Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-Glacier Byrd : Sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus.

Catherine Ritz

▶ **To cite this version:**

Catherine Ritz. Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-Glacier Byrd : Sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus.. Glaciologie. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1992. Français. NNT : . tel-00693923

HAL Id: tel-00693923

https://theses.hal.science/tel-00693923

Submitted on 3 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

LABORATOIRE DE GLACIOLOGIE ET GÉOPHYSIQUE DE L'ENVIRONNEMENT

Associé à l'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

UN MODELE THERMO-MECANIQUE D'EVOLUTION POUR LE BASSIN GLACIAIRE ANTARCTIQUE VOSTOK - GLACIER BYRD : SENSIBILITE AUX VALEURS DES PARAMETRES MAL CONNUS.

Catherine RITZ

Thèse de Doctorat d'Etat.

Soutenue le 26 Juin 1992 devant la commission d'examen composée de :

Président :	P. Duval
Rapporteurs :	J. Jouzel
	L. Lliboutry
	J.F. Minster
Examinateurs :	G. Boulton
	E. Brun
	B. Lismonde
	D. Raynaud

Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement
Tel. (33) 76 82 42 00 - Fax. (33) 76 82 42 01 - Telex 38 90 00 S42 505-LGGE
54, Rue Molière. BP 96 - 38402 Saint Martin d'Hères Cedex France

REMERCIEMENTS

Je tiens exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur Lliboutry qui m'a orientée vers la modélisation des calottes polaires. Ses conseils m'ont été extrêmement précieux tout au long de cette thèse.

Je remercie vivement Jean Jouzel qui a encouragé mes efforts de rédaction et dont l'impatience à me voir soutenir m'a aidée à me contenter de l'essentiel.

A de nombreuses reprises, Paul Duval a répondu avec le sourire et apparemment sans se lasser, à mes questions sur les lois de déformation de la glace. Je veux l'en remercier ainsi que d'avoir bien voulu présider le jury.

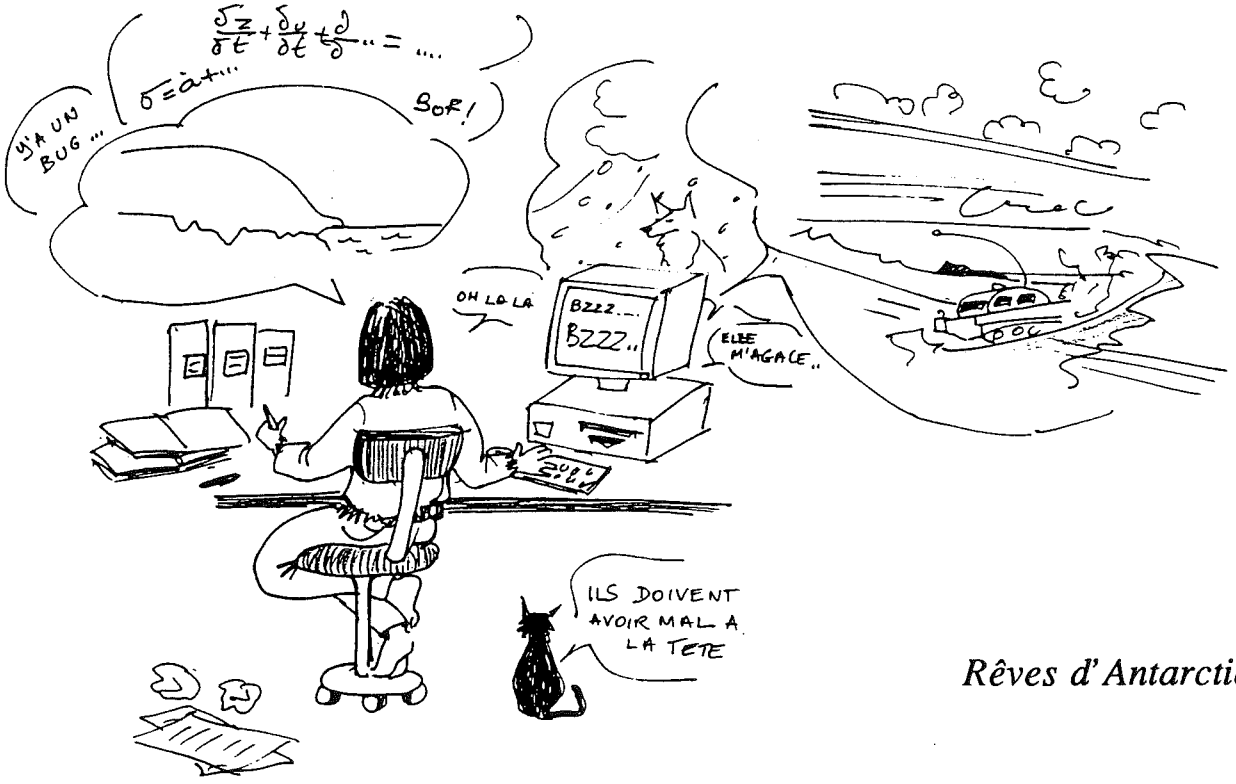
Je remercie Dominique Raynaud qui a consenti à être membre du jury et a toujours su montrer son intérêt pour la modélisation des calottes et ses implications climatiques. Je n'oublie pas non plus qu'il fut à l'origine de mes premiers contacts scientifiques internationaux.

Ma sincère gratitude va également à Jean-Francois Minster qui a accepté d'être rapporteur, à Monsieur le Professeur Geoffrey Boulton ainsi qu'à Messieurs Eric Brun et Baudoin Lismonde qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

La forme finale de ce document doit beaucoup à Jean Jouzel, Paul Duval, Baudoin Lismonde, Frédérique Remy, Anne Letréguilly, Renaud Lestringant et Jean-Pierre Benoist qui ont accepté de relire tout ou partie des versions préliminaires et m'ont fait part de leurs commentaires judicieux. Je suis particulièrement reconnaissante à Marie-Christine Mieulet, Jean-Pierre Benoist et Jean-Yves Bieser de m'avoir aidée à apprivoiser les ordinateurs. De nombreuses discussions scientifiques ont contribué à clarifier mes idées. Je tiens à évoquer l'apport des chimistes, Michel Legrand et Martine De Angelis sur les problèmes d'accumulation et la culture encyclopédique de Michel Vallon sur tous les sujets.

Nombreux sont les membres du Laboratoire qui au cours de la longue élaboration de ce mémoire m'ont aidée ou encouragée. Il y a aussi les petits détails qui soutiennent le moral du rédacteur en fin de thèse, le café de Manu, la présence de Guy le week-end (et celle de Négative), le sourire de Danielle, les E-mail de Patricia, le dessin de Martine, la reliure de Christine ... Il serait difficile de les citer tous mais je les remercie sincèrement.

Enfin, je remercie de tout coeur mes proches, Bernard qui m'a assuré un soutien sans faille, cumulant les rôles et supportant avec gentillesse cette dure période et ma Fée Morgane, qui a tenu à participer en apposant sa pointure 21 sur certains originaux et en ajoutant 14 pages de "w" au chapitre IV.



Rêves d'Antarctique

Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-Glacier Byrd : Sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus.

Résumé

Un modèle d'écoulement de la glace est développé en tenant compte du couplage vitesse-température. Ce modèle permet l'étude des réactions d'une calotte polaire aux variations du climat et est appliqués à la ligne de courant "Ridge B - Vostok - Glacier Byrd". (Antarctique de l'Est).

Les processus à prendre en compte, les équations de base ainsi qu'une étude bibliographique sont présentés au chapitre (I). Au chapitre (II) dans le but d'interpréter les forages glaciaires, nous développons un outil dans lequel les vitesses d'écoulement sont déduites de la géométrie de la nappe de glace et de l'alimentation par précipitation. A partir du champ de vitesse ainsi calculé, le champ de température est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur dépendant du temps avec des conditions aux limites qui tiennent compte de la fusion éventuelle à la base de la calotte de glace ainsi que de la température dans le socle rocheux. Cet outil est utilisé (chapitre III) pour calculer l'âge de la glace dans le carottage de Vostok. Il apparait que la principale incertitude sur la chronologie vient de la mauvaise connaissance de l'accumulation de glace en amont du forage. Le modèle de température permet également d'interpréter le profil de température mesuré à Vostok et d'en tirer des informations sur le flux géothermique et sur l'accumulation.

Le modèle thermo-mécanique (chapitre IV) simule l'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps. Les vitesses d'écoulement sont intégrées numériquement et couplées aux température à chaque pas de temps. Un modèle d'ice-shelf est également développé et les déplacements de la ligne d'échouage sont calculés en fonction de la dynamique de la calotte glaciaire et de celle de l'ice-shelf. Des études de sensibilité sont effectuées pour les divers paramètres du modèle. Les variations d'altitude à Vostok pour le dernier cycle climatique sont obtenues et ne dépassent pas 100 m.

A thermo-mechanical model of evolution for the glacial Antarctic basin Vostok - Byrd Glacier : Sensitivity to poorly known parameters.

Abstract

A model of ice flow with coupled velocity-temperature fields and ice-sheet reactions to climatic change is developed and applied to the flow line "Ridge B - Vostok - Byrd Glacier" (East Antarctica). The main processes to be taken into account, the basic equations and a bibliography study are presented in chapter (I). First a tool to interpret ice cores is developed in chapter (II). Velocities are derived from the ice sheet geometry and from accumulation rate. With this velocity field, the temperature field is obtained by solving the time dependent heat equation. The boundary conditions take into account possible melting at the ice base and the temperature distribution in the underlying bedrock. In chapter (III) this tool is used to compute the age of Vostok ice core. It is shown that the main uncertainty on this chronology is due to the poor knowledge of the accumulation rate upstream from Vostok station. Interpretation of the temperature profile measured in the Vostok borehole is also performed, providing information on the geothermal flux and the accumulation rate.

The thermal-mechanical model (chapter IV) simulates ice thickness evolution with time. Ice velocity are numerically integrated and coupled with temperature at each time step. An ice-shelf model is also developed and grounding line advance and retreat are computed depending on ice sheet and ice shelf dynamics. Sensitivity studies are performed for various model parameters. Variations in Vostok elevation during the last climatic cycle are presented and do not exceed 100 m.

NOTATIONS

Am(Z)	Amincissement des couches entre le site de déposition et le forage
a(Z)	Age de la glace (forage de Vostok)
B	Altitude du socle de la calotte
B_0	Coefficient de la loi de déformation à 0°C
B_T	Coefficient de la loi de déformation à la température T
B_{temp}	Coefficient de la loi de déformation pour de la glace tempérée
$\dot{b}$	Taux d'accumulation
$\dot{b}_m$	Valeur moyenne de l'accumulation à Vostok au cours du dernier cycle climatique
CBT	Couche basale tempérée
C_m	Variation de T_f avec la profondeur
c_{bord}	PAramètre du frottement sur les bords de la vallée (Glacier Byrd, chapitre IV)
c_g	Capacité calorifique de la glace
c_r	Capacité calorifique du socle
D	Refroidissement de l'air par détente
D_1	Diffusivité (équation d'évolution de l'épaisseur de glace), voir définition du débit (chapitre IV)
D_2	Définition du débit (chapitre IV)
D_a	Diffusivité de l'asthénosphère (isostasie)
D_l	Rigidité de la lithosphère (isostasie)
E	Altitude de la surface de la calotte
E_a	Energie d'activation (loi de déformation)
E_{sea}	ALtitude du niveau de la mer (par rapport à l'actuel)
$e_z(t)$	Epaisseur au temps t, d'une couche annuelle de glace actuellement à la profondeur Z dans le forage de Vostok
F	Force de frottement sur les bords de la vallée (Glacier Byrd, chapitre IV)
F(x)	fonction dans la paramétrisation de l'accumulation (chapitre III)
$\dot{f}$	Taux de fusion basale

G_0	Gradient de température à la base de la glace
G_f	Gradient de fusion dans la glace
g	Accélération de la pesanteur
H	Epaisseur de glace
H_0	Epaisseur au dôme
H_s	Epaisseur de socle considérée dans le calcul des températures
h	Enfoncement du socle (isostasie)
h_e	Enfoncement à l'équilibre (isostasie)
K_g	Conductivité thermique de la glace
K_r	Conductivité therimique du socle
k_{sl}	Coefficient de la loi de glissement
L	Longueur de la calotte
L_f	Chaleur latente de fusion
N_{eff}	Pression effective
n	exposant de la loi de déformation
m	Paramètre de la forme du profil de vitesse (déformation, chapitre II)
P_r	précipitation
P_s	Pression de vapeur saturante sur glace
p_w	Pression d'eau sous-glaciaire
Q	Production de chaleur dans la glace (déformation chapitre I, II et IV)
$\vec{Q}$	Transport horizontal d'humidité dans l'atmosphère (Q_x, Q_y) (chapitre III)
Q_r	Production de chaleur dans le socle (radioactivité, chapitre I et II)
Q_r	Refroidissement de l'air par déficit radiatif (chapitre III)
R	Constante des gaz parfaits
R_w	Constante spécifique de la vapeur d'eau
S	Refroidissement de l'air par subsidence
S_h	fonction de forme des lignes de courant (divergence)
s	Paramètre de la forme du profil de vitesse (proportion de glissement, chapitre II)

Notations

T	température
T_b	Température basale
T_f	Température de fusion de la glace
T_i	Température au dessus de la couche d'inversion
T_s	Température de surface
t	temps
t_i	Temps de réaction (isostasie)
$\bar{U}_i$	Vitesse horizontale dans la direction x_i, moyennée sur une colonne de glace
U_{bord}	Vitesse sur les bords de la vallée (glacier Byrd, chapitre IV)
u_i	Vitesse dans la direction x_i
u_{sl}	Vitesse de glissement
$u_{z\ cin}$	Vitesse verticale cinématique
$\vec{V}$	Vitesse horizontale des masses d'air (V_x, V_y)
w	Teneur en eau de la glace tempérée (chapitre I et IV)
w	Vitesse de subduction dans l'atmosphère (chapitre III)
x	Coordonnée horizontale. Dans les équations 2-D, x est le long de l'écoulement, origine au dôme.
x_a	Position de la ligne d'échouage
x_i	Coordonnée (x, y, ou z)
y	Coordonnée horizontale. Dans les équations 2-D, y est transversal. Origine sur la ligne de courant.
Y	Largeur d'un courant de glace (chapitre II), demi largeur du glacier émissaire
z	Coordonnée verticale. Dirigée vers le bas, origine au niveau de la mer actuel.
Z	Profondeur

ΔT_{clim}	Variation de température due au climat
ΔT_D	Variation de température déduite de δD
Δz	Epaisseur de la couche advective
δ	Epaisseur de la couche basale tempérée
δD	Teneur de la glace en deutérium
$\delta^{18}O$	Teneur de la glace ou de l'eau en ^{18}O
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Elément du tenseur des taux de déformation
$\dot{\gamma}$	Deuxième invariant du tenseur des taux de déformation
θ	ANgle entre la verticale et les murs de la vallée (glacier Byrd, chapitre IV)
λ	Epaisseur d'une couche annuelle de glace dans le forage
λ_0	Epaisseur initiale d'une couche annuelle (site et temps de déposition)
λ_s	Gradient vertical de température dans l'air à la surface de la calotte (le long de la pente, $\Delta T_s/\Delta E$)
η	Viscosité de la glace
ψ	Fonction de forme de la vitesse horizontale (chapitre II)
ϕ	Flux géothermique
ρ_a	Masse volumique de l'asthénosphère
ρ_g	Masse volumique de la glace
ρ_w	Masse volumique de l'eau de mer (chapitre II et IV)
ρ_w	Quantité de vapeur d'eau par unité de volume dans l'atmosphère (chapitre III)
τ	cission efficace
$\bar{\sigma}'_{back}$	Contrainte exercée par le Ross Ice-shelf sur la partie de l'ice-shelf en amont
σ_i	τ_{ii}
σ'_i	τ'_{ii}
τ_b	Contrainte de cisaillement à la base de la glace
τ_{ij}	Elément du tenseur des contraintes
τ'_{ij}	Elément du déviateur des contraintes
ζ	Profondeur réduite (Z/H)

Notations

TABLE DES MATIERES

Introduction 7

Chapitre I : Présentation du sujet, processus à prendre en compte, bibliographie. 11

I.1 But poursuivi 11

I.2 Principales caractéristiques de l'antarctique 12

I.2.A Les différentes régions de l'Antarctique 12
- Antarctique de l'Est 12
- Antarctique de l'Ouest 12
- Péninsule Antarctique 14
- Chaîne Transantarctique 14
- Ice-shelves 14
- Glaciers émissaires 14

I.2.B Données actuelles disponibles. 15
- L'altitude de la surface (E) 15
- L'épaisseur de glace (H) et l'altitude du socle (B) 15
- La température de la surface (Ts) 18
- Le bilan en surface ($\dot{b}$) 20

I.3 Phénomènes à prendre en compte, équations de base. 23

I.3.A Référentiel. 23

I.3.B Conservation de la masse. 24
- Incompressibilité. 24
- Conservation de la masse appliquée à une colonne de glace. 25

I.3.C Isostasie 26

I.3.D Contraintes et déformations 28
- Contraintes 28
- Equations d'équilibre quasi-statique 28
- Déformations 29
- Loi de comportement 29

- Conditions aux limites pour les contraintes et les vitesses. 33
. Condition en surface 33
. Condition au fond 33
. Lois de glissement à petite échelle. 34
. Lois de glissement à grande échelle. 35
. Condition sur le bord 36

I.3.E Champ de température. 37
- Equation de la chaleur dans les milieux continus 37
- Conditions aux limites pour la température. 38
. En surface 38
. A l'interface glace-socle. 39
Base froide
Base tempérée
. A la base du socle 39

I.3.F Forçage climatique, amplitude des variations passées. 40
- Relation : Rapport isotopique - température en surface 40
- Variations de l'accumulation 41
- Relation avec le climat mondial, niveau des mers. 42

I.4 Etude bibliographique.
43

I.4.A Approximations employées pour modéliser l'écoulement. 43
- Approximation de l'écoulement par cisaillement simple. 43
- Approximations d'ordre supérieur. 45
. L'obtention de la valeur moyenne du déviateur des contraintes σ'_x. 46
. L'approximation de la couche mince (shallow ice approximation) 47
. La résolution rigoureuse des équations par une méthode aux éléments finis 47

I.4.B Les modèles à géométrie imposée. 48

I.4.C Les modèles d'évolution. 49
- Calotte isotherme 49
- Prise en compte du champ de température. 50

I.5 Comment tester les modèles 51

I.5.A Données tirées des forages profonds. 52

I.5.B Mesures de surface 53
- Vitesses. 53
- Déformations 54
- Altitude de la surface. 54

I.6 Démarche suivie dans ce travail 55

Chapitre II : Description du modèle "A géométrie imposée" 59

Introduction. 59

II.1 Champ de vitesses 61

II.1.A Vitesses de bilan 61
- Définition des lignes de courant, convergence de l'écoulement, équation de bilan . 61
- Résolution numérique 64

II.1.B Profils verticaux de vitesse 66
- Profil de vitesse verticale imposé. 66
- Profil de vitesse horizontale imposé. 67
  - Modèle de Lliboutry pour une nappe de glace froide (sans glissement). 67
  - Généralisation au cas avec glissement. 70
  - Implications de cette formulation sur les autres composantes de la vitesse. 71
    + vitesse transversale.
    + Vitesse verticale et taux de déformation.
  - Restrictions sur l'utilisation de ce type de modèle 76
    + Calcul numérique du profil de vitesse.
    + Cas non stationnaire. 77

II.1.C Cas particulier des dômes. 78

II.1.D Profil analytique compatible avec le modèle pour une calotte polaire en état stationnaire. 82
- Obtention du profil d'équilibre 82
- Test du calcul des vitesses de bilan. 86
- Champs de vitesses horizontales et verticales 86

II.2 Champ de températures. 89

II.2.A Processus pris en compte, équations de base. 89
- Equation dans la glace 89
- Conditions aux limites. 90
  - Limites latérales. 90
  - Condition en surface 90
  - Condition à la base du glacier. 92
    + Température de fusion 92
    + Types de base 92
    + fusion basale 93
    + Influence de la condition basale sur l'écoulement. 94
    + Influence des propriétés thermiques de la glace 95
- Calcul dans le socle rocheux. 95
  - Equation simplifiée dans le socle. 96

II.2.B Modèle numérique 99
- Maillage. 99
- Equations dans le système de coordonnées ζ. 100
- Schéma temporel. 101
- Prise en compte de la chaleur de déformation Q_g. 103
  - chaleur, Q_g, concentrée à la base. 103
  - Chaleur, Q_g, répartie dans le glacier. 103
  - Chaleur de déformation et couche basale tempérée. 105
    + Formulation analytique de la température dans le bas du glacier. 106
    + Détermination de δ, l'épaisseur de la couche basale tempérée. 109
    + Fusion dans la couche basale tempérée. 109
- Tests sur les types de base. 110
  - Départ base froide. 110
  - Départ base tempérée. 111

II.2.C Résultats préliminaires. 114
Article : Ritz, C. 1987. Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets. 117

Conclusions 127

Chapitre III: Application du modèle "surface imposée" à l'interprétation du forage de Vostok : datation et temperature dans la glace. 131

Introduction 131

III-1 Signal climatique 132

III.1.A Température à la surface de la calotte 132
- Enregistrement climatique à Vostok. 132
- Généralisation à l'ensemble de l'Antarctique. 135

III-1-B Accumulation 137
- Processus gouvernant la précipitation en Antarctique 137
- Modélisation simple de la précipitation d'après le bilan de l'eau atmosphérique. 138
- Ordre de grandeur de l'accumulation ainsi obtenue. 143
- Répartition spatiale. 143
- Variations de l'accumulation en un site donné. 144
- Variations de l'accumulation avec le climat. 145
  - Pression de vapeur saturante. 145
  - Transport méridien 145
  - Bilan radiatif. 146
  - Subsidence. 147
- Comparaison avec les résultats des MCG. 148
- Conclusion. 150

III.2 Datation du forage de Vostok. 150

III.2.A Autres méthodes de datation des carottes de glace. 150
- Détermination stratigraphique des couches annuelles. 150
- Reconnaissance d'horizons repères. 151
- Comparaison avec d'autres enregistrements climatiques. 152
- Calage sur les périodes orbitales. 153
- Datation avec les isotopes radioactifs. 154

III.2.B Description de la méthode de datation par modélisation de l'écoulement. 156
- Principe de base pour la datation de la glace. 156
- Amincissement 158
  - Lignes d'écoulement 158
  - Suivi des trajectoires. 158
  - Intersection avec la surface, variation d'épaisseur 164
- accumulation passée. 166
  - composition de l'océan 166
  - Variations locales de l'accumulation. 167

III.2.C Résultats. 170
- Etude de sensibilité. 172
  - Topographie en amont. 172
  - Profil vertical de vitesse. 174
  - Accumulation. 177
    + Accumulation actuelle à Vostok. 177
    + Variation de l'accumulation entre Ridge B et Vostok. 178
    + Fonction de transfert isotope-accumulation. 178
  - Variations d'épaisseur au cours du temps. 182
- Comment choisir une datation. 186
  - Utilisation de l'enregistrement en ^{10}Be. 186
  - Comparaison avec les enregistrements marins en utilisant un repère stratigraphique donné par la concentration en poussière. 189
    + Repères stratigraphiques. 189
    + Procédure pour caler les chronologies calculées. 190
- Datation comparée des carottages de Vostok et Dôme B. 196
- Conclusions. 200
- Perspectives 201

III.3 Interprétation du profil de temperature mesuré dans le forage de vostok. 202

Article : Ritz, C. 1989. Interpretation of the temperature profile measured at Vostok, East Antarctica. 203

Conclusion 210

Chapitre IV: Variations d'épaisseur au cours du temps. Modèle d'évolution avec couplage vitesse-température. Application a la ligne de courant de vostok 217

Introduction 217

IV.1 Description du modèle 219

IV.1.A Champ de vitesse dans la calotte glaciaire. 219
- Détermination de la contrainte de cisaillement τ_{xz}. 219
- Vitesse horizontale due à la déformation. 223
  - Loi de déformation : valeurs de l'exposant et du coefficient. 224

- Intégration numérique. 225
- Vitesse basale, loi de glissement. 227
- Vitesse verticale. 229
- Couplage température-vitesse. 231
- influence de la température sur l'écoulement. 231
- Influence de l'écoulement sur la température. 232
  . Advection 232
  . Production de chaleur due à la déformation. 234

IV.1.B Contraintes et champ de vitesse dans l'ice-shelf. 235
- Ecoulement au bord de la calotte glaciaire et intérêt d'un modèle d'ice-shelf. 235
  . Bord terrestre en zone d'ablation. 235
  . Bord terrestre en zone d'accumulation. 235
  . Bord marin. 236
- Modèles simples d'ice-shelf, étude bibliographique. 237
  . Ice-shelf non confiné. 237
  . Ice-shelf dans une baie à bords parallèles. 240
- Description de notre modèle d'ice-shelf. 244
  . Contraintes 245
    + Ross ice-shelf. 245
    + Vallée. 245
  . Température 251
  . Déformations et vitesses 251
  . Epaisseur 252

IV.1.C Modélisation de la zone de transition calotte glaciaire - ice-shelf. 252
- Nécessité d'un traitement particulier. 252
- Modèles de jonction calotte - ice-shelf : Etude bibliographique. 253
- Modélisation de l'écoulement dans la partie aval de la calotte glaciaire. 257
  . Influence de l'ice-shelf : σ'_x 258
  . Effet du frottement sur les bords de la vallée : τ_{xy} 258
  . Effet de la convergence des lignes de courant : σ'_y 259
  . Calcul de la vitesse à la ligne d'échouage. 261

IV.1.D Evolution de la géométrie. 262
- Conservation de la masse et variation d'épaisseur 262
  . Equation d'évolution dans la calotte glaciaire. 262
  . Equation d'évolution dans l'ice-shelf. 263

. Conditions aux limites. 264
- Dôme.
- Bord de l'ice-shelf.
- Jonction calotte glaciaire - ice-shelf.
. Résolution numérique. 264
. Test avec une solution analytique. 265
- Isostasie 266

IV.2 Résultats

271

IV.2.A Etat d'équilibre, étude de sensibilité. 272
- Description des expériences. 272
. Conditions aux limites liées au climat. 272
. Etat initial. 273
. Paramètres du modèle et expérience de référence. 275
- Résultats de l'expérience de référence. 275
- Etude de sensibilité. 280
. Flux géothermique 280
. Coefficient de la loi de déformation. 282
. Influence de la teneur en eau dans la couche basale tempérée. 285
. Glissement basal 285
. influence de l'ice shelf. 288
. Conditions climatiques. 291
. Régionalisation de l'isostasie. 294
. Prise en compte de la contrainte déviatorique σ'_y, liée à la convergence des lignes de courant. 294
- Conclusion de l'étude de sensibilité sur l'état d'équilibre. 294

IV.2.B Changement d'épaisseur de la calotte en réponse à une perturbation climatique de forme simple. 295
- Description des expériences 295
- Expérience de référence. 297
- Sensibilité au flux géothermique et au coefficient de la loi de déformation. 304
- Sensibilité au coefficient de la loi de glissement. 307
- Sensibilité à la paramétrisation de l'accumulation. 309
- Sensibilité à la modélisation de l'isostasie. 311
- Sensibilité au sens de la perturbation climatique. 311
- Conclusions de ces expériences d'évolution avec perturbation climatique de forme simple. 313

IV.2.C Changement d'épaisseur de la calotte au cours du dernier cycle climatique. 314
- Procédure suivie. 314
- Résultats des évolutions sur le dernier cycle climatique. 316
- Comparaison entre les profils actuels calculés et mesuré. 322
- Conclusion sur les variations d'altitude à Vostok. 324

IV.3.A conclusion et prospectives 325

Conclusion 331

Annexes 337

Annexe 1 Propriétés physiques de la glace et du socle rocheux. 337

- Densité de la glace. 337
- Conductivité thermique de la glace. 337
- Capacité calorifique de la glace 338
- Fusion de la glace. 338
- Propriétés thermique du socle rocheux 339
- Loi de déformation de la glace. 340
- Unités et constantes universelles utilisées. 341

Annexe 2 Formulation analytique des taux de déformation et de la vitesse verticale dans le modèle à géométrie imposée. 343

- Notations. 343
- Dérivations horizontales. 344
- Intégrations verticales. 345

Annexe 3 Résolution numérique d'une équation de diffusion. 347

- Schéma explicite. 347
- Schéma implicite. 348
- Schéma Crank Nicholson et schémas apparentés. 349

Annexe 4 Pression de vapeur saturante et fonctions dérivées. 353

Références bibliographiques. 357

INTRODUCTION

L'Antarctique est un continent qui suscite le rêve. Après avoir attiré les explorateurs, il captive maintenant les scientifiques qui y voient en particulier une clef du système climatique mondial. Certains partent en expédition, effectuent des raids dans des conditions rudes, forent des trous de plusieurs kilomètres et en rapportent de précieuses carottes de glace qui nous informent sur le climat régnant dans des temps reculés. D'autres restent sous des latitudes tempérées (bien au chaud) et sans avoir jamais mis les pieds sur un glacier plus grand que la Mer de Glace (si ce n'est en rêve), façonnent une calotte glaciaire à coup d'équations et d'ordinateurs. L'auteur de cet ouvrage fait partie de ces derniers mais ne désespère pas de confronter un jour modèle et réalité.

Au cours de cette thèse nous avons développé deux modèles (destinés à des usages différents) et tous deux ont été appliqués à la ligne de courant passant par Vostok car l'un des objectifs de ce travail était d'améliorer l'interprétation des enregistrements obtenus dans ce forage. Notre but a été non seulement de mettre au point des modèles et d'en tirer des simulations ou des âges pour les carottes de glace, mais aussi de tenter de répondre à la question : " Quelle confiance peut-on accorder aux modèles de calotte polaire ? ". La démarche que nous avons suivie a consisté à partir des équations de base et à souligner au fur et à mesure les simplifications faites pour aboutir à un modèle. D'autre part nous avons effectué systématiquement des études de sensibilité afin d'évaluer à quel point notre médiocre connaissance de certains paramètres affecte les résultats trouvés.

Dans le chapitre (I), après une rapide description géographique de l'Antarctique, nous présentons les phénomènes à prendre en compte pour modéliser l'écoulement à grande échelle d'une calotte glaciaire. Par grande échelle nous entendons l'ensemble d'une ligne de courant, depuis le centre de la calotte jusqu'à son bord soit environ 1000 km en Antarctique de l'Est. Dans une étude bibliographique, nous analysons ensuite comment les divers auteurs ont simplifié les équations de base pour parvenir à des modèles d'écoulement et d'évolution.

Le chapitre (II) présente le premier modèle que nous avons développé. Dans ce modèle, appelé "à géométrie imposée" le champ de vitesse est déduit de la géométrie et de l'alimentation. Le champ de température est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur dépendant du temps. A l'interface avec le socle, la condition à la limite tient compte du champ de température dans le socle rocheux et des phénomènes de fusion de la glace. La production de chaleur par déformation est prise en compte d'une façon détaillée et le modèle simule l'existence d'une couche basale tempérée dans certaines régions de la calotte.

Dans le chapitre (III) nous utilisons le modèle "à géométrie imposée" pour améliorer l'interprétation de l'enregistrement climatique obtenu dans le forage de Vostok. Nous développons tout d'abord les relations utilisées pour estimer les variations au cours du temps de la température de surface et du taux d'accumulation. Ensuite, à partir du champ de vitesse du modèle, nous suivons les trajectoires des particules de glace et en déduisons l'âge de la glace en profondeur. Une étude de sensibilité montre que la chronologie ainsi calculée dépend surtout des hypothèses faites sur les variations spatiales et temporelles de l'accumulation. Nous appliquons également notre modèle à l'analyse du profil de température mesuré dans le trou de forage de Vostok.

Le chapitre (IV) est consacré à un deuxième modèle qui simule l'évolution, sous l'action du climat, de l'épaisseur de glace tout au long d'une ligne de courant de l'Antarctique de l'Est. Cette ligne de courant présente la particularité de traverser la chaîne Transantarctique et dans cette zone, la nappe de glace se trouve sous la forme d'un glacier de vallée. Ce modèle est couplé température-vitesse et les mouvements de la ligne d'échouage sont déterminés en fonction de la dynamique de la calotte glaciaire, de celle de l'ice-shelf et du niveau des mers. Nous introduisons aussi le frottement sur les bords d'une vallée qui joue un rôle non négligeable sur l'écoulement de l'ice-shelf. Ce modèle est utilisé pour calculer la réaction de la calotte glaciaire lors d'une perturbation climatique et une étude de sensibilité est effectuée pour évaluer l'influence des divers paramètres. Nous reconstituons également l'évolution de l'altitude de la surface à Vostok au cours du dernier cycle climatique.

CHAPITRE I

PRESENTATION DU SUJET
PROCESSUS A PRENDRE EN COMPTE
BIBLIOGRAPHIE.

I.1 BUT POURSUIVI

Ce travail a deux objectifs: modéliser l'évolution d'une calotte polaire sous l'action du climat et interpréter le mieux possible les données obtenues dans les forages profonds. Ces deux objectifs ne sont pas indépendants. Les données tirées des forages peuvent en effet servir soit d'entrée dans les modèles d'évolution (pour donner par exemple les variations de la température en surface) soit de test des modèles (profils de température, inclinométrie). Réciproquement la connaissance des variations d'épaisseur de la calotte polaire permettrait une meilleure interprétation des forages profonds.

Bien que ces deux problèmes nécessitent en général des modèles à des échelles différentes, les processus à prendre en compte sont les mêmes. Il s'agit de déterminer comment la calotte polaire est alimentée (précipitations) et comment la glace s'écoule et s'évacue vers les bords.

Dans la glace polaire le champ de température et le champ de vitesse sont liés. En effet l'advection (transport de chaleur avec le mouvement) est un processus fondamental dans l'établissement du champ de température. Réciproquement la loi de déformation de la glace et plus encore le glissement à la base dépendent de la température.

En raison de ce couplage température-vitesse, les variations climatiques ont un effet non seulement sur le bilan à la surface (accumulation ou ablation), mais aussi sur l'écoulement de la glace. De plus, l'effet sur le bilan de surface est immédiat, alors que l'action de la température sur l'écoulement se fait surtout lorsque la perturbation de température atteint le fond du glacier. Ce déphasage peut atteindre plusieurs dizaines de milliers d'années, il est donc nécessaire d'étudier l'évolution du champ de température sur une longue durée.

Dans ce chapitre nous décrivons les principales caractéristiques de l'Antarctique, les données disponibles ainsi que les équations de base du problème couplé et celle de l'évolution de la calotte. Nous abordons également les problèmes d'interaction (thermique et mécanique) avec le socle rocheux. Les processus à prendre en compte sont tout d'abord présentés de la façon la plus générale possible puis les différentes méthodes pour aborder le problème sont détaillées dans l'étude bibliographique.

I.2 PRINCIPALES CARACTERISTIQUES DE L'ANTARCTIQUE

I.2.A Les différentes régions de l'Antarctique

La figure (I.1) situe les différents lieux géographiques cités.

- Antarctique de l'Est

La calotte Antarctique est en réalité constituée de deux calottes distinctes reliées entre elles par un col (d'altitude 2100 m). L'Antarctique de l'Est est la plus importante de ces calottes (74 % de la surface et 86.5 % du volume total). C'est dans cette région que se trouve le forage de Vostok que nous étudierons plus particulièrement, ainsi que celui de Dôme C. Il y a un Dôme principal (Dôme A) à 4000 m d'altitude et plusieurs Dômes secondaires: Ridge B (qui est plutôt une crête à 3700 m), Dôme C (3200 m d'altitude) et Valkyrjedomen (3700m).

- Antarctique de l'Ouest

Cette calotte est nettement plus petite (14.2 % en surface, 10.2 % en volume) et son altitude maximum est 2500 m. Son socle est presque entièrement sous le niveau de la mer. Ce type de calotte polaire est appelée "calotte marine" et est souvent considérée comme plus instable. Le forage de Byrd est situé en Antarctique de l'Ouest.

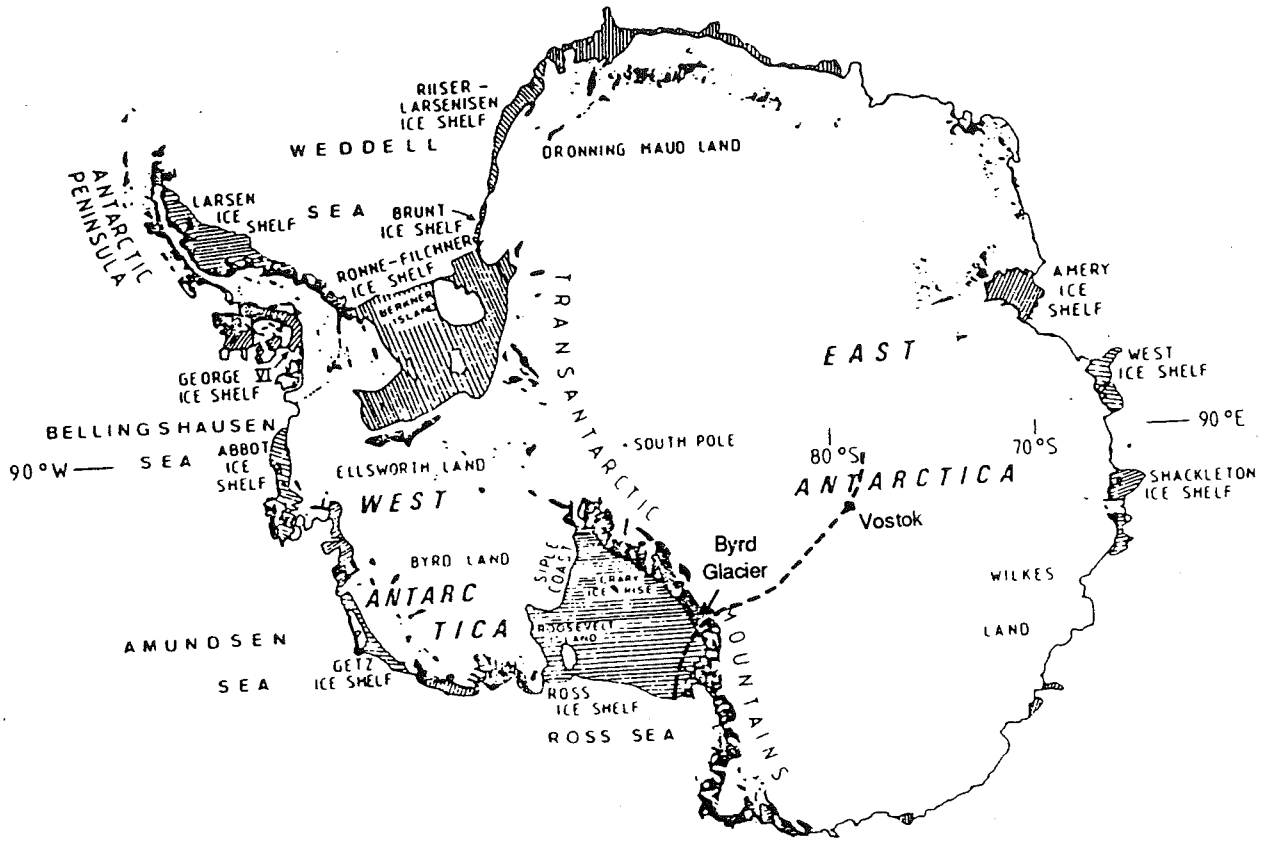


Figure I.1 : Principales caractéristiques de l'Antarctique.
D'après Van der Veen (1986). La ligne de courant passant par Vostok est représentée en pointillés.

- Péninsule Antarctique

C'est une chaîne de montagne qui comprend plusieurs petites calottes ainsi que des glaciers de vallée.

- Chaîne Transantarctique

Cette chaîne de montagne borde l'Antarctique de l'Est et forme une barrière traversée en quelques endroits par des fleuves de glace (par exemple le glacier Byrd) qui évacuent la glace venant de l'Antarctique de l'Est vers l'ice-shelf de Ross. Au chapitre (IV) nous nous intéresserons plus particulièrement à l'écoulement de ces glaciers car la ligne de courant que nous étudions (celle sur laquelle est située la station Vostok) passe par le Glacier Byrd.

- Ice shelves

Les ice shelves sont des plate-formes de glace et de névé (donc zones d'accumulation) prolongeant la calotte polaire et flottant sur la mer (il n'existe pas de terme français équivalent). Leur épaisseur ne dépasse pas quelques centaines de mètres. Les principaux ice-shelves ont rempli les échancrures du continent : Ross Ice Shelf, Ronne (ou Filchner) Ice shelf et Amery Ice shelf. Ces ice shelves jouent un rôle d'arc-boutant en limitant l'écoulement de la glace venant des calottes Antarctiques Est et Ouest. Nous aborderons ce problème au chapitre (IV) car la ligne de courant étudiée aboutit dans le Ross ice shelf (voir figure I.1).

- Glaciers émissaires

Sur la côte, l'évacuation de la glace ne se fait pas de façon uniforme. De grands fleuves de glace (ou glaciers émissaires) dont la vitesse est élevée (plusieurs centaines de mètres par an) drainent la plus grande partie de la glace, alors que d'autres parties de la côte sont stagnantes (5 m/an à D10 à 10 km de la côte en Terre Adélie). D'après Morgan et al. (1982) 90 % de la glace est évacuée par les fleuves de glace qui ne représentent que 13 % de la côte (Drewry & al. 1982).

I.2.B Données actuelles disponibles.

- L'altitude de la surface (E)

Hormis quelques montagnes émergeant de la glace, le continent Antarctique (14 millions de km^2) est entièrement couvert de glace. L'altitude de la surface (figure I.2) a tout d'abord été obtenue par barométrie lors de raids sur le continent (précision ± 50 m, Bentley 1964) puis à partir de moyens aériens (ballons et avions, précision ± 30 m. Drewry 1975) et plus récemment à l'aide d'altimètres radar embarqués sur des satellites (par SEASAT précision d'environ 0.4 m dans les régions de faible pente, Remy et al. 1989).

L'altitude de la surface augmente depuis la côte jusqu'au centre où la calotte atteint un peu plus de 4000m. La pente de la surface est forte près des côtes ($5\ 10^{-2}$) mais devient de plus en plus faible en allant vers l'intérieur. En particulier, toute la région centrale a une pente extrêmement faible (10^{-3}).

- L'épaisseur de glace (H) et l'altitude du socle (B)

L'épaisseur de glace est généralement déterminée par sondage radio-électrique aéroporté (Robin et al. 1969). Les ondes radios pénètrent en effet dans la glace et se réfléchissent sur le socle rocheux. Cette méthode permet de déterminer en même temps l'altitude de la surface et du socle (précision ± 30 m, Drewry 1975). L'épaisseur peut également être mesurée par sondage sismique et gravimétrie. Ces dernières méthodes ont surtout été employées lors de raids. Une bonne partie du socle rocheux a ainsi été cartographiée. (Figure I.3).

A partir de ces données Drewry (1983) a déterminé que l'épaisseur moyenne est 2200 m , la plus forte valeur mesurée atteignant 4800 m (à 400 km de la côte de Terre Adélie). Le poids de cette glace a provoqué l'enfoncement du socle qui se trouve en bonne partie en dessous du niveau de la mer.

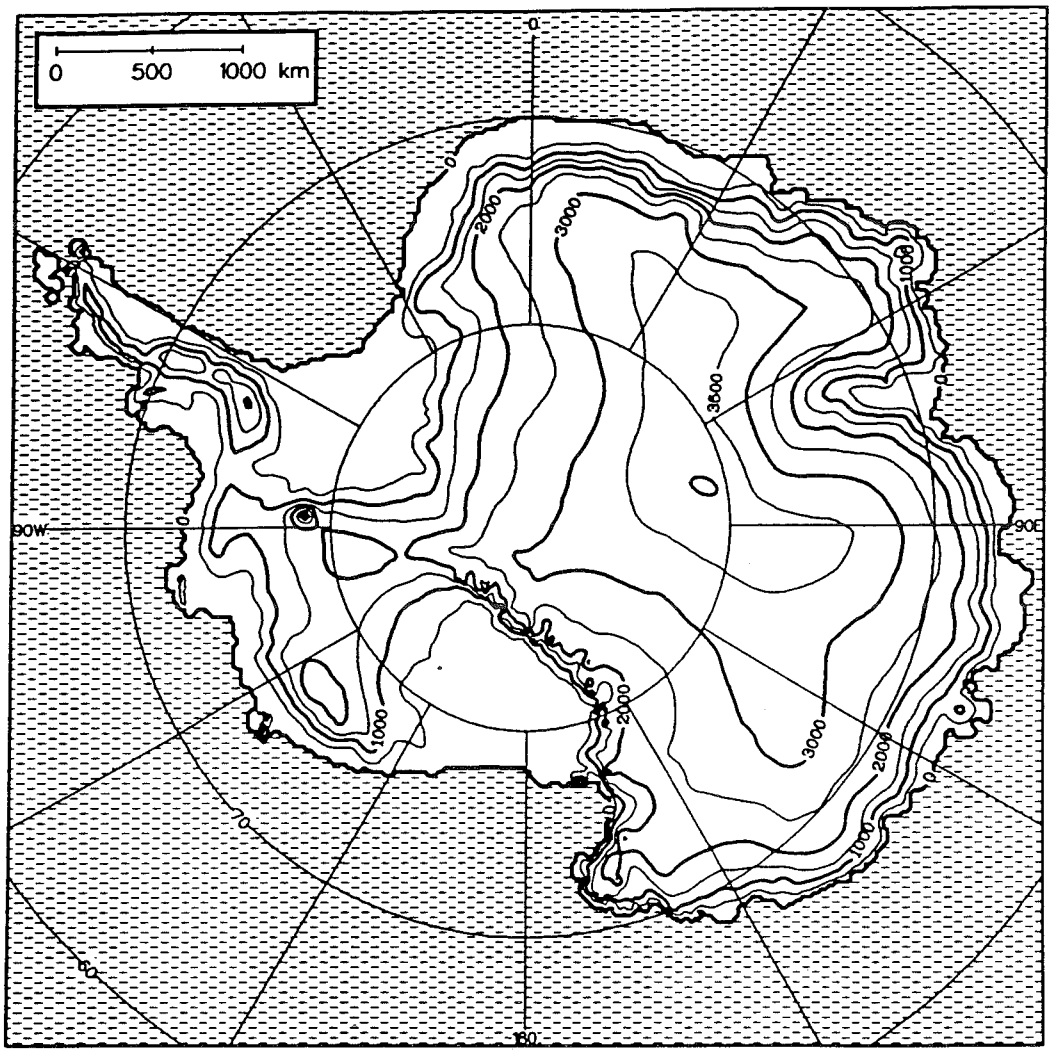


Figure I.2 : Altitude de la surface de l'Antarctique (en m).
D'après Drewry (1983). Numérisé par Mademoiselle Kia Mavrakis, au Meteorology Department, University of Melbourne, Victoria.

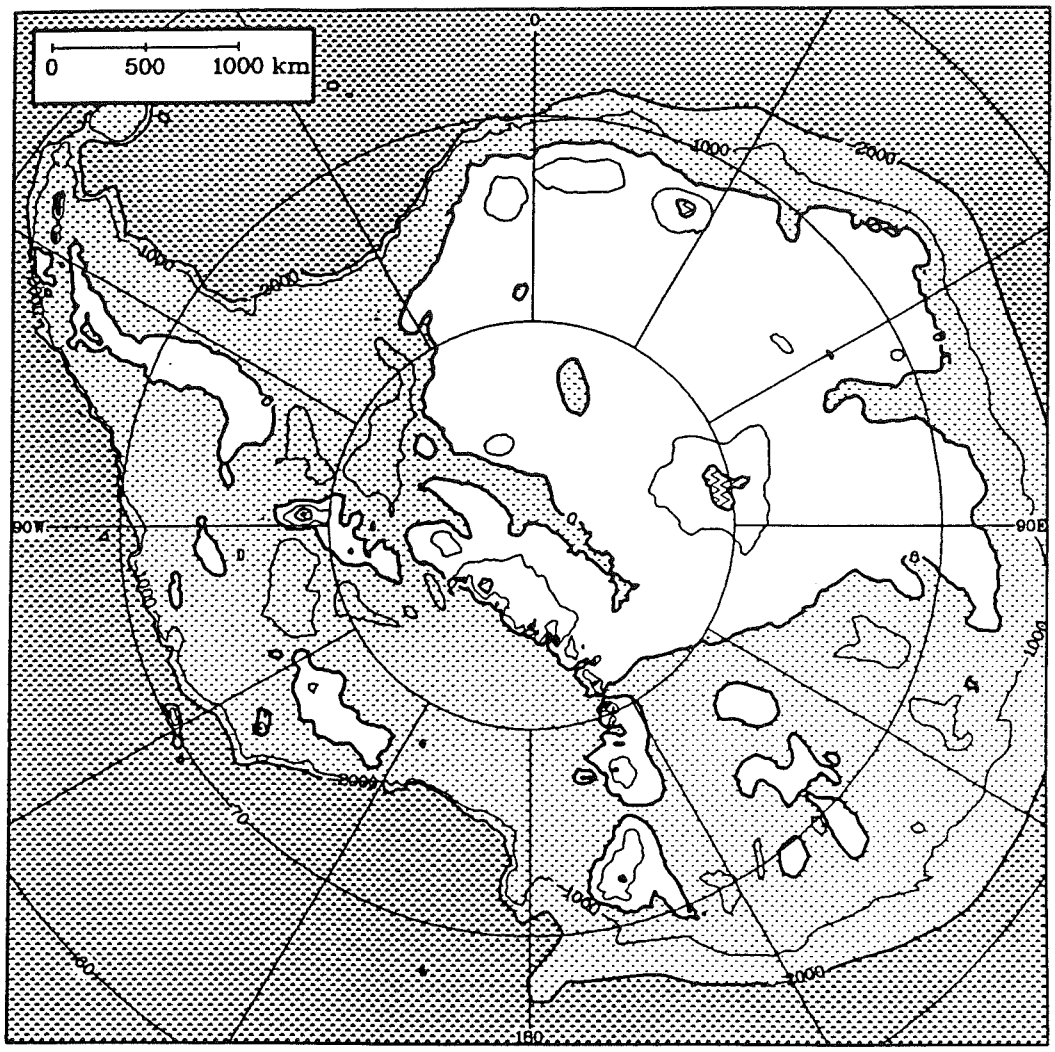


Figure I.3 : Altitude du socle de l'Antarctique (en m).
D'après Drewry (1983). Numérisé par Mademoiselle Kia Mavrakis, au Meteorology Department, University of Melbourne, Victoria.

Un point important à noter est que le relief du socle est très tourmenté ainsi que le montre par exemple le profil entre Dôme C et Dumont d'Urville (Figure I.4). Ceci aura une influence lorsqu'on abordera le problème des lois de glissement. Pour les modèles à grande échelle qui couvrent l'ensemble d'une ligne de courant (ou même l'ensemble de l'Antarctique pour Huybrechts 1990_a), la maille horizontale est 40 ou 50 km et nous voyons qu'à cette échelle le relief du socle doit être considérablement lissé.

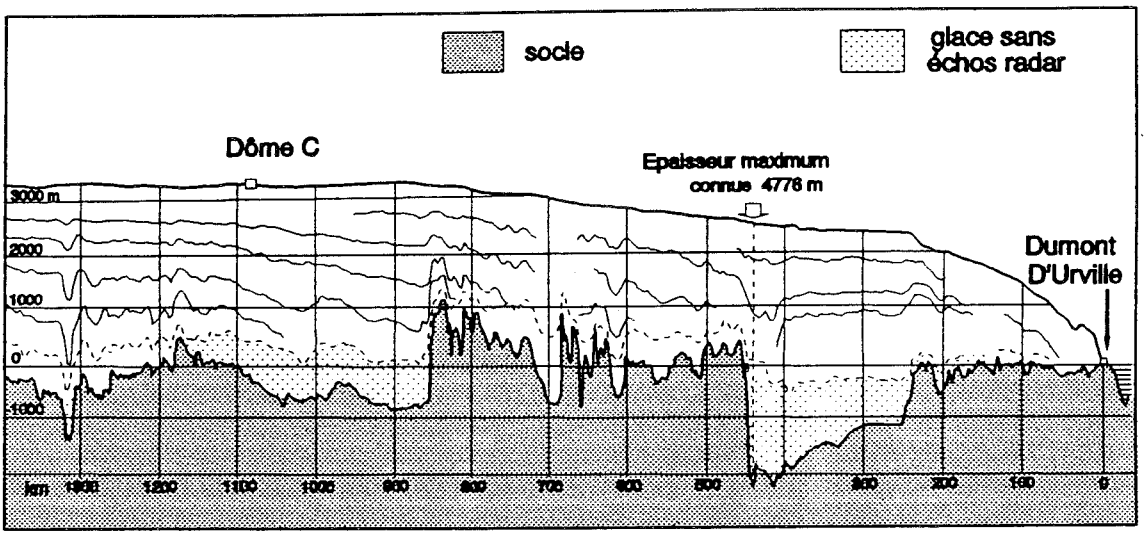


Figure I.4 : Profil de la surface et du socle mesuré par écho radar le long de l'axe Dôme C - Dumont d'Urville. *D'après Drewry, (1983)*

- La température de la surface (Ts)

C'est la température de la surface de la calotte polaire moyennée sur une année. Pour obtenir une telle donnée, il faudrait faire des mesures tout au long de l'année ce qui n'est possible qu'en un très petit nombre d'endroits en Antarctique. En pratique, on utilise la température à 10 m de profondeur. A cette profondeur en effet, les variations saisonnières de

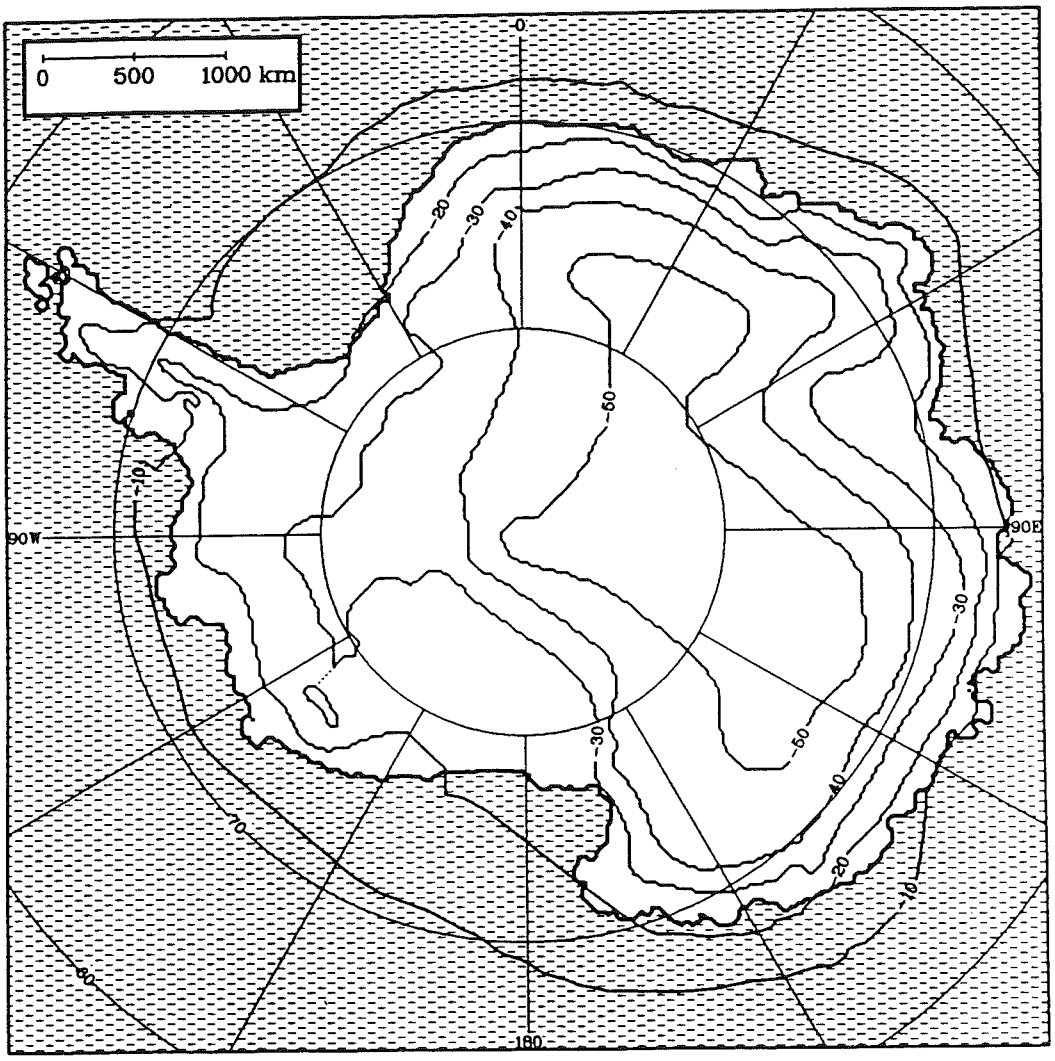


Figure I.5 : Température à la surface de l'Antarctique (en °C).
D'après une carte préliminaire de Drewry. Jenssen et al. (1985) et Radok et al. (1986)

température sont suffisamment atténuées (Lliboutry 1965). La mesure se fait en général en forant un trou dans le névé et en laissant une thermistance (ou une grappe de thermistances) jusqu'à ce que la température soit stabilisée (quelques heures). Cette mesure est précise (souvent 0.1°C). Cependant, étant donné que cette méthode nécessite la présence sur le terrain, les mesures sont très ponctuelles (le long des raids). Il faut noter que dans les sites où la température en surface est mesurée tout au long de l'année on observe une différence entre la moyenne annuelle de la température en surface et la température à 10 m (jusqu'à 2°C à Vostok). Cela n'a pas d'incidence sur la modélisation du champ de température dans la glace, car c'est la température à 10 m qui constitue la condition à la limite supérieure.

La carte des températures de surface est présentée figure (I.5). On remarque que la température est directement liée à l'altitude du lieu. Cette relation n'est cependant pas simplement linéaire. D'après Budd et al. (1971) le gradient de température selon l'altitude de la surface varie fortement de la côte vers le centre : il est environ de 1°C / 100 m sur la côte, puis il augmente jusqu'à 2°C / 100 m et diminue à nouveau pour atteindre une valeur de 0.5 °C / 100 m au centre.

Enfin une caractéristique de l'Antarctique est l'existence d'une couche d'inversion de température due au fort refroidissement radiatif de la surface. L'amplitude de cette inversion varie d'environ 20°C dans le centre à 0°C sur la côte et est beaucoup plus forte en hiver qu'en été (Phillpot et Zillman 1970).

Les variations au cours du temps de la température en surface sont traitées plus loin (I.3.F et III.1.A).

- Le bilan en surface ($\dot{b}$)

Les épisodes de fonte sont rares en Antarctique et limités aux régions côtières. L'eau de fonte regelant au sein du névé, sans parvenir à le porter à 0°C, aucune ablation ne s'ensuit dans le cas général. Les précipitations sont toujours solides, mais l'accumulation peut localement différer de la précipitation à cause du transport de la neige déposée par le vent.

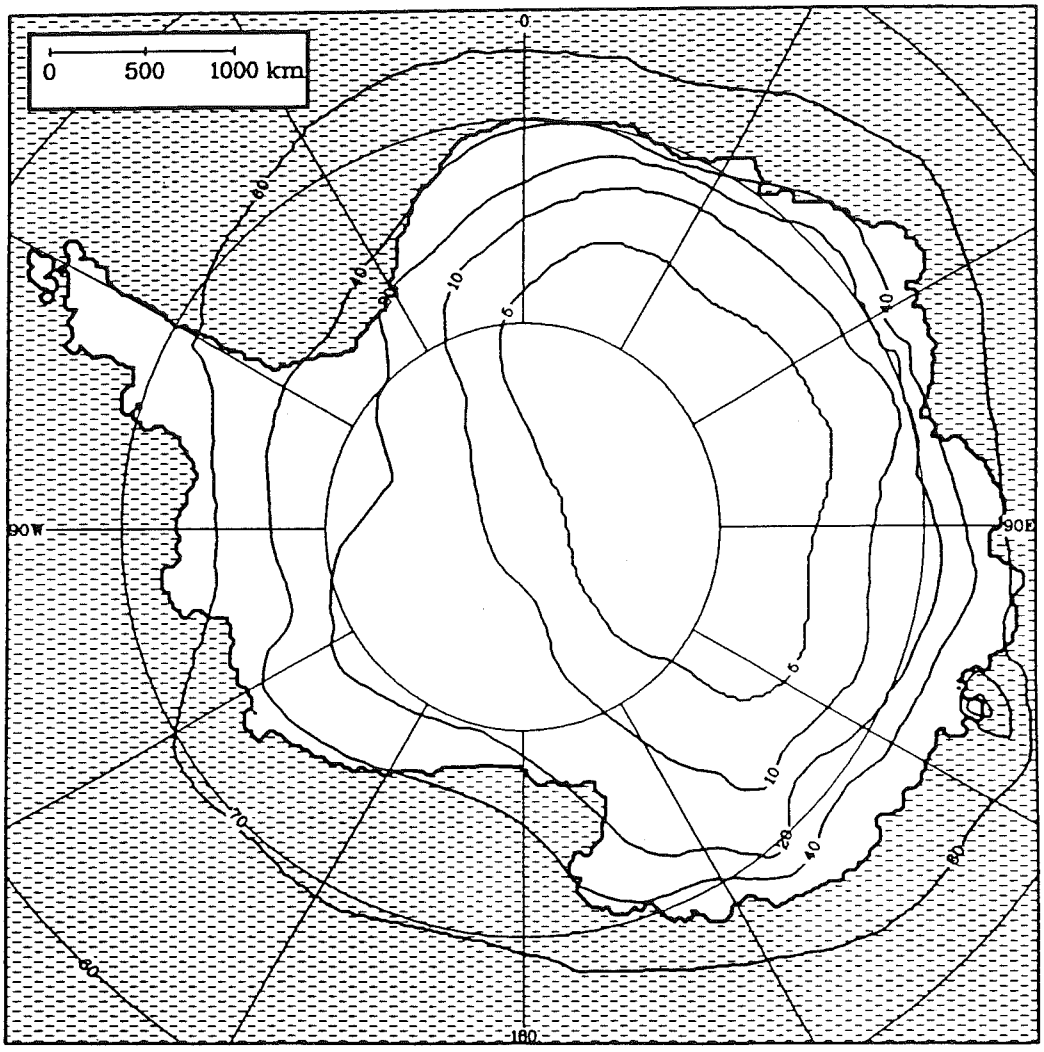


Figure I.6 : Accumulation en Antarctique (en g cm^{-2} an^{-1}).
D'après une carte préliminaire de Drewry. Jenssen et al. (1985) et Radok et al. (1986)

Seules quelques petites parties le long de la côte présentent un bilan négatif et sont en glace vive mais c'est un phénomène très local qui n'est pas représentatif du bilan de surface à l'échelle d'une maille de 20 km x 20 km (grille de notre carte). Nous confondrons donc accumulation et bilan.

Le bilan peut se mesurer de plusieurs façons : avec des balises (ce qui nécessite plusieurs passages) ou par stratigraphie (repérage des couches été-hiver, analyse chimique, isotopique ou radioactivité). Dans les méthodes stratigraphiques il faut surtout signaler la méthode par mesure de la radioactivité β qui consiste à repérer les horizons radioactifs liés aux grandes étapes de l'expérimentation nucléaire dans l'atmosphère. Cette méthode a l'avantage de toujours donner l'accumulation sur la même période (1955-1965). Il est beaucoup plus difficile d'estimer la validité des mesures faites par repérage des couches été-hiver car cette méthode est relativement subjective et il y a de fortes "chances" de ne pas comptabiliser une année, surtout dans les zones centrales où l'accumulation est de quelques cm par an.

L'accumulation est un des paramètres les plus difficiles à estimer. En effet sa variabilité spatiale est extrêmement élevée (100%) et est en bonne partie due à la redistribution par le vent avec formation de congères (zastrouguis). En ce qui concerne la variabilité temporelle elle est du même ordre de grandeur (100 %) d'une année sur l'autre. A des échelles de temps légèrement plus longues, Pourchet et al.(1983) ont trouvé une augmentation de l'accumulation de 30% entre la période (1955-1965) et la période (1965-1975) pour des sites couvrant un large secteur de l'Antarctique. Cela introduit un biais lorsqu'on veut en déterminer les variations spatiales car les mesures n'ont pas toutes été faites durant la même période. On peut se reporter à la compilation très complète de Giovinetto et Bull (1987) montrant différentes cartes d'accumulation en Antarctique selon les données utilisées.

La figure (I.6) montre la répartition de l'accumulation sur l'Antarctique. Les valeurs sont en général extrêmement faibles, moins de 20 cm d'eau par an (l'Antarctique ne reçoit pas plus de précipitation que le Sahara). Le fait le plus important est la forte corrélation avec la température. Plus la température est froide plus l'accumulation est faible. On peut expliquer ce fait en supposant que la précipitation est gouvernée par la quantité de vapeur d'eau que peut contenir l'air (Lliboutry 1965). Robin (1977) a montré que l'accumulation en divers sites

est proportionnelle à la pression de vapeur saturante pour la température régnant au dessus de la couche d'inversion (c'est à dire là où se forment les précipitations). Il est possible d'en déduire l'amplitude de variations d'accumulation dans le passé et nous aborderons ce problème plus loin (I.3.F et III.1.B).

I.3 PHENOMENES A PRENDRE EN COMPTE, EQUATIONS DE BASE.

I.3.A Référentiel.

Les équations de ce chapitre sont exprimées dans un repère cartésien x, y, z : x et y sont les coordonnées horizontales et z est la coordonnée verticale (dirigée vers le bas avec l'origine au niveau de la mer actuel). La vitesse selon x, y, z, est notée u_x, u_y, u_z, et $\vec{u}$ lorsqu'il s'agit du vecteur.

Dans ce travail toutes les équations sont exprimées avec des variables d'Euler c'est à dire que la vitesse est celle d'une particule passant au point M(x,y,z) au temps t.

La figure (I.7) récapitule les diverses notations : x, y, z, E, B, H. On remarque que la surface est donnée par z=-E et le socle z=-B. E et B sont les altitudes (positives au dessus du niveau des mers) et dépendent du temps. Il semble a priori que le sens de l'axe z vers le bas n'est pas judicieux. Cependant de nombreuses applications de la modélisation des calottes polaires concernent l'interprétation de forages pour lesquels la coordonnée "naturelle" est la profondeur (notée Z=e+z). Il est alors plus simple d'avoir un axe z vers le bas (on évite ainsi de changer de repère au milieu de l'ouvrage, cf. Ritz, thèse de troisième cycle).

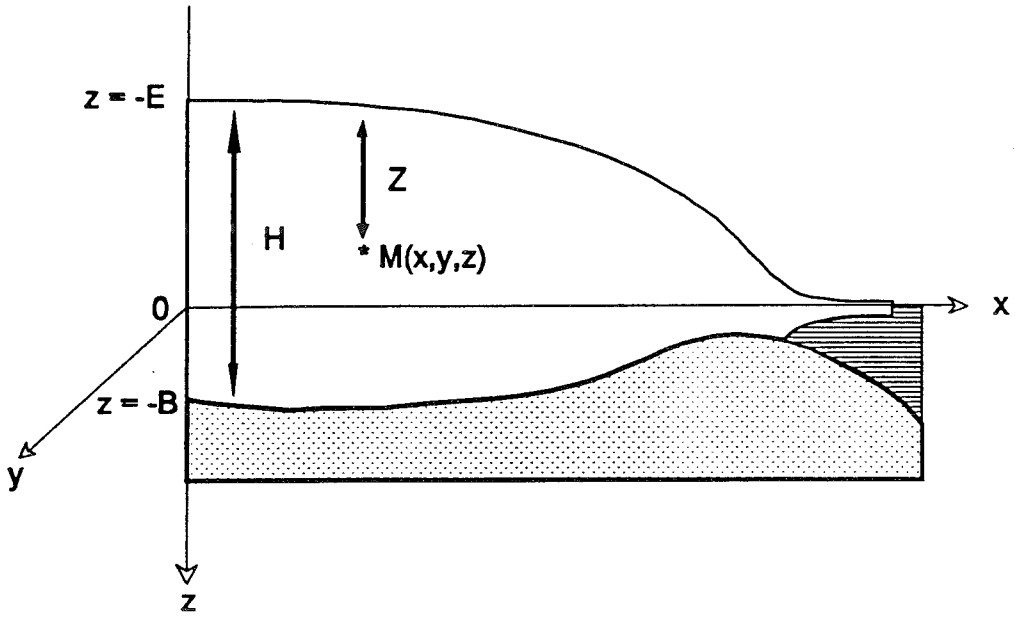


Figure I.7 : Référentiel et notations utilisés.

I.3.B Conservation de la masse.

- Incompressibilité.

La densité de la glace pure est à peu près constante: de 0.917 à 0°C et 0.924 à -60°C (cf annexe 1: propriétés physiques de la glace et du socle). Par contre, la densité du névé varie considérablement avec une valeur en surface d'environ 0.35 qui augmente progressivement avec la profondeur pour atteindre la densité de la glace vers 100 m. Pour les calculs d'écoulement à l'échelle de la calotte entière il est possible de remplacer la couche de névé par une couche de glace pure de même poids, "équivalente". La correction à appliquer est de l'ordre de 30 m dans les régions centrales. On parle alors de "m de glace", par opposition aux "m réels". Cette approximation a très peu d'influence sur l'écoulement car d'une part celui ci, qui est dû à la gravité, dépend essentiellement du poids total de la colonne de glace au dessus du point concerné, d'autre part la déformation est concentrée dans le fond de la calotte où la densité est constante.

Dans ces conditions on peut considérer la glace incompressible. Pour un élément de volume dv = dx dy dz, cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \qquad \textbf{(I.1)}$$

- Conservation de la masse appliquée à une colonne de glace.

On intègre verticalement l'équation (I.1) depuis la surface (E) jusqu'au socle (B). Il faut tenir compte du fait que les bornes de l'intégration E et B sont fonction de x et y. Les conditions aux limites pour la vitesse verticale u_z sont :

A la surface (z=-E) $$u_z(-E) = \dot{b} - \frac{\partial E}{\partial t} - u_x(-E)\frac{\partial E}{\partial x} - u_y(-E)\frac{\partial E}{\partial y} \qquad \textbf{(I.2)}$$

Au fond (z=-B) $$u_z(-B) = \dot{f} - \frac{\partial B}{\partial t} - u_x(-B)\frac{\partial B}{\partial x} - u_y(-B)\frac{\partial B}{\partial y} \qquad \textbf{(I.3)}$$

où $\dot{f}$ est le taux de fusion basale et $\dot{b}$ le taux d'accumulation.

L'équation pour la colonne de glace, appelée souvent équation de bilan de masse, s'écrit alors :

$$\frac{\partial(\bar{U}_x H)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{U}_y H)}{\partial y} = \dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \textbf{(I.4)}$$

$\bar{U}_x$ et $\bar{U}_y$ sont les vitesses dans les directions x et y moyennées sur toute la colonne de glace.

$$\bar{U}_i = \frac{1}{H}\int_{-E}^{-B} u_i(x,y,z)\, dz \qquad \textbf{(I.5)}$$

Cette équation de bilan est l'équation de base qui régit l'évolution des calottes glaciaires. Les mécanismes impliqués dans les variations d'épaisseur apparaissent :

- L'écoulement (vitesses $\bar{U}_x$ et $\bar{U}_y$). Les vitesses sont calculées en utilisant les équations du problème couplé (les équations d'équilibre et l'équation de la chaleur). C'est par cet intermédiaire que la température dans la glace intervient également.
- Le bilan en surface ($\dot{b}$).
- L'enfoncement isostatique du socle. ($\partial B/\partial t$)

I.3.C Isostasie

Le poids de la glace provoque une dépression du socle et actuellement le socle de l'Antarctique est beaucoup plus bas qu'il ne serait sans glace (voir par exemple la carte de Drewry ,1983). Toute variation d'épaisseur de glace, en changeant la charge sur le socle, modifie cet enfoncement. Cette réaction se fait avec un déphasage qui peut selon les cas, amplifier ou diminuer l'amplitude des variations de l'altitude de la surface. La dépression isostatique peut de plus induire un déplacement de la ligne à partir de laquelle la glace flotte (début de l'ice shelf) lorsque, sur la côte, la position du socle change par rapport au niveau de la mer.

L'amplitude de l'enfoncement isostatique peut être évaluée en considérant le cas stationnaire. On considère habituellement que la lithosphère est une plaque élastique, posée sur une couche visqueuse, l'asthénosphère. Si on suppose que la déformation de la lithosphère se fait localement en fonction du poids de glace, et que le fluage de l'asthénosphère est instantané aux échelles de temps considérées, l'enfoncement revient à un problème de flottaison, et l'équilibre isostatique s'écrit :

$$\rho_g H = \rho_a h \qquad \textbf{(I.6)}$$

où h est l'enfoncement. Avec $\rho_g = 0.92$ g cm^{-3} masse volumique de la glace, $\rho_a \approx 3$ g cm^{-3} masse volumique de l'asthénosphère. L'enfoncement est donc à peu près égal à un tiers de l'épaisseur de glace ($h \approx 0.3\ H$)

En réalité, la réaction isostatique est plus complexe. Tout d'abord, le fluage de l'asthénosphère n'est pas instantané. Les principales données dont nous disposons à ce sujet, viennent du soulèvement post-glaciaire de la Fennoscandie (ensemble de la Scandinavie et de la Finlande) qui était recouverte par une calotte de glace il y a environ 10 000 ans. Les étapes du retrait de la calotte de glace ont été bien datées à l'aide de varves (les varves sont des dépôts alternativement de sable, en été, et de limons fins, en hiver, que laissent les torrents glaciaires). Le soulèvement du sol, lui, est déterminé par d'anciennes plages soulevées. L'analyse de ces données indique que la vitesse de soulèvement (dh/dt) est à peu près proportionnelle à h^m avec ($3 \leq m \leq 5$). Le temps de relaxation a augmenté, passant de 1000 ans environ au début du soulèvement à 15000 ans après l'an -2000. (Lliboutry 1982). Pour l'Antarctique de l'Est où les variations de géométrie sont de petites oscillations il faudrait plutôt prendre m=1 car c'est le terme Newtonien dans la viscosité du manteau qui intervient (Lliboutry, communication personnelle).

Une autre approche consiste à modéliser le fluage de l'asthénosphère et certains auteurs ont fait alors appel à des modèles élaborés comprenant plusieurs couches de viscosités différentes (Peltier 1982, Lliboutry 1987).

En raison de la rigidité de la lithosphère, l'enfoncement n'est pas purement fonction de la charge locale comme pourrait le laisser penser l'équation (I.6). On peut estimer cet effet en étudiant la déflexion due à une charge ponctuelle (Lliboutry 1965, p 152). Le rayon d'action est environ 130 km et la région affectée par une charge s'étend jusqu'à 4 rayons d'actions (Drewry, 1983). La déflexion de la lithosphère dépend donc de la répartition des charges sur l'ensemble de la calotte.

Nous développerons ce sujet dans le modèle d'évolution (IV.1.D).

I.3.D Contraintes et déformations

- Contraintes

Le tenseur des contraintes est désigné par τ_{ij}, i étant la direction de projection de la contrainte et j la direction normale à la surface sur laquelle s'exerce la contrainte. Nous supposons qu'il n'existe pas dans le milieu de forces internes assimilables à des couples, le tenseur est alors symétrique. On note souvent $\tau_{ii}= \sigma_i$ (positif pour les tractions). $\sigma_0=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$ est le premier invariant du tenseur des contraintes (la pression hydrostatique est égale à $-\sigma_0$). Dans le cas d'un état hydrostatique, $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z$.

Le déviateur des contraintes s'écrit $\tau'_{ij}= \tau_{ij}- \delta_{ij}\ \sigma_0$ (par exemple $\sigma'_i = \sigma_i - \sigma_0$)
On définit la cission efficace τ par :

$$\tau^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\tau'_{ij})^2 = \frac{1}{2}(\sigma'^2_x + \sigma'^2_y + \sigma'^2_z) + \tau^2_{xy} + \tau^2_{yz} + \tau^2_{xz} \qquad \text{(I.7)}$$

- Equations d'équilibre quasi-statique

La glace s'écoule sous l'action de la pesanteur. On note g_i la composante de la pesanteur et x_i la coordonnée dans la direction i. Si on néglige les accélérations, l'équilibre des forces sur un cube élémentaire donne :

$$\sum_j \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho_g\ g_i = 0 \qquad \text{(I.8)}$$

- **Déformations**

Le tenseur des taux de déformation s'écrit $\dot{\varepsilon}_{ij}$ et est défini par :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad \textbf{(I.9)}$$

(note : L'équation (I.1) s'écrit aussi: $\dot{\varepsilon}_{xx} + \dot{\varepsilon}_{yy} + \dot{\varepsilon}_{zz} = 0$)

On définit également $\dot{\gamma}$ le deuxième invariant du tenseur des taux de déformations par:

$$\left(\frac{\dot{\gamma}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij})^2 \qquad \textbf{(I.10)}$$

- **Loi de comportement**

Si l'on ne considère que le fluage permanent, la glace se comporte comme un corps visqueux non newtonien. Lorsque la glace est macroscopiquement isotrope, le déviateur des contraintes et celui des taux de déformation sont proportionnels.

$$\tau'_{ij} = 2\,\eta\,\dot{\varepsilon}_{ij} \qquad \textbf{(I.11)}$$

La viscosité (η) dépend de la cission efficace suivant une loi puissance de type Norton-Hoff (souvent appelée loi de Glen par les glaciologues).

$$\frac{1}{\eta} = B_T\,\tau^{n-1} \qquad \textbf{(I.12)}$$

B_T est fonction de la température selon une loi d'Arrhenius

$$B_T = B_0 \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T}\right)\right) \qquad \textbf{(I.13)}$$

T_f est la température de fusion, T la température (en Kelvin), E_a l'énergie d'activation et R la constante des gaz parfaits.

L'exposant n, le coefficient B_0 et l'énergie d'activation E_a sont différents suivant la gamme de contrainte et de température car les processus en jeu ne sont pas les mêmes.

La base du glacier est l'endroit où les températures sont les plus élevées et les contraintes les plus fortes. En Antarctique, la cission efficace dépasse rarement 1 bar. Le processus de déformation doit alors être (comme pour les glaciers alpins) le fluage par dislocations avec recristallisation et l'exposant est (n=3). D'après Duval, dans les calottes glaciaires, la recristallisation dynamique survient lorsque la température dépasse -10°C ou lorsque la vitesse de déformation est supérieure à 2.5 10^{-10} s^{-1} (7.9 10^{-3} a^{-1}). Dans ces gammes de contraintes ($\tau \geq 1$ bar) il est possible de faire des expériences de déformation en laboratoire. Pour de la glace entre -20°C et -0.05 °C, Le Gac (1980) donne la valeur de $B_{T\text{secondaire}}$ en fonction de la température. D'après Le Gac (1980), l'énergie d'activation (Ea) est 78.2 kJ/mole pour les températures inférieures à -8°C et semble augmenter lorsqu'on s'aproche du point de fusion. En fait cette augmentation vient en partie du fait qu'on passe du fluage secondaire au fluage avec recristallisation pour lequel, d'après Duval (1984), le coefficient B_T est 2 à 3 fois plus élevé que le coefficient du fluage secondaire.

Sur la figure (I.8) nous avons porté la déformation en fonction de la température. Pour les températures entre -10°C et -6.5 °C, nous multiplions par 2.5 les valeurs de $B_{T\text{secondaire}}$ données par Le Gac (1980) pour avoir le coefficient de la glace recristallisée. La valeur à 0°C est directement celle du fluage avec recristallisation donnée par Lliboutry et Duval (1985) (B_T = 0.2 bar^{-3} an^{-1}).

Pour la glace tempérée, le coefficient de la loi de comportement (que nous notons B_{temp}) dépend de la teneur en eau de la glace. A partir d'expériences de fluage, Duval (1977) indique que B_{temp} (qui est celui de la glace recristallisée) passe de 0.15 à 0.5 (bar^{-3} an^{-1})

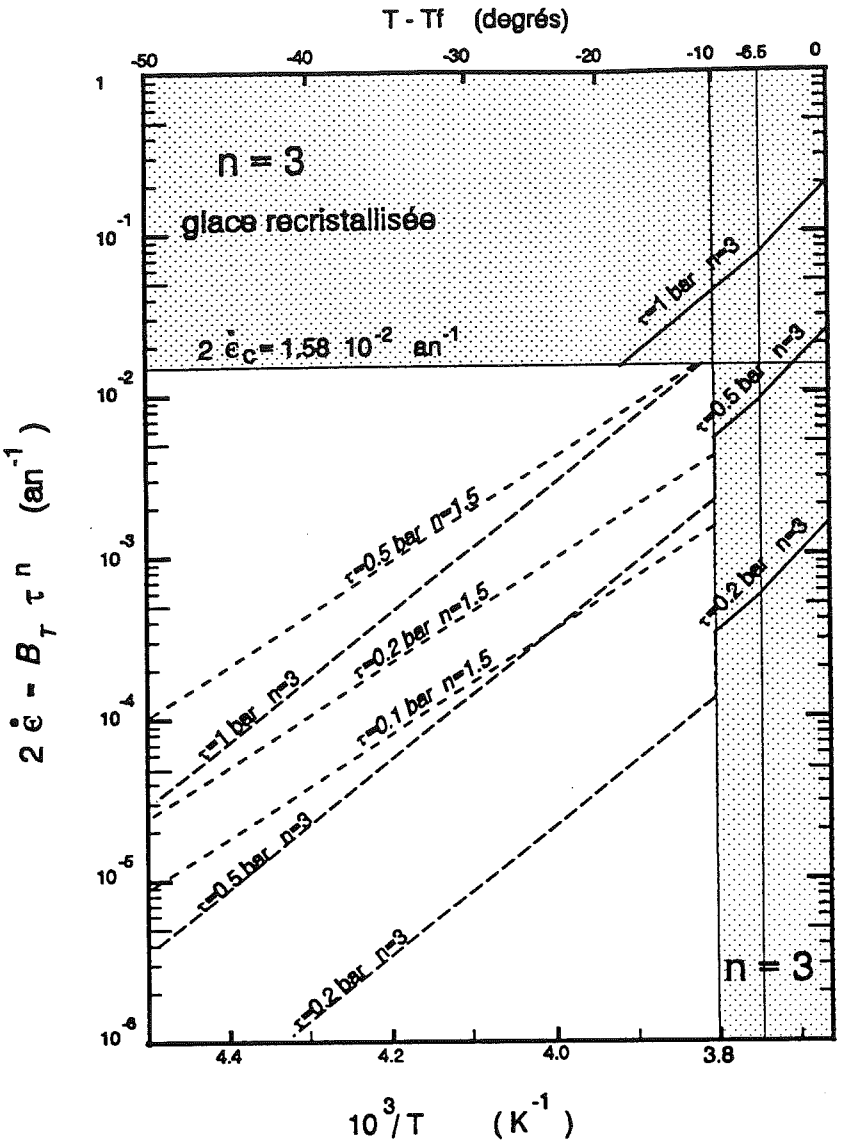


Figure I.8 Vitesse de déformation de la glace en fonction de la température pour différents exposants de la loi de déformation.

La vitesse de déformation dépend de la température selon une loi d'Arrhenius (équation I.13) et log(ε̇) varie linéairement avec (1/T). Les droites obtenues sont données pour différentes valeurs de la contrainte (τ), leur pente dépend de l'énergie d'activation (E_a)

***En grisé et traits continus**: glace recristallisée. La condition pour que la glace subisse une recristallisation dynamique porte soit sur la température ($T-T_f > -10°C$) soit sur la vitesse déformation ($2\dot{\varepsilon} > 2\dot{\varepsilon}_c$, $\dot{\varepsilon}_c = 1.58\ 10^{-2}\ an^{-1}$). La glace recristallisée se situe donc dans la partie inférieure de la nappe de glace. D'après Duval (1984), pour ce type de glace l'exposant de la loi de déformation est n=3 et le coefficient B_T est celui du fluage tertiaire (B_T tertiaire ≈ 2.5 B_T secondaire).*

Entre -10°C et -6.5°C, les valeurs de B_T utilisé ici sont celles de Le Gac (1980) pour $B_{T\ secondaire}$ mais en multipliant par 2.5 (B_T=0.072 à -6.5°C) et l'énergie d'activation est 78.2 kJ/mole.

A 0°C, la valeur de $B_{T tertiaire}$=0.2 bar^{-3} an^{-1} est donnée par Lliboutry et Duval (1985). Entre -6.5°C et 0°C nous supposons une énergie d'activation constante (95.45 kJ/mole).

***En blanc.** Pimienta (1987), dans le haut du glacier à Dye 3, (basse température, faible déformation) trouve un exposant n=1.5 (petits tirets). Il n'y a pas continuité entre cette loi et celle pour la glace recristallisée (pour le visualiser, suivre par exemple l'évolution de la déformation avec la température pour τ=0.2 bar). La transition se fait en réalité graduellement car l'exposant devrait augmenter avec la profondeur et de plus, très souvent il y a formation d'une fabrique dans les couches intermédiaires.*

La vitesse de déformation pour la glace non recristallisée, avec n=3 est également représentée (grands tirets).

lorsqu'on passe d'une température de (-0.2 ± 0.01°C) et une teneur en eau négligeable à une température (0 ± 0.005°C) et une teneur en eau égale à 0.8 %. Il semble d'après cette étude que l'augmentation de B_{temp} avec la teneur en eau soit à peu près linéaire. Lliboutry et Duval (1985) expriment la valeur du coefficient B_{temp} en fonction de la teneur en eau par :
B_{temp} = 0.20+0.368 w (w teneur en eau en %)

Dans le haut du glacier, les contraintes et les taux de déformation sont extrêmement faibles. Les expériences de laboratoire demandent alors des temps importants pour obtenir de déformations mesurables. Ceci explique le peu de mesures existantes. Un autre moyen de déterminer les propriétés mécaniques de la glace est l'étude in situ de la déformation des trous de forage (voir le paragraphe "Mesures servant d'entrée ou de test" dans ce chapitre). D'après l'étude faite par Pimienta (1987) de l'inclinométrie à Dye 3, les paramètres de la loi dans le haut de la nappe de glace (basse température, faible contrainte) sont : n=1.5, B_T =0.01329 $bar^{-1.5}$ an^{-1} à -20°C, énergie d'activation Ea=60 Kj/mole. Avec ces valeurs de n et de B_T, la déformation en fonction de la température est également présentée sur la figure (I.8). On remarque qu'il n'y a pas de continuité entre les deux lois (n=1.5 et n=3). Par exemple, pour une contrainte τ_{xz}=0.2 bar et une température T=-10°C, la vitesse de déformation obtenue avec n=1.5 est 10 fois plus forte que celle calculée avec n=3. Cette discontinuité n'existe pas dans la réalité car la transition se fait graduellement (les deux processus de déformation s'ajoutant). Surtout, il faudrait tenir compte des effets de la fabrique. D'après Le Gac (1980) l'existence d'une fabrique marquée avec axes C verticaux peut introduire un facteur 10 (par rapport au cas isotrope) sur la valeur de B_T pour le cisaillement (dans le cas d'une glace anisotrope il y a plusieurs coefficients B_T). Cette anisotropie augmente avec la profondeur puis est détruite lors de la recristallisation dynamique. La glace ayant subi cette recristallisation dynamique présente une fabrique à 4 maxima qui se comporte de façon isotrope. L'effet du changement de fabrique s'ajoute alors à celui de la transition entre la loi en n=1.5 et celle en n=3.

Enfin, on peut remarquer qu'avec la loi de déformation (I.12), la viscosité devient infinie lorsque la contrainte déviatorique est très faible. Il faut probablement introduire une légère fluidité de type Newtonien pour ces faibles contraintes (Lliboutry 1969, Ritz 1980)

- Conditions aux limites pour les contraintes et les vitesses.

. Condition en surface

La surface est une surface libre, la contrainte normale est donc égale à la pression atmosphérique, et la contrainte tangentielle est nulle.

. Condition au fond

La loi de glissement est la relation entre les contraintes à l'interface glace - socle (τ_b, la contrainte de cisaillement, N_{eff} la pression effective) et la vitesse de glissement (u_{sl}). Les caractéristiques du socle vont intervenir et particulièrement son relief. Etant donné qu'il est impossible de tenir compte de toutes les aspérités du lit, il faut lisser le profil du socle et l'échelle à laquelle est effectué ce lissage est prépondérante. Pour l'Antarctique où les lignes de courant ont environ 1000 km de long, le maillage utilisé varie de 10 à 100 km et c'est donc à cette échelle que le lit est lissé.

Si on définit le microrelief comme la taille des irrégularités du lit par rapport au lit lissé, ce relief dans le cas de l'Antarctique est loin d'être négligeable devant l'épaisseur. Des variations verticales de 1000 m pour quelques km sont chose courante (Figure I.4) Dans ce cas il est difficile de faire la différence entre le problème de glissement et le problème d'écoulement de la glace dans un domaine aux formes très irrégulières (Hutter 1981). Ce point est sans doute la difficulté principale dans la modélisation de l'écoulement des calottes polaires, d'autant plus que ce relief n'est pas partout bien connu.

On considère en général que lorsque la base est en dessous du point de fusion, il ne peut pas y avoir de glissement car les irrégularités du lit sont ancrées dans la glace et empêchent le glacier de déraper. Lliboutry ($1987_{a,b}$) étend ceci au cas où seule la base est tempérée. En effet la température croit avec la profondeur, la base n'est souvent tempérée que dans les creux, les bosses elles sont toujours ancrées dans la glace froide. Le glissement ne peut donc apparaître que si une couche de glace basale d'épaisseur comparable à la taille du relief est tempérée.

En plus du glissement, la déformation du sédiment est également un des processus en jeu dans l'écoulement de la glace. Boulton et Jones (1979) ont indiqué que ce mécanisme peut jouer un rôle important dans l'évolution des calottes de l'Hémisphère Nord. Blakenship et al. (1986) ont montré qu'à la base de l'Antarctique de l'Ouest il y a une couche de sédiment gorgé d'eau et très déformable. Il faudrait donc tenir compte également de la déformation de ce sédiment.

. Lois de glissement à petite échelle.

Pour un lit rocheux, de nombreux auteurs ont donné des lois de glissement en considérant diverses répartitions d'obstacles. On peut en particulier citer :

La loi de Weertmann (surtout valable aux faibles vitesses)

$$\tau_b = C\, u_{sl}^{\alpha} \qquad \textbf{(I.14)}$$

où u_{sl} est la vitesse de glissement et τ_b la contrainte de cisaillement basale.

La loi de Lliboutry (fortes vitesses)

$$\tau_b = f\, N_{eff} \qquad \textbf{(I.15)}$$

N_{eff} pression effective (pression de la glace - pression de l'eau)

Une loi mixte a été développée (Meyssonnier 1985) valable à la fois pour toutes les gammes de vitesse.

$$\tau_b = \left((C\, u_{sl}^{\alpha})^{-\beta} + (f\, N_{eff})^{-\beta} \right)^{-1/\beta} \qquad \textbf{(I.16)}$$

C, f, α et β étant des paramètres à ajuster.

Lliboutry (1987_b), en considérant un lit parsemé de bosses aléatoires auxquelles se surimposent des ondulations douces, propose également une loi avec trois paramètres à ajuster, valable pour toutes les vitesses .

. Lois de glissement à grande échelle.

A grande échelle, l'utilisation des lois de glissement précédemment citées présente deux difficultés. D'une part la définition du microrelief n'est pas aisée, d'autre part on ne connaît pas la valeur des paramètres des lois.

D'après Lliboutry (communication personnelle et 1987_a, p.159) on peut, à partir de considérations sur les dimensions, déterminer les principaux termes d'une loi de glissement à un facteur numérique près. Doivent intervenir les variables locales u_{sl}, τ_b, N_{eff} et les propriétés de la glace B (en bar^{-3} an^{-1}) et $A = K_g\ C_m\ /\ \rho_g\ L$ (en $m^2\ a^{-1}\ bar^{-1}$, propriétés thermiques de la glace intervenant dans la fusion, définitions et valeurs dans l'annexe 1). Le raisonnement suppose qu'on peut caractériser statistiquement le microrelief sans introduire une certaine longueur (microrelief non-dimensionel). Il y a 5 quantités pour trois unités fondamentales (m, bar, an). Il existe donc deux nombres sans dimension indépendants, par exemple :

$$\frac{\tau_b}{N_{eff}} \quad \text{et} \quad \frac{u_{sl}}{\sqrt{A\ B}\ \tau_b^2}$$

La loi de frottement solide (III.15) est τ_b/N_{eff} = Constante. La loi de frottement visqueux sans décollement (III.14, loi de Weertman) est $u_{sl}/(\sqrt{(AB)}\ \tau_b^2)$ = constante. La loi admise revient à supposer que les deux termes sans dimension sont proportionnels :

$$u_{sl} = k_{sl}\ \frac{\tau_b^3}{N_{eff}} \qquad \textbf{(I.17)}$$

Pour cette loi, Bindschadler (1983) a cherché le meilleur ajustement pour k_{sl}. En utilisant les mesures de vitesses et pressions d'eau sur le Variegated Glacier (Alaska), il a obtenu k_{sl}=84 m an^{-1} bar^{-2}, ordre de grandeur également trouvé par Budd et al. (1979) à partir d'expériences de laboratoire. Une rapide application numérique montre cependant qu'une valeur de l'ordre de 100 m bar^{-2} an^{-1} pour le coefficient k_{sl} est nettement trop faible

pour simuler les vitesses de glissement en Antarctique. Supposons par exemple une contrainte basale τ_b de 0.5 bar et une pression effective de 10 bar. Pour la partie connectée avec l'océan, cette pression effective correspond à une épaisseur dépassant seulement de 110 m l'épaisseur pour laquelle la nappe de glace se met à flotter. La vitesse de glissement résultante est 1.25 m/an ce qui est manifestement trop faible. Dans nos expériences avec le modèle d'évolution (chapitre IV), nous utiliserons cette loi (I.17) avec k_{sl}=1000 m an^{-1} bar^{-2} et effectuerons des études de sensiblité sur ce paramètre.

. Condition sur le bord

Plusieurs cas peuvent exister. La côte de l'Antarctique est composée d'ice shelves, de glaciers émissaires, et de zones où la glace est quasi-immobile (maximum quelques mètres par an), le socle rocheux affleurant éventuellement. Dans tous les cas, la condition à la limite est complexe et les effets tridimensionnels importants. Il faut différencier les cas suivants :

. La glace se termine sur la terre ferme et la condition dépend de la topographie du socle : surface libre dans le cas d'une falaise, vitesse nulle si la glace est arrêtée par une montagne.

. La nappe de glace flotte sur l'eau, la contrainte normale est la pression hydrostatique sur la partie immergée et la contrainte tangentielle est nulle. C'est par cet intermédiaire que le niveau des mers peut avoir une influence sur l'écoulement d'une calotte.

Dans le cas d'un glacier émissaire ou d'un ice shelf confiné il faut aussi définir les conditions aux limites latérales du type loi de frottement sur le bord ou vitesse nulle.

I.3.E Champ de température.

L'obtention du champ de température au cours du temps revient à calculer la température dans un milieu continu en mouvement avec une condition à la limite supérieure variable (la température à la surface de la glace). Ces perturbations de la température en surface se propagent dans la glace, mais aussi dans le socle rocheux, ce qui va changer la condition à l'interface glace-socle. Pour être rigoureux il faut donc traiter simultanément les deux équations de la chaleur : dans la glace et dans le socle.

- **Equation de la chaleur dans les milieux continus**

L'équation de la chaleur dans un milieu continu se déformant s'obtient en écrivant le bilan de chaleur pour un élément de volume dv. Pour cela il faut tenir compte des flux (Φ) et des sources ou puits (Q) suivants :

. Le flux de chaleur dû à la conduction

$$\Phi_c = -K \, \mathrm{grad}T \qquad \text{(Loi de Fourier)} \qquad \textbf{(I.18)}$$

K est la conductivité thermique

. Le flux dû à la chaleur transférée par le mouvement à la vitesse u (advection).

$$\Phi_a = \rho \, c \, T \, u \qquad \textbf{(I.19)}$$

ρ est la masse volumique et c la capacité calorifique

. Les sources dans la glace sont la chaleur produite par déformation ($Q_g = \dot{\gamma} \, \tau$), et celle dégagée lors des changements de phase (source pour le regel, puit pour la fonte).

. Dans le socle il y a une production de chaleur due à la radioactivité (Q_r).

L'équation de la chaleur dans un milieu continu se déformant s'écrit :

$$c\,\rho\,\frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\mathrm{div}\,(\Phi_a + \Phi_c) + Q \right) \qquad \textbf{(I.20)}$$

Ce qui donne, l'indice g étant attribué aux paramètres physiques de la glace, l'indice r à ceux du socle rocheux.

Pour la glace :

$$c_g\,\rho_g\,\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\,(K_g\,\mathrm{grad}T) - \mathrm{div}\,(c_g\,\rho_g\,T\,u) + Q_g \qquad \textbf{(I.21)}$$

Pour le socle qui est immobile aux échelles de temps considérées :

$$c_r\,\rho_r\,\frac{\partial T}{\partial t} = \mathrm{div}\,(K_r\,\mathrm{grad}T) + Q_r \qquad \textbf{(I.22)}$$

- Conditions aux limites pour la température.

. En surface

La température à 10 m est considérée comme une bonne estimation de la condition à la limite supérieure. En Antarctique où les phénomènes de fusion et sublimation en surface sont limités on considère que cette température est proche de la valeur moyenne annuelle de la température de l'air à la surface. Cette température en surface varie au cours du temps.

. ***A l'interface glace-socle.***

A l'interface entre les deux milieux, trois cas peuvent se présenter, selon que la température de la glace est ou non au point de fusion

. *Base froide* : La température à la base est en dessous de la température de fusion . La condition à l'interface est alors la continuité du flux de chaleur à travers l'interface.

$$K_r\, G_r = K_g\, G_g \qquad \textbf{(I.23)}$$

avec G_r le gradient de température dans le socle (à l'interface) et G_g le gradient de température dans la glace. Ces deux gradients de température sont pris selon la normale à l'interface. En première approximation l'interface est horizontale, les gradients sont donc verticaux : $G = \partial T/\partial z$. Dans notre référentiel (z vers le bas) il sont positifs lorsque la température s'élève avec la profondeur ce qui est généralement le cas.

. *Base tempérée et couche basale tempérée* : La base de la glace est au point de fusion et la condition à l'interface est alors fixée par la température de fusion (dépendant de la pression). Le reste du glacier peut alors être soit froid (base tempérée), soit en partie tempéré (couche basale tempérée).

. ***A la base du socle***

la condition à imposer est le flux géothermique. Ce paramètre est malheureusement très mal connu car il peut varier très fortement d'une région à l'autre.

I.3.F Forçage climatique, amplitude des variations passées.

Dans tout cet ouvrage nous considérons l'action du climat comme un forçage externe, c'est à dire que l'on néglige l'effet de la calotte polaire sur le climat mondial, par exemple les variations de circulation atmosphérique que pourraient induire des changements d'altitude de la surface de la calotte.

Les paramètres directement liés au climat sont la température en surface, le niveau des mers et l'accumulation. Les deux premiers ont une influence sur l'écoulement de la glace, alors que l'accumulation intervient directement sur le bilan. On donne ici l'ordre de grandeur des variations de ces paramètres dans le passé.

- Relation : Rapport isotopique - température en surface

Les molécules $H_2{}^{18}O$, $H_2{}^{16}O$, $HD^{16}O$ et $H_2{}^{16}O$ ont des propriétés physiques légèrement différentes en particulier lors des changements de phase. Les précipitations contiennent d'autant moins d'isotopes lourds que la température de condensation est basse. Les études de Dansgaard (1964) et Lorius et Merlivat (1977) ont donné une relation empirique entre la température en surface et la composition isotopique de la neige. Le modèle de Jouzel et Merlivat (1984) montre que la composition isotopique des précipitations est liée à la température de condensation. On considère en général que la condensation se fait au dessus de la couche d'inversion.

Si on utilise une telle relation isotope-température, non plus pour un même moment en différents sites mais pour un même site à plusieurs époques différentes on peut reconstituer les variations passées de la température moyenne en analysant la composition isotopiques des couches de glace trouvées en profondeur. On fait alors l'hypothèse essentielle, que la distribution des précipitations au cours de l'année est toujours restée statistiquement la même.

Il n'existe qu'un nombre restreint de sites où un forage profond a été réalisé. Ce sont Camp Century, Dye 3 et Summit (GRIP) au Groenland, Byrd en Antarctique de l'Ouest et Dôme C et Vostok en Antarctique de l'Est. La datation des couches de glace est indispensable pour interpréter ces données et nous reviendrons sur ce point dans le chapitre III. L'étude de ces forages a montré que la température en surface a subi de grandes variations dans le passé. A peu près constante depuis 10 000 ans BP (Before Present), elle était précédemment environ 10°C plus froide (période glaciaire). A une époque encore plus reculée (130000 ans) , c'est à dire dans les couches plus profondes on trouve à nouveau des signes de période chaude (interglaciaire).

- Variations de l'accumulation

Actuellement il y a une forte corrélation entre l'accumulation et la température. Une explication très simple est qu'un facteur limitant la précipitation est la quantité de vapeur d'eau que peuvent contenir les masses d'air. Si on suppose que la relation température-accumulation a été la même dans le passé qu'actuellement, les variations de température dans le passé ont vraisemblablement eu une influence sur l'accumulation. En ne tenant compte que de l'effet de la température sur la pression de vapeur saturante, on estime en général qu'en Antarctique, l'accumulation pendant la période glaciaire était environ la moitié de l'accumulation actuelle. Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre (III).

Les enregistrements en ^{10}Be tirés des forages profonds, reflètent l'accumulation par un effet de dilution et apportent une information indépendante sur les variations relatives d'accumulation dans le passé. Pour les sites de Vostok et Dôme C (Plateau Antarctique), l'estimation faite à partir de la pression de vapeur saturante se trouve ainsi confirmée par le ^{10}Be (Raisbeck et al. 1981, 1987).

Il convient de noter une différence fondamentale entre l'Antarctique et les calottes polaires de l'hémisphère Nord aujourd'hui disparues (Laurentide, Fennoscandie, ...). La première est entièrement en zone d'accumulation, les secondes au contraire devaient comporter de larges zones d'ablation. Lors d'un réchauffement l'accumulation a donc augmenté en Antarctique alors que pour le Laurentide les zones d'ablation se sont étendues rendant le bilan de surface négatif. L'étude de la dynamique de l'Antarctique permet de mieux

comprendre l'évolution des autres calottes glaciaires (d'autant plus que l'Antarctique a l'intérêt d'exister encore et de permettre ainsi quelques mesures). Il faut cependant être prudent dans les généralisations car les réactions à un changement climatique peuvent être diamétralement opposées. Le Groenland a une situation intermédiaire et certaines études indiquent que cette calotte pouvait être sensiblement plus réduite lors du précédent interglaciaire (Letréguilly et al. 1991).

- Relation avec le climat mondial, niveau des mers.

Les variations passées de la température à la surface de l'Antarctique peuvent être tirées des forages glaciaires. Il est tentant de tirer parti également des variations observées en d'autres lieux du globe et qui généralement donnent des enregistrements sur de plus longues durées. On sait, grâce à l'étude de carottages faits au fond des mers ou dans des tourbières que de nombreuses périodes glaciaires et interglaciaires ont alterné. Hays et al. (1976) ont montré que les principales fréquences des variations climatiques sont 21, 41 et 100 milliers d'années. Ces périodes correspondent aux périodes astronomiques de l'orbite terrestre, respectivement : la précession des équinoxes, l'obliquité et l'ellipticité. On peut donc penser que les variations de l'insolation sont à l'origine des cycles climatiques (théorie de Milankovitch). On peut en déduire que l'Antarctique a elle aussi été soumise à une alternance de périodes glaciaires et interglaciaires (mise en évidence dans l'enregistrement climatique de Vostok), et il faut en tenir compte dans les modèles d'évolution. Il faut cependant être prudent car les variations de température sur l'Antarctique ne sont pas forcément en phase avec celle que l'on trouve dans les carottes marines.

Le climat mondial influence également l'Antarctique par l'intermédiaire du niveau des mers. Lorsque les calottes de l'hémisphère Nord ont fondu, le niveau de l'océan a monté d'environ 70 m et cela a dû modifier l'écoulement de la glace en déplaçant les endroits où commencent les ice-shelves (grounding line ou ligne d'échouage)(Thomas et Bentley 1978). D'après Huybrechts (1990_a) le niveau de l'océan joue un rôle prédominant dans l'évolution de l'Antarctique. En particulier l'Antarctique de l'Ouest en raison de la géométrie de son socle (figure I.3) est très sensible et pourrait subir de grosses variations de volume lors d'une remontée du niveau des mers.

I.4 ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE.

Les modèles de calotte glaciaire peuvent en général être rattachés à deux grandes familles : Les modèles à géométrie imposée (paragraphe I.4.B) dans lesquels l'altitude de la surface et du socle rocheux sont imposés et les modèles d'évolution (paragraphe I.4.C) dans lesquels ces mêmes altitudes sont des variables du problème et sont calculées. Dans les deux cas, il est nécessaire de disposer du bilan de surface ($\dot{b}$) que ce soit d'après des données ou selon un modèle de précipitation-ablation. Le calcul du profil de calotte en supposant que la glace est un plastique parfait, calcul qui donne le "célèbre" profil parabolique est une exception à cette dernière règle puisqu'il est indépendant du bilan (Paterson 1981). Avant de décrire ces deux types de modèles nous allons d'abord étudier comment les équations de la mécanique peuvent être simplifiées.

I.4.A Approximations employées pour modéliser l'écoulement.

Pour obtenir le champ de vitesse, il faut intégrer les équations d'équilibre quasi-statique (8) tout en tenant compte de la loi de déformation (I.11 et I.12) et de la dépendance de la viscosité avec la température (13). Ce problème demande donc de résoudre simultanément 11 équations aux dérivées partielles liant les 6 composantes des contraintes, les 3 composantes de la vitesse, la viscosité et la température. Même numériquement ce problème est inabordable (sauf éventuellement sur des domaines géométriquement restreints comme les dômes) aussi est-il nécessaire de faire quelques approximations.

- Approximation de l'écoulement par cisaillement simple.

Cette simplification est utilisée dans un très grand nombre de modèles (quoique pas toujours explicitée), il est donc difficile de faire une liste de référence exhaustive. Nous citerons Bodvarsson (1955), Mahaffy (1976), et Budd et al. (1971). Cette approximation dérive du fait que les calottes glaciaires ont une épaisseur extrêmement faible par rapport à leurs dimensions horizontales. Pour l'Antarctique par exemple le rapport est environ 10^{-3} car l'épaisseur moyenne est 2200 m et les dimensions horizontales sont de l'ordre de 3000 km (il faut noter

que la façon habituelle de représenter une calotte glaciaire en coupe, comme par exemple sur la figure I.7, est tout à fait trompeuse). Si la surface est en général lisse, ce n'est pas toujours le cas du socle et dans cette approximation on considère un socle moyenné sur une distance horizontale d'environ 20 épaisseurs ou plus (Budd, 1970).
En raison de cette géométrie, pour une quantité w quelconque, on peut négliger les dérivées horizontales par rapport à la dérivée verticale. C'est en particulier le cas pour les vitesses :

$$\partial u_i/\partial x \ , \ \partial u_i/\partial y \ << \ \partial u_i/\partial z$$

Il en résulte que $\dot{\varepsilon}_{xy}$, $\dot{\varepsilon}_{xx}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}$ ainsi que $\dot{\varepsilon}_{zz}$ (en raison de l'incompressibilité) sont négligeables devant $\dot{\varepsilon}_{xz}$ et $\dot{\varepsilon}_{yz}$. Les vitesses sont à peu près parallèles à la surface. De plus négliger $\dot{\varepsilon}_{xy}$ implique que, quelle que soit la profondeur, la vitesse horizontale est toujours située dans le même plan vertical.
Les éléments correspondants du déviateur des contraintes τ_{xy}, σ'_x, σ'_y et σ'_z sont également négligeables (on suppose que la viscosité est isotrope). Cette hypothèse a aussi pour conséquence ($\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z$) et les contraintes déviatoriques longitudinales ne sont donc pas prises en compte. Les équations d'équilibre quasi-statique deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = - \rho \, g \end{cases} \qquad \textbf{(I.24)}$$

La troisième équation s'intègre aisément depuis la surface (z=-E) jusqu'à z. Compte tenu de $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \rho\ g\ (E+z)\ \dfrac{\partial E}{\partial x} \\ \tau_{yz} = \rho\ g\ (E+z)\ \dfrac{\partial E}{\partial y} \\ \sigma_z = -\ \rho\ g\ (z+E) \end{cases} \qquad \textbf{(I.25)}$$

La cission efficace se réduit à :

$$\tau = \rho\ g\ (E+z) \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2} \qquad \textbf{(I.26)}$$

Et la vitesse horizontale dans la direction i (x ou y) s'obtient en intégrant l'équation suivante :

$$2\ \dot{\varepsilon}_{iz} = \frac{\partial u_i}{\partial z} = B_T\ (\rho\ g)^n\ (E+z)^n \left(\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial y}\right)^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial E}{\partial i} \qquad \textbf{(I.27)}$$

(en négligeant les dérivées horizontales de la vitesse verticale u_z).

- Approximations d'ordre supérieur.

L'approximation de l'écoulement à vitesses parallèles n'est pas valable dans un certain nombre de cas :

- les dômes ou lignes de partage des glaces car alors la pente de la surface et donc τ_{xz} et τ_{yz} sont quasi nulles et les autres contraintes ne peuvent plus être négligées.
- Lorsque la relief du socle est irrégulier et que l'on s'intéresse à des phénomènes se produisant à une échelle inférieure à 20 épaisseurs (ondulations de la surface).
- Sur les bords terrestres de la calotte car dans ces zones l'épaisseur de glace diminue brutalement.
- A la jonction avec les ice shelves et dans les glaciers émissaires.

De nombreux auteurs ont cherché à tenir compte des contraintes longitudinales selon différentes approches :

. ***L'utilisation de la valeur moyenne du déviateur des contraintes*** σ'_x

C'est la démarche suivie par Lliboutry (1965, p 631-640) pour des glaciers tempérés et étendue par Nye (1969), Budd (1970), Alley et Whillans (1984), Van der Veen (1985) à des glaciers froids. Ces auteurs considèrent des déformations planes et un référentiel avec l'axe x dans le sens de l'écoulement. Nous donnons ici l'explication avec un repère cartésien, mais la démonstration peut également être faite dans un repère dont l'axe x suit la surface du glacier (Nye 1969). Les équations d'équilibre quasi-statique à 2 dimensions deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\rho\, g \end{cases} \qquad \textbf{(I.28)}$$

La technique consiste à dériver la première de ces équations par rapport à z, la deuxième par rapport à x et à faire la différence ce qui donne une expression pour $\partial^2(\sigma_x-\sigma_z) / \partial x\, \partial z$. On intègre ensuite deux fois depuis la surface en tenant compte de la condition à la limite pour obtenir d'une façon analogue à Paterson (1981) ou Alley et Whillans (1984) :

$$\tau_{xz} = \rho\, g\, (E+z)\, \frac{\partial E}{\partial x} - 2\, \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-E}^{z} \sigma'_x\, dz' \right) + \int_{-E}^{z} \int_{-E}^{z'} \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x^2}\, dz'\, dz'' \qquad \textbf{(I.29)}$$

D'après Budd (1970), pour z=-B, le troisième terme de la partie droite de l'équation (I.29) est négligeable si les quantités sont moyennées sur des distances horizontales de 4 épaisseurs et le deuxième terme est également négligeable pour des moyennes sur 20 épaisseurs. Toutefois son calcul est erroné car il confond perturbation des contraintes et déviateur des contraintes.

Pour poursuivre le calcul les auteurs (en négligeant le terme $\partial u_z/\partial x$ dans le calcul de $\dot{\varepsilon}_{xz}$) remplacent (σ'_x) par ($\bar{\sigma}'_x$) sa valeur moyenne sur l'épaisseur dans la loi de comportement (11). C'est l'hypothèse la plus discutable de cette méthode car σ'_x n'est pas forcément constant selon la profondeur.

La valeur de $\bar{\sigma}'_x$ peut être estimée à partir de mesures de surface qui donnent $\dot{\varepsilon}_{xx}$ en tenant compte de la loi de déformation (Paterson 1981). Van der Veen (1985) impose la valeur de $\bar{\sigma}'_x$ à la jonction entre la calotte et l'ice shelf et estime qu'il décroît linéairement vers l'amont (1985). Alley et Whillans (1984) le calculent numériquement en même temps que la position de la surface de la glace au cours du temps.

. ***L'approximation de la couche mince (shallow ice approximation)***

C'est une autre méthode développée pour introduire les contraintes longitudinales (Morland 1984, Hutter 1981, 1983, Reeh et al. 1985, Dahl-Jensen 1988). Ces auteurs introduisent des coordonnées réduites de façon à ce que les variations latérales des contraintes, vitesses et températures soient comparables aux variations verticales, c'est à dire que les dérivées horizontales et verticales soient du même ordre. Le coefficient, μ, utilisé pour ce changement de coordonnées est par exemple le rapport épaisseur sur extension de la calotte glaciaire (de l'ordre de 10^{-3} en Antarctique). En reformulant dans le nouveau référentiel, les diverses équations du problème et les conditions aux limites, ce coefficient apparait dans les équations et l'ordre de grandeur des différents termes peut être évalué d'après les puissances de μ. La résolution peut se faire par itérations successives en partant d'une solution approchée (Dahl-Jensen 1988).

. ***La résolution rigoureuse des équations par une méthode aux éléments finis***

Cette autre approche suivie par exemple par LeB. Hooke et al (1979) ou Watts et Drewry (1988).

I.4.B Les modèles à géométrie imposée.

Dans ces modèles, la géométrie étant connue, ainsi que l'accumulation, l'équation de bilan (I.4) donne le champ des vitesses moyennes. Dans l'hypothèse d'un état stationnaire, $\partial H/\partial t = 0$ mais la géométrie de la calotte peut être imposée variant avec le temps et la valeur de $\partial H/\partial t$ en découle alors. Cette démarche peut d'ailleurs être inversée pour trouver la variation d'épaisseur à partir de mesures de vitesse (Young 1979, Hamley et al. 1985). Sauf dans des cas de géométrie très simplifiées, le calcul des vitesses horizontales moyennées sur l'épaisseur de glace (vitesses moyennes) se fait d'une façon numérique en partant du dôme où cette vitesse est nulle.

Pour obtenir le champ de vitesse $\vec{u}$, il est nécessaire de faire des hypothèses sur la forme de la vitesse en fonction de la profondeur. Ces hypothèses découlent en général des approximations de l'écoulement décrites plus haut (par exemple cisaillement simple). Une bibliographie plus détaillée sur ce sujet sera faite au chapitre II.

Les modèles à géométrie imposée sont le plus souvent dédiés à l'interprétation de mesures de terrain et nous donnons ici une liste (non-exhaustive) des utilisations possibles :
- L'estimation des champs de vitesse et de température pour une partie ou l'ensemble d'une calotte glaciaire. En supposant l'état stationnaire (y compris pour les températures), Budd et al. (1971) et Budd et al. (1982) ont ainsi donné les principales caractéristiques de l'Antarctique et du Groenland.
- Le calcul des trajectoires des particules de glace (Raynaud et al. 1979).
- L'âge de la glace en fonction de la profondeur (Reeh 1989), Ritz (1991)
- Le calcul du champ de température dans la glace, dépendant du temps et en fonction des variations climatiques de la température en surface, comparaison avec les profils de température mesurés dans les trous de forage (Dahl-Jensen et Johnsen 1986, Bolzan 1985, Ritz et al. 1982, Ritz 1989).
- Autour de l'état stationnaire, les perturbations (en terme de variations d'épaisseur) dues à des variations de température (Whillans 1978) et d'accumulation (Whillans 1981).

Les inconvénients de ce type de modèle sont d'une part qu'ils sont basés sur l'état actuel de la calotte glaciaire et que cet état n'est pas stationnaire, au moins en ce qui concerne la température, d'autre part qu'il est impossible de coupler de façon réaliste, l'écoulement avec les températures et donc d'étudier l'influence des variations de température d'origine climatique.

I.4.C Les modèles d'évolution.

Ces modèles ont pour but de modéliser l'évolution sous l'action du climat, de la géométrie d'une calotte glaciaire au cours du temps.

- Calotte isotherme

L'équation (I.27) ne s'intègre analytiquement que si l'on considère que la température de la glace est uniforme, simplification que font certains auteurs. Dans ce cas, la déformation étant concentrée à la base du glacier (puissance n de la profondeur (E+z)), c'est la température basale qui est supposée la plus représentative. Le coefficient B_T constant pour l'ensemble de la calotte, doit donc être choisi pour une température relativement proche du point de fusion. La vitesse horizontale s'intègre en :

$$u_i(z) = u_i(-B) - B_T\,(\rho\, g)^n \left((\frac{\partial E}{\partial x})^2 + (\frac{\partial E}{\partial y})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial E}{\partial i} \frac{\left(H^{n+1} - (E+z)^{n+1} \right)}{n+1} \qquad \textbf{(I.30)}$$

Puis une seconde intégration donne la vitesse moyenne sur la colonne de glace.

$$\bar{U}_i = u_i(-B) - B_T\,(\rho\, g)^n \left((\frac{\partial E}{\partial x})^2 + (\frac{\partial E}{\partial y})^2 \right)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\partial E}{\partial i} \frac{H^{n+1}}{n+2} \qquad \textbf{(I.31)}$$

Cette formulation "isotherme", est essentiellement utilisée pour modéliser l'évolution des calottes glaciaires de l'hémisphère Nord tout au long d'un cycle climatique en ne tenant pas compte des modifications de température dans la glace (Oerlemans 1981, Birchfield et al. 1981, Deblonde et Peltier, 1990, Pollard et al. 1990). Ce type de modèle est appelé "intégré verticalement". Ce terme est impropre car ($\int B_T\, z^n\, dz \neq \bar{B}_T \int z^n\, dz$). C'est pourquoi nous préférons appeler ce type de modèle : isotherme. En introduisant la vitesse moyenne dans l'équation de bilan (I.4) on obtient l'équation d'évolution qui est une équation de diffusion non-linéaire. Nous avons donné l'équation de bilan sous sa forme cartésienne à deux dimensions. Dans la littérature, les auteurs emploient soit cette formulation (Budd et Smith 1979) soit plus souvent des coordonnées sphériques pour tenir compte de la rotondité de la

Terre et ne traitent qu'une dimension (la latitude). La deuxième dimension horizontale est alors prise en compte en faisant des hypothèses sur la forme de la calotte : rapport largeur/longueur (Oerlemans 1981), moyenne zonale (Birchfield et al. 1981, Pollard et al. 1990), profil parabolique qui relie altitude au dôme et largeur de la calotte (Berger et al. 1990).

Il faut noter qu'en général ces modèles visent à étudier l'évolution du climat au cours des cycles climatiques et qu'à côté de la partie glaciologique il est également nécessaire de modéliser l'isostasie et surtout l'atmosphère. Ceci explique (sans le justifier) la simplicité des modèles de calotte glaciaire utilisés.

- Prise en compte du champ de température.

La température dans les calottes polaires varie spatialement entre la surface et le fond du glacier et du centre vers les bords, mais elle varie aussi dans le temps car les perturbations (d'origine climatique) de la température en surface pénètrent dans la glace et se propagent vers le fond du glacier. Pour modéliser avec réalisme l'influence du climat sur une calotte glaciaire, il est donc nécessaire de traiter le problème couplé (température-écoulement).

Il s'agit de calculer le champ de température dans la glace à partir de l'équation (I.21) en tenant compte du champ de vitesse (en général celui calculé au pas de temps précédent) puis d'intégrer la déformation (par exemple l'équation I.27) en tenant compte de ce champ de température.

Ces deux calculs se font de façon numérique. La démarche pour ensuite calculer l'évolution dans le temps de l'épaisseur de glace est la même que pour la calotte isotherme : intégration numérique à nouveau pour obtenir la vitesse moyenne puis introduction de cette vitesse dans l'équation de bilan (I.4) pour obtenir l'équation d'évolution.

Un des premiers modèles de ce type a été développé pour le Groenland par Jenssen (1977), mais en raison d'une part de la puissance des ordinateurs dont disposait Jenssen, d'autre part du schéma numérique choisi, il n'a pu étudier l'évolution que sur une durée de 1000 ans.

Parmi les autres modèles on peut citer ceux à deux dimensions (dans un plan vertical) de Huybrechts et Oerlemans (1988) et de Esch et Herterich (1990) et celui à trois dimensions de Huybrechts (1990_a, 1990_b), Huybrechts et Oerlemans (1990) pour l'Antarctique et Huybrechts et al. (1991) et Letréguilly et al. (1991) pour le Groenland.

Les principales difficultés rencontrées dans ce modèle sont :

- Le couplage température - écoulement. Certains schémas numériques doivent être utilisés pour éviter les oscillations.
- La non-linéarité de l'équation de diffusion qui, même pour des méthodes semi-implicite, limite le pas de temps en fonction du pas d'espace.
- Les conditions aux limites sur les bords, en particulier pour les bords marins.
- Le temps de calcul nécessaire. Pour son modèle 3D de l'Antarctique, Huybrechts indique un temps de calcul de 3 heures de Cray 2 (celui de Stuttgart) pour une simulation de 100 000 ans.
- L'incertitude sur les paramètres tels que le flux géothermique et le coefficient de la loi de déformation B_0. Huybrechts (1990_a) par exemple cale ces paramètres à l'aide de la géométrie actuelle de la calotte Antarctique en supposant celle ci en état stationnaire.

I.5 COMMENT TESTER LES MODELES

Les mesures que nous décrivons ici peuvent être utilisées soit comme donnée d'entrée, soit comme test du modèle, soit enfin pour caler certains paramètres. Un cas typique est celui de l'altitude de la surface qui est une donnée d'entrée pour les modèles à géométrie imposée et un test pour les modèles d'évolution. Il faut cependant être attentif à ne pas faire plusieurs usages à la fois de la même mesure.

Une importante difficulté vient du fait que nous disposons d'une calotte polaire qui n'est pas en régime stationnaire. Les résultats que l'on peut tirer de la comparaison entre données actuelles et modèles stationnaires sont donc sujets à caution.

I.5.A Données tirées des forages profonds.

- **le rapport isotopique** est généralement une donnée d'entrée, cependant l'âge des couches de glace obtenu par un modèle d'écoulement pourrait servir de test si l'on disposait par ailleurs d'une datation absolue (isotope radio-actif, comparaison avec d'autres enregistrements, couches de poussière déposées, éruption volcanique...)

- **le volume de gaz piégé** dans la glace est un indicateur potentiel des variations passées de l'altitude de la surface. On suppose que lorsque la neige se transforme en névé, puis en glace, de l'air est piégé dans la glace et que la pression dans les bulles d'air au moment du piégeage est la pression atmosphérique. L'analyse en plusieurs sites a montré qu'en effet le volume total de gaz contenu dans la glace est relié à la pression atmosphérique du lieu (Raynaud 1976, Raynaud et Lebel, 1980, Martinerie et al. sous presse). A condition d'avoir la pression atmosphérique dans le passé, cette mesure donne accès à l'altitude d'origine de la glace. Il existe cependant une incertitude majeure sur le comportement de la porosité au moment du piégeage dans le passé (le vent en surface pouvant avoir une influence marquée). De telles mesures existent pour les forages de Byrd, Dôme C et Vostok en Antarctique et Camp Century au Groenland.

- **l'évolution de la forme du trou de forage** (diamètre, inclinaison) permet de déterminer la déformation de la glace en fonction de la profondeur. Pour cela, il est nécessaire de faire deux fois les mesures à au moins un an d'intervalle, et quelquefois beaucoup plus quand les déformations sont faibles.

Les données de "fermeture du trou" (évolution du diamètre) sont difficiles à interpréter, car il s'agit de fluage transitoire, et il faudrait tenir compte de l'anisotropie. L'état des contraintes au voisinage du trou est très différent et le déviateur beaucoup plus élevé que dans la calotte polaire. Par contre au cours de ces mesures, il est possible de repérer des accidents (par exemple des augmentations brusques du diamètre à cause d'une surchauffe prolongée pendant le forage) et de les reconnaître lors de la mesure suivante. Ceci permet de mesurer le taux de contraction vertical.

L'inclinométrie (évolution de l'inclinaison) apporte de nombreux renseignements sur les déformations ($\dot{\varepsilon}_{xz}$) dues au cisaillement (τ_{xz}). Il est donc possible d'en tirer la relation entre les deux (mais pas la loi de déformation complète si la glace est anisotrope). En Antarctique il n'y a d'inclinométrie exploitable qu'à Byrd et Law Dôme, car à Dôme C et Vostok les déformations sont trop faibles pour être mesurables.

- **le profil de température** mesuré dans le trou est un indicateur à la fois des températures passées et de l'écoulement car l'advection est un terme important dans l'équation de la chaleur. Il y a cependant des limitations, le profil de température étant sensible à de nombreux autres facteurs : flux géothermique, accumulation passée, variation d'épaisseur... Il n'est pas possible à partir d'un seul profil de déterminer tous ces facteurs, l'interprétation consiste donc à estimer le mieux possible certains paramètres (par exemple les températures passées à l'aide du profil isotopique) et à ajuster les autres (il y a souvent plusieurs jeux de paramètres qui conviennent). Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre interprétation du profil de température à Vostok.

I.5.B Mesures de surface

- Vitesses.

L'absence de repères fixes loin des côtes fait que les méthodes classiques de topographie ne sont pas souvent applicables. Le positionnement par satellite est souvent utilisé, le principe étant toujours des mesures d'effet Doppler. La précision des balises Argos est trop faible pour faire des mesures significatives sauf peut être sur les glaciers émissaires. Les balises Doris (système embarqué sur SPOT 2) ont une précision décimétrique mais ne sont pas adaptées aux conditions très rudes de l'Antarctique et de plus leur prix ne permet pas d'envisager d'en disséminer un grand nombre à la surface de la calotte. Jusqu'à présent, les instruments utilisés ont été de type récepteur Doppler (système Transit ou GPS). La précision sur la position est bonne ($\approx$ 1 m) mais pour obtenir les vitesses ce type de mesure nécessite deux passages à au moins un an d'intervalle. Ceci explique la rareté de ces mesures qui ont été faites principalement dans les stations habitées (Pôle Sud, Vostok) et le long de quelques

raids (Dumont d'Urville - Dôme C, Casey - Dôme C, Casey - Vostok, Mirny - Vostok, Young 1979, Hamley et al. 1985).

Une autre méthode pour mesurer des vitesses consiste à reconnaître des accidents du terrain, ou des repères artificiels et de mesurer leur déplacement entre deux clichés (par avion ou satellite. Cette méthode a été par exemple utilisée en Antarctique de l'Ouest (Whillans et al. 1987) et sur le glacier Byrd (Lucchitta et Ferguson, 1986).

- Déformations

Les déformations en surfaces sont un peu plus aisées à obtenir car la mesure est relative (déplacement de balises). De plus dans les régions crevassées on peut déduire le champ de déformation de la forme et direction des crevasses (Vornberger et Whillans 1990)

- Altitude de la surface.

La surface de la calotte étant une surface libre, elle peut servir de test aux modèles d'évolution. Dans la pratique, étant donné l'incertitude sur certains paramètres d'entrée tels que coefficient de la loi de déformation ou flux géothermique, la surface actuelle est plutôt utilisée pour caler ces paramètres, la condition étant d'obtenir la surface actuelle en laissant le modèle évoluer vers l'état stationnaire sous les conditions climatiques actuelles. Rémy et Minster (1991) développent une autre approche et utilisent une topographie précise de la surface (obtenue par altimétrie satellitaire) pour déterminer par comparaison entre vitesses de bilan et vitesse dynamique, l'exposant (n) de la loi de déformation.

I.6 DEMARCHE SUIVIE DANS CE TRAVAIL

Nous présentons dans cet ouvrage les deux modèles que nous avons développés et leurs applications.

Le premier modèle, présenté au chapitre II, est de type "géométrie imposée". Une attention particulière a été portée sur le calcul du champ de température (découplé de l'écoulement) avec prise en compte de la variation de la température dans le socle rocheux, des changements de phase à la base du glacier (fonte ou regel), de la chaleur due à la déformation. Enfin nous avons modélisé l'existence d'une couche basale tempérée.
Associé à une modélisation simple de la précipitation en Antarctique, le modèle à géométrie imposée a été appliqué à la ligne de courant passant par Vostok dans le but de dater le forage de Vostok et d'interpréter le profil de température mesuré dans le trou de forage (chapitre III).

Le chapitre (IV) est consacré à la présentation du deuxième modèle qui est un modèle d'évolution à deux dimensions (dans un plan vertical). Le calcul de température est celui déjà développé mais couplé cette fois avec l'écoulement. Les vitesses sont intégrées dans l'hypothèse d'un écoulement par cisaillement simple, mais les contraintes longitudinales sont introduites d'une façon simplifiée à la jonction avec l'ice shelf pour modéliser l'avance et le recul de cette jonction.

CHAPITRE II

DESCRIPTION DU MODELE "A GEOMETRIE IMPOSEE"

INTRODUCTION.

La surface d'une calotte polaire est une surface libre, cela signifie qu'elle est le résultat d'un ensemble de processus tels que l'écoulement de la glace, l'alimentation par précipitation et les pertes par fonte ou vêlage d'icebergs. A l'inverse, il est possible d'obtenir des informations sur l'écoulement à partir de la topographie de la surface. C'est l'approche que nous suivons dans le modèle à géométrie imposée : la géométrie (surface et socle) ainsi que le bilan de surface (accumulation) sont supposés connus au cours du temps. Les vitesses d'écoulement en sont déduites en appliquant le principe de conservation de la masse (par exemple l'équation I.4). Il faut noter que ce type de modèle peut dans certains cas donner des résultats irréalistes si la variation d'épaisseur imposée est très différente de la réalité. L'objectif d'un modèle à géométrie imposée est surtout d'effectuer des études de sensibilité.

Un des objectifs de ce modèle est de fournir un outil pour l'interprétation (âge et origine de la glace) des forages profonds, et plus particulièrement celui de Vostok. Ce forage couvre plus d'un cycle climatique. A cette échelle de temps l'épaisseur de la calotte glaciaire n'est vraisemblablement pas restée constante. Un modèle à géométrie imposée ne peut pas (par définition) calculer les variations de l'épaisseur de glace au cours du temps mais il est possible par une étude de sensibilité d'estimer à quel point ces changements d'épaisseur affectent les résultats obtenus avec le modèle. Pour cela on impose l'évolution de la surface au cours du temps selon différents scénarios.

La détermination du champ de température dans la glace est une autre application du modèle. A partir du champ de vitesses obtenu, il est en effet possible de résoudre l'équation de la chaleur dépendant du temps et en particulier de simuler la propagation vers la base de la calotte, de perturbations (d'origine climatique) de la température de surface. Cela permet de déterminer quelles seraient, avec les hypothèses faites, les conditions thermiques prévalant actuellement à la base de l'Antarctique et d'expliquer ainsi un certain nombre de données de terrain tels que les profils de température mesurés dans la glace ou la présence de lacs sous

glaciaires. De plus, la méthode mise au point pour résoudre l'équation de la chaleur (pour un champ de vitesses donné), est directement adaptable au modèle couplé d'évolution qui est décrit au chapitre IV.

La partie 1 du chapitre II présente la description du modèle à surface imposée. La modélisation du champ de température est décrite dans la deuxième partie. Nous donnons ensuite les premiers résultats obtenus par le modèle de température (article Ritz, 1987)

Les applications au forage de Vostok (datation et interprétation du profil vertical de température), font l'objet du chapitre III.

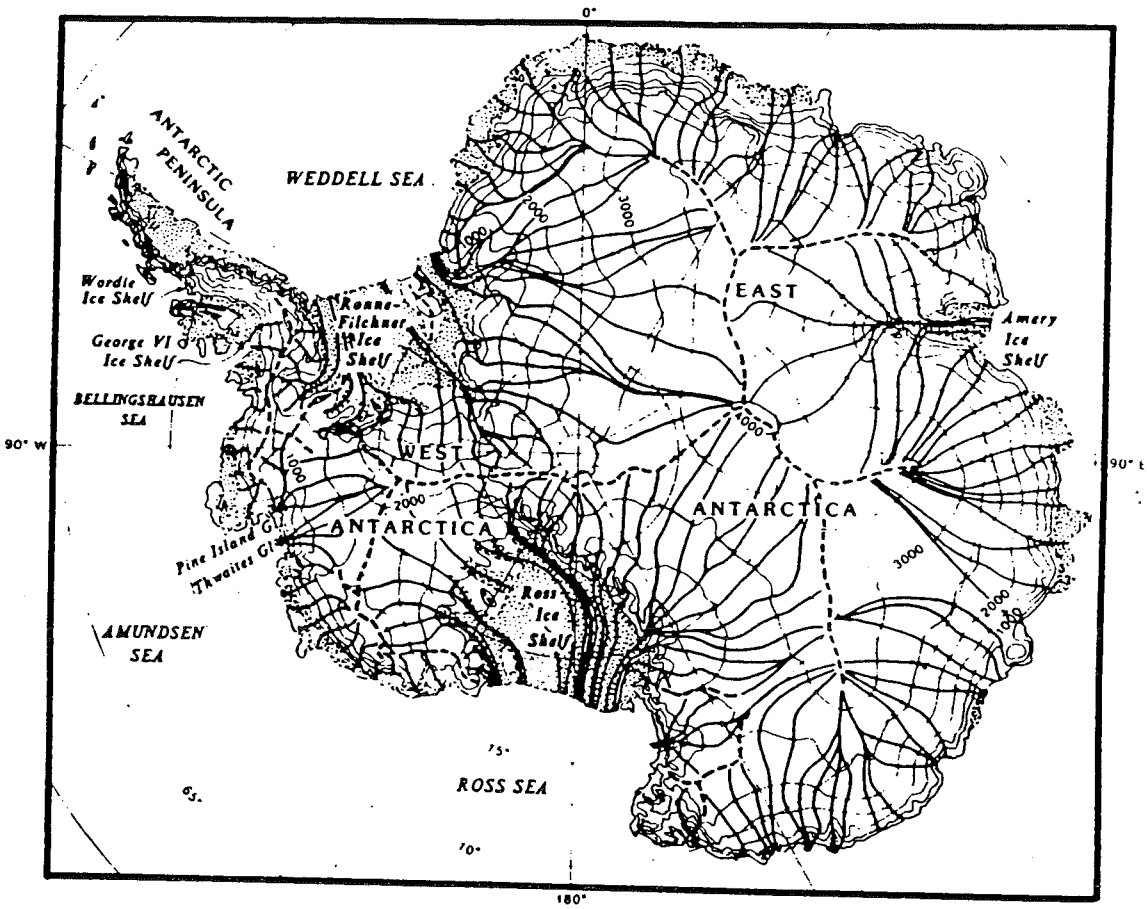


Figure II.1 Lignes de courant en Antarctique. *D'après Drewry (1983).*
Ces lignes sont tracées selon la direction de la plus grande pente de la surface.

II.1 CHAMP DE VITESSES

II.1.A Vitesses de bilan

Les vitesses de bilan sont les vitesses horizontales (moyennées verticalement sur la colonne de glace) obtenues en résolvant l'équation de conservation de la masse (ou de bilan) (I.4). Cette équation est bi-dimensionnelle dans le plan horizontal et n'est utilisée que pour traiter l'ensemble de la calotte glaciaire (par exemple, Jenssen et al. 1985). Pour les études plus détaillées, on considère en général l'écoulement le long d'une ligne de courant, et l'équation de bilan peut se simplifier tout en tenant compte de la convergence (ou divergence) horizontale de l'écoulement

- Définition des lignes de courant, convergence de l'écoulement, équation de bilan .

En suivant l'hypothèse de l'écoulement par cisaillement, la direction de l'écoulement à toute profondeur, suit la ligne de plus grande pente de la surface (équations I.25, I.27). A partir de la topographie de la surface, il est donc possible de déterminer la direction des vitesses et de tracer les lignes de courant (voir figure II.1). Ces lignes de courant ne sont pas parallèles et il s'agit de prendre en compte leur convergence (ou divergence) dans l'équation de bilan.

Nous considérons un courant de glace (limité par deux lignes de courant), la direction de l'axe x est choisie le long de la ligne de courant centrale. En général les lignes de courant ne sont pas rectilignes (voir figure II.1), le repère ainsi défini est donc curviligne, l'axe y étant perpendiculaire aux lignes de courant. Nous notons Y, la largeur du courant de glace. L'épaisseur de glace est supposée constante sur la largeur de ce courant (ou sinon il faut prendre la valeur moyenne). La vitesse d'écoulement moyennée sur l'épaisseur $\bar{U}_x$, qui est tangente aux lignes de courant, est elle aussi supposée indépendante de y sur la largeur du courant de glace.

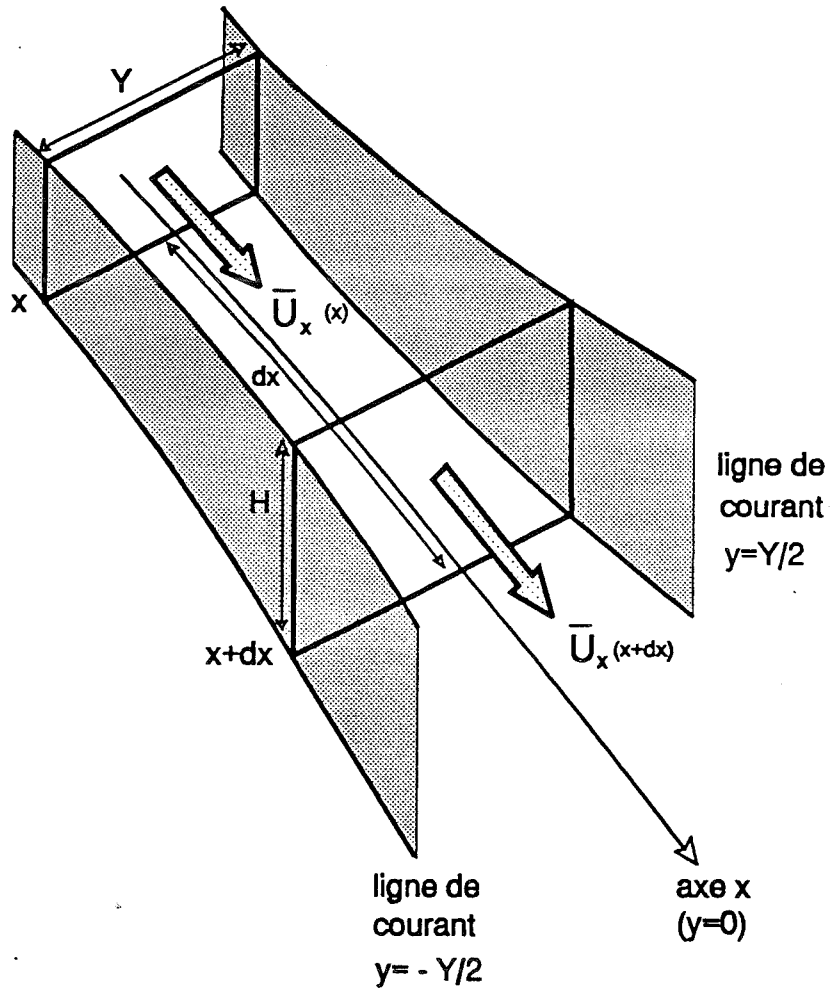


Figure II.2 Conservation de la masse avec divergence des lignes de courant.
Le volume considéré est celui ayant l'épaisseur H(x) de la nappe de glace, limité latéralement par les lignes de courant (en gris) qui sont espacées d'une distance Y(x) et longitudinalement par les deux sections en x et en x+dx. Par unité de temps, la quantité de glace entrant (du fait de l'écoulement) dans le volume à l'abscisse x est $\bar{U}_x$(x) Y(x) H(x). La quantité sortant en x+dx est $\bar{U}_x$(x+dx) Y(x+dx) H(x+dx). Il faut aussi tenir compte des apports et pertes aux interfaces air-glace (accumulation) et glace-socle (fusion). Ces interfaces ont une surface Y dx.

L'équation de conservation de la masse s'obtient en faisant le bilan des flux de glace pour un volume (dx Y H). (voir figure II.2) :

$$\frac{\partial\left(\bar{U}_x\, H\, Y\right)}{\partial x} = Y\left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t}\right) \qquad \text{(II.1)}$$

où $\dot{b}$ est l'accumulation et $\dot{f}$ la fusion.
Cette équation qui est souvent appelée équation de bilan s'écrit également :

$$\frac{\partial(H\bar{U}_x)}{\partial x} + \frac{H}{Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\bar{U}_x = \dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \qquad \text{(II.2)}$$

En comparant (II.2) avec l'équation (I.4) il vient (Budd et al. 1971) :

$$\frac{\partial \bar{U}_y}{\partial y} = \frac{1}{Y}\frac{\partial Y}{\partial x}\bar{U}_x \qquad \text{(II.3)}$$

Pour simplifier l'écriture nous notons $Sh(x)=1/Y\ \partial Y/\partial x$ (Sh pour shape car cette fonction dépend de la forme des lignes de courant). Remarquons que l'inverse de Sh, $R_e=1/Sh$ est le rayon de courbure des lignes de niveau et est plus directement obtenu sur une carte de la topographie de surface. Cette relation avec le rayon de courbure donne immédiatement Sh pour une calotte à symétrie circulaire: $Sh=1/x$, où x est la distance depuis la ligne de partage des glaces.

Sh est positif pour les zones de divergence (par exemple les dômes), nul quand les lignes de courant sont parallèles et négatif dans les zones de convergence, les plus fortes convergences étant situées juste en amont des glaciers émissaires (Figure II.1) Dans notre modèle, Sh est supposé indépendant du temps et égal à sa valeur actuelle.

Dans le modèle à géométrie imposée, l'équation de bilan pour une ligne de courant (II.2) permet d'obtenir la vitesse moyenne $\bar{U}_x$ qui lorsqu'elle est ainsi obtenue est souvent appelée vitesse de bilan.

- Résolution numérique

La méthode que nous utilisons est de type différences finies du premier ordre. L'équation (II.2) est écrite au milieu de la maille (j,j+1). Pour ($\dot{b}$- $\dot{f}$- $\partial H / \partial t$) et ($H\, Sh\, \bar{U}_x$) nous prenons la moyenne des valeurs aux mailles j et j+1. Par exemple :

$$(\dot{b}- \dot{f}- \partial H / \partial t)_{j+1/2} = [(\dot{b}- \dot{f}- \partial H / \partial t)_j + (\dot{b}- \dot{f}- \partial H / \partial t)_{j+1}] / 2$$

Nous écrivons les dérivées partielles par rapport à x avec une formule de différences finies :

$\partial (\bar{U}_x H) / \partial x = [(\bar{U}_x H)_{j+1} - (\bar{U}_x H)_j] / dx$. dx étant le pas horizontal.

Cela donne une relation récurrente liant les valeurs de $\bar{U}_x$ au noeud j+1 et j.

$$\left(\bar{U}_x \right)_{j+1} = \frac{dx \left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right)_{j+1/2} + \left(\bar{U}_x H \right)_j \left(1 - \frac{dx}{2} Sh_j \right)}{H_{j+1} \left(1 + \frac{dx}{2} Sh_{j+1} \right)} \qquad \text{(II.4)}$$

La résolution se fait en partant du dôme où la vitesse horizontale est nulle ($(\bar{U}_x)_1=0$). Si le dôme est un point de partage des glaces (Par exemple Dôme A ou Dôme C) et non pas une ligne de partage (Ridge B), il y a un point singulier car les lignes de courant étant sécantes, Sh est infini. Pour obtenir la vitesse en j=2, nous assimilons ce cas à celui d'un dôme circulaire. L'équation de bilan pour une calotte circulaire s'obtient soit d'après (II.2) avec sh =1/x soit en considérant le bilan des flux de glace pour un volume en forme d'anneau (dx $2\pi x$ H) :

$$\frac{\partial(x \bar{U}_x H)}{\partial x} = x \left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \qquad \text{(II.5)}$$

La vitesse au deuxième noeud (j=2) s'obtient par intégration analytique. Pour avoir le même type d'approximation que dans (4) nous supposons que ($\dot{b}$- $\dot{f}$- $\partial H / \partial t$) est linéaire entre les deux premiers noeuds.

$$\left(\bar{U}_x\right)_2 = \frac{dx \left(\left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right)_1 + 2 \left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right)_2 \right)}{6 H_2} \qquad \text{(II.6)}$$

Sur le bord de la calotte, il existe un autre point singulier : lorsque l'épaisseur est nulle, la vitesse peut numériquement devenir infinie (voir équation II.4). En effet, l'Antarctique étant entièrement en zone d'accumulation et la fusion basale étant de l'ordre de quelques mm/an, le bilan de surface ($\dot{b}$) est toujours positif (environ 50 cm/an)et est prédominant dans le membre de droite de l'équation (II.2). Si la divergence des lignes de courant est nulle (ou négative), l'équation (II.2) indique que le débit de glace ($\bar{U}_x$ H) augmente le long de l'écoulement.

Il existe pourtant de nombreux sites côtiers où l'épaisseur de glace est nulle et où le socle apparaît, mais ce sont des zones de glace morte et les lignes de courant divergent fortement en amont de ces points. La côte se présente en effet comme une alternance de glaciers émissaires qui drainent la glace venant de l'intérieur et de zones de glace immobiles. Pour prendre en compte cette hétérogénéité de la côte dans un modèle à une seule dimension horizontale, il faut, dans le cas d'une ligne de courant se terminant par de la glace morte, imposer une forte divergence de façon à ce que le débit de glace soit nul sur la côte. Cependant, étant donné la prépondérance des glaciers émissaires dans l'écoulement (ils évacuent 90 % de la glace), nous ne considérons ici que les lignes de courant aboutissant dans de tels glaciers. Il n'y a pas de point singulier car en arrivant sur la côte ces glaciers se mettent à flotter et leur front se situe en mer où il y a de l'ablation sous forme de vêlage d'icebergs.

II.1.B PROFILS VERTICAUX DE VITESSE

La vitesse moyenne sur une colonne étant obtenue à partir de l'équation de bilan (II.2), il reste à donner la forme du profil vertical des vitesses pour obtenir le champ de vitesse complet. Il est indifférent d'imposer la forme de la vitesse horizontale ou celle de la vitesse verticale car l'une peut se déduire de l'autre en écrivant l'incompressibilité (I.1) et en supposant le rapport (vitesse longitudinale u_x / vitesse transversale u_y) indépendant de la profondeur et donné par (II.3).

- Profil de vitesse verticale imposé.

Historiquement, c'est la forme de la vitesse verticale qui a été imposée dans les premiers travaux sur ce sujet. Nye (1951) a calculé les contraintes dans l'approximation du corps plastique parfait en supposant $\dot{\varepsilon}_{ee}$ uniforme, hypothèse appelée par Lliboutry (1965) "l'écoulement de Nye". Robin (1955) suppose aussi une vitesse verticale décroissant linéairement depuis la surface et s'annulant au socle pour calculer le champ de température. Avec la même hypothèse, Nye (1957) a traité le cas d'une nappe de glace isotherme dans le cas d'une loi de Glen puis a estimé l'âge de la glace en profondeur.

Ce profil de vitesse ne permettant pas de simuler les températures observées dans le trou de forage de Camp Century, Dansgaard et Johnsen (1969) et Philberth et Federer (1971) ont introduit un modèle à deux couches, dans lequel:

$$u_z = \dot{b}\left(1 - \frac{Z}{(H - H_m)}\right) \qquad \text{(lineaire)} \qquad 0 < Z < H - 2\,H_m$$

$$u_z = \frac{\dot{b}\,(H - Z)^2}{4\,H_m\,(H - H_m)} \qquad \text{(parabolique)} \qquad H - 2\,H_m < Z < H \qquad \text{(II.7)}$$

où Z est la profondeur, $2\,H_m$ l'épaisseur de la couche basale et $\dot{b}$ est égal à l'accumulation dans le cas d'un régime stationnaire.

H_m et $\dot{b}$ sont ajustés de façon à reproduire le profil de température mesuré. Avec le même modèle, Hammer et al. (1978) utilisent l'épaisseur des couches annuelles obtenue par stratigraphie pour déterminer la valeur de H_m et $\dot{b}$. Enfin Lliboutry (1979) donne une expression théorique de H_m en fonction de la pente de la surface et de celle du socle.

- Profil de vitesse horizontale imposé.

Whillans (1981) a imposé la forme de la vitesse horizontale, d'après les mesures d'inclinométrie dans le trou de forage de Byrd en supposant que le profil ainsi trouvé est le même tout au long de la ligne de courant. Lliboutry (1979) a développé un calcul théorique pour les nappes de glace froide qui permet d'avoir une formulation plus générale. C'est la démarche que nous avons suivie et dont nous rappelons ici les grandes lignes.

• Modèle de Lliboutry pour une nappe de glace froide (sans glissement).

Pour faciliter l'écriture, nous utilisons la profondeur réduite:

$$\zeta = \frac{Z}{H} = \frac{(E + z)}{H} \qquad \text{(II.8)}$$

ζ varie de 0 à 1 lorsque z varie de -E à -B (l'axe z est dirigé vers le bas et E et B sont les altitudes de la surface et du socle, le détail de ces notations est donné en I.3.A et figure I.7).

Il faut noter que les vitesses ne sont pas réduites et sont toujours exprimées en m/an, de même les taux de déformation sont $\partial u_x/\partial z$ et $\partial u_z/\partial z$ et non $\partial u_x/\partial \zeta$ et $\partial u_z/\partial \zeta$.

Nous nous plaçons dans l'approximation de l'écoulement par cisaillement explicitée au chapitre I. On admet une même loi rhéologique à toute profondeur (malgré l'anisotropie croissante, puis la recristallisation). L'équation (I.27) peut s'écrire :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\dot{\gamma}_b \, \zeta^n \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T}\right)\right) \qquad \text{(II.9)}$$

avec

$$\dot{\gamma}_b = B_0 \, (\rho \, g \, H \, \alpha)^n \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_{mb}} - \frac{1}{T_b}\right)\right) \qquad \text{(II.10)}$$

où α est la pente de la surface (avec nos notations $\alpha = - \partial E / \partial x$), T_b est la température basale et T_{mb} est la température de fusion à la base du glacier (fonction de la pression hydrostatique et donc de l'épaisseur de glace , annexe 1).

La première simplification consiste à remplacer le terme dépendant de la température par sa première approximation près du socle (Philberth et Federer 1971) :

$$\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_b} - \frac{1}{T}\right) \approx \frac{E_a}{R}\,\frac{T - T_b}{T_b^{\,2}} \approx - k \, G_0 \, H \, (1 - \zeta) \qquad \text{(II.11)}$$

$$\text{où } k = \frac{E_a}{R \, T_b^{\,2}} \approx \frac{1}{10} \quad (\deg^{-1})$$

et G_0 est le gradient géothermique à la base.

Dans le haut de la nappe de glace cette approximation conduit à des températures trop froides. Cependant, dans le calcul de la vitesse, l'influence de la température sur la déformation n'est importante qu'à la base de la calotte et l'erreur commise est faible.

A partir de développements limités au premier ordre ($(1-x)^a \approx 1-ax \approx e^{-ax}$).

$$\exp\left(-k \, G_0 \, H \, (1 - \zeta) \right) \approx \zeta^{\, k \, G_0 \, H} \qquad \text{(II.12)}$$

L'équation à intégrer (II.9) s'écrit:

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = - \dot{\gamma}_b \, \zeta^m \qquad \text{(II.13)}$$

et la vitesse horizontale $u_x(z)$

$$u_x(z) = \frac{\dot{\gamma}_b \, H}{m+1} \left(1 - \zeta^{m+1} \right) \qquad \text{(II.14)}$$

La vitesse horizontale moyennée sur la colonne de glace ($\bar{U}_x$) :

$$\bar{U}_x = \frac{\dot{\gamma}_b \, H}{m+2} \qquad \text{(II.15)}$$

La vitesse horizontale pour une coordonnée z (profondeur réduite ζ), peut donc simplement s'exprimer en fonction de la vitesse moyenne :

$$u_x(z) = \frac{m + 2}{m + 1} \left(1 - \zeta^{m+1} \right) \bar{U}_x \qquad \text{(II.16)}$$

Dans le cas d'une nappe de glace isotherme cette solution est exacte avec m=n (exposant de la loi de Glen). Pour une nappe de glace froide, l'équation (II.11) donne $m=n+kG_0H$ mais Lliboutry (1979) pour tenir compte de la production de chaleur due à la déformation dans la couche basale suggère plutôt :

$$m = n - 1 + k \, G_0 \, H \qquad \text{(II.17)}$$

A titre d'exemple, la valeur de m pour Vostok (H=3700 m, $G_0 \approx 0.025$ °C/m) est $m \approx 11$.

• ***Généralisation au cas avec glissement.***

Le modèle de Lliboutry (1979) s'applique seulement aux nappes de glace froide s'écoulant par déformation et sans glissement. Il existe des zones en Antarctique où la nappe de glace glisse sur le socle, en particulier sous les glaciers émissaires. Pour effectuer des études de sensibilité en fonction de ce glissement, nous introduisons une vitesse à la base u_b qui est une fraction de la vitesse moyenne :

$$u_b = s\,\bar{U}_x \qquad \text{(II.18)}$$

La valeur de s est imposée en tenant compte du fait qu'il n'y a pas de glissement (s=0) lorsque la base du glacier est en dessous du point de fusion (information éventuellement fournie par le calcul des températures décrit plus loin). Par l'intermédiaire de u_b il est également possible d'introduire la déformation de la couche de sédiment sous-glaciaire.

En tenant compte de cette vitesse basale, la vitesse horizontale s'écrit :

$$u_x(x,z) = \psi(\zeta)\,\bar{U}_x(x)$$
$$\text{avec}\quad \psi(\zeta) = s + (1 - s)\,\frac{m+2}{m+1}\left(1 - \zeta^{m+1}\right) \qquad \text{(II.19)}$$

L'écriture de la vitesse sous la forme d'un produit (un terme décrivant la forme du profil vertical multiplié par la valeur moyenne pour la colonne) est également utilisée par Whillans (1979) qui tire parti des mesures d'inclinométrie dans le forage de Byrd pour imposer la forme du profil, supposée identique pour toute la ligne de courant (hypothèse discutable). Reeh (1988) introduit de plus l'influence des contraintes longitudinales. Il faut noter que ce dernier auteur n'utilise pas cette formulation dans le cadre d'un modèle à géométrie imposée mais calcule le profil de la surface.

• ***Implications de cette formulation sur les autres composantes de la vitesse.***

+ vitesse transversale.

Les lignes d'écoulement étant situées dans un même plan vertical, le rapport des vitesses transversales et longitudinales est indépendant de la profondeur :

$u_y / u_x = \bar{U}_y / \bar{U}_x$

Cela implique que la forme de la vitesse horizontale est la même selon x et y :

$$u_y(x,y,z) = \psi(\zeta)\ \bar{U}_y(x,y) \tag{II.20}$$

+ Vitesse verticale et taux de déformation.

Le taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{zz}$ s'obtient à partir de l'équation d'incompressibilité (I.1) en tenant compte de (II.3) et (II.19).

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\bar{U}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x} - \bar{U}_x\, Sh(x)\, \psi \tag{II.21}$$

Puis d'après l'équation de bilan (II.3)

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = -\bar{U}_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\psi}{H}\left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} - \bar{U}_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) \tag{II.22}$$

La vitesse verticale se calcule en intégrant analytiquement $\dot{\varepsilon}_{zz}$, depuis la surface où u_z est

donnée par l'équation (I.2). On vérifie que la valeur de u_z au fond est celle donnée par (I.3).

$$u_z(x,z) = (\dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t}) \left(1 - \int_0^\zeta \psi(\xi)\, d\xi \right) + \bar{U}_x\, \psi(\zeta) \left(\zeta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x} \right) \qquad \text{(II.23)}$$

$$- \bar{U}_x\, H \left(\frac{\partial s}{\partial x} \int_0^\zeta \frac{\partial \psi}{\partial s}(\xi)\, d\xi + \frac{\partial m}{\partial x} \int_0^\zeta \frac{\partial \psi}{\partial m}(\xi)\, d\xi \right) + \dot{f} \int_0^\zeta \psi(\xi)\, d\xi - \frac{\partial B}{\partial t}$$

$\partial m/\partial x$ et $\partial s/\partial x$ sont calculés numériquement (par différence finie) d'après les valeurs de m et s le long de la ligne de courant en fonction de (II.17) et du type de base qui conditionne la possibilité de glissement.

Nous appelons vitesse verticale cinématique le terme :

$$u_{z\,cin} = \bar{U}_x\, \psi(\zeta) \left(\zeta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x} \right) \qquad \text{(II.24)}$$

qui correspond à la vitesse verticale due au mouvement horizontal.

Les divers termes de l'équation (II.23) peuvent s'intégrer analytiquement et la formulation détaillée ainsi que celle des taux de déformation ($\dot{\varepsilon}_{zz}$, $\dot{\varepsilon}_{xx}$ et $\dot{\varepsilon}_{zz}$) est donnée dans l'annexe 2.

Il existe d'autres modèles analytiques donnant la forme du profil de vitesse (Lliboutry 1979) mais celle que nous présentons ici comporte certains avantages : Si la loi rhéologique est uniforme, il est possible de justifier théoriquement la valeur de m et dans le cas d'une glace isotherme cette formulation est exacte. Mais surtout, elle est très maniable et permet d'étudier la sensibilité des autres variables à la forme de la vitesse et à la proportion de glissement simplement en faisant varier les paramètres m et s.

Les figures (II.3), (II.4) et (II.5) montrent la forme de u_x et u_z pour plusieurs valeurs de m, s et $\dot{f}$. Dans la partie supérieure la vitesse horizontale est à peu près constante avec la profondeur, et la vitesse verticale est linéaire ($\dot{\varepsilon}_{zz}$ constant). Il faut noter que la vitesse verticale (u_z) est assez peu sensible à la valeur de m et de s, l'influence de la fusion basale ($\dot{f}$) est légèrement plus grande. Le profil de u_x est indépendant de la distance au Dôme mais ce n'est pas le cas pour u_z qui est sensible à la pente de la surface et du socle principalement en raison de la vitesse cinématique qui augmente avec x. Les figures présentées donnent la vitesse verticale à 100 km du Dôme pour une calotte de longueur totale 500 km (voir plus loin le profil stationnaire utilisé) c'est à dire dans une région où $u_{z\,cin}$ est faible.

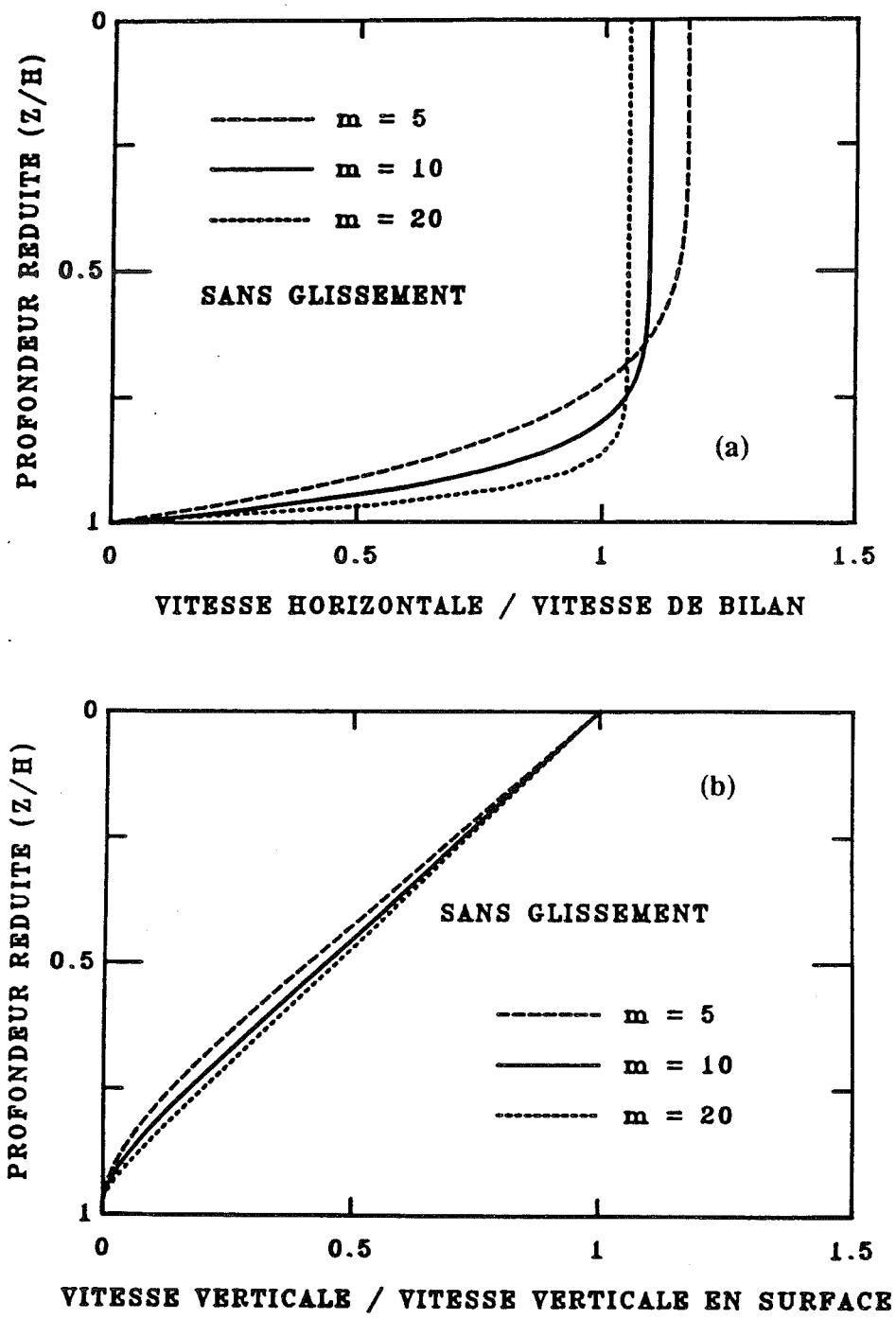
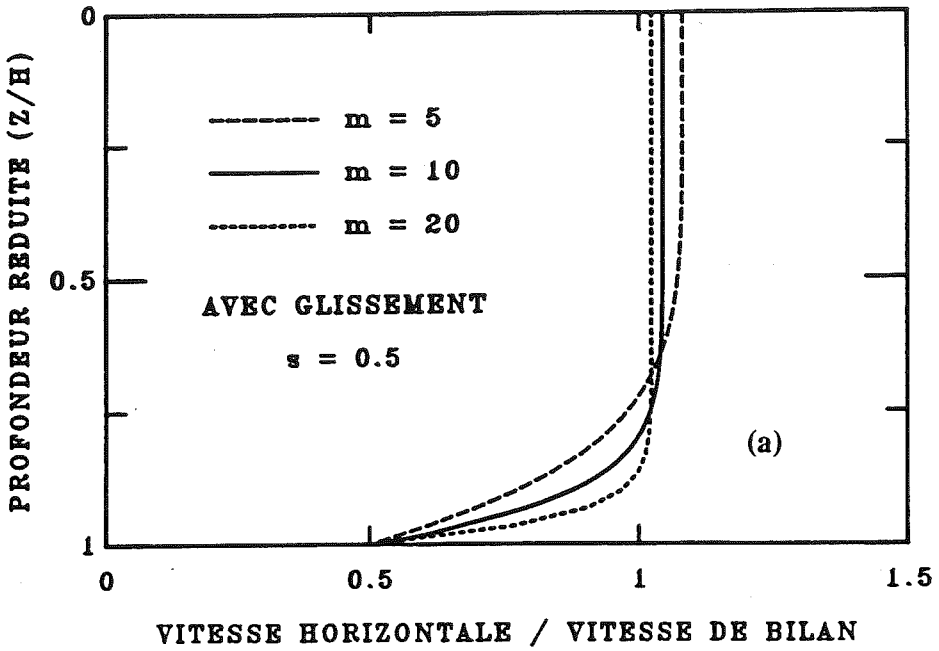


Figure II.3 Profils de vitesse sans glissement.
(a) vitesse horizontale (u_x) / vitesse de bilan ($\bar{U}_x$)
(b) vitesse verticale ($u_z(z)$) / vitesse verticale en surface ($u_z(-E)$)
Ces rapports, représentés en fonction de la profondeur réduite (profondeur/épaisseur), sont calculés avec différentes valeurs du paramètre m, d'après l'équation (II.19) pour la vitesse horizontale, la vitesse verticale s'en déduisant grâce à l'équation d'incompressibilité (I.1). Le glissement est supposé nul (paramètre s=0) et il n'y a pas de fusion basale.



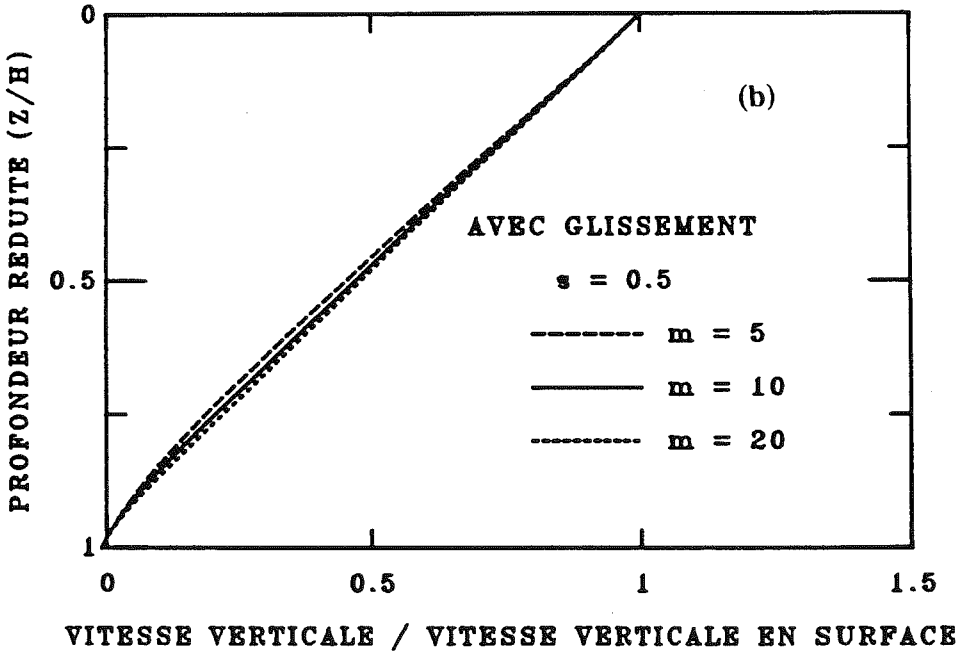


Figure II.4 Profils de vitesse avec glissement.
(a) vitesse horizontale (u_x) / vitesse de bilan ($\bar{U}_x$)
(b) vitesse verticale ($u_z(z)$) / vitesse verticale en surface ($u_z(-E)$)
Ces rapports, représentés en fonction de la profondeur réduite (profondeur/épaisseur), sont calculés avec différentes valeurs du paramètre m, d'après l'équation (II.19) pour la vitesse horizontale, la vitesse verticale s'en déduisant grâce à l'équation d'incompressibilité (I.1). La fraction de la vitesse moyenne dû au glissement est 0.5. (paramètre s=0.5). Il n'y a pas de fusion basale.

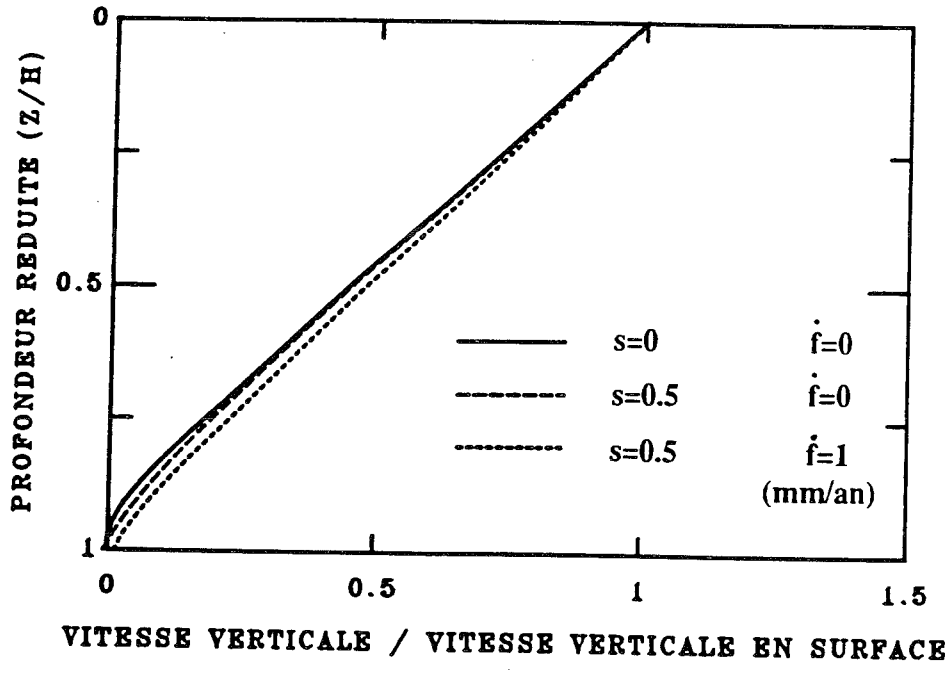


Figure II.5 Influence du glissement et de la fusion basale sur la vitesse verticale.
Le rapport vitesse verticale ($u_z(z)$) / vitesse verticale en surface ($u_z(-E)$) est représenté en fonction du glissement (s=0 et s=0.5) et de la fusion basale (f=0 et f=1 mm/an)
La valeur du paramètre m est fixée (m=10)

- ***Restrictions sur l'utilisation de ce type de modèle***

  + *Calcul numérique du profil de vitesse.*

Il y a une approche numérique donnant le profil vertical de u_x. A partir du champ de températures (voir plus loin), l'équation (I.27) peut s'intégrer numériquement, puis une deuxième intégration donne la vitesse moyenne sur la colonne, or la vitesse moyenne ainsi calculée ne satisfait pas forcément l'équation de conservation de la masse (II.2).

Dans le modèle d'évolution c'est justement en introduisant cette vitesse intégrée (obtenue par I.27) dans l'équation de conservation de la masse que l'on peut calculer les variations d'épaisseur de la calotte glaciaire. Dans le modèle à surface imposée, $(\partial H/\partial t)$ est supposé connu et la relation :

$$\frac{1}{H} \int_{-E}^{-B} u_x(x,z)\, dz = \bar{U}_x(x) \qquad \text{(II.25)}$$

avec $\bar{U}_x$ la vitesse de bilan obtenue par (II.2), est utilisée par certains auteurs (Budd et al., 1971 qui prennent $\partial H/\partial t=0$) pour déterminer le coefficient (B_T) de la loi de déformation.

En réalité ce coefficient est assez bien connu pour de la glace basale à plusieurs maxima et c'est plutôt la température basale qui est ainsi déterminée. Cependant, s'il y a du glissement ou des couches très anisotropes favorisant l'écoulement le "coefficient de déformation" ainsi obtenu n'a aucun sens.

+ *Cas non stationnaire.*

D'une manière générale, la seule information sur les vitesses que l'on peut tirer d'un modèle à surface imposée est l'ensemble des champs de vitesse compatibles avec la géométrie de la calotte et le bilan de surface prescrits. Certaines hypothèses, basées sur la loi de déformation de la glace, permettent de préférer un champ de vitesse parmi les autres en jouant sur la forme du profil de vitesse.

Dans le cas transitoire, on peut avec ce modèle étudier l'influence sur le champ de vitesse des variations de la géométrie de la calotte ou du bilan de surface, mais en revanche il est impossible de simuler l'effet des variations de température sur l'écoulement. Nous n'envisageons par conséquent pas d'imposer des variations des paramètres m et s au cours du temps.

II.1.C CAS PARTICULIER DES DOMES.

Sur une ligne de partage des glaces, la pente de la surface est nulle, ainsi que la vitesse horizontale. Les approximations faites pour obtenir (I.27) ne sont alors plus valables. En particulier, il n'est pas possible de négliger les contraintes longitudinales σ'_{xx} et σ'_{zz} devant la contrainte de cisaillement τ_{xz}. Le problème devient alors beaucoup plus complexe, d'autant plus que la viscosité dépend du déviateur des contraintes et il faut alors résoudre le problème mécanique complet.

Quelques auteurs ont abordé ce problème avec des méthodes sensiblement différentes. Dans le cas du Dôme C, nous avons (Ritz, 1980) résolu les équations d'équilibre en utilisant un développement limité selon x de la fonction de courant et de la température et appliqué les résultats au Dôme C. Raymond (1983) pour la calotte de Devon Island, a utilisé une méthode aux éléments finis pour une glace isotherme avec les conditions sur les bords (à une distance de 20 épaisseurs) données par l'équation (II.19) isotherme (m=3) et sans glissement (s=0). Dahl-Jensen (1989) a développé un modèle aux différences finies, dans lequel les champs de contraintes, vitesses et températures sont calculés successivement, en itérant jusqu'à l'obtention de la convergence.

Malgré la différence de ces approches, ces modèles sont qualitativement en accord et montrent que la déformation ($\dot{\varepsilon}_{zz}$) est plus grande dans le haut du glacier que ne le donne l'équation (II.21). Cet effet est particulièrement visible pour la glace isotherme, pour laquelle la vitesse verticale au Dôme a un profil très proche d'une parabole ce qui donne :

$$u_z(x,z) = u_z(x,-E) \left(1 - \zeta \right)^2 \qquad \text{(II.26)}$$

Pour la glace froide, cet effet est contrecarré en partie par le fait que la glace est beaucoup plus froide (et donc plus difficile à déformer) dans le haut du glacier qu'à la base. Raymond (1983) et Dahl-Jensen (1988) montrent qu'au fur et à mesure que l'on s'éloigne du Dôme les profils de vitesse tendent vers le cas de l'écoulement par cisaillement, qui est atteint à une distance correspondant à quelques épaisseurs: 10 épaisseurs d'après Raymond (15 km), 5 épaisseurs d'après Dahl-Jensen. Ces résultats sont donnés pour la vitesse horizontale, la vitesse verticale tendant encore plus vite vers la forme obtenue dans l'écoulement par

cisaillement. Les différences entre ces deux auteurs sont sans doute dues au fait que Raymond a traité un cas isotherme.

Au niveau du modèle numérique plusieurs démarches sont possibles, en fonction du but recherché.

Pour connaître ce qui se passe exactement au Dôme au point de vue mécanique et thermique, il est utile d'avoir un modèle spécifique. C'est essentiellement le cas lorsqu'on désire interpréter un forage situé sur un Dôme (une telle localisation a l'avantage de limiter les effets d'origine). Cela peut s'avérer particulièrement important pour la datation, les modèles spécifiques aux Dômes donnant, dans la partie haute du glacier, des âges systématiquement plus vieux que ceux obtenus avec l'équation (II.21) (l'écart est encore plus fort avec les datations qui supposent u_z linéaire et s'annulant au fond). La validité des résultats ainsi obtenus est cependant dépendante des déplacements éventuels du Dôme au cours du temps.

Pour les études concernant l'ensemble du glacier un modèle spécifique de Dôme est par contre superflu. Si le profil de température au Dôme n'est qu'imparfaitement simulé cela n'a que très peu d'influence sur le champ de température en aval car le processus de diffusion horizontale est négligeable et la vitesse horizontale au dôme ainsi que l'advection correspondante sont extrêmement faibles. D'autre part, nous verrons plus loin que dans la modélisation de l'évolution de la calotte, c'est la vitesse moyenne $\bar{U}_x$ qui intervient et il suffit de savoir qu'elle est nulle au dôme. Le champ de vitesses en ce point n'est donc pas calculé.

Pour ces raisons, nous nous sommes limités dans ce travail à une formulation assez simple de la vitesse verticale, généralement celle donnée par l'équation (II.23). Pour des raisons de symétrie, le glissement (tout comme la vitesse horizontale) est nul et s=0. Pour tenir compte du régime particulier du Dôme, la valeur de m est plus faible que pour le reste de la ligne de courant.

Cette formulation rejoint celle de Bolzan (1985) pour ses fonctions de classe A (avec m+1=p). Pour l'interprétation du profil de température au Dôme C, Bolzan a en effet étudié systématiquement deux familles de courbes avec un taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{zz}$ proportionnel à :

$-(1-\zeta^p)$ pour la classe A.

$-(1-\zeta)^p$ pour la classe B.

Cette dernière classe est dite à "peau fine" car la déformation semble concentrée dans une peau de surface.

D'après Bolzan (1985), la meilleure simulation du profil de température mesuré s'obtient avec une fonction de classe B ayant un paramètre p=2.5. Il nous a donc paru intéressant d'introduire ce type de fonction dans notre modèle, en particulier pour mener des tests de sensibilité dans l'étude des dômes. La vitesse verticale s'écrit alors pour les deux classes :

Classe A

$$u_z(z) = \left(\dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \left(1 - \zeta \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{\zeta^{m+2}}{m+2} \right) \right) + \dot{f} \zeta \frac{m+2}{m+1} \left(1 - \frac{\zeta^{m+2}}{m+2} \right) - \frac{\partial B}{\partial t} \qquad \text{(II.27)}$$

Classe B

$$u_z(z) = \left(\dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \left(1 - \zeta \right)^{m+2} + \dot{f} \left(1 - (1-\zeta)^{m+2} \right) - \frac{\partial B}{\partial t}$$

Nous prenons m=p+1 de façon à ce que les classes A et B se rejoignent quand m=0. On remarque que cette fonction (m=0), lorsqu'il 'y a pas de fusion ($\dot{f}$=0) est la parabole trouvée par Raymond, et il parait donc a priori plus réaliste d'utiliser la classe A, puisque cette parabole (nappe de glace isotherme) est supposée donner la limite maximum pour la concentration de la déformation dans le haut du glacier. Nous faisons cependant des tests de sensibilité avec les deux types de fonction, avec en particulier, dans le cas d'une classe A, un paramètre m inférieur à celui utilisé dans le reste du glacier.

La forme de la vitesse verticale au dôme pour les classes A et B est présentée dans la figure (II.6).

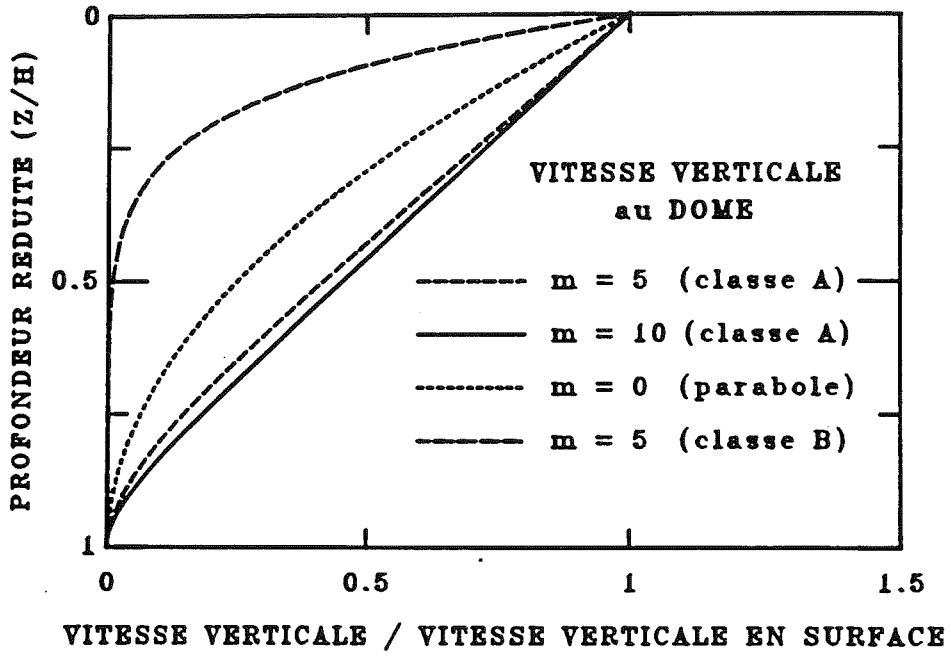


Figure II.6 Vitesse verticale au Dôme.
Le rapport vitesse verticale ($u_z(z)$) / vitesse verticale en surface ($u_z(-E)$) est représenté pour les classes A et B (équation II.27).

II.1.D PROFIL ANALYTIQUE COMPATIBLE AVEC LE MODELE POUR UNE CALOTTE POLAIRE EN ETAT STATIONNAIRE.

De nombreux auteurs ont proposé dans des cas simples, des profils analytiques pour une calotte polaire en état stationnaire. Une étude détaillée de la littérature sur ce sujet peut être trouvée dans Lliboutry (1965) ou Paterson (1981). Nous cherchons ici s'il existe pour des cas simples de bilan en surface, un profil compatible avec notre modèle. Nous entendons par là, un profil dans lequel le champ de vitesses calculé à partir des vitesses de bilan (équation II.2) et de la forme de la vitesse (II.19) est le même que celui obtenu par intégration de la déformation (équation I.27) dans le cadre des mêmes approximations (II.11, II.12).

L'intérêt d'un tel profil est d'une part de permettre une présentation des champs de vitesses et de température obtenus dans ce chapitre, d'autre part de fournir une solution analytique qui permette de tester certains codes numériques (méthode numérique employée, écriture du programme lui même), que ce soit le calcul des vitesses de bilan (II.2) ou le profil obtenu en résolvant l'équation d'évolution (voir chapitre IV).
Nous développons ici une variante de calcul de Vialov (1958)

- Obtention du profil d'équilibre

D'après les équations (II.15) et (II.18) :

$$\bar{U}_x = \frac{\dot{\gamma}_b \, H}{(m + 2)\,(1 - s)} \qquad \text{(II.28)}$$

L'isostasie est prise en compte de façon locale, d'après l'équation (I.6). Nous faisons l'hypothèse que le socle d'origine (avant la calotte) était horizontal. Cela conduit à une relation simple entre pente de la surface et variation d'épaisseur le long de l'écoulement :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}\left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a}\right) \qquad \text{(II.29)}$$

La vitesse moyenne peut alors s'écrire en tenant compte de la définition de $\dot{\gamma}_b$ (II.10) :

$$\bar{U}_x = A\, H^{n+1} \left(- \frac{\partial H}{\partial x} \right)^n$$

avec (II.30)

$$A = \frac{(\rho_g\, g)^n \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_a} \right)^n B_0 \exp\left(\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_{mb}} - \frac{1}{T} \right) \right)}{(m + 2)(1 - s)}$$

L'équation de bilan devient alors:

$$\frac{\partial \left(A\, H^{n+2} \left(- \frac{\partial H}{\partial x} \right)^n \right)}{\partial x} + Sh\, A\, H^{n+2} \left(- \frac{\partial H}{\partial x} \right)^n = \dot{b} - \dot{f} \qquad \text{(II.31)}$$

Cette équation peut s'intégrer numériquement en tenant compte des variations spatiales de la température basale et du bilan. Si l'on désire obtenir une solution analytique, il faut se limiter au cas simplifié (A, $\dot{b}$ et $\dot{f}$ indépendants de x) bien que ces hypothèses (surtout $\dot{b}$ constant) soient grossières.

Nous envisageons le cas bi-dimensionnel (Sh=0) et celui de la calotte à symétrie circulaire (Sh=1/x, dans ce dernier cas il est plus aisé de partir de l'équation de bilan sous sa forme II.5)). En remarquant que :

$$H^{n+2} \left(- \frac{\partial H}{\partial x} \right)^n = \left(\frac{- n}{n + 2} \right)^n \left(\frac{\partial \left(H^{\frac{2n+2}{n}} \right)}{\partial x} \right)^n \qquad \text{(II.32)}$$

Le profil analytique donné par Vialov (1958) s'écrit :

$$H^{(2+\frac{2}{n})} = H_0^{(2+\frac{2}{n})} - 2\left(\frac{\dot{b} - \dot{f}}{A'}\right)^{\frac{1}{n}} x^{(1+\frac{1}{n})} \qquad \text{(II.33)}$$

où H_0 est l'épaisseur au Dôme, A'= A si Sh=0 et A'=2A si Sh= 1/x (calotte circulaire).

Nous avons déjà souligné que la vitesse horizontale peut présenter un point singulier lorsque l'épaisseur est nulle et noté qu'en réalité les lignes d'écoulement se terminent par des glaciers émissaires d'épaisseur non nulle. Nous simulons ceci dans le profil analytique en imposant un socle initial légèrement sous le niveau de la mer (à la profondeur h_0 c'est à dire une altitude $-h_0$). La calotte se termine alors par une nappe de glace flottant sur la mer. Au point de décollement la pression sur le socle est la même qu'elle soit due à la glace ou à l'océan et si l'on admet qu'il n'y a pas de régionalisation de l'isostasie (I.6), il n'y a pas d'enfoncement isostatique supplémentaire. L'épaisseur au point où la glace commence à flotter (point de décollement), H_l, est obtenue en écrivant simplement la flottaison de la glace :

$$H_l = h_0 \frac{\rho_w}{\rho_g} \qquad \text{(II.34)}$$

La distance, L, entre le dôme et le point de décollement est :

$$L = \left(\frac{H_0^{(2+\frac{2}{n})} - H_l^{(2+\frac{2}{n})}}{2\left(\frac{\dot{b} - \dot{f}}{A'}\right)^{\frac{1}{n}}} \right)^{\frac{n}{n+1}} \qquad \text{(II.35)}$$

Pour comparer ce profil et la forme réelle de la calotte ($\dot{b}$- $\dot{f}$)/A' est implicitement ajusté afin que la calotte ait la longueur voulue. En supposant H_1=0, Paterson (1981) a monté que l'accord est très satisfaisant sur le profil allant de Mirny à l'intérieur.

Si l' épaisseur au centre H_0, la longueur L et le socle initial h_0 sont donnés, la forme de la calotte ne dépend que de la valeur de n, l'exposant de la loi de Glen. Cela signifie que pour une même géométrie il peut y avoir plusieurs régimes d'écoulement. Par exemple, un régime rapide avec une forte accumulation et une température basale élevée et un régime lent avec faible accumulation et température basse. La figure (II.7) montre ce profil pour n=1 et n=3 pour une calotte de longueur 500 km et d'épaisseur maximum 4000 m, et un socle initial à la profondeur -100 m.

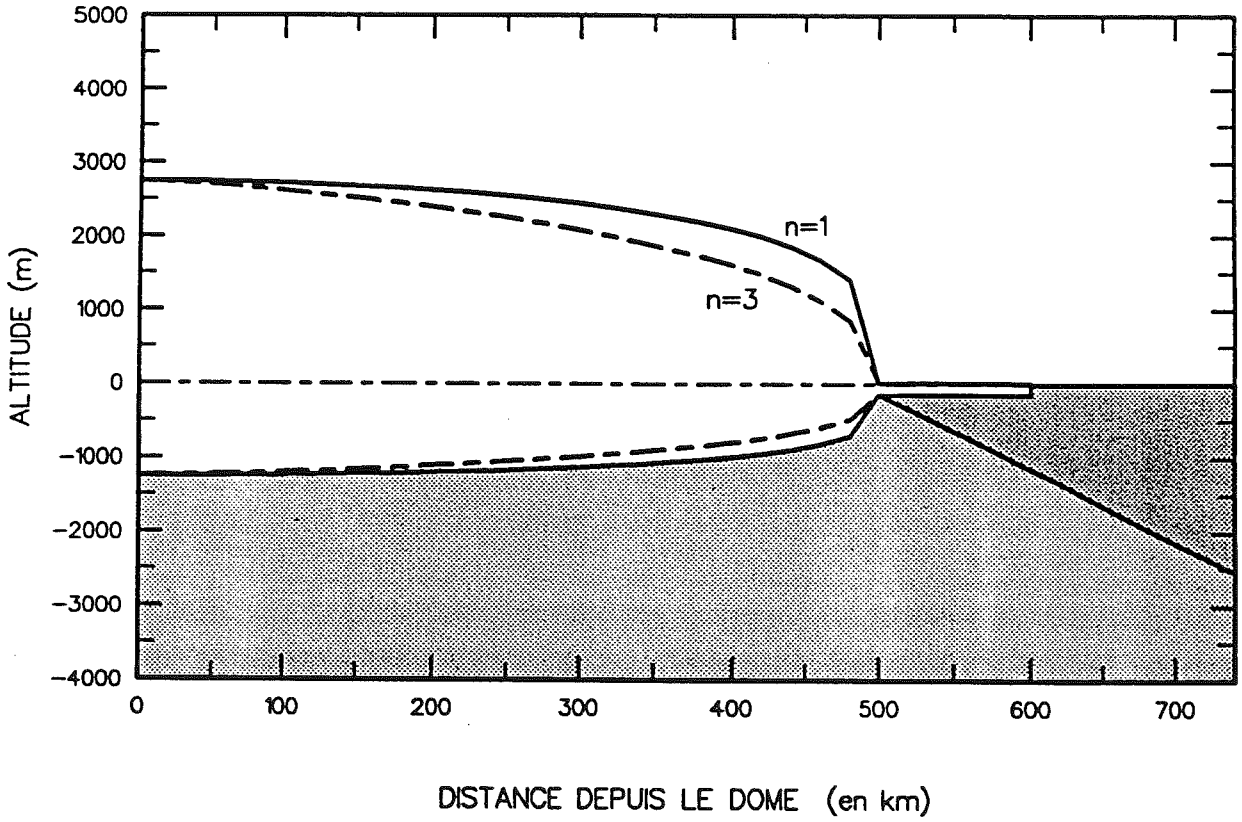


Figure II.7 Profils d'équilibre selon la valeur de l'exposant de la loi de déformation. *L'océan est représenté en gris foncé et le socle rocheux en gris clair. L'altitude initiale du socle (avant le développement de la calotte) est -100 m. La longueur de la calotte est 500 km et l'épaisseur de glace au centre est 4000 m. Dans ces conditions le profil d'équilibre (équation II.33) ne dépend que de la valeur de l'exposant de la loi de déformation. Les profils tracés sont ceux pour n=1 (trait continu) et n=3 (tirets).*

- Test du calcul des vitesses de bilan.

Le calcul numérique permettant d'obtenir la vitesse de bilan a été testé pour les cas suivants :

1. $\dot{b}$=constante et sh(x)=0 -> $U(x)= \dot{b}\ x / H$
2. $\dot{b}$=constante et sh(x)=1/x -> $U(x)= \dot{b}\ x / (2H)$
3. $\dot{b}= \dot{b}_0 \exp(-lx)$ et sh(x)=0 -> $U(x)= \dot{b}_0 (1 - \exp(-lx)) / (lH)$

(ce dernier cas n'est pas en équilibre pour le profil de Vialov)

L'erreur maximum pour le cas 3 qui est le plus sensible, est 2% avec dx=50 km et 0.1% pour dx = 10 km.

- Champs de vitesses horizontales et verticales

Les figures (II.8) et (II.9) montrent les champs de vitesse u_x et u_z avec et sans glissement. Il faut noter l'importance de la vitesse verticale "cinématique" due au mouvement horizontal et à la pente de la surface et du socle. En particulier la pente du socle étant positive (le socle remonte dans la direction de l'écoulement), la vitesse verticale peut être négative (dirigée vers le haut).

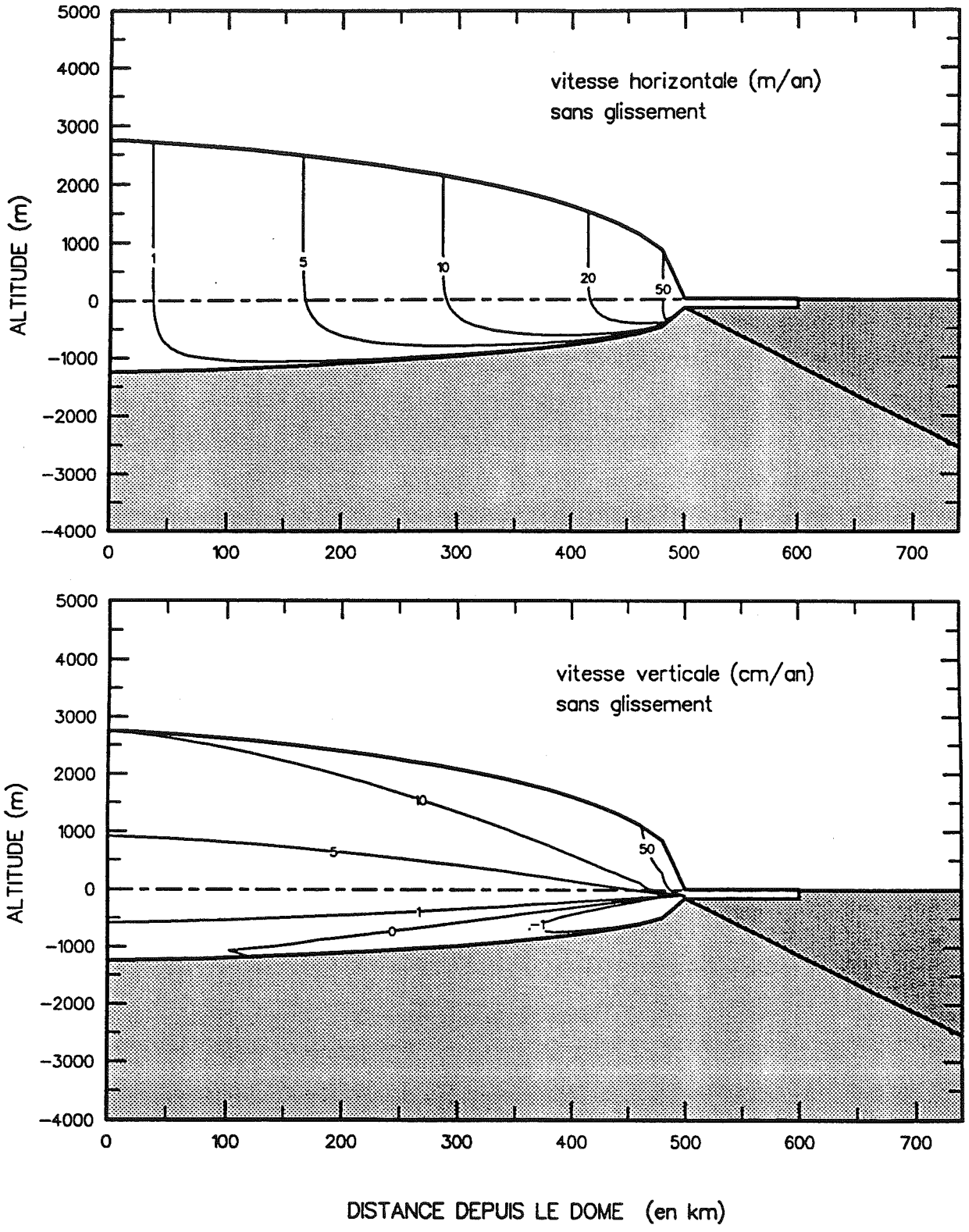


Figure II.8 Vitesses horizontales et verticales sans glissement.
Le profil de la calotte glaciaire est celui présenté sur la figure II.7 avec n=3. L'accumulation est uniforme et égale à 10 cm/an. Le coefficient de la loi de déformation (ou la température basale) est déduit implicitement par le choix de la longueur de la calotte.

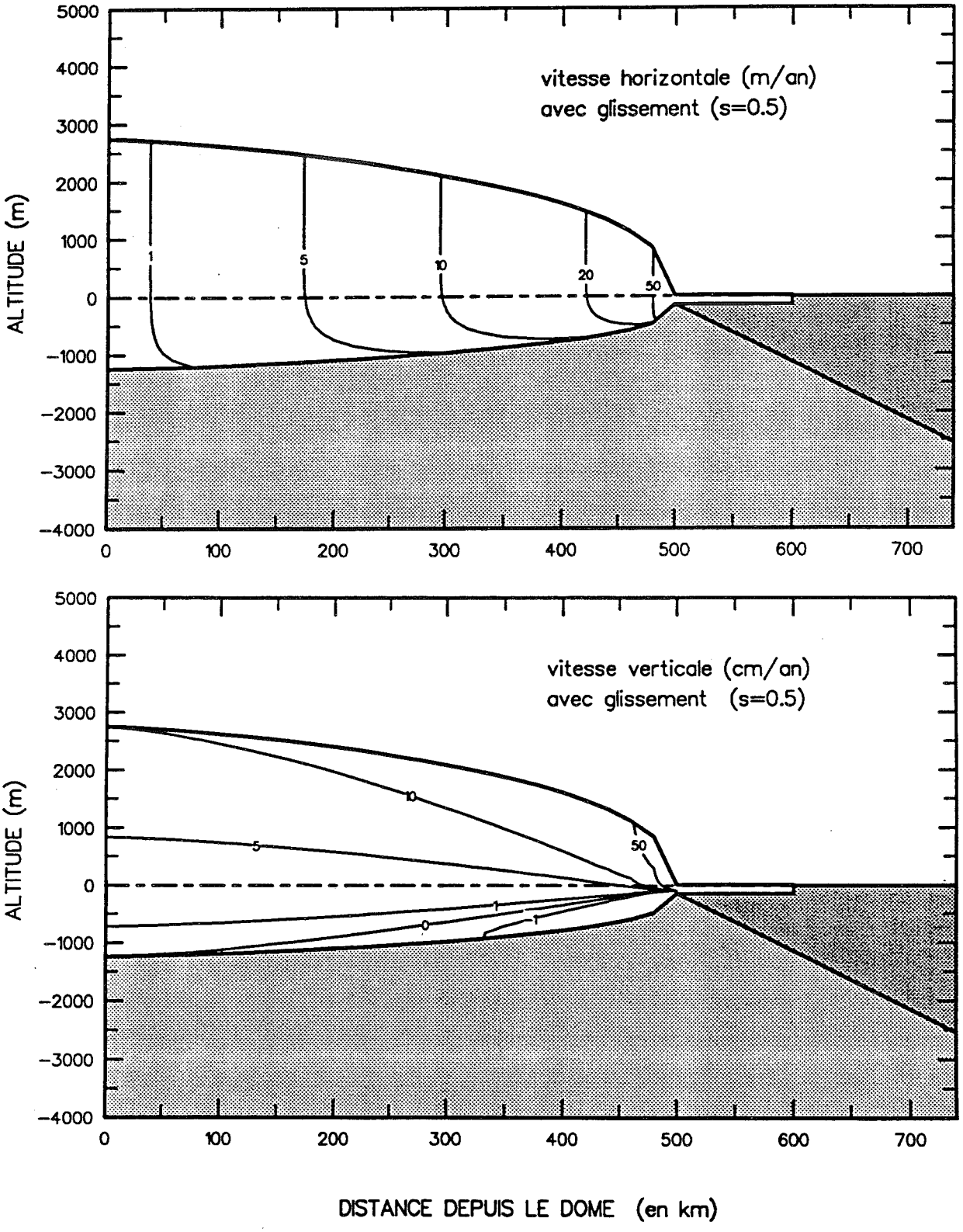


Figure II.9 Vitesses horizontales et verticales avec glissement.
Le profil de la calotte glaciaire est celui présenté sur la figure II.7 avec n=3. L'accumulation est uniforme et égale à 10 cm/an. Le coefficient de la loi de déformation (ou la température basale) est déduit implicitement par le choix de la longueur de la calotte. La fraction de la vitesse moyenne due au glissement est 0.5 (valeur du paramètre s).

II.2 CHAMP DE TEMPERATURES.

II.2.A Processus pris en compte, équations de base.

- Equation dans la glace

Nous considérons une seule ligne de courant. L'équation de la chaleur pour la glace (I.21) s'écrit :

$$c_g \rho_g \frac{\partial T}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial (K_g \partial T/\partial x)}{\partial x}}_{\textit{diffusion horizontale}} + \underbrace{\frac{\partial (K_g \partial T/\partial z)}{\partial z}}_{\textit{diffusion verticale}} - \underbrace{c_g \rho_g u_x \frac{\partial T}{\partial x}}_{\textit{advection horizontale}} - \underbrace{c_g \rho_g u_z \frac{\partial T}{\partial z}}_{\textit{advection verticale}} + \underbrace{Q_g}_{\textit{production de chaleur}} \qquad \text{(II.36)}$$

Les termes verticaux sont prédominants car les gradients verticaux de température sont beaucoup plus forts que les gradients horizontaux. Par exemple, l'écart de température entre la surface et le socle est de l'ordre de 40 °C pour 3000 m de glace, alors qu'horizontalement pour obtenir ce même écart de température (en surface) il faut aller du dôme à la côte, soit une distance d'environ 1000 km. Il n'est cependant pas possible de négliger l'advection horizontale car la faiblesse du gradient de température est compensée par le fait que la vitesse horizontale est beaucoup plus élevée que la vitesse verticale. Les profils verticaux de température mesurés dans les régions de fort écoulement, (Mirny, Byrd) présentent une forme caractéristique de l'influence de l'advection horizontale (la température croit tout d'abord avec la profondeur puis décroît vers le fond). La diffusion horizontale, a été introduite d'une façon simplifiée dans le modèle (en résolvant l'équation de la chaleur avec $\partial^2 T/\partial x^2$ pris au pas de temps précédent), mais il apparait que ce terme est réellement négligeable et nous n'en tiendrons plus compte ici (d'autant plus qu'il complique considérablement les équations).

Dans les processus d'advection, la chaleur est transportée dans le sens de l'écoulement. Le terme d'advection horizontale dépend donc principalement de la température de la colonne de glace située en amont. Nous prenons comme gradient horizontal de température celui calculé entre la colonne de glace considérée et celle située en amont. La résolution de l'équation de la chaleur s'effectue en balayant les colonnes de glace depuis le dôme jusqu'à la côte, ce qui permet de simplifier le calcul numérique en remplaçant l'équation à deux dimensions par une équation à une dimension qui est résolue pour chaque verticale.
La méthode consistant à prendre les gradients vers l'amont dans les termes advectifs (méthode appelée "upwind") présente de plus des intérêts de stabilité numérique lors du couplage de l'écoulement et des températures (voir chapitre IV).

- Conditions aux limites.

• ***Limites latérales.***

Au dôme, les termes horizontaux de diffusion et d'advection sont nuls. La température est en effet symétrique par rapport au Dôme (pas de diffusion) et la vitesse horizontale est nulle (pas d'advection). En conséquence, l'équation de la chaleur est purement unidimensionnelle et la température obtenue en la résolvant constitue la condition à la limite au Dôme.

Sur le bord, étant donné la méthode de résolution par balayage depuis le dôme, il n'est pas nécessaire de fixer une condition.

• ***Condition en surface***

La température en surface est imposée. Elle dépend du temps en fonction du climat. Nous détaillerons ce point dans le chapitre III (signal climatique).

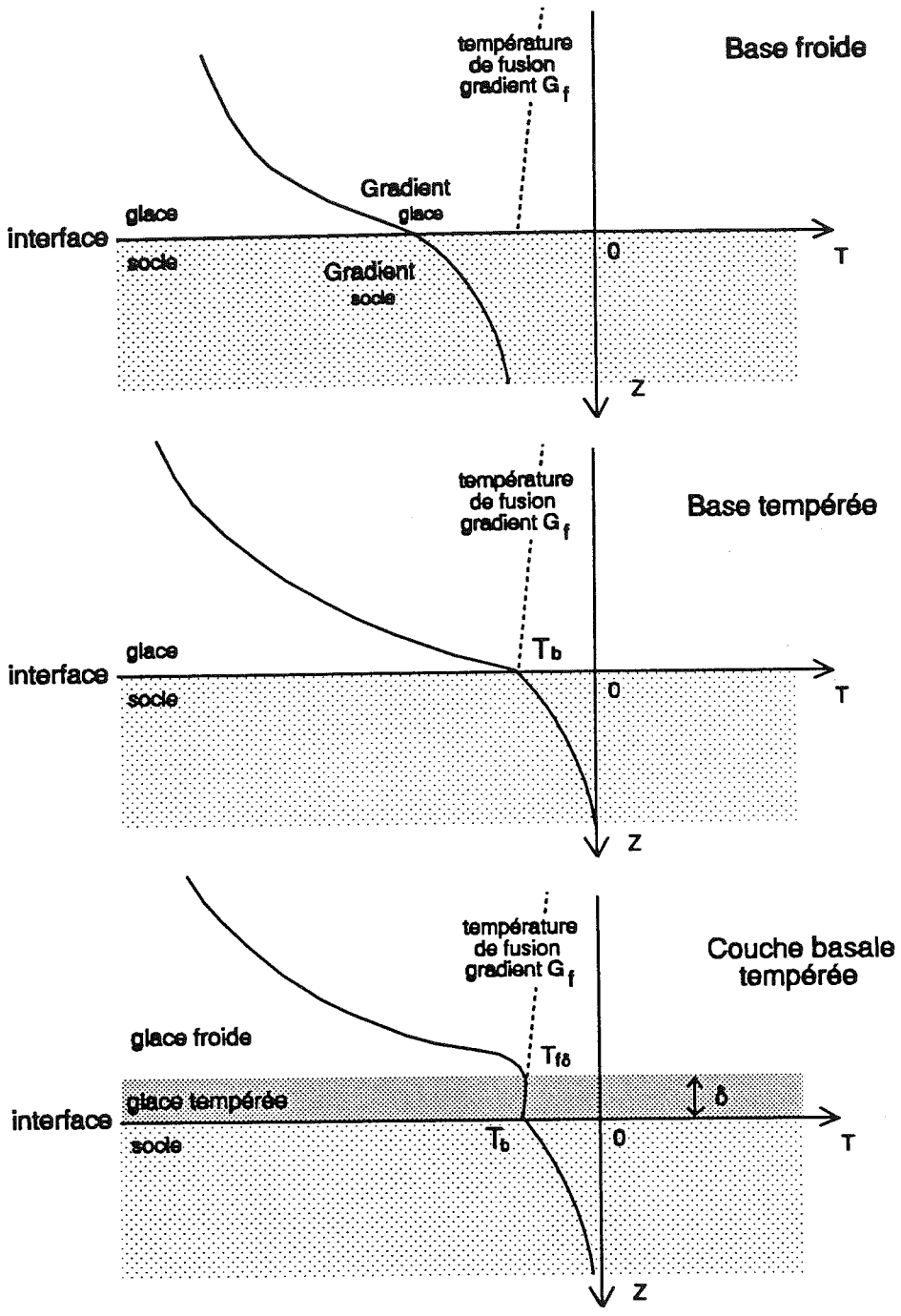


Figure II.10 *Conditions aux limites pour la température : Les différents types de base*
Les trois types de bases sont représentés.
Base froide *: la conservation du flux à travers l'interface impose une condition (II.39) entre le gradient vertical de température dans la glace et dans le socle.*
Base tempérée *: La température à l'interface T_b est égale à la température de fusion et le gradient de température dans la glace est supérieur au gradient de fusion G_f.*
Couche basale tempérée *: La température est tempérée pour la couche basale d'épaisseur δ. La température basale T_b est égale à la température de fusion à la profondeur H. La température au sommet de la couche basale $T_{f\delta}$ est légèrement plus élevée du fait de la variation du point de fusion avec la profondeur. Le gradient de température dans la couche tempérée est G_f et est continu à l'interface glace froide-glace tempérée.*

• ***Condition à la base du glacier.***

A l'interface glace-socle rocheux le type de base et les conditions aux limites associées varient selon que la glace est ou non au point de fusion.

+ Température de fusion

La température de fusion dépend de la pression et par conséquent de la profondeur :

$$T_f = -C_m \rho_g g H \qquad \text{(II.37)}$$

avec C_m = 0.0074 °/ bar (nous discutons cette valeur de C_m dans l'annexe 1 sur les paramètres physiques). Pour de la glace polaire, (ρ_g) vaut approximativement 0.09 bar/m. A une profondeur de 3000 m, la température de fusion est environ -2°c.

+ Types de base

Nous notons T_b la température à la base du glacier. Les différents types de base sont représentés sur la figure (II.10). Les conditions aux limites correspondantes sont les suivantes :

*** Tb < Tf**

La base est dite "froide" (nous la noterons quelquefois BF), la condition à la limite est la continuité du flux de chaleur à travers l'interface (I.23) qui s'écrit :

$$K_g \frac{\partial T}{\partial z}(-B)\Big|_{glace} = K_r \frac{\partial T}{\partial z}(-B)\Big|_{socle} \qquad \text{(II.38)}$$

*** Tb = Tf**

La base est tempérée et la condition à la limite est la température de fusion de la glace. Lliboutry (1987_a) détermine deux types de base selon le gradient vertical de

température dans la glace comparé au gradient de température dans de la glace tempérée (G_f) donné par :

$$G_f = -C_m \rho_g g \qquad \text{(II.39)}$$

Les deux types de base sont définis par :

* $(\partial T/\partial z)_{glace} > G_f$ et $T_b = T_f$.

Seule l'interface glace-rocher est au point de fusion, la glace située juste au dessus est froide. Ce type de base est noté "base tempérée" (BT)

* $(\partial T/\partial z)_{glace} = G_f$ et $T_b = T_f$.

Ce type de base est appelé "couche basale tempérée" (CBT). L'épaisseur de la couche tempérée, δ s'ajuste de telle façon que, dans la partie haute du glacier d'épaisseur H-δ, la température suive l'équation de la chaleur avec deux conditions basales (à la profondeur H-δ), la température de fusion et le gradient G_f. L'existence d'une couche basale tempérée est très rarement prise en compte dans les modèles de calotte glaciaire, bien qu'elle existe manifestement dans certains glaciers émissaires (températures mesurées dans le glacier de Jakobshavn, Groenland, Iken et al. 1990) et que son rôle puisse alors être important dans la dynamique de ces glaciers. Fowler (1984), Hutter (1982), Hutter et al. (1988) et Blatter (1991) ont posé les équations de la chaleur et du transport d'eau dans les glaciers en partie tempérés. L'introduction dans un modèle à deux dimensions (ligne de courant) a seulement été faite par Dahl-Jensen (1988) et Blatter (1991).

+ fusion basale

Dans les deux cas (BT et CBT) où la température de l'interface est fixée, les gradients de température dans le socle et dans la glace ne satisfont pas forcément la conservation du flux de chaleur (II.38) et il peut y avoir une discontinuité du flux de chaleur à l'interface. La différence entre le flux de chaleur venant du socle et celui partant vers la glace est utilisée

par le changement de phase de la glace basale. La quantité d'eau fondue (par unité de temps) $\dot{f}$ s'écrit :

$$\dot{f} = \frac{K_r \frac{\partial T}{\partial z}(-B)\Big|_{socle} - K_b \frac{\partial T}{\partial z}(-B)\Big|_{glace}}{L_f \rho_g} \qquad (II.40)$$

L_f est la chaleur latente de fusion. $\dot{f}$ est exprimé en m par unité de temps et a donc la dimension d'une vitesse.
$\dot{f}$ donnée par l'équation (II.40) est la fusion à l'interface glace-rocher. Dans le cas d'une CBT, la chaleur de déformation provoque également de la fusion au sein de la couche basale tempérée. Nous reviendrons sur ce point dans la prise en compte numérique de la chaleur de déformation.

Lorsque $\dot{f}$ est négatif, il peut y avoir du regel, à condition que de l'eau liquide soit disponible. Nous considérons que cette condition est toujours remplie. En réalité cela dépend du type de sol (rocheux ou sédiments meubles gorgés d'eau). Cependant, les quantités d'eau en jeu lors du regel sont très faibles (inférieures à 0.1 mm par an) et nous supposons que même si le sol est très perméable, il reste une fine couche à l'interface lorsque la base est tempérée. D'autre part, le regel (contrairement à la fonte) ne se poursuit jamais pendant longtemps puisqu'il se produit seulement lors des transitions base tempérée → base froide. En pratique, nous avons effectué quelques tests en supposant que le regel n'est pas possible, et le résultat numérique n'est pas du tout affecté (en raison des faibles quantités d'eau concernées).

+ Influence de la condition basale sur l'écoulement.

Le taux de fusion basale, $\dot{f}$, intervient dans l'équation de bilan (II.3) et dans la vitesse verticale (II.22). Nous faisons l'hypothèse implicite que toute l'eau (sauf la fine couche mentionnée plus haut) pénètre dans le sol. Cette hypothèse est fondée sur le fait que la production d'eau est toujours très faible (au maximum quelques mm par an) et qu'aucun milieu n'est absolument imperméable. La présence de lacs sous glaciaires montre que cette

hypothèse n'est pas partout valable et qu'en fait $\dot{f}$ donne une valeur supérieure pour la vitesse verticale à la base.

En ce qui concerne la vitesse horizontale, il est très important de différencier les deux types de base tempérée lorsque le profil de température est utilisé pour calculer le champ de vitesses. D'une part la déformation est très sensible à la température (équations I.13, I.25) mais surtout, d'après Lliboutry (1987_a), le glissement sur un socle indéformable, n'est possible que dans le cas d'une couche basale tempérée car sinon la glace est au point de fusion seulement dans les creux du socle et les grandes bosses, rugueuses et froides, ancrent le glacier au socle.

+ Influence des propriétés thermiques de la glace

La conductibilité thermique de la glace varie avec la température et il ne faut pas négliger le terme $\partial K_g/\partial z$ dans l'équation (II.36). Cette dépendance avec la température joue de plus un rôle dans la condition à l'interface ainsi que le montre l'équation (II.38). C'est pourquoi il est physiquement plus réaliste d'imposer le flux géothermique et non pas le gradient vertical à la base ainsi que le font de nombreux auteurs.

- Calcul dans le socle rocheux.

Dans tous les types de base, le gradient de température dans le socle (relié au flux de chaleur à la base du glacier) est un paramètre très sensible. Une difficulté importante vient du fait qu'il peut varier au cours du temps. En effet lorsque la base est froide, les perturbations de température d'origine climatique qui atteignent le fond du glacier pénètrent dans le socle rocheux et changent ainsi le champ de température dans le socle. Lorsque les perturbations positives et négatives alternent, comme c'est le cas, l'amplitude des variations de température au fond du glacier est très fortement atténuée (Ritz 1987, en fin de ce chapitre). Pour prendre en compte ce phénomène, nous calculons le champ de température dépendant du temps dans la partie supérieure du socle rocheux. Ce type de calcul a été

introduit par Paterson et Clarke (1978), et utilisé par quelques auteurs pour interpréter les profils de température mesurés dans les trous de forage (Dahl-Jensen et Johnsen 1986). L'épaisseur de socle prise en compte (notée H_s) est très variable selon les auteurs et nous chercherons à déterminer l'épaisseur optimale qui permette de simuler les perturbations du flux tout en économisant le temps de calcul (Ritz 1987).

• ***Equation simplifiée dans le socle.***

L'équation (à deux dimensions) de la chaleur dans le socle s'obtient à partir de (I.22). Au échelles de temps considérées il n'y a pas de mouvement et donc pas d'advection. De plus nous considérons que les propriétés physiques sont indépendantes de la température et de la profondeur. Q_r est la chaleur produite par la radioactivité des roches.

$$\rho_r c_r \frac{\partial T}{\partial t} = K_r \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q_r \qquad \text{(II.41)}$$

Nous ne nous intéressons à la température dans le socle que dans la mesure où elle affecte la température de la glace. Cette influence se fait essentiellement par l'intermédiaire des variations temporelles du gradient de température à l'interface. Dans cette optique, il est possible de remplacer (II.41) par deux équations l'une dépendante du temps et ne comportant que le terme de diffusion verticale et l'autre stationnaire et tenant compte de la diffusion horizontale et de la production de chaleur qui sont supposées indépendantes du temps.

Nous écrivons la température dans le socle sous la forme :

$T = T_0 + T_1$

T_0 est la température stationnaire obéissant à :

$$K_r \frac{\partial^2 T_0}{\partial x^2} + K_r \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + Q_r = 0 \qquad \text{(II.42)}$$

avec comme conditions à l'interface $T_0 = 0$ et $\partial T_0/\partial z=0$.

Si la diffusion horizontale est négligée et si la production de chaleur Q_r est indépendante de la profondeur, la température stationnaire, T_0, est parabolique : $T_0 = -(Q_r/2K_r)(z-B)^2$.

T_1 est la température dépendant du temps :

$$\rho_r c_r \frac{\partial T_1}{\partial t} = K_r \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \qquad \text{(II.43)}$$

Le calcul de température dans le socle se résume donc à la résolution pour chaque colonne de l'équation de la chaleur (II.43) ne tenant compte que de la diffusion verticale.

A l'interface glace-rocher (T_1=T), et la condition à la limite est celle correspondant au type de base de la glace. En cas de base froide c'est l'équation (II.38) qui s'applique et pour une base tempérée la température est la température de fusion de la glace T_f.

Nous considérons une épaisseur de socle H_s suffisamment grande pour qu'à la base de cette couche, les perturbations d'origine climatique soient complètement atténuées. La condition (pour z = Hs-B) est donc un flux de chaleur constant ce qui fixe le gradient $\partial T_1/\partial z$ par (I.18).

La valeur de ce flux correspond à la partie stationnaire du flux géothermique à la surface de la terre, or le flux mesuré en surface n'est pas stationnaire. De plus, d'après Waddington (1987), la température à la base de la glace étant plus élevée au centre que sur les bords, la diffusion horizontale (stationnaire) dans le socle diminue le flux géothermique sous les dômes. Il faudrait donc utiliser des valeurs de flux en surface en les corrigeant de ces deux effets (non stationnarité du flux mesuré et diffusion horizontale due à la calotte). Les variations spatiales du flux géothermique dues à la topographie sous-glaciaire sont cependant négligeables devant celles dues à l'histoire géologique, le flux étant d'autant plus bas qu'il n'y a pas eu d'orogénie depuis une période plus réculée. Il est vraisemblablement plus faible au coeur de l'Antarctique orientale que vers la chaîne Transantarctique, mais on ne peut avancer que des ordres de grandeur.
La figure (II.11) résume les conditions aux limites pour la glace et le socle.

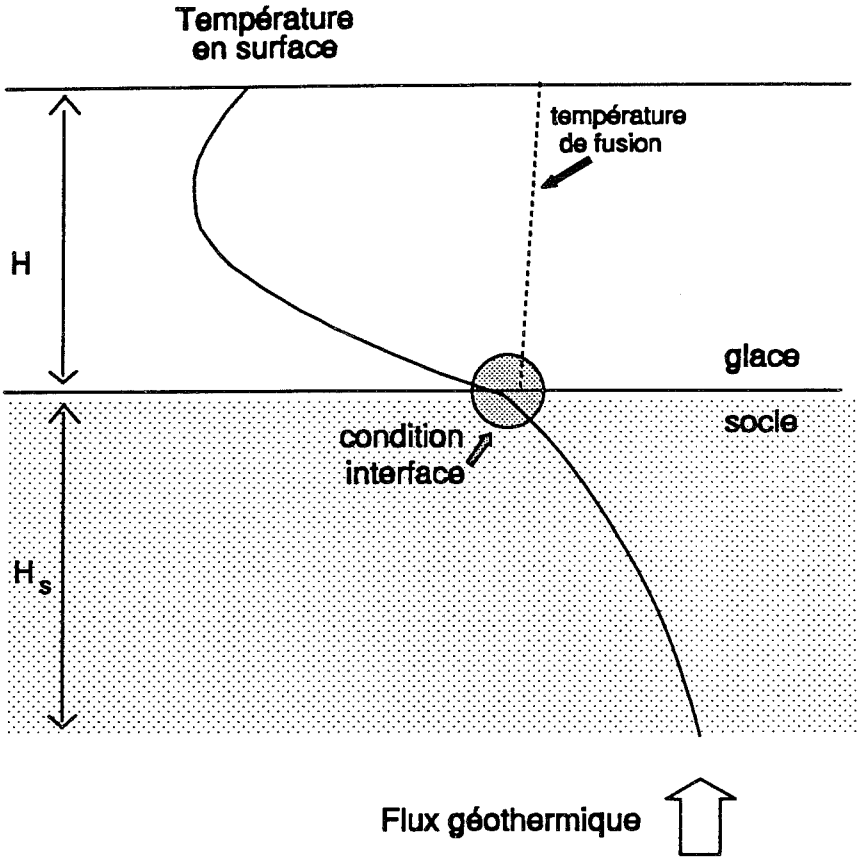


Figure II.11 Résumé des conditions aux limites pour la température.
Surface de la glace *: La température est imposée en fonction du climat.*
Interface *: Relation entre gradients ou températures dans la glace et le socle selon le type de base (voir figure II.10)*
Base du socle *: Le flux est imposé ce qui définit le gradient de température.*

II.2.B MODELE NUMERIQUE

La méthode utilisée est de type différence finie du premier ordre, dans l'espace et dans le temps.

- Maillage.

La grille est définie à partir de la coordonnée verticale réduite ζ (équation II.8). Le pas horizontal dx est constant et le nombre de colonnes (n_h) est donné par (L_g), la longueur de la calotte ($n_h = L_g / dx + 1$). Le nombre de noeuds verticaux, nv, est le même pour chaque colonne (selon les cas de 11 à 31). Le pas vertical dans chaque colonne est donc : $dz = H / (nv-1)$ et le pas en coordonnées ζ : $d\zeta = 1 / (nv-1)$.

Le type de grille ainsi obtenu est représenté sur la figure (II.12).

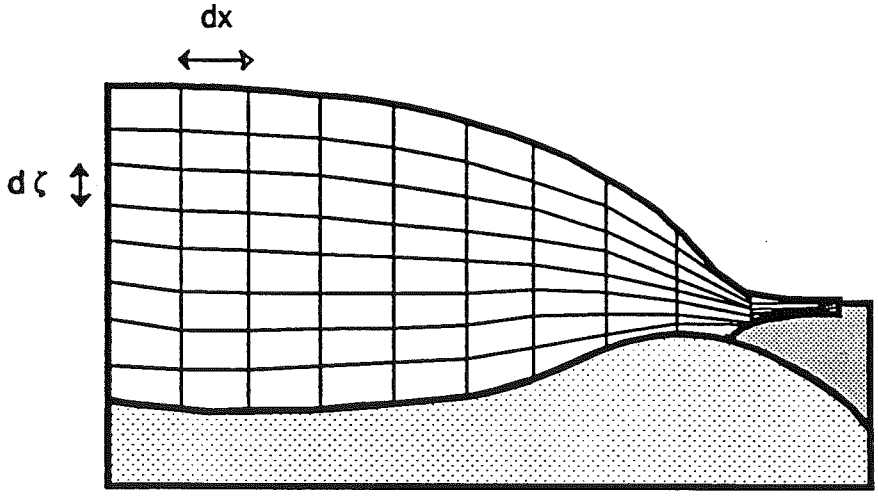


Figure II.12 Maillage utilisé pour le calcul des températures.

- Equations dans le système de coordonnées ζ.

L'utilisation de coordonnées verticales réduites, classique dans les modèles de météorologie, a été proposée pour les modèles de calotte polaire par Jenssen (1977). Les équations s'en trouvent légèrement compliquées, mais les limites du glacier (surface et lit) coïncident ainsi toujours avec un noeud de la grille et ne demandent pas un traitement numérique particulier. Ceci est particulièrement appréciable lorsque la géométrie du glacier varie dans le temps.

Une variable A peut être exprimée soit dans le système de coordonnées z : A(x,z,t), soit dans le système ζ : A(x,ζ,t). La formulation des dérivées dans le repère ζ est donnée par exemple par Haltiner et Williams (1980), r représentant indifféremment x ou t.

$$\left[\frac{\partial A}{\partial r}\right]_\zeta = \left[\frac{\partial A}{\partial r}\right]_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial z}\left[\frac{\partial z}{\partial r}\right]_\zeta \qquad \text{(II.44)}$$

D'après la définition de ζ (II.8), les dérivées s'écrivent donc :

$$\frac{\partial A}{\partial \zeta} = H\frac{\partial A}{\partial z} \qquad \text{(II.45)}$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial x}\right]_\zeta = \left[\frac{\partial A}{\partial x}\right]_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\left(\zeta\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x}\right)}{H} \qquad \text{(II.46)}$$

$$\left[\frac{\partial A}{\partial t}\right]_\zeta = \left[\frac{\partial A}{\partial t}\right]_z + \frac{\partial A}{\partial \zeta}\frac{\left(\zeta\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t}\right)}{H} \qquad \text{(II.47)}$$

L'équation de la chaleur dans la glace devient, dans le repère ζ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{K_g}{c_g \rho_g H^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} + \left(\frac{1}{c_g \rho_g H^2} \frac{\partial K_g}{\partial \zeta} + \frac{\zeta \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial t}}{H} \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta}$$

$$+ \left(u_x \frac{\zeta \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x}}{H} - \frac{u_z}{H} \right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} - u_x \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{Q_g}{c_g \rho_g} \qquad \text{(II.48)}$$

Les variations éventuelles de l'altitude de la surface et du socle au cours du temps sont prises en compte par le terme (ζ $\partial H/\partial t$ - $\partial E/\partial t$) qui est la vitesse verticale des noeuds.

Dans le socle, le pas vertical (dz_s) ainsi que le nombre de noeuds (n_s) sont les mêmes pour toutes les colonnes de façon à garder facilement une couche de socle d'épaisseur constante. Le pas dans le socle est choisi à peu près de la même taille que celui dans la glace.

- Schéma temporel.

La méthode de résolution est de type implicite. Les dérivées spatiales premières et secondes de la température sont écrites au pas de temps k+1 et la dérivée temporelle est calculée selon une formule de différence finie vers " l'arrière " (backward). Tous les autres termes sont ceux calculés au pas de temps k, ce qui se justifie car l'écoulement ne varie pas très vite pendant un pas de temps, donc l'erreur commise sur u_x,u_z et Q_g est faible. La variation temporelle du gradient de conductivité est encore plus négligeable.

Nous donnons dans l'annexe (3) une description des différents types de schémas temporels (implicites, explicites, Crank Nicholson, prédicteur-correcteur) et leurs avantages respectifs. Pour le calcul des températures toutes les méthodes non explicites donnent de bons résultats pour des pas de temps de l'ordre de 1000 ans. Au début de ce travail, nous utilisions

un prédicteur correcteur (Ritz 1987), mais celui-ci nécessite deux fois plus de calculs pour un même résultat, nous l'avons donc abandonné au profit d'une méthode purement implicite.

Les termes advectifs horizontaux et verticaux, sont calculés avec des formules de différences finies vers l'amont. Les termes diffusifs avec des différences finies centrées. $T_{i,j,k}$ étant la température au noeud de la ligne i, de la colonne j et du pas de temps k les différentes formules de différences finies sont :

$$\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]_\zeta = \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i,j-1,k+1}}{dx}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{T_{i,j,k+1} - T_{i-1,j,k+1}}{d\zeta} \qquad \textit{pour l'advection} \qquad \text{(II.49)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = \frac{T_{i+1,j,k+1} - T_{i-1,j,k+1}}{2\, d\zeta} \qquad \textit{pour la diffusion}$$

Etant donné que le calcul se fait en balayant les colonnes depuis le dôme $T_{i,j-1,k+1}$, la température amont au pas de temps k+1 est connue.

Nous avons remarqué que la vitesse verticale peut être négative si la pente du socle remonte le long de l'écoulement en raison de la vitesse verticale cinématique (II.24). Si l'on considère le référentiel ζ, le terme en $\partial T/\partial \zeta$ de l'advection horizontale annule exactement l'advection verticale due à cette vitesse cinématique. Ceci est vrai non seulement pour la vitesse verticale analytique (II.23) de ce modèle, mais aussi pour celle calculée numériquement (chapitre IV). Nous pouvons en fait considérer l'advection de chaleur, non plus décomposée selon x et z, mais selon les lignes d'iso-ζ et ζ, la vitesse verticale (notée w) étant celle due au tassement de la glace ($w=u_z-u_{z\ cin}$). Le terme d'advection verticale de l'équation (II.48) se réduit à: $\partial T/\partial \zeta$ w/H.

- Prise en compte de la chaleur de déformation Q_g.

Dans notre approximation où les contraintes longitudinales sont négligées, la chaleur produite par la déformation de la glace peut s'écrire (Lliboutry 1965):

$$Q_g = 2\ \dot{\varepsilon}_{xz}\ \tau_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z}\ \rho_g\ g\ H\ \zeta\ \frac{\partial E}{\partial x} \qquad \text{(II.50)}$$

Dans le modèle à surface imposée, u_x est donné par une formulation analytique, et Q_g se calcule aisément :

$$Q_g = (\ 1\ -\ s\ )\ (\ m\ +\ 2\ )\ \bar{U}_x\ \rho_g\ g\ (-\ \frac{\partial E}{\partial x}\ )\ \zeta^{m+1} \qquad \text{(II.51)}$$

Il y a plusieurs approches pour introduire la chaleur de déformation.

• ***chaleur, Q_g, concentrée à la base.***

Ainsi que le montrent par exemple les équations (II.50) ou (II.51), la chaleur due à la déformation est principalement produite à la base du glacier. C'est pourquoi de nombreux auteurs (Lliboutry 1965, Budd et al. 1971) introduisent Q_g à l'interface, sous la forme d'un flux de chaleur ϕ_q qui s'ajoute au flux géothermique. D'après Lliboutry (1987_a) :

$$\phi_q = \bar{U}_x\ \tau_b \qquad \text{(II.52)}$$

• ***Chaleur, Q_g, répartie dans le glacier.***

Pour être plus rigoureux, Q_g peut aussi être introduit à chaque noeud du maillage. Dans notre modèle, Q_g est calculé selon (II.50 ou II.51)) d'après l'écoulement au pas de temps précédent.

Les deux méthodes (Q_g concentrée à la base ou répartie) donnent des résultats sensiblement différents, d'autant plus que la grille verticale est large. En particulier, la température moyenne sur la colonne est systématiquement supérieure lorsque toute la chaleur est introduite à la base sous forme de flux.

Ce désaccord provient de la méthode numérique utilisée pour répartir la chaleur de déformation Q_g. Avec une méthode telle que les différences finies, la chaleur de déformation est celle produite exactement au noeud et est implicitement supposée représenter une couche de glace d'épaisseur dz, répartie de part et d'autre du noeud. Ceci est valable pour tous les noeuds situés dans la nappe de glace mais pas pour ceux des limites (surface et base du glacier) puisqu'alors c'est la condition à la limite qui est imposée. A l'interface glace-rocher, Q_g n'est donc pas pris en compte sur le noeud basal. Etant donné l'augmentation de Q_g avec la profondeur, la chaleur produite sur la dernière demi-maille est ainsi perdue (figure II.13). Par exemple avec une grille verticale de 10 mailles (n_v=11), et un paramètre m égal à 10, l'équation (II.52) indique que 45% de la chaleur de déformation est concentrée dans cette demi-maille basale.

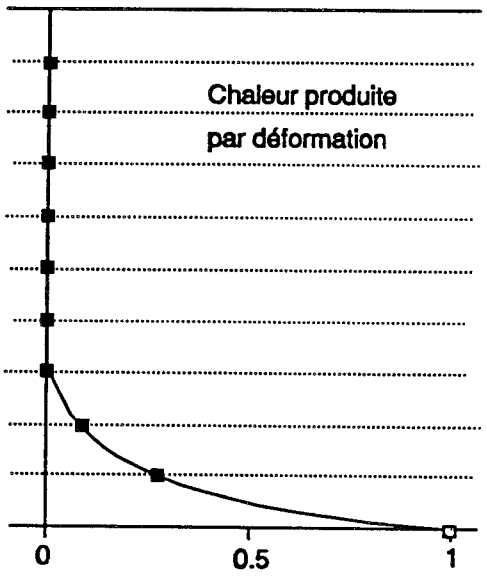


Figure II.13 Chaleur produite par la déformation Q_g.
Cette figure représente la fraction (par rapport à la valeur basale) de la chaleur de déformation aux différents noeuds du maillage. Les carrés noirs indiquent les noeuds pour lesquels cette chaleur est effectivement prise en compte dans l'équation de la chaleur. Cette courbe est obtenue d'après l'équation (II.52) avec m=10.

Pour éviter cette perte due à la discrétisation, nous introduisons cette quantité de chaleur sous la forme d'un flux, ϕ_d, qui se rajoute au flux géothermique :

$$\phi_d = \int_{H-dz/2}^{H} Q_g \, dz + u_x(-B) \, \tau_b \qquad \text{(II.53)}$$

Le deuxième terme de cette équation est la chaleur produite par le glissement.

Le désaccord précédemment observé est ainsi supprimé. Les températures calculées par les deux méthodes ne diffèrent plus sur leur moyenne verticale mais seulement sur la répartition en fonction de la profondeur : Lorsque la chaleur est répartie, la température est légèrement plus élevée dans le haut du glacier et légèrement plus basse à la base que lorsqu'elle est introduite à la base. Dans le cas (u_z linéaire) où il est facile de calculer analytiquement le bilan de chaleur pour la colonne de glace, nous avons vérifié que le bilan obtenu numériquement est équilibré ce qui n'est pas le cas sans l'introduction de ϕ_d.

• ***Chaleur de déformation et couche basale tempérée.***

La formulation que nous venons de décrire convient dans le cas d'une base froide. Elle présente cependant l'inconvénient de prévenir (sauf dans des cas extrêmes) l'apparition d'une couche basale tempérée. En effet, une bonne partie de la chaleur de déformation est introduite sous forme de flux de chaleur à la base. Si la base est tempérée, cette chaleur est convertie en fusion basale (II.40) et ne sert donc pas à réchauffer la glace encore froide située juste au dessus. Nous avons ici encore un problème de discrétisation provenant des faits suivants :

- Au moins lors de son apparition, la couche basale tempérée est plus fine que la maille verticale du modèle (d'épaisseur dz).

- l'existence d'une telle couche est principalement due à la chaleur de déformation qui elle même du fait de sa non linéarité n'est pas convenablement prise en compte dans une approximation aux différences finies du premier ordre.

+ Formulation analytique de la température dans le bas du glacier.

Pour pouvoir simuler l'apparition d'une couche basale tempérée, nous développons ici une expression analytique de la température dans une couche basale en tenant compte de la production de chaleur. Cela nous permet de calculer, (δ), l'épaisseur de la CBT. Les gradients de température (à la base et au noeud situé juste au dessus de la CBT) ainsi calculés sont introduits dans le modèle numérique.

Le calcul des températures ne s'effectue que dans la partie froide du glacier, d'épaisseur (H-δ). Par analogie avec la profondeur réduite ζ et pour simplifier l'écriture des équations nous utilisons la profondeur réduite dans la glace froide ξ :

$$\xi = \frac{Z}{H - \delta} = \frac{E + z}{H - \delta} \qquad \text{(II.54)}$$

Nous considérons une couche de glace froide située juste au dessus de la couche basale tempérée. Cette couche froide, d'épaisseur h_{if}, est limitée en haut par un noeud du maillage (noté "i_f", dernier noeud froid). h_{if} est donc inférieur à dz, la maille verticale. Le noeud i_f se trouve à la profondeur dz (if-1). Sa température est T_{if} et en ce point le gradient de température vers le bas G_{if}.

Nous notons G_{bf} le gradient de température à la base de cette couche froide (à la profondeur H-δ). La température en ce même point est la température de fusion, $T_{f\delta}$, donnée par (II.37) mais avec une épaisseur de glace H-δ. La production de chaleur par déformation en ce point est notée Q_{bf}. La (figure II.14) illustre ces diverses notations.

La chaleur de déformation dans la glace froide peut s'écrire :

$$Q = Q_{bf}\, \xi^p$$

avec (II.55)

$$Q_{bf} \propto (H - \delta)^{n+1}$$

Dans le cas du modèle forcé (ce chapitre), Q_{bf} est donné par (II.51) et (p=m+1). Dans le cas du modèle d'évolution (chapitre IV), Q_{bf} est calculé par (II.50). Pour déterminer p,

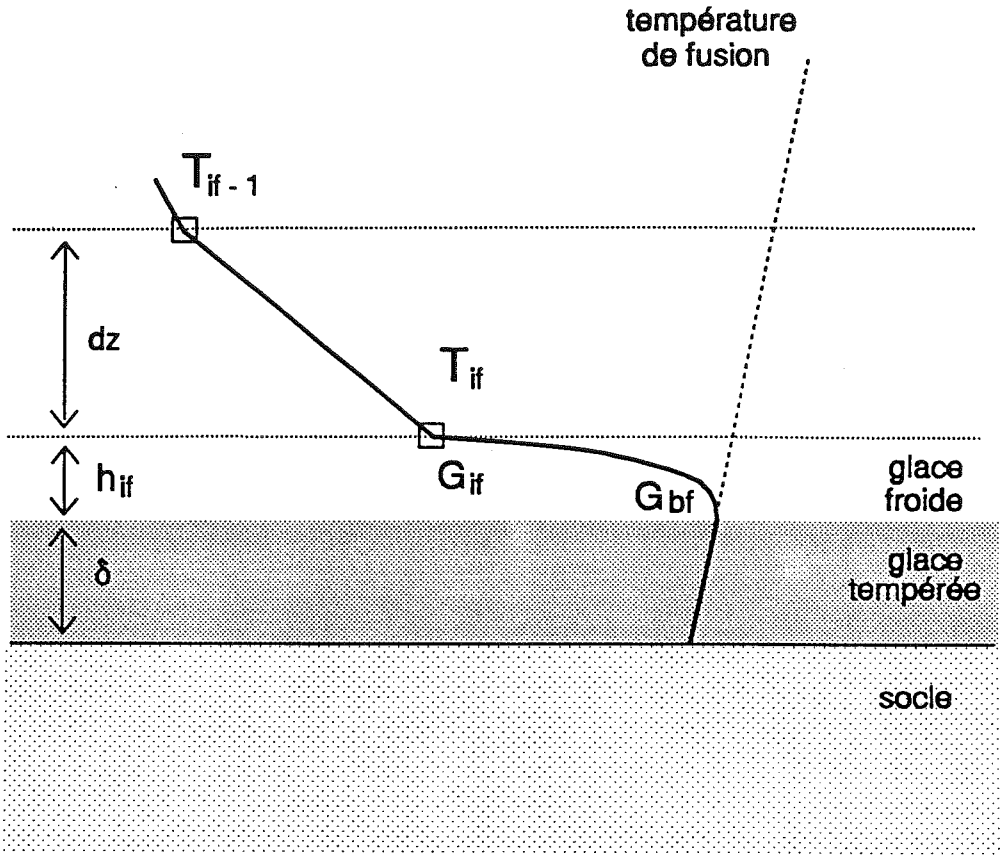


Figure II.14 Formulation analytique de la température à la base du glacier : Notations. *La couche basale tempéré d'épaisseur δ est représentée en gris et le socle en moucheté. On considère la couche de glace froide d'épaisseur h_{if}, située entre la couche basale tempéré et le noeud du maillage directement supérieur (noté i_f) . Le gradient de température "vers le bas" au noeud (i_f) est G_{if}. Le gradient "vers le haut" au même point est donné par différence finie : $(T_{if}-T_{if-1})/dz$. Le gradient à la base de la glace froide est G_{bf}. S'il existe une couche basale tempérée, ce gradient doit être égal au gradient de fusion G_f.*

nous reprenons les mêmes approximations que (II.11) ce qui donne :
$p=n+1+k\ G_{bf}\ (H-\delta)$ calculé d'après les valeurs de G_{bf} et de δ au pas de temps précédent.

Nous négligeons l'advection (horizontale et verticale) qui est faible dans le bas du glacier. D'autre part, la couche étant fine, nous considérons que la température est en équilibre à l'échelle du pas de temps (plusieurs dizaines d'années). L'équation de la chaleur dans cette couche froide basale devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = - \frac{Q}{K_g} = - \frac{Q_{bf}}{K_g} \xi^p \qquad \text{(II.56)}$$

avec K_g la conductivité thermique de la glace.

Cette équation s'intègre une première fois en :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = G_{bf} + \frac{Q_{bf} (H - \delta)}{K_g (p + 1)} \left(1 - \xi^{p+1} \right) \qquad \text{(II.57)}$$

En particulier au noeud (i_f), $\xi = 1 - h_{if}/(H-\delta)$
Le gradient vers le bas, G_{if}, s'écrit (en utilisant un développement limité au deuxième ordre de ξ^{p+1}) :

$$G_{if} = G_{bf} + \frac{Q_{bf}\ h_{if}}{K_g} \left(1 - \frac{p}{2} \frac{h_{if}}{H - \delta} \right) \qquad \text{(II.58)}$$

Une deuxième intégration donne la température.

$$T = T_f - \left(G_{bf} + \frac{Q_{bf} (H - \delta)}{K_g (p + 1)} \right) (H - \delta) (1 - \xi) + \frac{Q_{bf} (H - \delta)^2}{K_g (p + 1) (p + 2)} \left(1 - \xi^{p+2} \right) \qquad \text{(II.59)}$$

La température T_{if} s'écrit :

$$T_{if} = T_{f\delta} - G_{bf}\, h_{if} - \frac{Q_{bf}\, h_{if}^2}{2\, K_g}\left(1 - \frac{p}{3}\,\frac{h_{if}}{H - \delta}\right) \qquad \text{(II.60)}$$

+ *Détermination de* δ, *l'épaisseur de la couche basale tempérée.*

Si T_{if} est connue, l'épaisseur, δ, de la couche basale tempérée peut être déterminée à partir de l'équation (II.60) avec la condition de gradient à la limite supérieure de la CBT : $G_{bf} = G_f$.

L'équation (II.60) revient en effet à une équation de degré n+3 en (H-δ) (en tenant compte de II.55). Dans la pratique, nous calculons l'épaisseur de la couche basale d'après la température T_{if} obtenue au pas de temps précédent et par une méthode itérative associée au test de type de base. Le gradient vers le bas G_{if} est alors complètement défini par (II.58). Ce gradient est introduit dans les formules de différences finies, c'est à dire que les dérivées et dérivées secondes au noeud i_f, s'écrivent :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{if} = \frac{\dfrac{T_{if} - T_{if-1}}{dz} + G_{if}}{2} \qquad \text{(II.61)}$$

et

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right|_{if} = \frac{G_{if} - \dfrac{T_{if} - T_{if-1}}{dz}}{\dfrac{dz + h_{if}}{2}} \qquad \text{(II.62)}$$

+ *Fusion dans la couche basale tempérée.*

Dans la couche basale tempérée, la chaleur de déformation est convertie en fusion de la glace. Il faudrait sur ce point suivre la méthode de Hutter (1982), Hutter et al. (1988) et Blatter (1991), c'est à dire considérer la teneur en eau liquide comme une variable supplémentaire et traiter sa diffusion dans la glace tempérée, tout comme on traite la diffusion de la chaleur dans la glace froide. Cela permettrait d'introduire des phénomènes importants

tels que l'influence de la teneur en eau sur la loi de comportement de la glace ou le calcul de la pression effective du glacier sur le socle. Cependant, l'épaisseur de la couche basale tempérée est en général faible, et faire un tel calcul demanderait un maillage détaillé dans cette zone (un modèle à l'intérieur du modèle). Nous nous limitons ici à faire le bilan de la chaleur fournie dans la CBT en utilisant toute cette chaleur pour fondre la glace. Nous supposons ensuite soit que toute l'eau fondue s'écoule dans sol, soit que la saturation en eau (≈2%, d'après Lliboutry et Duval, 1985) est atteinte et nous étudions la sensibilité du modèle à cette hypothèse (nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre (IV) car dans le modèle couplé, nous faisons intervenir la teneur en eau dans le coefficent de la loi de déformation. Il se rajoute donc à la fusion donnée par (II.40) la fusion interne dans la CBT :

$$\dot{f}_{CBT} = \frac{\int_{-B}^{-B-\delta} Q \, dz}{L_f \, \rho_g} \qquad \text{(II.63)}$$

- Tests sur les types de base.

Le type de base est testé à chaque pas de temps, pour chaque colonne. L'équation de la chaleur est tout d'abord résolue en prenant le type de base tiré de la température au pas de temps précédent. Après ce calcul, le type de base est testé à nouveau et s'il y a lieu, une deuxième résolution est faite avec la nouvelle condition basale. La procédure utilisée (résumée dans la figure II.15) est la suivante :

• ***Départ base froide.***

Lorsque la condition de départ est une base froide, le changement vers une base tempérée se fait si l'interface est à une température supérieure au point de fusion et le calcul du champ de température avec une base tempérée est effectué au même pas de temps.

• ***Départ base tempérée.***

Si la base est tempérée, le calcul analytique de la température décrit précédemment est utilisé pour calculer G_{bf}, le gradient de température à la base de la couche froide. G_{bf} est obtenu d'après l'équation (II.60) et à partir des valeurs de T_{if}, $T_{f\delta}$ et δ du pas de temps précédent. C'est la valeur de G_{bf} qui permet de tester le type de base.

$G_{bf} > -\phi_{tot}/K_g$ *: transition vers la base froide.*

ϕ_{tot} est le flux total de chaleur arrivant à la base de la glace c'est à dire le flux d'origine géothermique plus celui dû à la chaleur produite par le glissement (généralement négligeable lors de ce type de transition): $\phi_{tot} = -K_T\, \partial T/\partial z)_{socle} - u_x(-B)\, \tau_b$.

Ce cas correspond à un regel, ($\dot{f}$ négatif) et entraîne le passage au cas base froide. Il se produit souvent des oscillations entre les deux types de base car, en raison de l'influence de $\dot{f}$ sur l'advection verticale (Ritz 1980), la fusion tend à refroidir la base. Pour limiter l'amplitude de cette oscillation, la transition : base tempérée → base froide, se fait en deux étapes.

Lorsque du regel est détecté, le profil vertical de température est recalculé au même pas de temps en supposant la base tempérée mais sans terme de fusion dans la vitesse verticale. Le passage à la base froide ne se fait que si le regel persiste et seulement au pas de temps suivant.

$-\phi_{tot}/K_g \geq G_{bf} > G_f$ *: base tempérée ou diminution de l'épaisseur de la couche basale tempérée.*

Une procédure itérative est mise en oeuvre où nous faisons décroître la valeur de δ jusqu'à ce que soit $\delta=0$ (base tempérée), soit $G_{bf}=G_f$ (CBT avec la valeur de δ ainsi déterminée). Dans ce dernier cas le calcul du champ de température dans la partie froide est effectué à nouveau pour ce pas de temps en tenant compte de (II.61) et (II.62).

$G_{bf} < G_f$ *: augmentation de l'épaisseur de la couche basale tempérée.*

Le même type de procédure est utilisé mais cette fois en augmentant la valeur de δ.

$G_{bf} = G_f$ *: l'épaisseur de la couche basale tempérée ne change pas.*

PROCEDURE POUR LE CHOIX DU TYPE DE BASE

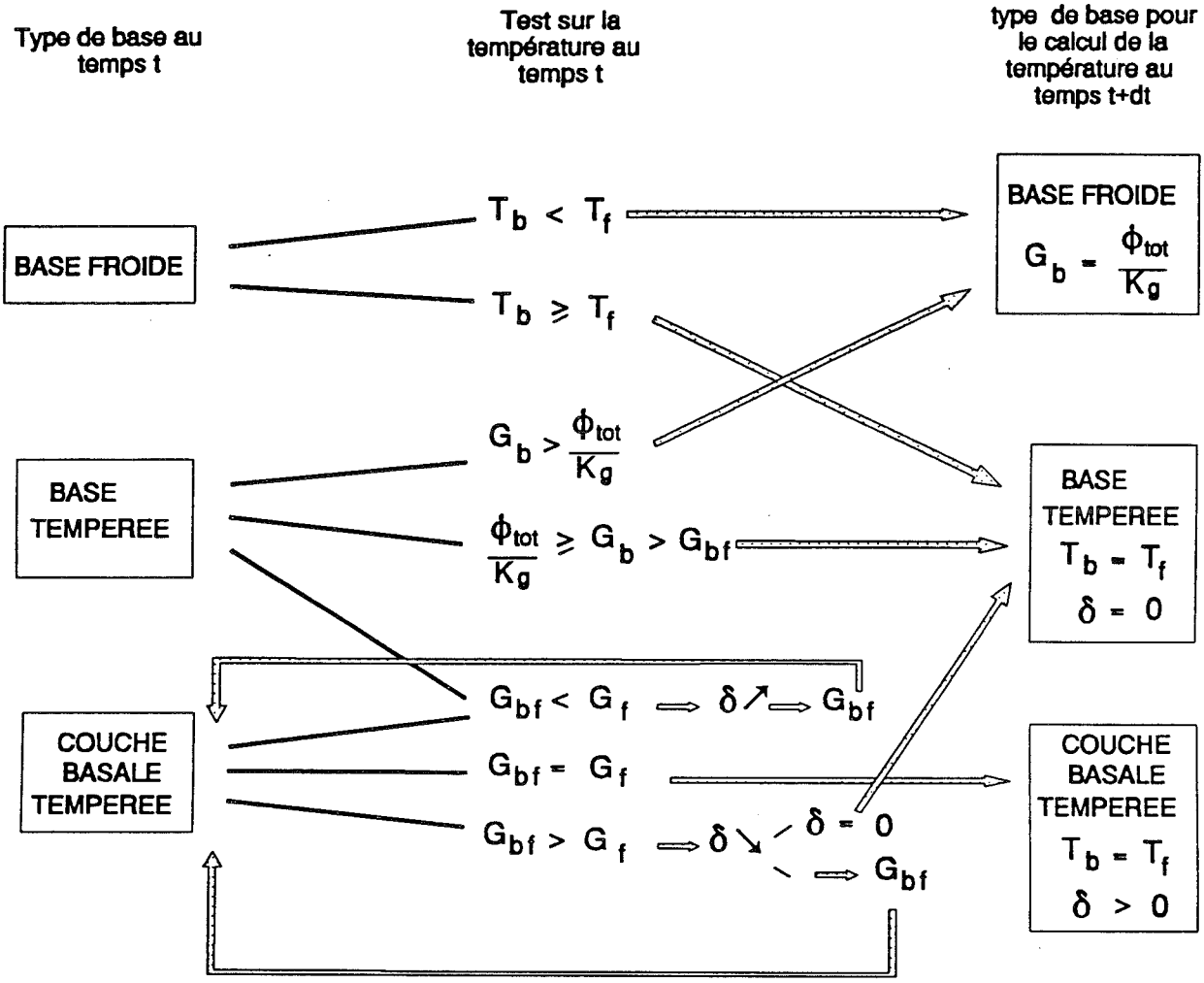


Figure II.15 Tests pour le choix du type de base.

A l'interface glace-socle : *T_b est la température de la glace, T_f est la température de fusion de la glace, G_b est le gradient vertical de température, ϕ_{tot} est le flux de chaleur à l'interface (d'origine géothermique plus éventuellement celui dû à la chaleur produite par le glissement), K_g est la conductivité thermique de la glace à la température T_b.*

Au sommet de la couche basale tempérée d'épaisseur *δ. G_{bf} est le gradient de température dans la glace froide calculé d'après (II.61) en fonction de δ et de la température au noeud immédiatement supérieur (T_{if}). G_f est le gradient de fusion.*

$\delta\nearrow$ représente la procédure itérative par laquelle l'épaisseur de la couche basale tempérée est progressivement augmentée ce qui permet un nouveau calcul de G_{bf}. $\delta\searrow$ est la procédure de diminution de δ.

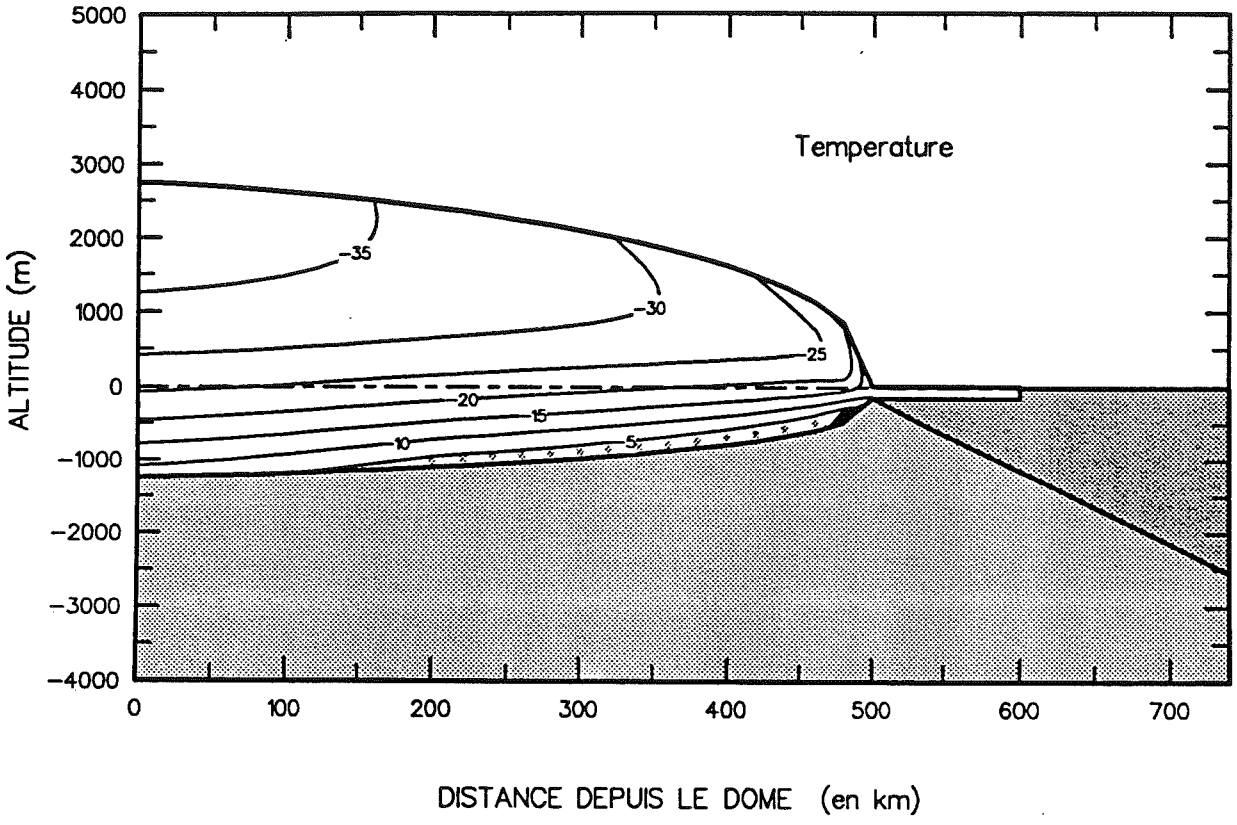


Figure II.16 Champ de température calculé.
Le profil de la calotte et les champs de vitesse sont ceux donnés dans les figures (II.7 et II.8). La température en surface est -10 °C au niveau de la mer et décroît de 1°/100m avec l'altitude de la surface. Le flux géothermique est 40 mW/m^2. les points à la base de la calotte représentent les colonnes pour lesquelles il y a une base tempérée. Une petite couche basale tempérée existe au bord de la calotte et est représentée en noir. L'influence de l'advection horizontale qui transporte du froid de l'amont vers l'aval s'observe dans la partie supérieure de la calotte en particulier pour les lignes -30°C et -25°C.

II.2.C RESULTATS PRELIMINAIRES.

Notre modèle permet, connaissant la géométrie de la calotte, l'accumulation et la température en surface au cours du temps, de déterminer le champ de température dépendant du temps dans l'ensemble de la calotte. La première étape consiste à obtenir un état stationnaire pour des conditions données. Pour cela, nous partons d'une solution initiale qui est analytique mais qui ne prend pas en compte l'advection horizontale et pour laquelle toute la chaleur de déformation est introduite à la base sous forme de flux. Le calcul numérique du champ de température est ensuite effectué jusqu'à l'obtention d'un champ de température stationnaire. Ce champ stationnaire obtenu ne dépend pas de l'état initial, seul le temps mis pour atteindre l'état stationnaire est affecté. Par la suite lors de tous les calculs de température, le champ initial sera en fait ce champ stationnaire. Un exemple est donné sur la figure (II.16) pour le profil d'équilibre déjà présenté.

Lorsque la température en surface varie, d'autres conditions aux limites sont affectées. Il s'agit principalement de l'accumulation (qui a une influence sur le champ de vitesses) et du gradient de température à l'interface glace-socle. Les premières études effectuées avec notre modèle de température portaient sur l'évolution dans le temps de ces conditions aux limites et ont fait l'objet d'un article (Ritz, 1987) que nous présentons ici.

Le premier point abordé concerne l'influence du champ de température dans le socle rocheux. Les variations (d'origine climatique) de la température en surface se propagent dans la glace et après un temps assez long (plus de 10 000 ans) atteignent l'interface glace-socle. Lorsque la base est froide, les perturbations de température pénètrent également dans le socle. Nous montrons que ce phénomène affecte la réponse de la température basale de la glace aux changements climatiques. Dans le cas d'une perturbation climatique en forme de marche, la réponse de la température à l'interface est considérablement ralentie par l'influence du socle, au point qu'après 600 000 ans la température basale n'est toujours pas stationnaire. Dans le cas d'une variation périodique de la température en surface, l'amplitude des variations à la base de la calotte est fortement atténuée (d'un facteur 3). Enfin nous indiquons dans quelle épaisseur de socle il faut effectuer le calcul de température pour bien prendre en compte ces phénomènes tout en optimisant le temps de calcul (2 km).

Nous étudions ensuite l'influence d'une variation d'accumulation associée à la variation de température en surface et nous montrons qu'il est nécessaire de tenir compte également de la variation d'épaisseur consécutive au changement d'accumulation.

L'ensemble de cette étude permet de modéliser de façon plus réaliste la réaction d'une calotte glaciaire aux variations climatiques.

The Physical Basis of Ice Sheet Modelling (Proceedings of the Vancouver Symposium, August 1987). IAHS Publ. no. 170.

Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets

Catherine Ritz
Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement
38402 St. Martin d'Heres Cedex, FRANCE

ABSTRACT The time dependent heat equation is solved to study the influence of boundary conditions on temperature changes. To take into account the propagation of a temperature perturbation into the rock, it is necessary to perform the calculation both in the ice and the rock. A sensitivity analysis indicates that a rock thickness of 1 to 2 km is sufficient. The effects of an accumulation rate change on the temperature are also studied. For this it is also necessary to account for ice thickness variations, which reduce the influence of accumulation rate perturbations. Because horizontal advection and strain heating vary when accumulation rate changes occur, a two-dimensional calculation is needed at each time step.

Conditions aux limites en fonction du temps pour le calcul des champs de temperature dans les calottes de glace

RESUME L'équation de la chaleur dépendant du temps est résolue et on étudie l'influence des conditions aux limites sur l'évolution de la température. On montre que pour tenir compte de la propagation des perturbations de température dans le socle rocheux il faut faire le calcul à la fois dans la glace et dans le socle rocheux. Un étude de sensibilité indique qu'une épaisseur de socle de 1 à 2 km est suffisante. On étudie ensuite l'effet d'une variation de l'accumulation sur la température. Il est alors indispensable de tenir compte du changements d'épaisseur de la calotte polaire qui atténue l'influence de la perturbation d'accumulation. Enfin l'advection horizontale et la production de chaleur par déformation ne sont pas constantes lors d'une variation de l'accumulation et il faut donc effectuer un calcul bidimensionel à chaque pas de temps.

INTRODUCTION

Computation of the temperature field is an important part of ice sheet modelling, especially in the study of the response of ice sheets to climatic change and in the interpretation of measured temperature profiles in boreholes. Steady state models show a high sensitivity to boundary conditions, mainly with respect to the geothermal heat flux (basal condition), the surface temperature (surface condition) and the accumulation rate (surface condition for the vertical velocity) (Ritz *et al.*, 1982).

Climatic records obtained using isotopic data from polar ice cores show large changes in the temperature at the surface of the ice sheets. Several authors have modelled the propagation of a temperature perturbation (Jenssen & Campbell, 1983; Budd & Young, 1983; Whillans, 1978); however, when a change in surface temperature occurs, the other boundary conditions do not remain constant with time. When the base of the glacier is below the melting point, the temperature perturbations penetrate into the bedrock and change the temperature gradient in the rock. Thus, the heat flux across the ice-rock interface depends on past temperature variations.

The accumulation rate is strongly linked with surface temperature, since precipitation is governed by the amount of water vapor in the atmosphere (Lliboutry, 1965; Robin, 1977). A temperature variation is generally associated with a change in accumulation rate and consequently also affects the ice thickness. Our purpose here is to study the effect of such time dependent conditions on the calculated temperature field in order to choose the most realistic parameterization.

MODEL DESCRIPTION

Governing equations

The heat equation is given by

$$\rho_i C_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K_i \frac{\partial T}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[K_i \frac{\partial T}{\partial z}\right] - \rho_i C_i \left[U \frac{\partial T}{\partial x} + W \frac{\partial T}{\partial z}\right] + Q \tag{1}$$

for the ice and by

$$\rho_r C_r \frac{\partial T}{\partial t} = K_r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{2}$$

for the rock. We neglect horizontal advection of heat in the rock. Here the z axis is vertical and positive downward from sea level, x is the horizontal distance from the ice divide, t is time, T is temperature, U and W are the x and z components of velocity, respectively, and Q is the heat produced by ice deformation (strain heating). K_i, ρ_i, and C_i are the conductivity, density, and specific heat capacity, respectively, for the ice; K_r, ρ_r, and C_r are the corresponding parameters for the rock. The values of these physical parameters for ice and rock are summarized in Table 1.

TABLE 1 Physical parameters for ice and rock. T_a is Kelvin temperature.

$K_i = 9.828 \exp(-0.0057\, T_a) W\ ^\circ m^{-1}\ K^{-1}$	*(Yen, 1981)*
$\rho_i C_i = 19.36 \times 10^5 + 6.6 \times 10^3 (T - 273.15)\ J\ m^{-3}\ ^\circ K^{-1}$	*(Yen, 1981)*
$\rho_r C_r = 20 \times 10^5\ J\ m^{-3}\ ^\circ K^{-1}$	
$K_r = 3\ W\ ^\circ K^{-1} m^{-1}$	*(Drury et al., 1984)*
$\psi = 0.045\ W\ m^{-2}$	*(Lee, 1970)*

Boundary conditions

This study is limited to the case of a cold base (i.e., the ice base below the melting point), giving heat flux continuity at the ice-rock interface:

$$K_i \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_i = K_r \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_r \tag{3}$$

The geothermal heat flux ψ is defined at the base of the rock. The rock layer thickness taken into account is noted H_s. We generally use a ψ value of 0.045 W m^{-2} , a typical value for Precambrian shield areas (Lee, 1970). We will also need to consider E, the surface elevation of the ice sheet; H, the ice thickness; b, the accumulation rate; and T_s, the surface temperature. All these parameters may vary as a function of x and t.

Physical parameters for ice and rock

The temperature dependence of the thermal parameters of ice is reflected in the temperature distribution in two ways:

(a) The term $\partial K_i / \partial z$ is non-negligible. It has an order of magnitude similar to that of the advection term $C_i \rho_i W$ ($\sim 5\times10^{-4}$ W °C^{-1}m^{-2}).

(b) The condition at the ice-rock interface is temperature dependent. For example, with a heat flux of 0.045 W m^{-2} across the interface, the thermal gradient in the ice will be 0.020 °C m^{-1} at 0°C and 0.018 at −15°C.

Velocity distribution

The depth profile of horizontal velocity U is derived from the analytical model given by Lliboutry (1979). For a cold base we assume no sliding and all ice flow due to deformation. We write $U(x,z) = \psi(z,H)\overline{U}(x)$, where $\overline{U}(x)$ is the balance velocity and

$$\psi(z,H) = \frac{m+2}{m+1}\left[1-\left[\frac{E+z}{H}\right]^{m+1}\right] \tag{4}$$

where $m = n - 1 + (\partial \ln \gamma/\partial T)\, H\, G_0$, n is the exponent of power law viscosity, G_0 is the thermal gradient at the rock-ice interface, and γ is the effective shear strain rate. Because we focus on the sensitivity of the temperature field to boundary conditions, we always use the same value of m to avoid the effects of velocity profile changes with temperature. The m value is 11, corresponding to a Glen Law exponent $n = 3$, a thickness $H = 3000$ m, and a geothermal gradient at the base of the ice $G_0 = 0.02$ °C m^{-1}. A specific model for the ice divide would perhaps be more realistic.

To obtain the balance velocity, the mass continuity equation:

$$\frac{\partial[\overline{U}(x)H(x)]}{\partial x} = b(x) - \frac{\partial H(x)}{\partial t} \tag{5}$$

is solved numerically subject to the boundary condition of zero velocity at the ice divide. Finally the vertical velocity $W(x,z)$ is calculated using mass continuity for the local element:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{6}$$

This gives:

$$W(x,z) = \left[b(x) - \frac{\partial H(x)}{\partial t}\right]\left[1 - \frac{1}{H(x)}\int_{-E}^{z}\psi(z,H)\,dz\right] + U(x,z)\left[\frac{E+z}{H(x)}\frac{\partial H(x)}{\partial x} - \frac{\partial E(x)}{\partial x}\right] \tag{7}$$

The ice sheet profile is allowed to change with time.

Strain heating

Strain heating is assumed to be concentrated at the ice sheet base. This changes the boundary condition, adding a heat flux ψ_d:

$$\psi_d = \overline{U}\tau_b \tag{8}$$

where τ_b is the basal shear stress (Budd *et al.*, 1971; Lliboutry, in press).

NUMERICAL METHOD

The heat equation is solved with a finite difference method of the predictor-corrector type (Douglas-Jones method; Remson, 1971). The predictor is solved for each column, using the horizontal terms (advection and diffusion) calculated at the previous time step. For the corrector, the predicted values of these horizontal terms are used. If the difference between predicted

and corrected values is greater than 0.1°C, a re-corrector loop is applied to all the columns; however, this is generally necessary only for the first time step. This method requires less computer time than a true bidimensional solution, since only tridiagonal matrices need to be inverted and longer time steps (up to 10^3 years) may be used than with an explicit method.

As in Jenssen (1977), the vertical coordinate z is transformed to a relative coordinate $\sigma = (E+z)/H$. This makes the equations more complicated, but computational problems on the boundaries are avoided when derivatives are replaced by finite differences. It is also easier to introduce thickness changes. When a change in thickness is considered, an interpolation is performed at each time step to calculate the temperature on the new grid.

The initial temperature profile in the ice is obtained by numerically integrating the steady state heat equation (without terms corresponding to horizontal advection) with constant conductivity and heat capacity, and with the vertical velocity obtained as described above. In the bedrock, a linear temperature profile is the solution of the steady state heat equation. We then perform the calculation until the steady state is reached in order to "forget" the initial distribution. This may take 400 years of model time. The time needed to calculate the steady state, but not the steady state itself, is dependent on the initial conditions.

We present results for a simple example with parallel surface and bedrock profiles, a slope equal to 2×10^{-3}, and an atmospheric temperature gradient of 10^{-2} °C m^{-1}. For the steady state case, the thickness is $H = 3$ km, the accumulation rate is $b = 5$ cm a^{-1}, and the surface temperature at the ice divide is $T_s = -50$°C. We generally present results for the ice divide (basal temperature equal to −12.27°C) and for a point 100 km downstream (surface temperature −48°C, basal temperature −9.03°C). Such an example is typical of present day East Antarctica. The steady state temperature field is different for Greenland or West Antarctica, but the time dependence of the solution would be similar.

When the steady state is reached, we introduce perturbations in boundary conditions (surface temperature, accumulation rate and thickness). Because our purpose is more to perform a sensitivity analysis than to treat a realistic case, we use arbitrary perturbations such as step and sine functions. We focus on the concomitant basal temperature changes because they are representative of the evolution of the whole temperature field. Furthermore, they have a great influence on ice flow.

COMPUTATIONAL RESULTS

Influence of temperature perturbation in the rock

One of the most important parameters of our model is H_s, the thickness of rock layer. If a temperature perturbation occurs at the rock-ice interface, the change of temperature with time in the rock decreases with depth. Therefore at the rock base the constant heat flux assumption is better if H_s is large. On the other hand, the computing time is directly linked with the number of nodes in the rock. Dahl-Jensen & Johnsen (1986) used a rock thickness value of 3 km; Paterson & Waddington (1986) used 2 km.

To choose the best value for H_s, we performed a sensitivity study on this parameter, with H_s varying from 0 (without bedrock) to 30 km. We first introduced a surface temperature step change. Figure 1 represents the corresponding bottom temperature response. Note that there is no difference between $H_s = 5$ km and larger values. Furthermore, the total variation of the basal temperature is greater (by about 10%) than the surface temperature change. This is due to the temperature dependence of the thermal properties of ice, and is a phenomenon that is relatively insensitive to the amplitude of the surface perturbation.

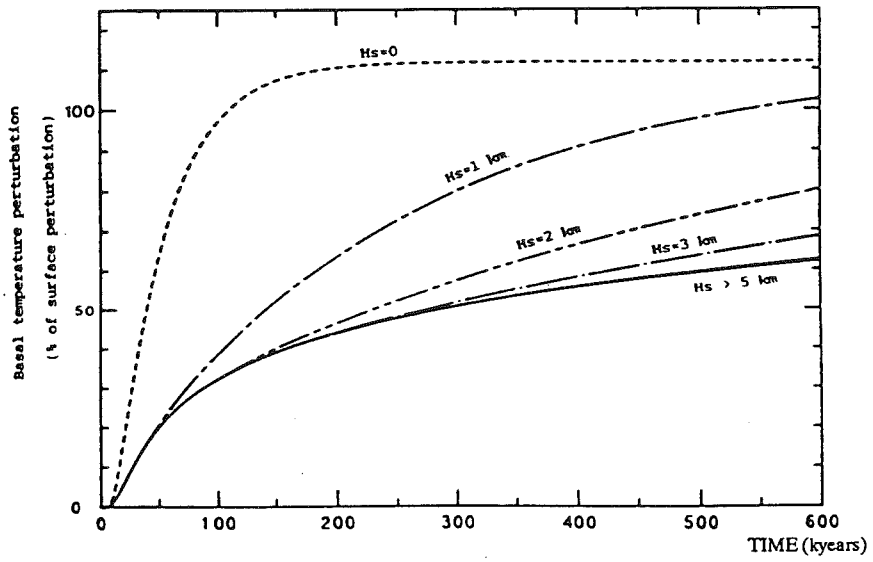


FIG. 1 Response to a step change in the surface temperature. Basal tempeature variation calculated with different rock thicknesses (H_s).

The time needed to reach equilibrium is very long: about 200 ka without rock and even longer with rock (when $H_s = 5$ km only 60% of the perturbation reaches the bottom after 600 ka). This gives rise to a computational problem. If the initial temperature is far from the steady state, which is generally the case since there is no simple solution taking into account horizontal advection and the temperature dependence of conductivity, then the time necessary to reach steady state is very long (up to 2000 ka). Such behavior may explain why Dahl-Jensen & Johnsen (1986) had continue their calculation over 7-10 climatic cycles (~ 100 ka each) before the influence of initial temperature became negligible. A more efficient way to get around this problem is to drive the model to steady state by considering only heat transport in the ice and then introducing the effect of underlying rock (with a linear temperature profile in the rock).

Finally, the response duration is by far longer than typical climatic cycles. We can see that for shorter times (100 ka), the differences between different values of H_s (except $H_s = 0$) are negligible. Therefore, it may not be necessary to use an H_s value of 5 km.

To investigate the effects of more realistic surface conditions, we also tested a periodic (sinusoidal) surface temperature signal. The periods used were 20, 40 and 100 ka, which are roughly typical climatic periods (Hays *et al.*, 1976). The results are presented in Fig. 2. The first conclusion is that it is not necessary to use a rock thickness greater than 1 to 2 km. The basal temperature becomes periodic after about 150 ka. The amplitude of the basal perturbation is about one half the value obtained without rock; nevertheless, for the 100 ka period, it reaches at least 10% of the surface amplitude (and even greater values for larger accumulation rates and thinner ice sheets), and may have a significant influence on ice flow.

Change in accumulation rate and ice thickness

The temperature distribution depends upon velocity field, mainly the vertical velocity. The dependence of surface vertical velocity W_s on accumulation rate and ice thickness variation may be derived from Equation (6).

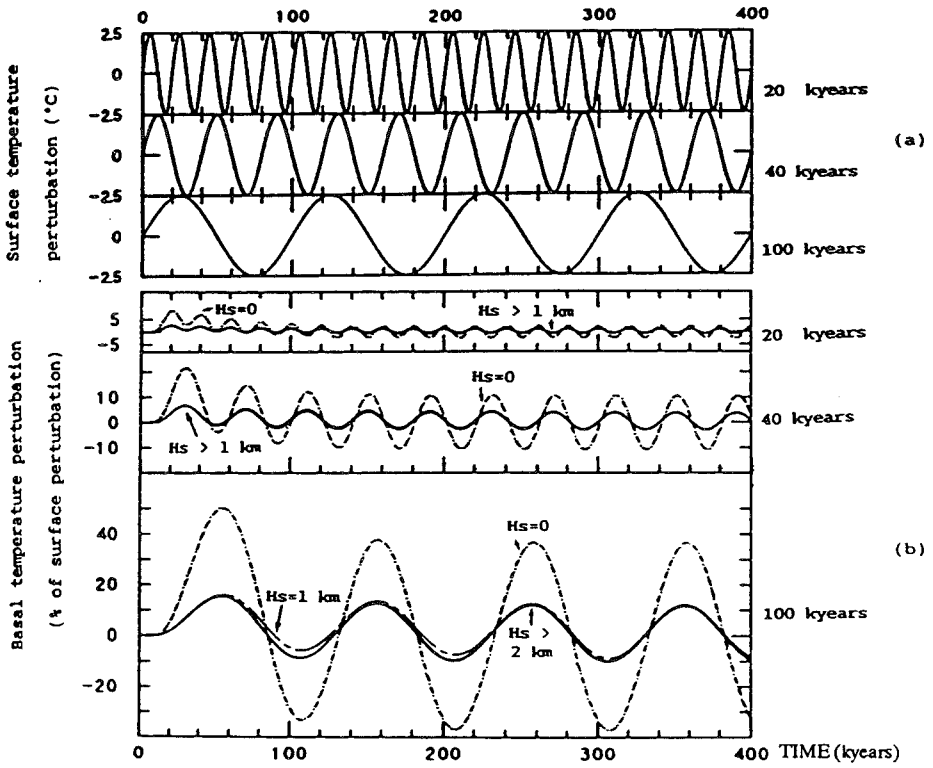


FIG. 2 Response to a sinusoidal variation of the surface temperature. Basal temperature variation calculated with different rock thicknesses (H_s) and for three periods (20, 40 and 100 ka).

Authors who have introduced accumulation rate variations have generally assumed that without varying thickness, the velocity field changes in such a way that the ice sheet maintains its mass balance (Dahl-Jensen & Johnsen, 1986; Paterson & Waddington, 1986). Paterson & Waddington introduce a time lag of 500 years during which the velocity adjusts, but they estimate that between 1 and 8 ka would actually be needed. We try to assess the effect of such boundary conditions compared to those including a change in thickness associated with accumulation rate variation (possibly a more realistic condition).

For the thickness variations, simple assumptions allow us to describe qualitatively the temperature behavior due to thickness change. A surface temperature step change of 10°C and a doubling of accumulation rate at $t = t_0$ is assumed; only thickness changes due to the accumulation rate variations are taken into account. We assume that the thickness change with time is:

$$H(t) = H(t_0) + \tau b_1 \left[1 - \exp\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]\right] \qquad (9)$$

where b_1 is the accumulation rate perturbation and τ is a reaction time dependent on thickness, accumulation rate and velocity. This equation is obtained by several workers, including Nye (1960) and Whillans (1981), who defined τ as a function of the Glen's Law exponent n. For our example, Whillans' model gives $\tau = 20$ ka when $n = 1$ and $\tau = 12$ ka when $n = 3$. (This model assumes an ice sheet with a uniform thickness.) Another approach to determining τ is based on the observation (Paterson, 1981) that for a steady state ice sheet profile, as calculated by Vialov (1958), the thickness is proportional to $b^{1/8}$. This gives a thickness change of about 250 m and $\tau = 5$ ka. Such a time dependence for thickness changes leads to:

$$W_s(t) = W_s(t_0) - b_1 \exp\left[-\left[\frac{t-t_0}{\tau}\right]\right] \quad (10)$$

Figure 3 shows the time-dependent boundary conditions: surface temperature, accumulation rate, thickness, and W_s. Different τ values are used ($\tau = 5$, 12 and 20 ka), leading to the total thickness variation ΔH (respectively 250, 600 and 1000 m).

Results are presented in Fig. 4 for several cases: surface temperature change only (curve a); surface temperature and accumulation rate variation, with velocity adjusting immediately

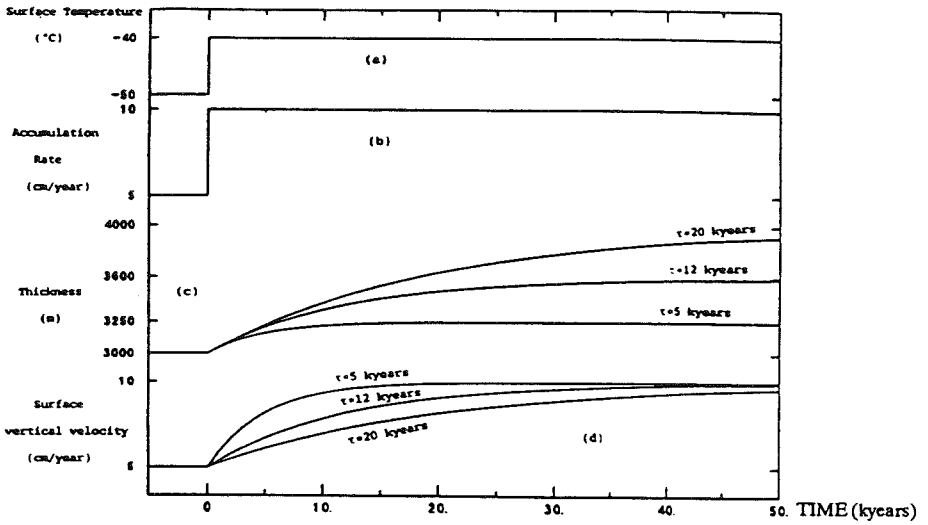


FIG. 3 Boundary conditions: (a) surface temperature, (b) accumulation rate, (c) thickness, (d) surface vertical velocity. (c) and (d) for different values of τ (Equation (9)).

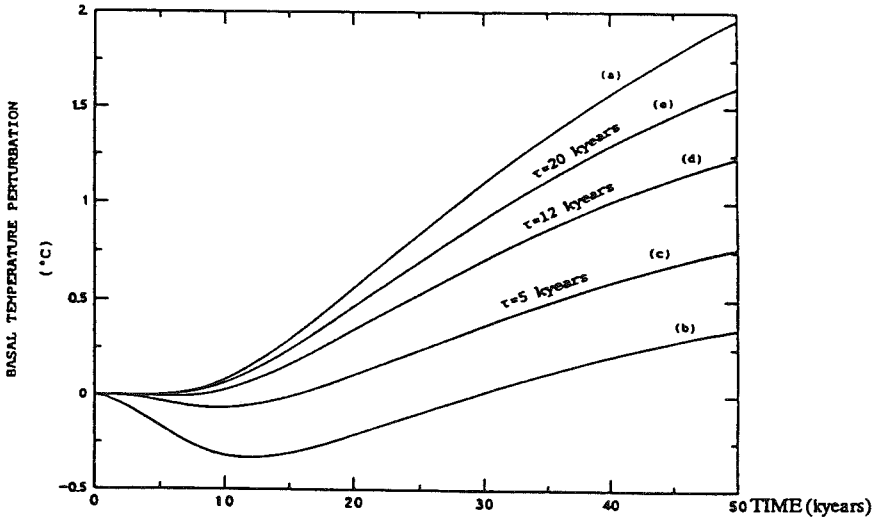


FIG. 4 Basal temperature changes in response to boundary conditions described in Fig. 3: (a) temperature variation only; (b) temperature and accumulation rate variation; (c), (d), and (e) temperature, accumulation rate and thickness variation. Thickness change according to Equation (9) with $\tau = 5$, 12, 20 ka.

(curve b); and thickness change for, respectively, $\tau = 5$, 12 and $\tau = 20$ ka, with W_s given by Equation (10) (curves c, d, and e). We observe that the thickness change reduces the influence of accumulation rate variation, and this effect depends sensitively upon the ΔH value. This allows us to estimate that the error due to our lack of knowledge about thickness changes may reach 1°C, 10 ka after the surface variation.

Finally, we compare these results with those obtained without thickness change and with a time-dependent W_s. Our purpose is to find a parameterization of W_s that gives a good approximation of basal temperature changes. Figure 5 shows several attempts: curves a, b, and c for velocity adjusting linearly with time over within 5, 12 and 20 ka, respectively; curve d for W_s given by Equation (10), with $\tau = 5$ ka; and, for comparison, curve e, for which thickness change with $\tau = 5$ ka was considered. In curves d and e, the W_s trend is similar, thus the difference between the two curves is only due to different thicknesses. Therefore, if the thickness variation is small, such a parameterization gives good results. We see that over the first 10 ka, curve b fits curve e very well. In curve b, W_s is smaller than in curve e, perfectly balancing the thickness effect. However, it is difficult to derive a general parameterization from this result.

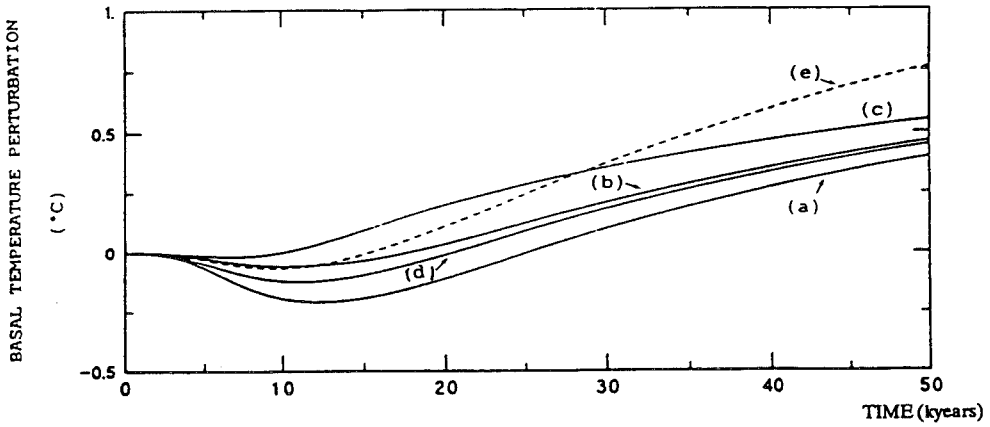


FIG. 5 Basal temperature changes in response to perturbations of surface temperature and accumulation rate. Surface velocity adjusting linearly within (a) 5 ka, (b) 12 ka, (c) 20 ka; (d) surface vertical velocity according to Equation (9) with ($\tau = 5$ ka); (e) (dotted line) with thickness change ($\tau = 5$ ka).

TWO-DIMENSIONAL EFFECTS

All the results presented above were obtained at the ice divide (horizontal velocity equal to 0). We will now try to assess how horizontal advection and frictional heat production (Q) affect the response of basal temperature to perturbations in boundary conditions. For this purpose, Fig. 6 compares the basal temperature variations at the ice divide and 100 km downstream. The surface perturbations used are as follows: for curves a and b, 10°C surface temperature increase; for curves c, d, and e, respectively, temperature perturbation, doubling of accumulation rate, and thickness change as in Equation (9) with $\tau = 5$ ka. Curves a and c (continuous line) give results at the ice divide, and curves b, d and e (broken line) show results for a point 100 km downstream. In curve d, strain heating Q is neglected, while it is included in curve e (as described by Equation (8)).

When only the surface temperature perturbation is defined, horizontal advection and strain heating do not change with time, hence curves a and b are similar. This result has also been

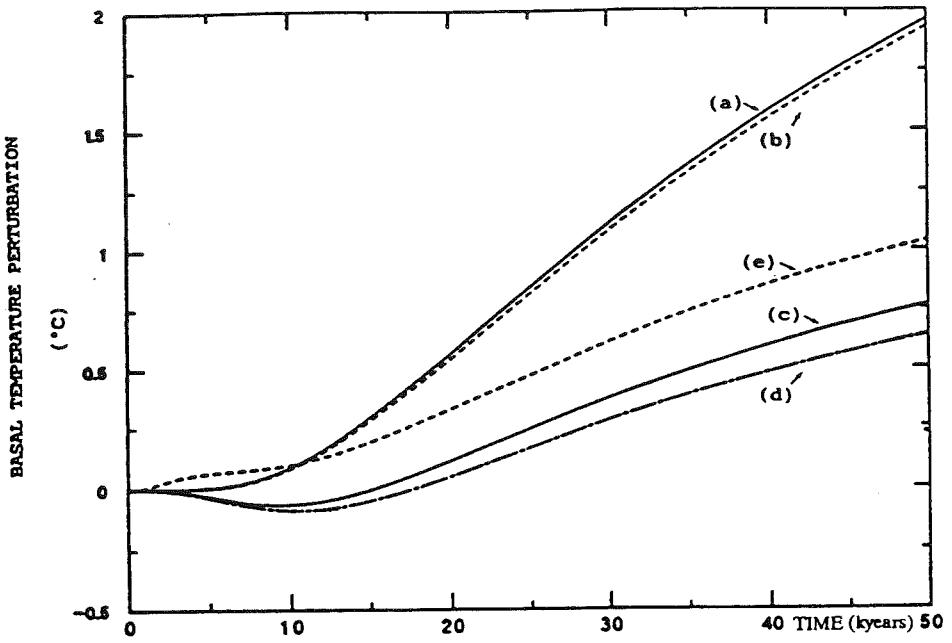


FIG. 6 Basal temperature changes. Comparison between the ice divide (curves a and c, continuous line) and 100 km downstream (curves b, d and e, broken line). Curves a and b are for surface temperature variation only; curves c, d and e are for surface temperature, accumulation rate and thickness variation (τ = 5 ka) respectively. In curve d the strain heating is neglected.

found by Paterson & Waddington (1986). However, as soon as we introduce accumulation rate perturbations, the mass balance velocity changes, inducing an increase in strain heating (thus warming the base) and in horizontal advection (a cooling effect). The comparison between curves b, d and e shows that at the base the warming due to strain heating is more important than the cooling due to horizontal advection.

CONCLUSIONS

We have studied the basal temperature response to climatic perturbations with different boundary conditions. This allows improved temperature calculation using more realistic boundary conditions. The first result is that the propagation of temperature perturbations into the bedrock highly reduces the amplitude of temperature variation at the rock-ice interface. To include this process in a model, it is necessary to perform the calculations both in the ice and the rock. A rock layer with a thickness of 1-2 km is adequate.

The second part of this paper has dealt with the influence of accumulation rate and thickness changes. A thickness variation affects the basal temperature in two ways: first a thickness increase leads to the warming of the base due to the insulating effect of ice; second, the vertical velocity at the surface is a function of both the accumulation rate and the thickness change with time ($\partial H/\partial t$). Our results show that the thickness change has an influence roughly as large as the accumulation rate but of opposite sign; thus, it is not realistic to take into account only accumulation rate variations. In our example, if the thickness variation is small (less than 10%) and confined to a short period (10 ka) after the accumulation rate variation, the use of a constant thickness with the surface velocity adjusting slowly within 12 ka leads to good results. Generally, the time lag over which the velocity adjusts has to be of the same order as the reaction time of the ice sheet to an accumulation perturbation.

Finally, in some cases we used a two-dimensional model to compare the basal temperature changes at the ice divide and 100 km downstream. We deduce from these results that horizontal terms are relatively insensitive to changes in temperature (because changes with time of horizontal temperature gradients are small), but that these terms are sensitive to velocity field variations. Our conclusion is that for a coupled model, it is necessary to perform bidimensional calculations at each time step.

ACKNOWLEDGEMENTS I thank Professor L. Lliboutry and Jacques Meyssonnier for stimulating discussions. This study was funded by the Programme National d'Etude de la Dynamique du Climat (CNRS).

REFERENCES

Budd, W.F., Jenssen, D. & Radok, U. (1971) Derived physical characteristics of the Antarctic ice sheet. *Publication No. 18, University of Melbourne, Meteorology Dept.*

Budd, W.F. & Young, N.W. (1983) Application of modelling techniques to measured profiles of temperature and isotopes. In: *The Climatic Record in Polar Ice Sheets* (ed. by G. de Q. Robin) 150-177. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Dahl-Jensen, D. & Johnsen, S.J. (1986) Paleotemperatures still exist in the Greenland ice sheet. *Nature* 320, 250-252.

Drury, M.J., Allen, V.S. & Jessop, A.M. (1984) The measurement of thermal diffusivity of rock cores. *Tectonophysics* 103, 321-333.

Hays, J.D., Imbrie, J. & Shackleton, N.J. (1976) Variations in the Earth orbit: Pacemaker of the ice ages. *Science* 194, 1121-1132.

Jenssen, D. (1977) A three dimensional polar ice sheet model. *J. Glaciol.* 18(80), 373-389.

Jenssen, D. & Campbell, J.A. (1983) Heat conduction studies. In: *The Climatic Record in Polar Ice Sheets* (ed. by G. de Q. Robin), 125-138, Cambridge University Press, Cambridge, UK.

Lee, W.H.K. (1970) On the global variations of terrestrial heat-flow. *Phys. Earth Planet. Int.* 2, 332-341.

Lliboutry, L. (1965) *Traité de Glaciologie.* Masson et Cie, Paris, France.

Lliboutry, L. (1979) A critical review of analytical approximate solutions for steady state velocities and temperature in cold ice-sheets. *Z. Gletscherk. Glacialgeol.* 15(2), 135-148.

Lliboutry, L. (in press) *Very Slow Flows of Solids: Basics of Modeling in Geodynamics and Glaciology.* Martinus Nijhoff, Dordrecht, Netherlands.

Nye, J.F. (1960) The response of glaciers and ice-sheets to seasonal and climatic changes. *Proc. Royal Soc. London* A256, 559-584.

Paterson, W.S.B. (1981) *The Physics of Glaciers,* 2nd edition. Pergamon Press, Oxford, UK.

Paterson, W.S.B. & Waddington, E.D. (1986) Estimated basal ice temperatures at Crête, Greenland, throughout a glacial cycle. *Cold Regions Sci. Tech.* 12, 99-102.

Remson, I., Hornberger, G.M. & Molz, F.J. (1971) *Numerical Methods in Subsurface Hydrology.* J. Wiley & Sons, New York, USA.

Ritz, C., Lliboutry, L. & Rado, C. (1982) Analysis of a 870 m deep temperature profile at Dome C. *Ann. Glaciol.* 3, 284-289.

Robin, G. de Q. (1977) Ice cores and climatic change. *Phil. Trans. Royal Soc. Lond.* B280, 143-168.

Vialov, S.S. (1958) Regularities of glacial shields movement and the theory of plastic viscous flow. In: *Physics of the Movement of the Ice* (Proc. Chamonix Symp., September 1958), 266-275. IAHS Publ. No. 47.

Whillans, I.M. (1978) Inland ice sheet thinning due to Holocene warmth. *Science* 201, 1014-1016.

Whillans, I.M. (1981) Reaction of the accumulation zone portions of glaciers to climatic change. *J. Geophys. Res.* 86(C5), 4274-4282.

Yen, Yin-Chao (1981) Review of critical properties of snow-ice and sea-ice. *Report No. 81-10, U.S. Army Corps of Engineers, Cold Regions Research and Engineering Laboratory, Hanover, New Hampshire, USA.*

CONCLUSIONS

Pour calculer le champ de température dans une calotte glaciaire, ou pour reconstituer les trajectoires des particules de glace (par exemple dans un but de datation) il est nécessaire de disposer du champ de vitesse. La méthode la plus réaliste consiste à traiter le problème couplé en lui associant l'évolution de la géométrie de la calotte et nous développons un modèle de ce type (que nous appelons d'évolution) au chapitre IV. Cependant ce modèle d'évolution est relativement lourd et n'est pas réellement approprié aux études locales. Nous avons donc, dans ce chapitre II, développé un modèle (utilitaire) basé sur la conservation de la masse. Connaissant la géométrie de la calotte glaciaire, les vitesses sont telles que toute la neige tombée soit exactement évacuée par l'écoulement. Ce type de modèle (que nous appelons à géométrie imposée) est relativement répandu (Budd et al. 1971). Les spécificités de celui que nous présentons sont l'utilisation du modèle analytique de Lliboutry (1979) pour décrire la forme du profil de vitesse et la possibilité d'imposer des variations de la géométrie de la calotte dans le but d'études de sensibilité.

Une fois le champ de vitesse imposé, l'équation de la chaleur dépendant du temps est résolue par une méthode aux différences finies. Notre effort a porté sur la prise en compte des différents types de base pouvant exister à l'interface glace-socle et des transitions possibles d'un type de base à un autre. En particulier, nous avons montré la nécessité de faire les calculs non seulement dans la glace mais aussi dans le socle sous-jacent et surtout nous modélisons la couche basale tempérée pouvant éventuellement apparaître. Ce dernier point est très rarement envisagé dans la littérature mais il a une influence importante sur l'écoulement des glaciers émissaires car d'après Lliboutry il ne peut y avoir de glissement significatif que s'il existe une couche basale tempérée. Au niveau numérique il faut être attentif à la façon d'introduire la chaleur produite par déformation. Notre méthode est basée sur une formulation analytique de la température dans la maille froide située juste au dessus de la couche basale tempérée ce qui permet la détermination de l'épaisseur de la couche basale tempérée par une procédure itérative. Il faut noter que le modèle de température ainsi développé est directement utilisable dans le modèle couplé.

Dans le chapitre suivant, le modèle d'écoulement à géométrie imposée est appliqué à la datation du forage de Vostok et le modèle de température permet l'interprétation du profil vertical de température mesuré dans le trou de forage.

CHAPITRE III

APPLICATION DU MODELE "SURFACE IMPOSEE" A L'INTERPRETATION DU FORAGE DE VOSTOK : DATATION ET TEMPERATURE DANS LA GLACE.

INTRODUCTION

L'interprétation des forages profonds est une application importante des modèles d'écoulement de la glace. Dans le chapitre I nous avons vu qu'il y a deux grands types de modèles : les modèles forcés (à surface imposée) et les modèles d'évolution. Ces derniers sont les plus réalistes puisqu'ils ne demandent aucune hypothèse sur les variations d'épaisseur de la calotte au cours du temps, cependant ils sont peu maniables pour les problèmes à petite échelle. C'est pourquoi en pratique les modèles forcés sont généralement utilisés pour l'interprétation des forages.

Dans ce travail, le modèle "surface imposée" a été appliqué au calcul des caractéristiques suivantes :

- L'âge des carottes de glace, pour obtenir des enregistrements climatiques dépendant du temps, et les comparer avec d'autres enregistrements (marins, lacustres...).

- La distance du site de déposition par rapport au forage.

- Le champ de température dans la glace qui peut être comparé au profil de température mesuré dans le trou de forage de Vostok et donner ainsi des informations sur des paramètres auxquels le modèle est très sensible tels le flux géothermique et l'accumulation. Ce dernier paramètre permet en retour de valider la datation.

Etant données les limitations inhérentes à ce type de modèle (il n'est pas possible de simuler les variations d'épaisseur de la calotte sous l'action du climat) nous le considérons comme un outil préliminaire qui est utilisé pour déterminer la sensibilité aux différents paramètres et estimer si l'appel à un modèle d'évolution, beaucoup plus lourd, apporterait une amélioration notable compte tenu de l'incertitude sur certaines données.

Au cours de ce calcul, il est indispensable de disposer de la température à la surface de la calotte et de l'accumulation au cours du temps, non seulement à Vostok, mais aussi pour toute la ligne de courant en amont de Vostok. Dans ce chapitre nous développerons d'abord les relations utilisées pour déduire température et accumulation d'après l'enregistrement isotopique (signal climatique), puis nous décrirons la méthode de datation et ses résultats. Enfin nous comparerons le profil vertical de température dans la glace estimé grâce au modèle avec celui qui a été mesuré dans le trou de forage de Vostok.

III-1 SIGNAL CLIMATIQUE

Nous cherchons ici à déterminer les conditions climatiques (température et accumulation) ayant prévalu dans le passé. Cette étude est centrée sur la région de Vostok, mais nous cherchons également à généraliser à l'ensemble de l'Antarctique car le modèle d'évolution requiert la température et l'accumulation en tout point au cours du temps.

Les informations disponibles sur ces données climatiques sont d'une part les variations au cours du temps en quelques sites (forages), d'autre part la répartition actuelle (cartes, voir chapitre I). Il s'agit donc ici de généraliser à toute la calotte polaire les données tirées des forages.

III.1.A Température à la surface de la calotte

- Enregistrement climatique à Vostok.

Nous employons ici les données tirées du carottage de Vostok car parmi les carottages profonds réalisés en Antarctique, c'est celui qui permet de reconstituer les variations de température en surface sur la plus grande échelle de temps (plus d'un cycle climatique). Les enregistrements isotopiques à Byrd et Dôme C étant très semblables à celui de Vostok (Jouzel et al. 1989) nous considérons que ce signal climatique obtenu à Vostok est représentatif de l'Antarctique centrale.

Les variations de température à Vostok sont obtenues soit à partir de la concentration en ^{18}O (Lorius et al. 1985), soit de la concentration en Deutérium (Jouzel et al. 1987_a). Les

deux enregistrements sont en bon accord et dans tout ce travail nous utilisons uniquement celui en Deutérium qui est le plus détaillé. De plus le Deutérium représente de façon plus fidèle la température (Jouzel et al. 1987_a).

La composition isotopique de la neige est liée à la température de condensation des précipitations. On considère en général que la précipitation nait dans la couche la plus chaude de l'atmosphère et on suppose par conséquent que la température de condensation est la température au dessus de la couche d'inversion. Une relation empirique entre les moyennes annuelles de la température d'inversion (T_i) et de la température de surface (T_s) a été obtenue à partir de la compilation des mesures faites sur l'ensemble du continent Antarctique (Jouzel et Merlivat 1984) :

$$T_i = 0.67\ T_s + 88.9 \qquad (T_i \text{ et } T_s \text{ en K}) \qquad \textbf{(III.1)}$$

Pour déduire la température de surface de la composition isotopique Jouzel et al. (1987_a) supposent un rapport ($d\delta D/dTs = 6$ ‰/ °C) en accord avec la relation trouvée par Lorius et Merlivat (1977) à partir d'échantillons de surface entre Dumont d'Urville et Dôme C (6.04 ‰/°C). Ce rapport est également celui obtenu avec un modèle isotopique théorique reliant température de condensation et isotope (Jouzel et Merlivat 1984) en tenant compte de (III.1).

La teneur en Deutérium est préalablement corrigée afin de tenir compte des variations de composition isotopique de l'océan. Le signal isotopique étant très bruité, nous utilisons le signal lissé par une méthode spline (figure III.1) et nous notons ΔT_D la différence de température déduite de l 'enregistrement isotopique :

$$\Delta T_D = \frac{\Delta \delta D}{6} \qquad (\delta D \text{ lissé et corrigé de l'océan}) \qquad \textbf{(III.2)}$$

L'enregistrement ainsi obtenu représente la différence entre la température actuelle à Vostok et la température au site et au temps de déposition. Pour en déduire la température à Vostok au cours du temps, il faut tenir compte de l'origine de la glace. Nous ne disposons d'aucune donnée de température en amont de Vostok, mais nous pouvons tirer certaines informations du forage de Dôme B. Bien que ce site soit situé 200 m plus haut que Vostok, la température de surface déduite de l'isotope est environ 1.3 degré plus élevé qu'à Vostok

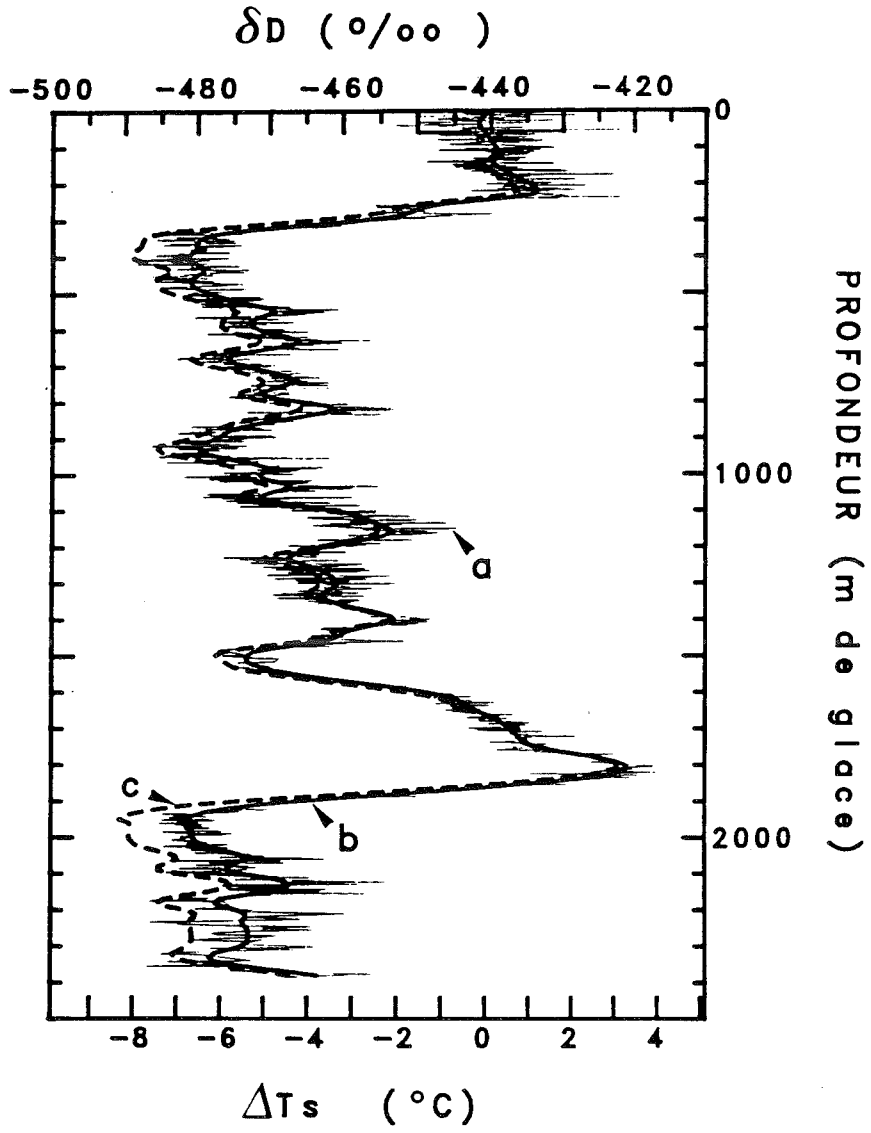


Figure III.1 Enregistrement climatique tiré de la carotte de Vostok.
Composition isotopique (en deutérium) en fonction de la profondeur (en m de glace). Cet enregistrement est converti en écart de température en surface (axe du bas) en supposant une relation $d\delta D/Dt_s = 6$ ‰ /°C.
a)Trait fin continu : données brutes.
b)Trait épais continu : lissage avec une méthode spline.
c) Pointillé : avec correction pour tenir compte des variations de composition isotopique de l'océan.

(voir plus loin la comparaison Dôme B - Vostok). Ce gradient de température le long de la pente, négatif lorsque l'altitude de la surface diminue peut s'expliquer par un mouvement descendant de l'air plus intense au niveau du Dôme et amenant de la chaleur par advection (Schwerdtfeger 1984), ou par une origine différente des masses d'air. L'origine de la glace et la correction à apporter sont calculées au cours de la datation (voir plus loin).

- Généralisation à l'ensemble de l'Antarctique.

La température moyenne annuelle à la surface de l'Antarctique dépend essentiellement de l'altitude de cette surface (voir cartes I.2 et I.5). La température au niveau de la mer est d'environ -20°C sur toute la côte. La relation n'est cependant pas linéaire et en particulier le gradient $\Delta Ts/\Delta E$ (noté λ_s) varie de 1°/100m sur la côte à 0.5°/100m au centre en passant par un maximum de 2°/100m (Budd et al. 1971). Nous avons également noté plus haut l'existence d'un gradient négatif entre Dôme B et Vostok.

Au cours de cycles climatiques, la calotte a changé d'épaisseur et l'effet sur la température de ce changement d'altitude s'ajoute à la perturbation d'origine climatique (notée ΔT_{clim}). Nous faisons l'hypothèse que la perturbation climatique est indépendante du site et que $\lambda_s(x)$, le gradient de température avec l'altitude de la surface ne varie pas dans le temps (nous prenons λ_s égal au gradient vertical de température mesuré le long de la pente et non au gradient vertical en un point en raison de l'inversion). La température à un instant t, en un site x (distance au Dôme) se décompose alors linéairement:

$$T_s(x,t) = T_s(x,t_0) + \lambda_s(x)\left(E(x,t) - E(x,t_0) \right) + \Delta T_{clim}(t) \qquad \textbf{(III.3)}$$

t_0 étant l'instant de référence, en l'occurrence le présent, E(x,t) l'altitude de la surface à l'instant t.

Cette formulation permet de tenir compte des particularités régionales. Il faut cependant noter qu'elle est surtout valable pour de petites variations d'épaisseur et serait inadaptée pour traiter le problème du développement ou de la disparition d'une grande calotte (Laurentide). Dans ce dernier cas il faudrait tenir compte de la rétroaction de la calotte sur le climat.

D'après l'équation (III.3), il faut disposer de l'altitude de la surface au cours du temps pour calculer la température à la surface de la calotte. Cependant, lorsque notre étude est

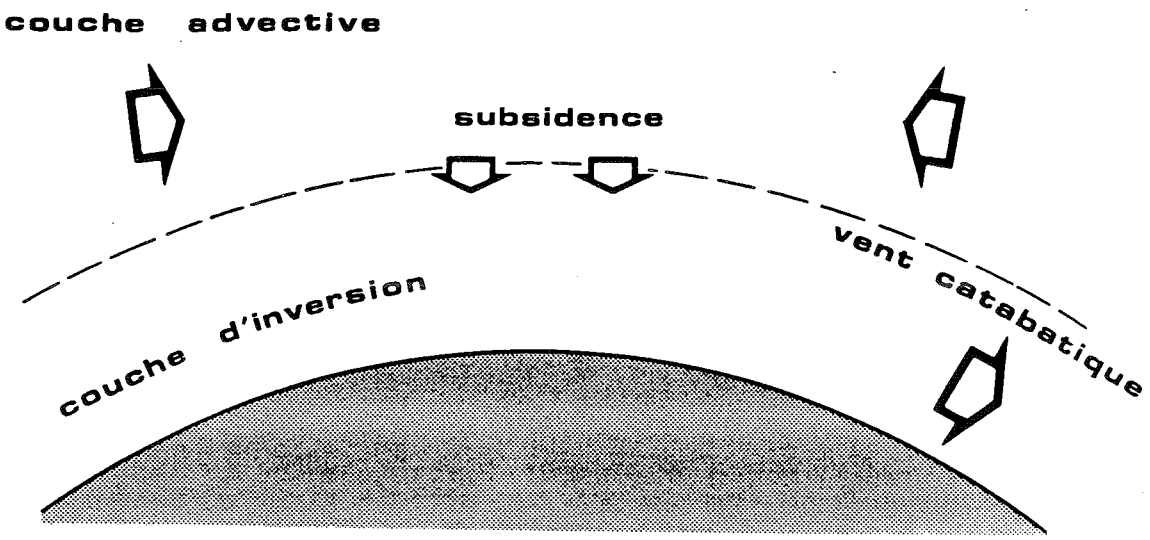


Figure III.2 Schéma de la circulation atmosphérique au dessus de l'Antarctique.
Dans la couche d'inversion, l'air froid s'écoule du centre vers les côtes (vent catabatique). Ce mouvement vers l'extérieur est compensé par l'arrivée d'air relativement chaud dans la couche advective et par la descente de cet air dans les régions centrales (subsidence).

limitée à la région de Vostok, nous faisons l'hypothèse que la variation d'altitude a été sensiblement la même pour toute la région. La température de surface s'exprime alors simplement en fonction de la température à Vostok dont la variation au cours du temps est déduite de l'enregistrement isotopique (nous tiendrons compte de la correction d'origine).

$$T_s(x,t) = T_s(x,t_0) + T_s(x_v,t) - T_s(x_v,t_0) \qquad \text{(III.4)}$$

où x_v est la position de Vostok sur la ligne de courant.

III-1-B Accumulation

- Processus gouvernant la précipitation en Antarctique

Actuellement en Antarctique l'accumulation en un site dépend fortement de la température moyenne en ce site. On estime qu'étant données les températures très basses régnant au dessus de l'Antarctique, la précipitation est gouvernée par la quantité de vapeur d'eau que peut contenir l'atmosphère (pression de vapeur saturante) et correspond à la condensation de la vapeur d'eau en excès lors du refroidissement des masses d'air.

La circulation au dessus de l'Antarctique est caractérisée par un écoulement des masses d'air froid du centre vers les côtes. Cet écoulement a lieu dans la couche d'inversion, soit environ les 500 premiers mètres au dessus du sol. On distingue en général le vent catabatique sur les bords qui provient du fait que l'air froid et dense s'écoule le long de la pente par gravité et le vent thermique sur le plateau dû à l'inversion de température (Schwerdtfeger, 1984). Ce mouvement vers l'extérieur se produisant dans la couche d'inversion est compensé par l'arrivée d'air relativement chaud au dessus de la couche d'inversion (couche advective) et la descente de cet air dans les régions centrales (subsidence). Un schéma de cette circulation est donné sur la figure (III.2).

A partir de données en quelques sites Robin (1977) a montré que l'accumulation est proportionnelle à la pression de vapeur saturante pour la température moyenne au dessus de la couche d'inversion. On en déduit que les précipitations se forment dans la couche advective. Cela s'explique aisément car plus une couche de l'atmosphère est chaude, plus elle peut contenir de vapeur d'eau et donc participer pour une part importante à la précipitation (par rapport au reste de la colonne). Ainsi à Vostok, l'air peut contenir 7 fois plus de vapeur d'eau à la température d'inversion (-39°C) qu'au sol (-55.5°C).

- Modélisation simple de la précipitation d'après le bilan de l'eau atmosphérique.

Nous considérons une colonne verticale de base dx.dy. D'après Peixóto et Oort (1984), l'équation de bilan de l'eau atmosphérique pour cette colonne d'air est :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = Ev - Pr \qquad \textbf{(III.5)}$$

avec W la quantité d'eau précipitable dans la colonne d'air :

$$W = \int_{\text{colonne}} \rho_w \, dz \qquad \textbf{(III.6)}$$

et $\vec{Q}$ le transport horizontal de vapeur d'eau (on néglige le transport sous forme solide et liquide).

$$\vec{Q} = \int_{\text{colonne}} \vec{V} \, \rho_w \, dz \qquad \textbf{(III.7)}$$

Ev est l'évaporation (ou la sublimation), Pr est la précipitation, $\vec{V}$ est la vitesse horizontale de transport des masses d'air (de composantes V_x, V_y) et ρ_w est la quantité de vapeur d'eau par unité de volume.

$$\rho_w = \frac{P_w}{T \, R_w} \qquad \text{en kg/m}^3 \qquad \textbf{(III.8)}$$

Pw est la pression partielle de la vapeur d'eau en Pa, T la température (en Kelvin), R_w la constante spécifique de la vapeur d'eau (R_w = 461.51 J kg^{-1} $°C^{-1}$).

Etant données les conditions prévalant en Antarctique (très basse température, inversion), on peut simplifier l'équation (III.5) :

Nous supposons que l'air est toujours à saturation ($P_w = P_s$) . De plus nous négligeons le transport d'humidité en dehors de la couche la plus chaude, d'épaisseur Δz, dont la

température est homogène (ou alors on se réfère à la température moyenne). En première approximation la température de cette couche est la température d'inversion qui est par définition la température maximum pour la colonne d'air (Phillpot et Zillman 1970). Nous négligeons également la sublimation et l'évaporation car du fait de l'inversion de température, la pression de vapeur est beaucoup plus faible près du sol que dans la couche isotherme.

Nous considérons un volume dont la hauteur est celle de la couche isotherme (Δz) et qui est limité horizontalement par les parois de la colonne (voir figure III.3). L'axe z est vertical et dirigé vers le haut, Zbas et Zhaut sont respectivement les hauteurs du bas et du haut de la couche isotherme. L'axe x est pris dans la direction de la plus grande pente de la surface dirigé des côtes vers l'intérieur, l'axe y est transversal. La pente de la surface α (qui est aussi la pente de la couche isotherme) est très faible, nous négligeons donc le fait que les axes ne sont pas exactement orthogonaux. Le transport horizontal d'humidité devient:

$$\vec{Q} = \frac{\vec{V}\ \Delta z\ P_s}{R_w\ T} \qquad \textbf{(III.9)}$$

Avec P_s la pression de vapeur saturante au dessus de la glace qui dépend de la température de façon exponentielle (voir annexe 4).

$$P_s = A_s \exp\left(-\frac{B_s}{T}\right) \qquad \textbf{(III.10)}$$

En moyenne temporelle la variation de la quantité d'eau précipitable dans la colonne est négligeable : $\langle \partial W/\partial t \rangle = 0$ (Peixóto et Oort 1984).
La précipitation s'écrit :

(III.11)

$$Pr = -\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right)$$

$$= -\frac{\Delta z}{R_w}\frac{\partial(P_s/T)}{\partial T}\left(V_x\frac{\partial T}{\partial x} + V_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) - \frac{P_s}{R_w\ T}\left(\frac{\partial(V_x\ \Delta z)}{\partial x} + \frac{\partial(V_y\ \Delta z)}{\partial y}\right)$$

(a) (b)

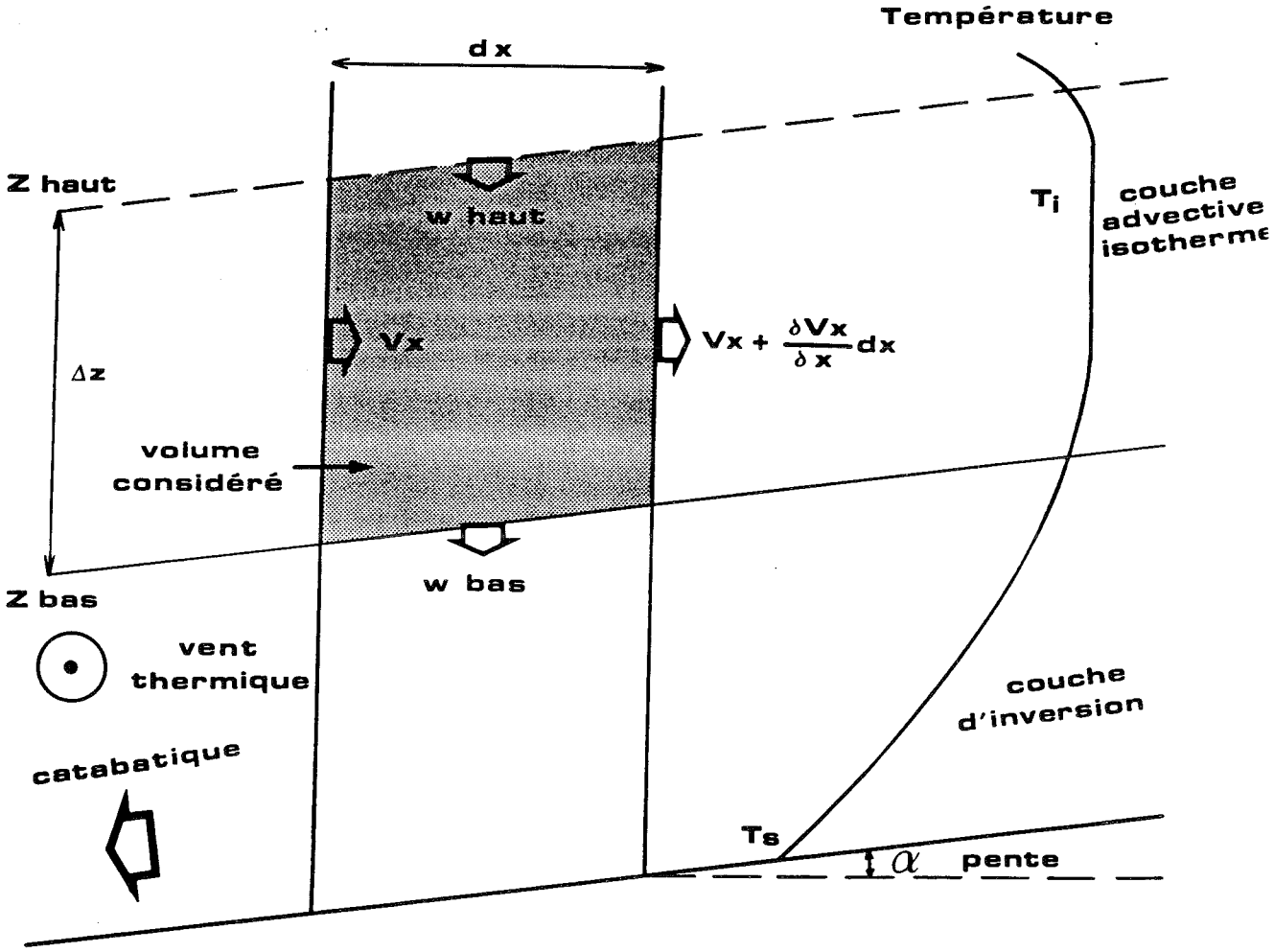


Figure III.3 Bilan de la vapeur d'eau. Notations
La couche advective d'épaisseur Δz est comprise entre Z_{bas} et Z_{haut}.
V_x est la vitesse horizontale des masses d'air dans la couche advective, w la vitesse verticale de l'air.
T_i est la température moyenne de la couche advective et T_s est la température à la surface de la calotte.
α est la pente de la surface de la calotte.
Dans la couche d'inversion, le transport de l'air est dû soit au vent catabatique soit au vent thermique. Dans les deux cas, ce transport s'effectue du centre vers les côtes.

Le terme (a) de l'équation (III.11) est lié à la variation du contenu en vapeur d'eau de l'air lorsqu'il traverse horizontalement le volume et qu'il se refroidit. Ce refroidissement se fait selon deux processus :

- Refroidissement par détente lorsque le transport a lieu vers les hautes altitudes, et que l'air s'élève en suivant la surface de la calotte. Ce refroidissement par détente est égal à $V_x \alpha \lambda$, où λ est le gradient adiabatique.

- Refroidissement par rayonnement car le bilan radiatif de l'atmosphère est négatif. D'après Schwerdtfeger (1984) sur le plateau Antarctique, les masses d'air se refroidissent de cette façon de 3 deg/jour en moyenne. Ce refroidissement par rayonnement est noté Q_r.

La variation de température d'une masse d'air au cours de son trajet s'écrit :

$$\frac{dT}{dt} = V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} = - (V_x \lambda \alpha + Q_r) \qquad \textbf{(III.12)}$$

Le terme (b) de l'équation (III.11) (divergence horizontale du transport de l'air) peut se calculer en appliquant, au volume défini précédemment, l'équation de continuité pour l'air et en supposant qu'à long terme $\partial\rho/\partial t=0$, ρ étant la masse volumique de l'air.

$$\rho \left(\frac{\partial (V_x \Delta z)}{\partial x} + \frac{\partial (V_y \Delta z)}{\partial y} \right) + V_x \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial x} + V_y \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left[w \rho \right]_{Zbas}^{Zhaut} = 0 \qquad \textbf{(III.13)}$$

w est la vitesse verticale, positive vers le haut.

En négligeant les variations spatiales de ρ (termes représentant quelques % de la précipitation), la précipitation s'exprime finalement à partir de (III.11), (III.12) et (III.13).

$$Pr = \frac{\Delta z}{R_w} \frac{\partial (P_s/T)}{\partial T} (V_x \alpha \lambda + Q_r) - \frac{P_s}{R_w T} \left(w(Z_{bas}) - w(Z_{haut}) \right) \qquad \textbf{(III.14)}$$

Dans l'équation (III.14) nous faisons implicitement l'hypothèse que toute la vapeur d'eau qui sort de la couche isotherme vers la couche d'inversion se condense.

Etant donnée la relation (III.10), $P_s / R_w T$ peut aussi s'écrire en fonction de $\partial(P_s / T) / \partial T$. L'équation (III.14) devient :

$$Pr = \frac{\Delta z}{R_w} \frac{\partial (P_s/T)}{\partial T} \left(V_x \alpha \lambda + Q_r - \frac{T^2}{(B_s - T)\Delta z} \left(w(Z_{bas}) - w(Z_{haut}) \right) \right)$$

$$= \frac{\Delta z}{R_w} \frac{\partial (P_s/T)}{\partial T} (D + Q_r + S)$$

(III.15)

L'importance relative des termes D (refroidissement par détente), Qr (refroidissement par rayonnement) et S (terme relié à la subsidence) dépend de la zone considérée. D'après Bromwich (1988) lorsque la surface de la calotte polaire se situe entre les altitudes 1000m et 3000m, le mécanisme qui gouverne les précipitations est le refroidissement adiabatique dû à la montée des masses d'air. Ce transport d'humidité méridien se fait essentiellement pendant les perturbations cycloniques. A l'opposé, sur le plateau, la pente de la surface est très faible (de l'ordre de 10^{-3}), de plus les perturbations n'y pénètrent que très rarement (Mechoso 1980). Le refroidissement par rayonnement devient alors nettement dominant (Bromwich 1988).

Jusqu'ici nous avons considéré la précipitation pour des périodes de temps durant lesquelles les conditions de température et de transport sont constantes. Nous faisons à présent l'hypothèse que la précipitation sur une année obéit également à l'équation (III.15) avec les valeurs moyennes sur l'année de la température et du transport. Cette hypothèse est raisonnable sur le plateau Antarctique où les conditions sont stables (Miller 1974), elle est par contre discutable dans les régions soumises aux perturbations car pendant les perturbations l'air est plus chaud. Du fait de la variation exponentielle de la pression de vapeur saturante avec la température, un événement de quelques jours avec une température élevée, peut apporter une quantité importante d'humidité et donc de précipitation sans pour autant augmenter de façon sensible la température moyenne.

Nous supposons également que le transport et la redéposition de la neige par le vent n'intervient pas dans la valeur moyenne de l'accumulation sur une région et que l'accumulation est la précipitation totale sur une année.

- Ordre de grandeur de l'accumulation ainsi obtenue.

Dans le centre où l'accumulation minimum mesurée est 2 g cm^{-2} an^{-1}, on trouve que la précipitation due au refroidissement par rayonnement est 1.4 g cm^{-2} an^{-1} (Δz=1000m, T_i=-40°C, Q_r=3°/jour), valeur également obtenue par Miller (1974). Le transport au dessus de la couche d'inversion étant mal connu, nous nous limitons à un calcul d'ordre de grandeur en prenant V_x=1m/s (Oort 1983). Avec une pente $\alpha=10^{-3}$, la précipitation par détente est environ de 0.3 g cm^{-2} an^{-1}. Pour la subsidence nous prenons : $w(Z_{haut})$= 0 et $w(Z_{bas})$ = -1mm/s (Miller 1974). La précipitation résultante est 0.3 g cm^{-2} an^{-1}.

Entre 1000m et 3000m d'altitude, la pente est plus forte par conséquent le refroidissement adiabatique est le processus dominant. Pour une pente $\alpha=10^{-2}$ et une température d'inversion Ti=-20°C, un transport méridien V_x=1m/s, nous obtenons une accumulation de 25 g cm^{-2} an^{-1}.

L'équation (III.15) n'est pas utilisable pour les régions côtières car la redistribution par le vent y est très importante, de plus la circulation des masses d'air est différente du schéma développé précédemment (effets orographiques).

- Répartition spatiale.

L'ordre de grandeur obtenu pour les précipitations est correct, cependant il est difficile de reproduire la répartition spatiale à partir de la seule équation (III.15) en supposant un transport homogène pour l'ensemble du continent. Le transport méridien présente en effet une grande variation zonale, due à la localisation des basses pressions autour de l'Antarctique (Bromwich 1988).

D'autre part la subsidence est principalement gouvernée par la divergence du vent thermique (Schwerdtfeger 1984) et donc par la forme de la surface de la calotte car le vent thermique est proportionnel à la pente. Ce phénomène peut être proportionnellement important dans les régions centrales et expliquer les différences d'accumulation entre sites du Plateau ayant des conditions semblables de température. A partir de l'analyse multivariée des mesures d'accumulation, Fortuin et Oerlemans (1990) ont mis en évidence pour le plateau Antarctique, la corrélation de l'accumulation avec la divergence de la pente (mais pas avec la pente elle même ce qui conforte l'idée que le refroidissement adiabatique est négligeable). En raison

d'une subsidence plus intense, l'accumulation pourrait en particulier être systématiquement plus forte sur les dômes que dans les régions environnantes. Nous avons un exemple au Dôme B où l'accumulation est environ 50% plus élevée qu'à Vostok (en tenant compte des différences de température entre les deux sites). Nous reviendrons sur cet exemple en raison de son importance pour la datation de la glace de Vostok.

- Variations de l'accumulation en un site donné.

L'intérêt de cette formulation pour l'accumulation est qu'elle permet d'estimer les variations d'accumulation au cours du temps et en particulier lors des grands changements climatiques car en faisant le rapport entre deux périodes on élimine en partie les erreurs liées aux particularités locales.

Un premier test consiste à vérifier que les mécanismes introduits dans le modèle peuvent expliquer au moins qualitativement les variations saisonnières de la précipitation en Antarctique. En hiver, la température étant beaucoup plus basse, l'air contient beaucoup moins de vapeur d'eau (environ trois fois moins) mais malgré cela à Vostok, Pôle Sud et Byrd par exemple il neige environ trois fois plus (Dolgina et Petrova, 1977). Les mesures de précipitation sur des échelles de temps de l'ordre du mois sont bien sûr extrêmement grossières en raison du vent, cependant à Vostok les mesures ont été faites pendant 15 ans et ont été corrigées (de façon empirique) de l'effet du vent. L'augmentation de la précipitation en hiver est d'ailleurs commune à tout l'Antarctique à l'exception de quelques stations côtières près des mers de Ross et de Weddel où le maximum est plutôt en Mars (Bromwich, 1988).

L'un et l'autre des mécanismes de refroidissement des masses d'air décrits plus haut permettent d'expliquer une plus forte précipitation en hiver. D'une part les perturbations cycloniques sont beaucoup plus nombreuses pendant l'hiver et cela se traduit par une intensification du transport V_x, d'autre part le déficit radiatif de l'atmosphère est plus intense durant la nuit polaire. Le fait qu'il neige plus en hiver indique que ces deux effets prédominent par rapport à l'influence de la température sur la pression de vapeur saturante. Par analogie, pour estimer l'accumulation à l'époque glaciaire, ceci nous incite à prendre en compte non seulement la variation de température, mais aussi le changement dans la circulation atmosphérique.

- Variations de l'accumulation avec le climat.

Pour reconstituer l'accumulation au cours du dernier cycle climatique (150000 ans) nous faisons l'hypothèse que les particularités locales ne changent pas avec le climat, que par exemple les basses pressions ont toujours eu la même position moyenne et que l'épaisseur de la couche isotherme est restée la même. Pour simplifier l'exposé nous comparons ici la période glaciaire (notée g) à l'interglaciaire (notée i) et nous estimons les variations des différents termes (pression de vapeur saturante, bilan radiatif de l'atmosphère, transport méridien et subsidence).

• ***Pression de vapeur saturante.***

A Vostok, la variation de la température au dessus de la couche d'inversion est obtenue directement à partir de l'enregistrement isotopique. Dans les autres régions, elle peut également être déduite de l'enregistrement climatique de Vostok en utilisant les équations (III.1) et (III.3).

A Vostok, la température d'inversion est -39°C actuellement et était environ 7°C plus basse durant le dernier maximum glaciaire, ce qui conduit à un rapport:

$$\frac{(\partial(P_s / T) / \partial T)_g}{(\partial(P_s / T) / \partial T)_i} \approx \frac{1}{2}$$

• ***Transport méridien***

Il est généralement admis que la circulation était plus intense durant les périodes froides en raison d'un plus fort gradient de température Pôle-Equateur. L'analyse des carottes de glace donnent de plus quelques arguments en faveur d'une augmentation du transport au dessus de l'Antarctique durant les périodes glaciaires. D'après la concentration en aérosols marins dans la glace de Dôme C, Petit et al. (1981) estiment que la vitesse du vent au dessus de la mer était 1.5 - 1.8 fois plus élevée durant le dernier maximum glaciaire (DMG). La production et le transport des aérosols marins étant tous deux liés aux perturbations cycloniques autour de l'Antarctique, on peut penser que l'augmentation des aérosols marins pendant le DMG indique une intensification de ces perturbations qui sont également

prédominantes dans le transport de vapeur d'eau vers l'intérieur de l'Antarctique. Nous pouvons faire une analogie avec les variations saisonnières. A Pôle Sud il y a une très forte augmentation du sodium marin en hiver (malgré l'éloignement de la source dû à l'extension de la glace de mer) ce phénomène étant attribué en partie à l'accroissement du transport (Legrand communication personnelle). D'autre part, en ce site, les précipitations se produisent principalement lors du passage des perturbations et sont plus importantes en hiver.

Nous supposons que la vitesse de déplacement V_x était plus élevée durant les périodes froides et nous utilisons la paramétrisation suivante:

$$V_x(t) = V_x(t_0)\left(1 + C_t \frac{\Delta T_s}{\Delta T_{max}}\right) \qquad \textbf{(III.16)}$$

ΔT_s est la variation de température en surface tirée de l'isotope, ΔT_{max} valeur de ΔT_s pour le dernier maximum glaciaire. $C_t = 0.7$. Cela revient à prendre un accroissement du transport proportionnel à la variation de température en calant la relation de façon à avoir un rapport 1.7 entre le DMG et le présent.

• ***Bilan radiatif.***

Nous estimons que le refroidissement par rayonnement était légèrement plus faible durant les périodes glaciaires. L'insolation locale ne change que de quelques % (Berger 1978, Blatter et al. 1984) et cet effet peut être négligé. L'émission (infra-rouge) de la couche advective varie avec la température selon la loi de Stefan (en T^4). Le rapport : T^4 au glaciaire / T^4 à l'interglaciaire est égal à 0.88 mais cet effet est en partie compensé car le rayonnement venant du sol était également plus faible (rapport 0.83). Enfin l'absorption et l'émission dans l'infra-rouge sont reliées à la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'air ce qui implique également un refroidissement plus faible durant les périodes glaciaires.
La paramétrisation du refroidissement radiatif est de la même forme que celle pour le transport :

$$Q_r(t) = Q_r(t_0)\left(1 + C_Q \frac{\Delta T_s}{\Delta T_{max}}\right) \qquad \textbf{(III.17)}$$

avec C_Q négatif (nous utiliserons des valeurs de l'ordre de -0.1)

• ***Subsidence.***

Nous ne considérons la subsidence que dans les régions centrales où elle peut proportionnellement jouer un rôle important. Sur le plateau Antarctique le mouvement descendant des masses d'air est principalement gouverné par le vent thermique et ce vent thermique est proportionnel à $(T_i-T_s)/T_m$, T_m étant la valeur moyenne de la température dans la couche d'inversion (Schwerdtfeger 1984). Pour estimer les variations de la subsidence entre glaciaire et interglaciaire, nous supposons que $w(Z_{haut})$ - $w(Z_{bas})$ est proportionnel à l'intensité du vent thermique. En tenant compte de (III.1) et en prenant $T_m = (T_i+T_s)/2$, le terme (S) de subsidence de l'équation (III.14) était environ 20% plus élevé pendant le dernier maximum glaciaire. De la même façon que pour le transport, nous utilisons une paramétrisation linéaire en ΔT_s.

$$S(t) = S(t_0)\left(1 + C_s \frac{\Delta T_s}{\Delta T_{max}}\right) \qquad \textbf{(III.18)}$$

avec C_s=0.2

Finalement l'accumulation à une époque t, s'écrit en fonction de l'accumulation actuelle (époque notée t_0) :

$$Acc(t) = Acc(t_0) \frac{\left.\frac{\partial (P_s/T)}{\partial T}\right|_{T_i(t)}}{\left.\frac{\partial (P_s/T)}{\partial T}\right|_{T_i(t_0)}} \left(1 + \frac{\Delta T_s}{\Delta T_{max}} F(x) \right) \qquad \textbf{(III.19)}$$

$$\text{où} \quad F(x) = \frac{C_t\, D(t_0) + C_Q\, Q_r(t_0) + C_s\, S(t_0)}{D(t_0) + Q_r(t_0) + S(t_0)}$$

F(x) est lié à l'importance relative des mécanismes de précipitation et peut être estimé d'une façon qualitative.

Sur le plateau Antarctique, le refroidissement par détente est négligeable. Nous supposons que le refroidissement radiatif est 3 deg/jour et nous en déduisons la fraction de précipitation due à la subsidence. Nous obtenons ainsi F(x)=0.01 à Vostok et F(x)=0.07 à Dôme B.

Lorsque la pente est plus forte, nous suivons le même raisonnement mais en négligeant cette fois la subsidence et le refroidissement radiatif. La valeur extrême de F(x) est donc 0.7 lorsque la précipitation est uniquement due à la détente des masses d'air.

En pratique, sur le Plateau Antarctique, nous prenons le plus souvent F=0 (pour les études de sensibilité : $-0.2 \leq F \leq 0.2$). En dehors du Plateau Antarctique nous utilisons une variation dépendant linéairement de la pente de la surface, le coefficient étant choisi tel que $F(x)=C_t$ sur les bords.

- Comparaison avec les résultats des MCG.

Les modèles de circulation générale (MCG) résolvent, pour l'atmosphère de l'ensemble du Globe, les équations de base de la dynamique et de la thermodynamique. Des expériences ont été faites visant à simuler l'état de l'atmosphère sous les conditions climatiques actuelles

et sous les conditions climatiques du dernier maximum glaciaire (liste de références). Il est intéressant de tester les variations de précipitation (Holocène-DMG) que nous avons estimées avec les précipitations obtenues lors de ces simulations de MCG. Nous utilisons ici les résultats fournis par le modèle du GISS (Jouzel et al. 1987_b). Ce modèle de circulation reproduit bien les températures au sol et au-dessus de l'inversion, néanmoins les valeurs absolues de précipitation annuelles (≈ accumulation) sont environ deux fois trop élevées, c'est pourquoi nous avons limité notre comparaison aux rapports de précipitation entre une simulation actuelle et une simulation DMG. Nous donnons dans le tableau (III.1) les rapports de précipitation (colonne 2) et de la fonction $\partial(P_s/T)/\partial T$ (colonne 3) qui indique la quantité maximum de vapeur d'eau pouvant être contenue dans les masses d'air pour différentes régions de l'Antarctique. On peut en déduire une fonction F d'après l'équation (III.19). Les valeurs de F ainsi trouvées sont qualitativement en accord avec notre estimation, c'est à dire F quasiment nul sur le Plateau Antarctique (accumulation uniquement gouvernée par la température), et F plus élevé (compris entre 0 et 1) sur les bords et en Antarctique de l'Ouest où les processus de refroidissement par détente est prédominant.

TABLEAU 1

Région considérée	$\frac{\text{Acc(DMG)}}{\text{Acc (prés.)}}$	$\frac{[\partial(P_s / T) / \partial T]_{Ti(DMG)}}{[\partial(P_s / T) / \partial T]_{Ti(prés.)}}$	F
Centre (plateau)	0.58	0.53	0.09
Est(plateau+bords)	0.74	0.6	0.23
Ouest	0.91	0.44	1.
ensemble du continent	0.8	0.56	0.42

Cette différence de comportement selon la région considérée apparait aussi avec le MCG du LMD (Laboratoire de Météorologie Dynamique) qui indique pendant la dernière période glaciaire une précipitation réduite de moitié sur l'Antarctique de l'Est et une augmentation de la précipitation en Antarctique de l'Ouest (Joussaume 1989).

- Conclusion.

La paramétrisation généralement utilisée pour évaluer les changements dans l'accumulation au cours du temps suppose que la précipitation est gouvernée uniquement par la température (Robin 1988), ce qui correspond à F(x)=0. Nous estimons que cette paramétrisation n'est valable que pour le plateau Antarctique. Dans les modèles d'évolution qui traitent l'ensemble de la calotte glaciaire (ou au moins une ligne de courant) il faut prendre en compte l'influence relative des mécanismes de précipitation pour calculer les variations de l'accumulation en fonction du climat. D'autre part même dans le centre, les variations spatiales d'accumulation sont liées non seulement à la température mais aussi à des phénomènes locaux (en particulier la subsidence). Lors de l'interprétation des forages et de la reconstitution de l'épaisseur initiale des couches de glace, il faut tenir compte de l'origine de la glace et non pas considérer que tous les effets d'origine sont déjà intégrés dans le signal isotopique.

III-2 DATATION DU FORAGE DE VOSTOK.

III.2.A Autres méthodes de datation des carottes de glace.

Avant d'aborder la datation par modélisation de l'écoulement de la glace, il nous semble utile de rappeler les différentes méthodes utilisées pour obtenir la chronologie des carottages glaciaires, les sites où ces méthodes sont applicables et leurs avantages et inconvénients respectifs. Chaque méthode étant sujette à erreur, il est en tout état de cause conseillé d'obtenir les chronologies dans la glace de plusieurs façons indépendantes (Budd et al. Dahlem 1989)

- Détermination stratigraphique des couches annuelles.

Un certain nombre d'indicateurs présente des variations saisonnières mesurables dans la glace. C'est en particulier le cas des isotopes ^{18}O et deutérium (Jouzel et al. 1983, Hammer et al. 1978, Dansgaard et al. 1985), des poussières (Thompson 1977), de l'acidité (Hammer et al. 1978) et du sodium (liste non exhaustive, voir par exemple Hammer 1989). L'âge est

alors obtenu simplement en "comptant " les couches annuelles. Cette méthode est limitée d'une part parce que les phénomènes de diffusion dans le névé et de mélange à la surface (vent) atténuent les variations saisonnières, d'autre part par les possibilités de découpage fin. Elle n'est par conséquent plus applicable lorsque les couches annuelles sont trop minces. Cela se produit dans les sites où l'accumulation est trop faible (Vostok, Dôme C) et dans la partie inférieure de certains forages profonds (Dye 3, Camp Century) en raison de l'amincissement (dû à l'écoulement) des couches de glace. L'accumulation minimum en dessous de laquelle les couches annuelles ne sont plus observées dépend du type d'indicateur. C'est sans doute à cause de la très faible accumulation du site (2.3 g cm^{-2} an^{-1}) que jusqu'à présent aucun signal saisonnier n'a été détecté dans le forage de Vostok. Cette technique a été par contre utilisée en d'autres sites d'Antarctique (Pôle Sud, Byrd) et au Groenland (Camp Century et Dye 3, Hammer et al. 1978, Dansgaard et al. 1985).

- Reconnaissance d'horizons repères.

Certains événements se produisant dans l'atmosphère ont laissé une empreinte dans les couches de glace (éruptions volcaniques, essais nucléaires dans l'atmosphère). Si ces accidents sont reconnaissables sans ambiguïté, ils fournissent des horizons repères permettant de caler les chronologies, soit en absolu (si leur âge est bien connu), soit de façon relative par rapport à d'autres enregistrements dans lesquels se retrouvent les mêmes événements.

Parmi les candidats à ce rôle d'horizon repère nous trouvons :

- Certaines éruptions volcaniques : Krakatoa 1883, Tambora 1915 (Legrand et Delmas 1987).
- Des couches de poussières liées aux périodes d'aridité (450, 960, 2024 et 2130 m à Vostok) et qui sont détectées dans les carottes marines par des mesures de susceptibilité magnétique (Mounier 1988, Petit et al. 1990).
- Des pics de ^{10}Be (600 et 925 m à Vostok; Raisbeck et al. 1987) attribués à une augmentation de la production (cosmogénique). Un de ces pics a également été mesuré dans le forage de Dôme C (Raisbeck et al. 1987) et il sera sans doute possible de les détecter dans d'autres sites.

- Comparaison avec d'autres enregistrements climatiques.

Le principe est le même que pour les horizons repères c'est à dire que l'on date un enregistrement par rapport à un autre en recherchant des événements communs. Les forages de Dye 3 et Camp Century (Dansgaard et al. 1985) ainsi que Dôme C (Lorius et al. 1979) ont en partie été datés ainsi. Par rapport au cas précédent on est souvent amené à utiliser des indicateurs climatiques différents (dépendant du type d'enregistrement considéré, marin ou glaciaire) mais que l'on suppose corrélés et non déphasés (ou dont le déphasage est connu).

Par exemple, la composition isotopique de la glace qui reflète essentiellement la température locale est comparée à la composition isotopique des foraminifères de l'océan dont les variations sont attribuées à la fonte des grands Inlandsis de l'Hémisphère Nord et à la température à la surface des océans. Il peut donc y avoir entre le signal marin et le signal dans la glace un déphasage dû aux différences entre les divers climats (Antarctique, Hémisphère Nord, surface de l'océan de la carotte marine considérée) ainsi qu'au temps nécessaire pour fondre (ou construire) les calottes de l'Hémisphère Nord et au temps de mélange de l'océan. Certains de ces phénomènes sont vraisemblablement non-linéaires ce qui signifie que le déphasage n'est pas forcément constant tout au long du signal. Un des intérêts des études paléoclimatologiques est justement de pouvoir étudier les relations entre les divers éléments du système climatique (océans, continents, calottes polaires), l'utilisation de cette méthode de datation fait donc perdre de l'information

La composition de l'air emprisonné dans la glace (CO_2, méthane, $\delta^{18}O$ de l'air) est un indicateur intéressant pour comparer les chronologies car c'est une mesure directe de la composition de l'atmosphère globale au cours du temps et cet enregistrement dépend très peu du climat local. Le seul déphasage est celui dû au temps de piégeage de l'air dans la glace et celui ci peut être estimé avec une bonne précision en regard des échelles de temps considérées (Barnola et al. 1991). Malheureusement dans les carottes marines, il n'y a pas d'indicateur direct de la composition de l'air. On ne connaît par exemple pas d'équivalent à l'enregistrement du méthane obtenu dans les carottages glaciaires et des réserves sont faites sur la validité du $\Delta\delta^{13}C$ (différence entre la teneur en ^{13}C des foraminifères benthiques et pélagiques; Shackleton et al. 1983) comme indicateur du CO_2 atmosphérique (Barnola et al. 1987). Par contre, le $\delta^{18}O$ de l'air est un indicateur prometteur car il reflète assez directement la composition isotopique de l'océan (Bender et al. 1985, Sowers et al. 1991).

Il y a cependant un déphasage (environ 2000 ans en moyenne pour l'avant dernière transition glaciaire) lié à la vitesse à laquelle les variations de $\delta^{18}O$ de l'océan sont transmises à l'atmosphère par photosynthèse.

A propos de cette méthode de datation par comparaison d'enregistrements liés au climat il faut souligner que la datation ainsi obtenue a au mieux la précision de l'enregistrement étalon (en général la chronologie marine).

- Calage sur les périodes orbitales.

Il est largement admis à l'heure actuelle que les oscillations climatiques sont forcées par les variations de l'insolation de la planète et peuvent donc être reliées aux paramètres de l'orbite terrestre (voir par exemple l'article de synthèse de Berger, 1988). A l'échelle de temps qui nous intéresse (environ 150 milliers d'années) les principales périodes de ces paramètres orbitaux sont environ 100000 ans (excentricité), 41000 ans (obliquité), 23000 ans et 19000 ans (précession).

Une méthode de datation consiste à caler l'âge de façon à ce que l'analyse spectrale du signal climatique présente les périodes typiques des paramètres orbitaux. Les carottes marines sont datées avec des méthodes procédant de la même philosophie mais plus raffinées ("orbital tuning") c'est à dire incluant des hypothèses sur le mode d'action du forçage orbital sur le climat et de possibles effets non linéaires (Martinson et al. 1987). Au passage, il faut noter que de ce fait, les chronologies dans la glace obtenues par comparaison avec les enregistrements marins, sont implicitement calées sur les périodes orbitales. La mise en évidence de périodes orbitales dans de tels signaux n'apporte donc aucune information.

J.P. Benoist (1986) a développé une autre approche "spectrale" de la datation en prenant comme hypothèse de base l'existence de cycles climatiques stables (sans spécifier leur période). En étudiant leur stabilité tout au long de l'enregistrement on obtient une vérification a posteriori de la validité des datations. Dans cette méthode on déplace une fenêtre le long du signal ce qui limite son emploi aux courtes fréquences (inférieures à 5000 ans). Appliquée au forage de Dôme C, cette méthode a donné une chronologie dans laquelle le signal climatique de Dôme C est très semblable à celui de Vostok (obtenue par modélisation de

l'écoulement) et a permis de retrouver l'âge du premier pic de ^{10}Be cité précédemment (Jouzel et al. 1989).

- Datation avec les isotopes radioactifs.

Dans d'autres domaines, les radio-isotopes ont fait largement leurs preuves pour dater les événements du passé mais dans les carottes de glace cette méthode se heurte à d'importantes difficultés qui font que jusqu'à présent aucune datation réellement probante n'a été obtenue.

La première difficulté tient à la mesure elle-même. Etant donnée la faible concentration des impuretés dans la glace polaire, la méthode classique de comptage est inapplicable car il faudrait disposer de plusieurs centaines de kilogrammes de glace. Heureusement avec la spectrométrie de masse par accélérateur quelques centaines de grammes suffisent à présent (Raisbeck et Yiou, 1985). Cette méthode ne peut s'utiliser qu'avec des atomes pouvant être ionisés, dans le cas des gaz rares c'est la méthode de spectrométrie de masse à temps de vol qui est employée (Stauffer 1989).

Une deuxième difficulté vient des demi-vies des radio-isotopes présents dans la glace. Ainsi que le montre le tableau (III.2) on ne trouve pas dans la glace d'élément ayant une demi-vie située entre celle du ^{14}C (5730 ans) et celle du ^{81}Kr (213000 ans) ce qui rend difficile la datation dans la gamme de temps intermédiaire (100000 ans). Avec des échantillons de glace d'une dizaine de kg, la gamme d'utilisation du ^{14}C s'étend jusque vers 20 000 ans (Budd et al. Dahlem 1989), celle de ^{81}Kr va de 50000 à 10^6 ans avec une précision d'environ 30000 ans (Stauffer 1989).

Le dernier problème tient aux variations temporelles de production et de déposition. Les radio-isotopes utilisables pour dater la glace sont ceux produits par les rayons cosmiques dans la haute atmosphère (cosmogéniques), ils peuvent être sous forme gazeuse (^{14}C dans le CO_2) ou d'aérosol (^{10}Be). Leur production est sensible à l'activité solaire (le vent solaire repousse le rayonnement cosmique). Les augmentations du ^{10}Be dans les époques récentes (par exemple le Maunder minimum) sont attribuées à des baisses de l'activité solaire (Raisbeck et al. 1981). Ces variations de production ne sont malheureusement pas connues sur une grande échelle de temps. Il sera sans doute possible d'éliminer ce problème en

utilisant des rapports de cosmogéniques, $^{26}Al/^{10}Be$ semblant le plus prometteur. Pour le ^{14}C, il y a une production in situ qui peut modifier la teneur en ^{14}C de la glace. Enfin, le taux de déposition des radio-isotopes qui sont sous forme d'aérosol est sensible aux conditions météorologiques ce qui peut entraîner une variabilité spatiale.

Malgré ces difficultés, la datation par les radio-isotopes est parmi les méthodes de datation que nous avons décrites, la seule qui puisse donner des âges de façon totalement indépendante des autres enregistrements, marins en particulier. Souhaitons que l'évolution des techniques de mesures permette de l'appliquer aux carottes de glace.

Isotope	Demi-vie (en années)	Origine	Localisation dans les carottes de glace
Tritium	12.26	Tests nucléaires	glace
^{85}Kr	10.76	Industrie nucléaire	bulles d'air
^{210}Pb	22.3	Désintégration de ^{238}U	aérosol
^{32}Si	172	Produits dans l'atmosphère par les rayons cosmiques.	aérosol
^{39}Ar	269		bulles d'air
^{14}C	5 730		bulles d'air
^{81}Kr	213 000		bulles d'air
^{36}Cl	301 000		aérosol
^{10}Be	1 500 000		aérosol

Tableau III.2 Données sur les principaux radio-isotopes pouvant permettre de dater la glace. D'après Stauffer (1989).

III.2.B Description de la méthode de datation par modélisation de l'écoulement.

Depuis Nye (1957) de nombreux auteurs ont daté la glace des calottes polaires à l'aide de modèles glaciologiques. Selon l'objectif une chronologie grossière peut s'avérer suffisante. C'est le cas par exemple pour choisir un site de forage couvrant la période de temps la plus longue possible, ou pour définir avec quelle finesse les carottes de glace doivent être échantillonnées. Lors de l'interprétation d'un carottage, par contre, l'objectif est d'apporter des informations sur les mécanismes qui régissent le climat et pour cela la datation devrait permettre d'évaluer les déphasages entre les enregistrements climatiques du forage considéré et ceux issus d'autres carottages (marins, glaciaires, lacustres). Nous verrons qu'il est difficile d'atteindre une telle précision par un modèle d'écoulement, mais à défaut, il nous semble primordial d'établir le degré de confiance que l'on peut accorder à la chronologie fournie. Nous détaillons donc ici la démarche suivie pour dater la glace par modélisation de l'écoulement, en évaluant l'importance relative de tous les paramètres afin de mettre en évidence les incertitudes (qu'elles soient liées au modèle ou aux données). Enfin nous chercherons à améliorer la chronologie en associant diverses méthodes de datation décrites précédemment à celle par modélisation de l'écoulement.

- Principe de base pour la datation de la glace.

Le champ de vitesse étant supposé connu (voir chapitre II), la chronologie peut être obtenue selon deux démarches.

L'une consiste à suivre la trajectoires de chaque couche de glace lors de son déplacement depuis la surface jusqu'à la profondeur Z dans le forage et à calculer le temps mis pour parcourir cette trajectoire (temps de trajet). Par exemple, Reeh (1988, 1989) donne pour un état stationnaire l'équation des trajectoires et celle du temps de trajet. Le forage de D10 (Terre Adélie) a été daté de cette manière (d'une façon numérique) en supposant un régime stationnaire (Raynaud et al. 1979).

L'autre méthode revient à calculer l'épaisseur de chaque couche annuelle, qui est fonction de l'accumulation et de l'histoire mécanique de la couche. La "formule de Nye"

(1957) est l'application de cette méthode dans le cas le plus simple possible (vitesse verticale linéaire, état stationnaire, une dimension).

La méthode que nous utilisons procède au départ de cette deuxième approche. Nous écrivons $\lambda(Z)$ l'épaisseur d'une couche annuelle à la profondeur Z en fonction de son épaisseur initiale et de son histoire mécanique.

$$\lambda(Z) = \lambda_0(Z)\ Am(Z) \qquad \textbf{(III.20)}$$

λ_0 est l'épaisseur de cette couche lorsqu'elle se trouvait en surface. C'est donc l'accumulation à l'époque et au site de déposition.

$$\lambda_0(Z) = \dot{b}(x_0(Z), a(Z)) \qquad \textbf{(III.21)}$$

avec a(Z) l'âge de cette couche de glace et $x_0(Z)$ son site d'origine.

Am(Z) est la fonction d'amincissement et représente la déformation cumulée de la couche au cours de son trajet depuis la surface.

Nous rappelons qu'avec le référentiel défini au chapitre I, la profondeur s'écrit Z=E+z. Dans tout ce chapitre, à côté des variables x,y,z, nous utiliserons souvent la profondeur Z (en mètres de glace sauf indication contraire) car c'est la variable "naturelle" des forages. Ainsi l'accumulation d'origine ou les variables liées à la trajectoire d'une couche de glace seront notées comme des fonctions de Z.

Lorsque λ est déterminée pour toutes les profondeurs, l'âge se calcule en "comptant" les couches annuelles, ce qui s'exprime d'une façon plus mathématique :

$$a(Z) = -\int_0^Z \frac{d\xi}{\lambda(\xi)} \qquad \textbf{(III.22)}$$

Il y a donc deux volets, relativement indépendants pour l'obtention de la chronologie :

* La détermination de l'accumulation passée qui se fait d'après les fonctions de transfert données précédemment (relations isotope-température III.2 et température-accumulation III.19).

* Le calcul de l'amincissement qui comporte le suivi des trajectoires des couches de glace dans le champ de vitesse défini par le modèle.

- Amincissement

• Lignes d'écoulement

Les lignes de d'écoulement dans la région de Vostok sont déterminées graphiquement à partir de la carte d'altitude de la surface donnée par Drewry (1983) et sont représentées sur la figure (III.4). Pour tester l'influence de la divergence et convergence des lignes de courant, nous envisageons deux cas :

+ Ecoulement purement bi-dimensionnel (sh(x)=0)

+ Divergence des lignes d'écoulement obtenue d'après le rayon de courbure des courbes de niveau (voir chapitre II). En amont de Vostok, les courbes de niveau sont convexes avec un rayon de courbure de l'ordre de 200 km et par conséquent les lignes d'écoulement sont divergentes. On remarque que le rayon de courbure à l'altitude 3400 m (juste en aval de Vostok) est notablement plus faible (100 km) indiquant une forte divergence. La figure (III.5) présente la topographie de la surface et du socle (III.5.1) et la variation de Sh (l'inverse du rayon de courbure de courbes de niveau) le long de la ligne de courant (III.5.2).

• Suivi des trajectoires.

Les trajectoires sont calculées en suivant les particules de glace, depuis le forage jusqu'à la surface, c'est à dire en remontant dans le temps. Le sens de parcours des trajectoires n'a aucune importance en état stationnaire. Le sens que nous avons choisi présente des avantages lorsque nous imposons des variations dans le temps de l'accumulation (et donc

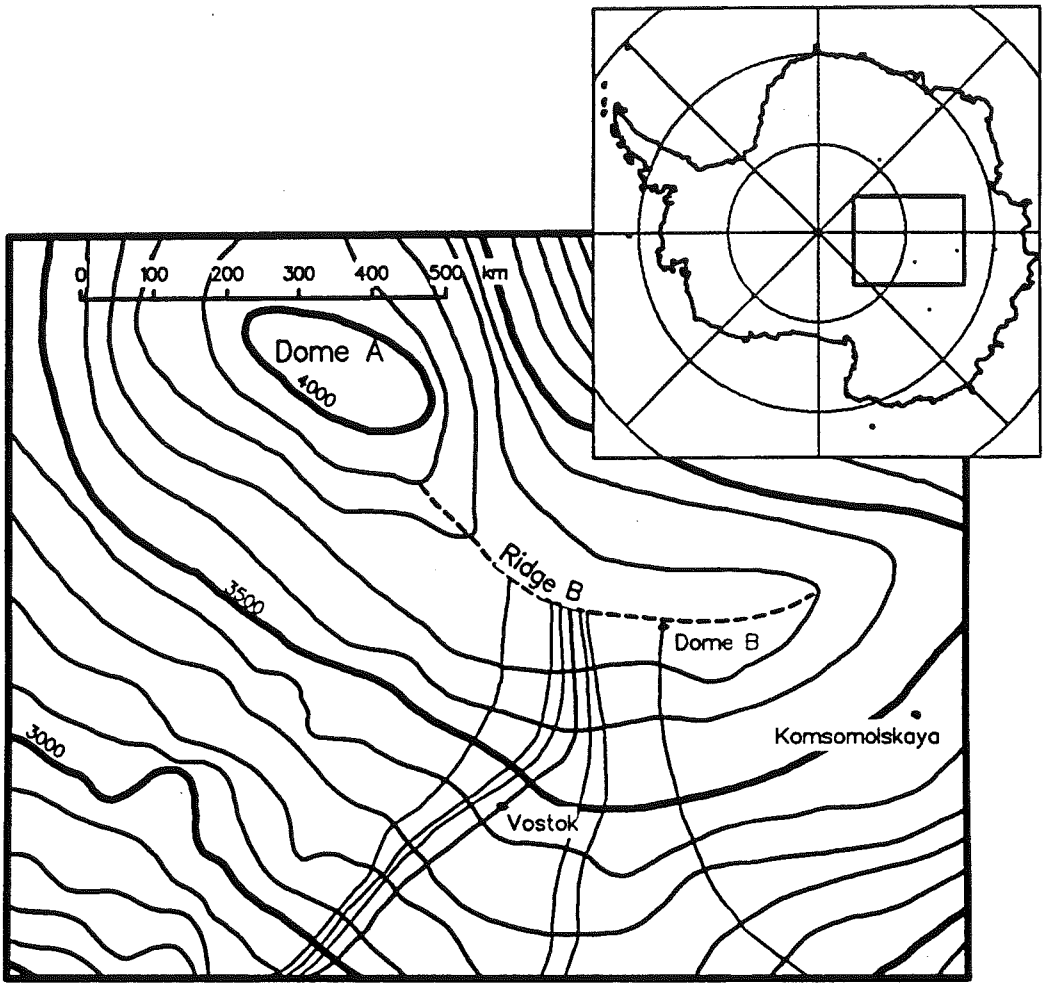


Figure III.4 Carte de la région de Vostok.
Carte donnant l'emplacement des principales stations de la région (Vostok, Dôme B, Komsomolskaya) et les lignes de niveau tous les 100 m (trait plus épais pour les lignes 3000 m, 3500 m et 4000 m (d'après Drewry, 1983). Les lignes de courant sont transversales aux lignes de niveau. Nous avons principalement représenté celles partant de Ridge B en direction de la station de Vostok. La carte de l'Antarctique en cartouche indique la localisation de cette région.

des vitesses) et éventuellement de l'épaisseur (voir plus loin). En effet un calcul dans le sens de l'écoulement nécessiterait de calculer beaucoup plus de trajectoires pour sélectionner ensuite celles aboutissant au forage de Vostok à l'époque actuelle.

Nous étudions le déplacement d'une couche annuelle d'épaisseur e_z et de coordonnées x_M, y_M, z_M dans le repère (x,y,z) décrit en I.3.A (l'indice z dans l'épaisseur signifie que c'est la couche se trouvant dans le forage à la profondeur Z à l'époque actuelle).

Les coordonnées étant connues au temps t, à t+dt elles sont calculées par :

$$\begin{cases} x_M\,(t+dt) = x_M\,(t) + u_x\,dt \\ y_M\,(t+dt) = 0 \quad (\text{ sur la ligne de courant : } u_y = 0\ ) \\ z_M\,(t+dt) = z_M\,(t) + u_z\,dt \end{cases} \qquad \textbf{(III.23)}$$

où dt est compté positif dans le sens de l'écoulement.

L'épaisseur de la couche au temps t+dt s'écrit en fonction de celle au temps t :

$$e_z(t+dt) = e_z\,(t)\,(\,1 + \dot{\varepsilon}_{zz}\,dt\,) \qquad \textbf{(III.24)}$$

Cette équation (III.24) également utilisée par Whillans (1979) est seulement approchée et n'est pas valable si la pente des isochrones et $\partial u_x/\partial z$ sont élevés, ce qui peut se produire dans le bas du forage (Reeh 1989). La formulation complète s'écrit (Reeh communication personnelle) :

$$e_z\,(\,t+dt\,) = e_z\,(\,t\,)\,(\,1+\dot{\varepsilon}_{zz}\,dt - \beta\,\frac{\partial u_x}{\partial z}\,dt) \qquad \textbf{(III.24 bis)}$$

β est la pente de l'isochrone à l'endroit considéré, prise positivement lorsque l'isochrone s'enfonce avec la distance au Dôme. La déformation d'une couche annuelle en un pas de temps dt est représentée sur la figure (III.6).
Nous estimons que dans le cas du forage de Vostok, le terme correctif ($\beta\,\partial u_x/\partial z$) peut être négligé par rapport à $\dot{\varepsilon}_{zz}$ qui à Vostok est de l'ordre de 10^{-5}.

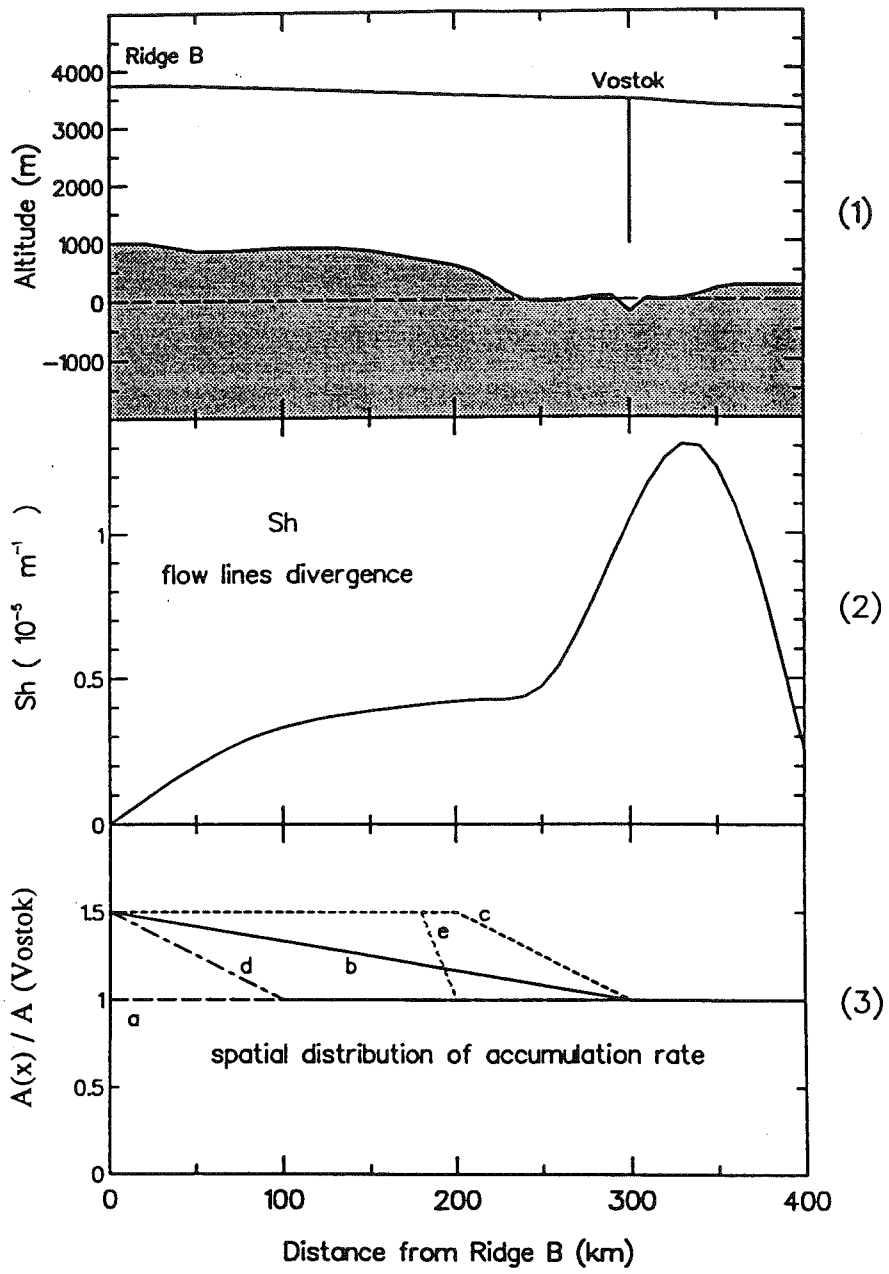


Figure III.5 Données topographiques et hypothèses sur l'accumulation entre Ridge B et Vostok.

(1) Profils de la surface et du socle rocheux. *D'après Drewry, 1983.*

(2) Divergence des lignes de courant. *Sh est l'inverse du rayon de courbure des lignes de niveau, calculé d'après la carte de Drewry (1983)*

(3) Variation spatiale de l'accumulation. *A(x) est l'accumulation "corrigée" de l'influence de la température.* $A(x) = \dot{b}(x) / (\partial(P_s \int T)/\partial T)$. *Sauf dans le cas (a), la valeur de A(x) à Ridge B est égale à 1.5 A(Vostok) ce qui correspond à une accumulation 1.65 fois plus élevée à Ridge B qu'à Vostok. Diverses hypothèses sont envisagées :*

(a) A(x) partout égal à sa valeur à Vostok.

(b) décroissant linéairement entre Ridge B et Vostok.

(c) A(x) constant entre Ridge B et un point x_s *(sur la figure 200 km) puis décroissant linéairement jusqu'à Vostok.*

(d) A(x) décroissant linéairement entre Ridge B et une point X_s *(sur la figure 100 km) puis constant jusqu'à Vostok.*

(e) A(x) constant entre Ridge B et un point x_s *(sur la figure à 180 km de Ridge B), puis décroissant rapidement en 20 km jusqu'à atteindre la valeur de Vostok. A(x), constant ensuite jusqu'à Vostok.*

Le terme $\partial u_x/\partial z$ peut se calculer d'après les équations (II.13) et (II.15). Avec une vitesse moyenne de 2 m/an (valeur mesurée à Vostok), une épaisseur de glace H=3700 m, et un paramètre m=10, $\partial u_x/\partial z$ au fond du forage (ζ=0.65) est égal à 8.7 10^{-5}.
En ce qui concerne la pente de l'isochrone, nous avons des informations sur sa valeur en surface (avec une pente en amont de Vostok légèrement inférieure à 10^{-3}) et pour l'isochrone correspondant à la dernière transition glaciaire-Holocène. Dans ce dernier cas on peut en effet estimer la pente moyenne entre Dôme B et Vostok car cette transition se produit à environ 450 m de profondeur à Dôme B (soit 3300 m d'altitude) et à 300 m de profondeur à Vostok (3200 m d'altitude) ce qui donne une pente β = 3.3 10^{-4}. Même si en profondeur la pente des isochrones est plus forte que ces valeurs, il est vraisemblable qu'elle ne dépasse pas 10^{-2} et ceci seulement de façon locale. Le terme $\beta\ \partial u_x/\partial z$ est donc toujours au moins un ordre de grandeur inférieur à $\dot{\varepsilon}_{zz}$.

Il faut noter que le terme épaisseur des couches annuelles n'est pas tout à fait exact lorsque les isochrones sont inclinés. En réalité c'est la section verticale des couches annuelles (voir figure III.6) que nous calculons dans (III.24) et utilisons dans (III.20).

Au début de la trajectoire (c'est à dire à la profondeur Z dans le forage), nous prenons e_z =1. Pour obtenir le rapport entre l'épaisseur que cette couche a dans le forage et celle qu'elle avait en surface lors de la déposition, il suffit de prendre l'inverse de la valeur trouvée en surface à la fin de la trajectoire. La fonction d'amincissement est donnée par :

$$Am(Z) = \frac{1}{e_z(Z)_{\text{en surface}}} \qquad \textbf{(III.25)}$$

Les vitesses (u_x , u_z) et le taux de déformation ($\dot{\varepsilon}_{zz}$) sont définis sur une grille (voir chapitre II et annexe 2). Pour les utiliser dans les équations (III.23) et (III.24) au point (x_M, y_M , z_M) nous effectuons une interpolation bilinéaire en x et z.

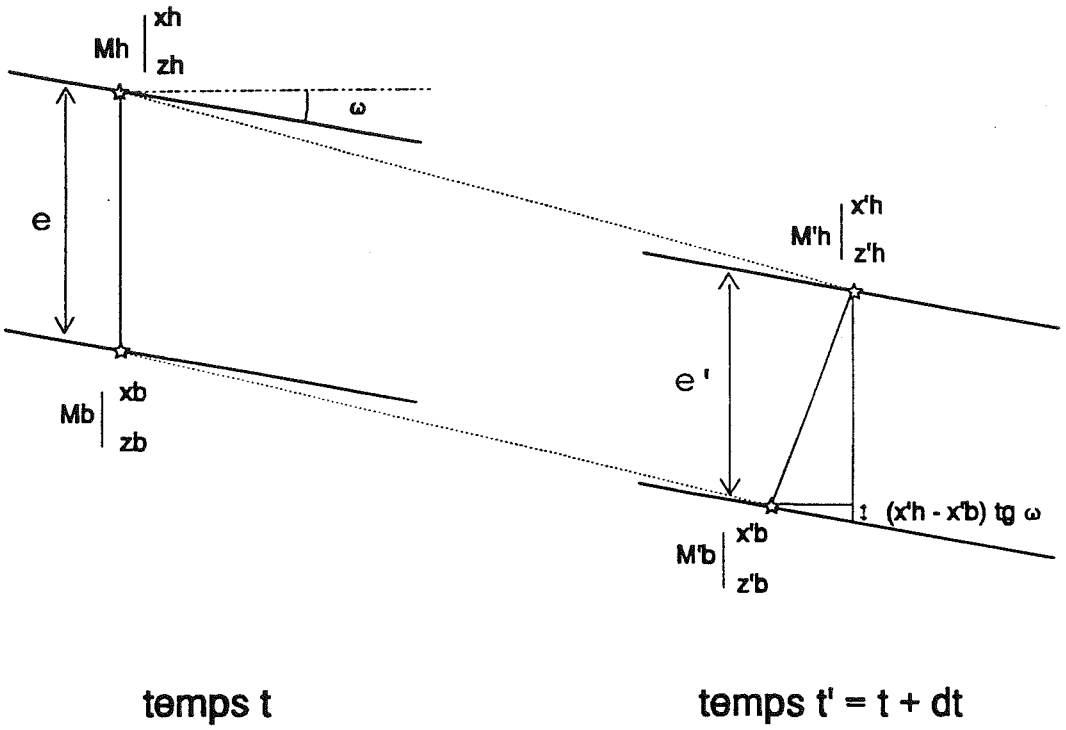


Figure III.6 Déformation d'une couche annuelle au cours de son déplacement.
La couche annuelle est inclinée d'un angle ω avec l'horizontale (tg ω = β pente de l'isochrone). Au temps t, la section verticale de la couche (notée e= z_b-z_h) est matérialisée par le segment [M_h ,M_b]. Au temps t'=t+dt, les points se sont déplacés en M'_h et M'_b . Les coordonnées de M'_h et M'_b sont données par l'équation (III.23). En écrivant les vitesses (verticale et horizontale) au point M_b sous la forme $(u_i (z_b) = u_i (z_h) + e\, \partial u_i /\partial z)$
on obtient : $x'_b - x'_h = \partial u_x /\partial z\, e\, dt$ *et* $z'_b - z'_h = e (1 + \partial u_z /\partial z\, dt) = e (1 + \dot{\varepsilon}_{zz}\, dt)$
La section verticale de la couche au temps t' s'écrit :
$e' = z'_b - z'_h + (x'_h - x'_b)\, tg\, \omega = e (1 + \dot{\varepsilon}_{zz}\, dt - \beta\, \partial u_x /\partial z\, dt)$

• ***Intersection avec la surface, variation d'épaisseur***

Le calcul de chaque trajectoire se termine lors de son intersection avec la surface, mais pour déterminer le lieu et l'âge de cette intersection, il faudrait répondre à la question : " Où était la surface à l'époque considérée ? " . Le calcul de l'évolution de la surface (qui fait l'objet du chapitre IV) demande de prendre en compte la ligne de courant dans son ensemble et serait très lourd si l'on voulait le développer en même temps que le suivi des trajectoires. De plus il n'est pas possible de lui faire "remonter le temps" (en partie à cause de l'équation de la chaleur).

Nous cherchons tout d'abord à tester l'influence des variations d'épaisseur sur la chronologie calculée afin d'estimer si le recours à un modèle d'évolution est réellement indispensable. Pour cela nous comparons la datation calculée soit en supposant que l'altitude de la surface est restée constante dans le temps, soit en suivant un scénario très simple de variation d'épaisseur. Les approximations faites pour obtenir ces variations d'épaisseur au cours du temps sont les suivantes:

. L'influence de la température sur l'écoulement est négligée. Cela se justifie en partie par le fait que dans la région de Vostok, la température basale est au point de fusion tout au long du cycle climatique et varie donc peu au cours du temps (Ritz 1989, en fin de ce chapitre).

. La variation d'épaisseur est supposée constante le long de la ligne d'écoulement, entre le Dôme B et Vostok (300 km). La pente de la surface et la dérivée horizontale de l'épaisseur sont alors indépendantes du temps.

. La variation d'épaisseur est faible relativement à l'épaisseur elle même. La vitesse d'écoulement ne varie alors que très peu au cours du temps et grossièrement l'équation de bilan se réduit à:

$$\dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t} = \text{constante} = \dot{b}_m \qquad \textbf{(III.26)}$$

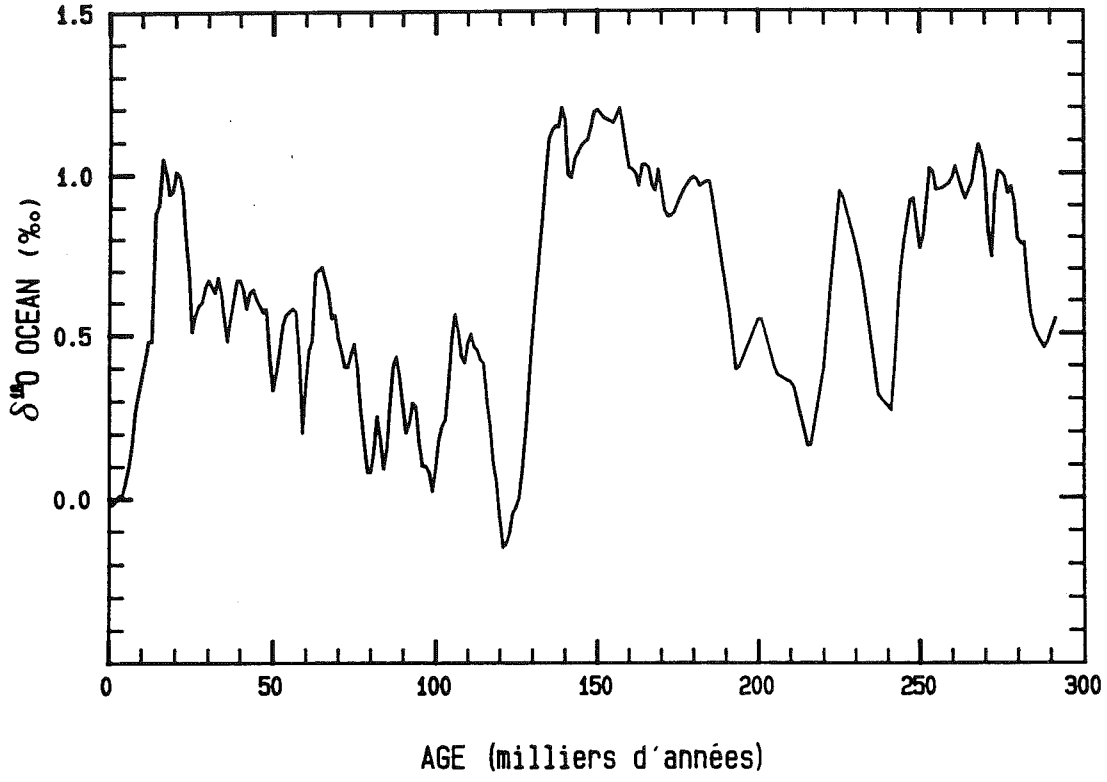


Figure III.7 Variation de la composition isotopique (^{18}O) de l'océan.
D'après Labeyrie et al. (1987) et Martinson et al. (1987)

L'équation (III.26) signifie que dans cette approximation l'accumulation est le seul moteur des variations d'épaisseur et que la nappe de glace oscille autour d'une valeur d'équilibre. L'accumulation qui correspond à cet équilibre est $\dot{b}_m$, c'est à dire que si l'accumulation était constamment égale à cette valeur la calotte serait stationnaire (du moins dans la partie centrale). Ce scénario de l'évolution de l'épaisseur est donc extrêmement sommaire: lorsque l'accumulation est supérieure à $\dot{b}_m$, la nappe de glace augmente chaque année de l'accumulation "en excès" et inversement.

Nous faisons une dernière hypothèse en supposant qu'au cours des cycles climatiques successifs, il n'y a pas de tendance à l'épaississement (ou amincissement) de la calotte. Pour cela il faut que $\dot{b}_m$ soit la valeur moyenne de l'accumulation sur le cycle climatique (dans le cas de Vostok, environ 75% de l'accumulation actuelle).

- accumulation passée.

La fonction de transfert isotope-accumulation est donnée dans la première partie de ce chapitre. Nous allons à présent décrire comment sont prises en compte la variation de la composition isotopique de l'océan d'une part et l'influence du site de déposition sur l'accumulation d'autre part.

• composition de l'océan

La composition isotopique de l'océan au cours du temps est déduite de l'enregistrement benthique dans les carottes marines. Nous utilisons ici la série en $\delta^{18}O$ publiée par Labeyrie et al. (1987) et celle de Martinson et al. (1987). Cette courbe est représentée sur la figure (III.7). La variation de la composition de l'océan en deutérium est obtenue avec la relation $d\delta D = 8\ d\delta^{18}O$.

Un inconvénient découle du fait que cet enregistrement est donné en fonction du temps et que nous l'utilisons justement pour obtenir une datation. Deux démarches sont possibles, soit :

- Comparer la courbe isotopique de Vostok et celle de la carotte marine pic à pic, avec toutes les réserves qui peuvent être faites sur la comparaison a priori des deux signaux. Dans

ce cas, il faut au moins utiliser pour le calage une courbe représentant la température de surface de l'océan Austral et venant de la même carotte marine que la courbe benthique. Cette méthode avait été utilisée pour la datation préliminaire de Vostok (Lorius et al. 1985).

- Supposer que la datation de la carotte marine est parfaite et faire la correction sur le signal de Vostok par une méthode itérative. C'est l'approche que nous avons finalement choisie mais le signal final (en température) est alors légèrement sensible à l'âge calculé.

• ***Variations locales de l'accumulation.***

L'équation (III.19) donne l'accumulation au cours du temps en fonction de l'accumulation actuelle sur le même site. La glace du carottage de Vostok ayant été déposée en amont, l'épaisseur d'origine des couches(λ_0 (Z)) dépend donc de l'accumulation actuelle sur le site de déposition et de la température d'inversion à l'époque de la déposition. Cette température d'inversion se déduit directement du signal isotopique. Nous rappelons que la relation isotope température est supposée être la même pour les variations spatiales et temporelles. Il est d'usage de considérer que les variations spatiales de l'accumulation dépendent seulement de la température et que par conséquent les effets d'origine peuvent être entièrement pris en compte par une fonction de transfert isotope-accumulation. Cependant quelques mesures viennent en contradiction de cette hypothèse en montrant que l'accumulation n'est pas uniquement gouvernée par la température même sur le plateau Antarctique où les conditions atmosphériques sont pourtant assez uniformes. Les mesures anciennes, obtenues par stratigraphie des couches superficielles (quelques mètres) pouvaient être considérées comme peu significatives car il est difficile de déterminer avec précision l'accumulation dans les zones où celle ci est extrêmement faible (de l'ordre de 2 cm d'eau par an). Le principal problème vient du fait que la variabilité spatiale est très grande en raison de la redistribution par le vent. Nous disposons à présent d'une donnée beaucoup moins contestable provenant de la comparaison des carottages Dôme B et Vostok. La datation comparée de ces deux forages est abordée plus loin, mais le fait important est qu'avec une teneur en deutérium en surface de l'ordre de -429‰ (température d'inversion supérieure de 1.23°C à celle de Vostok) l'accumulation est 1.65 fois celle de Vostok. Cette comparaison porte sur l'ensemble de l'holocène et est donc significative.

Nous écrivons l'accumulation sous forme d'un produit (notation simplifiée de l'équation III.15) : $b(x) = A(x)\, f(T)$
où A(x) est l'accumulation "corrigée" des effets de température.

A(x) est 50% plus élevé à Dôme B qu'à Vostok. Cette différence est vraisemblablement due à une plus forte précipitation par subsidence au Dôme B. Cette hypothèse est confortée par le fait que la température est plus élevée au Dôme B ce qui pourrait indiquer des descentes d'air relativement chaud depuis la couche advective. Le transport par le vent ou une origine différente des masses d'air amenant l'humidité (le Dôme B est en particulier plus exposé aux perturbations venant de l'Amer Ile Shelf) peuvent également jouer un rôle.

La principale difficulté pour tenir compte de l'accumulation en amont vient de ce que la seule mesure fiable dont nous disposons est justement celle de Dôme B et encore faut-il y apporter une restriction car le site de forage de Dôme B n'est pas le point où débute la ligne d'écoulement de Vostok (voir figure III.4). Cependant les processus envisagés pour expliquer la plus forte accumulation à Dôme B, sont liés à la forme et à l'exposition du Dôme et il est vraisemblable que les conditions climatiques sont homogènes sur toute la crête (Ridge B). Par conséquent il nous paraît indispensable d'étudier la sensibilité de la chronologie à une éventuelle variation de l'accumulation "corrigée" A(x) en amont de Vostok.

Pour évaluer l'influence que peuvent avoir les effets d'origine sur la chronologie, nous supposons divers types de variation de l'accumulation entre Ridge B et Vostok :

(a) Accumulation constante en amont et égale à celle de Vostok. La première datation de Vostok (Lorius et al. 1985) correspond au type (a).

(b) Accumulation sur la crête égale à 1.65 fois celle de Vostok (A(Ridge B) = 1.5 A(Vostok)) . Variation linéaire de A(x) entre les deux.

(c) Accumulation constante (1.65 x accumulation à Vostok) entre Ridge B et un point situé à la distance x_s de Ridge B, A(x) décroissant ensuite linéairement vers Vostok.

(d) A(x) décroissant linéairement depuis la crête jusqu'à atteindre la valeur de Vostok à la distance x_s, et constant entre x_s et Vostok.

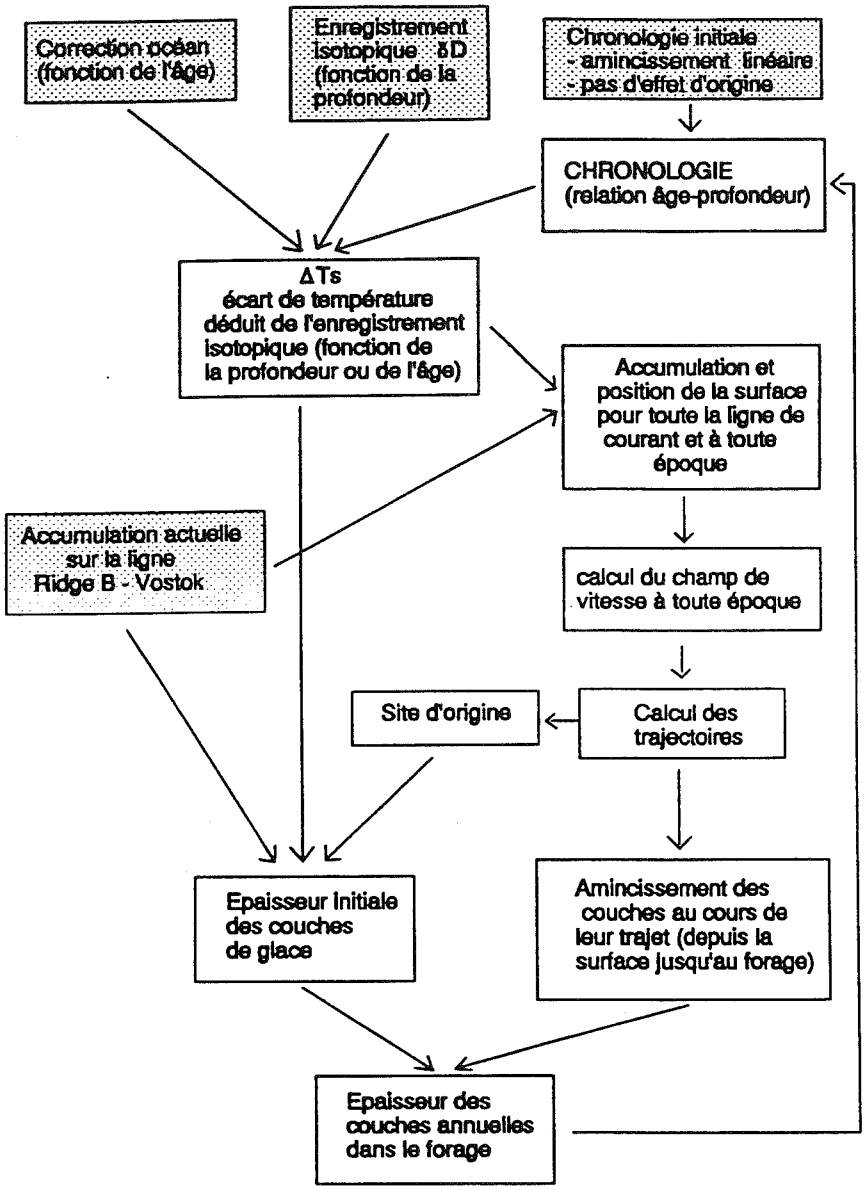


Figure III.8 Calcul de la chronologie du forage de Vostok : Organigramme.
Chaque itération part d'une chronologie calculée pour aboutir à une autre chronologie. Ces itérations sont poursuivies jusqu'à convergence (environ 3 fois). Les rectangles sur fond gris indiquent les données (qui ne changent pas au cours du calcul). Les autres éléments sont déterminés à chaque itération, les flèches indiquant quels sont les variables ou données nécessaires pour les obtenir. Par exemple, l'écart de température en surface ΔT_s, dépend de l'enregistrement isotopique et de la correction océan mais le premier est fonction de la profondeur et l'autre fonction de l'âge c'est pourquoi la chronologie est également nécessaire.

Ces différents types de variation spatiale de l'accumulation sont représentés sur la figure (III.5.3). Avec la fonction de transfert température-accumulation utilisée (équation III.19) et la variation spatiale décrite ci dessus, on remarque que pour un instant et un site donnés l'accumulation s'exprime toujours proportionnellement à l'accumulation actuelle à Vostok qui est ainsi l'accumulation de référence.

Pour introduire la correction d'origine, nous utilisons une méthode itérative. Les sites d'origine des couches de glace sont calculés lors du suivi des trajectoires puis servent à corriger l'accumulation dans l'itération suivante. L'organigramme du calcul est présenté sur la figure (III.8).

Remarque : Nous avons commencé cette description du modèle de datation en distinguant deux méthodes, soit le calcul des couches annuelles soit le suivi des trajectoires et l'intersection avec la surface. Dans notre modèle, nous utilisons les deux approches à la fois puisque nous suivons les trajectoires pour déterminer la fonction d'amincissement, et de ce fait nous obtenons également un âge lors de l'intersection avec la surface. Dans les résultats que nous allons présenter, les deux âges sont très semblables (moins de 300 ans d'écart). Ce n'est pas une preuve de la validité du modèle, mais cela montre que le pas de temps (dt=-20 ans) et de profondeur (Dz=10 m) utilisés sont suffisamment petits pour que les deux intégrations soient équivalentes. Nous continuons à calculer l'épaisseur des couches annuelles car cela permet d'une part d'évaluer aisément l'influence relatives des divers paramètres sur la chronologie calculée et d'autre part, de tirer parti de l'enregistrement de la concentration en ^{10}Be (voir plus loin).

III.2.C Résultats.

Avec les gammes de paramètres utilisées, l'âge calculé pour la glace venant du fond du forage (2400 m réels) varie de 130 000 ans à 260 000 ans. Nous allons maintenant étudier un par un tous ces paramètres afin de déterminer leur influence sur les diverses variables calculées par le modèle : fonction d'amincissement (Am), position du site d'origine (x_0), épaisseur initiale de la couche (λ_0) et enfin âge.

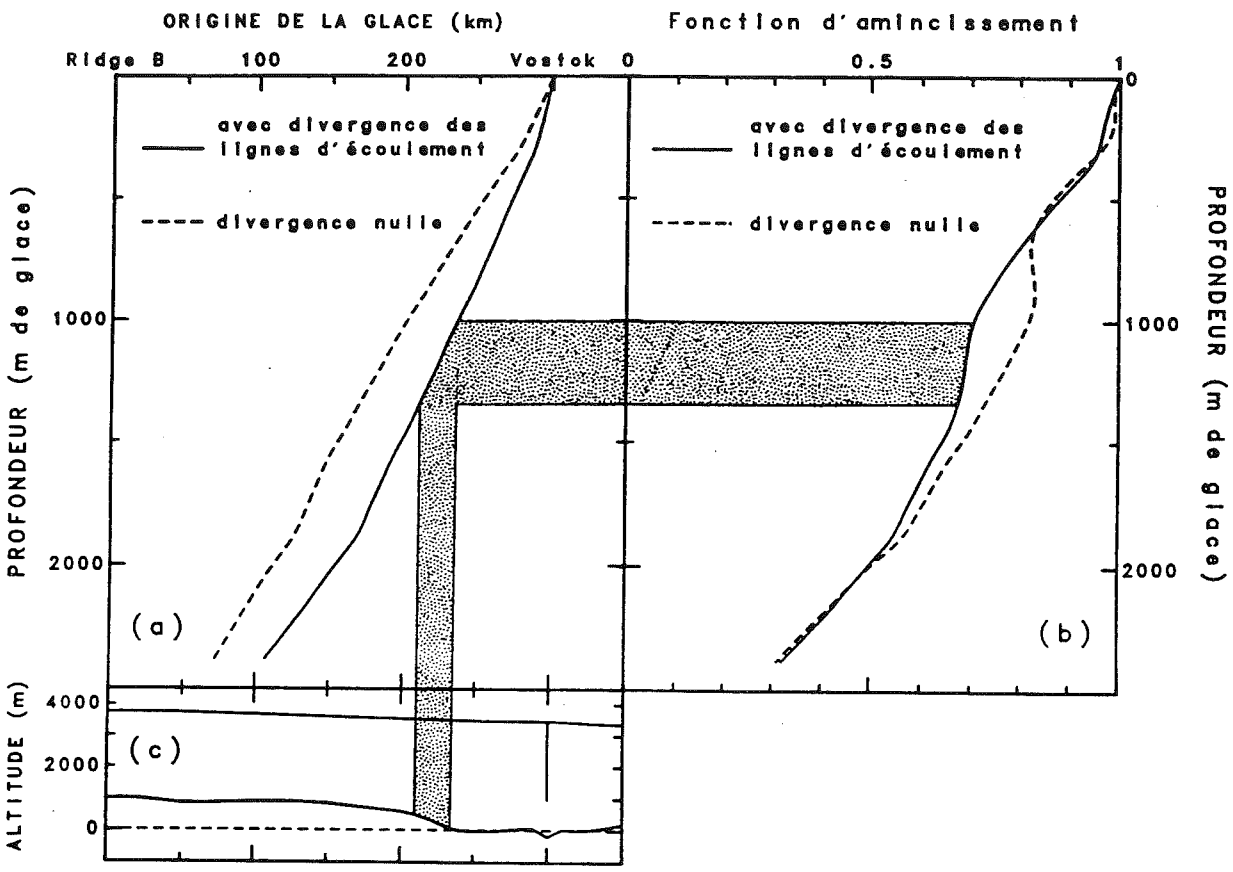


Figure III.9 Sensibilité à la topographie en amont et à la divergence des lignes de courant.
Origine de la glace (a) et fonction d'amincissement (b) obtenus avec deux expériences :
En traits continus, calcul avec la divergence des lignes de courant déterminée d'après la carte de surface et donnée dans la figure (III.5.2).
Avec tirets, divergence des lignes de courant égale à 0 (écoulement parallèle).
Les ondulations de la fonction d'amincissement sont dues à la topographie sous-glaciaire (c) (correspondance en grisé).

- Etude de sensibilité.

• Topographie en amont.

Toutes les autres conditions étant semblables, le site d'origine de la glace est plus proche de Vostok lorsque la divergence des lignes d'écoulement est prise en compte (figure III.9.a). En effet, la vitesse de bilan (horizontale) est plus faible lorsqu'il y a divergence et par conséquent la pente des trajectoires des particules de glace (donnée par le rapport u_z/u_x) est plus forte. L'écart atteint environ 50 km entre les deux hypothèses sur la divergence.

La fonction d'amincissement qui est le rapport : épaisseur dans le forage / épaisseur à l'origine) présente des ondulations qui sont manifestement dues au relief sous-glaciaire (figure III.9.b). En particulier la fonction d'amincissement cesse quasiment de décroître avec la profondeur pour la glace dont l'origine est située entre 70 et 100 km en amont de Vostok (figure III.9.c). Cette zone correspond exactement à un abaissement rapide du socle entre 70 km et 100 km en amont de Vostok. Lorsque l'épaisseur augmente ainsi le long de l'écoulement, la vitesse de bilan cesse de croître avec la distance au dôme et le taux de déformation vertical est plus faible. En écrivant l'équation (III.24) en fonction d'un pas dx, l'amincissement d'une couche de glace le long d'une trajectoire devient :

$$\frac{de_z}{dx} = e_z \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{u_x} \quad \text{puis en intégrant} \quad \text{Log Am(Z)} = \int_{x_0}^{x_v} \frac{\dot{\varepsilon}_{zz}}{u_x} dx \qquad \textbf{(III.27)}$$

où x_0 est la position du site d'origine de la glace et x_v celle du forage.
En tenant compte de (II.19) et (II.21) et en prenant (comme dans III.26) les valeurs moyennées sur un cycle climatique de l'accumulation et des vitesses de bilan dans l'équation

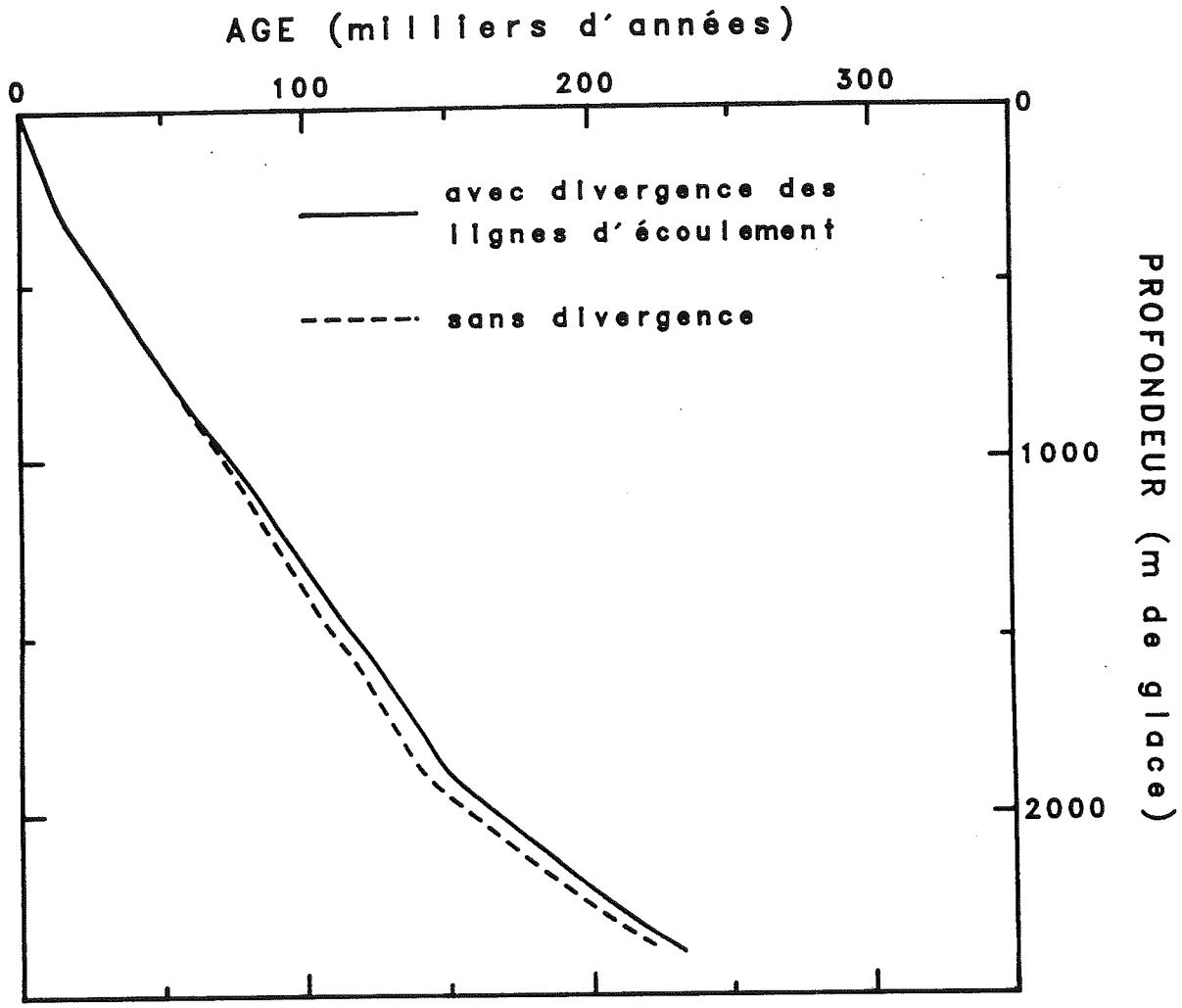


Figure III.10 Sensibilité de l'âge de la glace à la divergence des lignes de courant.

(II.2), nous obtenons une formulation approchée de la fonction d'amincissement qui permet d'évaluer l'importance des différents paramètres :

$$\text{Log Am(Z)} \approx \text{Log}\,\frac{H_v}{H_0} - \int_{x_0}^{x_v} \frac{\dot{b}_m}{\bar{U}_x\, H}\, dx - \int_{x_0}^{x_v} \frac{1}{\psi(x,z)}\,\frac{\partial \psi(x,z)}{\partial x}\, dx \qquad \text{(III.28)}$$

où x et z sont les coordonnées du point le long de la trajectoire.

Nous retrouvons bien la dépendance de l'amincissement avec l'épaisseur au site d'origine. En ce qui concerne l'influence de la divergence des lignes de courant deux effets se compensent : la déformation des couches est plus intense en cas de divergence mais elle agit sur une plus petite distance puisque le site d'origine est plus proche de Vostok. La différence d'âge entre les deux hypothèses sur la divergence ne dépasse pas 7000 ans et tend à s'atténuer dans le fond du forage (figure III.10). Tous les résultats exposés par la suite sont obtenus avec le paramètre Sh(x) déduit de la carte de surface. Il faut noter que nous ne disposons pour déterminer Sh que de courbes de niveau espacées d'environ 100 km, et que la variation représentée sur la figure (III.5.2) est forcément grossière. Cette estimation nous parait cependant plus réaliste que l'hypothèse purement bi-dimensionnelle.

• ***Profil vertical de vitesse.***

La variation de la vitesse horizontale avec la profondeur est donnée par la fonction ψ définie par l'équation (II.19). Les deux paramètres de cette fonction sont m (lié à la déformation) et s (proportion de glissement). Nous avons tout d'abord effectué une étude de sensibilité avec des valeurs de m comprises entre 5 et 20 ce qui constitue une gamme très étendue car d'après l'équation (II.17) m varie de 9 à 11 le long de l'écoulement (à l'exception de la ligne de partage des glaces) . Les résultats de cette étude de sensibilité sont représentés sur les figures III.11 (amincissement) et III.12 (âge). L'influence de m sur la fonction d'amincissement augmente avec la profondeur et entraîne une écart de ±15% à 2400 m. Pour les petites valeurs de m (m=5), le taux de déformation vertical est plus intense dans la partie supérieure du glacier (figures II.3.b et II.4.b) et nous trouvons par conséquent que les couches de glace dans le forage sont plus amincies pour une même épaisseur initiale (fonction d'amincissement plus faible). L'influence du glissement a été testée en étudiant les cas s=0

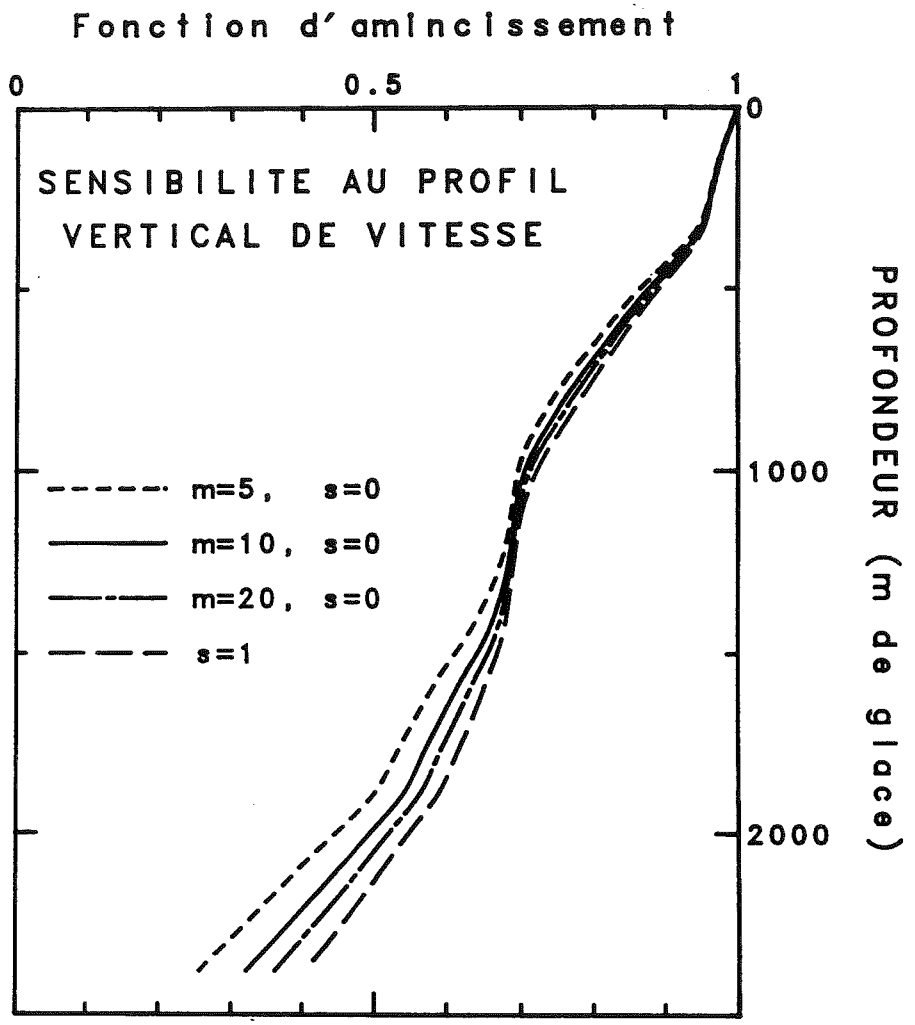


Figure III.11 Sensibilité de la fonction d'amincissement aux paramètres (m et s) du profil de vitesse.

La fonction d'amincissement donne pour chaque couche annuelle (référencée par sa profondeur actuelle dans le forage) le rapport de l'épaisseur dans le forage sur l'épaisseur initiale (lors de la déposition). m est le paramètre qui représente la forme du profil de vitesse. Plus m est petit, plus la déformation est importante dans le haut du glacier, ce qui conduit à un amincissement plus fort (fonction d'amincissement plus faible) des couches au cours de leur trajet entre la surface et la profondeur Z dans le forage. s est la fraction (de la vitesse horizontale moyenne) qui est due au glissement. s=1 signifie donc que le déplacement horizontal est uniquement dû au glissement ce qui implique une vitesse verticale décroissant linéairement depuis la surface jusqu'au fond. L'influence des paramètres (m) et (s) est surtout sensible lorsque la profondeur dépasse 1500 m.

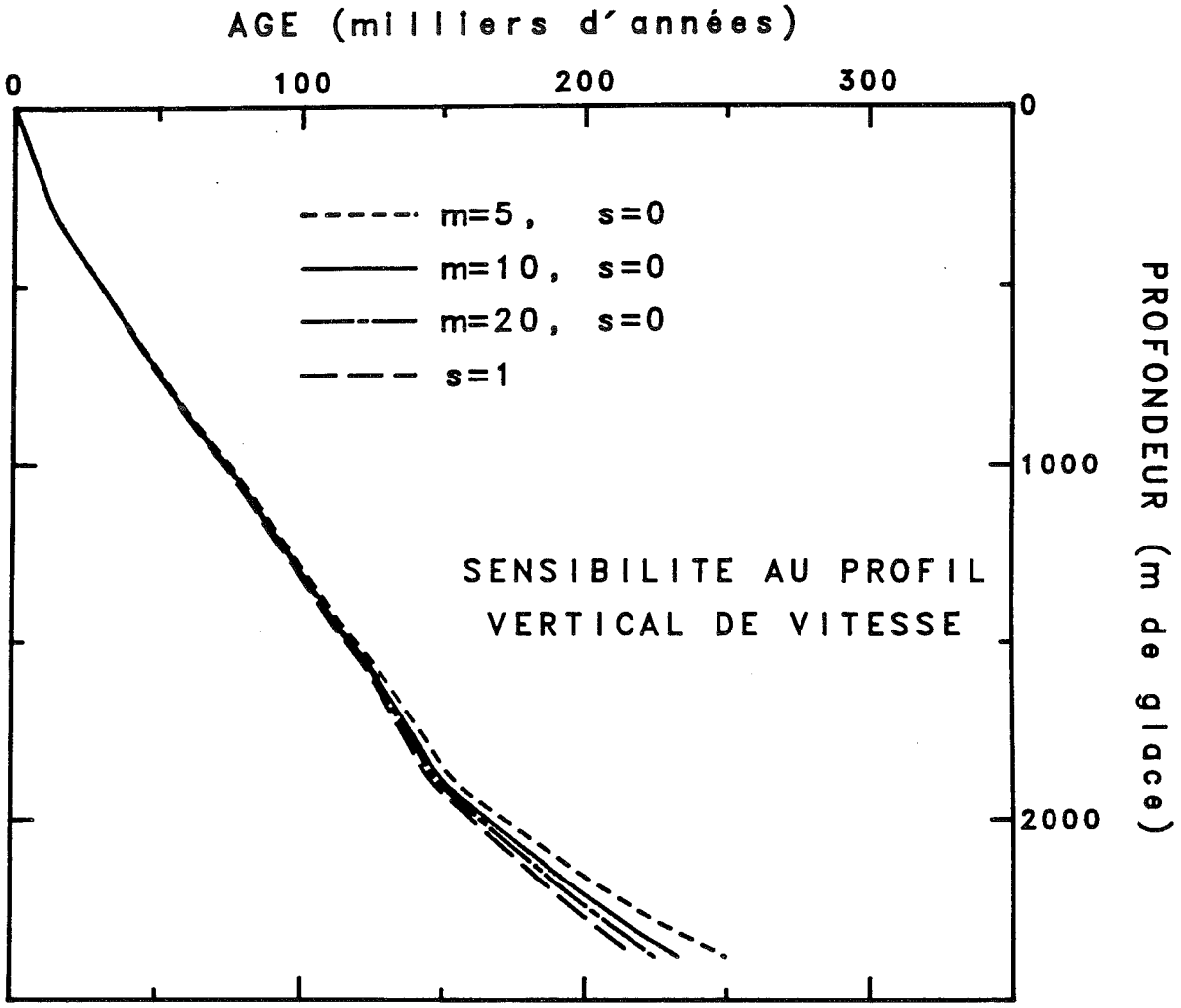


Figure III.12 Sensibilité de l'âge calculé aux paramètres (m et s) du profil de vitesse. *Ces courbes sont calculées avec une accumulation à Vostok de 2.2 cm /an et un type (a) de variation spatiale entre Ridge B et Vostok.*

(pas de glissement) et s=1 (seulement du glissement). Ce dernier cas est évidemment excessif car en amont de Vostok seule une zone de quelques km est susceptible de présenter du glissement (lac sous-glaciaire), mais cela permet d'évaluer l'erreur maximum commise (notons que ce cas correspond à une vitesse verticale décroissant linéairement jusqu'au fond). Même dans ce cas extrême, l'influence du glissement est relativement faible pour les profondeurs inférieures à 1000 m (figure III.11), cependant nous voyons que les paramètres liés à l'écoulement ont de plus en plus d'importance lorsque la profondeur augmente. En ce qui concerne l'âge (calculé) de la glace, l'influence aux paramètres m et s ne devient significative que pour les profondeurs supérieure à 1500 m (figure III.12), de plus avec des valeurs de m plus vraisemblables (de 9 à 11) les courbes sont confondues. Par la suite nous supposerons m=10 et s=0.

• ***Accumulation.***

En tout point de la ligne d'écoulement, l'accumulation au cours du temps est complètement décrite à partir de la valeur actuelle de l'accumulation à Vostok, du type de variation spatiale entre Ridge B et Vostok et de la fonction de transfert isotope-accumulation. Nous allons étudier séparément l'effet de ces trois paramètres.

+ *Accumulation actuelle à Vostok.*

L'accumulation est toujours définie proportionnellement à l'accumulation actuelle à Vostok ($\dot{b}_v$) (accumulation de référence). D'après l'équation de conservation de la masse (II.2), si nous négligeons la fusion basale (inférieure à 1 mm/an) et que la variation d'épaisseur au cours du temps est nulle (ou donnée par III.26), la vitesse de bilan $\bar{U}_x$ est elle aussi proportionnelle à $\dot{b}_v$ de même que u_x et u_z puisque ces vitesses sont obtenues à partir de la vitesse de bilan. Cela signifie que ni l'origine de la glace, ni l'amincissement ne sont affectés par la valeur de l'accumulation de référence. D'après les équations (III.20), (III.21) et (III.22) l'âge de la glace est inversement proportionnel à l'accumulation à Vostok. La correction océan est exprimée en fonction de l'âge et pourrait de ce fait perturber cette relation, mais cet effet qui est perceptible sur le signal température-âge, est trop faible pour affecter la chronologie.

La valeur de l'accumulation en un site est un paramètre qui semble a priori facile à obtenir (les datations des autres forages ne font en général pas état d'étude de sensibilité sur ce sujet). Pour le site de Vostok, néanmoins la valeur de l'accumulation est très faible et l'incertitude est proportionnellement importante. Au cours de la première datation de Vostok, nous avions pris la valeur obtenue par stratigraphie β et qui est intégrée sur 30 ans, soit 2.2-2.4 g cm^{-2} an^{-1} (Jougs et al. 1982). Cependant, l'éruption du Tambora en 1817 fournit un autre marqueur stratigraphique qui intègre l'accumulation sur plus de 100 ans et qui indique une valeur de 2 g cm^{-2} an^{-1} (Legrand et Delmas 1987). Il nous parait donc plus réaliste d'élargir la gamme possible et de prendre l'accumulation à Vostok entre 2 et 2.4 g cm^{-2} an^{-1}, ce qui entraîne une incertitude de ±10% sur l'âge (figure III.13). Dans ce travail les accumulations sont le plus souvent données en m de glace par an car c'est l'unité utilisée dans le modèle d'écoulement (la profondeur est également exprimée ainsi). Avec une densité de la glace de 0.916, la gamme d'accumulation est alors environ 2.2-2.6 cm/an.

+ Variation de l'accumulation entre Ridge B et Vostok.

La vitesse de bilan dépend de l'accumulation cumulée depuis la crête, par conséquent la variation d'accumulation entre Dôme B et Vostok a une influence sur la vitesse de bilan U_x et sur l'amincissement. Cet effet est cependant relativement faible (figure III.14). Il en va différemment pour l'épaisseur initiale des couches de glace qui est représentée sur la figure (III.15). Nous voyons que la différence entre les diverses hypothèses atteind dans le fond ±25%. L'âge dépend donc fortement de la répartition spatiale de l'accumulation (figure III.16). A la différence du cas précédent (sensibilité à la valeur de l'accumulation à Vostok) les chronologies obtenues à partir des différentes hypothèses ne sont pas proportionnelles entre elles.

+ Fonction de transfert isotope-accumulation.

Cette fonction dépend de deux paramètres. La relation deutérium-température au dessus de la couche d'inversion et la fonction F de l'équation (III.19). Pour étudier la sensibilité de la chronologie à l'amplitude des variations d'accumulation au cours du temps, nous effectuons des tests avec F=-0.20 et F=+0.20. Nous rappelons que F=0 correspond à des variations d'accumulation uniquement gouvernées par la température, F positif indiquant des

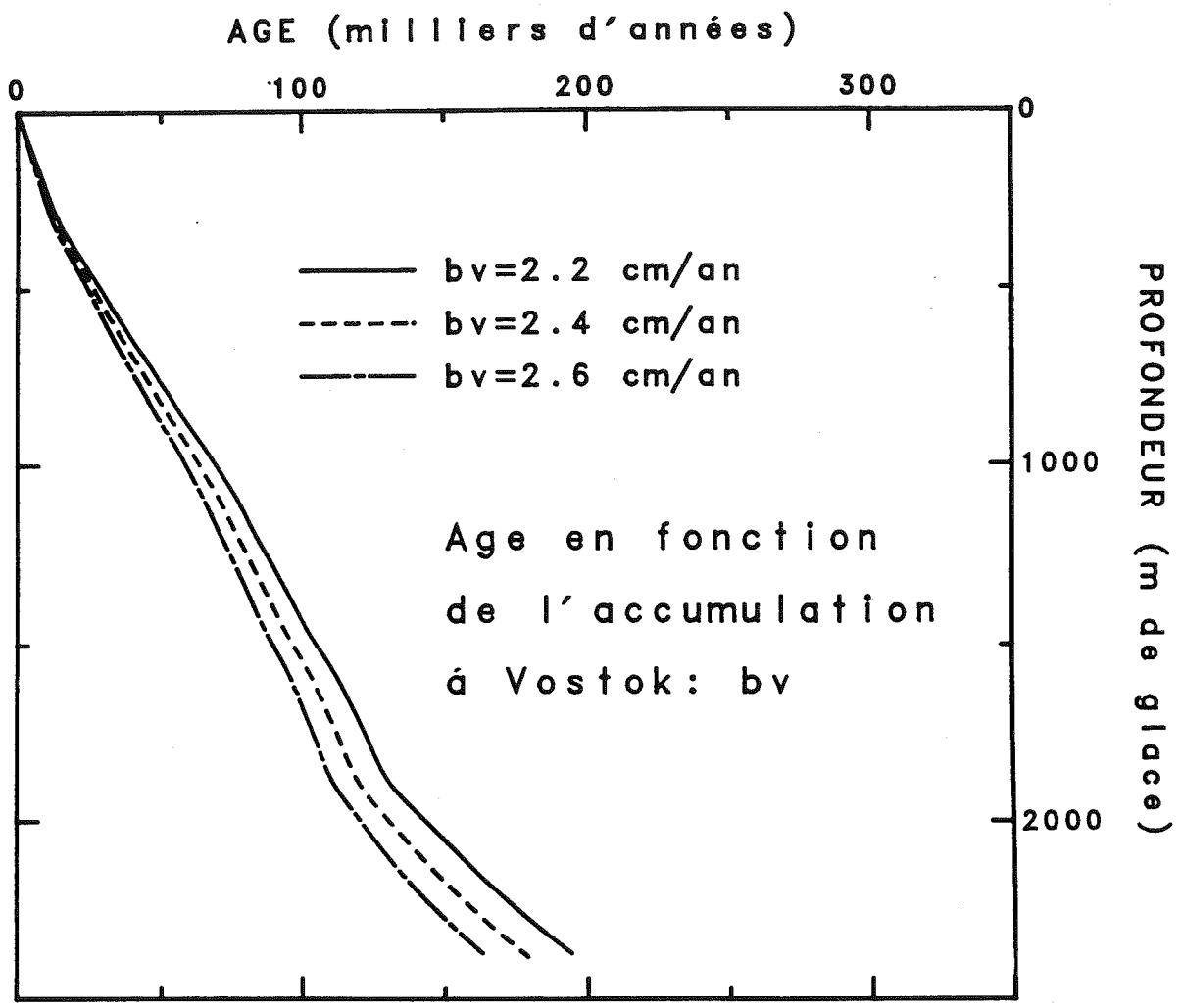


Figure III.13 Sensibilité de l'âge à la valeur de l'accumulation présente à Vostok. *L'accumulation à Vostok sert de valeur de référence pour les variations spatiales et temporelles. A une profondeur donnée, l'âge est donc inversement proportionnel à cette valeur ce que nous retrouvons sur cette figure.*

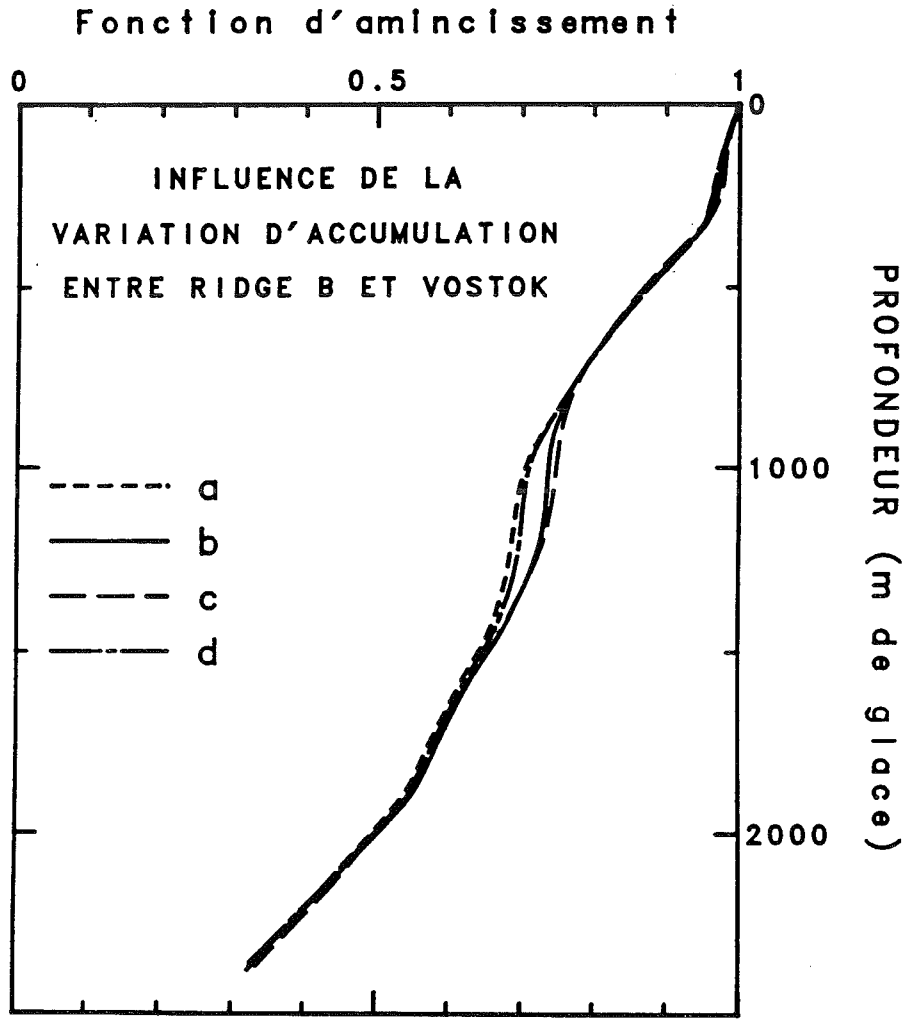


Figure III.14 Sensibilité de l'amincissement à la variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok.
Les quatre courbes représentées correspondent aux types (a, b, c, d) de variations d'accumulation données dans la figure III.5.3

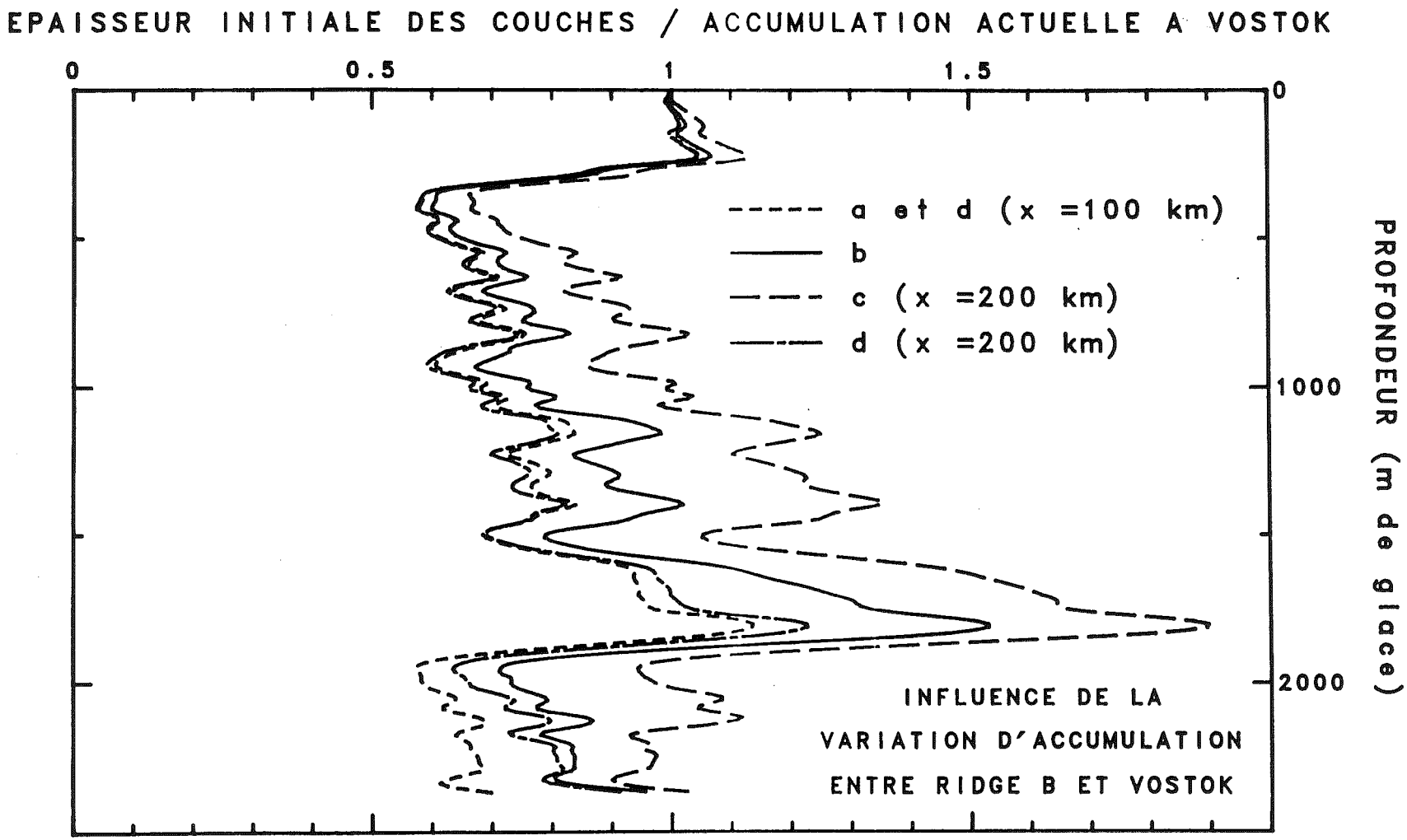


Figure III.15 Epaisseur initiale des couches annuelles en fonction du type de variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok.

Les épaisseurs de couches annuelles sont données par rapport à l'accumulation actuelle à Vostok. Les types de variation entre Ridge B et Vostok sont représentés sur la figure III.5.3

amplitudes de variation plus faibles et F négatif des amplitudes plus fortes. Nous avons également étudié la sensibilité à la relation $\Delta\delta D/\Delta T_s$. Bien que, a priori, ces deux séries de tests ne soient pas tout à fait équivalentes puisque la pression de vapeur saturante est une fonction exponentielle de la température, les résultats sont similaires ($\Delta\delta D/\Delta T_s$ = 5‰ correspond à F=-0.10) . Les figures III.17 (épaisseurs initiales) et III.18 (âges) représentent les résultats obtenus pour ces différents paramètres. Comme pour la variation spatiale d'accumulation, la sensibilité de la chronologie aux variations temporelles d'accumulation est importante. (environ ±12 %).

• ***Variations d'épaisseur au cours du temps.***

Les variations d'épaisseur envisagées sont celles calculées par l'équation (III.26) ce qui donne une amplitude de ± 100 m. La prise en compte ou non de la variation d'épaisseur de la calotte au cours du temps n'affecte pour ainsi dire pas la datation. Le changement d'épaisseur joue sur la fonction d'amincissement car il modifie la longueur des trajectoires. Cette influence est tantôt positive, tantôt négative (selon que la surface était plus haute ou plus basse qu'à présent) et ainsi les effets sur la chronologie se compensent. Un tel résultat est en partie dû à une formulation trop simple de la variation d'épaisseur. Avec notre scénario la vitesse d'écoulement est en particulier très peu différente de la vitesse moyenne sur le cycle climatique. Cependant quelques autres essais (plus fantaisistes) nous ont montré que pour cet ordre de grandeur de la variation d'épaisseur (± 100 m) la chronologie est très peu sensible aux variations d'épaisseur de la calotte.

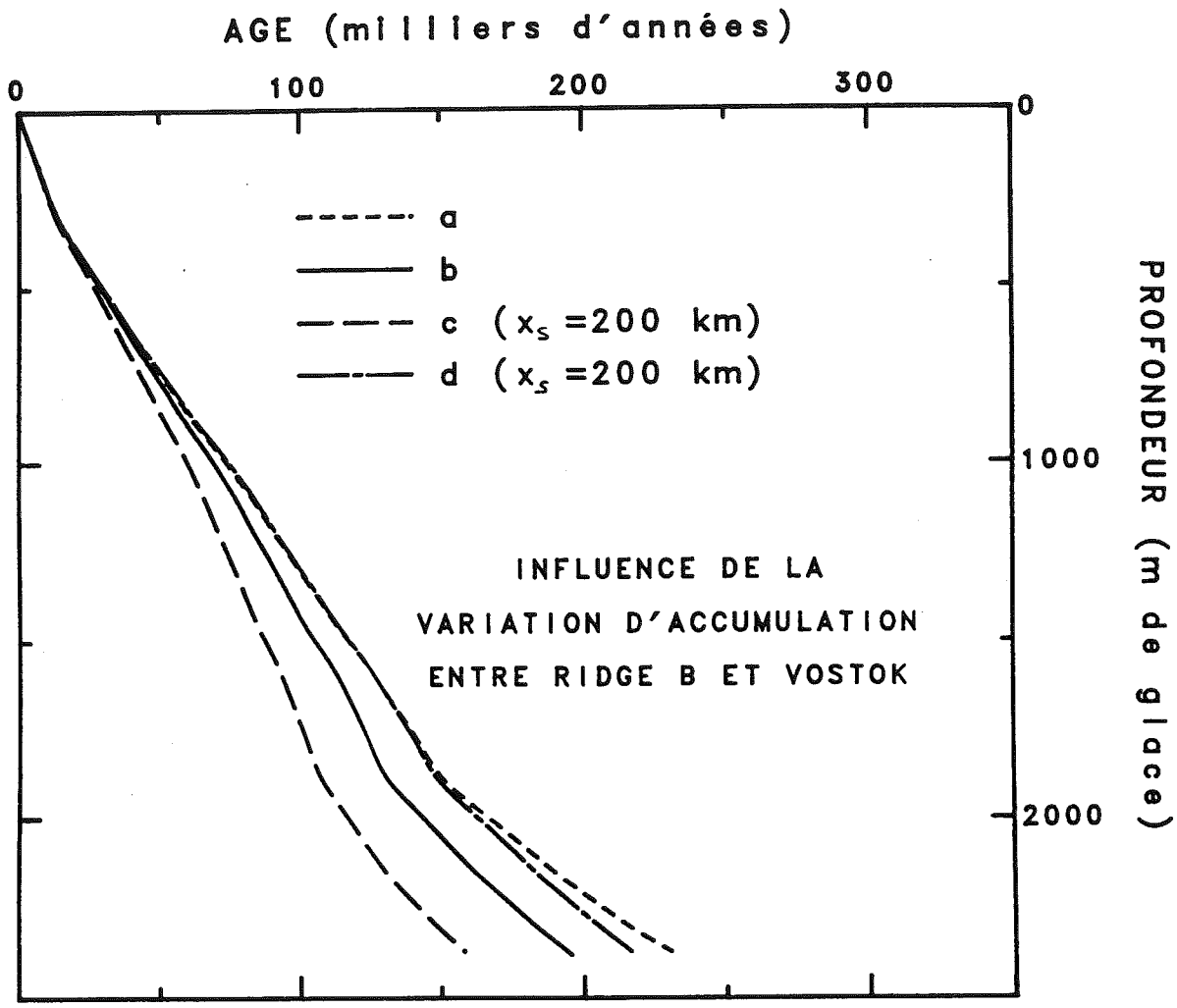


Figure III.16 Sensibilité de l'âge au type de variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok.
Ces courbes ont été calculées avec une accumulation à Vostok de 2.2 cm /an.

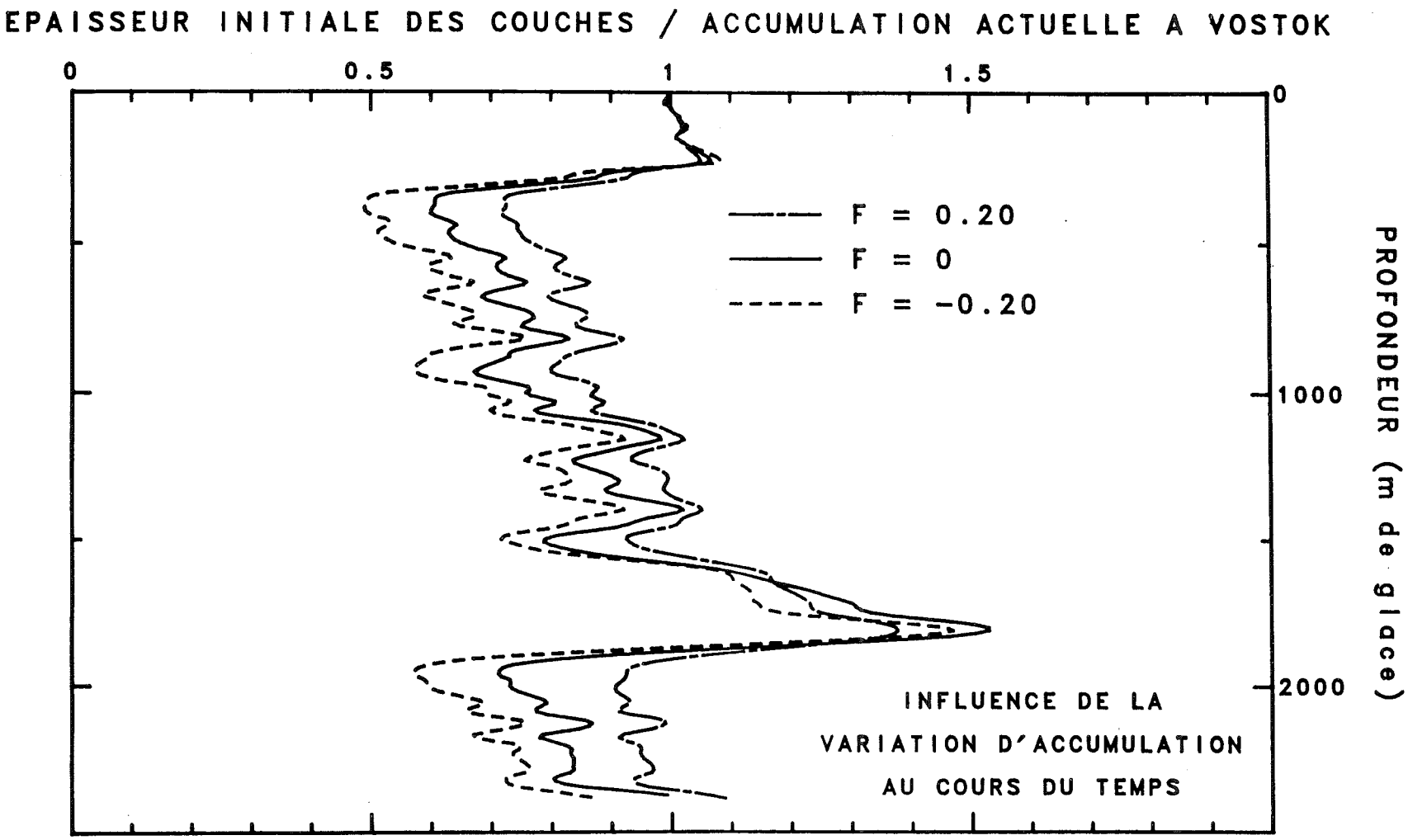


Figure III.17 Epaisseur initiale des couches annuelles en fonction de l'amplitude des variations d'accumulation au cours du temps.

Les variations d'accumulation au cours du temps sont principalement gouvernées par la température, ce qui explique que les différentes courbes aient une morphologie assez semblable à celle de l'enregistrement isotopique. La courbe F=0 (centrale) correspond à une accumulation ne dépendant que de la température, F=0.2 l'amplitude est plus petite par exemple à cause d'une intensification du transport pendant les périodes froides, F=-0.2 l'amplitude est plus grande (un mécanisme possible serait un refroidissement par déficit radiatif plus faible pendant les périodes froides)

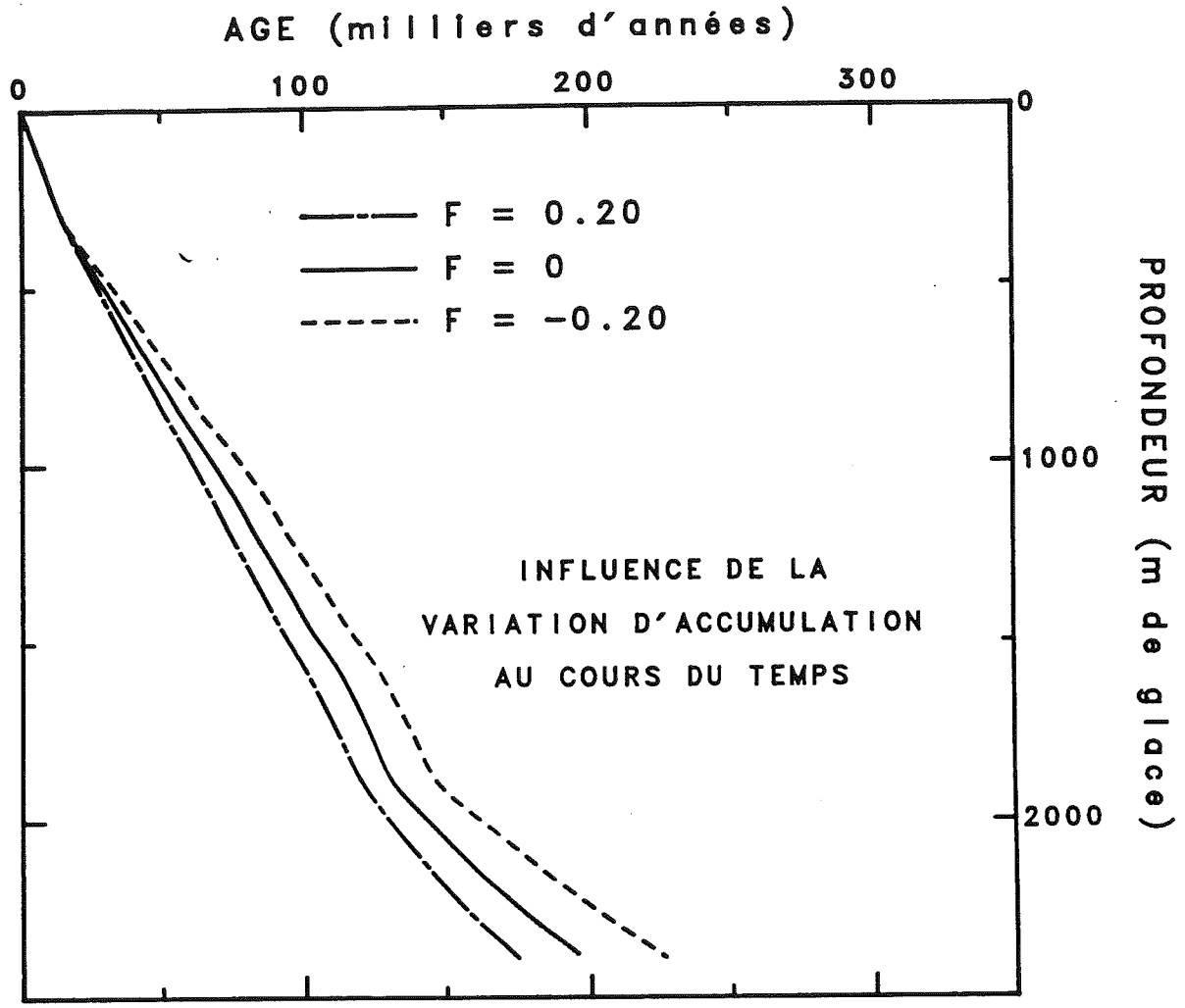


Figure III.18 Sensibilité de l'âge à l'amplitude des variations d'accumulation au cours du temps.
Ces courbes ont été calculées avec une accumulation à Vostok de 2.2 cm /an.

- Comment choisir une datation.

Ainsi que le montre notre étude de sensibilité, même en choisissant des paramètres "raisonnables", la mauvaise connaissance de certaines données (et en particulier tout ce qui a trait à l'accumulation) conduit à une incertitude importante sur la chronologie. Ainsi que nous l'avons déjà remarqué, utilisée seule, aucune méthode de datation n'est absolument sûre et la chronologie par modélisation de l'écoulement ne fait pas exception, cependant en l'associant à d'autres méthodes il est possible de mieux cerner la chronologie. Pour cela nous disposons de deux indicateurs qui sont l'enregistrement en ^{10}Be et les poussières contenues dans la glace.

• ***Utilisation de l'enregistrement en ^{10}Be.***

Un profil détaillé de la concentration en ^{10}Be dans la glace de Vostok a été mesuré par Raisbeck et al. (1987). Ce profil est nettement anticorrélé avec le profil isotopique (concentration environ deux fois plus forte durant les périodes froides). Un tel phénomène a aussi été observé dans la glace de Dôme C (Raisbeck et al. 1981). L'explication proposée par les auteurs est que la concentration en ^{10}Be reflète les changements d'accumulation par un effet de dilution. Une comparaison entre la variation d'accumulation déduite de la pression de vapeur saturante et celle obtenue à partir du ^{10}Be a déjà été faite (Jouzel et al. 1989) mais sans tenir compte des effets d'origines que nous avons introduits pour la reconstitution de l'épaisseur des couches initiales.

Pour déterminer les paléoaccumulations à partir de l'enregistrement en ^{10}Be, il faut faire les hypothèses suivantes :

1) La déposition se fait essentiellement sous forme de dépôt sec, indépendamment de l'accumulation. Cette hypothèse donne en fait la limite minimum de l'amplitude des variations d'accumulation.

2) Le flux de ^{10}Be est constant dans le temps, au moins en moyenne. On suppose ici que le taux de production ne varie pas à l'exception d'événements relativement brefs tels ceux qui ont donné les deux pics de ^{10}Be déjà cités précédemment. On suppose de plus que les changements dans la circulation atmosphérique n'affectent pas de façon notable la déposition de cet aérosol.

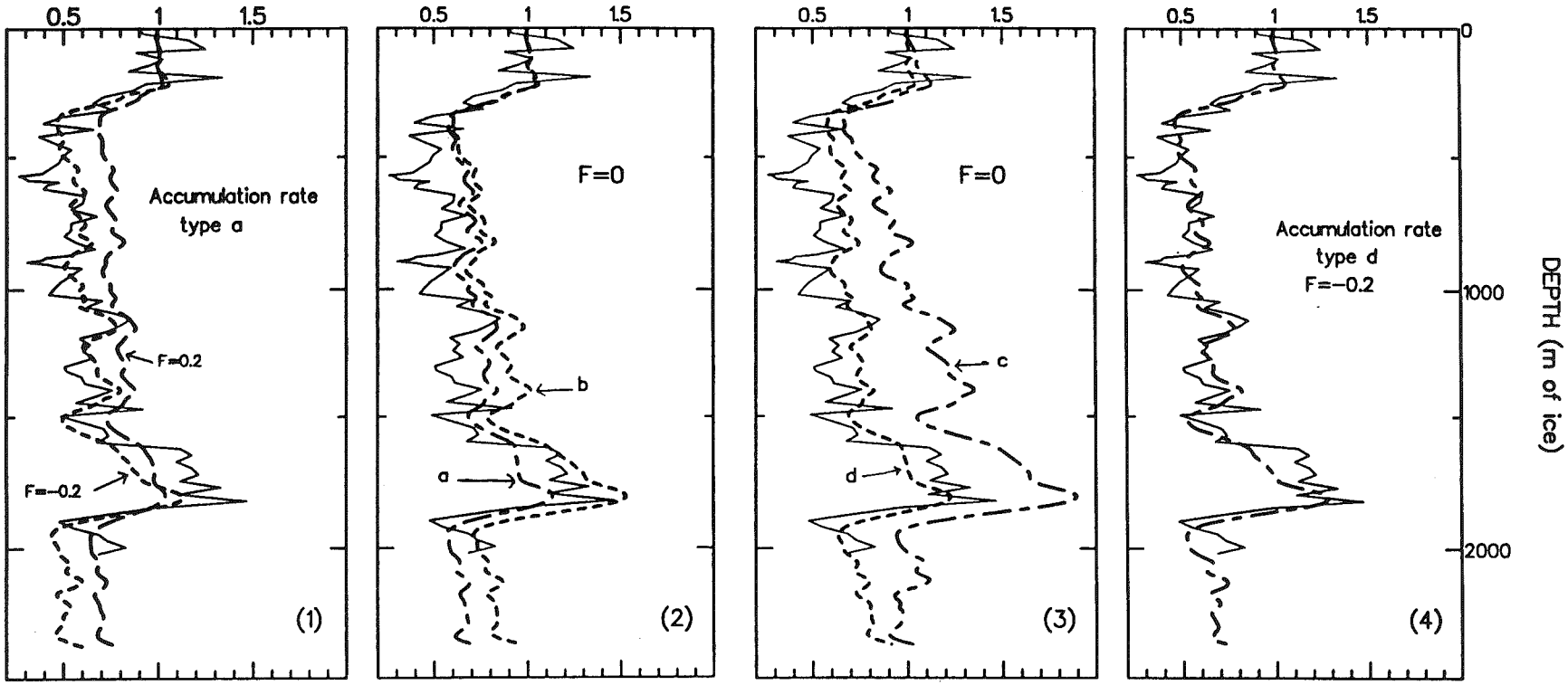


Figure III.19 Epaisseurs initiales des couches annuelles : calculées par le modèle et déduites du ^{10}Be

En trait fin continu sur (1), (2), (3) et (4) : épaisseurs initiales déduites du ^{10}Be, d'après les données de Raisbeck et al. (1987). Cette courbe n'est pas lissée. On voit clairement l'effet des deux pics de ^{10}Be à 570 et 895 m de glace (600 et 925 m de profondeur réelle).

(1) Courbes calculées avec F=0.2 et F=-0.2. Cette dernière courbe est en meilleur accord avec celle déduite du ^{10}Be ce qui signifie que l'amplitude de la variation d'accumulation au cours du temps serait plutôt supérieure à celle donnée dans le cas d'une précipitation purement gouvernée par la température.

(2) Courbes calculées avec les types de variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok : (a) constant et (b) linéaire. Pendant le précédent interglaciaire (a) donne des épaisseurs trop faibles, (b) légèrement trop fortes mais les écarts ne semble pas assez grands pour éliminer ces deux cas.

(3) types (d) avec x_s=200 km et (c) avec x_s=200 km (voir figure III.5.3). Le type (c) parait nettement en désaccord avec les épaisseurs déduites du ^{10}Be.

(4) Essai pour trouver un jeu de paramètres donnant un bon accord avec le ^{10}Be. C'est le cas par exemple de F=-0.2 avec un type (d) (x_s=200 km) de variation spatiale.

3) La déposition est homogène pour la région considérée (de Vostok à la crête).

Avec ces hypothèses la concentration en ^{10}Be est inversement proportionnelle à l'accumulation (pour le site et l'époque de déposition). Les rapports d'accumulation ainsi obtenus sont donc directement comparables aux épaisseurs initiales des couches annuelles calculées par le modèle (figure III.19). Il est bien évident qu'il ne faut pas attendre une ressemblance parfaite dans le détail (Jouzel et al. 1989) mais l'accord est globalement bon.

En ce qui concerne le choix d'une chronologie, cette comparaison permet de considérer que certaines hypothèses sur la variation spatiale et temporelle de l'accumulation sont moins vraisemblables que d'autres.

La première remarque que l'on peut faire est que l'amplitude des variations d'accumulation déduite du ^{10}Be semble plus forte que celle obtenue par la fonction de transfert isotope-accumulation avec F=0 (F= -0.2 donne en effet un meilleur accord figure III.19.1). La différence n'est pas suffisamment flagrante pour bâtir une nouvelle théorie sur l'une ou l'autre des fonctions de transfert (béryllium -accumulation ou isotope-accumulation) mais il parait raisonnable d'écarter les hypothèses F>0.

Il est également possible d'éliminer certains types de variation spatiale. En effet jusqu'à 1500 m de profondeur l'accord n'est pas bon dans la répartition de type c (voir figure III.5.3) où l'accumulation actuelle au site d'origine est nettement plus forte que celle de Vostok. Nous excluons par conséquent ce type de répartition spatiale. Pour les couches plus profondes que 1500m, l'épaisseur des couches annuelles déduite du ^{10}Be est plus grande que celle obtenue par le modèle avec une répartition de type a (figure III.19.2). Cela semble indiquer une accumulation plus forte qu'à Vostok pour les sites d'où provient la glace du fond (distance de Vostok supérieure à 100 km). Nous pourrions peut être écarter par conséquent le type de variation (a) qui correspond à une accumulation constante de Dôme B à Vostok mais l'effet est cependant moins net que dans le cas précédent.

Le lecteur aura remarqué que (par prudence) nous n'avons ici procédé que par élimination. Il est possible également de chercher à titre d'exercice de style, si un jeu de paramètres donne un très bon accord avec les variations d'accumulation données par le ^{10}Be. Le type (d) avec x_s= 200 km et F=-0.2 semble convenir (figure III.19.4).

Enfin, il faut souligner que le ^{10}Be donne une indication sur les variations d'accumulation complètement indépendante des fonctions de transfert utilisées dans le modèle. De ce fait, le bon accord global entre les deux reconstitutions incite à considérer avec confiance (au moins pour le plateau Antarctique) la relation isotope-accumulation développée au début de ce chapitre.

• ***Comparaison avec les enregistrements marins en utilisant un repère stratigraphique donné par la concentration en poussière.***

+ *Repères stratigraphiques.*

Les enregistrements climatiques de Vostok sont très souvent comparés à ceux tirés des carottes marines. Il peut être utile de disposer d'une chronologie calée sur la chronologie marine, non pas point par point (ce qui fait perdre une bonne partie de l'information), mais d'une façon globale en ayant par exemple un cycle climatique de même durée pour les deux types d'enregistrement (marin ou glaciaire) ou un point de calage commun. Pour l'interprétation en terme de mécanismes climatiques, il est alors très important d'estimer dans quelle mesure les incertitudes sur la chronologie introduisent des déphasages entre les enregistrements glaciaires et marins. C'est ce que nous allons chercher à déterminer ici.

Petit et al. (1990) et Mounier (1988) ont mesuré la concentration en poussières de la glace de Vostok et ont proposé d'utiliser les événements de cet enregistrement en poussières comme repères stratigraphiques pour comparer les chronologies de la carottes de Vostok et des carottes marines. La concentration en poussières dans les carottes de glace est liée à l'aridité, à la vitesse du vent au dessus des sources et à l'intensité du transport méridien. Petit et al. (1990) ont comparé ce traceur à la susceptibilité magnétique de la carotte marine RC 11 120 car la susceptibilité magnétique est également supposée refléter l'apport éolien. L. Mounier (1988) a ainsi donné sept repères stratigraphiques permettant de comparer la carotte de Vostok aux carottes marines. La démarche que nous suivons ici est d'utiliser un seul de ces repères pour caler la chronologie et de comparer les âges ainsi obtenus avec les autres repères.

Nous avons observé que l'âge calculé est inversement proportionnel à l'accumulation actuelle à Vostok et que du fait de l'incertitude sur cette valeur, la datation n'est donné qu'à un facteur près (dans certaines limites cependant). Le calage de la chronologie calculée est effectué en jouant uniquement sur l'accumulation actuelle à Vostok. Nous avons choisi comme point de calage un niveau qui est caractérisé par une faible concentration en poussières et qui est situé au milieu de l'avant dernière transition glaciaire-interglaciaire. La profondeur dans le forage de Vostok est 1870 m (équivalent glace) et avec la chronologie marine, l'âge du niveau correspondant dans la carotte marine RC 11 120 est 128 700 ans (Mounier 1988).

Petit et al. (1990) indiquent qu'en utilisant ce niveau comme repère stratigraphique, l'enregistrement de température à Vostok (donné par δD) est pratiquement en phase avec celui du $\delta^{18}O$ marin. Cette correspondance n'est pas tout à fait en accord avec les récents résultats de Sowers et al. (soumis) qui ont mesuré $\delta^{18}O$ dans l'oxygène (O_2) contenu dans les bulles d'air des carottes de Vostok. Nous rappelons que cet indicateur est supposé lié au $\delta^{18}O$ marin. A la fin de l'avant dernière période glaciaire, Sowers et al. suggèrent que le δD dans la glace de Vostok a augmenté environ 5000 ans (± 1000 ans) avant la décroissance du $\delta^{18}O$ de l'océan (qui reflète la fonte de la glace continentale principalement des grandes calottes de l'Hémisphère Nord). Cet écart est légèrement plus grand que l'avance de 4000 ans de la température à la surface de l'océan aux hautes latitudes de l'Hémisphère Sud, par rapport à la réduction de la glace continentale lors de l'avant dernière déglaciation (CLIMAP 1984).

Il faut aussi noter que l'âge de l'avant dernière déglaciation dans les chronologies marines n'est pas forcément exact (Hamelin et al. soumis).

+ Procédure pour caler les chronologies calculées.

Pour chaque type de répartition spatiale et temporelle de l'accumulation ainsi que pour les diverses hypothèses sur la valeur de m et de s nous avons cherché la valeur de l'accumulation à Vostok donnant un âge de 128 700 ans à la profondeur voulue, puis nous avons éliminé les cas pour lesquels l'accumulation nécessaire était nettement en dehors de la gamme 2-2.4 g cm^{-2} an^{-1}. On notera qu'avec ce critère les variations spatiales de type c sont une fois encore éliminées. Les courbes âge-profondeur ainsi calées sont données dans les figures III.20 (influence de la forme du profil de vitesse), III.21 (fonction de transfert température-accumulation) et III.22 (effet de la variation spatiale d'accumulation).

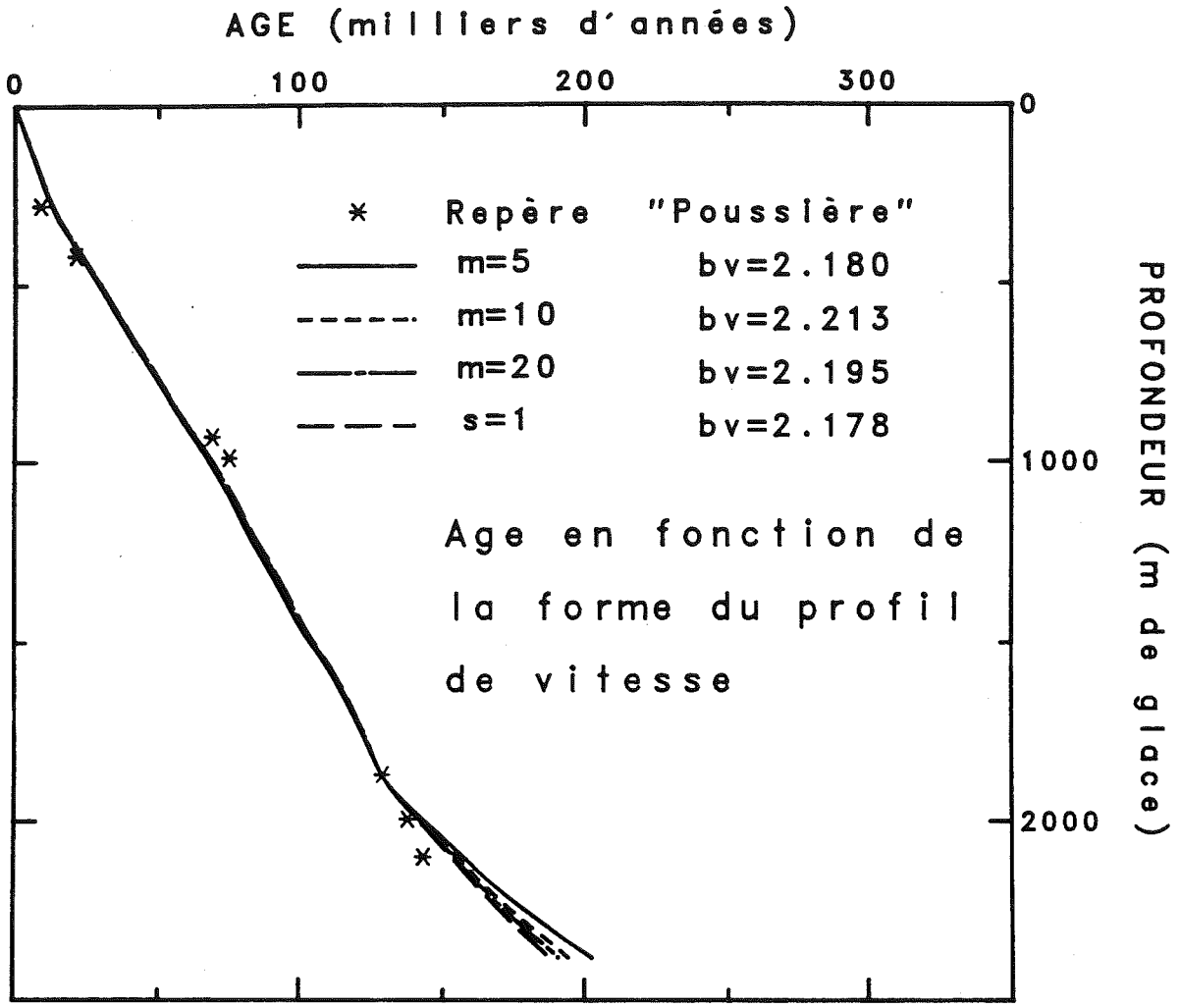


Figure III.20 Chronologies calées et repères stratigraphiques "poussière". Sensibilité à la forme du profil de vitesse.
*Les chronologies sont calculées avec différentes valeurs des paramètres m et s du profil vertical de vitesse. Pour chaque chronologie, la valeur de l'accumulation de référence b_v (accumulation actuelle à Vostok) est ajustée (calage) de façon à ce que l'âge à 1870 m soit 128700 ans (repère stratigraphique "poussière" d'après Mounier 1988). Les autres repères "poussière" donnés dans Petit et al. (1990) et Mounier (1988) sont représentés par des *. Les chronologies ainsi calées sont beaucoup moins dispersées que dans la figure (III.12).*

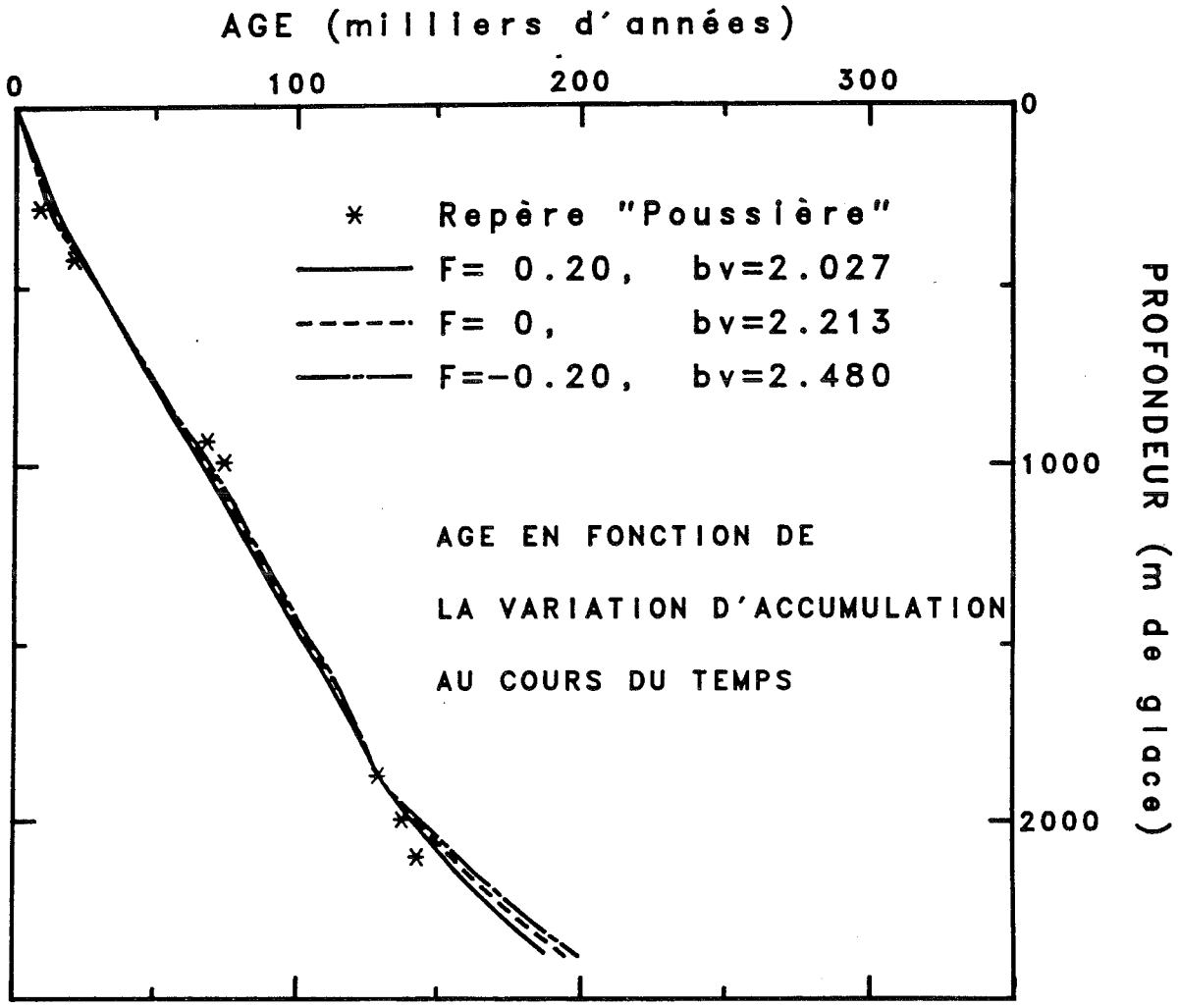


Figure III.21 Chronologies calées et repères stratigraphiques "poussière". Sensibilité à l'amplitude de la variation d'accumulation au cours du temps.
*Les chronologies sont calculées avec F=-0.2, F=0 et F=0.2 (F est lié à l'amplitude de la variation d'accumulation au cours du temps). Pour chaque chronologie, la valeur de l'accumulation de référence b_v (accumulation actuelle à Vostok) est ajustée (calage) de façon à ce que l'âge à 1870 m soit 128700 ans (repère stratigraphique "poussière" d'après Mounier 1988). Les autres repères "poussière" donnés dans Petit et al. (1990) et Mounier (1988) sont représentés par des *. Comme dans le cas précédent (figure III.20), les chronologies ainsi calées sont beaucoup moins dispersées dans le cas "calé" que dans le cas standard représenté sur la figure (III.18).*

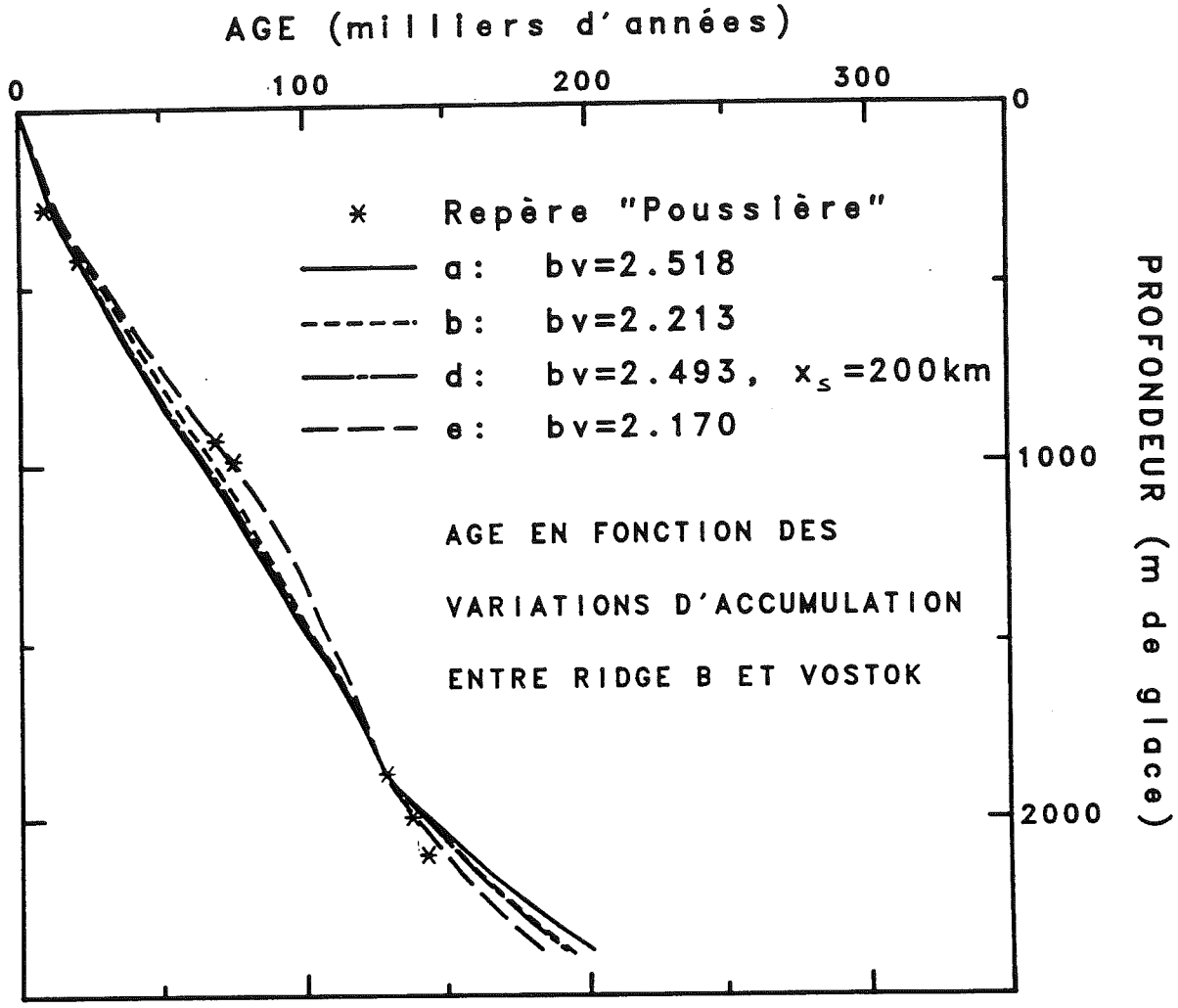


Figure III.22 Chronologies calées et repères stratigraphiques "poussière". Sensibilité à la variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok.
*Les chronologies sont calculées avec les différents types de variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok. Pour chaque chronologie, la valeur de l'accumulation de référence b_v (accumulation actuelle à Vostok) est ajustée (calage) de façon à ce que l'âge à 1870 m soit 128700 ans (repère stratigraphique "poussière" d'après Mounier 1988). Les autres repères "poussière" donnés dans Petit et al. (1990) et Mounier (1988) sont représentés par des *. Aucun des types de variation (a,b,d) envisagés précédemment ne donne un bon accord avec tous les repères "poussière". Le type (e) (représenté sur la figure (III.5.3) est un essai de trouver une répartition spatiale (plausible) donnant cet accord. L'écart maximum entre les chronologies ainsi calées est 15000 ans.*

Les principales observations que nous pouvons tirer sont :

- L'écart entre les différentes courbes est beaucoup plus faible que dans l'étude de sensibilité présentée précédemment.

- Entre la surface et le point de calage, la variation d'accumulation (dans le temps mais surtout spatialement) est la clef de la datation.

- L'âge du fond du forage est de l'ordre de 200 000 ans. Les carottes marines indiquent un épisode interglaciaire vers 200 000 ans BP. Si on admet que les enregistrements marins et glaciaires reflètent les mêmes événements climatiques (avec des déphasages de quelques milliers d'années), ceci donne une estimation de l'âge maximum pour le fond du forage de Vostok, car cet épisode interglaciaire n'apparait pas (figure III.1).

- Aucune chronologie de type (a,b,c,d) ne donne un bon accord avec la majorité des marqueurs stratigraphiques. On peut se poser la question inverse : existe t'il une (ou plusieurs) variation d'accumulation entre Ridge B et Vostok qui soit plausible et qui concorde avec les repères stratigraphiques "poussière". Nous avons fait quelques essais, (à titre d'exercice) et trouvé un type (e) qui donne un bon accord (figure III.22) (le type (e) est représenté sur la figure III.5.3 et est défini par : A(x) constant entre Ridge B et 180 km de Ridge B, puis décroissant rapidement en 20 km, jusqu'à atteindre la valeur de Vostok à 100 km de Vostok, A(x) est constant ensuite jusqu'à Vostok). Ce type de variation ne nous parait pas irréaliste car il faut bien voir que la décroissance ne représente qu'une différence d'accumulation de 1 cm entre deux sites éloignés de 20 km. Cela nous incite à considérer que ce type de variation spatiale doit être pris en compte pour estimer l'écart maximum entre les différentes chronologies (calées). Cet écart est de l'ordre de 15000 ans (entre (e) et (a))

Dans la figure (III.23) nous présentons le signal de température à Vostok, en fonction de l'âge obtenu avec différentes variation d'accumulation en amont de Vostok. **Vis à vis du modèle, aucune de ces datations n'est plus probable qu'une autre**. L'étude de l'enregistrement en ^{10}Be nous incite à privilégier les répartitions spatiales comprenant une accumulation plus forte en amont (b) et (e). La comparaison avec les repères stratigraphiques "poussière" ne sélectionne (parmi les hypothèses utilisées) que (e) c'est à dire une augmentation "abrupte" de l'accumulation à 100 km de Vostok (en allant vers Ridge B). Il est cependant clair, que d'autres types (plausibles) de variation d'accumulation en amont permettraient d'obtenir une chronologie passant par tous les repères "poussière".

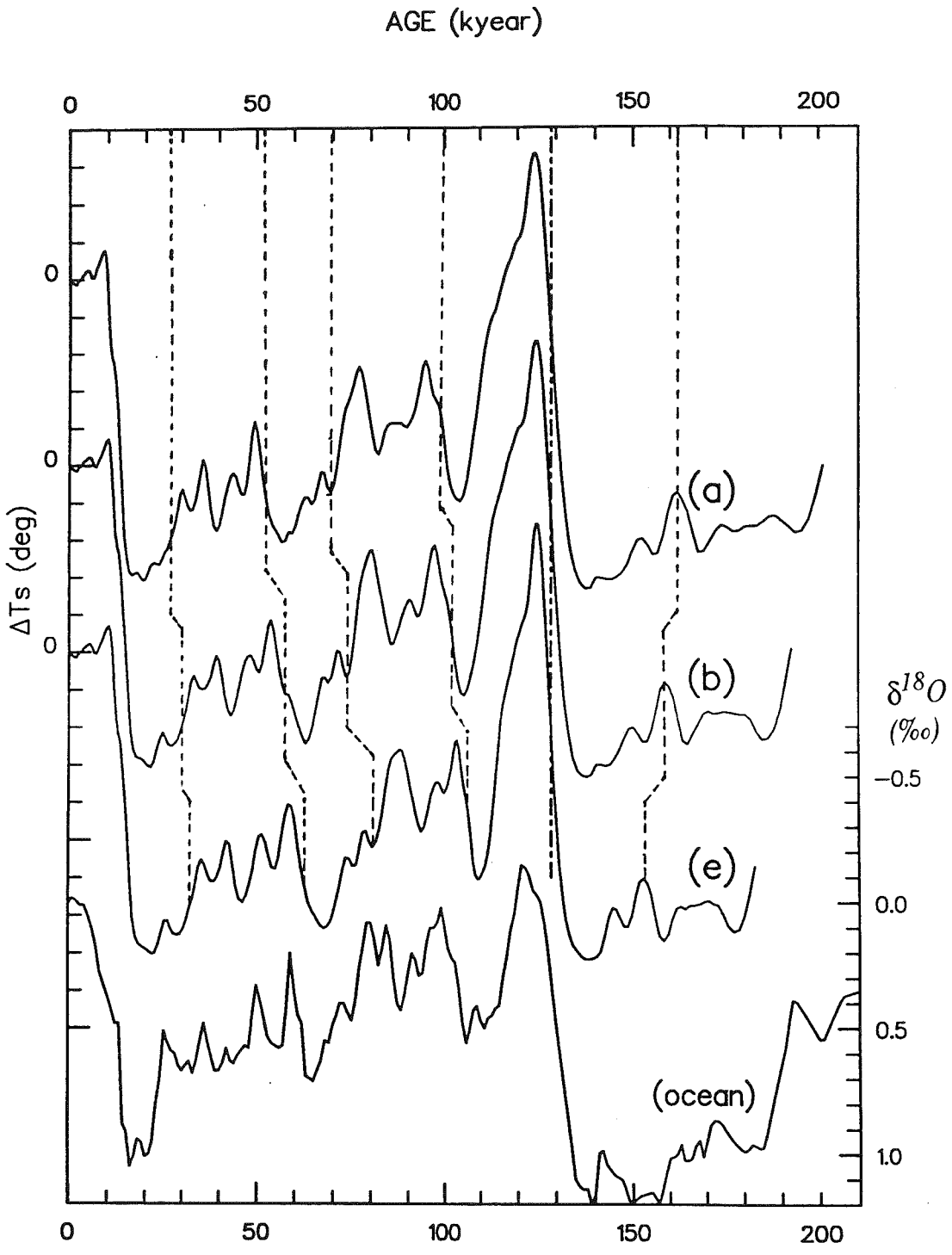


Figure III.23 Vostok : Température en surface en fonction de l'âge.
L'enregistrement des variations de température en surface (déduite de l'isotope par l'équation III.2) est présenté en fonction de l'âge selon trois chronologies calculées. La différence entre ces chronologies est essentiellement le type de variation spatiale de l'accumulation entre Ridge B et Vostok. Ces chronologies "calées" sont celles représentées sur la figure (III.22). Le point de calage est symbolisé par une droite en grands tirets à 128700 ans. Pour quelques événements bien reconnaissables, les différences d'âge entre les chronologies sont mises en évidence (lignes en petit tirets).
La variation de composition isotopique de l'océan est représentée en bas (d'après Labeyrie et al. 1987)

Pour conclure cette comparaison avec la chronologie marine, le résultat certain est que la chronologie tirée des repères stratigraphiques "poussière" n'est pas incompatible avec la chronologie obtenue par modélisation. Le paramètre crucial qui est l'accumulation actuelle en amont, peut être mesuré ce qui constituerait le meilleur des tests.

- Datation comparée des carottages de Vostok et Dôme B.

Notre principal argument pour introduire un effet d'origine dans la reconstitution de l'accumulation passée est basée sur le fait que l'accumulation à Dôme B est nettement plus forte qu'à Vostok.

Le carottage de Dôme B a été effectué par les soviétiques (Léningrad) et l'analyse des échantillons a été faite à Saclay (rapport de stage P. Bordat, 1988) et à Talin en Estonie. (Vakmae en préparation). Nous ne disposons pour l'instant que de l'enregistrement mesuré par P. Bordat qui est représenté sur la figure (III.24). On remarque que la valeur en surface est sensiblement plus basse (-6‰) que la valeur moyenne pour la fin de l'Holocène. En raison de la variabilité naturelle de l'isotope et du fait que nous avons peu de mesures, le point de surface ne nous parait pas significatif et dans cette présentation nous prenons comme valeur de référence en surface -429‰ (valeur moyenne) et non -435‰ (échantillon de surface, Jouzel et al 1987).

La datation a été effectuée exactement de la même façon que pour le carottage de Vostok si ce n'est que nous avons spécifiquement étudié l'influence de la forme du profil de la vitesse verticale. Nous avons vu en effet (chapitre II) que ce sujet est controversé, et nous avons défini deux types de fonction pour décrire la décroissance de la vitesse verticale avec la profondeur (voir figure II.6). Le calcul a été fait avec les valeurs suivantes des paramètres :

pour le type A, m= 10, 5

profil parabolique (m=0)

pour le type B, m =5

D'après les échos radars, il y a au Dôme B, un lac sous-glaciaire avec une épaisseur de glace de 3700 m. (Bogorodsky et Chérémétyev 1981). Nous avons par conséquent testé l'influence d'une fonte basale en supposant (pour certaines chronologies) une vitesse verticale

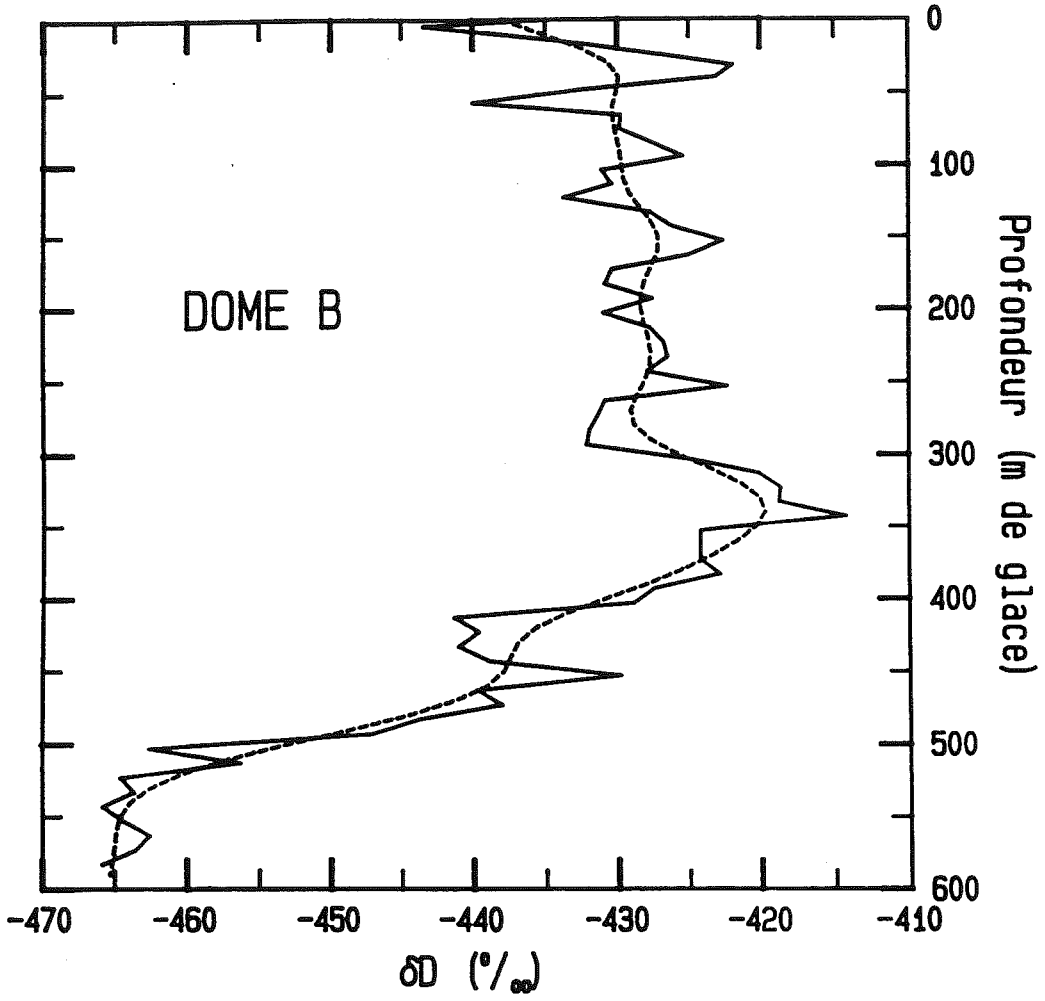


Figure III.24 Dôme B. Enregistrement isotopique (δD) en fonction de la profondeur. D'après P. Bordat (1988)

à la base de 1 mm/an.

La valeur de l'accumulation de référence à Dôme B (celle correspondant à la teneur isotopique -429‰) est déterminée en cherchant le meilleur accord entre le signal de Vostok et celui de Dôme B.

Pour la période Holocène et le dernier maximum glaciaire, la chronologie de Vostok dépend essentiellement de l'accumulation à Vostok (voir les figures de l'étude de sensibilité). La comparaison des deux enregistrements (Vostok et Dôme B) permet donc d'avoir une bonne estimation relative de l'accumulation à Dôme B par rapport à celle de Vostok. La figure (III.25) illustre cette comparaison.

Pour les vitesses verticale de type A, la datation de Dôme B est peu sensible à la valeur du paramètre m et à la fusion basale, sans doute parce que le forage est située dans la partie supérieure du glacier. L'accord entre les deux signaux est très bon, la pente de la transition est en particulier exactement la même. L'accumulation à Dôme B ainsi déterminée est 65% plus forte que celle de Vostok (rapport d'accumulation 1.65). C'est la valeur que nous conserverons, car ce type de profils de vitesse nous semble le plus vraisemblable (voir discussion chapitre II).

Dans le cas d'une vitesse parabolique, l'accord est également bon, mais il faut un rapport d'accumulation 1.8.

Il n'est pas possible d'obtenir un bon accord avec la fonction de type B. Nous avons déjà souligné (chapitre II) que cette fonction nous parait peu réaliste, mais cette comparaison semble le confirmer.

En résumé, le rapport entre l'accumulation à Dôme B et celle de Vostok est au moins 1.65. La différence (moyenne) de composition isotopique (deutérium) entre les deux sites est environ 11 ‰ ce qui correspond avec une température d'inversion, 1.23°C plus élevée à Dôme B et pourrait expliquer un rapport d'accumulation 1.13. Le rapport des accumulation "corrigées" de la température est donc au moins 1.46.

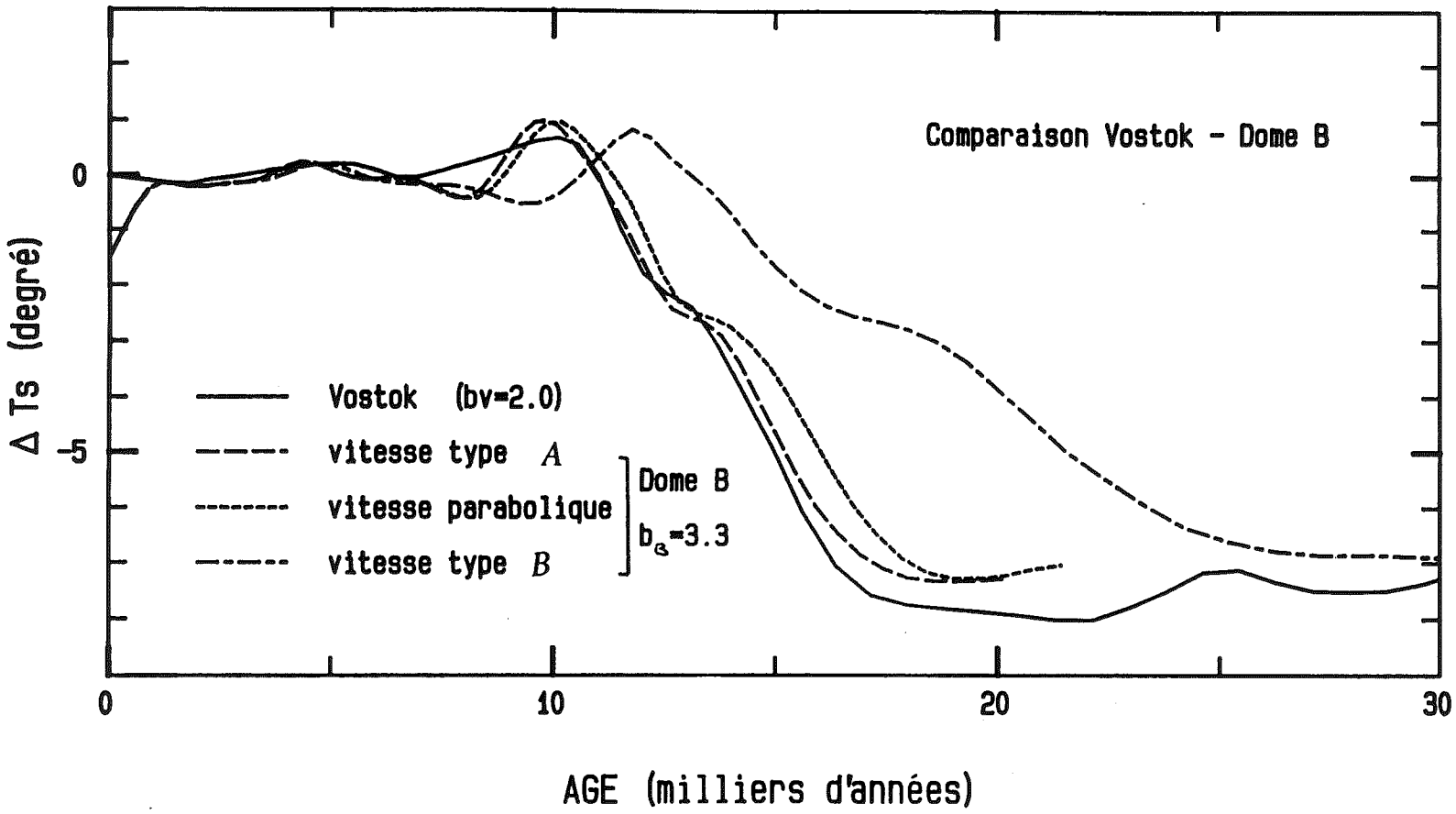


Figure III.25 Comparaison des enregistrements à Dôme B et à Vostok : Température en surface en fonction de l'âge. *Les températures en surface déduites des enregistrements isotopiques à Vostok et à Dôme B sont représentées en fonction de l'âge. Dans le cas de Vostok, l'accumulation de référence b_v est 2 cm/an. Pour Dôme B, l'accumulation de référence b_B est 3.3 cm/an (rapport b_v/b_B = 1.65) et plusieurs chronologies sont envisagées en fonction du profil de vitesse verticale. Avec un profil de type A (voir figure II.6) les courbes pour m=5 et m=10 sont confondues et l'accord est particulièrement bon entre les enregistrements de Vostok et de Dôme B. Pour un profil de vitesse parabolique, l'accord est encore bon, par contre pour un profil de type B, il n'est pas possible d'obtenir un bon accord quelle que soit la valeur de b_B.*

- Conclusions.

Nos résultats peuvent paraître peu encourageants et soulever la question : "A quoi sert une datation par modélisation s'il faut des points de calage pour fixer les paramètres ?".

Nous allons tenter d'y répondre ici tout en reconnaissant qu'utilisée seule ce n'est pas une méthode de datation précise. La principale limitation vient de la sensibilité de la chronologie calculée à l'accumulation et de ce que l'accumulation n'est pas uniquement gouvernée par la température ce qui restreint la validité de la fonction de transfert isotope-accumulation.

La datation par modélisation de l'écoulement permet d'obtenir une chronologie préliminaire, quand le seul enregistrement dont on dispose est le signal isotopique (souvent la première mesure effectuée) et que l'on ne désire pas systématiquement se caler sur la chronologie marine (par exemple si le signal n'est pas suffisamment reconnaissable).

Lorsqu'on utilise des points de calage, la modélisation donne les âges pour les profondeurs intermédiaires et permet d'évaluer l'incertitude. Il nous semble que ce point est important par exemple pour les analyses spectrales, mais aussi pour rechercher des événement de courte durée (pics de ^{10}Be, éruptions volcaniques).

L'âge de la glace n'est pas la seule information obtenue lors de la datation, car en reconstituant la trajectoire des couches de glace, nous avons également accès à l'origine géographique de la glace, et à l'histoire de la déformation, (il serait facile de calculer en plus l'histoire thermique en relation avec le grossissement des cristaux). De plus l'épaisseur initiale des couches annuelles est nécessaire pour transformer les concentrations des divers éléments mesurés dans la glace (sodium, sulfate ...) en flux ou pour faire la démarche inverse comme dans le cas du ^{10}Be. L'accumulation intervient également dans le calcul de la différence entre l'âge du gaz et l'âge de la glace (Barnola et al. 1991). Toutes ces caractéristiques (âge, origine, épaisseur initiale) étant obtenues d'une façon cohérente, les informations sur l'une permettent d'améliorer la connaissance des autres.

Enfin, étant donné que l'accumulation dans le passé et âge de la glace sont intimement liés, nous avons là une source d'information sur les relations accumulation-climat.

- Perspectives.

Il est possible d'améliorer la chronologie du forage de Vostok, tout d'abord par des mesures de l'accumulation en amont de Vostok car nous avons vu que l'accumulation (à Vostok, en amont et au cours du temps) est la clef de la chronologie beaucoup plus que les paramètres liés à l'écoulement. Tant que ces données cruciales sur l'accumulation manquent, il nous parait pour l'instant peu utile de sophistiquer le modèle de datation en introduisant par exemple des variations d'épaisseur plus réalistes ou une loi de déformation de la glace dépendant de la fabrique (ces deux sujets sont bien entendu très intéressant mais pas à courte échéance pour la datation).

L'autre approche serait d'utiliser l'analyse spectrale pour sélectionner la chronologie. Il semble raisonnable de caler la valeur de l'accumulation de référence (à Vostok) en cherchant à retrouver les périodes astronomiques. La stabilité des hautes fréquences pourrait donner un critère pour choisir parmi les hypothèses de variation (spatiale et temporelle) de l'accumulation (Benoist 1986, Yiou et al. 1989).

III.3 INTERPRETATION DU PROFIL DE TEMPERATURE MESURE DANS LE FORAGE DE VOSTOK.

Dans une calotte glaciaire, les champs de vitesse et de température sont couplés. Pour modéliser l'écoulement, il est donc important de calculer les températures de la façon la plus réaliste possible, c'est ce que nous avons développé au chapitre II en insistant sur la prise en compte des différentes conditions à la base de la calotte. Cependant la validité des résultats dépend non seulement du modèle mais également des paramètres géophysiques entrant dans le modèle. Dans le calcul du champ de température, ces paramètres sont le flux géothermique, l'accumulation et les variations de la température en surface au cours du temps.

Le forage de Vostok réunit les conditions pour étudier l'influence de tous ces paramètres sur le champ de température. Des mesures répétées de température dans le trou de forage ont été effectuées par les Soviétiques (Vostresov et al. 1984). D'autre part, nous disposons de l'enregistrement isotopique qui couvre plus d'un cycle climatique et qui permet d'estimer la température et l'accumulation au cours du temps.

Dans l'article présenté ici (Ritz 1989), nous cherchons quelles informations il est possible d'obtenir en analysant le profil vertical de température mesuré dans le trou de forage. Pour cela nous comparons ce profil mesuré et des profils calculés avec différents jeux de paramètres. Dans certains cas l'accord est très bon (écart inférieur à 0.1°C) mais pour certaines valeurs du flux géothermique (inférieur à 50 mW/m^2) et de l'accumulation (supérieure à 2.6 cm/an) l'accord est impossible ce qui permet de donner des bornes (respectivement inférieure et supérieure) à ces paramètres. Nous rappelons que ces paramètres interviennent non seulement dans le calcul du champ de température lui même, mais aussi dans l'évolution de la géométrie de la calotte (car la vitesse d'écoulement dépend des températures, voir chapitre IV) et sur l'âge calculé.

Annals of Glaciology 12 1989
© International Glaciological Society

INTERPRETATION OF THE TEMPERATURE PROFILE MEASURED AT VOSTOK, EAST ANTARCTICA

by

Catherine Ritz

(Laboratoire de Glaciologie et Géophysique de l'Environnement, B.P. 96, F-38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France)

ABSTRACT

The temperature profile measured in the Vostok bore hole is analysed. The temperature distribution in polar ice sheets depends mainly on past surface temperature, geothermal flux, and accumulation rate. In the present work, the heat equation is solved both for ice and for the underlying bedrock. The Vostok ice core offers a 160 000 year climatic record which is used to define the past surface temperature, while accumulation-rate variations are assumed to be governed by the saturation vapour pressure. The model is run for a number of different sets of parameters in order to find the parameter associations giving a good fit between the observed and the computed temperature profiles. With this model, it is possible to simulate the measured temperature profile within 0.1 °C. To obtain this good fit, geothermal flux has to be higher than 50 mW/m^2 and present-day accumulation rate must be lower than 2.6 cm/year. Sensitivity of these results both to the amplitude of surface-temperature change and to the velocity profile with depth is also investigated. Finally, it is shown that ice is at the melting point at the base of the ice sheet, which is in agreement with the presence of a subglacial lake near Vostok Station.

INTRODUCTION

The temperature distribution in an ice sheet is governed both by diffusion and advection, and is therefore dependent not only on boundary conditions such as surface temperature and geothermal heat flux but also on ice velocity. At Vostok, the past surface temperature has been estimated on the basis of the deuterium-isotope record which covers the last 160 000 years (Jouzel and others, 1987). By varying the surface-boundary condition as suggested by this record, the down-core temperature profile can be computed for a given set of parameters. In this study, the two-dimensional time-dependent heat equation is solved for a wide range of parameters in order to determine the parameter sets which provide the best fit to the measured temperature profile.

This approach has been used, for example, by Jenssen and Campbell (1983), Budd and Young (1983), and Dahl-Jensen and Johnsen (1986) to derive surface-temperature change from the temperature profiles in deep ice holes. For the present work, the palaeotemperature record, as determined by Jouzel and others (1987), is used to compute the vertical temperature distribution at Vostok. Comparison with the measured temperature profile gives information on the more sensitive parameters, which are the geothermal flux and the accumulation rate.

FIELD MEASUREMENTS

Temperature

Temperature was measured in the Vostok bore hole on three occasions (1977, 1980, and 1982) by Soviet scientists (Vostresov and others, 1984). The precision given for the measurements was 0.01 °C between 100 and 900 m and 0.1 °C between 900 and 2040 m. The deeper measurements were less precise as they were taken shortly after the thermal drilling.

The vertical temperature profile is given in Figure 1a. In Figure 1b, we present the differences between measured values and a smoothed curve (obtained using a spline approximation). The maximum discrepancy between the different surveys is 0.05 °C in the upper part of the bore hole (above 800 m) and 0.1 °C in the lower part.

The present-day surface temperature at Vostok is −57 °C (Barkov and Uvarov, 1970). There are no data about surface temperature up-stream from Vostok. Following Budd and others (1971), we assume a 0.005 deg/m temperature gradient along the slope.

Accumulation rate

The recent accumulation rate, as determined by β-activity, is 22–24 kg m^{-2} year^{-1}, which corresponds to 2.4–2.6 cm year^{-1} of ice (Young and others, 1982). In this study, we assume a constant accumulation rate between Ridge B (ice divide) and Vostok.

Surface and bedrock topography

For the Vostok area, surface elevation (E) and thickness (H) are taken from the Antarctic map folio (Drewry, 1983). For Vostok Station, we use the more precise data from Kapitsa (1964): E = 3490 m and H = 3700 m. In this work, H, E, and all depths are expressed in metres of ice. The firn layer is therefore replaced by an equivalent layer of ice with a density ρ_i = 0.916. The difference between depth in metres ice

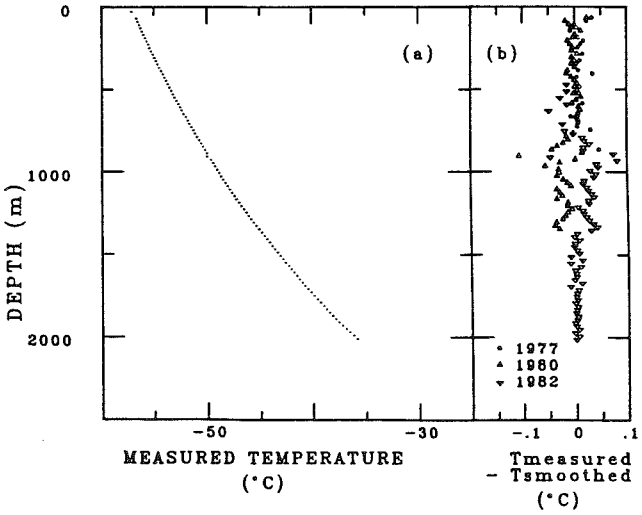


Fig. 1. (a) Temperature profile measured in the Vostok bore hole. (b) Difference between measured values and a smoothed curve (spline approximation).

equivalent and true depth from the surface is 30 m.

MODEL DESCRIPTION

Governing equations

The flow lines are assumed to be along the steepest surface slope that is perpendicular to the elevation contours as given in Drewry (1983). In the Vostok area, such flow lines are almost parallel, indicating that the transverse velocity is very small and hence the transverse advection term can be neglected. Consequently, the temperature distribution at Vostok can be reasonably computed using a two-dimensional model with the x-axis defined along the flow line.

The heat equation is solved both for the ice and for a 5 km thick layer of underlying bedrock in order to simulate the geothermal heat-flux changes induced by climatic variations (Ritz, 1987). The heat equation for ice is given by:

$$\rho_i C_i \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(K_i \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_i \frac{\partial T}{\partial z}) - \rho_i C_i (u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z}) + Q. \quad (1)$$

Equation (2) is the corresponding equation for the bedrock:

$$\rho_r C_r \frac{\partial T}{\partial t} = K_r \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (2)$$

Here, x is the distance from the ice divide, z is the vertical coordinate, positive downward from sea-level, u and w are the horizontal and vertical components of the velocity, Q is the strain heating in the ice, ρ is the density, C is the specific heat, and K is the thermal conductivity (subscript i for ice and r for rock). The values of these parameters are given in Table I.

Numerical methods

In order to avoid computational problems at the boundaries, the vertical coordinate z is transformed to a relative coordinate $\zeta = (E + z)/H$. The heat equation for such a coordinate system has been described by Jenssen (1977). The solution is determined using the finite-difference method and a semi-implicit time scheme (see Ritz, 1987). The horizontal step is 10 km, the vertical step is 1/30 (corresponding to 122 m at Vostok), and the time step is generally 1000 years. In some cases, the time step is reduced to 10 years in order to take account of recent detailed surface-temperature changes.

Boundary conditions

The temperature (T_s) is defined at the ice surface according to the Vostok record (see climatic history), and a constant geothermal flux (φ) is defined at the base of the rock layer (5 km below the ice–rock interface). East Antarctica is generally assumed to be a Precambrian shield with typical heat-flux values of 40 ± 10 mW/m^2 (Lee, 1970). However, near Vostok, the bedrock shows subglacial highlands, indicating that this area may have had a more complex geological history (Drewry, 1975) with a higher geothermal flux.

Model simulations were therefore performed with φ values between 35 and 90 mW/m^2.

At the ice–rock interface, three types of boundary condition are used depending on (T_b), the basal temperature. When T_b is below the melting temperature, the heat flux across the ice–rock interface is continuous and the boundary condition is given by Equation (3).

$$K_i(\partial T/\partial z)_i = K_r(\partial T/\partial z)_r. \quad (3)$$

When ice at the interface is at its melting point, the melting temperature is prescribed and the melting rate $\dot{M}$ is given by Equation (4) (Budd and others, 1971):

$$\dot{M} = \frac{1}{L\rho_i}\{K_r(\partial T/\partial z)_r - K_i(\partial T/\partial z)_i\} \quad (4)$$

where L is the latent heat of fusion. A third type of base is the "temperate basal layer", in which the ice is at its melting point in a basal layer as well as at the ice–rock interface (Lliboutry, 1987). In our model, the occurrence of such a base is tested but it has never been found in the Vostok area.

Velocity field

Following Lliboutry (1981), the horizontal velocity (u) is written

$$u(x,\zeta) = \bar{U}(x)\psi(\zeta) \quad \text{with } \psi(\zeta) = \frac{m+2}{m+1}(1 - \zeta^{m+1}) \quad (5)$$

where $\bar{U}$ is the balance velocity and m is a parameter describing the shape of the velocity profile with depth. Using the Lliboutry model, m is about 11 in the Vostok area. In order to study the sensitivity of the model to the velocity shape, the computation is also performed using m = 5 and m = 20.

The balance velocity is obtained by solving numerically the mass-continuity equation at each time step:

$$\frac{\partial \bar{U}(x)H(x)}{\partial x} = \dot{b}(x) - \dot{M}(x) - \frac{\partial H(x)}{\partial t} \quad (6)$$

where $\dot{M}$ is the melting rate, computed using Equation (4). $\dot{b}$ (the accumulation rate) and H (the ice thickness) are both functions of time (see climatic history).

The vertical velocity (w) is computed using the ice-incompressibility equation: $\partial u/\partial x + \partial w/\partial z = 0$. This equation can be integrated analytically from the surface, where

$$w(x,0) = \dot{b}(x) - \partial H(x)/\partial t + u(x,0)\alpha \quad (\alpha \text{ surface slope}) \quad (7)$$

to the bottom

$$w(x,1) = \dot{M}(x) + u(x,1)\beta \quad (\beta \text{ bed slope}). \quad (8)$$

Following Lliboutry (1987), we assume that sliding is significant only in the case of a temperate basal layer. As this condition does not appear in the Vostok area, $u(x,1)$ is taken to be equal to 0. The velocity profiles with depth at Vostok are given in Figure 2. Note that vertical velocity is much less sensitive to the value of the exponent m than is horizontal velocity. Note that in Equations (6), (7), and (8) $\dot{b}$ and $\dot{M}$ are expressed in m (of ice)/year.

TABLE I. PHYSICAL PARAMETERS FOR ICE AND ROCK; T IS TEMPERATURE IN °C

$K_i = 2.22 - 0.0148T$	W m^{-1} deg^{-1}	(Weller and Schwerdtfeger, 1971)
$\rho_i C_i = 19.36 \times 10^5 + 6.6 \times 10^3 T$	J m^{-3} deg^{-1}	(Yen, 1981)
$K_i = 3$	W m^{-1} deg^{-1}	(Drury and others, 1984)
$\rho_r C_r = 20 \times 10^6$	J m^{-3} deg^{-1}	(Drury and others, 1984)

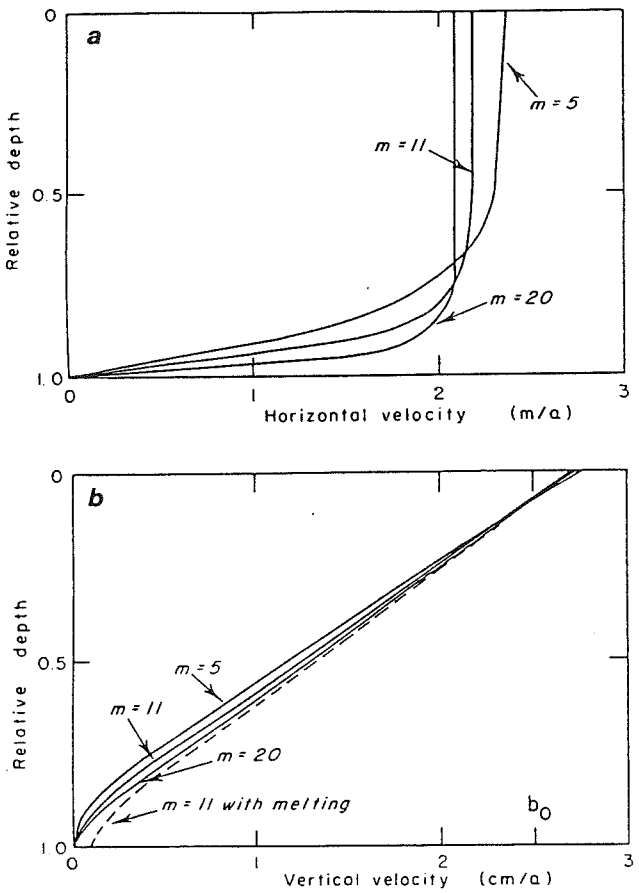


Fig. 2. Velocity profile with depth with different values of m. (a) Horizontal velocity, and (b) vertical velocity.

Strain heating

The heating released by deformation within the glacier is:

$$Q = \rho_i g \zeta \alpha \partial u/\partial \zeta \qquad (9)$$

where g is the acceleration due to gravity, and $\partial u/\partial \zeta$ has an analytic form derived from Equation (5).

Strain heating is concentrated at the base of the ice sheet. For instance, from Equations (5) and (9), and with m = 11, 20% of the total strain heating is produced in a basal layer representing 1/60 of the ice thickness. This layer corresponds to 1/2 vertical step above the ice–rock interface. Using the finite-difference method, heat production is not taken into account at the interface node and therefore in this layer. This is because the boundary condition applies instead of the heat equation where Q is introduced. To avoid this systematic error, a heat flux φ_d is added to $K_r(\partial T/\partial z)_r$ in the ice–rock interface boundary condition (Equation (3) or (4)).

$$\varphi_d = \int_{H-h/2}^{H} Q dz \qquad (10)$$

where h is the vertical step ($h = H/30$).

Climatic history

The continuous deuterium record from the Vostok ice core has been used to reconstruct the palaeotemperature record for the Vostok area over the last 160 000 years (Jouzel and others, 1987). From the δD record, past surface temperature has been estimated and reported relative to the present-value gradient of 6‰ per °C. The authors estimated that the error in the temperature change can be up to 20%. In order to determine the sensitivity of our results to this parameter, the model was run with three values of the temperature-variation amplitude: ΔT_s = 0.8, 1, or 1.2 (ΔT_s = 1 corresponding to a gradient of 6‰). In this study, we use the smoothed palaeotemperature curve given by Jouzel and others (1987), corrected for temperature variations due to different ice origins. As the palaeotemperature record gives the past surface temperature even in those cases of thickness change, the only correction needed is that which arises from the difference in elevation between Vostok and the location of ice origin. This later correction was made using the velocity field described above.

The smoothed palaeotemperature curve is suited to this model because high-frequency temperature oscillations are damped by heat diffusion in ice. However, very recent surface-temperature variations may affect the upper part of the down-core temperature profile. In order to assess the influence of such variations, some computations are performed for the last 5000 years with a less smoothed surface-temperature record.

Changes in the accumulation rate can be estimated from the Vostok palaeotemperature record. If one assumes (Robin, 1977) that the accumulation rate is governed by the amount of water vapour contained in the air, the accumulation rate is then proportional to $\partial P/\partial T$, where P is the water-vapour pressure at the condensation temperature (T_c). The palaeo-accumulation rate ($\dot{b}_t$) can therefore be estimated given the present-day accumulation rate ($\dot{b}_0$) and the palaeotemperature using Equation (11).

$$\dot{b}_t = \dot{b}_0 \frac{(\partial P/\partial T)_t}{(\partial P/\partial T)_0}. \qquad (11)$$

The condensation temperature (T_c) is taken to be the temperature at the top of the inversion layer. At Vostok, the mean value of inversion is −16.6 °C (Kovrova, 1964). According to Jouzel and others (1987), the variations in condensation temperature can be derived from changes in the surface temperature using the empirical relation $\partial T_c/\partial T_s$ = 0.67. The accumulation-rate changes obtained in this way are in good agreement with those estimated from the ^{10}Be profile (Raisbeck and others, 1987). From Equation (11), accumulation rate as a function of time is described entirely using the present value ($\dot{b}_0$) and the palaeotemperature.

The last parameter related to climatic change is the ice thickness. A first-order approximation of the maximum change in thickness is obtained by assuming that the horizontal velocity does not vary during a climatic cycle. This neglects the influence of temperature on ice flow and changes in basal stress due to thickness variations.

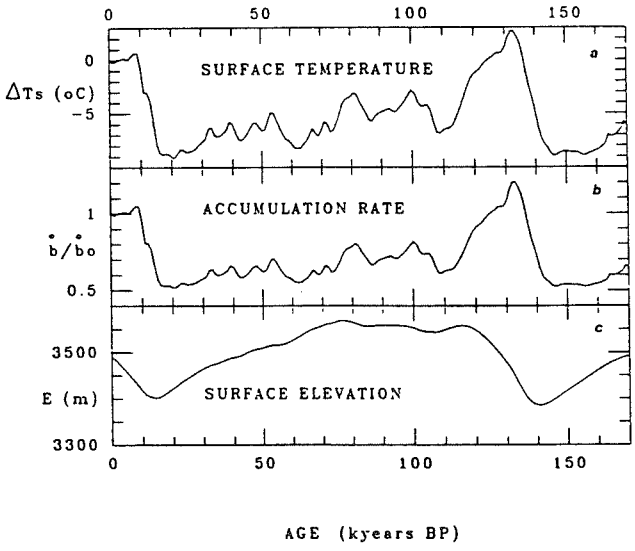


Fig. 3. Climatic history used in the model. (a) Past surface temperature derived from deuterium record. (b) Past accumulation rate obtained from Equation (11). (c) Past surface elevation obtained from H following Equation (12).

Because the accumulation rates between Vostok and Ridge B are supposed to be identical, $\partial H/\partial x$ must be almost constant over time and the mass-continuity Equation (6) then gives:

$$\partial H(x)/\partial t = \dot{b} - \dot{b}_m \qquad (12)$$

where $\dot{b}_m$ is the average value of $\dot{b}$ over a climatic cycle. This relation was used to test the sensitivity of the computed temperature profile to change in ice thickness by running the model for two cases: no variation ($\partial H/\partial t = 0$) and maximum variation (Equation (12)).

Variations in surface temperature, accumulation rate, and ice thickness over 160 000 years (duration of the Vostok record) are presented in Figure 3. In order to decrease the influence of the initial temperature field, the model is run over several climatic cycles.

RESULTS

Method

The model described above is used with a number of different sets of parameters. Table II lists the different parameters and their range of variation.

Comparison between the computed and observed temperature profile is first done by calculating the standard deviation (σ) and the difference of the means (γ)

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1,N}(T_m(i) - T_0(i))^2}{N - 1}$$

$$\gamma = \frac{\sum_{i=1,N}(T_m(i) - T_0(i))}{N}$$

where T_0 is the smoothed observed temperature and T_m is the computed temperature, both taken at the depths $z(i)$ corresponding to the nodes of the model. As temperature profile is measured between 0 and 2010 m (ice equivalent), only the first 17 nodes of the computed temperature are used ($N = 17$). The "best fits" are given by a minimum σ, while γ is useful in determining whether the computed temperature is globally colder ($\gamma < 0$) or warmer ($\gamma > 0$) than the observed one.

Standard tests

The first computations are performed with $\Delta T_s = 1$, $\Delta H = 1$, and $m = 11$ which are the more plausible values of these parameters. The study then concerns accumulation rate and geothermal flux. Figure 4 shows σ and γ versus φ for several values of $\dot{b}_0$.

When φ is less than 50 mW/m², the computed profile is much lower than the observed one. With such values, one cannot simulate the measured temperature profile with any accumulation rate. This provides a minimum value for geothermal heat flux of 50 mW/m². We also note that, in

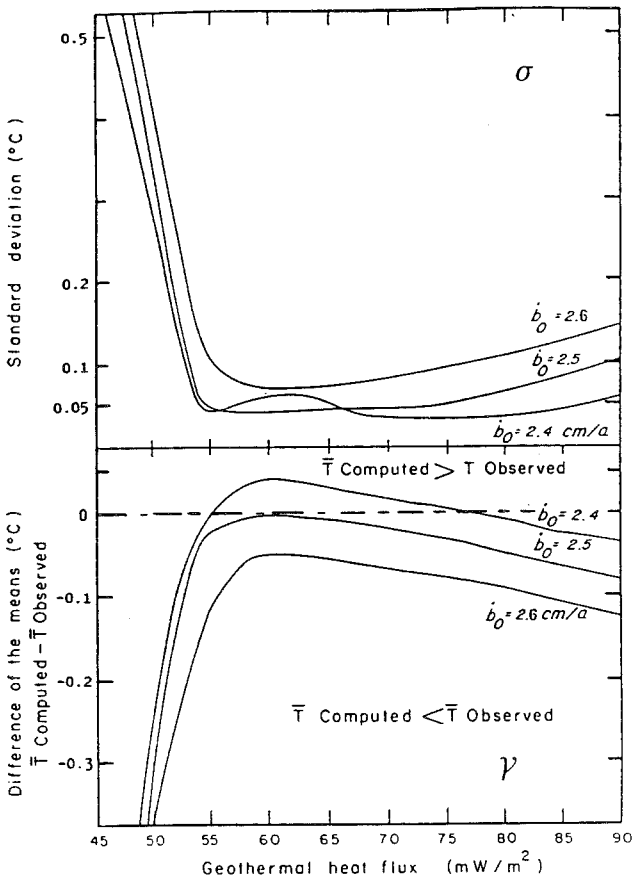


Fig. 4. Standard deviation and mean of ($T_{computed} - T_{observed}$) versus geothermal flux for different values of present accumulation rate.

those cases where $\varphi < 50$ mW/m², basal temperature is below the melting point. With larger values of geothermal flux, basal ice reaches the melting point and agreement between calculated and measured profiles can be very good with σ values equal to 0.05°C. The minimum geothermal flux necessary to obtain good agreement is dependent on the accumulation rate. Minimum φ values range from 54 mW/m² for $\dot{b}_0$ = 2.3 cm/year to 67 mW/m² for $\dot{b}_0$ = 2.6 cm/year. This behaviour is expected because higher accumulation rates require a larger geothermal flux to compensate for the cooling due to the advective process.

When φ is larger than 65 mW/m², melting is important with consequent increase in the vertical velocity as well as advection at the base (Equations (4) and (8)). This effect is clearly seen in Figure 4 where the highest φ values

TABLE II. PARAMETERS OF THE MODEL AND THEIR RANGE OF VARIATION

Geothermal flux	φ = 35 → 90 mW/m²
Accumulation rate	
surface measurements	$\dot{b}_0$ = 2.4 → 2.6 cm/year (22 → 24 kg m^{-2} year^{-1})
in the model	$\dot{b}_0$ = 2.0 → 3.0 cm/year
Parameter of the velocity shape	m = 5, 11, 20
Amplitude of surface-temperature change	ΔT_s = 0.8, 1.0, 1.2
ΔT_s = 1.0 corresponds to a gradient	$\partial D/\partial T$ = 6‰
Change in thickness	ΔH = 0 (no change), 1 (Equation (12))

correspond to relatively cold computed profiles. The maximum in each γ curve occurs not as soon as melting is initiated but only when it occurs during almost the whole climatic cycle, because there is competition between this process (which is not very efficient) and the warming effect of heat flux which prevails when the base is cold.

The maximum in γ corresponds to the warmest calculated profile that it is possible to obtain with a given accumulation rate. For low accumulation rates, this maximum is positive, yielding two different best fits ($\gamma = 0$), the second one being for a high melting rate. If accumulation rate is higher than 2.55 cm/year, the computed profile is colder than the observed one for any heat flux. In this case, the basal melting point is reached but an advective process removes heat in the upper part of the ice sheet. This result is interesting as it provides an upper limit for the accumulation rate. With the "standard" set of parameters, this limit is 2.6 cm/year which agrees well with surface measurements (Young and others, 1982).

In summary, one can estimate the minimum value of φ and a maximum accumulation rate from a comparison between the computed and the observed temperature profiles. On the other hand, it is not realistic to derive a maximum value of the geothermal flux from these model results. Indeed, Equation (8) which gives the basal velocity as a function of melting assumes implicitly that all the water produced by melting penetrates into the substrate. This is not always the case and must depend on the type of substrate underlying the glacier. Robin and others (1977) found the existence of a subglacial lake at Vostok, indicating that some water does not in fact penetrate the underlying substrate. In this case, Equation (8) gives only the maximum value of basal vertical velocity and it is not possible to link geothermal flux and temperature.

The following studies will determine whether these conclusions are sensitive to the other parameters of the model.

Sensitivity to the amplitude of surface-temperature change

The model is run with $\Delta T_S = 0.8$ and $\Delta T_S = 1.2$, φ and $\dot{b}_0$ varying as in the previous section. When the amplitude of the surface-temperature change (ΔT_S) is smaller than the standard ($\Delta T_S = 1$), the computed profile is warmer because the reference is taken at the present time and such an assumption implies the surface temperature was warmer during the ice age. The reverse reasoning can be made for $\Delta T = 1.2$.

The results of these model runs are very similar to those with $\Delta T = 1$. It is possible to simulate the temperature profile only if the base is at the melting point. The main effect of changing ΔT_S is to move the limits on $\dot{b}_0$ and φ. Figure 5 shows, for different geothermal fluxes, the values of $\dot{b}_0$ giving a good simulation of observation versus ΔT_S. For $\Delta T_S = 1.2$, the maximum accumulation rate is 2.25 cm/year, which is lower than the field measurements, and a geothermal flux of about 70 mW/m² is needed. For $\Delta T_S = 0.8$, the maximum $\dot{b}_0$ is 2.9 cm/year.

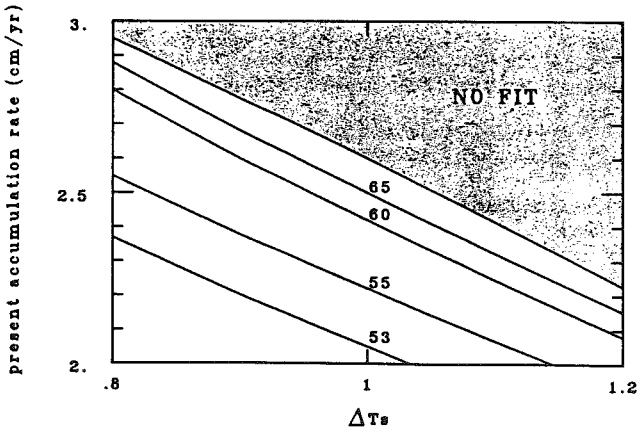


Fig. 5. Values of present accumulation rate giving the best simulation of observation versus ΔT_S, the amplitude of surface-temperature change (for geothermal flux = 53, 55, 60, and 65 mW/m²). In grey, the accumulation rate is too high and no fit can be achieved.

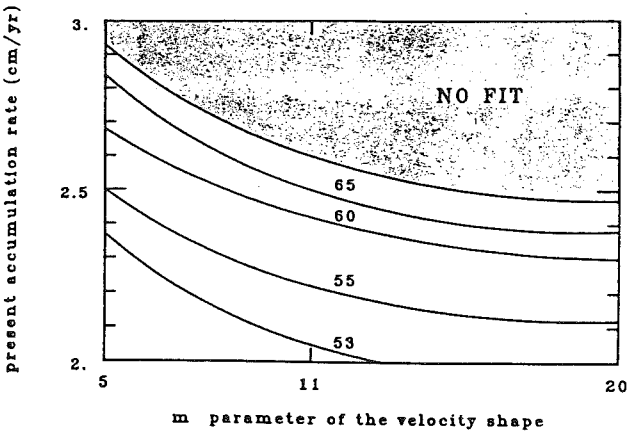


Fig. 6. Values of present accumulation rate giving the best simulation of observation versus m, the parameter describing the velocity shape (for geothermal flux = 53, 55, 60, and 65 mW/m²). In grey, the accumulation rate is too high and no fit can be achieved.

Influence of velocity shape

The sensitivity to the velocity-shape parameter (m) is presented in Figure 6. For these model runs, changing the parameter also moves the limits. For example, a low value of m corresponds to a lower vertical velocity and hence less advection which must be balanced by higher accumulation rates to obtain the same result. This effect is small but, as we have already noticed, vertical velocity is not very sensitive to changes in m.

Our conclusion is that, given the uncertainty in the value of accumulation rate, it is not possible to obtain information about the velocity shape at Vostok. The case may be different at an ice divide, where the range of plausible shape is larger (Bolzan, 1985), or near the coast where horizontal advection is important and is affected more by the value of m than is vertical advection.

Effect of thickness change

Calculations are also performed with $\Delta H = 0$ (no thickness change). This affects the temperature in two different ways. First, with $\Delta H = 0$, the surface vertical velocity follows accumulation rate (Equation (7)) and changes more than in the standard case. For instance, it is greater during the Holocene than during the glacial periods. From that, we can expect a colder temperature in the upper part of the ice sheet. Secondly, ice is warmer when thickness is greater because of the insulating effect and, during the Holocene, H is larger if no change is assumed (see Fig. 3). The two influences balance each other and, finally, temperature profiles differ by less than 0.2 °C between the two cases ($\Delta H = 1$ and $\Delta H = 0$).

Graphical comparison

The differences ($T_0 - T_m$) between the observed and the calculated temperatures is plotted against depth. Figures 7 and 8 present the influence of the different parameters: Figure 7 shows the effect of changing the geothermal flux for a given accumulation rate ($\dot{b}_0 = 2.5$ cm/year); Figure 8 shows the effect of changing the accumulation rate (with $\varphi = 60$ mW/m²). All these computed curves reach the melting point of ice at the base. One can see that the shape of the curve remains the same regardless of the parameter chosen. In Figure 9, we select a few best fits with different values of ΔT_S and $\dot{b}_0$. All the curves are very similar with the difference between observed and computed temperature not exceeding ±0.1 °C. However, they have some oscillations. In order to check whether these oscillations could be due to recent surface-temperature variations not taken into account by the smoothed palaeotemperature record, the model was run with a more detailed record over the last 5000 years using a 10 year time step. This palaeotemperature record was obtained by using a less smoothed spline approximation of isotope data. The result of this experiment is shown in Figure 10. The

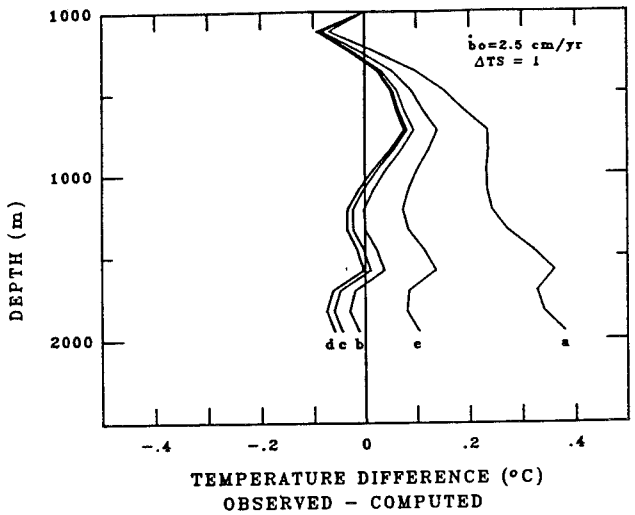


Fig. 7. Influence of geothermal flux. Difference between observed and computed temperature versus depth, for φ = 55 (a), 60 (b), 65 (c), 70 (d), and 75 (e) mW/m^2. For all the curves, $\dot{b}_0$ = 2.5 cm/year and ΔT_S = 1.

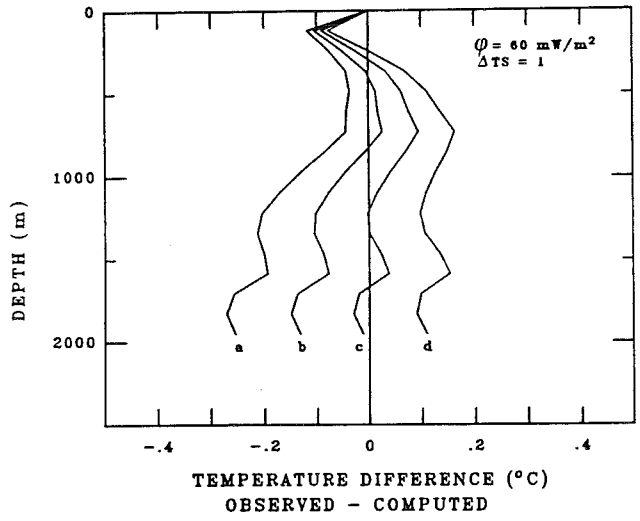


Fig. 8. Influence of accumulation rate. b_0 = 2.3 (a), 2.4 (b), 2.5 (c), and 2.6 (d) cm/year. For all the curves φ = 60 mW/m^2 and ΔT_S = 1.

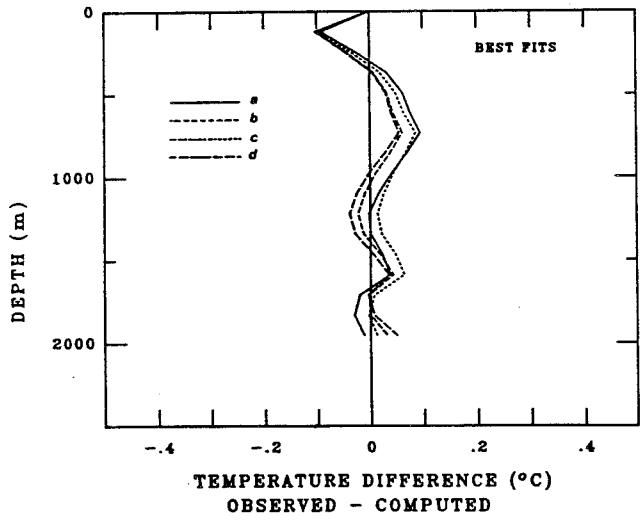


Fig. 9. Best fits between observed and computed temperature profiles. (a) $\dot{b}_0$ = 2.5 cm/year, ΔT_S = 1, φ = 60 mW/m^2; (b) $\dot{b}_0$ = 2.3 cm/year, ΔT_S = 1, φ = 55 mW/m^2; (c) $\dot{b}_0$ = 2.55 cm/year, ΔT_S = 0.8, φ = 55 mW/m^2; (d) $\dot{b}_0$ = 2 cm/year, ΔT_S = 1.2, φ = 60 mW/m^2.

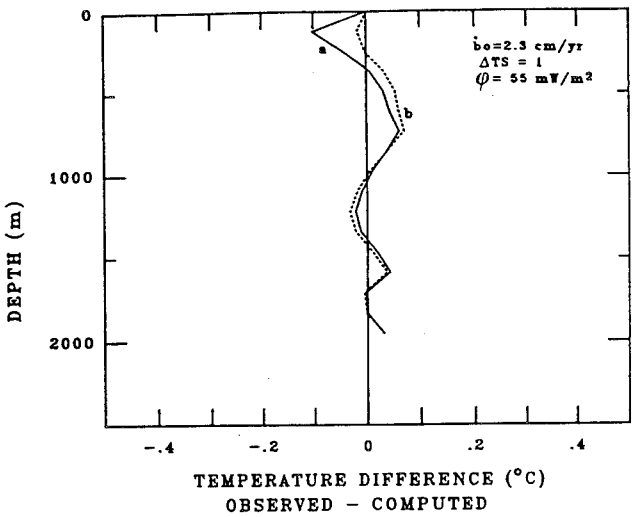


Fig. 10. Influence of the palaeotemperature curve used in the model; (a) with a smoothed curve (standard), (b) with a detailed record.

first 700 m of the computed temperature profile seem to be affected by only 0.03 °C. One explanation of this (small) discrepancy between observed and computed temperature profiles could be that the isotope record does not give a sufficiently precise surface-temperature record for the recent years. The difficulty of extracting the climatic signal in the first 100 m has been documented by Benoist and others (1982).

CONCLUSION

Our model gives a temperature distribution with depth that agrees within 0.1 °C of the measured temperature in the bore hole. The computed profile shows that melting occurs at the ice–rock interface which also agrees with the presence of a subglacial lake near Vostok Station. It is possible to obtain a good fit with several combinations of the model parameters, but certain values of geothermal flux and of accumulation rate can be excluded.

The minimum value of the geothermal flux is 50 mW/m^2 and is slightly greater than that usually assumed for the Precambrian shield (40 mW/m^2). This difference seems small but it considerably affects the temperature distribution and consequently the velocity because of the ice-deformation dependence on temperature. For instance, with a flux of 40 mW/m^2 the basal temperature is about −15 °C, leading to a five times smaller horizontal velocity than one obtains by using the observed temperature profile. This result confirms the Budd and Young (1983) analysis of the upper part of the measured temperature profile.

A maximum value for accumulation rate is also deduced. This value is dependent on the transfer function used to determine the surface temperature at Vostok from the deuterium record. With the standard transfer function ($\partial D/\partial T$ = 6‰), the model-predicted maximum accumulation rate corresponds exactly to the upper limit of the accumulation-rate measurements.

It is interesting to note that none of the standard parameters can be excluded. This conclusion is especially important for the chronology of the Vostok record which is very sensitive to the accumulation rate. The upper limit for the accumulation rate found in this work confirms the dating given by Lorius and others (1985).

ACKNOWLEDGEMENTS

This study was initiated by the Programme National d'Étude de la Dynamique du Climat (CNRS). I thank Professor L. Lliboutry, Professor W. Budd, R. Jenssen, D. Dahl-Jenssen, M. Vallon, and T. Sowers for stimulating discusssions.

REFERENCES

Barkov, N.I. and N.N. Uvarov. 1973. Geophysical investigations of the borehole at Vostok Station in 1970. *Sov. Antarct. Exped. Inf. Bull.*, 8(7), 380-383.

Benoist, J.P., J. Jouzel, C. Lorius, L. Merlivat, and M. Pourchet. 1982. Isotope climatic record over the last 2.5 KA from Dome C, Antarctica, ice cores. *Ann. Glaciol.*, 3, 17-22.

Bolzan, J.F. 1985. Ice flow at the Dome C ice divide based on a deep temperature profile. *J. Geophys. Res.*, 90(D5), 8111-8124.

Budd, W.F. and N.W. Young. 1983. Application of modelling techniques to measured profiles of temperatures and isotopes. *In* Robin G. de Q., *ed. The climatic record in polar ice sheets.* Cambridge, etc., Cambridge University Press, 150-177.

Budd, W.F., D. Jenssen, and U. Radok. 1971. Derived physical characteristics of the Antarctic ice sheet. *ANARE Interim. Rep., Ser. A*(IV). *Glaciol.* (Publ. 120.)

Dahl-Jensen, D. and S.J. Johnsen. 1986. Palaeotemperatures still exist in Greenland ice sheet. *Nature*, 320(6059), 250-252.

Drewry, D.J. 1975. Terrain units in eastern Antarctica. *Nature*, 256(5514), 194-195.

Drewry, D.J., *ed.* 1983. *Antarctica: glaciological and geophysical map folio.* Cambridge, University of Cambridge. Scott Polar Research Institute.

Drury, M.J., V.S. Allen, and A.M. Jessop. 1984. The measurement of thermal diffusivity of rock cores. *Tectonophysics*, 103, 321-333.

Jenssen, D. 1977. A three-dimensional polar ice-sheet model. *J. Glaciol.*, 18(80), 373-389.

Jenssen, D. and J.A. Campbell. 1983. Heat conduction studies. *In* Robin G. de Q., *ed. The climatic record in polar ice sheets.* Cambridge, etc., Cambridge University Press, 125-138.

Jouzel, J., *and 6 others.* 1987. Vostok ice core: a continuous isotope temperature record over the last climatic cycle (160,000 years). *Nature*, 329(6138), 403-408.

Kapitsa, A.P. 1964. New data on ice thickness in the central regions of Antarctica. *Sov. Antarct. Exped. Inf. Bull.*, 2, 247-250.

Kovrova, A.M. 1964. Characteristics of surface inversions in Antarctica. *Sov. Antarct. Exped. Inf. Bull.*, 5(4), 227-228.

Lee, W.H.K. 1970. On the global variations of terrrestrial heat-flow. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 2, 332-341.

Lliboutry, L. 1981. A critical review of analytical approximate solutions for steady state velocities and temperatures in cold ice-sheets. *Z. Gletscherkd. Glazialgeol.*, 15(2), 1979, 135-148.

Lliboutry, L. 1987. *Very slow flow of solids: basics of modeling in geodynamics and glaciology.* Dordrecht, etc., Martinus Nijhoff.

Lorius, C., *and 6 others.* 1985. A 150,000 year climatic record from Antarctic ice. *Nature*, 316(6029), 591-596.

Raisbeck, G.M., F. Yiou, D. Bourles, C. Lorius, J. Jouzel, and N.I. Barkov. 1987. Evidence for two intervals of enhanced ^{10}Be deposition in Antarctic ice during the last glacial period. *Nature*, 326(6110), 273-277.

Ritz, C. 1987. Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets. *International Association of Hydrological Sciences Publication* 170 (Symposium at Vancouver 1987 — *The Physical Basis of Ice Sheet Modelling*), 207-216.

Robin, G. de Q. 1977. Ice cores and climatic change. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B*, 280, 143-168.

Robin, G. de Q., D.J. Drewry, and D.T. Meldrum. 1977. International studies of ice sheet and bedrock. *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. B*, 279(963), 185-196.

Vostretsov, R.N., D.N. Dmitriyev, O.F. Putikov, K.V. Blinov, and S.V. Mitin. 1984. Osnovnyye rezul'taty geofizicheskikh issledovaniy glubokikh skvazhhin i ledyanogo kerna v Vostochnoy Antarktide [The main results of geophysical studies of deep boreholes and the ice core in East Antarctica]. *Mater. Glyatsiol. Issled.*, 51, 172-178.

Weller, G.E. and P. Schwerdtfeger. 1971. New data on the thermal conductivity of natural snow. *J. Glaciol.*, 10(59), 309-311.

Yen, Y.-C. 1981. Review of critical properties of snow-ice and sea-ice. *CRREL Rep.* 81-10.

Young, N.W., M. Pourchet, V.M. Kotlyakov, P.A. Korolev, and M.B. Dyugerov. 1982. Accumulation distribution in the AIGP area, Antarctica: 90°E–150°E. *Ann. Glaciol.*, 3, 333-338.

CONCLUSION

Les enregistrements isotopiques permettent de reconstituer les variations de la température en surface au cours du temps dans la région du site de forage. Nous avons tout d'abord exposé une méthode (basée sur la séparation des termes temporels et spatiaux) pour étendre ces résultats et estimer la température en surface pour l'ensemble de la calotte ou au moins pour une ligne de courant. Cette paramétrisation de la température en surface sera utilisée dans le modèle d'évolution du chapitre IV.

Nous avons ensuite développé un modèle simple, basé sur le bilan de vapeur d'eau, pour évaluer en un site, les changements d'accumulation en fonction des changements de température. Cette approche, encore rudimentaire, indique que l'accumulation dépend non seulement de la température mais aussi des mécanismes par lesquels les masses d'air se refroidissent (détente, déficit radiatif ou subsidence).

En chaque site, il faut tenir compte de l'importance relative de ces mécanismes pour estimer les variations d'accumulation au cours du temps. Sur le Plateau Antarctique, dont l'exemple typique est le site de Vostok, l'accumulation est principalement gouvernée par la température ce qui donne une accumulation en période glaciaire égale à 50 % de l'accumulation actuelle, ce résultat étant en accord avec les accumulations passées déduites du ^{10}Be. Par contre pour les régions dont la pente de surface est relativement forte, (altitude de la surface entre 1000 m et 3000 m) et où le refroidissement de l'air par montée adiabatique est prédominant, l'intensification du transport durant les périodes froides contrecarre l'effet de la température (accumulation glaciaire égale à 80 % de l'accumulation actuelle). Notre paramétrisation est sensiblement différente de celle habituellement utilisée dans les modèles d'évolution (Robin 1988, Huybrechts 1990). Les auteurs en effet ne prennent en compte que l'effet de la température ce qui conduit à des accumulations 50 % plus faibles durant les périodes froides pour n'importe quel site de l'Antarctique. Il nous parait dangereux de s'appuyer sur les résultats de Vostok comme le fait Huybrechts (1990) pour justifier le même type de paramétrisation en des sites où les processus de précipitation sont différents.

En ce qui concerne la chronologie du forage de Vostok, obtenue par modélisation de l'écoulement, l'étude de sensibilité indique que pour ce type de site à très faible accumulation, l'âge calculé est surtout sensible aux caractéristiques locales de l'accumulation. Pour améliorer cette datation, la première urgence est l'obtention de données d'accumulation en amont de Vostok, l'amélioration du modèle ne vient qu'en second lieu (dans l'optique datation) et nécessite elle aussi l'acquisition de données (topographie détaillée du socle, déformations en surface).

Le désaccord qui apparaissait entre la première datation de Vostok (Lorius et al. 1985) et la chronologie des carottes marines pourrait s'expliquer par une variation de l'accumulation en amont de Vostok et entre donc dans la sensibilité du modèle de datation.

Une conséquence de la sensibilité de l'âge calculé à l'accumulation locale est que des données indépendantes sur l'âge de la glace ne peuvent pas amener d'information sur l'écoulement à Vostok. Par contre dans le cas de Dôme B, si l'on suppose que les signaux climatiques à Vostok et à Dôme B sont relativement en phase, (les deux sites ne sont éloignés que de 300 km), les vitesses verticales de type B proposées par Bolzan (1985) ne peuvent pas donner de chronologie appropriée. Notre conclusion est que, soit ce type de vitesse verticale n'est pas valable, soit le site de Dôme B n'est pas réellement un dôme (au sens mécanique, voir chapitre II).

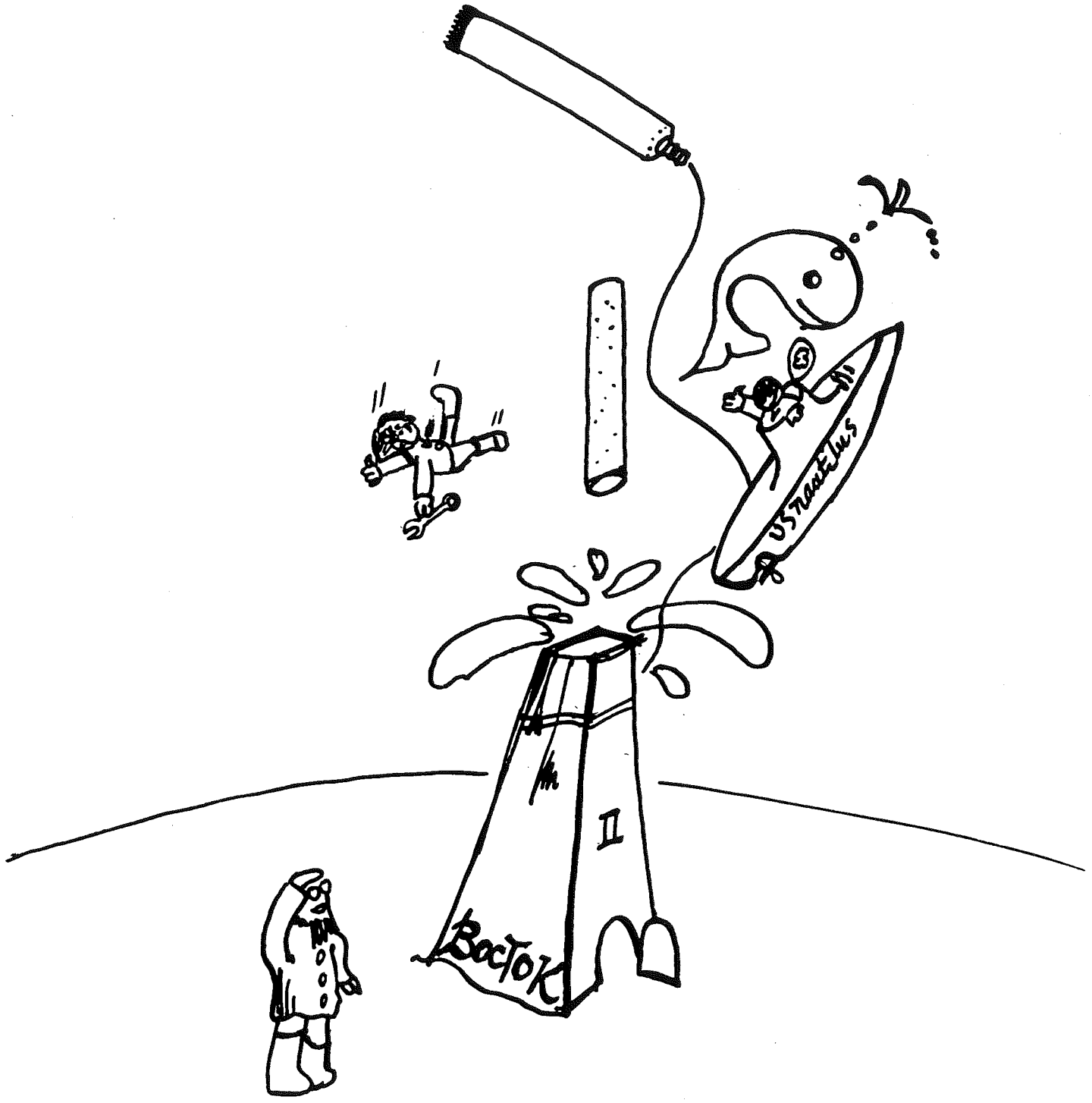
L'étude du profil de température mesuré dans le forage de Vostok apporte principalement des informations sur le flux géothermique. Ceci est particulièrement intéressant car en général le flux géothermique est très difficile à déterminer (sous 3000 m de glace) et de plus le champ de température y est très sensible.

La valeur minimum trouvée (50 $mW/m^{2)}$ est supérieure à celle utilisée par certains auteurs qui estiment que l'Antarctique de l'Est est un bouclier précambrien et en déduisent une valeur du flux géothermique (40 mW/m^2 d'après Lee 1970, 46 mW/m^2 d'après Sclater et al. 1980). Si l'Antarctique orientale était entièrement un bouclier précambrien, il n'y aurait pas de montagne de 4000 m vers le Ridge B (cf. la topographie sous-glaciaire sans glace après réajustement isostatique, Drewry, 1983). L'écart sur le flux géothermiqe peut paraître

faible, mais prendre 50 mW/m^2 et non 40 mW/m^2 conduit à une différence de température basale de 15 °C.

Au cours de cette étude, nous montrons également que la glace est au point de fusion à l'interface glace-socle ce qui concorde avec la présence d'un lac sous-glaciaire indiqué par Robin et al. (1977).

Un prolongement possible de ce type de travail (ou avec une méthode inverse plus élaborée) serait d'estimer le flux géothermique dans les régions où des lacs sous-glaciaires ont été observés par écho radar.



Un lac sous-glaciaire à Vostok ?
(mis en image par Louis Reynaud)

CHAPITRE IV

VARIATIONS D'EPAISSEUR AU COURS DU TEMPS

MODELE D'EVOLUTION AVEC COUPLAGE

VITESSE-TEMPERATURE

APPLICATION A LA LIGNE DE COURANT DE VOSTOK

INTRODUCTION

Déterminer l'évolution des calottes glaciaires au cours du temps, en particulier sous l'action du climat, est un des objectifs de la modélisation à grande échelle des écoulements de glace. L'un des intérêts de ce type d'étude est d'évaluer quelles ont été les variations passées d'une calotte donnée (l'Antarctique par exemple) en réponse à l'alternance de périodes chaudes et froides et d'estimer en retour le rôle de cette calotte dans l'évolution du climat ou du niveau des océans. D'autre part une meilleure connaissance de la position (variant avec le temps) de la surface de la calotte permet d'interpréter d'une façon plus réaliste les enregistrements climatiques issus des carottages glaciaires.

Le modèle que nous présentons dans ce chapitre simule, pour une ligne de courant, l'évolution de la géométrie de la calotte glaciaire. Ses principales caractéristiques par rapport aux modèles existants, sont les suivantes : C'est un modèle couplé (écoulement-température) et les phénomènes thermiques sont traités d'une façon détaillée y compris l'existence éventuelle d'une couche basale tempérée qui a notre connaissance n'a jamais été introduite dans un modèle d'évolution ; le calcul est fait pour deux dimensions (dans un plan vertical) mais de plus, nous tenons compte de la convergence des lignes de courant ; Les mouvements de la ligne d'échouage sont déterminés en fonction de la dynamique de la calotte glaciaire, de celle de l'ice-shelf et du niveau des mers ; la ligne de courant étudiée passant par le glacier Byrd, les effets du frottement sur les bords de la vallée sont calculés à l'aide d'une loi de frottement.

Dans un modèle d'évolution, la position de la surface est calculée à chaque pas de temps en fonction du bilan en surface (accumulation, ablation) et de la vitesse d'écoulement. Ce calcul est basé sur la conservation de la masse et peut se décrire d'une façon qualitative : Si la vitesse d'écoulement est insuffisante pour évacuer les précipitations se produisant en amont, la couche de glace s'épaissit (et inversement).

La vitesse d'écoulement dépend elle même de la géométrie de la calotte (pente de la surface, épaisseur) et du champ de température dans la glace. Il faut donc déterminer les champs couplés de température et de vitesse en fonction de la géométrie de la calotte et introduire les vitesses d'écoulement ainsi obtenues dans l'équation de conservation de la masse pour en déduire la nouvelle géométrie.

Le champ de température est obtenu avec le modèle décrit au chapitre (II). Dans ce chapitre (IV), nous développons d'abord le calcul du champ de vitesse dans la calotte glaciaire puis le couplage température-vitesse. Pour résoudre l'équation d'évolution il est nécessaire de calculer le champ de vitesse jusqu'à la jonction entre la calotte glaciaire et l'ice-shelf. En Antarctique toute ligne de courant "active" aboutit forcément dans la mer et nous appelons ice-shelf la partie flottante de la nappe de glace même quand celle-ci à la forme d'un glacier. La difficulté vient de ce que la position de cette jonction peut varier dans le temps soit en raison des changements de géométrie de la calotte soit par suite de variations du niveau des mers. Pour résoudre ce problème nous avons développé un modèle simple d'ice-shelf (à une dimension horizontale et intégré verticalement). De plus, dans la partie inférieure de la calotte glaciaire (juste en amont de la jonction) la vitesse d'écoulement dépend non seulement de la pente de la surface de la calotte (approximation de l'écoulement par cisaillement donnée au chapitre I) mais également (d'une façon simplifiée) des contraintes longitudinales. L'équation d'évolution est ensuite résolue pour l'ensemble "calotte glaciaire - ice-shelf" ce qui permet de simuler l'évolution au cours du temps de la position de la jonction.

Ce modèle est appliqué à la ligne de courant sur laquelle est situé le forage de Vostok (Antarctique de l'Est). Nous étudions tout d'abord l'influence des divers paramètres du modèle sur le profil de la calotte pour des conditions climatiques stationnaires. Nous calculons ensuite les variations d'épaisseur en réponse à des forçages climatiques (variations de

température en surface, d'accumulation et de niveau des mers). La valeur des résultats obtenus est estimée à l'aide d'études de sensibilité.

IV.1 DESCRIPTION DU MODELE

IV.1.A Champ de vitesse dans la calotte glaciaire.

Notre modèle calcule les vitesses et les températures dans un plan vertical (deux dimensions). L'axe horizontal (x) est choisi le long d'une ligne de courant (de la même manière que dans le chapitre II). Les notations sont celles données au chapitre (I) et nous les rappelons brièvement. L'axe y est horizontal et transversal à l'écoulement, l'axe z est vertical, dirigé vers le bas son origine étant située au niveau de la mer actuel. L'altitude de la surface est notée E (coordonnée z=-E) et celle du socle B (z=-B). La divergence (ou convergence) des lignes de courant est prise en compte non seulement dans la conservation de la masse (voir plus bas l'évolution de la géométrie) mais aussi (dans certains cas) dans le calcul des contraintes. Pour calculer les vitesses d'écoulement à la jonction avec l'ice-shelf, la contrainte longitudinale déviatorique (σ'_x) est également prise en compte avec une méthode semblable à celle de Van der Veen (1985).

- Détermination de la contrainte de cisaillement τ_{xz}.

La ligne de courant que nous considérons est longue de 1500 km, l'épaisseur de la nappe de glace étant environ 3 km. Partant de cette disproportion entre les dimensions verticales et horizontales un certain nombre de simplifications peuvent être faites dans les équations d'équilibre quasi-statique (I.8). Nous développons ici une approximation assez semblable à celle donnée par exemple par Alley et Whillans (1984) ou Huybrechts (1990_b), ce qui permet de prendre en compte l'influence des contraintes longitudinales déviatoriques.

Dans une calotte glaciaire, les termes $\partial\tau_{xz}/\partial x$ et $\partial\tau_{xy}/\partial y$ dans la troisième équation de l'équilibre quasi-statique (I.8) peuvent être négligés devant $\partial\sigma_z/\partial z$. D'une part, les dérivées

horizontales des contraintes sont faibles devant les dérivées verticales, en raison du rapport des dimensions verticales et horizontales. D'autre part, les contraintes de cisaillement (τ_{xz}, τ_{yz}) sont elles mêmes faibles devant les pressions (σ_z). Par exemple, la contrainte de cisaillement dépasse rarement 1 bar (à la base des calottes) alors que la pression hydrostatique prend cette valeur de 1 bar à seulement une dizaine de mètres de profondeur pour atteindre environ 300 bars au fond. D'après Budd (1970) les termes ($\partial\tau_{xz}/\partial x$ et $\partial\tau_{yz}/\partial y$) peuvent être négligés dans le calcul de la contrainte de cisaillement lorsque l'échelle horizontale considérée est supérieure à quatre épaisseurs, condition amplement satisfaite dans notre cas car la maille horizontale de notre modèle est 50 km ce qui représente plus de 15 épaisseurs.

La contrainte σ_z s'obtient donc par intégration depuis la surface :

$$\sigma_z = -\rho_g\, g\, (E + z) \qquad \textbf{(IV.1)}$$

A partir des relations ($2\,\sigma'_x+\sigma'_y= \sigma_x - \sigma_z$) et ($2\,\sigma'_y+\sigma'_x= \sigma_y - \sigma_z$) qui se déduisent de ($\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z=0$) et de la définition du déviateur des contraintes, les équations d'équilibre quasi-statique (I.8) peuvent également s'écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho_g\, g\, \dfrac{\partial E}{\partial x} - 2\,\dfrac{\partial \sigma'_x}{\partial x} - \dfrac{\partial \sigma'_y}{\partial x} - \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho_g\, g\, \dfrac{\partial E}{\partial y} - \dfrac{\partial \sigma'_x}{\partial y} - 2\,\dfrac{\partial \sigma'_y}{\partial y} - \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \end{cases} \qquad \textbf{(IV.2)}$$

Avec le référentiel choisi, seule la première équation est utilisée. Nous supposons que dans les deux équations, les termes dûs aux contraintes σ'_x, σ'_y et τ_{xy} sont négligeables. L'écoulement est alors toujours dirigé le long de la plus grande pente de la surface (à toute profondeur).

Généralement dans les modèles d'évolution à grande échelle (couvrant au moins une ligne de courant), seul le terme dépendant de la pente de la surface ($\partial E/\partial x$) est pris en compte pour le calcul de la contrainte de cisaillement (τ_{xz}). Certains auteurs (Alley et Whillans, 1984, Huybrechts 1990$_b$) calculent la contrainte σ'_x et l'introduisent dans la loi de comportement mais négligent le terme $\partial\sigma'_x/\partial x$ dans les équations d'équilibre quasi statique. Van der Veen

(1985) par contre la prend en compte (sous une forme analytique car son modèle qui ne tient pas compte de la température le permet).

Dans certaines zones, les termes liés aux contraintes (σ'_x, σ'_y et τ_{xy}) dans l'équation (IV.2) pourraient cependant avoir une certaine importance par rapport au terme (ρ_g g $\partial E/\partial x$).

Ces zones sont les suivantes :

- Le dôme où la pente de la surface ($\partial E/\partial x$) est nulle. Ainsi que nous l'avons souligné au chapitre II, cela n'affecte pas la vitesse horizontale qui est de toute façon égale à zéro en ce point. La vitesse verticale présente un profil vertical spécifique au Dôme mais cela n'a d'influence que sur la température au Dôme lui même (l'advection horizontale de température est nulle). Dans le cadre d'un modèle d'évolution il nous parait donc inutile de résoudre de façon complète le champ de contrainte au Dôme (une telle résolution serait par contre très utile pour les études locales telles que l'interprétation d'un forage).

- Les régions où la pente du socle varie rapidement le long de l'écoulement. Il est généralement admis que l'effet des irrégularités du socle sur les contraintes est négligeable lorsque le socle est lissé sur une échelle supérieure à 10 épaisseurs ce qui est le cas dans notre modèle.

- Les zones de forte convergence ou divergence des lignes de courant. Nous cherchons en particulier à prendre en compte les caractéristiques de la ligne de courant que nous étudions (celle sur laquelle est située la station de Vostok). Cette ligne de courant aboutit dans un vaste bassin qui converge vers le glacier Byrd qui lui même se "jette" dans l'ice-shelf de Ross (voir figure IV.1). Une telle convergence doit induire une force résistante qui diminue la vitesse d'écoulement (par rapport au cas parallèle).

- La jonction entre la calotte glaciaire et l'ice-shelf car ce dernier impose une traction ce qui accroit la vitesse d'écoulement sur le bord de la calotte.

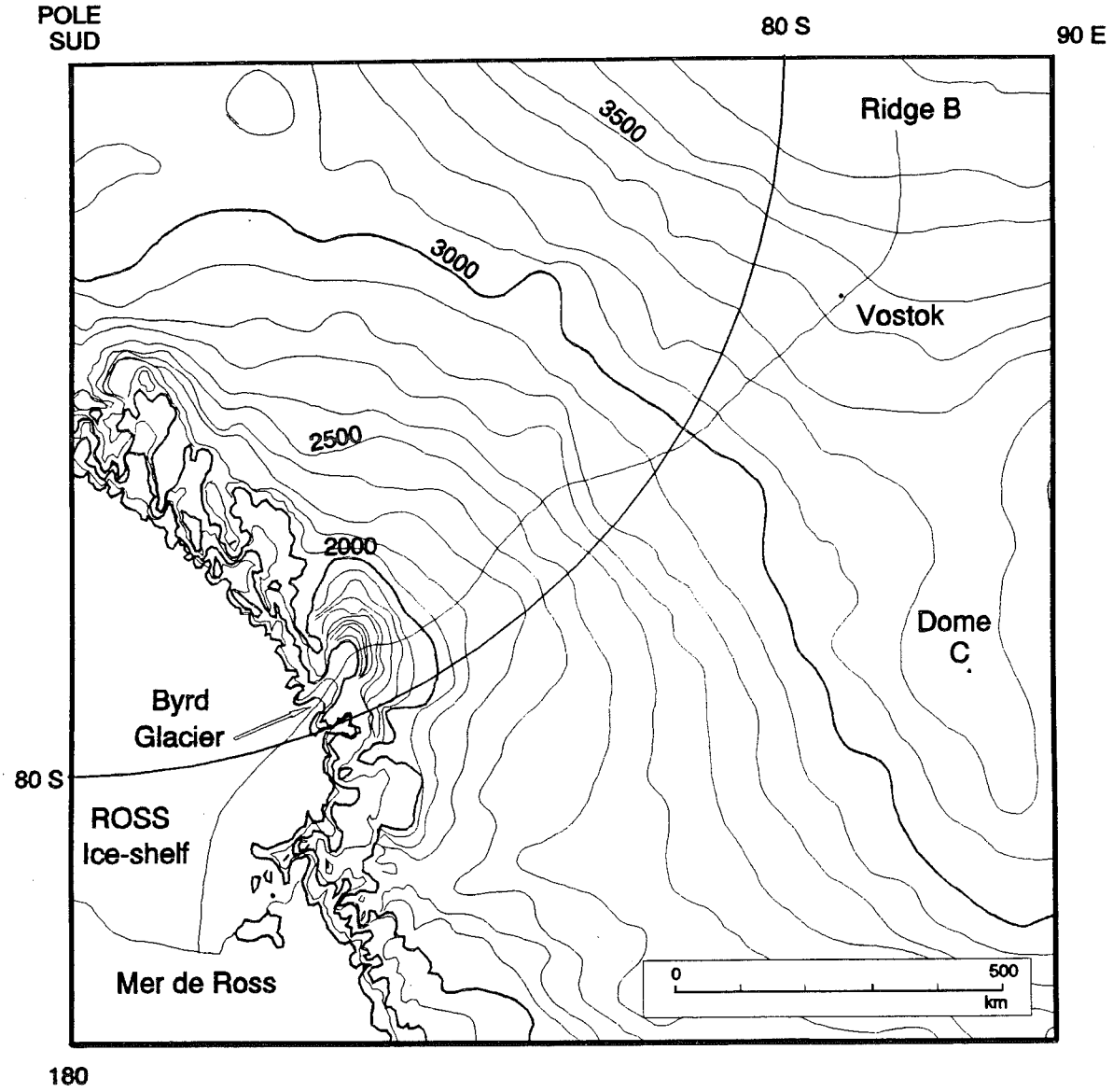


Figure IV.1 Carte d'une partie de l'Antarctique de l'Est (d'après Drewry, 1983).
La ligne de courant étudiée commence à Ridge B, passe par Vostok, le Byrd Glacier et aboutit dans le Ross Ice Shelf.

- Lorsque la nappe de glace s'écoule dans une vallée, le frottement sur les flancs de la vallée induit alors une contrainte τ_{xy} sur le bord du glacier. Ce processus doit être pris en compte pour la ligne de courant que nous étudions car elle se termine par le glacier Byrd. .

Nous prendrons en compte les trois derniers cas, pour lesquels l'influence des contraintes (σ'_x, σ'_y et τ_{xy}) peut être sensible à une échelle supérieure à la maille du modèle. Nous détaillerons comment sont estimées les contraintes (σ'_x, σ'_y, τ_{xy}) dans le paragraphe traitant de la zone de jonction calotte - ice-shelf.

Bien que (σ'_x, σ'_y et τ_{xy}) soient négligeables sur la majeure partie du domaine, nous donnons toutes les équations en fonction de ces contraintes. Lorsqu'elles sont considérées comme nulles nous retrouvons la très classique approximation de l'écoulement par cisaillement décrite au chapitre (I). Dans le cas général, la contrainte τ_{xz} est donnée par :

$$\tau_{xz}(z) = \rho_g\, g\, (E + z)\, \frac{\partial E}{\partial x} - 2 \int_{-E}^{z} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x}\, dz' - \int_{-E}^{z} \frac{\partial \sigma'_y}{\partial x}\, dz' - \int_{-E}^{z} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dz' \qquad \textbf{(IV.3)}$$

- Vitesse horizontale due à la déformation.

D'après la loi de comportement (I.11,I.12) la déformation $\dot{\varepsilon}_{xz}$ s'écrit :

$$2\, \dot{\varepsilon}_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = B_T\, \tau^{n-1}\, \tau_{xz} \qquad \textbf{(IV.4)}$$

où B_T est fonction de la température selon une loi d'Arrhenius (I.13), n est l'exposant de la loi de comportement et la cission efficace (τ) est donnée par (I.7).

Le terme ($\partial u_z/\partial x$) est négligeable devant ($\partial u_x/\partial z$). D'une part (sauf au dôme) la vitesse verticale est au moins un ordre de grandeur plus faible que la vitesse horizontale, d'autre part

les dérivées horizontales sont faibles devant les dérivées verticales. A partir du champ de température, le coefficient de la loi de comportement (B_T) peut être déterminé à toute profondeur et la vitesse horizontale due à la déformation s'obtient en intégrant (IV.4).

• *Loi de déformation : valeurs de l'exposant et du coefficient.*

Les processus de déformation et par conséquent le coefficient et l'exposant de la loi rhéologique, dépendent de la partie du glacier considérée (voir chapitre I). Nous supposons ici que la glace est isotrope.

Notre modèle est construit de façon à pouvoir introduire aisément des paramètres variables de la loi de déformation. Il serait par exemple possible d'imposer une valeur de B_T différente pour certaines couches du glacier (enhancement factor suggéré par Dahl-Jensen et Gundestrup 1987). Nous soulignons que l'anisotropie ne peut pas être prise en compte simplement en changeant la valeur de B_T pour certaines couches. Dans le cadre d'un modèle à grande échelle comme le nôtre, le vrai problème mécanique n'est pas traité (en raison de l'échelle horizontale considérée) ce qui rend impossible l'introduction rigoureuse de l'anisotropie.

En pratique, nous nous sommes limités à utiliser une loi unique pour l'ensemble du glacier. Si l'on considère les températures et contraintes régnant à la base de l'Antarctique, il apparait que la glace basale subit presque partout une recristallisation dynamique. Comme la déformation est surtout localisée à la base du glacier, nous prenons la loi de déformation correspondant à cette glace basale (avec n=3 et le coefficient $B_{T\ \text{tertiaire}}$ donné sur la figure (I.8) et rappelé plus loin dans le tableau IV.1). Etant données les approximations faites sur la loi de déformation, il nous semble cependant indispensable d'étudier la sensibilité du modèle à la valeur de B_T.

Le coefficient (B_T) de la loi de comportement dépend également de la teneur en eau de la glace. Dans les calottes glaciaires, il ne peut y avoir d'eau liquide que dans la couche basale tempérée (CBT) lorsqu'elle existe. Pour déterminer la teneur en eau dans la CBT (et le coefficient B_{temp} de la loi de comportement), il faudrait modéliser l'hydrologie dans cette

couche, c'est à dire considérer la teneur en eau comme une variable supplémentaire et calculer son écoulement. C'est la démarche adoptée par Hutter (1982), Blatter (1991) qui dans des modèles à petite échelle, utilisent une loi de Darcy pour modéliser l'écoulement de l'eau. A grande échelle, un tel raffinement ne nous parait pas indispensable étant données les autres approximations du modèle (en particulier sur la loi de glissement), d'autant plus que la couche basale tempérée est d'épaisseur relativement faible (quelques dizaines de mètres) et que le calcul de l'hydrologie nécessiterait un sous-maillage spécifique assez lourd numériquement.

Pour l'instant nous nous limitons à une étude de sensibilité : Soit nous considérons que toute l'eau s'écoule vers le socle et que par conséquent la teneur en eau est nulle ; Soit une teneur maximum est rapidement atteinte. La teneur en eau maximum que nous utilisons (water=2%) est choisie d'après des mesures faites sur le glacier d'Argentière (Vallon et al. 1976, Lliboutry et Duval 1985). Le coefficient correspondant est B_{temp} =0.936 bar^{-3} an^{-1}.

- Intégration numérique.

En tenant compte de la vitesse basale de glissement $u_{sl}(x)$ ($u_{sl}(x)=u_x(x,-B)$), la vitesse horizontale s'écrit :

$$u_x(x,z) = u_{sl}(x) + \int_{-B}^{z} B_T(x,z') \left(\tau(x,z')\right)^{n-1} \tau_{xz}(x,z')\, dz' \qquad \text{(IV.5)}$$

L'intégration de la vitesse se fait indépendamment pour chaque colonne x. Pour des raisons (développées plus loin) liées au couplage avec la température et à la résolution de l'équation d'évolution, nous utilisons une grille horizontale décalée (représentée sur la figure IV.2). La température est calculée sur les noeuds (que nous appelons noeuds majeurs) où sont également définies l'altitude de la surface et celle du socle. La vitesse horizontale est calculée aux mailles 1/2 (noeuds mineurs). En ce qui concerne la dimension verticale, nous utilisons le maillage réduit (ζ), déjà décrit au chapitre (II). Dans tout ce qui suit les dérivées horizontales sont effectuées en tenant compte de la formule de dérivation dans le repère ζ (II.44).

Les contraintes (τ_{xy}, σ'_x, et σ'_y) sont supposées connues en chaque noeud de la grille. La méthode utilisée pour les calculer est décrite en (IV.1.C, modélisation de la zone de

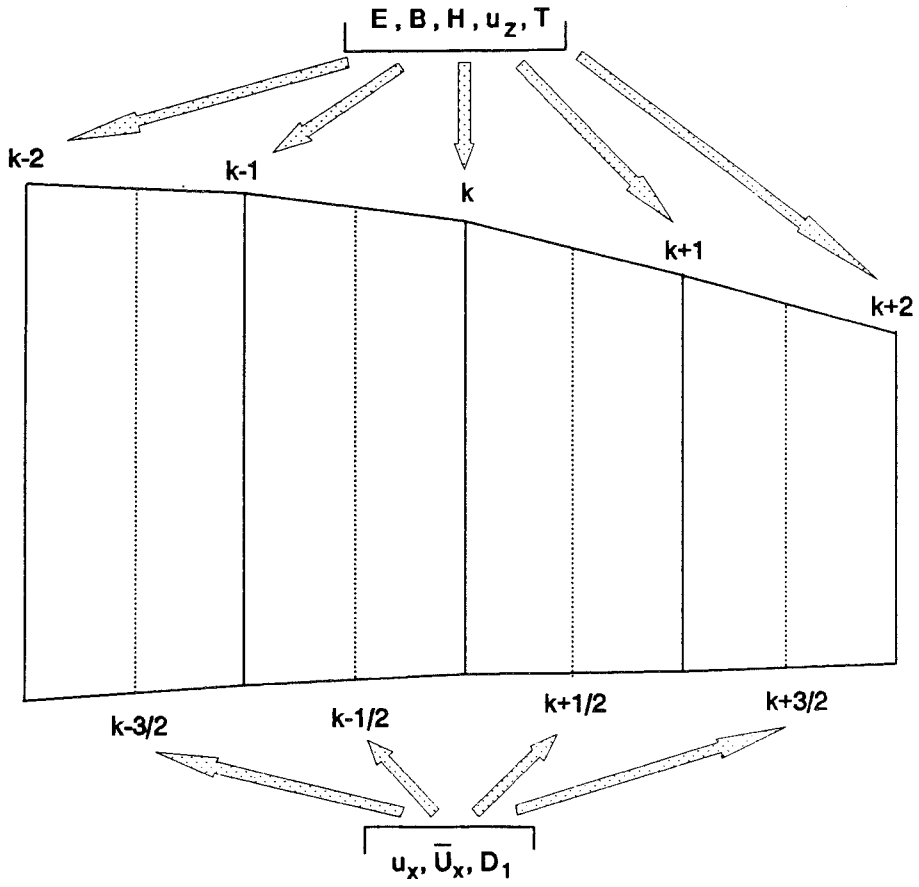


figure IV.2 Grille décalée
Les variables E (altitude de la surface), B (altitude du socle), H (épaisseur), u_z (vitesse verticale) et T (température) sont calculées sur les colonnes représentées en traits pleins. La vitesse horizontale (u_x) et la diffusivité (définie par IV.37) sont calculées sur les colonnes intermédiaires (en pointillé).

transition). τ_{xz} s'obtient d'après l'équation (IV.3) et est calculée sur les noeuds mineurs. Les termes qui ne peuvent être intégrés de façon analytique, sont intégrés numériquement par la méthode des trapèzes. La cission efficace τ est donnée par (I.7).

L'intégration de la vitesse horizontale (équation IV.5) se fait également de façon numérique, mais cette fois par la méthode de Simpson. Nous utilisons cette méthode car la déformation n'est pas linéaire en fonction de la profondeur. De plus, afin d'améliorer la précision de cette intégration, et surtout en raison du caractère exponentiel de la loi d'Arrhenius, nous divisons chaque maille verticale en sous mailles (au moins 2). La température sur chaque sous-noeud est donnée par une interpolation bilinéaire ce qui donne la valeur de B_T. S'il existe une couche basale tempérée, la température est évidemment égale à la température de fusion dans cette couche et linéaire entre le sommet de la CBT et le noeud situé au dessus.

L'intégration numérique est effectuée une seconde fois afin de calculer $\bar{U}_x(x)$, la vitesse horizontale moyennée sur l'épaisseur.

$$\bar{U}_x(x) = u_{sl}(x) + \frac{1}{H(x)} \int_{-E}^{-B} u_x(x,z')\, dz' \qquad \textbf{(IV.6)}$$

- Vitesse basale, loi de glissement.

Une loi de glissement relie la contrainte de cisaillement à la base du glacier τ_b, la pression effective N_{eff} et la vitesse basale u_{sl} (voir chaptre I).

Parmi les lois de glissement existantes, celle de Lliboutry (1987_a) nous paraît la plus complète car elle traite à la fois les faibles et les fortes vitesses de glissement. Cependant cette loi dépend de trois paramètres et nous ne disposons pas de données suffisantes pour ajuster ces paramètres. Plutôt que de faire des études de sensibilité sur ces trois paramètres nous préférons nous limiter à une loi (I.17) plus simple (et peut-être moins justifiée physiquement). Nous supposons que le glissement n'existe que lorsque la base est au point

de fusion. Pour tenir compte de la possibilité que le glissement dépende également de l'épaisseur δ de la couche basale tempérée nous effectuerons des tests de sensibilité en supposant soit que (k_{sl}), le coefficient de la loi de glissement soit constant, soit qu'il varie linéairement avec δ. Il faut cependant souligner qu'il sera a priori difficile de différencier l'influence de δ sur la loi de glissement de celle de la teneur en eau dans la CBT sur le coefficient de la loi de déformation. Finalement nous écrivons la vitesse basale :

$$u_{sl}(x) = \frac{k_{sl}\ \tau_b(x)^3}{N_{eff}(x)} \qquad k_{sl} = \text{constante} \quad \text{ou} \quad k_{sl} \text{ proportionnel à } \delta$$

avec (IV.7)

$$\tau_b(x) = \tau_{xz}(x, -B)$$

et

$$N_{eff}(x) = \rho_g\ g\ H - p_w \qquad p_w \text{ étant la pression d'eau sous-glaciaire}$$

La formulation (IV.7) de la pression effective n'est valable que pour un socle horizontal (transversalement). Dans le cas d'un glacier de vallée, il faudrait faire la moyenne sur la section du glacier, voir plus loin l'équation (IV.30). Pour calculer rigoureusement la pression d'eau, il faudrait modéliser l'hydrologie à la base du glacier (dans la glace et dans le socle), calcul d'autant plus compliqué que nous ne connaissons pas les propriétés du sol (perméabilité). Dans notre modèle nous ne considérons la pression d'eau sous-glaciaire que dans la zone pour laquelle le socle est situé sous le niveau de l'océan et qui est connectée avec la mer. La pression d'eau s'écrit :

$$p_w = \rho_w\ g\ (\ E_{sea} - B\ ) \qquad \text{(IV.8)}$$

où E_{sea} est la hauteur du niveau marin par rapport au niveau actuel. (E_{sea} est positif quand le niveau des océans est supérieur au niveau actuel et nous rappelons que B l'altitude du socle est positive lorsque le socle est situé au dessus du niveau actuel de l'océan). Nous considérons que le lit du glacier est connecté avec la mer quand la base du glacier est tempérée sur tout le trajet entre le lieu considéré et l'océan.

En calculant ainsi la pression effective, nous prenons mal en compte le glissement du glacier dans les régions intérieures du continent et en particulier au-dessus des lacs sous-glaciaires (où pourtant du glissement doit exister car la pente de la surface y est quasi nulle). Nous supposons cependant que ces zones sont suffisamment petites pour ne pas avoir d'effet à grande échelle.

Avec une telle loi, et si le socle est transversalement horizontal, la pression effective est nulle lorsque le glacier commence à flotter sur la mer c'est à dire à la jonction entre la calotte glaciaire et l'ice-shelf. La vitesse de glissement serait alors infinie. En pratique, lorsque nous calculons la vitesse en un point, nous prenons la pression effective moyennée sur une certaine distance (en général 10 km de part et d'autre du point, et nous avons effectué des tests de sensibilité sur l'influence de cette distance). Cela nous parait plus réaliste que de supposer que la vitesse de glissement ne dépend de la pression effective qu'en un seul point. Il faudrait en réalité faire également une moyenne transversale pour prendre en compte la pente des murs de la vallée (voir plus loi). Nous imposons une autre limitation à la vitesse de glissement en considérant qu'à la ligne d'échouage, le taux d'extension longitudinale de la nappe de glace ($\dot{\varepsilon}_{xx}$) est inférieur à celui de l'ice-shelf qui est contigu.

La loi de glissement que nous avons choisi ne donne une vitesse de glissement significative que pour les glaciers émissaires, mais cela nous semble assez représentatif de l'écoulement à grande échelle en Antarctique de L'Est.

- Vitesse verticale.

Nous suivons ici aussi la même démarche que dans le modèle à surface imposée, la différence notable tenant à ce que les dérivations et intégrations sont faites de façon numérique . Le taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{zz}$ s'écrit (d'après I.1 et IV.6) :

$$\dot{\varepsilon}_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = - \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} = - \frac{\partial u_x}{\partial x} - Sh(x)\, u_x \qquad \textbf{(IV.9)}$$

La dérivée selon y de la vitesse transversale est déduite de la vitesse le long de l'écoulement selon les mêmes considérations géométriques que dans le modèle à surface imposée. Nous avons en particulier :

$$\dot{\varepsilon}_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = Sh(x)\ u_x \qquad \textbf{(IV.10)}$$

La vitesse verticale est calculée sur les noeuds majeurs et la dérivée horizontale de u_x est calculée en différences finies centrées du premier ordre. La vitesse verticale est donnée par :

$$u_z(z) = u_z(-B) + \int_{-B}^{z} \frac{\partial u_z}{\partial z}\, dz \qquad \textbf{(IV.11)}$$

$u_z(-B)$ étant donnée par (I.3).

L'intégration se fait par la méthode de Simpson.

Il est possible de tester cette partie du calcul numérique (dérivation puis intégration). En effet, la vitesse verticale en surface $u_z(-E)$ qui est calculée d'après l'équation (IV.11) peut également être obtenue en tenant compte de (I.2, condition à la limite en surface) et (II.3, conservation de la masse) :

$$u_z(-E) = \frac{\partial \bar{U}_x\, H}{\partial x} + H\ Sh(x)\ \bar{U}_x + \dot{f} - \frac{\partial B}{\partial t} - u_x(-E)\ \frac{\partial E}{\partial x} \qquad \textbf{(IV.12)}$$

Nous vérifions que numériquement les deux calculs donnent le même résultat à condition d'écrire $\partial\ (\bar{U}_x\ H)/\partial x$ sous la forme d'une somme ($\bar{U}_x\ \partial H/\partial x + H\ \partial \bar{U}_x/\partial x$). On peut montrer qu'au point de vue des dérivations horizontales, les formules de différences finies sont les mêmes dans les deux cas.

- Couplage température-vitesse.

Le couplage est effectué en calculant à chaque pas de temps le champ de température puis le champ de vitesse. Cette méthode est également celle utilisée par Jenssen (1977). Huybrechts (1990_b) utilise un pas de temps plus grand pour le calcul des températures que pour celui des vitesses. L'évolution temporelle est déterminée d'une façon différente selon la variable considérée. Le champ de température est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur dépendant du temps (équation de diffusion II.36). Le champ de vitesse est calculé à un instant donné en fonction de la géométrie et de la température (IV.5) sa variation temporelle est directement liée à celle de la température ou de la géométrie.

Nous rappelons ici les divers processus de couplage et indiquons leurs rétroactions (positives ou négatives) ainsi que les problèmes numériques qu'ils peuvent éventuellement soulever.

- influence de la température sur l'écoulement.

L'influence de la température sur la vitesse horizontale est simple : plus la température est élevée plus la vitesse horizontale est grande.

Pour la fraction de la vitesse horizontale qui résulte de la déformation, ceci est dû à la diminution de la viscosité avec la température (I.13). Cet effet peut encore être augmenté si la température est suffisamment élevée pour qu'il existe une couche basale tempérée (CBT), car la présence d'eau liquide dans la CBT diminue encore la viscosité de la glace.

La vitesse de glissement dépend elle aussi de la température puisque le glissement ne peut intervenir quand la base est froide. Il y a donc un effet de seuil lors du passage base froide-base tempérée. La dépendance de la vitesse de glissement en fonction de la température est encore plus marquée si nous supposons que le coefficient de la loi de glissement dépend de l'épaisseur de la couche basale tempérée. Dans ce cas (que nous traitons dans certains tests), la vitesse de glissement dépend non seulement de la température basale mais aussi de celle des couches immédiatement supérieures. Enfin, nous ne prenons pas en compte ici l'influence de la fusion basale sur la pression de l'eau sous-glaciaire mais ce processus agirait dans le même sens (augmentation de la vitesse de glissement avec la température).

En ce qui concerne la vitesse verticale, nous avons tout d'abord l'effet de la fusion basale ($\dot{f}$) qui, lorsqu'elle augmente, accroît directement la vitesse verticale à la base (condition à la limite I.3). La vitesse verticale pour l'ensemble de la couche de glace est ensuite obtenue en appliquant la conservation de la masse (IV.9) et dépend donc de $(\partial u_x/\partial x)$, la dérivée horizontale de la vitesse horizontale. Pour évaluer l'influence de la température sur la vitesse verticale, prenons pour commencer l'exemple d'un réchauffement affectant l'ensemble de la ligne de courant : La vitesse horizontale augmente alors en tout point ainsi que sa dérivée horizontale (lorsqu'elle est positive ce qui est généralement le cas) et par conséquent la vitesse verticale s'accroit également partout. Ce type de réchauffement (ou refroidissement) global apparait lors des variations de température d'origine climatique. Cependant, il peut arriver qu'un réchauffement n'affecte qu'une partie de la ligne de courant. Par exemple parce que les perturbations de température d'origine climatique atteignent plus rapidement le socle vers la côte que dans l'intérieur ou en raison de l'action de la vitesse sur la température. Dans ce cas les variations temporelles de $\partial u_x/\partial x$ n'auront pas forcément le même signe selon les régions et il en sera de même pour les variations de la vitesse verticale.

- Influence de l'écoulement sur la température.

L'action de la vitesse sur la température est complexe et dépend du phénomène considéré.

. Advection

L'advection qui transporte la chaleur (en l'occurrence des frigories) de l'amont vers l'aval (advection horizontale) et du haut vers le bas (advection verticale) a un effet de refroidissement et est d'autant plus efficace que la vitesse est élevée. Il y a donc une rétroaction négative qui a tendance à atténuer les variations de température d'origine climatique.

Au point de vue numérique ce phénomène peut éventuellement produire des oscillations car dans certaines zones cette rétroaction a une amplitude semblable à la variation de température qui en est à l'origine mais elle ne peut intervenir qu'au pas de temps suivant. En effet lors du couplage les deux champs (température et vitesse) sont calculés

successivement sans chercher de convergence à chaque pas de temps. La solution pourrait donc sauter alternativement d'un type "rapide et chaud" à un type "lent et froid". En fait, les pas de temps (qui sont imposés par la résolution de l'équation d'évolution) sont suffisamment petits pour éviter ce phénomène (ou pour faire qu'il soit négligeable).

L'autre problème numérique vient de la méthode pour obtenir la vitesse verticale. Une première méthode consiste à calculer les vitesses (horizontale et verticale) sur les mêmes noeuds que la température et de calculer la dérivée horizontale de u_x par une formule de différence finie centrée. La vitesse verticale dépend alors des vitesses horizontales et donc des températures, non pas sur la colonne considérée mais sur les deux colonnes voisines. Supposons par exemple, que la température d'une colonne augmente à un pas de temps donné, au pas de temps suivant, la vitesse verticale de cette colonne n'est pas affectée. Il existe une rétroaction sur la température de cette colonne car la vitesse horizontale et par conséquent l'advection horizontale augmentent mais ce processus est beaucoup moins efficace que l'advection verticale. Sur les colonnes situées en aval et en amont par contre, la vitesse verticale est affectée ce qui en retour agit sur la température. En résumé, la rétroaction se produit d'abord sur les colonnes adjacentes et non pas sur celle d'où est partie la perturbation de température. Etant donné le pas horizontal (50 km) cette rétroaction déplacée est certainement peu réaliste et de plus cela a tendance à amplifier les oscillations de température et de vitesse horizontale d'une colonne à l'autre. Cet effet est en général (mais pas toujours suffisamment) compensé par les variations d'altitudes de la surface. Pour l'éviter on peut utiliser une formule de différence finies arrière.

Dans notre modèle nous procédons différemment en utilisant la grille alternée décrite précédemment dans laquelle la vitesse horizontale est calculée sur des colonnes intermédiaires (figure IV.2). La rétroaction de la vitesse sur la température est alors active dès le pas de temps suivant l'action. Une telle grille offre aussi l'avantage d'une meilleure approximation lors des dérivations horizontales car dans la formule de différence finie, le pas est deux fois plus petit. Cette amélioration joue pour la vitesse verticale, mais aussi pour le calcul de la pente qui intervient dans la vitesse horizontale.

. Production de chaleur due à la déformation.

Le champ de vitesse agit également sur les températures en raison de la chaleur dégagée par la déformation mais cette fois la rétroaction est positive. Il y a là une instabilité potentielle des calottes polaires puisque une légère augmentation de la température basale, par exemple d'origine climatique, peut provoquer un "emballement" (accroissement de la vitesse et de la chaleur de déformation conduisant à nouveau à l'élévation de la température). Quelques auteurs ont étudié la possibilité d'une telle instabilité "explosive" (Clarke et al. 1977, Yuen et al. 1986) mais sans tenir compte des phénomènes susceptibles d'enrayer cette accroissement de la température : Augmentation de l'advection, diminution de l'épaisseur et donc de l'effet isolant de la couche de glace, fusion basale qui évacue une partie de la chaleur ainsi dégagée. Ce dernier point nous parait important en Antarctique de L'Est car nous verrons que pour notre ligne de courant, la majeure partie de l'interface glace-socle est au point de fusion. Pour bien traiter cette possibilité d'emballement de l'écoulement il faudrait sans doute faire intervenir l'eau liquide dans la couche basale tempérée et dans le socle comme variable supplémentaire.

Dans notre modèle, la production de chaleur est traitée d'une façon détaillée (voir le chapitre II) et de plus la géométrie de la calotte et le champ de vitesse interagissent avec le champ de température. Nous estimons donc que toutes les rétroactions sont prises en compte (à l'exception de celles liées à l'hydrologie dans la couche basale tempérée). Sans rechercher précisément à simuler un emballement de la température, nous suivrons l'évolution de la production de chaleur lorsque la calotte glaciaire est soumise à diverses perturbations (température, épaisseur...)

En résumé, le couplage température-écoulement ne pose pas de problèmes majeurs. Cela découle en partie du fait que l'équation d'évolution qui est non-linéaire, impose des pas de temps relativement petits (moins de 100 ans) et que durant un tel laps de temps les températures et les vitesses ne varient pas beaucoup.

IV.1.B Contraintes et champ de vitesse dans l'ice-shelf.

- Ecoulement au bord de la calotte glaciaire et intérêt d'un modèle d'ice-shelf.

Notre objectif est de modéliser l'évolution au cours du temps de la calotte glaciaire. Nous nous intéressons ici au bord de la calotte c'est à dire à la limite aval. Cette limite n'est pas fixe au cours du temps et peut être soit terrestre soit marine.

. Bord terrestre en zone d'ablation.

Ce cas se présente pour les grandes calottes de l'hémisphère Nord (Laurentide, Fennoscandie) et pour une bonne partie de Groenland dont la région côtière est en zone d'ablation. Tout comme les glaciers alpins, ce type de calotte se termine à l'endroit où la perte de glace par ablation l'emporte sur l'apport de glace dû à l'écoulement. L'écoulement de la glace peut se modéliser de la même façon que pour la partie amont de la calotte. Dans l'équation d'évolution que nous verrons par la suite, la condition à la limite à prendre sur le bord est alors une épaisseur nulle.

. Bord terrestre en zone d'accumulation.

La situation est différente en Antarctique où la zone d'ablation est négligeable. S'il existe tout autour de l'Antarctique de nombreux endroits où l'épaisseur de glace est nulle et où le socle rocheux affleure, ce n'est pas en raison d'une forte ablation mais plutôt parce que l'apport de glace par écoulement devient quasi nul. Nous rappelons que 90% de la glace est évacuée par les glaciers émissaires qui représentent 13% du pourtour de l'Antarctique. Entre ces glaciers émissaires qui sont des régions de forte convergence on trouve des zones de glace "morte" (presque immobile) ayant une forte divergence.

Cette divergence se produit par exemple en Terre Adélie vers Dumont d'Urville. Des mesures de vitesse ont été faites par l'IGN avec un récepteur Doppler le long de la ligne de

Raid qui va de Dumont d'Urville vers Dôme C (cette ligne est grossièrement orientée le long de l'écoulement). La vitesse décroît depuis D57 (50 m/an, 200 km de la côte) jusqu'à D10 (10 m/an, 6 km de la côte) car la glace est évacuée vers le glacier de l'Astrolabe et vers la pointe Ebba.

Il est envisageable avec un modèle bi-dimensionnel (mais prenant en compte la divergence des lignes de courant) de modéliser l'évolution d'une ligne de courant se terminant sur la terre ferme. Il suffit d'imposer une forte divergence vers la côte et une épaisseur nulle comme condition à la limite de l'équation d'évolution. Cependant le modèle est alors extrêmement sensible à la valeur de divergence (Sh) choisie, or il n'est pas possible dans le cadre d'un modèle à une seule dimension horizontale de modéliser l'évolution de la divergence au cours du temps ce qui limite la validité des résultats. Ce type de problème doit être traité dans le cadre d'un modèle tridimensionnel. Nous choisissons donc d'étudier une ligne d'écoulement qui se termine dans l'océan et qui, drainant réellement de la glace vers l'extérieur, est beaucoup plus représentative de l'écoulement en Antarctique. C'est le cas de la ligne d'écoulement passant par Vostok.

. *Bord marin.*

Nous donnons quelques précisions sur le vocabulaire employé ici. Nous appelons calotte glaciaire (ou glacier) la partie de la nappe de glace qui repose sur le socle et ice-shelf la partie qui flotte même quand il s'agit d'une langue de glace. Nous appelons la jonction entre ces deux parties "zone de transition". Cette zone n'est pas forcément ponctuelle. D'après Herterich (1987) elle s'étend sur une dizaine de kilomètres. La ligne exacte où la nappe de glace se met à flotter est appelé "grounding line" en anglais (littéralement ligne d'échouage). En français, cette ligne est quelquefois appelée ligne d'ancrage sans doute pour faire ressortir que c'est l'endroit où l'ice-shelf est "accroché" à la calotte glaciaire. Le Pr. Lliboutry propose "ligne de décollement" (décollement entre le bas de la nappe de glace et le socle). Nous utiliserons ligne d'échouage. Cette ligne est définie par la condition de flottaison qui s'écrit :

ρ_g et ρ_w sont respectivement les densités de la glace et de l'eau de mer et Esea le niveau de l'océan (positif lorsque il est supérieur au niveau actuel). Approximativement pour Esea=0

$$(E - Esea) = (B - Esea) \left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_g} \right) \qquad \text{(IV.13)}$$

(cas présent), nous avons ($E \approx - 0.1\ B$)

La position de la ligne d'échouage est fonction du niveau de la mer et de l'épaisseur de la calotte. Son déplacement au cours du temps doit donc être déterminé d'une façon interactive en même temps que l'évolution de la calotte. Plusieurs méthodes (décrites plus loin) sont envisageables mais, quel que soit le mode de calcul, la vitesse d'écoulement dans la zone de transition est nécessaire et cette vitesse dépend des contraintes imposées par l'ice-shelf. De plus, dans notre modèle la position de la ligne d'échouage dépend aussi de l'épaisseur de l'ice-shelf ce qui rend le modèle d'ice-shelf encore plus indispensable. Nous présenterons d'abord une étude bibliographique sur les modèles (simples) d'ice-shelf puis nous exposerons notre propre modèle qui en est une variante adaptée à la ligne de courant considérée.

- Modèles simples d'ice-shelf, étude bibliographique.

. Ice-shelf non confiné.

Nous considérons d'abord un ice-shelf non confiné et nous suivons l'analyse de Weertman (1957), reprise par Paterson (1981) mais en utilisant nos propres notations qui sont rappelées dans la figure (IV.3). La coordonnée de la base de l'ice-shelf est notée (-Bs). Toutes les équations sont données en supposant que le niveau de l'océan est Esea, négatif lorsque le niveau est inférieur au niveau actuel (coordonnée z=-Esea). L'équation d'équilibre quasi-statique s'écrit :

$$\rho_g H = - \rho_w (Bs - Esea) = \frac{\rho_g \rho_w}{\rho_w - \rho_g} (E - Esea) \qquad \text{(IV.14)}$$

La densité de la glace est supposée constante (les équations pour une densité variable sont données dans Sanderson 1979). L'ice-shelf étant non-confiné, il y a une symétrie des

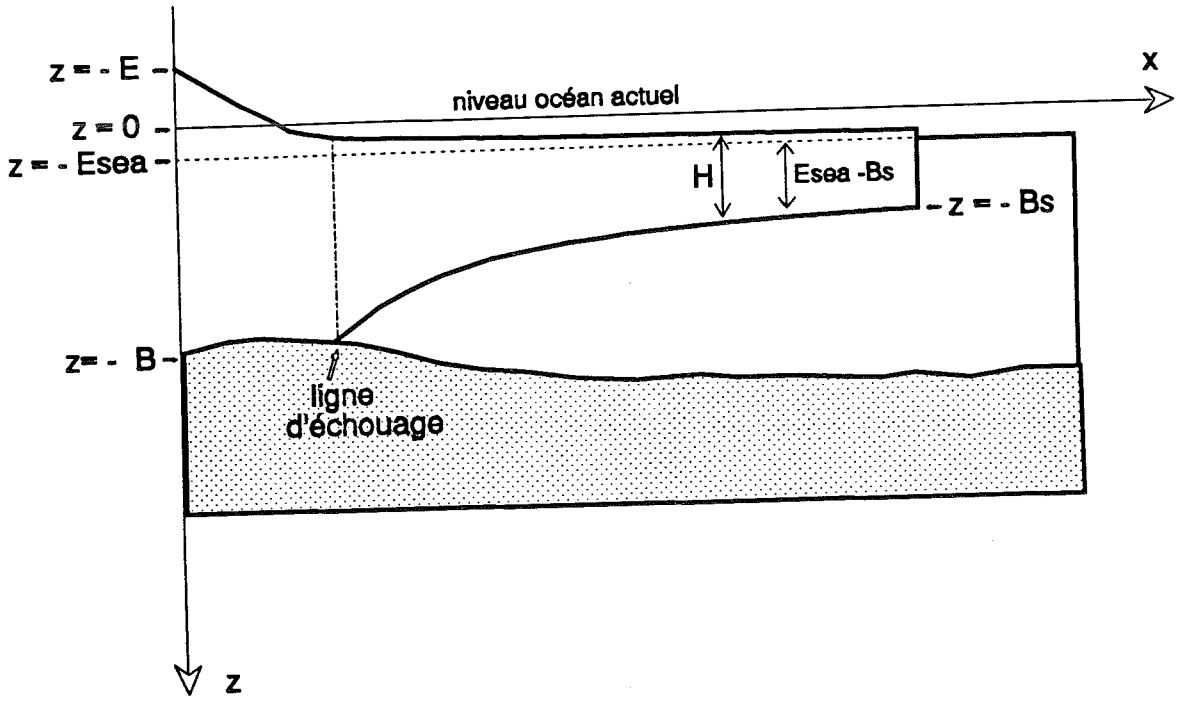


figure IV.3 Notations utilisées pour l'ice-shelf
Ce dessin illustre un cas où le niveau de l'océan plus bas que le niveau actuel ($E_{sea}<0$)

composantes en x et en y des contraintes et des déformations ($\sigma_x=\sigma_y$ et $\tau_{xy}=0$), ce qui implique pour le déviateur des contraintes et pour la cission efficace :

$$\sigma'_x = \sigma'_y = -\frac{\sigma'_z}{2} = \frac{1}{3}\left(\sigma_x - \sigma_z\right) \qquad \tau = \sqrt{3}\,\sigma'_x \qquad \textbf{(IV.15)}$$

Les ice-shelves étant extrêmement plats, on suppose que les contraintes de cisaillement τ_{xz} et τ_{yz} sont négligeables quelle que soit la profondeur ainsi que les taux de déformation correspondants ($\dot{\varepsilon}_{xz}$, $\dot{\varepsilon}_{yz}$). La vitesse horizontale et les taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$ et $\dot{\varepsilon}_{yy}$ sont par conséquent indépendants de la profondeur.

De la même façon que dans la calotte glaciaire, l'expression de la contrainte σ_z se déduit de la troisième équation de l'équilibre quasi-statique (I.8) :

$$\sigma_z = -\rho_g\left(E + z\right) \qquad \textbf{(IV.16)}$$

La valeur de σ_x intégrée sur l'épaisseur peut être obtenue en supposant que pour chaque colonne la force horizontale totale exercée dans le shelf est équilibrée par la pression de l'eau au front du glacier. Vers l'extrémité, il a une perturbation des contraintes qui décroit lorsqu'on s'éloigne du front, mais il faut que la résultante générale et le moment résultant des forces en bout ne soient pas modifiés (le moment résultant augmente τ_{xz} mais on admet $\tau_{xz}\approx 0$). Nous rappelons que par convention les pressions sont négatives.

$$\int_{-E}^{-Bs} \sigma_x \, dz = -\int_{-Esea}^{-Bs} \rho_w \, g \, (z + Esea) \, dz = -\frac{1}{2}\rho_w \, g \, (Bs - Esea)^2 \qquad \textbf{(IV.17)}$$

Nous notons $\bar{\sigma}'_x$, la valeur moyennée sur l'épaisseur de l'élément du déviateur des contraintes σ'_x. D'après (IV.17) et en tenant compte de (IV.15) et de l'équilibre hydrostatique (IV.14) :

$$\bar{\sigma}'_x = \frac{1}{H} \int_{-E}^{-Bs} \sigma'_x \, dz = \frac{1}{3\,H} \left(\int_{-E}^{-Bs} \sigma_x \, dz - \int_{-E}^{-Bs} \sigma_z \, dz \right) = \frac{\rho_g \, g \, (E - Esea)}{6} \qquad \textbf{(IV.18)}$$

Pour obtenir la déformation il faut faire intervenir la loi de comportement qui s'écrit ici :

$$2\,\dot{\varepsilon}_{xx} = B_T \, \tau^{n-1} \, \sigma'_x = \sqrt{3}\, B_T \, \tau^n \qquad \textbf{(IV.19)}$$

Nous avons supposé que les déformations sont indépendantes de la profondeur et on peut alors écrire :

$$\frac{1}{H} \int_{-E}^{-Bs} \tau \, dz = \frac{1}{H} \int_{-E}^{-Bs} \left(\frac{2\sqrt{3}\,\dot{\varepsilon}_{xx}}{B_T} \right)^{\frac{1}{n}} dz = \left(2\sqrt{3}\,\dot{\varepsilon}_{xx} \right)^{\frac{1}{n}} \int_{-E}^{-Bs} \frac{dz}{B_T^{\,1/n}} \qquad \textbf{(IV.20)}$$

Ce qui donne l'expression de la déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$.

$$2\,\dot{\varepsilon}_{xx} = 3^{-\frac{n+1}{2}} \, \bar{C} \left(\frac{\rho_g \, g \, (E - Esea)}{2} \right)^n = \bar{C} \; \bar{\tau}^{n-1} \; \bar{\sigma}'_x \qquad \textbf{(IV.21)}$$

où

$$\bar{C} = \left(\frac{1}{\frac{1}{H} \int_{-E}^{-B} \frac{dz}{B_T^{\,1/n}}} \right)^n \qquad \textbf{(IV.22)}$$

. Ice-shelf dans une baie à bords parallèles.

En Antarctique, la plupart des ice-shelves sont situés dans des baies ce qui modifie

quelques peu les équations mécaniques. Le cas d'un ice-shelf dans une baie à bords parallèles a été traité par exemple par Thomas (1973). Son analyse, que nous suivons ici, est assez similaire à celle développée pour l'ice-shelf non-confiné excepté que σ'_y est nul (au lieu de IV.15) et que la contrainte τ_{xy} ne peut pas être négligée partout en raison du frottement sur les murs de la baie.

La géométrie que nous considérons est représentée sur la figure (IV.4). L'ice-shelf s'étend entre x_a (point d'échouage) et X (limite extérieure de la baie). L'axe (y) a son origine sur la ligne médiane, la largeur de la baie étant 2Y. L'ice-shelf est supposé symétrique ce qui implique que sur la ligne médiane, (τ_{xy}=0).

Sur la ligne médiane, les éléments de contrainte et la cission efficace sont donc :

$$\sigma'_x = -\sigma'_z = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z)$$

$$\sigma'_y = 0 \qquad \tau_{xy} = 0 \qquad \text{(IV.23)}$$

$$\tau = \sigma'_x$$

Le frottement sur les murs de la baie induit une force qui s'oppose à l'extension longitudinale. Pour une colonne verticale de largeur unité et de coordonnée (x,y) cette force est donnée par :

$$F = -\int_x^X \int_{-E}^{-B} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dz\, dx \qquad \text{(IV.24)}$$

La première hypothèse de Thomas (1973) est de considérer que $\partial\tau_{xy}/\partial y$ est indépendant de y. Comme τ_{xy}=0 sur la ligne médiane, ceci implique :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\tau_{xy}}{y} \qquad \text{(IV.25)}$$

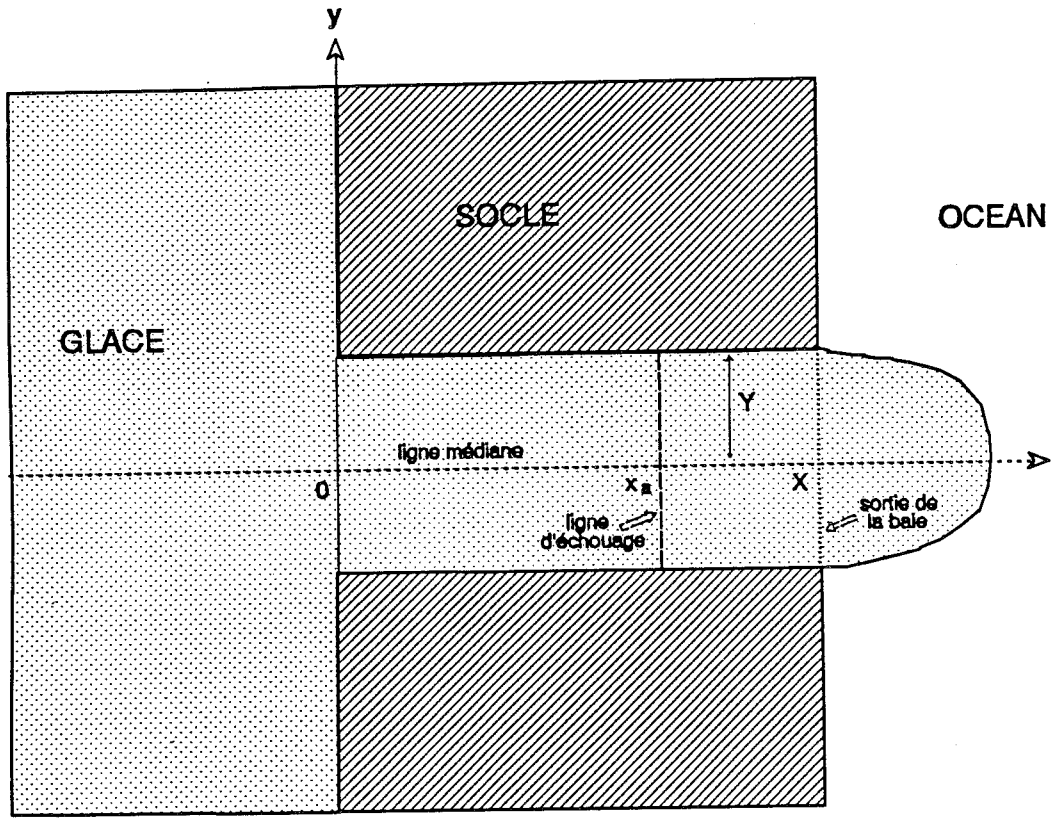


figure IV.4 Ice-shelf dans une baie à bords parallèles : Notations

On suppose ensuite que sur les bords, la contrainte de cisaillement moyennée sur l'épaisseur a une valeur limite τ_0, indépendante de x et comparable à la contrainte de cisaillement existant à la base de la calotte polaire c'est à dire de l'ordre de 1 bar.

La force par unité de largeur, due au frottement sur les bords et qui s'oppose à l'extension de l'ice-shelf est donc :

$$F = - \int_x^X \frac{\tau_0 \, H}{Y} \, dx \qquad \text{(IV.26)}$$

Cette force est à ajouter à celle résultant de la pression hydrostatique sur le front dans le calcul de σ_x (équation IV.17). On obtient $\bar{\sigma}'_x$ et $\dot{\varepsilon}_{xx}$ sur la ligne médiane :

$$\bar{\sigma}'_x = \frac{\rho_g \, g \, (E - Esea)}{4} - \frac{F}{H} \qquad \text{(IV.27)}$$

$$2 \, \dot{\varepsilon}_{xx} = \bar{C} \left(\frac{\rho_g \, g \, (E - Esea)}{4} - \frac{F}{H} \right)^n = \bar{C} \; \bar{\tau}^{n-1} \; \bar{\sigma}'_x \qquad \text{(IV.28)}$$

Des améliorations notables peuvent être apportées à ces modèles : Thomas (1973) considère des baies convergentes ou divergentes, Sanderson (1979) prend une densité variable pour déterminer le profil d'équilibre d'un ice-shelf, Morland et Shoemaker (1982) tiennent compte de la pente de la surface le long de l'axe x ($\partial H/\partial x$) et de l'influence d'un champ de température (simplifié) sur la loi de déformation de la glace. Bien que les équations obtenues soient plus complexes, le principe est toujours le même qui consiste à équilibrer les contraintes longitudinales dans l'ice-shelf avec les forces dues à la pression hydrostatique de l'océan et au frottement sur les bords de la baie. Dans les modèles plus élaborés, cette condition est appliquée seulement à l'extrémité de l'ice-shelf (et non pas pour tout x) et la contrainte σ'_{xx} est calculée en intégrant depuis le bord jusqu'au point considéré (Van der Veen 1986_a). Enfin, il existe des modèles numériques (bi-dimensionnels dans le plan horizontal) prenant en compte la géométrie réelle (généralement complexe), c'est le cas en particulier des modèles appliqués aux grands ice-shelves de Ross et de Ronne-Filchner

(Mac Ayeal et Thomas 1982, 1986, Huybrechts 1990_b).

La vitesse horizontale (notée $\bar{U}_x$) s'obtient en tout point de la ligne de courant, en intégrant le taux d'extension depuis la ligne d'échouage.

$$\bar{U}_x = \bar{U}a + \int_{xa}^{x} \dot{\varepsilon}_{xx}\, dx \qquad \text{(IV.29)}$$

où $\bar{U}a$ est la vitesse à la ligne d'échouage. $\bar{U}a$ doit donc être imposée soit d'après des données de terrain, soit en fonction de la dynamique de la calotte glaciaire. C'est cette deuxième méthode qui doit être utilisée dans un modèle traitant de l'évolution de la nappe de glace.

La vitesse étant connue, le profil de l'ice-shelf, peut se calculer à l'aide de l'équation de conservation de la masse (I.4 ou II.2). Lorsque l'évolution de l'ice-shelf est découplée de celle de la calotte, les auteurs imposent alors une ligne d'échouage fixe et un flux de glace à cette ligne (Van der Veen 1986_a, Mac Ayeal 1987). Un important résultat de ce type de modèle est que le temps nécessaire pour qu'un ice-shelf atteigne un état stationnaire est de l'ordre de 1000 ans c'est à dire beaucoup plus court que le temps de réaction caractéristique d'une calotte glaciaire (plus de 10000 ans).

- Description de notre modèle d'ice-shelf.

En ce qui concerne l'ice-shelf, notre objectif est surtout de le coupler avec la calotte glaciaire afin de simuler le déplacement de la ligne d'échouage, déplacement qui sera ensuite pris en compte dans l'évolution de la calotte glaciaire. Un modèle trop simple ne reproduit sans doute pas toutes les caractéristiques de l'ice-shelf, mais nous nous en contenterons du moment que cela n'affecte pas la ligne d'échouage. Comme souvent dans ce travail, des études de sensibilité permettront de déterminer quelles sont les hypothèses ou les paramètres importants.

. *Contraintes*

Nous supposons que les lignes de courant du shelf sont parallèles, c'est à dire que les contraintes obéissent à (IV.23). Cette hypothèse est tout à fait justifiée dans la première partie de l'ice-shelf, lorsque celui ci s'écoule dans une vallée (partie flottante du glacier Byrd). Dans le Ross Ice-shelf, cette hypothèse est peut-être moins réaliste, et nous pourrions peut-être considérer une baie divergente. Cependant, étant donnée la forme du Ross Ice-shelf, et son alimentation par de nombreux courants de glace, il faudrait en fait un modèle à 2 dimensions horizontales pour traiter correctement ce problème (ce qui n'aurait de sens qu'avec un modèle englobant toute la calotte glaciaire). Nous nous limitons donc à considérer un écoulement parallèle. Toute la difficulté consiste alors à déterminer la force résistante F sur les bords de l'ice-shelf qui intervient dans le calcul de $\bar{\sigma}'_x$ (équation (IV.27). Nous traitons différemment les deux régions : le Ross Ice-shelf et la vallée.

+ Ross ice-shelf.

Dans le Ross ice-shelf, nous supposons que la contrainte $\bar{\sigma}'_{back}=F/H$ exercée vers l'arrière par le shelf est constante et nous effectuerons des études de sensibilité avec diverses valeurs de cette contrainte (entre 0 et 0.3 bars).

+ Vallée.

Pour traiter la partie du shelf située dans la vallée, nous schématisons la géométrie de la façon suivante. La vallée dans laquelle se trouve le glacier Byrd est supposée de largeur constante (2Y=25 km) et la longueur est 100 km. Etant donné que la maille de notre modèle est 50 km, nous voyons que peu de noeuds du modèle vont être situés dans la vallée. Cependant cette courte zone a une grande importance car les frottements y sont intenses et de plus, c'est la région où se trouve actuellement la ligne d'échouage.

Nous suivons la méthode de Thomas mais une différence notable vient du fait que nous déterminons la contrainte (τ_0) à l'aide d'une loi de glissement faisant intervenir la vitesse et la pression effective. Il nous parait peu réaliste de supposer que le frottement a toujours une valeur constante. Le frottement devrait augmenter avec la vitesse de l'ice-shelf. De plus le frottement est sûrement plus fort au dessus du niveau de l'océan qu'en dessous car

la pression d'eau diminue la pression effective. C'est ce qui se produit par exemple pour le glacier de l'Athabasca (Raymond, 1971, Reynaud, 1973).

Tout d'abord il y a forcément glissement, autrement dit on ne peut pas prendre une vitesse nulle sur les bords. Cela entrainerait σ'_x nul sur les bords. Or si τ_{xz} est négligeable et $\tau_{yz}= 0$, les équations d'équilibre pour le problème plan ($\sigma_x = 2\,\sigma'_x + \sigma_z$ et $\sigma_y = \sigma'_x + \sigma_z$) conduisent à :

$$\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 \sigma'_x}{\partial y^2}$$

d'où $\sigma'_x= f_1(x+\sqrt{2}\,y) + f_2(x-\sqrt{2}\,y) + c_1\,x + c_2\,y + c_3$ qui ne peut être nul pour $y=\pm Y$ et x quelconque.

La démarche qui nous semble la plus cohérente consiste à utiliser la même loi de glissement que celle prise à la base de la calotte glaciaire (IV.7) : $U_{bord}= k_{sl}\,\tau_0^3 / N_{eff}$
Cette fois-ci nous avons la vitesse (U_{bord}) et nous cherchons à déterminer la contrainte τ_0. Les contraintes sont orientées différemment (que pour le glissement basal) et dans tout ce qui suit τ_0 est le cisaillement parallèle à la surface de frottement et N_{eff} est la pression effective normale à la surface de frottement. Pour déterminer cette pression effective N_{eff}, il nous faut faire des hypothèses sur la géométrie de la vallée.

Nous considérons que le mur de la vallée n'est pas vertical mais fait un angle (θ) avec la verticale (voir figure IV.5). Dans le cas du glacier Byrd, l'altitude du socle qui borde la vallée passe de 2000 m à -1000 m (le fond de la vallée) en quelques kilomètres, ce qui donne un angle θ, de l'ordre de 45 degrés. Il est difficile de déterminer plus précisément cette pente à partir des données dont nous disposons, l'angle θ doit donc être considéré comme un paramètre du modèle. En l'absence de données détaillées, nous supposons également que cette pente ne dépend pas de la profondeur.

La pression de la glace (P_g) normale à l'interface glace rocher s'obtient par une rotation du système de coordonnées (voir par exemple la méthode de transformation données par Lliboutry 1987_a, p.49 avec une rotation d'un angle ($\pi/2-\theta$)) :

$$p_g = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_z}{2} \cos 2(\frac{\pi}{2} - \theta) \quad - \tau_{yz} \sin 2(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

Comme (τ_{yz}=0) et (σ_y=σ'_x+σ_z, problème plan), on obtient :

$$P_g = \sigma_z + \sigma'_x \cos^2\theta = \rho_g \, g \, (E + z) + \sigma'_x \cos^2\theta$$

La pression de l'eau est indépendante de l'orientation (σ_y=σ_z) : P_w=ρ_w g (Esea+z) et la pression effective s'écrit :

$$N_{eff} = \rho_g \, g \, (E + z) + \sigma'_x \cos^2\theta \qquad (-E \le z \le -Esea)$$

$$N_{eff} = \rho_g \, g \, (E + z) - \rho_w \, g \, (Esea + z) + \sigma'_x \cos^2\theta \qquad (-Esea \le z \le -Bs) \qquad \textbf{(IV.30)}$$

La contrainte de cisaillement (τ_0) due au frottement et intégrée sur l'épaisseur de glace s'écrit donc (en tenant compte des équations de flottaison de l'ice-shelf (IV.14) :

$$\int_{-E}^{-Bs} \tau_0 \, dz = \frac{3 \, U_{bord}^{1/3} \, \rho_w}{4 \, k_{sl}^{1/3} \, \rho_g \, g \, (\rho_w - \rho_g)} \left(\left(\rho_g \, g \, (E - E_{sea}) + \sigma'_x \cos^2\theta \right)^{\frac{4}{3}} - \left(\sigma'_x \cos^2\theta \right)^{\frac{4}{3}} \right)$$

$$= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_w} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\left(1 + s_x \cos^2\theta \right)^{\frac{4}{3}} - \left(s_x \cos^2\theta \right)^{\frac{4}{3}} \right) \left(\frac{\rho_g \, g \, H \, U_{bord}}{k_{sl}} \right)^{\frac{1}{3}} H \qquad \textbf{(IV.31)}$$

Où U_{bord} est la vitesse de l'ice-shelf sur le bord et s_x = σ'_x / ρ_g g (E-E_{sea}). D'après (IV.27) s_x est inférieur à 0.25.

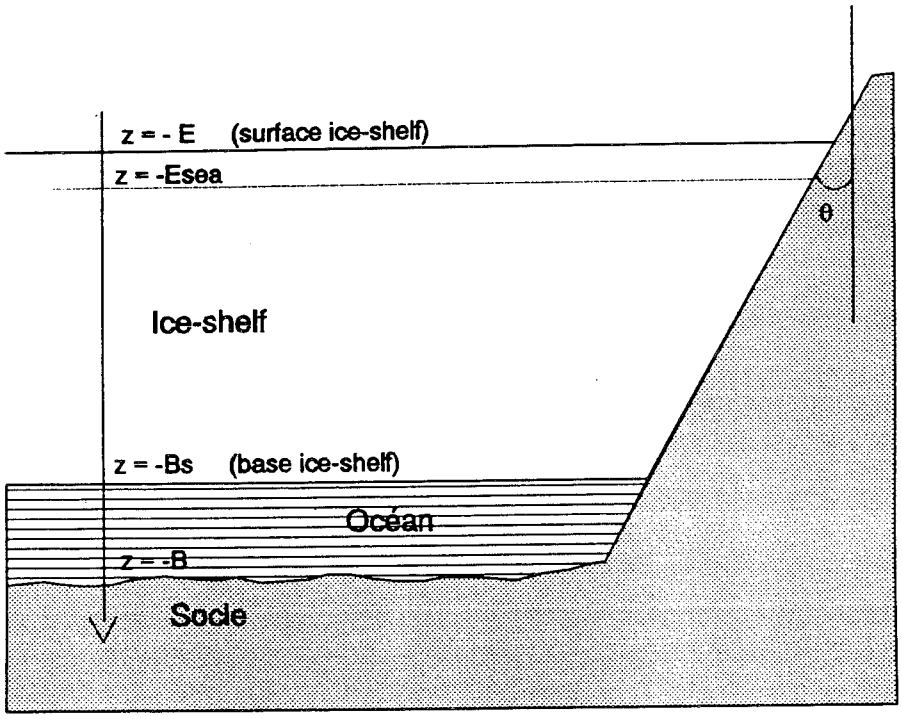


figure IV.5 Loi de frottement sur le bord de l'ice-shelf : Détermination de la pression effective.

Prenons l'exemple du glacier Byrd. D'après Whillans et al. (1989), l'épaisseur de l'ice-shelf est environ 1000 m, la vitesse horizontale sur le bord 250 m/an. De nombreuses mesures de vitesse à la surface du glacier Byrd ont été effectuées par photogrammétrie (Brecher 1982). A partir de ces mesures Whillans et al. ont déterminé les déformations et les contraintes en surface et ils donnent en particulier une valeur de 2.5 bar pour la contrainte τ_{xy} sur le bord du glacier. D'après notre équation (IV.31) et avec un coefficient de la loi de glissement k_{sl}=1000 m bar^{-2} a^{-1}, la contrainte de cisaillement moyenne ($\bar{\tau}_0$) est 1 bar. La contrainte déterminée par Whillans et al. (1989) est celle en surface, et il nous semble plus raisonnable de la comparer avec la moyenne de τ_0 sur la partie émergée de l'ice-shelf plutôt qu'avec la moyenne sur l'épaisseur. Nous suivons le même raisonnement que celui développé plus haut en changeant simplement les bornes d'intégration (de -E à -Esea). La contrainte moyenne due au frottement pour la partie émergée de l'ice-shelf est alors 4.5 bar.

Notre modèle d'ice-shelf est à une dimension horizontale (le long d'une ligne de courant) et nous ne considérons que la ligne médiane. Nous disposons d'une vitesse (calculée par IV.29) mais c'est celle sur la ligne médiane ($\bar{U}_x$) et non pas la vitesse U_{bord} qui du fait même du frottement est sensiblement plus faible que $\bar{U}_x$ (pour le glacier Byrd, il y a un rapport 1/3 entre ces deux vitesses).

Pour estimer la différence entre U_{bord} et $\bar{U}_x$, on peut examiner le cas où tous les éléments du déviateur des contraintes autres que τ_{xy} sont négligeables. D'après (IV.25), la déformation $\dot{\varepsilon}_{xy}$ est proportionnelle à τ_0^3 et est par conséquent proportionnelle à U_{bord} (selon (IV.31). Finalement U_{bord} est proportionnelle à $\bar{U}_x$. En réalité σ'_x n'est pas négligeable et intervient dans la cission efficace τ. De plus le rapport ($U_{bord}/\bar{U}_x$) dépend également de l'épaisseur de glace. Nous supposerons cependant qu'utiliser la vitesse sur la ligne médiane à la place de la vitesse sur le bord n'introduit qu'un facteur multiplicatif (égal à la racine cubique du rapport des vitesses) dans l'équation (IV.31).

Nous avons noté que τ_0 est le cisaillement parallèle à la surface de frottement. Du fait de l'angle entre cette surface et la verticale, les contraintes de cisaillement dans notre référentiel s'écrivent en fonction de τ_0 : (τ_{xy}= τ_0 cos θ) et (τ_{xz}= τ_0 sin θ) (formules de rotation). Ces relations sont valables sur la surface de frottement elle même. Lorsqu'on

s'éloigne du bord, τ_{xz} devient nul. Nous estimons que la ligne médiane est suffisamment éloignée du bord (plus de 10 épaisseurs) pour que l'on puisse écrire :

$$\int_{-E}^{-Bs} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dz = \frac{1}{Y} \int_{-E}^{-Bs} \tau_0\, dz = \frac{c_{bord}}{Y} \left(\frac{\rho_g\, g\, H\, \bar{U}_x}{k_{sl}} \right)^{\frac{1}{3}} H \qquad \text{(IV.32)}$$

Ce qui traduit le fait que c'est τ_0 qui intervient dans la force résistante totale.

c_{bord} est un coefficient sans dimension de l'ordre de 0.2. Ce coefficient fera l'objet d'études de sensibilités), Y est la largeur du demi-courant de glace, et k_{sl} est le coefficient de la loi de glissement (IV.7).

Finalement, sur la ligne médiane, nous écrivons $\bar{\sigma}'_x$ en tenant compte de la force résistante due aux frottement sur les bords et de celle exercée par le Ross Ice-shelf (contrainte $\bar{\sigma}'_{back}$) :

$$\bar{\sigma}'_x = \frac{\rho_g\, g\, (E - Esea)}{4} - \bar{\sigma}'_{back} - \frac{1}{H} \int_x^X \frac{c_{bord}}{Y} \left(\frac{\bar{U}_x}{k_{sl}} \right)^{\frac{1}{3}} H^{\frac{4}{3}}\, dx \qquad \text{(IV.33)}$$

On pourrait s'interroger sur la nécessité d'utiliser une loi de glissement dans la détermination de τ_0 pour finir par obtenir une relation dans laquelle un coefficient (c_{bord}) n'est pas bien connu. Il semblerait plus simple de faire directement les études de sensibilité sur la valeur de τ_0. Dans ce dernier cas cependant certaines rétroactions ne seraient pas prises en compte en particulier l'influence de la vitesse sur le frottement qui a un effet stabilisateur. Si par exemple la vitesse de l'ice-shelf augmente, le frottement augmente aussi ce qui diminue la valeur de $\bar{\sigma}'_x$ et donc de la vitesse (par l'intermédiaire de $\dot{\varepsilon}_{xx}$). Il est vraisemblable que pour les grandes vitesses, τ_0 ne peut dépasser une valeur limite (que nous imposons généralement à 2 bar), mais dans les faits cette limite n'est jamais atteinte.

Pour modéliser l'écoulement d'un ice-shelf dans une vallée, notre modèle est forcément moins réaliste que les modèles détaillés tel celui de Whillans et al. (1989). Il faut considérer l'échelle à laquelle nous travaillons (mailles de 50 km) et nous pensons avoir

introduit les processus réellement nécessaires à cette échelle. On pourrait peut-être critiquer le choix de la loi de glissement car celle que nous utilisons n'est pas forcément adaptée aux grandes vitesses.

Finalement nous rappelons que notre objectif est de simuler l'avance et le recul de la ligne d'échouage et de ce point de vue, notre modèle "fonctionne" y compris dans des conditions éloignées des conditions actuelles (on notera que ce n'est pas le cas avec une valeur τ_0 imposée car cela pose des problèmes pour les faibles vitesses de l'ice-shelf)

. Température

La température dans l'ice-shelf est calculée de la même façon que dans la calotte glaciaire (voir chapitre II). La seule différence est la condition basale, où la température imposée est celle de la congélation de l'eau de mer (-1.8°C). En ce qui concerne la température, notre modèle d'ice-shelf est donc à deux dimensions. Le champ de température dans l'ice-shelf est nécessaire pour calculer la déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$ à partir de $\bar{\sigma}'_x$. Cette température est également indispensable lorsque la ligne d'échouage avance. En effet, lorsqu'une colonne de glace qui précédemment flottait s'échoue, le calcul du profil de température doit se faire à partir du profil au pas de temps précédent (lorsque la colonne faisait partie de l'ice-shelf).

. Déformations et vitesses

La déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$ est calculée d'après l'équation (IV.28), la fonction de la température ($\bar{C}$) étant intégrée numériquement (équation IV.22). La vitesse horizontale moyenne pour chaque colonne ($\bar{U}_x$) s'obtient en intégrant numériquement le taux d'extension ($\dot{\varepsilon}_{xx}$) depuis la ligne d'échouage (équation IV.29)). Etant donné que la vitesse horizontale est indépendante de la profondeur, nous avons $u_x(z)=\bar{U}_x$.

La vitesse verticale varie linéairement en fonction de la profondeur (puisque $\dot{\varepsilon}_{xx}$ et donc $\dot{\varepsilon}_{zz}$ sont indépendants de la profondeur). Ses valeurs en surface et au fond sont données par les conditions aux limites (I.2 et I.3).

. *Epaisseur*

Le champ de vitesse dépend fortement du profil de l'ice-shelf. Ce profil s'obtient en appliquant la conservation de la masse. Comme ce calcul est effectué en même temps que celui de la calotte glaciaire, nous traiterons ce problème plus loin dans l'équation d'évolution.

En conclusion, nous avons développé un modèle d'ice-shelf qui fournit les vitesses, les températures et l'épaisseur en fonction du temps. Pour les contraintes, ce modèle est inspiré de celui de Thomas (1973) mais est original dans son application à la ligne de courant que nous considérons (loi de frottement). De plus il comprend un calcul complet du champ de température.

IV.1.C Modélisation de la zone de transition calotte glaciaire - ice-shelf.

- Nécessité d'un traitement particulier.

L'évolution de l'épaisseur de la nappe de glace est basée sur la conservation de la masse et dépend en bonne partie de la vitesse d'écoulement. Il est donc indispensable de déterminer cette vitesse de la façon la plus réaliste possible en tout point. Dans la calotte glaciaire, pour obtenir cette vitesse, on peut en général faire l'approximation de l'écoulement par cisaillement qui consiste à négliger le déviateur des contraintes longitudinales et à ne tenir compte que de la contrainte de cisaillement liée à la pente de la surface (voir chapitre I). A l'opposé, dans l'ice-shelf on peut négliger les contraintes de cisaillement (voir plus haut). La zone de transition constitue un cas plus ardu en ce sens qu'on ne peut faire aucune de ces approximations. Pour traiter rigoureusement ce problème mécanique il faudrait effectuer le calcul complet du champ de contrainte avec comme conditions aux limites en amont les contraintes typiques de la calotte glaciaire et en aval celles de l'ice-shelf. Jusqu'à présent, seul Herterich (1987) a abordé ce sujet qui nécessite un traitement à petite échelle (quelques kilomètres). Il a montré que la longueur de la zone de transition est faible (de l'ordre de grandeur de l'épaisseur) et augmente lorsqu'il y a du glissement. Les modèles d'évolution

étant à grande échelle, la meilleure démarche serait de partir d'un modèle local de transition calotte glaciaire - ice-shelf et d'en déduire une paramétrisation donnant la répartition des contraintes puis de l'introduire dans le modèle à grande échelle. Malheureusement nous ne disposons pas pour l'instant d'une telle paramétrisation.

Avant d'exposer la méthode que nous utilisons nous présentons tout d'abord une étude bibliographique sur les modèles (à grande échelle) de zone de transition et sur les conditions utilisées par d'autres auteurs pour relier l'évolution d'une calotte glaciaire et celle d'un ice-shelf.

- Modèles de jonction calotte - ice-shelf : Etude bibliographique.

Il y a en réalité deux problèmes dans la modélisation de la jonction. Tout d'abord pour une géométrie donnée, (ligne d'échouage fixée) il faut déterminer le champ de contrainte et en déduire le champ de vitesse. D'autre part, il faut aussi simuler l'avance et le retrait de la ligne d'échouage en réponse à diverses perturbations venant soit de la calotte (variation d'épaisseur), soit de l'ice-shelf (variation d'épaisseur ou modification de la force résistante), soit externe (niveau des mers). Dans notre modèle, ces deux problèmes sont traités séparément mais ce n'est pas le cas chez tous les auteurs. C'est pourquoi dans cette étude bibliographique nous abordons tout ce qui a trait à la modélisation de la zone de transition.

Plusieurs auteurs ont simulé l'avancée et le recul de la ligne d'échouage, en général dans le but d'estimer la stabilité de l'Antarctique de l'Ouest.

Tout d'abord il faut souligner que la principale difficulté est de calculer la vitesse d'écoulement à l'échouage. Un premier exemple de cette difficulté est la détermination de la vitesse de glissement. A la ligne d'échouage, si le lit est horizontal (ce qui est souvent le cas en Antarctique de l'Ouest), la pression effective (N_{eff}) est très faible (non nulle car nous moyennons sur 20 km) et avec notre loi de glissement cela conduit à une vitesse basale élevée. Dans la réalité, cette vitesse de glissement est limitée par la force résistante exercée par l'ice-shelf et il s'agit de prendre en compte cette limitation dans le modèle.

A la ligne d'échouage, certains auteurs calculent la vitesse (ou le flux de glace ce qui revient au même) d'après des considérations de conservation de la masse. Thomas et Bentley

(1978) supposent qu'à tout instant la forme de la calotte polaire est parabolique. Lors d'un déplacement de la ligne d'échouage, ils en déduisent la variation totale de la quantité de glace de la calotte glaciaire (d'après l'écart entre deux paraboles) et prennent en compte cette quantité pour déterminer le flux de glace à la ligne d'échouage. Le flux leur permet en retour de calculer le déplacement de cette ligne d'échouage en appliquant la conservation de la masse de façon locale. Le taux de déformation longitudinale qui intervient dans l'équation de conservation est celui de l'ice-shelf (que nous donnons en IV.28).

Le modèle de Lingle (1984) bien que plus perfectionné, obéi à la même philosophie. Il utilise une loi de glissement empirique qui est calée sur les vitesses de bilan (régime stationnaire) de l'Antarctique de l'Ouest. Cette loi dépend de l'éloignement de la ligne d'échouage et il suppose que la relation est valable quelle que soit la position de cette ligne. Il résout l'équation d'évolution de la calotte glaciaire en prenant comme condition à la limite aval l'épaisseur de glace à la ligne d'échouage (cette épaisseur étant donnée par la condition de flottaison). La variation au cours d'un pas de temps de la quantité de glace contenue dans la calotte glaciaire lui permet de calculer le flux à l'échouage et son modèle rejoint alors celui de Thomas.

Ces deux modèles donnent qualitativement le même résultat : si la force exercée par l'ice-shelf sur la calotte glaciaire diminue (par exemple en cas de fonte des ice-shelves) le recul de la ligne d'échouage est très rapide et catastrophique. D'après Van der Veen (1986_b), ce type de modèle produit cette instabilité en raison d'une contradiction sur le calcul des vitesses à la ligne d'échouage. D'un côté le gradient longitudinal de vitesse est donné seulement par la dynamique de l'ice-shelf, de l'autre côté la vitesse dépend seulement de la dynamique de la calotte glaciaire. Dans l'équation de conservation on trouve un terme positif ($\bar{U}_x\ \partial H/\partial x$, apport de glace) qui est proportionnel à la vitesse et un terme négatif ($H\ \partial \bar{U}_x/\partial x$, évacuation) qui est proportionnel au gradient de la vitesse. Dans ce modèle seul le terme dépendant du gradient a dans un premier temps une influence sur le déplacement de la ligne d'échouage puisqu'au cours d'un pas de temps la vitesse est fixée. La rétroaction sur la vitesse elle même n'est prise en compte qu'au pas de temps suivant. Le principal problème est que non seulement la rétroaction est retardée mais que de plus les variations de vitesse à la ligne d'échouage calculées par ce type de mdoèle sont indépendantes de la pente locale (puisque le flux de glace est fonction des variation de masse de glace pour l'ensemble de la

calotte) ce qui est irréaliste et prévient toute rétroaction négative qui limiterait le recul.

Van der Veen (1985) a développé un modèle prenant en compte les contraintes longitudinales pour la glace de la calotte glaciaire. Il suppose que $\bar{\sigma}'_x$ décroît linéairement depuis la ligne d'échouage où $\bar{\sigma}'_x$ a la valeur donnée par la mécanique de l'ice-shelf (équation IV.25) jusqu'à une distance L_1 en amont où $\bar{\sigma}'_x$ est nul. L'ordre de grandeur de L_1 (la longueur de la zone de transition) est 100 km. Des comparaisons avec une version du modèle prenant en compte les contraintes longitudinales sur l'ensemble de la ligne d'écoulement ne montrent pas de différence qualitative ce qui, d'après l'auteur, indique que l'ice-shelf n'a d'influence sur la calotte glaciaire que dans la zone de transition (cette hypothèse avait été implicitement faite dans le modèle de Thomas). Van der Veen suppose ensuite que σ'_x ne dépend pas de la profondeur (ou plus exactement estime qu'il n'y a pas d'autres moyens), et l'introduit à la fois dans les équations d'équilibre quasi-statique (IV.2) et dans le calcul de la cission efficace τ.

Les deux principales différences avec le modèle de Thomas où Lingle, sont les suivantes : D'une part la force exercée par l'ice-shelf agit sur la vitesse non seulement à la ligne l'échouage mais aussi légèrement en amont ce qui fait que le gradient de vitesse est également affecté. D'autre part il n'y a pas de calcul explicite du déplacement de la ligne d'échouage. L'équation d'évolution est appliquée de la même façon pour la calotte glaciaire et pour la ligne d'échouage.

Un des résultats les plus intéressants est que les deux types de modèles ont des comportements qualitativement différents (Van der Veen 1986_b). Lorsque la force exercée par l'ice-shelf diminue la calotte glaciaire marine ne se désintègre pas comme dans Lingle (1984) mais au contraire la ligne d'échouage avance légèrement et la calotte s'aplatit, le volume total décroissant faiblement. Ce désaccord fait clairement ressortir l'importance de la condition aux limites dans les modèles d'évolution et est à notre avis lié aux contradictions internes (déjà soulignées) des modèles de type Thomas ou Lingle.

Le modèle de Mc Innes et Budd (1984) prend également en compte l'influence de l'ice-shelf sur la partie inférieure de la calotte mais d'une façon beaucoup plus simple : le gradient longitudinal de vitesse pour la glace ancrée est limité par $\dot{\varepsilon}_{xx}$ le taux d'extension de l'ice-shelf. Ces auteurs imposent un taux d'extension non dépendant de l'épaisseur à

l'échouage mais fonction en général de la géométrie de la baie. Leurs études de sensibilité montrent une assez grande influence de l'évolution avec le taux $\dot{\varepsilon}_{xx}$ choisi (Mc Innes 1984) et une très grande influence de l'état initial.

Le modèle de Huybrechts (1990_b) couvre l'ensemble de l'Antarctique (modèle 3D pour la calotte glaciaire, modèle 2D horizontal pour l'ice-shelf). L'approximation de l'écoulement par cisaillement est faite sur l'ensemble de la calotte glaciaire (sauf la zone de transition). Dans l'ice-shelf, les vitesses sont supposées indépendantes de la profondeur et sont obtenues d'après une méthode proposée par Herterich (1987). Dans les équations d'équilibre quasi-statique (IV.2) les éléments du déviateur des contraintes sont écrits en fonction des taux de déformation (à l'aide de la loi de comportement) puis en fonction des vitesses. Cela donne un système d' équations aux dérivées partielles de type elliptique.

Ce modèle comprend également un calcul spécifique pour la zone de transition qu'il définit comme l'ensemble des points de grille situés dans la calotte glaciaire mais en bordure des ice-shelves. Le flux de glace est calculé en intégrant deux fois $\dot{\varepsilon}_{xz}$ et $\dot{\varepsilon}_{yz}$. Ces taux de déformations sont déduits (par la loi de comportement I.11, I.12) des contraintes τ_{xz}, τ_{yz} elles mêmes données par l'approximation de l'écoulement par cisaillement. La différence avec le reste de la calotte glaciaire vient de ce que les valeurs moyennes des autres contraintes ($\bar{\sigma}'_x$, $\bar{\sigma}'_y$, $\bar{\tau}_{xy}$) interviennent dans le calcul de la cission efficace τ. On remarquera que ces mêmes contraintes ne sont pas prises en compte dans le calcul de la contrainte de cisaillement (dans l'équation IV.2). Huybrechts (1990_b) admet que cela pourrait poser des problèmes dans certaines zones, mais que cela nécessiterait le calcul des contraintes en tout point (puisque ce sont les dérivées horizontales qui interviennent dans IV.2) ce qui s'avérerait trop lourd. Dans son modèle, le seul effets des contraintes (σ'_{xx}, σ'_{yy} et τ_{xy}) est donc de diminuer la viscosité de la glace.

Les contraintes moyennées sur l'épaisseur ($\bar{\sigma}'_x$, $\bar{\sigma}'_{yy}$, $\bar{\tau}_{xy}$) sont calculées à partir des vitesses sur les points de grille. En effet, les taux de déformation peuvent se déduire des vitesses par dérivation, et en appliquant une fois encore la loi de comportement, Huybrechts (1990_b) obtient un système (non linéaire) de trois équations en ($\bar{\sigma}'_x$, $\bar{\sigma}'_{yy}$, $\bar{\tau}_{xy}$) qu'il résout par une méthode itérative.

Dans le modèle de Huybrechts (1990_b), l'influence de l'ice-shelf sur la calotte glaciaire vient du fait que le taux d'extension de l'ice-shelf modifie la viscosité de la glace dans la zone de transition. Un fort taux d'extension facilite ainsi la déformation en amont. Réciproquement (influence de la calotte sur l'ice-shelf), la vitesse dans la zone de transition constitue la condition à la limite amont des vitesses dans l'ice-shelf. Il n'y a pas un calcul explicite de la position de la ligne d'échouage, les variations d'épaisseur de la nappe de glace sont calculées par l'équation de conservation de la masse que ce soit dans la calotte glaciaire, la zone de transition ou l'ice-shelf. Il faut noter que comme le modèle de Van der Veen (1986_b) auquel il est apparenté (en beaucoup plus complexe du fait des trois dimensions) ce modèle ne produit pas de désintégration complète de l'Antarctique de l'Ouest au cours des changements climatiques (niveau des mers, température, accumulation) (Huybrechts 1990_b).

Il existe aussi dans la littérature (plus ancienne) quelques conditions aux limites ne prenant pas en compte la dynamique de l'ice-shelf. Oerlemans et Van der Veen (1984) supposent que la forme du bord de la calotte est toujours parabolique et en déduisent une relation entre les épaisseurs aux deux derniers noeuds H_{nf} et H_{nf-1} ($H_{nf} = 0.577\ H_{nf-1}$). On peut également citer Huybrechts et Oerlemans (1987) qui dans la première version de leur modèle fixent simplement la position de la ligne d'échouage au cours du temps ce qui revient à imposer une épaisseur constante sur le bord. Cette dernière condition n'est bien sûr pas réaliste mais il faut noter qu'elle s'avère pratique pour obtenir (avec un minimum d'essais) l'état stationnaire d'une calotte ayant un profil donné car avec les autres conditions décrites précédemment l'état stationnaire dépend de la solution initiale.

- Modélisation de l'écoulement dans la partie aval de la calotte glaciaire.

Nous modélisons de façon particulière, non seulement la zone de transition calotte glaciaire - ice-shelf mais également la zone de forte convergence située en amont du glacier Byrd. Nous avons déjà donné l'équation (IV.2) qui permet de calculer la contrainte de cisaillement (τ_{xz}) en supposant les éléments du déviateur des contraintes (σ'_x, σ'_y, τ_{xy}) connus. Dans la majeure partie de la calotte glaciaire, ces éléments sont supposés négligeables

et nous retrouvons alors l'approximation classique de l'écoulement par cisaillement. Dans la région que nous considérons maintenant, il s'agit de prendre en compte l'influence de l'ice-shelf, celle du frottement sur les bords du glacier et celle de la convergence des lignes de courant et pour cela de déterminer (σ'_x, σ'_y, τ_{xy}). Nous indiquerons ensuite comment nous calculons la vitesse à la ligne d'échouage

. *Influence de l'ice-shelf :* σ'_x

La principale influence de l'ice-shelf sur la calotte glaciaire est d'exercer une contrainte résistante qui limite l'écoulement de la glace. Dans le modèle cela se traduit par le fait que la valeur de la contrainte longitudinale σ'_x à la ligne d'échouage est imposée par l'épaisseur de l'ice-shelf (équation IV.33). D'après les résultats d'Herterich (1987), la zone de transition est étroite, bien inférieure à la maille de notre modèle et il faut choisir une paramétrisation des variations spatiales de σ'_x. Nous suivons la méthode de Van der Veen (1986_b) en supposant que $\bar{\sigma}'_x$ décroît linéairement vers l'amont sur une distance L1. De plus nous supposons que σ'_x ne varie pas beaucoup avec la profondeur et nous prenons la valeur moyennée sur l'épaisseur. A l'échelle à laquelle nous travaillons cette paramétrisation très simple nous parait pour l'instant suffisante. Des progrès sur ce sujet ne pourraient venir que de modèles à petite échelle sur lesquels pourrait se baser la paramétrisation. La distance L_1 est de l'ordre d'une à deux mailles du modèle, ce choix découlant surtout de considérations numériques. Il faut en effet que quel que soit la position de la ligne d'échouage, le noeud situé juste en amont soit affecté par l'ice-shelf.

. *Effet du frottement sur les bords de la vallée :* τ_{xy}

Actuellement la zone de transition est la partie amont du glacier Byrd et se situe dans une vallée. Pour l'ice-shelf (partie flottante du glacier Byrd) nous avons pris en compte le frottement sur les bords de la vallée. Nous en faisons de même pour la région où le glacier Byrd repose sur le socle avec une méthode exactement identique excepté que les équations d'équilibre hydrostatique ne s'appliquent plus et que l'on ne peut pas simplifier comme dans l'équation (IV.31).

Sur la ligne médiane, τ_{xy} est nul mais $\partial\tau_{xy}/\partial y$ (qui intervient dans l'équation (IV.2)) s'écrit (N_{eff} étant donné par l'équation IV.30) :

(IV.34)

$$\int_{-E}^{-B} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\, dz =$$

$$\frac{3}{4\, g\, Y}\left(\frac{\bar{U}_x}{k_{sl}}\right)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{N_{eff}(-E_{sea})^{\frac{4}{3}} - N_{eff}(-E)^{\frac{4}{3}}}{\rho_g} + \frac{N_{eff}(-B)^{\frac{3}{4}} - N_{eff}(-E_{sea})^{\frac{3}{4}}}{\rho_g - \rho_w}\right)$$

. Effet de la convergence des lignes de courant : σ'_y

En amont du glacier Byrd, les lignes de courant convergent fortement. Les lignes de niveau forment grossièrement des cercles concentriques ce qui implique que la fonction de forme Sh varie en 1/R où R est la distance entre le point considéré et l'entrée de la vallée (avec R minimum = Y la demi-largeur de la vallée). Cette convergence doit produire une force résistante qui diminue la vitesse. Notre objectif est d'estimer l'influence de cette convergence sur l'écoulement. Pour cela il faut déterminer l'élément du déviateur des contraintes ($\bar{\sigma}'_y$). A l'échelle de notre modèle (50 km), nous supposons qu'à toute profondeur, l'écoulement est dirigé selon la plus grande pente de la surface. Le taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{yy}$ s'exprime alors en fonction de la vitesse u_x d'après l'équation (IV.10). En utilisant la loi de comportement (avec n=3) nous obtenons la relation suivante pour la contrainte σ'_y :

$$\tau^2\, \sigma'_y = \frac{2\, Sh\, u_x}{B_T} \qquad \textbf{(IV.35)}$$

On remarquera qu'il serait peu réaliste de supposer σ'_y constant avec la profondeur. En effet, u_x diminue avec la profondeur, alors qu'au contraire τ et B_T (qui sont au dénominateur) augmentent. σ'_y diminue donc avec la profondeur. D'après la définition de la cission efficace τ et en tenant compte de ($\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z=0$), l'équation (IV.35) s'écrit aussi :

$$\sigma'^3_y + \sigma'_x \sigma'^2_y + (\sigma'^2_x + \tau^2_{xz} + \tau^2_{yz}) \sigma'_y - \frac{2 \text{ Sh } u_x}{B_T} = 0 \qquad \text{(IV.36)}$$

Cette équation du troisième degré peut se résoudre analytiquement et a toujours une seule solution réelle (voir par exemple Bronstein et Semendiaev 1979, p 198). Si les autres contraintes sont connues ainsi que la vitesse horizontale, l'élément du déviateur σ'_y s'en déduit directement.

Nous avons indiqué comment sont estimés σ'_x et τ_{xy}. La contrainte de cisaillement τ_{xz} dépend de σ'_y (équation IV.2) et il en est par conséquent de même de la vitesse u_x. Cela devrait nécessiter des itérations pour obtenir σ'_y, cependant au cours d'un pas de temps les contraintes et les vitesses varient assez peu et il est suffisant de partir des valeurs calculées au pas de temps précédent. En pratique, nous déterminons tout d'abord τ_{xz} à partir de la valeur précédente de σ'_y (IV.2) puis nous calculons σ'_y.

Pour évaluer l'ordre de grandeur de σ'_y et son influence sur le cisaillement τ_{xz}, nous examinons la région où la convergence est la plus forte, c'est à dire juste en amont de la vallée, suffisamment loin de la ligne d'échouage pour que σ'_x soit négligeable. En surface σ'_y est simplement la racine cubique de (2 Sh u_x/B_T). Avec u_x(-E)=200 m/an, $B_T = 10^{-3}$ et Sh=1/20000 (rayon de courbure de la ligne de niveau = 20 km) σ'_y=-2.71 bar.

Dans le calcul de τ_{xz} c'est la dérivée $(\partial\sigma'_y/\partial x)$ qui intervient. En prenant $(\partial u_x/\partial x = 4\ 10^{-3}$ soit 200m/an en 50 km) et en dérivant Sh analytiquement ($\partial Sh/\partial x = -\partial Sh/\partial R$), nous obtenons $\partial\sigma'_y/\partial x \approx 4.5\ 10^{-5}$ (bar m^{-1}). Ce terme doit être comparé à (ρ_g g $\partial E/\partial x$) qui vaut environ 4.5 10^{-4} bar m^{-1} pour une pente de surface 5 10^{-3}. Cela signifie qu'en surface, la dérivée verticale de la contrainte de cisaillement $(\partial\tau_{xz}/\partial z)$ est environ 10% plus faible (en valeur absolue) lorsque l'influence mécanique de la convergence est prise en compte. Nous voyons donc que cette influence est faible, d'autant plus que cette

application numérique fournit une surestimation car nous avons pris les valeurs en surface et σ'_y décroît avec la profondeur.

En ce qui concerne σ'_y, cela justifie l'approximation que fait Huybrechts (1990_b) de ne tenir compte des contraintes (σ'_x, σ'_y, τ_{xy}) que dans le calcul de la viscosité. Il faut noter que dans le cas d'une convergence, l'effet de σ'_y sur la contrainte de cisaillement a pour résultat de ralentir l'écoulement alors qu'au contraire l'introduction de σ'_y dans la cission efficace abaisse la viscosité et facilite l'écoulement.

Il faut noter que la valeur maximum de $\bar{\sigma}'_x$ (imposée par l'ice-shelf) est également de l'ordre de 2 bars et que la dérivée est alors $\bar{\sigma}'/L1$ soit 2 10^{-5} bar m^{-1}. A la différence de σ'_y, la région dans laquelle cette contrainte est active peut être extrêmement plate, et $\partial\sigma'_x/\partial x$ peut alors affecter sensiblement la valeur de τ_{xz}. Il faut noter que ce résultat est peut être le fait de notre paramétrisation.

Dans notre modèle nous prenons en compte les contraintes (σ'_x, σ'_y, τ_{xy}) à la fois dans l'équation d'équilibre quasi-statique (IV.2) et dans la cission efficace même si dans le cas de σ'_y les effets s'avèrent en général faibles.

. Calcul de la vitesse à la ligne d'échouage.

La vitesse et la géométrie de l'ice-shelf dépendent fortement de la vitesse à l'échouage U_a (ainsi que de l'épaisseur de glace en ce même point). Cette vitesse est calculée avec la formulation utilisée dans la calotte glaciaire (IV.5). Pour la vitesse de glissement, nous rappelons que la pression effective est moyennée sur une distance de 20 km et n'est donc pas nulle. Nous imposons une deuxième limitation qui porte sur le taux d'extension. Le taux d'extension calculé (numériquement) par différence entre la vitesse à la ligne d'échouage et la vitesse pour la colonne immédiatement en amont doit être inférieur au taux d'extension qu'aurait un ice-shelf de même épaisseur. Autrement dit la nappe de glace ne doit pas s'écouler plus vite lorsqu'elle repose sur le socle que lorsqu'elle flotte. Il faut noter qu'en pratique cette limitation entre rarement en action.

IV.1.D Evolution de la géométrie.

- Conservation de la masse et variation d'épaisseur

Que ce soit pour la calotte glaciaire ou pour l'ice-shelf, la variation d'épaisseur au cours du temps est régie par la conservation de la masse (II.2). Cependant, selon que la nappe de glace flotte ou non, la vitesse ne suit pas les mêmes relations avec la géométrie.

. Equation d'évolution dans la calotte glaciaire.

La vitesse d'écoulement moyennée sur l'épaisseur ($\bar{U}_x$) est calculée d'après (IV.5), (IV.6),(IV.7). Pour écrire l'équation d'évolution, on considère en général que $\bar{U}_x$ est proportionnel à la pente de la surface ($\partial E/\partial x$). Le débit s'écrit alors :

$$\bar{U}\, H = D1\, \frac{\partial E}{\partial x} \qquad \text{(IV.37)}$$

On notera que dans l'approximation de l'écoulement par cisaillement, $\bar{U}_x$ est proportionnelle à $(\partial E/\partial x)^n$, n étant l'exposant de la loi de comportement. Pour résoudre ensuite l'équation d'évolution il est nécessaire de linéariser, en écrivant $(\partial E/\partial x)^n=(\partial E/\partial x)^{n-1}$ $\partial E/\partial x$. Le terme $(\partial E/\partial x)^{n-1}$ est pris en compte dans la diffusivité (D1).

Pour calculer la diffusivité D1 nous partons de la vitesse $\bar{U}_x$Lorsque la pente est nulle (ou très faible) cette méthode donne une diffusivité infinie (ou anormalement élevée). Dans ce cas nous écrivons simplement (D1=0). Dans la zone de transition nous sortons de l'approximation de l'écoulement par cisaillement. La proportionnalité entre vitesse et pente de surface n'est alors pas vérifiée car il s'ajoute à la vitesse un terme fonction entre autre de σ'^{n-1}_x $(\partial\sigma'_x/\partial x)$, (voir l'équation d'équilibre quasi-statique (IV.2)). En pratique nous ne prenons en compte ce terme que lorsque la pente est nulle, pour traduire le fait que la glace

peut s'écouler par le seul effet de la traction qu'exerce l'ice-shelf. Afin d'avoir une formulation valable quelle que soit la pente de la surface, nous écrivons :

$$\bar{U}_x H = - D1 \frac{\partial E}{\partial x} + D2 H \qquad \text{(IV.37.bis)}$$

où D1 et D2 sont positifs (dans notre simplification, l'un ou l'autre est nul).

En reportant cette formulation dans l'équation de conservation de la masse et en tenant compte de (E-B=H), nous obtenons :

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial D1 \frac{\partial H}{\partial x}}{\partial x} - \frac{\partial D2\, H}{\partial x} + Sh\, D1 \frac{\partial H}{\partial x} - Sh\, D2\, H + \dot{b} - \dot{f} + \frac{\partial D1 \frac{\partial B}{\partial x}}{\partial x} + Sh\, D1 \frac{\partial B}{\partial x} \qquad \text{(IV.38)}$$

Cette équation décrit l'évolution de la calotte glaciaire. C'est une équation de diffusion non linéaire (du fait que D1 dépend de $(\partial E/\partial x)$ et de H). Nous rappelons que $\dot{b}$ est le taux d'accumulation dépendant du temps (voir chapitre III) et $\dot{f}$ est le taux de fusion basal obtenu lors du calcul des températures (voir chapitre II)

. Equation d'évolution dans l'ice-shelf.

Dans l'ice-shelf, la vitesse ne dépend pas de la pente de la surface et l'équation d'évolution garde la forme de l'équation de conservation de la masse (II.2). On remarquera que cette forme est également donnée par l'équation (IV.38) avec D1=0 et D2=$\bar{U}_x$.

. Conditions aux limites.

- Dôme.

Nous nous limitons à l'étude d'une ligne de courant (demi-calotte) et supposons que la position du dôme ne varie pas au cours du temps. Par symétrie, la condition à la limite est une pente de la surface nulle au dôme : $\partial E/\partial x = 0$ (ou $\partial H/\partial x=-\partial B/\partial x$).

- Bord de l'ice-shelf.

Les ice-shelves sont extrêmement plats, d'autant plus que l'on s'éloigne de la ligne d'échouage. Par conséquent, nous prenons comme condition sur le bord de l'ice-shelf une pente de surface nulle, ce qui en raison de la condition de flottaison est équivalent à : $\partial H/\partial x=0$.

- Jonction calotte glaciaire - ice-shelf.

A la jonction entre la calotte glaciaire et l'ice-shelf, l'équation d'évolution (IV.38) est toujours valable, il faut simplement s'assurer lors de la discrétisation que la conservation de la masse est localement vérifiée.

A chaque pas de temps, la position de la ligne d'échouage est calculée en supposant que l'épaisseur varie linéairement à l'intérieur la maille de transition et en cherchant le point pour lequel la condition de flottaison (IV.13) est satisfaite. La position de la ligne d'échouage ne joue pas directement sur les variations d'épaisseur mais affecte la contrainte σ'_x et par là les vitesses d'écoulement dans la zone de transition et dans l'ice-shelf.

. Résolution numérique.

Dans la calotte glaciaire, l'équation d'évolution est une équation de diffusion non-linéaire. En raison de cette non-linéarité, il n'est pas possible d'utiliser un schéma purement implicite. Nous avons recours à un schéma temporel semi-implicite dans lequel la diffusivité

est prise au pas de temps précédent. Avec notre grille alternée, la diffusivité est calculée sur les colonnes intermédiaires ce qui améliore la stabilité, mais malgré cela et sans doute en raison de la non-linéarité la stabilité numérique de la résolution dépend du pas de temps choisi.

Dans l'ice-shelf, l'équation d'évolution est plus simple (équation de conservation de flux) mais comme nous résolvons l'évolution de l'ensemble de la nappe de glace en une seule fois nous utilisons également le même type de formulation semi-implicite que pour la calotte glaciaire. Cette résolution semi-implicite est détaillée dans l'annexe 3.

Nous utilisons un pas de temps variable et pour le déterminer nous imposons comme condition que la variation d'épaisseur en n'importe quel point de la nappe de glace, ne doit pas dépasser 1m en un pas de temps. Cela permet d'avoir de grands pas de temps (jusqu'à 40 ans) dans les situations stables et de faibles pas de temps si nécessaire. Ce dernier cas peut se produire lorsque les conditions varient rapidement mais aussi pour des raisons numériques en particulier lorsque la position de la ligne d'échouage change de maille.

. Test avec une solution analytique.

Dans le cas général, même avec une géométrie simple (socle plat), il n'y a pas de solution analytique permettant de déterminer le profil stationnaire d'une calotte glaciaire. Dans la formulation analytique (II.33) que nous avons donné au chapitre (II), nous supposons que l'accumulation est la même en tous points et nous imposons la forme du profil vertical de vitesse (II.19). Le premier test du code numérique du modèle d'évolution consiste à comparer ce profil analytique avec celui obtenu numériquement par l'équation d'évolution en partant d'un profil initial quelconque et en laissant évoluer la géométrie de la calotte jusqu'à ce qu'elle atteigne un état stationnaire. Les hypothèses sur le socle initial, l'accumulation et la forme de la vitesse sont les mêmes que pour le profil analytique. Cette comparaison est effectuée en prenant comme condition à la limite sur le bord une épaisseur fixe. L'écart entre les deux profils ne dépasse pas 20 m (sur environ 3000 m) et est attribué à la discrétisation. Cet écart est plus marqué dans la région du Dôme car dans le modèle d'évolution la pente de la surface est supposée nulle à l'échelle du pas horizontal (50 km), ce qui n'est pas le cas dans la solution analytique.

L'unicité de la solution est assurée lorsqu'une au moins des conditions aux limites consiste à imposer la valeur de la variable recherchée, l'autre condition pouvant être un gradient. Dans ce test, ou l'épaisseur est imposée sur le bord, on vérifie que le profil d'équilibre est indépendant de la solution de départ que celle ci soit une calotte plus épaisse ou plus fine que le profil analytique.

- Isostasie

Pour simuler complètement l'évolution de la géométrie au cours du temps, il reste à déterminer les mouvements verticaux du socle ($\partial B/\partial t$). Ces mouvements verticaux sont essentiellement dus au fluage de l'asthénosphère qui migre depuis le centre de la calotte vers les bords. Lliboutry (1965, P. 809) tient également compte de la compression élastique de la lithosphère mais celle ci est faible (50 m pour la Fennoscandie). Les principales informations sur la réaction du socle en réponse aux variations d'épaisseur d'une calotte glaciaire viennent du relèvement post-glaciaire de la Fennoscandie. Depuis que la calotte qui recouvrait l'ensemble de la Scandinavie et de la Finlande a disparu, le socle émerge lentement. Pour notre époque, ce soulèvement a pu être documenté à partir de documents historiques relatifs aux ports de la Baltique. Par rapport à un géoïde moyen immuable, l'émergence au centre (de la calotte disparue) est 107 cm/siècle et s'accompagne à la périphérie d'un enfoncement quatre fois moindre (25 cm/siècle) (Lliboutry 1965). Plus loin dans le passé, on a pu déterminer l'émergence en analysant d'ancienne plages soulevées. D'après ces données si (d) est le soulèvement restant à accomplir, la vitesse de soulèvement est proportionnelle à d^m, avec m compris entre 3 et 5 (Lliboutry 1965).

Dans le cas de la Fennoscandie (ou du Laurentide) les variations d'épaisseur de glace sont de grande amplitudes puisque la calotte glaciaire a entièrement disparu. Pour l'Antarctique de l'Est, les variations d'épaisseur sont plutôt de petites oscillations autour d'une valeur moyenne et il en est de même pour l'enfoncement. D'après Lliboutry (communication personnelle) la valeur de m est alors probablement m=1 (terme Newtonien dans la viscosité du manteau).

Nous notons (h) l'enfoncement du socle sous le poids de la glace et h_e la valeur de cet enfoncement à l'équilibre. B_0 étant l'altitude du socle lorsqu'il n'y avait pas de glace, (h) est donné par ($h=B_0-B$). Nous calculons l'évolution du socle au cours du temps de la façon suivante :

$$\frac{\partial B}{\partial t} = - \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h - h_e}{t_i} \qquad \textbf{(IV.39)}$$

où t_i, le temps de relaxation, est un paramètre du modèle (de l'ordre de quelques milliers d'années). Cette formulation est également celle utilisée par Oerlemans dans son premier modèle (1983).

Une autre approche consiste à modéliser l'isostasie à partir du comportement mécanique de la lithosphère et de l'asthénosphère. On considère en général une lithosphère élastique reposant sur une asthénosphère visqueuse. En exprimant la conservation du flux de matière dans l'asthénosphère et en supposant que ce flux n'est fonction que de l'épaisseur (H_a) de l'asthénosphère et du gradient horizontal de pression (proportionnel à $\partial(h-h_e)/\partial x$) on obtient alors une équation de diffusion du type :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D_a \frac{\partial^2 (h - h_e)}{\partial x^2} \qquad \textbf{(IV.40)}$$

Pour une viscosité Newtonienne (η), la diffusivité D_a est proportionnelle à H_a^3/η (Lliboutry 1965, p.820, Cathles, 1975, Oerlemans et Van der Veen, 1984). La formulation exacte de la diffusivité diffère selon les auteurs car elle dépend des hypothèses sur les conditions aux limites à l'interface lithosphère-asthénosphère et à la base de l'asthénosphère (pour la contrainte de cisaillement et la vitesse horizontale). Les valeurs de la diffusivité trouvées dans la littérature vont de 20 à 60 $km^2\ an^{-1}$ (Cathles, 1975, p. 177).

Entre ces deux approches, il est relativement difficile d'estimer quelle est la meilleure et quelle en est l'influence sur l'évolution de la calotte glaciaire. Que ce soit avec l'équation (IV.39) ou (IV.40), il y a un paramètre relativement mal connu (temps de relaxation ou diffusivité). L'intérêt de l'équation de diffusion est de prendre en compte explicitement les

mécanismes intervenant dans la réaction isostatique. En particulier lors d'un enfoncement, le fluage de l'asthénosphère se fait du centre vers le bord de la calotte. Cet afflux de matière à la périphérie provoque un gonflement du socle (bourrelet extérieur). Ce phénomène est transitoire mais peut avoir une grande importance sur le déplacement de la ligne d'échouage. Il semble assez bien simulé avec l'équation de diffusion. Un inconvénient de cette méthode est que l'hypothèse de viscosité Newtonienne est discutable, une loi de comportement non-linéaire (comme dans la glace) paraissant en effet plus vraisemblable. Pour une viscosité non-linéaire, on ne sait traiter le problème qu'en prenant des couches superposées chacune de propriété uniforme et de viscosité Newtonienne. Cependant, dans le cas des petites oscillations que nous considérons, c'est sans doute le terme Newtonien qui intervient. Dans notre modèle, nous utilisons l'une ou l'autre méthode (équation IV.39 ou IV.40) avec des tests de sensibilité sur la valeur de t_i ou celle de D_a.

Il reste à calculer l'enfoncement à l'équilibre (h_e). En négligeant la rigidité de la lithosphère, (h_e) s'obtient simplement à partir de la condition de flottaison ($\rho_g H = \rho_a h_e$) où H est l'épaisseur de glace et ρ_g et ρ_a les densités de la glace et de l'asthénosphère. Cependant cette hypothèse d'enfoncement local n'est pas réaliste et il faut tenir compte de la régionalisation.

La rigidité à la flexion (D_l) de la lithosphère est définie par :

$$D_l = \frac{E_y H_l^3}{12 (1 - \nu^2)} \qquad \textbf{(IV.41)}$$

où H_l est l'épaisseur de la lithosphère, E_y est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson. D'après les valeurs données par Drewry (1983) : H_l=110 km, E_y=8.35 10^{10} N/m^2, ν=0.25 et D_l=9.87 10^{24} N m. L'enfoncement à l'équilibre (h_e) satisfait à l'équation ci-dessous (Lliboutry 1965, p 151, Brotchie et Silvester, 1969) :

$$\Delta\Delta h_e + \frac{\rho_a g}{D_l} h_e = \frac{q}{D_l} \qquad \textbf{(IV.42)}$$

où q désigne la charge par unité de surface. Lorsque les deux dimensions horizontales sont prises en compte, la solution de cette équation avec une charge concentrée au centre est donnée par la fonction de Kelvin d'ordre 0 (kei) (Lliboutry 1965, Brotchie et Silvester 1969). Pour l'ensemble de l'Antarctique, une carte de l'enfoncement ainsi obtenu ainsi que la méthode numérique utilisée sont données dans Drewry (1983).

Dans notre modèle à une dimension horizontale, il faut considérer non plus une charge ponctuelle mais une ligne de charge et l'équation (IV.42) s'écrit simplement :

$$\frac{\partial^4 h_e}{\partial x^4} + \frac{\rho_a\, g}{D_l}\, h_e = \frac{q}{D_l} \qquad \text{(IV.43)}$$

La solution pour une charge P (poids par unité de longueur) en x=0, est donnée par Turcotte et Schubert (1982). Elle s'obtient en résolvant l'équation homogène et en tenant compte du fait que la charge doit être entièrement compensée par la poussée d'Archimède :

$$h_e = \frac{P\, r^3}{8\, D_l}\, e^{-\frac{|x|}{r}} \left(\cos \frac{|x|}{r} + \sin \frac{|x|}{r} \right)$$

avec r, le rayon d'action (IV.44)

$$r = \left(\frac{4\, D_l}{\rho_a\, g} \right)^{\frac{1}{4}}$$

Avec les valeurs numériques citées plus haut le rayon d'action est environ 185 km.

L'équation (IV.44) est linéaire et de plus la dimension (dx) d'une maille du modèle (50 km) est inférieure au rayon d'action. On peut alors suivre la méthode proposée par Oerlemans et Van der Veen (1984) et considérer que l'enfoncement à l'équilibre pour l'ensemble de la calotte est donné par la somme des contributions de chaque noeud du modèle (avec pour un noeud k une charge $P_k = \rho_g\, g\, H_k\, dx$).

Pour déterminer le socle sans glace B_0, nous partons du socle actuel, puis nous calculons l'enfoncement en supposant que l'état actuel en équilibre. Cette dernière hypothèse n'est pas forcément juste, cependant on estime qu'au cours des derniers cycles climatiques

la calotte n'a subi que des oscillations d'une amplitude de quelques centaines de m autour d'un état moyen. L'erreur éventuellement commise est donc faible, et surtout, il n'y a pas d'information permettant une meilleure estimation. Nous effectuons nous même le calcul de B_0 pour garder la cohérence avec le calcul d'enfoncement fait au cours du temps. L'autre alternative est de prendre les données dans la carte donnant le socle de l'Antarctique sans glace (Drewry 1983).

IV.2 RESULTATS

Les résultats que nous présentons concernent la ligne de courant passant par Vostok. Un des buts de cette étude est en effet de simuler les variations d'épaisseur de glace dans la région de Vostok afin d'améliorer l'interprétation de l'enregistrement climatique de Vostok. De plus cette ligne de courant nous semble représentative de toutes les lignes qui partent des Dômes A,B et C et aboutissent dans le Ross Ice-shelf en traversant la Chaîne Transantarctique. La particularité de ces lignes par rapport au reste de l'Antarctique vient justement de la traversée de la Chaîne Transantarctique puisque la nappe de glace s'écoule alors dans des vallées relativement étroites (25 km dans le cas du Glacier Byrd). Les modèles d'évolution sont forcément à grande échelle car il faut forcément couvrir au moins une demi-ligne de courant (comme dans notre modèle) et les mailles horizontales utilisées sont de l'ordre de 50 km (40 km dans le modèle de Huybrechts 1990a). Avec cette taille de maille, les phénomènes qui se produisent dans les vallées et en particulier le frottement sur les bords, ne peuvent pas être pris en compte dans un modèle tri-dimensionnel. Par contre, avec un modèle bi-dimensionnel, il est possible de choisir la ligne de courant qui passe dans la vallée et de prendre ainsi en compte le frottement sur les bords. C'est la démarche que nous avons suivi et c'est pourquoi notre modèle nous semble bien adapté à la modélisation de cette partie de l'Antarctique.

L'autre objectif que nous poursuivons est de déterminer l'influence, sur la géométrie de la calotte glaciaire, des divers processus pris en compte, ceci afin d'établir quels sont les mécanismes les plus importants dans l'évolution. Notre démarche est d'effectuer systématiquement des tests de sensibilité aux divers paramètres du modèle.

Nous commencerons par étudier le profil d'équilibre de la calotte glaciaire en imposant des conditions climatiques constantes, puis nous étudierons l'influence de perturbations climatiques simples (créneau) et enfin nous effectuerons quelques expériences en imposant des conditions climatiques déduites de l'enregistrement climatique de Vostok et des variations des niveau de l'océan tiré des enregistrements marins.

IV.2.A Etat d'équilibre, étude de sensibilité.

- Description des expériences.

Ces expériences consistent à simuler l'évolution de la nappe de glace depuis une solution initiale jusqu'à l'obtention d'un état stationnaire, les conditions climatiques restant constantes dans le temps.

. Conditions aux limites liées au climat.

Dans notre modèle, l'action du climat sur la calotte glaciaire est imposée par l'intermédiaire de la perturbation de température (ΔT_{clim}) et du niveau de l'océan (E_{sea}).

La paramétrisation de la température en surface et de l'accumulation est décrite dans le chapitre (III). La température à la surface de la calotte est donnée par (III.3) en fonction de la température actuelle, de l'altitude de la surface et de la perturbation d'origine climatique (ΔT_{clim}) supposée indépendante du lieu. Cette perturbation ($\Delta T_{clim}(t)$) est donc pour une altitude donnée (par exemple le niveau actuel de la mer) l'écart entre la température à l'instant (t) et la température actuelle. L'accumulation est donnée par (III.19) et dépend de la température au dessus de l'inversion (cette température étant elle même liée à la température en surface) et d'une fonction F(x) qui représente l'importance relative des mécanismes de précipitation (cette fonction est indépendante du temps). L'altitude de la surface étant une variable du modèle, elle est connue au cours du temps et le seul fait d'imposer (ΔT_{clim}) suffit donc pour fournir la température et l'accumulation en tout point et à toute époque.

Le niveau de l'océan (E_{sea}) est également imposé et intervient dans les conditions à la jonction calotte glaciaire - ice-shelf ainsi que dans la définition de la pression effective (par exemple équations IV.13, IV.31, IV.33).

Dans les expériences d'état stationnaire, ΔT_{clim} et E_{sea} sont constants. Nous rappelons que $\Delta T_{clim}=0$ et $E_{sea}=0$ représentent les conditions actuelles.

. Etat initial.

L'état initial est composé de l'épaisseur de glace, de l'altitude du socle rocheux et de la température en tout point. Seules ces variables sont calculées par une équation dépendant du temps (respectivement les équations (IV.38), (IV.39 ou IV.40) (II.37)). Les autres variables (vitesses, contraintes, température en surface, accumulation) sont entièrement déterminées à partir de la géométrie, du champ de température et des conditions climatiques imposées.

Dans l'équation de diffusion qui régit l'évolution de la géométrie (IV.38) nous avons imposé une pente de la surface nulle comme condition aux limites au dôme et à l'extrémité du shelf. Une telle condition de gradient n'assure pas l'unicité de la solution, il en résulte que le profil d'équilibre peut dépendre de l'état initial choisi, cependant nous n'avons pas observé d'influence significative de la condition initiale sans doute en raison de la non-linéarité des équations. Seul varie le temps nécessaire pour atteindre l'équilibre. Ce temps dépend principalement des processus thermiques qui sont les plus lents.

Nous avons testé trois types d'état initial :

- La géométrie actuelle, et un champ de température analytique (pas d'advection horizontale, vitesse verticale fonction linéaire de la profondeur)
- Une géométrie obtenue par le modèle mais avec des paramètres différents.
- Pas de glace. Cette dernière condition est sans doute irréaliste, car lorsque la calotte Antarctique s'est formée (il y a plusieurs millions d'années) les conditions climatiques ne sont pas devenues froides brutalement et de plus le socle rocheux a vraisemblablement été modifié depuis (érosion). Cependant ce type de condition est intéressant car il permet d'étudier le comportement du modèle dans des conditions radicalement différentes des conditions actuelles. En particulier nous vérifions que le modèle autorise de grands déplacements de la ligne d'échouage.

Dans le cas d'un état initial sans glace, la calotte atteint l'épaisseur actuelle en environ 100 000 ans et l'équilibre parait achevé en 400 000 ans.

flux géothermique	ϕ = 40, <u>50</u>, 55, 60, 65 mW m^{-2}
Loi de comportement $2\ \dot{\varepsilon}_{ij} = B_T\ \tau^{n-1}\ \tau'_{ij}$	exposant : n=3
	coefficient : $B_T = B_0$ exp (E_a/R (1/Tf-1/T)) T ≤ 266.65 (K) $B_0 = m_B$ x 0.166 bar^{-3} an^{-1} E_a = 78.2 kJ/mole T ≥ 266.65 (K) $B_0 = m_B$ x 0.2 bar^{-3} an^{-1} E_a = 95.45 kJ/mole m_B coefficient pour l'étude de sensibilité m_B = 0.5, <u>1</u>, 2
	teneur en eau dans la couche basale tempérée : water = <u>0</u>, 2 % water=2% implique un coefficient B_0=0.936 bar^{-3} an^{-1}
Loi de glissement $U_{sl} = k_{sl}\ \tau_b^3 / N_{eff}$	<u>coefficient k_{sl} constant</u> : k_{sl} = 100, <u>1000</u>, 5000 m bar^{-2} an^{-1} **coefficient k_{sl} fonction de l'épaisseur (δ) de la CBT :** k_{sl} = 200 x δ (δ en m, k_{sl} en m bar^{-2} an^{-1}) avec valeur minimum de ksl : 1000 (m bar^{-2} an^{-1})
ice-shelf équation (IV.33)	<u>C</u>ontrainte exercée par le Ross Ice shelf : σ'_{back} = 0, <u>0.1</u>, 0.2, 0.3, 0.5, 1. bar
	Frottement sur les bords de la vallée : c_{bord}= 0.05, <u>0.1</u>, 0.2, 0.3
Conditions climatiques	E_{sea} = -100, <u>0</u>
	ΔT_{clim} = -7, <u>0</u> °C
Taux d'accumulation	<u>Accumulation fonction de la température en surface</u> (équation III.19) <u>F(x) = 0</u>
	Accumulation = coef x accumulation actuelle (pour étudier séparément l'influence de la température et de l'accumulation) coef = 0.5, <u>1</u>
Isostasie	**Rigidité de la lithosphère :** <u>$D_1 = 8.5\ 10^{24}$ N m</u> ou enfoncement local
	FLuage de l'asthénosphère : <u>équation (IV.39) ti=2000 ans</u>

Tableau IV.1 *Gammes de paramètres utilisés dans l'étude de sensibilité pour l'état stationnaire. Les paramètres soulignés sont ceux de l'expérience de référence.*

. Paramètres du modèle et expérience de référence.

Les différents paramètres pour lesquels nous étudions la sensibilité du modèle sont résumés dans le Tableau (IV.1). Pour chaque paramètre, nous indiquons les valeurs extrêmes envisagées dans l'étude de sensibilité, ainsi que celle utilisée dans l'expérience de "référence". Cette dernière valeur (soulignée dans le texte) est en général la plus communément admise et est souvent celle qui a été citée lors de la description du modèle. Afin d'étudier séparément l'influence de chaque paramètre, nous ne faisons le plus souvent, qu'une seule modification à la fois, par rapport à l'expérience de "référence".

- Résultats de l'expérience de référence.

Dans l'expérience de référence, les données climatiques sont prises égales aux valeurs actuelles. Il parait donc assez naturel de comparer le profil d'équilibre ainsi obtenu avec le profil mesuré de la calotte glaciaire. Il ne faut cependant pas faire de cette comparaison un critère pour caler les paramètres du modèle car l'Antarctique n'est pas en état d'équilibre au moins en ce qui concerne le champ de température. La température à la base de la nappe de glace est en effet encore fortement influencée par les conditions glaciaires qui régnaient il y a 15000 ans (Ritz, 1987).

La géométrie calculée est relativement proche (dans sa forme et dans sa dimension) de la géométrie actuelle (figure IV.6). Dans le centre, le modèle donne une épaisseur environ 200 m plus grande que l'actuel (pour une épaisseur de 3000 m). La position de la ligne d'échouage déterminée par le modèle est à quelques kilomètres de la ligne actuelle.

Le champ de température est présenté sur la figure (IV.7). La température basale la plus froide (-11°C) se situe au Dôme (figure IV.7.b). En effet, plus l'épaisseur de glace est importante plus la température basale est élevée car la couche de glace joue un rôle d'isolant (par rapport aux températures très basses régnant en surface). Dans les régions centrales cet effet isolant est prédominant car la production de chaleur par déformation est négligeable. Au dôme, en raison du relief sous glaciaire, l'épaisseur de glace est relativement faible (environ 3000 m) ce qui explique cette température basale basse. A Vostok (qui est situé à 300 km du

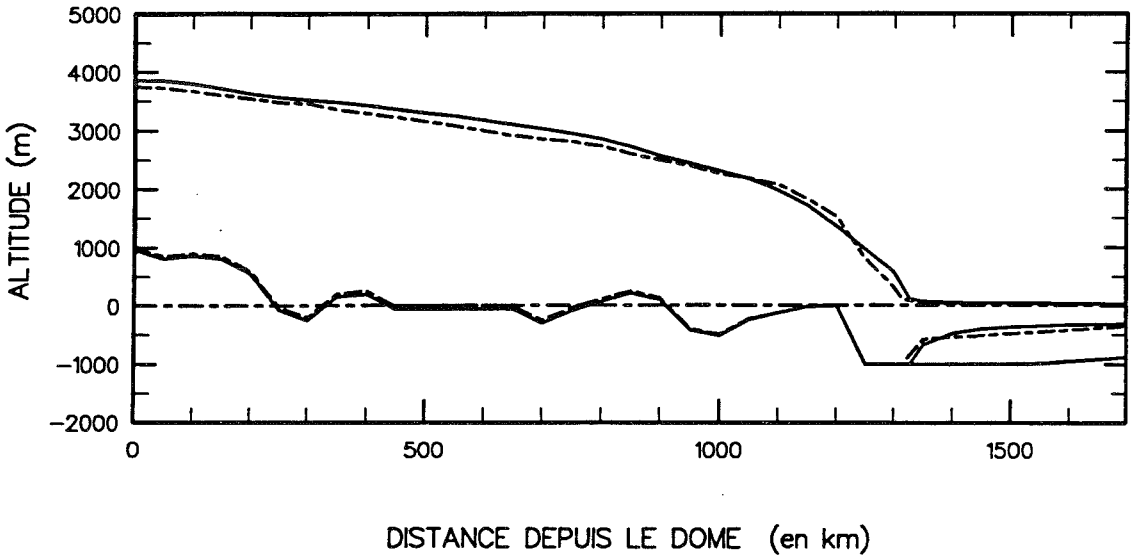


Figure IV.6 ***Profil d'équilibre obtenu dans l'expérience de référence comparé au profil actuel.***

Le profil calculé par le modèle est représenté en trait continu. Les paramètres utilisés dans le calcul sont résumés dans le Tableau (IV.1).

La géométrie actuelle (en pointillés) est obtenue à partir des cartes de Drewry (1983) et est prise le long de la ligne de courant qui part de Ridge B, passe par Vostok (300 km du dôme) et Byrd Glacier (de 1280 à 1380 km du dôme) pour aboutir dans le Ross Ice shelf (voir aussi figure IV.1). La ligne d'échouage se situe au niveau du Byrd Glacier (1320 km du dôme).

Dôme), l'épaisseur est plus grande (3800 m) et la température basale atteind le point de fusion (mais seulement en ce point de la région). Le flux géothermique utilisé pour l'expérience de référence est 50 mW/m^2, et nous avons vu (chapitre III et Ritz 1989) que la valeur minimum du flux géothermique nécessaire pour obtenir la fusion à Vostok est 50 mW/m^2, en bon accord avec les résultats obtenus ici.

Dans la partie aval de la calotte, les processus les plus efficaces (mais avec des effets opposés) sont l'advection et la chaleur de déformation. Près de la surface de la nappe de glace, on remarque que le gradient vertical de température est plus faible en aval que dans les régions centrales ce qui reflète l'influence de l'advection horizontale qui transporte du froid de l'amont vers l'aval. La chaleur produite par la déformation augmente le long de l'écoulement ce qui entraîne une fusion basale (à partir de 950 km du Dôme) et même l'apparition d'une couche basale tempérée sur les 200 derniers kilomètres. L'épaisseur de cette couche basale tempérée (CBT) varie entre 5 et 100 m. La production de chaleur par déformation est donc un mécanisme très important pour la température dans la partie aval du glacier.

La vitesse horizontale augmente très lentement entre le centre et 1000 km puis beaucoup plus rapidement sur le bord (figure IV.8). On remarque que la vitesse à Vostok est inférieure à 1 m c'est à dire du même ordre de grandeur que la vitesse mesurée en surface (2 ± 1 m). L'autre site pour lequel nous disposons de mesures pour la vitesse d'écoulement est le glacier Byrd (Whillans et al. 1989). Juste en amont de la ligne d'échouage, la vitesse en surface est 750 m/an sur la ligne médiane et 250 m/an sur le bord de la vallée. Ces vitesses mesurées sont plus fortes que les vitesses obtenues par notre modèle (250 m/an sur la ligne médiane). Ce fait est à rapprocher de la différence de géométrie existant à cet endroit entre modèle et profil actuel. On observe en effet (figure IV.6) que le profil calculé est 300 m plus épais que le profil actuel ce qui va aussi dans le sens d'une vitesse d'écoulement plus faible dans le modèle. Ce désaccord peut provenir du fait (déjà cité) que le profil calculé simule un état d'équilibre alors que la calotte réelle n'est pas forcément en équilibre, il peut aussi être dû à une mauvaise estimation de la vitesse de glissement ou de la déformation dans la couche basale tempérée car dans cette expérience nous ne tenons pas compte de l'influence de la teneur en eau sur la déformation. Nous étudierons l'influence de ces paramètres dans l'étude de sensibilité. Enfin, il faut reconnaître que la maille horizontale que nous utilisons

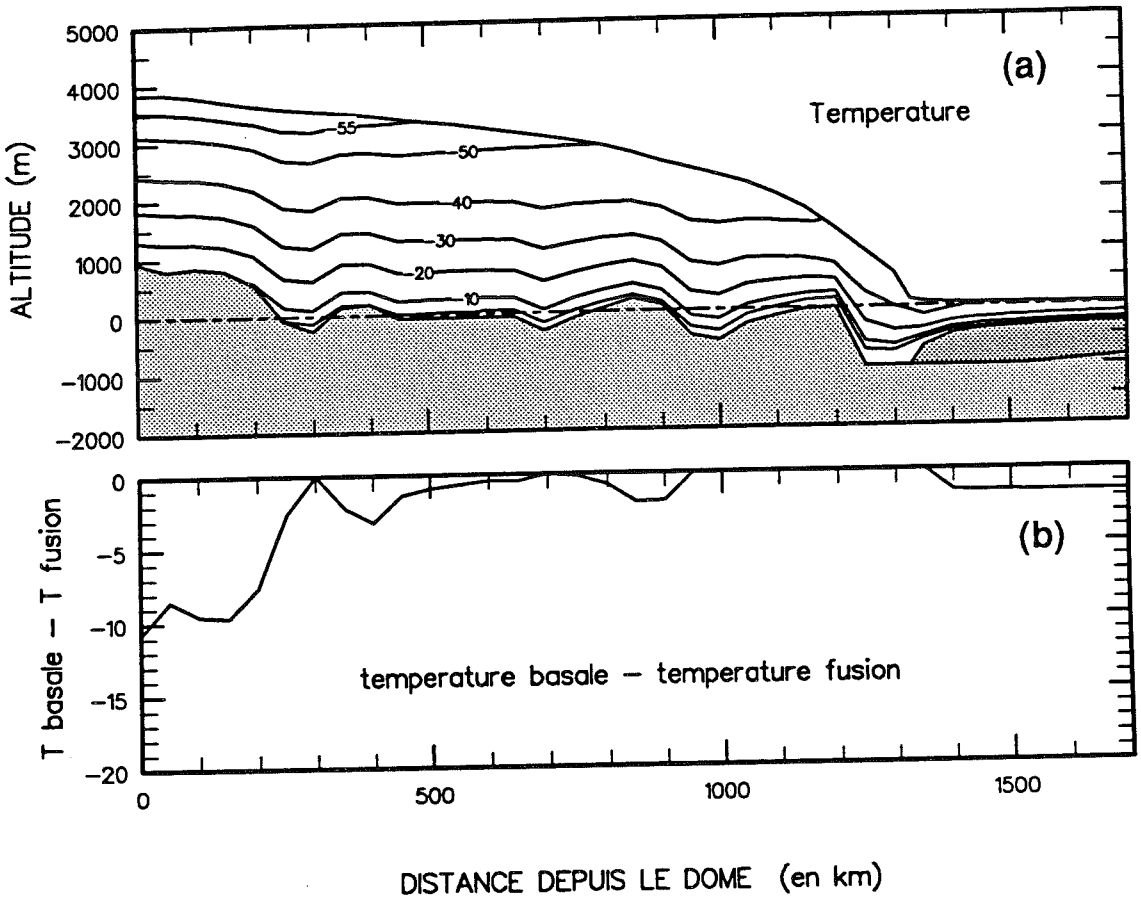


Figure IV.7 Température dans la glace calculée pour une calotte en état d'équilibre.
Expérience de référence.
***a.** Champ de température (en ° C)*
***b.** Ecart entre la température basale et la température de fusion.*
Dans le centre, la fusion basale est liée à l'épaisseur de glace (noter par exemple le cas de Vostok à 300 km du dôme). Sur le bord, la fusion basale est due à la chaleur de déformation. La température basale de l'ice shelf est imposée à -1.8°C pour tenir compte du point de congélation de l'eau de mer.

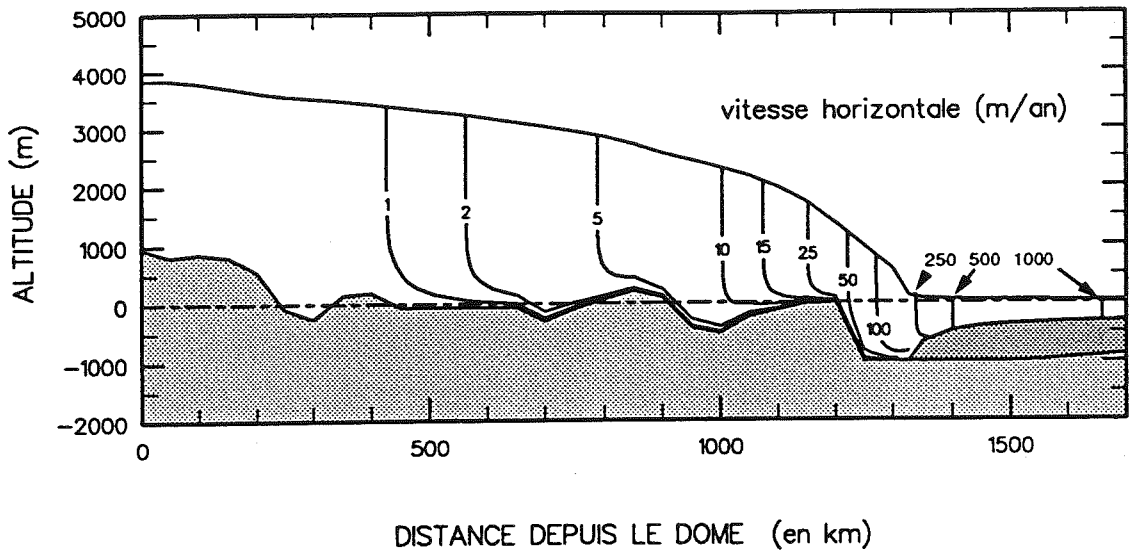


Figure IV.8 Vitesse horizontale calculée pour le profil d'équilibre. Expérience de référence.

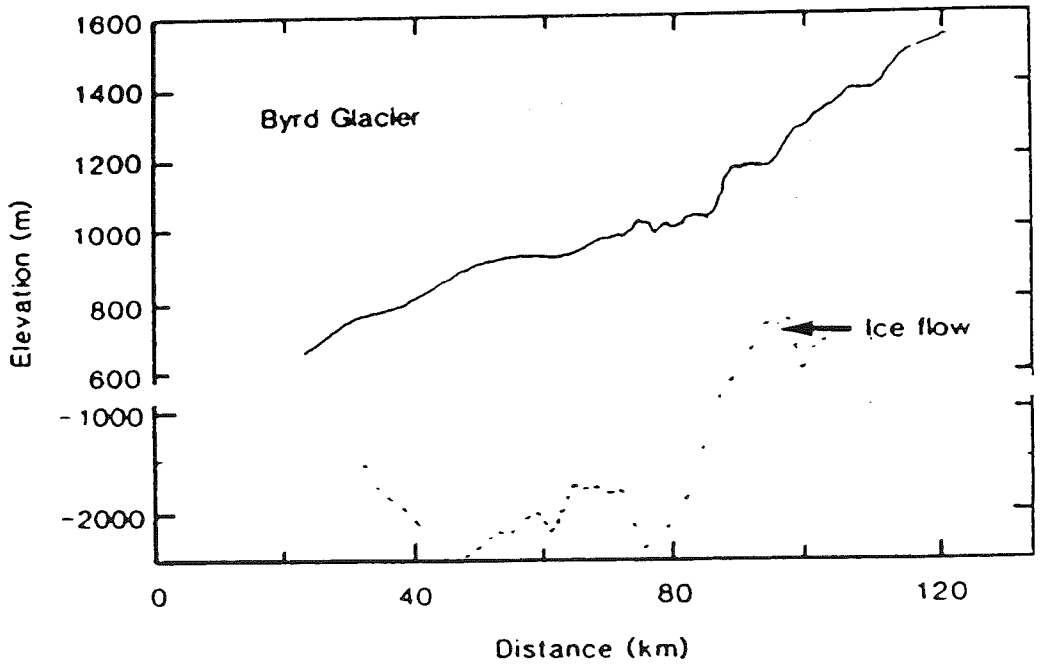


Figure IV.9 Profils de la surface et du socle le long du Byrd Glacier. Figure extraite de McIntyre (1985). Le profil de la surface a été mesuré par altimétrie aéroportée, et le profil du socle par radio écho-sondages. Le profil du socle est en pointillé car les données sont espacées. Noter que le sens de l'écoulement est inverse de celui des autres figures et que l'échelle verticale de la surface est dilatée par rapport à celle du socle.

n'est pas suffisamment petite pour prendre en compte les irrégularités du socle rocheux dans cette région. En particulier, le brusque enfoncement du socle (entre 1200 et 1250 km depuis le dôme, figure IV.6) est encore plus abrupt dans la réalité que dans le modèle. D'après McIntyre (1985, figure IV.9) le socle passe de 0 à -2500 m en seulement 20 km. Le profil du socle que nous utilisons est lui obtenu à partir de la carte de Drewry (1983) et est plus lissé.

En résumé cette expérience de référence donne une géométrie relativement proche des données actuelles, malgré un léger désaccord sur le bord. Cette expérience nous parait donc une base correcte pour étudier la sensibilité du modèle.

- Etude de sensibilité.

. Flux géothermique

Le flux géothermique intervient dans le champ de température puisqu'il conditionne fortement la condition à l'interface socle-glace. Ce paramètre est non seulement difficile à estimer (voir annexe 1), mais de plus il peut varier en fonction des caractéristiques géologiques du socle rocheux. Dans notre modèle cependant, la valeur du flux géothermique est supposée indépendante du lieu.

L'influence du flux géothermique sur le profil stationnaire de la calotte glaciaire est illustrée sur la figure (IV.10.a) et peut se résumer ainsi : Plus le flux géothermique est fort, plus la température est élevée et plus la calotte glaciaire est plate car la fluidité de la glace augmente avec la température. La différence d'épaisseur (au dôme) atteint 650 m entre les expériences ϕ=40 mW/m^2 et ϕ=65 mW/m^2. La sensibilité au flux géothermique n'est significative que lorsque la base est froide (en dessous du point de fusion) car alors le champ de température est conditionné par le gradient de température basal, lui même relié au flux géothermique. Lorsque la base est tempérée, le flux géothermique n'agit plus que sur le taux de fusion basal (équation II.40), la température basale étant alors fixée au point de fusion.

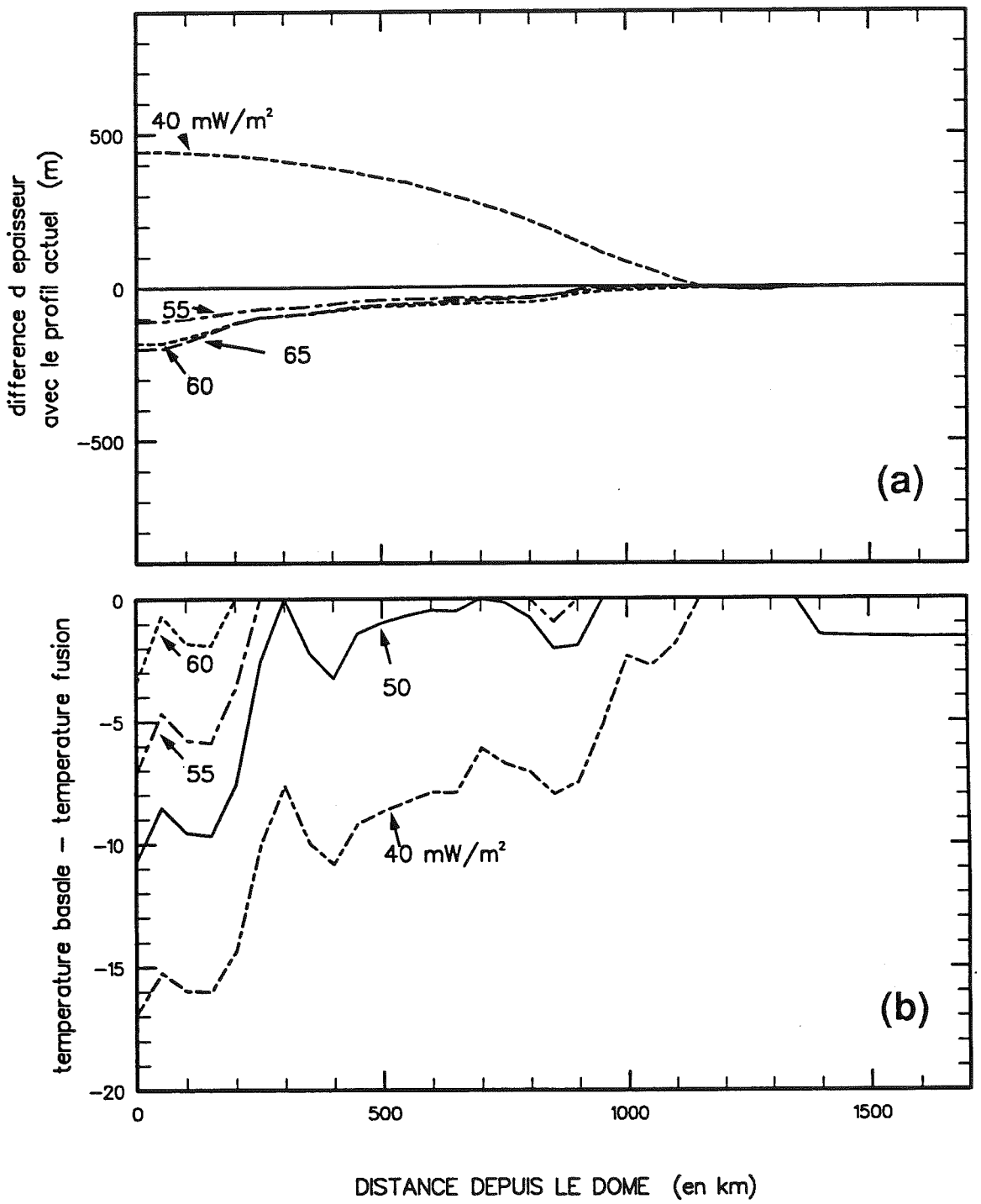


Figure IV.10 Sensibilité au flux géothermique.
a. *Différence d'épaisseur entre chaque profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence (ϕ=50 mW/m^2).*
Les profils sont calculés avec diverses valeurs du flux géothermique. Plus le flux géothermique est faible, plus la calotte est épaisse.
b. *Ecart entre la température basale et la température de fusion pour différentes valeurs du flux géothermique.*

Cette sensibilité différente selon que la base est ou non au point de fusion apparaît sur la figure (IV.10 a et b). Dans les expériences avec ϕ=40 mW/m^2 et ϕ=50 mW/m^2, la majeure partie de la ligne de courant a une base froide et les différences d'épaisseur entre les deux expériences sont importantes (450 m au dôme), sauf sur le bord où justement la base est tempérée. Dans les expériences avec un flux géothermique supérieur à 55 mW/m^2, seuls les 300 premiers kilomètres ont une base froide et les différences d'épaisseur sont très faibles (moins de 100 m entre 55 et 65 mW/m^2) et localisées dans cette région centrale à base froide.

En conclusion, le flux géothermique apparait comme un paramètre important. Pour chaque expérience, la sensibilité du modèle au flux géothermique dépend essentiellement du type de base, lui même fonction de l'ensemble des paramètres (dont le flux géothermique, mais aussi l'épaisseur de glace, la température en surface ...).

. *Coefficient de la loi de déformation.*

Nous avons effectué des expériences en multipliant (à l'aide du coefficient m_B défini dans le tableau IV.1), le coefficient B_T par 2 (expérience "B_T fort") ou en le divisant par 2 (expérience "B_T faible"). L'écart entre ces expériences et l'expérience de référence est représenté sur la figure (IV.11). Pour "B_T fort", la déformation est augmentée ce qui donne une calotte plus fine et inversement pour "B_T faible". La différence d'épaisseur au dôme entre ces deux extrêmes est 450 m.

Pour une même géométrie et un même champ température le fait de multiplier B_T par 4 (ce qui correspond au rapport entre les expériences "B_T fort" et "B_T faible") multiplie également les vitesses par 4. En réalité un certains nombre de rétroactions négatives font que le rapport des vitesses est nettement plus faible (de l'ordre de 1.3 au Dôme et 1.5 sur le bord).

La première de ces rétroactions négatives est due à l'influence de l'épaisseur sur la vitesse par l'intermédiaire de la contrainte de cisaillement. En effet plus la calotte est épaisse, plus la contrainte de cisaillement τ_{xz} est forte à la base, non seulement à cause de l'épaisseur de glace mais aussi parce que globalement la pente de surface est plus forte. Nous rappelons que lorsque l'exposant de la loi de déformation est n=3, la vitesse dépend de τ_{xz}^3.

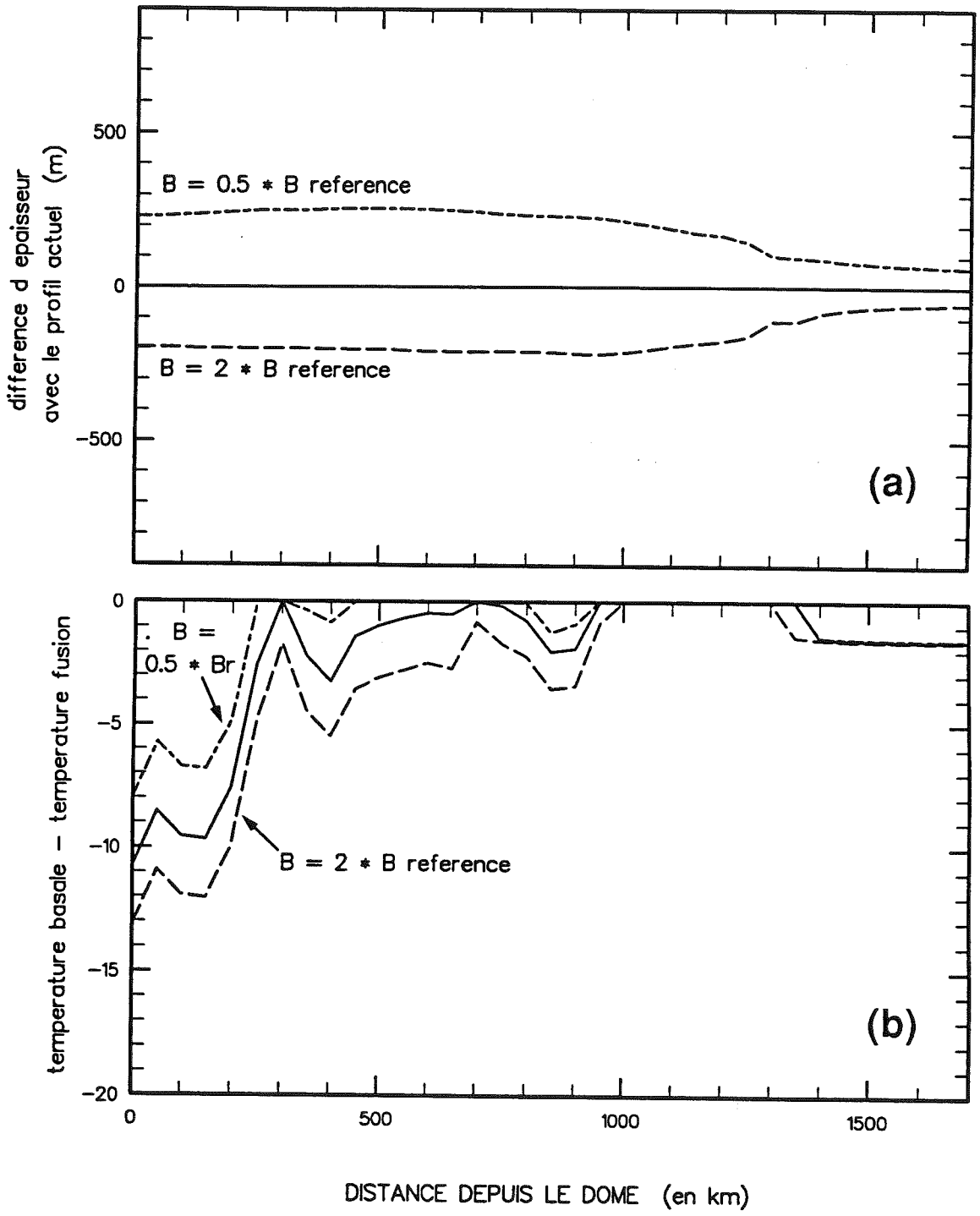


Figure IV.11 Sensibilité au coefficient de la loi de déformation.
a. Différence d'épaisseur entre chaque profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence.
Les profils sont calculés pour B_T = 0.5 B_T référence (différence positive ≈ calotte plus épaisse) et pour B_T = 2 B_T référence (différence négative ≈ calotte plus fine).
b. Ecart entre la température basale et la température de fusion. On voit l'influence de l'épaisseur sur la température basale.

La rétroaction la plus efficace vient de la température basale qui intervient d'une façon prédominante (par rapport à la température dans les couches supérieures) dans la vitesse d'écoulement. Plus l'épaisseur de glace est grande, plus la température basale est élevée, avec (comme pour le flux géothermique), un effet de seuil selon le type de base (figure IV.11.b).

Dans son modèle, Huybrechts ($1990_{a,b}$) cale ce paramètre B_T (à l'aide d'un coefficient multiplicatif m) de façon à obtenir le meilleur accord possible entre le profil stationnaire et le profil actuel. Il prend m=5 pour la calotte glaciaire et m=1 pour l'ice-shelf. Sa valeur de base étant sensiblement la même que la nôtre (environ un facteur 2), le coefficient qu'il utilise finalement est encore plus élevée que B_T fort. Dans nos résultats, nous observons qu'effectivement, l'expérience avec B_T fort reproduit mieux l'épaisseur de glace actuelle dans le centre que B_T mais que cet accord ne nécessite pas un coefficient aussi élevé que celui de Huybrechts. De plus, cette méthode utilisée par Huybrechts nous inspire deux remarques.

- S'il faut caler un paramètre, l'utilisation d'un profil stationnaire comparé au profil actuel ne nous paraît pas la meilleure solution car la calotte glaciaire n'est actuellement pas en équilibre. Il vaudrait mieux utiliser le modèle avec des conditions climatiques variant dans le temps et considérer l'état de la calotte après une simulation couvrant le dernier cycle climatique. La comparaison entre la géométrie ainsi obtenue et la géométrie actuelle fournirait alors un critère plus correct pour caler un paramètre.

- Etant donné que la géométrie de la calotte est sensible à la fois au flux géothermique et au coefficient de la loi de déformation il existe vraisemblablement plusieurs couples (ϕ,B_T) permettant de reproduire l'épaisseur actuelle à 5 ou 10 % près (critère utilisé par Huybrechts). Parmi nos expériences par exemple, (ϕ=50 mW/m^2, m_B = 2) et (ϕ=60 mW/m^2, B_T standard) conviendraient, mais il n'est pas évident que l'évolution en réponse à une perturbation climatique soit la même dans les deux cas. Nous reviendrons sur ce sujet dans les expériences d'évolution. Il faut noter cependant que le modèle de Huybrechts couvre l'ensemble de l'Antarctique et que l'influence du flux géothermique est peut-être plus faible en Antarctique de l'Ouest où la zone de fusion basale est géographiquement étendue. Il n'existerait alors qu'un seul B_T permettant de reproduire la géométrie actuelle quel que soit le flux (mais le même raisonnement s'appliquerait au couple (B_T, coefficient de la loi de glissement)).

. Influence de la teneur en eau dans la couche basale tempérée.

La teneur en eau modifie considérablement la valeur du coefficient B_T dans la glace tempérée. Pour évaluer cette influence nous avons effectué une expérience en supposant que la teneur en eau dans la couche basale tempérée est de 2%. Nous rappelons que dans l'expérience de référence nous avons pris une valeur de 0% ce qui suppose que toute l'eau fondue est évacuée dans le sol. La différence d'épaisseur avec l'expérience de référence est représentée sur la figure (IV.12). L'effet de la teneur en eau (vitesse horizontale plus élevée et épaisseur plus faible) est surtout localisé dans la région où la couche basale tempérée existe mais s'étend légèrement plus en amont. Ce dernier effet est lié à la pente de la surface.

. Glissement basal

Le coefficient (k_{sl}) de la loi de glissement, intervient à la fois dans la vitesse de glissement à la base de la calotte et dans la condition de frottement sur les bords de la vallée. Nous étudions tout d'abord l'influence du glissement basal en faisant des expériences où k_{sl} est modifié (par rapport à l'expérience de référence) seulement dans la détermination de la vitesse basale (équation IV.7). Avec une valeur de k_{sl} de 100 m bar^{-2} an^{-1} (ordre de grandeur indiqué par Bindshadler 1983) les vitesses de glissement que nous obtenons sont très faibles (quelques mètres par an) ce qui est très faible par rapport aux extimations de Whillans et al. (1989). Il faut souligner que les données utilisées par Bindshadler proviennent essentiellement du Variegated Glacier, pour lequel les vitesses de glissement sont faibles, comparées à celles trouvées en Antarctique. Dans l'expérience de référence, (k_{sl}=1000 m bar^{-2} an^{-1}) la vitesse de glissement représente environ 50 % de la vitesse moyenne. Pour évaluer l'influence que pourrait avoir un glissement plus intense, nous avons effectué une expérience avec un coefficient k_{sl} nettement plus fort (5000 bar^{-2} an^{-1}) qui donne des vitesses de glissement d'environ 250 m/an et ce qui constitue une plus grande (90%) fraction de la vitesse moyenne. En résumé, si la vitesse de glissement est très sensible à la valeur de k_{sl}, la vitesse moyenne l'est par contre assez peu, car plus le glissement est fort, plus la pente de surface est faible ce qui donne moins de déformation. Les différences d'épaisseur entre ces expériences et l'expérience de référence sont représentées sur la figure (IV.13). On remarque que l'effet est

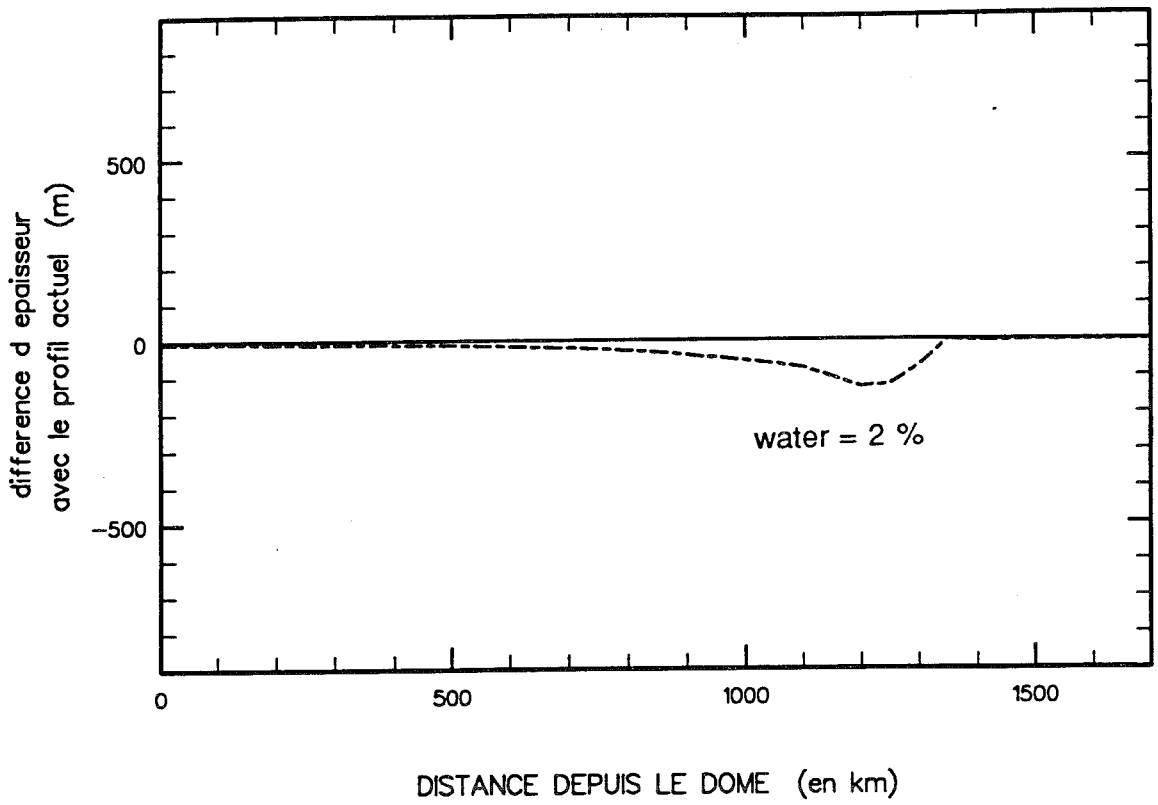


Figure IV.12 Influence de la teneur en eau dans la couche basale tempérée.
Différence d'épaisseur entre le profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence (pour laquelle la teneur en eau est 0%, B_{temp}=0.2 bar^{-3} an^{-1}).
Le profil présenté est calculé avec une teneur en eau de 2% dans la CBT. Le coefficient B_{temp} de la loi de déformation est alors 0.936 bar^{-3} an^{-1} dans la CBT.

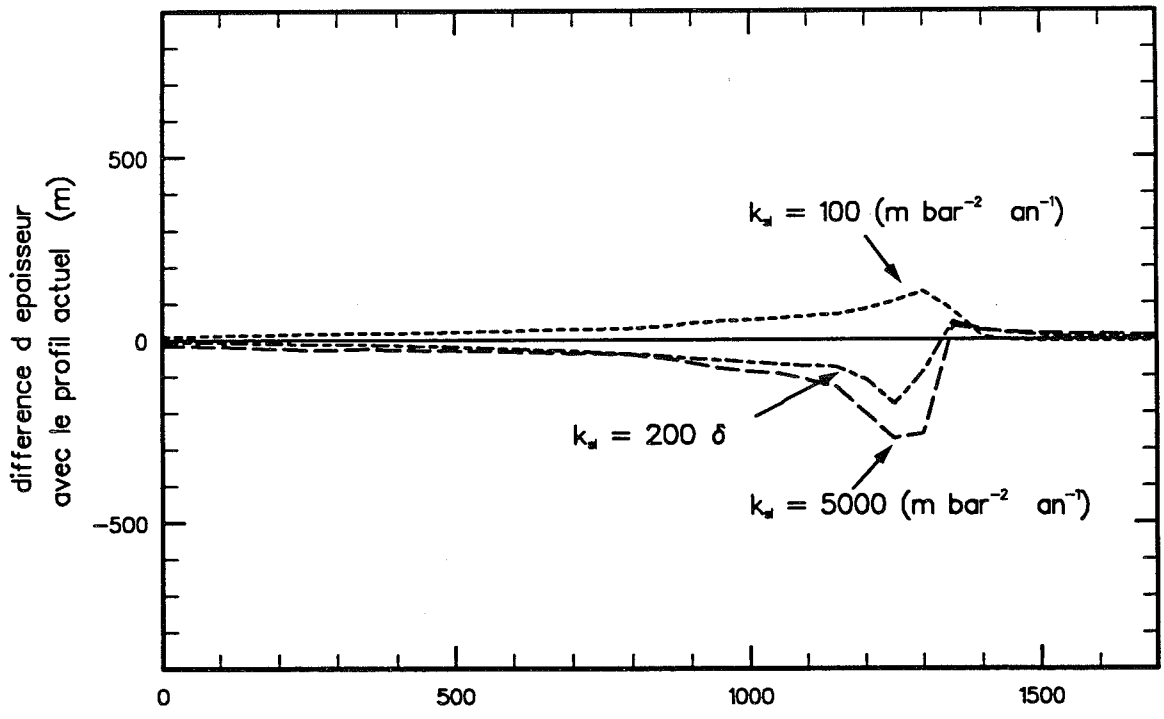


Figure IV.13 Influence du coefficient k_{sl} de la loi de glissement.
Différence d'épaisseur entre chaque profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence (k_{sl}= 1000 bar^{-2} an^{-1}). Trois expériences sont présentées : ksl=100 (m bar^{-2} an^{-1}), k_{sl} = 5000 (m bar^{-2} an^{-1}) et k_{sl} fonction de (δ), l'épaisseur de la couche basale tempérée (k_{sl}=200 δ (m ^{bar}-2 an^{-1}).

limité à une région étroite juste en amont de la ligne d'échouage. Cette localisation s'explique par l'influence de la pression effective sur le glissement. Etant donné la formulation utilisée pour calculer la pression d'eau (équation IV.8) celle ci n'est forte que pour la région située entre 1200 km du Dôme et la ligne d'échouage. Dans cette zone le socle est en dessous du niveau de la mer (voir figure IV.6) et la pression d'eau à l'interface glace-socle est supposée égale à la pression hydrostatique dans l'océan à la profondeur considérée. Plus en amont, au contraire, la pression d'eau est nulle. La vitesse de glissement qui est inversement proportionnelle à la pression effective ne peut donc être significative que dans la partie de la nappe de glace en aval de 1200 km, ce qui correspond en fait au Byrd Glacier. L'utilisation d'un plus fort coefficient de glissement atténue donc le désaccord (observé sur la figure IV.6) entre les profils mesurés et calculés mais pas la différence entre les vitesses mesurées sur le glacier Byrd et celles simulées par le modèle.

Nous avons également effectué des expériences dans lesquelles le coefficient de la loi de glissement k_{sl} est proportionnel à l'épaisseur de la couche basale tempérée. La figure (IV.12) montre le résultat pour (k_{sl}= 200 δ). Etant donné que dans cette expérience, l'épaisseur moyenne de la couche basale tempérée est de l'ordre de 20 m, cette expérience s'avère assez similaire à celle avec k_{sl}=5000 (m bar^{-2} an^{-1}).

En conclusion, le coefficient de la loi de glissement est mal connu. Remarquons que pour une même loi de glissement, Huybrechts (1990_a) prend une valeur de k_{sl} de l'ordre de 10000 m bar^{-2} an^{-1} alors que Bindshadler (1983) donne 84 m bar^{-2} an-1. La méthode utilisée pour calculer la pression effective pourrait aussi être mise en cause, car nous ne tenons pas compte de la production d'eau à la base de la glace. Avec la loi et le coefficient utilisés, le glissement est donc un phénomène relativement mal pris en compte. En raison de la géométrie de la ligne de courant considérée, l'influence du glissement est localisée sur le bord du glacier. On peut donc estimer que les résultats obtenus pour la région de Vostok ne seront pas trop affectés par la mauvaise connaissance du coefficient de la loi de glissement. Il faut cependant noter que la situation est sans doute opposée pour l'Antarctique de l'Ouest et que la détermination de la loi de glissement (et de ses coefficients) reste un problème majeur.

. influence de l'ice shelf.

L'ice-shelf agit sur la calotte glaciaire, d'une part parce qu'il impose une contrainte déviatorique longitudinale ($\bar{\sigma}'_x$) qui accélère l'écoulement dans la zone de jonction, d'autre part parce que la position de la ligne d'échouage est fonction de l'épaisseur de l'ice-shelf. L'extension de l'ice-shelf est gouvernée par deux mécanismes : La pression exercée par le Ross Ice-shelf ($\bar{\sigma}'_{back}$) et le frottement sur le bord de la vallée du glacier Byrd. Les paramètres de ce frottement sont c_{bord} et k_{sl}. D'après l'équation (IV.32), on voit que les deux paramètres interviennent dans le même terme et que multiplier k_{sl} par un facteur est équivalent à diviser C_{bord} par ce même facteur à la puissance 1/3. Nous étudieront ici seulement l'influence de C_{bord} mais en étendant la gamme de valeur vers le bas (jusqu'à 0.05) pour simuler un coefficient de glissement plus fort.

D'après les études de sensibilité que nous avons effectuées, les paramètres (C_{bord} et $\bar{\sigma}'_{back}$) agissent principalement sur la position de la ligne d'échouage et sur l'épaisseur de l'ice-shelf. Leur influence est par contre négligeable dans toute la région centrale. La figure (IV.14) montre les profils de calotte pour diverses valeurs de ces paramètres.

***Figure IV.14** Profil de la calotte en fonction des paramètres de l'ice-shelf.*

a. Profils d'équilibre calculés avec C_{bord}=0.1. Pour des valeurs de $\bar{\sigma}'_{back}$ 0, 0.1 et 0.2 bar, les profils sont confondus. Ils sont comparés ici au profil actuel de la calotte (en pointillés). L'expérience de référence fait partie de ces profils ($\bar{\sigma}'_{back}$=0.1 bar).

b. Profils d'équilibre calculés avec C_{bord}=0.05 (qui correspond à un faible frottement sur les bords de la vallée). Pour des valeurs de $\bar{\sigma}'_{back}$ 0.1, 0.3 et 0.5 bar. Plus la contrainte du Ross Ice-shelf ($\bar{\sigma}'_{back}$) est importante plus la position de la ligne d'échouage est avancée

c. Profils d'équilibre calculés avec une pression du Ross Ice-shelf ($\bar{\sigma}'_{back}$=0.1 bar) et C_{bord}= 0.05, 0.1, 0.15. La ligne d'échouage est d'autant plus avancée que le frottement sur les bords de la vallée (C_{bord}) est fort.

d.Coefficient de la loi de glissement k_{sl}=5000 (m bar^{-2} an^{-1}) à la fois pour le glissement basal et pour la loi de frottement sur les bords de la vallée. Le frottement étant faible du fait de k_{sl}, il faut que C_{bord} ou $\bar{\sigma}'_{back}$ soit fort pour que la ligne d'échouage soit à sa position actuelle. Sur cette figure sont représentés les profils obtenus avec ($\bar{\sigma}'_{back}$=0.1 bar et C_{bord}=0.25) en trait continu et ($\bar{\sigma}'_{back}$=0.5 bar et C_{bord}=0.1) en pointillés. Dans ce deuxième cas l'épaisseur de l'ice-shelf est plus grande. Noter que la forme de la calotte est légèrement différente des autres expériences (plus plate sur le bord) à cause du glissement basal.

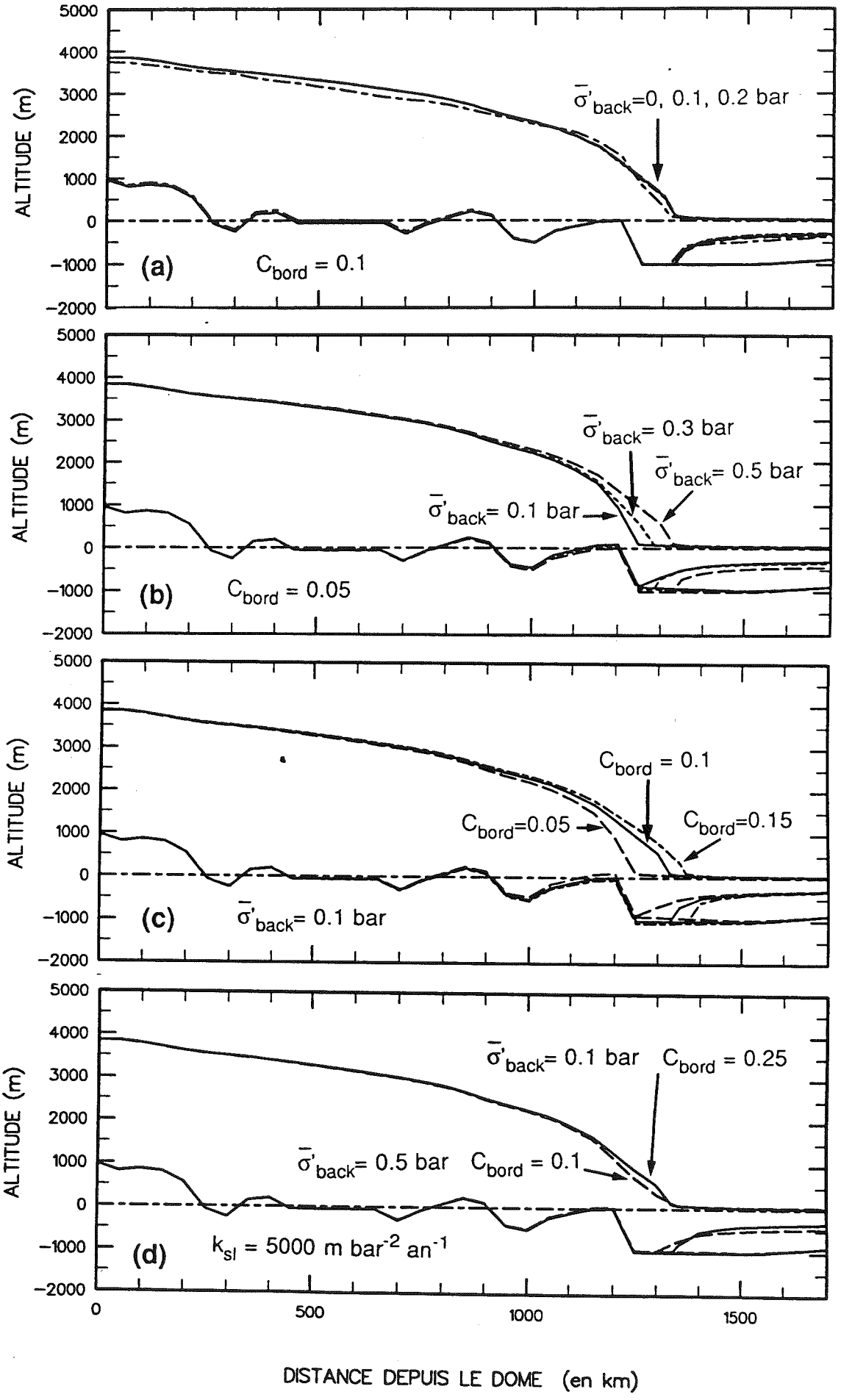


Figure IV.14 Profil de la calotte en fonction des paramètres de l'ice-shelf.

Il est intéressant de déterminer pour quelles valeurs de ces paramètres la position de la ligne d'échouage est proche de la position actuelle. Les problèmes de comparaison entre en profil d'équilibre et l'état actuel sont moins critiques que dans le centre de la calotte car l'équilibre est plus rapidement atteint (voir plus loin les expériences d'évolution). Il y a plusieurs couples ($\bar{\sigma}'_{back}$, C_{bord}) qui conviennent. D'une façon simplifiée, plus le frottement sur les bords est faible (C_{bord}), plus grande doit être la pression exercée par le Ross Ice-shelf ($\bar{\sigma}'_{back}$) pour que la ligne d'échouage soit à sa position actuelle. Ces paramètres contrôlent tous deux l'extension de l'ice-shelf sans jouer cependant un rôle complètement similaire car le frottement sur les bords de la vallée n'agit que sur une région limitée (la vallée) et dépend de la vitesse de l'ice-shelf, alors que la pression $\bar{\sigma}'_{back}$ est efficace sur toute la longueur de l'ice-shelf et est supposée constante dans le temps. Parmi les couples qui conviennent, on trouve par exemple le cas où l'influence du Ross Ice shelf est nulle ($\bar{\sigma}'_{back}$=0) avec des valeurs de C_{bord} entre 0.05 et 0.07. Par contre, si l'on suppose le frottement sur les bords nul (C_{bord}=0), soit la ligne d'échouage se trouve nettement en amont (pour $\bar{\sigma}'_{back}$ <1 bar), soit il faut une pression du Ross Ice shelf supérieure à 1 bar et dans ce cas l'ice shelf devient tellement épais qu'il se pose sur toute sa longueur.

Nous avons également effectué quelques expériences en prenant un coefficient de glissement k_{sl}=5000 m bar^{-2} an^{-1}, à la fois pour le glissement basal et pour la loi de frottement sur les bords de la vallée. Pour avoir alors la ligne d'échouage à la position actuelle, il faut des paramètres de l'ice-shelf assez forts (par exemple $\bar{\sigma}'_{back}$=0.7 bar et C_{bord}=0.07 ou $\bar{\sigma}'_{back}$=1 bar et C_{bord}=0.05, voir figure IV.14.d).

Finalement, pour les paramètres proches de ceux de l'expérience de référence (qui nous semblaient les plus raisonnables a priori), il est relativement aisé d'avoir la ligne d'échouage à sa position actuelle. Il y a cependant plusieurs façons d'obtenir ce résultat et il reste à vérifier si ces différents cas réagissent de la même façon à des perturbations climatiques de température en surface et surtout de niveau de l'océan. Par exemple, il semble vraisemblable que plus la pression exercée par le Ross Ice-shelf est forte, plus la géométrie du bord de la calotte sera sensible à une désintégration éventuelle du Ross Ice-shelf. Pour lever cette incertitude, il faudrait disposer d'un modèle d'ice-shelf à deux dimensions horizontales afin de calculer plus rigoureusement la pression exercée par le Ross Ice-shelf et surtout son évolution dans le temps.

. *Conditions climatiques.*

Nous considérons ici l'influence des conditions climatiques stationnaires sur la géométrie de la calotte (les variations dans le temps seront traitées plus loin). L'expérience de référence a été faite pour des conditions climatiques actuelles et nous nous intéressons à présent aux profils d'équilibre en conditions glaciaires.

Les trois conditions qui sont liées au climat et qui interviennent dans la détermination du profil de la calotte glaciaire sont la température en surface, l'accumulation et le niveau de l'océan. En général, l'accumulation est déterminée à partir de la température en surface (voir chapitre III) et pendant les périodes glaciaires, le niveau des mers est plus bas (d'environ 100 m) que le présent c'est à dire que les trois conditions sont simultanément glaciaires (ou interglaciaires) avec des déphasages éventuels pour le niveau des mers qui est surtout gouverné par les calottes glaciaires de l'Hémisphère Nord. Afin de déterminer leurs influences respectives nous avons effectué des expériences dans lesquelles nous imposons des valeurs glaciaires pour une seule ou deux des conditions et les résultats sont résumés sur les figures (IV.15 et IV.16).

Pour une accumulation plus faible (50% de l'actuel) le profil est plus mince de 350 m au dôme (figure IV.15.a). Les rétroactions liées au champ de température dans la glace sont globalement négligeables car deux effets s'annulent : d'une part une accumulation plus faible implique une advection verticale plus faible et donc des températures basales plus élevées, d'autre part lorsque la calotte est plus fine, l'effet isolant de la glace diminue et la température basale est plus basse. D'autres mécanismes cependant interviennent et on peut en particulier observer que la ligne d'échouage a une position différente (plus en amont que dans l'expérience de référence) ce qui souligne que la position du bord n'est pas seulement soumise à la dynamique de l'ice shelf mais dépend aussi de la géométrie de la calotte glaciaire.

Avec une température en surface de type glaciaire (-7°C par rapport à l'actuel), le champ de température dans la glace est globalement plus froid, l'écoulement est plus lent et l'épaisseur de glace est plus grande. Au dôme (où la température basale est 6°C plus basse) l'épaisseur est 350 m plus forte que dans l'expérience de référence (figure IV.15.b).

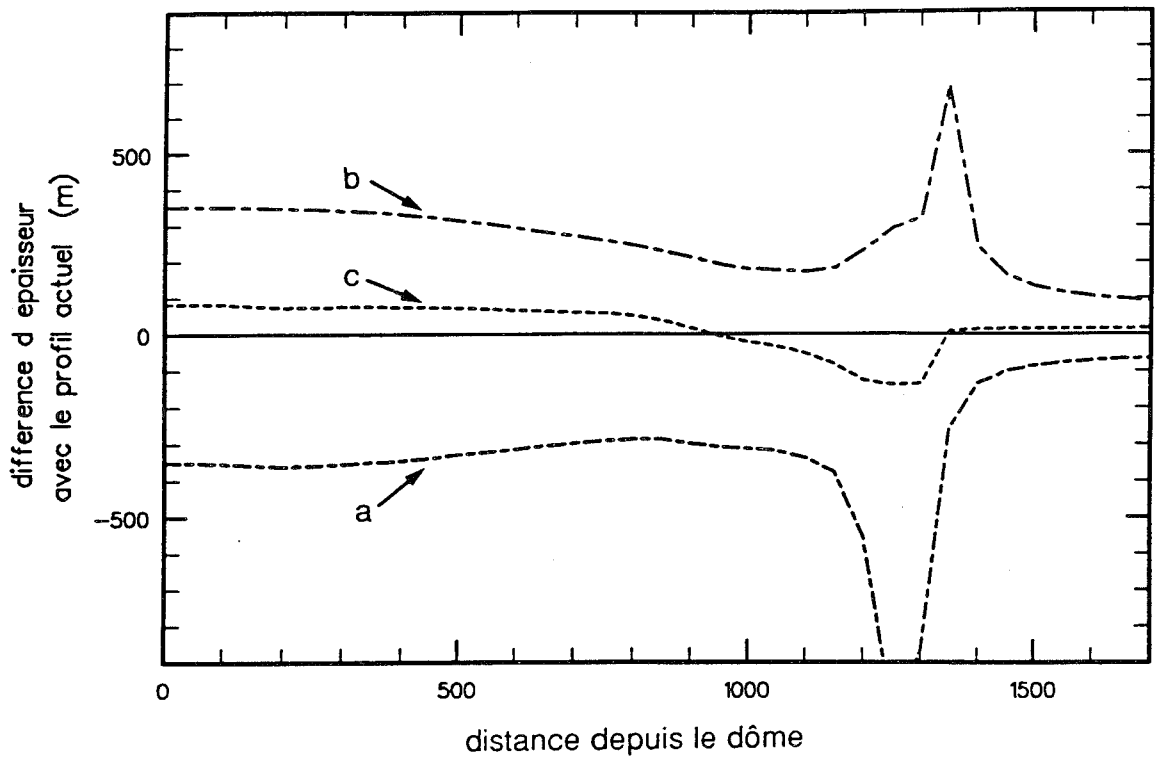


Figure IV.15 Sensibilité aux conditions climatiques : Accumulation et température.
Différence d'épaisseur entre chaque profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence (conditions climatiques actuelles).
(a) Accumulation égale à 50 % de l'accumulation actuelle (accumulation en condition glaciaire), (b) Température en surface 7°C plus basse que la température actuelle (température en condition glaciaire), (c) ΔT_{clim}=-7°C : Accumulation et température en conditions glaciaires.

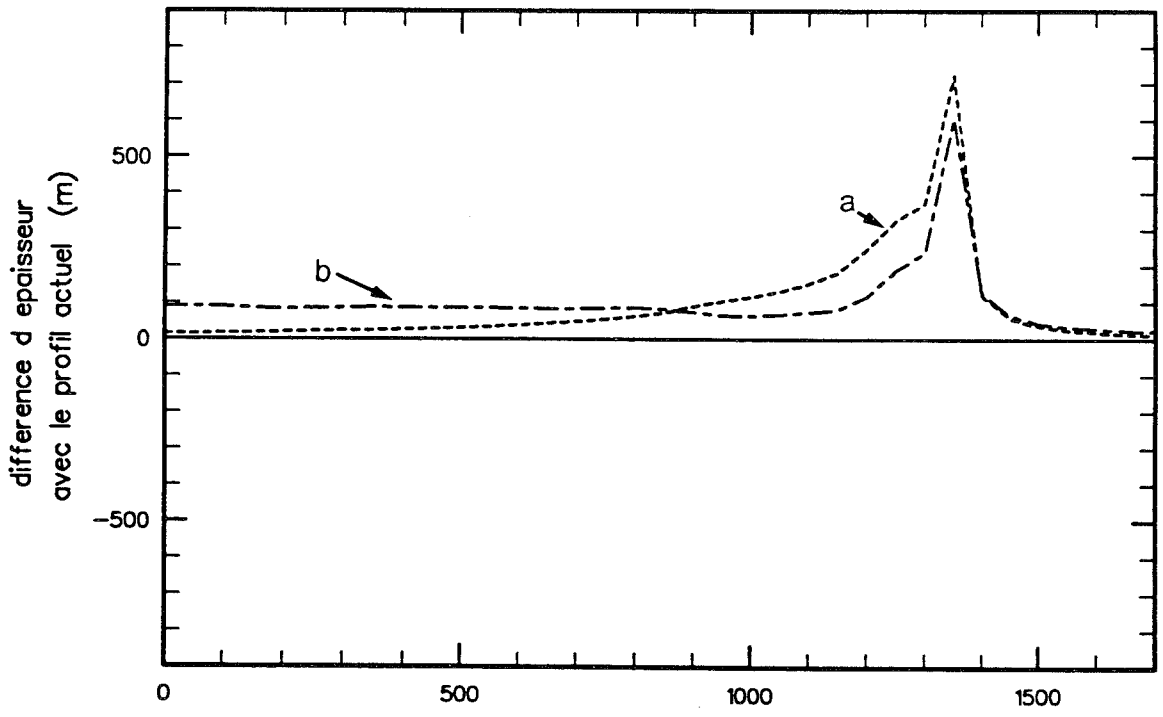


Figure IV.16 Sensibilité aux conditions climatiques : Niveau des mers, température et accumulation.
Différence d'épaisseur entre chaque profil étudié et le profil d'équilibre de l'expérience de référence (conditions climatiques actuelles).
(a) E_{sea}= -100 m. Niveau de l'océan 100 m plus bas que le niveau actuel (niveau glaciaire)
(b) ΔT_{clim}= -7°C et E_{sea} = -100 m. Toutes les conditions glaciaires réunies.

L'influence de la température en surface est moins forte sur le bord car dans cette zone, la chaleur de déformation joue un rôle prédominant sur le champ de température et la température basale y est au point de fusion dans les deux cas.

Lorsque la température en surface et l'accumulation sont en conditions glaciaires (avec l'accumulation dépendant de la température en surface par l'équation III.19) le profil résultant correspond à peu près à l'association des deux effets précédents (figure IV.15.c). Par rapport à l'expérience de référence, l'épaisseur est 100 m plus forte au centre et 100 m plus faible sur le bord.

L'influence du niveau de l'océan est concentrée sur le bord de la calotte. Avec un niveau des mers 100 m plus bas que l'actuel l'épaisseur au Dôme est la même que l'actuel, par contre la position de la ligne d'échouage est située 30 km plus en aval ce qui permet à la calotte d'être nettement plus épaisse sur le bord (figure IV.16.a).

Enfin, lorsque toutes les conditions climatiques sont glaciaires (température en surface, accumulation, niveau des mers), le profil est au centre 100m plus épais que dans l'expérience de référence, cette différence va en s'atténuant en s'éloignant du Dôme, puis augmente à nouveau fortement sous l'influence du niveau des mers (figure IV.16.b).

En résumé, pour la ligne de courant que nous étudions, le profil d'équilibre avec des conditions glaciaires est assez proche du profil avec les conditions actuelles. On peut noter que le centre est principalement gouverné par la température et le bord par le niveau des océans et que les deux phénomènes donnent une épaisseur de glace plus grande en période glaciaire qu'en période chaude malgré l'effet opposé de l'accumulation. Il faut cependant se garder de déduire l'évolution de la calotte glaciaire à partir de ces résultats car, si dans les expériences ci-dessus les différents effets ont l'air de s'additionner, ils ont en réalité des temps de réaction différents (ce qui apparaîtra dans les expériences d'évolution). Ainsi, l'effet d'une variation du niveau des mers est très rapide, celui d'un changement de l'accumulation également, par contre les perturbations de températures sont très longues à agir car il faut qu'elles atteignent la base du glacier pour être pleinement efficace.

. Régionalisation de l'isostasie.

Pour l'état d'équilibre, nous n'avons pas étudié l'influence du type de modélisation de l'asthénosphère car elle ne joue que sur la vitesse de réaction. L'étude de sensibilité sur la régionalisation de l'isostasie n'a pas montré de différence significative que l'on considère un enfoncement purement local ou une régionalisation avec une rigidité de la lithosphère égale à 8.5 10^{24} N.m . L'explication vient de la méthode utilisée pour calculer le socle sans glace. Celui-ci est obtenu d'après l'état actuel avec ou sans régionalisation selon l'expérience considérée. La différence d'enfoncement entre les deux expériences ne porte donc pas sur l'épaisseur de glace totale mais sur l'écart entre l'épaisseur réelle et l'épaisseur simulée par le modèle (c'est à dire très peu, voir figure IV.6).

. Prise en compte de la contrainte déviatorique σ'_y, liée à la convergence des lignes de courant.

Ainsi que nous l'avions estimé, le fait de prendre en compte ou non σ'_y n'a que très peu d'influence sur le profil de la calotte glaciaire. Les deux effets de σ'_y (augmentation de la fluidité et force résistante) sont faibles et se compensent.

- Conclusion de l'étude de sensibilité sur l'état d'équilibre.

Cette étude de sensibilité montre que les paramètres les plus influents sur la géométrie sont le flux géothermique le coefficient B_T de la loi de déformation et dans une moindre mesure le coefficient k_{sl} de la loi de glissement, le rôle de ce coefficient étant important principalement parce qu'il conditionne le frottement sur les bords de la vallée du glacier Byrd.

Il est relativement aisé de reproduire le profil de la calotte actuelle mais il existe plusieurs jeux de paramètres pour lesquels cette simulation est possible (avec par exemple des champs de température sensiblement différents). Ceci nous incite à sélectionner plusieurs de ces jeux de paramètres pour les expériences d'évolution afin de déterminer à quel point la variation de géométrie due à des variations de conditions climatiques dépend du jeu de paramètres choisi.

IV.2.B Changement d'épaisseur de la calotte en réponse à une perturbation climatique de forme simple.

Avant d'étudier l'évolution tout au long d'un cycle climatique, nous nous intéressons à la réaction de la calotte en réponse à une variation climatique en forme de créneau. Ce type d'expérience permet d'évaluer tous les effets d'un changement climatique y compris les processus thermiques qui demandent un temps très long pour être complètement efficaces et qui sont moins aisément discernables dans les expériences simulant un cycle climatique en raison de l'alternance de périodes chaudes et froides.

. Description des expériences

Ces expériences consistent à imposer une variation rapide (en 5000 ans) de température et de niveau de l'océan. L'amplitude de ces variations (7°C pour ΔT_{clim}, 100 m pour E_{sea}) correspond à la différence entre un état interglaciaire et un état glaciaire. La solution de départ est une calotte en état d'équilibre pour les conditions actuelles (interglaciaire) et la perturbation imposée est "froide" (abaissement de la température et du niveau de l'océan). Ces conditions climatiques sont représentées sur la figure (IV.17). Nous avons également effectué les expériences inverses en partant d'un état stationnaire "glaciaire" et en imposant une perturbation climatique "chaude" (d'un état glaciaire vers un état interglaciaire).

Sur le Tableau (IV.2) nous avons résumé les jeux de paramètres pour lesquels sont menées les expériences d'évolutions. Ces paramètres sont choisis de telle façon que l'état d'équilibre pour les conditions climatiques interglaciaires soit assez proche de l'état actuel. Nous suivons la même démarche que dans le paragraphe précédent en étudiant tout d'abord l'expérience de référence puis en relevant les différences les plus significatives avec les autres expériences.

Numéro d'expérience	Caractéristiques de l'expérience. Différences par rapport à l'expérience de référence.
1 (référence)	Expéreince de référence définie dans le Tableau (IV.1) ϕ=50 mW/m^2, m_B=1, k_{sl}=1000 m bar^{-2} an^{-1}, F(x)=0 (éq.III.19)
2	Flux géothermique : ϕ=60 mW/m^2
3	Coefficient loi de déformation : B_T= 2 B_T référence (m_B=2)
4	Coefficient de glissement : k_{sl}=5000 m bar^{-2} an^{-1}
5	Paramétrisation de l'accumulation (III.19) : F(x)=0 entre le dôme et 700 km, augmente linéairement jusqu'à F(x)=0.7 au Byrd Glacier.

Tableau IV.2 Expériences d'évolution

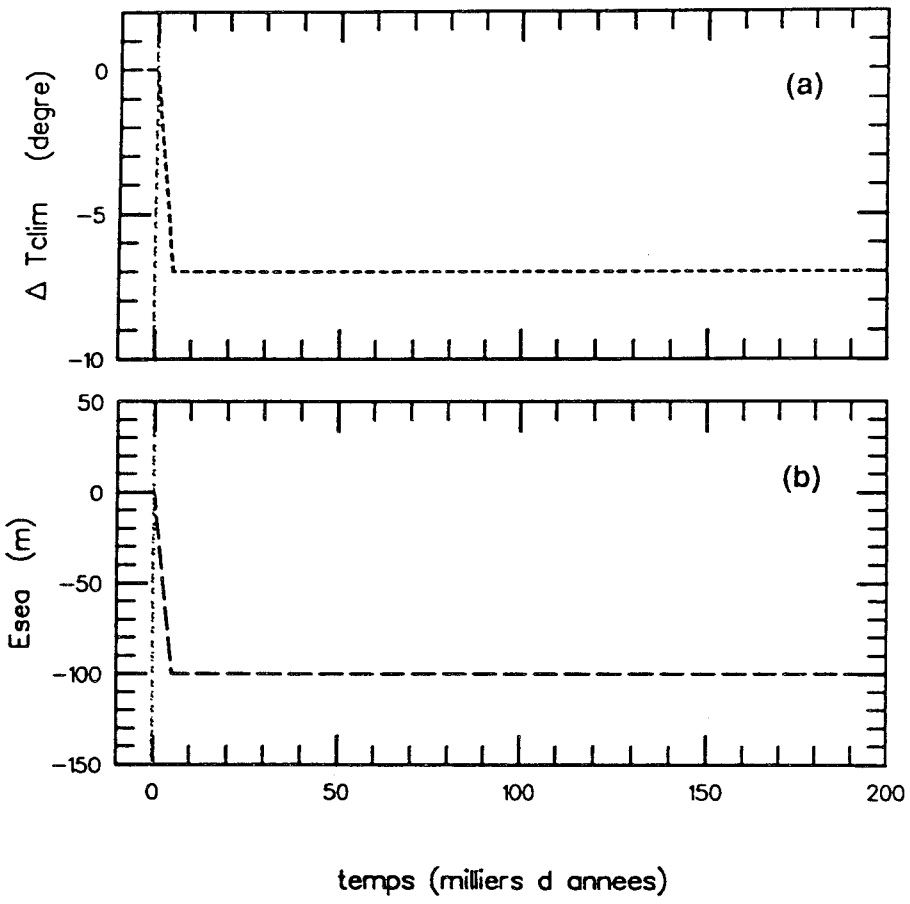


Figure IV.17 Perturbation climatique imposée
a. *Variation de température (ΔT_{clim}) en fonction du temps. Cette variation est indépendante du lieu et peut être vue comme la variation de température au niveau de la mer (actuel).*
b. *Variation du niveau de l'océan (E_{sea}).*

. Expérience de référence.

La figure (IV.18) montre les variations d'altitude de la surface au cours du temps en réponse soit à un refroidissement de 7°C (figure IV.18.a), soit à ce même refroidissement associé à un abaissement du niveau de l'océan de 100 m (figure IV.18.b). Nous étudions l'évolution pour quatre sites : le dôme (Ridge B), Vostok, un point situé à 750 km du dôme et un point (que nous appelons bord) situé à 1200 km du dôme c'est à dire juste en amont du glacier émissaire (glacier Byrd), le socle présentant un enfoncement très abrupt immédiatement en aval de ce point (voir figure IV.6).

Lorsqu'on impose un refroidissement seul, la première réaction est une décroissance de l'épaisseur (abaissement de la surface) due à la diminution de l'accumulation (environ d'un facteur 2, voir figure IV.19). Ensuite, à partir de 15000 ans (différent selon le site), l'influence de la variation de température se fait sentir et l'épaisseur augmente à nouveau. Le refroidissement se propage en effet lentement vers le bas et son action de ralentissement de l'écoulement est d'autant plus efficace que la zone est profonde. Cette prédominance des couches basales est due au fait que la déformation y est beaucoup plus forte que dans le haut du glacier. La figure (IV.20) montre pour le site de Vostok, l'évolution de la température (à diverses profondeurs) et de la vitesse moyenne.

Les trois sites en amont ont qualitativement le même type d'évolution. La principale différence réside dans le délai nécessaire pour que la température agisse d'une façon sensible sur l'écoulement, délai lié au temps mis par le refroidissement pour atteindre le socle Ce temps diminue avec la distance au dôme, principalement parce que l'advection, qui accélère la propagation des perturbations de température, augmente le long de la ligne de courant. Pour visualiser ce délai, on peut par exemple étudier le moment auquel l'altitude recommence à croître (minimum de la courbe d'évolution, lorsque l'effet température l'emporte sur l'effet accumulation). Au dôme, ce minimum intervient 30000 ans après le début de la perturbation, et à 750 km il se produit après seulement 15000 ans.

Le site sur le bord présente un comportement sensiblement différent. Tout d'abord la décroissance n'est pas plus rapide que dans les sites en amont alors que la variation

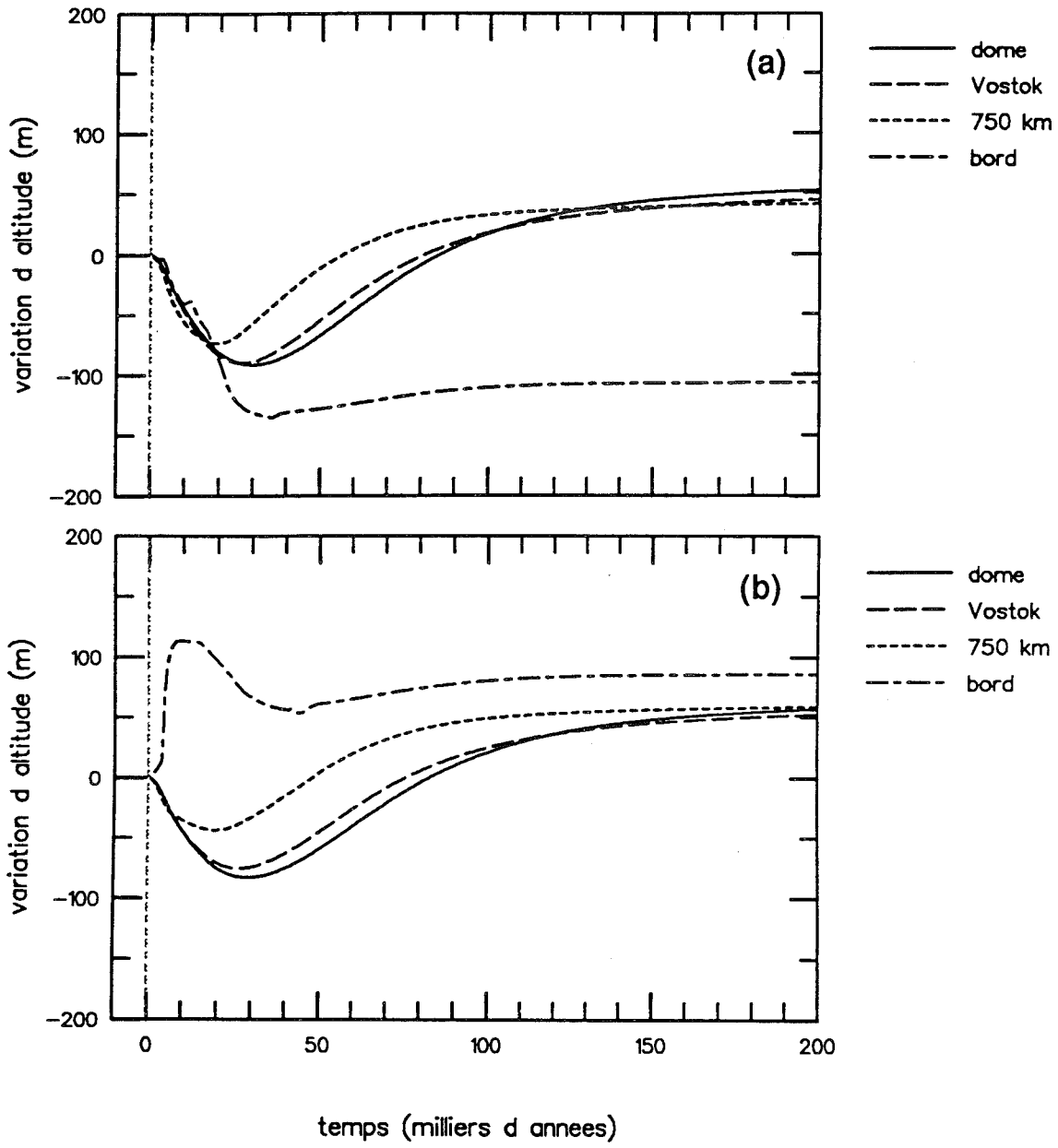


Figure IV.18 Evolution de l'altitude de la surface en réponse à une perturbation climatique : Expérience de référence.
Les variations de (ΔT_{clim}) et (E_{sea}) sont celles données dans la figure (IV.17). Les quatre sites suivis sont : le dôme (Ridge B), Vostok, un site à 750 km du dôme et un autre à 1200 km du dôme et noté "bord".

***a.** Effet de la variation de température (ΔT_{clim}). La décroissance est due à la diminution d'accumulation associée au refroidissement. La remontée est liée à l'influence de la température sur l'écoulement. Ce dernier effet est moins important pour le site du bord car la température basale y reste au point de fusion.*

***b.** Effet des variations associées de température (ΔT_{clim}) et de niveau de l'océan (E_{sea}). Par rapport à (a) noter l'influence du niveau de l'océan sur le site du bord.*

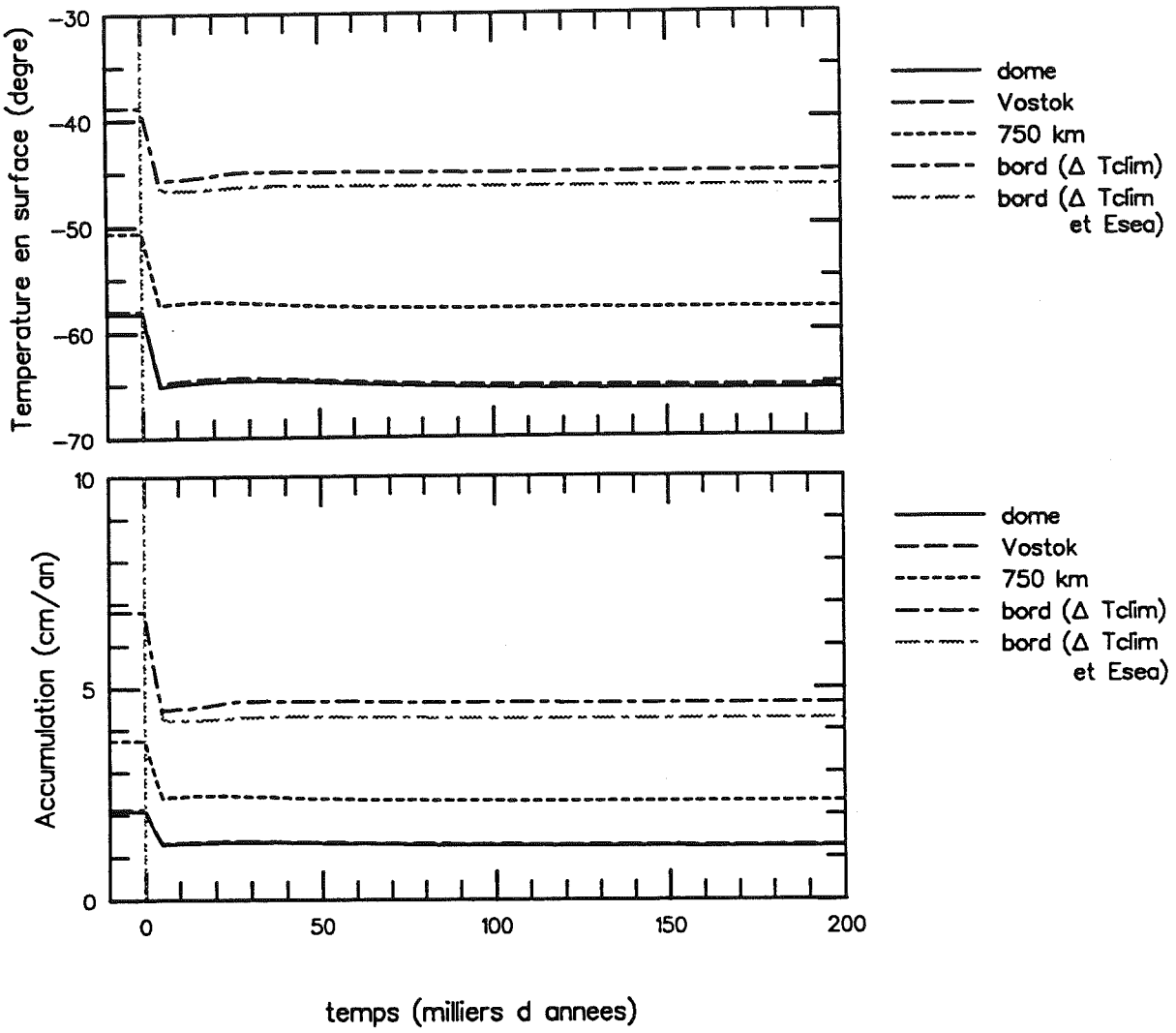


Figure IV.19 Variation de la température en surface et de l'accumulation : Expérience de référence.

a. *La température en surface est fonction de la perturbation climatique (ΔT_{clim}) et de l'altitude de la surface. On observe cette rétroaction de l'altitude sur la température en surface par la très légère remontée après 5000 ans. Pour le bord cet effet est un peu plus fort dans le cas où nous imposons une variation de (ΔT_{clim}) seul (en noir).*

b. *Dans cette expérience, l'accumulation est seulement fonction de la température d'inversion, elle même reliée à la température en surface. Le comportement de l'accumulation est donc très similaire à celui de la température en surface.*

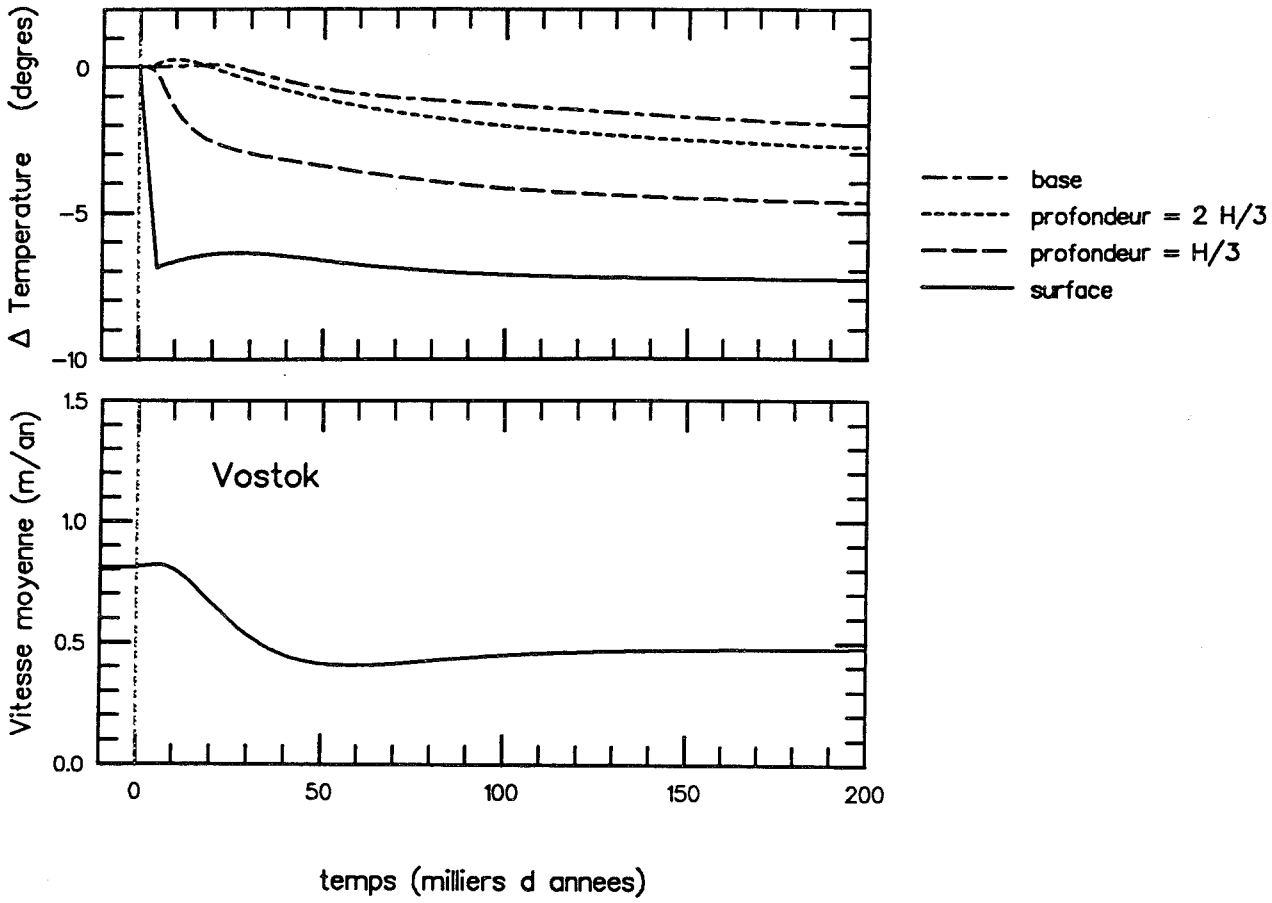


Figure IV.20 Vostok : Evolution de la température dans la glace et de la vitesse en réponse à la perturbation climatique (expérience de référence).
a. *Variation au cours du temps de la température à diverses profondeurs (base, 2/3 de l'épaisseur, 1/3 de l'épaisseur et surface).* ***b.*** *Variation de la vitesse d'écoulement principalement sous l'action de la température.*
Ces courbes sont données pour le site de Vostok mais sont très semblables au site 750 km excepté que la réaction est plus rapide.

Figure IV.21 Bord : Evolution de la température dans la glace, de l'épaisseur de la CBT et de la vitesse (expérience de référence).
a. *Variation au cours du temps de la température à diverses profondeurs lorsqu'on impose une variation de (ΔT_{clim}) seulement.*
b. *Variation au cours du temps de la température à diverses profondeurs lorsqu'on impose une variation de (ΔT_{clim}) et de (E_{sea}).*
c. *Variation de l'épaisseur de la couche basale tempérée. Trait plein, variation de (ΔT_{clim}) seulement. Pointillés, variation de (ΔT_{clim}) et de (E_{sea}).*
d. *Variation de la vitesse d'écoulement. Noter l'influence rapide du niveau des mers (pointillés).*

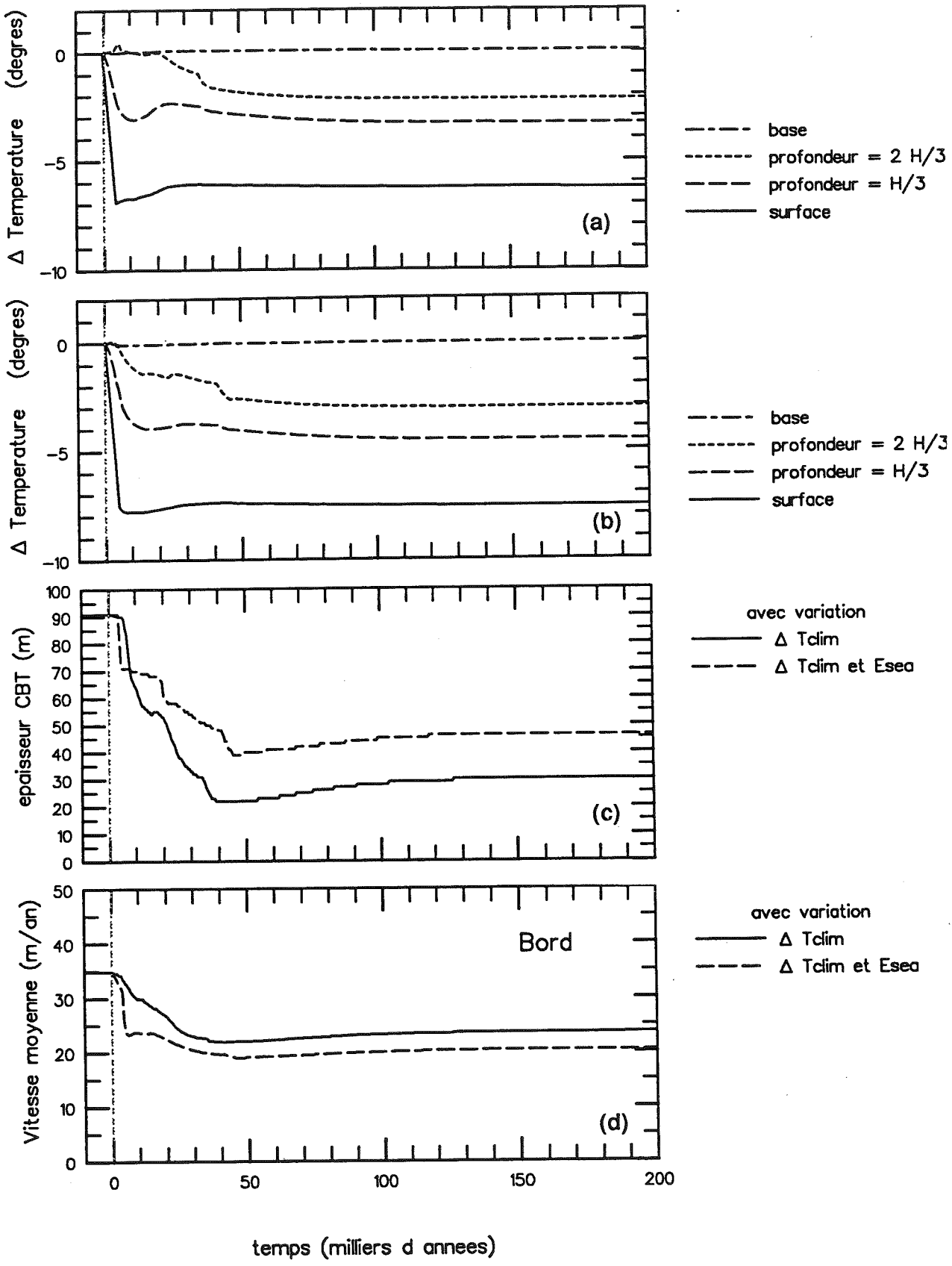


Figure IV.21 Bord : Evolution de la température dans la glace, de l'épaisseur de la CBT et de la vitesse (expérience de référence).

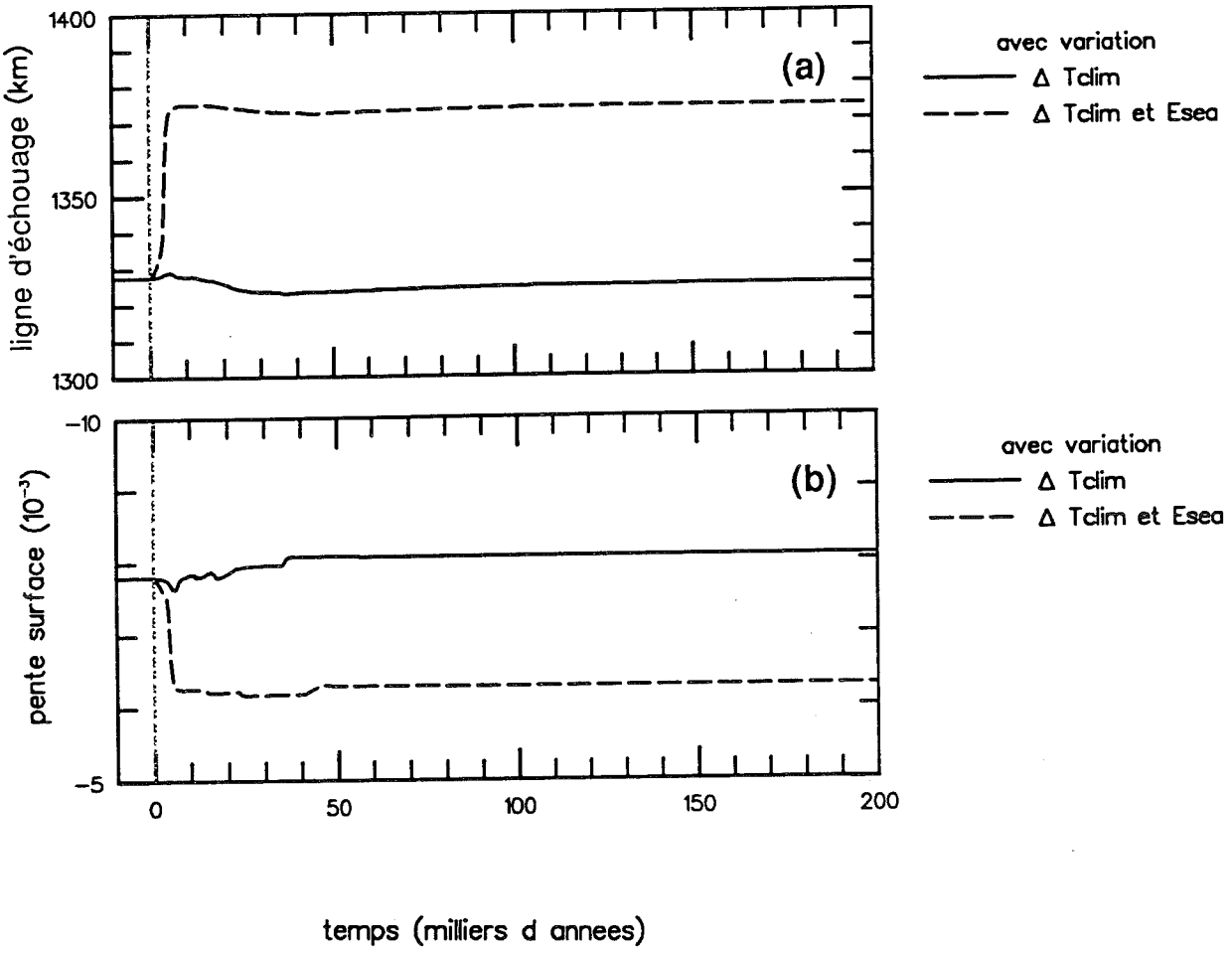


Figure IV.22 Evolution de la position de la ligne d'échouage et de la pente de la surface (expérience de référence).
a. *Déplacement de la ligne d'échouage. Trait plein, avec variation de (ΔT_{clim}) seulement. Pointillés avec variation de (ΔT_{clim}) et de (E_{sea}).*
b. *Evolution de la pente de la surface.*

d'accumulation est plus forte. Ceci est tout d'abord lié au fait que l'écoulement joue un plus grand rôle sur le bord. La vitesse est environ 10 fois plus élevée à 1200 km du dôme (64 m/an) qu'à 750 km du dôme (5 m/an) et il en est de même du gradient horizontal de vitesse. La moindre variation de vitesse peut donc affecter de façon sensible le débit de glace et en conséquence l'épaisseur de glace. D'autre part, en raison de l'épaisseur relativement faible et de la forte advection, le refroidissement atteint plus rapidement les couches basales que dans les régions centrales. Enfin, sur le bord la production de chaleur par déformation est un processus prédominant, or ce phénomène réagit de façon instantanée aux variations de géométrie de la calotte. Ceci est particulièrement visible sur l'évolution de l'épaisseur de la couche basale tempérée (figure IV.21). Nous voyons ici un des intérêts de modéliser la couche basale tempérée, car sans cela, cette rétroaction de la géométrie sur la température (et sur la vitesse) ne serait pas complètement prise en compte. En effet lorsqu'on suppose que seule la base est tempérée, la chaleur de déformation à la base est convertie en fusion de la glace. Sans couche basale tempérée, une variation de la géométrie modifie principalement le taux de fusion qui n'agit pas sur l'écoulement.

Dans cette expérience (sans variation du niveau de l'océan), nous observons que l'augmentation de l'épaisseur après 30000 ans est beaucoup plus limitée sur le bord que dans le centre. Ceci est lié au fait (déjà noté dans les expériences sur l'état d'équilibre) que l'influence de la température est moins forte lorsque la base est au point du fusion.
Lorsque la perturbation climatique comprend à la fois un refroidissement et un abaissement du niveau de l'océan, l'évolution dans le centre (Ridge B, Vostok) est semblable au cas précédent (refroidissement seul) alors que le comportement du bord est complètement différent (le site à 750 km a une réaction intermédiaire, figure IV.18.b). En réponse à la variation du niveau des mers, la position de la ligne d'échouage avance d'une façon instantanée, une partie de la nappe de glace qui flottait précédemment se "pose" alors sur le socle et sa vitesse d'écoulement diminue fortement. L'épaisseur de glace augmente alors et cet effet se propage vers l'amont en entraînant rapidement une diminution de la pente de la surface (figure IV.22). La vitesse d'écoulement à 1200 km s'en trouve immédiatement ralentie et l'épaisseur de glace augmente là aussi. Nous observons comme dans le cas précédent, l'influence de la géométrie sur l'épaisseur de la couche basale tempérée, mais cette fois ci, le changement de géométrie a deux effets opposés sur la production de chaleur (Q): l'augmentation de l'épaisseur et la diminution de la pente. C'est ce dernier effet qui est le

plus important et cette diminution de l'épaisseur de la CBT contribue à ralentir l'écoulement (rétroaction positive).

L'influence de la variation d'accumulation se superpose à celle du niveau des mers, et quand cette dernière s'est atténuée, l'altitude de la surface décroît pour augmenter à nouveau après 40000 ans lorsque le refroidissement agit de façon efficace sur la déformation.

En conclusion, cette expérience met en évidence le comportement différent du bord et du centre, ce dernier étant peu sensible à l'influence du niveau de l'océan (ce que nous observions déjà sur le profil stationnaire, figure (IV.16)) alors que le bord réagit d'une façon quasi instantanée. L'amplitude des variations d'altitude de la surface est d'environ ±100 m, on peut donc considérer que cette région de l'Antarctique de l'Est est relativement stable. Nous avons présenté les résultats jusqu'à 200000 ans après la perturbation imposée et nous observons que même après ce temps, l'équilibre n'est pas complètement atteint ce qui n'est pas surprenant car les phénomènes thermiques sont très long à s'équilibrer. Cependant, la plus grande partie de l'évolution se produit pendant les premiers 50000 ans.

. Sensibilité au flux géothermique et au coefficient de la loi de déformation.

Dans l'étude sur le profil d'équilibre nous avons noté qu'il est possible de reproduire de façon satisfaisante le profil actuel avec différents couples (ϕ, B_T). Nous avons sélectionné deux de ces couples : expérience 2 (ϕ=60 mW/m^2, B_T référence) et expérience 3 (ϕ=50 mW/m^2, B_T = 2 B_T référence). Nous cherchons à déterminer si les calottes modélisées avec ces jeux de paramètres réagissent de la même façon à une perturbation climatique. Les résultats (pour un refroidissement et un abaissement du niveau de l'océan en forme de créneau) sont représentés sur la figure (IV.23) et montrent des différences notables entre les expériences 2 et 3.

Pour les sites du centre, le comportement est qualitativement celui décrit dans l'expérience de référence mais dans l'expérience 2 (flux géothermique fort) l'influence de la température est beaucoup plus faible que dans l'expérience 3 (qui pour ces sites est très proche de l'expérience de référence). Ce résultat était prévisible car lorsque le flux

géothermique est fort, la base est au point de fusion et les variations de température dans les couches profondes sont limitées. Ce phénomène est également illustré dans l'expérience (2), par le cas du dôme pour lequel la base est en dessous du point de fusion et qui sous l'action du refroidissement présente une plus forte remontée de la surface que les sites de Vostok et de 750 km pour lesquels la base reste tempérée.

Sur le bord, la situation est inversée. L'expérience (2) est proche de l'expérience de référence. Comme seule différence significative nous observons que la décroissance due à l'accumulation est plus lente parce que le flux de glace venant de l'intérieur est moins diminué par le refroidissement que dans l'expérience de référence. Dans l'expérience (3), par contre, l'influence du niveau de l'océan est très faible, et après 50000 ans, l'altitude de la surface sur le bord s'établit à un niveau plus bas que la position d'origine. Ce comportement est essentiellement lié à la géométrie de l'ice-shelf juste en aval de la ligne d'échouage. Dans cette expérience en effet, le coefficient de la loi de déformation intervient également dans le taux d'extension de l'ice-shelf (équation IV.22) et celui ci étant plus fort, l'ice-shelf est plus fin. Un même abaissement du niveau de l'océan ne permet pas à l'ice-shelf de se "poser" sur une distance aussi grande que dans l'expérience de référence.

A l'occasion de cette comparaison, nous avons pu observer l'importance du champ de température (et surtout de la température basale) sur l'évolution de la calotte glaciaire dans la partie centrale. Dans ces deux expériences, les profils stationnaires sont très semblables mais dans le cas (2) (ϕ=60 mW/m^2), la température basale est presque partout au point de fusion alors que dans le cas (3)(B_T= 2 B_T référence) la fusion basale ne touche que le bord. La conséquence en est que les évolutions dans le temps diffèrent sensiblement. Cela pose le problème du calage des paramètres (flux géothermique et coefficient de la loi de déformation) avec comme seul critère le profil de la calotte actuelle. Cependant, les différences concernent surtout l'évolution à long terme (plus de 50000 ans). Au cours d'un cycle climatique, les alternances de périodes chaudes et froides peuvent atténuer cet écart (voir plus loin).

Un deuxième point délicat est apparu. Il s'agit de l'influence de la géométrie du bord (épaisseur de l'ice-shelf associée au profil du socle) sur les mouvements de la ligne d'échouage lors des variations de niveau de l'océan.

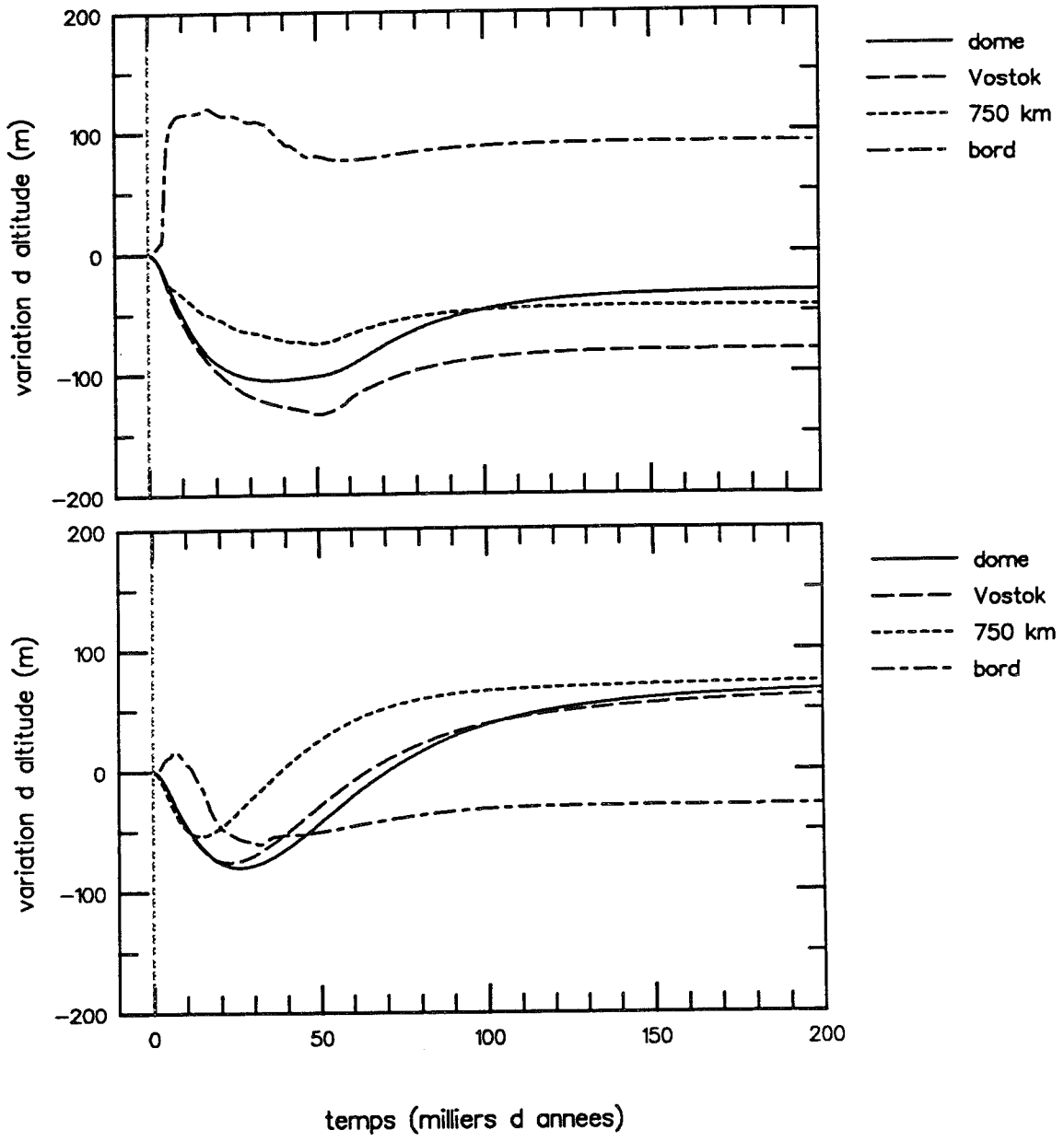


Figure IV.23 ***Evolution de l'altitude de la surface en réponse à une perturbation climatique : Sensibilité au flux géothermique et au coefficient de la loi de déformation.*** *Perturbation climatique avec variation de (ΔT_{clim}) et de (E_{sea}).*
a. *Expérience 2 : Flux géothermique ϕ=60 mW/m^2. Les autres paramètres sont les mêmes que dans l'expérience de référence. Noter la faible influence de la température par rapport à l'expérience de référence (figure IV.20.b)*
b. *Expérience 3 : Coefficient B_T = 1.5 B_T référence. Les autres paramètres sont les mêmes que dans l'expérience de référence.*

Noter que ces deux expériences ont des profils d'équilibre semblables (pour des conditions climatiques actuelles) mais des évolution différentes.

. ***Sensibilité au coefficient de la loi de glissement.***

L'expérience (4) porte sur l'influence du coefficient de la loi de glissement (k_{sl}=5000 m bar^{-2}. an^{-1}). Nous avons ici aussi un comportement différent dans le centre et sur le bord (figure (IV.24).

Pour les sites du centre, l'évolution ressemble à celle de l'expérience de référence mais l'action de la température sur l'écoulement est plus précoce et plus forte. Cela provient (encore une fois) de la température basale qui est plus froide avec en particulier une base froide à 750 km dans l'expérience (4) alors qu'elle est tempérée dans l'expérience de référence. Le glissement agit sur le champ de température par l'intermédiaire de plusieurs mécanismes :

+ L'advection car plus le glissement est fort, plus le gradient horizontal de vitesse l'est et par conséquent plus la vitesse verticale est élevée et la température basale basse. Ce phénomène associé au fait que lorsque la base passe en dessous du point de fusion, le glissement devient impossible (ou faible) et que la discrétisation horizontale est un peu trop grande provoque des oscillations dans certains cas.

+ L'effet isolant car avec un fort glissement, l'épaisseur sur le bord est plus faible (que dans l'expérience de référence) et cela implique un effet isolant moindre.

+ La production de chaleur par déformation qui dépend de la géométrie (épaisseur et pente). Sur le bord, ce dernier processus explique en partie la faible influence du niveau de l'océan. Dans l'expérience de référence, lors de l'abaissement du niveau des mers, la pente de surface diminue et cela fait décroître non seulement la vitesse mais aussi la chaleur de déformation (visualisée par l'épaisseur de la CBT) ce qui constitue une rétroaction positive (c'est à dire que la vitesse décroît encore plus). Dans l'expérience (4), la vitesse d'écoulement sur le bord avant la perturbation climatique, est assez proche du cas de référence mais avec une plus faible proportion de déformation et plus de glissement. La chaleur produite par le glissement est uniquement utilisée pour fondre la glace, ses variations ne provoquent donc pas de rétroaction sur l'écoulement et nous observons que la vitesse décroît effectivement moins proportionnellement que dans le cas de référence.

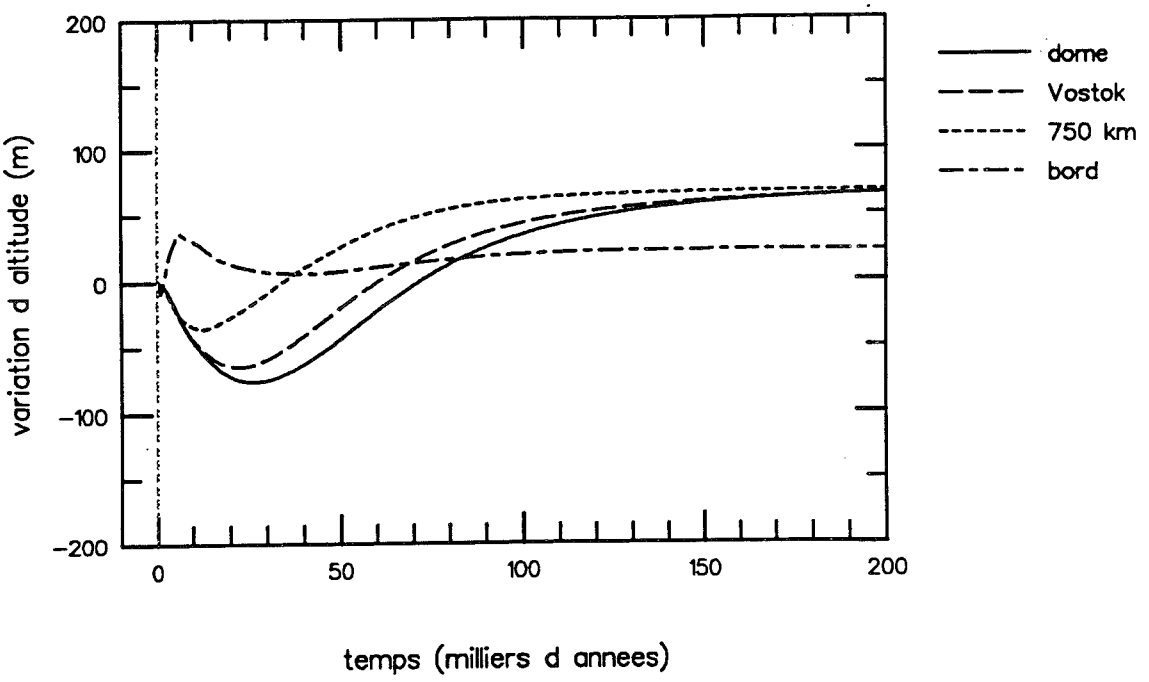


***Figure IV.24** Evolution de l'altitude de la surface en réponse à une perturbation climatique : Sensibilité au coefficient de la loi de glissement.*
Perturbation climatique avec variation de (ΔT_{clim}) et de (E_{sea}).
Expérience 4 : Coefficient de la loi glissement : k_{sl}=5000 m bar^{-2} an^{-1}. Les autres paramètres sont les mêmes que dans l'expérience de référence.

Un autre mécanisme limite (encore plus efficacement semble t'il) l'influence du niveau des mers. Lorsque une partie de l'ice-shelf se "pose" sur le socle à cause de l'abaissement du niveau de l'océan, la vitesse d'écoulement diminue beaucoup moins si le coefficient de glissement (k_{sl}) est fort.

. Sensibilité à la paramétrisation de l'accumulation.

Toutes les expériences effectuées jusqu'ici utilisent une paramétrisation dans laquelle les variations d'accumulation sont seulement fonction des variations de température (à travers la pression de vapeur saturante dans la couche où se condensent les précipitations, au dessus de la couche d'inversion). Nous avons montré au chapitre (III), qu'une telle relation suppose que le transport atmosphérique au dessus de l'Antarctique ne subit pas de modification lors des changements climatiques, hypothèse contredite par l'apport accru d'aérosols (d'origine continentale ou marine) pendant les périodes froides. Nous avons développé une paramétrisation simple de l'accumulation permettant de prendre en compte cette intensification du transport (équation III.19). Nous faisons intervenir une fonction F(x) qui reflète l'importance relative des divers processus de précipitation (refroidissement par détente, par déficit radiatif ou par subsidence). Nous évaluons maintenant l'influence d'une telle paramétrisation sur l'évolution de l'épaisseur de glace lors des changements climatiques.

Nous prenons F(x)=0 entre le dôme et une distance de 700 km ce qui correspond à la partie de la calotte située actuellement au dessus de 3000 m. Entre le site à 700 km et le glacier Byrd, F(x) augmente (de 0 à 0.7) linéairement avec la distance. Plus en aval, F(x) décroît à nouveau pour atteindre 0 au bord de l'ice-shelf. Cette répartition spatiale de F(x) est très simple car notre but ici est surtout de tester la sensibilité à ce type de paramétrisation. Une détermination plus physique consisterait à écrire F(x) en fonction de la pente de la surface pour évaluer d'une façon interactive la composante de l'accumulation due au refroidissement par détente lors de la montée des masses d'air. Lorsque nous imposons une diminution de la température (avec éventuellement une variation du niveau de l'océan), les variations d'accumulation (pour les divers sites suivis) sont représentées sur la figure (IV.25). Pour le dôme et Vostok (et dans une moindre mesure pour le site à 750 km), l'accumulation varie comme dans l'expérience de référence (la variation liée à la rétroaction : altitude -

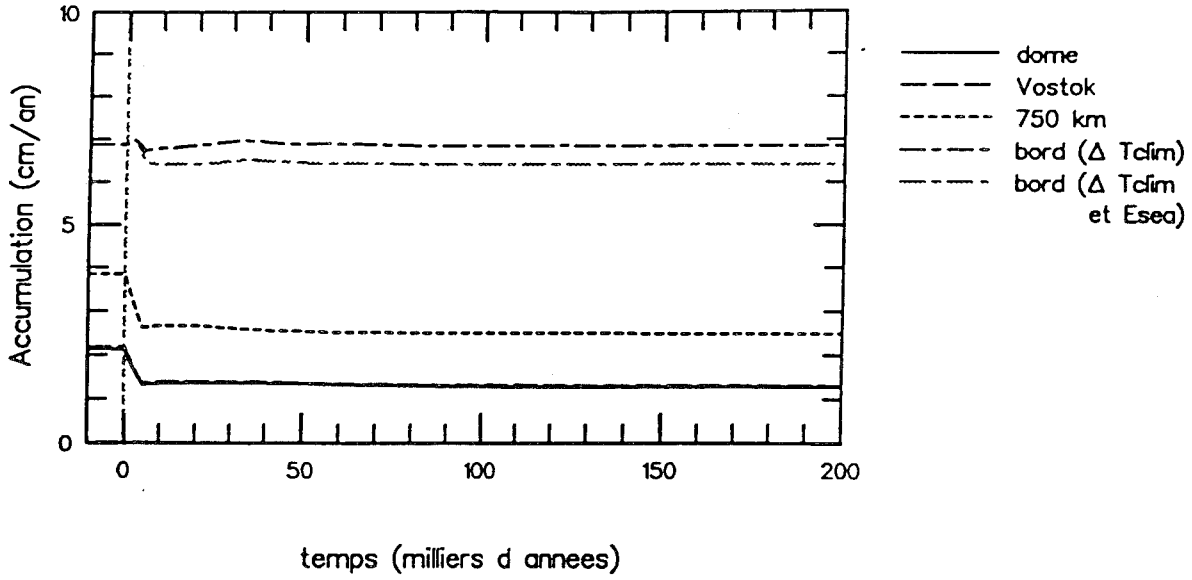


Figure IV.25 Variation de l'accumulation : Influence de la paramétrisation de l'accumulation.
Dans cette expérience, l'accumulation est obtenue d'après l'équation (III.19) pour tenir compte d'une intensification du transport atmosphérique lors des périodes froides. F(x)=0 entre le dôme et 700 km (altitude de la surface >3000 m) et croit linéairement entre 700 km et 1300 km. Les variations d'accumulation au dôme, à Vostok et à 750 km sont semblables à celles de l'expérience de référence (figure IV.21.b). Sur le bord par contre, l'accumulation ne change pour ainsi dire pas, l'abaissement de la température étant compensée par l'intensification du transport atmosphérique.

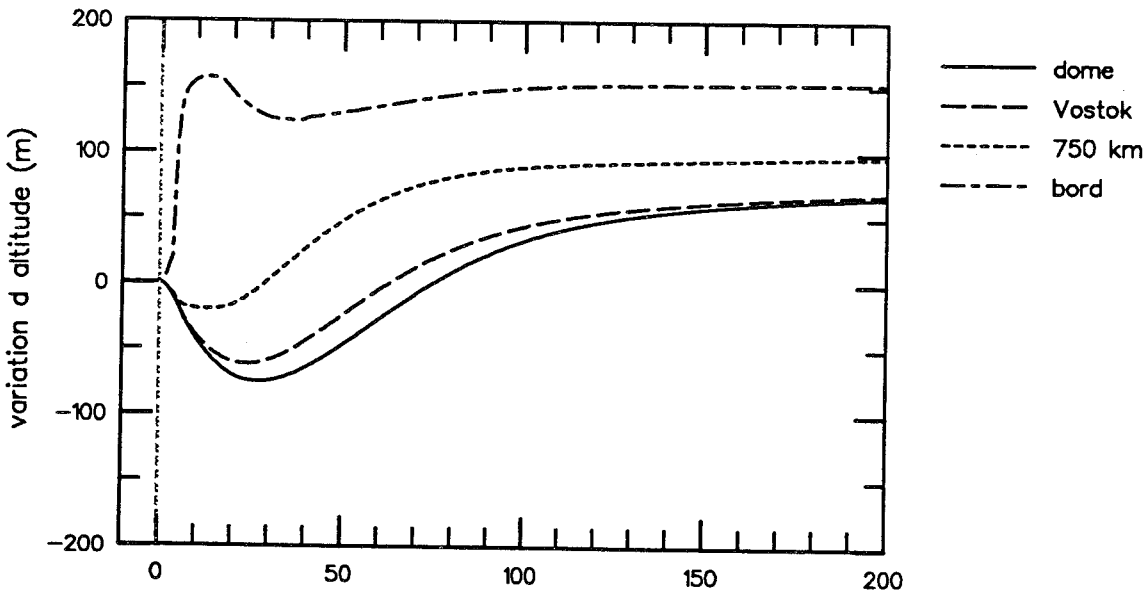


Figure IV.26 Evolution de l'altitude de la surface en réponse à une perturbation climatique : Influence de la paramétrisation de l'accumulation.
Expérience 5 : Les variations de l'accumulation sont celles représentées sur la figure (IV.25). Sur le bord (où l'accumulation ne varie pas) on observe cependant une légère diminution de l'altitude (entre 20 000 et 35 000 ans) qui reflète l'influence du centre. Réciproquement, au centre la décroissance liée à l'accumulation est plus faible que dans l'expérience de référence (figure IV.18.b) ce qui traduit l'influence du bord.

température - accumulation est négligeable). Par contre sur le bord, l'accumulation ne varie pour ainsi dire pas. La diminution due à la température (l'air contient moins de vapeur d'eau) est exactement compensée par l'intensification du transport atmosphérique (il passe plus de masses d'air).

L'évolution de l'altitude de la surface (figure IV.26) est qualitativement semblable à celle de l'expérience de référence, mais la première décroissance (qui est liée à l'accumulation) est plus faible. Cette décroissance est légèrement atténuée dans le centre, et beaucoup plus sur le bord. Nous observons donc une influence réciproque entre le centre et le bord, puisque l'évolution en un site ne dépend pas uniquement de l'accumulation locale.

. ***Sensibilité à la modélisation de l'isostasie.***

Dans toutes les expériences décrites jusqu'ici, la réaction isostatique est calculée en imposant un temps de relaxation (équation (IV.39) avec t_i=2000 ans). Le fait de modéliser le fluage de l'asthénosphère à l'aide d'une équation de diffusion (avec une diffusivité de l'asthénosphère D_a= 50 km^2/an) modifie très peu les résultats de l'évolution. Il faut noter que pour cette ligne de courant les variations d'épaisseurs (et par conséquent d'enfoncement isostatique) sont faibles. De plus quelle que soit la méthode employée (équation (IV.39) ou (IV.40)), la réponse est qualitativement la même bien qu'il puisse y avoir des déphasages. La principale différence se situe sur le bord, car avec l'équation de diffusion, il se produit un bourrelet périphérique qui pourrait modifier les mouvements de la ligne d'échouage. Nous n'observons pas d'influence significative de ce bourrelet, mais cela peut être lié à la géométrie du socle sous marin dans notre ligne de courant et ce résultat n'est pas forcément généralisable. Huybrechts (1990_a) par exemple, estime qu'en Antarctique de l'Ouest, l'effet de l'isostasie sur les déplacements de la ligne d'échouage, pourrait être très sensible.

. ***Sensibilité au sens de la perturbation climatique.***

Pour étudier l'influence d'un réchauffement (au lieu d'un refroidissement), nous avons suivi la procédure suivante pour chaque jeu de paramètres. L'expérience d'évolution après un

refroidissement est prolongée pendant 400 000 ans, jusqu'à atteindre un nouvel état d'équilibre mais pour des conditions froides. Un réchauffement est alors imposé (ΔT_{clim} passant de -7°C à 0°C et Esea de -100 m à 0). Les évolutions pour un réchauffement sont proches de celles obtenues pour un refroidissement, sans être exactement symétriques (comparer par exemple la figure (IV.27), et la figure (IV.18).

Parmi les mécanismes qui expliquent ces asymétries nous avons relevé les points suivants : Le temps mis par la perturbation de température pour atteindre le fond et agir efficacement sur la vitesse, dépend de l'épaisseur de glace et de la vitesse verticale. Ces variables sont différentes selon que nous partons d'un état d'équilibre "chaud" (expériences de refroidissement), ou "froid" (expériences de réchauffement). De plus la loi de déformation ayant une énergie d'activation légèrement plus élevée près du point de fusion, une variation d'un degré n'a pas exactement le même effet sur la viscosité si la base est par exemple à -7°C ou au point de fusion. Les variations d'épaisseur de la couche basale tempérée, qui sont très sensibles à la géométrie, dépendent également de l'état de départavant la perturbation climatique.

Malgré ces quelques différences, les observations faites sur les résultats d'un refroidissement sont encore valables pour un réchauffement.

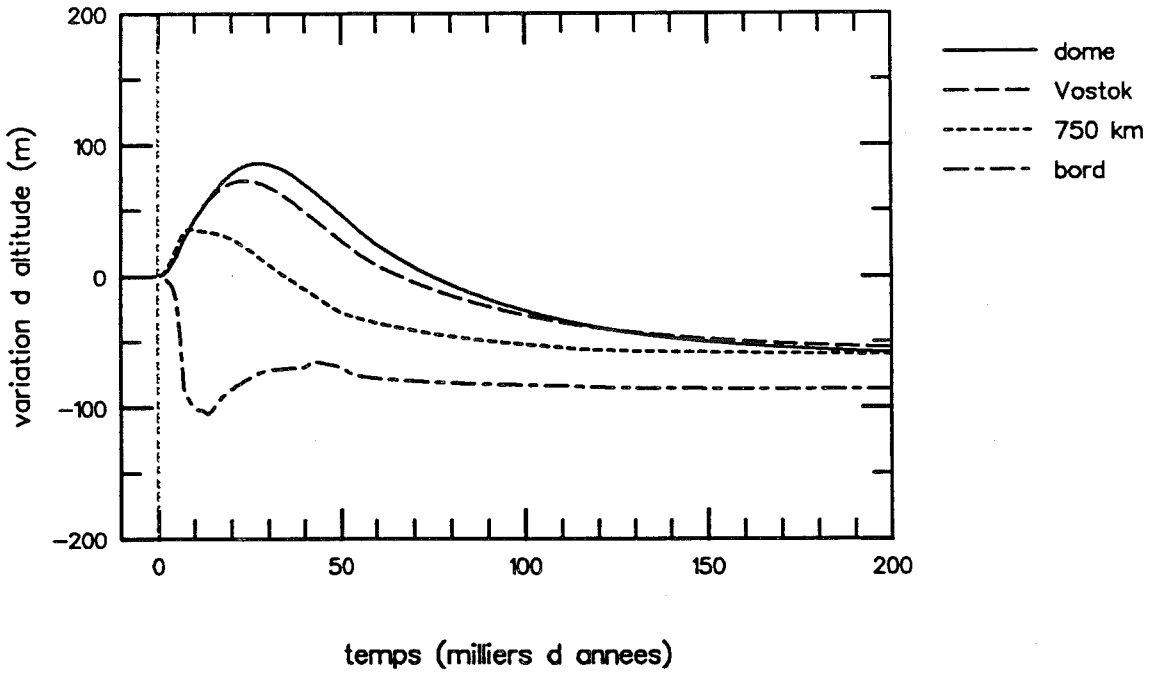


Figure IV.27 Evolution de l'altitude de la surface en réponse à une perturbation climatique : sensibilité au sens de la perturbation climatique (expérience de référence).
La solution initiale est l'état d'équilibre pour les conditions (ΔT_{clim}=-7°C) et (E_{sea}=-100 m). La perturbation climatique est un réchauffement (7°C) et une élévation du niveau des mers

. Conclusions de ces expériences d'évolution avec perturbation climatique de forme simple.

Ce type d'expérience avait essentiellement pour but d'étudier les divers mécanismes survenant après une perturbation climatique. Nous avons imposé un signal climatique de forme simple afin que l'effet des processus à long terme ne soient pas masqué par l'alternance de périodes chaudes et froides.

Les résultats obtenus montrent un comportement différent dans le centre et sur le bord. Dans le centre, l'épaisseur de glace varie dans un premier temps sous l'influence de l'accumulation par un simple effet de conservation de la masse. Ensuite, la perturbation de température, en agissant sur la viscosité de la glace, modifie l'écoulement. L'influence de la température est retardée car il faut que la perturbation de température atteigne les couches basales pour être pleinement efficace. Cet effet s'oppose à celui de l'accumulation puisque lors d'un refroidissement (qui ralentit l'écoulement), l'accumulation diminue. Nous notons que l'action d'une perturbation de température est plus efficace lorsque la base se trouve en dessous du point de fusion. En raison de ce phénomène, l'évolution est sensible à la valeur du flux géothermique.

Sur le bord, la variation du niveau de l'océan modifie la position de la ligne d'échouage d'une façon instantanée mais ce déplacement dépend de la géométrie de la nappe de glace et du socle au environs immédiats de la ligne d'échouage. La variation de l'accumulation joue le même rôle que dans le centre bien qu'il soit plus difficile à discerner en raison des autres mécanismes qui agissent sur l'épaisseur. L'évolution de la température est sensiblement différente car à la composante lente (par diffusion) observée dans le centre, s'ajoute une réaction rapide due aux variations de la géométrie. Cette évolution rapide est principalement liée à la production de chaleur par déformation et affecte fortement l'épaisseur de la couche basale tempérée (où elle existe). Il peut également y avoir une autre influence de l'écoulement sur la température lorsque le gradient horizontal de vitesse évolue au cours du temps. La vitesse verticale et donc l'advection verticale (qui a tendance à refroidir la base de la nappe de glace) s'en trouvent rapidement affectées.

IV.2.C Changement d'épaisseur de la calotte au cours du dernier cycle climatique.

Il est clair que des conditions climatiques en forme de créneau, si elles permettent d'évaluer l'influence des différentents mécanismes, sont par contre peu représentatives des conditions ayant réellement prévalu à la surface de la calotte glaciaire. En particulier, l'alternance de périodes chaudes et froides est relativement rapide et ne laisse pas le temps à la calotte glaciaire de retrouver un état d'équilibre avant une nouvelle perturbation. A présent nous cherchons à simuler les variations d'épaisseur de la nappe de glace en imposant le signal de température issu de Vostok.

. *Procédure suivie.*

Pour imposer les conditions climatiques, nous disposons de l'enregistrement isotopique de Vostok qui couvre environ 160 000 ans. Nous avons décrit au chapitre (III) les hypothèses qui permettent à partir de la composition isotopique de la glace, de reconstituer la température en surface dans le passé. Nous avons également développé la méthode utilisée pour dater la glace. Nous utilisons ici la température de surface en fonction du temps telle que nous l'avons donnée sur la figure (III.23.a). Il faut noter que l'évolution de l'épaisseur est peu sensible aux légères différences entre les chronologie représentées en (III.23). Pour pouvoir comparer avec les autres variables, nous donnons à nouveau cette température en surface sur la figure (IV.28.a) (remarquer que l'axe du temps a un sens différent sur la figure III.23.a et IV.28.a).

Dans les réponses à une variation climatique en forme de créneau, nous avons observé que l'influence de la température se poursuivait pendant des durées supérieures à 100 000 ans. Cela pose le problème de l'état initial à utiliser. Huybrechts (1990_a) commence sa simulation il y a 160 000 ans, et part d'un état d'équilibre stationnaire obtenu avec une température 5°C plus froide que l'actuelle et un niveau de l'océan 130 m plus bas que l'actuel. Ensuite il impose les variations de températures déduites de l'enregistrement de Vostok. Nous avons observé que selon les paramètres, l'utilisation d'un tel état initial pouvait perturber sensiblement les résultats et pour notre part, nous employons la méthode suivante. Nous partons également d'un état d'équilibre stationnaire, mais il y a 640 000 ans (et non 160 000), nous imposons alors 5 cycles climatiques successifs et nous étudions le dernier. La principale

difficulté vient du fait que nous ne disposons de l'enregistrement de température que sur environ un cycle et demi. En pratique, pour la période avant 140 000 ans, nous dupliquons la partie du signal de Vostok, située entre les deux maxima glaciaires (≈ 16 000 ans, 140 000 ans). Ce n'est pas non plus la solution idéale car il est bien connu que les cycles climatiques ne sont pas tous semblables, mais cela nous parait une bonne approximation.

A l'échelle du cycle climatique, le niveau de l'océan, est principalement gouverné par le volume des calottes glaciaires de l'Hémisphère Nord. Les variations du niveau des mers au cours du temps sont généralement estimées d'après les enregistrements marins benthiques. En effet, la composition isotopique des foraminifères benthiques reflète la composition isotopique de l'océan profond, elle même étant fonction de la quantité d'eau stockée sous forme de glace continentale. Le mécanisme est le suivant : par rapport à l'océan, la glace des calottes est apauvrie en isotopes lourds (fractionnement lors des changements de phase : évaporation et condensation). Lorsque les calottes glaciaires fondent, le volume d'eau ainsi libéré augmente le volume de l'océan, et parallèlement, cette eau pauvre en isotopes lourds se mélange à celle de l'océan en abaissant la teneur isotopique moyenne. Il faut cependant effectuer des corrections, pour tenir compte d'une part des variations de température de l'océan (qui modifient également la composition isotopique), d'autre part de la composition isotopique moyenne des calottes (Mix et Ruddiman, 1984). Une autre information sur le niveau de l'océan, provient des terrasses marines qui permettent en particulier de dater (par des mesures d'éléments radioactifs) les épisodes de hauts niveaux des mers. On estime ainsi que le niveau de l'océan a varié de -130 m lors des maxima glaciaires jusqu'au niveau actuel (ou légèrement plus) pendant les stages interglaciaires. D'après Shackleton (1987), les variations du niveau de l'océan déduites des carottes marines (après les corrections citées) sont en accord avec celles fournies par les terrasses marines de Nouvelle Guinée.

Dans nos expériences de simulation, nous utilisons une variation du niveau des mers très schématique en forme de dent de scie (figure IV.28.b). Nous supposons que les plus bas niveaux de l'océan correspondent aux minima de la température. Ce dernier point pourrait être discuté car que ce soit pour les enregistrements marins ou glaciaires, les datations de l'avant dernier maximum glaciaire sont controversées (voir chapitre III, et très récemment Lambeck et Nakada, 1992).

. Résultats des évolutions sur le dernier cycle climatique.

Nous suivons les mêmes points que lors des expériences précédentes (créneau), c'est à dire le dôme, Vostok, un site à 750 km du dôme et le bord (à 1200 km du dôme). Les résultats sont représentés sur la figure (IV.28.c) pour l'expérience de référence et sur la figure (IV.29) pour les expériences 2, 3, 5 (définition de ces expériences dans le Tableau IV.2). Ainsi que nous l'avions déjà souligné, il est beaucoup plus difficile de discerner l'influence des différents phénomènes que lorsqu'on impose des conditons climatiques de forme simple.

Les variations au cours du temps de l'altitude de la surface ne dépassent pas 150 m d'amplitude. Nous trouvons ici encore un comportement différent pour les trois sites du centre et pour le bord. Dans le centre, l'altitude de la surface répond immédiatement aux variations de l'accumulation et l'influence de la température se fait sentir avec un temps de retard. Ce retard diminue avec la distance au dôme. Le bord lui est très influencé par le niveau de l'océan. On observe en particulier une décroissance très rapide lors des remontées du niveau des mers. L'influence de l'accumulation et de la température ne sont cependant pas négligeables. Par exemple dans l'expérience de référence, entre -120 000 ans et -70 000 ans l'altitude de la surface diminue alors que le niveau de l'océan baisse et ce phénomène s'explique essentiellement par une moindre accumulation.

Les résultats des expériences (2, 3, 5) sont cohérents avec l'étude précédente. Nous pouvons citer quelques différences caractéristiques par rapport à l'expérience de référence : Dans l'expérience (2), avec un flux géothermique fort (ϕ=60 mW/m^2, figure IV.29.a), l'influence de la température pour les sites centraux est très légèrement plus faible (voir l'amplitude) et plus rapide, ce qui s'observe par la décroissance plus rapide après le précédent interglaciaire. Cette décroissance est due à l'action de la perturbation "chaude" qui facilite l'écoulement de la glace. Dans l'expérience (3), avec un coefficient (B_T=2 B_T référence), l'influence du niveau de l'océan est très faible en raison de la géométrie de l'ice-shelf. Enfin dans l'expérience (5) pour laquelle, l'accumulation sur le bord varie très peu (l'effet d'une intensification du transport compensant l'effet de la température), il semble que les variations du bord soient très dépendantes du niveau de l'océan, mais avec un effet de seuil. Il y a une décroissance rapide lorsque le niveau de l'oécan dépasse une certaine hauteur (environ -60 m) et réciproquement une brusque augmentation lorsque le niveau passe en dessous d'une

autre hauteur (-30 m). Par comparaison entre cette expérience (5) et l'expérience de référence, nous pouvons observer l'effet des variations d'accumulation sur le bord.

Pour comparer plus aisément ces diverses expériences, nous avons regroupé dans la figure (IV.30.a), les variations d'altitude de la surface à Vostok. Les différences sont faibles et nous pouvons juste observer un léger effet de la température sur l'écoulement. En particulier l'expérience (2) qui se détache un peu plus sensiblement des autres, suppose un flux géothermique plus fort. Dans cette expérience (2), la température basale à Vostok est au point de fusion tout au long du cycle climatique et ne varie donc pas ce qui limite l'influence des perturbations de température. Toujours pour Vostok, nous donnons également (figure (IV.30.b), les variations d'épaisseur telles qu'elles seraient si seule l'accumulation jouait un rôle. En comparant ces deux figures (IV.30.a et IV.30.b) on observe que l'influence de la température est loin d'être négligeable. Cela ne modifie cependant pas les conclusions de la datation (chapitre III) qui n'est pas sensible aux variations d'altitude de la surface au moins lorsque celles ci sont comprises dans une gamme de ± 100 m ce qui est le cas.

Il peut être utile de disposer d'un indicateur global. Comme avec un modèle à une dimension horizontale, il n'est pas question de déterminer des variations de volume, nous nous limitons à calculer les variations de l'épaisseur moyenne pour l'ensemble de la ligne de courant (ice-shelf compris). La figure (IV.31) représente l'évolution au cours du temps de l'épaisseur moyenne. Les variations sont encore plus faibles (±50 m) que pour un site donné car le centre et le bord se compensent en partie. Il faut noter que l'évolution de l'épaisseur moyenne est très différente d'une expérience à l'autre. Les paramètres les plus importants pour l'épaisseur moyenne sont ceux qui affectent le bord, c'est à dire la paramétrisation de l'accumulation (expérience 5) et la valeur du coefficient de la loi de déformation (expérience 3). L'influence de ce dernier paramètre est liée à la géométrie de l'ice-shelf.

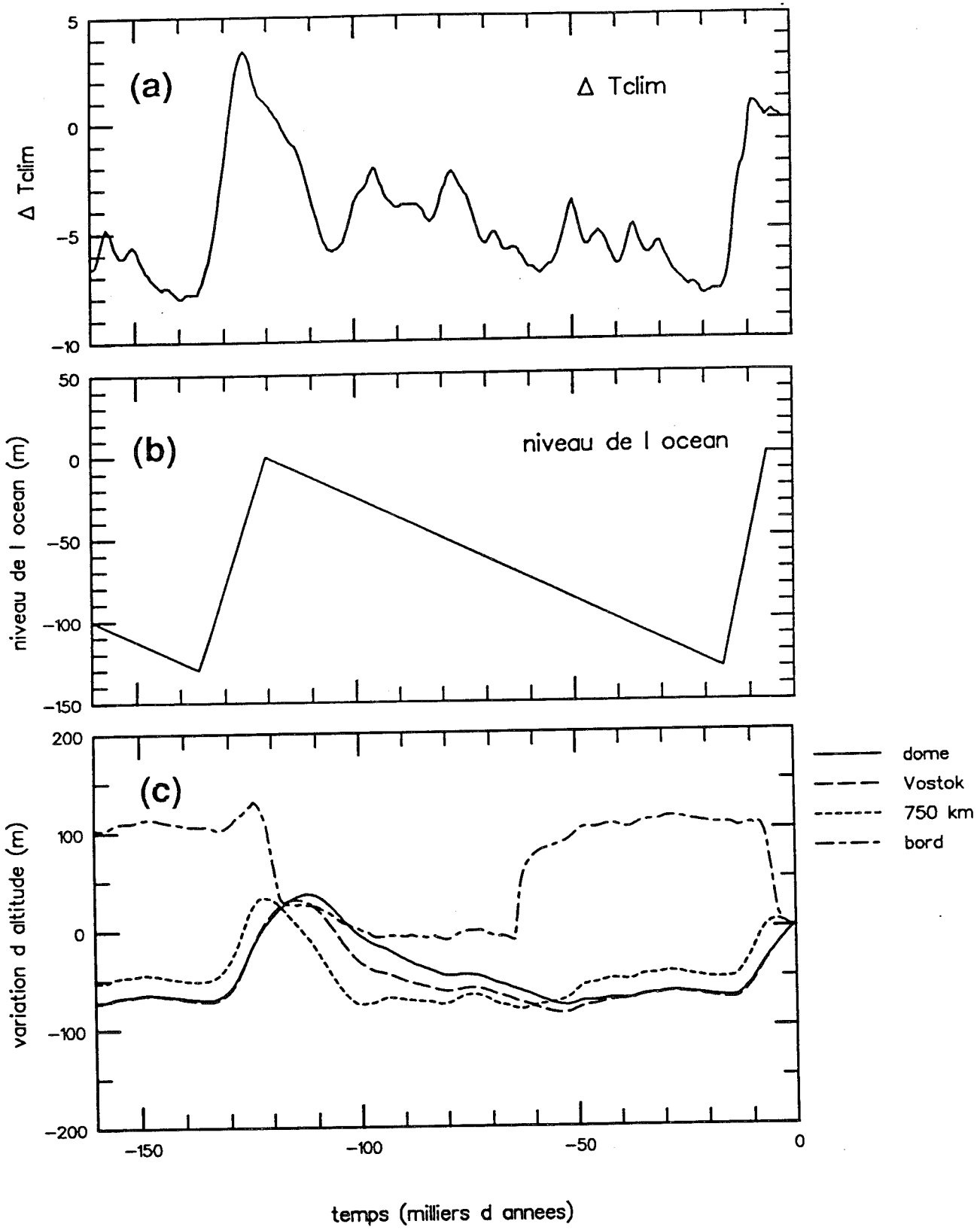


Figure IV.28.Evolution sur le dernier cycle climatique.
a. *Variation de la température en surface imposée dans les simulations. D'après l'enregistrement de Vostok.*
b. *Variation du niveau de l'océan imposée dans les simulations.*
c. *Résultat de la simulation pour l'expérience de référence. Variation d'altitude de la surface pour quatre sites.*

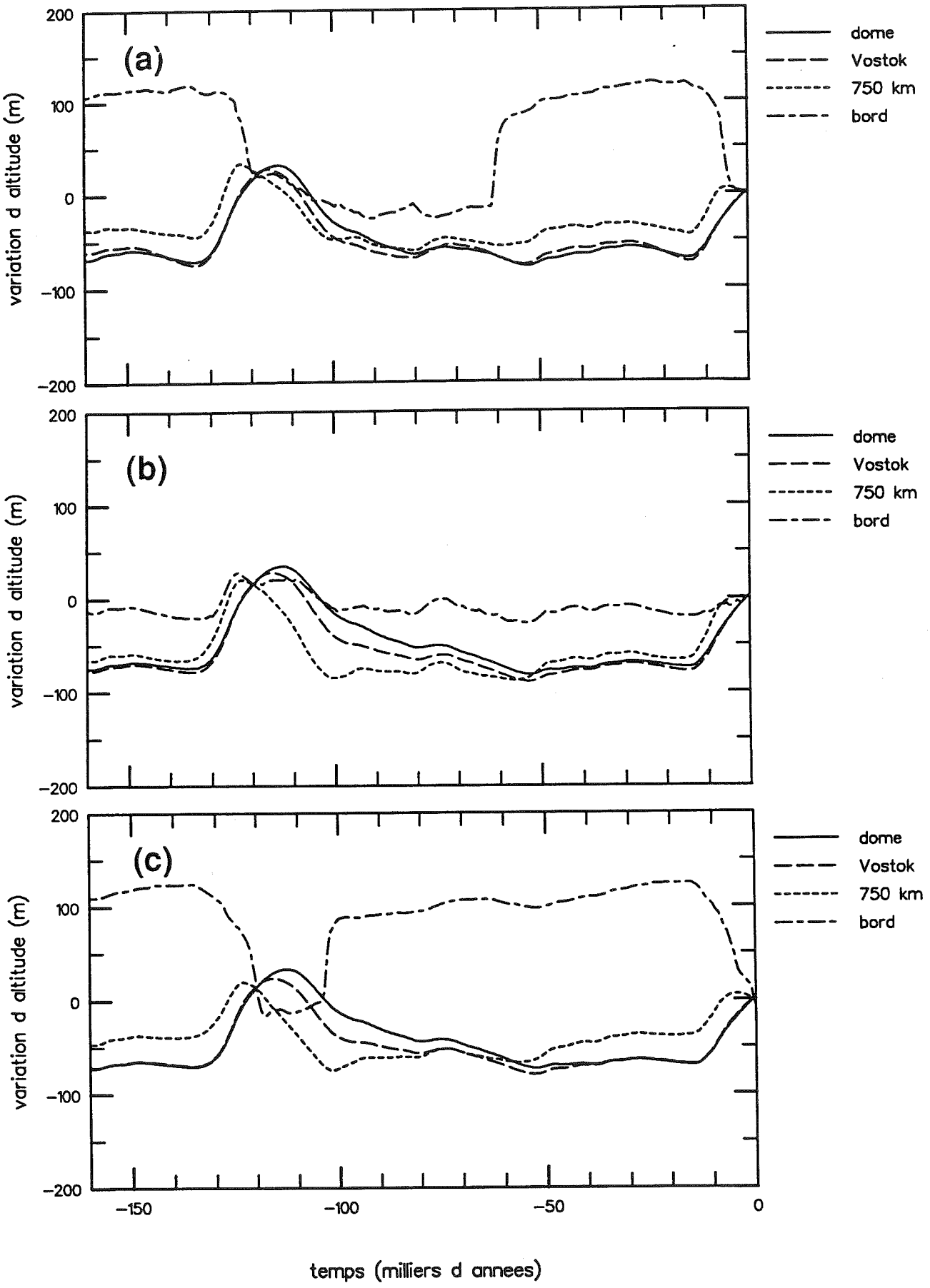


Figure IV.29 Variation d'altitude de la surface en différents sites.
a. expérience (2), flux géothermique ϕ=60 mW/m^2
b. expérience (3), B_T = 2 B_T référence.
c. expérience (5), paramétrisation de l'accumulation d'après (III.19) et F(x)>0.

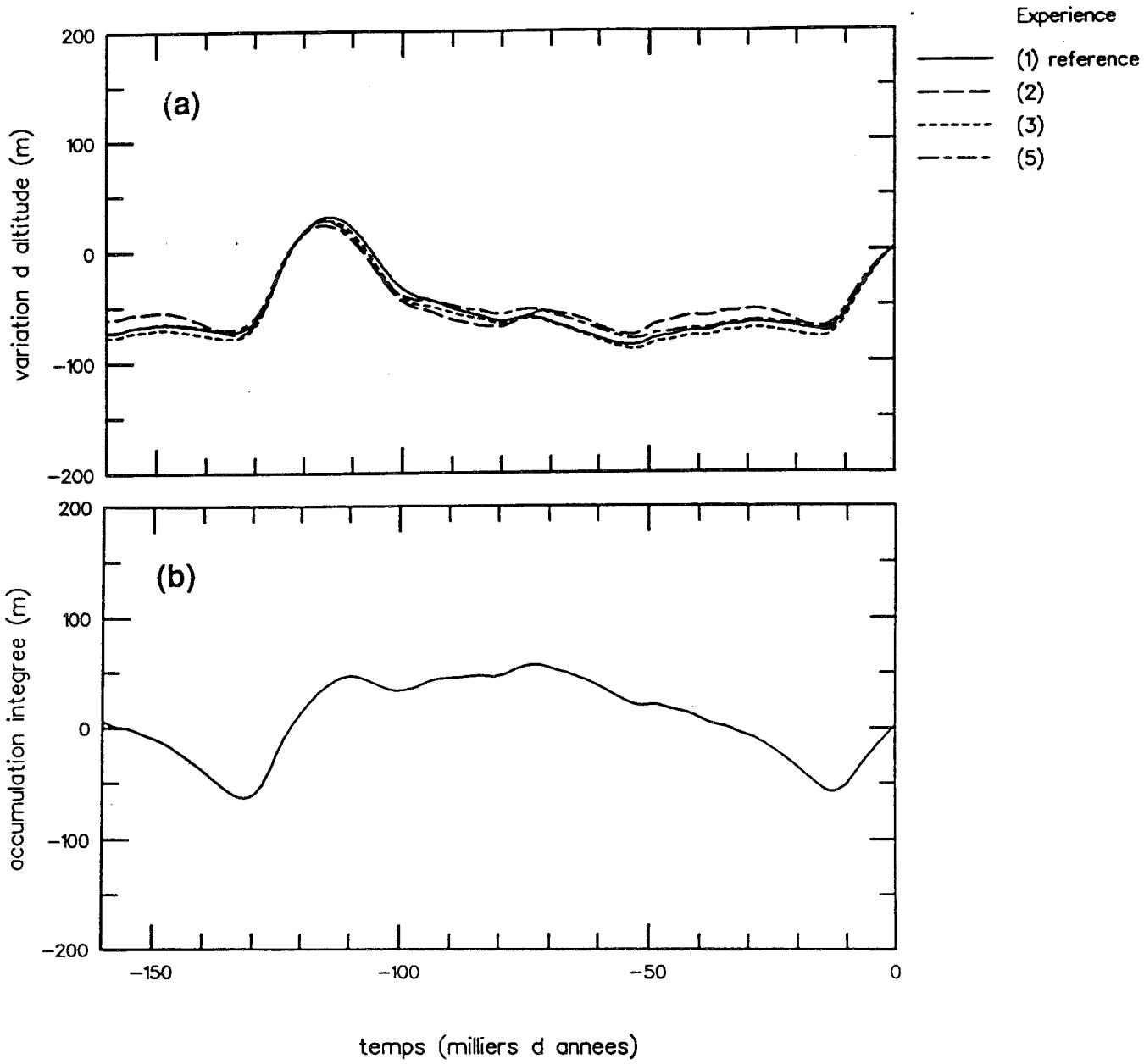


Figure IV.30 Variation de l'altitude de la surface à Vostok .
a. *Comparaison des résultats avec différentes expériences. (1, 2, 3, 5)*
b. *Variation de l'épaisseur uniquement due aux variations de l'accumulation. Cette courbe s'obtient en intégrant l'équation (III.26), en ajustant $\dot{b}_m$ de façon à ne pas avoir de tendance (soit à un grossissement soit à une décroissance) d'un cycle climatique à l'autre. Il faut alors prendre ($\dot{b}_m$ = 0.75 $\dot{b}$ actuel) ce qui correspond à la valeur moyenne de l'accumulation sur un cycle climatique.*

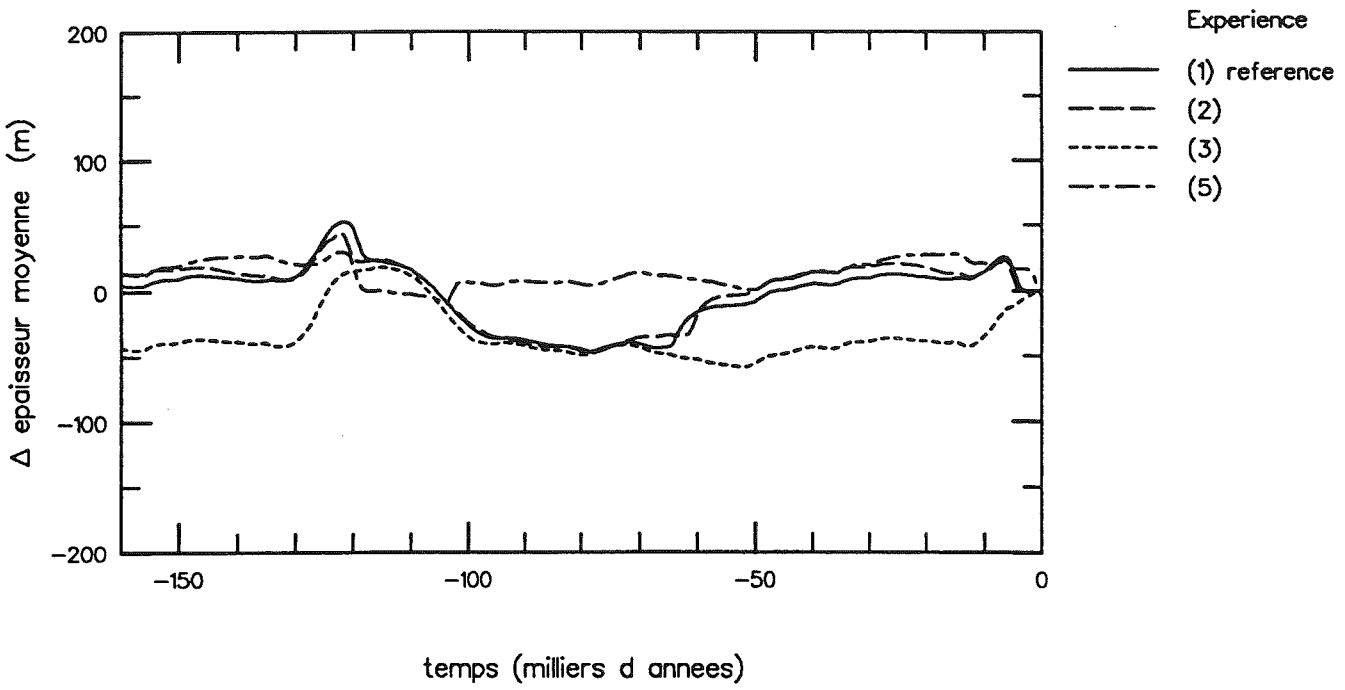


Figure IV.31 Variation au cours du temps de l'épaisseur moyenne.
L'épaisseur est moyennée sur l'ensemble de la ligne de courant.
Les différentes courbes correspondent aux expériences (1, 2, 3, 5)

. ***Comparaison entre les profils actuels calculés et mesuré.***

Pour un même jeu de paramètres, le profil correspondant à l'époque actuelle, obtenu après une simulation sur 5 cycles climatiques, est légèrement plus épais que le profil d'équilibre calculé avec les conditions climatiques actuelles. Pour l'expérience de référence, l'écart sur l'épaisseur est de 100 m au dôme et il semble du même ordre d'une expérience à l'autre. Ce résultat était qualitativement attendu, car dans cette simulation qui tient compte des perturbations climatiques passées, la température à la base de la calotte est encore influencée par la dernière période froide (il y a plus de 12000 ans). La vitesse d'écoulement est par conséquent plus faible et l'épaisseur plus grande que dans le cas stationnaire. La sensibilité aux divers paramètres du modèle est similaire à celle observée pour les profils stationnaires et décrite en (IV.2.A).

Nous avons comparé le profil actuel mesuré et les profils calculés par le modèle (pour le présent). Dans toute la région centrale le profil obtenu dans l'expérience de référence est plus épais (d'environ 200 m) que le profil mesuré. Pour avoir un meilleur accord dans cette région, il faut soit un flux géothermique plus élevé, par exemple dans l'expérience (2) (ϕ=60 mW/m^2) soit un coefficient de la loi de déformation plus fort comme dans l'expérience (3) (B_T= 2 B_T référence). L'écart de ces deux profils avec le profil actuel est présenté dans la figure (IV.32).

Sur le bord, à partir de 1000 km du dôme et comme dans les expériences d'état stationnaire, la forme calculée de la calotte est sensiblement différente de la forme mesurée. Il semble que cet écart soit principalement lié à la discrétisation horizontale qui ne permet pas de prendre en compte tous les accidents du relief sous-glaciaire. Des expériences avec un pas d'espace plus petit (de l'ordre de 10 km) permettraient d'évaluer l'influence de ces discrétisation.

Finalement, les expériences (2) et (3) simulent un profil assez semblable au profil actuel (écart moyen d'environ 5% de l'épaisseur). Il en est de même des expériences ayant les mêmes paramètres (ϕ et B_T) et une paramétrisation de l'accumulation qui tient compte du transport atmosphérique (avec F(x) > 0). Les champs de température sont cependant fort différents selon les expériences ainsi que nous pouvons l'observer sur la figure (IV.33) qui

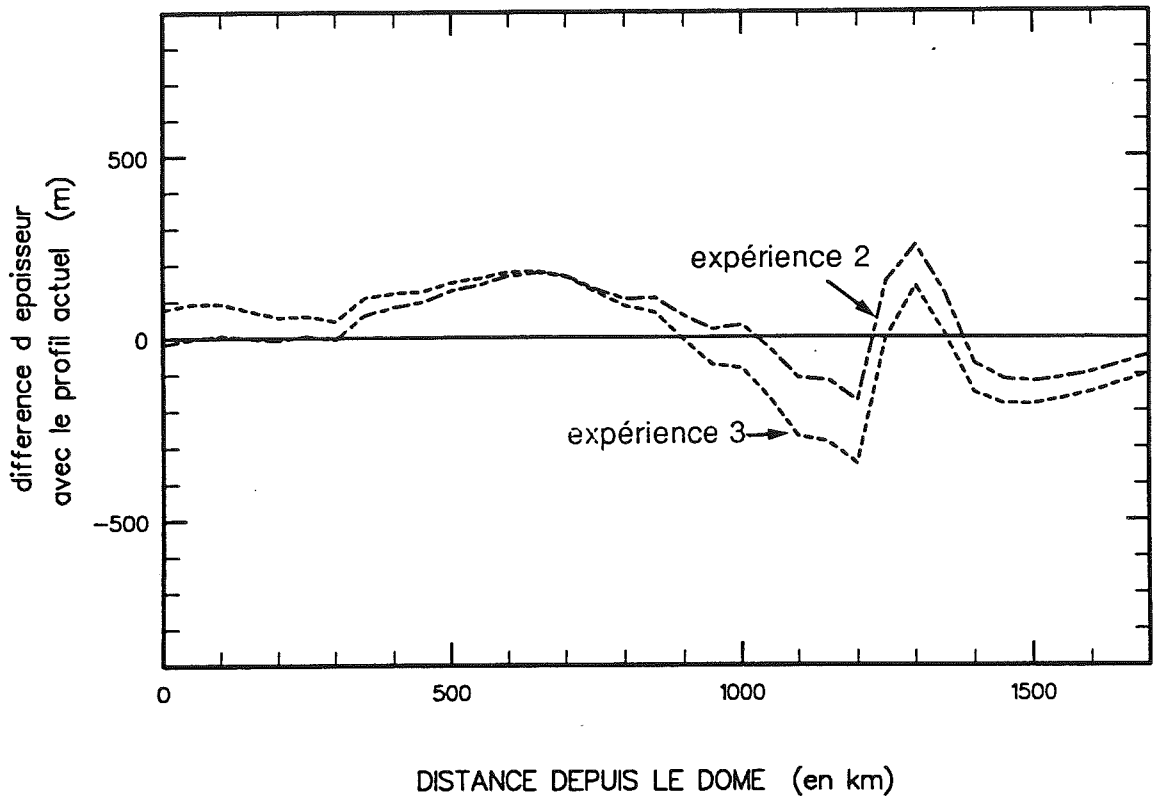


Figure IV.32 Différence d'épaisseur entre le profil de la calotte calculé et le profil mesuré. *Les profils calculés sont obtenus pour le présent après une simulation sur 5 cycles climatiques. Comparaison des expériences (2) et (3)*

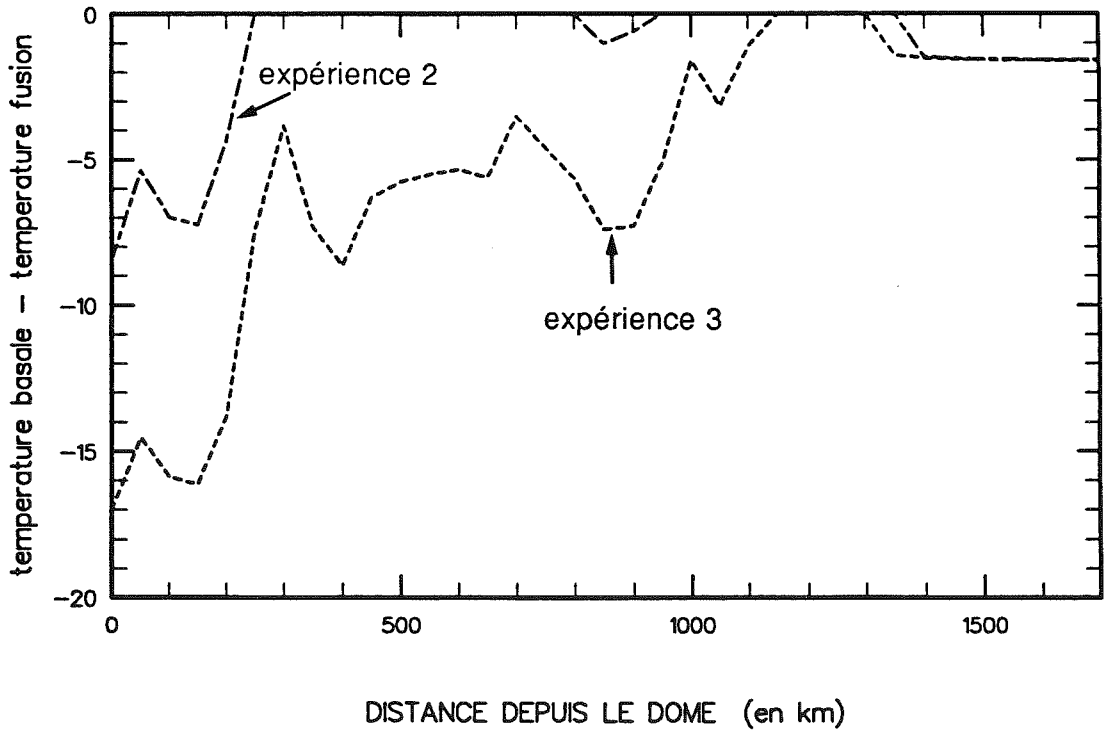


Figure IV.33 Ecart entre la température basale et la température de fusion *Pour des profils de calotte obtenu après une simulation sur 5 cycles climatiques. Comparaison des expériences (2) et (3).*

représente la température basale pour les expériences (2) et (3). Il faut noter que l'expérience (3) donne une température basale à Vostok, nettement en dessous du point de fusion ce qui est en contradiction avec l'existence d'un lac sous-glaciaire et avec le profil de température mesuré (Ritz, 1989).

. Conclusion sur les variations d'altitude à Vostok.

Pour le dernier cycle climatique, nous avons simulé l'évolution de la géométrie de la calotte le long de la ligne de courant passant par Vostok.

A Vostok même, les variations d'altitude de la surface ont une amplitude inférieure à 150 m et n'ont donc pas affecté de façon importante la température à la surface de la calotte glaciaire. Il n'y a que de faibles corrections (<1.5°C) à apporter au signal de température de Vostok pour tenir compte de ces variations d'altitude. Dans nos expériences, les variations d'épaisseur (et d'altitude de la surface) à Vostok, sont essentiellement fonction des variations d'accumulation et de température en surface, ce dernier effet ne pouvant pas être négligé. L'évolution au cours du temps est peu sensible au jeu de paramètre choisi, seule les expériences avec un flux géothermique "fort" semblant très légèrement différentes. Etant donné que ces expériences avec (ϕ=60 mW/m^2) sont les seules à être en accord à la fois avec le profil de calotte mesuré et les températures mesurées à Vostok, nous les considérons plus réalistes (mais l'écart est à vrai dire faible).

Toujours pour le site de Vostok, nous ne relèvons pas d'influence du niveau des mers. Ce résultat est qualitativement différent de celui que trouve Huybrechts (1990_a) car avec son modèle tri-dimensionnel cet auteur indique que l'influence du niveau de l'océan se fait sentir jusqu'à Vostok. Par exemple, pour les derniers 10 000 ans, il simule une diminution de l'altitude et nous une augmentation. Nous voyons plusieurs explications possibles à ce désaccord. Tout d'abord, des effets tri-dimensionnels dans le centre de l'Antarctique de l'Est, tels que le changement de position du dôme qui ne peuvent pas être pris en compte dans notre modèle. Un tel déplacement n'est cependant pas mis en évidence sur les cartes présentées par Huybrechts (1990_a). La principale cause semble être le comportement du Ross Ice-shelf car dans ses simulations avec un niveau de l'océan abaissé de 130 m, Huybrechts ($1990_{a,b}$) trouve

que le Ross Ice-shelf s'échoue presque entièrement, la ligne d'échouage avançant de plusieurs centaines de kilomètres. Notre modèle bi-dimensionnel ne peut pas simuler ce type de phénomène qui semble lié aux variations d'épaisseur de l'Antarctique de l'Ouest laquelle, en raison de la géométrie de son socle, répond très fortement aux variations du niveau marin. Notre conclusion serait que même pour modéliser le centre de l'Antarctique de l'Est, on ne peut être sûr d'avoir pris en compte tous les phénomènes qu'avec un modèle tri-dimensionnel incluant l'Antarctique de l'Ouest.

IV.3.A conclusion et prospectives

Nous avons développé un modèle bi-dimensionnel vertical qui calcule les champs couplés de température et de vitesse et simule l'évolution au cours du temps de la géométrie d'une calotte glaciaire. Nous avons appliqué ce modèle à la ligne de courant passant par Vostok pour évaluer les variations d'altitude de la surface pendant le dernier cycle climatique. Ces expériences indiquent que le centre de l'Antarctique n'a pas subi de variations supérieures à 100 m. La comparaison avec les résultats du modèle tri-dimensionnel de Huybrechts (1990_a) montrent que l'amplitude des variations est similaire mais fait apparaître un désaccord sur l'influence des variations du niveau des mers. Ce désaccord pourrait provenir du fait que notre modèle ne peut pas prendre en compte des phénomènes typiquement tri-dimensionnels comme l'influence de l'Antarctique de l'Ouest sur l'Antarctique de l'Est par l'intermédiaire du Ross Ice-shelf.

A notre avis, l'intérêt d'un modèle bi-dimensionnel est surtout de permettre des études sur les différents mécanismes survenant dans une calotte en réponse aux perturbations climatiques, de déterminer quels sont les paramètres sensibles et quelles mesures seraient nécessaires pour que les modèles soient plus réalistes. C'est l'orientation que nous avons cherché à donner à ce travail en nous basant sur de nombreuses études de sensibilité et nous résumons ici les points qui nous paraissent importants.

- Le profil de la calotte glaciaire dépend de nombreux paramètres (loi de déformation, flux géothermique, loi de glissement) mais le point critique à souligner est qu'un même profil peut cacher des champs de température radicalement différents. Or l'évolution en réponse aux

perturbations de température dépend de ce champ de température et plus précisément du fait que la base est ou non au point de fusion et pour quelle étendue. Il peut donc y avoir des expériences qui simulent des évolutions différentes mais parviennent au même profil actuel. Cela met en cause la méthode utilisée par Huybrechts (1990_a) qui cale le coefficient de la loi de comportement de façon à reproduire le profil actuel de la calotte. Un inconvénient supplémentaire à cette méthode est que si le profil de la calotte est utilisé pour caler des paramètres, il ne peut plus servir pour tester le modèle. Le profil dépendant principalement de la loi de déformation et du flux géothermique, il nous parait crucial d'améliorer notre connaissance sur ces deux sujets.

Pour le flux géothermique, les mesures de température dans les trous de forage permettent d'estimer la valeur du flux géothermique (voir chapitre III et Ritz, 1989). Nous pourrions également tirer parti de la présence de lacs sous-glaciaires qui indiquent avec certitude certaines zones de base tempérée.

Le problème de la loi de déformation est plus complexe car le processus de déformation et la loi correspondante dépendent de la partie du glacier considérée. Pour pouvoir introduire ces phénomènes dans un modèle à grande échelle, il faut pour chaque type glace, mesurer par des essais mécaniques, les coefficients et exposants de la loi de déformation. Il faut aussi déterminer comment varie le type de glace (texture, taille des grains) sur toute l'épaisseur du glacier et comment se fait la transition d'un processus de déformation à l'autre. Ce dernier point n'a jusqu'à présent été abordé que d'une façon qualitative, insuffisante pour pouvoir intégrer des lois dépendant de la profondeur dans un modèle comme le nôtre. Il faut noter que la déformation est concentrée dans les couches basales, or pour une grande fraction de l'Antarctique, ces couches basales ont une température supérieure à -10°C, la glace y a donc subi une recristallisation dynamique et la loi de déformation pour ce type de glace est relativement bien connue. La mauvaise prise en compte de la loi de déformation dans le reste du glacier n'a peut être qu'une influence limitée pour les modèles à grande échelle. Une difficulté vient cependant du fait qu'il existe des couches pour lesquelles la glace n'est pas isotrope et dont la déformation (en cisaillement) n'est pas négligeable bien qu'elles ne soient pas situées à la base de la calotte.

- Un autre point qui ressort de nos résultats est l'influence de la température. Lors d'un changement climatique, la perturbation de température est en général associée à une

variation d'accumulation. En Antarctique, les effets sur l'épaisseur de ces deux perturbations sont de même amplitude et de sens opposé, il n'est donc pas possible de négliger l'influence de la température. Dans les calottes glaciaires, il est d'usage de considérer que les phénomènes thermiques sont lents, et c'est ce que nous observons pour la diffusion. Par contre, il existe des mécanismes dont la réaction est très rapide. Il s'agit en particulier de la chaleur produite par déformation qui réagit instantanément aux modifications de la géométrie de la calotte. Ces modifications peuvent être initiées par les variations d'accumulation ou de niveau des mers. Au cours de nos expériences, nous n'avons pas observé d' "emballement" de la production de chaleur comme le suggèrent Yuen et al. (1986) mais ainsi que nous l'avons déjà noté (IV.1.A), ces auteurs n'avaient tenu compte que des rétroactions positives et d'aucune rétroaction négative.

- Lorsqu'on étudie la réaction aux variations du niveau des mers, la géométrie de la nappe de glace et du socle semble avoir une influence non négligeable. Il s'agit surtout de la géométrie dans la zone de transition entre calotte glaciaire et ice-shelf et dans la partie de l'ice-shelf proche de cette jonction. Les conséquences de cette sensibilité sont tout d'abord que chaque glacier émissaire risque d'être en cas particulier. De plus l'influence de la réaction isostatique, qui n'apparaît pas importante dans le cas de la ligne de Vostok, peut s'avérer déterminante selon la géométrie du bord. Ce point a également été soulevé par Huybrechts (1990_b). Enfin, le profil de l'ice-shelf joue un grand rôle. Nous revenons au problème de la loi de déformation mais cette fois la déformation se fait en extension et non plus en cisaillement. De plus, contrairement à ce qui se passe dans la calotte glaciaire, les couches basales ne jouent pas un rôle plus important que les couches supérieures.

Dans le futur, nous devrions poursuivre avec ce type de modèle en cherchant à progresser sur les thèmes suivants : introduction de lois de déformation plus réalistes, utilisation d'une grille horizontale plus petite pour mieux prendre en compte le socle rocheux, application à d'autres lignes de courant, amélioration du modèle de jonction calotte glaciaire - ice-shelf et du modèle d'ice-shelf, meilleure prise en compte des processus de précipitation pour évaluer les variations de l'accumulation au cours du temps. Su ce dernier point, nous avons déjà proposé une paramétrisation de l'accumulation au chapitre (III) et les études de sensibilité ont montré que cela joue un rôle important dans l'évolution de la calotte glaciaire.

La dernière amélioration que nous envisageons est le passage à un modèle tridimensionnel. Il faut souligner qu'il n'existe pour l'instant qu'un seul modèle d'évolution tridimensionnel (celui de Huybrechts 1990_a). Une difficulté non négligeable de ce passage en 3D est l'obtention d'heures de calcul (rappelons que d'après Huybrechts, une simulation de 400 000 ans nécessite 12 heures de Cray II).

CONCLUSION

CONCLUSION

Ce travail s'inscrit dans le vaste thème de la "modélisation des calottes glaciaires". Nous avons suivi une approche à grande échelle, cherchant à déterminer l'écoulement de la glace le long d'une ligne de courant. Nous nous sommes concentrés sur la ligne de courant qui passe par la station de Vostok en Antarctique de l'Est car d'une part cette ligne nous semble représentative d'une large partie de l'Antarctique de l'Est et d'autre part nous souhaitions utiliser nos modèles dans l'interprétation du forage de Vostok.

Nous avons développé deux modèles. Le premier, présenté au chapitre (II) et que nous intitulons "à géométrie imposée", fournit un champ de vitesse à partir de la géométrie de la nappe de glace et de l'alimentation. D'après nous, ce type de modèle doit surtout être considéré comme un outil préliminaire car une limitation majeure vient du fait qu'il est nécessaire de faire des hypothèses sur l'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps.

Le calcul des trajectoires des particules de glace est un exemple d'utilisation de ce modèle. Associé à des hypothèses sur les variations aux cours du temps de l'accumulation, il permet de calculer l'âge des carottes de glace. L'étude que nous avons ainsi effectuée sur la chronologie du forage de Vostok montre que la datation est beaucoup plus sensible aux variations de l'accumulation qu'aux paramètres du modèle d'écoulement (chapitre III). Notre mauvaise connaissance de l'accumulation en amont de Vostok limite la précision sur la chronologie. Le désaccord qui apparaissait entre la première chronologie Vostok (Lorius et al.1985) et la chronologie des carottes marines entre dans la sensibilité du modèle de datation.

A partir du champ de vitesse obtenu dans le modèle à géométrie imposée, il est également possible de calculer le champ de température dans la glace. Nous avons développé la résolution de l'équation de la chaleur dépendant du temps et la spécificité de notre modèle tient à ce que nous avons accordé une grande attention aux conditions aux limites, particulièrement lorsqu'il y a changement de phase (fusion). Nous avons appliqué ce calcul à l'interprétation du profil de température mesuré dans le trou de forage de Vostok, et montré

qu'en ce site, la base du glacier est au point de fusion. Lorsque la base est ainsi au point de fusion, il est possible de déduire du profil de température mesuré, une valeur minimum pour le flux géothermique (50 mW/m^2) et une valeur maximum pour l'accumulation. Cette dernière valeur se trouve en bon accord avec celle utilisée dans la datation.

Dans le deuxième modèle (chapitre IV), les champs de température et de vitesse couplés sont calculés et les variations au cours du temps de l'épaisseur de glace en découlent. Pour décrire complètement l'évolution de la géométrie de la nappe de glace, l'isostasie a également été introduite. Il a été de plus nécessaire de développer un modèle simple d'ice-shelf pour pouvoir simuler les avancées et reculs de la ligne d'échouage.

De nombreux mécanismes sont pris en compte :

- Thermiques (diffusion, advection, production de chaleur par déformation, changements de phase)
- Mécaniques (écoulement par gravité, action de l'ice-shelf, frottement sur les bords de la vallée, convergence des lignes de courant, isostasie)
- Climatiques (température de surface, alimentation, niveau de l'océan).

Le modèle indique comment les différents processus introduits interagissent, leurs évolutions au cours du temps et l'effet total sur la géométrie de la calotte glaciaire.

Nous observons en particulier que l'influence des variations de température dans la glace ne peut pas être négligée. A ce sujet nous estimons que le modèle à géométrie imposée s'est montré très utile pour la mise au point du calcul de température, mais qu'à présent que nous avons développé un modèle couplé, il est plus judicieux d'utiliser ce deuxième modèle pour l'étude de la température dans le glace, surtout lorsqu'on s'intéresse à la production de chaleur due à la déformation.

Un résultat important obtenu avec ce modèle est que le centre de l'Antarctique de l'Est a été très stable au cours du dernier cycle climatique, la variations d'altitude de la surface ne dépassant pas ±100 m. Le niveau des mers en particulier ne semble pas avoir une grande influence. Les paléoclimatologues s'en réjouiront, car l'interprétation des enregistrements isotopiques en terme de climat est facilitée. Le modélisateur par contre peut trouver une telle stabilité peu enthousiasmante et cherchera sans doute dans le futur à appliquer son modèle à des calottes glaciaires plus "dynamiques" (l'Antarctique de l'Ouest ou le Laurentide).

Conclusion

Nous terminerons sur une courte prospective. En effet, l'utilité d'un modèle n'est pas seulement de produire des simulations. Il doit également indiquer quelles mesures seraient utiles pour accroître la confiance dans les résultats et mettre en évidence ses propres limitations afin de montrer la voie pour des progrès futurs.

Nous rappelons les mesures qui nous semblent fondamentales :

- Les coefficients et exposants de la loi de déformation, pour tous les types de glace rencontrés dans une calotte polaire.
- Le flux géothermique, qui peut être estimé d'après des mesures de températures dans les trous de forages.
- Le taux d'accumulation, de préférence mesuré sur une période de temps assez longue (radioactivité β et volcans Tambora et Krakatoa).

En ce qui concerne les progrès que nous aimerions apporter au modèle :

- Loi de déformation. Il faudrait en particulier développer un modèle d'évolution de la fabrique et de la texture de la glace.
- Loi de glissement. C'est clairement une des lacunes de notre modèle. Il faudrait utiliser une loi valable à la fois pour les faibles et les fortes vitesses.
- Zone de transition calotte glaciaire - Ice-shelf et détermination de la vitesse à la ligne d'échouage. Ce problème est également lié à la loi de glissement. La paramétrisation utilisée ($\bar{\sigma}'_x$ linéaire) est grossière mais seul un modèle à petite échelle résolvant toutes les équations mécaniques peut traiter rigoureusement ce problème. Il faudrait ensuite soit en déduire une paramétrisation plus réaliste, soit imbriquer le modèle petite échelle dans celui à grande échelle.
- Variations d'accumulation au cours du temps. Nous avons commencé à aborder ce problème et mis en évidence l'importance des processus de précipitation. Cet effort devrait se poursuivre.
- Passage à un modèle tridimensionnel car certains phénomènes ne peuvent être pris en compte en considérant seulement une ligne de courant.

Conclusion

ANNEXES

ANNEXE 1

PROPRIETES PHYSIQUES DE LA GLACE ET DU SOCLE ROCHEUX.

Densité de la glace.

La densité pour de la glace pure sans bulle est :

$\rho_g = 0.917$ à 0°c

$\rho_g = 0.924$ à -60°c (Pimienta 1987)

En ce qui concerne la glace polaire, les valeurs pour la glace pure sont en accord avec les données expérimentales à Vostok (Barkov communication personnelle). La densité à Vostok, est 0.923 à 1000 m de profondeur et -50°C.

Conductivité thermique de la glace.

D'après Yin-Chao Yen (1981) la conductivité thermique de la glace pure en fonction de la température peut s'exprimer à l'aide d'une formule empirique

$K_g = 9.828 \exp(-0.0057 T)$ avec T en K

K_g en W K^{-1} m^{-1}

Cependant pour de la glace polaire, Weller et Schwerdtfeger (1971) indiquent une variation linéaire de la conductivité thermique en fonction de la température et des valeurs légèrement plus élevées.

$$K_g = 2.22 - 0.0148 (T-273.15) \text{ W } K^{-1} \text{ } m^{-1}$$

Nous utiliserons cette dernière relation qui de plus donne un meilleur accord entre température mesurée et calculée à Vostok (Ritz, 1989).

Capacité calorifique de la glace

La capacité calorifique varie également avec la température mais d'une façon à peu près linéaire (Yin-Chao Yen 1981).

$c_g = 38$ J mole^{-1} K^{-1} à 0°C

$c_g = 30$ J mole^{-1} K^{-1} à - 60°C

La capacité calorifique par unité de volume est donc

$c_g \rho_g = 19.36\ 10^5$ J m^{-3} K^{-1} à 0°C

$c_g \rho_g = 15.4\ 10^5$ J m^{-3} K^{-1} à -60°C

Fusion de la glace.

La température de fusion dépend de la pression hydrostatique :

$T_f = -C_m \rho_g g H$. T en °C

C_m est le coefficient de variation de T_f avec la pression, H est l'épaisseur de glace et g l'accélération de la pesanteur.

La loi de Clapeyron donne $C_m = 0.0074$ °C bar^{-1} pour de l'eau pure.

Harrison (1972) trouve un coefficient de 0.0098 dans le Blue Glacier en raison de l'air dissous à saturation. Ceci ne s'applique pas aux calottes polaires. En effet la quantité d'air emprisonnée dans la glace polaire est de l'ordre de 0.1 cm^3 g^{-1} STP (Raynaud 1976). Au fond d'une calotte d'épaisseur 3000 m, la pression hydrostatique est environ 270 bars. La saturation de l'azote dans l'eau à une telle pression est obtenue avec 2.6 cm^3 g^{-1} (Wiebe and al.1932). Celle pour l'oxygène est du même ordre de grandeur. On voit que l'air est loin d'être à saturation. Il faut seulement tenir compte de la pression partielle P' qui est celle nécessaire pour dissoudre 0.1 cm^3 g^{-1}. La température de fusion sera donc :

$T_f = -0.0074\ \rho_g\ g\ H - 0.0024\ P'$

P' est environ 10 bars. La correction due à l'air dissous est donc environ 0.024 °C, quelle que soit la profondeur.

La chaleur latente de fusion varie légèrement avec la température .

$L = 333.6$ kJ kg^{-1} à 0°c

$L = 308.5$ kJ kg^{-1} à -5°c (Hobbs 1974)

Nous supposons une variation linéaire de la chaleur latente de fusion entre ces deux températures.

Propriétés thermique du socle rocheux

La principale difficulté vient du fait que la géologie des continents englacés est très mal connue. Il est courant d'admettre que l'Antarctique est un bouclier antécambrien mais ce n'est certainement pas le cas pour l'ensemble du continent Antarctique. Par exemple Steed et Drewry (1977) à partir de sondages radar, ont établi une géologie (spéculative) de la Terre de Wilkes avec entre autre des filons de granite, un fossé d'effondrement et des terrains sédimentaires sur le socle antécambrien. On peut noter également du volcanisme dans la chaine transantarctique. Il ne faut donc pas se limiter pour les propriétés du socle au cas d'un bouclier antécambrien.

Les propriétés thermiques sont variables suivant le type de roche (Drury et al.1984). Même pour un type de roche donné les valeurs sont assez dispersées. Pour le granite par exemple la conductibilité varie de 1.67 à 3.53 W K^{-1} m^{-1}. Pour l'ensemble des roches de 1.29 W K^{-1} m^{-1} pour un basalte à 7.36 W K^{-1} m^{-1} pour une quartzite.

La densité est moins dispersée et nous prenons la valeur :

$\rho_r \approx 2.7$

La capacité calorifique varie de 670 à 1400 J kg^{-1} K^{-1} avec un grand nombre de valeurs autour de 750 J kg^{-1} K^{-1}, qui est aussi la valeur moyenne pour les constituants des roches (quartz,...). C'est cette valeur que nous retiendrons.

La valeur du flux géothermique est très mal connue. Lee (1970) a donné les valeurs moyennes suivant le type de socle. Pour un bouclier précambrien le flux est d'environ 1 hfu (1 hfu = *heat flux unit* = 10^{-6} cal cm^{-2} s^{-1} = 41.8 mW m^{-2}) avec un écart type de 0.24 hfu. La valeur pour le bouclier d'Australie qui est le plus proche au point de vue géologique, est 1.2 hfu. La moyenne mondiale pour les continents est 1.45 hfu (écart type 0.57).

Etant donné cette mauvaise connaissance du flux géothermique, et des propriété physiques des roches, nous faisons systématiquement des études de sensibilité sur ces paramètres .

Valeurs utilisées

Conductivité thermique : K_r = 2 - 3 W K^{-1} m^{-1}
Capacité calorifique par unité de volume : $c_r \rho_r$ = 20 10^5 J m^{-3} K^{-1}
Diffusivité : κ_r = 1-1.5 10^{-6} m^2 s^{-1} = 31.56 - 47.34 m^2 an^{-1}
Flux géothermique ϕ = 40- 60 mW m^{-2}.

Loi de déformation de la glace.

La loi de déformation utilisée dans notre modèle est une loi non linéaire :

$$2\ \dot{\varepsilon}_{ij} = B_T\ \tau^{n-1}\ \tau'_{ij}$$

où le coefficient B_T dépend de la température selon une loi d'Arrhenius.

$B_T = B_0 \exp(E_a/R\ (1/Tf - 1/T))$ R est la constante des gaz parfaits

Nous discutons au chapitre (I) les valeurs de l'exposant n, du coefficient B_T et de l'énergie d'activation E_a. Nous rappelons ici les valeurs utilisées dans nos calculs.
Exposant : n= 3

Le coefficient et l'énergie d'activation dépendent de la température.

T ≤ 266.65 (K) $B_0 = m_B \times 0.166$ bar^{-3} an^{-1} $E_a = 78.2$ kJ/mole

T ≥ 266.65 (K) $B_0 = m_B \times 0.2$ bar^{-3} an^{-1} $E_a = 95.45$ kJ/mole

Lorsque la glace est tempérée, la teneur en eau modifie le coefficient B_{temp}. Lliboutry et Duval (1985) expriment cette variation par :

$B_{temp} = 0.20 + 0.368$ w (w teneur en eau en %)

Unités et constantes universelles utilisées.

Dans cet ouvrage nous avons utilisé des unités qui ne font pas partie du système international. Pour le lecteur peu habitué nous rappelons que :

1 bar = 10^5 Pa = 10^5 N/m^2 = 10^5 kg. m^{-1} s^{-2}

1 an ≈ $3.1557\ 10^7$ s

Il peut être utile de se souvenir de la valeur en unité de base SI de certaines unités :

1J = 1 kg m^2 s^{-2}= 1 N m

1W = 1 J s^{-1}

Nous utilisons quelques constantes physiques :

R = 8.315 J mole^{-1} K^{-1} constante des gaz parfaits

g = 9.807 m/s^2 accélération de la pesanteur

Le terme ρ_g g qui apparait souvent dans les équations vaut : ρ_g g ≈ 0.9 bar m^{-1}.

ANNEXE 2

FORMULATION ANALYTIQUE DES TAUX DE DEFORMATION ET DE LA VITESSE VERTICALE DANS LE MODELE A GEOMETRIE IMPOSEE.

NOTATIONS.

L'axe x est choisi dans la direction de la plus grande pente de la surface et la dimension transversale est prise en compte par l'intermédiaire de la divergence des lignes de courant Sh. Les variables qui ne dépendent que de x sont notées sans faire référence à cette coordonnées (par exemple $\dot{b}$ pour noter $\dot{b}(x)$). Ces variables sont : La vitesse moyenne ($\bar{U}_x$), la divergence des lignes de courant (Sh), le bilan de surface ($\dot{b}$), la fonte basale ($\dot{f}$), l'altitude de la surface (E) et du socle (B), l'épaisseur de glace (H), les paramètres du profil de vitesse (s et m). Il en est de même pour leurs dérivée spatiales (selon x) et temporelles.

Les vitesses (u_i) et taux de déformation ($\dot{\varepsilon}_{ii}$) dépendent de x et de z mais nous ne noterons que la dépendance en z (par exemple : $u_i(z)$, $\dot{\varepsilon}_{ii}(z)$).
Pour alléger la notation, nous utilisons la profondeur réduite, ζ.

$$\zeta = \frac{E + z}{H} \qquad \text{(II.8)}$$

La fonction de forme du profil de vitesse, ψ ainsi que sa dérivée horizontale $\partial\psi / \partial x$ dépendent de x et de z par l'intermédiaire de ζ. Nous les noterons simplement $\psi(\zeta)$ (ou $\partial\psi / \partial x$ (ζ)). Une notation rigoureuse nécessiterait l'introduction d'une fonction $\Psi(x,z)$ telle que $\Psi(x,z) = \psi(\zeta)$. La dérivée horizontale de ζ est donnée par :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial E}{\partial x} - \zeta \frac{\partial H}{\partial x}}{H} \qquad \text{(A2.1)}$$

DERIVATIONS HORIZONTALES.

Nous rappelons les équations définissant u_x la vitesse horizontale le long de l'écoulement :

$$u_x(x,z) = \psi(\zeta)\ \bar{U}_x(x)$$
$$\text{avec}\quad \psi(\zeta) = s + (1 - s)\ \frac{m+2}{m+1}\left(1 - \zeta^{m+1}\right) \tag{II.19}$$

Les taux de déformation $\dot{\varepsilon}_{xx}$, $\dot{\varepsilon}_{yy}$ et $\dot{\varepsilon}_{zz}$ s'écrivent d'après (I.1, I.9, II.2) :

$$\dot{\varepsilon}_{xx}(z) = \bar{U}_x\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(\zeta) + \psi(\zeta)\ \frac{\partial \bar{U}_x}{\partial x}$$
$$\dot{\varepsilon}_{yy}(z) = Sh\ \psi(\zeta)\ \bar{U}_x \tag{A2.2}$$
$$\dot{\varepsilon}_{zz}(z) = -\ \bar{U}_x\ \frac{\partial\psi}{\partial x}(\zeta) - \frac{\psi(\zeta)}{H}\left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

avec :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(\zeta) = \frac{\partial\psi}{\partial s}(\zeta)\ \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial m}(\zeta)\ \frac{\partial m}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}(\zeta)\ \frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{A2.3}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}(\zeta) = \frac{1}{m+1}\left((m+2)\,\zeta^{m+1} - 1\right) \tag{A2.4}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial m}(\zeta) = \frac{1-s}{(m+1)^2}\left(-1 + \zeta^{m+1}\left(1 - (m+1)(m+2)\,Ln(\zeta)\right)\right) \tag{A2.5}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)(\zeta) = (1-s)(m+2)\,\zeta^m\ \frac{\zeta\ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial x}}{H} \tag{A2.6}$$

INTEGRATIONS VERTICALES.

La vitesse verticale $u_z(z)$ s'obtient en intégrant $\dot{\varepsilon}_{zz}$ depuis la surface (z=-E, condition I.2), jusqu'à z en tenant compte de la formule de changement de variable :

$$\int_{-E}^{z} A(z)\, dz = H \int_{0}^{\zeta} a(\xi)\, d\xi \qquad \text{(A2.7)}$$

avec

$A(z) = a(\zeta)$

ce qui donne :

$$u_z(x,z) = \dot{b} - \psi(0)\, \bar{U}_x \frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial E}{\partial t} - \bar{U}_x H \int_0^{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial x}(\xi)\, d\xi$$

$$- \left(\dot{b} - \dot{f} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \int_0^{\zeta} \psi(\xi)\, d\xi$$

$$= \left(\dot{b} - \frac{\partial H}{\partial t} \right) \left(1 - \int_0^{\zeta} \psi(\xi)\, d\xi \right) - \bar{U}_x\, \psi(\zeta) \left(\frac{\partial E}{\partial x} - \zeta \frac{\partial H}{\partial x} \right) \qquad \text{(A2.8)}$$

$$- \bar{U}_x H \left(\frac{\partial s}{\partial x} \int_0^{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial s}(\xi)\, d\xi + \frac{\partial m}{\partial x} \int_0^{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial m}(\xi)\, d\xi \right)$$

$$+ \dot{f} \int_0^{\zeta} \psi(\xi)\, d\xi - \frac{\partial B}{\partial t}$$

avec :

$$\int_0^{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial s}(\xi)\, d\xi = \frac{\zeta}{m+1}\left(\zeta^{m+1} - 1\right) \qquad \text{(A2.9)}$$

cette intégrale est nulle pour ($\zeta = 1$)

$$\int_0^{\zeta} \frac{\partial \psi}{\partial m}(\xi)\, d\xi = \frac{(1-s)\,\zeta}{(m+1)^2}\left(-1 - \zeta^{m+1}\left(-1 - (m+1)\,\mathrm{Ln}(\zeta)\right)\right) \qquad \text{(A2.10)}$$

Cette intégrale est nulle pour ($\zeta = 1$)

$$\int_0^{\zeta} \psi(\xi)\, d\xi = \zeta\left(s + \frac{(1-s)(m+2)}{m+1}\left(1 - \frac{\zeta^{m+2}}{m+2}\right)\right) \qquad \text{(A2.11)}$$

Cette intégrale est égale à 1 *pour* ($\zeta = 1$)

$$\int_0^{\zeta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)(\xi)\, d\xi = \psi(\zeta)\,\frac{\frac{\partial E}{\partial x} - \zeta\frac{\partial H}{\partial x}}{H} - \frac{\psi(0)}{H}\frac{\partial E}{\partial x} - \int_0^{\zeta}\psi(\xi)\, d\xi \qquad \text{(A2.12)}$$

On vérifie bien que la vitesse verticale à la base du glacier (z=-B) obéit à la condition à la limite (I.3).

ANNEXE 3

Résolution numérique d'une équation de diffusion.

L'équation de la chaleur (II.36 ou II.48), l'équation qui régit l'évolution de l'épaisseur de glace (IV.38) et celle du fluage de l'asthénosphère (IV.40) sont toutes des équations de diffusion à une dimension spatiale.

Pour généraliser nous les écrirons sous la forme :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \left(F1 \frac{\partial w}{\partial x} \right)}{\partial x} + F2 \frac{\partial w}{\partial x} + F3 \qquad \textbf{(A3.1)}$$

où w est la fonction calculée (selon l'équation w est la température, l'épaisseur de glace ou l'enfoncement du socle), t est le temps, x est la coordonnée spatiale. F1, F2 et F3 sont éventuellement fonction de w, t et x. Dans le cas de l'équation d'évolution de l'épaisseur de glace (IV.38), F1 est proportionnel à $w^5 (\partial w/\partial x)^2$ ce qui rend l'équation "particulièrement" non-linéaire.

Dans l'exposé qui suit nous notons $w_{i,j}$ la fonction w au noeud spatial i, et au pas de temps j (figure A3.1). Les dérivées sont exprimées avec des différences finies. dt est le pas de temps et dx le pas d'espace. A un pas de temps donné (j), $w_{i,j}$ est supposé connu pour tout i. Il y a alors plusieurs méthodes (de type différence finies) pour résoudre ce type d'équations c'est à dire calculer $w_{i,j+1}$.

Schéma explicite.

La dérivée temporelle est prise en arrière (backward) et les dérivées spatiales sont prises au pas de temps j.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{dt}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\,dx} \qquad \textbf{(A3.2)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j} - 2\,w_{ij} + w_{i-1,j}}{dx^2}$$

Cette méthode est la plus simple à mettre en oeuvre car $w_{i,j+1}$ est exprimé en fonction de termes qui sont tous connus. Malheureusement, cette méthode est également bien connue pour n'être stable que pour certaines conditions sur le pas de temps (la limite porte en fait sur dt/dx^2 qui doit être inférieur à une certaine valeur dépendant de F1, F2 et F3.) Dans le cas de l'équation (IV.38) par exemple, il faut pour un pas d'espace de 50 km, un pas de temps inférieur à 1 an.

Schéma implicite.

La dérivée temporelle est prise en arrière (backward) et les dérivées spatiales sont prises au pas de temps j+1.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{w_{i,j+1} - w_{ij}}{dt}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1}}{2\,dx} \qquad \textbf{(A3.3)}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{w_{i+1,j+1} - 2\,w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1}}{dx^2}$$

Etant donné que $w_{i,j+1}$ est exprimé en fonction de $w_{i+1,j+1}$ et $w_{i-1,j+1}$, la résolution de l'équation de diffusion revient à la résolution d'un système d'équations linéaires.

(A3.4)

$$\left(\frac{F2}{2\,dx} - \frac{F1_{i-1/2}}{dx^2} \right) w_{i-1,j+1} + \left(\frac{1}{dt} + \frac{F1_{i-1/2} + F1_{i+1/2}}{dx^2} \right) w_{i,j+1} - \left(\frac{F2}{2\,dx} + \frac{F1_{1+1/2}}{dx^2} \right) w_{i+1,j+1} = \frac{w_{i,j}}{dt} + F3$$

Ce système peut s'écrire sous la forme d'une équation matricielle :

$$[M]\,[w_{i,j+1}] = [N]$$

où [M] est une matrice tridiagonale, $[w_{i,j+1}]$ et [N] sont des vecteurs.

Pour i=1 ou $i=n_{max}$ (n_{max} nombre maximum de noeuds spatiaux), on doit imposer la condition à la limite (noter qu'en ces noeuds l'équation de diffusion n'est pas réellement résolue). Selon le type de fonction (température, épaisseur de glace) et les mécanismes à la limite on peut imposer la valeur de la fonction w à la limite (par exemple la température) ou sa dérivée spatiale (par exemple le gradient de température).

Nous prenons l'exemple de la limite i=1.

Imposer la valeur de w revient dans l'équation matricielle à prendre la diagonale de la première ligne égale à 1 (diag(1)=1), la sur-diagonale égale à 0 (surdiag(1)=0), et le premier élément du vecteur [N] égal à la valeur désirée (N(1)= valeur).

Imposer la dérivée spatiale peut se faire en prenant (diag(1)=1), (surdiag(1)=-1) et (N(1)= gradient x dx)

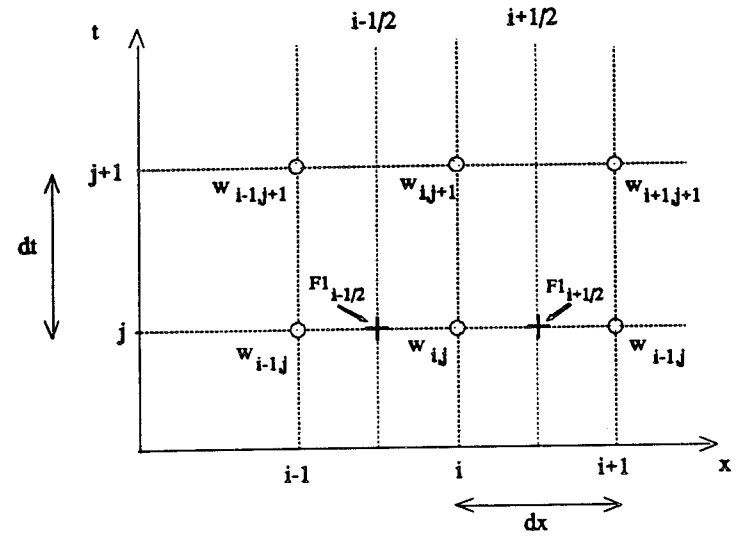


Figure A3.1

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & & & \\
F2\frac{dt}{2\,dx} - F1_{i-1/2}\frac{dt}{dx^2} & 1 + (F1_{i-1/2} + F1_{i+1/2})\frac{dt}{dx^2} & F2\frac{dt}{2\,dx} + F1_{i+1/2}\frac{dt}{dx^2} & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & -1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \\ W_{ij+1} \\ \\ \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} val \\ W_{ij} + F3\,dt \\ \\ dx\ grad \end{bmatrix}
$$

$$[M] \qquad [W_{i,j+1}] = [N]$$

Figure A3.2

La figure (A3.2) représente l'équation matricielle ainsi obtenue dans un cas ou la valeur (val) est imposée en i=1 et la dérivée spatiale (grad) est imposée en $i=n_{max}$. Noter que sur cette figure, les termes de l'équation (A3.4) sont multipliés par dt, ce qui ne change rien à l'équation matricielle mais permet d'avoir tous les éléments de la diagonale du même ordre de grandeur quand dt est suffisament petit.

Nous résolvons cette équation matricielle par une méthode d'Adams.

Si F1, F2 et F3 ne dépendent que de x, cette méthode implicite est inconditionellement stable et convergente. Parmi les équations que nous traitons, la seule difficulté vient de l'équation d'évolution de l'épaisseur (IV.38). Etant donné la forte non-linéarité de F1 la résolution est sensible au type de linéarisation spatiale et temporelle utilisée pour F1.

Il faut d'une part choisir une linéarisation de F1 entre deux noeuds i et i+1, lorsque nous utilisons $F1_{i+1/2}$. Ce choix est fait par l'utilisation d'une grille décalée et F1 (qui en l'occurence est D1) est toujours calculé sur les colones intermédiaires (figure IV.2). Cette méthode de linéarisation nous parait la plus adaptée au problème.

Il faudrait d'autre part extrapoler pour avoir F1 au pas de temps j+1. En pratique, (en attendant éventuellement d'imaginer une extrapolation judicieuse de F1), nous utilisons la valeur de F1 au pas de temps j et c'est sans doute de là que vient notre limitation sur le pas de temps. Cette limitation n'est cependant pas très génante car le pas de temps utilisé (50 ans) nous semble approprié lorsqu'on traite des évolutions rapides liées aux variations du niveau des mers.

Schéma Crank Nicholson et schémas apparentés.

On peut remarquer que le schéma implicite utilise une formule arrière (backward) pour la dérivée temporelle. L'erreur de troncature sur cette dérivée serait améliorée en prenant une dérivée centrée. La méthode de Crank-Nicholson consiste à résoudre l'équation de diffusion au pas de temps j+1/2. Les dérivées spatiales sont calculées en faisant les moyennes des dérivées au pas de temps j et au pas de temps j+1. Par exemple :

(9)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1}}{2\,dx} + \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\,dx} \right)$$

D'après Vauclin et al. (1979) dans le cas de certaines équations de diffusion non-linéaires, les schémas Crank-Nicholson sont moins sensibles au pas de temps que les schémas implicites.

Il existe également des méthodes mixtes, par exemple la méthode Douglas-Jones (Remson 1971) qui utilise un prédicteur implicite pour estimer w au pas de temps j+1/2 et un correcteur Crank-Nicholson pour calculer w au pas de temps j+1.

Dans le cas de nos équations, et après quelques tests, il semble que ce type de méthode ne soit pas plus efficace que le schéma implicite. Dans le cas de l'équation de la chaleur, toutes les méthodes (implicites, Crank Nicholson et Douglas-Jones) donnent le même résultat et ne posent aucun problème de stabilité pour des pas des temps inférieurs à 500 ans. Pour l'équation (IV.32) la limitation vient avant tout de l'extrapolation de F1.

Nous avons décrit la méthode de résolution d'une façon générale. Dans notre travail, nous avons quelquefois modifié certains points. Par exemple, les dérivées spatiales pour l'advection sont données par des formules amont (upwind) (équation II.49). La condition basale pour la température nécessite également des formules spécifiques pour certaines mailles (équations II.61, II.62).

ANNEXE 4

Pression de vapeur saturante et fonctions dérivées.

Pour un gaz parfait, la pression de vapeur saturante dépend de la température de façon exponentielle. L'eau n'étant pas un gaz parfait, nous donnons ici un ajustement entre -50°C et 0°C fait d'après le Smithsonian Meteorological Table (1958).

$P_s = A_s \exp(- B_s / T)$ avec $A_s = 3.64149\ 10^{12}\ P_a$ et $B_s = -6148.3$ K

θ (°C)	T (K)	Ps (Pa)	$\frac{\partial(Ps/T)}{\partial T}$ (Pa K^{-2})	ρ_w (g/m^3)
-60	213.15	1.08	.663 10^{-3}	.011
-59	214.15	1.24	.748 10^{-3}	.013
-58	215.15	1.41	.843 10^{-3}	.014
-57	216.15	1.61	.948 10^{-3}	.016
-56	217.15	1.84	.107 10^{-2}	.018
-55	218.15	2.10	.120 10^{-2}	.021
-54	219.15	2.38	.134 10^{-2}	.024
-53	220.15	2.71	.150 10^{-2}	.027
-52	221.15	3.07	.168 10^{-2}	.030
-51	222.15	3.48	.188 10^{-2}	.034
-50	223.15	3.94	.210 10^{-2}	.038
-49	224.15	4.45	.234 10^{-2}	.043
-48	225.15	5.03	.261 10^{-2}	.048
-47	226.15	5.68	.291 10^{-2}	.054
-46	227.15	6.40	.323 10^{-2}	.061
-45	228.15	7.21	.359 10^{-2}	.068
-44	229.15	8.11	.399 10^{-2}	.077
-43	230.15	9.11	.442 10^{-2}	.086
-42	231.15	10.22	.490 10^{-2}	.096
-41	232.15	11.46	.542 10^{-2}	.107
-40	233.15	12.84	.599 10^{-2}	.119
-39	234.15	14.37	.662 10^{-2}	.133
-38	235.15	16.07	.731 10^{-2}	.148
-37	236.15	17.95	.806 10^{-2}	.165
-36	237.15	20.04	.888 10^{-2}	.183
-35	238.15	22.34	.978 10^{-2}	.203
-34	239.15	24.89	.108 10^{-1}	.226
-33	240.15	27.70	.118 10^{-1}	.250
-32	241.15	30.80	.130 10^{-1}	.277
-31	242.15	34.22	.142 10^{-1}	.306

θ (°C)	T (K)	Ps (Pa)	$\frac{\partial(Ps/T)}{\partial T}$ (Pa K^{-2})	ρ_w (g/m^3)
-30	243.15	37.99	.156 10-1	.339
-29	244.15	42.14	.171 10^{-1}	.374
-28	245.15	46.70	.187 10^{-1}	.413
-27	246.15	51.71	.205 10^{-1}	.455
-26	247.15	57.20	.224 10^{-1}	.502
-25	248.15	63.24	.244 10^{-1}	.552
-24	249.15	69.85	.266 10^{-1}	.607
-23	250.15	77.09	.290 10^{-1}	.668
-22	251.15	85.02	.316 10^{-1}	.733
-21	252.15	93.68	.345 10^{-1}	.805
-20	253.15	103.16	.375 10^{-1}	.883
-19	254.15	113.50	.408 10^{-1}	.968
-18	255.15	124.79	.443 10^{-1}	1.060
-17	256.15	137.10	.481 10^{-1}	1.160
-16	257.15	150.51	.521 10^{-1}	1.268
-15	258.15	165.12	.565 10^{-1}	1.386
-14	259.15	181.01	.612 10^{-1}	1.513
-13	260.15	198.29	.663 10^{-1}	1.652
-12	261.15	217.07	.718 10^{-1}	1.801
-11	262.15	237.47	.776 10^{-1}	1.963
-10	263.15	259.61	.838 10^{-1}	2.138
-9	264.15	283.62	.905 10^{-1}	2.326
-8	265.15	309.64	.977 10^{-1}	2.530
-7	266.15	337.83	.105	2.750
-6	267.15	368.34	.114	2.988
-5	268.15	401.35	.122	3.243
-4	269.15	437.04	.132	3.518
-3	270.15	475.60	.142	3.815
-2	271.15	517.24	.152	4.133
-1	272.15	562.19	.164	4.476
0	273.15	610.66	.176	4.844

REFERENCES

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Alley, R. B. and I. M. Whillans. 1984. Response of the East Antarctic ice sheet to sea-level rise. *J. Geophys. Res.*, **89**(C4), 6487-6493.

Barnola, J.M., D. Raynaud, Y.S. Korotkevich and C. Lorius. 1987. Vostok ice core provides 160,000-years record of atmospheric CO_2. *Nature*, **329**(6128), 408-414.

Barnola, J-M, P. Pimienta, D. Raynaud and Y. S. Korotkevich. 1991. CO_2-climate relationship as deduced from the Vostok ice core: a re-examination based on new measurements and on a re-evaluation of the air-dating. *Tellus*, **43**B, 83-90.

Bender, M., L.D. Labeyrie, D. Raynaud and C. Lorius. 1985. Isotopic composition of atmospheric O_2 in ice linked with deglaciation and global primary productivity. *Nature*, **318**(6044), 349-352.

Benoist, J.P. 1986. Analyse spectrale de signaux glaciologiques : Etude des glaces sédimentaires déposées à Dome C (Antarctique). Morphologie du lit d'un glacier. Thèse d'Etat, U.S.T.M.G.

Bentley, C. R. 1964. The structure of Antarctica and its ice cover. In H. Odishaw (*Ed.*), *Research in Geophysics*, **vol 2**, M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts., U.S.A., 335-389.

Berger, A. 1988. Milankovitch theory and climate. *Reviews of Geophysics*, **26**(4), 624-657.

Berger, A., T. Fichefet, H. Gallée, I. Marsiat, C. Tricot and J. P. van Ypersele. 1990. Physical interactions within a coupled climate model over the last glacial-interglacial cycle. *Trans. of the Royal Society of Edinburgh: Earth Sciences*, **82**, 357-369.

Blakenship, D. D., C. R. Bentley, S. T. Rooney and R. B. Alley. 1986. Seismic measurements reveal a saturated, porous layer beneath an active Antarctic ice stram. *Nature*, **322**(6074), 54-57.

Blatter, H., M Funk and A. Ohmura, 1984. Atlas of SOlar Climate. Publication n° 10 du Geographishes Institut, ETH, Zürich.

Blatter, H. 1991. Effect of climate on the cryosphere. Climatic conditions and the polythermal structure of glaciers. *Publication n° 41 du Geographishes Institut, ETH, Zürich.*

Bindshadler, R. 1983. The importance of pressurized subglacial water in separation and sliding at the glacier bed. *J. Glaciog.*, **29**(101), 3-19.

Birchfield, G. E., J. Weertman and A. Lunde. 1981. A paleoclimate model of Northern Hemisphere ice sheets. *Quat. Res.*, **15**, 126-142.

Bodvarsson, G. 1955. On the flow of ice-sheets and glaciers. *Jökull*, **5**, 1-8.*[Chap I]*

Boulton G. S. and A. S. Jones, 1979. Stability of temperate ice caps and ice sheets resting on beds of deformable sediment. *J. Glaciol.*, **24**(90), 29-43.

Bolzan, J.F. 1985. Ice flow at the Dome C ice divide based on a deep temperature profile. *J. Geophys. Res.*, **90**(D5), 8111-8124.

Bogorodsky, V. V. and A. N. Chérémétiev. 1981. Lacs sous-glaciaires en Antarctique. (en Russe).

Bordat, P. 1988. Rapport de stage.

Brecher, H.H. 1986 Surface velocity determination on large polar glaciers by aerioal photogrammetry. *Ann. Glaciol.*,**8**, 22-26.

Bromwich, D.H. 1988. Snowfall in high southern latitudes. *Reviews of Geophysics*, **26**(1), 149-168.

Bronstein I.N. et K.A Semendaiev 1979. Aide-mémoire de mathématiques. *Eyrolles*, Paris.

Brotchie J. F. and R. Silverster, 1969. On crustal flexure. *J. Geophys. Res.*, **74**(22),5240-5252.

Budd, W. F. 1970. The longitudinal stress and strain-rate gradients in ice masses. *J. Glaciol.*, **9**(55), 19-27.

Budd, W.F., D. Jenssen and U. Radok. 1971. Derived characteristics of the Antarctic ice sheet. Publication n°18, University of Melbourne, Meteorology department.

Budd, W. F., P. L. Keage and N. A. Blundy. 1979. Empirical studies of ice sliding. *J. Glaciol.*, **23**(89), 157-170.

Budd, W. F. and I. N. Smith. 1982. Large scale numerical modelling of the Antarctic ice sheet. *Ann. Glaciol.*, **3**, 42-49.

Budd, W. F. and N.W.Young. 1983. Application of modelling techniques to measured profiles of temperature and isotopes. *In* Robin G. de Q., *ed. The Climatic Record In Polar Ice Sheets*. Cambridge University Press, Cambridge, UK. 150-157.

Budd, W. F., T. H. Jacka, D. Jenssen, U. Radok and N. Young. 1982. Derived physical characteristics of the Greenland ice sheet. Publication n°23, University of Melbourne, Meteorology department.

Budd, W.F. (Rapporteur), J.T. Andrews, R.C. Finkel, E.L. Fireman, W. Graf, C.U. Hammer, J. Jouzel, D.P. Raynaud, N. Reeh, H. Shoji, B.R. Stauffer, J. Weertman, 1989. Group Report, How can an ice core chronology be established ? Dahlem Conference, *In* The environmental Record in Glaciers and Ice Sheets ; Ed. H.Oeschger and C.C. Langway, Jr. 177-192.

Cathles, L. M., III. 1975. The viscosity of the Earth's Mantle. *Princeton University Press.*

CLIMAP. 1984. Project Members. The last interglacial ocean. *Quat. Res.*, **21**, 123-224.

Clarke, G. K. C., Uzi, Nitsan and W. S. B. Paterson, 1977. Strain heating and creep instability in glaciers and ice sheets. *Reviews of Geophysics and space physics*, **25**(2), 235-247.

Dahl-Jensen, D. 1988. Steady thermomechanical flow along two-dimensional flow-lines in large grounded ice sheets. *J. Geophys. Res.*, **94**(B8), 10,355-10,362.

Dahl-Jensen, D. 1989. Two-dimensional thermomechanical modelling of flow and depth-age profiles at Crête, central Greenland. *Ann. Glaciol.*, **12.**

Dahl-Jensen, D. and S.J. Johnsen. 1986. Paleotemperatures still exist in Greenland ice sheet. *Nature*, **320**, 250-252.

Dahl-Jensen and N. S. Gundestrup, 1987. Constitutive properties of ice at Dye 3, Greenland. *In*, The physical basis of ice sheet modelling, *IAHS*, **170**, 31-43.

Dansgaard, W. 1964. Stable isotopes in precipitation. *Tellus*, **16**, 436-468.

Dansgaard, W. and S. J. Johnsen. 1969. Comment on paper by J. Weertman "Comparison between measured and theoretical temperature profiles of the Camp Century, Greenland, Borehole". *J. Geophys. Res.*, **74**(4),1109-1110.

Dansgaard, W., H.B. Clausen, N. Gunderstrup, S.J. Johnsen, and C. Rygner. 1985. Dating and climatic interpretation of two deep Greenland ice cores. *In* Greenland Ice Core: Geophysics, Geochemistry, and the Environment. Geophysical monograph 33. C.C. Langway, JR, H. Oeschger, and W. Dansgaard Ed., A.G.U.

Deblonde, G. and W. R. Peltier. 1990. A model of late Pleistocene ice sheet growth with realistic geography and simplified cryodynamics and geodynamics. *Climate Dynamics*, **5**, 103-110.

Dolgina, I.M. and L.S. Petrova (Eds) 1977. Handbook of Antarctic Climate (en Russe). **vol 2**, Gidrometeorzdat, Leningrad.

Drewry, D.J. 1975. Terrain units in eastern Antarctica. *Nature*, **256**, 194-195.*[Chap I]*

Drewry, D.J. 1978. Radio echo sounding map of Antarctica (90°E-180°), *Polar Record*, **17**(109), 359-374.

Drewry, D.J., S.R. Jordan and E. Jankowski, 1982. Measured properties of the Antarctic ice sheet: surface configuration, ice thickness and volume and bedrock characteristics. *Ann. Glaciol.*, **3**, 83-91.

Drewry, D.J. 1983. Antarctica: glaciological and geophysical map folio. Cambridge, University of Cambridge. Scott Polar Research Institute.*[Chap I][Chap III][Chap IV]*

Drury, M.J., V.S. Allen, and A.M. Jessop. 1984. The measurement of thermal diffusivity of rock cores. *Tectonophysics*, **103**, 321-333.

Duval, P. 1977. The role of the water content on the creep rate of polycristalline ice. *In* Isotopes and impurities in snow and ice. *IAHS*, **118**, 29-33.

Duval, P. 1984. Mécanisme de la déformation plastique de la glace polycristalline. *La Houille Blanche*, **6/7**,499-503.

Esch, M. B. and K. Herterich. 1990. A two-dimensional coupled atmosphere-ice sheet-continent model designed for paleoclimatic simulations. *Ann. Glaciol.*, **14**, 55-57.

Fortuin J.P.F and J. Oerlemans. 1990. Parameterization of the annual surface temperature and mass balance of Antarctica. *Ann. of Glaciol.*, **14**, 78-84.

Fowler, A. C. 1984. On the transport of moisture in polythermal glaciers. *J. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **28**, 99-140.

Haltiner G. J. and R. T. Williams.1980. Numerical prediction and dynamic meteorology. *John Wiley & Sons. New York.*

Hamley, T. C., I. N. Smith and N. W. Young. 1985. Mass-balance and ice-flow-law parameters for East Antarctica. *J. Glaciol.*, **31**(109), 334-339.

Hamelin B., E. Bard, A. Zindler, and R.G. Fairbanks. (soumis) $^{234}U/^{238}U$ mass spectrometry of corals: How accurate is the U-Th age of the last interglacial period ?.

Hammer, C.U., H.B. Clausen, W. Dansgaard, N. Gundestrup, S.J. Johnsen, and N. Reeh. 1978. Dating of Greenland ice cores by flow models, isotopes, volcanic debris, and continental dust. *J. glaciol.*, **20**(82), 3-26.

Hammer, C.U. 1989. Dating by Physical and Chemical Seasonal Variation and Reference Horizons. Dahlem Conference , The environmental Record in Glaciers and Ice Sheets; Ed. H.Oeschger and C.C. Langway,Jr. 99-121.

Harrison, W.D. 1972. Temperature of temperate glacier. *J. Glaciol.*, **11**(61),15-29.

Hays, J. D., J. Imbrie and N. J. Schackleton 1976. Variations in the earth's orbit : pacemaker of the ice ages. *Science*, **194**, 1121-1132.

Herterich, K. 1987. On the flow within the transition zone between ice sheet and ice shelf. In Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet, C.J Van der Veen and J. Oerlemans *ed.* Reidel, Dordrecht, Netherland.

Hobbs, P.V., 1974. Ice Physics Clarendon Press, Oxford.

Hutter, K., 1981. The effect of longitudinal strain on the shear stress of an ice sheet. In defence of using stretched coordinates. *J. Glaciol.*, **27**(95), 39-56.

Hutter, K. 1982. A mathematical model of polythermal glaciers and ice sheets. *J. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **21**, 201-224.

Hutter, K. 1983. Theoretical Glaciology. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland.

Hutter, K., H. Blatter and M. Funk. 1988. A model computation of moisture content in polythermal glaciers. *J. Geophys. Res.*, **93**(B10),12205-12214.

Huybrechts, P. 1990_a. The Antarctic ice sheet during the last glacial-interglacial cycle: A three-dimensional experiment. *Ann. Glaciol.*, **14**, 115-119.

Huybrechts, P. 1990_b. A 3-D model for the Antarctic ice sheet: a sensitivity study on the glacial-interglacial contrast. *Climate Dynamics*, **5**, 79-92.

Huybrechts, P. and J. Oerlemans. 1988. Evolution of the East Antarctic ice sheet: A numerical study of thermo-mechanical response patterns with changing climate. *Ann. Glaciol.*, **11**, 52-59.

Huybrechts, P. and J. Oerlemans. 1990. Response of the Antarctic ice sheet to future greenhouse warming. *Climate Dynamics*, **5**, 93-102.

Huybrechts, P. A. Letréguilly and N. Reeh. 1991. The Greenland ice sheet and greenhouse warming. *Paleogeography, Paleoclimatology, Paleoecology (Global and Planetary Change section)*, **89**, 399-412.

Iken, A., K. Echelmeyer, M. Funk and W. Harrison. 1990. Measurements in deep boreholes in Jakobshavn Glacier, Greenland. *Journee en l'honneur du Professeur Louis Lliboutry*. 23 Novembre 1990, Grenoble.

Jenssen, D. 1977. A three dimensionnal polar ice sheet model. *J. Glaciol.*, **18**(80), 373-389.

Jenssen, D. and J.A. Campbell. 1983. Heat conduction studies. *In* Robin G. de Q., ed. The Climatic Record In Polar Ice sheets.Cambridge University Press, Cambridge, UK. 150-157.

Jenssen, D., W. F. Budd, I. N. Smith and U. Radok. 1985. *On the surging potential of polar ice strams. Part II. Ice streams and physical characteristics of the Ross Sea drainage basin, West Antarctica.* Boulder CO, University of Colorado. Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences / Parkville, Victoria, University of Melbourne. Meteorology Department.

Joussaume Sylvie. 1989. Simulation du climat du dernier maximum glaciaire à l'aide d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère incluant une modélisation du cycle des isotopes de l'eau et des poussières d'origine désertique. *Thèse de Doctorat d'Etat.* Université Pierre et Marie Curie. Paris 6.

Jouzel, J., L. Merlivat, and C. Lorius. 1982. Deuterium excess in an East Antarctic ice core suggests higher relative humidity at the oceanic surface during the last glacial maximum. *Nature*, **299**(5885), 688-691.

Jouzel, J. and L. Merlivat. 1984. Deuterium and Oxygen 18 in Precipitation : Modeling of the Isotopic Effects During Snow Formation. *J. Geophys. Res.*, **89** (D7), 11749-11757.

Jouzel, J., L. Merlivat, J.R. Petit and C. Lorius. 1983. Climatic information over the last century deduced from a detailed isotopic record in the South Pole snow. *J. Geophys. Res.*, **88**(C4), 2693-2703.

Jouzel, J., C. Lorius, J.R. Petit, C. Genthon, N.I. Barkov, V.M. Kotlyakov, and V.M. Petrov. 1987_a. Vostok ice core: a continuous isotope temperature record over the last climatic cycle (160,000 years). *Nature*, **329**(6138), 403-408.

Jouzel, J., G.L. Russel, R.J. Suozzo, R.D. Koster, J.W.C. White, and W.S. Broecker. 1987_b. Simulation of the HDO and $H_2{}^{18}O$ Atmospheric Cycles using the NASA GISS General Circulation Model: The seasonal Cycle for Present-Day Conditions. *J. of Geophys. Res.*, **92** (D12), 14739-14760.

Jouzel J., G. Raisbeck, J.P. Benoist, F. Yiou, C. Lorius, D. Raynaud, J.R. Petit, N.I. Barkov, Y.S. Korotkevich and V.M. Kotlyakov. 1989. A comparison of deep Antarctic ice cores and their implications for climate between 65,000 and 15,000 years ago. *Quat. Res.* **31**, 135-150.

Labeyrie, L.D., J.C. Duplessy, and P.L. Blanc. 1987. Variations in mode of formation and temperature of oceanic deep waters over the past 125,000 years. *Nature*, **327** (6122), 477-482.

Lambeck, K. and M. Nakada. 1992. Constraints on the age and duration of the last interglacial period and on sea-level variations. *Nature*, **357**, 125-128.

LeB. Hooke, R., C. Raymond, R. L. Hotchkiss and R. J. Gustafson. 1979. Calculations of velocity and temperature in a polar glacier using the finite-element method. *J. Glaciol.*, **24**(90), 131-146

Lee, W.H.K. 1970. On the global variations of terrestrial heat-flow. *Phys. Earth Planet. Int.*, **2**, 332-341.

Le Gac, H. 1980. Contribution à la détermination des lois de comportement de la glace polycristalline (anélasticité et plasticité). Thèse de troisième cycle de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Legrand, M. and R.J. Delmas. 1987. A 220-year continuous record of volcanic H_2SO_4 in the Antarctic ice sheet. *Nature*, **327**(6124), 671-676.

Letréguilly, A., P. Huybrechts and N. Reeh. 1991. Steady-state characteristics of the Greenland ice sheet under different climates. *J. Glaciol,* **37**(125), 149-157.

Letréguilly, A., N. Reeh and P. Huybrechts, 1991. The Greeland ice sheet through the last glacial-interglacial cycle. *3-Paleo, Global and Planetary change*. **90**, 385-394.

Lingle, C.S. 1984. A numerical model of interactions between a polar ice stream and the ocean : Application to ice stream E, West Antarctica. *J. Geophys. Res.* **89**(C3), 3523-3549

Lliboutry, L. 1965. Traité de Glaciologie. *Masson & C^{ie}, Paris.*

Lliboutry, L. 1969. The dynamics of temperate glaciers from the detailed viewpoint. *J. Glaciol.*, **8**(53), 185-205.

Lliboutry, L. 1979. A critical review of analytical approximate solutions for steady state velocities and temperature in cold ice sheets. *Z. Gletscherkd. Glacialgeol.*, **15**(2), 135-148

Lliboutry, L. 1982. Tectonophysique et géodynamique. Une synthèse. Géologie structurale. Géophysique interne. *Masson Ed.*

Lliboutry, L. 1987_a. Very Slow Flow of Solids : Basics of Modeling in Geodynamics and Glaciology. Martinus Nijhoff, Dordrecht, Netherlands.

Lliboutry, L. 1987_b. Realistic, yet simple bottom boundary conditions for glaciers and ice sheets. *J. Geophys. Res.*,**92**(B9), 9101-9109.

Lliboutry, L. and Duval, P. 1985. Various isotropic and anisotropic ices found in glaciers and polar ice caps and their corresponding rheologies. *Ann. Geophysicae*, **3**(2), 207-224.

Lorius, C. and L. Merlivat. 1977. Distribution of mean surface stable isotope values in East Antarctica: observed changes with depth in the coastal area. IAHS 118 (Proceedings of the Grenoble Symposium), 127-137.

Lorius, C. L. Merlivat, J. Jouzel, and M. Pourchet. 1979. A 30,000-yr isotope climatic record from Antarctic ice. *Nature*, **280**(5724), 644-648.

Lorius, C., J. Jouzel, C. Ritz, L. Merlivat, N.I. Barkov, Y.S. Korotkevitch, and V. Kotlyakov. 1985. A 150,000 year climatic record from Antarctic Ice. *Nature*, **316**, 591-596

Lucchitta, B. K. and H. M. Ferguson. 1986. Antarctica: measuring glacier velocity from satellite images. *Science*, **234**, 1105-1108.

Mac Ayeal D. R.1987. Ice-shelf backpressure : form drag versus dynamic drag. *In*, Dynamics of the West Antarctic Ice Sheet, *ed.* Van der Veen, C. J. and J. Oerlemans. Reidel. 141-16

MacAyeal, D.R. and R.H. Thomas, 1982. Numerical modeling of Ice-shelf motion. *Ann. Glaciol.*3,189-194.

MacAyeal, D.R. and R.H. Thomas, 1986. The effects of basal melting on the present flow of the Ross Ice Shelf. *J. Glaciol.*, **32**(110), 72-86.

Mahaffy, M. W. 1976. A three dimensional numerical model of ice sheets : Tests on the Barnes Ice Cap, Northwest Territories. *J. Geophys. Res.*, **81**(6), 1059-1066.

Martinerie, P., D. Raynaud, D. M. Etheridge, J.M. Barnola and D. Mazaudier (sous presse). Physical and climatic parameters which influence the air content in polar ice. *Earth Planet. Science letters.*

Martinson, D. G., N. G. Pisias, J. D. Hays, J. Imbrie, T.C. Moore, Jr, and N. Shackleton. 1987. Age Dating and the Orbital Theory of the Ice Ages : Development of a High-Resolution 0 to 300,000-Year Chronostratigraphy. *Quat. Res.*, **27**, 1-29.

Mc Innes, B.J., 1984. Thesis, University of Melbourne.

McInnes, B.J. and W.F. Budd, 1984. A cross sectional model for West Antarctica. *Ann. Glaciol.* **5**, 95-99

McIntyre, N.F. 1985. The dynamics of ice-sheet outlets. *J. Glaciol.*, **31**(108)99-107.

Mechoso, C.R. 1980. The atmospheric circulation around Antarctica: Linear stability and finite amplitude interactions with migrating cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1224-1248.

Meyssonnier, J. 1985. Glacier flow in a cylindrical channel with a friction law including subglacial water effect. *Hydraulic effects at the glacier bed and related phenomena.* International Workshop, 16-19 September 1985, Interlaken, Switzerland, Publication n°90 de l'ETH de Zürich, 82-83.

Miller, S.A. 1974. An analysis of heat and moisture budgets of the inversion layer over the Antarctic Plateau, for steady state conditions. research report. Dep. of Meteorol. Univ. of Wisconsin. Madison.

Mix, A.C. and W.F. Ruddiman. 1984. Oxygen-Isotope analyses and Pleistocene ice volumes. *Quat. Res.*, **21**, 1-20.

Morland, L.W. and E.M. Shoemaker, 1982. Ice shelf balances. *Cold Regions. Sc. Technology*,**5**, 235-251.

Morland, L. W. 1984., Thermomechanical balance of ice sheet flows. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **29**, 237-266.

Mounier, L. 1988. Etude des microparticules insolubles déposées dans la glace antarctique au cours du dernier cycle climatique. Thèse nouvelle Université J. Fourier (Grenoble I)

Nye, J. F. 1951. The flow of glaciers and ice-sheets as a problem in plasticity. *Proc. R. Soc. London*, Ser A, **207**, 554-572.

Nye, J. F. 1957. The distribution of stress and velocity in glaciers and ice-sheets. *Proc. R. Soc. London*, Ser A, **239**, 113-133.

Nye, J. F. 1969. The effect of longitudinal stress on the shear stress at the base of an ice sheet. *J. Glaciol.*, **8**(53), 207-213.

Oerlemans, J. 1981 Some basic experiments with a vertically-integrated ice sheet model. *Tellus*, **33**, 1-11.

Oerlemans, J. 1983. A numerical study on cyclic behaviour of polar ice sheets. *Tellus*, **35A**,81-87.

Oerlemans, J. and C.J. Van der Veen, 1984. Ice sheets and climate. *Reidel*, Dordrecht Netherland.

Oort, H. 1983. Global atmospheric circulation statistics, 1965-1973. NOAA professional Paper 14.

Paterson, W. S. B. 1981. The physics of glaciers. *Pergamon Press*, Oxford.

Paterson, W. S. B. and G. K. C. Clarke. 1978. Comparison of theoretical and observed temperature profiles in Devon Island ice cap, Canada. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, **55**, 615-632.

Peltier, W. R. 1982. Dynamic of the ice age earth. *Adv. Geophys.* **24**, 1-146.

Peixóto J.P. and A.H. Oort. 1984. The atmospheric branch of the hydrological cycle and climate. in *Variations in the global water budget.* Edited by A. Street-Perrot, M. Beran and R. Ratcliffe, D. Reidel, Hingham. Mass., 5-65.

Petit, J. R., L. Mounier, J. Jouzel, Y.S. Korotkevich, V.I. Kotlyakov and C. Lorius. 1990. Paleoclimatological and chronological implications of the Vostok core dust record. *Nature*, **343** (6253), 56-58.

Philberth, K. and B. Federer. 1971. On the temperature profile and the age profile in the central part of cold ice sheets. *J. Glaciol.*, **10**(58), 3-14.

Phillpot H.R. and J.W. Zillman. 1970. The surface temperature inversion over the Antarctic continent. *J. Geophys. Res.*, **75** (21), 4161-4169.

Pimienta, P. 1987. Etude du comportement mécanique des glaces polycristallines aux faibles contraintes ; applications aux glaces des calottes polaires. Thèse de Doctorat de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Pollard, D., I. Muszinski, S. H. Schneider and S. L. Thompson. 1990. Asynchronous coupling of ice-sheet and atmospheric forcing models. *Ann. Glaciol.*, **14**, 247-251.

Pourchet, M., F. Pinglot and C. Lorius. 1983. Some meteorological applications of radioactive fallout measurements in Antarctic snows. *J. Geophys. Res.*, **(88)**C10, 6013-6020.

Radok, U., T. J. Brown, D. Jenssen, I. N. Smith and W. F. Budd. 1986. *On the surging potential of polar ice strams. Part IV. Antarctic Ice Accumulation basins and their main discharge regions*. Boulder CO, University of Colorado. Cooperative Institute for Research in Environmental Sciences / Parkville, Victoria, University of Melbourne. Meteorology Department.

Raisbeck G. M., F. Yiou, M. Fruneau, J. M. Loiseaux, M. Lieuvin, J. C. Ravel and C. Lorius. 1981. Cosmogenic ^{10}Be concentrations in Antarctic ice during the past 30,000 years. *Nature*, **292**, 825-826.

Raisbeck G. M. and F. Yiou. 1985. ^{10}Be in polar ice and atmospheres. *Annals of Glaciol.* **7**,138-140.

Raisbeck, G.M., F. Yiou, D. Bourles, C. Lorius, J. Jouzel, and N.I. Barkov. 1987. Evidence for two intervals of enhanced Be deposition in Antarctic ice during the last glacial period. *Nature*, **326**, 62-64.

Raymond, C. F. 1971 Flow in a tranverse section of Athabasca Glacier, Alberta, Canada. *J. Glaciol , 10*(58), 55- 84.

Raymond, C.F. 1983. Deformation in the vicinity of ice divides. *J. Glaciol.*, **29**(103), 357-373.

Raynaud, D. 1976. Les inclusions gazeuses dans la glace de glacier ;leur utilisation comme indicateur du site de formation de la glace polaire; applications climatiques et rhéologiques. Thèse de doctorat d'Etat, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Raynaud, D. and B. Lebel. 1980. Total gas content and surface elevation of polar ice sheets. *Nature* **281** (5729), 289-291

Raynaud, D., C. Lorius, W.F. Budd, N.W. Young. 1979. Ice flow along an I.A.G.P. flow line and interpretation of data from an ice core in Terre Adélie, Antarctica. *J. of Glaciol.*, **24** (90), 103-115.

Reeh, N. 1988. A flow-line model for calculating the surface profile and the velocity, strain-rate and stress fields in an ice sheet. *J. Glaciol.*, **34**(116), 46-54.

Reeh, N. 1989. The age-depth profile in the upper part of a steady-state ice sheet. *J. Glaciol.*, **35**(121), 406-417.

Reeh, N., S. J. Johnsen and D. Dahl-Jensen. 1985. Dating the Dye 3 deep ice core by flow model calculations. *In* Greenland Ice Core: Geophysics, Geochemistry, and the Environment. Geophysical monograph 33. C.C. Langway, JR, H. Oeschger, and W. Dansgaard Ed., A.G.U., 57-65

Remy, F., P. Mazzega, S. Houry, C. Brossier, and J.F. Minster. 1989. Mapping of the topography of continental ice by inversion of satellite-altimeter data. *J. Glaciol.*, **35** (119),98-106.

Remson, I., G. M. Hornberger and F.J. Molz. 1971. Numerical methods in subsurface hydrology. *Whilley- Interscience*. New-York.

Reynaud, L. 1973. Flow of a valley glacier with a solid friction law. *J. Glaciol,* **12**(65), 251-258.

Ritz, C. 1980. Exploitation du profil de températures mesuré dans la calotte glaciaire au Dôme C (Antarctide Orientale). Thèse de troisième cycle de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble

Ritz, C. L. Lliboutry and C. Rado. 1982. Analysis of a 870 m deep temperature profile at Dome C. *Ann. Glaciol.*, **3**, 284-289.

Ritz, C. 1987. Time dependent boundary conditions for calculation of temperature fields in ice sheets. *In* The physical basis of ice sheet modelling, *IAHS*, **170**, 207-216.

Ritz, C. 1989. Interpretation of the temperature profile measured at Vostok, East Antarctica. *Ann. Glaciol.*, **12**, 138-144.

Robin, G. de Q. 1955. Ice movement and temperature distribution in glaciers and ice-sheets. *J. Glaciol.*, **2**(18), 523-532.

Robin, G. de Q. 1977. Ice cores and climatic change. *Phil. Trans. of the Royal Soc.*, London, B.280, 143-168.

Robin, G. de Q. 1988. The Antarctic ice sheet, its history and response to sea level and climatic changes over the past 100 million years. *Paleo 3*, **67**, 31-50.

Robin, G. de Q., S. Evans, and J.T. Bailey. 1969. Interpretation of radio echo sounding in polar ice sheets *Phil. Trans. of the Royal Soc.*, Lond., A.265, 1166, 437-505.

Robin, G. de Q., D.J. Drewry, and D.T. Meldrum. 1977. International studies of ice sheet and bedrock. *Phil. Trans. Royal Soc.*, Lond.,B.279, 185-196.

Sanderson, T.J.O. 1979. Equilibrium profile of ice shelves. *J. Glaciol.* **22** (88), 435-460

Schackleton, N. J. 1987. Oxygen isotopes, ice volume and sea level. *Quat. Sci. Rew., 6, 183-190.*

Schackleton, N. J., M. A. Hall, J. Line, and Cang, Shuxi. 1983. Carbon isotope data in core V19-30 confirm reduced carbon dioxide concentration in the ice age atmosphere. *Nature*, 306, 319-322.

Schwerdtfeger, W. 1984. *Weather and climate of the Antarctic, Dev. Atmosp. Sci.*, vol **15**, Elsevier, New York.

Sclater et al. 1980. *Rev. Geophys. Space Phys.*, **18**, 269-311

Slack, G.A. 1980. Thermal Conductivity of Ice Physical Review B, 22 ,N, 6 ,15 September, 3065-3071.

Sowers T., M. Bender, D. Raynaud, Y.S. Korotkevich, and J. Orchardo. 1991. The $\delta^{18}O$ of atmospheric O_2 from air inclusions in the Vostok ice core: Timing of CO_2 and ice volume changes during the penultimate deglaciation. *Paleoceanography*, **6**(6), 679-696.

Stauffer, B. 1989. Dating of Ice by Radioactive Isotope. Dahlem Conference, The environmental Record in Glaciers and Ice Sheets ; Ed. H.Oeschger and C.C. Langway Jr., 123-139.

Steed, R.H.N. 1977. Radio-Echo sounding investigations of Wilkes Land Antarctica,Antarctic geosciences edited by C.Craddock ,IUGS B4, 969,975.

Thomas, R.H., 1973. The creep of ice shelves : Theory. *J. Glaciol.*, **12**(64), 45-53.

Thomas, R.H. and C.R. Bentley, 1978. A model for Holocene Retrat of the West Antarctic Ice Sheet. *Quat. Res.*,**10**, 150-170.

Thompson, L.G. 1977. Variations in microparticle concentration, size distribution and elemental composition found in Camp Century, Greenland, and Byrd station, Antarctica, deep ice cores. IAHS-AIHS Publ. 118, (proc. IUGG, Grenoble 1975), 351-364.

Turcotte, D. L. and G. Schubert, 1971. Geodynamics, applications of continuum physics to geological problems. *Ed.* J. Whiley, New-York.

Vallon, M. J. R. Petit, and B. Favre. 1976. Study of an ice core to the bedrock in the accumulation zone of an Alpine Glacier. *J. Glaciol.*, **17**, 13-28.

Van der Veen, C.J. 1985. Response of a marine ice sheet to changes at the grounding line. *Quat. Res.*, **24**, 257-267.

Van der Veen, C.J. 1986a. Numerical modelling of ice shelves and ice tongues. *Ann. Geoph.*,**4B**, 45-54.

Van der Veen, C.J. 1986b. Ice sheets, Atmospheric CO_2 and sea level. Thèse, Université d'Utrecht.

Vauclin, M., Haverkamp, R. et G. Vachaud. 1979. Résolution numérique d'une équation de diffusion non linéaire. *Presses Universitaires de Grenoble.*

Vialov, S. S. 1958. Regularities of glacial shields movement and the theory of plastic viscous flow. In : *Physics of the movement of ice* (Proc. Chamonix symposium), *IAHS*, **47**, 266-275

Vornberger, P. L. and I. M. Whillans. 1990. Crevasse deformation and examples from Ice Stream B, Antarctica. *J. Glaciol.*, **36**(122), 3-10.

Vostresov, R.N., O.F. Dmitriev, O.F. Putikov, K.V. Blinov, and S.V. Mitin. 1984. The main results of geophysical studies of deep boreholes and the ice core in East Antarctica. Academy of Sciences of the U.S.S.R. Soviet Geophysical Committe, 51, 172-178.

Waddington, E.D. 1987. Geothermal heat flux beneath ice sheets. *In* The physical basis of ice sheet modelling, *IAHS*, **170**, 217-226.

Watts, L. G. and D. J. Drewry. 1987. Ice core-derived past surface temperatures used as boundary conditions to finite element modelling of the Antarctic ice sheet. *In* The physical basis of ice sheet modelling, *IAHS*, **170**, 227.

Weller, G.E., P. Schwerdtfeger. 1971. New data on the thermal conductivity of natural snow. *J. Glaciol.*, **10**(59), 309-311.

Weertman, J., 1957. Deformation of floating ice shelves. *J. Glaciol.*, **13**, 38-42.

Wiebe, R., V.L. Gaddy, and Conrad Heins, Jr. 1932. Solubility of Nitrogen in Water at 25 ,c from 25 to 1000 Atmospheres Ind.Eng.Chem., 24, 927.

Whillans, I. M. 1978. Inland ice-sheet thinning due to Holocene warmth, *Science*, **201**, 1014-1016.

Whillans, I. M. 1979. Ice flow along the Byrd station strain network, Antarctica. *J. Glaciol.*, **24**(90), 15-28.

Whillans, I. M. 1981. Reaction of the accumulation zone portions of glaciers to climatic change. *J. Geophys. Res.*, **86**(C5),4274-4282.

Whillans, I. M., J. Bolzan and S. Shabtaie. 1987. Velocity of ice streams B and C, Antarctica. *J. Geophys. Res.*, **92**(B9), 8895,8902.

Whillans, I. M., Y.H. Chen, C.J. Van der Veen and T. J. Hugues. 1989. Force budget : III. Application to three-dimensional flow of Byrd Glacier, Antarctica. *J. Glaciol. 35(119),68-80.*

Yiou, P., C. Genthon, M. Ghill, J. Jouzel, H. Le Treut, C. Lorius and Y. S. Korotkevich. 1989. High frequency paleovariability in climate and in CO_2 levels from Vostok ice core records. *Conference on modelling of global climate change and variability*, Hambourg (RFA), 11-15 septembre 1989.

Yin-Chao, Yen. 1981. Review of critical properties of snow-ice and sea-ice CRREL Report 81-10.

Young, N. W. 1979. Measured velocities of interior East Antarctica and the state of mass balance within the I.A.G.P. area. *J. Glaciol.*, **24**(90), 77-87.

Young, N.W., M. Pourchet, V.M. Kotlyakov, P.A. Korolev, and M.B. Dyugerov. 1982. Accumulation distribution in the IAGP Area, Antarctica: 90°E-150°E. *Ann. Glaciol.*, **3**, 333-338.

Yuen, D. A. and G. Schubert 1979. The role of shear heating in the dynamics of large ice masses. *J. Glaciog*, **24**(90), 195-212.

REPRO CNRS

Grenoble, juillet 1992.

Impression réalisée sur Rank Xerox 5090, au Service Reprographie du CNRS.

Un modèle thermo-mécanique d'évolution pour le bassin glaciaire Antarctique Vostok-Glacier Byrd : Sensibilité aux valeurs des paramètres mal connus.

Résumé

Un modèle d'écoulement de la glace est développé en tenant compte du couplage vitesse-température. Ce modèle permet l'étude des réactions d'une calotte polaire aux variations du climat et est appliqués à la ligne de courant "Ridge B - Vostok - Glacier Byrd". (Antarctique de l'Est).

Les processus à prendre en compte, les équations de base ainsi qu'une étude bibliographique sont présentés au chapitre (I). Au chapitre (II) dans le but d'interpréter les forages glaciaires, nous développons un outil dans lequel les vitesses d'écoulement sont déduites de la géométrie de la nappe de glace et de l'alimentation par précipitation. A partir du champ de vitesse ainsi calculé, le champ de température est obtenu en résolvant l'équation de la chaleur dépendant du temps avec des conditions aux limites qui tiennent compte de la fusion éventuelle à la base de la calotte de glace ainsi que de la température dans le socle rocheux. Cet outil est utilisé (chapitre III) pour calculer l'âge de la glace dans le carottage de Vostok. Il apparait que la principale incertitude sur la chronologie vient de la mauvaise connaissance de l'accumulation de glace en amont du forage. Le modèle de température permet également d'interpréter le profil de température mesuré à Vostok et d'en tirer des informations sur le flux géothermique et sur l'accumulation.

Le modèle thermo-mécanique (chapitre IV) simule l'évolution de l'épaisseur de glace au cours du temps. Les vitesses d'écoulement sont intégrées numériquement et couplées aux température à chaque pas de temps. Un modèle d'ice-shelf est également développé et les déplacements de la ligne d'échouage sont calculés en fonction de la dynamique de la calotte glaciaire et de celle de l'ice-shelf. Des études de sensibilité sont effectuées pour les divers paramètres du modèle. Les variations d'altitude à Vostok pour le dernier cycle climatique sont obtenues et ne dépassent pas 100 m.