Opérateurs Fourier-Intégraux sur des espaces de représentations, formule asymptotique de Weyl

Aubin Bérenger

UNIVERSITE Blaise Pascal
U.F.R Sciences et Technologies

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité : Mathématiques pures

Par **AUBIN Bérenger**

Sujet de la thèse : "Opérateurs OFI sur des espaces de représentations. Formule asymptotique de Weyl"

Soutenue publiquement le 2 Novembre 2006

Devant le Jury composé de :

Messieurs Jean-Yves CHARBONNEL (rapporteur).

Bernard HELFFER (président du jury).

Dominique MANCHON (directeur de thèse).

Madame Sylvie PAYCHA (examinatrice).

Deuxième rapporteur : Henrik STETKÆR.

Mots-clé : Phase stationnaire, groupes de Lie, opérateurs Fouriers-Intégraux, Représentations, méthode des orbites.

Remerciements

Tout d'abord, je remercie Dominique MANCHON d'avoir dirigé mes travaux de thèse pendant 4 ans, en m'apportant sa vision des mathématiques et toute son expérience, ce qui m'a permis de devenir autonome dans mes recherches.

Ensuite je remercie Jean-Yves CHARBONNEL et Henrik STETKÆR pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux ainsi que d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. Je remercie aussi Bernard HELFFER, président du jury, Sylvie PAYCHA, examinatrice, d'avoir accepté de faire partie du jury.

Enfin je remercie ma famille, en particulier ma femme Anne-Marie, de m'avoir soutenu dans les durs moments que j'ai pu vivre au cours de mes travaux de thèse.

Table des matières

1. Introduction 3
1.1. Notations 8
2. Opérateurs Fouriers Intégraux sur $\mathbb{R}^n$ 10
2.1. Intégrale oscillante 10
2.2. Opérateurs Fouriers Intégraux sur $\mathbb{R}^n$. 12
2.3. Exemples d'Opérateurs OFI 13
3. Opérateurs OFI sur les variétés. 15
3.1. Fibré linéaire complexe des densités d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$ 15
3.2. Distributions Fourier-Intégrales sur une variété X associée à un Lagrangien conique fermé de $T^*X \setminus \{0\}$ 16
3.3. Symbole principal d'une DFI sur X variété paracompacte 17
4. Approximation de l'exponentielle d'un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint elliptique classique d'ordre 1 invariant à gauche sur un groupe de Lie G par un OFI sur G invariant à gauche. 23
4.1. Problématique 23
4.2. Description d'un OFI invariant à gauche sur un groupe de Lie G. 23
4.3. Equation eikonale et équations de transport 27
5. Représentations 35
5.1. Rappels. 35
5.2. Opérateurs Fouriers-Intégraux dans les espaces de représentations de groupes de Lie. 36
5.3. Opérateurs pseudo-différentiels dans l'espace de la représentation π : 36
5.4. Approximation de l'exponentielle d'un opérateur elliptique auto-adjoint 37
5.5. Représentations fortement traçables. 38
6. Puissances complexes d'un opérateur différentiel elliptique classique sur un espace de représentation π. 40
6.1. Résolvante approchée 40
6.2. Calcul fonctionnel holomorphe 42
7. Croissance du volume spectral 43
8. Formule asymptotique de Weyl 45
8.1. Approximation de $N(\lambda)$ par $N_\alpha(\lambda)$. 45
8.2. Etude de $N_\alpha(\lambda)$. 49
8.3. Formule de Weyl 61
Références 63

1. Introduction

Les Opérateurs Fouriers-Intégraux, notés OFI, sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sont des opérateurs qui généralisent la notion d'Opérateurs Pseudo-Différentiels, notés OPD,

$$Pu(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x,y,\xi)e^{i<x-y,\xi>}u(y)dyd\xi,$$

où $a(x,y,\xi)$ est dans une classe bien spécifique de fonctions lisses à des opérateurs de la forme

$$Au(x) = \int_{Y}\int_{\mathbb{R}^N} a(x,y,\theta)e^{i\Phi(x,y,\theta)}u(y)dyd\theta,$$

où Y est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a(x,y,\theta)$ est une fonction lisse sur $X \times Y \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ avec X ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$ et Φ est une fonction positivement homogène de degré 1 en θ dont la différentielle ne s'annule pas sur $X \times Y \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Ici n et N sont deux entiers distincts. Pour définir ces opérateurs, on doit imposer à Φ d'être une fonction de phase d'opérateurs, c'est-à-dire de vérifier :

- $d_{(x,\theta)}\Phi(x,y,\theta) \neq 0$, pour tout $\theta \neq 0$, pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

- $d_{(y,\theta)}\Phi(x,y,\theta) \neq 0$, pour tout $\theta \neq 0$, pour tout $(x,y) \in X \times Y$.

Sous ces conditions, l'opérateur A est continu de $\mathcal{D}(Y)$, ensemble des fonctions lisses à support compact sur Y, dans $\mathcal{C}^\infty(X)$, ensemble des fonctions lisses sur X. La définition de ce type d'opérateurs permet par exemple de travailler sur l'équation des ondes plus facilement.
Après avoir défini ce type d'opérateurs sur des ouverts d'espaces vectoriels, on va les définir sur des variétés. Pour cela, il faudra d'abord correctement définir les intégrales oscillantes qui permettent de créer ces Opérateurs OFI sur des variétés. Ces intégrales oscillantes s'appelleront Distributions Fourier-Intégrales. Une DFI s'écrira alors :

$$A = \sum_{j \in J} A_j,$$

où les supports des A_j forment un recouvrement localement fini de *supp* A, les A_j étant définies par

$$< A_j, u >= (2\pi)^{-\frac{(n+2N_j)}{4}} \int\int e^{i\phi_j(x,\theta)} a_j(x,\theta) u(x) dx d\theta,$$

les $(\phi_j)_{j \in J}$ étant associé à la même variété Lagrangienne conique fermée Λ via les applications

$$\begin{array}{rcl} l_{\varphi_j} : X \times (\mathbb{R}^{N_j} \setminus \{0\}) & \longrightarrow & T^*X \setminus \{0\} \\ (x,\theta) & \longmapsto & (x, d_x\varphi_j(x,\theta)), \end{array}$$

les restrictions de ces applications aux cônes fermés C_{φ_j} étant des isomorphismes de C_{φ_j} sur un sous-ensemble de Λ.
Ces intégrales oscillantes étant construites, on peut alors construire les OFI sur des variétés. Il reste à définir les Opérateurs OFI sur les espaces de représentations. Soient G un groupe de Lie et π une représentation unitaire fortement continue du groupe de Lie G. En utilisant les coefficients

$$g \mapsto C_{u,v}(g) =< \pi(g)u, v >$$

d'une représentation, on sait qu'on peut définir un opérateur $\pi(\varphi)$ avec $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$ grâce à la formule :

$$< \pi(\varphi)u, v >=< \varphi, C_{u,v} >,$$

pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$ et tout $v \in \mathcal{H}_\pi$, où $\mathcal{H}_\pi^\infty$ est l'ensemble des vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{H}$. On pourra alors définir les OFI sur l'espace d'une représentation par cette formule en choisissant les DFI à support compact sur G. Un OFI sera alors de la forme

$$\pi(\varphi),$$

où φ est une DFI à support compact.
Ensuite on donnera une application de ces Opérateurs Fouriers-Intégraux, la formule asymptotique de Weyl pour un opérateur différentiel auto-adjoint elliptique sur l'espace d'une représentation unitaire irréductible d'un groupe de Lie. Rappelons ce qu'est la

formule de Weyl pour un opérateur différentiel elliptique auto-adjoint P d'ordre m sur une variété compacte [12][26] :

$$N(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} V(\lambda)(1+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{m}}})),$$

où $N(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres de P inférieures ou égales à λ, et $V(\lambda)$ est le volume spectral $\int\int_{a_m(x,\xi)\leq\lambda} dxd\xi$, avec a_m symbole principal de P. Dans le cadre des opérateurs différentiels sur les espaces de représentations, qui sont de la forme $\pi(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}\in\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, grâce aux OFI, on montre sous certaines hypothèses la formule :

$$N(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} V(\lambda)\big(1+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{m}}})\big),$$

avec $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$, pour pouvoir appliquer le théorème de la phase stationnaire, et où $N(\lambda)$ est toujours le comptage spectral pour l'opérateur différentiel $\pi(\mathfrak{a})$ d'ordre m sur l'espace d'une représentation et $V(\lambda)$ est le volume spectral associé à cet opérateur, c'est-à-dire

$$V(\lambda)=\int_{\Omega\cap\{a_m(\eta)\leq\lambda\}} d\beta_\Omega(\eta),$$

où a_m est le symbole principal de l'opérateur $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire le terme homogène de plus haut degré de $\sigma^{-1}(\mathfrak{a})$, où σ est la symétrisation et Ω l'orbite associée à π par la méthode des orbites de Kirillov. Dominique Manchon avait déjà trouvé une formule similaire [19] pour un opérateur différentiel elliptique autoadjoint d'ordre m sur l'espace d'une représentation unitaire fortement continue sur un groupe de Lie G, mais le reste trouvé etait moins bon. En effet, il obtenait une formule de la forme :

$$N(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} V(\lambda)\big(1+O(\lambda^{-\frac{1}{4m}+\varepsilon})\big),$$

où ε est un réel positif. Cependant cette formule ne nécessite pas d'hypothèses supplémentaires sur $N(\lambda)$, car la démonstration de D.MANCHON fait simplement appel à la méthode des projections approximatives, qui est une technique purement OPD. Mon approche utilise de manière essentielle les Opérateurs OFI. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 1.1. *(Corollaire 8.13) On suppose que $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, que $V(\lambda^m)\geq C\lambda^{\frac{1}{2}}$ et que la fonction de comptage N vérifie l'hypothèse (N), c'est-à-dire que*

$$N((\lambda+1)^m)-N(\lambda^m)=O(\frac{N(\lambda^m)}{\lambda}). \tag{1}$$

Alors,

$$N(\lambda) \underset{\lambda\to\infty}{=} V(\lambda)\big(1+O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{m}}})\big).$$

Ici on se ramène à travailler sur le cas $m=1$ grâce au calcul de la puissance $\frac{1}{m}$ de $\mathfrak{a}$, obtenue par une technique de résolvante et on utilise la formule

$$N(\lambda)=Tr\ \chi_\lambda(\pi(\mathfrak{a}))=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}} e^{it\pi(\mathfrak{a})}e^{-i\lambda t}\hat{\chi}(t)dt,$$

où χ est la fonction indicatrice de $]-\infty,0]$. On approxime alors $N(\lambda)$ par

$$N_\alpha(\lambda)=\lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\rho(\mu\lambda^{-\alpha})N(\lambda-\mu)d\mu,$$

où $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$, et ρ est une fonction paire de l'espace de Schwarz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que

$$\hat{\rho}(t)=1\ si\ |t|\ <\frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\hat{\rho}(t) = 0 \ si \ |t| \ > \varepsilon.$$

On écrit

$$N_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(t)\hat{\rho}(\lambda^\alpha t) e^{-i\lambda t} e^{it\pi(\mathfrak{a})} dt,$$

puis on approxime $e^{-it\pi(\mathfrak{a})}$ par un OFI $\pi((Q_e)_t)$ sur l'espace de la représentation, par analogie avec Hörmander [12](voir aussi Shubin [26]). Afin d'obtenir cette approximation, on va d'abord approximer e^{-itA}, où A est un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint elliptique classique d'ordre 1 invariant à gauche sur le groupe de Lie G, par un OFI invariant à gauche. Pour cela, comme dans Hörmander [12](voir aussi Shubin [26]), on va d'abord écrire la condition d'approximation de e^{-itA} sous forme du système :

$$\begin{cases} N[\frac{dQ_t}{dt} + iA \circ Q_t] & \in C^\infty(G \times G) \\ N[Q_0 - I] & \in C^\infty(G \times G) \end{cases}, \tag{2}$$

où $N[\cdot]$ désigne le noyau de l'opérateur, et avec Q_t d'amplitude q_t classique d'ordre 0 lisse en t.

Puis grâce aux travaux de B.Nielsen et H.Stetkaer [22], on va écrire un OFI invariant à gauche sur G sous la forme d'un produit de convolution à droite par une DFI sur G. Sous cette forme, le système devient :

$$\begin{cases} \frac{d(Q_e)_t}{dt} + iA_e * (Q_e)_t & \in \mathcal{D}(G) \\ (Q_e)_0 - \delta_e & \in \mathcal{D}(G) \end{cases}, \tag{3}$$

pour t assez petit, où $(Q_e)_t$ et A_e sont telles que $Q_t \cdot = \cdot * (Q_e)_t$ et $A \cdot = \cdot * A_e$. Par la suite, afin d'alléger les notations dans les calculs, on notera Q_t(resp. q_t, A) à la place de $(Q_e)_t$(resp .$(q_e)_t$, A_e). Le système (3) est alors équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{d\widetilde{Q_t}}{dt} + i\widetilde{Q_t * A} & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \\ \widetilde{Q_0} - \delta_0 & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \end{cases}, \tag{4}$$

pour t assez petit. DE manière analogue à Hörmander [12](voir aussi Shubin [26]), j'ai trouvé la phase de Q_t, sous la forme :

$$\varphi_t : (x, \xi) \mapsto \varphi(x, \xi) - ta_1(\xi),$$

où a_1 est le symbole principal de A, et φ est solution de l'équation eikonale :

$$a_1(\xi) = a_1(\eta(x, \xi)),$$

avec

$$\eta(x, \xi) = \frac{ad^* x}{e^{ad^* x} - 1} \cdot d_1\varphi(x, \xi).$$

L'équation eikonale trouvée ici est une équation d'Hamilton-Jacobi qui tient compte de la non-commutativité du groupe ; c'est l'unique différence avec celle trouvée par Hörmander [12] (voir aussi Shubin [26]). Pour aboutir à cette équation, il aura fallu écrire

$$\widetilde{Q_t * A}(x) = \int_{\mathfrak{g}} e^{i\varphi_t(x,\xi)} s(x, \xi) d\xi,$$

et trouver le développement asymptotique

$$s(x, \xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\partial^\alpha a(\eta(x, \xi))}{\alpha!} D_y^\alpha [y \mapsto j_G(y)\chi_e(-y) q_t\big(x \cdot y, \xi\big) e^{i\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0},$$

avec $\psi_t(x, y, \xi) = \varphi_t\big(x \cdot y, \xi\big) - \varphi_t(x, \xi) - < y, \eta(x, \xi) >$ et $x \cdot y = log(exp \ x \ exp \ y)$. Ensuite les équations provenant du système (4), c'est-à-dire les équations provenant de l'annulation des differents termes du système (4) donne à l'ordre 1 l' équation eikonale et aux ordres suivant les équations de transport qui ont la forme :

$$\frac{\partial q_{t,-j}}{\partial t}(x,\xi)+\mathbb{V}(x)\cdot d_x q_{t,-j}(x,\xi)+g(x,\xi)q_{t,-j}(x,\xi)=f_{-j}(x,\xi),$$

où les f_{-j} ne dépendent que de $q_{t,0},\cdots,q_{t,-j+1}$, pour tout $j\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{V}(x)=\frac{adx}{1-e^{-adx}}\cdot da_1(\eta(x,\xi))$, et

$$\begin{aligned} g(x,\xi) &= \sum_{|\alpha|=1}\partial^\alpha a_1\big(\eta(x,\xi)\big)\partial_\alpha j_G(0) \\ &\quad -i\sum_{|\alpha|=2}\frac{\partial^\alpha a_1\big(\eta(x,\xi)\big)}{\alpha}[\sum_{|\beta|=2} j_{\alpha_1\beta_1}(x)j_{\alpha_2\beta_2}(x)\partial_y^\beta\varphi(x,\xi)+\sum_{|\beta|=1} l_{\alpha\beta}(x)\partial_y^\beta\varphi(x,\xi)]. \end{aligned}$$

Pour la définition des termes, je renvoie à l'équation (17) section 4.3. La résolution successive des équations de transport fournit alors le développement asymptotique du symbole classique q_t.
Il reste alors à étudier

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(\lambda^\alpha t)e^{-i\lambda t}\pi((Q_e)_{-t})dt,$$

et

$$R_\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(\lambda^\alpha t)e^{-i\lambda t}\pi((R_e)_{-t})dt.$$

Grâce aux travaux de J.Y.Charbonnel [4], l'ad-algébricité de $\mathfrak{g}$ implique que V aussi vérifie l'hypothèse (N), c'est-à-dire

$$V((\lambda+1)^m)-V(\lambda^m)=O(\frac{V(\lambda^m)}{\lambda}),$$

car V admet un développement asymptotique (section 7). En supposant $V(\lambda)\geq C\lambda^{\frac{1}{2}}$, on montre alors que

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda)=V(\lambda)(1+O(\lambda^{-1+\alpha})).$$

Puis grâce à l'hypothèse (N), on montre

$$N_\alpha(\lambda)=N(\lambda)\big(1+O(\lambda^{-1+\alpha})\big).$$

Enfin on conclut avec l'égalité

$$N_\alpha(\lambda)=\tilde{N_\alpha}(\lambda)+R_\alpha(\lambda),$$

en montrant $R_\alpha(\lambda)=O(1)$. On a alors

$$N(\lambda)=V(\lambda)\big(1+O(\lambda^{-1+\alpha})\big).$$

En revenant au cas où m est un entier positif quelconque, on trouve :

$$N(\lambda)=V(\lambda)\big(1+O(\lambda^{\frac{-1+\alpha}{m}})\big).$$

Il serait bon d'obtenir le théorème 1.1 sans faire appel à l'hypothèse (N) sur la fonction de comptage, ou en la démontrant dans la foulée. Dans l'état actuel des choses, ce résultat est un premier pas vers l'obtention de la formule asymptotique de Weyl avec un meilleur reste que celui obtenu dans [19].

1.1. **Notations.** Soit $\xi \in \mathbb{R}^n$. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, on posera $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}$.
Soit X une variété, on notera $\mathcal{D}(X)$ (resp. $C^\infty(X)$) l'ensemble des fonctions lisses sur X à support compact (resp. des fonctions lisses sur X). On notera $\mathcal{D}'(X)$ l'ensemble des distributions sur X, $\mathcal{E}'(X)$ l'ensemble des distributions à support compact sur X.

Définition 1.2. *Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Soient ρ, δ deux réels. On dit qu'une fonction a sur $X \times \mathbb{R}^N$ appartient à la classe $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ si :*
- *$a \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$.*
- *Pour tout α, β multi-indices, pour tout $K \subset X$ compact, on a*
$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta)| \leq C_{K,\alpha,\beta} < \theta >^{m-|\beta|\rho+|\alpha|\delta},$$
pour tout $(x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N$, où $< \theta >= (1 + ||\theta||^2)^{\frac{1}{2}}$.

Si $\rho + \delta = 1$, on notera cette classe $\mathcal{S}^m_\rho(X \times \mathbb{R}^N)$, et si de plus $\delta = 0$, on la notera $\mathcal{S}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ et on posera $\cap_{m\in\mathbb{R}}\mathcal{S}^m = S^{-\infty}$.
Lorsque X est réduit à un point (i.e $n = 0$), on notera $\mathcal{S}^m_\rho(\mathbb{R}^N)$ à la place de $\mathcal{S}^m_\rho(X \times \mathbb{R}^N)$.

Remarque 1.3. *Dans le cas où X est une variété, la définition reste la même, les dérivées partielles par rapport aux variables x_i étant remplacées par des champs de vecteurs, en effet les constantes m, ρ, et δ ne dépendent pas de la carte locale.*

Définition 1.4. *Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{P} \subset \mathbb{C}$. Soient m, ρ, δ trois réels et $d \in \mathbb{R}^*_+$.*
On dit qu'une fonction a sur $X \times \mathbb{R}^N \times \mathcal{P}$ appartient à la classe $\mathcal{S}^m_{\rho,\delta,d}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$ si :
- *$a(\cdot,\cdot,\lambda) \in \mathcal{C}^\infty(X \times \mathbb{R}^N)$, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$.*
- *Pour tout α, β multi-indices, pour tout $K \subset X$ compact, on a*
$$|\partial_x^\alpha \partial_\theta^\beta a(x,\theta,\lambda)| \leq C_{K,\alpha,\beta} \Lambda_d(\theta,\lambda)^{m-|\beta|\rho+|\alpha|\delta},$$
pour tout $(x,\theta) \in K \times \mathbb{R}^N$, pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$.

Ici $\Lambda_d(\theta,\lambda) = (1 + ||\theta||^2 + |\lambda|^{\frac{2}{d}})^{\frac{1}{2}}$. Si $\rho + \delta = 1$, on notera cette classe $\mathcal{S}^m_{\rho,d}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$, et si de plus $\delta = 0$, on la notera $\mathcal{S}^m_{1,d}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$ et on posera $\cap_{m\in\mathbb{R}}\mathcal{S}^m_{1,d}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P}) = S^{-\infty}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$.

Définition 1.5. *Un symbole $a \in \mathcal{S}^m(X \times \mathbb{R}^N)$ est dit classique d'ordre $m' \in \mathbb{C}$ s'il admet un développement asymptotique de la forme :*
$$a(x,\theta) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} a_{m'-j}(x,\theta),$$
où $a_{m'-j}(x,\theta)$ est positivement homogène de degré $m' - j$ en la variable θ. On notera $CL^{m'}(X \times \mathbb{R}^N)$ la classe de telles fonctions.
Un symbole $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,d}(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$ est dit classique d'ordre m' si pour tout $\lambda \in \mathcal{P}$, $a(\cdot,\cdot,\lambda)$ est un symbole classique d'ordre m'. On notera $CL^{m'}_d(X \times \mathbb{R}^N, \mathcal{P})$ la classe de telles fonctions.

Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Définition 1.6. *On dit que $p \in \mathcal{S}^m_\rho(\mathfrak{g}^*)$ appartient à la classe de symboles $AS^{m,Q}_\rho(\mathfrak{g}^*)$ si supp $\mathcal{F}^{-1}p \subset Q$, où Q est un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$. Ici $\mathcal{F}$ représente la transformée de Fourier par rapport à une mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{g}$.*

On dit que $p_\lambda \in \mathcal{S}^m_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ *appartient à la classe de symboles à paramètre* $AS^{m,Q}_{\rho,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$ *si supp* $\mathcal{F}^{-1}p_\lambda \subset Q$, *pour tout* $\lambda \in \mathcal{P}$, *où* Q *est un voisinage compact de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$. *On posera* $CL^{m,Q}_d(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) = AS^{m,Q}_{1,d}(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P}) \cap \ CL^m_d(\mathfrak{g}^*,\mathcal{P})$.

Définition 1.7. *Pour tout* $x \in \mathfrak{g}$, *on désigne par* j_G *le jacobien de l'exponentielle et on a la formule* [10] *:*

$$j_G(x) = |det(\frac{1 - exp\ (ad\ x)}{ad\ x})|$$

Proposition 1.8. *Il existe un voisinage étoilé* W *de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$ *tel que* $(expW)^2$ *soit exponentiel.*
Dans ce cas, pour tout $(x, y) \in W^2$, *on peut poser*

$$x \cdot y = log(exp\ x\ exp\ y).$$

On considère le coproduit :

$$\begin{array}{rcl} \Delta{:}C^\infty(G) & \longrightarrow & C^\infty(G\times G) \\ \varphi & \longmapsto & (g,h) \mapsto \varphi(gh). \end{array}$$

Définition 1.9. *Soient* S,T *deux distributions à support compact sur* G.
Alors ${}^t\Delta(S \otimes T)$ *définit une distribution à support compact sur* G, *appelée produit de convolution des distributions de* S *et* T *sur* G. *On le notera par* $S * T$. *On a donc pour tout* $\varphi \in C^\infty(G)$:

$$< S * T, \varphi > = < S \otimes T, \Delta\varphi > .$$

Remarque 1.10. *Soit* $d\mu$*(resp.* $d\mu'$*) une mesure de Haar à gauche(resp. à droite). Le produit de convolution de deux fonctions à support compact sur* G *s'écrit avec la convention à gauche (resp. à droite), pour tout* $f, g \in \mathcal{D}(G)$ *:*

$$f \underset{G}{*} g(k) = \int_G f(h)g(h^{-1}k)d\mu(k)$$

(resp. $f \underset{D}{*} g(k) = \int_G f(kh)g(h^{-1})d\mu'(k)$*)*
Le produit de convolution des distributions s'identifie au produit de convolution des fonctions avec la convention à gauche (resp. à droite), via le choix d'une mesure de Haar invariante à gauche (resp. à droite).

$$fd\mu * gd\mu = (f \underset{G}{*} g)d\mu$$
$$fd\mu' * gd\mu' = (f \underset{D}{*} g)d\mu'$$

Théorème 1.11 (Poincaré-Birkhoff-Witt)**.** [6] *La symétrisation* $\sigma : \mathcal{S}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *définie par*

$$\sigma(x_1 \cdots x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\tau \in S_n} x_{\sigma_1} \cdot \cdots \cdot x_{\sigma_n}$$

est un isomorhisme d'espaces vectoriels, et on a :

$$\sigma(a) = exp_*(\mathcal{F}^{-1}a)$$

en tant que distribution sur G *de support* $\{e\}$.

Définition 1.12. *On désigne par* $v \mapsto v^*$ *l'anti-automorphisme principal de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$*, déterminé par* $X^* = -X$*, pour tout* $X \in \mathfrak{g}$.
Un élément $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ *est formellement positif s'il s'écrit*

$$u = \sum_{j=1}^{N} v_j^* v_j,$$

où les v_j *sont des éléments de* $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$.

2. Opérateurs Fouriers Intégraux sur $\mathbb{R}^n$

Dans ce chapitre, j'introduis la notion d'Opérateur Fourier-Intégral sur un espace vectoriel. Ce type d'opérateurs a d'abord été défini par Hörmander [8] [13] dans le but de résoudre l'équation des ondes. Ici je reprends la construction des OFI depuis le début en m'inspirant de l'ouvrage de Shubin [26]. On construit d'abord les intégrales oscillantes qui définissent des distributions particulières sur un espace vectoriel. Ensuite grâce à ces distributions auxquelles on aura rajouté quelques conditions supplémentaires, on définit la notion d'Opérateur Fourier-Intégral. Enfin je vais traiter quelques exemples d'OFI, dont celui qui a donné naissance à la théorie.

2.1. **Intégrale oscillante.**

Soit X un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit N un entier positif.

Définition 2.1. [26] *Une fonction* $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}))$ *est une fonction de phase si :*

- Φ *est positivement homogène de degré* 1 *en* ξ*, i.e*

$$\Phi(x, t\xi) = t\Phi(x, \xi),$$

  pour tout $(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ *et tout* $t > 0$.

- Φ *n'a pas de point critique, i.e*

$$d\Phi(x, \xi) \neq 0,$$

  pour tout $(x, \xi) \in X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Remarque 2.2. *Cette notion a encore un sens sur une variété lisse* X.

Définition 2.3. [9],[13],[26] *Soient* $u \in \mathcal{D}(X)$*,* $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ *avec* $\rho > 0, \delta < 1$ *et* Φ *une fonction de phase. Alors l'intégrale*

$$A(a, \Phi) \cdot u = \iint e^{i\Phi(x,\xi)} a(x, \xi) u(x) dx d\xi$$

a un sens et est appelée intégrale oscillante.

Justification de l'existence de l'intégrale.
On va régulariser $A(a, \Phi) \cdot u$, en utilisant une fonction de troncature χ_0 sur $\mathbb{R}^N$ telle que $\chi_0(\xi) = 1$ au voisinage de 0. On pose

$$A(a, \Phi) \cdot u = \lim_{\varepsilon \to 0} A(a, \Phi)_\varepsilon \cdot u,$$

où $A(a,\Phi)_\varepsilon \cdot u = \iint \chi_0(\varepsilon\xi)e^{i\Phi(x,\xi)}a(x,\xi)u(x)dxd\xi$.
Maintenant on va donner la construction d'un opérateur L qui permet de régulariser l'intégrale.

Lemme 2.4. *Il existe un opérateur L de la forme :*

$$\sum_{j=1}^{N} a_j(x,\xi)\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x,\xi)\frac{\partial}{\partial x_k} + c(x,\xi),$$

avec $a_j \in \mathcal{S}^0(X\times\mathbb{R}^N)$, b_k et $c \in \mathcal{S}^{-1}(X\times\mathbb{R}^N)$, tel que le transposé de L défini par :

$${}^tLu(x,\xi) = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\xi_j}(\overline{a_j}(x,\xi)u(x)) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{b_k}(x,\xi)u(x)) + \overline{c}(x,\xi)u(x),$$

vérifie ${}^tLe^{i\Phi} = e^{i\Phi}$.

Démonstration. On a $\frac{\partial}{\partial\xi_j}e^{i\Phi} = i\frac{\partial}{\partial\xi_j}\Phi e^{i\Phi}$, et $\frac{\partial}{\partial x_j}e^{i\Phi} = i\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi e^{i\Phi}$, alors

$$(\sum_{j=1}^{N} -i\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}|\xi|^2\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum_{k=1}^{n} -i\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j})e^{i\Phi} = \frac{1}{\psi}e^{i\Phi},$$

où ψ est homogène de degré -2 en ξ. On a alors

$$-i\psi(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}|\xi|^2\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j})e^{i\Phi} = e^{i\Phi}.$$

On pose

$${}^tL = -i(1-\chi)\psi(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial\Phi}{\partial\xi_j}|\xi|^2\frac{\partial}{\partial\xi_j} + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}) + \chi,$$

avec χ une fonction de troncature égale à 1 si $||\xi|| < \frac{1}{4}$ et 0 si $||\xi|| > \frac{1}{2}$. On a donc

$${}^tLe^{i\Phi} = e^{i\Phi}.$$

Fin de la justification.

On va régulariser l'intégrale grâce à L. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On peut alors transformer l'expression de $A(a,\Phi)_\varepsilon$ en :

$$A(a,\Phi)_\varepsilon \cdot u = \iint e^{i\Phi(x,\xi)}L^k\big(\chi_0(\varepsilon\xi)a(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi.$$

On voit que $L^k\big(\chi_0(\varepsilon\xi)a(x,\xi)u(x)\big)$ est un symbole d'ordre $m-ks$, avec $s = min(\rho, 1-\delta)$, et donc pour k assez grand,

$$A(a,\Phi)\cdot u = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint e^{i\Phi(x,\xi)}L^k\big(\chi_0(\varepsilon\xi)a(x,\xi)u(x)\big)dxd\xi$$

existe. On vérifie facilement que cette limite ne dépend ni de L, ni de χ_0.

Q.E.D.

Remarque 2.5. *La forme linéaire $u \mapsto A(a,\Phi)\cdot u$ est une distribution sur X, appelée Distribution Fourier Intégrale de phase Φ et d'amplitude a. On note alors A cette distribution.*

On pose

$$C_\Phi = \{(x,\theta) \in X \times \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \mid d_\theta \Phi(x,\theta) = 0\},$$

où C_Φ est un cône fermé. On note π la projection canonique $\pi : X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \to X$. On note alors : $S_\Phi = \pi C_\Phi$ et $R_\Phi = X \setminus S_\Phi$.

Théorème 2.6. [9],[13],[26], *voir aussi* [27].

$$\textit{sing supp } A \subset S_\Phi,$$

c'est-à-dire S_Φ contient le support singulier de A.

Théorème 2.7. [9],[13],[26], *voir aussi* [27].
Si $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(X \times \mathbb{R}^N)$ telle que a soit nulle au voisinage de C_Φ, alors

$$A \in \mathcal{C}^\infty(X).$$

Définition 2.8. *La fonction de phase Φ est dite non-dégénérée si $(d(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_j}))_{j=1,\cdots,N}$ est une famille libre sur C_Φ, i.e si la matrice*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_1}} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_1}\partial_{\xi_N}} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_1}\partial_{x_1}} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_1}\partial_{x_n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_N}\partial_{\xi_1}} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_N}\partial_{\xi_N}} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_N}\partial_{x_1}} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial_{\xi_N}\partial_{x_n}} \end{pmatrix}(x,\xi)$$

est de rang N pour tout $(x,\xi) \in C_\Phi$.

Proposition 2.9. [9],[13],[26], *voir aussi* [27].

Si Φ est une fonction de phase non-dégénérée, alors C_Φ est une sous-variété de dimension n dans $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.

Proposition 2.10. [9],[13],[26].

Soit Φ est une fonction de phase non-dégénérée, soit $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}$ avec $\rho + \delta = 1$, et $\rho > \delta$. Alors :

(1) *si $a_{|C_\Phi} = 0$, alors il existe $b \in \mathcal{S}^{m-(\rho-\delta)}(X \times \mathbb{R}^N)$ tel que $A(a,\Phi)\cdot u = A(b,\Phi)\cdot u$, pour tout $u \in \mathcal{D}(X)$.*

(2) *si $a_{|C_\Phi} = 0$ et si tous ces zéros sont d'ordre infini, alors $A \in \mathcal{C}^\infty(X)$.*

2.2. **Opérateurs Fouriers Intégraux sur $\mathbb{R}^n$.** Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^{n_X}$ et Y un ouvert de $\mathbb{R}^{n_Y}$, où n_X et n_Y sont deux entiers positifs.

Définition 2.11. *Soient $a \in \mathcal{S}^m_{\rho,\delta}(X \times Y \times \mathbb{R}^N)$ avec $\rho > 0, \delta < 1$ et Φ une fonction de phase sur $X \times Y \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$.*
L'opérateur

$$\begin{array}{rcl} A : \mathcal{D}(Y) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(X) \\ u & \longmapsto & v \mapsto A(a,\Phi)\cdot(v \otimes u) \end{array}$$

est appelé Operateur Fourier Intégral (OFI) de fonction de phase Φ et d'amplitude a sur $X \times Y \times \mathbb{R}^N$.

Définition 2.12. *La distribution $K_A \in \mathcal{D}'(X \times Y)$ telle que $< K_A, w >= A(a, \Phi) \cdot w$, pour tout $w \in \mathcal{D}(X \times Y)$ est appelée noyau de A.*

Remarque 2.13. *Le noyau K_A est défini de manière unique par A et inversement. Mais un OFI peut être déterminé par plusieurs fonctions de phase et plusieurs amplitudes.*

Proposition 2.14. [9],[13],[26]
- *Le noyau K_A est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur R_Φ, où R_Φ est défini comme dans le paragraphe précédent.*
- *Si $a = 0$ au voisinage de C_Φ, alors $K_A \in \mathcal{C}^\infty(X \times Y)$.*

Définition 2.15. *Une fonction de phase Φ sur $X \times Y \times (\mathbb{R}^N/\{0\})$ est appelée fonction de phase d'opérateurs si :*
- *$d_{(x,\xi)}\Phi(x, y, \xi) \neq 0$, pour tout $\xi \neq 0$, pour tout $(x, y) \in X \times Y$. $(*)$*
- *$d_{(y,\xi)}\Phi(x, y, \xi) \neq 0$, pour tout $\xi \neq 0$, pour tout $(x, y) \in X \times Y$. $(**)$*

L'intérêt de cette définition apparait dans les propositions suivantes :

Proposition 2.16. [26] *Sous la condition $(*)$, l'opérateur $A :\ u \mapsto \int e^{i\Phi(x,y,\theta)}a(x, y, \theta)u(y)dyd\theta$ est continu de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{C}^\infty(X)$.*

Proposition 2.17. [26] *Sous la condition $(**)$, l'application $A :\ u \mapsto \int e^{i\Phi(x,y,\theta)}a(x, y, \theta)u(y)dyd\theta$ de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ s'étend par continuité en une application de $\mathcal{E}'(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$, la continuité considérée est celle associée à la topologie faible sur $\mathcal{E}'(Y)$.*

Rappel : Soient $K \subset X \times Y$ et $S \subset Y \times Z$. On définit la composition de ces deux relations par :

$$K \circ S = \{(x, z) \in X \times Z |\, \exists y \in Y\ tq.\ (x, y) \in K\ et\ (y, z) \in S\}$$

Théorème 2.18. [9],[13],[26] *sing supp $Au \subset S_\Phi \circ$ sing supp u.*

2.3. **Exemples d'Opérateurs OFI.** [26]
Dans cette partie, on étudie deux exemples fondamentaux d'OFI, une solution de l'équation des ondes avec des conditions aux limites particulières, puis les opérateurs pseudo-différentiels. Le premier exemple est celui qui a donné naissance à la théorie des OFI [13] par L.Hörmander :

1. Equation des ondes :

C'est l'équation aux dérivées partielles du second ordre avec conditions aux limites :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \Delta f \\ \\ f(0,x) = 0, \, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ \\ \frac{\partial f}{\partial t}(0,x) = u(x), \, \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

avec $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Afin de résoudre ce système, on utilise la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}^n$, ce qui donne le nouveau système sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial t^2}(t,\xi) = -||\xi||^2 \hat{f}(t,\xi), \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \, \forall t \in \mathbb{R} \\ \hat{f}(0,\xi) = 0, \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \\ \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}(0,\xi) = \hat{u}(\xi), \, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

En résolvant, on obtient $\hat{f}(t,\xi) = \hat{u}(\xi)\frac{sin(t||\xi||)}{||\xi||}$.

Grâce à la formule d'inversion on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \, \forall t \in \mathbb{R}, \, f(t,x) = f_+(t,x) - f_-(t,x),$$

avec

$$f_+(t,x) = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(<x-y,\xi>+t||\xi||)}(2i||\xi||)^{-1}u(y)dyd\xi,$$

et

$$f_-(t,x) = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(<x-y,\xi>-t||\xi||)}(2i||\xi||)^{-1}u(y)dyd\xi.$$

Maintenant pour l'exemple, on voit qu'il suffit de considérer f_+. Soit χ une fonction de troncature égale à 1 au voisinage de 0. Posons

$$\begin{aligned} a :\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \xi &\longmapsto (1-\chi(\xi))(2i||\xi||)^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Phi :\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x,y,\xi) &\longmapsto < x-y, \xi > +t||\xi||. \end{aligned}$$

On vérifie aisément que Φ est une fonction de phase d'opérateurs. Soit A_+ l'OFI de fonction de phase Φ et d'amplitude a, on obtient donc :

$$f_+(t,x) = A_+u(t,x) + h_+(t,x),$$

avec $h_+(t,x) = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{i(<x-y,\xi>+t||\xi||)}\chi(\xi)(2i||\xi||)^{-1}u(y)dyd\xi$.
On peut définir de la même façon A_-u et h_-, on pose alors $h = h_+ - h_-$. La fonction de phase Φ a pour cône singulier et support singulier :

$$\begin{aligned} C_\Phi &= \{(t,x,y,\xi)| \; ||y-x|| = t\tfrac{\xi}{||\xi||}\} \\ S_\Phi &= \{(t,x,y)| \; ||y-x||^2 = t^2\} \end{aligned}.$$

L'application $u \mapsto h$ peut s'étendre par continuité à une application de $L^1(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$. Par simplicité, on étudiera l'équation des ondes avec $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. D'après le théorème 2.18, les singularités de f_+ et donc de f appartiennent à

$$\{(t,x,y)|\ \exists y \in singsupp\ u, ||y-x||^2 = t^2\}.$$

On retrouve le fait que les singularités se propagent à la vitesse de la lumière, qui est égale à 1 ici. En particulier dans le cas d'une source ponctuelle, i.e $u = \delta$, les singularités se propagent suivant le cône

$$\{(t,x)|\ ||x||^2 = t^2\}.$$

Remarque 2.19. *A $t = t_0$ fixé, $u \mapsto A_+(t_0, \cdot)$ est un OFI.*

2. Opérateurs Pseudo-Différentiels :

Définition 2.20. *On pose $n_X = n_Y = N = n$ et $X = Y$ avec les notations précédentes. Un OFI de fonction de phase $\Phi(x,y,\xi) =< x-y, \xi >$ est appelé Opérateur Pseudo-Différentiel (OPD) sur X.*

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 2.21. [26]. *Soit $\Phi(x,y,\xi) =< x-y,\xi >$. Alors,*

$$C_\Phi = \{(x,x,\xi)|\ x \in X, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$$
$$S_\Phi = \{(x,x)|\ x \in X\}.$$

3. Opérateurs OFI sur les variétés.

Dans ce chapitre, on rappelle la construction des OFI sur une variété X paracompacte. Dans la suite, X sera une variété paracompacte de dimension n et Λ un Lagrangien conique fermé de $T^*X \setminus \{0\}$, où le fibré T^*X est muni de sa forme symplectique canonique.
Définir les OFI sur une variété X nécessite d'abord de définir les intégrales oscillantes associées. Ici l'utilisation de la construction de l'intégrale oscillante sur $\mathbb{R}^n$ nous amène à définir des Distributions Fouriers-Intégrales (DFI) prenant en compte les changements de cartes locales sur X. Mais avant de donner cette définition, il faut introduire un formalisme qui permet d'intégrer sur la variété X, qui en général ne sera pas orientée, et donc ne possédera pas de forme volume. Ce formalisme, qui devra aussi nous permettre de parler de distributions sur une variété, est le formalisme des densités sur X.

3.1. **Fibré linéaire complexe des densités d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}$.** (d'après [9])

Définition 3.1. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, V un espace vectoriel de dimension n. On appelle densité à valeurs complexes d'ordre α une application $\rho : \bigwedge^n V \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ telle que $\rho(\lambda v) = |\lambda|^\alpha \rho(v)$, pour tout $v \in \bigwedge^n V \setminus \{0\}$ et $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
L'ensemble de toutes les densités d'ordre α sur V est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 1, noté $\Omega_\alpha(V)$.

Définition 3.2. *Soit X une variété lisse paracompacte. $(x, \Omega_\alpha(T_xX))_{x\in X}$ est un fibré $\mathbb{C}$-linéaire sur X, noté $\Omega_\alpha(X)$.*
Une section lisse ρ de $\Omega_\alpha(X)$ définit alors une densité d'ordre α sur X , notée $\rho \in \mathcal{C}^\infty(X, \Omega_\alpha)$.

Remarque 3.3. *Notons que par le choix d'une densité d'ordre α non-nulle partout, on peut identifier $C^\infty(X,\Omega_\alpha)$ à $C^\infty(X)$. On pourra toujours créer une telle densité grâce à une partition de l'unité adaptée.*

Proposition 3.4. *$\Omega_\alpha \otimes \Omega_\beta = \Omega_{\alpha+\beta}$ pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, et si $(\rho,\sigma) \in \mathcal{C}^\infty(X,\Omega_\alpha) \times \mathcal{C}^\infty(X,\Omega_\beta)$, alors $\rho \otimes \sigma \in \mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\alpha+\beta})$. Comme on travaille sur des fibrés linéaires, on notera $\rho \cdot \sigma$ pour $\rho \otimes \sigma$.*

Remarque 3.5. *Les densités d'ordre* 0 *sont exactement les fonctions complexes lisses sur* X*. Les densités d'ordre* 1 *sont les densités sur* X *au sens usuel.*

Remarque 3.6. *Les densités d'ordre* 1 *à support compact peuvent être intégrées sur* X*. En effet, pour toute densité d'ordre* 1 *sur* X*, l'intégrale* $\int \rho \ dx$ *est invariante par changement de cartes locales grâce à la positive homogénéité d'ordre* 1 *des densités d'ordre* 1 *par rapport aux jacobiens des changements de cartes.*
Alors si supp$(\rho \cdot \sigma)$ *est compact et* $\beta = 1 - \alpha$*,* $(\rho, \sigma) \mapsto \int \rho \cdot \sigma$ *définit une forme bilinéaire continue sur* $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_\alpha) \times \mathcal{D}(X, \Omega_\beta)$*. La correspondance* $\sigma \mapsto \int \rho \cdot \sigma$ *est donc un élément de* $(\mathcal{D}(X, \Omega_{1-\alpha}))'$*.*

Définition 3.7. $\mathcal{D}'(X, \Omega_\alpha) = (\mathcal{D}(X, \Omega_{1-\alpha}))'$ *est alors appelé l'espace des distributions de densité d'ordre* α *sur* X*. On a l'injection canonique de* $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_\alpha) \hookrightarrow \mathcal{D}'(X, \Omega_\alpha)$*.*

Remarque 3.8. *On notera le cas particulier* $\alpha = \frac{1}{2}$ *où* $C^\infty(X, \Omega_{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}'(X, \Omega_{\frac{1}{2}}) = \big(\mathcal{D}(X, \Omega_{\frac{1}{2}})\big)'$*. Comme exemple, on choisit une mesure de Haar invariante à gauche* μ*, comme dans* [22]*, on notera* $\sqrt{d\mu}$ *la demi-densité sur* G *telle que pour tous* $X_1, \cdots, X_n$ *champs de vecteurs invariants à gauche, on ait :*

$$\sqrt{d\mu}(X_1, \cdots, X_n) = |d\mu(X_1, \cdots, X_n)|^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 3.9. *Soit* f *une immersion lisse de* M_1 *dans* M_2 *avec dim* $M_1 =$ *dim* M_2*. Alors* f *induit pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$ *:*

– *Le tiré en arrière associé sur les sections de fibré linéaire*

$$f^\alpha : \mathcal{D}(M_2, \Omega_\alpha) \mapsto \mathcal{D}(M_1, \Omega_\alpha).$$

– *L'application transposée de ce tiré en arrière*

$$f_\alpha : \mathcal{D}'(M_1, \Omega_\alpha) \mapsto \mathcal{D}'(M_2, \Omega_\alpha).$$

– *Si de plus* f *est un difféomorphisme alors on peut définir l'isomorphisme de fibrés linéaires*

$$\Omega^\alpha(f) : \Omega_\alpha(M_2) \mapsto \Omega_\alpha(M_1).$$

3.2. **Distributions Fourier-Intégrales sur une variété X associée à un Lagrangien conique fermé de $T^*X \setminus \{0\}$.** (d'après [9],[13])

On note π_X la projection canonique de T^*X sur X. Soit Λ un Lagrangien conique fermé de $T^*X \setminus \{0\}$.

Avant de définir les classes de distributions Fourier- Intégrales sur la variété, rappelons la proposition suivante :

Proposition 3.10. *Soit* X *une variété.* [22]
Une fonction de phase non-dégénérée φ *sur* $X \times \mathbb{R}^N$ *décrit une variété Lagrangienne fermée conique* Λ_φ *de* $T^*X \setminus \{0\}$ *via l'application*

$$\begin{array}{rcl} l_\varphi : X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) & \longrightarrow & T^*X \setminus \{0\} \\ (x, \theta) & \longmapsto & (x, d_x\varphi(x, \theta)). \end{array}$$

La restriction de cette application au cône fermée C_φ *est un isomorphisme de* C_φ *sur son image qui est un Lagrangien fermé conique de* $T^*X \setminus \{0\}$

$$\Lambda_\varphi = l_\varphi(C_\varphi).$$

Soit Λ une sous-variété Lagrangienne conique fermée de $T^*X \setminus \{0\}$. Soit $(\phi_j)_{j \in J}$ une famille de fonctions de phase non-dégénérées telles que ϕ_j soit définie sur un ouvert conique Γ_j de $X \times (\mathbb{R}^{N_j} \setminus \{0\})$, avec $\pi_X(\Gamma_j)$ ouvert de carte locale de X et $N_j > 0$, et telles que $l_{\phi_j}(C_{\phi_j})$ soit un ouvert conique de la variété Lagrangienne conique fermée Λ.

Définition 3.11. *Soit a une fonction sur un cône, alors cone supp a désigne le cône engendré par le support de a.*

Définition 3.12. *Soit $\rho > \frac{1}{2}$.*
La classe des DFI associées au Lagrangien conique fermé Λ de T^*X, notée $I_\rho^m(X, \Lambda)$, est définie comme l'ensemble des $A \in \mathcal{D}'(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$ tels que $A = \sum_{j\in J} A_j$, où les supports des A_j forment un recouvrement localement fini de supp A, les A_j étant définies par

$$< A_j, u >= (2\pi)^{-\frac{(n+2N_j)}{4}} \int\int e^{i\phi_j(x,\theta)} a_j(x,\theta) u(x) dx d\theta,$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(X, \Omega_{\frac{1}{2}})$, avec $a_j \in \mathcal{S}_\rho^{m+\frac{n}{4}-\frac{1}{2}N_j}(X \times \mathbb{R}^{N_j})$ telle que cone supp $a_j \subset \Gamma_j$, et où $(\phi_j)_{j\in J}$ est une famille de fonctions de phase comme ci-dessus.

3.3. **Symbole principal d'une DFI sur X variété paracompacte.** Soit $A \in I_\rho^m(X, \Lambda)$ avec $\rho > \frac{1}{2}$. On va d'abord travailler localement sur un ouvert de carte, on peut donc se restreindre à un calcul de développement asymptotique sur un voisinage ouvert conique C_0 de $(x_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. On supposera donc que A est à support compact et a une amplitude a à support dans C_0, et une fonction de phase non-dégénérée φ. Dans un premier temps, on va déterminer les singularités d'une DFI. Pour ceci, on va introduire le front d'onde d'une distribution sur une variété, puis en utilisant le théorème de la phase stationnaire, on va calculer le comportement des singularités. Ceci va permettre de définir le symbole principal d'un OFI.

3.3.1. *Front d'onde d'une distribution.* [9]
Je vais présenter ici le front d'onde d'une distribution, c'est un outil qui permet de localiser les singularités d'une distribution.

Définition 3.13. *Soit $S \in \mathcal{D}'(X, \Omega_\alpha)$.*
Le front d'onde de S, noté $WF(S)$, est le complémentaire dans $T^*X \setminus \{0\}$ de l'ensemble des (x, ξ) appartenant à $T^*X \setminus \{0\}$ tels que :

Pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R}^p)$, avec $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\xi = d_x\psi(x, a)$, et tel qu'il existe un voisinage ouvert U(resp. A) de x(resp. a) tels que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(U, \Omega_{1-\alpha})$, tout $N \in \mathbb{N}$, on ait

$$< S, e^{i\tau\psi(\cdot,a)}\phi >= O(\tau^{-N}),$$

de façon uniforme pour $a \in A$, quand τ tend vers $+\infty$.

Proposition 3.14. *Page 27 de* [9].

- *$WF(S)$ est un cône fermé de $T^*X \setminus \{0\}$.*
- *sing supp $S = \pi(WF(S))$ où $\pi : T^*X \to X$ est la projection canonique sur X.*

Remarque 3.15. *Si $WF(S - T) = \emptyset$, alors $S \equiv T(mod\ \mathcal{C}^\infty)$.*

Théorème 3.16. *Théorème II.2.2 de* [9]*. Soit A une DFI sur une variété paracompacte X d'amplitude $a \in \mathcal{S}_\rho^m$, avec $\rho > 0$, et de fonction de phase φ non-dégénérée. Alors $WF(A) \subset \Lambda_\varphi \cap l_\varphi(ess\ supp\ a)$,*
où ess supp a est le plus petit ensemble conique en dehors duquel la restriction de a soit de classe $\mathcal{S}^{-\infty}$.

Maintenant on va donner le théorème de la phase stationnaire afin de pouvoir calculer le symbole principal d'une DFI.

3.3.2. *Méthode de la phase stationnaire avec paramètre.* [9][11]

Soient $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et X ouvert de $\mathbb{R}^q$. Soit m un réel et $\rho > \frac{1}{2}$.
Soient $\varphi \in C^\infty(X \times \mathcal{O})$, et $a \in C^\infty(X \times \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+)$ tel que pour η fixé, $(x, \tau) \mapsto a(x, \eta, \tau) \in \mathcal{S}^m_\rho(X \times \mathbb{R}^+)$, et $proj_X(supp\ a)$ soit compacte.
On va étudier le comportement asymptotique de

$$I(\eta, \tau) = \int_X e^{i\tau\varphi(x,\eta)} a(x, \eta, \tau) dx, \tag{5}$$

quand $\tau \to +\infty$, pour tout $\eta \in \mathcal{O}$.

Théorème 3.17 (Théorème de la phase non-stationnaire.)**.** [11] *On suppose que le support de a est contenu dans $X \times \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+$. Si $d_x\varphi \neq 0$ sur $X \times \mathcal{O} \times \mathbb{R}^+$ ou sur un voisinage du support de a, alors $(\eta, \tau) \mapsto I(\eta, \tau) \in \mathcal{S}^{-\infty}(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+)$.*

Si la phase a un point critique non-dégénéré $(x_0, \eta_0) \in X \times \mathcal{O}$, le théorème des fonctions implicites montre qu'il existe des voisinages U $(resp. V)$ de x_0 $(resp. \eta_0)$ tels que pour tout $\eta \in V$, il existe un unique $x(\eta) \in U$ vérifiant $d_x\varphi(x(\eta), \eta) = 0$ et $x(\eta_0) = x_0$. On pose alors $Q(\eta) = d_x^2\varphi(x(\eta), \eta)$, et par continuité du déterminant on peut choisir V assez petit pour que $Q(\eta)$ soit inversible, pour tout $\eta \in V$.
Dans ce cadre, le lemme de Morse avec paramètre permet par changement de variables convenable de se ramener à une phase quadratique :

Théorème 3.18 (Lemme de Morse avec paramètre)**.** [11] *On suppose que (x_0, η_0) est un point critique non-dégénéré de φ en x. Alors quitte à réduire les ouverts U et V, il existe une fonction lisse y de $U \times V$ dans $\mathbb{R}^q$, telle que, si on pose $z = y(x, \eta)$, on a :*

$$\varphi(x, \eta) - \varphi(x(\eta), \eta) = \frac{1}{2}\,{}^t z \cdot Q(\eta) \cdot z,$$

pour tout $(x, \eta) \in U \times V$.
En outre, y est un difféomorphisme en x pour η fixé et vérifie :

$$y(x(\eta), \eta) = 0\ ,\ \ d_x y(x(\eta), \eta) = I,$$

pour tout $\eta \in U$ (Pour $\eta \in V$ fixé, $x \mapsto y(x, \eta)$ est appelé difféomorphisme de Morse).

Remarque 3.19. *Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \times (\mathbb{R}^{N'} \setminus \{0\})$ et $X = X' \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ des fibrés coniques triviaux, avec $\mathcal{O}'$(resp. X') un ouvert de $\mathbb{R}^n$(resp. $\mathbb{R}^q$), et φ positivement homogène de degré 1 en (x, η) dans $X \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \times \Sigma$, alors $\eta \mapsto x(\eta)$ est positivement homogène de degré 1, et par positive homogénéité de degré 1, il suffit de connaître le difféomorphisme de Morse y sur le fibré en sphères de Σ pour l'avoir sur tout Σ.*

Maintenant on peut énoncer le théorème de la phase stationnaire avec paramètre :

Théorème 3.20 (Théorème de la phase stationnaire avec paramètre)**.** *Théorème II.9.3 de* [11]. *On se place dans les hypothèses du lemme de Morse avec paramètre et on suppose que a est nul pour x en dehors d'un compact de U. Alors l'intégrale $I(\eta, \tau) = \int_X e^{i\tau\varphi(x,\eta)} a(x, \eta, \tau) dx$, où X est un ouvert de $\mathbb{R}^q$ vérifie :*

(1) $e^{-i\tau\varphi(x(\eta),\eta)} I(\eta, \tau) \in \mathcal{S}^{m-\frac{1}{2}q}_\rho(\mathcal{O} \times \mathbb{R}^+)$.
(2) *Ce symbole admet dans $V \times \mathbb{R}^+$ un développement asymptotique de la forme :*

$$(\frac{2\pi}{\tau})^{\frac{q}{2}} |detQ(\eta)|^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4} sgn\ Q(\eta)} \left[\sum_{k \geq 0} \frac{\tau^{-k}}{k!} R(z, \eta)^k \tilde{a}(z, \eta, \tau)_{|z=0} \right],$$

où $\tilde{a}(z, \eta, \tau) = a(z, \eta, \tau)|\frac{Dx}{Dz}(z, \eta)|$ et $R(z, \eta) = \frac{i}{2} < Q^{-1}(\eta)\partial_z, \partial_z >$.

(3) *En particulier, le terme principal de ce développement est donné par :*

$$(\frac{2\pi}{\tau})^{\frac{q}{2}}|detQ(\eta)|^{-\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}sgn\ Q(\eta)}a(x(\eta),\eta,\tau)\ mod\ \mathcal{S}^{m-\frac{1}{2}q-1}(N\times\mathbb{R}^+)$$

On va maintenant appliquer ce théorème aux intégrales oscillantes de la forme :

$$I(\eta,\tau)=\iint_{X\times\mathbb{R}^N}e^{i\tau(\phi(x,\theta)-\psi(x,\eta))}a(x,\tau\theta)u(x)dxd\theta,$$

avec ϕ (resp. ψ) fonction de phase sur $X\times\mathbb{R}^N$(resp. $X\times\Sigma$, avec Σ de la forme $\mathcal{O}\times(\mathbb{R}^{N'}\setminus\{0\})$, où $\mathcal{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^{n'}$, $a\in\mathcal{S}^m_\rho(X\times\mathbb{R}^N)$, $u\in\mathcal{D}(X)$ et $\tau>0$.
Posons $\varphi:(x,\theta,\eta)\mapsto\phi(x,\theta)-\psi(x,\eta)$. On a alors :

$$I(\eta,\tau)=\iint_{X\times\mathbb{R}^N}e^{i\tau\varphi(x,\theta,\eta)}a(x,\tau\theta)u(x)dxd\theta,$$

avec φ fonction de phase sur $X\times\mathbb{R}^N\times\Sigma$ et, pour η fixé, $(x,\theta,\tau)\mapsto a(x,\tau\theta)u(x)\in\mathcal{S}^m_\rho(X\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^*_+)$. Supposons qu'il existe $(x_0,\theta_0,\eta_0)\in X\times\mathbb{R}^N\times\Sigma$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l}d_{(x,\theta)}\varphi(x_0,\theta_0,\eta_0)=0\\ d^2_{(x,\theta)}\varphi(x_0,\theta_0,\eta_0)\ soit\ non-dégénérée\end{array}\right.,$$

alors d'après le lemme de Morse, on peut trouver Σ_0 (resp. Γ_0) voisinage conique de η_0 (resp. (x_0,θ_0)) dans Σ, tels qu'il existe y lisse et positivement homogène de degré 1 sur $\Gamma_0\times\Sigma_0$, difféomorphisme de Morse pour $\eta\in\Sigma_0$ fixé, et donc vérifiant :

$$\varphi(x,\theta,\eta)-\varphi(x(\eta),\theta(\eta),\eta)=\frac{1}{2}y^t\cdot Q(\eta)\cdot y,$$

pour tout $(x,\theta,\eta)\in\Gamma_0\times\Sigma_0$, et

$$y(x(\eta),\theta(\eta),\eta)=0,\ d_{(x,\theta)}y(x(\eta),\theta(\eta),\eta)=id,$$

pour tout $\eta\in\Sigma_0$. Ici $\eta\mapsto(x(\eta),\theta(\eta))$ est le difféomophisme positivement homogène de degré 1 de Σ_0 dans un sous-ensemble de Γ_0, tel que $d_{(x,\theta)}\varphi(x(\eta),\theta(\eta),\eta)=0$.
Soit $\eta\in\Sigma_0$. Par définition de Γ_0, $(x(\eta),\theta(\eta))$ est l'unique solution de $d_{(x,\theta)}\varphi(x,\theta,\eta)=0$, donc φ n'a pas d'autres points critiques sur $\Gamma_0\times\{\eta\}$. Soit V_η un voisinage compact de $(x(\eta),\theta(\eta))$ inclus Γ_0. Supposons que *ess sup* $a\subset\Gamma_0$.
Coupons l'intégrale en une intégrale à phase stationnaire et une sans point critique, à l'aide de fonctions de troncature, ce qui donne :

$$\begin{array}{rcl}I(\eta,\tau) & = & \int\int_{X\times\mathbb{R}^N}e^{i\tau(\phi(x,\theta)-\psi(x,\eta))}\chi_1(x-x(\eta))\chi_2(\theta-\theta(\eta))a(x,\tau\theta)u(x)dxd\theta\\ & + & \int\int_{X\times\mathbb{R}^N}e^{i\tau(\phi(x,\theta)-\psi(x,\eta))}(1-\chi_1(x-x(\eta))\chi_2(\theta-\theta(\eta)))a(x,\tau\theta)u(x)dxd\theta\end{array},$$

où χ_1(resp. χ_2) est une fonction de troncature égales à 1 au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$(resp. $\mathbb{R}^N$), et telles que *supp* $\big((x,\theta)\mapsto\chi_1(x-x(\eta))\chi_2(\theta-\theta(\eta))\big)\subset V_\eta$.
On applique alors la méthode de la phase stationnaire à la première intégrale. La deuxième étant sans point critique, son développement asymptotique en τ est nul, d'après le théorème de la phase non-stationnaire. On peut alors énoncer le théorème :

Théorème 3.21. *Théorème II.3.1 de* [9] *Soit A une DFI d'amplitude $a\in\mathcal{S}^m_\rho(X\times\mathbb{R}^N)$, et de fonction de phase φ sur $X\times\mathbb{R}^N$. Soit ψ fonction de phase sur $X\times\Sigma$, avec Σ de la forme $\mathcal{O}\times(\mathbb{R}^{N'}\setminus\{0\})$.*
Supposons qu'il existe $(x_0,\theta_0,\eta_0)\in X\times\Sigma$ tel que $\xi_0=d_x\psi(x_0,\eta_0)\neq0$ et

$$\left\{\begin{array}{l}d_{(x,\theta)}\varphi(x_0,\theta_0,\eta_0)=0\\ d^2_{(x,\theta)}\varphi(x_0,\theta_0,\eta_0)\ soit\ non-dégénérée.\end{array}\right.$$

Alors il existe Σ_0*(resp.* Γ_0*) des voisinages ouverts coniques de* η_0*(resp.* (x_0,θ_0)*) tel que si* $u \in \mathcal{D}(X)$ *et ess supp* $a \subset \Gamma_0$*, on a le développement asymptotique suivant :*

$$e^{i\psi(x(\eta),\eta)} < A, e^{-i\psi(\cdot,\eta)}u > \underset{||\eta||\to+\infty}{\sim} (2\pi)^{\frac{1}{2}(N+n)}|detQ(\eta)|^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}sgnQ(\eta)}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[R(y,\eta)^k\tilde{b}(y,\eta,1)]_{|y=0},$$

uniformément en $\eta \in \Sigma_0$*. Dans cette expression,* $(x(\eta),\theta(\eta))$ *est l'unique solution dans* Γ_0 *de* $d_{(x,\theta)}\varphi(x(\eta),\theta(\eta),\eta) = 0$*, et*

$$\begin{cases} Q(\eta) = d^2_{(x,\theta)}\varphi(x(\eta),\theta(\eta),\eta) \ non-dégénérée \\ \\ \tilde{b}(y,\eta,\tau) = a(x(y),\tau\theta(y))u(x(y))|\frac{D(x,\theta)}{Dy}|(y,\eta) \\ \\ R(y,\eta) = \frac{i}{2} < Q(\eta)^{-1}\partial_y, \partial_y >, \end{cases}$$

où $(x,\theta) \mapsto y(x,\theta,\eta)$*, pour* $\eta \in \Gamma_0$ *fixé, est le difféomorphisme de Morse, i.e tel que :*

$$\begin{cases} y(x(\eta),\theta(\eta),\eta) = 0, \ et \ \frac{D\ y}{D(x,\theta)}(x(\eta),\theta(\eta),\eta) = id \\ \\ \varphi(x,\theta,\eta) = -\psi(x(\eta),\eta) + \frac{1}{2} < Q(\eta)y, y > . \end{cases}$$

Démonstration. On remarque que $I(\eta,\tau) = \tau^{-N} < A, e^{-i\tau\psi(\cdot,\eta)}u >$ et on se sert du théorème de la phase stationnaire à paramètre. On a donc :

$$e^{i\tau\psi(x(\eta_0),\eta_0)} < A, e^{-i\tau\psi(\cdot,\eta_0)}u > \sim \tau^N(\frac{2\pi}{\tau})^{\frac{1}{2}(N+q)}k(\eta_0)\sum_{k\geq 0}\frac{\tau^{-k}}{k!}[R(y,\eta_0)^k\tilde{b}(y,\eta_0,\tau)]_{|y=0},$$

où $k(\eta_0) = |detQ(\eta_0)|^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}sgnQ(\eta_0)}$, ce qui peut se réécrire :

$$e^{i\psi(x(\tau\eta_0),\tau\eta_0)} < A, e^{-i\psi(\cdot,\tau\eta_0)}u > \underset{\tau\to+\infty}{\sim} (2\pi)^{\frac{1}{2}(N+q)}k(\tau\eta_0)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}[R(y,\tau\eta_0)^k\tilde{b}(y,\tau\eta_0,1)]_{|y=0},$$

uniformément en $\eta_0 \in \Sigma_0$. Ensuite pour tout $\eta \in \Sigma_0$, on pose $\eta_0 = \frac{\eta}{||\eta||}$ et $\tau = ||\eta||$, par uniformité du développement asymptotique en τ, on obtient le développement asymptotique en η cherché grâce à l'expression précédente.

Q.E.D.

Remarque 3.22. *L'intérêt de ce théorème est de donner une équivalence asymptotique qui tient compte de la positive homogénéité de degré* 1 *des fonctions de phase utilisées, et de donner le développement en* η *et non en* τ *comme avant. On pourra alors passer à une formulation globale si les conditions du théorème sont vérifiées sur tout* Σ*.*

Avant d'appliquer ce théorème au calcul du symbole principal d'une DFI, on va donner un critère géométrique d'application du théorème 3.21 pour la phase ψ.

Proposition 3.23. *Lemme II.3.3 de* [9]*. Soient* ϕ *une fonction de phase sur* $X \times \mathbb{R}^N$ *et* ψ *une fonction de phase homogène de degré* 1 *sur* $X \times \Sigma_0$*, où* Σ_0 *est un cône ouvert de* $\mathcal{O}' \times (\mathbb{R}^{N'} \setminus \{0\})$*.*
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (x_0,θ_0) *est un point critique non-dégénéré pour* $(x,\theta) \mapsto \varphi(x,\theta) - \psi(x,\eta_0)$*.*

- (1) φ *est une fonction de phase non-dégénérée dans un voisinage conique de* (x_0,θ_0)*.*

(2) *De plus,* $d_\theta\varphi(x_0,\theta_0)=0$, $d_x\varphi(x_0,\theta_0)=d_x\psi(x_0,\theta_0)$ *et le graphe de* $d_x\psi$ *est transverse à* Λ_φ *en* $(x_0,d_x\varphi(x_0,\theta_0))=(x_0,d_x\psi(x_0,\eta_0))$ *dans* $T^*X\setminus\{0\}$*, où* Λ_φ *est le Lagrangien conique fermé de* $T^*X\setminus\{0\}$ *associé à* φ*.*

On a alors pour $\eta\in\Sigma_0$,

$$e^{i\psi(x,\eta)} < A, e^{-i\psi(\cdot,\eta)} >= (2\pi)^{\frac{n}{4}}k(\eta)a(x(\eta),\theta(\eta))\big(mod\ \mathcal{S}_\rho^{m-(2\rho-1)}\big),$$

où

$$k(\eta)=e^{i\frac{\pi}{4}sgn\ Q_\psi(x(\eta),\theta(\eta),\eta)}|detQ_\psi(x(\eta),\theta(\eta),\eta)|^{-\frac{1}{2}},$$

avec

$$Q_\psi(x,\theta,\eta)=\begin{pmatrix} d_x^2(\varphi-\psi)(x,\theta,\eta) & d_xd_\theta\varphi(x,\theta)\\ d_xd_\theta\varphi(x,\theta) & d_\theta^2\varphi(x,\theta)\end{pmatrix}, \tag{6}$$

qu'on note $Q_\psi(\eta)$ quand $(x,\theta)=(x(\eta),\theta(\eta))$.
On va interpréter $detQ_\psi(\eta)$ comme un jacobien de changement de cartes, pour cela posons :

$$\begin{aligned}\varphi_\psi:\Lambda\times\Sigma_0 &\longrightarrow T^*X\\ (x,\xi,\eta) &\longmapsto (x,\xi-d_x\psi(x,\eta)).\end{aligned}$$

On a alors $det\ Q_\psi(\eta)=det\ d_{(x,\theta)}\big((x,\theta)\mapsto((\varphi_\psi\circ l_\phi)_x,d_\theta\varphi))(x(\eta),\theta(\eta),\eta)\big)$, on peut alors vérifier [13] que $\lambda\mapsto a(l_\varphi^{-1}(\lambda))|det\ Q_\psi(l_\varphi^{-1}(\lambda))|^{-\frac{1}{2}}d\lambda^{\frac{1}{2}}$ est une demi-densité sur Λ.
Il reste à étudier $e^{i\frac{\pi}{4}sgn\ Q_\psi(x(\eta),\theta(\eta))}$. On va voir qu'on peut le relier à l'indice de Maslov, dont on va donner les propriétés dans le paragraphe suivant.

3.3.3. *Indice de Maslov.* [18]
Soit (V,ω) un espace symplectique. Soient l_1,l_2 et l_3 trois Lagrangiens de V.
On pose

$$\begin{aligned}Q:l_1\times l_2\times l_3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x_1,x_2,x_3) &\longmapsto \omega(x_1,x_2)+\omega(x_2,x_3)+\omega(x_3,x_1)\end{aligned}$$

Proposition 3.24. *Q est une forme quadratique sur $l_1\times l_2\times l_3$. La forme bilinéaire symétrique associée est*

$$\begin{aligned}Q:(l_1\times l_2\times l_3)\times(l_1\times l_2\times l_3) &\longrightarrow \mathbb{R}\\ ((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) &\longmapsto \tfrac{1}{2}[\omega(x_1,y_2)+\omega(y_1,x_2)+\omega(x_2,y_3)+\omega(y_2,x_3)+\cdots]\end{aligned}$$

Définition 3.25 (Indice de Maslov)**.** *L'indice de Maslov $\mu(l_1,l_2,l_3)$ de (l_1,l_2,l_3) est la signature de la forme quadratique Q, i.e*

$$\mu(l_1,l_2,l_3)=sgn\ Q.$$

Proposition 3.26. $\mu(l_1,l_2,l_3)=-\mu(l_2,l_1,l_3)=-\mu(l_1,l_3,l_2)$.

Maintenant on se place dans le cas où l_1,l_2 et l_3 sont 2 à 2 transverses. Pour commencer, on choisira juste l_1 et l_3 transverses, et l_2 quelconque. On a alors $V=l_1\oplus l_3$. On note π_1(resp. π_3) la projection sur l_1(resp. l_3) parallèlement à l_3(resp. l_1).

Proposition 3.27. *Dans le cas où l_1,l_3 sont transverses et l_2 quelconque,*
$\mu(l_1,l_2,l_3)=sgn\ Q_2$, où Q_2 est la forme quadratique sur l_2 définie par :

$$Q_2(x_2)=\omega(\pi_1(x_2),\pi_3(x_2)).$$

La forme bilinéaire symétrique associée est alors :

$$S_2(x_2,y_2)=\omega(\pi_1(x_2),\pi_3(y_2)),$$

et son noyau est $(l_1\cap l_2)\oplus(l_2\cap l_3)$.

Corollaire 3.28. *Si l_1, l_2 et l_3 sont deux à deux transverses, alors S_2 est non-dégénérée.*

3.3.4. *Fibré de Keller-Maslov.* [9][28]
On fixe $\eta_0 \in \Sigma_0$, et on note

$$(x_0, \theta_0) = (x(\eta_0), \theta(\eta_0)). \tag{7}$$

On va d'abord introduire les trois Lagrangiens de $T_{(x_0,\theta_0)}(T^*X)$:

$$M_1(x_0, \theta_0) = T^*_{x_0}X,$$
$$M_2(x_0, \theta_0) = T_{(x_0,\theta_0)}\Lambda,$$

et

$$L(x_0, \theta_0) = \{(v, d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot v), v \in T_{x_0}X\}.$$

Soit $\mathcal{L}(x_0, \theta_0)$ l'ensemble des $L(x_0, \theta_0)$ définis par les ψ tels que $L(x_0, \theta_0)$ soit transverse à $M_2(x_0, \theta_0)$. Alors si $L(x_0, \theta_0) \in \mathcal{L}(x_0, \theta_0)$, ces trois Lagrangiens sont tranverses deux à deux.

Définition 3.29 (Fibré de Keller-Maslov)**.**
Le fibré de Keller-Maslov est défini pour tout $(x_0, \theta_0) \in \Lambda$ par :

$$\mathbb{L}(x_0, \theta_0) = \left\{ \begin{array}{l} f : \mathcal{L}(x_0, \theta_0) \to \mathbb{C} \mid f(L_1) = i^{s(M_1,M_2,L_1,L_2)} f(L_2), \\ \\ \textit{pour tout } L_1,\ L_2 \textit{ dans } \mathcal{L}(x_0, \theta_0) \end{array} \right\},$$

où $s(M_1, M_2, L_1, L_2) = \frac{1}{2}(\mu(M_1, M_2, L_2) - \mu(M_1, M_2, L_1))$ est l'indice de Hörmander.

On pose

$$\begin{array}{rcl} g(x_0, \theta_0) : \mathcal{L}(x_0, \theta_0) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ L(x_0, \theta_0) & \longmapsto & e^{i\frac{\pi}{4} sgn\ Q_\psi(\eta_0)}. \end{array}$$

Pour la définition de $Q_\psi(\eta_0)$, voir (6) et (7).

Proposition 3.30. *$g(x_0, \theta_0)$ appartient à $\mathbb{L}(x_0, \theta_0)$.*

Démonstration. Comme M_1, M_2, et L sont deux à deux transverses, alors il existe $\tilde{A}$ telle que :

$$M_2 = \{(\tilde{A} \cdot \theta, \theta + d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot \tilde{A} \cdot \theta |\ \theta \in M_1\},$$

où $\tilde{A}$ est une application linéaire de M_1 dans $T_{x_0}X$.
On va d'abord relier $sgn\ Q_\psi(\eta_0)$ à l'indice de Maslov de M_2, M_1, et L, grâce au lemme suivant :

Lemme 3.31. *Lemme IV.1.2 de* [9] *On a les relations matricielles* $Q_\psi^{-1}(x_0, \theta_0) = \begin{pmatrix} \tilde{A} & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix}$, *et $sgn\ Q_\psi(x_0, \theta_0) = sgn\ \tilde{A} + sgn\ d_\theta^2\varphi(x_0, \theta_0)$, où B et C sont définies par $Q_\psi^{-1}(x_0, \theta_0)$.*

Démonstration. La preuve est donnée dans le lemme IV.1.2 de [9].

La projection sur M_1 parallélement à L, notée π_1, est donnée par :

$$\begin{array}{rcl} \pi_1 : T_{(x_0,\theta_0)}(T^*X) & \longrightarrow & M_1 \\ (v, \xi) & \longmapsto & \xi - d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot v. \end{array}$$

On a $\mu(M_1, M_2, L) = sgn\ \omega(\pi_1(\cdot), (id - \pi_1)(\cdot))$, grâce à la proposition 3.27. Soit $(v, \xi) \in \Lambda$. Il existe $\zeta \in M_1$ tel que $v = \tilde{A} \cdot \zeta$ et $\xi = \zeta + d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot \tilde{A}\zeta$.
On a :

$$\omega\big(\pi_1(v, \xi), (id - \pi_1)(v, \xi)\big) = \omega\big((0, \xi - d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot v), (v, d_x^2\psi(x_0, \eta_0) \cdot v)\big),$$

soit en tenant compte de l'expression de v et ξ :

$$\omega\big(\pi_1(v,\xi),(id-\pi_1)(v,\xi)\big)=\omega\big((0,\zeta),(\tilde{A}\zeta,0)\big).$$

Il existe alors $A : M_1 \to T_{x_0}X$ telle que

$$\omega\big((0,\zeta),(\tilde{A}\zeta,0)\big)=-<A\zeta,\zeta>.$$

Au vu de la forme de la forme symplectique canonique ω, cette matrice A a même signature que $\tilde{A}$. Donc $sgn\ \tilde{A} = sgn\ A = -\mu(M_1,M_2,L)$, ce qui donne $sgn\ Q_\psi(\eta_0) = -\mu(M_1,M_2,L) + sgn\ d_\theta^2\varphi(x_0,\theta_0)$. Donc pour tout L_1 et L_2 soient dans $\mathcal{L}(x_0,\theta_0)$, on a :

$$g(L_1)=i^{s(M_1,M_2,L_1,L_2)}g(L_2),$$

ce qui démontre la proposition 3.30.

Définition 3.32. [13][9][28]*[Symbole principal d'une DFI.] Pour une DFI A d'ordre m, associée à un Lagrangien conique fermé Λ, le symbole principal d'ordre m est l'élément de $\mathcal{S}_\rho^{m+\frac{n}{4}}(\Lambda,\Omega_{\frac{1}{2}}\otimes\mathbb{L})/\mathcal{S}_\rho^{m+\frac{n}{4}+1-2\rho}(\Lambda,\Omega_{\frac{1}{2}}\otimes\mathbb{L})$ défini par :*

$$\alpha\mapsto e^{i\psi(\pi(\alpha),\alpha)}<A,e^{-i\psi(\cdot,\alpha)}>,$$

où π est la surjection canonique de T^*X dans X et $\psi\in C^\infty(X\times T^*X)$ est telle que le graphe de $d_x\psi(\cdot,\alpha)$ soit transverse à Λ en α.

Remarque 3.33. *D'abord remarquons que localement, on choisit $\alpha=\big(x(\eta),d_x\varphi(x(\eta),\theta(\eta))\big)$ comme paramètre dans ψ. Puis on a montré que si on considère un symbole à valeur dans $\Omega_{\frac{1}{2}}\otimes\mathbb{L}$, le symbole principale ne dépend plus de ψ.*

4. Approximation de l'exponentielle d'un opérateur pseudo-différentiel auto-adjoint elliptique classique d'ordre 1 invariant à gauche sur un groupe de Lie G par un OFI sur G invariant à gauche.

4.1. **Problématique.** Soit G un groupe de Lie. Soit A un OPD classique sur G d'amplitude a invariant à gauche auto-adjoint et elliptique d'ordre 1.
On cherche, pour t réel assez petit, une approximation de e^{-itA} par un OFI Q_t invariant à gauche sur G. Dans le contexte Fourier-Intégral, approximation signifie que la différence des noyaux des deux opérateurs est lisse. On cherche donc à résoudre pour t assez petit,

$$\left\{\begin{array}{ll} N[\frac{dQ_t}{dt}+iA\circ Q_t] & \in C^\infty(G\times G,\Omega_{\frac{1}{2}}) \\ N[Q_0-I] & \in C^\infty(G\times G,\Omega_{\frac{1}{2}}) \end{array}\right., \tag{8}$$

où $N[\cdot]$ désigne le noyau de l'opérateur, et avec Q_t d'amplitude q_t classique d'ordre 0 lisse en t.
L'invariance à gauche des opérateurs doit permettre de simplifier ce système. B. Nielsen et H. Stetkaer ont travaillé dans ce sens. Grâce à leurs travaux, on montre que l'on peut écrire un OFI invariant à gauche comme une convolution à droite par une distribution Fourier-Intégrale. Le paragraphe suivant résume ce résultat.

4.2. **Description d'un OFI invariant à gauche sur un groupe de Lie G.** (d'après [22]) B. Nielsen et H. Stetkaer donnent une description précise d'un OFI invariant à gauche sur G, l'idée principale étant d'écrire un tel OFI sous la forme d'une convolution à droite par une Distribution Fourier-Intégrale sur G. Le fibré $\Omega_{\frac{1}{2}}(G)$ des demi-densités sur G est trivial car il existe une mesure de Haar à gauche ou à droite, qui est aussi une forme volume. On peut donc travailler avec des distributions sur G au lieu des distributions demi-densités, quand on utilise des classes de DFI sur G ou $G\times G$. Ici le travail de B.

Nielsen et H. Stetkaer sera réécrit dans le formalisme des distributions sur G.
Dans un premier temps, ils ont donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe de Distributions Fourier-Intégrales sur $G \times G$ soit invariante à gauche. Celle-ci résulte de l'action des translations à gauche sur les cônes Lagrangiens fermés de T^*G. La proposition suivante décrit cette action :

Proposition 4.1. *Soient M_1 et M_2 deux variétés lisses de dimension finie. Soit $f : M_1 \to M_2$ un difféomorphisme.*
Alors la restriction de l'application $f_* : \mathcal{D}'(M_1) \to \mathcal{D}'(M_2)$ à $I^m_\rho(M_1, \Lambda)$ est un isomorphisme de $I^m_\rho(M_1, \Lambda)$ sur $I^m_\rho(M_2, (f^*)^{-1}\Lambda)$.

On note $L(g) : h \mapsto gh$ la multiplication à gauche par g sur G et $R(g) : h \mapsto hg$ la multiplication à droite par g sur G. Si on travaille avec $G \times G$, on considérera alors les actions diagonales $L(g)(h_1, h_2) = (gh_1, gh_2)$ et $R(g)(h_1, h_2) = (h_1 g, h_2 g)$. Rappelons la définition d'invariance à gauche et d'invariance à droite.

Définition 4.2. *Un ensemble $\Lambda \subset T^*(G \times G)$ est dit invariant à gauche (resp. invariant à droite) si $L(g)^*\Lambda = \Lambda$ (resp. $R(g)^*\Lambda = \Lambda$), et bi-invariant s'il est invariant à gauche et à droite.*

Grâce à la proposition précédente, on caractérise les classes de DFI invariantes à gauche de la façon suivante :

Proposition 4.3. *Soient $m \in \mathbb{R}$, $\rho > \frac{1}{2}$ et Λ un Lagrangien conique fermé de $T^*(G \times G) \setminus \{0\}$. La classe $I^m_\rho(G \times G, \Lambda)$ est invariante à gauche si et seulement si Λ l'est.*

Grâce au travail de B. Nielsen et H. Stetkaer, nous allons écrire un Opérateur Fourier Intégral invariant à gauche sous la forme d'une convolution à droite par une Distribution Fourier Intégrale via l'application

$$\begin{array}{rccc} s\colon & G \times G & \longrightarrow & G \times G \\ & (g,h) & \longmapsto & (g, gh) \end{array}$$

et le diagramme associé :

$$\begin{tikzcd} T^*(G \times G) \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "proj."] & T^*(G \times G) \arrow[d, "proj."] \\ G \times G \arrow[r, "s"] & G \times G \end{tikzcd} ,$$

où $S' =^t (ds)^{-1}$.
Comme S' est un symplectomorphisme, on a le lemme suivant :

Lemme 4.4. *Lemme IV.2 de* [22]. *Soit $\pi_2 : G \times T^*G \to T^*G$ la projection sur le second facteur, et soit $S = S'_{|G \times T^*G}$.*
Alors $S^*(\Theta_{G\times G}) = \pi_2^*(\Theta_G)$ et $S^*(\omega_{G\times G}) = \pi_2^*(\omega_G)$, $\Theta_{G\times G}$ (resp. Θ_G) étant la 1-forme canonique sur $T^*(G\times G)$ (resp. T^*G) et $\omega_{G\times G}$ (resp. ω_G) la 2-forme symplectique canonique sur $T^*(G \times G)$ (resp. T^*G).

Grâce à l'application S, on peut créer une bijection de l'ensemble des sous-variétés Lagrangiennes coniques fermées de $T^*G \setminus \{0\}$ dans l'ensemble des sous-variétés Lagrangiennes coniques fermées de $T^*(G \times G) \setminus \{0\}$ invariantes à gauche.

Théorème 4.5. *Théorème IV.4 de* [22]. *L'application $\Lambda_e \mapsto S(G \times \Lambda_e)$ est une bijection sur l'ensemble des sous-variétés Lagrangiennes coniques fermées de $T^*G \setminus \{0\}$ dans l'ensemble des sous-variétés Lagrangiennes coniques fermées de $T^*(G \times G) \setminus \{0\}$ invariantes*

à gauche.
L'inverse de cette bijection est donné par $\Lambda \mapsto \Lambda_e = \{\lambda \in T^*G, S(e,\lambda) \in \Lambda\}$

Le théorème suivant donne le changement de variables à utiliser pour obtenir la forme convolée de l'OFI invariant à gauche.

Théorème 4.6. *Théorème IV.7 de* [22]*.Soit* Λ_e *une sous-variété Lagrangienne conique de* $T^*G \setminus \{0\}$*, décrite par une fonction de phase non-dégénérée* $\varphi : V \to \mathbb{R}$*, où* V *est un ouvert conique de* $G \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$*. Soit*

$$W = \{(x,y,\theta) \in G \times G \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) |\ (x^{-1}y,\theta) \in V\}$$

et posons

$$\begin{array}{rccc} \psi: & W & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,\theta) & \longmapsto & \varphi(x^{-1}y,\theta). \end{array}$$

Alors ψ *est une fonction de phase non-dégénérée décrivant la sous-variété Lagrangienne conique*

$$\Lambda = S(G \times \Lambda_e) \subset T^*(G \times G) \setminus \{0\}.$$

Démonstration. Soit $\psi_2 : (x,y,\theta) \mapsto \varphi(y,\theta)$ de $G \times V$ dans $\mathbb{R}$. Notons que $\psi = \psi_2 \circ F$, où $F : (x,y,\theta) \mapsto (x, xy^{-1}, \theta)$ est un difféomorphisme de W dans $G \times V$.
Comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] \arrow[d, "proj."] & G \times V \arrow[d, "proj."] \\ G \times G \arrow[r, "s^{-1}"] & G \times G \end{tikzcd}$$

commute, ψ décrit $(s^*)^{-1}(G \times \Lambda_e) = S(G \times \Lambda_e)$, par le lemme qui suit.

Lemme 4.7. *Lemme III.3 de* [22]*. Soient* $\pi_1 : \Sigma_1 \to M_1$ *et* $\pi_2 : \Sigma_2 \to M_2$*, où* Σ_1 *et* Σ_2 *sont deux cones ouverts de* $M_1 \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$*(resp.* $M_2 \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$*). Soit* (F,f) *un isomorphisme de* Σ_1 *dans* Σ_2 *tel que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} \Sigma_1 \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_1"] & \Sigma_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Soit $\varphi_2 \in C^\infty(\Sigma_2)$ *une fonction de phase non-dégénérée. Alors* $f_1 = \varphi_2 \circ F$ *est aussi une fonction de phase non-dégénérée,* $FC_{\varphi_1} = C_{\varphi_2}$ *et* $l_{\varphi_1} = f^* \circ l_{\varphi_2} \circ F$*. Si* φ_2 *décrit* $\Lambda_2 \subset (T^*M_2 \setminus \{0\})$*, alors* φ_1 *décrit* $f^*(\Lambda_2) \subset (T^*M_1 \setminus \{0\})$*.*

Q.E.D.

Définition 4.8. *Un élément* $A \in \mathcal{D}'(G \times G)$ *est dit invariant à gauche si* $L(g)_*A = A$*, pour tout* $g \in G$*, et invariant à droite si* $R(g)_*A = A$*, pour tout* $g \in G$*.*
Un opérateur $A : \mathcal{D}(G) \to \mathcal{D}'(G)$ *est dit invariant à gauche (resp. à droite) si* $A \circ L(g)^* = L(g)_* \circ A$*(resp.* $A \circ R(g)^* = R(g)_* \circ A$*), pour tout* $g \in G$*.*

Proposition 4.9. *Soit* Λ *une sous-variété Lagrangienne conique fermée de* $T^*(G \times G) \setminus \{0\}$ *invariante à gauche et soit* Λ_e *la sous-variété Lagrangienne fermée conique de* $T^*G \setminus \{0\}$ *correspondante.*
Soient $A \in I^m_\rho(G \times G, \Lambda)$ *et* $v \in \mathcal{D}(G)$*. On peut alors définir la fonction* $(Av)^\sim$ *grâce à la relation :*
$\int (Av)^\sim u d\mu = < A, u \otimes v >$*, pour tout* $u \in \mathcal{D}(G)$*, avec* $d\mu$ *mesure de Haar à gauche.*

On peut alors définir la distribution sur G

$$A_e : v \mapsto (Av)^{\sim}(e).$$

Soit ${}^G I_\rho^m(G \times G, \Lambda)$ l'ensemble des DFI invariantes à gauche sur $G \times G$.

Théorème 4.10. *Avec les notations de la proposition précédente, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \psi : {}^G I_\rho^m(G \times G, \Lambda) & \longrightarrow & I^{m+\frac{n}{4}}(G, \Lambda_e) \\ A & \longmapsto & A_e \end{array}$$

est un isomorphisme de l'espace vectoriel ${}^G I_\rho^m(G \times G, \Lambda)$ *dans* $I_\rho^{m+\frac{1}{4}n}(G, \Lambda_e)$*, où* $n = \dim G$.
L'application inverse est $A_e \mapsto s_*(d\mu \otimes A_e)$.

Démonstration. La preuve de ce théorème est donnée dans [22] théorème 5.2, le passage de l'ordre m à l'ordre $m + \frac{n}{4}$ provenant des définitions de $I_\rho^m(G \times G, \Lambda)$ et de $I_\rho^{m+\frac{n}{4}}(G, \Lambda_e)$. En effet une amplitude d'une DFI dans $I_\rho^m(G \times G, \Lambda)$ est d'ordre $m - \frac{1}{2}N_j + \frac{n}{2}$ dans une carte locale, alors l'amplitude de la DFI correspondante par la bijection est du même ordre dans la carte correspondante, donc on est bien dans $I_\rho^{m+\frac{n}{4}}(G, \Lambda_e)$ car dans la carte locale les amplitudes dans cette classe sont d'ordre $m + \frac{n}{4} - \frac{1}{2}N_j + \frac{n}{4} = m - \frac{1}{2}N_j + \frac{n}{2}$.
Q.E.D.

Corollaire 4.11. *En termes d'opérateurs, on peut traduire cette application inverse sous la forme :*

$$Av = (v d\mu) * \big(({}^t A)_e\big),$$

où $*$ *est la convolution des distributions sur* G*. Le Lagrangien fermé conique associé à* $({}^t A)_e$ *est alors donné par la relation* $\Lambda^* = j^*(\Lambda_e)$*, où* $j : g \mapsto g^{-1}$.

Démonstration. D'après le théorème, on a pour tout u, v dans $\mathcal{D}(G)$,

$$\begin{array}{rcl} < Av, u > & = & < v, {}^t Au > \\ & = & < s_*(d\mu \otimes ({}^t A)_e), v \otimes u > \\ & = & < d\mu \otimes ({}^t A)_e, s^*(v \otimes u) > . \end{array}$$

On a donc, vu la définition de s,

$$\begin{array}{rcl} < Av, u > & = & \int_G d\mu(g) v(g) < ({}^t A)_e, L(g)^* u > \\ & = & < ({}^t A)_e, \int_G v(g) d\mu(g) L(g)^* u > . \end{array}$$

On a pour tout $h \in G$,

$$\begin{array}{rcl} \int_G v(g) d\mu(g) L(g)^* u(h) & = & \int_G v(g) u(gh) d\mu(g) \\ < Av, u > & = & \int_G d\mu(g) v(g) < ({}^t A)_e, L(g)^* u > \\ & = & < ({}^t A)_e, h \mapsto \int_G u(gh) v(g) d\mu(g) > \\ & = & < (v d\mu) \otimes ({}^t A)_e, \Delta u > \\ & = & < (v d\mu) * \big(({}^t A)_e\big), u > . \end{array}$$

Donc

$$(Av) = (v d\mu) * \big(({}^t A)_e\big).$$

Pour trouver le Lagrangien conique fermé associé à $({}^t A)_e$, on utilise le théorème 4.6 qui donne la fonction de phase de A en fonction de φ la fonction de phase de A_e.
La fonction de phase de A est alors $(g, h) \mapsto \varphi(g^{-1}h)$, ce qui donne $(g, h) \mapsto \varphi(h^{-1}g) = \varphi((g^{-1}h)^{-1})$ comme fonction de phase pour ${}^t A$.

La fonction de phase de $({}^tA)_e$ est donc $\varphi \circ j$, et donc le Lagrangien conique associé à $({}^tA)_e$ est donc $\Lambda^* = j^*(\Lambda_e)$.

Q.E.D.

4.3. **Equation eikonale et équations de transport.** Cette partie constitue l'analyse du système. D'après les résultats du paragraphe précédent, on peut écrire, quitte à changer les notations, $A = \cdot * A_e$ et $Q_t = \cdot * (Q_e)_t$, où A_e est une Distribution Pseudo-Différentielle classique d'ordre 1 de support $\tilde{V}$ sur G, avec $\tilde{V} = exp\, V$ voisinage compact exponentiel de e dans G, de phase $(x,\xi) \mapsto < x, \xi >$ dans la carte exponentielle, et où $(Q_e)_t$ est une DFI sur G d'amplitude q_t et de fonction de phase φ_t dans la carte exponentielle. Par la suite, on fera en sorte que l'amplitude de $(Q_e)_t$ dans la carte exponentielle soit, pour t fixé, un symbole classique d'ordre 0 à support dans $V \times \mathfrak{g}^*$, et qu'elle est lisse en t. Le système (8) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{d(Q_e)_t}{dt} + i(Q_e)_t * A_e & \in \mathcal{D}(G) \\ (Q_e)_0 - \delta_e & \in \mathcal{D}(G) \end{array} \right. , \tag{9}$$

pour t assez petit. Ici on a pu restreindre le support de A_e au voisinage compact exponentiel $\tilde{V} = exp\ V$ de e dans G, car le support singulier de A_e est e, et donc on ne change rien au système, la convolution d'une distribution à support compact par une fonction de $\mathcal{D}(G)$ étant lisse. On considérera, par la suite, V comme un paramètre à ajuster pour résoudre le système et on construira alors $(Q_e)_t$ à support dans V. D'abord on choisira V tel que V^2 soit l'image difféomorphe par l'exponentielle d'un voisinage $\tilde{V}^2$ de 0. Pour toute distribution $B \in \mathcal{E}'(G)$, dont le support est un voisinage compact exponentiel de e dans G, on note

$$\tilde{B} = (exp^{-1})_* B \in \mathcal{E}'(\mathfrak{g}).$$

Par la suite, afin d'alléger les notations dans les calculs, on notera Q_t(resp. q_t, A) à la place de $(Q_e)_t$(resp .$(q_e)_t$, A_e). Le système (9) est alors équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{cc} \frac{d\widetilde{Q_t}}{dt} + i\widetilde{Q_t * A} & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \\ \widetilde{Q_0} - \delta_0 & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \end{array} \right. ,$$

pour t assez petit.

Maintenant il faut trouver une phase φ_t convenable pour Q_t. Par analogie avec Hörmander et Shubin ([27] , voir aussi [26]), on cherche la phase sous la forme

$$\varphi_t : (x,\xi) \mapsto \varphi(x,\xi) - ta_1(\xi),$$

avec φ fonction de phase sur $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$.
Pour $t = 0$, $e^{itA} = Id$, on doit donc avoir $\varphi_0 : (x,\xi) \mapsto (x,\xi) = \varphi(x,\xi)$ phase de distribution pseudo-différentielle, ce qui implique $\varphi(x,\xi) =< x, \xi > +O(|x|^2|\xi|)$ au voisinage de $x = 0$. On va maintenant formuler des hypothèses sur V et t suffisantes pour résoudre le système. La Distribution Pseudo-différentielle $\widetilde{A}$ s'écrit formellement, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$\widetilde{A}(x) = \chi_e(x) \int_{\mathfrak{g}^*} a(\eta) e^{i<x,\eta>} d\xi,$$

où a est le symbole de $\widetilde{A}$ et χ_e est une fonction de troncature sur $\mathfrak{g}$ à support dans V. La Distribution Fourier Intégrale Q_t s'écrit quant à elle :

$$\widetilde{Q_t}(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} q_t(x,\xi) e^{i\varphi_t(x,\xi)} d\xi.$$

On peut alors écrire $\frac{d}{dt}\widetilde{Q_t}$ formellement :

$$\frac{d}{dt}\widetilde{Q_t}(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} \big(\frac{\partial q_t}{\partial t}(x,\xi) - ia_1(\xi)q_t(x,\xi)\big)e^{i\varphi_t(x,\xi)}d\xi.$$

Il reste maintenant a trouver le développement de l'amplitude de $\widetilde{Q_t * A}$: On connait dejà sa fonction de phase qui est la même que celle de $\widetilde{Q_t}$, c'est-à-dire φ_t. On a formellement

$$\widetilde{Q_t * A}(x) = \int_{\mathfrak{g}} j_G(y)\chi_e(-y) \int_{\mathfrak{g}^*} a(\eta)e^{-i<y,\eta>}d\eta \int_{\mathfrak{g}^*} q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\varphi_t\left(x\cdot y,\xi\right)}d\xi dy,$$

qu'on va chercher a écrire sous la forme :

$$\widetilde{Q_t * A}(x) = \int_{\mathfrak{g}^*} e^{i\varphi_t(x,\xi)}s(x,\xi)d\xi.$$

Pour tout $(x,\xi) \in V \times \mathfrak{g}^*$, on a alors

$$s(x,\xi) = \int\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} a(\eta)j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\left(\varphi_t\left(x\cdot y,\xi\right)-\varphi_t(x,\xi)-<y,\eta>\right)}dyd\eta,$$

où $j_G(y)$ et $x\cdot y$ sont définis dans le paragraphe des notations. On a la proposition suivante :

Proposition 4.12. *L'amplitude s est un symbole classique d'ordre 1 qui admet comme développement asymptotique :*

$$s(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha|\geq 0} \frac{\partial^\alpha a(\eta(x,\xi))}{\alpha!} D_y^\alpha[y \mapsto j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0},$$

avec $\psi_t(x,y,\xi) = \varphi_t\big(x\cdot y,\xi\big) - \varphi_t(x,\xi) - < y, \eta(x,\xi) >$.

Démonstration. Pour trouver le développement asymptotique de s en ξ, on etudiera, pour tout $(x,\xi) \in V \times \mathcal{S}^{n-1}$ fixé, l'intégrale

$$I(\lambda) = s(x,\lambda\xi) = \int\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} a(\eta)j_G(y)\chi_e(-y)q_t(x\cdot y,\lambda\xi)e^{i\left(\varphi_t\left(x\cdot y,\lambda\xi\right)-\varphi_t(x,\lambda\xi)-<y,\eta>\right)}dyd\eta.$$

Soit $(x,\xi) \in V \times \mathcal{S}^{n-1}$. Par le changement de variables $\eta' = \frac{\eta}{\lambda}$, on obtient

$$I(\lambda) = \lambda^n \int\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} a(\lambda\eta)j_G(y)\chi_e(-y)q_t(x\cdot y,\lambda\xi)e^{i\lambda\left(\varphi_t\left(x\cdot y,\xi\right)-\varphi_t(x,\xi)-<y,\eta>\right)}dyd\eta.$$

Pour obtenir le développement asymptotique de l'amplitude, il faut d'abord localiser les points critiques de la phase de l'intégrale oscillante $I(\lambda)$.
On pose $S_t(x,y,\xi,\eta) = \varphi\big(x\cdot y,\xi\big) - \varphi(x,\xi) - < y, \eta >$. On a alors

$$\begin{cases} d_y S_t(x,y,\xi,\eta) = -\eta + d_y\big(x \mapsto x\cdot y\big)\cdot d_1\varphi\big(x\cdot y,\xi\big) \\ d_\eta S_t(x,y,\xi,\eta) = -y \end{cases}$$

Le calcul donne en $(x,\xi) \in V \times \mathfrak{g}^*$ fixé :(voir théorème 4 page 6.12 de [10].)

$$\begin{cases} y &= & 0 \\ \eta &= & \frac{ad^*x}{e^{ad^*x}-1}\cdot d_1\varphi(x,\xi) \end{cases}$$

On pose alors :

$$\eta(x,\xi) = \frac{ad^*x}{e^{ad^*x}-1}\cdot d_1\varphi(x,\xi). \tag{10}$$

Le point critique est alors :

$$(y, \eta) = \big(0, \eta(x, \xi)\big).$$

L'application $(x, \xi) \mapsto \eta(x, \xi)$ est clairement lisse sur $V \times \mathfrak{g}*$. Maintenant, on va mimer le calcul du développement asymptotique d'un symbole, mais au lieu de faire le développement de Taylor de a en $\lambda\xi$, on va le faire en $\lambda\eta(x, \xi)$. En effet d'après le théorème de la phase stationnaire, on sait que le développement asymptotique de $I(\lambda)$ en λ dépend uniquement du comportement du terme dans l'intégrale au voisinage du point critique $(0, \eta(x, \xi))$. Avant d'effectuer ce développement de Taylor, on va se restreindre à un voisinage du point critique $(0, \eta(x, \xi))$ grâce à une fonction de troncature χ sur $\mathfrak{g}^*$ telle que

$$\begin{array}{rcl} \chi(\xi) & = & 1\, si\, ||\xi|| < \frac{\varepsilon}{2} \\ & = & 0\, si\, ||\xi|| > \varepsilon \end{array},$$

avec $\varepsilon < inf_{(x,\xi)\in V\times\mathcal{S}^{n-1}} \frac{||\eta(x,\xi)||}{2}$.
Notons qu'il faut choisir V assez petit pour que le terme à droite de l'inégalité ne s'annule pas :
En effet en $x = 0$, on a $\eta(0, \xi) = \xi$, et par continuité et compacité de $\mathcal{S}^{n-1}$, on trouve le voisinage V où η ne s'annule pas. On peut désormais poser

$$\tilde{I}(\lambda) = \lambda^n \int\!\!\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} a(\lambda\eta) j_G(y)\chi_e(-y)\chi\big(\eta - \eta(x, \xi)\big) q_t\big(x \cdot y, \lambda\xi\big) e^{i\lambda S_t(x,y,\xi,\eta)} dy d\eta. \tag{11}$$

Par le théorème de la phase non-stationnaire, on a directement que $I(\lambda) - \tilde{I}(\lambda) = o(\lambda^{-m})$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. On peut donc se restreindre à l'étude de $\tilde{I}(\lambda)$. On développe a en $\lambda\eta(x, \xi)$ grâce à la formule de Taylor à l'ordre N,

$$a(\lambda\eta) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x, \xi)\big)}{\alpha!} \Big(\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big)^\alpha + r_N(x, \lambda, \xi, \eta),$$

où

$$r_N(x, \lambda, \xi, \eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1 (1-t)^N \partial^\alpha a\Big(\lambda\eta(x, \xi) + t\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big) \Big(\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big)^\alpha dt.$$

En remplaçant $a(\lambda\eta)$ par cette expression dans (11), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\lambda) = \lambda^n \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x, \xi)\big)}{\alpha!} \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \Big(\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big)^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi\big(\eta - \eta(x, \xi)\big) \\ q_t\big(x \cdot y, \lambda\xi\big) e^{i\lambda S_t(x,y,\xi,\eta)} d\eta dy \\ + R_N(x, y, \lambda, \xi, \eta), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} R_N(x, y, \lambda, \xi, \eta) = \lambda^n \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1 \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N \partial^\alpha a\Big(\lambda\eta(x, \xi) + t\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big) \\ \Big(\lambda\big(\eta - \eta(x, \xi)\big)\Big)^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi\big(\eta - \eta(x, \xi)\big) q_t\big(x \cdot y, \lambda\xi\big) e^{i\lambda S_t(x,y,\xi,\eta)} d\eta dy dt. \end{aligned}$$

En posant $\psi_t(x,y,\xi) = \varphi_t\big(x \cdot y,\xi\big) - \varphi_t(x,\xi) - < y, \eta(x,\xi) >$, on peut alors réécrire l'expression précédente :

$$\begin{aligned}\tilde{I}(\lambda) \;\; = \;\; \lambda^n \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)\big)}{\alpha!} \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \Big(\lambda\big(\eta-\eta(x,\xi)\big)\Big)^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi\big(\eta-\eta(x,\xi)\big) \\ q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i\lambda<y,\eta-\eta(x,\xi)>}d\eta dy + R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta),\end{aligned}$$

avec

$$R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta) = \lambda^n \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1 \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N \partial^\alpha a\Big(\lambda\eta(x,\xi)+t\lambda\big(\eta-\eta(x,\xi)\big)\Big)$$

$$\Big(\lambda\big(\eta-\eta(x,\xi)\big)\Big)^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi\big(\eta-\eta(x,\xi)\big)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i\lambda<y,\eta-\eta(x,\xi)>}d\eta dy dt.$$

Après le changement de variables $\eta' = \lambda\big(\eta-\eta(x,\xi)\big)$, l'expression devient :

$$\tilde{I}(\lambda) = \sum_{|\alpha|\leq N} \frac{\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)\big)}{\alpha!} \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \eta^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi(\frac{\eta}{\lambda})q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy$$

$$\begin{aligned}+ \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1 \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N \partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)+t\eta\big)\eta^\alpha \chi(\frac{\eta}{\lambda}) j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)} \\ e^{-i<y,\eta>}d\eta dy dt.\end{aligned}$$

On coupe l'intégrale

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \eta^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)\chi(\frac{\eta}{\lambda})q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy = \\ \lambda^{n+|\alpha|}\int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \eta^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)(\chi(\eta)-1)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda(\psi_t(x,y,\xi)-<y,\eta>)}d\eta dy \; + \\ \int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \eta^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy.\end{aligned}$$

en deux intégrales. Dans la première, on peut appliquer le théorème de la phase non-stationnaire, c'est donc une fonction de variable λ décroissant rapidement à l'infini. Calculons la deuxième intégrale,

$$\begin{aligned}\int\!\!\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} \eta^\alpha j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy = \\ D_y^\alpha[y\mapsto j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0}.\end{aligned}$$

Lemme 4.13. *Le terme*

$$D_y^\alpha[y\mapsto j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0}$$

est un symbole classique d'ordre au plus $\frac{k}{2}$, avec $k=|\alpha|$.

Démonstration. En effet, considérons l'expression $D_y^{\gamma_1}\psi_t(x,y,\xi)\cdots D_y^{\gamma_k}\psi_t(x,y,\xi)$ dans laquelle au moins l'un des γ_i est tel que $|\gamma_i|\leq 1$, alors

$$D_y^{\gamma_1}\psi_t(x,0,\xi)\cdots D_y^{\gamma_k}\psi_t(x,0,\xi) = 0.$$

Donc dans $D_y^\alpha[y\mapsto j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0}$, seuls des termes contenant des $D_y^{\gamma_1}\psi_t(x,0,\xi)\cdots D_y^{\gamma_k}\psi_t(x,0,\xi)$ tel que tout $|\gamma_i|\geq 2$ interviennent, donc les γ_i sont en nombre au plus égal à $\frac{k}{2}$. On a donc des symboles classiques de degré au plus $\frac{k}{2}$.

Q.E.D.

Corollaire 4.14. *Le terme*

$$\frac{\partial^\alpha a(\eta(x,\xi))}{\alpha!} D_y^\alpha[y \mapsto j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\xi\big)e^{i\psi_t(x,y,\xi)}]_{|y=0}$$

est un symbole classique d'ordre au plus $1-\frac{k}{2}$.

Donc d'après la proposition (3.6) *page* 21 de [26], si on réussit à majorer le reste, on a donc trouvé le développement asymptotique de l'amplitude s.

Lemme 4.15.

$$|R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta)| \leq C_N\lambda^{n-\frac{N}{2}} \tag{12}$$

Démonstration. Ecrivons à nouveau l'expression explicite du reste :

$$R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1\int\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)+t\eta\big)\eta^\alpha\chi(\frac{\eta}{\lambda})j_G(y)\chi_e(-y)$$
$$q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy dt.$$

En utilisant l'égalité $(-D_y)^\alpha[e^{-i<y,\eta>}] = \eta^\alpha e^{-i<y,\eta>}$, l'égalité ci-dessus devient

$$R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1\int\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)+t\eta\big)\chi(\frac{\eta}{\lambda})j_G(y)\chi_e(-y)$$
$$q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}(-D_y)^\alpha[e^{-i<y,\eta>}]d\eta dy dt.$$

En intégrant par parties successivement, on a

$$R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta) = \sum_{|\alpha|=N+1} c_\alpha \int_0^1\int\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}} (1-t)^N\chi(\frac{\eta}{\lambda})\partial^\alpha a\big(\lambda\eta(x,\xi)+t\eta\big)D_y^\alpha[j_G(y)\chi_e(-y)$$
$$q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}]e^{-i<y,\eta>}d\eta dy dt.$$

Afin de montrer qu'on est en présence d'un développement asymptotique de $s(x,\xi)$ en ξ, on va majorer le reste par une puissance de λ suffisament petite à l'aide de la fonction

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{a_\alpha}:[0,1]\times K\times\mathbb{R}_+\times\mathcal{S}^{n-1}\times\mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x,\lambda,\xi,\eta) & \longmapsto & \chi(\frac{\eta}{\lambda})\partial^\alpha a\big(t\eta+\lambda\eta(x,\xi)\big) \end{array}$$

D'abord on cherche une majoration des dérivées partielles de $\widetilde{a_\alpha}$ en λ.
Si $||\eta|| \geq \varepsilon\lambda$, $\widetilde{a_\alpha}(t,x,\lambda,\xi,\eta)=0$. On déduit

$$\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma\widetilde{a_\alpha}(t,x,\lambda,\xi,\eta)=0. \tag{13}$$

Si $||\eta|| < \varepsilon\lambda$, on a $||t\eta+\lambda\eta(x,\xi)|| \leq (\varepsilon+M)\lambda$ avec $M = sup_{(x,\xi)\in K\times\mathcal{S}^{n-1}}||\eta(x,\xi)||$. On a alors, grâce à la formule de Leibniz, la majoration des dérivées partielles suivantes lorsque $|\alpha| = N+1$:

$$|\partial_x^\beta\partial_\eta^\gamma\widetilde{a_\alpha}(t,x,\lambda,\xi,\eta)| \leq C_{\alpha\beta\gamma}\lambda^{-|\gamma|-(N+1)}. \tag{14}$$

Il reste à déterminer l'influence du terme $D_y^\alpha[j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}]$. La formule de Leibniz donne

$$D_y^\alpha[j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}] =$$
$$\sum_{\alpha'+a''=\alpha}\frac{\alpha!}{\alpha'!\alpha''!}D_y^{\alpha'}[j_G(y)\chi_e(-y)q_t\big(x\cdot y,\lambda\xi\big)D_y^{\alpha''}[e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}].$$

Les termes $D_y^{\alpha''}[e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}]$ sont des sommes de termes de la forme

$$c_{\gamma_1,\cdots,\gamma_k}\lambda^k D_y^{\gamma_1}\psi_t(x,y,\xi)\cdots D_y^{\gamma_k}\psi_t(x,y,\xi)e^{i\psi_t(x,y,\xi)},$$

avec $|\gamma_1|+\cdots+|\gamma_k|\leq N$, et $|\gamma_i|\neq 0$, pour tout $i\in\{1,\cdots,k\}$. Afin de majorer ces termes, on doit considérer deux cas :

(1) Si $k\leq\frac{N}{2}$, les termes considérés contribuent à la majoration du reste en une puissance en λ, d'ordre égal au plus à $n-\frac{N}{2}$ ce qui suffira pour prouver le développement asymptotique.

(2) Si $k>\frac{N}{2}$, on a recours au principe des tiroirs de Dirichlet pour obtenir la majoration.
En effet, si on note N_1 le nombre de γ_i de longueur égal à 1, et N_2 le nombre de γ_i de longueur supérieure ou égale à 2, on a l'égalité $k=N_1+N_2$ et l'inégalité $N\geq N_1+2N_2$. En éliminant N_2 par combinaison linéaire des deux inégalités, on obtient

$$N_1\geq 2k-N.$$

Soit $i\in\{1,\cdots,k\}$ tel que $|\gamma_i|=1$. Comme $\psi_t(x,0,\xi)=0$ et $d_y\psi_t(x,0,\xi)=0$, le lemme d'Hadamard indique qu'on peut écrire

$$D_y^{\gamma_i}\psi_t(x,y,\xi)=\sum_{j=1}^{n}y_j g_{\gamma_i}^j(x,y,\xi),$$

où les g_{γ_i} sont des fonctions lisses.
On obtient alors

$$D_y^{\gamma_1}\psi_t(x,y,\xi)\cdots D_y^{\gamma_k}\psi_t(x,y,\xi)=\sum_{|\gamma|\geq 2k-N}y^\gamma g_\gamma(x,y,\xi),$$

où la somme est finie et les fonctions g_γ sont lisses. On a donc une contribution dans le reste du développement de Taylor de la forme

$$\lambda^k\sum_{|\gamma|\geq 2k-N}b_\gamma\int_0^1\int\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}}(1-t)^N\widetilde{a_\alpha}(t,x,\lambda,\xi,\eta)$$
$$D_y^{\alpha'}[j_G(y)\chi_e(-y)q_t(x\cdot y,\lambda\xi)]g_\gamma(x,y,\xi)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}y^\gamma e^{-i<y,\eta>}d\eta dy dt.$$

L'identité $(-D_\eta)^\gamma[e^{-i<y,\eta>}]=y^\gamma e^{-i<y,\eta>}$ permet de transformer cette contribution par intégration par partie en

$$\lambda^k\sum_{|\gamma|\geq 2k-N}b_\gamma\int_0^1\int\int_{\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}}(1-t)^N D_\eta^\gamma\widetilde{a_\alpha}(t,x,\lambda,\xi,\eta)$$
$$D_y^{\alpha'}[j_G(y)\chi_e(-y)q_t(x\cdot y,\lambda\xi)]g_\gamma(x,y,\xi)e^{i\lambda\psi_t(x,y,\xi)}e^{-i<y,\eta>}d\eta dy dt.$$

On obtient donc, grâce à (13) et (14) , une majoration en puissances de λ d'ordre égal au plus à $n-N+k-(2k-N)=n-k$, c'est-à dire d'ordre inférieur ou égal à $n-\frac{N}{2}$.

Globalement on a donc obtenu une majoration du reste de la forme

$$|R_N(x,y,\lambda,\xi,\eta)|\leq C_N\lambda^{n-\frac{N}{2}} \tag{15}$$

Q.E.D.

Le lemme (4.15) implique directement la proposition (4.12) .

Q.E.D.

Maintenant on revient au système :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\widetilde{Q_t} + i\widetilde{Q_t * A} & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \\ \\ \widetilde{Q_0} - \delta_0 & \in \mathcal{D}(\mathfrak{g}) \end{cases},$$

où l'on considère les noyaux des distributions. Il existe une fonction $d \in CL^0(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*)$ à support dans $V \times \mathfrak{g}^*$ telle que $\delta_0 = \int_{\mathfrak{g}^*} d(\cdot, \xi) e^{\varphi(\cdot,\xi)} d\xi \in .$ et $d \sim \sum_{i \geq 0} d_{-i}$ (Théorème 19.1 de [26]). Ce système est équivalent aux conditions :

$$\begin{cases} r_t : (x,\xi) \mapsto \frac{\partial q_t}{\partial t}(x,\xi) - ia_1(\xi) q_t(x,\xi) + is(x,\xi) & \sim 0 \\ \qquad\qquad q_0 - d & \sim 0 \end{cases}.$$

On doit maintenant trouver les équations qui annulent chaque composante du développement asymptotique du symbole $r_t \sim \sum_{i \geq 0} r_{t,1-i}$, qui est classique, en tant que somme de symboles classiques. On rappelle que $q_t \sim \sum_{i \geq 0} q_{t,-i}$, et $a \sim \sum_{i \geq 0} a_{1-i}$. L'annulation du terme d'ordre un $r_{t,1}$ donne l'équation eikonale :

$$-ia_1(\xi) q_{t,0}(x,\xi) + ia_1(\eta(x,\xi)) q_{t,0}(x,\xi) = 0,$$

c'est-à-dire

$$a_1(\xi) = a_1(\eta(x,\xi)), \tag{16}$$

où $\eta(x,\xi)$ est donné par (10) .

L'annulation du terme d'ordre 0 donne la première équation de transport :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_{t,0}}{\partial t}(x,\xi) - ia_1(\xi) q_{t,-1}(x,\xi) + ia_1\big(\eta(x,\xi)\big) q_{t,-1}(x,\xi) + ia_0\big(\eta(x,\xi)\big) q_{t,0}(x,\xi) \\ + \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha a_1\big(\eta(x,\xi)\big)\Big(\sum_{|\beta|=1} j_{\alpha\beta}(x) \partial_x^\beta q_{t,0}(x,\xi) + \partial_\alpha j_G(0) q_{t,0}(x,\xi)\Big) \end{aligned}$$

$$-i \sum_{|\gamma|=2} \frac{\partial^\gamma a_1\big(\eta(x,\xi)\big)}{\alpha!} [\sum_{|\beta|=2} j_{\gamma_1\beta_1}(x) j_{\gamma_2\beta_2}(x) \partial_y^\beta \varphi(x,\xi) + \sum_{|\beta|=1} l_{\gamma\beta}(x) \partial_y^\beta \varphi(x,\xi)] q_{t,0}(x,\xi) = 0, \tag{17}$$

avec la condition $q_{0,0} = d_0$. Les coefficients $j_{\alpha\beta}(x)$ proviennent de la matrice de l'endomorphisme $d_y(y \mapsto x \cdot y)_{y=0} = \frac{ad^* x}{e^{ad^* x} - 1}$, où α et β sont de longueur 1. Les coefficients $l_{\gamma\beta}(x)$ sont les coefficients, dans la base canonique, de $d_y^2(y \mapsto x \cdot y)_{y=0}$, où γ est de longueur 2 et β de longueur 1.

Grâce à l'équation eikonale, cette équation se simplifie :

$$\frac{\partial q_{t,0}}{\partial t}(x,\xi) + \mathbb{V}(x) \cdot d_x q_{t,0}(x,\xi) + g(x,\xi) q_{t,0}(x,\xi) = 0,$$

avec la condition $q_{0,0} = d_0$, $\mathbb{V}(x) = \frac{adx}{1 - e^{-adx}} \cdot da_1(\eta(x,\xi))$, et

$$\begin{aligned} g(x,\xi) &= \sum_{|\alpha|=1} \partial^\alpha a_1\big(\eta(x,\xi)\big) \partial_\alpha j_G(0) \\ &\quad -i \sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^\alpha a_1\big(\eta(x,\xi)\big)}{\alpha} [\sum_{|\beta|=2} j_{\alpha_1\beta_1}(x) j_{\alpha_2\beta_2}(x) \partial_y^\beta \varphi(x,\xi) + \sum_{|\beta|=1} l_{\alpha\beta}(x) \partial_y^\beta \varphi(x,\xi)]. \end{aligned}$$

Etant donnée la forme de l'équation, on voit que $q_{t,0}$ est à support dans $V \times \mathfrak{g}^*$.

Les autres équations de transport sont données par l'annulation des termes d'ordre $-1, -2, \cdots$ dans le développement asymptotique de r_t. Elles s'écrivent, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial q_{t,-j}}{\partial t}(x,\xi) + \mathbb{V}(x) \cdot d_x q_{t,-j}(x,\xi) + g(x,\xi) q_{t,-j}(x,\xi) = f_{-j}(x,\xi),$$

où les f_{-j} ne dépendent que de $q_{t,0}, \cdots, q_{t,-j+1}$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$. On a par ailleurs la condition
$$q_{0,-j} = d_{-j},$$
pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.
Vue la forme des équations, on voit que $q_{t,-j}$ est à support dans $V \times \mathfrak{g}^*$, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$.

Si l'équation eikonale et les équations de transport admettent une solution, alors $r_t \sim 0$ et $q_0 - d \sim 0$. Dans ce cas, le système est résolu.
D'abord intéressons-nous à l'équation eikonale :
$$a_1(\xi) = a_1\big(\eta(x,\xi)\big). \tag{18}$$
Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$. On pose
$$\begin{array}{rcl} A_\xi : V \times \mathfrak{g}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\eta) & \longmapsto & a_1\left(\frac{ad^*x}{e^{ad^*x}-1} \cdot \eta\right). \end{array}$$
Notons que A_ξ est homogène de degré 1. L'équation eikonale (18) équivaut à
$$A_\xi(x, d_x\varphi(x,\xi)) = a_1(\xi).$$
C'est une équation d'Hamilton-Jacobi homogène de degré 1.
Afin de trouver une solution compatible avec les conditions de phase de DPD sur φ, on rajoute des conditions sur φ, qui sont des conditions de Cauchy pour l'équation eikonale. L'hypersurface considérée dans le problème de Cauchy est $\mathcal{H}_\xi = \{x \mid \ < x, \xi >= 0\}$, et les conditions de Cauchy sont
$$\begin{cases} \varphi_{|\mathcal{H}_\xi} = 0 \\ d_x\varphi_{|x=0} = \xi. \end{cases}$$
La fonction
$$\begin{array}{rcl} \xi : \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g}^* \\ x & \longmapsto & \frac{a_1(\xi)}{a_1\left(\frac{ad^*x}{e^{ad^*x}-1}\cdot\xi\right)}\xi \end{array}$$
est solution de l'equation eikonale sur $\mathcal{H}_\xi$, en effet par positive homogénéité de degré 1 de a_1, on a
$$a_1\Big(\frac{ad^*x}{e^{ad^*x}-1} \cdot \xi(x)\Big) = a_1(\xi).$$
De $< d_\eta A_\xi(0, \xi(0)), \xi >= a_1(\xi) > 0$, on déduit que la bicaractéristique passant par $0 \in \mathcal{H}_\xi$ est transverse à $\mathcal{H}_\xi$ en ce point. Alors les conditions aux limites dépendant de manière lisse de ξ, il existe une solution lisse $(x,\xi) \mapsto \varphi(x,\xi)$ définie sur $W \times \mathcal{S}^{n-1}$, avec W voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}$ inclus dans V(paragraphe 17 de [26]), et quitte à changer les notations, on notera V le voisinage W.

Maintenant résolvons les équations de transport, on voit que ce sont des équations linéaires d'ordre 1, en particulier des équations d'Hamilton-Jacobi généralisées (paragraphe 17.6 de [26]).
On les résout successivement et, en tenant compte du fait que seul varie le second membre, en sachant que l'intervalle de définition des solutions ne dépend pas de celui-ci (paragraphe 17.6 de [26]), on trouve une suite de solutions $\big(q_{t,-j}\big)_{j\in\mathbb{N}}$ définies sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$.
Il reste à vérifier que $e^{-itA} - Q_t \in \mathcal{S}^{-\infty}(G)$. Pour cela, on pose $R_t = e^{itA} \cdot Q_t - I$. On a alors :
$$\frac{1}{i}\frac{\partial R_t}{\partial t} = e^{itA}\Big(\frac{1}{i}\frac{\partial Q_t}{\partial t} + A \cdot Q_t\Big).$$

Et par construction, on a

$$\frac{1}{i}\frac{\partial Q_t}{\partial t} + A \cdot Q_t \in L^{-\infty}(G).$$

Grâce à la formule intégrale $R(t) = R(0) + \int_0^t \frac{\partial R_t}{\partial t}(u)du \in L^{-\infty}(G)$, on en déduit

$$e^{-itA} - Q_t \in L^{-\infty}(G).$$

5. Représentations

5.1. Rappels.
On rappelle ici qu'une représentation (resp. représentation unitaire) π de G dans $\mathcal{H}$ espace de Hilbert séparable est un morphisme de groupes de G dans $GL(\mathcal{H})$ (resp. $\mathbb{U}(\mathcal{H})$). On dira que π est fortement continue si pour tout $u \in \mathcal{H}$, $g \mapsto \pi(g)u$ est continue sur G. Par la suite, on ne considérera que des représentations fortement continues.
Soit π une représentation unitaire fortement continue du groupe de Lie G dans un espace de Hilbert séparable, noté $\mathcal{H}_\pi$. On notera $\mathcal{H}_\pi^\infty$ l'ensemble des vecteurs indéfiniment dérivables de la représentation, i.e les vecteurs u de $\mathcal{H}_\pi$ tels que pour tout $v \in \mathcal{H}_\pi$, le coefficient

$$\begin{array}{rcl} C_{u,v} : G & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ g & \longmapsto & < \pi(g)u, v > \end{array}$$

soit lisse sur G.

Définition 5.1. *On définit pour tout $\varphi \in \mathcal{E}'(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ de domaine $\mathcal{H}_\pi^\infty$ par la formule :*

$$< \pi(\varphi)u, v > = < \varphi, C_{u,v} > .$$

Définition 5.2. *Un opérateur $P : \mathcal{H}_\pi \to \mathcal{H}_\pi$ est dit régularisant si pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi$, $Pu \in \mathcal{H}_\pi^\infty$.*

On notera j le difféomorphisme $g \mapsto g^{-1}$ de G dans G.

Lemme 5.3. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} j_* : \mathcal{E}'(G) & \longrightarrow & \mathcal{E}'(G) \\ S & \longmapsto & j_*S = S^* \end{array}$$

est une involution qui vérifie :

$$(S * T)^* = T^* * S^*.$$

Démonstration. Soit $u \in C^\infty(G)$.

$$\begin{array}{rcl} < (S*T)^*, u > & = & < S * T, j^*u > \\ & = & < S \otimes T, \Delta\big(j^*u\big) > \\ & = & < T \otimes S, (j^* \otimes j^*)\Delta\big(u\big) > \\ & = & < j_*T \otimes j_*S, \Delta\big(u\big) >, \end{array}$$

où Δ est le coproduit définit dans le paragraphe de notations.

Q.E.D.

5.2. **Opérateurs Fouriers-Intégraux dans les espaces de représentations de groupes de Lie.**
Dans cette partie, on se fixe un réel $\rho > \frac{1}{2}$.

Définition 5.4. *Soit K un voisinage compact de e dans G. On dira que $a : G \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ est une amplitude de classe $\mathcal{S}_\rho^{m,K}(G \times \mathbb{R}^N)$ si a est une fonction C^∞ telle que :*

(1) *Pour tout $g \notin K$, pour tout $\theta \in \mathbb{R}^N$, $a(g, \theta) = 0$.*
(2) *$a \in \mathcal{S}_\rho^m(G \times \mathbb{R}^N)$.*

Définition 5.5. *Soit π une représentation unitaire fortement continue de G. Un opérateur Fourier-Intégral sur l'espace de la représentation π est défini par :*

$$\pi(Q),$$

où Q est une DFI à support compact sur G.

Proposition 5.6. *Soit Q une DFI sur G de fonction de phase φ sur $G \times (\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ et d'amplitude $q \in \mathcal{S}_\rho^{m,K}(G \times \mathbb{R}^N)$. Alors $\pi\big(A(q, \varphi)\big)$ s'écrit :*

$$\pi\big(A(q, \varphi)\big)u = \int_G\int_{\mathbb{R}^N} q(g, \theta)e^{i\varphi(g,\theta)}\pi(g)u \; d\mu(g)d\theta,$$

pour tout $u \in \mathcal{H}_\pi^\infty$.

On gardera les notations utilisées pour les OFI sur un espace vectoriel, et on pose :
$C_\varphi = \{(g, \theta) \in G \times \mathbb{R}^N | \; d_\theta\varphi(g, \theta) = 0\}$ et $S_\varphi = proj_G(C_\varphi)$.
Les deux résultats suivants découlent directement du théorème 2.7 et de la proposition 2.10.

Proposition 5.7. *Si $q \in \mathcal{S}_\rho^{m,K}(G \times \mathbb{R}^N)$ est nulle au voisinage de C_φ, alors $\pi\big(A(q, \varphi)\big)$ est régularisant.*

Théorème 5.8. *Soient φ une fonction de phase non-dégénérée sur $G \times \mathbb{R}^N$ et p une amplitude dans $\mathcal{S}_\rho^{m,K}(G \times \mathbb{R}^N)$.*
Alors
- *Si $p_{| \, C_\varphi} = 0$, il existe $q \in \mathcal{S}_\rho^{m-(2\rho-1),K}(G \times \mathbb{R}^N)$ telle que $\pi\big(A(p, \varphi)\big) = \pi\big(A(q, \varphi)\big)$.*
- *Si $p_{| \, C_\varphi} = 0$ et si tous ces zéros sont d'ordre infini, l'opérateur $\pi\big(A(p, \varphi)\big)$ est régularisant.*

5.3. **Opérateurs pseudo-différentiels dans l'espace de la représentation π :** [19]

Définition 5.9 (Opérateurs $p^{W,\pi}$)**.** *Soit $p \in \mathcal{S}_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ telle que $\mathcal{F}^{-1}p$ ait son support inclus dans un voisinage compact exponentiel K de 0 dans $\mathfrak{g}$. On appelle alors $p^{W,\pi}$ l'opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl p dans l'espace $\mathcal{H}_\pi$, c'est-à dire :*

$$p^{W,\pi} = \pi(\tilde{p}),$$

où $\tilde{p} \in \mathcal{E}'(G)$ est définie par $\tilde{p} = exp_* \; \mathcal{F}^{-1}p$.

Proposition 5.10. *Soit p comme dans la définition précédente.*
Alors pour tout compact K' de $\mathfrak{g}$ tel que $K \subset int(K')$, il existe une fonction $q \in \mathcal{S}_\rho^m(K' \times \mathfrak{g}^*)$ telle que

$$p^{W,\pi} = \pi\big(A(q, \varphi)\big),$$

avec φ fonction de phase sur $G \times \mathfrak{g}^*$ définie par $(g, \xi) \mapsto < exp^{-1} \; g, \xi >$.

Démonstration. On pose pour tout $(x,\xi) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$, $q(x,\xi) = \chi(x)p(\xi)$, où χ est une fonction de troncature nulle hors de K', égale à 1 sur K. On teste contre $u \in C^\infty(\mathfrak{g})$, ce qui donne

$$\int_{\mathfrak{g}^*} q(x,\xi)e^{i<x,\xi>}d\xi = \chi(x)\mathcal{F}^{-1}p(x) = \mathcal{F}^{-1}p(x),$$

car χ est égale à 1 sur K.

Q.E.D.

Définition 5.11. *On définit le Laplacien sur $\mathcal{H}$ par $\pi(\Delta)$, où Δ est un Laplacien sur G, i.e l'opérateur différentiel $-\sum_{i=1}^n X_i^2$ où $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base de $\mathfrak{g}$.*

5.4. **Approximation de l'exponentielle d'un opérateur elliptique auto-adjoint.** On se donne une représentation unitaire fortement continue π dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}_\pi$, et une distribution formellement auto-adjointe $A_e \in \mathcal{E}'(G)$. On suppose :

$$A_e = exp_*(\mathcal{F}^{-1}a),$$

où $a \sim a_1 + a_0 + a_{-1} + \cdots$ est un symbole classique elliptique d'ordre 1 sur $\mathfrak{g}^*$. On considère l'opérateur(non borné) $\pi(A_e)$ qui s'écrit aussi $a^{W,\pi}$.

Proposition 5.12. *L'opérateur $\pi(A_e)$ est essentiellement auto-adjoint.*

Démonstration. L'opérateur $\pi(A_e)$ est défini sur le domaine dense $\mathcal{H}_\pi^\infty$, donc il admet un adjoint $\pi(A_e)^*$. Comme $A_e^* = A_e$, cet ajoint coïncide avec $\pi(A_e)$ sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$. il faut montrer que la fermeture de $\pi(A_e)$ est égale à l'adjoint $\pi(A_e^*)$. Cela revient à montrer que Ker $\big((\pi(A_e)^* \pm iI\big)$ est contenu dans le domaine de la fermeture de $\pi(A_e)$(Pour une démonstration de ce critère de self-adjonction essentielle, voir [26] Théorème 26.1 page 190). Nous allons montrer en fait que le noyau Ker $\big((\pi(A_e)^* \pm iI\big)$ est même contenu dans $\mathcal{H}_\pi^\infty$. Cela vient tout simplement du fait que le symbole $a \pm i$ est elliptique, et de l'existence de la paramétrixe (voir théorème I.3.6 de [19]) : si b est une paramétrixe pour $a - i$ et si v est tel que $(a-i)^{W,\pi}v = 0$, alors :

$$v = b^{W,\pi} \circ (a-i)^{W,\pi}v - r^{W,\pi}v = -r^{W,\pi}v,$$

avec r régularisant.
La démonstration avec $a + i$ est identique.

Q.E.D.

Corollaire 5.13. *L'opérateur $e^{i\pi(A_e)}$ est unitaire.*

Proposition 5.14. *Soit A un opérateur pseudo-différentiel classique, auto-adjoint, invariant à gauche et elliptique d'ordre 1 sur G. On a $A = \cdot * A_e$.*
Soit $Q_t = \cdot * Q_{e,t}$ l'approximation Fourier-Intégrale de e^{itA} donnée par la construction du paragraphe 4. Alors $R_t = e^{-itA}Q_t - I$ est donné par la convolution à droite par $S_t \in \mathcal{D}(G)$. L'opérateur $e^{it\pi(A_e)}\pi(S_t) = \pi(Q_{e,t}) - e^{-it\pi(A_e)}$ est régularisant.

Démonstration. On a montré à la fin du paragraphe 4 que R_t est donné par la convolution à droite par une fonction dans $\mathcal{D}(G)$. Comme l'opérateur $e^{-it\pi(A_e)}$ est unitaire , le reste de la proposition s'en déduit immédiatement.

Corollaire 5.15. *L'opérateur $e^{-it\pi(A_e)}$ est approximé à régularisant près par l'opérateur Fourier-Intégral $\pi(Q_{e,t})$.*

5.5. **Représentations fortement traçables.** [14] [20]

Définition 5.16. *Une représentation unitaire π d'un groupe de Lie G est dite traçable si, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est traçable.*

Définition 5.17. *Une représentation unitaire d'un groupe de Lie G est dite fortement traçable s'il existe un entier m tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^m(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace* [20].

Proposition 5.18. *Soit π une représentation unitaire d'un groupe de Lie G. Les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *π est fortement traçable.*

(2) *Il existe un entier s_0 tel que pour tout entier $s \geq s_0$, l'opérateur $\pi(1+\Delta)^{-s}$ est à trace, avec Δ le Laplacien sur G.*

(3) *Il existe un voisinage V de e dans G et un entier m tel que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^m(V)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace.*

(4) *Il existe un élément $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ formellement positif tel que $\pi(u)$ soit inversible sur $\mathcal{H}_\pi^\infty$ et d'inverse à trace.*

A.A.Kirillov a trouvé une formule explicite afin de calculer les traces de ces opérateurs sous certaines conditions (méthode des orbites [17]). Cette méthode permet de montrer qu'avec des hypothèses suffisantes sur une orbite coadjointe de G, notée Ω, et sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on peut associer à Ω une ou plusieurs représentations π unitaires irréductibles. Introduisons une hypothèse vérifiée dans de nombreux cas, en énonçant ceux qui sont connus, et qui donne lieu à une formule de trace de Kirillov :

Hypothèse 5.19 (H). *π est associée à une orbite coadjointe fermée Ω par la méthode des orbites de Kirillov, de la manière suivante : il existe un voisinage exponentiel U de 0 dans $\mathfrak{g}$, un entier strictement positif $\kappa(\pi)$ et une fonction P_Ω analytique et partout non nulle sur U et telle que $P(0) = 1$, tels que la formule des caracteres :*

$$Tr\ \pi(\varphi) = \kappa(\pi) \int_\Omega \mathcal{F}(P_\Omega^{-1} \cdot j_G \cdot (\varphi \circ\ exp))(\omega) d\beta_\Omega(\omega)$$

soit vérifiée pour toute fonction φ de classe C^∞ à support compact inclus dans $exp\ U$.

L'hypothèse (H) est vérifiée dans les cas suivants :

(1) Si G est compact (resp. nilpotent) et connexe, toute représentation unitaire irréductible π vérifie (H) avec $\kappa(\pi) = 1$ (resp. $\kappa(\pi) = 1$ et $P_\Omega = 1$ [17]).

(2) Si G est résoluble connexe et simplement connexe, à toute orbite coadjointe Ω telle que si $f \in \Omega$, l'indice du stabilisateur réduit $\overline{G(f)}$ dans le stabilisateur $G(f)$ soit fini [24], alors on associe [15] une famille de représentations factorielles normales ρ de type I. L'indice défini ci-dessus est de la forme n^2, $n \in \mathbb{N}^*$, et la représentation ρ est de la forme $n\pi$ où π est unitaire irréductible.
Si de plus l'orbite $\Omega = G \cdot f$ est fermée et tempérée, la représentation π vérifie (H) avec $\kappa(\pi) = n$. Ceci généralise les résultats de M. Duflo ([1] chap. IX) sur les caractères des représentations associées à une orbite entière, c'est-à-dire dans le

cas $n = 1$.

(3) Dans le cas d'un groupe réductif [25], l'hypothèse (H) est vérifiée pour des séries discrètes et principales généralisées. On peut choisir la fonction P_Ω de la forme

$$\begin{aligned} P_\Omega : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(det \frac{sh\ ad\ \frac{x}{2}}{ad\ \frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Cette fonction convient aussi dans le cas résoluble lorsque l'orbite est de dimension maximale [15].

(4) Enfin l'hypothèse (H) est vérifiée avec la même fonction P_Ω que ci-dessus pour les représentations unitaires irréductibles d'un groupe de Lie général construites par M.Duflo [7] associées à une orbite coadjointe fermée, tempérée et de dimension maximale [16]. La formule obtenue coïncide avec la formule de Rossmann [25] dans le cas réductif (voir 3. ci-dessus).

Pour décrire l'entier $\kappa(\pi)$, il nous faut rappeler brièvement la construction de M.Duflo [16] :
A un élément $f \in \mathfrak{g}^*$, on associe un certain revêtement d'ordre deux $\widetilde{G(f)}$ du stabilisateur $G(f)$ et on désigne par ε l'élément non trivial de $\widetilde{G(f)}$ qui se projette sur l'élément neutre de $G(f)$. On désigne par $X^{irr}(f)$ l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de τ de $\widetilde{G(f)}$ dont la différentielle est multiple de la restriction de $-if$ à l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}(f)$ du stabilisateur $G(f)$ (le signe moins provenant de nos conventions sur la transformée de Fourier), et telles que $\tau(\varepsilon) = -1$. Si $X^{irr}(f)$ est non vide, on dit que f est admissible.
On dit que f est bien polarisable s'il existe en f une polarisation résoluble complexe vérifiant la condition de Pukanszky. La construction de M. Duflo consiste à associer à $f \in \mathfrak{g}^*$ admissible et bien polarisable et à $\tau \in X^{irr}(f)$ une classe $T_{f,\tau}$ de représentations unitaires irréductibles de G. Dans le cas où l'orbite de f est fermée, tempérée et de dimension maximale M.S.Khalgui [16] montre que si de plus $\tau \in X^{irr}(f)$ est de dimension finie l'hypothèse (H) est alors vérifiée pour $T_{f,\tau}$ avec :

$$\kappa(T_{f,\tau}) = dim\ \tau.$$

Khalgui [16] a par ailleurs trouvé un exemple de représentation traçable qui ne vérifie pas (H) : pour une certaine représentation unitaire irréductible d'un groupe G produit semi-direct d'un groupe semi-simple compact K par son algèbre de Lie $\mathfrak{k}$, il exhibe une orbite Ω tempérée telle que la formule des caractères est vérifée, mais avec une fonction P_Ω qui ne peut être C^∞ en 0. Maintenant rappelons une définition classique :

Définition 5.20. *Une orbite Ω est tempérée s'il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que*

$$\int_\Omega \frac{d\beta_\Omega(\eta)}{(1 + ||\eta||^2)^N} < \infty.$$

J-Y. Charbonnel a montré qu'il suffit que Ω soit fermée pour être tempérée.

Théorème 5.21. [2][5] *Si l'orbite Ω est fermée dans $\mathfrak{g}^*$, alors elle est tempérée.*

Proposition 5.22. [20] *Toute représentation π unitaire irréductible vérifiant l'hypothèse (H) est fortement traçable.*

6. Puissances complexes d'un opérateur différentiel elliptique classique sur un espace de représentation π.

Nous allons étudier les puissances complexes d'un opérateur différentiel $p^{W,\pi}$ sur $\mathcal{H}$ de symbole polynomial p à l'aide d'une paramétrixe pour des symboles elliptiques à paramètre. Cette parametrixe s'obtiendra à l'aide d'une approximation d'une résolvante de façon analogue au calcul d'une paramétrixe d'opérateur différentiel elliptique auto-adjoint sur $\mathbb{R}^n$. Cette construction est donnée dans [21] par D.Manchon, mais la paramétrixe obtenue n'est pas classique, et l'extension de la formule de Weyl à un opérateur différentiel d'ordre m entier naturel non nul nécessite une paramétrixe classique (voir chap. 8).
La composition des opérateurs $p^{W,\pi}$ se traduit par un produit non-commutatif # sur les espaces de symboles $AS_\rho^{m,Q}(\mathfrak{g}^*)$, où Q est un voisinage exponentiel de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit. Le travail de D.Manchon s'appuie sur les propriétés de ce produit #, dont on va montrer qu'il se restreint aux symboles classiques.

Définition 6.1. *Soit $p \in \mathcal{S}_\rho^m(\mathfrak{g}^*)$ avec $m > 0$ et $\rho > \frac{1}{2}$. Le symbole p est dit elliptique s'il existe $R > 0$, tel que pour tout $||\xi|| > R$,*

$$C_1(1 + ||\xi||^2)^{\frac{m}{2}} \leq |p(\xi)| \leq C_2(1 + ||\xi||^2)^{\frac{m}{2}}.$$

Comme dans [26], on a besoin d'un calcul de résolvante approchée pour trouver la paramétrixe.

6.1. Résolvante approchée.

Soit $\mathcal{P}$ une partie de $\mathbb{C}$. Pour trouver une approximation classique de la résolvante, on a besoin du théorème suivant qui concerne les classes de symboles à paramètre définies dans le paragraphe de notations :[21]

Théorème 6.2. *[Calcul symbolique de Weyl à paramètre] Soit K un voisinage compact exponentiel de 0 dans $\mathfrak{g}$ assez petit pour que $(exp\ K)^2$ soit l'image difféomorphe d'un voisinage K^2 de 0 dans $\mathfrak{g}$. Alors il existe Q voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$, inclus dans K, tel que la loi # définie à partir de la convolution $*$ sur le groupe G par :*

$$exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}p_\lambda) * exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}q_\lambda) = exp_*(j_G^{-1}\mathcal{F}^{-1}(p_\lambda \# q_\lambda)),$$

où j_G est le jacobien de l'exponentielle, s'etend en une correspondance bilinéaire continue pour la topologie de Fréchet des espaces de symboles à paramètres :

$$AS_{1,d}^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \times AS_{1,d}^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \to AS_{1,d}^{m_1+m_2,Q^2}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

De plus, on a le développement asymptotique :

$$p_\lambda \# q_\lambda = \sum_{k=0}^{N} C_k(p_\lambda, q_\lambda) + R_N(p_\lambda, q_\lambda),$$

où les C_k sont des opérateurs bidifférentiels avec

$$C_0(p_\lambda, q_\lambda) = p_\lambda q_\lambda, \qquad C_1(p_\lambda, q_\lambda) = \frac{i}{2}\{p_\lambda, q_\lambda\},$$

les C_k (resp. R_N) étant continus de $AS_d^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \times AS_d^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ dans $AS_{1,d}^{m_1+m_2-k(2\rho-1),\,Q+Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ $\big($resp. $AS_{1,d}^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \times AS_{1,d}^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ dans $AS_{1,d}^{m_1+m_2-(N+1)(2\rho-1),\,(Q+Q)\cup Q^2}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})\big)$.

Proposition 6.3. *Soit $(p_\lambda, q_\lambda) \in CL_d^{m_1,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}) \times CL_d^{m_2,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$. Alors*

$$C_k(p_\lambda, q_\lambda) \in CL_d^{m_1+m_2-k,\,Q+Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

Démonstration. Rappelons d'abord la définition explicite des coefficients $C_k(p_\lambda, q_\lambda)$. Soit W voisinage étoilé de 0 dans $\mathfrak{g}$ tel que $(exp\ W)^2$ soit exponentiel.
On pose

$$x \underset{t}{\cdot} y = t^{-1}Log(exp(tx)exp(ty)) = x + y + \frac{t}{2}[x,y] + \cdots$$

(Formule de Campbell-Hausdorff). Soit $\xi \in \mathfrak{g}^*$.

$$p_\lambda \underset{t}{\#} q_\lambda(\xi) = \int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>}dxdy.$$

Le développement de Taylor en $t = 1$ donne :

$$\begin{array}{rcl} p_\lambda\#q_\lambda(\xi) & = & \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)\frac{d^k}{dt^k}|_{t=0}(e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>})dxdy \\ & + & \frac{1}{N!}\int_0^1(1-t)^N\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}(e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>})dxdy. \end{array}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \frac{1}{k!}\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)\frac{d^k}{dt^k}|_{t=0}(e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>})dxdy$, et pour tout $N \in \mathbb{N}$, $R_N(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \frac{1}{N!}\int_0^1(1-t)^N\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}(e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>})dxdy$.
Le lemme suivant va nous permettre de calculer ces coefficients et de prouver la proposition.

Lemme 6.4. *(Lemme A.2 de [21]).Pour tout $k \geq 0$, on a*

$$\frac{d^k}{dt^k}e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>} = \psi(x,y,\xi,t)e^{-i<x\underset{t}{\cdot}y,\xi>},$$

où ψ_k est une fonction analytique polynomiale en ξ, dont la série entière à l'origine converge pour tout $t \in [0,1]$, et $x, y \in W$. On a plus précisément,

$$\psi_k(x,y,\xi,t) = \sum_{r=1}^{k} \psi_k^r(x,y,\xi,t),$$

où ψ_k^r est polynomiale homogène de degré r en ξ. De plus, le développement en série entière par rapport à t s'écrit

$$\psi_k^r(x,y,\xi,t) = \sum_{s\geq k+r} \psi_k^{r,s}(x,y,\xi)t^{s-(k+r)},$$

où $\psi_k^{r,s}$ est polynomiale en les variables x, y, ξ, de valuation $\geq r$ par rapport à chacune des variables x et y, de valuation s et de degré au plus $2k$ par rapport à (x, y), et homogène de degré r par rapport à ξ.

On continue la démonstration de la proposition. Soient $N \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq N$.

$$C_k(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \frac{1}{k!}\int_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}} \mathcal{F}^{-1}p_\lambda(x)\mathcal{F}^{-1}q_\lambda(y)\left(\sum_{r=1}^{k}\psi_k^{r,k+r}(x,y,\xi)\right)e^{-i<x+y,\xi>}dxdy,$$

qui d'après le lemme peut s'écrire :

$$C_k(p_\lambda, q_\lambda)(\xi) = \sum_{r=1}^{k}\sum_{|\gamma|=r}\sum_{|\alpha|,|\beta|\geq r,\ k+r\leq|\alpha|+|\beta|\leq 2k} a_{k,r,\gamma,\alpha,\beta}\partial^\alpha p_\lambda(\xi)\,\partial^\beta q_\lambda(\xi)\,\xi^\gamma.$$

Comme $p_\lambda \in CL_d^{m_1}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ et $q_\lambda \in CL_d^{m_2}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$,

$$\xi \mapsto a_{k,r,\gamma,\alpha,\beta}\partial^\alpha p_\lambda(\xi)\,\partial^\beta q_\lambda(\xi)\,\xi^\gamma \in CL_d^{m_1+m_2-(|\alpha|+|\beta|)+r}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

$m_1 + m_2 - (|\alpha| + |\beta|) + r \geq m_1 + m_2 - k$, donc $C_k(p_\lambda, q_\lambda) \in CL_d^{m_1+m_2-k}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$.

Q.E.D.

Corollaire 6.5. *Si* $p_\lambda \in CL_d^{m_1,Q}$ *et* $q_\lambda \in CL_d^{m_2,Q}$*, alors*

$$p_\lambda \# q_\lambda \in CL^{m_1+m_2,Q^2}$$

Démonstration. $p_\lambda \# q_\lambda - \sum_{k=0}^{n} C_k(p_\lambda, q_\lambda) \in AS_{1,d}^{m_1+m_2-(N+1),(Q+Q)\cup Q^2}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$, d'après le théorème 6.2. Posons $C_k(p_\lambda, q_\lambda) \sim \sum_{j\geq 0} c_{k,m_1+m_2-(k+j)}$ avec $c_{k,m_1+m_2-(k+j)}$ lisse positivement homogène de degré $m_1 + m_2 - (k + j)$.

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(p_\lambda, q_\lambda) - \sum_{k=0}^{N} \sum_{j=0}^{N-k} c_{k,m_1+m_2-(k+j)} \in \mathcal{S}_{1,d}^{m_1+m_2-(N+1)}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}),$$

donc

$$\sum_{k=0}^{n} C_k(p_\lambda, q_\lambda) - \sum_{j=0}^{N} \sum_{k=0}^{j} c_{k,m_1+m_2-j} \in \mathcal{S}_{1,d}^{m_1+m_2-(N+1)}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}),$$

en posant $d_{m_1+m_2-j} = \sum_{k=0}^{j} c_{k,m_1+m_2-j}$, on a :

$$p_\lambda \# q_\lambda - \sum_{j=0}^{N} d_{m_1+m_2-j} \in \mathcal{S}_{1,d}^{m_1+m_2-(N+1)}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}),$$

ceci pour tout $N \in \mathbb{N}$. Donc $p_\lambda \# q_\lambda$ est classique et appartient à $CL_d^{m_1+m_2,Q^2}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$.

Q.E.D.

On peut maintenant améliorer les résultats dus à D.Manchon [21].

Proposition 6.6. *Soit* $\mathcal{P}$ *un domaine de* $\mathbb{C}$*. Il existe un symbole à paramètre* $q_\lambda \in CL_m^{-m,Q}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P})$ *holomorphe sur* $\mathcal{P}$ *telle que*

$$p_\lambda \# q_\lambda - 1 \in \mathcal{S}^{-\infty}(\mathfrak{g}^*, \mathcal{P}).$$

Démonstration. La démonstration est la même que dans la proposition I.2.6 de [21], à part que l'on se restreint à des symboles classiques grâce à la corollaire 6.5. De plus, on appliquera la démonstration suivant cette proposition I.2.6 pour trouver q_λ.

6.2. **Calcul fonctionnel holomorphe.**

Soit donc p un symbole polynomial elliptique de degré m sur $\mathfrak{g}^*$, et soit $\mathcal{P}$ un secteur angulaire ouvert de $\mathbb{C}$ tel qu'il existe $R > 0$ tel que $p(\xi) \notin \mathcal{P}$ pour $||\xi|| > R$. Soit φ une fonction holomorphe sur un voisinage conique ouvert $\mathcal{V}$ du complémentaire de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ et vérifiant

$$|\varphi(z)| \leq C(1 + |z|^2)^{\frac{s}{2}},$$

avec $s < 0$. Ici $\mathcal{V}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas disjoints.

Soit Γ le contour de $\mathbb{C}$ défini de la manière suivante : Quitte à faire une rotation on suppose que le secteur $\mathcal{P}$ contient la demi-droite des réels négatifs. On se donne deux réels $-\pi < a < b < \pi$ tels que les deux rayons d'argument a et b soient inclus à la fois dans $\mathcal{V}$ et dans l'intérieur de $\mathcal{P}$, et on parcourt Γ en parcourant d'abord le rayon d'argument b jusqu'au cercle de rayon $\frac{r}{2}$(avec $r < R$), puis le cercle de rayon $\frac{r}{2}$ dans le sens négatif, puis le rayon d'argument a en s'éloignant de l'origine.

Proposition 6.7. *Avec ces hypothèses, la fonction* $\varphi \overset{\#}{\circ} p$ *sur* $\mathfrak{g}^*$ *définies par*

$$\xi \longmapsto \varphi \overset{\#}{\circ} p(\xi) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \varphi(\lambda) q_\lambda(\xi) d\lambda$$

appartient à $CL^{ms,Q}(\mathfrak{g}^*)$.

Si on prend $\varphi(z) = z^c$ avec c complexe, on définit la puissance complexe pour le produit # d'un symbole elliptique auto-adjoint et donc, à régularisant près, la puissance de l'opérateur correspondant.

Proposition 6.8. *Soit φ et ψ deux fonctions holomorphes sur $\mathcal{P}$ telles que*

$$|\varphi(z)| \geq C(1+|z|^2)^{\frac{m}{2}}, \quad |\psi(z)| \geq C(1+|z|^2)^{\frac{m'}{2}},$$

avec $m, m' < 0$. Alors la différence

$$(\varphi \overset{\#}{\circ} p)\#(\psi \overset{\#}{\circ} p) - (\varphi\psi \overset{\#}{\circ} p)$$

appartient à $CL^{-\infty}(\mathfrak{g}^*)$.

Démonstration. La démonstration des deux propositions est la même que dans la proposition I.3.2 de [21], on remarquera juste que l'on peut remplacer $\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$ par $CL(\mathfrak{g}^*)$ dans les lemmes, grâce au corollaire 6.5 et la proposition 6.3.

7. Croissance du volume spectral

Afin d'intégrer les symboles sur les orbites, on doit connaître la façon dont croît la quantité $V(\lambda) = \int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \lambda\}} d\beta_\Omega(\eta)$, et sa dérivée au sens de Stieljes $dV(\lambda)$.
Nils Nilsson a montré le théorème suivant :

Théorème 7.1. [23] *Soit P un polynôme réel défini sur un espace vectoriel de dimension finie tel que $P(\xi) \to \infty$, quand $|\xi| \to \infty$, $\xi \in \mathbb{R}$, et soit α un multi-indice. Si*

$$V(\lambda) = \int_{P(\xi) \leq \lambda} \xi^{2\alpha} d\xi,$$

alors il existe des réels positifs c, C, a et $t \geq 0$ tel que

$$C^{-1}\lambda^a (log\lambda)^t \leq V(\lambda) \leq C\lambda^a (log\lambda)^t,$$

avec $\lambda > c$. De plus V est dérivable, et

$$V'(\lambda) = O(1)\lambda^{a-1}(log\lambda)^t,$$

quand $\lambda \to \infty$. Si $n = 2$, alors $t = 0$ ou $t = 1$ et

$$V(\lambda) = (k + o(1))\lambda^a (log\lambda)^t,$$

quand $\lambda \to \infty$, où k est une constante positive.

Ce théorème permet de conclure dans le cas d'une orbite coadjointe qui posséde un paramétrage polynomial qui transforme la mesure de Lebesgue $dxd\xi$ sur $\mathbb{R}^{2k}$ en la mesure de Liouville sur $d\beta_\Omega$ sur Ω. On a alors des propriétés intéressantes sur la croissance du volume. C'est le cas des orbites coadjointes dans le cas où $\mathfrak{g}$ est nilpotente.
Cependant nous sommes restreints à l'utilisation du théorème dans un cas particulier. Dans un cadre plus large, le cas ad-algébrique, on a besoin des travaux de J-Y. Charbonnel. Avant d'énoncer ses résultats, je vais rappeler quelques définitions de [3] et de [4].
Soit $\mathcal{P}$ une partie fermée, discrète et majorée de $\mathbb{R}$. Pour tout réel m, on désigne par $\overline{\mathcal{P}_m}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ qui ne sont pas inférieurs à $-m$. Puisque $\mathcal{P}$ est une partie fermée, discrète et majorée, $\overline{\mathcal{P}_m}$ est fini pour tout m. Soit s un entier positif.

Définition 7.2 (Développement asymptotique). [3] *On dira que la fonction a sur* $\mathbb{R}_+^*$ *possède un développement asymptotique relativement à la paire* $(\mathcal{P}, s)$, *quand* t *tend vers* $+\infty$ *s'il existe une application* α *de* $\mathcal{P} \times \{0, \cdots, s-1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *qui satisfait la condition suivante : pour tout réel positif* m, *il existe une fonction* b_m *sur l'intervalle* $[1, +\infty[$ *qui possèdent les deux propriétés suivantes :*

$$b_m(t) = \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{\mathfrak{p} \in \overline{\mathcal{P}_m}} \alpha(\mathfrak{p}, j) t^{\mathfrak{p}} (log\ t)^j,$$

et

$$lim_{t \to +\infty} t^m [a(t) - b_m(t)] = 0.$$

Définition 7.3. [4] *Soit* G *un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$. *On note* $\tilde{G}$ *la composante neutre de l'adhérence de* $Ad(G)$ *dans* $GL(\mathfrak{g})$ *pour la topologie de Zariski.* $\mathfrak{g}$ *est dite ad−algébrique si* $\tilde{G} = Ad(G)$.

Le théorème 3.5 de [4] démontre que le volume admet un développement asymptotique généralisé dans certains cas. Dans le cas où $\mathfrak{g}$ est $ad-$algébrique et F est un polynôme hypoelliptique sur $\mathfrak{g}^*$, le théorème prend la forme suivante :

Théorème 7.4. [4][3] *Soit* $\xi \in \mathfrak{g}^*$. *On suppose que les conditions suivantes sont vérifiées :*

(1) *l'orbite* $\Omega = Ad^*(G) \cdot \xi$ *est fermée dans* $\mathfrak{g}^*$.

(2) $\mathfrak{g}$ *est ad−algébrique.*

Soit μ *la mesure de Liouville invariante sur* Ω. *Alors il existe une partie fermée, discrète et majorée* $\mathcal{P}$ *de* $\mathbb{Q}$ *et une application* s *de* $\mathcal{P}$ *dans* $\mathbb{N}$ *telle que pour tout polynôme hypoelliptique* F *sur* $\mathfrak{g}^*$ *:*

(1) *la fonction*

$$z \mapsto \int_\Omega F(x)^{-z} d\mu(x),$$

holomorphe sur un demi-plan a un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ *dont les pôles* $\mathfrak{p}$ *appartiennent à* $\mathcal{P}$ *et ont une multiplicité au plus égale à* $s(\mathfrak{p})$.

(2) *la fonction* $W_F : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, *définie par*

$$W_F(t) = \mu(\{x \in \Omega;\ F(x) \leq t\}),$$

possède un développement asymptotique relativement à la paire $(\tau_1(\mathcal{P}), s)$, *quand* t *tend vers l'infini, où* $\tau_1(\mathcal{P})$ *est la réunion de* $\{0\}$ *et de l'image de* $\mathcal{P}$ *par la translation* $x \mapsto x + 1$.

Démonstration. On utilise le théorème 3.6 de [4] et son corollaire.

Q.E.D.

Ainsi dans le cas où F est un polynôme hypoelliptique en la variable $\eta \in \mathfrak{g}^*$, on a des informations sur la croissance du volume. Le volume spectral est associé à un symbole homogène puissance fractionnaire de polynôme elliptique sur $\mathfrak{g}^*$, il suffira donc de considérer des puissances convenables de celui-ci.

8. Formule asymptotique de Weyl

Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ formellement auto-adjoint, tel que sa symétrisation $a = \sigma^{-1}(\mathfrak{a}) = \mathcal{F}(\exp_*^{-1} \mathfrak{a})$ soit un polynôme elliptique sur $\mathfrak{g}^*$. Soit a_m le symbole principal de $\mathfrak{a}$, c'est-à dire le terme homogène de degré maximal de a. On suppose qu'il existe une constante C telle que $a+C>0$. L'opérateur $\pi(\mathfrak{a})$ est alors essentiellement auto-adjoint et a un spectre discret borné à gauche [19].
Dans ce paragraphe, on va démontrer la formule asymptotique de Weyl

$$N(\lambda) = V(\lambda)\big(1 + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{m}}})\big),$$

où $N(\lambda)$ est le nombre de valeurs propres de $\pi(\mathfrak{a})$ inférieures ou égales à λ, $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$,

$$V(\lambda) = \int_{\Omega \cap \{a_m(\eta) \leq \lambda\}} d\beta_\Omega(\eta)$$

est le volume associé à a_m symbole principal de $\mathfrak{a}$ polynomial positivement homogène de degré m.
Pour cela, on devra se restreindre à $\pi(\mathfrak{a})$ opérateur différentiel elliptique, auto-adjoint sur un espace de représentation et faire des hypothèses sur le volume spectral $V(\lambda)$ et sur $N(\lambda)$. D'après la théorie sur les opérateurs, on peut écrire

$$N(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(t) e^{-i\lambda t} e^{it\pi(\mathfrak{a})} dt,$$

où χ est la fonction indicatrice de $]-\infty, 0]$. Soient $\alpha \in [0,1[$ et $\lambda \geq 2^{\frac{1}{\alpha}}$.
On définit

$$N_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(t) \hat{\rho}(t\lambda^\alpha) e^{-i\lambda t} e^{it\pi(\mathfrak{a})} dt$$

où $\rho \in \mathcal{S}$ est paire et telle que

$$\hat{\rho}(t) = 1 \ si \ |t| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$\hat{\rho}(t) = 0 \ si \ |t| > \varepsilon.$$

8.1. **Approximation de $N(\lambda)$ par $N_\alpha(\lambda)$.** On va voir que sous certaines hypothèses sur N, alors on peut approximer $N(\lambda)$ par $N_\alpha(\lambda)$. Précisons qu'ici N joue le rôle du comptage spectral $N(\lambda)$ pour l'opérateur $\pi(\mathfrak{a})^{\frac{1}{m}}$. On se ramène à étudier ce $N(\lambda)$ pour pouvoir utiliser l'approximation de l'exponentielle par un Opérateur Fourier-Intégral.

Hypothèse 8.1 (N)**.** *N vérifie l'hypothèse (N) si :*

$$N(\lambda+1) - N(\lambda) = O(\frac{N(\lambda)}{\lambda}).$$

Proposition 8.2. *Soit ρ une fonction de l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ d'intégrale 1. Soit $\alpha \in [0,1[$. On pose $N_\alpha(\lambda) = \lambda^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \rho(\mu\lambda^{-\alpha}) N(\lambda - \mu) d\mu$. Si N vérifie l'hypothèse (N), alors on a :*

$$N(\lambda) - N_\alpha(\lambda) = O(\frac{N(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}).$$

Démonstration. Soit $\lambda \geq 2$.

$$N(\lambda) = \Big(\int_{\mathbb{R}} \rho(\mu) d\mu\Big) N(\lambda).$$

Donc

$$\begin{aligned} N(\lambda) - N_\alpha(\lambda) &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \rho(\mu) d\mu\Big) N(\lambda) - \lambda^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \rho(\lambda^{-\alpha}\mu) N(\lambda - \mu) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(\mu) N(\lambda) d\mu - \int_{\mathbb{R}} \rho(\mu) N(\lambda - \lambda^\alpha \mu) d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}} \rho(\mu) \big(N(\lambda) - N(\lambda - \lambda^\alpha \mu)\big) d\mu. \end{aligned}$$

On découpe l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} N(\lambda) - N_\alpha(\lambda) &= \int_{|\mu| \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} \rho(\mu) \big(N(\lambda) - N(\lambda - \lambda^\alpha \mu)\big) d\mu \\ &+ \int_{|\mu| > \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} \rho(\mu) \big(N(\lambda) - N(\lambda - \lambda^\alpha \mu)\big) d\mu. \end{aligned}$$

On pose

$$A_\alpha(\lambda) = \int_{|\mu| \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} \rho(\mu) \big(N(\lambda) - N(\lambda - \lambda^\alpha \mu)\big) d\mu,$$

et

$$B_\alpha(\lambda) = \int_{|\mu| > \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} \rho(\mu) \big(N(\lambda) - N(\lambda - \lambda^\alpha \mu)\big) d\mu.$$

Soit μ tel que $|\mu| > \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}$, alors $|\lambda - \lambda^\alpha \mu| \leq 3\lambda^\alpha |\mu|$.
N est à croissance au plus polynomiale, donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$|N(\mu)| \leq C_{N'} |\mu|^{N'},$$

pour tout $\mu \in \mathbb{R}$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} |B_\alpha(\lambda)| &\leq \int_{|\mu| > \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} |\rho(\mu)| \big(N(\lambda) + (3\lambda^\alpha |\mu|)^{N'}\big) d\mu \\ &\leq \int_{|\mu| > \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}} |\rho(\mu)| \big(C_{N'} \lambda^{N'} + (3\lambda^\alpha |\mu|)^{N'})\big) d\mu \end{aligned}$$

Comme ρ est dans l'espace de Schwartz, cette dérnière intégrale vérifie l'estimation $O(\lambda^{-m})$, pour tout $m \in \mathbb{N}$. Donc

$$|B_\alpha(\lambda)| = O(\lambda^{-m}),$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$.
Soit maintenant μ tel que $|\mu| \leq \frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}$, alors

$$\frac{\lambda}{2} \leq \lambda - \mu\lambda^\alpha \leq \frac{3\lambda}{2}.$$

Lemme 8.3. *Soit $M > 0$. Soit $0 \leq \nu \leq (1+M)\lambda$.*
Alors il existe $C_M > 0$ tel que

$$|N(\lambda) - N(\nu)| \leq C_M \frac{1 + |\lambda - \nu|}{\lambda} N(\lambda).$$

Démonstration. On va distinguer cinq cas :

(1) $0 \leq \nu \leq \frac{\lambda}{M+1}$

(2) $\frac{\lambda}{M+1} < \nu \leq \lambda - 1$

(3) $\lambda - 1 < \nu \leq \lambda$

(4) $\lambda < \nu \leq \lambda + 1$

(5) $\lambda + 1 < \nu \leq (1+M)\lambda$.

Premier cas :

Si $0 \leq \nu \leq \frac{\lambda}{M+1}$.

$$N(\lambda) - N(\nu) \leq N(\lambda),$$

mais $\frac{1+|\lambda-\nu|}{\lambda} \geq \frac{1+[\lambda-\nu]}{\lambda} \geq \frac{\lambda-\nu}{\lambda} \geq \frac{M}{M+1}$. Donc

$$N(\lambda) - N(\nu) \leq (\frac{M+1}{M})(\frac{1+|\lambda-\nu|}{\lambda})N(\lambda).$$

Deuxième cas :

Si $\frac{\lambda}{M+1} \leq \nu \leq \lambda - 1$.

$$\begin{aligned} N(\lambda) - N(\nu) &= \sum_{k=0}^{[\lambda-\nu]-1} (N(\lambda-k) - N(\lambda-(k+1)) + N(\lambda - [\lambda-\nu]) - N(\nu) \\ &\leq C \sum_{k=0}^{[\lambda-\nu]-1} \frac{N(\lambda-(k+1))}{\lambda-(k+1)} + C\frac{N(\nu)}{\nu}, \end{aligned}$$

où C est telle que $N(x+1) - N(x) \leq C\frac{N(x)}{x}$, pour tout $x \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned} N(\lambda) - N(\nu) &\leq C \sum_{k=0}^{[\lambda-\nu]-1} \frac{N(\lambda)}{\frac{\lambda}{M+1}} + C\frac{N(\lambda)}{\frac{\lambda}{M+1}} \\ &\leq (M+1)C([\lambda-\nu]+1)\frac{N(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

La propriété est donc prouvée dans ce cas.

Troisième cas et quatrième cas :

Maintenant si $\lambda - 1 \leq \nu \leq \lambda$, alors

$$N(\lambda) - N(\nu) \leq N(\lambda) - N(\lambda-1) \leq C\frac{N(\lambda-1)}{\lambda-1} \leq C\frac{N(\lambda)}{\frac{\lambda}{2}},$$

et si $\lambda \leq \nu \leq \lambda + 1$, alors l'inégalité est directement vérifiée.

Cinquième cas :

Maintenant si $\lambda+1 \leq \nu \leq (1+M)\lambda$.
Alors $\frac{\nu}{M+1} \leq \lambda \leq \nu-1$ et $\nu \geq 2$. Donc en renversant les rôles de λ et ν, on a :

$$N(\nu)-N(\lambda) \leq C(1+[\nu-\lambda])\frac{N(\nu)}{\nu},$$

et comme $\nu \geq \lambda$, alors on a

$$N(\nu)-N(\lambda) \leq C(1+[\nu-\lambda])\frac{N(\nu)}{\lambda}.$$

$$N(\nu) \leq N(\lambda+[\nu-\lambda]+1) = \Pi_{k=0}^{\nu-\lambda}\frac{N(\lambda+k+1)}{N(\lambda+k)},$$

et en utilisant l'hypothèse (N), on a

$$N(\nu) \leq \Pi_{k=0}^{[\nu-\lambda]}(1+\frac{C}{\lambda+k})N(\lambda).$$

Mais on a

$$\Pi_{k=0}^{[\nu-\lambda]}(1+\frac{C}{\lambda+k}) \leq \Pi_{k=0}^{[M\lambda]}(1+\frac{C}{\lambda+k}).$$

Il reste donc à majorer cette expression par une constante dépendant de M.

$$\Pi_{k=0}^{[M\lambda]}(1+\frac{C}{\lambda+k}) = e^{\sum_{k=0}^{[M\lambda]} ln(1+\frac{C}{\lambda+k})},$$

et on a

$$\sum_{k=0}^{[M\lambda]} ln(1+\frac{C}{\lambda+k}) \leq \sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k}.$$

$$\sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k} \leq \frac{C}{\lambda}+\sum_{k=1}^{[M\lambda]}\int_{k-1}^{k}\frac{C}{\lambda+u}du,$$

ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k} \leq C\sum_{k=1}^{[M\lambda]}[ln(\lambda+u)]_{k-1}^{k}du,$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k} \leq \frac{C}{\lambda}+C(ln(\lambda+[M\lambda])-ln(\lambda)).$$

Quand $\lambda \to \infty$, $ln(\lambda+[M\lambda])-ln(\lambda) \to ln(M+1)$. Donc $\sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k}$ est majorée, et donc il existe $K>0$ tel que $\sum_{k=0}^{[M\lambda]}\frac{C}{\lambda+k} \leq K$, donc $\sum_{k=0}^{[M\lambda]} ln(1+\frac{C}{\lambda+k}) \leq K$, et donc

$$\Pi_{k=0}^{[\nu-\lambda]}(1+\frac{C}{\lambda+k}) \leq e^{K},$$

ce qui prouve l'inégalité dans ce cas.

Q.E.D.

Maintenant, je vais terminer la démonstration de la proposition 8.2. D'après le lemme, on a alors :

$$\begin{aligned}|A_\alpha(\lambda)| &\leq C\int_{|\mu|\leq\frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}}|\rho(\mu)(|\mu|\lambda^\alpha+1)\frac{N(\lambda)}{\lambda}d\mu\\ &\leq C'\frac{N(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}\int_{|\mu|\leq\frac{\lambda^{1-\alpha}}{2}}|\rho(\mu)||\mu|d\mu.\end{aligned}$$

On a donc

$$N(\lambda)-N_\alpha(\lambda)=O(\frac{N(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}).$$

Q.E.D.

Maintenant on va étudier $N_\alpha(\lambda)$ afin d'obtenir la formule de Weyl.

8.2. **Etude de $N_\alpha(\lambda)$.**

$$N_\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)\hat{\rho}(t)e^{-i\lambda t}e^{it\pi(\mathfrak{a})}dt,$$

car $\hat{\rho}(t)\hat{\rho}(\lambda^\alpha t)=\hat{\rho}(\lambda^\alpha t)$, puisque $\lambda\geq 2^{\frac{1}{\alpha}}$. En utilisant l'approximation de $e^{it\pi(\mathfrak{a})}$ par $\pi(Q_{-t})$, on obtient

$$N_\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)e^{-i\lambda t}\pi(Q_{-t})\,dt+\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)e^{-i\lambda t}\pi(R_{-t})\,dt.$$

où R_{-t} est l'opérateur régularisant $e^{it\pi(\mathfrak{a})}-\pi(Q_{-t})$. On note

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)\hat{\rho}(t)e^{-i\lambda t}\pi(Q_{-t})\,dt,$$

et

$$R_\alpha(\lambda)=\frac{1}{2\pi}Tr\int_{\mathbb{R}}\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)\hat{\rho}(t)e^{-i\lambda t}\pi(R_{-t})dt.$$

Maintenant on va réécrire $\tilde{N_\alpha}(\lambda)$ à l'aide des deux lemmes qui suivent :

Lemme 8.4. *Au sens des distributions, on a l'égalité :*

$$\hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)e^{-i\lambda t}=\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda))e^{-i\mu t}d\mu.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda))e^{-i\mu t}d\mu &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)-\nu)\chi(\nu)e^{-i\mu t}d\mu d\nu\\ &= \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)-\lambda^{-\alpha}\nu)\chi(\nu)e^{-i\mu t}d\mu d\nu\\ &= \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}(\mu-\nu-\lambda))\chi(\nu)e^{-i\mu t}d\mu d\nu\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda))e^{-i\mu t}d\mu &= \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}(\mu-\nu-\lambda))e^{-i(\mu-\nu-\lambda)t}d\mu\chi(\nu)e^{-i\nu t}d\nu e^{-i\lambda t}\\ &= \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}\mu)e^{-i\mu t}d\mu\int_{\mathbb{R}}\chi(\nu)e^{-i\nu t}d\nu e^{-i\lambda t}\\ &= \lambda^{-\alpha}\int_{\mathbb{R}}\rho(\lambda^{-\alpha}\mu)e^{-i\mu t}d\mu\hat{\chi}(t)e^{-i\lambda t}\\ &= \hat{\rho}(\lambda^\alpha t)\hat{\chi}(t)e^{-i\lambda t}\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lemme 8.5. *A μ fixé, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t) Q_{-t} e^{-it\mu} dt$ définit une fonction lisse à support compact sur $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. D'abord, on a, à $\mu \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t) Q_{-t} e^{-it\mu} dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{g}^*} \hat{\rho}(t) q(-t, x, \xi) e^{i(\varphi(x,\xi) + t(a_1(\xi) - \mu))} d\xi dt.$$

Après plusieurs intégrations par partie en t, on obtient pour $\mu \in \mathbb{R}$ fixé :

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t) Q_{-t} e^{-it\mu} dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{g}^*} \frac{1 + (-1)^N \partial_t^{2N} (\hat{\rho}(t) q(-t, x, \xi))}{1 + (a_1(\xi) - \mu)^{2N}} e^{i(\varphi(x,\xi) + t(a_1(\xi) - \mu))} d\xi dt.$$

On voit que l'intégrale et ses dérivées partielles sur $\mathfrak{g}$ converge absolument pour N assez grand et donc par convergence dominée, elle est lisse sur $\mathfrak{g}$. De plus $x \mapsto q(-t, x, \xi)$ est à support compact par construction, donc cette intégrale est lisse à support compact sur $\mathfrak{g}$.

Q.E.D.

En utilisant le lemme 8.4, on a alors :

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu - \lambda)) \hat{\rho}(t) \pi(Q_{-t}) e^{-it\mu} dt d\mu.$$

On pose

$$\psi(t, x, \mu, \xi, \eta) = \varphi(x, \xi) + t(a_1(\xi) - \mu) - < x, \eta > .$$

A l'aide de l'expression explicite de $\int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t) Q_{-t} e^{-it\mu} dt$ et de la formule de Kirillov, on écrit :

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathfrak{g}} \int_{\mathfrak{g}^*} P_\Omega(x)^{-1} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu - \lambda)) \hat{\rho}(t) q(-t, x, \xi) e^{i\psi(t,x,\mu,\xi,\eta)} dx d\xi dt d\beta_\Omega(\eta) d\mu.$$

On pose

$$\tilde{q}(t, x, \xi) = P_\Omega(x)^{-1} q(-t, x, \xi).$$

On a donc $\tilde{N_\alpha}(\lambda) = \int_\Omega \sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) d\beta_\Omega(\eta)$, avec

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu - \lambda)) \hat{\rho}(t) \tilde{q}(t, x, \xi) e^{i\psi(t,x,\mu,\xi,\eta)} dx d\xi dt d\mu,$$

pour tout $\eta \in \mathfrak{g}^*$. Maintenant je vais étudier pour $t \in] - \varepsilon, \varepsilon[$, l'intégrale oscillante :

$$I(t, \eta) = \iint_{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*} \tilde{q}(t, x, \xi) e^{i\Psi_t(x,\xi,\eta)} dx d\xi,$$

de phase $\Psi_t : (x, \xi, \eta) \mapsto \varphi(x, \xi) + t a_1(\xi) - < x, \eta >$. On a alors

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu - \lambda)) \hat{\rho}(t) I(t, \eta) e^{-i\mu t} dt d\mu,$$

pour tout $\eta \in \mathfrak{g}^*$, et les points critiques de la phase Ψ_t de $I(t, \eta)$ sont donnés par le système :

$$\begin{cases} d_x \Psi_t(x, \xi, \eta) = 0 \\ d_\xi \Psi_t(x, \xi, \eta) = 0 \end{cases} .$$

Le système peut donc se réécrire :

$$\begin{cases} d_x \varphi_t(x, \xi) = \eta \\ d_\xi \varphi_t(x, \xi) = 0 \end{cases} ,$$

avec $\varphi_t(x,\xi) = \varphi(x,\xi) + ta_1(\xi)$.
On se propose de montrer dans la proposition suivante que si on choisit bien certains paramètres pour l'intégrale oscillante, ce système possède une unique solution.

Proposition 8.6. *Supposons* $\dim \mathfrak{g} \geq 3$. *Soient* V *un voisinage ouvert de* 0 *relativement compact dans* $\mathfrak{g}$ *et* ϕ *une fonction de phase d'OPD sur* $V \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$. *On pose* $\phi_t : (x,\xi) \mapsto \phi(x,\xi) + ta_1(\xi)$ *sur* $V \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$. *Alors il existe* K *voisinage compact de* 0, *inclus dans* V *et* $\alpha > 0$ *tel que :*

(1) *pour tout* $t \in]-\alpha, \alpha[$, *le Hessien de* ϕ_t *soit non-dégénéré sur* $Int(K) \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$, *en particulier* ϕ_t *est une fonction de phase non-dégénérée sur* $Int(K) \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$.

(2) $sgn\, d^2\phi_t(x,\xi) = 0$ *sur* $Int(K) \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$.

(3) $\Phi : (t,x,\xi) \mapsto (t, d_\xi\phi_t(x,\xi), d_x\phi_t(x,\xi))$ *soit un difféomorphisme de* $]-\alpha,\alpha[\times Int(K) \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ *sur* $]-\alpha,\alpha[\times W \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$, *où* W *est un voisinage ouvert de* 0 *dans* $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times V \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \\ (t,x,\xi) &\longmapsto (t, d_\xi\phi_t(x,\xi), d_x\phi_t(x,\xi)). \end{aligned}$$

Soit $\xi \in \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$. Le jacobien de Φ en $(0,0,\xi)$ est $det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ d_\xi a_1 & id & 0 \\ 0 & d_x^2\phi_t & id \end{pmatrix} (0,0,\xi) = 1$, donc par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage ouvert $]-\alpha_\xi, \alpha_\xi[\times \mathcal{U}_{0,\xi}$ de $(0,(0,\xi))$ dans $\mathbb{R} \times (V \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ tel que Φ soit un difféomorphisme de $]-\alpha_\xi,\alpha_\xi[\times \mathcal{U}_{0,\xi}$ sur le voisinage ouvert $]-\alpha_\xi,\alpha_\xi[\times \mathcal{W}_{0,\xi}$ de $\Phi(0,0,\xi) = (0,(0,\xi))$, où $\mathcal{W}_{0,\xi}$ est un voisinage ouvert de $(0,\xi)$ dans $\mathfrak{g} \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$. On définit $\mathcal{U}_\xi$ (resp. $\mathcal{W}_\xi$) le cône engendré par $\mathcal{U}_{0,\xi}$(resp. $\mathcal{W}_{0,\xi}$). Ce difféomorphisme se prolonge par positive homogénéité de degré 1 en ξ en un difféomorphisme local du voisinage ouvert conique $]-\alpha_\xi,\alpha_\xi[\times \mathcal{U}_\xi$ dans le voisinage ouvert conique $]-\alpha_\xi,\alpha_\xi[\times \mathcal{W}_\xi$.
Comme $\{0\} \times (\{0\} \times \mathcal{S}^{n-1}) \subset \cup_{\xi \in \mathcal{S}^{n-1}}\ ]-\alpha_\xi,\alpha_\xi[\times \mathcal{U}_\xi$, par compacité, il existe un recouvrement fini de $\{0\} \times (\{0\} \times \mathcal{S}^{n-1})$ par $\cup_{i=1,\cdots,p}]-\alpha_{\xi_i},\alpha_{\xi_i}[\times \mathcal{U}_{\xi_i}$, avec $\xi_i \in \mathcal{S}^{n-1}$, pour tout i.
On pose $\alpha = inf\{\alpha_{\xi_i}, 1 \leq i \leq p\}$, $U = \cap_{i=1,\cdots,p}\, pr_{\mathfrak{g}}(\mathcal{U}_{\xi_i})$. Φ est alors un difféomorphisme local de $]-\alpha,\alpha,[\times U \times proj_{\mathfrak{g}^*}(\mathcal{U}_{\xi_i})$ dans son image, pour tout i. C'est donc un difféomorphisme local de $]-\alpha,\alpha[\times U \times C$ dans son image, où C est le cône $\cup_{i=1,\cdots,n} proj_{\mathfrak{g}^*}(\mathcal{U}_{\xi_i})$.

Comme $\mathcal{S}^{n-1} \subset\ C$ et C est un cône, $C = (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$. Ensuite Φ est positivement homogène de degré 1 en la variable ξ, l'image de $]-\alpha,\alpha,[\times U \times C$ est donc de la forme $]-\alpha,\alpha,[\times W \times C'$, où C' est un cône et W est un voisinage ouvert de 0 dans $\mathfrak{g}$ relativement compact.

On a l'inclusion $\{0\} \times \{0\} \times \mathcal{S}^{n-1} \subset\ \Phi(\{0\} \times \{0\} \times \mathcal{S}^{n-1})$, donc $\mathcal{S}^{n-1} \subset C'$, alors par positive homogénéité de degré 1 de Φ en la variable ξ, $C' = (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$.
Φ est donc une application surjective de $]-\alpha,\alpha[\times U \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ sur $]-\alpha,\alpha[\times W \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$, qui est un difféomorphisme local en tout point. Soit $(t,x) \in]-\alpha,\alpha[\times U$. Alors l'application $\psi_{t,x} : \xi \mapsto d_x\phi_t(x,\xi)$ est une application surjective de $(\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ dans $(\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ qui est un difféomorphisme local en tout point. Comme $\mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$ est simplement connexe et Φ est une application surjective qui est localement un difféomorphisme, c'est un difféomorphisme

global, donc Φ est un difféomorphisme global de $]-\alpha,\alpha,[\times U \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$ dans $]-\alpha,\alpha[\times W \times (\mathfrak{g}^* \setminus \{0\})$.
Ensuite, l'ensemble des matrices symétriques de signature (n,n) est ouvert dans l'ensemble des matrices symétriques inversibles d'ordre $2n$, donc on peut trouver un voisinage de $\{0\}\times\{0\}\times\mathfrak{g}^*$ dans $\mathbb{R}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*$ sur lequel la signature de la Hessienne de ϕ_t soit constante.
Grâce à la relation $Hess(\phi_t)(x,\frac{\xi}{\tau}) = \frac{1}{\tau}\begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & \tau id \end{pmatrix} Hess(\phi_t)(x,\xi)\begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & \tau id \end{pmatrix}$, on a alors $sgn\ Hess(\phi_t)(x,\frac{\xi}{\tau}) = sgn\ Hess(\phi_t)(x,\xi)$, pour tout $\tau > 0$, car les matrices symétriques ont donc même signature.
La suite $\left(Hess(\phi_t)(x,\frac{\xi}{k})\right)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 & id \\ id & 0 \end{pmatrix}$ de signature (n,n). Comme l'ensemble des matrices symétriques de signature (n,n) est ouvert, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $sgn\ Hess(\phi_t)(x,\frac{\xi}{k}) = 0$, donc

$$sgn\ Hess(\phi_t)(x,\xi) = 0.$$

Q.E.D.

Pour ne pas s'encombrer de nouvelles notations, on supposera ε,L choisis tels que $]-\varepsilon,\varepsilon[\times Int(L)\times(\mathfrak{g}^*\setminus\{0\})$ vérifie les propriétés de la proposition précédente. Donc d'après la proposition (8.6), grâce à notre choix de ε et L , on a l'équivalence :

$$\begin{cases} d_x\varphi_t(x,\xi) = \eta \\ d_\xi\varphi_t(x,\xi) = 0 \end{cases} \iff \Phi^{-1}(t,0,\eta) = (t,x,\xi) \iff \begin{cases} x = x_t(\eta) \\ \xi = \xi_t(\eta) \end{cases}.$$

Il existe donc un unique point $(x_t(\eta),\xi_t(\eta))$ tel que

$$\begin{cases} d_x\Psi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta),\eta) = 0 \\ d_\xi\Psi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta),\eta) = 0 \end{cases}.$$

La phase Ψ_t de $I(t,\eta)$ possède donc un unique point critique $(x_t(\eta),\xi_t(\eta))$. Le choix du voisinage exponentiel et de ε assure qu'on a :

$$\begin{cases} d_x\varphi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta)) = \eta \\ d_\xi\varphi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta)) = 0 \\ d^2_{(x,\xi)}\varphi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta))\ est\ non-dégénérée \end{cases}, \quad (*)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} d_x\Psi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta)) = \eta \\ d_\xi\Psi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta)) = 0 \\ d^2_{(x,\xi)}\Psi_t(x_t(\eta),\xi_t(\eta))\ est\ non-dégénérée \end{cases}.$$

D'après le théorème de la phase stationnaire, on a :

$$I(t,\eta) = e^{-i<x_t(\eta),\eta>}Q(t,\eta),$$

avec $Q(t,\eta)$ symbole classique sur $\mathbb{R}\times\mathfrak{g}^*$ de développement asymptotique :

$$Q(t,\eta) \sim k_t(\eta)e^{\frac{i\pi}{4} sgn\,H_t(\eta)}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(R_t(y_t,\eta)^k g_t(y_t,\eta))_{|y_t=0},$$

où

$$\begin{cases} g_t(y_t,\eta)|det\, d_{(x,\xi)}y_t| = \tilde{q}(-t,x(y_t),\xi(y_t)) \\ R_t(y_t,\eta) = \frac{i}{2} < H_t(\eta)^{-1}\partial_{y_t},\partial_{y_t} > \\ k_t(\eta) = |detH_t(\eta)|^{-\frac{1}{2}} \end{cases},$$

y_t étant le difféomorphisme de Morse à paramètre (t,η) pour Ψ_t. On a donc

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda))\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)e^{-i(\mu t+<x_t(\eta),\eta>)}dtd\mu.$$

Notons que grâce à la proposition 8.6, on a

$$Q(t,\eta)\sim k_t(\eta)\sum_{k\geq 0}\frac{1}{k!}(R_t(y_t,\eta)^k g_t(y_t,\eta))_{|y_t=0},$$

le symbole principal de $Q(t,\eta)$ étant $k_t(\eta)q_0(-t,x_t(\eta),\xi_t(\eta))$.

Lemme 8.7. *On a l'égalité suivante :*

$$\partial_t<x_t(\eta),\eta>=-a_1(\xi_t(\eta)). \tag{19}$$

Démonstration. On a directement $x_0(\eta)=0$, parce que φ est une fonction de phase de Distribution Pseudo-Différentielle.
Comme $d_\xi\varphi(x_t(\eta),\xi_t(\eta))=-tda_1(\xi_t(\eta))$, en effectuant le produit scalaire avec $\xi_t(\eta)$ on trouve par positive homogénéité de degré 1,

$$\varphi(x_t(\eta),\xi_t(\eta))=-ta_1(\xi_t(\eta)),$$

pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$. En dérivant cette relation par rapport à t, on obtient :

$$\partial_t x_t(\eta)\cdot d_x\varphi(x_t(\eta),\xi_t(\eta))+\partial_t\xi_t(\eta)\cdot d_\xi\varphi(x_t(\eta),\xi_t(\eta))=-a_1(\xi_t(\eta))-t\partial_t\xi_t(\eta)\cdot da_1(\xi_t(\eta)),$$

pour tout $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$. Ce qui après simplification, compte tenu de $(*)$ donne

$$<\partial_t x_t(\eta),\eta>=-a_1(\xi_t(\eta)>.$$

On va chercher le développement limité de $x_t(\eta)$ au voisinage de $t=0$, on sait déjà que $\xi_t(\eta)=\eta+tF(t,\eta)$, où $(t,\eta)\mapsto F(t,\eta)$ est lisse sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times(\mathfrak{g}^*\setminus\{0\})$ et positivement homogène de degré 1 en η et comme $d_\xi\varphi(x_t(\eta),\xi_t(\eta))=x_t(\eta)+O(x_t(\eta)^2)=-tda_1(\xi_t(\eta))$, on trouve

$$x_t(\eta)=-tda_1(\eta)+t^2H(t,\eta),$$

où $(t,\eta)\mapsto H(t,\eta)$ est lisse sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times(\mathfrak{g}^*\setminus\{0\})$ et positivement homogène de degré 0 en η. On a donc

$$<x_t(\eta),\eta>=-ta_1(\eta)+t^2G(t,\eta),$$

où $(t,\eta)\mapsto G(t,\eta)$ est lisse sur $]-\varepsilon,\varepsilon[\times(\mathfrak{g}^*\setminus\{0\})$ et positivement homogène de degré 1 en η.

Q.E.D.

D'après la proposition précédente, on a :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)e^{-i\big(\mu-a_1(\eta)+tG(t,\eta)\big)t}dtd\mu.$$

Effectuons le changement de variable $\mu'=\mu-a_1(\eta)+tG(t,\eta)$ en posant $w=a_1(\eta)$, ce qui donne :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu'+w-tG(t,\eta)-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)e^{-i\mu' t}dtd\mu'.$$

On fait un deuxième changement de variables $\mu=\lambda\mu'$, on obtient alors :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\frac{\lambda}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(\lambda\mu+w-tG(t,\eta)-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)e^{-i\lambda\mu t}dtd\mu.$$

La phase de cette intégrale oscillante a pour point critique $\left\{\begin{array}{l} t=0 \\ \mu=0 \end{array}\right.$. Ce point est non-dégénéré, $(t,\mu)\mapsto \mu t$ étant non-dégénérée.

On pose $h(t,\mu,\lambda,w,\eta)=\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(\lambda\mu+w-tG(t,\eta)-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)$.

Théorème 8.8. *Soit $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$. Si $\frac{1}{V(\lambda)}=O(\lambda^{-\frac{1}{2}})$, si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, et si a est tel qu'il existe un polynôme p elliptique de degré m tel que $a^{\#m}-p\in\mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, alors on a l'estimation*

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda)=V(\lambda)\big(1+O(\frac{1}{\lambda^{1-\alpha}})\big).$$

Démonstration. On va d'abord se placer dans un cas où l'amplitude $h(t,\mu,\lambda,w,\eta)$ vérifie les conditions d'application de la phase stationnaire.
Quand $w\le\mathcal{C}\lambda$, où $\mathcal{C}$ est une constante et $\alpha\in]\frac{1}{2},1[$, on a les estimations

$$|\partial_t^\beta\partial_\mu^\gamma h(t,\mu,\lambda,w,\eta)|\le C_{\beta,\gamma}\lambda^{(1-\alpha)(\beta+\gamma)},$$

où les $C_{\beta,\gamma}$ sont des constantes ne dépendant que de β et γ. Alors nous sommes bien dans les conditions d'application de la phase stationnaire.
Nous choisirons la constante $\mathcal{C}$ assez grande pour la suite de la démonstration. Par exemple, $\mathcal{C}\ge 12$ conviendra.
Dans ce cas, on a pour tout $m\in\mathbb{N}$:

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^{-k}}{k!}(\partial_t\partial_\mu)^k[h(t,\mu,\lambda,w,\eta)]_{|t=0,\mu=0}+O(\lambda^{(m+1)(1-2\alpha)}),$$

où la majoration du reste ne dépend pas de w, ce qui peut se réécrire :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)\hat{\rho}(0)Q(0,\eta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^{-k}}{k!}(\partial_t\partial_\mu)^k[h(t,\mu,\lambda,w,\eta)]_{|t=0,\mu=0}+O(\lambda^{(m+1)(1-2\alpha)}).$$

Donc

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)=\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)Q(0,\eta)+\sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^{-k}}{k!}(\partial_t\partial_\mu)^k[h(t,\mu,\lambda,w,\eta)]_{|t=0,\mu=0}+O(\lambda^{(m+1)(1-2\alpha)}).\quad(20)$$

On choisira m tel que $(m+1)(1-2\alpha)\le-(1-\alpha)$.
On a

$$\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)Q(0,\eta)=\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)q_0(0,0,\eta)+\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)b(\eta),\quad(21)$$

où $b(\eta)$ est un symbole classique d'ordre -1. En outre $q_0(0,0,\eta)=1$, donc on a :

$$\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)Q(0,\eta)=\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)+\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)b(\eta).\qquad(22)$$

En remplaçant w par sa valeur $a_1(\eta)$ et en intégrant sur le domaine $\Omega\cap\{a_1(\eta)\le\mathcal{C}\lambda\}$, on obtient donc :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\le\mathcal{C}\lambda\}}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta)-\lambda)\big)d\beta_\Omega(\eta) &= \int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\le\mathcal{C}\lambda\}}(\rho*\chi-\chi)\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta)-\lambda)\big)d\beta_\Omega(\eta)\\ &\quad+\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\le\mathcal{C}\lambda\}}\chi(a_1(\eta)-\lambda)d\beta_\Omega(\eta)\end{aligned}$$

Proposition 8.9. *Soit ρ une fonction à décroissance rapide en $-\infty$ et $+\infty$, soient $\alpha\in[0,1[$ et $M>0$. Alors*

$$\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\le(1+M)\lambda\}}\rho(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta)-\lambda))d\beta_\Omega(\eta)=O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\leq(1+M)\lambda\}} \rho(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta)-\lambda))d\beta_\Omega(\eta) &\leq \int_{w\leq(1+M)\lambda} |\rho(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda))|dV(w)\\ &\leq \int_{w\leq(1+M)\lambda} \frac{dV(w)}{[1+\lambda^{-2\alpha}(\lambda-w)^2]}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^{(1+M)\lambda} \frac{dV(w)}{[1+\lambda^{-2\alpha}(\lambda-w)^2]} &= [\frac{(V(w)-V(\lambda))}{[1+\lambda^{-2\alpha}(\lambda-w)^2]}]_0^{(1+M)\lambda}\\ &\quad +2\int_0^{(1+M)\lambda} \frac{(V(w)-V(\lambda))\lambda^{-2\alpha}(w-\lambda)}{[1+\lambda^{-2\alpha}(\lambda-w)^2]^2}d\mu\\ &= \frac{V((1+M)\lambda)-V(\lambda)}{[1+(M\lambda^{1-\alpha})^2]^N}+\frac{V(\lambda)}{[1+\lambda^{2(1-\alpha)}]^N}\\ &\quad +2\int_{-\lambda}^{M\lambda} \frac{(V(\mu+\lambda)-V(\lambda))\lambda^{-2\alpha}\mu}{[1+\lambda^{-2\alpha}\mu^2]^2}d\mu. \qquad (23)\end{aligned}$$

Lemme 8.10. *Soit* $0\leq\nu\leq M\lambda$.
Alors il existe $C>0$ *tel que*

$$|V(\lambda)-V(\nu)|\leq C\frac{1+|\lambda-\nu|}{\lambda}V(\lambda).$$

Démonstration. $\mathfrak{g}$ étant *ad*-algébrique, V vérifie l'hypothèse (N) grâce au théorème 7.4 avec $F=a_1$. La démonstration est donc mot pour mot celle du lemme 8.3 en remplaçant N par V.

Q.E.D.

Je vais maintenant terminer de démontrer la proposition 8.9. D'après le lemme précédent, on a l'inégalité :

$$\int_{-\lambda}^{M\lambda} \frac{(V(\mu+\lambda)-V(\lambda))\lambda^{-2\alpha}\mu}{[1+\lambda^{-2\alpha}\mu^2]^2}d\mu\leq C\frac{V(\lambda)}{\lambda}\lambda^{-2\alpha}\int_{-\lambda}^{M\lambda} \frac{(1+|\mu|)|\mu|}{[1+\lambda^{-2\alpha}\mu^2]^2}d\mu$$

et par ailleurs

$$\int_{-\lambda}^{M\lambda} \frac{(1+|\mu|)|\mu|}{[1+\lambda^{-2\alpha}\mu^2]^2}d\mu=O(\lambda^{3\alpha}).$$

On a donc

$$2\int_{-\lambda}^{M\lambda} \frac{(V(\mu+\lambda)-V(\lambda))\lambda^{-2\alpha}\mu}{[1+\lambda^{-2\alpha}\mu^2]^2}d\mu=O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}).$$

Puis

$$\frac{V((1+M)\lambda)-V(\lambda)}{[1+(M\lambda^{1-\alpha})^2]}+\frac{V(\lambda)}{[1+\lambda^{2(1-\alpha)}]}=O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{2(1-\alpha)}}).$$

Donc d'après (23),

$$\int_0^{(1+M)\lambda} \frac{dV(w)}{[1+\lambda^{-2\alpha}(\lambda-w)^2]}=O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{(1-\alpha)}}).$$

Q.E.D.

On continue la démonstration du théorème (8.8). Comme $\rho * \chi - \chi$ est à décroissance rapide et comme $\mathcal{C} \geq 1$, d'après la proposition précédente, on a

$$\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} (\rho * \chi - \chi)\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta) - \lambda)\big) d\beta_\Omega(\eta) = O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}).$$

Puis on a

$$\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \chi\big(a_1(\eta) - \lambda\big) d\beta_\Omega(\eta) = V(\lambda),$$

donc

$$\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta) - \lambda)\big) d\beta_\Omega(\eta) = V(\lambda) + O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}). \tag{24}$$

Puis

$$|\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta) - \lambda)\big) b(\eta) d\beta_\Omega(\eta)| \leq \int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} |b(\eta)| d\beta_\Omega(\eta),$$

où b est défini en (21). Comme b est classique d'ordre -1, on a :

$$\begin{aligned} |\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta) - \lambda)\big) b(\eta) d\beta_\Omega(\eta)| &\leq \int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \frac{K}{||\eta||} d\beta_\Omega(\eta) \\ &\leq \int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \frac{K}{\frac{a_1(\eta)}{C_1}} d\beta_\Omega(\eta) \\ &\leq \int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \frac{KC_1}{a_1(\eta)} d\beta_\Omega(\eta). \end{aligned}$$

D'où :

$$|\int_{\Omega \cap \{a_1(\eta) \leq \mathcal{C}\lambda\}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta) - \lambda)\big) b(\eta) d\beta_\Omega(\eta)| \;\; \leq \;\; \int_{w \leq \mathcal{C}\lambda} \frac{K'}{w} dV(w).$$

Comme $\mathfrak{g}$ est $ad-$algébrique et a_1^m est polynomial elliptique sur $\mathfrak{g}^*$, alors d'après [4], $w \mapsto V(w)$ admet un développement asymptotique quand $w \to +\infty$. Plus précisément, il existe une paire $(\mathcal{P}, s)$, où $\mathcal{P}$ est une partie fermée, discrète, et majorée de $\mathbb{R}$ et s un entier positif et une application γ de $\mathcal{P} \times \{0, \cdots, s-1\}$ dans $\mathbb{C}$ telle que pour tout entier positif m, il existe

$$b_m(w) = \sum_{j=0}^{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \overline{\mathcal{P}_m}} \gamma(\mathfrak{p}, j) w^{\mathfrak{p}} (ln\ w)^j,$$

et

$$lim_{w \to +\infty} w^m [V(w) - b_m(w)] = 0,$$

où $\overline{\mathcal{P}_m}$ est l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ qui ne sont pas inférieurs à $-m$.

$$\int_{w \leq \mathcal{C}\lambda} \frac{dV(w)}{w} = [\frac{V(w)}{w}]_c^{\mathcal{C}\lambda} + \int_c^{\mathcal{C}\lambda} \frac{V(w)}{w^2}, \tag{25}$$

où c est le plus grand réel positif tel que $V(c) = 0$. Ω est fermée et ne contient pas 0, donc $c > 0$.

On choisit $m = 1$ et on a alors

$$\int_{w \leq \mathcal{C}\lambda} \frac{dV(w)}{w} \leq \frac{V(\mathcal{C}\lambda)}{\mathcal{C}\lambda} + \Big|\int_c^{\mathcal{C}\lambda} \big(\sum_{j=0}^{s} \sum_{\mathfrak{p} \in \overline{\mathcal{P}_2}} \gamma(\mathfrak{p}, j) w^{\mathfrak{p}-2} (ln\ w)^j\big) dw\Big| + C_2 \int_c^{\mathcal{C}\lambda} \frac{dw}{w^3}. \tag{26}$$

Par intégration par parties successives, on obtient si $\mathfrak{p} \neq 1$:

$$\int_c^{\mathcal{C}\lambda} w^{\mathfrak{p}-2}(ln\ w)^j dw = [\frac{w^{\mathfrak{p}-1}}{\mathfrak{p}-1}(ln\ w)^j]_c^{\mathcal{C}\lambda} + \sum_{k=1}^{j}[\frac{w^{\mathfrak{p}-1}}{(\mathfrak{p}-1)^{k+1}}(ln\ w)^{j-k}\Pi_{i=0}^{k-1}(j-i)]_c^{\mathcal{C}\lambda}. \quad (27)$$

et si $\mathfrak{p} = 1$,

$$\int_c^{\mathcal{C}\lambda} w^{\mathfrak{p}-2}(ln\ w)^j dw = [\frac{1}{j+1}(ln\ w)^{j+1}]_c^{\mathcal{C}\lambda}. \quad (28)$$

On a aussi :

$$|V(\lambda) - \big(\sum_{j=0}^{s}\sum_{\mathfrak{p}\in\overline{\mathcal{P}_1}} \gamma(\mathfrak{p}, j)\lambda^{\mathfrak{p}}(ln\ \lambda)^j\big)| \leq \frac{C_3}{\lambda}. \quad (29)$$

On notera $\mathfrak{p}_{max}$ le plus grand $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}_1$. D'après les calculs précédents (27), et (28), et compte tenu des inégalités (29) et (26), on a donc :

$$\int_c^{\mathcal{C}\lambda} \frac{dV(w)}{w} \leq C^{te} + O(\frac{V(\lambda)}{\lambda}),$$

si $\mathfrak{p}_{max} > 1$ ou $0 \leq \mathfrak{p}_{max} < 1$,

$$\int_c^{\mathcal{C}\lambda} \frac{dV(w)}{w} \leq C^{te} + O(V(\lambda)\frac{ln\ \lambda}{\lambda}), \quad (30)$$

si $\mathfrak{p}_{max} = 1$. On va supposer qu'il existe $C_4 > 0$ telle que

$$V(\lambda) \geq C_4\lambda^{\frac{1}{2}}, \quad (31)$$

on a donc $\mathfrak{p}_{max} \geq \frac{1}{2}$ et :

$$\int_c^{\mathcal{C}\lambda} \frac{dV(w)}{w} = O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}). \quad (32)$$

Maintenant, il reste à étudier la contribution, après intégration sur l'orbite, des termes qui sont au delà de l'ordre 0 en λ dans le développement asymptotique de $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)$ (20).

Lemme 8.11. *Les termes qui sont au-delà de l'ordre* 0 *en* λ *dans le développement asymptotique de* $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)$ *(20) sont des sommes finies de termes de la forme :*

$$\rho^{(k)}\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)c_k(t,\lambda,\eta),$$

où $k \geq 0$. *De plus chaque terme* $c_k(t,\lambda,\eta)$ *a une estimation de la forme* $O(\lambda^{(1-2\alpha)})$.

Démonstration. On rappelle que l'amplitude de $\sigma_{\lambda,\alpha}$ s'écrit :

$$h(t,\mu,\lambda,w,\eta) = \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(\lambda\mu + w - tG(t,\eta) - \lambda)\big)\hat{\rho}(t)Q(t,\eta).$$

On calcule alors $\partial_t\partial_\mu h(t,\mu,\lambda,w,\eta)$, et on obtient :

$$-\lambda^{1-\alpha}\rho\big(\lambda^{-\alpha}(\lambda\mu + w - tG(t,\eta) - \lambda\big)\partial_t(\hat{\rho}(t)Q(t,\eta)) +$$
$$\lambda^{1-2\alpha}\rho^{(1)}\big(\lambda^{-\alpha}(\lambda\mu + w - tG(t,\eta) - \lambda)\big)\partial_t(tG(t,\eta))\hat{\rho}(t)Q(t,\eta),$$

ce qui donne en $t = \mu = 0$ un terme dans le développement asymptotique de la forme :

$$-\rho\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)\lambda^{-\alpha}\partial_t(\hat{\rho}(t)Q(t,\eta))(0) + \rho^{(1)}\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)\lambda^{-2\alpha}\partial_t(tG(t,\eta))(0)Q(0,\eta).$$

Comme $\partial_t(\hat{\rho}(t)Q(t,\eta))(0)$ (resp. $\partial_t(tG(t,\eta))(0)Q(0,\eta)$) sont positivement homogènes de degré 0 (resp. de degré 1) en η, les deux termes sont bien de la forme précédente. Puis en considérant $\lambda^{-l}\partial_t^l\partial_\mu^l h(t,\mu,\lambda,w,\eta)$, on fait apparaitre des termes dont la valeur en $t = \mu =$

0 sera bien de la forme $\rho^{(k)}\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)c_k(t,\lambda,\eta)$, avec $k \geq 0$ et c_k qui a une estimation de la forme $O(\lambda^{(1-2\alpha)})$.

Q.E.D.

On continue la démonstration du théorème (8.8).
Si on intégre sur le bout d'orbite un terme de la forme

$$\rho^{(k)}\big(\lambda^{-\alpha}(w-\lambda)\big)c_k(t,\lambda,\eta),$$

on obtient alors une estimation de la forme

$$O\Big(\lambda^{1-2\alpha}\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\leq\mathcal{C}\lambda\}}|\rho^{(k)}|\big(\lambda^{-\alpha}(a_1(\eta)-\lambda)\big)d\beta(\eta)\Big).$$

La somme de ces termes donne donc, sur la partie de l'orbite considérée, une contribution de la forme

$$O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{\alpha}}), \tag{33}$$

et le reste de la forme $O(\lambda^{(m+1)(1-2\alpha)})$, avec $(m+1)(1-2\alpha) \leq -(1-\alpha)$ donne quant à lui une contribution de la forme

$$O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}) \tag{34}$$

On a donc, compte tenu de (24), (30),(32),(33), et (34) :

$$\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\leq\mathcal{C}\lambda\}}\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = V(\lambda) + O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}}). \tag{35}$$

On va maintenant regarder le cas $a_1(\eta) = w \geq \mathcal{C}\lambda$. On rappelle la définition de $\sigma_{\lambda,\alpha}$

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)\tilde{q}(t,x,\xi)e^{i\psi(t,x,\mu,\xi,\eta)}dxd\xi dtd\mu,$$

pour tout $\eta \in \mathfrak{g}^*$. D'abord effectuons les changements de variable $\xi \mapsto w\xi$ et $\mu \mapsto w\mu$ et posons $\eta = w\tilde{\eta}$, ce qui donne :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = \frac{w^{n+1}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)\tilde{q}(t,x,w\xi)e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\tilde{\eta})}dxd\xi dtd\mu.$$

Le point critique de de la phase de cette intégrale oscillante est alors $\left\{\begin{array}{l} t=0\\ x=0\\ \mu=1\\ \xi=\tilde{\eta}\end{array}\right.$.

Je vais découper l'intégrale oscillante en deux parties, une au voisinage du point critique, une non-stationnaire. Mais d'abord prenons quelques précautions quant au choix du ε de la fonction de troncature $\hat{\rho}$. On va choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$|a_1(\xi_t(\tilde{\eta}))-1| \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, pour tout $\tilde{\eta} \in S_{a_1}$ et avec $S_{a_1} = \{\eta \in \mathfrak{g}^* |\, a_1(\eta) = 1\}$. Ceci est possible par continuité de $(t,\eta) \mapsto a_1(\xi_t(\eta))$, par compacité de S_{a_1}, et parce que $\xi_0(\tilde{\eta}) = \tilde{\eta} \in S_{a_1}$.
Maintenant je vais choisir des fonctions de troncature au voisinage du point critique permettant d'avoir des majorations intéressantes de l'intégrale au voisinage du point critique

d'une part et loin du point critique d'autre part. D'abord je vais prendre χ_0 une fonction de troncature tel que

$$\begin{cases} \chi_0(\mu) = 1 \ si \ |\mu| \leq \frac{3}{4} \\ \\ \chi_0(\mu) = 0 \ si \ |\mu| \geq \frac{5}{6} \end{cases}.$$

Ensuite l'ensemble $\{x_t(\tilde{\eta}) | t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ et \ \tilde{\eta} \in S_{a_1}\}$ est inclus dans l'intérieur d'un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}$. Je vais alors choisir une fonction de troncature χ_1 égale à 1 sur ce voisinage compact, à 0 en dehors d'un voisinage compact dont l'intérieur contient le précédent.
Enfin on fait de même avec l'ensemble $\{\xi_t(\tilde{\eta}) - \tilde{\eta} | t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \ et \ \tilde{\eta} \in S_{a_1}\}$ inclus dans l'intérieur d'un voisinage compact de 0 dans $\mathfrak{g}^*$, on choisit une fonction de troncature χ_2 égale à 1 sur ce voisinage compact, à 0 en dehors d'un voisinage compact dont l'intérieur contient le précédent.
On découpe alors l'intégrale oscillante de la façon suivante :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta) = \sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_c + \sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s},$$

avec

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_c = \frac{w^{n+1}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu - \lambda)\big)\hat{\rho}(t)\chi_0(\mu - 1)\chi_1(x)\chi_2(\xi - \tilde{\eta})\tilde{q}(t, x, w\xi)$$
$$e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\eta)} dx d\xi dt d\mu,$$

et

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s} = \frac{w^{n+1}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu - \lambda)\big)\hat{\rho}(t)\big(1 - \chi_0(\mu - 1)\chi_1(x)\chi_2(\xi - \tilde{\eta})\big)$$
$$\tilde{q}(t, x, w\xi) e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\eta)} dx d\xi dt d\mu,$$

$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_c$ étant le terme critique et $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s}$ le terme non-stationnaire. On va s'intéresser au terme critique pour commencer, en majorant la fonction $\mu \mapsto \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu - \lambda)\big)\chi_0(\mu - 1)$.
Sur le support de $\mu \mapsto \chi_0(\mu - 1)$, on a $\mu \geq \frac{1}{6}$, donc $w\mu - \lambda \geq \frac{w}{12}$, car $w \geq \mathcal{C}\lambda$, et $\mathcal{C} \geq 12$.
Comme l'orbite est tempérée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\int_\Omega \frac{d\beta_\Omega(\eta)}{(1+||\eta||)^N} < +\infty$. Donc comme $\rho * \chi$ est à décroissance rapide en $+\infty$, on a

$$\rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu - \lambda)\big)\chi_0(\mu - 1) \leq C_\alpha (\frac{\lambda^\alpha}{w})^{n_\alpha},$$

avec $n_\alpha = [\frac{n+N+2}{1-\alpha}] + 1$. On a donc une majoration de la forme :

$$|\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_c| \leq K_\alpha \frac{\lambda^{n_\alpha \alpha}}{w^{n_\alpha - (n+1)}},$$

mais

$$\frac{\lambda^{n_\alpha\alpha}}{w^{n_\alpha-(n+1)}} \leq \frac{\lambda^{n_\alpha\alpha+1}}{\lambda w^{n_\alpha-(n+1)}} \leq \frac{w^{n_\alpha\alpha+1}}{\mathcal{C}^{n_\alpha\alpha+1}\lambda w^{n_\alpha-(n+1)}} \leq \frac{1}{\mathcal{C}^{n_\alpha\alpha+1}\lambda w^{(1-\alpha)n_\alpha-(n+2)}},$$

et comme $n_\alpha \geq \frac{n+N+2}{1-\alpha}$, alors

$$\frac{1}{\mathcal{C}^{n_\alpha\alpha+1}\lambda w^{(1-\alpha)n_\alpha-(n+2)}} \leq \frac{1}{\mathcal{C}^{n_\alpha\alpha+1}\lambda w^{n+N+2-(n+2)}},$$

ce qui donne :

$$|\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_c| \leq K'_\alpha \frac{w^{-N}}{\lambda}.$$

Maintenant on va majorer le terme non-stationnaire $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s}$. Pour cela on va utiliser l'opérateur :

$${}^tL = -i\frac{(a_1(\xi)-\mu)\partial_t + (d_x\varphi(x,\xi)-\tilde{\eta})\cdot\partial_x + ||\xi||^2(d_\xi\varphi(x,\xi)+tda_1(\xi))\cdot\partial_\xi}{(\mu-a_1(\xi))^2 + ||d_x\varphi(x,\xi)-\tilde{\eta}||^2 + ||\xi||^2||d_\xi\varphi(x,\xi)+tda_1(\xi)||^2}.$$

On doit vérifier que cet opérateur est bien défini sur le support de

$$\hat{\rho}(t)\big(1-\chi_0(\mu-1)\chi_1(x)\chi_2(\xi-\tilde{\eta})\big),$$

pour cela il suffit de déterminer quand le dénominateur s'annule et s'il le fait sur le support de cette fonction. On a directement que le dénominateur s'annule si : $t\in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $\mu = a_1(\xi_t(\tilde{\eta}))$, $x = x_t(\tilde{\eta})$, et $\xi = \xi_t(\tilde{\eta})$. Et donc la manière dont on a choisi χ_0, χ_1 et χ_2 fait que le dénominateur ne s'annule pas sur le support de $\hat{\rho}(t)\big(1-\chi_0(\mu-1)\chi_1(x)\chi_2(\xi-\tilde{\eta})\big)$. On a

$${}^tL(e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\tilde{\eta})}) = we^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\tilde{\eta})}.$$

Cette égalité s'inspire du lemme 1.1 de [26], on la démontre de la même façon que dans cette référence. Donc si on applique ce résultat a l'intégrale oscillante $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s}$, on a :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s} = \frac{w^{-(N+1)}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)\big(1-\chi_0(\mu-1)\chi_1(x)\chi_2(\xi-\tilde{\eta})\big)\tilde{q}(t,x,w\xi)$$
$$({}^tL)^{n+2+N}(e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\tilde{\eta})})dxd\xi dtd\mu.$$

En utilisant la transposée formelle L de l'opérateur ${}^tL$, on alors :

$$\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s} = \frac{w^{-(N+1)}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\iint_{\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}^*}L^{n+2+N}(\hat{\rho}(t)\big(1-\chi_0(\mu-1)\chi_1(x)\chi_2(\xi-\tilde{\eta})\big)\tilde{q}(t,x,w\xi))$$
$$\rho*\chi\big(\lambda^{-\alpha}(w\mu-\lambda)\big)e^{iw\psi(t,x,\mu,\xi,\tilde{\eta})}dxd\xi dtd\mu.$$

Cette dernière intégrale étant absolument convergente, on a la majoration :

$$|\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)_{n.s}| \leq K'\frac{w^{-N}}{\lambda}.$$

Donc si $a_1(\eta)\geq \mathcal{C}\lambda$, on a $|\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)| \leq C_\alpha\frac{a_1(\eta)^{-N}}{\lambda}$. Comme a_1 est elliptique, il existe C_1 tel que $a_1(\eta)\geq C_1||\eta||$, pour tout $\eta\in\mathfrak{g}^*$. Donc

$$|\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)| \leq C'_\alpha\frac{||\eta||^{-N}}{\lambda}.$$

Comme $\int_\Omega \frac{d\beta_\Omega(\eta)}{||\eta||^N} < +\infty$,

$$|\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\geq\mathcal{C}\lambda\}}\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)d\beta_\Omega(\eta)| \leq \frac{C'_\alpha}{\lambda}\int_\Omega\frac{d\beta_\Omega(\eta)}{||\eta||^N} \leq C_\alpha\lambda^{-1},$$

donc on a :

$$|\int_{\Omega\cap\{a_1(\eta)\geq\mathcal{C}\lambda\}}\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)d\beta_\Omega(\eta)| \leq \frac{V(\lambda)}{\lambda}, \tag{36}$$

pour λ suffisament grand. On a donc en intégrant $\sigma_{\lambda,\alpha}(\eta)$ sur toute l'orbite grâce à (35) et à (36) , une estimation de la forme :

$$\tilde{N_\alpha}(\lambda) = V(\lambda)\big(1 + O(\frac{1}{\lambda^{1-\alpha}})\big).$$

Q.E.D.

Remarque 8.12. *On ne considère que les cas où* dim $\mathfrak{g} \geq 3$, *car en dimension* 1 *toutes les représentations irréductibles unitaires sont de dimension* 1, *et en dimension* 2 *le seul cas non trivial est le groupe affine* $ax + b$. *Dans ce cas, les deux représentations unitaires irréductibles de dimension infinie sont liées à des orbites coadjointes qui ne sont pas fermées, et donc exclues des hypothèses de départ.*

8.3. **Formule de Weyl.**

Corollaire 8.13. *Si on suppose que* $\frac{1}{V(\lambda)} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}})$, *que* N *vérifie l'hypothèse* (N), *que* $\mathfrak{g}$ *est ad-algébrique, et que* a *est tel qu'il existe* p *un polynôme de degré* m *elliptique tel que* $a^{\#m} - p \in \mathcal{S}(\mathfrak{g}^*)$, *alors*

$$N(\lambda) = V(\lambda)\big(1 + O(\frac{1}{\lambda^{1-\alpha}})\big).$$

Démonstration. On a déjà donné une formule asymptotique pour $\tilde{N_\alpha}(\lambda)$ dans le paragraphe précédent, et on a aussi donné la formule asymptotique pour

$$N(\lambda) - N_\alpha(\lambda) = O(\frac{N(\lambda)}{\lambda^{1-\alpha}})$$

quand $N(\lambda)$ vérifie l'hypothèse (N). Il reste donc à trouver une formule asymptotique pour

$$R_\alpha(\lambda) = N_\alpha(\lambda) - \tilde{N_\alpha}(\lambda)$$

pour avoir la formule asymptotique de $N(\lambda)$.On a

$$R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}} \hat{\chi}(t)\hat{\rho}(t\lambda^\alpha)\hat{\rho}(t)e^{-i\lambda t}\pi(R_{-t})dt.$$

On peut écrire ceci sous la forme :

$$R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} Tr \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu - \lambda))\hat{\rho}(t)e^{-i\mu t}\pi(R_{-t})dtd\mu.$$

L'opérateur $\pi(R_{-t})$ est régularisant, donc à trace puisque la représentation π est fortement traçable. La trace de $B_\mu := \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t)e^{-i\mu t}\pi(R_{-t})dt$ est donnée par :

$$TrB_\mu = \sum_{i\geq 1} \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t)e^{-i\mu t} < \pi(R_{-t})e_i, e_i > dt,$$

où (e_i) est une base d'un sous-espace dense de $\mathcal{H}_\pi$.
Les fonctions $t \mapsto \hat{\rho}(t)e^{-i\mu t} < \pi(R_{-t})e_i, e_i >$ sont lisses à support contenu dans un compact indépendant de i et de μ, donc l'expression ci-dessus est absolument convergente en tant qu'intégrale double (par rapport à la mesure produit de la mesure de Lebesgue dt par la mesure de comptage), et $\mu \mapsto Tr|B_\mu|$ est à décroissance rapide en μ. On peut donc intervertir la somme et l'intégration, ce qui donne :

$$TrB_\mu = \int_{\mathbb{R}} \hat{\rho}(t)e^{-i\mu t} Tr\ \pi(R_{-t})dt.$$

Considérons maintenant l'opérateur :

$$A_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big)B_\mu d\mu.$$

Sa trace est donnée par :

$$TrA_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i\geq 1}\int_{\mathbb{R}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big) < B_\mu(e_i), e_i > d\mu.$$

Cette expression est là encore absolument convergente comme intégrale double, d'où finalement :

$$\begin{array}{rcl} R_\alpha(\lambda) & = & TrA_\alpha(\lambda) \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big)TrB_\mu d\mu \\ & = & \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \rho * \chi\big(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda)\big)\hat{\rho}(t)e^{-i\mu t}Tr\ \pi(R_{-t})dtd\mu. \end{array}$$

On a alors

$$R_\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rho * \chi(\lambda^{-\alpha}(\mu-\lambda))\hat{\rho}(t)e^{-i\mu t}Tr\ \pi(R_{-t})dtd\mu.$$

Par construction $t \mapsto Tr\ \pi(R_{-t})$ est de classe C^∞, on a donc

$$t \mapsto \hat{\rho}(t)Tr\ \pi(R_{-t})$$

qui est C^∞ à support compact. On fait le changement de variable $\mu \mapsto \lambda\mu$, on obtient

$$R_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathbb{R}\mathbb{R}} \rho * \chi(\lambda^{1-\alpha}(\mu-1))\hat{\rho}(t)e^{-i\lambda\mu t}Tr\ \pi(R_{-t})dtd\mu.$$

Et on applique la méthode de la phase stationnaire, on peut car $\alpha > \frac{1}{2}$ (voir [9] page 17), ce qui donne :

$$R_\alpha(\lambda) = \rho * \chi(-\lambda^{1-\alpha})Tr\ \pi(R_0) + O(\lambda^{-\alpha}).$$

Donc

$$R_\alpha(\lambda) = O(1),$$

et donc

$$R_\alpha(\lambda) = O(\frac{V(\lambda)}{\lambda^{\frac{1}{2}}}).$$

Donc on a bien l'estimation asymptotique cherchée pour $N(\lambda)$.

Q.E.D.

Corollaire 8.14. *Soit $\mathfrak{a}$ tel que $a = \sigma^{-1}(\mathfrak{a})$ soit un polynôme elliptique de degré m sur $\mathfrak{g}^*$. Soit a_m la partie homogène de degré m de a.*
On suppose que $\mathfrak{g}$ est ad$-$algébrique, que $\lambda \mapsto N(\lambda^m)$ vérifie l'hypothèse (N), et on suppose :

$$\frac{1}{V(\lambda^m)} = O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{2}}}).$$

Alors

$$N(\lambda) = V(\lambda)\big(1 + O(\frac{1}{\lambda^{\frac{1-\alpha}{m}}})\big),$$

pour tout $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Démonstration. On va appliquer le corollaire précédent à $\pi(\mathfrak{a})^{\frac{1}{m}} = \pi(\mathfrak{a}^{\#\frac{1}{m}})$. On notera N_1 la fonction de comptage des valeurs propres de $\pi(\mathfrak{a})^{\frac{1}{m}}$ et V_1 le volume spectral associé à $\pi(\mathfrak{a})^{\frac{1}{m}}$. On a les relations :

$$N_1(\lambda) = N(\lambda^m),$$

et

$$V_1(\lambda) = V(\lambda^m).$$

La puissance m-ième du symbole de $\mathfrak{a}^{\#\frac{1}{m}}$ est le polynome a, $\lambda \mapsto N_1(\lambda)$ vérifie l'hypothèse (N), et $V_1(\lambda) \geq C\lambda^{\frac{1}{2}}$, donc on peut appliquer le corollaire précédent. On a alors

$$N_1(\lambda) = V_1(\lambda)\big(1 + O(\lambda^{-1+\alpha})\big).$$

Donc

$$N(\lambda^m) = V(\lambda^m)\big(1 + O(\lambda^{-1+\alpha})\big),$$

et on a finalement :

$$N(\lambda) = V(\lambda)\big(1 + O(\lambda^{\frac{-1+\alpha}{m}})\big).$$

Q.E.D.

Références

[1] P. Bernat, N. Conze, M. Duflo, and al. *Représentations des groupes de* Lie *résolubles.* Dunod, 1972.

[2] J-Y. Charbonnel. Orbites fermées et orbites tempérées. *Ann. Sci. Ec Norm. Sup.*, 23 :123–149, 1990.

[3] J-Y. Charbonnel. Transformation de Mellin et développements asymptotiques. *Bull. Sci. math.*, 118 :47–78, 1994.

[4] J-Y. Charbonnel. Mesures orbitales tempérées et développements asymptotiques. *Bull. Sci. math*, 119 :339–380, 1995.

[5] J-Y. Charbonnel. Orbites fermées et orbites tempérées, ii. *J.Funct. Anal*, 138 :213–222, 1996.

[6] J. Dixmier. *Algèbres enveloppantes.* Gauthier-Villars, 1974.

[7] M. Duflo. Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie. *Cours d'été du C.I.M.E*, 4 :129–221, 1980.

[8] J-J. Duistermaat and L. Hörmander. Fourier integral operators II. *Acta.Math.*, 128 :184–269, 1972.

[9] J.J. Duistermaat. *Fourier Integral Operators.* Courant Institute Lectures Notes, 1971.

[10] R. Godement. *Introduction à la théorie des groupes de Lie*, volume II. Université Paris VII, 1979.

[11] B. Helffer. *Théorie Spectrale pour des opérateurs globalement elliptiques.* SMF, 1984.

[12] L. Hörmander. The spectral function of an elliptic operator. *Acta.Math.*, 121 :193–218, 1968.

[13] L. Hörmander. Fourier integral operators I. *Acta.Math.*, 127 :79–183, 1971.

[14] R. Howe. *Wave front sets of representations of Lie groups*, volume 10. Tata Inst. Fund. Res. Studies In Math., 1981.

[15] M.S. Khalgui. Sur les caractères des groupes de Lie résolubles. *Publ. Math. Univ. Paris VII*, 2, 1978.

[16] M.S. Khalgui. Caractères des groupes de Lie. *J. Funct. Anal.*, 47 :64–77, 1982.

[17] A.A. Kirillov. *Elements of the Theory of Representations.* Springer-Verlag.

[18] G. Lion and Vergne.M. *The Weil representation, Maslov index and Theta series*, volume 6. Birkhauser, 1980.

[19] D. Manchon. Opérateurs pseudodifférentiels et représentations unitaires des groupes de Lie. *Bull. Soc math. France*, 123 :117–138, 1995.

[20] D. Manchon. Distributions à support compact et représentations unitaires. *Journal of Lie Theory*, 9 :403–424, 1999.

[21] D. Manchon. Front d'onde et propagation des singularités pour un vecteur-distribution. *Colloquium Mathematicum*, 81 :161–191, 1999.

[22] B. Nielsen and H. Stetkaer. Invariant fourier integral operators on Lie groups. *Math.Scand.*, 35 :193–210, 1974.

[23] N. Nilsson. Asymptotic estimates for spectral functions connected with hypoelliptic differential operators. *Ark. Math.*, 5(35) :527–540, 1965.

[24] L. Pukanszky. Unitary representations of solvable Lie groups. *Ann.Ec.Norm. Sup*, 4 :457–608, 1971.

[25] W. Rossmann. Kirillov's character formula for reductive Lie groups. *Invent.Math.*, 48 :207–220, 1978.

[26] M.A. Shubin. *Pseudo-Differential Operators and Spectral Theory*. Springer-Verlag, 1987.

[27] C. Sogge. *Fourier Integral in Classical Analysis*. Cambridge University Press, 1993.

[28] F. Treves. *Fourier-Integral Operators*, volume 2 of *Introduction to Pseudodifférential and Fourier-Integrals Operators*. Plenum publishing corporation, 1993.