



Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes

Denis Vautrin

► To cite this version:

Denis Vautrin. Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Centrale de Nantes (ECN), 2011. Français. NNT : . tel-00692589

HAL Id: tel-00692589

<https://theses.hal.science/tel-00692589>

Submitted on 1 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE CENTRALE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET MATHÉMATIQUES

Année 2011

Thèse de Doctorat

Spécialité : INFORMATIQUE, AUTOMATIQUE, ELECTRONIQUE
ET GÉNIE ELECTRIQUE

Présentée et soutenue publiquement par :

Denis VAUTRIN

le 14 décembre 2011
à l'Ecole Centrale de Nantes

TITRE

**Régularisation et optimisation pour
l'imagerie sismique des fondations de pylônes**

JURY

Président :	Jean-Pierre GUEDON	Professeur à l'Université de Nantes
Rapporteurs :	Pierre CHARBONNIER	Directeur de recherche IFSTTAR
	Jean-François GIOVANNELLI	Professeur à l'Université de Bordeaux
Examineurs :	Paul CRISTINI	Chargé de recherche CNRS
	Jérôme IDIER	Directeur de recherche CNRS
	Nicolas PAUL	Chercheur expert à EDF R&D
Membre invité :	Gwennou LE MIGNON	Responsable fondations à RTE

Directeur de thèse : **Jérôme IDIER**
Laboratoire : IRCCyN

Remerciements

Je remercie tout d'abord Réseau de Transport d'Electricité pour le financement de cette thèse ainsi que pour la confiance qui m'a été accordée tout au long de ces trois années.

Ces travaux ont été effectués sous la direction de Jérôme Idier. Je tiens à le remercier pour ses conseils avisés, sa rigueur scientifique, son esprit critique et pour avoir toujours su se rendre disponible. Un grand merci également à Matthieu Voorons et à Yves Goussard de l'Ecole Polytechnique de Montréal pour leur précieuse collaboration.

Je remercie Nicolas Paul, Alexandre Girard et Guy D'Urso du département STEP d'EDF R&D pour avoir suivi de près l'évolution de mes travaux, pour leurs nombreux conseils, remarques et suggestions. Merci également à Stéven Kerzale, à Laurie Chan-Lam, ainsi qu'à tous les autres intervenants du projet pour les échanges fructueux.

Je remercie l'ensemble des membres de mon jury de thèse pour avoir accepté d'évaluer mes travaux, et en particulier Pierre Charbonnier et Jean-François Giovannelli pour avoir accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

J'adresse mes remerciements à toutes les personnes de l'IRCCyN qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ma thèse. Je remercie Michel Malabre pour m'avoir accueilli au sein de l'IRCCyN ce qui m'a permis d'effectuer mes travaux de recherche dans les meilleures conditions. Je tiens à remercier également tous les membres de l'équipe ADTSI ainsi qu'Emily Thureau.

Un grand merci aux doctorants et aux post-docs que j'ai côtoyés pendant ces trois années. Je pense à Adrien, Aleksandra, Arnaud, Carlos, Céline, Charbel, David, Dominique, Ewen, Inès, Jinda, Jonathan, Karthick, Roberto, Ruina, Sébastien, Sylvain, Tomas, Xavier mais j'en oublie certainement. Je garde un très bon souvenir des soirées / restos / fest-noz / cinés et des nombreux autres moments passés en votre compagnie. Merci pour votre sympathie et votre bonne humeur !

Je termine en remerciant ma famille pour sa présence et son soutien de tous les instants.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Contexte	7
1.1 Organisation du chapitre	7
1.2 Description de la procédure expérimentale retenue	8
1.2.1 Généralités	8
1.2.2 Choix d'un dispositif adapté à notre étude	9
1.2.3 Description du protocole de mesure	9
1.3 Méthodes d'inversion existantes en imagerie sismique	12
1.3.1 Particularités du problème abordé	12
1.3.2 Méthodes basées sur une exploitation partielle des enregistrements	12
1.3.3 Méthodes basées sur l'exploitation du champ d'ondes complet	13
1.4 Modélisation de la propagation des ondes	16
1.4.1 Equations de propagation utilisées	16
1.4.2 Discrétisation des équations de propagation	18
1.4.3 Ecriture sous forme matricielle	20
1.5 Résolution du problème direct	22
1.5.1 Algorithme initial	22
1.5.2 Restriction à une zone d'intérêt	23
1.6 Milieux utilisés pour tester les méthodes d'inversion proposées	27
1.6.1 Milieu sans cheminée ni surface libre	28
1.6.2 Milieu avec cheminée et surface libre	29
2 Reconstruction tomographique par régularisation markovienne	33
2.1 Introduction	33
2.1.1 Objectifs du problème	33
2.1.2 Difficultés du problème	34
2.1.3 Organisation du chapitre	34
2.2 Méthodes d'optimisation locale en tomographie de diffraction	35
2.2.1 Méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire	36

2.2.2	Méthodes s'appuyant sur une formulation non linéaire	39
2.3	Précisions sur la technique d'optimisation retenue	43
2.3.1	Critère minimisé	43
2.3.2	Algorithme de minimisation utilisé	46
2.4	Résultats sur données simulées	50
2.4.1	Précisions sur les tests effectués	50
2.4.2	Premiers résultats obtenus	51
2.4.3	Introduction progressive des données	52
2.4.4	Introduction d'un changement de variables	53
2.4.5	Éléments d'interprétation complémentaires	57
3	Reconstruction tomographique avec segmentation du milieu sondé	63
3.1	Introduction	63
3.1.1	Objectifs	63
3.1.2	Organisation du chapitre	64
3.2	Détail des informations <i>a priori</i> disponibles	64
3.2.1	Position et géométrie d'une fondation	64
3.2.2	Informations obtenues par des techniques complémentaires	65
3.2.3	Estimation préalable des caractéristiques du terrain	67
3.3	Introduction d'une segmentation du milieu	67
3.3.1	Principe général de l'approche par segmentation	69
3.3.2	Représentations paramétriques	70
3.3.3	Représentations non paramétriques : la méthode des <i>level-sets</i>	71
3.4	Description de la méthode d'inversion proposée	74
3.4.1	Description semi-paramétrique du milieu	75
3.4.2	Algorithme d'optimisation	77
3.5	Résultats sur données simulées	82
3.5.1	Précisions sur les tests effectués	82
3.5.2	Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre	83
3.5.3	Robustesse par rapport à des erreurs sur les estimations préalables	85
4	Extensions de la méthode de reconstruction avec segmentation	91
4.1	Introduction	91
4.2	Inversion de la signature de la source	92
4.2.1	Position du problème	92
4.2.2	Introduction de variables supplémentaires	93
4.2.3	Inversion dans le cas où la source n'est pas répétable	94
4.2.4	Inversion dans le cas où la source est parfaitement répétable	97

4.3	Prise en compte de la variation spatiale de la masse volumique	100
4.3.1	Position du problème	100
4.3.2	Méthode proposée	101
4.3.3	Application à une configuration de taille réaliste	103
4.4	Prise en compte de l'atténuation intrinsèque	107
4.4.1	Introduction d'une caractéristique supplémentaire	107
4.4.2	Méthode proposée pour inverser le facteur de qualité	109
4.4.3	Mise à l'échelle des différentes variables	110
4.4.4	Résultats obtenus	111
Conclusion générale et perspectives		115
A Adaptation du signal source au profil d'atténuation du sous-sol		121
A.1	Contexte	121
A.1.1	Observations et objectif	121
A.1.2	Hypothèses et notations	122
A.2	Discretisation sur un nombre fini de fréquences	122
A.2.1	Calcul des instants de transition entre les fréquences $\hat{t}_n$	123
A.2.2	Calcul des phases à l'origine $\hat{\Phi}_n^0$	123
A.3	Passage à une expression analytique	124
A.3.1	Calcul des instants d'émission de chaque fréquence	124
A.3.2	Calcul des phases à l'origine	125
B Mise à l'échelle des variables descriptives		127
B.1	Expressions générales du critère, du gradient et de la matrice hessienne	128
B.2	Expressions des matrices jacobienues	128
B.2.1	Méthode de reconstruction avec régularisation markovienne	128
B.2.2	Méthode de reconstruction avec segmentation du milieu sondé	129
B.3	Mise à l'échelle des variables descriptives	130
C Sensibilité par rapport à la pondération de la régularisation		133
C.1	Retour sur l'expression du critère minimisé	133
C.2	Tests de sensibilité sur le milieu avec cheminée et surface libre	133
C.3	Résultats obtenus sur une configuration différente	136
C.3.1	Description de la configuration	136
C.3.2	Résultats obtenus	136

Introduction générale

Cette thèse a été réalisée sous Convention Industrielle de Formation par la Recherche (CIFRE). Elle s'inscrit dans le cadre d'un projet industriel multipartenarial financé par le Centre National d'Expertise Réseaux de Réseau de Transport d'Electricité (RTE-CNER) et supervisé par le département Simulation et Traitement de l'information pour l'Exploitation des systèmes de Production (STEP) du centre de Recherche et Développement d'Electricité De France (EDF R&D).

L'objectif global de ce projet est l'élaboration d'une procédure d'imagerie en deux dimensions des fondations de pylônes électriques haute tension par contrôle non destructif.

Cette thèse est dédiée à la résolution du problème inverse dont le but est de retrouver la géométrie de la fondation auscultée à partir des mesures relevées sur le terrain.

Description de la procédure d'auscultation

Une fondation est une structure en béton dont la profondeur est généralement inférieure à cinq mètres. Elle est typiquement constituée d'une cheminée dont une partie émerge du sol, d'une semelle qui constitue la base de la fondation, et éventuellement de gradins. Un schéma de la structure générale d'une fondation est donné sur la figure 1.

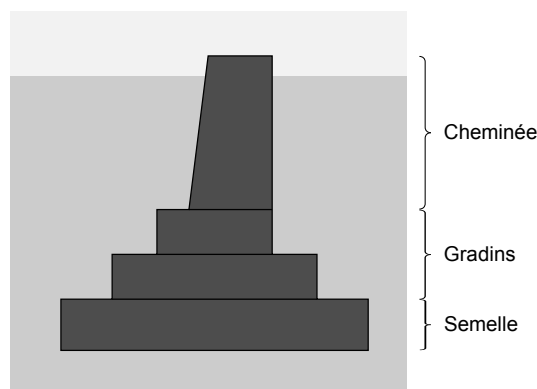


Figure 1 – Schéma en deux dimensions de la structure d'une fondation

La procédure d'auscultation doit permettre de reconstruire avec précision la géométrie d'une fondation tout en s'adaptant à la diversité des terrains environnants et à la variabilité des conditions hydrogéologiques. Une technique d'imagerie basée sur la propagation d'ondes sismiques est susceptible de réunir ces contraintes. Elle consiste à propager un train d'ondes dans le sous-sol à l'aide d'une source d'excitation et à enregistrer la vitesse de l'onde résultante en plusieurs points de mesure à l'aide de géophones.

Dans la configuration « nominale », la génération de l'onde d'excitation et l'acquisition de mesures sont entièrement réalisées depuis la surface du sol. Etant donné que l'objectif est d'imager une coupe verticale de la fondation, l'ensemble du dispositif est positionné le long d'une ligne, de préférence dans le plan de symétrie de la fondation. Une acquisition en « couverture multiple » est réalisée : la procédure de mesure est répétée pour plusieurs positions de la source afin d'acquérir des données plus riches.

Résolution du problème inverse

Objectif du problème inverse

L'objectif du problème inverse est de retrouver la géométrie de la fondation connaissant les données enregistrées par les capteurs et le protocole d'imagerie suivi. Néanmoins, les inconnues du problème ne se limitent pas seulement au contour de la fondation. Il est nécessaire d'estimer la distribution spatiale des caractéristiques physiques du sous-sol car celles-ci influent fortement sur les données et ne peuvent pas être déterminées de façon exacte au préalable.

De nombreuses méthodes classiquement utilisées en imagerie par ondes sismiques telles que les techniques de sismique réflexion [Hole et Zelt, 1995] ou de sismique réfraction [Lanz *et al.*, 1998] exploitent les données enregistrées de façon partielle. Leur analyse se limite à certains modes de propagation des ondes. Dans notre cas, les enregistrements résultent de modes de propagation très divers. Etant donné la faible quantité d'informations mesurées par rapport au grand nombre d'inconnues, il convient d'exploiter l'information disponible de façon plus complète.

Les méthodes exploitant l'ensemble des données enregistrées par les capteurs [Tarantola, 1986 ; Pratt, 1999] consistent généralement à minimiser une fonction coût. En regroupant dans la variable θ les différentes inconnues du problème, le critère minimisé prend typiquement la forme suivante :

$$\mathcal{C}(\theta) = \|\mathbf{y} - \mathbf{g}(\theta)\|^2 + \phi(\theta)$$

où $\mathbf{y}$ et $\mathbf{g}$ désignent les données mesurées et la sortie d'un modèle respectivement. La fonction de pénalisation ϕ permet, quant à elle, d'inclure des informations *a priori* sur les variables optimisées.

L'enjeu du problème inverse est de concilier qualité de reconstruction et efficacité de l'algorithme d'inversion. Pour cela, le modèle utilisé doit à la fois représenter fidèlement la réalité et être peu coûteux en calculs. Les données $\mathbf{y}$ sont généralement bruitées. Pour compenser le caractère mal posé du problème et ainsi éviter à l'algorithme de converger vers une solution dégénérée, il est nécessaire d'inclure des informations *a priori* (représentées par l'ajout de la fonction de pénalisation ϕ) qui doivent être choisies de façon judicieuse. Enfin, l'algorithme de minimisation du critère doit lui-même être performant et peu coûteux.

Nous ajoutons à cela une contrainte supplémentaire : le nombre d'hyperparamètres doit être minimal afin de se rapprocher d'une méthode idéalement non supervisée. Cela permet d'éviter des réglages empiriques qui peuvent être fastidieux. La notion d'« hyperparamètres » renvoie aux coefficients qui interviennent dans l'expression du critère minimisé et dont la valeur doit être réglée par l'utilisateur. Il peut s'agir par exemple d'un coefficient de pondération permettant d'établir un compromis entre les termes d'adéquation aux données et de pénalisation du critère minimisé.

Difficultés du problème abordé

Les longueurs d'ondes se propageant dans le milieu sont du même ordre de grandeur que les dimensions des fondations et les caractéristiques physiques du béton sont très différentes de celles de la terre. Cela donne lieu à des phénomènes de diffraction qui ne peuvent pas être négligés.

Le problème d'imagerie des fondations s'intègre donc à l'ensemble des problèmes de « tomographie de diffraction » [Carfantan et Mohammad-Djafari, 2001]. Ce type de problème inverse est difficile à résoudre : il s'agit de problèmes mal posés marqués par une forte non-linéarité entre les inconnues et les données mesurées. La convexité du critère minimisé n'est alors pas garantie et cela induit la présence éventuelle de minima locaux.

D'autres aspects du problème inverse abordé ici rendent sa résolution difficile. Premièrement, le fort contraste entre les caractéristiques de la terre et du béton donne lieu à une dégradation significative du conditionnement du critère. Notre problème est caractérisé par une faible quantité de données mesurées par rapport au nombre important d'inconnues et le milieu n'est ausculté que depuis la surface du sol (dans la configuration « nominale »). Cela tend à accentuer la sous-détermination du problème. Enfin, la résolution du problème direct est coûteuse en calculs, ce qui alourdit la résolution du problème inverse.

Organisation globale du projet

Parmi les différents objectifs du projet d'imagerie des fondations, on distingue deux volets.

Le premier volet regroupe les aspects expérimentaux. Les acteurs travaillant sur ce volet sont l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFSTTAR), le département STEP d'EDF R&D et la société TERRASEIS.

Il comprend bien entendu le choix du matériel utilisé et la définition du protocole de mesure (placement de la source et des capteurs, choix du signal d'excitation). Ces travaux ont en partie fait l'objet de la thèse d'Olivier Magnin [Magnin, 2008].

Ce volet inclut également plusieurs tâches additionnelles. D'une part, plusieurs techniques de contrôle complémentaires ont été mises au point. Elles permettent d'obtenir des informations *a priori* utiles pour la résolution du problème inverse. D'autre part, l'IFSTTAR a pris en charge la conception d'une maquette représentant une fondation à l'échelle 1/60 et la réalisation de mesures sur cette maquette à l'aide d'un banc de Mesures Ultrasonores Sans Contact (MUSC). Cela a permis d'acquérir un jeu de données complet sur une configuration réaliste dont les caractéristiques sont bien maîtrisées. Ces travaux font suite à la thèse de François Bretaudeau [Bretaudeau, 2010].

Le second volet regroupe les aspects algorithmiques, c'est-à-dire les travaux relatifs à la mise au point d'un outil numérique permettant de résoudre le problème inverse. Les acteurs travaillant sur ce second volet sont l'Ecole Polytechnique de Montréal (EPM), le laboratoire Grenoble Images Parole Signal et Automatique (GIPSA-Lab), l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), l'Institut des Sciences de la Terre (ISTerre) et le département STEP d'EDF R&D.

Plusieurs points ont été abordés :

- l'application d'une première méthode d'inversion déjà éprouvée dans le cadre de la détection de couches d'hydrocarbures [Brossier, 2009] ;
- la mise au point de techniques de « pré-traitement » permettant de mettre en exergue les informations d'intérêt dans les données mesurées ;

- l’élaboration d’un algorithme de résolution du problème direct permettant de synthétiser un jeu de mesures ;
- la conception d’un algorithme de résolution du problème inverse adapté à l’imagerie des fondations de pylônes.

Associé à l’EPM, le rôle de l’IRCCyN a été principalement de proposer un schéma d’inversion prenant en compte des informations *a priori* spécifiques à l’imagerie des fondations de pylônes.

Organisation de la thèse

Cette thèse est consacrée à la résolution du problème inverse. Elle s’est déroulée en majorité au sein de l’IRCCyN.

Ce travail a été mené en étroite collaboration avec l’Ecole Polytechnique de Montréal. Cela a permis d’explorer davantage de pistes et de multiplier les tests d’inversion. Nos deux équipes se sont appuyées sur un même algorithme de résolution du problème direct développé au sein du département STEP d’EDF R&D [Kerzale *et al.*, 2009]. A partir d’une discrétisation des équations de propagation des ondes élastiques par différences finies, il permet de générer un jeu de mesures synthétiques connaissant les caractéristiques du milieu sondé et le protocole de mesure suivi.

Au cours des premiers mois, nos deux équipes ont travaillé en commun. Il s’agissait au départ de se familiariser avec l’algorithme de résolution du problème direct et de travailler sur la mise en application de la méthode *Contrast Source Inversion* (CSI). Cette méthode avait déjà été utilisée pour deux projets de tomographie de diffraction : le premier impliquant l’IRCCyN et l’EPM et portant sur la détection du cancer du sein par tomographie micro-ondes [Barrière, 2008] et le second impliquant l’IRCCyN, l’EPM et le département STEP d’EDF R&D et portant sur la détection de défauts dans des plaques métalliques par courants de Foucault [Trillon, 2010].

Par la suite, nos deux équipes ont travaillé en parallèle sur des approches différentes. Afin de comparer leurs performances, les algorithmes d’inversion étaient testés sur des configurations communes.

Dans un premier temps, deux approches de type « cartographie » ont été abordées. Dans ce cas, les inconnues du problème correspondent à la distribution spatiale des caractéristiques physiques du milieu.

- Côté EPM, plusieurs méthodes basées sur une formulation bilinéaire du problème direct incluant la méthode du gradient modifié [Kleinman et Van Den Berg, 1992] et la méthode CSI [Van Den Berg et Kleinman, 1997] ont été testées. Elles consistent à introduire des variables auxiliaires en plus des variables d’intérêt et à relâcher certaines contraintes liées au modèle direct. Cela permet de simplifier les étapes de mise à jour des différentes variables.
- Côté IRCCyN, nous avons travaillé sur des méthodes prenant directement en compte la non-linéarité du problème direct. Celles-ci ont un coût par itération plus élevé mais ne passent pas par l’introduction de variables auxiliaires et par le relâchement de certaines contraintes.

L’approche basée sur une formulation non linéaire s’est avérée la plus performante. Elle a donc servi de base à la seconde partie de l’étude.

Dans les approches de type « cartographie », peu d’*a priori* sont considérés. Une régularisation markovienne permet seulement de tenir compte du fait que le milieu sondé est constitué de régions lisses séparées par des contours francs. Dans un second temps, nous avons travaillé sur l’incorporation d’*a priori* plus nombreux et plus précis.

- Côté EPM, une approche prenant en compte une estimation préalable des caractéristiques de la terre et du béton a été étudiée. Il s'agit principalement d'introduire dans le critère des termes de régularisation non convexes favorisant l'apparition de zones homogènes.
- Côté IRCCyN, nous avons proposé une approche originale basée sur une segmentation du milieu sondé en une région Terre et une région Béton. Cette approche permet de tenir compte non seulement de l'estimation préalable des caractéristiques de chaque région mais également de plusieurs informations liées à la structure de la fondation.

Présentation du document

Ce document est divisé en quatre chapitres.

Le premier chapitre est consacré au contexte du problème inverse. Nous expliquons le choix du dispositif utilisé puis le protocole expérimental de mesure dans sa configuration nominale.

S'ensuit un état de l'art sur les méthodes couramment employées en imagerie par ondes sismiques. Nous distinguons d'une part les méthodes basées sur une exploitation partielle des mesures et d'autre part les méthodes exploitant le champ d'ondes complet. Etant donné la quantité limitée d'informations mesurées vis-à-vis du nombre important d'inconnues du problème, nous nous sommes davantage intéressés à la seconde famille de méthodes.

Nous abordons ensuite la résolution du problème direct. L'algorithme utilisé s'appuie sur les équations de propagation des ondes élastiques, ce qui permet de modéliser fidèlement la propagation des ondes sismiques dans le sous-sol. Le problème direct est résolu dans le domaine fréquentiel : cela permet de réduire dans une certaine mesure le coût calculatoire et de s'accorder avec la méthode de résolution du problème inverse pour laquelle seul un nombre limité de fréquences est considéré.

Enfin, deux configurations que nous avons utilisées pour tester les différentes méthodes d'inversion proposées sont présentées. Elles correspondent à deux milieux de taille réduite, ce qui permet de cerner les performances des algorithmes d'inversion pour un coût calculatoire moindre.

Le deuxième chapitre est consacré aux approches de type « cartographie ». La résolution du problème direct est coûteuse. C'est pourquoi les méthodes d'optimisation globale ont été écartées d'emblée pour s'intéresser uniquement aux méthodes d'optimisation locale. Deux familles de méthodes sont abordées : d'abord celles s'appuyant sur une formulation bilinéaire des équations de modélisation puis celles s'appuyant sur une formulation non linéaire.

Nous détaillons ensuite la méthode développée à l'IRCCyN qui appartient à la seconde famille de méthodes. Peu d'informations *a priori* sont exploitées : seule une régularisation markovienne est introduite afin de tenir compte du fait que le milieu sondé est constitué de régions lisses séparées par des contours francs.

Enfin, les résultats obtenus sur données simulées sont présentés. Ils mettent en évidence un fort ralentissement de la convergence de l'algorithme dû au fort contraste entre les caractéristiques de la terre et du béton. Une de nos contributions consiste à introduire un changement de variables afin d'accélérer la convergence de l'algorithme.

Les limites de la première approche proposée semblent rapidement atteintes lorsque la configuration du milieu sondé se complexifie. Pour pouvoir aller plus loin, une seconde approche est proposée **dans le troisième chapitre**. Elle se base sur une segmentation du milieu sondé. Celle-ci permet de prendre en compte des *a priori* plus nombreux et plus spécifiques liés aux

caractéristiques du sous-sol et à la géométrie des fondations. Dans un premier temps, les *a priori* en question sont détaillés.

Plusieurs approches fréquemment utilisées dans la littérature ont été envisagées. Nous expliquons dans un deuxième temps leurs principes puis leurs avantages et leurs limites dans le cadre de l'imagerie des fondations de pylônes. Au lieu de l'une de ces approches, nous avons mis au point une méthode originale s'adaptant bien aux informations *a priori* disponibles et assurant une certaine efficacité de l'algorithme d'inversion. Il s'agit de notre contribution principale au problème d'imagerie des fondations de pylônes.

Nous présentons enfin les résultats obtenus sur données simulées. Ils montrent une nette amélioration des performances par rapport à la première approche proposée. La robustesse de l'algorithme par rapport à des erreurs sur l'estimation préalable de la profondeur de la fondation ou des caractéristiques du terrain a également été testée.

Dans le quatrième chapitre, trois extensions sont apportées à l'approche par segmentation. Elles sont nécessaires au traitement de données réelles. La première porte sur l'estimation de la signature de la source car celle-ci ne peut pas être supposée parfaitement connue lors de l'inversion.

Initialement, l'approche par segmentation consiste à retrouver la distribution spatiale de deux caractéristiques (la vitesse de propagation des ondes de compression et des ondes de cisaillement). Or le milieu est également caractérisé par la distribution de la masse volumique. La deuxième extension consiste à inclure l'estimation de la distribution de cette caractéristique dans l'algorithme d'inversion.

Enfin, la troisième extension concerne la prise en compte du facteur de qualité. Il permet de modéliser une certaine forme d'atténuation des ondes lors de leur propagation dans le sous-sol.

Chapitre 1

Contexte

Sommaire

1.1	Organisation du chapitre	7
1.2	Description de la procédure expérimentale retenue	8
1.2.1	Généralités	8
1.2.2	Choix d'un dispositif adapté à notre étude	9
1.2.3	Description du protocole de mesure	9
1.3	Méthodes d'inversion existantes en imagerie sismique	12
1.3.1	Particularités du problème abordé	12
1.3.2	Méthodes basées sur une exploitation partielle des enregistrements . . .	12
1.3.3	Méthodes basées sur l'exploitation du champ d'ondes complet	13
1.4	Modélisation de la propagation des ondes	16
1.4.1	Equations de propagation utilisées	16
1.4.2	Discretisation des équations de propagation	18
1.4.3	Ecriture sous forme matricielle	20
1.5	Résolution du problème direct	22
1.5.1	Algorithme initial	22
1.5.2	Restriction à une zone d'intérêt	23
1.6	Milieux utilisés pour tester les méthodes d'inversion proposées . . .	27
1.6.1	Milieu sans cheminée ni surface libre	28
1.6.2	Milieu avec cheminée et surface libre	29

1.1 Organisation du chapitre

Dans ce premier chapitre, nous abordons le contexte du problème inverse.

Dans la section 1.2, nous présentons la procédure expérimentale suivie pour l'imagerie des fondations de pylônes. Nous abordons notamment la mise en forme du signal généré par la source vibratoire.

La section 1.3 porte sur les techniques d'inversion classiquement utilisées en imagerie par ondes sismiques. Nous abordons d'abord les méthodes basées sur une exploitation partielle des enregistrements puis les méthodes basées sur l'exploitation du champ d'ondes complet. Nous expliquons davantage les méthodes appartenant à la deuxième famille car elles sont plus adaptées au problème d'imagerie des fondations de pylônes.

Pour résoudre le problème inverse, il faut savoir résoudre le problème direct, c'est-à-dire construire un jeu de données mesurées connaissant les caractéristiques du sous-sol et le protocole expérimental. Pour cela, une modélisation de la propagation des ondes dans le sous-sol est nécessaire. Dans la section 1.4, nous décrivons le modèle utilisé. Il s'appuie sur les équations de propagation des ondes élastiques formulées dans le domaine fréquentiel et discrétisées par différences finies. La section 1.5 explique la résolution du problème direct en tant que telle. Nous proposons de nous restreindre à une zone d'intérêt de taille réduite afin de diminuer le nombre d'inconnues. Parmi les différentes formulations possibles, une de nos contributions consiste à retenir celle qui minimise l'espace mémoire requis.

Enfin, la section 1.6 détaille les caractéristiques des configurations utilisées pour tester les méthodes d'inversion proposées dans les chapitres suivants.

1.2 Description de la procédure expérimentale retenue

1.2.1 Généralités

Les différentes procédures d'imagerie par ondes sismiques utilisent toutes un dispositif d'investigation similaire. D'une part, une source sismique est utilisée afin de générer un train d'ondes dans le sous-sol. On distingue les techniques de sismologie passive pour lesquelles un séisme est à l'origine du train d'ondes et les techniques de sismologie active pour lesquelles on utilise une source anthropique (explosion, chute de poids, source vibratoire) ce qui permet de contrôler la localisation de la source et le signal d'émission. D'autre part, un ensemble de capteurs est utilisé afin de mesurer la vitesse des ondes résultantes (géophones) ou leur accélération (accéléromètres) en plusieurs points du milieu sondé.

Les différents phénomènes qui régissent la propagation du train d'ondes depuis la source d'émission jusqu'aux capteurs sont directement liés à la structure du sous-sol et à ses caractéristiques physiques. Par conséquent, les données enregistrées par les capteurs contiennent des informations sur la composition du sous-sol. Le dispositif utilisé doit être en adéquation avec les objectifs visés (profondeur d'auscultation, résolution, etc.) car les données acquises doivent être suffisamment riches pour pouvoir recueillir les renseignements escomptés.

Les premiers travaux en imagerie sismique datent de la fin du XIX^{ème} siècle. Ces techniques ont connu un essor important à partir des années 1930, au moment de leur utilisation pour la prospection pétrolière. Les échelles d'investigation s'étendaient alors de quelques centaines de mètres à plusieurs kilomètres. Depuis, l'utilisation des méthodes d'imagerie par ondes sismiques a été étendue à d'autres objectifs tels que la prévention des risques (effondrements de cavités, glissements de terrains), la construction et la maintenance d'ouvrages en génie civil (conformité du terrain, détection de détériorations, respect des normes) ou encore la compréhension de la tectonique des plaques et des phénomènes intervenant dans la formation de tremblements de terre. Elles ont donc été appliquées à différentes échelles d'investigation, les plus courtes allant jusqu'aux premiers mètres sous la surface du sol [Magnin, 2008 ; Brossier, 2009].

Les méthodes d'imagerie sismique diffèrent les unes des autres par le placement du dispositif de mesure sur le terrain. Pour la sismique de surface, la source d'émission ainsi que les capteurs sont positionnés à la surface du sol. Pour imager une coupe verticale du sous-sol, l'ensemble du dispositif est placé le long d'une même ligne. Si les premiers travaux en imagerie par ondes sismiques utilisaient un dispositif « à courts offset » (récepteurs proches de la source), les dispositifs « à grands offsets » ont davantage été utilisés par la suite car ils permettent l'acquisition de données plus riches [Sirgue, 2006]. Dans le cas de la sismique de puits, la source d'émission de

l'onde sismique et/ou les récepteurs sont placés en profondeur dans un puits. Cela permet d'acquérir des informations plus complètes mais la procédure de mesure est plus lourde puisqu'un forage est nécessaire. De manière générale, il est préférable de multiplier les positions de capteurs et de répéter la procédure d'acquisition en variant les angles d'illumination dans la mesure du possible afin d'acquérir davantage d'informations sur la composition du milieu ausculté.

La signature temporelle du signal émis par la source sismique doit également être choisie en fonction des objectifs visés. Par exemple, un signal riche en hautes fréquences permet de localiser de façon plus précise les interfaces géologiques présentes dans le sous-sol. Cependant, les composantes hautes fréquences d'un signal ont tendance à s'atténuer plus rapidement que les composantes basses fréquences. Ainsi, la source sismique doit être en mesure de générer un signal suffisamment hautes fréquences avec une amplitude assez élevée pour répondre aux objectifs de profondeur d'auscultation et de finesse de résolution escomptés.

1.2.2 Choix d'un dispositif adapté à notre étude

Pour notre étude, la mise au point d'un protocole d'imagerie sismique adapté à l'auscultation des fondations de pylônes électriques a fait l'objet de la thèse d'Olivier Magnin [Magnin, 2008]. Selon les objectifs définis par RTE et EDF R&D, la procédure d'auscultation utilisée doit permettre, en imageant les dix premiers mètres du sous-sol, de déterminer la géométrie des fondations de pylônes électriques avec une résolution décimétrique. De plus, cette procédure doit pouvoir s'adapter aux différents types de terrains rencontrés ainsi qu'à la variabilité des conditions hydrogéologiques. Pour répondre à ces différents critères, une procédure d'imagerie haute résolution basée sur la propagation d'ondes sismiques a été conçue. Celle-ci permet de reconstruire une image en deux dimensions de la proche surface, c'est-à-dire des dix premiers mètres du sous-sol, après inversion.

Pour générer l'onde sismique, une source sismique vibratoire est utilisée. L'intérêt de ce type de source par rapport à des sources explosives (détonateur) ou à impact (marteau, chute de poids) est multiple :

- La source est complètement commandée par l'utilisateur, ce qui permet de contrôler la durée et le contenu fréquentiel du signal émis.
- Le signal émis par la source est parfaitement répétable.
- La source est relativement légère (20 kg) ce qui permet de facilement répéter la procédure d'acquisition pour plusieurs positions de la source.

Un ensemble de géophones est utilisé pour l'acquisition de données. Ils mesurent la composante verticale de la vitesse particulière des ondes sismiques. Les géophones sont caractérisés par une fréquence propre choisie en fonction de la bande de fréquences que l'on souhaite mesurer. Le système d'acquisition utilisé permet de travailler avec plusieurs dizaines voire plusieurs centaines de géophones.

1.2.3 Description du protocole de mesure

Nous nous restreignons à une étude en deux dimensions. En effet, travailler en trois dimensions paraît difficilement envisageable, d'une part à cause de la lourdeur de la procédure d'acquisition et d'autre part à cause du coût excessif en temps de calcul et en place mémoire nécessaire pour le traitement des données. Par conséquent, l'ensemble du dispositif (source vibratoire et géophones) est positionné le long d'une ligne, en surface et dans le plan de symétrie de la fondation (voir figure 1.1). Afin de recueillir davantage d'informations sur les caractéristiques



Figure 1.1 – Dispositif utilisé pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes électriques avec la source vibratoire en premier plan et les géophones entre la source et le pylône électrique.

du sous-sol, on réalise une acquisition en couverture multiple : la procédure d'auscultation est répétée pour plusieurs positions de la source.

Un point important concerne la signature du signal émis par la source vibratoire. Le contenu spectral du signal doit être choisi en fonction des dimensions du domaine sondé et de la résolution escomptée. L'expérience montre que la résolution la plus fine que l'on est en mesure d'obtenir est environ égale au quart de la plus petite longueur d'onde se propageant dans le sous-sol [Magnin, 2008]. Elle dépend donc de la plus haute fréquence émise par la source vibratoire.

Dans notre cas, l'objectif de résolution pour l'imagerie des fondations est décimétrique et les vitesses de propagation des ondes sismiques de cisaillement évoluent généralement entre 180 m/s et 400 m/s. Par conséquent, les plus hautes fréquences de l'onde générées par la source vibratoire doivent au moins être égales à 400 Hz. Le spectre du signal doit également s'étendre aux basses fréquences pour que l'algorithme d'inversion soit en mesure de converger vers l'image du sous-sol recherchée [Sirgue, 2006]. Par conséquent, nous considérerons que le contenu fréquentiel du signal émis par la source vibratoire varie de $f_{\min} = 100$ Hz à $f_{\max} = 500$ Hz. La bande passante des capteurs doit être adaptée à celle du signal émis par la source. Les géophones retenus ont une fréquence propre égale à 100 Hz.

Certaines contraintes doivent également être prises en compte : la durée du signal est limitée (environ 4 secondes) afin de modérer la quantité de données enregistrées et son amplitude est bornée par les capacités de l'amplificateur (on note $a_{\max}$ l'amplitude maximale autorisée).

Le signal source doit être choisi de sorte que chaque fréquence du signal comprise entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$ véhicule la même énergie et que cette énergie soit maximale. En supposant que le bruit est additif et d'amplitude égale quelle que soit la fréquence (caractéristiques d'un bruit blanc), cela permet d'égaliser le rapport signal / bruit sur toutes les fréquences du signal et de le maximiser. Ces conditions conduisent naturellement à un *sweep* linéaire dont la fréquence varie entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$ et dont l'amplitude est égale à l'amplitude $a_{\max}$:

$$s(t) = a_{\max} \exp \left(2\pi \left(f_{\max} + \frac{(f_{\min} - f_{\max})t}{2T} \right) t + \varphi \right), \quad t \in [0, T] \quad (1.1)$$

Cependant, certaines caractéristiques du signal transmis dans le sous-sol diffèrent du signal généré par la source vibratoire. En pratique, un capteur est placé à proximité de la source afin de contrôler la qualité du signal se propageant dans le sous-sol. L'analyse du signal de contrôle montre qu'un problème de couplage entre la source vibratoire et le sol implique des phénomènes d'atténuation plus marqués pour certaines fréquences que pour d'autres. Par conséquent, l'énergie du signal transmis dans le sous-sol n'est pas uniformément répartie sur l'ensemble des fréquences parcourues (voir illustration sur la figure 1.2).

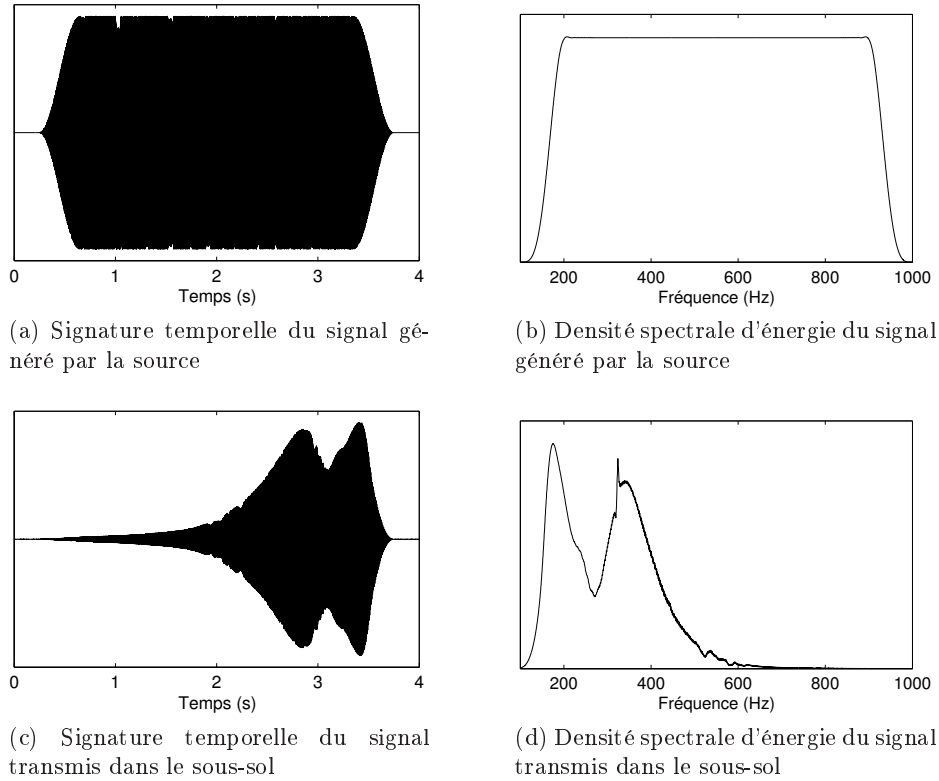


Figure 1.2 – Illustration du problème d'atténuation du signal généré par la source vibratoire. Le signal généré par la source est un *sweep* linéaire dont la fréquence varie de 1000 Hz à 100 Hz. Un fenêtrage est appliqué aux extrémités du *sweep* afin d'éviter une sollicitation trop brutale de la source vibratoire.

Pour compenser ce phénomène d'atténuation et égaliser l'énergie du signal transmis dans le sous-sol pour chaque fréquence, il faut modifier l'allure temporelle du signal généré par la source. La procédure suivante a été adoptée. L'intervalle des fréquences parcourues $[f_{\min}; f_{\max}]$ est découpé en plusieurs sous-intervalles et l'énergie du signal généré par la source sur chaque

sous-intervalle est adaptée. Pour ce faire, on joue sur la durée consacrée à l'émission de chaque fréquence tout en conservant l'amplitude du signal envoyé égale à $a_{\max}$: les intervalles correspondant aux fréquences les plus atténuées voient leur durée d'émission augmentée afin de rehausser l'énergie du signal transmis tandis que pour les fréquences les moins atténuées, la durée d'émission est diminuée.

Actuellement, le réglage des durées des différents sous-intervalles est effectué à la main en procédant par ajustement successifs. Ce réglage peut être long et fastidieux. Nous proposons dans l'annexe A une procédure automatisée permettant d'adapter l'allure du signal selon le profil d'atténuation du milieu.

1.3 Méthodes d'inversion existantes en imagerie sismique

1.3.1 Particularités du problème abordé

Dans notre étude, nous nous intéressons à un problème d'imagerie sismique dite « de proche surface » ou « de subsurface » : le domaine sondé s'étend de la surface du sol jusqu'aux dix premiers mètres sous la surface du sol. A cette échelle, différents types d'ondes interagissent :

les ondes dites « de volume » qui se propagent dans le sol. Elles sont de deux types : les ondes de compression dites ondes P (le déplacement des particules est parallèle à la direction de propagation) et les ondes cisailantes dites ondes S (le déplacement des particules est orthogonal à la direction de propagation). Ces ondes sont révélatrices des caractéristiques du sous-sol à la fois à proximité de la surface et en profondeur.

les ondes dites « de surface » qui se propagent au niveau de la surface libre (c'est-à-dire l'interface entre l'air et le sous-sol). Ces ondes comportent des informations sur les caractéristiques du sous-sol à proximité de la surface libre. Elles ont la particularité d'être très énergétiques (environ 67% de l'énergie émise par la source se propage à la surface du sol [Miller et Pursey, 1955]). Elles ont donc tendance à masquer les enregistrements correspondant aux ondes de volumes. Les ondes de surface étant difficiles à modéliser, elles réduisent la part d'information exploitable concernant les zones plus profondes du sous-sol.

Notons également que nous sommes en présence d'un milieu très fortement contrasté puisque les caractéristiques physiques des fondations (en béton) sont très différentes de celles du milieu environnant (la terre). Ce type de configuration donne lieu à des phénomènes très divers tels que :

- des réflexions et des réfractions qui peuvent être multiples ;
- des diffractions, dues au fait que les longueurs d'ondes du signal émis par la source vibratoire sont du même ordre de grandeur que les dimensions des fondations ;
- des mécanismes de conversion entre ondes de compression et ondes cisailantes.

A cela s'ajoutent également des phénomènes d'atténuation à la fois géométrique (perte d'amplitude liée à l'expansion du front d'onde) et intrinsèque (atténuation au sein des matériaux due à la dissipation de l'énergie).

Les ondes sismiques suivent donc des modes de propagation particulièrement complexes, ce qui rend l'interprétation des mesures difficile.

1.3.2 Méthodes basées sur une exploitation partielle des enregistrements

De nombreuses méthodes d'imagerie par ondes sismiques n'exploitent qu'une partie de l'information contenue dans les sismogrammes. Par exemple, certaines techniques ne s'appuient que sur le temps de propagation des ondes dans le sous-sol telles que :

- les méthodes d'imagerie par sismique réflexion [Hole et Zelt, 1995 ; Baker *et al.*, 1999]. Pour ces méthodes, on utilise un dispositif à court offset (récepteurs proches de la source). Il s'agit des premières méthodes largement utilisées en imagerie par ondes sismiques. Elles consistent à identifier sur les sismogrammes les hodochrones^a correspondant à des réflexions de l'onde émise par la source.
- les méthodes d'imagerie par sismique réfraction, également appelée sismique grands angles [Lanz *et al.*, 1998 ; Zelt *et al.*, 2006]. Pour ces méthodes, on utilise un dispositif à grand offset (récepteurs éloignés de la source). Elles consistent à identifier sur les sismogrammes les hodochrones correspondant à des réfractions de l'onde émise par la source. Ces méthodes peuvent être utilisées de manière combinée avec la sismique réflexion [Miller *et al.*, 1998].
- les méthodes de tomographie des temps de première arrivées [Hole, 1992 ; Zelt et Barton, 1998]. Pour déterminer les caractéristiques du sous-sol, on ne retient des sismogrammes que les durées les plus courtes pour que l'onde émise par la source se propage jusqu'aux différents récepteurs.

Ces techniques d'imagerie consistent à résoudre un problème inverse, le but étant de déterminer les caractéristiques d'un modèle physique expliquant au mieux les temps de propagation relevés. Elles font donc appel à un modèle de propagation des ondes dans le sous-sol. Dans de nombreux cas, on utilise la théorie des rais : en faisant l'hypothèse que les longueurs d'onde sont nettement inférieures aux dimensions des objets à imager, on considère que les ondes suivent des lois de réflexion / réfraction équivalentes à celles de l'optique géométrique (lois de Snell-Descartes). Ces méthodes aboutissent à la reconstruction d'un modèle lisse du milieu sondé.

D'autres techniques s'appuient exclusivement sur les ondes de surface [Nazarian et Stokoe, 1984 ; Park *et al.*, 1999]. En effet, il est possible de déterminer certaines caractéristiques du sous-sol à partir de la vitesse des ondes se propageant au niveau de la surface libre. Ces méthodes fournissent des informations sur les zones très superficielles du sous-sol et aboutissent à une reconstruction lisse du milieu.

Globalement, pour ces différentes méthodes, seuls les éléments qui semblent le plus porteurs d'information sont retenus dans les données enregistrées par les capteurs. Elles s'appuient donc sur une description parcimonieuse des mesures. Elles ont l'avantage d'être relativement simples à mettre en œuvre et d'aboutir à un résultat d'imagerie de façon rapide. Elles restent donc compétitives par rapport à d'autres méthodes d'imagerie plus complexes et elles sont toujours utilisées actuellement. En revanche, elles aboutissent à une reconstruction approximative des caractéristiques du milieu.

Dans notre cas, les enregistrements résultent de modes de propagation divers et nous souhaitons reconstruire une image haute résolution du milieu sondé bien que les données soient en quantité limitée (les tirs sont effectués uniquement depuis la surface libre et les données sont acquises en surface avec un petit nombre de capteurs). Nous nous sommes donc orientés vers des méthodes permettant d'exploiter plus finement les mesures.

1.3.3 Méthodes basées sur l'exploitation du champ d'ondes complet

Principe des méthodes d'inversion des formes d'ondes complètes

Pour les méthodes d'imagerie citées précédemment, la quantité d'informations exploitées est très faible, ce qui ne permet pas d'aboutir à une reconstruction précise du milieu sondé. De plus, l'utilisation de la théorie des rais pour modéliser la propagation des ondes est parfois trop approximative [Williamson, 1991 ; Williamson et Worthington, 1993]. Par exemple, lorsque les

a. Une hodochrone est une courbe décrivant les temps d'arrivée d'une onde sismique en fonction de l'offset.

longueurs d'ondes se propageant dans le milieu sont du même ordre de grandeur que les objets à imager (ce qui est le cas dans notre étude), les phénomènes de diffraction ne peuvent pas être négligés.

Les méthodes d'« inversion des formes d'ondes complètes » constituent une famille de méthodes d'imagerie sismique qui exploitent l'ensemble des données mesurées par les capteurs. Le problème inverse se présente sous la forme d'un problème de minimisation d'un critère de moindres carrés permettant de retrouver les caractéristiques du modèle qui expliquent au mieux les données observées. Ces méthodes étant assez complexes et coûteuses, elles restent relativement peu utilisées actuellement en exploration géophysique [Virieux et Operto, 2009].

Les premières méthodes d'inversion des formes d'ondes complètes ont été introduites au cours des années 1980 et s'appuyaient sur les équations de propagation des ondes acoustiques [Tarantola et Valette, 1982]. Cependant, l'approximation acoustique se limite à la modélisation de la propagation des ondes de compression dans le milieu sondé. Son utilisation peut mener à des résultats erronés si la présence d'autres ondes devient prépondérante dans la formation des enregistrements [Barnes et Charara, 2008]. Certains auteurs appliquent alors des prétraitements aux données mesurées afin de se rapprocher du cas acoustique [Operto *et al.*, 2004 ; Smithyman *et al.*, 2009].

Une alternative consiste à modéliser la propagation d'ondes élastiques [Tarantola, 1986]. Dans le domaine temporel et en deux dimensions, la propagation d'ondes élastiques est décrite par les équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^x(r,t)}{\partial t} = \rho(r) \frac{\partial^2 V^x(r,t)}{\partial t^2} &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_p(r)^2 \frac{\partial V^x(r,t)}{\partial x} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \frac{\partial V^x(r,t)}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) (v_p(r)^2 - 2v_s(r)^2) \frac{\partial V^y(r,t)}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \frac{\partial V^y(r,t)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^y(r,t)}{\partial t} = \rho(r) \frac{\partial^2 V^y(r,t)}{\partial t^2} &- \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_p(r)^2 \frac{\partial V^y(r,t)}{\partial y} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \frac{\partial V^y(r,t)}{\partial x} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) (v_p(r)^2 - 2v_s(r)^2) \frac{\partial V^x(r,t)}{\partial x} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \frac{\partial V^x(r,t)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

où r désigne un point de l'espace et t est la variable temporelle.

Ces équations se construisent à partir du principe fondamental de la dynamique, en se ramenant à une relation linéaire et isotrope entre déplacements, déformations et contraintes dans le milieu. Pour se ramener à deux dimensions, les caractéristiques du milieu sont supposées invariantes selon une direction de l'espace et les dérivées spatiales sont annulées selon cette même direction [Gélis, 2005].

Elles font intervenir plusieurs grandeurs. Certaines sont liées à la dynamique des particules dans le milieu :

- $F^x(r,t)$ et $F^y(r,t)$ sont les composantes d'une densité volumique de force selon l'axe horizontal et l'axe vertical au point r et à l'instant t . Ces deux champs correspondent à l'excitation du milieu par la source sismique et se déduisent directement du signal émis par la source sismique.
- $V^x(r,t)$ et $V^y(r,t)$ sont les composantes de la vitesse particulière selon l'axe horizontal et l'axe vertical au point r et à l'instant t . Ces deux champs correspondent à la réponse du terrain à l'excitation par la source sismique. Une partie de ce champ est mesurée par les géophones.

Trois caractéristiques indépendantes du temps interviennent également dans les équations de propagation. Leur distribution spatiale détermine la propagation des ondes élastiques dans le domaine considéré. Il s'agit de :

- v_p : la vitesse de propagation des ondes de compression ;
- v_s : la vitesse de propagation des ondes de cisaillement ;
- ρ : la masse volumique.

Pour l'imagerie des fondations de pylônes, nous reconstruisons la distribution spatiale de ces trois grandeurs à partir des données mesurées afin de retrouver la géométrie de la fondation auscultée.

Les équations de propagation des ondes élastiques ont l'avantage de représenter plus fidèlement les différents phénomènes intervenant dans la formation des sismogrammes. Néanmoins, le recours à cette modélisation complexifie l'inversion des formes d'ondes complètes. En effet, trois grandeurs caractérisent le sous-sol et l'expression des données mesurées en fonction des caractéristiques du modèle est fortement non linéaire. Cela rend la résolution du problème inverse difficile (caractère mal posé, coût de calcul important, présence éventuelle de minima locaux).

Le problème inverse est généralement écrit sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire consistant à minimiser un critère des moindres carrés régularisé. Dans la plupart des cas, ce problème est résolu en utilisant un algorithme de minimisation locale. Pour réduire le nombre d'itérations, il est préférable d'initialiser l'algorithme par un modèle proche de la solution recherchée. Pour ce faire, certains auteurs font appel à des méthodes plus approximatives telles que celles évoquées dans le paragraphe 1.3.2 [Shipp et Singh, 2002 ; Operto *et al.*, 2006].

Inversion dans le domaine fréquentiel

Les premiers travaux en inversion des formes d'ondes complètes s'appuyaient sur une formulation des équations de propagation dans le domaine temporel [Tarantola, 1984 ; Mora, 1987]. Cependant, il peut être plus intéressant de travailler dans le domaine fréquentiel [Pratt, 1990] :

- Il est possible de se ramener à un nombre limité de fréquences pour résoudre le problème inverse [Pratt et Worthington, 1990 ; Sirgue et Pratt, 2004] et donc de réduire la quantité de données à traiter.
- Le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème direct est directement proportionnel au nombre de fréquences retenues. En diminuant le nombre de fréquences utilisées, on diminue le temps de calcul requis pour résoudre le problème direct et on accélère ainsi la résolution du problème inverse.
- Travailler dans le domaine fréquentiel peut se révéler plus économique en temps de calcul lorsque le nombre de positions de la source est important.

Un autre avantage de la formulation fréquentielle est qu'elle permet d'introduire facilement les informations de façon progressive. Plusieurs auteurs utilisent cette stratégie afin de faciliter la résolution du problème inverse. Par exemple, les données peuvent être introduites dans l'algorithme d'inversion en commençant par les basses fréquences et en considérant ensuite les plus hautes fréquences. Plusieurs démarches sont possibles :

- On travaille en permanence sur une seule fréquence. On commence par traiter la fréquence la plus basse puis on passe progressivement de la plus basse fréquence à la plus haute [Pratt et Worthington, 1990].
- On agglomère les fréquences. On commence par traiter la fréquence la plus basse puis on incorpore les fréquences suivantes jusqu'à traiter l'ensemble des fréquences [Bunks *et al.*, 1995 ; Campman et Dwi Riyanti, 2007].
- On travaille par groupes de plusieurs fréquences. en se déplaçant des basses vers les hautes fréquences [Pratt, 1999 ; Brossier, 2009].

La formulation fréquentielle permet également d'introduire les données progressivement dans le temps, en commençant par traiter les premières données enregistrées puis en incluant les arrivées plus tardives. Cela permet de traiter les données provenant des couches les plus superficielles du sous-sol avant de s'intéresser aux zones plus profondes. Pour ce faire, on utilise des fréquences complexes. Lorsque la partie imaginaire des fréquences est non nulle, les données sont atténuées suivant une loi exponentielle. On travaille alors avec des données fortement atténuées au départ puis avec une atténuation moins marquée ensuite [Shin *et al.*, 2002 ; Brossier, 2009].

Il est également possible de travailler avec des sous-ensembles de géophones en commençant par exemple par les courts offsets (géophones proches de la source) [Shipp et Singh, 2002].

1.4 Modélisation de la propagation des ondes

Le problème inverse consiste à déterminer les caractéristiques du sous-sol connaissant les données mesurées par les capteurs ainsi que le protocole d'imagerie utilisé (positions de la source vibratoire, signal émis par la source vibratoire et position des géophones). Pour résoudre le problème inverse, il est nécessaire de savoir résoudre le problème direct, c'est-à-dire construire un jeu de mesures (données enregistrées par les géophones) dans le cas où les caractéristiques du milieu ainsi que le protocole suivi sont connus. Il est donc nécessaire de savoir modéliser la propagation d'une onde sismique dans un milieu donné.

Afin d'optimiser les performances de l'algorithme de résolution du problème inverse, il faut trouver un compromis entre réalisme et complexité du modèle. En effet, le modèle de propagation des ondes doit être suffisamment fidèle à la réalité pour qu'un maximum d'informations présentes dans les données puissent être interprétées correctement lors de l'inversion. Cependant, l'algorithme de résolution du problème direct doit rester peu coûteux en temps de calcul et en place mémoire afin de ne pas pénaliser inutilement l'algorithme d'inversion.

Pour le projet d'imagerie des fondations de pylônes électriques, EDF R&D a pris en charge le développement de l'algorithme de résolution du problème direct [Kerzalı *et al.*, 2009] en reprenant la démarche proposée dans [Gélis, 2005]. Certaines évolutions ont ensuite été apportées à l'algorithme initial afin de diminuer le coût de calcul requis. Cet algorithme repose sur une discrétisation des équations de propagation des ondes élastiques (1.2) et (1.3) par différences finies. Nous allons décrire la démarche suivie pour aboutir finalement à une relation matricielle reliant les caractéristiques du milieu (v_p , v_s et ρ) et les champs des forces volumiques et des vitesses particulières (F^x , F^y , V^x et V^y).

1.4.1 Equations de propagation utilisées

Les équations (1.2) et (1.3) décrivent la propagation des ondes élastiques en deux dimensions dans le domaine temporel. Or nous souhaitons résoudre le problème inverse dans le domaine fréquentiel en travaillant sur un nombre limité de fréquences. Nous nous plaçons donc dans le

domaine fréquentiel pour résoudre le problème direct afin de déterminer directement les composantes fréquentielles des mesures qui sont utilisées pour la résolution du problème inverse.

Par la suite, nous désignerons par l'indice ω les différentes pulsations retenues ($\omega = 1, \dots, N_\omega$). De plus, étant donné que l'on réalise une acquisition en couverture multiple, nous introduisons l'indice k pour distinguer les différentes positions de la source ($k = 1, \dots, N_k$). Dans le domaine fréquentiel, pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k , les équations de propagation des ondes élastiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} -i\omega F_{\omega,k}^x(r) = & \omega^2 \rho(r) V_{\omega,k}^x(r) + \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_p(r)^2 \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^x(r)}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^x(r)}{\partial y} \right) \\ & + \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) (v_p(r)^2 - 2v_s(r)^2) \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^y(r)}{\partial y} \right) \\ & + \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^y(r)}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} -i\omega F_{\omega,k}^y(r) = & \omega^2 \rho(r) V_{\omega,k}^y(r) + \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) v_p(r)^2 \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^y(r)}{\partial y} \right) \\ & + \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^y(r)}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho(r) (v_p(r)^2 - 2v_s(r)^2) \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^x(r)}{\partial x} \right) \\ & + \alpha_\omega^x(r) \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho(r) v_s(r)^2 \alpha_\omega^y(r) \frac{\partial V_{\omega,k}^x(r)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sur le terrain, les ondes sismiques se propagent dans un milieu de dimensions infinies. Or nous devons nous ramener à un milieu de dimensions finies pour pouvoir modéliser la propagation des ondes. Pour ce faire, des zones d'absorption des ondes appelées Perfectly Matched Layers (PML) [Berenger, 1994] sont introduites sur le pourtour du domaine d'étude (voir figure 1.3).

La zone PML doit être suffisamment large vis-à-vis des longueurs d'ondes se propageant dans le milieu pour qu'elle atténue complètement les ondes arrivant sur les bords du domaine. Néanmoins, elle ne doit pas être trop étendue afin de ne pas alourdir inutilement la résolution du problème direct. En pratique, on fixe la largeur de la zone PML à la moitié de la longueur d'onde la plus grande se propageant dans le domaine d'étude.

L'introduction d'une zone PML dans le domaine se traduit par la présence des coefficients d'absorption α_ω^x et α_ω^y dans les équations de propagation. Ils sont classiquement définis de la façon suivante [Martin *et al.*, 2008] :

$$\alpha_\omega^x(r) = \frac{1}{1 + i\gamma_x(r)/\omega} \quad \text{et} \quad \alpha_\omega^y(r) = \frac{1}{1 + i\gamma_y(r)/\omega} \quad (1.6)$$

A l'intérieur du domaine d'étude, les coefficients γ_x et γ_y sont nuls. Les coefficients d'absorption n'ont ainsi aucune incidence sur la propagation des ondes. Dans la zone PML, γ_x et γ_y sont nuls à proximité du domaine intérieur et augmentent à mesure que l'on s'en éloigne. Cela génère un phénomène d'absorption de plus en plus marqué.

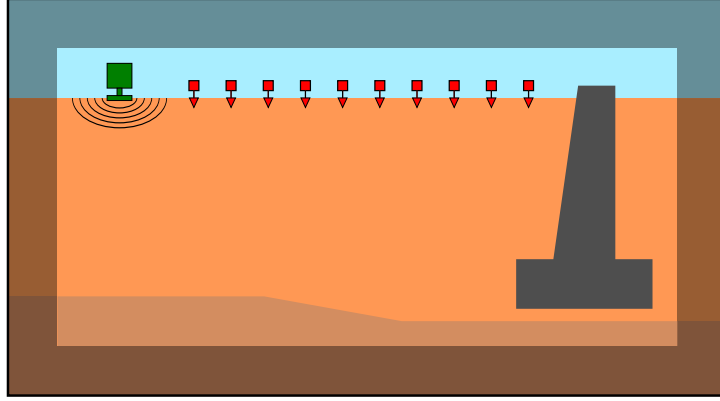


Figure 1.3 – Schéma du dispositif utilisé pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes électriques. La surface grisée correspond à la zone d'absorption des ondes (zone PML). Elle est introduite sur le pourtour du domaine afin de se ramener à un milieu de dimensions finies tout en simulant la propagation d'ondes dans un milieu infini.

1.4.2 Discrétisation des équations de propagation

Les équations de propagation (1.4) et (1.5) sont discrétisées par différences finies. Ce type de discrétisation est adapté pour la résolution d'un problème inverse puisque cela permet de modéliser la propagation des ondes dans un milieu hétérogène de manière simple et rapide [Virieux, 1986]. Le schéma de discrétisation proposé par Saenger [Saenger *et al.*, 2000] est utilisé ici car il s'adapte bien aux milieux dont les propriétés varient rapidement, ce qui est le cas dans notre étude au niveau de l'interface terre/béton. De plus, la surface libre, c'est-à-dire l'interface entre l'air et le sous-sol, se modélise de façon simple : il suffit d'imposer aux caractéristiques v_p et v_s d'être nulles au-dessus de l'interface.

On considère donc un maillage constitué de deux grilles disposées en quinconce (voir figure 1.4) :

- La première grille (représentée par des points noirs sur la figure 1.4 et sur les figures suivantes) est associée aux grandeurs v_p et v_s . Elle est donc liée aux caractéristiques physiques du milieu. Par la suite, nous désignerons les coordonnées des points de cette grille par des nombres entiers i et j .
- La seconde grille (représentée par des points blancs sur la figure 1.4 et sur les figures suivantes) est associée aux grandeurs F_x et F_y (les composantes de la densité volumique de force) et V_x et V_y (les composantes du champ de vitesse particulaire). Par la suite, nous désignerons les coordonnées des points de cette grille par $i \pm \frac{1}{2}$ et $j \pm \frac{1}{2}$ avec i et j entiers.

La masse volumique ρ ainsi que les coefficients d'atténuation α_x et α_y doivent quant à eux être définis sur les deux grilles.

Notons N_x le nombre de colonnes et N_y le nombre de lignes de la grille liée aux caractéristiques du milieu. La grille liée aux champs des forces volumiques et des vitesses particulières compte alors $N_x - 1$ colonnes et $N_y - 1$ lignes.

Pour discrétiser les opérations de dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ intervenant dans les équations (1.4) et (1.5), nous introduisons les quatre opérateurs de différences finies suivants :

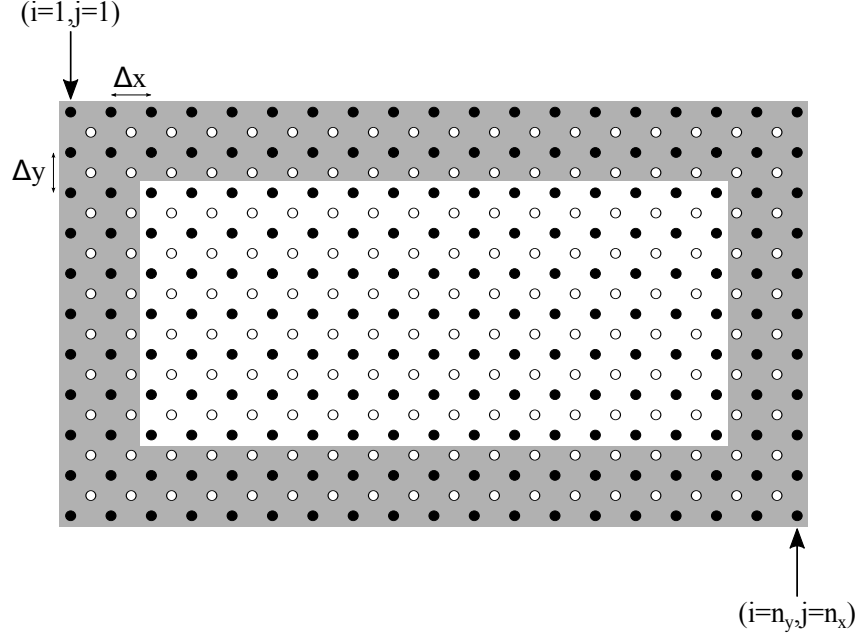
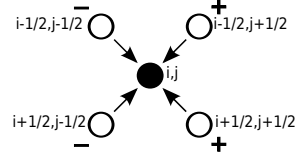


Figure 1.4 – Maillage utilisé pour discrétiser les équations de propagation. La surface grisée correspond à la zone PML. La grille blanche est associée aux composantes de la densité volumique de force (F_x et F_y) et aux composantes de la vitesse particulaire (V_x et V_y). La grille noire est associée aux caractéristiques du milieu (v_p et v_s). La masse volumique (ρ) et les coefficients d'atténuation (α_x et α_y) sont définis sur les deux grilles.

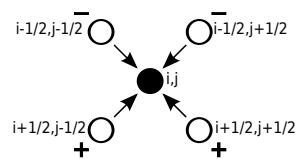
- $\mathcal{G}^x$ correspond à la dérivée partielle selon l'axe horizontal d'une grandeur X liée aux champs des forces et des vitesses particulaires :

$$\mathcal{G}^x(X)_{i,j} = \frac{(X)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (X)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (X)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \quad (1.7)$$



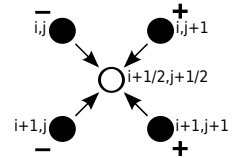
- $\mathcal{G}^y$ correspond à la dérivée partielle selon l'axe vertical d'une grandeur X liée aux champs des forces et des vitesses particulaires :

$$\mathcal{G}^y(X)_{i,j} = \frac{(X)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - (X)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} + (X)_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}} - (X)_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{2\Delta y} \quad (1.8)$$



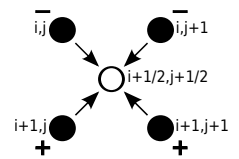
- $\mathcal{H}^x$ correspond à la dérivée partielle selon l'axe horizontal d'une grandeur X liée aux caractéristiques du milieu :

$$\mathcal{H}^x(X)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{(X)_{i+1,j+1} + (X)_{i,j+1} - (X)_{i+1,j} - (X)_{i,j}}{2\Delta x} \quad (1.9)$$



- $\mathcal{H}^y$ correspond à la dérivée partielle selon l'axe vertical d'une grandeur X liée aux caractéristiques du milieu :

$$\mathcal{H}^y(X)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{(X)_{i+1,j+1} - (X)_{i,j+1} + (X)_{i+1,j} - (X)_{i,j}}{2\Delta y} \quad (1.10)$$



Remarque : L'utilisation de l'un de ces opérateurs induit le passage d'une grille à l'autre.

1.4.3 Ecriture sous forme matricielle

Relation entre champ de force et champ de vitesse particulière

Après discrétisation, nous pouvons écrire les équations de propagation sous forme matricielle. Soient $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\mathbf{V}_{\omega,k}$ deux vecteurs comprenant l'ensemble des composantes du champ de force et du champ de vitesse particulière pour une pulsation ω et une position de la source k données. Ce sont des vecteurs de longueur $2(N_x - 1)(N_y - 1)$. Nous avons :

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = \mathbf{A}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (1.11)$$

A priori, seules un petit nombre de composantes de $\mathbf{F}_{\omega,k}$ sont non nulles. Il s'agit des composantes associées aux points du maillage excités par la source sismique à la position k . Leur amplitude (complexe) est proportionnelle à celle du signal source à la pulsation ω . Néanmoins, une telle modélisation du champ de force peut conduire à des problèmes numériques (apparition d'un « effet damier » lors du calcul de $\mathbf{V}_{\omega,k}$). Pour éviter cela, une convolution spatiale par une gaussienne à deux dimensions est effectuée [Gélis, 2005 ; Kerzali *et al.*, 2009]. L'écart-type est choisi égal au pas de discrétisation dans les deux directions de l'espace.

L'équation (1.11) met en évidence la relation de linéarité entre la densité volumique de force et le champ de vitesse particulière. $\mathbf{A}_{\omega}$ est la matrice d'impédance associée à la pulsation ω . Elle dépend des caractéristiques du milieu et de la pulsation considérée ω mais elle est indépendante de la position de la source k .

Il s'agit d'une matrice creuse de taille $2(N_x - 1)(N_y - 1) \times 2(N_x - 1)(N_y - 1)$. Chacune de ses lignes possède au plus 18 éléments non nuls. En effet, chaque composante du vecteur $\mathbf{F}_{\omega,k}$ s'écrit en fonction des deux composantes du vecteur $\mathbf{V}_{\omega,k}$ prises au même point et à ses huit points voisins. Autrement dit, il s'agit d'un voisinage « au deuxième ordre » : le calcul d'une composante de $\mathbf{F}_{\omega,k}$ passe par l'utilisation des opérateurs $\mathcal{G}^x$ et $\mathcal{G}^y$ puis des opérateurs $\mathcal{H}^x$ et $\mathcal{H}^y$ qui induisent chacun le passage d'une grille à l'autre via une combinaison linéaire en quatre points voisins (cf équations 1.7 à 1.10). La structure de la matrice d'impédance est schématisée sur la figure 1.5 dans le cas où les vecteurs $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\mathbf{V}_{\omega,k}$ sont construits en parcourant la grille associée colonne par colonne et en alternant composante selon l'axe horizontal et composante selon l'axe vertical.

Décomposition des matrices d'impédance

Soient :

- $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ deux vecteurs dont les composantes sont égales au carré des vitesses des ondes de compression et des ondes de cisaillement respectivement ;
- $\boldsymbol{\rho}$ un vecteur dont les composantes sont égales à la masse volumique définie sur la grille liée aux caractéristiques du milieu ;
- $\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^x$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^y$ deux vecteurs dont les composantes sont égales aux coefficients d'atténuation définis sur la grille liée aux caractéristiques du milieu.

Ces cinq vecteurs sont de longueur $N_x N_y$.

La matrice d'impédance dépend des caractéristiques du milieu et des coefficients d'atténuation. Nous pouvons la décomposer en une somme de trois termes :

$$\mathbf{A}_{\omega} = \mathbf{A}_{\omega}^p + \mathbf{A}_{\omega}^s + \mathbf{A}_{\omega}^{\rho} \quad (1.12)$$

où :

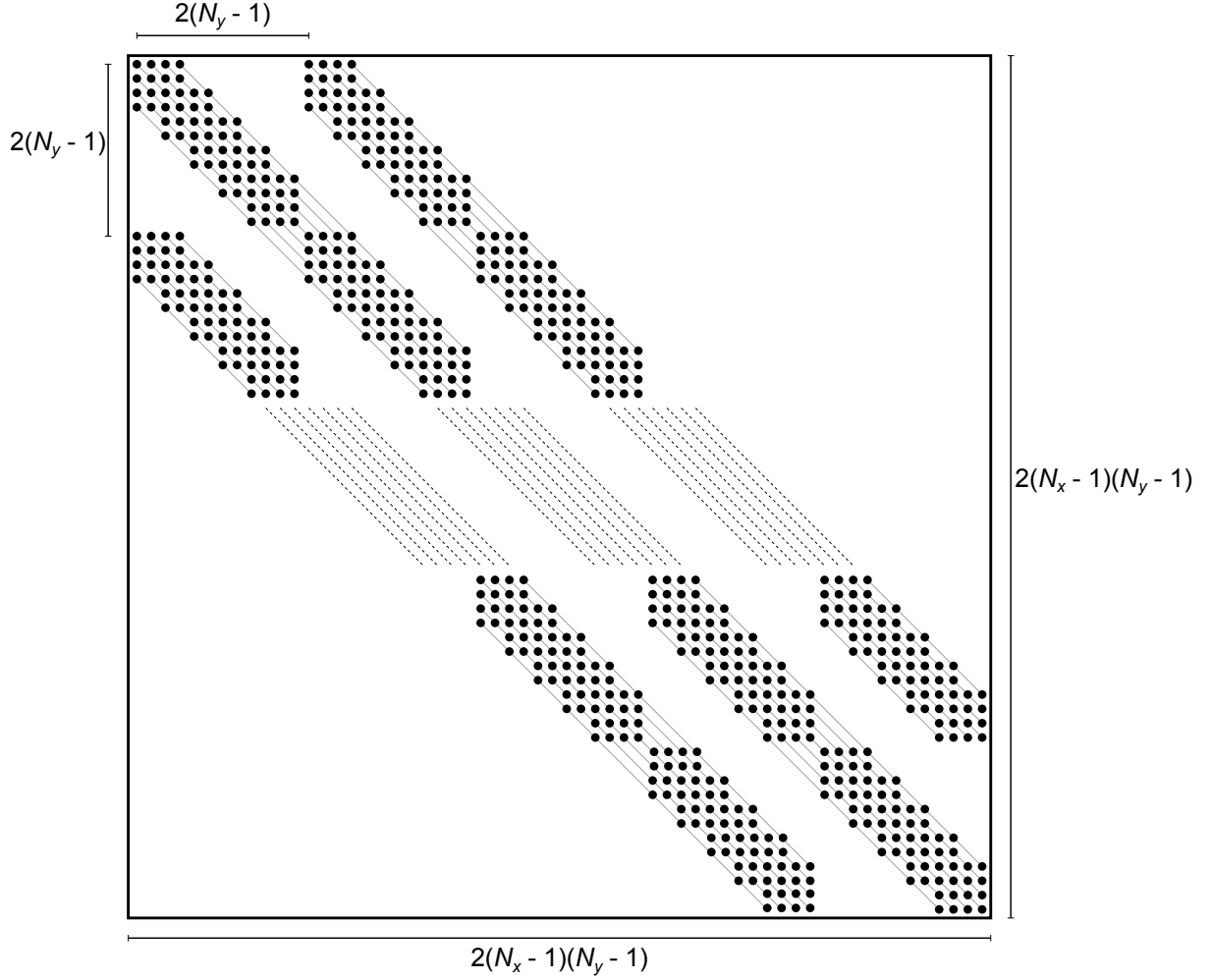


Figure 1.5 – Structure de la matrice d'impédance dans le cas où les vecteurs $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\mathbf{V}_{\omega,k}$ sont construits en parcourant la grille associée colonne par colonne et en alternant composante selon l'axe horizontal et composante selon l'axe vertical. N_x et N_y désignent le nombre de colonnes et de lignes de la grilles liées aux caractéristiques du milieu respectivement. Dans le cas général, chaque ligne comporte 8, 12 ou 18 éléments non nuls.

- $\mathbf{A}_{\omega}^p$ comprend exclusivement les termes dépendant des caractéristiques v_p .
- $\mathbf{A}_{\omega}^s$ comprend exclusivement les termes dépendant des caractéristiques v_s .
- $\mathbf{A}_{\omega}^{\rho}$ comprend les termes ne dépendant ni des caractéristiques v_p , ni des caractéristiques v_s .

Une relation faisant intervenir des matrices creuses a été établie entre chacun des termes $\mathbf{A}_{\omega}^p$, $\mathbf{A}_{\omega}^s$ et $\mathbf{A}_{\omega}^{\rho}$ et les vecteurs $\mathbf{v}_p^2$, $\mathbf{v}_s^2$, $\boldsymbol{\rho}$, $\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^x$ et $\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^y$ [Vautrin et Voorons, 2010]^b :

$$\mathbf{A}_{\omega}^p = \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^x\} \mathbf{H}^x \\ \text{Diag}\{\mathbf{M}\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^y\} \mathbf{H}^y \end{bmatrix} \text{Diag}\{\mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho}\} \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^x\} \mathbf{G}^x & \text{Diag}\{\boldsymbol{\alpha}_{\omega}^y\} \mathbf{G}^y \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

b. $\text{Diag}\{\mathbf{w}\}$ désigne une matrice diagonale dont la diagonale est le vecteur $\mathbf{w}$ et $\odot$ représente le produit composante par composante ou produit d'Hadamard.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_\omega^s = & \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^y\} \mathbf{H}^y \\ \text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^x\} \mathbf{H}^x \end{bmatrix} \text{Diag}\{v_s^2 \odot \rho\} \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y & \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x \\ \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x & -\text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^x\} \mathbf{H}^x \\ -\text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^y\} \mathbf{H}^y \end{bmatrix} \text{Diag}\{v_s^2 \odot \rho\} \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x & -\text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y \\ \text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y & \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x \end{bmatrix} \\
& - \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^x\} \mathbf{H}^x \\ \text{Diag}\{\mathbf{M}\alpha_\omega^y\} \mathbf{H}^y \end{bmatrix} \text{Diag}\{v_s^2 \odot \rho\} \begin{bmatrix} \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x & \text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y \\ \text{Diag}\{\alpha_\omega^y\} \mathbf{G}^y & \text{Diag}\{\alpha_\omega^x\} \mathbf{G}^x \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{A}_\omega^\rho = \omega^2 \text{Diag}\{\mathbf{M}\rho\} \tag{1.15}$$

Les distributions de ρ , α_ω^x et α_ω^y doivent *a priori* être définies sur les deux grilles mais nous avons introduit la matrice $\mathbf{M}$ qui permet de se ramener uniquement aux distributions définies sur la grille liée aux caractéristiques du milieu.

Les matrices $\mathbf{G}^x$, $\mathbf{G}^y$, $\mathbf{H}^x$ et $\mathbf{H}^y$ sont des matrices rectangulaires creuses associées aux quatre opérateurs de différences finies (voir les équations (1.7) à (1.10)) :

- $\mathbf{G}^x$ et $\mathbf{G}^y$ sont de taille $N_x N_y \times (N_x - 1)(N_y - 1)$. Chacune de leurs lignes comporte 1, 2 ou 4 coefficients non nuls correspondant aux coefficients des opérateurs de différences finies $\mathcal{G}^x$ et $\mathcal{G}^y$ ($\pm \frac{1}{2\Delta x}$ et $\pm \frac{1}{2\Delta y}$).
- $\mathbf{H}^x$ et $\mathbf{H}^y$ sont de taille $(N_x - 1)(N_y - 1) \times N_x N_y$. Chacune de leurs lignes comporte 4 coefficients non nuls correspondant aux coefficients des opérateurs de différences finies $\mathcal{H}^x$ et $\mathcal{H}^y$ ($\pm \frac{1}{2\Delta x}$ et $\pm \frac{1}{2\Delta y}$).

A partir des équations de propagation des ondes élastiques formulées dans le domaine fréquentiel (équations (1.4) et (1.5), page 17), nous avons donc établi une relation matricielle permettant de faire le lien entre les champs des forces et des vitesses particulières et les grandeurs caractéristiques du milieu. Cette relation est utilisée pour résoudre le problème direct et le problème inverse.

Notons que l'utilisation des équations (1.13) à (1.15) nous a permis d'accélérer la construction des matrices d'impédance par rapport à l'algorithme initial. Cela a entraîné une accélération de la résolution du problème direct et donc une diminution du temps de calcul nécessaire à la résolution du problème inverse.

1.5 Résolution du problème direct

1.5.1 Algorithme initial

Nous rappelons que le problème direct consiste à déterminer les données mesurées par les géophones connaissant les caractéristiques du sous-sol et la procédure suivie. Pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k , l'objectif est donc de calculer la composante verticale de la vitesse particulière à l'endroit des géophones connaissant :

- les vecteurs des caractéristiques du sous-sol $\mathbf{v}_p^2$, $\mathbf{v}_s^2$ et ρ ;
- la position de la source et le signal émis par la source qui permettent de déterminer les vecteurs $\mathbf{F}_{\omega,k}$.

Pour chaque couple (ω, k) , la résolution du problème direct s'effectue en deux temps. Dans une première étape, les champs de vitesses $\mathbf{V}_{\omega, k}$ sont calculés dans l'ensemble du domaine en résolvant le système linéaire donné à l'équation (1.11). Les matrices normales de ces systèmes sont les matrices d'impédance $\mathbf{A}_{\omega}$ qui dépendent de ω mais pas de k . Une même matrice normale est donc commune à plusieurs systèmes linéaires. Pour mutualiser les calculs et accélérer la résolution du problème direct, une décomposition LU de chaque matrice d'impédance est effectuée avant de résoudre les systèmes linéaires associés. Ces matrices étant creuses, nous faisons appel à un algorithme de permutation des lignes et des colonnes qui minimise le taux de coefficients non nuls dans les facteurs L et U [Davis, 2004]. De cette façon, la résolution des systèmes linéaires est plus rapide. Dans une deuxième étape, les composantes correspondant aux mesures $\mathbf{g}_{\omega, k}$ sont extraites de $\mathbf{V}_{\omega, k}$. La démarche suivie pour résoudre le problème direct est résumée dans l'algorithme 1.

Algorithme 1: Algorithme initial de résolution du problème direct

Pour chaque pulsation ω :

 Construction de la matrice d'impédance $\mathbf{A}_{\omega}$;

 Calcul des matrices de permutation des lignes et des colonnes $\mathbf{P}_{\omega}$ et $\mathbf{Q}_{\omega}$;

 Factorisation LU de la matrice d'impédance après permutation des lignes et des colonnes : $\mathbf{P}_{\omega}\mathbf{A}_{\omega}\mathbf{Q}_{\omega} = \mathbf{L}_{\omega}\mathbf{U}_{\omega}$;

Pour chaque position de la source k :

 Construction du champ des forces $\mathbf{F}_{\omega, k}$;

 Calcul du champs des vitesses : $\mathbf{V}_{\omega, k} = \mathbf{Q}_{\omega}\mathbf{U}_{\omega}^{-1}\mathbf{L}_{\omega}^{-1}\mathbf{P}_{\omega}\mathbf{F}_{\omega, k}$;

 Restriction aux composantes mesurées par les géophones : $\mathbf{g}_{\omega, k} = \mathbf{E}_g \mathbf{V}_{\omega, k}$;

Fin

Fin

1.5.2 Restriction à une zone d'intérêt

Pour les méthodes d'imagerie sismique utilisant le champ d'ondes complet, le problème inverse est souvent résolu en minimisant un critère des moindres carrés pénalisé avec un algorithme d'optimisation local. Il est donc préférable d'initialiser l'algorithme avec des caractéristiques proches de la solution recherchée afin de minimiser le nombre d'itérations. Pour ce faire, certains auteurs font appel à une méthode d'imagerie alternative telles que celles présentées dans le paragraphe 1.3.2, page 12 [Shipp et Singh, 2002 ; Operto *et al.*, 2006]. Elles permettent d'obtenir une première estimation des caractéristiques recherchées.

Supposons qu'une telle méthode soit utilisée dans notre étude et qu'une estimation *a priori* des caractéristiques du milieu soit disponible préalablement à l'inversion des formes d'ondes complètes. Par la suite, le milieu construit à partir des caractéristiques estimées *a priori* sera appelé « milieu de référence » et ses caractéristiques seront notées $v_{p,0}$, $v_{s,0}$ et ρ_0 .

Le problème inverse consiste alors à retrouver les variations des caractéristiques v_p , v_s et ρ par rapport à celles du milieu de référence. Les variations les plus importantes sont localisées à proximité de la fondation. Nous pouvons donc supposer que les caractéristiques du milieu de référence sont égales aux caractéristiques réelles dans les régions éloignées de la fondation et nous ramener à une zone d'intérêt plus restreinte pour résoudre les problèmes direct et inverse. Cette démarche a pour avantage de réduire le nombre d'inconnues et de diminuer le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème direct. Cela contribue à accélérer la convergence de l'algorithme d'inversion.

Par la suite, nous désignerons par $\mathbf{v}_p^2$, $\mathbf{v}_s^2$ et $\boldsymbol{\rho}$ les caractéristiques du milieu en se restreignant aux points du maillage qui appartiennent à la zone d'intérêt. Ces vecteurs sont de longueur $N_x^Z N_y^Z$ où N_x^Z et N_y^Z sont les dimensions de la zone d'intérêt en nombre de points du maillage.

Décomposition des matrices d'impédance

Nous avons vu que la résolution du problème direct passe par la résolution de plusieurs systèmes linéaires faisant intervenir des matrices d'impédance (voir section 1.4.3, page 20) :

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = \mathbf{A}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (1.16)$$

Seule une partie des matrices d'impédance dépend des caractéristiques de la zone d'intérêt. A une permutation des lignes et des colonnes près, nous avons :

$$\mathbf{A}_{\omega} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\omega,1}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) & \mathbf{A}_{\omega,20} \\ \hline \mathbf{A}_{\omega,30} & \mathbf{A}_{\omega,40} \end{array} \right] \quad (1.17)$$

où $\mathbf{A}_{\omega,1}$ désigne la plus petite sous-matrice carrée de $\mathbf{A}_{\omega}$ dépendant des caractéristiques de la zone d'intérêt.

Pour mettre en évidence les variations des caractéristiques par rapport au milieu de référence, nous pouvons écrire :

$$\mathbf{A}_{\omega} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{\omega,10} & \mathbf{A}_{\omega,20} \\ \hline \mathbf{A}_{\omega,30} & \mathbf{A}_{\omega,40} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{X}_{\omega}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \quad (1.18)$$

$$= \mathbf{A}_{\omega}^0 + \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X}_{\omega}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) \mathbf{E}_Z \quad (1.19)$$

où $\mathbf{A}_{\omega}^0$ est la matrice d'impédance construite à partir des caractéristiques du milieu de référence et où $\mathbf{E}_Z$ est une matrice d'échantillonnage permettant de se ramener aux points appartenant à la zone d'intérêt.

A partir des équations (1.13), (1.14) et (1.15) page 21, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\omega}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ \mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_{p,0}^2 \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}^p \\ &+ \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \{ \mathbf{v}_s^2 \odot \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_{s,0}^2 \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}_i^s \\ &+ \omega^2 \text{Diag} \{ \mathbf{M}_Z(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) \} \end{aligned} \quad (1.20)$$

où les matrices $\mathbf{G}^p$, $\mathbf{G}_i^s$, $\mathbf{H}^p$, $\mathbf{H}_i^s$ et $\mathbf{M}_Z$ se déduisent des matrices $\mathbf{G}^x$, $\mathbf{G}^y$, $\mathbf{H}^x$, $\mathbf{H}^y$ et $\mathbf{M}$ en ne retenant que les lignes et les colonnes associées à la zone d'intérêt. Nous nous plaçons dans le cas où la zone d'intérêt n'a pas d'intersection avec la zone PML. Par conséquent, l'équation précédente ne fait pas intervenir les coefficients d'atténuation α_{ω}^x et α_{ω}^y .

Choix d'une formulation pour exprimer les données en fonction des caractéristiques de la zone d'intérêt

Nous devons être en mesure de traiter des problèmes de taille réaliste : les dimensions du domaine considéré sont de l'ordre du décimètre et la résolution spatiale du maillage est de l'ordre du centimètre. Un espace mémoire important est donc nécessaire pour résoudre le problème

inverse. Plusieurs formulations peuvent être utilisées pour exprimer un jeu de données $\mathbf{g}_{\omega,k}$ en fonction des caractéristiques de la zone d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$, $\mathbf{v}_s^2$ et $\boldsymbol{\rho}$.

Parmi les différentes formulations possibles, une de nos contributions consiste à sélectionner celle qui minimise l'espace mémoire requis lors de l'inversion. Pour orienter notre choix, nous avons supposé qu'un grand nombre de fréquences intervenaient dans la procédure d'inversion. Cela nous a amenés à retenir deux formulations qui seront explicitées dans les paragraphes suivants. Leur différence est liée à l'utilisation ou non du lemme d'inversion matricielle par bloc qui permet d'exploiter le fait que l'on se restreint à une zone d'intérêt. Nous proposerons ensuite une démarche permettant de déterminer la formulation la plus adaptée.

Expression obtenue sans utilisation du lemme d'inversion

La première expression proposée est obtenue sans le recours au lemme d'inversion matricielle par bloc. Soit $\mathbf{V}_{\omega,k}^0$ le champ de vitesse dans le milieu de référence :

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = \mathbf{A}_{\omega}^0 \mathbf{V}_{\omega,k}^0 \quad (1.21)$$

On a donc :

$$\mathbf{A}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k} = \mathbf{A}_{\omega}^0 \mathbf{V}_{\omega,k}^0 \quad (1.22)$$

En soustrayant le vecteur $\mathbf{A}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k}^0$ de chaque côté de l'égalité, on obtient (cf. équation (1.19)) :

$$\mathbf{A}_{\omega} (\mathbf{V}_{\omega,k} - \mathbf{V}_{\omega,k}^0) = -\mathbf{E}_Z^t \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{E}_Z \mathbf{V}_{\omega,k}^0 \quad (1.23)$$

En isolant le vecteur $\mathbf{V}_{\omega,k}$ et en se ramenant aux composantes mesurées par les géophones, on obtient l'expression suivante :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{E}_g (\mathbf{A}_{\omega}^0 + \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{E}_Z)^{-1} \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (1.24)$$

où $\mathbf{g}_{\omega,k}^0 = \mathbf{E}_g \mathbf{V}_{\omega,k}^0$ et $\mathbf{V}_{\omega,k}^{10} = \mathbf{E}_Z \mathbf{V}_{\omega,k}^0$.

Expression obtenue avec utilisation du lemme d'inversion

La seconde expression proposée est obtenue avec le recours au lemme d'inversion matricielle par bloc. Cette expression peut se construire directement à partir de l'équation (1.24) en appliquant le lemme d'inversion matricielle par bloc^c à la matrice $\mathbf{A}_{\omega}^0 + \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{E}_Z$. On obtient ainsi :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \boldsymbol{\rho}) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{E}_g \left[\begin{array}{c} (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X}_{\omega})^{-1} \\ -\mathbf{A}_{\omega,40}^{-1} \mathbf{A}_{\omega,30} (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X}_{\omega})^{-1} \end{array} \right] \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (1.25)$$

$$= \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X}_{\omega})^{-1} \mathbf{X}_{\omega} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (1.26)$$

où $\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 = \mathbf{A}_{\omega,10} - \mathbf{A}_{\omega,20} \mathbf{A}_{\omega,40}^{-1} \mathbf{A}_{\omega,30}$ et $\mathbf{B}_{\omega}^0 = \mathbf{E}_g \left[\begin{array}{c} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{\omega,40}^{-1} \mathbf{A}_{\omega,30} \end{array} \right]$.

c. Lemme d'inversion matricielle par bloc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)^{-1} & -(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \\ -\mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)^{-1} & \mathbf{A}_4^{-1} + \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)^{-1} \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \end{bmatrix}$$

Choix de la formulation selon la configuration du problème

Nous souhaitons minimiser l'espace mémoire requis pour la résolution du problème inverse. Pour se ramener aux deux formulations précédentes, nous avons supposé qu'un grand nombre de pulsations intervenaient dans l'inversion. Dans ce cas, les variables qui dépendent de la pulsation ω jouent un rôle prépondérant dans le choix de l'une ou l'autre des deux formulations proposées.

- Pour l'expression obtenue sans utilisation du lemme d'inversion matricielle, il s'agit des variables $\mathbf{A}_{\omega}^0$, $\mathbf{V}_{\omega,k}^{10}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}^0$.
- Pour l'expression obtenue avec utilisation du lemme d'inversion matricielle, il s'agit des variables $\mathbf{A}_{\omega,Z}^0$, $\mathbf{B}_{\omega}^0$, $\mathbf{V}_{\omega,k}^{10}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}^0$.

Les variables $\mathbf{V}_{\omega,k}^{10}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}^0$ sont présentes dans les deux formulations proposées. Le choix de la méthode s'opère donc en fonction de l'espace mémoire occupé par les matrices $\mathbf{A}_{\omega}^0$ d'une part et les matrices $\mathbf{A}_{\omega,Z}^0$ et $\mathbf{B}_{\omega}^0$ d'autre part. Pour orienter ce choix, nous proposons de comparer le nombre de coefficients non nuls contenus dans ces variables pour chaque pulsation.

- Pour l'inversion sans utilisation du lemme d'inversion :

Les variables occupant le plus d'espace en mémoire sont les matrices $\mathbf{A}_{\omega}^0$ dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à $2(N_x - 1)(N_y - 1)$. En dehors des lignes associées aux bords du domaine, on dénombre 18 coefficients non nuls par ligne. Pour chaque pulsation, le nombre total de composantes non nulles est environ égal à :

$$18 \times 2(N_x - 1)(N_y - 1)$$

- Pour l'inversion avec utilisation du lemme d'inversion :

Les variables occupant le plus d'espace en mémoire sont les matrices $\mathbf{A}_{\omega,Z}^0$ et $\mathbf{B}_{\omega}^0$. On rappelle que :

$$\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 = \mathbf{A}_{10,\omega} - \mathbf{A}_{\omega,20}\mathbf{A}_{\omega,40}^{-1}\mathbf{A}_{\omega,30} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\omega}^0 = \mathbf{E}_g \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{A}_{\omega,40}^{-1}\mathbf{A}_{\omega,30} \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

- $\mathbf{A}_{10,\omega}$ est une matrice creuse dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes est égal à $2(N_x^Z + 1)(N_y^Z + 1)$. En dehors des lignes associées aux bords de la zone d'intérêt, on dénombre 18 coefficients non nuls par ligne.
 - $\mathbf{A}_{\omega,40}^{-1}$ est une matrice pleine.
 - $\mathbf{A}_{\omega,20}$ est une matrice dont seules $4(N_x^Z + N_y^Z)$ lignes sont non nulles.
 - $\mathbf{A}_{\omega,30}$ est une matrice dont seules $4(N_x^Z + N_y^Z)$ colonnes sont non nulles.
- Par conséquent, pour chaque pulsation ω , le nombre de composantes non nulles présentes dans $\mathbf{A}_{\omega,Z}^0$ est environ égal à :

$$18 \times 2(N_x^Z + 1)(N_y^Z + 1) + (4(N_x^Z + N_y^Z))^2$$

et dans le cas où les capteurs sont situés à l'extérieur de la zone d'intérêt, le nombre de composantes non nulles présentes dans $\mathbf{B}_{\omega}^0$ est environ égal à :

$$N_g \times 4(N_x^Z + N_y^Z)$$

où N_g est égal au nombre de géophones utilisés.

Le choix de l'expression minimisant l'espace mémoire requis pour résoudre le problème inverse s'effectue donc en comparant N_{SLI} (sans utilisation du lemme d'inversion) et N_{ALI} (avec utilisation du lemme d'inversion) :

$$\begin{aligned} N_{\text{SLI}} &= 36(N_x - 1)(N_y - 1) \\ N_{\text{ALI}} &= 36(N_x^Z + 1)(N_y^Z + 1) + 16(N_x^Z + N_y^Z)^2 + 4N_g(N_x^Z + N_y^Z) \end{aligned}$$

Comparaison sur une configuration de taille réaliste

On considère un milieu de 12 mètres de longueur et de 5 mètres de profondeur discrétisé avec une résolution de 1 cm et sondé avec 40 capteurs (un capteur tous les 30 cm). Nous supposons que la zone d'intérêt est carrée. Les dimensions de ce problème sont donc $N_x = 1200$, $N_y = 500$, $N_{\text{capt}} = 40$ et $N_x^Z = N_y^Z = n^Z$.

Nous faisons évoluer la taille de la zone d'intérêt de manière à déterminer le seuil à partir duquel il semble préférable d'utiliser la méthode d'inversion sans utilisation du lemme d'inversion matricielle par bloc. La figure 1.6 montre l'évolution de N_{SLI} et N_{ALI} (voir équations ci-dessus) en fonction de n^Z (la longueur et la profondeur de la zone d'intérêt sont exprimées en mètres).

L'égalité entre N_{SLI} et N_{ALI} est obtenue pour une zone d'intérêt de longueur et de profondeur égale à 4,5 mètres environ. Il s'agit donc du seuil au-delà duquel il est préférable d'utiliser l'expression obtenue sans le lemme d'inversion matricielle pour minimiser la place mémoire occupée. Pour une dimension de la zone d'intérêt inférieure, c'est l'expression obtenue en utilisant le lemme d'inversion qui est la moins coûteuse en mémoire.

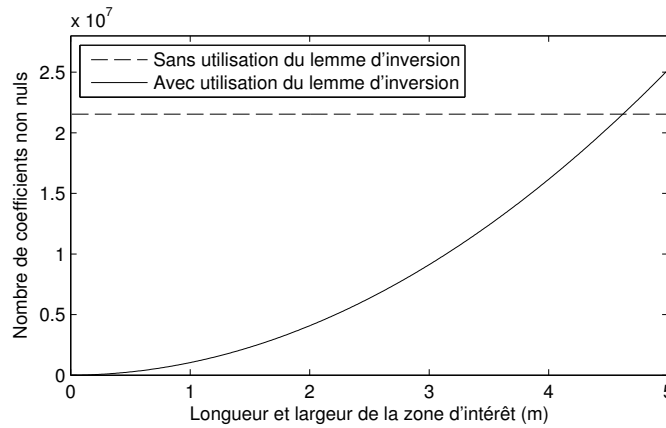


Figure 1.6 – Evolution de N_{SLI} et N_{ALI} en fonction des dimensions de la zone d'intérêt en mètres pour choisir la méthode d'inversion la moins coûteuse en espace mémoire

1.6 Milieux utilisés pour tester les méthodes d'inversion proposées

Les chapitres suivants sont consacrés à la résolution du problème inverse. Pour comparer les performances des différentes méthodes d'inversion, nous proposons de travailler sur deux jeux de données synthétiques. Ceux-ci sont obtenus à partir de deux configurations différentes. La

première correspond à un milieu sans cheminée ni surface libre et la seconde à un milieu avec cheminée et surface libre. Dans les deux cas, nous nous plaçons dans l'hypothèse où les régions Terre et Béton du sous-sol sont homogènes.

Travailler sur un milieu de taille réaliste requiert un temps de calcul et un espace mémoire relativement importants. En particulier, étant donné les dimensions du milieu ausculté (de l'ordre de la dizaine de mètres) et la résolution spatiale du maillage (de l'ordre du centimètre), le nombre d'inconnues du problème est considérable (jusqu'à plusieurs millions). Nous avons choisi de travailler sur des milieux de taille réduite. Le coût de calcul est alors plus abordable, ce qui permet de multiplier les tests d'inversion et de mieux cerner les performances des méthodes d'inversion.

Dans un premier temps, nous nous placerons dans le cas où la masse volumique du milieu est constante dans le sous-sol (caractéristique ρ uniforme) et connue *a priori*. Les méthodes d'inversion consisteront alors à estimer les paramètres v_p et v_s . Les données simulées sont bruitées avant d'être utilisées pour résoudre le problème inverse. Nous avons ajouté une séquence de bruit blanc gaussien dont l'amplitude est telle que le rapport signal sur bruit est égal à 30 dB.

Nous présentons ci-dessous les deux configurations utilisées pour comparer les performances des différentes méthodes d'inversion.

1.6.1 Milieu sans cheminée ni surface libre

Pour la première configuration, on considère un milieu sans cheminée ni surface libre. Les dimensions de ce milieu sont de 1 mètre par 50 centimètres et comprend un bloc de béton rectangulaire de 30 centimètres de largeur et de 25 centimètres de profondeur. Les caractéristiques physiques des régions Terre et Béton sont indiquées dans le tableau 1.1.

Région	Caractéristiques		
Terre	$v_p^T = 300$ m/s	$v_s^T = 150$ m/s	$\rho^T = 1500$ kg/m ³
Béton	$v_p^B = 4000$ m/s	$v_s^B = 2200$ m/s	$\rho^B = 1500$ kg/m ³

Tableau 1.1 – Caractéristiques du milieu sans cheminée ni surface libre

Le dispositif de mesure comprend 19 géophones que l'on place le long d'une ligne horizontale 10 centimètres au-dessus du bloc de béton. La source vibratoire prend quatre positions successives en restant à la même hauteur que les géophones. Le signal émis par la source est un Ricker dont la fréquence principale est de 200 Hz. Pour résoudre le problème inverse, nous retenons 10 fréquences situées dans la bande passante de ce signal (voir figure 1.7). Nous nous plaçons ainsi dans le cas général où l'énergie du signal transmis dans le sous-sol n'est pas uniformément répartie sur l'axe fréquentiel (voir section 1.2.3, page 9) et où le rapport signal / bruit n'est pas égal d'une fréquence à l'autre.

La résolution du maillage dépend des longueurs d'ondes qui se propagent dans le milieu. Sans la présence d'une surface libre, la résolution spatiale doit être inférieure ou égale au dixième de la plus petite longueur d'onde de compression se propageant dans le milieu. Dans notre cas, les ondes de compression se propagent à la vitesse de 300 m/s dans la terre et la plus grande fréquence retenue pour l'inversion est de 500 Hz. La petite longueur d'onde de compression est donc égale à 60 cm ($\lambda_p = v_p/f$). La résolution spatiale doit donc être inférieure ou égale à 6 cm. Nous prenons une résolution égale à 5 cm.

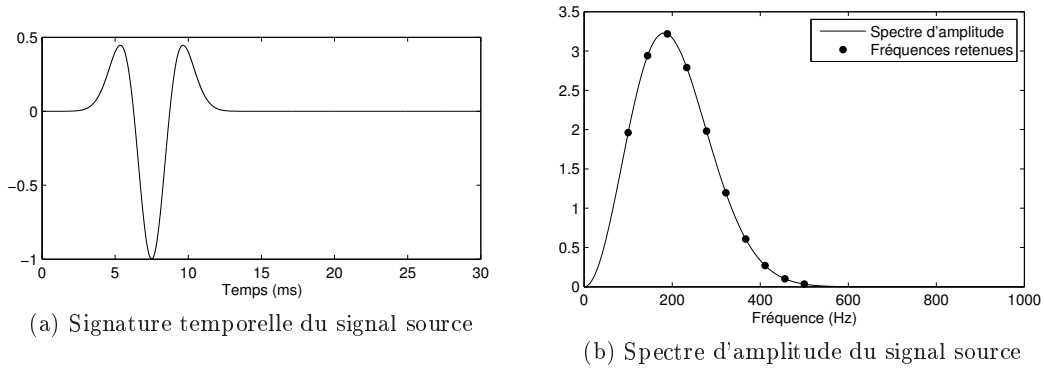


Figure 1.7 – Signature temporelle du signal émis par la source (à gauche) et spectre d'amplitude correspondant (à droite). Les points placés sur le spectre d'amplitude désignent les composantes fréquentielles retenues pour l'inversion (10 fréquences équiréparties entre 100 Hz et 500 Hz).

La largeur de la zone PML est également définie en fonction des longueurs d'ondes qui se propagent dans le milieu. Elle doit être au moins égale à la moitié de la plus grande longueur d'onde se propageant dans la région Terre. Les ondes de compression se propagent à la vitesse de 300 m/s dans la terre et la plus petite fréquence retenue pour l'inversion est de 100 Hz. La longueur d'onde correspondante est donc de 3 m et la largeur de la zone PML est fixée à 1,5 m.

Un schéma du milieu sans cheminée ni surface libre et du placement du dispositif de mesure est donné sur la figure 1.8 (la zone PML n'est pas représentée). Les données issues des capteurs pour une position de la source donnée sont habituellement représentées sous forme de sismogrammes. Nous représentons sur la figure 1.9 les sismogrammes correspondant à la deuxième position de la source vibratoire.

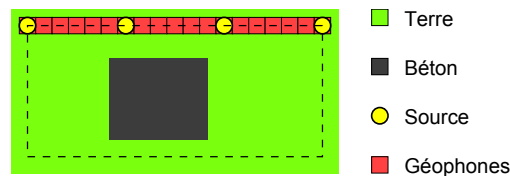


Figure 1.8 – Schéma du milieu sans cheminée ni surface libre. La ligne en pointillés représente la frontière de la zone d'intérêt qui comprend 18 pixels en largeur et 8 pixels en profondeur.

1.6.2 Milieu avec cheminée et surface libre

Pour la seconde configuration, un milieu de 2 mètres de largeur et de 70 centimètres de profondeur avec cheminée et surface libre est considéré. Ce milieu comprend un objet en béton de géométrie plus complexe. La largeur maximale de cet objet est de 50 centimètres et sa hauteur totale est de 30 centimètres. Les caractéristiques physiques des différentes régions du milieu sont indiquées dans le tableau 1.2.

Le dispositif de mesure comprend 90 géophones placés le long d'une ligne horizontale. Ils mesurent la composante verticale de la vitesse particulière juste sous la surface libre. La source vibratoire est placée au même niveau et elle prend six positions successives. Comme pour le milieu sans cheminée ni surface libre, le signal émis par la source est un Ricker dont la fréquence

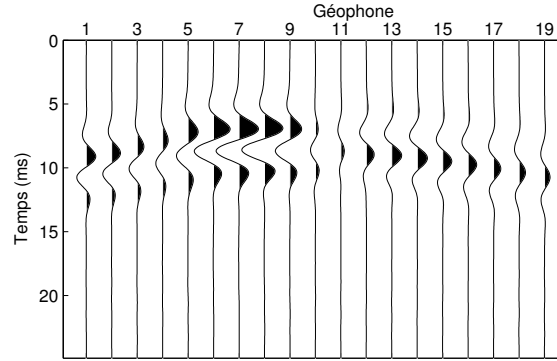


Figure 1.9 – Sismogrammes obtenus sur le milieu sans cheminée ni surface libre pour la deuxième position de la source

Région	Caractéristiques		
Terre	$v_p^T = 300$ m/s	$v_s^T = 150$ m/s	$\rho^T = 1500$ kg/m ³
Béton	$v_p^B = 4000$ m/s	$v_s^B = 2200$ m/s	$\rho^B = 1500$ kg/m ³
Air	$v_p^A = 0$ m/s	$v_s^A = 0$ m/s	$\rho^A = 1,2$ kg/m ³

Tableau 1.2 – Caractéristiques du milieu avec cheminée et surface libre

principale est de 200 Hz. Pour résoudre le problème inverse, nous retenons 10 fréquences situées dans la bande passante de ce signal (voir figure 1.7).

En présence d'une surface libre, la résolution spatiale doit être inférieure ou égale au trentième de la plus petite longueur d'onde de compression se propageant dans le sous-sol. Comme précédemment, les ondes de compression se propagent à la vitesse de 300 m/s dans la terre et la plus grande fréquence retenue pour l'inversion est de 500 Hz. La petite longueur d'onde de compression est donc égale à 60 cm ($\lambda_p = v_p/f$). Nous prenons une résolution spatiale égale à 2 cm. De plus, comme pour le milieu avec cheminée et surface libre, la longueur d'onde correspondante est donc de 3 m et la largeur de la zone PML est fixée à 1,5m.

Un schéma du milieu avec cheminée et surface libre avec le dispositif de mesure est donné sur la figure 1.10 (la zone PML n'est pas représentée). Nous représentons sur la figure 1.11 les sismogrammes correspondant à la deuxième position de la source vibratoire.

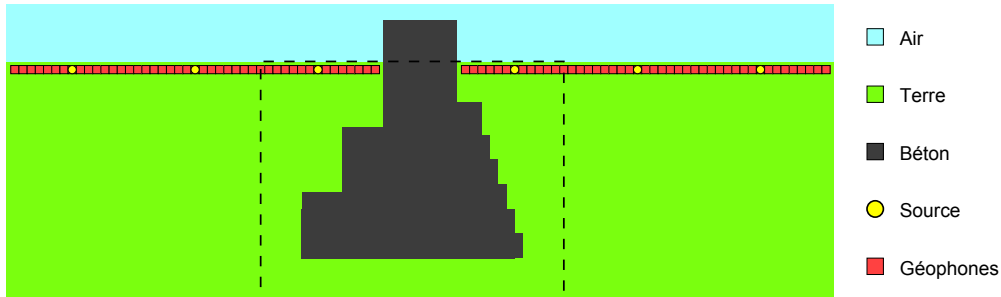


Figure 1.10 – Schéma du milieu avec cheminée et surface libre. La ligne en pointillés représente la frontière de la zone d'intérêt qui comprend 37 pixels en largeur et 29 pixels en profondeur.

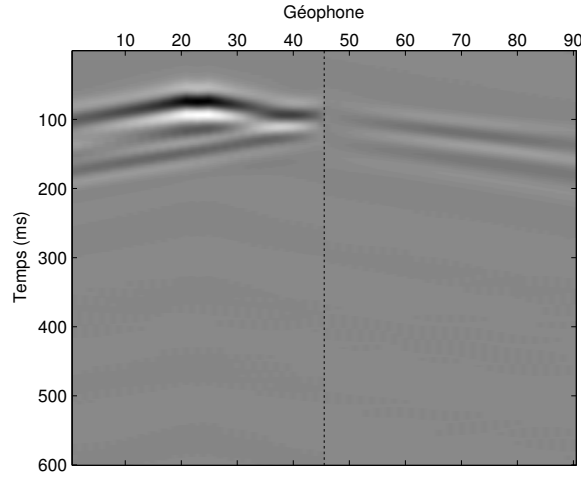


Figure 1.11 – Sismogrammes obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre pour la deuxième position de la source. La ligne en pointillés indique la séparation entre les deux ensembles de géophones situés de part et d'autre de la fondation.

Remarque : Des jeux de données réelles ont également été obtenus. Un banc de Mesures Ultrasonores Sans Contact (MUSC) conçu à l'IFSTTAR [Bretaudeau, 2010] a permis d'obtenir un jeu de données sur une maquette reproduisant une fondation dans un milieu bicouche à l'échelle 1/60. L'Ecole Polytechnique de Montréal a pris en charge l'application des méthodes d'inversion développées au cours de cette thèse à ce jeu de données. D'autre part, des données ont été acquises sur site, en suivant le protocole de mesure décrit dans la partie 1.2, page 8. Pour le traitement de telles données, certains pré-traitements sont à prévoir. En particulier, dans le modèle utilisé, le train d'ondes émis par la source est supposé se propager dans un milieu dont les caractéristiques sont invariantes suivant une direction de l'espace. Cette hypothèse est approximative. Des pré-traitements adéquats permettraient d'éviter une mauvaise interprétation des données mesurées.

La suite du manuscrit est consacrée à la résolution du problème inverse. Dans le chapitre suivant, une première méthode d'inversion prenant en compte peu d'informations *a priori* est introduite. Deux cartes du milieu sont reconstruites, une pour chacune des caractéristiques v_p et v_s . Cette méthode s'appuie sur une régularisation markovienne, la différence entre pixels voisins est pénalisée de manière à favoriser la reconstruction de régions lisses séparées par des contours francs.

Chapitre 2

Reconstruction tomographique par régularisation markovienne

Sommaire

2.1	Introduction	33
2.1.1	Objectifs du problème	33
2.1.2	Difficultés du problème	34
2.1.3	Organisation du chapitre	34
2.2	Méthodes d'optimisation locale en tomographie de diffraction	35
2.2.1	Méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire	36
2.2.2	Méthodes s'appuyant sur une formulation non linéaire	39
2.3	Précisions sur la technique d'optimisation retenue	43
2.3.1	Critère minimisé	43
2.3.2	Algorithme de minimisation utilisé	46
2.4	Résultats sur données simulées	50
2.4.1	Précisions sur les tests effectués	50
2.4.2	Premiers résultats obtenus	51
2.4.3	Introduction progressive des données	52
2.4.4	Introduction d'un changement de variables	53
2.4.5	Eléments d'interprétation complémentaires	57

2.1 Introduction

2.1.1 Objectifs du problème

Dans ce chapitre, nous abordons la résolution du problème inverse. L'objectif consiste à identifier la géométrie de la fondation auscultée à partir des données mesurées par les géophones en supposant connu le protocole de mesure, c'est-à-dire le signal émis par la source vibratoire, les positions successives de la source et les positions des géophones.

Les inconnues du problème ne se limitent pas seulement à la géométrie de la fondation. En particulier, les caractéristiques physiques de la terre ont une forte influence sur les données mesurées et ne peuvent pas être déterminées au préalable de façon précise. Leur estimation au cours de l'inversion est donc nécessaire afin d'éviter une mauvaise interprétation des données.

Nous nous sommes orientés dans un premier temps vers une approche de type « cartographie » : l'objectif est de déterminer une carte pour chacune des caractéristiques physiques du milieu. La forme de la fondation est alors indiquée par les pixels associés aux valeurs caractéristiques du béton.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté différentes méthodes d'imagerie par ondes sismiques. Les spécificités de notre problème (dimensions et caractéristiques de l'objet ausculté, profondeur d'auscultation, résolution souhaitée) nous ont dirigés vers les méthodes d'« inversion des formes d'ondes complètes » (voir section 1.3, page 12). Ces méthodes s'appuient sur une modélisation précise de la propagation des ondes dans le sous-sol et prennent notamment en compte les phénomènes de diffraction des ondes.

Notre problème se place donc dans le cadre plus général de la tomographie de diffraction qui regroupe de nombreuses modalités d'imagerie [Carfantan et Mohammad-Djafari, 2001]. Il s'apparente par exemple à d'autres travaux qui utilisent la propagation d'ondes électromagnétiques pour des applications diverses telles que l'exploration géophysique [Chaturvedi et Plumb, 1995], l'imagerie biomédicale [Barrière, 2008] ou encore le contrôle non destructif par courants de Foucault [Trillon, 2010]. Généralement, en tomographie de diffraction, le problème inverse est écrit sous la forme d'un problème d'optimisation non linéaire qui consiste à minimiser une fonction coût.

2.1.2 Difficultés du problème

Les problèmes de tomographie de diffraction sont difficiles à résoudre. Il s'agit généralement de problèmes mal posés puisqu'ils ne vérifient pas les conditions d'existence, d'unicité et de stabilité établies par Hadamard [Hadamard, 1902 ; Colton et Kress, 1998]. De plus, la relation entre les inconnues du problème (les caractéristiques du milieu sondé) et les données mesurées est fortement non linéaire. Par conséquent, le critère minimisé ne possède pas de garantie de convexité et des minima locaux peuvent exister.

Remarquons également que dans notre cas, les données mesurées sont en faible quantité (quelques dizaines de positions de la source et des géophones) par rapport à la grande taille du problème (jusqu'à plusieurs millions d'inconnues pour une configuration de taille réaliste). De plus, le milieu n'est ausculté que depuis la surface du sol dans la configuration nominale ce qui tend à accentuer la sous-détermination du problème. Le milieu sondé est très contrasté (cf. tableaux 1.1 et 1.2, page 28), ce qui renforce la non-linéarité entre les données et les inconnues du problème. Enfin, le coût de calcul nécessaire à la résolution du problème direct est élevé, ce qui alourdit la résolution du problème inverse.

Au premier abord, il semble préférable d'utiliser une méthode d'optimisation globale pour assurer la convergence vers le minimum global [Caorsi *et al.*, 1995 ; Garnero *et al.*, 1991]. Cependant, ces méthodes sont trop gourmandes en calculs pour être utilisées dans notre étude. C'est pourquoi nous nous sommes orientés vers les méthodes d'optimisation locale. L'initialisation doit alors être suffisamment proche du minimiseur global pour éviter la convergence vers un éventuel minimum local.

2.1.3 Organisation du chapitre

Dans la section 2.2, nous présentons les méthodes d'optimisation locale qui ont été envisagées. Nous nous sommes en particulier intéressés aux techniques établissant un bon compromis entre rapidité de convergence et coût de calcul par itération.

Dans la section 2.3, nous donnons une description précise de l'algorithme retenu en détaillant notamment l'expression du critère minimisé et la technique de minimisation employée. De manière générale, nous avons conçu cet algorithme en combinant des éléments directement liés aux problèmes d'imagerie par ondes sismiques à d'autres plus classiques en optimisation non linéaire tout en nous efforçant de conserver un maximum de cohérence.

Dans la section 2.4, nous présentons les résultats obtenus sur données synthétiques, le but étant de nous rapprocher au mieux de la solution parfaite du problème pour un temps de calcul raisonnable. Deux évolutions de l'algorithme initial nous ont permis d'en améliorer les performances : la prise en compte des données de manière progressive, ce qui est couramment effectué en imagerie sismique, et l'introduction d'un changement de variables.

Notons que dans ce chapitre, nous supposons que la distribution spatiale de la caractéristique ρ est uniforme et connue *a priori*, comme c'est le cas dans [Gélis, 2005] ou [Brossier, 2009]. Les inconnues du problème sont donc les distributions spatiales de v_p et de v_s ^a. Nous nous restreignons à la zone d'intérêt afin de réduire le nombre d'inconnues.

2.2 Méthodes d'optimisation locale en tomographie de diffraction

En tomographie de diffraction, certaines méthodes consistent à se ramener à une relation linéaire entre les données mesurées et les inconnues du problème. Les plus connues sont les approximations de Born et de Rytov. Cette démarche de linéarisation n'est valable que dans le cas de faibles contrastes ou lorsque l'objet diffractant est de petite taille vis-à-vis des longueurs d'ondes se propageant dans le milieu. Etant donné les dimensions des fondations et le très fort contraste entre les caractéristiques de la terre et du béton, ces méthodes ne sont pas adaptées à notre cas. Nous devons donc prendre en compte la non-linéarité du modèle direct.

Nous distinguons deux familles de méthodes : d'une part, les méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire du problème dont le principe est présenté dans la section 2.2.1 et d'autre part, les méthodes qui prennent directement en compte la non-linéarité entre données mesurées et inconnues et que nous présentons dans la section 2.2.2.

La méthode *Contrast Source Inversion* (CSI) appartient à la première famille de méthodes. Elle a été appliquée avec succès à la fois sur un projet de tomographie micro-ondes impliquant l'IRCCyN et l'Ecole Polytechnique de Montréal [Barrière, 2008] et sur un problème de tomographie par courants de Foucault impliquant l'IRCCyN, l'Ecole Polytechnique de Montréal et EDF R&D [Trillon, 2010]. De plus, cette méthode a récemment fait l'objet de publications en imagerie par ondes sismiques [Hu *et al.*, 2008 ; Abubakar *et al.*, 2009]. Les techniques appartenant à la première famille semblent donc adaptées à notre étude. Elles ont été testées dès le début du projet par Matthieu Voorons et Yves Goussard de l'Ecole Polytechnique de Montréal sur des données synthétiques [Vautrin et Voorons, 2010]. Néanmoins, ces méthodes n'ont pas abouti à des reconstructions satisfaisantes, même après un grand nombre d'itérations. Nous nous sommes intéressés à la seconde famille de méthodes. Leur application à des données synthétiques a abouti à des résultats plus satisfaisants.

a. Remarquons que nous aurions pu travailler, de manière équivalente, sur les paramètres de Lamé λ et μ : $\lambda = \rho(v_p^2 - 2v_s^2)$ et $\mu = \rho v_s^2$.

2.2.1 Méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire

Ces méthodes consistent à introduire un jeu de variables supplémentaires afin d'écrire les équations du problème direct sous la forme d'un système de deux équations bilinéaires. Leur principal avantage est de faciliter la procédure d'inversion du point de vue algorithmique. En effet, le problème inverse peut être résolu par une succession de sous-problèmes qui consistent à minimiser un critère quadratique. De plus, les algorithmes d'optimisation ne font jamais explicitement appel à la résolution d'un problème direct, ce qui permet d'alléger le coût de calcul.

Cependant, les variables auxiliaires doivent être optimisées au même titre que les variables d'intérêt, ce qui peut entraîner une augmentation significative du nombre global d'itérations. De plus, pour ce type de méthode, les équations du problème direct ne sont pas vérifiées de façon exacte : une contrainte reliant les données mesurées aux variables d'intérêt est relâchée afin de se ramener à la minimisation de critères quadratiques. Les données doivent alors être suffisamment riches et l'algorithme d'inversion suffisamment robuste pour converger vers des résultats satisfaisants malgré cette approximation.

Formulation générale

De manière générale, pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k , la formulation bilinéaire est constituée de deux équations faisant intervenir les variables d'intérêt ($\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ dans notre cas) et les variables auxiliaires (que nous noterons $\mathbf{w}_{\omega,k}$) :

- L'équation d'observation correspond à l'expression des données mesurées en fonction des variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$:

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathbf{K}_o \mathbf{w}_{\omega,k} + \mathbf{u}_o \quad (2.1)$$

- L'équation de couplage fait le lien entre les variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$ et les variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$:

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) = 0 \quad (2.2)$$

Cette seconde équation peut être vue comme une contrainte sur les différentes variables du problème. Pour $\mathbf{w}_{\omega,k}$ fixé, cette relation peut s'écrire de manière à mettre en évidence la linéarité de $\mathcal{R}$ par rapport aux variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$:

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathbf{K}_p(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_p^2 + \mathbf{K}_s(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{u}_{p,s}(\mathbf{w}_{\omega,k}) \quad (2.3)$$

Pour $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ fixé, cette même relation peut se mettre sous une forme différente mettant cette fois en évidence la linéarité de $\mathcal{R}$ par rapport aux variables auxiliaires :

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathbf{K}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \mathbf{w}_{\omega,k} + \mathbf{u}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \quad (2.4)$$

Critère minimisé

Les données observées $\mathbf{y}_{\omega,k}$ sont modélisées comme étant la somme des données calculées $\mathbf{g}_{\omega,k}$ et d'une erreur $\epsilon_{\omega,k}^o$ pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k :

$$\mathbf{y}_{\omega,k} = \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{w}_{\omega,k}) + \epsilon_{\omega,k}^o \quad (2.5)$$

Supposons également que les contraintes données par les équations de couplage sont relâchées, en considérant qu'une erreur $\epsilon_{\omega,k}^c$ est commise :

$$\mathcal{R}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) = \epsilon_{\omega,k}^c \quad (2.6)$$

Pour compenser le caractère mal posé du problème, il est nécessaire d'inclure des informations *a priori*. En supposant que $\epsilon_{\omega,k}^o$ et $\epsilon_{\omega,k}^c$ correspondent à des séquences de bruit blanc gaussien, l'estimation au sens du *maximum a posteriori* est obtenue en minimisant un critère des moindres carrés pénalisé de la forme :

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathcal{C}_o(\mathbf{w}_{\omega,k}) + \gamma \mathcal{C}_c(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) + \phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k}) \quad (2.7)$$

avec :

$$\mathcal{C}_o = \sum_{\omega} \sum_k \|y_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{w}_{\omega,k})\|^2 \quad (2.8)$$

$$\mathcal{C}_c = \sum_{\omega} \sum_k \|\mathcal{R}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2, \mathbf{w}_{\omega,k})\|^2 \quad (2.9)$$

Le terme $\mathcal{C}_o$ correspond à la minimisation de l'erreur sur les équations d'observation et $\mathcal{C}_c$ correspond à la minimisation de l'erreur sur les équations de couplage. La fonction ϕ est une fonction de régularisation du critère. Elle est construite d'après les informations *a priori* disponibles sur les différentes variables intervenant dans le problème.

L'hyperparamètre de pondération γ permet d'établir un compromis entre les termes $\mathcal{C}_o$ et $\mathcal{C}_c$. Une petite valeur de γ permet d'accorder davantage d'importance à l'adéquation entre données calculées et données observées. Une grande valeur de γ conduit plutôt à vérifier les contraintes données par les équations de couplage.

Résolution du problème inverse

Le problème inverse consiste à identifier les variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ et les variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$ qui minimisent le critère (2.7). L'utilisation d'une formulation bilinéaire est particulièrement avantageuse lorsque l'on minimise le critère de manière alternée, c'est-à-dire en optimisant tour à tour chacune des variables, les autres restant fixées. Dans ce cas, on se ramène à une succession de minimisations de critères quadratiques (à condition bien sûr que le terme de régularisation ϕ soit lui-même quadratique).

Il existe de nombreuses manières de formuler un problème de tomographie de diffraction en respectant la forme indiquée par les équations (2.1) à (2.4). Le choix de l'une ou l'autre de ces variantes a une influence sur les performances globales de l'algorithme d'inversion car il peut rendre l'optimisation de certaines variables très rapide.

Néanmoins, les variables auxiliaires peuvent être nombreuses : avec N_{ω} pulsations et N_k positions de la source, le nombre de variables auxiliaires est égal à $N_{\omega}N_k$. L'optimisation des variables de manière alternée peut alors nécessiter un nombre important d'itérations, en particulier si le critère est mal conditionné. Ce nombre d'itérations peut être diminué en optimisant plusieurs variables conjointement mais, dans ce cas, le critère minimisé n'est plus forcément quadratique. De plus, des différences d'échelle entre les différentes variables peuvent impliquer des problèmes de mauvais conditionnement [Barrière, 2008].

Formulations couramment utilisées

Parmi les différentes formulations bilinéaires possibles, les plus couramment utilisées sont associées à la méthode du gradient modifié [Kleinman et Van Den Berg, 1992] et à la méthode *Contrast Source Inversion* (CSI) [Van Den Berg et Kleinman, 1997] qui ont été introduites dans les années 1990. Nous donnons ci-dessous les formulations correspondant à chacune de ces deux

méthodes en reprenant les équations de propagation utilisées dans notre étude (cf. sections 1.4 et 1.5 du chapitre précédent) :

- Pour la méthode du gradient modifié, les variables auxiliaires sont les champs des vitesses particulières $\mathbf{V}_{\omega,k}$. L'équation d'observation correspond simplement à l'échantillonnage des vecteurs $\mathbf{V}_{\omega,k}$ pour ne retenir que les composantes mesurées par les capteurs :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{V}_{\omega,k}) = \mathbf{E}_g \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (2.10)$$

Les équations de couplage établissent une relation entre les variables auxiliaires $\mathbf{V}_{\omega,k}$ et les variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$. Elles peuvent se mettre sous deux formes différentes. La première met en évidence la linéarité de la relation par rapport aux variables d'intérêt :

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{V}_{\omega,k}) \mathbf{v}_p^2 + \mathbf{K}_s(\mathbf{V}_{\omega,k}) \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{u}_{p,s}(\mathbf{V}_{\omega,k}) = 0 \quad (2.11)$$

avec :

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{V}_{\omega,k}) = \mathbf{H}^p \mathbf{Diag} \{ \boldsymbol{\rho}_0 \odot (\mathbf{G}^p \mathbf{V}_{\omega,k}) \} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{V}_{\omega,k}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \mathbf{Diag} \{ \boldsymbol{\rho}_0 \odot (\mathbf{G}_i^s \mathbf{V}_{\omega,k}) \} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{u}_{p,s}(\mathbf{V}_{\omega,k}) = -\mathbf{K}_p(\mathbf{V}_{\omega,k}) \mathbf{v}_{p,0}^2 - \mathbf{K}_s(\mathbf{V}_{\omega,k}) \mathbf{v}_{s,0}^2 + \mathbf{A}_\omega^0 (\mathbf{V}_{\omega,k} - \mathbf{V}_{\omega,k}^0) \quad (2.14)$$

La seconde met en évidence la linéarité de la relation par rapport aux variables auxiliaires :

$$\mathbf{K}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \mathbf{V}_{\omega,k} + \mathbf{u}_w = 0 \quad (2.15)$$

avec :

$$\mathbf{K}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = (\mathbf{A}_\omega^0 + \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X} \mathbf{E}_Z) \quad (2.16)$$

$$\mathbf{u}_w = -\mathbf{A}_\omega^0 \mathbf{V}_{\omega,k}^0 \quad (2.17)$$

L'avantage de cette formulation est la rapidité de mise à jour des variables auxiliaires : le calcul du critère et du gradient par rapport à ces variables ne fait intervenir que des sommes et des produits. Cependant, contrairement aux variables d'intérêt, les variables auxiliaires doivent être estimées dans l'ensemble du domaine et pas seulement à l'intérieur de la zone d'intérêt.

- Pour la méthode CSI, les variables auxiliaires sont obtenues en multipliant les champs des vitesses particulières $\mathbf{V}_{\omega,k}$, dont on n'a retenu que les composantes liées à la zone d'intérêt, par la matrice de contraste $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{w}_{\omega,k} = \mathbf{X} \mathbf{E}_Z \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (2.18)$$

Nous donnons ci-dessous l'expression des équations d'observation :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{B}_\omega^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0)^{-1} \mathbf{w}_{\omega,k} \quad (2.19)$$

Comme précédemment, les équations de couplage peuvent être écrites sous deux formes. La première met en évidence la linéarité de la relation par rapport aux variables d'intérêt :

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_p^2 + \mathbf{K}_s(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_s^2 + \mathbf{u}(\mathbf{w}_{\omega,k}) = 0 \quad (2.20)$$

avec :

$$\mathbf{K}_p(\mathbf{w}_{\omega,k}) = \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ \rho_0 \odot (\mathbf{G}^p(\mathbf{V}_{\omega,k}^{10} - (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0)^{-1} \mathbf{w}_{\omega,k})) \} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{K}_s(\mathbf{w}_{\omega,k}) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \{ \rho_0 \odot (\mathbf{G}_i^s(\mathbf{V}_{\omega,k}^{10} - (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0)^{-1} \mathbf{w}_{\omega,k})) \} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{w}_{\omega,k}) = -\mathbf{K}_p(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_{p,0}^2 - \mathbf{K}_s(\mathbf{w}_{\omega,k}) \mathbf{v}_{s,0}^2 - \mathbf{w}_{\omega,k} \quad (2.23)$$

La seconde met en évidence la linéarité de la relation par rapport aux variables auxiliaires :

$$\mathbf{K}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \mathbf{w}_{\omega,k} + \mathbf{u}_w = 0 \quad (2.24)$$

avec :

$$\mathbf{K}_w(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = (\mathbf{I} + \mathbf{X}(\mathbf{A}_{\omega,Z}^0)^{-1}) \quad (2.25)$$

$$\mathbf{u}_w = -\mathbf{X} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (2.26)$$

L'avantage de cette formulation est la taille réduite des variables auxiliaires et des variables d'intérêt : elles ne sont estimées qu'à l'intérieur de la zone d'intérêt. En revanche, cette méthode perd en efficacité par rapport à la formulation associée à la méthode du gradient modifié à chaque itération car l'estimation des variables auxiliaires est plus lourde en calculs.

Concernant le réglage du coefficient γ (cf. équation (2.7)), Abubakar et Van Den Berg proposent de choisir la valeur qui annule le critère lorsque les variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$ sont nulles [Van Den Berg et Kleinman, 1997 ; Abubakar *et al.*, 2008]. On obtient :

$$\gamma_{\text{CSI}} = \frac{\sum_{\omega} \sum_k \|y_{\omega,k}\|^2}{\sum_{\omega} \sum_k \|\mathbf{X} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10}\|^2} \quad (2.27)$$

Cependant, cette démarche peut aboutir à une solution dégénérée [Barrière, 2008] et il est préférable de régler la valeur de cet hyperparamètre de façon empirique.

Dans le cadre de notre étude, plusieurs formulations (y compris la méthode du gradient modifié et la méthode CSI) combinées à différentes techniques d'optimisation (minimisation alternée / conjointe, recours à divers préconditionneurs) ont été testées par l'Ecole Polytechnique de Montréal mais aucune d'entre elles n'a abouti à des résultats satisfaisants. Ces résultats semblent dus au mauvais conditionnement du critère, et plus particulièrement au mauvais conditionnement des matrices intervenant dans l'estimation des variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$ [Vautrin et Voorons, 2010].

Remarquons que dans la thèse d'Adrien Trillon qui porte sur un problème d'imagerie par courants de Foucault, les reconstructions les plus intéressantes étaient obtenues avec une méthode de Lagrangien augmenté [Trillon, 2010]. Dans ce cas, l'erreur sur les équations de couplage était nulle à la convergence de l'algorithme d'inversion. Ces résultats sont cohérents avec nos observations : il est préférable de vérifier les contraintes liées aux équations de couplage de façon exacte.

2.2.2 Méthodes s'appuyant sur une formulation non linéaire

Ces méthodes sont une alternative aux méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire. Elles consistent à revenir à l'expression des données mesurées directement en fonction des variables d'intérêt et à faire appel à des techniques d'optimisation locale plus classiques. Elles possèdent plusieurs avantages :

- Les équations du problème direct restent toujours vérifiées de façon exacte (pas de relâchement de contrainte).
- Le nombre d'inconnues du problème est réduit puisque l'on ne considère plus que les variables d'intérêt du problème, ce qui tend à diminuer le nombre global d'itérations pour résoudre le problème.
- La plupart des méthodes d'optimisation classiques n'introduisent pas d'hyperparamètre supplémentaire (hormis les éventuels hyperparamètres liés à la régularisation du critère).

Cependant, l'expression des données calculées en fonction des inconnues est non linéaire. Cela implique notamment une augmentation du coût de calcul par itération.

Critère minimisé

Supposons que pour chaque fréquence ω et chaque position de la source k , les données observées $\mathbf{y}_{\omega,k}$ correspondent aux données calculées $\mathbf{g}_{\omega,k}$ auxquelles s'ajoute une séquence de bruit blanc gaussien $\epsilon_{\omega,k}$:

$$\mathbf{y}_{\omega,k} = \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) + \epsilon_{\omega,k} \quad (2.28)$$

L'objectif est alors de minimiser les erreurs $\epsilon_{\omega,k}$ en tenant compte d'informations *a priori*. L'estimation au sens du *maximum a posteriori* est obtenue en minimisant un critère des moindres carrés pénalisé de la forme :

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \mathcal{C}_{AD}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) + \phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \quad (2.29)$$

où $\mathcal{C}_{AD}$ est le terme d'adéquation aux données. Il s'agit de la somme sur toutes les pulsations ω et toutes les positions de la source k des normes des écarts entre données observées et données calculées :

$$\mathcal{C}_{AD}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \sum_{\omega} \sum_k \|\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2)\|^2 \quad (2.30)$$

Comme précédemment, ϕ est une fonction de régularisation du critère construite d'après les informations *a priori* disponibles.

Résolution du problème inverse

De manière générale, les méthodes d'optimisation non linéaire locales procèdent de manière itérative en alternant détermination d'une direction de recherche et calcul d'un pas de progression dans la direction de recherche choisie. Cette démarche est résumée dans l'algorithme 2 où θ_n désigne l'ensemble des inconnues (les composantes des vecteurs $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$) à l'itération n . Nous détaillerons ces deux étapes dans les paragraphes suivants.

Détermination d'une direction de recherche

Pour les méthodes d'optimisation non linéaire classiques, la direction de recherche est définie à partir de certaines informations sur la forme locale du critère. Elles s'appuient par exemple sur le gradient et sur la matrice hessienne calculés au point courant et lors des itérations précédentes. Nous donnons ci-dessous l'expression générale du gradient du critère (2.29)^b :

$$\nabla \mathcal{C}(\theta) = \sum_{\omega} \sum_k -2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\theta)^\dagger (\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\theta)) \right\} + \nabla \phi(\theta) \quad (2.31)$$

b. $\mathbf{M}^\dagger$ est la matrice adjointe (transposée conjuguée) de la matrice $\mathbf{M}$

Algorithme 2: Algorithme général de minimisation d'un critère non quadratique

Initialisation ;

Répéter

 Détermination d'une direction de recherche $\mathbf{d}_n$ en $\boldsymbol{\theta}_n$;

Répéter

 Choix d'un pas de progression α dans la direction $\mathbf{d}_n$;

 Calcul du critère et du gradient en $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n$;

Jusqu'à vérification des conditions de Wolfe ;

$\boldsymbol{\theta}_{n+1} \leftarrow \boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n$;

$n \leftarrow n + 1$;

Jusqu'à vérification des conditions d'arrêt ;

ainsi que l'expression de la matrice hessienne :

$$\nabla^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{l=1}^{N_g} \overline{\nabla^2 [\mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_l} [\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_l \right\} + \nabla^2 \phi(\boldsymbol{\theta}) \quad (2.32)$$

où $\boldsymbol{\theta}$ désigne l'ensemble des inconnues. Ces expressions font intervenir la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\omega,k}$. Chacun de ses coefficients correspond à la dérivée partielle d'une des composantes de $\mathbf{g}_{\omega,k}$ par rapport à l'une des inconnues :

$$[\mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_{l,m} = \frac{\partial [\mathbf{g}_{\omega,k}]_l}{\partial [\boldsymbol{\theta}]_m} \quad (2.33)$$

La démarche la plus simple consiste à choisir l'opposé du gradient comme direction de recherche (méthode de *steepest descent*) mais cette méthode s'avère souvent peu efficace, ce qui conduit généralement à utiliser des méthodes plus performantes. Nous listons ci-dessous quelques-unes des méthodes les plus couramment utilisées :

- Dans la méthode du gradient conjugué non linéaire, utilisée en tomographie de diffraction dans [Harada *et al.*, 1995 ; Lobel *et al.*, 1996 ; Rekanos *et al.*, 1999], la direction de recherche est obtenue par combinaison linéaire entre le gradient au point courant et la direction de recherche calculée à l'itération précédente :

$$\mathbf{d}_n = -\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) + \beta_n \mathbf{d}_{n-1} \quad (2.34)$$

Il existe différentes possibilités pour déterminer le coefficient β_n qui peuvent influencer sur l'efficacité de la méthode. Les plus couramment utilisées sont la méthode de Fletcher-Reeves :

$$\beta_n = \frac{\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^\dagger \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)}{\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_{n-1})^\dagger \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_{n-1})} \quad (2.35)$$

et la méthode de Polak-Ribière :

$$\beta_n = \frac{\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^\dagger (\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) - \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_{n-1}))}{\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_{n-1})^\dagger \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_{n-1})} \quad (2.36)$$

- Pour la méthode de Newton, utilisée en tomographie de diffraction dans [Pratt *et al.*, 1998 ; Newman et Hoversten, 2000], la direction de recherche est obtenue à partir du gradient et de la matrice hessienne calculés au point courant. $\mathbf{d}_n$ est tel que :

$$\nabla^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \mathbf{d}_n = -\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \quad (2.37)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de s'affranchir des problèmes de conditionnement. Elle converge également en très peu d'itérations lorsque la forme du critère est proche d'une forme quadratique. Cependant, le coût de calcul à chaque itération peut être important en raison du calcul de la matrice hessienne. De plus, elle ne garantit pas de définir une direction de descente (si la matrice hessienne est définie négative, la direction obtenue pointe vers un maximiseur du critère).

- Pour la méthode de Gauss-Newton, utilisée en tomographie de diffraction dans [Pratt *et al.*, 1998 ; Mojabi et LoVetri, 2009], la démarche est la même que pour la méthode de Newton mais une approximation de la matrice hessienne est utilisée : seul le premier terme faisant intervenir les matrices jacobienues dans l'équation (2.32) est conservé. $\mathbf{d}_n$ est donc tel que :

$$\left(\sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}_n)^\dagger \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}_n) \right\} \right) \mathbf{d}_n = -\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \quad (2.38)$$

Par rapport à la méthode de Newton, les avantages sont une réduction du coût de calcul par itération ainsi que l'assurance de définir une direction de descente (l'approximation de la matrice hessienne est une matrice semi-définie positive).

- La méthode de Levenberg-Marquardt, utilisée en tomographie de diffraction dans [Joachimowicz *et al.*, 1991 ; Franchois et Pichot, 1997], est proche de la méthode de Gauss-Newton. La direction de recherche $\mathbf{d}_n$ est telle que :

$$\left(\sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}_n)^\dagger \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}_n) \right\} + \alpha \mathbf{I} \right) \mathbf{d}_n = -\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \quad (2.39)$$

L'introduction du terme $\alpha \mathbf{I}$ dans l'approximation de la matrice hessienne permet d'améliorer le conditionnement et de faciliter la convergence de l'algorithme. Notons que la méthode de Levenberg-Marquardt et la méthode *distorted Born iterative* [Chew et Wang, 1990] sont équivalentes [Franchois et Pichot, 1997].

- Enfin, la méthode BFGS, utilisée en tomographie de diffraction dans [Klose et Hielscher, 2003 ; Hu *et al.*, 2006], est une méthode de quasi-Newton qui consiste à estimer l'inverse de la matrice hessienne au fur et à mesure des itérations [Nocedal et Wright, 1999, chap. 8]. Supposons qu'à l'itération n , le critère soit approché par une fonction quadratique :

$$\mathcal{Q}_n(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) + \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^T \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{B}_n \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.40)$$

où $\mathbf{B}_n$ est une matrice définie positive. La direction de recherche $\mathbf{d}_n$ est alors définie de manière à pointer vers le minimiseur de l'approximation quadratique :

$$\mathbf{B}_n \mathbf{d}_n = -\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \quad (2.41)$$

A chaque itération, l'approximation de la matrice hessienne $\mathbf{B}_n$ est mise à jour en fonction de son itérée précédente. Elle est choisie de sorte que le gradient de l'approximation quadratique corresponde au gradient du critère en $\boldsymbol{\theta}_{n-1}$. Parmi l'infinité de solutions possibles, la matrice retenue est :

$$\mathbf{B}_n = \underset{\mathbf{B}}{\text{Argmin}} \|\mathbf{B} - \mathbf{B}_{n-1}\| \quad (2.42)$$

L'utilisation d'une norme matricielle particulière (la norme de Frobenius pondérée) permet de mettre à jour directement l'inverse de $\mathbf{B}_n$. La direction de recherche $\mathbf{d}_n$ peut donc être calculée sans nécessiter la résolution d'un système linéaire. De plus, le coût calculatoire est relativement faible puisque cela ne nécessite principalement que le calcul du gradient au point courant.

Cette méthode permet donc de récupérer une information de plus en plus précise sur la courbure du critère sans passer explicitement par le calcul de la matrice hessienne ou d'une approximation à chaque itération.

Calcul d'un pas de progression

Chaque étape de détermination d'une direction de recherche $\mathbf{d}_n$ est suivie du calcul d'un pas de progression α dans cette direction. Il est déterminé au moyen de la fonction Φ dont les variations sont celles du critère dans la direction définie par $\mathbf{d}_n$: $\Phi(\alpha) = \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n)$.

A priori, le pas retenu devrait correspondre à un minimum local : α doit vérifier $\Phi'(\alpha) = 0$. Cependant, il n'existe pas toujours d'expression analytique permettant d'obtenir un pas α vérifiant cette égalité et dans ce cas, le recours à une procédure itérative n'est pas envisageable. Une alternative est alors de rechercher un pas vérifiant les conditions dites de Wolfe [Nocedal et Wright, 1999, chap. 3]. L'intérêt est double : cela permet d'une part de s'approcher d'un minimum de Φ de façon itérative avec un nombre d'itérations raisonnable et d'autre part d'avoir la garantie d'obtenir un pas de progression suffisamment proche d'un minimum local de Φ pour que les algorithmes de minimisation puissent converger.

Les conditions de Wolfe sont au nombre de deux :

- la première condition de Wolfe ou « condition d'Armijo » :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n) - \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n) \leq c_1 \alpha \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^T \mathbf{d}_n \quad (2.43)$$

qui impose ainsi une certaine décroissance du critère.

- la seconde condition de Wolfe :

$$\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n)^T \mathbf{d}_n \geq c_2 \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^T \mathbf{d}_n \quad (2.44)$$

ou sa version forte :

$$|\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n)^T \mathbf{d}_n| \leq |c_2 \nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}_n)^T \mathbf{d}_n| \quad (2.45)$$

qui conduit nécessairement $\boldsymbol{\theta}_n + \alpha \mathbf{d}_n$ à se rapprocher d'un minimiseur de Φ .

Les coefficients c_1 et c_2 intervenant dans chacune des deux conditions doivent être choisis de sorte que $0 < c_1 < c_2 < 1$. Dans notre étude, les valeurs utilisées sont $c_1 = 10^{-3}$ et $c_2 = 0,9$.

2.3 Précisions sur la technique d'optimisation retenue

Dans la section précédente, nous avons souligné l'avantage des méthodes exploitant directement l'expression non linéaire des données en fonction des inconnues par rapport aux méthodes s'appuyant sur une formulation bilinéaire pour notre étude. Dans cette section, nous donnons des précisions sur la méthode d'inversion que nous avons utilisée. Nous explicitons plus particulièrement l'expression du critère minimisé puis l'algorithme d'optimisation retenu.

2.3.1 Critère minimisé

Rappelons tout d'abord que l'objectif est de minimiser un critère des moindres carrés pénalisé de la forme :

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \mathcal{C}_{AD}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) + \phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) \quad (2.46)$$

$\mathcal{C}_{AD}$ correspond au terme d'adéquation aux données. Il s'agit de la somme sur toutes les pulsations ω et toutes les positions de la source k des normes des écarts entre données observées et données calculées :

$$\mathcal{C}_{AD}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \sum_{\omega} \sum_k \|\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2)\|^2 \quad (2.47)$$

ϕ est un terme de régularisation du critère qui permet compenser le caractère mal posé du problème par l'ajout d'informations *a priori*.

Nous détaillons chacun de ces deux termes.

Terme d'adéquation aux données

Il existe plusieurs formulations permettant d'exprimer les données calculées $\mathbf{g}_{\omega,k}$ en fonction des caractéristiques du milieu $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$. Le choix de l'une ou l'autre de ces formulations n'a aucune incidence sur le cheminement suivi par l'algorithme au fur et à mesure des itérations puisqu'elles sont équivalentes mathématiquement.

Dans la section 1.5.2, page 24, nous nous sommes ramenés à un choix entre deux formulations dans le but de limiter l'espace mémoire requis pour résoudre le problème direct. La différence entre ces deux formulations provient de l'utilisation ou non du lemme d'inversion matricielle qui permet d'exploiter le fait que l'on se ramène à une zone d'intérêt. Sans le recours au lemme d'inversion matricielle, nous avons obtenu la relation suivante :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{E}_g (\mathbf{A}_{\omega}^0 + \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X} \mathbf{E}_Z)^{-1} \mathbf{E}_Z^t \mathbf{X} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (2.48)$$

Le lemme d'inversion matricielle conduit quant à lui à la relation suivante :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (2.49)$$

Dans les deux cas, la matrice de contraste $\mathbf{X}$ s'écrit en fonction des variables d'intérêt de la façon suivante (cf. section 1.5.2, page 24) :

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}^p \text{Diag} \{(\mathbf{v}_p^2 - \mathbf{v}_{p,0}^2) \odot \boldsymbol{\rho}_0\} \mathbf{G}^p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \{(\mathbf{v}_s^2 - \mathbf{v}_{s,0}^2) \odot \boldsymbol{\rho}_0\} \mathbf{G}_i^s \quad (2.50)$$

Remarquons que $\mathbf{X}$ ne dépend plus de la pulsation ω car la masse volumique ρ est supposée égale à son estimée ρ_0 (voir équation (1.20), page 24).

Pour les tests d'inversion sur des configurations de taille réduite (cf. section 1.6, page 27), l'espace mémoire occupé n'est pas un point critique. Parmi les deux formulations proposées, nous avons donc retenu celle qui résout le problème direct le plus rapidement, à savoir la relation (2.49) obtenue avec le recours au lemme d'inversion matricielle. Cette différence de temps de calcul s'explique par le fait que la résolution des systèmes linéaires est plus rapide (les matrices normales sont de plus petite taille).

Régularisation

La régularisation du critère est assurée par l'ajout du terme $\phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2)$ dans le critère (2.46). Elle permet de compenser le caractère mal posé du problème en incorporant des informations *a priori* sur les variables optimisées. Nous nous sommes appuyés sur un *a priori* faible en supposant simplement que le milieu est constitué de régions lisses délimitées par des contours francs.

Une forme de régularisation couramment employée est la régularisation de Tikhonov :

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \|\mathbf{D}^{(n)} \boldsymbol{\theta}\|^2 \quad (2.51)$$

où $\mathbf{D}^{(n)}$ est la matrice de différenciation à l'ordre n . Dans notre étude, nous savons que les images recherchées sont constituées de deux régions relativement lisses (les régions Terre et Béton). La pénalisation des différences à l'ordre 1, c'est-à-dire la pénalisation des différences entre les points du maillage qui forment une clique horizontale ou verticale (voir figure 2.1), semble donc la plus pertinente :

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \gamma \sum_{(l,l') \in \mathbf{C}} ([\boldsymbol{\theta}]_l - [\boldsymbol{\theta}]_{l'})^2 \quad (2.52)$$

où $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des cliques du domaine (4 connexités).

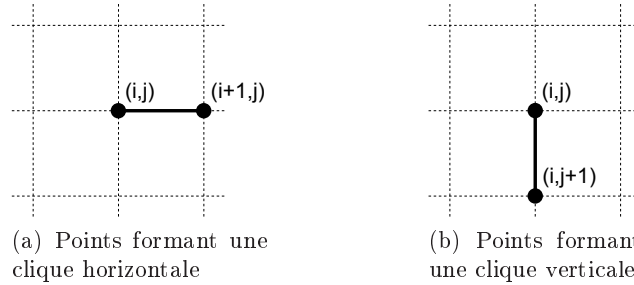


Figure 2.1 – Cliques horizontale et verticale d'un voisinage à 4 connexités

Néanmoins, si la régularisation de Tikhonov permet de reconstruire des images lisses, elle ne fait pas facilement apparaître les variations franches entre deux régions. Elle n'est donc pas adaptée à notre étude étant donné le fort contraste entre les caractéristiques de la terre et du béton (cf. tableaux 1.1 et 1.2, page 28). Nous adoptons donc une forme plus générale faisant intervenir une fonction potentiel φ :

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \gamma \sum_{(l,l') \in \mathbf{C}} \varphi([\boldsymbol{\theta}]_l - [\boldsymbol{\theta}]_{l'}) \quad (2.53)$$

Pour pénaliser les différences entre les points du maillage voisins tout en préservant les fortes discontinuités, la fonction potentiel φ doit vérifier certaines propriétés qui ont été établies dans [Charbonnier *et al.*, 1997] :

- $\varphi'(t)/2t$ doit être continue et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t)/2t = 0$;
- $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi'(t)/2t = M, 0 < M < +\infty$.

Une telle fonction a un comportement quadratique pour t proche de zéro et est asymptotiquement linéaire. Par conséquent, les petites différences entre pixels voisins sont atténuées tandis que les variations plus importantes sont préservées. Nous avons retenu :

$$\varphi(t) = \sqrt{t^2 + \delta^2} \quad (2.54)$$

Cette fonction vérifie les trois conditions précédentes. Le coefficient δ permet de positionner la transition entre les régimes quadratique et linéaire.

Dans notre étude, deux distributions doivent être reconstruites : celle des vitesses de propagation des ondes de compression (v_p) et celle des vitesses de propagation des ondes de cisaillement

(v_s). Or, nous savons que les fortes variations spatiales de v_p et de v_s coïncident spatialement puisqu'elles sont localisées au niveau de la frontière qui sépare la région Terre et la région Béton. Pour tenir compte de cette information, nous avons opté pour la fonction de régularisation suivante :

$$\phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \gamma \sum_{(l, l') \in \mathbf{C}} \sqrt{([\mathbf{v}_p^2]_l - [\mathbf{v}_p^2]_{l'})^2 + ([\mathbf{v}_s^2]_l - [\mathbf{v}_s^2]_{l'})^2 + \delta^2} \quad (2.55)$$

où $\mathbf{C}$ est l'ensemble des cliques du domaine (4-connexité). Nous illustrons l'intérêt de cette fonction sur un cas 1D (voir figure 2.2). Lorsque les deux variations ne coïncident pas (figure 2.2a), nous avons :

$$\phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \gamma \left(\sqrt{(\beta_p - \alpha_p)^2 + \delta^2} + \sqrt{(\beta_s - \alpha_s)^2 + \delta^2} \right) = \phi_1 \quad (2.56)$$

et lorsque les deux variations coïncident (figure 2.2b), nous avons :

$$\phi(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2) = \gamma \left(\sqrt{(\beta_p - \alpha_p)^2 + (\beta_s - \alpha_s)^2 + \delta^2} \right) = \phi_2 \quad (2.57)$$

Il est évident que $\phi_2 < \phi_1$, ce qui met en évidence le fait que le terme de régularisation (2.55) favorise les cas où les variations spatiales de v_p et de v_s coïncident spatialement.

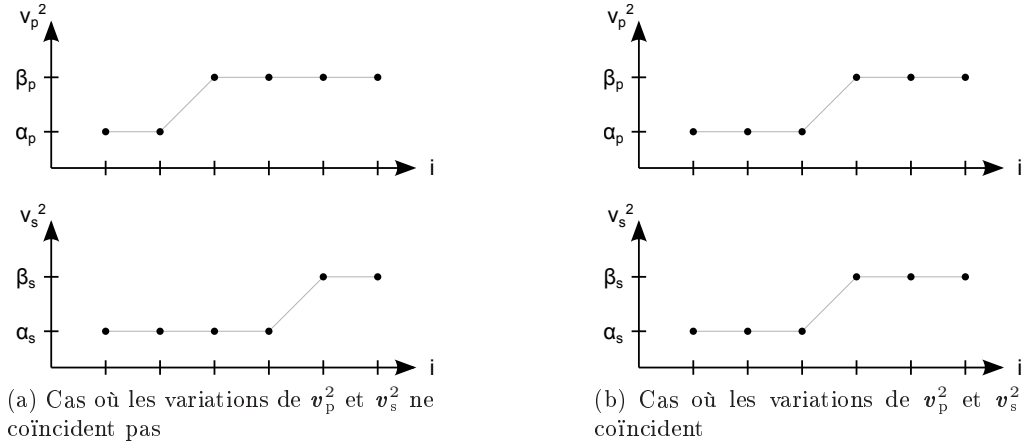


Figure 2.2 – Choix de la régularisation – Illustration sur un cas 1D

2.3.2 Algorithme de minimisation utilisé

Parmi les différentes méthodes d'optimisation locale que nous avons citées dans la section 2.2.2, une tendance se dégage. Les méthodes qui font appel au calcul de la matrice hessienne (ou d'une approximation) sont les plus coûteuses mais elles convergent en peu d'itérations, en particulier lorsque la forme du critère est proche d'une forme quadratique. A l'inverse, les méthodes qui se basent uniquement sur le calcul du gradient ont un coût par itération moindre mais elles nécessitent souvent un plus grand nombre d'itérations.

Remarque : Les méthodes basées sur une formulation bilinéaire (cf. section 2.2.1, page 36) suivent cette même tendance : la résolution du problème direct n'est jamais explicite, ce qui permet de réduire le coût de calcul par itération. Cependant, la construction des formulations

bilinéaires nécessite l'introduction de variables auxiliaires qui doivent être optimisées en plus des variables d'intérêt. Cela implique une augmentation du nombre d'itérations pour arriver à convergence.

Dans notre cas, l'algorithme d'inversion doit permettre de résoudre des problèmes de grande taille. Il semble donc préférable de se tourner vers les méthodes les moins coûteuses malgré l'augmentation du nombre d'itérations qui en découle, à condition bien sûr que ce nombre d'itérations ne soit pas disproportionné. Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme L-BFGS [Nocedal et Wright, 1999, chap. 9]. La démarche est la même que pour la méthode BFGS sauf qu'au lieu de prendre en compte l'ensemble des gradients calculés dès la première itération, on ne garde en mémoire qu'un nombre limité de gradients pour construire l'approximation de la matrice hessienne inverse. Cela permet de contrôler l'espace mémoire occupé, ce qui rend cette méthode particulièrement adaptée aux problèmes de grande taille.

Plus particulièrement, nous avons retenu l'algorithme L-BFGS-B [Byrd *et al.*, 1995]. Cette variante de l'algorithme L-BFGS permet de tenir compte de contraintes de bornes sur les variables optimisées grâce à une technique de gradient projeté. Dans notre étude, cela permet de tenir compte du fait que les composantes des vecteurs $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ doivent rester positives. Cette méthode est généralement utilisée avec un nombre de gradients en mémoire compris entre 3 et 20. Les premiers tests ont montré que le nombre de gradients mémorisés a peu d'influence sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Nous avons poursuivi avec 3 vecteurs en mémoire afin de réduire l'espace mémoire occupé.

Pour le choix du pas de progression à chaque itération, nous utilisons l'algorithme proposé dans [Moré et Thunberg, 1994] qui a l'avantage de déterminer un pas satisfaisant les conditions fortes de Wolfe pour un petit nombre de calculs du critère et du gradient.

Expression du gradient du critère

Pour la méthode d'optimisation retenue, il est nécessaire de savoir calculer le gradient en un point quelconque de l'espace d'état. Nous résumons ici une démarche permettant d'aboutir à l'expression du gradient du critère lorsque celui-ci ne comporte que le terme d'adéquation aux données. Le terme de régularisation ne présente pas de difficulté. Notons que le gradient peut également être calculé en suivant le formalisme de l'état adjoint, comme expliqué dans [Plessix, 2006] pour les problèmes d'imagerie en géophysique.

Expression générale pour une seule fréquence et une seule position de la source

Afin de simplifier le raisonnement et les écritures, nous considérons uniquement les variations du critère par rapport à $\mathbf{v}_p^2$, pour une seule pulsation et une seule position de la source. Le critère peut donc s'écrire :

$$\mathcal{C}(\mathbf{v}_p^2) = \|\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2)\|^2 \quad (2.58)$$

où les données calculées $\mathbf{g}$ s'expriment en fonction des inconnues $\mathbf{v}_p^2$ comme écrit ci-dessous :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2) = \mathbf{g}^0 - \mathbf{B}^0 (\mathbf{A}_Z^0 + \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{V}^{10} \quad (2.59)$$

avec :

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ (\mathbf{v}_p^2 - \mathbf{v}_{p,0}^2) \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}^p \quad (2.60)$$

Le gradient du critère est égal à :

$$\nabla \mathcal{C} = -2\Re \left\{ \mathbf{J}_p(\mathbf{v}_p^2)^\dagger (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2)) \right\} \quad (2.61)$$

où $\mathbf{J}_p$ est la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}$:

$$\left[\mathbf{J}_p(\mathbf{v}_p^2) \right]_{l,m} = \frac{\partial [g]_l}{\partial [\mathbf{v}_p^2]_m} \quad (2.62)$$

Calcul de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_p$

Pour calculer la matrice jacobienne $\mathbf{J}_p$, on effectue un développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\mathbf{g}$. La matrice recherchée est telle que :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2 + \delta \mathbf{v}_p^2) = \mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2) + \mathbf{J}_p \delta \mathbf{v}_p^2 + \mathcal{O}(\|\delta \mathbf{v}_p^2\|^2) \quad (2.63)$$

Or, nous avons (cf. équation (2.59)) :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2 + \delta \mathbf{v}_p^2) = \mathbf{g}^0 - \mathbf{B}^0 (\mathbf{A}_Z + \delta \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X} + \delta \mathbf{X}) \mathbf{V}^{10} \quad (2.64)$$

avec $\mathbf{A}_Z = \mathbf{A}_Z^0 + \mathbf{X}$ et $\delta \mathbf{X} = \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ \delta \mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}^p$.

- Dans un premier temps, un développement à l'ordre 1 de $(\mathbf{A}_Z + \delta \mathbf{X})^{-1}$ est effectué en utilisant le lemme d'inversion matricielle^c, ce qui conduit à :

$$(\mathbf{A}_Z + \delta \mathbf{X})^{-1} = \mathbf{A}_Z^{-1} - \mathbf{A}_Z^{-1} \delta \mathbf{X} \mathbf{A}_Z^{-1} + \mathcal{O}(\|\delta \mathbf{X}\|^2) \quad (2.65)$$

- Ce développement est intégré dans l'expression de $\mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2 + \delta \mathbf{v}_p^2)$ pour obtenir le développement suivant :

$$\mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2 + \delta \mathbf{v}_p^2) = \mathbf{g}(\mathbf{v}_p^2) - \mathbf{B}^0 \mathbf{A}_Z^{-1} \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ \delta \mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}^p (\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z^{-1} \mathbf{X}) \mathbf{V}^{10} + \mathcal{O}(\|\delta \mathbf{v}_p^2\|^2) \quad (2.66)$$

- Et l'expression de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_p$ s'en déduit :

$$\mathbf{J}_p = -\mathbf{B}^0 \mathbf{A}_Z^{-1} \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ \boldsymbol{\rho}_0 \odot (\mathbf{G}^p (\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z^{-1} \mathbf{X}) \mathbf{V}^{10}) \} \quad (2.67)$$

Calcul de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_s$

La même démarche que pour le calcul de $\mathbf{J}_p$ donne l'expression de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_s$:

$$\mathbf{J}_s = -\mathbf{B}^0 \mathbf{A}_Z^{-1} \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \{ \boldsymbol{\rho}_0 \odot (\mathbf{G}_i^s (\mathbf{I} - \mathbf{A}_Z^{-1} \mathbf{X}) \mathbf{V}^{10}) \} \quad (2.68)$$

avec $\mathbf{A}_Z = \mathbf{A}_Z^0 + \mathbf{X}$.

Retour à l'expression du gradient

Dans le cas de plusieurs fréquences ω et plusieurs positions de la source k , le gradient correspond à la somme des expressions obtenues pour chaque couple $\{\omega, k\}$. On a donc :

c. Lemme d'inversion matricielle : $(\mathbf{P} + \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{S})^{-1} = \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} (\mathbf{R}^{-1} + \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{S} \mathbf{P}^{-1}$

$$\nabla \mathcal{C} = \sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \left[\begin{array}{c} \text{Diag} \left\{ \overline{\rho_0 \odot (\mathbf{G}^p(V_{\omega,k}^{10} - \mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10}))} \right\} (\mathbf{H}^p)^t \\ \sum_{i=1}^3 \text{Diag} \left\{ \overline{\rho_0 \odot (\mathbf{G}_i^s(V_{\omega,k}^{10} - \mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10}))} \right\} (\mathbf{H}_i^s)^t \end{array} \right] \right. \\ \left. (\mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1})^\dagger (\mathbf{B}_\omega^0)^\dagger (y_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2)) \right\} \quad (2.69)$$

avec $\mathbf{A}_{\omega,Z} = \mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X}$.

Algorithme de calcul du critère et du gradient

Pour la méthode d'inversion retenue, chaque point de l'espace d'état exploré fait l'objet d'un calcul du critère et du gradient. En effet, ces deux calculs sont nécessaires pour la vérification des conditions de Wolfe. Pour éviter de répéter certaines opérations communes, les deux calculs sont menés de façon conjointe.

Par exemple, pour chaque pulsation ω , le calcul du critère et du gradient passe par la résolution de plusieurs systèmes linéaires qui ont en commun la matrice normale $\mathbf{A}_{\omega,Z}$ qui ne dépend pas de la position de la source k . Par conséquent, une décomposition en facteurs LU de $\mathbf{A}_{\omega,Z}$ est effectuée pour mutualiser les calculs avant de considérer chaque position de la source. Ces facteurs sont utilisés à la fois pour le calcul du critère et du gradient.

Notons également que l'expression $\mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10}$ intervient déjà dans le calcul du critère. Le calcul du gradient nécessite donc la résolution d'un seul système linéaire supplémentaire pour chaque couple $\{\omega, k\}$ par rapport au calcul du critère.

La procédure de calcul du critère et du gradient est résumée dans l'algorithme 3.

Algorithme 3: Calcul du critère et du gradient

Construction de la matrice de contraste $\mathbf{X}$;

Pour chaque pulsation ω :

 Factorisation LU de la matrice $\mathbf{A}_{\omega,Z}$;

Pour chaque position de la source k :

 Calcul de $\mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10}$ en utilisant les facteurs L et U de $\mathbf{A}_{\omega,Z}$;

 Calcul du terme du critère associé à la fréquence et à la position de la source courantes ;

 Calcul de $(\mathbf{A}_{\omega,Z}^{-1})^\dagger (\mathbf{B}_\omega^0)^\dagger (y_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{v}_p^2, \mathbf{v}_s^2))$ en utilisant les facteurs L et U de $\mathbf{A}_{\omega,Z}$;

 Calcul du terme du gradient associé à la fréquence et à la position de la source courantes ;

Fin

Fin

Remarque : En ce qui concerne le terme de pénalisation du critère (cf. section 2.3.1), [Charbonnier *et al.*, 1997] proposent de travailler à partir d'une expression modifiée de la fonction potentiel φ qui dépend à la fois des variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ et d'un jeu de variables auxiliaires. Lorsque l'expression des données en fonction des inconnues du problème est linéaire, la démarche proposée permet de simplifier la minimisation du critère. Ce n'est pas le cas dans notre étude.

De plus, cela ne permettrait pas de réduire de façon significative le coût de calcul puisque les opérations les plus coûteuses sont liées au terme d'adéquation aux données. Par conséquent, le gradient de la fonction de régularisation est calculé directement en fonction des variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$.

2.4 Résultats sur données simulées

2.4.1 Précisions sur les tests effectués

Le critère d'arrêt de l'algorithme se base sur la variation de $\mathbf{v}_p$ et de $\mathbf{v}_s$ d'une itération à l'autre. A l'itération n , elle est définie par :

$$\Delta_n = \frac{\|\mathbf{v}_{p_n} - \mathbf{v}_{p_{n-1}}\|^2 + \|\mathbf{v}_{s_n} - \mathbf{v}_{s_{n-1}}\|^2}{2N_x^Z N_y^Z} \quad (2.70)$$

La grandeur Δ_n est très variable d'une itération à l'autre. C'est pourquoi nous avons préféré arrêter l'algorithme lorsque Δ_n était inférieur à un seuil η pendant 10 itérations successives. Cela permet de filtrer les valeurs excessivement petites de Δ_n qui mettraient fin à l'algorithme de manière intempestive si l'on seyait sur une seule itération.

L'algorithme d'inversion a été exécuté pour deux initialisations différentes :

1. Pour la première initialisation, les caractéristiques de la zone d'intérêt sont égales à celles du milieu de référence, c'est-à-dire aux caractéristiques de la terre ($v_p = 300$ m/s et $v_s = 150$ m/s).
2. Pour la seconde initialisation, les caractéristiques de la zone d'intérêt correspondent exactement à la solution parfaite du problème.

Nous considérons ainsi deux situations extrêmes. Dans le premier cas, aucun *a priori* concernant l'objet diffractant n'est introduit pour initialiser l'algorithme et les caractéristiques de la zone d'intérêt sont simplement celles du milieu environnant. Dans le deuxième cas, un maximum d'*a priori* est introduit pour initialiser l'algorithme puisque l'élément en béton est supposé parfaitement connu. Lors de l'inversion de signaux réels mesurés sur site, nous pouvons supposer que nous disposerons de suffisamment d'informations sur la forme et les caractéristiques de la fondation pour nous placer dans une situation intermédiaire.

Les différents coefficients qui interviennent dans l'algorithme d'inversion ont été réglés de façon empirique. Il s'agit :

- de l'hyperparamètre γ qui intervient dans le terme de pénalisation ϕ . Il permet d'établir un compromis entre adéquation aux données et régularisation (voir équation (2.55), page 46). Les valeurs testées ont été définies d'après les ordres de grandeur du terme d'adéquation aux données $\mathcal{C}_{AD}$ et du terme de régularisation ϕ lors des premières itérations pour les deux initialisations, de sorte que l'un de ces deux termes ne soit pas négligeable devant l'autre.
- de l'hyperparamètre δ qui intervient également dans le terme de pénalisation ϕ et qui permet de positionner la transition entre le régime quadratique et le régime linéaire de la fonction potentiel (voir équation (2.54), page 45). Les valeurs testées ont été définies en fonction de l'écart entre les caractéristiques du béton et celles de la terre.
- du seuil η qui intervient dans le critère d'arrêt. Il a été réglé de sorte que pour les deux initialisations, l'algorithme converge vers des valeurs du critère très proches en un temps raisonnable.

- du nombre d'itérations successives au cours desquelles la grandeur Δ_n (cf. équation (2.70)) doit être inférieure au seuil η pour que l'algorithme s'arrête. Pour tous les tests effectués, ce nombre d'itérations a été fixé à 10.

2.4.2 Premiers résultats obtenus

Nous avons commencé par appliquer la méthode d'inversion présentée dans la section précédente au milieu sans cheminée ni surface libre (voir section 1.6.1, page 28). Les valeurs des hyperparamètres retenues sont $\delta = 10^4$ et $\gamma = 10^{-18}$ et le seuil η a été fixé à 10^{-9} . Les résultats sont présentés sur la figure 2.3. Nous montrons les cartes des caractéristiques v_p et v_s obtenues à convergence ainsi que l'évolution temporelle du critère pour l'initialisation aux caractéristiques de la terre et l'initialisation à la solution parfaite.

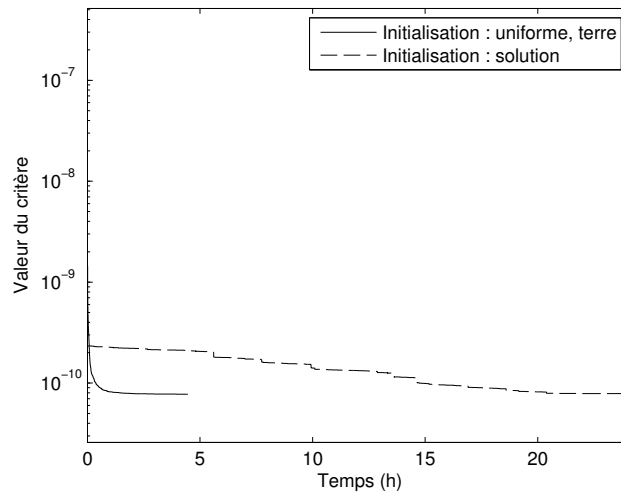
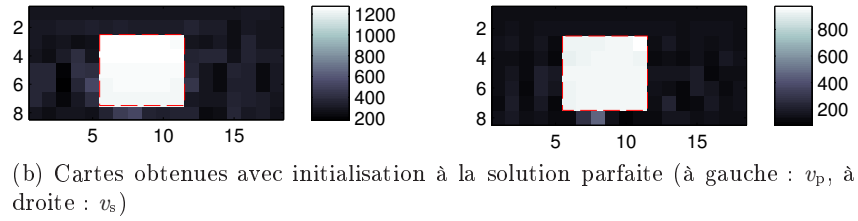
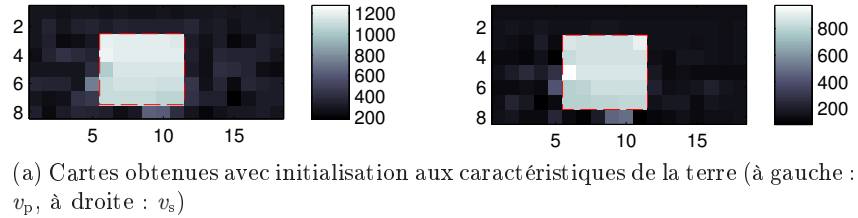


Figure 2.3 – Premiers résultats obtenus sur le milieu sans cheminée ni surface libre pour deux initialisations différentes (valeurs caractéristiques du béton attendues : $v_p = 4000$ m/s et $v_s = 2200$ m/s)

Pour les deux initialisations, l'algorithme aboutit à des cartes similaires et à une valeur de

critère similaire. Il semble donc qu'un même minimiseur du critère ait été atteint. Sur la carte des caractéristiques v_p comme sur la carte des caractéristiques v_s , nous reconnaissons bien la forme de l'objet diffractant.

Néanmoins, les résultats obtenus ne sont pas tout à fait satisfaisants :

- Les caractéristiques du béton ne correspondent pas aux valeurs attendues : pour les deux initialisations, les valeurs de v_p obtenues sont inférieures à 1300 m/s alors qu'elles devraient être égales à 4000 m/s et les valeurs de v_s obtenues sont inférieures à 1000 m/s alors qu'elles devraient être égales à 2200 m/s.
- Sur les cartes reconstruites, les régions Terre et Béton ne sont pas tout à fait uniformes alors que pour la solution recherchée, ces régions le sont parfaitement.
- Le temps de calcul est excessivement long : presque 5 heures sont nécessaires pour l'initialisation aux caractéristiques de la terre et il faut plus de 24 heures pour l'initialisation à la solution.

Il est possible de se rapprocher des caractéristiques du béton recherchées et de converger vers des régions plus homogènes en imposant un critère d'arrêt plus strict mais cela implique une augmentation du temps de calcul.

La lenteur de convergence de l'algorithme est manifestement due à un mauvais conditionnement du critère. Il est possible d'améliorer le conditionnement en augmentant la valeur du coefficient de pondération γ et ainsi d'accélérer la convergence de l'algorithme mais les caractéristiques du béton reconstruites s'éloigneront davantage des valeurs recherchées.

2.4.3 Introduction progressive des données

Description de la démarche

Pour accélérer la convergence de l'algorithme, nous proposons tout d'abord d'introduire les données de manière progressive, comme nous l'avons évoqué dans la section 1.3.3, page 15. L'idée est de réduire la quantité de données traitées dans un premier temps afin de se rapprocher de la solution pour un coût de calcul moindre, puis de prendre en compte davantage d'informations afin d'affiner la reconstruction.

L'introduction des données fréquence par fréquence semble la démarche la plus pertinente dans notre cas. En effet, le temps de calcul du critère et du gradient est directement lié au nombre de fréquences prises en compte. Plus précisément, le nombre de décompositions en facteurs LU et de résolutions de systèmes linéaires, qui sont les opérations les plus coûteuses, est directement proportionnel au nombre de fréquences considérées (cf. algorithme 3, page 49).

Nous reprenons la démarche proposée dans [Bunks *et al.*, 1995] : dans un premier temps, nous travaillons sur la plus basse fréquence jusqu'à convergence de l'algorithme. Les résultats obtenus servent d'initialisation pour l'étape suivante qui consiste à travailler sur les deux plus basses fréquences. Nous procédons de cette façon jusqu'à ce que l'ensemble des données soit pris en compte. De cette façon, nous reconstruisons d'abord un milieu lisse (informations correspondant aux données basses fréquences) avant de reconstruire les discontinuités plus franches (informations correspondant aux données hautes fréquences).

Par rapport à d'autres techniques qui consistent à travailler constamment sur un nombre de fréquences limité [Pratt et Worthington, 1990 ; Pratt, 1999 ; Brossier, 2009], cette façon de procéder nous semble plus rigoureuse car à l'étape finale d'optimisation, nous travaillons sur l'expression complète du critère.

Remarque : La non-linéarité du critère est moins marquée pour les basses fréquences que pour les hautes fréquences [Sirgue et Pratt, 2004]. La démarche adoptée s'apparente donc à la méthode proposée dans [Carfantan et Mohammad-Djafari, 1995] qui consiste à minimiser un critère non convexe en considérant d'abord une approximation convexe puis en introduisant la non-convexité du critère de manière graduelle.

Résultats obtenus

Les résultats sont présentés sur la figure 2.4. Ils ont été obtenus en utilisant les mêmes valeurs des hyperparamètres δ et γ que précédemment. Nous avons également conservé le critère d'arrêt basé sur la variation des cartes des caractéristiques v_p et v_s pour chaque groupe de fréquences mais le seuil η est maintenant égal à 10^{-8} . Lorsqu'une fréquence supplémentaire est prise en compte, les termes associés à cette fréquence sont ajoutés à l'expression du critère, ce qui explique les « pics » visibles sur l'évolution temporelle du critère. A chaque occurrence, nous avons indiqué le numéro de la fréquence introduite.

Cette démarche nous a permis de réduire le temps de calcul pour l'initialisation à la solution : nous sommes passés de plus de 24 heures de calcul à environ 6 heures de calcul. Pour l'initialisation aux caractéristiques de la terre, le temps de calcul est resté quasiment identique. Les cartes obtenues après la prise en compte des 10 fréquences sont semblables aux cartes obtenues précédemment : la forme de l'objet diffractant est reconnaissable mais les caractéristiques du béton sont sous-estimées et les régions Terre et Béton ne sont pas tout à fait uniformes.

Nous allons montrer que l'utilisation d'un autre jeu de variables peut entraîner une amélioration des résultats d'inversion.

2.4.4 Introduction d'un changement de variables

Intérêt du changement de variables

D'après les résultats précédents, un ralentissement de la progression de l'algorithme d'inversion se manifeste lorsqu'un contraste élevé entre les caractéristiques de la terre et celles du béton est atteint. Cela est particulièrement visible sur les résultats présentés figure 2.3 :

- Pour l'initialisation aux caractéristiques de la terre, le contraste est faible lors des premières itérations et nous observons une rapide décroissance du critère. Une fois que des valeurs de v_p^2 et de v_s^2 relativement élevées sont atteintes (bien que celles-ci restent encore éloignées des valeurs recherchées), la décroissance du critère est plus lente.
- Pour l'initialisation à la solution, le contraste est élevé dès les premières itérations et nous observons une lente évolution du critère tout au long du processus de minimisation.

Nous expliquons ces observations par un manque de sensibilité du critère vis-à-vis des variables optimisées : lorsque des valeurs caractéristiques élevées sont atteintes le critère devient quasiment insensible à des variations de v_p^2 et de v_s^2 , ce qui induit une faible progression de l'algorithme à chaque itération. Cela est une conséquence directe du fort contraste entre les caractéristiques de la terre et du béton : d'après les tableaux 1.1 et 1.2, page 28, le ratio entre les caractéristiques des deux régions est supérieur à 13 pour v_p comme pour v_s (un contraste « faible » désigne habituellement à un ratio inférieur à 2). D'un point de vue physique, cela correspond au fait qu'une légère modification des caractéristiques du béton n'a quasiment aucun impact sur la propagation des ondes dans le sous-sol.

Une de nos contributions consiste à accélérer la convergence de l'algorithme d'inversion grâce à un changement de variables choisi de manière à compenser le manque de sensibilité du critère [Vautrin *et al.*, 2011b].

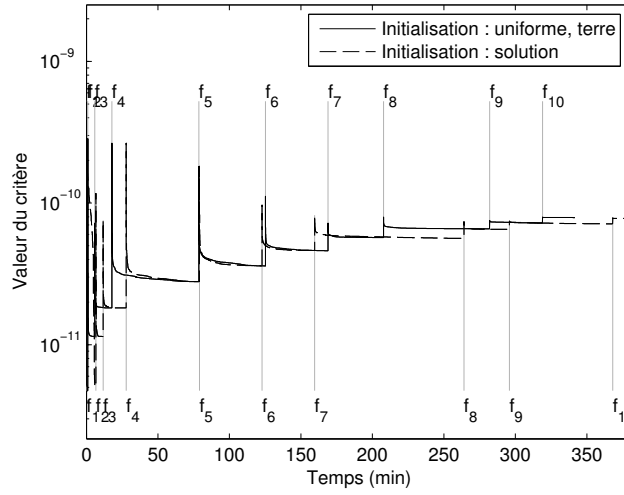
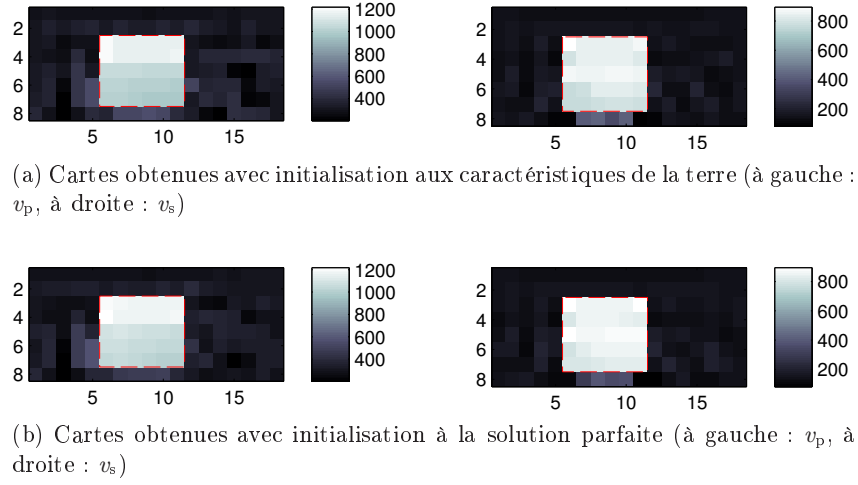


Figure 2.4 – Résultats obtenus sur le milieu sans cheminée ni surface libre en introduisant les données fréquence par fréquence pour deux initialisations différentes (valeurs caractéristiques du béton attendues : $v_p = 4000$ m/s et $v_s = 2200$ m/s)

Jusqu'à maintenant, nous avons travaillé avec les vecteurs $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ dont chaque composante est égale au carré de la vitesse de propagation des ondes de compression et de cisaillement en un point du maillage. Ce choix provient du fait que la matrice d'impédance $\mathbf{A}_\omega$ dépend linéairement de $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ (voir section 1.4.3, page 20). Nous proposons d'exprimer le critère en fonction de deux nouvelles variables χ_p et χ_s dont les composantes sont les images des composantes de $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ par une fonction h :

$$[\chi_p]_l = h([\mathbf{v}_p^2]_l) \quad \text{et} \quad [\chi_s]_l = h([\mathbf{v}_s^2]_l) \quad (2.71)$$

où h est un difféomorphisme défini sur $[0; +\infty[$ (h est bijective et différentiable et sa réciproque est différentiable). Cela revient à minimiser le critère :

$$\mathcal{C}_h(\chi_p, \chi_s) = \mathcal{C}(h^{-1}(\chi_p), h^{-1}(\chi_s)) \quad (2.72)$$

où $[h^{-1}(\chi_p)]_l = h^{-1}([\chi_p]_l)$ et $[h^{-1}(\chi_s)]_l = h^{-1}([\chi_s]_l)$.

Le changement de variables a une influence sur le calcul du gradient du critère :

$$\nabla \mathcal{C}_h(\chi_p, \chi_s) = \text{Diag} \left\{ \begin{bmatrix} (h^{-1})'(\chi_p) \\ (h^{-1})'(\chi_s) \end{bmatrix} \right\} \nabla \mathcal{C}(h^{-1}(\chi_p), h^{-1}(\chi_s)) \quad (2.73)$$

où $[(h^{-1})'(\chi_p)]_l = \partial h^{-1}([\chi_p]_l) / \partial [\chi_p]_l$ et $[(h^{-1})'(\chi_s)]_l = \partial h^{-1}([\chi_s]_l) / \partial [\chi_s]_l$.

Il agit donc comme un préconditionneur diagonal variable [Barrett *et al.*, 1994] qui a l'avantage d'être très peu coûteux en calculs. Notons que le changement de variables a un impact sur le processus de minimisation uniquement dans le cas où la fonction h est non linéaire.

Choix du changement de variables

Nous avons observé que le critère semble perdre en sensibilité lorsque des valeurs de contraste élevées sont atteintes. Pour compenser ce manque de sensibilité, la fonction h doit être choisie de sorte que de faibles variations sur χ impliquent des variations de $v^2 = h^{-1}(\chi)$ plus fortes pour des valeurs élevées que pour des valeurs faibles de v^2 . Autrement dit, la dérivée de h doit être décroissante en valeur absolue. Une première possibilité consiste simplement à se ramener à des vitesses de propagation en choisissant $h(v^2) = v$. Nous avons également testé les changements de variables $h(v^2) = v^{-1}$ et $h(v^2) = \ln v$ (voir figure 2.5).

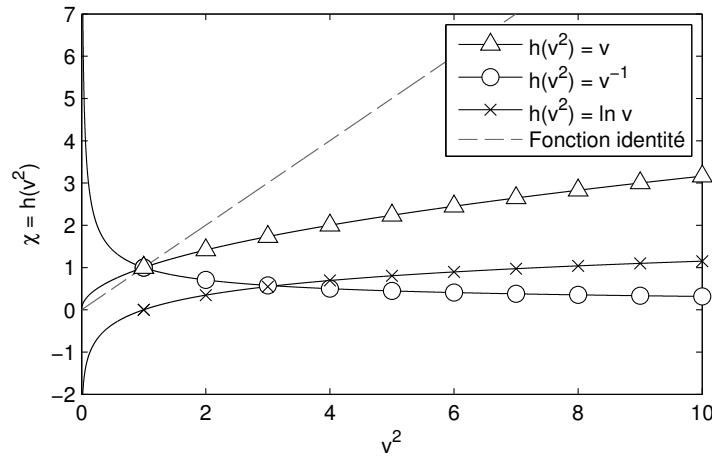


Figure 2.5 – Changements de variables testés. Dans tous les cas, h est choisie de sorte que sa dérivée soit décroissante en valeur absolue.

Remarquons enfin que le terme de régularisation peut être modifié de manière à porter sur les nouvelles variables χ_p et χ_s .

Résultats obtenus

Parmi les différents changements de variables testés, les résultats les plus satisfaisants sont obtenus avec le changement de variables logarithmique et lorsque le terme de régularisation ϕ porte directement sur les variables optimisées χ_p et χ_s . Nous les présentons sur la figure 2.6. Les valeurs des deux hyperparamètres intervenant dans le terme de régularisation ϕ du critère sont maintenant $\delta = 10^{-2}$ et $\gamma = 10^{-11}$. Nous avons conservé le même critère d'arrêt que précédemment : la variation de v_p et v_s (cf. équation (2.70)) est inférieure à $\eta = 10^{-8}$ pendant 10

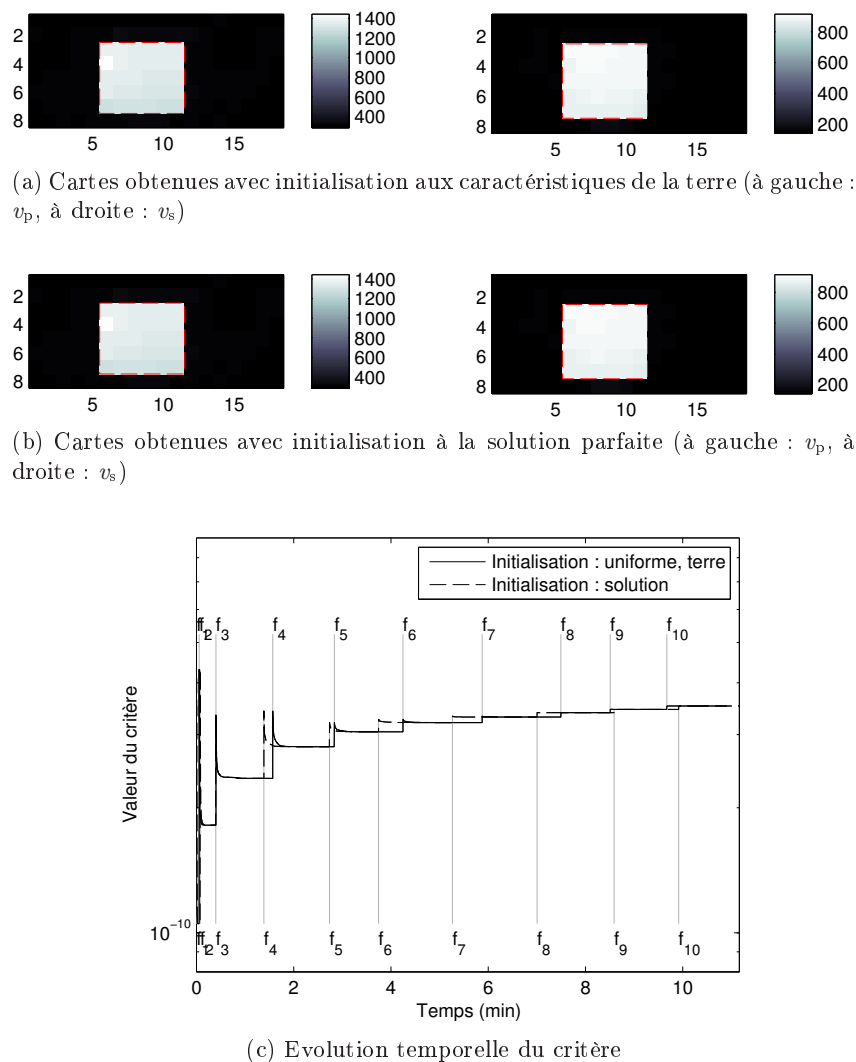


Figure 2.6 – Résultats obtenus sur le milieu sans cheminée ni surface libre avec changement de variables logarithmique pour deux initialisations différentes (valeurs caractéristiques du béton attendues : $v_p = 4000$ m/s et $v_s = 2200$ m/s)

itérations successives. Nous présentons à nouveau les résultats obtenus en initialisant l'algorithme aux caractéristiques de la terre d'une part et à la solution parfaite d'autre part.

Comme précédemment, l'algorithme aboutit à des cartes similaires et à une valeur de critère similaire pour les deux initialisations. Les cartes obtenues sont plus satisfaisantes : non seulement la forme de l'objet diffractant est nettement visible mais les régions Terre et Béton sont maintenant plus uniformes. De plus, nous nous sommes légèrement rapprochés des valeurs caractéristiques du béton recherchées, bien qu'elles restent sous-estimées.

L'amélioration la plus significative porte sur le temps de calcul. Alors que plusieurs heures étaient nécessaires initialement, l'effet combiné de l'introduction progressive des données et du changement de variables a permis de réduire le temps de calcul à une dizaine de minutes pour les deux initialisations.

Notons que comme précédemment, il reste possible de se rapprocher des caractéristiques du béton recherchées en jouant sur la valeur du coefficient de pondération γ et en imposant un

critère d'arrêt plus strict mais cela se fait au détriment du temps de calcul.

Application au milieu avec cheminée et surface libre

Nous avons appliqué cette dernière version de notre algorithme d'inversion au milieu avec cheminée et surface libre décrit à la section 1.6.2, page 29. Les réglages des hyperparamètres δ et γ sont identiques ($\delta = 10^{-2}$ et $\gamma = 10^{-11}$). Nous avons également conservé le critère d'arrêt basé sur la variation des cartes des caractéristiques v_p et v_s mais le seuil η est cette fois égal à 10^{-5} . Nous avons initialisé l'algorithme aux caractéristiques de la terre d'une part et à la solution parfaite d'autre part. Les résultats sont présentés sur la figure 2.7.

On remarque que l'algorithme converge apparemment vers le même minimiseur pour les deux initialisations : les cartes obtenues sont similaires et les valeurs finales de critère sont très proches. Cependant, la forme de l'objet diffractant est reconstruite de manière assez approximative. De plus, les valeurs caractéristiques du béton sont à nouveau sous-estimées (on parvient aux mêmes estimations que pour le milieu sans cheminées ni surface libre). D'autres réglages des hyperparamètres δ et γ et du critère d'arrêt ont été testés mais cela n'a pas permis d'améliorer de façon significative les résultats.

On note également qu'il faut davantage de temps par rapport au milieu sans cheminée ni surface libre pour arriver à convergence (environ trois heures de calcul sont nécessaires). Cela peut s'expliquer non seulement par l'augmentation du nombre d'inconnues (les dimensions de la zone d'intérêt sont plus grandes et la résolution spatiale du maillage plus fine) mais également par la plus grande complexité de la configuration : les dimensions de l'objet diffractant sont plus grandes, sa géométrie est plus complexe et le milieu comprend une surface libre ce qui implique la formation d'ondes de surface.

Nous montrons sur la figure 2.8 le sismogramme obtenu à partir du milieu reconstruit. Les figures 2.8a et 2.8c montrent une comparaison avec les sismogrammes correspondant à la solution parfaite (voir figure 1.11, page 31). Les sismogrammes sont très similaires. Cela illustre le caractère mal posé du problème non régularisé : les cartes des caractéristiques associées à deux jeux de données très proches sont sensiblement différentes.

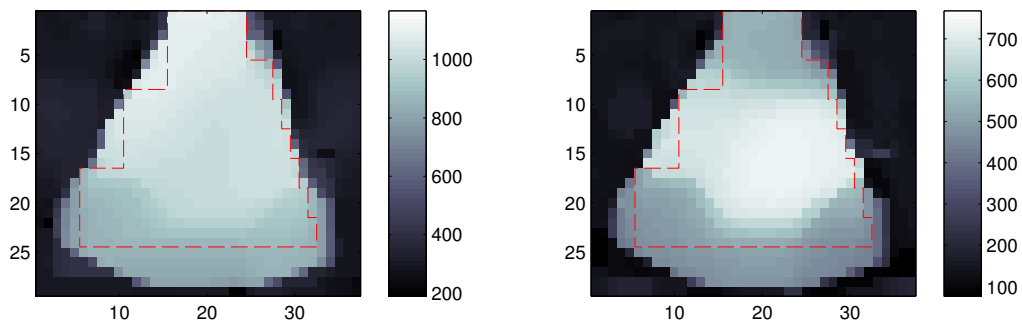
Bilan des résultats

Nous avons appliqué l'algorithme d'inversion proposé, avec introduction progressive des données des basses vers les hautes fréquences et changement de variables logarithmique, à deux configurations différentes. Dans les deux cas, un même jeu d'hyperparamètres ($\delta = 10^{-2}$ et $\gamma = 10^{-11}$) a abouti aux meilleurs résultats possibles. Seul le critère d'arrêt a dû être adapté d'une configuration à l'autre.

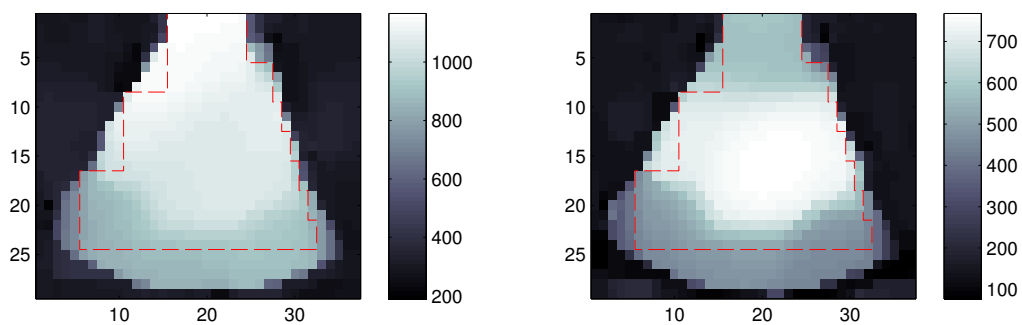
Si les résultats obtenus sont proches de la solution recherchée sur un milieu de petite taille sans cheminée ni surface libre, ils sont moins satisfaisants pour une configuration plus complexe. Pour améliorer les résultats de reconstruction, il est nécessaire d'incorporer des informations plus précises concernant l'objectif d'inversion. C'est ce que nous aborderons dans le prochain chapitre.

2.4.5 Éléments d'interprétation complémentaires

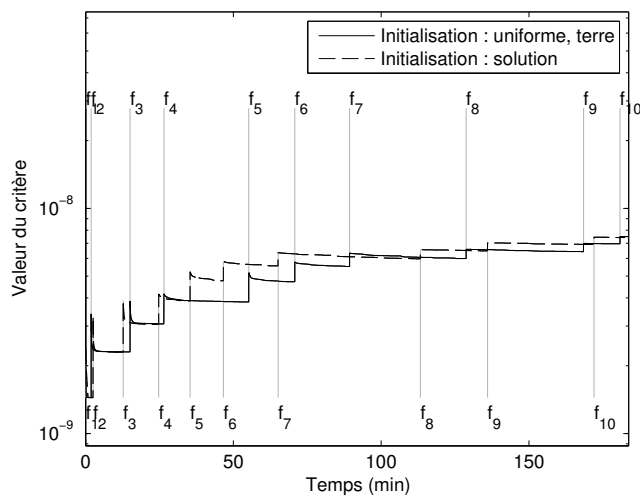
Nous proposons finalement de revenir aux résultats obtenus sur le milieu sans cheminée ni surface libre et d'apporter quelques éléments complémentaires permettant de mieux cerner l'intérêt d'un changement de variables logarithmique.



(a) Cartes obtenues avec initialisation aux caractéristiques de la terre (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(b) Cartes obtenues avec initialisation à la solution parfaite (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(c) Evolution temporelle du critère

Figure 2.7 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre avec changement de variables logarithmique pour deux initialisations différentes (valeurs caractéristiques du béton attendues : $v_p = 4000$ m/s et $v_s = 2200$ m/s)

Considérons les trois situations suivantes :

1. Les variables optimisées et régularisées sont v_p^2 et v_s^2 .
2. Les variables optimisées sont χ_p et χ_s et les variables régularisées sont v_p^2 et v_s^2 .
3. Les variables optimisées et régularisées sont χ_p et χ_s .

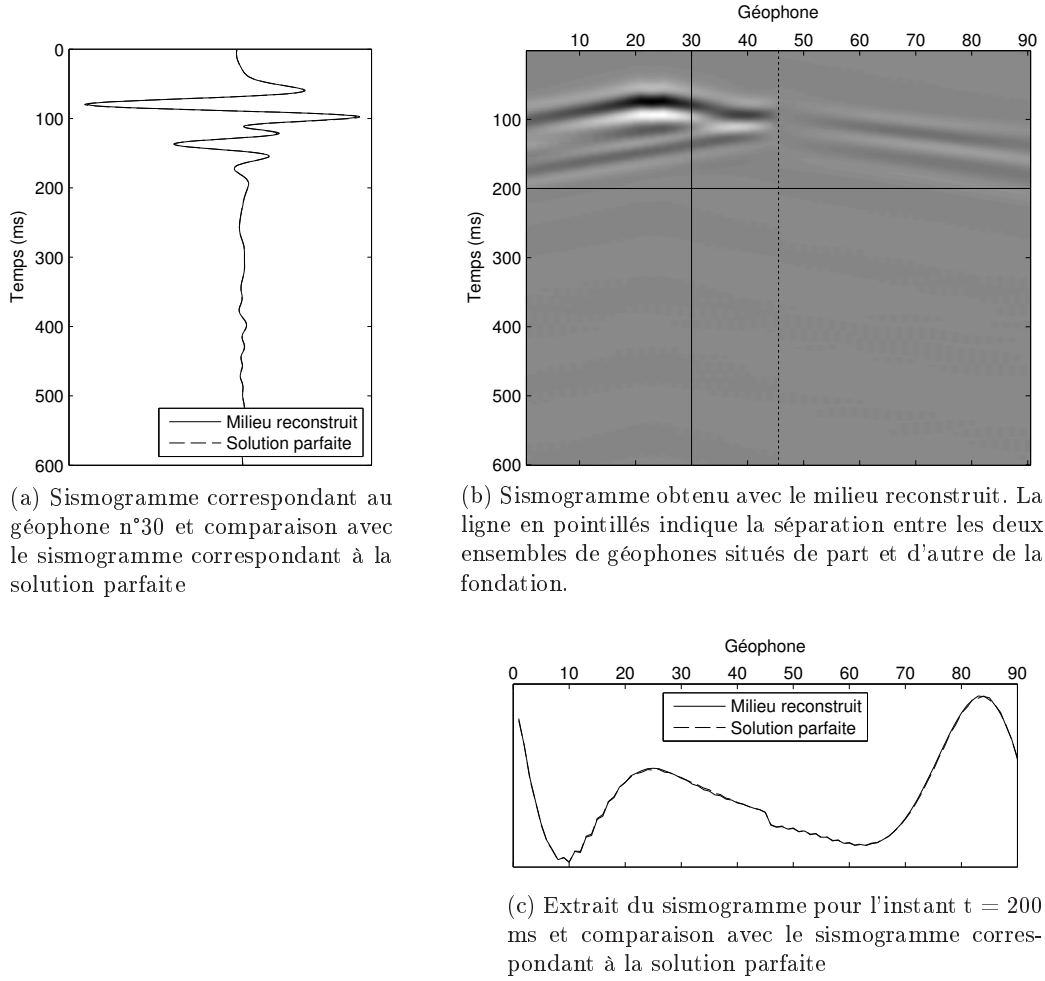


Figure 2.8 – Sismogramme obtenu avec le milieu reconstruit et comparaison avec le sismogramme correspondant à la solution parfaite pour le géophone n°30 (figure (a)) et pour l'instant $t = 200$ ms (figure (c))

Dans ces trois cas, la forme de l'objet diffractant est supposée connue et nous étudions l'évolution du terme d'adéquation aux données $\mathcal{C}_{AD}$, du terme de régularisation ϕ et du critère total $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{AD} + \phi$ en fonction de ses caractéristiques. Sans changement de variables (situation n°1), nous faisons évoluer les composantes de $\mathbf{v}_p^2$ (resp. $\mathbf{v}_s^2$) associées à la région Béton de façon linéaire entre les valeurs caractéristiques de la terre et les valeurs caractéristiques réelles du béton, c'est-à-dire entre 300^2 et 4000^2 (resp. entre 150^2 et 2200^2). Avec changement de variables logarithmique (situations n°2 et n°3), nous faisons évoluer les composantes de χ_p (resp. χ_s) associées à la région Béton de façon linéaire entre $\ln(300)$ et $\ln(4000)$ (resp. entre $\ln(150)$ et $\ln(2200)$).

De cette façon, nous nous ramenons à l'évolution du critère le long d'un axe particulier de l'espace d'état ce qui permet de mieux se représenter l'impact du changement de variables logarithmique. Précisons que les courbes affichées ne sont pas représentatives de l'évolution du critère dans tout l'espace d'état. En particulier, dans la direction choisie, le critère est unimodal et convexe, ce qui n'est certainement pas le cas de manière générale.

1. Cas où les variables optimisées et régularisées sont v_p^2 et v_s^2

Il s'agit du cas où aucun changement de variables n'est effectué et où le terme de régularisation porte sur les variables initiales. L'évolution des différents termes du critère est présentée sur la figure 2.9.

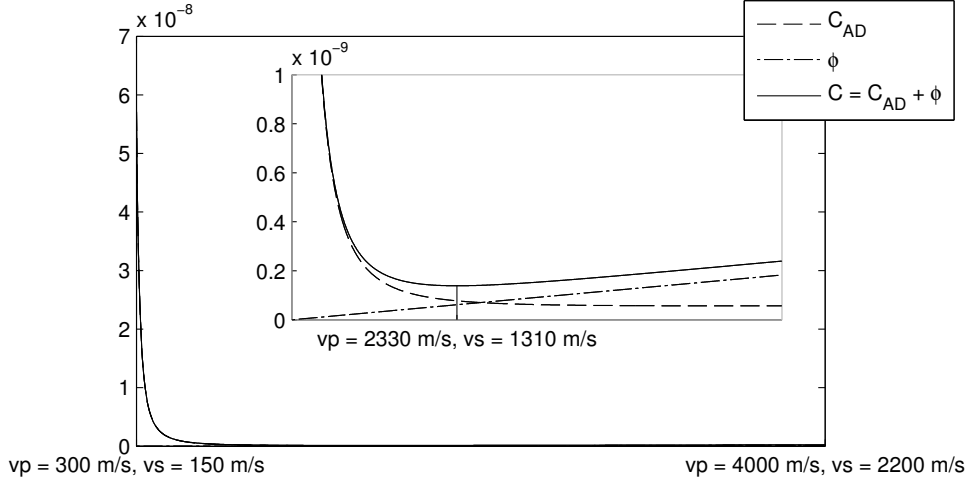


Figure 2.9 – Evolution des différents termes du critère en fonction des caractéristiques de l'objet diffractant pour deux échelles de l'axe des ordonnées. Dans ce cas, les variables optimisées et les variables régularisées sont v_p^2 et v_s^2 . Le long de l'axe des abscisses, v_p^2 et v_s^2 évoluent linéairement. Les valeurs de v_p et v_s affichées ont été calculées après conversion.

L'évolution du terme d'adéquation aux données met en évidence le manque de sensibilité des données calculées. En effet, ses plus fortes variations se concentrent autour des très faibles valeurs de v_p^2 et v_s^2 . Pour les valeurs de v_p^2 et v_s^2 plus élevées, l'évolution de C_{AD} stagne.

Ce manque de sensibilité implique une difficulté de réglage de l'hyperparamètre γ qui pondère la fonction de régularisation. En effet, une faible pondération est nécessaire pour permettre à l'algorithme de se rapprocher des caractéristiques du réelles béton (remarquons que malgré la petite valeur de γ que nous avons choisie, le minimum du critère est déjà atteint pour $v_p = 2330$ m/s et $v_s = 1310$ m/s). Cela se fait au détriment à la fois de la pénalisation des petites différences entre pixels voisins (cela explique l'hétérogénéité des régions Terre et Béton observée sur les cartes reconstruites, voir figure 2.4, page 54) et de la sensibilité du critère total qui est à l'origine de la lenteur de convergence de l'algorithme.

2. Cas où les variables optimisées sont χ_p et χ_s et les variables régularisées sont v_p^2 et v_s^2

Il s'agit du cas où seul un changement de variables a été effectué. Le terme de régularisation porte toujours sur les variables initiales. L'évolution des différents termes du critère est présentée sur la figure 2.10.

Nous mettons ici en évidence l'intérêt du changement de variables vis-à-vis de la sensibilité des données. En effet, les plus fortes variations du terme d'adéquation aux données se répartissent maintenant sur un intervalle plus grand.

Cependant, les petites différences entre pixels voisins restent mal pénalisées par le terme de régularisation : pour les petites valeurs de χ_p et χ_s , la fonction ϕ ne varie quasiment pas.

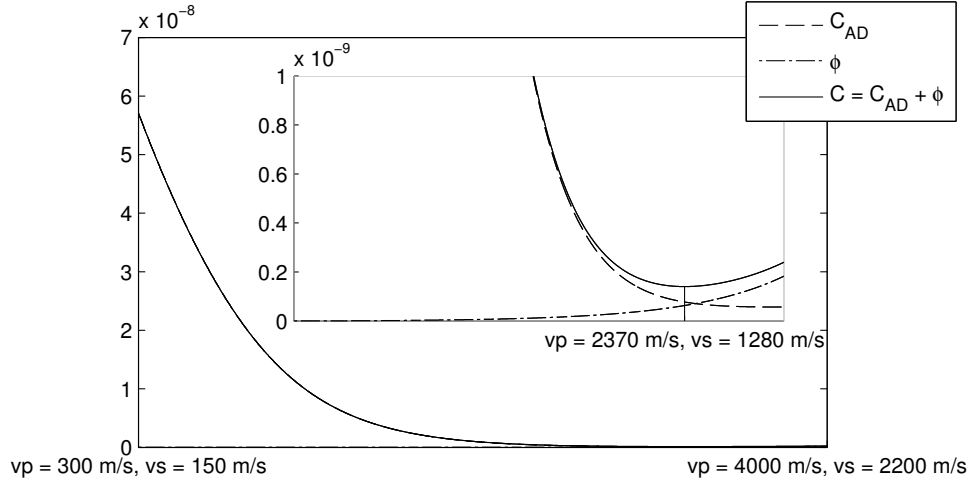


Figure 2.10 – Evolution des différents termes du critère en fonction des caractéristiques de l'objet diffractant pour deux échelles de l'axe des ordonnées. Dans ce cas, un changement de variables logarithmique a été effectué. Les variables optimisées sont $\ln v_p$ et $\ln v_s$ et les variables régularisées sont v_p^2 et v_s^2 . Le long de l'axe des abscisses, $\ln v_p$ et $\ln v_s$ évoluent linéairement. Les valeurs de v_p et v_s affichées ont été calculées après conversion.

3. Cas où les variables optimisées et régularisées sont χ_p et χ_s

Il s'agit du cas où un changement de variables a été effectué et où le terme de régularisation porte sur les nouvelles variables. L'évolution des différents termes du critère est présentée sur la figure 2.11.

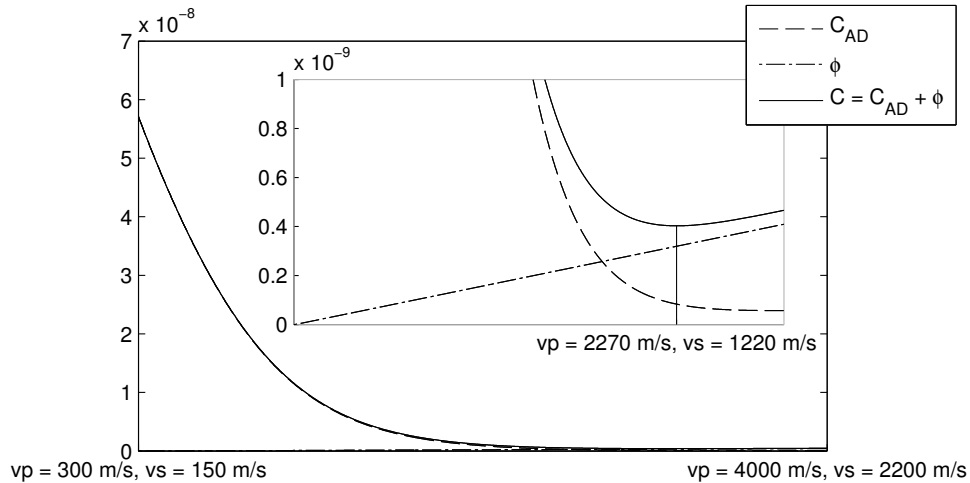


Figure 2.11 – Evolution des différents termes du critère en fonction des caractéristiques de l'objet diffractant pour deux échelles de l'axe des ordonnées. Dans ce cas, un changement de variables logarithmique a été effectué. Les variables optimisées et les variables régularisées sont $\ln v_p$ et $\ln v_s$. Le long de l'axe des abscisses, $\ln v_p$ et $\ln v_s$ évoluent linéairement. Les valeurs de v_p et v_s affichées ont été calculées après conversion.

Les courbes montrent que les petites différences entre pixels voisins sont maintenant mieux

régularisées sans pour autant pénaliser davantage les fortes discontinuités (dans la direction choisie, le minimum du critère est atteint pour $v_p = 2270$ m/s et $v_s = 1220$ m/s). C'est pourquoi les régions Terre et Béton des cartes reconstruites sont plus homogènes dans ce cas (voir figure 2.6, page 56).

Remarquons que, même après modification de la fonction de régularisation du critère, un changement de variables logarithmique reste nécessaire pour accélérer la convergence de l'algorithme comme le montrent les temps de calcul indiqués sur le tableau 2.1.

	Initialisation aux caractéristiques de la terre	Initialisation à la solution exacte
Sans changement de variables	151 min.	190 min.
Avec changement de variables	11 min.	11 min.

Tableau 2.1 – Temps de calcul sans et avec changement de variables logarithmique dans le cas où le terme de régularisation porte sur χ_p et χ_s

Chapitre 3

Reconstruction tomographique avec segmentation du milieu sondé

Sommaire

3.1	Introduction	63
3.1.1	Objectifs	63
3.1.2	Organisation du chapitre	64
3.2	Détail des informations <i>a priori</i> disponibles	64
3.2.1	Position et géométrie d'une fondation	64
3.2.2	Informations obtenues par des techniques complémentaires	65
3.2.3	Estimation préalable des caractéristiques du terrain	67
3.3	Introduction d'une segmentation du milieu	67
3.3.1	Principe général de l'approche par segmentation	69
3.3.2	Représentations paramétriques	70
3.3.3	Représentations non paramétriques : la méthode des <i>level-sets</i>	71
3.4	Description de la méthode d'inversion proposée	74
3.4.1	Description semi-paramétrique du milieu	75
3.4.2	Algorithme d'optimisation	77
3.5	Résultats sur données simulées	82
3.5.1	Précisions sur les tests effectués	82
3.5.2	Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre	83
3.5.3	Robustesse par rapport à des erreurs sur les estimations préalables	85

3.1 Introduction

3.1.1 Objectifs

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une méthode d'inversion avec régularisation markovienne. Des tests sur données simulées ont montré qu'elle aboutit à des résultats intéressants sur des milieux de petite taille sans surface libre. Cependant, dans le cas d'une configuration plus complexe (milieu de plus grandes dimensions, présence d'une surface libre), les reconstructions sont plus approximatives.

Un point faible de cette méthode est le peu d'*a priori* pris en compte. En effet, la régularisation du critère minimisé se base uniquement sur une pénalisation des différences entre pixels voisins.

Les performances de la méthode peuvent être améliorées si l'on tient compte d'*a priori* plus nombreux et plus précis. Nous disposons en particulier^a :

- d'*a priori* sur la structure particulière des fondations ;
- d'informations portant sur la géométrie des fondations obtenues par des techniques de mesure complémentaires ;
- d'une estimation préalable des caractéristiques du terrain.

Dans ce chapitre, nous proposons une seconde approche pour la résolution du problème inverse basée sur une segmentation du milieu sondé. Elle permet de prendre en compte ces différentes informations. Elle partage certains points communs avec la méthode d'inversion par régularisation markovienne que nous avons présentée dans le chapitre précédent.

3.1.2 Organisation du chapitre

Dans la section 3.2, nous présentons en détail les différentes informations *a priori* disponibles. Concernant les techniques de mesure complémentaires, nous expliquons en particulier le principe du « sondage au piquet » qui apporte des informations sur la géométrie de la fondation auscultée et de l'*impact-echo* qui fournit une estimation préalable de la profondeur de la fondation.

Pour prendre en compte ces informations, il est nécessaire d'introduire une segmentation de la zone d'intérêt en deux régions (une région Terre et une région Béton). Dans la section 3.3, nous décrivons la prise en compte d'une segmentation dans l'algorithme d'inversion de façon générale. Nous expliquons ensuite le principe de certaines méthodes de reconstruction tomographique qui s'appuient sur une segmentation du milieu sondé.

La section 3.4 décrit la procédure retenue. Il s'agit d'une méthode originale que nous avons développée afin de pouvoir exploiter toutes les informations *a priori* disponibles. Comme précédemment, elle se base sur la minimisation d'un critère des moindres carrés régularisé. Un de ses avantages est qu'elle permet d'utiliser des méthodes d'optimisation basées sur le calcul explicite du gradient, ce qui contribue à l'efficacité de l'algorithme de minimisation.

Les résultats obtenus sur des données synthétiques sont présentés dans la section 3.5. Ils montrent que la méthode proposée est plus performante que la méthode d'inversion par régularisation markovienne. Afin d'évaluer la robustesse de l'algorithme de reconstruction, des situations où la profondeur de la fondation ou les caractéristiques de la terre étaient mal estimées ont également été considérées.

3.2 Détail des informations *a priori* disponibles

Dans cette section, nous listons les *a priori* disponibles pour l'imagerie des fondations de pylônes. Ces informations seront utilisées par la suite pour la résolution du problème inverse.

3.2.1 Position et géométrie d'une fondation

Une partie de la cheminée des fondations est émergente. Cela donne une information précise sur sa position. Lors de la résolution du problème inverse, nous nous concentrons donc sur la

a. Hormis le premier point qui est lié à la géométrie intrinsèque des fondations, ces informations sont fournies par les autres acteurs du projet.

géométrie des fondations.

Une fondation est une structure d'un seul tenant. Elle possède une géométrie particulière : sa forme est telle que toute section horizontale est rectangulaire. Rappelons que pour résoudre les problèmes direct et inverse, nous nous ramenons à une étude en deux dimensions en nous plaçant dans le plan de symétrie de la fondation. Dans ce cas, toute section horizontale d'une fondation est représentée par un segment horizontal (voir le schéma de la figure 3.1).

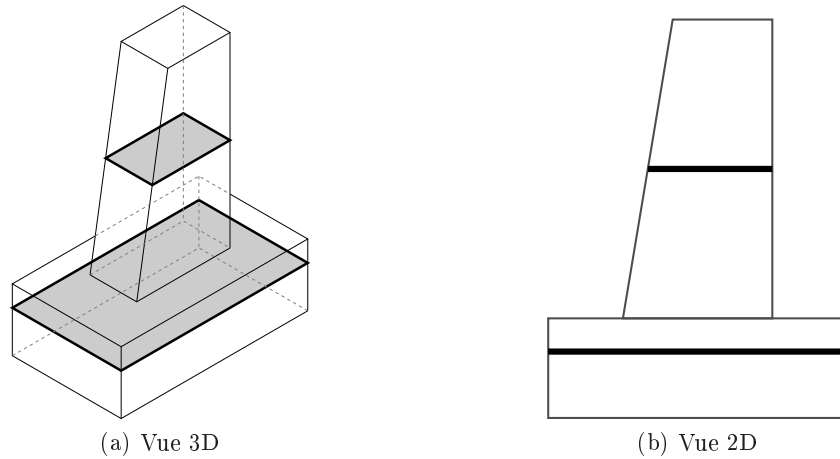


Figure 3.1 – Représentation en trois dimensions et en deux dimensions d'une fondation avec deux coupes horizontales

Nous pouvons également tenir compte du fait que dans la majorité des cas, la largeur de la fondation augmente en fonction de la profondeur.

3.2.2 Informations obtenues par des techniques complémentaires

Informations par sondage au piquet

La technique du « sondage au piquet » permet d'obtenir des informations supplémentaires sur la géométrie de la fondation. Elle consiste simplement à enfoncer une tige métallique dans le sol jusqu'à ce qu'elle entre en contact avec la semelle de la fondation (voir figure 3.2). En mesurant la position de la tige en surface (D_{sp}) et la profondeur à laquelle la pointe a été enfoncée (P_{sp}), nous obtenons un *a priori* sur l'évolution de la largeur de la fondation en fonction de la profondeur.

Estimation de la profondeur de la fondation auscultée par *impact-echo*

La procédure d'*impact-echo* est une méthode de contrôle non destructif qui a été développée au cours des années 1980. Cette technique est couramment employée pour mesurer une épaisseur ou pour détecter des défauts dans une structure en béton [Cheng et Sansalone, 1995 ; Abraham *et al.*, 2000 ; Carino, 2001]. Dans notre étude, cette technique sert à mesurer la profondeur totale des fondations.

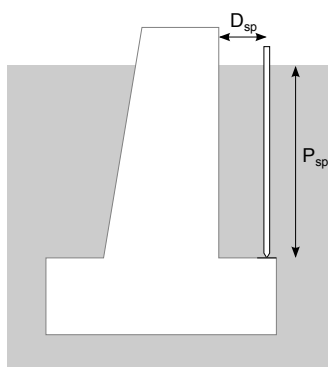


Figure 3.2 – Informations sur l'évolution de la largeur en fonction de la profondeur obtenues par sondage au piquet

Procédure de mesure

La mesure par *impact-echo* est effectuée sur la partie émergente de la fondation. Elle consiste à créer un impact de courte durée sur le toit de la fondation, en faisant chuter une boule métallique par exemple. Cet impact entraîne la propagation d'une onde dans le béton. La signature de l'onde résultante est mesurée à l'aide d'un accéléromètre placé sur le toit de la fondation, à proximité du point d'impact. Le schéma de la figure 3.3 résume la procédure de mesure. Etant donné le fort contraste entre le béton et son milieu environnant (terre et air), l'onde incidente est presque entièrement réfléchiée lorsqu'elle atteint le fond ou le toit de la fondation. L'onde effectue donc une succession d'allers-retours sur toute la hauteur de la fondation.

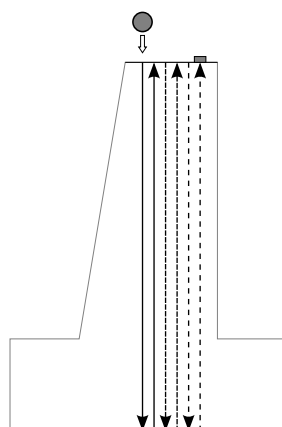


Figure 3.3 – Mesure de la profondeur de la fondation par *impact-echo*. Etant donné le fort contraste entre la fondation et le milieu environnant (terre et air), l'impact sur le toit de la fondation est suivi d'une succession de réflexions sur le fond et sur le toit de la fondation.

Analyse du signal mesuré

L'estimation de la profondeur s'obtient par analyse fréquentielle du signal mesuré par l'accéléromètre.

L'alternance entre réflexion sur le fond et sur le toit de la fondation est un phénomène périodique (on note sa période T). Elle est associée à la composante fréquentielle du signal

mesuré dont l'amplitude est maximale ($f_{\max} = T^{-1}$). Cette fréquence correspond à un mode de résonance de la fondation. Soit v_p^b la vitesse de propagation de l'onde dans le béton. La longueur d'onde $\lambda_{\max}$ associée à la fréquence $f_{\max}$ est égale à :

$$\lambda_{\max} = \frac{v_p^b}{f_{\max}} \quad (3.1)$$

La période T correspond à la durée d'un aller-retour entre le toit et le fond de la fondation. Une demi-période est donc nécessaire pour parcourir toute la hauteur de la fondation. La profondeur P de la fondation est donc égale à :

$$P = \frac{\lambda_{\max}}{2} = \frac{v_p^b}{2f_{\max}} \quad (3.2)$$

Remarque : La profondeur de la fondation n'est estimée qu'à partir de l'analyse du signal mesuré. Néanmoins, l'impact initial a une influence sur le résultat de l'estimation. En particulier, sa durée influe sur le spectre du signal mesuré : plus l'impact est bref (onde générée proche d'une impulsion), plus le contenu fréquentiel du signal est riche mais plus l'amplitude de chaque fréquence est faible (rapport signal à bruit plus élevé) [Carino, 2001].

3.2.3 Estimation préalable des caractéristiques du terrain

Une première estimation des caractéristiques du terrain qui englobe la fondation est réalisée en faisant appel à des méthodes d'imagerie plus classiques. Celles-ci n'exploitent qu'une partie des informations contenues dans les sismogrammes, comme celles que nous avons citées à la section 1.3.2, page 12 :

- Une méthode de tomographie par sismique réfraction est utilisée pour estimer la distribution spatiale de la vitesse des ondes de compression v_p . Elle consiste à minimiser l'écart entre les temps d'arrivée des ondes de réfraction théoriques et les temps d'arrivée mesurés sur les sismogrammes. Cette méthode s'appuie sur une approximation haute fréquence de l'équation de propagation des ondes appelée *équation de l'eikonale*.
- L'analyse de la propagation des ondes de Rayleigh permet d'estimer la distribution spatiale de la vitesse des ondes de cisaillement v_s . Il s'agit d'ondes de surface dispersives (leur vitesse de propagation dépend de la fréquence). Les fréquences les plus hautes donnent des informations sur les zones les plus superficielles tandis que les fréquences les plus basses renseignent sur les zones plus profondes.

Notons que pour obtenir ces estimations préalables, le dispositif mis en place diffère de celui utilisé pour l'imagerie des fondations, notamment par l'utilisation d'un dispositif à offset plus grand (source vibratoire plus éloignée des géophones). Des précisions et des références sur les méthodes utilisées sont données dans [Magnin, 2008, chap. 2].

Les caractéristiques du béton ne sont quant à elles pas mesurées : des valeurs standards ($v_p = 4000$ m/s et $v_s = 2200$ m/s) sont directement utilisées.

3.3 Introduction d'une segmentation du milieu

La méthode d'inversion par régularisation markovienne, que nous avons présentée dans le deuxième chapitre, se base sur des *a priori* faibles. C'est ce qui explique les reconstructions approximatives du milieu avec cheminée et surface libre (cf. section 2.4.4, page 53). Nous proposons

de modifier cette première méthode d'inversion pour y incorporer les *a priori* que nous avons cités dans la section 3.2.

Une première approche prenant en compte uniquement l'estimation préalable des caractéristiques de la terre et du béton (voir section 3.2.3, page 67) a été mise en œuvre par Matthieu Voorons et Yves Goussard de l'Ecole Polytechnique de Montréal [Vautrin et Voorons, 2011]. Elle consiste à ajouter dans l'expression du critère minimisé des fonctions de pénalisation non convexes qui privilégient l'apparition de certaines valeurs caractéristiques dans les cartes reconstruites. Les fonctions utilisées sont construites à partir de la fonction potentiel φ qui a été introduite dans le chapitre précédent (voir équation (2.54), page 45). Plus précisément, elles s'obtiennent en soustrayant deux fonctions φ de paramètres δ_1 et δ_2 différents :

$$\phi_{L_2L_0}(\mathbf{x}) = \gamma \sum_{m=1}^{N_x^Z N_y^Z} \sqrt{\delta_1^2 + ([\mathbf{x}]_m - \tilde{\chi})^2} - \sqrt{\delta_2^2 + ([\mathbf{x}]_m - \tilde{\chi})^2} \quad (3.3)$$

où $\mathbf{x}$ désigne une des variables optimisées ($\mathbf{x}_p$ ou $\mathbf{x}_s$) et $([\mathbf{x}]_m)$ ses différentes composantes. $\tilde{\chi}$ correspond à la valeur de rappel, γ est un hyperparamètre de pondération et δ_1 et δ_2 déterminent l'allure de la fonction de pénalisation (largeur et profondeur du puits de potentiel). δ_1 et δ_2 doivent être choisis tels que : $0 < \delta_1 < \delta_2$.

La figure 3.4 montre l'allure de la fonction $\phi_{L_2L_0}$ pour un rappel à la valeur $\tilde{\chi} = 5$ avec $\gamma = 1$, $\delta_1 = 0,2$ et $\delta_2 = 0,4$.

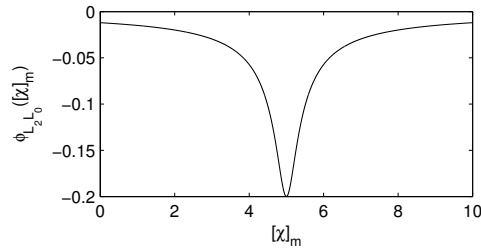


Figure 3.4 – Fonction de pénalisation non convexe pour un rappel à la valeur $\tilde{\chi} = 5$. Les valeurs des hyperparamètres sont $\gamma = 1$, $\delta_1 = 0,2$ et $\delta_2 = 0,4$.

Des tests sur données simulées montrent que pour certaines initialisations, cette approche permet d'accélérer la convergence de l'algorithme. Cependant, elle n'aboutit pas à une amélioration significative des résultats de reconstruction par rapport à la méthode initiale [Vautrin *et al.*, 2011a]. De plus, elle fait intervenir des hyperparamètres supplémentaires qui sont réglés de façon empirique et ce réglage peut être fastidieux.

Nous proposons de nous écarter du modèle markovien qui se limite aux interactions entre pixels voisins et de travailler sur une description plus globale du milieu, en introduisant une segmentation de la zone d'intérêt en deux régions complémentaires : une région Terre et une région Béton. Le principe général de cette approche est décrit dans la section 3.3.1.

De nombreuses méthodes de reconstruction tomographique s'appuient sur une segmentation du milieu sondé. Dans les sections 3.3.2 et 3.3.3, nous présentons certaines d'entre elles en distinguant :

- les modèles paramétriques pour lesquels la frontière qui sépare les deux régions est décrite à partir d'un nombre fini de paramètres ;

- les modèles non paramétriques, également appelés *contours actifs*, pour lesquels on agit directement sur les points de la frontière. L’approche par ligne de niveau (en anglais *level-set*) qui est la plus utilisée sera décrite.

L’objectif n’est pas de faire une synthèse exhaustive des méthodes existantes mais plutôt de cerner les avantages et les limites des méthodes les plus courantes pour une application au problème d’imagerie des fondations de pylônes.

Nous indiquons d’ores et déjà que ces méthodes ne nous ont pas permis d’exploiter au mieux les *a priori* disponibles. Cela nous a amenés à développer une méthode originale. Elle sera présentée en détail dans la section 3.4.

3.3.1 Principe général de l’approche par segmentation

Le milieu sondé est constitué de deux régions : une région Terre que nous noterons Ω_T et une région Béton que nous noterons Ω_B . Elles sont séparées par la frontière Γ . Ω_T et Ω_B sont associées à deux fonctions complémentaires $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_T$ à valeur dans $\{0; 1\}$. Elles décrivent l’appartenance de chaque point du milieu à l’une ou l’autre des régions :

$$\mathcal{R}_B(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in \Omega_B \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Omega_T \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\mathcal{R}_T(x, y) = 1 - \mathcal{R}_B(x, y) \quad (3.5)$$

Les caractéristiques des régions Terre et Béton sont estimées au préalable (voir section 3.2.3, page 67). Pour une frontière Γ donnée, nous pouvons utiliser ces estimations pour reconstruire la distribution spatiale des caractéristiques v_p et v_s dans tout le milieu :

$$v_p(x, y) = \tilde{v}_p^B(x, y)\mathcal{R}_B(x, y) + \tilde{v}_p^T(x, y)\mathcal{R}_T(x, y) + \varepsilon_p(x, y) \quad (3.6)$$

$$v_s(x, y) = \tilde{v}_s^B(x, y)\mathcal{R}_B(x, y) + \tilde{v}_s^T(x, y)\mathcal{R}_T(x, y) + \varepsilon_s(x, y) \quad (3.7)$$

où $\tilde{v}_p^T$ et $\tilde{v}_s^T$ (resp. $\tilde{v}_p^B$ et $\tilde{v}_s^B$) désignent les estimations préalables des caractéristiques de la terre (resp. du béton).

Une erreur sur l’estimation préalable des caractéristiques de chaque région est possible. Pour tenir compte de l’écart entre valeurs estimées et valeurs réelles, nous avons introduit les champs ε_p et ε_s dans les équations (3.6) et (3.7). L’algorithme d’inversion consiste alors à retrouver la distribution spatiale exacte des caractéristiques v_p et v_s en optimisant à la fois :

- le contour qui sépare les deux régions Terre et Béton (Γ) ;
- les variations par rapport aux estimations préalables (ε_p et ε_s).

Comme pour la méthode par régularisation markovienne, nous résolvons pour cela un problème d’optimisation qui consiste à minimiser un critère des moindres carrés régularisé.

Remarque : Nous pouvons qualifier cette approche d’*approche région* : la frontière évolue en fonction des caractéristiques définies au sein de chaque région Ω_T et Ω_B . Cette approche se distingue des *approches contour* classiquement utilisées en segmentation d’image pour lesquelles la frontière évolue uniquement en fonction des caractéristiques des points de l’image situés à proximité de la frontière (on cherche typiquement à positionner la frontière à l’endroit des plus fortes variations de niveau de gris).

3.3.2 Représentations paramétriques

Pour les modèles paramétriques, la géométrie de la frontière Γ est définie à partir d'un nombre fini de paramètres. Nous voyons deux avantages à leur utilisation : d'une part, elles permettent de se ramener directement à certaines géométries plus ou moins spécifiques et d'autre part, le nombre d'inconnues liées à la forme de l'objet imagé est limité.

Plusieurs méthodes de reconstruction tomographique s'appuient sur une telle représentation. Par exemple, la forme de l'objet imagé peut être représentée par une ellipse [Apostolopoulos *et al.*, 1990 ; Arnaoudov *et al.*, 1993], un polygone ou un polyèdre [Norton, 2004 ; Soussen et Mohammad-Djafari, 2004], une spline [Miller *et al.*, 2000 ; Rekanos, 2008] ou encore des harmoniques circulaires pour la tomographie 2-D [Norton, 2004] ou sphériques pour la tomographie 3-D [El-Shenawee et Miller, 2006 ; Zacharopoulos *et al.*, 2006].

D'autres techniques d'imagerie consistent à agir de façon indirecte sur une forme de référence définie par l'utilisateur. Par exemple, dans [Milanfar *et al.*, 1994], six paramètres qui définissent la taille, la position, l'orientation et l'élongation suivant les axes horizontal et vertical de la forme de référence sont optimisés. [Battle *et al.*, 2000] proposent une approche plus générale. L'idée est d'inclure la forme de référence dans une boîte déformable. La forme de la boîte est paramétrée par un nombre limité de points de contrôle. Un déplacement des points de contrôle induit une déformation de la boîte, ce qui entraîne une déformation de la forme de référence.

Pour une application à l'imagerie des fondations de pylônes électriques, une représentation de la frontière Γ par un polygone semble pertinente au premier abord car le contour de la fondation est linéaire par morceaux. Cependant, cette approche semble difficile à mettre en œuvre pour deux raisons :

- le nombre de sommets du polygone doit être défini par l'utilisateur. Or, nous ne disposons pas d'*a priori* suffisamment précis pour connaître ce nombre à l'avance. Nous pourrions inclure dans l'algorithme d'inversion des étapes de mise à jour consistant à ajouter ou à retirer un ou plusieurs sommets afin de corriger une mauvaise estimation. Cependant, les règles de décision concernant le nombre et la position des sommets à ajouter / à retirer semblent difficiles à établir. Une alternative possible consiste à travailler dès le départ avec un grand nombre de sommets. Dans [Soussen et Mohammad-Djafari, 2004], cette approche est utilisée afin de pouvoir travailler sur une géométrie quelconque. Cependant, pour un trop grand nombre de sommets, nous perdons l'intérêt lié à la forme polygonale des fondations et nous augmentons inutilement le nombre d'inconnues.
- des contraintes doivent être introduites sur la position relative des sommets afin d'éviter une auto-intersection du polygone (voir figure 3.5). Or il semble difficile de concilier la prise en compte de ces contraintes et l'utilisation d'une méthode d'optimisation basée sur le calcul explicite du gradient.

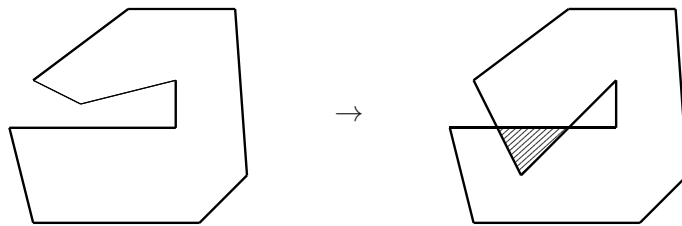


Figure 3.5 – Auto-intersection du polygone suite au déplacement d'un des sommets

Dans [Soussen et Mohammad-Djafari, 2004], c'est pour cette raison que la méthode d'optimisation retenue consiste non pas à faire évoluer conjointement la position de tous les

sommets du polygone mais à considérer la position de chacun des sommets les uns après les autres. Une méthode de descente de gradient est conservée mais chaque étape d'optimisation est réalisée dans un espace à deux dimensions (abscisse et ordonnée du point) seulement.

Nous pourrions utiliser une technique de minimisation basée uniquement sur le calcul du critère. Dans [Miller *et al.*, 2000], l'algorithme de minimisation consiste, à chaque itération, à appliquer aux paramètres une série de perturbations prédéfinies puis à retenir celle qui est associée à la plus petite valeur du critère. [Qing, 2003] et [Rekanos, 2008] s'appuient sur des algorithmes évolutionnaires qui consistent à faire varier une population en suivant une série de processus aléatoires. Cependant, l'utilisation de l'une de ces méthodes risque d'entraîner une lente décroissance du critère. De plus, elles nécessitent le réglage de plusieurs hyperparamètres.

3.3.3 Représentations non paramétriques : la méthode des *level-sets*

La méthode des *level-sets* a été introduite à la fin des années 1980 dans [Osher et Sethian, 1988]. Il s'agit au départ d'un outil permettant de modéliser l'évolution d'une interface au cours du temps mais cette approche a depuis été étendue à des applications variées [Sethian, 1999 ; Osher et Fedkiw, 2002]. Elle a notamment été utilisée pour la résolution de problèmes de tomographie [Santosa, 1996 ; Yu et Fessler, 2002 ; Feng *et al.*, 2003], et plus particulièrement en tomographie de diffraction [Litman *et al.*, 1998 ; Ferraye *et al.*, 2003 ; Dorn et Lesselier, 2006]. Nous décrivons son principe en reprenant les notations que nous avons introduites dans la section 3.3.1. Nous nous plaçons dans le cas d'une segmentation en deux dimensions mais cette représentation peut aisément être étendue aux espaces de dimension supérieure.

Principe

En supposant que le milieu est constitué de deux régions Ω_T et Ω_B séparées par la frontière Γ , l'approche des *level-sets* consiste à considérer que Γ correspond à la ligne de niveau d'une fonction ψ à valeurs dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \psi(x,y) \geq 0 & \text{si } (x,y) \in \Omega_T \\ \psi(x,y) < 0 & \text{si } (x,y) \in \Omega_B \end{cases} \quad (3.8)$$

où (x,y) désigne les coordonnées d'un point du milieu. Sur la figure 3.6, nous donnons une représentation par ligne de niveau du milieu sans cheminée ni surface libre que nous avons décrit dans la section 1.6.1, page 28.

Les fonctions $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_T$ décrivent l'appartenance de chaque point du milieu à l'une ou l'autre des régions (cf. équations (3.4) et (3.5)). Elles se déduisent de la fonction ψ grâce à la fonction de Heaviside^b :

$$\mathcal{R}_B(x,y) = 1 - \mathcal{H}(\psi(x,y)) \quad (3.9)$$

$$\mathcal{R}_T(x,y) = \mathcal{H}(\psi(x,y)) \quad (3.10)$$

L'algorithme d'optimisation consiste alors à faire évoluer la fonction ψ de sorte que la frontière Γ associée converge vers la frontière optimale. Pour ce faire, un critère des moindres carrés

b. $\mathcal{H}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

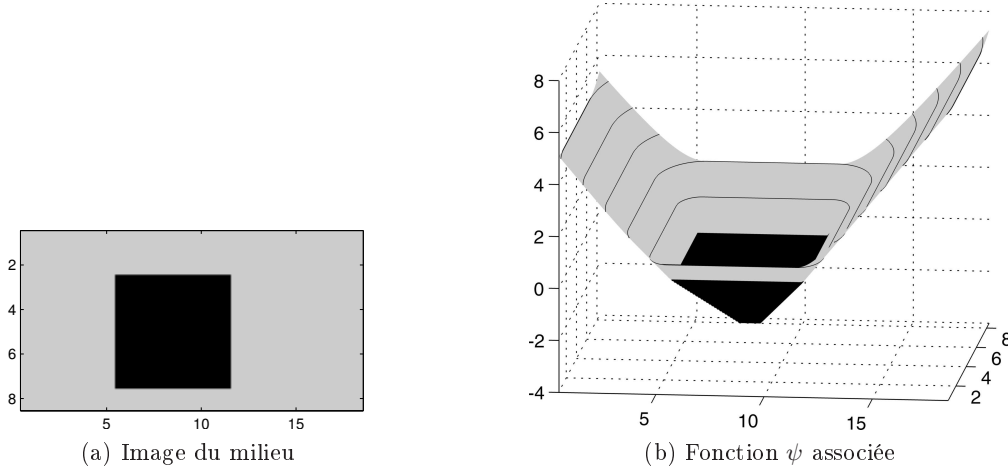


Figure 3.6 – Représentation du milieu sans cheminée ni surface libre avec la méthode des *level-sets*. La région noire ($\psi(x,y) < 0$) correspond à la région Béton et la grise ($\psi(x,y) \geq 0$) à la région Terre.

est minimisé de manière itérative. Pour un algorithme de minimisation donné, la loi d'évolution de la fonction ψ peut également être écrite de manière plus explicite sous la forme d'une équation aux dérivées partielles [Santosa, 1996 ; Litman *et al.*, 1998 ; Samson *et al.*, 2000] :

$$\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t} + F \|\nabla \psi(x,y,t)\| = 0 \quad (3.11)$$

où F désigne la vitesse de chaque point du contour suivant sa normale et t est un paramètre temporel.

Pénalisation de la frontière

Afin de régulariser le problème, le critère minimisé comporte souvent un terme dépendant de la longueur de la frontière Γ :

$$\mathcal{L}(\Gamma) = \iint \mathcal{D}(\psi(x,y)) |\nabla \psi(x,y)| dx dy \quad (3.12)$$

où $\mathcal{D}$ désigne la fonction Dirac. Dans le cas où la loi d'évolution de Γ est écrite sous la forme d'une équation aux dérivées partielles, cela se traduit par la présence dans l'expression de F d'un terme dépendant de la courbure locale du contour [Zhao *et al.*, 1996 ; Samson *et al.*, 2000 ; Feng *et al.*, 2003] :

$$\kappa(\Gamma) = -\nabla \cdot (\nabla \psi / |\nabla \psi|) \quad (3.13)$$

En reconstruction d'image, cette forme de régularisation n'est pas toujours adaptée. Par exemple, elle empêche la formation de points anguleux et favorise la reconstruction de contours lisses.

Un autre forme de régularisation est proposée dans [Unal *et al.*, 2002]. Elle permet de favoriser la convergence vers un contour polygonal à N côtés en modifiant la loi d'évolution de la fonction ψ de la façon suivante :

$$\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t} + \cos^2 \left(\frac{N\theta}{2} + \theta_0 \right) F \|\nabla \psi(x,y,t)\| = 0 \quad (3.14)$$

où θ désigne l'angle formé par la normale au contour et l'axe des abscisses.

D'autres techniques, utilisées dans [Leventon *et al.*, 2000 ; Chen *et al.*, 2002 ; Rousson et Paragios, 2002] en segmentation d'image, utilisent un *a priori* plus fort. Elles favorisent la reconstruction d'une géométrie de référence définie par l'utilisateur en s'appuyant sur une mesure de similarité entre le contour en évolution et le contour de référence. Se pose alors le problème de l'alignement entre les deux contours.

Dans [Foulonneau, 2004], où la méthode des *level-sets* est également utilisée en segmentation d'image, on utilise les moments de Legendre pour décrire le contour en évolution et le contour de référence. Cela permet de rendre la description invariante à toute transformation affine (redimensionnement, translation, changement d'orientation) et ainsi de s'affranchir du problème d'alignement des contours. Cette approche a récemment été étendue à la prise en compte de plusieurs formes de référence [Foulonneau *et al.*, 2009].

Passage au cas discret

Nous avons présenté l'approche des *level-sets* dans le cas continu. [Sussman *et al.*, 1994] et [Zhao *et al.*, 1996] donnent une description détaillée de la démarche à suivre pour se ramener à une grille discrète.

Au lieu de considérer une fonction continue ψ définie sur tout le domaine, on introduit un vecteur $\boldsymbol{\psi}$ de longueur $N_x^Z N_y^Z$ où N_x^Z et N_y^Z sont les dimensions de la zone d'intérêt en nombre de points du maillage. L'appartenance de chaque point du maillage à l'une ou l'autre des régions est définie suivant le signe de chacune des composantes $\boldsymbol{\psi}$ (voir équation (3.8)). L'algorithme d'optimisation consiste alors à agir sur les composantes de $\boldsymbol{\psi}$ pour faire évoluer la segmentation de la zone d'intérêt.

La méthode des *level-sets* fait intervenir la fonction de Heaviside $\mathcal{H}$ et la fonction Dirac $\mathcal{D}$:

- Deux fonctions $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_T$ à valeurs dans $\{0; 1\}$ permettent de revenir aux caractéristiques de la zone d'intérêt (voir équations (3.6) et (3.7)). Elles sont construites à partir de $\boldsymbol{\psi}$ grâce à la fonction de Heaviside (voir équations (3.9) et (3.10)).
- La longueur du contour est calculée à l'aide de la fonction Dirac $\mathcal{D}$ (voir équation (3.12)).

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas dérivables en zéro et le critère n'est alors pas dérivable en tout point. Une solution à ce problème consiste à utiliser des fonctions de Heaviside et Dirac approchées :

$$\mathcal{H}_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{si } x < -\alpha \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |x| > \alpha \end{cases} \quad (3.16)$$

où α est égal au pas de discrétisation spatial. Ces deux fonctions sont représentées sur la figure 3.7 dans le cas où $\alpha = 1$.

A priori, le nombre de variables à optimiser est égal au nombre de points du maillage. Cependant, il est possible de ne s'intéresser qu'aux points du maillage appartenant à une « bande étroite » centrée sur le contour Γ et dont la largeur est fixée par l'utilisateur. Cela permet de ne considérer que les composantes de $\boldsymbol{\psi}$ qui sont les plus susceptibles d'agir sur la forme du contour Γ .

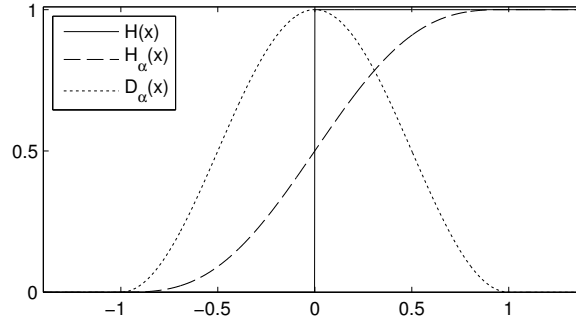


Figure 3.7 – Tracés de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_\alpha$ et $\mathcal{D}_\alpha$ pour $\alpha = 1$

Application à l'imagerie des fondations de pylônes

L'approche des *level-sets* a l'avantage de rendre le critère dérivable par rapport aux variables qui décrivent le contour Γ . Néanmoins, elle n'est pas réellement adaptée à l'imagerie des fondations de pylônes pour plusieurs raisons.

Cette approche est souvent mise en avant pour sa capacité à gérer les changements de topologie (fusion de deux régions ou séparation d'une région en deux sous-régions). Or dans le cadre de l'imagerie des fondations de pylônes, nous souhaitons au contraire conserver deux régions d'un seul tenant ([Han *et al.*, 2003] proposent une technique permettant d'utiliser la méthode des *level-sets* tout en conservant la topologie initiale mais la méthode perd alors son principal intérêt).

Elle ne permet pas de tenir compte aisément des *a priori* cités dans la section 3.2, page 64 : l'ajout de contraintes de positivité sur certaines composantes de ψ permettrait de tenir compte de l'estimation de la profondeur de la fondation et des informations obtenues par sondage au piquet mais la prise en compte de la géométrie particulière des fondations semble plus complexe. En effet, l'ajout de contraintes sur la longueur de la frontière ne convient pas puisque cette forme de régularisation s'oppose à la formation de point anguleux. L'approche proposée dans [Unal *et al.*, 2002] ne convient pas non plus car elle revient à privilégier certaines orientations lors de la reconstruction des segments qui composent le contour de la fondation. Enfin, les *a priori* disponibles ne sont pas suffisamment précis pour effectuer un rappel à une ou plusieurs géométries de référence.

Remarquons enfin qu'un des inconvénients de la méthode des *level-sets* est le nombre important de variables introduites pour décrire la forme du contour Γ .

3.4 Description de la méthode d'inversion proposée

Dans cette section, nous décrivons en détail la méthode que nous avons retenue. Rappelons tout d'abord les conditions qu'elle doit vérifier :

- Elle doit permettre de prendre en compte l'ensemble des *a priori* que nous avons listés dans la section 3.2, page 64.
- La forme de la frontière Γ qui sépare les régions Terre (Ω_T) et Béton (Ω_B) doit dépendre d'un nombre limité de paramètres.
- Le critère minimisé doit être dérivable par rapport aux paramètres qui définissent la forme de la frontière Γ .

Les méthodes citées dans les sections 3.3.2 et 3.3.3 ne permettent pas de réunir ces trois conditions. C'est pourquoi nous avons développé une méthode d'inversion originale. Il s'agit de notre contribution principale au problème d'imagerie des fondations de pylônes.

Dans la section 3.4.1, nous expliquons la paramétrisation du contour Γ . Nous abordons le cas continu puis le cas discret. Cette description peut être qualifiée de « semi-paramétrique » au sens où elle se situe entre une description paramétrique qui consiste à se ramener à un nombre minimal de paramètres pour décrire le contour et une description non paramétrique qui consiste à agir directement sur l'ensemble des points qui constituent la frontière Γ . Dans la section 3.4.2, nous décrivons l'algorithme d'optimisation utilisé.

3.4.1 Description semi-paramétrique du milieu

Description de la géométrie d'une fondation

Jusqu'à maintenant, nous nous sommes restreints à une zone d'intérêt rectangulaire pour résoudre le problème inverse. Supposons que le contour de la zone d'intérêt coïncide avec la surface du sol en haut ($y = 0$) et qu'elle englobe toute la partie immergée de la fondation comme c'est le cas pour le milieu avec cheminée et surface libre (cf. figure 1.10, page 30).

La mesure par *impact-echo* nous indique la profondeur de la fondation (cf. section 3.2.2, page 65) notée P . La région Béton est donc délimitée en haut par la droite d'équation $y = 0$ et en bas par la droite d'équation $y = P$.

Toute section horizontale d'une fondation se représente en deux dimensions par un segment horizontal (cf. section 3.2.1, page 64). Par conséquent, à la profondeur y tel que $0 < y < P$, la région Béton est délimitée par exactement deux transitions. Elles se situent de part et d'autre d'un axe de référence vertical qui traverse la fondation sur toute sa hauteur. Sa position est indiquée par la partie émergente de la fondation. Deux longueurs $\ell_g(y)$ et $\ell_d(y)$ donnent les positions des deux transitions à gauche et à droite de l'axe de référence (voir figure 3.8).

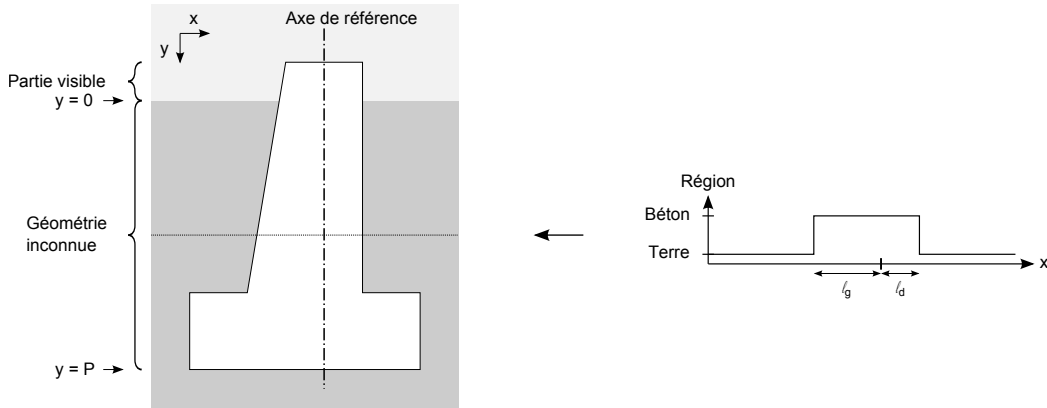


Figure 3.8 – A la profondeur y tel que $0 < y < P$, la région Béton est délimitée par deux transitions dont les positions sont indiquées par les longueurs $\ell_g(y)$ et $\ell_d(y)$

Ainsi, deux fonctions ℓ_g et ℓ_d définies sur $[0; P]$ décrivent la forme de la région Béton dans son ensemble (voir figure 3.9). Pour prendre en compte les autres informations *a priori* concernant la géométrie de la fondation, il faut ajouter des contraintes sur les fonctions ℓ_g et ℓ_d :

- Pour tenir compte du fait que la fondation s'élargit en fonction de la profondeur (cf. section 3.2.1, page 64), il faut imposer aux fonctions ℓ_g et ℓ_d d'être croissantes.

- Les informations fournies par sondage au piquet (cf. section 3.2.2, page 65) se traduisent par des contraintes d'inégalité sur les fonctions. Supposons par exemple qu'à une distance D_{sp} à droite de la fondation, la tige s'enfonce jusqu'à la profondeur P_{sp} (voir figure 3.2, page 66). Cette information se traduit par :

$$\begin{cases} \ell_d(y) < D_{sp} & \text{pour } y < P_{sp} \\ \ell_d(y) > D_{sp} & \text{pour } y = P_{sp} \end{cases} \quad (3.17)$$

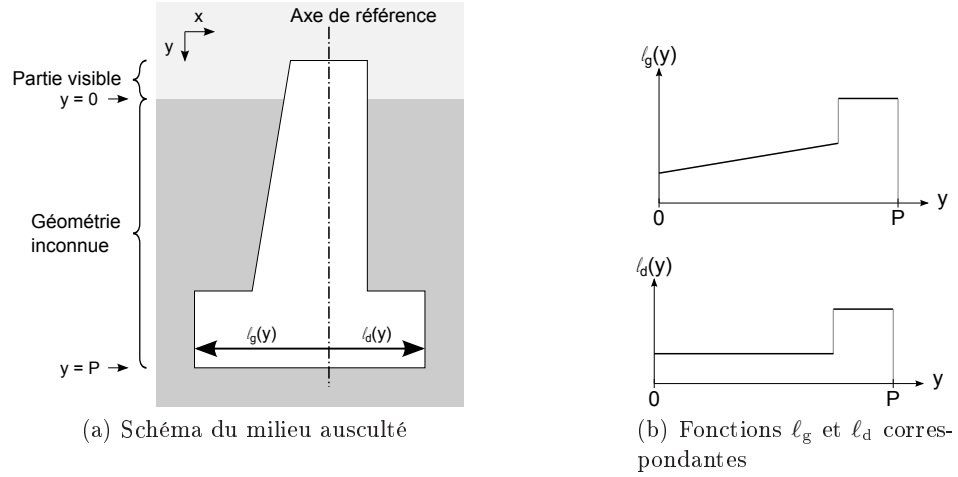


Figure 3.9 – La forme de la fondation est décrite par deux fonctions ℓ_g et ℓ_d

Reconstruction des caractéristiques v_p et v_s

Les fonctions $\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_T$ à valeur dans $\{0;1\}$ décrivent l'appartenance de chaque point de la zone d'intérêt à l'une ou l'autre des régions Ω_T et Ω_B (voir équations (3.4) et (3.5), page 69). Ces deux fonctions peuvent être construites à partir des fonctions ℓ_g et ℓ_d en utilisant la fonction de Heaviside $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{R}_B(x,y) = \begin{cases} \mathcal{H}(x - \ell_{ref} + \ell_g(y))(1 - \mathcal{H}(x - \ell_{ref} - \ell_d(y))) & \text{si } y \leq P \\ 0 & \text{si } y > P \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\mathcal{R}_T(x,y) = 1 - \mathcal{R}_B(x,y) \quad (3.19)$$

où ℓ_{ref} désigne l'abscisse de l'axe de référence.

$\mathcal{R}_B$ et $\mathcal{R}_T$ sont utilisées pour reconstruire la distribution spatiale des caractéristiques v_p et v_s à partir des estimations préalables des caractéristiques de la terre ($\tilde{v}_p^T$ et $\tilde{v}_s^T$) et du béton ($\tilde{v}_p^B$ et $\tilde{v}_s^B$) (voir équations (3.6) et (3.7), page 69).

Passage au cas discret

L'algorithme de résolution du problème direct passe par une description discrétisée des caractéristiques du milieu : la vitesse des ondes P et des ondes S doit être définie en chaque point d'un maillage rectangulaire. La méthode que nous proposons doit s'adapter à ce schéma de discrétisation.

Le contour de la région Béton sera donc décrit à l'aide de deux vecteurs $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ qui correspondent à une version échantillonnée des fonctions ℓ_g et ℓ_d . Leur longueur, que nous noterons

N_l , est égale au nombre de lignes horizontales du maillage qui recouvrent partiellement la région Béton. Chacune de leurs composantes indique la distance entre le contour de la région Béton et l'axe vertical de référence pour une ligne horizontale du maillage. Cette distance est exprimée en nombre de pixels.

$\mathbf{R}_B$ et $\mathbf{R}_T$ sont deux vecteurs de longueur $N_x^Z N_y^Z$ où N_x^Z et N_y^Z sont les dimensions de la zone d'intérêt en nombre de points du maillage. Ils décrivent l'appartenance de chaque point du maillage à l'une ou l'autre des régions et se définissent à partir des vecteurs $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ en suivant le même raisonnement que pour le cas continu. En supposant que la zone d'intérêt est parcourue ligne par ligne, du haut vers le bas, nous avons pour chaque composante :

$$[\mathbf{R}_B]_m = \sum_{n=1}^{N_l} \mathcal{H}(m - N_{\text{ref}} - nN_x^Z + [\mathbf{l}_g]_n)(1 - \mathcal{H}(m - N_{\text{ref}} - nN_x^Z - [\mathbf{l}_d]_n)) \quad (3.20)$$

$$[\mathbf{R}_T]_m = 1 - [\mathbf{R}_B]_m \quad (3.21)$$

où N_{ref} indique la position de l'axe vertical de référence en nombre de pixels ($N_{\text{ref}} = \ell_{\text{ref}}/\Delta x$).

Cette version discrétisée de la segmentation de la zone d'intérêt est utilisée pour revenir aux variables χ_p et χ_s :

$$\chi_p = \tilde{\chi}_p^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_p^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \varepsilon_p \quad (3.22)$$

$$\chi_s = \tilde{\chi}_s^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_s^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \varepsilon_s \quad (3.23)$$

où $\tilde{\chi}_p^T$, $\tilde{\chi}_s^T$, $\tilde{\chi}_p^B$ et $\tilde{\chi}_s^B$ correspondent aux estimations préalables des caractéristiques de la terre et du béton en tenant compte du changement de variables logarithmique.

Une erreur sur ces estimations préalables est possible. Pour permettre à l'algorithme d'inversion de converger vers les distributions exactes des caractéristiques de chaque région malgré ces erreurs d'estimations, les vecteurs ε_p et ε_s sont introduits. Ils correspondent à des variations par rapport aux estimations préalables.

L'algorithme de reconstruction consiste donc à optimiser à la fois les variables descriptives $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ et les variations par rapport aux estimations préalables ε_p et ε_s .

3.4.2 Algorithme d'optimisation

Cette section est consacrée à l'algorithme d'optimisation utilisé. Nous commençons par détailler l'expression du critère et sa régularisation. Nous abordons ensuite la minimisation du critère et plus particulièrement l'approximation utilisée pour rendre le critère dérivable, la prise en compte des contraintes sur la géométrie de la fondation et l'introduction d'un coefficient de mise à l'échelle pour l'optimisation conjointe des variables.

Critère minimisé

Comme dans le chapitre précédent, nous résolvons le problème inverse en minimisant un critère des moindres carrés pénalisé. Celui-ci s'exprime maintenant en fonction des variables qui décrivent le contour de la région Béton ($\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$) et des variations par rapport aux estimations préalables (ε_p et ε_s) :

$$\mathcal{C}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \varepsilon_p, \varepsilon_s) = \mathcal{C}_{AD}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \varepsilon_p, \varepsilon_s) + \phi(\varepsilon_p, \varepsilon_s) \quad (3.24)$$

- $\mathcal{C}_{AD}$ correspond au terme d'adéquation aux données. Il s'agit de la somme sur toutes les pulsations ω et toutes les positions de la source k des normes des écarts entre données observées et données calculées :

$$\mathcal{C}_{AD}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \sum_{\omega} \sum_k \| \mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \|^2 \quad (3.25)$$

sachant que :

$$\mathbf{g}_{\omega,k}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \mathbf{g}_{\omega,k}^0 - \mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \mathbf{V}_{\omega,k}^{10} \quad (3.26)$$

et :

$$\mathbf{X} = \mathbf{H}^p \text{Diag} \{ (\mathbf{h}^{-1}(\boldsymbol{\chi}_p) - \mathbf{v}_{p,0}^2) \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}^p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \{ (\mathbf{h}^{-1}(\boldsymbol{\chi}_s) - \mathbf{v}_{s,0}^2) \odot \boldsymbol{\rho}_0 \} \mathbf{G}_i^s \quad (3.27)$$

où $\mathbf{h}$ traduit l'introduction du changement de variables logarithmique (cf. section 2.4.4, page 53). L'expression de $\boldsymbol{\chi}_p$ et de $\boldsymbol{\chi}_s$ en fonction de $\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ s'obtient à partir des équations (3.20) à (3.23).

- ϕ est le terme de régularisation du critère. Dans le chapitre précédent, nous utilisons une régularisation markovienne. La fonction de pénalisation du critère avait été choisie de manière à favoriser la reconstruction de régions homogènes tout en préservant les fortes discontinuités.

La notion de discontinuité entre les régions est maintenant prise en compte grâce à la segmentation et une régularisation markovienne au sein de chaque région ne serait pas forcément pertinente car la région Terre n'est en général pas homogène. Nous préférons nous limiter à une pénalisation quadratique de l'amplitude des variations par rapport aux estimations préalables :

$$\phi(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) = \gamma (\|\boldsymbol{\varepsilon}_p\|^2 + \|\boldsymbol{\varepsilon}_s\|^2) \quad (3.28)$$

Le coefficient γ est un coefficient de pondération. Sa valeur est réglée selon la confiance accordée aux estimations préalables : plus γ est grand, plus elles sont jugées pertinentes.

- A l'utilisation de la fonction de pénalisation ϕ s'ajoute une autre forme de régularisation du critère. Il s'agit des contraintes portant sur les composantes des variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$. Elles permettent de tenir compte :
 - des informations provenant du sondage au piquet. En reprenant les notations de la figure 3.2 page 66, cela se traduit par :

$$\begin{cases} [\mathbf{l}_d]_m < D_{sp} & \text{pour } m < M \\ [\mathbf{l}_d]_M > D_{sp} \end{cases} \quad (3.29)$$

où M est la profondeur de la pointe de la tige mesurée en nombre de points du maillage ($M = \lceil P_{sp}/\Delta_y \rceil$).

- de la contrainte d'élargissement de la fondation en fonction de la profondeur. Cela se traduit par :

$$\begin{cases} [\mathbf{l}_g]_1 \geq \ell_g^0 \text{ et } [\mathbf{l}_d]_1 \geq \ell_d^0 \\ [\mathbf{l}_g]_m \geq [\mathbf{l}_g]_{m-1} \text{ et } [\mathbf{l}_d]_m \geq [\mathbf{l}_d]_{m-1} & \text{pour } m > 1 \end{cases} \quad (3.30)$$

où ℓ_g^0 et ℓ_d^0 sont mesurées à la base de la partie émergente de la fondation.

Minimisation du critère

Prise en compte des contraintes sur la géométrie de la fondation

L'algorithme L-BFGS-B permet d'imposer des contraintes d'inégalité aux variables optimisées à condition que ces contraintes soient indépendantes (elles ne doivent pas lier plusieurs variables entre elles). Il n'y a pas de difficulté pour les informations provenant du sondage au piquet (équation (3.29)).

Pour prendre en compte la contrainte d'élargissement de la fondation (équation 3.30), il faut décrire la forme de la région Béton à l'aide d'autres variables que nous notons $\mathbf{dl}_g$ et $\mathbf{dl}_d$. Chacune de leurs composantes correspond à une variation de longueur entre deux lignes horizontales successives du maillage :

$$\begin{cases} [\mathbf{dl}_g]_1 = [\mathbf{l}_g]_1 - \ell_g^0 \text{ et } [\mathbf{dl}_d]_1 = [\mathbf{l}_d]_1 - \ell_d^0 \\ [\mathbf{dl}_g]_m = [\mathbf{l}_g]_m - [\mathbf{l}_g]_{m-1} \text{ et } [\mathbf{dl}_d]_m = [\mathbf{l}_d]_m - [\mathbf{l}_d]_{m-1} \quad \text{pour } m > 1 \end{cases} \quad (3.31)$$

où ℓ_g^0 et ℓ_d^0 sont mesurées à la base de la partie émergente de la fondation. La contrainte d'élargissement de la fondation se traduit alors par des contraintes de positivité sur chaque composante des vecteurs $\mathbf{dl}_g$ et $\mathbf{dl}_d$.

Ces variables peuvent également être utilisées pour prendre en compte à la fois la contrainte d'élargissement et les informations issues du sondage au piquet. Dans ce cas, les contraintes (3.29) s'écrivent :

$$\begin{cases} \ell_d^0 + \sum_{o=1}^m [\mathbf{dl}_d]_o < D_{sp} \quad \text{pour } m < M \\ \ell_d^0 + \sum_{o=1}^M [\mathbf{dl}_d]_o > D_{sp} \end{cases} \quad (3.32)$$

Ces contraintes ne sont pas indépendantes. Une méthode de points intérieurs ou plus simplement l'ajout d'une fonction barrière inverse ou logarithmique dans l'expression du critère minimisé [Bertsekas, 1999, chap. 4] sont des techniques envisageables pour en tenir compte.

Dérivabilité du critère

Pour pouvoir utiliser l'algorithme L-BFGS-B, le critère (3.24) doit être dérivable en tout point. Or l'expression de χ_p et χ_s en fonction des variables descriptives $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ fait intervenir la fonction de Heaviside qui n'est pas continue en zéro. Pour se ramener à une fonction continue et dérivable, nous utilisons une version approchée de la fonction de Heaviside comme cela est couramment effectué avec la méthode des *level-sets* :

$$\mathcal{H}_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\alpha} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{\alpha}\right) \right) & \text{si } |x| \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x > \alpha \\ 0 & \text{si } x < -\alpha \end{cases} \quad (3.33)$$

où le coefficient α règle la douceur de la transition. Nous choisissons α égal au pas de discrétisation comme cela est préconisé dans [Sussman *et al.*, 1994] et dans [Zhao *et al.*, 1996].

Optimisation des variables de façon conjointe

Différentes variables doivent être optimisées : d'une part, les variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (ou $\mathbf{dl}_g$ et $\mathbf{dl}_d$) qui décrivent la forme de la fondation et ε_p et ε_s qui déterminent les caractéristiques de

chaque région. De manière générale, il existe deux schémas d'optimisation possibles : en traitant les variables « par blocs » ou de façon simultanée. Les méthodes d'optimisation « par blocs » consistent à diviser l'ensemble des variables en plusieurs sous-ensembles et à mettre à jour de façon successive chaque sous-ensemble, les autres étant fixés. Ces méthodes s'avèrent souvent lentes en raison du grand nombre d'itérations nécessaire pour arriver à convergence [Press *et al.*, 1992, chap. 10]. Les méthodes d'optimisation simultanée consistent quant à elles à optimiser l'ensemble des variables conjointement, ce qui est susceptible de réduire le nombre d'itérations et ainsi d'accélérer la convergence. Dans notre étude, nous avons opté pour une optimisation conjointe des variables $\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$.

Se pose alors le problème de l'unité des différentes variables, c'est-à-dire de la mise à l'échelle de certaines variables par rapport à d'autres. En effet, nous sommes en présence de deux ensembles de variables associés à deux grandeurs différentes : $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ correspondent à des longueurs mesurées en nombre de points du maillage et $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ correspondent à des vitesses de propagation. Sans mise à l'échelle des variables, le critère risque d'être mal conditionné, ce qui entraînerait un ralentissement de la convergence de l'algorithme. La technique proposée ici consiste à introduire un coefficient de mise à l'échelle des variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$. Une description détaillée du raisonnement suivi et des coûts de calcul associés à chaque étape est donnée dans l'annexe B.

Un problème similaire a été abordé dans la thèse de Paul-André Barrière où la méthode *Contrast Source Inversion* est utilisée [Barrière, 2008]. Comme nous l'avons expliqué dans la section 2.2.1, page 36, cette méthode consiste à optimiser deux ensembles de variables correspondant à des grandeurs différentes : en reprenant les notations de la section 2.2.1, il s'agit des variables d'intérêt $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ d'une part et des variables auxiliaires $\mathbf{w}_{\omega,k}$ d'autre part. Un préconditionneur est utilisé pour s'affranchir du problème de mise à l'échelle. Il s'agit plus particulièrement d'un préconditionneur de Jacobi qui est constitué des éléments diagonaux de la matrice hessienne du critère minimisé [Barrett *et al.*, 1994].

De manière générale, si l'ensemble des variables optimisées est regroupé dans la variable $\boldsymbol{\theta}$, un préconditionnement consiste à effectuer un changement de variables linéaire et à travailler avec la variable $\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{P}\boldsymbol{\theta}$. La matrice $\mathbf{P}$ est choisie de sorte que la matrice de préconditionnement $\mathbf{P}^\dagger\mathbf{P}$ soit une approximation symétrique définie positive de la matrice hessienne en $\boldsymbol{\theta}$. Cela permet d'améliorer le conditionnement du critère et ainsi de réduire le nombre d'itérations nécessaires pour arriver à convergence. Néanmoins, l'utilisation du préconditionnement n'est pertinente que lorsque le coût de calcul global est diminué. Il faut donc prendre en considération le temps consacré au calcul de la matrice de préconditionnement $\mathbf{P}$ et à son utilisation (changements de variables).

Dans notre cas, le critère minimisé ne possède pas de garantie de convexité. Nous ne sommes donc pas assurés que la matrice hessienne soit définie positive, ce qui nous empêche d'utiliser un préconditionneur construit à partir de la diagonale de la matrice hessienne. Une alternative consiste à utiliser une version approchée de cette matrice, en ne conservant de son expression que le terme faisant intervenir les matrices jacobiniennes, comme dans la méthode de minimisation de Gauss-Newton (voir section 2.2.2, page 39). Dans ce cas, chaque coefficient diagonal de la matrice de préconditionnement est égal à la norme euclidienne d'une colonne de la matrice jacobienne ^c :

$$\begin{cases} [\mathbf{P}]_{l,l}^2 = \sum_{\omega} \sum_k \left\| [\mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_{.,l} \right\|^2 \\ [\mathbf{P}]_{l,m}^2 = 0 \quad \text{si } l \neq m \end{cases} \quad (3.34)$$

De cette façon, la matrice de préconditionnement est nécessairement positive.

c. $[\mathbf{M}]_{.,l}$ est un vecteur égal à la colonne l de la matrice $\mathbf{M}$.

Cependant, cette matrice est coûteuse à calculer : si l'on note N_ω le nombre de pulsations et N_k le nombre de positions de la source, chaque coefficient diagonal fait l'objet de la résolution de $N_\omega N_k$ systèmes linéaires (voir équation (B.22) de l'annexe B, page 130). Si l'on désigne par N_l (resp. $N_x^Z N_y^Z$) la longueur des vecteurs $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (resp. $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$), il y a donc $2N_\omega N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires à résoudre au total. Dans ce cas, cette matrice ne peut pas être utilisée en tant que préconditionneur dans notre algorithme. Nous proposons une démarche moins coûteuse.

Notre objectif initial consiste à mettre à l'échelle certaines variables par rapport à d'autres. Nous introduisons un coefficient β réel positif qui permet d'agir sur les variables descriptives $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (ou $d\mathbf{l}_g$ et $d\mathbf{l}_d$). Cela revient à manipuler les variables descriptives $\mathbf{l}'_g$ et $\mathbf{l}'_d$ telles que :

$$\mathbf{l}'_g = \beta \mathbf{l}_g \quad \text{et} \quad \mathbf{l}'_d = \beta \mathbf{l}_d \quad (3.35)$$

Par exemple, pour $\beta = 0,1$, les composantes de $\mathbf{l}'_g$ et $\mathbf{l}'_d$ s'expriment en « dixièmes de pixels », pour $\beta = 10$, en « dizaines de pixels », etc.

La valeur de β peut être estimée à partir de la matrice de préconditionnement introduite à l'équation (3.34), en calculant le rapport entre la moyenne des coefficients diagonaux associés aux variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ et la moyenne des coefficients diagonaux associés aux variables $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\beta^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_\omega \sum_k \sum_l \left\| \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,l} \right\|^2}{N_l \sum_\omega \sum_k \sum_m \left\| \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} \right\|^2} \quad (3.36)$$

où $\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}$ (resp. $\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}$) est la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}_{\omega,k}$ dont on n'a conservé que les colonnes associées aux variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (resp. $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$).

Ce calcul reste coûteux car il nécessite toujours la résolution de $2N_\omega N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires (voir équations (B.24) et (B.25) de l'annexe B, page 130). Cependant, il n'est pas nécessaire d'estimer la valeur optimale de β de façon précise car ce coefficient est simplement utilisé pour compenser dans une certaine mesure un mauvais conditionnement du critère. Une version approchée est proposée dans le but de réduire le coût de calcul.

Les matrices normales des systèmes intervenant dans l'équation (3.36) ne dépendent que de la pulsation ω (il s'agit plus précisément des matrices d'impédance, voir section 1.4.3, page 20). Nous avons donc opté pour une version approchée de l'équation (3.36) qui s'obtient en transférant les sommes sur les colonnes de la matrice jacobienne à l'intérieur de la norme. Cela permet de mettre en facteur les matrices normales et ainsi de réduire le coût de calcul :

$$\beta^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_\omega \sum_k \left\| \sum_l \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,l} \right\|^2}{N_l \sum_\omega \sum_k \left\| \sum_m \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} \right\|^2} \quad (3.37)$$

Ainsi, au lieu de $2N_\omega N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires, nous nous ramenons à un total de $2N_\omega N_k$ systèmes linéaires (voir équations (B.27) et (B.28) de l'annexe B, page 131), ce qui allège significativement le coût de calcul. Le principal avantage de cette démarche est qu'elle permet d'éviter à l'utilisateur le réglage empirique de β . Des essais effectués sur données simulées ont montré qu'une mise à jour de β au moment de l'introduction d'une fréquence supplémentaire était suffisante. Une mise à jour plus fréquente n'entraînait pas une réduction significative du temps de calcul.

Cette démarche de réglage a été proposée récemment. Parmi les résultats présentés dans ce manuscrit, elle n'a été utilisée que dans la section 4.4, page 107 qui porte sur une extension de la méthode par segmentation. Pour les autres résultats présentés par la suite, la valeur du coefficient β a été réglée de façon empirique, la valeur $\beta = 10$ a été retenue.

3.5 Résultats sur données simulées

3.5.1 Précisions sur les tests effectués

L'ensemble des résultats de reconstruction que nous présentons dans ce chapitre ont été obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre (voir section 1.6.2, page 29). Dans aucun cas nous n'avons tenu compte d'informations qui auraient été obtenues par sondage au piquet.

Comme dans le deuxième chapitre, le critère d'arrêt de l'algorithme se base sur la variation des caractéristiques au fur et à mesure des itérations. Nous avons préféré tenir compte du changement de variables logarithmique. La variation est donc calculée sur les variables χ_p et χ_s d'une itération à l'autre. A l'itération n , elle est calculée de la façon suivante :

$$\Delta_n = \frac{\|\chi_{p_n} - \chi_{p_{n-1}}\|^2 + \|\chi_{s_n} - \chi_{s_{n-1}}\|^2}{2N_x^Z N_y^Z} \quad (3.38)$$

L'algorithme s'arrête lorsque Δ_n est inférieur à un seuil η pendant 10 itérations successives. Cela permet de filtrer les valeurs excessivement petites de Δ_n qui mettraient fin à l'algorithme de manière intempestive si l'on seuillait sur une seule itération.

Remarque : Un tel changement du critère d'arrêt n'aurait pas eu d'incidence sur les conclusions du chapitre précédent. Il s'agissait avant tout de comparer les performances de différentes variantes de la méthode d'inversion par régularisation markovienne (sans ou avec introduction progressive des données, sans ou avec changement de variables) pour un même critère d'arrêt.

Nous avons initialisé l'algorithme de la façon suivante :

- La cheminée de la fondation est prolongée jusqu'à la profondeur estimée (voir figure 3.10). Cela correspond au cas où $[l_g]_m = \ell_g^0$ et $[l_d]_m = \ell_g^0$ pour $m = 1, \dots, N_l$ ou, de façon équivalente, $[dl_g]_m = 0$ et $[dl_d]_m = 0$ pour $m = 1, \dots, N_l$.
- Les caractéristiques de chaque région sont égales aux valeurs estimées (toutes les composantes de ε_p et ε_s sont nulles).

Dans certains cas, nous montrons également les résultats obtenus pour une initialisation à la solution parfaite. Les variables descriptives l_g et l_d (ou dl_g et dl_d) sont initialisées de sorte que la région Béton prenne la forme exacte de la fondation et les valeurs initiales des composantes de ε_p et ε_s sont telles que l'on retrouve les caractéristiques exactes du sous-sol.

L'idée est à nouveau de considérer deux situations extrêmes. Dans le premier cas, nous nous limitons aux *a priori* cités dans la section 3.2. Dans le deuxième cas, un maximum d'*a priori* est introduit pour initialiser l'algorithme.

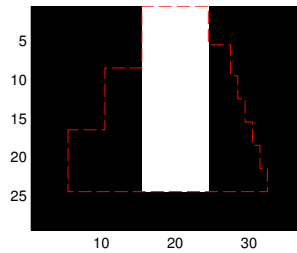


Figure 3.10 – Prolongation de la cheminée jusqu'à la profondeur totale de la fondation

Les différents coefficients qui interviennent dans l'algorithme d'inversion ont été réglés de façon empirique. Il s'agit :

- de l’hyperparamètre γ qui intervient dans le terme de régularisation ϕ . Les valeurs testées ont été définies d’après les ordres de grandeur du terme d’adéquation aux données $\mathcal{C}_{AD}$ et du terme de régularisation ϕ lors des premières itérations pour les deux initialisations, de sorte que l’un de ces deux termes ne soit pas négligeable devant l’autre.
- du coefficient β qui définit l’unité des variables descriptives. Il n’agit pas sur le critère mais uniquement sur la vitesse de convergence de l’algorithme. Les premiers tests ont montré qu’une valeur supérieure à 1 aboutissait à des temps de calcul raisonnables. Pour les résultats présentés ici, nous avons retenu la valeur $\beta = 10$.
- du seuil η qui intervient dans le critère d’arrêt. Il a été réglé de sorte que pour les deux initialisations, l’algorithme converge vers des valeurs du critère très proches en un temps raisonnable.
- du nombre d’itérations successives au cours desquelles la grandeur Δ_n (cf. équation (3.38)) doit être inférieure au seuil η pour que l’algorithme s’arrête. Pour tous les tests effectués, ce nombre d’itérations a été fixé à 10.

3.5.2 Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre

Avec prise en compte de la contrainte d’élargissement

Nous présentons tout d’abord les résultats obtenus lorsque l’hypothèse d’élargissement de la fondation est prise en compte. L’hyperparamètre γ est égal à 10^{-10} , le coefficient β à 10 et le seuil η qui intervient dans le critère d’arrêt a été fixé à 10^{-8} . Les résultats sont présentés sur la figure 3.11. Nous montrons les cartes des caractéristiques v_p et v_s ainsi que l’évolution temporelle du critère pour les deux initialisations de l’algorithme.

Nous remarquons que les résultats sont nettement plus satisfaisants que ceux obtenus sur le même milieu avec la méthode d’inversion par régularisation markovienne (voir figure 2.7, page 58). Pour les deux initialisations, la géométrie reconstruite est très proche de la solution parfaite. De plus, le temps de calcul est réduit de moitié (l’algorithme converge maintenant en 90 minutes environ pour les deux initialisations).

On note néanmoins que sur la partie gauche de la fondation, les reconstructions ne sont pas tout à fait identiques : pour l’initialisation à la solution parfaite, on retrouve bien la géométrie recherchée alors qu’un léger décalage est visible lorsque l’on initialise en prolongeant la cheminée. Cela s’explique à nouveau par le caractère mal posé du problème.

Plus particulièrement, dans l’algorithme proposé, les variables $\mathbf{dl}_g$ et $\mathbf{dl}_d$ sont régularisées par l’ajout de contraintes. Lorsque ces contraintes sont respectées, seul le terme d’adéquation aux données du critère détermine les valeurs optimales de ces variables. Les données associées aux plus hautes fréquences sont censées affiner la reconstruction. Or il s’agit également des données les plus bruitées : sur l’ensemble des fréquences, le rapport signal à bruit est égal à 30 dB mais pour les plus hautes fréquences, l’amplitude du signal est faible (voir le spectre du signal source à la figure 1.7, page 29) ce qui accroît leur rapport signal à bruit.

De plus, les fréquences ont été sélectionnées afin d’atteindre une résolution décimétrique (voir section 1.2.3, page 9). Sur la configuration considérée ici, nous arrivons à cette limite de résolution.

Remarque : Pour compenser ce problème, une solution simple consisterait à ajouter un terme de pénalisation au critère portant sur les variables descriptives. Nous pourrions par exemple pénaliser les variations de longueur d’une ligne à l’autre du maillage de manière à

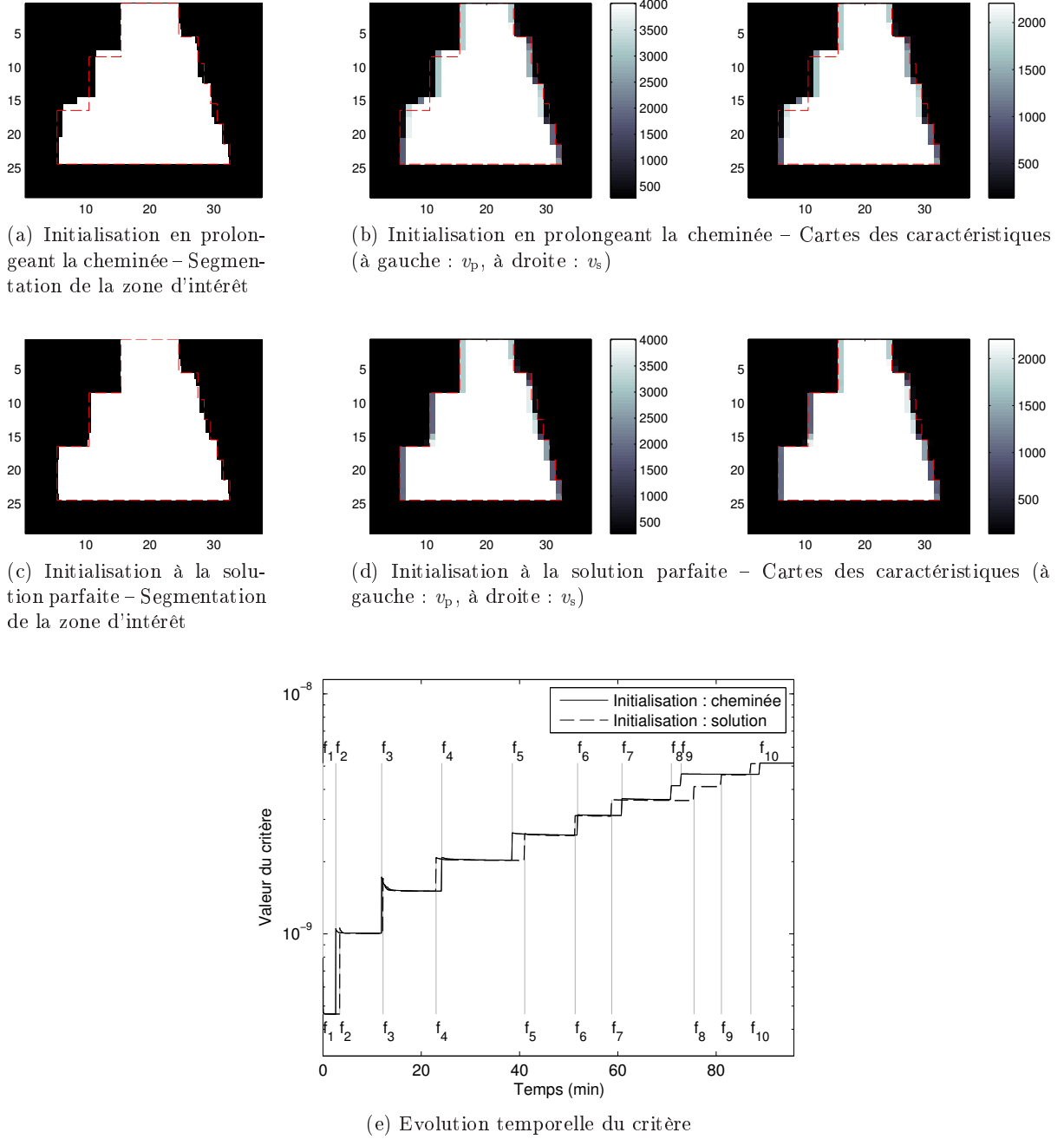


Figure 3.11 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre en prenant en compte la contrainte d'élargissement de la fondation

favoriser la reconstruction d'un contour polygonal. Cependant, cette forme de régularisation risquerait de masquer des irrégularités de la forme de certaines fondations et cela nécessiterait le réglage d'hyperparamètres supplémentaires.

Nous avons testé la sensibilité de l'algorithme vis-à-vis de la valeur de l'hyperparamètre de pondération γ . Les résultats sont présentés dans l'annexe C. Ils montrent que sur une même configuration, les résultats de reconstruction varient relativement peu. Il semble également envi-

sageable de conserver la même valeur pour différentes configurations. Dans la suite de ce chapitre ainsi que dans le chapitre suivant, nous conserverons la valeur utilisée ici ($\gamma = 10^{-10}$).

Sans prise en compte de la contrainte d'élargissement

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où l'hypothèse d'élargissement n'est plus prise en compte. Les contraintes de positivité sur les variables descriptives sont relâchées. Nous avons conservé le même réglage de l'hyperparamètre γ et des coefficients β et η . Les résultats sont présentés sur la figure 3.12. Nous montrons les cartes des caractéristiques v_p et v_s ainsi que l'évolution temporelle du critère pour les deux initialisations de l'algorithme.

Le critère étant moins régularisé que précédemment, nous aboutissons naturellement à des résultats moins satisfaisants. Nous remarquons en particulier que le contour de la région Béton est moins régulier qu'auparavant, ce qui s'explique à nouveau par le caractère mal posé du problème.

Néanmoins, pour les deux initialisations, l'algorithme converge vers des cartes similaires et relativement proches de la solution exacte. On note en particulier que pour les deux initialisations, la base de la fondation est plutôt bien reconstruite. Les valeurs finales du critère sont très proches et le temps de calcul est raisonnable.

Dans la suite de ce chapitre, on se place dans le cas où l'hypothèse d'élargissement de la fondation est prise en compte.

3.5.3 Robustesse par rapport à des erreurs sur les estimations préalables

Les estimations préalables de la profondeur de la fondation et des caractéristiques de la terre peuvent être erronées (dans les deux cas, on considère que l'erreur d'estimation maximale est de 10 %). Nous avons effectué des tests sur données simulées en prenant en compte une erreur éventuelle sur chacune de ces estimations afin d'évaluer la robustesse de l'algorithme de reconstruction.

Robustesse par rapport à l'estimation de la profondeur

La profondeur exacte de la fondation est de 48 cm. Nous avons considéré les cas où son estimation variait entre 42 cm à 54 cm par pas de 2 cm (ce qui correspond à la résolution spatiale du maillage). Cela correspond à une erreur d'estimation maximale d'environ 12 %.

Dans tous les cas, nous avons initialisé l'algorithme en prolongeant la cheminée jusqu'à la profondeur estimée. Nous avons conservé les mêmes réglages que dans les deux situations précédentes ($\gamma = 10^{-10}$, $\beta = 10$, $\eta = 10^{-8}$). Les résultats sont présentés sur la figure 3.13. Pour chaque reconstruction, nous affichons la segmentation finale de la zone d'intérêt ainsi que la valeur finale du terme d'adéquation aux données.

Les résultats montrent que l'algorithme est sensible à l'estimation de la profondeur de la fondation. Lorsque l'erreur d'estimation augmente, les résultats de reconstruction se dégradent. Plus particulièrement, une erreur sur l'estimation de la profondeur de la fondation semble être compensée par une mauvaise estimation de la largeur de la semelle (lorsque la profondeur est sous-estimée, la largeur de la semelle est surestimée et inversement).

Une erreur d'estimation de la profondeur de la fondation a également un impact sur la valeur finale du terme d'adéquation aux données : plus l'erreur d'estimation est importante,

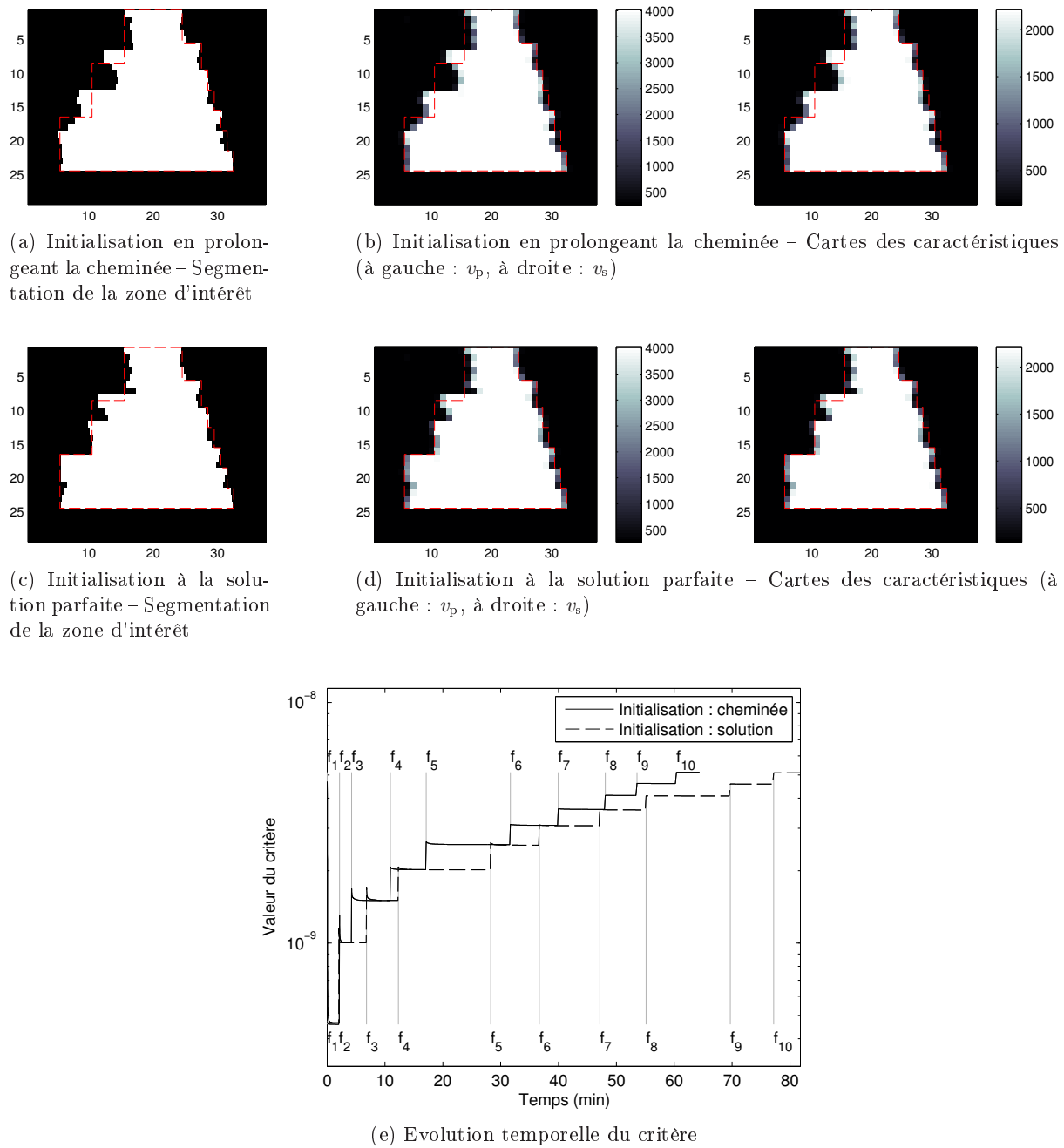


Figure 3.12 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre sans prendre en compte la contrainte d'élargissement de la fondation

plus la valeur finale de $\mathcal{C}_{AD}$ est élevée. Cette valeur pourrait donc nous servir d'indicateur pour retrouver la profondeur exacte de la fondation.

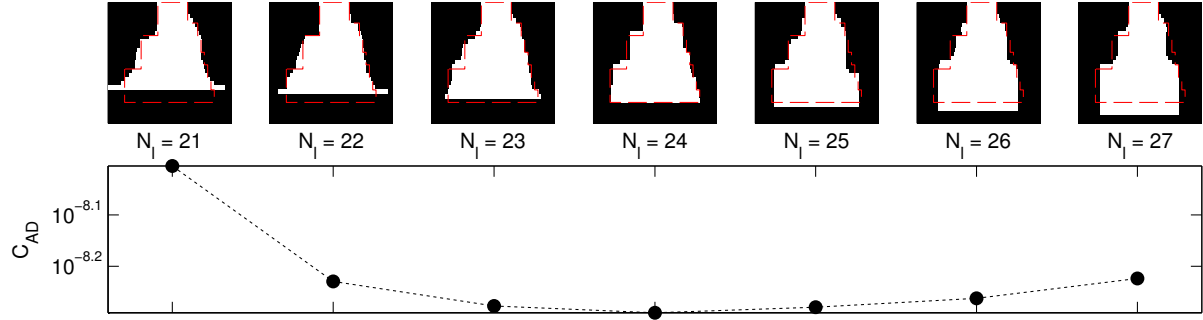


Figure 3.13 – Evolution de la segmentation finale et de la valeur finale du terme d'adéquation aux données en fonction de l'estimation de la profondeur de la fondation

Robustesse par rapport à l'estimation préalable des caractéristiques de la terre et du béton

Nous nous sommes placés dans le cas où les caractéristiques de la terre étaient sous-estimées avec une erreur de 10 %. Au lieu de $\tilde{v}_p^T = 300$ m/s et $\tilde{v}_s^T = 150$ m/s, nous avons $\tilde{v}_p^T = 270$ m/s et $\tilde{v}_s^T = 135$ m/s. Nous montrons qu'il est nécessaire de ne pas se restreindre à une zone d'intérêt pour que l'algorithme converge vers des résultats intéressants malgré cette erreur d'estimation.

Sur la figure 3.14, nous présentons les segmentations finales de la zone d'intérêt pour l'initialisation avec prolongation de la cheminée et pour l'initialisation à la solution parfaite. Nous avons conservé les mêmes réglages que précédemment ($\gamma = 10^{-10}$, $\beta = 10$, $\eta = 10^{-8}$). Les résultats montrent que dans les deux cas, la segmentation finale de la zone d'intérêt est très éloignée de la solution recherchée. L'algorithme semble donc peu robuste vis-à-vis d'une erreur sur l'estimation préalable des caractéristiques de la terre.

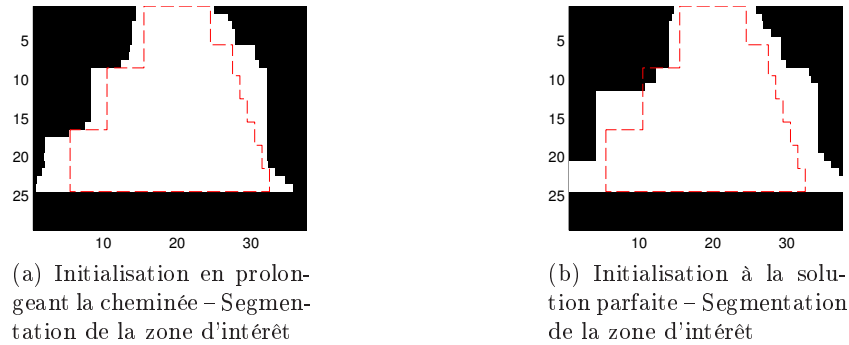


Figure 3.14 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre avec restriction à une zone d'intérêt. On se place dans le cas où les caractéristiques de la terre ont été sous-estimées avec une erreur de 10 %.

Dans l'algorithme d'inversion proposé, l'estimation préalable des caractéristiques de la terre intervient à plusieurs niveaux :

1. Nous nous sommes restreints à une zone d'intérêt localisée autour de la fondation pour réduire le nombre d'inconnues du problème. En dehors de la zone d'intérêt, les caractéristiques v_p et v_s doivent être définies par l'utilisateur et on utilise pour cela les estimations effectuées au préalable.

2. La méthode d'inversion se base sur une segmentation de la zone d'intérêt en une région Terre et une région Béton. Les estimations préalables sont utilisées pour définir les caractéristiques de ces deux régions (nous les avons notées $\tilde{\chi}_p^B$, $\tilde{\chi}_p^T$, $\tilde{\chi}_s^B$ et $\tilde{\chi}_s^T$).
3. Elles sont utilisées pour initialiser l'algorithme.

A l'intérieur de la zone d'intérêt, nous avons introduit les variables ϵ_p et ϵ_s qui correspondent à des variations par rapport aux estimations préalables des caractéristiques de la terre et du béton. Cela permet de corriger une éventuelle erreur d'estimation.

En revanche, l'algorithme ne permet pas de corriger une erreur sur les estimations préalables à l'extérieur de la zone d'intérêt. Nous proposons donc de ne pas nous restreindre à une zone d'intérêt afin de permettre à l'algorithme de corriger les erreurs d'estimation dans tout le milieu.

Un point particulier concerne l'inversion des caractéristiques dans la zone PML (voir section 1.4, page 16). Pour qu'elles conservent leur capacité à atténuer les ondes, leurs caractéristiques doivent être invariantes suivant l'axe horizontal à gauche et à droite et suivant l'axe vertical en bas. Pour tenir compte de cette contrainte, nous avons choisi d'exprimer les caractéristiques de la zone PML en fonction des caractéristiques du domaine intérieur. Il s'agit plus particulièrement d'étendre les caractéristiques du contour intérieur à toute la zone PML, comme indiqué sur la figure 3.15.

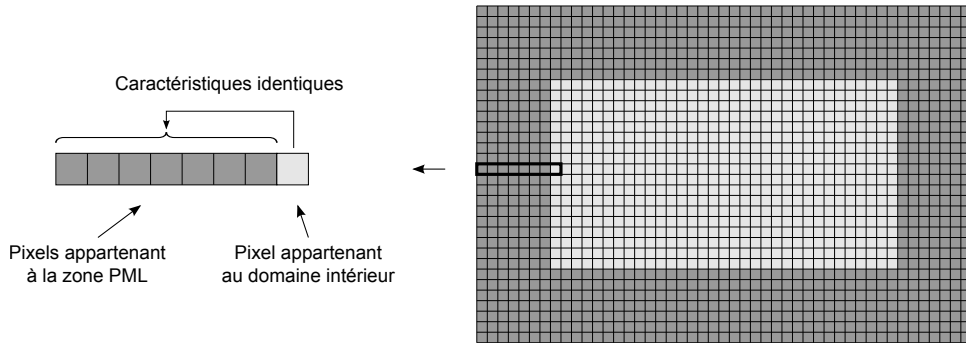


Figure 3.15 – Mise à jour des caractéristiques de la zone PML (gris foncé) en fonction des caractéristiques des points du domaine intérieur (gris clair)

Les résultats obtenus sans restriction à une zone d'intérêt sont présentés sur la figure 3.16. Les valeurs de l'hyperparamètre γ , du coefficient β et du seuil intervenant dans le critère d'arrêt η sont restées identiques (10^{-10} , 10 et 10^{-8} respectivement). Nous affichons les résultats obtenus pour l'initialisation avec prolongation de la cheminée jusqu'à la profondeur estimée et pour l'initialisation à la solution parfaite.

Les résultats sont plus satisfaisants qu'avec restriction à une zone d'intérêt. La segmentation du milieu est proche de la solution recherchée. De plus, l'algorithme converge vers des cartes similaires et vers des valeurs de critère très proches pour les deux initialisations.

Notons que le temps de calcul a augmenté par rapport aux résultats présentés dans la section 3.5.2. Cette augmentation du temps de calcul est principalement due à une augmentation du coût par itération, elle-même due à la plus grande taille du problème (nous sommes passés d'environ 2200 à environ 5900 inconnues).

Bilan des résultats

La méthode proposée dans ce chapitre a conduit à une nette amélioration des résultats de reconstruction par rapport au chapitre précédent. En effet, la prise en compte d'*a priori* plus pertinents permet de mieux contraindre l'algorithme d'optimisation, ce qui entraîne une amélioration de ses performances. Elle permet également de tenir compte d'éventuelles erreurs sur l'estimation préalable de la profondeur de la fondation et des caractéristiques de la terre.

Néanmoins, cette méthode ne permet pas encore de traiter des données réelles. En particulier, nous avons supposé que le signal source était parfaitement connu pour résoudre le problème inverse, ce qui n'est pas forcément le cas en réalité. De plus, d'autres grandeurs doivent être optimisées en plus des caractéristiques v_p et v_s . Nous abordons ces différents points dans le chapitre suivant.

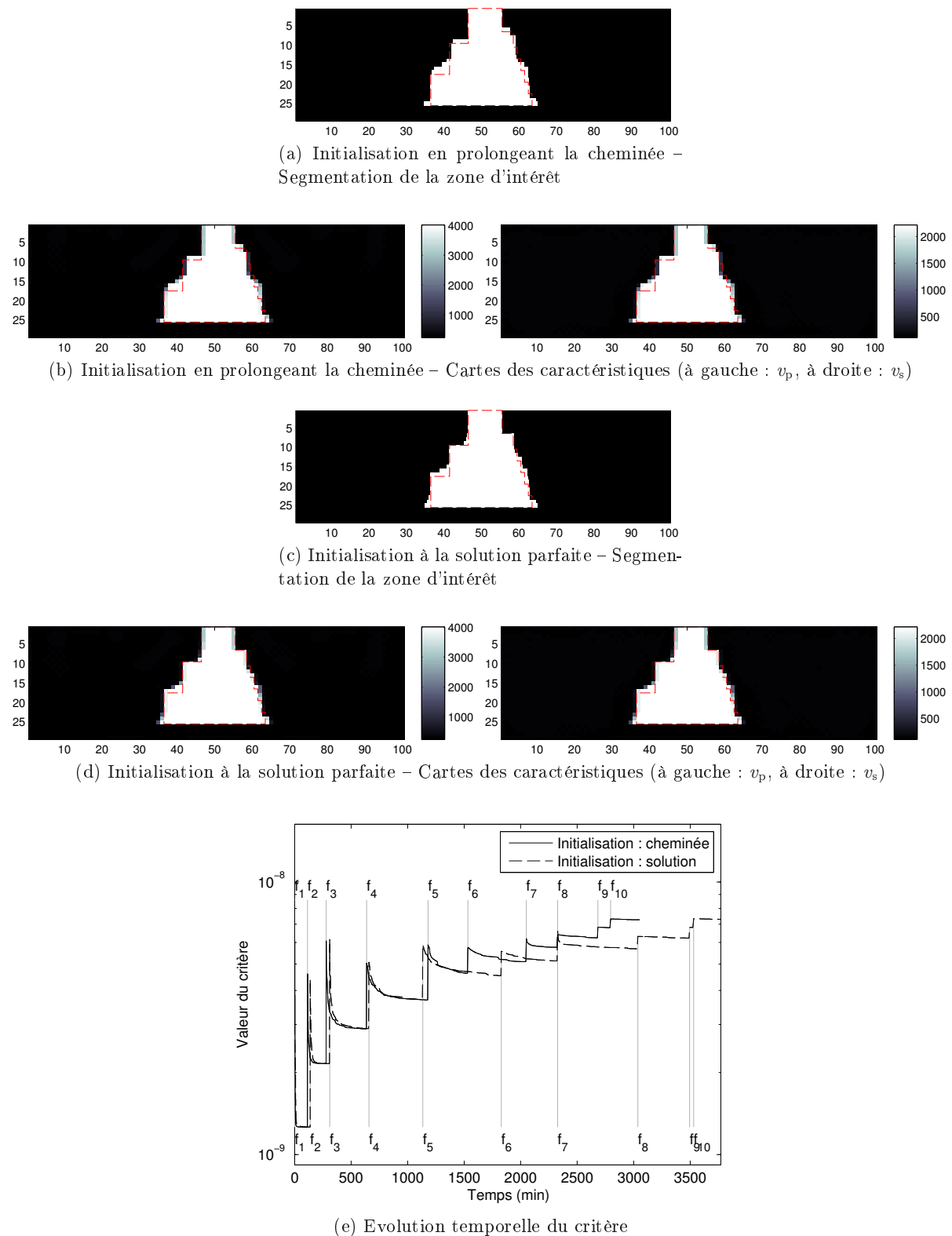


Figure 3.16 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre sans se restreindre à une zone d'intérêt. Les caractéristiques de la terre ont été sous-estimées avec une erreur de 10 %.

Chapitre 4

Extensions de la méthode de reconstruction avec segmentation

Sommaire

4.1	Introduction	91
4.2	Inversion de la signature de la source	92
4.2.1	Position du problème	92
4.2.2	Introduction de variables supplémentaires	93
4.2.3	Inversion dans le cas où la source n'est pas répétable	94
4.2.4	Inversion dans le cas où la source est parfaitement répétable	97
4.3	Prise en compte de la variation spatiale de la masse volumique . . .	100
4.3.1	Position du problème	100
4.3.2	Méthode proposée	101
4.3.3	Application à une configuration de taille réaliste	103
4.4	Prise en compte de l'atténuation intrinsèque	107
4.4.1	Introduction d'une caractéristique supplémentaire	107
4.4.2	Méthode proposée pour inverser le facteur de qualité	109
4.4.3	Mise à l'échelle des différentes variables	110
4.4.4	Résultats obtenus	111

4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, une méthode de reconstruction tomographique basée sur une segmentation du milieu sondé a été proposée. Elle s'est avérée performante sur des données synthétiques. Elle permet également de tenir compte d'une éventuelle erreur d'estimation sur la profondeur de la fondation ou sur les caractéristiques v_p et v_s des régions Terre et Béton. Dans ce chapitre, trois extensions de cette méthode nécessaires au traitement de données réelles sont présentées.

Comme suggéré par les partenaires du projet de l'ISTerre (réunion scientifique des 24 et 25 juin 2010), il est préférable d'estimer la signature de la source au cours de la résolution du problème inverse car celle-ci ne peut pas être déterminée de façon exacte *a priori*. L'approche proposée dans [Pratt, 1999] permet de se ramener à un critère dépendant uniquement des inconnues initiales du problème. Dans la section 4.2, nous appliquons cette technique à notre

algorithme d'inversion. Deux cas sont étudiés : d'une part le cas où la source n'est pas répétable (le signal d'excitation change selon la position de la source vibratoire) et d'autre part le cas où la source est parfaitement répétable (le signal d'excitation est identique d'une position à l'autre de la source).

Les méthodes d'inversion proposées précédemment consistent à reconstruire la distribution spatiale des caractéristiques v_p et v_s . Or le milieu est également caractérisé par la distribution spatiale de la masse volumique ρ . Dans la section 4.3, la reconstruction de cette troisième grandeur physique est introduite. L'algorithme s'appuie sur la segmentation du milieu et sur une estimation préalable de la masse volumique du béton et de la terre de sorte qu'aucune inconnue supplémentaire n'est introduite. Cette méthode d'inversion a récemment été appliquée à une configuration de taille réaliste.

Lors de sa propagation dans le sous-sol, un train d'ondes subit des phénomènes d'atténuation qui sont principalement de deux types : l'atténuation géométrique (perte d'amplitude liée à l'expansion du front d'onde) et l'atténuation intrinsèque (atténuation au sein des matériaux due à la dissipation de l'énergie). Les phénomènes d'atténuation intrinsèque peuvent être pris en compte grâce à l'introduction d'un facteur de qualité Q . Comme suggéré par les partenaires du projet de l'IFSTTAR et de la société TERRASEIS (réunion scientifique des 1^{er} et 2 février 2011), il est préférable d'estimer la distribution spatiale de Q lors de la résolution du problème inverse car elle a un impact non négligeable sur les données et elle ne peut pas être déterminée *a priori*. Ce point est abordé dans la section 4.4. Nous proposons de décrire la distribution spatiale de Q à l'aide d'un petit nombre de paramètres afin de limiter le nombre d'inconnues supplémentaires.

Nous pouvons également mentionner le fait que certains pré-traitements des données sont à prévoir pour l'inversion de données réelles. En particulier, le train d'ondes émis par la source vibratoire se propage dans un milieu à trois dimensions en réalité alors que dans le modèle utilisé, on travaille sur un milieu à deux dimensions. Par conséquent, l'atténuation « géométrique » liée à l'expansion du front d'onde n'est pas modélisée correctement. Pour se ramener à un modèle d'atténuation en deux dimensions, un pré-traitement couramment effectué consiste à appliquer une correction en $\sqrt{t}$ sur les signaux enregistrés [Bretaudiou, 2010, Chap. 3].

4.2 Inversion de la signature de la source

4.2.1 Position du problème

Pour générer une onde sismique, une source vibratoire est utilisée ce qui permet à l'utilisateur de définir la signature temporelle du signal d'excitation. Cependant, comme cela a été évoqué dans la section 1.2.3, page 9, l'expérience montre qu'il y a généralement une différence sensible entre le signal généré par la source vibratoire et le signal effectivement transmis dans le sous-sol. Cela est dû à des phénomènes d'atténuation qui proviennent d'un mauvais couplage entre la source sismique et le sol.

Cette étape de contrôle est effectuée à l'aide d'un « géophone pilote » placé à proximité de la source. Néanmoins, cette mesure ne permet pas d'accéder directement à la signature exacte du signal d'excitation. Le géophone pilote mesure une vitesse particulière qui résulte de l'excitation du sous-sol par la source. Une procédure d'estimation devrait alors être utilisée pour revenir au signal d'excitation initial. De plus, cette mesure est bruitée et sujette à des phénomènes d'atténuation propres au capteur ce qui rendrait la procédure d'estimation complexe. Par conséquent, la signature de la source ne peut pas être supposée connue de façon exacte.

Dans l'algorithme d'inversion avec segmentation du milieu, que nous avons présenté dans le troisième chapitre, le signal source est supposé parfaitement connu. Or cet algorithme n'est pas suffisamment robuste pour converger vers des résultats satisfaisants malgré une erreur sur l'estimation de la signature de la source.

A titre d'exemple, nous présentons sur la figure 4.1 les résultats de segmentation obtenus sur la configuration avec cheminée et surface libre lorsque l'amplitude du signal source est sous-estimée avec une erreur de 10 %. Hormis l'erreur sur l'amplitude de la source, il s'agit de la même situation que dans la section 3.5.2, page 83 : la profondeur de la fondation ainsi que les caractéristiques du milieu sont estimées de façon exacte, l'hypothèse d'élargissement de la fondation est prise en compte et les coefficients γ , β et η sont fixés à 10^{-10} , 10 et 10^{-8} . Nous remarquons une dégradation des résultats de reconstruction par rapport au cas où le signal source est parfaitement connu (voir figure 3.11, page 84). Il est donc nécessaire d'estimer la signature de la source lors de la résolution du problème inverse.

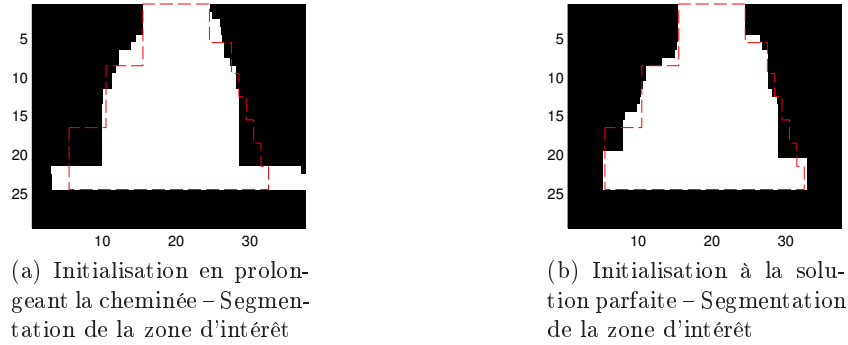


Figure 4.1 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre dans le cas où l'amplitude du signal source a été sous-estimée avec une erreur de 10 %.

Dans la section 4.2.2, l'expression du critère minimisé est modifiée pour y intégrer un jeu d'inconnues supplémentaire permettant d'estimer le signal d'excitation. Dans les sections 4.2.3 et 4.2.4, nous nous ramenons à un critère dépendant uniquement des inconnues initiales du problème en reprenant l'approche proposée dans [Pratt, 1999]. Deux situations sont considérées :

1. Dans la section 4.2.3, la source sismique est supposée non répétable. Autrement dit, les phénomènes d'atténuation qui déforment le signal généré par la source vibratoire varient d'une position à l'autre de la source.
2. Dans la section 4.2.4, la source sismique est supposée parfaitement répétable.

4.2.2 Introduction de variables supplémentaires

Soit s le signal source exact. Supposons que s soit égal au produit de convolution entre une estimation du signal source $\tilde{s}$ définie par l'utilisateur et une fonction a :

$$s(t) = a(t) * \tilde{s}(t) \quad (4.1)$$

Dans le domaine fréquentiel, cette relation correspond à une multiplication :

$$s(\omega) = a(\omega)\tilde{s}(\omega) \quad (4.2)$$

A priori, tout le spectre de a doit être estimé mais on ne considère qu'un nombre réduit de fréquences pour résoudre le problème inverse. Par exemple, pour les tests sur données simulées,

10 fréquences comprises entre 100 Hz et 500 Hz sont sélectionnées (voir section 1.6, page 27). Seules les composantes de a associées à ces fréquences doivent donc être estimées.

Les équations de propagation utilisées pour résoudre les problèmes direct et inverse font intervenir un champ de forces volumiques. Dans la section 1.4, page 16, après discrétisation des équations de propagation écrites dans le domaine fréquentiel, il est noté $\mathbf{F}_{\omega,k}$ où ω désigne la pulsation et k la position de la source. Le signal source agit directement sur cette grandeur.

Soit $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\omega,k}$ les champs de forces volumiques associés aux signaux s et $\tilde{s}$ respectivement. Chaque composante de $\mathbf{F}_{\omega,k}$ (resp. de $\tilde{\mathbf{F}}_{\omega,k}$) est proportionnelle à $s(\omega)$ (resp. à $\tilde{s}(\omega)$). Par conséquent, $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\tilde{\mathbf{F}}_{\omega,k}$ vérifient la même relation de proportionnalité que $s(\omega)$ et $\tilde{s}(\omega)$:

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = a_{\omega,k} \tilde{\mathbf{F}}_{\omega,k} \quad (4.3)$$

Remarque : Nous nous plaçons ici dans le cas général où la source n'est pas supposée répétée. C'est pourquoi les coefficients de proportionnalité $a_{\omega,k}$ dépendent à la fois de la pulsation ω et de la position de la source k . Dans le cas où la source est supposée parfaitement répétée, les coefficients de proportionnalité ne dépendent que de la position ω .

L'algorithme de résolution du problème direct permet de calculer les mesures $\tilde{\mathbf{g}}_{\omega,k}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}$ associées aux champs $\tilde{\mathbf{F}}_{\omega,k}$ et $\mathbf{F}_{\omega,k}$ respectivement pour une distribution des caractéristiques v_p et v_s donnée. Cette relation est linéaire. En effet, à partir des équations de l'algorithme 1, page 23, les mesures $\mathbf{g}_{\omega,k}$ peuvent s'écrire :

$$\mathbf{g}_{\omega,k} = \mathbf{E}_g \mathbf{A}_{\omega}^{-1} \mathbf{F}_{\omega,k} \quad (4.4)$$

Par conséquent, la relation de proportionnalité (4.3) est également vérifiée pour les vecteurs $\tilde{\mathbf{g}}_{\omega,k}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}$:

$$\mathbf{g}_{\omega,k} = a_{\omega,k} \tilde{\mathbf{g}}_{\omega,k} \quad (4.5)$$

Les coefficients de proportionnalité $a_{\omega,k}$ n'agissent donc que sur le terme d'adéquation aux données du critère $\mathcal{C}_{AD}$. Celui-ci s'exprime maintenant en fonction des variables qui définissent les caractéristiques du milieu ($\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, ε_p et ε_s) et des coefficients $a_{\omega,k}$:

$$\mathcal{C}_{AD}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \varepsilon_p, \varepsilon_s, a_{\omega,k}) = \sum_{\omega} \sum_k \|\mathbf{y}_{\omega,k} - a_{\omega,k} \tilde{\mathbf{g}}_{\omega,k}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \varepsilon_p, \varepsilon_s)\|^2 \quad (4.6)$$

4.2.3 Inversion dans le cas où la source n'est pas répétée

Expression du critère

Pour simplifier les écritures, nous nous plaçons dans le cas où l'on travaille avec une seule fréquence et une seule position de la source. Les inconnues $\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, ε_p et ε_s sont regroupées dans la variable $\boldsymbol{\theta}$ et $\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})$ désigne les données calculées à partir du signal source estimé. Le terme d'adéquation aux données du critère s'écrit alors de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}, a) = \|\mathbf{y} - a \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \quad (4.7)$$

Supposons que $\boldsymbol{\theta}$ soit fixe et que l'on s'intéresse uniquement aux variations de $\mathcal{C}_{AD}$ en fonction de a . Le critère à minimiser est quadratique. Dans ce cas, la valeur optimale de a s'exprime de façon analytique en fonction des autres inconnues $\boldsymbol{\theta}$:

- L'expression de la dérivée du critère par rapport à a est :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{\text{AD}}}{\partial a} = -2\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y} - a\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) \quad (4.8)$$

- La valeur de a qui annule la dérivée est :

$$a = \frac{\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{y}}{\|\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\|^2} \quad (4.9)$$

- Cette expression est reportée dans l'équation (4.7) pour obtenir une expression de $\mathcal{C}_{\text{AD}}$ dépendant uniquement de $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{C}_{\text{AD}}(\boldsymbol{\theta}) = \left\| \mathbf{y} - \frac{\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{y}}{\|\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\|^2} \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 \quad (4.10)$$

Expression du gradient

Le critère s'écrit :

$$\mathcal{C}_{\text{AD}}(\boldsymbol{\theta}) = \|\mathbf{y} - a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \quad (4.11)$$

où l'expression de la fonction a est donnée à l'équation (4.9).

Le gradient de $\mathcal{C}_{\text{AD}}$ est égal à :

$$\nabla \mathcal{C}_{\text{AD}}(\boldsymbol{\theta}) = -2\Re \left\{ \mathbf{J}_{a\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y} - a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.12)$$

$\mathbf{J}_{a\mathbf{g}}$ est la matrice jacobienne associée au produit des fonctions a et $\mathbf{g}$. Elle s'exprime en fonction de $\mathbf{J}_{\mathbf{g}}$ qui est la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}$ (voir section 2.3.2, page 46) :

$$\mathbf{J}_{a\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}) = a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})\nabla a(\boldsymbol{\theta})^t \quad (4.13)$$

Ce développement est intégré dans l'expression du gradient pour obtenir :

$$\nabla \mathcal{C}_{\text{AD}}(\boldsymbol{\theta}) = -2\Re \left\{ \overline{a(\boldsymbol{\theta})}\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y} - a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) + \overline{\nabla a(\boldsymbol{\theta})}\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y} - a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.14)$$

Etant donné que $a(\boldsymbol{\theta})$ a été choisi de manière à annuler la dérivée du critère (cf. équation (4.8)), le gradient est égal à :

$$\nabla \mathcal{C}_{\text{AD}}(\boldsymbol{\theta}) = -2\Re \left\{ \overline{a(\boldsymbol{\theta})}\mathbf{J}_{\mathbf{g}}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y} - a(\boldsymbol{\theta})\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.15)$$

Nous remarquons que pour prendre en compte l'inversion de la signature de la source, le coût de calcul supplémentaire est minime. En effet, pour le calcul de a (équation (4.9)) et dans les expressions du critère (équation (4.10)) et du gradient (équation (4.15)), les calculs liés à l'inversion de la source correspondent seulement à des produits scalaires et à des multiplications de matrices ou de vecteurs par des scalaires.

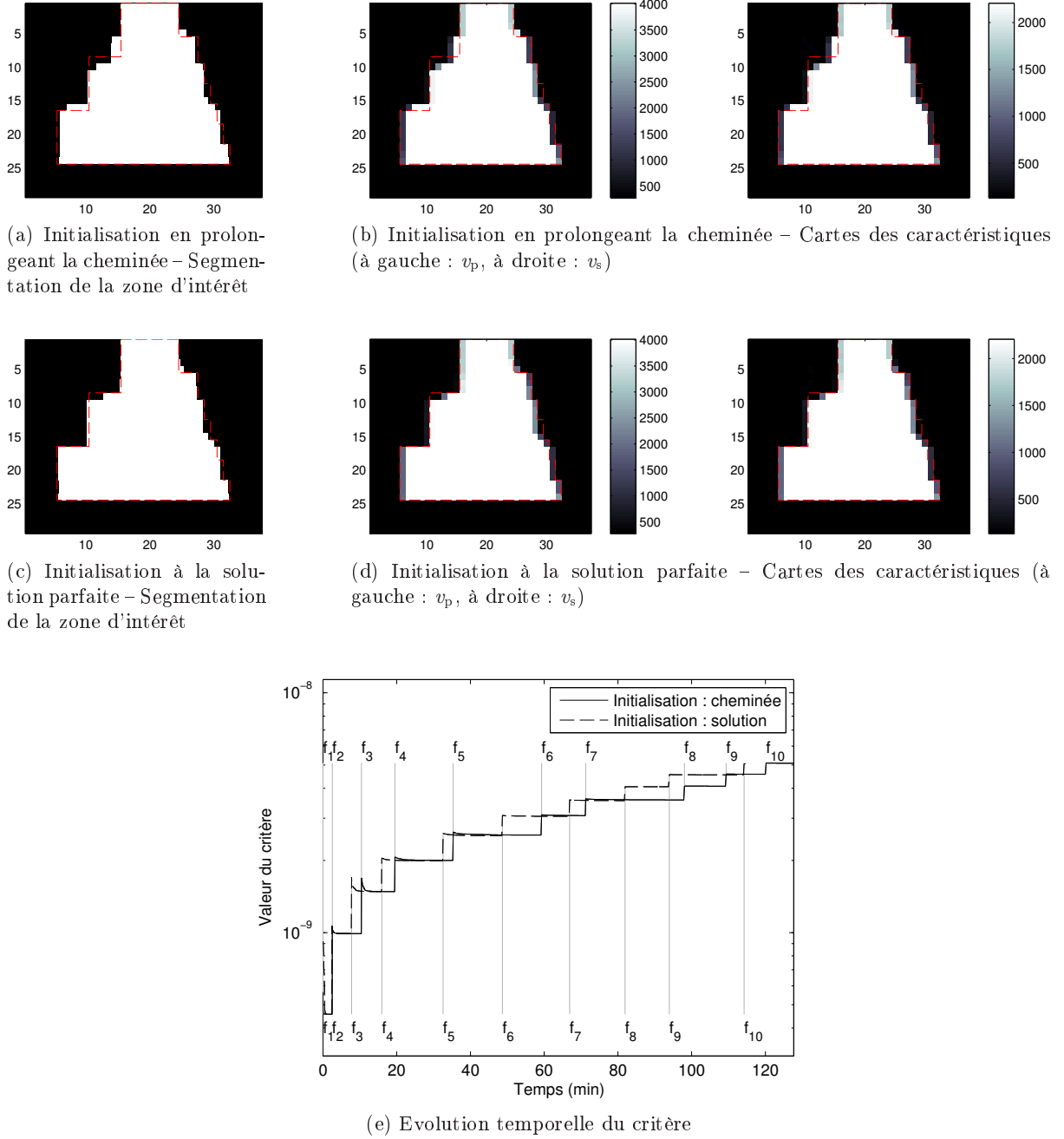


Figure 4.2 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre avec inversion de la signature de la source. On se place dans cas où la source n'est pas supposée répétable.

Résultats obtenus

Nous avons repris l'exemple de la section 4.2.1 où l'amplitude du signal source était sous-estimée avec une erreur de 10 %. Hormis les changements apportés aux expressions du critère et du gradient, nous avons conservé le même algorithme d'inversion. Les résultats obtenus pour les deux initialisations de l'algorithme sont présentés sur la figure 4.2.

Nous remarquons une amélioration des résultats par rapport à ceux que nous avons présentés

	Valeur attendue	Initialisation cheminée	Initialisation solution
Partie réelle	1/0,9 = 1,111...	1,115 ± 0,035	1,115 ± 0,035
Partie imaginaire	0	0,003 ± 0,013	0,002 ± 0,015

Tableau 4.1 – Estimation des coefficients $a_{\omega,k}$ à l’issue de l’inversion dans le cas où la source n’est pas supposée répétable. Les résultats sont indiqués sous la forme « moyenne ± écart-type ».

à la figure 4.1. Les reconstructions sont maintenant similaires à celles obtenues dans cas où le signal source est parfaitement connu (voir figure 3.11, page 84). Nous notons cependant une augmentation du temps de calcul (nous sommes passés d’environ 90 min à environ 120 min). Elle n’est pas due à une augmentation du coût de calcul par itération mais plutôt à une augmentation du nombre d’itérations effectuées.

Dans le tableau 4.1, nous indiquons les estimations des coefficients $a_{\omega,k}$ à l’issue de l’inversion. Elles ont été calculées à partir des valeurs finales des autres variables θ selon l’expression (4.9). Nous donnons pour les deux initialisations les moyennes et les écarts-types calculés sur l’ensemble des pulsations ω et des positions de la source k en distinguant partie réelle et partie imaginaire. Les résultats sont très proches des valeurs attendues (les écarts sont probablement dus au bruit sur les données).

4.2.4 Inversion dans le cas où la source est parfaitement répétable

La source est maintenant supposée parfaitement répétable. Autrement dit, d’une position à l’autre de la source, un même signal généré par la source vibratoire est supposé être déformé de la même façon. Cette hypothèse permet de réduire le nombre d’inconnues supplémentaires : les coefficients de proportionnalité recherchés ne dépendent plus de la position de la source. Ils sont donc notés a_{ω} .

Expression du critère

Comme précédemment, les écritures sont simplifiées en regroupant les inconnues $\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, ε_p et ε_s dans la variable θ et en désignant les données calculées à partir du signal source estimé par $\mathbf{g}_k(\theta)$. Nous considérons que l’on travaille avec une seule fréquence. Le terme d’adéquation aux données du critère s’écrit alors de la façon suivante :

$$\mathcal{C}_{AD}(\theta, a) = \sum_k \|\mathbf{y}_k - a \mathbf{g}_k(\theta)\|^2 \quad (4.16)$$

Le critère étant quadratique en fonction de a à θ fixé, l’expression de la valeur optimale de a peut à nouveau s’écrire en fonction des autres inconnues θ :

- L’expression de la dérivée du critère par rapport à a est :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{AD}}{\partial a} = -2 \sum_k \mathbf{g}_k(\theta)^\dagger (\mathbf{y}_k - a \mathbf{g}_k(\theta)) \quad (4.17)$$

- La valeur de a qui annule la dérivée est :

$$a = \frac{\sum_k \mathbf{g}_k(\theta)^\dagger \mathbf{y}_k}{\sum_k \|\mathbf{g}_k(\theta)\|^2} \quad (4.18)$$

- Cette expression est reportée dans l'équation (4.16) pour obtenir une expression de $\mathcal{C}_{AD}$ dépendant uniquement de $\boldsymbol{\theta}$:

$$\mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_k \left\| \mathbf{y}_k - \frac{\sum_l \mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{y}_l}{\sum_l \|\mathbf{g}_l(\boldsymbol{\theta})\|^2} \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta}) \right\|^2 \quad (4.19)$$

Expression du gradient

Nous reprenons la même démarche que précédemment. Le critère s'écrit :

$$\mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_k \|\mathbf{y}_k - a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})\|^2 \quad (4.20)$$

où l'expression de la fonction a est donnée à l'équation (4.18).

Le gradient de $\mathcal{C}_{AD}$ est égal à :

$$\nabla \mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \sum_k \Re \left\{ \mathbf{J}_{a\mathbf{g}_k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y}_k - a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.21)$$

$\mathbf{J}_{a\mathbf{g}_k}$ est la matrice jacobienne associée au produit des fonctions a et $\mathbf{g}_k$:

$$\mathbf{J}_{a\mathbf{g}_k}(\boldsymbol{\theta}) = a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{J}_{\mathbf{g}_k}(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta}) \nabla a(\boldsymbol{\theta})^t \quad (4.22)$$

où $\mathbf{J}_{\mathbf{g}_k}$ est la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}_k$.

Ce développement est intégré dans l'expression du gradient pour obtenir :

$$\nabla \mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \Re \left\{ \overline{a(\boldsymbol{\theta})} \sum_k \mathbf{J}_{\mathbf{g}_k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y}_k - a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})) + \overline{\nabla a(\boldsymbol{\theta})} \sum_k \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y}_k - a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.23)$$

Etant donné que $a(\boldsymbol{\theta})$ a été choisi de manière à annuler la dérivée du critère (cf. équation (4.17)), le gradient est égal à :

$$\nabla \mathcal{C}_{AD}(\boldsymbol{\theta}) = -2 \sum_k \Re \left\{ \overline{a(\boldsymbol{\theta})} \mathbf{J}_{\mathbf{g}_k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y}_k - a(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{g}_k(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (4.24)$$

Comme dans le cas où la source n'est pas supposée répétable, les calculs liés à l'inversion de la signature de la source sont peu coûteux.

Résultats obtenus

Nous avons à nouveau repris l'exemple de la section 4.2.1 en utilisant le même algorithme d'inversion hormis les changements liés aux expressions du critère et du gradient. Les résultats obtenus pour les deux initialisations de l'algorithme sont présentés sur la figure 4.3.

Les résultats sont très proches de ceux obtenus lorsque le signal source est parfaitement connu (voir figure 3.11, page 84), non seulement au niveau des reconstructions mais également au niveau du temps de calcul (environ 90 min pour les deux initialisations). Cette amélioration des performances par rapport au cas où la source n'est pas supposée répétable est probablement due au fait que le problème est ici moins sous-déterminé (les informations à extraire des données sont moins nombreuses).

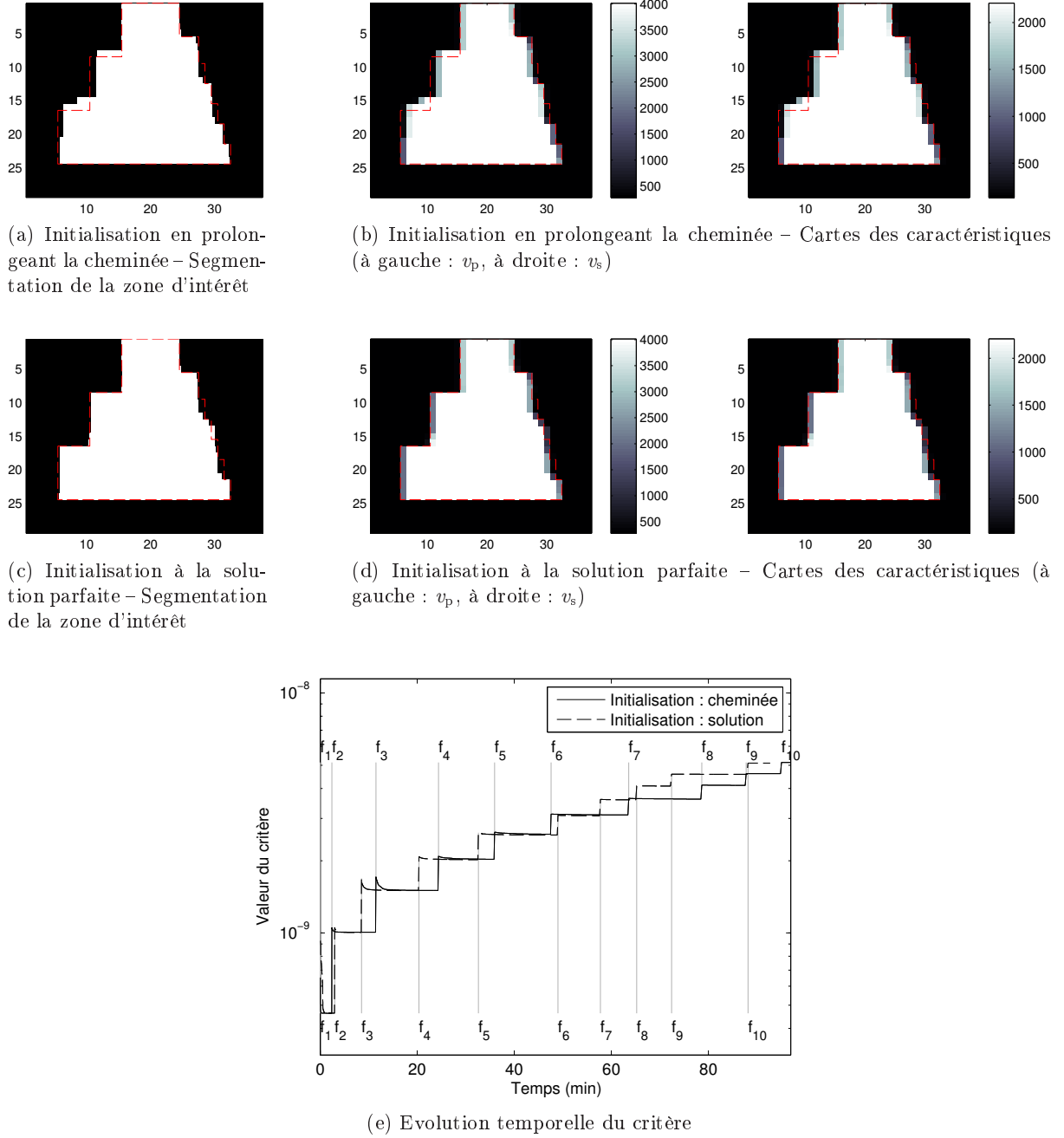


Figure 4.3 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre avec inversion de la signature de la source. On se place dans cas où la source est supposée parfaitement répétable.

Les estimations finales des coefficients a_ω qui ont été calculés selon l'expression (4.18) sont indiquées dans le tableau 4.2. Pour les deux initialisations, nous donnons les moyennes et les écarts-types calculés sur l'ensemble des pulsations ω en distinguant partie réelle et partie imaginaire. Il est à noter que les estimations sont meilleures que précédemment (moyennes plus proches des valeurs attendues et écarts-types plus petits) ce qui s'explique encore une fois par le fait que le problème est ici moins sous-déterminé.

	Valeur attendue	Initialisation cheminée	Initialisation solution
Partie réelle	$1/0,9 = 1,111 \dots$	$1,115 \pm 0,011$	$1,114 \pm 0,011$
Partie imaginaire	0	$0,001 \pm 0,004$	$0,001 \pm 0,005$

Tableau 4.2 – Estimation des coefficients a_ω à l’issue de l’inversion dans le cas où la source est supposée parfaitement répétable. Les résultats sont indiqués sous la forme « moyenne $\pm$ écart-type ».

Des tests de sensibilité de l’algorithme vis-à-vis de la valeur de l’hyperparamètre de pondération γ ont également été réalisés lorsque l’algorithme d’inversion inclut l’inversion de la signature de la source. Les résultats sont présentés dans l’annexe C. Comme dans le cas où la source est supposée parfaitement connue, les résultats de reconstruction varient relativement peu sur une même configuration. La valeur de γ a surtout un impact sur le temps de calcul. Il semble également envisageable de conserver une même valeur de γ pour différentes configurations.

4.3 Prise en compte de la variation spatiale de la masse volumique

4.3.1 Position du problème

Les caractéristiques du milieu sondé sont définies par la distribution spatiale de trois grandeurs physiques (voir section 1.3.3, page 13) :

- la vitesse de propagation des ondes de compression (v_p) ;
- la vitesse de propagation des ondes de cisaillement (v_s) ;
- la masse volumique (ρ).

Jusqu’à maintenant, la distribution spatiale de la masse volumique était supposée parfaitement uniforme dans le sous-sol et sa valeur était supposée connue au préalable. Le problème inverse consistait alors à retrouver la distribution de v_p et de v_s uniquement. Cela est couramment effectué dans la littérature [Gélis, 2005 ; Brossier, 2009]. De plus, le ratio entre les caractéristiques du béton et de la terre est nettement plus petit pour la masse volumique (inférieur à 2) que pour les caractéristiques v_p et v_s (supérieur à 13), ce qui justifiait cette approximation dans notre étude *a priori*.

Cependant, l’algorithme de résolution du problème inverse n’est pas suffisamment robuste pour que cette hypothèse puisse être conservée. Nous l’illustrons sur le milieu avec cheminée et surface libre dans le cas suivant :

- Pour générer les données synthétiques $\mathbf{y}_{\omega,k}$, la masse volumique du béton a été fixée à la valeur plus réaliste de 2200 kg/m^3 au lieu de 1500 kg/m^3 .
- Pour inverser ces données, ρ était supposé uniformément égal à 1500 kg/m^3 et nous nous sommes placés dans la même configuration que dans la section 3.5.2, page 83 (la profondeur de la fondation, les caractéristiques du milieu et la signature de la source sont estimées de façon exacte et l’hypothèse d’élargissement de la fondation est prise en compte). Nous n’avons pas utilisé l’algorithme d’inversion de la source.

Les résultats de segmentation pour les deux initialisations de l’algorithme sont présentés sur la figure 4.4. Nous remarquons une dégradation des résultats de reconstruction par rapport au cas où l’hypothèse d’uniformité de la masse volumique est vérifiée (voir figure 3.11, page 84). Il

est donc nécessaire de prendre en compte une variation de la masse volumique entre la terre et le béton.

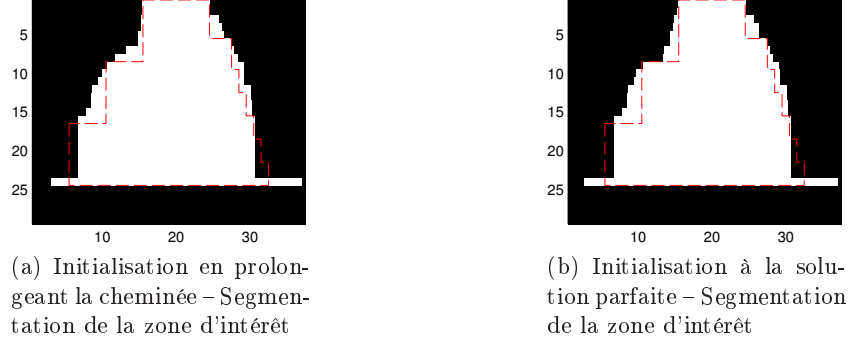


Figure 4.4 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre dans le cas où l'hypothèse d'uniformité de la masse volumique est conservée

4.3.2 Méthode proposée

Description de la distribution de la masse volumique

Dans la méthode de reconstruction avec segmentation du milieu sondé, la distribution spatiale des caractéristiques v_p et v_s est décrite de la façon suivante (voir section 3.4.1, page 75) :

$$\chi_p = \tilde{\chi}_p^B \odot R_B(l_g, l_d) + \tilde{\chi}_p^T \odot R_T(l_g, l_d) + \epsilon_p \quad (4.25)$$

$$\chi_s = \tilde{\chi}_s^B \odot R_B(l_g, l_d) + \tilde{\chi}_s^T \odot R_T(l_g, l_d) + \epsilon_s \quad (4.26)$$

où :

- l_g et l_d décrivent la segmentation de la zone d'intérêt en deux régions Terre et Béton ;
- $\tilde{\chi}_p^T$, $\tilde{\chi}_s^T$, $\tilde{\chi}_p^B$ et $\tilde{\chi}_s^B$ sont les estimations préalables des caractéristiques des deux régions ;
- ϵ_p et ϵ_s sont des variations par rapport aux estimations préalables.

Nous proposons de décrire la distribution spatiale de la masse volumique ρ de manière analogue. Soient $\tilde{\rho}^T$ et $\tilde{\rho}^B$ deux vecteurs désignant une estimation préalable de la distribution spatiale de ρ pour chaque région. Le vecteur ρ dont les composantes désignent la valeur de la masse volumique aux différents points de la zone d'intérêt est alors égal à :

$$\rho(l_g, l_d) = \tilde{\rho}^B \odot R_B(l_g, l_d) + \tilde{\rho}^T \odot R_T(l_g, l_d) \quad (4.27)$$

Nous n'avons pas introduit de variable autorisant des variations par rapport aux estimations préalables comme c'est le cas pour χ_p et χ_s . De cette façon, la reconstruction de la distribution spatiale de la masse volumique ne nécessite pas l'optimisation de variables supplémentaires. Néanmoins, cela peut poser problème lorsque la masse volumique de l'une des régions est mal estimée. Cette situation est abordée dans la section suivante.

Résultats obtenus lorsque la masse volumique de la terre est mal estimée

Reprenons l'exemple sur le milieu avec cheminée et surface libre et considérons le cas où la masse volumique de la terre est sous-estimée :

- Pour générer les données synthétiques $\mathbf{y}_{\omega,k}$, la masse volumique du béton est fixée à 2200 kg/m³ et la masse volumique de la terre est fixée à 1500 kg/m³.
- Ces données sont inversées en supposant que la masse volumique du béton est bien estimée (les composantes de $\tilde{\rho}^B$ sont égales à 2200 kg/m³) et que la masse volumique de la terre est sous-estimée avec une erreur de 10 % (les composantes de $\tilde{\rho}^T$ sont égales à 1350 kg/m³).

Nous montrons les résultats de segmentation pour les deux initialisations de l'algorithme sur la figure 4.5. Nous remarquons à nouveau une dégradation des résultats par rapport au cas où la masse volumique est bien estimée (voir figure 3.11, page 84).

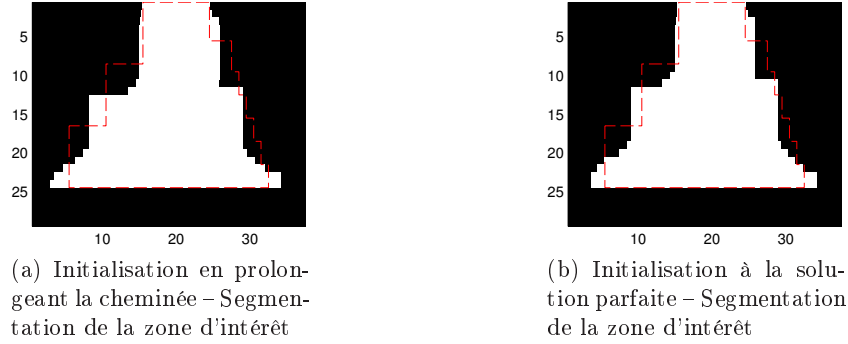


Figure 4.5 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre dans le cas où la masse volumique de la terre est mal estimée sans inversion de la source

Résultats obtenus avec inversion de la signature de la source

Comme suggéré par Romain BROSSIER de l'ISTerre (réunion scientifique des 17 et 18 mai 2011), l'utilisation de l'algorithme de reconstruction avec inversion de la signature de la source peut compenser dans une certaine mesure une mauvaise estimation préalable de la masse volumique. Nous le montrons sur les équations utilisées pour résoudre le problème direct :

- A partir des équations (1.11) à (1.15) de la section 1.4.3, page 20, la relation entre les vecteurs $\mathbf{F}_{\omega,k}$ et $\mathbf{V}_{\omega,k}$ peut s'écrire de la façon suivante :

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = \left(\mathbf{H}_{\omega}^p \text{Diag} \{ \mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{\omega}^p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_{i,\omega}^s \text{Diag} \{ \mathbf{v}_s^2 \odot \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{i,\omega}^s + \omega^2 \text{Diag} \{ \mathbf{M}_Z \boldsymbol{\rho} \} \right) \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (4.28)$$

- Supposons qu'une même perturbation multiplicative soit appliquée à tous les coefficients du vecteur $\boldsymbol{\rho}$:

$$\boldsymbol{\rho}' = \mu \boldsymbol{\rho} \quad (4.29)$$

- L'équation (4.28) devient :

$$\mathbf{F}_{\omega,k} = \left(\mathbf{H}_{\omega}^p \text{Diag} \{ \mathbf{v}_p^2 \odot \mu \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{\omega}^p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_{i,\omega}^s \text{Diag} \{ \mathbf{v}_s^2 \odot \mu \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{i,\omega}^s + \omega^2 \text{Diag} \{ \mathbf{M}_Z \mu \boldsymbol{\rho} \} \right) \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (4.30)$$

ou encore :

$$\frac{1}{\mu} \mathbf{F}_{\omega,k} = \left(\mathbf{H}_{\omega}^p \text{Diag} \{ \mathbf{v}_p^2 \odot \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{\omega}^p + \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_{i,\omega}^s \text{Diag} \{ \mathbf{v}_s^2 \odot \boldsymbol{\rho} \} \mathbf{G}_{i,\omega}^s + \omega^2 \text{Diag} \{ \mathbf{M}_Z \boldsymbol{\rho} \} \right) \mathbf{V}_{\omega,k} \quad (4.31)$$

Par conséquent, si l'erreur sur l'estimation préalable de la masse volumique est telle qu'indiqué à l'équation (4.29), elle peut être interprétée comme étant une mauvaise estimation de la signature de la source.

Sur la figure 4.6, nous présentons les résultats obtenus dans le cas où la masse volumique de la terre est sous-estimée en incluant l'inversion de la signature de la source (la source était supposée parfaitement répétable). L'erreur sur l'estimation préalable n'est pas conforme à l'équation (4.29) donc elle ne peut pas être totalement compensée par l'inversion de la signature de la source. Néanmoins, une amélioration de la reconstruction est visible par rapport aux résultats de la figure 4.5, avec en particulier une meilleure reconstruction de la base de la fondation.

4.3.3 Application à une configuration de taille réaliste

Cette dernière version de l'algorithme d'inversion a récemment été appliquée à une configuration de taille réaliste. Comme précédemment, nous travaillons à partir de données simulées auxquelles nous avons ajouté une séquence de bruit blanc gaussien (rapport signal à bruit égal à 30 dB). Nous décrivons les caractéristiques de cette configuration puis nous présentons les résultats obtenus.

Description de la configuration

Les dimensions du milieu sont environ de 9 mètres en largeur et de 4 mètres en profondeur. La largeur maximale de la fondation est de 1,4 mètres et sa hauteur de 2,5 mètres. Les valeurs des caractéristiques v_p et v_s des deux configurations de taille réduite ont été réutilisées et la variation de la masse volumique ρ entre la terre et le béton a été prise en compte (voir tableau 4.3).

Région	Caractéristiques		
Terre	$v_p^T = 300$ m/s	$v_s^T = 150$ m/s	$\rho^T = 1500$ kg/m ³
Béton	$v_p^B = 4000$ m/s	$v_s^B = 2200$ m/s	$\rho^B = 2200$ kg/m ³
Air	$v_p^A = 0$ m/s	$v_s^A = 0$ m/s	$\rho^A = 1,2$ kg/m ³

Tableau 4.3 – Caractéristiques du milieu de taille réaliste

Le dispositif de mesure comprend deux ensembles de 22 géophones placés de part et d'autre de la fondation avec un espace entre deux géophones de 20 cm. Deux techniques différentes ont été utilisées pour générer une onde sismique :

- La première correspond à la configuration nominale : une source vibratoire est placée en surface. Elle est successivement placée en face de chaque géophone. Elle prend donc 44 positions successives.

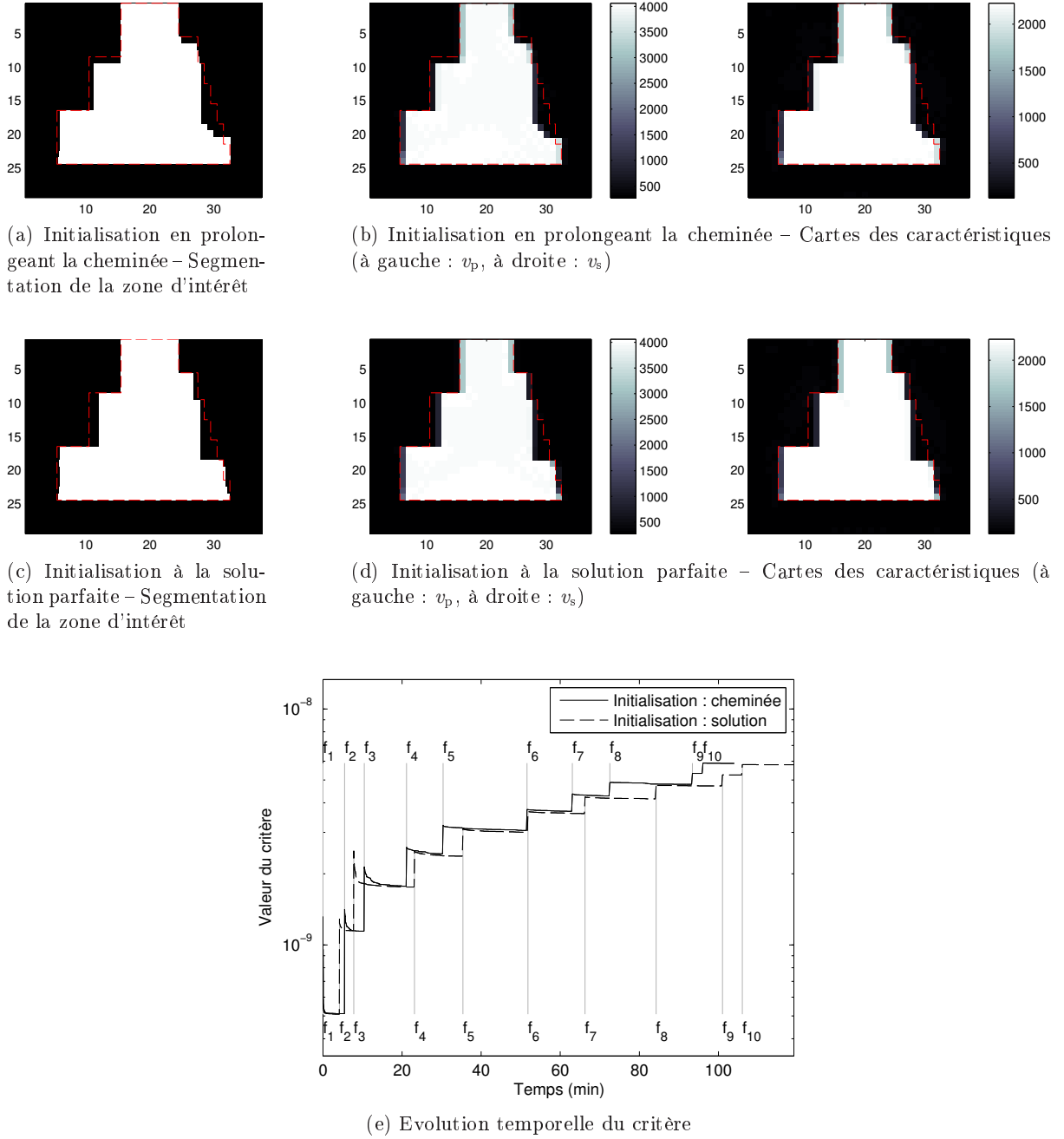


Figure 4.6 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre dans le cas où la masse volumique de la terre est mal estimée en incluant dans l'algorithme l'inversion de la signature de la source

- Pour la seconde, un train d'ondes est émis au moyen de sources explosives souterraines. Ce dispositif a l'avantage de pouvoir diversifier les angles de tirs et ainsi d'acquérir des informations plus riches. Dans notre configuration, 18 tirs sont effectués (9 positions différentes de chaque côté de la fondation).

Pour les deux types de source, le signal émis est un Ricker dont la fréquence principale est de 200 Hz. Comme précédemment, 10 fréquences situées dans la bande passante de ce signal (entre

100 et 500 Hz) ont été sélectionnées pour la résolution du problème inverse. Pour discrétiser les équations de propagation, nous avons utilisé un maillage dont la résolution spatiale est égale à 2 cm et qui comprend une zone PML de 1,5 m de largeur. Un schéma de cette configuration est donné sur la figure 4.7 (la zone PML n'est pas représentée).

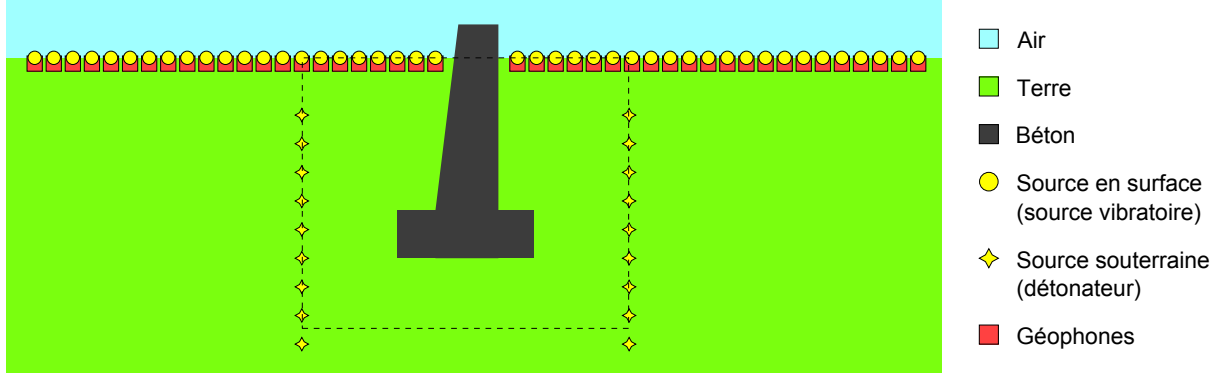


Figure 4.7 – Schéma du milieu de taille réaliste. La ligne en pointillés représente la frontière de la zone d'intérêt qui comprend 170 pixels en largeur et 141 pixels en profondeur.

Résultats obtenus

Des tests ont été effectués dans le cas où la profondeur de la fondation ainsi que les différentes caractéristiques des deux régions sont correctement estimées. Nous nous sommes restreints à une zone d'intérêt dont le contour est indiqué sur la figure 4.7. L'estimation de la signature de la source est incluse dans l'algorithme de reconstruction (la source n'est pas supposée répétable). Comme précédemment, l'hyperparamètre γ est égal à 10^{-10} et le coefficient β est fixé à 10. Seul le critère d'arrêt a changé, la convergence est atteinte lorsque la variation des caractéristiques χ_p et χ_s est inférieure à $\eta = 10^{-7}$ pendant 10 itérations successives.

Dans un premier temps, seules les sources placées en surface étaient prises en compte. La figure 4.8 montre que la reconstruction obtenue en incluant l'hypothèse d'élargissement de la fondation est très proche de la solution exacte du problème. L'erreur maximale commise sur la géométrie de la fondation est inférieure à 10 cm. On note cependant que la convergence de l'algorithme est assez longue : plusieurs jours de calcul sont nécessaires. Cette augmentation du temps de calcul est principalement due à une augmentation du coût par itération.

Ces résultats ont ensuite été comparés avec le cas où seules les sources souterraines étaient prises en compte (voir figure 4.9). Les résultats de reconstruction sont similaires. Dans cette configuration, le temps de calcul requis a été divisé par deux environ. Cela est dû à la fois à une diminution du temps de calcul par itération (moins d'informations sont traitées puisque le nombre de positions de la source est plus petit) et à une diminution du nombre global d'itérations.

Nous montrons enfin les résultats obtenus toujours dans le cas où seules les sources souterraines sont prises en compte et en relâchant l'hypothèse d'élargissement de la fondation (voir figure 4.10). Les résultats de segmentation restent satisfaisants. La solution reste proche de la géométrie recherchée mais le contour de la semelle de la fondation est irrégulier.

Plus précisément, les longueurs qui décrivent la forme de la fondation ont tendance localement à être sous-estimées plutôt qu'à être surestimées. Nous expliquons cela par le fait qu'un renforcement très localisé de la fondation a peu d'impact sur les données. Dans ce cas, la présence ou non d'irrégularités est quasiment équivalente du point de vue du critère minimisé. En

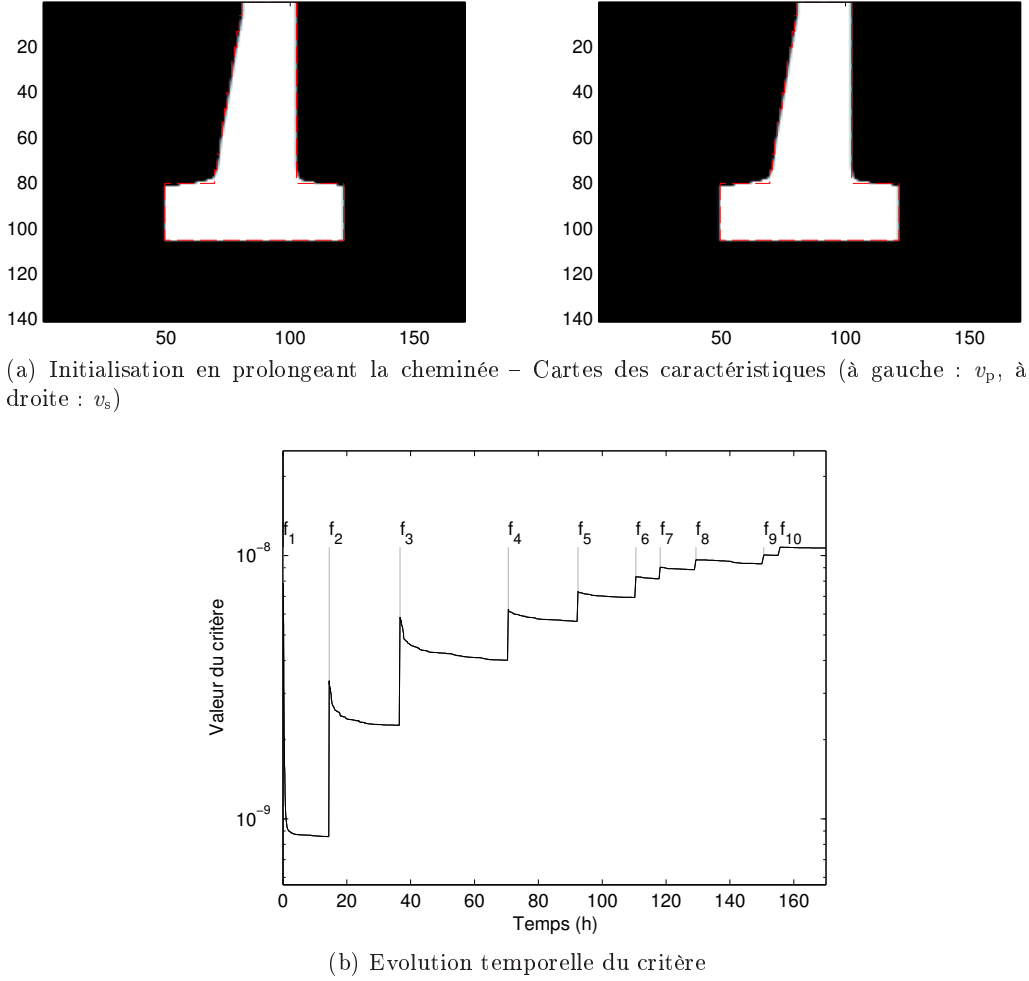
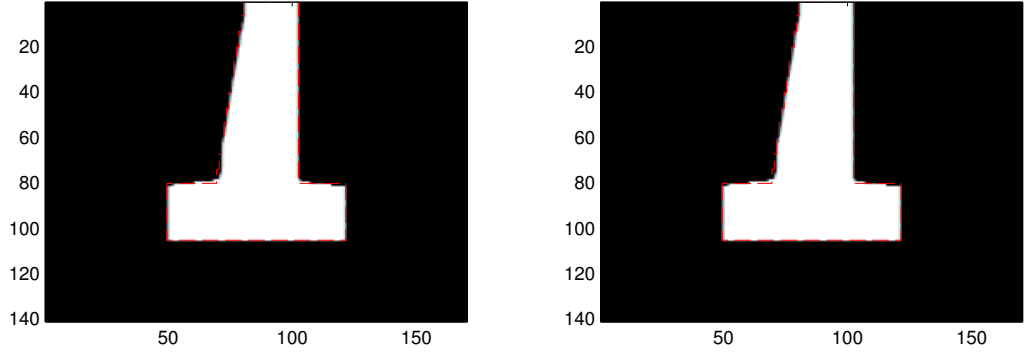


Figure 4.8 – Résultats obtenus sur le milieu de taille réaliste en ne considérant que les sources placées en surface

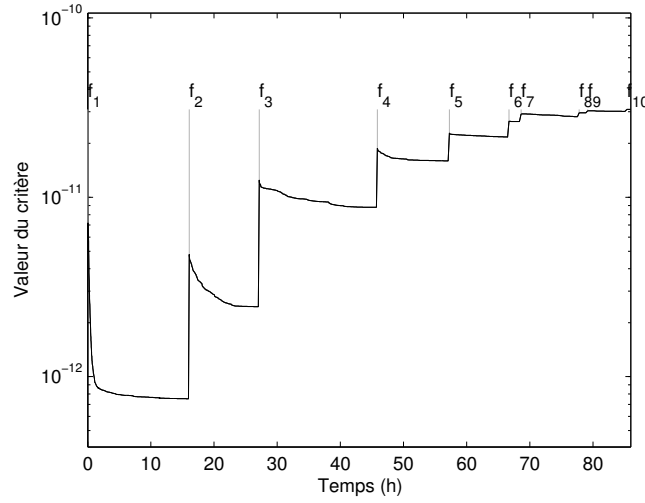
revanche, une « saillie » (cas où les longueurs seraient surestimées) aurait un impact plus marqué sur les mesures.

On note également une diminution du temps de calcul.

Ces résultats montrent que l'algorithme de reconstruction que nous proposons peut être appliqué à une configuration de taille réaliste et aboutir à des résultats d'inversion très proches de la solution exacte. Néanmoins, le temps de calcul requis est assez long ce qui s'explique par la grande taille du problème. Des temps de calcul encore plus longs seraient à prévoir lors du traitement de données réelles. En effet, il faut éviter de se restreindre à une zone d'intérêt pour prendre en compte une erreur éventuelle sur l'estimation préalable des caractéristiques v_p et v_s (voir section 3.5.3, page 85), ce qui augmente d'autant plus la taille du problème.



(a) Initialisation en prolongeant la cheminée – Cartes des caractéristiques (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(b) Evolution temporelle du critère

Figure 4.9 – Résultats obtenus sur le milieu de taille réaliste en ne considérant que les sources souterraines

4.4 Prise en compte de l'atténuation intrinsèque

4.4.1 Introduction d'une caractéristique supplémentaire

Un train d'ondes subit des phénomènes d'atténuation lors de sa propagation dans le sous-sol, phénomènes qui sont principalement de deux types :

- l'atténuation « géométrique » qui est due à l'expansion de l'onde dans le milieu. Cette forme d'atténuation est naturellement prise en compte dans la modélisation.
- l'atténuation « intrinsèque » qui est due à la dissipation d'énergie dans le matériau. Dans le modèle utilisé jusqu'à présent, cette forme d'atténuation n'est pas prise en compte.

Pour résoudre les problèmes direct et inverse, une formulation dans le domaine fréquentiel a été retenue afin de réduire le coût de calcul (voir section 1.3.3, page 13). Elle présente un autre avantage qui est de pouvoir modéliser facilement l'atténuation « intrinsèque » en travaillant avec des caractéristiques v_p et v_s complexes. Un des modèles les plus simples qui est souvent utilisé pour la propagation d'ondes sismiques consiste à introduire un facteur de qualité Q indépendant

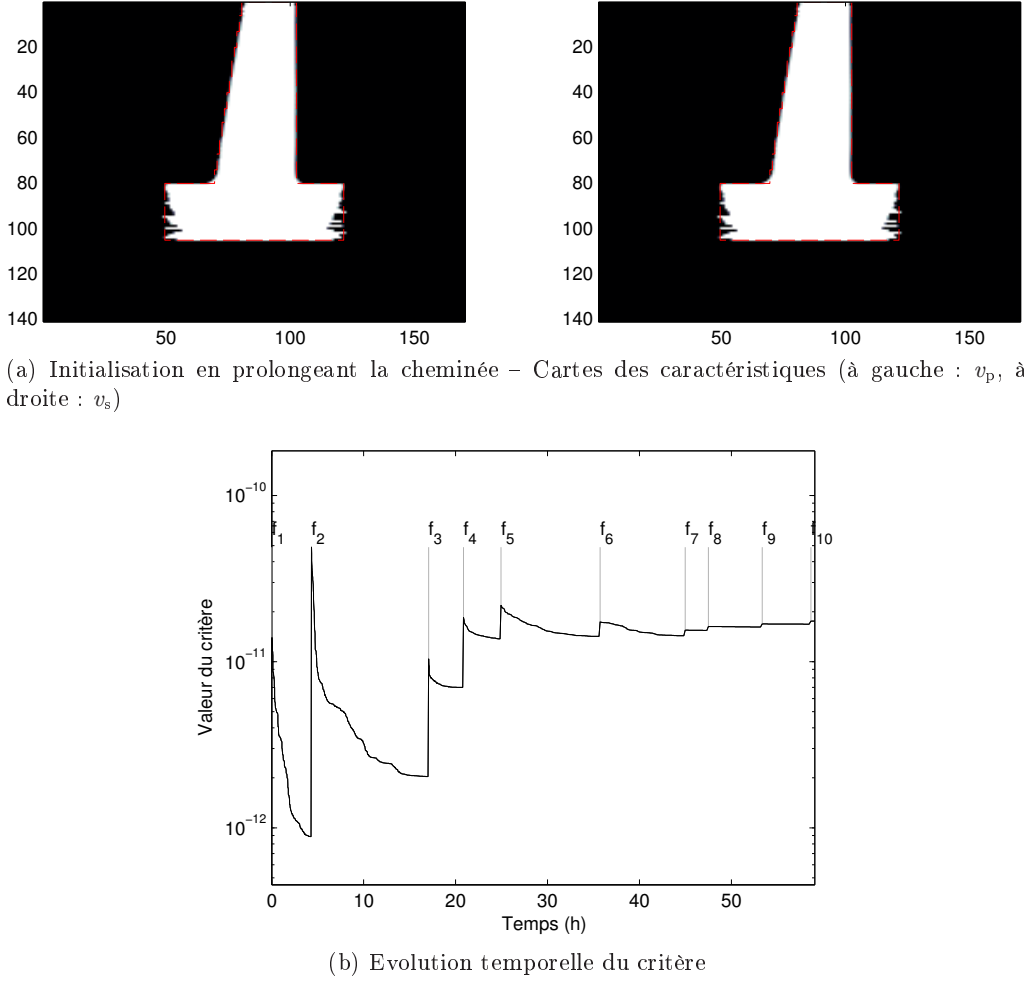


Figure 4.10 – Résultats obtenus sur le milieu de taille réaliste en ne considérant que les sources souterraines et relâchant la contrainte d'élargissement de la fondation

de la fréquence [Aki et Richards, 2002] :

$$v_p^{\text{att}} = v_p \left(1 + \frac{i}{2Q} \right) \quad (4.32)$$

$$v_s^{\text{att}} = v_s \left(1 + \frac{i}{2Q} \right) \quad (4.33)$$

Plus Q est petit, plus l'atténuation est marquée. Dans le cadre de l'imagerie des fondations de pylônes, les plus petites valeurs de Q rencontrées sont de l'ordre de 10 [Magnin, 2008], ce qui correspond à un milieu fortement atténuant. Dans ce cas, l'atténuation intrinsèque des ondes ne peut pas être négligée. Elle agit en particulier sur les plus hautes fréquences du signal source.

Un exemple est donné sur la figure 4.11. Nous avons considéré un milieu dont les caractéristiques v_p , v_s et ρ sont uniformément égales à 300 m/s, 150 m/s et 1500 kg/m³ respectivement. Une source émettant un Ricker dont la fréquence principale est de 500 Hz ainsi que cinq géophones placés en profondeur à 2, 4, 6, 8 et 10 mètres sous la source y ont été placés (cf. figure 4.11a). Deux situations sont considérées : dans un cas, le milieu est non atténuant ($Q = \infty$) et dans l'autre, le facteur de qualité est uniformément égal à 10. Les sismogrammes obtenus sont

présentés sur les figures 4.11b et 4.11c. La diminution de l'amplitude n'est pas visible car chaque trace est normalisée. L'atténuation « intrinsèque » se manifeste par une distorsion de l'onde émise par la source. Elle est de plus en plus marquée au fur et à mesure que l'onde s'éloigne du point source.

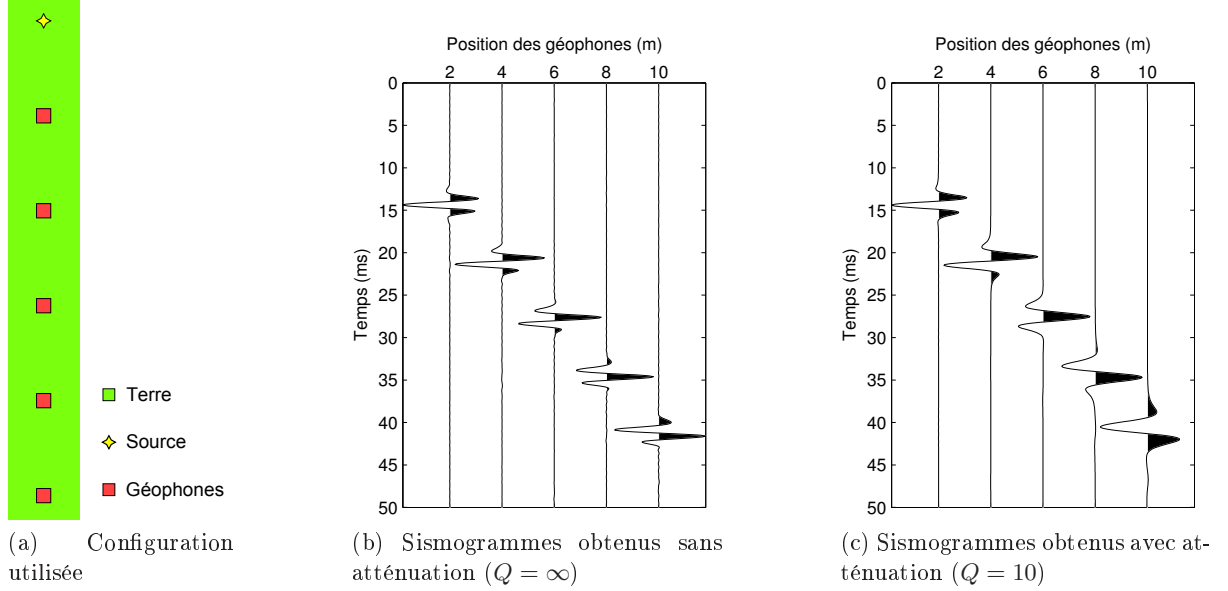


Figure 4.11 – Impact du facteur de qualité Q sur les données mesurées

4.4.2 Méthode proposée pour inverser le facteur de qualité

Description de la distribution spatiale de Q avec un petit nombre de paramètres

La distribution spatiale du facteur de qualité Q ne peut pas être déterminée *a priori*. Elle doit donc être estimée lors de la résolution du problème inverse. Contrairement aux autres caractéristiques v_p , v_s et ρ , une estimation préalable ne peut pas être exploitée.

Nous proposons de décrire la distribution spatiale du facteur de qualité Q avec un petit nombre de paramètres. Cette approche est utilisée par exemple dans [Miller *et al.*, 2000] pour reconstruire la distribution de la permittivité complexe dans le cadre d'un problème de tomographie par ondes électromagnétiques. Plusieurs modèles sont possibles :

- Le facteur de qualité peut être supposé uniforme dans tout le sous-sol :

$$Q(x,y) = Q \quad (4.34)$$

- Sur de grandes échelles, le facteur de qualité a tendance à varier avec la profondeur. Un modèle de variation linéaire peut donc être utilisé :

$$Q(x,y) = Q^a y + Q^b \quad (4.35)$$

- La segmentation du milieu en deux régions Terre et Béton peut être exploitée pour introduire une loi d'évolution de Q différente dans chaque région. Par exemple, Q peut être supposé constant dans le béton et variant linéairement en fonction de la profondeur dans la terre :

$$\begin{cases} Q(x,y) = Q & \text{si } (x,y) \in \Omega_B \\ Q(x,y) = Q^a y + Q^b & \text{si } (x,y) \in \Omega_T \end{cases} \quad (4.36)$$

Ce type d'approche a l'avantage de n'introduire qu'un petit nombre d'inconnues supplémentaires dans la résolution du problème inverse. Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons le premier modèle proposé où Q est uniforme dans tout le sous-sol.

Introduction d'un changement de variable

Comme pour les variables v_p^2 et v_s^2 (voir section 2.4.4, page 53), un manque de sensibilité du critère par rapport à des variations du facteur de qualité est observé. Il se manifeste dans le cas d'une faible atténuation, c'est-à-dire pour les plus grandes valeurs de Q (les plus fortes variations du critère sont localisées autour des plus petites valeurs de Q). Afin d'éviter un ralentissement de l'algorithme d'inversion, nous effectuons un changement de variable en travaillant avec l'inverse de Q comme dans [Hicks et Pratt, 2001]. Cette nouvelle variable, que nous noterons χ_Q par la suite, est parfois appelée « facteur d'atténuation » dans la littérature.

Pour mettre en évidence l'amélioration de la sensibilité du critère, nous considérons le milieu sans cheminée ni surface libre (voir section 1.6.1, page 28). Les données $y_{\omega,k}$ sont générées dans le cas où $Q = 10$ (milieu fortement atténuant). Sur la figure 4.12, nous montrons l'évolution du critère sans et avec changement de variable, sachant que les distributions des autres caractéristiques v_p , v_s et ρ correspondent à la solution exacte. Il s'agit plus exactement de l'évolution du terme d'adéquation aux données du critère $\mathcal{C}_{AD}$ car le terme de régularisation ϕ ne dépend pas du facteur de qualité. Sans changement de variable (resp. avec changement de variable), la variable Q (resp. χ_Q) évolue linéairement entre les valeurs $Q = 10$ et $Q = 10^4$ (resp. $\chi_Q = 10^{-1}$ et $\chi_Q = 10^{-4}$) le long de l'axe des abscisses.

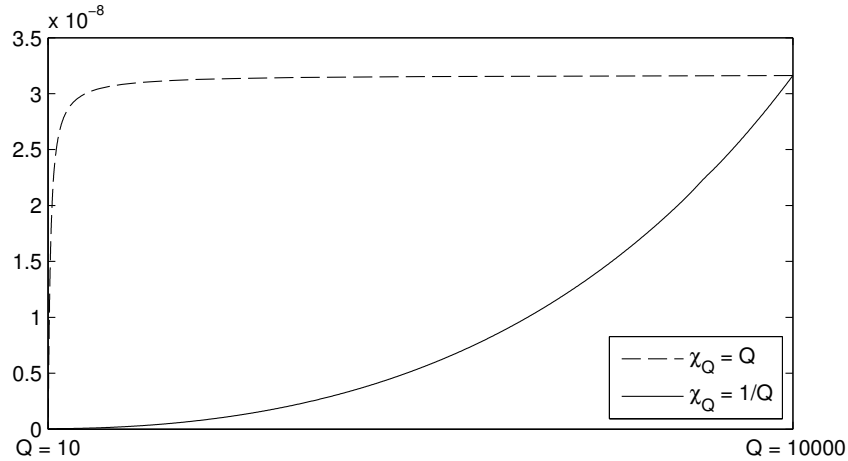


Figure 4.12 – Evolution du terme d'adéquation aux données du critère sans et avec changement de variable inverse. Sans changement de variable, le facteur de qualité Q évolue linéairement de 10 (forte atténuation) à 10^4 (faible atténuation) le long de l'axe des abscisses. Avec changement de variable, χ_Q évolue linéairement de 10^{-1} à 10^{-4} .

4.4.3 Mise à l'échelle des différentes variables

Comme cela a été évoqué dans la section 3.4.2, page 79, il est préférable d'utiliser une méthode d'optimisation simultanée (à chaque itération, toutes les variables sont mises à jour de façon conjointe). Dans ce cas, une mise à l'échelle de certaines variables par rapport à d'autres

est souhaitable pour éviter un mauvais conditionnement du critère. Nous sommes ici en présence de trois ensembles de variables associés à trois grandeurs physiques différentes :

- les variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_s$ qui correspondent à des longueurs mesurées en nombre de pixels ;
- les variations par rapport aux caractéristiques estimées $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ qui correspondent à des vitesses de propagation ;
- le facteur d'atténuation χ_Q qui est adimensionnel.

Deux coefficients β_ℓ et β_Q sont donc introduits. Ils agissent sur les variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_s$ d'une part et χ_Q d'autre part. Cela revient à travailler avec les variables $\mathbf{l}'_g$, $\mathbf{l}'_s$ et χ'_Q telles que :

$$\begin{aligned}\mathbf{l}'_g &= \beta_\ell \mathbf{l}_g \\ \mathbf{l}'_d &= \beta_\ell \mathbf{l}_d \\ \chi'_Q &= \beta_Q \chi_Q\end{aligned}\tag{4.37}$$

Un réglage empirique de ces deux coefficients peut être fastidieux. C'est pourquoi nous avons utilisé la méthode de réglage qui a été proposée dans la section 3.4.2, page 79. Le principe est de définir β_ℓ et β_Q à partir des termes diagonaux d'une matrice hessienne approchée :

$$\beta_\ell^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_\omega \sum_k \left\| \sum_l \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,l} \right\|^2}{N_l \sum_\omega \sum_k \left\| \sum_m \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} \right\|^2}\tag{4.38}$$

$$\beta_Q^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_\omega \sum_k \left\| \mathbf{J}_{\omega,k}^Q(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right\|^2}{\sum_\omega \sum_k \left\| \sum_m \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} \right\|^2}\tag{4.39}$$

où :

- $\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}$, $\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}$ et $\mathbf{J}_{\omega,k}^Q$ correspondent aux colonnes associées respectivement aux variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$, et χ_Q dans la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}_{\omega,k}$.
- N_l (resp. $N_x^Z N_y^Z$) désigne la longueur des vecteurs $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (resp. $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$).

Pour les tests d'inversion effectués, les coefficients β_ℓ et β_Q étaient mis à jour au moment de l'introduction d'une fréquence supplémentaire.

4.4.4 Résultats obtenus

Dans le modèle proposé, les variations du facteur de qualité Q d'une itération à l'autre s'étendent à tout le sous-sol. Dans ce cas, nous ne pouvons pas exploiter la restriction à une zone d'intérêt pour réduire le coût de calcul. Sur la configuration de taille réaliste que nous avons utilisée dans la section 4.3.3, page 103, le coût de calcul serait considérable. C'est pourquoi nous avons préféré revenir à la configuration que nous avons utilisée à la fin de la section 3.5.3, page 87. Elle correspond au milieu avec cheminée et surface libre mais au lieu de limiter le problème aux caractéristiques d'une zone d'intérêt, tout le sous-sol est considéré y compris la zone PML.

Nous avons supposé que la profondeur de la fondation, la signature de la source ainsi que les caractéristiques v_p , v_s et ρ des régions Terre et Béton étaient estimées au préalable de façon exacte. A l'initialisation, la forme de la fondation correspond à la prolongation de la cheminée jusqu'à la profondeur totale de la fondation et le milieu est supposé non atténuant ($Q = +\infty$). Comme précédemment, l'hyperparamètre γ est égal à 10^{-10} et le seuil η qui intervient dans le critère d'arrêt a été fixé à 10^{-8} . Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4.13.

Les résultats obtenus sont relativement proches de la solution recherchée, avec notamment une bonne reconstruction de la base de la fondation. Néanmoins, la partie gauche de la fondation

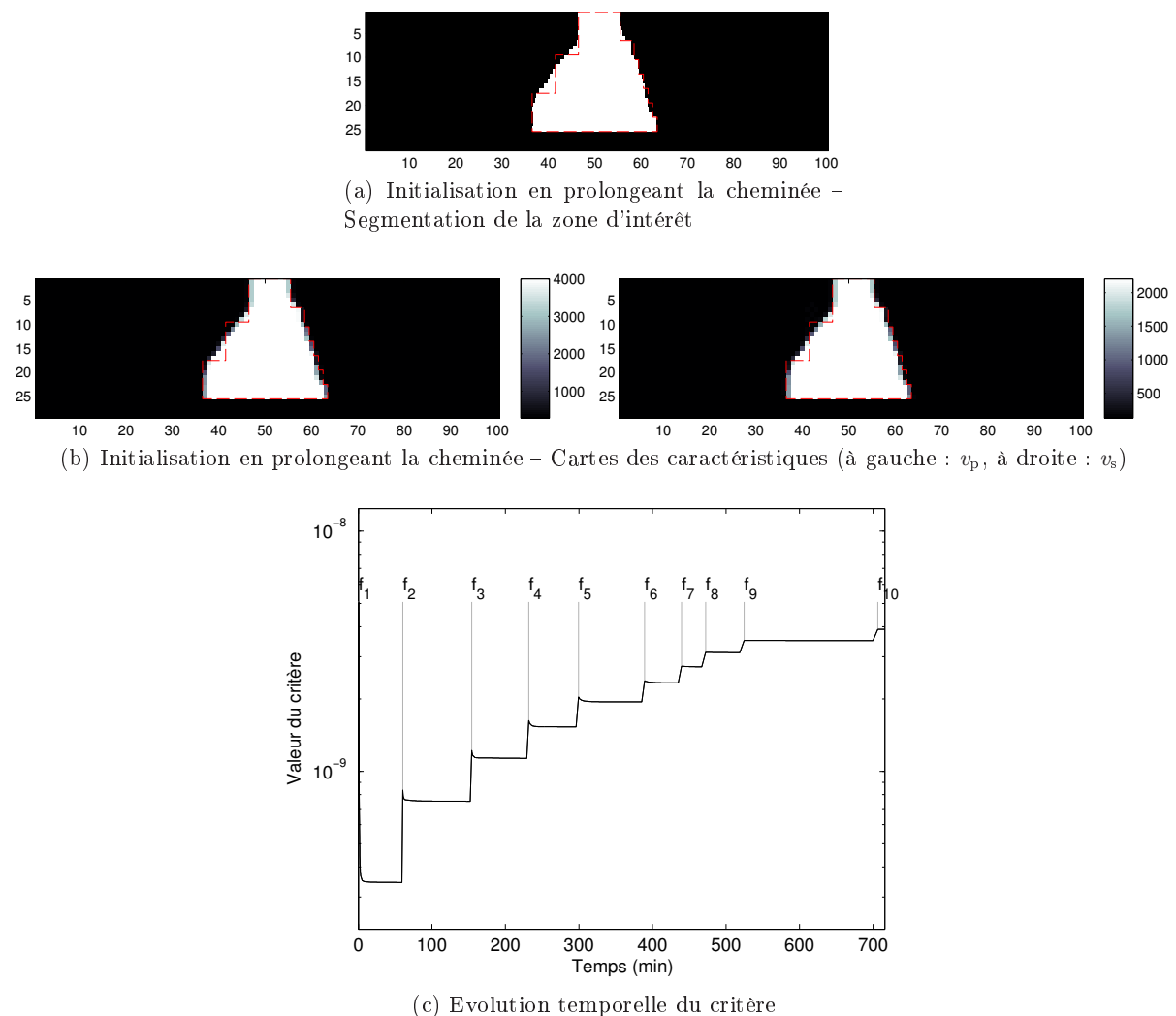


Figure 4.13 – Résultats obtenus sur le milieu avec cheminée et surface libre sans se restreindre à une zone d'intérêt. L'algorithme d'inversion inclut l'estimation du facteur de qualité Q .

est reconstruite de façon approximative. Le temps de calcul est quasiment identique à celui dans le cas sans atténuation (voir figure 3.16, page 90). Notons enfin que malgré une initialisation très éloignée de la valeur exacte (nous avons supposé que le milieu n'était pas atténuant), l'algorithme converge vers une valeur du facteur de qualité Q égale à 10,04, ce qui est très proche de la valeur attendue ($Q = 10$).

Bilan des résultats

Dans ce chapitre, plusieurs extensions ont été apportées à la méthode de reconstruction basée sur une segmentation.

La prise en compte de l'indétermination sur la signature de la source ne semble pas affecter significativement les résultats de reconstruction. Seule une augmentation du coût de calcul a été observée. La technique utilisée a deux avantages : d'une part, il n'y a pas de variable supplémentaire à estimer et d'autre part, les calculs liés à l'inversion de la signature de la source sont négligeables en coût de calcul.

Pour reconstruire la distribution spatiale de la masse volumique, la méthode proposée s'appuie exclusivement sur la segmentation du milieu et sur une estimation préalable de la masse volumique de chaque région. De cette façon, il n'y a pas de variable supplémentaire à estimer. Cependant, une erreur sur les estimations préalables est possible. L'inversion de la source permet de compenser une erreur d'estimation dans une certaine mesure.

Enfin, l'inversion du facteur de qualité est prise en compte en supposant que cette caractéristique est répartie uniformément dans tout le milieu. La solution obtenue est plus approximative que précédemment bien que l'algorithme converge vers la bonne valeur du facteur de qualité. Ces résultats peuvent s'expliquer par le fait que les données associées aux plus hautes fréquences, qui permettent d'affiner la reconstruction, subissent davantage les phénomènes d'atténuation.

Conclusion générale et perspectives

Cette thèse a été consacrée à la résolution d'un problème inverse dont le but est de retrouver la géométrie de fondations à partir de mesures obtenues par propagation d'ondes sismiques. Notre objectif a été de proposer un outil numérique non seulement performant, c'est-à-dire convergeant vers des résultats de reconstruction satisfaisants en un temps de calcul minimal, mais également limitant l'intervention de l'utilisateur.

Plusieurs aspects de ce problème inverse rendent sa résolution difficile :

- Il s'agit d'un problème de tomographie de diffraction. Ce type de problème se distingue par son caractère mal posé et par la non-linéarité de l'expression des données mesurées en fonction des inconnues.
- Il s'agit d'un problème de grande taille. En effet, il est nécessaire de reconstruire la distribution spatiale de plusieurs caractéristiques du sous-sol et il convient d'utiliser un maillage finement discrétisé pour modéliser correctement la propagation des ondes sismiques.
- Dans la configuration nominale, la procédure d'auscultation des fondations est entièrement réalisée depuis la surface du sol. Cela accentue la sous-détermination du problème.
- La résolution du problème direct est coûteuse en calculs. Cela se répercute sur le coût de résolution du problème inverse.

Deux approches différentes ont été abordées. Toutes deux consistent à minimiser un critère des moindres carrés régularisé. Pour élaborer ces deux méthodes, nous nous sommes efforcés de suivre une démarche se voulant rigoureuse et cohérente.

La première approche proposée est de type « cartographie » : les paramètres du modèle sont les valeurs des caractéristiques du sous-sol en chaque point du maillage. Elle est basée sur une régularisation markovienne. La différence entre pixels voisins est pénalisée de manière à favoriser la reconstruction de cartes constituées de régions lisses séparées par des contours francs.

Les premiers tests d'inversion ont été réalisés sur une configuration simple. Ils ont mis en évidence une très lente progression de l'algorithme de minimisation. Pour pallier ce problème, deux modifications ont été apportées au schéma d'optimisation. La première est l'incorporation progressive des fréquences, des basses vers les hautes. Cette technique est couramment utilisée en imagerie par ondes sismiques. Cela se traduit par la reconstruction d'une image lisse dont les contours s'affinent avec la prise en compte des données hautes fréquences. La seconde consiste à introduire un changement de variables logarithmique afin d'améliorer la sensibilité du critère. C'est une de nos contributions au problème d'imagerie des fondations de pylônes.

Des tests sur une configuration plus complexe ont montré que cette première méthode d'inversion ne pouvait pas s'appliquer à des configurations réalistes. Un point faible est le peu d'informations *a priori* prises en compte. Pour que l'algorithme converge vers des résultats plus satisfaisants, une seconde méthode prenant en compte des *a priori* plus forts a été développée.

La seconde approche proposée est basée sur une segmentation du milieu sondé en deux régions : une région Terre et une région Béton. Cette méthode originale s'appuie sur une description semi-paramétrique de la forme de la fondation. Cela permet de tenir compte d'*a priori* divers liés à la structure particulière des fondations, à certaines informations sur la géométrie de la fondation obtenues par des techniques de contrôle complémentaires et à une estimation préalable des caractéristiques de chaque région. Il s'agit de notre contribution principale au problème d'imagerie des fondations de pylônes.

D'après les tests réalisés sur données simulées, cette méthode converge plus rapidement vers des résultats de reconstruction plus satisfaisants que l'approche par régularisation markovienne. De plus, elle fait preuve d'une certaine robustesse vis-à-vis d'une erreur sur l'estimation préalable des caractéristiques du terrain environnant. Cela montre que la prise en compte d'*a priori* plus nombreux et plus précis est essentielle à l'élaboration d'une méthode d'inversion performante.

Nous allons revenir en détail sur différents aspects des méthodes proposées. Pour certains d'entre eux, des perspectives seront proposées.

Résolution du problème direct

Un algorithme de résolution du problème direct développé au sein du département STEP d'EDF R&D a servi de base à notre travail. Celui-ci se fonde sur une discrétisation par différences finies des équations décrivant la propagation d'ondes élastiques. Une formulation dans le domaine fréquentiel a été retenue. Cela a l'avantage de réduire le coût de calcul et permet de travailler directement sur les fréquences sélectionnées pour la résolution du problème inverse. De plus, le recours à des matrices creuses est privilégié, ce qui contribue à la réduction du temps de calcul.

Un inconvénient d'une discrétisation par différences finies est la nécessité de travailler avec un maillage dont la résolution est invariante sur tout le milieu. En effet, une contrainte locale sur la valeur du pas de discrétisation se répercute sur la résolution spatiale du maillage dans l'ensemble du milieu. Dans notre étude, pour modéliser fidèlement la propagation d'une onde au niveau de la surface libre, il est nécessaire de travailler avec un maillage dense : le pas de discrétisation doit être inférieur ou égal au trentième de la plus petite longueur d'onde se propageant dans le milieu. Pourtant, il n'est pas nécessaire de mailler si finement le sous-sol dans les zones plus profondes. Nous sommes donc amenés à travailler avec un nombre de paramètres plus grand que nécessaire.

Pour réduire le nombre de paramètres, nous avons proposé de travailler sur une zone d'intérêt de taille réduite centrée autour de l'objet diffractant. Néanmoins, les tests de robustesse réalisés avec l'approche par segmentation mettent en évidence une dégradation des résultats lorsqu'une erreur sur l'estimation préalable des caractéristiques de la terre est commise. Une réduction à une zone d'intérêt n'est donc pas pertinente.

Une alternative consisterait à utiliser un schéma de discrétisation différent. Par exemple, une discrétisation des équations de propagation par éléments finis permettrait de faire varier la résolution du maillage dans le milieu. Ainsi, le maillage pourrait être affiné au niveau de la surface libre afin de modéliser correctement la propagation des ondes, et à proximité de la fondation afin de reconstruire la géométrie de la fondation avec précision. Dans les zones plus profondes et plus éloignées de la fondation, la résolution du maillage pourrait être plus grossière ce qui permettrait de réduire le nombre de paramètres du modèle.

Remarquons que la description semi-paramétrique qui a été introduite dans le troisième chapitre n'est pas nécessairement associée à un maillage régulier et qu'elle pourrait aisément

être adaptée à un nouveau schéma de discrétisation.

Régularisation du critère

Les deux approches qui ont été proposées pour résoudre le problème inverse consistent à minimiser un critère des moindres carrés. Pour pallier le caractère mal posé du problème, ce critère est régularisé par l'ajout d'informations *a priori*. Pour la seconde approche proposée, le critère est régularisé via :

- une nouvelle paramétrisation du problème qui tient compte de la structure particulière des fondations. D'une part, les variables descriptives $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ décrivent la forme du contour de la fondation et d'autre part, les variables $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ décrivent la distribution des caractéristiques v_p et v_s au sein de chaque région.
- la pénalisation de la norme de $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$. De cette façon, un rappel à une estimation préalable des caractéristiques de chaque région est effectué.
- l'ajout de contraintes sur les variables descriptives. Cela permet de prendre en compte l'hypothèse d'élargissement de la fondation en fonction de la profondeur ou des informations obtenues par « sondage au piquet » (voir section 3.2, page 64).

Dans la plupart des tests effectués, l'hypothèse d'élargissement de la fondation était prise en compte. Pour cela, les contraintes suivantes étaient introduites :

$$\begin{cases} [\mathbf{l}_g]_1 \geq \ell_g^0 \text{ et } [\mathbf{l}_d]_1 \geq \ell_d^0 \\ [\mathbf{l}_g]_m \geq [\mathbf{l}_g]_{m-1} \text{ et } [\mathbf{l}_d]_m \geq [\mathbf{l}_d]_{m-1} \text{ pour } m > 1 \end{cases} \quad (4.40)$$

où ℓ_g^0 et ℓ_d^0 sont mesurées à la base de la partie émergente de la fondation.

La prise en compte de ces contraintes semble justifiée car dans le cas contraire, l'algorithme a tendance à converger vers un contour qui présente des irrégularités assez marquées (cf. figure 4.10, page 108). Cependant, il existe des cas où, selon les spécifications pour la construction de la fondation, cette propriété géométrique n'est pas vérifiée.

Il faudrait tenir compte d'*a priori* moins forts sur la géométrie de la fondation au cours de l'inversion. Cela permettrait de converger vers un contour régulier sans pour autant contraindre la fondation à s'élargir en fonction de la profondeur.

Les résultats présentés sur la figure 4.10, page 108 montrent que les composantes de $\mathbf{l}_g$ et de $\mathbf{l}_d$ ont tendance à être sous-estimées plutôt qu'à être surestimées. Une technique proposée par les partenaires du département STEP d'EDF R&D consiste à appliquer un filtrage morphologique à l'issue du traitement de chaque groupe de fréquences de manière à éliminer les renforcements très localisés du contour reconstruit.

D'autres alternatives peuvent être envisagées de manière à prendre en compte des *a priori* au cours de la minimisation du critère. Une première possibilité consisterait à ajouter à l'expression du critère un terme de pénalisation supplémentaire qui prendrait la forme générale suivante :

$$\phi(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) = \sum_{n \geq 0} \gamma_n \sum_m \left(\varphi \left(\left[\mathbf{D}^{(n)} \mathbf{l}_g \right]_m \right) + \varphi \left(\left[\mathbf{D}^{(n)} \mathbf{l}_d \right]_m \right) \right) \quad (4.41)$$

où $\mathbf{D}^{(n)}$ est la matrice de différenciation à l'ordre n .

Nous pourrions travailler sur les différences à l'ordre $n = 1$ et pénaliser les variations de longueur avec une norme de type $\ell_2 \ell_1$, en reprenant par exemple la fonction potentiel utilisée pour l'approche par régularisation markovienne (voir section 2.3.1, page 43) :

$$\varphi(t) = \sqrt{t^2 + \delta^2} \quad (4.42)$$

De cette façon, les petites variations de longueur auraient tendance à s'annuler tandis que les plus fortes variations seraient préservées. Nous pourrions également travailler sur les différences à l'ordre $n = 2$ avec une norme de type $\ell_2\ell_0$. Cela favoriserait la reconstruction d'une forme polygonale et le réglage du coefficient de pondération associé permettrait d'agir sur le nombre de sommets du polygone.

Etant donné que l'algorithme a tendance à sous-estimer les longueurs, nous pourrions également utiliser une fonction potentiel φ asymétrique. Par exemple, à l'ordre $n = 1$, seuls les incréments négatifs (rétrécissement de la fondation) pourraient être pénalisés.

Le principal inconvénient des propositions précédentes est l'introduction d'au moins un hyperparamètre supplémentaire qui devrait être réglé par l'utilisateur. Une autre alternative consisterait à revenir à des contraintes portant sur les variables descriptives. Pour contrer la tendance de l'algorithme à sous-estimer localement certaines longueurs, nous pourrions introduire par exemple les contraintes suivantes (voir figure 4.14) :

$$\begin{aligned} [l_g]_m &\geq \min([l_g]_{m-1}, [l_g]_{m+1}) \\ [l_d]_m &\geq \min([l_d]_{m-1}, [l_d]_{m+1}) \end{aligned}$$

Remarquons que de telles contraintes ne peuvent pas être prises en compte au cours de la procédure d'inversion directement avec l'algorithme L-BFGS-B car elles ne sont pas indépendantes (elles lient plusieurs variables entre elles). Il faudrait plutôt utiliser des techniques plus générales telles que la méthode des points intérieurs pour en tenir compte.

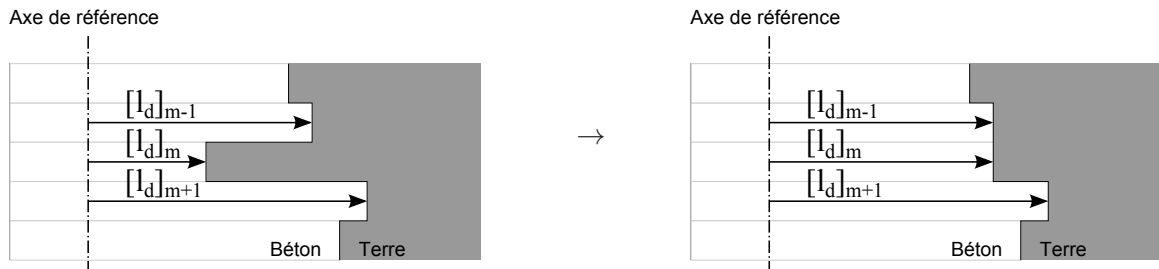


Figure 4.14 – Schéma illustrant l'action de la contrainte proposée sur les variables descriptives

Vitesse de convergence de l'algorithme

Le critère est minimisé avec l'algorithme L-BGFS-B. Il se base sur le calcul du critère et du gradient. Cet algorithme s'adapte bien aux problèmes de grande taille car il bénéficie d'un bon compromis entre coût calculatoire et efficacité. Malgré cela, les résultats d'inversion montrent que la progression de l'algorithme d'inversion est relativement lente. Du point de vue algorithmique, nous voyons deux façons d'accélérer la convergence : soit en agissant sur le coût de calcul par itération, soit en diminuant le nombre d'itérations effectuées.

Chaque itération passe par le calcul du critère et du gradient en plusieurs points de l'espace d'état (un ou deux points en règle générale). Cette opération est relativement coûteuse. En effet, si l'on note N_ω le nombre de pulsations considérées et N_k le nombre de positions de la source, $2N_\omega N_k$ résolutions de systèmes linéaires sont nécessaires. La matrice normale de ces systèmes linéaires ne dépend que de la pulsation ω . Par conséquent, une décomposition en facteurs L et

U est effectuée avant de considérer chaque position de la source ce qui permet de mutualiser certains calculs. Ces étapes sont les plus coûteuses.

Au lieu d'une décomposition en facteurs L et U exacte, une factorisation tronquée pourrait diminuer significativement le coût de calcul du critère et du gradient. Néanmoins, il faudrait étudier l'impact d'une telle approximation sur les propriétés de convergence de l'algorithme. Il faudrait s'assurer par exemple qu'à chaque itération, l'algorithme de minimisation utilisé définit bien une direction de descente.

Une autre façon d'accélérer la convergence de l'algorithme consisterait à réduire le nombre d'itérations effectuées grâce au préconditionnement. Un préconditionneur diagonal a été introduit dans les sections 3.4.2, page 79, et 4.4.4, page 111. Il s'agissait avant tout de construire un préconditionneur rapide à calculer et à utiliser afin de pallier le problème de mise à l'échelle des différentes variables optimisées. Celui-ci n'a pas eu d'impact notable sur le nombre d'itérations effectuées. L'utilisation d'un préconditionneur plus approprié qui s'adapterait bien à la structure particulière du modèle permettrait sans doute de diminuer de façon plus significative le nombre d'itérations. Le recours à une décomposition en facteurs LU tronquée pourrait également intervenir dans la construction d'un tel préconditionneur.

Enfin, une dernière possibilité d'accélération est liée au langage de programmation utilisé. Nos algorithmes ont été développés sous Matlab. Une traduction de ces algorithmes en langage compilé (C++) est actuellement réalisée au sein du département STEP d'EDF R&D. Ainsi, plusieurs possibilités de parallélisation peuvent être exploitées. En particulier, une accélération du calcul du critère et du gradient est possible en menant en parallèle les calculs portant sur les différentes pulsations et sur les différentes positions de la source.

Application à des configurations réalistes et traitement de données réelles

Les deux méthodes d'inversion qui ont été présentées dans ce manuscrit ont été testées en majorité sur des données simulées correspondant à des configurations de taille réduite. Une partie de ces tests a servi à évaluer la robustesse de l'approche par segmentation.

D'autres tests seraient à prévoir afin de se rapprocher d'une configuration réaliste et de mieux cerner les limites de l'algorithme. Nous pourrions nous placer dans le cas où le terrain qui entoure la fondation est hétérogène, en considérant par exemple un milieu stratifié. Les tests de robustesse qui ont été présentés portent chacun sur une erreur d'estimation (estimation préalable des caractéristiques physiques, de la profondeur de la fondation, de la signature de la source). Il faudrait tester l'effet combiné de plusieurs erreurs d'estimation sur les résultats de reconstruction. Nous pourrions également tester la robustesse de l'algorithme par rapport à un mauvais positionnement des capteurs ou de la source.

Ces tests supplémentaires permettraient de mieux cerner la marge d'erreur des reconstructions et de savoir jusqu'à quel point les résultats peuvent s'éloigner de la solution exacte du problème sur une configuration réaliste.

Il serait également intéressant de pouvoir définir un indicateur de validité des résultats de reconstruction. Une première piste a été évoquée dans la section 3.5.3, page 85 où la valeur finale de l'adéquation aux données sert à indiquer la profondeur exacte de la fondation.

Un dernier point concerne le choix des fréquences sélectionnées pour la résolution du problème inverse. Un compromis est à trouver : d'une part, les fréquences doivent être suffisamment

nombreuses pour contenir toute l'information disponible dans les mesures et d'autre part, il faut éviter d'alourdir inutilement l'algorithme d'inversion avec une trop grande quantité de données à traiter. L'idéal serait bien entendu de se ramener à un maillage « critique », c'est-à-dire tel que l'ensemble des fréquences sélectionnées englobe toute l'information contenue dans les données sans redondance.

Annexe A

Adaptation du signal source au profil d'atténuation du sous-sol

A.1 Contexte

A.1.1 Observations et objectif

Pour générer une onde sismique, une source vibratoire est utilisée. Cela permet à l'utilisateur de contrôler l'allure du train d'ondes qui se propage dans le sous-sol. Le signal émis par la source doit être choisi de sorte que pour l'ensemble des fréquences du signal appartenant à un intervalle $[f_{\min}; f_{\max}]$, l'énergie transmise dans le sous-sol soit constante et maximale. En supposant que le bruit est additif et de même amplitude sur cet intervalle fréquentiel, cela permet d'égaliser et de maximiser le rapport signal à bruit. Pour cela, un *sweep* linéaire dont la fréquence varie entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$ et dont l'amplitude maximale est la plus élevée possible (notée $a_{\max}$ par la suite) a naturellement été choisi.

En pratique, pour contrôler la qualité du signal se propageant dans le sous-sol, un géophone appelé « géophone pilote » est placé à proximité de la source. L'expérience montre que le signal mesuré par le géophone pilote ne correspond généralement pas au signal émis par la source vibratoire. Cela est dû à un problème de couplage entre la source vibratoire et la surface du sol qui entraîne une atténuation plus marquée pour certaines fréquences que pour d'autres. Pour compenser ce phénomène d'atténuation et égaliser l'énergie du signal transmis dans le sous-sol sur l'intervalle $[f_{\min}; f_{\max}]$, l'évolution au cours du temps de la fréquence du signal émis est modifiée tout en gardant son amplitude maximale égale à $a_{\max}$.

Actuellement, la procédure suivante est appliquée : l'intervalle des fréquences parcourues $[f_{\min}; f_{\max}]$ est découpé en N sous-intervalles. Les sous-intervalles correspondant aux fréquences les plus atténuées voient leur durée d'émission augmentée afin de rehausser l'énergie du signal transmis tandis que pour les fréquences les moins atténuées, la durée de l'intervalle correspondant est diminuée. Le réglage des durées des différents sous-intervalles est effectué de manière empirique en procédant par ajustement successifs. Nous proposons une procédure automatisée permettant de corriger l'allure du signal émis par la source vibratoire en fonction du signal mesuré par le géophone pilote.

A.1.2 Hypothèses et notations

Le premier signal émis par la source vibratoire est noté s^e . Son amplitude maximale est égale à $a_{\max}$ et sa durée est limitée à T :

$$s^e(t) = a_{\max} \exp(j\Phi(t)), \quad t \in [0; T] \quad (\text{A.1})$$

Il s'agit d'un *sweep* linéaire dont la fréquence varie de $f_{\max}$ à $f_{\min}$. La phase du signal est donc égale à :

$$\Phi(t) = 2\pi \left(f_{\max} + \frac{(f_{\min} - f_{\max})t}{2T} \right) t + \varphi, \quad t \in [0; T] \quad (\text{A.2})$$

Lors de l'émission de s^e , le géophone pilote mesure le signal s^{gp} . Nous formulons deux hypothèses sur la formation de s^{gp} à partir de s^e :

1. l'atténuation n'a pas d'impact sur l'évolution temporelle de la phase ;
2. l'atténuation ne dépend que de la fréquence instantanée.

Le profil d'atténuation du sous-sol est représenté par la fonction h à valeurs dans $]0; 1]$. L'expression du signal mesuré par le géophone pilote est :

$$s^{\text{gp}}(t) = a_{\max} h \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} \right) \exp(j\Phi(t)), \quad t \in [0; T] \quad (\text{A.3})$$

A partir du signal s^{gp} , nous proposons de construire un second signal émis par la source $\hat{s}^e$ de manière à compenser l'atténuation. Sa phase est notée $\hat{\Phi}$. Comme pour le premier signal émis, son amplitude maximale est égale à $a_{\max}$ et sa durée est limitée à T :

$$\hat{s}^e(t) = a_{\max} \exp(j\hat{\Phi}(t)), \quad t \in [0; T] \quad (\text{A.4})$$

Le signal mesuré par le géophone après correction du signal émis par la source est noté $\hat{s}^{\text{gp}}$. Il est égal à :

$$\hat{s}^{\text{gp}}(t) = a_{\max} h \left(\frac{1}{2\pi} \frac{d\hat{\Phi}(t)}{dt} \right) \exp(j\hat{\Phi}(t)), \quad t \in [0; T] \quad (\text{A.5})$$

A.2 Discrétisation sur un nombre fini de fréquences

Dans un premier temps, nous travaillons sur un nombre fini de fréquences. L'intervalle des fréquences parcourues $[f_{\min}; f_{\max}]$ est découpé en N sous-intervalles de longueur égale à Δ_f :

$$\Delta_f = \frac{f_{\max} - f_{\min}}{N} \quad (\text{A.6})$$

Chaque sous-intervalle est représenté par sa fréquence centrale f_n :

$$f_n = f_{\max} + \frac{2n-1}{2N}(f_{\min} - f_{\max}), \quad n = 1, \dots, N \quad (\text{A.7})$$

La fréquence du signal émis après correction ($\hat{s}^e$) est constante par morceaux. Elle évolue de la fréquence f_1 à la fréquence f_N par paliers successifs. Par conséquent, l'intervalle temporel

$[0; T]$ est également découpé en N sous-intervalles délimités par les instants $\hat{t}_n$ où $n = 0, \dots, N$. Sur l'intervalle $[\hat{t}_{n-1}; \hat{t}_n]$, le signal $\hat{s}^e$ est égal à :

$$\hat{s}^e(t) = a_{\max} \exp \left(j(2\pi f_n t + \hat{\Phi}_n^0) \right), \quad t \in [\hat{t}_{n-1}; \hat{t}_n] \quad (\text{A.8})$$

$\hat{\delta}_n$ désigne la longueur du sous-intervalle temporel délimité par les instants $\hat{t}_{n-1}$ et $\hat{t}_n$. Notre objectif consiste donc à définir les longueurs $\hat{\delta}_n$ des sous-intervalles temporels ainsi que les phases à l'origine $\hat{\Phi}_n^0$ de sorte que l'énergie du signal mesuré par le géophone $\hat{s}^{\text{gp}}$ soit identique pour les N fréquences considérées.

A.2.1 Calcul des instants de transition entre les fréquences $\hat{t}_n$

De manière générale, l'énergie moyenne E d'un signal complexe de fréquence constante, de durée T et d'amplitude maximale a est égale à :

$$E = a^2 T \quad (\text{A.9})$$

Dans notre cas, la fréquence du signal émis après correction est constante par morceaux. Pour une durée $\hat{\delta}_n$ donnée, l'énergie $\hat{E}_n^{\text{gp}}$ du signal mesuré par le géophone associée à la fréquence f_n est alors égale à :

$$\hat{E}_n^{\text{gp}} = (a_{\max} h_n)^2 \hat{\delta}_n \quad (\text{A.10})$$

où h_n correspond à l'atténuation de la fréquence f_n : $h_n = h(f_n)$. Sa valeur se déduit des signaux s^e et s^{gp} associés à la première mesure avec émission d'un *sweep* linéaire.

Pour que toutes les énergies $\hat{E}_n^{\text{gp}}$ soient égales, les longueurs δ_n doivent donc être proportionnelles à h_n^{-2} . Or la durée totale du signal est limitée à T :

$$\sum_{l=1}^N \hat{\delta}_n = T \quad (\text{A.11})$$

La durée d'émission de chaque fréquence f_n est donc égale à :

$$\hat{\delta}_n = T \frac{h_n^{-2}}{\sum_{m=1}^N h_m^{-2}} \quad (\text{A.12})$$

Nous en déduisons les instants de transition entre les différentes fréquences :

$$\hat{t}_n = \sum_{m=1}^n \hat{\delta}_m = T \frac{\sum_{m=1}^n h_m^{-2}}{\sum_{m=1}^N h_m^{-2}} \quad (\text{A.13})$$

A.2.2 Calcul des phases à l'origine $\hat{\Phi}_n^0$

Sur l'intervalle $[\hat{t}_{n-1}; \hat{t}_n]$, le signal $\hat{s}^e$ est égal à :

$$\hat{s}^e(t) = a_{\max} \exp \left(j(2\pi f_n t + \hat{\Phi}_n^0) \right), \quad t \in [\hat{t}_{n-1}; \hat{t}_n] \quad (\text{A.14})$$

Sur l'intervalle $[\hat{t}_n; \hat{t}_{n+1}]$, le signal $\hat{s}^e$ est égal à :

$$\hat{s}^e(t) = a_{\max} \exp \left(j(2\pi f_{n+1} t + \hat{\Phi}_{n+1}^0) \right), \quad t \in [\hat{t}_n; \hat{t}_{n+1}] \quad (\text{A.15})$$

A l'instant $\hat{t}_n$, la phase du signal doit rester continue. L'égalité suivante doit donc être vérifiée :

$$2\pi f_n \hat{t}_n + \hat{\Phi}_n^0 = 2\pi f_{n+1} \hat{t}_n + \hat{\Phi}_{n+1}^0 \quad (\text{A.16})$$

Isolons la phase à l'origine $\hat{\Phi}_{n+1}^0$:

$$\hat{\Phi}_{n+1}^0 = \hat{\Phi}_n^0 + 2\pi(f_n - f_{n+1})\hat{t}_n \quad (\text{A.17})$$

$$= \hat{\Phi}_n^0 + 2\pi T \frac{(f_{\max} - f_{\min}) \sum_{m=1}^n h_m^{-2}}{N \sum_{m=1}^N h_m^{-2}} \quad (\text{A.18})$$

La phase à l'origine associée à la fréquence f_1 est choisie par l'utilisateur ($\hat{\Phi}_1^0 = \varphi$). Pour les fréquences f_n où $2 < n < N$, la phase à l'origine est donc égale à :

$$\hat{\Phi}_n^0 = \hat{\Phi}_1^0 + \sum_{l=1}^{n-1} 2\pi(f_l - f_{l+1})\hat{t}_l \quad (\text{A.19})$$

$$= \varphi + 2\pi T \frac{(f_{\max} - f_{\min}) \sum_{l=1}^{n-1} \sum_{m=1}^l h_m^{-2}}{N \sum_{m=1}^N h_m^{-2}} \quad (\text{A.20})$$

A.3 Passage à une expression analytique

Supposons maintenant que l'on parcourt l'ensemble des fréquences comprises entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$. Cela revient à reprendre le raisonnement de la section précédente et à faire tendre le nombre de fréquences N vers l'infini. Chaque fréquence de l'intervalle $[f_{\min}; f_{\max}]$ est désignée par un réel ν compris entre 0 et 1 :

$$f(\nu) = f_{\max} + \nu(f_{\min} - f_{\max}) \quad (\text{A.21})$$

Nous allons construire un signal $\hat{s}^e$ fonction de la variable ν :

$$\hat{s}^e(\nu) = a_{\max} \exp \left(j(2\pi f(\nu)\hat{t}(\nu) + \hat{\Phi}^0(\nu)) \right), \quad t \in [\hat{t}_{n-1}; \hat{t}_n] \quad (\text{A.22})$$

En plus de la fonction f (équation (A.21)), cette expression fait intervenir deux fonctions de la variable ν :

- $\hat{t}$ qui indique l'instant d'émission de chaque fréquence de $f_{\max}$ à $f_{\min}$;
- $\hat{\Phi}^0$ qui donne la phase à l'origine associée à chaque fréquence.

A.3.1 Calcul des instants d'émission de chaque fréquence

L'expression de l'énergie du signal mesuré par le géophone en fonction de ν se déduit de l'équation (A.10) :

$$\hat{E}^{\text{gp}}(\nu) = (a_{\max} H(\nu))^2 \frac{d\hat{t}(\nu)}{d\nu} \quad (\text{A.23})$$

$H(\nu) = h(f(\nu))$ et la fonction h se déduit des signaux s^e et s^{gp} associés à la première mesure avec émission d'un *sweep* linéaire.

Pour que l'énergie $\hat{E}^{\text{gp}}$ soit constante, la fonction $\hat{t}$ doit vérifier :

$$\frac{d\hat{t}(\nu)}{d\nu} \propto (H(\nu))^{-2} \quad (\text{A.24})$$

Sachant que $\hat{t}(0) = 0$ et que la durée totale du signal est limitée à T , nous avons :

$$\hat{t}(\nu) = T \frac{\int_0^\nu (H(\eta))^{-2} d\eta}{\int_0^1 (H(\eta))^{-2} d\eta} \quad (\text{A.25})$$

A.3.2 Calcul des phases à l'origine

La fonction $\phi(\nu)$ se construit en réécrivant l'équation (A.17) dans le cas continu :

$$\hat{\Phi}^0(\nu + \epsilon) = \hat{\Phi}^0(\nu) + 2\pi(f(\nu) - f(\nu + \epsilon))\hat{t}(\nu) \quad (\text{A.26})$$

$$= \hat{\Phi}^0(\nu) + 2\pi\epsilon(f_{\max} - f_{\min})\hat{t}(\nu) \quad (\text{A.27})$$

d'où :

$$\frac{d\hat{\Phi}^0}{d\nu} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\Phi}^0(\nu + \epsilon) - \hat{\Phi}^0(\nu)}{\epsilon} \quad (\text{A.28})$$

$$= 2\pi(f_{\max} - f_{\min})\hat{t}(\nu) \quad (\text{A.29})$$

Sachant qu'à l'instant $t = 0$, la phase est égale à φ :

$$\hat{\Phi}^0(\nu) = \varphi + 2\pi(f_{\max} - f_{\min}) \int_0^\nu \hat{t}(\eta) d\eta \quad (\text{A.30})$$

d'où :

$$\hat{\Phi}^0(\nu) = \varphi + 2\pi(f_{\max} - f_{\min})T \frac{\int_0^\nu \int_0^\xi (H(\eta))^{-2} d\eta d\xi}{\int_0^1 (H(\eta))^{-2} d\eta} \quad (\text{A.31})$$

Remarques :

- Les équations (A.22), (A.25) et (A.31) sont écrites en fonction de la variable ν . Cependant, la fonction $\hat{t}$ est une fonction continue strictement croissante. Nous pouvons donc utiliser sa réciproque pour revenir à des expressions dépendant du paramètre temporel t .
- Etant donné que l'utilisateur agit sur un signal discret, la forme discrétisée proposée dans la section A.2 serait plutôt utilisée en pratique. Ajoutons que si les fréquences retenues pour le problème inverse sont connues à l'avance, il serait judicieux d'appliquer la méthode proposée en travaillant sur ces fréquences uniquement.

Annexe B

Mise à l'échelle des variables descriptives

La méthode d'inversion basée sur une segmentation du milieu sondé fait intervenir deux ensembles de variables : d'une part les variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ qui décrivent la forme de la frontière qui sépare les régions Terre et Béton et les variables ϵ_p et ϵ_s qui déterminent la distribution spatiale des caractéristiques v_p et v_s au sein de chaque région. L'algorithme d'inversion consiste à optimiser ces différentes variables de façon simultanée. Par rapport à un schéma d'optimisation « par blocs », cela est susceptible de réduire le nombre d'itérations et ainsi d'accélérer la convergence.

Cependant, ces deux ensembles de variables sont associés à deux grandeurs différentes : les variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ correspondent à des longueurs mesurées en nombre de points du maillage et les variables ϵ_p et ϵ_s correspondent à des vitesses de propagation. Se pose alors le problème de la mise à l'échelle d'un ensemble de variables par rapport à l'autre, sans quoi le critère risque d'être mal conditionné ce qui entraînerait un ralentissement de la convergence.

Le problème de mise à l'échelle se résout au moyen d'un préconditionnement. Si l'ensemble des inconnues sont regroupées dans la variable $\boldsymbol{\theta}$, cela consiste à travailler avec la variable $\boldsymbol{\theta}' = \mathbf{P}\boldsymbol{\theta}$ où $\mathbf{P}$ doit être choisie de sorte que la matrice de préconditionnement $\mathbf{P}^\dagger\mathbf{P}$ soit une approximation symétrique définie positive de la matrice hessienne en $\boldsymbol{\theta}$. Le recours au préconditionnement n'est pertinent que lorsque le coût associé au calcul de la matrice $\mathbf{P}$ et à son utilisation (changements de variables) est faible.

Dans la section 3.4.2, page 79, un coefficient β a été introduit afin d'agir sur l'unité des variables descriptives. Cela revient à manipuler les variables $\mathbf{l}'_g$ et $\mathbf{l}'_d$ telles que :

$$\begin{aligned}\mathbf{l}'_g &= \beta\mathbf{l}_g \\ \mathbf{l}'_d &= \beta\mathbf{l}_d\end{aligned}\tag{B.1}$$

Cela correspond à l'application d'un préconditionnement tel que la matrice $\mathbf{P}$ est diagonale et dont les coefficients diagonaux prennent soit la valeur β (coefficients associés aux variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$) soit la valeur 1 (coefficients associés aux variables ϵ_p et ϵ_s). Une technique permettant d'estimer la valeur optimale de β à faible coût a été proposée. Son principal avantage est d'éviter à l'utilisateur un réglage empirique. Dans cette annexe, nous reprenons le raisonnement suivi en partant de l'expression générale de la matrice hessienne du critère et en détaillant les calculs.

B.1 Expressions générales du critère, du gradient et de la matrice hessienne

L'algorithme d'inversion consiste à minimiser un critère des moindres carrés. Par la suite, nous supposons que ce critère ne comprend que le terme d'adéquation aux données : il s'agit du terme faisant intervenir les étapes de calcul les plus coûteuses et le terme de régularisation ne présente pas de difficulté. Le critère minimisé s'écrit donc :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\omega} \sum_k \|\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})\|^2 \quad (\text{B.2})$$

où, pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k , $\mathbf{y}_{\omega,k}$ et $\mathbf{g}_{\omega,k}$ désignent les données mesurées et la sortie du modèle direct respectivement.

L'expression du gradient du critère s'écrit :

$$\nabla \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\omega} \sum_k -2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger (\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})) \right\} \quad (\text{B.3})$$

où $\mathbf{J}_{\omega,k}$ désigne la matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{g}_{\omega,k}$. Chacun de ses coefficients correspond à la dérivée partielle d'une composante de $\mathbf{g}_{\omega,k}$ par rapport à l'une des inconnues :

$$[\mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_{l,m} = \frac{\partial [\mathbf{g}_{\omega,k}]_l}{\partial [\boldsymbol{\theta}]_m} \quad (\text{B.4})$$

L'expression de la matrice hessienne du critère (B.2) s'écrit :

$$\nabla^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}) - \sum_{l=1}^{N_g} \overline{\nabla^2 [\mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_l} [\mathbf{y}_{\omega,k} - \mathbf{g}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})]_l \right\} \quad (\text{B.5})$$

Etant donné la forte non-linéarité du modèle direct, nous ne sommes pas assurés que la matrice hessienne du critère soit définie positive. Pour construire la matrice de préconditionnement, il est préférable de considérer une version approchée de la matrice hessienne en ne conservant que les termes faisant intervenir les matrices jacobienes :

$$\nabla^2 \mathcal{C}(\boldsymbol{\theta}) \approx \sum_{\omega} \sum_k 2\Re \left\{ \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\theta}) \right\} \quad (\text{B.6})$$

Cette matrice est nécessairement positive.

B.2 Expressions des matrices jacobienes

B.2.1 Méthode de reconstruction avec régularisation markovienne

Nous revenons d'abord à la première méthode d'inversion proposée qui se base sur une régularisation markovienne du critère. Dans la section 2.3.2, page 47, nous avons donné l'expression des matrices jacobienes dans le cas où les variables $\mathbf{v}_p^2$ et $\mathbf{v}_s^2$ sont optimisées. Dans la section 2.4.4, page 53, un changement de variables logarithmique a été introduit, ce qui a conduit à travailler avec les variables $\boldsymbol{\chi}_p$ et $\boldsymbol{\chi}_s$ telles que :

$$[\boldsymbol{\chi}_p]_l = \frac{1}{2} \log[\mathbf{v}_p^2]_l \quad (\text{B.7})$$

$$[\boldsymbol{\chi}_s]_l = \frac{1}{2} \log[\mathbf{v}_s^2]_l \quad (\text{B.8})$$

Si ce changement de variables est pris en compte, les matrices jacobiniennes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\omega,k}(\chi_p, \chi_s) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega,k}^{\chi_p} & \mathbf{J}_{\omega,k}^{\chi_s} \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_p} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_s} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

avec :

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_p} = 2\mathbf{H}^p \text{Diag} \left\{ \rho_0 \odot \left(\mathbf{G}^p \left(V_{\omega,k}^{10} - (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10} \right) \odot \mathbf{v}_p^2 \right) \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_s} = 2 \sum_{i=1}^3 \mathbf{H}_i^s \text{Diag} \left\{ \rho_0 \odot \left(\mathbf{G}_i^s \left(V_{\omega,k}^{10} - (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} V_{\omega,k}^{10} \right) \odot \mathbf{v}_s^2 \right) \right\} \quad (\text{B.11})$$

Ces expressions sont réutilisées pour la méthode d'inversion basée sur une segmentation du milieu sondé.

B.2.2 Méthode de reconstruction avec segmentation du milieu sondé

Pour introduire une segmentation du milieu dans l'algorithme de résolution du problème inverse, une nouvelle paramétrisation du problème a été proposée (voir section 3.4.1, page 75). Le critère s'exprime en fonction des variables $\mathbf{l}_g$, $\mathbf{l}_d$, $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ de sorte que :

$$\chi_p = \tilde{\chi}_p^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_p^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (\text{B.12})$$

$$\chi_s = \tilde{\chi}_s^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_s^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad (\text{B.13})$$

où :

- $\mathbf{R}_B$ et $\mathbf{R}_T$ décrivent l'appartenance de chaque point du maillage à l'une ou l'autre des régions Béton et Terre (cf. équations (3.4) et (3.5), page 69) ;
- $\tilde{\chi}_p^T$, $\tilde{\chi}_s^T$, $\tilde{\chi}_p^B$ et $\tilde{\chi}_s^B$ sont les estimations préalables des caractéristiques de chaque région ;
- $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ permettent des variations par rapport aux estimations préalables.

Dans ce cas, sachant que les deux régions sont complémentaires ($[\mathbf{R}_T]_l = 1 - [\mathbf{R}_B]_l$), les matrices jacobiniennes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p} & \mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_s} & \mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g} & \mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_d} \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_s} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_d} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

avec :

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p} = \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_p} \quad (\text{B.15})$$

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_s} = \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_s} \quad (\text{B.16})$$

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g} = \left(\mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_p} \text{Diag} \{ \tilde{\chi}_p^B - \tilde{\chi}_p^T \} + \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_s} \text{Diag} \{ \tilde{\chi}_s^B - \tilde{\chi}_s^T \} \right) \mathbf{R}'_{B,g} \quad (\text{B.17})$$

$$\mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_d} = \left(\mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_p} \text{Diag} \{ \tilde{\chi}_p^B - \tilde{\chi}_p^T \} + \mathbf{M}_{\omega,k}^{\chi_s} \text{Diag} \{ \tilde{\chi}_s^B - \tilde{\chi}_s^T \} \right) \mathbf{R}'_{B,d} \quad (\text{B.18})$$

Chacun des coefficients de la matrice $\mathbf{R}'_{B,g}$ (resp. $\mathbf{R}'_{B,d}$) correspond à la dérivée partielle d'une composante de $\mathbf{R}_B$ par rapport à une composante de $\mathbf{l}_g$ (resp. de $\mathbf{l}_d$) :

$$\left[\mathbf{R}'_{B,g} \right]_{l,m} = \frac{\partial [\mathbf{R}_B]_l}{\partial [\mathbf{l}_g]_m} \quad (\text{B.19})$$

$$\left[\mathbf{R}'_{B,d} \right]_{l,m} = \frac{\partial [\mathbf{R}_B]_l}{\partial [\mathbf{l}_d]_m} \quad (\text{B.20})$$

B.3 Mise à l'échelle des variables descriptives

La construction d'un préconditionneur diagonal a été privilégiée car les changements de variables qui en découlent sont très peu coûteux en calculs. Une première possibilité consiste à utiliser les coefficients diagonaux de la matrice hessienne approchée (cf. équation (B.6))^a :

$$\begin{cases} [\mathbf{P}]_{l,l}^2 = \sum_{\omega} \sum_k \left\| [\mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d)]_{.,l} \right\|^2 \\ [\mathbf{P}]_{l,m}^2 = 0 \quad \text{si } l \neq m \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Cependant, cette matrice est très coûteuse à calculer. Pour chaque pulsation ω et chaque position de la source k , chaque colonne de la matrice jacobienne $\mathbf{J}_{\omega,k}$ fait l'objet de la résolution d'un système linéaire :

$$[\mathbf{J}_{\omega,k}(\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s, \mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d)]_{.,l} = -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_s} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_d} \end{bmatrix}_{.,l} \quad (\text{B.22})$$

Si l'on désigne par N_{ω} le nombre de pulsations, par N_k le nombre de positions de la source et par N_l (resp. $N_x^Z N_y^Z$) la longueur des vecteurs $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (resp. $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$), il y a alors $2N_{\omega}N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires à résoudre au total. Le coût de calcul est trop élevé pour que l'on puisse utiliser cette matrice en tant que préconditionneur dans notre algorithme.

Remarque : Les matrices jacobienes $\mathbf{J}_{\omega,k}$ apparaissent dans l'expression du gradient du critère minimisé (voir équation (B.3)) mais elles ne sont pas calculées de façon explicite lors du calcul du gradient (voir algorithme 3, page 49). C'est pour cette raison que le coût de calcul augmente si fortement lorsque l'on introduit le calcul de la matrice $\mathbf{P}$ de l'équation (B.21) dans l'algorithme. Certaines opérations pourraient être mises en commun (décomposition des matrices normales en facteurs LU) mais cela ne permettrait pas de diminuer le nombre de résolutions de systèmes linéaires nécessaires au calcul de $\mathbf{P}$.

Notre objectif initial consiste à mettre à l'échelle certaines variables par rapport à d'autres. L'alternative proposée consiste à introduire un coefficient β réel positif qui agit sur les variables descriptives $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ (cf. équation (B.1)). Une première manière d'estimer la valeur optimale de β consiste à travailler à partir de la diagonale de la matrice hessienne approchée (cf. équation (B.6)), en calculant le rapport entre la moyenne des coefficients associés aux variables $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ et la moyenne des coefficients associés aux variables $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_s$:

$$\beta^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_{\omega} \sum_k \sum_l \left\| [\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s)]_{.,l} \right\|^2}{N_l \sum_{\omega} \sum_k \sum_m \left\| [\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s)]_{.,m} \right\|^2} \quad (\text{B.23})$$

avec :

$$[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s)]_{.,l} = -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_g} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\mathbf{l}_d} \end{bmatrix}_{.,l} \quad (\text{B.24})$$

$$[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s)]_{.,m} = -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_p} & \mathbf{M}_{\omega,k}^{\boldsymbol{\varepsilon}_s} \end{bmatrix}_{.,m} \quad (\text{B.25})$$

Cependant, ce calcul reste coûteux car il nécessite toujours la résolution de $2N_{\omega}N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires.

a. $[\mathbf{M}]_{.,l}$ est un vecteur égal à la colonne l de la matrice $\mathbf{M}$.

Il n'est pas nécessaire d'estimer la valeur optimale de β de façon précise car ce coefficient est simplement utilisé pour compenser dans une certaine mesure un mauvais conditionnement du critère. Une seconde manière d'estimer la valeur optimale de β a été proposée dans le but de réduire le coût de calcul. Elle consiste à reprendre l'équation (B.23) et à transférer les sommes sur les colonnes de la matrice jacobienne à l'intérieur de la norme :

$$\beta^2 = \frac{N_x^Z N_y^Z \sum_{\omega} \sum_k \left\| \sum_l \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{l_g, l_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,l} \right\|^2}{N_l \sum_{\omega} \sum_k \left\| \sum_m \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\varepsilon_p, \varepsilon_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} \right\|^2} \quad (\text{B.26})$$

Etant donné qu'elles ne dépendent que de la pulsation ω , les matrices $\mathbf{B}_{\omega}^0$ et $(\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1}$ peuvent être mises en facteur ce qui permet de réduire le coût de calcul :

$$\sum_l \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{l_g, l_d}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,l} = -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_l \left[\mathbf{M}_{\omega,k}^{l_g} \quad \mathbf{M}_{\omega,k}^{l_d} \right]_{.,l} \right) \quad (\text{B.27})$$

$$\sum_m \left[\mathbf{J}_{\omega,k}^{\varepsilon_p, \varepsilon_s}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \boldsymbol{\varepsilon}_s) \right]_{.,m} = -\mathbf{B}_{\omega}^0 (\mathbf{A}_{\omega,Z}^0 + \mathbf{X})^{-1} \left(\sum_m \left[\mathbf{M}_{\omega,k}^{\varepsilon_p} \quad \mathbf{M}_{\omega,k}^{\varepsilon_s} \right]_{.,m} \right) \quad (\text{B.28})$$

Ainsi, au lieu de $2N_{\omega}N_k(N_l + N_x^Z N_y^Z)$ systèmes linéaires, nous nous ramenons à un total de $2N_{\omega}N_k$ systèmes linéaires.

Remarque : Les matrices normales de ces systèmes ne dépendent que de la pulsation ω . Elles sont identiques aux matrices normales des systèmes linéaires intervenant dans le calcul du critère et du gradient. Une décomposition de ces matrices en facteurs LU est déjà effectuée pour le calcul du critère et du gradient (voir algorithme 3, page 49). Cette décomposition peut être exploitée pour la résolution des systèmes linéaires intervenant dans le calcul du coefficient β , ce qui contribue à la réduction du coût de calcul.

Annexe C

Sensibilité par rapport à la pondération de la régularisation

Dans la méthode de reconstruction tomographique avec segmentation du milieu sondé, le critère minimisé fait intervenir un hyperparamètre γ . Dans cette annexe, nous abordons la question de la sensibilité de l'algorithme par rapport à la valeur de γ .

C.1 Retour sur l'expression du critère minimisé

La méthode de reconstruction que nous avons introduite dans le troisième chapitre s'appuie sur une segmentation de la zone d'intérêt en deux régions (une région Terre et une région Béton) et sur une estimation préalable des caractéristiques v_p et v_s de ces deux régions. Après discrétisation et en tenant compte du changement de variables logarithmique (voir section 2.4.4, page 53), les caractéristiques des régions se construisent de la façon suivante :

$$\chi_p = \tilde{\chi}_p^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_p^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \epsilon_p \quad (\text{C.1})$$

$$\chi_s = \tilde{\chi}_s^B \odot \mathbf{R}_B(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \tilde{\chi}_s^T \odot \mathbf{R}_T(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d) + \epsilon_s \quad (\text{C.2})$$

où :

- $\mathbf{l}_g$ et $\mathbf{l}_d$ déterminent la forme de la frontière qui sépare les régions Terre et Béton ;
- $\tilde{\chi}_p^T$, $\tilde{\chi}_s^T$, $\tilde{\chi}_p^B$ et $\tilde{\chi}_s^B$ désignent les estimations préalables des caractéristiques des deux régions ;
- ϵ_p et ϵ_s sont des variations par rapport aux estimations préalables.

Dans l'expression du critère minimisé, on inclut un terme qui pénalise l'amplitude des variations par rapport aux estimations préalables :

$$\mathcal{C}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \epsilon_p, \epsilon_s) = \mathcal{C}_{AD}(\mathbf{l}_g, \mathbf{l}_d, \epsilon_p, \epsilon_s) + \gamma (\|\epsilon_p\|^2 + \|\epsilon_s\|^2) \quad (\text{C.3})$$

Cette pénalisation est pondérée par l'hyperparamètre γ . Sa valeur est réglée selon la confiance accordée aux estimations préalables : plus γ est grand, plus elles sont jugées pertinentes.

C.2 Tests de sensibilité sur le milieu avec cheminée et surface libre

Pour tester la sensibilité de l'algorithme par rapport à la valeur de γ , nous travaillons sur le milieu avec cheminée et surface libre (voir section 1.6.2, page 29). Nous nous plaçons dans

la même situation que dans la section 3.5.2, page 83 : la profondeur de la fondation ainsi que les caractéristiques du milieu sont estimées de façon exacte et l'hypothèse d'élargissement de la fondation est prise en compte. Nous avons utilisé trois versions de l'algorithme d'inversion :

1. l'algorithme sans inversion de la signature de la source ;
2. l'algorithme avec inversion de la signature de la source dans le cas où la source n'est pas supposée répétable (cf. section 4.2.3, page 94) ;
3. l'algorithme avec inversion de la signature de la source dans le cas où la source est supposée parfaitement répétable (cf. section 4.2.4, page 97).

Dans les trois cas, nous avons fait varier la valeur de γ de 10^{-6} (cas où l'on accorde beaucoup de confiance aux estimations préalables) à 10^{-14} (cas où les estimations préalables sont jugées peu fiables). Les résultats sont présentés dans le tableau C.1. Nous montrons les cartes des caractéristiques obtenues (à gauche : v_p , à droite : v_s) ainsi que le temps de calcul. La ligne grisée est associée à la valeur de γ que nous avons utilisée dans les chapitres 3 et 4 ($\gamma = 10^{-10}$).

Les résultats montrent que la valeur de γ semble avoir relativement peu d'influence sur la reconstruction des caractéristiques v_p et v_s . Dans tous les cas, la base de la fondation est plutôt bien reconstruite. Sur la partie gauche de l'objet diffractant, le contour obtenu ne correspond pas toujours à la solution recherchée mais cela s'explique par le caractère mal posé du problème, comme nous l'avons évoqué dans la section 3.5.2, page 83.

La valeur de γ semble avoir un impact plus marqué sur le temps de calcul : plus la valeur du coefficient de pondération est grande, moins le coût de calcul est élevé. Cette tendance est justifiée par le fait qu'une pénalisation accrue de la norme quadratique de ϵ_p et ϵ_s améliore le conditionnement du critère.

Remarquons néanmoins que contrairement à la méthode basée sur une régularisation markovienne où une forte pondération du terme de régularisation avait tendance à lisser l'image reconstruite, la valeur de l'hyperparamètre de pondération γ n'est pas critique dans le cas considéré ici. En effet, étant donné que les caractéristiques de la terre et du béton sont correctement estimées au préalable, la pénalisation de la norme quadratique de ϵ_p et ϵ_s s'accorde parfaitement avec la solution recherchée.

Les méthodes employées pour fournir une estimation préalable des caractéristiques v_p et v_s ont tendance à produire une image relativement lisse du milieu. Dans le cas où l'estimation préalable de ces caractéristiques serait erronée, et en particulier lorsque le milieu sondé présente de fortes hétérogénéités, l'hyperparamètre γ définirait un réel compromis.

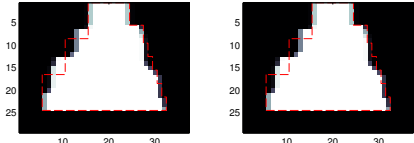
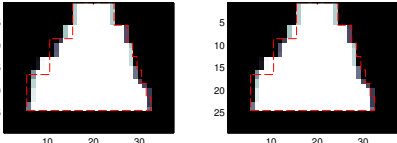
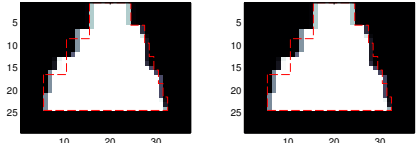
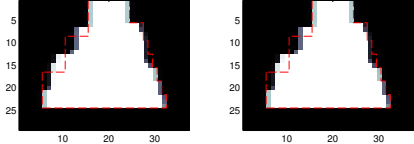
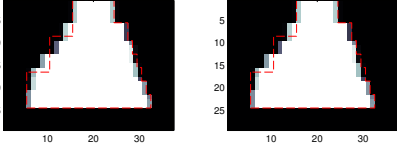
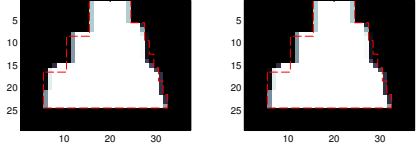
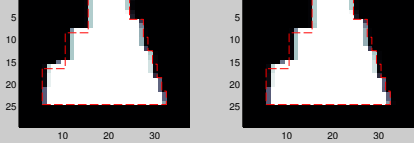
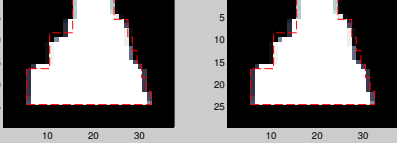
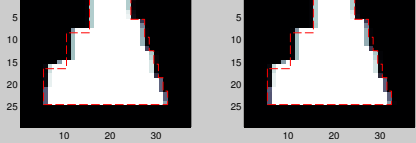
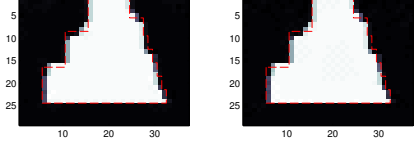
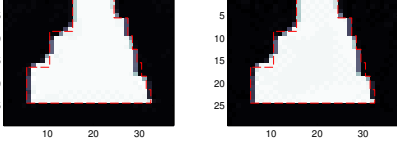
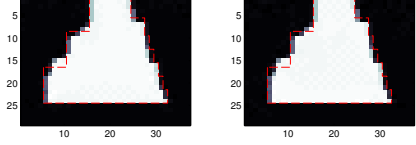
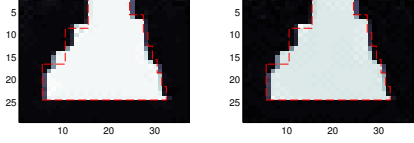
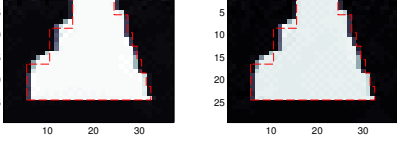
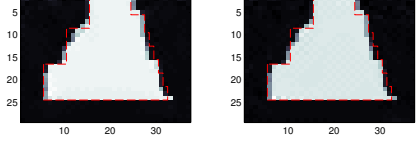
	Sans inversion de la signature de la source	Avec inversion de la signature de la source Source supposée parfaitement répétable	Avec inversion de la signature de la source Source supposée non répétable
$\gamma = 10^{-6}$	 51 min.	 57 min.	 44 min.
$\gamma = 10^{-8}$	 45 min.	 56 min.	 61 min.
$\gamma = 10^{-10}$	 97 min.	 137 min.	 94 min.
$\gamma = 10^{-12}$	 183 min.	 193 min.	 223 min.
$\gamma = 10^{-14}$	 272 min.	 255 min.	 255 min.

Tableau C.1 – Sensibilité de la méthode d'inversion par rapport à la valeur de l'hyperparamètre γ

C.3 Résultats obtenus sur une configuration différente

Nous avons également cherché à savoir si un même réglage de l'hyperparamètre γ et des coefficients β et η pouvait être utilisé pour différentes configurations. Dans cette section, une seconde configuration avec cheminée et surface libre est considérée.

C.3.1 Description de la configuration

Le milieu mesure 2 mètres en largeur et 1 mètre en profondeur. La largeur maximale de la fondation est d'environ 0,6 mètres et sa hauteur d'environ 0,8 mètres. Un schéma de la configuration est donné sur la figure C.1. Elle partage plusieurs points communs avec le milieu présenté dans la section 1.6.2, page 29 :

- Les caractéristiques des différentes régions sont identiques (voir tableau 1.2, page 30).
- La source vibratoire prend les mêmes six positions successives de part et d'autre de la cheminée et le dispositif de mesure comprend 90 géophones placés aux mêmes endroits.
- Le signal émis par la source est un Ricker dont la fréquence principale est de 200 Hz et 10 fréquences situées entre 100 Hz et 500 Hz sont retenues pour l'inversion.
- Le problème inverse est résolu à partir de données simulées auxquelles nous avons ajouté une séquence de bruit blanc gaussien (rapport signal à bruit égal à 30 dB).

Les deux configurations diffèrent par la forme de la fondation et par les dimensions de la zone d'intérêt. Le problème compte ici 3000 inconnues environ (on en compte environ 2200 pour le premier milieu).

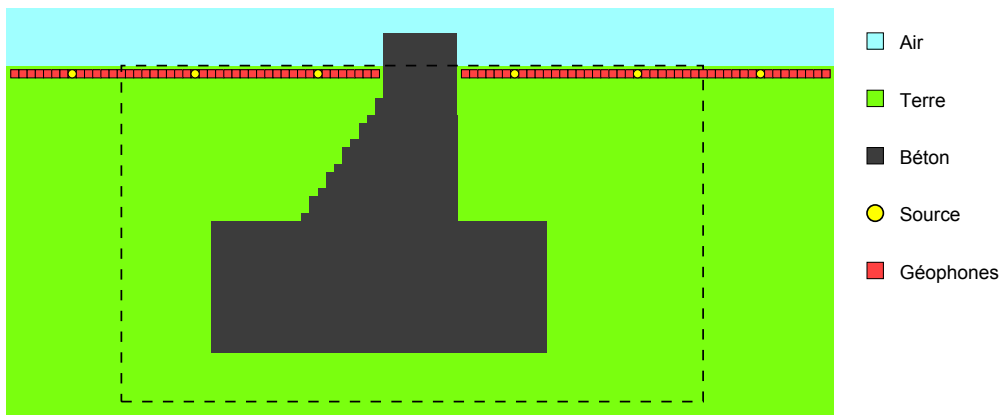
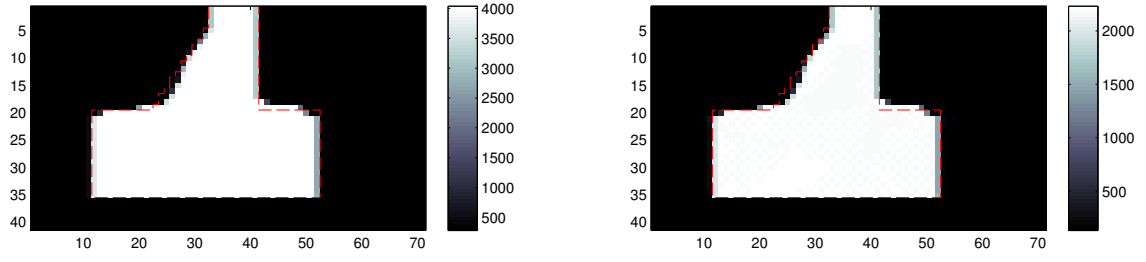


Figure C.1 – Schéma du second milieu avec cheminée et surface libre. La ligne en pointillés représente la frontière de la zone d'intérêt qui comprend 71 pixels en largeur et 41 pixels en profondeur.

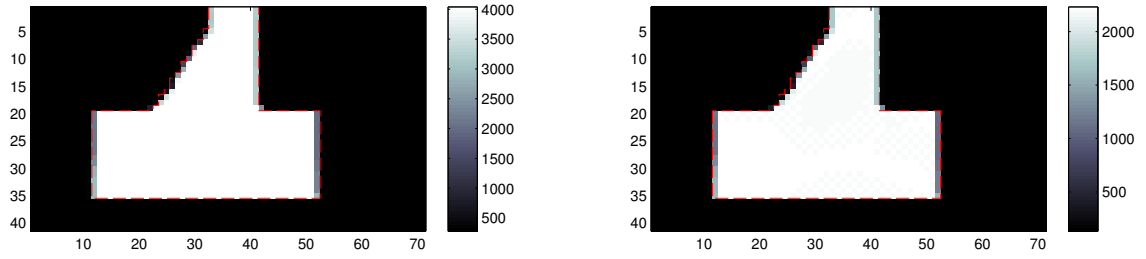
C.3.2 Résultats obtenus

Les tests ont été effectués dans le cas où la profondeur de la fondation ainsi que les différentes caractéristiques des deux régions sont correctement estimées. Comme pour la majorité des résultats présentés dans les chapitres 3 et 4, l'hyperparamètre γ , le coefficient β et le seuil intervenant dans le critère d'arrêt η sont fixés à 10^{-10} , 10 et 10^{-8} respectivement.

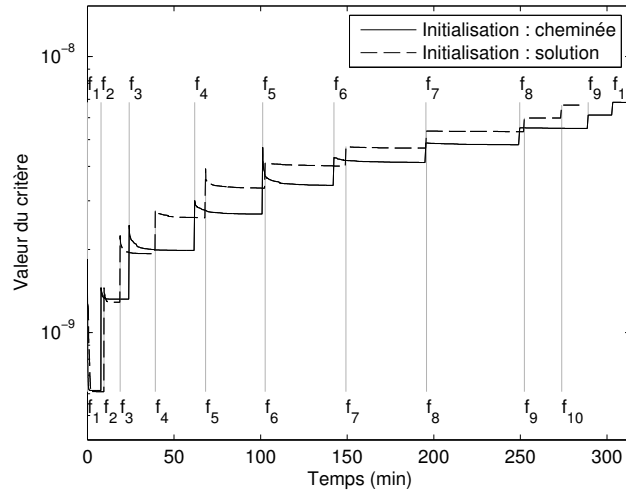
Sur la figure C.2, nous montrons les résultats obtenus lorsque l'hypothèse d'élargissement de la fondation est prise en compte et lorsque l'algorithme de reconstruction inclut l'inversion de la signature de la source (la source n'est pas supposée répétable).



(a) Initialisation en prolongeant la cheminée – Cartes des caractéristiques (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(b) Initialisation à la solution parfaite – Cartes des caractéristiques (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(c) Evolution temporelle du critère

Figure C.2 – Résultats obtenus sur le second milieu avec cheminée et surface libre en prenant en compte l'hypothèse d'élargissement de la fondation et en incluant l'inversion de la signature de la source (source non répétable)

Pour les deux initialisations, la solution obtenue est très proche de la solution exacte du problème. De plus, l'algorithme converge vers des valeurs du critère quasiment égales. On note que le temps de calcul est entre 3 et 4 fois supérieur à celui sur la première configuration avec cheminée et surface libre (cf. figure 3.11). Le tableau C.2 indique le nombre d'itérations effectuées dans les deux cas pour chaque groupe de fréquences. De manière générale, les nombres d'itérations sont du même ordre de grandeur. L'augmentation du temps de calcul est donc principalement due à une augmentation du coût par itération, elle-même due à la plus grande taille du problème.

Nombre de fréquences traitées	Premier milieu	Second milieu
1	601 it.	600 it.
2	1190 it.	425 it.
3	1019 it.	667 it.
4	884 it.	694 it.
5	673 it.	428 it.
6	373 it.	938 it.
7	362 it.	674 it.
8	58 it.	65 it.
9	443 it.	403 it.
10	180 it.	203 it.

Tableau C.2 – Comparaison du nombre d’itérations effectuées pour chaque groupe de fréquences pour les deux configurations avec cheminée et surface libre

Initialisation		Cheminée prolongée	Solution exacte
Sans inversion de la source		5,1 h	3,8 h
Avec inversion de la source	Source répétable	5,4 h	3,9 h
	Source non répétable	5,2 h	4,7 h

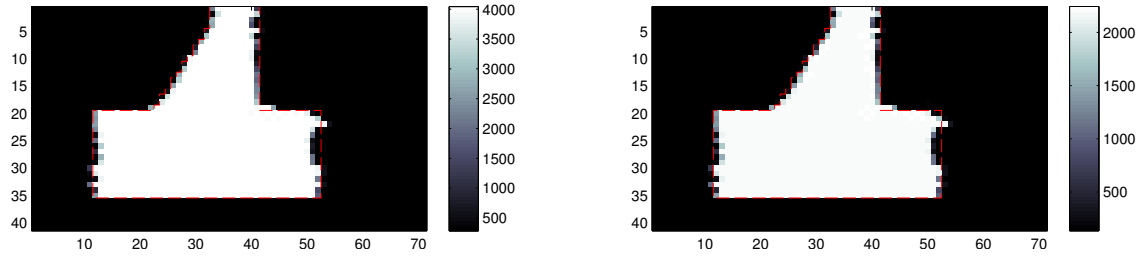
Tableau C.3 – Comparaison des temps de calcul

Des tests d’inversion ont également été réalisés en supposant que la source est parfaitement répétable et dans le cas où la signature de la source est supposée connue *a priori*. Les résultats de reconstruction sont très similaires à ceux présentés sur la figure C.2. Les temps de calculs sont également très proches, ils sont résumés dans le tableau C.3.

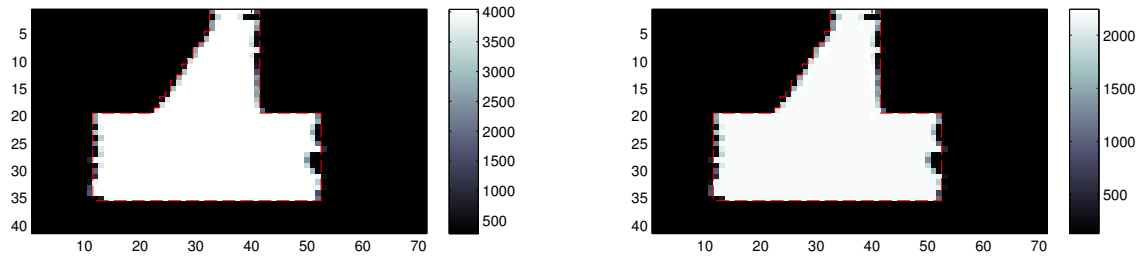
Nous montrons enfin sur la figure C.3 les résultats de reconstruction dans le cas où l’hypothèse d’élargissement de la fondation n’est pas prise en compte et lorsque l’algorithme de reconstruction inclut l’inversion de la signature de la source (la source n’est pas supposée répétable). Comme pour le premier milieu avec cheminée et surface libre (cf. figure 3.12, page 86), nous aboutissons à un contour de la région Béton plus irrégulier que précédemment. Malgré cela, les résultats de reconstruction restent satisfaisants.

Au vu de ces résultats, il semble qu’un même réglage des coefficients intervenant dans l’algorithme d’inversion puisse être utilisé pour différentes configurations. Les résultats présentés dans les sections 3.16, page 90, (travail sur le milieu avec cheminée et surface libre sans restriction à une zone d’intérêt) et 4.3.3, page 103, (travail sur une configuration de taille réaliste) vont dans ce sens.

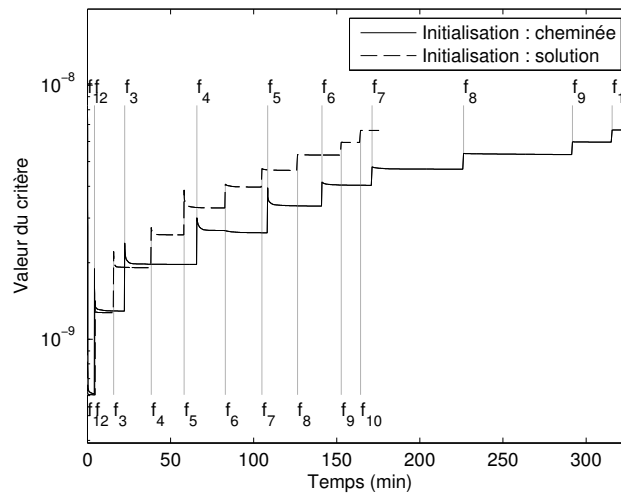
Il faut néanmoins rappeler que nous avons considéré le cas où les caractéristiques de la terre et du béton sont correctement estimées au préalable. La valeur de l’hyperparamètre de pondération γ ne joue alors pas un rôle critique. Pour confirmer ces observations, il faudrait considérer des cas où les estimations préalables sont erronées et où l’hyperparamètre γ définirait un réel compromis (configurations où le milieu sondé présente de fortes hétérogénéités par exemple).



(a) Initialisation en prolongeant la cheminée – Cartes des caractéristiques (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(b) Initialisation à la solution parfaite – Cartes des caractéristiques (à gauche : v_p , à droite : v_s)



(c) Evolution temporelle du critère

Figure C.3 – Résultats obtenus sur le second milieu avec cheminée et surface libre sans prendre en compte l'hypothèse d'élargissement de la fondation et en incluant l'inversion de la signature de la source (source non répétable)

Bibliographie

- O. ABRAHAM, C. LEONARD, P. CÔTE et B. PIWAKOWSKI : Time-frequency analysis of impact-echo signals : numerical modeling and experimental validation. *ACI Materials Journal*, 97:645–657, 2000.
- A. ABUBAKAR, W. HU, T. M. HABASHY et P. M. VAN DEN BERG : Application of the finite-difference contrast-source inversion algorithm to seismic full-waveform data. *Geophysics*, 74:WCC47–WCC58, 2009.
- A. ABUBAKAR, W. HU, P. M. VAN DEN BERG et T. M. HABASHY : A finite-difference contrast source inversion method. *Inverse Problems*, 24:65004–65020, 2008.
- K. AKI et P. G. RICHARDS : *Quantitative Seismology, 2nd Ed.* University Science Books, 2002.
- T. APOSTOLOPOULOS, K. KIRIAKI et D. POLYZOS : The inverse scattering problem for a rigid ellipsoid in linear elasticity. *Inverse Problems*, 6:1–9, 1990.
- Y. ARNAOUDOV, G. DASSIOS et V. GEORGIEV : High-frequency asymptotics in inverse scattering by ellipsoids. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 16:1–12, 1993.
- G. S. BAKER, C. SCHMEISSNER, D. W. STEEPLES et R. G. PLUMB : Seismic reflections from depths of less than two meters. *Geophysical Research Letters*, 26:279–282, 1999.
- C. BARNES et M. CHARARA : Full-waveform inversion results when using acoustic approximation instead of elastic medium. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 27:1895–1899, 2008.
- R. BARRETT, M. BERRY, T. CHAN, J. DEMMEL, J. DONATO, J. DONGARRA, V. EIJKHOUT, R. POZO, C. ROMINE et H. Van der VORST : *Templates for the Solution of Linear Systems : Building Blocks for Iterative Methods*. SIAM, Philadelphia, PA, 1994.
- P.-A. BARRIÈRE : *Développement d’algorithmes d’inversion rapides et propositions relatives à la configuration du montage de mesures dans un contexte de tomographie micro-ondes appliquée à la détection du cancer du sein*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Ecole Polytechnique de Montréal, 2008.
- X. L. BATTLE, C. LE REST, A. TURZO et Y. BIZAIS : Three-dimensional attenuation map reconstruction using geometrical models and free-form deformations. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19:404–411, 2000.
- J.-P. BERENGER : A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computational Physics*, 114:185–200, 1994.
- D. P. BERTSEKAS : *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, 2nd éd., 1999.

- F. BRETAUDEAU : *Modélisation physique à échelle réduite pour l'adaptation de l'inversion des formes d'ondes sismiques au génie civil et à la subsurface*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2010.
- R. BROSSIER : *Imagerie sismique à deux dimensions des milieux visco-élastiques par inversion des formes d'ondes : développements méthodologiques et applications*. Thèse de doctorat, Université de Nice – Sophia Antipolis, 2009.
- C. BUNKS, F. M. SALECK, S. ZALESKI et G. CHAVENT : Multiscale seismic waveform inversion. *Geophysics*, 60:1457–1473, 1995.
- R. H. BYRD, P. LU, J. NOCEDAL et C. ZHU : A limited memory algorithm for bound constrained optimization. *SIAM Journal on Computing*, 16:1190–1208, 1995.
- X. CAMPMAN et C. DWI RIYANTI : Non-linear inversion of scattered seismic surface waves. *Geophysical Journal International*, 171:1118–1125, 2007.
- S. CAORSI, G. L. GRAGNANI, S. MEDICINA, M. PASTORINO et G. A. PINTO : A Gibbs random field-based active electromagnetic method for noninvasive diagnostics in biomedical applications. *Radio Science*, 30:291–301, 1995.
- H. CARFANTAN et A. MOHAMMAD-DJAFARI : A Bayesian approach for nonlinear inverse scattering tomographic imaging. *Proc. IEEE ICASSP*, Detroit, MI, USA, 1995.
- H. CARFANTAN et A. MOHAMMAD-DJAFARI : Tomographie de diffraction. J. IDIER, éd. : *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*, p. 321–342, Paris, nov. 2001. Traité IC2, Série traitement du signal et de l'image, Hermès.
- N. J. CARINO : The impact-echo method : an overview. *Proc. of 2001 Structures Congress*, Washington, D.C., USA, 2001. ASCE.
- P. CHARBONNIER, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et M. BARLAUD : Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging. *IEEE Transactions on Image Processing*, 6:298–311, 1997.
- P. CHATURVEDI et R. G. PLUMB : Electromagnetic imaging of underground targets using constrained optimization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 33:551–561, 1995.
- Y. CHEN, H. D. TAGARE, S. THIRUVENKADAM, F. HUANG, D. WILSON, K. S. GOPINATH, R. W. BRIGGS et E. A. GEISER : Using prior shapes in geometric active contours in a variational framework. *International Journal of Computer Vision*, 50:315–328, 2002.
- C. CHENG et M. SANSALONE : Determining the minimum crack width that can be detected using the impact-echo method. Part 1 : Experimental study. *Materials and Structures*, 28:74–82, 1995.
- W. CHEW et Y. WANG : Reconstruction of two-dimensional permittivity distribution using the distorted Born iterative method. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 9:218–225, 1990.
- D. COLTON et R. KRESS : *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 2 édn, jan. 1998.
- T. A. DAVIS : A column pre-ordering strategy for the unsymmetric-pattern multifrontal method. *ACM Trans. on Mathematical Software*, 30:165–195, 2004.

- O. DORN et D. LESSELIER : Level set methods for inverse scattering. *Inverse Problems*, 22:R67–R131, 2006.
- M. EL-SHENAWEE et E. MILLER : Spherical harmonics microwave algorithm for shape and location reconstruction of breast cancer tumor. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 25:1258–1271, 2006.
- H. FENG, W. KARL et D. CASTANON : A curve evolution approach to object-based tomographic reconstruction. *IEEE Transactions on Image Processing*, 12:44–57, 2003.
- R. FERRAYE, J.-Y. DAUVIGNAC et C. PICHOT : An inverse scattering method based on contour deformations by means of a level set method using frequency hopping technique. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51:1100–1113, 2003.
- A. FOULONNEAU : *Une contribution à l'introduction de contraintes géométriques dans les contours actifs orientés région*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur – Strasbourg 1, 2004.
- A. FOULONNEAU, P. CHARBONNIER et F. HEITZ : Multi-reference shape priors for active contours. *International Journal of Computer Vision*, 81:68–81, 2009.
- A. FRANCHOIS et C. PICHOT : Microwave imaging-complex permittivity reconstruction with a Levenberg-Marquardt method. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 45:203–215, 1997.
- L. GARNERO, A. FRANCHOIS, J.-P. HUGONIN, C. PICHOT et N. JOACHIMOWICZ : Microwave imaging-complex permittivity reconstruction-by simulated annealing. *IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques*, 39:1801–1807, 1991.
- C. GÉLIS : *Inversion des formes d'onde élastique dans le domaine espace-fréquence en deux dimensions. Application à la caractérisation de la subsurface dans le cadre de la détection de cavités souterraines*. Thèse de doctorat, Université de Nice – Sophia Antipolis, 2005.
- J. HADAMARD : Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton Univ. Bull.*, 13:49–52, 1902.
- X. HAN, C. XU et J. L. PRINCE : A topology preserving level set method for geometric deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25:755–768, 2003.
- H. HARADA, D. J. N. WALL, T. TAKENAKA et M. TANAKA : Conjugate gradient method applied to inverse scattering problem. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 43:784–792, 1995.
- G. J. HICKS et R. G. PRATT : Reflection waveform inversion using local descent methods : estimating attenuation and velocity over a gas-sand deposit. *Geophysics*, 66:598–612, 2001.
- J. A. HOLE : Nonlinear high-resolution three-dimensional seismic travel time tomography. *Journal of Geophysical Research*, 97:6553–6562, 1992.
- J. A. HOLE et B. C. ZELT : 3-d finite-difference reflection travel times. *Geophysical Journal International*, 121:427–434, 1995.
- J.-L. HU, Z. WU, H. MCCANN, L. DAVIS et C.-G. XIE : BFGS quasi-Newton method for solving electromagnetic inverse problems. *IEE Proc. Microwaves, Antennas and Propagation*, 153:199–204, 2006.

- W. HU, A. ABUBAKAR, T. HABASHY et P. M. VAN DEN BERG : A local contrast source inversion algorithm for cross-well time-lapse seismic applications. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 27:1961–1965, 2008.
- N. JOACHIMOWICZ, C. PICHOT et J. P. HUGONIN : Inverse scattering : an iterative numerical method for electromagnetic imaging. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 39:1742–1753, 1991.
- S. KERZALÉ, A. GIRARD et G. D’URSO : Simulation des ondes sismiques dans la subsurface. Rap. tech., EDF R&D, Département STEP, 2009.
- R. E. KLEINMAN et P. M. VAN DEN BERG : A modified gradient method for two-dimensional problems in tomography. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 42:17–35, 1992.
- A. D. KLOSE et A. H. HIELSCHER : Quasi-Newton methods in optical tomographic image reconstruction. *Inverse Problems*, 19:387–409, 2003.
- E. LANZ, H. MAURER et A. G. GREEN : Refraction tomography over a buried waste disposal site. *Geophysics*, 63:1414–1433, 1998.
- M. E. LEVENTON, W. E. L. GRIMSON et O. FAUGERAS : Statistical shape influence in geodesic active contours. *Proc. IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, vol. 1, p. 316–323, Hilton Head Island, SC, USA, 2000.
- A. LITMAN, D. LESSELIER et F. SANTOSA : Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set. *Inverse Problems*, 14:685–706, 1998.
- P. LOBEL, R. E. KLEINMAN, C. PICHOT, L. BLANC-FERAUD et M. BARLAUD : Conjugate gradient method for solving inverse scattering with experimental data. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, 38:48–51, 1996.
- O. MAGNIN : *Utilisation des ondes sismiques pour la caractérisation d’objets enfouis. Contribution à la mise au point d’une méthode d’imagerie sismique de très haute résolution. Application à l’imagerie des fondations de pylônes du Réseau de Transport d’Electricité*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I, 2008.
- R. MARTIN, D. KOMATITSCH et A. EZZIANI : An unsplit convolutional perfectly matched layer improved at grazing incidence for seismic wave propagation in poroelastic media. *Geophysics*, 73:T51–T61, 2008.
- P. MILANFAR, W. KARL et A. WILLSKY : Reconstructing binary polygonal objects from projections : a statistical view. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 56:371–391, 1994.
- E. MILLER, M. KILMER et C. RAPPAPORT : A new shape-based method for object localization and characterization from scattered field data. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 38:1682–1696, 2000.
- G. F. MILLER et H. PURSEY : On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 233:55–69, 1955.
- K. C. MILLER, S. H. HARDER, D. C. ADAMS et T. O’DONNELL : Integrating high-resolution refraction data into near-surface seismic reflection data processing and interpretation. *Geophysics*, 63:WCC119–WCC127, 1998.

- P. MOJABI et J. LOVETRI : Overview and classification of some regularization techniques for the gauss-newton inversion method applied to inverse scattering problems. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 57:2658–2665, 2009.
- P. MORA : Nonlinear two-dimensional elastic inversion of multioffset seismic data. *Geophysics*, 52:1211–1228, 1987.
- J. J. MORÉ et D. J. THUENTE : Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease. *ACM Trans. on Mathematical Software*, 20:286–307, 1994.
- S. NAZARIAN et K. H. STOKOE : In situ shear wave velocities from spectral analysis of surface waves. *8th Conf. on Earthquake Engineering, San Francisco*, vol. 3, p. 31–38, 1984.
- G. A. NEWMAN et G. M. HOVERSTEN : Solution strategies for two- and three-dimensional electromagnetic inverse problems. *Inverse Problems*, 16:1357–1375, 2000.
- J. NOCEDAL et S. J. WRIGHT : *Numerical Optimization*. Springer, 1999.
- S. J. NORTON : Iterative algorithms for computing the shape of a hard scattering object : Computing the shape derivative. *Acoustical Society of America Journal*, 116:1002–1008, 2004.
- S. OPERTO, C. RAVAUT, L. IMPROTA, J. VIRIEUX, A. HERRERO et P. DELL’AVERSANA : Quantitative imaging of complex structures from dense wide-aperture seismic data by multiscale traveltimes and waveform inversions : a case study. *Geophysical Prospecting*, 52:625–651, 2004.
- S. OPERTO, J. VIRIEUX, J.-X. DESSA et G. PASCAL : Crustal seismic imaging from multifold ocean bottom seismometer data by frequency domain full waveform tomography : application to the eastern Nankai trough. *Journal of Geophysical Research*, 111:B09306.1–33, 2006.
- S. OSHER et J. A. SETHIAN : Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79:12–49, 1988.
- S. J. OSHER et R. P. FEDKIW : *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, 1^{er} éd., oct. 2002.
- C. B. PARK, R. D. MILLER et J. XIA : Multichannel analysis of surface waves. *Geophysics*, 64:800–808, 1999.
- R.-E. PLESSIX : A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications. *Geophysical Journal International*, 167:495–503, 2006.
- R. G. PRATT : Frequency-domain elastic wave modeling by finite differences : A tool for crosshole seismic imaging. *Geophysics*, 55:626–632, 1990.
- R. G. PRATT : Seismic waveform inversion in the frequency domain. Part 1 : theory and verification in a physical scale model. *Geophysics*, 64:888–901, 1999.
- R. G. PRATT, C. SHIN et G. J. HICKS : Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion. *Geophysical Journal International*, 133:341–362, 1998.
- R. G. PRATT et M. H. WORTHINGTON : Inverse theory applied to multi-source cross-hole tomography. Part 1 : acoustic wave-equation method. *Geophysical Prospecting*, 38:287–310, 1990.
- W. H. PRESS, S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERLING et B. P. FLANNERY : *Numerical recipes in C, the art of scientific computing*. Cambridge Univ. Press, 2nd éd., 1992.

- A. QING : Electromagnetic inverse scattering of multiple two-dimensional perfectly conducting objects by the differential evolution strategy. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 51:1251–1262, 2003.
- I. T. REKANOS, T. V. YIOULTSIS et T. D. TSIBOUKIS : Inverse scattering using the finite-element method and a nonlinear optimization technique. *IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques*, 47:336–344, 1999.
- I. REKANOS : Shape reconstruction of a perfectly conducting scatterer using differential evolution and particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 46:1967–1974, 2008.
- M. ROUSSON et N. PARAGIOS : Shape priors for level set representations. *Proc. of the 7th European Conference on Computer Vision – Part II*, Copenhagen, Denmark, 2002.
- E. H. SAENGER, N. GOLD et S. A. SHAPIRO : Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. *Wave Motion*, 31:77–92, 2000.
- C. SAMSON, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT et J. ZERUBIA : A level set model for image classification. *International Journal of Computer Vision*, 40(3):187–198, 2000.
- F. SANTOSA : A level-set approach for inverse problems involving obstacles. *The European Series in Applied and Industrial Mathematics : Control, Optimization and Calculus of Variations*, 1:17–33, 1996.
- J. A. SETHIAN : *Level Set Methods and Fast Marching Methods : Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, 2 éd., juin 1999.
- C. SHIN, D.-J. MIN, K. J. MARFURT, H. Y. LIM, D. YANG, Y. CHA, S. KO, K. YOON, T. HA et S. HONG : Traveltime and amplitude calculations using the damped wave solution. *Geophysics*, 67:1637–1647, 2002.
- R. M. SHIPP et S. C. SINGH : Two-dimensional full wavefield inversion of wide-aperture marine seismic streamer data. *Geophysical Journal International*, 151:325–344, 2002.
- L. SIRGUE : The importance of low frequency and large offset in waveform inversion. *68th EAGE Conference & Exhibition*, 2006.
- L. SIRGUE et R. G. PRATT : Efficient waveform inversion and imaging : A strategy for selecting temporal frequencies. *Geophysics*, 69:231–248, 2004.
- B. SMITHYMAN, R. G. PRATT, J. HAYLES et R. WITTEBOLLE : Detecting near-surface objects with seismic waveform tomography. *Geophysics*, 74:WCC119–WCC127, 2009.
- C. SOUSSEN et A. MOHAMMAD-DJAFARI : Polygonal and polyhedral contour reconstruction in computed tomography. *IEEE Transactions on Image Processing*, 13:1507–1523, 2004.
- M. SUSSMAN, P. SMEREKA et S. OSHER : A level-set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114:146–159, 1994.
- A. TARANTOLA : Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49:1259–1266, 1984.
- A. TARANTOLA : A strategy for nonlinear elastic inversion of seismic reflection data. *Geophysics*, 51:1893–1903, 1986.

- A. TARANTOLA et B. VALETTE : Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion. *Reviews of Geophysics*, 20:219–232, 1982.
- A. TRILLON : *Reconstruction de défauts à partir de données issues de capteurs à courants de Foucault avec modèle direct différentiel*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2010.
- G. UNAL, H. KRIM et A. YEZZI : Stochastic differential equations and geometric flows. *IEEE Transactions on Image Processing*, 11:1405–1416, 2002.
- P. M. VAN DEN BERG et R. E. KLEINMAN : A contrast source inversion method. *Inverse Problems*, 13:1607–1620, 1997.
- D. VAUTRIN et M. VOORONS : Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes. Rap. tech., IRCCyN et Ecole Polytechnique de Montréal, 2010.
- D. VAUTRIN et M. VOORONS : Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes – Développement de modèles de régularisation locaux et globaux. Rap. tech., IRCCyN et Ecole Polytechnique de Montréal, 2011.
- D. VAUTRIN, M. VOORONS, J. IDIER et Y. GOUSSARD : Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes. *23^e coll. GRETSI*, Bordeaux, sep. 2011a.
- D. VAUTRIN, M. VOORONS, J. IDIER, Y. GOUSSARD, S. KERZALÉ et N. PAUL : Seismic imaging of transmission overhead line structure foundations. *Computational Imaging IX (IS&T/SPIE Symposium on Electronic Imaging)*, San Francisco Airport, CA, USA, jan. 2011b.
- J. VIRIEUX : P-SV wave propagation in heterogeneous media : velocity-stress finite-difference method. *Geophysics*, 51:889–901, 1986.
- J. VIRIEUX et S. OPERTO : An overview of full-waveform inversion in exploration geophysics. *Geophysics*, 74:WCC127–WCC152, 2009.
- P. R. WILLIAMSON : A guide to the limits of resolution imposed by scattering in ray tomography. *Geophysics*, 56:202–207, 1991.
- P. R. WILLIAMSON et M. H. WORTHINGTON : Resolution limits in ray tomography due to wave behavior : Numerical experiments. *Geophysics*, 58:727–735, 1993.
- D. YU et J. FESSLER : Edge-preserving tomographic reconstruction with nonlocal regularization. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 21:159–173, 2002.
- A. D. ZACHAROPOULOS, S. R. ARRIDGE, O. DORN, V. KOLEHMAINEN et J. SIKORA : Three-dimensional reconstruction of shape and piecewise constant region values for optical tomography using spherical harmonic parametrization and a boundary element method. *Inverse Problems*, 22:1509–1532, 2006.
- C. A. ZELT, A. AZARIA et A. LEVANDER : 3D seismic refraction traveltime tomography at a groundwater contamination site. *Geophysics*, 71:H67–H78, 2006.
- C. A. ZELT et P. J. BARTON : Three-dimensional seismic refraction tomography : a comparison of two methods applied to data from the Faeroe Basin. *Journal of Geophysical Research*, 103:7187–7210, 1998.
- H.-K. ZHAO, T. CHAN, B. MERRIMAN et S. OSHER : A variational level set approach to multiphase motion. *Journal of Computational Physics*, 127:179–195, 1996.

Titre : Régularisation et optimisation pour l'imagerie sismique des fondations de pylônes

Résumé :

Cette thèse porte sur l'auscultation de fondations de pylônes électriques par contrôle non destructif. Une procédure d'imagerie par ondes sismiques est utilisée, ce qui consiste à générer une onde sismique au voisinage de la fondation avec une source vibratoire et à mesurer la vitesse de l'onde résultante à l'aide d'un réseau de géophones. Le travail présenté s'intéresse spécifiquement à la résolution du problème inverse. L'objectif est de concevoir un algorithme permettant de déterminer la géométrie de la fondation auscultée à partir des données enregistrées par les capteurs. Il s'agit d'un problème de tomographie de diffraction. Son caractère mal posé ainsi que la forte non-linéarité du modèle direct rendent sa résolution particulièrement difficile.

Deux méthodes d'inversion ont été développées. Elles consistent toutes deux à reconstruire plusieurs cartes du sous-sol, chaque carte étant associée à une caractéristique physique du sous-sol. Dans les deux cas, un critère des moindres carrés régularisé est minimisé de façon itérative. Pour la première approche, peu d'a priori sont pris en compte. Elle se base sur une régularisation markovienne et la différence entre pixels voisins est pénalisée de manière à favoriser la reconstruction de régions lisses séparées par des contours francs. La seconde approche tient compte d'informations a priori plus nombreuses et plus précises. Elles sont liées à la structure particulière des fondations et aux caractéristiques de la terre et du béton. La méthode se base sur une segmentation du milieu à imager en deux régions. Des tests ont été réalisés sur des données simulées afin d'évaluer et de comparer les performances de ces deux méthodes.

Mots-clés : imagerie sismique, tomographie de diffraction, moindres carrés régularisés, approche par segmentation

Title : Regularization and optimization for the seismic imaging of transmission overhead line structure foundations

Abstract :

This thesis deals with the nondestructive testing of transmission overhead line structure foundations. A seismic imaging technique is used. The experimental procedure consists of the generation of a seismic wave near the foundation by means of a vibrating source and the measurement of the resulting wave velocity with a set of geophones. The specific goal of the presented work is to provide an inversion scheme in order to determine the shape of foundations from the measured data. This problem corresponds to an inverse scattering problem. Its resolution is particularly difficult because of its ill-posedness and the strong nonlinearity of the direct model.

Two inversion methods have been developed. Their common aim is to map the spatial distribution of several physical characteristic of the probed medium. In both cases, a regularized least squares criterion is minimized iteratively. For the first approach, little a priori information is considered. It is based on a Markovian regularization scheme. The differences between neighboring pixels are penalized so that the algorithm converges towards smooth areas separated by sharp boundaries. The second approach takes more relevant priors into consideration. They are related to the particular shape of foundations and to the physical characteristics of earth and concrete. The method is based on a segmentation of the probed area into two regions. Tests were performed on simulated data to evaluate and compare the performance of these two methods.

Keywords : seismic imaging, inverse scattering problem, regularized least squares, segmentation-based approach

Discipline : Sciences de l'Ingénieur