/LTR (Loop Transfer Recovery) dont le principe repose sur le calcul

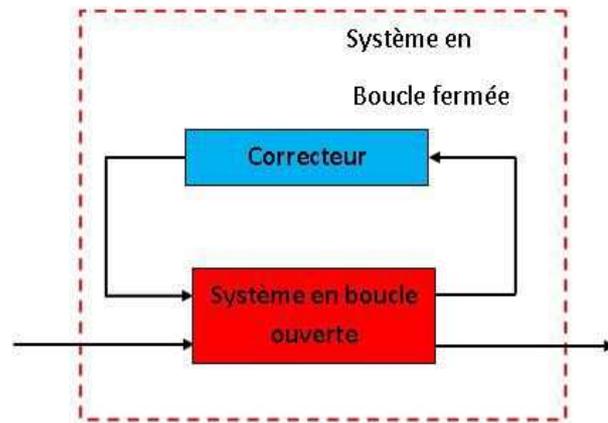


FIGURE 1.4 – Boucle fermée par un correcteur

d'un retour d'état de type LQ puis la construction d'un observateur dont le gain est choisi tel que le transfert en boucle fermée tend vers celui obtenu avec le retour d'état [Athans, 1986], [Lewis, 1992].

- L'approche H_∞ :

En effet, la norme H_∞ est présentée comme un moyen pour quantifier le transfert entre une perturbation en entrée et la sortie contrôlée ; et certes la recherche d'un compensateur minimisant ce transfert peut être vue comme un problème de robustesse, non vis à vis d'une incertitude de modélisation mais vis à vis d'une perturbation exogène. D'où le nom de commande H_∞ [Doyle et Stein, 1981], [Chilali et Gahinet, 1996].

- L'approche CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier)[Oustaloup, 1994] : Elle s'intéresse initialement à la robustesse du degré de stabilité. C'est une stratégie qui a l'intérêt d'envisager la robustesse en raisonnant sur les indicateurs de stabilité et de performances fréquentiels des systèmes monovariabiles sans avoir à modéliser l'incertitude, ce qui signifie que la nature de cette incertitude n'a pas besoin d'être précisée. Ce type de commandes est fortement investigué par [Oustaloup, 1994], [Oustaloup, 1995] et [Oustaloup *et al.*, 1996].

Approches temporelles :

Les approches temporelles, pour le cas de la commande robuste, comme pour l'analyse robuste, s'appuient principalement sur la théorie de Lyapunov. Celle sur laquelle nous nous appuyons dans le présent travail.

Méthode directe de Lyapunov

En effet, les résultats découlant de la théorie de Lyapunov restent toujours à l'origine de la majeure partie d'outils de test de stabilisabilité robuste. De certains résultats se basant sur la méthode directe de Lyapunov pour synthétiser des contrôleurs robustes pour systèmes incertains LTI, on peut citer les travaux de [Gutman et Polmer, 1982] ou [Hollot et Barmish, 1980], et bien d'autres.

Stabilisabilité quadratique

De la théorie de Lyapunov émane également le concept de la stabilisation quadratique. Ce concept, tout comme la stabilité quadratique a été introduit en 1980 par [Hollot et Barmish, 1980], pour la résolution du problème de stabilisation robuste, par retour d'état, de systèmes incertains avec incertitudes de type polytopique. Cette approche présente l'avantage d'aboutir à des conditions numériquement faciles à tester [Garcia *et al.*, 1997].

Cette approche, est elle aussi fondée sur la méthode directe de Lyapunov [Courties, 1999], et consiste à rechercher une fonction de Lyapunov adéquate, afin de tester la stabilité asymptotique globale du système en boucle fermée, dans le domaine des incertitudes admissibles (Voir la définition(1.4.1)).

Dans la suite, nous considérons le système incertain donné par(1.27).

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B_2(\theta)u(t) \quad (1.27)$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande. $A(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état et $B_2(\theta) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ est la matrice de commande.

Définition 1.4.1. [Barmish, 1985]

Le système (1.27) est dit *quadratiquement stabilisable*, s'il existe une loi de commande $p(x)$ continue de $\mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ avec $p(0) = 0$, une matrice symétrique définie positive P , une constante $\alpha > 0$, satisfaisant la condition suivante :

Quelles que soient les incertitudes admissibles θ :

$$L(x) := x^T(A^T(\theta)P + PA(\theta))x + 2xPB_2(\theta)p(x) \leq -\alpha\|x\|^2 \quad (1.28)$$

pour toute paire $(x) \in \mathfrak{R}^n$

Si l'équation (1.28) est satisfaite, alors $V(x) = x^TPx$, dont la dérivée est donnée par $L(x)$, est une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée.

A partir de la définition (1.4.1), Barmish a donné une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité quadratique pour le système incertain de type (1.27). Elle est illustrée dans le théorème ci-après.

Théorème 1.4.1. [Barmish, 1985]

Le système incertain (1.27) est *quadratiquement stabilisable* si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive P telle que :

$$x^T(A(\theta)P + PA^T(\theta))x < 0 \quad \forall x \in \mathfrak{N}_{B_2} \quad (1.29)$$

Où l'ensemble \mathfrak{N}_{B_2} représente le noyau de $B_2^T(\theta)$ soit :

$$\mathfrak{N}_{B_2} = \{x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n : B_2^T(\theta)x = 0\} \quad (1.30)$$

Ce travail important réalisé par Barmish, a été à l'origine de nombre important d'autres travaux comme dans [Petersen et Hollot, 1988] où Petersen et Hollot ont proposé une procédure s'appuyant sur la résolution d'une équation de Ricatti pour la construction d'une fonction de Lyapunov associée à la stabilisabilité quadratique des systèmes incertains avec incertitudes affine, ou alors dans [Zhou et Khargonekar, 1988] où les auteurs donnent une condition de stabilisabilité robuste pour systèmes incertains avec incertitudes sur

la matrice d'entrée. Également [Garcia *et al.*, 1994], [Garcia *et al.*, 1996] proposent une solution pour systèmes linéaires affectés par incertitudes bornées en norme. Beaucoup d'autres publications reliées à l'approche quadratique dans le cadre de synthèse de compensateurs stabilisants sont aussi données dans [Petersen, 1987], [Bernussou *et al.*, 1989] ou alors [Anderson et Moore, 1989].

Et Vu le conservatisme engendré par l'approche quadratique sur la synthèse de correcteurs stabilisants, les Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres sont largement utilisées dans ce domaine, où par exemple [Feron *et al.*, 1996] propose l'investigation des FLDP pour systèmes incertains LTI à structure affine. Dans [Haddad et Bernstein, 1991], Haddad et Bernstein donnent des techniques de synthèse par retour d'état de contrôleurs d'ordre plein et réduit pour systèmes incertains LTI.

La plupart des solutions citées sont présentées pour le cas d'une commande par retour d'état. Mais vu que l'état n'est pas toujours disponible, les automaticiens ont recours au calcul d'une loi de commande robuste par retour de sortie qui peut être soit statique soit dynamique.

Les deux techniques sont détaillées dans la suite pour les systèmes incertains LTI.

1.4.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LTI

On commence dans un premier paragraphe par donner quelques importants résultats sur le retour d'état pour systèmes incertains LTI.

Depuis les années 60, de nombreux travaux se sont intéressés à la possibilité de commander les systèmes par retour d'état. La représentation d'état par Kalman, l'introduction des notions de commandabilité et d'observabilité ont contribué largement au développement de ce type de commandes. Parmi les travaux ayant débuté à base de la théorie de Lyapunov et synthétisant des contrôleurs par retour d'état, on peut citer [Rosenbrock, 1962], [Rissanen, 1960], [Wonham, 1985].

Un des résultats les plus importants dans ce contexte est donné dans le théorème (1.4.2).

On considère toujours le système incertain donné par (1.27). Dans le cas de retour d'état, la loi de commande est en général donnée par : $u(t) = Kx(t)$. $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ est la matrice de dimensions appropriées qu'il faut déterminer.

Le modèle du système en boucle fermée s'écrit comme suit.

$$\dot{x}(t) = (A(\theta) + B_2(\theta)K)x(t) \quad (1.31)$$

Problème : Lors d'un contrôle par retour d'état statique, il s'agit de trouver une loi de commande $u(t) = Kx(t)$, pour le système (1.27) en déterminant K tel que $A(\theta) + B_2(\theta)K$ soit asymptotiquement stable.

On a le résultat suivant :

Théorème 1.4.2. [Courties, 1999]

Le système linéaire incertain (1.27) est stabilisable asymptotiquement en boucle fermée, par retour d'état $u(t) = Kx(t)$ si et seulement si il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ telles que :

$$AP + PA^T + B_2R + R^T B_2^T < 0 \quad (1.32)$$

Dans ce théorème, le gain de retour d'état est donné par : $K = RP^{-1}$.

Aussi pour ce type de commandes, on peut citer les travaux de [Petersen, 1987], [Colmenares et Henrion, 1995], plus tard [Peaucelle *et al.*, 2000a] et même plus récemment [Iwasaki, 2005], où les auteurs se basent sur une classe polynomiale de Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres, pour donner une condition nécessaire et suffisante de synthèse robuste par retour d'état pour systèmes incertains LTI .

Dans les commandes par retour d'état, la loi de commande est mise en oeuvre à travers la mesure de l'état du système. La connaissance des états du système n'est pas toujours garantie, ce qui nous amène à parler de contrôleurs par retour de sortie statique et dynamique.

1.4.2 Synthèse des correcteurs par retour de sortie pour systèmes LTI

La synthèse de compensateurs utilisant la sortie est réalisée dans [Scherer *et al.*, 1997], [Scherer, 1999], [Colmenares, 1996], [Courties, 1999], [Benton et Smith, 1999], [Peaucelle et Arzelier, 2001], et plus récemment dans [Hu *et al.*, 2002] et [Hai, 2008] où ils réalisent des contrôles par retour de sortie hybride.

L'état n'est pas toujours mesurable en pratique. Il faut alors envisager de travailler uniquement avec l'information partielle contenue dans la sortie mesurée y .

1.4.2.1 Retour de sortie statique

On considère ici le système incertain LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_2(\theta)u(t) \\ y(t) &= C_2(\theta)x(t) \end{aligned} \quad (1.33)$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ sont respectivement les vecteurs d'état et de commande. $y(t) \in \mathfrak{R}^r$ est la sortie mesurée. $A(\theta)$ et $B_2(\theta)$ sont déjà prédéfinies et $C_2(\theta) \in \mathfrak{R}^{r \times n}$

Problème : Pour un contrôle par retour de sortie statique le problème c'est que pour le système (1.27) et la loi de commande $u(t) = Ky(t)$, il faut trouver $K \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ tel que $A(\theta) + B_2(\theta)KC_2(\theta)$ soit asymptotiquement stable.

Théorème 1.4.3. *Le système linéaire incertain donné par (1.27) est quadratiquement stabilisable par retour de sortie statique $u(t) = Ky(t)$, si et seulement il existe $P = P^T > 0$ et $K \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ tel que :*

$$(A + B_2KC_2)^T P + P(A + B_2KC_2) < 0 \quad (1.34)$$

$K \in \mathfrak{R}^{r \times m}$ est le gain de retour de sortie.

1.4.2.2 Retour de sortie dynamique

Soit le système incertain décrit par (1.27) et le compensateur dynamique associé :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta)x(t) + B_2(\theta)u(t) \\ y(t) &= C_2(\theta)x(t) \\ \dot{x}_K(t) &= A_K x_K(t) + B_K y(t) \\ u(t) &= C_K x_K(t) + D_K y(t) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Problème : Pour un contrôle par retour de sortie dynamique, le problème c'est que pour le système (1.35) donné par le triplet $(A(\theta), B(\theta), C(\theta))$ et étant donné un entier $k < n$, il faut déterminer les matrices $A_K \in \mathbb{R}^{k \times k}$, $B_K \in \mathbb{R}^{k \times r}$, $C_K \in \mathbb{R}^{m \times k}$ et $D_K \in \mathbb{R}^{m \times r}$ tel que la matrice dynamique en boucle fermée A_{bf} soit stable asymptotiquement $\forall A(\theta) \in D_A$ [Arzelier, 2004].

Avec D_A donné par la représentation (1.4).

la matrice dynamique en boucle fermée A_{bf} est donnée par $A_{bf} = \begin{pmatrix} A + B_2 A_K C_2 & B_2 C_K \\ B_K C_2 & D_K \end{pmatrix}$.

Une condition suffisante pour la stabilisabilité par retour de sortie de ce système est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1.4.4. *D'après le théorème de Lyapunov, le système (1.35) est asymptotiquement stable s'il existe $P = P^T > 0$ tel que :*

$$A_{bf}P + PA_{bf} < 0 \quad \forall A \in D_A \quad (1.36)$$

Avec D_A donné par la représentation (1.4).

Remarque :

Un des objectifs dans la définition du problème de retour de sortie dynamique est de minimiser k et de le rendre le plus petit possible par rapport à n .

- Pour $k = 0$, le problème de retour de sortie dynamique est exactement le problème de retour de sortie statique.
- En définissant un système augmenté :

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ C & 0 \end{pmatrix}; \quad (1.37)$$

la résolution du problème de retour de sortie dynamique d'ordre k peut se ramener à celle de retour de sortie statique [Arzelier, 2004].

- Quand $k = n$, la synthèse par retour de sortie est dite d'ordre plein.

1.5 Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, un historique sur les systèmes incertains LTI a été donné. Nous avons également présenté les différents modèles sur lesquels peuvent se mettre ces systèmes et en particulier les incertitudes.

Des notions de stabilité classique et de stabilité robuste sont détaillées et l'accent a été mis sur l'approche de Lyapunov beaucoup utilisée pour ces modèles. Aussi, nous avons rappelé pour ces systèmes, les différentes approches de synthèse de contrôleurs robustes à

savoir les synthèses par retour d'état et par retour de sortie statique et dynamique. Toutefois la modélisation LTI peut ne pas couvrir des cas pratiques importants, ce que permet d'assurer la modélisation LPV que nous présentons dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Systèmes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV)

Le savoir n'est pas difficile, seule sa mise en pratique l'est. Proverbe Chinois

2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, les approches d'analyse de stabilité robuste ainsi que des techniques de synthèse de contrôleurs robustes pour les systèmes LTI sont donnés. Dans ce chapitre, nous présentons les mêmes approches et techniques mais pour systèmes incertains LPV. Cette modélisation LPV recouvre des cas pratiques importants non couverts par les modèles linéaires invariants dans le temps. Nous commençons par donner l'historique d'apparition des systèmes LPV. Nous détaillons deux classes qui sont la classe de LPV à structure polytopique et celle à structure affine. Nous présentons dans une partie ultérieure les différentes approches d'analyse robuste ayant été investiguées. Un intérêt particulier est porté sur l'approche de Lyapunov appliquée à ces systèmes. Pour la suite, la démarche est d'énumérer les approches de synthèse pour ces systèmes. En particulier, nous donnons les résultats les plus importants dans le contexte de contrôle moyennant les Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres par retour d'état statique ou par application des techniques de gain scheduling. Nos contributions pour les systèmes LPV sont présentées dans les chapitres qui suivent.

2.2 Systèmes incertains LPV - Intérêts de la modélisation et Histoire

Dans ce paragraphe, nous parlons de la classe des systèmes incertains Linéaires à Paramètres Variant dans le temps. En terminologie anglo-saxonne, ce sont les "Linear Parameter Varying Systems" (LPV systems). Ce sont les systèmes linéaires qui dépendent de paramètres réels variant en fonction du temps. Ces paramètres ne sont pas connus d'avance mais peuvent être utilisés en temps réel pour des objectifs de contrôle [Bilman, 2005].

En effet, les caractéristiques dynamiques des processus évoluent parfois largement en

fonction des conditions de fonctionnement. Dans ce cas le comportement du système est souvent décrit par un modèle linéaire à paramètres variant (LPV). Cette modélisation recouvre des cas pratiques importants non couverts par les modèles linéaires invariants dans le temps (LTI). Et même si le modèle résultant reste général, il existe toujours un outil générique permettant l'analyse ou la commande de ces systèmes. En effet, les systèmes Linéaires à Paramètres Variant dans le temps, ont reçu beaucoup d'attention pendant les dernières années.

Cette classe est devenue essentielle pour les automaticiens puisqu'elle se positionne entre la classe des systèmes LTI, considérée restrictive et celle des systèmes non linéaires considérée trop générale pour développer des lois de commande. En plus, la classe des systèmes LPV comprend bon nombre de systèmes réels. On peut citer différents domaines comme le domaine automobile [Modjtahedzadeh et Hess, 1993], [Ackermann, 1993] et [Raharijoana *et al.*, 2006], le domaine aéronautique [Apkarian *et al.*, 1993] et [Balas, 2002], le domaine naval [Tanguy et Lebret, 2004] ou encore le génie électrique [Darengosse et Chevrel, 2000] et [Darengosse et Chevrel, 2002].

En général, la seule information dont on dispose à priori sur le paramètre variant $\theta(t)$ c'est son domaine de variation. D'un point de vue historique, les systèmes LPV ont fait leurs apparitions au début des années 90. Les premiers travaux que nous rencontrons dans la littérature sont faits par [Shamma et Athans, 1991], [Shahruz et Behtash, 1992] où des systèmes LPV dotés de correcteurs à gains multiples (gain scheduling) sont traités, l'importance de synthétiser des correcteurs de ce type pour ces systèmes est mise en avant. Également dans [Becker et Packard, 1994], [Apkarian *et al.*, 1995], [Wu *et al.*, 1997], différentes approches d'analyse de stabilité et de synthèse pour systèmes Linéaires à Paramètres Variant dans le temps sont développées. D'après [Feron *et al.*, 1996], pour les systèmes à paramètres réels temps variant, il existe essentiellement deux tests pour la stabilité robuste : le test de stabilité quadratique et le μ -upper bound réel avec D,G scaling constants. Ces deux critères garantissent la robustesse en présence de variation arbitraire et rapide des paramètres. Néanmoins, d'autres techniques ont été développées dans ce contexte pour analyse et synthèse de pareils systèmes. L'utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres fut un outil très sollicité dans ce contexte; les FLDPs contribuent à la réduction du conservatisme engendré par le choix d'une fonction unique de Lyapunov. Les FLDP sont particulièrement utiles puisque les bornes sur les taux de variations du paramètre peuvent être utilisées comme une information dans les conditions LMIs qui testent la stabilité du système. On peut citer après les premiers travaux faits par [Feron *et al.*, 1996] et [Gahinet *et al.*, 1996], dans le cadre des systèmes Linéaires Temps Invariants, l'article de [Oliveira *et al.*, 1999a] en domaine discret et les travaux de [Peaucelle *et al.*, 2000a], [Apkarian et Tuan, 2000], [Zhang *et al.*, 2003] et [Bliman, 2004] en domaine continu. Il ya également dans ce cadre le recours aux Fonctions de Lyapunov par morceaux (piecewise Lyapunov functions) [Xie *et al.*, 1997], [Almeida *et al.*, 2001], [Johansson, 2000] et [Leite et Peres, 2004]. On parle même de Fonctions de Lyapunov Bi-quadratiques dans [Trofino et Souza, 2001].

Ces critères sont le plus souvent formulés en terme de contraintes LMIs simples ou LMIs paramétrées (Voir Annexe A (A.1.2 et A.1.3)). Aussi, l'outil de séparation quadratique est fortement mis à contribution par [Apkarian *et al.*, 2001], [Peaucelle *et al.*, 2000b], [Ebihara et Hagiwara, 2003], [Peaucelle, 2009b], [Briat, 2010]. Un autre moyen non négligeable, c'est l'utilisation des lemmes.

Dans le contexte des systèmes LPV, plusieurs sous classes peuvent être mentionnées. On peut citer les systèmes polytopiques où des résultats ont été donnés par [Peaucelle *et al.*, 2000a], [Apkarian *et al.*, 2001], [Shaked, 2001], [Montagner et Peres, 2003], [Cao et Lin, 2004] ou [Geromel et Colaneri, 2006]. Également pour les systèmes LPV affines, ont été faits des travaux par [Feron *et al.*, 1996], [Gahinet *et al.*, 1996], [Cao et Lin, 2004]. Bien d'autres classes existent comme la classe des systèmes LPV rationnels. Dans ce chapitre nous revenons particulièrement sur les principaux résultats donnés en domaines polytopique et affine. Nos principales contributions dans ce contexte aussi bien en analyse qu'en synthèse, sont présentées dans les chapitres à venir.

2.2.1 Modélisation des systèmes Linéaires à Paramètres temps Variants

La modélisation LPV est en général donnée sous forme d'équation d'état suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t); \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

Où $A(\theta(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice d'état et $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état. L'expression de $A(\theta(t))$ dépend de la structure donnée au modèle. Ceci est détaillé dans les paragraphes qui suivent.

$\theta(t)$ représente le paramètre incertain variant en fonction du temps t . La trajectoire de $\theta(t)$ est toujours supposée non connue à l'avance même si sa valeur est connue en temps réel. La modélisation donnée par (2.1) permet de prendre en compte les variations paramétriques d'un système dynamique (masse, température,...). Le modèle est dit évoluant en fonction d'une trajectoire paramétrique admissible.

Une trajectoire paramétrique admissible est telle que chacun de ses points appartient à chaque instant au domaine P , soit $\theta(t) \in P$ [Courties, 1999].

Les systèmes LPV peuvent être définis comme une généralisation des systèmes à temps invariant (LTI) et à temps variant (LTV). En effet, en choisissant une trajectoire $\theta = \tilde{\theta}(t)$, dans le domaine de fonctionnement P , on obtient un modèle dépendant du temps. Et si l'on gèle le temps dans ce modèle LTV, on obtient un modèle LTI, sachant que le modèle LTI peut être directement généré à partir du modèle LPV en figeant le paramètre $\theta(t) = \theta_0$. La figure donnée par Figure 2.1 [Courties, 1999] illustre ceci.

2.2.1.1 Modélisation des systèmes incertains LPV polytopiques

Il s'agit de modèles linéaires dépendant explicitement d'un paramètre (ou d'un vecteur de paramètres) variant dans le temps.

Les systèmes LPV polytopiques sont définis par la représentation d'état (2.1); où la matrice dynamique $A(\theta(t))$ est donnée par :

$$A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i \quad (2.2)$$

Le paramètre temps variant $\theta(t)$ varie dans un polytope donné par (2.3).

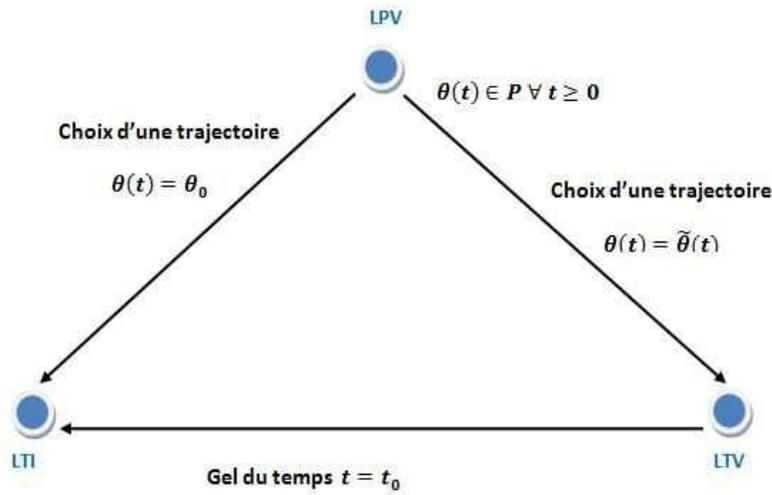


FIGURE 2.1 – Les différents modèles linéaires

$$\Lambda_N := \{\theta(t) \in \mathfrak{R}^N : \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\} \quad (2.3)$$

Et vérifie (2.4).

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)) \in \mathfrak{R}^N \quad (2.4)$$

Le taux de variation du paramètre $\dot{\theta}(t)$ peut être représenté de diverses manières. En effet, la plupart du temps, les chercheurs rencontrent des problèmes pour donner une modélisation adéquate à la dérivée $\dot{\theta}(t)$ du paramètre. Nous mentionnons que, pour les systèmes LPV, la dérivée du paramètre incertain ne s'annule pas comme pour le cas des systèmes LTI, c'est pour cette raison que, dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées afin de modéliser la dérivée temporelle du paramètre incertain. La façon dont elle est modélisée est considérée comme un problème assez crucial. Dans ce qui suit nous rappelons certaines représentations proposées par les chercheurs pour le taux de variation du paramètre incertain.

- Dans [Cao et Lin, 2004], les auteurs ont proposé l'écriture suivante :

$$\dot{\theta}_i \leq v_i \theta_i \quad (2.5)$$

Où le taux de variation est bien défini à tout instant et satisfait à (2.5). v_i est une constante.

Néanmoins, cette écriture présente une faiblesse : dans plusieurs cas pratiques, l'écriture (2.5) ne peut être physiquement justifiée.

- Nous mentionnons dans un second cas, les résultats donnés par Geromel et al [Geromel et Colaneri, 2006] où la dérivée temporelle est définie dans un polytope tel que :

$$\dot{\theta}(t) = \sum_{j=1}^M \mu_j(t) h_j \quad (2.6)$$

Où

$$\mu(t) \in \Lambda_M = \left\{ \mu \in \mathbb{R}^M : \sum_{j=1}^M \mu_j = 1, \mu_j \geq 0 \right\}, \quad h_j \in \mathbb{R}^N \quad (2.7)$$

pour tout $j = 1..M$

Et $\dot{\theta}(t)$ satisfait à :

$$\left\| \dot{\theta}(t) \right\|_{\infty} \leq r \quad (2.8)$$

Contrairement à (2.5), l'expression (2.6) n'impose aucune condition particulière sur la dérivée du paramètre incertain. Toutefois, elle ne donne aucune idée concernant la dimension du polyèdre où évolue le paramètre.

- Un autre résultat aussi important que les deux qui ont précédé a été donné dans [Xie, 2005] où le taux de variation $\dot{\theta}(t)$ est défini à tout instant t et varie dans un polytope Θ_v tel que :

$$\begin{aligned} & \dot{\theta}(t) \in \Theta_v \\ \text{Et } \Theta_v = & \left\{ \sum_{k=1}^N \beta_k(t) v_k : \beta_k(t) \geq 0, \sum_{k=1}^N \beta_k(t) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

La modélisation (2.9) peut être considérée comme un cas particulier de celle donnée dans [Geromel et Colaneri, 2006] où le nombre de sommets est le même aussi bien pour le polytope définissant le paramètre incertain que celui qui contient la dérivée temporelle de ce paramètre.

Nous proposons dans les chapitres qui suivent de nouvelles représentations relatives aux taux de variations des paramètres incertains temps-variant.

2.2.1.2 Modélisation des systèmes incertains LPV affines

Dans ce paragraphe, nous donnons la modélisation d'un système où les incertitudes sont de structure affine.

On garde pour la représentation d'état l'équation différentielle donnée par (2.1).

La matrice du système est dépendante des paramètres $\theta_i(t)$ et est donnée par :

$$A(\theta(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i \quad (2.10)$$

Où A_0 et $A_i (i = 1, ..N)$ sont des matrices connues et fixes.

Le vecteur de paramètres incertains temps-variant $\theta(t)$ est donné, comme pour le cas polytopique par l'expression (2.4).

On suppose que chaque paramètre $\theta_i(t)$ évolue entre des valeurs extrêmes connues $\underline{\theta}_i$ et $\overline{\theta}_i$, tel que :

$$\theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i] \quad (2.11)$$

Et que le taux de variation $\dot{\theta}_i(t)$ est bien connu à tout instant t et satisfait :

$$\dot{\theta}_i \in [\underline{v}_i, \overline{v}_i] \quad (2.12)$$

Où $\underline{v}_i < 0 < \overline{v}_i$ sont les bornes inférieure et supérieure sur $\dot{\theta}_i$

Dans la suite, nous établissons une étude bibliographique portant sur les différentes approches et outils d'analyse et de synthèse, investigués pour les systèmes Linéaires à Paramètres Variant dans le temps.

2.3 Systèmes incertains LPV - Stabilité robuste et Approches d'analyse

Le domaine d'analyse de stabilité robuste des systèmes LPV a connu un essor important durant les vingt dernières années, et ceci grâce au développement des outils numériques. De ces outils on peut citer le LMI Control Toolbox [Gahinet *et al.*, 1995], dans l'environnement MATLAB. En effet les problèmes LMIs peuvent être résolus en temps polynomial (Polynomial Time), ce qui veut dire qu'ils ont une complexité de calcul faible. D'un point de vue pratique, il existe des algorithmes très puissants et efficaces, qui peuvent rapidement calculer l'optimum global, avec des critères non-heuristiques (non-heuristic stopping criteria) [Boyd et Ghaoui, 1993], [Alizadeh *et al.*, 1994], [Nesterov et Nemirovsky, 1994] et [Vandenberghe et Boyd, 1995].

L'expérience numérique a montré que ce type d'algorithmes résoud les problèmes LMIs avec une efficacité extrême [Khotare *et al.*, 1996].

Dans ce cadre, plusieurs conditions ont été proposées dans le but d'évaluer la stabilité robuste de systèmes affectés par paramètres incertains variant dans le temps.

On peut citer dans les travaux de [Trofino et Souza, 2001], [Ramos et Peres, 2002], [Leite et Peres, 2003], [Montagner et Peres, 2004a] ou plus récemment [Koroglu et Scherer, 2006], [Oliveira *et al.*, 2005], [Montagner *et al.*, 2009], mais bien d'autres aussi. L'étude de stabilité robuste pour ces systèmes a été investiguée en se basant sur des approches de type Kharitonov [Bhattacharyya *et al.*, 1995b] ou utilisant la μ -analyse [Zhou *et al.*, 1996], sur les méthodes fréquentielles plus anciennes [Narendra et Tripathi, 1973], mais également sur les approches temporelles mettant en évidence en particulier les fonctions de Lyapunov. L'objectif principal de l'étape d'analyse étant toujours de déterminer des conditions assurant la stabilité asymptotique globale de la solution d'équilibre de l'équation (2.1) pour tout $\theta(t)$ vérifiant (2.3).

Dans ce paragraphe, nous énumérons les outils mathématiques dérivant de l'approche temporelle et ayant été utilisés pour l'analyse de stabilité robuste de systèmes LPV. Nous présentons en premier la seconde méthode de Lyapunov. Nous enchaînons par l'approche classique de stabilité quadratique puis nous détaillons l'utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres dans ce domaine.

2.3.1 Stabilité au sens de Lyapunov pour systèmes LPV

Une méthode fondamentale pour l'analyse de stabilité de ces systèmes est l'utilisation des fonctions de Lyapunov [Peaucelle, 2000], [Leite, 2005].

2.3.1.1 Seconde Méthode de Lyapunov

Il est à rappeler ici qu'une grande partie des recherches réalisées au cours des dernières années sur les systèmes LPV, se base sur la deuxième méthode de Lyapunov. Cette méthode, appelée aussi méthode directe de Lyapunov permet de se prononcer quant à la stabilité d'un état d'équilibre sans avoir recours à la résolution de l'équation d'état [Daafouz, 1997].

Le signe d'une fonction $V(x, \theta(t))$ telle que $(V(0, \theta(t)) = 0$ et $V(\infty, \theta(t)) = \infty)$; appelée fonction de Lyapunov, et celui de sa dérivée $\dot{V}(x, \theta(t)) = \frac{dV(x, \theta(t))}{dt}$ donnent une information sur la stabilité du système.

La définition qui est donnée ici l'est dans le cadre des systèmes incertains LPV.

Soit le système (2.1) linéaire incertain a paramètres variant dans le temps.

Théorème 2.3.1. *Le système (2.1) sujet à des incertitudes $\theta(t)$ est globalement asymptotiquement stable autour de l'origine s'il existe une fonction réelle $V(x, \theta(t))$ telle que :*

$$\begin{aligned} i) & V(0, \theta(t)) = 0 \quad \forall t \geq 0; \\ ii) & V(x, \theta(t)) > 0 \quad \forall x \neq 0; \quad \forall t \geq 0; \\ iii) & V(x, \theta(t)) \rightarrow \infty \quad \text{quand } \|x\| \neq 0; \quad \forall t \geq 0; \\ iv) & \dot{V}(x, \theta(t)) < 0 \quad \forall x \neq 0; \quad \forall t \geq 0; \end{aligned} \quad (2.13)$$

Où \dot{V} est la dérivée temporelle de V le long des trajectoires du système (2.1).

Une fonction vérifiant les conditions i)-iii) est par définition une fonction candidate de Lyapunov. Si elle vérifie également iv), c'est une fonction de Lyapunov pour le système. Un choix particulier de fonction candidate de Lyapunov est la forme quadratique (2.14).

$$V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x \quad (2.14)$$

Où $P(\theta(t))$ est une matrice symétrique définie positive pour toutes les valeurs de $\theta(t)$. Un choix de $P(\theta(t))$ est donné par :

$$P(\theta(t)) = P(\theta(t))^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} \quad (2.15)$$

Ce choix de fonction de Lyapunov conduit aux résultats suivants :

Théorème 2.3.2. *Le système incertain (2.1), dont les incertitudes varient dans le temps est robustement stable s'il existe une matrice $P(\theta(t))$ telle que :*

$$\left[\frac{dP(\theta(t))}{dt} + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) \right] < 0 \quad (2.16)$$

$\frac{dP(\theta(t))}{dt}$ étant la dérivée de la matrice de Lyapunov. Elle peut se mettre dans la littérature sous l'écriture suivante :

$$\frac{dP(\theta(t))}{dt} = \dot{P}(\theta(t)) \quad (2.17)$$

Preuve

La fonction $V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x$ est une fonction quadratique de Lyapunov pour le système (2.1), si elle vérifie :

$$\dot{V}(x, \theta(t)) < 0 \quad \forall x \neq 0; \quad \forall t \neq 0 \quad (2.18)$$

Ceci se traduit par :

$$x^T \left[\frac{dP(\theta(t))}{dt} + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) \right] x < 0; \quad (2.19)$$

$$\forall x \neq 0; \forall t \neq 0$$

L'équation (2.19) s'écrit :

$$\left[\frac{dP(\theta(t))}{dt} + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) \right] < 0 \quad \forall t \neq 0 \quad (2.20)$$

La condition (2.20) est une condition suffisante de stabilité robuste pour le système incertain LPV (2.1). La résolution de cette équation reste un problème NP-difficile puisque la solution numérique requiert un effort de calcul très élevé.

Remarque :

C'est dans le cadre de réduction du conservatisme engendré par le formalisme donné dans l'inégalité (2.16) que l'utilisation fréquente des outils de séparation quadratique (Voir [Iwasaki et Hara, 1998] , [Iwasaki et Shibata, 2001]) ainsi que l'introduction de variables de relaxation (Voir [Montagner *et al.*, 2007a], [Montagner *et al.*, 2007c] et [Peaucelle, 2009b]) ont fait leur apparition dans ce domaine.

Nos présenterons dans les chapitres à venir des conditions de stabilité robuste pour les systèmes incertains LPV. Les problèmes étant formulés en inégalités matricielles linéaires, nous nous référons également à l'utilisation du complément de Schur, des lemmes de Finsler, de projection et bien d'autres, que nous rappelons dans l'Annexe (A.2).

2.3.2 Stabilité quadratique pour systèmes LPV

L'approche quadratique appliquée dans le contexte des systèmes LPV dérive principalement de la méthode directe de Lyapunov. En effet, on considère toujours la fonction de Lyapunov donnée par (2.14). $P(\theta(t))$ est donnée par (2.15), mais :

$$P(\theta(t)) = P > 0 \quad (2.21)$$

Où P est fixe (indépendante des valeurs prises par $\theta(t)$).

Quand un système admet une fonction de Lyapunov donnée par (2.14), (2.15) et (2.21), on dit que le système est quadratiquement stable.

Ce concept de stabilité quadratique [Barmish, 1985], comme pour le cas des systèmes LTI, implique l'existence d'une même fonction de Lyapunov, assurant la stabilité pour tout le domaine d'incertitudes.

Théorème 2.3.3. *Un système incertain à paramètres variant dans le temps est quadratiquement stable si et seulement si il existe une matrice unique $P = P^T > 0$ telle que pour toutes les incertitudes $\theta(t)$, l'inégalité (2.22) est vérifiée :*

$$A^T(\theta(t))P + PA(\theta(t)) < 0 \quad (2.22)$$

Si on prend le cas des systèmes incertains LPV polytopiques, la condition de stabilité quadratique s'écrit :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \text{pour } i = 1..N \quad (2.23)$$

Il est ainsi établi que la stabilité quadratique est une condition suffisante pour la stabilité des systèmes linéaires avec paramètres à variations arbitraires.

Cette solution reste pour les systèmes incertains LPV très attirante d'un point de vue numérique spécialement par sa simplicité. Elle a été beaucoup utilisée pour le contrôle robuste, avec des critères de performance comme la norme H_2 et H_∞ (Voir par exemple [Boyd *et al.*, 1994]) ou les synthèses de filtres robustes [Montagner et Peres, 2003]. Dans la plupart des cas, les problèmes sont exprimés à travers des formulations convexes en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) (Voir Annexe A.1).

Néanmoins, cette approche engendre des problèmes conservatifs dans l'analyse des systèmes LPV, dus au choix restrictif d'une fonction unique de Lyapunov. Afin de diminuer ce conservatisme, plusieurs types de fonctions de Lyapunov ont été proposés. On peut en citer la classe des fonctions de Lyapunov quadratiques par morceaux utilisées dans [Boyd *et al.*, 1994], [Johansson, 1999], [Rantzer et Johansson,] et [Leite et Peres, 2004]; la classe des fonctions bi-quadratiques et non-quadratique utilisées dans [Blanchini, 1995] et [Trofino et Souza, 2001], ou encore la classe des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres ayant eu un essor sans précédent au début des années 2000. Nous les détaillons dans le paragraphe suivant.

2.3.3 Fonctions de Lyapunov Dépendant des paramètres (FLDPs) pour systèmes LPV

L'analyse de stabilité robuste des systèmes LPV incertains, de manière à aller au delà du pessimisme de la stabilité quadratique, consiste en l'utilisations des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres.

Dans le cas où les incertitudes varient dans le temps, ces FLDP sont des fonctions quadratiques dont la matrice $P(\theta(t))$ dépend du paramètre temps-variant $\theta(t)$. Dans l'objectif d'obtenir des conditions non conservatives, les FLDPs sont utilisées pour tester les propriétés de stabilité de systèmes linéaires temps-variants. Nous précisons qu'il faut connaître la dépendance correcte du paramètre, pour la fonction de Lyapunov; correct signifiant une fonction de Lyapunov qui dépend du paramètre telle que pour les valeurs du paramètre, le système est stable et les conditions sont satisfaites. En effet, leur utilisation est récente dans la littérature et depuis l'avènement des premières idées proposées dans [Feron *et al.*, 1996] et [Gahinet *et al.*, 1996] plusieurs ont proposé leurs contributions dans ce domaine. On peut citer d'ordre général [Peaucelle *et al.*, 2000b], [Zhang *et al.*, 2003], [Bliman, 2004], [Oliveira et Peres, 2005] et d'autres. Différents types de Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres peuvent être envisagées. On peut citer les FLDP polytopiques explicitées dans les travaux de [Montagner et Peres, 2003], [Geromel et Colaneri, 2006], [Cao et Lin, 2006] ...

Aussi, des FLDP à structures affines ont permis de développer des conditions importantes de stabilité robuste pour systèmes LPV dans [Apkarian et Tuan, 2000], [Trofino et Souza, 2001], [Gahinet *et al.*, 2002].

Une autre classe de Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres pour l'analyse

robuste des systèmes LPV émergea également au début des années 2000, connues sous le nom de FLDP polynomiales. Ces FLDP sont devenues un outil très puissant d'analyse robuste et sont considérées comme établissant un lien fort étroit avec des techniques d'optimisation. On peut citer les travaux de [Tsuyoshi, 2002], où une condition d'analyse robuste est formulée en terme d'Inégalités Matricielles Linéaires. L'approche est considérée fructueuse du point de vue calcul. Ont suivi les travaux de [Chesi *et al.*, 2004a], [Chesi *et al.*, 2004b] où les FLDP polynomiales sont fortement exploitées. Des conditions de stabilité robuste en présence de bornes polytopiques sur le taux de variation du paramètre sont mises en place, en considérant des FLDP homogènes.

La classe qu'introduisent ces articles où la dépendance du vecteur de paramètres incertains ainsi que le vecteur d'état sont exprimés sous forme homogène polynomiale, peut être considérée comme une généralisation des fonctions de Lyapunov utilisées auparavant pour des variations non bornées du paramètre incertain dans [Chesi *et al.*, 2003] où les taux de variation sont nuls.

Bien d'autres résultats ont été établis dans ce cadre. On donne l'exemple de [Henrion *et al.*, 2004], [Montagner *et al.*, 2006] ou [Ebihara et Hagiwara, 2006].

Dans le théorème suivant, nous rappelons une condition suffisante de stabilité robuste pour les systèmes LPV, donnée en se basant sur des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres.

Théorème 2.3.4. *Le système incertain LPV (2.1) est robustement stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P(\theta(t))$ telle que :*

$$A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.24)$$

Selon la structure de la matrice dynamique du système, la Fonction de Lyapunov Dépendant des Paramètres peut se mettre sous plusieurs formes. Nous nous intéressons dans la suite aux deux classes polytopique et affine.

2.3.3.1 FLDP polytopiques

Pour le cas polytopique, nous considérons le système incertain (2.1) où $A(\theta(t))$ est donnée par (2.2) avec $\theta_i(t)$ vérifiant (2.3).

La fonction de Lyapunov dépendant des paramètres est donnée par (2.25).

$$P(\theta) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t)P_i; \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1; \quad \theta_i \geq 0 \quad (2.25)$$

Et sa dérivée temporelle est donnée par (2.26).

$$\dot{P}(\theta) = \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t)P_i; \quad \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i = 0 \quad (2.26)$$

A partir des écritures (2.25) et (2.26), nous pouvons écrire que :

Le système (2.1)-(2.2)-(2.3) est robustement stable si la condition (2.27) est vérifiée :

$$\sum_{i=1}^N A_i^T \theta_i(t) \sum_{i=1}^N \theta_i(t)P_i + \sum_{i=1}^N \theta_i(t)P_i \sum_{i=1}^N \theta_i(t)A_i + \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t)P_i < 0 \quad (2.27)$$

pour $i = 1..N$

Remarque :

Dans la formulation (2.27), nous pouvons dégager deux difficultés importantes.

- La première c'est que la résolution numérique de (2.27) reste un problème NP-difficile vu l'absence d'outils efficaces. Afin de palier à cela, des outils mathématiques de séparation quadratique sont proposés dans l'objectif de permettre l'introduction de variables auxiliaires. Ces variables permettent le découplage entre les matrices de Lyapunov P_i et les matrices dynamiques A_i . Certaines des solutions à ce problème ont été publiées par [Montagner et Peres, 2003], [Montagner et Peres, 2004b], [Chesi *et al.*, 2004a], [Chesi *et al.*, 2007] et [Montagner *et al.*, 2009]. Nous proposons nos contributions dans ce contexte dans [Aouani *et al.*, 2009c] et [Aouani *et al.*, 2010a].
- La deuxième consiste à trouver une représentation adéquate au taux de variation du paramètre incertain temps variant $\dot{\theta}_i$. Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe (2.2.1.1), des modélisations ont été suggérées dans [Cao et Lin, 2004], [Xie, 2005] ou [Geromel et Colaneri, 2006]. Nous en présentons également dans [Aouani *et al.*, 2009a] et [Aouani *et al.*, 2011].

2.3.3.2 FLDP affines

La première condition d'analyse de stabilité robuste pour systèmes incertains LPV affines a été développée par [Gahinet *et al.*, 1996]. Nous la rappelons ici. Le système considéré est représenté par l'équation différentielle (2.1) avec la matrice d'état donnée par (2.10).

La fonction de Lyapunov est donnée par (2.28).

$$P(\theta) = P_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i; \quad \sum_{i=1}^N \theta_i = 1; \quad \theta_i \geq 0 \quad (2.28)$$

Avant d'introduire la condition de stabilité quadratique affine, les auteurs dans [Gahinet *et al.*, 1996] mettent en place les hypothèses suivantes :

- Chaque paramètre θ_i évolue entre les valeurs extrêmes $\underline{\theta}_i(t)$ et $\bar{\theta}_i(t)$ et vérifie (2.11). Cette hypothèse signifie que $\theta_i(t)$ évolue dans l'ensemble polytopique donné par (2.29).

$$\vartheta = \{(v_1, \dots, v_N) : v_N \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (2.29)$$

Qui est l'ensemble des 2^N sommets du polyèdre.

- Le taux de variation du paramètre $\dot{\theta}_i(t)$ de $\theta_i(t)$ est défini pour tout instant t et vérifie (2.12). De la même façon, (2.12) délimite un polytope de 2^N sommets, donné par

$$W = (\omega_1, \dots, \omega_N) : \omega_i \in \underline{v}_i, \bar{v}_i \quad (2.30)$$

Suite à ces hypothèses, la définition (2.3.1) est donnée :

Définition 2.3.1. Stabilité Quadratique Affine

Le système linéaire (2.1)-(2.10) est quadratiquement affinement stable s'il existe $N + 1$ matrices P_0, \dots, P_N tel que les conditions (2.31) sont vérifiées pour toutes les trajectoires admissibles du vecteur de paramètres $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))$.

$$\begin{aligned} P(\theta(t)) &= P_0 + \theta_1(t)P_1 + \dots + \theta_N(t)P_N > I \\ A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} &< 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Le théorème suivant peut être démontré dans [Gahinet *et al.*, 1996].

Théorème 2.3.5. *Considérons un système linéaire régi par (2.1) où $A(\theta(t))$ dépend affinement du vecteur de paramètres $\theta(t) = (\theta_1(t), \dots, \theta_N(t))$ et $\theta_i(t)$ satisfait (2.11) et (2.12). Soient ∇ et Γ les ensembles des sommets des polytopes respectifs des paramètres et de leurs taux de variations et soit*

$$\theta_{mean} = \left(\frac{\theta_1 + \bar{\theta}_1}{2}, \dots, \frac{\theta_N + \bar{\theta}_N}{2} \right) \quad (2.32)$$

la valeur moyenne du vecteur de paramètres.

Ce système est affinement quadratiquement stable si $A(\theta_{mean})$ est stable et s'il existe $N+1$ matrices symétriques P_0, \dots, P_N tel que (2.28) satisfait :

$$\begin{aligned} A^T(\omega)P(\omega) + P(\omega)A(\omega) + P(\tau) - P_0 &< 0 \quad \text{pour } tout(\omega, \tau) \in (\nabla \times \Gamma) \\ A_i^T P_i + P_i A_i &\quad \text{pour } i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ceci fut le premier test de stabilité quadratique affine réalisé sur les systèmes LPV. D'autres résultats se sont succédés dans le même contexte, comme dans [Ramos et Peres, 2002], [Montagner et Peres, 2004b] et [Oliveira et Peres, 2005].

Dans notre travail, nous proposons également des conditions de stabilité quadratique affine dans [Aouani *et al.*, 2009b] et [Aouani *et al.*, 2010b].

2.3.4 Analyse de performance H_2 pour systèmes incertains LPV

Pour les systèmes incertains LPV, nous mentionnons que, pour bien des cas, les perturbations peuvent affecter le modèle [Dahleh et Bobilo, 1996]. Dans l'objectif d'optimiser les performances du système, le contrôle H_2 robuste est développé, même si son progrès reste moindre que celui du contrôle robuste. Certains chercheurs se sont intéressés à ce sujet. Nous pouvons nous référer à [Doyle, 1989], [Courties, 1999], [Apkarian *et al.*, 2001] ou [Xie, 2005]. Pour la présentation des résultats déjà établis, nous partons sur la modélisation du système LPV donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C_1(\theta(t))x(t) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ est une perturbation exogène et $z(t)(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie commandée.

Les matrices du système $A(\theta(t))$, $B_1(\theta(t))$ et $C_1(\theta(t))$ sont supposées dépendantes du paramètre temps-variant ($\theta(t)$). Selon la structure imposée au système, elles peuvent être de nature polytopique, affine ou autre.

La définition de la norme H_2 peut se faire de deux façons équivalentes. Une dans le domaine fréquentiel et l'autre dans le domaine temporel [Duc, 1994], [Courties, 1999].

Nous explicitons dans la suite ces deux définitions en terme de systèmes incertains LPV.

La première est donnée dans le domaine fréquentiel.

Définition 2.3.2. [Courties, 1999].

La norme H_2 d'un système linéaire déterministe stable, notée $\|\cdot\|_2$ correspond à l'énergie de sa réponse impulsionnelle.

On a donc :

$$\|T(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{R}} \text{trace}(T^*(j\omega)T(j\omega))d\omega \quad (2.35)$$

Où $T(s)$ est la matrice de transfert relative au système donné par (2.34).

La deuxième définition donnée dans le domaine temporel est la suivante :

Définition 2.3.3. La norme H_2 d'un système LPV donné par (2.34) est la valeur attendue de la sortie quand l'entrée est une réalisation d'un processus bruit blanc de variance unité [Green et Limebeer, 1996].

C'est-à-dire que l'entrée est exprimée par :

$$\omega(t) = \begin{cases} \text{un processus bruit blanc de variance unit,} & \text{pour } t \in [0, T] \\ \text{nulle} & \text{, autrement} \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour le système (2.34), pour tout $t \in [0, T]$ on a :

$$\|G\|_{2[0,T]}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{trace}(C_1(\theta(t))Q(\theta(t))C_1^T(\theta(t)))dt \quad (2.37)$$

Où G est le système donné par (2.34) et $Q(\theta(t))$ est le grammien de commandabilité satisfaisant :

$$\begin{aligned} \frac{dQ(\theta(t))}{dt} &= A(\theta(t))Q(\theta(t)) + Q(\theta(t))A^T(\theta(t)) + B_1(\theta(t))B_1^T(\theta(t)), \\ Q(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Remarque

Pour un scalaire γ donné, on définit l'indice de performance par $\|G\|_2 < \gamma$. Il s'ensuit que $\|G\|_2 < \gamma$, pour tout $w(t)$ non nul, $w(t) \in L_2^q[0, \infty)$, s'il existe une matrice de fonction symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ qui satisfait :

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))P(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (2.40)$$

$$\text{Trace } W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (2.41)$$

2.4 Systèmes incertains LPV - Stabilisabilité robuste et approches de synthèse

Assurer la stabilité d'un système en boucle fermée, même en présence d'incertitudes, est devenu un important champs d'étude de la théorie de la commande. D'ailleurs, garantir certaines caractéristiques de performance pour le système bouclé affecté par les incertitudes a des implications immédiates dans les aspects de sécurité, qualité du produit et économie du procédé.

Depuis quelques années, l'apparition de la technique des systèmes Linéaires à Paramètres Variants dans le temps a permis d'étendre considérablement les méthodologies linéaires aux domaines non linéaire et hybride [Poussot-Vassal *et al.*, 2007]. Ainsi, cette technique a contribué à l'extension de celle du contrôle robuste en lui permettant de prendre en compte, sous certaines conditions, les aspects non linéaires et variants du système.

La commande robuste des systèmes LPV consiste à synthétiser un compensateur qui vise à conférer au système des propriétés souhaitées malgré la présence d'incertitudes, ou de maximiser le domaine d'incertitude pour lequel le système conserve des propriétés acceptables [Courties, 1999]. Comme pour les systèmes LTI, un grand nombre d'approches de commande existe pour les systèmes LPV.

En effet, la commande des systèmes LPV est une problématique abordée depuis une vingtaine d'années; et plusieurs approches assurant la synthèse de régulateurs pour ces systèmes sont adoptées. Nous pouvons rencontrer deux grands types de démarches :

- Une première démarche dite "classique" fréquemment utilisée dans l'industrie; et qui peut être selon [Bouali, 2008] décomposée en trois étapes fondamentales :
 - Linéarisation du système non-linéaire autour d'un ensemble représentatif de points de fonctionnement.
 - Synthèse d'un correcteur LTI "classique" pour chaque modèle LTI associé à un point de fonctionnement.
 - Interpolation des correcteurs LTI permettant la construction d'une loi de commande globale.

Les résultats présentés dans ce contexte ne semblent pas garantir la stabilité et/ou la performance de la boucle fermée, même s'il existe certaines conditions dans les travaux présentés par [Rugh et Shamma, 2000] et [Stilwell et Rugh, 2000] remédiant à ce problème. Cependant, il est important de noter que ces résultats sont basés sur certaines hypothèses qui conduisent à un échantillonnage très fin de l'espace paramétrique afin de garantir la "condition de recouvrement" (Voir sur la figure 2.2 la notion de "condition de recouvrement"). L'idée sous jacente consiste à chercher des régulateurs suffisamment robustes pour que les "plages de stabilisation" puissent se chevaucher [Bouali, 2008].

Les questions qui se posent avec cette première démarche sont [Bouali, 2008] : comment choisir le maillage et comment déduire le régulateur LPV? Comment assurer qu'il stabilise le système de manière robuste?

- Une deuxième approche, qui repose sur les résultats donnés en analyse dans le paragraphe (2.3) (à savoir la deuxième méthode de Lyapunov) permet quant à elle la synthèse de lois de commande garantissant a priori la stabilité ainsi que la performance de la boucle fermée : la commande LPV.

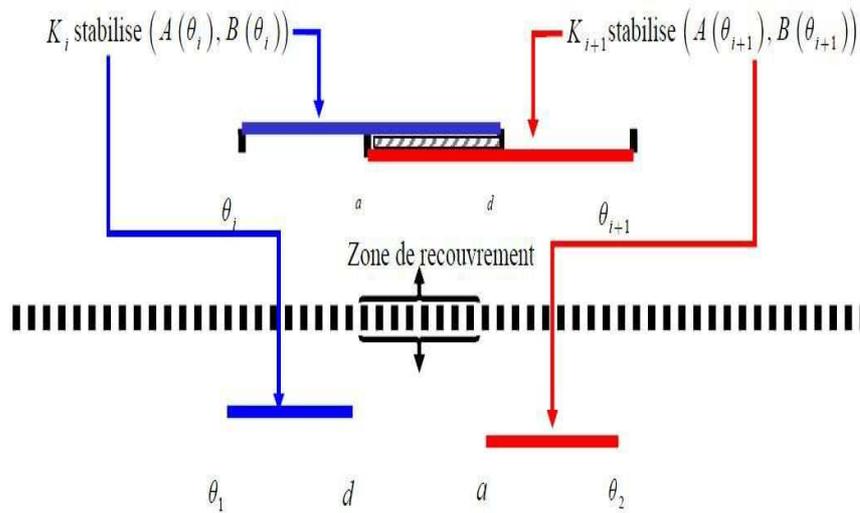


FIGURE 2.2 – Conditions de recouvrement
[Bouali, 2008]

D'après [Courties, 1999], les avantages de la commande LPV sont liés à la structure du compensateur qui est adaptée à celle du système, soient :

- Davantage de degrés de libertés pour satisfaire les contraintes de performances et de stabilité, d'où réduction du conservatisme de la commande robuste.
- Dans le cas où le système physique doit être représenté sur un domaine de fonctionnement très étendu, nécessitant une modélisation à l'aide de plusieurs modèles linéaires, il faut avoir recours à une adaptation du compensateur en fonction de la plage dans laquelle se trouve le système à l'instant t .
- Le fait de suivre l'évolution du système en temps réel et d'adapter le compensateur garantit un meilleur comportement du système en boucle fermée vis à vis de perturbations extérieures par exemple.

Sur ce thème, plusieurs travaux ont été publiés, on en cite [Leith et Leithead, 2000], [Bilman, 2005], [Wu et Prajna, 2005] ou [Oliveira *et al.*, 2007].

Nous détaillons dans les paragraphes à venir ; les commandes suivantes pour systèmes LPV : la commande par retour d'état statique, la commande par retour d'état à gains multiples (approche du "gain scheduling"), la commande H_2 par retour d'état statique et la commande H_2 par retour d'état à gains multiples (approche du "gain scheduling").

2.4.1 Synthèse de correcteurs par retour d'état statique pour systèmes LPV

Ce paragraphe est consacré à l'étude de stabilisation par retour d'état statique de systèmes linéaires dépendant d'un ensemble fini de paramètres réels bornés. Ces paramètres sont connus a priori mais connus en temps réel pour le contrôle.

Par conséquent, il est possible que le gain soit dépendant des paramètres (ce qui a comme nom en terminologie anglo-saxonne le "gain-scheduling"). Le contrôle par gain scheduling

est développé dans le paragraphe suivant.

En ce qui concerne le contrôle par retour d'état statique appliqué aux systèmes LPV, des résultats ont été exposés dans [Khotare *et al.*, 1996], [Courties, 1999] ou [Cao et Lin, 2004]. La plupart des problèmes de synthèse par retour d'état statique sont formulées en terme d'inégalités matricielles linéaires.

Un des résultats les plus importants dans ce contexte est donné dans le théorème (2.4.1).

Nous considérons le système incertain donné par (2.42).

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) + B_2(\theta(t))u(t) \\ z(t) &= C_1(\theta(t))x(t) + D_{12}(\theta(t))u(t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^q$ sont respectivement les vecteurs d'état, de commande, de perturbation et $z(t) \in \mathfrak{R}^p$ est la sortie commandée. Les matrices du système $A(\theta(t))$, $B_2(\theta(t))$, $B_1(\theta(t))$, $C_1(\theta(t))$, $D_{12}(\theta(t))$ sont des matrices de dimensions appropriées dépendant du paramètre temps variant $\theta(t)$ donné par (2.4). Leur modélisation dépend de la structure donnée au système.

Dans le cas de retour d'état statique, la loi de commande est donnée par : $u(t) = Kx(t)$ où $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ est la matrice de dimensions appropriées qu'il faut déterminer.

Le modèle du système en boucle fermée s'écrit comme suit.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K)x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= (C_1(\theta(t)) + D_{12}(\theta(t))K)x(t) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Problème : Lors de la commande d'un système LPV par un contrôleur à retour d'état statique, il s'agit de trouver une loi de commande $u(t) = Kx(t)$, pour le système (2.42) en déterminant K tel que $A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K$ soit asymptotiquement stable.

On a le résultat suivant :

Théorème 2.4.1. *Le système linéaire incertain (2.42) est robustement stabilisable par retour d'état $u(t) = Kx(t)$ s'il existe une matrice de fonction symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice de fonction $R(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que :*

$$A(\theta(t))P + PA^T(\theta(t)) + B_2(\theta(t))R + R^T B_2^T(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.44)$$

Dans ce théorème, le gain de retour d'état est donné par : $K = R(\theta(t))P^{-1}(\theta(t))$.

Preuve :

D'après le théorème de Lyapunov, le système (2.42) en boucle fermée est stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ telle que :

$$A_{BF}(\theta(t))P + PA_{BF}^T(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.45)$$

$A_{BF}(\theta(t))$ est la matrice du système en boucle fermée, en la remplaçant dans (2.45) par $A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K$, on a :

$$(A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K)P + P(A^T(\theta(t)) + K^T B_2^T(\theta(t))) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.46)$$

Ceci s'écrit :

$$A(\theta(t))P + B_2(\theta(t))KP + PA^T(\theta(t)) + PK^T B_2^T(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.47)$$

En remplaçant KP par R et PK^T par R^T dans (2.47), nous avons l'inégalité (2.48)

$$A(\theta(t))P + PA^T(\theta(t)) + B_2(\theta(t))R + R^T B_2^T(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (2.48)$$

Qui est la même que celle donnée par le théorème (2.4.1).

Et selon la structure donnée au système, la structure de $P(\theta(t))$ est fixée.

Souvent, les problèmes suivants sont dégagées dans l'écriture (2.44) :

- Le problème présenté par (2.44) est un problème difficile à résoudre mathématiquement et les outils numériques pour le résoudre ne sont pas disponibles. C'est dans ce sens que la plupart du temps il y a recours aux LMIs (Voir annexe A.1), aux outils de séparation quadratique comme l'introduction des variables de relaxation par le lemme de projection ou de Finsler (Voir annexe A.2) ou bien d'autres solutions. Nous exposons nos résultats dans ce domaine dans [Aouani *et al.*, 2009c]
- Comment exprimer convenablement la dérivée de la matrice de Lyapunov $\frac{dP(\theta(t))}{dt}$ qui dépend du taux de variation du paramètre incertain $\dot{\theta}(t)$. Dans certains cas, on peut l'exprimer $\frac{dP(\theta(t))}{dt} = \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) P_i$.

En plus se pose toujours le problème de trouver une représentation adéquate pour $\dot{\theta}(t)$.

2.4.2 Synthèse de correcteurs par retour d'état à gain scheduling pour systèmes LPV

Nous venons de voir la commande des systèmes LPV à l'aide de retour d'état à gain statique. Nous l'explorons dans ce paragraphe sous un autre angle, celui du retour d'état à gain scheduling. La technique a comme objectif de traiter des systèmes soumis à des variations paramétriques, donc des systèmes Linéaires à Paramètres Variant (LPV) dans le temps [Montagner et Peres, 2004b]. Tout compte fait, l'approche du gain scheduling consiste à synthétiser des contrôles linéaires pour plusieurs points de fonctionnement, et d'appliquer par la suite, une stratégie d'interpolation afin d'obtenir un contrôle global. Ainsi, plusieurs outils puissants aussi bien pour les systèmes linéaires que pour les systèmes non linéaires ont pu être développés. Et malgré les multiples applications, il n'y a pas eu une structure régulière jusqu'au début des années 90 [Shamma et Athans, 1991]. La structure proposée a comme but de donner des règles heuristiques dont l'objectif est d'assurer la stabilité globale du système mais pas la garantie d'une procédure de conception systématique. En effet, L'approche du gain scheduling a été pendant longtemps un outil pratique très connu, mais sans réelle justification théorique; c'est autour des années 1991, que Shamma et al [Shamma et Athans, 1991] ont introduit les systèmes LPV. C'est dans ce contexte que le problème de synthèse a pu être formulé comme problème convexe d'optimisation avec des contraintes LMIs.

Le contrôleur a été considéré comme une entité simple sans les inconvénients des interpolations classiques. C'est à partir de l'année 1991 qu'un renouveau de cette approche a eu lieu, avec les papiers de Doyle [Doyle et A. Packard and, 1991], Packard [Packard *et al.*,], [Lu *et al.*, 1991], Becker [Becker *et al.*, 1993]... Autres résultats sont publiés dans [Becker et Packard, 1994], [Packard, 1994], [Apkarian et Gahinet, 1995], [Apkarian *et al.*, 1995] et [Apkarian et Gahinet, 1998], [Stilwell et Rugh, 1998], [Li *et al.*, 1999], [Shamma et Xiong, 1999].

Récemment, nombreux progrès importants, ont pu être réalisés dans le domaine de quelques classes de systèmes LPV. On en cite les systèmes polytopique, affine, ou ayant une structure LFT (Linear Fractional Transformation).

On cherche dans ce sens, des conditions pour l'existence d'un contrôleur à paramètres variant en fonction du temps, garantissant la stabilité et la performance H2 du système en boucle fermée. Les contraintes étant formulées en termes d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs).

Pour le cas du contrôle par retour d'état à gains multiples, nous considérons le système donné par (2.42), avec les matrices $B_2(\theta(t))$ et $D_{12}(\theta(t))$ ne dépendant plus du paramètre et donc B_2 et D_{12} constantes.

Lors d'une commande par retour d'état à gain scheduling, la loi de commande est donnée par :

$$u(t) = K(\theta(t))x(t) \quad (2.49)$$

Où $K(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ est la matrice de fonctions de dimensions appropriées qu'il faut déterminer.

Remarque :

Selon la structure du régulateur, l'expression de $K(\theta(t))$ est donnée. Si nous prenons le cas polytopique par exemple, $K(\theta(t))$ est donnée par l'équation (2.50) :

$$K(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) K_i \quad (2.50)$$

Le modèle du système (2.42) en boucle fermée s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ((A(\theta(t)) + B_2 K(\theta(t)))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= (C_1(\theta(t)) + D_{12} K(\theta(t)))x(t) \end{aligned} \quad (2.51)$$

Problème : Lors de la commande d'un système LPV par un contrôleur à retour d'état à gain scheduling, il s'agit de trouver une loi de commande $u(t) = K(\theta(t))x(t)$ pour le système (2.42) en déterminant les K_i tel que $A(\theta(t)) + B_2 K(\theta(t))$ soit asymptotiquement stable

On a le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *Le système linéaire incertain (2.42) est robustement stabilisable par retour d'état $u(t) = K(\theta(t))x(t)$ s'il existe une matrice symétrique définie positive $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice de fonctions $R(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ telles que l'inégalité (2.52) est vérifiée.*

$$A(\theta(t))P + PA^T(\theta(t)) + B_2 R(\theta(t)) + R^T(\theta(t))B_2^T < 0 \quad (2.52)$$

$K(\theta(t)) = R(\theta(t))P^{-1}$ représente le gain de retour d'état.

Preuve :

D'après le théorème de Lyapunov, le système LPV (2.42), bouclé par retour d'état LPV $u(t) = K(\theta(t))x(t)$ est stable s'il existe une matrice symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tel que $\theta(t) \in \Lambda_N$ avec Λ_N donné par (2.3).

La matrice du système en boucle fermée $A_{BF}(\theta(t))$ est donnée par :

$$A_{BF}(\theta(t)) = A(\theta(t)) + B_2K(\theta(t)) \quad (2.53)$$

On a alors l'équation de Lyapunov suivante :

$$A_{BF}(\theta(t))P + PA_{BF}^T(\theta(t)) < 0 \quad (2.54)$$

Qui peut s'écrire :

$$(A(\theta(t)) + B_2K(\theta(t)))P + P(A^T(\theta(t)) + K^T(\theta(t))B_2^T) < 0 \quad (2.55)$$

Ceci donne :

$$A(\theta(t))P + PA^T(\theta(t)) + B_2K(\theta(t))P + PK^T(\theta(t))B_2^T < 0 \quad (2.56)$$

En remplaçant $K(\theta(t))P$ par $R(\theta(t))$; on obtient :

$$A(\theta(t))P + PA^T(\theta(t)) + B_2R(\theta(t)) + R^T(\theta(t))B_2^T < 0 \quad (2.57)$$

Ce qui n'est autre que l'équation donnée dans le théorème (2.4.2). Des travaux les plus récents dans ce domaine on peut se référer à [Montagner et Peres, 2004b], [Wu et Prajna, 2005], [Poussot-Vassal *et al.*, 2007] ou [Montagner *et al.*, 2009] où le problème de contrôle des systèmes LPV à variations paramétriques bornées est traité et des retours d'état stabilisants à gains dépendants des paramètres sont donnés.

2.4.3 Commande H_2 par retour d'état pour systèmes LPV

Dans le paragraphe 2.3.4, le calcul du coût H_2 pour systèmes LPV a été étudié. L'actuel paragraphe est consacré à l'extension de l'analyse de performance H_2 à la synthèse. C'est ainsi que abordons alors le problème de garantie des performances des systèmes en boucle fermée. Dans ce domaine, nous notons les travaux faits par [Souza *et al.*, 2003], [Xie, 2005], par [Bouali *et al.*, 2008] où les conditions proposées sont données pour des systèmes LPV de type rationnel. Nous rappelons également les travaux de [Montagner *et al.*, 2007b] et [Prempain et Postlethwaite, 2008] dans ce sens.

Nous proposons dans les paragraphes suivants deux formulations de problèmes de commande H_2 de systèmes LPV, l'une par retour d'état statique et l'autre par retour d'état à gain scheduling.

2.4.3.1 Synthèse de performance H_2 par retour d'état statique pour systèmes LPV

Nous considérons le système donné par (2.42)

Problème : Lors de la commande H_2 d'un système LPV par un contrôleur à retour d'état statique, il s'agit de trouver une loi de commande $u(t) = Kx(t)$, pour le système

(2.42) en déterminant K tel que $A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K$. Ce contrôle doit garantir $\|G\|_2^2 < \gamma$ avec γ un scalaire tel que $\gamma > 0$.

Le système en boucle fermée s'écrit comme dans (2.43).

Dans ce contexte, le théorème suivant est donné pour le système LPV (2.52)

Théorème 2.4.3. *Etant donné le système (2.42), sa norme H_2 est inférieure à une valeur donnée de γ s'il existe une matrice de fonctions symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et une matrice $R(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ tel que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) + B_2(\theta(t))R(\theta(t)) + R^T(\theta(t))B_2^T(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.58)$$

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) + R^T(\theta(t))D_{12}^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))P(\theta(t)) + D_{12}(\theta(t))R(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (2.59)$$

$$\text{Trace } W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (2.60)$$

Le gain est donné par $K = R^{-1}(\theta(t))P^{-1}(\theta(t))$

Preuve :

Soient les conditions données par (2.39) - (2.40) - (2.41) pour analyse H_2 du système (2.34). Dans ces contraintes LMIs; $A(\theta(t))$ est remplacée par la matrice en boucle fermée $A_{BF}(\theta(t)) = A(\theta(t)) + B_2(\theta(t))K$ et la matrice $C_1(\theta(t))$ par $C_{1BF}(\theta(t)) = C_1(\theta(t)) + D_{12}(\theta(t))K$. Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) + B_2(\theta(t))KP(\theta(t)) + P(\theta(t))K^TB_2^T(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.61)$$

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) + P(\theta(t))K^TD_{12}^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))P(\theta(t)) + D_{12}(\theta(t))KP(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (2.62)$$

$$\text{Trace } W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (2.63)$$

En remplaçant dans (2.61) et (2.62) $KP(\theta(t))$ par $R(\theta(t))$ et $P(\theta(t))K^T$ par $R^T(\theta(t))$, nous obtenons les inégalités données dans le théorème (2.4.3).

Remarque :

Pour le cas des systèmes LPV, le problème formulé dans le théorème (2.4.3) est non exploitable numériquement. C'est dans ce sens que différentes approches ont été proposées pour rendre le problème convexe. Certains proposent l'utilisation d'une seule fonction de Lyapunov. Ce qui rend le problème très conservatif. Des solutions à ce problème ont été proposées dans [Courties, 1999], [Tan *et al.*, 2003] où la solution du problème est donnée en terme de LMI. D'autres résultats dans ce sens sont également donnés par [Souza *et al.*, 2003], [Xie, 2005], [Montagner *et al.*, 2007b] ou [Montagner *et al.*, 2007c].

2.4.3.2 Synthèse de performance H_2 par retour d'état à gain scheduling pour systèmes LPV

Nous considérons toujours le système (2.42). Les matrices de commande $B_2(\theta(t))$ et $D_{12}(\theta(t))$ sont prises constantes B_2 et D_{12} .

Problème : Lors de la commande H_2 d'un système LPV par un contrôleur à retour d'état à gain scheduling, il s'agit de trouver une loi de commande $u(t) = K(\theta(t))x(t)$, pour le système (2.42) en déterminant $K(\theta(t))$ tel que $A(\theta(t)) + B_2K(\theta(t))$. Ce contrôle doit garantir $\|G\|_2^2 < \gamma$ avec γ un scalaire tel que $\gamma > 0$.

Le système en boucle fermée est donné par (2.51).

Nous introduisons le théorème suivant.

Théorème 2.4.4. *Étant donné le système (2.42), sa norme H_2 est inférieure à une valeur donnée de γ s'il existe une matrice de fonction symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ et une matrice de fonction $R(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ telles que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) + B_2R(\theta(t)) + R^T(\theta(t))B_2^T & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (2.64)$$

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) + R^T(\theta(t))D_{12}^T \\ C_1(\theta(t))P + D_{12}R(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (2.65)$$

$$\text{Trace } W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (2.66)$$

Le gain est donné par $K(\theta(t)) = R^{-1}(\theta(t))P(\theta(t))^{-1}$

Remarque : La résolution de ces inégalités est un problème difficile. Certaines solutions ont été proposées dans [Xie, 2005] et [de Souza et Trofino, 2006]. Nous donnons également certains résultats dans le chapitre 4 de ce manuscrit.

2.5 Conclusion du chapitre

Nous avons pu présenté dans ce chapitre les systèmes incertains Linéaires à Paramètres Variant dans le temps, ainsi que les différentes approches étudiées pour leur analyse en stabilité robuste ainsi que la synthèse de contrôleurs robustes.

Différentes méthodes sont détaillées et nos contributions dans ce contexte sont détaillées dans les chapitres qui suivent.

Chapitre 3

Systemes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV) - Analyse de stabilité robuste

La meilleure façon d'imposer une idée aux autres, c'est de leur faire croire qu'elle vient d'eux. Alphonse Daudet

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons nos principales contributions dans le domaine d'analyse de stabilité robuste pour les systèmes LPV. Nous traitons des systèmes aussi bien polytopiques qu'affines.

Nous présentons dans un premier paragraphe des conditions de stabilité robuste pour systèmes LPV polytopiques formulés en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI) paramétrées. Dans le deuxième paragraphe, une condition de stabilité robuste pour ces mêmes systèmes est donnée et l'on met en place l'étude des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres (FLDP) à une nouvelle structure. Nous investiguons dans le troisième paragraphe la structure affine des incertitudes et nous établissons une condition de stabilité robuste pour les systèmes LPV affines. Nous considérons dans le troisième paragraphe la structure affine des incertitudes et nous établissons une condition de stabilité robuste pour systèmes LPV affines. Dans le dernier paragraphe, nous mettons en place des conditions d'analyse H_2 pour la stabilité robuste de systèmes LPV. Les conditions sont données en terme de LMIs généralisées.

3.2 Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV polytopiques - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des paramètres à structure polytopique

Dans ce paragraphe, nous présentons différentes conditions de stabilité robuste pour les systèmes LPV polytopiques. Ces conditions diffèrent principalement par la façon dont est représentée la dérivée temporelle du paramètre incertain. Ces approches nous permettent un découplage entre les matrices dynamiques du système et celle de Lyapunov. Ceci est fait en se basant sur certains lemmes que nous présentons à fur et à mesure dans ce chapitre et sur d'autres donnés dans l'annexe A.2. Les problèmes sont formulés en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI). Pour l'application de la théorie de Lyapunov, nous nous basons sur des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres à structure polytopique.

3.2.1 Formulation du problème

Soit le système continu linéaire, incertain, de la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) \quad (3.1)$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état.

La matrice d'état $A(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ est donnée par la structure polytopique (3.2)

$$A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i, \quad \theta_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.2)$$

Le vecteur des paramètres incertains temps variant $\theta(t)$ est donné par (3.3).

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)) \in \mathfrak{R}^N \quad (3.3)$$

Et évolue dans l'ensemble convexe donné par Λ_N .

$$\Lambda_N := \{\theta(t) \in \mathfrak{R}^N : \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\} \quad (3.4)$$

Pour le système présenté ci dessous, nous avançons trois conditions de stabilité robuste où nous considérons des modélisations différentes de la dérivée du paramètre incertain et où nous tenons compte de différentes démarches de relaxation et techniques de séparation quadratiques. Nous les explicitons ci après une par une.

3.2.2 Première condition de stabilité robuste

Nous considérons les hypothèses suivantes :

- Tous les paramètres incertains $\theta_i(t)$ sont réels et varient dans un intervalle tel que :

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad (3.5)$$

- Le taux de variation du paramètre incertain $\dot{\theta}_i(t)$ est défini pour tout t et satisfait à la condition :

$$\dot{\theta}_i(t) \leq v_i \theta_i \quad (3.6)$$

Où v_i est une constante positive.

Nous précisons que cette modélisation de la dérivée temporelle du paramètre est également considérée dans [Cao et Lin, 2004].

Soit la fonction de Lyapunov donnée par :

$$V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x \quad (3.7)$$

Où $P(\theta(t))$ est une matrice symétrique et définie positive ayant la structure polytopique (3.8)

$$P(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i, \quad \theta_i(t) \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.8)$$

Les matrices P_i sont symétriques, positives et constantes. Le présent choix de la structure polytopique de la fonction de Lyapunov dépendant des paramètres et donnée par (3.8) a été fait en accord avec la structure de la matrice dynamique du système.

Soit $\frac{dP(\theta(t))}{dt}$ la dérivée de la matrice de Lyapunov $P(\theta(t))$. La notation $\frac{dP(\theta(t))}{dt} = \dot{P}(\theta(t))$ est utilisée. Elle est définie par :

$$\dot{P}(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) P_i, \quad \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) = 0 \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, nous donnons pour les systèmes LPV de type (3.1)-(3.2) avec le paramètre temps variant évoluant dans (3.4) et la dérivée du paramètre donnée par (3.6), une condition de stabilité robuste.

3.2.2.1 condition de stabilité robuste :

Dans le théorème (3.2.1), nous donnons une condition suffisante de stabilité robuste pour le système LPV décrit par (3.1)-(3.2).

Théorème 3.2.1. [Aouani et al., 2009c]

Le système LPV continu (3.1)-(3.2) est robustement stable dans le domaine donné par (3.4) et telle que la dérivée temporelle du paramètre incertain satisfait à (3.6), s'il existe N matrices constantes, symétriques et définies positives P_1, \dots, P_N , et une matrice F de dimensions appropriées tel que pour un réel α vérifiant $\alpha > \frac{v_i}{2}$, la LMI suivante existe :

$$\begin{pmatrix} v_i P_i - 2\alpha P_i & P_i + A_i^T F + \alpha F \\ P_i + F^T A_i + \alpha F^T & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.10)$$

Pour tout $i = 1..N$

Preuve : Soit la condition donnée par (3.10).

Comme $\theta_i(t) \geq 0$, si nous multiplions (3.10) par $\theta_i(t)$ et que nous appliquons la somme pour $i = 1, \dots, N$, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^N (\theta_i(t)) \begin{pmatrix} v_i P_i - 2\alpha P_i & P_i + (A_i^T F + \alpha I) F \\ P_i + F^T (A_i + \alpha I) & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.11)$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N v_i \theta_i(t) P_i - 2\alpha \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i & \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i + (\sum_{i=1}^N A_i^T \theta_i(t) + \alpha I) F \\ \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i + F^T (\sum_{i=1}^N A_i \theta_i(t) + \alpha I) & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.12)$$

Comme on a l'écriture (3.6), alors :

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i(t) P_i - 2\alpha \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i & \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i + (\sum_{i=1}^N A_i^T \theta_i(t) + \alpha I) F \\ \sum_{i=1}^N \theta_i(t) P_i + F^T (\sum_{i=1}^N A_i \theta_i(t) + \alpha I) & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.13)$$

En remplaçant dans (3.13), $\theta_i(t) A_i$ par $A(\theta(t))$, $\theta_i(t) P_i$ par $P(\theta(t))$ et $\dot{\theta}_i(t) P_i$ par la dérivée de la matrice de Lyapunov ; on va obtenir :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(\theta(t)) - 2\alpha P(\theta(t)) & P(\theta(t)) + (A^T(\theta(t)) + \alpha I) F \\ P(\theta(t)) + F^T (A(\theta(t)) + \alpha I) & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.14)$$

Pour la condition (3.14), si on applique le lemme donné dans le paragraphe (A.2.4) en Annexe A.2, on va obtenir :

$$\dot{P}(\theta(t)) - 2\alpha P(\theta(t)) + [A^T(\theta(t)) + \alpha I] P(\theta(t)) + P(\theta(t)) [A(\theta(t)) + \alpha I] < 0 \quad (3.15)$$

Ce qui équivaut à :

$$\dot{P}(\theta(t)) - 2\alpha P(\theta(t)) + [A^T(\theta(t)) + \alpha I] P(\theta(t)) + P(\theta(t)) [A(\theta(t)) + \alpha I] < 0 \quad (3.16)$$

Ce qui correspond à la dérivée de la matrice de Lyapunov donnée par (3.7). En effet cette dérivée s'exprime par la condition (3.17).

$$x^T [A^T(\theta(t)) P(\theta(t)) + P(\theta(t)) A(\theta(t)) + \dot{P}(\theta(t))] x < 0; \forall x \neq 0; \forall t \geq 0 \quad (3.17)$$

Remarques :

- Soit la condition de stabilité (3.10), si dans cette condition on prend $\alpha = 1$, on obtient exactement la condition (13) du théorème 1 dans [Cao et Lin, 2004]. Nous pouvons ainsi conclure que la condition de CAO et al est un cas particulier de la condition que nous avançons (condition (3.10)).

En effet, dans la condition (13) dans [Cao et Lin, 2004], si nous posons $P_2 = P_3 = F$ et en appliquant une congruence par $\begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$, nous obtenons exactement la condition (3.10) du théorème (3.2.1) avec $\alpha = 1$.

- La condition de stabilité (3.10) donnée dans ce paragraphe contient le concept de stabilité quadratique.

Pour le même système (3.1)-(3.4) donné, nous présentons dans le paragraphe suivant une condition de stabilité robuste nouvelle et où la dérivée temporelle du paramètre incertain est exprimée différemment que dans (3.6).

3.2.3 Deuxième condition de stabilité robuste

Soit le système donné par (3.1)-(3.4). Étant donné le paramètre incertain $\theta(t)$, sa dérivée temporelle $\dot{\theta}(t)$ est telle que les $\theta_i(t)$ vérifient :

$$\|\dot{\theta}_i(t)\| \leq b; b \geq 0 \quad (3.18)$$

Et :

$$\dot{\theta}(t) = \{\dot{\theta}_1(t), \dots, \dot{\theta}_N(t)\} \in \mathfrak{R}^N \quad (3.19)$$

Nous notons que, dans l'article [Oliveira et Peres, 2008], les auteurs introduisent une condition de stabilité robuste, pour un système discret LPV polytopique, où la variation du paramètre est bornée. Pour cette variation, [Oliveira et Peres, 2008] propose une nouvelle écriture donnée dans le plan $(\alpha_i, \Delta\alpha_i)$ où α_i et $\Delta\alpha_i$ sont respectivement le paramètre incertain et sa dérivée. Nous pouvons alors introduire le lemme suivant, dans le contexte des systèmes LPV continus.

Lemme 3.2.1. [Aouani et al., 2009a]

Si le paramètre incertain $\theta_i(t)$ appartient à l'ensemble défini par (3.4) et satisfait (3.18), alors sa dérivée temporelle peut être exprimée comme suit :

$$\dot{\theta}_i = b(\sigma_j - \beta_k) \quad (3.20)$$

Où σ_j et β_k appartiennent respectivement aux polytopes suivants :

$$\sigma(t) \in \Lambda_M; \Lambda_M := \{\sigma \in \mathfrak{R}^M : \sum_{j=1}^M \sigma_j = 1, \sigma_j \geq 0\} \quad (3.21)$$

$$\beta(t) \in \Lambda_K; \Lambda_K := \{\beta \in \mathfrak{R}^K : \sum_{k=1}^K \beta_k = 1, \beta_k \geq 0\} \quad (3.22)$$

Preuve :

Partant de (3.18); $\dot{\theta}_i$ vérifie l'inégalité :

$$-b \leq \dot{\theta}_i \leq b \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \dot{\theta}_i = 0 \quad (3.23)$$

Ainsi, il existe toujours α_i vérifiant :

$$\dot{\theta}_i = b\alpha_i \quad \text{tel que} \quad -1 \leq \alpha_i \leq 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 0 \quad (3.24)$$

α_i peut aussi se mettre sous la forme :

$$\alpha_i = \sigma_j - \beta_k \quad (3.25)$$

Où σ_j et β_k vérifient :

$$0 \leq \sigma_j \leq 1 \quad , \quad 0 \leq \beta_k \leq 1 \quad (3.26)$$

Ceci nous ramène à (3.20).

Pour le système (3.1)-(3.4), et en se basant sur la nouvelle représentation de la dérivée du paramètre (3.20), une condition de stabilité robuste peut être déduite.

Théorème 3.2.2. [Aouani et al., 2009a]

Le système incertain (3.1)-(3.2) est robustement stable dans le domaine incertain (3.4) avec la dérivée du paramètre satisfaisant à (3.20), s'il existe N matrices symétriques définies positives P_i et des matrices F_j, G_j telles que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + F_j A_i + A_i^T F_j^T & P_i + A_i^T G_j^T - F_j \\ P_i + G_j A_i - F_j^T & -G_j - G_j^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.27)$$

pour $i, j, k = 1, \dots, N$

Preuve Soit la condition suffisante donnée par (3.27), pour la stabilité du système LPV (3.1)-(3.2). Si nous prenons $\theta(t) \in \Lambda_N$, et que nous multiplions la LMI (3.27) par un scalaire non négatif $\theta_i(t)$, en faisant la somme pour $i = 1, \dots, N$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + F_j A(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) F_j^T & P(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) G_j^T - F_j \\ P(\theta(t)) + G_j A(\theta(t)) - F_j^T & -G_j - G_j^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.28)$$

pour $i, j, k = 1, \dots, N$

Nous multiplions (3.28) simultanément par les scalaires non négatifs $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$ tel que les conditions (3.26) soient vérifiées. On somme les résultats pour $j = 1..N$ et $k = 1..N$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + F(\sigma(t)) A(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) F^T(\sigma(t)) & P(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) G^T(\sigma(t)) - F(\sigma(t)) \\ P(\theta(t)) + G(\sigma(t)) A(\theta(t)) - F^T(\sigma(t)) & -G(\sigma(t)) - G^T(\sigma(t)) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

Soit la dérivée $P(\dot{\theta}(t))$ de la matrice de Lyapunov $P(\theta)$ donnée par (3.9), et $\dot{\theta}_i$ par (3.20). En remplaçant (3.20) dans (3.9), on a :

$$P(\dot{\theta}(t)) = b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) \quad (3.30)$$

Avec $\theta(t)$ et $\beta(t)$ à structures polytopiques comme décrit dans (3.21) et (3.22).

Remplaçant (3.21) dans (3.22), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} P(\dot{\theta}(t)) + F(\sigma(t)) A(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) F^T(\theta(t)) & P(\theta(t)) + A^T(\theta(t)) G^T(\theta(t)) - F(\theta(t)) \\ P(\theta(t)) + G(\theta(t)) A(\theta(t)) - F^T(\theta(t)) & -G(\sigma(t)) - G^T(\sigma(t)) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.31)$$

Si nous multiplions (3.31) à gauche par $\begin{pmatrix} I & A^T(\theta) \end{pmatrix}$ et à droite par le transposé nous obtenons :

$$P(\dot{\theta}(t)) + A^T(\theta(t)) P(\theta(t)) + P(\theta(t)) A(\theta(t)) < 0 \quad (3.32)$$

La condition (3.32) est bien la condition de Lyapunov pour la stabilité robuste du système LPV incertain donné par (3.1)-(3.2) et $P(\theta(t))$ une matrice symétrique, définie positive donnée par (3.8).

Nous cherchons dans la suite, à établir un lien entre la condition de stabilité robuste du système LPV donnée par (3.27) et l'approche quadratique.

Lien entre le théorème (3.2.2) et le concept de stabilité quadratique

La condition (3.27) est reliée au concept de stabilité quadratique, caractérisée par le fait qu'un ensemble de matrices $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ partagent la même fonction de Lyapunov $P > 0$, soit :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N \quad (3.33)$$

En prenant $P_i = P_j = P_k = P$ pour tout $i, j, k = 1, \dots, N$ et $F_j = P$ pour tout $j = 1, \dots, M$, dans la condition (3.27) et en utilisant le complément de Schur, on arrive à :

$$\begin{aligned} G_j + G_j^T &> 0 \\ (P A_i + A_i^T P) + A_i^T G_j^T (G_j + G_j)^{-1} G_j A_i &< 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Pour G_j suffisamment petite, pour tout $j = 1, \dots, M$, l'équation (3.33) est toujours vérifiée. Ce qui correspond au concept de stabilité quadratique.

Pour la condition (3.27) donnée, des résultats en analyse robuste sont possibles mais elle ne nous permet pas d'obtenir facilement une méthode pour la synthèse.

Nous donnons dans la suite, une condition dérivée de (3.27) et nous permettant de passer à la synthèse.

3.2.4 Troisième condition de stabilité robuste

Le système considéré est toujours celui donné par (3.1)-(3.2). Le paramètre incertain $\theta(t)$ vérifie (3.3)-(3.4). Nous gardons pour sa dérivée temporelle l'hypothèse donnée par (3.18).

Pour mettre en place la nouvelle condition de stabilité robuste, nous considérons le lemme dérivant du lemme de projection et donné dans le paragraphe A.2.4 et le lemme de Finsler donné dans l'Annexe (A.2) (paragraphe A.2.2).

En effet, pour la condition (3.27), la présence de deux matrices différentes F_j et G_j qui multiplient la matrice dynamique A_i , est très contraignante pour la synthèse. Nous cherchons alors une condition d'analyse qui permette de passer à l'étape de synthèse de contrôleurs robustes pour le système LPV (3.1)-(3.2). Pour cela, nous avons besoin du lemme (3.2.2).

Lemme 3.2.2. [Aouani et al., 2009a]

Soit $P(\theta)$ une matrice symétrique définie positive. Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour le système (3.1)-(3.4).

i) Il existe $P(\theta)$ et sa dérivée $P(\dot{\theta})$ telle que la condition suivante est vérifiée :

$$P(\dot{\theta}(t)) + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) < 0 \quad (3.35)$$

ii) Il existe des matrices $F(\sigma(t))$, $G(\sigma(t))$ et $H(\sigma(t))$ de dimensions compatibles, vérifiant :

$$\left(\begin{array}{ccc} P(\dot{\theta}(t)) - \alpha F(\sigma(t)) - \alpha F^T(\sigma(t)) & -\alpha G^T(\sigma(t)) - F(\sigma(t)) + P(\theta(t)) & A^T(\theta(t))H(\sigma(t)) + \alpha H(\sigma(t)) + F(\sigma(t)) \\ -\alpha G(\sigma(t)) - F^T(\sigma) + P^T(\theta) & -G(\alpha(t)) - G^T(\alpha(t)) & G(\alpha(t)) \\ H^T(\sigma(t))A(\theta(t)) + \alpha H^T(\sigma(t)) + F^T(\sigma(t)) & G^T(\alpha(t)) & -H(\sigma(t)) - H^T(\sigma(t)) \end{array} \right) < 0 \quad (3.36)$$

Preuve :

Preuve de la suffisance :

Étant données les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \phi &= \begin{pmatrix} P(\dot{\theta}) - \alpha F(\theta) - \alpha F^T(\theta) & -\alpha G^T(\theta) - F(\sigma) + P(\theta) \\ -\alpha G(\theta) - F^T(\theta) + P(\theta) & -G(\theta) - G^T(\theta) \end{pmatrix}; \\ N &= \begin{pmatrix} F(\sigma) \\ G(\sigma) \end{pmatrix}; \quad M = \begin{pmatrix} A^T(\theta) + \alpha I \\ 0 \end{pmatrix}; \quad D = H; \end{aligned} \quad (3.37)$$

La LMI (3.36) peut se mettre sous la forme (A.11) dans l'annexe A.2 (le lemme donné par le paragraphe A.2.4). Comme (A.11) équivaut à (A.10), on peut déduire la condition (3.31) de (3.36).

En multipliant la condition (3.31) à gauche par $\begin{pmatrix} I & A^T \end{pmatrix}$ et à droite par sa transposée, nous obtenons la condition (3.35). En effet, la condition (3.35) peut s'écrire :

$$P(\dot{\theta}(t)) + A^T(\theta(t))F(\sigma(t)) + F(\sigma(t))A(\theta(t)) + A^T(\theta(t))[P(\theta(t)) - F(\sigma(t))] + [P(\theta(t)) - F^T(\sigma(t))]A(\theta(t)) < 0 \quad (3.38)$$

Ce qui, selon le lemme dans paragraphe (A.2.4), équivaut à (3.31).

Preuve de la nécessité :

En multipliant la condition LMI (3.36) par $\begin{pmatrix} I & 0 & \alpha I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$ à gauche et sa transposée à droite, où α est un réel positif, on obtient :

$$\left(\begin{array}{ccc} P(\dot{\theta}) + \alpha A^T(\theta)H(\sigma) + \alpha H^T(\sigma)A(\theta) & -F(\sigma) + P(\theta) & A^T(\theta)H(\sigma) - \alpha H^T(\sigma) + F(\sigma) \\ -F^T(\sigma) + P(\theta) + H^T(\sigma)A(\theta) & -G(\sigma) - G^T(\sigma) & G(\sigma) \\ H^T(\sigma)A(\theta) - \alpha H(\sigma) + F^T(\sigma) & G^T(\sigma) & -H(\sigma) - H^T(\sigma) \end{array} \right) < 0 \quad (3.39)$$

Si dans (3.39), nous prenons $\alpha H^T(\sigma(t)) = F(\sigma(t)) = P(\theta(t))$ et $G(\sigma(t)) = \frac{P(\theta(t))}{\alpha(t)}$; nous obtenons l'expression suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc} P(\dot{\theta}(t)) + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) & 0 & \frac{A^T(\theta(t))P(\theta(t))}{\alpha} \\ 0 & -\frac{2P(\theta(t))}{\alpha} & \frac{P(\dot{\theta}(t))}{\alpha} \\ \frac{P(\theta(t))A(\theta(t))}{\alpha} & \frac{P(\theta(t))}{\alpha} & -\frac{2P(\theta(t))}{\alpha} \end{array} \right) \quad (3.40)$$

En appliquant le complément de Schur à (3.40), elle équivaut à (3.41). Nous rappelons le complément de Schur dans l'annexe A.2.

$$P(\dot{\theta}(t)) + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) < -\frac{2}{3\alpha} A^T(\theta(t))P(\theta(t))A(\theta(t)) \quad (3.41)$$

Nous pouvons ainsi conclure que, pour des valeurs de α suffisamment grandes, l'expression (3.41) est équivalente à la condition de Lyapunov de stabilité robuste (3.35).

Ainsi, à partir de la condition (3.36), la condition suivante de stabilité pour le système LPV (3.1)-(3.2) considéré, peut être déduite :

Théorème 3.2.3. [Aouani et al., 2009a]

Le système incertain (3.1)-(3.2) est robustement stable dans le domaine incertain (3.4) avec la dérivée du paramètre incertain satisfaisant à (3.20), s'il existe des matrices $F_j, G_j, H_j (j = 1, \dots, N)$ de dimensions appropriées, des matrices symétriques définies positives $P_i (i = 1, \dots, N)$ et α un réel positif suffisamment grand qui satisfait à :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) - \alpha F_j - \alpha F_j^T & -\alpha G_j^T - F_j + P_i & A_i^T H_j + \alpha H_j + F_j \\ -\alpha G_j - F_j^T + P_i^T & -G_j - G_j^T & G_j \\ H_j^T + \alpha H_j^T + F_j^T & G_j^T & -H_j - H_j^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.42)$$

pour $i, j, k = 1, \dots, N$

Preuve : Si on multiplie la condition (3.42) simultanément par les scalaires positifs $\theta_i(t)$, $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$ évoluant dans les polytopes définis par (3.4), (3.21) et (3.22), en faisant les sommes respectivement pour $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$ et $k = 1, \dots, N$, on peut obtenir la condition (3.36).

3.2.5 Exemple numérique :

Nous mentionnons que les trois théorèmes présentés dans ce paragraphe avancent trois nouvelles conditions de stabilité robuste pour les systèmes LPV polytopiques.

Nous considérons l'exemple suivant extrait de [Geromel et Colaneri, 2006].

Soit le système donné par (3.1)-(3.2) où les matrices A_i sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 + \beta^2) & -\xi \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 - \beta^2) & -\xi \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

Où w ; ξ et β sont des scalaires; $w = 1$; $\xi = 0.05$ et $0 \leq \beta \leq 3$.

Le paramètre incertain $\theta(t)$ évolue dans le polytôpe donné par (3.4) et sa dérivée temporelle est bornée telle que : $-b \leq \dot{\theta}_i \leq b$ où $b = \frac{\omega}{2}$ et $0 \leq \omega \leq 4$.

L'objectif étant d'évaluer les limites de stabilité dans le plan (ω, β) en se basant sur le théorème (3.2.3). En testant l'exemple avec le théorème (3.2.3) nous obtenons comme limites dans le plan (ω, β) ; $\omega = 4$ et $\beta = 0.23$. Nous retrouvons les mêmes valeurs que dans [Geromel et Colaneri, 2006].

Remarque :

Les améliorations par rapport aux conditions existantes le sont plutôt au niveau de la synthèse. Nous voyons des exemples concrets dans le chapitre suivant.

3.3 Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV polytopiques - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres à structure spécifique

L'approche sur laquelle nous nous basons dans ce paragraphe dérive des travaux de [Ebihara *et al.*, 2005] effectués en 2005, dans le cadre de l'analyse de stabilité robuste d'un système continu incertain Linéaire à Temps Invariant (LTI). L'idée étant dans la globalité d'employer des FLDP pouvant être associées à des dérivées de l'état d'ordre plus élevé (voir pour cela [Peaucelle *et al.*, 2006]). Le système résultant est un système augmenté (redondant). Un outil fondamental dans l'obtention du résultat de [Ebihara *et al.*, 2005], est l'utilisation du lemme de Finsler (voir annexe A.2). Pour le cas des systèmes LPV, nous ne pouvons nous baser sur le lemme de Finsler (voir les détails dans l'article de Gahinet et Apkarian [Gahinet et Apkarian, 1994]).

Dans le travail présenté dans ce paragraphe, l'idée motrice est également de considérer des fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres qu'on associe à des dérivées de l'état d'ordre plus élevé, mais où les paramètres incertains sont temps variant.

Le système considéré est toujours décrit par (3.1)-(3.4). Étant donné le paramètre incertain $\theta(t)$, sa dérivée $\dot{\theta}(t)$ est telle que les $\dot{\theta}_i(t)$ vérifient (3.18) et sont donnés par le lemme (3.2.1). Comme Fonction de Lyapunov, nous considérons la FLDP donnée par (3.8). Sa dérivée est exprimée dans le lemme (3.3.1).

Lemme 3.3.1. [Aouani *et al.*, 2010a]

la dérivée temporelle de la matrice de Lyapunov $P(\theta(t))$ vérifie :

$$\dot{P}(\theta(t)) = P(\dot{\theta}(t)) = b[P(\sigma(t)) - P(\beta(t))] \quad (3.44)$$

Où $\sigma(t) \in \Lambda_N$ et $\beta(t) \in \Lambda_M$

Preuve :

Le lemme donné par (3.3.1) dérive du lemme (3.2.1). Soit l'expression de $\dot{\theta}_i$ donnée par (3.20). En la multipliant par P_i , nous obtenons (3.45).

$$P_i \dot{\theta}_i = b(P_i \sigma_i - P_i \beta_i) \quad (3.45)$$

Remarque : Nous modifions tous les indices en i dans (3.20) afin que le produit par P_i soit calculable.

En sommant (3.45) pour $i = 1, \dots, N$, on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^N P_i \dot{\theta}_i = b \left(\sum_{i=1}^N P_i \sigma_i - \sum_{i=1}^N P_i \beta_i \right) \quad (3.46)$$

Ce qui équivaut à :

$$P(\dot{\theta}(t)) = b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) \quad (3.47)$$

Dans la suite, nous donnons une nouvelle condition de stabilité robuste formulée en terme de LMIs.

Soit le système donné par (3.1)-(3.2) ; avec $\theta(t)$ vérifiant (3.3)-(3.4)

Ce système est asymptotiquement stable -en appliquant l'approche de Lyapunov- s'il existe une fonction de Lyapunov $V(x(t))$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} V(x(t)) > 0; \quad \dot{V}(x(t)) < 0; \quad \forall \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N}; \\ \mathfrak{N} := \{y \in \mathfrak{R}^{2n} : y \neq 0; \begin{pmatrix} A & -I \end{pmatrix} y = 0\} \end{aligned} \quad (3.48)$$

En évaluant la stabilité asymptotique du système (3.1)-(3.2), on peut restreindre la classe des fonctions de Lyapunov à la forme :

$$V(x(t)) = x^T P(\theta(t))x; \quad \text{avec } P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0 \quad (3.49)$$

En particulier, le système (3.1)-(3.2) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives $P(\theta(t))$ vérifiant (3.8) et qui satisfont la condition (3.48) avec $V(x(t))$ donnée par (3.49). En effet, nous pouvons voir que la première condition dans (3.48) peut être assurée par $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ alors que la deuxième peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} & P(\theta(t)) \\ P(\theta(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} < 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathfrak{N} \quad (3.50)$$

Dans ce contexte, nous pouvons obtenir la condition de stabilité donnée par le théorème (3.3.1) pour le système (3.1)-(3.2), ceci en exploitant l'expression (3.47) de la dérivée de la fonction de Lyapunov.

Théorème 3.3.1. [Aouani et al., 2010a]

Le système (3.1)-(3.2) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives P_i , des matrices P_j , P_k et $F_l \in \mathfrak{R}^{n \times n} (l = 1, 2)$ telles que les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) & P_i \\ P_i & 0 \end{pmatrix} + He \left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & -I \end{pmatrix} \right\} < 0 \quad (3.51)$$

Pour $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, N$

Preuve :

Afin de montrer la suffisance de la condition de stabilité donnée par (3.51), nous montrons que cette condition contient la condition de stabilité connue de Lyapunov. En multipliant la condition (3.51) respectivement par $\theta_i(t)$, $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$ et en faisant la somme pour $i = 1..N$, $j = 1..N$, $k = 1..N$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) & P(\theta) \\ P(\theta) & 0 \end{pmatrix} + He \left(\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} \right) < 0 \quad (3.52)$$

En multipliant la condition (3.52) à gauche par $\begin{pmatrix} I & A(\theta) \end{pmatrix}$ et à droite par sa transposée, on va obtenir l'expression :

$$b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) < 0 \quad (3.53)$$

A partir de (3.47), nous avons $b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) = P(\dot{\theta}(t)) = \frac{dP(\theta(t))}{dt}$; nous obtenons ainsi la condition de stabilité de Lyapunov donnée par :

$$\frac{dP(\theta(t))}{dt} + A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) < 0 \quad (3.54)$$

Ainsi, la condition (3.51) est effective pour l'analyse de stabilité robuste du système (3.1)-(3.2).

3.3.1 condition de stabilité robuste

En effet, l'idée clé exprimée dans la suite est l'introduction d'une forme nouvelle de FLDPs, dans l'objectif de proposer une condition de stabilité relative au système (3.1)-(3.2); et réduisant le conservatisme engendré par d'autres conditions données dans le même contexte.

Supposons qu'il existe une matrice P_i qui satisfait (3.48), avec $V(x(t))$ donnée by (3.49). Conformément au complément de Schur, nous voyons qu'il existe un scalaire positif $\bar{\varepsilon}(P)$ tel que la condition de positivité donnée par :

$$\Pi_i = \begin{pmatrix} P_i & -\varepsilon A_i^T \\ -\varepsilon A_i & 2\varepsilon I \end{pmatrix} \in P_{2n} \quad (3.55)$$

est vérifiée pour tout $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}(P)$ [Ebihara *et al.*, 2005]. Il est évident que la matrice Π_i donnée par (3.55) satisfait à (3.41) avec $V(x(t))$ donnée par (3.42) pour tout $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}(P)$, puisque nous avons :

$$\begin{pmatrix} I \\ A_i \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_i & -\varepsilon A_i^T \\ -\varepsilon A_i & 2\varepsilon I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ A_i \end{pmatrix} = P_i \in P_n \quad (3.56)$$

Nous introduisons dans ce sens les matrices suivantes W_2 et ψ_c dont le rôle est très important dans l'obtention du résultat.

$$W_2 = \begin{pmatrix} W_{21} & W_{22} \end{pmatrix}^T; \quad W_{21} = \begin{pmatrix} I_{2n} \\ 0_{n,2n} \end{pmatrix}; \quad W_{22} = \begin{pmatrix} 0_{n,2n} \\ I_{2n} \end{pmatrix}; \quad (3.57)$$

$$\psi_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En nous basant sur les expressions données dans (3.57), le théorème suivant est donné :

Théorème 3.3.2. [Aouani *et al.*, 2010a]

Le système (3.1)-(3.2)-(3.18) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices symétriques définies positives P_i , des matrices P_j , P_k et $F_{lm} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ($l = 1, 2, 3; m = 1, 2$) telles que les LMI suivantes sont vérifiées :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + W_2^T (\psi_c \otimes \Pi_i) W_2 + He \left\{ \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_i & -I & 0 \\ 0 & A_i & -I \end{pmatrix} \right\} < 0 \quad (3.58)$$

Pour $i = 1, \dots, N; j = 1..N; k = 1, \dots, N$

Où W_2 et ψ_c sont données par (3.57).

Preuve :

La démonstration de ce théorème est très similaire à celle du théorème (3.3.1), précédente. Le but étant toujours de retrouver la condition de stabilité connue de Lyapunov (3.54).

En effet, la condition (3.58) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + F_{11}A_i + A_i^T F_{11}^T & (2,1)^T & (3,1)^T \\ P_i + F_{21}A_i - F_{11}^T + A_i^T F_{12}^T & -\varepsilon A_i - \varepsilon A_i^T - F_{21} + F_{22}A_i - F_{21}^T + A_i^T F_{22}^T & (3,2)^T \\ -\varepsilon A_i - F_{12}^T + F_{31}A_i & 2\varepsilon I - F_{31} - F_{22}^T + F_{32}A_i & -F_{32} - F_{32}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.59)$$

Pour $i = 1, \dots, N$; $j = 1 \dots N$; $k = 1 \dots N$

En multipliant (3.59) respectivement par $\theta_i(t)$, $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$ et en faisant la somme pour $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$, $k = 1, \dots, N$; nous obtenons la condition (3.60). En la multipliant par $\begin{pmatrix} I & A^T(\theta(t)) & A^{2T}(\theta(t)) \end{pmatrix}$ à gauche et par sa transposée à droite, la LMI (3.60) donne exactement la condition de stabilité de Lyapunov (3.54).

$$\begin{pmatrix} b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + F_{11}A(\theta(t)) + A^T(\theta(t))F_{11}^T & (2,1)^T & (3,1)^T \\ P(\theta(t)) + F_{21}A(\theta(t)) - F_{11}^T + A^T(\theta(t))F_{12}^T & -F_{21} + F_{22}A(\theta(t)) - \varepsilon A(\theta(t)) - \varepsilon A^T(\theta(t)) - F_{21}^T + A^T(\theta(t))F_{22}^T & (3,2)^T \\ -\varepsilon A(\theta(t)) - F_{12}^T + F_{31}A(\theta(t)) & 2\varepsilon I - F_{31} - F_{22}^T + F_{32}A(\theta(t)) - F_{32}A(\theta(t)) & -F_{32} - F_{32}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.60)$$

Remarques :

- Soit la condition de stabilité donnée par (3.58), si nous remplaçons $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix}$ par

$$\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ F_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

nous obtenons exactement la condition dans le corollaire 1 de l'article [Geromel et Colaneri, 2006]; nous pouvons ainsi dire que la condition donnée dans le théorème (3.3.2) ici contient celle donnée dans [Geromel et Colaneri, 2006]. La condition (3.58) est une forme généralisée de la condition du corollaire 1 dans [Geromel et Colaneri, 2006].

- Une autre remarque est que la condition de stabilité donnée par (3.58) contient la stabilité quadratique caractérisée par le fait que l'ensemble des matrices A_1, \dots, A_N partagent la même fonction de Lyapunov, qui est l'existence de $P > 0$ tel que :

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad \text{pour tout } i = 1, \dots, N \quad (3.61)$$

Soit la condition (3.59) qui est elle même la condition (3.58). Si dans (3.59) nous appliquons les changements suivants :

$$P_i = P_j = P_k = P; \quad F_{11} = F_1 = P; \quad F_{12} = 0; \quad F_{21} = F_2; \quad F_{22} = 0; \quad F_{31} = 0; \quad F_{32} = 0 \quad (3.62)$$

Nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} P A_i + A_i^T P & A_i^T F_2^T & -\varepsilon A_i^T \\ F_2 A_i & -\varepsilon A_i - \varepsilon A_i^T - F_2 - F_2^T & 2\varepsilon I \\ -\varepsilon A_i & 2\varepsilon I & -F_{32} - F_{32}^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.63)$$

En mettant $\varepsilon = 0$; nous obtenons la condition :

$$\begin{pmatrix} PA_i + A_i^T & A_i^T F_2^T \\ F_2 A_i & -F_2 - F_2^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.64)$$

En appliquant le complément de Schur, sur (3.64), nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_2 + F_2^T &> 0 \\ (PA_i + A_i^T P) + A_i^T F_2^T (F_2 + F_2^T)^{-1} F_2 A_i &< 0 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Pour F_2 suffisamment petite dans (3.65), (3.61) est toujours vérifiée. Ceci reproduit alors le cas particulier de la stabilité quadratique.

- L'idée clé présentée dans ce paragraphe : traiter des problèmes de stabilité robuste pour systèmes LPV peut être tourné en un problème d'utilisations de fonctions de Lyapunov pouvant être associées à des dérivées de vecteurs d'états d'ordres plus élevé [Ebihara *et al.*, 2005].

En effet, en considérant une description du système redondant relatif au modèle, de nouvelles conditions LMI peuvent être dérivées successivement.

Par exemple, il est possible de prendre une fonction de Lyapunov de la forme :

$$V(x(t)) = x^T \left(\begin{pmatrix} I \\ A(\theta(t)) \\ A^2(\theta(t)) \end{pmatrix} \right)^T \Xi(\theta(t)) \left(\begin{pmatrix} I \\ A(\theta(t)) \\ A^2(\theta(t)) \end{pmatrix} \right) x(t); \quad (3.66)$$

$\Xi(\theta(t)) \in P_{3n}$

Où $\Xi(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i \Xi_i$ avec $\theta_i \in P_{3n}$ une matrice à déterminer. Des extensions supplémentaires peuvent être faites.

3.3.2 Exemple numérique :

Nous considérons à nouveau l'exemple tiré de [Geromel et Colaneri, 2006], l'équation différentielle linéaire de second ordre est alors considérée :

$$\ddot{x}(t) + \xi \dot{x}(t) + (w^2 + \beta^2 p(t))x(t) = 0 \quad (3.67)$$

Où w , ξ et α sont des scalaires et $p(t)$ un paramètre temps-variant non spécifié exactement, mais tel que $|p(t)| \leq 1$ et $|\dot{p}(t)| \leq \omega$ pour tout $t > 0$. Il est intéressant de voir que cette équation différentielle se réduit à la fameuse équation de Mathieu avec amortissement pour $p(t) = \cos(\omega t)$ [Geromel et Colaneri, 2006]. Dans l'objectif de réécrire l'équation (3.67) sous la forme (3.1), il suffirait de mettre $N = 2$, et de définir un vecteur de paramètres :

$$\theta(t) = \begin{pmatrix} 0.5 + 0.5p(t) \\ 0.5 - 0.5p(t) \end{pmatrix} \forall t \geq 0 \quad (3.68)$$

Les matrices extrêmes sont données par [Geromel et Colaneri, 2006] :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 + \beta^2) & -\xi \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 - \beta^2) & -\xi \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

Et $b = \frac{\omega}{2}$

L'objectif étant de délimiter la région du plan (ω, β) avec $0 \leq \omega \leq 4$ et $0 \leq \beta \leq 1$ tel que la stabilité asymptotique globale est préservée.

Pour l'application numérique, nous considérons $w = 1$ et un petit amortissement représenté par $\xi = 0.05$ [Geromel et Colaneri, 2006].

En effet, le théorème (3.3.2) est vérifié pour toute paire (ω, β) satisfaisant la LMI (3.58); la solution d'équilibre de l'équation différentielle (3.1) est globalement asymptotiquement stable pour tout paramètre incertain $\theta(t)$ inclus dans l'ensemble défini par (3.4) et tel que $\dot{\theta}(t)$ satisfait à (3.20). Nous dessinons sur la même figure la courbe relative au théorème de stabilité donné par Geromel (donné par le théorème 1 dans [Geromel et Colaneri, 2006]) et celle donnée par le théorème (3.3.2) dans ce chapitre.

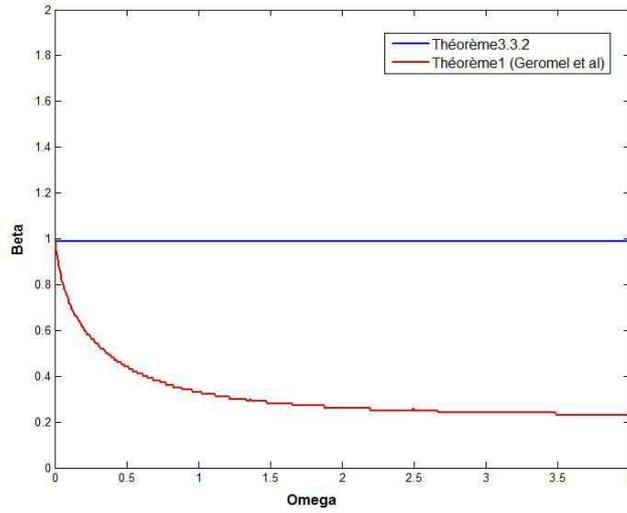


FIGURE 3.1 – Limites de stabilité dans le plan (ω, β) d'après le théorème 1 dans [Geromel et Colaneri, 2006] et le théorème (3.3.2) donné ici.

La figure 3.1 donne les régions de stabilité sous chaque courbe donnée par les deux théorèmes.

Dans [Geromel et Colaneri, 2006], la stabilité asymptotique globale est assurée seulement pour $0 \leq \beta \leq 0.23$ quand nous prenons le point du plan $\omega = 4$. Alors que, pour le théorème (3.3.2) donné ici, la stabilité asymptotique globale au delà de ces limites est possible. Le paramètre β peut en effet atteindre la valeur $\beta = 0.99$ même si $\omega = 4$. Ainsi, nous pouvons voir que la condition (3.58) donnée ici élargit la région de stabilité du plan (ω, β) . Nous notons ainsi, l'amélioration très importante apportée par le théorème (3.3.2). D'autre part, l'équation de Mathieu, peut être aussi réécrite comme l'équation (3.1), pour $N = 3$, avec les matrices extrêmes données par [Geromel et Colaneri, 2006] :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 + 3\beta^2) & -\xi \end{pmatrix}; A_2 = A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 - \beta^2) & -\xi \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Et $b = \frac{w}{4}$.

Dans ce cas; nous vérifions numériquement que, pour $\omega \geq 203$ et même si $\beta > 1.5$, la LMI (3.58) est toujours vérifiée, ce qui n'est pas possible dans [Geromel et Colaneri, 2006]. (c'est à dire que $\alpha = 1.5$ ne permet pas la faisabilité de la LMI (21) dans [Geromel et Colaneri, 2006]).

3.4 Analyse de stabilité robuste des systèmes incertains LPV affines - Utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres à structure affine

Après avoir traité le problème d'analyse robuste des systèmes LPV polytopiques, nous traitons ici le problème d'analyse de stabilité robuste des systèmes LPV affines. De nouvelles conditions sont proposées et données en terme d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

3.4.1 Formulation du problème

Soit le système LPV continu donné par (3.1). La matrice d'état $A(\theta(t))$ pour le cas affine est donnée par la structure :

$$A(\theta(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i \quad , \theta_i(t) \geq 0 \quad , \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.71)$$

Où, A_0, \dots, A_N sont des matrices constantes. Le vecteur des paramètres temps-variant $\theta(t)$ est toujours donné par (3.3) et vérifie l'ensemble (3.4).

Nous considérons que les bornes inférieure et supérieure des valeurs du paramètre et de leurs taux de variations sont connues, et données par (3.72) et (3.73) [Gahinet *et al.*, 1996].

- Chaque paramètre $\theta_i(t)$ évolue entre des valeurs extrêmes connues $\underline{\theta}_i$ et $\bar{\theta}_i$:

$$\theta_i(t) \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad (3.72)$$

- Le taux de variation $\dot{\theta}_i$ est bien défini et satisfait :

$$\dot{\theta}_i(t) \in [\underline{v}_i, \bar{v}_i] \quad (3.73)$$

Où, $\underline{v}_i < 0 < \bar{v}_i$ sont les bornes inférieure et supérieure sur $\dot{\theta}_i(t)$.

L'hypothèse (3.72) veut dire que le vecteur $\theta(t)$ est évalué dans un ensemble donné par :

$$\vartheta := \{(v_1, \dots, v_N) : v_i \in \{\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i\}\} \quad (3.74)$$

Où ϑ désigne l'ensemble des 2^N sommets.

Le vecteur donné par (3.73), évolue également dans un ensemble de \Re^N , donné par :

$$W := \{(\omega_1, \dots, \omega_N) : \omega_i \in \{\underline{v}_i, \bar{v}_i\}\} \quad (3.75)$$

Tout le long de ce paragraphe, le résultat principal se base sur le lemme dérivant de projection que nous rappelons dans l'annexe A : lemme (A.2.4).

3.4.2 Condition de stabilité robuste

L'analyse du système LPV donné par (3.1)-(3.71) est faite et une condition de stabilité quadratique affine est établie. Soit la fonction candidate de Lyapunov donnée par :

$$V(x, \theta(t)) = x^T P(\theta(t))x \quad (3.76)$$

Où la fonction $P(\theta(t))$ est décrite par la structure affine :

$$P(\theta(t)) = P_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t)P_i \quad , \theta_i(t) \geq 0 \quad , \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.77)$$

$P(\theta(t))$ est une matrice symétrique définie positive.

Nous donnons dans le théorème (3.4.1) une condition nécessaire et suffisante de stabilité quadratique affine.

Théorème 3.4.1. [Aouani et al., 2009b]

Le système continu linéaire à paramètres temps variant donné par (3.1)-(3.71) est affinement quadratiquement stabilisable dans les domaines (3.74) et (3.75), si et seulement s'il existe $N + 1$ matrices symétriques X_0, \dots, X_N et une matrice F de dimensions appropriées, qui permet la séparation entre $A(v)$ et $X(v)$, tel que, pour un réel positif α vérifiant $2\alpha P(\theta(t)) > P(\dot{\theta}(t))$, on a :

$$X(v) = X_0 + v_1 X_1 + \dots + v_N X_N > 0 \quad (3.78)$$

$$\begin{pmatrix} -2\alpha X(v) + X(\omega) - X_0 & F^T A^T(v) + \alpha F + X(v) \\ A(v)F + \alpha F^T + X(v) & -F - F^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.79)$$

$\forall v \in \vartheta \quad \text{et} \quad \omega \in W$

Où,

$$X(\omega) = X_0 + \omega_1 X_1 + \dots + \omega_N X_N \quad (3.80)$$

$$A(v) = A_0 + v_1 A_1 + \dots + v_N A_N \quad (3.81)$$

Preuve :

Soit la fonction de Lyapunov donnée par (3.76). Le système (3.1)-(3.71) est affinement quadratiquement stable, cela veut dire que :

$$\frac{dV(x, \theta(t))}{dt} = \dot{V}(x, \theta(t)) < 0 \quad \forall \quad x \neq 0 \quad (3.82)$$

Cela peut s'écrire :

$$x^T (A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt})x < 0 \quad \forall \quad x \neq 0 \quad (3.83)$$

Soit

$$A^T(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (3.84)$$

On a alors pour $\alpha > 0$

$$(A^T(\theta(t)) + \alpha I)P(\theta(t)) + P(\theta(t))(A(\theta(t)) + \alpha I) - 2\alpha P(\theta(t)) + \frac{dP(\theta(t))}{dt} < 0 \quad (3.85)$$

Par analogie avec le lemme dérivant du lemme de projection, le choix du réel positif α doit vérifier l'inégalité suivante :

$$\dot{P}(\theta(t)) - 2\alpha P(\theta(t)) < 0 \quad (3.86)$$

Soit

$$2\alpha P(\theta(t)) > \dot{P}(\theta(t)) \quad \text{avec} \quad \dot{P}(\theta(t)) = \frac{P(\theta(t))}{dt} \quad (3.87)$$

En appliquant le lemme du paragraphe (A.2.4), nous pouvons obtenir la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(\theta(t)) - 2\alpha P(\theta(t)) & A^T(\theta(t))G + \alpha G + P(\theta(t)) \\ G^T A(\theta(t)) + \alpha G^T + P(\theta(t)) & -G - G^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.88)$$

$\forall \theta(t) \in \vartheta \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t) \in W$

Comme $\dot{P}(\theta(t)) = P(\dot{\theta}(t)) - P_0$, nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{P}(\theta(t)) - P_0 - 2\alpha P(\theta(t)) & A^T(\theta(t))G + \alpha G + P(\theta(t)) \\ G^T A(\theta(t)) + \alpha G^T + P(\theta(t)) & -G - G^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.89)$$

$\forall \theta(t) \in \vartheta \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t) \in W$

Comme cette expression est affine en θ et $\dot{\theta}$, alors elle est vérifiée pour toutes les valeurs possibles θ et $\dot{\theta}$ si et seulement si elle est vérifiée sur les sommets des polytopes ϑ et W , c'est à dire que l'ensemble fini des LMIs suivantes est vérifié pour tout $(v, \omega) \in \vartheta \times W$ [Gahinet *et al.*, 1996], [Boyd et Yang, 1989] et [Cao et Lin, 2004].

$$\begin{pmatrix} -2\alpha P(v) + P(\omega) - P_0 & A^T(v)G + \alpha G + P(v) \\ G^T A(v) + \alpha G^T + P(v) & -G - G^T \end{pmatrix} < 0 \quad (3.90)$$

$\forall v \in \vartheta \quad \text{et} \quad \omega \in W$

Afin de compléter la preuve, il suffit de multiplier la LMI (3.90) à gauche par $Diag(G^{-T}, G^T)$ et par sa transposée à droite, après appliquer le changement de variable donné par (3.91), dans un but de linéarisation.

$$\begin{aligned} X_0 &= G^{-T} P_0 G^{-1}; & X(v) &= G^{-T} P(v) G^{-1}; & X(\omega) &= G^{-T} P(\omega) G^{-1}; \\ F^T &= G^{-T}; & F &= G^{-1} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité (3.79).

Remarque :

Pour la condition de stabilité donnée par (3.79) ; nous obtenons exactement la condition donnée par le théorème 3 dans [Cao et Lin, 2004] si nous posons $\alpha = 1$. Nous pouvons ainsi conclure que la condition donnée par CA0 et al est un cas particulier de celle donnée par le théorème (3.4.1).

3.4.3 Exemple numérique

Nous comparons dans cette section nos résultats avec ceux donnés dans [Cao et Lin, 2004] dans les mêmes conditions. Le système que nous considérons est le système masse-ressort considéré par [Gahinet *et al.*, 1996] :

$$x(t) = A(f(t), k(t))x(t) + B(f(t), k(t))x(t) \quad (3.92)$$

Où les paramètres incertains sont respectivement le frottement f et la raideur k , les deux variant dans le temps.

Les matrices du système $A(.,.)$ et $B(.,.)$ sont affines en f et k et les matrices A_i et B_i sont données par les matrices constantes suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.93)$$

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.1 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \end{pmatrix}; \quad (3.94)$$

Les trajectoires des paramètres sont définies par :

$$f(t) = f_0(1 + \delta_1(t)); \quad k(t) = k_0(1 + \delta_2) \quad (3.95)$$

Avec $f_0 = 1$, $k_0 = 1$ et les bornes suivantes sur les taux de variations :

$$|\dot{f}(t)| \leq \dot{f}_{max}; \quad |\dot{k}(t)| \leq \dot{k}_{max}; \quad (3.96)$$

Dans la suite, nous faisons des comparaisons entre le test de stabilité réalisé par le théorème (3.4.1) (où la condition de stabilité est paramétrée par le réel α , avec la condition donnée par [Cao et Lin, 2004].

L'idée consiste à évaluer la marge du paramètre δ_{max} , qui est la plus grande valeur de $\delta = \max(|\delta_1|, |\delta_2|)$, pour laquelle le système temps variant (3.92) soumis aux contraintes (3.96) est affinement quadratiquement stable.

Pour des valeurs fixes de $\dot{f}_{max} = 1$ et $\dot{k}_{max} = 1$, la plus large valeur de δ , déterminée par [Cao et Lin, 2004] est $\delta_{max} = 0.562$. La nouvelle condition proposée (3.79), nous permet d'obtenir cette même valeur de δ , soit $\delta_{max} = 0.562$ avec $\alpha = 2.1$.

Remarque :

Il est clair que nous n'apportons pas d'améliorations au niveau de l'analyse robuste du système (3.92), avec la condition (3.79). Nous verrons dans le chapitre suivant que l'extension de cette même condition à la synthèse des systèmes LPV affines apporte de grands changements en terme de réduction du conservatisme. L'influence du réel α qui paramétrise les LMIs étant grande.

3.5 Analyse de performances H2 des systèmes incertains LPV polytopiques

Dans les paragraphes précédents, on a abordé la stabilité des systèmes continus LPV. Celui ci traite, outre la stabilité, la notion de performances pour ce même type de systèmes.

Comme expliqué dans le deuxième chapitre, le problème de garantie de performances d'un système peut être traité en minimisant une norme H_2 . L'approche que nous proposons dans ce cadre, s'appuie sur une formulation à partir d'inégalités matricielles linéaires.

Nous commençons par donner les équations du système :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C_1(\theta(t))x(t) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Où $A(\theta(t))$ est donnée par la structure polytopique (3.2). Les matrices $B_1(\theta(t))$ et $C_1(\theta(t))$ sont données par :

$$B_1(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) B_{1i}, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.98)$$

Et :

$$C_1(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) C_{1i}, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (3.99)$$

Le paramètre incertain $\theta(t)$ est donné par (3.3) et évolue dans l'ensemble donné par (3.4).

Nous donnons dans la suite deux conditions pour l'analyse de performances H_2 d'un système LPV polytopique.

3.5.1 Première condition LMIs pour analyse H_2 de systèmes LPV polytopiques

Pour le système considéré, la dérivée du paramètre incertain est donnée par (3.18) et vérifie (3.20). Nous donnons une nouvelle condition d'analyse de performance H_2 . Nous montrons que les conditions données dérivent des conditions de base données dans le deuxième chapitre (Voir paragraphe (2.3.4)). La matrice de Lyapunov $P(\theta(t))$ est donnée par (3.8) et sa dérivée par (3.9).

Les conditions, de type LMIs paramétrées (Voir annexe A.1.3) sont données dans le théorème suivant :

Théorème 3.5.1. *Étant donné le système (3.97), avec ses matrices données par (3.2)-(3.98)-(3.99), sa norme H_2 est inférieure à une valeur positive donnée de γ s'il existe une matrice symétrique définie positive P_i , des matrices P_j, P_k et des matrices F_j, G_j ($j = 1, \dots, N$) telles que pour un paramètre α non nul, les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + A_i F_j + F_j^T A_i^T & P_i - F_j^T + \frac{1}{\alpha} A_i G_j & B_{1i} \\ P_i - F_j + \frac{1}{\alpha} G_j^T A_i^T & -\frac{1}{\alpha} (G_j^T + G_j) & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.100)$$

$$\begin{pmatrix} F_j + F_j^T - P_i & F_j^T C_{1i}^T \\ C_{1i} F_j & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (3.101)$$

$$\text{Trace} W_i < \gamma^2 \quad (3.102)$$

$$i = 1, \dots, N; j = 1, \dots, N; k = 1, \dots, N$$

Preuve :

Suffisance de la condition (3.100)

Nous démontrons d'abord la suffisance de la condition (3.100).

En appliquant le complément de Schur, la condition (3.100) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + A_i F_j + F_j^T A_i^T + B_{1i} B_{1i}^T & P_i - F_j^T + \frac{1}{\alpha} A_i G_j \\ P_i - F_j + \frac{1}{\alpha} G_j^T A_i^T & -\frac{1}{\alpha} (G_j + G_j^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.103)$$

En multipliant (3.103), respectivement par $\theta_i(t)$, $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$ et en appliquant la somme pour i, j, k de $1N$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + A(\theta(t))F(\sigma(t)) + F(\sigma(t))^T A(\theta(t))^T + B_1(\theta(t))B_1^T(\theta(t)) & P(\theta(t)) - F(\sigma(t))^T + \frac{1}{\alpha} A(\theta(t))G(\sigma(t)) \\ P(\theta(t)) - F(\sigma(t)) + \frac{1}{\alpha} G(\sigma(t))^T A(\theta(t))^T & -\frac{1}{\alpha} (G(\sigma(t)) + G(\sigma(t))^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.104)$$

Si on multiplie (3.104) à gauche par $\begin{pmatrix} I & A(\theta(t)) \end{pmatrix}$ et à droite par sa transposée $\begin{pmatrix} I \\ A^T(\theta(t)) \end{pmatrix}$, nous obtenons :

$$b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t))^T + B_1(\theta(t))B_1^T(\theta(t)) < 0 \quad (3.105)$$

En appliquant le complément de Schur à (3.105), nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t))) + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A(\theta(t))^T & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.106)$$

En remplaçant dans (3.106), $b(P(\sigma(t)) - P(\beta(t)))$ par $\frac{dP(\theta(t))}{dt}$, nous obtenons exactement la condition :

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.107)$$

Suffisance de la condition (3.101)

Nous démontrons également la suffisance de la condition (3.101).

Soit $P(\theta(t))$ la matrice symétrique définie positive donnée par (3.8) $F(\sigma(t))$ une matrice non singulière donnée. Nous pouvons alors introduire l'inégalité :

$$(P(\theta(t)) - F(\sigma(t))^T)P^{-1}(\theta(t))(P(\theta(t)) - F(\sigma(t))) \geq 0 \quad (3.108)$$

Ce qui peut s'écrire :

$$F^T(\sigma(t))P^{-1}(\theta(t))F(\sigma(t)) \geq F(\sigma(t)) + F^T(\sigma(t)) - P(\theta(t)) \quad (3.109)$$

Et si nous considérons la condition (3.101), que nous la multiplions respectivement par $\theta_i(t)$, $\sigma_j(t)$ et $\beta_k(t)$, lui appliquons la somme pour i, j, k de 1 à N , nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} F(\sigma(t)) + F^T(\sigma(t)) - P(\theta(t)) & F(\sigma(t))^T C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))F(\sigma(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.110)$$

D'après (3.109), l'expression (3.110) est vérifiée si l'expression (3.111) suivante est vérifiée :

$$\begin{pmatrix} F(\sigma(t))^T P(\theta(t))^{-1} F(\sigma(t)) & F(\sigma(t))^T C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t)) F(\sigma(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.111)$$

En multipliant (3.111) à droite par $\begin{pmatrix} F(\sigma(t))^{-1} P(\theta(t)) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ et à gauche par $\begin{pmatrix} F^{-1}(\sigma(t)) P(\theta(t)) & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T$, on va obtenir : $\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t)) C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t)) P(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0$.

Et soit la condition (3.102), si nous la multiplions par $\theta_i(t)$ et que nous appliquons la somme pour i de 1 à N , nous obtenons

$$\text{Trace } W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (3.112)$$

Nous retrouvons ainsi les conditions (2.39), (2.40) et (2.41) données dans le chapitre 2.

3.5.2 Deuxième condition LMIs pour analyse H_2 de systèmes LPV polytopiques

Le travail réalisé dans ce paragraphe est la suite des travaux réalisés dans le paragraphe (3.3) sur la stabilité du système (3.1)-(3.2).

Toutes les hypothèses et les formulations données dans le paragraphe (3.3) sont maintenues ici. Nous considérons le système (3.97) avec ses matrices données par (3.2)-(3.98)-(3.99). Dans la suite, une nouvelle formulation de la norme H_2 pour le système (3.97)-(3.2)-(3.98)-(3.99) est donnée.

L'idée principale étant de séparer les matrices du système et la matrice de Lyapunov d'une part ; et d'utiliser une nouvelle structure de FLDPs (celle explicitée dans le paragraphe (3.3)). Nous rappelons dans ce cadre la définition de la norme H_2 donnée dans le deuxième chapitre.

Définition 3.5.1. *Pour le système (3.97)-(3.2)-(3.98)-(3.99), la norme H_2 est exprimée telle que :*

$$\|G\|_{2[0,T]}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Trace} (C_1(\theta(t)) Q(\theta(t)) C_1^T(\theta(t))) dt \quad (3.113)$$

Où $Q(\theta(t))$ est le grammien de controllabilité satisfaisant à :

$$\frac{dQ(\theta(t))}{dt} = A(\theta(t)) Q(\theta(t)) + Q(\theta(t)) A^T(\theta(t)) + B_1(\theta(t)) B_1^T(\theta(t)), Q(0) = 0 \quad (3.114)$$

En effet, les formulations (3.113) et (3.114), peuvent être formulées alternativement, tel que, pour un scalaire donné γ , nous définissons l'indice de performance par $\|G\|_2 < \gamma$.

Nous proposons le lemme suivant :

Lemme 3.5.1. *S'il existe une matrice symétrique définie positive $P(\theta(t)) \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ qui satisfait les LMIs donnés par (3.115), (3.116), (3.117), alors $\|G\|_2 < \gamma$ est vérifiée, pour tout $\omega(t)$ non nul et $\omega(t) \in L_2^q[0, \infty)$ où $L_2^q[0, \infty)$ désigne le Lebesgue 2-espace.*

$$\begin{pmatrix} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) & B_1(\theta(t)) \\ B_1^T(\theta(t)) & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.115)$$

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))P(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.116)$$

$$\text{Trace}W(\theta(t)) < \gamma^2 \quad (3.117)$$

Nous présentons dans le théorème (3.5.2), une nouvelle caractérisation de la norme H_2 -pour le système LPV polytopique (3.97)-(3.2)- (3.98)-(3.99), dérivant en effet du lemme (3.5.1). Un réel qui paramétrise les conditions est introduit, ajoutant un degré de liberté additif. La nouvelle représentation de la dérivée temporelle du paramètre incertain donnée par (3.20) est utilisée.

Théorème 3.5.2. [Aouani et al., 2011]

Étant donné le système (3.97) avec ses matrices données par (3.2)- (3.98)-(3.99) ; sa norme H_2 est inférieure à une valeur donnée de γ s'il existe des matrices symétriques définies positives P_i , P_j , P_k , des matrices $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{31}, F_{32}, G_j$, telles que, les LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + F_{11}A_i^T + A_iF_{11}^T & P_i - F_{11} + F_{12}A_i^T + A_iF_{21}^T & -F_{12} + A_iF_{31}^T - \varepsilon A_i & B_{1i} \\ P_i + F_{21}A_i^T - F_{11}^T + A_iF_{12}^T & -\varepsilon A_i - \varepsilon A_i^T - F_{21} + F_{22}A_i^T - F_{22}A_i^T - F_{21}^T + A_iF_{22}^T & 2\varepsilon I - F_{22} - F_{31}^T + A_iF_{32}^T & 0 \\ -F_{12}^T + F_{31}A_i^T - \varepsilon A_i^T & 2\varepsilon I - F_{31} + F_{32}A_i^T - F_{22}^T & -F_{32} - F_{32}^T & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.118)$$

$$\begin{pmatrix} G_j + G_j^T - P_i & G_j C_{1i}^T \\ C_{1i} G_j^T & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (3.119)$$

$$\text{Trace } W_i < \gamma^2 \quad (3.120)$$

$i, j, k = 1, \dots, N$

Preuve :

Soit la condition donnée par (3.118). En multipliant cette condition respectivement par θ_i , σ_j , β_k et en faisant la somme pour $i = 1..N, j = 1..N, k = 1..N$; en remplaçant $\sum_{i=1}^N \theta_i A_i$ par $A(\theta(t))$; $\sum_{i=1}^N \theta_i B_{1i}$ par $B_1(\theta(t))$; $\sum_{i=1}^N \theta_i P_i$ par $P(\theta(t))$; $\sum_{k=1}^N \beta_k P_k$ par $P(\beta(t))$ et $\sum_{i=1}^N \theta_i W_i$ par $W(\theta(t))$; et en remplaçant également $b[P(\sigma(t)) - P(\beta(t))]$ par $\frac{dP(\theta(t))}{dt}$; nous obtenons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{dP(\theta)}{dt} + F_{11}A^T(\theta) + A(\theta)F_{11}^T & & & (2,1)^T & & (3,1)^T & (4,1)^T \\ P(\theta) + F_{21}A^T(\theta) - F_{11}^T + A(\theta)F_{11}^T + A(\theta)F_{12}^T & -\varepsilon A^T(\theta) - \varepsilon A(\theta) - F_{21} - F_{22}A^T(\theta) - F_{21}^T + A(\theta)F_{22}^T & & & (3,2)^T & & (4,2)^T \\ -F_{12}^T + F_{31}A^T(\theta) - \varepsilon A^T(\theta) & & 2\varepsilon I - F_{31} + F_{32}A^T(\theta) - F_{22}^T & & & -F_{32} - F_{32}^T & (4,3)^T \\ B^T(\theta) & & 0 & & & 0 & -I \end{array} \right) < 0 \quad (3.121)$$

Appliquant le complément de Schur sur (3.121); nous avons :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{dP(\theta(t))}{dt} + F_{11}A^T(\theta(t)) + A(\theta(t))F_{11}^T + B_1(\theta(t))B_1^T(\theta(t)) & & & (2,1)^T & & (3,1)^T \\ P(\theta(t)) + F_{21}A^T(\theta(t)) - F_{11}^T + A(\theta(t))F_{12}^T & -\varepsilon A^T(\theta(t)) - \varepsilon A(\theta(t)) - F_{21} + F_{22}A^T(\theta(t)) - F_{21}^T + A(\theta(t))F_{22}^T & & & (3,2)^T & \\ -\varepsilon A^T(\theta(t)) - F_{12}^T + F_{31}A^T(\theta(t)) & & 2\varepsilon I - F_{31} + F_{32}A^T(\theta(t)) - F_{22}^T & & & -F_{32} - F_{32}^T \end{array} \right) < 0 \quad (3.122)$$

Multipliant (3.122), à gauche par $\left(\begin{array}{ccc} I & A(\theta(t)) & A^2(\theta(t)) \end{array} \right)$ et à droite par sa transposée

$$\left(\begin{array}{c} I \\ A^T(\theta(t)) \\ A^{2T}(\theta(t)) \end{array} \right), \text{ nous obtenons exactement :}$$

$$\frac{dP(\theta(t))}{dt} + A(\theta(t))P(\theta(t)) + P(\theta(t))A^T(\theta(t)) + B_1(\theta(t))B_1^T(\theta(t)) < 0 \quad (3.123)$$

Si on applique à nouveau le complément de Schur à (3.123); nous obtenons (3.115).

Nous considérons maintenant la condition (3.119). En multipliant cette condition par θ_i, σ_j et en faisant la somme pour $i = 1..N, j = 1..N$. Remplaçant $\sum_{i=1}^N \sigma_j G_j$ par $G(\sigma(t))$, $\sum_{i=1}^N \theta_i P_i$ par $P(\theta(t))$, $\sum_{i=1}^N \theta_i C_i$ par $C(\theta(t))$ et $\sum_{i=1}^N \theta_i W_i$ par $W(\theta(t))$, nous obtenons :

$$\left(\begin{array}{cc} G(\sigma(t)) + G(\sigma(t))^T - P(\theta(t)) & G(\sigma(t))C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))G^T(\sigma(t)) & W(\theta(t)) \end{array} \right) > 0 \quad (3.124)$$

Soit $P(\theta(t))$ une matrice symétrique définie positive et $G(\sigma(t))$ une matrice non singulière donnée. Nous pouvons alors introduire l'inégalité :

$$(P(\theta(t)) - G(\sigma(t)))^T P^{-1}(\theta(t)) (P(\theta(t)) - G(\sigma(t))) \geq 0 \quad (3.125)$$

Qui peut s'écrire :

$$G^T(\sigma(t))P^{-1}(\theta(t))G(\sigma(t)) \geq G(\sigma(t)) + G^T(\sigma(t)) - P(\theta(t)) \quad (3.126)$$

Selon (3.126), si la condition (3.124) est vérifiée, alors la condition suivante (3.127) l'est également.

$$\left(\begin{array}{cc} G^T(\sigma(t))P^{-1}(\theta(t))G(\sigma(t)) & G(\sigma(t))C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))G(\sigma(t)) & W(\theta(t)) \end{array} \right) > 0 \quad (3.127)$$

Multipliant (3.127), à droite par $\left(\begin{array}{cc} G^{-1}(\sigma(t))P(\theta(t)) & 0 \\ 0 & I \end{array} \right)$ et à gauche par $\left(\begin{array}{cc} G^{-1}(\sigma(t))P(\theta(t)) & 0 \\ 0 & I \end{array} \right)^T$, nous allons obtenir la LMI (3.128).

$$\begin{pmatrix} P(\theta(t)) & P(\theta(t))C_1^T(\theta(t)) \\ C_1(\theta(t))P(\theta(t)) & W(\theta(t)) \end{pmatrix} > 0 \quad (3.128)$$

Qui est la condition (3.116).

En ce qui concerne (3.117), nous multiplions (3.120) par $\theta_i(t)$ et faisons la somme pour $i = 1..N$.

Nous introduisons le lemme suivant :

Lemme 3.5.2. [Aouani et al., 2011]

S'il existe un ensemble de matrices symétriques définies positives P_i ; des matrices W_i, P_{tk}, Q_j , et un scalaire positif $d > 0$ satisfaisant les LMIs données par le théorème 2 dans [Xie, 2005], alors il existe des matrices symétriques définies positives P_i, P_j, P_k , des matrices $F_{11}, F_{12}, F_{21}, F_{22}, F_{31}, F_{32}, G_j$, tel que les LMIs données dans le théorème (3.5.2) sont vérifiées.

Preuve :

Soit dans (3.118), $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_j^T & 0 \\ rQ_j^T & 0 \\ 0 & \eta\bar{F} \end{pmatrix}$ Où $\eta > 0$ et \bar{F} est une matrice

constante de dimensions appropriées; et remplaçons ε par $\varepsilon = 0$. Nous obtenons alors la condition :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + Q_j^T A_i^T + A_i Q_j & P_i - Q_j^T + dA_i Q_j & 0 & B_{1i} \\ P_i + rQ_j^T A_i^T - Q_j & -rQ_j^T - rQ_j & \eta A_i \bar{F}^T & 0 \\ 0 & \eta \bar{F} A_i^T & -\eta(F + \bar{F}^T) & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (3.129)$$

Appliquant le complément de schur sur (3.129); nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + Q_j^T A_i^T + A_i Q_j & P_i - Q_j^T + rA_i Q_j & B_{1i} \\ P_i + rQ_j^T A_i^T - Q_j & -rQ_j^T - rQ_j & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -I \end{pmatrix} + \eta A_i \bar{F}^T (F + \bar{F}^T)^{-1} \bar{F} A_i^T < 0 \quad (3.130)$$

S'il existe des matrices symétriques définies positives P_i ; des matrices W_i, P_{tk}, Q_j et un scalaire positif $d > 0$ satisfaisant aux LMIs données dans le théorème 2 dans [Xie, 2005], alors il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que (3.130) est satisfaite. Nous pouvons alors

conclure que la condition (3.118) est satisfaite avec $\begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \\ F_{31} & F_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_j^T & 0 \\ rQ_j^T & 0 \\ 0 & \eta\bar{F} \end{pmatrix}$.

Ceci conclut la preuve.

Nous rappelons le théorème 2 de ([Xie, 2005]) dans l'annexe A.3.

3.5.3 Exemple numérique

L'objectif est la minimisation du coût garanti H_2 de γ donné dans le théorème (3.5.2). En effet, le même problème est abordé dans [Xie, 2005]. Nous considérons dans ce cadre, le

système donné par (3.97)-(3.2)-(3.98)-(3.99) ; avec les matrices $A_1(\theta(t))$, $B_1(\theta(t))$ et $C_1(\theta(t))$ données par les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{pmatrix} -3.1581 & 0.5822 & 0.3181 & 0.4795 \\ 0.8329 & -3.4593 & 0.1192 & 0.6393 \\ 0.2564 & 0.8699 & -3.0602 & 0.5447 \\ 0.6135 & 0.2648 & 0.6456 & -3.3527 \end{pmatrix}; \\ A_2 &= \begin{pmatrix} -3.4561 & 0.2187 & 0.4046 & 0.6279 \\ 0.7210 & -3.8942 & 0.4484 & 0.7720 \\ 0.5225 & 0.1097 & -3.6342 & 0.9329 \\ 0.9937 & 0.0636 & 0.7635 & -3.0273 \end{pmatrix}; \\ A_3 &= \begin{pmatrix} -3.8080 & 0.5254 & 0.3935 & 0.3477 \\ 0.1389 & -3.4697 & 0.6714 & 0.1500 \\ 0.6963 & 0.8611 & -3.2587 & 0.5861 \\ 0.0938 & 0.4849 & 0.5201 & -3.7379 \end{pmatrix}; \\ A_4 &= \begin{pmatrix} -3.9555 & 0.6878 & 0.6834 & 0.3309 \\ 0.7549 & -3.6408 & 0.7040 & 0.4243 \\ 0.2428 & 0.7363 & -3.5577 & 0.2703 \\ 0.4424 & 0.3947 & 0.0196 & -3.8029 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.131)$$

La matrice de commande $B_1(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) B_{1i}$ est telle que :

$$B_{11} = B_{12} = B_{13} = B_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \quad (3.132)$$

Et la matrice $C_1(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) C_{1i}$ est elle que :

$$C_{11} = C_{12} = C_{13} = C_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

Deux méthodes sont testées pour résoudre le problème d'analyse H_2 formulé par (3.5.2) : l'approche d'analyse H_2 par Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres donnée dans le théorème 2 dans [Xie, 2005], et l'approche d'analyse H_2 se basant sur des Fonctions de Lyapunov à structure particulière, donnée dans le théorème (3.5.2) dans ce paragraphe.

Avec la méthode donnée dans [Xie, 2005], nous obtenons $\gamma_{\min} = 0.1691$ avec $r = 1/15$. Nous rappelons que r est un scalaire positif qui paramétrise les contraintes LMIs données dans [Xie, 2005]. Il donne un degré de liberté supplémentaire.

Avec la méthode donnée dans ce paragraphe (théorème (3.5.2)), nous obtenons un cout H_2 minimum de la valeur $\gamma_{\min} = 0.0883$ et cette valeur nous l'obtenons avec $b = 10$. Nous rappelons que b est un scalaire positif qui borne la dérivée temporelle du paramètre temps-variant.

Nous pouvons ainsi voir dans cet exemple, que pour l'analyse H_2 du système LPV considéré, la nouvelle forme spécifique de FLDPs ; ainsi que le fait de pouvoir agir sur le paramètre b servant de borne sur la norme de la dérivée du paramètre, réduit considérablement le conservatisme engendré par les FLDPs classiques.

3.6 Conclusion du chapitre

Après avoir présenté dans le chapitre précédent les différentes approches ayant été publiées ces dernières années par les automaticiens dans le cadre d'analyse robuste de systèmes incertains LPV, nous avons pu apporter dans ce chapitre des améliorations en préservant des formulations de type LMIs.

Également, de nouvelles formulations pour les dérivées des paramètres incertains ont été explicitées.

Dans certains cas, nous avons conclu nos méthodes par des applications sur des exemples numériques extraits de la littérature, et des comparaisons ont été proposées.

Dans le chapitre suivant, nous présentons nos méthodes dans le domaine de synthèse robuste pour systèmes LPV.

Chapitre 4

Systèmes Linéaires incertains à Paramètres Variant dans le temps (LPV) - Synthèse robuste

Si éclairants soient les grands textes, ils donnent moins de lumière que les premiers flocons de neige. Christian Bobin

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons nos principales contributions dans le domaine de synthèse des contrôleurs robustes pour les systèmes LPV. Nous traitons des systèmes aussi bien polytopiques qu'affines. Nous présentons dans le deuxième paragraphe des conditions de stabilisabilité robuste pour systèmes LPV polytopiques formulés en terme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI) paramétrées. Nous étudions dans le troisième paragraphe la structure affine des incertitudes et nous établissons une condition de stabilisabilité robuste pour systèmes LPV affines. Dans le dernier paragraphe, nous mettons en place des conditions de synthèse H_2 pour stabilisabilité robuste de systèmes LPV. Les conditions sont données en terme de LMIs paramétrées.

4.2 Commande par retour d'état pour systèmes incertains LPV polytopiques

4.2.1 Formulation du problème

Nous considérons le système linéaire continu incertain de la forme :

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (4.1)$$

Où, $x \in \mathfrak{R}^n$ est le vecteur d'état et $u \in \mathfrak{R}^m$ le vecteur de commande. La matrice d'état $A(\theta(t))$ est donnée par la structure polytopique :

$$A(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (4.2)$$

Et la matrice de commande par :

$$B(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) B_i, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (4.3)$$

Le vecteur des paramètres incertains temps variant $\theta(t)$ -nous le rappelons- est donné par (4.4).

$$\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_N(t)) \in \mathbb{R}^N \quad (4.4)$$

et évolue dans l'ensemble convexe donné par :

$$\Lambda_N := \{\theta \in \mathbb{R}^N : \sum_{i=1}^N \theta_i = 1, \theta_i \geq 0\} \quad (4.5)$$

4.2.2 Première condition de synthèse robuste pour systèmes LPV polytopiques :

Nous considérons les hypothèses déjà utilisées dans le paragraphe 3.2.2. Nous les rappelons ici :

- Tous les paramètres incertains $\theta_i(t)$ sont réels et varient dans un intervalle tel que :

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i(t)] \quad (4.6)$$

- Le taux de variation du paramètre incertain $\dot{\theta}_i(t)$ est défini pour tout t et satisfait la condition :

$$\dot{\theta}_i(t) \leq v_i \theta_i \quad (4.7)$$

Où v_i est une constante

Nous considérons le lemme donné par (A.2.1).

4.2.2.1 Condition de contrôle par retour d'état à gain statique

Soit le théorème 3.2.1 dans le chapitre précédent. Pour le système en boucle fermée, on cherche un contrôleur par retour d'état statique K pour que $A(\theta(t)) + B(\theta(t))K$ soit stable pour tout $A(\theta(t))$ et $B(\theta(t))$ où $u(t) = Kx(t)$. Une condition de stabilisabilité robuste est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. [Aouani et al., 2009c]

Le système (4.1)-(4.2)-(4.3) vérifiant (4.6) et tel que sa dérivée temporelle satisfait à (4.7) est stabilisable s'il existe des matrices constantes symétriques définies positives X_i , $i = 1, \dots, N$ et des matrices G et R de dimensions appropriées, tel que , pour un réel positif α qui vérifie $\alpha > \frac{v_i}{2}$:

$$X(\theta(t)) = \theta_1 X_1 + \dots + \theta_N X_N > 0 \quad (4.8)$$

et

$$\begin{pmatrix} v_i X_i - 2\alpha X_i & X_i + G^T A_i^T + R^T B_i^T + \alpha G^T \\ X_i + A_i G + B_i R + \alpha G & -G^T - G \end{pmatrix} < 0 \quad (4.9)$$

Pour $i = 1..N$

On a alors $K = RG^{-1}$

Preuve : Soit la condition de stabilité robuste donnée par (3.10) dans le troisième chapitre; si nous la multiplions par $\begin{pmatrix} F^{-T} & 0 \\ 0 & F^{-T} \end{pmatrix}$ à gauche, et par sa transposée à droite, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} v_i X_i - 2\alpha X_i & X_i + G^T A_i^T + \alpha G^T \\ X_i + A_i G + \alpha G & -G^T - G \end{pmatrix} < 0 \quad (4.10)$$

Où $X_i = F^{-T} P_i F^{-1}$ et $G = F^{-1}$.

Si nous remplaçons A_i par $A_i + B_i K$, et A_i^T par $A_i^T + K^T B_i^T$ nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} v_i X_i - 2\alpha X_i & X_i + G^T A_i^T + R^T B_i^T + \alpha G^T \\ X_i + A_i G + B_i R + \alpha G & -G - G^T \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

avec $K = RG^{-1}$

4.2.3 Exemple numérique

Nous considérons pour l'application numérique l'exemple suivant extrait de [Montagner *et al.*, 2009].

Soit le système donné par l'équation (4.1) et ses matrices données par (4.2)-(4.3), avec $\theta(t)$ évoluant dans le polytope (4.5) et sa dérivée vérifiant (4.7).

Avec $N = 3$, les matrices du système sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B_i = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (4.12)$$

$i=1,2,3$

En testant la condition (3.10) pour une valeur de $v_i = 8$ et $\alpha = 100$, le système n'est pas faisable, nous n'arrivons pas à améliorer par rapport à certaines conditions existantes comme celle de CAO et al [Cao et Lin, 2004]. En analyse, nous concluons que nous n'apportons pas d'amélioration. L'amélioration est plutôt en synthèse. En appliquant le théorème 4.2.1, nous obtenons de meilleurs résultats que ceux donnés par le théorème relatif à la condition de commande par retour d'état (théorème 2) dans [Cao et Lin, 2004]. Nous le rappelons dans l'annexe (A.3). Soit le paramètre $v_i = 1.2$. La condition de stabilisabilité donnée dans [Cao et Lin, 2004] (condition 16) n'est pas faisable avec cette valeur de $v_i = 1.2$. La condition de stabilisabilité donnée dans le théorème 4.2.1 ici est par contre faisable pour la même valeur de v_i et $\alpha = 5$. La valeur du retour d'état obtenue est : $K = [2.329726.1388 - 40.1246]$. Nous concluons que le réel α qui paramétrise la LMI donnée par (4.10) contribue à diminuer le conservatisme déjà rencontré dans la littérature.

4.2.4 Deuxième condition de synthèse robuste pour systèmes LPV polytopiques :

Nous gardons toujours le système donné par (4.1)-(4.3). Le paramètre temps-variant évolue toujours dans le polytope donné par (4.5). Sa dérivée temporelle est décrite par :

$$\|\dot{\theta}_i(t)\| \leq b; b \geq 0 \quad (4.13)$$

Le paramètre incertain vérifiant toujours le lemme donné par Lemme (3.2.2) dans le chapitre précédent, et la condition de stabilité étant établie (condition 3.44) pour le système (4.1)-(4.4), nous donnons dans la suite une condition de stabilisabilité robuste, de commande par retour d'état statique, qui en dérive.

4.2.4.1 Condition de stabilisabilité

Pour le système incertain (4.1)-(4.4), en boucle fermée, on cherche un retour d'état statique à gain K , tel que $A(\theta(t)) + B(\theta(t)K)$ soit robustement stable pour tout $A(\theta(t))$ et $B(\theta(t))$, où $u(t) = Kx(t)$. Une condition suffisante de stabilisabilité est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2.2. [Aouani et al., 2009a]

Le système (4.1)-(4.4) tel que la dérivée du paramètre vérifie (4.13) et donnée par (3.20) est robustement stabilisable dans le domaine (4.5), s'il existe N matrices symétriques et définies positives, X_1, \dots, X_N , N matrices $F_j, G_j, (j = 1..N)$, des matrices L et R de dimensions appropriées, et un réel positif α suffisamment grand tel que :

$$\begin{pmatrix} b(X_j - X_k) - \alpha F_j - \alpha F_j^T & -\alpha G_j^T - F_j + X_i & L^T A_i^T + R^T B_i^T + \alpha L^T + F_j \\ -\alpha G_j - F_j^T + X_i^T & -G_j - G_j^T & G_j \\ A_i L + B_i R + \alpha L + F_j^T & G_j^T & -L - L^T \end{pmatrix} < 0$$

Pour $i, j, k = 1, \dots, N$

(4.14)

Où le gain est donné par : $K = RL^{-1}$

Preuve Soit la condition donnée par (3.42) dans le chapitre précédent. Si nous la considérons, que nous remplaçons H_j par H , multiplions la condition obtenue à gauche par $\text{Diag}(H^{-T}, H^{-T}, H^{-T})$ et sa transposée à droite, que nous appliquons les changements de variable suivants :

$$\begin{aligned} X_i &= H^{-T} P_i H^{-1}; & X_j &= H^{-T} P_j H^{-1}; & X_k &= H^{-T} P_k H^{-1}; \\ F_j &= H^{-T} F_j H^{-1}; & G_j &= H^{-T} G_j H^{-1}; & L &= H^{-1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Nous allons obtenir :

$$\begin{pmatrix} b(X_j - X_k - \alpha F_j - \alpha F_j^T) & -\alpha G_j^T - F_j + X_i & L^T A_i^T + \alpha L^T + F_j \\ -\alpha G_j - F_j^T + X_i^T & -G_j - G_j^T & G_j \\ LA_i + \alpha L + F_j^T & G_j^T & -L - L^T \end{pmatrix} < 0 \quad (4.16)$$

Si dans la condition (4.16), nous remplaçons la matrice A_i par $A_i = A_i + B_i K$ puis le produit $K \times L$ par R , nous obtenons exactement la condition (4.14).

4.2.5 Exemple numérique

Nous considérons toujours pour l'application numérique, l'exemple pris dans [Geromel et Colaneri, 2006], et donné dans le chapitre précédent (Voir paragraphe (3.2.5)). Nous rappelons ici l'exemple : Soit le système donné par l'équation différentielle (4.1). Les matrices A_i sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 + \beta^2) & -\xi \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(w^2 - \beta^2) & -\xi \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Où w ; ξ et β sont des scalaires et $w = 1$; $\xi = 0.05$ et $0 \leq \beta \leq 3$. Et les matrices B_i données par :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.5 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Le paramètre incertain $\theta(t)$ évolue toujours dans l'ensemble (4.4). Nous prouvons pour la synthèse l'influence du paramètre α paramétrisant la condition (4.14). En effet, les résultats donnés ci-après, sont basés sur le théorème (4.2.2).

La Figure 4.1 montre les régions de stabilité obtenues pour $\alpha = 10$, $\alpha = 20$ et $\alpha = 30$ dans le plan (ω, β) . Pour chaque valeur en dessous des courbes, le système en boucle fermée est asymptotiquement stable.

On note que, plus importante est la valeur de α , plus grande devient la région de stabilité dans le plan (ω, β) .

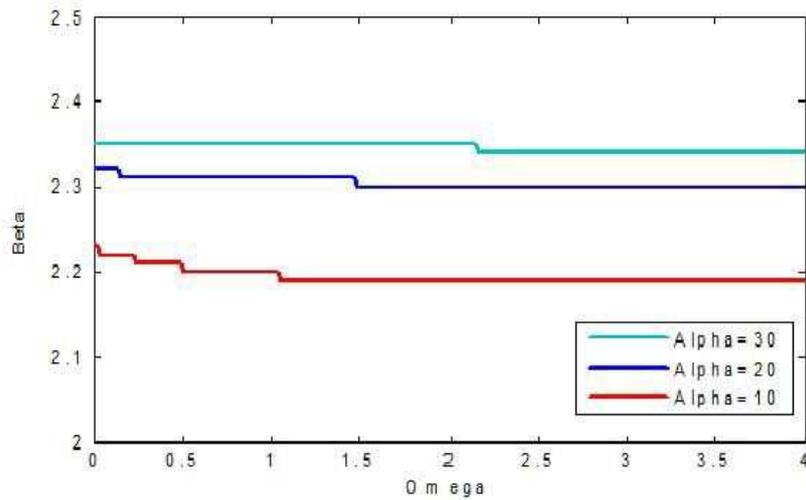


FIGURE 4.1 – Limites de stabilité dans le plan (ω, β) selon le théorème (4.2.2) selon différentes valeurs de α .

4.3 Commande par retour d'état pour systèmes incertains LPV affine

Après avoir traité le problème de commande robuste des systèmes LPV polytopiques, nous entamons dans cette partie le problème de commande robuste des systèmes LPV affines. Les conditions sont proposées en terme d'Inégalités Matricielles Linéaires (LMI).

4.3.1 Formulation du problème

Soit le système LPV continu donné par (4.1). La matrice d'état $A(\theta(t))$ est donnée par la structure affine :

$$A(\theta(t)) = A_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) A_i, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (4.19)$$

Et la matrice de commande par :

$$B(\theta(t)) = B_0 + \sum_{i=1}^N \theta_i(t) B_i, \theta_i(t) \geq 0, \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (4.20)$$

Nous gardons pour la formulation de ce problème les mêmes hypothèses données dans le paragraphe 3.4.1, aussi bien pour le paramètre incertain que pour sa dérivée temporelle.

4.3.2 Condition de stabilisabilité

En effet , Le théorème (3.4.1) proposé dans le chapitre précédent, donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité quadratique affine.

Pour le système incertain en boucle fermée, nous cherchons un gain de retour d'état statique tel que $A(v) + B(v)K$ est affinement quadratiquement stable pour tout $A(v)$ et $B(v)$, où $u(t) = Kx(t)$. Une condition nécessaire et suffisante de stabilisabilité robuste est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. [Aouani et al., 2009b]

Le système incertain (4.1)-(4.19)-(4.20) est affinement quadratiquement stabilisable dans les domaines incertains , si et seulement si il existe $N + 1$ matrices symétriques, X_0, \dots, X_N , et des matrices F et R de dimensions appropriées tel que, pour tout réel α positif vérifiant $2\alpha P(\theta(t)) > \dot{P}(\theta(t))$:

$$X(v) = X_0 + v_1 X_1 + \dots + v_N X_N > 0 \quad (4.21)$$

$$\left(\begin{array}{cc} -2\alpha X(v) + X(\omega) - X_0 & F^T A^T(v) + R^T B^T(v) + \alpha F + X(v) \\ A(v)F + B(v)R + \alpha F^T + X(v) & -F - F^T \end{array} \right) < 0 \quad (4.22)$$

pour tout $v \in \vartheta$ et $\omega \in W$

Avec $K = RF^{-1}$.

Preuve : Dans le théorème (3.4.1), dans la condition (3.79), la matrice $A(v)$ est remplacée par $A(v) + B(v)K$ et le produit KF par R .

Remarque : En faisant les développements afin d'obtenir la condition de stabilisabilité à partir de la condition de stabilité (le passage du théorème 3 au théorème 4 dans [Cao et Lin, 2004]), l'article [Cao et Lin, 2004] propose de mettre une égalité entre les variables P_2 et P_3 , alors que dans le travail actuel, il n'est pas nécessaire de mettre des conditions supplémentaires pour obtenir la condition (4.22) de la condition (3.79). Nous rappelons les théorèmes 3 et 4 de [Cao et Lin, 2004] dans l'annexe A.3. Également, nous avons des conditions nécessaires et suffisantes aussi bien pour l'approche d'analyse que celle de synthèse.

4.3.3 Exemple numérique

L'exemple numérique utilisé ici est la suite de celui donné dans le paragraphe 3.4.3 dans le chapitre précédent. Nous rappelons que l'équation d'état du système (3.92) et les matrices d'état données par (3.93) et celles de commande données par (3.94). Les trajectoires des paramètres $f(t)$ et $k(t)$ sont données par (3.95).

Nous montrons dans ce paragraphe l'influence de la variable α , sur les conditions de stabilisabilité établies dans le théorème 4.3.1. Nous faisons également des comparaisons avec certains résultats établis au préalable par [Cao et Lin, 2004].

Nous dégageons ainsi les conclusions suivantes :

- Pour des valeurs de variations fixes $\dot{f}_{\max} = 0.2$ et $\dot{k}_{\max} = 0.2$, si nous appliquons le théorème 4 dans [Cao et Lin, 2004], le système (3.92) est faisable pour $\delta_{\max} = 3.2$. Si nous augmentons cette valeur, il ne l'est plus.
- Pour les mêmes valeurs \dot{f}_{\max} , \dot{k}_{\max} et pour $\delta_{\max} = 3.3$, avec une valeur donnée de α , $\alpha = 10$, si nous appliquons la condition donnée par (4.22), le système (3.92) devient faisable, et stabilisable pour un contrôle par retour d'état $K = [-346.3862 \quad -448.4075]$.

En plus, nous montrons dans les figures suivantes, avec une loi de commande donnée par $u(t) = Kx(t)$ en prenant un gain statique de la valeur $K = [-346.3862 \quad -448.4075]$, que le système (3.92) peut être stabilisable.

La commande est donnée dans la figure 4.2, et les composantes de l'état dans la figure 4.3. En effet, le frottement f et la raideur k sont pris comme $f(t) = 0.245 + 0.155\exp(-4t)\sin(10t)$ et $k(t) = 0.24 + 0.15\exp(-4t)\cos(10t)$.

Nous montrons ainsi l'efficacité de l'utilisation du paramètre α pour certains tests non faisables aussi bien pour la stabilité que pour la stabilisabilité, appliqués à un système LPV à incertitudes à structure affine.

4.4 Commande H_2 par retour d'état pour systèmes incertains LPV polytopiques

Dans les paragraphes qui ont précédé, nous avons abordé le problème de stabilisabilité des systèmes LPV. Dans le présent paragraphe, outre la stabilisabilité, nous traitons la notion de performances pour ce même type de systèmes. Le système que nous considérons est le système suivant :

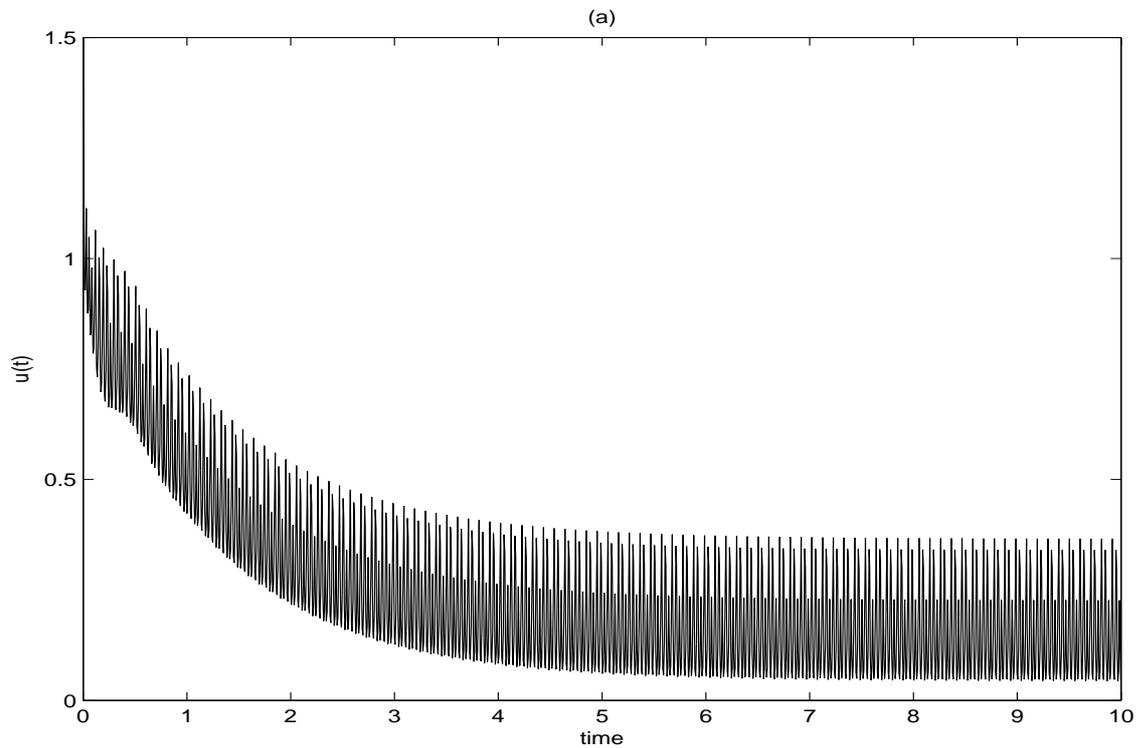


FIGURE 4.2 – Allure de la Loi de commande appliquée au système (3.92)

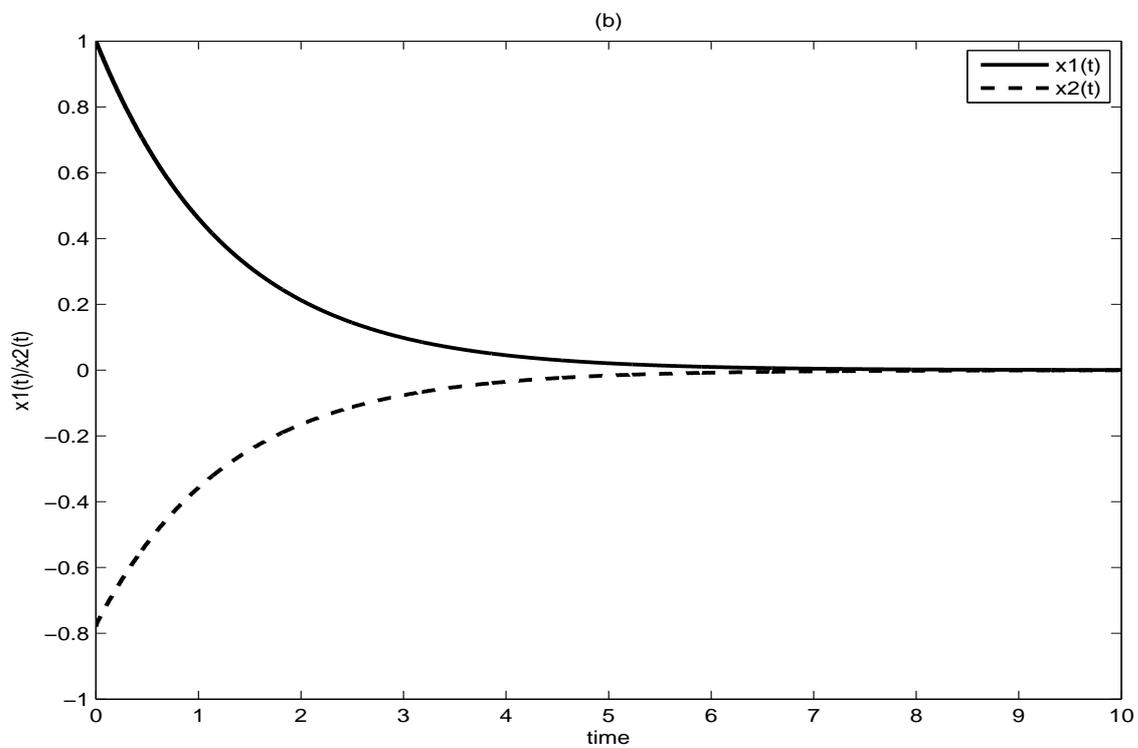


FIGURE 4.3 – Allure des composantes de l'état pour le système (3.92)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1(\theta(t))x(t) + D_{12}u(t)\end{aligned}\quad (4.23)$$

Où $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ est l'état, $w(t) \in \mathfrak{R}^q$ une perturbation exogène et $z(t) \in \mathfrak{R}^p$ une fonction signal incluant une combinaison de l'état. $u(t)$ est l'entrée de commande. Les matrices $A(\theta(t))$, $B_1(\theta(t))$ et $C_1(\theta(t))$ ont des structures polytopiques comme présenté dans le système (3.97).

Remarque :

En ce qui concerne les matrices B_2 et D_{12} ; on les prend temps-variant si nous réalisons un contrôle par retour d'état statique; on les prend constantes si nous réalisons un contrôle par retour d'état à gain scheduling.

4.4.1 Commande H_2 par retour d'état à gain scheduling

L'approche que nous proposons est la suite de l'approche donnée dans le cadre d'analyse H_2 pour ces systèmes, dans le paragraphe 3.5.1 par le théorème 3.5.1.

Afin de stabiliser le système en boucle fermée, un retour d'état à gain scheduling est synthétisé tel que :

$$K(\theta(t)) = \sum_{i=1}^N \theta_i(t)K_i \quad , \theta_i(t) \geq 0 \quad , \sum_{i=1}^N \theta_i(t) = 1 \quad (4.24)$$

accomplit la loi de commande $u(t) = K(\theta(t))x$. L'objectif de la synthèse étant que les contrôleurs garantissent au mieux la minimisation de la valeur γ de la norme H_2 . En remplaçant la loi de commande dans le système en boucle ouverte donné par 4.21, le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= (A(\theta(t)) + B_2)K(\theta(t))x(t) + B_1(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= (C(\theta(t)) + D_{12}K(\theta(t)))x(t)\end{aligned}\quad (4.25)$$

Les nouvelles conditions sont données dans le théorème (4.4.1)

Théorème 4.4.1. *Étant donné le système 4.25, sa norme H_2 est inférieure à une valeur γ , s'il existe des matrices symétriques définies positives P_i , des matrices P_j , P_k et des matrices F , R_i , telles que pour un paramètre α non négatif, les LMIs suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + A_i F + B_2 R_i + F^T A_i^T + R_i^T B_2^T & P_i - F^T + \frac{1}{\alpha} A_i F + \frac{1}{\alpha} B_2 R_i & B_{1i} \\ P_i - F + \frac{1}{\alpha} F^T A_i^T + \frac{1}{\alpha} R_i^T B_2^T & -\frac{1}{\alpha} (F^T + F) & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.26)$$

$$\begin{pmatrix} F + F^T - P_i & F^T C_i^T + R_i^T D^T \\ C_i F + R_i F & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (4.27)$$

$$\begin{aligned} \text{Trace } W_i &< \gamma^2 \\ i = 1, \dots, N, j = 1 \dots N, k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.28)$$

La commande par retour d'état s'écrit alors $K = \sum_{i=1}^N \theta_i(t) K_i$ avec $K = \text{gain scheduling}$ à $K_i = R_i F^{-1}$

Preuve :

Si nous considérons les LMIs données par (3.100)-(3.101)-(3.102), en prenant $F_j = G_j = F$, nous remplaçons les matrices A_i et A_i^T respectivement par $A_i + B_2 K_i$ et $A_i^T + K_i^T B_2^T$. Si nous remplaçons C_{1i} et C_{1i}^T respectivement par $C_{1i} + D_{12} K_i$ et $C_{1i}^T + K_i^T D_{12}^T$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + A_i F + B_2 K_i F + F^T A_i^T + F^T K_i^T B_2^T & (2,1)^T & (3,1)^T \\ P_i - F + \frac{1}{\alpha} F^T A_i^T + \frac{1}{\alpha} F^T K_i^T B_2^T & -\frac{1}{\alpha} (F^T + F) & (3,2)^T \\ B_{1i}^T & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.29)$$

$$\begin{pmatrix} F + F^T - P_i & F^T C_{1i}^T + F^T K_i^T D_{12}^T \\ C_{1i} F + D_{12} K_i F & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \text{Trace } W_i &< \gamma^2 \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.31)$$

En remplaçant $K_i F$ par R_i et $F^T K_i^T$ par R_i^T , nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} b(P_j - P_k) + A_i F + B_2 R_i + F^T A_i^T + R_i^T B_2^T & P_i - F^T + \frac{1}{\alpha} A_i F + \frac{1}{\alpha} B_2 R_i & B_{1i} \\ P_i - F + \frac{1}{\alpha} F^T A_i^T + \frac{1}{\alpha} R_i^T B_2^T & -\frac{1}{\alpha} (F^T + F) & 0 \\ B_{1i}^T & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

$$\begin{pmatrix} F + F^T - P_i & F^T C_{1i}^T + R_i^T D_{12}^T \\ C_{1i} F + R_i F & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \text{Trace } W_i &< \gamma^2 \\ i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.34)$$

Afin de mettre en évidence l'efficacité des conditions établies, nous les testons avec un exemple numérique pris de [Xie, 2005].

4.4.2 Exemple numérique :

Nous considérons le problème de contrôle des angles d'un système satellitaire composé de deux corps rigides joints par un lien flexible [Xie, 2005]. Le système en question a la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -f & f \\ k & -k & f & -f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ z &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} u \end{aligned} \quad (4.35)$$

Où k et f sont un couple constant et un amortissement visqueux qui varient dans les intervalles incertains suivants $k \in [0.09 \quad 0.4]$ et $f \in [0.0038 \quad 0.04]$. Les paramètres variants α_i sont tels que $\alpha_1 = xy$, $\alpha_2 = (1-x)y$, $\alpha_3 = x(1-y)$ et $\alpha_4 = (1-x)(1-y)$;

Où $x(t) = 0.4 - \frac{k(t)}{0.4} - 0.09$ et $y(t) = f(t) - \frac{0.0038}{0.04} - 0.0038$.

L'idée est de comparer l'approche quadratique et l'approche par FLDP lors de la réalisation d'un retour d'état par gain scheduling sur le système donné par (4.35). Tout au long du contrôle, le but étant d'obtenir la valeur minimale possible de γ . On peut voir que le paramètre α influence les résultats obtenus.

- Pour la solution se basant sur la stabilité quadratique, nous obtenons une norme H_2 minimale de la valeur $\gamma = 2.310$. Le gain qui assure ces résultats est donné par $K_1(\theta(t))$ tel que

$$\begin{aligned} K_{11} &= \begin{pmatrix} -26.6352 & -64.4233 & -8.6142 & -243.8681 \end{pmatrix}; \\ K_{12} &= \begin{pmatrix} -27.6661 & 673.1734 & -8.9231 & -258.0239 \end{pmatrix}; \\ K_{13} &= \begin{pmatrix} -32.0842 & -66.4792 & -7.9596 & -246.2630 \end{pmatrix}; \\ K_{14} &= \begin{pmatrix} -6.3691 & -94.2469 & -7.3103 & -70.0275 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Avec la méthode proposée ici par le théorème 4.4.1, pour la condition paramétrée par le réel α , pour une synthèse de performance H_2 , le niveau minimal obtenu de la norme H_2 est donné par : $\gamma = 1.595$; avec une valeur de $b = 0.4$ et une valeur de $\alpha = 20$. Le gain qui permet ceci est donné par $K_2(\theta(t))$ tel que :

$$\begin{aligned} K_{21} &= \begin{pmatrix} -18.4486 & 686.2302 & -6.9139 & -199.2230 \end{pmatrix}; \\ K_{22} &= \begin{pmatrix} -16.4051 & -80.2605 & -7.3162 & -180.8624 \end{pmatrix}; \\ K_{23} &= \begin{pmatrix} -19.8184 & -51.9431 & -5.5597 & -139.6763 \end{pmatrix}; \\ K_{24} &= \begin{pmatrix} -20.0549 & -58.2590 & -6.5256 & -150.3257 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le résultat principal est que l'approche proposée dans le théorème 4.4.1 conduit à une valeur γ de la norme H_2 inférieure à celle donnée par l'approche quadratique. Les améliorations sont également apportées par le réel α paramétrisant les conditions. Dans une partie ultérieure, nous réalisons des simulations numériques afin de comparer la propriété de rejet de perturbation externe entre les deux types de contrôleurs (l'approche quadratique et l'approche par FLDP). Le couple constant k et l'amortissement visqueux f sont donnés respectivement par :

$$k(t) = 0.24 + 0.15e^{-4t} \cos(10t) \quad (4.36)$$

$$f(t) = 0.245 + 0.155e^{-4t} \sin(10t) \quad (4.37)$$

La perturbation externe est prise en tant que signal rectangulaire tel que :

$$w(t) = \begin{cases} 0 & , 0 < t < 1 \\ 1 & , 1 \leq t < 2 \\ 0 & , t \geq 2 \end{cases} \quad (4.38)$$

Avec deux types de contrôleurs par retour d'état à gain scheduling, l'un par approche quadratique et l'autre par l'approche FLDP, la réponse $z(t)$ du système en boucle fermée dans le cas d'une perturbation externe $w(t)$ est donnée dans la figure 4.4.

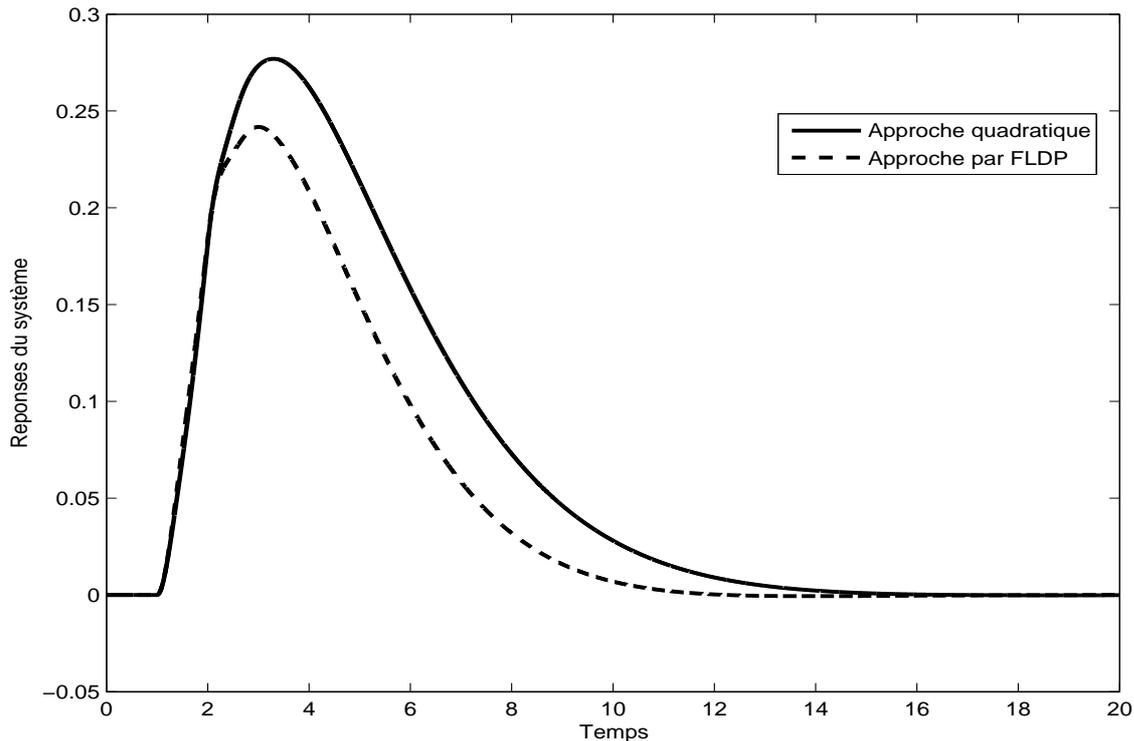


FIGURE 4.4 – Réponses du système lors d'une perturbation externe $w(t)$

Les deux courbes correspondent respectivement à l'approche quadratique et à l'approche se basant sur les FLDP. Nous pouvons à partir de la figure, voir que la convergence du système vers zéro est plus rapide dans le cas de contrôleurs basés sur la méthode FLDP ; ceci confirme l'apport de l'approche proposée dans le théorème 4.4.1.

4.5 Conclusion du chapitre

Après avoir présenté dans le chapitre précédent les différentes approches que nous avons proposées dans le cadre de l'analyse robuste de systèmes incertains LPV, nous présentons dans ce chapitre les approches que nous avons proposées dans le cadre de synthèse robuste de contrôleurs pour systèmes LPV. Les nouvelles conditions sont données sous forme de LMIs.

Dans ce cadre, les nouvelles formulations pour les dérivées des paramètres incertains sont exploitées.

Conclusion et perspectives des travaux

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la stabilité et stabilizabilité robustes des systèmes LPV.

Tout d'abord, dans une première partie, une étude bibliographique est proposée dans le cadre des systèmes incertains Linéaires Temps Invariants (LTI). Les différentes techniques d'analyse et de synthèse pour ces systèmes sont largement présentées. Dans une seconde partie, une étude bibliographique est développée pour les systèmes LPV, étude concernant des conditions de stabilité quadratique, la notion de stabilité au sens de Lyapunov, ainsi que l'utilisation massive des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres (FLDP) au début des années 2000.

Cet effort bibliographique nécessaire a permis de positionner nos contributions par rapport aux travaux déjà existants.

L'originalité des travaux proposés est décrite dans les deux derniers chapitres, où le lecteur peut trouver de nouvelles conditions de stabilité et de stabilisabilité robuste pour systèmes incertains LPV polytopiques et affines. Des résultats en performance sont aussi proposés. Les conditions obtenues sont formulées comme des contraintes LMIs. Également, l'utilisation des variables de relaxation ainsi que les techniques de séparation ont été utilisées pour arriver à des conditions numériquement testables. Nous avons mis en relief l'apport des nouvelles approches par rapport à l'approche quadratique où l'utilisation d'une fonction de Lyapunov unique et les résultats présentés montrent une amélioration du conservatisme engendré par les approches classiques. C'est dans l'objectif de réduire ce conservatisme que nous avons travaillé sur l'utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres. Nous avons par ailleurs synthétisé des correcteurs à gain scheduling. Dans les structures choisies, nous avons adopté des structures identiques à celles proposées dans la littérature. Le problème de trouver une représentation adéquate de dérivée temporelle du paramètre incertain est également abordé. Les exemples numériques ont permis de tester la pertinence des approches proposées. Toutes nos simulations sont réalisées à partir de MATLAB.

On peut conclure que l'utilisation des Fonctions de Lyapunov Dépendant des Paramètres dans les problèmes étudiés, mène à une réduction significative du conservatisme des conditions d'analyse de stabilité robuste et de synthèse robuste.

Également, le recours à des approches de modélisation de la dérivée du paramètre temps-variant ; où cette dérivée est indépendante de l'incertitude même, apporte plus de liberté lors de l'analyse ou synthèse du système LPV en question et contribue à la convexification du problème.

Un autre point important à souligner est l'intérêt de la parametrization des LMIs formu-

lées, par un réel positif non nul. Ceci a permis le fait que les conditions avancées puissent contenir bon nombre de conditions déjà existant dans la littérature. Les approches que nous présentons sont des cas généraux de problèmes déjà traités.

Pour terminer, nous mentionnons les perspectives suivantes pour notre travail :

- Nous avons traité dans nos travaux des systèmes où les incertitudes sont soit polytopiques soit affines. Il serait intéressant d'aborder des systèmes à structures bornée en norme rationnelles ou LFT...
- Également, nous avons pu établir des conditions d'analyse de performance H_2 pour systèmes LPV, il serait intéressant d'aborder le problème de synthèse dans le même contexte.
- D'autre part, nous signalons que tout le travail réalisé dans le cadre de cette thèse est dans le domaine continu. Une des idées serait d'étendre les résultats déjà établis, au domaine discret : formuler de nouvelles conditions d'analyse ainsi que proposer de nouvelles approches de commande par retour d'état à gain scheduling pour ces systèmes. On pourrait se référer à comme point de départ les travaux de De Caigny [DeCaigny *et al.*, 2008], [DeCaigny *et al.*, 2009], [DeCaigny *et al.*, 2011]

Annexe

A.1 Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs

A.1.1 Histoire des LMIs

[Boyd *et al.*, 1994]

L'histoire des LMIs dans l'analyse des systèmes dynamiques date depuis plus de 100 ans. L'histoire a commencé dans les années 1890, quand Lyapunov a publié ses travaux introduisant ce que l'on appelle de nos jours la théorie de Lyapunov. Il a montré que l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \tag{A.1}$$

est stable (c'est à dire que toutes les trajectoires convergent vers zero) si et seulement si il existe une matrice définie positive P tel que :

$$A^T P + P A < 0 \tag{A.2}$$

La condition $P > 0$, $A^T P + P A < 0$ est ce que nous appelons maintenant l'inégalité de Lyapunov en P , qui est une forme particulière de LMI.

Lyapunov a également montré que cette première LMI peut être explicitement résolue. En effet, nous pouvons choisir n'importe quelle $Q = Q^T > 0$ puis résoudre l'équation linéaire $A^T P + P A = -Q$ en P , qui est définie positive si le système (A.1) est stable. En résumé, la première LMI utilisée dans l'objectif d'analyser la stabilité d'un système dynamique est l'inégalité de Lyapunov (1.4).

L'étape qui a suivi fut en 1940 où Lur'e, Postnikov et d'autres en l'union soviétique ont appliqué les méthodes de Lyapunov à certains problèmes pratiques spécifiques en ingénierie de contrôle, spécialement le problème de stabilité d'un système de contrôle avec non linéarité dans les actionneurs.

Et même si ils n'avaient pas formé explicitement des inégalités matricielles, le critère de stabilité qui leur est associé a la forme de LMIs. Nous pouvons ainsi dire que Lur'e et ses associés étaient les premiers à appliquer les méthodes de Lyapunov aux problèmes pratiques d'ingénierie au contrôle. En effet les LMIs résultantes ont été réduites à des inégalités polynomiales qui ont été résolues à la "main" (pour de petits systèmes). S'en est suivi après, au début des années 1960, les travaux de Yakubovich, Popov, Kalman, et d'autres chercheurs qui ont réussi à réduire la solution des LMIs posant le problème de Lur'e en un simple critère graphique, en se basant sur le lemme "positive real lemma (PR)". L'objectif principal était alors de démontrer comment résoudre une famille certaine de LMIs par des méthodes graphiques. De certains travaux ayant démontré l'important

rôle des LMIs en théorie de contrôle, on peut citer [Yakubovich, b], [Yakubovich, a] et [Yakubovich, 1967]. Puis en 1970, les équations algébriques de Ricatti (ARE) devenaient un outil remarquable de résolution des LMIs [Willems,].

Les travaux se sont succédés par la suite et on mentionne qu'au début des années 1980, il y eu un développement de la résolution des LMIs par ordinateur via la programmation convexe [Pyatnitskii et Shorodinskii, 1982]. En fin des années 1980 (1988), Nestor et Nemirovski développèrent les algorithmes de point intérieur pour résoudre les LMIs.

articlesturm99.

A.1.2 Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs

[Boyd *et al.*, 1994]

Une inégalité matricielle linéaire (en terminologie anglo saxone Linear Matrix Inequality (LMI)), a la forme suivante :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^N x_i F_i > 0 \quad (\text{A.3})$$

Où $x \in \mathfrak{R}^M$ est la variable, et les matrices $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{N \times N}$; $i = 0, \dots, N$ sont données. Le symbole d'inégalité dans (A.3) signifie que $F(x)$ est définie positive, c'est à dire $u^T F(x) u > 0$ pour tout $u \in \mathfrak{R}^N$ non nul. Bien évidemment , la LMI (A.3) est équivalente à un ensemble de N inégalités polynomiales en x , cela veut dire que the leading principal minors de $F(x)$ doivent être positifs. Nous pourrons également rencontrer des LMIs non strictes , de la forme :

$$F(x) \geq 0 \quad (\text{A.4})$$

La LMI stricte (A.3) et la LMI non stricte (A.4) sont proches. Nous utilisons dans ce mémoire les LMIs strictes de type (A.3). La LMI (A.3) est une contrainte convexe, c'est à dire que l'ensemble $\{x \mid F(x) > 0\}$ est convexe. Même si la LMI (A.3) paraît avoir une forme spécialisée, elle peut représenter une large variété de contraintes convexes en x . En particulier, les inégalités linéaires, les inégalités quadratiques (convexes) et les contraintes que l'on rencontre dans la théorie de contrôle, comme les inégalités de Lyapunov et les inégalités quadratiques convexes, peuvent toutes être transformées en la forme d'une LMI.

A.1.3 Les Inégalités Matricielles Linéaires LMIs paramétrées

[Apkarian et Tuan, 2000]

Une grande variété des problèmes de la théorie de contrôle des systèmes relèvent de la classe des Inégalités Matricielles Linéaires (LMIs); qui sont les LMIs dont les coefficients dépendent de paramètres appartenant à un ensemble compact. Ces LMIs sont appelées Inégalités Matricielles Linéaires Paramétrées (PLMIs). Ce type de problèmes, même si convexes, impliquent un ensemble infini de contraintes LMIs. La faisabilité des LMIs paramétrées reste un problème à haute complexité et est considéré comme NP-hard. Des techniques de relaxation sont proposées pour traduire ce problème en un problème LMI standard. L'une des techniques investiguées dans le but de résoudre des

problèmes LMIs en problèmes LMIs conventionnels est la S-procédure. Dans cette approche, le 'scaling' et les multiplieurs sont utilisés dans le but d'éliminer à la LMI la dépendance en fonction du paramètres. Néanmoins cette méthode pose un problème, celui du conservatisme des conditions posées, ainsi que l'effort de calcul très important. L'axe d'application des LMIs est large et dépasse le domaine de la théorie de commande robuste. Dans [Tal et Nemirovski,] et [Tal et Nemirovski, 1995], BEN-TAL et NEMIROVSKI posent le fondement de la programmation robuste convexe et investissent sa tractabilité théorique, en conjonction avec l'analyse de certains programmes convexes incertains génériques. Le même ensemble d'idées est appliqué à un problème de design de topologies dans [Tal et Nemirovski, 1997]. Également, dans [Oustry *et al.*, pear], les auteurs proposent une étude des propriétés de régularité des solutions de PLMIs utilisant la S-procédure, et discutent ses implications pour un nombre de sujets comme : la programmation linéaire, l'interpolation polynomiale, la programmation entière... Des techniques alternatives sont développées dans [Tuan et Apkarian, 1998] utilisant ainsi soit des approximations convexes soit représentations d.c. (difference convex).

A.2 Les lemmes et outils mathématiques

A.2.1 Complément de Schur

Soit :

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

avec A et B inversible. On a :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} > 0 \iff \begin{cases} A > 0 & \text{et} & D - CA^{-1}B > 0 \\ D > 0 & \text{et} & A - BD^{-1}C > 0 \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

A.2.2 Le lemme de Finsler

L'utilisation de ce lemme dans le cadre de notre travail, contribue à l'introduction de variables additionnelles permettant de réduire le conservatisme engendré par les conditions proposées au préalable.

Lemme A.2.1. *Soient des matrices $Q = Q^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ et $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tel que $\text{rang}(R) < n$. Les expressions suivantes sont équivalentes :*

- i) $R_{\perp}^T Q R_{\perp} < 0$ où R_{\perp} représente le complément orthogonal de R
- ii) $\exists X \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ tel que :

$$Q + XR + R^T X^T < 0 \quad (\text{A.7})$$

A.2.3 Lemme de projection

Lemme A.2.2. *Étant donnée une matrice $\Psi \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ et deux matrices symétriques P, Q de dimensions en colonnes m , il existe X tel que la LMI suivante est vérifiée :*

$$\Psi + P^T X^T Q + Q^T X P < 0 \quad (\text{A.8})$$

Si et seulement si les inégalités de projection sont satisfaites.

$$N_p^T \Psi N_p < 0; N_Q \Psi N_Q^T < 0 \quad (\text{A.9})$$

Où N_p et N_Q désignent arbitrairement les bases des noyaux de P et Q respectivement.

Le lemme de projection permet de démontrer les résultats suivants :

A.2.4 Lemme dérivant du lemme de projection

Lemme A.2.3. Soit Φ une matrice symétrique, et N, M des matrices de dimensions appropriées. Les hypothèses suivantes sont équivalentes :

i) $\Phi < 0$ et

$$\Phi + NM^T + MN^T < 0 \quad (\text{A.10})$$

ii) Il existe une matrice D tel que :

$$\begin{pmatrix} \Phi & M + ND \\ M^T + D^T N^T & -D - D^T \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.11})$$

A.3 Rappel des théorèmes pris d'autres articles

A.3.1 Théorème 2 dans ([Xie, 2005])

Soit le système LPV polytopique donné par (A.12) :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))w(t) \\ z(t) &= C(\theta(t))x(t) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Le système est stable et sa norme H_2 est inférieure à une valeur donnée de σ tel que le théorème suivant (A.3.1) est vérifié.

Théorème A.3.1. Étant donné le système (A.12); son coût H_2 garanti est inférieur à une valeur donnée de σ s'il existe une matrice symétrique définie positive P_i , des matrices W_i, P_{tk}, Q_j et un scalaire positif $r > 0$ satisfaisant :

$$\begin{pmatrix} A_i Q_j + Q_j^T A_i^T + P_{tk} & P_i - Q_j^T + r A_i Q_j & B_i \\ P_i - Q_j + r Q_j^T A_i^T & -r(Q_j + Q_j^T) & 0 \\ B_i^T & 0 & -I \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{pmatrix} Q_j + Q_j^T - P_i & Q_j^T C_i^T \\ C_i Q_j & W_i \end{pmatrix} > 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\text{Trace } W_i < \sigma^2 \quad (\text{A.15})$$

$i=1, \dots, N; j=1, \dots, N$ et $k=1, \dots, N$

A.3.2 Théorème 2 dans ([Cao et Lin, 2004])

Soit le système donné par (A.16) :

$$\dot{x}(t) = A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \quad (\text{A.16})$$

Où $A(\theta(t))$ et $B(\theta(t))$ ont des structures polytopiques.

$$[AB] := [A(\theta)B(\theta)] : [A(\theta)B(\theta)] = \sum \theta_i [A_i B_i], \quad \theta_i \geq 0, \sum \theta_i = 1 \quad (\text{A.17})$$

Une condition de stabilisabilité robuste est donnée par le théorème (A.3.2).

Théorème A.3.2. *Le système incertain (A.16) est robustement stabilisable dans le domaine incertain (A.17) s'il existe des matrices $X_{1i} > 0$, X_2 et Y telles que :*

$$\begin{pmatrix} X_2^T A_i^T + A_i X_2 + Y^T B_i^T + B_i Y + v_i X_{1i} & (2, 1)^T \\ A_i X_2 + B_i Y - X_{1i} + X_2^T & -X_2 - X_2^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Pour tout $i \in [1, r]$. Le gain stabilisant par retour d'état est donné par : $F = Y X_2^{-1}$

A.3.3 Théorème 3 dans ([Cao et Lin, 2004])

Nous considérons toujours le système (A.16) avec $A(\theta(t))$ et $B(\theta(t))$ à structures affines. Nous considérons que le paramètre θ et son taux de variation $\dot{\theta}$ vérifient :

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i] \quad (\text{A.19})$$

Et :

$$\dot{\theta}_i \in [\underline{v}_i, \bar{v}_i] \quad (\text{A.20})$$

Une condition de stabilité robuste est donnée par le théorème (A.3.3).

Théorème A.3.3. *Le système incertain (A.16) est affinement quadratiquement stable dans le domaine incertain (A.19)-(A.20) si et seulement s'il existe $r+1$ matrices $P_{10}, P_{11}, \dots, P_{1r}, P_2$ et P_3 telles que :*

$$P_1(v) = P_{10} + v_1 P_{11} + \dots v_r P_{1r} > 0 \quad (\text{A.21})$$

$$L(v, \omega) = \begin{pmatrix} L_0(v) + P_1(\omega) - P_{10} & (2, 1)^T \\ P_3^T A(v) + P_1(v) - P_2 & -P_3 - P_3^T \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

Pour tout $(v, \omega) \in V, W_0$:

$$L_0(v) = A^T(v)P_2 + P_2^T A(v) \quad (\text{A.23})$$

A.3.4 Théorème 4 dans ([Cao et Lin, 2004])

Théorème A.3.4. *Le système incertain (A.16) est affinement quadratiquement stabilisable dans le domaine incertain (A.19)-(A.20) s'il existe $r+1$ matrices $X_{10}, X_{11}, \dots, X_{1r}, X_2$ et Y telles que :*

$$X_{10} + v_1 X_{11} + \dots + v_r X_{1r} > 0 \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{pmatrix} L_0 + X_1(\omega) - X_{10} & (2, 1)^T \\ A(v)X_2 + B(v)Y + X_1(v) - X_2^T & -X_2 - X_2^T \end{pmatrix} < 0 \quad (\text{A.25})$$

Pour tout $(v, \omega) \in V, W_0$:

$$L_0 = X_2^T A^T(v) + A(v)X_2 + B(v)Y + Y^T B(v) \quad (\text{A.26})$$

Le gain stabilisant par retour d'état s donné par $F = YX_2^{-1}$

Bibliographie

- [Ackermann, 1993] ACKERMANN, J. (1993). Robust control : Systems with uncertain physical parameters. *Springer*, page 456–464.
- [Alizadeh *et al.*, 1994] ALIZADEH, F., HAEBERLY, J.-P. et OVERTON, M. (1994). A new primal-dual interior-point method for semidefinite programming. *In Proceeding 5th SIAM Conference on Applied Linear Algebra, Snowbird, UT.*
- [Almeida *et al.*, 2001] ALMEIDA, H., BHAYA, A., FALCAO, D. et KASZKUREWICZ, E. (2001). A team algorithm for robust stability analysis and control design of uncertain time-varying linear systems using piecewise quadratic lyapunov functions. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 11(4):357–371.
- [Anderson et Moore, 1989] ANDERSON, B. et MOORE, J. (1989). Optimal control : Linear quadratic methods. *Prentice Hall International Editions.*
- [Aouani *et al.*, 2009a] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2009a). New robust stability and stabilizability conditions for linear parameter time varying polytopic systems. *2009 3rd International Conference on Signals, Circuits and Systems (SCS), 6-8 Nov. 2009 , Djerba, Tunisie*, pages 1–6.
- [Aouani *et al.*, 2009b] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2009b). Robust control analysis and synthesis for lpv systems under affine uncertainty structure. *6th IEEE Conference on Systems, Signals and Devices, 2009. SSD '09 March 2009, Djerba, Tunisie*, pages 1–5.
- [Aouani *et al.*, 2009c] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2009c). Stability analysis and static state feedback synthesis for lpv systems under polytopic uncertainty structure. *10th International conference on Sciences and Techniques of Automatic control computer engineering, STA 2009, December 2009, Hammamet Tunisie.*
- [Aouani *et al.*, 2010a] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2010a). Parameter dependent lyapunov functions for stability of linear parameter varying systems. *2010 IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems ICECS 2010, December 12-15, 2010, Athènes, Grèce*, pages 1–4.
- [Aouani *et al.*, 2010b] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2010b). Robust control analysis and synthesis for lpv systems under affine uncertainty structure. *Transactions on Systems, Signals and Devices, 2010. TSSD'10.*
- [Aouani *et al.*, 2011] AOUANI, N., SALHI, S., GARCIA, G. et KSOURI, M. (2011). H2 analysis for lpv systems by parameter-dependent lyapunov functions. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 28(8).
- [Apkarian *et al.*, 1993] APKARIAN, P., BIANNIC, J. et GAHINET, P. (1993). Linear parameter-varying control and its application to a turbofan engine. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 18(3):532–538.

- [Apkarian et Gahinet, 1995] APKARIAN, P. et GAHINET, P. (1995). A convex characterization of gainscheduled h_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5):853–864.
- [Apkarian et Gahinet, 1998] APKARIAN, P. et GAHINET, P. (1998). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 6(1):21–32.
- [Apkarian *et al.*, 1995] APKARIAN, P., GAHINET, P. et BECKER, G. (1995). Selscheduled h, control of linear parameter varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9): 1251– 1261.
- [Apkarian et Tuan, 2000] APKARIAN, P. et TUAN, H. (2000). Parameterized lmis in control theory. *SIAM journal on control and optimization*, 38(4):1241–1264.
- [Apkarian *et al.*, 2001] APKARIAN, P., TUAN, H. et BERNUSSOU, J. (2001). Continuous time analysis, eigenstructure assignment and h_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (lmi) characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(46): 1941–1946.
- [Arzelier, 2004] ARZELIER, D. (2004). Théorie de lyapunov, commande robuste et optimisation. *Mémoire d'Habilitation à Diriger les Recherches*.
- [Arzelier *et al.*, 2002] ARZELIER, D., BERNUSSOU, J. et PEAUCELLE, D. (2002). Fonctions de lyapunov dépendant des paramètres pour l'analyse et la synthèse robuste.
- [Arzelier *et al.*, 2003] ARZELIER, D., PEAUCELLE, D. et SALHI, S. (2003). Robust static output feedback stabilization for polytopic uncertain systems : Improving the guaranteed performance bound. *ROCOND, Milan, June 2003*.
- [Athans, 1986] ATHANS, M. (1986). A tutorial on the lqg/ltr method. *American Control Conference ACC'86*, pages 1289–1296.
- [Bachelier, 1998] BACHELIER, O. (1998). Commande des systèmes linéaires incertains placement de pôles robustes en d-stabilité. 98433.
- [Balas, 2002] BALAS, G. (2002). Linear parameter-varying control and its application to a turbofan engine. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 12:763–796.
- [Barmish, 1985] BARMISH, B. (1985). *Journal of Optimization Theory and Applications*.
- [Becker et Packard, 1994] BECKER, G. et PACKARD, A. (1994). Robust performance of linear parametrically varying systems using parametrically dependent linear feedback. *Systems and Control Letters*, 23(3):205–215.
- [Becker *et al.*, 1993] BECKER, G., PACKARD, A., PHILBRICK, D. et BLAS, G. (1993). Control of parametrically-dependent linear systems : a single quadratic lyapunov approach. *Proceeding of ACC, 1993*, pages 2795–2799.
- [Benton et Smith, 1999] BENTON, R. et SMITH, D. (1999). A noniterative lmi-based algorithm for robust static-output-feedback stabilization. *International Journal of Control*, 72(14):1322–1330.
- [Bernussou *et al.*, 1989] BERNUSSOU, J., GEROMEL, J. et PERES, P. (1989). A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems and Control Letters*, 13(4):56–72.
- [Bernussou et Oustaloup, 2001] BERNUSSOU, J. et OUSTALOUP, A. (2001). Conception de commandes robustes. *Hermes Science Publications*.

- [Bhattacharyya *et al.*, 1995a] BHATTACHARYYA, S., CHAPPELLAT, H. et KEEL, L. (1995a). Robust control : The parametric approach. *Prentice-Hall Publishing Co.*, NJ, USA(Upper Saddle River).
- [Bhattacharyya *et al.*, 1995b] BHATTACHARYYA, S., CHAPPELLAT, H. et KEEL, L. (1995b). Robust control : The parametric approach. *Prentice-Hall Publishing Co.*, Upper Saddle River, NJ, USA.
- [Biannic, 1996] BIANNIC, J. (1996). Commande robuste des systèmes à paramètres variables : application en aéronautique. *Rapport*.
- [Bilman, 2005] BILMAN, P. (2005). Stabilization of lpv systems. In *Positive Polynomials in Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences*, Springer, 312:103–116.
- [Blanchini, 1995] BLANCHINI, F. (1995). Nonquadratic lyapunov functions for robust control. *Automatica*, 31(3):451–461.
- [Bliman, 2004] BLIMAN, P. (2004). A convex approach to robust stabilisability for linear systems with uncertain scalar parameters.
- [Bouali, 2008] BOUALI, A. (2008). Approche descripteur pour l'analyse et la commande des systèmes lpv rationnels. *Mémoire de thèse*.
- [Bouali *et al.*, 2008] BOUALI, A., YAGOUBI, M. et P.CHEVREL (2008). H2 gain scheduling control for rational lpv systems using the descriptor framework. *Proceeding of the 47th IEEE Conference on Decision and Control, Cancun, Mexico December 9-11, 2008*.
- [Boyd et Yang, 1989] BOYD, B. et YANG, Q. (1989). Structured and simultaneous lyapunov functions for system stability problems. *International Journal of Control*, 49:2215–2240.
- [Boyd et Ghaoui, 1993] BOYD, S. et GHAOUI, L. E. (1993). Methods of centers for minimizing generalized eigenvalues. *Linear Algebra*, 188(10):63–111.
- [Boyd *et al.*, 1994] BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E. et BALAKRISHNAN, V. (1994). Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM, Studies in Applied Mathematics*, Philadelphia, PA, 15.
- [Briat, 2010] BRIAT, C. (2010). Lpv systems with stochastic parameters. *KTH, Division of Optimization and Systems Theory, Stockholm, Sweden, April 27th 2010 K.U. Leuven, Optec*.
- [Cao et Lin, 2004] CAO, Y. et LIN, Z. (2004). A descriptor system approach to robust stability analysis and controller synthesis. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 49(11):2081–2084.
- [Cao et Lin, 2006] CAO, Y. et LIN, Z. (2006). An anti-windup design for polytopic systems by a parameter-dependent lyapunov function approach. *International Journal of Systems Science, Taylor Francis*, 37(2):129 – 139.
- [Chang, 1972] CHANG, S.S.L., P. T. (1972). Adaptive guaranteed cost control systems with uncertain parameters.
- [Chesi *et al.*, 2003] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A. et VICINIO, A. (2003). Robust stability for polytopic systems via polynomially parameter-dependent lyapunov functions. *42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 4670–4675.

- [Chesi *et al.*, 2004a] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A. et VICINIO, A. (2004a). Parameter dependent homogeneous lyapunov functions for robust stability of linear time varying systems. *43rd IEEE Conference on Decision and Control, Paradise Island, Bahamas*, 4:4095 – 4100.
- [Chesi *et al.*, 2004b] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A. et VICINIO, A. (2004b). Parameter dependent homogeneous lyapunov functions for robust stability of linear time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 7(49):1211–1216.
- [Chesi *et al.*, 2005] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A. et VICINIO, A. (2005). An lmi based technique for robust stability analysis of linear systems with polynomial parametric uncertainties. In *Henrion, D., Garulli, A., Positive polynomials in control, Lecture Notes in Control and Informations Sciences, London, Springer*, 312:87–101.
- [Chesi *et al.*, 2007] CHESI, G., GARULLI, A., TESI, A. et VICINIO, A. (2007). Robust stability of time-varying polytopic systems via parameter-dependent homogeneous lyapunov functions. *Automatica*, 43(2):309–316.
- [Chilali et Gahinet, 1996] CHILALI, M. et GAHINET, P. (1996). h_∞ design with pole placement constraints : an lmi approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3):358–367.
- [Colmenares, 1996] COLMENARES, W. (1996). Sur la robustesse des systèmes linéaires incertains : Approche quadratique, retour de sortie. *Mémoire de thèse*, (96414).
- [Colmenares et Henrion, 1995] COLMENARES, W. et HENRION, D. (1995). Necessary conditions and sufficient conditions for the quadratic stabilization by dynamic feedback of a class of uncertain systems. *Latin America Seminar on Advanced Control, Santiago*.
- [Courties, 1999] COURTIES, C. (1999). Sur la commande robuste et lpv de systemes a paramètres lenetement variables. *Mémoire de thèse*, 99552.
- [Daafouz, 1997] DAAFOUZ, J. (1997). Robustesse en performance des systèmes linéaires incertains : Placemen de pôles et coût garanti.
- [Daafouz *et al.*, 1997] DAAFOUZ, J., GARCIA, G. et TARBOURIECH, S. (1997). Synthèse de lois de commande robuste : stabilisabilité quadratique. *Rapport LAAS*, (97473).
- [Dahleh et Bobilo, 1996] DAHLEH, M. et BOBILO, I. (1996). Control of uncertain systems - a linear programming approach. *Chapitre 7 : Stability and performance robustness*, pages 145–145.
- [Darengosse et Chevrel, 2000] DARENGOSSE, C. et CHEVREL, P. (2000). Linear parameter varying controller design for active power filters. *IFAC Conference on Control Systems Design - Bratislava*.
- [Darengosse et Chevrel, 2002] DARENGOSSE, C. et CHEVREL, P. (2002). Expérimentation d'un observateur h_∞ lpv pour la machine asynchrone. *JESA*, 36(5):641–655.
- [de Souza et Trofino, 2006] de SOUZA, C. et TROFINO, A. (2006). Gain-scheduled h_2 controller synthesis for linear parameter varying systems via parameter-dependent lyapunov functions. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, (16):243–257.
- [DeCaigny *et al.*, 2008] DECAIGNY, J., CAMINO, J., OLIVEIRA, R., PERES, P. et SWEVERS, J. (2008). Gain scheduled h_2 and h_{∞} control of discrete time polytopic time-varying systems. *IET control Theory Appl.*

- [DeCaigny *et al.*, 2009] DECAIGNY, J., CAMINO, J., OLIVEIRA, R., PERES, P. et SWEVERS, J. (2009). Gain scheduled hinf control for discrete time polytopic lpv systems using homogenous polynomially parameter dependent lyapunov functions. *16th IFAC Symposium on robust control design*.
- [DeCaigny *et al.*, 2011] DECAIGNY, J., CAMINO, J., OLIVEIRA, R., PERES, P. et SWEVERS, J. (2011). Gain scheduled dynamic output feedback control for discrete time lpv systems. *International Journal of robust and non linear control*.
- [Doyle, 1989] DOYLE, J., G. K. K. P. e. F. B. (1989). State space solution to standard h_2 and h_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 34(8):831–847.
- [Doyle, 1982] DOYLE, J. (1982). Analysis of control systems with structured uncertainty. *IEEE Proceedings*, 129:1483–1485.
- [Doyle et A. Packard and, 1991] DOYLE, J. et A. PACKARD AND, A. et Zhou, K. (1991). Review of lft's, lmi's and μ . *Proceeding of 30th IEEE Conf. on Decision and Control*, 2(2):1227–1232.
- [Doyle et Stein, 1981] DOYLE, J. et STEIN, G. (1981). Multivariable feedback design : Concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26:252–253.
- [Duc, 1994] DUC, G. (1994). Robustesse des systèmes linéaires multivariables, école supérieure d'électricité.
- [Ebihara et Hagiwara, 2003] EBIHARA, Y. et HAGIWARA, T. (2003). New dilated lmi characterizations for continuous time control design and robust multiobjective control. *Proceeding of American Control Conference, Denver, Colorado, USA*, 13:4452–4456.
- [Ebihara et Hagiwara, 2004] EBIHARA, Y. et HAGIWARA, T. (2004). New dilated lmi characterizations for continuous-time multiobjective controller synthesis. *Automatica*, 40:2003–2009.
- [Ebihara et Hagiwara, 2006] EBIHARA, Y. et HAGIWARA, T. (2006). On the degree of polynomial parameter-dependent lyapunov functions for robust stability of single parameter-dependent lti systems : a counter-example to barmish's conjecture. *Science Direct, Automatica*, 42:1599–1603.
- [Ebihara *et al.*, 2005] EBIHARA, Y., PEAUCELLE, D., ARZELIER, D. et HAGIWARA, T. (2005). Robust performance analysis of linear time invariant uncertain systems by taking higher order time derivatives of the states. *CDC*, pages 1–13.
- [Ebihara *et al.*, 2006] EBIHARA, Y., PEAUCELLE, D., ARZELIER, D. et HAGIWARA, T. (2006). Robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems by taking higher-order time-derivatives of the states. *Conf.on Decision and Control CDC, 1'07*, pages 1–13.
- [Feron *et al.*, 1996] FERON, E., APKARIAN, P. et GAHINET, P. (1996). Analysis and synthesis of robust control. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 41(7):1041–1046.
- [Fu et Dasgupta, 1999] FU, M. et DASGUPTA, S. (1999). Parametric lyapunov functions for uncertain systems : the multiplier approach. *LMI Methods in optimisation, identification and control, Seminar, Compiègne, France*, 41.

- [Fu et Dasgupta, 2000] FU, M. et DASGUPTA, S. (2000). Parametric lyapunov functions for uncertain systems : The multiplier approach. *Advances in linear matrix inequality methods in control*.
- [Gahinet et Apkarian, 1994] GAHINET, P. et APKARIAN, P. (1994). A linear matrix inequality approach to h_∞ control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448.
- [Gahinet et al., 1996] GAHINET, P., APKARIAN, P. et CHILALI, M. (1996). Affine parameter-dependent lyapunov functions for real parametric uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 3(41):436–442.
- [Gahinet et al., 2002] GAHINET, P., APKARIAN, P. et CHILALI, M. (2002). Affine parameter-dependent lyapunov functions and real parametric uncertainty. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 41(3):1041–1045.
- [Gahinet et al., 1995] GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAMB, J. et CHILALI, M. (1995). Lmi control toolbox : For use with matlab.the mathworks, inc., natick, ma.
- [Garcia, 1999] GARCIA, G. (1999). Contribution a la synthèse de lois de commande robuste par l’approche quadratique. *Mémoire d’HDR*, Chapitre1:4–5.
- [Garcia et Bernussou, 1995] GARCIA, G. et BERNUSSOU, J. (1995). Pole assignment for uncertain systems in a specific disk by state feedback. *IEEE Transactions On Automatic and Control*, 40(1).
- [Garcia et al., 1994] GARCIA, G., BERNUSSOU, J. et ARZELIER, D. (1994). Robust stabilization of discrete time linear systems with norm bounded time varying uncertainty. *Systems And Control Letters*, 22(5):327–339.
- [Garcia et al., 1996] GARCIA, G., BERNUSSOU, J. et ARZELIER, D. (1996). Stabilisation of an uncertain linear dynamic system by state and output feedback : a quadratic stabilisability approach. *International journal of control*, 64:839–858.
- [Garcia et al., 1997] GARCIA, G., BERNUSSOU, J., DAAFOUZ, J. et ARZLIER, D. (1997). Garteur : Robust flight control. *Lecture Notes in Control and Information Sciences Springer, London*, 224(Chapitre Robust Quadratic Stabilization).
- [Geromel et al., 1999] GEROMEL, J., BERNUSSOU, J. et OLIVEIRA, M. D. (1999). H2 norm oprimization with constrained dynamic output feedback controllers : Decentralized and reliable control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-44:1449–1454.
- [Geromel et Colaneri, 2006] GEROMEL, J. et COLANERI, P. (2006). Robust stability of time varying polytopic systems. *Systems and control letters*, 55:81–85.
- [Geromel et al., 1998] GEROMEL, J., OLIVEIRA, M. D. et HSU, L. (1998). Characterization of structural and robust stability. *Linear Algebra and its Applications*, 285:68–80.
- [Geromel et al., 1991] GEROMEL, J., PERES, P. et BERNUSSOU, J. (1991). Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stabilizability and h_∞ control theory. *SIAM Journal Control and Optimization*, 29(2):381–402.
- [Ghaoui et Niculescus, 2000] GHAOUI, L. E. et NICULESCUS, S. (2000). Advances in linear matrix inequality methods in control. *SIAM Advances in design and control*.
- [Ghaoui et Scorletti, 1996] GHAOUI, L. E. et SCORLETTI, G. (1996). Control of rational systems using linear-fractional representations and linear matrix ineaqualities. *Automatica*, 32(9):1273–1284.

- [Green et Limebeer, 1996] GREEN, M. et LIMEBEER, D. (1996). Linear robust control. *Prentice Hall Information and System Sciences Series*, pages 94–96.
- [Gutman et Polmer, 1982] GUTMAN, S. et POLMER, Z. (1982). Properties of min-max controllers in uncertain dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimisation*, 20.
- [Haddad et Bernstein, 1991] HADDAD, W. et BERNSTEIN, D. (1991). Robust stabilization with positive real uncertainty : Beyond the small gain. *Systems And Control Letters*, 17:191–208.
- [Hai, 2008] HAI, L. (2008). Hybrid output feedback stabilization for lti systems with single output. *IEEE Tansaction on Automatic Control*, 53(7):1736–1740.
- [Helmerson, 1999] HELMERSON, A. (1999). Parameter-dependent lyapunov functions based on linear fractional transformations. *14th IFAC World Congress, Beijing*.
- [Henrion et al., 2004] HENRION, D., ARZELIER, D., PEAUCELLE, D. et LASSERRE, J. (2004). On parameter-dependent lyapunov functions for robust stability of linear systems. *43rd IEEE conference on Decision and Control*, 1:887–892.
- [Hollot et Barmish, 1980] HOLLOT, C. et BARMISH, B. (1980). Optimal quadratic stabilisability of uncertain linear systems. *18th Alteron Conference on Communication and Computing, Monticello*.
- [Hu et al., 2002] HU, B., ZHAI, G. et MICHEL, A. (2002). Hybrid static output feedback stabilization of second-order linear time-invariant systems. *Linear Algebra and its Applications*, page 475–485.
- [Iwasaki, 2005] IWASAKI, T. Tsiotras, P. X. Z. (2005). State-feedback controller synthesis for parameter-dependent lti systems. *American Control Conference, 2005. Proceedings of the 2005*, 1:593–597.
- [Iwasaki et Hara, 1998] IWASAKI, T. et HARA, S. (1998). Well posedness of feedback systems : Insights into exact robustness analysis and approximative computations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43:619–630.
- [Iwasaki et Shibata, 2001] IWASAKI, T. et SHIBATA, G. (2001). Lpv systems analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8):590–595.
- [Johansson, 1999] JOHANSSON, M. (1999). Piecewise linear control systems. *PhD thesis, Lund Institute of Technology, Lund Sweden*.
- [Johansson, 2000] JOHANSSON, M. (2000). Piecewise linear control systems - a computational approach. *Lecture Notes in Control and Information Science. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany*, 284.
- [Kalman, 2000] KALMAN, R. (2000). On the theory of control systems. *In premier Congrès international IFAC, Moscou, URSS*.
- [Khalil, 1992] KHALIL, H. (1992). Non linear systems. *Macmillan Publishing Company*.
- [Khargonekar et al., 1990] KHARGONEKAR, P., PETERSON, I. et K.ZHOU (1990). Robust stabilization of uncertain linear systems : quadratic stabilizability and h_∞ control theory. *IEEE Transactions On Automatic Control*, 35:356–361.

- [Kharitonov, 1978] KHARITONOV, V. (1978). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations. *Differential'nye Uravne*, 14(11):1483–1485.
- [Khotare et al., 1996] KHOTARE, M., BALAKRISHNAN, V. et MORARIS, M. (1996). Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*, 32(10):1361–1379.
- [Koroglu et Scherer, 2006] KOROGLU, H. et SCHERER, C. (2006). Robust stability analysis against perturbations of smoothly time varying parameters. *Proceeding of the 45th IEEE conference on Decision and Control, San Diego, USA*, pages 2895–2899.
- [Leite, 2005] LEITE, V. (2005). Sur la stabilité robuste de systèmes linéaires : Une approche par des fonctions dépendantes de paramètres. *Mémoire de thèse*.
- [Leite et Peres, 2003] LEITE, V. et PERES, P. (2003). An improved lmi conditions for robust d-stability of uncertain polytopic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48:500–504.
- [Leite et Peres, 2004] LEITE, V. et PERES, P. (2004). Robust control through piecewise lyapunov functions for discrete time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*, 3(77):230–238.
- [Leith et Leithead, 2000] LEITH, D. et LEITHEAD, W. (2000). Advanced gain-scheduling techniques for uncertain systems. *International Journal of Control*, (11):1001–1025.
- [Lewis, 1992] LEWIS, F. (1992). Applied optimal control and estimation-digital design and impletemtation. *Prentice Hall and Digital Signal Processing Series- Texas Instrument*.
- [Li et al., 1999] LI, J., WANG, H., NIEMANN, D. et TANKA, K. (1999). Synthesis of gain-scheduled controller for a class of lpv systems. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999.*, 3:2314 – 2319.
- [Lim et al., 2006] LIM, C., PARKA, Y. et MOON, S. (2006). Robust saturation controller for linear time-invariant system with structured real parameter uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 249:1–14.
- [Lu et al., 1991] LU, W., ZHOU, K. et DOYLE, J. (1991). Stabilization of lft systems. *Proceeding of IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1238–1244.
- [Lu et al., 1996] LU, W., ZHOU, K. et DOYLE, J. (1996). Stability of uncertain linear systems : An lft approach. *IEEE Tansaction on Automatic Control*, 41(1):50–65.
- [Magni et al., 1997] MAGNI, J., BENNANI, S. et TERLOUW, J. (1997). *Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Springer Verlag, Berlin.
- [Modjtahedzadeh et Hess, 1993] MODJTAHEDZADEH, A. et HESS, R. (1993). A model of driver steering control behavior for use in assessing vehicle handling qualities. *Transactions of the ASME*, 15:456–464.
- [Montagner et al., 2007a] MONTAGNER, V., OLIVEIRA, R., PERES, P. et BLIMAN, P. (2007a). Linear matrix inequality characterization for h_∞ and h_2 guaranteed cost gain – scheduling quadratic stabilisation of linear time – varying polytopic systems. *IET Control Theory Application*, 1(6) : 1726 – 1735.
- [Montagner et al., 2007b] MONTAGNER, V., OLIVEIRA, R., PERES, P. et BLIMAN, P. (2007b). Linear matrix inequality characterization for

- h_1 et h_2 guaranteed cost gain – scheduling quadratic stabilisation of linear time – varying polytopic systems. *IET Control Theory Application*, 1(6) : 1726 – 1735.
- [Montagner *et al.*, 2007c] MONTAGNER, V., OLIVEIRA, R., PERES, P., TARBOURIECH, S. et QUEINNEC, I. (2007c). Lmi-based design of gain-scheduled control with guaranteed performance for lpv systems subject to saturated actuators. *LAAS Report N° 07159*.
- [Montagner et Peres, 2003] MONTAGNER, V. et PERES, P. (2003). A new lmi condition for the robust stability of linear time varying systems. *Proceeding of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Hawaii USA*.
- [Montagner et Peres, 2004a] MONTAGNER, V. et PERES, P. (2004a). Robust stability and h_∞ performance of linear time – varying systems in polytopic domains. *International Journal of Control*, 77(15) : 1343–1352.
- [Montagner et Peres, 2004b] MONTAGNER, V. et PERES, P. (2004b). State feedback gain scheduling for linear systems with time-varying parameters. *Proceeding of the 2004 American Control Conference Boston, Massachusetts*, pages 357–371.
- [Montagner *et al.*, 2009] MONTAGNER, V., RICARDO, C. et ad P.A. BLIMAN, P. P. (2009). Stability analysis and gain-scheduled state feedback control for continuous-time systems with bounded parameter variation. *International Journal of Control*, 82(6):1045–1059.
- [Montagner *et al.*, 2006] MONTAGNER, V. F., OLIVEIRA, R. C. L. F. et PERES, P. L. D. (2006). Robust stability of linear time-varying polytopic systems through polynomially parameter-dependent lyapunov functions. *5th IFAC Symposium on Robust Control Design (2006)*, 5(1).
- [Mori et Kohaure, 2000] MORI, T. et KOHAURE, H. (2000). A parameter dependant lyapunov function for a polytope of matrices. *Cybernetics*, 45(8):1516–1519.
- [Narendra et Tripathi, 1973] NARENDA, K. et TRIPATHI, S. (1973). Identification and optimization of aircraft dynamics. *Journal of Aircraft*, 4(10):193–199.
- [Nesterov et Nemirovsky, 1994] NESTEROV, Y. et NEMIROVSKY, A. (1994). Interior-point polynomial methods in convex programming. *SIAM, Philadelphia*.
- [Oliveira *et al.*, 1999a] OLIVEIRA, M. D., BERNUSSOU, J. et GEROMEL, J. (1999a). A new discrete-time stability condition. *Systems and Control Letters*, 37(4):261–265.
- [Oliveira *et al.*, 1999b] OLIVEIRA, M. D., GEROMEL, J. et HSU, L. (1999b). Lmi characterization of structural and robust stability : The discrete time case. *Linear Algebra and its applications*, 296(1-3):27–28.
- [Oliveira *et al.*, 2005] OLIVEIRA, R., LEITE, V., OLIVEIRA, M. D. et PERES, P. (2005). An lmi characterization of polynomial parameter dependent lyapunov functions for robust stability. *Proceeding of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain*, pages 12–15.
- [Oliveira *et al.*, 2007] OLIVEIRA, R., MONTAGNER, V., PERES, P. et BLIMAN, P. (2007). Lmi relaxations for h-infinity control of time-varying polytopic systems by means of parameter-dependent quadratically stabilizing gains. *Proc. of 3rd IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC07), Foz do Iguacu (Brazil)*.
- [Oliveira et Peres, 2005] OLIVEIRA, R. et PERES, P. (2005). Stability of polytopes of matrices via affine parameter-dependent lyapunov functions : Asymptotically exact lmi conditions. *Linear algebra and its applications*, 405:209–228.

- [Oliveira et Peres, 2007] OLIVEIRA, R. et PERES, P. (2007). Parameter-dependent lmis in robust analysis : Characterization of homogeneous polynomially parameter-dependent solutions via lmi relaxations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(7):1334–1340.
- [Oliveira et Peres, 2008] OLIVEIRA, R. et PERES, P. (2008). Robust stability analysis and control design for time-varying discrete-time polytopic systems with bounded parameter variation. *2008 American Control Conference*, pages 3094–3099.
- [Oustaloup, 1994] OUSTALOUP, A. (1994). La robustesse- analyse et synthèse de commandes robustes. *Edition Hermes*.
- [Oustaloup, 1995] OUSTALOUP, A. (1995). La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications. *Edition Hermes*.
- [Oustaloup et al., 1996] OUSTALOUP, A., MATHIEU, B., LANUSSE, P. et SABATIER, J. (1996). La commande crone : de la robustesse fractale à un gabarit curviligne en boucle ouverte. *Chapitre 6 dans Commande robuste (coordinateur : J. Bernussou), Editions HERMES*.
- [Oustry et al., pear] OUSTRY, F., ELGHAOUI, L. et LEBRET, H. (to appear). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM J. on Optimization*.
- [Packard, 1994] PACKARD, A. (1994). Gain scheduling via linear fractional transformations. *Systems and Control Letters*, 22:79–92.
- [Packard et al.,] PACKARD, A., ZHOU, K., PANDEY, P. et BECKER, G.
- [Peaucelle, 2000] PEAUCELLE, D. (2000). Formulation generique de problèmes en analyse et commande robuste par les fonctions de lyapunov dependant des paramètres. *Mémoire de thèse*.
- [Peaucelle, 2009a] PEAUCELLE, D. (2009a). Integral quadratic separation applied to polytopic systems. *Robust Control Design, 6th IFAC Symposium on Robust Control, 2009*, 6(1).
- [Peaucelle, 2009b] PEAUCELLE, D. (2009b). Integral quadratic separation applied to polytopic systems. *ROCOND, 16-18 June 2009, Haifa*.
- [Peaucelle et Arzelier, 2001] PEAUCELLE, D. et ARZELIER, D. (2001). Robust performance analysis with lmi based methods for real parametric uncertainty via parameter dependant lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):624–630.
- [Peaucelle et al., 2000a] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D. et BACHELIER, O. (2000a). A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, 40(1):21–30.
- [Peaucelle et al., 2000b] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., BACHELIER, O. et BERNUSSOU, J. (2000b). A new robust d-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems and Control Letters*, 40(1):21–30.
- [Peaucelle et al., 1998] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D. et D. (1998). Quadratic stabilisability and disk pole assignment for generalised uncertainty models- an lmi approach. *2nd IMACS muticonference CESA*, 1:650–655.
- [Peaucelle et al., 2007] PEAUCELLE, D., ARZELIER, D., HENRION, D. et GOUAISBAUT, F. (2007). Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformations. *Automatica*, 43(5):795–804.

- [Peaucelle *et al.*, 2006] PEAUCELLE, D., EBIHARA, Y., ARZELIER, D. et HAGIWARA, T. (2006). General polynomial parameter-dependent lyapunov functions for polytopic uncertain systems. *Proceeding of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and systems, Kyoto, Japan*, pages 2238–2242.
- [Peres, 1989] PERES, P. (1989). Sur la robustesse des systèmes linéaires, approche par programmation linéaire. *Mémoire de thèse*.
- [Petersen, 1987] PETERSEN, I. (1987). A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems. *Systems and control letters*, 8:351–357.
- [Petersen et Holot, 1988] PETERSEN, I. et HOLLOT, C. (1988). A ricatti equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. *Automatica*, 22.
- [Poussot-Vassal *et al.*, 2007] POUSSOT-VASSAL, C., SENAME, O. et DUGARD, L. (2007). Contrôle robuste lvp : Application aux véhicules automobiles. *2ème journées doctorales Journées Nationales MAC 2007*.
- [Prempain et Postlethwaite, 2008] PREMPAIN, E. et POSTLETHWAITE, I. (2008). L_2 and h_2 performance analysis and gain – scheduling synthesis for parameter – dependent systems. *Automatica*, 44 : 2801 – –2089.
- [Pyatnitskii et Shorodinskii, 1982] PYATNITSKII, E. et SHORODINSKII, V. (1982). Numerical methods of lyapunov function construction and their application to the absolute stability problem. *Systems and control letters*, 2(2):130–135.
- [Raharijoana *et al.*, 2006] RAHARIJOANA, T., CHEVREL, P. et G.DUC (2006). Reduced order and observer based lvp control for lateral driving assistance. *Proceeding of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design, Toulouse, France*.
- [Ramos et Peres, 2002] RAMOS, D. et PERES, P. (2002). An lmi condition for the robust stability of uncertain continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47:675–678.
- [Rantzer et Johansson,] RANTZER, A. et JOHANSSON, M. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 4(45):629–637.
- [Rissanen, 1960] RISSANEN, J. (1960). Control system synthesis by analogue computer based on the generalized linear feedback concept. *In Proceedings of the Symposium on Analog Comutation Applied to Study of Chemical Processes, International Seminar*, pages 1–13.
- [Rosenbrock, 1962] ROSENBROCK, H. (1962). Distinctive problems of process control. *Chemical Engeneering Progress*, 58:43–50.
- [Rugh et Shamma, 2000] RUGH, W. et SHAMMA, J. (2000). A survey of research on gain scheduling. *Automatica*, (10):1401–1425.
- [Safari-Shad et Cobb, 1992] SAFARI-SHAD, N. et COBB, J. (1992). A lyapunov-based proof of the quadratic separation principle for systems with noise-free measurements. *41th Annual Scientific Session, Atlantic Coast Conference ACC*, pages 666–670.
- [Safonov et Chiang, 1993] SAFONOV, M. et CHIANG, R. (1993). Real/complex k_m synthesis without curve fitting. *Control and Dynamical Systems, Academic New York*, 56:303–324.
- [Saoud, 2009] SAOUD, H. (2009). Étude des problèmes unilatéraux : Analyse de récession, stabilité de lyapunov et applications en Électronique et en mécanique. *mémoire de thèse, Université de Limoges, (Thèse N°12-2009)*.

- [Sato, 2005] SATO, M. (2005). Robust performance analysis of linear time-invariant parameter-dependent systems using higher-order lyapunov functions. *American Control Conference 2005. Portland, OR, USA*, pages 615–620.
- [Scherer, 1999] SCHERER, C. (1999). From mixed to multi-objective control. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control, 1999*, 4:3621 – 3626.
- [Scherer et al., 1997] SCHERER, C., GAHINET, P. et CHILALI, M. (1997). Multiobjective output-feedback control via lmi optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42(7):896–911.
- [Schim, 1996] SCHIM, D. (1996). Quadratic stability in the circle theorem or positivity theorem. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:781–788.
- [Scorletti et Ghaoui, 1995] SCORLETTI, G. et GHAOUI, E. E. (1995). Proceedings of the 34th iee conference on decision and control. *Improved linear matrix inequality conditions for gain scheduling*, (4):590–595.
- [Shahruz et Behtash, 1992] SHAHRUZ, S. et BEHTASH, S. (1992). Design of controllers for linear parameter varying systems by the gain scheduling technique. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 168(1):195–217.
- [Shaked, 2001] SHAKED, U. (2001). Improved lmi representation for the analysis and the design of continuous systems with polytopic type uncertainty. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4):652–656.
- [Shamma et Athans, 1991] SHAMMA, J. et ATHANS, M. (1991). Guaranteed properties of gain scheduled control of linear parameter-varying plants. *Automatica*, 27(3):559–564.
- [Shamma et Xiong, 1999] SHAMMA, J. et XIONG, D. (1999). Set-valued methods for linear parameter varying systems. *Automatica*, 35(6):1081–1089.
- [Shorten et Narendra, 2003] SHORTEN, R. et NARENDRA, K. (2003). On common quadratic lyapunov functions for pairs of stable lti systems whose system matrices are in companion form. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48(4):618–621.
- [Souza et al., 2003] SOUZA, C. D., TROFINO, A. et OLIVEIRA, J. D. (2003). Parametric lyapunov function approach to h2 analysis and control of linear parameter dependent systems. *IEE Proceedings, Control Theory and Applications*, 150(5):501–508.
- [Stilwell et Rugh, 1998] STILWELL, D. et RUGH, W. (1998). Interpolation methods for gain scheduling.
- [Stilwell et Rugh, 2000] STILWELL, D. et RUGH, W. (2000). Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers. *Automatica*, (5):665–671.
- [Tal et Nemirovski,] TAL, A. B. et NEMIROVSKI, A. Robsut convex programming. *working paper*.
- [Tal et Nemirovski, 1995] TAL, A. B. et NEMIROVSKI, A. (1995). Robust solutions to uncertain linear problems. *Technical Report 6/95, Optimization Laboratory, Technion*.
- [Tal et Nemirovski, 1997] TAL, A. B. et NEMIROVSKI, A. (1997). Robust truss topology design via semidefinite programming. *SIAM J. on Optimization*, (7):991–1016.
- [Tan et al., 2003] TAN, K., GRIGORIADIS, K. et WU, F. (2003). h_∞ and l_2 gain control of linear parameter varying systems with parameter varying delays. *IEE Proceeding of Control Theory and Applications*, 150(5):509–517.

- [Tanguy et Lebret, 2004] TANGUY, H. et LEBRET, G. (2004). Fin/rudder roll stabilisation of ships : a gain scheduling control methodology. *American Conference on Control. - Boston*.
- [Troffino, 1999] TROFFINO, A. (1999). Parameter dependent lyapunov functions for a class of uncertain linear systems : an lmi approach. *In proceedings of the 38th IEEE conference on Decision and Control*, 1:2341–2346.
- [Troffino et Souza, 2001] TROFFINO, A. et SOUZA, C. D. (2001). Biquadratic stability of uncertain linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46:1303–1307.
- [Tsuyoshi, 2002] TSUYOSHI, K. (2002). Stability analysis and synthesis for lpv systems based on a polynomial parameter-dependent lyapunov function. approach via quadratic separator. *Seigyō Riron Shinpojiumu Shiryo*, 31:590–595.
- [Tuan et Apkarian, 1998] TUAN, H. et APKARIAN, P. (1998). Relaxations of parameterized lmis with control applications. *Int. Journal and Nonlinear Control*.
- [Vandenberghe et Boyd, 1995] VANDENBERGHE, L. et BOYD, S. (1995). A primal-dual potential reduction method for problems involving linear matrix inequalities. *Mathematics Program*, 69:205–236.
- [Weinmann, 1991] WEINMANN, A. (1991). Uncertain models and robust control. *Springer Verlag, New York*, page 31.
- [Wie et Bernstein, 1992] WIE, B. et BERNSTEIN, D. (1992). Benchmark problem for robust control design. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 15:1057–1059.
- [Willems,] WILLEMS, J. Least squares stationary optimal control and the algebraic ricatti equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16(6):621–634.
- [Wonham, 1985] WONHAM, W. (1985). Linear multivariable control : A geometric approach. *Application of Mathematics. Springer Verlag, New York*, 10(3):590–595.
- [Wu et Prajna, 2005] WU, F. et PRAJNA, S. (2005). Sos-based solution approach to polynomial lpv system analysis and synthesis problems. *International Journal of Control, Francis and Taylor*, 78(8):600–611.
- [Wu et al., 1997] WU, F., YANG, X., PACKARD, A. et BECKER, G. (1997). Induced l2 norm control for lpv systems with bounded parameter variation rates. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 6:983–998.
- [Xie et al., 1997] XIE, L., SHISHKIN, S. et FU, M. (1997). Piecewise lyapunov functions for robust stability of linear time varying. *Systems and Control Letters*, 31:165–171.
- [Xie, 2005] XIE, W. (2005). H2 gain scheduled state feedback for lpv system with new lmi formulation. *IEE Proceedings : Control theory and applications*, 152(6):693–697.
- [Xie, 2008] XIE, W. (2008). New lmi-based conditions for quadratic stabilization of lpv systems. *Hindawi Publishing Corporation Journal of Inequalities and Applications Volume 2008*.
- [Yakubovich, a] YAKUBOVICH, V. A. The solution of certain matrix inequalities encountered in nonlinear control theory. *Soviet Doklady Mathematics*, 5:652–656.
- [Yakubovich, b] YAKUBOVICH, V. A. The solution of certain matrix inequalities in automatic control theory. *Soviet Doklady Mathematics*, 3:620–623.

- [Yakubovich, 1967] YAKUBOVICH, V. A. (1967). The method of matrix inequalities in the stability theory of nonlinear control systems i, ii, iii. *Automation and remote control*, 25-26(4):905–917.
- [Zames, 1981] ZAMES, G. (1981). Asymptotic stability of an equilibrium position of a family of systems of differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(2):301–320.
- [Zhang *et al.*, 2003] ZHANG, Z., TSIOTRAS, P. et IWASAKI, T. (2003). Parameter-dependent lyapunov function for exact stability analysis of single-parameter dependent lti systems. *42nd IEEE Conference on Decision and Control*.
- [Zhou *et al.*, 1996] ZHOU, K., DOYLE, J. et GLOVER, K. (1996). Robust and optimal control, prentice hall, new jersey.
- [Zhou et Khargonekar, 1988] ZHOU, K. et KHARGONEKAR, P. (1988). Robust stabilization of linear system with norm-bounded time-varying uncertainty. *Systems and control letters*, 10:17–20.