



HAL
open science

Commande de drone miniature à voilure tournante

S. Bertrand

► **To cite this version:**

S. Bertrand. Commande de drone miniature à voilure tournante. Automatique / Robotique. Université Nice Sophia Antipolis, 2007. Français. NNT: . tel-00702441

HAL Id: tel-00702441

<https://theses.hal.science/tel-00702441>

Submitted on 30 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

**L'OFFICE NATIONAL D'ETUDES ET RECHERCHES
AEROSPATIALES**

par

Sylvain BERTRAND

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE NICE
SOPHIA ANTIPOLIS**

Spécialité : Automatique

COMMANDE DE DRONE MINIATURE A VOILURE TOURNANTE

Soutenue le 5 novembre 2007 devant le Jury composé de

Françoise LAMNABHI-LAGARRIGUE

Tarek HAMEL

Hélène PIET-LAHANIER

Caroline BERARD

Houria SIGUERDIDJANE

Philippe SOUERES

Présidente

Directeur de thèse

Co-Directrice de Thèse

Rapporteur

Rapporteur

Rapporteur

SYLVAIN BERTRAND

ONERA, DPRS-SAGP,
29 Av de la Division Leclerc, BP 72,
92322 Chatillon Cedex, France,

I3S, UNSA-CNRS,
2000, rte des Lucioles - Les Algorithmes - Bât. Euclide B, BP 121,
06903 Sophia Antipolis Cedex, France.

E-mail : sylvain.bertrand@onera.fr

Mots clefs :

Drones miniatures à voilure tournante, commande hiérarchique, guidage-pilotage, commande prédictive non linéaire, commande adaptative, commande avec accès partiel à l'état, perturbations singulières.

A mon père,

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Françoise Lamnabhi-Lagarrigue de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse,

Ma reconnaissance va également à Caroline Bérard, Houria Siguerdidjane et Philippe Souères pour avoir accepté d'être rapporteurs de mon manuscrit de thèse,

Je remercie Tarek Hamel, mon directeur de thèse, pour son expérience de la recherche qu'il a su me faire partager, pour l'ensemble des connaissances que j'ai pu acquérir ainsi que pour sa patience et sa pédagogie,

Je tiens à témoigner ma gratitude à Hélène Piet-Lahanier, mon encadrante à l'ONERA, pour son expérience scientifique qu'elle m'a transmise, pour l'ensemble des connaissances que j'ai acquises grâce à elle, pour ses conseils, ainsi que pour son soutien dans les moments difficiles,

Je remercie Claude Le Tallec, mon encadrant à l'ONERA, qui a été à l'origine de cette thèse, pour l'ensemble des connaissances que j'ai pu acquérir sur les drones miniatures ainsi que pour sa confiance et sa grande disponibilité,

Je remercie Arnaud Lancien pour ces trois bonnes années au quotidien et son soutien dans les moments difficiles,

Je tiens à saluer l'ensemble des personnes du Département Prospective et Synthèse de l'ONERA et les remercier pour leur accueil chaleureux et leur sympathie,

Je remercie mes parents, ma soeur et ma famille ainsi que mes amis qui m'ont soutenu pendant mes travaux de thèse, dont Cédric, Bérénice, Vincent, François (que je remercie de plus tout particulièrement pour son accueil sur la Côte d'Azur), Jérôme(s), Rémy, Jérémy, Mikael, Nicolas, Mai, et bien sûr tous les autres.

COMMANDE DE DRONE MINIATURE A VOILURE TOURNANTE

PRESENTATION

Ce document présente les travaux réalisés dans le cadre de ma thèse et qui concernent la commande de drone miniature à voilure tournante. L'objectif de ces travaux est de proposer et d'étudier des méthodes de commande pour le guidage-pilotage de ce type de véhicule, pouvant permettre une automatisation de leur vol en présence de perturbations aérologiques ou lorsque l'état du système n'est pas entièrement mesuré. Une attention particulière sera portée à l'analyse de la stabilité des approches proposées, lorsque celle-ci est possible.

De nombreuses approches de commande prédictive pour des drones miniatures peuvent être recensées dans la littérature. Cependant, l'utilisation d'un modèle réellement représentatif de la dynamique d'un véhicule à voilure tournante, et l'analyse de la stabilité du système bouclé par un contrôleur prédictif synthétisé à partir de ce modèle, n'ont, à notre connaissance, pas été abordées simultanément. A ce titre, nous proposons et étudions ici plusieurs algorithmes de commande prédictive (commande prédictive adaptative, commande prédictive contractante) permettant la synthèse de lois de guidage-pilotage pour un modèle non linéaire à six degrés de liberté, et garantissant la stabilité du système bouclé.

Nous nous intéressons également à la synthèse de lois de commande dans le cas où seuls les positions et les angles d'attitude du véhicule sont mesurés. Pour ce cas, correspondant à certaines utilisations pratiques ou expérimentales d'un drone miniature, des techniques de commande avec accès partiel à l'état ou utilisant des observateurs peuvent être appliquées. Afin de réaliser un compromis entre ces deux classes d'approches, compromis permettant de bonnes performances du système bouclé et une réduction de la complexité de la méthode utilisée (temps de calcul, analyse de la stabilité), nous proposons ici une méthode de synthèse par fonction de Lyapunov basée sur l'introduction d'états virtuels au sein de la dynamique du système.

Notre contribution réside également en l'analyse de la stabilité d'une approche de commande hiérarchique par la théorie des perturbations singulières.

Ce document est composé de trois parties. La première consiste en une introduction au problème de commande d'un drone miniature à voilure tournante, ainsi qu'à l'analyse d'une stratégie de commande particulière : la commande hiérarchique. Les parties suivantes s'articulent autour des deux classes d'approches précédemment évoquées pour la synthèse de lois de commande : la commande prédictive, puis la synthèse de lois de commande non linéaires via une analyse par fonctions de Lyapunov dans le cas où les vitesses du véhicule ne sont pas mesurées.

Table des matières

I Introduction à la commande des drones miniatures à voilure tournante	7
Contenu de la Partie I	9
1 Les drones miniatures à voilure tournante	11
1.1 Des premiers drones aux drones miniatures	12
1.2 De nombreuses applications	13
1.3 Différentes configurations de véhicules	14
1.3.1 Hélicoptère classique	14
1.3.2 Double rotor contrarotatif	14
1.3.3 Rotor à pas fixe caréné et volets	15
1.3.4 Quadrirotor	15
1.3.5 Convertibles	16
1.3.6 Autres configurations	17
1.4 Autonomie et automatisation	17
2 Commande des drones miniatures	19
2.1 Système de décision et de commande	20
2.1.1 Navigation, Guidage, Pilotage	20
2.1.2 Commande des drones miniatures : les premiers travaux	20
2.2 Modélisation	22
2.2.1 Différents niveaux de modélisation	22
2.2.2 Description du mouvement du drone	22
2.2.3 Bilan des forces et moments appliqués	25
2.2.4 Modèle dynamique	26
2.2.5 Spécification du modèle à un véhicule donné	29
2.3 Etat de l'art	30
2.3.1 Retours d'états linéaires	31
2.3.2 Commande par extension dynamique	31
2.3.3 Commande hiérarchique	32
2.3.4 Incertitudes de modèle et perturbations	33
2.3.5 Autres méthodes pour la synthèse de lois de commande	34
2.4 Perturbations singulières	34
2.4.1 Perturbations singulières	34
2.4.2 Analyse de la stabilité	35
2.5 Stratégie de commande pour la stabilisation	38
2.5.1 Guidage : commande en position	39

2.5.2	Pilotage : commande en attitude	39
2.5.3	Commande en cascade	39
2.5.4	Particularité des véhicules possédant des plans de symétrie	40
2.5.5	Analyse de la séparation des échelles de temps	40
2.5.6	Modèles pour la synthèse des lois de commande	43
2.6	Suivi de trajectoire	43
2.6.1	Loi de commande en position	43
2.6.2	Loi de commande en attitude	44
2.6.3	Commande en cascade	44
2.6.4	Analyse de la séparation des échelles de temps	44
2.6.5	Modèles pour la synthèse des lois de commande	47
Conclusion de la Partie I		49
II Commande prédictive		53
Contenu de la Partie II		55
3	Introduction à la commande prédictive	57
3.1	Introduction	58
3.2	Formulation générale	59
3.3	Stabilité	60
3.3.1	Stabilité et horizon infini	60
3.3.2	Stabilité et horizon fini	61
3.3.3	Critère général de stabilité en horizon fini	62
3.3.4	Autres approches en horizon fini	64
3.4	Commande prédictive et optimisation	65
3.4.1	Choix de la fonctionnelle coût	65
3.4.2	Choix de l'horizon de prédiction	66
3.4.3	Résolution du problème d'optimisation	66
3.5	Commande prédictive et drones miniatures	67
4	Commande prédictive linéaire	69
4.1	Systèmes linéaires, discrétisation	70
4.2	Commande prédictive linéaire	71
4.3	Expression des prédictions	71
4.4	Expression du coût	73
4.5	Expression des contraintes	73
4.6	Formulation QP	75
4.7	Résolution pour le cas non contraint, non perturbé	75
4.8	Formulation LQG	76
4.9	Exemple	77
4.10	Application au guidage	80
4.10.1	Discrétisation	80
4.10.2	Simulations	80
4.11	Limites de la commande prédictive linéaire	84

5	Commande prédictive non linéaire bi-composante	87
5.1	Commande prédictive non linéaire et stabilité	88
5.2	Commande prédictive et fonctions de Lyapunov	88
5.3	Approche bi-composante	89
5.3.1	Composante nominale u_n	90
5.3.2	Composante prédictive u_p	90
5.3.3	Stabilité	90
5.3.4	Exemple	91
5.3.5	Optimisation des coefficients du contrôleur nominal	92
5.4	Extension adaptative	95
5.4.1	Composante nominale adaptative u_n	95
5.4.2	Composante prédictive u_p	96
5.4.3	Stabilité	96
5.4.4	Exemple	97
5.4.5	Systèmes perturbés	99
5.5	Application au guidage-pilotage	99
5.5.1	Loi de guidage	100
5.5.2	Loi de pilotage	101
5.5.3	Contraintes sur les commandes	102
5.5.4	Stabilité	103
5.5.5	Simulations	103
5.6	Bilan et limites de l'approche	109
6	Commande prédictive contractante	111
6.1	Commande prédictive et contraintes terminales	112
6.2	Etat de l'art	113
6.3	Contrainte contractante	114
6.4	Présentation de l'algorithme	115
6.5	Facteur de contraction variable	119
6.6	Application au guidage pilotage	122
6.6.1	Loi de guidage	122
6.6.2	Loi de pilotage	124
6.6.3	Stabilité	126
6.6.4	Simulations	127
6.7	Evitement d'obstacle	128
6.7.1	Termes de pénalité dans la fonction coût	130
6.7.2	Contraintes instantanées sur l'état	131
6.8	Bilan et limites de l'approche	133
	Conclusion de la Partie II et perspectives	135
III	Commande sans mesure de vitesse	141
	Contenu de la Partie III	143

7	Introduction	145
7.1	Problématique	146
7.2	Étude de l'existant	146
8	Synthèse de lois de guidage-pilotage avec un état virtuel	149
8.1	Principe	150
8.1.1	Mise en forme du problème	150
8.1.2	Introduction d'un état virtuel	150
8.1.3	Analyse fréquentielle	151
8.1.4	Exemple	151
8.2	Commande en position	153
8.2.1	Synthèse de la commande en position	153
8.2.2	Commande en position avec saturations	155
8.2.3	Commande en position adaptative	157
8.3	Commande en attitude	158
8.3.1	Synthèse de la commande en attitude	158
8.3.2	Existence d'une borne pour $\ \Gamma\ $	161
8.4	Stabilité	161
8.5	Bilan et limites de l'approche proposée	162
9	Synthèse de lois de guidage-pilotage avec deux états virtuels	163
9.1	Principe	164
9.1.1	Introduction de deux états virtuels	164
9.1.2	Analyse fréquentielle	165
9.1.3	Exemple	165
9.2	Commande en position	166
9.2.1	Synthèse de la commande en position	166
9.2.2	Commande en position saturée	169
9.2.3	Commande en position adaptative	172
9.3	Commande en attitude	173
9.3.1	Synthèse de la commande en attitude	174
9.3.2	Commande en attitude saturée	178
9.4	Stabilité	180
9.4.1	Bouclage et stabilité sans mesure de v	180
9.4.2	Bouclage et stabilité sans mesure de v ni de Ω	182
9.5	Simulations	183
9.5.1	Stabilisation	183
9.5.2	Suivi de trajectoire	186
9.6	Bilan et limites de l'approche	188
	Conclusion de la Partie III et perspectives	189
	Conclusion générale et perspectives	191
A	Définitions, opérateurs et identités remarquables	195
A.1	Définitions	195
A.2	Groupes matriciels	196
A.3	Opérateurs utilisés	196

A.4 Identités remarquables utilisées	196
B Calcul de l'orientation désirée	199
C Calcul de Ω^d	203
D Lemme de Barbalat	205
E Analyse de la stabilité dans le cas sans mesure de v	207
E.1 Commande en position	207
E.2 Commande en attitude	209
E.3 Analyse de la stabilité	211
Bibliographie	216

Première partie

Introduction à la commande des drones miniatures à voilure tournante

Contenu de la Partie I

Cette Première Partie présente le concept de drone miniature à voilure tournante ainsi que les problématiques liées à la réalisation d'une commande permettant d'automatiser ce type de véhicule. Nous y présenterons le modèle qui sera utilisé dans la suite de cette étude, ainsi que les principales méthodes de commande existant dans la littérature. Enfin, nous nous intéressons plus particulièrement à la commande hiérarchique et présenterons le cadre théorique permettant de développer des lois de guidage-pilotage, puis d'analyser la stabilité du système bouclé par ce type d'approche.

L'organisation de cette partie est la suivante :

Le **Chapitre 1** consiste en une introduction générale sur les drones et plus particulièrement sur les drones miniatures à voilure tournante. Nous en présenterons les applications et les configurations de véhicules les plus répandues. Les notions d'autonomie et d'automatisation du véhicule y seront également abordées.

Dans le **Chapitre 2**, nous nous intéresserons à la manière dont peut être réalisé un système de décision et de commande d'un drone miniature. Nous introduirons à ce titre les notions de navigation, guidage, pilotage. Nous présenterons ensuite le modèle qui sera utilisé pour la synthèse d'algorithmes de guidage-pilotage et nous dresserons un état de l'art des diverses stratégies de commande employées dans la littérature. Nous nous intéresserons plus particulièrement à l'une d'entre elles, la commande hiérarchique, et présenterons le cadre formel permettant la synthèse de lois de commande, puis l'analyse de la stabilité du système bouclé par la théorie des perturbations singulières. Enfin, la mise en application de cette stratégie de commande sera détaillée dans le cas de la stabilisation du véhicule autour d'un point fixe, puis dans le cas du suivi d'une trajectoire de référence.

Chapitre 1

Les drones miniatures à voile tournante

1.1 Des premiers drones aux drones miniatures

L'apparition des premiers drones, véhicules volants sans pilote humain à bord, date de la fin de la seconde guerre mondiale. Tout d'abord principalement utilisés comme cibles militaires pour l'entraînement au combat (drone cible CT.41 Nord Aviation en 1957), ils furent ensuite employés pour des missions de reconnaissance dans les années 1960 (drones Firebee et Lightning Bug). Leur utilisation pour des missions de surveillance s'est ensuite répandue lors de nombreux conflits. Depuis, de nombreux drones ont été développés, et leur usage à des fins civiles a également débuté.

Selon la nature du véhicule, on distingue plusieurs classes de drones :

- les drones Haute Altitude Longue Endurance (HALE), tels que le Global Hawk (Northrop Grumman), de la taille d'un avion de ligne et volant à des altitudes pouvant atteindre 20km pour un rayon d'action de plusieurs milliers de kilomètres,
- les drones Moyenne Altitude Longue Endurance (MALE), tels que le Eagle 1 (EADS) ou le Predator (General Atomics), d'envergure de l'ordre d'une dizaine de mètre et volant à des altitudes comprises entre 5km et 12km pour un rayon d'action allant jusqu'à 1000km,
- les drones de combat (UCAV Unmanned Combat Air Vehicles), tels que le nEUROn ou le X-45 (Boeing), conçus pour des missions d'attaque,
- les drones tactiques, tels que le Sperwer (SAGEM) ou le Aerostar (Aeronautics Defense Systems), utilisés pour des missions de reconnaissance ou de supervision du champ de bataille et volant à une altitude comprise entre 200m et 5km, pour un rayon d'action de 30 à 500km,
- les drones miniatures, tels que le Hovereeye (Bertin Technologies) ou le Dragon Eye (AeroVironment) dont la dimension maximale n'excède pas le mètre
- les micro drones, tels que le PicoFlyer (Proxyflyer), dont la dimension maximale n'excède pas 15cm



FIG. 1.1 – Exemple de drones (1/2) : Global Hawk (à gauche), Eagle 1 (au centre) et Sperwer (à droite)

Le véhicule ne constitue cependant qu'une partie d'un "système de drone" qui est en effet composé d'un vecteur aérien (véhicule), mais également d'une station sol et d'un système de liaison de données entre la station sol et le véhicule. La station sol permet aux opérateurs de superviser la mission du drone, de lui fournir de nouvelles consignes, mais aussi d'acquérir et visualiser les données issues du véhicule et de ses charges utiles.

Des progrès technologiques récents ayant permis la miniaturisation du véhicule, des équipements embarqués nécessaires à son automatisation ainsi que des charges utiles, la réalisation d'un



FIG. 1.2 – Exemples de drones (2/2) : Dragon Eye (à gauche), Hovereye (au centre) et PicoFlyer (à droite)

drone miniature est devenue possible à partir de "composants pris sur étagère" et/ou de véhicules de modélisme du commerce. Cette possibilité de réalisation à "bas coût" contribue à l'intérêt croissant que suscite cette nouvelle classe de véhicules.

Dans ce document, nous nous intéresserons plus particulièrement aux drones miniatures à voilures tournantes. Contrairement aux véhicules de type "avion", pour lesquels la propulsion et la sustentation sont réalisées séparément (réacteur ou hélice, et voilure fixe), les véhicules à voilure tournante utilisent le même organe pour la propulsion et la sustentation (rotors). Grâce à cette particularité, ce type de drone miniature est capable d'atterrissage et de décollage vertical, ainsi que de vol stationnaire ou quasi-stationnaire, ouvrant un large champ à de nouvelles applications.

1.2 De nombreuses applications

L'utilisation des drones miniatures est encore limitée à ce jour, essentiellement à cause des réglementations restreignant ou interdisant leur utilisation au sein de l'espace aérien. Néanmoins, le nombre d'applications envisageables pour ce type de véhicule, ainsi que l'intérêt qu'il suscite chez de nombreux industriels, permet d'espérer un futur assouplissement de cette réglementation. Ces applications relèvent tant du domaine civil que militaire.

Les applications militaires potentielles sont, par exemple, l'aide au fantassin, la reconnaissance de zones à risques, la cartographie de régions ou de bâtiments, la localisation de victimes lors de conflit, etc. Equipé d'une caméra, le véhicule réalise alors une fonction d'*oeil déporté*. L'absence d'humain à bord permet son utilisation dans des contextes dangereux où la perte du véhicule peut être envisagée, d'autant plus facilement que son coût est bas. La faible taille du véhicule peut de plus rendre possible son utilisation par une seule personne, et faciliter ainsi son transport dans des zones de conflit. Enfin, la capacité de décollage et d'atterrissage vertical autorise un déploiement rapide depuis des zones très restreintes.

Dans le domaine civil, les applications sont nombreuses : localisation de victimes lors de catastrophes naturelles, surveillance en milieu urbain, analyse ou collecte d'échantillons en atmosphère polluée, exploration de zones contaminées, supervision du trafic routier, prises de vues de bâtiments ou d'ouvrages d'art pour la maintenance, épandage agricole, inspection de lignes électriques ou de voies ferrées, etc. Le drone est principalement utilisé dans sa fonction d'*oeil déporté*, pour laquelle la capacité de vol stationnaire est mise à profit, et

pour des missions difficiles d'accès pour l'homme ou dans des milieux dangereux pour lui (sites pollués ou irradiés).

Les drones miniatures à voilure tournante trouvent également leur place comme plateformes expérimentales peu onéreuses et faciles à mettre en oeuvre. Ils servent ainsi à mettre en pratique et à illustrer par l'expérience des travaux de recherche dans les domaines de la robotique, de l'automatique, du traitement du signal, de l'informatique temps réel, de la vision, etc.

1.3 Différentes configurations de véhicules

Il existe de nombreuses configurations de véhicules de drones miniatures à voilure tournante, suivant le nombre de rotors, leur position et la présence ou non d'autres actionneurs. Les configurations de véhicules les plus courantes sont ici présentées.

1.3.1 Hélicoptère classique

Le véhicule est un hélicoptère classique, à échelle réduite, doté d'un rotor principal et d'un rotor de queue. Un plateau cyclique permet de faire varier le pas des pales du rotor principal et de piloter le véhicule en tangage et roulis. Le rotor principal assure également la fonction de sustentation. Le rotor de queue joue un rôle d'anticouple, afin d'annuler le couple de réaction en lacet créé par le rotor principal. Le pilotage en lacet se fait donc en faisant varier le pas collectif du rotor de queue.

Ce type de configuration présente l'avantage de pouvoir exploiter les résultats des travaux réalisés pour les hélicoptères classiques en terme de modélisation et de commande.



FIG. 1.3 – Hélicoptères Yamaha RMAX (Onera - projet Ressayac) (à gauche) et Micro Star (à droite)

1.3.2 Double rotor contrarotatif

Le véhicule est équipé de deux rotors coaxiaux tournant dans des sens opposés. Le pilotage en lacet se réalise par différence de rotation des deux rotors. Ces deux rotors peuvent être équipés de plateaux cycliques, ou être à pas fixe et commandés en vitesse de rotation. Dans ce dernier cas, des volets peuvent être disposés sous les deux rotors afin de dévier le flux d'air et de commander le véhicule en tangage et roulis.



FIG. 1.4 – Drone Auryon de l'UTC

1.3.3 Rotor à pas fixe caréné et volets

Le véhicule est équipé d'un rotor principal à pas fixe assurant la sustentation. Des volets sont disposés dans le flux d'air afin de réaliser la commande en tangage roulis. La stabilisation en lacet est assurée par un étage anticouple.



FIG. 1.5 – Le drone iSTAR d'Allied Aerospace (à gauche) et le Polydrone de Polytech'Orléans (à droite)

1.3.4 Quadrirotor

Le véhicule est équipé de quatre rotors disposés en croix. Les rotors avant et arrière tournent dans le sens contraire des rotors latéraux. Les rotors étant à pas fixe, le pilotage en tangage roulis lacet est réalisé par différence de vitesse de rotation, selon le schéma de principe présenté en Figure 1.7. La simplicité mécanique de ce véhicule en fait une configuration très abordable pour la réalisation de plateformes expérimentales à faible coût.



FIG. 1.6 – Le X4 Flyer du CEA LIST (à gauche) et le CPX4 (challenge minidrones ONERA DGA)

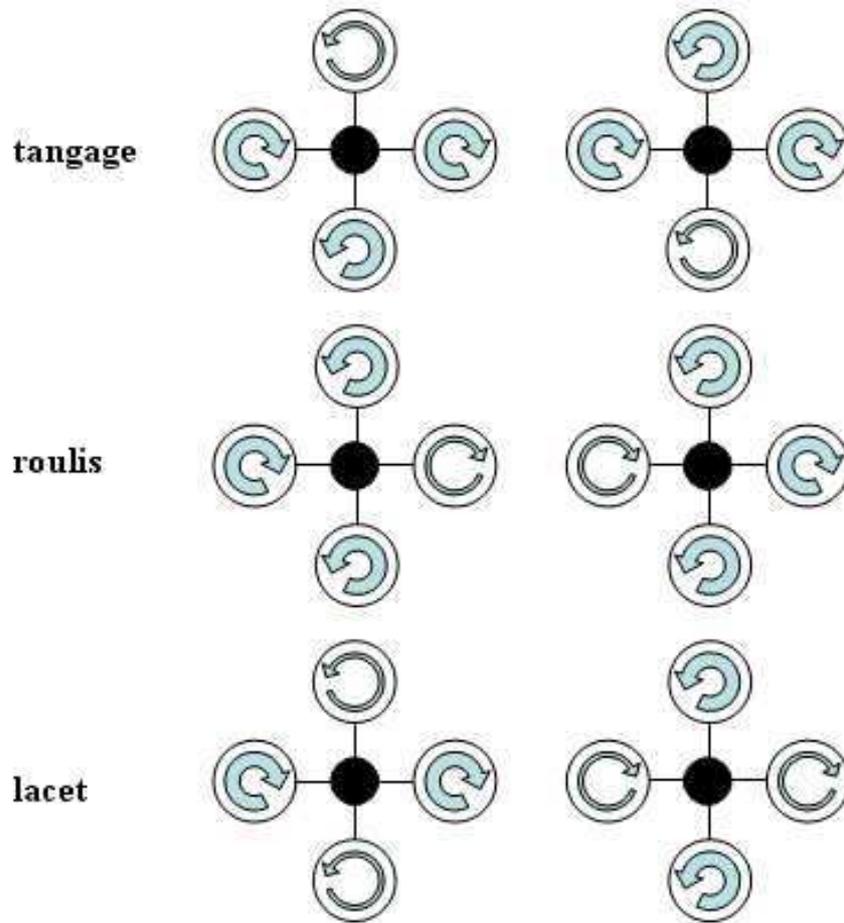


FIG. 1.7 – Pilotage d'un quadrirotor par différence de vitesse de rotation des rotors

1.3.5 Convertibles

Les drones convertibles cumulent les avantages de l'avion et de l'hélicoptère : décollage et atterrissage vertical, vol stationnaire, vol d'avancement rapide et économique. La transition entre ces deux phases de vol peut se réaliser par basculement complet du véhicule lorsque celui-ci est équipé d'un rotor surmontant un voilure (Vertigo de Supaéro), ou uniquement par basculement de ses rotors lorsque ceux-ci sont disposés sur des nacelles pivotantes (Eagle Eye de Bell). Ce type de configuration est encore peu répandue pour les drones miniatures du fait de la complexité de la phase de transition.



FIG. 1.8 – Drones Vertigo de Supaéro (à gauche) et Eagle Eye de Bell (à droite)

1.3.6 Autres configurations

Il existe d'autres configurations de drones miniatures à voilure tournante, pour lesquelles le nombre et la disposition de rotors varie d'un concept à l'autre : trirotor, rotors pour la sustentation et rotors d'avancement, etc.

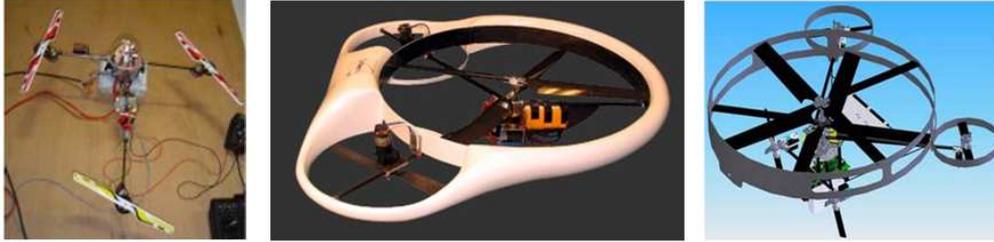


FIG. 1.9 – Trirotor de l'UTC Heudiasyc (à gauche), Satoorn de Supaéro (au centre), μ Drone de l'ENSMM (à droite)

1.4 Autonomie et automatisation

La différence entre un modèle réduit et un drone miniature réside dans le degré d'automatisation et d'autonomie du véhicule. L'autonomie consiste en la faculté du véhicule à réaliser une mission donnée, sans intervention extérieure, en prenant lui même des "décisions" suivant les événements rencontrés, et ce afin d'atteindre des objectifs fixés. Pour que cette autonomie soit possible, le mouvement du véhicule doit pouvoir être géré de manière automatique, permettant ainsi également le déplacement du drone en dehors du champ de vue d'un opérateur. Un niveau intermédiaire d'automatisation peut éventuellement être développé, afin de permettre à un pilote humain de diriger le véhicule avec des ordres de haut niveau uniquement (commande cartésienne selon les axes de translation par exemple).

La réalisation de ce degré d'automatisation nécessite le développement d'un système de commande remplaçant les actions d'un pilote humain. C'est ce système de commande qui sera l'objet de notre étude dans la suite de ce document.

Chapitre 2

Commande des drones miniatures à voilure tournante

2.1 Système de décision et de commande pour un drone miniature

Quel que soit le type de configuration sélectionné pour le véhicule, un système de commande et de décision doit être développé afin de permettre son utilisation sans intervention humaine, ou uniquement avec des interventions de haut niveau.

2.1.1 Navigation, Guidage, Pilotage

La mission que l'on souhaite faire exécuter au drone peut être définie de différentes manières. Avec une description de haut niveau, celle-ci peut, par exemple, être représentée en terme d'objectifs, de ressources et de contraintes de priorités ou de criticités différentes. Plus simplement, la mission peut également être décrite en spécifiant des points de passage pour le véhicule. Cette paramétrisation de la mission peut être définie avant son exécution puis mise à jour en ligne par un opérateur ou un système de supervision. Un algorithme de planification et de génération de trajectoire est alors utilisé pour déterminer, à partir de la paramétrisation de la mission, une trajectoire de référence à suivre, ou plus simplement des points de passage.

Pour permettre au véhicule de suivre cette référence, des algorithmes de guidage-pilotage sont employés afin de calculer les commandes à appliquer aux actionneurs, remplaçant ainsi l'action d'un pilote humain. L'algorithme de guidage est dédié à la stabilisation de la dynamique de translation (convergence du centre de gravité du véhicule vers la référence). Il permettra également de définir une consigne pour l'algorithme de pilotage chargé quand à lui de commander les mouvements du véhicule autour de son centre de gravité (dynamique de rotation).

Pour le calcul de ces commandes, l'état du véhicule (positions, vitesses, angles d'attitude, vitesses de rotation) peut être reconstitué à partir des mesures délivrées par les instruments et capteurs embarqués à bord du véhicule (centrale inertielle, GPS, caméras, etc.). Cette fonction est réalisée au sein de la "brique" navigation.

Un algorithme de localisation peut également être développé afin de déterminer la position relative du véhicule par rapport à son environnement. Ces informations de localisation et de navigation sont utilisées pour la génération de la référence ainsi que pour le guidage pilotage.

Ce système hiérarchique de décision et de commande est représenté en Figure 2.1.

Dans ce document, on s'intéressera plus particulièrement à la réalisation des fonctions guidage et pilotage. D'une manière générale, la brique regroupant ces deux fonctions sera aussi désignée sous le nom de "commande" du véhicule.

2.1.2 Commande des drones miniatures : les premiers travaux

On peut considérer que les premiers travaux traitant des problématiques associées à la commande des drones miniatures à voilure tournante, ont été réalisés dans le cadre de la

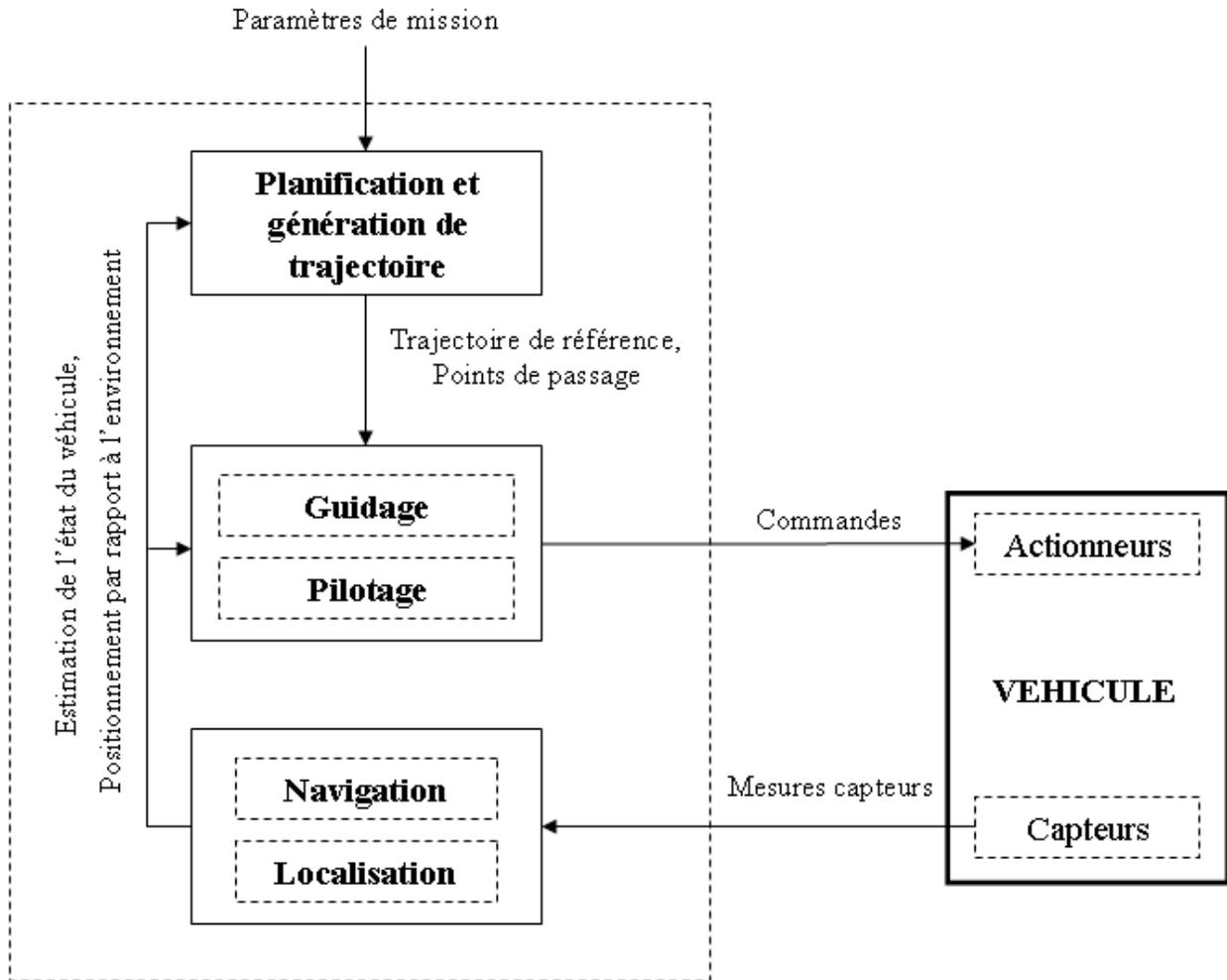


FIG. 2.1 – Guidage pilotage navigation

commande d'un modèle décrivant, dans le plan, la dynamique d'un avion à décollage et atterrissage vertical (PVTOL). Ce modèle non linéaire, introduit dans [52], est sous-actionné (nombre de commandes inférieur au nombre de degrés de liberté) et à déphasage non minimal (dynamique des zéros instable). Ces caractéristiques en ont fait un exemple académique très répandu pour l'application de nombreux travaux de commande non linéaire [2, 21, 71, 77].

Ce sont ces mêmes caractéristiques qui contribuent à susciter un intérêt académique important pour la commande des drones miniatures à voilure tournante. Les problématiques soulevées par la sensibilité de ces véhicules aux perturbations aérodynamiques, ainsi que par le faible nombre de capteurs et de puissance de calcul embarquables, participent également à cet engouement.

De nombreuses méthodologies ont ainsi été appliquées pour la commande des drones miniatures. Nous ne traiterons pas ici des techniques de commande directement basées sur l'observation du comportement d'un pilote humain ou le recueil de données issues d'expérimentations en vol. Des références sur ce sujet peuvent être trouvées dans [86]. Nous nous intéresserons ici aux approches de commande basées sur une représentation de la dynamique du véhicule.

Une manière de modéliser cette dynamique est présentée en section suivante.

2.2 Modélisation des drones miniatures à voilure tournante

2.2.1 Différents niveaux de modélisation

Une modélisation fine d'un drone miniature à voilure tournante est complexe et requiert la connaissance de l'aérodynamique du véhicule, de ses caractéristiques mécaniques ainsi que de la dynamique des actionneurs. Cette modélisation nécessite également un travail spécifique à chaque configuration de véhicule étudié : quadri rotor [90], rotor caréné avec volets [87], hélicoptère classique [94], etc.

Cependant, la description de la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante peut se faire d'une manière générale par décomposition en plusieurs niveaux [64, 63] : dynamique des actionneurs, dynamique des rotors (et volets), génération des forces et moments résultants, dynamique du solide (cf Figure 2.2). Au cours de cette étude, nous ne considérerons que le dernier niveau de modélisation (dynamique du solide) qui est le seul dont la représentation peut être commune à toutes les configurations de véhicules. Nous présenterons cependant, pour plusieurs configurations de véhicules, la manière de prendre en compte les interactions actionneurs / dynamique du solide.

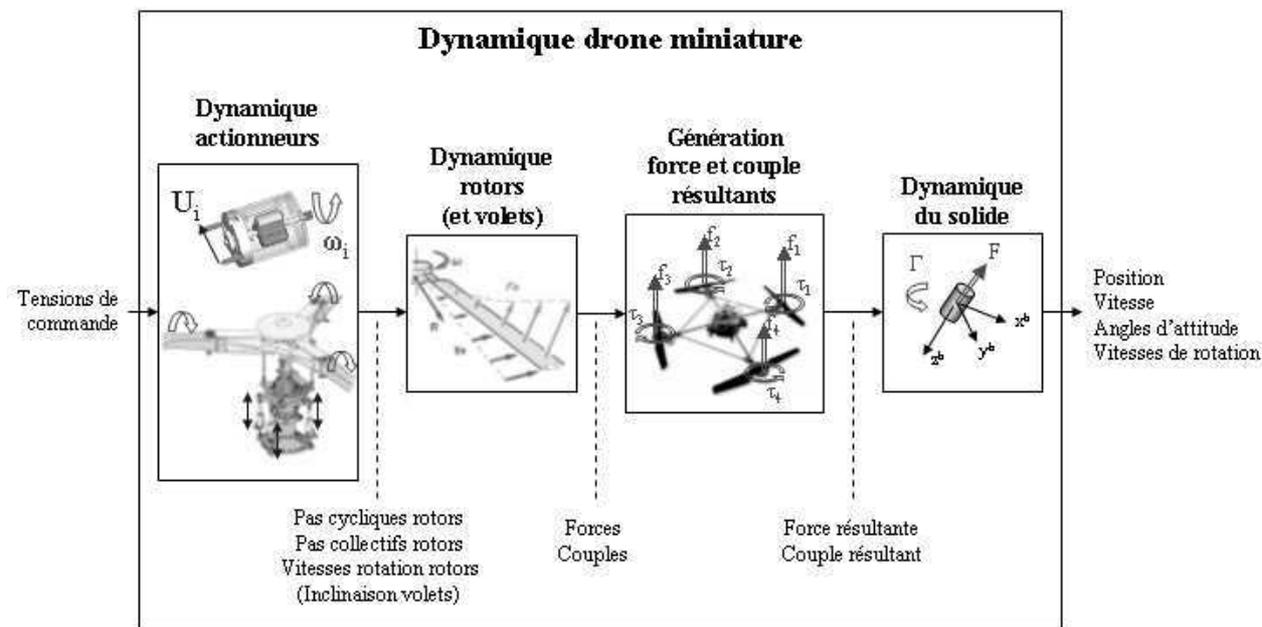


FIG. 2.2 – Différents niveaux de modélisation

2.2.2 Description du mouvement du drone

Le véhicule est assimilé à un corps rigide de masse m et de centre de gravité G . On notera I son tenseur d'inertie.

Afin de décrire le mouvement du drone, deux repères sont définis :

- Un repère inertiel (\mathcal{I}) lié à un point origine O et à une base $\{e_1, e_2, e_3\}$ où e_3 pointe vers le centre de la Terre. (cf Figure 2.3) Ce repère est supposé galiléen.
- Un repère véhicule (\mathcal{B}) lié au centre de gravité G du drone et à une base $\{e_1^b, e_2^b, e_3^b\}$ où e_1^b définit l'axe longitudinal du véhicule et pointe vers l'avant de celui-ci, e_2^b définit l'axe latéral du véhicule et est orienté vers la droite de celui-ci, e_3^b définit l'axe vertical du véhicule et pointe vers le bas. (cf Figure 2.3)

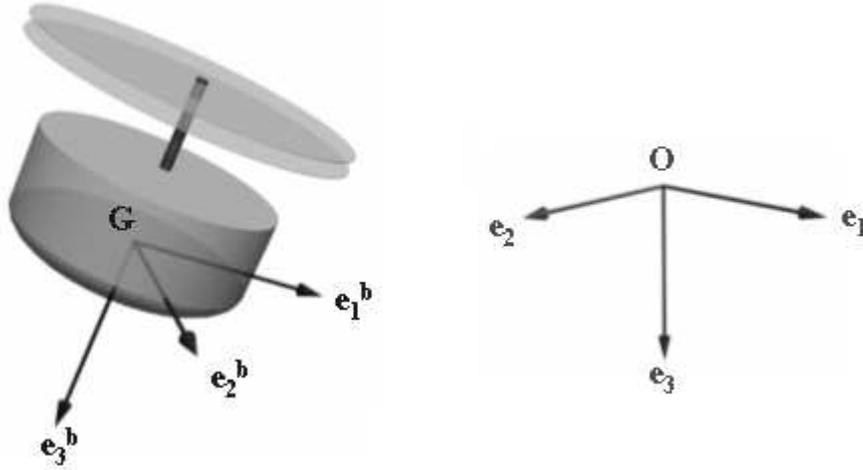


FIG. 2.3 – Repères utilisés pour décrire le mouvement du drone

Le passage du repère (\mathcal{I}) vers le repère (\mathcal{B}) est réalisé par trois rotations successives (cf Figure 2.4) :

- une rotation d'angle ψ (angle de lacet) autour de l'axe e_3 qui transforme $\{e_1, e_2, e_3\}$ en $\{e'_1, e'_2, e'_3 = e_3\}$. Cette rotation est représentée par la matrice

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_\psi & s_\psi & 0 \\ -s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

où les notations trigonométriques suivantes sont utilisées : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, c_\alpha = \cos \alpha, s_\alpha = \sin \alpha$.

- une rotation d'angle θ (angle de tangage) autour de l'axe e'_2 qui transforme $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ en $\{e''_1, e''_2 = e'_2, e''_3\}$. Cette rotation est représentée par la matrice

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_\theta & 0 & -s_\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\theta & 0 & c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

- une rotation d'angle ϕ (angle de roulis) autour de l'axe e''_1 et qui transforme $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$ en $\{e^b_1 = e''_1, e^b_2, e^b_3\}$. Cette rotation est représentée par la matrice

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\phi & s_\phi \\ 0 & -s_\phi & c_\phi \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

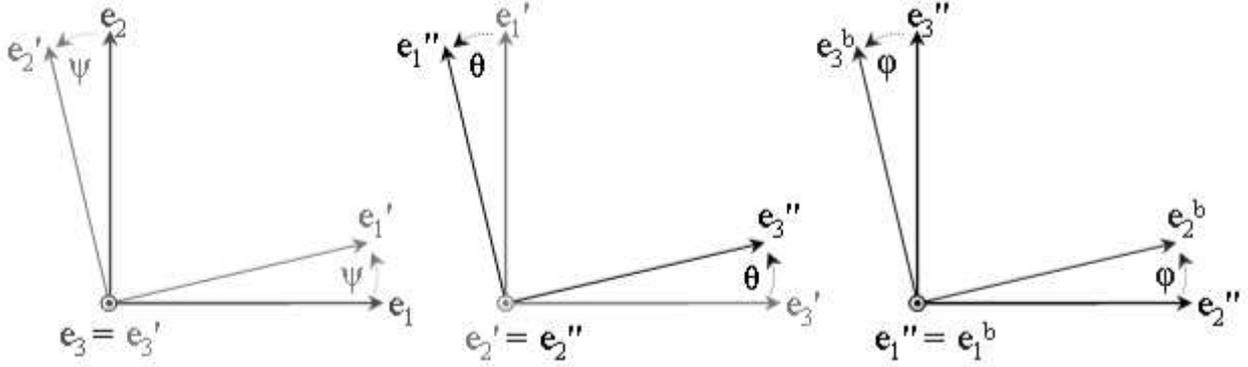


FIG. 2.4 – Rotations successives définissant les pseudo angles d'Euler

La matrice de rotation qui transforme $\{e_1, e_2, e_3\}$ en $\{e_1^b, e_2^b, e_3^b\}$ est donnée par

$$R_{zyx}(\psi, \theta, \phi) = R_x(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi) \quad (2.4)$$

La matrice de rotation R_{zyx} est un élément du groupe spécial orthogonal $SO(3)$ et vérifie

$$\det(R_{zyx}) = 1 \quad (R_{zyx})^{-1} = (R_{zyx})^T \quad (2.5)$$

Pour un vecteur u donné, on note $[u]_{\mathcal{I}}$ ses coordonnées dans (\mathcal{I}) et $[u]_{\mathcal{B}}$ ses coordonnées dans (\mathcal{B}) . Le changement de coordonnées entre ces deux écritures est donné par les relations

$$[u]_{\mathcal{B}} = R_{zyx}(\psi, \theta, \phi) [u]_{\mathcal{I}} \quad (2.6)$$

$$[u]_{\mathcal{I}} = (R_{zyx}(\psi, \theta, \phi))^T [u]_{\mathcal{B}} \quad (2.7)$$

Dans la suite, on notera R la matrice d'orientation définie par

$$R = (R_{zyx}(\psi, \theta, \phi))^T \quad (2.8)$$

soit :

$$R = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

et les expressions suivantes de changement de repère :

$$[u]_{\mathcal{B}} = R^T [u]_{\mathcal{I}} \quad (2.10)$$

$$[u]_{\mathcal{I}} = R [u]_{\mathcal{B}} \quad (2.11)$$

Pour décrire le mouvement en translation du centre de gravité G du drone, on notera

$$\xi = [x \ y \ z]^T \quad (2.12)$$

sa position dans le repère inertiel (\mathcal{I}) et

$$v = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T \quad (2.13)$$

sa vitesse linéaire dans (\mathcal{I}). Pour décrire le mouvement de rotation du véhicule autour de son centre de gravité G, on utilisera les pseudo angles d'Euler en roulis (ϕ), tangage (θ) et lacet (ψ) précédemment définis. Le vecteur vitesse de rotation instantané sera noté

$$\Omega = [\omega_p \quad \omega_q \quad \omega_r]^T \quad (2.14)$$

dans le repère (\mathcal{B}).

2.2.3 Bilan des forces et moments appliqués

Bilan des forces

On suppose que le drone est soumis aux forces suivantes :

- F_p : poussée générée par la propulsion du drone
- F_a : résultante des forces aérodynamiques, pouvant être décomposée en :
 - F_x : composante de traînée, issue des frottements avec la masse d'air
 - F_z : composante de portance, assurant la sustentation du drone
- mge_3 : poids du drone (où la constante g représente l'accélération de la pesanteur)
- F_{ext} : résultante des forces extérieures de perturbation aérodynamique (vent, rafale)

Pour un drone miniature à voilure tournante évoluant dans un domaine de vol proche du quasi-stationnaire, on peut supposer que la composante de portance est prédominante sur celle de traînée. Cette dernière étant proportionnelle au carré de la vitesse relative (différence entre la vitesse du drone et la vitesse de la masse d'air), celle-ci peut en effet être négligée devant la composante de portance pour des faibles vitesses, et l'on peut alors formuler l'hypothèse suivante [49] :

Hypothèse 1 *Pour un drone miniature à voilure tournante évoluant dans un domaine de vol proche du quasi-stationnaire, on suppose que la résultante des forces aérodynamiques et de poussée est selon l'axe e_3^b .*

Sous cette hypothèse, la résultante des forces aérodynamiques et de poussée peut être notée dans (\mathcal{I}) par

$$F_p + F_a = -\mathcal{T}Re_3 \quad (2.15)$$

avec

$$\mathcal{T} = \|F_p + F_a\| \quad (2.16)$$

On notera F la force

$$F = F_p + F_a + mge_3 \quad (2.17)$$

Bilan des couples et moments

Les moments et couples appliqués au drone sont les suivants :

- Γ_1 : couple de commande réalisé par les actionneurs du drone
- Γ_2 : couple généré par les phénomènes aérodynamiques et gyroscopiques produits par la rotation des rotors
- M_{ext} : moment engendré par la résultante des forces extérieures de perturbation aérodynamique (vent, rafale)

La génération du couple de commande Γ_1 , par les actionneurs du véhicule, induit l'apparition de forces supplémentaires appliquées au drone [25, 74]. Ces forces peuvent être modélisées sous la forme $R\Sigma\Gamma_1$, où la matrice $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, liée à la géométrie du véhicule, représente le couplage entre la dynamique de rotation et la dynamique de translation [23, 74].

On notera Γ le couple défini par

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 \quad (2.18)$$

2.2.4 Modèle dynamique

L'obtention de la représentation dynamique du drone est détaillée dans les paragraphes suivants.

Relation cinématique sur la position

Dans le référentiel (\mathcal{I}) , la vitesse du centre de gravité G du drone est définie par la relation cinématique

$$(v_G)_{\mathcal{I}} = \frac{d}{dt} \left\{ \vec{OG} \right\}_{\mathcal{I}} \quad (2.19)$$

soit, avec les notations précédemment introduites :

$$v = \dot{\xi} \quad (2.20)$$

Application du principe fondamental de la dynamique

L'application dans (\mathcal{I}) du principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$\frac{d}{dt} \{m(v_G)_{\mathcal{I}}\}_{\mathcal{I}} = F_{res} \quad (2.21)$$

où F_{res} représente la résultante des forces appliquées au solide. Dans notre cas, cette relation peut s'écrire dans (\mathcal{I}) sous la forme

$$m\ddot{v} = F + R\Sigma\Gamma_1 + F_{ext} = -\mathcal{T}Re_3 + mge_3 + R\Sigma\Gamma_1 + F_{ext} \quad (2.22)$$

Relation cinématique sur l'orientation

La dérivée d'un vecteur de base e_i^b du référentiel (\mathcal{B}) est donnée par

$$\frac{d}{dt} \{e_i^b\}_{\mathcal{I}} = (\Omega_{(\mathcal{B}/\mathcal{I})})_{\mathcal{I}} \times (e_i^b)_{\mathcal{I}} \quad (2.23)$$

où $\vec{\Omega}_{(\mathcal{B}/\mathcal{I})}$ est le vecteur vitesse de rotation instantanée du référentiel (\mathcal{B}) par rapport au référentiel (\mathcal{I}) et où \times dénote le produit vectoriel usuel entre deux vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Dans notre cas, la matrice d'orientation R peut s'écrire en fonction des vecteurs de base de la manière suivante :

$$R = [(e_1^b)_{\mathcal{I}} \quad (e_2^b)_{\mathcal{I}} \quad (e_3^b)_{\mathcal{I}}] \quad (2.24)$$

d'où l'expression de sa dérivée

$$\dot{R} = \left[\frac{d}{dt}(e_1^b)_{\mathcal{I}} \quad \frac{d}{dt}(e_2^b)_{\mathcal{I}} \quad \frac{d}{dt}(e_3^b)_{\mathcal{I}} \right] \quad (2.25)$$

et en utilisant (2.23) :

$$\dot{R} = (\Omega_{(\mathcal{B}/\mathcal{I})})_{\mathcal{I}} \times [(e_1^b)_{\mathcal{I}} \quad (e_2^b)_{\mathcal{I}} \quad (e_3^b)_{\mathcal{I}}] \quad (2.26)$$

Pour tout vecteur a de \mathbb{R}^3 , on définit la notation a_{\times} utilisée pour représenter de manière matricielle le produit vectoriel du vecteur a avec un autre vecteur donné : $\forall b \in \mathbb{R}^3, a_{\times} b = a \times b$. Avec cette notation, l'équation (2.26) devient :

$$\dot{R} = (R\Omega)_{\times} R \quad (2.27)$$

En utilisant les propriétés $(R\Omega)_{\times} = R\Omega \times R^T$ et $R^T = R^{-1}$, on obtient finalement l'équation cinématique

$$\dot{R} = R\Omega_{\times} \quad (2.28)$$

avec

$$\Omega_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_r & \omega_q \\ \omega_r & 0 & -\omega_p \\ -\omega_q & \omega_p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Application du théorème des moments

Le théorème des moments appliqué au solide dans le référentiel (\mathcal{I}) s'écrit

$$\frac{d}{dt} \{I\Omega_{(\mathcal{B}/\mathcal{I})}\}_{\mathcal{I}} = (\mathcal{M}_{res})_{\mathcal{I}} \quad (2.30)$$

où \mathcal{M}_{res} est le moment des forces appliquées au solide ramené au centre de gravité G .

Avec les notations introduites, on a

$$\frac{d}{dt} \{I\Omega_{(\mathcal{B}/\mathcal{I})}\}_{\mathcal{I}} = \frac{d}{dt}(RI\Omega) = \dot{R}I\Omega + RI\dot{\Omega} = R\Omega_{\times}I\Omega + RI\dot{\Omega} \quad (2.31)$$

et

$$(\mathcal{M}_{res})_{\mathcal{I}} = R(\mathcal{M}_{res})_{\mathcal{B}} \quad (2.32)$$

En combinant les équations (2.31) et (2.32), et en multipliant à gauche par R^T :

$$\Omega_{\times}I\Omega + I\dot{\Omega} = (\mathcal{M}_{res})_{\mathcal{B}} \quad (2.33)$$

Soit, dans notre cas :

$$I\dot{\Omega} = -\Omega_{\times}I\Omega + \Gamma + M_{ext} \quad (2.34)$$

Représentation d'état

En regroupant les deux équations cinématiques (2.20) (2.27) et les deux équations dynamiques (2.22) (2.34), on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ m\dot{v} = F + R\Sigma\Gamma_1 + F_{ext} \\ \dot{R} = R\Omega_{\times} \\ I\dot{\Omega} = -\Omega_{\times}I\Omega + \Gamma + M_{ext} \end{cases} \quad (2.35)$$

Ce système est à déphasage non minimal car le terme de couplage $R\Sigma\Gamma_1$ est responsable d'un phénomène d'instabilité de la dynamique de zéros [52, 64]. La présence de ce terme rend difficile la synthèse d'une loi de commande et peut provoquer l'oscillations de certains états internes du système bien que d'autres, considérés comme sorties, soient stabilisés.

Pour certaines configurations de véhicules, ce problème peut être écarté. Il a ainsi été montré dans [89], pour le cas particulier d'un véhicule disposant de rotors carénés et de gouvernes, que si l'on contrôle un point virtuel déporté sur l'axe de l'engin, au lieu de son centre de gravité, ce phénomène de dynamique des zéros disparaît. Dans le cas d'un quadrirotor, ce terme de couplage est théoriquement nul ($\Sigma = 0$).

D'une manière générale, le terme de couplage $R\Sigma\Gamma_1$ est ignoré pour la synthèse de lois de commande ($\Sigma = 0$). Une analyse de la robustesse peut être réalisée ensuite en réinjectant ce terme ($\Sigma \neq 0$). On considère ainsi le système

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = \frac{1}{m}F + \frac{1}{m}F_{ext} \\ \dot{R} = R\Omega_{\times} \\ I\dot{\Omega} = -\Omega_{\times}I\Omega + \Gamma + M_{ext} \end{cases} \quad (2.36)$$

dont l'état peut être représenté par le vecteur

$$\chi = [\xi^T \quad v^T \quad \eta^T \quad \Omega^T]^T \quad (2.37)$$

avec $\eta = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$.

Les commandes sont la force F et le couple Γ .

Sous l'hypothèse 1, on utilise (2.15) pour obtenir le modèle

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m}\mathcal{T}Re_3 + ge_3 + \frac{1}{m}F_{ext} \\ \dot{R} = R\Omega_{\times} \\ I\dot{\Omega} = -\Omega_{\times}I\Omega + \Gamma + M_{ext} \end{cases} \quad (2.38)$$

où les commandes considérées sont alors le scalaire \mathcal{T} et le couple Γ .

Ce système est sous-actionné puisqu'il dispose d'un nombre de commandes inférieur au nombre de degrés de liberté.

Le modèle simplifié (2.38), modèle que nous utiliserons pour représenter la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante, peut être considéré comme générique, c'est-à-dire indépendant de la configuration choisie pour le véhicule. Ce modèle peut ensuite être détaillé suivant la configuration de véhicule choisie en y ajoutant la manière dont les commandes en force et couple sont réalisées.

2.2.5 Spécification du modèle à un véhicule donné

Hélicoptère classique

Pour une configuration de véhicule de type hélicoptère classique, la force F et le couple Γ peuvent être décomposés de manière simplifiée selon les contributions du rotor principal et du rotor de queue :

$$F = R(F_M^b + F_T^b) + mge_3 \quad (2.39)$$

$$\Gamma = \Gamma_M + \Gamma_T \quad (2.40)$$

où F_M^b , F_T^b , Γ_M et Γ_b représentent dans (\mathcal{B}) les forces et couples réalisés par le rotor principal (indices $.M$) et le rotor de queue (indices $.T$).

Les forces peuvent être représentées par

$$F_M^b = \begin{bmatrix} f_M^1 \\ f_M^2 \\ f_M^3 \end{bmatrix} \quad F_T^b = \begin{bmatrix} 0 \\ f_T^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Si le rotor principal est situé à un point P, et si le rotor de queue en un point Q, les couples produits sont

$$\Gamma_M = \begin{bmatrix} \Gamma_M^1 \\ \Gamma_M^2 \\ \Gamma_M^3 \end{bmatrix} + (\vec{GM})_{\mathcal{B}} \times \begin{bmatrix} f_M^1 \\ f_M^2 \\ f_M^3 \end{bmatrix} \quad \Gamma_T = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_T^2 \\ 0 \end{bmatrix} + (\vec{GQ})_{\mathcal{B}} \times \begin{bmatrix} 0 \\ f_T^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

où les composantes algébriques Γ_M^i et Γ_T^2 proviennent des couples de réaction induits par l'air sur les rotors en rotation. Pour obtenir un niveau de modélisation supplémentaire, les forces et couples peuvent être ensuite reliés à la vitesse de rotation des rotors, aux valeurs des pas collectifs et cycliques. Ces grandeurs peuvent être alors considérées comme nouvelles entrées de commande. Des modèles plus détaillés peuvent être trouvés dans [23, 44, 64, 76].

Quadrirotor

Dans le cas d'un véhicule de type quadrirotor, la force F peut être décomposée en :

$$F = R\left(\sum_{i=1}^4 F_i^b\right) + mge_3 \quad (2.43)$$

où la force F_i^b représente dans (\mathcal{B}) la force engendrée par le rotor i :

$$F_i^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_i \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Si chaque rotor est situé à un point P_i , le couple Γ peut alors s'écrire

$$\Gamma = \sum_{i=1}^4 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Gamma_i^r \end{bmatrix} + \vec{GP}_i \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_i \end{bmatrix} \right) \quad (2.45)$$

où les composantes algébriques Γ_i^r proviennent des couples de réaction induits par l'air sur les rotors en rotation. La relation entre les composantes de Γ et le module de F peuvent ensuite être liées par une relation algébrique aux carrés des vitesses de rotation des rotors [46]. De même que pour l'hélicoptère, il est alors possible de remplacer les commandes en force F et en couple Γ par des commandes en vitesses de rotation des rotors. Des modèles plus détaillés peuvent être trouvés dans [47, 51, 90].

Rotors contra rotatifs avec volets

Pour un véhicule équipé de deux rotors coaxiaux contra rotatifs à pas fixe et de volets, la force F peut être décomposée en

$$F = R(F_p^b + F_{vol}^b) + mge_3 \quad (2.46)$$

où

$$F_p^b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -f_p \end{bmatrix} \quad F_{vol}^b = \begin{bmatrix} f_{vol}^1 \\ f_{vol}^2 \\ f_{vol}^3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

représentent dans (\mathcal{B}) respectivement la force résultante engendrée par les deux rotors et la résultante des forces exercée par les volets. Dans le cas où les deux rotors contra rotatifs tournent constamment à une vitesse de rotation identique, le pilotage en lacet peut être également réalisé par les volets et la résultante des couples de réaction de l'air sur les rotors est annulée. Le couple Γ peut alors être décrit par :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{vol}^1 \\ \Gamma_{vol}^2 \\ \Gamma_{vol}^3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

où les composantes Γ_{vol}^i du couple résultant créé par les volets peuvent être rattachées aux composantes de F_{vol}^b et prises comme entrées de commande avec la composante f_p . Une modélisation plus précise peut être trouvée dans [87, 88].

On dispose ainsi d'un modèle générique, décrit par (2.38), adaptable à différentes configurations de véhicules, et pouvant être utilisé pour la synthèse de lois de commandes.

2.3 Etat de l'art sur la commande des drones miniatures

Nous présentons ici diverses méthodes utilisées dans la littérature pour la commande de modèles similaires à celui proposé en section précédente.

2.3.1 Retours d'états linéaires

En négligeant les couplages entre les différents axes, ou en linéarisant la dynamique du drone autour d'un point de vol donné (vol stationnaire par exemple), une représentation dynamique simplifiée peut être obtenue.

Des approches de commande linéaire telles que la synthèse de correcteurs PID peuvent alors être utilisées. Cette démarche est employée dans [58], où des correcteurs sont réalisés pour chacune des boucles (mouvement longitudinal, mouvement latéral, altitude et lacet) d'un hélicoptère Yamaha R-50. Des résultats expérimentaux sont proposés pour la stabilisation en vol stationnaire.

Un modèle linéaire d'hélicoptère est également utilisé dans [15] où une approche de commande optimale linéaire quadratique (LQR) est appliquée au suivi de trajectoire et à la prise en compte de contraintes sur la commande. Une comparaison entre ces deux types de méthode, PID et LQR, est réalisée dans [13] pour un modèle linéarisé de la dynamique de rotation d'un quadrirotor.

Afin de prendre en compte les non linéarités de la dynamique de rotation de ce type de véhicule, un correcteur PD et un correcteur PD2 compensant les couples gyroscopiques et de Coriolis sont proposés dans [108] pour la stabilisation en attitude.

2.3.2 Commande par extension dynamique

Une des premières méthodes de commande non linéaires appliquées à des modèles de drones miniatures semblables à celui présenté précédemment, est la linéarisation entrée-sortie.

Cette méthode, entraînant une extension de la dynamique du contrôleur, est utilisable pour des systèmes à déphasage minimal, ce qui n'est pas le cas pour le modèle présenté si le terme de couplage Σ est considéré : quelles que soient les sorties choisies (quatre grandeurs parmi les six composées des coordonnées en position et des angles d'attitude), il peut être montré que le système est à déphasage non minimal [64]. Cependant, si ce terme de couplage Σ est ignoré, le système approché est alors à déphasage minimal et une linéarisation entrée sortie peut être réalisée. Cette approche de linéarisation approchée est réalisée dans [64]. Elle a ensuite été reprise dans [103], puis appliquée dans [48], dans le cas discret, à la stabilisation et au suivi de trajectoire d'un modèle de quadrirotor.

Un autre type de démarche consiste à considérer le système (2.38) comme une chaîne d'intégrateurs :

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \Phi_1(v) \\ \dot{v} &= \Phi_2(R) \\ \dot{R} &= \Phi_3(R, \Omega) \\ \dot{\Omega} &= \Phi_4(\Omega, \Gamma)\end{aligned}\tag{2.49}$$

où les fonctions Φ_i sont de classe \mathcal{C}^1 . Le couplage entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation est réalisé par l'orientation R . En considérant le système (2.38) sous la forme (2.49), la commande peut être synthétisée par backstepping.

La détermination des commandes \mathcal{T} et Γ est toutefois rendue difficile dans la mesure où la dynamique de translation est sous-actionnée (une seule commande scalaire pour trois degrés de liberté).

Une solution consiste alors à choisir le vecteur $\mathcal{T}Re_3$ comme vecteur de commande pour la dynamique de translation, et à appliquer une méthode de backstepping en réalisant une extension dynamique de \mathcal{T} par un double intégrateur [74]. L'entrée de commande \mathcal{T} et sa première dérivée temporelle $\dot{\mathcal{T}}$ peuvent alors être considérées comme des états internes d'un contrôleur dynamique.

Des méthodes de backstepping ont été appliquées avec succès à la stabilisation ou au suivi de trajectoire de modèles d'hélicoptères [41, 74] ou de quadrirotors [14].

Une technique de backstepping a également été utilisée dans [33], à partir d'une représentation de la dynamique d'un hélicoptère bi-rotor coaxial exprimée en repère engin. Cette représentation est motivée par l'utilisation moins coûteuse de capteurs tels qu'une caméra embarquée, par exemple, lorsque l'on souhaite davantage réguler la position relative du véhicule par rapport à un objectif donné, plutôt que par rapport à une position de référence absolue donnée en repère inertiel. Une extension de la dynamique de \mathcal{T} est réalisée par un intégrateur simple et les dérivées des vitesses de rotation sont également choisies comme nouvelles commandes à la place de la composante Γ_1 du couple Γ . Cette approche permet d'obtenir une dynamique plus rapide qu'avec l'approche précédente, tout en conservant les mêmes propriétés de robustesse.

En pratique, il est difficile d'obtenir une mesure de \mathcal{T} , et de $\dot{\mathcal{T}}$ dans le cas d'une extension dynamique par un second ordre. La mise en application de ces approches n'est donc pas aisée.

En pratique, la réalisation d'une mesure de la translation ne peut se faire qu'avec une fréquence bien inférieure à celle qu'il est possible d'obtenir pour la rotation. Les approches précédemment évoquées ne permettent pas de prendre en compte ces différentes cadences. La commande ne peut donc être calculée qu'en se basant sur la cadence de mesure la plus lente. Or, pour réussir à stabiliser un drone miniature à voilure tournante, la mesure nécessaire à la commande en rotation doit être réalisée avec une haute fréquence. Il y a donc une difficulté réelle d'appliquer les méthodes citées.

Une approche de commande permettant une séparation de ces cadences de mesure, telle que la commande hiérarchique, est en pratique plus appropriée.

2.3.3 Commande hiérarchique

Dans cette classe d'approche, les commandes sont réalisées par un retour d'état statique. Elles ne nécessitent donc pas de modification de la dynamique du contrôleur.

Le vecteur $\mathcal{T}Re_3$ est considéré comme vecteur de commande de la dynamique de translation. Il s'agit alors de construire un retour d'état permettant de définir une valeur désirée $(\mathcal{T}Re_3)^d$ de ce vecteur de commande. En supposant que la dynamique des actionneurs permettant de réaliser \mathcal{T} est beaucoup plus rapide que celles régissant la translation et l'orientation du véhicule, on peut considérer que la valeur \mathcal{T}^d est instantanément atteinte par \mathcal{T} . On peut ainsi décomposer le vecteur de commande désiré en :

$$(\mathcal{T}Re_3)^d = \mathcal{T}(Re_3)^d \quad (2.50)$$

On réalise ainsi une séparation entre les dynamiques de translation et de rotation.

En se fixant une valeur désirée $\psi^d(t)$ pour l'angle de lacet, et à partir de la connaissance du vecteur direction $(Re_3)^d = R^d e_3$, on peut alors déduire la valeur désirée R^d de la matrice d'orientation (cf Annexe B). Cette orientation désirée est ensuite considérée comme consigne lors de la synthèse de la loi de commande pour la dynamique de rotation. D'où la notion de commande hiérarchique, ou de guidage-pilotage.

Des lois de commandes séparées peuvent alors être réalisées pour la commande en position d'une part, et la commande en attitude, d'autre part. Cette stratégie de commande a été utilisée dans de nombreux travaux dont [47, 51, 88].

2.3.4 Incertitudes de modèle et perturbations

Dans le cas d'une modélisation fine de la dynamique du véhicule, la représentation des forces aérodynamiques fait intervenir des termes (coefficient aérodynamique, masse volumique de l'air, surface apparente) qu'il est difficile de connaître de manière précise. De même, la connaissance des constantes physiques du véhicule (masse, inerties) est soumise à des incertitudes.

Pour stabiliser le système, malgré ces incertitudes, on peut tout d'abord choisir d'utiliser des techniques de commande robuste.

Ce type de méthode est employé dans [103] pour stabiliser un modèle linéarisé d'hélicoptère, malgré la présence de dynamiques non modélisées (battements rotors) ou d'incertitudes sur les constantes d'inerties ou les coefficients aérodynamiques. Une commande robuste non linéaire par "boucle externe" et une commande H_∞ sont proposées dans [78] pour la stabilisation d'un modèle liant l'altitude, le lacet et l'angle d'azimut des pales du rotor principal d'un hélicoptère classique soumis à une rafale de vent.

Une autre façon de traiter ces incertitudes consiste à estimer en ligne les paramètres dont les valeurs sont méconnues. Des méthodes de commande adaptative ont été développées dans [25] pour estimer les paramètres intervenant dans la modélisation des forces aérodynamiques pour un modèle d'hélicoptère. Une commande adaptative est également utilisée dans [34] pour la commande du mouvement vertical d'un hélicoptère monté sur une plateforme expérimentale. La prise en compte d'incertitudes paramétriques liées à la variation des efforts aérodynamiques, lors des phases de décollage et d'atterrissage d'un hélicoptère, est réalisée dans [76] par backstepping adaptatif.

Cette utilisation combinée de la commande adaptative et du backstepping a été mise à profit dans [88, 89] pour estimer la résultante des efforts aérodynamiques provoqués par une rafale de vent sur un drone miniature à rotors contra rotatifs carénés et équipé de volets, et permettre sa stabilisation. Une commande par backstepping est également utilisée dans [23] pour le suivi de trajectoire d'un modèle réduit d'hélicoptère en présence de perturbations cette fois-ci estimées à l'aide d'un observateur grand gain.

2.3.5 Autres méthodes pour la synthèse de lois de commande

D'autres techniques de commande telles que la commande par mode glissant [14, 99, 112], par logique floue [103], par saturations imbriquées [19] ou encore par commande prédictive (cf Section 3.5) ont été utilisées pour le guidage pilotage de drones miniatures à voilure tournante.

Dans ce document, nous nous intéresserons plus particulièrement à la synthèse de lois de commande prédictives, et à la synthèse de lois de commande par fonction de Lyapunov dans le cas où l'état du système n'est pas entièrement mesuré. Un état de l'art spécifique sera réalisé pour chacune de ces approches et en fonction des problématiques associées.

La stratégie générale de commande que nous avons choisi d'adopter ici est une stratégie de commande hiérarchique. Elle permet la réalisation de lois de commande séparées pour la position et l'attitude du véhicule, et nous permettra d'utiliser et de comparer les différentes méthodes de synthèse que nous étudierons (commande par fonction de Lyapunov, commande prédictive).

2.4 Commande hiérarchique et perturbations singulières

L'utilisation d'une commande hiérarchique permet de commander le système considéré en le décomposant en deux sous-systèmes et en synthétisant une commande pour chacun d'entre eux. Cette décomposition est liée à une séparation des échelles de temps qui peut être formalisée et analysée à l'aide de la théorie des perturbations singulières.

2.4.1 Perturbations singulières

En commande des systèmes dynamiques, la méthode des perturbations singulières est utilisée pour analyser les systèmes composés de plusieurs sous-systèmes possédant des dynamiques différentes. Son formalisme ainsi que des résultats de stabilité concernant la commande de ces systèmes sont présentés dans [57, 62, 100]. Un aperçu exhaustif des différentes applications de ce type de méthode en aérospatial peut être trouvé dans [84]. Un exemple en est l'utilisation dans un problème de manoeuvre optimale pour des avions de chasse [18]. Cette théorie a également été appliquée à la synthèse de lois de commande pour des modèles d'hélicoptères [53, 85] ou pour une plateforme expérimentale dont la dynamique est séparée en trois échelles de temps [35, 36].

Nous rappelons ci-dessous le formalisme de cette méthode et la démarche utilisé pour l'analyse de la stabilité.

Le modèle standard utilisé pour représenter un système avec perturbation singulière est le suivant :

$$\dot{x} = f(t, x, z, \epsilon) \quad (2.51)$$

$$\epsilon \dot{z} = g(t, x, z, \epsilon) \quad (2.52)$$

avec f et g de classe \mathcal{C}^1 , $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}^m$, et où le paramètre $\epsilon > 0$ est petit ($\epsilon \ll 1$). On suppose que $(x = 0, z = 0)$ est un point d'équilibre de ce système.

Plus le paramètre ϵ est petit, plus la dynamique en z sera rapide par rapport à celle en x . D'où l'étude d'une séparation des échelles de temps entre les sous-systèmes (2.51) et (2.52).

En pratique, ce paramètre ϵ peut correspondre à une constante physique du système assurant une différence de dynamique entre (2.51) et (2.52) (constante de temps d'un système électrique couplé à un système mécanique par exemple). Ce paramètre peut également être introduit artificiellement en réalisant un contrôleur grands gains pour le sous-système (2.52).

Notons \underline{x} et \underline{z} les valeurs de x et z correspondant au cas $\epsilon = 0$. Dans ce cas, on obtient à partir de (2.52) l'équation algébrique

$$g(t, \underline{x}, \underline{z}, 0) = 0 \quad (2.53)$$

Le modèle (2.51,2.52) est dit sous "forme standard" [57] lorsque cette équation possède une ou plusieurs racines réelles distinctes

$$\underline{z} = \Phi(t, \underline{x}) \quad (2.54)$$

A chacune de ces racines correspond un "modèle réduit" défini par

$$\dot{\underline{x}} = f(t, \underline{x}, \Phi(t, \underline{x}), 0) \quad (2.55)$$

Ce modèle est également appelé "modèle à état quasi stationnaire" car, pour ϵ petit, l'état z converge très rapidement vers la racine (2.54) donnant une forme quasi-stationnaire à la dynamique de (2.52).

On définit la différence entre l'état z et sa valeur correspondant à l'état quasi-stationnaire par

$$y = z - \Phi(t, x) \quad (2.56)$$

Avec ce changement de variable et en introduisant $\tau = t/\epsilon$, on définit le "système de couche limite"

$$\frac{dy}{d\tau} = g(\tau, x, y + \Phi(\tau, x), \epsilon) \quad (2.57)$$

qui constitue le sous-système de dynamique rapide.

Nous rappelons maintenant le cadre général présenté dans [57] permettant d'analyser la stabilité du système (2.51,2.52).

2.4.2 Analyse de la stabilité

L'utilisation de la théorie des perturbations singulières pour la synthèse de lois de commande repose sur l'idée que, pour $\epsilon \ll 1$, les trajectoires en x et z du système (2.51, 2.52) peuvent être approximées par celles du modèle réduit (2.55) et du modèle de couche limite (2.57). On peut donc développer des lois de commande à partir de sous-modèles simplifiés correspondant à (2.55) et (2.57), puis ensuite chercher une condition sur la valeur du paramètre ϵ permettant de garantir la stabilité du système bouclé initial (2.51, 2.52).

Les étapes de cette analyse sont les suivantes : on suppose que le système réduit (2.55) est asymptotiquement stable, et que le système de couche limite (2.57) est asymptotiquement stable, uniformément en x . On suppose également que l'on dispose d'une fonction de Lyapunov¹ pour chacun de ces deux systèmes. En considérant le système initial (2.51, 2.52) comme une interconnexion des systèmes (2.55) et (2.57), on définit alors pour celui-ci une fonction de Lyapunov par combinaison linéaire des deux fonctions de Lyapunov précédentes. En dérivant cette fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système complet, on cherche une condition sur le paramètre ϵ permettant de garantir la stabilité.

Pour formaliser cette démarche d'une manière simple, on supposera que les systèmes (2.51, 2.52), (2.55) et (2.57) ne dépendent pas explicitement du temps. La démarche reste identique dans le cas contraire.

Soit $V(x)$ une fonction de Lyapunov pour le système réduit (2.55) telle que

$$\frac{\partial V}{\partial x} f(x, \Phi(x)) \leq -\alpha_1 \Psi_1^2(x) \quad (2.58)$$

où α_1 est une constante strictement positive et où Ψ_1 est une fonction définie positive de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

De même, soit $W(x, y)$ une fonction de Lyapunov pour le système de couche limite (2.57) telle que

$$\frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + \Phi(x)) \leq -\alpha_2 \Psi_2^2(y) \quad (2.59)$$

où α_2 est une constante strictement positive et où Ψ_2 est une fonction définie positive de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Pour s'assurer que la stabilité asymptotique du système de couche limite soit uniforme en x , on suppose de plus que $W(x, y)$ vérifie

$$W_1(y) \leq W(x, y) \leq W_2(y) \quad (2.60)$$

où W_1 et W_2 sont des fonctions définies positives.

On définit, pour le système complet, la fonction de Lyapunov

$$\mathcal{L}(x, y) = (1 - d)V(x) + dW(x, y) \quad (2.61)$$

avec $0 < d < 1$.

Pour calculer la dérivée de \mathcal{L} le long des trajectoires du système complet (2.51, 2.52), reformulons ce dernier en utilisant les coordonnées (x, y) .

Dans ces coordonnées, la relation (2.51) devient :

$$\dot{x} = f(x, y + \Phi(x)) \quad (2.62)$$

Calculons la dérivée de (2.56) par rapport à τ :

$$\frac{dy}{d\tau} = \epsilon \frac{dz}{dt} - \epsilon \frac{d\Phi(x)}{dt} \quad (2.63)$$

¹Les définitions de fonction de Lyapunov et fonction de Kyapunov candidate sont données en Annexe A. Ce sont ces définitions qui seront utilisées dans la suite de ce document.

Soit :

$$\frac{dy}{d\tau} = g(x, y + \Phi(x)) - \epsilon \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} f(x, y + \Phi(x)) \quad (2.64)$$

On dérive donc $\mathcal{L}(x, y)$ le long des trajectoires du système complet réécrit en (2.62-2.64) :

$$\dot{\mathcal{L}} = (1-d) \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + d \frac{\partial W}{\partial x} \frac{dx}{dt} + d \frac{\partial W}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & (1-d) \frac{\partial V}{\partial x} f(x, y + \Phi(x)) + \frac{d}{\epsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + \Phi(x)) \\ & - d \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} f(x, y + \Phi(x)) + d \frac{\partial W}{\partial x} f(x, y + \Phi(x)) \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & (1-d) \frac{\partial V}{\partial x} f(x, \Phi(x)) + \frac{d}{\epsilon} \frac{\partial W}{\partial y} g(x, y + \Phi(x)) \\ & + (1-d) \frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + \Phi(x)) - f(x, \phi(x))] \\ & + d \left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] f(x, y + \Phi(x)) \end{aligned} \quad (2.67)$$

Les deux premiers termes correspondent aux dérivées de V et W le long des trajectoires du système réduit et du système de couche limite. Ces termes sont définis négatifs d'après (2.58) et (2.59). Les deux derniers termes proviennent des effets d'interconnection de la dynamique lente et de la dynamique rapide. Leur effet est négligé pour $\epsilon = 0$. On suppose que ces termes de perturbation satisfont

$$\frac{\partial V}{\partial x} [f(x, y + \Phi(x)) - f(x, \phi(x))] \leq \beta_1 \Psi_1(x) \Psi_2(x) \quad (2.68)$$

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] f(x, y + \Phi(x)) \leq \beta_2 \Psi_1(x) \Psi_2(y) + \gamma \psi_2^2(y) \quad (2.69)$$

où β_1 , β_2 et γ sont des constantes positives ou nulles. En utilisant ces relations avec (2.58) et (2.59), la dérivée de L peut être bornée par

$$\dot{\mathcal{L}} \leq -\Psi(x, y) \Lambda \Psi(x, y) \quad (2.70)$$

avec $\Psi(x, y) = [\Psi_1(x)^T \quad \Psi_2(y)^T]^T$ et

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (1-d)\alpha_1 & -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 \\ -\frac{1}{2}(1-d)\beta_1 - \frac{1}{2}d\beta_2 & d(\frac{\alpha_2}{\epsilon} - \gamma) \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

Cette expression est définie négative en Ψ si Λ est défini positive. Ceci est obtenu pour la condition $\epsilon < \epsilon_d$ avec

$$\epsilon_d = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \gamma + \frac{1}{1-d} [(1-d)\beta_1 + d\beta_2]^2} \quad (2.72)$$

En choisissant la valeur de d maximisant ϵ_d , on choisit $d = \beta_1 / (\beta_1 + \beta_2)$ et

$$\epsilon^* = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \gamma + \beta_1 \beta_2} \quad (2.73)$$

La stabilité asymptotique du système (2.51, 2.52) est alors obtenue pour tout $\epsilon < \epsilon^*$.

Cette méthode permet donc de définir une condition sur le paramètre ϵ permettant de garantir la stabilité asymptotique du système complet à partir de la stabilité asymptotique du système réduit et du système de couche limite. L'application de cette méthode n'est pas toujours aisée dans la mesure où l'on doit déterminer une fonction de Lyapunov pour chacun des deux sous systèmes et vérifier les conditions (2.68 - 2.69).

L'utilisation de cette méthode pour l'analyse de la stabilité du modèle (2.38) commandé par une approche hiérarchique sera discutée par la suite, dans le cas de la stabilisation et du suivi de trajectoire.

2.5 Stratégie de commande pour la stabilisation

Le système dispose de quatre entrées de commande (le scalaire \mathcal{T} et les trois composantes de Γ) et de six degrés de libertés (trois coordonnées en position et trois angles d'attitude). En principe, on ne peut donc stabiliser que quatre sorties indépendantes choisies parmi les six degrés de liberté du système, soit $C_6^4 = 15$ choix possibles. Le choix de ces sorties est néanmoins conditionné par la dynamique du système et ne peut être réalisé arbitrairement [50].

Par exemple, les couples (x, θ) et (y, ϕ) ne peuvent pas être considérés comme des sorties indépendantes. En effet, dans le cas sans vent, la stabilisation de la coordonnée en position impose la stabilisation à zéro de l'angle d'attitude correspondant, ce qui interdit une stabilisation du type $(x, \theta) \rightarrow (x^d, \alpha)$ ou $(y, \phi) \rightarrow (y^d, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$. L'élimination des quadruplets contenant ces paires, parmi les 15 choix de sorties possibles, conduit aux possibilités suivantes :

- (x, z, ϕ, ψ) : ce choix exclut le mouvement latéral,
- (x, z, θ, ψ) : par ce choix, on ne s'intéresse pas au mouvement longitudinal,
- (z, θ, ϕ, ψ) : ce choix correspond à une utilisation du drone dans un mode téléopéré par un pilote où celui-ci définit la consigne en attitude,
- (x, y, z, ψ) : ce choix correspond à une utilisation automatique du drone

En pratique, on considérera donc ce dernier choix de sorties, et on cherchera à stabiliser le véhicule autour d'un point défini par une position $\xi^d = [x^d \ y^d \ z^d]^T$ et un lacet ψ^d donnés. Par un changement de variables, ce problème peut être ramené à une stabilisation autour du point d'équilibre $(\xi_e = 0, v_e = 0, R_e = I_3, \Omega_e = 0)$, où I_3 désigne la matrice identité de \mathbb{R}^3 . C'est ce problème de stabilisation que nous considérerons pour la synthèse des lois de commande.

2.5.1 Guidage : commande en position

Pour la dynamique de translation, le vecteur $\mathcal{T}R^d e_3$ est considéré comme vecteur de commande en position. On cherchera à déterminer sa valeur désirée en synthétisant une loi de commande de la forme

$$\mathcal{T}R^d e_3 = f(\xi, v) \quad (2.74)$$

permettant de faire respectivement converger la position ξ et la vitesse v vers leurs valeurs d'équilibre.

Ce vecteur de commande sera ensuite décomposé en deux parties : en son module

$$\mathcal{T} = \|f(\xi, v)\| \quad (2.75)$$

représentant la première commande du système, et en sa direction

$$R^d e_3 = \frac{1}{\mathcal{T}} f(\xi, v) \quad (2.76)$$

représentant une valeur désirée R^d pour l'orientation R du drone.

L'orientation R^d peut être calculée à partir de la direction définie par (2.76), d'une valeur désirée ψ^d du lacet et de la paramétrisation (2.9) de l'orientation du drone utilisant les pseudo angles d'Euler (cf Annexe B).

Cette valeur désirée R^d de l'orientation est ensuite considérée comme une consigne pour la partie rotation.

2.5.2 Pilotage : commande en attitude

A partir de la valeur désirée R^d et de sa dynamique, on peut définir une vitesse de rotation désirée Ω^d vérifiant

$$\dot{R}^d = R^d \Omega_{\times}^d \quad (2.77)$$

et telle que l'on ait, à l'équilibre, $\Omega^d = \Omega_e = 0$ ($\dot{R}_e^d = 0$). Une méthode permettant de calculer Ω^d à partir de la connaissance du vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$ est présentée en Annexe C.

Pour la dynamique de rotation, on cherchera donc à synthétiser une loi de commande de la forme

$$\Gamma = h(R, R^d, \Omega, \Omega^d) \quad (2.78)$$

permettant de faire converger l'orientation R du drone vers sa valeur désirée R^d , et la vitesse de rotation Ω vers Ω^d .

2.5.3 Commande en cascade

Cette stratégie de commande est schématisée en Figure 2.5. Le contrôleur est constitué de la mise en cascade du contrôleur en position et du contrôleur en attitude.

La décomposition en deux sous systèmes (translation et rotation) conduit en pratique à une séparation des échelles de temps.

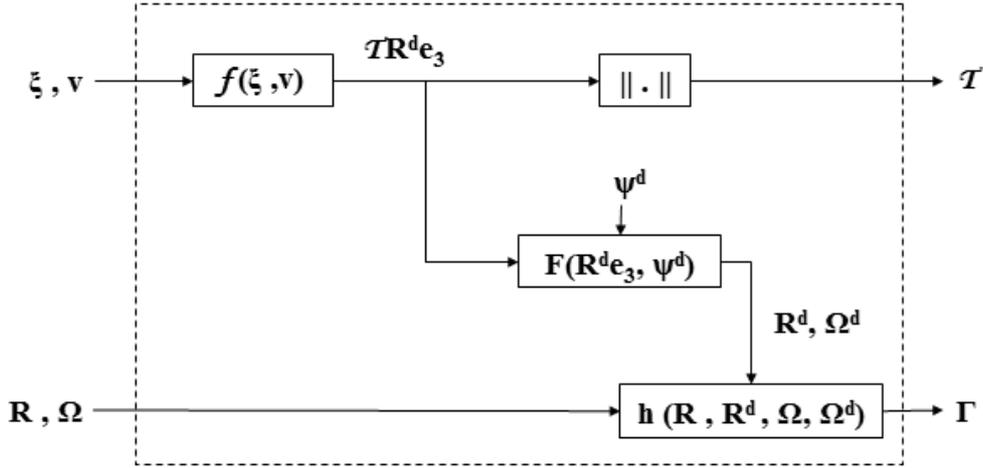


FIG. 2.5 – Commande en cascade pour la stabilisation

2.5.4 Particularité des véhicules possédant des plans de symétrie

On considère les véhicules pour lesquels les plans (e_1^b, e_3^b) et (e_2^b, e_3^b) sont des plans de symétrie. Ce cas de figure est, par exemple, rencontré pour les configurations monorotor caréné avec un axe principal, ou les véhicules de type quadrirotor. Le tenseur d'inertie du véhicule prend alors la forme suivante :

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

avec $I_1 = I_2$. On a alors

$$\Omega_{\times} I \Omega = \begin{bmatrix} (I_3 - I_2)\omega_y\omega_z \\ (I_1 - I_3)\omega_x\omega_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

et, dans le cas non perturbé ($M_{ext} = 0$)

$$I_3 \dot{\omega}_r = \Gamma_3 \quad (2.81)$$

La commande en lacet peut alors être découplée [89, 114].

2.5.5 Analyse de la séparation des échelles de temps

La synthèse séparée de lois de commande pour la stabilisation en position et en attitude est basée sur une séparation des échelles de temps. Celle-ci peut être analysée à l'aide de la théorie des perturbations singulières présentée en Section 2.4. Cependant, l'application directe de ce formalisme pour la commande du modèle (2.38) nécessite la connaissance de fonctions de Lyapunov appropriées pour les sous-systèmes de translation et de rotation, et n'est pas aisée dans tous les cas. Elle sera plus particulièrement abordée en Section 9.4.

On se propose ici de se baser sur un exemple simple afin d'en dégager les hypothèses pratiques associées à la synthèse des lois de guidage-pilotage pour la stabilisation du modèle (2.38) par une séparation des échelles de temps.

Exemple 1

Considérons le système

$$\dot{X} = V \quad (2.82)$$

$$\epsilon \dot{V} = U \quad (2.83)$$

avec $X, V, U \in \mathbb{R}^n$, et $0 < \epsilon \ll 1$. En considérant V comme vecteur de commande de l'équation (2.82), on définit la loi

$$V^d = -k_1 X \quad (2.84)$$

avec $k_1 > 0$. On introduit alors l'erreur

$$\tilde{V} = V - V^d = V + k_1 X \quad (2.85)$$

et l'on calcule la dérivée

$$\epsilon \dot{\tilde{V}} = \epsilon \dot{V} - \epsilon \dot{V}^d = U + \epsilon k_1 \dot{X} = U + \epsilon k_1 V = U + \epsilon k_1 (\tilde{V} - k_1 X) \quad (2.86)$$

Choisissons la loi de commande

$$U = -k_2 \tilde{V} \quad (2.87)$$

avec $k_2 > 0$. Le système (2.82,2.83) peut alors se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -k_1 X + \tilde{V} \\ \epsilon \dot{\tilde{V}} &= -(k_2 - \epsilon k_1) \tilde{V} - \epsilon k_1^2 X \end{aligned} \quad (2.88)$$

On définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \|X\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{V}\|^2 \quad (2.89)$$

et l'on calcule sa dérivée le long des trajectoires du système (2.88) :

$$\dot{\mathcal{L}} = -k_1 \|X\|^2 - \left(\frac{k_2}{\epsilon} - k_1\right) \|\tilde{V}\|^2 + X^T \tilde{V} - k_1^2 \tilde{V}^T X \quad (2.90)$$

Cette fonction est définie négative pour tout $\epsilon < \epsilon^*$ avec

$$\epsilon^* = \frac{4k_1 k_2}{4k_1^2 + (1 - k_1^2)^2} \quad (2.91)$$

Et la stabilité du système bouclé est alors garantie.

Pour $\epsilon < \epsilon^* \ll 1$, la relation

$$\epsilon \dot{\tilde{V}} = U - \epsilon \dot{V}^d \quad (2.92)$$

peut être approximée par $U = 0$, soit d'après (2.87) : $\tilde{V} = 0$. Pour ϵ faible, on peut donc considérer que l'on a $\dot{X} = V^d$ (modèle réduit) et réaliser la synthèse du vecteur de commande V^d sous cette hypothèse.

En pratique, le gain k_1 sera choisi faible pour permettre d'assurer la décomposition des

échelles de temps en réalisant une commande à grand gain pour U . Si l'on examine alors la relation

$$\epsilon \dot{\tilde{V}} = U - \epsilon \dot{V}^d = U + \epsilon k_1(-k_1 X + \tilde{V}) \quad (2.93)$$

on s'aperçoit que la contribution du terme en \dot{V}^d peut être négligée devant celle de la commande U . On peut donc chercher à synthétiser la commande U en se plaçant sous l'hypothèse $V^d = \text{constante}$.

De manière pratique, on pourra donc déterminer le vecteur de commande V^d en supposant $V = V^d$ et synthétiser la commande U en supposant $V^d = \text{cste}$. L'analyse de la stabilité pourra ensuite être menée en considérant les fonctions de Lyapunov utilisées lors de la synthèse de ces deux commandes.

Hypothèses pour la synthèse de la commande

En s'inspirant de l'exemple précédent, on peut mener une analyse similaire pour synthétiser des lois de commande pour la stabilisation du modèle (2.38).

Une décomposition des échelles de temps permettra ainsi de considérer la dynamique de translation comme la dynamique lente, et la dynamique de rotation comme la dynamique rapide en introduisant un facteur $0 < \epsilon \ll 1$ tel que

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{1}{m} \mathcal{T} R e_3 + g e_3 + \frac{1}{m} F_{ext} \\ \epsilon \dot{R} = R \Omega_{\times} \\ \epsilon I \dot{\Omega} = -\Omega_{\times} I \Omega + \Gamma + M_{ext} \end{cases} \quad (2.94)$$

De manière similaire à l'exemple précédent, la synthèse du vecteur de commande en position $\mathcal{T} R^d e_3$ peut se faire sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2 *On suppose que la convergence de la dynamique de rotation est beaucoup plus rapide que celle de la dynamique de translation, et que l'on a ainsi $R = R^d$.*

De même, pour la stabilisation, la synthèse de la loi de commande en attitude Γ , pourra se faire sous l'hypothèse

Hypothèse 3 *On suppose que la convergence de la dynamique de translation est beaucoup plus lente que celle de la dynamique de rotation, et que l'on a ainsi, dans le cas de la stabilisation, $\dot{R}^d = 0$, et donc $\Omega^d = 0$.*

En utilisant une séparation des échelles de temps, les lois de commande (2.74) et (2.78) peuvent donc être synthétisées sous les Hypothèses 2 et 3. Si l'analyse de la stabilité devra par contre être menée pour le système initial complet, la synthèse des lois de commande peut se faire en considérant deux sous-systèmes simplifiés.

2.5.6 Modèles pour la synthèse des lois de commande

En utilisant une séparation des échelles de temps, et d'après l'hypothèse 2, la synthèse de la commande en position (2.74) (loi de guidage) peut s'effectuer à partir de la représentation suivante de la dynamique de translation :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 \quad \left(+\frac{1}{m}F_{ext}\right) \end{cases} \quad (2.95)$$

Pour la synthèse de la commande en attitude (2.78), on définit la matrice de déviation

$$\tilde{R} = (R^d)^T R \quad (2.96)$$

En utilisant l'hypothèse 3, la dérivée de l'orientation désirée R^d peut être considérée comme nulle. On a alors

$$\dot{\tilde{R}} = (R^d)^T \dot{R} = (R^d)^T R \Omega_{\times} \quad (2.97)$$

et en utilisant (2.96) :

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{R} \Omega_{\times} \quad (2.98)$$

On en déduit le modèle suivant, qui pourra être utilisé pour la synthèse de la commande en attitude :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = \tilde{R} \Omega_{\times} \\ I \dot{\Omega} = -\Omega_{\times} I \Omega + \Gamma(+M_{ext}) \end{cases} \quad (2.99)$$

2.6 Suivi de trajectoire

Nous avons présenté ci-dessus des éléments pour l'élaboration de lois de commande en position et en attitude dans le cas de la stabilisation. Intéressons-nous maintenant au cas où l'on cherche à synthétiser des lois de commande pour le suivi d'une trajectoire de référence supposée définie au cours du temps par la donnée d'une position désirée ξ^d , et de ses dérivées temporelles $v^d = \dot{\xi}^d$ et $\dot{v}^d = \ddot{\xi}^d$, ainsi que d'un lacet désiré ψ^d .

2.6.1 Loi de commande en position

Pour la partie translation, on cherche à déterminer une loi de commande de la forme

$$\mathcal{T}R^d e_3 = f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d) \quad (2.100)$$

permettant de faire converger la position ξ et la vitesse v du drone vers les valeurs de référence ξ^d et v^d . Comme précédemment, ce vecteur de commande est ensuite séparé en son module

$$\mathcal{T} = \|f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d)\| \quad (2.101)$$

et en la direction

$$R^d e_3 = \frac{1}{\mathcal{T}} f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d) \quad (2.102)$$

utilisée pour le calcul de l'orientation désirée à partir de la référence en lacet ψ^d (cf Annexe B).

2.6.2 Loi de commande en attitude

Dans le cas du suivi de trajectoire, la référence en lacet $\psi^d(t)$ intervenant dans le calcul de R^d (cf Annexe B) peut être choisie non constante. De plus, la référence en position $\xi^d(t)$ et ses dérivées successives interviennent également dans ce calcul à travers la relation (2.102). La dynamique de R^d dépend donc non seulement de l'état de la dynamique de translation, mais également de la référence. La vitesse de rotation désirée Ω^d vérifiant (2.77) peut alors être décomposée² en

$$\Omega^d = \Omega^d(X) + \Omega^d(t) \quad (2.103)$$

où la première composante $\Omega^d(t)$ ne dépend explicitement que de la trajectoire de référence donnée par $\xi^d(t)$, $v^d(t)$, $\dot{v}^d(t)$, $\psi^d(t)$ et leurs dérivées temporelles, et où la seconde composante $\Omega^d(X)$ dépend de l'état de la dynamique de translation, noté ici X . Le problème précédent de stabilisation est retrouvé pour $\Omega^d(t) = 0$.

On cherchera, pour la dynamique de rotation, à synthétiser une commande de la forme (2.78) permettant de faire converger R vers R^d et Ω vers Ω^d .

2.6.3 Commande en cascade

Comme dans le cas de la stabilisation, un contrôleur en cascade est réalisé, composé du contrôleur en position et du contrôleur en attitude (2.6).

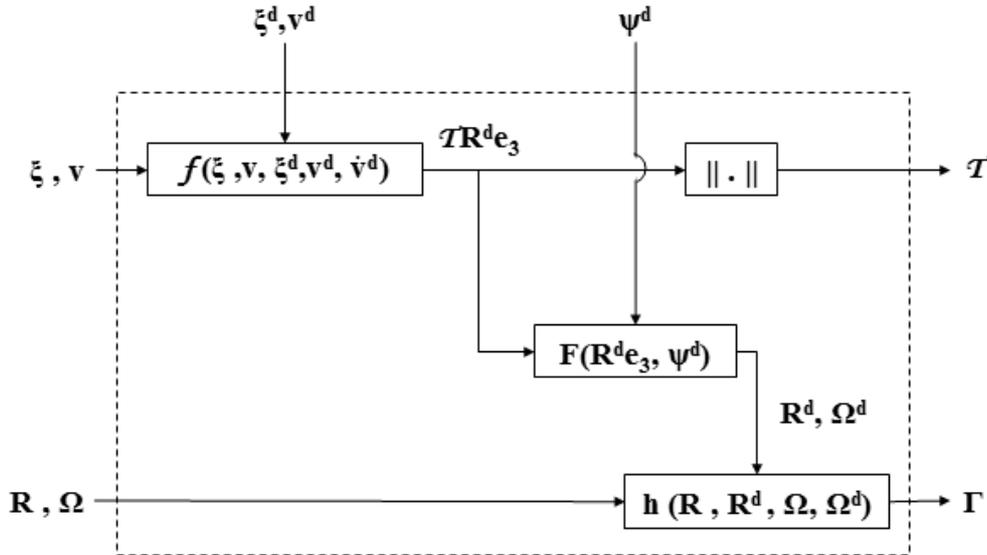


FIG. 2.6 – Commande en cascade pour le suivi de trajectoire

2.6.4 Analyse de la séparation des échelles de temps

Nous nous proposons de considérer un exemple simple qui servira de base pour l'analyse de la séparation des échelles de temps dans le cas du suivi de trajectoire.

²Cette notion de décomposition en une composante dépendant de l'état et une composante ne dépendant que de la référence est présentée en Annexe C et peut être retrouvée au sein de l'exemple introductif de la Section 2.6.4

Exemple 2

Reprenons le système de l'Exemple 1 présenté en Section 2.5.5. On cherche cette fois-ci à réaliser le suivi d'une trajectoire définie par une référence X^r et ses dérivées $V^r = \dot{X}^r$, $\dot{V}^r = \ddot{X}^r$.

On définit les écarts

$$\delta_1 = X - X^r \quad \delta_2 = V - V^r \quad (2.104)$$

Avec ces nouvelles coordonnées, le système (2.82, 2.83) peut s'écrire

$$\dot{\delta}_1 = \delta_2 \quad (2.105)$$

$$\epsilon \dot{\delta}_2 = U - \epsilon \dot{V}^r \quad (2.106)$$

Pour l'équation (2.105), on définit le vecteur de commande

$$\delta_2^d = -k_1 \delta_1 \quad (2.107)$$

avec $k_1 > 0$. On introduit l'erreur

$$\tilde{\delta}_2 = \delta_2 - \delta_2^d \quad (2.108)$$

Le système peut alors se réécrire sous la forme

$$\dot{\delta}_1 = -k_1 \delta_1 + \tilde{\delta}_2 \quad (2.109)$$

$$\epsilon \dot{\tilde{\delta}}_2 = U + \epsilon k_1 (-k_1 \delta_1 + \tilde{\delta}_2) - \epsilon \dot{V}^r \quad (2.110)$$

En choisissant la commande

$$U = -k_2 \tilde{\delta}_2 + \epsilon \dot{V}^r \quad (2.111)$$

on obtient

$$\epsilon \dot{\tilde{\delta}}_2 = -k_2 \tilde{\delta}_2 + \epsilon k_1 (-k_1 \delta_1 + \tilde{\delta}_2) \quad (2.112)$$

On définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \|\delta_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\delta}_2\|^2 \quad (2.113)$$

et l'on montre, de manière similaire à l'exemple traité dans le cas de la stabilisation, que sa dérivée

$$\dot{\mathcal{L}} = -k_1 \|\delta_1\|^2 - \left(\frac{k_2}{\epsilon} - k_1\right) \|\tilde{\delta}_2\|^2 + (1 - k_1^2) \delta_1^T \tilde{\delta}_2 \quad (2.114)$$

est définie négative pour tout $\epsilon < \epsilon^*$ avec

$$\epsilon^* = \frac{4k_1 k_2}{4k_1^2 + (1 - k_1^2)^2} \quad (2.115)$$

Pour $\epsilon < \epsilon^*$ on peut ainsi garantir que l'on a $X \rightarrow X^r$ et $V \rightarrow V^r$.

Comme pour le cas de la stabilisation, pour ϵ petit, on peut déterminer le vecteur de commande δ_2^d en considérant l'équation (2.105) sous l'hypothèse $\delta_2 = \delta_2^d$.

De même que précédemment, le gain k_1 sera choisi faible pour permettre d'assurer la décomposition des échelles de temps en réalisant une commande à grands gains pour U . Dans la relation (2.110), le terme $\epsilon k_1(-k_1\delta_1 + \tilde{\delta}_2)$ pourra ainsi être négligé devant la contribution de la commande. Ce n'est pas le cas du terme $(-\epsilon\dot{V}^r)$ qui doit être compensé par celle-ci.

Cherchons à rattacher cette dernière hypothèse au calcul de la dérivée de V^d . On a

$$\delta_2^d = (V - V^r)^d = V^d - V^r \quad (2.116)$$

En utilisant (2.107), on en déduit

$$V^d = -k_1(X - X^r) + V^r \quad (2.117)$$

On calcule maintenant la dérivée

$$\epsilon \overbrace{(V - V^d)}^{\cdot} = \epsilon\dot{V} - \epsilon\dot{V}^d = U + \epsilon k_1(V - V^r) - \epsilon\dot{V}^r \quad (2.118)$$

Cette dernière équation correspond à la relation (2.110) où l'on peut identifier que le terme $(\epsilon k_1(-k_1\delta_1 + \tilde{\delta}_2) - \epsilon\dot{V}^r)$ provient de la dérivée temporelle de V^d . En posant

$$\dot{V}^d(\delta_1, \tilde{\delta}_2) = k_1(-k_1\delta_1 + \tilde{\delta}_2) \quad \dot{V}^d(t) = -\dot{V}^r \quad (2.119)$$

la dérivée de V^d peut être décomposée sous la forme

$$\dot{V}^d = \dot{V}^d(\delta_1, \tilde{\delta}_2) + \dot{V}^d(t) \quad (2.120)$$

D'après l'analyse menée ci-dessus, le terme dépendant de l'état $\dot{V}^d(\delta_1, \tilde{\delta}_2)$ pourra être négligé pour la synthèse de la commande U , mais le terme $\dot{V}^d(t)$ devra être compensé.

De manière pratique, on pourra donc déterminer le vecteur de commande V^d en supposant $V = V^d$ et synthétiser la commande U en négligeant la composante de \dot{V}^d dépendant de l'état. L'analyse de la stabilité pourra ensuite être menée en utilisant les fonctions de Lyapunov utilisées lors de la synthèse de ces deux commandes.

Hypothèses pour la synthèse de la commande

En s'inspirant de l'exemple précédent, on peut mener une analyse similaire pour le développement de lois de commande pour le suivi de trajectoire du modèle (2.38).

Une décomposition des échelles de temps permettra ainsi de considérer la dynamique de translation comme la dynamique lente, et la dynamique de rotation comme la dynamique rapide en introduisant un facteur $0 < \epsilon \ll 1$ comme présenté en (2.94).

Comme précédemment, la synthèse du vecteur de commande en position $\mathcal{T}R^d e_3$ peut se faire sous l'Hypothèse 2 (Section 2.5.5) toujours valide dans le cas du suivi de trajectoire.

Pour la synthèse de la loi de commande en attitude Γ , l'Hypothèse 3 énoncée en section 2.5.5 dans le cas de la stabilisation n'est plus valide dans le cas du suivi de trajectoire. En effet, seule la composante $\Omega^d(X)$, où X est utilisé pour représenter l'état de la dynamique de translation, peut être négligée lorsque l'on se place en échelle de temps rapide. La composante $\Omega^d(t)$ est liée à la dynamique de la référence, qui peut générer une erreur dans la déviation angulaire si elle est négligée. On considérera donc l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4 *On suppose que la convergence de la dynamique de translation est beaucoup plus lente que celle de la dynamique de rotation, et que l'on a ainsi, dans le cas du suivi de trajectoire, $\Omega^d(X) = 0$, où X est utilisé pour représenter l'état de la dynamique de translation, soit $\Omega^d = \Omega^d(t)$.*

En utilisant une séparation des échelles de temps, les lois de commande (2.100) et (2.78) peuvent donc être synthétisées sous les Hypothèses 2 et 4. L'analyse de la stabilité devra par contre être menée pour le système initial complet, alors que la synthèse des lois de commande peut se faire en considérant deux sous-systèmes simplifiés.

2.6.5 Modèles pour la synthèse des lois de commande

Considérons les équations définissant la dynamique en translation du modèle (2.38). On introduit les variables d'écart

$$\epsilon_1 = \xi - \xi^d \quad (2.121)$$

$$\epsilon_2 = v - v^d \quad (2.122)$$

Avec ces notations et en réalisant une séparation des échelles de temps, on utilise l'hypothèse 2 pour obtenir le modèle

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{T}{m} R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \quad \left(+ \frac{1}{m} F_{ext} \right) \end{cases} \quad (2.123)$$

qui pourra être utilisé pour la synthèse de lois de guidage.

Pour la synthèse de la loi de commande en attitude, on utilise la matrice de déviation \tilde{R} définie par (2.96). Sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\dot{\tilde{R}} = \overbrace{(R^d)^T}^{\dot{}} R + (R^d)^T \dot{R} \quad (2.124)$$

D'après (2.77), celle-ci s'écrit

$$\dot{\tilde{R}} = (R^d \Omega_{\times}^d)^T R + (R^d)^T R \Omega_{\times} \quad (2.125)$$

avec, sous l'hypothèse 4, $\Omega^d = \Omega^d(t)$. En utilisant (2.96) et $(\Omega_{\times}^d)^T = -\Omega_{\times}^d$, on a

$$\dot{\tilde{R}} = -\Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \quad (2.126)$$

Puisque pour toute matrice A de $SO(3)$ on a $AA^T = I_a$, on peut écrire

$$\dot{\tilde{R}} = -\tilde{R} \tilde{R}^T \Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \quad (2.127)$$

et en utilisant le fait que pour toute matrice A de $SO(3)$ et tout vecteur b de \mathbb{R}^3 , on a la relation $Ab_{\times}A^T = (Ab)_{\times}$, on obtient

$$\dot{\tilde{R}} = -\tilde{R}(\tilde{R}^T \Omega^d)_{\times} + \tilde{R} \Omega_{\times} \quad (2.128)$$

Factorisant maintenant par \tilde{R} :

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{R}(\Omega - \tilde{R}^T \Omega^d)_\times \quad (2.129)$$

Comme suggéré dans [107], on introduit $\bar{\Omega}^d$ et $\tilde{\Omega}$ définis par

$$\bar{\Omega}^d = \tilde{R}^T \Omega^d \quad (2.130)$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega}^d \quad (2.131)$$

En utilisant ces notations, la relation (2.129) s'écrit

$$\dot{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \quad (2.132)$$

Avec ces notations, on a également

$$I\dot{\tilde{\Omega}} = I(\dot{\tilde{\Omega}} - \dot{\tilde{\Omega}}^d) = -\Omega \times I\Omega + \Gamma - I\dot{\tilde{\Omega}}^d \quad (+M_{ext}) \quad (2.133)$$

Calculons le terme $\dot{\tilde{\Omega}}^d$:

$$\dot{\tilde{\Omega}}^d = \overbrace{\tilde{R}^T \Omega^d}^{\dot{\tilde{R}}^T \Omega^d + \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d} = (\tilde{R}\tilde{\Omega}_\times)^T \Omega^d + \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d = -\tilde{\Omega}_\times \tilde{R}^T \Omega^d + \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (2.134)$$

soit

$$\dot{\tilde{\Omega}}^d = -\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d + \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (2.135)$$

On remplace dans (2.133) :

$$I\dot{\tilde{\Omega}} = -\Omega \times I\Omega + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (+M_{ext}) \quad (2.136)$$

et en utilisant $\Omega = \tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d$:

$$I\dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (+M_{ext}) \quad (2.137)$$

En regroupant les équations (2.132) et (2.137), on obtient le système suivant qui pourra être utilisé pour la synthèse de loi de pilotage :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I\dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (+M_{ext}) \end{cases} \quad (2.138)$$

On dispose ainsi de modèles permettant la synthèse de lois de commande pour le modèle (2.38), dans le cas de la stabilisation et du suivi de trajectoire, en utilisant une stratégie de commande basée sur une séparation des échelles de temps.

Conclusion de la Partie I

Dans cette première partie, nous nous sommes intéressés au concept de drone miniature, véhicule aérien de petite taille sans pilote humain, et nous avons présenté une introduction au problème de leur commande.

Au cours du **Chapitre 1**, nous avons brièvement présenté le contexte historique associé à l'apparition des premiers drones. Nous avons également vu quelles applications peuvent être envisagées pour les drones miniatures à voilure tournante, véhicules capables de vol stationnaire et de décollage et d'atterrissage vertical. Différentes configurations de véhicules ont été mentionnées : hélicoptère classique, quadrirotor, double rotor contrarotatif, etc. Pour pouvoir évoluer de manière autonome, un drone miniature doit être équipé d'un système de décision et de commande remplaçant les actions d'un pilote humain. C'est le système de commande permettant d'automatiser son vol qui fera l'objet de notre étude dans les parties suivantes.

Dans le **Chapitre 2**, nous avons vu la façon dont est organisé ce système de décision et de commande. L'action du pilote humain y est remplacée par des algorithmes de guidage-pilotage. Le type d'algorithmes que nous nous sommes proposés d'étudier sont basés sur une représentation de la dynamique du véhicule. Pour modéliser cette dynamique, nous avons vu que plusieurs niveaux de représentation peuvent être considérés : dynamique des actionneurs, dynamique des rotors, processus de génération de la résultante des forces et des moments, dynamique du solide. Ce dernier niveau de représentation indépendant de la configuration de véhicule choisie est celui que nous utiliserons pour la synthèse de lois de commande. Nous avons présenté une modélisation, couramment utilisée dans la littérature, permettant de représenter la dynamique d'un drone miniature avec cette approche de type mécanique du solide. Le modèle non linéaire à six degrés de liberté obtenu est sous-actionné et généralement à déphasage non minimal. Cette dernière propriété rend complexe la synthèse de lois de commande. Comme dans la plupart des approches rencontrées, nous avons choisi de développer de lois de commande en ignorant le terme de couplage responsable de l'instabilité de la dynamique des zéros du système.

Au cours de ce même chapitre, nous avons présenté un état de l'art concernant les stratégies de commande rencontrées dans la littérature pour ce type de modèle (commande par extension dynamique, commande hiérarchique) et diverses méthodes pour la synthèse des lois de commande (commande linéaire par retour d'état, commande robuste, backstepping, etc.). La stratégie de commande que nous avons choisie est la commande hiérarchique. Elle nous permettra de développer différents types de lois (commande prédictive, commande par fonction de Lyapunov) et de les comparer. Elle présente également l'intérêt pratique de pouvoir prendre en compte des différences de dynamiques entre les mouvements en rotation et en translation du véhicule. Par ce type d'approche, le système est en effet décomposé en deux parties : dynamique de translation et dynamique de rotation. Deux contrôleurs distincts

peuvent alors être réalisés en considérant une séparation des échelles de temps. Nous avons vu que cette séparation peut être étudiée de manière formelle par la théorie des perturbations singulières. En proposant deux exemples d'application de ce cadre théorique, dans le cas de la stabilisation et dans le cas d'un suivi de trajectoire, nous avons déduit des hypothèses pouvant être utilisées pour le développement des lois de guidage pilotage.

Ainsi, en considérant une séparation des échelles de temps, nous avons vu que la commande en position peut être réalisée en supposant que l'orientation du drone atteint instantanément sa valeur de consigne. Nous avons également montré que la commande en attitude peut être réalisée en négligeant certaines composantes de la dérivée temporelle de la consigne en orientation, fournie par la loi de guidage. Si le développement des lois de commande peut se faire sous ces hypothèses simplificatrices, la stabilité du système bouclé doit, quant à elle, être analysée en considérant le système initial non simplifié.

Nous nous proposons maintenant d'étudier une première méthode permettant la synthèse de lois de guidage-pilotage. Cette classe d'approches, présentée dans la partie suivante, est basée sur la commande prédictive.

Deuxième partie
Commande prédictive

Contenu de la Partie II

Cette Deuxième Partie sera consacrée à l'étude d'approches de commande prédictive ainsi qu'à leur application à la synthèse de lois de guidage-pilotage. Nous y présenterons une introduction générale à la commande prédictive, et mettrons en évidence les avantages que peut offrir cette classe de contrôleurs, à travers l'étude d'une approche prédictive linéaire fréquemment utilisée dans la littérature. Nous proposerons ensuite deux algorithmes de commande prédictive non linéaires pour le développement de lois de guidage-pilotage.

Le **Chapitre 3** consiste en une introduction à la commande prédictive. Nous présenterons ensuite de manière formelle la définition générale d'un problème de commande prédictive. Nous discuterons alors des problèmes de stabilité de ce type d'approches et présenterons les principales solutions proposées dans la littérature. La commande prédictive faisant intervenir la résolution d'un problème d'optimisation pour le calcul de la commande, nous mentionnerons également quelques méthodes de résolution existant et présenterons une discussion sur le choix de certains éléments de la formulation de ce problème (fonctionnelle coût, longueur d'horizon de prédiction). Enfin, nous dresserons un état de l'art concernant l'utilisation de méthodes prédictives pour la commande de modèles de drones miniatures.

Une première approche prédictive sera étudiée au **Chapitre 4**, dans le cadre de systèmes linéaires discrets, afin de mettre en évidence les propriétés et avantages liés à la commande prédictive. Nous montrerons, par cette approche classique, comment formuler le problème du calcul de la commande et présenterons sa résolution dans le cas non contraint et non perturbé. Dans le cas où l'état du système n'est pas entièrement mesurable et dans le cas perturbé, nous présenterons l'utilisation simultanée d'une commande prédictive linéaire à critère quadratique et d'un filtre de Kalman. Nous proposerons ensuite l'application de cette commande Linéaire Quadratique Gaussienne au guidage du modèle de drone présenté en Partie I.

Une première approche de commande prédictive non linéaire sera proposée en **Chapitre 5**. Nous montrerons la particularité de celle-ci par rapport aux formulations de la littérature mêlant commande prédictive et fonctions de Lyapunov. L'approche proposée, définissant une commande à deux composantes (composante nominale analytique par fonction de Lyapunov et composante prédictive), sera formalisée dans le cas de systèmes continus non linéaires affines en la commande. Nous proposerons ensuite un algorithme de commande prédictive adaptative, par extension de l'approche précédente au cas de systèmes possédant des paramètres inconnus ou incertains. Une analyse de la stabilité sera proposée dans les deux cas évoqués ci-dessus, ainsi que dans l'application que nous présenterons pour le guidage-pilotage.

Dans le **Chapitre 6**, nous présenterons un algorithme de commande prédictive contractante non linéaire issu de la littérature, et basé sur l'utilisation d'une contrainte stabilisante.

Nous proposerons une extension de cet algorithme permettant une optimisation du facteur de contraction définissant cette contrainte. Une application au guidage-pilotage sera enfin présentée, avec une analyse de la stabilité, ainsi qu'une application à l'évitement d'obstacle.

Chapitre 3

Introduction à la commande prédictive

3.1 Introduction

Pour stabiliser un système dynamique, la plupart des méthodes traditionnelles utilise une fonction de l'écart entre l'état actuel du système et l'état désiré pour calculer la commande. Dans le cas d'un suivi de trajectoire, des termes d'anticipation peuvent être ajoutés (dérivées de la trajectoire de référence, par exemple, lorsque celles-ci sont disponibles).

Si l'on s'intéresse à la commande d'un drone miniature à voilure tournante, le sous-actionnement que nous avons mis en évidence en Section 2.2.4 peut rendre certains mouvements difficiles à réaliser directement par le véhicule. Des contraintes physiques sur la commande peuvent également limiter les mouvements qui pourront être réalisés. Il peut alors être intéressant d'anticiper le comportement futur du véhicule, ainsi que de tenir compte de l'évolution de la référence, dans le cas d'un suivi de trajectoire, pour calculer la commande et éviter, de la sorte, des sollicitations en inadéquation avec la physique du système.

La commande prédictive permet ce type de démarche : elle consiste à calculer les commandes qui optimisent une prédiction du comportement futur du système, sur un intervalle de temps donné appelé horizon de prédiction. Seule une partie de cette commande optimale est réellement appliquée au système. L'horizon de prédiction est alors ensuite décalé pour calculer la commande à l'instant suivant. En raison de ce décalage de fenêtre temporelle, principe dont la première utilisation est souvent attribuée à [93], la commande prédictive est également appelée commande à horizon glissant, ou *Receding Horizon Control* (RHC). Elle est aussi connue sous le nom de *Model Predictive Control* (MPC), puisqu'un modèle représentant la dynamique du système est utilisé pour le calcul des prédictions.

Cette approche se révèle très intéressante dans les cas où il est difficile d'obtenir une expression analytique de la commande, puisque celle-ci est déterminée en résolvant, en ligne et de manière numérique, un problème d'optimisation. Un autre avantage est sa faculté à prendre en compte, de manière intrinsèque, des contraintes sur la commande et/ou sur l'état du système.

Ce sont ces caractéristiques qui ont été à l'origine, dès la fin des années 1970, de nombreux algorithmes prédictifs à des fins d'utilisation industrielle : IDCOM (*IDentification and COMmand*) et PFC (*Predictive Functional Control*) [96, 97], DMC (*Dynamic Matrix Control*) [29], etc . Un formalisme plus complet a été introduit autour de la méthode GPC (*Generalized Predictive Control*) présentée dans [26, 27] pour la commande de modèles sous forme ARIMAX (*Auto-Regressive Integrated Moving Average eXogenous input*).

On ne s'intéressera ici qu'aux méthodes de commande prédictive utilisant une représentation de la dynamique du système sous forme d'équations d'état. Dans ce chapitre, nous présenterons tout d'abord le contexte formel permettant d'appréhender, de manière générale, un problème de commande prédictive, ainsi que les problèmes de stabilité sous-jacents. Les principales approches existantes seront brièvement présentées (un aperçu exhaustif de ces méthodes, de leurs applications ainsi que des travaux relatifs à l'étude de la stabilité peut être trouvé dans [37, 38, 39, 43, 81]).

Les avantages et inconvénients de la commande prédictive seront analysés au chapitre 4, en s'appuyant sur une méthode de commande prédictive linéaire. Les chapitres 5 et 6 seront ensuite consacrés à l'étude et au développement d'approches de commande prédictive non linéaires pouvant être appliquées au guidage pilotage d'un drone miniature à voilure

tournante.

3.2 Formulation générale

Afin de formuler, d'une manière générale, un problème de commande prédictive, considérons un système dynamique dont l'évolution est décrite en temps continu par l'équation d'état

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \quad \forall t > 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ sa commande. Pour un instant t et un horizon temporel de longueur $T > 0$ donnés, on définit le modèle de prédiction

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(\tau) &= \bar{f}(\bar{x}(\tau), u(\tau)) \quad \forall \tau \in]t, T] \\ \bar{x}(t) &= x(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

où \bar{x} désigne l'état prédit. La fonction \bar{f} utilisée pour le modèle de prédiction peut être différente de la fonction f utilisée dans la modélisation (3.1) du système.

A l'instant t et sur l'horizon de longueur T (horizon de prédiction choisi identique à l'horizon de commande), on définit également la fonctionnelle

$$J(t, x(t), T, u(\cdot)) = \int_t^{t+T} q(\bar{x}(\tau), u(\tau)) d\tau + V(\bar{x}(t+T)) \quad (3.3)$$

où $q(\cdot, \cdot)$ est une forme définie (ou semi-définie) positive de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $V(\cdot)$ une forme définie positive de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$.

A l'instant t , on cherche à déterminer la commande minimisant la fonctionnelle J en présence de contraintes sur l'état et/ou sur la commande du système. Soit $u_t^*(\cdot)$ cette commande, solution du problème

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t, x(t)) : \quad & \min_{u(\cdot)} J(t, x(t), T, u(\cdot)) \\ & \text{tel que } \bar{x}(\tau) \in \mathbb{X}, \quad \forall \tau \in [t, t+T] \\ & u(\tau) \in \mathbb{U}, \quad \forall \tau \in [t, t+T] \end{aligned} \quad (3.4)$$

où les ensembles $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ représentent respectivement les contraintes sur l'état et sur la commande.

De la solution $u_t^*(\cdot)$ de ce problème, seule la partie $u_t^*(\tau)$ pour $\tau \in [t, t+\delta]$ ($0 < \delta \leq T$) est appliquée au système.

A l'instant $t+\delta$, un nouveau problème $\mathcal{P}(t+\delta, x(t+\delta))$ est défini en prenant en compte l'état $x(t+\delta)$ du système obtenu à cette nouvelle date (Figure 3.1). Cette approche de commande à horizon glissant, ou commande prédictive, permet de définir une commande sous forme de retour d'état.

Puisque la commande est calculée par résolution en boucle ouverte du problème (3.4), une analyse de la stabilité du système bouclé est nécessaire.

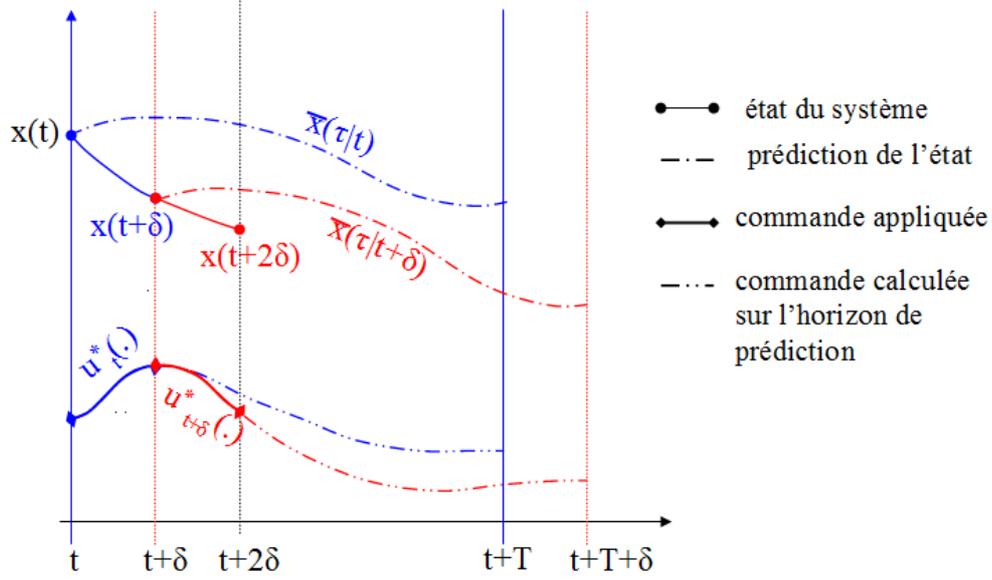


FIG. 3.1 – Horizon glissant et prédictions

3.3 Stabilité

Les problèmes de stabilité liés à la commande prédictive proviennent principalement de la réalisation de prédictions en boucle ouverte sur un horizon fini. Pour résoudre ce problème, une première solution consiste à étendre cet horizon de prédiction et à considérer ainsi un problème à horizon infini.

3.3.1 Stabilité et horizon infini

Supposons qu'il n'existe aucune erreur entre le système (3.1) et le modèle (3.2) utilisé pour le calcul des prédictions, i.e. $\bar{f} = f$. On suppose de plus que $T \rightarrow \infty$ et on définit la fonctionnelle

$$J_\infty(t, x(t), u(\cdot)) = \int_t^\infty q(\bar{x}(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (3.5)$$

où $q(\cdot, \cdot)$ est ici supposée définie positive de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$. Puisqu'on considère un problème à horizon infini, aucune fonction coût terminal V n'est considérée.

A l'instant t on définit le problème à horizon infini

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\infty(t, x(t)) : \quad & \min_{u(\cdot)} J_\infty(t, x(t), u(\cdot)) \\ & \text{tel que } \bar{x}(\tau) \in \mathbb{X}, \quad \forall \tau \geq t \\ & \quad \quad u(\tau) \in \mathbb{U}, \quad \forall \tau \geq t \end{aligned} \quad (3.6)$$

Soit $u_t^*(\cdot)$ la solution de $\mathcal{P}_\infty(t, x(t))$. On définit également la valeur optimale du coût

$$J_\infty^*(t, x(t), u_t^*(\cdot)) = \int_t^\infty q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau \quad (3.7)$$

où \bar{x}^* désigne les prédictions de l'état du système calculées à partir du modèle (3.2) et de la commande $u_t^*(\cdot)$.

On applique la commande u_t^* au système (3.1) durant $[t, t + \delta]$ à partir de la condition initiale $x(t)$. Notons $x^*(t + \delta)$ l'état ainsi obtenu à la date $t + \delta$.

À l'instant $t + \delta$, on calcule la commande $u_{t+\delta}^*(\cdot)$ solution du problème $\mathcal{P}_\infty(t + \delta, x^*(t + \delta))$. Soit $J_\infty^*(t + \delta, x^*(t + \delta), u_{t+\delta}^*(\cdot))$ le coût optimal correspondant :

$$J_\infty^*(t + \delta, x^*(t + \delta), u_{t+\delta}^*(\cdot)) = \int_{t+\delta}^{\infty} q(\bar{x}^*(\tau), u_{t+\delta}^*(\tau)) d\tau \quad (3.8)$$

D'après le principe d'optimalité de Bellman, la trajectoire optimale sur $[t + \delta, \infty[$ obtenue à partir de la condition initiale $x^*(t + \delta)$ consiste en la portion sur $[t + \delta, \infty[$ de la trajectoire optimale calculée sur $[t, \infty[$ à partir de la condition initiale $x(t)$ (*Si une trajectoire est optimale pour un critère donné, alors toute portion de cette trajectoire est optimale pour ce même critère*).

D'où :

$$J_\infty^*(t + \delta, x^*(t + \delta), u_{t+\delta}^*(\cdot)) = \int_{t+\delta}^{\infty} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau \quad (3.9)$$

Calculons la quantité issue de la différence entre (3.9) et (3.7) :

$$J_\infty^*(t + \delta, x^*(t + \delta), u_{t+\delta}^*(\cdot)) - J_\infty^*(t, x(t), u_t^*(\cdot)) = - \int_t^{t+\delta} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau \quad (3.10)$$

En divisant par δ et en faisant tendre δ vers zéro, on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \{ J_\infty^*(t + \delta, x^*(t + \delta), u_{t+\delta}^*(\cdot)) - J_\infty^*(t, x(t), u_t^*(\cdot)) \} = -q(x(t), u_t^*(t)) \quad (3.11)$$

Soit

$$\overbrace{J_\infty^*(t, x(t), u_t^*(\cdot))} = -q(x(t), u_t^*(t)) < 0 \quad (3.12)$$

La fonction J_∞^* est une fonction de l'état x de classe \mathcal{C}^1 définie positive et radialement non bornée et dont la dérivée est définie négative le long des trajectoires du système (3.1) bouclé par u^* . C'est donc une fonction de Lyapunov pour le système (3.1) et la commande obtenue par résolution du problème à horizon infini est asymptotiquement stabilisante.

Cette propriété de stabilité, obtenue en horizon infini, est à la base d'approches de commande prédictive avec garantie de stabilité [60, 82].

En pratique, il n'est pas toujours évident de trouver une solution analytique au problème d'optimisation formulé pour le calcul de la commande, la difficulté de résolution augmentant avec la présence de non-linéarités et de contraintes. Il n'est également pas aisé de résoudre de manière numérique un problème sur un horizon infini.

Une solution consiste alors à approximer le problème à horizon infini par un problème à horizon fini pouvant être résolu numériquement.

3.3.2 Stabilité et horizon fini

En horizon fini, de nombreuses approches ont été proposées afin de garantir la stabilité du système bouclé. Les approches les plus répandues reposent sur des formulations particulières du problème d'optimisation utilisé pour calculer la commande et présentées ci-dessous.

Contrainte terminale d'égalité

Une première solution proposée dans la littérature [80, 105] est l'emploi d'une contrainte terminale d'égalité, imposant aux prédictions de l'état du système d'avoir atteint l'état d'équilibre x_e à la fin de l'horizon de prédiction :

$$\bar{x}(t + T) = x_e$$

Si la stabilité est garantie par ce type d'approche, leur faisabilité est toutefois limitée dans la mesure où l'état du système doit pouvoir être amené à l'état d'équilibre en un temps fini (fixé par la longueur de l'horizon de prédiction). De plus, la vérification d'une contrainte exacte d'égalité est difficile à réaliser numériquement.

Commande prédictive à mode dual

Dans [83], la contrainte terminale d'égalité est transformée en une contrainte d'appartenance à un domaine $\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X}$ contenant le point d'équilibre :

$$\bar{x}(t + T) \in \mathbb{X}_f$$

Une fois l'état du système dans \mathbb{X}_f , un contrôleur local est utilisé pour la stabilisation jusqu'au point d'équilibre. Initialement proposé avec un horizon de prédiction variable dans le cas de systèmes continus [83], ce principe a également été utilisé avec un horizon fixe pour des systèmes discrets [24]. Une version sous optimale a également été étudiée, où seule la faisabilité du problème d'optimisation est requise pour la stabilité [104]. Par ce type de méthode, la taille du bassin d'attraction du contrôleur dépend de celle de la région terminale et de la longueur de l'horizon de prédiction. Si cette dernière est choisie variable, son augmentation se fait au détriment du temps de calcul. Cette méthode nécessite également la synthèse d'un contrôleur localement stabilisant dans \mathbb{X}_f .

Horizon quasi-infini

Pour s'affranchir de l'utilisation supplémentaire d'un contrôleur local, une autre méthode consiste à définir, en plus de la contrainte terminale, une fonction coût terminal V telle que le coût en horizon fini puisse être considéré comme une borne supérieure pour le coût en horizon infini [22, 73]. Si le linéarisé du système autour du point d'équilibre est stabilisable, alors la fonction coût terminal V et la région terminale \mathbb{X}_f peuvent être obtenues en appliquant une démarche systématique présentée dans [22]. Cette démarche fait intervenir la synthèse d'un contrôleur localement stabilisant dans \mathbb{X}_f , utilisé pour prouver la stabilité du système bouclé. Contrairement à l'approche précédente, ce contrôleur n'est cependant jamais appliqué au système.

3.3.3 Critère général de stabilité en horizon fini

Les approches à horizon fini précédemment citées font intervenir, dans la formulation du problème, un ou plusieurs éléments parmi les suivants :

- utilisation d'une contrainte terminale sur l'état prédit : $\bar{x}(t + T) \in \mathbb{X}_f$
- utilisation d'un coût terminal : $V(\bar{x}(t + T))$

– utilisation d'un contrôleur localement stabilisant : $k_f(x)$

Quelque soit le ou les éléments utilisés, le problème peut se définir d'une manière générale de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_T(t, x(t)) : \quad & \min_{u(\cdot)} J(t, x(t), T, u(\cdot)) \\ & \text{tel que } \bar{x}(\tau) \in \mathbb{X}, \forall \tau \in [t, t+T[\\ & \bar{x}(t+T) \in \mathbb{X}_f \\ & u(\tau) \in \mathbb{U}, \forall \tau \in [t, t+T] \end{aligned} \quad (3.13)$$

où l'ensemble terminal \mathbb{X}_f vérifie la propriété

$$\mathbb{X}_f \subset \mathbb{X} \quad (3.14)$$

Comme précédemment, on note $u_t^*(\cdot)$ la solution de $\mathcal{P}_T(t, x(t))$ et $J^*(t, x(t), T, u_t^*(\cdot))$ le coût optimal correspondant. Notons de même $x^*(t+\delta)$ l'état du système (3.1) à la date $t+\delta$, lorsqu'on applique la commande $u_t^*(\cdot)$ à partir de l'état initial x_t . Soient $u_{t+\delta}^*(\cdot)$ la solution de $\mathcal{P}_T(t+\delta, x^*(t+\delta))$ et $J^*(t+\delta, x^*(t+\delta), T, u_{t+\delta}^*(\cdot))$ le coût optimal correspondant.

On définit enfin sur $[t+\delta, t+T+\delta]$ la commande

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} u_{t+\delta}^*(\tau), \forall \tau \in [t+\delta, t+T] \\ k_f(x(\tau)), \forall \tau \in [t+T, t+T+\delta] \end{cases} \quad (3.15)$$

où le retour d'état $k_f(\cdot)$ vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall x \in \mathbb{X}_f, k_f(x) \in \mathbb{U} \quad (3.16)$$

$$\forall x \in \mathbb{X}_f, f(x, k_f(x)) \in \mathbb{X}_f \quad (3.17)$$

On définit d'autre part la fonctionnelle

$$\tilde{J}(t+\delta, x^*(t+\delta), T, \tilde{u}(\cdot)) = \int_{t+\delta}^{t+T+\delta} q(\tilde{x}(\tau), \tilde{u}(\tau)) d\tau + V(\tilde{x}(t+T+\delta)) \quad (3.18)$$

où \tilde{x} désigne les prédictions de l'état du système calculées à partir du modèle (3.2) et de la commande $\tilde{u}(\cdot)$, et où $q(\cdot, \cdot)$ est définie (ou semi définie) positive de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Afin de simplifier l'analyse de la stabilité, nous supposons ici que $q(\cdot, \cdot)$ est définie positive.

Décomposons la partie intégrale de (3.18) sur $[t+\delta, t+T]$ et sur $[t+T, t+T+\delta]$:

$$\tilde{J}(t+\delta, x^*(t+\delta), T, \tilde{u}(\cdot)) = \int_{t+\delta}^{t+T} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau + \int_{t+T}^{t+T+\delta} q(\tilde{x}(\tau), k_f(\tilde{x}(\tau))) d\tau + V(\tilde{x}(t+T+\delta)) \quad (3.19)$$

Via le principe d'optimalité de Bellman, on a

$$J^*(t+\delta, x^*(t+\delta), T, u_{t+\delta}^*(\cdot)) \leq \tilde{J}(t+\delta, x^*(t+\delta), T, \tilde{u}(\cdot)) \quad (3.20)$$

D'où :

$$\begin{aligned} J^*(t+\delta, x^*(t+\delta), T, u_{t+\delta}^*(\cdot)) & \leq \int_{t+\delta}^{t+T} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau + \int_{t+T}^{t+T+\delta} q(\tilde{x}(\tau), k_f(\tilde{x}(\tau))) d\tau \\ & \quad + V(\tilde{x}(t+T+\delta)) \end{aligned} \quad (3.21)$$

En utilisant

$$J^*(t, x^*(t), T, u_t^*(.)) = \int_t^{t+T} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau + V(\bar{x}^*(t+T)) \quad (3.22)$$

on peut remplacer la première intégrale de (3.21) :

$$\begin{aligned} J^*(t+\delta, x^*(t+\delta), T, u_{t+\delta}^*(.)) &\leq J^*(t, x(t), T, u_t^*(.)) - \int_t^{t+\delta} q(\bar{x}^*(\tau), u_t^*(\tau)) d\tau - V(\bar{x}^*(t+T)) \\ &\quad + \int_{t+T}^{t+T+\delta} q(\tilde{x}(\tau), k_f(\tilde{x}(\tau))) d\tau + V(\tilde{x}(t+T+\delta)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

En divisant par δ et en faisant tendre δ vers 0 on obtient :

$$\overbrace{J^*(t, x(t), T, u_t^*(.))} \leq -q(x(t), u_t^*(t)) + q(\tilde{x}(t+T), k_f(\tilde{x}(t+T))) + \overbrace{V(\tilde{x}(t+T))} \quad (3.24)$$

Sous la condition suffisante

$$\overbrace{V(\tilde{x}(t+T))} \leq -q(\tilde{x}(t+T), k_f(\tilde{x}(t+T))) \quad (3.25)$$

on peut assurer

$$\overbrace{J^*(t, x(t), T, u_t^*(.))} \leq -q(x(t), u_t^*(t)) \quad (3.26)$$

et, par conséquent, le système bouclé est asymptotiquement stable, J^* pouvant être considéré comme une fonction de Lyapunov.

Les conditions (3.14), (3.16), (3.17) et (3.25) ont été énoncées dans [81]. Elles permettent de caractériser, de manière générale, la stabilité de nombreuses formulations de commande prédictive reposant sur l'utilisation combinée d'une contrainte terminale, d'un coût terminal et/ou d'un contrôleur localement stabilisant.

3.3.4 Autres approches en horizon fini

Les approches précédemment présentées sont les plus classiques et sont celles qui ont fait l'objet des premiers travaux portant sur la stabilité des approches prédictives à horizon fini. Pour la plupart d'entre elles, l'utilisation d'une contrainte terminale limite la taille du bassin d'attraction du contrôleur et ne permet d'obtenir qu'une stabilité locale du système bouclé. D'autres approches permettent quand à elles d'obtenir des propriétés de stabilité globale, ou locales mais avec un grand bassin d'attraction. C'est le cas des approches mêlant commande prédictive et fonctions de Lyapunov ainsi que des approches de commande prédictive utilisant des contraintes variant dans le temps (contraintes contractantes).

Ces deux classes de contrôleurs prédictifs sont celles qui nous intéresseront plus particulièrement. Elles seront respectivement présentées en sections 5.2 et 6.2 des chapitres 5 et 6.

Toutes les méthodes de commande prédictive que nous avons évoquées sont basées sur la

résolution en ligne d'un problème d'optimisation. Dans cette thèse, nous ne traiterons pas de la recherche d'une commande optimale, mais nous nous intéresserons plutôt aux problèmes de stabilité du système bouclé. Quelques éléments liant commande prédictive et optimisation sont néanmoins présentés dans la section suivante.

3.4 Commande prédictive et optimisation

Dans une approche de type commande prédictive, le calcul de la commande à appliquer au système se fait en résolvant un problème d'optimisation. L'obtention d'une expression analytique de la commande optimale n'étant possible que dans les cas simples, une résolution numérique est effectuée à l'aide de solveurs spécifiques. Les performances souhaitées pour le système bouclé (rapidité, amortissement) sont quand à elles définies lors de la formulation même du problème d'optimisation (3.4), à savoir par le choix de la longueur T de l'horizon de prédiction et par le choix de la fonctionnelle (3.3).

3.4.1 Choix de la fonctionnelle coût

La fonctionnelle J définie par (3.3) peut être choisie de manière à définir un critère d'optimalité de nature énergétique, à définir une performance en terme de suivi d'une référence, à représenter la consommation d'une "ressource" liée à la commande, etc.

Sans perte de généralité, on peut séparer en deux la fonction q définissant la partie intégrale :

$$q(x, u) = q_1(x) + q_2(u) \quad (3.27)$$

avec $q_1(\cdot)$ semi-définie positive de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ et q_2 définie positive de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$. On considère les cas suivants :

Cas $q_1 = 0$

- Si $q_2 = 0$, on a alors $J(t, x(t), T, u(\cdot)) = V(\bar{x}(t+T))$. Le choix de V (le cas $V = 0$ présente peu d'intérêt) ne permet d'influencer le comportement du transitoire que pour des valeurs assez faibles de T . Aucune pondération sur la commande n'étant présente, celle-ci peut être de forte amplitude et l'on peut se rapprocher d'une commande de type "bang-bang" si des saturations sur la commande sont définies. Un réglage précis du comportement du système bouclé est difficilement réalisable.

- Si $q_2 \neq 0$, on a alors $J(t, x(t), T, u(\cdot)) = \int_t^{t+T} q_2(u(\tau)) d\tau + V(\bar{x}(t+T))$. Le choix de V (le cas $V = 0$ présente peu d'intérêt) ne permet ici aussi d'influencer le comportement du transitoire que pour des valeurs assez faibles de T . Pour des longueurs d'horizon plus grandes, la commande obtenue sera faible et le réglage du comportement du système durant le transitoire est difficilement réglable.

Cas $q_1 \neq 0$

- Si $q_2 = 0$, on a alors $J(t, x(t), T, u(\cdot)) = \int_t^{t+T} q_1(\bar{x}(\tau)) d\tau + V(\bar{x}(t+T))$. Le comportement du système peut être réglé par le choix de q_1 mais, puisqu'aucune pondération sur la commande n'est définie, celle-ci peut être de forte amplitude et se rapprocher d'une commande "bang-bang" si des contraintes sur la commande sont définies. La fonction V peut

être choisie nulle.

• Si $q_2 \neq 0$, on a alors $J(t, x(t), T, u(\cdot)) = \int_t^{t+T} (q_1(\bar{x}(\tau)) + q_2(u(\tau))) d\tau (+V(\bar{x}(t+T)))$. Le comportement du système bouclé peut être réglé par le rapport des pondérations réalisées par q_1 et q_2 . Une "forte" pondération sur l'état peut par exemple permettre d'obtenir un transitoire bien amorti. La fonction V peut être choisie nulle sans incidence sur le réglage des performances.

C'est ce dernier cas de Figure ($q_1 \neq 0$ et $q_2 \neq 0$) qui sera utilisé. En pratique, les fonctions q_1 et q_2 sont souvent définies comme des fonctions quadratiques :

$$\forall \tau \in [t, t+T], \quad q_1(\bar{x}(\tau)) = \bar{x}(\tau)^T Q \bar{x}(\tau), \quad q_2(u(\tau)) = u(\tau)^T R u(\tau) \quad (3.28)$$

avec Q matrice de pondération semi-définie positive de $\mathbb{R}^{n \times n}$, et R matrice de pondération définie positive de $\mathbb{R}^{m \times m}$.

3.4.2 Choix de l'horizon de prédiction

Le choix de la longueur T de l'horizon de prédiction est tout d'abord dicté par les problèmes de faisabilité pouvant apparaître dans le cas où une contrainte terminale est utilisée pour assurer la stabilité. En effet, l'état du système doit, dans ce cas, pouvoir être amené à l'état d'équilibre, ou dans une région terminale l'entourant, en un temps défini par la longueur T de l'horizon de prédiction. Ceci peut s'avérer infaisable si T est choisi trop faible.

Le choix de T va permettre de jouer sur la rapidité du système : celle-ci sera plus importante pour de faibles valeurs de T . Un compromis rapidité / amortissement est à trouver, le transitoire pouvant devenir oscillant pour de faibles valeurs de T .

Finalement, le choix de T est également réalisé en fonction de la durée admissible pour les temps de calcul de la commande : plus l'horizon de prédiction sera long et plus la résolution numérique du problème d'optimisation nécessitera de temps de calcul.

3.4.3 Résolution du problème d'optimisation

Le calcul de l'expression analytique de la commande optimale n'étant possible que dans les cas simples, une résolution numérique est effectuée. Pour ce faire, le problème doit être mis sous une forme standard permettant l'utilisation d'un solveur dédié à un type de problème donné.

Dans le cas linéaire, et avec une fonction coût quadratique, le problème peut parfois être transformé sous la forme d'un problème de programmation quadratique (QP) (cf section 4.6) :

$$\begin{aligned} \min_u & (u^T Q u + C^T u) \\ \text{tel que} & \quad A_i u \leq b_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

Des algorithmes et des solveurs en permettent alors la résolution. Une description de plusieurs solveurs peut être trouvée dans [3]. Celui que nous utiliserons est la fonction *quadprog* de la toolbox d'optimisation de Matlab.

Dans les cas plus complexes, le calcul de la commande peut être posé sous forme de problème de programmation non linéaire (NLP) :

$$\begin{aligned} \min_u f(u) \\ \text{tel que } c(u) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Parmi les méthodes utilisées pour la résolution de ce type de problèmes, on peut citer les méthodes de points intérieurs [4] ou de programmation séquentielle quadratique (SQP) [11, 79]. C'est sur ce dernier type d'algorithme que repose le solveur que nous utiliserons pour traiter les cas non linéaires, à savoir la fonction *fmincon* sous Matlab.

L'utilisation pratique de la commande prédictive est conditionnée par la rapidité de calcul d'une solution au problème d'optimisation posé. Les avancées réalisées à ce jour en terme d'algorithmie et de vitesse de calcul permettent l'application réelle de la commande prédictive à des classes de systèmes possédant des dynamiques rapides, comme les systèmes aéronautiques.

3.5 Commande prédictive et drones miniatures

Les premières applications industrielles de la commande prédictive ont été réalisées dans le domaine du génie des procédés, pour des systèmes dont la dynamique d'évolution était suffisamment lente pour permettre l'utilisation d'une commande qui requière une optimisation en ligne. Depuis, d'autres applications à des systèmes plus rapides (mécaniques, électriques) ont vu le jour grâce aux progrès des outils informatiques et de l'augmentation des puissances de calcul disponibles.

En aéronautique, la commande prédictive a tout d'abord été utilisée pour la commande de véhicules susceptibles de disposer de calculateurs embarqués suffisamment puissants pour en permettre l'implantation. On peut ainsi citer des études portant sur le suivi de profils de terrains pour des avions de chasse [72, 95], sur la commande d'un avion de chasse Boeing F/A-18 HARV (*High Alpha Research Vehicle*) utilisé par la Nasa à des fins de recherche [54], ou encore sur le guidage d'un véhicule servant de banc d'essai d'un drone X-45 [61].

La récente miniaturisation des moyens de calcul et l'augmentation de leur puissance permettent maintenant d'envisager l'utilisation de la commande prédictive pour des drones miniatures à voilure tournante dans un proche avenir¹. Ces progrès ont initié de nombreux travaux de recherche.

Dans [56] et [40] une approche mêlant commande prédictive non linéaire et fonctions de Lyapunov est appliquée à un dispositif expérimental d'aile volante équipée d'un propulseur et de gouvernes ajustables. Le modèle utilisée pour calculer la commande prédictive est un modèle planaire représentant la dynamique verticale de l'aile. La stabilité est garantie par l'approche prédictive présentée. Un modèle de drone simplifié à trois degrés de liberté est également utilisé dans [106] pour la génération de trajectoires et la synthèse de commande

¹Les expérimentations réalisés à ce jour, à notre connaissance, utilisent un calculateur déporté au sol pour l'implantation de techniques prédictives.

par une approche prédictive. Des modèles plus complets sont utilisés dans [59] et [58] pour représenter la dynamique d'un hélicoptère miniature. Une commande prédictive y est calculée par un algorithme de descente de gradient. Cependant, les problèmes liés à la stabilité du système bouclé ne sont pas abordés.

Au cours de ce chapitre, nous nous proposons de synthétiser des lois de commande prédictives, en considérant simultanément un modèle proche de la dynamique réelle d'un drone miniature à voilure tournante (modèle non linéaire à six degrés de liberté défini par (2.38)) et l'analyse de la stabilité du système bouclé.

Avant de nous pencher sur des méthodes de commande prédictive non linéaire, nous nous proposons d'analyser le concept de commande prédictive et d'en valider, par l'exemple, les avantages qu'il peut offrir en s'intéressant au cas linéaire discret présenté dans le cadre de [12, 98].

Chapitre 4

Commande prédictive linéaire

4.1 Systèmes linéaires, discrétisation

On s'intéresse aux systèmes dynamiques dont l'évolution en temps continu peut être décrite par l'équation d'état linéaire

$$\dot{x} = A_c x + B_c u + F_c p \quad (4.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ la commande et $p \in \mathbb{R}^q$ une perturbation exogène.

On suppose que les grandeurs définies ci-dessus sont accessibles sous forme de signaux échantillonnés délivrés par un bloqueur d'ordre zéro à la période d'échantillonnage T_e . On cherche alors une représentation discrète du système (4.1).

La solution homogène de l'équation (4.1) est donnée par

$$x(t) = e^{A_c t} K(t) \quad (4.2)$$

où $K(t)$ vérifie

$$A_c e^{A_c t} K(t) + e^{A_c t} \dot{K}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) + F_c p(t) \quad (4.3)$$

En remplaçant $x(t)$ par l'expression (4.2), on obtient

$$\dot{K}(t) = e^{-A_c t} (B_c u(t) + F_c p(t)) \quad (4.4)$$

On intègre entre t et $t + T_e$. Puisqu'un bloqueur d'ordre zéro est utilisé, u et p sont considérés comme constants sur la période d'échantillonnage, et l'on obtient ainsi

$$K(t + T_e) = \left(\int_t^{t+T_e} e^{-A_c \tau} d\tau \right) (B_c u(t) + F_c p(t)) + K(t) \quad (4.5)$$

puis en utilisant (4.2)

$$x(t + T_e) = e^{A_c(t+T_e)} \left(\int_t^{t+T_e} e^{-A_c \tau} d\tau \right) (B_c u(t) + F_c p(t)) + e^{A_c(t+T_e)} e^{-A_c t} x(t) \quad (4.6)$$

En utilisant le changement de variable $s = \tau - t$, on obtient finalement

$$x(t + T_e) = \left(\int_0^{T_e} e^{-A_c(s-T_e)} ds \right) (B_c u(t) + F_c p(t)) + e^{A_c T_e} x(t) \quad (4.7)$$

Posons $t_k = kT_e$, et $x_k = x(t_k)$. En définissant

$$A = e^{A_c T_e} \quad (4.8)$$

$$B = \left(\int_0^{T_e} e^{-A_c(s-T_e)} ds \right) B_c \quad (4.9)$$

$$F = \left(\int_0^{T_e} e^{-A_c(s-T_e)} ds \right) F_c \quad (4.10)$$

la dynamique du système (4.1) peut alors être représentée de manière discrète par

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Fp_k \quad (4.11)$$

La représentation (4.11) de la dynamique du système sera utilisée pour formuler un problème de commande prédictive linéaire.

4.2 Commande prédictive linéaire

Pour un instant k et une longueur N de l'horizon de prédiction donnés, on définit le modèle de prédiction

$$\begin{aligned}\bar{x}_{k+i+1} &= A\bar{x}_{k+i} + Bu_{k+i} + F\bar{p}_{k+i} \quad i \in \{0, \dots, N-1\} \\ u_{k+i} &= u_{k+i-1} + v_{k+i} \\ \bar{p}_{k+i} &= \bar{p}_{k+i-1} + w_{k+i} \quad i \in \{1, \dots, N-1\} \\ \bar{x}_k &= x_k \\ \bar{p}_k &= p_k\end{aligned}\tag{4.12}$$

où w est bruit blanc utilisé pour le modèle de prédiction de la perturbation. On introduit le vecteur d'incrément de commande

$$V_k = [v_k^T \ v_{k+1}^T \ \dots \ v_{k+N-1}^T]^T\tag{4.13}$$

et la fonctionnelle

$$J(k, x_k, N, V_k) = \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{x}_{k+i}^T Q \bar{x}_{k+i} + v_{k+i}^T R v_{k+i}) + \bar{x}_{k+N}^T Q \bar{x}_{k+N}\tag{4.14}$$

avec $Q = Q^T > 0$ et $R = R^T > 0$ matrices de pondération définies positives. On considère le problème d'optimisation

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_N(k, x_k) : \quad & \min_{V_k} J(k, x_k, N, V_k) \\ & \text{tel que } \bar{x}_{k+i} \in \mathbb{X}, \forall i \in \{0, \dots, N\} \\ & \quad u_{k+i} \in \mathbb{U}, \forall i \in \{0, \dots, N-1\}\end{aligned}\tag{4.15}$$

Du vecteur d'incrément de commande V_k^* solution de $\mathcal{P}_N(k, x_k)$, on ne conserve que la première valeur v_k^* et on calcule $u_k^* = u_{k-1}^* + v_k^*$ (en prenant $u_{-1}^* = 0$) que l'on applique au système (4.11). A l'instant $k+1$ la procédure de calcul est répétée à partir du problème $\mathcal{P}_N(k+1, x_{k+1})$.

Pour résoudre le problème $\mathcal{P}_N(k, x_k)$, cherchons à simplifier sa formulation en tirant directement partie de la forme linéaire discrète des prédictions (4.12).

4.3 Expression des prédictions

Définissons l'état augmenté

$$\bar{z}_k = [\bar{x}_k^T \ u_{k-1}^T \ \bar{p}_{k-1}^T]^T\tag{4.16}$$

Le modèle de prédiction (4.12) peut alors se réécrire sous la forme

$$\bar{z}_{k+i+1} = \bar{A}\bar{z}_{k+i} + \bar{B}v_{k+i} + \bar{F}w_{k+i}\tag{4.17}$$

avec les matrices

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B & F \\ 0_{m \times n} & I_{m \times m} & 0_{m \times q} \\ 0_{q \times n} & 0_{q \times m} & I_{q \times q} \end{bmatrix}\tag{4.18}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ I_{m \times m} \\ 0_{q \times m} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F \\ 0_{m \times q} \\ I_{q \times q} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Les prédictions \bar{z}_{k+i} s'expriment alors en fonction de l'état augmenté z_k de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \bar{z}_k &= z_k \\ \bar{z}_{k+1} &= \bar{A}z_k + \bar{B}v_k + \bar{F}w_k \\ \bar{z}_{k+2} &= \bar{A}^2z_k + \bar{A}\bar{B}v_k + \bar{A}\bar{F}w_k + \bar{B}v_{k+1} + \bar{F}w_{k+1} \\ &\dots \\ \bar{z}_{k+i} &= \bar{A}^i z_k + (\bar{A}^{i-1}\bar{B}v_k + \bar{A}^{i-2}\bar{B}v_{k+1} + \dots + \bar{B}v_{k+i-1}) \\ &\quad + (\bar{A}^{i-1}\bar{F}w_k + \bar{A}^{i-2}\bar{F}w_{k+1} + \dots + \bar{F}w_{k+i-1}) \\ &\dots \\ \bar{z}_{k+N} &= \bar{A}^N z_k + (\bar{A}^{N-1}\bar{B}v_k + \bar{A}^{N-2}\bar{B}v_{k+1} + \dots + \bar{B}v_{k+N-1}) \\ &\quad + (\bar{A}^{N-1}\bar{F}w_k + \bar{A}^{N-2}\bar{F}w_{k+1} + \dots + \bar{F}w_{k+N-1}) \end{aligned} \quad (4.21)$$

En posant

$$\bar{Z}_k = [\bar{z}_k^T \ \bar{z}_{k+1}^T \ \dots \ \bar{z}_{k+N}^T]^T \quad (4.22)$$

$$W_k = [w_k^T \ w_{k+1}^T \ \dots \ w_{k+N-1}^T]^T \quad (4.23)$$

et en utilisant (4.13), le calcul des prédictions peut se formuler par

$$\bar{Z}_k = \mathcal{A}z_k + \mathcal{B}V_k + \mathcal{F}W_k \quad (4.24)$$

avec

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} I \\ \bar{A} \\ \bar{A}^2 \\ \dots \\ \bar{A}^N \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \bar{B} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \bar{A}\bar{B} & \bar{B} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \bar{A}^{N-1}\bar{B} & \dots & \dots & \bar{A}\bar{B} & \bar{B} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \bar{F} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \bar{A}\bar{F} & \bar{F} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ \bar{A}^{N-1}\bar{F} & \dots & \dots & \bar{A}\bar{F} & \bar{F} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Utilisons ces notations pour reformuler $\mathcal{P}_N(k, x_k)$.

4.4 Expression du coût

D'après (4.16), on a

$$\bar{x}_{k+i} = \mathbb{I} \bar{z}_{k+i} \quad \forall i \in \{0, \dots, N\} \quad (4.28)$$

avec

$$\mathbb{I} = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times m} \quad 0_{n \times q}] \quad (4.29)$$

Avec cette notation, la fonctionnelle coût définie par (4.14) peut alors se réécrire

$$J(k, x_k, N, V_k) = \sum_{i=0}^N \bar{z}_{k+i}^T \mathbb{I}^T Q \mathbb{I} \bar{z}_{k+i} + \sum_{i=0}^{N-1} v_{k+i}^T R v_{k+i} \quad (4.30)$$

Posons

$$Q = \text{diag}(\mathbb{I}^T Q \mathbb{I}, \dots, \mathbb{I}^T Q \mathbb{I}) \quad (4.31)$$

$$R = \text{diag}(R, \dots, R) \quad (4.32)$$

On a alors

$$J(k, x_k, N, V_k) = \bar{Z}_k^T Q \bar{Z}_k + V_k^T R V_k \quad (4.33)$$

et en utilisant l'équation de prédiction (4.24)

$$J(k, x_k, N, V_k) = (\mathcal{A}z_k + \mathcal{B}V_k + \mathcal{F}W_k)^T Q (\mathcal{A}z_k + \mathcal{B}V_k + \mathcal{F}W_k) + V_k^T R V_k \quad (4.34)$$

Cette expression ne dépend, à un instant k donné, que de l'état z_k , du vecteur bruit W_k et du vecteur d'incrément de commande V_k , vecteur sur lequel portera l'optimisation.

4.5 Expression des contraintes

On suppose que les ensembles \mathbb{X} et \mathbb{U} définissent des contraintes polyédriques sur l'état du système et sur la commande :

$$C_x \bar{x}_{k+i} \leq d_x \quad \forall i \in \{0, \dots, N\} \quad (4.35)$$

$$C_u u_{k+i} \leq d_u \quad \forall i \in \{0, \dots, N-1\} \quad (4.36)$$

Contraintes sur l'état

En posant

$$C_x = \text{diag}(C_x \mathbb{I}, \dots, C_x \mathbb{I}) \quad (4.37)$$

$$D_x = [d_x^T \quad \dots \quad d_x^T]^T \quad (4.38)$$

la contrainte (4.35) peut être reformulée en

$$\mathcal{C}_x \bar{Z}_k \leq \mathcal{D}_x \quad (4.39)$$

puis d'après (4.24)

$$\mathcal{C}_x(\mathcal{A}z_k + \mathcal{B}V_k + \mathcal{F}W_k) \leq \mathcal{D}_x \quad (4.40)$$

Soit

$$(\mathcal{C}_x \mathcal{B})V_k \leq \mathcal{D}_x - \mathcal{C}_x(\mathcal{A}z_k + \mathcal{F}W_k) \quad (4.41)$$

Contraintes sur la commande

Posons de même

$$\mathcal{C}_u = \text{diag}(C_u, \dots, C_u) \quad (4.42)$$

$$\mathcal{D}_u = [d_u^T \ \dots \ d_u^T]^T \quad (4.43)$$

et

$$U_k = [u_k^T \ u_{k-1}^T \ \dots \ u_{k+N-1}^T]^T \quad (4.44)$$

La contrainte (4.36) est ainsi équivalente à

$$\mathcal{C}_u U_k \leq \mathcal{D}_u \quad (4.45)$$

Le vecteur U_k peut s'exprimer en fonction de V_k de la manière suivante :

$$U_k = \mathcal{I}V_k + \mathcal{I}_u z_k \quad (4.46)$$

avec

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} I_{m \times m} & 0_{m \times m} & \dots & 0_{m \times m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0_{m \times m} \\ I_{m \times m} & \dots & \dots & I_{m \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mN \times mN} \quad (4.47)$$

$$\mathcal{I}_u = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_u \\ \mathbb{I}_u \\ \vdots \\ \mathbb{I}_u \end{bmatrix} \quad \mathbb{I}_u = [0_{m \times n} \quad I_{m \times n} \quad 0_{m \times q}] \quad (4.48)$$

On a ainsi :

$$(\mathcal{C}_u \mathcal{I})V_k \leq \mathcal{D}_u - \mathcal{C}_u \mathcal{I}_u z_k \quad (4.49)$$

4.6 Formulation QP

En utilisant les notations précédemment introduites, nous avons vu que le coût et les contraintes définissant $\mathcal{P}_N(k, x_k)$ peuvent être respectivement reformulés en (4.34) et (4.41) et (4.49).

La minimisation de la fonctionnelle $J(k, x_k, N, V_k)$ se faisant par rapport à V_k , la solution V_k^* de $\mathcal{P}_N(k, x_k)$ sera identique en considérant la fonctionnelle

$$J'(k, x_k, N, V_k) = V_k^T (\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}) V_k + 2(\mathcal{A} z_k + \mathcal{F} W_k)^T \mathcal{Q} \mathcal{B} V_k \quad (4.50)$$

où seuls les termes faisant intervenir V_k ont été conservés.

Pour calculer la commande il est donc équivalent de résoudre le problème $\mathcal{P}_N(k, x_k)$ ou le problème de programmation quadratique (QP) suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{QP}(k, x_k) : \quad & \min_{V_k} V_k^T \mathcal{M} V_k + 2\mathcal{N}^T V_k \\ & \text{tq} \quad \mathcal{C} V_k \leq \mathcal{D} \end{aligned} \quad (4.51)$$

avec

$$\mathcal{M} = \mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R} \quad (4.52)$$

$$\mathcal{N} = \mathcal{B}^T \mathcal{Q}^T (\mathcal{A} z_k + \mathcal{F} W_k) \quad (4.53)$$

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_x \mathcal{B} \\ \mathcal{C}_u \mathcal{I} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_x - \mathcal{C}_x (\mathcal{A} z_k + \mathcal{F} W_k) \\ \mathcal{D}_u - \mathcal{C}_u \mathcal{I} z_k \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

Ce type de problème peut se résoudre de manière numérique par des solveurs dédiés aux problèmes de programmation quadratique (par exemple *quadprog* sous Matlab).

4.7 Résolution pour le cas non contraint, non perturbé

Dans le cas le plus simple, non contraint et sans perturbation, une expression analytique de la solution de $\mathcal{P}_{QP}(k, x_k)$ est aisément calculable. La solution au problème de calcul de la commande est donnée par

$$V_k^* = \arg \min_{V_k} (V_k^T (\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}) V_k + 2z_k^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} V_k) \quad (4.56)$$

La solution V_k^* annule la dérivée première de $(V_k^T (\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}) V_k + 2z_k^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} V_k)$, la dérivée seconde étant définie positive.

$$\frac{d}{dV_k^*} \{V_k^{*T} (\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}) V_k^* + 2z_k^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} V_k^*\} = 0 \quad (4.57)$$

Soit

$$(\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}) V_k^* + (\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R})^T V_k^* + 2(z_k^T \mathcal{A}^T \mathcal{Q} \mathcal{B})^T = 0 \quad (4.58)$$

En utilisant la symétrie de $(\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R})$, le minimum est obtenu pour

$$V_k^* = -(\mathcal{B}^T \mathcal{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R})^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{Q}^T \mathcal{A} z_k \quad (4.59)$$

Le choix des pondérations Q et R permet alors d'assurer la stabilité du système bouclé.

4.8 Formulation LQG

La démarche présentée suppose que l'on connaisse à l'instant k la valeur x_k de l'état et la valeur p_k de la perturbation. Pour obtenir ces valeurs, utilisons un estimateur d'état linéaire.

On suppose que l'état x_k du système n'est pas accessible dans sa totalité, mais que l'on connaît une mesure $y_k \in \mathbb{R}^p$ définie par

$$y_k = Cx_k \quad (4.60)$$

Utilisons un filtre de Kalman pour réaliser l'estimation d'état. L'utilisation combinée de l'estimateur avec la commande optimale linéaire quadratique telle que précédemment établie définit un schéma de commande Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) [12].

On définit respectivement par \hat{x}_k , \hat{p}_k et \hat{y}_k les estimées de x_k , p_k et y_k vérifiant la dynamique

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= A\hat{x}_k + Bu_k + F\hat{p}_k \\ \hat{p}_k &= \hat{p}_{k-1} + w_k \\ \hat{y}_k &= C\hat{x}_k \end{aligned} \quad (4.61)$$

Soit \hat{z}_k l'état augmenté défini par

$$\hat{z}_k = [\hat{x}_k^T \hat{p}_{k-1}^T]^T \quad (4.62)$$

et

$$\delta_k = [u_k^T w_k^T]^T \quad (4.63)$$

Le système (4.61) peut se reformuler en

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k+1} &= \underline{A}\hat{z}_k + \underline{B}\delta_k + n_k^z \\ \hat{y}_k &= \underline{C}\hat{z}_k + n_k^y \end{aligned} \quad (4.64)$$

avec

$$\underline{A} = \bar{A} \quad (4.65)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} B & F \\ 0_{q \times m} & I_{q \times q} \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\underline{C} = [C \ 0_{p \times q}] \quad (4.67)$$

où n_k^z est un bruit sur l'état de covariance Q^{KF} et n_k^y un bruit sur la sortie de covariance R^{KF} . Notons P_0^{KF} la covariance de l'état initial z_0 .

Les équations du filtre de Kalman se décomposent en deux parties : une partie prédiction utilisant le modèle interne d'estimation, et une partie correction utilisant la mesure réalisée à l'instant k .

Les équations de prédiction sont définies par

$$\begin{aligned} \hat{z}_{k/k-1} &= \underline{A}\hat{z}_{k-1/k-1} + \underline{B}\delta_{k-1} \\ P_{k/k-1}^{KF} &= \underline{A}P_{k-1/k-1}^{KF}\underline{A}^T + Q^{KF} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Soit y_k^{mes} une mesure à l'instant k de la sortie y_k . Les relations définissant la correction sont

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k/k} &= \hat{z}_{k/k-1} + K_k^{KF} (y_k^{mes} - \underline{C} \hat{z}_k) \\ P_{k/k}^{KF} &= (I - K_k^{KF} \underline{C}) P_{k/k-1}^{KF}\end{aligned}\quad (4.69)$$

avec le gain

$$K_k^{KF} = P_{k/k-1}^{KF} \underline{C}^T (\underline{C} P_{k/k-1}^{KF} \underline{C}^T + R^{KF})^{-1} \quad (4.70)$$

A l'instant k , on obtient ainsi une estimée $\hat{z}_k = \hat{z}_{k/k}$ fournissant une observation \hat{x}_k de l'état x_k ainsi qu'une estimée \hat{p}_{k-1} de la perturbation p_{k-1} .

La commande est alors calculée à partir du problème $\mathcal{P}_{QP}(k, \hat{x}_k)$.

4.9 Exemple

Considérons le système instable suivant

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} p_k \quad (4.71)$$

On cherche à stabiliser ce système en présence d'une perturbation p_k supposée constante par morceaux. On choisit ainsi $w_{k+i} = 0$ dans le modèle de prédiction (4.12). Les résultats de simulation présentés dans la suite ont été réalisés avec $Q = R = I_{2 \times 2}$ et pour la condition initiale $x_0 = [2 \ -3]^T$.

Cas non contraint, non perturbé, état mesurable

On suppose dans un premier temps que l'état entier est mesurable ($y_k = x_k$) et qu'il n'existe aucune contrainte sur l'état ($\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$) ni sur la commande ($\mathbb{U} = \mathbb{R}$). On s'intéresse au cas non perturbé. Les résultats de simulation correspondants sont présentés en Figure 4.1 pour plusieurs valeurs de N . On vérifie que plus la valeur de N augmente, plus l'on se rapproche de la performance optimale obtenue en horizon infini où la commande est définie de manière analytique par

$$u_k = -(B^T P B + R)^{-1} B^T P A x_k \quad (4.72)$$

où la matrice P symétrique est la solution unique de l'équation algébrique de Riccati (ARE)

$$P = A^T P A - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q \quad (4.73)$$

Si dans ce cas trivial (linéaire, non contraint) l'utilisation d'un horizon infini est bien sûr la plus judicieuse, cet exemple nous permet de vérifier que le choix d'une faible valeur de N peut entraîner une dégradation de l'amortissement du système bouclé, comme évoqué en section 3.4.2.

Cas perturbé, reconstitution de l'état

On se place maintenant dans le cas où seule la première composante de l'état est mesurable ($y_k = [1 \ 0] x_k$) et où il existe une perturbation constante par morceaux. Les courbes présentées Figure 4.2 ont été obtenues pour $N = 4$. L'utilisation combinée du filtre de Kalman et de la commande prédictive permet de stabiliser le système à partir d'une estimation de la perturbation et en reconstruisant l'état complet.

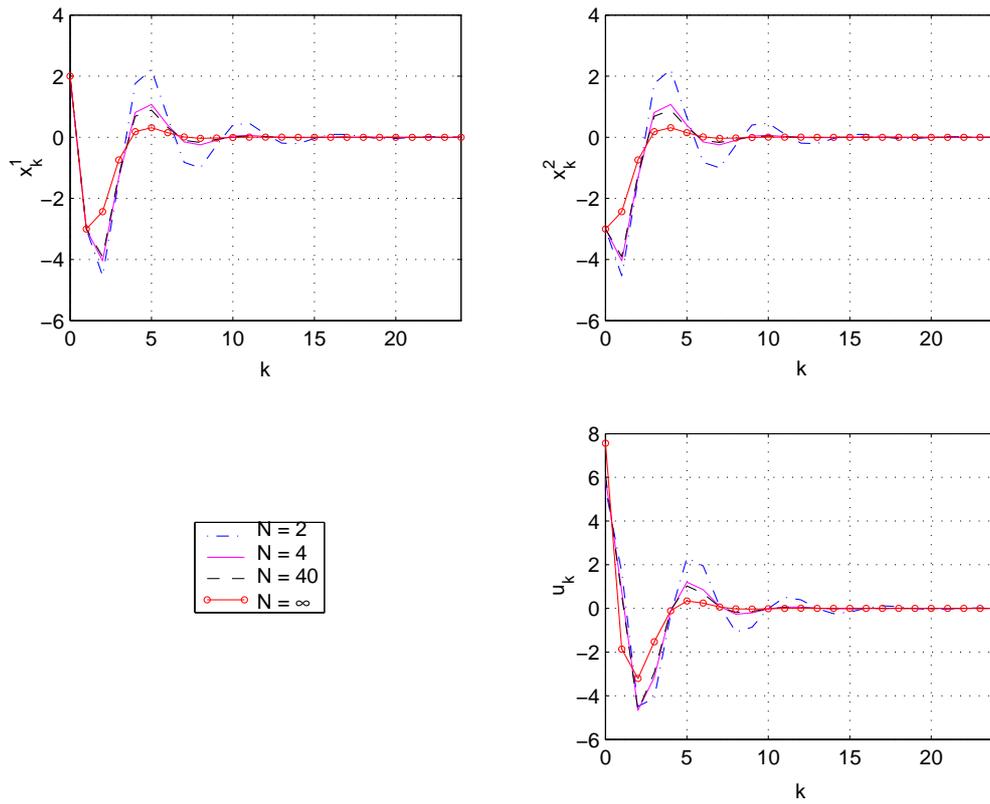
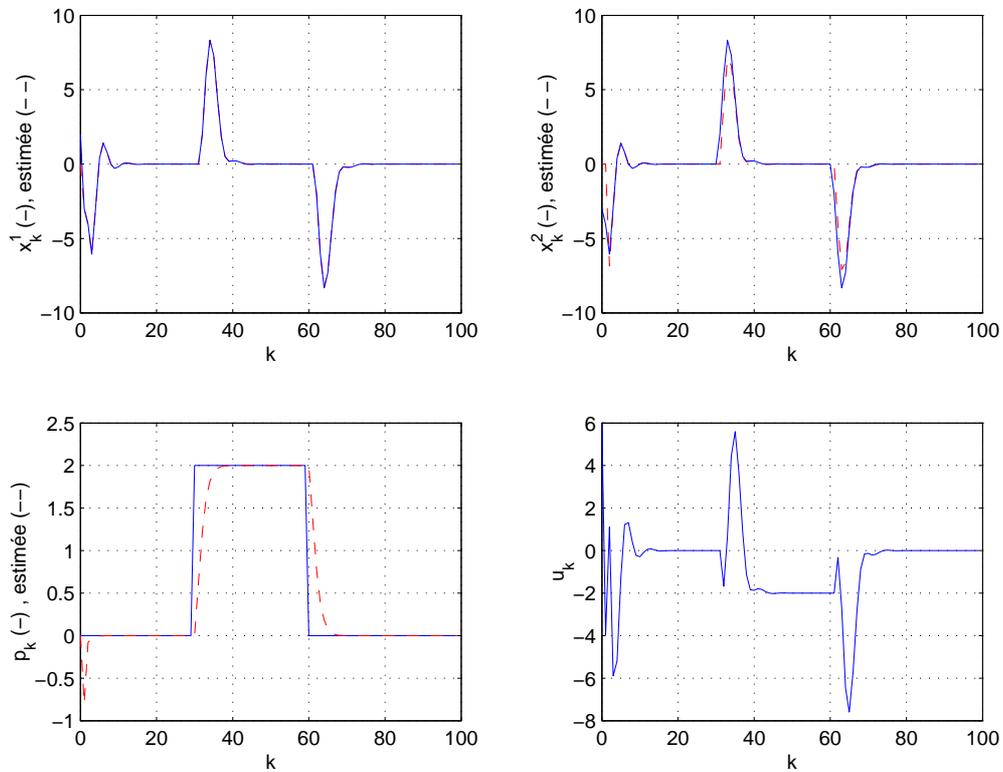
FIG. 4.1 – Stabilisation pour différentes valeurs de N 

FIG. 4.2 – Stabilisation en présence d'une perturbation

Cas perturbé contraint, reconstitution de l'état

On reprend le cas précédent en ajoutant des contraintes sur la commande du type $u_{min} \leq u_k \leq u_{max}$ (où les inégalités sont définies composante par composante). La stabilisation est obtenue malgré la perturbation, et avec une commande saturée selon les bornes fixées (Figure 4.3).

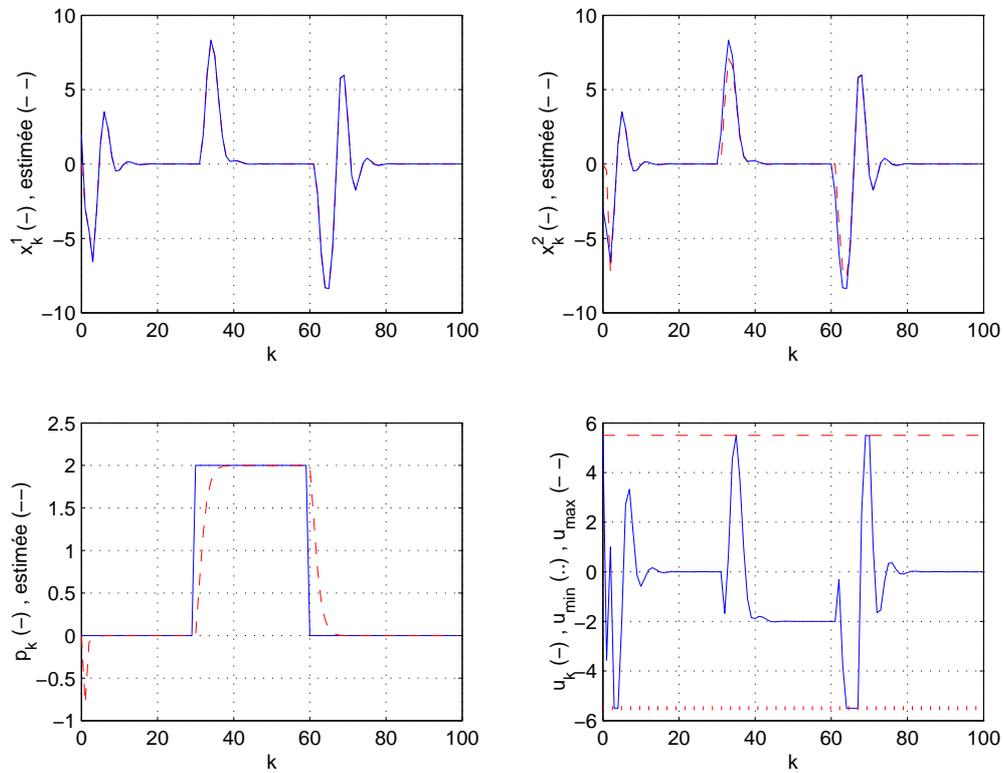


FIG. 4.3 – Stabilisation en présence d'une perturbation et de contraintes sur la commande

Cet exemple nous a permis d'illustrer, dans le cas de la stabilisation, les possibilités offertes par l'approche LQG précédemment présentée. Intéressons nous maintenant à l'application de cette approche au suivi de trajectoire d'un modèle de drone.

4.10 Application au guidage

Considérons le cas d'un suivi de trajectoire. Pour la synthèse de la loi de commande en position, on utilise l'hypothèse 2 et l'on considère le système défini par (2.123) :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d + \frac{1}{m}F_{ext} \end{cases} \quad (4.74)$$

où l'on rappelle que l'on a $\epsilon_1 = \xi - \xi^d$ et $\epsilon_2 = v - v^d$.

On définit le vecteur de commande

$$u = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \quad (4.75)$$

et on introduit

$$\chi = [\epsilon_1^T \ \epsilon_2^T]^T \quad (4.76)$$

pour obtenir la représentation d'état

$$\dot{\chi} = A_c^{tr} \chi + B_c^{tr} u + F_c^{tr} F_{ext} \quad (4.77)$$

avec

$$A_c^{tr} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad B_c^{tr} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad F_c^{tr} = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \frac{1}{m}I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

4.10.1 Discrétisation

La matrice A_c^{tr} est nilpotente d'ordre deux ($\forall j \geq 2, (A_c^{tr})^j = 0$). On a ainsi par développement

$$e^{A_c^{tr} T_e} = I_d + A_c^{tr} T_e \quad (4.79)$$

En utilisant les relations (4.8) (4.9) (4.10), on peut alors calculer

$$A^{tr} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & T_e I_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad B^{tr} = \begin{bmatrix} \frac{T_e^2}{2} I_{3 \times 3} \\ T_e I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad F^{tr} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} \frac{T_e^2}{2} I_{3 \times 3} \\ T_e I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

et obtenir une représentation discrète de (4.77) :

$$\chi_{k+1} = A^{tr} \chi_k + B^{tr} u_k + F^{tr} F_{extk} \quad (4.81)$$

La commande u_k peut alors être calculée par la formulation LQG présentée en section 2.2.8.

4.10.2 Simulations

On suppose que la trajectoire de référence en position est définie, pour les axes x et y , par une portion affine suivi d'une sinusoïde, et, pour l'axe z , par une portion constante nulle suivie d'une portion affine.

On se place tout d'abord dans le cas non contraint et on suppose que ξ et v sont tous deux mesurables. Les Figures 4.4 et 4.5 présentent respectivement l'évolution de l'état, de l'estimée de la perturbation et de la commande \mathcal{T} , lors de la stabilisation autour de la trajectoire de référence. La simulation a été réalisée pour $N = 4$ à partir de la condition initiale

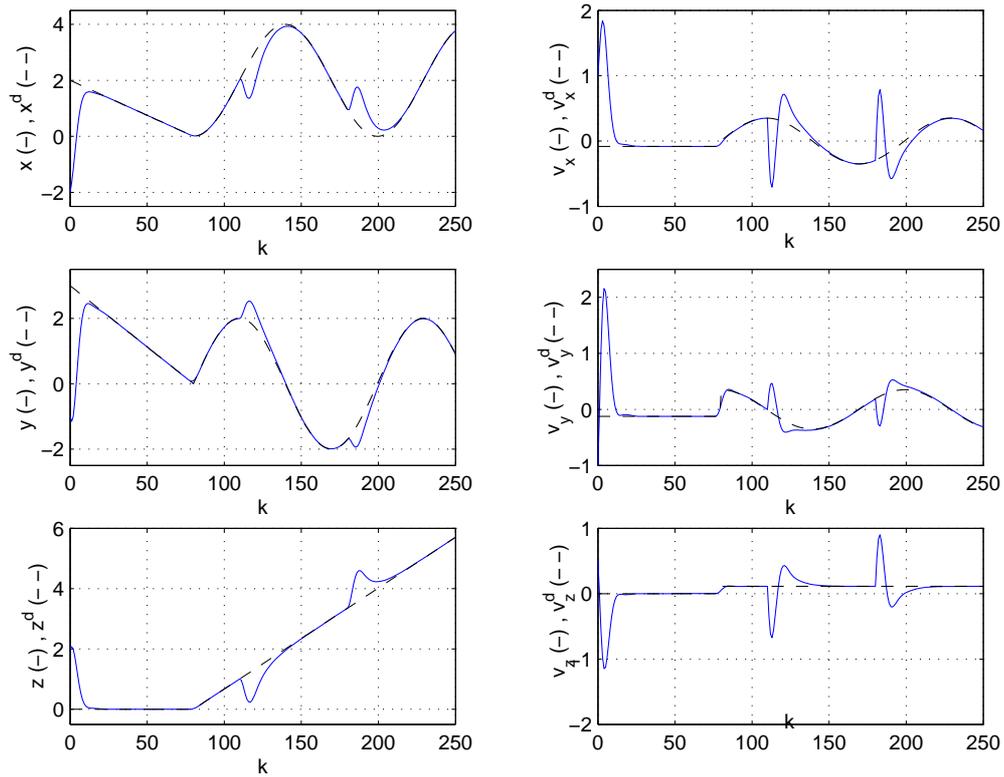


FIG. 4.4 – Evolution de l'état pour $N = 4$

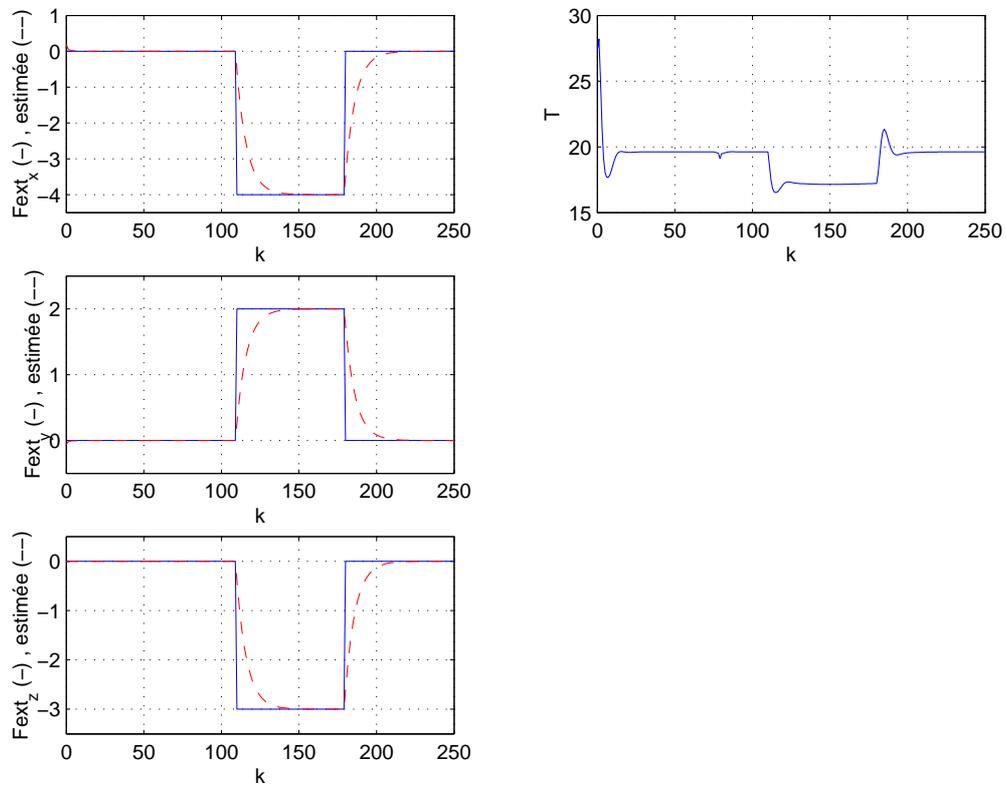


FIG. 4.5 – Estimation de la perturbation et commande T pour $N = 4$

$\xi_0 = [-2 \ -1 \ 2]^T$, $v_0 = [1 \ -1 \ 0.5]^T$. La masse du drone est $m = 2.5$ kg et l'accélération de la pesanteur $g = 9.81$ m.s⁻².

La méthode présentée permet de réaliser le suivi de la trajectoire de référence, même en présence d'une perturbation.

La Figure 4.6 présente en détail l'évolution de l'état autour des changements de référence. Des trajectoires correspondant à plusieurs valeurs de N ont été représentées ($N = 2$, $N = 4$ et $N = 8$). On s'aperçoit que les changements de références intervenant à $k = 80$ sont anticipés d'un nombre de pas de temps égal à la longueur de l'horizon de prédiction : l'évolution de la référence sur l'horizon de prédiction est prise en compte lors du calcul de la commande à un instant donné. Comme évoqué précédemment, la longueur N de l'horizon de prédiction influe sur les performances obtenues pour le système bouclé, l'amortissement diminuant avec la valeur de N .

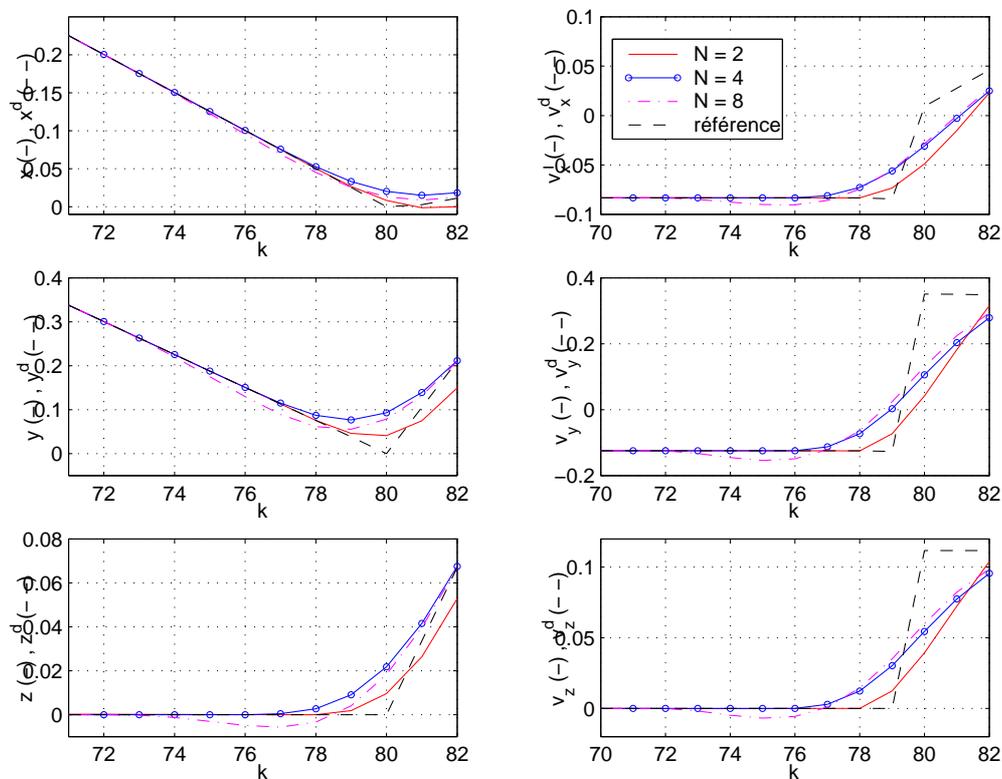


FIG. 4.6 – Evolution de l'état lors des changements de référence pour différent horizons de prédiction

On suppose maintenant que seule la position ξ est mesurable. La Figure 4.7 représente la trajectoire en boucle fermée obtenue pour $N = 4$ dans le cas où la position et la vitesse sont mesurées simultanément, et dans le cas où seule la position est mesurée. Les estimées initiales de la vitesse ont été prises égales à zéro. La Figure 4.8 présente les écarts entre les composantes de la vitesse et celles de la vitesse estimée pour le cas où seule la position ξ est mesurée. La perte d'information liée à l'absence de mesure en vitesse entraîne une dégradation de la performance obtenue en terme de rapidité de convergence vers la trajectoire de référence et de rapidité de réaction face à la perturbation.

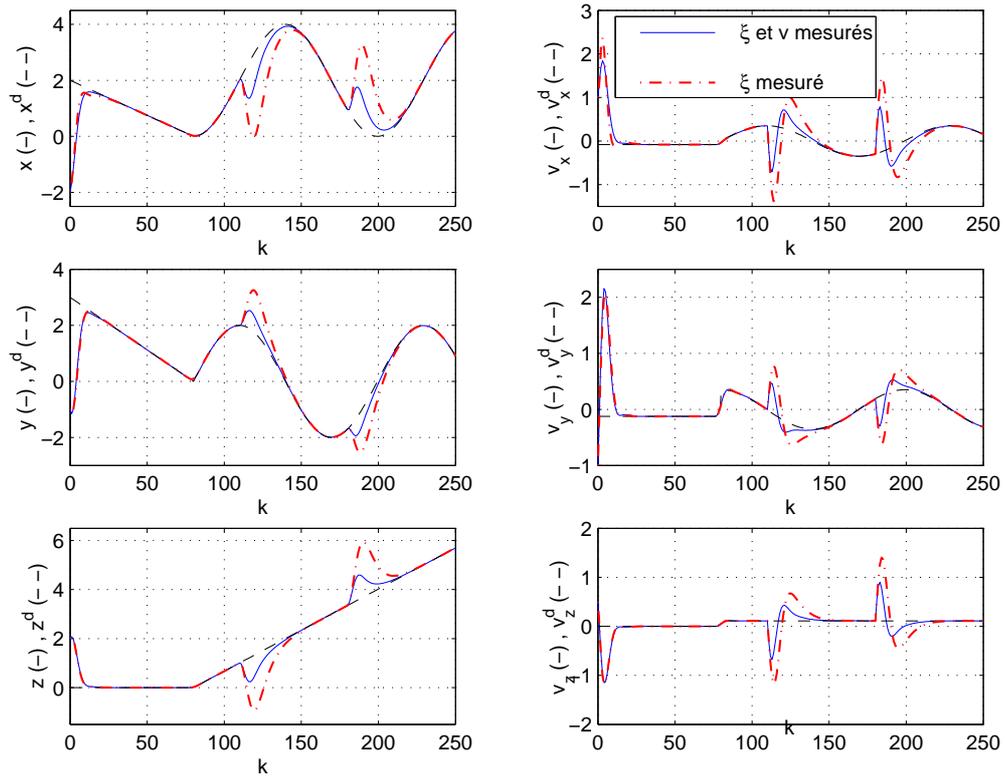


FIG. 4.7 – Evolution de l'état avec et sans mesures de vitesse

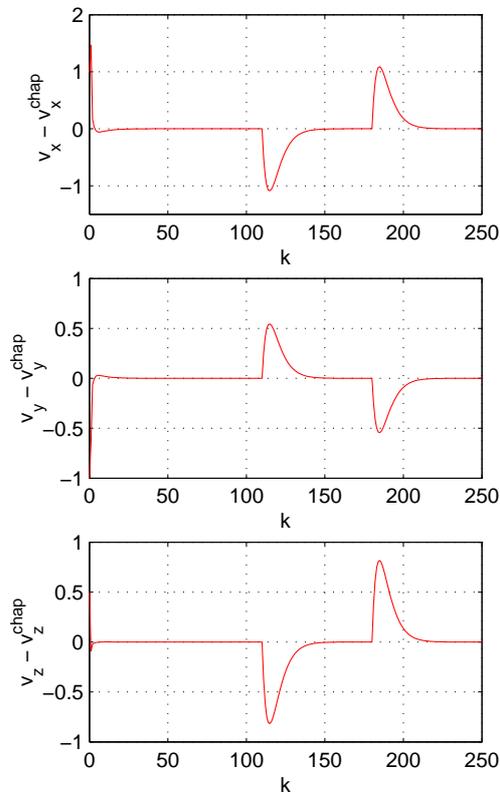


FIG. 4.8 – Evolution des erreurs d'estimation de la vitesse

On considère maintenant des contraintes sur le vecteur u sous la forme :

$$u_{min} \leq u_k \leq u_{max} \quad (4.82)$$

où les inégalités entre vecteur sont définies composante par composante. Soit

$$m(u_{min} - ge_3 + \dot{v}^d(k)) \leq -(TR^d e_3)_k \leq m(u_{max} - ge_3 + \dot{v}^d(k)) \quad (4.83)$$

composante par composante. Les résultats de simulation présentés en Figures 4.9 et 4.10 ont été obtenus en considérant uniquement des mesures sur la position ξ , en présence d'une perturbation identique à celles des cas précédents, et en définissant la contrainte

$$u_{min} = [-1 \quad -1.2 \quad -1]^T \quad u_{max} = [2.5 \quad 1.5 \quad 2]^T$$

La stabilisation autour de la trajectoire de référence est assurée dans ce cas, avec une nouvelle dégradation de la vitesse de convergence lorsque les composantes du vecteur de commande u sont saturées.

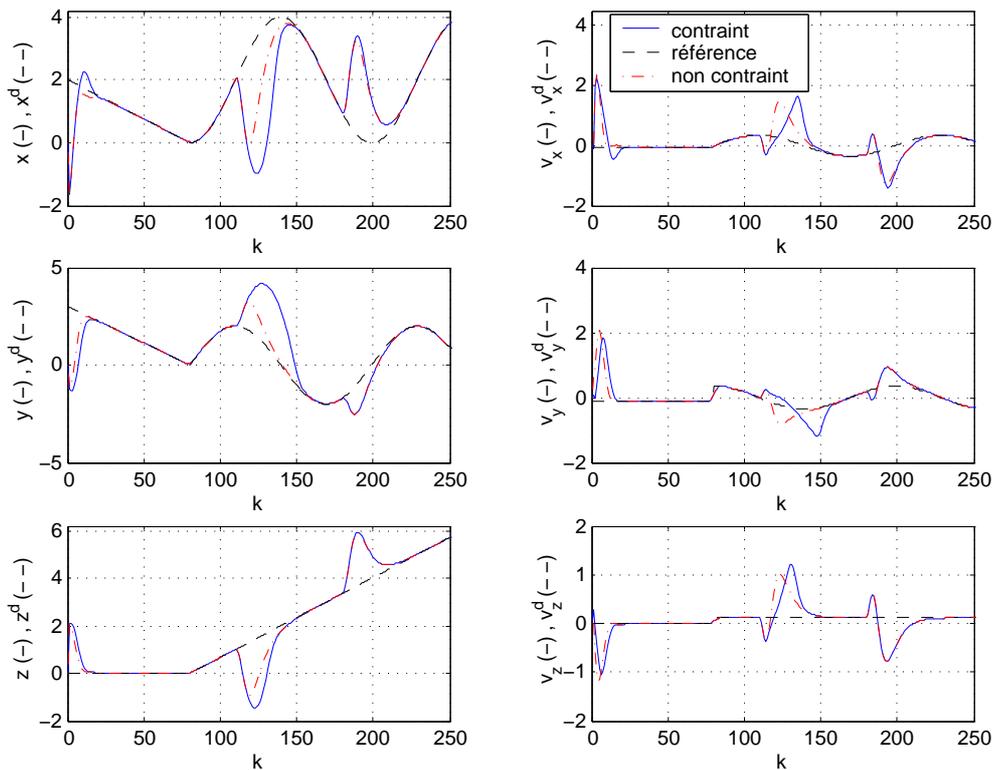
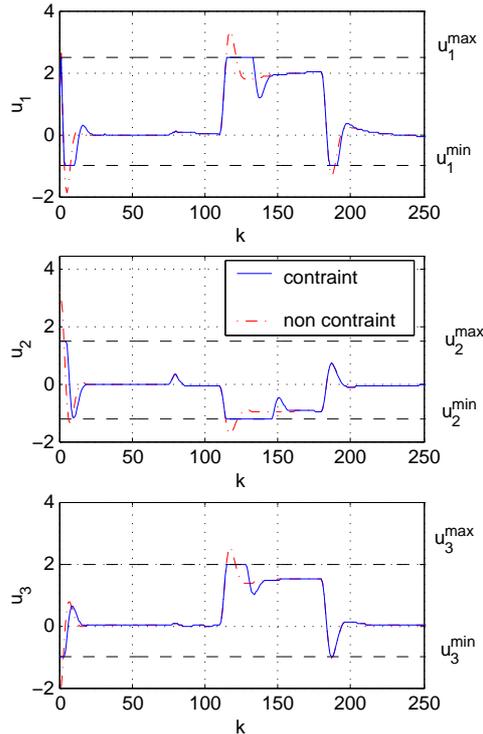


FIG. 4.9 – Evolution de l'état avec et sans contraintes sur la commande

4.11 Limites de la commande prédictive linéaire

L'approche de commande prédictive linéaire, basée sur la formulation LQG présentée, a l'avantage d'être aisée à mettre en oeuvre. De plus, elle illustre immédiatement les avantages et inconvénients liés à une méthode de commande prédictive.

FIG. 4.10 – Evolution du vecteur de commande u avec et sans contraintes

Dans le cas non perturbé et non contraint, nous avons vu qu'une commande analytique peut être déterminée. Dans les autres cas, un problème de programmation quadratique (QP) peut être formulé puis résolu en un faible temps de calcul par un solveur numérique.

La prise en compte de contraintes sur la commande et/ou l'état du système se fait de manière intrinsèque, dans la mesure où celles-ci sont introduites dans la formulation du problème d'optimisation utilisé pour le calcul de la commande. A travers l'exemple d'application proposé à la fin de cette section, à savoir le guidage d'un modèle de drone miniature, nous avons pu mettre en évidence l'intérêt de la commande prédictive dans le cas d'un suivi de trajectoire : la commande est calculée en prenant en compte l'écart actuel entre l'état du système et la référence, mais également une prédiction de cet écart sur un horizon temporel fixé. Cette particularité a pour conséquence une anticipation des changements de références pour le système bouclé. Ce type d'approche permet en outre d'obtenir une commande localement optimale, par rapport à un critère de performance fixé (fonction coût). Enfin, puisque cette approche de commande fait intervenir la résolution en ligne d'un problème d'optimisation, de nouvelles informations pourront être prises en compte au fur et à mesure dans la formulation même du calcul de la commande. Ainsi, on pourra, par exemple, activer, désactiver ou mettre à jour en ligne des contraintes, ajuster des pondérations intervenant dans la fonction coût, etc.

L'approche précédemment présentée ne s'applique toutefois qu'à des systèmes linéaires, ou des systèmes pour lesquels une linéarisation est possible autour d'un point de fonctionnement (ou point d'équilibre) donné. Lorsque l'on s'écarte du domaine dans lequel ce linéarisé est valable, une première solution peut consister à chercher un nouveau point de fonctionnement,

puis à linéariser le système autour de ce nouveau point. Pour chaque point de fonctionnement ainsi envisagé, un contrôleur localement stabilisant peut être obtenu afin de couvrir la totalité du domaine d'évolution du système.

Dans le cas de systèmes fortement non linéaires, cette méthode peut rapidement présenter des limites dans la mesure où les modèles linéarisés ne seront que très localement représentatifs de la dynamique réelle du système. Dans le cas de la commande d'un modèle de drone miniature, l'exemple que nous avons présenté sur le guidage suppose une convergence instantanée de la dynamique de rotation bouclée par une loi de pilotage. Pour pouvoir valider une loi de guidage développée, il est intéressant de considérer la cascade guidage / pilotage et de réaliser ainsi une commande en attitude pour le modèle de drone. Les non linéarités de la dynamique de rotation ne permettent cependant pas de réaliser une commande linéaire valable dans la totalité du domaine de vol. On s'intéressera donc maintenant à des méthodes de commande prédictive non linéaires.

Chapitre 5

Commande prédictive non linéaire bi-composante

5.1 Commande prédictive non linéaire et stabilité

Dans le cas non linéaire, nous avons vu précédemment qu'en commande prédictive, la stabilité peut être assurée au moyen de contraintes stabilisantes, de l'utilisation simultanées de contraintes et d'un contrôleur local ou d'un coût terminal. Si la stabilité est effectivement garantie par ces approches classiques, l'utilisation de tels éléments conditionne fortement le bassin d'attraction du contrôleur, c'est à dire la région de l'espace d'état dans laquelle la stabilité du système bouclé est garantie.

Afin de pouvoir disposer de lois de commandes utilisables dans un large domaine de vol, nous allons nous intéresser ici à une autre classe de contrôleurs prédictifs utilisant simultanément commande prédictive et fonction de Lyapunov.

5.2 Commande prédictive et fonctions de Lyapunov

L'utilisation de fonctions de Lyapunov pour l'étude des systèmes non linéaires permet non seulement d'analyser la stabilité d'un système bouclé donné, mais également de déterminer, de manière constructive, une commande stabilisante. Il est nécessaire de construire conjointement une fonction de l'état du système qui soit définie positive, propre (i.e. radialement non bornée) et continuellement dérivable, et une commande associée assurant que la dérivée de cette fonction soit négative le long des trajectoires du système bouclé. Cette construction requiert une analyse théorique et peut s'avérer très complexe dans certains cas.

Selon [92], une mise en regard des propriétés respectives des méthodes de commande prédictive et des approches par fonction de Lyapunov permet de mettre en évidence leurs complémentarités (c.f. table 5.1). Ces deux techniques peuvent être utilisées simultanément afin de bénéficier des avantages de chacune d'elles.

MPC	CLF
Optimalité locale	Stabilité globale
Calcul en ligne	Analyse hors ligne

TAB. 5.1 – Propriétés des approches de commande prédictives (MPC) et par fonctions de Lyapunov (CLF)

Une première approche utilisant simultanément commande prédictive et fonctions de Lyapunov a été développée dans [91, 92]. Cette approche est basée sur une extension du *pointwise min-norm controller*¹ présenté dans [42].

Ce dernier est déterminé, pour une fonction de Lyapunov donnée, en définissant un problème d'optimisation par lequel on cherche à trouver la commande minimale telle qu'une contrainte de négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov soit vérifiée. La généralisation de cette approche est faite en introduisant dans un problème de commande prédictive non contraint, une première contrainte imposant la négativité de la fonction de Lyapunov à l'instant t , ainsi qu'une seconde contrainte imposant à la valeur de la fonction de Lyapunov d'être inférieure, à la fin de l'horizon de prédiction, à celle obtenue par le "pointwise min-norm controller".

¹Dans cette approche, la commande est obtenue à chaque instant par la résolution d'un problème d'optimisation posé de la manière suivante : on cherche à trouver une commande de norme minimale rendant négative la dérivée d'une fonction de Lyapunov donnée pour le système.

La première contrainte garantit la stabilité du système bouclé, alors que la seconde assure une amélioration des performances par rapport au contrôleur précédemment cité.

On notera, que seule la commande prédictive est appliquée au système, et non celle issue du "pointwise min-norm controller" qui n'intervient que dans la formulation du problème d'optimisation.

Pour ne pas avoir à utiliser de contraintes pour le calcul de la commande, d'autres approches faisant intervenir à la fois commande prédictive et fonctions de Lyapunov ont été développées.

Une première méthode proposée dans [55] consiste à chercher une fonction de Lyapunov pour le système considéré et à l'utiliser comme coût terminal, pondéré par un coefficient scalaire constant. Il existe alors une valeur de ce coefficient de pondération telle que le schéma de commande ainsi défini permette de garantir la stabilité du système bouclé. Dans cette approche, la commande associée à la fonction de Lyapunov n'est utilisée que pour démontrer la stabilité du système bouclé, mais n'est jamais appliquée.

Une seconde solution a été proposée dans [69, 70] reposant également sur l'utilisation seule d'un coût terminal. Une fonction de Lyapunov et la commande associée sont supposées connues pour le système considéré. Cette fonction de Lyapunov est utilisée comme fonction coût terminal au sein du problème de commande prédictive avec un coefficient de pondération cette fois-ci déterminé de manière dynamique. L'expression de sa dynamique fait intervenir la dite fonction de Lyapunov ainsi que la commande associée. Cette commande n'intervient toutefois que dans la définition de cette dynamique et n'est jamais appliquée au système.

Ces différentes approches définissent des contrôleurs prédictifs assurant une stabilité globale du système bouclé. Elles requièrent cependant la connaissance d'une fonction de Lyapunov pour le système sans toutefois réellement utiliser la commande associée.

L'approche que nous présentons dans cette section se situe dans cette classe de contrôleurs associant commande prédictive et fonctions de Lyapunov. En supposant connue une fonction de Lyapunov pour le système, on se propose ici de tirer parti de la commande associée pour l'appliquer au système en même temps que la commande prédictive.

Cette méthode sera par la suite appliquée au développement de lois de commande pour le modèle de drone considéré. Cette application met à profit l'existence de fonctions de Lyapunov issues de travaux précédents pour ce type de modèle.

5.3 Approche bi-composante

On s'intéresse aux systèmes dynamiques dont l'évolution en temps continu peut être décrite par le modèle non linéaire affine en la commande

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t)) + g(x(t))u(t) \quad \forall t > 0 \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f(0) = 0$, $g(0) \neq 0$, g bornée et f et g de classe \mathcal{C}^1 .

On cherche à déterminer une commande à deux composantes de la forme $u = u_n + u_p$ où la seconde composante u_p , de nature prédictive, vient s'ajouter à une commande "nominale" u_n précédemment établie.

5.3.1 Composante nominale u_n

On suppose que l'on a déterminé une commande nominale $u_n(x(t))$ stabilisant asymptotiquement le système (5.1). La dynamique du système (5.1) bouclé par $u = u_n$ est notée

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t)) \quad (5.2)$$

avec $\phi(0) = 0$.

5.3.2 Composante prédictive u_p

Si le système (5.1) est commandé par $u = u_n + u_p$, il peut alors s'écrire sous la forme

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t)) + g(x(t))u_p(t) \quad (5.3)$$

Pour un instant t donné et un horizon temporel de longueur T fixée, on définit le modèle de prédiction associé

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(\tau) = \phi(\bar{x}(\tau)) + g(\bar{x}(\tau))u_p(\tau) & \forall \tau \in]t, t+T] \\ \bar{x}(t) = x(t) \end{cases} \quad (5.4)$$

On introduit également la fonctionnelle

$$J(t, x_t, u_p(\cdot)) = \int_t^{t+T} q(\bar{x}(\tau), u_p(\tau)) d\tau + V(\bar{x}(t+T)) \quad (5.5)$$

où $q(\cdot, \cdot)$ est une forme définie positive de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $V(\cdot)$ une forme définie positive de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$. On note $u_p^*(\cdot)$ la commande qui minimise $J(t, x_t, u_p(\cdot))$ et l'on définit

$$u^*(t) = u_n(t) + u_p^*(t) \quad (5.6)$$

La dynamique du système bouclé s'écrit alors

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u_n(t) + g(x(t))u_p^*(t) \quad (5.7)$$

soit

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t)) + g(x(t))u_p^*(t) \quad (5.8)$$

5.3.3 Stabilité

Proposition 1 *Le système (5.1) bouclé par la commande $u^* = u_n + u_p^*$ précédemment définie est asymptotiquement stable.*

Preuve

Par construction de la composante nominale de la commande, on sait que le système bouclé par $u = u_n$ ($u_p^* = 0$) est asymptotiquement stable. Il faut donc montrer que l'ajout de la composante prédictive u_p^* permet de conserver cette stabilité asymptotique.

Notons $J_t^* = J(t, x_t, u_p^*(\cdot))$ la valeur optimale de la fonctionnelle coût. Soit $\tilde{J}_t = J(t, x_t, 0)$ la valeur de la fonctionnelle lorsqu'elle est évaluée le long des trajectoires du système bouclé par la seule composante nominale u_n de la commande ($u_p^* = 0$). On a ainsi :

$$0 \leq J_t^* \leq \tilde{J}_t \quad (5.9)$$

En notant \bar{x}^* et $\tilde{\bar{x}}$ les prédictions correspondantes (respectivement pour $u = u^*$ et $u = u_n$), on a

$$0 \leq \int_t^{t+T} q(\bar{x}^*(\tau), u_p^*(\tau)) d\tau + V(\bar{x}^*(t+T)) \leq \int_t^{t+T} q(\tilde{\bar{x}}(\tau), 0) d\tau + V(\tilde{\bar{x}}(t+T)) \quad (5.10)$$

La commande u_n n'étant pas appliquée avec un horizon glissant, les prédictions $\tilde{\bar{x}}$ coïncident avec l'état \tilde{x} du système commandé par u_n et qui converge asymptotiquement vers zéro. Le terme de droite de l'inégalité (5.10) converge donc asymptotiquement vers zéro. Par pincement, et puisque q et V sont définies positives par rapport à chacun de leurs arguments, les prédictions \bar{x}^* de l'état du système bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$ tendent identiquement vers zéro sur l'horizon de prédiction. De même, $u_p^*(\cdot)$ tend identiquement vers la fonction nulle sur l'horizon de prédiction pour $t \rightarrow \infty$. On a ainsi $u_p^*(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$. En utilisant la stabilité asymptotique de (5.2) et la bornitude de g , on peut conclure que le système (5.8), i.e. le système (5.1) bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$, est asymptotiquement stable. ■

L'ajout de la composante prédictive permet donc de conserver la stabilité asymptotique du système initialement bouclé par la composante nominale u_n . L'optimalité locale qu'elle introduit fait de cette approche un moyen d'amélioration des performances du système bouclé obtenues pour un contrôleur nominal donné, par rapport à un critère donné défini par (5.5). Cette approche constitue également un moyen de prendre en compte des contraintes sur la commande, par exemple, en définissant un problème d'optimisation de la forme

$$\begin{aligned} & \min_{u_p(\cdot)} J(t, x_t, u_p(\cdot)) \\ & \text{tel que } u(\tau) \in \mathbb{U}, \forall \tau \in [t, t+T] \\ & \quad u(\tau) = u_n(\bar{x}(\tau)) + u_p(\tau), \forall \tau \in [t, t+T] \end{aligned} \quad (5.11)$$

5.3.4 Exemple

On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_2 + 1)x_1^2 + \sin(x_2) + u \end{aligned} \quad (5.12)$$

avec $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ et u scalaire. Pour définir la composante nominale u_n de la commande, on introduit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \quad (5.13)$$

Pour la commande

$$u_n = -2(x_1 + x_2) - (x_2 + 1)x_1^2 - \sin(x_2) \quad (5.14)$$

on a

$$\dot{\mathcal{L}} = -x_1^2 - (x_1 + x_2)^2 \quad (5.15)$$

et le système (5.12) bouclé par $u = u_n$ est exponentiellement stable, donc a fortiori asymptotiquement stable.

Pour calculer la composante prédictive u_p^* de la commande, la fonctionnelle (5.5) est définie à partir de

$$\begin{aligned} q(\bar{x}(\tau), u_p(\tau)) &= \mathcal{L}(\bar{x}(\tau)) + \lambda u_p(\tau)^2 \quad \forall \tau \in [t, t + T[\\ V(\bar{x}(t + T)) &= \mathcal{L}(\bar{x}(t + T)) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Les résultats de simulation présentés en Figure 5.1 ont été réalisés pour $\lambda = 0.25$ et pour la condition initiale $x_0 = [1 \ 0.5]^T$. Les courbes en trait discontinu sont celles obtenues par application de la commande nominale u_n seule, alors que les courbes en trait continu ont été obtenues par application de la commande $u^* = u_n + u_p^*$. On remarque que la vitesse de convergence est améliorée par l'introduction de la composante prédictive dans la commande². Cette propriété peut être vérifiée sur la sous-Figure représentant l'évolution de la valeur de la fonction de Lyapunov \mathcal{L} le long des trajectoires du système bouclé : pour $u = u_n + u_p^*$ (trait continu) la valeur de \mathcal{L} est toujours inférieure à celle obtenue pour $u = u_n$ (trait discontinu). L'approche bi-composante présentée est ici utilisée comme un moyen d'améliorer les performances du système bouclé par un contrôleur nominal donné.

On s'intéresse maintenant au cas où la commande est limitée par la contrainte

$$u = u_n + u_p^* \leq 0.8$$

La Figure 5.2 présente les courbes obtenues pour le cas non contraint où u_n est utilisé comme commande (trait discontinu) et pour le cas contraint où la commande est $u = u_n + u_p^*$ (trait continu). L'ajout de la composante prédictive permet l'amélioration des performances en dehors de la zone de saturation de la commande : la valeur de la fonction de Lyapunov correspondant à $u = u_n + u_p^*$ reste inférieure à celle correspondant à $u = u_n$, excepté dans cette zone de saturation. La composante prédictive constitue un degré de liberté permettant le respect de la contrainte.

5.3.5 Optimisation des coefficients du contrôleur nominal

On suppose que le contrôleur nominal est paramétré par un nombre fini de coefficients k_1, k_2, \dots, k_r

$$u_n = u_n((k_1, \dots, k_r), x) \quad (5.17)$$

On peut tirer profit du calcul en ligne de la composante prédictive de la commande pour améliorer le réglage des gains du contrôleur nominal. En effet, ces gains peuvent être considérés comme des paramètres à optimiser au même titre que la composante prédictive de la commande. On formule le problème d'optimisation (5.11) :

$$\begin{aligned} \min_{(u_p(\cdot), (k_1, \dots, k_r))} & J(t, x_t, u_p(\cdot)) \\ \text{tel que} & \quad u(\tau) \in \mathbb{U}, \quad \forall \tau \in [t, t + T] \\ & \quad u(\tau) = u_n((k_1, \dots, k_r), \bar{x}(\tau)) + u_p(\tau), \quad \forall \tau \in [t, t + T] \\ & \quad (k_1, \dots, k_r) \in \mathbb{K} \end{aligned} \quad (5.18)$$

où \mathbb{K} définit l'ensemble des gains k_1, \dots, k_r tels que le système bouclé par $u = u_n$ soit asymptotiquement stable.

²Le réglage des gains de la fonction coût a été choisi ici de manière à n'imposer aucune performance spécifique, et ce afin de mettre en évidence le caractère optimal de l'approche proposée. Le comportement du système bouclé peut bien entendu être sensiblement amélioré par un choix adéquat de ces gains.

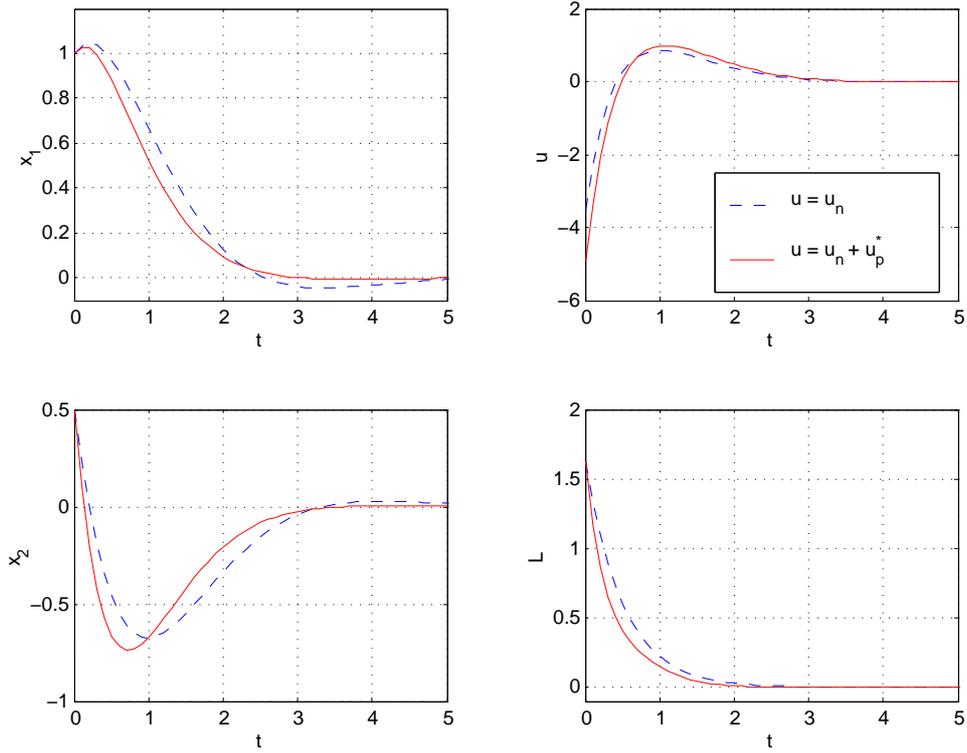


FIG. 5.1 – Comparaison des bouclages $u = u_n$ et $u = u_n + u_p^*$

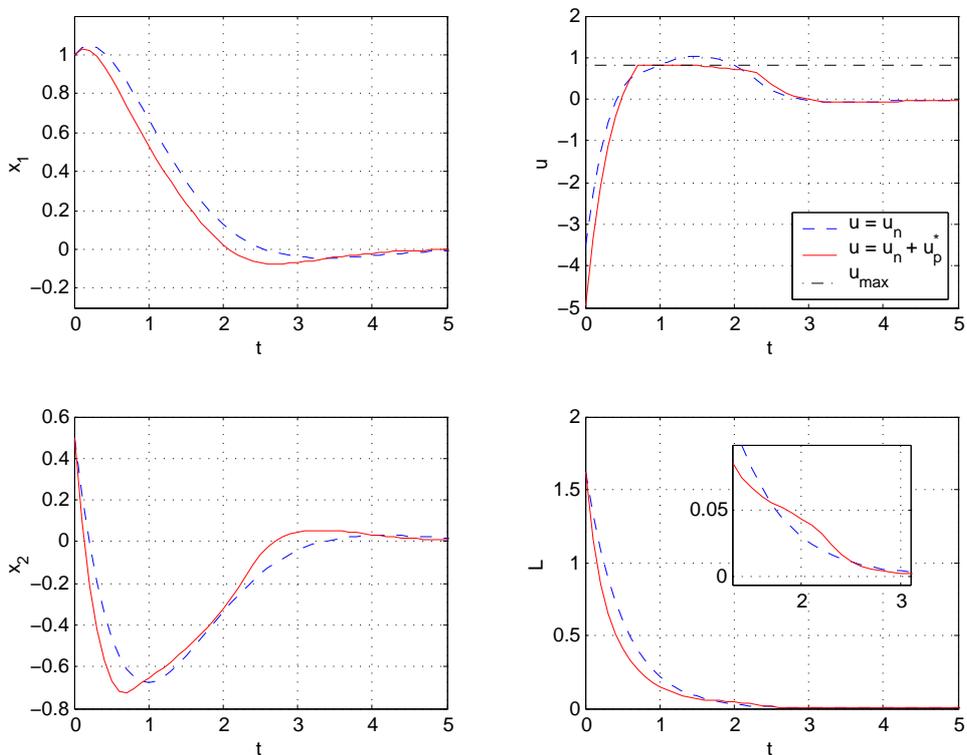


FIG. 5.2 – Comparaison des bouclages $u = u_n$ et $u = u_n + u_p^*$ en présence d'une contrainte sur la commande

Exemple

Reprenons l'exemple (5.12). On considère cette fois-ci la commande

$$u_n = -(1+k)(x_1 + x_2) - (x_2 + 1)x_1^2 - \sin(x_2) \quad (5.19)$$

où k est un gain scalaire. En utilisant cette commande, la dérivée de la fonction \mathcal{L} définie par (5.13) devient

$$\dot{\mathcal{L}} = -x_1^2 - k(x_1 + x_2)^2 \quad (5.20)$$

En définissant $\mathbb{K} = \mathbb{R}^+$, le système (5.12) bouclé par (5.19) est (au moins) asymptotiquement stable pour $k \in \mathbb{K}$.

On reprend la contrainte sur la commande $u = u_n + u_p^* \leq 0.8$ et on définit la contrainte $k_{min} \leq k \leq k_{max}$ avec $k_{min} = 1$ et $k_{max} = 2$. La valeur initiale du gain est fixée à 1. Les résultats de simulation correspondant sont présentés en Figure 5.3. Les courbes en trait discontinu correspondent au cas précédent, gain unitaire ($k = 1$) non optimisé, et les courbes en trait continu correspondent au cas où le gain k est optimisé. D'après (5.20), la convergence est d'autant plus rapide que k est grand. D'où la valeur $k = k_{max}$ que l'on retrouve sur la Figure 5.3, en dehors de la zone de saturation de la commande³.

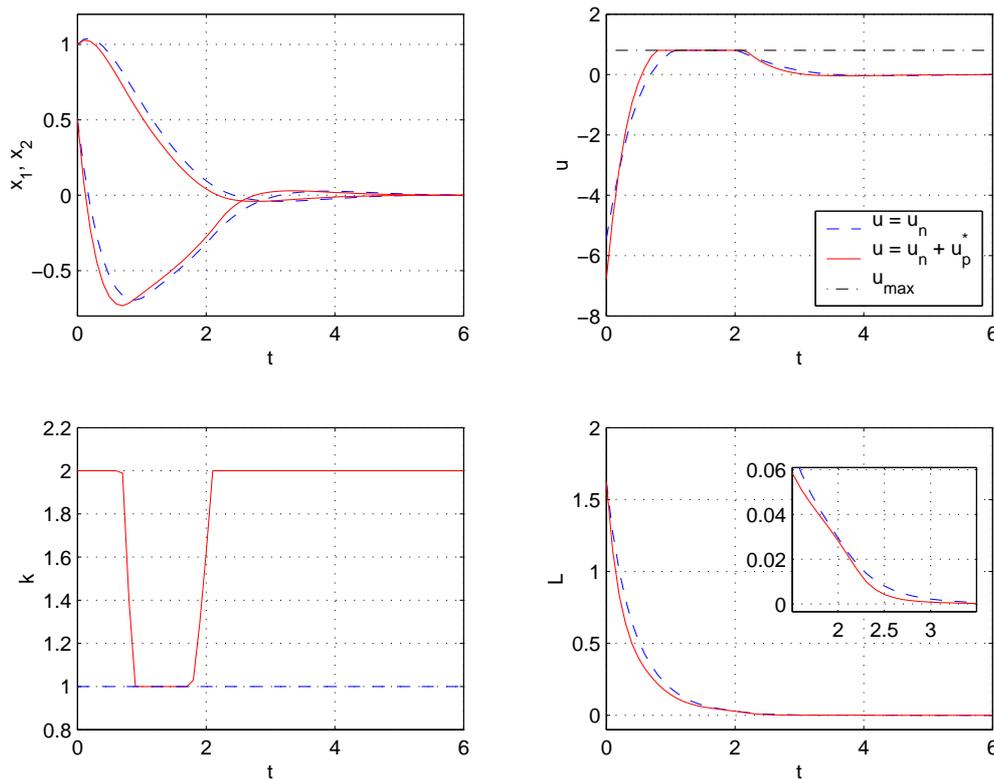


FIG. 5.3 – Comparaison entre le cas $k = 1$ et le cas k optimisé

Cette approche peut être utilisée pour affiner le réglage des paramètres du contrôleur nominal, en partant d'un réglage initial pour lequel on sait que la stabilité asymptotique du

³Ici encore, on a choisi de mettre en évidence l'optimalité de l'approche proposée en définissant les gains de la fonction coût de manière à ne pas imposer de performance spécifique pour le système bouclé. Celle-ci peut être sensiblement améliorée par un choix adéquat de ces gains.

système bouclé est assurée.

On a supposé jusqu'à présent que la représentation d'état du système (5.1) était parfaitement déterminée. On souhaite maintenant s'intéresser au cas de systèmes possédant des paramètres inconnus.

5.4 Extension adaptative

On considère les systèmes dynamiques dont l'évolution en temps continu peut être décrite sous la forme

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x)u + F(x)\theta \quad (5.21)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u \in \mathbb{R}^m$ la commande et $\theta \in \mathbb{R}^p$ un vecteur de paramètres inconnus constants, ou variant lentement dans le temps. On suppose que f et g sont de classe \mathcal{C}^1 , avec g bornée, $f(0) = 0$ et $g(0) \neq 0$.

On cherche à déterminer pour Σ une loi de commande de la forme $u = u_n + u_p$, où la composante nominale u_n est une loi de commande adaptative et où la composante u_p est de nature prédictive.

5.4.1 Composante nominale adaptative u_n

Soit $\hat{\theta}$ une estimée de θ . On introduit l'erreur d'estimation

$$\tilde{\theta} \triangleq \theta - \hat{\theta} \quad (5.22)$$

On définit le système nominal Σ_n correspondant à Σ avec $\hat{\theta} = \theta$:

$$\Sigma_n : \dot{x} = f(x) + g(x)u + F(x)\hat{\theta} \quad (5.23)$$

Le système Σ peut se ré-écrire en

$$\Sigma : \dot{x} = f(x) + g(x)u + F(x)\hat{\theta} + F(x)\tilde{\theta} \quad (5.24)$$

où le terme $F(x)\tilde{\theta}$ peut être vu comme une pseudo-perturbation pour le système nominal Σ_n .

On suppose que l'on a déterminé une commande $u_n = u_n(x, \hat{\theta})$ stabilisant exponentiellement le système nominal Σ_n . La dynamique du système Σ_n bouclé par $u = u_n$ est notée

$$\dot{x} = \phi(x, \hat{\theta}) \quad (5.25)$$

avec $\phi(0, \hat{\theta}) = 0$.

D'après le théorème réciproque de Lyapunov (théorème 4.5 de [57]), il existe une fonction de Lyapunov \mathcal{L} et des constantes strictement positives c_1, c_2, c_3, c_4 telles que :

$$c_1 \|x\|_2^2 \leq \mathcal{L}(x) \leq c_2 \|x\|_2^2 \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \phi(x, \hat{\theta}) \leq -c_3 \|x\|_2^2 \quad (5.27)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x) \right\|_2 \leq c_4 \|x\|_2 \quad (5.28)$$

On peut donc trouver une constante λ strictement positive telle que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \phi(x, \hat{\theta}) \leq -\lambda \mathcal{L}(x) \quad (5.29)$$

5.4.2 Composante prédictive u_p

Pour un instant t donné et un horizon temporel de longueur T fixée, on définit le modèle de prédiction

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(\tau) = \phi(\bar{x}(\tau), \hat{\theta}(\tau)) + g(\bar{x}(\tau))u_p(\tau) & \forall \tau \in]t, t + T] \\ \bar{x}(t) = x(t) \end{cases} \quad (5.30)$$

On reprend la fonctionnelle $J(t, x_t, u_p(\cdot))$ définie par (5.5). La commande minimisant $J(t, x_t, u_p(\cdot))$ est notée $u_p^*(\cdot)$. On définit

$$u^*(t) = u_n(t) + u_p^*(t) \quad (5.31)$$

La dynamique du système Σ_n bouclé s'écrit alors

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + g(x(t))u_n(t) + g(x(t))u_p^*(t) + F(x(t))\hat{\theta}(t) \quad (5.32)$$

soit

$$\dot{x}(t) = \phi(x(t), \hat{\theta}(t)) + g(x(t))u_p^*(t) \quad (5.33)$$

5.4.3 Stabilité

On définit pour le système Σ la fonction de Lyapunov candidate \mathcal{S} par

$$\mathcal{S} = \mathcal{L} + \frac{1}{2} \tilde{\theta}^T \Lambda \tilde{\theta} \quad (5.34)$$

où Λ est une matrice symétrique définie positive. On définit également la dynamique d'adaptation

$$\dot{\hat{\theta}} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} F(x) \Lambda^{-1} \right)^T \quad (5.35)$$

Proposition 2 [5] *Le système Σ bouclé par la commande $u^* = u_n + u_p^*$ précédemment définie avec la dynamique d'adaptation (5.35) est asymptotiquement stable.*

Preuve

On sait que le système nominal Σ_n bouclé par $u = u_n$ est exponentiellement stable, par construction de u_n . Il existe donc une fonction de Lyapunov \mathcal{L} et un scalaire λ strictement positif vérifiant (5.29). De façon analogue à la preuve de la proposition 1, on montre que l'ajout de la composante prédictive permet de conserver cette stabilité exponentielle et que u_p^* converge exponentiellement vers zéro pour $t \rightarrow \infty$. Le système nominal Σ_n bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$ reste donc exponentiellement stable. On peut ainsi trouver une constante α strictement positive telle que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} (\phi(x, \hat{\theta}) + g(x)u_p^*) \leq -\alpha \mathcal{L}(x) \quad (5.36)$$

Considérons le système complet Σ et la fonction de Lyapunov candidate \mathcal{S} définie par (5.34). Sa dérivée le long des trajectoires du système bouclée par $u^* = u_n + u_p^*$ est donnée par

$$\dot{\mathcal{S}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \left\{ f(x) + g(x)u_n(x, \hat{\theta}) + g(x)u_p^* + F(x)\hat{\theta} + F(x)\tilde{\theta} \right\} - \dot{\hat{\theta}}^T \Lambda \tilde{\theta} \quad (5.37)$$

$$\dot{\mathcal{S}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} \left\{ \phi(x, \hat{\theta}) + g(x)u_p^* \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} F(x)\tilde{\theta} - \dot{\hat{\theta}}^T \Lambda \tilde{\theta} \quad (5.38)$$

En utilisant (5.36)

$$\dot{\mathcal{S}} \leq -\alpha \mathcal{L}(x) + \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} F(x) - \dot{\hat{\theta}}^T \Lambda \right\} \tilde{\theta} \quad (5.39)$$

En utilisant la dynamique d'adaptation (5.35) pour $\dot{\hat{\theta}}$, on a

$$\dot{\mathcal{S}} \leq -\alpha \mathcal{L}(x) \quad (5.40)$$

et d'après (5.26)

$$\dot{\mathcal{S}} \leq -\alpha c_2 \|x\|_2^2 \quad (5.41)$$

La dérivée de \mathcal{S} est semi-définie négative et s'annule pour $x = 0$. La fonction \mathcal{S} décroît ainsi jusqu'à $x \rightarrow 0$. Par continuité et en utilisant le principe d'invariance de La Salle, on a $\dot{x} \rightarrow 0$. On a alors, pour $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$, $\dot{x} \rightarrow 0$, $u_p^* \rightarrow 0$. En étudiant la dynamique du système bouclé donnée par

$$\dot{x} = \phi(x, \hat{\theta}) + g(x)u_p^* + F(x)\tilde{\theta} \quad (5.42)$$

on obtient

$$F(x)\tilde{\theta} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (5.43)$$

Le terme de pseudo-perturbation $F(x)\tilde{\theta}$ converge donc asymptotiquement vers zéro. Pour $F(0) \neq 0$ on a de plus $\tilde{\theta} \rightarrow 0$ i. e. $\hat{\theta} \rightarrow \theta$.

Le système Σ_n bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$ est exponentiellement stable. En d'autre termes, pour $F(x)\tilde{\theta} = 0$, le système Σ bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$ est exponentiellement stable. Comme $F(x)\tilde{\theta}$ converge asymptotiquement vers zéro, le système Σ bouclé par $u^* = u_n + u_p^*$ est donc asymptotiquement stable (Lemme 4.9 [57]).

■

5.4.4 Exemple

On considère le système

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= (x_2 + 1)(x_1^2 + \theta) + \sin(x_2) + u \end{aligned} \quad (5.44)$$

où θ est un paramètre inconnu constant et $\hat{\theta}$ une estimée de θ . Pour le système nominal, on définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 \quad (5.45)$$

et la commande

$$u_n(x, \hat{\theta}) = -(x_1 + x_2) - (x_2 + 1)(x_1^2 + \hat{\theta}) - \sin(x_2) \quad (5.46)$$

La composante prédictive de la commande est calculée en reprenant la fonctionnelle (5.5) définie à partir de (5.16).

Pour $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta}$, on introduit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S} = \mathcal{L} + \frac{1}{2}k_a\tilde{\theta}^2 \quad (5.47)$$

L'application de (5.35) à cet exemple donne la dynamique d'adaptation suivante :

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{1}{k_a}(x_1 + x_2)(x_2 + 1) \quad (5.48)$$

Les résultats de simulation présentés en Figure (5.4) ont été réalisés pour $k_a = 1$, $\lambda = 0.25$ et pour la condition initiale $x_0 = [1 \ 0.5]^T$. Les courbes en trait continu correspondent au cas où seul le contrôleur nominal adaptatif est appliqué au système, et les courbes en trait discontinu au cas où l'approche bi-composante a été employée. La vitesse de convergence du système bouclé par cette dernière est améliorée par rapport au cas nominal adaptatif seul. Pour cet exemple, on a $F(x) = [0 \ x_2 + 1]^T$ et donc $F(0) \neq 0$. La grandeur $\hat{\theta}$ est bien une estimée de θ dans le sens $\hat{\theta} \rightarrow \theta$ pour $t \rightarrow 0$.

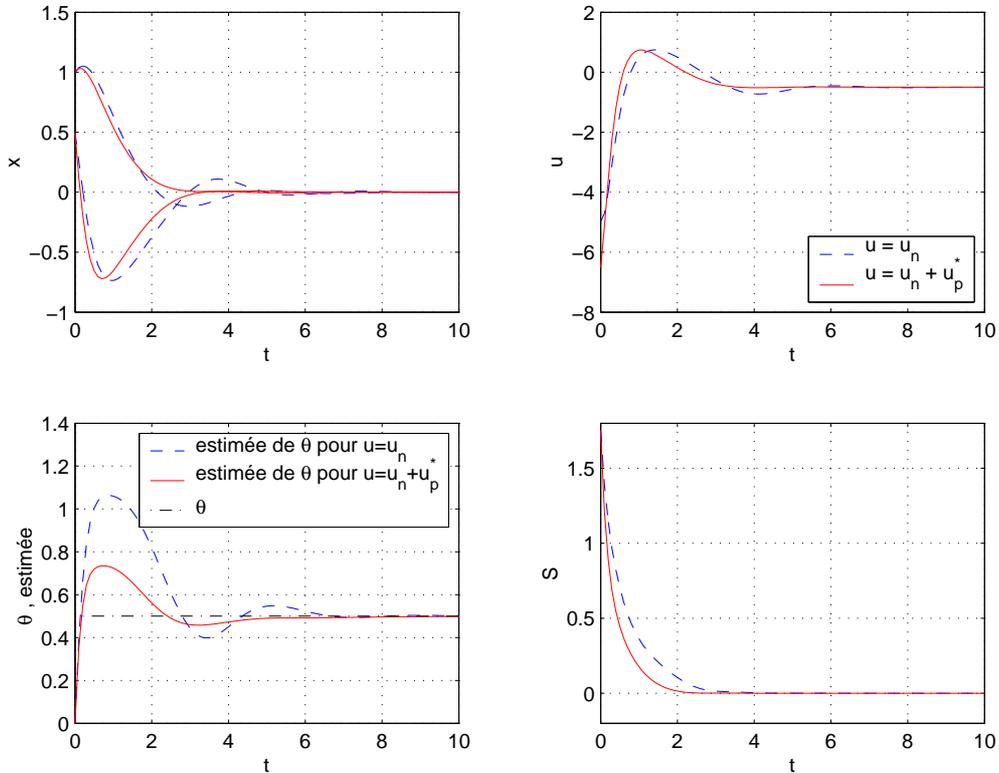


FIG. 5.4 – Comparaison de l'approche bi-composantes avec le contrôleur nominal adaptatif

5.4.5 Systèmes perturbés

Considérons à nouveau le système (Σ) défini en (5.21). On s'intéresse au cas où une perturbation d bornée convergeant asymptotiquement vers zéro est ajoutée, et l'on définit le système perturbé

$$\Sigma_d : \dot{x} = f(x) + g(x)u + F(x)\theta + d \quad (5.49)$$

Proposition 3 [5] *Le système Σ_d bouclé par la commande $u^* = u_n + u_p^*$ précédemment définie avec la dynamique d'adaptation (5.35) est asymptotiquement stable.*

Preuve

Le système Σ_d peut s'écrire sous la forme Σ_n (5.23) à laquelle vient s'ajouter deux termes de perturbations $F(x)\tilde{\theta}$ et d . Comme présenté dans la preuve de la proposition 2, on montre que u^* stabilise exponentiellement Σ_n et que le système Σ est asymptotiquement stable. La perturbation d étant bornée et convergeant asymptotiquement vers zéro, on peut utiliser les résultats de [57] sur les systèmes perturbés (Lemmes 4.8 et 4.9), et conclure que la commande u^* stabilise asymptotiquement le système Σ_d . ■

5.5 Application au guidage-pilotage

On cherche à appliquer l'approche bi-composante précédemment présentée pour commander le système (2.38) représentant la dynamique du drone dans le cas perturbé. Le système considéré est rappelé ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ m\dot{v} = -\mathcal{T} R e_3 + m g e_3 + F_{ext} \\ \dot{R} = R \Omega_{\times} \\ I\dot{\Omega} = -\Omega \times I\Omega + \Gamma + M_{ext} \end{cases} \quad (5.50)$$

On suppose que F_{ext} et M_{ext} peuvent être considérés constants ou variant lentement avec le temps. Soient \hat{F}_{ext} et \hat{M}_{ext} des estimées respectives de F_{ext} et M_{ext} . On définit les erreurs d'estimation

$$\tilde{F}_{ext} = F_{ext} - \hat{F}_{ext} \quad (5.51)$$

$$\tilde{M}_{ext} = M_{ext} - \hat{M}_{ext} \quad (5.52)$$

La dynamique du système peut être séparée en une partie translation (Σ_t) et en une partie rotation (Σ_r), puis reformulée en utilisant les notations précédentes et en faisant apparaître un terme d'erreur en orientation dans la dynamique de translation :

$$\begin{aligned} \Sigma_t \begin{cases} \dot{\xi} &= v \\ m\dot{v} &= -\mathcal{T} R^d e_3 + m g e_3 + \hat{F}_{ext} + \left\{ \tilde{F}_{ext} \right\} - \left\{ \mathcal{T} (R - R^d) e_3 \right\} \end{cases} \\ \Sigma_r \begin{cases} \dot{R} &= R \Omega_{\times} \\ I\dot{\Omega} &= -\Omega \times I\Omega + \Gamma + \hat{M}_{ext} + \left\{ \tilde{M}_{ext} \right\} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Ce système peut être vu comme un système nominal avec deux termes de perturbations. Comme détaillé par la suite, la convergence asymptotique du terme de perturbation $-\mathcal{T} (R -$

$R^d)e_3$ est obtenue par la loi de pilotage stabilisant la dynamique de rotation. La stabilité de Σ_r est obtenue par application de la proposition 2. La stabilité de Σ_t est, quand à elle, issue de la proposition 3.

Définissons pour chaque sous système les composantes nominales adaptatives et prédictives de la commande.

5.5.1 Loi de guidage

Notons $P = -\mathcal{T}R^de_3$ le vecteur de commande en position. Ce vecteur de commande est décomposé en $P = P_n + P_p$ avec la composante nominale P_n et la commande prédictive P_p .

Pour le suivi d'une trajectoire de référence, on introduit les erreurs

$$\epsilon_1 = \xi - \xi^d \quad (5.54)$$

$$\epsilon_2 = v - v^d \quad (5.55)$$

Afin d'utiliser une composante nominale de la commande développée par backstepping, on définit la variable

$$\delta_1 = \frac{m}{k_1}\epsilon_2 + \epsilon_1 \quad (5.56)$$

où k_1 est un gain strictement positif. Avec ces notations, le système Σ_t se réécrit en

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = -\frac{k_1}{m}\epsilon_1 + \frac{k_1}{m}\delta_1 \\ \dot{\delta}_1 = -\frac{k_1}{m}\epsilon_1 + \frac{k_1}{m}\delta_1 - \frac{\mathcal{T}}{k_1}R^de_3 + \frac{m}{k_1}ge_3 - \frac{m}{k_1}\dot{v}^d + \frac{1}{k_1}\hat{F}_{ext} + \left\{ \frac{1}{k_1}\tilde{F}_{ext} \right\} - \left\{ \frac{\mathcal{T}}{k_1}(R - R^d)e_3 \right\} \end{cases} \quad (5.57)$$

Considérons la partie nominale de (5.57), i.e. le système (5.57) sous les hypothèses $\tilde{F}_{ext} = 0$ et $R = R^d$ (hypothèse 2). La synthèse de la composante nominale P_n de la loi de commande en position n'est pas détaillée ici. Elle est développée par backstepping à partir des travaux présentés dans [88]. On définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}\epsilon_1^T\epsilon_1 + \frac{1}{2}\delta_1^T\delta_1 \quad (5.58)$$

Le vecteur de commande en position

$$P_n = -\mathcal{T}R^de_3 = -mge_3 - \hat{F}_{ext} + m\dot{v}^d - 2\frac{k_1^2}{m}\delta_1 \quad (5.59)$$

stabilise exponentiellement la partie nominale de (5.57). En effet, la dérivée de \mathcal{L}_1 le long des trajectoires du système (5.57), sous les hypothèses $\tilde{F}_{ext} = 0$ et $R = R^d$, est donnée par

$$\dot{\mathcal{L}}_1 = -2\frac{k_1}{m}\mathcal{L}_1 \quad (5.60)$$

Définissons maintenant le problème d'optimisation permettant de calculer la composante prédictive P_p .

Soit $X = [\epsilon_1^T \ \delta_1^T]^T$. La composante prédictive P_p est calculée en minimisant par rapport à $P_p(\cdot)$ la fonctionnelle

$$J_1(t, X_t, P_p(\cdot)) = \int_t^{t+T_1} (\bar{X}^T(\tau)Q_1\bar{X}(\tau) + P_p^T(\tau)R_1P_p(\tau)) d\tau + \bar{X}^T(t+T_1)Q_1\bar{X}(t+T_1) \quad (5.61)$$

où T_1 désigne la longueur de l'horizon de prédiction, et où Q_1 et R_1 sont deux matrices de pondération symétriques définies positives. Les prédictions \bar{X} sont calculées en utilisant la partie nominale de (5.57) commandée par $P = P_n + P_p$.

On considère maintenant le système (5.57) sous la seule hypothèse $R = R^d$, et l'on définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{L}_1 + \frac{1}{2k_f} \tilde{F}_{ext}^T \tilde{F}_{ext} \quad (5.62)$$

avec k_f strictement positif. La dynamique d'adaptation est définie par

$$\dot{\tilde{F}}_{ext} = \frac{k_f}{k_1} \delta_1 \quad (5.63)$$

5.5.2 Loi de pilotage

Le couple de commande Γ est décomposé en $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p$, avec la composante nominale Γ_n et la composante prédictive Γ_p .

Pour la synthèse de la commande dans le cas du suivi de trajectoire, on utilise des notations similaires à celles introduites pour le modèle (2.138), et on reformule la dynamique de rotation en :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I\dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\Omega}^d + \hat{M}_{ext} + \{\tilde{M}_{ext}\} \end{cases} \quad (5.64)$$

avec $\tilde{R} = (R^d)^T R$, $\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega}^d$ et $\bar{\Omega}^d = \tilde{R}^T \Omega^d$.

Considérons la partie nominale de (5.64), i.e. le système (5.64) pour $\tilde{M}_{ext} = 0$. La composante nominale Γ_n est également développée à partir des travaux présentés dans [88]. On définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2} \delta_2^T I \delta_2 \quad (5.65)$$

avec

$$\delta_2 = \tilde{\Omega} - \tilde{\Omega}^d \quad (5.66)$$

$$\tilde{\Omega}^d = V(P_a(\tilde{R})^T) \quad (5.67)$$

Le vecteur couple de commande

$$\Gamma_n = (\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) - I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d + I\tilde{R}^T \dot{\Omega}^d + I\dot{\tilde{\Omega}}^d - \hat{M}_{ext} - V(P_a(\tilde{R})) - k_2 \delta_2 \quad (5.68)$$

avec k_2 strictement positif, stabilise exponentiellement la partie nominale de (5.64). En effet, la dérivée de \mathcal{L}_2 le long des trajectoires du système (5.64), sous l'hypothèse $\tilde{M}_{ext} = 0$, est donnée par

$$\dot{\mathcal{L}}_2 = - \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\|^2 - k_2 \|\delta_2\|^2 \quad (5.69)$$

Définissons maintenant le problème d'optimisation permettant de calculer la composante prédictive Γ_p .

Soit $\chi = [\tilde{r}^T \ \delta_1^T]^T$ avec $\tilde{r} = V(P_a(\tilde{R}))$. La composante prédictive Γ_p est calculée en minimisant par rapport à $\Gamma_p(\cdot)$ la fonctionnelle

$$J_2(t, \chi_t, \Gamma_p(\cdot)) = \int_t^{t+T_2} (\bar{\chi}^T(\tau) Q_2 \bar{\chi}(\tau) + \Gamma_p^T(\tau) R_2 \Gamma_p(\tau)) d\tau + \bar{\chi}^T(t+T_2) Q_2 \bar{\chi}(t+T_2) \quad (5.70)$$

où T_2 désigne la longueur de l'horizon de prédiction, et où Q_2 et R_2 sont deux matrices de pondération symétriques définies positives. Les prédictions $\bar{\chi}$ sont calculées en utilisant la partie nominale de (5.64) commandée par $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_p$.

On considère maintenant le système (5.64) dans sa totalité et pour lequel on définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{L}_2 + \frac{1}{2k_m} \tilde{M}_{ext}^T \tilde{M}_{ext} \quad (5.71)$$

avec k_m strictement positif. La dynamique d'adaptation est définie par

$$\dot{\tilde{M}}_{ext} = k_m \delta_2 \quad (5.72)$$

5.5.3 Contraintes sur les commandes

On suppose que, lors du calcul de la composante prédictive du vecteur de commande en position P_p , la solution doit satisfaire les contraintes sur $\mathcal{T} = \|P\| = \|P_n + P_p\|$:

$$\mathcal{T}_{min} \leq \|P(\tau)\| \leq \mathcal{T}_{max} \quad \forall \tau \in [t, t+T_1] \quad (5.73)$$

On suppose qu'il en est de même lors du calcul de la composante prédictive Γ_p du couple de commande :

$$\Gamma_{min} \leq \Gamma(\tau) \leq \Gamma_{max} \quad \forall \tau \in [t, t+T_1] \quad (5.74)$$

où les inégalités sont définies composante par composante. Ces contraintes sont introduites dans les problèmes d'optimisation respectifs utilisés pour calculer P_p et Γ_p . Elles portent sur les sommes des deux composantes et peuvent permettre de prendre en compte les limitations physiques des actionneurs. Ces contraintes garantissent en outre que la poussée $\mathcal{T} = \|P\|$ et que le couple de commande Γ sont tous deux bornés.

Pour que la stabilité puisse être réalisée, il faut toutefois que les contraintes fixées sur les commandes permettent d'atteindre l'état d'équilibre. Si l'on note \mathcal{T}_e et Γ_e les valeurs à l'équilibre de la poussée $\mathcal{T} = \|P\|$ et du couple de commande Γ , il convient donc de vérifier que l'on a (composante par composante)

$$\mathcal{T}_{min} < \mathcal{T}_e < \mathcal{T}_{max} \quad (5.75)$$

$$\Gamma_{min} < \Gamma_e < \Gamma_{max} \quad (5.76)$$

En présence de perturbations, l'état d'équilibre peut être déplacé et les valeurs à l'équilibre de la poussée et du couple de commande dépendent de ces perturbations. L'ensemble des perturbations (F_{ext}, M_{ext}) pouvant être prises en compte en présence des contraintes précédemment définies est donné par

$$\mathcal{T}_{min} < \mathcal{T}_e(F_{ext}) < \mathcal{T}_{max} \quad (5.77)$$

$$\Gamma_{min} < \Gamma_e(M_{ext}) < \Gamma_{max} \quad (5.78)$$

où, en utilisant (5.57) pour $R = R^d$ et (5.64), les commandes à l'équilibre sont données par

$$\mathcal{T}_e(F_{ext}) = \frac{1}{k_1} \left\| mge_3 - m\dot{v}^d + F_{ext} \right\| \quad (5.79)$$

$$\Gamma_e(M_{ext}) = (\tilde{R}_e^T \Omega^d)_\times I (\tilde{R}_e^T \Omega^d) + I \tilde{R}_e^T \dot{\Omega}^d - M_{ext} \quad (5.80)$$

Ces contraintes permettent, outre la prise en compte des limitations d'actionneurs, de garantir que les commandes sont bornées. Cette propriété est utilisée dans l'analyse de la stabilité de l'approche proposée.

5.5.4 Stabilité

Proposition 4 [5] *Le système (5.57, 5.64) bouclé par l'approche bi-composante proposée est asymptotiquement stable.*

Preuve

La stabilité du système (5.57, 5.64) bouclé par l'approche bi-composante est issue de l'application des propositions 2 et 3.

Par application de la proposition (2), la dynamique de rotation en boucle fermée est asymptotiquement stable. L'erreur d'orientation $(R - R^d)$ converge donc asymptotiquement vers zéro. En utilisant une contrainte de la forme (5.73), la poussée \mathcal{T} est bornée et le terme d'erreur $-\frac{\mathcal{T}}{k_1}(R - R^d)e_3$ converge donc asymptotiquement vers zéro. La proposition 3 peut alors être appliquée à la dynamique de translation, et l'on a ainsi la stabilité asymptotique en boucle fermée de la dynamique de translation.

Le système (5.57, 5.64) commandé par l'approche bi-composante présentée est donc asymptotiquement stable. ■

5.5.5 Simulations

L'approche précédemment présentée est illustrée en simulation au travers de deux cas de figure : la stabilisation du modèle de drone à l'origine, et le suivi d'une trajectoire de référence.

Les paramètres utilisés pour le contrôleur sont donnés dans la table 5.2. Les paramètres choisis pour le modèle du drone sont les suivants :

$$I = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

Commande en position	Commande en attitude
$k_1 = 3.2$	$k_2 = 1.2$
$k_f = 0.9$	$k_m = 2$
$T_1 = 0.3$ s	$T_2 = 0.2$ s
$Q_1 = \text{diag}(2,2,2,5,5,5)$	$Q_2 = \text{diag}(10,10,10,5,5,5)$
$R_1 = I_{3 \times 3}$	$S_2 = I_{3 \times 3}$

TAB. 5.2 – Paramètres du contrôleur adaptatif-prédictif

avec $I_1 = 0.13$ kg.m², $I_2 = 0.13$ kg.m², $I_3 = 0.16$ kg.m². La masse du drone est $m = 2.5$ kg et l'accélération de la pesanteur $g = 9,81$ m.s⁻². Ce sont ces mêmes valeurs qui seront utilisées pour le reste de l'étude.

Stabilisation

On considère tout d'abord le cas de la stabilisation du modèle de drone à l'origine en partant des conditions initiales suivantes : $\xi_0 = [-7 \quad -6 \quad -5]^T$ (m), $\phi_0 = 20^\circ$, $\theta_0 = -10^\circ$, $\psi_0 = 15^\circ$, $v_0 = 0$ (m/s), $\Omega_0 = 0$ (deg/s). On suppose que le drone est soumis à une perturbation aérologique pouvant être représentée par la force constante (inconnue) $F_{ext} = [3 \quad 1.5 \quad 0]^T$ (N) appliqué en un point situé sur l'axe e_3^b du véhicule à une distance (inconnue) $\epsilon = -0.1$ (m) du centre de gravité. Le couple de perturbation s'écrit : $M_{ext} = e_3 \times R^T m_{ext}$ avec $m_{ext} = \epsilon F_{ext}$.

La Figure 5.5 présente l'évolution de l'état et des angles d'attitude dans le cas où seul le contrôleur nominal adaptatif est utilisé (courbes bleues en trait discontinu), et dans le cas où le contrôleur adaptatif prédictif est utilisé (courbes rouges en trait continu). La poussée et les composantes du couple de commande sont présentées en Figure 5.6 dans le cas adaptatif seul (courbes bleues en trait discontinu) et adaptatif prédictif (courbes rouges en trait continu). Les composantes de la force F_{ext} et du moment de perturbation m_{ext} sont représentées en Figure 5.7 (courbes noires en pointillés). Leurs estimées \hat{y} sont également tracées dans le cas adaptatif seul (courbes bleues en trait discontinu) et adaptatif prédictif (courbes rouges en trait continu).

La stabilité, en présence de la perturbation, est conservée lorsque la composante prédictive est ajoutée. Pour le réglage donné du contrôleur nominal adaptatif, l'approche prédictive-adaptative permet d'améliorer le comportement du drone en terme de rapidité de convergence des composantes de position et des angles d'attitude, de dépassement et d'amortissement. Les performances obtenues sont issues principalement du choix du critère d'optimisation utilisé.

Intéressons nous maintenant au cas contraint. On suppose que les limitations physiques des actionneurs peuvent être représentées par les contraintes suivantes :

$$\mathcal{T}_{min} = 65 \text{ (N)} \quad \mathcal{T}_{max} = 83 \text{ (N)} \quad (5.82)$$

$$\Gamma_{min} = [-0.4 \quad -0.5 \quad -0.1]^T \text{ (N.m)} \quad \Gamma_{max} = [0.4 \quad 0.5 \quad 0.1]^T \text{ (N.m)} \quad (5.83)$$

Les résultats de simulations présentés en Figures 5.8, 5.9 et 5.10 ont été réalisés pour les mêmes conditions initiales et perturbations que dans le cas précédent, mais en présence des contraintes définies ci-dessus. Pour le cas adaptatif seul, une saturation est appliquée aux commandes après leur calcul, de manière à ce que les valeurs des commandes appliquées au système respectent les contraintes (5.82) (5.83).

La stabilité est obtenue en tenant compte des contraintes. Contrairement au cas adaptatif seul, où les contraintes sont imposées a posteriori une fois la commande calculée, celles-ci sont directement prises en compte dans le calcul de la commande à deux composantes. Les performances obtenues dans ce cas, en terme de rapidité de convergence et d'amortissement des coordonnées en position et des angles d'attitude, sont améliorées par rapport au cas adaptatif seul saturé.

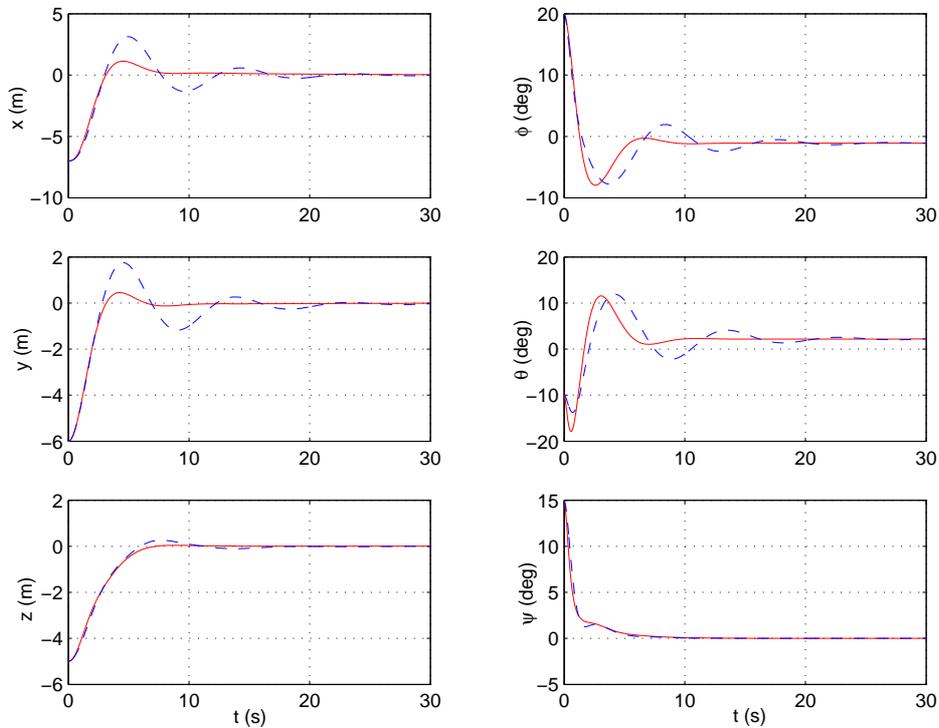


FIG. 5.5 – Position et angles d'attitude dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu)

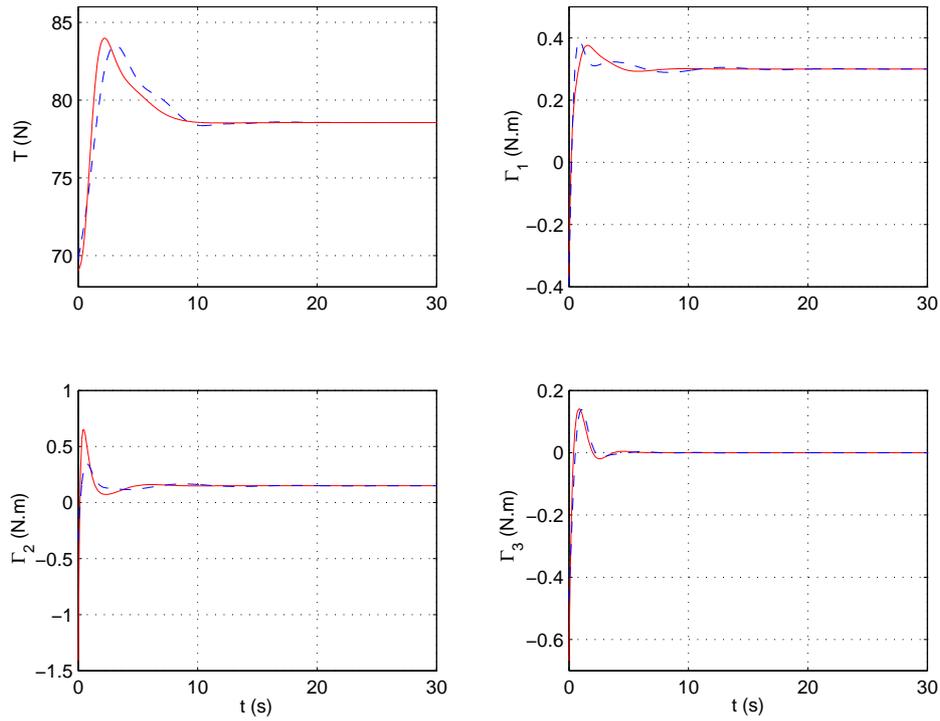


FIG. 5.6 – Poussée et couple de commande dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu)

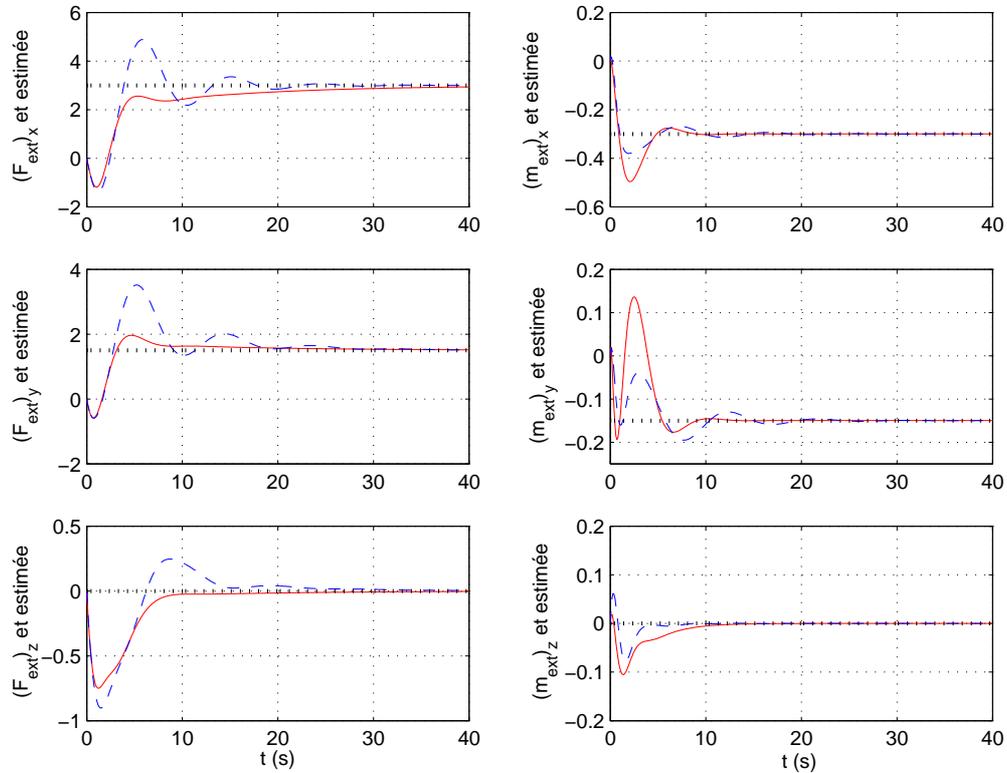


FIG. 5.7 – Efforts extérieurs (trait pointillé) et estimées dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu)

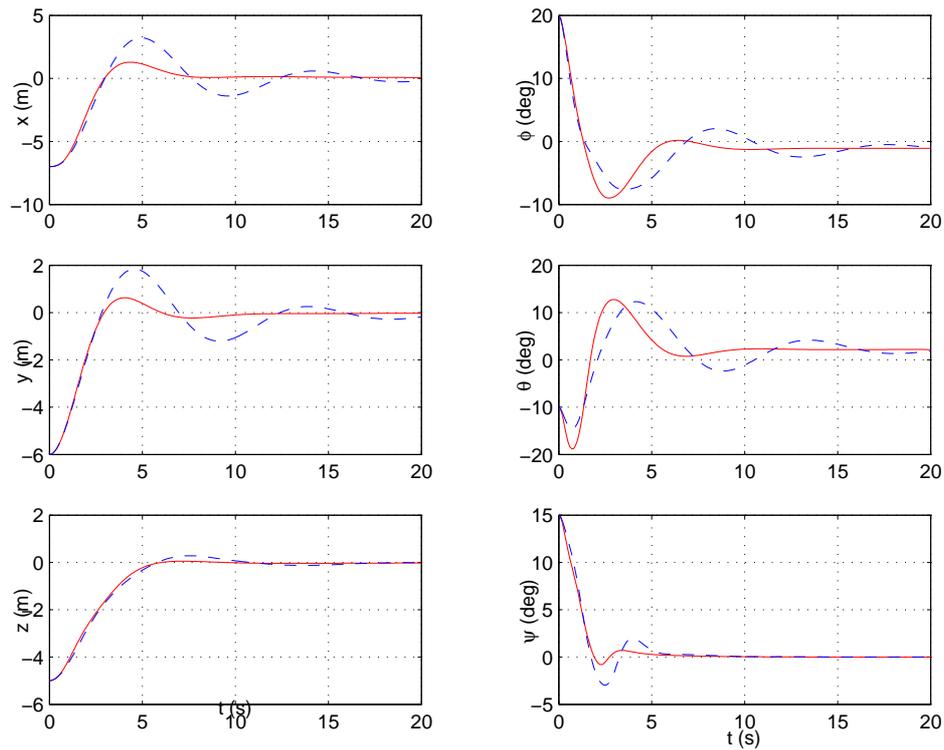


FIG. 5.8 – Position et angles d’attitude dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu) en présence de contraintes sur la commande

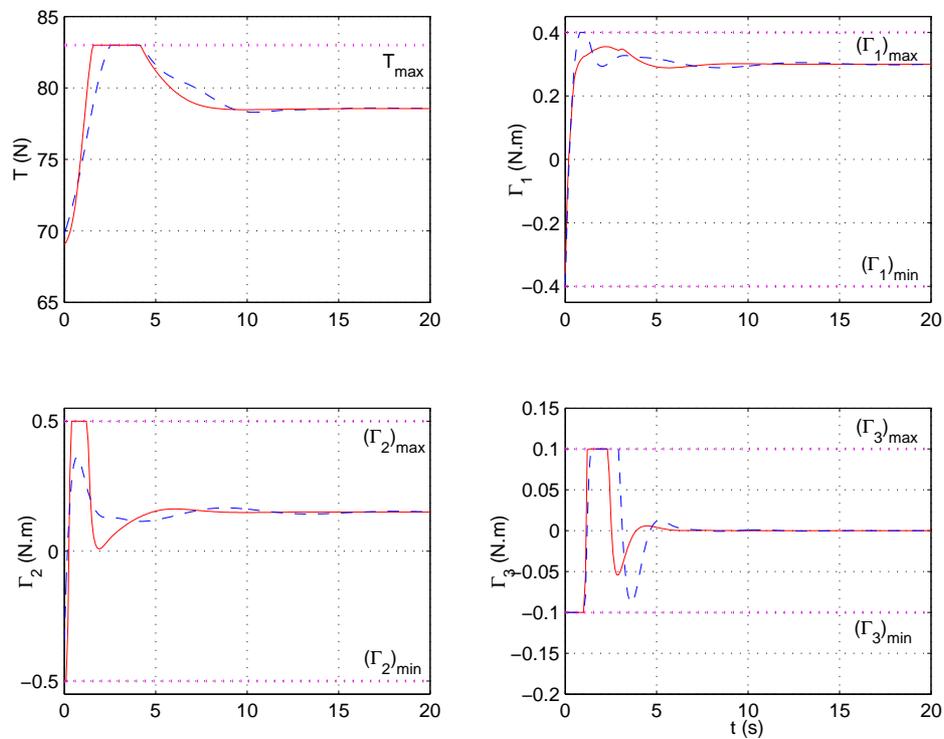


FIG. 5.9 – Poussée et couple de commande dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu) en présence de contraintes sur la commande (trait pointillé)

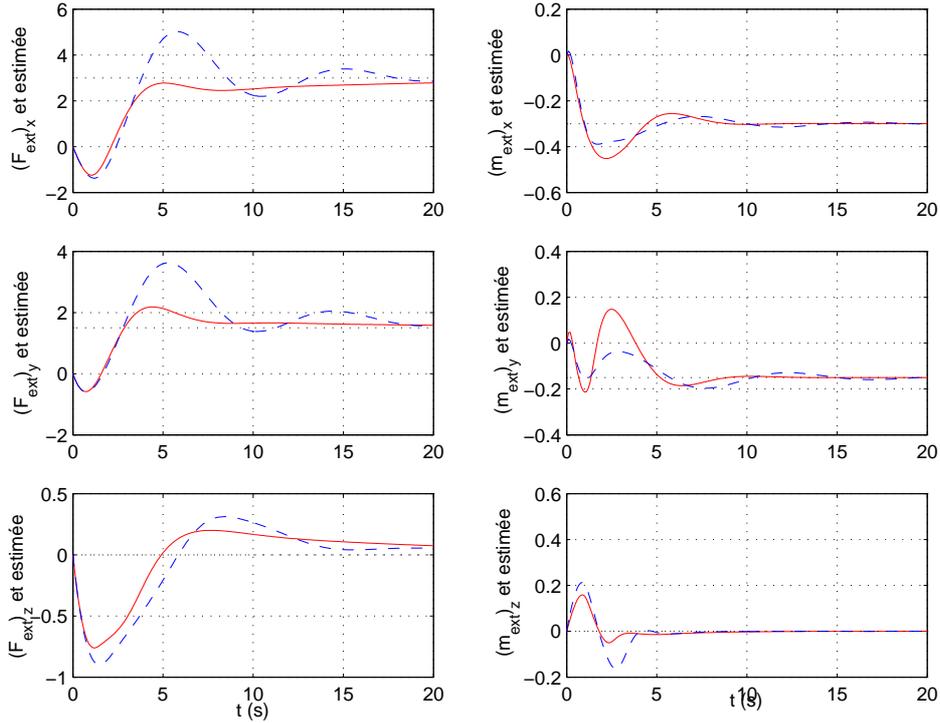


FIG. 5.10 – Efforts extérieurs (trait pointillé) et estimées dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu) en présence de contraintes sur la commande

Suivi de trajectoire

On s'intéresse maintenant au cas du suivi d'une trajectoire de référence définie par

$$\xi^d = [x^d \quad y^d \quad z^d]^T \quad \psi^d = 0 \quad (5.84)$$

avec

$$x^d(t) = 0.25t \quad y^d(t) = 0.25t \quad z^d(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 36 \\ 1 & \text{pour } t \geq 36 \end{cases} \quad (5.85)$$

La perturbation et les conditions initiales restent identiques à celles de l'exemple de stabilisation, excepté pour la position initiale choisie égale à $\xi_0 = [-3 \quad -4 \quad 0]^T$ (m).

La Figure 5.11 présente la trajectoire de référence (trait pointillé noir) ainsi que l'évolution de la position et des angles d'attitude dans le cas adaptatif seul (trait discontinu bleu) et dans le cas adaptatif-prédictif (trait continu rouge). La stabilité est obtenue par l'approche bi-composante adaptative prédictive et les performances du système bouclé sont améliorées par rapport au contrôleur adaptatif donné. L'ajout de la composante prédictive permet de plus d'anticiper (d'un laps de temps égal à la longueur de l'horizon de prédiction) les changements de référence, comme présenté en Figure 5.12, où est détaillé le changement de référence en z intervenant à $t = 36$ s. Cette anticipation des changements de référence (lorsque ceux-ci sont connus), même discontinus comme présenté dans cet exemple, permet d'améliorer la réactivité du drone et d'obtenir un meilleur suivi de trajectoire.

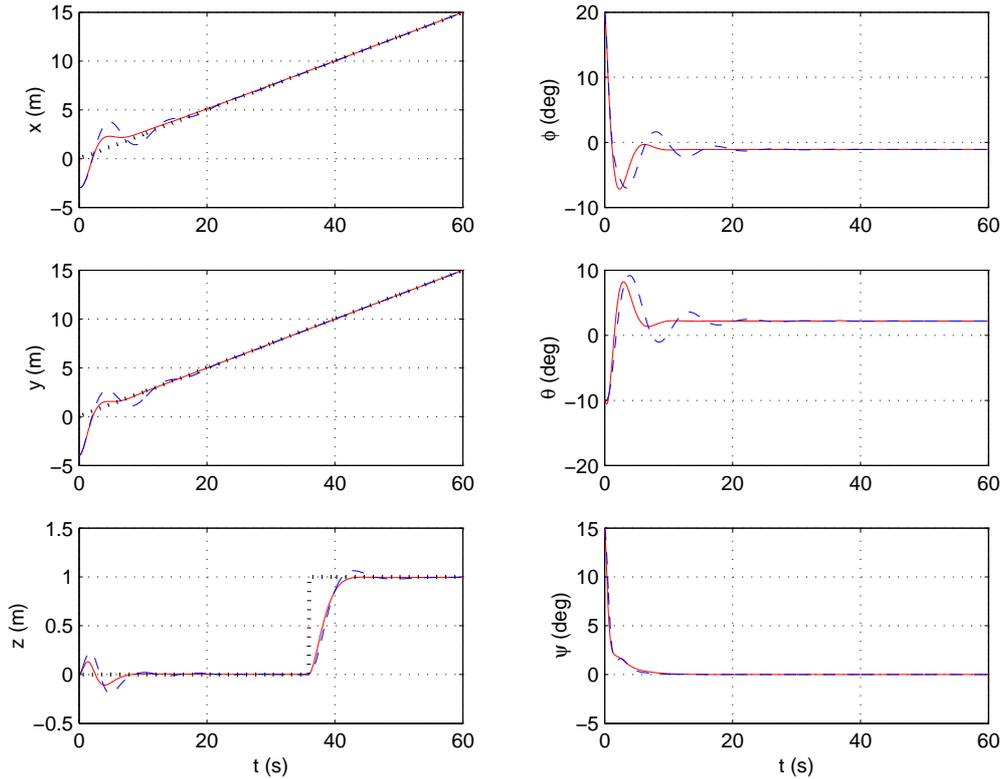


FIG. 5.11 – Référence (trait pointillé), état angles d'attitude dans le cas adaptatif seul (trait discontinu) et adaptatif prédictif (trait continu)

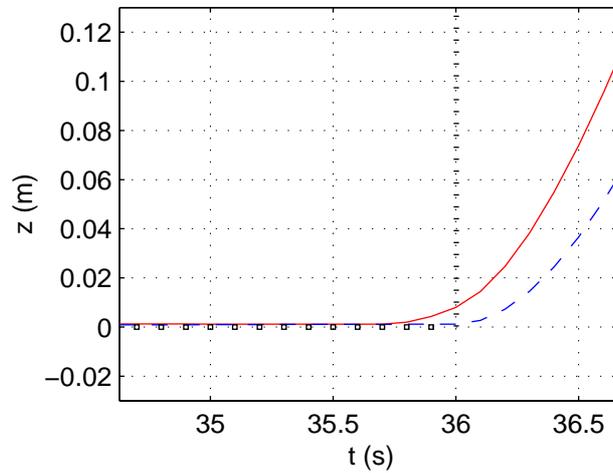


FIG. 5.12 – Anticipation du changement de référence

5.6 Bilan et limites de l'approche

L'approche bi-composante présentée permet la stabilisation de systèmes dynamiques non linéaires. Elle permet d'utiliser une commande prédictive non linéaire sans avoir besoin d'ajouter des contraintes stabilisantes ni un coût terminal particulier. La composante nominale de la commande peut être vue comme une commande pré-stabilisante alors que la composante prédictive permet la prise en compte de contraintes et garantit une optimalité lo-

cale. Cette approche peut ainsi être utilisée pour améliorer les performances d'un contrôleur nominal donné.

Une formulation adaptative a été proposée pour les systèmes dont la représentation est affine vis-à-vis de la commande et vis-à-vis d'un vecteur de paramètres inconnus. Cette formulation a été appliquée au guidage pilotage du modèle de drone dans le cas de la stabilisation et du suivi de trajectoire en présence de perturbations inconnues.

Notons que cette approche nécessite la synthèse d'une commande nominale stabilisant exponentiellement le système. Cette synthèse pouvant s'avérer complexe dans le cas de certains systèmes non linéaires, nous nous proposons de nous intéresser maintenant à une commande où seule une composante prédictive est employée.

Chapitre 6

Commande prédictive contractante

6.1 Commande prédictive et contraintes terminales

On considère les systèmes dynamiques dont l'évolution en temps continu peut être décrite par

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)) \quad \forall t > 0 \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{6.1}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système et $u \in \mathbb{R}^m$ sa commande. Pour un instant t et un horizon temporel de longueur $T > 0$ donnés, on définit le modèle de prédiction¹

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(\tau) &= \bar{f}(\bar{x}(\tau), u(\tau)) \quad \forall \tau \in]t, T] \\ \bar{x}(t) &= x(t)\end{aligned}\tag{6.2}$$

et la fonctionnelle

$$J(t, x(t), T, u(\cdot)) = \int_t^{t+T} q(\bar{x}(\tau), u(\tau)) d\tau\tag{6.3}$$

où $q(\cdot, \cdot)$ est une forme semi-définie positive de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Nous avons vu précédemment (Section 3.3.2) que, pour garantir par une approche de type commande prédictive la stabilité d'un système de la forme (6.1), le calcul de la commande à l'instant t peut se faire en résolvant le problème

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t, x(t)) : \quad & \min_{u(\cdot)} J(t, x(t), T, u(\cdot)) \\ & \text{tel que } \bar{x}(t+T) \in \mathbb{X}_f\end{aligned}\tag{6.4}$$

où la contrainte terminale peut être une contrainte d'égalité, ou d'inégalité (domaine) associée à un contrôleur localement stabilisant (la commande prédictive perdant sa propriété stabilisante lorsque l'état du système est dans \mathbb{X}_f).

Le domaine d'attraction \mathbb{X}_0 du contrôleur correspond alors à l'ensemble des conditions initiales $x_0 \in \mathbb{R}^n$ pour lesquelles la contrainte terminale peut être satisfaite. Soit \mathbb{U} l'ensemble des commandes admissibles par le système. On note $\bar{x}(t, x_0, u)$ la valeur à l'instant t de l'état prédit à partir de la condition initiale x_0 et pour la commande u . On a alors

$$\mathbb{X}_0 = \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid \exists u \in \mathbb{U}, \bar{x}(T, x_0, u) \in \mathbb{X}_f\}\tag{6.5}$$

Pour augmenter la taille de \mathbb{X}_0 , à longueur d'horizon T constante, une première solution peut consister à relâcher la contrainte terminale en définissant un domaine final \mathbb{X}_f plus grand. Le contrôleur local doit cependant conserver sa propriété stabilisante au sein de ce nouveau domaine final. Sa synthèse peut s'avérer alors plus complexe, surtout dans le cas de systèmes fortement non linéaires.

Une seconde solution consiste à faire varier la contrainte terminale afin de définir un domaine \mathbb{X}_f dont la taille décroît en fonction temps et de l'état.

C'est ce dernier type de méthode qui nous intéressera dans ce chapitre.

¹D'une manière générale, la fonction \bar{f} utilisée pour définir le modèle de prédiction peut être différente de la fonction f utilisée pour la représentation de la dynamique du système.

6.2 Etat de l'art

Une première manière de définir une contrainte terminale dont la taille décroît dans le temps, est de construire, à partir de \mathbb{X}_f , une séquence d'ensembles imbriqués et contenant \mathbb{X}_f . Chaque ensemble doit vérifier une propriété d'atteignabilité, à savoir qu'il existe une commande permettant de faire passer l'état du système d'un ensemble donné vers l'ensemble précédent (ensemble plus petit) contenant \mathbb{X}_f . Cette méthode permet de définir, en temps discret, un problème de commande prédictive où la contrainte terminale est mise à jour à chaque itération, de manière à correspondre successivement à chacun de ces ensembles imbriqués. Dans ce cas, le bassin d'attraction du contrôleur n'est plus défini à partir de \mathbb{X}_f mais à partir du dernier ensemble invariant construit contenant \mathbb{X}_f et se trouve donc élargi. Cette méthode, utilisant ce type de contrainte terminale "contractante", est utilisée dans [66, 67] pour élargir le bassin d'attraction d'un contrôleur prédictif en temps discret. Elle nécessite toutefois le calcul hors ligne d'une séquence d'ensembles invariants imbriqués, calcul qui peut s'avérer difficile dans le cas non linéaire, et également dans le cas continu.

Une approche continue basée sur une contrainte contractante a été introduite tout d'abord dans le cas de systèmes linéaires [115, 116], puis dans le cas de systèmes non linéaires [117]. Dans ces travaux, la contrainte terminale traditionnelle est remplacée par une contrainte imposant une contraction de la norme l'état prédit du système, en fin d'horizon de prédiction. Une autre particularité de cette approche est que le problème de calcul de la commande n'est pas défini à partir de l'état actuel du système, mais d'un état prédit. Ceci permet de prendre en compte le temps nécessaire au calcul de la commande, mais augmente la sensibilité de l'algorithme aux erreurs de modèle.

Une contrainte contractante explicite est également utilisée dans [30]. Celle-ci n'est réactualisée qu'à des dates distantes d'une durée égale à l'horizon de prédiction, et permet de garantir la stabilité de systèmes non linéaires continus, en présence de perturbations additives convergent asymptotiquement vers zéro. En outre, cette méthode utilise une paramétrisation discrète de la commande, facilitant ainsi son implémentation.

Une autre approche de commande prédictive utilisant des propriétés de contraction a depuis été développée par [1] sans utiliser de contrainte stabilisante. Cette approche, également aisée à implémenter, peut être appliquée à des systèmes de dynamique rapide grâce à une paramétrisation de la commande de faible dimension. Elle permet de garantir la stabilité de systèmes non linéaires mais sans considérer les aspects performances en boucle fermée (rapidité, amortissement, anticipation).

L'approche que nous considérerons dans la suite de ce chapitre est celle proposée dans [30]. Avant de présenter le fonctionnement de cet algorithme de commande, nous présentons tout d'abord le principe d'utilisation d'une contrainte terminale contractante.

6.3 Contrainte contractante

Une façon instinctive de formuler une contrainte terminale contractante peut être

$$\|\bar{x}(t+T, x_t, u_t)\|_{\mathcal{P}} \leq \alpha \|x(t)\|_{\mathcal{P}} \quad (6.6)$$

pour une norme \mathcal{P} donnée et un facteur de contraction α vérifiant

$$0 \leq \alpha < 1 \quad (6.7)$$

Cette formulation n'est toutefois pas stabilisante dans la mesure où elle ne garantit pas une décroissance, au sens de la norme pondérée de l'état réel du système ($\|x\|_{\mathcal{P}}$). En effet, comme le présente le schéma de principe de la Figure 6.1, la satisfaction de cette contrainte à chaque date $t + k\delta$ (δ petit, $k \in \mathbb{N}$) de calcul de la commande n'implique pas la stabilité du système. Pour s'assurer de la stabilité du système bouclé, on peut choisir de ne pas actualiser la contrainte (6.6) à chaque instant, mais de vérifier que les prédictions de l'état du système la satisfont à une date fixe donnée. Lorsque l'état du système satisfait à son tour cette contrainte, on choisit alors de la remettre à jour.

Soit $0 < \Delta \leq T$. Pour un instant t donné, on définit la contrainte

$$\|\bar{x}(t+\Delta, x_\tau, u_\tau)\|_{\mathcal{P}} \leq \alpha \|x(t)\|_{\mathcal{P}} \quad (6.8)$$

Pour chaque date $\tau \in [t, t+\Delta[$ où la commande est calculée, on vérifie que la prédiction réalisée à partir de l'état $x(\tau)$ du système bouclé satisfait la contrainte (6.8). Lorsqu'à son

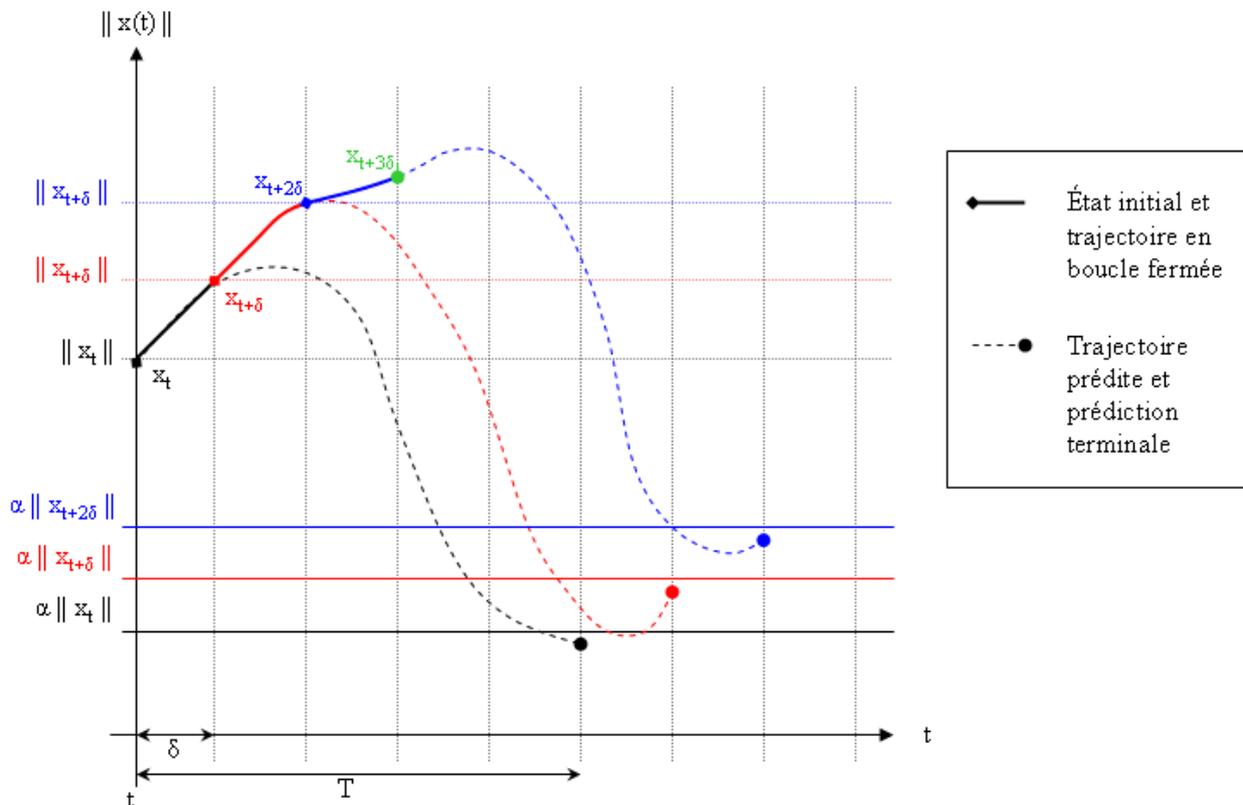


FIG. 6.1 – Contrainte ne garantissant pas la stabilité

tour l'état du système vérifie à la date $t + \Delta$

$$\|x(t + \Delta)\|_{\mathcal{P}} \leq \alpha \|x(t)\|_{\mathcal{P}} \quad (6.9)$$

la contrainte est alors remise à jour de la manière suivante

$$\|\bar{x}(t + 2\Delta, x_\tau, u_\tau)\|_{\mathcal{P}} \leq \alpha \|x(t + \Delta)\|_{\mathcal{P}} \quad (6.10)$$

Pour chaque date $\tau \in [t + \Delta, t + 2\Delta[$ où la commande est calculée, on vérifie alors que la prédiction réalisée à partir de l'état $x(\tau)$ du système bouclé satisfait la contrainte (6.10). La procédure est ensuite répétée, comme illustré par le schéma de principe présenté en Figure 6.2.

Cette idée de mise à jour de la contrainte contractante est à la base de l'algorithme présenté dans [30].

6.4 Présentation de l'algorithme

Nous rappelons ici le formalisme utilisé pour l'algorithme présenté dans [30] pour les systèmes non linéaires de la forme

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) + d(t) \quad (6.11)$$

où la fonction f de classe \mathcal{C}^1 et la perturbation d vérifient les propriétés suivantes :

Hypothèse 5 *La fonction f est localement Lipschitzienne par rapport à son premier argument sur un compact de \mathbb{R}^n .*

Hypothèse 6 *Le linéarisé $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial u})$ au voisinage de l'équilibre est stabilisable.*

Hypothèse 7 *Le système ne diverge pas en temps fini pour une commande bornée.*

Hypothèse 8 *La perturbation d est bornée et converge asymptotiquement vers zéro.*

On définit par $P \in \mathbb{N}^*$ la longueur de l'horizon de prédiction et par T_s la période d'échantillonnage. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit

$$t_k = t_0 + kPT_s \quad (6.12)$$

et l'on divise l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ en P parties :

$$\begin{aligned} t_k^j &= t_k + jT_s, \quad \forall j \in \{0, \dots, P\} \\ t_k^0 &= t_k \\ t_k^P &= t_{k+1} \end{aligned} \quad (6.13)$$

On suppose la commande u constante par morceaux sur l'horizon de prédiction et l'on introduit la séquence de commande

$$u_k^j(\cdot) = \left\{ u(t_k^j | t_k^j), u(t_k^{j+1} | t_k^j), \dots, u(t_k^{j+P-1} | t_k^j) \right\} \quad (6.14)$$

L'horizon sur lequel est calculé la commande, est choisi égal à l'horizon de prédiction. La valeur $x(t_k^j)$ de l'état à l'instant t_k^j est notée x_k^j . A l'instant t_k^j , la commande est calculée en résolvant le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{u_k^j(\cdot)} & \int_{t_k^j}^{t_k^{j+P}} \|\bar{x}_k^j(\tau)\|_Q^2 d\tau + \sum_{i=0}^{P-1} \|u(t_k^{j+i}|t_k^j)\|_S^2 \\ \text{t.q.} & \mathcal{L}(\check{x}_k^j(t_{k+1})) \leq \alpha \mathcal{L}(x_k) \\ & u_{min} \leq u(t_k^{j+i}|t_k^j) \leq u_{max} \quad \forall i = 0, \dots, P-1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

avec Q matrice de pondération symétrique semi-définie positive et S matrice de pondération symétrique définie positive, et avec $0 \leq \alpha < 1$. La fonction définie positive \mathcal{L} est utilisée pour évaluer la contrainte contractante. Les prédictions \bar{x} sont calculées en utilisant le modèle de prédiction

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_k^j(t) = f(\bar{x}_k^j(t), u_k^j(t)) \\ u_k^j(t) = u(t_k^{j+i}|t_k^j) \\ \bar{x}_k^j = x_k^j \\ \forall t \in [t_k^{j+i}, t_k^{j+i+1}], \quad \forall i \in \{0, \dots, P-1\} \end{cases} \quad (6.16)$$

tandis que les valeurs de l'état \check{x} , utilisées pour l'évaluation de la contrainte contractante, sont calculées par le modèle

$$\begin{cases} \dot{\check{x}}_k^j(t) = f(\check{x}_k^j(t), u_k^j(t)) \\ u_k^j(t) = u(t_k^{j+i}|t_k^j) \\ \check{x}_k^j = \begin{cases} \check{x}_k^{j-1}(t_k^j), & \forall j \geq 1 \\ x_k, & \text{for } j = 0 \end{cases} \\ \forall t \in [t_k^{j+i}, t_k^{j+i+1}], \quad \forall i \in \{0, \dots, P-1\} \end{cases} \quad (6.17)$$

Ce modèle, utilisé pour évaluer la contrainte contractante, ne prend en compte la valeur x_k de l'état du système que tous les P pas de temps, contrairement au modèle de prédiction (6.16) qui lui prend compte de cette valeur à chaque période d'échantillonnage. L'équation définissant le modèle de prédiction est intégrée sur tout l'horizon de prédiction (i.e. sur l'intervalle $[t_k^j, t_k^{j+P}]$) alors qu'il suffit d'intégrer le modèle (6.17) que de t_k^j à $t_k^P = t_{k+1}$.

Un récapitulatif visuel du calcul des prédictions et des quantités servant à l'évaluation de la contrainte contractante est proposé en Figure 6.3 pour le cas $P = 4$.

Seule la première composante $u^*(t_k^j|t_k^j)$ de la solution optimale $u_k^{*j}(\cdot)$ est appliquée au système sur l'intervalle $[t_k^j, t_k^{j+1}]$.

La procédure de calcul est répétée ensuite à l'instant suivant, pour calculer la valeur de la commande à l'instant t_k^{j+1} .

Considérons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 9 *Le problème d'optimisation (6.15) est faisable à l'instant initial.*

Sous les hypothèses 5 à 9, l'application de la méthode présentée dans [30] et rappelée ci-dessus permet de garantir la stabilité asymptotique du système (6.11).

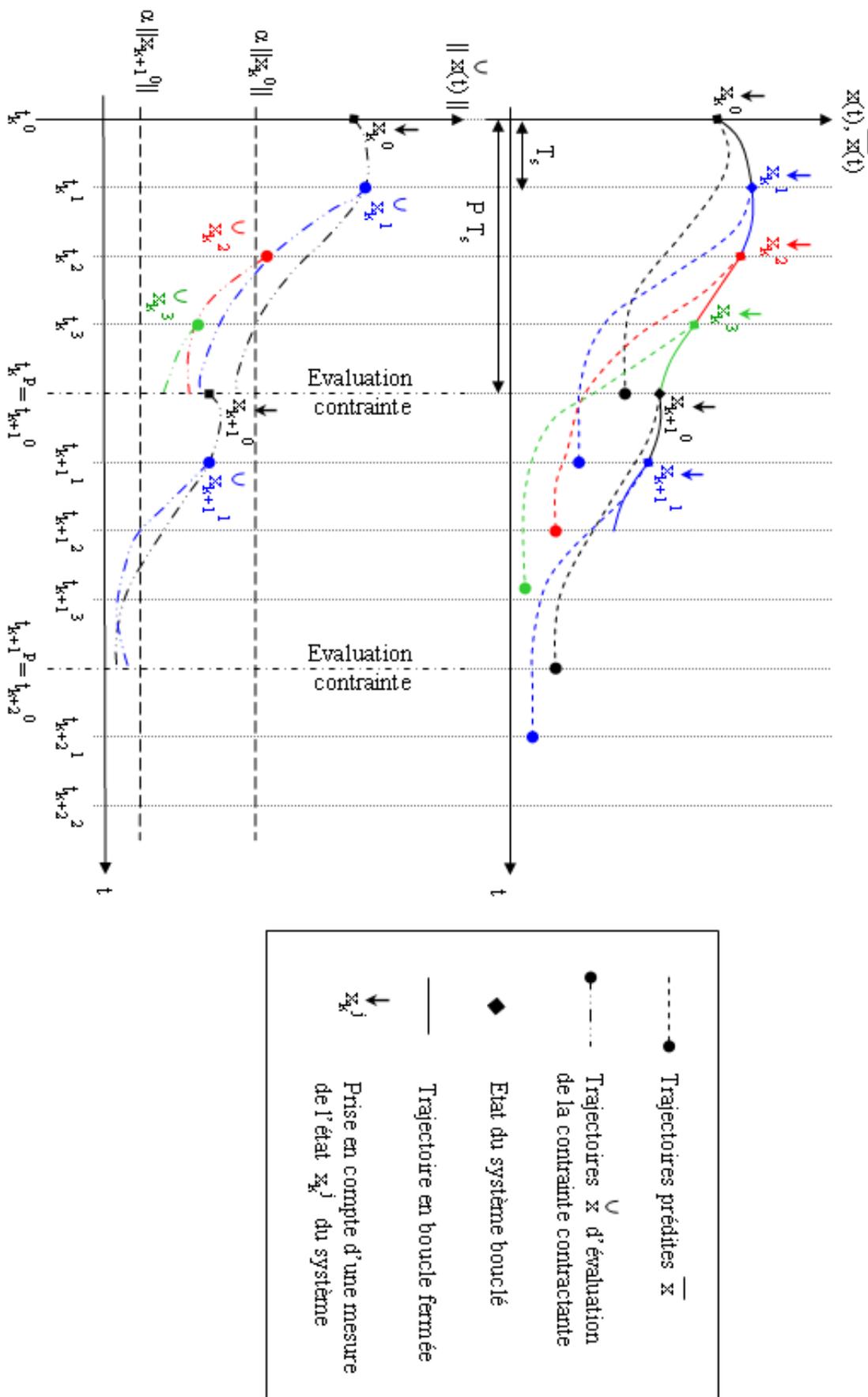


FIG. 6.3 – Calcul des prédictions et évaluation de la contrainte contractante

6.5 Facteur de contraction variable

Dans cette approche, la contrainte utilisée pour garantir la stabilité impose la contraction, pour une norme donnée, d'une valeur prédite de l'état du système. Cette contraction est paramétrée par le facteur α vérifiant $0 \leq \alpha < 1$.

Pour une longueur d'horizon de prédiction donnée, le choix du facteur de contraction est soumis au compromis suivant :

- si α est proche de 1, une faible contraction est imposée. Les risques d'infaisabilité liés à la satisfaction simultanée de la contrainte contractante et d'éventuelles contraintes sur la commande sont plus faibles que pour un α proche de zéro, ou égal à zéro (contrainte dure). En contrepartie, les performances obtenues en terme de rapidité de convergence sont moindres.
- si α est davantage proche de zéro, la contrainte contractante est plus difficile à satisfaire, et des problèmes d'infaisabilité peuvent apparaître. La vitesse de convergence sera par contre accrue.

Considérons, à titre d'exemple, le système

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \sin(x_2) + x_1 + u\end{aligned}\tag{6.18}$$

et la fonction

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2\tag{6.19}$$

pour l'évaluation de la contrainte contractante.

L'évolution de l'état depuis la condition initiale $x_0 = [0.5 \quad -1]^T$ est représentée en Figure 6.4, ainsi que la commande, pour diverses valeurs du facteur de contraction. On peut y vérifier que la performance, en terme de rapidité de convergence, est directement liée à la valeur du facteur de contraction α .

Si l'on ajoute la contrainte sur la commande $u \leq 1.2$, le problème devient alors numériquement infaisable pour certaines valeurs trop faibles du facteur de contraction (solveur ne trouvant pas de solution au problème d'optimisation). Pour des valeurs plus élevées, le problème redevient numériquement faisable mais la rapidité de stabilisation diminue. Un réglage adéquat de cette valeur permet d'obtenir le compromis faisabilité / performance souhaité.

Dans [30], il est mentionné que le facteur de contraction ainsi que l'horizon de prédiction devraient pouvoir varier de manière à être ajustés en cas d'infaisabilité du problème. Ces deux valeurs sont cependant choisies constantes lors de cette étude.

Nous proposons ici une approche à facteur de contraction variable, permettant de gérer au mieux le compromis faisabilité / performance précédemment évoqué.

On se propose de considérer le facteur de contraction comme un paramètre à optimiser.

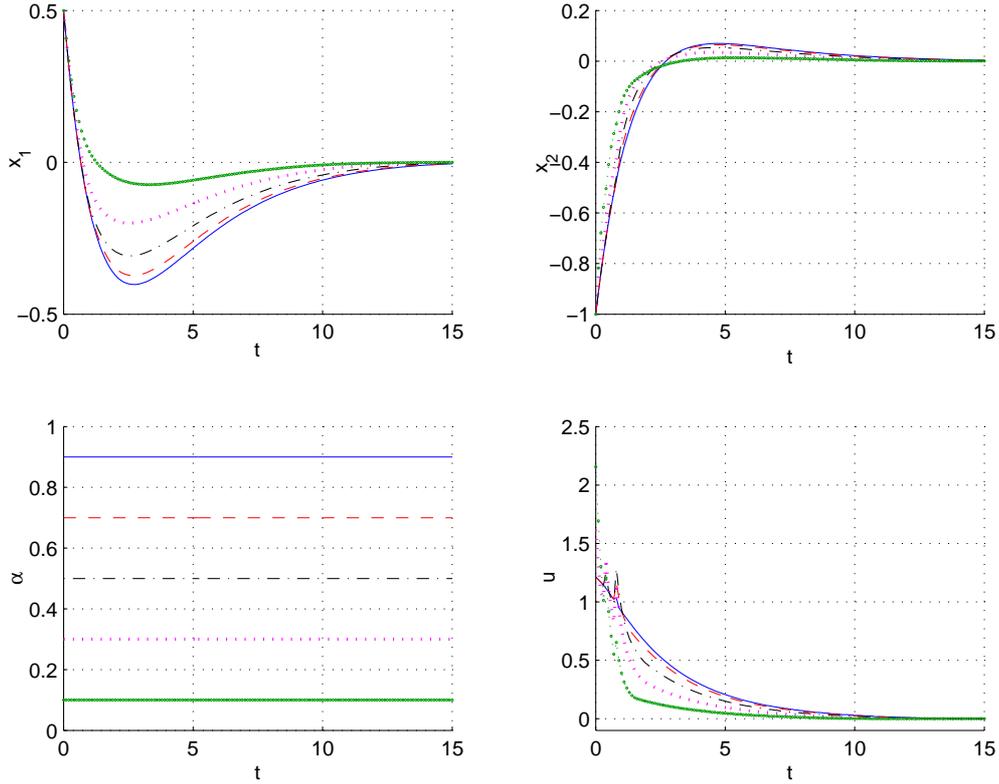


FIG. 6.4 – Etat et commande pour différentes valeurs du facteur de contraction

Le problème d'optimisation (6.15) est ainsi transformé en

$$\begin{aligned}
 \min_{(u_k^j(\cdot), \alpha)} & \int_{t_k^j}^{t_k^{j+P}} \|\bar{x}_k^j(\tau)\|_Q^2 d\tau + \sum_{i=0}^{P-1} \|u(t_k^{j+i}|t_k^j)\|_S^2 + Q_a \alpha^2 \\
 \text{t.q.} & \mathcal{L}(\bar{x}_k^j(t_{k+1})) \leq \alpha \mathcal{L}(x_k) \\
 & u_{\min} \leq u(t_k^{j+i}|t_k^j) \leq u_{\max} \quad \forall i = 0, \dots, P-1 \\
 & \alpha_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\max}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

avec $\alpha_{\min} \geq 0$ et $\alpha_{\max} < 1$.

Cette approche est appliquée à l'exemple précédent en introduisant la contrainte $u_{\max} = 1.2$. Dans le cas où α est fixe, le problème est numériquement faisable pour $\alpha = 0.9$ mais est infaisable pour $\alpha = 0.1$. Pour pouvoir conserver à la fois la faisabilité liée à un facteur de contraction élevé et la performance, liée à un facteur de contraction faible, on utilise l'approche à facteur de contraction variable en définissant, dans le problème (6.20), $\alpha_{\min} = 0.1$ et $\alpha_{\max} = 0.9$.

La Figure 6.5 présente les évolutions de l'état, de la commande et du facteur de contraction, pour les cas $\alpha = \text{cste} = 0.9$ (trait discontinu) et α optimisé (trait continu), en présence de la contrainte sur la commande, et pour le cas $\alpha = \text{cste} = 0.1$ (trait mixte), en l'absence de la contrainte sur la commande.

On peut y vérifier que l'approche à facteur de contraction variable permet de réaliser le meilleur compromis faisabilité / performance. Le problème est numériquement faisable et la contrainte sur la commande est bien prise en compte (comme pour le cas $\alpha = 0.9$), et la

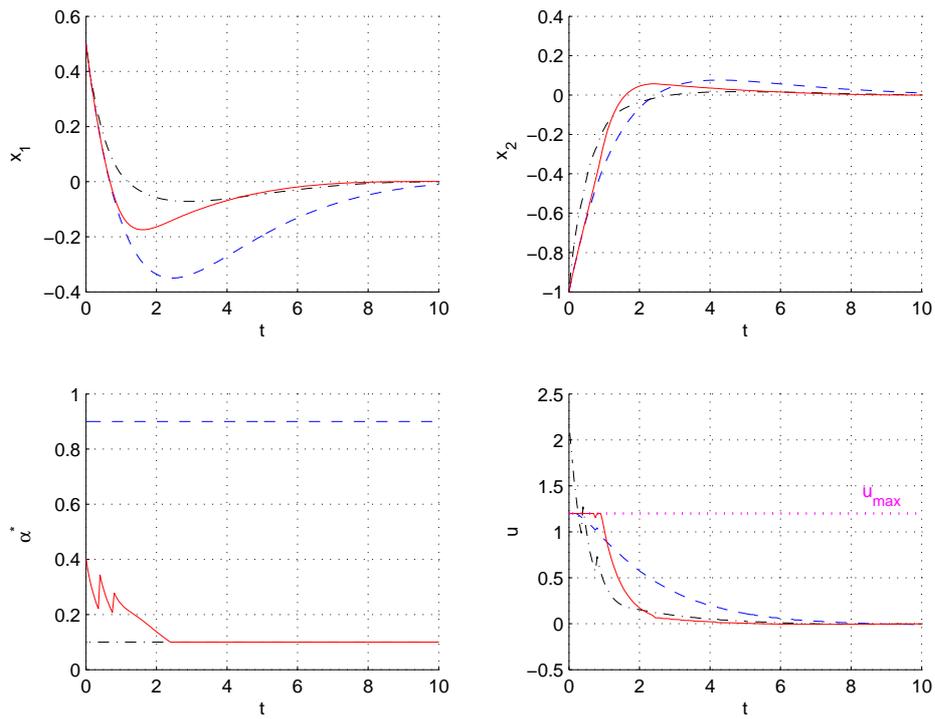


FIG. 6.5 – Stabilisation en présence de contraintes sur la commande, pour différentes valeurs de α et α optimisé

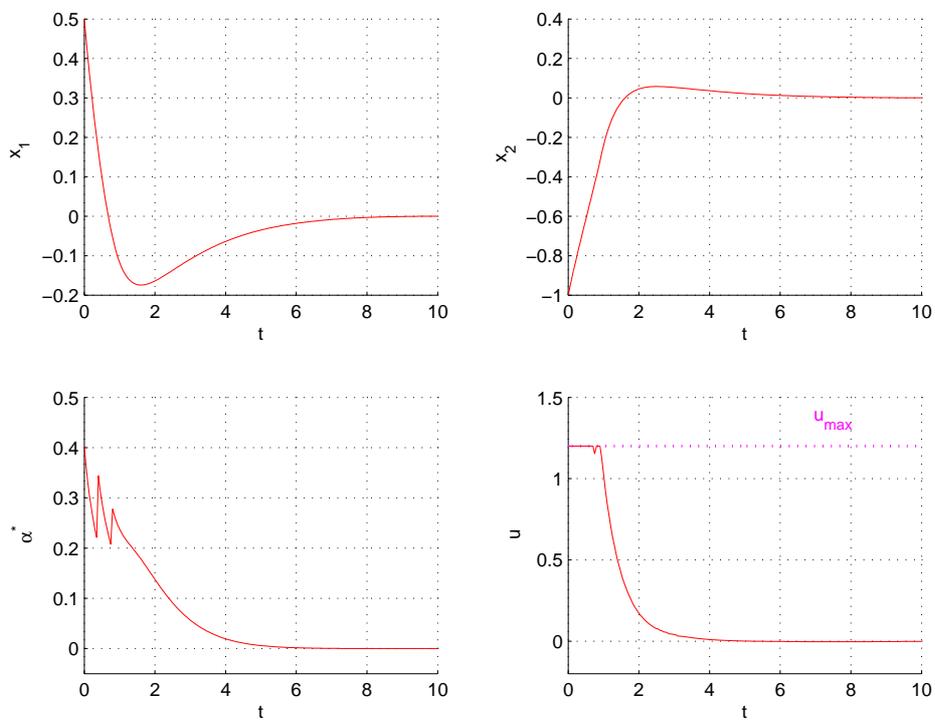


FIG. 6.6 – Optimisation du facteur de contraction et contrainte terminale d'égalité

performance en terme de rapidité de convergence est proche de celle pouvant être obtenue pour $\alpha = 0.1$ (cas non faisable en présence de la contrainte sur la commande). Les brusques variations de α^* proviennent du fait que ce facteur peut être choisi à chaque instant dans l'intervalle $[\alpha_{min}, \alpha_{max}]$ sans contrainte particulière.

Dans le cas où l'on choisit $\alpha_{min} = 0$, l'approche proposée permet de retrouver naturellement une contrainte terminale semblable à une contrainte d'égalité du type $\bar{x}(t + T) = 0$, lorsque l'état du système arrive dans une zone proche de l'équilibre où cette contrainte "dure" devient faisable.

Cette propriété est illustrée en Figure 6.6, où l'on a choisi $\alpha_{max} = 0.99$ et $\alpha_{min} = 0$. Une contrainte terminale d'égalité est alors imposée dans le problème d'optimisation lorsque l'état du système arrive dans un voisinage de l'équilibre correspondant à la portion de trajectoire pour $t \geq 6$.

L'optimisation du facteur de contraction permet d'obtenir le meilleur compromis faisabilité / performance. Ceci a néanmoins pour conséquence d'augmenter la charge de calcul lors de la résolution du problème d'optimisation, et peut alors rendre difficile son application pratique à la commande de systèmes à dynamique rapide.

Nous considérerons dans la suite une approche à facteur de contraction fixe pour l'application de cette méthode de commande prédictive au développement de lois de guidage-pilotage.

6.6 Application au guidage pilotage

Appliquons la méthode de commande prédictive avec contrainte contractante au guidage pilotage du modèle de drone, dans le cas d'un suivi de trajectoire.

6.6.1 Loi de guidage

Pour le développement de la commande en position dans le cas d'un suivi de trajectoire, on introduit les variables d'écart

$$\epsilon_1 = \xi - \xi^d \quad (6.21)$$

$$\epsilon_2 = v - v^d \quad (6.22)$$

et l'on reformule la dynamique de translation de (2.38), dans le cas $F_{ext} = 0$, en :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d - \frac{\mathcal{T}}{m}(R - R^d)e_3 \end{cases} \quad (6.23)$$

Pour appliquer le formalisme précédemment présenté, on définit

$$X = [\epsilon_1^T \ \epsilon_2^T]^T \quad (6.24)$$

$$u = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \quad (6.25)$$

$$d = \left[0 \quad -\frac{\mathcal{T}}{m}((R - R^d)e_3)^T \right]^T \quad (6.26)$$

pour réécrire (6.23) en

$$\dot{X} = f_1(X, u) + d \quad (6.27)$$

avec $f_1(0, 0) = 0$.

Remarque 1 *La fonction f_1 est localement lipschitzienne par rapport à son premier argument (uniformément par rapport au temps) sur un fermé borné de \mathbb{R}^6 . Le système $\dot{X} = f_1(X, u)$ est stabilisable et ne diverge pas en temps fini pour une commande u bornée.*

En utilisant les notations précédemment introduites, on note P_p la longueur de l'horizon de prédiction et par T_s la période d'échantillonnage. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $t_k = t_0 + kP_pT_s$ et l'on divise l'intervalle $[t_k, t_{k+1}]$ en P_p parties :

$$\begin{aligned} t_k^j &= t_k + jT_s, \quad \forall j \in \{0, \dots, P_p\} \\ t_k^0 &= t_k \\ t_k^{P_p} &= t_{k+1} \end{aligned} \quad (6.28)$$

On suppose la commande u constante par morceaux sur l'horizon de prédiction et l'on introduit la séquence de commande

$$u_k^j(\cdot) = \left\{ u(t_k^j | t_k^j), u(t_k^{j+1} | t_k^j), \dots, u(t_k^{j+P_p-1} | t_k^j) \right\}$$

Soit $X_k^j = X(t_k^j)$. A l'instant t_k^j , la commande est calculée en résolvant le problème

$$\begin{aligned} \min_{u_k^j(\cdot)} \int_{t_k^j}^{t_k^{j+P_p}} \|\bar{X}_k^j(\tau)\|_{Q_1}^2 d\tau + \sum_{i=0}^{P_p-1} \|u(t_k^{j+i} | t_k^j)\|_{S_1}^2 \\ \text{tel que } \mathcal{L}_1(\check{X}_k^j(t_{k+1})) \leq \alpha_1 \mathcal{L}_1(X_k) \\ u_{min} \leq u(t_k^{j+i} | t_k^j) \leq u_{max} \quad \forall i = 0, \dots, P_p - 1 \end{aligned} \quad (6.29)$$

avec Q_1 et S_1 deux matrices de pondération symétriques définies positives, et avec $0 \leq \alpha_1 < 1$. La fonction définie positive \mathcal{L}_1 utilisée pour évaluer la contrainte contractante est définie par

$$\mathcal{L}_1(X) = \frac{1}{2} X^T X = \frac{1}{2} \epsilon_1^T \epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2^T \epsilon_2 \quad (6.30)$$

Les prédictions \bar{X} et les valeurs de \check{X} , utilisé pour l'évaluation de la contrainte contractante, sont calculées en utilisant les formalismes (6.16) et (6.17).

Seule la première valeur $u^*(t_k^j | t_k^j)$ de la solution optimale $u_k^{*j}(\cdot)$ est utilisée pour calculer la commande

$$\mathcal{T}^*(t_k^j) = m \|u^*(t_k^j | t_k^j) - ge_3 + \dot{v}^d(t_k^j)\| \quad (6.31)$$

appliquée à la dynamique de translation sur $[t_k^j, t_k^{j+1}]$. La valeur de l'orientation désirée, consigne de la loi de pilotage, est donnée par

$$R^d(t_k^j)e_3 = \frac{m}{\mathcal{T}^*(t_k^j)} (-u^*(t_k^j | t_k^j) + ge_3 - \dot{v}^d(t_k^j)) \quad (6.32)$$

La procédure de calcul est répétée au bout d'une période d'échantillonnage pour calculer la nouvelle valeur de la commande à t_k^{j+1} .

Dans le problème d'optimisation (6.29), les bornes u_{min} et u_{max} sont choisies de manière à assurer que \mathcal{T}^* soit borné, comme présenté dans le Lemme ci-dessous :

Lemme 1 [9]

Supposons que la trajectoire de référence et que ses dérivées ($v^d = \dot{\xi}^d$, $\dot{v}^d = \ddot{\xi}^d$) soient uniformément continues et bornées telles que $(g - \sup \|\dot{v}^d\|) > 0$.

On définit les bornes u_{max} et u_{min} sur la commande et $\nu = \|u_{max}\|$. Supposons

$$u_{min} = -u_{max} \quad (6.33)$$

$$\nu < (g - \sup \|\dot{v}^d\|) \quad (6.34)$$

$$\exists K > 0, \nu < K < \infty \quad (6.35)$$

Alors, la commande \mathcal{T}^* est bornée et strictement positive.

Preuve

Montrons que \mathcal{T}^* est bornée. De (6.31), on a

$$\mathcal{T}^* = m \|-u^* + ge_3 - \dot{v}^d\| \leq m(\|u^*\| + g + \sup \|\dot{v}^d\|) \quad (6.36)$$

En utilisant $\|u^*\| \leq \nu$ avec (6.35), on montre que la commande \mathcal{T}^* est bornée.

Montrons que \mathcal{T}^* est strictement positif.

$$\mathcal{T}^* \geq m(-\|u^*\| + g - \|\dot{v}^d\|) \quad (6.37)$$

$$\mathcal{T}^* \geq m(-\nu + g - \sup \|\dot{v}^d\|) \quad (6.38)$$

et en utilisant finalement la condition (6.34), on obtient la stricte positivité de \mathcal{T}^* . ■

Le lemme 1 permet d'assurer que la relation (6.32) utilisée pour le calcul de l'orientation désirée est bien définie.

6.6.2 Loi de pilotage

Pour la loi de commande en attitude, on considère la formulation (5.64) de la dynamique de rotation et l'on définit

$$\Lambda = I_d - \tilde{R} \quad (6.39)$$

et

$$\gamma = \Gamma - \Omega_{\times}^d I \Omega^d - I \dot{\Omega}^d \quad (6.40)$$

La dynamique de rotation peut alors s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{\Lambda} = (\Lambda - I_d) \tilde{\Omega}_{\times} \\ I \dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + (I_d - \Lambda^T) \Omega^d)_{\times} I (\tilde{\Omega} + (I_d - \Lambda^T) \Omega^d) + \gamma \\ \quad + \Omega_{\times}^d I \Omega^d + I \tilde{\Omega}_{\times} (I_d - \Lambda^T) \Omega^d - I \Lambda^T \dot{\Omega}^d \end{cases} \quad (6.41)$$

Définissons

$$P_a(\tilde{R}) = \frac{\tilde{R} - \tilde{R}^T}{2} \quad (6.42)$$

et l'opérateur inverse de $(\cdot)_\times$:

$$\begin{aligned} V : SO(3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \forall b \in \mathbb{R}^3, V(b_\times) &= b \\ \forall B \in SO(3), V(B)_\times &= B \end{aligned} \quad (6.43)$$

Avec ces notations, on peut définir l'état

$$\chi = \left[V(P_a(\Lambda))^T \quad \tilde{\Omega}^T \right]^T \quad (6.44)$$

et on réécrit le système (6.41) sous la forme

$$\dot{\chi} = f_2(\chi, \gamma) \quad (6.45)$$

avec $f_2(0, 0) = 0$.

Remarque 2 La fonction f_2 est localement lipschitzienne par rapport à son premier argument (uniformément par rapport au temps) sur un fermé borné de \mathbb{R}^6 . Le système (6.45) ne diverge pas en temps fini lorsque la commande γ est bornée. Enfin, la paire $(\frac{\partial f_2}{\partial \chi}, \frac{\partial f_2}{\partial \gamma})_{(\chi=0, \gamma=0)}$ est stabilisable.

On note P_r la longueur de l'horizon de prédiction. Pour $k' \in \mathbb{N}$, on définit $t_{k'} = t_0 + k'P_r T_s$ et l'on divise l'intervalle $[t_{k'}, t_{k'+1}]$ en P_r parties :

$$\begin{aligned} t_{k'}^j &= t_{k'} + jT_s, \quad \forall j \in \{0, \dots, P_r\} \\ t_{k'}^0 &= t_{k'} \\ t_{k'}^{P_r} &= t_{k'+1} \end{aligned} \quad (6.46)$$

Comme pour la synthèse de la loi de guidage, on suppose γ constante par morceaux sur l'horizon de prédiction et on introduit la séquence de commande

$$\gamma_{k'}^j(\cdot) = \left\{ \gamma(t_{k'}^j | t_{k'}^j), \gamma(t_{k'}^{j+1} | t_{k'}^j), \dots, \gamma(t_{k'}^{j+P_r-1} | t_{k'}^j) \right\} \quad (6.47)$$

A l'instant $t_{k'}^j$, la commande est calculée en résolvant le problème d'optimisation

$$\begin{aligned} \min_{\gamma_{k'}^j(\cdot)} \int_{t_{k'}^j}^{t_{k'}^{j+P_r}} \left\{ \mu \operatorname{tr}(\bar{\Lambda}_{k'}^j(\tau)) + \left\| \bar{\Omega}_{k'}^j(\tau) \right\|_{Q_2}^2 \right\} d\tau + \sum_{i=0}^{P_r-1} \left\| \gamma_{k'}^j(t_{k'}^{j+i} | t_{k'}^j) \right\|_{S_2}^2 \\ \text{tel que } \mathcal{L}_2(\check{\Lambda}_{k'}^j(t_{k'+1}), \check{\Omega}_{k'}^j(t_{k'+1})) \leq \alpha_2 \mathcal{L}_2(\Lambda_{k'}, \tilde{\Omega}_{k'}) \\ \gamma_{\min} \leq \gamma(t_{k'}^{j+i}) \leq \gamma_{\max} \quad \forall i = 0, \dots, P_r - 1 \end{aligned} \quad (6.48)$$

avec Q_2 et S_2 deux matrices de pondération symétriques définies positives, et avec $\mu > 0$ et $0 \leq \alpha_2 < 1$. La forme définie positive \mathcal{L}_2 utilisée pour l'évaluation de la contrainte contractante est

$$\mathcal{L}_2(\Lambda, \tilde{\Omega}) = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\Lambda) + \frac{1}{2} \tilde{\Omega}^T I \tilde{\Omega} \quad (6.49)$$

Les prédictions et les quantités utilisées pour l'évaluation de la contrainte contractante sont toutes deux calculées en utilisant (6.45) avec le même formalisme que celui introduit pour la synthèse de la loi de guidage.

La première valeur $\gamma^*(t_{k'}^j|t_{k'}^j)$ de la solution optimale $\gamma_{k'}^{*j}(\cdot)$ est utilisée pour calculer la commande

$$\Gamma^*(t_{k'}^j) = \gamma^*(t_{k'}^j|t_{k'}^j) + \Omega^d(t_{k'}^j) \times I\Omega^d(t_{k'}^j) + I\dot{\Omega}^d(t_{k'}^j) \quad (6.50)$$

qui est appliquée à la dynamique de rotation durant une période d'échantillonnage. La procédure est ensuite répétée à l'instant suivant $t_{k'}^{j+1}$ pour calculer la nouvelle valeur du couple de commande.

6.6.3 Stabilité

Considérons la représentation dynamique du drone (2.38). Pour le suivi de trajectoire, le système a été reformulé en

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d - \frac{\mathcal{T}}{m}(R - R^d)e_3 \\ \dot{\Lambda} = (\Lambda - I_d)\tilde{\Omega}_\times \\ I\dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + (I_d - \Lambda^T)\Omega^d)_\times I(\tilde{\Omega} + (I_d - \Lambda^T)\Omega^d) + \gamma \\ \quad + \Omega_\times^d I\Omega^d + I\tilde{\Omega}_\times(I_d - \Lambda^T)\Omega^d - I\Lambda^T\dot{\Omega}^d \end{cases} \quad (6.51)$$

Hypothèse 10 *On suppose qu'à l'instant initial t_0 les problèmes d'optimisation (6.29) et (6.48) sont tous les deux faisables.*

Remarque 3 *L'hypothèse (10) est vérifiée pour des conditions initiales dans le domaine de vol usuel du modèle de drone. En effet, pour de telles conditions initiales, on peut trouver des valeurs de facteurs de contraction α_1 et α_2 et des longueurs d'horizon de prédiction P_p et P_r telles que les problèmes d'optimisation soient faisables.*

Proposition 5 [9] *Sous l'hypothèse 10, et sous les conditions (6.34) et (6.35), les commandes \mathcal{T}^* et Γ^* respectivement définies par (6.31) et (6.50) stabilisent asymptotiquement le système (6.51).*

Preuve

La preuve est basée sur l'application des résultats de [30].

En utilisant $f_2(0, 0) = 0$ et la remarque 2, la formulation de commande prédictive contractante peut être appliquée pour commander la dynamique de rotation. Sous l'hypothèse 10, on obtient alors la stabilité asymptotique de la dynamique de rotation en boucle fermée. Ainsi, le terme d'erreur en orientation $(R - R^d)$ converge asymptotiquement vers zéro. Sous les hypothèses (6.35) et (6.34), le lemme 1 garantit la bornitude de la commande \mathcal{T} . Par conséquent, le terme de perturbation $d = -\frac{\mathcal{T}}{m}(R - R^d)e_3$ converge asymptotiquement vers zéro.

En utilisant $f_1(0, 0) = 0$ et la remarque 1, l'approche prédictive contractante peut être appliquée pour commander la dynamique de translation. Elle garantit, sous l'hypothèse 10, la stabilité asymptotique de la dynamique de translation bouclée.

L'application de l'approche prédictive contractante, telle que présentée ici, stabilise asymptotiquement le système. ■

6.6.4 Simulations

On s'intéresse au suivi d'une trajectoire de référence définie par

$$\xi^d(t) = [2 \quad -2 \cos(0.05t) \quad 0.083t]^T, \quad \psi^d(t) = 0 \quad (6.52)$$

Les paramètres associés aux lois de commande sont : $T_s P_p = 2$ s, $Q_1 = \text{diag}(2, 2, 2, 5, 5, 5)$, $S_1 = I_d$, $\alpha_1 = 0.3$, $T_s P_r = 0.8$ s, $\mu = 1$, $Q_2 = I_d$, $S_2 = I_d$, and $\alpha_2 = 0.1$.

La position initiale est choisie égale à $\xi_0 = [-1 \quad 0.5 \quad -2]$ (m), les autres conditions initiales étant choisies égales à zéro.

L'évolution de la position et des angles d'attitude est représentée en Figure 6.7 avec la trajectoire de référence. Les valeurs du couple de commande et de la poussée sont présentés en Figure 6.9, et l'évolution des erreurs de tracking en Figure 6.10. La stabilisation vers

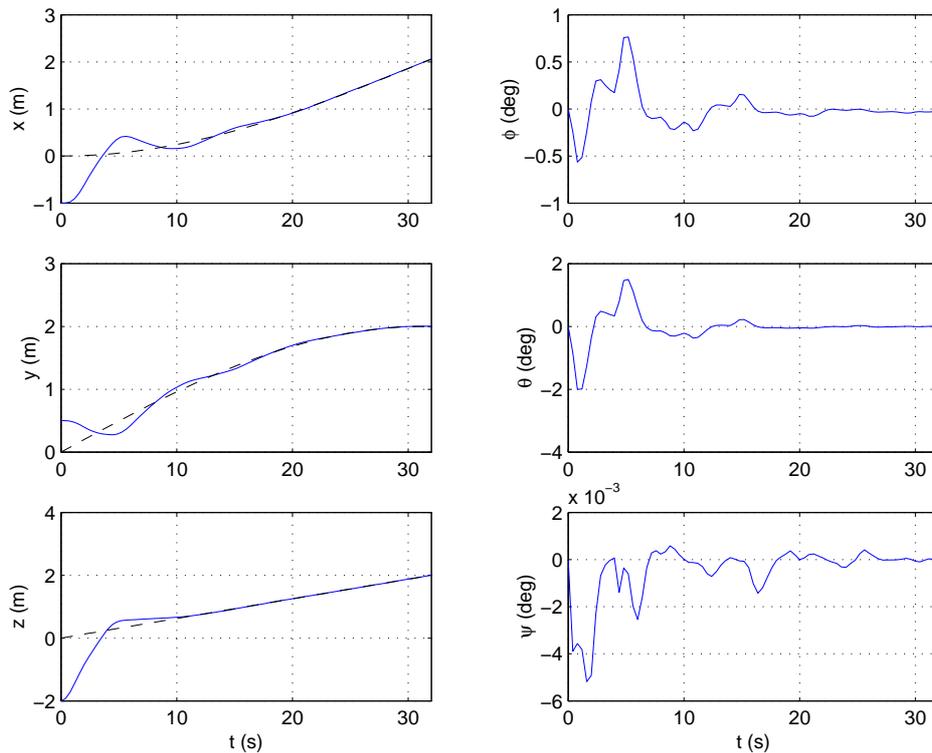


FIG. 6.7 – Evolution de la position et des angles d'attitude (référence : trait discontinu, réalisé : trait continu)

la trajectoire de référence est bien réalisée, avec un comportement satisfaisant en terme d'amortissement et de rapidité de convergence.

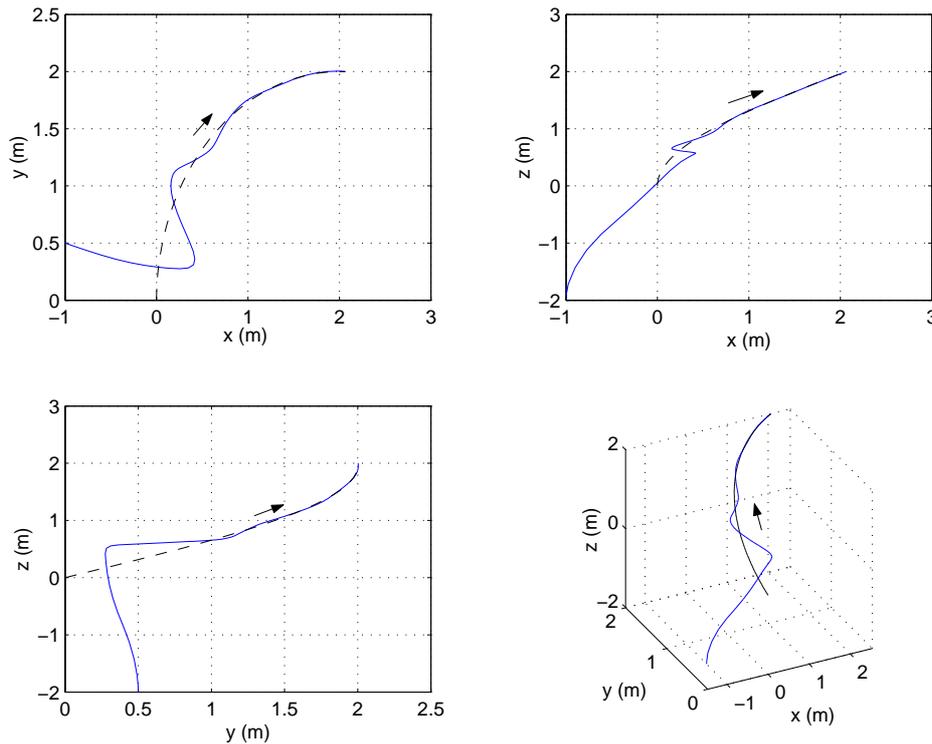


FIG. 6.8 – Projections de la trajectoire réalisée (trait continu) et de référence (trait discontinu)

6.7 Evitement d'obstacle

Dans le cas où le drone évolue dans un environnement parfaitement connu, la génération d'une trajectoire de référence peut se faire hors ligne, avant le début d'une mission. On peut alors par exemple utiliser des algorithmes de planification et de génération de trajectoire par optimisation sous contrainte [45] ou utilisant la platitude [111].

Dans le cas d'un environnement incertain, où la position des obstacles peut être méconnue ou temporellement variable, le véhicule doit être équipé de capteurs pouvant être utilisés pour la localisation des obstacles en temps réel (capteurs utilisant la vision, télémètres, scanners lasers, etc...). Une fois la position réelle des obstacles déterminée, la trajectoire du drone doit être modifiée par rapport à la trajectoire de référence qui lui a été initialement donnée.

Plusieurs approches ont été développées pour réaliser une fonction d'évitement d'obstacles pour les véhicules autonomes. Une première solution consiste à générer une nouvelle trajectoire de référence sans risque de collision. Des approches basées sur la commande prédictive ont été proposées à ce titre pour générer de proche en proche des portions locales de cette référence [106]. Cependant, la génération en ligne d'une référence peut être prohibitive en temps de calcul. Une autre solution envisageable consiste alors à introduire un "niveau réactif" entre la génération de trajectoire (path planner) et les fonctions de commande (tracking layer), afin de modifier la référence en prenant en compte les positions des obstacles détectés. Cette approche est utilisée dans [101] où cette fonction de "modification" de la référence est réalisée en combinant des propriétés d'attraction vers un objectif unique et de répulsion vis à vis des obstacles. Dans [102], la modification de la référence est réalisée par commande prédictive en utilisant des termes qui pénalisent la proximité aux obstacles.

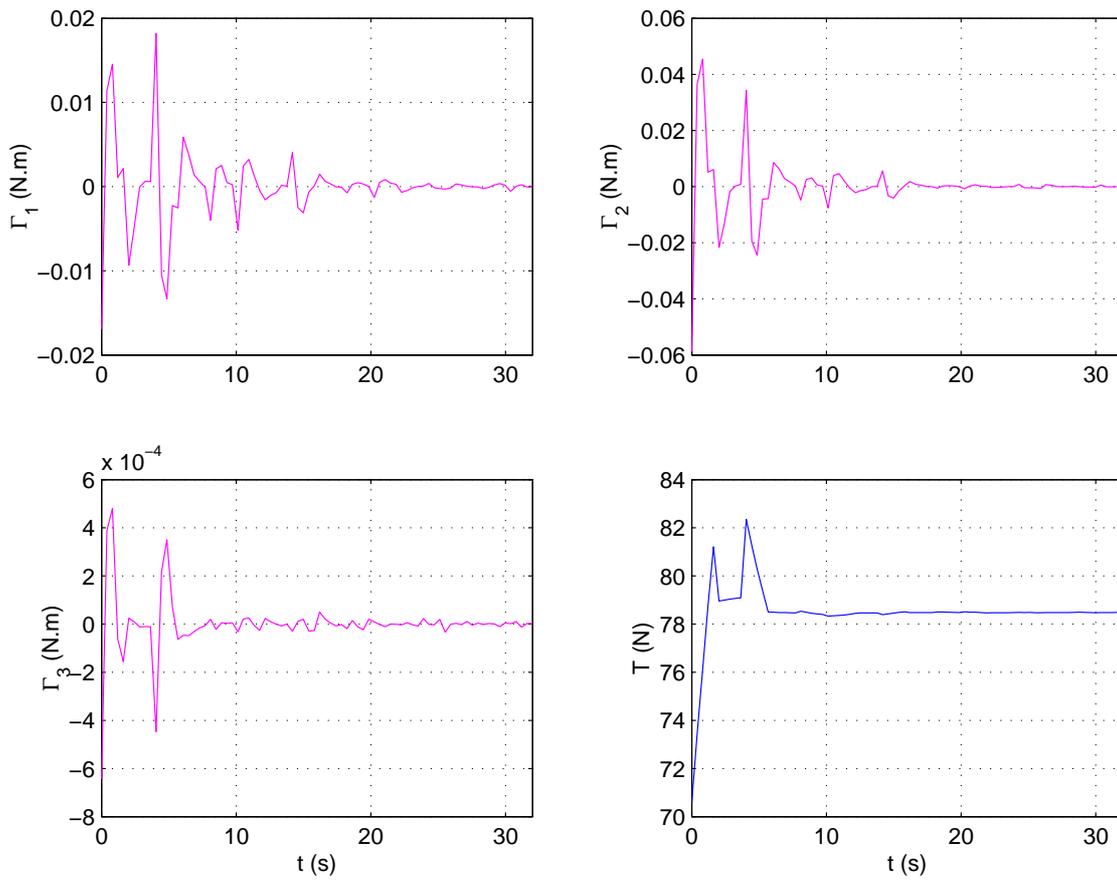


FIG. 6.9 – Couple de commande et poussée

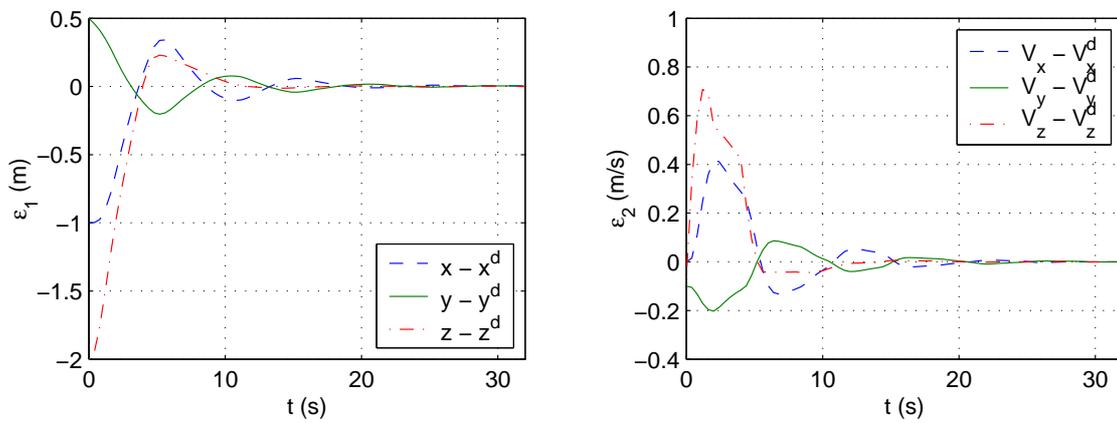


FIG. 6.10 – Ecart de suivi de trajectoire

Dans ces approches, les fonctions réalisant l'évitement d'obstacle et le suivi de trajectoire sont réalisées séparément.

On tire ici parti de la capacité des approches de type prédictif à prendre en compte, en ligne, de nouvelles informations pour le calcul de la commande. Considérons en effet le problème d'optimisation (6.29) utilisé pour la commande en position : ce problème doit être résolu à chaque date d'échantillonnage ; sa formulation peut ainsi être modifiée en ligne, dès l'obtention de nouvelles informations concernant les positions des obstacles rencontrés. Par une reformulation adéquate de ce problème, les fonctions de suivi de trajectoire et d'évitement d'obstacles peuvent être réalisées simultanément.

On suppose qu'un algorithme de navigation est utilisé pour traiter les mesures provenant des capteurs, et fournir le nombre N^{obs} d'obstacles détectés à considérer, ainsi que leurs positions respectives. On s'intéresse au cas d'obstacles convexes.

Deux méthodes sont étudiées [10] : l'ajout de termes de pénalité au sein de la fonction coût, et l'ajout de contraintes instantanées sur l'état. Des résultats de simulation sont présentés pour chacun de ces cas, dans le cas d'une trajectoire de référence à suivre définie par un segment à altitude constante et partant de la position initiale $\xi^d(0) = [0 \ 0 \ 2]^T$. La référence en lacet $\psi^d(t)$ est prise égale à zéro. On considère le cas $N^{obs}=2$ avec un obstacle sphérique centré en $\xi_1^{obs} = [2 \ 2 \ 2]^T$ et de rayon $r_1^{obs} = 0.5$. Le second obstacle est un cylindre vertical de hauteur infinie et de rayon $r_2^{obs} = 0.5$ et dont l'axe principale intersecte la trajectoire de référence en $\xi_2^{obs} = [6 \ 6 \ 2]^T$.

6.7.1 Termes de pénalité dans la fonction coût

Les obstacles sont représentés par les points $\xi_i^{obs} = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ avec $i \in \{1, \dots, N^{obs}\}$. Un terme est ajouté au sein de la fonction coût de (6.29) pour pénaliser la proximité aux obstacles. Le problème d'optimisation utilisé pour calculer la commande en position est reformulé comme suit :

$$\min_{u_k^j(\cdot)} \int_{t_k^j}^{t_k^{j+P_p}} \left\{ \|\bar{X}_k^j(\tau)\|_{Q_1}^2 + \sum_{i=1}^{N^{obs}} \frac{K_i}{\epsilon + \|\bar{\xi}(\tau) - \xi_i^{obs}(\tau)\|_{Q_i^{obs}}^2} \right\} d\tau + \sum_{i=0}^{P_p-1} \|u(t_k^{j+i} | t_k^j)\|_{S_1}^2 \quad (6.53)$$

tel que $\mathcal{L}_1(\check{X}_k^j(t_{k+1})) \leq \alpha_1 \mathcal{L}_1(X_k)$
 $u_{min} \leq u(t_k^{j+i} | t_k^j) \leq u_{max} \quad \forall i = 0, \dots, P_p - 1$

avec $K_i \in \mathbb{R}^+$ et où ϵ est une constante petite et strictement positive introduite pour éviter les singularités en $\bar{\xi} = \xi_i^{obs}$ [102]. La matrice de pondération Q_i^{obs} peut être utilisée pour définir des directions privilégiées d'évitement : un faible coefficient sur l'axe z , par exemple, produira un évitement dans le plan xy .

Les paramètres choisis pour la simulation sont $K_1 = K_2 = 15$, $Q_1^{obs} = \text{diag}(1, 1, 4)$ et $Q_2^{obs} = \text{diag}(1, 1, 0)$. Les paramètres liés aux commandes en position et attitude sont donnés en table 6.7.1. Les valeurs de Q_1^{obs} et Q_2^{obs} ont été choisies pour réaliser, respectivement, un évitement dans un plan vertical et un évitement dans le plan xy .

Avec cette représentation, la forme des obstacles n'est pas prise en compte. Un réglage approprié des paramètres K_i et Q_i^{obs} peut permettre de s'écarter de la trajectoire de référence au niveau des obstacles rencontrés, mais sans toutefois garantir que la trajectoire réalisée

TAB. 6.1 – Paramètres des lois de commande

Commande en position	Commande en attitude
$k_1 = 3.2$	$\lambda = 1$
$P_p T_s = 3 \text{ s}$	$P_r T_s = 1 \text{ s}$
$Q_1 = \text{diag}(2, 2, 2, 5, 5, 5)$	$Q_2 = I_d$
$S_1 = I_d$	$S_2 = I_d$
$\alpha_1 = 0.5$	$\alpha_2 = 0.1$

n'intersectera pas les volumes définissant ces obstacles. Ce cas est représenté en Figure 6.11 où la trajectoire en boucle fermée du drone est déviée de la référence mais intersecte le premier obstacle.

En utilisant des termes de pénalités dans la fonction coût, l'évitement d'obstacle peut être réalisé en représentant, à chaque instant, un obstacle donné par l'ensemble de ses points situés le plus près de la trajectoire de référence. Une autre solution consiste à représenter l'obstacle par un ensemble de points définissant sa forme complète. Dans ce cas, une représentation utilisant des contraintes sur l'état est utilisée.

6.7.2 Contraintes instantanées sur l'état

Les obstacles sont représentés par des ellipsoïdes. Pour un obstacle donné i centré en $\xi_i^{obs} = [x_i \ y_i \ z_i]^T$, l'ensemble des coordonnées que le drone doit éviter est représenté par la contrainte quadratique

$$(\bar{\xi}(\tau) - \xi_i^{obs})^T P_i^{obs} (\bar{\xi}(\tau) - \xi_i^{obs}) > r_i^{obs} \quad \forall \tau \in [t_k^j, t_k^{j+P_p}] \quad \forall i \in \{1, \dots, N^{obs}\} \quad (6.54)$$

qui est ajoutée au problème d'optimisation (6.29).

Les matrices de pondération P_i^{obs} choisies pour la simulation sont $P_1^{obs} = \text{diag}(1, 1, 1)$ et $P_2^{obs} = \text{diag}(1, 1, 0)$.

Les trajectoires en boucle fermée obtenues dans le cas de la présence du premier obstacle uniquement, puis des deux obstacles simultanément sont représentées en Figure 6.12. L'évitement est réalisé, en utilisant spontanément des directions privilégiées pour chaque sorte d'obstacle : évitement vertical pour l'obstacle sphérique, et évitement dans le plan xy pour l'obstacle cylindrique.

La faisabilité de cette méthode étant liée à la possibilité de trouver une commande vérifiant les contraintes posées sur l'état du système, on ne considère que des obstacles garantissant un espace de recherche convexe pour la solution du problème d'optimisation utilisé pour le guidage. La faisabilité de chaque problème d'optimisation posé au cours de la trajectoire implique la stabilité du système.

L'ajout de contraintes sur l'état au sein du problème d'optimisation a pour conséquence d'augmenter le temps de calcul de la commande, par rapport au cas où des pénalités sont insérées dans la fonction coût.

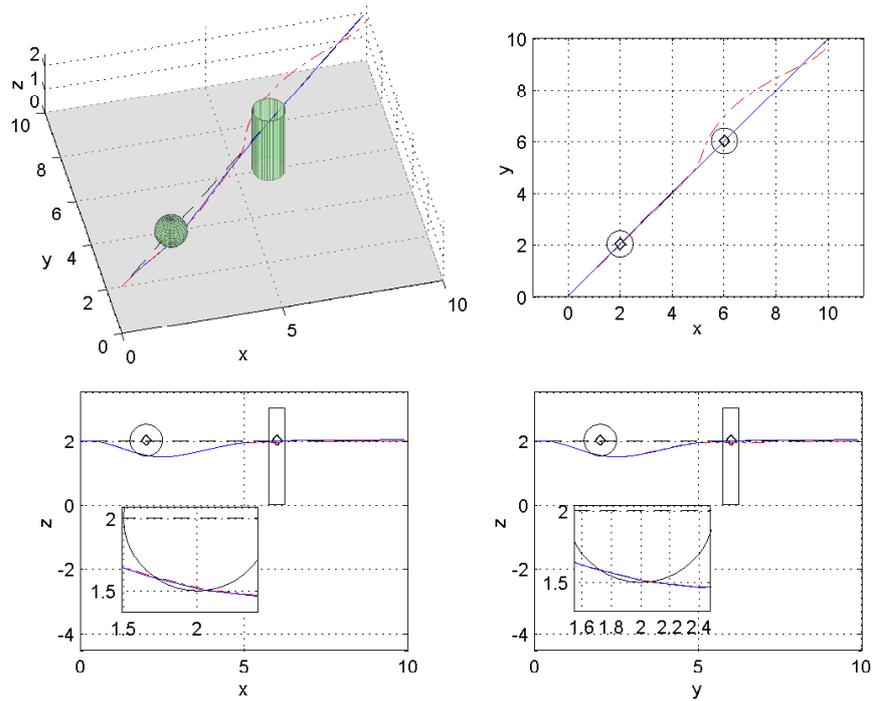


FIG. 6.11 – Evitement d'obstacles par termes de pénalité dans la fonction coût
Trajectoire de référence (ligne discontinue), trajectoires en boucle fermée avec évitement de l'obstacle 1 seul (ligne continue) et des obstacles 1 et 2 (ligne mixte)

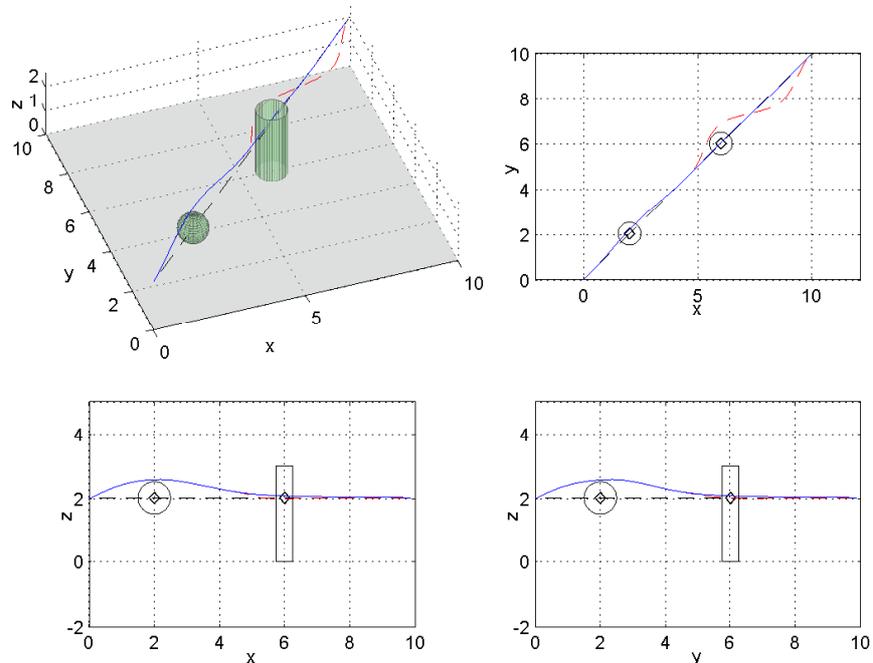


FIG. 6.12 – Evitement d'obstacles par contraintes instantanées sur l'état
Trajectoire de référence (ligne discontinue), trajectoires en boucle fermée avec évitement de l'obstacle 1 seul (ligne continue) et des obstacles 1 et 2 (ligne mixte)

6.8 Bilan et limites de l'approche

L'approche de commande prédictive contractante que nous avons utilisée permet de garantir la stabilité de systèmes non linéaires en présence d'une perturbation additive bornée et convergeant asymptotiquement vers zéro. Cette approche initialement introduite dans [30] a pour avantage de permettre l'utilisation d'une commande prédictive non linéaire avec garantie de stabilité tout en conservant un grand bassin d'attraction. En effet, la contrainte stabilisante utilisée dans cette formulation n'est pas une contrainte dure comme celles utilisées dans les approches prédictives classiques (contrainte terminale d'égalité, région terminale se limitant à un voisinage de l'équilibre). Cette contrainte varie dans le temps et en fonction de l'état du système, et impose une contraction en norme d'une prédiction de cet état. Cette approche a également pour avantage de permettre la commande de systèmes continus tout en utilisant une paramétrisation discrète de la commande, facilitant son implémentation.

Dans [30], la prise en compte d'une perturbation bornée convergeant asymptotiquement vers zéro est mise à profit pour traiter le cas où l'état du système n'est pas directement mesurable. Un observateur est alors utilisé et cette perturbation additive est alors considérée comme l'erreur d'estimation.

Nous avons ici proposé une application de cette méthode au guidage-pilotage du modèle de drone miniature, en considérant ce terme de perturbation comme l'erreur d'orientation $-\frac{\tau}{m}(R - R^d)e_3$ introduite par la convergence non instantanée de la dynamique de rotation du véhicule.

Une application à l'évitement d'obstacle a également été proposée ainsi qu'une approche à facteur de contraction variable, où celui-ci est considéré comme un paramètre à optimiser.

Par cette approche de commande prédictive, la stabilité du système bouclé repose sur la faisabilité du problème d'optimisation, à l'instant initial. Dans l'application que nous avons proposée, cette faisabilité a été prise comme hypothèse pour la démonstration de la stabilité du modèle de drone et a été vérifiée de manière pratique pour des conditions initiales du domaine de vol usuel.

Il convient enfin de noter que cette approche, telle qu'étudiée dans cette partie, ne permet pas de traiter le cas perturbé $F_{ext} \neq 0$.

Conclusion de la Partie II et perspectives

Les approches étudiées dans cette partie appartiennent à la classe des contrôleurs prédictifs, dans la mesure où, pour le calcul de la commande, elles font intervenir une prédiction de l'état du système sur un horizon temporel futur. Ces méthodes sont généralement utilisées dans le cas de systèmes où une expression analytique de la commande est difficile à trouver. La commande n'est en effet pas déterminée de manière analytique, mais par la résolution en ligne d'un problème d'optimisation. Sauf dans les cas simples (linéaire quadratique non contraint), la commande est alors déterminée de manière numérique.

Dans cette partie, nous nous sommes intéressés à l'identification des avantages et inconvénients de ce types de méthodes ainsi qu'aux problèmes liés à la stabilité du système bouclé. Nous avons proposé deux approches de commande prédictive non linéaire et étudié leur application au développement de lois de guidage-pilotage pour un drone miniature, à partir de la modélisation présentée en Partie I.

Le **Chapitre 3** a été consacré à une introduction à la commande prédictive. Après un bref historique des premières méthodes de commande prédictive, nous avons présenté la formulation générale d'un tel problème. Nous avons vu que la commande est calculée par la résolution en ligne d'un problème d'optimisation faisant intervenir des prédictions de l'état du système. Ces prédictions étant réalisées en boucle ouverte, la garantie de stabilité du système bouclé n'est pas immédiate, sauf dans le cas où l'horizon de prédiction est choisi infini. Ce cas étant peu utilisable en pratique, nous avons présenté les principales classes d'approches de commande prédictive à horizon fini, existant dans la littérature, qui garantissent la stabilité du système bouclé : utilisation d'une contrainte stabilisante, commande prédictive à mode dual, horizon quasi-infini. Nous avons également rappelé le cadre formel présenté dans [81] permettant d'énoncer de manière générale les conditions de stabilités de ces approches. Sachant que la mise en pratique de la commande prédictive fait intervenir des techniques d'optimisation, nous avons mentionné à ce titre, dans ce chapitre, des méthodes de résolution d'un problème d'optimisation. Nous avons de plus proposé une discussion sur le choix de la fonction coût et de la longueur de l'horizon de prédiction.

Enfin, nous avons donné un aperçu des travaux utilisant des approches prédictives pour la commande de drones miniatures à voilure tournante. Nous avons montré, d'après les travaux que nous avons pu recenser, que l'analyse de la stabilité et l'utilisation d'un modèle réellement représentatif de la dynamique d'un drone ne sont que rarement réalisées simultanément.

Dans le **Chapitre 4**, nous nous sommes intéressés à une approche de commande prédictive linéaire répandue dans la littérature. Nous avons considéré le cas où l'on peut se ramener à l'étude d'un système discret. Nous avons vu que, dans ce cas, il est possible d'exprimer de manière algébrique les prédictions de l'état du système et de reformuler le problème de commande prédictive en problème de Programmation Quadratique (QP). Dans le cas où l'état n'est pas entièrement mesurable, et où une perturbation additive sur l'état est considérée,

nous avons présenté l'utilisation d'une approche Linéaire Quadratique Gaussienne (LQG) combinant commande prédictive linéaire à critère quadratique et filtre de Kalman. Nous avons proposé une application de cette méthode pour le guidage, dans le cas d'un suivi de trajectoire, en présence de perturbations et de contraintes sur la commande, et dans le cas où seule la position du véhicule est mesurée.

Cette première approche de la commande prédictive nous a permis de mettre en évidence les avantages de ce type de commande, à savoir la prise en compte de contraintes, l'anticipation des changements d'une référence lors du suivi de trajectoire, l'obtention d'une commande localement optimale par rapport à un critère spécifié, et la possibilité de commander un système sans avoir à déterminer de commande analytique.

Cependant, les méthodes linéaires que nous avons utilisées dans ce chapitre ne permettent pas de développer des lois de guidage-pilotage dans un large domaine de vol. D'où notre intérêt pour des méthodes de commande prédictive non linéaires.

Nous avons proposé une première approche de commande prédictive non linéaire dans le **Chapitre 5**. Cette approche s'inscrit dans la classe des contrôleurs utilisant simultanément commande prédictive et commande par fonction de Lyapunov. Un état de l'art nous a permis de montrer la complémentarité de ces deux méthodes de synthèse de commande, et l'intérêt de les utiliser simultanément. Nous avons pu voir que les méthodes existantes reposent sur la détermination d'une fonction de Lyapunov pour le système, et de sa commande associée, afin de prouver la stabilité d'un problème de commande prédictive non linéaire. Cependant la commande synthétisée n'est jamais appliquée au système.

Au cours de ce chapitre, nous avons proposé d'appliquer ce contrôleur par une approche de commande à deux composantes : la commande appliquée au système résulte de la somme d'une commande nominale, déterminée par fonction de Lyapunov, et d'une commande prédictive. Nous avons analysé la stabilité de cette approche pour la commande de systèmes non linéaires continus et affines en la commande. Nous avons montré qu'une stabilité globale peut être obtenue, en plus d'une amélioration des performances du système bouclé, par rapport au cas où seul le contrôleur nominal est appliqué. Une extension de cette approche a été proposée dans le cas où le contrôleur nominal est paramétré par des gains : ceux-ci sont alors optimisés en même temps qu'est calculée la composante prédictive de la commande.

Une autre extension a été proposée dans le cas où le système comporte des paramètres inconnus, supposés constants ou variant lentement dans le temps. Dans ce cas, la composante nominale de la commande est une commande adaptative. La stabilité de cette approche a été prouvée dans le cas de systèmes non linéaires affines en la commande et en un vecteur regroupant ces paramètres inconnus. Cette méthode a ensuite été appliquée au développement de lois de guidage-pilotage pour la stabilisation d'un modèle de drone miniature en présence de contraintes sur la commande, et pour le suivi de trajectoire en considérant, dans les deux cas, une perturbation inconnue.

L'approche que nous avons proposée permet de cumuler les avantages issus des méthodes de synthèse par fonction de Lyapunov et par commande prédictive : stabilité avec un grand bassin d'attraction, prise en compte de contraintes, anticipation de changements de référence, optimalité. Elle requiert néanmoins la synthèse d'un contrôleur nominal. A ce titre, nous nous sommes intéressés dans un dernier temps à une méthode de commande prédictive ne nécessitant pas de synthèse de contrôleur analytique.

Une approche de commande prédictive non linéaire, basée sur l'algorithme présenté

dans [30], a ainsi été étudiée dans le **Chapitre 6**. Cette méthode garantit la stabilité de systèmes non linéaires en présence d’une perturbation additive bornée et convergeant asymptotiquement vers zéro. Elle a également pour avantage de permettre l’utilisation d’une commande prédictive non linéaire avec garantie de stabilité tout en conservant un grand bassin d’attraction. En effet, la contrainte stabilisante utilisée dans cette formulation n’est pas une contrainte dure comme celles utilisées dans les approches prédictives classiques (contrainte terminale d’égalité, région terminale se limitant à un voisinage de l’équilibre). Cette contrainte varie dans le temps et en fonction de l’état du système, et impose une contraction en norme d’une prédiction de cet état. D’où l’appellation de commande prédictive contractante. Cette approche a également pour avantage de permettre la commande de systèmes continus tout en utilisant une paramétrisation discrète de la commande, facilitant son implémentation.

Nous avons proposé ici une extension de cette méthode en considérant le facteur de contraction, paramétrant la contrainte stabilisante, comme un paramètre variable et en l’optimisant lors du calcul de la commande prédictive.

Dans [30], le cas où l’état du système n’est pas complètement mesurable est traité en exploitant la faculté de l’algorithme proposé à prendre en compte une perturbation bornée convergeant asymptotiquement vers zéro. Un observateur est alors utilisé et l’erreur d’estimation est considérée comme étant cette perturbation additive.

Nous avons proposé ici une application de cette méthode pour le guidage-pilotage du modèle de drone miniature. Dans notre approche, l’erreur d’orientation $-\frac{\mathcal{I}}{m}(R - R^d)e_3$, introduite par la convergence non instantanée de la dynamique de rotation du véhicule, est considérée comme perturbation additive. La stabilité du modèle de drone, bouclé par la commande prédictive contractante étudiée, a ainsi pu être prouvée.

Une application à l’évitement d’obstacle a également été proposée dans ce chapitre.

La stabilité du modèle de drone commandé par les approches prédictives proposée a été analysée par les Propositions 4 et 5. Il convient toutefois de noter que les preuves de ces propositions supposent que la vitesse de rotation désirée Ω^d ainsi que sa dérivée $\dot{\Omega}^d$ soient connues.

Le calcul de ces grandeurs nécessite une expression algébrique du vecteur de commande $\mathcal{T}R^de_3$ (cf Annexe C), qui ne peut être obtenue par les approches prédictives présentées. Ce vecteur de commande y est en effet calculé numériquement.

En pratique, la commande prédictive n’est pas calculée à chaque instant mais uniquement à des dates espacées d’une durée très petite devant la longueur de l’horizon de prédiction. Le vecteur désiré Ω^d peut alors être calculé par la relation $\Omega^d = (R^d)^T \dot{R}^d$ où la quantité \dot{R}^d est estimée par différence finie entre l’instant présent et l’instant précédent de calcul de la commande. Le vecteur Ω^d ne peut toutefois pas être calculé sur le reste de l’horizon de prédiction. En pratique, on supposera donc R^d constant sur cet horizon, en appliquant une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation, par une méthode des perturbations singulières. Dans ce cas, la preuve de la stabilité est difficile. La difficulté provient de l’application du cadre formel présenté en Section 2.4.

Plusieurs **perspectives** de travail s'offrent à l'issue de l'étude que nous avons réalisée au cours de cette partie.

Une première suite à donner à ce travail concerne l'étude de la faisabilité des problèmes d'optimisation utilisés pour le calcul de la commande prédictive.

Dans les approches présentées, la stabilité est effectivement prouvée sous l'hypothèse qu'une solution puisse être trouvée à chaque instant au problème d'optimisation posé. Si cette faisabilité a été vérifiée de manière pratique pour des conditions du domaine de vol usuel d'un drone miniature, une étude théorique doit cependant être menée, principalement dans les cas contraints.

La condition énoncée dans [30] pourra par exemple servir de base à ce travail, dans le cas de l'approche prédictive contractante.

D'autre part, plusieurs voies peuvent être envisagées pour la possible mise en pratique de techniques de commande prédictive pour le guidage-pilotage d'un drone miniature².

Une première méthode pour réduire le temps de calcul consiste à modifier le paramétrage utilisé pour la commande. Classiquement, celle-ci est considérée constante par morceaux sur l'horizon de prédiction. Le nombre de paramètres à optimiser dépend donc à la fois de la longueur de l'horizon et de la dimension de la commande. Par exemple, quinze paramètres devront être optimisés dans le cas d'une commande à trois dimensions et d'un horizon de prédiction composé de cinq pas de temps. Ce nombre de paramètres peut être considérablement réduit en représentant, sur l'horizon de prédiction, chacune des composantes de la commande par une fonction ne dépendant que de peu de paramètres. On pourra par exemple commencer par étudier les paramétrisations présentées dans [1, 20].

Une autre voie à explorer pour la réduction des temps de calcul est l'étude de solution sous-optimales. Cette approche est par exemple possible dans le cadre de l'algorithme de commande prédictive contractante présenté, en choisissant de se contenter d'une solution sous-optimale à partir du moment où celle-ci vérifie la contrainte stabilisante imposée. Dans ce type d'approche, il pourra alors être intéressant d'étudier le compromis entre réduction du temps de calcul et conservation d'une performance proche de l'optimale.

Nous avons vu l'intérêt des approches de commande prédictive dans le cas d'un suivi de trajectoire. Les approches que nous avons proposées supposent que la trajectoire de référence soit définie par la donnée d'une position ξ^d et de ses dérivées temporelles successives. Une extension du travail réalisé pourra être de considérer le cas où la trajectoire est considérée comme un état dont on ne connaît que la position, puis le cas où l'on ne se donne que des points de passage datés.

Dans la partie suivante, on s'intéressera au cas où une mesure de l'état complet du système n'est pas accessible. Dans un souci de disposer de lois de commande permettant un passage plus aisé à l'implémentation, nous nous intéresserons également à une méthode de synthèse permettant d'obtenir une expression analytique de la commande.

²Si le guidage peut être réalisé par commande prédictive, le pilotage requiert des cadences de calcul qui paraissent encore à ce jour incompatibles avec l'utilisation pratique des méthodes non linéaires présentées.

Troisième partie

Commande sans mesure de vitesse

Contenu de la Partie III

Dans cette Troisième Partie nous nous intéresserons au cas où une partie seulement de l'état du drone est mesurée. On traitera plus particulièrement le cas sans mesure de vitesses, où seules des mesures en position et en angles d'attitude du véhicule sont disponibles pour la synthèse de la commande. L'approche que nous proposerons dans cette partie est basée sur l'introduction d'états virtuels au sein de la représentation dynamique du système et permet l'obtention d'une commande analytique. La synthèse de lois de guidage-pilotage sera réalisée, par cette méthode, sous l'hypothèse d'une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation. La stabilité du système bouclé sera alors analysée en utilisant la théorie des perturbations singulières.

Dans le **Chapitre 7**, nous présenterons les différents cadres d'utilisation d'un drone miniature à voilure tournante pour lesquels une mesure de la vitesse linéaire ou angulaire n'est pas directement accessible. Nous présenterons également un état de l'art des principales méthodes existant dans la littérature permettant de traiter ce cas de figure.

Nous proposerons en **Chapitre 8** une méthode de synthèse de lois de commande sans mesure de vitesses, basée sur l'introduction d'un état virtuel au sein de la dynamique du système. Après en avoir présenté le principe, nous nous intéresserons à son application à la synthèse de lois de guidage-pilotage, en utilisant une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation du véhicule. L'analyse de la stabilité sera présentée, dans un cadre similaire, dans le chapitre suivant. Nous proposerons, en complément, une autre manière de synthétiser la loi de guidage, afin d'obtenir des propriétés d'existence d'une borne et de stricte positivité de la commande en position. Nous proposerons également une étude de l'existence d'une borne de la commande en attitude et enfin une loi de guidage adaptative sans mesure de vitesse.

Afin d'améliorer l'approche précédente en terme de filtrage, nous proposerons en **Chapitre 9**, une méthode de synthèse de commande sans mesure de vitesse utilisant deux états virtuels. Comme dans le chapitre précédent, nous présenterons la synthèse de lois de guidage-pilotage en utilisant une séparation des échelles de temps entre les dynamiques de translation et de rotation. Une analyse de la stabilité sera proposée en utilisant la théorie des perturbations singulières. Nous proposerons enfin des lois de guidage-pilotage avec saturation, permettant de garantir des propriétés d'existence d'une borne sur les commandes, ainsi qu'une loi de guidage adaptative pour la stabilisation de la dynamique de translation en présence d'une perturbation.

Chapitre 7

Introduction

7.1 Problématique

Pour le guidage pilotage d'un véhicule aérien autonome, le calcul de la commande requiert une mesure de l'état du système, à savoir de ses positions, vitesses linéaires, angles d'attitude et vitesses de rotations instantanées. Dans le cas d'un drone miniature, le nombre de capteurs disponibles à bord du véhicule peut être limité par la faible masse embarquable ou pour des raisons de coût. Dans ce cas, une mesure de l'état complet du système peut ne pas toujours être directement disponible.

La nature de la mission, ou de l'application souhaitée pour le drone, peut également impacter sur le nombre ou la nature des capteurs à utiliser, et donc sur le nombre de grandeurs directement mesurables.

Pour obtenir des mesures en position et en vitesse linéaire, le véhicule peut être équipé d'un GPS. Cependant, si le choix d'un GPS est adéquat pour un vol au sein d'un environnement extérieur non contraint, il peut être préférable, dans le cas d'un environnement contraint, d'utiliser un système de navigation basé sur un capteur de type caméra afin d'estimer la position du drone par rapport à cet environnement, ainsi que son attitude. Dans ce cas, la vitesse linéaire v et la vitesse de rotation Ω ne sont pas directement mesurées.

Un autre cas de figure est fréquemment rencontré lors de la réalisation d'une plateforme expérimentale de drone miniature. Afin de réaliser un dispositif facile à mettre en oeuvre, le véhicule est très souvent un véhicule de modélisme du commerce. Pour ne pas avoir à en modifier la structure ni l'électronique, celui-ci est alors piloté en reliant sa télécommande à un ordinateur, et des capteurs externes sont utilisés pour réaliser un retour d'information. C'est le cas, par exemple des plateformes présentées dans [63, 65, 110], où un dispositif de *motion capture* est utilisé. Le véhicule est équipé de repères réfléchissants et des caméras externes, associées à un dispositif infrarouge, permettent de localiser ces repères sur les images puis d'en déduire en temps réel la position et l'attitude du drone. Un autre exemple de plateforme, présenté dans [19], utilise un système de capteur magnétique permettant la mesure de la position et de l'attitude d'un quadrirotor. Dans ces exemples d'utilisation, la vitesse linéaire v et la vitesse de rotation Ω ne sont pas directement mesurées.

Dans cette partie, on se place donc dans le cas où, pour la synthèse de la commande, on ne dispose pas de mesures de la vitesse linéaire v ni de la vitesse de rotation Ω du drone. L'accès aux seules coordonnées en position et en angles d'attitude n'est pas suffisant pour stabiliser, par un retour d'état classique, le modèle présenté. Après avoir fait un rapide état l'art des méthodes traitant de cette problématique, nous présenterons une approche permettant la synthèse de lois de commande sans mesures de vitesses.

7.2 Etude de l'existant

Dans certains des travaux présentant des expérimentations avec les dispositifs précédemment évoqués (motion tracking par vision externe, émetteur-récepteur magnétique), la vitesse non accessible à la mesure est calculée de manière pratique par une différence finie des mesures en position. Cette méthode est par exemple employée dans [19] pour calculer les vitesses linéaires et les vitesses de rotation pour un quadrirotor. Dans [63], où un hélicoptère miniature et un quadrirotor sont testés, seule la vitesse linéaire est reconstruite de cette manière,

les vitesses de rotation étant mesurées.

Aucune étude théorique de la stabilité n'est cependant associée à ces approches pratiques.

Une première solution, lorsque seule une partie de l'état est accessible à la mesure, consiste à construire un observateur pour estimer l'état complet du système.

Dans [32], le suivi de trajectoire d'un modèle PVTOL est traité dans le cas où seules les positions et l'angle d'attitude sont mesurés. Un observateur d'ordre complet y est construit. Un changement de coordonnées est ensuite réalisé pour mettre le système sous forme triangulaire et appliquer une technique de backstepping afin d'obtenir un contrôleur ne nécessitant pas des mesures en vitesses.

Si l'utilisation d'observateurs permet de traiter ce problème, en reconstruisant les grandeurs non disponibles, elle peut cependant accroître la complexité et introduire des délais de calcul supplémentaires, principalement pour la dynamique de rotation. Deux étapes sont de plus nécessaires pour prouver la stabilité du système bouclé : la convergence de l'observateur (i.e. des estimées vers les grandeurs observées) doit être établie avant d'analyser celle du système bouclé par une commande se basant sur l'estimée de l'état.

Une autre classe d'approches consiste à synthétiser la commande, directement à partir des seules mesures accessibles (*partial state feedback*). Ces approches permettent d'éviter les inconvénients liés à l'introduction d'observateurs.

Les premiers travaux utilisant ce type de méthodes ont été réalisés pour des robots manipulateurs, lorsqu'aucune vitesse n'est mesurée. Dans [16, 17], la mesure en vitesse est remplacée par un signal généré par un filtre linéaire à partir des mesures des positions articulaires. Une extension de ce travail, utilisant un filtre non linéaire, peut être trouvée dans [31]. La même méthode a été utilisée pour résoudre le problème de tracking en attitude de solides dont les inerties sont inconnues. Un signal lié à la vitesse et généré par un filtre linéaire est utilisé dans [113], où une représentation cinématique basée sur les paramètres de Rodrigues modifiés a été choisie. Dans [28], une représentation avec des quaternions a été adoptée et un filtre non linéaire génère un signal se substituant aux mesures de vitesses dans la commande. La même représentation de la cinématique est choisie dans [107] où une commande est synthétisée, dépendant d'une estimée de l'erreur en quaternion, pour le suivi d'attitude d'un engin spatial. Le contrôle en attitude de corps solides sans mesure de vitesses est également traité dans [68] et [109] où une propriété de passivité du système est mise à profit pour la synthèse de la commande. Des représentations cinématiques respectivement basées sur des quaternions et les paramètres de Rodrigues sont respectivement employées dans ces deux travaux. Ceux-ci utilisent tous deux des techniques de filtrage pour éviter de recourir à des mesures de vitesse.

Comme le montrent les simulations ou les résultats expérimentaux de certains des travaux mentionnés, certaines de ces approches conduisent à un comportement transitoire fortement oscillant pour le système bouclé, principalement dû au fait que peu de paramètres de réglages sont accessibles.

Dans cette partie, nous présentons une méthode de commande dans le cas où aucune mesure de la vitesse linéaire ni de la vitesse angulaire du drone n'est disponible. Cette méthode repose sur l'introduction d'états virtuels au sein de la dynamique du système. Elle ne nécessite pas la construction d'un observateur. Contrairement aux travaux précédemment évoqués, la représentation cinématique adoptée est basée sur le groupe $SO(3)$.

Chapitre 8

Synthèse de lois de guidage-pilotage avec un état virtuel

8.1 Principe

La méthode que nous proposons est tout d'abord présentée sur un exemple simple dans cette première section. Son application à la synthèse de lois de guidage-pilotage fait l'objet des sections suivantes de ce chapitre.

8.1.1 Mise en forme du problème

On considère les systèmes dynamiques dont l'évolution peut être décrite en temps continu par

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + u \end{cases} \quad (8.1)$$

où $x = [x_1^T \ x_2^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ représente l'état du système, et $u \in \mathbb{R}^n$ la commande. On suppose

$$f(0) = 0 \quad (8.2)$$

et

$$\forall x_2, \ x_2^T f(x_2) = 0 \quad (8.3)$$

On suppose de plus que x_2 n'est pas mesurable. On souhaite stabiliser le système à l'origine en utilisant uniquement une mesure de x_1 et sans synthétiser d'observateur.

La méthode proposée est basée sur l'introduction d'états virtuels dans la représentation de la dynamique du système.

8.1.2 Introduction d'un état virtuel

Considérons le système (8.1). On introduit un état virtuel $q \in \mathbb{R}^n$ et une commande virtuelle $\delta \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + u \\ \dot{q} = \delta \end{cases} \quad (8.4)$$

On définit alors la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{2}k_a x_1^T x_1 + \frac{1}{2}x_2^T x_2 + \frac{1}{2}k_b (x_1 - q)^T (x_1 - q) \quad (8.5)$$

où k_a, k_b sont des gains scalaires strictement positifs. Sa dérivée par rapport au temps, le long des trajectoires de (8.4), est donnée par

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = k_a x_1^T x_2 + x_2^T (f(x_2) + u) + k_b (x_1 - q)^T (x_2 - \delta) \quad (8.6)$$

En factorisant par x_2 et en utilisant (8.3), on obtient

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = x_2^T (k_a x_1 + u + k_b (x_1 - q)) - k_b (x_1 - q)^T \delta \quad (8.7)$$

Choisissons

$$u = -k_a x_1 - k_b (x_1 - q) \quad (8.8)$$

$$\delta = \frac{k_a}{k_b} (x_1 - q) \quad (8.9)$$

avec $k_d > 0$. Pour ces expressions de la commande u et de la commande virtuelle δ , la dérivée de \mathcal{V}_1 devient

$$\dot{\mathcal{V}}_1 = -k_d \|x_1 - q\|^2 \quad (8.10)$$

La fonction $\dot{\mathcal{V}}_1$ est semi-définie négative. Elle assure que x_1 converge vers q . Par continuité et en utilisant le principe d'invariance de La Salle, on a alors $\dot{x}_1 \rightarrow \dot{q}$, i.e. $x_2 \rightarrow \delta$. Comme $\delta = \frac{k_d}{k_b}(x_1 - q) \rightarrow 0$, on en déduit $x_2 \rightarrow 0$, et par continuité $\dot{x}_2 \rightarrow 0$. En utilisant $f(0) = 0$ avec (8.4) et (8.8), on a $(-k_a x_1 - k_b(x_1 - q)) \rightarrow 0$ et, finalement, $x_1 \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$ et $\dot{x}_1 \rightarrow 0$ et $\dot{q} \rightarrow 0$ par continuité.

En utilisant le principe d'invariance de La Salle, on peut donc conclure que la commande (8.8), avec la commande virtuelle (8.9), stabilise asymptotiquement le système (8.4).

On notera que les expressions (8.8) et (8.9) de la commande u et de la commande virtuelle δ ne dépendent pas de l'état x_2 .

8.1.3 Analyse fréquentielle

Interprétons l'approche présentée en terme de filtrage. Afin de transposer l'approche dans le domaine fréquentiel, on introduit la variable

$$s = j\omega \quad (8.11)$$

En transposant la dernière équation de (8.4) dans le domaine fréquentiel et en utilisant (8.9), on a

$$sq = \alpha(x_1 - q) \quad (8.12)$$

avec $\alpha = k_d/k_b$. D'où

$$q = \frac{\alpha x_1}{s + \alpha} \quad (8.13)$$

Calculons la quantité $(x_1 - q)$:

$$(x_1 - q) = x_1 - \frac{\alpha x_1}{s + \alpha} = \frac{s}{s + \alpha} x_1 \quad (8.14)$$

En utilisant la première équation de (8.4), réécrite dans le domaine fréquentiel, on a finalement :

$$(x_1 - q) = \frac{1}{s + \alpha} x_2 \quad (8.15)$$

On constate d'après (8.15) que le terme $(x_1 - q)$, intervenant dans la commande u et obtenu par filtrage de la dérivée de x_1 par la relation (8.14), peut être rapproché d'une mesure associée à l'état x_2 , non accessible. L'expression (8.8) de la commande u est donc constituée d'un retour direct sur la partie accessible de l'état, et d'un retour filtré sur sa dérivée .

8.1.4 Exemple

A titre d'exemple, considérons le cas $n = 1$ et $f = 0$. Le système se réduit à un double intégrateur.

L'évolution de l'état du système, de l'état virtuel, ainsi que de la commande est présentée

en Figure 8.1. La simulation a été réalisée à partir de la condition initiale $x_0 = [1 \ -1]^T$ et $q_0 = 0$, et pour des gains unitaires. La stabilité asymptotique vers l'origine est obtenue par la commande réalisée. Un réglage adéquat des gains peut permettre de régler le comportement du transitoire.

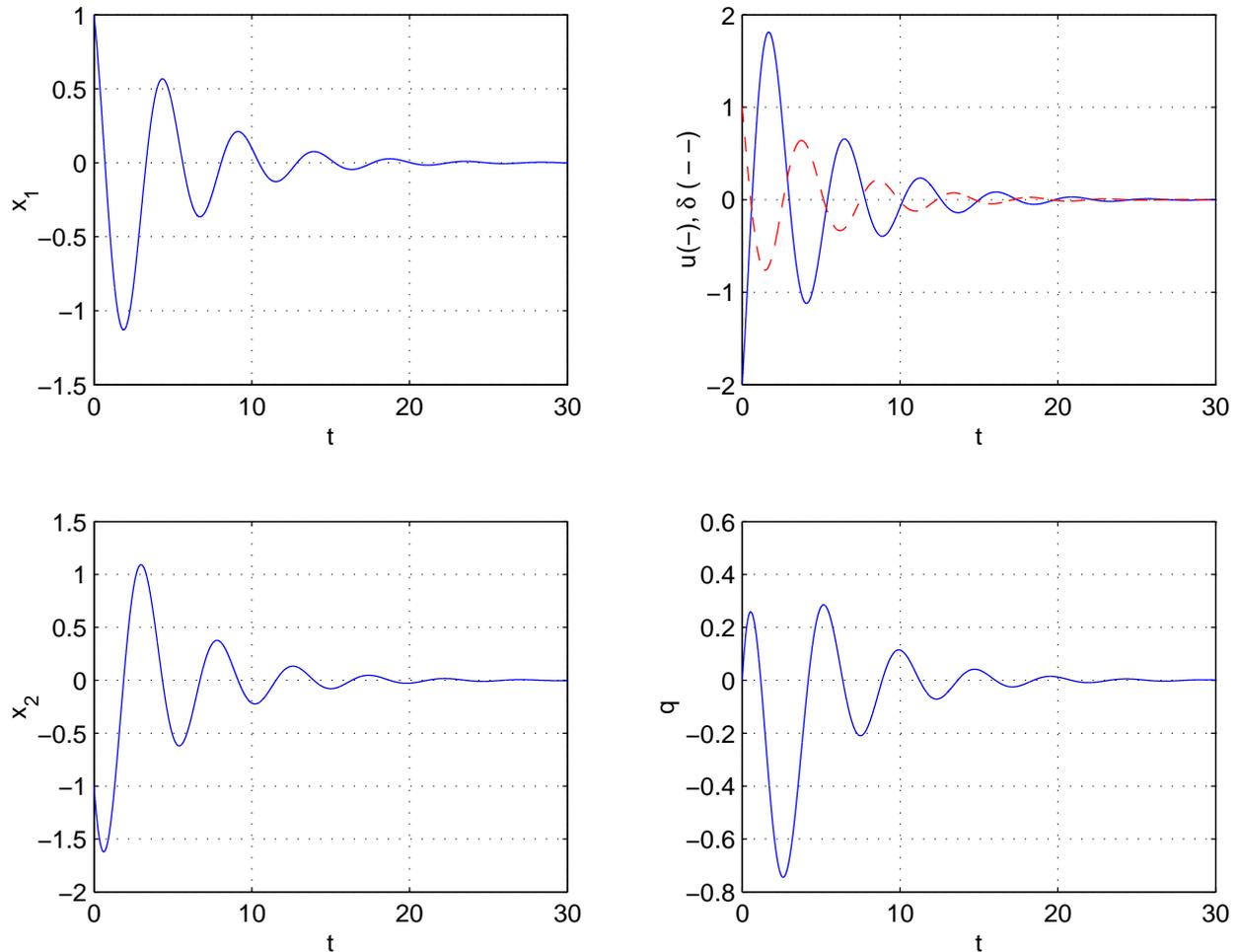


FIG. 8.1 – Stabilisation avec un état virtuel

L'utilisation d'un état virtuel s'avère intéressante dans la mesure où, comparativement à un observateur d'ordre plein, le nombre d'état rajouté est inférieur à la dimension de l'état du système. De plus l'analyse de la stabilité du système bouclé peut être menée, comme nous l'avons vu, en une seule étape.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'appliquer cette méthode à la synthèse de lois de guidage-pilotage, à partir du modèle présenté en Partie I représentant de manière simplifiée la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante.

Comme présenté en Section 2.4, on réalisera une commande hiérarchique en considérant une décomposition des échelles de temps entre la dynamique de translation (dynamique lente) et la dynamique de rotation (dynamique rapide).

Dans ce chapitre, nous présenterons la synthèse de lois de commande pour chacun des deux

sous-systèmes considérés (translation et rotation), sous les hypothèses évoquées en Section 2.4 et correspondant à cette séparation des échelles de temps. L'analyse de la stabilité du système complet sera abordée dans le chapitre suivant, où une méthode de synthèse de commande utilisant deux états virtuels au lieu d'un seul est présentée.

8.2 Commande en position

En utilisant une séparation des échelles de temps, la commande en position peut être synthétisée, dans le cas d'un suivi de trajectoire, en utilisant le système (2.123) correspondant à l'hypothèse $R = R^d$.

Pour la synthèse de cette loi de guidage, nous considérerons successivement le cas non perturbé ($F_{ext} = 0$), le cas non perturbé avec des saturations sur la commande, et enfin le cas perturbé en proposant une loi de guidage adaptative.

8.2.1 Synthèse de la commande en position

Nous considérerons ici le cas non perturbé ($F_{ext} = 0$). Le système utilisé pour la synthèse de la commande est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \end{cases} \quad (8.16)$$

avec $\epsilon_1 = \xi - \xi^d$ et $\epsilon_2 = v - v^d$.

On suppose que l'on ne dispose, pour la synthèse de la commande, que d'une mesure de la position ξ du drone. Seul l'état ϵ_1 du système (8.16) est donc accessible.

On suppose de plus que la trajectoire de référence et que ses dérivées vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse 11 *La trajectoire de référence $\xi^d(t)$ et ses dérivées $v^d(t) = \dot{\xi}^d(t)$, $\dot{v}^d(t) = \ddot{\xi}^d(t)$ (supposées connues) sont uniformément continues et bornées.*

Supposons de plus que la trajectoire de référence $\xi^d(t)$ et ses dérivées $v^d(t) = \dot{\xi}^d(t)$, $\dot{v}^d(t) = \ddot{\xi}^d(t)$ (supposées connues) sont uniformément continues et bornées.

Appliquons la méthode introduite en Section 8.1 pour la synthèse de la loi de commande en position.

On complète la dynamique (8.16) en ajoutant un état virtuel $q \in \mathbb{R}^3$ et une commande virtuelle $\delta \in \mathbb{R}^3$ vérifiant

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \\ \dot{q} = \delta \end{cases} \quad (8.17)$$

Soit \mathcal{S}_1 la fonction de Lyapunov candidate définie par

$$\mathcal{S}_1 = \frac{1}{2}k_x \|\epsilon_1\|^2 + \frac{1}{2}k_v \|\epsilon_2\|^2 + \frac{1}{2}k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 \quad (8.18)$$

où k_x , k_v et k_1 sont des gains scalaires strictement positifs.

La dérivée de \mathcal{S}_1 le long des trajectoires de (8.17) est donnée par

$$\dot{\mathcal{S}}_1 = k_x \epsilon_1^T \epsilon_2 + k_v \epsilon_2^T \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 (\epsilon_1 - q)^T (\epsilon_2 - \delta) \quad (8.19)$$

Regroupons les termes en ϵ_2 :

$$\dot{\mathcal{S}}_1 = \epsilon_2^T \left\{ k_x \epsilon_1 + k_v \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 (\epsilon_1 - q) \right\} - k_1 (\epsilon_1 - q)^T \delta \quad (8.20)$$

On choisit alors le vecteur de commande

$$\mathcal{T} R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \{ k_1 (\epsilon_1 - q) + k_x \epsilon_1 \} + m g e_3 - m \dot{v}^d \quad (8.21)$$

qui permet de simplifier l'expression de la dérivée de \mathcal{S}_1 en :

$$\dot{\mathcal{S}}_1 = -k_1 (\epsilon_1 - q)^T \delta \quad (8.22)$$

En définissant la commande virtuelle

$$\delta = \epsilon_1 - q \quad (8.23)$$

on obtient

$$\dot{\mathcal{S}}_1 = -k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 \quad (8.24)$$

Calculons la dérivée seconde de \mathcal{S}_1 :

$$\ddot{\mathcal{S}}_1 = -2k_1 (\epsilon_1 - q)^T (\epsilon_2 - \epsilon_1 + q) \quad (8.25)$$

Sous l'Hypothèse 11, cette dérivée est uniformément bornée. La fonction $\dot{\mathcal{S}}_1$ est donc uniformément continue et on peut appliquer le Lemme de Barbalat (cf Annexe D) pour conclure que $\epsilon_1 \rightarrow q$. Par continuité, on a $\dot{\epsilon}_1 \rightarrow \dot{q}$, i.e. $\epsilon_2 \rightarrow \delta$. En utilisant (8.23) et $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$, on peut en déduire $\epsilon_2 \rightarrow 0$ puis, par continuité, $\dot{\epsilon}_2 \rightarrow 0$. La seconde équation de (8.17) donne alors $(-\mathcal{T}/m)R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \rightarrow 0$. En remplaçant ensuite le vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$ par l'expression (8.21), on obtient $(\frac{k_x}{k_v}(\epsilon_1 - q) + \frac{k_x}{k_v}\epsilon_1) \rightarrow 0$. Puisque l'on a $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$, on peut en déduire $\epsilon_1 \rightarrow 0$, puis $q \rightarrow 0$, et enfin par continuité $\dot{\epsilon}_1 \rightarrow 0$ et $\dot{q} \rightarrow 0$.

Le vecteur de commande (8.21), avec la commande virtuelle (8.23), stabilise donc asymptotiquement le système (8.17). Le système étant linéaire, la convergence est exponentielle.

Cette commande, synthétisée sous l'Hypothèse 11, et sous l'hypothèse $R = R^d$ induite par la séparation des échelles de temps, permet donc d'obtenir $\xi \rightarrow \xi^d$ et $v \rightarrow v^d$ exponentiellement.

8.2.2 Commande en position avec saturations

On peut montrer (cf Section 9.2.1) que si les gains de la commande en position satisfont une relation faisant intervenir la valeur initiale de la fonction de Lyapunov du système, alors on peut garantir que l'entrée de commande \mathcal{T} est strictement positive¹ et bornée. Dans cette section, nous proposons une autre manière de synthétiser cette commande en position, pour assurer directement ces propriétés de stricte positivité et de bornitude et ce, indépendamment des conditions initiales.

Considérons le système (8.17). On a le Lemme suivant :

Lemme 2 *On suppose que la trajectoire de référence ξ^d et ses dérivées ($\dot{\xi}^d = v^d$, $\ddot{\xi}^d = \dot{v}^d$) satisfont l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1, ainsi que $\sup \|\dot{v}^d\| < g$.*

On définit le vecteur de commande

$$\mathcal{T}R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_1 \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\} + mge_3 - m\dot{v}^d \quad (8.26)$$

où k_x , k_v et k_1 sont des gains scalaires strictement positifs, et la commande virtuelle

$$\delta = -\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}(\epsilon_1 - q) \quad (8.27)$$

Pour k_x , k_v et k_1 vérifiant

$$\frac{k_x + k_1}{k_v} \leq g - \sup \|\dot{v}^d\| \quad (8.28)$$

le vecteur de commande (8.26), avec la commande virtuelle (8.27), stabilise asymptotiquement la dynamique (8.17). De plus, la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

Preuve

Pour le système (8.17), on définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S}_{1_{sat}} = k_x(\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2} - 1) + \frac{1}{2}k_v \|\epsilon_2\|^2 + k_1(\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2} - 1) \quad (8.29)$$

où k_x , k_v et k_1 sont des gains scalaires strictement positifs.

La dérivée de cette fonction, le long des trajectoires de (8.17), est donnée par

$$\dot{\mathcal{S}}_{1_{sat}} = k_x \frac{\epsilon_1^T \epsilon_2}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_v \epsilon_2^T \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + ge_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 \frac{(\epsilon_1 - q)^T (\epsilon_2 + \delta)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \quad (8.30)$$

Regroupons les termes en ϵ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_{1_{sat}} = & \epsilon_2^T \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_v \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + ge_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\} \\ & + k_1 \frac{\delta^T (\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \end{aligned} \quad (8.31)$$

¹La stricte positivité de \mathcal{T} permet d'assurer que l'expression (2.102) utilisée pour le calcul de l'orientation désirée est bien définie.

Remplaçons le vecteur de commande $\mathcal{T} R^d e_3$ par l'expression proposée en (8.26). La dérivée de $\mathcal{S}_{1_{sat}}$ se simplifie comme suit :

$$\dot{\mathcal{S}}_{1_{sat}} = k_1 \frac{\delta^T (\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \quad (8.32)$$

En choisissant la commande virtuelle δ conformément à (8.27), cette dérivée devient

$$\dot{\mathcal{S}}_{1_{sat}} = -k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 \quad (8.33)$$

Comme présenté en Section 8.2.1, on utilise le lemme de Barbalat (cf Annexe D) pour en déduire $\epsilon_1 \rightarrow q$, puis la stabilité asymptotique du système (8.17) bouclé par la commande (8.26) et la commande virtuelle (8.27).

Montrons maintenant que la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

De (8.26), on a

$$\mathcal{T} = \left\| \frac{m}{k_v} \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_1 \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\} + m g e_3 - m \dot{v}^d \right\| \quad (8.34)$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\mathcal{T} \geq m g - m \|\dot{v}^d\| - m \frac{k_x}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} \right\| - m \frac{k_1}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\| \quad (8.35)$$

soit

$$\mathcal{T} > m(g - \sup \|\dot{v}^d\|) - \frac{m}{k_v} (k_x + k_1) \quad (8.36)$$

La condition (8.28) permet finalement de garantir la stricte positivité de \mathcal{T} .

Montrons finalement que \mathcal{T} est bornée.

De l'expression (8.34) et par inégalité triangulaire, on a

$$\mathcal{T} \leq m g + m \|\dot{v}^d\| + m \frac{k_x}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} \right\| + m \frac{k_1}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\| \quad (8.37)$$

et enfin

$$\mathcal{T} < m g + \sup \|\dot{v}^d\| + \frac{m}{k_v} (k_x + k_1) \quad (8.38)$$

qui assure que la commande \mathcal{T} est bornée. ■

La commande développée ici permet de garantir la stricte positivité et la bornitude de la commande \mathcal{T} sans imposer de relation à satisfaire qui fasse intervenir les conditions initiales. De plus, la borne supérieure de \mathcal{T} peut être directement définie en réglant les gains k_x , k_v , k_1 .

Par cette commande, on garantit la stabilité asymptotique de la dynamique de translation (8.17), mais on n'a pas la stabilité exponentielle, le système bouclé n'étant pas linéaire.

Toutefois, le système bouclé étant continu et son linéarisé étant exponentiellement stable, on a un système à énergie finie dont les performances seront similaires à celles que l'on peut obtenir dans le cas exponentiellement stable.

8.2.3 Commande en position adaptative

Considérons à nouveau le système (8.17), cette fois-ci dans le cas perturbé :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m}R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d + \frac{1}{m}F_{ext} \\ \dot{q} = \delta \end{cases} \quad (8.39)$$

où la perturbation F_{ext} est supposée constante (ou variant faiblement dans le temps).

On cherche à synthétiser une commande, à partir de la seule connaissance de ϵ_1 , permettant de stabiliser ce système en présence du terme de perturbation F_{ext} . Une solution à ce problème est proposée dans le lemme suivant :

Lemme 3 *Considérons le système (8.39). Supposons que la trajectoire de référence ξ^d et ses dérivées ($\dot{\xi}^d = v^d$, $\ddot{\xi}^d = \dot{v}^d$) satisfont l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1. Soit \hat{F}_{ext} une estimée de F_{ext} .*

Le vecteur de commande

$$\mathcal{T}R^d e_3 = m\epsilon_1 + m(k+1)(\epsilon_1 - q) + mge_3 - m\dot{v}^d + \hat{F}_{ext} \quad (8.40)$$

où k est un gain scalaire strictement positif, avec la commande virtuelle

$$\delta = \epsilon_1 - q \quad (8.41)$$

et la dynamique d'adaptation

$$\dot{\hat{F}}_{ext} = mk\epsilon_1 \quad (8.42)$$

stabilise exponentiellement le système (8.39).

Preuve (étapes principales)

La formulation proposée dans le Lemme ci-dessus revient à ajouter un intégrateur dans l'expression de la commande proposée en Section 8.2.1. La preuve n'est pas détaillée ici, mais ses principales étapes sont données.

On définit l'erreur d'estimation $\tilde{F}_{ext} = F_{ext} - \hat{F}_{ext}$ et la fonction de Lyapunov candidate :

$$\mathcal{S}_{1_{ada}} = \frac{1}{2} \|\epsilon_1 - q\|^2 + \frac{1}{2} \|\epsilon_2\|^2 + \frac{1}{2}k \|\epsilon_2 + q\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \epsilon_1 + k(\epsilon_1 - q) - \frac{\tilde{F}_{ext}}{m} \right\|^2 \quad (8.43)$$

En dérivant $\mathcal{S}_{1_{ada}}$ le long des trajectoires de (8.39) et en choisissant le vecteur de commande (8.40), la commande virtuelle (8.41) et la dynamique d'adaptation (8.42), on obtient :

$$\dot{\mathcal{S}}_{1_{ada}} = -\|\epsilon_1 - q\|^2 \quad (8.44)$$

Comme précédemment, on utilise le Lemme de Barbalat pour en déduire $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$. Par continuité, on a alors $\dot{\epsilon}_1 \rightarrow \dot{q}$, soit $\epsilon_2 \rightarrow \delta$. En utilisant la relation (8.41), on obtient $\epsilon_2 \rightarrow 0$ puis, par continuité, $\dot{\epsilon}_2 \rightarrow 0$. En utilisant la seconde équation du système (8.39) avec l'expression (8.40) du vecteur de commande, on en déduit ainsi :

$$(-\epsilon_1 - (k+1)(\epsilon_1 - q) - \frac{\hat{F}_{ext}}{m} + \frac{F_{ext}}{m}) \rightarrow 0 \quad (8.45)$$

Soit $(\tilde{F}_{ext}/m) \rightarrow -\epsilon_1$ puis, par continuité $(\hat{F}_{ext}/m) \rightarrow \epsilon_2$. Comme $\epsilon_2 \rightarrow 0$, on en déduit alors, en utilisant (8.42), $\epsilon_1 \rightarrow 0$. On a alors également $\tilde{F}_{ext} \rightarrow 0$ et donc $\hat{F}_{ext} \rightarrow F_{ext}$.

La stabilité asymptotique du système (8.39) est donc obtenue pour les expressions proposées du vecteur de commande, de la commande virtuelle et de la dynamique d'adaptation. Le système étant linéaire, il est donc de plus exponentiellement stable. ■

8.3 Commande en attitude

8.3.1 Synthèse de la commande en attitude

Pour la synthèse de la commande en attitude, on considère comme nulle la composante du vecteur Ω^d dépendant de l'état de la dynamique de translation (cf discussion de la Section 2.6 et Annexe C). On a donc, dans le cas d'un suivi de trajectoire, $\Omega^d = \Omega^d(t)$ où le vecteur $\Omega^d(t)$ ne dépend que de la trajectoire de référence et de ses dérivées temporelles.

Cette hypothèse, liée à la séparation des échelles de temps, est utilisée pour synthétiser la commande en attitude en échelle de temps rapide.

Le changement d'échelle de temps est réalisé en introduisant $\tau = t/\epsilon$. Pour une fonction f donnée, on introduit la notation suivante :

$$\overset{\circ}{f} = \frac{d}{d\tau} f = \epsilon \frac{d}{dt} f \quad (8.46)$$

Pour la synthèse de la commande en attitude, on considère donc le modèle (2.138), correspondant aux hypothèses précédemment énoncées, dans le cas non perturbé ($M_{ext} = 0$) :

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\tilde{R}} = \tilde{R} \tilde{\Omega}_\times \\ I \overset{\circ}{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I \tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I \tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d \end{cases} \quad (8.47)$$

où l'on rappelle les notations $\tilde{R} = (R^d)^T R$, $\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega}^d$ et $\bar{\Omega}^d = \tilde{R}^T \Omega^d$.

On suppose que l'on ne dispose, pour la synthèse de la commande, que d'une mesure de l'orientation R du drone. Seul l'état \tilde{R} du système (8.47) est donc accessible.

Pour cette synthèse, on utilisera les opérateurs $P_a(\cdot)$ (donnant la partie antisymétrique d'une matrice), $P_s(\cdot)$ (donnant la partie symétrique d'une matrice) et $V(\cdot)^2$ (opérateur inverse de l'opérateur $(\cdot)_\times$) respectivement définis en Annexe A par les relations (A.13) et (A.10).

Appliquons la méthode présentée en Section 8.1.1 à la synthèse de la loi de commande en attitude.

On complète la dynamique (8.47) en ajoutant un état virtuel $Q \in SO(3)$ et une commande

² $V : SO(3) \rightarrow \mathbb{R}^3, \forall b \in \mathbb{R}^3, V(b_\times) = b$ et $\forall B \in SO(3), V(B)_\times = B$

virtuelle $\Delta \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I \overset{\circ}{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d \\ \overset{\circ}{\tilde{Q}} = Q\Delta_\times \end{cases} \quad (8.48)$$

Pour une valeur de \tilde{R} donnée, on définit

$$\tilde{Q} = Q^T \tilde{R} \quad (8.49)$$

En dérivant cette expression on a

$$\overset{\circ}{\tilde{Q}} = (Q\Delta_\times)^T \tilde{R} + Q^T \tilde{R} \tilde{\Omega}_\times \quad (8.50)$$

Le système (8.48) se réécrit donc finalement en

$$\begin{cases} \overset{\circ}{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I \overset{\circ}{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d \\ \overset{\circ}{\tilde{Q}} = -\Delta_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{\Omega}_\times \end{cases} \quad (8.51)$$

On définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}k_r \text{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2}k_\omega \tilde{\Omega}^T I \tilde{\Omega} + \frac{1}{2}k_2 \text{tr}(I_d - \tilde{Q}) \quad (8.52)$$

où I_d est la matrice identité de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Sa dérivée par rapport au temps, en échelle de temps rapide, le long des trajectoires de (8.51) est donnée par

$$\dot{\mathcal{L}}_1 = -\frac{1}{2}k_r \text{tr}(\tilde{R}\tilde{\Omega}_\times) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d) - \frac{1}{2}k_2 \text{tr}(-\Delta_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{\Omega}_\times) \quad (8.53)$$

En utilisant $\forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\text{tr}(P_a(A)P_s(B)) = 0$ et $\forall a, b \in \mathbb{R}^3$, $a^T(a \times b) = 0$, on a

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_1 = & -\frac{1}{2}k_r \text{tr}(\tilde{\Omega}_\times P_a(\tilde{R})) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\bar{\Omega}_\times^d I \tilde{\Omega} - \bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d) \\ & + \frac{1}{2}k_2 \text{tr}(\Delta_\times P_a(\tilde{Q})) - \frac{1}{2}k_2 \text{tr}(\tilde{\Omega}_\times P_a(\tilde{Q})) \end{aligned} \quad (8.54)$$

En utilisant le fait que pour deux matrices antisymétriques données $A_a, B_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on a $\frac{1}{2}\text{tr}(A_a B_a) = V(A_a^T)^T V(B_a)$ et $A_a^T = -A_a$, cette dernière expression se simplifie en

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}}_1 = & k_r \tilde{\Omega}^T V(P_a(\tilde{R})) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\bar{\Omega}_\times^d I \tilde{\Omega} + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (\Gamma - \bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \overset{\circ}{\tilde{\Omega}}^d) \\ & + \frac{1}{2}k_2 \text{tr}(\Delta_\times P_a(\tilde{Q})) + k_2 \tilde{\Omega}^T V(P_a(\tilde{Q})) \end{aligned} \quad (8.55)$$

Regroupons les termes en $\tilde{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \mathring{\mathcal{L}}_1 = & \tilde{\Omega}^T \left\{ k_r V(P_a(\tilde{R})) + k_\omega (\Gamma - \bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d - I \tilde{R}^T \mathring{\Omega}^d) + k_1 V(P_a(\tilde{Q})) \right\} - k_\omega \tilde{\Omega}^T (\bar{\Omega}_\times^d I + \bar{\Omega}_\times^d I) \tilde{\Omega} \\ & + \frac{1}{2} k_2 \text{tr}(\Delta_\times P_a(\tilde{Q})) \end{aligned} \quad (8.56)$$

Sous l'hypothèse $I = I^T$, la matrice $(\bar{\Omega}_\times^d I + I \bar{\Omega}_\times^d)$ est antisymétrique et l'on a donc $\tilde{\Omega}^T (\bar{\Omega}_\times^d I + I \bar{\Omega}_\times^d) \tilde{\Omega} = 0$ (cf identité (A.19)).

On choisit

$$\Gamma = \frac{1}{k_\omega} \left\{ -k_r V(P_a(\tilde{R})) - k_2 V(P_a(\tilde{Q})) \right\} + \bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d + I \tilde{R}^T \mathring{\Omega}^d \quad (8.57)$$

La dérivée de \mathcal{L}_1 se simplifie alors en

$$\mathring{\mathcal{L}}_1 = \frac{1}{2} k_2 \text{tr}(\Delta_\times P_a(\tilde{Q})) \quad (8.58)$$

En imposant

$$\Delta = V(P_a(\tilde{Q})) \quad (8.59)$$

et en utilisant le fait que pour une matrice antisymétrique $A_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\frac{1}{2} \text{tr}(A_a^T A_a) = \|V(A_a)\|^2$, on obtient :

$$\mathring{\mathcal{L}}_1 = -k_2 \left\| V(P_a(\tilde{Q})) \right\|^2 \quad (8.60)$$

Sous l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 et en supposant que ψ^d et ses dérivées sont continues et uniformément bornées, alors Ω^d et ses dérivées sont uniformément bornées, et la dérivée de $\mathring{\mathcal{L}}_1$ est uniformément bornée. Ainsi, $\mathring{\mathcal{L}}_1$ est uniformément continue et on peut appliquer le lemme de Barbalat pour conclure $P_a(\tilde{Q}) \rightarrow 0$, et $\Delta_\times \rightarrow 0$, soit $\Delta \rightarrow 0$.

Sous certaines conditions sur les gains et sur la valeur initiale de la fonction de Lyapunov \mathcal{L}_1 (conditions similaires à celles présentées dans le chapitre suivant)³, on peut montrer que $P_a(\tilde{Q}) \rightarrow 0$ implique $\tilde{Q} \rightarrow I_d$

De (8.49), on en déduit $\tilde{R} \rightarrow Q$ et par continuité $\mathring{\tilde{R}} \rightarrow \mathring{Q}$. En utilisant la première et la dernière équation de (8.48), on a $\tilde{R} \tilde{\Omega}_\times \rightarrow Q \Delta_\times$, soit $\tilde{\Omega}_\times \rightarrow \tilde{R}^T Q \Delta_\times$. En utilisant $\Delta \rightarrow 0$, on en déduit $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$ et, par continuité, $\mathring{\tilde{\Omega}} \rightarrow 0$. En remplaçant dans la deuxième équation de (8.51) et en utilisant (8.57), on aboutit à

$$\frac{1}{k_\omega} \left\{ -k_r V(P_a(\tilde{R})) - k_1 V(P_a(\tilde{Q})) \right\} \rightarrow 0 \quad (8.61)$$

soit $P_a(\tilde{R}) \rightarrow 0$. Comme précédemment on montre que, sous certaines conditions faisant intervenir les gains et la valeur initiale de la fonction de Lyapunov, $P_a(\tilde{R}) \rightarrow 0$ implique $\tilde{R} \rightarrow I_d$ et donc $R \rightarrow R_d$. Cette analyse est également présentée en détail dans la section correspondante du chapitre suivant.

En utilisant $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$ on a $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}^d$, i.e. $\Omega \rightarrow \tilde{R}^T \Omega^d$. De $\tilde{R} \rightarrow I_d$ on en déduit finalement $\Omega \rightarrow \Omega^d$.

La commande (8.57), avec la commande virtuelle (8.59), stabilise asymptotiquement la dynamique de rotation (8.51), sans utiliser de mesure de la vitesse de rotation Ω .

³La condition exacte fait intervenir la fonction de Lyapunov totale du système, i.e. la fonction somme des fonctions de Lyapunov de la translation et de la rotation. Cette analyse est semblable à celle menée dans le cas à deux états virtuels présentée au chapitre suivant.

8.3.2 Existence d'une borne pour $\|\Gamma\|$

Considérons le système (8.51) et la commande (8.57) définie précédemment. L'existence d'une borne pour Γ est alors garantie par le lemme suivant :

Lemme 4 *Sous l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1, et en supposant que ψ^d et ses dérivées temporelles sont uniformément continues et bornées, la commande Γ définie par (8.57) pour le système (8.51) est uniformément bornée.*

Preuve

D'après (8.57), on a :

$$\Gamma = \frac{1}{k_\omega} \left\{ -k_r V(P_a(\tilde{R})) - k_2 V(P_a(\tilde{Q})) \right\} + \bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d + I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (8.62)$$

où l'on rappelle la notation $\bar{\Omega}^d = \tilde{R}^T \Omega^d$.

Par inégalité triangulaire, on a

$$\|\Gamma\| \leq \frac{k_r}{k_\omega} \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| + \frac{k_2}{k_\omega} \left\| V(P_a(\tilde{Q})) \right\| + \|\bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d\| + \left\| I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \right\| \quad (8.63)$$

Soient $(\gamma_{\tilde{R}}, n_{\tilde{R}})$ et $(\gamma_{\tilde{Q}}, n_{\tilde{Q}})$ les coordonnées angle-axe respectives de \tilde{R} et \tilde{Q} . En utilisant la relation (A.22), on a :

$$\|\Gamma\| \leq \frac{k_r}{k_\omega} |\sin(\gamma_{\tilde{R}})| + \frac{k_2}{k_\omega} |\sin(\gamma_{\tilde{Q}})| + \|\bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d\| + \left\| I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \right\| \quad (8.64)$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres du tenseur d'inertie I . On définit

$$\lambda_I = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (8.65)$$

Sous l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 et en supposant que ψ^d et ses dérivées temporelles sont continues et uniformément bornées, on peut déduire que Ω^d et sa dérivée $\dot{\Omega}^d$ sont uniformément bornées (cf méthode de calcul de Ω^d en Annexe C). On a alors

$$\|\Gamma\| \leq \frac{k_r}{k_\omega} + \frac{k_2}{k_\omega} + \lambda_I \sup \|\Omega^d\|^2 + \lambda_I \sup \|\dot{\Omega}^d\| \quad (8.66)$$

La commande Γ est donc uniformément bornée. ■

Les gains k_r , k_ω et k_2 peuvent être utilisés pour définir la borne sur $\|\Gamma\|$.

8.4 Stabilité

L'analyse de la stabilité du système total, bouclé par les commandes sans mesures de vitesses présentées ci-dessus, est similaire à celle présentée ultérieurement en Section 9.4 dans le cas à deux états virtuels. Cette discussion n'est donc pas présentée ici par souci de concision.

8.5 Bilan et limites de l'approche proposée

Les lois de commande proposées dans ce chapitre permettent de stabiliser la dynamique de translation, ou la dynamique de rotation, sans utiliser de mesure de la vitesse linéaire v , ou de la vitesse de rotation Ω du véhicule, et sans utiliser d'observateur. La stabilité de chaque sous-système bouclé peut alors se prouver en une seule étape, sans avoir besoin de s'assurer au préalable de la convergence d'une estimée, fournie par un observateur, vers la valeur réelle de l'état observé.

Dans ce chapitre, seule la stabilité de chacun des sous-systèmes considérés (dynamique de translation et dynamique de rotation) a été analysée, sous les hypothèses simplificatrices liées à une séparation des échelles de temps et présentée en Sections 2.6 et 2.5. La stabilité du système total sera discutée au cours du chapitre suivant où une méthode de synthèse similaire est employée.

En Section 8.1.3, nous avons vu que l'état virtuel introduit dans la dynamique du système correspond à une valeur filtrée de la mesure en position (ou en angle d'attitude pour la dynamique de rotation). Le filtre utilisé est un premier ordre, dont la fréquence de coupure peut alors être choisie de manière à atténuer l'éventuel bruit de mesure sur la position (ou les angles d'attitude). Afin d'améliorer cette approche en terme de filtrage, en passant à un filtre du second ordre, on se propose, dans le chapitre suivant, d'introduire un second état virtuel dans la dynamique du système.

Chapitre 9

Synthèse de lois de guidage-pilotage avec deux états virtuels

9.1 Principe

La méthode proposée dans le chapitre précédent est étendue dans ce chapitre au cas où l'on rajoute deux états virtuels dans la dynamique du système. Comme dans le chapitre précédent, nous proposons tout d'abord un exemple introductif avant de nous intéresser à la synthèse de lois de guidage-pilotage.

9.1.1 Introduction de deux états virtuels

Considérons à nouveau le système (8.1) sous les hypothèses présentées en section 8.1.1. On rappelle que l'on souhaite stabiliser l'état de ce système lorsque seul l'état x_1 est mesurable. On introduit cette fois deux états virtuels $q, w \in \mathbb{R}^n$ et une commande virtuelle $\delta \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_2) + u \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \end{cases} \quad (9.1)$$

Pour ce nouveau système, on définit la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{V}_2 = \frac{1}{2}k_a x_1^T x_1 + \frac{1}{2}x_2^T x_2 + \frac{1}{2}k_b (x_1 - q)^T (x_1 - q) + \frac{1}{2}k_c (x_1 - q + w)^T (x_1 - q + w) \quad (9.2)$$

où k_a, k_b et k_c sont des gains scalaires strictement positifs.

La dérivée temporelle de \mathcal{V}_2 le long des trajectoires de (9.1) est donnée par

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = k_a x_1^T x_2 + x_2^T (f(x_2) + u) + k_b (x_1 - q)^T (x_2 + w) + k_c (x_1 - q + w)^T (x_2 + w + \delta) \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2 = & x_2^T (k_a x_1 + u + k_b (x_1 - q) + k_c (x_1 - q + w)) + k_b (x_1 - q)^T w \\ & + k_c (x_1 - q + w)^T (w + \delta) \end{aligned} \quad (9.4)$$

En choisissant

$$u = -k_a x_1 - k_b (x_1 - q) - k_c (x_1 - q + w) \quad (9.5)$$

on obtient

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = k_b (x_1 - q)^T w + k_c (x_1 - q + w)^T (w + \delta) \quad (9.6)$$

Ajoutons et soustrayons $(x_1 - q)$ dans le premier terme :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}_2 &= k_b (x_1 - q)^T (w + (x_1 - q) - (x_1 - q)) + k_c (x_1 - q + w)^T (w + \delta) \\ \dot{\mathcal{V}}_2 &= -k_b \|x_1 - q\|^2 + (w + x_1 - q)^T (k_b (x_1 - q) + k_c (w + \delta)) \end{aligned} \quad (9.7)$$

En posant

$$\delta = -w - \frac{k_b}{k_c} (x_1 - q) - (w + x_1 - q) \quad (9.8)$$

on a finalement

$$\dot{\mathcal{V}}_2 = -k_b \|x_1 - q\|^2 - k_c \|w + x_1 - q\|^2 \quad (9.9)$$

La fonction \mathcal{V}_2 est strictement décroissante jusqu'à $(x_1 - q) \rightarrow 0$ et $(w + x_1 - q) \rightarrow 0$. Par continuité et en utilisant le principe d'invariance de La Salle, on a alors $\dot{x}_1 \rightarrow \dot{q}$, i.e. $x_2 \rightarrow -w$.

Comme $w \rightarrow -(x_1 - q)$ et $x_1 \rightarrow q$, on obtient $w \rightarrow 0$, puis $x_2 \rightarrow 0$. On en déduit ensuite $\dot{x}_2 \rightarrow 0$ par continuité. En utilisant la seconde équation de (9.1) et $f(0) = 0$, on obtient $u \rightarrow 0$. Finalement, (9.5) donne $x_1 \rightarrow 0$, puis $q \rightarrow 0$ et $\dot{x}_1 \rightarrow 0$ et $\dot{q} \rightarrow 0$ par continuité.

En utilisant le principe d'invariance de La Salle, on peut donc conclure que la commande (9.5), avec la commande virtuelle (9.8), stabilise asymptotiquement le système (9.1). On notera que seule la mesure de x_1 est utilisée.

9.1.2 Analyse fréquentielle

Posons $\alpha = \frac{k_b}{k_c}$. Dans le domaine fréquentiel, on a

$$sq = -w \quad (9.10)$$

$$sw = -w - \alpha(x_1 - q) - (w + x_1 - q) \quad (9.11)$$

De cette dernière équation, on isole w

$$w = -\frac{\alpha + 1}{s + 2}(x_1 - q) \quad (9.12)$$

et en utilisant (9.10) :

$$q = -\frac{1}{s}w = \frac{\alpha + 1}{s(s + 2)}(x_1 - q) \quad (9.13)$$

D'où

$$q = \frac{\alpha + 1}{s(s + 2) + \alpha + 1}x_1 \quad (9.14)$$

et

$$x_1 - q = \frac{s(s + 2)}{s(s + 2) + (\alpha + 1)}x_1 = \frac{(s + 2)}{s(s + 2) + (\alpha + 1)}x_2 \quad (9.15)$$

On a d'autre part

$$w = -\frac{\alpha + 1}{s + 2}(x_1 - q) = -\frac{(\alpha + 1)s}{s(s + 2) + \alpha + 1}x_1 = -\frac{(\alpha + 1)}{s(s + 2) + \alpha + 1}x_2 \quad (9.16)$$

Les équations (9.15) et (9.16) montrent que les termes intervenant dans la commande (9.5) sont obtenus par filtrage de la dérivée x_1 et peuvent être rapprochés d'une mesure associée à x_2 .

9.1.3 Exemple

Reprenons l'exemple d'un double intégrateur ($n = 1$, $f = 0$). On définit la condition initiale $x_0 = [1 \quad -1]^T$, $q_0 = 0$ et $w_0 = 0$. Dans cet exemple, les gains sont choisis unitaires. L'évolution de l'état, des états virtuels et de la commande sont représentées en Figure 9.1. La commande synthétisée par la méthode proposée stabilise asymptotiquement le système sans nécessiter une mesure de l'état x_2 . Cette approche est appliquée dans les sections suivantes au développement de lois de guidage-pilotage, pour une approche de commande hiérarchique où une séparation des échelles de temps est réalisée entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation.

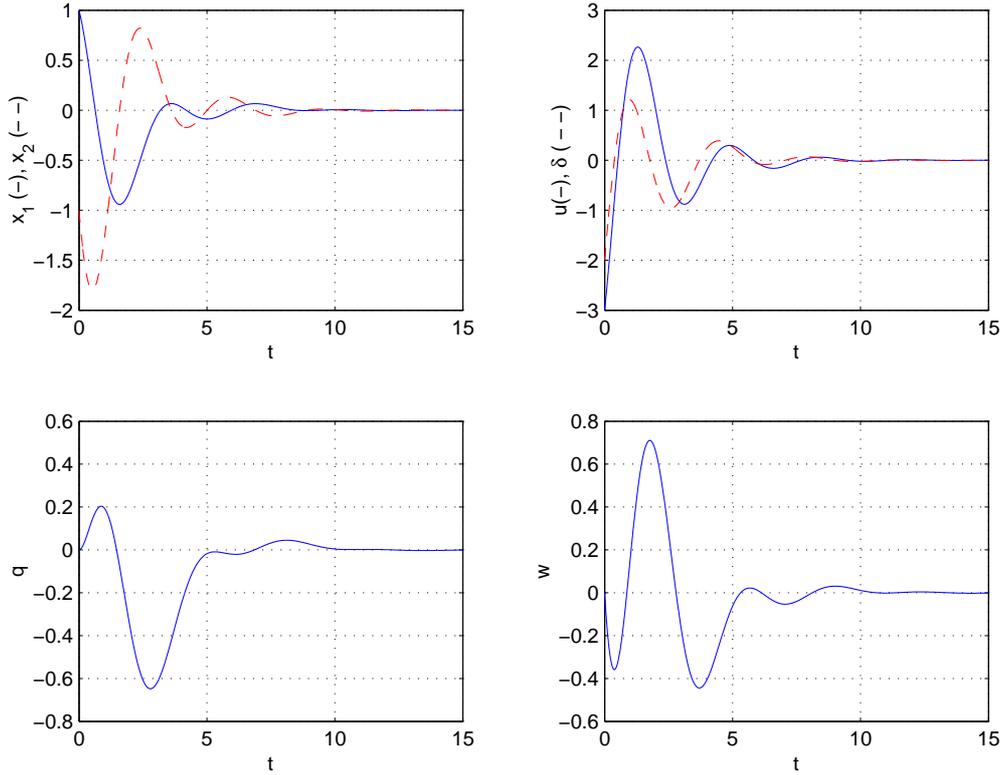


FIG. 9.1 – Stabilisation avec deux états virtuels

9.2 Commande en position

Comme dans le chapitre précédent, nous nous proposons de synthétiser la loi de commande en position en utilisant le système (2.123) obtenu sous l'hypothèse $R = R^d$ qui découle d'une séparation des échelles de temps.

Nous considérerons successivement le cas non perturbé ($F_{ext} = 0$), le cas non perturbé en définissant des saturations sur la commande, et enfin le cas perturbé en proposant une loi de guidage adaptative.

9.2.1 Synthèse de la commande en position

Considérons tout d'abord le cas non perturbé en posant $F_{ext} = 0$ dans le système (2.123). On définit ensuite deux états virtuels $q, w \in \mathbb{R}^3$ ainsi qu'une commande virtuelle $\delta \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \end{cases} \quad (9.17)$$

Définissons la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} k_x \|\epsilon_1\|^2 + \frac{1}{2} k_v \|\epsilon_2\|^2 + \frac{1}{2} k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 + \frac{1}{2} k_2 \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \quad (9.18)$$

où k_x, k_v, k_1 et k_2 sont des gains scalaires strictement positifs. On note $\mathcal{S}(0)$ la valeur initiale de la fonction \mathcal{S} et l'on introduit

$$k_{min} = \min(k_x, k_v, k_1, k_2) \quad (9.19)$$

et

$$k_{max} = \max(k_x, k_1, k_2) \quad (9.20)$$

Lemme 5 [6, 7] *Considérons le système (9.17). On suppose que la trajectoire de référence ξ^d et ses dérivées ($\dot{\xi}^d = v^d, \ddot{\xi}^d = \dot{v}^d$) satisfont l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 ainsi que la condition $\sup \|\dot{v}^d\| < g$.*

On définit le vecteur de commande

$$\mathcal{T}R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \{k_x \epsilon_1 + k_1(\epsilon_1 - q) + k_2(\epsilon_1 - q + w)\} + mge_3 - m\dot{v}^d \quad (9.21)$$

et la commande virtuelle

$$\delta = -\frac{1}{k_2} \{k_2 w + k_1(\epsilon_1 - q) + k_2(\epsilon_1 - q + w)\} \quad (9.22)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate (9.18).

Pour toute condition initiale $\epsilon_1(0), \epsilon_2(0)$, et $q(0) = \epsilon_1(0)$ et $w(0) = 0$ vérifiant

$$\mathcal{S}(0) < \frac{1}{18} \frac{k_{min}}{k_{max}^2} k_v (g - \sup \|\dot{v}^d\|)^2 \quad (9.23)$$

le vecteur de commande (9.21), avec la commande virtuelle (9.22), stabilise exponentiellement le système (9.17), et la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

Preuve

La dérivée de la fonction \mathcal{S} le long des trajectoires de (9.17) est donnée par

$$\dot{\mathcal{S}} = k_x \epsilon_1^T \epsilon_2 + k_v \epsilon_2^T \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + ge_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 (\epsilon_1 - q)^T (\epsilon_2 + w) + k_2 (\epsilon_1 - q + w)^T (\epsilon_2 + w + \delta) \quad (9.24)$$

Factorisons les termes en ϵ_2 :

$$\dot{\mathcal{S}} = \epsilon_2^T \left\{ k_x \epsilon_1 - k_v \frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + k_v ge_3 - k_v \dot{v}^d + k_1 (\epsilon_1 - q) + k_2 (\epsilon_1 - q + w) \right\} + k_1 w^T (\epsilon_1 - q) + k_2 (\epsilon_1 - q + w)^T (w + \delta) \quad (9.25)$$

On remplace le vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$ par son expression définie en (9.21), et l'on obtient :

$$\dot{\mathcal{S}} = k_1 w^T (\epsilon_1 - q) + k_2 (\epsilon_1 - q + w)^T (w + \delta) \quad (9.26)$$

On introduit $(\epsilon_1 - q)$ dans le premier terme :

$$\dot{\mathcal{S}} = k_1 (w + (\epsilon_1 - q) - (\epsilon_1 - q))^T (\epsilon_1 - q) + k_2 (\epsilon_1 - q + w)^T (w + \delta) \quad (9.27)$$

Soit :

$$\dot{\mathcal{S}} = -k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 + (\epsilon_1 - q + w)^T (k_1 (\epsilon_1 - q) + k_2 (w + \delta)) \quad (9.28)$$

En choisissant la commande virtuelle δ proposée en (9.22), la dérivée de \mathcal{S} devient :

$$\dot{\mathcal{S}} = -k_1 \|\epsilon_1 - q\|^2 - k_2 \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \quad (9.29)$$

En utilisant l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1, la fonction $\dot{\mathcal{S}}$ est uniformément continue puisque

$$\ddot{\mathcal{S}} = -2k_1(\epsilon_1 - q)^T(\epsilon_2 + w) - 2k_2(\epsilon_1 - q + w)^T\left(\epsilon_2 - \frac{k_1}{k_2}(\epsilon_1 - q) - (\epsilon_1 - q + w)\right) \quad (9.30)$$

est uniformément bornée. L'application du lemme de Barbalat conduit alors à $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$ et $(w + \epsilon_1 - q) \rightarrow 0$, i.e. $w \rightarrow 0$. Par continuité, on obtient $\dot{\epsilon}_1 \rightarrow \dot{q}$, soit $\epsilon_2 \rightarrow -w$. Puisque $w \rightarrow 0$, on a donc $\epsilon_2 \rightarrow 0$, et par continuité $\dot{\epsilon}_2 \rightarrow 0$. En combinant la seconde équation de (9.17) avec (9.21) et avec le fait que $\dot{\epsilon}_2 \rightarrow 0$, on aboutit à :

$$(k_x \epsilon_1 + k_1(\epsilon_1 - q) + k_2(\epsilon_1 - q + w)) \rightarrow 0 \quad (9.31)$$

On utilise alors $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$ et $w \rightarrow 0$ pour finalement obtenir $\epsilon_1 \rightarrow 0$ et $q \rightarrow 0$.

Ainsi, la commande (9.21), avec la commande virtuelle (9.22), stabilise asymptotiquement le système (9.17). Le système étant linéaire, il est donc exponentiellement stable.

Il reste à montrer que la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

De (9.21), on a :

$$\mathcal{T} = \left\| \frac{m}{k_v} \{k_x \epsilon_1 + k_1(\epsilon_1 - q) + k_2(\epsilon_1 - q + w)\} + mge_3 - m\dot{v}^d \right\| \quad (9.32)$$

Par inégalité triangulaire :

$$\mathcal{T} \geq \left\| mge_3 - m\dot{v}^d \right\| - \frac{m}{k_v} k_{max} \{ \|\epsilon_1\| + \|\epsilon_1 - q\| + \|\epsilon_1 - q + w\| \} \quad (9.33)$$

$$\mathcal{T} \geq \left\| mge_3 - m\dot{v}^d \right\| - 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \{ \|\epsilon_1\|^2 + \|\epsilon_2\|^2 + \|\epsilon_1 - q\|^2 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (9.34)$$

En utilisant la définition de \mathcal{S} et (9.19), on a :

$$\frac{1}{2} k_{min} \{ \|\epsilon_1\|^2 + \|\epsilon_2\|^2 + \|\epsilon_1 - q\|^2 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \} \leq \mathcal{S} \quad (9.35)$$

Puisque \mathcal{S} est décroissante, on a :

$$\mathcal{S} \leq \mathcal{S}(0) \quad (9.36)$$

où, en prenant $q(0) = \epsilon_1(0)$ et $w(0) = 0$, la valeur initiale $\mathcal{S}(0)$ est définie par :

$$\mathcal{S}(0) = \frac{1}{2} k_x \|\epsilon_1(0)\|^2 + \frac{1}{2} k_v \|\epsilon_2(0)\|^2 \quad (9.37)$$

En utilisant (9.34) avec (9.35) et (9.36), on obtient :

$$\mathcal{T} \geq \left\| mge_3 - m\dot{v}^d \right\| - 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \sqrt{\frac{2\mathcal{S}(0)}{k_{min}}} \quad (9.38)$$

et par inégalité triangulaire :

$$\mathcal{T} \geq mg - m \|\dot{v}^d\| - 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \sqrt{\frac{2\mathcal{S}(0)}{k_{min}}} \quad (9.39)$$

$$\mathcal{T} \geq mg - m \{ \sup \|\dot{v}^d\| \} - 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \sqrt{\frac{2\mathcal{S}(0)}{k_{min}}} \quad (9.40)$$

En utilisant la condition (9.23), on a finalement $\mathcal{T} > 0$.

Montrons que \mathcal{T} est bornée.

De l'équation (9.32) et par inégalité triangulaire, on a aussi :

$$\mathcal{T} \leq mg + m \|\dot{v}^d\| + \frac{m}{k_v} k_{max} \{ \|\epsilon_1\| + \|\epsilon_1 - q\| + \|\epsilon_1 - q + w\| \} \quad (9.41)$$

$$\mathcal{T} \leq mg + m \{ \sup \|\dot{v}^d\| \} + 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \{ \|\epsilon_1\|^2 + \|\epsilon_2\|^2 + \|\epsilon_1 - q\|^2 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \}^{\frac{1}{2}} \quad (9.42)$$

Les relations (9.35) et (9.36) permettent d'obtenir :

$$\mathcal{T} \leq mg + m \{ \sup \|\dot{v}^d\| \} + 3 \frac{m}{k_v} k_{max} \sqrt{\frac{2\mathcal{S}(0)}{k_{min}}} \quad (9.43)$$

La commande \mathcal{T} est donc bornée. ■

La commande (9.21), avec la commande virtuelle (9.22), stabilise asymptotiquement le système (9.17), sans utiliser de mesure de la vitesse linéaire v .

Remarque 4 La condition (9.23) n'est utilisable que dans le cas où l'on s'intéresse de manière isolée à l'étude de la dynamique de translation en échelle de temps lente, c'est à dire sous l'hypothèse $R = R^d$.

Dans le cas réel où l'on considère l'ensemble du système (translation et rotation), la condition permettant d'assurer la stricte positivité de \mathcal{T} doit faire intervenir une fonction de Lyapunov associée au système complet, et non seulement celle associée à la dynamique de translation qui sera alors perturbée par une erreur en orientation. Une telle condition sera présentée en Section 9.4.1.

9.2.2 Commande en position saturée

Au cours des Sections 9.2.1 et 9.4, nous avons vu qu'il était possible de garantir la stricte positivité de \mathcal{T} , ainsi que le fait que cette commande soit bornée, par une condition faisant intervenir la valeur initiale de la fonction de Lyapunov.

Pour pouvoir garantir ces propriétés sans condition à vérifier sur la valeur initiale de la fonction de Lyapunov, nous proposons dans le lemme suivant une autre manière de synthétiser la commande en position en considérant le système (9.17).

Lemme 6 *Considérons le système (9.17). On suppose que la trajectoire de référence ξ^d et ses dérivées ($\dot{\xi}^d = v^d$, $\ddot{\xi}^d = \dot{v}^d$) satisfont l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 ainsi que $\sup \|\dot{v}^d\| < g$.*

On définit le vecteur de commande

$$\mathcal{T}R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_1 \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 \frac{\epsilon_1 - q + w}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\} + mge_3 - m\dot{v}^d \quad (9.44)$$

où k_x , k_v , k_1 et k_2 sont des gains scalaires strictement positifs, et la commande virtuelle

$$\delta = -\frac{k_1}{k_2} \frac{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} (\epsilon_1 - q) - w - (\epsilon_1 - q + w) \quad (9.45)$$

Pour k_x , k_v , k_1 et k_2 vérifiant

$$\frac{k_x + k_1 + k_2}{k_v} \leq g - \sup \|\dot{v}^d\| \quad (9.46)$$

le vecteur de commande (9.44), avec la commande virtuelle (9.45), stabilise asymptotiquement la dynamique (9.17). De plus, la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

Preuve

Pour le système (9.17), définissons la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{S}_{sat} = k_x (\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2} - 1) + \frac{1}{2} k_v \|\epsilon_2\|^2 + k_1 (\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2} - 1) + k_2 (\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2} - 1) \quad (9.47)$$

où k_x , k_v , k_1 et k_2 sont des gains scalaires strictement positifs.

La dérivée de cette fonction, le long des trajectoires de (9.17), est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_{sat} = & k_x \frac{\epsilon_1^T \epsilon_2}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_v \epsilon_2^T \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + ge_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 \frac{(\epsilon_1 - q)^T (\epsilon_2 + w)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \\ & + k_2 \frac{(\epsilon_1 - q + w)^T (\epsilon_2 + w + \delta)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \end{aligned} \quad (9.48)$$

Regroupons les termes en ϵ_2 :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}}_{sat} = & \epsilon_2^T \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_v \left(-\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + ge_3 - \dot{v}^d \right) + k_1 \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 \frac{(\epsilon_1 - q + w)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\} \\ & + k_1 w^T \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 (w + \delta)^T \frac{(\epsilon_1 - q + w)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \end{aligned} \quad (9.49)$$

En remplaçant le vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$ par l'expression proposée en (9.44), on obtient

$$\dot{\mathcal{S}}_{sat} = k_1 w^T \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 (w + \delta)^T \frac{(\epsilon_1 - q + w)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \quad (9.50)$$

Introduisons et retranchons $(\epsilon_1 - q)$ dans le premier terme :

$$\dot{\mathcal{S}}_{sat} = k_1 (w + (\epsilon_1 - q) - (\epsilon_1 - q))^T \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 (w + \delta)^T \frac{(\epsilon_1 - q + w)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \quad (9.51)$$

On obtient alors

$$\dot{\mathcal{S}}_{sat} = -k_1 \frac{\|\epsilon_1 - q\|^2}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + (\epsilon_1 - q + w)^T \left\{ k_1 \frac{(\epsilon_1 - q)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 \frac{(w + \delta)}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\} \quad (9.52)$$

Si l'on choisit finalement la commande virtuelle δ conformément à (9.45), la dérivée de \mathcal{S}_{sat} devient

$$\dot{\mathcal{S}}_{sat} = -k_1 \frac{\|\epsilon_1 - q\|^2}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} - k_2 \frac{\|\epsilon_1 - q + w\|^2}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \quad (9.53)$$

assurant la décroissance stricte de \mathcal{S}_{sat} jusqu'à $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$ et $(w + \epsilon_1 - q) \rightarrow 0$, i.e. $w \rightarrow 0$. Comme dans la preuve du Lemme 5, on utilise le lemme de Barbalat pour conclure à la stabilité asymptotique du système (9.17) lorsque (9.44) et (9.45) sont respectivement utilisées comme vecteur de commande et commande virtuelle.

Montrons maintenant que la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée.

De (9.44), on a

$$\mathcal{T} = \left\| \frac{m}{k_v} \left\{ k_x \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} + k_1 \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} + k_2 \frac{\epsilon_1 - q + w}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\} + m g e_3 - m \dot{v}^d \right\| \quad (9.54)$$

Par inégalité triangulaire, on obtient

$$\mathcal{T} \geq m g - m \|\dot{v}^d\| - m \frac{k_x}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} \right\| - m \frac{k_1}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\| - m \frac{k_2}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q + w}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\| \quad (9.55)$$

soit

$$\mathcal{T} > m(g - \sup \|\dot{v}^d\|) - \frac{m}{k_v} (k_x + k_1 + k_2) \quad (9.56)$$

Sous la condition (9.46), la commande \mathcal{T} est donc strictement positive.

Montrons finalement que \mathcal{T} est bornée.

De l'expression (9.54) et par inégalité triangulaire, on a

$$\mathcal{T} \leq m g + m \|\dot{v}^d\| + m \frac{k_x}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1\|^2}} \right\| + m \frac{k_1}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q\|^2}} \right\| + m \frac{k_2}{k_v} \left\| \frac{\epsilon_1 - q + w}{\sqrt{1 + \|\epsilon_1 - q + w\|^2}} \right\| \quad (9.57)$$

et enfin

$$\mathcal{T} < mg + \sup \|\dot{v}^d\| + \frac{m}{k_v}(k_x + k_1 + k_2) \quad (9.58)$$

La commande \mathcal{T} est donc bornée. ■

La commande développée ici permet de garantir la stricte positivité et la bornitude de la commande \mathcal{T} quelque soient les conditions initiales. De plus, la borne supérieure de \mathcal{T} peut être directement définie en réglant les gains k_x, k_v, k_1, k_2 .

Par cette commande, on garantit la stabilité asymptotique de la dynamique de translation (9.17), mais on n'a pas la stabilité exponentielle, car le système bouclé n'est pas linéaire. Toutefois, le système bouclé étant continu et son linéarisé étant exponentiellement stable, on a un système à énergie finie dont les performances seront similaires à celles que l'on peut obtenir dans le cas exponentiellement stable.

9.2.3 Commande en position adaptative

On considère à nouveau le système (9.17), dans le cas perturbé :

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \epsilon_2 \\ \dot{\epsilon}_2 = -\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \dot{v}^d + \frac{F_{ext}}{m} \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \end{cases} \quad (9.59)$$

où la perturbation F_{ext} est supposée constante (ou variant faiblement dans le temps).

Comme présenté dans le cas à un seul état virtuel, en Section 8.2.3, on cherche à synthétiser une loi de commande à partir de la seule connaissance de ϵ_1 permettant de stabiliser ce système en présence du terme de perturbation F_{ext} . Une telle loi de commande est proposée dans le lemme suivant :

Lemme 7 *Considérons le système (9.17). Supposons que la trajectoire de référence ξ^d et ses dérivées ($\dot{\xi}^d = v^d, \ddot{\xi}^d = \dot{v}^d$) satisfont l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1. Soit \hat{F}_{ext} une estimée de F_{ext} .*

Le vecteur de commande

$$\mathcal{T} R^d e_3 = mk\epsilon_1 + m(\epsilon_1 - q) + m(k+1)(\epsilon_1 - q + w) + mge_3 - m\dot{v}^d + \hat{F}_{ext} \quad (9.60)$$

où k est un gain scalaire strictement positif, avec la commande virtuelle

$$\delta = -w - (\epsilon_1 - q) - (\epsilon_1 - q + w) \quad (9.61)$$

et la dynamique d'adaptation

$$\dot{\hat{F}}_{ext} = mk\epsilon_1 \quad (9.62)$$

stabilise exponentiellement le système (9.59).

Preuve (étapes principales)

La formulation proposée dans le Lemme ci-dessus revient à ajouter un intégrateur au sein de la commande proposée en Section 9.2.1. Seuls les principaux éléments de la démonstration sont présentés ici.

On définit l'erreur d'estimation $\tilde{F}_{ext} = F_{ext} - \hat{F}_{ext}$ et la fonction de Lyapunov candidate :

$$\mathcal{S}_{ada} = \frac{1}{2} \|\epsilon_1 - q\|^2 + \frac{1}{2} \|\epsilon_1 - q + w\|^2 + \frac{1}{2} \|w - q\|^2 + \frac{1}{k} \|v + q - w\|^2 + \frac{1}{2} \left\| \epsilon_1 + \frac{w}{2} - \frac{\tilde{F}_{ext}}{km} \right\|^2 \quad (9.63)$$

Le calcul de la dérivée de \mathcal{S}_{ada} le long des trajectoires de (9.59), pour le vecteur de commande (9.60), la commande virtuelle (9.61) et la dynamique d'adaptation (9.62), donne :

$$\dot{\mathcal{S}}_{ada} = -\|\epsilon_1 - q\|^2 - \|\epsilon_1 - q + w\|^2 \quad (9.64)$$

Comme précédemment, on utilise le Lemme de Barbalat pour en déduire $(\epsilon_1 - q) \rightarrow 0$ et $(\epsilon_1 - q + w) \rightarrow 0$, puis $w \rightarrow 0$. Par continuité, on a alors $\dot{\epsilon}_1 \rightarrow \dot{q}$, soit $\epsilon_2 \rightarrow -w$. Comme $w \rightarrow 0$, on en déduit $\epsilon_2 \rightarrow 0$ puis par continuité $\dot{\epsilon}_2 \rightarrow 0$. En utilisant alors la seconde équation de (9.59) avec (9.60), on obtient :

$$(-k\epsilon_1 - (\epsilon_1 - q) - (k+1)(\epsilon_1 - q + w) - \frac{\hat{F}_{ext}}{m} + \frac{F_{ext}}{m}) \rightarrow 0 \quad (9.65)$$

Soit $(\tilde{F}_{ext}/m) \rightarrow k\epsilon_1$ puis, par continuité $(\hat{F}_{ext}/m) \rightarrow -k\epsilon_2$. En utilisant $\epsilon_2 \rightarrow 0$ et (9.62), on en déduit alors $\epsilon_1 \rightarrow 0$, puis $\tilde{F}_{ext} \rightarrow 0$. Soit $\hat{F}_{ext} \rightarrow F_{ext}$.

En utilisant respectivement les expressions (9.60) et (9.61) pour la commande Γ et la commande virtuelle Δ , avec la dynamique d'adaptation (9.62), le système (9.59) est alors asymptotiquement stable en boucle fermée. Le système étant linéaire, il est donc, de plus, exponentiellement stable. ■

9.3 Commande en attitude

Pour la synthèse de la commande en attitude, dans le cas d'un suivi de trajectoire et dans le cas non perturbé, on considère le modèle (2.138) pour $M_{ext} = 0$. La synthèse de la commande est réalisée en supposant nulle la composante du vecteur Ω^d dépendant de l'état de la dynamique de translation (cf discussion de la Section 2.6 et Annexe C). On a donc, dans le cas d'un suivi de trajectoire, $\Omega^d = \Omega^d(t)$ où le vecteur $\Omega^d(t)$ ne dépend que de la trajectoire de référence et de ses dérivées temporelles.

Cette hypothèse, liée à la séparation des échelles de temps, est utilisée pour synthétiser la commande en attitude en échelle de temps rapide.

Comme dans le chapitre précédent, ce changement d'échelle de temps est réalisé en introduisant $\tau = t/\epsilon$ et en définissant, pour une fonction f donnée, la notation suivante :

$$\overset{\circ}{f} = \frac{d}{d\tau} f = \epsilon \frac{d}{dt} f \quad (9.66)$$

On complète cette fois-ci la dynamique du système (2.138), pour $M_{ext} = 0$, en introduisant deux états virtuels $Q \in SO(3)$, $W \in \mathbb{R}^3$ et une commande virtuelle $\Delta \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I \dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\bar{\Omega}}^d \\ \dot{Q} = -QW_\times \\ \dot{W} = \Delta \end{cases} \quad (9.67)$$

où l'on rappelle les notations $\tilde{R} = (R^d)^T R$, $\tilde{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega}^d$ et $\bar{\Omega}^d = \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d$.

On introduit alors

$$\tilde{Q} = Q^T \tilde{R} \quad (9.68)$$

et l'on réécrit le système (9.67) sous la forme

$$\begin{cases} \dot{\tilde{R}} = \tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \\ I \dot{\tilde{\Omega}} = -(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d)_\times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I\tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d - I\tilde{R}^T \dot{\bar{\Omega}}^d \\ \dot{Q} = W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}\tilde{\Omega}_\times \\ \dot{W} = \Delta \end{cases} \quad (9.69)$$

Nous considérerons successivement le cas non perturbé, puis le cas non perturbé en définissant des saturations sur la commande.

9.3.1 Synthèse de la commande en attitude

Définissons pour le système (9.69) la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}k_r \text{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2}k_\omega \tilde{\Omega}^T I \tilde{\Omega} + \frac{1}{2}k_3 \text{tr}(I_d - \tilde{Q}) + \frac{1}{2}k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\} \quad (9.70)$$

où k_r , k_ω , k_3 et k_4 sont des gains scalaires strictement positifs.

Notons $\mathcal{L}(0)$ la valeur initiale de \mathcal{L} .

Lemme 8 [6, 7] *Considérons le système (9.69). On suppose que l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 est vérifiée et que ψ^d et ses dérivées sont continues et uniformément bornées.*

On définit le couple de commande

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{1}{k_\omega} \left\{ -k_r V(P_a(\tilde{R})) - k_3 V(P_a(\tilde{Q})) + k_4 V(P_a(M)) + k_4 V(P_a(N)) \right\} \\ + \bar{\Omega}^d \times I \bar{\Omega}^d + I \tilde{R}^T \dot{\bar{\Omega}}^d \end{aligned} \quad (9.71)$$

et la commande virtuelle

$$\Delta = -\frac{1}{k_4} V \left(\frac{1}{2} k_3 P_a(\tilde{Q}) + \frac{1}{2} k_4 (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times) + \frac{1}{2} k_5 (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right) \quad (9.72)$$

où les matrices M et N sont définies par

$$M = (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \tilde{Q} \quad (9.73)$$

$$N = \tilde{Q}^T (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \quad (9.74)$$

et où k_r , k_ω , k_3 , k_4 et k_5 sont des gains scalaires strictement positifs vérifiant

$$k_r < k_3 \quad (9.75)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate (9.70).

Pour toute condition initiale $\tilde{R}(0)$, $\tilde{\Omega}(0)$, avec $Q(0) = \tilde{R}(0)$ et $W(0) = 0$, tels que

$$\mathcal{L}(0) < 2k_r \quad (9.76)$$

le couple de commande (9.71), avec la commande virtuelle (9.72), stabilise asymptotiquement la dynamique (9.69).

Preuve

Considérons la fonction de Lyapunov candidate \mathcal{L} définie par (9.70). Sa dérivée par rapport au temps, le long des trajectoires de (9.69) est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{2} k_r \text{tr}(\tilde{R} \tilde{\Omega}_\times) - \frac{1}{2} k_3 \text{tr}(W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q} \tilde{\Omega}_\times) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) \times I(\tilde{\Omega} + \bar{\Omega}^d) + \Gamma + I \tilde{\Omega}_\times \bar{\Omega}^d \\ & - k_\omega \tilde{\Omega}^T (I \tilde{R}^T \overset{\circ}{\Omega}^d) + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \overset{\circ}{P}_a(\tilde{Q})) \right\} \end{aligned} \quad (9.77)$$

où

$$\overset{\circ}{P}_a(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} (\overset{\circ}{Q} - \overset{\circ}{Q}^T) = \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q} \tilde{\Omega}_\times + \tilde{Q}^T W_\times + \tilde{\Omega}_\times \tilde{Q}^T) \quad (9.78)$$

En utilisant le fait que pour deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on a¹ $\text{tr}(P_a(A)P_s(B)) = 0$, et que pour deux vecteurs $a, b \in \mathbb{R}^3$ on ait $a^T(a \times b) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & -\frac{1}{2} k_r \text{tr}(\tilde{\Omega}_\times P_a(\tilde{R})) - \frac{1}{2} k_3 \text{tr}(W_\times P_a(\tilde{Q})) - \frac{1}{2} k_3 \text{tr}(\tilde{\Omega}_\times P_a(\tilde{Q})) \\ & + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\bar{\Omega}^d \times I \bar{\Omega}^d + \Gamma - I \tilde{R}^T \overset{\circ}{\Omega}^d) + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\bar{\Omega}^d \times I \tilde{\Omega} + I \tilde{\Omega} \times \bar{\Omega}^d) \\ & + \frac{1}{2} k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \tilde{Q} \tilde{\Omega}_\times \right\} + \frac{1}{2} k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \tilde{\Omega}_\times \tilde{Q}^T \right\} \\ & + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times)) \right\} \end{aligned} \quad (9.79)$$

¹Les opérateurs $P_a(\cdot)$ et $P_s(\cdot)$ transforment respectivement une matrice donnée en sa partie antisymétrique et sa partie symétrique. Leur définition est donnée en Annexe A.

On rappelle que pour deux matrices antisymétriques données $A_a, B_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$ on a $\frac{1}{2} \text{tr}(A_a B_a) = V(A_a^T)^T V(B_a)$. En utilisant cette propriété avec $A_a^T = -A_a$ et les définitions (9.73) et (9.74) des matrices M et N , on a :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & k_r \tilde{\Omega}^T V(P_a(\tilde{R})) + k_3 \tilde{\Omega}^T V(P_a(\tilde{Q})) - k_4 \tilde{\Omega}^T V(P_a(M)) - k_4 \tilde{\Omega}^T V(P_a(N)) \\ & + k_\omega \tilde{\Omega}^T (-\bar{\Omega}^d \times I \bar{\Omega}^d + \Gamma - I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d) - k_\omega \tilde{\Omega}^T (\bar{\Omega}_\times^d I + I \bar{\Omega}_\times^d) \tilde{\Omega} - \frac{1}{2} k_3 \text{tr}(W_\times P_a(\tilde{Q})) \\ & + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times)) \right\} \end{aligned} \quad (9.80)$$

Sous l'hypothèse $I = I^T$, la matrice $(\bar{\Omega}_\times^d I + I \bar{\Omega}_\times^d)$ est antisymétrique et l'identité (A.19) donne :

$$\tilde{\Omega}^T (\bar{\Omega}_\times^d I + I \bar{\Omega}_\times^d) \tilde{\Omega} = 0 \quad (9.81)$$

Après cette simplification, regroupons les termes en $\tilde{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} = & \tilde{\Omega}^T \left\{ k_r V(P_a(\tilde{R})) + k_3 V(P_a(\tilde{Q})) - k_4 V(P_a(M)) - k_4 V(P_a(N)) \right. \\ & \left. + k_\omega (-\bar{\Omega}^d \times I \bar{\Omega}^d + \Gamma - I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d) \right\} \\ & - \frac{1}{2} k_3 \text{tr}(W_\times P_a(\tilde{Q})) + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times)) \right\} \end{aligned} \quad (9.82)$$

On remplace Γ par l'expression proposée en (9.71). L'expression de la dérivée de \mathcal{L} se simplifie alors en

$$\dot{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} k_3 \text{tr}(W_\times P_a(\tilde{Q})) + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times)) \right\} \quad (9.83)$$

On introduit $P_a(\tilde{Q})$ dans le premier terme, en utilisant également $W_\times^T = -W_\times$:

$$\dot{\mathcal{L}} = \frac{1}{2} k_3 \text{tr}((W_\times + P_a(\tilde{Q}) - P_a(\tilde{Q}))^T P_a(\tilde{Q})) + k_4 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (\Delta_\times + \frac{1}{2} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times)) \right\} \quad (9.84)$$

$$\dot{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} k_3 \text{tr}(P_a(\tilde{Q})^T P_a(\tilde{Q})) + \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \left(\frac{1}{2} k_3 P_a(\tilde{Q}) + k_4 \Delta_\times + \frac{1}{2} k_4 (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times) \right) \right\} \quad (9.85)$$

La commande virtuelle Δ est alors remplacée par la loi proposée en (9.72) :

$$\dot{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2} k_3 \text{tr} \left\{ P_a(\tilde{Q})^T P_a(\tilde{Q}) \right\} - \frac{1}{2} k_5 \text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\} \quad (9.86)$$

On utilise finalement le fait que, pour toute matrice antisymétrique $A_a \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\frac{1}{2} \text{tr}(A_a^T A_a) = \|V(A_a)\|^2$, pour obtenir :

$$\dot{\mathcal{L}} = -k_3 \left\| V(P_a(\tilde{Q})) \right\|^2 - k_5 \left\| V(W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\|^2 \quad (9.87)$$

Sous l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 et en supposant que ψ^d et ses dérivées sont continues et uniformément bornées, alors Ω^d et ses dérivées sont uniformément bornées³, et la dérivée

²On rappelle que l'opérateur $V(\cdot)$ est l'opérateur inverse de $(\cdot)_\times$. Sa définition est donnée en Annexe A.

³c.f. méthode de calcul de Ω^d présentée en Annexe C

de $\mathring{\mathcal{L}}$ est uniformément bornée. La fonction $\mathring{\mathcal{L}}$ est donc uniformément continue et le lemme de Barbalat peut être appliqué pour obtenir $P_a(\tilde{Q}) \rightarrow 0$ et $W_\times \rightarrow -P_a(\tilde{Q})$, i.e. $W_\times \rightarrow 0$ et $W \rightarrow 0$.

Notons $(\gamma_{\tilde{Q}}, \mathbf{n}_{\tilde{Q}})$ les coordonnées angle-axe de \tilde{Q} . En utilisant (A.21) on a :

$$k_3(1 - \cos(\gamma_{\tilde{Q}})) = \frac{1}{2}k_3\text{tr}(I_d - \tilde{Q}) \leq \mathcal{L} \quad (9.88)$$

La fonction \mathcal{L} étant décroissante, on a $\mathcal{L} \leq \mathcal{L}(0)$. En utilisant la condition (9.76) on obtient ainsi

$$k_3(1 - \cos(\gamma_{\tilde{Q}})) \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}(0) \leq 2k_r \quad (9.89)$$

et d'après la condition (9.75) :

$$1 - \cos(\gamma_{\tilde{Q}}) < 2\frac{k_r}{k_3} < 2 \quad (9.90)$$

De $P_a(\tilde{Q}) \rightarrow 0$, on a $\gamma_{\tilde{Q}} = 0$ ou $\gamma_{\tilde{Q}} = \pm\pi$. La seconde possibilité est exclue par la relation (9.90).

On obtient ainsi $\tilde{Q} \rightarrow I_d$. De (8.49), on a $\tilde{R} \rightarrow Q$. Par continuité, on obtient $\mathring{\tilde{R}} \rightarrow \mathring{Q}$. En utilisant la première et la troisième équation de (9.67), on en déduit $\tilde{R}\tilde{\Omega}_\times \rightarrow -QW_\times$. La matrice \tilde{R} étant orthogonale, on a alors $\tilde{\Omega}_\times \rightarrow -\tilde{R}^T QW_\times$. En utilisant $W_\times \rightarrow 0$ on obtient $\tilde{\Omega}_\times \rightarrow 0$, $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$, et $\mathring{\tilde{R}} \rightarrow 0$ par la première équation de (9.67). Par continuité on en déduit $\mathring{\tilde{\Omega}} \rightarrow 0$ puis, par la seconde équation de (9.67) :

$$\Gamma \rightarrow (\bar{\Omega}^d \times I\bar{\Omega}^d + I\tilde{R}^T \mathring{\Omega}^d) \quad (9.91)$$

Sachant que $P_a(\tilde{Q})$ et W_\times convergent vers zéro, on peut alors garantir, respectivement de (9.73) et (9.74), que les matrices M et N convergent également toutes deux vers zéro. En combinant la discussion ci-dessus avec (9.91), l'équation (9.71) garantit $P_a(\tilde{R}) \rightarrow 0$.

De manière semblable à l'analyse réalisée pour \tilde{Q} , notons $(\gamma_{\tilde{R}}, \mathbf{n}_{\tilde{R}})$ les coordonnées angle-axe de \tilde{R} . Avec cette notation, on a

$$k_r(1 - \cos(\gamma_{\tilde{R}})) = \frac{1}{2}k_r\text{tr}(I_d - \tilde{R}) \leq \mathcal{L} \leq \mathcal{L}(0) < 2k_r \quad (9.92)$$

soit

$$1 - \cos(\gamma_{\tilde{R}}) < 2 \quad (9.93)$$

De $P_a(\tilde{R}) \rightarrow 0$, on a $\gamma_{\tilde{R}} = 0$ ou $\gamma_{\tilde{R}} = \pm\pi$. La seconde possibilité est exclue par la relation (9.93). On obtient ainsi $\tilde{R} \rightarrow I_d$ et $R \rightarrow R_d$.

En utilisant $\tilde{\Omega} \rightarrow 0$, on a $\Omega \rightarrow \bar{\Omega}^d$, i.e. $\Omega \rightarrow \tilde{R}^T \Omega^d$. De $\tilde{R} \rightarrow I_d$, on déduit finalement $\Omega \rightarrow \Omega^d$.

■

Le lemme 8 garantit que la commande (9.71), avec la commande virtuelle (9.72), stabilise asymptotiquement la dynamique (9.69), sans utiliser de mesure de la vitesse de rotation Ω .

Remarque 5 La condition (9.76) n'est pas très conservative. En choisissant $W(0) = 0$ et $Q(0) = \tilde{R}(0)$, elle peut être simplifiée en

$$\frac{k_r}{k_\omega} > \frac{E_\omega(0)}{(2 - E_r(0))} \quad (9.94)$$

avec $E_r(0) = \frac{1}{2}\text{tr}(I_d - \tilde{R}(0))$ et $E_\omega(0) = \frac{1}{2}\tilde{\Omega}(0)^T I \tilde{\Omega}(0)$.

Remarque 6 Les conditions (9.75) et (9.76) ne sont utilisables que si l'on considère de manière isolée la dynamique de rotation en échelle de temps rapide.

Dans le cas où l'on s'intéresse à l'ensemble du système (rotation et translation), les conditions permettant d'assurer la convergence de \tilde{Q} et \tilde{R} vers la matrice identité doivent faire intervenir une fonction de Lyapunov pour le système complet, et non seulement celle associée à la dynamique de rotation. Une telle condition sera présentée en Section 9.4.1.

9.3.2 Commande en attitude saturée

Lors de l'ajout d'un seul état virtuel au sein de la dynamique de rotation, nous avons vu en Section 8.3.2 que la commande Γ était naturellement bornée. Dans le cas à deux états virtuels, l'expression (9.71) de Γ ne permet pas de garantir directement l'existence d'une borne. Nous proposons dans le lemme suivant une loi de commande permettant de garantir que la commande Γ est bornée.

On définit tout d'abord, pour le système (9.69), la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L}_{sat} = \frac{1}{2}k_r \text{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2}k_\omega \tilde{\Omega}^T I \tilde{\Omega} + \frac{1}{2}k_3 \text{tr}(I_d - \tilde{Q}) + \frac{1}{2}k_4 (\mathcal{N}(W, \tilde{Q}) - 1) \quad (9.95)$$

où k_r , k_ω , k_3 et k_4 sont des gains scalaires strictement positifs et où le terme $\mathcal{N}(W, \tilde{Q})$ strictement positif est défini par :

$$\mathcal{N}(W, \tilde{Q}) = \sqrt{\text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\}} + 1 \quad (9.96)$$

On notera $\mathcal{L}_{sat}(0)$ la valeur initiale de \mathcal{L}_{sat} .

Lemme 9 Considérons le système (9.69). On suppose que la trajectoire de référence satisfait l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1, et que ψ^d et ses dérivées temporelles sont uniformément continues et bornées.

On définit le couple de commande

$$\Gamma = -\frac{k_r}{k_\omega} V(P_a(\tilde{R})) - \frac{k_3}{k_\omega} V(P_a(\tilde{Q})) + \frac{k_4}{k_\omega} \frac{V(P_a(M)) + V(P_a(N))}{\mathcal{N}(W, \tilde{Q})} + \bar{\Omega}^d \times I \bar{\Omega}^d + I \tilde{R}^T \dot{\Omega}^d \quad (9.97)$$

et la commande virtuelle

$$\Delta = -\frac{\mathcal{N}(W, \tilde{Q})}{k_4} V \left(\frac{1}{2}k_3 P_a(\tilde{Q}) + \frac{1}{2} \frac{k_4}{\mathcal{N}(W, \tilde{Q})} (W_\times \tilde{Q} + \tilde{Q}^T W_\times) + \frac{1}{2}k_5 (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right) \quad (9.98)$$

où les matrices M et N sont définies par

$$M = (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \tilde{Q} \quad (9.99)$$

$$N = \tilde{Q}^T (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T \quad (9.100)$$

et où k_r , k_ω , k_3 , k_4 et k_5 sont des gains scalaires strictement positifs vérifiant

$$k_r < k_3 \quad (9.101)$$

Considérons la fonction de Lyapunov candidate (9.95).

Pour toute condition initiale $\tilde{R}(0)$, $\tilde{\Omega}(0)$, avec $Q(0) = \tilde{R}(0)$ et $W(0) = 0$, tels que

$$\mathcal{L}_{sat}(0) < 2k_r \quad (9.102)$$

le couple de commande (9.97), avec la commande virtuelle (9.98), stabilise asymptotiquement la dynamique (9.69). De plus, le vecteur de commande Γ est uniformément borné.

Preuve

Le déroulement de la preuve est le même que pour celle du Lemme 8 en remplaçant le gain k_4 par $k_4/\mathcal{N}(W, \tilde{Q})$. C'est pourquoi nous montrerons uniquement que la commande Γ est uniformément bornée.

A partir de (9.97) et par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| &\leq \frac{k_r}{k_\omega} \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| + \frac{k_3}{k_\omega} \left\| V(P_a(\tilde{Q})) \right\| + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(M)) \right\| \\ &\quad + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(N)) \right\| + \|\bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d\| + \left\| I \tilde{R}^T \dot{\tilde{\Omega}}^d \right\| \end{aligned} \quad (9.103)$$

Soient $(\gamma_{\tilde{R}}, n_{\tilde{R}})$ et $(\gamma_{\tilde{Q}}, n_{\tilde{Q}})$ les coordonnées angle-axe respectives de \tilde{R} et \tilde{Q} . En utilisant la relation (A.22), on a :

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| &\leq \frac{k_r}{k_\omega} |\sin(\gamma_{\tilde{R}})| + \frac{k_3}{k_\omega} |\sin(\gamma_{\tilde{Q}})| + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(M)) \right\| \\ &\quad + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(N)) \right\| + \|\bar{\Omega}_\times^d I \bar{\Omega}^d\| + \left\| I \tilde{R}^T \dot{\tilde{\Omega}}^d \right\| \end{aligned} \quad (9.104)$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les valeurs propres du tenseur d'inertie I . On définit

$$\lambda_I = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (9.105)$$

Sous l'Hypothèse 11 de la Section 8.2.1 et en supposant que ψ^d et ses dérivées temporelles sont continues et uniformément bornées, on peut déduire que Ω^d et sa dérivée $\dot{\Omega}^d$ sont uniformément bornées (cf méthode de calcul de Ω^d en Annexe C). On a alors

$$\begin{aligned} \|\Gamma\| &\leq \frac{k_r}{k_\omega} + \frac{k_3}{k_\omega} + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(M)) \right\| + \frac{k_4}{k_\omega \mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \left\| V(P_a(N)) \right\| \\ &\quad + \lambda_I \sup \|\Omega^d\|^2 + \lambda_I \sup \left\| \dot{\Omega}^d \right\| \end{aligned} \quad (9.106)$$

Considérons le terme $\|V(P_a(M))\|/\mathcal{N}(W, \tilde{Q})$. Par inégalité triangulaire, on a

$$\|V(P_a(M))\|^2 \leq \frac{1}{4}(\|V(M)\|^2 + \|V(M^T)\|^2) \quad (9.107)$$

On utilise ensuite l'identité (A.18), pour obtenir :

$$\|V(P_a(M))\|^2 \leq \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{2} \text{tr}(M^T M) + \frac{1}{2} \text{tr}((M^T)^T M^T) \right\} \leq \frac{1}{4} \text{tr}(M^T M) \quad (9.108)$$

Soit, en utilisant l'expression (9.99) de M ainsi que la propriété $\forall A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$:

$$\|V(P_a(M))\|^2 \leq \frac{1}{4} \sqrt{\text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\}} \quad (9.109)$$

On a donc :

$$\frac{\|V(P_a(M))\|}{\mathcal{N}(W, \tilde{Q})} \leq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\}}}{\sqrt{\text{tr} \left\{ (W_\times + P_a(\tilde{Q}))^T (W_\times + P_a(\tilde{Q})) \right\}} + 1} \leq \frac{1}{2} \quad (9.110)$$

En majorant le terme $\|V(P_a(N))\|/\mathcal{N}(W, \tilde{Q})$ de la même manière, et en remplaçant dans (9.106), on obtient finalement :

$$\|\Gamma\| \leq \frac{k_r + k_3 + k_4}{k_\omega} + \lambda_I \sup \|\Omega^d\|^2 + \lambda_I \sup \|\dot{\Omega}^d\| \quad (9.111)$$

La commande Γ est donc uniformément bornée. ■

9.4 Stabilité

Au cours des sections précédentes, nous avons synthétisé des lois de commande par une approche hiérarchique en considérant successivement la dynamique de translation et la dynamique de rotation du drone. Pour la synthèse de ces lois, nous avons adopté des hypothèses liées à une séparation des échelles de temps entre ces deux dynamiques, comme présenté en Sections 2.5 et 2.6. Nous avons vu que, sous ces hypothèses, les commandes proposées permettent de stabiliser la dynamique de translation et la dynamique de rotation.

Pour analyser de manière complète la stabilité du véhicule, il convient cependant de considérer le système dans sa totalité (translation et rotation), sans les hypothèses précédemment utilisées. Deux cas sont considérés pour cette analyse :

- la position, les angles d'attitude et les vitesses de rotation sont mesurés,
- seuls la position et les angles d'attitude sont mesurés.

9.4.1 Bouclage et stabilité sans mesure de v

On considère tout d'abord le cas pratique où le drone est équipé d'une centrale inertielle permettant de fournir une mesure des angles d'attitude et des vitesses de rotation du véhicule. On suppose que celui-ci est équipé, de plus, d'une caméra permettant de mesurer la position

du véhicule (ou sa position relative par rapport à un objectif donné), mais qu'aucune mesure de la vitesse linéaire v n'est disponible pour la commande.

L'approche présentée en Section 9.2.1 est utilisée pour la commande de la dynamique de translation. La dynamique de rotation est, quant à elle, stabilisée par une commande utilisant une mesure de tout l'état (angles d'attitudes et vitesses de rotation). Nous nous proposons d'analyser la stabilité en considérant, pour le cas de la stabilisation, le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \frac{\mathcal{T}}{m} (R - R^d) e_3 \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \\ \epsilon \dot{\tilde{R}} = -\epsilon \Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \\ \epsilon I \dot{\tilde{\Omega}} = -\Omega_{\times} I \tilde{\Omega} + \Gamma \end{cases} \quad (9.112)$$

où l'on rappelle $\tilde{R} = (R^d)^T R$. Le terme Ω^d n'est ici pas négligé⁴.

On introduit également les notations :

$$\alpha = \xi - q \quad \beta = \xi - q + w \quad (9.113)$$

$$X = [\xi^T \quad v^T \quad \alpha^T \quad \beta^T]^T \quad (9.114)$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega - l_1 V(P_a(\tilde{R})^T) \quad (9.115)$$

On définit enfin, pour le système (9.112), la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} X^T P X + l \text{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2} \|\tilde{\Omega}\|^2 \quad (9.116)$$

où P est une matrice définie positive (cf. Annexe E) et où l est un gain scalaire strictement positif. On notera $\mathcal{V}(0)$ la valeur initiale de la fonction \mathcal{V} .

Proposition 6 [8] *Considérons le système (9.112).*

On définit le vecteur de commande

$$\mathcal{T} R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \{k_x \xi + k_1(\xi - q) + k_2(\xi - q + w)\} + m g e_3 \quad (9.117)$$

et la commande virtuelle

$$\delta = -\frac{1}{k_2} \{k_2 w + k_1(\xi - q) + k_2(\xi - q + w)\} \quad (9.118)$$

où k_x , k_v , k_1 et k_2 sont des gains scalaires strictement positifs.

On définit également la commande en couple

$$\Gamma = \Omega_{\times} I \tilde{\Omega} + I \left\{ -l_2 \tilde{\Omega} - 2l V(P_a(\tilde{R})) - \frac{l_1}{2} V(\Omega_{\times} \tilde{R}^T + \tilde{R} \Omega_{\times}) \right\} \quad (9.119)$$

⁴Dans le cas d'un suivi de trajectoire, le terme Ω^d est considéré en entier, sans en négliger la composante dépendant de l'état de la dynamique de translation

où l , l_1 et l_2 sont des gains scalaires strictement positifs.

Il existe alors $K_1, K_2 > 0$ et $\epsilon^* > 0$ tels que,

pour toute condition initiale $\xi(0)$, $v(0)$, $q(0) = \xi(0)$, $w(0) = 0$, $R(0)$ et $\Omega(0)$ vérifiant

$$\mathcal{V}(0) < \frac{K_2(g - \frac{\epsilon_g}{m})^2}{2(3\frac{K_1}{k_v})^2} \quad (0 < \epsilon_g \ll mg) \quad (9.120)$$

pour l vérifiant

$$l \geq \frac{K_2(g - \frac{\epsilon_g}{m})^2}{2(3\frac{K_1}{k_v})^2(4 - \eta)} \quad (0 < \eta < 4) \quad (9.121)$$

et pour tout $\epsilon > 0$ vérifiant $\epsilon < \epsilon^*$,

le système (9.112) est exponentiellement stable lorsque (9.117), (9.119) et (9.118) sont utilisés comme commandes et commande virtuelle.

Preuve

La preuve de cette proposition est présentée en Annexe E. ■

Par la théorie des perturbations singulières, on parvient donc à prouver la stabilité du système (9.112) bouclé dans le cas où seule la vitesse linéaire v n'est pas mesurée.

Remarque 7 La condition (9.120) n'est pas restrictive. En pratique, on peut en effet régler les gains k_x , k_1 , k_2 et choisir la matrice P définissant la fonction de Lyapunov pour la dynamique de translation (cf. Annexe E) de manière à obtenir un coefficient $K_1 = \max(k_x, k_1, k_2)$ faible et un coefficient $K_2 = \lambda_{\min}(P)$ grand, permettant alors de couvrir un large domaine de conditions initiales.

Remarque 8 L'analyse de la stabilité a été menée uniquement dans le cas où la loi de guidage employée est celle présentée en Section 9.2.1. Les autres cas (avec saturation et adaptatif) ne seront pas considérés ici, l'application du cadre formel présenté en Section 2.4 s'avérant déjà complexe dans le cas simple présenté.

9.4.2 Bouclage et stabilité sans mesure de v ni de Ω

Considérons maintenant le cas où la position et les angles d'attitude du véhicule sont mesurées par un dispositif visuel ou un capteur externe (cf. Section 7.1). Dans ce cas où ni la vitesse linéaire v ni la vitesse angulaire Ω n'est mesurée, on utilise les lois de commande proposées en Sections (9.2.1) et (9.3.1).

La stabilité du système bouclé peut alors être analysée, dans le cas de la stabilisation à

l'origine, en considérant le système complet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{T}{m} R^d e_3 + g e_3 - \frac{T}{m} (R - R^d) e_3 \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \\ \epsilon \dot{\tilde{R}} = -\epsilon \Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \\ \epsilon I \dot{\Omega} = -\Omega_{\times} I \Omega + \Gamma \\ \epsilon \dot{\tilde{Q}} = W_{\times} \tilde{Q} + \tilde{Q} \Omega_{\times} - \epsilon \tilde{Q} (\tilde{R}^T \Omega^d)_{\times} \\ \epsilon \dot{W} = \Delta \end{array} \right. \quad (9.122)$$

où le terme Ω^d n'est pas négligé⁵.

L'analyse de la stabilité du système (9.122), lorsque (9.21) et (9.71) sont utilisées comme commandes avec les commandes virtuelles (9.22) et (9.72) peut se faire, comme précédemment, en appliquant la théorie des perturbations singulières. Toutefois, l'application du cadre formel présenté en Section 2.4 s'avère très complexe.

La présence de l'erreur en orientation $-\frac{T}{m}(R - R^d)e_3$ dans la dynamique de translation induit des termes supplémentaires dans la dérivée de la fonction de Lyapunov du système complet. Pour majorer ces termes et assurer la négativité de cette dérivée, on doit avoir déterminé au préalable, pour la dynamique de rotation, une fonction de Lyapunov dont la dérivée comporte un terme défini négatif en $V(P_a(\tilde{R}))$ (cf section 9.4.1 et Annexe E).

C'est la détermination d'une telle fonction de Lyapunov qui s'avère difficile, dans le cas sans mesure de vitesse de rotation⁶.

Nous n'avons, à ce jour, pas pu déterminer de manière explicite une telle fonction de Lyapunov. La stabilité de cette approche n'est donc pas analysée théoriquement de manière complète, et nous proposons en section suivante, une validation partielle par la simulation.

9.5 Simulations

La méthode présentée est illustrée ici au travers de deux exemples : la stabilisation du modèle à l'origine, et le suivi d'une trajectoire de référence. Ces deux exemples sont traités dans le cas où ni la vitesse linéaire v ni la vitesse angulaire Ω ne sont mesurées.

Les gains choisis pour la simulation sont : $k_x = 0.2$, $k_v = 3.0$, $k_1 = 0.8$, $k_2 = 0.8$, $k_r = 0.74$, $k_\omega = 3.3$, $k_3 = 12$, $k_4 = 0.25$, $k_5 = 6.1$

9.5.1 Stabilisation

On considère tout d'abord le cas de la stabilisation à l'origine depuis les conditions $\xi_0 = [2 \ -2 \ 3]^T$ (m), $[\psi_0 \ \theta_0 \ \phi_0] = [0 \ -10 \ -8]$ (deg), $v_0 = 0$ et $\Omega_0 = 0$.

⁵Dans le cas d'un suivi de trajectoire, le terme Ω^d est considéré en entier, sans en négliger la composante dépendant de l'état de la dynamique de translation

⁶La difficulté de trouver une fonction de Lyapunov adéquate est la même dans le cas d'une synthèse à un ou deux états virtuels.

La Figure 9.2 présente l'évolution de la position et des angles d'attitude du système bouclé. La commande en poussée ainsi que les composantes du couple de commande sont représentées en Figure 9.3. La stabilisation du modèle de drone est réalisée à partir des conditions initiales données avec un comportement transitoire satisfaisant.

L'évolution des déviations angulaires $\tilde{\phi} = \phi - \phi^d$, $\tilde{\theta} = \theta - \theta^d$ et $\tilde{\psi} = \psi - \psi^d$ est présentée en Figure 9.4. Il peut être vérifié que ces termes convergent plus rapidement que la translation en boucle fermée, validant ainsi l'approche de séparation des échelles de temps utilisée pour la synthèse des lois de commande.

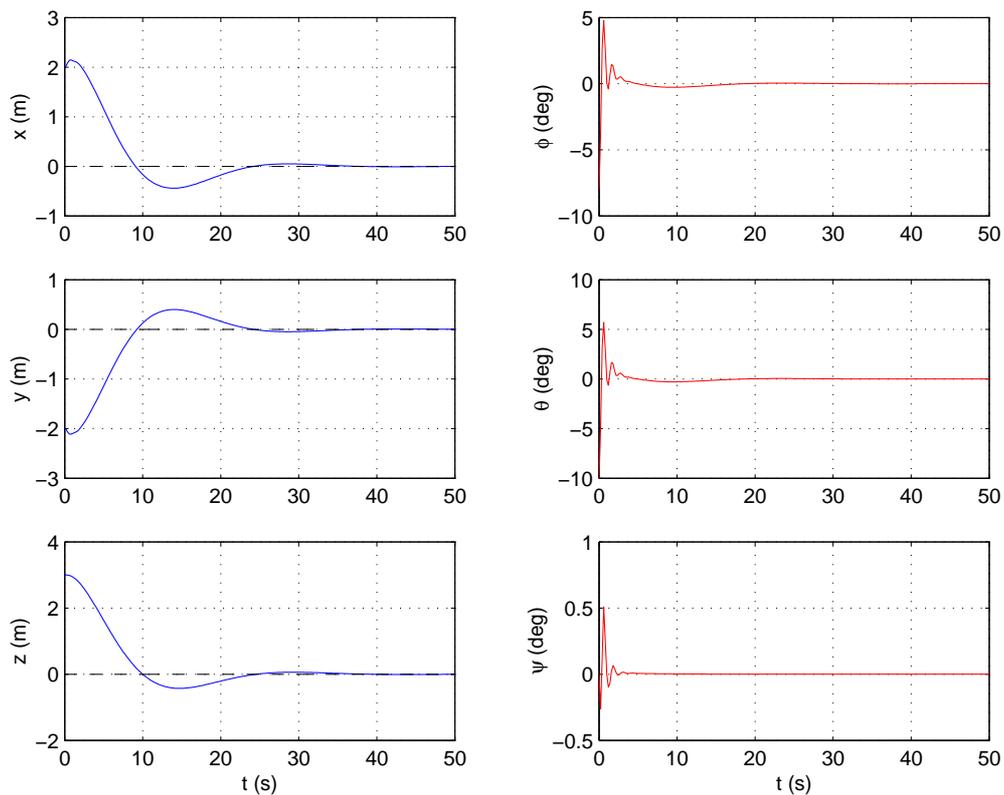


FIG. 9.2 – Stabilisation à l'origine : évolution de l'état

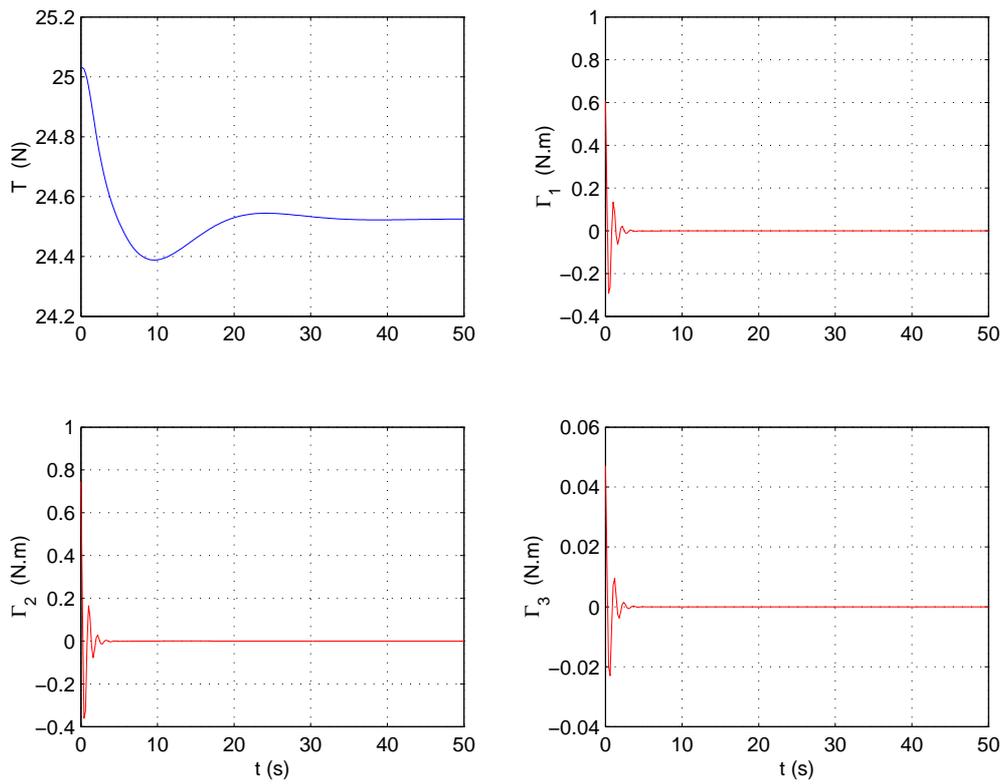


FIG. 9.3 – Stabilisation à l’origine : évolution de la poussée et du couple de commande

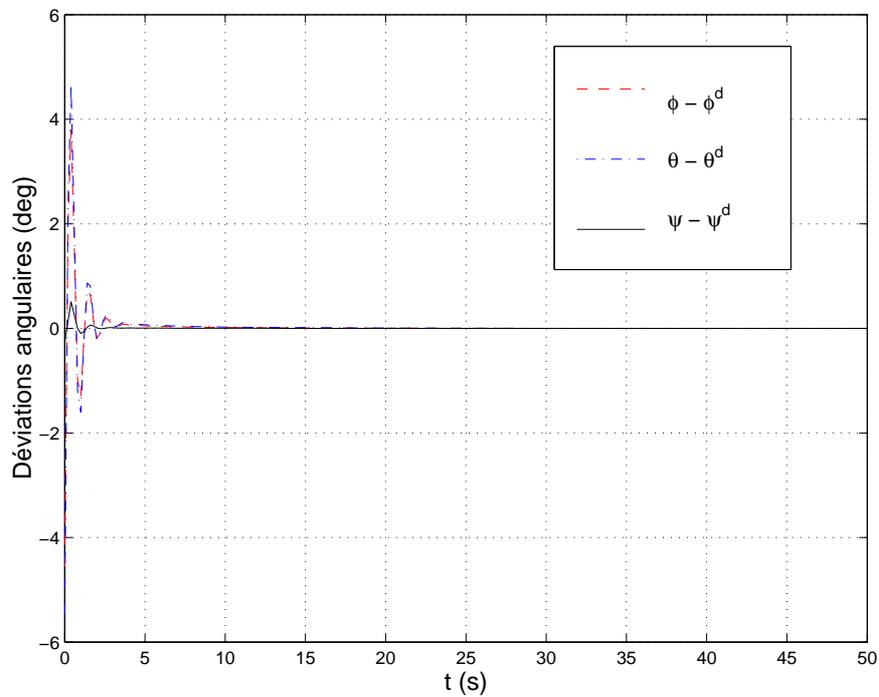


FIG. 9.4 – Stabilisation à l’origine : évolution des termes de déviation angulaire

9.5.2 Suivi de trajectoire

On considère le cas d'une trajectoire de référence définie par l'hélice

$$\xi^d = [\cos(\alpha t) \quad \sin(\alpha t) \quad \beta t]^T$$

avec $\alpha = 0.03$ et $\beta = 0.05$. Les conditions initiales sont $\xi_0 = [3 \quad -2 \quad -1.5]^T$ (m), $\phi(0) = \theta(0) = \psi(0) = 0$ (deg), avec des vitesses linéaires et angulaires initiales nulles. La référence en lacet ψ^d est choisie nulle.

L'évolution de la position du drone est présentée en Figure 9.5 (courbes en trait continu) ainsi que la trajectoire de référence (trait discontinu) et les angles d'attitude. La commande en poussée et les composantes du couple de commande sont représentées en Figure 9.6. La Figure 9.7 présente enfin des projections de la trajectoire du drone (courbes en trait continu) et de la trajectoire de référence (courbes en trait discontinu).

Le suivi de la trajectoire de référence présente un comportement satisfaisant.

Les termes de déviation angulaire $\tilde{\phi} = \phi - \phi^d$, $\tilde{\theta} = \theta - \theta^d$ et $\tilde{\psi} = \psi - \psi^d$ sont enfin représentés en Figure 9.8. Leur convergence vers zéro s'effectue plus rapidement que celle de la dynamique de translation bouclée et permet ainsi de valider les hypothèses issues de la séparation des échelles de temps.

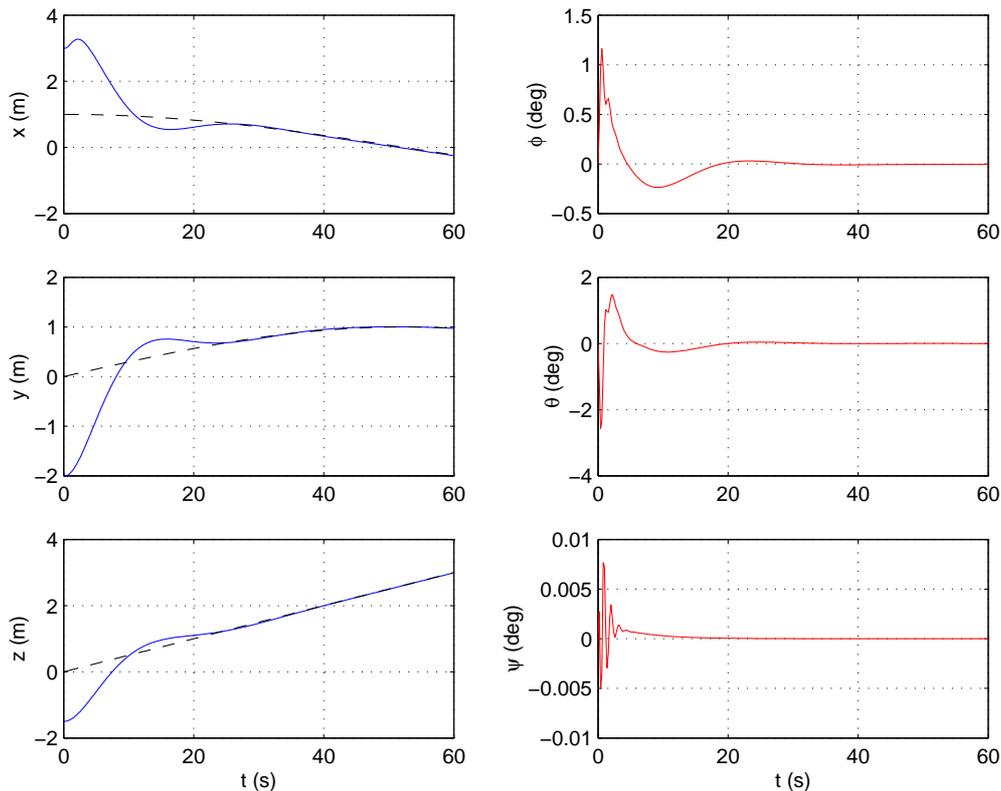


FIG. 9.5 – Suivi de trajectoire : évolution de l'état

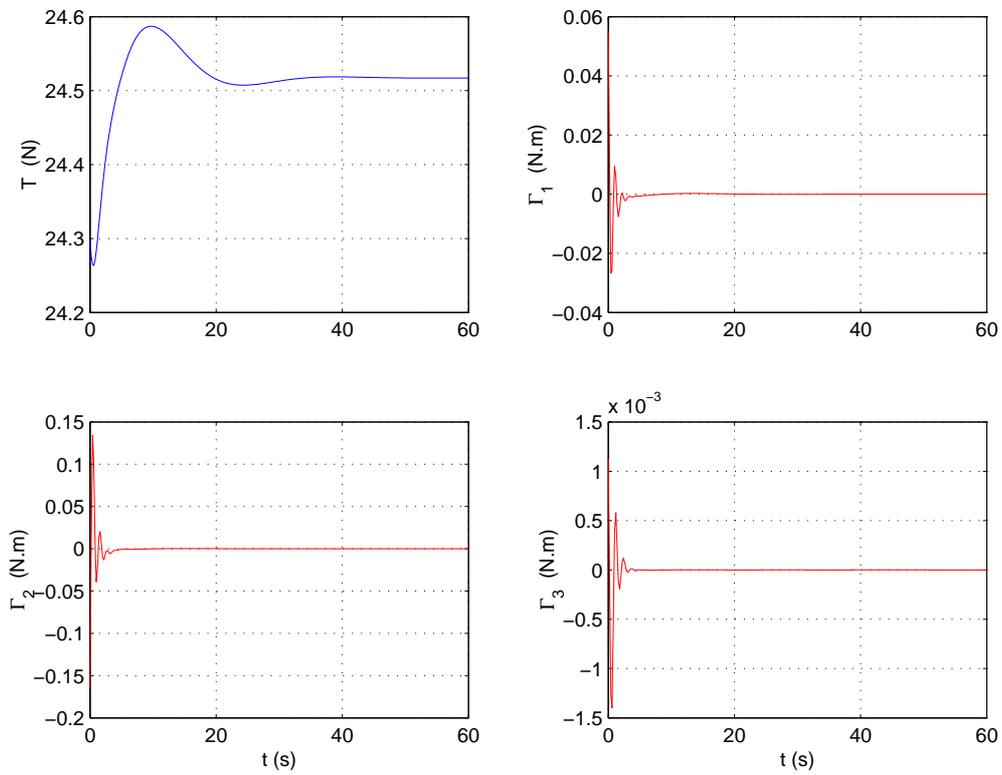


FIG. 9.6 – Suivi de trajectoire : évolution de la poussée et du couple de commande

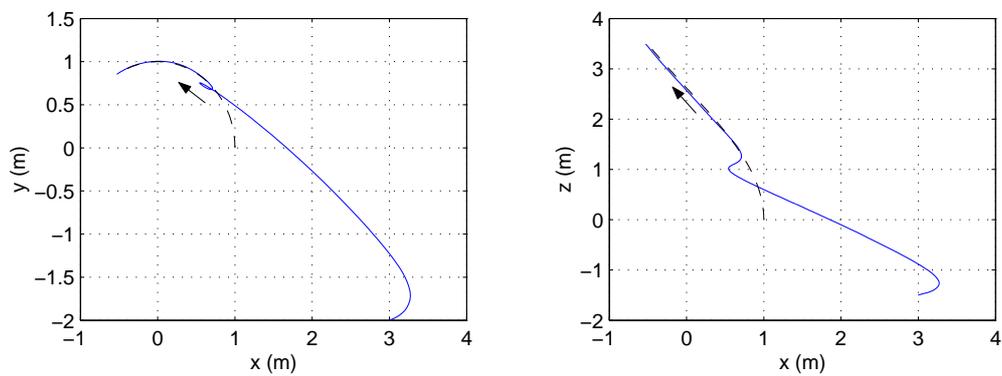


FIG. 9.7 – Suivi de trajectoire : projections de la trajectoire du drone et de la référence

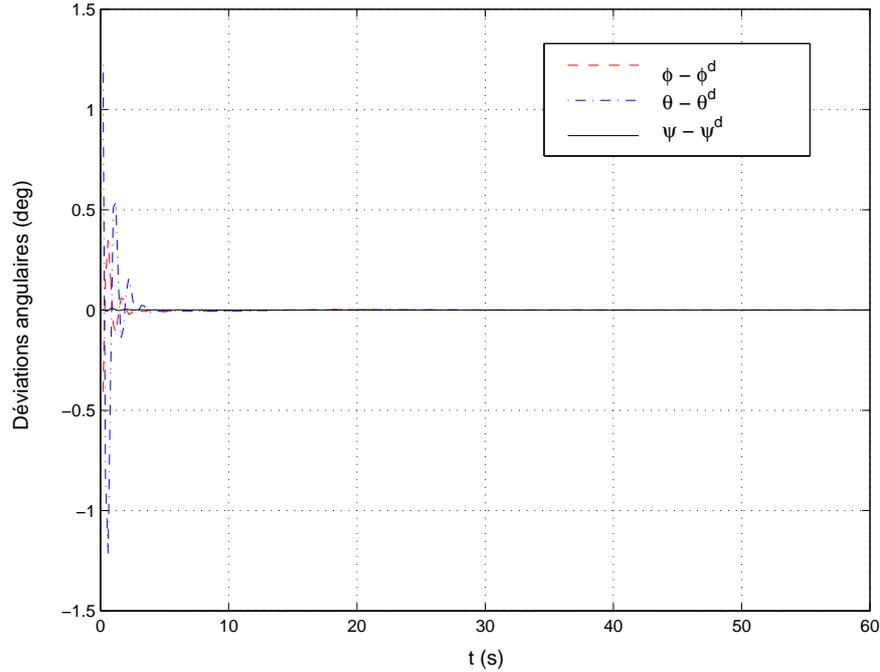


FIG. 9.8 – Suivi de trajectoire : évolution des termes de déviation angulaire

9.6 Bilan et limites de l'approche

Nous avons présenté, dans ce chapitre, une méthode de synthèse de commande dans le cas où la vitesse linéaire v et la vitesse angulaire Ω du drone ne sont pas mesurées. Ces cas de figures correspondant à plusieurs cadres d'applications pratiques ont été traités sans utiliser d'observateur.

Dans l'approche que nous avons proposée, deux états virtuels sont introduits au sein de la dynamique de chaque sous-système considéré (dynamique de translation et dynamique de rotation). La synthèse de chaque loi de commande est réalisée sous les hypothèses présentées aux Sections 2.5 et 2.6 et correspondant à une séparation des échelles de temps entre la translation et la rotation.

Une analyse de la stabilité du système bouclé complet a été proposée dans le cas où seule la vitesse linéaire v n'est pas mesurée. Cette analyse a été réalisée en appliquant le cadre formel présenté en Section 2.4 lié à la théorie des perturbations singulières.

Cette analyse théorique, complexe, n'a pas encore pu être étendue dans le cas où ni v ni Ω ne sont mesurées, à cause de la difficulté de déterminer de manière explicite une fonction de Lyapunov adéquate pour la dynamique de rotation. La preuve théorique de la stabilité pour ce cas de figure n'est donc que partielle. Un complément de validation a été proposé en simulation.

Nous avons également présenté, en complément, d'autres méthodes de synthèse des commandes pour garantir certaines propriétés de bornitude et pour permettre l'estimation d'une perturbation additive dans la dynamique de translation.

Conclusion de la Partie III et perspectives

Dans cette partie, nous avons présenté une méthode de synthèse de lois de commande dans le cas où l'on ne dispose pas d'une mesure de l'état entier du véhicule, et plus particulièrement dans le cas sans mesure de vitesses. L'approche proposée est basée sur l'introduction d'états virtuels dans la représentation de la dynamique du système et ne requiert pas l'utilisation d'un observateur.

Au cours du **Chapitre 7**, nous avons vu que la nature des capteurs équipant un drone miniature à voilure tournante peut varier selon le cadre applicatif dans lequel le véhicule doit être employé. Si le drone est par exemple utilisé pour des missions dans un milieu contraint, un capteur vidéo peut être préféré à l'utilisation d'un GPS pour mesurer la position relative du véhicule par rapport à son environnement. Les angles d'attitude peuvent également être obtenus, mais la vitesse linéaire v et la vitesse de rotation Ω ne sont pas directement connues. Dans le cas où des capteurs externes sont utilisés (caméras externes associées à un système de *motion capture*, capteurs magnétiques), on ne dispose également que de mesures en position et en angles d'attitude pour réaliser la commande du drone.

Une première solution consiste alors à utiliser des observateurs pour reconstruire les grandeurs non accessibles pour la synthèse de la commande. Cette méthode peut, cependant, introduire des délais de calcul supplémentaires, spécialement pour la dynamique de rotation, et nécessite deux étapes dans l'analyse de la stabilité du système bouclé : convergence de l'observateur, puis stabilité du système bouclé par une commande basée sur l'estimée fournie par l'observateur. Un état de l'art nous a permis de voir que d'autres approches de commande avec accès partiel à l'état (*Partial State Feedback*) liées à des techniques de filtrage peuvent être utilisées. Un comportement oscillant du système bouclé, lors du transitoire, a pu être observé dans les applications que nous avons relevées. De plus ce type d'approche n'a pas été appliqué, à notre connaissance, à la commande de drones miniatures à voilure tournante.

Nous avons tout d'abord proposé, dans le **Chapitre 8**, une méthode de synthèse basée sur l'introduction d'un état virtuel dans la dynamique du système. Après en avoir présenté le principe, nous avons pu constater que l'approche proposée peut être interprétée en terme de filtrage, en reliant cet état virtuel à la partie mesurée de l'état, filtrée par un premier ordre.

Nous avons ensuite présenté l'application de cette méthode à la synthèse de lois de guidage-pilotage, sous les hypothèses liées à une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation (hypothèses présentées en Partie I). Nous avons vu que, si la loi de pilotage réalisée permet de garantir de manière immédiate que Γ soit borné, une condition sur la valeur initiale de la fonction de Lyapunov est nécessaire pour prouver que la commande \mathcal{T} est strictement positive et bornée. Nous avons alors présenté une autre méthode de synthèse de la loi de guidage pour s'affranchir de cette condition faisant intervenir la fonction de Lyapunov du système. Nous avons également proposé une loi de

guidage adaptative permettant la stabilisation de la dynamique de translation, sans mesure de vitesse, en présence d'une perturbation.

L'approche de commande que nous avons présentée dans ce chapitre, utilisant un état virtuel, permet de limiter, par rapport à un observateur, le nombre d'états ajoutés à la dynamique du système.

Pour améliorer l'approche proposée en terme de filtrage (second ordre au lieu d'un premier ordre), nous avons proposé en **Chapitre 9**, une méthode de synthèse de commande avec deux états virtuels.

Des lois de commande en position et en attitude ont été proposées à partir de la seule connaissance de la position et de l'orientation du véhicule. Ces lois ont été synthétisées de manière distincte en considérant des hypothèses liées à une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la dynamique de rotation.

Une analyse de la stabilité du système complet a ensuite été proposée, dans le cadre de la théorie des perturbations singulières, lorsque seule la vitesse linéaire du drone n'est pas mesurée. Dans le cas où la vitesse de rotation n'est pas non plus mesurée, l'analyse de la stabilité par l'application de ce cadre formel s'avère complexe. Elle requiert en effet la connaissance explicite d'une fonction de Lyapunov, pour la dynamique de rotation, dont la dérivée comporte un terme défini négatif en l'erreur d'orientation. Ce terme est en effet utilisé pour borner les termes provenant de l'erreur en orientation, introduite dans la dynamique de translation, qui apparaissent dans la dérivée de la fonction de Lyapunov du système complet. Dans le cas où Ω n'est pas mesuré, une telle fonction de Lyapunov, pour la dynamique de rotation, n'a pas pu être déterminée. Un complément de validation des lois de commande obtenues a été alors proposé à travers des exemples de simulation pour la stabilisation et le suivi de trajectoire.

Comme dans le chapitre précédent, nous avons également proposé une approche de synthèse de la loi de guidage permettant de garantir des propriétés de stricte positivité et de bornitude de la commande \mathcal{T} , indépendamment de la valeur de la fonction de Lyapunov. Une approche similaire utilisant des saturations a été proposée pour la synthèse de la loi de pilotage. Enfin, en complément, une commande adaptative sans mesure de vitesse a été présentée pour la stabilisation de la dynamique de translation du drone, en présence d'une perturbation additive.

Les **perspectives** concernant ce travail sont à la fois d'ordre pratique et théorique.

Un premier complément concerne l'obtention d'une analyse théorique complète de la stabilité, dans le cas où ni la vitesse linéaire ni la vitesse de rotation du véhicule ne sont mesurées. La démarche présentée en Annexe E peut servir de base à cette analyse menée dans le cadre de la théorie des perturbations singulières, et dont le point dur est l'obtention d'une fonction de Lyapunov adéquate pour la dynamique de rotation.

Une seconde perspective est la mise en pratique des méthodes présentées sur une plateforme expérimentale. On dispose ici de lois analytiques dont la structure permet en effet l'implantation sur un véhicule. Une première étape expérimentale peut consister en l'application des lois de guidage présentées en utilisant uniquement des mesures de position fournies par l'intermédiaire d'une caméra vidéo embarquée.

CONCLUSION GENERALE

ET PERSPECTIVES

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux drones miniatures à voilure tournante, et plus précisément à l'élaboration de lois de commande permettant une automatisation de leur vol. Notre contribution dans ce domaine consiste en la proposition de différentes approches permettant la synthèse de lois de commande en prenant en compte les difficultés spécifiques à ce type de véhicules et à leurs applications : évolution en environnement perturbé malgré une grande sensibilité aux perturbations aérologiques, non linéarité de la dynamique du véhicule, impossibilité de mesurer certaines composantes de l'état du système, et évolution au sein d'un environnement incertain comportant des obstacles.

Dans un premier temps, nous avons proposé plusieurs approches de commande prédictive, en réponse au manque de travaux existant dans la littérature - à notre connaissance - considérant, simultanément, un modèle suffisamment représentatif de la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante, et une approche de commande prédictive garantissant la stabilité.

Nous avons tout d'abord proposé une commande prédictive à deux composantes pour la stabilisation de systèmes non linéaires affines en la commande, en général. Une extension au cas de systèmes à paramètres inconnus a ensuite été réalisée. L'algorithme de commande prédictive adaptative obtenu a alors été adapté pour la stabilisation et le suivi de trajectoire d'un modèle non linéaire à six degrés de liberté, en présence de perturbations et de contraintes sur la commande.

Nous avons ensuite étudié un algorithme de commande prédictive contractante emprunté à la littérature. Cet algorithme, pour lequel nous avons proposé une extension à facteur de contraction optimal, a ensuite été appliqué au développement de lois de guidage-pilotage dans le cas d'un suivi de trajectoire et pour l'évitement d'obstacles.

Pour chacune des approches proposées, une analyse de la stabilité du système bouclé a été menée.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés au cas où seules des mesures en position et en angles d'attitude sont disponibles pour la réalisation de la commande. Afin de réaliser un compromis⁷ entre les approches basées sur un observateur et les approches de commande avec accès partiel à l'état (*partial state feedback*) de la littérature, nous avons proposé une méthode de synthèse par fonction de Lyapunov, basée sur l'introduction d'états virtuels au sein de la dynamique du système. L'application de cette méthode au développement de lois de guidage-pilotage a été successivement présentée dans les cas à un, puis deux états virtuels, en considérant une séparation des échelles de temps entre la dynamique de translation et la

⁷Ce compromis permet d'obtenir à la fois de bonnes performances pour le système bouclé (amortissement, rapidité de convergence) et de réduire la complexité de la méthode utilisée (temps de calcul, analyse de la stabilité).

dynamique de rotation du véhicule.

A ce titre, notre contribution réside également dans l'analyse de la stabilité d'une approche de commande hiérarchique, permettant la synthèse successive des lois de commande en position et en attitude, par la théorie des perturbations singulières.

Outre les perspectives de travail mentionnées dans les conclusions des différentes parties de ce document, une extension des travaux effectués dans le cadre de cette thèse peut être réalisée en considérant les points suivants.

Les approches proposées ont été adaptées pour l'élaboration de lois de guidage-pilotage en utilisant un niveau de modélisation de la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante basé sur une représentation de type mécanique du solide. Une extension de ces travaux peut consister en l'application des méthodes proposées à des modèles plus détaillés, représentatifs d'une configuration de véhicule donnée et prenant en compte une représentation de son aérodynamique.

Enfin, une analyse de la robustesse des approches proposées peut être étudiée en poursuite à cette thèse, afin de garantir dans quelle mesure les propriétés de stabilité établies sont conservées en présence d'erreurs de modèles.

Annexe A

Définitions, opérateurs et identités remarquables

A.1 Définitions

Soient $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ deux domaines contenant l'origine. Considérons le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (\text{A.1})$$

où f est une fonction de $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$f(0, 0) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Definition 1 *On appellera fonction de Lyapunov candidate pour le système (A.1), toute fonction de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^1 définie positive (et radialement non bornée dans le cas $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$).*

Definition 2 *On appellera fonction de Lyapunov pour le système (A.1) (ou Control Lyapunov Function), toute fonction de Lyapunov candidate V pour le système (A.1) qui vérifie :*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \exists u \in \mathcal{U}, \frac{\partial V}{\partial x} f(x, u) \leq 0 \quad (\text{A.3})$$

Dans le cas de systèmes autonomes de la forme

$$\dot{x} = \Phi(x) \quad (\text{A.4})$$

où Φ est une fonction de $\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\Phi(0) = 0$, les mêmes définitions seront utilisées en remplaçant toutefois la propriété (A.3) par :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \frac{\partial V}{\partial x} \Phi(x) \leq 0 \quad (\text{A.5})$$

A.2 Groupes matriciels

Soit I_d la matrice identité de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$. On définit le groupe $O(3)$, ou groupe orthogonal, par

$$O(3) = \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | M^T M = I_d\} \quad (\text{A.6})$$

Le groupe $SO(3)$, ou groupe spécial orthogonal, contenant l'ensemble des matrices de rotation de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, est défini par

$$SO(3) = \{M \in O(3) | \det(M) = 1\} \quad (\text{A.7})$$

On définit également le groupe des matrices antisymétriques

$$so(3) = \{M \in \mathbb{R}^{3 \times 3} | M^T = -M\} \quad (\text{A.8})$$

A.3 Opérateurs utilisés

Pour le produit vectoriel \times , on définit les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} (\cdot)_\times : \mathbb{R}^3 &\rightarrow so(3) \\ (v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}) &\mapsto (v_\times = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix}) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} V(\cdot) : so(3) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (M = \begin{bmatrix} 0 & -m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & 0 & -m_{23} \\ -m_{13} & m_{23} & 0 \end{bmatrix}) &\mapsto (V(M) = \begin{bmatrix} m_{23} \\ m_{13} \\ m_{12} \end{bmatrix}) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Avec ces définitions, on a donc les relations suivantes :

$$\forall b \in \mathbb{R}^3, V(b_\times) = b \quad (\text{A.11})$$

$$\forall B \in so(3), V(B)_\times = B \quad (\text{A.12})$$

On définit également pour toute matrice M de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$P_a(M) = \frac{M - M^T}{2} \quad P_s(M) = \frac{M + M^T}{2} \quad (\text{A.13})$$

A.4 Identités remarquables utilisées

Pour toute matrice M de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$, on note $\text{tr}(M)$ sa trace. Avec les définitions introduites précédemment, on a les relations suivantes :

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \text{tr}(P_a(A) P_s(B)) = 0 \quad (\text{A.14})$$

$$\forall A_a, B_a \in so(3), \frac{1}{2} \text{tr}(A_a B_a) = V(A_a^T)^T V(B_a) \quad (\text{A.15})$$

Des relations (A.14) et (A.15), on en déduit les identités suivantes pour tout vecteur v de \mathbb{R}^3 et toute matrice M de $\mathbb{R}^{3 \times 3}$:

$$\frac{1}{2} \text{tr}(v_\times M) = \frac{1}{2} \text{tr}(v_\times P_a(M)) = V(v_\times^T)^T V(P_a(M)) = -v^T V(P_a(M)) \quad (\text{A.16})$$

De (A.15), on a également :

$$\forall A_a \in so(3), \frac{1}{2} \text{tr}(A_a^T A_a) = \|V(A_a)\|^2 \quad (\text{A.17})$$

et :

$$\forall v \in \mathbb{R}^3, \|v\|^2 = \frac{1}{2} \text{tr}(v_{\times}^T v_{\times}) \quad (\text{A.18})$$

Les identités suivantes seront également utilisées :

$$\forall A_a \in so(3), \forall v \in \mathbb{R}^3, v^T A_a v = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\forall R \in SO(3), \forall v \in \mathbb{R}, (Rv)_{\times} = Rv_{\times}R^T \quad (\text{A.20})$$

Pour une matrice $R \in SO(3)$ donnée, on note (γ_R, n_R) ses coordonnées angle-axe principal où le vecteur n_R est unitaire ($\|n_R\| = 1$). On a alors les relations suivantes :

$$\forall R \in SO(3), \text{tr}(I_d - R) = 2(1 - \cos(\gamma_R)) \quad (\text{A.21})$$

$$\forall R \in SO(3), \|V(P_a(R))\| = |\sin(\gamma_R)| \quad (\text{A.22})$$

De (A.21) et (A.22), on en déduit

$$\forall R \in SO(3), \sqrt{\text{tr}(I_d - R)} = \frac{\|V(P_a(R))\|}{\cos(\frac{\gamma_R}{2})} \quad (\text{A.23})$$

Annexe B

Calcul de l'orientation désirée

Cette annexe présente le calcul de l'orientation désirée R^d à partir de la connaissance du vecteur de commande en position $\mathcal{T}R^d e_3$ et d'une référence en lacet ψ^d donnée.

Lors du calcul de la commande en position, on détermine le vecteur

$$\mathcal{T}R^d e_3 = f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d) \quad (\text{B.1})$$

La direction de ce vecteur de commande est alors donnée par

$$R^d e_3 = \frac{f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d)}{\|f(\xi, v, \xi^d, v^d, \dot{v}^d)\|} \quad (\text{B.2})$$

A partir de la connaissance de cette direction et de la référence en lacet ψ^d , on souhaite déterminer la matrice R^d .

On choisit de représenter la matrice R^d en utilisant les angles d'Euler en lacet, tangage, roulis (ψ^d, θ^d, ϕ^d) :

$$R^d = \begin{bmatrix} c_{\theta^d} c_{\psi^d} & s_{\phi^d} s_{\theta^d} c_{\psi^d} - c_{\phi^d} s_{\psi^d} & c_{\phi^d} s_{\theta^d} c_{\psi^d} + s_{\phi^d} s_{\psi^d} \\ c_{\theta^d} s_{\psi^d} & s_{\phi^d} s_{\theta^d} s_{\psi^d} + c_{\phi^d} c_{\psi^d} & c_{\phi^d} s_{\theta^d} s_{\psi^d} - s_{\phi^d} c_{\psi^d} \\ -s_{\theta^d} & s_{\phi^d} c_{\theta^d} & c_{\phi^d} c_{\theta^d} \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

avec les notations trigonométriques $\forall \beta \in \mathbb{R}, c_\beta = \cos(\beta), s_\beta = \sin(\beta)$.

Par l'expression (B.2), le vecteur $R^d e_3$ peut être directement calculé et ses composantes sont donc directement connues. Notons les

$$R^d e_3 = [r_1^d \quad r_2^d \quad r_3^d]^T \quad (\text{B.4})$$

En utilisant (B.3) et (B.4), on obtient le système suivant

$$c_{\phi^d} s_{\theta^d} c_{\psi^d} + s_{\phi^d} s_{\psi^d} = r_1^d \quad (\text{B.5})$$

$$c_{\phi^d} s_{\theta^d} s_{\psi^d} - s_{\phi^d} c_{\psi^d} = r_2^d \quad (\text{B.6})$$

$$c_{\phi^d} c_{\theta^d} = r_3^d \quad (\text{B.7})$$

où les composantes r_i^d ($i = 1, 2, 3$) et où la valeur ψ^d sont connues. On cherche à déterminer les valeurs de ϕ^d et θ^d .

Pour le calcul de ces angles on suppose

Hypothèse 12 La quantité $e_3^T R^d e_3$ est non nulle (i.e. $r_3^d \neq 0$).

Remarque 9 Cette hypothèse est valable pour le domaine de vol usuel du drone. En effet, si la composante r_3^d est nulle, le drone est en chute libre, la gravité n'étant plus compensée. De plus, d'après (B.7), si $r_3^d = 0$ on a alors $\theta^d = \pm \frac{\pi}{2}$ ou $\phi^d = \pm \frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à des valeurs des angles de roulis et tangage non atteintes en vol quasi stationnaire par un drone miniature à voilure tournante.

Pour la détermination des angles θ^d et ϕ^d , on considère deux cas : $\psi^d = \pm \frac{\pi}{2}$ et $\psi^d \neq \pm \frac{\pi}{2}$.

• **1^{er} cas** : $\psi^d = \pm \frac{\pi}{2}$

Pour $\psi^d = \pm \frac{\pi}{2}$, on a $c_{\psi^d} = 0$ et $s_{\psi^d} = \sigma(\psi^d)$ avec

$$\sigma(\psi^d) = \begin{cases} +1 & \text{si } \psi^d = +\frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \psi^d = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Le système (B.5)-(B.7) s'écrit alors

$$\sigma(\psi^d) s_{\phi^d} = r_1^d \quad (\text{B.9})$$

$$\sigma(\psi^d) c_{\phi^d} s_{\theta^d} = r_2^d \quad (\text{B.10})$$

$$c_{\phi^d} c_{\theta^d} = r_3^d \quad (\text{B.11})$$

En utilisant l'hypothèse 12, et la notation on divise (B.10) par (B.11) :

$$\tan(\theta^d) = \sigma(\psi^d) \frac{r_2^d}{r_3^d} \quad (\text{B.12})$$

d'où

$$\theta^d = \sigma(\psi^d) \arctan\left(\frac{r_2^d}{r_3^d}\right) \quad (\text{B.13})$$

En divisant (B.9) par (B.11), on a de même

$$\tan(\phi^d) = \sigma(\psi^d) c_{\theta^d} \frac{r_1^d}{r_3^d} \quad (\text{B.14})$$

d'où

$$\phi^d = \sigma(\psi^d) \arctan\left(c_{\theta^d} \frac{r_1^d}{r_3^d}\right) \quad (\text{B.15})$$

où θ^d est calculé en utilisant (B.13).

• **2^e cas** : $\psi^d \neq \pm \frac{\pi}{2}$

En utilisant l'hypothèse 12, on divise (B.5) et (B.6) par (B.7) :

$$\tan(\theta^d) c_{\psi^d} + \frac{\tan(\phi^d)}{c_{\theta^d}} s_{\psi^d} = \frac{r_1^d}{r_3^d} \quad (\text{B.16})$$

$$\tan(\theta^d) s_{\psi^d} - \frac{\tan(\phi^d)}{c_{\theta^d}} c_{\psi^d} = \frac{r_2^d}{r_3^d} \quad (\text{B.17})$$

En multipliant (B.16) par c_{ψ^d} et (B.17) par s_{ψ^d} et en sommant les deux expressions obtenues, on a

$$\tan(\theta^d)c_{\psi^d}^2 + \tan(\theta^d)s_{\psi^d}^2 = \frac{r_1^d}{r_3^d}c_{\psi^d} + \frac{r_2^d}{r_3^d}s_{\psi^d} \quad (\text{B.18})$$

En utilisant $c_{\psi^d}^2 + s_{\psi^d}^2 = 1$, on a finalement :

$$\theta^d = \arctan\left(\frac{r_1^d}{r_3^d}c_{\psi^d} + \frac{r_2^d}{r_3^d}s_{\psi^d}\right) \quad (\text{B.19})$$

Pour le calcul de ϕ^d , on déduit de l'équation (B.17) :

$$\phi^d = \arctan\left(s_{\theta^d} \tan(\psi^d) - \frac{r_2^d}{r_3^d} \frac{c_{\theta^d}}{c_{\psi^d}}\right) \quad (\text{B.20})$$

où θ^d est calculé en utilisant (B.19).

Annexe C

Calcul de Ω^d

Cette annexe présente une méthode pour calculer la vitesse de rotation désirée Ω^d à partir de la connaissance du vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$.

On rappelle ici que le vecteur vitesse de rotation désiré Ω^d satisfait la relation

$$\dot{R}^d = R^d \Omega_{\times}^d \quad (\text{C.1})$$

où $R^d \in SO(3)$ représente la valeur désirée de la matrice d'orientation $R \in SO(3)$. On rappelle également que la matrice Ω_{\times}^d est définie par

$$\Omega_{\times}^d = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3^d & \Omega_2^d \\ \Omega_3^d & 0 & -\Omega_1^d \\ -\Omega_2^d & \Omega_1^d & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.2})$$

où Ω_i^d désigne la i -ème composante du vecteur Ω^d .

En multipliant à droite la relation (C.1) par le vecteur e_3 , on obtient :

$$\frac{d}{dt}(R^d e_3) = \dot{R}^d e_3 = R^d \Omega_{\times}^d e_3 \quad (\text{C.3})$$

et on en déduit

$$\Omega_{\times}^d e_3 = (R^d)^T \frac{d}{dt}(R^d e_3) \quad (\text{C.4})$$

Afin de calculer la dérivée du vecteur $R^d e_3$, on introduit les notations suivantes :

$$u = R^d e_3 \quad U = \mathcal{T}R^d e_3 \quad (\text{C.5})$$

Avec ces notations, on a

$$u = \frac{U}{\sqrt{U^T U}} \quad (\text{C.6})$$

La dérivée de u est donnée par

$$\dot{u} = \frac{\dot{U} \sqrt{U^T U} - \frac{U U^T \dot{U}}{\sqrt{U^T U}}}{U^T U} = \frac{1}{\sqrt{U^T U}} (I_3 - \frac{U U^T}{U^T U}) \dot{U} \quad (\text{C.7})$$

avec

$$\sqrt{U^T U} = \mathcal{T} \quad U^T U = \mathcal{T}^2 \quad U U^T = \mathcal{T}^2 R^d e_3 e_3^T (R^d)^T \quad (\text{C.8})$$

On a ainsi :

$$\dot{u} = \frac{d}{dt}(R^d e_3) = \frac{1}{\mathcal{T}} \{I_3 - R^d e_3 e_3^T (R^d)^T\} \frac{d}{dt}(\mathcal{T} R^d e_3) \quad (\text{C.9})$$

Cette expression est alors remplacée dans (C.4) pour obtenir :

$$\Omega_{\times}^d e_3 = \frac{1}{\mathcal{T}} (R^d)^T \{I_3 - R^d e_3 e_3^T (R^d)^T\} \frac{d}{dt}(\mathcal{T} R^d e_3) \quad (\text{C.10})$$

En définissant le projecteur

$$\Pi_{e_3} = I_3 - e_3 e_3^T \quad (\text{C.11})$$

on a finalement :

$$\Omega_{\times}^d e_3 = \begin{bmatrix} \Omega_2^d \\ -\Omega_1^d \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{T}} \Pi_{e_3} (R^d)^T \frac{d}{dt}(\mathcal{T} R^d e_3) \quad (\text{C.12})$$

Si le vecteur de commande $\mathcal{T} R^d e_3$ est connu analytiquement, s'il est dérivable et que sa dérivée est également connue analytiquement, alors les composantes Ω_1^d et Ω_2^d du vecteur Ω^d sont directement obtenues par l'expression (C.12).

Dans le cas de la stabilisation, on supposera que la composante Ω_3^d est choisie constamment nulle $\Omega_3^d = 0$ et que l'on a $\psi^d(t) = \psi^d(0)$ avec $\psi^d(0)$ donné.

Dans le cas d'un suivi de trajectoire la composante Ω_3^d est déterminée à partir de la connaissance de $\psi^d(t)$ et de sa dérivée $\dot{\psi}^d(t)$

D'après l'expression (C.12), on peut en déduire que le vecteur Ω^d dépendra explicitement de l'état de la dynamique de translation, par l'intermédiaire de la dérivée de $\mathcal{T} R^d e_3$. Dans le cas d'un suivi de trajectoire, la dérivée du vecteur de commande $\mathcal{T} R^d e_3$ est composée d'une somme de termes dépendant de l'état de la dynamique de translation et de termes ne dépendant explicitement que de la référence et de ses dérivées temporelles. Dans ce cas, le vecteur Ω^d peut être décomposé en

$$\Omega^d = \Omega^d(X) + \Omega^d(t) \quad (\text{C.13})$$

où la première composante $\Omega^d(X)$ ne dépend que de l'état X de la dynamique de translation, et où la seconde composante $\Omega^d(t)$ ne dépend que de la trajectoire de référence et de ses dérivées temporelles.

Annexe D

Lemme de Barbalat

Cette annexe rappelle l'énoncé du Lemme de Barbalat [57] et présente la manière dont celui-ci est utilisé dans les preuves de la Partie III.

Considérons un système dynamique autonome de la forme

$$\dot{x} = f(x) \tag{D.1}$$

où la fonction f est temporellement invariante, et où $x \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système. Soit $\mathcal{V}(x)$ une fonction de Lyapunov pour (D.1) vérifiant :

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x) f(x) = -\sigma(x) \leq 0 \tag{D.2}$$

Par le principe d'invariance de La Salle, on sait que les trajectoires de (D.1) convergent alors vers le plus grand ensemble invariant contenu dans $E = \{x \in \mathbb{R}^n, \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x) = 0\}$. On peut alors conclure $\sigma(x) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

On considère maintenant le cas où la fonction f dépend du temps

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \tag{D.3}$$

et où il existe une fonction de Lyapunov $\mathcal{V}(x, t)$ telle que

$$\dot{\mathcal{V}}(x, t) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(x, t) f(x, t) = -\sigma(x, t) \leq 0 \tag{D.4}$$

Dans ce cas, le principe d'invariance de La Salle ne peut être appliqué. On utilise alors le lemme de Barbalat

Lemme 10 [57] *Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur $[0, \infty[$. Si la limite pour $t \rightarrow \infty$ de $\int_0^t \phi(\tau) d\tau$ existe et est finie, alors $\phi(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.*

De (D.4), on sait que la fonction \mathcal{V} est décroissante. Etant positive, il existe donc un d , $0 \leq d < \infty$, tel que $\mathcal{V}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} d$. Or :

$$\int_0^t \dot{\mathcal{V}}(x, \tau) d\tau = \mathcal{V}(x, t) - \mathcal{V}(x, 0) \tag{D.5}$$

La limite de $\int_0^t \dot{\mathcal{V}}(x, \tau) d\tau$ pour $t \rightarrow \infty$ est donc finie. Si la fonction $\dot{\mathcal{V}}$ est uniformément bornée en t de $[0, \infty[$ dans \mathbb{R} , on peut alors appliquer le lemme de Barbalat pour conclure $\dot{\mathcal{V}}(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ et donc $\sigma(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

Annexe E

Analyse de la stabilité dans le cas sans mesure de v

Cette annexe présente la preuve de la Proposition 6 énoncée en Section 9.4.1.

On rappelle que l'on cherche à commander le système (9.112), rappelé ci-dessous en (E.1), dans le cas où seule la vitesse linéaire v n'est pas mesurée.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = -\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 - \frac{\mathcal{T}}{m} (R - R^d) e_3 \\ \dot{q} = -w \\ \dot{w} = \delta \\ \epsilon \dot{\tilde{R}} = -\epsilon \Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \\ \epsilon I \dot{\Omega} = -\Omega_{\times} I \Omega + \Gamma \end{array} \right. \quad (\text{E.1})$$

avec $\tilde{R} = (R^d)^T R$.

La preuve est réalisée en trois temps. Une fonction de Lyapunov candidate est tout d'abord proposée pour la dynamique de translation, et sa dérivée est calculée le long des trajectoires du système (E.1) bouclé par la commande (9.117) et la commande virtuelle (9.118) proposées dans la Proposition 6 de la Section 9.4.1. La même démarche est ensuite adoptée pour la dynamique de rotation, en proposant une fonction de Lyapunov candidate et en calculant sa dérivée le long des trajectoires de (E.1) bouclé par la commande (9.119). Enfin, la stabilité du système complet est analysée en considérant comme fonction de Lyapunov candidate la somme des deux fonctions précédentes.

E.1 Commande en position

Considérons la dynamique de translation du système (E.1). On introduit les notations

$$\alpha = \xi - q \quad \beta = \xi - q + w \quad (\text{E.2})$$

$$u = -\frac{\mathcal{T}}{m} R e_3 + g e_3 \quad u^d = -\frac{\mathcal{T}}{m} R^d e_3 + g e_3 \quad \tilde{u} = u - u^d \quad (\text{E.3})$$

Avec ces notations, la dynamique de translation du système (E.1) peut se réécrire sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = v \\ \dot{v} = u^d + \tilde{u} \\ \dot{\alpha} = v + \beta - \alpha \\ \dot{\beta} = v + \beta - \alpha + \delta \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Pour ce système, on définit l'état

$$X = [\xi^T \quad v^T \quad \alpha^T \quad \beta^T]^T \quad (\text{E.5})$$

et le vecteur

$$\tilde{U} = [0_3^T \quad \tilde{u}^T \quad 0_3^T \quad 0_3^T]^T \quad \text{avec } 0_3 = [0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (\text{E.6})$$

Avec la commande (9.117) et la commande virtuelle (9.118), rappelées ci-dessous dans les coordonnées ξ, α, β

$$\mathcal{T}R^d e_3 = \frac{m}{k_v} \{k_x \xi + k_1 \alpha + k_2 \beta\} + m g e_3 \quad (\text{E.7})$$

$$\delta = -\frac{1}{k_2} \{k_2(\beta - \alpha) + k_1 \alpha + k_2 \beta\} \quad (\text{E.8})$$

le système (E.4) peut se mettre sous la forme

$$\dot{X} = AX + \tilde{U} \quad (\text{E.9})$$

Considérons tout d'abord le cas $\tilde{U} = 0$.

On peut montrer, de manière similaire à la démonstration du Lemme 5 présenté en Section 9.2.1, que la commande (9.117), avec la commande virtuelle (9.118), stabilise exponentiellement le système (E.9) sous l'hypothèse $\tilde{U} = 0$.

Il existe alors des matrices symétriques définies positives P et Q permettant de définir une fonction de Lyapunov \mathcal{S} telle que

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} X^T P X \quad (\text{E.10})$$

$$\frac{1}{2} \lambda_{\min}(P) \|X\|^2 \leq \mathcal{S} \leq \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P) \|X\|^2 \quad (\text{E.11})$$

$$\dot{\mathcal{S}} = -X^T Q X \leq -\lambda_{\min}(Q) \|X\|^2 \quad (\text{E.12})$$

où, pour une matrice M définie positive donnée de valeurs propres $\lambda_i(M)$ connues, on définit

$$\lambda_{\min}(M) = \min \{|\lambda_i(M)|\} \quad \lambda_{\max}(M) = \max \{|\lambda_i(M)|\} \quad (\text{E.13})$$

La matrice Q vérifie l'équation de Lyapunov :

$$\frac{1}{2} (A^T P + P A) = -Q \quad (\text{E.14})$$

Considérons maintenant le cas $\tilde{U} \neq 0$ et calculons la dérivée de \mathcal{S} le long des trajectoires du système (E.9) :

$$\dot{\mathcal{S}} = -X^T Q X + \tilde{U}^T P X \quad (\text{E.15})$$

On majore alors cette dérivée en

$$\dot{\mathcal{S}} \leq -\lambda_{\min}(Q) \|X\|^2 + \lambda_{\max}(P) \|\tilde{u}\| \{\|\xi\| + \|v\| + \|\alpha\| + \|\beta\|\} \quad (\text{E.16})$$

Afin de majorer cette relation, on calcule :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\| &= \frac{\mathcal{T}}{m} \|(R - R^d)e_3\| = \frac{\mathcal{T}}{m} \|(R^d R^T - I_d)Re_3\| \\ &\leq \frac{\mathcal{T}}{m} \sqrt{\text{tr}((R^d R^T - I_d)^T (R^d R^T - I_d))} \|Re_3\| \\ &\leq \frac{\mathcal{T}}{m} \sqrt{2\text{tr}(I_d - \tilde{R})} \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

Soient $(\gamma_{\tilde{R}}, n_{\tilde{R}})$ les coordonnées angle-axe de \tilde{R} . En utilisant l'identité (A.23), on a alors :

$$\|\tilde{u}\| \leq \frac{\mathcal{T}}{m} \sqrt{2} \frac{\|V(P_a(\tilde{R}))\|}{\cos(\frac{\gamma_{\tilde{R}}}{2})} \quad (\text{E.18})$$

Par inégalité triangulaire sur (E.16), on obtient alors la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{S}} &\leq -\lambda_{\min}(Q) \{\|\xi\|^2 + \|v\|^2 + \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2\} \\ &\quad + \left(\sqrt{2} \frac{\mathcal{T}}{m} \frac{\lambda_{\max}(P)}{\cos(\frac{\gamma_{\tilde{R}}}{2})}\right) \|V(P_a(\tilde{R}))\| \{\|\xi\| + \|v\| + \|\alpha\| + \|\beta\|\} \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

E.2 Commande en attitude

Considérons maintenant la dynamique de rotation du système (E.1).

$$\begin{cases} \epsilon \dot{\tilde{R}} = -\epsilon \Omega_{\times}^d \tilde{R} + \tilde{R} \Omega_{\times} \\ \epsilon I \dot{\tilde{\Omega}} = -\Omega_{\times} I \Omega + \Gamma \end{cases} \quad (\text{E.20})$$

avec $\tilde{R} = (R^d)^T R$.

Définissons

$$\tilde{\Omega} = \Omega - l_1 V(P_a(\tilde{R})^T) \quad (\text{E.21})$$

avec $l_1 > 0$. Avec cette notation, on peut réécrire la relation cinématique en

$$\dot{\tilde{R}} = -\Omega_{\times}^d \tilde{R} + \frac{1}{\epsilon} \tilde{R} (\tilde{\Omega} + l_1 V(P_a(\tilde{R})^T))_{\times} \quad (\text{E.22})$$

soit

$$\dot{\tilde{R}} = -\Omega_{\times}^d \tilde{R} + \frac{1}{\epsilon} \tilde{R} \tilde{\Omega}_{\times} + \frac{l_1}{\epsilon} \tilde{R} P_a(\tilde{R})^T \quad (\text{E.23})$$

Calculons maintenant la dérivée de $\tilde{\Omega}$:

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \dot{\Omega} - l_1 \overbrace{V(P_a(\tilde{R})^T)} \quad (\text{E.24})$$

Dans le cas général de l'inversibilité du tenseur d'inertie I , on a alors :

$$\dot{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{\epsilon} I^{-1}(-\Omega_{\times} I \Omega) + \frac{1}{\epsilon} I^{-1} \Gamma - \frac{l_1}{2} V(\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R}) + \frac{l_1}{2\epsilon} V(\Omega_{\times} \tilde{R}^T + \tilde{R} \Omega_{\times}) \quad (\text{E.25})$$

Choisissons pour Γ l'expression proposée dans la Proposition 6 de la Section 9.4.1 :

$$\Gamma = \Omega_{\times} I \Omega + I \left\{ -l_2 \tilde{\Omega} - 2l V(P_a(\tilde{R})) - \frac{l_1}{2} V(\Omega_{\times} \tilde{R}^T + \tilde{R} \Omega_{\times}) \right\} \quad (\text{E.26})$$

avec $l > 0$ et $l_2 > 0$.

On obtient ainsi :

$$\dot{\tilde{\Omega}} = -\frac{l_2}{\epsilon} \tilde{\Omega} - 2\frac{l}{\epsilon} V(P_a(\tilde{R})) - \frac{l_1}{2} V(\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R}) \quad (\text{E.27})$$

Définissons, pour la dynamique de rotation, la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{L} = l \operatorname{tr}(I_d - \tilde{R}) + \frac{1}{2} \|\tilde{\Omega}\|^2 \quad (\text{E.28})$$

Calculons sa dérivée le long des trajectoires de (E.20) bouclé par (E.26) :

$$\dot{\mathcal{L}} = -l \operatorname{tr}(\dot{\tilde{R}}) + \tilde{\Omega}^T \dot{\tilde{\Omega}} \quad (\text{E.29})$$

En utilisant les expressions (E.23) et (E.27), ainsi que l'identité (A.16) cette dérivée se simplifie en

$$\dot{\mathcal{L}} = -2l (\Omega^d)^T V(P_a(\tilde{R})) - \frac{ll_1}{\epsilon} \operatorname{tr}(P_a(\tilde{R}) P_a(\tilde{R})^T) - \frac{l_2}{\epsilon} \|\tilde{\Omega}\|^2 - \frac{l_1}{2} \tilde{\Omega}^T V(\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R}) \quad (\text{E.30})$$

Par inégalité triangulaire et par l'identité (A.17), on a la majoration

$$\dot{\mathcal{L}} \leq 2l \|\Omega^d\| \|V(P_a(\tilde{R}))\| - \frac{2ll_1}{\epsilon} \|V(P_a(\tilde{R}))\|^2 - \frac{l_2}{\epsilon} \|\tilde{\Omega}\|^2 + \frac{l_1}{2} \|\tilde{\Omega}\| \|V(\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R})\| \quad (\text{E.31})$$

Cherchons à majorer le dernier terme. On a

$$\begin{aligned} \|V(\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R})\|^2 &\leq \frac{1}{2} \operatorname{tr} \left\{ (\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R})^T (\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d + \Omega_{\times}^d \tilde{R}) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2} \operatorname{tr}((\tilde{R}^T \Omega_{\times}^d)^T \tilde{R}^T \Omega_{\times}^d) + \frac{1}{2} \operatorname{tr}((\Omega_{\times}^d \tilde{R})^T \Omega_{\times}^d \tilde{R}) \\ &\leq \operatorname{tr}((\Omega_{\times}^d)^T \Omega_{\times}^d) \\ &\leq 2 \|\Omega^d\|^2 \end{aligned} \quad (\text{E.32})$$

D'où :

$$\dot{\mathcal{L}} \leq 2l \|\Omega^d\| \|V(P_a(\tilde{R}))\| - \frac{2ll_1}{\epsilon} \|V(P_a(\tilde{R}))\|^2 - \frac{l_2}{\epsilon} \|\tilde{\Omega}\|^2 + \frac{l_1}{2} \sqrt{2} \|\tilde{\Omega}\| \|\Omega^d\| \quad (\text{E.33})$$

Il nous reste maintenant à borner le terme $\|\Omega^d\|$. Dans le cas de la stabilisation, lorsque l'on choisit $\Omega_3^d = 0$ (cf. Annexe C), on a d'après (C.12) :

$$\|\Omega^d\| = \|\Omega_{\times}^d e_3\| = \frac{1}{\mathcal{T}} \left\| \Pi_{e_3} (R^d)^T \frac{d}{dt} (\mathcal{T} R^d e_3) \right\| \quad (\text{E.34})$$

avec $\Pi_{e_3} = I_d - e_3 e_3^T$ et, en dérivant (9.117) :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{T}R^d e_3) = \frac{m}{k_v}((k_x + k_1 + k_2)v - 2k_1\alpha + (k_1 - k_2)\beta) \quad (\text{E.35})$$

On a ainsi

$$\|\Omega^d\| \leq \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{m}{k_v} (k_x + k_1 + k_2) \|v\| + \frac{2}{\mathcal{T}} \frac{m}{k_v} k_1 \|\alpha\| + \frac{1}{\mathcal{T}} \frac{m}{k_v} |k_1 - k_2| \|\beta\| \quad (\text{E.36})$$

et en remplaçant dans (E.33) :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{L}} \leq & -\frac{2l l_1}{\epsilon} \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\|^2 - \frac{l_2}{\epsilon} \left\| \tilde{\Omega} \right\|^2 \\ & + \frac{2m}{\mathcal{T}} \frac{l}{k_v} \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| \left\{ (k_x + k_1 + k_2) \|v\| + 2k_1 \|\alpha\| + |k_1 - k_2| \|\beta\| \right\} \\ & + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{\mathcal{T}} \frac{l_1}{k_v} \left\| \tilde{\Omega} \right\| \left\{ (k_x + k_1 + k_2) \|v\| + 2k_1 \|\alpha\| + |k_1 - k_2| \|\beta\| \right\} \end{aligned} \quad (\text{E.37})$$

E.3 Analyse de la stabilité

Considérons le système complet (E.1) et définissons pour celui-ci la fonction de Lyapunov candidate

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} + \mathcal{L} \quad (\text{E.38})$$

Considérons les hypothèses suivantes :

Hypothèse 13 *Il existe deux réels \mathcal{T}_{min} et \mathcal{T}_{max} tels que*

$$0 < \mathcal{T}_{min} < mg < \mathcal{T}_{max} < \infty \quad (\text{E.39})$$

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{T}_{min} \leq \mathcal{T}(t) \leq \mathcal{T}_{max} \quad (\text{E.40})$$

Hypothèse 14 *Il existe un réel $c > 0$ tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad \cos\left(\frac{\gamma_{\tilde{R}}(t)}{2}\right) \geq c \quad (\text{E.41})$$

Sous ces hypothèses, et en utilisant les relations (E.19) et (E.37), la dérivée de \mathcal{V} le long des trajectoires du système (E.1) bouclé par les commandes (9.117) et (9.118) et la commande

virtuelle (9.119) peut se majorer par :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{V}} \leq & -\lambda_{\min}(Q) \|\xi\|^2 - \lambda_{\min}(Q) \|v\|^2 - \lambda_{\min}(Q) \|\alpha\|^2 - \lambda_{\min}(Q) \|\beta\|^2 \\
& - \frac{2l l_1}{\epsilon} \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\|^2 - \frac{l_2}{\epsilon} \left\| \tilde{\Omega} \right\|^2 \\
& + \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2}}{c} \lambda_{\max}(P) \right\} \|\xi\| \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| \\
& + \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2}}{c} \lambda_{\max}(P) + \frac{2m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l(k_x + k_1 + k_2)}{k_v} \right\} \|v\| \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| \\
& + \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2}}{c} \lambda_{\max}(P) + \frac{4m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l k_1}{k_v} \right\} \|\alpha\| \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| \\
& + \left\{ \frac{\mathcal{T}_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2}}{c} \lambda_{\max}(P) + \frac{2m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l |k_1 - k_2|}{k_v} \right\} \|\beta\| \left\| V(P_a(\tilde{R})) \right\| \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l_1}{k_v} (k_x + k_1 + k_2) \right\} \|v\| \left\| \tilde{\Omega} \right\| \\
& + \left\{ \sqrt{2} \frac{m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l_1 k_1}{k_v} \right\} \|\alpha\| \left\| \tilde{\Omega} \right\| \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{l_1 |k_1 - k_2|}{k_v} \right\} \|\beta\| \left\| \tilde{\Omega} \right\|
\end{aligned} \tag{E.42}$$

On définit les coefficients strictement positifs suivant

$$s_1 = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(P) \frac{\mathcal{T}_{\max}}{m} \frac{\sqrt{2}}{c} \tag{E.43}$$

$$s_2 = \frac{l}{\mathcal{T}_{\min}} \frac{m}{k_v} \tag{E.44}$$

$$s_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{l_1}{k_v} \frac{m}{\mathcal{T}_{\min}} \tag{E.45}$$

$$a = \lambda_{\min}(Q) \tag{E.46}$$

$$b_1 = s_1 \tag{E.47}$$

$$b_2 = s_1 + s_2(k_x + k_1 + k_2) \tag{E.48}$$

$$b_3 = s_1 + 2s_2 k_1 \tag{E.49}$$

$$b_4 = s_1 + s_2 |k_1 - k_2| \tag{E.50}$$

$$b_5 = s_3(k_x + k_1 + k_2) \tag{E.51}$$

$$b_6 = 2s_3 k_1 \tag{E.52}$$

$$b_7 = s_3 |k_1 - k_2| \tag{E.53}$$

et en définissant l'état

$$\mathcal{X} = \left[\xi^T \quad v^T \quad \alpha^T \quad \beta^T \quad V(P_a(\tilde{R}))^T \quad \tilde{\Omega}^T \right]^T \tag{E.54}$$

on peut alors réécrire (E.42) sous la forme

$$\dot{\mathcal{V}} \leq -\mathcal{X}^T \Sigma \mathcal{X} \tag{E.55}$$

Le terme $-\mathcal{X}^T \Sigma \mathcal{X}$ est défini négatif si et seulement si la matrice σ suivante est définie positive :

$$\sigma = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & -b_1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & -b_2 & -b_5 \\ 0 & 0 & a & 0 & -b_3 & -b_6 \\ 0 & 0 & 0 & a & -b_4 & -b_7 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 & \frac{2ll_1}{\epsilon} & 0 \\ 0 & -b_5 & -b_6 & -b_7 & 0 & \frac{l_2}{\epsilon} \end{bmatrix} \quad (\text{E.56})$$

Cherchons pour quelles valeurs de ϵ cette matrice est définie positive. Afin de simplifier les expressions manipulées, on supposera que l'on prend $k_1 = k_2$ pour le reste de cette preuve. La matrice Q étant définie positive, le terme $a = \lambda_{\min}(Q)$ est strictement positif et les quatre premiers mineurs de la matrice σ sont strictement positifs. Il nous reste donc à examiner les mineurs de tailles 5 et 6.

La stricte positivité du mineur de taille 5 est obtenue sous la condition $\epsilon < \epsilon_1^*$ avec

$$\epsilon_1^* = \frac{2\lambda_{\min}(Q) ll_1}{4s_1^2 + s_2^2(8k_1^2 + k_x^2 + 4k_x k_1) + 2s_1 s_2(4k_1 + k_x)} \quad (\text{E.57})$$

La stricte positivité de $\det(\sigma)$ est obtenue pour

$$A\epsilon^2 + B\epsilon + C > 0 \quad (\text{E.58})$$

avec

$$A = a^2 s_3^2 s_1^2 (3k_x^2 + 8k_x k_1 + 16k_1^2) > 0 \quad (\text{E.59})$$

$$B = -a^3 (4l_2 s_1^2 + 8l_2 s_1 s_2 k_1 + 8l_2 s_2^2 k_1^2 + 2s_3^2 ll_1 k_x^2 + 8s_3^2 ll_1 k_x k_1 + 16s_3^2 k_1^2 ll_1 + 2l_2 s_1 s_2 k_x + l_2 s_2^2 k_x^2 + 4l_2 s_2^2 k_x k_1) < 0 \quad (\text{E.60})$$

$$C = 2l_2 ll_1 a^4 > 0 \quad (\text{E.61})$$

Avec ces coefficients, on peut vérifier que le discriminant $(B^2 - 4AC)$ de (E.58) est strictement positif. Définissons

$$\epsilon_2^* = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (\text{E.62})$$

Ce terme est strictement positif puisque l'on a $A > 0$, $B < 0$, $C > 0$ et $(B^2 - 4AC) > 0$.

La stricte positivité de $\det(\sigma)$ est alors obtenue sous la condition $\epsilon < \epsilon_2^*$.

Définissons

$$\epsilon^* = \min(\epsilon_1^*, \epsilon_2^*) \quad (\text{E.63})$$

Pour tout $\epsilon > 0$ tel que $\epsilon < \epsilon^*$, la dérivée (E.55) de \mathcal{V} est alors définie négative et l'on garantit ¹ la stabilité exponentielle du système (9.112) bouclé par les commandes (9.117) et (9.119) et la commande virtuelle (9.118).

Cette stabilité est garantie pour tout $\epsilon < \epsilon^*$ sous les Hypothèses 13 et 14. Il convient donc de vérifier que celles-ci sont satisfaites.

¹La convergence de \tilde{R} vers la matrice identité I_d est assurée par les conditions (9.120) et (9.121) qui, prises conjointement, permettent de montrer que l'on a $(1 - \cos(\gamma_{\tilde{R}})) < 2$ et donc $\gamma_{\tilde{R}} \rightarrow 0$. Cette relation est établie plus loin dans la preuve.

Commençons par l'Hypothèse 13 où l'on suppose l'existence de bornes \mathcal{T}_{min} et \mathcal{T}_{max} sur \mathcal{T} vérifiant (E.39) et (E.40).

D'après l'expression (9.117) du vecteur de commande $\mathcal{T}R^d e_3$, on a par inégalité triangulaire :

$$mg - \frac{m}{k_v} K_1 (\|\xi\| + \|\alpha\| + \|\beta\|) \leq \mathcal{T} \leq mg + \frac{m}{k_v} K_1 (\|\xi\| + \|\alpha\| + \|\beta\|) \quad (\text{E.64})$$

avec

$$K_1 = \max(k_x, k_1, k_2) \quad (\text{E.65})$$

Définissons également

$$K_2 = \lambda_{min}(P) \quad (\text{E.66})$$

Avec cette notation, et en utilisant (E.10),(E.11) et (E.38), on a

$$\forall t \geq 0, \quad \|\xi(t)\| + \|\alpha(t)\| + \|\beta(t)\| \leq 3\sqrt{\frac{2\mathcal{V}(t)}{K_2}} \quad (\text{E.67})$$

Soit pour tout $t \geq 0$:

$$mg - 3\frac{m}{k_v} K_1 \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(t)}{K_2}} \leq \mathcal{T}(t) \leq mg + 3\frac{m}{k_v} K_1 \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(t)}{K_2}} \quad (\text{E.68})$$

Pour $\epsilon < \epsilon^*$, on a montré que la dérivée de \mathcal{V} est négative. On a donc :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{V}(t) \leq \mathcal{V}(0) \quad (\text{E.69})$$

D'après la relation (E.68), on a alors pour tout $t \geq 0$:

$$mg - 3\frac{m}{k_v} K_1 \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(0)}{K_2}} \leq \mathcal{T}(t) \leq mg + 3\frac{m}{k_v} K_1 \sqrt{\frac{2\mathcal{V}(0)}{K_2}} \quad (\text{E.70})$$

Pour ϵ_g donné tel que $0 < \epsilon_g \ll mg$, on peut finalement déduire d'après la condition (9.120) de la Proposition 6 :

$$\forall t \geq 0, \quad 0 < \epsilon_g < \mathcal{T}(t) < 2mg - \epsilon_g \quad (\text{E.71})$$

En choisissant $\mathcal{T}_{min} = \epsilon_g$ et $\mathcal{T}_{max} = 2mg - \epsilon_g$, l'Hypothèse 13 est donc vérifiée.

Vérifions maintenant l'Hypothèse 14.

En utilisant comme précédemment la décroissance de \mathcal{V} , avec (E.28) et (E.38), on a

$$\forall t \geq 0, \quad l \operatorname{tr}(I_d - \tilde{R}(t)) \leq \mathcal{V}(t) \leq \mathcal{V}(0) \quad (\text{E.72})$$

Pour η donné vérifiant $0 < \eta < 4$, on utilise conjointement les conditions (9.120) et (9.121) de la Proposition 6, pour déduire :

$$\mathcal{V}(0) < (4 - \eta)l \quad (\text{E.73})$$

On a ainsi

$$\forall t \geq 0, \quad \text{tr}(I_d - \tilde{R}(t)) < 4 - \eta \quad (\text{E.74})$$

et l'on utilise (A.21) pour obtenir

$$\forall t \geq 0, \quad 2(1 - \cos(\gamma_{\tilde{R}}(t))) < 4 \quad (\text{E.75})$$

On garantit ainsi, pour tout $t \geq 0$, que l'on a $-\pi < \gamma_{\tilde{R}}(t) < \pi$ et qu'il existe donc un $c > 0$ tel que

$$\cos\left(\frac{\gamma_{\tilde{R}}(t)}{2}\right) \geq c > 0 \quad (\text{E.76})$$

L'Hypothèse 14 est ainsi vérifiée. ■

Bibliographie

- [1] M. Alamir, A Low Dimensional Contractive MPC Scheme for Nonlinear Systems Stabilization : Theoretical Framework and Numerical Investigation on Relatively Fast Systems, *International Workshop on Assessment and Future Directions of NMPC*, Freudenstadt-Lauterbad, Germany, 2005.
- [2] S. A. Al-Hiddabi and N. H. Mc Clamroch, Output Tracking for Nonlinear Non-minimum Phase VTOL Aircraft, in *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, pp 4573-4578, Tampa, USA, 1998.
- [3] R. A. Bartlett, L. T. Biegler, J. Backstrom and V. Gopal, Quadratic Programming Algorithms for Large-Scale Model Predictive Control, in *Journal of Process Control*, 12, pp 775-795, 2002.
- [4] R. A. Bartlett, A. Wachter and L. T. Biegler, Active Set vs. Interior Point Strategies for Model Predictive Control, in *Proceedings of the American Control Conference*, 6, pp 4229-4223, Chicago, USA, 2000.
- [5] S. Bertrand, T. Hamel and H Piet-Lahanier, Performance Improvement of an Adaptive Controller using Model Predictive Control : Application to an UAV Model, *4th IFAC Symposium on Mechatronic Systems*, Heidelberg, Germany, 2006.
- [6] S. Bertrand, T. Hamel and H. Piet-Lahanier, Stabilization of a Small Unmanned Aerial Vehicle Model without Velocity Measurement, in *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp 724-729, Roma, Italy.
- [7] S. Bertrand, T. Hamel and H. Piet-Lahanier, Trajectory Tracking of an Unmanned Aerial Vehicle Model using Partial State Feedback, *European Control Conference 2007*, Kos, Greece, 2007.
- [8] S. Bertrand, T. Hamel and H. Piet-Lahanier, Stability Analysis of an UAV Controller using Singular Perturbation Theory, submitted to the *17th IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [9] S. Bertrand, H. Piet-Lahanier and T. Hamel, Contractive Model Predictive Control of an Unmanned Aerial Vehicle Model, *17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Toulouse, France, 2007.
- [10] S. Bertrand, H. Piet-Lahanier, T. Hamel and C. Le Tallec, Obstacle Avoidance for an Unmanned Aerial Vehicle using Model Predictive Control, *2nd European Conference for Aero-Space Sciences*, Brussels, Belgium, 2007.
- [11] L. T. Biegler, Advances in Nonlinear Programming Concepts for Process Control, in *Journal of Process Control*, 8 :5, pp 301-311, 1998.
- [12] R. R. Bitmead, M. Gevers and V. Wertz, *Adaptive Optimal Control : The Thinking Man's GPC*, Prentice Hall, 1990.

- [13] S. Bouabdallah, A. Noth and R. Siegwart, PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor, in *Proceedings of the IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 3, pp 2451-2456, Sendai, Japan, 2004.
- [14] S. Bouabdallah and R. Siegwart, Backstepping and Sliding-Mode Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor, in *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp 2259-2264, Barcelona, Spain, 2005.
- [15] A. Budiyo and S. S. Wibowo, Optimal Tracking Controller Design for A Small Scale Helicopter, in *Proceeding ITB*, 2005.
- [16] T. Burg, D. Dawson, J. Hu and M. de Queiroz, An Adaptive Partial State-Feedback Controller for RLED Robot Manipulators, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :7, pp 1024-1030, 1996.
- [17] T. Burg, D. Dawson and P. Vedagarbha, A Redesigned DCAL Controller without Velocity Measurements : Theory and Demonstration, in *Robotica*, 15, pp 337-346, 1997.
- [18] A. J. Calise, Singular Perturbation Methods for Variational Problems in Aircraft Flight, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21 :3, pp 345-353, 1976.
- [19] P. Castillo, A. Dzul and R. Lozano, Real-Time Stabilization and Tracking of a Four-Rotor Mini Rotorcraft, in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 12 :4, pp 510-516, 2004.
- [20] A. Chemori, *Quelques contributions à la commande non linéaire des robots marcheurs bipèdes sous-actionnés*, PhD Thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2005.
- [21] A. Chemori and N. Marchand, A Prediction Based Controller for Stabilization of a Non-minimum Phase PVTOL Aircraft, *IFAC Workshop on Model Predictive Control for Fast Systems*, Grenoble, France, 2006.
- [22] H. Chen and F. Allgöwer, A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability, in *Automatica*, 34 :10, pp 1205-1217, 1998.
- [23] T. Cheviron, A. Chriette and F. Plestan, Robust Control of an Autonomous Reduced Scale Helicopter in Presence of Wind Gusts, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Keystone, USA, 2006.
- [24] L. Chisci, A. Lombardi and E. Mosca, Dual-Receding Horizon Control of Constrained Discrete Time Systems, in *European Journal of Control*, 2 :4, pp 278-285, 1996.
- [25] A. Chriette, *Contribution à la commande et à la modélisation des hélicoptères : Asservisement visuel et commande adaptative*, Phd Thesis, Université d'Evry - Val d'Essonne, 2001.
- [26] D. W. Clarke, C. Mothadi and P. S. Tuffs, Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm, in *Automatica*, 23 :2, pp 137-148, 1987.
- [27] D. W. Clarke, C. Mothadi and P. S. Tuffs, Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations, in *Automatica*, 23 :2, pp 149-160, 1987.
- [28] B. T. Costic, D. M. Dawson, M. S. de Queiroz and V. Kapila, A Quaternion-Based Adaptive Attitude Tracking Controller Without Velocity Measurements, in *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, 3, pp 2424-2429, Sydney, Australia, 2000.
- [29] C. R. Cutler and B. L. Ramaker, Dynamic Matrix Control - A Computer Control Algorithm, in *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference*, San Fransisco, USA, 1980.

- [30] S. L. De Oliveira Kothare and M. Morari, Contractive Model Predictive Control for Constrained Nonlinear Systems, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45 :6, pp 1053-1071, 2000.
- [31] W. E. Dixon, E. Zergeroglu, D. M. Dawson and M. W. Hannan, Global Adaptive Partial State Feedback Tracking Control of Rigid-Link Flexible-Joints Robots, in *Robotica*, 18, pp 325-336, 2000.
- [32] K. D. Do, Z. P. Jiang and J. Pan, On Global Tracking Control of a VTOL Aircraft without Velocity Measurements, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 48 :12, pp 2212-2217, 2003.
- [33] A. Dzul, T. Hamel and R. Lozano, Modélisation et Commande Non Linéaire pour un Hélicoptère Birotor Coaxial, in *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 37 :10, pp 1277-1295, 2003.
- [34] A. Dzul, R. Lozano and P. Castillo, Adaptive Control for a Radio-Controlled Helicopter in a Vertical Flying Stand, in *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 18, pp 473-485, 2004.
- [35] S. Esteban, J. Aracil and F. Gordillo, Three-Time Scale Singular Perturbation Control for a Radio-Control Helicopter on a Platform, *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit*, San Fransisco, USA, 2005.
- [36] S. Esteban, F. Gordillo and J. Aracil, Lyapunov Based Stability Analysis of a Three-Time Scale Model for a Helicopter on a Platform, *17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Toulouse, France, 2007.
- [37] R. Findeisen and F. Allgöwer, An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control, *21st Benelux Meeting on Systems and Control*, Veldhoven, Belgium, 2002.
- [38] R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgöwer and B. A. Foss, State and Output Feedback Nonlinear Model Predictive Control : An Overview, in *European Journal of Control*, 9 :2-3, pp 190-207, 2003.
- [39] F. A. C. C. Fontes, Overview of Nonlinear Model Predictive Control Schemes Leading to Stability, *4th Portuguese Conference on Automatic Control*, Guimarães, Portugal, 2000.
- [40] R. Franz, M. Milam and J. Hauser, Applied Receding Horizon Control of the Caltech Ducted Fan, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp 3735-3740, Anchorage, USA, 2002.
- [41] E. Frazzoli, M.A. Dahleh and E. Feron, Trajectory Tracking Control Design for Autonomous Helicopters using a Backstepping Algorithm, *2000 American Control Conference*, Chicago, USA, 2000.
- [42] R. Freeman and P. Kokotovic, Optimal Nonlinear Controllers for Feedback Linearizable Systems, in *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, pp 2722-2726, Seattle, USA, 1995.
- [43] C. E. Garcia, D. M. Prett and M. Morari, Model Predictive Control : Theory and Practice - a Survey, in *Automatica*, 25 :3, pp 335-348, 1989.
- [44] V. Gavrillets, B. Mettler and E. Feron, Dynamic Model for a Miniature Aerobatic Helicopter, MIT-LIDS report no. LIDS-P-2580, 2003.
- [45] B. R. Geiger, J. F. Horn, A. M. DeLullo and L. N. Long, Optimal Path Planning of UAVs using Direct Collocation with Nonlinear Programming, *2006 AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Keyston, USA, 2006.

- [46] N. Guenard, T. Hamel and L. Eck, Control Laws for the Tele Operation of an Unmanned Aerial Vehicle known as an X4-Flyer, in *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp 3249-3254, Beijing, China, 2006.
- [47] N. Guenard, T. Hamel and V. Moreau, Dynamic Modeling and Intuitive Control Strategy for an "X4-Flyer", *5th International Conference on Control and Automation*, Budapest, Hungary, 2005.
- [48] M. Guisser, H. Medromi, J. Saadi and H. Ifassiouen, Stabilization and Trajectory Tracking in Discrete-Time of an Autonomous Four Rotor Mini-Rotorcraft, *Second International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*, Marrakech, Morocco, 2006.
- [49] T. Hamel and R. Mahony, Pure 2D Visual Control for a Class of Under-Actuated Dynamic Systems, *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, New Orleans, USA, 2004.
- [50] T. Hamel and R. Mahony, Image Based Visual Servo-Control for a Class of Aerial Robotic Systems, *Automatica* 2007, doi :10.1016/j.automatica.2007.03.030.
- [51] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano and J. Ostrowski, Dynamic Modelling and Configuration Stabilization for an X4-Flyer, *15th Triennial IFAC World Congress*, Barcelona, Spain, 2002.
- [52] J. Hauser, S. Sastry and G. Meyer, Nonlinear Control Design for Slightly Nonminimum Phase Systems : Application to V/STOL Aircraft, in *Automatica*, 28 :4, pp 665-679, 1992.
- [53] M. W. Heiges, P. K. Menon and D. P. Schrage, Synthesis of a Helicopter Full Authority Controller, in *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, pp 207-213, Boston, USA, 1989.
- [54] S. A. Heise and J. M. Maciejowski, Model Predictive Control of a Supermaneuverable Aircraft, *AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, San Diego, USA, 1996.
- [55] A. Jadbabaie, J. Yu and J. Hauser, Stabilizing Receding Horizon Control of Nonlinear Systems : A Control Lyapunov Function Approach, *American Control Conference*, San Diego, USA, 1999.
- [56] A. Jadbabaie, J. Yu and J. Hauser, Receding Horizon Control of the Caltech Ducted Fan : A Control Lyapunov Function Approach, *IEEE Conference on Control Applications*, Hawaiï, USA, 1999.
- [57] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 1st Edition, Macmillan, 1992.
- [58] Kim H. J. and Shim D. H. A Flight Control System for Aerial Robots : Algorithms and Experiments, in *Control Engineering Practice*, 11, pp 1389-1400, 2003.
- [59] H. J. Kim, D. H. Shim and S. Sastry, Nonlinear Model Predictive Tracking Control for Rotorcraft-based Unmanned Aerial Vehicles, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp 3576-3581, Anchorage, USA, 2002.
- [60] S. S. Keerthi and E. G. Gilbert, Optimal Infinite-Horizon Feedback Laws for a General Class of Constrained Discrete-Time Systems : Stability and Moving-Horizon Approximations, in *Journal of Optimization Theory and Applications*, 57 :2, pp 265-293, 1988.
- [61] T. Keviczky and G. J. Balas, Flight Test of a Receding Horizon Controller for Autonomous UAV Guidance, *2005 American Control Conference*, Portland, USA, 2005.

- [62] P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reily, *Singular Perturbation Methods in Control : Analysis and Design*, Academom Press, 1986.
- [63] K. Kondak, M. Bernard, N. Meyer and G. Hommel, Autonomously Flying VTOL-Robots : Modeling and Control, in *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp 736-741, Roma, Italy, 2007.
- [64] T. J. Koo and S. Sastry, Output Tracking Control Design of a Helicopter Model Based on Approximate Linearization, in *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida, USA, 1998.
- [65] N. Kundak and B. Mettler, Experimental Framework for Evaluating Autonomous Guidance and Control Algorithms for Agile Aerial Vehicles, in *Proceedings of the European Control Conference 2007*, pp 293-300, Kos, Greece, 2007.
- [66] D. Limon, T. Alamo and E. F. Camacho, Robust MPC Control Based on a Contractive Sequence of Sets, in *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*, pp 3706-3711, Maui, Hawaii, USA, 2003.
- [67] D. Limon, T. Alamo and E. F. Camacho, Enlarging the Domain of Attraction of MPC Controllers, in *Automatica*, 41 :4, pp 629-635, 2005.
- [68] F. Lizarralde and J. T. Wen, Attitude Control without Angular Velocity Measurement : A Passivity Approach, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :3, pp 468-472, 1996.
- [69] J. Löfberg, Nonlinear Receding Horizon Control : Stability without Stabilizing Constraints, *European Control Conference Porto*, Portugal, 2001.
- [70] J. Löfberg, *Minmax Approaches to Robust Model Predictive Control*, PhD Thesis, Linköping Unversity, 2003.
- [71] P. Lu, Constrained Tracking Control of Nonlinear Systems, in *System and Control Letters*, 27 :5, pp 305-314, 1997.
- [72] P. Lu and B. L. Pierson, Aircraft Terrain Following Based on a Nonlinear Continuous Predictive Control Approach, in *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18 :4, pp 817-823, 1995.
- [73] L. MAgni, G. De Nicolao, L. Magnani and R. Scattolini, A Stabilizing Model-Based Predictive Control Algorithm for Nonlinear Systems, in *Automatica*, 37 :9, pp 1351-1362, 2001.
- [74] R. Mahony and T. Hamel, Robust Trajectory Tracking for a Scale Model Autonomous Helicopter, in *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 14, pp 1035-1059, 2004.
- [75] R. Mahony, T. Hamel and A. Dzul, Hover Control via Approximate Lyapunov Control for a Model Helicopter, in *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 533-534, Phoenix, USA, 1999.
- [76] R. Mahony and T. Hamel, Adaptive Compensation of Aerodynamic Effects during Takeoff and Landing Manoeuvres for a Scale Model Autonomous Helicopter, in *European Journal of Control*, 7 :1, pp 43-58, 2001.
- [77] P. Martin, S. Devasia and B. Paden, A Different Look at Output Tracking : Control of a VTOL Aircraft, in *Automatica*, 32 :1, pp 101-107, 1996.

- [78] A. Martini, F. Leonard and G. Abba, Suvi Robuste de Trajectoires d'un Hélicoptère Drone sous Rafale de Vent, *Conférence Internationale Francophone d'Automatique 2006*, Bordeaux, France, 2006.
- [79] F. Martinsen, L. T. Biegler and B. A. Foss, A New Optimization Algorithm with Application to Nonlinear MPC, in *Journal of Process Control*, 14, pp 853-865, 2004.
- [80] D. Q. Mayne and H. Michalska, Receding Horizon Control of Nonlinear Systems, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 35 :7, pp 814-824, 1990.
- [81] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, P. O. M. Scokaert, Constrained Model Predictive Control : Stability and Optimality, in *Automatica*, 36 :6, pp 789-814, 2000.
- [82] E. S. Meadows and J. B. Rawlings, Receding Horizon Control with an Infinite Horizon, in *Proceedings of the American Control Conference*, pp 2926-2930, San Fransisco, USA, 1993.
- [83] H. Michalska and D. Q. Mayne, Robust Receding Horizon Control of Constrained Nonlinear Systems, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38 :11, pp1623-1633, 1993.
- [84] D. S. Naidu and A. J. Calise, Singular Perturbations and Time Scales in Guidance and Control of Aerospace Systems : A Survey, in *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24 :6, pp 1057-1078, 2001.
- [85] C. E. Njaka and P. K. Menon, Towards an Advanced Nonlinear Rotorcraft Flight Control System Design, *13th AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference*, Phoenix, USA, 1994.
- [86] A. Ollero and L. Merino, Control and Perception Techniques for Aerial Robots, in *Annual Reviews in Control*, 28, pp 167-178, 2004.
- [87] J. M. Pflimlin, P. Binetti, D. Trouchet, P. Souères and T. Hamel, Aerodynamic Modeling and Practical Attitude Stabilization of a Ducted Fan UAV, in *Proceedings of the European Control Conference 2007*, pp 4023-4029, Kos, Greece, 2007.
- [88] J. M. Pflimlin, T. Hamel, P. Souères and R. Mahony, A Hierarchical Control Strategy for the Autonomous Navigation of a ducted fan VTOL UAV, *2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, USA, 2006.
- [89] J. M. Pflimlin, P. Soères and T. Hamel, Hovering Flight Stabilization in Wind Gusts for a Ducted Fan UAV, in *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*, pp 3491-3496, Paradise Island, Bahamas, 2004.
- [90] P. Pounds, R. Mahony, J. Gresham, P. Corke and J. Roberts, Towards Dynamically-Favourable Quad-Rotor Aerial Robots, *Australian Conference on Robotics and Automation*, Canberra, Australia, 2004.
- [91] J. A. Primbs, *Nonlinear Optimal Control : A Receding Horizon Approach*, PhD Thesis, California Institue of Technology, 1999.
- [92] J. A. Primbs, V. Nevistic and J. C. Doyle, Nonlinear Optimal Control : A Control Lyapunov Function and Receding Horizon Perspective, in *Asian Journal of Control*, 1 :1, pp 14-24, 1999.
- [93] A. I. Propoi, Use of Linear Programming Methods for Synthesizing Sampled-Data Automatic Systmes, in *Automatic Remote Control*, 24 :7, pp 837-844, 1963.
- [94] R. W. Prouty, *Helicopter Performance, Stabiltiy and Control*, Lavoisier, 2002.

- [95] J. G. Reid, Output Predictive Algorithmic Control : Precision Tracking with Application to Terrain Following, in *Journal of Guidance and Control*, 4 :5, pp 502-509, 1981.
- [96] J. Richalet, *Pratique de la Commande Prédicative*, Hermès, 1993.
- [97] J. Richalet, A. Rault, J. L. Testud and J. Papon, Model Predictive Heuristic Control - Applications to Industrial Processes, in *Automatica*, 14 :5, pp 413-428, 1978.
- [98] J. A. Rossiter, *Model-Based Predictive Control : A Practical Approach*, CRC Press, 2003.
- [99] D. Rontani and H. Siguerdidjane, Robust Flatness Based Control and Motion Planning of a UAV, *17th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace*, Toulouse, France, 2007.
- [100] A. Saberi and H. Khalil, Quadratic-Type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29 :6, pp 542-550, 1984.
- [101] S. Scherer, S. Singh S., L. Chamberlain and S. Saripalli, Flying Fast and Low Among Obstacles, *2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Roma, Italy, 2007.
- [102] D. H. Shim, Autonomous Exploration in Unknown Urban Environments for Unmanned Aerial Vehicles, *2nd International Symposium on Innovative Aerial/Space Flyer Systems*, Tokyo, Japan, 2005.
- [103] H. Shim, T. J. Koo, F. Hoffman and S. Sastry, A Comprehensive Study of Control Design for an Autonomous Helicopter, in *Proceedings of the 37th Conference on Decision and Control*, 4, pp 3653-3658, Tampa, USA, 1998.
- [104] P. O. M. Scokaert, D. Q. Mayne and J. B. Rawlings, Suboptimal Model Predictive Control (Feasibility Implies Stability), in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44 :3, pp 648-654, 1999.
- [105] P. O. M. Scokaert, J. B. Rawlings and E. S. Meadows, Discrete-Time Stability with Perturbations : Application to Model Predictive Control, in *Automatica*, 33 :3, pp 463-470, 1997.
- [106] L. Singh and J. Fuller, Trajectory Generation for a UAV in Urban Terrain, using Nonlinear MPC, in *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, 3, pp2301-2308, 2001.
- [107] A. Tayebi, Attitude Tracking of a Rigid Spacecraft without Velocity Measurement, *26th American Control Conference*, New York City, USA, 2007.
- [108] A. Tayebi and S. McGilvray, Attitude Stabilization of a VTOL Quadrotor Aircraft, in *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 14 :3, pp 562-571, 2006.
- [109] P. Tsiotras, Further Passivity Results for the Attitude Control Problem, in *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43 :11, pp 1597-1600, 1998.
- [110] M. Valenti, B. Bethke, G. Fiore, J. P. How and E. Feron, Indoor Multi-Vehicle Flight Testbed for Fault Detection, Isolation, and Recovery, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, Keystone, USA, 2006.
- [111] M. J. Van Nieuwstadt and R. M. Murray, Real-Time Trajectory Generation for Differentially Flat Systems, in *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 8 :11, pp 995-1020, 1998.

-
- [112] S. L. Waslander, G. Hoffmann, J. S. Jang and C. J. Tomlin, Multi-Agent X4-Flyer Testbed Control Design : Integral Sliding Mode vs. Reinforcement Learning, in *2005 IEEE/RSL International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Edmonton, Canada, 2005.
- [113] H. Wong, M. S. de Queiroz and V. Kapila, Adaptive Tracking Control Using Synthesized Velocity from Attitude Measurements, in *Proceedings of the American Control Conference*, 3, pp. 1572-1576, Chicago, USA, 2000.
- [114] R. Wood, R. Mahony and B. Cazzolato, High Performance Control for Trajectory Tracking of Symmetric VTOL Vehicles with Significant Aerodynamic Effects, in *Proceedings of the European Control Conference 2007*, pp 3399-3406, Kos, Greece, 2007.
- [115] T. H. Yang and E. Polak, Moving Horizon Control of Linear Systems with Input Saturation and Plant Uncertainty. Part 1. Robustness, in *International Journal of Control*, 58 :3, pp 613-638, 1993.
- [116] T. H. Yang and E. Polak, Moving Horizon Control of Linear Systems with Input Saturation and Plant Uncertainty. Part 2. Disturbance Rejection and Tracking, in *International Journal of Control*, 58 :3, pp 639-663, 1993.
- [117] T. H. Yang and E. Polak, Moving Horizon Control of Nonlinear Systems with Input Saturation, Disturbances and Plant Uncertainty, in *International Journal of Control*, 58 :4, pp 875-903, 1993.

RESUME

L'utilisation de drones miniatures à voilure tournante est limitée par leur grande sensibilité face aux perturbations aérologiques. Cette particularité, ajoutée à la non linéarité de leur dynamique, rend complexe le développement de lois de commande pour de tels véhicules. Afin de permettre une automatisation de leur vol en tenant compte de ces difficultés, deux classes d'approches pour la synthèse de lois de commande sont étudiées dans cette thèse : la commande prédictive, puis la synthèse de lois de commande non linéaires via une analyse par fonctions de Lyapunov dans le cas où les vitesses du véhicule ne sont pas mesurées.

Des contrôleurs de nature prédictive ont été proposés dans la littérature, mais sans considérer simultanément un modèle suffisamment représentatif de la dynamique d'un drone miniature à voilure tournante et une approche de commande garantissant la stabilité. A ce titre, nous proposons ici plusieurs algorithmes de commande prédictive ainsi que leur adaptation au développement de lois de guidage-pilotage de drone en considérant un modèle non linéaire à six degrés de liberté et en réalisant conjointement une analyse de la stabilité. Plusieurs applications sont présentées : stabilisation autour d'un point fixe, suivi de trajectoire en présence ou non de perturbations, évitement d'obstacles.

Lors de certaines utilisations pratiques ou expérimentales d'un drone miniature, les mesures en vitesses du véhicule ne sont pas toujours disponibles. Des techniques de commande avec accès partiel à l'état ou utilisant des observateurs peuvent être alors appliquées. Afin de concilier ces deux classes d'approches, et d'obtenir simultanément de bonnes performances du système bouclé et une réduction de la complexité de la méthode utilisée (temps de calcul, analyse de la stabilité), nous proposons ici une méthode de synthèse de lois de commandes via une analyse par fonctions de Lyapunov. Cette méthode est basée sur l'introduction d'états virtuels au sein de la dynamique du système.

Notre contribution réside également dans l'analyse de la stabilité, par la théorie des perturbations singulières, d'une approche de commande hiérarchique permettant la synthèse successive des lois de commande en position et en attitude.

Mots clefs :

Drones miniatures à voilure tournante, commande hiérarchique, guidage-pilotage, commande prédictive non linéaire, commande adaptative, commande avec accès partiel à l'état, perturbations singulières.