N° d'ordre: D.U. 1667

UNIVERSITE BLAISE PASCAL

U.F.R Sciences et Technonologies

ECOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES N° 493

THESE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

Spécialité: *Mathématiques*

Par **TANGARA Fana**

D.E.A

TITRE:

BASES ORTHONORMALES ET CALCUL OMBRAL EN ANALYSE p-ADIQUE

Soutenue publiquement le 04 septembre 2006, devant la commission d'examen:

Jury

Daouda SANGARÉ, Président
Bertin DIARRA, codirecteur
Niamanto DIARRA, codirecteur
Alain ESCASSUT
Alain SALINIER
Gaoussou TRAORE

Rapporteurs:

Jesús ARAUJO
Alain SALINIER

À TANGARA Néma GUINDO

REMERCIEMENTS

Le travail que je présente ici doit sa réalisation à un certain nombre d'institutions et de personnes que je tiens à remercier:

- L'Ambassade de France à Bamako (Service de Coopération et d'Action Culturelle)
- L'Université de Bamako (Institut Supérieur de Formation et Recherche Appliquée & Faculté des Sciences et Techniques)
- L'Université Blaise Pascal (Université Clermont Ferrand II)
- Le programme TOKTEN (Transfer Of Knowledge Through Expatriate Nationals) - MALI

Toutes ces institutions qui, à plusieurs niveaux ont permis l'acquisition de ma bourse, voudront bien trouver dans ces quelques lignes mes remerciements, car sans elles, ce travail n'aurait pas progressé au rythme soutenu qu'il a eu.

Je remercie particulièrement les professeurs Bertin et Niamanto DIARRA qui ont bien voulu se charger de la direction de ce travail.

Le sens aigu du travail bien fait du professeur Bertin DIARRA et son intuition mathématique m'ont permis de mener à bien ce travail. Il n'a cessé d'être pour moi une source d'idées et de soutiens moraux permanents. Qu'il me soit permis d'adresser à lui et à toute sa famille ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Je dois mon orientation vers la recherche au professeur Niamanto DIARRA. Il m'a toujours progigué ses conseils depuis la maîtrise jusqu'à la fin de cette thèse en passant par le DEA.

Je remercie le professeur Daouda SANGARÉ d'avoir accepté de présider ce jury. Il est l'initiateur de notre DEA et les formations doctorales en mathématiques au niveau de l'Université de Bamako. Ses conseils et encouragements ne m'ont jamais fait défaut.

Je suis très sensible à l'honneur que m'ont fait les professeurs Jesús ARAUJO et Alain SALINIER d'avoir accepté cette tâche ingrate d'être rapporteur. Je les remercie pour leurs remarques et suggestions.

J'exprime également toute ma gratitude aux professeurs Alain ESCASSUT et Gaoussou TRAORÉ d'avoir accepté de participer à ce jury.

Je remercie les professeur Youcef AMIRAT et Bernard SARAMITO, Madame Noelle ROUGANNE pour leur soutient constant. Je remercie tout le personnel du laboratoire de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal.

Les membres de Synergies Manden et les ressortissants maliens de Clermont-Ferrand m'ont rendu agréable le séjour clermontois. Qu'ils trouvent ici ma profonde gratitude.

Que tous les membres du Département de Mathématiques et d'Informatique de la FAST et ceux du Département de Mathématiques de l'ENSUP trouvent ici toute ma reconnaissance. Je remercie particulièrement le chef de département du DER Math-Info de la FAST, Monsieur Ouateni Diallo pour ses conseils et encouragements.

Je suis très reconnaissant envers feu Pasteur Kassim Kéita et sa femme, feue Kouta Kéita pour tout ce qu'ils ont fait pour moi. J'adresse ici mes condoléances et reconnaissances à leurs enfants.

Qu'il me soit permis d'exprimer ma gratitude à tous mes amis et compagnons de thèse: Monzon TRAORÉ, Bocar TOURÉ, Sagaïdou Mohamed LAMINE, Aïsata ADAMA, Dr Mamadou SY, Dr Fabrice BLACHE, Mathieu GOURCY, Dr Liangzhen LEI, Ingrid VIOLET, Remy SART, Malcom DJENNO, Hamid BADI, Dr Benoit TESTUD, Aubin BERANGER.

Ma dette vis à vis de mes parents et amis est très grande. Je remercie particulirement mon oncle Jean TANGARA, mes frères Pst Daniel TANGARA, Pst Daouda TANGARA et Joseph TANGARA, mon beau frère Elie GUINDO et mon ami Job DEMBELE.

Je ne saurais terminer sans remercier ma très chère épouse pour son amour, son soutien, sa patience et sa sagesse.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soient p un nombre premier, $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K munie de la norme de la convergence uniforme. En 1958 K. Mahler construit une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, formée des fonctions binomiales B_n, telles que $B_0 = 1$ et $B_n(x) = \dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$, $\forall n \geq 1$. Toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ s'écrit de façon unique comme série uniformément convergente $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n B_n$, $a_n \in K$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ [25] (voir aussi [26]). Ce développement en série est appelé développement de Mahler de f.

En 1990, L. Van Hamme retrouve la description des opérateurs linéaires continus sur l'algèbre des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K, qui commutent avec l'opérateur de translation τ_1 défini par $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$ [46]. Ces opérateurs ne sont autres que les opérateurs aux différences. L. Van Hamme utilise ces opérateurs pour construire de nouvelles bases de l'algèbre des fonctions continues de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Considérons V_q, le sous-groupe compact multiplicatif du groupe des unités U_p de $\mathbb{Z}_p$ engendré par q, où q est un élément de U_p non racine de l'unité. Soit $\mathcal{C}(V_q, K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de V_q à valeurs dans K munie de la norme de la convergence uniforme. A. Verdoodt continue les travaux de L. Van Hamme, en remplaçant le groupe $\mathbb{Z}_p$ par le sous-groupe V_q de U_p et l'opérateur de translation par les opérateurs T_q ou D_q, où T_q et D_q sont définis respectivement par $T_q(f)(s) = f(qs)$ et $D_q(f)(s) = \dfrac{f(qs) - f(s)}{qs - q}$ [53]. Ainsi, en 1994, elle donne une description des opérateurs qui commutent avec T_q (resp. avec D_q). Comme L. Van Hamme, elle utilise ces opérateurs pour construire de nouvelles bases orthonormales de $\mathcal{C}(V_q, K)$ [51] (voir aussi [53]).

En prenant un élément $q \in K$ tel que $|q-1| < 1$, K. Conrad donne un q-développement analogue à celui de K. Mahler. Plus précisément, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n C_{n,q}(x)$, avec $a_n \in K$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et

$C_{n,q}(x) = \dbinom{x}{n}_q = \dfrac{(q^x - 1)\dots(q^{x-n+1} - 1)}{(q^n - 1)\dots(q-1)}$, lorsque q est non racine de l'unité et où

$q^x = \sum_{n\geq 0}(q-1)^n B_n(x)$ [4]. Ce développement est appelé **q-développement de Mahler** et la suite $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est appelé **q-base de Mahler**. Nous replaçons cet article de K. Conrad dans la perspective des travaux de L. Van Hamme [44] et de A. Verdoodt [51] sur l'espace $\mathcal{C}(V_q, K)$ des fonctions continues de V_q à valeurs dans K où, cette fois-ci, V_q est le sous-groupe du groupe des unités de K engendré par q.

Nous allons nous interesser à plusieurs espaces d'endomorphismes linéaires continus de l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Ces espaces sont construits à partir de certains opérateurs de "base" dans l'algèbre de Banach $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, comme les opérateurs aux q-différences $\Delta_q^{(n)}$ et la q-dérivation de Jackson ∇_q. Les $\Delta_q^{(n)}$ sont définis par $\Delta = \Delta_q^{(1)} = \tau_1 - id$, $\Delta_q^{(n)} = (\tau_1 - id)\circ(\tau_1 - qid)\circ\cdots\circ(\tau_1 - q^{n-1}id)$, pour $n \geq 1$ et $\Delta_q^{(0)} = id$.
La q-dérivation de Jackson ∇_q est quant à elle définie en posant pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, $\nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(q-1)q^x}$ et les puissances de ∇_q par $\nabla_q^n = \nabla_q \circ \nabla_q^{n-1}$, $\forall n \geq 1$ et $\nabla_q^0 = id$.
On a l'opérateur Z_q de multiplication par q^x défini par $Z_q(f)(x) = q^x f(x)$ et ses itérés, $Z_q^n = Z_q \circ Z_q^{n-1}$. Alors, par substitution, on a $Q_n(Z_q) = \dfrac{(Z_q - id)\dots(Z_q - q^{n-1}id)}{(q^n-1)\dots(q^n - q^{n-1})}$, $\forall n \geq 1$ et $Q_0(Z_q) = id$, les Q_n étant les polynômes $Q_n(s) = \dfrac{(s-1)\dots(s-q^{n-1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})}$, pour $n \geq 1$, $Q_0(s) = 1$.

On désigne par $W(\mathbb{Z}_p, K)$ le commutant de τ_1 dans $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$: Q est un élément de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ si et seulement si $Q \circ \tau_1 = \tau_1 \circ Q$. C'est une sous-algèbre fermée unitaire de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$. Ses éléments sont appelés opérateurs aux différences finies. La norme de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ est donnée par $\|Q\| = \sup_{\|f\|\neq 0} \dfrac{\|Q(f)\|}{\|f\|}$, pour tout $Q \in L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$.
Rappelons que tout opérateur $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ s'écrit sous forme d'une série simplement uniformément convergente $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n$, en d'autres termes pour toute fonction continue f, la série $\sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n(f)$ converge uniformément et $Q(f) = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n(f)$, avec $\sup_{n\geq 0} |b_n| < +\infty$ et l'on montre que $\|Q\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|$ [7]. De la même manière, tout opérateur $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ peut se mettre sous forme d'une série $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta_q^{(n)}$, telle que pour toute fonction continue f, la série $\sum_{n\geq 0} b_n \Delta_q^{(n)}(f)$ converge uniformément, $b_n \in K$ et $Q(f) = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta_q^{(n)}(f)$; de plus $\|Q\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|$.

On désigne aussi par $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ le commutant de ∇_q dans $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$. Les éléments de $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ sont appelés opérateurs de Jackson . Tout élément $R \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ peut s'écrire sous forme d'une série $R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n$, telle que pour toute fonction continue f, la série $\sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n(f)$ converge uniformément, $b_n \in K$ et $R(f) = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n(f)$; de plus $\|R\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|\,|q-1|^{-n}$.

Soit $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ la sous-algèbre fermée de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q. Les éléments de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ sont les opérateurs de multiplication par une fonction continue. On voit que pour tout entier positif n, $Q_n(Z_q)$ est l'opérateur de multiplication par la fonction continue $C_{n,q}$, où $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est la q-base de Mahler. On montre que tout élément R de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ s'écrit sous forme de série simplement uniformément convergente $R = \sum_{n\geq 0} b_n Q_n(Z_q)$, avec $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ et $\|R\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|$. En d'autres termes, la suite $(Q_n(Z_q))_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Ecrit sous cette forme, l'opérateur R est l'opérateur de multiplication par la fonction continue $\sum_{n\geq 0} b_n C_{n,q}$. On a $R(C_{0,q}) = \sum_{n\geq 0} b_n C_{n,q}$. En fait $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Associons à tout élément $q \in K$, **non racine de l'unité**, tel que $|q-1| < 1$, l'application $\varepsilon_q : \mathbb{Z}_p \longrightarrow V_q$ définie par $\varepsilon_q(x) = q^x$. C'est un isomorphisme topologique de groupes compacts totalement discontinus. Il vient que l'application $\widetilde{\varepsilon_q}$ de $\mathcal{C}(V_q, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, définie en posant, pour $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $\widetilde{\varepsilon_q}(g) = g \circ \varepsilon_q$, est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach. Il envoie donc toute base orthonormale (resp. orthogonale) de $\mathcal{C}(V_q, K)$ sur une base orthonormale (resp. orthogonale) de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. En particulier, il envoie la base de Van Hamme $(Q_n)_{n\geq 0}$ sur la base orthonormale $(Q_n \circ \varepsilon_q)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, les éléments Q_n de cette base étant définis par $Q_n(s) = \dfrac{(s-1)\ldots(s-q^{n-1})}{(q^n-1)\ldots(q^n-q^{n-1})}$, $\forall n \geq 0$. Cette base $(Q_n \circ \varepsilon_q)_{n\geq 0}$ n'est autre que la base $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ donnée par K. Conrad dans [4]. Ce qui nous permet, au Chapitre 1, de faire le lien entre les travaux de K. Conrad et ceux de L. Van Hamme et A. Verdoodt.

Soit $q \in K$, **non racine de l'unité**, tel que $|q-1| < 1$. Les fonctions $x \longrightarrow q^{jx}$ sont linéairement indépendantes, ce qui est une conséquence du Lemme 1.0.7. Nous appelons **q-polynôme de q-degré** n, toute fonction $h \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ pouvant s'écrire sous la forme $h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q^{jx}$, avec $a_n \neq 0$ et **suite q-polynomiale**, toute suite de q-polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ tels que pour tout $n \geq 0$, h_n est **de q-degré** n et $h_0 = 1$.

Nous allons, comme dans le calcul ombral classique, établir une correspondance bijective entre la classe de suites q-polynomiales $(h_n)_{n\geq 0}$, telles que $h_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_s(x)h_{n-s}(y)$, $\forall n \geq\ 0$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$, qui sont des bases orthonormales de l'algèbre des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et la classe d'opérateurs linéaires $Q = \sum_{i\geq 1} b_i\Delta_q^{(i)}$, tels que $\|Q\| = |b_1| = 1$ (voir le corollaire 1 du Théorème 2.1.7).
De même, nous établissons une correspondance bijective entre une classe de suites q-polynomiales, qui sont des bases orthogonales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et la classe d'opérateurs linéaires $R = \sum_{i\geq 1} b_i\nabla_q^i$, tels que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$ (voir le corollaire du Théorème 2.2.3).

Soit $q \in K$, **non racine de l'unité**, tel que $|q-1| < 1$. La relation de commutation $\nabla_q\tau_1 = q\tau_1\nabla_q$ nous permet de réaliser le *plan quantique* à deux générateurs, sous une forme concrète d'une algèbre d'opérateurs qu'on note $\mathcal{P}_q$. La famille $(\tau_1^i\nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une base du K-espace vectoriel $\mathcal{P}_q$. En désignant par $\mathcal{P}_q^{(n)}$ le sous-espace de $\mathcal{P}_q$ engendré par les éléments homogènes de degrés n, on obtient une graduation sur $\mathcal{P}_q$. La famille $(\tau_1^i\nabla_q^{n-i})_{0\leq i\leq n}$ est une base orthogonale de $\mathcal{P}_q^{(n)}$. Soit $R = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \tau_1^i\nabla_q^i$ un élément de $\mathcal{P}_q$, pour tout q-polynôme h_n de q-degré n, $R(h_n)$ est de q-degré $\leq n$. En d'autres termes, l'espace des q-polynômes est invariant par $\mathcal{P}_q$. On montre que l'espace des fonctions strictement différentiables et celui des fonctions continues restrictions de fonctions analytiques sont invariants par tout élément R de $\mathcal{P}_q$.
On obtient également la règle de commutation $\nabla_q Z_q = qZ_q\nabla_q + id$. Ce qui nous permet d'avoir une réalisation concrète $\mathcal{A}_q$ de l'*algèbre de Weyl quantique* à deux générateurs comme espace d'opérateurs linéaires continus. La famille $\Big(Q_i(Z_q)\nabla_q^j\Big)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une famille orthogonale dans $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$. On obtient alors une description, sous forme de séries convergentes, de la sous-algèbre fermée de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q et ∇_q.

Des conditions portant sur les coefficients du développement de Mahler, pour qu'une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K, soit strictement différentiable sont bien connues [33]. Si $f = \sum_{n\geq 0} a_nB_n$, $a_n \in K$, est le développement de Mahler de f, alors f est strictement différentiable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} n\,|a_n| = 0$. Nous trouvons, dans le quatrième chapitre, des conditions similaires sur les coefficients du q-développement Mahler pour qu'une fonction $f = \sum_{n\geq 0} b_nC_{n,q} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ soit strictement différentiable sur $\mathbb{Z}_p$, d'abord lorsque q est non racine de l'unité (Théorème 4.1.1), ensuite lorsque q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p (Théorème 4.1.2). Ces conditions sont à comparer avec celle obtenue par A. Verdoodt dans sa thèse [52] (voir aussi [54]). Dans le cas où q est tel que $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient une base orthonormale de l'espace des fonctions strictement différentiables sur $\mathbb{Z}_p$ (voir le corollaire 1 du Théorème 4.1.1). Nous donnons dans la dernière partie de ce chapitre, la somme indéfinie et l'intégrale de Volkenborn des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en fonction du q-développement de Mahler.

La plupart des résultats qui suivent ont été annoncés au Séminaire de Théorie des Nombres et d'Analyse du Laboratoire de Mathématiques de l'Université Blaise Pascal [40], [41], à la 8^e Conférence d'Analyse Fonctionnelle p-adique à Clermont Ferrand du 5 au 9 juillet 2004 [38], à Mali Symposium on Applied Sciences à Bamako du 2 au 5 août 2004 [39] et au Colloque du Réseau Africain de Géométrie et Algèbre Appliquées au Développement du 18 au 25 novembre 2005 à Bamako [41].

La deuxième partie du Chapitre 2 est publiée dans Contemporary Mathematics - Vol. 384 (2005) - p. 335-351 et la première partie sera publiée dans "Journal of Analysis". Une rédaction de la deuxième partie du Chapitre 4 va paraître dans "Afrika Matematika"

Conventions Générales et Notations

Dans toute la suite:
• $\mathbb{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques
• $\mathbb{Q}_p$ est le corps des nombres p-adiques
• K est un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$
• q est un élément de K tel que $|q-1|<1$.
• V_q est l'adhérence de l'ensemble $\{q^n, n\in\mathbb{Z}\}$ dans le groupe des unités U_K de K.
• $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$ est l'algèbre de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K
• $\mathcal{C}(V_q,K)$ est l'algèbre de Banach des fonctions continues de V_q à valeurs dans K.
• $B_n(x)=\dfrac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$.
• $C_{n,q}(x)=C_n(x)=\dbinom{x}{n}_q=\dfrac{(q^x-1)\dots(q^x-q^{n+1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})}$, lorsque q est non racine de l'unité.
• $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)\big)$ est l'algèbre des endomorphismes linéaires continus de l'espace des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K.
• $W(\mathbb{Z}_p,K)$ est l'algèbre des opérateurs aux différences finies.
• $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p,K)$ est l'algèbre des opérateurs de Jackson.
• $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K)$ est l'algèbre des opérateurs de multiplication par une fonction continue, adhérence de la sous-algèbre engendrée par Z_q.
• $\mathcal{P}_q$ est l'algèbre du plan quantique engendrée par τ_1 et ∇_q.
• $\widehat{\mathcal{P}}_q$ est l'adhérence de $\mathcal{P}_q$.
• $\mathcal{A}_q$ est l'algèbre de Weyl quantique engendrée par Z_q et ∇_q et $\widehat{\mathcal{A}}_q$ est l'adhérence de $\mathcal{A}_q$.
• On note Q_1Q_2 la composée $Q_1\circ Q_2$ de deux opérateurs Q_1 et Q_2.
• Par convention on pose $\prod\limits_{\emptyset}=1$ et $\sum\limits_{\emptyset}=0$.
• On dit qu'une suite de polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite polynomiale si $h_0=1$ et pour tout $n\geq 1$, h_n est de degré n.
• Une suite polynomiale $(h_n)_{n\geq 0}$ est dite de type binomial si $h_n(x+y)=\sum\limits_{i+j=n} h_i(x)h_j(y)$, $\forall n\geq 0,\ x,y\in\mathbb{Z}_p$.
• Nous appelons q-polynôme de q-degré n, toute fonction $h\in\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$ pouvant s'écrire sous la forme $h(x)=\sum\limits_{j=0}^{n} a_jq^{jx}$, avec $a_n\neq 0$; q étant un élément de K non racine de l'unité.
Les fonctions q^{jx} sont linéairement indépendantes (c'est une conséquence du Lemme 1.0.7.
• Une suite de q-polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ telle que $h_0=1$ et pour tout $n\geq 1$, h_n est de q-degré n est appelée suite q-polynomiale.
• On appelle suite de type q-binomial toute suite q-polynomiale $(h_n)_{n\geq 0}$ telle que
$h_n(x+y)=\sum\limits_{i+j=n} q^{j(x-i)}h_i(x)h_j(y)$, $\forall n\geq 0,\ x,y\in\mathbb{Z}_p$.

CHAPITRE 1

1. Quelques bases orthonormales dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$

Soit K est un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et q un élément de K tel que $|q-1|<1$, dans ce chapitre, nous faisons le lien entre les travaux de L. Van Hamme et de A. Verdoodt sur l'algèbre de Banach des fonctions continus de V_q à valeurs dans K et ceux de K. Conrad sur l'algèbre $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K.

Définition 1.0.1. *Soit K un corps valué ultrametrique complet, de valeur absolue non trivial $|\ |$. Une norme ultramétrique sur un K-espace vectoriel E est une application $\|\ \|: E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que*

(1) $\|v\| = 0 \Longleftrightarrow v = 0$

(2) $\|av\| = |a|\,\|v\|$ $\qquad \forall a \in K,\ v \in E$

(3) $\|v+w\| \leq \max(\|v\|, \|w\|)$ $\qquad \forall v, w \in E$ *(inégalité triangulaire forte ou ultramétrique).*

On dit alors que l'espace vectoriel $(E, \|\ \|)$ est ultranormé et lorsqu'il est complet, on dit que c'est un K-espace de Banach ultramétrique.

Nous rappelons ici quelques propriétés classiques des K-espaces de Banach ultramétriques, qui nous seront d'un usage fréquent.

Propriétés 1.0.1. *Soit K un corps valué ultrametrique complet et soit $(E, \|\ \|)$ un K-espace de Banach ultramétrique.*

P.1: *Soient $v, w \in E$ tels que $\|v\| \neq \|w\|$, alors $\|v \pm w\| = \max(\|v\|, \|w\|)$.*

P.2: *Soit $(v_j)_{1\leq j\leq n}$ une suite de E, on a* $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} v_j = 0 \Longrightarrow \exists i, j,\ i \neq j\ /\ \|v_i\| = \|v_j\|$.

P.3: *Une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de E est de Cauchy si et seulement si* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|v_n - v_{n+1}\| = 0$.

P.4: *Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ une suite de E, si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = v \neq 0$, alors il existe n_0, tel que $\|v_n\| = \|v\|$, $\forall n \geq n_0$.*

P.5: *Si E est de Banach, une série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge dans E si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.*

Définition 1.0.2. *Soient K un corps valué ultramétrique complet et E un K-espace de Banach ultramétrique.*
Une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est appelée base orthogonale de E si et seulement si tout élément v de E s'écrit sous la forme $v = \sum_{i\in I} a_i e_i$, avec $a_i \in K$, $\forall i \in I$, $\lim_{i\in I} a_i e_i = 0$ et $\|v\| = \sup_{i\in I} |a_i| \, \|e_i\|$.
De plus, si $\|e_i\| = 1$, $\forall i \in I$, alors on dit que $(e_i)_{i\in I}$ est une base orthonormale de E.

Lemme 1.0.1 (Bases orthonormales proches)**.**
Soient K un corps valué ultramétrique complet, V un K-espace de Banach possédant une base orthonormale $(e_n)_{n\geq 0}$. Soit $(e'_n)_{n\geq 0}$ une suite dans V, telle que $\sup_{n\geq 0} \left\|e_n - e'_n\right\| < 1$, alors $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de V.

Démonstration. Voir [5] Corollary 5.3 et [4] Lemma 3.2. □

Nous rappelons ici le théorème principal sur la base de Mahler.

Théorème 1.0.1. *Soit K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$. Posons $B_0(x) = 1$ et $B_n(x) = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n!} = \dbinom{x}{n}$, $\forall n \geq 1$. Alors la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.*
Le développement de toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ s'obtient sous la forme $f = \sum_{n\geq 0} \Delta^n(f)(0) B_n$, où Δ est l'opérateur linéaire définie par $\Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{Z}_p$.

Démonstration.
On renvoie à [1], [25], [26] et [33]. Rappelons simplement que l'une des démonstrations consiste à montrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a $\lim_{n\to+\infty} \Delta^n(f) = 0$. □

Soit K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$. Notons $\Lambda = \{a \in K / \, |a| \leq 1\}$ l'anneau de valuation de K et $\mathcal{M} = \{a \in K / \, |a| < 1\}$, l'idéal maximal de Λ.

Lemme 1.0.2. *La valeur absolue de $\mathbb{Z}_p$ est normalisée de telle sorte que $|p| = p^{-1}$.*

(i) *Les racines de l'unité dans K qui sont réduites à 1 dans le corps résiduel $\Lambda/\mathcal{M}$ sont exactement les racines de l'unité d'ordre une puissance de p dans K.*

(ii) *Soit q une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance $p^N > 1$, c'est-à-dire $q^{p^N} = 1$ et $q^k \neq 1$, $\forall 1 \leq k < p^N$, alors $|q-1| = p^{-\frac{1}{p^{N-1}(p-1)}} \geq p^{\frac{-1}{p-1}}$.*
Les racines de l'unité dans K forment un ensemble discret.

(iii) *Pour $q \in K$, la suite $1, q, q^2, \ldots,$ peut être prolongée en une fonction continue q^x pour $x \in \mathbb{Z}_p$ si et seulement si $|q-1| < 1$. Dans ce cas $q^x = \displaystyle\sum_{n\geq 0}(q-1)^n\binom{x}{n}$ et $|q^x - 1| \leq |q-1| < 1$.*

(iv) *Si $|q-1| < 1$ et $x \neq 0$, alors $q^x = 1$ si et seulement si q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p et $x \in p^N\mathbb{Z}_p$.*

Démonstration.

(i) Puisque K est un sur-corps valué de $\mathbb{Q}_p$, le corps résiduel $\overline{K} = \Lambda/\mathcal{M}$ est de caractéristique p. Soit a un entier premier à p. Si $x \in K$ est une racine a-ième de l'unité distincte de 1 et congrue à $1(\mod \mathcal{M})$, comme $1 + x + \cdots + x^{a-1} = 0$, on aurait $0 = \bar{1} + \bar{x} + \cdots + \bar{x}^{a-1} = \bar{1} + \cdots + \bar{1} = \bar{a}$. Ce qui est absurde.
Si q est une racine de l'unité d'ordre ap^b dans K distincte de 1 et congrue à $1(\mod \mathcal{M})$, alors q^{p^b} est une racine de l'unité d'ordre a congrue à $1(\mod \mathcal{M})$. Il vient que $q^{p^b} = 1$.

(ii) Rappelons que pour tout entier positif ℓ, on a $\left|\binom{p^\ell}{k}\right| = \dfrac{|p|^\ell}{|k|}$, pour $1 \leq k \leq p^\ell$, avec $\dfrac{|p|^\ell}{|k|} \leq |p|$, pour $1 \leq k \leq p^\ell - 1$.
Soit q une racine de l'unité d'ordre p^N. Montrons que $|q-1| < 1$.
Puisque $q^{p^N} = 1$, alors $\bar{q}^{p^N} - \bar{1} = 0$ dans $\bar{K}$. Donc $(\bar{q} - \bar{1})^{p^N} = 0$ et $\bar{q} = \bar{1}$, c'est-à-dire $|q-1| < 1$.

Posons $\zeta = q^{p^{N-1}}$, alors $\zeta^p = 1$ et $|\zeta - 1| < 1$. On a
$0 = \dfrac{\zeta^p - 1}{\zeta - 1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p}\binom{p}{k}(\zeta-1)^{k-1} = p + \sum_{k=2}^{p-1}\binom{p}{k}(\zeta-1)^{k-1} + (\zeta-1)^{p-1}$, ou encore

$(\zeta-1)^{p-1} = -p - \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (\zeta-1)^{k-1}$.

Comme $\left| \sum_{k=2}^{p-1} \binom{p}{k} (\zeta-1)^{k-1} \right| \leq \max_{2 \leq k \leq p-1} \left| \binom{p}{k} \right| |\zeta - 1|^{k-1} \leq |p|\,|\zeta-1| < |p|$, on a $|\zeta-1|^{p-1} = |p|$ et $|\zeta - 1| = |p|^{\frac{1}{p-1}}$.

Posons maintenant $\gamma = q - 1$. On a $|\gamma| = |q-1| < 1$ et $\zeta - 1 = (\gamma+1)^{p^{N-1}} - 1 = \sum_{k=1}^{p^{N-1}-1} \binom{p^{N-1}}{k} \gamma^k + \gamma^{p^{N-1}}$. Mais $\left| \sum_{k=1}^{p^{N-1}-1} \binom{p^{N-1}}{k} \gamma^k \right| \leq \max_{1 \leq k \leq p^{N-1}-1} \frac{|p|^{p^{N-1}}}{|k|} |\gamma|^k \leq |p| \max_{1 \leq k \leq p^{N-1}-1} |\gamma|^k = |\gamma|\,|p| < |p| \leq$ $\leq |p|^{\frac{1}{p-1}} = |\zeta - 1|$. Ainsi, $\left|\gamma^{p^{N-1}}\right| = \left| \zeta - 1 - \sum_{k=0}^{p^{N-1}-1} \binom{p^{N-1}}{k} \gamma^k \right| = |\zeta - 1|$ et $|\gamma| = |\zeta - 1|^{\frac{1}{p^{N-1}}} = |p|^{\frac{1}{p^N - p^{N-1}}}$.

Soient q et q' deux racines distinctes de l'unité dans K, alors $|q - q'| \leq 1$. Ou bien $|q-q'| = 1$, ou bien $|q - q'| = |q/q' - 1| < 1$ et on déduit de (i) que q/q' est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p dans K. On a $|q - q'| \geq p^{\frac{-1}{p-1}}$. Donc les racines de l'unité dans K forment un ensemble discret.

(iii) Soit $q \in K$, si la suite $m \longrightarrow q^m$ se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$, alors on a $\lim_{\ell \to +\infty} q^{p^\ell} = 1$ et il existe ℓ_0 tel que $\left| q^{p^{\ell_0}} - 1 \right| < 1$. Ainsi, d'une part $|q| = 1$ et d'autre part $q^{p^{\ell_0}}$ est congru à 1 modulo $\mathcal{M}$, d'où l'on déduit $|q-1| < 1$.
Réciproquement si $|q - 1| < 1$, alors la série de fonction $\varepsilon_q(x) = \sum_{n \geq 0} (q-1)^n B_n(x)$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}_p$. La fonction continue ε_q est telle que $\varepsilon_q(m) = \sum_{n=0}^{m} (q-1)^n \binom{m}{n} = q^m$. On posera aussi $\varepsilon_q(x) = q^x$.

(iv) Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$. Notons que $(q^x)^y = q^{xy}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$.
Posons $x = ap^N$, $a \neq 0$. Si $q^x = 1$, on a $(q^{p^N})^a = 1$ et $q^{p^N} = \left((q^{p^N})^a\right)^{a^{-1}} = 1$.
Réciproquement, si q est une racine d'ordre p^N de l'unité, alors pour $x = ap^N$, avec $a \neq 0$, on a $q^x = (q^{p^N})^a = 1$. □

Définition 1.0.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. La suite de fonctions $(q^{jx})_{j\geq 0}$ est linéairement indépendante sur K (voir Lemme 1.0.7).*
On appelle **q-polynôme de q-degré** *n toute fonction h, continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K, pouvant s'écrire sous la forme $h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j q^{jx}$, avec $a_n \neq 0$. Dans ce cas, le coefficient a_n est appélé coefficient dominant du q-polynôme h.*
Une suite de q-polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ telle que $h_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, h_n **est de q-degré** *n est appelée* ***suite q-polynomiale***.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Posons $(m)_q = \dfrac{q^m - 1}{q-1}$, pour $m \in \mathbb{N}$. On déduit du Lemme 1.0.2 (iii) que la fonction qui à m fait correspondre $(m)_q$ se prolonge en une fonction continue $x \longrightarrow (x)_q$ sur $\mathbb{Z}_p$ si et seulement si $|q-1| < 1$. Dans ce cas, on a $(x)_q = \dfrac{q^x - 1}{q-1} = \sum_{n\geq 1} (q-1)^{n-1} \binom{x}{n}$ si $q \neq 1$ et $(x)_1 = x$.

Soient K un corps valué complet et X un espace compact. Rappelons que la norme sur l'espace des fonctions continues de X à valeurs dans K est la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$, pour toute fonction continue f.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Considérons le sous-groupe fermé V_q du groupe des unités de K engendré par q. Notons que V_q est égal à l'adhérence de $\{q^n,\ n \geq 0\}$.
Soit $(Q_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions continues définies sur V_q par $Q_0(s) = 1$ et
$Q_n(s) = \dfrac{(s-1)(s-q)\dots(s-q^{n-1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})}$, $\forall n \geq 1,\ s \in V_q$. On définit les opérateurs linéaires continus $D_q^{(n)}$ par $D_q^{(0)} = id$ et $D_q^{(n)} = (T_q - id)\dots(T_q - q^{n-1}id)$, $\forall n \geq 1$.
On verifie par récurrence que $D_q^{(j)}(Q_n)(s) = q^{-j(n-j)} s^j Q_{n-j}(s)$, $\forall 0 \leq j \leq n-1$.
En particulier $D_q^{(n)}(Q_n)(s) = s^n$, ce qui implique que $D_q^{(j)}(Q_n)(s) = 0$, $\forall j \geq n+1$.

Théorème 1.0.2 (Base de Van Hamme)**.** *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. La suite polynomiale $(Q_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de l'espace de Banach ultramétrique $\mathcal{C}(V_q, K)$ des fonctions continues de V_q à valeurs dans K.*
Pour tout élément $f \in \mathcal{C}(V_q, K)$, on a $f = \sum_{n\geq 0} a_n Q_n$, avec $a_n \in K$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|$; de plus $a_n = D_q^{(n)}(f)(1)$.

Démonstration. (Voir [11] Theorem 1).
Les démonstrations données par L. Van Hamme et A. Verdoodt pour $q \in \mathbb{Z}_p$ se trans-

posent ici sans difficulté. Notons qu'une démonstration directe consiste à montrer que pour $f : V_q \longrightarrow K$ continue, la suite $(D_q^{(n)}(f))_{n\geq 0}$ converge uniformément vers zéro.
Une autre démonstration utilise un théorème de Y. Amice, basé sur le théorème de Weierstrass-Kaplansky. $\square$

• Considérons l'ensemble $E_p = \{x \in K \ / \ |x| < p^{\frac{-1}{p-1}}\}$. On sait que la série de fonctions $\exp_p(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge dans K si et seulement si $x \in E_p$, on dit que $\exp_p$ est l'exponentielle p-adique.
De même, la série de fonctions $\log_p(x) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n}$ converge dans K si et seulement si $|x-1| < 1$. On dit que $\log_p$ est le logarithme p-adique. Remarquons que pour $|q-1| < 1$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{q^x - 1}{x} = \log_p(q)$.

Remarque 1.0.1. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$, alors $V_q \subset 1 + \mathcal{M}$.*
Notons que V_q est fini lorsque q est une racine de l'unité.

Lemme 1.0.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$.*
L'application $\varepsilon_q : \mathbb{Z}_p \longrightarrow V_q$ définie par $\varepsilon_q(x) = q^x = \sum_{n\geq 0} (q-1)^n B_n(x)$ est un isomorphisme de groupes topologiques.
De plus, si $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, alors $V_q \subset 1 + E_p$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $q^x = \exp_p(x \log_p(q))$.

Démonstration.
Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $q \equiv 1 (\mod \mathcal{M})$. Soit $x, x' \in \mathbb{Z}_p$, on a $\varepsilon_q(x + x') = q^{x+x'} = q^x q^{x'} = \varepsilon_q(x)\varepsilon_q(x')$. Il vient que ε_q est un morphisme de groupes de $\mathbb{Z}_p$ dans V_q.
On voit aussitôt par la définition de V_q que ε_q est surjectif. On déduit du Lemme 1.0.2 (iii) que ε_q est injectif.
On déduit du fait que $\mathbb{Z}_p$ est compact que ε_q est bi-continue. C'est donc un isomorphisme de groupes topologiques et V_q est un groupe compact.
De plus comme $V_q \subset 1 + \mathcal{M}$, posant $\log_q = \frac{\log_p}{\log_p(q)}$, on voit que la restriction de $\log_q$ à V_q est l'isomorphisme réciproque de ε_q.

Supposons $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, on déduit encore du Lemme 1.0.2 (iii) que $|q^x - 1| \leq |q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. Donc $V_q \subset 1 + E_p$. Posons $s = q^x$, $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\log_p(s) = \log_p(q^x) = x \log_p(q)$ et $\varepsilon_q(x) = q^x = \exp_p(\log_p(q^x)) = \exp_q(x \log_p(q))$. $\square$

Pour q non racine de l'unité, on note φ_q l'isomorphisme réciproque de ε_q, qui coincide avec la restriction à V_q de $\log_q = \dfrac{\log_p}{\log_p(q)}$. Notons que $\varepsilon_q \circ \varphi_q = id_{V_q}$ et $\varphi_q \circ \varepsilon_q = id_{\mathbb{Z}_p}$.

Théorème 1.0.3. *Soient* $\widetilde{\varepsilon_q} : \mathcal{C}(V_q, K) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ *et* $\widetilde{\varphi_q} : \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K) \longrightarrow \mathcal{C}(V_q, K)$ *les morphismes d'algèbres définis par* $\widetilde{\varepsilon_q}(g) = g \circ \varepsilon_q$, $\forall g \in \mathcal{C}(V_q, K)$ *et* $\widetilde{\varphi_q}(f) = f \circ \varphi_q$, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. *Alors* $\widetilde{\varepsilon_q}$ *et* $\widetilde{\varphi_q}$ *sont des isomorphismes isométriques d'algèbres de Banach réciproques l'un de l'autre.*
De plus, pour tout $j \geq 0$, *on a* $\Delta_q^{(j)} = \widetilde{\varepsilon_q} \circ D_q^{(j)} \circ \widetilde{\varphi_q}$ *et* $D_q^{(j)} = \widetilde{\varphi_q} \circ \Delta_q^{(j)} \circ \widetilde{\varepsilon_q}$.

Démonstration. On vérifie aussitôt que $\widetilde{\varepsilon_q}$ et $\widetilde{\varphi_q}$ sont des morphismes d'algèbres. En utilisant l'associativité de la composition des fonctions continues on a, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $\widetilde{\varepsilon_q}(\widetilde{\varphi_q}(f)) = \widetilde{\varphi_q}(f) \circ \varepsilon_q = f \circ \varphi_q \circ \varepsilon_q = f$ et de la même manière si $g \in \mathcal{C}(V_q, K)$, on a $\widetilde{\varphi_q}(\widetilde{\varepsilon_q}(g)) = \widetilde{\varepsilon_q}(g) \circ \varphi_q = g \circ \varepsilon_q \circ \varphi_q = g$. Il vient que $\widetilde{\varepsilon_q}$ et $\widetilde{\varphi_q}$ sont des bigections réciproques l'une de l'autre. De plus on a $\|\widetilde{\varepsilon_q}(g)\| = \sup\limits_{x \in \mathbb{Z}_p} |g \circ \varepsilon_q(x)| = \sup\limits_{s \in V_q} |g(s)| = \|g\|$ et de même $\|\widetilde{\varphi_q}(f)\| = \|f\|$. D'où $\widetilde{\varepsilon_q}$ et $\widetilde{\varphi_q}$ sont des isométries.

Soient f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et $x \in \mathbb{Z}_p$, on a
$\widetilde{\varepsilon_q} \circ T_q \circ \widetilde{\varphi_q}(f)(x) = T_q \circ \widetilde{\varphi_q}(f)(q^x) = \widetilde{\varphi_q}(f)(q^{x+1}) = f(\varphi_q(q^{x+1})) = f(x+1) = \tau_1(f)(x)$,
c'est-à-dire $\widetilde{\varepsilon_q} \circ \tau_q \circ \widetilde{\varphi_q} = \tau_1$.
Pour tout entier $k \geq 0$, on a
$\widetilde{\varepsilon_q} \circ (T_q - q^k id) \circ \widetilde{\varphi_q} = \widetilde{\varepsilon_q} \circ T_q \circ \widetilde{\varphi_q} - q^k \widetilde{\varepsilon_q} \circ \widetilde{\varphi_q} = \tau_1 - q^k id$, ainsi
$\widetilde{\varepsilon_q} \circ D_q^{(j)} \circ \widetilde{\varphi_q} = \left[\widetilde{\varepsilon_q} \circ (T_q - id) \circ \widetilde{\varphi_q}\right] \circ \left[\widetilde{\varepsilon_q} \circ (T_q - qid) \circ \widetilde{\varphi_q}\right] \circ \cdots \circ \left[\widetilde{\varepsilon_q} \circ (T_q - q^{j-1} id) \circ \widetilde{\varphi_q}\right] =$
$= (\tau_1 - id) \circ (\tau_1 - qid) \circ \cdots \circ (\tau_1 - q^{j-1} id) = \Delta_q^{(j)}$.
Réciproquement, on a $D_q^{(j)} = \widetilde{\varphi_q} \circ \Delta_q^{(j)} \circ \widetilde{\varepsilon_q}$ et $\tau_q = \widetilde{\varphi_q} \circ \tau_1 \circ \widetilde{\varepsilon_q}$. □

Remarque 1.0.2. *De façon générale, soient* X *et* Y *deux espaces compacts. Si* $\varepsilon : X \longrightarrow Y$ *est un isomorphisme de* X *sur* Y, *alors l'application* $\tilde{\varepsilon} : \mathcal{C}(Y, K) \longrightarrow \mathcal{C}(X, K)$ *définie par* $\tilde{\varepsilon}(g) = g \circ \varepsilon$, $\forall g \in \mathcal{C}(Y, K)$, *est un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach.*

Corollaire. *Soit* $q \in K$, *non racine de l'unité, tel que* $|q - 1| < 1$. *Alors, la suite de fonctions* $(\widetilde{\varepsilon_q}(Q_n))_{n \geq 0}$ *est une base orthonormale de* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
De plus, pour $x \in \mathbb{Z}_p$, *on a* $\widetilde{\varepsilon_q}(Q_n)(x) = Q_n(q^x) = \dfrac{(q^x - 1) \ldots (q^x - q^{n-1})}{(q^n - 1) \ldots (q^n - q^{n-1})}$.

- Dans toute la suite, on note $C_n = C_{n,q} = \widetilde{\varepsilon_q}(Q_n)$.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$, rappelons que, pour m un entier positif, $(m)_q = \frac{q^m - 1}{q-1}$. On pose $(m)_q! = (m)_q(m-1)_q \dots (1)_q$, pour $m \geq 1$ et $(0)_q! = 1$.
On a, pour $m \geq n$, $\widetilde{\varepsilon_q}(Q_n)(m) = C_{n,q}(m) = \frac{(q^m-1)(q^m-q)\dots(q^m-q^{n-1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})} =$
$= \frac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)\dots(q^{m-n+1}-1)}{(q^n-1)\dots(q-1)} = \frac{(m)_q(m-1)_q\dots(m-n+1)_q}{(n)_q\dots(1)_q} = \frac{(m)_q!}{(m-n)_q!(n)_q!}$.
Ce qui est analogue au coefficient binomial $\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!n!} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}$.
Les $C_{n,q}(m)$ sont appelés, les coefficients q-binomiaux et par analogie aux coefficients binomiaux, on les note souvent $\binom{m}{n}_q$. De même, le q-polynôme $C_{n,q}$ est appelé le n-ième q-polynôme q-binomial.

N.B: Soit n un entier positif, on remarque que $\binom{m}{n}_q = 0$, $\forall 0 \leq m < n$ et $\binom{-m}{n}_q = (-1)^n q^{\frac{-n(n-1)}{2} - nm} \binom{m+n-1}{n}_q$, $\forall m \geq 0$. En particulier, pour tout entier positif n, on a $\binom{-1}{n}_q = (-1)^n q^{\frac{-n(n+1)}{2}}$.

Lemme 1.0.4. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Pour tout $n \geq 0$ et tout $m \geq 1$, on a $C_{n,q}(m+1) = q^n C_{n,q}(m) + C_{n-1,q}(m) = C_{n,q}(m) + q^{m-n+1}C_{n-1,q}(m)$.*

Démonstration.

-(a)- Pour $m < n-1$, on a $C_{n,q}(m+1) = C_{n,q}(m) = C_{n-1,q}(m) = 0$ et il n'y a rien à démontrer.

-(b)- Pour $m = n-1$, on a $C_{n,q}(m+1) = q^{m+1-n}C_{n-1,q}(m) = C_{n-1,q}(m) = 1$ et $C_{n,q}(m) = 0$.

-(c)- Pour $m \geq n$, on a $C_{n,q}(m+1) = \frac{(q^{m+1}-1)(q^{m+1}-q)\dots(q^{m+1}-q^{n-1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})} =$
$= \frac{q^{m+1}-q^n+q^n-1}{q^n-1} C_{n-1,q}(m) = \frac{(q^{m+1}-q^n)(q^m-1)\dots(q^m-q^{n-2})}{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-1}-q^{n-2})} + C_{n-1,q}(m)$
$= q^n \frac{(q^m-1)\dots(q^m-q^{n-2})(q^m-q^{n-1})}{(q^n-1)(q^n-q)\dots(q^n-q^{n-1})} + C_{n-1,q}(m) = q^n C_{n,q}(m) + C_{n-1,q}(m)$.
De même, $C_{n,q}(m+1) = C_{m+1-n,q}(m+1) = q^{m+1-n}C_{m+1-n,q}(m) + C_{m-n,q}(m) =$
$= C_{n,q}(m) + q^{m+1-n}C_{n-1,q}(m)$. □

Corollaire. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soient m et n deux entiers positifs, tels que $m \geq n$, le coefficient q-binomial $C_{n,q}(m) = \binom{m}{n}_q$ est un polynôme en q, à coefficients entiers, de degré $n(m-n)$, de terme constant 1 et de coefficient dominant 1, c'est-à-dire que le coefficient du terme de degré $n(m-n)$ est égal à 1.*

Démonstration. Pour tout entier $m \geq 2$, on a
$\binom{m}{1}_q = \dfrac{q^m-1}{q-1} = q^{m-1} + q^{m-2} + \cdots + q + 1$ et $\binom{m}{2}_q = \dfrac{(q^m-1)(q^{m-1}-1)}{(q^2-1)(q-1)}$.
Ou bien m est pair et $m = 2t$, $t \in \mathbb{N}$. Dans ce cas $\binom{m}{2}_q = \dfrac{q^{2t}-1}{q^2-1}\dfrac{q^{2t-1}-1}{q-1} =$
$= \left(\sum_{j=0}^{t-1} q^{2j}\right)\left(\sum_{i=0}^{2t-2} q^j\right)$ qui est un polynôme en q, à coefficients entiers de degré $4t-4 = 2(m-2)$, de terme constant 1 et de coefficient dominant 1.
Ou bien m est impair avec $m = 2t+1$, $t \in \mathbb{N}$ et $\binom{m}{2}_q = \dfrac{q^{2t}-1}{q^2-1}\dfrac{q^{2t+1}-1}{q-1} = \left(\sum_{j=0}^{t-1} q^{2j}\right)\left(\sum_{i=0}^{2t} q^j\right)$ qui est aussi un polynôme de degré $4t-2 = 2(m-2)$, à coefficients entiers, de terme constant et de coefficient dominant 1.
Par double récurence, on suppose que $\binom{m-1}{n}_q$ et $\binom{m-1}{n-1}_q$ sont des polynômes en q à coefficients entiers, de degrés respectifs $n(m-1-n)$ et $(n-1)(m-n)$, de termes constants et de coefficients dominants 1. Puisque $\binom{m}{n}_q = q^n\binom{m-1}{n}_q + \binom{m-1}{n-1}_q$, on voit par récurrence que $\binom{m}{n}_q$ est un polynôme en q à coefficients entiers, de plus ce polynôme est de degré $n(m-n)$ et de terme constant et coefficient dominant 1. □

Nous avons l'analogue suivant à la formule de Chu-Vandermonde.

Théorème 1.0.4. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$.*

(i) *On a $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$, $C_{n,q}(x+y) = \sum_{j=0}^{n} q^{j(y-n+j)} C_{j,q}(x) C_{n-j,q}(y)$.*

(ii) *Soient q_1 et q_2 deux éléments de K, non racines de l'unité, tels que $|q_1 - 1| < 1$ et $|q_2 - 1| < 1$, alors $\|C_{n,q_1} - C_{n,q_2}\| < |q_1 - q_2|$.*

Démonstration.

(i) Soit $n \geq 0$ un entier fixé et soient m et s deux entiers. Montrons que
$$C_{n,q}(m+s) = \sum_{j=0}^{n} q^{j(m-n+j)} C_{j,q}(s) C_{n-j,q}(m).$$
Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer.
Supposons que n est un entier ≥ 1. Nous avons démontré au Lemme 1.0.4, que $C_{n,q}(m+1) = C_{n,q}(m) + q^{m-n+1} C_{n-1,q}(m)$. On en déduit que
$$C_{n,q}(m+2) = C_{n,q}(m+1) + q^{m-n+2} C_{n-1,q}(m+1) =$$
$$= C_{n,q}(m) + q^{m-n+1} C_{n-1,q}(m) + q^{m-n+2} C_{n-1,q}(m) + q^{2(m-n+2)} C_{n-2,q}(m) =$$
$$= C_{n,q}(m) + (2)_q q^{m-n+1} C_{n-1,q}(m) + q^{2(m-n+2)} C_{n-2,q}(m).$$
Par récurrence sur s, supposons que pour tout $n \geq 1$,
$$C_{n,q}(m+s-1) = \sum_{j=0}^{n} q^{j(m-n+j)} C_{j,q}(s-1) C_{n-j,q}(m).$$
On a $C_{n,q}(m+s) = C_{n,q}(m+s-1) + q^{m+s-n} C_{n-1,q}(m+s-1) =$
$$= \sum_{j=0}^{n} q^{j(m-n+j)} C_{j,q}(s-1) C_{n-j,q}(m) + q^{m+s-n} \sum_{j=0}^{n-1} q^{j(m-n+j+1)} C_{j,q}(s-1) C_{n-1-j,q}(m) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} q^{j(m-n+j)} C_{j,q}(s-1) C_{n-j,q}(m) + \sum_{j=1}^{n} q^{s-j} q^{j(m-n+j)} C_{j-1,q}(s-1) C_{n-j,q}(m) =$$
$$= C_{n,q}(m) + \sum_{j=1}^{n} (C_{j,q}(s-1) + q^{s-j} C_{j-1,q}(s-1)) q^{j(m-n+j)} C_{n-j,q}(m) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n} q^{j(m-n+j)} C_{j,q}(s) C_{n-j,q}(m).$$
Par continuité, on a (i).

(ii) Soient q_1 et q_2 deux éléments non racines de l'unité de K, tels que $|q_1 - 1| < 1$ et $|q_2 - 1| < 1$. Soit n un entier positif fixé. On sait, pour tout entier positif $m < n$, que $\binom{m}{n}_{q_1} = \binom{m}{n}_{q_2} = 0$.
Pour tout entier $m \geq n$, on déduit du corollaire du Lemme 1.0.4 que
$$\binom{m}{n}_{q_1} - \binom{m}{n}_{q_2} = \sum_{k=1}^{n(m-n)} a_{m,n}(k)(q_1^k - q_2^k), \text{ avec } a_{m,n}(k) \in \mathbb{Z}, \ \forall 1 \leq k \leq n(m-n).$$
Donc, pour tout enier $m \geq 0$, on a $\left| \binom{m}{n}_{q_1} - \binom{m}{n}_{q_2} \right| \leq |q_1 - q_2|$ et en passant à la limite on obtient $|C_{n,q_1}(x) - C_{n,q_2}(x)| \leq |q_1 - q_2|$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. $\square$

Remarque 1.0.3. Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Considérons $q_\alpha = q + p^\alpha a$, $|a| \leq 1$, α étant un entier > 0. Alors $|q_\alpha - 1| < 1$ et $\lim_{\alpha \to +\infty} q_\alpha = q$. De plus q_α est non racine de l'unité.
Soient α un entier > 0 et n un entier positif fixé. Soit $m \geq n$ un entier, sachant que $C_{n,q'}(m) = \sum_{k=0}^{n(m-n)} a_k^{(n,m)} q'^k$ est un polynôme en q' à coefficients entiers, les quantités $C_{n,q_\alpha}(m)$ et $C_{n,q}(m)$ sont bien définies. Comme au Théorème 1.0.4 (ii), on obtient pour tout $\alpha > 0$ et tous entiers m et n, $C_{n,q}(m) - C_{n,q_\alpha}(m) = \sum_{k=1}^{n(m-n)} a_k^{(n,m)}(q^k - q_\alpha^k)$. On en déduit que $|C_{n,q}(m) - C_{n,q_\alpha}(m)| \leq |q - q_\alpha|$. Puisque la suite $(q_\alpha)_{\alpha>0}$ converge vers q, on obtient la convergence uniforme sur $\mathbb{N}$ de C_{n,q_α} vers $C_{n,q}$. Comme l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers positifs est dense dans $\mathbb{Z}_p$, on a par prolongement par continuité la convergence uniforme sur $\mathbb{Z}_p$ de C_{n,q_α} vers une fonction continue que nous noterons encore $C_{n,q}$ et dont la restriction à $\mathbb{N}$ donne la quantité $C_{n,q}(m) = \sum_{k=0}^{n(m-n)} a_k^{(n,m)} q^k$, pour tout entier positif $m \geq n$ et $C_{n,q}(m) = 0$, pour tout entier positif $m < n$. De plus $\|C_{n,q} - C_{n,q_\alpha}\| \leq |q - q_\alpha| < 1$, $\forall \alpha > 0$. D'où l'on déduit que le Théorème 1.0.4 reste vrai lorsque q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. $\square$

Lemme 1.0.5. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p.*

(i) *Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $n \geq 0$, on a $C_{np^N,q}(mp^N) = \binom{m}{n}$.*

(ii) *Soient $m, n \in \mathbb{Z}$, avec $n \geq 0$, $0 \leq r, s < p^N$, on a*
$C_{p^N n+s,q}(p^N m + r) = \binom{m}{n}\binom{r}{s}_q$.

Démonstration. Considérons la suite $q_\alpha = q + ap^\alpha$, avec $|a| \leq 1$ et $\alpha > 0$. Alors q_α est non racine de l'unité d'ordre p^N et $\lim_{\alpha \to +\infty} q_\alpha = q$.

• On a
$$\binom{mp^N}{np^N}_{q_\alpha} = \prod_{j=0}^{np^N-1} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^j}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^j} = \prod_{i=0}^{n-1}\prod_{r=0}^{p^N-1} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^{ip^N+r}}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^{ip^N+r}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^{ip^N}}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^{ip^N}} \times$$
$$\times \prod_{i=0}^{n-1}\prod_{r=1}^{p^N-1} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^{ip^N+r}}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^{ip^N+r}} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{q_\alpha^{(m-i)p^N} - 1}{q_\alpha^{(n-i)p^N} - 1} \times \prod_{i=0}^{n-1}\prod_{r=1}^{p^N-1} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^{ip^N+r}}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^{ip^N+r}}.$$
Or
$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{q_\alpha^{(m-i)p^N} - 1}{q_\alpha^{(n-i)p^N} - 1} = \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\left((q_\alpha^{p^N})^{m-i-1} + \cdots + q_\alpha^{p^N} + 1\right)(q_\alpha^{p^N} - 1)}{\left((q_\alpha^{p^N})^{n-i-1} + \cdots + q_\alpha^{p^N} + 1\right)(q_\alpha^{p^N} - 1)} = \frac{m-i}{n-i}.$$

D'autre part, pour $1 \leq r \leq p^N - 1$, on a $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{q_\alpha^{mp^N} - q_\alpha^{ip^N+r}}{q_\alpha^{np^N} - q_\alpha^{ip^N+r}} = \frac{z^r-1}{z^r-1} = 1$. D'où

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \binom{mp^N}{np^N}_{q_\alpha} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{m-i}{n-i} = \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n(n-1)\dots(1)} = \binom{m}{n}.$$

•• Pour tout $r \geq 0$, on a $\displaystyle\binom{mp^N+r}{np^N}_{q_\alpha} = \frac{(q_\alpha^{mp^N+r}-1)\dots(q_\alpha^{mp^N+1}-1)}{(q_\alpha^{mp^N+r-np^N}-1)\dots(q_\alpha^{mp^N-np^N+1}-1)}\binom{mp^N}{np^N}_{q_\alpha}$

et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \binom{mp^N+r}{np^N}_{q_\alpha} = \frac{(z^r-1)\dots(z-1)}{(z^r-1)\dots(z-1)}\binom{m}{n} = \binom{m}{n}$.

D'autre part, on a $\displaystyle\binom{mp^N+r}{np^N+s}_{q_\alpha} = \frac{(q_\alpha^{mp^N+r}-1)\dots(q_\alpha^{mp^N+r-s+1}-1)}{(q_\alpha^{np^N+s}-1)\dots(q_\alpha^{np^N+1}-1)}\binom{mp^N+r-s}{np^N}_{q_\alpha}$

et $\displaystyle\lim_{\alpha\to+\infty} \binom{mp^N+r}{np^N+s}_{q_\alpha} = \frac{(q^r-1)\dots(q^{r-s+1}-1)}{(q^s-1)\dots(q-1)}\binom{m}{n} = \binom{r}{s}_q\binom{m}{n}$. □

Remarque 1.0.4. *Soit $q \in K$, une racine primitive p^N-ième de l'unité. Soient $x = p^N z(x) + l(x) \in \mathbb{Z}_p$ et $n = m(n)p^N + r(n)$. Par continuité on a $C_{n,q}(x) = C_{r(n),q}(l(x))B_{m(n)}(z(x))$.*

Lemme 1.0.6. *Soit n un entier naturel et soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles finies dans une algèbre de Banach ultramétrique E, telles que $\|a_i\| \leq 1$, $\|b_i\| \leq 1$, $\forall 1 \leq i \leq n$. Alors $\|a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|a_i - b_i\|$.*

Démonstration. Par récurrence
Pour $n = 2$, on a $a_1a_2 - b_1b_2 = (a_1 - b_1)a_2 + b_1(a_2 - b_2)$. Donc
$\|a_1a_2 - b_1b_2\| \leq \max(\|a_1 - b_1\|, \|a_2 - b_2\|)$.
Supposons que $\|a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n\| \leq \max_{1\leq i\leq n} \|a_i - b_i\|$. Alors on a
$\|a_1 \dots a_na_{n+1} - b_1 \dots b_nb_{n+1}\| = \|(a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n)a_{n+1} + b_1 \dots b_n(a_{n+1} - b_{n+1})\| \leq$
$\leq \max(\|a_1 \dots a_n - b_1 \dots b_n\|, \|a_{n+1} - b_{n+1}\|) \leq \max_{1\leq i\leq n+1} \|a_i - b_i\|$. □

Corollaire. *Soient q_1 et q_2 deux éléments de K tels que* $\max(|q_1 - 1|, |q_2 - 1|) < 1$. *Alors, pour tout $j \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$, on a $\left\|\Delta_{q_1}^{(j)} - \Delta_{q_2}^{(j)}\right\| \leq |q_1 - q_2|$ et $\left\|\Delta_{q_1}^{(j)}(C_{n,q_1}) - \Delta_{q_2}^{(j)}(C_{n,q_2})\right\| \leq |q_1 - q_2|$.*

Démonstration. En effet soient q_1 et q_2 deux éléments de K tels que $|q_1 - 1| < 1$ et $|q_2 - 1| < 1$. Pour tout $k \geq 0$, on a $\|\tau_1 - q_1^k id\| \leq 1$ et $\|\tau_1 - q_2^k id\| \leq 1$.
D'autre part, pour tout $j \geq 0$, on a

$\left\|\Delta_{q_1}^{(j)} - \Delta_{q_2}^{(j)}\right\| = \left\|\prod_{k=0}^{j-1}(\tau_1 - q_1^k id) - \prod_{k=0}^{j-1}(\tau_1 - q_2^k id)\right\|$. On déduit du Lemme 1.0.6 que
$\left\|\Delta_{q_1}^{(j)} - \Delta_{q_2}^{(j)}\right\| \leq \max_{0\leq k\leq j-1} \left\|(\tau_1 - q_1^k id) - (\tau_1 - q_2^k id)\right\| = \max_{0\leq k\leq j-1}\left|q_1^k - q_2^k\right| \leq$
$\leq |q_1 - q_2| < 1$.
Pour tous entiers positifs n et j, on a
$\Delta_{q_1}^{(j)}(C_{n,q_1}) - \Delta_{q_2}^{(j)}(C_{n,q_2}) = \Delta_{q_1}^{(j)}(C_{n,q_1} - C_{n,q_2}) + (\Delta_{q_1}^{(j)} - \Delta_{q_2}^{(j)})(C_{n,q_2})$. On en déduit que
$\left\|\Delta_{q_1}^{(j)}(C_{n,q_1}) - \Delta_{q_2}^{(j)}(C_{n,q_2})\right\| \leq \max\Big(\|C_{n,q_1} - C_{n,q_2}\|, \left\|\Delta_{q_1}^{(j)} - \Delta_{q_2}^{(j)}\right\|\Big) \leq$
$\leq |q_1 - q_2| < 1$. □

Lemme 1.0.7. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*

- *Pour $k \geq j \geq 1$, on a $\Delta_q^{(j)}(q^{kx}) = \Big(\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell)\Big)q^{kx}$ et pour tout $j \geq k+1$, on a $\Delta_q^{(j)}(q^{kx}) = 0$.*
- •• *On a $\Delta_q^{(j)}(C_{n,q})(x) = q^{j(x+j-n)}C_{n-j,q}(x)$, $\forall j \leq n$ et $\Delta_q^{(j)}(C_{n,q})(x) = 0$, $\forall j \geq n+1$.*

Démonstration.

-(1)- Supposons q non racine de l'unité.
• On a $\Delta(q^{kx}) = q^{k(x+1)} - q^{kx} = (q^k - 1)q^{kx}$.
Supposons que $\Delta_q^{(j)}(q^{kx}) = \Big(\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell)\Big)q^{kx}$. On obtient

$$\Delta_q^{(j+1)}(q^{kx}) = (\tau_1 - q^j)\left(\Big(\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell)\Big)q^{kx}\right) = \Big(\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell)\Big)(q^{k(x+1)} - q^j q^{kx}) =$$

$$= \Big(\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell)\Big)(q^k - q^j)q^{kx} = \Big(\prod_{\ell=0}^{j}(q^k - q^\ell)\Big)q^{kx}.$$ On en déduit que

$\Delta_q^{(k)}(q^{kx}) = \Big(\prod_{\ell=0}^{k-1}(q^k - q^\ell)\Big)q^{kx}$. Donc $\Delta_q^{(k+1)}(q^{kx}) = \Big(\prod_{\ell=0}^{k-1}(q^k - q^\ell)\Big)(q^k q^{kx} - q^k q^{kx}) = 0$
et pour tout $j \geq k+1$, $\Delta_q^{(j)}(q^{kx}) = 0$.
•• Soit n un entier positif fixé, on a $\Delta_q^{(0)}(C_{n,q})(x) = C_{n,q}(x)$ et
$\Delta_q^{(1)}(C_{n,q})(x) = C_{n,q}(x+1) - C_{n,q}(x)$. Puisque $C_{n,q}(x+1) = \dfrac{q^{x+1}-1}{q^n - 1}C_{n-1,q}(x)$ et
$C_{n,q}(x) = \dfrac{q^{x-n+1}-1}{q^n-1}C_{n-1,q}(x)$, alors
$\Delta_q^{(1)}(C_{n,q})(x) = \dfrac{q^{x+1} - q^{x-n+1}}{q^n - 1}C_{n-1,q}(x) = q^{x+1-n}C_{n-1,q}(x)$.
Supposons par récurrence que $\Delta_q^{(j)}(C_{n,q})(x) = q^{j(x+j-n)}C_{n-j,q}(x)$, $j < n$. Alors on

a, $\Delta_q^{(j+1)}(C_{n,q})(x) = (\tau_1 - q^j id)\big(q^{j(x+j-n)}C_{n-j,q}(x)\big) = q^{j(x+j+1-n)}C_{n-j,q}(x+1) -$
$- q^{j(x+j+1-n)}C_{n-j,q}(x) = q^{j(x+j+1-n)}\Delta_q^{(1)}(C_{n-j,q})(x) =$
$= q^{j(x+j+1-n)}q^{x+j+1-n}C_{n-j-1,q}(x) = q^{(j+1)(x+j+1-n)}C_{n-j-1,q}(x)$.
En particulier $\Delta_q^{(n)}(C_{n,q})(x) = q^{nx}$. Donc $\Delta_q^{(n+1)}(C_{n,q})(x) = q^{n(x+1)} - q^n q^{nx} = 0$ et $\Delta_q^{(j)}(C_{n,q})(x) = 0$, $\forall j \geq n+1$.

-(2)- Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p. Considérant la suite $(q_\alpha)_{\alpha>0}$, avec $q_\alpha = q + ap^\alpha$, $|a| \leq 1$, on a, pour tout $j \geq 0$ et tout $n \geq 0$, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \Delta_{q_\alpha}^{(j)}(C_{n,q_\alpha}) = \Delta_q^{(j)}(C_{n,q})$ et $\left\|\Delta_{q_\alpha}^{(j)} - \Delta_q^{(j)}\right\| \leq |q_\alpha - q| < 1$.
Il vient que, pour tout entier n fixé et pour toute fonction continue f, $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \Delta_{q_\alpha}^{(n)}(f) = \Delta_q^{(n)}(f)$. D'où l'on déduit les formules du lemme pour q racine de l'unité. $\square$

N.B.: Notons que $\displaystyle\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^k - q^\ell) = (q-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}(k)_q \dots (k-j+1)_q$.

Proposition 1.0.1. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soient m et r deux entiers positifs, on a $\Delta_q^{(mp^N+r)} = \Delta_q^{(r)} \circ (\Delta_q^{(p^N)})^m$.*

Démonstration. Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. On a $\Delta_q^{(p^N)} = (\tau_1 - id)\dots(\tau_1 - q^{p^N-1}id)$ et $\Delta_q^{(p^N+1)} = \Delta_q^{(p^N)} \circ (\tau_1 - q^{p^N}id) = \Delta \circ \Delta_q^{(p^N)}$.
Supposons par récurrence que $\Delta_q^{((m-1)p^N)} = (\Delta_q^{(p^N)})^{m-1}$. On obtient alors
$\Delta_q^{(mp^N)} = \Delta_q^{((m-1)p^N)}(\tau_1 - q^{(m-1)p^N}id)\dots(\tau_1 - q^{mp^N-1}id) =$
$= (\Delta_q^{(p^N)})^{m-1}(\tau_1 - id)\dots(\tau_1 - q^{p^N-1}id) = (\Delta_q^{(p^N)})^m$. Ainsi, on a
$\Delta_q^{(mp^N+r)} = \Delta_q^{(mp^N)}(\tau_1 - q^{mp^N}id)\dots(\tau_1 - q^{mp^N+r}id) = (\Delta_q^{(p^N)})^m(\tau_1 - id)\dots(\tau_1 - q^{r-1}id) =$
$= \Delta_q^{(r)} \circ (\Delta_q^{(p^N)})^m$. $\square$

Théorème 1.0.5 (q-analogue au Théorème de Mahler - K. Conrad)**.**
Soit $q \in K$ tel que $|q-1| < 1$. Toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ admet un unique développement sous la forme $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_{n,q}$, $a_n \in K$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, avec

$$a_n = \Delta_q^{(n)}(f)(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_{k,q}(n) f(n-k).$$

De plus $\|f\| = \sup\limits_{n\geq 0}|a_n|$, en d'autres termes $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
*Ce développement unique est appelé le q-**développement de Mahler** de f.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, alors $f \circ \varphi_q \in \mathcal{C}(V_q, K)$ et on déduit du Théorème 1.0.2 que $f \circ \varphi_q = \sum_{n\geq 0} D_q^{(n)}(f \circ \varphi_q)(1)Q_n$.

-(a)- Supposons q non racine de l'unité.
On a $\Delta_q^{(j)}(f)(0) = \widetilde{\varepsilon_q} \circ D_q^{(j)} \circ \widetilde{\varphi_q}(f)(0) = D_q^{(j)}(f \circ \varphi_q)(1)$. Soit $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $f(x) = \widetilde{\varepsilon_q}(f \circ \varphi_q)(x) = (f \circ \varphi_q)(q^x) = \sum_{n\geq 0} D_q^{(n)}(f \circ \varphi_q)(1)Q_n(q^x) =$
$= \sum_{n\geq 0} \widetilde{\varepsilon_q} \circ D_q^{(n)} \circ \widetilde{\varphi_q}(f)(0)C_n(x) = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(f)(0)C_n(x)$. Ce développement est unique car celui de $f \circ \varphi_q$ l'est dans $\mathcal{C}(V_q, K)$.
Puisque $\Delta_q^{(n)} = (\tau_1 - id)\ldots(\tau_1 - q^{n-1}id)$, on a $\Delta_q^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k(n)\tau_1^{n-k}$.
En effet, $\Delta_q^{(2)} = \tau_1^2 - (2)_q\tau_1 + qid$ et $\Delta_q^{(3)} = (\tau_1^2 - (2)_q\tau_1 + qid)(\tau_1 - q^2 id) =$
$= \tau_1^3 - (3)_q\tau_1^2 + +q(3)_q\tau_1 - q^3 id = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k(3)\tau_1^{3-k}$.
Par récurrence, on voit que $\Delta_q^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k(n)\tau_1^{n-k}$.
On en déduit que $a_n = \Delta_q^{(n)}(f)(0) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k(n)\tau_1^{n-k}(f)(0) =$
$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} C_k(n)(f)(n-k)$.

-(b)- Supposons que q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N et considérons une suite $(q_\alpha)_\alpha$ qui converge vers q. Soit n un entier positif, comme ci-dessus, on obtient $\|C_{n,q_\alpha} - C_{n,q}\| \leq |q_\alpha - q|$ et $\left\|\Delta_{q_\alpha}^{(n)} - \Delta_q^{(n)}\right\| \leq |q_\alpha - q|$. On en déduit que, pour tout $n \geq 0$, $\lim_{\alpha\to+\infty} C_{n,q_\alpha} = C_{n,q}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} \Delta_{q_\alpha}^{(n)}(f)(0) = \Delta_q^{(n)}(f)(0)$.
Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, puisque q_α est non racine de l'unité, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $f = \sum_{n\geq 0} a_{\alpha,n}C_{n,q_\alpha}$, avec $a_{\alpha,n} = \Delta_{q_\alpha}^{(n)}(f)(0)$. Par passage à la limite, on obtient
$f = \lim_{\alpha\to+\infty} \sum_{n\geq 0} \Delta_{q_\alpha}^{(n)}(f)(0)C_{n,q_\alpha} = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(f)(0)C_{n,q}$.
D'autre part, comme $(C_{n,q_\alpha})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et pour tout $n \geq 0$, on a $\|C_{n,q_\alpha} - C_{n,q}\| \leq |q_\alpha - q| < 1$, on déduit du Lemme 1.0.1 que $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. $\square$

Proposition 1.0.2. *Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K de q-développements $f = \sum_{k\geq 0} a_k C_{k,q}$ et $g = \sum_{k\geq 0} b_k C_{k,q}$.*

(i) *Pour tout $n \geq 0$, on a $\Delta_q^{(n)}(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(g)$.*

(ii) *Pour tous $m \geq 0$ et $n \geq m$, on a $\Delta_q^{(n)}(C_{m,q}f)(0) = C_{m,q}(n)\sum_{k=0}^{m} q^{k(n-m)}C_{k,q}(m)a_{n-k}$ et $\Delta_q^{(n)}(C_{m,q}f)(0) = 0$, $\forall n < m$.*

Démonstration. Puisque $\tau_1(fg) = \tau_1(f)\tau_1(g)$, on a $\Delta(fg) = \tau_1(f)\tau_1(g) - fg =$ $= (\tau_1 - id)(f)\tau_1(g) + f(\tau_1 - id)(g) = \Delta(f)\tau_1(g) + f\Delta(g)$. De même, on a $\Delta_q^{(2)}(fg) = (\tau_1 - qid)(\Delta(f)\tau_1(g) + f\Delta(g)) = (\tau_1 - id)(\tau_1(f))\tau_1^2(g) + \tau_1(f)(\tau_1 - id)(\tau_1(g)) -$ $-q(\Delta(f)\tau_1(g) + f\Delta(g)) = (\tau_1 - id)(\tau_1 - qid)(f)\tau_1^2(g) + q\Delta(f)\tau_1(\tau_1 - id)(g) +$ $+ (\tau_1 - id)(f)(\tau_1 - id)(\tau_1(g)) + f(\tau_1 - id)(\tau_1 - qid)(g) = \Delta_q^{(2)}(f)\tau_1^2(g) + (2)_q\Delta(f)\tau_1\Delta(g) +$ $+f\Delta_q^{(2)}(g)$.

Par récurrence, supposons que $\Delta_q^{(n)}(fg) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(g)$. On a

$$\Delta_q^{(n+1)} = (\tau_1 - q^n id)\Big(\sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(g)\Big) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}\tau_1(f)\tau_1^{k+1}\Delta_q^{(n-k)}(g) - q^n\sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(g) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(\tau_1 - q^k id)(f)\tau_1^{k+1}\Delta_q^{(n-k)}(g) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k q^k(\tau_1 - q^{n-k}id)\Delta_q^{(n-k)}(g) =$$
$$= \Delta_q(n+1)(f)\tau_1^{n+1}(g) + \sum_{k=1}^{n}(C_{k-1,q}(n) + q^kC_{k,q}(n))\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n+1-k)}(g) + f\Delta_q^{(n+1)}(g) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_{k,q}(n+1)\Delta_q^{(k)}(f)\tau_1^k\Delta_q^{(n+1-k)}(g).$$

On déduit de (i) que $\Delta_q^{(n)}(C_{m,q}f) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(f)(x)\Delta_q^{(k)}(C_{m,q})$ et

$\Delta_q^{(n)}(C_mf)(0) = \sum_{k=0}^{n} C_{k,q}(n)\tau_1^k\Delta_q^{(n-k)}(f)(0)\Delta_q^{(k)}(C_{m,q})(0)$. Or $\Delta_q^{(k)}(C_{m,q})(0) = 0$, $\forall k \neq m$ et $\Delta_q^{(m)}(C_{m,q})(0) = 1$. Donc, pour $n < m$, on a $\Delta_q^{(n)}(C_{m,q})(0) = 0$ et pour $n \geq m$, on a

$\Delta_q^{(n)}(C_{m,q}f)(0) = C_{m,q}(n)\Delta_q^{(n-m)}(f)(m) = C_{m,q}(n)\sum_{k\geq 0} a_k \Delta_q^{n-m}(C_{k,q})(m)$. On déduit du Lemme 1.0.7 que $\Delta_q^{(n)}(C_{m,q}f)(0) = C_{m,q}(n)\sum_{k\geq n-m} a_k q^{(n-m)(n-k)} C_{k-n+m,q}(m) =$

$$= C_{m,q}(n)\sum_{k=0}^{m} a_{n-m+k} q^{(n-m)(m-k)} C_{k,q}(m) = C_{m,q}(n)\sum_{k=0}^{m} a_{n-k} q^{k(n-m)} C_{k,q}(m). \qquad \square$$

Corollaire. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K et soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_{n,q}$ son q-développement de Mahler. Soit m un entier positif, on a*

$$C_{m,q}.f = \sum_{n\geq 0}\Big(C_{m,q}(n)\sum_{k=0}^{m} q^{k(n-m)} C_{k,q}(m) a_{n-k}\Big) C_{n,q}.$$

Lemme 1.0.8. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*

(i) *Si $x = p^n u$, avec u une unité de $\mathbb{Z}_p$, alors $|(x)_q| = |(p^n)_q| \leq \max(|q-1|^n, p^{-n}) < 1$.*

(ii) *Si $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, alors $|(x)_q| = |x|$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$.*

(iii) *Si q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p, alors $|p|^{N-1} \leq |(x)_q| \leq |q-1|$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.*

Démonstration.

(i) Soit $x = p^n u$, on a $(x)_q = (p^n)_q (u)_{q^{p^n}}$ et $(u)_{q^{p^n}} = \dfrac{(q^{p^n})^u - 1}{q^{p^n} - 1} =$

$= u + \sum_{i\geq 2}\binom{u}{i}(q^{p^n}-1)^{i-1}$. Puisque $\left|\sum_{i\geq 2}\binom{u}{i}(q^{p^n}-1)^{i-1}\right| \leq \left|q^{p^n}-1\right| < 1$, on a $\left|(u)_{q^{p^n}}\right| = |u| = 1$. Donc $|(x)_q| = |(p^n)_q|$.

D'autre part, $(p^n)_q = (p)_q (p^{n-1})_{q^p} = (p)_q (p)_{q^p} \dots (p)_{q^{p^{n-1}}}$ et $(p)_q = \dfrac{q^p - 1}{q-1} = p + \sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}(q-1)^{k-1}$. D'où $|(p)_q| \leq \max(|q-1|, p^{-1}) < 1$. Puisque $\left|q^{p^i}-1\right| < 1$, $\forall 0 \leq i \leq n-1$, on a $\left|(p)_{q^{p^i}}\right| \leq \max(\left|q^{p^i}-1\right|, p^{-1})$. Donc $|(p^n)_q| = \prod_{i=0}^{n-1}\left|(p)_{q^{p^i}}\right| \leq \max(|q-1|^n, p^{-n}) < 1$.

(ii) Si $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, alors $\left|q^{p^i}-1\right| < p^{-\frac{1}{p-1}}$ et $\left|\sum_{k=2}^{p}\binom{p}{k}(q^{p^i}-1)^{k-1}\right| < |p|$, $\forall i \geq 0$.
Donc $\left|(p)_{q^{p^i}}\right| = |p|$ et pour $x = p^n u$ où u est un élément unité de $\mathbb{Z}_p$, on a
$|(x)_q| = |(p^n)_q| = \prod_{i=0}^{n-1}\left|(p)_{q^{p^i}}\right| = |p|^n = |p^n u|$.

(iii) Supposons que q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p.
Soit $x = z(x)p^N + l(x)$, $1 \leq l(x) \leq p^N - 1$, on a $(x)_q = \dfrac{q^{z(x)p^N + l(x)} - 1}{q-1} = \dfrac{q^{l(x)}-1}{q-1} =$
$= (l(x))_q$. On pose $l(x) = up^n$, u étant un entier premier à p, alors on a $n \leq N-1$.
Comme en (i), on a $|(x)_q| = |(l(x))_q| = |(p^n)_q| \leq \max(|q-1|^n, |p|^n)$. Puisque q est racine de l'unité d'ordre p^N, on déduit du Lemme 1.0.2 (ii) que $|q-1| \geq |p|^{\frac{1}{p-1}} \geq |p|$.
Donc $|(x)_q| \leq |q-1|^n \leq |q-1|$.
D'autre part, on a $(p^{N-1})_q = (p^{N-n-1})_{q^{p^n}}(p^n)_q$ et $\left|(p^{N-1})_q\right| \leq |(p^n)_q|$. Mais q est une racine de l'unité d'ordre p^N, donc $q^{p^{N-1}}$ est une racine de l'unité d'ordre p, avec $\left|q^{p^{N-1}} - 1\right| = |p|^{\frac{1}{p-1}}$ et $|q-1| = |p|^{\frac{1}{(p-1)p^{N-1}}}$. Ainsi
$\left|(p^{N-1})_q\right| = |p|^{\frac{p^{N-1}-1}{(p-1)p^{N-1}}} \geq |p|^{N-1}$. D'où $|p|^{N-1} \leq |(x)_q| \leq |q-1|$. □

Soient $n \geq 1$ un entier et $k(n)$ l'entier tel que $p^{k(n)} \leq n < p^{k(n)+1}$. On a l'inégalité $\left|\binom{x}{n} - \binom{y}{n}\right| \leq p^{k(n)}|x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$ ([33] Proposition 47.4). Pour $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$, on a les inégalités analogues suivantes:

Lemme 1.0.9. *Soit $n = a_0 + \cdots + a_{k(n)}p^{k(n)}$ le développement en base p de l'entier positif n; on a $p^{k(n)} \leq n < p^{k(n)+1}$.*
Soit $q \in K$, $|q-1| < 1$.

(i) *Si q est non racine de l'unité, alors $|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq \left|(p^{k(n)})_q\right|^{-1} |(x-y)_q|$.*

(ii) *Si q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p ($N \geq 0$), alors $|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq |x-y| \max(p^{N-1}, p^{k(n)})$.*

Démonstration.

(i) Soit $x = y + z$ un élément de $\mathbb{Z}_p$. On déduit du Théorème 1.0.4 (i), que
$C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y) = \sum_{j=0}^{n} q^{(n-j)(y-j)} C_{n-j,q}(y) C_{j,q}(z) - C_{n,q}(y) =$

$= \sum_{j=1}^{n} q^{(n-j)(y-j)} C_{n-j,q}(y) C_{j,q}(z) = \sum_{j=1}^{n} q^{(n-j)(y-j)} \frac{(z)_q}{(j)_q} C_{n-j,q}(y) C_{j-1,q}(z-1)$. Ce qui entraîne $|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq |(z)_q| \max_{1 \leq j \leq n} |(j)_q|^{-1}$.
Supposons $0 \leq j = p^m v \leq n$, avec v premier à p, on a $|(j)_q| = |(p^m)_q|$. Puisque $p^{k(n)} \leq n < p^{k(n)+1}$, alors $m \leq k(n)$ et $\max_{1 \leq j \leq n} |(j)_q|^{-1} = \max_{0 \leq m \leq k(n)} |(p^m)_q|^{-1}$.
Or $\left|(p^{k(n)})_q\right| = \left|(p^m)_q (p^{k(n)-m})_{q^{p^m}}\right| \leq |(p^m)_q|$, $\forall m \leq k(n)$. Donc
$|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq |(x-y)_q| \max_{0 \leq m \leq k(n)} |(p^m)_q|^{-1} \leq |(x-y)_q| \left|(p^{k(n)})_q\right|^{-1}$.

(ii) Supposons q racine de l'unité d'ordre p^N. Soit $n = m(n)p^N + r(n)$, on obtient $p^{k(n)-N} \leq m(n) \leq p^{k(n)-N+1}$. Soient $x = z(x)p^N + l(x)$ et $y = \zeta(y)p^N + l(y)$, on a, ou bien $l(x) = l(y)$ et $|x-y| = \left|(z(x) - \zeta(y))p^N\right| \leq |p|^N$, ou bien $l(x) \neq l(y)$ et $|x-y| = |l(x) - l(y)|$, car $|p|^N < |p|^{N-1} \leq |l(x) - l(y)|$.
Donc $\max(\left|(z(x) - \zeta(y))p^N\right|, |l(x) - l(y)|) = |x-y|$. On a
$C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y) = \Big(B_{m(n)}(z(x)) - B_{m(n)}(\zeta(y))\Big) C_{r(n),q}(l(x)) +$
$+ B_{m(n)}(\zeta(y)) \big(C_{r(n),q}(l(x)) - C_{r(n),q}(l(y))\big)$. Donc
$|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq \max\big(\left|B_{m(n)}(z(x)) - B_{m(n)}(\zeta(y))\right|, \left|C_{r(n),q}(l(x)) - C_{r(n),q}(l(y))\right|\big)$.
On déduit de la Proposition 47.4 de [33] que
$\left|B_{m(n)}(z(x)) - B_{m(n)}(\zeta(y))\right| .5 \leq p^{k(n)-N} |z - \zeta| = p^{k(n)} \left|zp^N - \zeta p^N\right| \leq p^{k(n)} |x-y|$.
D'autre part $\left|C_{r(n),q}(l(x)) - C_{r(n),q}(l(y))\right| \leq |l(x) - l(y)| \left|(p^{k(r(n))})_q\right|^{-1} \leq$
$\leq |l(x) - l(y)| \left|(p^{N-1})_q\right|^{-1} \leq |l(x) - l(y)| p^{N-1} \leq |x-y| p^{N-1}$. Donc
$|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq |x-y| \max(p^{N-1}, p^{k(n)})$. □

N.B.: Si $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, alors on a $|C_{n,q}(x) - C_{n,q}(y)| \leq p^{k(n)} |x-y|$.

CHAPITRE 2

2. Opérateurs aux différences et q-bases de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$

Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K. Soit τ_1, l'oprérateur linéaire continu défini sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ par $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. Plus généralement, les opérateurs de translations τ_y sont définis, pour $y \in \mathbb{Z}_p$ par $\tau_y(f)(x) = f(x+y)$. Nous appelons opérateurs aux différences finies les endomorphismes linéaires continus Q de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, tels que $Q \circ \tau_1 = \tau_1 \circ Q$. L'ensemble $W(\mathbb{Z}_p, K)$ des opérateurs aux différences finies est une sous-algèbre fermée de l'algèbre $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Considérons l'opérateur $\Delta = \tau_1 - id$. On a $\Delta(B_0) = 0$ et $\Delta(B_n) = B_{n-1}$, $\forall n \geq 1$. Les puissances de Δ sont définies successivement par $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$. On sait que tout élément Q de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ admet un développement en série simplement uniformément convergente $Q = \sum_{n \geq 0} b_n \Delta^n$, avec $\|Q\| = \sup_{n \geq 0} |b_n| < +\infty$ et $b_n = Q(B_n)(0)$. Ce développement de Q est donc lié à la base de Mahler. On obtient ici un autre développement des éléments de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ lié à la q-base de Mahler. Ce développement nous permet aussi d'établir une bijection entre une classe de bases orthonormales et une classe d'opérateurs aux différences finies.

Considérons la q-dérivation de Jackson, ∇_q définie sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ par $\nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(q-1)q^x}$, $\forall f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$. On appelle opérateurs de Jackson les opérateurs linéaires continus R tels que $R \circ \nabla_q = \nabla_q \circ R$. On désigne par $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, la sous-algèbre fermée de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ formée des opérateurs de Jackson. Tout opérateur R de $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ admet un développement en série simplement uniformément convergente. Comme pour les opérateurs aux différences, ce développement est lié à la base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ formée de la suite de fonction $F_{n,q} = (q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} C_{n,q}$. Cela nous permet également d'ébablir une bijection entre une classe de bases orthogonales et une classe d'opérateurs de Jackson.

2.1 q-Bases orthonormales et opérateurs aux différences

Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ l'espace de Banach dual de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ identifié à l'espace des mesures bornées sur $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K. Si $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$, on a $\|\mu\| = \sup_{n\geq 0} |< \mu, B_n >|$.
De plus, l'espace des mesures bornées $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ muni du produit de convolution, tel que $< \mu \star \nu, f >= \int \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+y) d\mu(x) d\nu(y)$ est une algèbre de Banach unitaire d'unité ε_0, telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $\varepsilon_0(f) = f(0)$.

Considérons l'application linéaire continue θ de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ qui à l'endomorphisme linéaire continu u, associe la forme linéaire continue $\theta(u) = \varepsilon_0 \circ u$. Il devient clair que $\|\theta(u)\| \leq \|u\|$. On note θ_1 la restriction de θ à $W(\mathbb{Z}_p, K)$.
Associons à $\mu \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ l'élément $\varphi(\mu) = \sum_{n\geq 0} < \mu, B_n > \Delta^n$ de $W(\mathbb{Z}_p, K)$, on définit ainsi un isomorphisme isométrique d'algèbres de Banach unitaires de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ sur $W(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $\varphi \circ \theta_1 = id$ et $\theta_1 \circ \varphi = id$ (voir [6], [7], [8] et [46]).

Soit $K \ll X \gg = \{S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n \in K[[X]] \ / \ \|S\| = \sup_{n\geq 0} |a_n| < +\infty\}$ l'algèbre des séries formelles à coefficients bornés munie de la norme $\|S\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|$.
On obtient également un isomorphisme isométrique entre les algèbres de Banach $W(\mathbb{Z}_p, K)$ et $K \ll X \gg$ en associant à l'opérateur aux différences finies $Q = \sum_{n\geq 0} a_n \Delta^n$, la série formelle $S_Q = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et à la série formelle $S = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, l'opérateur $Q_S = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n$.
Ainsi, les algèbres $W(\mathbb{Z}_p, K)$, $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)'$ et $K \ll X \gg$ sont isométriquement isomorphes. Puisque la norme de $K \ll X \gg$ est multiplicative, celle de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ est aussi multiplicative (voir le Corollaire du Théorème 3 de [7] et aussi le Theorem 13.10 de [14]).

La boule unité fermée de l'algèbre $K \ll X \gg$ est égale à l'anneau $\Lambda[[X]]$ des séries formelles à coefficients dans l'anneau des entiers Λ de K.

La proposition suivante nous sera utile.

Proposition 2.1.1. *Soit $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \Delta^n \in W(\mathbb{Z}_p, K)$. Alors Q est inversible si et seulement si $\|Q\| = |b_0| \neq 0$.*

Démonstration. Voir [7] Corollaire du Théorème 3.
La démonstration repose essentiellement sur le fait que $K \ll X \gg$ est de norme multiplicative et que $\Lambda[[X]]$, la boule unité de $K \ll X \gg$ est un anneau local. $\square$

Définition 2.1.1. *On dit qu'une suite de polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ est une suite polynomiale si $h_0 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, h_n est de degré n.*
Une suite polynomiale $(h_n)_{n\geq 0}$ est dite de type binomial si et seulement si $h_n(x+y) = \sum_{i+j=n} h_i(x)h_j(y)$, $\forall n \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$.

Dans [44], L. Van Hamme donne une démonstration du théorème suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $Q = \sum_{n\geq 1} b_n\Delta^n$ un opérateur aux différences finies tel que $\|Q\| = |b_1| = 1$. Alors, il existe une unique suite polynomiale de type binomial $(h_n)_{n\geq 0}$ telle que $h_0 = 1$, $Q(h_n) = h_{n-1}$ et $h_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$.*
De plus, toute fonction continue f admet un développement en série uniformément convergente $f = \sum_{n\geq 0} Q^n(f)(0)h_n$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |Q^n(f)(0)|$.

B. Diarra donne une réciproque au Théorème 2.1.1 (voir [7]).

Théorème 2.1.2. *Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et soit $(h_n)_{n\geq 0}$ une suite de polynômes de type binomial qui est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Alors, il existe un opérateur aux différences finies $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, unique tel que $Q(h_n) = h_{n-1}$, où $h_{-1} = 0$ et $Q = \sum_{n\geq 1} b_n\Delta^n$, avec $\|Q\| = |b_1| = 1$.*

Ainsi, une bijection est établie entre les bases orthonormales de type binomial $(h_n)_{n\geq 0}$ et les opérateurs aux différences $Q = \sum_{n\geq 0} b_n\Delta^n$, tels que $\|Q\| = |b_1| = 1$.

Théorème 2.1.3. *Soit $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ un opérateur aux différences finies, alors Q a un unique développement en série simplement uniformément convergente $Q = \sum_{n\geq 0} b_n\Delta_q^{(n)}$, $b_n \in K$, c'est-à-dire que pour toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$, la série $\sum_{n\geq 0} b_n\Delta_q^{(n)}(f)$ converge uniformément et $Q(f) = \sum_{n\geq 0} b_n\Delta_q^{(n)}(f)$.*
De plus, $b_n = Q(C_{n,q})(0)$ et $\|Q\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|$, où $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est la q-base de Mahler.

Démonstration. On pourra trouver une démonstration de ce théorème dans [8]. Plus précisément, si Q commute avec τ_1, alors il commute avec tout autre opérateur de translation τ_x, $x \in \mathbb{Z}_p$: pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $y \in \mathbb{Z}_p$, on a $\tau_x(f)(y) = f(x+y)$. Comme $f = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(f)(0)C_{n,q}$ (Théorème 1.0.5), on obtient $Q(f) = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(f)(0)Q(C_{n,q})$. Donc $Q(f)(x+y) = \tau_x \circ Q(f)(y) = Q(\tau_x(f))(y) = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(f)(x)Q(C_{n,q})(y)$. Posant $y = 0$, on obtient $Q(f)(x) = \sum_{n\geq 0} Q(C_{n,q})(0)\Delta_q^{(n)}(f)(x)$. Rappelons que $\Delta_q^{(n)}(f)$ converge uniformément vers 0, comme $|Q(C_{n,q})(0)| \leq \|Q\|$, on voit que l'on a la convergence uniforme $Q(f) = \sum_{n\geq 0} Q(C_{n,q})(0)\Delta_q^{(n)}(f)$. De plus $\|Q\| = \sup_{n\geq 0} |Q(C_{n,q})(0)|$. □

Théorème 2.1.4. *Soit* $Q = \sum_{n\geq 0} b_n\Delta_q^{(n)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, *$Q$ est inversible si et seulement si* $\|Q\| = |b_0| \neq 0$.

Démonstration. Par définition, on a $\Delta_q^{(n)} = (\tau_1 - id) \circ \cdots \circ (\tau_1 - q^{n-1}id) =$
$= \Delta \circ \big(\Delta - (q-1)id\big) \circ \cdots \circ \big(\Delta - (q^{n-1}-1)id\big) = \sum_{m=1}^{n} a_{n,m}\Delta^m$, où $a_{n,n} = 1$,
$a_{n,1} = (-1)^{n-1}(q-1)^{n-1}(n-1)_q!$ et pour $1 \leq m \leq n$, on a
$a_{n,m} = (-1)^{n-m} \sum_{1\leq i_1 < \cdots < i_{n-m} \leq n-1} \prod_{\ell=1}^{n-m} (q^{i_\ell} - 1)$. Donc $|a_{n,m}| \leq |q-1|^{n-m}$, $\forall 1 \leq m \leq n$ et $\lim_{n\to+\infty} |a_{n,m}| = 0$ pour m fixé . Puisque $\Delta_q^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} a_{n,m}\Delta^m$, avec $\lim_{n\to+\infty} |a_{n,m}| = 0$ et $\sup_{n\geq 0} |b_n| < +\infty$, la série $\sum_{n\geq m} b_n a_{n,m}$ converge. D'où l'on déduit que

$$Q = b_0 + \sum_{n\geq 1} b_n\Delta_q^{(n)} = b_0 + \sum_{n\geq 1} b_n \sum_{m=1}^{n} a_{n,m}\Delta^m = b_0 + \sum_{m\geq 1} \Big(\sum_{n\geq m} b_n a_{n,m}\Big)\Delta^m = \sum_{m\geq 0} \alpha_m\Delta^m,$$

avec $\alpha_0 = b_0$ et $\alpha_m = \sum_{n\geq m} b_n a_{n,m}$, $\forall m \geq 1$. Nous avons $|\alpha_m| \leq \sup_{n\geq m} |b_n| < +\infty$ et $\|Q\| = \sup_{m\geq 0} |\alpha_m|$.
On déduit de la Proposition 2.1.1 que Q est inversible si et seulement si
$\|Q\| = |\alpha_0| = |b_0| \neq 0$. □

N.B. De plus Q est bijectif et isométrique si et seulement si $\|Q\| = |b_0| = 1$. Dans ces conditions Q envoie une base orthonormale sur une autre.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$. Rappelons qu'un q-polynôme de q-degré n est une fonction continue h, telle que $h(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k q^{kx}$, avec $a_n \neq 0$. Notons que h peut aussi s'écrire sous la forme $h=\sum_{k=0}^{n} b_k C_{k,q}$, avec $b_k \in K$ et $b_n \neq 0$.

Définition 2.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$. Une suite de q-polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$ est dite* **q-polynomiale** *si $h_0=1$ et pour tout $n\neq 0$, h_n est de* **q-degré** *n.*

Lemme 2.1.1. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$. Soit $Q=\sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)}$ tel que $\|Q\|=|b_1|$. Si h est un q-polynôme de q-degré $n\geq 1$, alors $Q(h)$ est aussi un q-polynôme de q-degré n.*

Démonstration. Prouvons le pour $h(x)=q^{nx}$, $n\geq 1$.
Pour $1\leq i\leq n$, on a $\Delta_q^{(i)}(q^{nx})=\prod_{\ell=0}^{i-1}(q^n-q^\ell)q^{nx}$ et $\Delta_q^{(i)}(q^{nx})=0, \forall i\geq n+1$ (Lemme 1.0.7).
Donc $Q(q^{nx})=\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^n-q^\ell)\Big)q^{nx}$. On a
$\sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^n-q^\ell)=(q^n-1)\Big(b_1+\sum_{i=2}^{n} b_i\prod_{\ell=1}^{i-1}(q^n-q^\ell)\Big)$, avec $|b_i|\prod_{\ell=1}^{i-1}\Big|q^n-q^\ell\Big|<|b_i|\leq|b_1|$, pour $i\geq 2$. D'où $\left|\sum_{i=1}^{n} b_i\prod_{l=0}^{i-1}(q^n-q^l)\right|=|q^n-1|\,|b_1|$. Puisque q est non racine de l'unité, $|q^n-1|\,|b_1|\neq 0$ et $Q(q^{nx})$ est un q-polynôme de q-degré n. Le lemme suit par linéarité. □

Proposition 2.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$ et soit $Q=\sum_{i\geq 1} b_i\Delta_q^{(i)}$ tel que $\|Q\|=|b_1|$. Il existe une unique suite q-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que $Q(h_{n,q})(x)=q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x)$, $h_{n,q}(0)=0$ si $n\geq 1$.*

Démonstration. On déduit du Lemme 2.1.1 que $Q(q^{nx})=\beta_n(q)q^{nx}$, avec $\beta_n(q)=\sum_{i=1}^{n} b_i\prod_{\ell=0}^{i-1}(q^n-q^\ell)\in K$. Puisque q est non racine de l'unité, $\beta_n(q)\neq 0$, pour $n\geq 1$ et $\beta_0(q)=0$.

Supposons $h_{0,q},\ h_{1,q}, \ldots,\ h_{n-1,q},\ (n \geq 1)$ déjà construits. On détermine $h_{n,q}(x) = \sum_{j=0}^{n} d_{n,j}(q) q^{jx}$. Puisque $h_{n,q}$ est de q-degré $n \geq 1$, on déduit du Lemme 2.1.1 que $Q(h_{n,q})$ est un q-polynôme de q-degré n. On a
$Q(h_{n,q})(x) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j(q) d_{n,j}(q) q^{jx} = q^{1-n} q^x h_{n-1,q}(x) = q^{1-n} \sum_{j=0}^{n-1} d_{n-1,j}(q) q^{(j+1)x} =$
$= q^{1-n} \sum_{j=1}^{n} d_{n-1,j-1}(q) q^{jx}$. Donc, par identification, on obtient $\beta_j(q) d_{n,j}(q) = q^{1-n} d_{n-1,j-1}(q)$, $\forall 1 \leq j \leq n$, d'où l'on déduit que $d_{n,j}(q) = \dfrac{q^{1-n} d_{n-1,j-1}(q)}{\beta_j(q)}$, $\forall 1 \leq j \leq n$. Puisque $0 = h_{n,q}(0) = \sum_{j=0}^{n} d_{n,j}(q)$, on obtient $d_{n,0}(q) = -\sum_{j=1}^{n} d_{n,j}(q)$. Donc $h_{n,q}$ est bien construit et est unique. □

Lemme 2.1.2 (Ann Verdoodt)**.** *Soit K un corps valué ultramétrique complet et soit $(E, \| \ \|)$ un K-espace de Banach. On suppose que E contient une base orthonormale dénombrable $(e_n)_{n\geq 0}$. Soit $(e'_n)_{n\geq 0}$ une suite dans E, telle que $e'_n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,j} e_j$, $\alpha_{n,j} \in K$, $n = 0,\ 1,\ \ldots;\ 0 \leq j \leq n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *La suite $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E.*

(ii) *Pour $n \geq 0$, on a $\|e'_n\| = 1,\ |\alpha_{n,n}| = 1$*

(iii) *Pour $n \geq 0$ et pour tout j tel que $0 \leq j \leq n$, on a $|\alpha_{n,j}| \leq 1$, $|\alpha_{n,n}| = 1$.*

Démonstration.

-(a)- Tout d'abord, montrons que (i) est équivalent à (ii).
• Supposons que $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E. Alors $\|e'_n\| = 1$ et puisque $(e_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E, on voit que
$|\alpha_{n,n}| \leq \max_{0\leq j\leq n} |\alpha_{n,j}| = \left\|e'_n\right\| = 1$.
D'autre part, comme $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E, il existe une suite $(d_{n,i})_{0\leq i\leq n}$ dans K telle que $e_n = \sum_{i=0}^{n} d_{n,i} e'_n$ et $1 = \|e_n\| = \max_{0\leq i\leq n} |d_{n,i}|$. Donc

$|d_{n,n}| \leq 1$. De plus $e_n = \sum_{i=0}^{n} d_{n,i} \sum_{j=0}^{i} \alpha_{i,j} e_j = \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{i=j}^{n} d_{n,i}\alpha_{i,j} \Big) e_j$. Donc $d_{n,n}\alpha_{n,n} = 1$.
Puisque $|d_{n,n}| \leq 1$ et $|\alpha_{n,n}| \leq 1$, on obtient $|d_{n,n}| = |\alpha_{n,n}| = 1$.
•• Réciproquement, supposons que $\|e'_n\| = 1$ et $|\alpha_{n,n}| = 1$, pour tout $n \geq 0$. Soit $h_m = \sum_{k=0}^{m} d_k e'_k$. Montrons que $\|h_m\| = \max_{0 \leq k \leq m} |d_k|$. Il est évident que $\|h_m\| \leq \max_{0 \leq k \leq m} |d_k|$.
Montrons, par récurrence descendante que $\max_{0 \leq k \leq m} |d_k| \leq \|h_m\|$. On a $h_m = \sum_{k=0}^{m} d_k e'_k = \sum_{k=0}^{m} d_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} e_j = \sum_{j=0}^{m} \Big(\sum_{k=j}^{m} d_k \alpha_{k,j} \Big) e_j$. Donc

$$\|h_m\| = \max_{0 \leq j \leq m} \left| \sum_{k=j}^{m} d_k \alpha_{k,j} \right| = \max \left(\max_{0 \leq j \leq m-1} \left| \sum_{k=j}^{m} d_k \alpha_{k,j} \right|, |d_m \alpha_{m,m}| \right)$$ et

$$|d_m \alpha_{m,m}| = |d_m| \leq \max_{0 \leq j \leq m} \left| \sum_{k=j}^{m} d_k \alpha_{k,j} \right| = \|h_m\|.$$

D'autre part $h_m - d_m e'_m = \sum_{k=0}^{m-1} d_k e'_k = \sum_{k=0}^{m-1} d_k \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} e_j = \sum_{j=0}^{m-1} \Big(\sum_{k=j}^{m-1} d_k \alpha_{k,j} \Big) e_j =$
$= \sum_{j=0}^{m-2} \Big(\sum_{k=j}^{m-1} d_k \alpha_{k,j} \Big) e_j + d_{m-1}\alpha_{m-1,m-1} e_{m-1}$. Donc $|d_{m-1}| \leq \|h_m\|$.

Supposons alors que $\max_{1 \leq k \leq m} |d_k| \leq \|h_m\|$. Comme $h_m - \sum_{k=1}^{m} d_k e'_k = d_0 e'_0$, on obtient $|d_0| = \big\| d_0 e'_0 \big\| \leq \max(\|h_m\|, \max_{1 \leq k \leq m} |d_k|) = \|h_m\|$ et $\|h_m\| = \max_{0 \leq k \leq m} |d_k|$. En d'autres termes $(e'_n)_{n \geq 0}$ est une famille orthonormale E. Comme $e'_n \in \bigoplus_{j=0}^{n} K.e_j$ pour tout $n \geq 0$, e_n peut s'écrire sous la forme $e_n = \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k} e'_k$, avec $|\beta_{n,k}| \leq 1$, $\forall 0 \leq k \leq n$.

Soit $v = \sum_{n \geq 0} a_n e_n \in E$, avec $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$; on a $v = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_n \beta_{n,k} e'_n$. Comme $\sup_{n \geq k} |a_n| \, |\beta_{n,k}| \leq \sup_{n \geq k} |a_n|$, on a $\lim_{k \to +\infty} \left| \sum_{n \geq k} a_n \beta_{n,k} \right| \leq \lim_{k \to +\infty} \sup_{n \geq k} |a_n| = \lim_{n \to +\infty} |a_n| = 0$.
Donc $v = \sum_{k \geq 0} \Big(\sum_{n \geq k} a_n \beta_{n,k} \Big) e'_k = \sum_{k \geq 0} b_k e'_k$, avec $b_k = \sum_{n \geq k} a_n \beta_{n,k}$, $\lim_{k \to +\infty} |b_k| = 0$ et

$\|v\| = \sup_{k\geq 0} |b_k|$. D'où $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E.

-(b)- Montrons maintenant que $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$.
Supposons que $\|e'_n\| = 1$ et $\alpha_{n,n} = 1$, $\forall n \geq 0$. Mais alors $(e'_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de E, ainsi pour tout $n \geq 0$, $\|e'_n\| = \max_{0\leq j\leq n} |\alpha_{n,j}| = 1$. Donc, pour tout j, $0 \leq j \leq n$, $|\alpha_{n,j}| \leq 1$.
Réciproquement si $|\alpha_{n,j}| \leq 1$ et $|\alpha_{n,n}| = 1$, $\forall n \geq 0$, $0 \leq j \leq n$, alors $\|e'_n\| = \max_{0\leq j\leq n} |\alpha_{n,j}| = 1, \forall n \geq 0$. □

On a la q-version suivante au Théorème 2.1.1.

Théorème 2.1.5. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$.*
Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$.

(i) *Il existe une unique suite q-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que $Q(h_{n,q})(x) = q^{1-n} q^x h_{n-1,q}(x)$, $h_{n,q}(0) = 0$ si $n \geq 1$. Cette suite est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.*

(ii) *Si f est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, alors f peut s'écrire sous une forme unique de série uniformément convergente $f = \sum_{n\geq 0} d_n(q) h_{n,q}$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |d_n(q)|$ et $d_n(q) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^{-x}Q)^n(f)(0)$, où $q^{-x}Q$ est l'opérateur linéaire continu défini par $(q^{-x}Q)(f)(x) = q^{-x}Q(f)(x)$.*

Démonstration. Supposons donc q non racine de l'unité tel que $|q-1| < 1$. Dans ces conditions, la démonstration est essentiellement la même que celle donnée par A. Verdoodt dans [51] et [52]. Par souci d'être complet, nous donnons ici une démonstration plus explicite, la condition $|q-1| < 1$ étant fort utile.

-(a)- L'existence et l'unicité découlent de la Proposition 2.1.2. Nous avons à montrer que la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
Posons $h_{n,q} = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}(q) C_{j,q}$. En vertu du Lemme 2.1.2, il suffit de montrer que $|a_{n,j}(q)| \leq 1$ et $|a_{n,n}(q)| = 1$.
Pour $n = 0$, on a $h_{0,q}(x) = 1$ et $a_{0,0}(q) = 1$.
Soit $n \geq 1$, supposons par récurrence que $|a_{n-1,j}(q)| \leq 1$ et $|a_{n-1,n-1}(q)| = 1$. On a

$Q(h_{n,q}) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}(q)Q(C_{j,q}) = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}(q)\sum_{i=1}^{j} b_i q^{i(i-j)}q^{ix}C_{j-i,q}$ (Lemme 1.0.7). Par substitution dans le Lemma 2 de [44], on obtient

$C_{k,q}(x) = \sum_{s=0}^{k} \frac{(-1)^{k+s}}{(k)_q!(q-1)^k} q^{\frac{s(s-2k+1)}{2}} \binom{k}{s}_q q^{sx}$. Donc

$Q(h_{n,q})(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{s=0}^{j-i}(-1)^{j-i+s} q^{\frac{s(s-2(j-i)+1)}{2}} \binom{j-i}{s}_q \frac{q^{i(i-j)}a_{n,j}(q)b_i}{(j-i)_q!(q-1)^{j-i}} q^{(i+s)x}$.

Posons $i+s=m$, on obtient $0 \leq s = m-i \leq j-i$ et $i \leq m \leq j$. On en déduit que

$Q(h_{n,q})(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\sum_{m=i}^{j}(-1)^{j+m} q^{\frac{(m-i)(m-i-2(j-i)+1)}{2}} \binom{j-i}{m-i}_q \frac{q^{i(i-j)}a_{n,j}(q)b_i}{(j-i)_q!(q-1)^{j-i}} q^{mx} =$

$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=1}^{m} q^{\frac{(m-i)(m+i-2j+1)}{2}} \binom{j-i}{m-i}_q \frac{(-1)^{j+m}q^{i(i-j)}b_i}{(j-i)_q!(q-1)^{j-i}} a_{n,j}(q)q^{mx}$.

D'autre part $q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} q^{1-n}a_{n-1,j}(q) \sum_{s=0}^{j} \frac{(-1)^{j+s}}{(j)_q!(q-1)^j} q^{\frac{s(s-2j+1)}{2}} \binom{j}{s}_q q^{(s+1)x}$.

Donc $q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=m}^{n} q^{1-n}\frac{(-1)^{j+m}q^{\frac{(m-1)(m-2(j-1))}{2}}}{(j-1)_q!(q-1)^{j-1}} \binom{j-1}{m-1}_q a_{n-1,j-1}(q)q^{mx}$.

Par identification des coefficients, on obtient pour $m \geq 1$,

$\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{j+m}q^{i(i-j)}}{(j-i)_q!(q-1)^{j-i}} q^{\frac{(m-i)(m+i-2j+1)}{2}} \binom{j-i}{m-i}_q b_i a_{n,j}(q) =$

$= \sum_{j=m}^{n} q^{1-n}\frac{(-1)^{j+m}q^{\frac{(m-1)(m-2(j-1))}{2}}}{(j-1)_q!(q-1)^{j-1}} \binom{j-1}{m-1}_q a_{n-1,j-1}(q)$.

• Pour $m=n$, on a $a_{n,n}(q)\sum_{i=1}^{n} \frac{b_i q^{\frac{-(n-i)(n+i-1)}{2}}}{(n-i)_q!(q-1)^{n-i}} = \frac{q^{\frac{-n(n-1)}{2}}}{(n-1)_q!(q-1)^{n-1}} a_{n-1,n-1}(q)$.

Il vient que $a_{n,n}(q)\sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)_q!(q-1)^{n-1}}{(n-i)_q!(q-1)^{n-i}} b_i q^{\frac{-(n-i)(n+i-1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} = a_{n-1,n-1}(q)$, ou encore $a_{n,n}(q)\sum_{i=1}^{n} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{n-\ell}-1)b_i = a_{n-1,n-1}(q)$. Notons que, pour tout $i \geq 1$, le coefficient $q^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{n-\ell}-1)$ de b_i est un polynôme en q de degré $n(i-1)$. De plus, on a $\left|\sum_{i=2}^{n} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{n-\ell}-1)b_i\right| < \max_{2\le i\le n} |b_i| \le |b_1|$. Donc

$$\left|b_1 + \sum_{i=2}^{n} q^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{n-\ell}-1)b_i\right| = |b_1| = 1. \qquad (*)$$

On en déduit que $|a_{n,n}(q)| = |a_{n-1,n-1}(q)| = 1$.

•• Supposons maintenant que, pour $k+1 \le j \le n$, on ait $|a_{n,j}(q)| \le 1$.
Puisque $q^{-x}\sum_{j=0}^{n} a_{n,j}(q)Q(C_{j,q})(x) = q^{1-n}h_{n-1,q}(x)$ est un q-polynôme de q-degré $n-1$, avec $\|h_{n-1,q}\| = 1$, on voit que
$\sum_{j=1}^{k} a_{n,j}(q)Q(C_{j,q})(x) = q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x) - \sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j}(q)Q(C_{j,q})(x) = q^x g_{n,k}(x)$, où $g_{n,k}$ est un q-polynôme de q-degré $k-1$ tel que $\|g_{n,k}\| \le 1$. Posant $g_{n,k} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_{n,k}(j)C_{j,q}$, on voit que $|\alpha_{n,k}(j)| \le 1$, $\forall 0 \le j \le k-1$. On obtient comme ci-dessus
$\sum_{j=1}^{k} a_{n,j}(q)Q(C_{j,q})(x) = \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=m}^{k}\sum_{i=1}^{m} \frac{(-1)^{j+m}q^{\frac{(m-i)(m+i-2j+1)}{2}}}{(j-i)_q!(q-1)^{j-i}} \binom{j-i}{m-i}_q q^{i(i-j)}b_i a_{n,j}(q)q^{mx}$
et $q^x g_{n,k}(x) = \sum_{m=1}^{k}\sum_{j=m}^{k}(-1)^{j+m}\frac{q^{\frac{(m-1)(m-2(j-1))}{2}}}{(j-1)_q!(q-1)^{j-1}}\binom{j-1}{m-1}_q \alpha_{n,k}(j-1)q^{mx}$.
Donc $a_{n,k}(q)\sum_{i=1}^{k}\frac{(k-1)_q!(q-1)^{k-1}}{(k-i)_q(q-1)^{k-i}} q^{\frac{-(k-i)(k+i-1)}{2}} b_i = q^{\frac{(k-1)(2-k)}{2}}\alpha_{n,k}(k-1)$. Comme ci-dessus, on voit que $a_{n,k}(q)\sum_{i=1}^{k} q^{\frac{i(i-1)}{2}}\prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{k-\ell}-1)b_i = q^{k-1}\alpha_{n,k}(k-1)$. On déduit de (*) que l'on a $|a_{n,k}(q)| = |\alpha_{n,k}(k-1)| \le 1$.

-(b)- Il est évident que $q^{-x}Q$ est linéaire et que $\|q^{-x}Q\| = \|Q\| = 1$.
Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. Puisque $(h_{n,q})_{n\ge 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a un développement de f sous la forme $f = \sum_{n\ge 0} d_n(q)h_{n,q}$, $d_n(q) \in K$, avec $\lim_{n\to+\infty} d_n(q) = 0$ et $\|f\| = \sum_{n\ge 0}|d_n(q)|$.
De plus, $(q^{-x}Q)(f)(x) = \sum_{n\ge 1} q^{1-n}d_n(q)q^{-x}q^x h_{n-1,q}(x) = \sum_{n\ge 1} q^{1-n}d_n(q)h_{n-1,q}(x)$ et

$(q^{-x}Q)^k(f)(x) = \sum_{n\geq k} q^{\frac{k(k+1)}{2}-kn} d_n(q) h_{n-k,q}(x)$. Donc $(q^{-x}Q)^k(f)(0) = q^{\frac{-k(k-1)}{2}} d_k(q)$ et $d_k(q) = q^{\frac{k(k-1)}{2}} (q^{-x}Q)^k(f)(0)$. □

Définition 2.1.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$ et soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$.*
La suite q-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ obtenue dans le Théorème 2.1.5 est appelée suite **de q-polynômes basiques associée à** Q.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Nous avons rappelé ci-dessus qu'un q-polynôme h de q-degré n peut s'écrire sous la forme $h = \sum_{k=0}^{n} b_k C_{k,q}$, avec $b_k \in K$ et $b_n \neq 0$.

Si q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N, la notion de q-polynôme pose un problème. En effet, la fonction continue qui à x associe q^x est localement constante. Pour tout entier positif n, écrit sous la forme $n = m(n)p^N + r(n)$, on a $q^{nx} = q^{r(n)x}$. Dans ce cas, les fonctions continues h pouvant s'écrire sous la forme $h = \sum_{k=0}^{n} b_k C_{k,q}$, $b_k \in K$ et $b_n \neq 0$, ne sont pas forcément des q-polynômes. Nous donnons donc une autre définition à ce type de fonctions dans le cas où q est une racine de l'unité.

Définition 2.1.4. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N.*
On appelle q**-quasi-polynôme de degré** n, *toute fonction continue h pouvant s'écrire sous la forme $h = \sum_{k=0}^{n} a_k C_{k,q}$, avec $a_k \in K$ et $a_n \neq 0$.*
Une suite de q-quasi-polynômes $(h_n)_{n\geq 0}$, telle que $h_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, h_n **est de degré** n *est appelée suite* q**-quasi-polynomiale**.

Définition 2.1.5. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$. On appelle* **suite de type q-binomial** *toute suite* q**-polynomiale** (*resp.* q**-quasi-polynomiale**) $(h_n)_{n\geq 0}$, *telle que $h_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)} q^{(n-s)x} h_s(x) h_{n-s}(y)$, $\forall n \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$.*

Corollaire. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soit $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ satisfaisant aux conditions du Théorème 2.1.5. La suite de q-polynômes basiques $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ associée à Q est de type q-binomial.*

Démonstration. En effet, la propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$, car $h_{0,q} = C_{0,q}$ et $h_{1,q}$ peut s'écrire sous la forme $h_{1,q} = aC_{1,q}$. Supposons la propriété vraie pour $h_{n-1,q}$. On a $Q(\tau_x(h_{n,q}))(y) = \tau_x(Q(h_{n,q}))(y) = q^{1-n}q^{x+y}h_{n-1,q}(x+y)$. Ainsi

$Q(\tau_x(h_n))(y) = \sum_{s=0}^{n-1} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_s(x)q^{1-n+s}q^y h_{n-1-s}(y) =$

$= \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)Q(h_{n-s,q})(y) = Q\Big(\sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}\Big)(y).$

Donc $Q\Big(\tau_x h_{n,q} - \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}\Big)(y) = 0$ et

$\tau_x(h_{n,q})(y) - \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y) = c(x)$, où $c(x)$ ne dépend que de x.

On a $\tau_x(h_{n,q})(y) = h_{n,q}(x+y) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y) + c(x)$.

Donc $h_{n,q}(x) = \tau_x(h_{n,q})(0) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(0) + c(x) = h_{n,q}(x) + c(x)$ et $c(x) = 0$. □

Nous avons un énoncé équivalent au Théorème 2.1.5 lorsque q est une racine de l'unité. Plus précisement, on a:

Théorème 2.1.6. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i\Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$. Il existe une unique suite q-quasi-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que $Q(h_{n,q})(x) = q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x)$, $h_{n,q}(0) = 0$ si $n \geq 1$. Cette suite est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.*

Démonstration. Supposons que q est une racine primitive de l'unité dordre p^N. Considérons la suite $(q_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par $q_\alpha = q + ap^\alpha$, $|a| \leq 1$. On sait que q_α est non racine de l'unité tel que $|q_\alpha - 1| < 1$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} q_\alpha = q$. On a vu que $\lim_{\alpha\to+\infty} \Delta_{q_\alpha}^{(i)} = \Delta_q^{(i)}$. Considérons la suite d'opérateurs linéaires continus $(Q_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par $Q_\alpha = \sum_{i\geq 1} b_i\Delta_{q_\alpha}^{(i)}$.

On a $\|Q_\alpha\| = \sup_{i\geq 0}|b_i| = |b_1|$. Comme $\|Q - Q_\alpha\| = \left\|\sum_{i\geq 1} b_i(\Delta_q^{(i)} - \Delta_{q_\alpha}^{(i)})\right\| \leq$
$\leq \sup_{i\geq 1}|b_i| \left\|\Delta_q^{(i)} - \Delta_{q_\alpha}^{(i)}\right\| \leq |b_1|\,|q - q_\alpha|$, on a $\lim_{\alpha\to+\infty} Q_\alpha = Q$.
D'autre part il existe une unique suite q_α-polynomiale $(h_{n,q_\alpha})_{n\geq 0}$, telle que $Q_\alpha(h_{n,q_\alpha})(x) = q_\alpha^{1-n} q_\alpha^x h_{n-1,q_\alpha}(x)$, $h_{n,q_\alpha}(0) = 0$ si $n \geq 1$ qui est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Puisque $(C_{n,q_\alpha})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, pour tout $n \geq 1$, h_{n,q_α} admet le q_α-développement $h_{n,q_\alpha} = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(q_\alpha) C_{k,q_\alpha}$.
Montrons que $\lim_{\alpha\to+\infty} h_{n,q_\alpha}$ existe. Pour cela, puisque pour tout entier $\ell \geq 0$, on a $C_{\ell,q} = \lim_{\alpha\to+\infty} C_{\ell,q_\alpha}$, il suffit de montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} a_{n,k}(q_\alpha)$ existe dans K.
On a $h_{0,q_\alpha} = 1$ et $h_{1,q_\alpha} = a_{1,1}(q_\alpha)C_{1,q_\alpha}$, avec $|a_{1,1}(q_\alpha)| = 1$. Comme $Q(h_{1,q_\alpha}) = h_{0,q_\alpha} = 1$, on obtient $a_{1,1}(q_\alpha) = \dfrac{1}{b_1}$.
Soit $h_{2,q_\alpha} = a_{2,1}(q_\alpha)C_{1,q_\alpha} + a_{2,2}(q_\alpha)C_{2,q_\alpha}$ le q_α-développement de h_{2,q_α}. Puisque $Q_\alpha(h_{2,q_\alpha}) = q_\alpha^x q_\alpha^{-1} h_{1,q_\alpha}$, on voit que $a_{2,2}(q_\alpha) = \dfrac{a_{1,1}(q_\alpha)}{b_1 + q_\alpha(q_\alpha - 1)b_2} = \dfrac{1}{b_1(b_1 + q_\alpha(q_\alpha - 1)b_2)}$ et $a_{2,2}(q_\alpha) = \dfrac{-b_2}{b_1^2(b_1 + q_\alpha(q_\alpha - 1))}$. D'où l'on déduit l'existence de la limite $h_{2,q} = \lim_{\alpha\to+\infty} h_{2,q_\alpha}$.
Supposons que, pour $1 \leq t \leq n-1$, la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} h_{t,q_\alpha} = h_{t,q}$ existe dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On déduit de la démonstration du Théorème 2.1.5 que $a_{n,n}(q_\alpha) = \dfrac{a_{n-1,n-1}(q_\alpha)}{v_{n,n}(q_\alpha)}$, avec $v_{n,n}(q_\alpha) = \sum_{i=1}^{n} q_\alpha^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q_\alpha^{n-\ell} - 1)b_i$ et on voit que $|v_{n,n}(q_\alpha)| = 1$. De plus $a_{n,n}(q_\alpha) = \prod_{\ell=1}^{n} \dfrac{1}{v_{\ell,\ell}(q_\alpha)}$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} a_{n,n}(q_\alpha) = a_{n,n}(q)$ existe avec $|a_{n,n}(q)| = 1$.
Supposons que, pour $k+1 \leq j \leq n$, la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} a_{n,j}(q_\alpha) = a_{n,j}(q)$ existe. Posant $q_\alpha^x g_{n,k,\alpha}(x) = q_\alpha^{1-n} q_\alpha^x h_{n-1,q_\alpha}(x) - \sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j}(q_\alpha) Q_\alpha(C_{j,q_\alpha})(x) = q_\alpha^x \sum_{j=0}^{k-1} d_{n,k}(q_\alpha, j) C_{j,q_\alpha}(x)$, sachant, par hypothèse de récurrence que les suites des coefficients $(a_{n-1,i}(q_\alpha))_{\alpha>0}$ des fonctions h_{n-1,q_α} convergent, on voit que les limites $\lim_{\alpha\to+\infty} d_{n,k}(q_\alpha, j) = d_{n,k}(q, j)$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} g_{n,k,\alpha} = g_{n,k}$ existent. De plus, comme $|d_{n,k}(q_\alpha, j)| \leq 1$, $\forall 0 \leq j \leq k-1$, on a $|d_{n,k}(q, j)| \leq 1$, $\forall 0 \leq j \leq k-1$.
On déduit encore de la démonstration du Théorème 2.1.5 que $a_{n,k}(q_\alpha) = \dfrac{q_\alpha^{k-1} d_{n,k}(q_\alpha, k-1)}{v_{n,k}(q_\alpha)}$,

avec $v_{n,k}(q_\alpha) = \sum_{i=1}^{k} q_\alpha^{\frac{i(i-1)}{2}} \prod_{\ell=1}^{i-1}(q_\alpha^{k-\ell} - 1)b_i$. On a $|v_{n,k}(q_\alpha)| = 1$. De plus $\lim_{\alpha\to+\infty} v_{n,k}(q_\alpha) = v_{n,k}(q)$ existe avec $|v_{n,k}(q)| = 1$. Donc la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} a_{n,k}(q_\alpha) = a_{n,k}(q) = \dfrac{q^{k-1}d_{n,k}(q, k-1)}{v_{n,k}(q)}$ existe et est telle que $|a_{n,k}(q)| \leq 1$. D'où l'on déduit que, pour $1 \leq j \leq n$, la limite $\lim_{\alpha\to+\infty} a_{n,j}(q_\alpha) = a_{n,j}(q)$ existe avec $|a_{n,j}(q)| \leq 1$.

Posons $h_{0,q} = 1$ et $h_{n,q} = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j}(q)C_{n,q}$. Alors $h_{n,q}$ est la limite uniforme de la suite $(h_{n,q_\alpha})_{\alpha\geq 1}$ et l'on a, pour $n \geq 0$, $\|h_{n,q}\| = 1$ et $|a_{n,n}(q)| = 1$. Il vient que $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une suite q-quasi-polynomiale telle que $h_{n,q}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On a les développements uniformément convergents $f = \sum_{n\geq 0} q_\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} (q_\alpha^{-x}Q_\alpha)^n(f)(0)h_{n,q_\alpha}$. Puisque $\lim_{\alpha\to+\infty} q_\alpha^{-x}Q_\alpha = q^{-x}Q$ et $\lim_{\alpha\to+\infty} h_{n,q_\alpha} = h_{n,q}$, on obtient par passage à la limite le développement uniformément convergent $f = \lim_{\alpha\to+\infty} \sum_{n\geq 0} q_\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}} (q_\alpha^{-x}Q_\alpha)^n(f)(0)h_{n,q_\alpha} = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^{-x}Q)^n(f)(0)h_{n,q}$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} \left|(q^{-x}Q)^n(f)(0)\right|$, c'est-à-dire que la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
On déduit de la relation $Q_\alpha(h_{n,q_\alpha})(x) = q_\alpha^{1-n}q_\alpha^x h_{n-1,q_\alpha}$, $\forall n \geq 0$, $x \in \mathbb{Z}_p$ que
$Q(h_{n,q})(x) = \lim_{\alpha\to+\infty} Q_\alpha(h_{n,q_\alpha})(x) = \lim_{\alpha\to+\infty} q_\alpha^{1-n}q_\alpha^x h_{n-1,q_\alpha}(x) = q^{1-n}q^x h_{n-1,q}(x)$. □

N.B. Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i\Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$. Comme la suite q-polynomiale du Théorème 2.1.5, la suite q-quasi-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ obtenue dans le Théorème 2.1.6 est appelée **suite de q-quasi-polynômes basiques associées à Q**.

Corollaire. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soit $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ satisfaisant aux conditions du Théorème 2.1.6. La suite de q-quasi-polynômes basiques $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ associée à Q est de type q-binomial, c'est-à-dire que $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une suite q-quasi-polynomiale telle que $h_{n,q}(x+y) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)}q^{(n-s)x}h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y)$, $\forall n \geq 0$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$.*

Démonstration. La démonstration est la même que celle du Corollaire du Théorème 2.1.5. □

Remarque 2.1.1. *Si une suite q-polynomiale (resp. q-quasi-polynomiale)* $(h_n)_{n\geq 0}$ *est de type q-binomial, alors* $h_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Démonstration. En effet, puisque $h_1(x+y) = q^y h_1(x) + h_1(y)$, pour $y = 0$ on a $h_1(x) = h_1(x) + h_1(0)$. Donc $h_1(0) = 0$. De même $h_2(x+y) = q^{2y} h_2(x) + q^{-1} q^y h_1(y) h_1(x) + + h_2(y)$. Donc $h_2(x) = h_2(x+0) = h_2(x) + q^{-1} h_1(0) h_1(x) + h_2(0) = h_2(x) + h_2(0)$ et $h_2(0) = 0$.
Supposons, par récurrence, que $h_1(0) = h_2(0) = \cdots = h_{n-1}(0) = 0$. Puisque $h_n(x+y) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)} q^{(n-s)y} h_s(y) h_{n-s}(x)$, on obtient $h_n(x) = \sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)} h_s(0) h_{n-s}(x) = = h_n(x) + \sum_{s=1}^{n-1} q^{-s(n-s)} h_s(0) h_{n-s}(x) + h_n(0)$. Puisque, pour $1 \leq s \leq n-1$, $h_s(0) = 0$, on a $h_n(x) = h_n(x) + h_n(0)$. Donc $h_n(0) = 0$. □

On a la réciproque suivante aux Théorèmes 2.1.5 et 2.1.6.

Théorème 2.1.7. *Soit* $q \in K$ *tel que* $|q-1| < 1$.
Soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ *une base orthonormale de* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ *telle que pour tout n,* $h_{n,q}$ *est un q-polynôme (q-quasi-polynôme) de q-degré (degré) n et* $h_{0,q}(x) = 1$. *Si* $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ *est de type q-binomial, alors il existe un unique opérateur* $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, *tel que* $\|Q\| = 1 = |b_1|$ *et* $Q(h_{n,q})(x) = q^{1-n} q^x h_{n-1,q}(x)$, *avec la convention que* $h_{-1,q} = 0$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a le développement $f = \sum_{n\geq 0} a_n h_{n,q}$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n q^{1-n} h_{n-1,q}(x)$ converge dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
Posons $Q(f)(x) = q^x \sum_{n\geq 1} a_n q^{1-n} h_{n-1,q}(x) = q^x \sum_{n\geq 0} a_{n+1} q^{-n} h_{n,q}(x)$. On définit ainsi un endomorphisme linéaire du K-espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $Q(h_{n,q})(x) = q^x q^{1-n} h_{n-1,q}(x)$.
Pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $|Q(f)(x)| = \left| \sum_{n\geq 0} a_{n+1} q^{-n} h_{n,q}(x) \right|$. Il vient que $\|Q(f)\| = \left\| \sum_{n\geq 0} a_{n+1} q^{-n} h_{n,q} \right\| = \sup_{n\geq 0} |a_{n+1}| \leq \|f\|$. On en déduit que Q est continu.

Comme $\|Q(h_{n,q})\| = \|h_{n-1,q}\| = 1$, $\forall n \geq 1$, on voit que $\|Q\| = 1$.
L'opérateur linéaire continu Q est uniquement déterminé par les images $Q(h_{n,q})(x) = q^x q^{1-n} h_{n-1,q}(x)$ prises sur la base orthonormale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$.

Soient $x, y \in \mathbb{Z}_p$, on a $\tau_x \circ Q(h_{n,q})(y) = \tau_x(q^{1-n} q^y h_{n-1,q})(y) = q^{1-n} q^{x+y} h_{n-1,q}(x+y) =$
$= \sum_{s=0}^{n-1} q^{-s(n-s)} q^{(n-s)x} h_{s,q}(x) q^{1-n+s} q^y h_{n-1-s,q}(y) = Q\Big(\sum_{s=0}^{n} q^{(n-s)(x-s)} h_{s,q}(x) h_{n-s,q}\Big)(y) =$
$= Q \circ \tau_x(h_{n,q})(y)$. On obtient $\tau_x \circ Q = Q \circ \tau_x$ et $Q \in W(\mathbb{Z}_p, K)$.

Posons $Q = \sum_{i\geq 0} b_i \Delta_q^{(i)}$. On a $0 = Q(h_{0,q}) = b_0 h_{0,q} = b_0$. Puisque $h_{1,q} = aC_{1,q}$, avec $|a| = 1$, on voit que $Q(h_{1,q})(x) = ab_1 \Delta(C_{1,q})(x) = ab_1 q^x$. D'autre part, $Q(h_{1,q})(x) = q^x h_{0,q}(x) = q^x$. Donc $ab_1 = 1$ et $b_1 = a^{-1}$. On en déduit que $\|Q\| = 1 = |b_1|$ et le théorème est démontré. □

Remarque 2.1.2. *Notons que lorsque q est non racine de l'unité, on peut obtenir par récurrence les coefficients du développement $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)}$ de Q.*

Démonstration. En effet, posant $h_1 = aC_{1,q}$, avec $|a| = 1$, on a
$q^x = Q(h_1)(x) = b_1 \Delta(h_1)(x) = q^x b_1 a$. Donc $ab_1 = 1$ et $b_1 = \dfrac{1}{a}$.
Supposons avoir déterminé $b_1, \ b_2, \ \ldots, \ b_{n-1}$. Considérons le développement
$h_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} q^{jx}$ de h_n. On déduit de la Proposition 2.1.2 que $a_{n,n}\beta_n = q^{1-n} a_{n-1,n-1}$,
où $\beta_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \prod_{\ell=0}^{i-1} (q^n - q^\ell)$. Donc $\beta_n = q^{1-n} \dfrac{a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}}$ et
$$b_n = \prod_{\ell=0}^{n-1} (q^n - q^\ell)^{-1} \Big(\frac{q^{1-n} a_{n-1,n-1}}{a_{n,n}} - \sum_{i=1}^{n-1} b_i \prod_{\ell=0}^{i-1} (q^n - q^\ell) \Big).$$
□

Corollaire 1. *Soit $q \in K$, tel que $|q - 1| < 1$.*
Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des opérateurs linéaires continus $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)}$, tels que $\|Q\| = 1 = |b_1|$ et l'ensemble des suites q-polynomiales (q-quasi-polynomiales) de type q-binomial qui sont des bases orthonormales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Exemples:

(i) Considérons l'opérateur $Q = \Delta_q^{(1)} = \Delta$, on voit que $b_1 = 1$ et $b_n = 0$, $\forall n \neq 1$. Les q-polynômes (q-quasi-polynômes) $h_{n,q}$ sont donnés par $h_{n,q} = C_{n,q}$.

(ii) Soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ la suite définie par $h_{n,q} = q^n C_{n,q}$. L'opérateur Q est donné par $Q = q^{-1}\Delta$. De façon générale, si $h_{n,q} = \alpha^{jn} C_{n,q}$, l'opérateur associé est $Q = \alpha^{-j}\Delta$.

Corollaire 2. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.
Soit $Q = \Delta + \alpha\Delta_q^{(2)}$, avec $|\alpha| \leq 1$ et soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ la suite de q-polynômes (resp. q-quasi-polynômes) basiques associée à Q, avec $h_{n,q}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} q^{jx}$. Alors*

$$h_{n,q}(x) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=i}^{n} a_{n,j} \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^j - q^\ell)\Big) C_{i,q}(x).$$

De plus si q est non racine de l'unité, on a

$$a_{n,j} = q^{\frac{j(j-2n+1)}{2}} a_{n-j,0} \prod_{k=1}^{j}(q^k - 1)^{-1}(1 + \alpha(q^k - q))^{-1}, \text{ pour } j \geq 1 \text{ et } \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} = 0.$$

Démonstration. En effet, puisque $q^{jx} = \sum_{i\geq 0} \Delta_q^{(i)}(q^{jx})(0) C_{i,q}(x) =$
$= 1 + \sum_{i=1}^{j} \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^j - q^\ell) C_{i,q}(x), \forall j \geq 1$, on a $h_{n,q}(x) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} q^{jx} = a_{n,0} + \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} +$
$+ \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{n,j} \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^j - q^\ell) C_{i,q}(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{n,j} \prod_{\ell=0}^{i-1}(q^j - q^\ell) C_{i,q}(x)$.
D'autre part, si q est non racine de l'unité, on déduit de la relation $a_{n,j} = \dfrac{q^{1-n} a_{n-1,j-1}}{\beta_j}$ que $a_{n,j} = \dfrac{q^{1-n} q^{2-n} a_{n-2,j-2}}{\beta_j \beta_{j-1}}$. Par récurrence, on a $a_{n,j} = q^{\frac{j(j-2n+1)}{2}} a_{n-j,0} \prod_{k=1}^{j} \beta_k^{-1}$. Mais $\beta_k = \sum_{m=1}^{k} b_m \prod_{\ell=0}^{m-1}(q^k - q^\ell)$.
Ici, $b_1 = 1$, $b_2 = \alpha$ et $b_k = 0$, $\forall k \geq 3$. Donc $\beta_k = (q^k - 1) + \alpha(q^k - 1)(q^k - q) =$
$= (q^k - 1)(1 + \alpha(q^k - q))$ et $a_{n,j} = q^{\frac{j(j-2n+1)}{2}} a_{n-j,0} \prod_{k=1}^{j}(q^k - 1)^{-1}(1 + \alpha(q^k - q))^{-1}, \forall j \geq 1$. $\square$

Nous avons ici les premiers termes de la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ donnée dans le Corollaire 2, lorsque q est non racine de l'unité:

(i) $a_{1,1} = \dfrac{a_{0,0}}{q-1} = \dfrac{1}{q-1}$ et $a_{1,0} = -a_{1,1} = \dfrac{-1}{q-1}$. Donc $h_{1,q}(x) = \dfrac{q^x-1}{q-1} = C_{1,q}(x)$.

(ii) $a_{2,1} = \dfrac{q^{-1}a_{1,0}}{q-1} = \dfrac{-q^{-1}}{(q-1)^2}$,

$a_{2,2} = \dfrac{q^{-1}a_{1,1}}{(q^2-1)(1+\alpha(q^2-q))} = \dfrac{q^{-1}}{(q-1)(q^2-1)(1+\alpha(q^2-q))}$,

$a_{2,0} = -a_{2,1} - a_{2,2} = q^{-1}\Big(\dfrac{1}{(q-1)^2} - \dfrac{1}{(q-1)(q^2-1)(1+\alpha(q^2-q))}\Big)$.

Donc $h_{2,q} = \Big(\dfrac{-q^{-1}}{q-1} + \dfrac{q^{-1}}{(q-1)(1+\alpha(q^2-q))}\Big)C_{1,q} + \dfrac{1}{1+\alpha(q^2-q)}C_{2,q}$

$= \dfrac{1}{1+\alpha(q^2-q)}(-\alpha C_{1,q} + C_{2,q})$.

On obtient également,

(iii) $h_{3,q} = \dfrac{1}{(1+\alpha(q^2-q))(1+\alpha(q^3-q))}(\alpha^2 q^{-1}(2)_q C_{1,q} - \alpha q^{-1}(2)_q C_{2,q} + C_{3,q})$.

(iv) $h_{4,q} = \dfrac{(\alpha^2 q^{-3}(2)_q(1+\alpha(q^4-q)) + \alpha^2 q^{-2}(3)_q)(-\alpha C_{1,q} + C_{2,q})}{(1+\alpha(q^2-q))^2(1+\alpha(q^3-q))(1+\alpha(q^4-q))}$

$+ \dfrac{-\alpha q^{-2}(3)_q C_{3,q} + C_{4,q}}{(1+\alpha(q^2-q))(1+\alpha(q^3-q))(1+\alpha(q^4-q))} \cdots$.

Proposition 2.1.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$ et soit $h(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j C_{j,q}$ un q-polynôme de q-degré $n \geq 1$, avec $|a_j| \leq 1$ et $|a_n| = 1$. Alors $Q(h)(x) = q^x q^{1-n} r(x)$, où $r = \sum_{j=0}^{n-1} d_j C_{j,q}$ est tel que $\|r\| = 1 = |d_{n-1}|$.*

Démonstration. Soit $h = \sum_{j=0}^{n} a_j C_{j,q}$, alors $Q(h)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j Q(C_{j,q})(x) =$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{j} b_i q^{ix} q^{i(i-j)} C_{j-i,q}(x) = q^x q^{1-n} \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{j} b_i q^{(i-1)x} q^{n-1+i(i-j)} C_{j-i,q}(x).$$

Posons $r=\sum_{j=1}^{n}a_j\sum_{i=1}^{j}b_iq^{(i-1)x}q^{n-1+i(i-j)}C_{j-i,q}$. On voit que r est de q-degré $n-1$. On a $\|Q(h)\|=\left\|q^{1-n}q^xr\right\|=\|r\|$ et $\|r\|\leq 1$. Soit $r=\sum_{j=0}^{n-1}d_jC_{j,q}$, on obtient $|d_j|\leq 1$. Il suffit de montrer que $|d_{n-1}|=1$.

Comme dans la démonstration du Théorème 2.1.5, on obtient $a_n\sum_{i=1}^{n}q^{\frac{i(i-1)}{2}}\prod_{\ell=1}^{i-1}(q^{n-\ell}-1)b_i=d_{n-1}$. On déduit de (*) que $1=|a_n|=|d_{n-1}|$. □

Proposition 2.1.4. *Soit $q\in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soit $Q=\sum_{i\geq 1}b_i\Delta_q^{(i)}\in W(\mathbb{Z}_p,K)$, tel que $\|Q\|=1=|b_1|$ et soit $h=\sum_{j=0}^{n}a_jC_{j,q}$ un q-quasi-polynôme de degré $n\geq 1$, avec $|a_j|\leq 1$ et $|a_n|=1$. Alors $Q(h)(x)=q^xq^{1-n}r(x)$, où $r=\sum_{j=0}^{n-1}d_jC_{j,q}$ est tel que $\|r\|=1=|d_{n-1}|$.*

Démonstration. Supposons que q est une racine primitive de l'unité dordre p^N. Considérons la suite $(q_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par $q_\alpha=q+ap^\alpha$, $|a|\leq 1$. Rappelons que q_α est non racine de l'unité tel que $|q_\alpha-1|<1$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}q_\alpha=q$.

Soit $h=\sum_{j=0}^{n}a_jC_{j,q}$. Puisque $(C_{n,q_\alpha})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$, h admet le q_α-développement $h=\sum_{j=0}^{n}\Delta_{q_\alpha}^{(j)}(h)(0)C_{k,q_\alpha}$. De plus $a_j=\lim_{\alpha\to+\infty}\Delta_{q_\alpha}^{(j)}(h)(0)$.

Considérons la suite d'opérateurs linéaires continus $(Q_\alpha)_{\alpha>0}$ définie par $Q_\alpha=\sum_{i\geq 1}b_i\Delta_{q_\alpha}^{(i)}$. On a $\|Q_\alpha\|=\sup_{i\geq 0}|b_i|=|b_1|=1$ et $\lim_{\alpha\to+\infty}Q_\alpha=Q$.

D'autre part, pour tout $\alpha>0$, il existe un q_α-polynôme r_α de q_α-degré $n-1$, tel que $r_\alpha=\sum_{j=0}^{n-1}d_{j,\alpha}C_{j,q_\alpha}$, $\|r_\alpha\|=1=|d_{n-1,\alpha}|$ et $Q_\alpha(h)(x)=q_\alpha^{1-n}q_\alpha^xr_\alpha(x)$. On voit alors comme dans la démonstration du Théorème 2.1.6 que la limite $r=\lim_{\alpha\to+\infty}r_\alpha$ existe. On obtient $r=\sum_{j=0}^{n-1}\Delta_q^{(j)}(r)(0)C_{j,q}$, avec $\|r\|=\lim_{\alpha\to+\infty}|d_{n-1,\alpha}|=1=\left|\Delta_q^{(n-1)}(r)(0)\right|$ et $Q(h)(x)=q^{1-n}q^xr(x)$. □

Corollaire. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.
Soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ une suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes), telle que pour tout $n \geq 0$, $h_{n,q}$ est de q-degré (degré) n ($h_{0,q}$ n'est pas nécessairement égal à 1); qui est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$.
Alors il existe une suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) $(r_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que pour tout $n \geq 0$, $r_{n,q}$ est de q-degré (degré) n et $Q(h_{n,q})(x) = q^{1-n} q^x r_{n-1,q}(x)$, $\forall n \geq 1$.
De plus la suite $(r_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du Lemme 2.1.2 et des Proposition 2.1.3 et 2.1.4. □

Lemme 2.1.3. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.
Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$. Alors
$(q^{-x}Q)^n \circ \tau_y = \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)^n$, où $q^{-x}Q$ est l'opérateur linéaire défini par
$(q^{-x}Q)(f)(x) = q^{-x}Q(f)(x)$.*

Démonstration. Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K, alors
$((q^{-x}Q) \circ \tau_y)(f)(x) = (q^{-x-y+y}\tau_y \circ Q)(f)(x) = \tau_y(q^{-x-y})(\tau_y \circ Q)(f)(x) =$
$= (\tau_y \circ (q^{-x-y}Q))(f)(x)$. Donc $(q^{-x}Q) \circ \tau_y = \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)$.
Par récurrence, supposons que $(q^{-x}Q)^n \circ \tau_y = \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)^n$ $(n \geq 1)$. On obtient
$(q^{-x}Q)^{n+1} \circ \tau_y = (q^{-x}Q) \circ \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)^n = \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)(q^{-(x+y)}Q)^n =$
$= \tau_y \circ (q^{-(x+y)}Q)^{n+1}$. □

Théorème 2.1.8. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.
Soit $Q = \sum_{i\geq 1} b_i \Delta_q^{(i)} \in W(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $\|Q\| = 1 = |b_1|$ et soit $U \in W(\mathbb{Z}_p, K)$. Alors U s'écrit sous forme de série simplement uniformément convergente
$U = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U(h_{n,q})(0)(q^{-x}Q)^n$, où $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est la suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) basiques associée à Q.*

Démonstration. Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On a
$f(x+y) = \tau_x(f)(y) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^{-y}Q)^n(\tau_x(f))(0) h_{n,q}(y) =$
$= \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tau_x((q^{-x-y}Q)^n(f))(0) h_{n,q}(y) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^{-x-y}Q)^n(f)(x) h_{n,q}(y)$.
On obtient $U(f)(x+y) = U(\tau_x(f))(y) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U(h_{n,q})(y)(q^{-x-y}Q)^n(f)(x)$.

Donc $U(f)(x) = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U(h_{n,q})(0)(q^{-x}Q)^n(f)(x)$ et $U = \sum_{n\geq 0} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U(h_{n,q})(0)(q^{-x}Q)^n$.
Notons que $q^{-x}Q \notin W(\mathbb{Z}_p, K)$. $\square$

Remarque 2.1.3. Le Théorème 2.1.8 est une q-version du fait que si $V = \sum_{n\geq 1} b_n \Delta^n$ est tel que $\|V\| = |b_1|$, alors tout élément U de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ se met sous forme de série simplement uniformément convergente $U = \sum_{n\geq 0} U(e_n)(0)V^n$, où $(e_n)_{n\geq 0}$ est la suite de polynômes basiques associée à V.

2.2 q-Bases orthogonales et opérateurs de Jackson

Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K. Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$. Nous allons définir l'analogue de la dérivation de Jackson que nous désignons par le même nom. La q-dérivation de Jackson sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ est l'opérateur linéaire ∇_q défini par $\nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+1)-f(x)}{(q-1)q^x}$, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$.

Considérons la suite q-polynomiale (resp. q-quasi-polynomiale) $(F_{n,q})_{n\geq 0}$ définie par $F_{n,q} = (q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} C_{n,q}$, $\forall n \geq 0$, où $(C_{n,q})_{n\geq 0}$ est la q-base de Mahler. La suite $(F_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de l'espace de Banach des fonctions continues $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. De plus $\|F_{n,q}\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$. On a $\nabla_q(F_{n,q}) = F_{n-1,q}$, $\forall n \geq 0$, avec la convention $F_{-1,q} = 0$ et toute fonction continue f se met sous forme unique de série uniformément convergente $f = \sum_{n\geq 0} \nabla_q^n(f)(0) F_{n,q}$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} \left|\nabla_q^n(f)(0)\right| |q-1|^n$.

Nous avons défini les opérateurs de Jackson comme étant des endomorphismes linéaires continus R de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, tels que $R \circ \nabla_q = \nabla_q \circ R$. Il devient clair que l'ensemble $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ des opérateurs de Jackson est une sous-algèbre fermée de l'algèbre de Banach $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Pour tout opérateur de Jackson R, on montre que la suite $((q-1)^{-n} R(F_{n,q})(0))_{n\geq 0}$ est bornée. Cela nous permet, comme au paragraphe précédent, d'écrire R sous une forme unique de série simplement uniformément convergente $R = \sum_{n\geq 0} R(F_{n,q})(0) \nabla_q^n$. Ce développement est analogue à celui donné par L. Van Hamme sur les opérateurs aux différences finies (cf. [44] et aussi [52]). Nous allons

établir une correspondance bijective entre une classe de bases orthogonales et une classe d'opérateurs de Jackson.
Comme pour l'algèbre $W(\mathbb{Z}_p, K)$ des opérateurs aux différences finies, nous allons montrer que l'algèbre $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre $K \ll X \gg$ des séries formelles à coefficients bornés. Donc la norme de $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est multiplicative.
Rappelons que la boule unité fermée de l'algèbre $K \ll X \gg$ est égale à $\Lambda[[X]]$, l'anneau des séries formelles à coefficients dans l'anneau des entiers Λ de K.

Dans les énoncés dès que l'on écrira **q-quasi-polynôme,** **q-quasi-polynomial** ou **degré**, sans autre précision, il s'agira du cas où q **est une racine de l'unité**.

Propriétés 2.2.1. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*

(i) *Pour $k \geq j \geq 1$, on a $\nabla_q^j(q^{kx}) = (k)_q(k-1)_q \dots (k-j+1)_q q^{(k-j)x}$ et $\nabla_q^k(q^{kx}) = (k)_q!$. Pour $j \geq k+1$, on a $\nabla_q^j(q^{kx}) = 0$.*

(ii) *Pour $j \leq k$, on a $\nabla_q^j(C_{k,q}) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jk} C_{k-j,q}$ et $\nabla_q^j(C_{k,q}) = 0$, pour $j > k$.*

(iii) *On a $\nabla_q^j(F_{n,q}) = F_{n-j,q}$, si $j \leq n$ et $\nabla_q^j(F_{n,q}) = 0$, si $j > n$. En particulier $\nabla_q^n(F_{n,q}) = 1$.*

Démonstration. Par récurrence.

(i) On a $\nabla_q(q^{kx}) = \dfrac{q^{kx+k} - q^{kx}}{(q-1)q^x} = \dfrac{(q^k-1)q^{kx}}{(q-1)q^x} = (k)_q q^{(k-1)x}$.
On déduit donc, par récurrence, que
$\nabla_q^j(q^{kx}) = (k)_q(k-1)_q \dots (k-j+1)_q q^{(k-j)x}$, pour $k > j \geq 1$.
De plus $\nabla_q^k(q^{kx}) = (k)_q \dots (k-k+1)_q q^{(k-k)x} = (k)_q!$ et $\forall j \geq k+1$, $\nabla_q^j(q^{kx}) = 0$.

(ii) Soit $x \in \mathbb{Z}_p$. On a $\nabla_q(C_{k,q})(x) = \dfrac{C_{k,q}(x+1) - C_{k,q}(x)}{(q-1)q^x} = \dfrac{q^{1-k} q^x C_{k-1,q}(x)}{(q-1)q^x} =$
$= (q-1)^{-1} q^{1-k} C_{k-1,q}(x)$.
Par récurrence, on voit que $\nabla_q^j(C_{k,q}) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jk} C_{k-j,q}$, pour $1 \leq j < k$.
Donc $\nabla_q^k(C_{k,q}) = (q-1)^{-k} q^{\frac{k(k+1)}{2} - k^2} = (q-1)^{-k} q^{\frac{k(k+1-2k)}{2}} =$
$= (q-1)^{-k} q^{\frac{-k(k-1)}{2}}$. D'où l'on déduit que $\nabla_q^{k+1}(C_{k,q}) = 0$ et $\forall j \geq k+1$, $\nabla_q^j(C_{k,q}) = 0$.

(iii) Il suffit de montrer que $\nabla_q(F_{n,q}) = F_{n-1,q}$. Or
$\nabla_q(F_{n,q}) = (q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \nabla_q(C_{n,q}) = (q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q-1)^{-1} q^{1-n} C_{n-1,q} =$

$$= (q-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{2(n-1)}{2}} C_{n-1,q} = (q-1)^{n-1} q^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} C_{n-1,q} = F_{n-1,q}. \qquad \square$$

Remarque 2.2.1. *Soit $k = s(k)p^N + r(k)$ un entier positif. Notons que si $q \in K$ est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N, alors $\nabla_q^j(q^{kx}) = 0$, pour tout $j > r(k)$.*

Démonstration. En effet, si q est racine primitive de l'unité d'ordre p^N, pour tout $j \geq 0$, on a $(k)_q \dots (k-j+1)_q = (r(k))_q \dots (r(k)-j+1)_q$. Il vient que $(r(k))_q \dots (r(k)-j+1)_q = 0$, $\forall j > r(k)$. D'où l'on déduit que $\nabla_q^j(q^{kx}) = 0$, pour tout $j > r(k)$. $\square$

Remarque 2.2.2. *On a $\|\nabla_q\| = |q-1|^{-1}$.*

Démonstration. En effet, soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\nabla_q(f)(x) = q^{-x}(q-1)^{-1}\Delta(f)(x)$ et $\|\nabla_q\| = |q-1|^{-1}$. $\square$

• Rappelons que pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|(q-1)^n \nabla_q^n(f)\right\| = 0$. En effet, on sait que $\Delta_q^{(n)}(f)(x) = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)^n q^{nx} \nabla_q^n(f)(x)$, (voir [51] Lemma 1 (iii)), ainsi $\left\|\Delta_q^{(n)}(f)\right\| = \left\|(q-1)^n \nabla_q^n(f)\right\|$. On déduit alors de la Proposition 2 de [11] que $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\Delta_q^{(n)}(f)\right\| = \lim\limits_{n\to+\infty} \left\|(q-1)^n \nabla_q^n(f)\right\|$.

On voit aussitôt que la série de fonctions à deux variables $\sum\limits_{n\geq 0} F_n(x) \nabla_q^n(f)(y)$ converge uniformément.

On désigne par c_q l'application "coproduit" de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ qui à toute fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ associe la fonction continue $c_q(f) : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$, telle que $c_q(f)(x,y) = \sum\limits_{n\geq 0} F_{n,q}(x) \nabla_q^n(f)(y)$. On vérifie aussitôt que c_q est linéaire.

Propriétés 2.2.2. *Soit f une fonction continue élément de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On a les propriétés suivantes:*

(i) $c_q(F_{n,q})(x,y) = \sum\limits_{s=0}^{n} F_{s,q}(x) F_{n-s,q}(y)$

(ii) *c_q est linéaire isométrique telle que $c_q(f)(x,y) = c_q(f)(y,x)$.*

(iii) $c_q(f)(x,0) = c_q(f)(0,x) = f(x)$.

Démonstration.

(i) En effet, pour $x, y \in \mathbb{Z}_p$, on a $c_q(F_{n,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{n} F_{s,q}(x)\nabla_q^s(F_{n,q})(y) =$
$= \sum_{s=0}^{n} F_{s,q}(x)F_{n-s,q}(y)$ (Propriété 2.2.1 (iii)).
De plus $c_q(F_{n,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{n} F_{s,q}(x)F_{n-s,q}(y) = \sum_{s=0}^{n} F_{s,q}(y)F_{n-s,q}(x) = c_q(F_{n,q})(y,x)$.

(ii) Par définition de c_q, on a pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$:
$c_q(f)(x,y) = \sum_{n\geq 0} F_{n,q}(x)\nabla_q^n(f)(y)$. Ainsi $|c_q(f)(x,y)| \leq \sup_{n\geq 0} |F_{n,q}(x)| \left|\nabla_q^n(f)(y)\right| \leq$
$\leq \sup_{n\geq 0} \|F_{n,q}\| \left\|\nabla_q^n(f)\right\| \leq \left(\sup_{n\geq 0} \|F_{n,q}\| \left\|\nabla_q^n\right\|\right) \|f\| = \|f\|$ et l'on déduit que
$\|c_q(f)\| = \sup_{(x,y)} |c_q(f)(x,y)| \leq \|f\|$.
D'autre part, comme $c_q(f)(0,x) = \sum_{n\geq 0} F_{n,q}(0)\nabla_q^n(f)(x) = \nabla_q^0(f)(x) = f(x)$, on a $|f(x)| = |c_q(f)(0,x)| \leq \|c_q(f)\|$, donc $\|f\| \leq \|c_q(f)\|$. En conclusion, on voit que $\|c_q(f)\| = \|f\|$.
Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n F_{n,q}$ une fonction continue élément de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Puisque c_q est linéaire continu, on obtient $c_q(f)(x,y) = \sum_{n\geq 0} a_n c_q(F_{n,q})(x,y) = \sum_{n\geq 0} a_n c_q(F_{n,q})(y,x) =$
$= c_q(f)(y,x)$. □

Rappelons que $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\widehat{\otimes}\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ (cf. [8] 1 et 3). Soit $R \in L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$, nous lui associons l'opérateur linéaire continu $id \otimes R$ défini sur $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ par $(id \otimes R)(f \otimes g)(x,y) = f(x)R(g)(y), \forall f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K); x, y \in \mathbb{Z}_p$.

Lemme 2.2.1. *Soit $R \in L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$. On a $R \circ \nabla_q = \nabla_q \circ R \Longleftrightarrow c_q \circ R = (id \otimes R) \circ c_q$.*

Démonstration. Supposons que $\nabla_q \circ R = R \circ \nabla_q$, alors on a
$(c_q \circ R)(f)(x,y) = c_q(R(f))(x,y) = \sum_{s\geq 0} F_{s,q}(x)(\nabla_q^s \circ R)(f)(y) = \sum_{s\geq 0} F_{s,q}(x)(R \circ \nabla_q^s)(f)(y) =$
$= (id \otimes R)\Big(\sum_{s\geq 0} F_{s,q}\nabla_q^s(f)\Big)(x,y) = \big((id \otimes R) \circ c_q\big)(f)(x,y)$.
Réciproquement, supposons que $c_q \circ R = (id \otimes R) \circ c_q$. On obtient

$(c_q \circ R)(f)(x,y) = \sum_{s\geq 0} F_{s,q}(x)(\nabla_q^s \circ R)(f)(y) = \sum_{s\geq 0} F_{s,q}(x)(R\circ \nabla_q^s)(f)(y),\ \forall x,y \in \mathbb{Z}_p$.
Puisque $(F_{s,q})_{s\geq 0}$ est une base orthogonale, on a $(\nabla_q^s \circ R)(f)(y) = (R\circ\nabla_q^s)(f)(y)$, $\forall s \geq 0$, $\forall y \in \mathbb{Z}_p$. Donc $\nabla_q^s \circ R = R\circ\nabla_q^s$, $\forall s\geq 0$, en particulier $\nabla_q \circ R = R\circ \nabla_q$. □

Définition 2.2.1. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*
Les suites q-polynomiales (q-quasi-polynomiales) $(h_n)_{n\geq 0}$ telles que $c_q(h_n)(x,y) = \sum_{s=0}^{n} h_s(x)h_{n-s}(y)$, $\forall n \geq 0$, $x,y \in \mathbb{Z}_p$ *seront appelées* ***suites de type** c_q**-binomial**, où **suites aux** q**-puissances divisées**.*

Remarque 2.2.3. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*
Si une suite q-polynomiale (q-quasi-polynomiale) $(h_n)_{n\geq 0}$ est de type c_q-binomial, alors $h_n(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.

Démonstration. En effet, $c_q(h_1)(x,y) = h_1(x) + h_1(y)$ (car $h_0(x) = h_0(y) = 1$). Donc $h_1(x) = c_q(h_1)(x,0) = h_1(x) + h_1(0)$. D'où $h_1(0) = 0$. Supposons, pour $n \geq 1$, que $h_1(0) = \cdots = h_{n-1}(0) = 0$. Puisque $c_q(h_n)(x,y) = \sum_{s=0}^{n} h_s(x)h_{n-s}(y)$, on a
$h_n(x) = c_q(h_n)(x,0) = \sum_{s=0}^{n} h_s(x)h_{n-s}(0) = h_n(0)+h_n(x)$. Donc $h_n(0) = 0$. □

Théorème 2.2.1. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*
Soit $R \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, alors R a un développement unique en série simplement uniformément convergente $R = \sum_{n\geq 0} b_n\nabla_q^n$, $b_n \in K$. De plus, $b_n = R(F_{n,q})(0)$ et $\|R\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|\,|q-1|^{-n}$.

Démonstration. (Voir Propriétés 2.2.2.)
Soit $R \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Puisque $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left\|(q-1)^n\nabla_q^n(f)\right\| = 0$, on a
$(id\otimes R)(c_q(f))(x,y) = (id\otimes R)\sum_{n\geq 0}\nabla_q^n(f)(x)F_{n,q}(y) = \sum_{n\geq 0}(\nabla_q^n f)(x)R(F_{n,q})(y)$. On déduit de Propriétés 2.2.2 et du Lemme 2.2.1 que $R(f)(x) = c_q(R(f))(x,0) = (id\otimes R)(c_q(f))(0,x) =$

$= (id\otimes R)\Big(\sum_{n\geq 0} F_{n,q}\nabla_q^n(f)\Big)(0,x) = (id\otimes R)\Big(\sum_{n\geq 0}\nabla_q^n(f)F_{n,q}\Big)(x,0) = \sum_{n\geq 0}\nabla_q^n(f)(x)R(F_{n,q})(0)$
$= \sum_{n\geq 0} R(F_{n,q})(0)\nabla_q^n(f)(x) = \Big(\sum_{n\geq 0} R(F_{n,q})(0)\nabla_q^n\Big)(f)(x)$.
Puisque $|R(F_{n,q})(0)|\left\|\nabla_q^n\right\| \leq \|R(F_{n,q})\|\left\|\nabla_q^n\right\| \leq \|R\|\,\|F_{n,q}\|\left\|\nabla_q^n\right\| = \|R\|$, $\forall n\geq 0$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} |R(F_{n,q})(0)|\left\|\nabla_q^n(f)\right\| = \lim_{n\to+\infty} |R(F_{n,q})(0)|\,|q-1|^{-n}\left\|(q-1)^n\nabla_q^n(f)\right\| \leq$

$\leq \|R\| \lim_{n\to+\infty} \left\|(q-1)^n \nabla_q^n(f)\right\| = 0$. Donc R est égal à la somme simplement uniformément convergente $\sum_{n\geq 0} R(F_{n,q})(0)\nabla_q^n$ et $\|R\| \leq \sup_{n\geq 0} |R(F_{n,q})(0)| \left\|\nabla_q^n\right\|$.
D'autre part, pour tout $n \geq 0$, on a $|R(F_{n,q})(0)| \left\|\nabla_q^n\right\| \leq \|R\|$. Ainsi $\sup_{n\geq 0} |R(F_{n,q})(0)| \left\|\nabla_q^n\right\| \leq \|R\|$ et $\|R\| = \sup_{n\geq 0} |R(F_{n,q})(0)| \left\|\nabla_q^n\right\|$. □

Corollaire. *Les algèbres de Banach $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ et $K \ll X \gg$ sont isométriquement isomorphes.*

Démonstration. Soit $R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n$ un opérateur de Jackson, on a
$R = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{(q-1)^n}\big((q-1)\nabla_q\big)^n = \sum_{n\geq 0} a_n\big((q-1)\nabla_q\big)^n$, avec $a_n = \frac{b_n}{(q-1)^n}$ et on déduit du Théorème 2.2.1 que $\|R\| = \sup_{n\geq 0} |b_n|\,|q-1|^{-n} = \sup_{n\geq 0} |a_n|$.
Considérons l'application ϕ de $K \ll X \gg$ dans $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, qui à toute série formelle à coefficients bornés $S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ associe l'unique opérateur de Jackson $\phi(S) = R_S = \sum_{n\geq 0} a_n\big((q-1)\nabla_q\big)^n$. On voit que, ϕ est linéaire, tel que pour tout $S \in K \ll X \gg$, $\|\phi(S)\| = \|S\|$.
Réciproquement, à tout opérateur de Jackson $R = \sum_{n\geq 0} a_n\big((q-1)\nabla_q\big)^n$, on peut associer la série formelle à coefficients bornés $S_R = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$. D'où l'on déduit que les algèbres de Banach $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ et $K \ll X \gg$ sont isométriquement isomorphes.
En particulier $\Lambda[[(q-1)\nabla_q]]$ est isométriquement isomorphe à $\Lambda[[X]]$. □

N.B. On déduit du Theorem 13.10 de [14] (voir aussi le Corollaire du Théorème 3 de [7]) que la norme sur $K \ll X \gg$ est multiplicative. On en déduit que celle de $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est aussi multiplicative.

Proposition 2.2.1. *Soit $q \in K$ tel que $|q-1| < 1$ et soit $R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Alors R est inversible si et seulement si $\|R\| = |b_0| \neq 0$.*

Démonstration. Soit $K[[X]]$ (resp. $\Lambda[[X]]$) l'algèbre des séries formelles sur K (resp. Λ). Soit $S = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ une série formelle sur Λ. Alors S est inversible si et seulement si

$S(0) = a_0 \notin \mathcal{M}$, c'est-à-dire $|S(0)| = 1$.
Puisque $\Lambda[[(q-1)\nabla_q]]$ est isomtriquement isomorphe à $\Lambda[[X]]$, il vient que $R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n = \sum_{n\geq 0} b_n (q-1)^{-n}(q-1)^n \nabla_q^n \in \Lambda[[(q-1)\nabla_q]]$ est inversible si et seulement si b_0 est inversible dans Λ.
Supposons que $\|R\| = \sup_{n\geq 0} \left|(q-1)^{-n} b_n\right| = |b_0| \neq 0$, on obtient $|(q-1)^{-n} b_n| \leq |b_0|, \forall n \geq 0$ et $\left|(q-1)^{-n} b_n b_0^{-1}\right| \leq 1$, $\forall n \geq 0$. Donc $b_0^{-1} R = 1 + \sum_{n\geq 1} b_0^{-1}(q-1)^{-n} b_n (q-1)^n \nabla_q^n \in \Lambda[[(q-1)\nabla_q]]$ et $b_0^{-1} R$ est inversible dans $\Lambda[[(q-1)\nabla_q]]$, donc R est inversible dans $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$.

Réciproquement, si $R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est inversible, il existe $T = \sum_{n\geq 0} d_n \nabla_q^n \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ tel que $R \circ T = id$. Donc $id = R \circ T = \sum_{n\geq 0}\Big(\sum_{i+j=n} b_i d_j\Big)\nabla_q^n =$ $= b_0 d_0 + \sum_{n\geq 1}\Big(\sum_{i+j=n} b_i d_j\Big)\nabla_q^n$. On obtient $b_0 d_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{n} b_{n-j} d_j = 0$, ainsi $b_0 = d_0^{-1}$ et $(q-1)^{-n} b_n = -b_0 \sum_{j=1}^{n} (q-1)^{-(n-j)} b_{n-j} (q-1)^{-j} d_j$. Puisque $\|R\| = \sup_{n\geq 0} \left|(q-1)^{-n} b_n\right|$, $\|T\| = \sup_{n\geq 0} \left|(q-1)^{-n} d_n\right|$ (Théorème 2.2.1) et $\|R \circ T\| = \|R\| \, \|T\|$, on déduit que $\left|(q-1)^{-i} b_i\right| \left|(q-1)^{-j} d_j\right| \leq \|R\| \, \|T\| = \|R \circ T\| = 1, \forall i, j \geq 0$. Donc $\left|(q-1)^{-n} b_n\right| = |b_0| \left|\sum_{j=1}^{n} (q-1)^{-n} b_{n-j} d_j\right| \leq |b_0| \max_{1\leq j\leq n} \left|(q-1)^{-(n-j)} b_{n-j}\right| \left|(q-1)^{-j} d_j\right| \leq$ $\leq |b_0| \, \|R\| \, \|T\| = |b_0|$. D'où $|(q-1)^{-n} b_n| \leq |b_0|, \forall n \geq 0$ et $\|R\| = \sup_{n\geq 0} \left|(q-1)^{-n} b_n\right| =$ $= |b_0| \neq 0$. $\square$

Remarque 2.2.4. *Si le corps K est algèbriquement clos, on voit que $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ est isométriquement isomorphe à l'algèbre des fonctions analytiques bornées sur le disque ouvert $D^-(0, |q-1|^{-1})$.*

Lemme 2.2.2. *Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i$, avec $b_1 \neq 0$. Si h est un q-polynôme (q-quasi-polynôme) de q-degré (degré) $n \geq 1$, alors $R(h)$ est un q-polynôme (q-quasi-polynôme) de q-degré (degré) $n-1$.*

Démonstration. Prouvons le pour $h = F_{k,q}$, avec $k \leq n$.

On a $R(F_{k,q}) = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i(F_{k,q}) = \sum_{i=1}^{k} b_i \nabla_q^i(F_{k,q}) = \sum_{i=1}^{k} b_i F_{k-i,q}$. Puisque $b_1 \neq 0$, alors $R(F_{k,q})$ est un q-polynôme (q-quasi-polynôme) de q-degré (degré) $k-1$. Le Lemme suit par linéarité. □

Proposition 2.2.2. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$.*
Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i$, avec $\|R\| = |b_1|\,|q-1|^{-1} = |q-1|^{-1}$. Alors il existe une unique suite q-polynomiale (q-quasi-polynomiale) $(h_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$, $h_{n,q}(0) = 0$, $\forall n \geq 1$.
De plus $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est de type c_q-binomial.

Démonstration. On a $R(F_{n,q}) = \sum_{i=1}^{n} b_i F_{n-i,q} = \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k} F_{k,q}$ et $h_{0,q} = 1$.
Supposons avoir déjà construit les q-polynômes (q-quasi-polynôme) $h_{0,q}$, $h_{1,q}$, …, $h_{n-1,q}$ ($n \geq 1$). Determinons $h_{n,q} = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} F_{j,q}$.
Puisque $h_{n,q}$ est de q-degré (degré) $n \geq 1$, on déduit du Lemme 2.2.2 que $R(h_{n,q})$ est un q-polynôme (q-quasi-polynôme) de q-degré (degré) $n-1$. On a

$$R(h_{n,q}) = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} R(F_{j,q}) = \sum_{j=0}^{n} a_{n,j} \sum_{k=0}^{j-1} b_{j-k} F_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j} b_{j-k} \Big) F_{k,q}.$$

Supposons que $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} F_{k,q}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Big(\sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j} b_{j-k} \Big) F_{k,q} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-1,k} F_{k,q}.$$ Donc $\sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j} b_{j-k} = a_{n-1,k}$, $\forall 0 \leq k \geq n-1$.

Pour $k = n-1$, on a $a_{n,n} b_1 = a_{n-1,n-1}$ et $a_{n,n} = \frac{1}{b_1} a_{n-1,n-1}$.
Supposons que, pour $0 \leq k < n$, les $a_{n,n}, a_{n,n-1}, \ldots, a_{n,k+2}$ sont déjà déterminés, alors $\sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j} b_{j-k} = a_{n-1,k}$ et $a_{n,k+1} = \frac{1}{b_1}(a_{n-1,k} - \sum_{j=k+2}^{n} a_{n,j} b_{j-k})$. Donc, pour $n > k \geq 1$,

$$a_{n,k} = \frac{1}{b_1}(a_{n-1,k-1} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{n,j} b_{j-k+1}) \text{ et } a_{n,n} = \frac{a_{n-1,n-1}}{b_1}.$$

D'où l'existence et l'unicité de $h_{n,q}$.
Montrons que $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est de type c_q-binomial.
En effet, la propriété est vraie pour $h_{0,q}$.
Pour $h_{1,q}$, on a $c_q(h_{1,q})(x,y) = F_{0,q}(x) h_{1,q}(y) + F_{1,q}(x) \nabla_q(h_{1,q})(y)$. Puisque

$1 = h_{0,q}(y) = R(h_{1,q})(y) = b_1\nabla_q(h_{1,q})(y)$, on voit que $b_1^{-1} = b_1^{-1}R(h_{1,q})(y) = \nabla_q(h_{1,q})(y)$. Donc $c_q(h_{1,q})(x,y) = F_{0,q}(x)h_{1,q}(y)+b_1^{-1}F_{1,q}(x)$ et $h_{1,q}(x) = c_q(h_{1,q})(x,0) = F_{0,q}(x)h_{1,q}(0)+$

$+b_1^{-1}F_{1,q}(x) = b_1^{-1}F_{1,q}(x)$. On en déduit que $c_q(h_{1,q})(x,y) = h_{0,q}(x)h_{1,q}(y)+h_{1,q}(x)h_{0,q}(y)$.

Supposons que $c_q(h_{j,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{j} h_{s,q}(x)h_{j-s,q}(y),\ \forall 0 \leq j \leq n-1$. On obtient

$(id \otimes R)(c_q(h_{n,q}))(x,y) = c_q \circ R(h_{n,q})(x,y) = c_q(h_{n-1,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{n-1} h_{s,q}(x)h_{n-1-s,q}(y) =$

$= \sum_{s=0}^{n-1} h_{s,q}(x)R(h_{n-s,q})(y) = \sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x)R(h_{n-s,q})(y) = (id \otimes R)\Big(\sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y)\Big)$.

Il vient que $c_q(h_{n,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y)$. □

Lemme 2.2.3. *Soit* $R = \sum_{i\geq 1} b_i\nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ *tel que* $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$. *On pose* $R = \nabla_q \circ P$, *où* $P = \sum_{i\geq 1} b_i\nabla_q^{i-1} = \sum_{i\geq 0} b_{i+1}\nabla_q^i$. *Soit* $R' = \sum_{i\geq 1} ib_i\nabla_q^{i-1}$, *(la série formelle dérivée de* R*). Alors* P *et* R' *sont des isométries bijectives telles que* $|b_1| = 1$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $\|P\| = \|R'\| = |b_1| = 1$.
Puisque $|q-1|^{-1} = |q-1|^{-1}|b_1| \geq |q-1|^{-i}|b_i|,\ \forall i > 1$, on obtient
$1 = |b_1| \geq |q-1|^{-(i-1)}|b_i| \geq |i|\,|q-1|^{-(i-1)}|b_i|,\ \forall i > 1$. Donc $\|P\| = \|R'\| = |b_1| = 1$.
Pour le reste de la démonstration, on peut se référer a la démonstration de [7] Lemme 1. En effet, les normes des réciproques étant telles que $\|P^{-1}\| = 1 = \|R'^{-1}\|$, on voit que P et R' sont isométriques. □

Théorème 2.2.2. *Soit* $q \in K$, *non racine de l'unité, tel que* $|q-1| < 1$.
Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i\nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, *tel que* $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$.

(i) *Il existe une suite unique* q*-polynomiale* $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ *de type* c_q*-binomial, telle que* $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$. *Cette suite est une base orthogonale de* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *telle que* $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n,\ \forall n \geq 0$.

(ii) *Pus précisement, si* f *est un élément de* $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *alors* f *admet un développement unique, uniformément convergent de la forme* $f = \sum_{n\geq 0} d_nh_{n,q}$, $d_n = R^n(f)(0)$, *avec* $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |R^n(f)(0)|\,|q-1|^n$.

Démonstration.

(i) L'existence et l'unicité de la suite ont été démontrées. Nous avons donc à montrer que $(h_{n,q})$ est une base orthogonale $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
Montrons que la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est orthogonale. Pour cela, il suffit de montrer que $\forall a_0, \ldots, a_n \in K$, $|a_j| \, \|h_{j,q}\| \leq \left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} \right\|$, $\forall 0 \leq j \leq n$. Puisque $\sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q}(0) = a_0 h_{0,q}(0) = a_0 h_{0,q}(x)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $|a_0| \, \|h_{0,q}\| \leq \left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} \right\|$.
Supposons que $|a_j| \, \|h_{j,q}\| \leq \left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} \right\|$, $\forall 0 \leq j \leq n-1$. On obtient $\sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} - \sum_{s=0}^{n-1} a_s h_{s,q} = a_n h_{n,q}$ et $|a_n| \, \|h_{n,q}\| = \left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} - \sum_{s=0}^{n-1} a_s h_{s,q} \right\| \leq$
$\leq \max\Big(\left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} \right\|, \left\| \sum_{s=0}^{n-1} a_s h_{s,q} \right\| \Big) = \left\| \sum_{s=0}^{n} a_s h_{s,q} \right\|$. D'où $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est orthogonale.
Puisque, pour tout $n \geq 0$, chaque $h_{n,q}$ est un q-polynôme de q-degré n, la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base de l'espace des q-polynômes. Comme $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une famille orthogonale engendrant un sous-espace dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, c'est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.
Calculons maintenant $\|h_{n,q}\|$.
Soit $R = P \circ \nabla_q$. On déduit du Lemme 2.2.3 que P est une isométrie bijective .
Soit $h_{n,q} = \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} F_{j,q}$. On a $\|h_{n,q}\| = \max_{1\leq j\leq n} |a_{n,j}| \, |q-1|^j$.
Puisque $h_{n-1,q} = R(h_{n,q}) = P \circ \nabla_q(h_{n,q})$, on a $\|h_{n-1,q}\| = \|P \circ \nabla_q(h_{n,q})\| =$
$= \|\nabla_q(h_{n,q})\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} F_{j-1,q} \right\| = \max_{1\leq j\leq n} |a_{n,j}| \, |q-1|^{j-1} =$
$= |q-1|^{-1} \max_{1\leq j\leq n} |a_{n,j}| \, |q-1|^j = |q-1|^{-1} \|h_{n,q}\|$. Donc $|q-1| \, \|h_{n-1,q}\| = \|h_{n,q}\|$.
Par récurrence, on obtient $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n$.

(ii) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Puisque $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, f admet le développement $f = \sum_{j\geq 0} d_j h_{j,q}$, avec $\|f\| = \sup_{j\geq 0} |d_j| \, |q-1|^j$. On a $R(h_{j,q}) = h_{j-1,q}$ $R^2(h_{j,q}) = R(h_{j-1,q}) = h_{j-2,q}$. De proche en proche, on obtient $R^n(h_{j,q}) = h_{j-n,q}$, pour $n \leq j$ et $R^j(h_{j,q}) = h_{0,q} = 1$. Donc $R^{j+1}(h_{j,q}) = 0$ et $R^n(h_{j,q}) = 0$, pour $n \geq j+1$. D'où l'on déduit que $R^n(f) = \sum_{j\geq 0} d_j R^n(h_{j,q}) = \sum_{j\geq n} d_j h_{j-n,q} =$
$= d_n + \sum_{j\geq n+1} d_j h_{j-n,q}$ et $R^n(f)(0) = d_n$. $\square$

Définition 2.2.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. La suite de type c_q- binomial $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ construite dans le Théoréme 2.2.2 est appelée* ***suite de q-polynômes basiques de type c_q-binomial associée à*** *R.*

Nous avons ici une réciproque au Théorème 2.2.2.

Théorème 2.2.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$ et soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ une suite q-polynomiale de type c_q-binomial qui est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, telle que $\|h_n\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$. Alors il existe un unique opérateur de Jackson $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$, $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$, $\forall n \geq 1$ et $R(h_{0,q}) = 0$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on pose $f = \sum_{n\geq 0} a_n h_{n,q}$, avec $\|f\| = \sup_{n\geq 0} |a_n|\,\|h_{n,q}\|$.
Soit $R(f) = \sum_{n\geq 1} a_n h_{n-1,q}$. On a $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$ et $R(f) = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} h_{n,q}$. Donc R est linéaire tel que $\|R(f)\| = \sup_{n\geq 1} |a_n|\,|q-1|^{n-1} = \sup_{n\geq 1} |a_n|\,|q-1|^n\,|q-1|^{-1} \leq |q-1|^{-1}\,\|f\|$.
Comme, pour tout $n \geq 1$, $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$, on obtient
$|q-1|^{n-1} = \|h_{n-1,q}\| = \|R(h_{n,q})\| \leq \|R\|\,\|h_{n,q}\| = \|R\|\,|q-1|^n$. Donc $|q-1|^{-1} \leq \|R\|$ et $\|R\| = |q-1|^{-1}$.
Montrons que $(id \otimes R) \circ c_q = c_q \circ R$.
Soient $x, y \in \mathbb{Z}_p$, alors pour tout entier $\forall n \geq 1$, on a

$$c_q(R(h_{n,q}))(x,y) = c_q(h_{n-1,q})(x,y) = \sum_{s=0}^{n-1} h_{s,q}(x) h_{n-1-s,q}(y) = \sum_{s=0}^{n-1} h_{s,q}(x) R(h_{n-s,q})(y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x) R(h_{n-s,q})(y) = \big((id \otimes R) \circ c_q\big)(h_{n,q})(x,y).$$

Donc $c_q \circ R = (id \otimes R) \circ c_q$, $R \circ \nabla_q = \nabla_q \circ R$ et $R \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$.
Soit $R = \sum_{i\geq 0} b_i \nabla_q^i$ et $h_{1,q} = \alpha F_{1,q}$. On a $|q-1| = \|h_{1,q}\| = |\alpha|\,|q-1|$, c'est-à-dire que $|\alpha| = 1$ et $0 = R(h_{0,q}) = b_0 h_{0,q} = b_0$.
D'autre part, puisque $1 = R(h_{1,q}) = b_0 h_{1,q} + b_1 \alpha \nabla_q(F_{1,q}) = b_1 \alpha$, on voit que $|b_1| = 1$. Donc $\|R\| = |q-1|^{-1} = |q-1|^{-1}\,|b_1|$. □

Les Théorème 2.2.2 et 2.2.3 admettent des analogues, lorsque q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N.

Théorème 2.2.4. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N.*
Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$. Alors il existe une suite unique q-quasi-polynomiale $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ de type c_q-binomial, telle que $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$. Cette suite est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, telle que $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$.

Démonstration. C'est la même que celle du Théorème 2.2.2. □

N.B. Comme pour le cas q non racine de l'unité, la suite de type c_q- binomial $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ construite dans le Théoréme 2.2.4 est appelée **suite de q-quasi-polynômes basiques de type c_q-binomial associée à** R.

Nous avons la réciproque suivante au Théorème 2.2.4 dont la démonstration est la même que celle du Théorème 2.2.3.

Théorème 2.2.5. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N et soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ une suite q-quasi-polynomiale de type c_q-binomial qui est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, telle que $\|h_n\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$. Alors il existe un unique opérateur de Jackson $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$, $R(h_{n,q}) = h_{n-1,q}$, $\forall n \geq 1$ et $R(h_{0,q}) = 0$.*

Corollaire. *Soit q un élément de K, tel que $|q-1| < 1$.*
Il y a une correspondance bijective entre l'ensemble des opérateurs de Jackson $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tels que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$ et l'ensemble des suites q-polynomiales lorsque q est non racine de l'unité (resp. q-quasi-polynomiales lorsque q est une racine de l'unité) de type c_q-binomial $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ qui sont des bases orthogonales telles que $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$. □

Exemples:

(i) Considérons l'opérateur $R = \nabla_q$, c'est-à-dire, le cas où $b_1 = 1$ et $b_n = 0$, $\forall n \neq 1$. Les q-polynômes (q-quasi-polynômes) $h_{n,q}$ sont donnés par $h_{n,q} = F_{n,q}$.

(i) Soit $\alpha \in K$. Si la suite de type c_q-binomial est telle que $h_{n,q} = \alpha^{jn} F_{n,q}$, $\forall n \geq 0$, alors l'opérateur R est $R = \alpha^{-j}\nabla_q$.

Lemme 2.2.4. *Soit* $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, *tel que* $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$ *et soit* $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ *la suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) basiques* c_q*-binomial associée à R. Soit* $R = P \circ \nabla_q$ *et soit* $R' = \sum_{i\geq 1} i b_i \nabla_q^{i-1}$, *la série formelle dérivée de R.*
Alors $h_{n,q} = R' \circ P^{-n-1}(F_{n,q})$, $\forall n \geq 0$.

Démonstration. Voir la démonstration du Lemme 1 de [7]. □

Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$. Le Lemme 2.2.4 permet d'obtenir explicitement la suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) basiques de type c_q-binomial associée à R.

Exemple: Soit q un élément de K, tel que $|q-1| < 1$ et soit $R = \nabla_q + \alpha\nabla_q^2$, avec $|\alpha| \leq |q-1|$. On a $\|R\| = |q-1|^{-1}$.
Soit $R = \nabla_q \circ P$, alors $P = 1 + \alpha\nabla_q$, $P^{-n-1} = (1+\alpha\nabla_q)^{-n-1} =$
$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^k \nabla_q^k$ et $R' = 1 + 2\alpha\nabla_q$.
Posons $h_{n,q} = R' \circ P^{-n-1}(F_{n,q})$. On obtient

$$h_{n,q} = (1+2\alpha\nabla_q) \circ \left(\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^k \nabla_q^k\right)(F_{n,q}) =$$
$$= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^k \nabla_q^k(F_{n,q}) + \sum_{k\geq 0} 2(-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^{k+1} \nabla_q^{k+1}(F_{n,q}) =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^k F_{n-k,q} + \sum_{k=0}^{n-1} 2(-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^{k+1} F_{n-k-1,q} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k} \alpha^k F_{n-k,q} + \sum_{k=1}^{n} 2(-1)^{k-1} \binom{n+k-1}{k-1} \alpha^k F_{n-k,q} =$$
$$= F_{n,q} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \left(\binom{n+k}{k} - 2\binom{n+k-1}{k-1}\right) \alpha^k F_{n-k,q} =$$
$$= F_{n,q} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n-k}{k} \binom{n+k-1}{k-1} \alpha^k F_{n-k,q}.$$

On déduit du Lemme 2.2.4 que l'on obtient ainsi la suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) basiques de type c_q-binomial associée à $R = \nabla_q + \alpha\nabla_q^2$.

Théorème 2.2.6. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1|<1$. Soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ une suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes), telle que pour tout $n \geq 0$, $h_{n,q}$ est de q-degré (degré) n, avec $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n$ et soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1|\,|q-1|^{-1}$.*
Si la suite $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, alors il existe une suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) $(r_{n,q})_{n\geq 0}$, telle que pour tout $n \geq 0$, $r_{n,q}$ est de q-degré (degré) n, avec $\|r_{n,q}\| = |q-1|^n$ et $R(h_{n,q}) = r_{n-1,q}$, $\forall n \geq 1$.
De plus la suite $(r_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Démonstration. Soit $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$, tel que $\|R\| = |q-1|^{-1} =$ $= |b_1||q-1|^{-1}$ et soit $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ une suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes), telle que pour tout $n \geq 0$, $h_{n,q}$ est de q-degré (degré) n, avec $\|h_{n,q}\| = |q-1|^n$; qui est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Alors la suite $((q-1)^{-n}h_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Rappelons que la suite $(F_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, telle que pour tout entier positif n, $\|F_{n,q}\| = |q-1|^n$. Il vient donc que la suite $((q-1)^{-n}F_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Soit $h_{n,q} = \sum_{j=0}^{n} a_j F_j$, le développement de $h_{n,q}$ dans la base $(F_{n,q})_{n\geq 0}$. On déduit de Propriétés 2.2.1 que $R(h_{n,q}) = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=1}^{j} b_i F_{j-i,q} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{j-1} a_j b_{j-i} F_{i,q} = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i} F_{i,q}$.
Posant $r_{n-1,q} = R(h_{n,q})$, on voit que $r_{n-1,q}$ est un q-polynôme (resp. q-quasi-polynôme) de q-degré (resp. degré) $n-1$, car $a_n b_1 \neq 0$.

De plus, on a $\|r_{n-1,q}\| = \max_{0\leq i\leq n-1} \left|\sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i}\right| |q-1|^i =$

$$= \Big(\max_{0\leq i\leq n-2} \left|\sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i}\right| |q-1|^i, |a_n|\,|q-1|^{n-1}\Big).$$

D'autre part, on a $(q-1)^{-n}h_{n,q} = \sum_{j=0}^{n} (q-1)^{-n+j} a_j \Big((q-1)^{-j}F_{j,q}\Big)$.

Puisque les suites $((q-1)^{-n}h_{n,q})_{n\geq 0}$ et $((q-1)^{-n}F_{n,q})_{n\geq 0}$ sont des bases orthonormales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on déduit du Lemme 2.1.2 que $\left|(q-1)^{-n+j}a_j\right| \leq 1$, $\forall 0 \leq j \leq n$ et $|a_n| = 1$. On obtient donc $\left\|(q-1)^{-n+1}r_{n-1,q}\right\| = \max(\max_{0\leq i\leq n-2} |q-1|^{-n+1+i} \left|\sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i}\right|, 1)$. Comme $\max_{0\leq i\leq n-2} |q-1|^{-n+1+i} \left|\sum_{j=i+1}^{n} a_j b_{j-i}\right| \leq \max_{0\leq i\leq n-2}\max_{i+1\leq j\leq n} \left|(q-1)^{-n+j}a_j\right| \leq 1$, il vient que $\left\|(q-1)^{-n+1}r_{n-1,q}\right\| = 1 = \left|\big((q-1)^{-n}a_n\big)\big((q-1)^{-1}b_1\big)\right|$. D'ou l'on déduit que la suite

$((q-1)^{-n}r_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et alors la suite $(r_{n,q})_{n\geq 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. De plus on a $\|r_{n,q}\| = |q-1|^n$, $\forall n \geq 0$. $\square$

Théorème 2.2.7. *Soit* $R = \sum_{i\geq 1} b_i \nabla_q^i \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$*, tel que* $\|R\| = |q-1|^{-1} = |b_1||q-1|^{-1}$ *et soit* $U \in \mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$*. Alors* $U = \sum_{n\geq 0} U(h_{n,q})(0)R^n$*, où la suite* $(h_{n,q})_{n\geq 0}$ *est la suite de q-polynômes (q-quasi-polynômes) basiques de type* c_q*-binomial associée à* R*.*

Démonstration. Soit $f = \sum_{n\geq 0} d_n h_{n,q}(x) \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K),\ x, y \in \mathbb{Z}_p$, alors

$$c_q(f)(x,y) = \sum_{n\geq 0} d_n c_q(h_{n,q})(x,y) = \sum_{n\geq 0} d_n \sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x)h_{n-s,q}(y) =$$
$$= \sum_{n\geq 0} d_n \sum_{s=0}^{n} h_{s,q}(x)R^s(h_{n,q})(y) = \sum_{s\geq 0} h_{s,q}(x) \sum_{n\geq s} d_n R^s(h_{n,q})(y) =$$
$$= \sum_{s\geq 0} h_{s,q}(x) \sum_{n\geq 0} d_n R^s(h_{n,q})(y) = \sum_{s\geq 0} h_{s,q}(x) R^s\Big(\sum_{n\geq 0} d_n h_{n,q}\Big)(y) = \sum_{s\geq 0} h_{s,q}(x)R^s(f)(y).$$

Comme $c_q(f)(x,y) = c_q(f)(y,x)$, on a
$$c_q(f)(x,y) = \sum_{s\geq 0} h_{s,q}(y)R^s(f)(x) = \sum_{s\geq 0} R^s(f)(x)h_{s,q}(y).$$

Ainsi $\big((id \otimes U)\circ c_q\big)(f)(x,y) = \sum_{n\geq 0} R^n(f)(x)U(h_{n,q})(y) = \sum_{n\geq 0} U(h_{n,q})(y)R^n(f)(x)$.

Il vient que $U(f)(x) = c_q(U(f))(x,0) = \big((id\otimes U)\circ c_q\big)(f)(x,0) = \sum_{n\geq 0} U(h_{n,q})(0)R^n(f)(x)$.

D'ou l'on déduit que $U = \sum_{n\geq 0} U(h_{n,q})(0)R^n$. $\square$

N.B. Ce théorème, comme quelques uns des résultats ci-dessus sur les opérateurs de Jackson, à rapprocher du Théorème 2.1.8 est l'analogue d'un théorème du calcul ombral classique.

CHAPITRE 3

3. L'algèbre du plan quantique et l'algèbre de Weyl quantique

Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soient τ_1, ∇_q et Z_q les opérateurs définis, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, par $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$, $\nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(q-1)q^x}$ et $Z_q(f)(x) = q^x f(x)$. On obtient les relations de commutations $\nabla_q \circ \tau_1 = q\tau_1 \circ \nabla_q$ et $\nabla_q \circ Z_q = qZ_q \circ \nabla_q + id$.

Le plan affine est connu comme étant une algèbre libre engendrée par deux variables x et y, soumises à la règle de commutation ordinaire donnée par $yx = xy$.
Considèrons à present la règle de commutation donnée par $yx = qxy$.
Soit $K < x, y >$, l'algèbre libre engendrée par x et y, c'est-à-dire l'algèbre des polynômes non commutatifs en x et y. Désignons par I_q, l'idéal bilatère de $K < x, y >$ engendré par $yx - qxy$. Le plan quantique est défini comme étant l'algèbre quotient
$K_q[x, y] = K < x, y > /I_q$.
Soit $\mathcal{P}_q$ l'algèbre d'opérateurs engendrée par τ_1 et ∇_q. On obtient un isomorphisme de $K_q[x, y]$ sur $\mathcal{P}_q$ qui, à la classe de x associe τ_1 et à la classe de y associe ∇_q. Ainsi, on peut réaliser le plan quantique comme étant une algèbre d'opérateurs linéaires continus.

De même, considérant la relation de commutation $yx = qxy + 1$, on définit l'algèbre de Weyl quantique comme étant l'algèbre quotient $K < x, y > /J_q$, où J_q est l'idéal bilatère engendré par $yx - qxy - 1$.
Soit $\mathcal{A}_q$ l'algèbre d'oprérateurs linéaires continus engendrée par Z_q et ∇_q. Alors $\mathcal{A}_q$ est isomorphe à $K < x, y > /J_q$.

Dans ce chapitre, nous nous interésserons à l'algèbre du plan quantique et l'algèbre de Weyl quantique sous la forme d'algèbres d'opérateurs. *Nous supposons que q est non racine de l'unité.*
Pour alléger les notations, nous posons ici $C_{n,q} = C_n$ les éléments de la q-base de Mahler.
On note Q_1Q_2 la composé $Q_1 \circ Q_2$ de deux opérateurs Q_1 et Q_2.

N.B. Par convention on pose $\prod_{\emptyset} = 1$ et $\sum_{\emptyset} = 0$.

3.1 L'algèbre du plan quantique

Soit $\mathcal{P}_q$ l'algèbre des opérateurs linéaires continus engendrée par τ_1 et ∇_q et soit $\widehat{\mathcal{P}_q}$ son adhérence dans l'algèbre $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. Rappelons que $W(\mathbb{Z}_p, K)$ est l'algèbre des opérateurs aux différences finies, c'est-à-dire les opérateurs linéaires continus commutant avec τ_1. L'algèbre des opérateurs de Jackson, ou encore l'algèbre des opérateurs linéaires continus commutant avec ∇_q est désignée par $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Les algèbres d'opérateurs $W(\mathbb{Z}_p, K)$ et $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ sont des sous-algèbres de $\widehat{\mathcal{P}_q}$.

Soient τ_1^i et $\Delta_q^{(i)}$ les opérateurs linéaires continus définis respectivement, pour $i \geq 0$ par $\tau_1^i = \tau_1 \circ \tau_1^{i-1}$ et $\Delta_q^{(i)} = (\tau_1 - id) \circ (\tau_1 - qid) \circ \cdots \circ (\tau_1 - q^{i-1}id)$. On pose $\tau_1^0 = \Delta_q^{(0)} = id$. Les opérateurs de Jacksons ∇_q^j sont également définis par $\nabla_q^0 = id$ et pour $j > 0$ $\nabla_q^j = \nabla_q \circ \nabla_q^{j-1}$. On a les propriétés suivantes:

Propriétés 3.1.1. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Par convention, on pose* $\displaystyle\prod_{\ell=0}^{-1} . = 1$.

(i) *On a* $\nabla_q \tau_1 = q\tau_1 \nabla_q$. *Plus généralement, on a* $\nabla_q^j \tau_1^i = q^{ij} \tau_1^i \nabla_q^j$, $\forall i \geq 0, j \geq 0$ *et*
$$\nabla_q^j \Delta_q^{(n)} = q^{nj} \left(\sum_{s=0}^{n} \alpha_{n,s}(j) \Delta_q^{(n-s)} \right) \nabla_q^j, \text{ où } \alpha_{n,0}(j) = 1 \text{ et}$$
$$\alpha_{n,s}(j) = q^{-s(j-1)} \binom{n}{s}_q \prod_{\ell=0}^{s-1} (q^j - q^\ell), \ \forall 1 \leq s \leq n.$$
De même, $$\Delta_q^{(n)} \nabla_q^j = q^{-nj} \nabla_q^j \sum_{k=0}^{n} \beta_{n,k}(j) \Delta_q^{(n-k)}, \text{ où } \beta_{n,0}(j) = 1 \text{ et}$$
$$\beta_{n,k}(j) = (-1)^k \binom{n}{k}_q \prod_{\ell=0}^{k-1} (q^{j+\ell} - 1), \ \forall 1 \leq k \leq n.$$

(ii) *Soit n un entier positif. On a*
$$\tau_1^i \nabla_q^j (C_n) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jn} \sum_{s=0}^{n-j} q^{(n-j-s)(i-s)} \binom{i}{s}_q C_{n-j-s},$$
$\forall i \geq 0,\ 0 \leq j \leq n$ *et* $\tau_1^i \nabla_q^j (C_n) = 0$, $\forall i \geq 0, j > n$.

(iii) *Soit $(\pi_{q,n})_{n \geq 0}$ la famille de q-polynômes définies, pour $x \in \mathbb{Z}_p$, par $\pi_{q,0}(x) = 1$ et $\pi_{q,n}(x) = (x)_q (x-1)_q \ldots (x-n+1)_q$, $\forall n \geq 1$. On a*
$$\nabla_q^j (\pi_{q,n}) = q^{-j(n-1)} \prod_{\ell=0}^{j-1} (q^n - q^\ell).\pi_{q,n}, \ \forall j \leq n \text{ et } \nabla_q^j (\pi_{q,n}) = 0, \ \forall j > n.$$

Démonstration. Par récurrence:

(i) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a
$\nabla_q \tau_1(f)(x) = \dfrac{\tau_1(f)(x+1) - \tau_1(f)(x)}{(q-1)q^x} = \dfrac{f(x+2) - f(x+1)}{(q-1)q^x}$ et
$\tau_1 \nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+2) - f(x+1)}{(q-1)q^{x+1}}$. Donc $q\tau_1\nabla_q(f)(x) = \nabla_q\tau_1(f)(x)$.
De plus $\nabla_q^2\tau_1 = \nabla_q\nabla_q\tau_1 = \nabla_q(q\tau_1\nabla_q) = q^2\tau_1\nabla_q^2$.
Par récurrence sur j, supposons que $\nabla_q^j\tau_1 = q^j\tau_1\nabla_q^j$. On obtient
$\nabla_q^{j+1}\tau_1 = \nabla_q(q^j\tau_1\nabla_q^j) = q^{j+1}\tau_1\nabla_q^{j+1}$ et $\nabla_q^j\tau_1^2 = q^{2j}\tau_1^2\nabla_q^j$.
Supposons maintenant que $\nabla_q^j\tau_1^i = q^{ij}\tau_1^i\nabla_q^j$. On obtient alors
$\nabla_q^j\tau_1^{i+1} = q^{ij}\tau_1^i\nabla_q^j\tau_1 = q^{(i+1)j}\tau_1^i\nabla_q^j$.

Montrons par récurrence que $\nabla_q^j\Delta_q^{(n)} = q^{nj}\displaystyle\sum_{s=0}^{j}\alpha_{n,s}(j)\Delta_q^{(n-s)}\nabla_q^j$, avec $\alpha_{n,0}(j) = 1$ et

$\alpha_{n,s}(j) = q^{-s(j-1)}\dbinom{n}{s}_q\displaystyle\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^j - q^\ell)$, $\forall 1 \leq s \leq n$.
On déduit aussitôt de la relation $\nabla_q\tau_1 = q\tau_1\nabla_q$ que
$\nabla_q\Delta_q^{(n)} = (q\tau_1 - id)(q\tau_1 - qid)\dots(q\tau_1 - q^{n-1}id)\nabla_q =$
$= q^{n-1}(\tau_1 - id)(\tau_1 - qid)\dots(\tau_1 - q^{n-2}id)(q\tau_1 - q^n id + q^n id - id)\nabla_q =$
$= \big(q^n\Delta_q^{(n)} + q^{n-1}(q^n - 1)\Delta_q^{(n-1)}\big)\nabla_q$.
On obtient $\nabla_q^2\Delta_q^{(n)} = \nabla_q\big(q^n\Delta_q^{(n)} + q^{n-1}(q^n-1)\Delta_q^{(n-1)}\big)\nabla_q =$
$= q^{2n}\big(\Delta_q^{(n)} + q^{-2}(q^n - 1)\dbinom{2}{1}_q\Delta_q^{(n-1)} + q^{-3}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dbinom{2}{2}_q\Delta_q^{(n-2)}\big)\nabla_q^2$.

Par récurrence sur j, supposons que $\nabla_q^j\Delta_q^{(n)} = q^{nj}\displaystyle\sum_{s=0}^{j}\alpha_{n,s}(j)\Delta_q^{(n-s)}\nabla_q^j$. On obtient

$$\nabla_q^{j+1}\Delta_q^{(n)} = q^{nj}\sum_{s=0}^{j}\alpha_{n,s}(j)q^{n-s}\Delta_q^{(n-s)}\nabla_q^{j+1} +$$

$$+ q^{nj}\sum_{s=0}^{j}\alpha_{n,s}(j)q^{n-s-1}(q^{n-s}-1)\Delta_q^{(n-s-1)}\nabla_q^{j+1} =$$

$$= q^{n(j+1)}\Big(\Delta_q^{(n)} + \sum_{s=1}^{j}q^{-s}\alpha_{n,s}(j)\Delta_q^{(n-s)} + \sum_{s=1}^{j}q^{-s}(q^{n-s+1}-1)\alpha_{n,s-1}(j)\Delta_q^{(n-s)} +$$

$$+ q^{\frac{-j(j+1)}{2}}\prod_{\ell=0}^{j}(q^{n-\ell}-1)\Delta_q^{(n-j-1)}\Big)\nabla_q^{j+1}.$$

Comme $\dbinom{j}{s}_q\displaystyle\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^n - q^\ell) = \dbinom{n}{s}_q\displaystyle\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^j - q^\ell)$, on voit que

$$q^{-s}\alpha_{n,s}(j)+q^{-s}(q^{n-s+1}-1)\alpha_{n,s-1}(j)=q^{-sj}\left(\binom{j}{s}_q-q^{j-s}\binom{j}{s-1}_q\right)\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^n-q^\ell)=$$
$$=q^{-sj}\binom{j+1}{s}_q\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^n-q^\ell)=\alpha_{n,s}(j+1).$$

D'où l'on déduit que $\nabla_q^{j+1}\Delta_q^{(n)}=q^{n(j+1)}\sum_{s=0}^{j+1}\alpha_{n,s}(j+1)\Delta_q^{(n-s)}\nabla_q^{j+1}$.

D'autre part, pour $n>j$, on a $\prod_{\ell=j}^{n-1}(q^j-q^\ell)=0$. Ainsi, on obtient

$$\nabla_q^j\Delta_q^{(n)}=q^{nj}\sum_{s=0}^{n}\alpha_{n,s}(j)\Delta_q^{(n-s)}\nabla_q^j.$$

De la même manière, on montre que $\Delta_q^{(n)}\nabla_q^j=q^{-nj}\nabla_q^j\sum_{k=0}^{n}\beta_{n,k}(j)\Delta_q^{(n-k)}$, avec

$\beta_{n,0}(j)=1$ et $\beta_{n,k}(j)=(-1)^k\binom{n}{k}_q\prod_{\ell=0}^{k-1}(q^{j+\ell}-1)$, $\forall 1\leq k\leq n$.

(ii) Elle découle de Propriétés 2.2.2 et du Théorème 1.0.4.

(iii) Puisque $\pi_{q,n}=(n)_q!C_n$, on déduit de (ii) que

$$\nabla_q^j(\pi_{q,n})=(n)_q!(q-1)^{-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}}q^{-jn}C_{n-j}=(q-1)^{-j}q^{\frac{j(j-2n+1)}{2}}\prod_{\ell=0}^{j-1}(n-\ell)_q\cdot\pi_{q,n}=$$
$$=q^{-j(n-1)}\prod_{\ell=0}^{j-1}(q^n-q^\ell).\pi_{q,n},\ \forall j\leq n \text{ et } \nabla_q^j(\pi_{q,n})=0,\ \forall j>n.\qquad\square$$

Théorème 3.1.1. *La suite $(\tau_1^i\nabla_q^j)_{i\geq 0,j\geq 0}$ est une base de $\mathcal{P}_q$. Cette suite n'est pas une famille orthogonale dans l'espace de Banach des endomorphismes linéaires continus $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)\big)$.*

Démonstration. Il est évident, par la définition, que la suite $(\tau_1^i\nabla_q^j)_{i,j}$ est un système générateur de $\mathcal{P}_q$. Montrons que $(\tau_1^i\nabla_q^j)_{i,j}$ est un système libre. Soit $Q=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j$ un élément de $\mathcal{P}_q$.

Pour $k\geq m$, on a $Q(C_k)(x)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(q-1)^{-j}q^{\frac{j(j+1)}{2}-jk}b_{i,j}C_{k-j}(x+i)$.

Supposons $Q=0$, comme $C_{n+m-j}(i)=0$ pour $i<n$ ou $j<m$ et $C_n(n)=1$, on obtient

$Q(C_{n+m})(0) = (q-1)^{-m} q^{\frac{m(m+1)}{2} - m(n+m)} b_{n,m} = 0$. Donc $b_{n,m} = 0$.
D'autre part, on a $Q(C_{n+m})(1) = (q-1)^{-m} q^{\frac{-m(2n+m-1)}{2}} b_{n-1,m} +$
$+ (q-1)^{1-m} q^{\frac{-(m-1)(2n+m)}{2}} b_{n,m-1} = 0$.
De même, on a $Q(C_{n+m-1})(0) = (q-1)^{-m} q^{\frac{-m(2n+m-3)}{2}} b_{n-1,m} +$
$+ (q-1)^{1-m} q^{\frac{-(m-1)(2n+m-2)}{2}} b_{n,m-1} = 0$.
Il vient que $Q(C_{n+m-1})(0) - q^m Q(C_{n+m})(1) = -(q-1)^{2-m} q^{\frac{-(m-1)(2n+m-2)}{2}} b_{n,m-1} = 0$.
D'où l'on déduit que $b_{n,m-1} = 0$ et $b_{n-1,m} = 0$.
Supposons que, pour tous entiers positifs i et j, tels que $i+j > 1$, on ait $b_{i,j} = 0$. On obtient alors $Q = b_{0,0} + b_{1,0}\tau_1 + b_{0,1}\nabla_q = 0$. Ce qui entraîne, $Q(C_1)(0) = b_{1,0} + b_{0,1}(q-1)^{-1} = 0$ et $Q(C_2)(1) = b_{1,0} + b_{0,1}(q-1)^{-1}q^{-1} = 0$. On en déduit que
$Q(C_1)(0) - Q(C_2)(1) = b_{0,1}(q-1)^{-1}(1-q^{-1}) = 0$. Donc $b_{0,1} = 0$ et $b_{1,0} = 0$.
On conclut que la famille $(\tau_1^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est libre.

• La famille $(\tau_1^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ n'est pas orthogonale. En effet, considérons
$Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$.
On a $Q(C_n)(x) = C_n(x) + (p-1)C_n(x+1) - (p-1)(q-1)(q-1)^{-1}q^{1-n}C_{n-1}(x) =$
$= (1 - q^n + pq^n)C_n(x) + (p-1)(1-q^{1-n})C_{n-1}(x)$.
On obtient, pour tout entier n positif,
$\|Q(C_n)\| \leq \max(|p|, |q^n - 1|, |q^{n-1} - 1|) \leq \max(|p|, |q-1|)$.
D'autre part, on a $Q(C_0) = pC_0$ et $Q(C_2) = (1 - q^2 + pq^2)C_2 + (p-1)(1-q^{-1})C_1$.
On en déduit que $|p| = \|Q(C_0)\| \leq \|Q\|$ et $|q^{-1} - 1| = |q-1| \leq \|Q(C_2)\| \leq \|Q\|$.
Donc $\|Q\| = \max(|p|, |q-1|) < \max(1, |p-1|\,\|\tau_1\|, |(q-1)(p-1)|\,\|\nabla_q\|) = 1$. □

Remarque 3.1.1. *Soit* $Q_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j \in \mathcal{P}_q$, *on déduit de Propriétés* 3.1.1 (ii) *que si h est un q-polynôme de q-degré n, alors $Q_{n,m}(h)$ est un q-polynôme de q-degré $\leq n$.*

Proposition 3.1.1. *Soit* $\mathcal{P}_q^{(n)}$ *le sous-espace de* $\mathcal{P}_q$ *défini par*
$\mathcal{P}_q^{(n)} = \{Q^{(n)} \in \mathcal{P}_q, Q^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n-i}\tau_1^i\nabla_q^{n-i}\}$. *Alors* $\mathcal{P}_q^{(n)}$ *est un espace de dimension finie* $n+1$ *et la famille* $(\tau_1^i\nabla_q^{n-i})_{0\leq i\leq n}$ *est une base orthogonale de* $\mathcal{P}_q^{(n)}$.
De plus, la famille $(\mathcal{P}_q^{(n)})_{n\geq 0}$ *définit une graduation de l'algèbre* $\mathcal{P}_q$.

Démonstration. On a $\left\|Q^{(n)}\right\| \leq \max_{0\leq j\leq n} |b_{n,j}|\,|q-1|^{-j}$.
Puisque $Q^{(n)}(C_0)(x) = b_{n,0}\tau_1^n(C_0)(x) = b_{n,0}$, on obtient $|b_{n,0}| \leq \|Q_n\|$. D'autre part, on a $(Q^{(n)} - b_{n,0}id)(C_1)(x) = b_{n,1}\tau_1^{n-1}\nabla_q(C_1)(x) = b_{n,1}(q-1)^{-1}$. Ainsi
$|b_{n,1}(q-1)^{-1}| \leq \max(\|Q_n\|, |b_{n,0}|) = \|Q^{(n)}\|$.

De proche en proche, on voit que $\max\limits_{0\leq j\leq n-1} |b_{n,j}|\,|q-1|^{-j} \leq \left\|Q^{(n)}\right\|$.
Comme $Q^{(n)} - \sum\limits_{j=0}^{n-1} b_{n,j}\tau_1^{n-j}\nabla_q^j = b_{n,n}\nabla_q^n$, on obtient
$|b_{n,n}|\,|q-1|^{-n} \leq \max(\left\|Q^{(n)}\right\|, \max\limits_{0\leq j\leq n-1} |b_{n,j}|\,|q-1|^{-j}) = \left\|Q^{(n)}\right\|$. D'où l'on déduit que
$\left\|Q^{(n)}\right\| = \max\limits_{0\leq j\leq n} |b_{n,j}|\,|q-1|^{-j}$.
Soit $(\mathcal{P}_q^{(n)})_{n\geq 0}$ la suite de sous-espaces de $\mathcal{P}_q$ telle que, pour tout $n \geq 0$,
$\mathcal{P}_q^{(n)} = \{Q^{(n)} \in \mathcal{P}_q, Q^{(n)} = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,n-i}\tau_1^i\nabla_q^{n-i}\}$. On obtient alors $\mathcal{P}_q = \bigoplus\limits_{n\geq 0}\mathcal{P}_q^{(n)}$.
En effet soit $Q = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j$ un élément de $\mathcal{P}_q$. On peut écrire Q sous la forme $Q = \sum\limits_{k=0}^{n+m} Q^{(k)}$, où $Q^{(k)} = \sum\limits_{i+j=k} b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j$, $\forall 0 \leq k \leq n+m$. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n+m$, on a $Q^{(k)} \in \mathcal{P}_q^{(k)}$.
D'autre part, soient $Q^{(s)} = \sum\limits_{i=0}^{s} b_{i,s-i}\tau_1^i\nabla_q^{s-i}$ un élément de $\mathcal{P}_q^{(s)}$ et $Q^{(t)} = \sum\limits_{j=0}^{t} b_{j,t-j}\tau_1^j\nabla_q^{t-j}$ un élément de $\mathcal{P}_q^{(t)}$. On obtient $Q^{(s)}Q^{(t)} = \sum\limits_{i=0}^{s}\sum\limits_{j=0}^{t} b_{i,s-i}b_{j,t-j}q^{j(s-i)}\tau_1^{i+j}\nabla_q^{s+t-(i+j)} \in \mathcal{P}_q^{(s+t)}$. D'où l'on déduit que la famille $(\mathcal{P}_q^{(n)})_{n\geq 0}$ définit une structure de graduation sur $\mathcal{P}_q$. $\square$

Théorème 3.1.2. *Le centre* $\mathcal{Z}(\mathcal{P}_q) = \{u \in \mathcal{P}_q/\ u \circ v = v \circ u,\ \forall v \in \mathcal{P}_q,\ \}$ *est réduit aux scalaires. En d'autres termes* $\mathcal{Z}(\mathcal{P}_q) = K.id$.

Démonstration. Soit $u = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}_q)$. On a $\tau_1 \circ u = u \circ \tau_1$. Donc $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} b_{i,j}q^j\tau_1^{i+1}\nabla_q^j = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} b_{i,j}\tau_1^{i+1}\nabla_q^j$. On obtient $\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m}(q^j-1)b_{i,j}\tau_1^{i+1}\nabla_q^j = 0$. Il vient que, pour tous entiers i et j positifs, $(q^j-1)b_{i,j} = 0$. Comme q est non racine de l'unité, pout tout $j > 0$, on a $q^j - 1 \neq 0$. Donc $b_{i,j} = 0$, $\forall j \geq 1$ et $u = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,0}\tau_1^i$.
D'autre part, par hypothèse, $u\circ\nabla_q = \nabla_q\circ u$ et donc $\sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,0}\tau_1^i\circ\nabla_q = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,0}q^i\tau_1^i\circ\nabla_q$. D'où

l'on déduit, pour tout $i > 0$, que $b_{i,0} = 0$ et $u = b_{0,0}$. $\square$

On désigne par $K\{\Delta\}$ la sous-algèbre de $W(\mathbb{Z}_p, K)$ définie par $K\{\Delta\} = \{Q = \sum_{n\geq 0} a_n \Delta_q^{(n)} \ / \ \lim_{n\to+\infty} a_n = 0\}$ et par $K\{\nabla_q\}$ la sous-algèbre de $\mathcal{D}_q(\mathbb{Z}_p, K)$ définie par $K\{\nabla_q\} = \{R = \sum_{n\geq 0} b_n \nabla_q^n \ / \ \lim_{n\to+\infty} |b_n| \left|\nabla_q^n\right| = 0\}$. Notons que ce sont des sous-algèbres fermées et la suite $(\Delta_q^{(n)})_{n\geq 0}$ (resp. $(\nabla_q^n)_{n\geq 0}$) est une base orthonormale (resp. orthogonale) de $K\{\Delta\}$ (resp. $K\{\nabla_q\}$). Les sous-algèbres fermées $K\{\Delta\}$ et $K\{\nabla_q\}$ sont contenues dans l'adhérence $\widehat{\mathcal{P}}_q$ de $\mathcal{P}_q$.

Soient $K\{\Delta\}\{\nabla_q\}$ et $K\{\nabla_q\}\{\Delta\}$ les sous-algèbres de $\widehat{\mathcal{P}}_q$ définies respectivement par $K\{\Delta\}\{\nabla_q\} = \{R = \sum_{j\geq 0} a_j(\Delta)\nabla_q^j,\ a_j(\Delta) \in K\{\Delta\} \ / \lim_{j\to+\infty} \|a_j(\Delta)\| \left\|\nabla_q^j\right\| = 0\}$ et
$K\{\nabla_q\}\{\Delta\} = \{Q = \sum_{\ell\geq 0} b_\ell(\nabla_q)\Delta_q^{(\ell)},\ b_\ell(\nabla_q) \in K\{\nabla_q\} \ / \lim_{\ell\to+\infty} \|b_\ell(\nabla_q)\| = 0\}$.

Théorème 3.1.3. *Les sous-algèbres $K\{\Delta\}\{\nabla_q\}$ et $K\{\nabla_q\}\{\Delta\}$ de $\widehat{\mathcal{P}}_q$ sont égales.*

Démonstration. Soit $R = \sum_{j\geq 0} a_j(\Delta)\nabla_q^j \in K\{\Delta\}\{\nabla_q\}$, on a $a_j(\Delta) \in K\{\Delta\}$ et $\lim_{j\to+\infty} \|a_j(\Delta)\| \left\|\nabla_q^j\right\| = 0$. Donc $a_j(\Delta)$ s'écrit sous la forme $a_j(\Delta) = \sum_{i\geq 0} a_j(i)\Delta_q^{(i)}$, avec $\lim_{i\to+\infty} a_j(i) = 0$ et $\|a_j(\Delta)\| = \sup_{i\geq 0} |a_j(i)|$. On obtient $0 = \lim_{j\to+\infty} \|a_j(\Delta)\| \left\|\nabla_q^j\right\| =$
$= \lim_{j\to+\infty} \sup_{i\geq 0} |a_j(i)| \left\|\nabla_q^j\right\|$. Donc, pour tout $i \geq 0$, $\lim_{j\to+\infty} |a_j(i)| \left\|\nabla_q^j\right\| = 0$ et
$\sum_{j\geq 0} a_j(i)\nabla_q^j \in K\{\nabla_q\}$. Il vient que $R = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} a_j(i)\Delta_q^{(i)}\nabla_q^j$ est une famille sommable.
D'autre part, $\Delta_q^{(i)}\nabla_q^j = q^{-ij}\nabla_q^j \sum_{k=0}^{i} \beta_{i,i-k}(j)\Delta_q^{(k)}$, avec $\beta_{i,i}(j) = 1$ et
$\beta_{i,i-k}(j)(-1)^{i-k} \binom{i}{k}_q \prod_{\ell=0}^{i-k-1} (q^{j+\ell} - 1)$, $\forall 0 \leq k \leq i-1$.
Donc $R = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq 0} q^{-ij} a_j(i) \sum_{k=0}^{i} \beta_{i,i-k}(j)\nabla_q^j\Delta_q^{(k)}$.
Comme $\lim_{k\to+\infty} \left|\sum_{i\geq k} q^{-ij}(-1)^{i-k}\binom{i}{k}_q \prod_{\ell=0}^{i-k-1}(q^{j+\ell}-1)a_j(i)\right| \leq \lim_{k\to+\infty} \sup_{i\geq k} |a_j(i)| = 0$. On

voit que $R = \sum_{j\geq 0}\sum_{k\geq 0}\sum_{i\geq k} q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\nabla_q^j\Delta_q^{(k)}$.

Pour $k \geq j$, on a $\left\|\binom{i}{k}_q \prod_{\ell=0}^{i-k-1}(q^{j+\ell}-1)a_j(i)\nabla_q^j\Delta_q^{(k)}\right\| \leq |a_j(i)|$. Donc, pour tout $j \geq 0$, on a $\lim_{k\to+\infty}\sup_{i\geq k}\left\|q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\nabla_q^j\Delta_q^{(k)}\right\| = \lim_{i\to+\infty}|a_j(i)| = 0$. Il vient que

$\lim_{k\to+\infty}\sup_{j\geq 0}\sup_{i\geq k}\left\|q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\nabla_q^j\Delta_q^{(k)}\right\| = 0$ et $\lim_{k\to+\infty}\left\|\sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq k}q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\nabla_q^j\right\| = 0$.

On en déduit que $R = \sum_{k\geq 0} b_k(\nabla_q)\Delta_q^{(k)}$, avec $\lim_{k\to+\infty}\|b_k(\nabla_q)\| = 0$,

où $b_k(\nabla_q) = \sum_{j\geq 0}\sum_{i\geq k}q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\nabla_q^j$, avec $\lim_{j\to+\infty}\left|\sum_{i\geq k}q^{-ij}\beta_{i,i-k}(j)a_j(i)\right|\left\|\nabla_q^j\right\| = 0$ et $\beta_{i,i-k}(j) = (-1)^{i-k}\binom{i}{k}_q\prod_{\ell=0}^{i-k-1}(q^{j+\ell}-1)$, $\forall 0 \leq k \leq i-1$ ($\beta_{i,i}(j) = 1$).

On a donc démontré que $R \in K\{\nabla_q\}\{\Delta\}$.

De la même manière, considérons $Q = \sum_{m\geq 0} b_m(\nabla_q)\Delta_q^{(m)} \in K\{\nabla_q\}\{\Delta\}$, avec $\lim_{m\to+\infty}\|b_m(\nabla_q)\| = 0$ et $b_m(\nabla_q) \in K\{\nabla_q\}$. Pour tout entier m positif, $b_m(\nabla_q)$ admet le développement $b_m(\nabla_q) = \sum_{k\geq 0} b_m(k)\nabla_q^k$, avec $\lim_{k\to+\infty}|b_m(k)|\left\|\nabla_q^k\right\| = 0$ et $\|b_m(\nabla_q)\| = \sup_{k\geq 0}|b_m(k)|\left\|\nabla_q^k\right\|$. Puisque $0 = \lim_{m\to+\infty}\|b_m(\nabla_q)\| = \lim_{m\to+\infty}\sup_{k\geq 0}|b_m(k)|\left\|\nabla_q^k\right\| \geq$
$\geq \lim_{m\to+\infty}\sup_{k\geq 0}|b_m(k)|$, on voit que, pour tout $k \geq 0$, $\lim_{m\to+\infty}|b_m(k)| = 0$.

Par hypothèse, pour tout entier m positif, $b_m(\nabla_q) \in K\{\nabla_q\}$. Il vient que, pour tout entier m positif, $\lim_{k\to+\infty}|b_m(k)|\left\|\nabla_q^k\right\| = 0$ et $\lim_{k\to+\infty}\sup_{m\geq 0}|b_m(k)|\left\|\nabla_q^k\right\| = 0$. D'où l'on déduit que la famille $\sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 0} b_m(k)\nabla_q^k\Delta_q^{(m)}$ est sommable.

D'autre part, pour tous entiers positifs k et m, on a $\nabla_q^k\Delta_q^{(m)} = q^{mk}\left(\sum_{s=0}^{m}\alpha_{m,s}(k)\Delta_q^{(m-s)}\right)\nabla_q^k$,

avec $\alpha_{m,s}(k) = q^{-s(k-1)}\binom{m}{s}_q\prod_{\ell=0}^{s-1}(q^k-q^\ell)$. On en déduit que

$Q = \sum_{m\geq 0}\sum_{k\geq 0} q^{mk}b_m(k)\left(\sum_{s=0}^{m}\alpha_{m,s}(k)\Delta_q^{(m-s)}\right)\nabla_q^k =$

$$= \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{s\geq 0}\sum_{m\geq s} q^{mk}\alpha_{m,m-s}(k)b_m(k)\Delta_q^{(s)}\right)\nabla_q^k = \sum_{k\geq 0} d_k(\Delta)\nabla_q^k, \text{ avec}$$

$\lim\limits_{k\to+\infty} \|d_k(\Delta)\| \left\|\nabla_q^k\right\| = 0$, où $d_k(\Delta) = \sum\limits_{s\geq 0}\sum\limits_{m\geq s} q^{mk}\alpha_{m,m-s}(k)b_m(k)\Delta_q^{(s)}$ et

$$\lim_{s\to+\infty}\left|\sum_{m\geq s} q^{mk}\alpha_{m,m-s}(k)b_m(k)\right| \leq \lim_{s\to+\infty}\sup_{m\geq s}|b_m(k)| = 0.$$

Ainsi, on a démontré que $Q \in K\{\Delta\}\{\nabla_q\}$. $\square$

• Il serait interessant de voir si $K\{\Delta\}\{\nabla_q\} = K\{\nabla_q\}\{\Delta\}$ est fermée dans $\widehat{\mathcal{P}}_q$, ce qui revient à dire qu'elle est égale à $\widehat{\mathcal{P}}_q$.

• Soit Q un élément de $\mathcal{P}_q$ et soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, un problème qui se pose naturellement est la résolution de l'équation $Q(f) = g$, un autre est celui de l'étude du spectre de Q. Nous allons nous intéresser ici à un exemple simple.

Lemme 3.1.1. *Considérons l'élément $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$ de $\mathcal{P}_q$. Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ une fonction continue de q-développement $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n C_n$. Alors*

$$Q(f) = pa_0 + \sum_{n\geq 1}\big(a_n(1+(p-1)q^n) + a_{n+1}(p-1)(1-q^{-n})\big)C_n \text{ et}$$

$$(Q-id)(f) = (p-1)a_0 + (p-1)\sum_{n\geq 1}\big(q^n a_n + a_{n+1}(1-q^{-n})\big)C_n.$$

Démonstration. En effet $Q(f) = pa_0 + \sum\limits_{n\geq 1}(1+(p-1)q^n)a_nC_n +$ $+\sum\limits_{n\geq 1}(p-1)(1-q^{1-n})a_nC_{n-1} = pa_0 + \sum\limits_{n\geq 1}\big((1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n$. On en déduit que $(Q-id)(f) = (p-1)a_0 + (p-1)\sum\limits_{n\geq 1}\big(q^n a_n + (1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n$. $\square$

N.B. Si h est un q-polynôme de q-degré m et de q-développement $h = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n C_n$, on obtient $Q(h) = pa_0 + \sum\limits_{n=1}^{m-1}\big((1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n + (1+(p-1)q^m a_m C_m$ et $(Q-id)(h) = (p-1)a_0 + (p-1)\sum\limits_{n=1}^{m-1}\big(q^n a_n + (1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n + (p-1)q^m a_m C_m$. En d'autres termes, l'espace des q-polynômes $\mathbb{P}$ est stable par Q et $Q - id$. La restriction à $\mathbb{P}$ de $Q - id$ est bijective et celle de Q l'est lorsque $q \notin \{(1-p)^{\frac{-1}{n}},\ n \geq 1\}$.

Proposition 3.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < |p|$. Considérons l'élément $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$ de $\mathcal{P}_q$. Alors Q est une application bijective.*

Démonstration. Tout d'abord montrons que Q est une application injective.
Soit f une fonction continue et soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ son q-développement. Supposons que $Q(f) = 0$, on déduit du Lemme 3.1.1 que
$\sum_{n\geq 0}\big((1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n = 0.$
Pour tout entier $n \geq 0$, on a $|1-q^n| \leq |1-q| < |pq^n| = |p|$. Ainsi, on a $|1+(p-1)q^n| = |p| \neq 0$. Puisque $(C_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a $(1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = 0$. Il vient que $a_0 = 0$ et pout $n \geq 1$,
$a_n = \dfrac{(p-1)(q^{-n}-1)}{1+(p-1)q^n}a_{n+1}$. On en déduit de proche en proche que
$a_n = (p-1)^k \prod_{\ell=0}^{k-1} \dfrac{(q^{-n-\ell}-1)}{1+(p-1)q^{n+\ell}}a_{n+k},\ \forall k \geq 1.$
On vient de voir ci-dessus que pour tout entier $m \geq 1$, on a $|1+(p-1)q^m| = |p|$. Ainsi $\dfrac{|q^{-m}-1|}{|1+(p-1)q^m|} = \dfrac{|q^m-1|}{|p|} \leq 1$. D'où l'on déduit que $|a_n| = \prod_{\ell=0}^{k-1}\dfrac{|q^{-n-\ell}-1|}{|1+(p-1)q^{n+\ell}|}|a_{n+k}| \leq$
$\leq |a_{n+k}|$. Comme $\lim_{k\to+\infty}|a_{n+k}| = 0$, on voit que $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$. Donc Q est injective.

Montrons maintenant que Q est une application surjective.
Soit g une fonction continue de q-développement $g = \sum_{n\geq 0} d_n C_n$. Supposons qu'il existe une fonction continue $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$, telle que $Q(f) = g$. On a
$Q(f) = \sum_{n\geq 0}\big[(1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1}\big]C_n$. Comme par hypothèse, f est telle que $Q(f) = g$, on obtient $a_0 = \dfrac{d_0}{p}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a
$(1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = d_n$, d'où $a_n = \dfrac{d_n}{1+(p-1)q^n} +$
$+ \dfrac{(p-1)(q^{-n}-1)}{1+(p-1)q^n}a_{n+1}$; comme $a_{n+1} = \dfrac{d_{n+1}}{1+(p-1)q^{n+1}} + \dfrac{(p-1)(q^{-n-1}-1)}{1+(p-1)q^{n+1}}a_{n+2}$, on obtient $a_n = \dfrac{d_n}{1+(p-1)q^n} + \dfrac{(p-1)(q^{-n}-1)d_{n+1}}{(1+(p-1)q^n)(1+(p-1)q^{n+1})} +$

$$+\frac{(p-1)^2(q^{-n}-1)(q^{-n-1}-1)}{(1+(p-1)q^n)(1+(p-1)q^{n+1})}a_{n+2}.$$

De proche en proche, on obtient, pour tout entier $k \geq 0$,

$$a_n = \sum_{s=0}^{k} \frac{(p-1)^s}{1+(p-1)q^n} \prod_{\ell=0}^{s-1} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell+1}} d_{n+s} + (p-1)^k \prod_{\ell=0}^{k} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell}} a_{n+k+1},$$

avec la convention $\displaystyle\prod_{\ell=0}^{-1} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell+1}} = 1.$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$, on obtient $\displaystyle\lim_{s\to+\infty} \left|\prod_{\ell=0}^{s-1} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell+1}} d_{n+s}\right| \leq \lim_{s\to+\infty} |d_{n+s}| = 0.$

Donc la série $\displaystyle\sum_{s\geq 0}(p-1)^s \prod_{\ell=0}^{s-1} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell+1}} d_{n+s}$ converge.

Comme, pour tout entier $m \geq 0$, on a $|1+(p-1)q^m| = |p|$, posant

$\displaystyle a_n = \frac{1}{1+(p-1)q^n} \sum_{s\geq 0}(p-1)^s \prod_{\ell=0}^{s-1} \frac{q^{-n-\ell}-1}{1+(p-1)q^{n+\ell+1}} d_{n+s}$, on obtient $|a_n| \leq |p|^{-1} \sup_{s\geq 0} |d_{n+s}|$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

D'autre part, on vérifie que $(1+(p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = d_n$. Ainsi, la fonction continue $f = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n C_n$ est telle que $Q(f) = g$. □

N.B. Un problème qui reste posé est de savoir si Q est une application bijective, lorsque $q \in K$ est tel que " $|p| \leq |q-1| < 1$" et n'appartient pas à $\{(1-p)^{\frac{-1}{n}},\ n \geq 1\}$.

Proposition 3.1.3. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Considérons l'opérateur $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$. Alors $Q - id$ est une application bijective.*

Démonstration. Soit f une fonction continue et soit $f = \displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n C_n$ son q-développement.

Supposons que $Q(f) = f$, on déduit du Lemme 3.1.1 que

$\displaystyle\sum_{n\geq 0}\big((p-1)q^n)a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1}\big)C_n = 0.$

On obtient $a_0 = 0$ et pout tout entier $n \geq 1$, $(p-1)q^n a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = 0$, d'où l'on a $a_n = \dfrac{(q^{-n}-1)a_{n+1}}{q^n} = q^{-2n}(1-q^n)a_{n+1}$. Comme ci-dessus, on obtient

$\displaystyle a_n = \prod_{\ell=0}^{k-1} q^{-2(n+\ell)}(1-q^{n+\ell})a_{n+k}$, $\forall k \geq 1$. Ainsi, pour tout entier $k \geq 1$, on a $|a_n| \leq |a_{n+k}|$.

Comme $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} |a_{n+k}| = 0$, on voit que $a_n = 0$, $\forall n \geq 1$. D'où l'on déduit que $f = 0$ et

$Q - id$ est injectif.

Montrons maintenant que $Q - id$ est surjectif.
Soit g une fonction continue de q-développement $g = \sum_{n\geq 0} d_n C_n$. Supposons qu'il existe une fonction continue $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$, telle que $(Q - id)(f) = g$. On obtient $a_0 = \dfrac{d_0}{p-1}$ et pour tout $n \geq 1$, $(p-1)q^n a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = d_n$, il vient que
$a_n = \dfrac{d_n}{(p-1)q^n} + \dfrac{(q^{-n}-1)}{q^n} a_{n+1}$. Par récurrence, on obtient, pour tout entier $k \geq 0$,
$a_n = \dfrac{1}{(p-1)q^n} \sum_{s=0}^{k} \prod_{\ell=0}^{s-1} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} d_{n+s} + \prod_{\ell=0}^{k} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} a_{n+k}$, avec la convention
$\prod_{\ell=0}^{-1} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} = 1$. On vérifie facilement que la série $\dfrac{1}{(p-1)q^n} \sum_{s\geq 0} \prod_{\ell=0}^{s-1} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} d_{n+s}$ converge. En effet, pour tout entier $s \geq 0$, on a $\left| \prod_{\ell=0}^{s-1} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} d_{n+s} \right| \leq |d_{n+s}|$. Comme par hypothèse g est une fonction continue, on a $\lim_{s\to+\infty} d_{n+s} = 0$.
Posant $a_n = \dfrac{1}{(p-1)q^n} \sum_{s\geq 0} \prod_{\ell=0}^{s-1} \dfrac{q^{-n-\ell}-1}{q^{n+\ell}} d_{n+s}$, on obtient $|a_n| \leq \sup_{s\geq 0} |d_{n+s}|$ et $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$. On vérifie d'autre part que $(p-1)q^n a_n + (p-1)(1-q^{-n})a_{n+1} = d_n$. Ainsi $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ est une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K, telle que $(Q - id)(f) = g$ et on a démontré que $Q - id$ est une application bijective. □

Théorème 3.1.4. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$ et soit $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$ un élément de $\mathcal{P}_q$. Pour tout entier $m \geq 0$, il existe $\lambda_m \in K$ et un q-polynôme h de q-degré m, tel que $Q(h) = \lambda_m h$.
De plus, pour tout $m \geq 0$, $\lambda_m = 1 + q^m(p-1)$. En particulier $\lambda_0 = p$. En d'autres termes, l'opérateur Q possède des valeurs propres.*

Démonstration. Soit $h = \sum_{n=0}^{m} a_n C_n$ un q-polynôme de q-degré $m > 0$. Supposons qu'il existe un élément λ_m dans K tel que $Q(h) = \lambda_m h$, on voit que $a_0 p = a_0 \lambda$ et $0 = a_m(\lambda_m - 1 - (p-1)q^m)$. Comme h est un q-polynôme de q-degré $m > 0$, on a $a_m \neq 0$. Donc $\lambda_m - 1 - (p-1)q^m = 0$ et $\lambda_m = 1 + q^m(p-1)$.
D'autre part, on a $(1+(p-1)q^m)a_n = (1+(p-1)q^n)a_n - (p-1)(q^{-n}-1)a_{n+1}$. On obtient donc $a_{n+1} = q^{2n}(q^{m-n}-1)(q^n-1)^{-1}a_n$. On voit que $a_0 = 0$, $a_2 = q^2(q^{m-1}-1)(q-1)^{-1}a_1$

et $a_3 = q^4(q^{m-2}-1)(q^2-1)^{-1}a_2 = q^6(q^{m-1}-1)(q^{m-2}-1)(q-1)^{-1}(q^2-1)^{-1}a_1$. Par récurrence sur n, on obtient $a_n = q^{n(n-1)}\prod_{\ell=1}^{n-1}(q^{m-\ell}-1)(q^\ell-1)^{-1}a_1$, pour $2 \le n \le m$ et $a_m = q^{m(m-1)}a_1$. D'où l'existence de h et de λ_m, pour $m > 0$.

Supposons que $m = 0$ et posons $h = a \neq 0$. On obtient $Q(h) = a + (p-1)a = pa$. Si $Q(h) = \lambda_0 h$, on obtient $0 = (\lambda_0 - p)a$. Donc $\lambda_0 = p$. □

Remarque 3.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soit $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$ un élément de $\mathcal{P}_q$. Notons que si h est un q-polynôme de q-degré m tel que $Q(h) = (1+(p-1)q^m)h$, alors h est tel que $(Q-id)(h) = (p-1)q^m h$. On en déduit que $(Q-id)$ admet des valeurs propres et $(p-1)q^m$ en est une.*

• On a vu que l'opérateur particulier $Q = id + (p-1)\tau_1 - (q-1)(p-1)\nabla_q$ laisse stable l'espace des q-polynômes.
On voit sans peine qu'en fait cet espace est stable par l'algèbre $\mathcal{P}_q$ toute entière. Il y a aussi quelqu'autres sous-espaces de fonctions continues qui sont invariants par $\mathcal{P}_q$.

Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et soit $\Phi_1 f$ la fonction des quotients aux différences définie par $\Phi_1 f(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, pour $(x,y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \backslash \Delta(\mathbb{Z}_p)$, où $\Delta(\mathbb{Z}_p) = \{(x,x), x \in \mathbb{Z}_p\}$. Nous rappelons que f est strictement différentiable si et seulement si $\Phi_1 f$ peut être prolongée en une fonction continue $\widetilde{\Phi_1} f : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$.

Théorème 3.1.5. *Soit f une fonction strictement différentiable de $\mathbb{Z}_p$ dans K et soit $Q_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j \in \mathcal{P}_q$. Alors $Q_{n,m}(f)$ est strictement différentiable. En d'autres termes, l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions strictement différentiables est invariant par $\mathcal{P}_q$.*

Démonstration. On a $\Phi_1(\tau_1(f))(x,y) = \dfrac{f(x+1)-f(y+1)}{x-y} = \Phi_1(f)(x+1,y+1)$.
Donc si f est strictement différentiable, alors $\tau_1(f)$ est strictement différentiable.
On voit sans peine que la fonction continue I_q définie par $I_q(x) = q^{-x}$, est strictement différentiable. Donc $\nabla_q(f) = (q-1)^{-1}I_q.(\tau_1(f)-f)$, produit de fonctions strictement différentiables est strictement différentiable. On en déduit que pour $i \ge 0$, $j \ge 0$, $\tau_1^i\nabla_q^j(f)$ est strictement différentiable. La somme finie $Q_{n,m}(f)$ de fonctions strictement

différentiables, est strictement différentiable. □

Définition 3.1.1. *Soient K un corps valué complet et L un sur-corps valué complet de K. Soit D une boule ouverte (resp. fermée) de K, on dit que la fonction $f : D \longrightarrow L$ est analytique s'ils existent $a \in D$ et une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans L tels que $f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, $\forall x \in D$. Ceci est alors vrai pour tout $a \in D$.*

Soit $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n B_n$ une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On sait que f est la restriction d'une fonction analytique si et seulement si $\dfrac{a_n}{n!}$ tend vers 0 [33].

Soit K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et soit $D_+ = \{x \in K / \, |x| \leq 1\}$ la boule unité fermée de K. Alors $\mathbb{Z}_p$ est contenu dans D_+.
Soit $A(D_+, K) = \{f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n, \ a_n \in K, \ \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\}$ l'ensemble des fonctions analytiques de D_+ à valeurs dans K. C'est une K-algèbre de Banach pour la norme $\|f\| = \max\limits_{n\geq 0} |a_n|$ et la suite de fonctions $(x^n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $A(D_+, K)$.
Considérons la suite de polynômes $(p_n(x))_{n\geq 0}$ où $p_n(x) = n!B_n(x) = x(x-1)\dots(x-n+1)$.
On sait que $(p_n(x))_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $A(D_+, K)$ (voir [33] Theorem 54.4 et aussi [28] 4.7).

Théorème 3.1.6. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$. Soit $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ une fonction continue, considérons son q-développement $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n C_n$ dans la base $(C_n)_{n\geq 0}$. Alors f est la restriction à $\mathbb{Z}_p$ d'une fonction analytique si et seulement si $\dfrac{a_n}{(n)_q!}$ converge vers 0.*

Démonstration. Soit $f = \sum\limits_{n\geq 0} a_n C_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a
$f(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{a_n}{(n)_q!}(x)_q(x-1)_q \dots (x-n+1)_q$. Puisque $|q-1| < p^{-\frac{1}{p-1}}$, la fonction $q^x = \sum\limits_{n\geq 0}(q-1)^n \binom{x}{n} = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{(q-1)^n}{n!} p_n(x)$ est analytique. On en déduit que les fonctions $(x-j)_q$ sont analytiques sur D_+. De plus $(x-j)_q = \dfrac{q^{x-j}-1}{q-1} = \sum\limits_{k\geq 1} \binom{x-j}{k}(q-1)^{k-1} =$
$= (x-j) + \sum\limits_{k\geq 2}(q-1)^{k-1}\binom{x-j}{k}$ et $(x-j)_q - (x-j) = \sum\limits_{k\geq 2}(q-1)^{k-1}\binom{x-j}{k}$. Donc

$\|(x-j)_q-(x-j)\| = \sup_{k\geq 2} |q-1|^{k-1} = |q-1| < 1$. On déduit du Lemme 1.0.6 que pour tout $n \geq 1$, $\|(x)_q(x-1)_q\dots(x-n+1)_q - x(x-1)\dots(x-n+1)\| \leq$ $\leq \max_{1\leq j\leq n-1} \|(x-j)_q-(x-j)\| < 1$. Puisque $\Big(x(x-1)\dots(x-n+1)\Big)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $A(D_+,K)$, on déduit du Lemme 1.0.1 que $\Big((x)_q\dots(x-n+1)_q = \pi_{q,n}(x)\Big)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $A(D_+,K)$. Ainsi f est la restriction d'un élément de $A(D_+,K)$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{(n)_q!} = 0$. □

Proposition 3.1.4. *Supposons que* $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$.
Soit $Q_{n,m} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} b_{i,j}\tau_1^i\nabla_q^j \in \mathcal{P}_q$. *Si* $f = \sum_{n\geq 0} a_nC_n$ *est la restriction à* $\mathbb{Z}_p$ *d'une fonction analytique alors* $Q_{n,m}(f)$ *est la restriction à* $\mathbb{Z}_p$ *d'une fonction analytique.*

Démonstration. Puisque f est la restriction à $\mathbb{Z}_p$ d'une fonction analytique, il existe une suite $(b_n)_{n\geq 0}$ dans K telle que $f(x) = \sum_{n\geq 0} b_nx^n$. On obtient
$\tau_1(f)(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(x+1)^n$. Donc $\tau_1(f)$ est la restriction à $\mathbb{Z}_p$ d'une fonction analytique.
D'autre part, puisque $(\pi_{q,n})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $A(D_+,K)$, f peut s'écrire sous la forme $f = \sum_{n\geq 0} d_n\pi_{q,n}$, avec $d_n = \frac{a_n}{(n)_q!}$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n = 0$. Alors
$\nabla_q(f) = \sum_{n\geq 0} d_n\nabla_q(\pi_{q,n}) = \sum_{n\geq 1}(n)_q(q-1)^{-1}q^{1-n}d_n\pi_{q,n-1} =$
$= \sum_{n\geq 0}(n+1)_q(q-1)^{-1}q^{-n}d_{n+1}\pi_{q,n}$ et $\left|(n+1)_q(q-1)^{-1}q^{-n}d_{n+1}\right| \leq |q-1|^{-1}|d_{n+1}|$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\left|(n+1)_q(q-1)^{-1}q^{-n}d_{n+1}\right| = 0$. Puisque $(\pi_{q,n})_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de l'espace des fonctions analytiques sur D_+, la fonction $\nabla_q(f)$ est la restriction à $\mathbb{Z}_p$ d'une fonction analytique. Nous en déduisons, pour $i\geq 0$, $j\geq 0$, que $\tau_1^i\nabla_q^j(f)$ est analytique sur $\mathbb{Z}_p$. Donc $Q_{n,m}(f)$ est la restriction à $\mathbb{Z}_p$ d'une fonction analytique. □

3.2 L'algèbre de Weyl quantique

Soient K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$ et $q \in K$, *non racine de l'unité*, tel que $|q-1| < 1$. Soient $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'espace de Banach des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K et Z_q l'operateur linéaire continu défini, pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, par $Z_q(f)(x) = q^x f(x)$. On désigne par $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ la sous-algèbre fermée de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q. Les éléments de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ ne sont autres que les opérateurs obtenus par multiplication par une fonction continue.

Soient τ_1 l'opérateur de translation et ∇_q la q-dérivation de Jackson, définis pour $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, $x \in \mathbb{Z}_p$, par $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$ et $\nabla_q(f)(x) = \dfrac{f(x+1) - f(x)}{(q-1)q^x}$. On a

$\nabla_q(Z_q(f))(x) = \dfrac{q^{x+1}f(x+1) - q^x f(x)}{(q-1)q^x} = (q-1)^{-1}(q\tau_1(f)(x) - f(x))$ et

$Z_q(\nabla_q(f))(x) = \dfrac{q^x(f(x+1) - f(x))}{(q-1)q^x} = (q-1)^{-1}(\tau_1(f)(x) - f(x))$. On en déduit que $\nabla_q Z_q - qZ_q\nabla_q = id$ et $\nabla_q Z_q - Z_q \nabla_q = \tau_1$.

Les opérateurs Z_q^s et $Q_s(Z_q)$ sont définis respectivement, pour $s \geq 1$, par

$Z_q^s = Z_q \circ Z_q^{s-1}$, $Q_s(Z_q) = \dfrac{(Z_q - id)\dots(Z_q - q^{s-1})}{(q^s-1)\dots(q^s - q^{s-1})}$ et $Z_q^0 = Q_0(Z_q) = id$.

On désigne par $\mathcal{A}_q$ la sous-algèbre de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q et ∇_q. En fait, $\mathcal{A}_q$ est isomorphe à l'algèbre de Weyl quantique à deux générateurs.

- On voit qu'avec les notations ci-dessus, $\mathcal{P}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{A}_q$.

Nous allons donner une description effective de l'adhérence de $\widehat{\mathcal{A}_q}$ de l'algèbre de Weyl quantique dans $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$.

Lemme 3.2.1. *Soit I_q l'application qui à x associe $I_q(x) = q^{-x}$. Alors I_q est une fonction continue de q-développement* $I_q = C_0 + \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n} (q^\ell - 1) C_n$.

Démonstration. Rappelons que la fonction ε_q qui à x associe q^x est une fonction continue bijective qui ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}_p$. Donc la fonction $I_q = \dfrac{1}{\varepsilon_q}$ est une fonction continue bijective sur $\mathbb{Z}_p$ et pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, $I_q(x) \neq 0$.

Nous rappelons aussi que la suite d'opérateurs aux différences finies $(\Delta_q^{(n)})_{n\geq 0}$ est telle que $\Delta_q^{(n)} = (\tau_1 - id)\dots(\tau_1 - q^{n-1}id)$, pour $n > 0$ et $\Delta_q^{(0)} = id$. On obtient par récurrence $\Delta_q^{(n)}(I_q) = (-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n} (q^\ell - 1) I_q$.

En effet pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, on a $\Delta_q^{(1)}(I_q)(x) = q^{-x-1} - q^{-x} = -q^{-1}(q-1)q^{-x}$ et $\Delta_q^{(2)}(I_q)(x) = q^{-2}(q-1)(q^2-1)q^{-x}$.
Supposons que $\Delta_q^{(n)}(I_q) = (-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n}(q^\ell - 1)I_q$. On obtient

$$\Delta_q^{(n+1)}(I_q)(x) = (-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n}(q^\ell - 1)(q^{-x-1} - q^n q^{-x}) = (-1)^{n+1} q^{-n-1} \prod_{\ell=1}^{n+1}(q^\ell - 1)q^{-x}.$$

Il vient que $\Delta_q^{(n)}(I_q)(0) = (-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n}(q^\ell - 1)$. D'où l'on en déduit que

$$I_q = \sum_{n\geq 0} \Delta_q^{(n)}(I_q)(0)C_n = C_0 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n q^{-n} \prod_{\ell=1}^{n}(q^\ell - 1)C_n. \qquad \square$$

N.B. On déduit du Lemme 3.2.1 que $\lim_{n\to+\infty} \prod_{\ell=1}^{n}(q^\ell - 1) = 0$.

Remarque 3.2.1. *De façon générale, pour tout entier m positif,*
$I_q^m = C_0 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n q^{-nm} \prod_{\ell=1}^{n}(q^{m+\ell-1} - 1)C_n$, *avec* $\lim_{n\to+\infty} \prod_{\ell=1}^{n}(q^{m+\ell-1} - 1) = 0$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, $I_q^m(x) = q^{-mx}$. Donc
$\Delta_q^{(1)}(I_q^m)(x) = q^{-mx}q^{-m} - q^{-mx} = -q^{-m}(q^m - 1)q^{-mx}$. et
$\Delta_q^{(2)}(I_q^m)(x) = q^{-2m}(q^m - 1)(q^{m+1} - 1)q^{-mx}$.
Par récurrence sur n, supposons que $\Delta_q^{(n)}(I_q^m)(x) = (-1)^n q^{-nm} \prod_{\ell=1}^{n}(q^{m+\ell-1} - 1)I_q^m(x)$.
On obtient $\Delta_q^{(n+1)}(I_q^m)(x) = (-1)^n q^{-nm} \prod_{\ell=1}^{n}(q^{m+\ell-1} - 1)(q^{-mx}q^{-m} - q^n q^{-mx}) =$
$= (-1)^{n+1} q^{-m(n+1)} \prod_{\ell=1}^{n+1}(q^{m+\ell-1} - 1)q^{-mx}$.
On en déduit que $I_q^m = C_0 + \sum_{n\geq 1} \Delta_q^{(n)}(I_q^m)(0)C_n = C_0 + \sum_{n\geq 1}(-1)^n q^{-nm} \prod_{\ell=1}^{n}(q^{m+\ell-1} - 1)C_n$. $\square$

Lemme 3.2.2. *L'opérateur linéaire continu Z_q est une isométrie bijective.*

Démonstration. Soient f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et x un élément de $\mathbb{Z}_p$. On a $|Z_q(f)(x)| = |q^x f(x)| = |f(x)|$. On en déduit que $\|Z_q(f)\| = \|f\|$ et Z_q est isométrique. Donc Z_q est injectif.

Considérons l'opérateur de multiplication par I_q. Pour toute fonction continue f, on a $Z_q(I_q.f) = f$ et $I_q.(Z_q(f)) = f$. Il vient que Z_q est bijectif, d'opérateur réciproque l'opérateur $f \longrightarrow I_q.f$. □

Propriétés 3.2.1.

(i) *Pour tout* $i \geq 1, j \geq 1$, *on a* $\nabla_q^j Z_q^i = \sum_{k=0}^{j} \alpha_{i,j}(k) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j-k}$, *où*

$$\alpha_{i,j}(k) = q^{(i-k)(j-k)} \prod_{\ell=0}^{k-1} (i-\ell)_q \binom{j}{k}_q, \ \forall 0 < k \leq j \ \text{et} \ \alpha_{i,j}(0) = q^{ij}.$$

(ii) *Pour tout* $i \geq 1, j \geq 1$, *on a* $\nabla_q^j Q_i(Z_q) = \sum_{k=0}^{j} \sum_{s=0}^{k} \beta_{i,j}(k,s) Q_{i-k}(Z_q) \nabla_q^{j-k+s}$, *où*

$$\beta_{i,j}(k,s) = q^{(i-k)(j-2k+s)} q^{\frac{s(s-1)-k(k-1)}{2}} (q-1)^{s-k} \binom{k}{s}_q \binom{j}{k}_q \ ; \ \text{avec la convention}$$

$Q_s(Z_q) = 0$, $\forall s < 0$.

(iii) *Pour tout entier* $i \geq 0$ *et toute fonction* $f \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *on a* $Q_i(Z_q)(f) = C_i.f$. *En d'autres termes,* $Q_i(Z_q)$ *est l'opérateur de multiplication par la fonction continue* C_i.

Démonstration. Par double récurrence sur i et j:

(i) Par récurrence sur i, montrons que $\nabla_q Z_q^i = q^i Z_q^i \nabla_q + (i)_q Z_q^{i-1}$.
On a $\nabla_q Z_q^2 = (q Z_q \nabla_q + id) Z_q = q^2 Z_q^2 \nabla_q + (2)_q Z_q$.
Supposons que $\nabla_q Z_q^i = q^i Z_q^i \nabla_q + (i)_q Z_q^{j-1}$.
On obtient $\nabla_q Z_q^{i+1} = (q^i Z_q^i \nabla_q + (i)_q Z_q^{i-1}) Z_q = q^{i+1} Z_q^{i+1} \nabla_q + q^i Z_q^i + (i)_q Z_q^i =$
$= q^{i+1} Z_q^{i+1} \nabla_q + (i+1)_q Z_q^i$. Donc $\forall i \geq 1$, $\nabla_q Z_q^i = q^i Z_q^i \nabla_q + (i)_q Z_q^{i-1}$.
D'autre part, $\nabla_q^2 Z_q^i = \nabla_q (q^i Z_q^i \nabla_q + (i)_q Z_q^{i-1}) = q^{2i} Z_q^i \nabla_q^2 + q^{i-1} (i)_q (2)_q Z_q^{i-1} \nabla_q +$
$+ (i)_q (i-1)_q Z_q^{i-2}$.

Par récurrence sur j, supposons que $\nabla_q^j Z_q^i = \sum_{k=0}^{j} \alpha_{i,j}(k) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j-k}$, avec

$$\alpha_{i,j}(k) = q^{(i-k)(j-k)} \prod_{\ell=0}^{k-1} (i-\ell)_q \binom{j}{k}_q.$$

On obtient $\nabla_q^{j+1} Z_q^i = \sum_{k=0}^{j} q^{i-k} \alpha_{i,j}(k) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j+1-k} + \sum_{k=0}^{j} (i-k)_q \alpha_{i,j}(k) Z_q^{i-k-1} \nabla_q^{j-k} =$

$$= q^{i(j+1)} Z_q^i \nabla_q^{j+1} + \sum_{k=1}^{j} (q^{i-k} \alpha_{i,j}(k) + (i+1-k)_q \alpha_{i,j}(k-1)) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j+1-k} +$$

$+ (i)_q \dots (i-j)_q Z_q^{i-j-1}$.
On a $\alpha_{i,j+1}(0) = q^{i(j+1)}$ et $\alpha_{i,j+1}(j+1) = (i)_q \dots (i-j)_q$.
D'autre part, on voit que

$$q^{i-k}\alpha_{i,j}(k) + (i+1-k)_q \alpha_{i,j}(k-1) = q^{(i-k)(j+1-k)} \prod_{\ell=0}^{k-1}(i-\ell)_q \binom{j}{k}_q +$$
$$+ q^{(i+1-k)(j+1-k)} \prod_{\ell=0}^{k-1}(i-\ell)_q \binom{j}{k-1}_q =$$
$$= q^{(i-k)(j+1-k)} \prod_{\ell=0}^{k-1}(i-\ell)_q \left(\binom{j}{k}_q + q^{j+1-k}\binom{j}{k-1}_q \right) = \alpha_{i,j+1}(k).$$

On en déduit que $\nabla_q^{j+1} Z_q^i = \sum_{k=0}^{j+1} \alpha_{i,j+1}(k) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j+1-k}$.

On a donc montré que $\nabla_q^j Z_q^i = \sum_{k=0}^{j} \alpha_{i,j}(k) Z_q^{i-k} \nabla_q^{j-k}$.

(ii) Montrons, par récurrence sur i, que
$\nabla_q Q_i(Z_q) = q^i Q_i(Z_q)\nabla_q + Q_{i-1}\Big(\nabla_q + q^{1-i}(q-1)^{-1} id\Big)$. On a
$\nabla_q Q_1(Z_q) = \dfrac{1}{q-1}(qZ_q\nabla_q + id - \nabla_q) = qQ_1(Z_q)\nabla_q + \nabla_q + (q-1)^{-1} id$.
De la même manière on obtient
$\nabla_q Q_2(Z_q) = \dfrac{q^{-1}}{q^2-1}\Big(qQ_1(Z_q)\nabla_q + \nabla_q + (q-1)^{-1} id\Big)(Z_q - q id) =$
$= q^2 Q_2(Z_q)\nabla_q + Q_1(Z_q)(\nabla_q + q^{-1}(q-1)^{-1} id)$.
Supposons que $\nabla_q Q_i(Z_q) = q^i Q_i(Z_q)\nabla_q + Q_{i-1}(Z_q)(\nabla_q + q^{1-i}(q-1)^{-1} id)$.
Puisque $Q_{i+1}(Z_q) = \dfrac{q^{-i}}{q^{i+1}-1}(Z_q - q^i id)$, on obtient
$\nabla_q Q_{i+1}(Z_q) = \dfrac{q^{-i}}{q^{i+1}-1}\nabla_q Q_i(Z_q)(Z_q - q^i id)$. Donc
$\nabla_q Q_{i+1}(Z_q) = \dfrac{q^{-i}}{q^{i+1}-1}\Big(q^i Q_i(Z_q)\nabla_q + Q_{i-1}(Z_q)\big(\nabla_q + q^{1-i}(q-1)^{-1} id\big)(Z_q - q^i id)\Big) =$
$= q^{i+1} Q_{i+1}(Z_q)\nabla_q + \dfrac{1}{q^{i+1}-1} Q_i(Z_q)\big(q^i(q-1)\nabla_q + id\big) +$
$+ \dfrac{(q^i-1)(q-1)^{-1}}{q^i q^{i+1}-1} Q_i(Z_q)\big(q^i(q-1)\nabla_q + id\big)$.
On en déduit que $\nabla_q Q_{i+1}(Z_q) = q^{i+1} Q_{i+1}(Z_q)\nabla_q + Q_i(Z_q)\big(\nabla_q + q^{-i}(q-1)^{-1} id\big)$.

Par récurrence sur j, montrons que $\nabla_q^j Q_i(Z_q) = \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k} \beta_{i,j}(k,s) Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j-k+s}$,
avec $\beta_{i,j}(k,s) = q^{(i-k)(j-2k+s)} q^{\frac{s(s-1)-k(k-1)}{2}} (q-1)^{s-k} \binom{k}{s}_q \binom{j}{k}_q$.

On a $\nabla_q^2 Q_i(Z_q) = \nabla_q\Big(q^i Q_i(Z_q)\nabla_q + Q_{i-1}(Z_q)\big(\nabla_q + q^{1-i}(q-1)^{-1}id\big)\Big) =$
$= q^{2i}Q_i(Z_q)\nabla_q^2 + q^{i-1}(2)_q Q_{i-1}(Z_q)(\nabla_q^2 + q^{1-i}(q-1)^{-1}\nabla_q) +$
$+ Q_{i-2}(Z_q)\big(\nabla_q^2 + q^{1-i}(2)_q(q-1)^{-1}\nabla_q + q^{3-2i}(q-1)^{-2}id\big)$.

Supposons que $\nabla_q^j Q_i(Z_q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j}(k,s)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j-k+s}$.

On obtient $\nabla_q^{j+1}Q_i(Z_q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j}(k,s)\nabla_q Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j-k+s} =$

$$= \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j}(k,s)q^{i-k}Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k+s} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{j}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j}(k,s)Q_{i-k-1}(Z_q)\big(\nabla_q + q^{k+1-i}(q-1)^{-1}id\big)\nabla_q^{j-k+s}.$$

Ainsi, on a $\nabla_q^{j+1}Q_i(Z_q) = \beta_{i,j+1}(0,0)Q_i(Z_q)\nabla_q^{j+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{j} q^{i-k}\beta_{i,j}(k,0)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k} +$

$$+ \sum_{k=1}^{j} q^{i-k}\beta_{i,j}(k,k)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1} + \sum_{k=1}^{j}\sum_{s=1}^{k-1}\Big(\beta_{i,j}(k,s)q^{i-k} + \beta_{i,j}(k-1,s-1) +$$
$$+ \beta_{i,j}(k-1,s)q^{k-i}(q-1)^{-1}\Big)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k+s} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{j}(\beta_{i,j}(j,s-1) + \beta_{i,j}(j,s)q^{j+1-i}(q-1)^{-1})Q_{i-1-j}(Z_q)\nabla_q^{s} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{j+1}\beta_{i,j}(k-1,k-1)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1} + \sum_{k=1}^{j+1}\beta_{i,j}(k-1,0)q^{k-i}(q-1)^{-1}Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k}.$$

Pour tous entiers k et s tels que $1 \leq s \leq k \leq j+1$, on a
$\beta_{i,j}(k-1,s-1) + \beta_{i,j}(k-1,s)q^{k-i}(q-1)^{-1} = q^{(i+1-k)(j+1-2k+s)}q^{\frac{(s-1)(s-2)-(k-1)(k-2)}{2}} \times$
$\times (q-1)^{s-k}\begin{pmatrix} j \\ k-1 \end{pmatrix}_q \begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}_q$.

On obtient donc $\beta_{i,j}(k,s)q^{i-k} + \beta_{i,j}(k-1,s-1) + \beta_{i,j}(k-1,s)q^{k-i}(q-1)^{-1} =$
$= q^{(i-k)(j+1-2k+s)}q^{\frac{s(s-2)-k(k-2)}{2}}\begin{pmatrix} k \\ s \end{pmatrix}_q \left(\begin{pmatrix} j \\ k \end{pmatrix}_q + q^{j+1-k}\begin{pmatrix} j \\ k-1 \end{pmatrix}_q\right) = \beta_{i,j+1}(k,s)$.

De la même manière, on obtient $q^{i-k}\beta_{i,j}(k,k) + \beta_{i,j}(k-1,k-1) = \beta_{i,j+1}(k,k)$ et $q^{i-k}\beta_{i,j}(k,0) + q^{k-i}(q-1)^{-1}\beta_{i,j}(k-1,0) = \beta_{i,j+1}(k,0)$.
On voit que $\beta_{i,j}(j,j) = \alpha_{i,j+1}(j+1,j+1) = 1$ et $\beta_{i,j}(j,0)q^{j+1-i} = \beta_{i,j+1}(j+1,0)$.
On voit également que $\beta_{i,j}(j,s-1) + \beta_{i,j}(j,s)q^{j+1-i}(q-1)^{-1} = \beta_{i,j+1}(j+1,s-1)$.
D'où l'on en déduit que

$$\nabla_q^{j+1}Q_i(Z_q) = \sum_{k=0}^{j}\beta_{i,j+1}(k,0)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k} + \sum_{k=1}^{j}\sum_{s=1}^{k}\beta_{i,j+1}(k,s)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k+s} +$$

$$+\sum_{s=0}^{j}\beta_{i,j+1}(j+1,s)Q_{i-1-j}(Z_q)\nabla_q^s+Q_{i-j-1}(Z_q)\nabla_q^{j+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{j+1}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j+1}(k,s)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j+1-k+s}.$$

(iii) Soit $f:\mathbb{Z}_p\longrightarrow K$ une fonction continue. Puisque $Z_q(f)(x)=q^xf(x)$, on a $(Z_q-q^kid)(f)(x)=(q^x-q^k)f(x)$, $\forall k\geq 0$. Donc
$$Q_i(Z_q)(f)(x)=\frac{(Z_q-id)\dots(Z_q-q^{i-2}id)(Z_q-q^{i-1}id)(f)(x)}{(q^i-1)\dots(q^i-q^{i-1})}=$$
$$=\frac{(Z_q-id)\dots(Z_q-q^{i-2}id)((q^x-q^{i-1})f)(x)}{(q^i-1)\dots(q^i-q^{i-1})}=$$
$$=\frac{(Z_q-id)\dots(Z_q-q^{i-3}id)((q^x-q^{i-2})(q^x-q^{i-1})f)(x)}{(q^i-1)\dots(q^i-q^{i-1})}.$$
De proche en proche, on obtient
$$Q_i(Z_q)(f)(x)=\frac{(q^x-1)\dots(q^x-q^{i-1})f(x)}{(q^i-1)\dots(q^i-q^{i-1})}=C_i(x)f(x).$$ □

N.B. Puisque $(i)_q\dots(i-k+1)_q=0$ pour $k>i$, on obtient
$$\sum_{k=i+1}^{j}\sum_{s=0}^{k}\beta_{i,j}(k,s)Q_{i-k}(Z_q)\nabla_q^{j-k+s}=\sum_{k=i+1}^{j}\alpha_{i,j}(k)Z_q^{i-k}\nabla_q^{j-k}=0,\text{ pour tout } j>i.$$
Notons que pour tout $i\geq 0$ et pour tout $j\geq 0$, on a $|\alpha_{i,j}(k)|\leq 1$, $\forall 0\leq k\leq j$ et $|\beta_{i,j}(k,s)|\leq 1$, $\forall 0\leq s\leq k\leq j$.

Remarque 3.2.2. *Considérons l'opérateur* $R=\sum_{n=0}^{m}b_nQ_n(Z_q)$*; c'est l'opérateur de multiplication par la fonction continue* $h=\sum_{n=0}^{m}b_nC_n$*. En d'autres termes, si* $f:\mathbb{Z}_p\longrightarrow K$ *est une fonction continue, on a* $R(f)=h.f$*, avec* $h=R_n(C_0)$*.*

Lemme 3.2.3. *Les opérateurs linéaires continus* $Q_n(Z_q)$*,* $n\geq 0$*, sont isométriques. De plus* $(Q_n(Z_q))_n\geq 0$ *est une famille orthonormale dans* $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)\big)$*.*

Démonstration. En effet, pour tout entier $n\geq 0$ et pour toute fonction continue f, on a $\|Q_n(Z_q)\|=\sup_{\|f\|\neq 0}\dfrac{\|Q_n(Z_q)(f)\|}{\|f\|}\leq\sup_{\|f\|\neq 0}\dfrac{\|C_n\|\,\|f\|}{\|f\|}=1$. D'autre part $\|Q_n(Z_q)(C_0)\|=\|C_n\|=1$. Donc $\|Q_n(Z_q)\|=1$.

Soit $R = \sum_{n=0}^{m} b_n Q_n(Z_q)$, on déduit de la Remarque 3.2.2, pour $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ continue, que $R(f) = h.f$ où $h = R(C_0)$. On obtient, d'une part, que
$\|h\| = \|R(C_0)\| = \max_{0 \leq n \leq m} |b_n| \leq \|R\|$. Mais $\|R(f)\| = \|h.f\| \leq \|h\| \, \|f\|$.
D'où l'on déduit que $\|R\| \leq \|h\|$ et $\|R\| = \|h\|$. $\square$

Proposition 3.2.1. *La sous-algèbre fermée $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q est égale au sous-espace fermé des opérateurs de la forme $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$, tels que $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$.*
De plus $(Q_n(Z_q))_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$.

Démonstration. Considérons $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$, avec $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$. On déduit du Lemme 3.2.3 que $\|R\| = \sup_{n \geq 0} |b_n|$; donc $W = \{R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q) \ / \ \lim_{n \to +\infty} b_n = 0\}$ est un sous-espace fermé de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ contenu dans $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ et $(Q_n(Z_q))_{n \geq 0}$ est une base orthonormale de W. Puisque l'espace des polynômes $\sum_{n=0}^{m} b_n Q_n(Z_q)$ (en Z_q) est dense dans $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$, on obtient $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K) = W$. $\square$

Théorème 3.2.1. *Les algèbres $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ sont isométriquement isomorphes.*

Démonstration. Considérons l'application φ de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ qui à toute fonction continue $f = \sum_{n \geq 0} b_n C_n$ associe l'opérateur $R_f = \varphi(f) = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$.
Comme $(C_n)_{n \geq 0}$ et $(Q_n(Z_q))_{n \geq 0}$ sont des bases orthonormales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ respectivement, on voit que φ est un isomorphisme isométrique d'espaces de Banach. De plus, on a $\varphi(f)(C_0) = R_f(C_0) = \sum_{n \geq 0} b_n C_n = f$ et $\varphi(f)(g) = R_f(g) = f.g$. On en déduit aussitôt que $\varphi(fh)(g) = (fh).g = f.(hg) = f.\varphi(h)(g) = \varphi(f)\big(\varphi(h)(g)\big) = \big(\varphi(f) \circ \varphi(h)\big)(g)$, c'est-à-dire $\varphi(fh) = \varphi(f) \circ \varphi(h)$. $\square$

Soit $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$ un élément de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients b_n de R pour que l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$, des fonctions strictement différentiables de $\mathbb{Z}_p$ dans K, soit stable par R. Nous donnerons une démonstration de ce théorème dans le Chapitre 4.

Théorème 3.2.2. *Soit* $R = \sum_{n\geq 0} b_n Q_n(Z_q)$ *un élément de* $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur* R *laisse invariant l'espace* $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ *des fonctions strictement différentiables.*

(i) $\lim_{n\to+\infty} n\,|b_n| = 0$ □

Lemme 3.2.4. *Pour tout opérateur* $R \in \Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$, *on a* $\lim_{m\to+\infty} (q-1)^m \nabla_q^m \circ R(f) = 0$.

Démonstration. Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On sait que $R(f)$ est une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K. Comme, pour toute fonction continue g, on a $\lim_{m\to+\infty} |q-1|^m \left\|\nabla_q^m(g)\right\| = 0$, il vient que $\lim_{m\to+\infty} |q-1|^m \left\|\nabla_q^m(R(f))\right\| = 0$. □

Soit $\mathcal{A}_q$ la sous-algèbre de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ engendrée par Z_q et ∇_q. On désigne par $\widehat{\mathcal{A}_q}$ l'adhérence de $\mathcal{A}_q$ dans l'algèbre de Banach $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$.

Proposition 3.2.2. *La sous-algèbre* $\mathcal{A}_q$ *de* $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$, *en tant qu'espace vectoriel admet* $(Z_q^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ *comme base. C'est un modèle de l'algèbre de Weyl quantique à deux indéterminées.*

Démonstration. Rappelons que $\nabla_q^j(C_n) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jn} C_{n-j}$, $\forall j \leq n$ et $\nabla_q^j(C_n) = 0$, $\forall j > n$ (Lemme 1.0.7).
On déduit de Propriétés 3.2.1 que la famille $(Z_q^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_q$. Il reste donc à montrer que $(Z_q^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une famille libre.

Soit $R_{n,m} = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} b_{i,j} Z_q^i \nabla_q^j \in \mathcal{A}_q$. Supposons que $R_{n,m} = 0$, on obtient
$0 = R_{n,m}(C_0)(x) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,0} q^{ix}$.
D'autre part, on déduit du Lemme 1.0.7 que, pour tout $k \geq 0$, $\nabla_q^k(q^{kx}) = (i)_q!$ et

$\nabla_q^k(q^{ix}) = 0$, pour tout $i < k$. On obtient donc $0 = \nabla_q^n(R_{n,m}(C_0)) = b_{n,0}(n)_q!$. Comme $(n)_q! \neq 0$, on a $b_{n,0} = 0$. De proche en proche, on obtient $b_{i,0} = 0$, $\forall 0 \leq i \leq n$. De la même manière, appliquant $R_{n,m}$ à C_1, on obtient, $b_{i,1} = 0$, pout tous entier i, $0 \leq i \leq n$. Ainsi, en appliquant successivement $R_{n,m}$ aux C_j, $0 \leq j \leq m$, on voit que, pour tous entiers i et j, tels que $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq m$, on a $b_{i,j} = 0$.
D'où l'on déduit que la famille $(Z_q^i \nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est libre. □

On a un énoncé meilleur que la Proposition 3.2.2.
Ce qui indique en contraste une différence majeure avec la réalisation du plan quantique.

Théorème 3.2.3. *La famille d'opérateurs linéaires continus* $(Q_i(Z_q)\nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ *est une famille orthogonale dans* $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$*, telle que* $\left\|Q_i(Z_q)\nabla_q^j\right\| = |q-1|^{-j}$, $\forall i \geq 0$, $\forall j \geq 0$. *C'est une base orthogonale de l'adhérence* $\widehat{\mathcal{A}_q}$ *dans* $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ *de l'algèbre de Weyl quantique* $\mathcal{A}_q$.

Démonstration. Nous avons démontrer au Chapitre 1 que
$\nabla_q^j(C_n) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jn} C_{n-j}$, $\forall j \leq n$ et $\nabla_q^j(C_n) = 0$, $\forall j > n$ (Lemme 1.0.7).
On obtient donc $Q_i(Z_q)\nabla_q^j(C_n)(x) = (q-1)^{-j} q^{\frac{j(j+1)}{2} - jn} C_i(x) C_{n-j}(x)$, $\forall n \geq j$ et $Q_i(Z_q)\nabla_q^j(C_n)(x) = 0$, $\forall n < j$. On en déduit que $\left\|Q_i(Z_q)\nabla_q^j\right\| \leq \dfrac{1}{|q-1|^j}$.
D'autre part $Q_i(Z_q)\nabla_q^j(C_j)(i) = (q-1)^{-j} q^{-\frac{j(j-1)}{2}}(C_i)(i) = (q-1)^{-j} q^{-\frac{j(j-1)}{2}}$. Donc $|q-1|^{-j} = \left|Q_i(Z_q)\nabla_q^j(C_j)(i)\right| \leq \left\|Q_i(Z_q)\nabla_q^j\right\|$. On en déduit que $\left\|Q_i(Z_q)\nabla_q^j\right\| = \dfrac{1}{|q-1|^j}$.

Montrons maintenant que $(Q_i(Z_q)\nabla_q^j)_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une famille orthogonale.
Considérons l'opérateur $R_{n,m} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_{i,j} Q_i(Z_q)\nabla_q^j$. On obtient

$\|R_{n,m}\| \leq \displaystyle\max_{0\leq j\leq m}\max_{0\leq i\leq n} |b_{i,j}| \left\|Q_i(Z_q)\nabla_q^j\right\| = \max_{0\leq j\leq m}\max_{0\leq i\leq n} \frac{|b_{i,j}|}{|q-1|^j}$.

Montrons que $\displaystyle\max_{0\leq j\leq m}\max_{0\leq i\leq n} \frac{|b_{i,j}|}{|q-1|^j} \leq \|R_{n,m}\|$. On a $R_{n,m}(C_0) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_{i,0} C_i$. Puisque $(C_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on a $\|R_{n,m}(C_0)\| = \displaystyle\max_{0\leq i\leq n} |b_{i,0}|$ et $\displaystyle\max_{0\leq i\leq n} |b_{i,0}| \leq \|R_{n,m}\|$.

D'autre part, $R_{n,m} - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_{i,0} Q_i(Z_q) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=0}^{n} b_{i,j} Q_i(Z_q)\nabla_q^j$. Donc

$\Big(R_{n,m} - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_{i,0} Q_i(Z_q)\Big)(C_1) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,1}(q-1)^{-1} C_i$ et

$$\max_{0\le i\le n}\left|\frac{b_{i,1}}{q-1}\right| = \left\|\Big(R_{n,m}-\sum_{i=0}^{n} b_{i,0}Q_i(Z_q)\Big)(C_1)\right\| \le \|R_{n,m}\|.$$

Supposons que $\max\limits_{0\le j\le m-1}\max\limits_{0\le i\le n}\dfrac{|b_{i,j}|}{|q-1|^j} \le \|R_{n,m}\|$. On obtient

$\Big(R_{n,m}-\sum\limits_{j=0}^{m-1}\sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j}Q_i(Z_q)\nabla_q^j\Big)(C_m) = \sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,m}(q-1)^{-m}q^{-\frac{m(m-1)}{2}}C_i$ et

$\left\|\Big(R_{n,m}-\sum\limits_{j=0}^{m-1}\sum\limits_{i=0}^{n} b_{i,j}Q_i(Z_q)\nabla_q^j\Big)(C_m)\right\| = \max\limits_{0\le i\le n}|b_{i,m}|\,|q-1|^{-m}$. Donc

$\max\limits_{0\le i\le n}\dfrac{|b_{i,m}|}{|q-1|^m} \le \|R_{n,m}\|$. D'où $\max\limits_{0\le j\le m}\max\limits_{0\le i\le n}\dfrac{|b_{i,j}|}{|q-1|^j} \le \|R_{n,m}\|$ et $(Q_i(Z_q)\nabla_q^j)_{i\ge 0,j\ge 0}$ est une base orthogonale de $\mathcal{A}_q$. Comme $\mathcal{A}_q$ est dense dans $\widehat{\mathcal{A}_q}$, il vient que $(Q_i(Z_q)\nabla_q^j)_{i\ge 0,j\ge 0}$ est une base orthogonale de $\widehat{\mathcal{A}_q}$. □

Notons que $\widehat{\mathcal{A}_q}$, étant l'adhérence d'une sous-algèbre est une sous-algèbre fermée de $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)\big)$.

Les éléments de $\mathcal{A}_q$, à l'instar de ceux de l'algèbre de Weyl classique, peuvent s'interpréter comme opérateurs q-différentiels. Quant aux éléments de $\widehat{\mathcal{A}_q}$, ils peuvent être vus comme opérateurs pseudo-q-différentiels. Plus précisement, on a:

Corollaire. *Considérons, dans $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)\big)$ le sous-espace vectoriel* $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K)\{\nabla_q\} = \{S=\sum\limits_{n\ge 0}R_n(Z_q)\nabla_q^n,\ R_n(Z_q)\in\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K),$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\|R_n(Z_q)\|\,|q-1|^{-n}=0\}$. *Alors* $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K)\{\nabla_q\}=\widehat{\mathcal{A}_q}$.

Démonstration. Il est clair que $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K)$ est une sous-algèbre fermée $\widehat{\mathcal{A}_q}$. Considérons $S=\sum\limits_{n\ge 0}R_n(Z_q)\nabla_q^n\in\Gamma_q(\mathbb{Z}_p,K)\{\nabla_q\}$. Pour tout entier $n\ge 0$, $R_n(Z_q)\nabla_q^n$ est un élément de $\widehat{\mathcal{A}_q}$. Ainsi les sommes $S_m=\sum\limits_{n=0}^{m}R_n(Z_q)\nabla_q^n$ sont des élément de $\widehat{\mathcal{A}_q}$. Puisque $\|S-S_m\| = \left\|\sum\limits_{n\ge m+1}R_n(Z_q)\nabla_q^n\right\| \le \sup\limits_{n\ge m+1}\|R_n(Z_q)\|\,|q-1|^{-n}$, on a $\lim\limits_{m\to+\infty}\|S-S_m\|=0$ et $S\in\widehat{\mathcal{A}_q}$.

Reciproquement, soit $S=\sum\limits_{n\ge 0}\sum\limits_{m\ge 0}b_{n,m}Q_m(Z_q)\nabla_q^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{A}_q}$. La famille

$\Big(b_{n,m}Q_m(Z_q)\nabla_q^n\Big)_{n,m}$ étant sommable, sa limite est égale à zéro suivant le filtre de Fréchet de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.
Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe une partie finie $J_\varepsilon \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tel que pour tout $(n,m) \notin J_\varepsilon$, on a $|b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} = \|b_{n,m}Q_m(Z_q)\|\,\|\nabla_q^n\| = \|b_{n,m}Q_m(Z_q)\nabla_q^n\| < \varepsilon$.

Posons $m_\varepsilon = \max\{m \in \mathbb{N} \ / \ (n,m) \in J_\varepsilon\}$ et $n_\varepsilon = \max\{n \in \mathbb{N} \ / \ (n,m) \in J_\varepsilon\}$.

Fixons n dans $\mathbb{N}$. Pour tout entier $m > m_\varepsilon$, on a $(n,m) \notin J_\varepsilon$ et $|b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} < \varepsilon$. On voit ainsi que $\lim\limits_{m\to+\infty} |b_{n,m}| = 0$. On définit donc un élément de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ en posant $R_n(Z_q) = \sum\limits_{m\geq 0} b_{n,m}Q_m(Z_q)$.

De plus, on a $\|R_n(Z_q)\|\,|q-1|^{-n} = \sup\limits_{m\geq 0} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} =$
$= \max(\max\limits_{0\leq m\leq m_\varepsilon} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n}, \sup\limits_{m>m_\varepsilon} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n})$.

Mais d'une part $\sup\limits_{m>m_\varepsilon} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} \leq \varepsilon$ et d'autre part, pour $n > n_\varepsilon$, comme $(n,m) \notin J_\varepsilon$, on a $\max\limits_{0\leq m\leq m_\varepsilon} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} < \varepsilon$. Il vient que $\|R_n(Z_q)\nabla_q^n\| = \sup\limits_{m\geq 0} |b_{n,m}|\,|q-1|^{-n} \leq \varepsilon$ dès que $n > n_\varepsilon$.

En d'autres termes, $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n(Z_q)\nabla_q^n = 0$. On en déduit que $S = \sum\limits_{n\geq 0}\sum\limits_{m\geq 0} b_{n,m}Q_m(Z_q)\nabla_q^n = \sum\limits_{n\geq 0} R_n(Z_q)\nabla_q^n \in \Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)\{\nabla_q\}$ et l'on a démontré que $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)\{\nabla_q\} = \widehat{\mathcal{A}_q}$. □

CHAPITRE 4

4. Sur les fonctions strictement différentiables sur $\mathbb{Z}_p$

Soit K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$. Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et soit $\Phi_1 f$ la fonction des quotients aux différences définie, pour $x \neq y$ par $\Phi_1 f(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$. Rappelons que f est strictement différentiable si et seulement si $\Phi_1 f$ peut être prolongées en une fonction continue $\widetilde{\Phi_1} f$ sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. On désigne par $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ l'ensemble des fonctions strictement différentiables de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On définit une norme $\| \ \|_1$ sur $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ en posant $\|f\|_1 = \max(\|f\|, \|\Phi_1 f\|)$, où $\| \ \|$ est la norme de la convergence uniforme et $\|\Phi_1 f\| = \sup\limits_{x \neq y} |\Phi_1 f(x,y)|$. De plus $(\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K), \ \| \ \|_1)$ est un K-espace de Banach et même une K-algèbre de Banach.

Soit $f = \sum\limits_{n \geq 0} a_n B_n$ le développement de la fonction continue $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ dans la base de Mahler $(B_n)_{n \geq 0}$. On sait que f est strictement différentiable si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} n\,|a_n| = 0$. On voit que $\|f\|_1 = \max(|f(0)|, \|\Phi_1 f\|)$.

Soit $q \in K$ tel que $|q - 1| < 1$. Comme au Chapitre 3, nous posons $C_{n,q} = C_n$ les éléments de la q-base de Mahler. Soit $f = \sum\limits_{n \geq 0} a_n C_n$ le q-développement de Maler de la fonction f. Dans ce chapitre, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients a_n pour que f soit strictement différentiable. Nous verrons que ces conditions sont équivalentes à celle du développement dans la base de Mahler.
A cause de sa spécificité, le cas q racine de l'unité nécessite un traitement particulier.

Nous rappelons que l'espace $\mathbb{P}$ des fonctions q-polynomiales est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, lorsque q est non racine de l'unité.

4.1 Le cas q non racine de l'unité

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$. Rappelons que, pour $|q-1|<1$, la série $\log_p(q) = \sum_{j\geq 1}(-1)^{j-1}\frac{(q-1)^j}{j}$ converge dans K, donc $\left|\log_p(q)\right| \leq \max_{j\geq 1}\frac{|q-1|^j}{|j|}$.

On pose $\rho = \sup_{j\geq 1}\frac{|q-1|^j}{|j|}$.

Soit n un entier positif et soit $n = a_0 + a_1p + \cdots + a_{k-1}p^{k-1} + a_kp^k$, son développement en base p, avec $a_k \neq 0$ et $0 \leq a_i \leq p-1$. On a $k(n) = \left[\frac{\log(n)}{\log(p)}\right]$ et $n/p < p^{k(n)} \leq n$. Posons $\gamma_0 = 1$ et $\gamma_n = a_{k(n)}p^{k(n)}$, pour $n \geq 1$; on a $|\gamma_n| = |p|^{k(n)}$.

Pour $n \geq 1$, on pose $\delta_n = \max_{1\leq j\leq n}\frac{1}{|q^j-1|}$. On a $\min_{1\leq j\leq n}\left|q^j-1\right| = \min_{0\leq s\leq k(n)}\left|q^{p^s}-1\right|$. Or, pour $0 \leq s \leq k(n)$, on a $q^{p^{k(n)}} - 1 = (q^{p^s})^{p^{k(n)-s}} - 1 = (q^{p^s}-1)\sum_{i=0}^{p^{k(n)-s}} q^{ip^s}$ et $\left|q^{p^{k(n)}}-1\right| \leq \left|q^{p^s}-1\right|$. On déduit donc que $\min_{1\leq j\leq n}\left|q^j-1\right| = \left|q^{p^{k(n)}}-1\right|$.

Conclusion: Pour $n \geq 1$, $\delta_n = \frac{1}{\left|q^{p^{k(n)}}-1\right|}$ donc $\lim_{n\to+\infty}\delta_n = +\infty$.

De plus, si q est tel que $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$ (par exemple lorsque $q \in 1+p\mathbb{Z}_p$), on sait que $|q^x-1| = |q-1|\,|x|$, $\forall x \in \mathbb{Z}_p$. Donc $\min_{1\leq j\leq n}\left|q^j-1\right| = \left|q^{p^{k(n)}}-1\right| = |q-1|\,|p|^{k(n)}$. D'où $\delta_n = \frac{1}{|q-1|\,|p|^{k(n)}} = \frac{1}{|q-1|\,|\gamma_n|}$.

Dans la suite de ce paragraphe, nous supposons que q *est non racine de l'unité.*

Définition 4.1.1. *Soit X une partie non vide de K sans point isolé.*
Considérons la fonction $f : X \longrightarrow K$. On dit que f est différentiable en $a \in X$ si $\lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ existe et f est différentiable sur X si elle est différentiable en tout point $x \in X$.
Soit $\Phi_1 f$ la fonction des quotients aux différences de la fonction f définie sur $X\times X\backslash\Delta(X)$ par $\Phi_1 f(x,y) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, où $\Delta(X) = \{(x,x),\ x \in X\}$. On dit que f est strictement différentiable si $\Phi_1 f$ peut être prolongée en une fonction continue $\widetilde{\Phi_1}f$ sur $X\times X$.

Théorème 4.1.1. (W. H. Schikhof)
Soit f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n B_n$ son développement de Mahler.

(i) *Alors f est strictement différentiable si et seulement si* $\lim_{n\to+\infty} n\,|a_n| = \lim_{n\to+\infty} |a_n|\,|\gamma_n|^{-1} = 0.$

(ii) *Si f est strictment différentiable, alors $\|f\|_1 = \max_{n\geq 0} |a_n|\,|\gamma_n|^{-1}$.*

(iii) *La suite de fonctions $(\gamma_n B_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$.*

Démonstration. Voir [33] Theorem 53.5. □

Nous allons montrer que pour le q-développement de Mahler, on a des resultats semblables au Théorème 4.1.1.

Rappelons que l'on désigne par ε_q la fonction continue définie de $\mathbb{Z}_p$ dans K par $\varepsilon_q(x) = q^x$. On définit la fonction ψ par $\psi(x) = \dfrac{q^x - 1}{x} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(q-1)^n}{n} B_{n-1}(x-1)$, pour $x \neq 0$ et $\psi(0) = \log_p(q)$.

Lemme 4.1.1. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$.*
• *La fonction ψ est une fonction continue de norme $\|\psi\| = \rho$.*
De plus, la fonction ε_q est strictement différentiables, de dérivée $\varepsilon_q' = \log_p(q)\varepsilon_q$.
•• *Soit x et y deux élément de $\mathbb{Z}_p$, $x \neq y$. On a*

$$\Phi_1 C_n(x,y) = \psi(x-y) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{q^{-s(n-s)}}{q^{n-1}-1} q^{y(n-s)} C_s(y) C_{n-s-1}(x-y-1).$$

Démonstration. Montrons que ψ est une fonction continue de norme $\|\psi\| = \rho$.
Pour $x \neq 0$, on a $\psi(x) = \dfrac{q^x - 1}{x} = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(q-1)^n}{n} B_{n-1}(x-1)$. Rappelons que pour tout entier positif k, on a $B_k(-1) = (-1)^k$. On en déduit que $\lim_{x\to 0} \dfrac{q^x-1}{x} = \log_p(q)$ et ψ est continue.
De plus, puisque $\psi(x+1) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{(q-1)^{n+1}}{n+1} B_n(x)$ et $(B_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale

de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, on obtient $\|\psi\| = \sup_{x\in\mathbb{Z}_p} |\psi(x+1)| = \sup_{n\geq 1} \frac{|q-1|^n}{|n|} = \rho$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{Z}_p$, $\lim_{\substack{z\to x\\ y\to x}} \frac{\varepsilon_q(z)-\varepsilon_q(y)}{z-y} = \lim_{\substack{z\to x\\ y\to x}} q^y\psi(z-y) = q^x \log_p(q)$. Donc ε_q est strictement différentiable de fonction dérivée $\varepsilon'_q = \log_p(q).\varepsilon_q$.

Soit x et y deux élément de $\mathbb{Z}_p$, tels que $x \neq y$. On déduit du Théorème 1.0.4 que $C_n(x)-C_n(y) = C_n(y+x-y)-C_n(y) = \sum_{s=0}^{n-1} q^{-s(n-s)}q^{y(n-s)}C_s(y)C_{n-s}(x-y)$. Pour $l \geq 1$, $x, y \in \mathbb{Z}_p$, $x \neq y$, on a $\frac{C_l(x-y)}{x-y} = \frac{q^{x-y}-1}{x-y}\frac{1}{q^l-1}\frac{(q^{x-y-1}-1)\dots(q^{x-y-1}-q^{l-2})}{(q^{l-1}-1)\dots(q^{l-1}-q^{l-2})} =$
$= \frac{1}{q^l-1}\psi(x-y)C_{l-1}(x-y-1)$. D'où l'on déduit que $\Phi_1 C_n(x,y) = \frac{C_n(x)-C_n(y)}{x-y} =$
$= \psi(x-y)\sum_{s=0}^{n-1} \frac{q^{-s(n-s)}}{q^{n-s}-1} q^{y(n-s)}C_s(y)C_{n-s-1}(x-y-1)$. □

Lemme 4.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$ et soit n un entier positif, C_n est une fonction strictement différentiable de fonction dérivée*
$C'_n = \log_p(q)\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\frac{q^{\frac{-(n-s)(n+s-1)}{2}}}{q^{n-s}-1}q^{x(n-s)}C_s$.

Démonstration. En effet, par définition $C_0(x) = 1$ et pour $n \geq 1$, $C_n(x) = \frac{(q^x-1)\dots(q^x-q^{n-1})}{(q^n-1)\dots(q^n-q^{n-1})}$. Donc C_n est strictement différentiable. Nous rappelons que, pour tout entier k positif, $C_k(-1) = (-1)^k q^{\frac{-k(k+1)}{2}}$. En appliquant le Lemme 4.1.1, on obtient $C'_n(x) = \log_p(q)\sum_{s=0}^{n-1}(-1)^{n-s-1}\frac{q^{\frac{-(n-s)(n+s-1)}{2}}}{q^{n-s}-1}q^{x(n-s)}C_s(x) = \widetilde{\Phi_1}C_n(x,x)$. □

Lemme 4.1.3. *Soit E_n l'espace vectoriel des q-polynômes de q-degré $\leq n$. La famille de fonctions $(q^{(n-s)x}C_s(x))_{0\leq s\leq n}$ est une base orthonormale de E_n.*
De plus, $\|C'_n\| = \left|\log_p(q)\right|\delta_n$.

Démonstration. Pour $0 \leq s \leq n$, on a $\left\|q^{(n-s)x}C_s\right\| = \|C_s\| = 1$.
Soit $h(x) = \sum_{s=0}^{n} a_s q^{(n-s)x}C_s(x)$, on a $\|h\| \leq \max_{0\leq s\leq n}|a_s|$.
Montrons que $\max_{0\leq s\leq n}|a_s| \leq \|h\|$.
On a $h(0) = a_0 \Longrightarrow |a_0| = |h(0)| \leq \|h\|$. De plus $h(1) = a_0 + q^{n-1}a_1$. Donc
$h(1) - a_0 = a_1 q^{n-1}$ et $|a_1| = \left|a_1 q^{n-1}\right| = |h(1)-a_0| \leq \max(|h(1)|, |a_0|) \leq \|h\|$.

Par récurrence, supposons que $\max\limits_{0\leq s\leq n-1} |a_s| \leq \|h\|$. On a

$h(x) - \sum\limits_{s=0}^{n-1} a_s q^{(n-s)x} C_s(x) = a_n C_n(x)$ et $\big(h - \sum\limits_{s=0}^{n-1} a_s q^{(n-s)x} C_s\big)(n) = a_n C_n(n) = a_n$.

Donc $|a_n| \leq \max(\|h\|, \max\limits_{0\leq s\leq n-1} |a_s|)$ et $\|h\| = \max\limits_{0\leq s\leq n} |a_s|$.

Puisque l'espace vectoriel E_n est de dimension $n+1$, il vient que $(q^{(n-s)x}C_s)_{0\leq s\leq n}$ est une base orthonormale de E_n.

D'autre part, puisque $C'_n(x) = \log_p(q) \sum\limits_{s=0}^{n-1} (-1)^{n-s-1} \dfrac{q^{\frac{-(n-s)(n+s-1)}{2}}}{q^{n-s}-1} q^{(n-s)x} C_s(x)$, on voit que $\|C'_n\| = \big|\log_p(q)\big| \max\limits_{0\leq s\leq n-1} \left|\dfrac{q^{-(n-s)(n-s-1)/2}}{q^{n-s}-1}\right| = \big|\log_p(q)\big| \max\limits_{1\leq j\leq n} \dfrac{1}{|q^j - 1|} = \big|\log_p(q)\big| \delta_n$. □

Lemme 4.1.4. *La famille de fonctions $(q^{ix}C_j(x)C_i(y))_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une base orthonormale de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions continues de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ à valeurs dans K.*

Démonstration. Il est évident que, pour tout $i, j \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_{x,y} \big|q^{ix}C_j(x)C_i(y)\big| = 1$. Soit $U_{n,m}$ le sous-space des fonctions continues $\theta : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$, telles que

$\theta(x,y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \sum\limits_{j=0}^{m} a_{i,j} q^{ix} C_j(x) C_i(y)$, $a_{i,j} \in K$. On a $\|\theta\| \leq \max\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} |a_{i,j}|$.

Montrons que $\max\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} |a_{i,j}| \leq \|\theta\|$. On a $\theta(0,0) = a_{0,0} \Longrightarrow |a_{0,0}| \leq \|\theta\|$.

Supposons, par double récurrence que $\max\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m-1}} |a_{i,j}| \leq \|\theta\|$ et $\max\limits_{0\leq i\leq n-1} |a_{i,m}| \leq \|\theta\|$. On obtient $\Big(\theta - \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m-1} a_{i,j}q^{ix}C_jC_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i,m}q^{ix}C_mC_i\Big)(x,y) = a_{n,m}q^{nx}C_m(x)C_n(y)$ et

$\Big(\theta - \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m-1} a_{i,j}q^{ix}C_jC_i - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_{i,m}q^{ix}C_mC_i\Big)(m,n) = a_{n,m}q^{nm}$. Donc

$|a_{n,m}| \leq \max(\|\theta\|, \max\limits_{\substack{\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m-1}} |a_{i,j}|, \max\limits_{0\leq i\leq n-1} |a_{i,m}|) = \|\theta\|$ et $\|\theta\| = \max\limits_{\substack{0\leq i\leq n\\ 0\leq j\leq m}} |a_{i,j}|$. D'où l'on déduit que $(q^{ix}C_j(x)C_i(y))_{0\leq i\leq n, 0\leq j\leq m}$ est une base orthonormale de $U_{n,m}$.

Puisque $\mathbb{P}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\widehat{\otimes}\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, l'espace $U_{n,m}$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$. On en déduit que $(q^{ix}C_j(x)C_i(y))_{i\geq 0, j\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_p, K)$. □

Remarque 4.1.1. *Considérons l'opérateur ϑ_q de multiplication par q^x de l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ défini, pour toute fonction continue f élément de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$, $(x, y) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, par $\vartheta_q(f)(x, y) = q^x f(x, y)$. Comme l'opérateur Z_q de multiplication par q^x dans l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_q, K)$, l'opérateur ϑ_q est un automorphisme linéaire isométrique de l'espace de Banach $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$. On déduit du Lemme 4.1.4, que $(q^{(i+1)x} C_j(x) C_i(y))_{i \geq 0, j \geq 0}$ est une base orthonormale $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$.*

Lemme 4.1.5. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q - 1| < 1$, alors $\left|\log_p(q)\right| \delta_n \leq \|\Phi_1 C_n\| \leq \rho \delta_n$.*
De plus, si $|q - 1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, on a $\|\Phi_1 C_n\| = |q - 1| \delta_n = p^{k(n)}$.

Démonstration.

• Comme $\|C'_n\| = \left|\log_p(q)\right| \delta_n$ (Lemme 4.1.3), on voit que $\left|\log_p(q)\right| \delta_n \leq \|\Phi_1 C_n\|$. D'autre part, on déduit du Lemme 1.0.9 que $|\Phi_1 C_n(x, y)| \leq \dfrac{|q^{x-y} - 1|}{|x - y|} \dfrac{1}{\left|q^{p^{k(n)}} - 1\right|} \leq \rho \delta_n$.

•• Supposons que $|q - 1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, puisque $|(x - y)_q| = |x - y|$ (Lemme 1.0.8 (ii)), on obtient $\dfrac{|q^{x-y} - 1|}{|x - y|} = \dfrac{|(x - y)_q|}{|x - y|} |q - 1| = |q - 1|$. D'où l'on déduit que $\|\Phi_1 C_n\| = |q - 1| \delta_n = |\gamma_n|^{-1} = p^{k(n)}$. □

N.B.: Pour $n \geq 1$, on a $C_n(0) = 0$, donc $\|C_n\|_1 = \|\Phi_1 C_n\|$. Notons que $\|C_0\|_1 = 1$.

Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q - 1| < 1$. On pose $m(\psi) = \inf_{x \in \mathbb{Z}_p} \dfrac{|q^x - 1|}{|x|}$. On a $0 < m(\psi) \leq \left|\log_p(q)\right|$.

Théorème 4.1.2. *Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q - 1| < 1$ et soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ le q-développement de la fonction f.*

(i) *Alors f est strictement différentiable si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} \delta_n |a_n| = 0$.*
De plus, on a $m(\psi) \sup_{n \geq 1} |a_n| \delta_n \leq \|\Phi_1 f\| \leq \rho \sup_{n \geq 1} |a_n| \delta_n$.

(ii) *Si q est tel que $|q - 1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, alors $\|\Phi_1 f\| = |q - 1| \sup_{n \geq 1} |a_n| \delta_n = \sup_{n \geq 1} p^{k(n)} |a_n|$.*

Démonstration. Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ le q-développement de la fonction f. On déduit de la définition des quotients aux différences de la fonction f que
$\Phi_1 f(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n \Phi_1 C_n(x,y)$.

-(a)- Rappelons que pour $n \geq 1$, la fonction C_n est strictement différentiable avec $\left\|\widetilde{\Phi_1} C_n\right\| = \|\Phi_1 C_n\| \leq \rho\delta_n$.

• Supposons que $\lim_{n\to+\infty} |a_n|\,\delta_n = 0$. Puisque $|a_n| \left\|\widetilde{\Phi_1} C_n\right\| \leq \rho\delta_n\,|a_n|$, on obtient $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \left\|\widetilde{\Phi_1} C_n\right\| = \lim_{n\to+\infty} \rho\,|a_n|\,\delta_n = 0$ et la suite de fonctions $\sum_{n\geq 1} a_n \widetilde{\Phi_1} C_n$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ vers une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \Delta(\mathbb{Z}_p)$ est égale à $\Phi_1 f$. Donc f est strictement différentiable.

•• Reciproquement, supposons que $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ soit strictement différentiable, c'est-à-dire que $\Phi_1 f$ peut s'étendre à une fonction continue $\widetilde{\Phi_1} f$ sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Pour $x \neq y$, on a $\Phi_1 f(x,y) = \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{s=0}^{n-1} \frac{q^{(y-s)(n-s)}}{q^{n-s}-1} \psi(x-y) C_s(y) C_{n-s-1}(x-y-1) =$
$= \psi(x-y) \sum_{s\geq 0}\sum_{t\geq 0} \frac{a_{t+s+1} q^{-s(t+1)}}{q^{t+1}-1} q^{y(t+1)} C_s(y) C_t(x-y-1)$.
En particulier, pour $y \neq -1$, on a
$\Phi_1 f(x+y+1,x) = \psi(y+1) \sum_{s\geq 0}\sum_{t\geq 0} \frac{a_{s+t+1} q^{-s(t+1)}}{q^{t+1}-1} q^{x(t+1)} C_s(x) C_t(y)$.
Notons que la fonction continue ψ ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}_p$. Donc
$\frac{1}{\psi(y+1)} \widetilde{\Phi_1} f(x+y+1,x)$ est une fonction continue de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ dans K. Puisque la famille de fonctions $(q^{x(t+1)} C_s(x) C_t(y))_{s\geq 0, t\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$ (Remarque 4.1.1), on obtient
$\frac{1}{\psi(y+1)} \widetilde{\Phi_1} f(x+y+1,x) = \sum_{s,t} b_{s,t} q^{x(t+1)} C_s(x) C_t(y)$, avec $\lim_{s+t\to+\infty} b_{s,t} = 0$ et
$\sup_{(x,y)} \left| \frac{1}{\psi(y+1)} \widetilde{\Phi_1} f(x+y+1,x) \right| = \sup_{s,t} |b_{s,t}|$.
D'autre part, pour $y \neq -1$, on a
$\frac{1}{\psi(y+1)} \widetilde{\Phi_1} f(x+y+1,x) = \sum_{s\geq 0}\sum_{t\geq 0} \frac{a_{s+t+1}}{q^{t+1}-1} q^{(x-s)(t+1)} C_s(x) C_t(y)$, il vient que
$b_{s,t} = \frac{a_{s+t+1} q^{-s(t+1)}}{q^{t+1}-1}$. On en déduit que

$$\sup_{(y,x)}\left|\frac{1}{\psi(y+1)}\widetilde{\Phi_1}f(x+y+1,x)\right| = \sup_{s,t}\frac{\left|a_{s+t+1}q^{-s(t+1)}\right|}{|q^{t+1}-1|} =$$
$$= \sup_{n\geq 1}\sup_{s+t+1=n}\frac{|a_{s+t+1}|}{|q^{t+1}-1|} = \sup_{n\geq 1}|a_n|\sup_{s+t+1=n}\frac{1}{|q^{t+1}-1|} = \sup_{n\geq 1}|a_n|\,\delta_n.$$
De plus, on a $0 = \lim_{s+t\to+\infty}|b_{s,t}| = \lim_{s+t\to+\infty}\max_{s+t+1=n}|b_{s,t}| =$
$= \lim_{n\to+\infty}|a_n|\max_{s+t+1=n}\dfrac{1}{|q^{t+1}-1|} = \lim_{n\to+\infty}|a_n|\,\delta_n$. Il vient que
$$\sup_{n\geq 1}|a_n|\,\delta_n = \sup_{(y,x)}\left|\frac{1}{\psi(y+1)}\widetilde{\Phi_1}f(x+y+1,x)\right| \leq \left\|\frac{1}{\psi}\right\|\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\| = \left\|\frac{1}{\psi}\right\|\|\Phi_1 f\|.$$
Puisque la fonction continue ψ ne s'annule pas sur $\mathbb{Z}_p$, on voit que $m(\psi) = \inf_{x\in\mathbb{Z}_p}|\psi(x)| = \min_{x\in\mathbb{Z}_p}|\psi(x)| > 0$. D'où l'on en déduit que
$$\left\|\frac{1}{\psi}\right\| = \sup_{x\in\mathbb{Z}_p}\frac{1}{|\psi(x)|} = \frac{1}{\inf_{x\in\mathbb{Z}_p}|\psi(x)|} = \frac{1}{m(\psi)} \text{ et } m(\psi)\sup_{n\geq 1}|a_n|\,\delta_n \leq \|\Phi_1 f\| \leq \rho\sup_{n\geq 1}|a_n|\,\delta_n.$$

-(b)- Supposons que $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, alors $\left|\log_p(q)\right| = |q-1|$.
De plus, pour $x\in\mathbb{Z}_p$, $\left|x\log_p(q)\right| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$ et $q^x = \exp(\log_p(q^x)) = \exp(x\log_p(q))$. On en déduit que $|q^x-1| = \left|\exp(x\log_p(q))-1\right| = \left|x\log_p(q)\right| = |x|\left|\log_p(q)\right|$. Ainsi pour $x\neq 0$, on obtient $\dfrac{|q^x-1|}{|x|} = \left|\log_p(q)\right|$, et $m(\psi) = \left|\log_p(q)\right| = |q-1| = \rho$. Donc $\|\Phi_1 f\| = |q-1|\sup_{n\geq 1}|a_n|\,\delta_n = \sup_{n\geq 1}p^{k(n)}|a_n|$. □

Corollaire 1. *Soit $q\in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1|<1$ et soit $f:\ \mathbb{Z}_p\longrightarrow K$ une fonction continue de q-développement $f = \sum_{n\geq 0}a_nC_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$. Alors f est strictement différentiable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}n\,|a_n| = 0$.*

Démonstration. On a $\psi(p^{k(n)}) = \dfrac{q^{p^{k(n)}}-1}{p^{k(n)}}$, $\forall n\geq 1$ et
$\lim_{n\to+\infty}\psi(p^{k(n)}) = \lim_{n\to+\infty}\dfrac{q^{p^{k(n)}}-1}{p^{k(n)}} = \log_p(q)$. Puisque $\log_p(q)\neq 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier $n\geq n_0$, on ait $\dfrac{\left|q^{p^{k(n)}}-1\right|}{|p|^{k(n)}} = \left|\log_p(q)\right|$. Donc $\delta_n = \dfrac{1}{\left|q^{p^{k(n)}}-1\right|} =$
$= \dfrac{p^{k(n)}}{\left|\log_p(q)\right|}$, $\forall n\geq n_0$. On déduit du Théorème 4.1.2 que f est strictement différentiable si et seulement si $\dfrac{1}{\left|\log_p(q)\right|}\lim_{\to+\infty}|a_n|\,p^{k(n)} = \lim_{n\to+\infty}\delta_n\,|a_n| = 0$. Ce qui équivaut à $\lim_{n\to+\infty}p^{k(n)}|a_n| = 0$ et à $\lim_{n\to+\infty}n\,|a_n| = 0$. □

N.B.: Le Corollaire 1, qui est une q-version du Théorème 4.1.1, contient la condition nécessaire donnée par T. Kim et al. pour le cas où $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$.

Corollaire 2. *Soit* $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ *une fonction continue. Si* f *est strictement différentiable, alors* f *est telle que* $\max(|a_0|, m(\psi) \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n) \leq \|f\|_1 \leq \max(|a_0|, \rho \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n)$.
De plus, si $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, *on a* $\|f\|_1 = \sup_{n\geq 0} |a_n| |\gamma_n|^{-1}$. *Dans ces conditions, posant* $\alpha_0 = 1$ *et* $\alpha_n = (p^{k(n)})_q$, *pour* $n \geq 1$, *la famille* $(\alpha_n C_n)_{n\geq 0}$ *devient une base orthonormale de* $(\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K), \ \| \ \|_1)$.

Démonstration. On déduit du Théorème 4.1.2, que $m(\psi) \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n \leq \|\Phi_1 f\| \leq$ $\leq \rho \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n$. Donc $\max(|a_0|, m(\psi) \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n) \leq \|f\|_1 \leq \max(|a_0|, \rho \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n)$.
De plus, si $|q-1| < |p|^{\frac{1}{p-1}}$, on obtient $m(\psi) = |q-1| = \rho$ et
$\max(|a_0|, |q-1| \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n) \leq \|f\|_1 \leq \max(|a_0|, |q-1| \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n)$. Il vient que
$\|f\|_1 = \max(|a_0|, |q-1| \sup_{n\geq 1} |a_n| \delta_n) = \max(|a_0|, \sup_{n\geq 1} |a_n| |\gamma_n|^{-1}) = \sup_{n\geq 0} |a_n| |\gamma_n|^{-1}$,
$(\gamma_0 = 1)$.
D'autre part, on a $f = \sum_{n\geq 0} a_n (\alpha_n)^{-1} (\alpha_n C_n)$. Puisque $\|C_n\|_1 = |\gamma_n|^{-1}$ et $|\alpha_n| = \left|(p^{k(n)})_q\right| =$ $= \left|p^{k(n)}\right| = |\gamma_n|$, on obtient $\|\alpha_n C_n\|_1 = |\alpha_n| \|C_n\|_1 = 1$. On déduit donc que
$\|f\|_1 = \sup_{n\geq 0} |a_n| |\gamma_n|^{-1} = \sup_{n\geq 0} |a_n| |\alpha_n|^{-1}$ et $(\alpha_n C_n)_{n\geq 0}$ est une base orthonormale de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$. □

Remarque 4.1.2. On sait que l'opérateur de dérivation est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. De plus, si $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ est strictement différentiable,
on obtient $f'(x) = \sum_{n\geq 0} a_n C'_n(x) = \sum_{n\geq 1} a_n \log_p(q) \sum_{s=0}^{n-1} \frac{q^{-s(n-s)}}{q^{n-s}-1} q^{x(n-s)} C_s(x) C_{n-s-1}(-1)$.
Comme $C_k(-1) = (-1)^k q^{\frac{-k(k+1)}{2}}$, posant $t = n-s-1$, on voit que
$f' = \log_p(q) \sum_{n\geq 1} a_n \sum_{s+t+1=n} (-1)^t \frac{q^{-(t+1)(t+2s)/2}}{q^{t+1}-1} q^{x(t+1)} C_s(x)$.
En particulier, $f'(0) = \log_p(q) \sum_{t\geq 0} (-1)^t a_{t+1} \frac{q^{-t(t+1)/2}}{q^{t+1}-1}$.
De façon générale, pour $m \in \mathbb{N}$, on a

$$f'(m) = \log_p(q) \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s}_q \sum_{t \geq 0} (-1)^t a_{s+t+1} \frac{q^{-(t+1)(t+2s-2m)/2}}{q^{t+1}-1}.$$

D'autre part, K. Conrad donne dans [4] le q-développement de la fonction dérivée f' d'une fonction différentiable f. Toute fonction strictement différentiable étant différentiable, ce q-développement reste vrai pour les fonctions strictement différentiables.

• Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soient $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ une fonction continue et x un élément de $\mathbb{Z}_p$. Rappelons que l'opérateur Z_q est défini par $Z_q(f)(x) = q^x f(x)$. Nous avons désigné par $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$, la sous-algèbre fermée de l'algèbre $L\big(\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)\big)$ des endomorphismes linéaires continus de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, engendrée par Z_q. Nous avons montré que tout élément R de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ s'écrit sous la forme d'une série uniformément convergente $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$, avec $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ et $\|R\| = \sup_{n \geq 0} |b_n|$, les $Q_n(Z_q)$ étant des polynômes en Z_q définis par, $Q_0(Z_q) = id$ et $Q_n(Z_q) = \dfrac{(Z_q - id)\dots(Z_q - q^{n-1} id)}{(q^n - 1)\dots(q^n - q^{n-1})}$, $\forall n \geq 1$. Nous donnons ici une condition nécessaire et suffisante, sur les coefficients b_n pour qu'un élément $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q) \in \Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$ laisse invariant l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions strictement différentiables de $\mathbb{Z}_p$ dans K.

Théorème 4.1.3. *Soit $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$ un élément de $\Gamma_q(\mathbb{Z}_p, K)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur R laisse invariant l'espace $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ des fonctions strictement différentiables de $\mathbb{Z}_p$ dans K.*

(ii) $\lim_{n \to +\infty} n\,|b_n| = 0$

Démonstration. Soit $R = \sum_{n \geq 0} b_n Q_n(Z_q)$ un élément de $\Gamma(\mathbb{Z}_p, K)$. Supposons que $\lim_{n \to +\infty} n\,|b_n| = 0$. Alors, la fonction continue $R(C_0) = \sum_{n \geq 0} b_n C_n$ est strictement différentiable de $\mathbb{Z}_p$ dans K. Ainsi, si $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$ est une fonction strictement différentiable, $R(f) = f.\sum_{n \geq 0} b_n C_n = f.R(C_0)$, produit de deux fonctions strictement différentiables est strictement différentiable.
Réciproquement, supposons, pour toute fonction strictement différentiable $f : \mathbb{Z}_p \longrightarrow K$,

que $R(f)$ est strictement différentiable. Alors $R(C_0) = \sum_{n\geq 0} b_n C_n$ est strictement différentiable. Donc $\lim_{n\to+\infty} n\,|b_n| = 0$. □

4.2 Le cas q racine de l'unité d'ordre p^N

Dans ce paragraphe, nous supposons que $q \in K$ *est une racine primitive de l'unité d'odre* p^N, $N \geq 1$, c'est-à-dire que q est une racine p^N-ième de l'unité et pour tout entier $k < p^N$, $q^k \neq 1$. Dans ces conditions, on a $|q-1| < 1$.
Rappelons que la suite associée à q formée des fonctions $C_{n,q} = C_n$ constituant une base orthonormale de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ est telle que pour tout entier $n = m(n)p^N + r(n)$ et tout $x = z(x)p^N + l(x) \in \mathbb{Z}_p$, on a $C_{n,q}(x) = C_n(x) = C_{r(n),q}(l(x)).B_{m(n)}(z(x))$, où $B_{m(n)}$ est le $m(n)$-ième polynôme binomial usuel.
Comme pour le cas q non racine de l'unité, les fonctions de la q-base de Mahler sont strictement différentiables. Plus précisement on a:

Lemme 4.2.1. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'odre p^N. Alors $p^{k(n)} \leq \|\Phi_1 C_n\| \leq \max(p^{N-1}, p^{k(n)})$.*

Démonstration.
On déduit du Lemme 1.0.9 (ii) que $\|\Phi_1 C_n\| \leq \max(p^{N-1}, p^{k(n)})$.
D'autre part, on a $\Phi_1 C_n(y + p^{k(n)}, y) = \frac{1}{p^{k(n)}} \sum_{s=1}^{n} q^{-s(n-s)} C_s(p^{k(n)}) q^{sy} C_{n-s}(y)$. On voit, comme dans la démonstration du Lemme 4.1.3, que la suite de fonctions $(q^{sy}C_{n-s})_{0\leq s\leq n}$ est une famille orthonormale dans $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On en déduit que
$\sup_{y\in\mathbb{Z}_p} \left|\Phi_1 C_n(y + p^{k(n)}, y)\right| = p^{k(n)} \sup_{1\leq s\leq n} \left|C_s(p^{k(n)})\right| = p^{k(n)}$, car $p^{k(n)} \leq n$ et $C_{p^{k(n)}}(p^{k(n)}) = 1$. D'où le lemme. □

Lemme 4.2.2. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N.*

(i) *Soit n un entier $< p^N$, alors la n-ième fonction continue $C_{n,q} = C_n$ de la q-base de Mahler est strictement différentiable de fonction dérivée C'_n égale à zéro.*

(ii) *Si n est un entier $\geq p^N$, alors la fonction C_n est une fonction strictement différentiable. De plus, si $n = m(n)p^N + r(n)$, avec $m(n) \geq 1$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$ et $x = z(x)p^N + l(x) \in \mathbb{Z}_p$, $0 \leq l(x) \leq p^N - 1$, la fonction dérivée C'_n de C_n est telle que $C'_n(x) = \frac{1}{p^N} B'_{m(n)}(z(x)) C_{r(n)}(l(x))$, où $B'_{m(n)} = \sum_{i=0}^{m(n)-1} \frac{(-1)^{m(n)-i-1}}{m(n)-i} B_i$.*

Démonstration. Soient $x = z(x)p^N + l(x)$, $0 \leq l(x) \leq p^N - 1$, $y = \zeta(y)p^N + l(y)$, $0 \leq l(y) \leq p^N - 1$ et soit $n = m(n)p^N + r(n)$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$. On obtient $x - y = (z(x) - \zeta(y))p^N + (l(x) - l(y))$.
Il est clair que $\left|(z(x) - \zeta(y))p^N\right| = p^{-N}\left|z(x) - \zeta(y)\right| \leq p^{-N}$ et pour $l(x) \neq l(y)$, on a $\left|p^{N-1}\right| \leq |l(x) - l(y)|$ et $\left|(z(x) - \zeta(y))p^N\right| < |x - y|$, on en déduit que, pour $l(x) \neq l(y)$, on a $|x - y| = |l(x) - l(y)|$.

(i) Pour $0 \leq n < p^N$, $m(n) = 0$, $r(n) = n$ et la fonction C_n est localement constant. De plus $C_n(x) = C_n(l(x))$ et $C_n(y) = C_n(l(y))$. Donc $\Phi_1 C_n(z(x)p^N, \zeta(y)p^N) = 0$.
Pour $l(x) \neq l(y)$, on obtient $\left|\Phi_1 C_n(z(x)p^N + l(x), \zeta(y)p^N + l(y))\right| = |\Phi_1 C_n(l(x), l(y))| \leq$

$\leq \dfrac{1}{|l(x) - l(y)|} \leq p^{N-1}$.

Comme $C_n(x) = C_n(y + x - y) = \displaystyle\sum_{s=0}^{n} q^{-s(n-s)} q^{y(n-s)} C_s(y) C_{n-s}(x - y)$ (Théorème 1.0.4), on voit que $C_n(x) - C_n(y) = \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} q^{-s(n-s)} q^{y(n-s)} C_s(y) C_{n-s}(x - y)$.
On en déduit que
$\Phi_1 C_n(x, y) = \dfrac{(q^{l(x)-l(y)} - 1)}{x - y} \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} \dfrac{q^{(n-s)(l(y)-s)}}{q^{n-s} - 1} C_s(l(y)) C_{n-s-1}(l(x) - l(y) - 1)$, ou encore $\Phi_1 C_n(x, y) = \psi(x - y) \displaystyle\sum_{s=0}^{n-1} \dfrac{q^{(n-s)(l(y)-s)}}{q^{n-s} - 1} C_s(l(y)) C_{n-s-1}(l(x) - l(y) - 1)$.
Donc pour $l(x) = l(y)$, $\Phi_1 C_n(x, y) = 0$. D'où l'on déduit que $C'_n = 0$.

(ii) Soit $n = m(n)p^N + r(n)$, avec $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$, $m(n) \geq 1$ et soient $x = z(x)p^N + l(x) \in \mathbb{Z}_p$, $y = \zeta(y)p^N + l(y) \in \mathbb{Z}_p$, on obtient
$\Phi_1 C_n(x, y) = \dfrac{1}{(z(x) - \zeta(y))p^N + l(x) - l(y)} \Big[\Big(B_{m(n)}(z(x)) - B_{m(n)}(\zeta(y))\Big) C_{r(n)}(l(x)) +$
$+ B_{m(n)}(\zeta(y))\Big(C_{r(n)}(l(x)) - C_{r(n)}(l(y))\Big)\Big]$.
Pour $l(x) = l(y)$, on a $x - y = (z(x) - \zeta(y))p^N$ et
$\Phi_1 C_n(x, y) = \dfrac{1}{p^N} \dfrac{B_{m(n)}(z(x)) - B_{m(n)}(\zeta(y))}{z(x) - \zeta(y)} C_{r(n)}(l(x)) =$
$= \dfrac{1}{p^N} \Phi_1 B_{m(n)}(z(x), \zeta(y)) C_{r(n)}(l(x))$.
D'où l'on déduit aussitôt que $C'_n(x) = \dfrac{1}{p^N} B'_{m(n)}(z(x)) C_{r(n)}(l(x))$, où $B'_{m(n)}$ est la fonction dérivée de $B_{m(n)}$ et $B'_{m(n)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m(n)-1} \dfrac{(-1)^{m(n)-i-1}}{m(n) - i} B_i$. $\square$

Soit $q \in K$ une racine primitive de l'unité d'ordre p^N, nous avons ici un résultat semblable au Théorème 4.1.1.

Théorème 4.2.1. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N et soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ le q-développement de f. Alors f est strictement différentiable si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} n\,|a_n| = 0$.*
De plus $f'(x) = \dfrac{1}{p^N} \sum_{\ell \geq 0} \Big(\sum_{j \geq 0} \dfrac{(-1)^j}{j+1} a_{(j+1)p^N + \ell} \Big) C_\ell(x)$.

Démonstration. On a rappelé ci-dessus que, pour tout entier positif $n = m(n)p^N + r(n)$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$ et pour tout $x = p^N z(x) + l(x) \in \mathbb{Z}_p$, $0 \leq l(x) \leq p^N - 1$, on a $C_n(x) = B_{m(n)}(z(x)) C_{r(n)}(l(x))$. De plus, la fonction C_n est strictement différentiable, avec $p^{k(n)} \leq \left\| \widetilde{\Phi_1} C_n \right\| = \|\Phi_1 C_n\| \leq \max(p^{N-1}, p^{k(n)}) \leq \max(p^{N-1}, n)$.

Soit $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On déduit de la définition des quotients aux différences de la fonction f, que l'on a $\Phi_1 f(x, y) = \sum_{n \geq 1} a_n \Phi_1 C_n(x, y)$.

-(a)- Supposons que $\lim_{n \to +\infty} n\,|a_n| = 0$. Comme $|a_n| \left\| \widetilde{\Phi_1} C_n \right\| \leq \max(p^{N-1}, n)\,|a_n| \leq n\,|a_n|$ pour n assez grand, on voit que $\lim_{n \to +\infty} |a_n| \left\| \widetilde{\Phi_1} C_n \right\| = \lim_{n \to +\infty} n\,|a_n| = 0$ et la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \widetilde{\Phi_1} C_n$ converge uniformément sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ vers une fonction continue dont la restriction à $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \setminus \Delta(\mathbb{Z}_p)$ est égale à $\Phi_1 f$. Donc f est strictement différentiable.

-(b)- Reciproquement, supposons que $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n$ soit strictement différentiable, c'est-à-dire que $\Phi_1 f$ peut s'étendre en une fonction continue $\widetilde{\Phi_1} f$ sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. Considérons un s fixé, tel que $0 \leq s \leq p^N - 1$.
Pour $x = z(x)p^N + s$ et $y = \zeta(y)p^N + s \in p^N \mathbb{Z}_p + s$, on voit que

$$\Phi_1(x, y) = \frac{1}{p^N} \sum_{r=0}^{p^N - 1} \sum_{m \geq 1} a_{mp^N + r} C_r(s) \frac{B_m(z(x)) - B_m(\zeta(y))}{z(x) - \zeta(y)} =$$

$$= \frac{1}{p^N} \sum_{r=0}^{s} \sum_{m \geq 1} a_{mp^N + r} C_r(s) \Phi_1 B_m(z(x), \zeta(y)).$$

La fonction $\Phi_{1,s} f(z, \zeta) = \Phi_1 f(s + p^N z, s + p^N \zeta) =$

$= \dfrac{1}{p^N} \sum_{r=0}^{s} \sum_{m \geq 1} a_{mp^N+r} C_r(s) \dfrac{B_m(z) - B_m(\zeta)}{z - \zeta}$ peut, elle aussi se prolonger en une fonction continue $\widetilde{\Phi_{1,s}} f$ sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, qui en fait correspond à la restriction de la fonction continue $\widetilde{\Phi_1} f$ à $s + p^N\mathbb{Z}_p \times s + p^N\mathbb{Z}_p$.

On obtient sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ la fonction continue

$$\widetilde{\Phi_{1,s}} f(z + \zeta + 1, \zeta) = \frac{1}{p^N} \sum_{r=0}^{s} \sum_{m \geq 1} a_{mp^N+r} C_r(s) \sum_{i+j=m-1} \frac{1}{j+1} B_j(z) B_i(\zeta) =$$

$$= \frac{1}{p^N} \sum_{i,j} \sum_{r=0}^{s} C_r(s) \frac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1} B_j(z) B_i(\zeta).$$

Puisque la famille de fonctions $(z, \zeta) \to B_j(z)B_i(\zeta)$ forme une base orthonormale de l'espace des fonctions continues à deux variables $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, K)$, on obtient le développement suivant dans cette base: $\widetilde{\Phi_{1,s}} f(z + \zeta + 1, z) = \sum_{i,j} b_{i,j}(s) B_j(z) B_i(\zeta)$,

avec $\lim_{i+j \to +\infty} b_{i,j}(s) = 0$ et $\sup_{(z,\zeta)} \left| \widetilde{\Phi_{1,s}} f(z + \zeta + 1, z) \right| = \sup_{i,j} |b_{i,j}(s)|$.

De plus $b_{i,j}(s) = p^{-N} \sum_{r=0}^{s} C_r(s) \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1}$. Donc pout tout s, $0 \leq s \leq p^N - 1$, on a $\quad 0 = p^N \lim_{i+j \to +\infty} b_{i,j}(s) = \lim_{i+j \to +\infty} \sum_{r=0}^{s} C_r(s) \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1}$.

En particulier, pour $s = 0$, $\lim_{i+j \to +\infty} \sum_{r=0}^{0} C_r(s) \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1} = \lim_{i+j \to +\infty} \dfrac{a_{(i+j+1)p^N}}{j+1} = 0$.

Pour $s = 1$, on a $0 = \lim_{i+j \to +\infty} \left(\dfrac{a_{(i+j+1)p^N}}{j+1} + \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+1}}{j+1} \right) = \lim_{i+j \to +\infty} \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+1}}{j+1}$.

Supposons, de proche en proche, que pour $0 \leq r \leq p^N - 2$, on a $\lim_{i+j \to +\infty} \dfrac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1} = 0$.

Alors, pour $s = p^N - 1$, on obtient

$$0 = \lim_{i+j \to +\infty} \sum_{r=0}^{p^N-1} C_r(p^N - 1) \frac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1} = \lim_{i+j \to +\infty} \frac{a_{(i+j+1)p^N+p^N-1}}{j+1}.$$

Donc, pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq p^N - 1$, on a

$$\lim_{m \to +\infty} \left| a_{mp^N+r} \right| .p^{k(m)} = \lim_{m \to +\infty} \max_{i+j+1=m} \frac{\left| a_{(i+j+1)p^N+r} \right|}{|j+1|} = 0.$$

Si $n = m(n)p^N + r(n)$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$ est tel que $m(n) \geq 1$, on obtient $n < p.p^{k(n)} = p^{N+1}.p^{k(m(n))}$.

Comme $|a_n| \leq \max_{0 \leq r \leq p^N-1} \left| a_{m(n)p^N+r} \right|$, on voit que

$n\,|a_n| < p.p^{k(n)}\,|a_n| \leq p^{N+1} \max_{0 \leq r \leq p^N-1} p^{k(m(n))} \left| a_{m(n)p^N+r} \right|$ et $\lim_{n \to +\infty} n\,|a_n| = 0$.

De plus, si f est strictement différentiable, pour $x = z(x)p^N + l(x)$, on a
$f'(x) = \widetilde{\Phi_1} f(x,x) = \sum_{r=0}^{p^N-1} \sum_{m\geq 1} a_{mp^N+r} C_r(l(x)) \frac{B'_m(z(x))}{p^N}$. Comme
$B'_m(z(x)) = \sum_{i+j=m-1} \frac{(-1)^j}{j+1} B_i(z(x))$, on voit que
$$f'(x) = \frac{1}{p^N} \sum_{i\geq 0} \sum_{r=0}^{p^N-1} \sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{j+1} a_{(j+1)p^N+ip^N+r} C_{ip^N+r}(x).$$
Faisant le changement d'indices $ip^N + r = \ell$, on obtient
$$f'(x) = \frac{1}{p^N} \sum_{\ell\geq 0} \Big(\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{j+1} a_{(j+1)p^N+\ell} \Big) C_\ell(x).$$ □

Remarque 4.2.1. Soit m un entier positif. On a
$$f'(m) = \frac{1}{p^N} \sum_{\ell=0}^{m} \Big(\sum_{j\geq 0} \frac{(-1)^j}{j+1} a_{(j+1)p^N+\ell} \Big) C_\ell(m).$$
En particulier $f'(0) = \frac{1}{p^N} \sum_{j\geq 0} a_{(j+1)p^N} \frac{(-1)^j}{j+1} = \frac{1}{p^N} \sum_{j\geq 1} a_{jp^N} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

Corollaire. *Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite dans K telle que $|\alpha_n| = \|\Phi_1 C_n\|$, pour $n \geq 1$ et $\alpha_0 = 1$. Alors $p^{1-N}.\sup_{n\geq 0} |a_n|\,|\alpha_n| \leq \|f\|_1 \leq \sup_{n\geq 0} |a_n|\,|\alpha_n|$.*
De plus, pour $N = 1$, on a $\|f\|_1 = \sup_{n\geq 0} |a_n|\,|\alpha_n|$.

Démonstration. Rappelons que la norme de $f \in \mathcal{C}^1(Z_p, K)$ est donnée par $\|f\|_1 = \max(\|f\|, \|\Phi_1 f\|) = \max(|f(0)|, \|\Phi_1 f\|)$ et $\|\Phi_1 f\| = \left\|\widetilde{\Phi_1} f\right\|$ la norme uniforme de $\widetilde{\Phi_1} f$. Donc pour $n \geq 1$, on a $\|C_n\|_1 = \max(|C_n(0)|, \|\Phi_1 C_n\|) = \|\Phi_1 C_n\|$ et $\|C_0\|_1 = 1$.
Nous rappelons également que, pour $n \geq 1$, on a $p^{k(n)} \leq \|\Phi_1(C_n)\| \leq \max(p^{N-1}, n)$.
Soit $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$ le q-développement de f. Alors, on a
$\lim_{n\to+\infty} |a_n|\,|\alpha_n| = \lim_{n\to+\infty} |a_n|\,\|C_n\|_1 = 0$. D'où l'on déduit que la série de fonction $f = \sum_{n\geq 0} a_n(\alpha_n)(\alpha_n^{-1} C_n)$ converge dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$. D'autre part, on a $\left|\alpha_n^{-1}\right| \|C_n\|_1 = 1$.
Donc $\|f\|_1 \leq \sup_{n\geq 0} |a_n|\,|\alpha_n|$.
Considérons un s fixé, tel que $0 \leq s \leq p^N - 1$. Comme dans la démonstration du Théorème 4.2.1, on obtient sur $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$, la fonction continue
$$\widetilde{\Phi_{1,s}} f(z + \zeta + 1, \zeta) = \frac{1}{p^N} \sum_{i,j} \sum_{r=0}^{s} C_r(s) \frac{a_{(i+j+1)p^N+r}}{j+1} B_j(z) B_i(\zeta).$$

Pour $s=0$, on obtient $\widetilde{\Phi_{1,0}}f(z+\zeta+1,\zeta)=\dfrac{1}{p^N}\sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0}\dfrac{a_{(i+j+1)p^N}}{j+1}B_j(z)B_i(\zeta)$. Il vient que $\sup_{(z,\zeta)}\left|\widetilde{\Phi_{1,0}}f(z+\zeta+1,\zeta)\right|=p^N\sup_{i\geq 0}\sup_{j\geq 0}\left|a_{(i+j+1)p^N}\right||j+1|^{-1}=$
$=p^N\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N}\right|\sup_{i+j+1=m}\dfrac{1}{|j+1|}=\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N}\right|p^{k(m)+N}=\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N}\right|\left|\alpha_{mp^N}\right|$. Donc $\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N}\right|\left|\alpha_{mp^N}\right|\leq\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\|=\|\Phi_1 f\|$.
Supposons avoir démontré, de proche en proche, que pour $0\leq s\leq p^N-2$, on a $\sup_{0\leq r\leq s}\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N+r}\right|\left|\alpha_{mp^N+r}\right|\leq\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\|$. Comme ci-dessus, on obtient
$\sup_{m\geq 1}\left|a_{mp^N+p^N-1}\right|\left|\alpha_{mp^N+p^N-1}\right|=\sup_{(z,\zeta)}\left|\widetilde{\Phi_{1,p^N-1}}f(z+\zeta+1,\zeta)-\widetilde{\Phi_{1,p^N-2}}f(z+\zeta+1,\zeta)\right|\leq$
$\leq\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\|$. D'où l'on déduit que $\sup_{n\geq p^N}|a_n|\,|\alpha_n|\leq\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\|$ et
$p^{1-N}\sup_{n\geq p^N}|a_n|\,|\alpha_n|\leq\left\|\widetilde{\Phi_1}f\right\|=\|\Phi_1 f\|$.
De plus, $|a_0|\,|\alpha_0|=|f(0)|\leq\|f\|_1$.
D'autre part, puisque pour $1\leq r\leq p^N-1$, on a $|\alpha_r|=\|\Phi_1 C_r\|=\sup_{l(x)\neq l(y)}|\Phi_1 C_r(l(x),l(y))|\leq$
$\leq p^{N-1}$, on voit que $p^{1-N}\max_{1\leq r\leq p^N-1}|a_r|\,|\alpha_r|\leq\max_{1\leq r\leq p^N-1}|a_r|\leq\|f\|\leq\|f\|_1$. D'où l'on déduit que $p^{1-N}\sup_{n\geq 0}|a_n|\,|\alpha_n|\leq\|f\|_1\leq\sup_{n\geq 0}|a_n|\,|\alpha_n|$ et pour $N=1$, on a $\sup_{n\geq 0}|a_n|\,|\alpha_n|=\|f\|_1$. $\square$

4.3 Somme indéfinie et intégrale de Volkenborn

Définition 4.3.1. *Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$, la somme indéfinie de f est l'unique fonction continue $S(f)$, telle que $S(f)(x+1)-S(f)(x)=f(x)$ et $S(f)(0)=0$.*

Une étude détaillée de la somme indéfinie a été faite dans [33]. Notons ici que si B_n est le n-ième polynôme binomial, alors $S(B_n)=B_{n+1}$. Donc, si $f=\sum_{n\geq 0}a_nB_n$ est le développement de Mahler d'une fonction continue $f:\mathbb{Z}_p\longrightarrow K$, on a $S(f)=\sum_{n\geq 0}a_nB_{n+1}$ et $\|S(f)\|=\|f\|$. Ainsi, l'endomorphisme linéaire S de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p,K)$ est isométrique.

Nous allons évaluer la somme indéfinie de fonctions continues suivant le développement dans la q-base de Mahler. Ce qui s'applique au calcul de l'intégrale de Volkenborn des fonctions strictement différentiables.

Lemme 4.3.1. *Soit $q \in K$, tel que $|q-1| < 1$. Le q-développement de la fonction $S(C_n)$ est donné par $S(C_n) = \sum_{s\geq n+1} (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=n+1}^{s-1} (q^\ell - 1)C_s$, avec la convention $\prod_{\ell=t}^{\beta} \alpha_\ell = 1$, pour $t > \beta$.*
En outre, si q est une racine de l'unité d'ordre p^N, pour $n = m(n)p^N + r(n)$, $m(n) \geq 0$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$, on obtient $S(C_n) = \sum_{s=n+1}^{(m(n)+1)p^N} (-1)^{s-n-1} \prod_{l=1}^{s-n-1} (q^{s-l} - 1)C_s =$
$= \sum_{k=1}^{p^N - r(n)} (-1)^{k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (q^{n+k-\ell} - 1)C_{n+k}$.

Démonstration. Rappelons que, pour tout entier positif s, on a
$C_s(x+1) = q^s C_s(x) + C_{s-1}(x)$.
Soit $S(C_n) = \sum_{s\geq 0} b_s(n)C_s$ le q-développement de Mahler de $S(C_n)$. Alors
$b_0(n) = S(C_n)(0) = 0$ et $S(C_n)(x+1) - S(C_n)(x) =$
$= \sum_{s\geq 1} b_s(n)\big(C_s(x+1) - C_s(x)\big) = \sum_{s\geq 1} b_s(n)(q^s - 1)C_s(x) + \sum_{s\geq 0} b_{s+1}(n)C_s(x) =$
$= \sum_{s\geq 0} ((q^s - 1)b_s(n) + b_{s+1}(n))C_s(x)$.
Puisque $S(C_n)(x+1) - S(C_n)(x) = C_n(x)$, on obtient $0 = (q^s - 1)b_s(n) + b_{s+1}(n)$, pour $s \neq n$ et $b_{n+1}(n) = 1 - (q^n - 1)b_n(n)$. Par récurrence, on voit que $b_s(n) = 0$, pour $s \leq n$, $b_{n+1}(n) = 1$ et pour $s > n+1$, $b_{s+1}(n) = -(q^s - 1)b_s(n)$. D'où l'on déduit que $b_s(n) = (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=n+1}^{s-1} (q^\ell - 1) = (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=1}^{s-n-1} (q^{s-\ell} - 1)$, $\forall s \geq n+1$ et

$$S(C_n) = \sum_{s\geq n+1} (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=n+1}^{s-1} (q^\ell - 1)C_s = \sum_{s\geq n+1} (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=1}^{s-n-1} (q^{s-\ell} - 1)C_s.$$

De plus, si q est une *racine de l'unité d'ordre* p^N, pour $n = m(n)p^N + r(n)$, $m(n) \geq 0$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$ et $s > n+1$, on obtient $\prod_{\ell=(m(n)+1)p^N}^{s-1} (q^\ell - 1) = 0$. On voit que $b_s(n) = 0$ pour tout $s > (m(n)+1)p^N$. D'où l'on déduit que

$$S(C_n) = \sum_{s=n+1}^{(m(n)+1)p^N} (-1)^{s-n-1} \prod_{l=1}^{s-n-1} (q^{s-l} - 1)C_s = \sum_{k=1}^{p^N - r(n)} (-1)^{k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (q^{n+k-\ell} - 1)C_{n+k}. \qquad \square$$

Dans la suite, on pose par convention $\prod_{l=t}^{\beta} \alpha_l = 1$, pour $t > \beta$.

Corollaire.
Soit $q \in K$ tel que $|q-1| < 1$. Soient f une fonction continue de $\mathbb{Z}_p$ dans K et $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n$ le q-développement de f. Soit $S(f)$ la somme indéfinie de f. Par convention, on pose $\prod_{\ell=1}^{0}(q^{n-\ell}-1) = 1$.

(i) *Si q est non racine de l'unité, alors* $S(f) = \sum_{s \geq 1} \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} a_{s-k} \prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{n-\ell}-1) C_s$.

(ii) *Si q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N, alors*
$$S(f) = \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{p^N} (-1)^{k-1} a_{n-k} \prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{n-\ell}-1) C_n.$$

Démonstration.

(i) Supposons que q est non racine de l'unité. Soit f une fonction continue et $f = \sum_{n \geq 0} a_n C_n$ le q-développement de f. Sachant que l'opérateur S est linéaire continu, on déduit du Lemme 4.3.1 que
$$S(f) = \sum_{n \geq 0} a_n S(C_n) = \sum_{n \geq 0} a_n \sum_{s \geq n+1} (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=n+1}^{s-1} (q^{\ell}-1) C_s =$$
$$= \sum_{s \geq 1} \sum_{n=0}^{s-1} a_n (-1)^{s-n-1} \prod_{\ell=n+1}^{s-1} (q^{\ell}-1) C_s.$$
Posant $s-n=k$, on obtient $S(f) = \sum_{s \geq 1} \sum_{k=1}^{s} a_{s-k}(-1)^{k-1} \prod_{\ell=s-k+1}^{s-1} (q^{\ell}-1) C_s =$
$$= \sum_{s \geq 1} \sum_{k=1}^{s} a_{s-k}(-1)^{k-1} \prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{s-\ell}-1) C_s.$$

(ii) Supposons que q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. Soit f une fonction continue telle que $f = \sum_{m \geq 0} \sum_{r=0}^{p^N-1} a_{mp^N+r} C_{mp^N+r} \in \mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$. On déduit encore du

Lemme 4.3.1 que $S(f) = \sum_{m\geq 0}\sum_{r=0}^{p^N-1} a_{mp^N+r} S(C_{mp^N+r}) =$

$$= \sum_{m\geq 0}\sum_{r=0}^{p^N-1} a_{mp^N+r}\sum_{k=1}^{p^N-r}(-1)^{k-1}\prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{mp^N+r+k-\ell}-1)C_{mp^N+r+k}.$$

Il vient que $S(f) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{p^N} a_{n-k}(-1)^{k-1}\prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{n-\ell}-1)C_n$. □

Soit f une application de $\mathbb{Z}_p$ dans K. On dit que f est Volkenborn intégrable si la limite $\lim_{n\to+\infty} p^{-n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ existe et l'on pose $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} p^{-n}\sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ que l'on désigne comme l'intégrale de Volkenborn de f.
Si de plus f est continue, on déduit aussitôt de la définition de $S(f)$ que l'on a $S(f)(p^n) = \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)$ et donc f est Volkenborn intégrable si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} p^{-n}S(f)(p^n)$ existe.
On montre (cf. [33]) que si f est strictement différentiable, alors $S(f)$ est strictement différentiable. Dans ces conditions, f est Volkenborn intégrable et $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = (S(f))'(0)$.
Ainsi, comme la somme indéfinie S, l'intégrale de Volkenborn est linéaire et continue sur l'espace des fonctions strictement différentiables.

Théorème 4.3.1 (Intégrale de Volkenborn).
Soit $q \in K$, non racine de l'unité, tel que $|q-1| < 1$. Soit f une fonction strictement différentiable de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ de q-développement $f = \sum_{n\geq 0} a_nC_n$. Alors

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \log_p(q)\sum_{m\geq 0}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\frac{q^{\frac{-m(m-1)}{2}}}{q^m-1}\prod_{\ell=1}^{k-1}(q^{m-\ell}-1)a_{m-k}.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} C_n(x)dx = (-1)^n\log_p(q)\sum_{m\geq n+1}\frac{q^{-\frac{m(m-1)}{2}}}{q^{m+1}-1}\prod_{\ell=n+1}^{m-1}(q^\ell-1).$$

Démonstration. Supposons q non racine de l'unité. On déduit du Lemme 4.3.1 et de la Remarque 4.1.2 que $\int_{\mathbb{Z}_p} C_n(x)dx = (S(C_n))'(0) =$

$$= (-1)^n \log_p(q) \sum_{m\geq n+1} \frac{q^{\frac{-m(m-1)}{2}}}{q^m - 1} \prod_{\ell=n+1}^{m-1} (q^\ell - 1).$$

L'intégrale de Volkenborn étant linéaire et continue sur l'espace de Banach des fonctions strictement différentiables, on obtient $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n\geq 0} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} C_n(x)dx$. D'où l'on déduit que $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \log_p(q) \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq n+1} (-1)^n \frac{q^{\frac{-m(m-1)}{2}}}{q^m - 1} \prod_{\ell=n+1}^{m-1} (q^\ell - 1)a_n =$

$$= \log_p(q) \sum_{m\geq 1} \sum_{n=0}^{m-1} (-1)^n \frac{q^{\frac{-m(m-1)}{2}}}{q^m - 1} \prod_{\ell=1}^{m-n-1} (q^{m-\ell} - 1)a_n.$$

Posant $k = m - n$, on obtient

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \log_p(q) \sum_{m\geq 0} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \frac{q^{\frac{-m(m-1)}{2}}}{q^m - 1} \prod_{\ell=1}^{k-1} (q^{m-\ell} - 1)a_{m-k}.$$ □

N.B. On obtient l'intégrale de Volkenborn évaluée dans la base de Mahler en faisant tendre q vers 1 dans les formules obtenues ci-dessus.

Théorème 4.3.2. *Soit $q \in K$, une racine primitive de l'unité d'ordre p^N et soit f une fonction strictement différentiable de $\mathcal{C}^1(\mathbb{Z}_p, K)$ de q-développement $f = \sum_{n\geq 0} a_n C_n$. Alors $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{m\geq 1} \sum_{k=1}^{p^N} \frac{(-1)^{m-k}}{mp^N} a_{mp^N-k} \prod_{l=1}^{k-1} (q^{mp^N-l} - 1)$. Plus particulièment, posant pour n entier positif, $n = m(n)p^N + r(n)$, avec $m \geq 0$ et $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$, on a*

$$\int_{\mathbb{Z}_p} C_n(x)dx = \frac{(-1)^{m(n)+r(n)}}{(m(n)+1)p^N} \prod_{l=1}^{p^N-r(n)-1} (q^{(m(n)+1)p^N-l} - 1).$$

Démonstration. Supposons que q est une racine primitive de l'unité d'ordre p^N. On déduit du Théorème 4.2.1 que $C'_{mp^N+r}(0) = 0$, pour $r \neq 0$ et $C'_{mp^N}(0) = \frac{(-1)^{m-1}}{mp^N}$.

Soit $n = m(n)p^N + r(n)$, $0 \leq r(n) \leq p^N - 1$, on déduit du Lemme 4.3.1 que

$$S(C_n)'(0) = (-1)^{r(n)-1} \prod_{\ell=1}^{p^N-r(n)-1} (q^{(m(n)+1)p^N-\ell} - 1)C'_{(m(n)+1)p^N}(0) =$$

$$= \frac{(-1)^{m(n)+r(n)}}{(m(n)+1)p^N} \prod_{\ell=1}^{p^N-r(n)-1} (q^{(m(n)+1)p^N-\ell} - 1).$$

Soit f une fonction strictement différentiable, telle que $f = \sum_{m\geq 0} \sum_{r=0}^{p^N-1} a_{mp^N+r} C_{mp^N+r}$. Par linéarité de l'intégrale de Volkenborn, on obtient

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{m\geq 0}\sum_{r=0}^{p^N-1} \frac{(-1)^{m+r}}{(m+1)p^N} \prod_{\ell=1}^{p^N-r(n)-1} (q^{(m+1)p^N-\ell}-1)a_{mp^N+r} =$$

$$= \sum_{m\geq 1}\sum_{k=1}^{p^N} \frac{(-1)^{m-k}}{mp^N} \prod_{l=1}^{k-1}(q^{mp^N-l}-1)a_{mp^N-k}. \qquad \square$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, P.U.F., Paris, (1975).

[2] E. T. Bell, Postulational bases for the umbral calculus, *Amer. J. Math.* 62 (1940), 717-724.

[3] N. Bourbaki, *Fonctions d'une variable réelle*, Chapitres 4, 5, 6 et 7 Eléments de mathématique, Hermann, Paris, (1961).

[4] K. Conrad, A q-analogue of Mahler Expansion, *Advances in Mathematics* 153, (2000), 185-230.

[5] T. Diagana, Towards a theory of some unbounded linear operators on p-adic Hilbert spaces and applications, *Annales Mathématiques Blaise Pascal* 12, (2005), 205-222.

[6] B. Diarra, Sur quelques représentations linéaires p-adiques de $\mathbb{Z}_p$. *Proceedings Kon. Ned. Akad. van Wetensch (Amsterdam)*, Series A. 82 (4), (1979), 481-493.

[7] B. Diarra, Base de Mahler et autres, *Séminaire Anal. Université Blaise Pascal*(Clermont II) -1994-95 (16),18 pp. -1997. MR 98e: 46093

[8] B. Diarra, Complete ultrametric Hopf algebras which are free Banach spaces, In *"p-Adic functional Analysis"*, edited by W.H. Schikhof, C. Perez-Garcia, J.Kąkol, M. Dekker, Inc., New-York, (1997), 61-80.

[9] B. Diarra, The continuous coalgebra endomorphisms of $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *Bull. Belg. Math. Soc.*, Simon Stevin - Supplement, December (2002), 63-79.

[10] B. Diarra, The Hopf algebra structure of the space of continuous functions on power series over $\mathbb{F}_q$ and Carlitz polynomials, *Contemp. Math.* 319 (2003), 75-97. MR2004d: 16067.

[11] B. Diarra, Ultrametric q-calculus, *Contemp. Math.* 384 (2005), 63-78.

[12] A. Di Bucchianico, *An introduction to Umbral calculus*, Euler Institute for Discrete Mathmatics and it Applications. February (1998).

[13] B. Dragovich, On p-adic power series, In *"p-Adic functional Analysis"*, edited by J. Kąkol, N. De Grande-De Kimpe and C. Perez-Garcia, M. Dekker, (1999), 65-75.

[14] A. Escassut *Analytic Elements in p-adic Analysis*, World Scientific Publishing, (1995).

[15] L. Ferrari, An Umbral Calculus over Infinite Coefficient Fields of Positive Characteristic, Umbral Calculus and it Applications, (Cortona, 1998), *Comput. Math. Appl.* 41 (2001), 1099-1108.

[16] M. Héraoua, *Cogèbre binomiale et calcul ombral des opérateurs différentiels*, Thèse de l'Université de Limoges, Limoges Juillet (2004).

[17] F.H. Jackson, Generalization of the Differential Operative Symbol with an Extended Form of Boole's Equation, *Messenger of Mathematics*, vol. 38, (1909), 57-61.

[18] F.H. Jackson, q-form of Taylor's Theorem, *Messenger of Mathematics*, vol 38, (1909), 62-64.

[19] S. A. Joni and G.-C. Rota, *Coalgebras and Bialgebras in Combinatorics*, in Umbral Calculus and Hopf Algebras, Contemp. Math., Vol. 6, (1982).

[20] C. Kassel, *Cours sur les groupes quantiques, 1ère partie*, Publication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée, n°492, (1992).

[21] T. Kim, S. D. Kim and D. W. Park, On Uniform Differentiability and q-Mahler Expansions, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics* 4, n°1, (2001), 35-41.

[22] T. Kim, Y. Simsek, et H. M. Srivastava, q-Bernoulli numbers and polynomials associated with multiple q-zeta functions and basic L-series, *arXiv:math.NT/0502019 v1 10 Feb.*, (2005).

[23] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta-Functions*, Graduate Texts in Mathematics 58, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, (1977).

[24] É. Lucas, *Théorie des Nombres*, Nouveau Tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, (1958).

[25] K. Mahler, An interpolation series for continuous functions of p-adic variable, *J. Reine Angew. Math.* 199 (1958), 23-34.

[26] K. Mahler, A correction to the paper "An interpolation series ...", *J. Reine Angew. Math.* 208 (1961), 70-72.

[27] N. Ray, Universal Constructions in Umbral Calculus, Mathematical essays in honor of Gian-Carlo Rota, (Cambridge, MA, 1996), 343-357, *Progr. Math.* 161, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1998).

[28] A. Robert, *A course in p-adic analysis*, GTM 198, Springer, New York, Berlin, (2000).

[29] S. Roman and G.-C. Rota, The umbral calculus, *Advances in Math.* 27 n°2, (1978), 95-188.

[30] S. Roman, The algebra of formal series, *Adv. in Math.* 31, (1979), 309-329, Erratum 35 (1980), 274.

[31] S. Roman, *The umbral calculus*, Pure and Applied Mathematics 111, Academic Press, Inc., New-York, (1984).

[32] S. Roman, More on the Umbral Calculus, with Emphasis on the q-Umbral Calculus, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 107 (1985), 222-254.

[33] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus - An introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1984).

[34] J. P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, *Pupl. Math.* , I.H.E.S., $n°12$, Paris (1962), 69-95.

[35] S. De Smedt, p-Adic continuous differentiable functions of several variables, *Coll. Math.* 45(2), (1994), 137-152.

[36] S. De Smedt, Orthonormal bases for p-adic continuous and continuously differentiable functions, *Ann. Math. Blaise Pascal* 2(1), (1995), 275-282.

[37] S. De Smedt, Mahler's and other bases for p-adic continuous functions, In *"p-Adic functional Analysis"*, edited by J. Kąkol, N. De Grande-De Kimpe and C. Perez-Garcia, M. Dekker, (1999), 309-322.

[38] F. Tangara, Some Continuous Linear Operators and Orthogonal q-Bases on $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *Contemp. Math.* 384 (2005), 335-351

[39] F. Tangara, Orthonormal q-Bases and Linear Continuous Operators on $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$, *à paraître dans Journal of Analysis*

[40] F. Tangara, On the strictly differentiable functions on $\mathbb{Z}_p$, *preprint*

[41] F. Tangara, Strict differentiability and q-expansion of functions on $\mathbb{Z}_p$ when q is a p^N-th primitive root of unity, *Afrika Mathematika*, Srie 3, Volume 17, (2006), 7-16

[42] M. van der Put, Difference equations over p-adic fields, *Math. Ann.* 198, (1972), 189-203.

[43] M. van der Put and M. F. Singer, *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer-Verlag, (2003).

[44] L. van Hamme, Jackson's Interpolation formula in p-adic analysis, *Proceedings of the Conference on p-adic analysis*, Report 7806, Catholic University of Nijmegen, (1978), 119-125.

[45] L. van Hamme, Three generalizations of of Mahler's expansion for continuous functions on $\mathbb{Z}_p$, In *p-adic analysis*, Lecture Notes on Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, vol. 1454 (1990), 356-361

[46] L. van Hamme, Continuous operators which commute with translations, on the space of continuous functions on $\mathbb{Z}_p$, In *"p-Adic functional Analysis"*, edited by J.M. Bayod, N. De Grande-De Kimpe and J. Martinez-Maurica, M. Dekker, New-York, (1991), 75-88.

[47] L. van Hamme, On the Mahler coefficients of the logarithmic derivative of the p-adic gamma function, In *"p-Adic functional Analysis"*, edited by J. Kąkol, N. De Grande-De Kimpe and C. Perez-Garcia, M. Dekker, (1999), 114-125.

[48] A.C.M. Van Rooij, *Non-Archimedean Functional Analysis*, M. Dekker, New-York and Basel, (1978).

[49] A.C.M. Van Rooij, The axiom of choice in p-adic functional analysis, *"p-Adic functional Analysis"*, edited by J.M. Bayod, N. De Grande-De Kimpe and J. Martinez-Maurica, M. Dekker, New-York, (1991), 151-156.

[50] A. Verdoodt, Jackson's formula with remainder in p-adic analysis, *Indag. Math., New Series,* 4(3), (1993), 375-384.

[51] A. Verdoodt, The use of operators for the construction of normal bases for the space of continuous functions on V_q, *Bull. Belg. Soc.* 1 (1994), 685-699.

[52] A. Verdoodt, *Bases and operators for the space of continuous functions defined on a subset of* $\mathbb{Z}_p$, PhD Thesis, Vrije Universiteit Brussel, September (1995).

[53] A. Verdoodt, p-adic q-umbral calculus, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 198 (1996), 166-177.

[54] A. Verdoodt, Orthonormal bases for spaces of continuous and continuously differentiable functions defined on a subset of $\mathbb{Z}_p$, *Revista Matematica Univ. Complut. Madrid* 9, n°2, (1996), 295-307.

Résumé

Soient p un nombre premier, $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques et K un sur-corps valué complet de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ l'algèbre de Banach des functions continues de $\mathbb{Z}_p$ dans K munie de la norme de la convergence uniforme et soit $q \in K$ tel que $|q-1| < 1$.
K. Conrad établit un q-analogue de la base de Mahler. A l'aide de ce développement, utilisant les techniques de calcul ombral, nous établissons une correspondance bijective, d'un côté entre une classe de q-bases orthonormales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et une classe d'opérateurs commutant avec l'oprérateur de translation τ_1 tel que $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$ et de autre part, entre une classe de q-bases orthogonales de $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ et une classe d'opérateurs commutant avec la q-dérivation de Jackson.
Nous obtenons une réalisation du plan quantique et de l'algèbre de Weyl quantique à deux générateurs, sous forme concrète d'algèbres d'opérateurs. Nous faisons quelques calculs de normes de ces opérateurs et nous exhibons une famille orthogonale pour l'algèbre de Weyl quantique.
Nous obtenons également des conditions nécessaires et suffisantes sur les coefficients du développement de Conrad pour qu'une fonction continue soit strictement différentiable, d'abord lorsque q est non racine de l'unité, ensuite lorsque q est une racine primitive de l'unité d'ordre une puissance p^N de p. Comme application nous donnons une q-expression de l'intégrale de Volkenborn.

Abstract

Let p be a prime number, $\mathbb{Z}_p$ the ring of the p-adic integers, $\mathbb{Q}_p$ the field of the p-adic numbers and K a complete valued field, extension of $\mathbb{Q}_p$. Let $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ be the Banach algebra of continuous functions from $\mathbb{Z}_p$ to K equipped with the supremum norm. K. Conrad has given a q-analogue of Mahler's expansion for $q \in K$, $|q-1| < 1$. We use the techniques of umbral calculus to establish a bijective correspondence, on one hand: between a class of continuous functions which are orthonormal q-bases and a class of linear continuous operators which commute with τ_1 such that $\tau_1(f)(x) = f(x+1)$; on the other hand between a class of orthogonal q-bases of $\mathcal{C}(\mathbb{Z}_p, K)$ and a class of linear continuous operators which commute with the Jackson q-derivation.
We give a realization of the quantum plane and Weyl quantum algebra of two generators, in the form of concrete operators algebras. We do some calculus of norms of these operators and exhibit an interesting orthogonal family for the quantum Weyl algebra.
We provide a necessary and sufficient conditions on the coefficients of the q-expansion for a continuous function to be strictly differentiable, first when q is not a root of unity and after when q is a primitive p^N-th root of unity. As an application we give a q-expansion of the Volkenborn integral.