Centres de Daugavet et opérateurs de composition à poids

Romain Demazeux

Thèse

présentée à

l'Université d'Artois

École Doctorale des Sciences Pour l'Ingénieur Lille

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université

Spécialité MATHÉMATIQUES

par

Romain DEMAZEUX

Centres de Daugavet et opérateurs de composition à poids

Soutenue le 24 Novembre 2011 devant le jury composé de :

Gilles Godefroy	Université Paris VI	(Rapporteur)
Sophie Grivaux	Université Lille 1	
Karim Kellay	Université Bordeaux 1	
Gilles Lancien	Université de Franche Comté	
Pascal Lefèvre	Université d'Artois	(Directeur)
Étienne Matheron	Université d'Artois	
Dirk Werner	Freie Universität Berlin	(Rapporteur)

Remerciements

Mes premières pensées vont à Pascal Lefèvre. Je suis très heureux d'avoir pu profiter pendant ces années de sa grande culture mathématique, mais aussi de ses qualités humaines. Sa convivialité, son dynamisme et ses conseils précieux m'ont été fortement utiles pour effectuer ce travail. J'ai eu la chance de l'avoir en tant que professeur en deuxième année de master à Lille en 2008, où il m'a transmis sa passion des mathématiques et m'a donné l'envie de travailler sous sa direction. Je lui exprime ma profonde gratitude pour le temps et les mathématiques qu'il a partagés avec moi.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Gilles Godefroy et Dirk Werner pour avoir accepté d'être les rapporteurs de mon travail, et je les remercie vivement pour la rapidité et l'attention avec laquelle ils ont relu ce manuscrit. Je suis également très honoré de compter sur la présence de Sophie Grivaux, Karim Kellay, Gilles Lancien et Étienne Matheron parmi les membres du jury.

J'adresse aussi mes remerciements à l'équipe du Laboratoire de Mathématiques de Lens pour son accueil chaleureux, ainsi qu'aux équipes d'Analyse Fonctionnelle de Lens, Lille et Mons qui, via le groupe de travail commun, fournissent un cadre de recherche dynamique et stimulant.

J'ai pu profiter pendant trois mois de l'hospitalité de l'équipe d'analyse de la Freie Universität Berlin, que je remercie pour les excellentes conditions de séjour et de travail offertes.

Je remercie également mes amis, ma famille et ma belle famille, et plus généralement tous ceux qui, de près ou de loin, m'ont entouré pendant ces trois années pour le soutien très précieux qu'ils m'ont apporté.

Enfin, et surtout, merci à Marion pour ses encouragements, sa patience et sa compréhension, et pour avoir rendu tout cela plus facile.

Table des matières

Introduction

Cette thèse est composée de trois chapitres, que nous pouvons regrouper en deux parties : la première, constituée des chapitres I et II, porte sur les centres et presque centres de Daugavet, tandis que la deuxième partie, constituée du chapitre III, concerne les normes essentielles des opérateurs de composition à poids entre différents espaces de Hardy. Bien que ces parties abordent des thèmes de recherche a priori différents (l'étude de propriétés géométriques d'un espace de Banach d'un coté, la théorie des opérateurs sur des espaces de fonctions analytiques de l'autre), le fil conducteur de nos travaux est l'étude de la norme $\|G+T\|$ d'une perturbation compacte d'un opérateur G donné. Nous concentrerons essentiellement notre attention sur le cas particulier où G est un opérateur de composition à poids.

Le point de vue de la première partie est le suivant : sous quelles conditions sur un opérateur G agissant entre des espaces de Banach X et Y a-t-on l'identité $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$ pour tout opérateur compact $T : X \to Y$? Un tel opérateur G est appelé *centre de Daugavet*, et quand $X = Y$ et G est l'opérateur identité, on dit simplement que l'espace X a la *propriété de Daugavet*. Le point de départ de ces travaux est un article de I. K. Daugavet de 1963, dans lequel il montre que l'équation $\|I+T\| = 1 + \|T\|$ est vérifiée pour tout opérateur compact sur $C([0,1])$. Par la suite plusieurs exemples d'espaces et de classes d'opérateurs qui vérifient cette propriété ont été exhibés : les opérateurs faiblement compacts sur $C(K)$ pour un compact K séparé sans point isolé [FoiSin65], les opérateurs compacts sur $L^1(\mu)$ et sur $L^\infty(\mu)$ pour une mesure non-atomique μ [Lo66], l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ et l'algèbre H^∞ des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité [Wo92].

Dans la première section du chapitre I, nous étudions la propriété de Daugavet pour certains sous-espaces de $C([0,1])$ invariants par translation. Plus précisément, nous montrons que si une partie Λ de $\mathbb{Z}$ est uniformément distribuée, alors l'espace C_Λ a la propriété de Daugavet. Dans le reste du chapitre I, nous cherchons à produire des exemples de centres de Daugavet non triviaux parmi, entre autre, l'ensemble des opérateurs de composition à poids uC_φ agissant sur différents espaces de fonctions. Nous étudions le cas des espaces de fonctions continues dans la section I.3, et nous obtenons la caractérisation suivante :

Théorème. (Théorème I.3.1) *Soient S_1 et S_2 des ensembles compacts séparés sans point*

isolé, $u \in C(S_2)$ et φ une fonction continue de S_2 dans S_1.
Alors l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|uC_\varphi\| + \|T\|$ est satisfaite pour tout opérateur faiblement compact $T : C(S_1) \to C(S_2)$ si et seulement si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2 pour chaque $t \in S_1$, et $|u|$ est constant sur S_2.

Nous nous intéressons également aux sommes d'opérateurs de compositions à poids, et donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'une telle somme soit un centre de Daugavet. Enfin nous terminons cette section par l'étude de l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|uC_\varphi\| + \|T\|$ pour la classe des opérateurs T dont l'adjoint a une image séparable. Dans la section I.4 nous adoptons la méthode de D. Werner dans [Wer97], utilisée pour montrer que certains espaces de fonctions isométriques à des sous-espaces de $C(S)$ ont la propriété de Daugavet, afin d'obtenir des exemples de centres de Daugavet sur l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème. (Théorème I.4.11) *Soient $\varphi \in A(\mathbb{D})$ vérifiant $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $u \in A(\mathbb{D})$. L'opérateur $uC_\varphi : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ est un centre de Daugavet si et seulement si φ est intérieure et u est un multiple d'une fonction intérieure.*

Enfin nous terminons le chapitre I par le cas des espaces de fonctions lipschitziennes. La question de savoir si, pour un espace métrique complet K, l'espace $\mathrm{Lip}(K)$ possède la propriété de Daugavet est soulevée dans [Wer01], et Y. Ivakhno, V. Kadets et D. Werner obtiennent une condition nécessaire et suffisante dans le cas où K est compact [IKadWer07]. Nous donnons une condition nécessaire et une condition suffisante pour qu'un opérateur de composition soit un centre de Daugavet entre les espaces $\mathrm{Lip}(K_1)$ et $\mathrm{Lip}(K_2)$. Dans le cas particulier $K_1 = K_2 = [0,1]$ nous prouvons le théorème suivant :

Théorème. (Théorème I.5.29) *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lipschitzienne de norme 1. Alors C_φ est un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$ si et seulement si $|\varphi'(x)| = 1$ pour presque tout $x \in [0,1]$.*

L'espace $\mathrm{Lip}([0,1])$ étant isométriquement isomorphe à $L^\infty([0,1])$ via la dérivation presque partout, ce théorème fournit également des exemples de centres de Daugavet sur l'espace $L^\infty([0,1])$.

Dans le chapitre II, nous étudions une propriété un peu plus faible, à savoir que l'équation $\|G + T\| = \|G\| + \|T\|$ soit réalisée non plus pour tous les opérateurs compacts $T : X \to Y$, mais pour ceux appartenant à un certain sous-espace de l'espace des opérateurs compacts, et nous appelons un tel opérateur G un *presque centre de Daugavet* (*c.f.* la condition *iii*) du théorème qui suit). Ces travaux généralisent ceux de V. Kadets, V. Shepelska et D. Werner dans [KadSheWer] sur la propriété presque Daugavet. Nous caractérisons les presque centres de Daugavet en terme d'*épaisseur d'un opérateur*, notion que l'on introduit dans la section II.2, et de ℓ^1-type, en prouvant le théorème suivant :

Théorème. (Théorème II.1.3) *Soient X et Y des espaces de Banach, avec Y séparable, et $G : X \to Y$ un opérateur de norme* 1*. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) il n'existe pas de ε-réseau fini de $G(S_X)$ dans S_Y, pour tout $0 < \varepsilon < 2$,

ii) il existe une suite $(e_n) \subset B_X$ telle que pour chaque $y \in Y$ on ait

$$\lim_n \|y + Ge_n\| = \|y\| + 1,$$

iii) il existe un sous-espace normant $Z \subset Y^*$ tel que l'équation

$$\|G + T\| = 1 + \|T\|$$

soit vérifiée pour chaque opérateur T de rang 1 *de la forme $T = x^* \otimes y$ où $y \in Y$ et $x^* \in \overline{G^*(Z)}$.*

Nous utilisons ce théorème pour produire des exemples de presque centres de Daugavet sur des ℓ^1-sommes et des ℓ^∞-sommes d'espaces possédant des presque centres de Daugavet, ainsi que des exemples d'opérateurs de composition à poids sur l'espace ℓ^1 qui sont des presque centres de Daugavet. Enfin nous caractérisons les opérateurs fixant une copie de ℓ^1 de la manière suivante :

Théorème. (Théorème II.1.6) *Soient X et Y des espaces de Banach, et supposons Y séparable. Alors $G \in S_{B(X,Y)}$ fixe une copie de ℓ^1 si et seulement si on peut renormer de manière équivalente les espaces X et Y de sorte que $G : X \to Y$ soit un presque centre de Daugavet de norme* 1 *pour les nouvelles normes.*

Le chapitre III, tant par le contexte, les techniques mises en jeu que par le point de vue adopté est différent des deux premiers chapitres. En effet dans la première partie on se donne un ensemble $\mathcal{K}$ d'opérateurs compacts, et l'on cherche G qui « maximise » la norme de $G + T$ pour tout $T \in \mathcal{K}$. Au contraire ici l'opérateur G est fixé, et l'on cherche un opérateur compact T qui minimise $\|G + T\|$. Autrement dit on cherche à évaluer la norme essentielle de G. Nous nous intéresserons au cas des opérateurs de composition à poids entre espaces de Hardy. Des résultats ont été obtenus dans [CuZ07] pour $G = uC_\varphi \in B(H^p, H^q)$ avec $1 < p \leq q < \infty$, mais les cas extrémaux $p = 1$ ou $q = \infty$, et le cas $1 \leq q < p \leq \infty$ restaient à être explorés. Nous élucidons les cas restants dans ce chapitre. Après avoir donné quelques rappels et notations dans la section III.2, nous obtenons une estimation de la norme essentielle de $uC_\varphi \in B(H^1, H^q)$ dans la section III.3 :

Théorème. (Théorème III.3.3) *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur de composition à poids uC_φ est borné de H^1 dans H^q pour un certain $1 \leq q < \infty$. On a alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \approx \limsup_{|a|\to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(\zeta)|^2} \right)^q \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Les techniques mises en jeu dans ce chapitre utilisent la notion de mesure de Carleson, introduite par Carleson dans sa résolution du problème de la couronne. Dans le cas $q < p$ nous donnons une estimation de la constante de Carleson de la restriction à $\overline{\mathbb{D}}\backslash r\mathbb{D}$ d'une (p,q)-mesure de Carleson dans la section III.6. Celle-ci nous permet de montrer le résultat suivant :

Théorème. (Théorème III.6.4) *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Supposons que uC_φ soit borné de H^p dans H^q, avec $\infty > p > q \geq 1$. Alors*

$$\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \,\mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|uC_\varphi\|_e \leq 2\|C_\varphi\|_{p/q}^{1/q} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^{\frac{pq}{p-q}} \,\mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

où $\|C_\varphi\|_{p/q}$ est la norme de C_φ agissant sur $H^{p/q}$ et $E_\varphi = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid \varphi^*(\zeta) \in \mathbb{T}.\}$

De ce théorème nous retrouvons immédiatement le fait que pour $1 \leq q < p < \infty$ et pour une fonction analytique u non nulle, un opérateur de composition à poids uC_φ borné de H^p dans H^q est compact si et seulement si $|\varphi^*| < 1$ presque sûrement sur $\mathbb{T}$, fait initialement dû à Ž. Čučković et R. Zhao [CuZ07].

Les théorèmes démontrés dans les sections I.3 et I.4 sont issus de [5]. La section I.5 est elle issue de [2]. Enfin, les chapitres II et III sont constitués de [1]-[4] et [3] respectivement.

[1] R. DEMAZEUX, *Almost Daugavet centers*, à paraitre dans Bulletin Sci. Math.
[2] R. DEMAZEUX, *Daugavet centers on spaces of Lipschitz functions*, en préparation.
[3] R. DEMAZEUX, *Essential norms of weighted composition operators between Hardy spaces H^p and H^q for $1 \leq p, q \leq \infty$*, Studia Math. **206** (2011), no. 3, 191–209.
[4] R. DEMAZEUX, *Examples of almost Daugavet centers*, en préparation.
[5] R. DEMAZEUX, *Weighted composition operators as Daugavet centers*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 473–485.

Chapitre I

Centres de Daugavet et opérateurs de composition à poids

I.1 La propriété de Daugavet

I.1.1 Définition et premières propriétés

La propriété suivante fut mise en évidence par I. K. Daugavet en 1963 : Pour tout opérateur compact T sur $C([0,1])$, on a l'égalité

$$\|I+T\| = 1 + \|T\|, \tag{ED}$$

connue désormais sous le nom d'*équation de Daugavet*. Peu après, C. Foias et I. Singer [FoiSin65] étendent ce résultat aux opérateurs faiblement compacts sur $C(K)$, où K est un compact séparé sans point isolé, alors que G. Ya. Lozanovskii [Lo66] le montre pour les opérateurs compacts sur $L^1(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$ pour une mesure μ non atomique. Jusqu'à la fin des années 1990, on cherche à étendre cette propriété à d'autres classes d'opérateurs ou d'autres espaces de Banach, comme par exemple l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ ou l'algèbre H^∞ des fonctions holomorphes bornées sur le disque unité [Wo92]. Dans ce dernier article, P. Wojtaszczyk remarque que si l'équation (ED) est satisfaite pour tous les opérateurs de rang 1 sur un espace de Banach X, alors la boule unité de X n'a pas de point fortement exposé. En particulier l'espace X n'a pas la propriété de Radon-Nikodym. Ce résultat ouvre la voie à une étude géométrique de tels espaces, et l'on donne la définition suivante :

Définition I.1.1. *On dit qu'un espace de Banach X a la propriété de Daugavet si l'équation*

$$\|I+T\| = 1 + \|T\|$$

est vérifiée pour tout opérateur borné T sur X de rang 1.

La propriété de Daugavet dépend clairement de la nature isométrique de l'espace, et ne se conserve pas nécessairement en passant à une norme équivalente. En fait, n'importe quel espace de Banach peut être renormé de sorte à ne pas posséder la propriété de Daugavet [Wo92, Corollary 2]. Néanmoins, la propriété de Daugavet impose des contraintes de nature isomorphique sur tout espace qui la possède. Par exemple, un tel espace n'a pas la propriété de Radon-Nikodym, et par conséquent n'est ni réflexif, ni un espace dual séparable. De plus, un tel espace contient nécessairement une copie isomorphique de l'espace ℓ^1 [KadShvSiWer00, Theorem 2.9]. Ces conditions ne sont cependant pas suffisantes, comme l'atteste l'exemple de l'espace ℓ^∞. Celui-ci ne possède pas la propriété de Daugavet, mais étant isomorphique à $L^\infty([0,1])$, il peut être renormé de sorte à posséder la propriété de Daugavet.

Dû à la non linéarité de la norme, il n'est pas clair que l'équation (ED) se transmette de l'ensemble des opérateurs de rang 1 aux opérateurs de rang fini, et plus généralement aux opérateurs compacts. Néanmoins une caractérisation géométrique en terme de tranches de la boule unité des espaces ayant la propriété de Daugavet et un résultat de Lindenstrauss et Troyanski sur les points fortement exposés dans les ensembles convexes faiblement compacts [Bou76] nous conduisent au résultat suivant :

Théorème I.1.2. ([KadShvSiWer00, Theorem 2.3]) *Si X a la propriété de Daugavet, alors tout opérateur faiblement compact sur X vérifie l'équation* (ED).

Grâce à un résultat de R. R. Phelps [Ph74], la preuve de ce théorème reste vraie pour la classe des opérateurs fortement Radon-Nikodym, c'est-à dire les opérateurs dont l'adhérence de l'image de la boule unité a la propriété de Radon-Nikodym. Le Théorème I.1.2 permet de montrer qu'un espace séparable ayant la propriété de Daugavet ne se plonge pas dans une somme inconditionnelle d'espaces réflexifs [KadShvSiWer00, Cor. 2.7], et par conséquent ne possède pas de base inconditionnelle, fait originellement dû à V. Kadets [Kad96]. Ceci permet de retrouver le résultat de Pełczyński qui affirme que ni $L^1([0,1])$ ni $C([0,1])$ ne se plongent dans un espace ayant une base inconditionnelle.

I.1.2 Passage à un sous-espace

Il est clair que la propriété de Daugavet ne passe pas à un sous-espace arbitraire. Un espace qui a la propriété de Daugavet peut être considéré comme « large », étant donné que ni lui ni son espace dual n'ont la propriété de Radon-Nikodym, et qu'il contient des sous-espaces isomorphes à ℓ^1. Par conséquent il est naturel de penser que la propriété de Daugavet se transmet à des sous-espaces « larges ». Précisons ce qu'on entend par là dans le cadre des espaces de fonctions continues.

Définition I.1.3. *Soient K un espace topologique compact séparé sans point isolé et E un espace de Banach. Un opérateur borné $T : C(K) \to E$ est dit* C-étroit *si pour tout sous-*

ensemble propre fermé F inclus dans K et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue f de norme 1 qui s'annule sur F et telle que $\|Tf\| \leq \varepsilon$.

Cette définition fut donnée par V. Kadets et M. Popov dans [KadPo97] dans l'optique d'une nouvelle approche sur l'étude de la propriété de Daugavet. Dans un cadre plus général, on trouvera la définition d'un *opérateur étroit* dans [KadShvWer01].

Définition I.1.4. *Soit K un espace topologique compact séparé sans point isolé. Un sous-espace fermé Y de l'espace $C(K)$ est dit* riche *si l'application quotient de $C(K)$ sur $C(K)/_Y$ est C-étroite.*

Théorème I.1.5. ([KadPo97]) *Soit K un compact séparé sans point isolé. Alors tout sous-espace riche dans $C(K)$ a la propriété de Daugavet.*

Comme exemples d'espaces riches dans $C(K)$, citons les sous-espaces Y tels que $C(K)/_Y$ ou $\left(C(K)/_Y\right)^*$ ait la propriété de Radon-Nikodym, ou encore les sous-espaces Y tels que $C(K)/_Y$ ne contienne pas de copie isomorphique de ℓ^1 [Wer01]. En particulier, tout sous-espace de codimension finie dans $C(K)$ est riche.
Nous allons utiliser le Théorème I.1.5 pour exhiber de nouveaux espaces ayant la propriété de Daugavet. Pour cela, nous allons chercher parmi les sous-espaces riches de $C(\mathbb{T})$ qui sont invariants par translation, c'est-à dire les espaces C_Λ. Rappelons tout d'abord quelques notations et définitions. On note $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ le tore et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité du plan complexe. Si $n \in \mathbb{Z}$ et $f \in C(\mathbb{T})$, le n^{e} coefficient de Fourier de f est défini par $\hat{f}(n) = \int_0^1 f(e^{2i\pi x})e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x$. Pour une partie $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$, on note C_Λ le sous-espace fermé constitué des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à spectre dans Λ. Autrement dit,

$$C_\Lambda = \{f \in C(\mathbb{T}) \ \mid \widehat{f}(n) = 0, \ \forall n \in \mathbb{Z} \backslash \Lambda\}.$$

L'idée est que plus l'ensemble Λ est grand dans $\mathbb{Z}$ plus l'espace C_Λ a de chances d'avoir la propriété de Daugavet. C'est trivialement le cas quand $\Lambda = \mathbb{Z}$, mais c'est aussi vrai quand $\Lambda = \mathbb{N}$ en identifiant $C_\mathbb{N}$ de manière isométrique (via le noyau de Poisson) à l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$ constituée des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ et holomorphes sur $\mathbb{D}$. Cette dernière possède la propriété de Daugavet, comme l'a montré P. Wojtaszczyk dans [Wo92].

Définition I.1.6. *On dit que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est uniformément distribué si*

$$\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi\lambda_n t} \underset{N}{\longrightarrow} 0, \quad \forall t \in]0,1[,$$

où $\Lambda = \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et $|\lambda_0| \leq |\lambda_1| \leq \dots$

Cette définition découle du critère classique de H. Weyl sur l'équidistribution d'une suite réelle modulo 2π. Évidemment $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{N}$ sont uniformément distribués dans $\mathbb{Z}$. Le théorème suivant est nouveau et non publié :

Théorème I.1.7. *Si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est uniformément distribué, alors C_Λ est riche dans $C(\mathbb{T})$. En particulier C_Λ a la propriété de Daugavet.*

Démonstration. Par définition des sous-espaces riches dans $C(\mathbb{T})$, il faut montrer que l'application quotient de $C(\mathbb{T})$ dans $C(\mathbb{T})/C_\Lambda$ est C-étroite. Autrement dit, étant donné F un fermé propre de $\mathbb{T}$ et $\varepsilon > 0$, on doit trouver $f \in C(\mathbb{T})$ satisfaisant les conditions

$$\|f\|_\infty = 1, \quad f_{|_F} = 0 \quad \text{et} \quad d(f, C_\Lambda) < \varepsilon.$$

Tout d'abord commençons par montrer qu'étant donné n'importe quel compact K tel que $0 \notin K$, on peut construire une fonction $g \in C_\Lambda$ de norme 1 avec $|g_{|_K}| < \varepsilon$. Posons, pour $N \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$,

$$q_N(t) = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} e^{2i\pi\lambda_n t}.$$

Alors $q_N(0) = 1$, $q_N \in C_\Lambda$ et q_N converge simplement vers 0 sur $]0,1[$ par hypothèse. Considérons alors l'espace $C(K)$. La suite (q_N) convergeant faiblement vers 0 dans cet espace, le théorème de Banach-Mazur nous dit qu'il existe une suite de combinaisons convexes des q_N qui converge en norme vers 0 dans $C(K.)$ On a donc une suite de sous-ensembles finis $I_M \subset \mathbb{N}$ telle que

$$Q_M(t) = \sum_{m \in I_M} \alpha_m^M q_m(t), \quad \sum_{m \in I_M} \underbrace{\alpha_m^M}_{\geq 0} = 1 \quad \text{et} \quad \sup_{t \in K} |Q_M(t)| \xrightarrow[M]{} 0.$$

De plus, $Q_M \in C_\Lambda$ et $\|Q_M\|_\infty = Q_M(0) = 1$. On choisit alors M assez grand pour que $g = Q_M$ convienne.
Soit $F \subsetneq \mathbb{T}$ un ensemble fermé non vide, et soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $\alpha \in]0,1[\setminus F$. Il existe une fonction u continue sur $\mathbb{T}$ telle que $u(\alpha) = 1$, $u_{|_F} = 0$ et $0 \leq u \leq 1$ $\big($on prend par exemple $u(t) = d(t,F)/\big(d(t,F) + d(t,\alpha)\big)\big)$. Par continuité de u en α, il existe un compact K de $\mathbb{T}$ tel que $F \subset K$, $\alpha \notin K$ et $\sup_{t \in K^c} |1 - u(t)| \leq \varepsilon$. Notons $K_\alpha = \{t - \alpha \mid t \in K\}$. C'est un compact de $\mathbb{T}$ qui ne contient pas 0. On considère alors la fonction $g \in C_\Lambda$ construite précédemment, qui vérifie $|g_{|_{K_\alpha}}| < \varepsilon$ et $\|g\|_\infty = g(0) = 1$, et l'on pose $h(t) = g(t - \alpha)$. Comme C_Λ est invariant par translation, h appartient à C_Λ et vérifie $\|h\|_\infty = h(\alpha) = g(0) = 1$ et $|h_{|_K}| < \varepsilon$. Si l'on pose $f = uh$, alors

- $\|f\|_\infty = 1$ puisque $f(\alpha) = u(\alpha)h(\alpha) = 1$
- $f_{|_F} = 0$
- $\|f - h\|_\infty = \|(u-1)h\|_\infty \leq \varepsilon$.

En effet, $\big(1 - u(t)\big)|h(t)| \leq |h(t)| \leq \varepsilon$ si $t \in K$, et $\big(1 - u(t)\big)|h(t)| \leq 1 - u(t) \leq \varepsilon$ si $t \notin K$. La fonction f satisfait bien les conditions voulues. □

De tels exemples d'ensembles uniformément distribués peuvent être fournis par un procédé aléatoire, appelé méthode des sélecteurs, crée par J. Bourgain dans [Bou88] : Si $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$, on lui associe l'ensemble $\Lambda = \Lambda(\omega) = \{n \geq 1 \mid \varepsilon_n(\omega) = 1\}$. On note δ_n l'espérance de ε_n, et l'on a alors le résultat suivant :

Théorème I.1.8. ([Bou88, Proposition 8.2]) *Supposons que $\sigma_N / \log N$ tende vers l'infini, où $\sigma_N = \delta_1 + \ldots + \delta_N$, et que la suite $(\delta_n)_n$ soit décroissante. Alors presque sûrement, l'ensemble $\Lambda = \Lambda(\omega)$ est uniformément distribué.*

Remarque I.1.9. Si $\delta_n = a_n/n$ avec $a_n \longrightarrow +\infty$ et $(\delta_n)_n$ est décroissante, alors nous sommes dans les conditions du théorème précédent.

Remarque I.1.10. À noter que dans [LiQR02] les auteurs produisent grâce à la méthode des sélecteurs des exemples d'espaces C_Λ où presque sûrement l'ensemble Λ est uniformément distribué, mais où presque sûrement également l'espace C_Λ est relativement « petit ».

Un autre résultat impliquant les espaces de type C_Λ a été prouvé par D. Werner. Notons $M(\mathbb{T}) = C(\mathbb{T})^*$ l'espace des mesures boréliennes (régulières) complexes sur G, et M_c le sous-espace de $M(\mathbb{T})$ formé des mesures continues. On considère $L^1(\mathbb{T})$ comme un sous-espace de $M(\mathbb{T})$ via les mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue normalisée. Un sous-ensemble Λ de $\mathbb{Z}$ est un ensemble *semi-Riesz* si toute mesure à spectre dans Λ est continue, autrement dit si $M_\Lambda \subset M_c$. De tels exemples sont fournis par les ensembles de Riesz, c'est-à dire ceux pour lesquels on a $M_\Lambda = L^1_\Lambda$, mais pas seulement. Il existe des ensembles semi-Riesz qui ne sont pas Riesz [Wer97]. Nous avons le théorème suivant, qui est en fait vrai dans le cadre plus général d'un groupe abélien compact infini :

Théorème I.1.11. ([Wer97, Theorem 3.7]) *Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ un ensemble tel que $\mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)$ soit un ensemble semi-Riesz. Alors C_Λ a la propriété de Daugavet.*

Notons que si l'on suppose que $\mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)$ est un ensemble de Riesz, alors l'espace dual $(C(\mathbb{T})/C_\Lambda)^* = M_{\mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)} = L^1_{\mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)}$ a la propriété de Radon-Nikodym, et donc C_Λ est un sous-espace riche de $C(\mathbb{T})$ et possède la propriété de Daugavet. Le Théorème I.1.11 ne peut se réduire à cet argument, car un ensemble Γ est Riesz si et seulement si M_Γ a la propriété de Radon-Nikodym.
Il serait intéressant de savoir s'il y a un lien entre le Théorème I.1.7 et le Théorème I.1.11, autrement dit si « Λ uniformément distribué $\Rightarrow \mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)$ semi-Riesz » ou « $\mathbb{Z}\backslash(-\Lambda)$ semi-Riesz $\Rightarrow \Lambda$ uniformément distribué » ?

I.2 Centres de Daugavet

Plusieurs généralisations de l'équation de Daugavet ont été proposées durant les années 2000. Par exemple dans [KadMarMer07], les auteurs étudient une généralisation de (ED) de la forme $\|g(T)\| = f(\|T\|)$, et montrent que celle-ci mène à la propriété de Daugavet pour l'espace en question. Dans [Po08], Popov montre que si l'on substitue l'opérateur identité dans (ED) par une isométrie $J : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ alors l'équation $\|J + T\| = 1 + \|T\|$ est vérifiée pour les opérateurs étroits, et donc en particulier pour les opérateurs faiblement compacts sur $L^1[0,1]$. Dans un cadre plus général, ce type de généralisation est étudié par T. Bosenko et V. Kadets dans [BoKad10]. Ils donnent la définition suivante :

Définition I.2.1. *Soit X un espace de Banach. On dit qu'un opérateur $G : X \to Y$ est un centre de Daugavet si l'identité*

$$\|G + T\| = \|G\| + \|T\| \tag{I.2.1}$$

est vraie pour tous les opérateurs $T : X \to Y$ de rang 1.

La raison pour laquelle ils donnent la terminologie « centre de Daugavet » est que si $G : X \to Y$ vérifie cette propriété, alors quelques soient les isométries linéaires surjectives $U \in B(Y)$ et $V \in B(X)$, l'opérateur $UGV \in B(X,Y)$ la vérifie également. Bosenko et Kadets ont montré que si $G : X \to Y$ est un centre de Daugavet qui n'est pas zéro, alors l'équation (I.2.1) est vraie pour les opérateurs fortement Radon-Nikodym de X dans Y. De plus l'opérateur G fixe une copie de ℓ^1, les espaces X et Y n'ont pas de base inconditionnelle, et ne peuvent même pas s'injecter dans un espace ayant une base inconditionnelle.

I.3 Centres de Daugavet de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$

Dans la suite, S_1 et S_2 désigneront deux espaces compacts séparés sans point isolé. On considère des fonctions continues $\varphi : S_2 \to S_1$ et $u : S_2 \to \mathbb{C}$, et l'on définit l'opérateur de composition à poids $uC_\varphi : C(S_1) \to C(S_2)$ par $uC_\varphi(f) = u.(f \circ \varphi)$ pour chaque $f \in C(S_1)$. C'est clairement un opérateur borné sur $C(S_1)$ et l'on a $\|uC_\varphi\| = \|u\|_\infty$. Dans le cas où $u \equiv 1$, on obtient juste l'opérateur de composition C_φ, et dans celui où $\varphi(s) = s$ on obtient l'opérateur de multiplication par u. On s'intéresse alors à l'équation :

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|. \tag{E}$$

Dans le cas où $\varphi(s) = s$ et $u \equiv 1$, l'équation (E) devient l'équation de Daugavet classique. Dans la suite on supposera que la fonction u n'est pas identiquement constante égale à zéro. Nous voulons obtenir des conditions sur φ et u assurant que chaque opérateur faiblement compact satisfasse l'équation (E). Tout d'abord, u et φ doivent être telles que l'opérateur uC_φ ne soit pas lui-même compact. Par un résultat de Kamowitz [Kam81], uC_φ est compact si et seulement si φ est constante sur un voisinage de chaque composante connexe de l'ensemble où u ne s'annule pas. Nous allons montrer qu'une forte négation de « uC_φ est compact » est nécessaire pour obtenir un centre de Daugavet.

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème I.3.1. *Soient S_1 et S_2 des ensembles compacts séparés sans point isolé, $u \in C(S_2)$ et φ une fonction continue de S_2 dans S_1.*
Alors chaque opérateur faiblement compact $T : C(S_1) \to C(S_2)$ satisfait l'équation (E) si et seulement si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2 pour chaque $t \in S_1$, et $|u|$ est constant sur S_2.

Une implication de ce théorème a été prouvée dans [BoKad10] pour les opérateurs de rang 1 et pour $u \equiv 1$. Ici nous donnerons une preuve directe et élémentaire pour les opérateurs faiblement compact, et nous vérifierons que les conditions sur φ et u sont bien nécessaires.

Commençons tout d'abord par introduire certaines notations. Pour un compact S, l'espace dual de $C(S)$ qui consiste des mesures boréliennes régulières sur S à variation finie sera noté $M(S)$. Pour $s \in S$, on définit la mesure de Dirac correspondante δ_s par $\delta_s(f) = f(s)$ pour tout $f \in C(S)$. Alors $\delta_s \in M(S)$ et $\|\delta_s\| = 1$.

En suivant une démarche due à D. Werner [Wer96], l'idée principale est de représenter un opérateur $T : C(S_1) \to C(S_2)$ par la famille de mesures $(\mu_s)_{s\in S_2}$ définie par $\mu_s = T^*(\delta_s) \in M(S_1)$, de sorte que :

$$(Tf)(s) = \langle Tf, \delta_s\rangle = \langle f, \mu_s\rangle = \int_{S_1} f \, \mathrm{d}\mu_s.$$

De cette façon, les propriétés de (faible) compacité de T se reformulent en termes de continuités de l'application $s \mapsto \mu_s$ de la manière suivante (c.f. [DunSch58], Th. VI, 7.1) :

Lemme I.3.2. *Soient $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur borné et $(\mu_s)_{s\in S_2}$ la famille de mesures associée à T. Alors :*

i) $s \mapsto \mu_s$ est continue de S_2 dans $M(S_1) = C(S_1)^*$ muni de la topologie préfaible, i.e. $\sigma(M(S_1), C(S_1))$.

ii) T est faiblement compact si et seulement si $s \mapsto \mu_s$ est continue pour la topologie faible sur $M(S_1)$, i.e. pour $\sigma\big(M(S_1), M(S_1)^*\big)$.

iii) T est compact si et seulement si $s \mapsto \mu_s$ est continue pour la norme sur $M(S_1)$.

Remarquons que $\|T\| = \sup\limits_{s\in S_2} \|\mu_s\|$, et que l'opérateur uC_φ est représenté par la famille de mesures $(u(s)\delta_{\varphi(s)})_{s\in S_2}$. En effet :

$$(uC_\varphi)^*(\delta_s)(f) = \delta_s(u.f \circ \varphi) = u(s)f\big(\varphi(s)\big) = u(s)\delta_{\varphi(s)}(f).$$

La proposition suivante montre, dans le cas où $|u|$ est constant, que pour chaque opérateur $T : C(S_1) \to C(S_2)$ il existe un certain $\lambda \in \mathbb{T}$ tel que λT vérifie l'équation (E).

Proposition I.3.3. *Soit $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur, et $u \in C(S_2)$ une fonction de module constant. Alors*

$$\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|uC_\varphi + \lambda T\| = \|u\|_\infty + \|T\|.$$

Démonstration. Soit $(\mu_s)_{s \in S}$ la famille de mesures associée à T. Alors

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|uC_\varphi + \lambda T\| &= \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \sup_{s \in S_2} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \lambda \mu_s\| \\
&= \sup_{s \in S_2} \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \Big(|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \lambda\mu_s|\big(\{\varphi(s)\}\big) + |u(s)\delta_{\varphi(s)} + \lambda\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big) \Big) \\
&= \sup_{s \in S_2} \max_{\lambda \in \mathbb{T}} \Big(\big|u(s) + \lambda\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big) \Big) \\
&= \sup_{s \in S_2} \Big(|u(s)| + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big) \Big) \\
&= \sup_{s \in S_2} (\|u\|_\infty + \|\mu_s\|) \qquad \text{car } |u(s)| = \|u\|_\infty,\ \forall s \in S_2 \\
&= \|u\|_\infty + \|T\|.
\end{aligned}$$

□

Remarque I.3.4. i) Dans le cas réel, nous avons un résultat similaire en remplaçant « $\lambda \in \mathbb{T}$ » par « $\lambda \in \{\pm 1\}$ ».

ii) Sans hypothèse sur le module de u, le résultat précédent n'est plus vrai. En effet, en prenant $v \in C(S)$, on a $\max_{\lambda \in \mathbb{T}} \|uC_\varphi + \lambda v C_\psi\| = \||u| + |v|\|_\infty$ qui est différent de $\|u\|_\infty + \|v\|_\infty$ en toute généralité.

I.3.1 Équation (E) pour les opérateurs faiblement compacts de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$

Soit $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur et $(\mu_s)_{s \in S_2}$ sa famille de mesures associée. Alors

$$\|uC_\varphi + T\| = \sup_{s \in S_2} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\| = \sup_{s \in S_2} \Big(\big|u(s) + \mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big) \Big)$$

et

$$\|u\|_\infty + \|T\| = \sup_{s \in S_2} (\|u\|_\infty + \|\mu_s\|) = \sup_{s \in S_2} \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big) \Big).$$

En comparant ces deux quantités nous obtenons une caractérisation des opérateurs satisfaisant l'équation (E) :

Lemme I.3.5.

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$$

si et seulement si

$$\sup_{\{s\in S_2 \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \Big(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\big)\Big) = 0 \tag{I.3.1}$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Démonstration. Condition suffisante : soit $\varepsilon > 0$ et $U = \{s \in S_2 \mid \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\}$. L'ensemble U est non vide, et

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi + T\| &\geq \sup_{s\in U} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\| \\
&\geq \sup_{s\in U} \Big(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big)\Big) \\
&\geq \sup_{s\in U} \bigg(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + \|u\|_\infty + \|\mu_s\| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)\bigg) \\
&\geq \|u\|_\infty + \|T\| - \varepsilon + \sup_{s\in U} \bigg(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)\bigg) \\
&\geq \|u\|_\infty + \|T\| - \varepsilon \qquad \big(\text{d'après (I.3.1)}\big).
\end{aligned}$$

Condition nécessaire : supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout s dans S_2, la condition $\|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon$ entraine

$$\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big) < -\alpha < 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi + T\| &= \sup_{s\in S_2} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\| \\
&= \max\Big(\sup_{\{s \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\|, \sup_{\{s \mid \|\mu_s\|\leq\|T\|-\varepsilon\}} \|u(s)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\|\Big).
\end{aligned}$$

Le second terme est majoré par $\|u\|_\infty + \|T\| - \varepsilon$. Pour le premier terme, on écrit comme précédemment

$$\begin{aligned}
&\sup_{\{s\in S_2 \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \|u(s)\delta_{\varphi(s)}+\mu_s\| \\
&= \sup_{\{s\in S_2 \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \Big(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + |\mu_s|\big(S\backslash\{\varphi(s)\}\big)\Big) \\
&= \sup_{\{s\in S_2 \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \bigg(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + \|u\|_\infty + \|\mu_s\| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)\bigg) \\
&\le \|u\|_\infty + \|T\| + \sup_{\{s\in S_2 \mid \|\mu_s\|>\|T\|-\varepsilon\}} \Big(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\big)\Big) \\
&\le \|u\|_\infty + \|T\| - \alpha.
\end{aligned}$$

Ainsi $\|uC_\varphi + T\| < \|u\|_\infty + \|T\| - \min(\varepsilon, \alpha) < \|u\|_\infty + \|T\|$, ce qui aboutit à une contradiction. □

Par conséquent, nous avons le corollaire suivant qui nous sera utile par la suite :

Corollaire I.3.6. *Supposons que la famille $(\mu_s)_{s\in S_2}$ vérifie la condition suivante : pour chaque ouvert non vide $U \subset S_2$,*

$$\sup_{s\in U} \bigg(\big|u(s)+\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)\bigg) = 0. \tag{I.3.2}$$

Alors

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, et notons $U = \{s \in S_2 \mid \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\}$. Grâce au Lemme I.3.5, il suffit de montrer que U est un ouvert non vide de S_2. D'une part il est clair que U est non vide. D'autre part, si $s_0 \in U$ il existe $f_0 \in C(S_1)$, $\|f_0\|_\infty \le 1$ tel que $|\mu_{s_0}(f_0)| > \|T\| - \varepsilon$. Le Lemme I.3.2 assure que $s \mapsto \mu_s$ est continue pour la topologie préfaible sur $M(S_1)$, et donc $s \mapsto \mu_s(f_0)$ est continue. Par conséquent l'ensemble $V = \{s \in S_2 \mid |\mu_s(f_0)| > \|T\| - \varepsilon\}$ est un voisinage ouvert de s_0 contenu dans U. Donc U est un ouvert non vide de S_2. □

Nous pouvons maintenant montrer un premier résultat concernant les opérateurs faiblement compacts. Avec des conditions suffisantes sur u et φ, tout opérateur faiblement compact de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$ vérifie l'équation (E).

Théorème I.3.7. *Soient S_1 et S_2 des ensembles compacts séparés sans point isolé. Supposons que $|u|$ soit constant sur S_2 et que pour tout ouvert non vide U de S_2, l'ensemble $\varphi(U) \subset S_1$ soit infini. Alors tout opérateur faiblement compact $T : C(S_1) \to C(S_2)$ vérifie l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$.*

Notons que la condition sur φ impose à S_2 de n'avoir aucun point isolé.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe un opérateur T de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$ faiblement compact qui ne vérifie pas l'équation (E). Alors la famille de mesures $(\mu_s)_{s\in S_2}$ associée à T ne vérifie pas la condition (I.3.2) du Corollaire I.3.6. Il existe donc un ouvert non vide $U \subset S_2$ et $\beta > 0$ tels que

$$\big|u(s) + \mu_s(\{\varphi(s)\})\big| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big|\Big) < -2\beta \quad \forall s \in U.$$

En particulier nous avons, puisque $|u(s)| = \|u\|_\infty$ pour tout $s \in S_2$,

$$\begin{aligned}\big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| &> 2\beta - \|u\|_\infty + \big|u(s) + \mu_s(\{\varphi(s)\})\big| \\ &\geq 2\beta - \|u\|_\infty + |u(s)| - \big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| \\ &= 2\beta - \big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big|\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| > \beta, \quad \text{pour tout } s \in U.$$

Si $t \in S_2$, l'application $s \in S_2 \mapsto \mu_s(\{t\}) \in \mathbb{C}$ est continue. En effet, le Lemme I.3.2 assure que $s \mapsto \mu_s$ est continue pour la topologie faible sur $M(S_1)$. Puisque la fonction $\mu_s \mapsto \mu_s(\{t\})$ appartient à $M(S_1)^*$, elle est continue sur $M(S_1)$ muni de la topologie faible.

Prenons $s_0 \in U$, et définissons

$$U_1 = \big\{s \in U \mid \big|\mu_s(\{\varphi(s_0)\})\big| > \beta\big\}.$$

Par la continuité de $s \in S_2 \mapsto \mu_s(\{t\}) \in \mathbb{C}$, l'ensemble U_1 est un ouvert de U (et donc de S_2) contenant s_0. Comme $\varphi(U_1)$ est infini, on peut trouver $s_1 \in U_1$ satisfaisant $\varphi(s_1) \neq \varphi(s_0)$. On a alors

$$\begin{aligned}&\big|\mu_{s_1}(\{\varphi(s_1)\})\big| > \beta, \quad \text{car } s_1 \in U, \\ &\big|\mu_{s_1}(\{\varphi(s_0)\})\big| > \beta.\end{aligned}$$

Considérons maintenant

$$U_2 = \big\{s \in U_1 \mid \big|\mu_s(\{\varphi(s_1)\})\big| > \beta\big\}.$$

C'est un ouvert de U contenant s_1, et il contient un élément s_2 vérifiant $\varphi(s_2) \neq \varphi(s_0)$ et $\varphi(s_2) \neq \varphi(s_1)$ car $\varphi(U_2)$ est infini. On a, puisque $s_2 \in U_2 \subset U_1 \subset U$,

$$\begin{aligned}&\big|\mu_{s_2}(\{\varphi(s_2)\})\big| > \beta, \\ &\big|\mu_{s_2}(\{\varphi(s_1)\})\big| > \beta, \\ &\big|\mu_{s_2}(\{\varphi(s_0)\})\big| > \beta.\end{aligned}$$

On construit ainsi de suite une suite décroissante d'ouvert $U_{n+1} \subset U_n \subset \ldots \subset U$, et une suite $(s_n)_{n\geq 0}$ d'éléments ayant la propriété

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \{s \in U_n \mid \left|\mu_s(\{\varphi(s_n)\})\right| > \beta\}, \\ s_{n+1} &\in U_{n+1}, \\ \varphi(s_{n+1}) &\notin \{\varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_n)\}. \end{aligned}$$

On a donc

$$\left|\mu_{s_n}(\{\varphi(s_j)\})\right| > \beta, \qquad j = 0, \ldots, n-1$$

ce qui aboutit à une contradiction en écrivant que

$$\|T\| \geq \|\mu_{s_n}\| \geq |\mu_{s_n}|(\{\varphi(s_0), \ldots, \varphi(s_{n-1})\}) \geq n\beta, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

D'autre part, nous obtenons également des conditions nécessaires sur φ et u pour que tout opérateur de rang 1 de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$ vérifie l'équation (E) :

Théorème I.3.8. *Supposons que tout opérateur de rang* 1 *de* $C(S_1)$ *dans* $C(S_2)$ *vérifie l'équation* (E). *Alors* $|u|$ *est constant sur* S_2 *et* $\varphi^{-1}(\{t\})$ *est d'intérieur vide dans* S_2, *pour tout* $t \in S_1$.

Démonstration. Montrons tout d'abord que $|u|$ est constant sur S_2. En raisonnant par l'absurde, on suppose qu'il existe $s_0 \in S_2$ tel que $|u(s_0)| < \|u\|_\infty$. Il existe alors $\delta > 0$ et un voisinage ouvert U de s_0 satisfaisant

$$\forall s \in U,\ |u(s)| < \|u\|_\infty - \delta.$$

Prenons une fonction continue $v \in C(S_2)$ telle que : $0 \leq v \leq 1,\ v(s_0) = 1$ et $v(s) < 1$ pour tout $s \neq s_0$. On définit l'opérateur $T = v\delta_\tau$ où τ est un élément de S_1. Alors $\mu_s = T^*(\delta_s) = v(s)\delta_\tau$ et $\|\mu_s\| = v(s)$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\{s \in S_2 \mid v(s) > 1 - \varepsilon\} \subset U$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} &\sup_{\{s|v(s)>1-\varepsilon\}} \Big(|u(s) + v(s)\delta_\tau(\{\varphi(s)\})| - \big(\|u\|_\infty + |v(s)|\delta_\tau(\{\varphi(s)\})\big)\Big) \\ &\leq \sup_{s\in U} \Big(|u(s)| + v(s)\delta_\tau(\{\varphi(s)\}) - \big(\|u\|_\infty + v(s)\delta_\tau(\{\varphi(s)\})\big)\Big) \\ &\leq \sup_{s\in U} |u(s)| - \|u\|_\infty \\ &\leq -\delta < 0. \end{aligned}$$

La famille de mesures $(\mu_s)_{s\in S_2}$ ne vérifie pas la condition (I.3.1) du Lemme I.3.5, et par conséquent T ne satisfait pas l'équation (E), ce qui est absurde. Donc $|u|$ est constant.

Prouvons maintenant que pour tout $t \in S_1$, $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2. Pour cela, il suffit de montrer qu'étant donné U un ouvert non vide de S_2, il existe $s \in U$ vérifiant $\varphi(s) \neq t$. Considérons l'opérateur de rang 1 défini par $T = \delta_t g u$, où $g \in C(S_2)$ satisfait $-1 \leq g \leq -\frac{1}{2}$, $g = -\frac{1}{2}$ hors de U et $\|g\|_\infty = 1$. Alors $\|T\| = \|u\|_\infty > 0$, la famille de mesures associée à T est donnée par $\mu_s = T^*(\delta_s) = u(s)g(s)\delta_t$ et $\|\mu_s\| = |u(s)g(s)| = \|u\|_\infty |g(s)|$.
Prenons $\varepsilon = \|u\|_\infty/2$ de sorte que $V = \{s \in S_2 \mid |u(s)g(s)| > \frac{\|u\|_\infty}{2}\} \subset U$. Comme T vérifie l'équation (E), la famille $(\mu_s)_{s\in S_2}$ satisfait la condition (I.3.1) du Lemme I.3.5 :

$$\begin{aligned}0 &= \sup_{s\in V}\Big(\big|u(s) + u(s)g(s)\delta_t\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(\|u\|_\infty + |u(s)g(s)|\delta_t\big(\{\varphi(s)\}\big)\Big)\Big)\\ &= \sup_{s\in V}\Big(2g(s)\|u\|_\infty\delta_t\big(\{\varphi(s)\}\big)\Big)\end{aligned}$$

qui est majoré par $\sup\limits_{s\in U}\Big(2g(s)\|u\|_\infty\delta_t\big(\{\varphi(s)\}\big)\Big)$. Il existe donc un élément $s \in U$ tel que $\delta_t\big(\{\varphi(s)\}\big) = 0$, *i.e.* $\varphi(s) \neq t$ et par conséquent $U \not\subset \varphi^{-1}(\{t\})$. □

Remarque I.3.9. Dans des espaces topologiques séparés S_1 et S_2, et pour une fonction continue $\varphi : S_2 \to S_1$, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) pour tout $t \in S_1$ l'ensemble $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2

ii) pour tout ouvert non vide U de S_2 l'ensemble $\varphi(U)$ est infini.

En effet, s'il existe un ouvert non vide U de S_2 tel que $U \subset \varphi^{-1}(\{t\})$ alors φ est constante sur U, donc $ii) \Rightarrow i)$. De plus, si $\varphi(U) = \{s_1, \ldots, s_n\}$ pour un ouvert U de S avec $n \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}\{s \in U \mid \varphi(s) = s_1\} &= \{s \in U \mid \varphi(s) \neq s_k,\ 2 \leq k \leq n\}\\ &= \varphi^{-1}\big(S_1 \backslash \{s_2, \ldots, s_n\}\big) \cap U.\end{aligned}$$

L'ensemble $S_1 \backslash \{s_2, \ldots, s_n\}$ est ouvert dans S_1, donc $\{s \in U \mid \varphi(s) = s_1\}$ est un ouvert non vide de U (et de S_2), et par conséquent $\{s \in S_2 \mid \varphi(s) = s_1\}$ n'est pas d'intérieur vide dans S_2. C'est clair si $n = 1$.

La remarque précédente, combinée avec les théorèmes I.3.7 et I.3.8 nous donne la caractérisation suivante :

Corollaire I.3.10. *Soient S_1 et S_2 des ensembles compacts séparés sans point isolé. Alors $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$ pour tout opérateur faiblement compact $T : C(S_1) \to C(S_2)$ si et seulement si $|u|$ est constant sur S_2 et les ensembles $\varphi^{-1}(\{t\})$ sont d'intérieur vide dans S_2, pour tout $t \in S_1$.*

Application : une réponse négative à une question de Popov

Si φ est surjective et si $|u| = 1$ alors l'opérateur uC_φ est une isométrie de $C(S_1)$

dans $C(S_2)$. Dans [Po08], Popov montre que toute isométrie $J : L^1([0,1]) \to L^1([0,1])$ est un centre de Daugavet. Il soulève la question de savoir si ce résultat est toujours vrai si l'on remplace l'espace $L^1([0,1])$ par un espace de Banach X qui possède la propriété de Daugavet. Il s'avère que la réponse à cette question est négative dans le cas où $X = C([0,1])$. En effet, il suffit pour cela de considérer un opérateur de composition C_φ dont le symbole φ est à la fois surjectif et constant sur un ouvert non vide de $[0,1]$. Alors l'opérateur C_φ est une isométrie bien qu'il ne soit pas un centre de Daugavet sur $C([0,1])$.
Ajoutons qu'un exemple fut indépendamment produit dans [BoKad10] à l'aide d'un opérateur de composition à poids.

I.3.2 Somme d'opérateurs de composition à poids

On s'intéresse à la question de savoir si une somme de centres de Daugavet est encore un centre de Daugavet. Il est facile de voir que ce n'est pas le cas. Pour cela, considérons $u(x) = e^{2i\pi x}$ et $v(x) = e^{-2i\pi x}$, $x \in [0,1]$. Alors u et v sont des fonctions continues sur $[0,1]$ de module constant égal à 1. Par conséquent, le Corollaire I.3.10 appliqué avec $\varphi(x) = x$ nous permet d'affirmer que uI et vI sont des centres de Daugavet sur $C([0,1])$. Cependant $(u(x)+v(x))/2 = \cos 2\pi x$ n'est pas de module constant sur $[0,1]$, et donc $(uI+vI)/2$ n'est pas un centre de Daugavet, toujours d'après le Corollaire I.3.10. En particulier l'ensemble des centres de Daugavet n'est pas convexe. Néanmoins nous allons montrer que certaines conditions nous permettent d'obtenir une réponse positive dans le cadre des opérateurs de composition à poids.

Notons tout d'abord que l'ensemble des opérateurs de composition à poids n'est pas stable par combinaison linéaire. En effet, considérons des fonctions $\psi_1 \neq \psi_2$ continues de S_2 dans S_1, et supposons que $C_{\psi_1} + C_{\psi_2} = uC_\varphi$. Prenons $s_0 \in S_2$ qui vérifie $\psi_1(s_0) \neq \psi_2(s_0)$. Alors en considérant les familles de mesures qui représentent les opérateurs C_{ψ_1}, C_{ψ_2} et uC_φ, nous obtenons l'identité $\delta_{\psi_1(s_0)} + \delta_{\psi_2(s_0)} = u(s_0)\delta_{\varphi(s_0)}$. En évaluant ensuite en les singletons $\{\psi_1(s_0)\}$ puis $\{\psi_2(s_0)\}$ nous aboutissons à la contradiction $\varphi(s_0) = \psi_1(s_0) = \psi_2(s_0)$.

Soient $\varphi \neq \psi$ des fonctions continues de S_2 dans S_1, et $u, v \in C(S_2)$ des fonctions non nulles. On suppose que uC_φ et vC_ψ sont des centres de Daugavet, et l'on cherche à savoir sous quelles conditions $uC_\varphi + vC_\psi$ est un centre de Daugavet. Tout d'abord remarquons que l'on peut supposer sans perte de généralité que $u \equiv 1$. En effet le module de $|u|$ est constant égale à $\|u\|_\infty$ et donc $uC_\varphi + vC_\psi = M_u(C_\varphi + (v/u)C_\psi)$, où M_u désigne l'opérateur de multiplication par u. Puisque l'opérateur $\|u\|_\infty^{-1} M_u$ est une isométrie surjective, il nous suffit de montrer que $\|u\|_\infty(C_\varphi + (v/u)C_\psi)$ est un centre de Daugavet, ce qui est vrai si et seulement si $C_\varphi + (v/u)C_\psi$ est un centre de Daugavet.

On définit l'ensemble $V = \{s \in S_2 \mid \varphi(s) \neq \psi(s)\}$. C'est un ouvert non vide de S_2 puisque S_2 n'a pas de point isolé. Commençons par calculer la norme de $C_\varphi + vC_\psi$, sans oublier que $|v|$ est constant sur S_2 :

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi + vC_\psi\| &= \sup_{s\in S_2} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)}\| \\
&= \max\left(\sup_{s\in V} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)}\|, \sup_{s\in S_2\setminus V} \|(1+v(s))\delta_{\varphi(s)}\|\right) \\
&= \max\left(\sup_{s\in V}(1+|v(s)|), \sup_{s\in S_2\setminus V} |1+v(s)|\right) \\
&= 1 + \|v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Étant donné un opérateur $T : C(S_1) \to C(S_2)$ et $(\mu_s)_{s\in S_2}$ sa famille de mesures associée, notons, pour des raisons de commodité,

$$\begin{aligned}
\Delta_T(s) =& \big|1 + \mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + \big|v(s) + \mu_s\big(\{\psi(s)\}\big)\big| \\
&- \Big(1 + \|v\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| + \big|\mu_s\big(\{\psi(s)\}\big)\big|\Big),
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{\Delta}_T(s) = \big|1 + v(s) + \mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(1 + \|v\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)$$

pour $s \in S_2$. Notons également

$$U_\varepsilon = \{s \in S_2 \mid \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\}, \text{ pour } \varepsilon > 0.$$

Comme dans le cas des opérateurs de composition à poids, nous avons la propriété suivante :

Proposition I.3.11. *Soit T un opérateur de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$, et $(\mu_s)_{s\in S_2}$ la famille de mesures associée à T. Alors*

$$\|C_\varphi + vC_\psi + T\| = 1 + \|v\|_\infty + \|T\|$$

si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\max\left(\sup_{s\in U_\varepsilon\cap V} \Delta_T(s), \sup_{s\in U_\varepsilon\cap(S_2\setminus V)} \tilde{\Delta}_T(s)\right) = 0, \tag{I.3.3}$$

avec par convention $\sup_\emptyset = -\infty$.

Démonstration. Pour montrer la condition nécessaire, on se donne $\varepsilon > 0$ et l'on écrit que

$$\|C_\varphi + vC_\psi + T\| \geq \sup_{s \in U_\varepsilon} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)} + \mu_s\|.$$

Cette dernière quantité est égale à

$$\max\left(\sup_{s\in U_\varepsilon \cap V} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)} + \mu_s\|, \sup_{s \in U_\varepsilon \cap (S_2 \setminus V)} \big\|\big(1+v(s)\big)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\big\|\right),$$

et l'on utilise le même argument que celui utilisé dans la démonstration du Lemme I.3.5 pour montrer que cette quantité est minorée par

$$1 + \|v\|_\infty + \|T\| - \varepsilon + \max\left(\sup_{s\in U_\varepsilon\cap V} \Delta_T(s), \sup_{s\in U_\varepsilon \cap (S_2\setminus V)} \tilde{\Delta}_T(s)\right)$$

qui est égal à $1 + \|v\|_\infty + \|T\| - \varepsilon$ par hypothèse. La réciproque est simplement une adaptation de celle la preuve du Lemme I.3.5 □

On en déduit le résultat suivant :

Théorème I.3.12. *Supposons que C_φ et vC_ψ soient des centres de Daugavet de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$, avec S_1 et S_2 des compacts séparés sans point isolé. Si de plus v est constante égale à $\|v\|_\infty$ sur l'intérieur de $S_2 \backslash V$, alors tout opérateur faiblement compact $T : C(S_1) \to C(S_2)$ satisfait l'équation*

$$\|C_\varphi + vC_\psi + T\| = 1 + \|v\|_\infty + \|T\|.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que la famille $(\mu_s)_{s\in S}$ ne vérifie pas la condition (I.3.3) de la Proposition I.3.11.
Il existe alors $\varepsilon > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\max\left(\sup_{s\in U_\varepsilon\cap V} \Delta_T(s), \sup_{s\in U_\varepsilon \cap (S_2\setminus V)} \tilde{\Delta}_T(s)\right) < -4\beta.$$

Premier cas : Si $U_\varepsilon \cap V \neq \emptyset$, alors pour tout $s \in U_\varepsilon \cap V$ la quantité

$$\big|1 + \mu_s(\{\varphi(s)\})\big| + \big|v(s) + \mu_s(\{\psi(s)\})\big| - \Big(1 + \|v\|_\infty + \big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| + \big|\mu_s(\{\psi(s)\})\big|\Big)$$

est majorée par -4β. On en déduit que

$$\big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| + \big|\mu_s(\{\psi(s)\})\big| > 2\beta, \quad \forall s \in U_\varepsilon \cap V.$$

Posons

$$V_1 = \{s \in U_\varepsilon \cap V \mid \big|\mu_s(\{\varphi(s)\})\big| > \beta\}$$
$$V_2 = \{s \in U_\varepsilon \cap V \mid \big|\mu_s(\{\psi(s)\})\big| > \beta\}.$$

Comme $U_\varepsilon \cap V \subset V_1 \cup V_2$, on peut supposer sans perte de généralité que V_1 contient un ouvert non vide W. Donc $\big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| > \beta$ pour tout $s \in W$. On suit alors la preuve du Théorème I.3.7 pour aboutir à une contradiction.

Deuxième cas : Si $U_\varepsilon \cap V = \emptyset$, alors pour tout $s \in U_\varepsilon \cap (S_2 \backslash V) = U_\varepsilon$, on a

$$\big|1 + v(s) + \mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(1 + \|v\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big) < -4\beta$$

ce qui implique

$$2\big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| > 4\beta + |1 + v(s)| - (1 + \|v\|_\infty) = 4\beta$$

où l'on utilise ici le fait que $v(s) = \|v\|_\infty$ pour tout s dans l'intérieur de $S_2 \backslash V$, et donc pour tout $s \in U_\varepsilon$. Il suffit alors de conclure comme dans la preuve du Théorème I.3.7. □

La proposition suivante montre que la condition suffisante sur v est en fait nécessaire.

Proposition I.3.13. *Si les opérateurs C_φ, vC_ψ et $C_\varphi + vC_\psi$ sont des centres de Daugavet de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$, alors la fonction v est constante égale à $\|v\|_\infty$ sur l'intérieur de l'ensemble $\{s \in S_2 \mid \varphi(s) = \psi(s)\}$.*

Démonstration. Notons $F = \{s \in S_2 \mid \varphi(s) = \psi(s)\} = S_2 \backslash V$. Si celui-ci est d'intérieur vide il n'y a rien à démontrer. Supposons donc qu'il est non vide, et qu'il existe s_0 dans l'intérieur de F tel que $v(s_0) \neq \|v\|_\infty$. Nous pouvons alors trouver un ouvert non vide $U \subset F$ et $\delta > 0$ tels que

$$\sup_{s \in U} \big(|1 + v(s)| - (1 + \|v\|_\infty)\big) < -\delta.$$

Soit $h \in C(S_2)$ vérifiant $0 \leq h \leq 1$, $\|h\|_\infty = 1$ et $h < 1/2$ hors de U. On définit l'opérateur $T = h\delta_t$, où $t \in S_2$ est arbitraire. Alors $\|T\| = 1$ et $\mu_s = T^*(\delta_s) = h(s)\delta_t$. Posons $\varepsilon = 1/2$, de sorte que $U_\varepsilon = \{s \in S_2 \mid \|\mu_s\| > \|T\| - \varepsilon\} \subset U \subset F$. Puisque l'opérateur $C_\varphi + vC_\psi$ est un centre de Daugavet, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
\|C_\varphi + vC_\psi + T\| &= 2 + \|v\|_\infty \\
&= \sup_{s \in U_\varepsilon} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)} + \mu_s\| \\
&\leq \sup_{s \in U} \|\delta_{\varphi(s)} + v(s)\delta_{\psi(s)} + \mu_s\| \\
&\leq \sup_{s \in U} \big\|\big(1 + v(s)\big)\delta_{\varphi(s)} + \mu_s\big\| \\
&\leq 1 + \sup_{s \in U} |1 + v(s)| \\
&\leq 2 + \|v\|_\infty + \sup_{s \in U} \big(|1 + v(s)| - (1 + \|v\|_\infty)\big) \\
&< 2 + \|v\|_\infty - \delta
\end{aligned}$$

ce qui mène à une contradiction et achève la démonstration. □

Résumons le résultat que nous avons obtenu :

Théorème I.3.14. *Soient C_φ et vC_ψ des centres de Daugavet de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$. L'opérateur $C_\varphi + vC_\psi$ est un centre de Daugavet si et seulement si la fonction v est constante égale à $\|v\|_\infty$ sur l'intérieur de l'ensemble $\{s \in S_2 \mid \varphi(s) = \psi(s)\}$.*

Ce théorème nous dit que dans le cas où uC_φ et vC_ψ sont des centres de Daugavet, la somme $uC_\varphi + vC_\psi$ est aussi un centre de Daugavet si et seulement si $|u+v| = |u| + |v|$ sur tout ouvert non vide sur lequel $\varphi = \psi$, autrement dit sur tout ouvert U où l'on a $(uC_\varphi + vC_\psi)(f)_{|u} = (u+v)C_\varphi(f)_{|u}$ pour tout $f \in C(S_2)$.

I.3.3 Opérateurs dont l'adjoint à une image séparable

Un résultat d'Ansari [An93] affirme que tout opérateur sur $C(S)$ se factorisant par c_0 satisfait l'équation de Daugavet. Dans [WeiWer98], L. Weiss et D. Werner donnent une nouvelle preuve de ce résultat en montrant que tout opérateur sur $C(S)$ dont l'adjoint à une image séparable vérifie l'équation de Daugavet. Dans cette section nous montrerons que c'est toujours le cas dans le cadre des centres de Daugavet.
Soit $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur, où S_1, S_2 sont des compacts séparés sans point isolé, et $(\mu_s)_{s\in S_2}$ la famille de mesures associée à T. Il est clair que si $\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big) = 0$ pour tout $s \in S_2$, et $|u|$ est constant, alors T remplit la condition (I.3.2) du Corollaire I.3.6. En fait, il suffit que la famille (μ_s) vérifie presque cette condition :

Définissons pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble $S_\varepsilon = \big\{s \in S_2 \mid \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| < \varepsilon\big\}$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme I.3.15. *Si $|u|$ est constant et si pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble S_ε est dense dans S_2, alors*

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|.$$

Démonstration. Soit U un ouvert non vide de S_2 et $\varepsilon > 0$. Par densité de S_ε dans S_2, il existe $s_\varepsilon \in U$ satisfaisant $\big|\mu_{s_\varepsilon}\big(\{\varphi(s_\varepsilon)\}\big)\big| < \varepsilon$, et donc

$$\begin{aligned}\big|u(s_\varepsilon) + \mu_{s_\varepsilon}\big(\{\varphi(s_\varepsilon)\}\big)\big| - \big(\|u\|_\infty + \big|\mu_{s_\varepsilon}(\{\varphi(s_\varepsilon)\})\big|\big) &\geq -2\big|\mu_{s_\varepsilon}\big(\{\varphi(s_\varepsilon)\}\big)\big| \\ &> -2\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi pour chaque ouvert non vide U de S_2, on a

$$\sup_{s\in U}\left(\big|u(s) + \mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| - \Big(\|u\|_\infty + \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big|\Big)\right) = 0.$$

On conclut grâce au Corollaire (I.3.6). □

Théorème I.3.16. *Soient S_1 et S_2 des compacts séparés sans point isolé, $\varphi : S_2 \to S_1$ une fonction continue, $u \in C(S_2)$ et $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur tel que T^* ait une image séparable. Si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2 pour tout $t \in S_1$, et si $|u|$ est constant, alors T satisfait l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$.*

Démonstration. Soit $\{\rho_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de $T^*\big(M(S_2)\big)$. On note comme précédemment $S_\varepsilon = \big\{s \in S_2 \mid \big|\mu_s\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| < \varepsilon\big\}$, où $\mu_s = T^*(\delta_s)$ pour tout $s \in S_2$, et $A = \bigcap\limits_{n \geq 0} \big\{s \in S_2 \mid \rho_n\big(\{\varphi(s)\}\big) = 0\big\}$. Nous allons montrer que :

i) A est dense dans S_2.

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ A \subset S_\varepsilon$.

On conclura alors avec le Lemme I.3.15.

Pour montrer i), prouvons que $S_2 \backslash A$ est d'intérieur vide. En effet,

$$S_2 \backslash A = \bigcup_{n \geq 0} \big\{s \in S_2 \mid \rho_n\big(\{\varphi(s)\}\big) \neq 0\big\} = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq 1} A_{n,p}$$

où $A_{n,p} = \big\{s \in S_2 \mid \big|\rho_n\big(\{\varphi(s)\}\big)\big| > \frac{1}{p}\big\}$. Comme ρ_n est une mesure finie, il s'ensuit que les ensembles $\varphi(A_{n,p})$ sont finis (et donc fermés) pour tous $n \geq 0$, $p \geq 1$. Mais $A_{n,p}$ est contenu dans $\varphi^{-1}\big(\varphi(A_{n,p})\big)$ qui est une union finie de fermés d'intérieur vide. Par le théorème de Baire, l'ensemble $S_2 \backslash A$ est contenu dans un ensemble d'intérieur vide, et donc A est dense dans S_2.

Preuve de ii) : soit $s \in A$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de la suite $(\rho_n)_n$ dans $T^*(M(S_2))$, il existe un entier $n_0 \geq 0$ tel que $\|T^*(\delta_s) - \rho_{n_0}\| < \varepsilon$. Alors $|\mu_s - \rho_{n_0}|\big(\{\varphi(s)\}\big) < \varepsilon$, et comme $\rho_{n_0}\big(\{\varphi(s)\}\big) = 0$ on a bien $A \subset S_\varepsilon$. ☐

Si $T : C(S_1) \to C(S_2)$ se factorise par un espace X ayant un dual séparable, alors le Théorème I.3.16 s'applique. En particulier c'est vrai pour la classe des opérateurs se factorisant par c_0. Concernant les opérateurs se factorisant par un espace X, nous n'avons pas besoin de l'hypothèse de séparabilité de X^* dans le cas où S_1 est métrisable. On rappelle la définition suivante, qui n'est pas la définition originale, mais qui est équivalente d'après [St78] :

Définition I.3.17. *Un espace de Banach X est dit* Asplund *si son espace dual a la propriété de Radon-Nikodym.*

Tout dual séparable a la propriété de Radon-Nikodym, et donc tout espace de Banach dont le dual est séparable est Asplund. En fait, un espace est Asplund si et seulement si tout sous-espace séparable a un dual séparable.

Corollaire I.3.18. *Soient S_1 et S_2 des compacts séparés sans point isolé, avec S_1 métrisable, $\varphi : S_2 \to S_1$ une fonction continue et $u \in C(S_2)$. Soit $T : C(S_1) \to C(S_2)$ un opérateur se factorisant par un espace Asplund. Si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2 pour tout $t \in S_1$, et si $|u|$ est constant, alors T satisfait l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$.*

Démonstration. Écrivons $T = T_2 T_1$ avec $T_1 : C(S_1) \to X$ et $T_2 : X \to C(S_2)$. Comme S_1 est un espace métrique compact, l'espace $C(S_1)$ est séparable. On peut donc supposer, en remplaçant X par $\overline{T_1(C(S_1))}$ que X^* est séparable. Ainsi $T^*(M(S_2))$ est séparable, et le résultat suit du Théorème I.3.16. $\square$

Remarque I.3.19. Chaque opérateur compact se factorise par un sous-espace de c_0, et donc le Théorème I.3.16 donne une autre preuve du Théorème I.3.7 pour les opérateurs compacts de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$. De plus, tout opérateur faiblement compact se factorise par un espace réflexif, qui est donc Asplund, ce qui donne une autre preuve du Théorème I.3.7 pour les opérateurs faiblement compacts de $C(S_1)$ dans $C(S_2)$ lorsque S_1 est métrisable. Nous pourrions aussi invoquer le fait que si T est faiblement compact alors $T^{**}(C(S_1)^{**}) \subset C(S_1)$, ce qui implique que T^{**} et par conséquent T^* a une image séparable si S_1 est métrisable.

Dans le cas où $uC_\varphi = I$, le Théorème I.3.16 est un cas particulier d'un résultat connu dans les espaces de Banach ayant la propriété de Daugavet. Si l'on considère un espace X ayant la propriété de Daugavet, alors tout opérateur $T : X \to X$ dont l'adjoint possède une image séparable satisfait l'équation de Daugavet. En effet un tel opérateur ne peut pas fixer de copie de ℓ^1, et d'après un résultat de Shvidkoy [Shv00] il vérifie l'équation de Daugavet.

Comme conséquence immédiate du Théorème I.3.16, nous avons le résultat suivant pour certains opérateurs de composition à poids (résultat qui peut aussi être prouvé directement) :

Corollaire I.3.20. *Soient S_1 et S_2 des compacts séparés sans point isolé, $\varphi : S_2 \to S_1$ une fonction continue et $u \in C(S_2)$. Si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans S_2 pour tout $t \in S_1$, et si $|u|$ est constant, alors $uC_\varphi : C(S_1) \to C(S_2)$ ne se factorise pas par un espace ayant un dual séparable. De plus, si S_1 est métrisable, alors uC_φ ne se factorise pas par un espace Asplund.*

I.4 Centres de Daugavet sur l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$

Dans cette section, nous voulons adapter la méthode utilisée dans [Wer97] pour trouver des centres de Daugavet définis sur des sous-espaces de $C(S)$, et en particulier sur l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$. Nous considèrerons des opérateurs de composition à poids uC_φ définis sur un espace de Banach X et formulerons des conditions sur une injection isométrique de X dans $C(S)$ impliquant que X est « uC_φ-bien plongé ». Nous donnerons ensuite des conditions pour que tout opérateur faiblement compact sur un espace uC_φ-bien plongé vérifie l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|uC_\varphi\| + \|T\|$.

I.4.1 Approche générale

Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach constitué de fonctions définies sur un ensemble Ω à valeurs dans $\mathbb{C}$ $\big(X \subset \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{C})\big)$. On considère φ une fonction définie sur Ω telle que $\varphi(\Omega) \subset \Omega$ et $u \in X$ une fonction non identiquement nulle. On suppose que $uC_\varphi : f \in X \mapsto u.(f \circ \varphi) \in X$ agit continûment sur X. Pour un espace topologique compact séparé sans point isolé S, on dit qu'une isométrie $J : X \to C(S)$ est un *uC_φ-bon plongement* et que X est *uC_φ-bien plongé* dans $C(S)$ si les conditions suivantes sont satisfaites pour tout $s \in S$:

(C1) si $p_s = (uC_\varphi)^* J^*(\delta_s) \in X^*$, alors $\|p_s\| = \|u\| > 0$.

(C2) $\mathrm{lin}(p_s)$ est un L-facteur dans X^*.

Rappelons qu'un sous-espace fermé F d'un espace E est un L-facteur s'il existe une projection Π de E sur F telle que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \|\Pi x\| + \|x - \Pi x\|.$$

On dit que F est un M-idéal si son orthogonal $F^\perp \subset E^*$ est un L-facteur. La condition **(C2)** peut alors se reformuler de la manière suivante : $\ker(p_s)$ est un M-idéal dans X. La condition **(C1)** implique que $\|uC_\varphi\| = \|u\|$.

Supposons que X soit uC_φ-bien plongé dans $C(S)$. La condition **(C2)** nous donne une famille de projections $(\Pi_s)_{s \in S}$ satisfaisant

$$\|x^*\| = \|\Pi_s x^*\| + \|x^* - \Pi_s x^*\|, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

et une famille $(\pi_s)_{s \in S}$ dans X^{**} telle que

$$\Pi_s x^* = \pi_s(x^*) p_s, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*.$$

Notons que $\pi_s(p_s) = 1$.

On considère la relation d'équivalence $\sim$ sur S définie par

$$s \sim t \Leftrightarrow \Pi_s = \Pi_t$$

et l'on note E_s la classe de s dans S. Alors E_s est fermé, et la condition **(C1)** nous dit que $E_s = \{t \in S \mid p_t = \lambda p_s,\ \lambda \in \mathbb{T}\}$. Nous aurons besoin de la condition suivante :

(C3) $\forall s \in S$, la classe E_s est d'intérieur vide dans S.

Soit $T : X \to X$ un opérateur borné, et $q_s = (JT)^*(\delta_s) \in X^*,\ s \in S$. Alors $s \mapsto q_s$ est continue pour la topologie préfaible sur X^*, et l'on a $\|T\| = \sup_S \|q_s\|$.

Énonçons maintenant certains résultats, dont les preuves sont semblables à celles de la section I.3 et sont données dans [Wer97] dans le cas particulier où $uC_\varphi = I$.

Proposition I.4.1. *Supposons que X soit uC_φ-bien plongé dans $C(S)$, et que T soit un opérateur borné sur X. Alors*

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\| + \|T\|$$

si et seulement si

$$\textit{pour tout } \varepsilon > 0, \qquad \sup_{\{s \mid \|q_s\| > \|T\| - \varepsilon\}} \Big(|1 + \pi_s(q_s)| - \big(1 + |\pi_s(q_s)|\big) \Big) = 0.$$

Proposition I.4.2. *Supposons que X soit uC_φ-bien plongé dans $C(S)$, et que la condition **(C3)** soit vraie. Si T est un opérateur sur X tel que pour tout $t \in S$, l'application $s \mapsto \pi_t(q_s)$ est continue, alors T vérifie l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|u\| + \|T\|$.*

Remarque I.4.3. Tout opérateur T faiblement compact sur X vérifie la condition de la Proposition I.4.2, et par conséquent l'identité $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$.

Nous voulons obtenir ce résultat pour les opérateurs dont l'adjoint a une image séparable. Commençons par un lemme qui sera utile dans la preuve de la proposition suivante :

Lemme I.4.4. ([Wer97, Lemma 2.3]) *Supposons que X soit uC_φ-bien plongé dans $C(S)$. Si $t_1, \ldots, t_k$ sont des points deux à deux non équivalent (pour la relation $\sim$), alors*

$$\|x^*\| \geq \sum_{j=1}^{k} \|\Pi_{t_j}(x^*)\|, \quad \textit{pour tout } x^* \in X^*.$$

Proposition I.4.5. *Soit X un espace uC_φ-bien plongé dans $C(S)$ satisfaisant la condition **(C3)**, et T un opérateur sur X tel que $T^*(X^*)$ soit séparable. Alors*

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\| + \|T\|$$

Démonstration. Considérons pour $\varepsilon > 0$ les ensembles $S_\varepsilon = \{s \in S \mid |\pi_s(q_s)| < \varepsilon\}$, où $q_s = (JT)^*(\delta_s)$. Si l'on montre que S_ε est dense dans S, pour chaque $\varepsilon > 0$, alors T remplit la condition de la Proposition I.4.1.

Soit $\{\psi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ une partie dense de $T^*(X^*)$ et posons

$$A = \big\{s \in S \mid \pi_s(\psi_n) = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\big\}.$$

Comme dans la preuve du Théorème I.3.16 nous voulons montrer que :

i) A est dense dans S

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ A \subset S_\varepsilon$.

La preuve de *ii*) est identique à celle du Théorème I.3.16. Pour *i*), on montre que $S \backslash A$ est d'intérieur vide. En effet

$$S \backslash A = \bigcup_{n \geq 0} \big\{s \in S \mid \pi_s(\psi_n) \neq 0\big\} = \bigcup_{n \geq 0} \bigcup_{p \geq 1} A_{n,p}$$

où $A_{n,p} = \{s \in S \mid |\pi_s(\psi_n)| > \frac{1}{p}\}$. D'après le Lemme I.4.4, il existe un nombre fini de classes d'équivalences distinctes pour $\sim$ dans $A_{n,p}$ (moins que $p\|\psi_n\|/\|u\|$). Ces classes sont fermées d'intérieurs vides (par la condition **(C3)**). Le théorème de Baire affirme qu'alors $S \backslash A$ est contenu dans un ensemble d'intérieur vide, ce qui signifie que A est dense dans S. □

Dans l'hypothèse où X est séparable, nous avons la même conclusion que dans le Corollaire I.3.18.

Corollaire I.4.6. *Supposons que l'espace séparable X soit uC_φ-bien plongé dans $C(S)$, vérifie la condition **(C3)**, et que T soit un opérateur sur X se factorisant par un espace Asplund. Alors*

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\| + \|T\|$$

I.4.2 Applications

Tout d'abord on peut évidemment appliquer ces résultats dans le cas $X = C(S)$, avec J étant l'opérateur identité sur $C(S)$. Si $\varphi : S \to S$ est continue et si $u \in C(S)$ avec $u \neq 0$, alors $p_s = u(s)\delta_{\varphi(s)}$ de sorte que la condition **(C1)** force $|u|$ à être constant égal à $\|u\|_\infty$. Alors $\Pi_s : \mu \in C(S)^* \mapsto \big(\mu(\{\varphi(s)\})/u(s)\big)p_s$ est une L-projection, et la condition **(C2)** est vérifiée. Enfin pour s et t dans S,

$$\begin{aligned} s \sim t &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{T},\ p_s = \lambda p_t \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{T},\ |u(s)|\delta_{\varphi(s)} = \lambda |u(t)|\delta_{\varphi(t)} \\ &\Leftrightarrow \varphi(s) = \varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi $E_s = \varphi^{-1}\big(\{\varphi(s)\}\big)$. La condition **(C3)** est donc satisfaite si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide pour tout $t \in S$. On retrouve donc la plupart des résultats de la section I.3.

On s'intéresse au cas de l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$. Rappelons que $A(\mathbb{D})$ est l'algèbre des fonctions continues sur $\overline{\mathbb{D}}$ qui sont holomorphes sur $\mathbb{D}$, munie de la norme infinie $\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \mid z \in \mathbb{D}\}$. Pour plus d'informations sur l'algèbre du disque, le lecteur peut se référer au livre [Ho88]. En considérant une fonction non identiquement nulle $u \in A(\mathbb{D})$ et φ dans l'algèbre du disque avec $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, on peut définir l'opérateur de composition à poids uC_φ qui agit continûment sur $A(\mathbb{D})$, avec $\|uC_\varphi\| = \|u\|_\infty$. On supposera dans la suite que φ n'est pas constante (ce qui implique en particulier que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$), sinon uC_φ est un opérateur de rang 1 et ne peut pas être un centre de Daugavet. En outre, uC_φ est compact sur $A(\mathbb{D})$ si et seulement si $|\varphi| < 1$ sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{T} \mid u(z) \neq 0\}$ (voir [Kam79]). Par conséquent, une condition nécessaire pour que tout opérateur faiblement compact sur $A(\mathbb{D})$ vérifie l'équation (E) est que $\|\varphi\|_\infty = 1$. En fait, nous allons montrer qu'une forte négation de « uC_φ est compact » est nécessaire.

Considérons l'isométrie naturelle $J : f \in A(\mathbb{D}) \mapsto J(f) = f_{|_{\mathbb{T}}} \in C(\mathbb{T})$. Il est bien connu que l'image de $A(\mathbb{D})$ par J est le sous-espace fermé $C_{\mathbb{N}}$ constitué des fonctions continues sur $\mathbb{T}$ à spectre dans $\mathbb{N}$, introduit dans la section I.1.2. Nous voulons des conditions sur φ et u impliquant que $A(\mathbb{D})$ soit uC_φ-bien plongé dans $C(\mathbb{T})$, et que de plus la condition **(C3)** soit remplie.

Pour $\omega \in \mathbb{T}$, posons

$$p_\omega := (uC_\varphi)^* J^*(\delta_\omega) = u(\omega)\delta_{\varphi(\omega)_{|_{A(\mathbb{D})}}} \in A(\mathbb{D})^*.$$

Clairement $\|p_\omega\| = |u(\omega)|$, donc **(C1)** est vérifiée si et seulement si $|u|$ est constant sur $\mathbb{T}$. On suppose donc que $|u|$ est constant sur $\mathbb{T}$. Pour vérifier la condition **(C2)**, nous devons montrer que $\ker(p_\omega)$ est un M-idéal. Mais

$$\begin{aligned}\ker(p_\omega) &= \{f \in A(\mathbb{D}) \mid u(\omega) f\big(\varphi(\omega)\big) = 0\} \\ &= \{f \in A(\mathbb{D}) \mid f\big(\varphi(\omega)\big) = 0\}\end{aligned}$$

car $u(\omega) \neq 0$. C'est un M-idéal si et seulement si $\varphi(\omega) \in \mathbb{T}$ (voir [HaWerWer93], p. 4). Cela signifie que **(C2)** est satisfaite si $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Enfin, si $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{T}$,

$$\begin{aligned}\omega_1 \sim \omega_2 &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{T},\ p_{\omega_1} = \lambda p_{\omega_2} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{T},\ |u(\omega_1)|\delta_{\varphi(\omega_1)} = \lambda |u(\omega_2)| \delta_{\varphi(\omega_2)} \text{ sur } A(\mathbb{D}) \\ &\Leftrightarrow \varphi(\omega_1) = \varphi(\omega_2).\end{aligned}$$

Ainsi $E_\omega = \varphi^{-1}\big(\{\varphi(\omega)\}\big) \cap \mathbb{T}$. Si φ n'est pas constante, alors la condition **(C3)** est vérifiée.

Pour résumer, nous avons :

Proposition I.4.7. *Soit φ une fonction intérieure et u un multiple d'une fonction intérieure. Si l'adjoint de $T : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ a une image séparable, alors l'équation $\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|$ est satisfaite.*

On rappelle que φ est une fonction intérieure si $|\varphi| = 1$ sur $\mathbb{T}$, ou de manière équivalente si $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Comme $A(\mathbb{D})$ est séparable, la Remarque I.3.19 et le Corollaire I.4.6 donnent :

Corollaire I.4.8. *Soit φ une fonction intérieure et u un multiple d'une fonction intérieure. Alors tout opérateur faiblement compact $T : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ vérifie l'équation*

$$\|uC_\varphi + T\| = \|u\|_\infty + \|T\|.$$

Ce corollaire mène à la remarque suivante sur les normes essentielles (généralisées) d'opérateurs de composition à poids sur l'algèbre du disque.

Remarque I.4.9. Soit X un espace de Banach, $B(X)$ l'espace des opérateurs agissant sur X, $\mathcal{K}(X)$ le sous-espace fermé de $B(X)$ constitué des opérateurs compacts sur X et $\mathcal{W}(X)$ le sous-espace fermé de $B(X)$ constitué des opérateurs faiblement compacts sur X. On rappelle que si $\mathcal{I}$ est un sous-espace fermé de $B(X)$, la norme essentielle (relative à $\mathcal{I}$) de $S \in B(X)$ est la distance de S à $\mathcal{I}$:

$$\|S\|_{e,\mathcal{I}} = \inf\{\|S - T\|;\ T \in \mathcal{I}\}.$$

C'est la norme canonique dans l'espace quotient $B(X)/\mathcal{I}$. Le cas classique correspond au cas $\mathcal{I} = \mathcal{K}(X)$ des opérateurs compacts. Dans ce cas, l'espace quotient ci-dessus est l'algèbre de Calkin. Les normes essentielles généralisées d'opérateurs de composition à poids sur l'algèbre du disque sont estimées dans [Le09]. Quand $\mathcal{I} \subset \mathcal{W}\big(A(\mathbb{D})\big)$, et dans le cas particulier où φ est une fonction intérieure (avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$) et u est un multiple d'une fonction intérieure, le Corollaire I.4.8 ne donne pas seulement la norme essentielle relative à $\mathcal{I}$ de uC_φ, mais aussi comment la norme de uC_φ réagit sous la perturbation par un opérateur dans la classe $\mathcal{I}$.

Bien que la méthode employée nous donne des conditions suffisantes pour qu'un opérateur de composition à poids soit un centre de Daugavet sur $A(\mathbb{D})$, il s'avère qu'elles sont également nécessaires.

Proposition I.4.10. *Supposons que uC_φ soit un centre de Daugavet sur $A(\mathbb{D})$. Alors φ est intérieure et $|u|$ est constant sur $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que φ ne soit pas intérieure. Alors il existe $\omega \in \mathbb{T}$ tel que $|\varphi(\omega)| = r < 1$. Comme u n'est pas constante égale à zéro sur aucun ouvert, on peut supposer, quitte à prendre un $\omega' \in \mathbb{T}$ proche de ω, que $u(\omega) \neq 0$. Soit $g \in A(\mathbb{D})$ définie par $g(z) = (1 + \bar{\omega} z)/2$, $z \in \mathbb{D}$. Considérons l'opérateur T de rang 1 défini par $T : f \mapsto Tf = u(\omega) f\big(\varphi(\omega)\big) g$ pour tout $f \in A(\mathbb{D})$. On a $\|T\| = |u(\omega)|$. Pour $0 < \varepsilon < \min(1 - r, |u(\omega)|/3)$, il existe un arc $I_\omega \subset \mathbb{T}$ contenant ω tel que pour tout $z \in I_\omega$, on ait $|\varphi(z) - \varphi(\omega)| \leq \varepsilon$, $|1 - g(z)| < 1/2$ et $|u(z) - u(\omega)| < \varepsilon$. Soit $f \in A(\mathbb{D})$ avec $\|f\|_\infty = 1$:

$$\|uC_\varphi(f) - Tf\| = \sup_{|z|=1} \big| u(z) f\big(\varphi(z)\big) - u(\omega) f\big(\varphi(\omega)\big) g(z) \big|$$

Si $z \notin I_\omega$, alors $\big| u(z) f\big(\varphi(z)\big) - u(\omega) f\big(\varphi(\omega)\big) g(z) \big| \leq \|u\|_\infty + |u(\omega)| \sup\limits_{z \in \mathbb{T} \setminus I_\omega} |g(z)|$.

Pour tous $a, b \in D(0, r + \varepsilon)$, la formule de Cauchy nous donne :

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=1} \frac{a - b}{(z - a)(z - b)} f(z) \mathrm{d}z \right| \\ &\leq \frac{|a - b|}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\big| f\big(e^{i\theta}\big) \big|}{\big|e^{i\theta} - a\big| \big|e^{i\theta} - b\big|} \mathrm{d}\theta \\ &\leq \frac{|a - b|}{\big(1 - (r + \varepsilon)\big)^2}. \end{aligned}$$

Pour tout $z \in I_\omega$ on a $\varphi(z) \in D(0, r+\varepsilon)$ et :

$$\begin{aligned}\big|\big(uC_\varphi(f) - Tf\big)(z)\big| &= \big|u(z)f\big(\varphi(z)\big) - u(\omega)f\big(\varphi(\omega)\big)g(z)\big| \\ &\leq |u(z)|\big|f\big(\varphi(z)\big) - f\big(\varphi(\omega)\big)\big| + |u(z) - u(\omega)|\big|f\big(\varphi(\omega)\big)\big| \\ &\quad + \big|u(\omega)f\big(\varphi(\omega)\big)\big||1 - g(z)| \\ &\leq \|u\|_\infty\left(\frac{\varepsilon}{\big(1-(r+\varepsilon)\big)^2}\right) + \varepsilon + \frac{|u(\omega)|}{2} \\ &\leq \|u\|_\infty + \frac{5}{6}|u(\omega)|\end{aligned}$$

pour un $\varepsilon > 0$ assez petit. Donc

$$\|uC_\varphi(f) - Tf\| \leq \max\left(\|u\|_\infty + \frac{5}{6}|u(\omega)|, \|u\|_\infty + |u(\omega)|\delta\right),$$

où $\delta = \sup_{z \in \mathbb{T}\setminus I_\omega} |g(z)| < 1$. Ceci montre que $\|uC_\varphi - T\| < \|u\|_\infty + |u(\omega)| = \|uC_\varphi\| + \|T\|$ ce qui est absurde car uC_φ est un centre de Daugavet. Donc φ est une fonction intérieure.

On utilise un argument similaire pour montrer que $|u|$ est constant sur le cercle unité. □

Résumons le résultat obtenu :

Théorème I.4.11. *Soient $\varphi \in A(\mathbb{D})$ vérifiant $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $u \in A(\mathbb{D})$. L'opérateur $uC_\varphi : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ est un centre de Daugavet si et seulement si φ est intérieure et u est un multiple d'une fonction intérieure.*

Ajoutons qu'une fonction intérieure non constante $\varphi \in A(\mathbb{D})$ est nécessairement un produit de Blaschke fini (car elle ne possède qu'un nombre fini de zéros dans $\mathbb{D}$). Autrement dit il existe $n \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{T}$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{D}$ tels que

$$\varphi(z) = \alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}.$$

Par conséquent les opérateurs de composition à poids qui sont des centres de Daugavet sur $A(\mathbb{D})$ sont de la forme

$$uC_\varphi(f)(z) = \beta f\left(\alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}\right)$$

ou

$$uC_\varphi(f)(z) = \beta \prod_{k=1}^{m} \frac{b_k - z}{1 - \overline{b_k}z} f\left(\alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k}z}\right)$$

avec $m, n \geq 1$, $\beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{T}$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{D}$.

Remarque I.4.12. Le cas de l'algèbre du disque est différent du cas $C(S)$. En effet on a vu qu'une fonction $\varphi : S \to S$ pouvait induire un opérateur de composition C_φ sur $C(S)$ qui est une isométrie mais qui n'est pas un centre de Daugavet. Si $\varphi \in A(\mathbb{D})$ vérifie $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, alors φ est intérieure si et seulement si C_φ est une isométrie, et donc C_φ est une isométrie si et seulement si C_φ est un centre de Daugavet.

Enfin notons que dans le cas particulier où φ est un automorphisme du disque, il est clair que C_φ est un centre de Daugavet car c'est une isométrie surjective sur un espace ayant la propriété de Daugavet.

I.5 Centres de Daugavet de Lip(K_1) dans Lip(K_2)

I.5.1 Introduction

Soit (K, d) un espace métrique non réduit à un singleton. Une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est dite lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ telle que pour tout $x, y \in K$ on ait $|f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)$. L'espace des fonctions lipschitziennes sur K est muni de la semi-norme

$$\|f\| = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x, y)} \mid x \neq y \in K \right\}.$$

L'espace Lip(K) est l'espace des (classes) de fonctions obtenues en identifiant les fonctions constantes. Par abus de langage on parlera de fonction lipschitzienne au lieu de classe de fonctions, comme c'est le cas pour les espaces L^p. L'espace Lip(K) muni de la norme $\|.\|$ est alors un espace de Banach.

La question de savoir si l'espace de Lipschitz Lip(Q) où $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ est le carré unité muni de la distance euclidienne possède la propriété de Daugavet est soulevée dans [Wer01]. Ce résultat est clair pour Lip($[0, 1]$) car ce dernier est isométriquement isomorphe à $L^\infty([0, 1])$ via le théorème de Lebesgue, et par conséquent possède la propriété de Daugavet. Le problème dans le cadre général d'un espace métrique complet K a été traité par Y. Ivakhno, V. Kadets et D. Werner dans [IKadWer07]. Contrairement aux espaces de fonctions classiques où avoir la propriété de Daugavet est équivalent à des conditions de non-atomicité (pas de point isolé dans K pour $C(K)$ [FoiSin65], pas d'atome pour la mesure μ pour $L^1(\mu)$ [FoiSin65], pas de point isolé dans la frontière de Choquet des algèbres uniformes [Wer97]), c'est une condition locale qui joue un rôle similaire. Plus précisément, ils donnent la définition suivante :

Définition I.5.1. *Soit (K, d) un espace métrique. L'espace K est dit* local *si pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque $f \in$ Lip(K) il existe $x \neq y$ tels que $d(x, y) < \varepsilon$ et $f(x) - f(y) > (\|f\| - \varepsilon)d(x, y)$.*

Autrement dit, un espace métrique K est local si chaque fonction $f \in \mathrm{Lip}(K)$ atteint presque sa norme en des points qui sont arbitrairement proches. Citons pour exemple d'espace local tout ensemble à la fois convexe et complet dans un espace normé (voir Proposition I.5.11 ci-après). Cette condition de localité caractérise les espaces métriques compacts K pour lesquels $\mathrm{Lip}(K)$ a la propriété de Daugavet :

Théorème I.5.2. ([IKadWer07, Theorem 3.3]) *Soit K un espace métrique compact. Alors $\mathrm{Lip}(K)$ a la propriété de Daugavet si et seulement si K est local.*

Il est intéressant de souligner que l'espace de Hölder $H^\alpha([0,1])$ qui consiste en les fonctions α-höldérienne définies sur $[0,1]$ ne possède pas la propriété de Daugavet pour $0 < \alpha < 1$, car c'est le dual d'un espace ayant la propriété de Radon-Nikodym [Wea99, p. 83]. L'espace $H^\alpha([0,1])$ est simplement l'espace $\mathrm{Lip}(K)$ pour $K = [0,1]$ muni de la métrique $d_\alpha(x,y) = |x-y|^\alpha$.

Dans la première partie de cette section, nous donnons une caractérisation géométrique des centres de Daugavet dans un contexte général qui apparaît dans [BoKad10], pour ensuite donner une condition nécessaire et des conditions suffisantes pour qu'un opérateur de composition C_φ soit un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}(K)$. Nous verrons qu'il doit y avoir un certain équilibre entre les propriétés de l'espace K et celles du symbole φ. Enfin nous nous intéressons au cas particulier $K = [0,1]$ où l'identification entre $\mathrm{Lip}([0,1])$ et $L^\infty([0,1])$ nous permet d'obtenir une caractérisation des symboles φ pour lesquels l'opérateur C_φ est un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$.

I.5.2 Caractérisation géométrique des centres de Daugavet

Dans les sections I.3 et I.4 nous avons fourni des exemples de centres de Daugavet sur $C(S)$ et sur $A(\mathbb{D})$ se basant sur une description de l'espace dual $C(S)^* = M(S)$. Dans un cadre général on utilise le lemme suivant, qui est le lemme clé dans l'étude de la propriété de Daugavet. Il permet de caractériser les espaces ayant la propriété de Daugavet en termes de tranches de la boule unité fermée de l'espace en question. Nous donnons ici la version avec centre dans le cas réel qui apparait dans [BoKad10].

Lemme I.5.3. *Soient X et Y des espaces de Banach, et $G \in B(X,Y)$ un opérateur de norme 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) G est un centre de Daugavet

ii) pour tous $y_0 \in S_Y$, $x_0^* \in S_{X^*}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $x \in B_X$ tel que $x_0^*(x) \geq 1-\varepsilon$ et $\|Gx + y_0\| > 2 - \varepsilon$.

En passant à l'opérateur adjoint, on obtient également une version duale de *ii*). Pour appliquer le Lemme I.5.3 il est nécessaire de bien connaitre l'espace dual X^*. Dans notre contexte nous n'avons pas de description satisfaisante de l'espace $\mathrm{Lip}(K)^*$, et par conséquent nous aurons besoin d'une autre caractérisation ne faisant pas intervenir l'espace dual.

Soit Y un espace de Banach et A une partie bornée non vide de Y. Pour $y \in Y$ on note $r_y(A)$ le rayon de la plus petite boule de centre y contenant A. Autrement dit,

$$r_y(A) = \sup\{\|y-a\| \mid a \in A\}.$$

Définition I.5.4. *On dit que A est une* quasi-boule *si pour chaque $y \in Y$, on a*

$$r_y(A) = \|y\| + r_0(A).$$

Théorème I.5.5. ([BoKad10, Theorem 2.7]) *Soient X, Y deux espaces de Banach. Un opérateur $G \in S_{B(X,Y)}$ est un centre de Daugavet si et seulement s'il satisfait les deux conditions suivantes :*

1) l'ensemble $A := G(B_X)$ est une quasi-boule ;

2) pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $y \in S_Y$, on a

$$\overline{\mathrm{conv}}\{x \in (1+\varepsilon)B_X \mid \|Gx+y\| > r_y(G(B_X)) - \varepsilon\} \supset B_X.$$

Remarque I.5.6. Notons que pour montrer que $A := G(B_X)$ est une quasi-boule, il suffit de montrer l'égalité $r_y(A) = \|y\| + r_0(A) = \|y\| + \|G\|$ pour les élément y de la sphère unité de Y, puis on l'étend à Y en utilisant la propriété suivante : si $y \in S_Y$ vérifie $r_y(A) = 1 + r_0(A) = 1 + \|G\|$, alors pour tout $\alpha > 0$ on a $r_{\alpha y}(A) = \alpha + \|G\|$. En effet, étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $a \in A$ vérifiant $\|y-a\| > 1 + \|G\| - \varepsilon$. Si $\alpha \geq 1$ on écrit que $\|\alpha y - a\| = \|\alpha(y-a) + (\alpha-1)a\| \geq \alpha\|y-a\| - (\alpha-1)\|a\| > \alpha(1+\|G\|-\varepsilon) - (\alpha-1)\|G\| \geq \alpha + \|G\| - \alpha\varepsilon$, ce qui donne le résultat voulu. On utilise un argument similaire pour le cas où $\alpha < 1$.

La condition 2) du Théorème I.5.5 est en fait une condition d'anti-dentabilité pour $G(B_X)$. En effet elle peut se reformuler de la manière suivante :

2') pour tout $y \in S_Y$ et pour tout $0 \leq r < r_y\left(G(B_X)\right)$,

$$\overline{\mathrm{conv}}\left(B_X \backslash G^{-1}\left(B(y,r)\right)\right) \supset B_X,$$

et c'est ainsi qu'elle est formulée dans [BoKad10]. C'est d'ailleurs grâce à cette caractérisation que l'on montre qu'un opérateur fortement Radon-Nikodym vérifie l'équation $\|G+T\| = \|G\| + \|T\|$ quand G est un centre de Daugavet.

Dans la suite, on considérera (K_1, d) et (K_2, ρ) deux espaces métriques complets, et $\varphi : K_2 \to K_1$ désignera une application lipschtizienne de norme 1, *i.e.* $\sup_{x \neq y} d(\varphi(x), \varphi(y))/\rho(x,y) = 1$. Alors l'opérateur de composition C_φ défini sur $\mathrm{Lip}(K_1)$ à valeurs dans $\mathrm{Lip}(K_2)$ par $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ est borné, et $\|C_\varphi\| = \|\varphi\| = 1$.

I.5.3 Une condition nécessaire

Les boules considérées seront ouvertes sauf mention explicite du contraire.

Lemme I.5.7. *Soit* $B(x_0, r) \subset K_2$ *et* $\delta > 0$. *Il existe* $f \in \mathrm{Lip}(K_2)$ *de norme* 1 *telle que*

$$\{(x,y) \in K_2^2 \mid \ |f(x) - f(y)| > (1-\delta)\rho(x,y)\} \subset B(x_0,r) \times B(x_0,r). \tag{I.5.1}$$

Démonstration. Commençons par noter $U = B(x_0, r)$. Posons $\delta' = 2\delta$ et choisissons des nombres réels r_1, r_2 et r_3 vérifiant $r_3 = r/(3 - 3\delta' + \delta'^2)$, $r_1 = (1-\delta')r_2 = (1-\delta')^2 r_3$ de sorte que $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r$ et $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Posons ensuite $V = B(x_0, r_1)$ et $W = B(x_0, r_1 + r_2)$. On définit une fonction $\tilde{f}$ sur $V \cup (K_2 \backslash W)$ par $\tilde{f} = 0$ sur $K_2 \backslash W$ et $\tilde{f}(x) = r_1 - \rho(x, x_0)$ si $x \in V$. Alors $\tilde{f}$ est lipschitzienne de norme 1 sur $V \cup (K_2 \backslash W)$. En effet, c'est clair sur V et sur $K_2 \backslash W$. De plus, si $x \notin W$ et $y \in V$, alors $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| = |\tilde{f}(y)| = r_1 - \rho(y, x_0) \leq r_1 \leq (1-\delta')r_2 \leq (1-\delta)r_2$. Mais $\rho(x,y) \geq \rho(y, K_2 \backslash W) \geq r_2$. Ainsi, $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(y)| \leq (1-\delta)\rho(x,y)$. De plus chaque $x \in V$ vérifie $|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(x_0)| = \rho(x, x_0)$ ce qui implique que $\|\tilde{f}\| = 1$. Par le théorème d'extension de McShane [BeLin00, p. 12–13], on peut prolonger $\tilde{f}$ à K_2 en une fonction f lipschitzienne en conservant la norme de $\tilde{f}$. Il nous reste à vérifier que cette fonction satisfait la condition (I.5.1). Autrement dit, x et y jouant des rôles symétriques dans (I.5.1), vérifions que si $x \notin U$ alors $|f(x) - f(y)| \leq (1-\delta)\rho(x,y)$ pour tout y dans K_2. Il y a 3 cas possibles : $y \in V, y \in K_2 \backslash W$ et $y \in W \backslash V$. Le premier cas a déjà été traité précédemment. Le deuxième cas est clair puisqu'alors $f(x) = f(y) = 0$. Pour le dernier cas, prenons $y \in W \backslash V$. On a alors $\rho(x,y) \geq \rho(y, K_2 \backslash U) \geq r_3$. Choisissons $z \in U \backslash W$ satisfaisant $\rho(y,z) \leq \rho(y, U \backslash W) + \delta r_3$. Alors $|f(y)| = |f(y) - f(z)| \leq \rho(y,z) \leq \rho(y, U \backslash W) + \delta r_3 \leq r_2 + \delta r_3 \leq (1 - \delta' + \delta) r_3 \leq (1-\delta) r_3 \leq (1-\delta)\rho(x,y)$ ce qui finit la preuve du lemme. $\square$

Théorème I.5.8. *Supposons qu'il existe un ouvert non vide* $U \subset K_2$ *et un réel* $\delta > 0$ *tels que pour chaque élément* x, y *appartenant à* U *on ait* $d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq (1-\delta)\rho(x,y)$. *Alors* $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}(K_1)})$ *n'est pas une quasi-boule. En particulier,* C_φ *n'est pas un centre de Daugavet.*

Démonstration. Notons $X = \mathrm{Lip}(K_1)$ et $Y = \mathrm{Lip}(K_2)$. Tout d'abord remarquons que $r_0(C_\varphi(B_X)) = \sup\{\|0 - g\| \mid \ g \in C_\varphi(B_X)\} = \|C_\varphi\| = 1$. Il s'agit donc de trouver une fonction $f \in S_Y$ qui vérifie $r_f(C_\varphi(B_X)) < 2$. On peut supposer que l'ouvert U est une boule de rayon $r > 0$ centrée en $x_0 \in K_2$. D'après le Lemme I.5.7, il existe une fonction $f \in Y$ de norme 1 qui vérifie $\forall x, y \in K_2, \ |f(x) - f(y)| > (1-\delta)\rho(x,y) \Rightarrow x, y \in U$. Soit $u \in B_X$. Si $x, y \in U$ on a

$$\left|\frac{u(\varphi(x)) - u(\varphi(y))}{\rho(x,y)}\right| = \left|\frac{u(\varphi(x)) - u(\varphi(y))}{d(\varphi(x), \varphi(y))}\right| \cdot \left|\frac{d(\varphi(x), \varphi(y))}{\rho(x,y)}\right| \leq (1-\delta)\|u\| \leq 1 - \delta,$$

et donc

$$\left|\frac{(f + u \circ \varphi)(x) - (f + u \circ \varphi)(y)}{\rho(x,y)}\right| \leq \left|\frac{f(x) - f(y)}{\rho(x,y)}\right| + \left|\frac{u(\varphi(x)) - u(\varphi(y))}{\rho(x,y)}\right| \leq 2 - \delta.$$

De plus, si $x \notin U$ ou $y \notin U$, alors

$$\left|\frac{(f+u\circ\varphi)(x)-(f+u\circ\varphi)(y)}{\rho(x,y)}\right| \leq \left|\frac{f(x)-f(y)}{\rho(x,y)}\right| + \|u\circ\varphi\| \leq (1-\delta)+1 \leq 2-\delta.$$

On en déduit que $\|f+u\circ\varphi\| \leq 2-\delta$ pour chaque $u \in B_X$, et que donc $r_f(C_\varphi(B_X)) \leq 2-\delta$, d'où le résultat. □

Corollaire I.5.9. *Si l'opérateur de composition C_φ est un centre de Daugavet, alors pour tout ouvert non vide $U \subset K_2$, on a*

$$\sup_{x\neq y\in U} d(\varphi(x),\varphi(y))/\rho(x,y) = 1.$$

I.5.4 Une condition suffisante

Nous avons besoin tout d'abord d'introduire la notion suivante :

Définition I.5.10. *Soit (K,d) un espace métrique. Pour $\varepsilon > 0$ on dit que $t \in K$ est un* ε-point *pour $f \in \mathrm{Lip}(K)$ si dans chaque voisinage $U \subset K$ de t, il existe $x, y \in U$ satisfaisant $f(x) - f(y) > (\|f\| - \varepsilon)d(x,y)$.*

La notion de ε-point est cruciale dans l'étude de la propriété de Daugavet pour Lip(K). Il est clair que dans le cas d'un espace métrique quelconque l'existence de ε-points pour une fonction lipschitzienne donnée n'est pas garantie. Pour cela nous nous placerons dans le contexte particulier des parties convexes d'espaces vectoriels normés. La proposition qui suit nous fournit une information sur le nombre de ε-points d'une fonction lipschitzienne sur un tel espace. La preuve est juste une précision de celle donnée dans [IKadWer07].

Proposition I.5.11. *Soit K_2 une partie convexe d'un espace normé. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in \mathrm{Lip}(K_2)$, l'ensemble des ε-points pour f est infini non-dénombrable.*

Démonstration. Supposons que f soit de norme 1 et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x, y \in K_2$ tels que $f(x) - f(y) > (1-\varepsilon)\rho(x,y)$. Notons $a = \rho(x,y) = \|x-y\|$ et définissons $\gamma : t \in [0,a] \mapsto \gamma(t) = (1-t/a)x + (t/a)y \in K_2$ et $F : [0,a] \to \mathbb{R}$ par $F(t) = f(\gamma(t))$. La fonction F est 1-lipschitzienne, et donc est dérivable presque partout avec $|F'| \leq 1$ p.p. On a alors

$$\int_0^a F'(t)\mathrm{d}t = F(a) - F(0) = f(x) - f(y) > (1-\varepsilon)a.$$

On en déduit qu'il existe un ensemble $A \subset [0,a]$ de mesure strictement positive tel que $F' > 1-\varepsilon$ sur A. Il reste à montrer que chaque élément de la forme $\gamma(t)$ où $t \in A$ est un ε-point pour f. Mais si $t \in A$, alors pour tout voisinage U de t il existe $\delta_t > 0$ tel que $f(\gamma(t+\delta_t)) - f(\gamma(t)) > (1-\varepsilon)\delta_t = (1-\varepsilon)\rho(\gamma(t+\delta_t),\gamma(t))$ avec $t+\delta_t \in U$. Ainsi $\gamma(t)$ est un ε-point pour f. □

À noter que la preuve reste vraie pour des parties K_2 plus générales, comme les espaces *métriquement convexes* et complets, c'est-à dire les espaces complets (K_2, ρ) vérifiant

$$B_f(x_1, r_1) \cap B_f(x_2, r_2) \neq \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \rho(x_1, x_2) \leq r_1 + r_2,$$

où $B_f(x_i, r_i)$ désigne la boule fermée de centre x_i de rayon r_i (*c.f.* [IKadWer07]). Ces espaces sont caractérisés par la propriété suivante : Si $x \neq y \in K_2$, alors il existe une isométrie $\chi : [0, a] \to K_2$ qui vérifie $\chi(0) = x$ et $\chi(a) = y$, où $a = \rho(x, y)$.

Pour $t \in K_2$, on note $\mathcal{V}_t$ l'ensemble des voisinages de t. Au regard de la condition nécessaire sur φ obtenue dans le Corollaire I.5.9, on s'intéresse aux points où φ atteint presque sa norme. On donne donc la définition suivante :

Définition I.5.12. *On dit que $t \in K_2$ est localement presque isométrique pour φ si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists U \in \mathcal{V}_t,\ \forall x, y \in U,\ d(\varphi(x), \varphi(y)) \geq (1 - \varepsilon)\rho(x, y).$$

On notera dans la suite $X = \mathrm{Lip}(K_1)$ et $Y = \mathrm{Lip}(K_2)$.

Proposition I.5.13. *Supposons que K_2 soit une partie convexe d'un espace normé (ou une partie métriquement convexe et complète). Si l'ensemble des points de K_2 qui ne sont pas localement presque isométriques pour φ est au plus dénombrable, alors $C_\varphi(B_X)$ est une quasi-boule.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute fonction $f \in Y$ on a $\sup\{\|f + u \circ \varphi\| \mid u \in B_X\} > \|f\| + 1 - \varepsilon$. D'après la Remarque I.5.6 on peut se restreindre au cas $\|f\| = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, et d'après la Proposition I.5.11, on peut trouver une infinité non-dénombrable de $\varepsilon/2$-points pour f. Par hypothèse sur φ, il existe un point $t \in K_2$ qui soit à la fois un $\varepsilon/2$-point pour f et localement presque isométrique pour φ. Soit U un voisinage de t tel que $d(\varphi(x), \varphi(y)) \geq (1 - \varepsilon/2)\rho(x, y)$, pour tous $x, y \in U$. Il existe $x_1, y_1 \in U$ tels que $f(x_1) - f(y_1) > (1 - \varepsilon/2)\rho(x_1, y_1)$. Posons $u(x) = d(x, \varphi(y_1))$ pour $x \in K_1$. Il est clair que u appartient à X et $\|u\| = 1$. De plus,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{(f + u \circ \varphi)(x_1) - (f + u \circ \varphi)(y_1)}{\rho(x_1, y_1)} \right| &= \frac{f(x_1) - f(y_1)}{\rho(x_1, y_1)} + \frac{u(\varphi(x_1)) - u(\varphi(y_1))}{\rho(x_1, y_1)} \\
&= \frac{f(x_1) - f(y_1)}{\rho(x_1, y_1)} + \frac{d(\varphi(x_1), \varphi(y_1))}{\rho(x_1, y_1)} \\
&> 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq 2 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\|f + u \circ \varphi\| > 2 - \varepsilon$. □

Le lemme qui suit permet de contrôler la constante de Lipschitz d'une fonction sur un ensemble si on connait sa constante de Lipschitz sur un certain sous-ensemble.

Lemme I.5.14. (Version de [IKadWer07]) *Soit $A = B \sqcup C$ un espace métrique, $r \in (0, 1/2]$, $\delta < r^2/5$, $d(B, C) \geq r - \delta/2$. Supposons que $\tilde{C} \subset C$ soit un δ-réseau de C tel que chaque point de $\tilde{C}$ soit à une distance au moins r des autres éléments de $\tilde{C}$, et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction 1-lipschitzienne sur $B \sqcup \tilde{C}$ et aussi $(1+r)$-lipschitzienne sur chaque boule $B_A(t, \delta)$ pour $t \in \tilde{C}$. Alors f est $(1+r)$-lipschitzienne sur A.*

Proposition I.5.15. *Soit K_2 une partie convexe d'un espace normé (ou une partie métriquement convexe et complète). Supposons que l'ensemble des points de K_2 qui ne sont pas localement presque isométriques pour φ soit au plus dénombrable et que pour tout $t \in K_1$ l'ensemble $\varphi^{-1}(\{t\})$ soit au plus dénombrable.*
Alors pour tous $g \in S_X$, $f \in Y$ et $\varepsilon > 0$, la fonction g appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{u \in (1+\varepsilon)B_X \mid \|f + u \circ \varphi\| > \|f\| + 1 - \varepsilon\}$.

Démonstration. On peut supposer $\|f\| = 1$ et $0 < \varepsilon < 1/2$. Soit n un nombre naturel, $n \geq 1$. Étant donné qu'il existe une infinité non dénombrable de $\varepsilon/2$-points pour f, on peut trouver $s_1, \ldots, s_n \in K_2$ des $\varepsilon/2$-points pour f qui soient localement presque isométriques pour φ. De plus, l'hypothèse faite sur φ nous permet de les choisir de sorte que $\varphi(s_i) \neq \varphi(s_j)$ si $i \neq j$. Choisissons ensuite $0 < r < \varepsilon$ de telle sorte que si on pose $U_i = B(\varphi(s_i), r)$, les U_i soient disjoints deux à deux. Comme s_i est un point localement presque isométrique pour φ, on peut trouver un voisinage de s_i tel que pour tous x, y dans ce voisinage on ait $d(\varphi(x), \varphi(y)) \geq (1 - r/2)\rho(x, y)$. Quitte à prendre un voisinage plus petit, on peut supposer que celui-ci est de la forme $B(s_i, \delta/2)$ où $\delta < r^2/5$. Il existe alors deux éléments x_i et y_i dans $B(s_i, \delta)$ vérifiant

$$\frac{f(x_i) - f(y_i)}{\rho(x_i, y_i)} > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \frac{d(\varphi(x_i), \varphi(y_i))}{\rho(x_i, y_i)} \geq 1 - \frac{r}{2}.$$

La fonction φ étant 1-lipschitzienne, on a $d(\varphi(x_i), \varphi(s_i)) \leq \rho(x_i, s_i) \leq \delta/2 < r$ et $d(\varphi(y_i), \varphi(s_i)) \leq \rho(y_i, s_i) \leq \delta/2 < r$ ce qui implique que $\varphi(x_i), \varphi(y_i) \in U_i$. Posons ensuite $u_i : (K_1 \backslash U_i) \sqcup \{\varphi(x_i), \varphi(y_i)\} \to \mathbb{R}$ qu'on définit par $u_i(\varphi(x_i)) = g(\varphi(x_i))$, $u_i(\varphi(y_i)) = g(\varphi(x_i)) + f(y_i) - f(x_i)$ et $u_i = g$ sur $K_1 \backslash U_i$. La fonction u_i est bien définie car $\varphi(x_i) \neq \varphi(y_i)$. On veut appliquer le lemme précédent avec $A = (K_1 \backslash U_i) \sqcup \{\varphi(x_i), \varphi(y_i)\}$, $B = K_1 \backslash U_i$, $C = \{\varphi(x_i), \varphi(y_i)\}$ et $\tilde{C} = \{\varphi(x_i)\}$. On a bien $d(B, C) \geq r - \delta/2$ et $\tilde{C}$ est un δ-réseau de C. Clairement, u_i est 1-lipschitzienne sur $B \sqcup \tilde{C}$ car g l'est. On a de plus

$$\frac{|u_i(\varphi(x_i)) - u_i(\varphi(y_i))|}{d(\varphi(x_i), \varphi(y_i))} = \frac{f(x_i) - f(y_i)}{d(\varphi(x_i), \varphi(y_i))} \leq \frac{\rho(x_i, y_i)}{d(\varphi(x_i), \varphi(y_i))} \leq (1 - \frac{r}{2})^{-1} \leq 1 + r$$

ce qui montre que u_i est $(1+r)$-lipschitzienne sur $B_A(\varphi(x_i), \delta) = C$. On en déduit bien que u_i est $(1+r)$-lipschitzienne sur $(K_1 \backslash U_i) \sqcup \{\varphi(x_i), \varphi(y_i)\}$.

On peut ensuite prolonger u_i à K_1 en gardant la même constante de Lipschitz ($\|u_i\| \leq 1 + r < 1 + \varepsilon$). On a alors :

$$\begin{aligned}\|f + u_i \circ \varphi\| &\geq \left| \frac{f(x_i) - f(y_i) + u_i(\varphi(x_i)) - u_i(\varphi(y_i))}{\rho(x_i, y_i)} \right| \\ &\geq 2\frac{f(x_i) - f(y_i)}{\rho(x_i, y_i)} \\ &> 2 - \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui implique que $u_i \in \{u \in (1+\varepsilon)B_X \mid \|f + u \circ \varphi\| \geq 2 - \varepsilon\}$. De plus,

$$\left\| g - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \right\| = \frac{1}{n}\left\| \sum_{i=1}^{n}(u_i - g) \right\| \leq \frac{4 + 2\varepsilon}{n}$$

car $\|u_i - g\| \leq 2 + \varepsilon$ et les supports des fonctions $u_i - g$ sont deux à deux disjoints. On en déduit que $g \in \overline{\text{conv}}\{u \in (1+\varepsilon)B_X \mid \|f + u \circ \varphi\| \geq 2 - \varepsilon\}$. □

Des propositions I.5.13 et I.5.15 et de la caractérisation des centres de Daugavet du Théorème I.5.5, on en déduit le résultat suivant :

Théorème I.5.16. *Supposons que K_2 soit une partie convexe d'un espace normé (ou une partie métriquement convexe et complète). Si l'ensemble des points de K_2 qui ne sont pas localement presque isométriques pour φ est au plus dénombrable et si pour tout $t \in K_1$ l'ensemble $\varphi^{-1}(\{t\})$ est au plus dénombrable, alors l'opérateur $C_\varphi : \mathrm{Lip}(K_1) \to \mathrm{Lip}(K_2)$ est un centre de Daugavet.*

Remarque I.5.17. Il est clair maintenant que si φ est une isométrie alors C_φ est un centre de Daugavet, bien que C_φ ne soit pas nécessairement une isométrie.

Revenons sur le début de la preuve de la Proposition I.5.15. Nous utilisons que pour toute fonction $f \in S_{\mathrm{Lip}(K_2)}$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons l'existence d'une suite de points $(s_n) \subset K_2$ qui vérifie : s_n est un ε-point pour f, s_n est localement presque isométrique pour φ et $\varphi(s_n) \neq \varphi(s_m)$ si $n \neq m$. Une fois cette condition remplie nous pouvons appliquer la suite de la preuve. Par conséquent nous pouvons toujours modifier les hypothèses faites sur K_2 et sur φ, tout en sachant que renforcer les hypothèses sur l'un permet d'affaiblir les hypothèses sur l'autre. Par exemple, si l'on supprime l'hypothèse de convexité et que l'on suppose simplement que l'espace K_2 est compact et local, alors nous pouvons montrer qu'il existe une infinité de ε-points pour $f \in \mathrm{Lip}(K_2)$ [IKadWer07, Lemma 2.6]. Ainsi pour faire fonctionner la preuve nous devons supposer que l'ensemble des points qui ne sont pas localement isométriques pour φ est fini, et que $\varphi^{-1}(\{t\})$ est fini pour tout $t \in K_1$. A contrario, si l'on renforce dans le Théorème I.5.16 l'hypothèse sur K_2, à savoir que K_2 soit de plus séparable, alors les ensembles $\varphi^{-1}(\{t\})$ sont automatiquement au plus dénombrables.

En effet, supposons qu'il existe $t \in K_1$ tel que $A := \varphi^{-1}(\{t\})$ soit non-dénombrable. Quitte à ôter un ensemble dénombrable à A, on peut supposer que tout élément de A est un localement presque isométrique pour φ. Ceci implique que chaque élément de A est isolé dans A, autrement dit : $\forall x \in A,\ \exists \delta_x > 0$ tel que $B(x, \delta_x) \cap A = \{x\}$. Si (x_n) est une suite dense dans K_2, alors à chaque $x \in A$ on lui associe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\rho(x, x_n) < \delta_x/2$. La fonction ainsi définie est une injection de A dans $\mathbb{N}$, ce qui est absurde.
Nous pouvons énoncer les corollaires suivants, obtenus selon que l'on soit plus ou moins restrictif sur K_2 ou sur φ :

Corollaire I.5.18. *Supposons que K_2 soit une partie compacte locale. Si l'ensemble des points de K_2 qui ne sont pas localement presque isométriques pour φ est fini et si pour tout $t \in K_1$ les ensembles $\varphi^{-1}(\{t\})$ sont finis, alors l'opérateur $C_\varphi : \mathrm{Lip}(K_1) \to \mathrm{Lip}(K_2)$ est un centre de Daugavet.*

Corollaire I.5.19. *Supposons que K_2 soit une partie convexe séparable d'un espace normé (ou une partie séparable métriquement convexe et complète). Si l'ensemble des points de K_2 qui ne sont pas localement presque isométriques pour φ est au plus dénombrable, alors l'opérateur $C_\varphi : \mathrm{Lip}(K_1) \to \mathrm{Lip}(K_2)$ est un centre de Daugavet.*

I.5.5 Cas particulier $K_2 = [0,1]$

Supposons que $K_2 = [0,1]$ muni de la distance usuelle, et que K_1 est muni d'une métrique d. On suppose toujours que $\varphi : [0,1] \to K_1$ est lipschitzienne de norme 1. Nous allons montrer que dans ce cas on peut faire un peu mieux que le Théorème I.5.16. Pour cela nous aurons besoin d'une précision sur l'ensemble des ε-points d'une fonction lipschitzienne sur $[0,1]$. La preuve du lemme qui suit est simplement une réécriture de celle de la Proposition I.5.11.

Lemme I.5.20. *Si $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ et si $\varepsilon > 0$, alors il existe un ensemble de mesure strictement positive formé de ε-points pour f.*

Par mesure on entend mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Par conséquent, nous avons une première condition suffisante :

Proposition I.5.21. *Si l'ensemble des points localement presque isométriques pour φ est de mesure pleine, alors $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}(K_1)})$ est une quasi-boule*

Démonstration. Soit $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ de norme 1 et soit $\varepsilon > 0$. La preuve est identique à celle de la proposition I.5.13 à partir du moment où l'on a trouvé un point qui est à la fois un $\varepsilon/2$-point pour f et localement presque isométrique pour φ. Mais comme l'ensemble des $\varepsilon/2$-points pour f est de mesure strictement positive et que l'ensemble des points localement presque isométriques pour φ est de mesure pleine, il est clair qu'on peut trouver un tel point. $\square$

Remarque I.5.22. Notons que si l'ensemble des points localement presque isométriques pour φ est de mesure pleine, alors les ensembles $\varphi^{-1}(\{t\})$ sont de mesure nulle pour chaque $t \in [0,1]$. En effet, supposons que $B = \varphi^{-1}(\{t\})$ soit de mesure strictement positive pour un certain t. Quitte à ôter en ensemble de mesure nulle à B, on peut supposer que $B \subset \{t \in [0,1] \mid t$ localement presque isométrique pour $\varphi\}$. Il s'ensuit que B est constitué de points isolés. Par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, il existe un ensemble compact $\tilde{B} \subset B$ de mesure strictement positive. Comme $\tilde{B}$ est constitué de points isolés, on déduit qu'il est fini, ce qui aboutit à une contradiction.

Énonçons maintenant un théorème qui est un peu plus fort que le Théorème I.5.16 dans notre contexte particulier :

Théorème I.5.23. *Soit $\varphi : [0,1] \to K_1$ une fonction lipschitzienne de norme* 1. *Si l'ensemble des points localement presque isométriques pour φ est de mesure pleine, alors l'opérateur $C_\varphi : \mathrm{Lip}(K_1) \to \mathrm{Lip}([0,1])$ est un centre de Daugavet.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve du Théorème I.5.16 et utiliser la Proposition I.5.21. La seule chose à modifier est le début de la preuve du Théorème I.5.16. Étant donné $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ de norme 1 et $\varepsilon > 0$, le Lemme I.5.20 nous dit qu'il existe une partie $A \subset [0,1]$ de mesure positive constituée de $\varepsilon/2$ points pour f. Quitte à enlever une partie de mesure nulle à A, on peut supposer que chaque élément de A est localement presque isométrique pour φ. La Remarque I.5.22 nous dit que $\varphi^{-1}(\{t\})$ est de mesure nulle pour chaque $t \in [0,1]$, ce qui est équivalent à la condition $\varphi(B)$ est infini pour chaque B de mesure strictement positive. Ainsi $\varphi(A)$ est infini, et l'on peut choisir une suite (s_n) de $\varepsilon/2$-points pour f qui sont localement presque isométriques pour φ, de telle sorte que $\varphi(s_i) \neq \varphi(s_j)$ si $i \neq j$. $\square$

I.5.6 Cas particulier $K_1 = K_2 = [0,1]$

Dans le cas où $K_1 = K_2 = [0,1]$ sont munis de la distance usuelle, on obtient une condition nécessaire et une condition suffisante pour qu'un point soit localement presque isométrique pour φ. On suppose toujours que $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est lipschitzienne de norme 1.

Lemme I.5.24. *Soit $0 < x < 1$. Si x est localement presque isométrique pour φ, alors φ est dérivable en x et $|\varphi'(x)| = 1$. D'autre part, si $x \in (0,1)$ est tel que φ est dérivable au voisinage de x, que φ' en continue en x avec $|\varphi'(x)| = 1$, alors x est localement presque isométrique pour φ.*

Démonstration. Soit $x \in (0,1)$ un point localement presque isométrique pour φ. La fonction pente en x définie sur $[0,1] \setminus \{x\}$ par $p_x(y) = (\varphi(y) - \varphi(x))/(y - x)$ est continue, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage de x sur lequel $|p_x| > 1 - \varepsilon$. Comme p_x

ne s'annule pas sur ce voisinage de x, on en déduit qu'elle admet une limite à gauche et à droite en x. Par conséquent φ admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en x, qu'on note respectivement $\varphi'_d(x)$ et $\varphi'_g(x)$, et $|\varphi'_d(x)| = |\varphi'_g(x)| = 1$. De plus, le caractère localement presque isométrique de x impose que $\varphi'_d(x) = \varphi'_g(x)$, et donc que φ est dérivable en x avec $|\varphi'(x)| = 1$.
Montrons la condition suffisante : supposons qu'il existe $x \in (0,1)$ tel que φ soit dérivable sur un voisinage de x avec $|\varphi'(x)| = 1$, et tel que φ' soit continue en x. On peut supposer que $\varphi'(x) = 1$. Pour $\varepsilon > 0$, la continuité de φ' en x assure l'existence d'un $\delta > 0$ tel que $|\varphi'(t) - 1| < \varepsilon$ pour tout $t \in (x - \delta, x + \delta)$. Alors pour tous $y, z \in (x - \delta, x + \delta)$, avec pour fixer les idées $y < z$, le théorème des accroissements finis nous assure l'existence d'un élément t appartenant à (y, z) tel que

$$\left| \frac{\varphi(z) - \varphi(y)}{z - y} \right| = |\varphi'(t)| > 1 - \varepsilon,$$

ce qui prouve notre assertion. □

Une simple reformulation du Théorème I.5.23 via le Lemme I.5.24 nous donne le résultat suivant :

Théorème I.5.25. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lipschitzienne de norme 1. Si pour presque tout $x \in (0,1)$, φ' est continue en x avec $|\varphi'(x)| = 1$, alors C_φ est un centre de Daugavet sur* $\mathrm{Lip}([0,1])$.

Exemple I.5.26. Donnons un exemple de fonction φ où l'ensemble des points non localement presque isométriques contient l'ensemble de Cantor triadique K, et où C_φ est un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$. Notons $K = \bigcap A_n$ où $A_0 = [0,1]$, $A_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$... Chaque A_{n+1} est obtenu en enlevant le tiers central de chaque segment constituant A_n. Notons aussi, pour $n \geq 1$, $B_n = [0,1] \backslash A_n$ et $C_n = B_n \backslash B_{n-1}$, $C_1 = B_1$, de sorte que le complémentaire de K soit la réunion disjointe des C_n. Définissons $\Delta_n : [0,1] \to [0,1]$ la fonction à support dans C_n telle que Δ_n est une fonction triangle de pente 1 puis -1 sur chaque intervalle constituant C_n. Plus précisément, si (α, β) est une composante connexe de C_n, alors la restriction de Δ_n à (α, β) est la fonction affine qui vérifie $\Delta_n\ (\alpha) = \Delta_n(\beta) = 0$, $\Delta'_n = 1$ sur $(\alpha, (\alpha + \beta)/2)$ et $\Delta'_n = -1$ sur $((\alpha + \beta)/2, \beta)$. On pose enfin $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta_n(x)$. Pour chaque $x \in [0,1]$ il y a au plus un terme non nul dans cette somme. Ainsi définie, φ est lipschitzienne de norme 1 et $|\varphi'| = 1$ *p.p.* sur $\bigcup C_n = [0,1] \backslash K$. De plus, φ' est continue en chaque point de dérivabilité, $\varphi = 0$ sur K, ce qui implique qu'aucun point de K, qui est un point d'accumulation, ne peut être localement presque isométrique pour φ.

La question naturelle que l'on peut se poser est de savoir ce qu'il se passe dans le cadre des ensembles de Cantor généralisés. Il est clair qu'en adaptant la construction à un tel ensemble, la fonction φ ainsi construite vérifie la condition nécessaire du Corollaire I.5.9, mais pas la condition suffisante du Théorème I.5.25. Il serait intéressant de décider si C_φ est un centre de Daugavet ou pas. Nous reviendrons plus loin dans cette section sur cet exemple.

Le cas $K_1 = K_2 = [0,1]$ est évidemment particulier, et nous pouvons tirer parti du fait que l'espace $\mathrm{Lip}([0,1])$ soit isométriquement isomorphe via la différentiation presque partout à l'espace $L^\infty([0,1])$ pour obtenir des résultats plus précis. Cela nous permet de donner une condition nécessaire pour qu'un opérateur de composition soit un centre de Daugavet qui est un peu plus satisfaisante que celle obtenue dans le Corollaire I.5.9. En particulier, nous obtenons une caractérisation des symboles φ qui sont tels que $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ soit une quasi-boule.

Proposition I.5.27. *Soit $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ une fonction lipschitzienne de norme* 1*. L'ensemble $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ est une quasi-boule si et seulement si $|\varphi'| = 1$ p.p.*

Démonstration. Tout d'abord supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une partie A qui vérifie $|A| > 0$ et $|\varphi'| < 1 - \varepsilon$ sur A. La fonction indicatrice de l'ensemble A est dans $L^\infty[0,1]$ et par conséquent la fonction qui à x associe $f(x) = |A \cap [0,x]| = \int_0^x \mathbb{1}_A(t)\mathrm{d}t$ est lipschitzienne de norme 1 et vérifie $f' = \mathbb{1}_A$ *p.p.* Supposons qu'il existe $u \in B_{\mathrm{Lip}([0,1])}$ satisfaisant $\|f + u \circ \varphi\| > 2 - \varepsilon$. La fonction $f + u \circ \varphi$ est dérivable presque partout, et cette dérivée a une norme strictement supérieure à $2 - \varepsilon$ dans $L^\infty[0,1]$. Notons $B = \{x \in [0,1] \mid |f'(x) + (u \circ \varphi)'(x)| > 2 - \varepsilon\}$. C'est un ensemble de mesure strictement positive, et comme φ est dérivable presque partout on peut supposer qu'elle est dérivable en tout point de B. D'une part $|f'(x)| > 1 - \varepsilon$ si $x \in B$ ce qui nous permet d'affirmer que presque tout x appartenant à B appartient également à A. On peut donc supposer, quitte à ôter un ensemble de mesure nulle à B, que $B \subset A$. Mais d'autre part, chaque $x \in B$ vérifie $|(u \circ \varphi)'(x)| > 1 - \varepsilon$, ce qui implique que $|\varphi'(x)| \geq 1 - \varepsilon$ et donc que $B \subset [0,1] \backslash A$, ce qui est absurde.
Réciproquement, soit f une fonction lipschitzienne de norme 1 et $\varepsilon > 0$. On note $A = \{x \in [0,1] \mid |f'(x)| > 1 - \varepsilon/2\}$. C'est un ensemble de mesure strictement positive, et l'on peut supposer sans perte de généralité que $f' > 1 - \varepsilon/2$ sur A. Par hypothèse $|\varphi'| = 1$ *p.p.* sur A. Quitte à séparer A en deux parties, on peut supposer que φ' est de signe constant sur A. Alors si $\varphi' \geq 1 - \varepsilon/2$, on a $|f' + \varphi'| > 2 - \varepsilon$ sur A, et donc $\|f + \varphi\| = \|f' + \varphi'\|_\infty > 2 - \varepsilon$. Dans le cas où $\varphi' < -1 + \varepsilon$, on a $\|f - \varphi\| = \|f' - \varphi'\|_\infty > 2 - \varepsilon$. Par conséquent $\sup\{\|f + u \circ \varphi\| \mid u \in B_{\mathrm{Lip}([0,1])}\} > 2 - \varepsilon$. □

Remarque I.5.28. Reprenons l'Exemple I.5.26 de la fonction φ qui s'annule sur l'ensemble de Cantor triadique et qui vérifie $|\varphi'| = 1$ *p.p.* On a vu que l'opérateur de composition induit est un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$. En adaptant cette construction pour un ensemble de Cantor généralisé K de mesure positive ou nulle, nous obtenons la dichotomie suivante : Soit $|K| = 0$, et le Théorème I.5.25 affirme que C_φ est un centre de Daugavet ; Soit $|K| > 0$ et la Proposition I.5.27 nous dit que

$C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ n'est pas une quasi-boule, et a fortiori n'est pas un centre de Daugavet non plus.

Nous pouvons montrer que la condition nécessaire obtenue dans la Proposition I.5.27 est en fait suffisante, et donc qu'elle caractérise les symboles φ des opérateurs de composition qui sont des centres de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$.

Théorème I.5.29. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction lipschitzienne de norme* 1. *Alors l'opérateur de composition* $C_\varphi : \mathrm{Lip}([0,1]) \to \mathrm{Lip}([0,1])$ *est un centre de Daugavet si et seulement si* $|\varphi'| = 1$ *p.p.*

Démonstration. Tout d'abord, si C_φ est un centre de Daugavet, alors $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ est une quasi-boule et par conséquent $|\varphi'| = 1$ *p.p.* en vertu de la Proposition I.5.27. Réciproquement, nous allons reprendre la preuve de la Proposition I.5.15 pour montrer que la condition 2) d'anti-dentabilité pour $C_\varphi(B_{\mathrm{Lip}([0,1])})$ du Théorème I.5.5 est satisfaite. Pour cela on se donne donc f et g dans $S_{\mathrm{Lip}([0,1])}$ et $0 < \varepsilon < 1/2$, et l'on veut montrer que g appartient à l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{u \in (1+\varepsilon)B_{\mathrm{Lip}([0,1])} \mid \|f + u \circ \varphi\| > \|f\| + 1 - \varepsilon\}$.
Notons $A = \{x \in [0,1] \mid |f'(x)| > 1 - \varepsilon/2\}$. C'est un ensemble de mesure strictement positive, et par hypothèse on peut supposer, quitte à ôter un ensemble de mesure nulle à A, que $|\varphi'| = 1$ sur A. Étant donné $n \geq 1$, on choisit $x_1, \ldots, x_n \in A$ tels que $\varphi(x_i) \neq \varphi(x_j)$ si $x_i \neq x_j$. Un tel choix est possible car $\varphi(A)$ est infini. En effet : sinon il existe $t \in [0,1]$ tel que $B = \varphi^{-1}(\{t\})$ soit de mesure strictement positive, et le même type d'argument que celui utilisé dans la Remarque I.5.22 mène à une contradiction. Nous pouvons choisir $0 < r < \varepsilon$ de sorte que pour $1 \leq i \leq n$, les intervalles $U_i = (\varphi(x_i) - r, \varphi(x_i) + r)$ soient deux à deux disjoints. Puisque $|f'(x_i)| > 1 - \varepsilon/2$ et $|\varphi'(x_i)| = 1$, nous pouvons également choisir $\delta < r^2/5$ de sorte que pour tout $y \in (x_i - \delta/2, x_i + \delta/2)$ on ait

$$\left|\frac{f(x_i) - f(y)}{x_i - y}\right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\varphi(x_i) - \varphi(y)}{x_i - y}\right| \geq 1 - \frac{r}{2}.$$

On choisit alors $y_i \in (x_i - \delta/2, x_i + \delta/2)$ pour tout $1 \leq i \leq n$, et l'on suit la fin de la preuve de la Proposition I.5.15. □

Enfin l'identification entre $\mathrm{Lip}([0,1])$ et $L^\infty([0,1])$ nous permet d'affirmer que si C_φ est un centre de Daugavet sur $\mathrm{Lip}([0,1])$, alors l'opérateur induit sur $L^\infty([0,1])$ est aussi un centre de Daugavet. On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire I.5.30. *Soit* $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ *une fonction lipschitzienne de norme* 1. *Si pour presque tout* x *dans* $(0,1)$ *la fonction* φ *est dérivable au voisinage de* x, *de dérivée continue en* x, *et si* $|\varphi'(x)| = 1$, *alors l'opérateur de composition à poids* $\varphi' C_\varphi$ *est un centre de Daugavet sur* $L^\infty([0,1])$.

Démonstration. Notons $G : L^\infty([0,1]) \to L^\infty([0,1])$ l'opérateur induit par C_φ et $\mathcal{D} : \mathrm{Lip}([0,1]) \to L^\infty([0,1])$ l'opérateur dérivation presque partout, qui est une isométrie surjective. Alors pour tout $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ on a $G(\mathcal{D}(f)) = \mathcal{D}(f \circ \varphi)$. C'est pourquoi si l'on a

$$(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi) \text{ p.p.} \qquad (*)$$

alors $G(\mathcal{D}(f)) = (f \circ \varphi)' = \varphi'.\mathcal{D}(f) \circ \varphi$ et par conséquent $G = \varphi' C_\varphi$ est un centre de Daugavet sur $L^\infty([0,1])$. Il nous reste donc à montrer $(*)$ pour toute fonction lipschitzienne $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$.
Notons $A = \{x \in [0,1] \mid \varphi' \text{ est continue en } x \text{ et } |\varphi'(x)| = 1\}$. Par hypothèse $|A| = 1$. Remarquons que si $x \in A$, alors il existe un voisinage $V_x \in \mathcal{V}_x$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(t) = \varphi'(x)t + \alpha$ pour tout $t \in V_x$. En effet nous pouvons supposer que $\varphi'(x) = 1$, et donc par continuité de φ' en x il existe un intervalle ouvert $V_x \in \mathcal{V}_x$ sur lequel $\varphi' > 0$. Alors $\varphi' = 1$ presque partout sur V_x (car $|A| = 1$), ce qui prouve notre assertion. Soit $f \in \mathrm{Lip}([0,1])$ et notons B l'ensemble des points de dérivabilité de f. On a alors $(f \circ \varphi)'(x) = \varphi'(x) f'(\varphi(x))$ pour tout $x \in A \cap \varphi^{-1}(B)$. Pour avoir l'égalité presque partout il suffit de montrer que $|\varphi^{-1}(B)| = 1$. Supposons donc que $|\varphi^{-1}(B)| < 1$. Il existe alors $D \subset [0,1]$ tel que $|D| > 0$ et $\varphi(D) \subset [0,1] \backslash B$ qui est négligeable. Puisque $|A| = 1$ on peut supposer quitte à ôter un ensemble de mesure nulle à D que $D \subset A$. De plus, par la régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, on peut supposer que l'ensemble D est compact. Soit $x \in D$ et V_x le voisinage associé comme ci-dessus. La fonction φ réalise une isométrie de V_x sur $\varphi(V_x)$, et donc $|\varphi(D \cap V_x)| = |D \cap V_x|$. Mais $\varphi(D \cap V_x) \subset \varphi(D)$ est négligeable. Par compacité on recouvre alors D par une union finie d'ensembles de type $D \cap V_x,\ x \in D$ où chaque $D \cap V_x$ est de mesure nulle. On en déduit que $|D| = 0$ ce qui est absurde. □

Notons qu'une fonction lipschitzienne $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ est absolument continue, et donc vérifie la propriété N de Luzin : l'image de toute partie de mesure nulle par φ est de mesure nulle. Nous venons de voir que sous les conditions du Corollaire I.5.30, la fonction φ vérifie en fait $|\varphi(A)| = 0$ si et seulement si $|A| = 0$.

Par exemple la fonction φ définie dans la Remarque I.5.26 vérifie les conditions du Corollaire I.5.30, et par conséquent l'opérateur de composition à poids $\varphi' C_\varphi$ est un centre de Daugavet sur $L^\infty([0,1])$.

Chapitre II

Presque centres de Daugavet

II.1 Introduction

Une autre manière de généraliser la propriété de Daugavet est de donner la définition suivante : On dit qu'un espace de Banach X a la *propriété de Daugavet par rapport à $Y \subset X^*$*, et l'on note $X \in \mathrm{DPr}(Y)$ si l'équation de Daugavet

$$\|I + T\| = 1 + \|T\|$$

est satisfaite pour chaque opérateur $T \in B(X)$ de rang un de la forme $T = y^* \otimes x$ où $y^* \in Y$ et $x \in X$. Évidemment avoir la propriété de Daugavet signifie $X \in \mathrm{DPr}(X^*)$. Cette généralisation fut introduite dans [BiKadShvWer05] dans l'étude de la propriété de Daugavet pour les ultraproduits, et fut reprise dans [KadSheWer08] pour montrer l'existence d'un sous-espace E de $L^1[0,1]$ ayant la propriété de Radon-Nikodym et tel que $L^1[0,1]/E$ n'ait pas la propriété de Daugavet, répondant de manière négative à une question de A. Pelczyński.
Dans [KadSheWer], V. Kadets, V. Shepelska et D. Werner introduisent la notion suivante : un espace X a la *propriété presque Daugavet* si $X \in \mathrm{DPr}(Y)$ pour un certain espace normant $Y \subset X^*$ (voir la définition ci-après). Les espaces séparables ayant la propriété presque Daugavet sont caractérisés de la manière suivante :

Théorème II.1.1. ([KadSheWer, Theorem 1.1])*Pour un espace de Banach séparable X les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) il n'y a pas de ε-réseau fini de S_X dans S_X, pour tout $\varepsilon < 2$,
ii) il existe une suite $(e_n) \subset B_X$ telle que pour tout $x \in X$

$$\lim_n \|x + e_n\| = \|x\| + 1,$$

iii) X a la propriété presque Daugavet.

La condition $i)$ lie la propriété presque Daugavet à l'*épaisseur* d'un espace de Banach. Cette notion, introduite par R. Whitley [Wh68], est une mesure de la non-compacité de la sphère unité d'un espace :

$$T(X) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{il existe un } \varepsilon\text{-réseau fini de } S_X \text{ dans } S_X\}.$$

Il a montré qu'on a toujours $1 \leq T(X) \leq 2$ si l'espace X est de dimension infinie. De plus, $T(\ell_p) = 2^{1/p}$ pour $1 \leq p < \infty$ et $T(C(K)) = 2$ si K n'a pas de point isolé. Évidemment $i)$ est équivalent à la condition $T(X) = 2$.

La condition $ii)$ lie la propriété presque Daugavet avec la théorie des *types*, utilisée par J.-L. Krivine et B. Maurey dans [KrMau81]. Un type sur un espace de Banach séparable X est une fonction de la forme

$$\tau(x) = \lim_n \|x + e_n\|$$

pour une suite bornée $(e_n) \subset X$. Un ℓ^1-type canonique est un type engendré par une suite (e_n) satisfaisant

$$\tau(x) = \lim_n \|x + e_n\| = \|x\| + 1.$$

On appelle une telle suite $(e_n) \subset B_X$ une *suite ℓ^1-type canonique*.
D'après le Théorème II.1.1, un espace de Banach séparable ayant la propriété presque Daugavet contient une suite ℓ^1-type canonique, qui contient elle-même une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1. Il s'avère que cette dernière condition caractérise en fait la classe des espaces de Banach séparables qui ont la propriété presque Daugavet à isomorphisme près :

Théorème II.1.2. ([KadSheWer, Theorem 1.2]) *Un espace de Banach séparable X peut être renormé de manière équivalente de sorte à posséder la propriété presque Daugavet si et seulement si X contient une copie isomorphique de ℓ^1.*

Dans cette partie nous nous penchons sur une généralisation de la propriété presque Daugavet du point de vu des centres, introduits dans la section I.2.
Soient X et Y deux espaces de Banach, $G : X \to Y$ un opérateur borné. Notons B_X et S_X (resp. B_Y et S_Y) la boule unité fermée et la sphère unité de X (resp. Y). On introduit la notion d'*épaisseur d'un opérateur* $G \in B(X, Y)$, que l'on note $T_G(X, Y)$, de la manière suivante :

$$T_G(X, Y) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{il existe un } \varepsilon\text{-réseau fini de } G(S_X) \text{ dans } \|G\| S_Y\}.$$

Autrement dit, $T_G(X, Y)$ est la borne inférieure des $\varepsilon > 0$ tels que $G(S_X)$ puisse être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε centrées en des points de la sphère $\|G\| S_Y$. Dans la section II.2 nous montrons que $\|G\| \leq T_G(X, Y) \leq 2\|G\|$ si X n'est pas de dimension finie, et que $\|G\| \leq T_G(X, Y) \leq T(Y)\|G\| \leq 2\|G\|$ si X et Y sont des espaces de dimension infinie. Nous prouvons le théorème suivant, qui caractérise les opérateurs dont l'épaisseur est en quelque sorte maximale :

Théorème II.1.3. *Soient X et Y des espaces de Banach, avec Y séparable, et $G \in S_{B(X,Y)}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) $T_G(X,Y) = 2$,

ii) il existe une suite $(e_n) \subset B_X$ telle que pour chaque $y \in Y$ on ait

$$\lim_n \|y + Ge_n\| = \|y\| + 1,$$

iii) il existe un sous-espace normant $Z \subset Y^*$ tel que l'équation

$$\|G + T\| = 1 + \|T\|$$

soit vérifiée pour chaque opérateur T de rang 1 de la forme $T = x^* \otimes y$ où $y \in Y$ et $x^* \in W := \overline{G^*(Z)}$.

Dans $iii)$, la fermeture de $G^*(Z)$ doit être considérée au sens de la topologie de la norme dans X^*. Rappelons qu'un sous-espace $Z \subset Y^*$ est dit normant (ou 1-normant) si pour chaque $y \in Y$ on a

$$\sup_{z^* \in S_Z} |z^*(y)| = \|y\|.$$

Autrement dit, Z est normant si et seulement si S_Z est préfaiblement dense dans B_{Y^*}.

Nous donnons donc la définition suivante :

Définition II.1.4. *On dit qu'un opérateur $G : X \to Y$ est un* centre de Daugavet par rapport à *W s'il existe un sous-espace $Z \subset Y^*$ tel que l'identité*

$$\|G + T\| = \|G\| + \|T\| \tag{II.1.1}$$

soit vérifiée pour chaque opérateur T de rang 1 de la forme $T = x^* \otimes y$ où $y \in Y$ et $x^* \in W = \overline{G^*(Z)}$. Dans le cas où l'espace Z est normant, on dit que G est un presque centre de Daugavet.

Notons que l'équation (II.1.1) implique que $\|aG + bT\| = a\|G\| + b\|T\|$ pour tout $a, b \geq 0$. Par conséquent un opérateur $G \neq 0$ est un presque centre de Daugavet si et seulement si $G/\|G\|$ l'est.

Dans le cas où $W = X^*$, l'opérateur G est un centre de Daugavet. Ajoutons ici qu'un centre de Daugavet G ne vérifie pas nécessairement la condition $\overline{G^*(Y^*)} = X^*$. En effet cette dernière condition implique que l'opérateur G est injectif, ce qui peut ne pas être le cas, comme le montre l'exemple de l'opérateur de composition C_φ sur $C[0,1]$ dont le symbole est donné par $\varphi(x) = x/2$ (*c.f.* Théorème I.3.1).

Puisque la condition $ii)$ du Théorème II.1.3 nous donne une suite ℓ^1-type canonique sur Y, le Théorème II.1.1 mène au résultat suivant :

Corollaire II.1.5. *Si $G \in S_{B(X,Y)}$ est un presque centre de Daugavet et si Y est séparable, alors Y a la propriété presque Daugavet.*

Nous obtenons également une caractérisation des opérateurs fixant une copie isomorphique de ℓ^1 :

Théorème II.1.6. *Soient X et Y des espaces de Banach, et supposons Y séparable. Alors $G \in S_{B(X,Y)}$ fixe une copie de ℓ^1 si et seulement si on peut renormer de manière équivalente les espaces X et Y de sorte que $G : X \to Y$ soit un presque centre de Daugavet de norme 1 pour les nouvelles normes.*

Par « G fixe une copie de ℓ^1 »on entend qu'il existe des suites $(e_n) \subset X$ et $(f_n) \subset Y$ équivalentes à la base canonique de ℓ^1 telles que $Ge_n = f_n$.

Dans la section II.2, nous commençons par donner quelques résultats concernant l'épaisseur d'un opérateur. La preuve du Théorème II.1.3 sera donnée dans la section II.3. Ensuite dans les sections II.4 et II.5, nous donnons des exemples de sommes directes d'espaces admettant des presque centres de Daugavet et des exemples de presque centres de Daugavet non triviaux sur ℓ^1 et entre espaces de type $C(K)$. Enfin la section II.6 est dévouée à la preuve du Théorème II.1.6.

II.2 Épaisseur d'un opérateur

Soit $G : X \to Y$ un opérateur borné. Rappelons que l'épaisseur de G est définie par la formule suivante :

$$T_G(X,Y) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid \text{il existe un } \varepsilon\text{-réseau fini de } G(S_X) \text{ dans } \|G\|S_Y\}.$$

Lemme II.2.1. $T_{\alpha G}(X,Y) = \alpha T_G(X,Y)$ *pour tout* $\alpha > 0$.

Démonstration. Soient $y_1, \dots, y_n \in S_X$. Il suffit de voir que $\{\|G\|y_1, \dots, \|G\|y_n\}$ est un r-réseau fini de $G(S_X)$ si et seulement si l'ensemble $\{\alpha\|G\|y_1, \dots, \alpha\|G\|y_n\}$ est un αr-réseau fini de $\alpha G(S_X)$. □

La proposition qui suit apparait initialement dans [Wh68] dans le cas où $X = Y$ et $G = I$.

Proposition II.2.2. *Si X est de dimension infinie, alors* $\|G\| \le T_G(X,Y) \le 2\|G\|$.

Démonstration. Si $G = 0$ alors c'est clair. Sinon, le Lemme II.2.1 nous permet de nous restreindre aux opérateurs de norme 1. L'inégalité $T_G(X,Y) \le 2$ est triviale puisque chaque élément y de S_Y fournit un 2-réseau de $G(S_X)$. Supposons que $T_G(X,Y) < 1$. Il existe $0 < r < 1$ et un r-réseau fini $\{y_1, \dots, y_n\}$ de $G(S_X)$ dans S_Y. Pour chaque $1 \le i \le n$, on prend $y_i \in S_{Y^*}$ satisfaisant $|y_i^*(y_i)| = 1$. Si $x \in S_X$, il existe un indice i tel que $\|Gx - y_i\| \le r$, ce qui implique $r \ge |y_i^*(Gx - y_i)| = |y_i^*(Gx) - 1|$. Par conséquent, $y_i^*(Gx) \ne 0$ et l'opérateur $L : x \in X \mapsto Lx = (y_1^*(Gx), \dots, y_n^*(Gx)) \in \mathbb{K}^n$ est injectif, ce qui montre que X est de dimension finie. □

Proposition II.2.3. *Dans le cas où X et Y sont de dimension infinie, on a l'inégalité $T_G(X,Y) \leq \|G\|T(Y)$, où $T(Y)$ est l'épaisseur de Y définie dans l'introduction.*

Démonstration. Comme précédemment on peut supposer $\|G\| = 1$. Si $T_G(X,Y) = 1$ le résultat est clair d'après la Proposition II.2.2 puisque $1 \leq T(Y) \leq 2$. Supposons donc $T_G(X,Y) > 1$ et prenons ε avec $0 < \varepsilon < T_G(X,Y) - 1$. l'ensemble $G(S_X)$ n'admet pas de $(T_G(X,Y) - \varepsilon)$-réseau fini dans S_Y. Étant donnés $y_1, \dots, y_n \in S_Y$, il existe $x \in S_X$ tel que $\min_i \|Gx - y_i\| > T_G(X,Y) - \varepsilon > 1$. Ceci implique que $Gx \neq 0$ et

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{Gx}{\|Gx\|} - y_i \right\| &= \frac{1}{\|Gx\|} \|Gx - \|Gx\| y_i\| \\
&= \frac{1}{\|Gx\|} \|Gx - y_i + (1 - \|Gx\|) y_i\| \\
&\geq \frac{1}{\|Gx\|} (\|Gx - y_i\| - (1 - \|Gx\|)) \\
&> \frac{T_G(X,Y) - \varepsilon - 1}{\|Gx\|} + 1 \\
&\geq T_G(X,Y) - \varepsilon,
\end{aligned}$$

pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi $Gx/\|Gx\| \in S_Y$ et

$$\min_i \left\| \frac{Gx}{\|Gx\|} - y_i \right\| \geq T_G(X,Y) - \varepsilon.$$

Puisque ε peut être choisi arbitrairement petit, on obtient $T(Y) \geq T_G(X,Y)$. □

II.3 Démonstration du Théorème II.1.3

Dans un espace de Banach X, on appelle tranche de B_X tout ensemble de la forme

$$S(x^*, \varepsilon) = \{x \in B_X \mid \operatorname{Re} x^*(x) \geq 1 - \varepsilon\}$$

pour un $x^* \in S_{X^*}$ et un $\varepsilon > 0$, et on appelle w*-tranche de B_{X^*} toute tranche $S(x, \varepsilon)$ de B_{X^*} engendrée par un élément $x \in S_X \subset S_{X^{**}}$. Avant de donner une preuve du Théorème II.1.3, énonçons le lemme suivant, analogue de [KadSheWer, Lemma 1.3], qui nous permet de donner une caractérisation géométrique des espaces qui possèdent des presque centres de Daugavet en terme de tranches de leur boule unité, ou de la boule unité de leur espace dual.

Lemme II.3.1. *Soit Z un sous-espace normant de Y^*, $G \in S_{B(X,Y)}$ et $W = \overline{G^*(Z)}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) G est un centre de Daugavet par rapport à W.

ii) Pour chaque $y \in S_Y$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque $x^* \in S_W$, il existe $x \in S(x^*, \varepsilon)$ tel que $\|y + Gx\| \geq 2 - \varepsilon$.

iii) Pour chaque $y \in S_Y$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque $x^* \in S_W$, il existe une tranche $S(x_1^*, \varepsilon_1) \subset S(x^*, \varepsilon)$ avec $x_1^* \in S_W$ telle que $\|y + Gx\| \geq 2 - \varepsilon$ pour tout $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$.

iv) Pour chaque $x^* \in S_W$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque w-tranche $S(y, \varepsilon)$ de B_{Y^*}, il existe $y^* \in S(y, \varepsilon)$ tel que $\|x^* + G^* y^*\| \geq 2 - \varepsilon$.*

v) Pour chaque $x^* \in S_W$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et pour chaque w-tranche $S(y, \varepsilon)$ de B_{Y^*}, il existe une w*-tranche $S(y_1, \varepsilon_1) \subset S(y, \varepsilon)$ telle que $\|x^* + G^* y^*\| \geq 2 - \varepsilon$ pour tout $y^* \in S(y_1, \varepsilon_1)$.*

Nous donnons la preuve dans le cas où les espaces sont supposés réels, la preuve dans le cas complexe suivant les mêmes lignes et étant juste un peu plus technique.

Démonstration. L'équivalence $i) \Leftrightarrow ii)$ est prouvée dans [BoKad10, Theorem 2.1] dans le cas où $W = X^*$, et ne nécessite pas l'hypothèse que Z soit normant. L'implication $iii) \Rightarrow ii)$ est évidente.

$ii) \Rightarrow iii)$: Soient $y \in S_Y$, $x_0^* \in S_W$ et $0 < \varepsilon < 1$. D'après $ii)$, il existe $x_0 \in S(x_0^*, \varepsilon/8)$ satisfaisant $\|y + Gx_0\| > 2 - \varepsilon/8$. L'espace Z étant normant, il existe $z_1^* \in S_Z$ tel que $z_1^*(y + Gx_0) > 2 - \varepsilon/8$. Ainsi $z_1^*(y) > 1 - \varepsilon/8$ et $z_1^*(Gx_0) > 1 - \varepsilon/8$. Notons alors

$$x_1^* = \frac{x_0^* + G^* z_1^*}{\|x_0^* + G^* z_1^*\|} \text{ et } \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{8}.$$

Le fait que $x_0^* \in W$, implique que $x_1^* \in S_W$. Nous avons aussi

$$\|x_0^* + G^* z_1^*\| \geq x_0^*(x_0) + z_1^*(Gx_0) > (1 - \varepsilon/8) + (1 - \varepsilon/8) = 2 - \varepsilon/4.$$

Prenons $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$. Alors

$$(x_0^* + G^* z_1^*)x = x_1^*(x)\|x_0^* + G^* z_1^*\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right)\left(2 - \frac{\varepsilon}{4}\right) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2},$$

et par conséquent

$$x_0^*(x) \geq \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - z_1^*(Gx) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cette dernière inégalité montre que $S(x_1^*, \varepsilon_1) \subset S(x_0^*, \varepsilon)$. De plus, pour tout x appartenant à $S(x_1^*, \varepsilon_1)$,

$$\|y + Gx\| \geq z_1^*(y + Gx) \geq z_1^*(y) + z_1^*(Gx) > \left(1 - \frac{\varepsilon}{8}\right) + \left(2 - \frac{\varepsilon}{2}\right) - x_0^*(x) \geq 2 - \varepsilon.$$

Nous venons donc de montrer les équivalences $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$. Les équivalences $i) \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow v)$ se montrent de la même façon en remplaçant l'opérateur G par son adjoint G^*. $\square$

Puisque les trois propriétés considérées dans le Théorème II.1.3 sont vraies pour un opérateur $G : X \to Y$ agissant entre des espaces de Banach complexes X et Y si et seulement si elles sont vraies pour l'opérateur $G : X_{\mathbb{R}} \to Y_{\mathbb{R}}$ agissant entre les espaces réels sous-jacents, on pourra supposer dans cette partie que les espaces considérés sont réels. Par conséquent dans la suite de cette section $G : X \to Y$ désignera un opérateur borné de norme 1 agissant sur des espaces réels.

Proposition II.3.2. *Si G est un presque centre de Daugavet, alors $T_G(X,Y) = 2$.*

Démonstration. Soit Z un sous-espace normant de Y^* et $W = \overline{G^*(Z)}$ tel que G soit un presque centre de Daugavet par rapport à W. Nous allons montrer que pour tout $\varepsilon_0 > 0$, l'ensemble $G(S_X)$ n'a pas de $(2-\varepsilon_0)$-réseau fini dans S_Y, ce qui nous donnera l'inégalité $T_G(X,Y) \geq 2$, et par conséquent le résultat voulu. Donnons nous $y_1, \cdots, y_n \in S_Y$, $\varepsilon_0 > 0$ et fixons $x_0^* \in S_W$. D'après *iii*) du Lemme II.3.1, il existe une tranche $S(x_1^*, \varepsilon_1) \subset S(x_0^*, \varepsilon_0)$ avec $x_1^* \in S_W$ et $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ telle que $\|-y_1 + Gx\| > 2 - \varepsilon_0$ pour tout $x \in S(x_1^*, \varepsilon_1)$. Par induction, on construit ainsi une suite de tranches $S(x_k^*, \varepsilon_k) \subset S(x_{k-1}^*, \varepsilon_{k-1})$ avec $x_k^* \in S_W$ et $0 < \varepsilon_k \leq \varepsilon_0$, $1 \leq k \leq n$, telle que

$$\|-y_k + Gx\| > 2 - \varepsilon_0$$

pour tout $x \in S(x_k^*, \varepsilon_k)$. Ainsi, pour tout x de norme 1 dans la plus petite des tranches construites, c'est-à-dire $S(x_n^*, \varepsilon_n)$, on a $\|-y_k + Gx\| > 2 - \varepsilon_0$, $\forall k = 1, \ldots, n$, ce qui montre que $\{y_1, \cdots, y_n\}$ n'est pas un $(2-\varepsilon_0)$-réseau fini de $G(S_X)$. □

Proposition II.3.3. *Supposons que $T_G(X,Y) = 2$, et que Y soit séparable. Alors il existe une suite $(e_n) \subset B_X$ telle que la suite (Ge_n) soit une suite ℓ^1-type canonique dans Y.*

Démonstration. Prenons une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ dense dans S_Y, et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ de réels positifs décroissante vers zéro. Pour $n \geq 1$, l'ensemble $\{-a_1, \ldots, -a_n\}$ n'est pas un $(2-\varepsilon_n)$-réseau fini de $G(S_X)$. Il existe donc un élément e_n dans la sphère unité S_X vérifiant $\|Ge_n - (-a_k)\| > 2 - \varepsilon_n$, $\forall 1 \leq k \leq n$. En fixant k et en faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\lim_n \|a_k + Ge_n\| = 2 = \|a_k\| + 1. \tag{II.3.1}$$

On étend (II.3.1) à chaque élément de la sphère unité de Y par densité, puis à l'espace Y grâce à l'argument standard utilisé dans la Remarque I.5.6. Donc la suite (Ge_n) forme une suite ℓ^1-type canonique dans Y. □

Nous aurons besoin des définitions suivantes :

Définition II.3.4. *Soit E un sous-espace d'un espace de Banach F et $\varepsilon > 0$. On dit qu'un élément $e \in B_F$ est ε-*orthogonal *à E si*

$$\|x + te\| \geq (1-\varepsilon)(\|x\| + |t|), \quad \forall x \in E,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

On dit qu'une suite $(e_n) \subset B_F \backslash \{0\}$ *est une* suite ℓ^1-asymptotique *s'il existe une suite de nombres réels* $\varepsilon_n > 0$ *avec* $\prod_n (1-\varepsilon_n) > 0$ *telle que* e_{n+1} *est* ε_n*-orthogonal à* $Y_n := \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Définition II.3.5. *Une suite* $(e_n^*) \subset B_{X^*}$ *est dite* doublement-normante *si* $\operatorname{lin}\{e_k^*,\ k \geq n\}$ *est normant pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition II.3.6. *Supposons que* Y *soit séparable et qu'il existe une suite* $(e_n) \subset B_X$ *telle que la suite* (Ge_n) *soit une suite* ℓ^1*-type canonique dans* Y*. Alors il existe une suite* $(f_n^*) \subset B_{Y^*}$ *qui est doublement-normante et telle que* $(G^* f_n^*) \subset B_{X^*}$ *soit* ℓ^1*-asymptotique.*

Soit (E_n) une suite croissante de sous-espaces de dimension finie de Y dont la réunion est dense dans Y. Soit (ε_n) une suite de réels positifs strictement décroissante vers zéro, et $\delta_n > 0$ satisfaisant

$$\prod_{k=n}^{\infty} (1-\delta_k) > 1 - \varepsilon_n.$$

Par un argument de compacité, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (e_n) est telle que

$$\|y + \alpha G e_{n+1}\| \geq (1-\delta_n)(\|y\| + |\alpha|), \quad \forall y \in \operatorname{lin}\{E_n \cup \{Ge_1, \dots, Ge_n\}\},\ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

On en déduit que pour tout $y \in E_n$ on a

$$\left\| y + \sum_{k=n+1}^{M} \alpha_k G e_k \right\| \geq (1-\varepsilon_n)\|y\| + \sum_{k=n+1}^{M} (1-\varepsilon_{k-1})|\alpha_k|. \tag{II.3.2}$$

Prenons une suite (y_n) dense dans S_Y telle que $y_n \in E_n$ et telle que chaque y_n soit répété une infinité de fois, et fixons une suite $(g_n) \subset \ell^\infty$ où chaque $g_n = (g_{n,j})_j$ est une suite de signes ± 1 qui vérifie la condition d'indépendance suivante : pour chaque ensemble de signes $\theta_k = \pm 1$, $1 \leq k \leq n$, l'ensemble des j tels que $g_{k,j} = \theta_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$ est infini.
On définit alors $\tilde{f}_n^* : \operatorname{lin}\{y_n, Ge_{n+1}, Ge_{n+2}, \dots\} \to \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}_n^*(y_n) = 1 - \varepsilon_n \tag{II.3.3}$$
$$\tilde{f}_n^*(Ge_j) = (1-\varepsilon_{j-1}) g_{n,j} \text{ si } j > n. \tag{II.3.4}$$

D'après (II.3.2), $\tilde{f}_n^*$ est bornée et $\|\tilde{f}_n^*\| \leq 1$. De plus, $\lim_j |\tilde{f}_n^*(Ge_j)| = 1$ nous donne que $\|\tilde{f}_n^*\| = 1$. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe une extension f_n^* de $\tilde{f}_n^*$ à Y qui conserve la norme. La densité de (y_n) dans S_Y, la répétition des y_n ainsi que la condition (II.3.3) implique que la suite (f_n^*) est doublement-normante. Il nous reste à montrer que $(G^* f_n^*)$ est ℓ^1-asymptotique. Fixons $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels non nuls, et posons $J_A = \{j > n \mid g_{k,j} = \text{signe}(a_k) \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$. La condition d'indépendance sur la suite (g_n) assure que l'ensemble J_A est infini. On a donc

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{n} a_k G^* f_k^*\right\| &\geq \sup_{j \in J_A} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k G^* f_k^*(e_j)\right| \\ &\geq \sup_{j \in J_A} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k f_k^*(Ge_j)\right| \\ &\geq \sup_{j \in J_A} \left|\sum_{k=1}^{n} a_k (1-\varepsilon_{j-1}) g_{k,j}\right| \\ &\geq \sup_{j \in J_A} (1-\varepsilon_{j-1}) \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} |a_k|,\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(G^* f_n^*)$ est en fait isométrique à la base canonique de ℓ^1. $\square$

Proposition II.3.7. *Supposons qu'il existe une suite $(f_n^*) \subset B_{Y^*}$ qui soit doublement-normante et telle que $(G^* f_n^*)$ soit ℓ^1-asymptotique. Alors G est un centre de Daugavet par rapport à l'espace $W := \overline{lin}\{G^* f_n^*\}$. Par conséquent, G est un presque centre de Daugavet.*

Démonstration. Posons $Z := \overline{\text{lin}}\{f_n^*, n \geq 1\}$ et $W := \overline{G^*(Z)} = \overline{\text{lin}}\{G^* f_n^*, n \geq 1\}$. Comme Z est un espace normant, il suffit de montrer que G est un centre de Daugavet par rapport à W. Nous aurons besoin des espaces suivants :

$$\begin{aligned} Z_m &:= \text{lin}\{f_k^*, k > m\}, \\ W_m &:= \text{lin}\{G^* f_1^*, \ldots, G^* f_m^*\}, \\ E_m &:= G^*(Z_m) = \text{lin}\{G^* f_k^*, k > m\} \end{aligned}$$

Comme $(G^* f_n^*)$ est ℓ^1-asymptotique, il existe une suite (ε_n) de réels positifs satisfaisant $\prod_n (1-\varepsilon_n) > 0$ telle que $G^* f_{n+1}^*$ soit ε_n-orthogonal à W_n. Nous allons montrer *iv*) du Lemme II.3.1.

Soit $x^* \in S_W$ et $S(y, \varepsilon)$ une w*-tranche de B_{Y^*}. Comme $W = \overline{\cup W_m}$ où l'union est croissante, on peut trouver $m \geq 1$ et $x_m^* \in W_m$ vérifiant

$$\|x^* - x_m^*\| < \varepsilon/8 \quad \text{et} \quad \prod_{n>m} (1-\varepsilon_n) > 1 - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Puisque l'espace Z_m est normant, il existe $y^* \in S_{Z_m}$ tel que $y^*(y) > 1 - \varepsilon$ (autrement dit $y^* \in S(y, \varepsilon)$). On a donc

$$\|x^* + G^* y^*\| \geq \|x_m^* + G^* y^*\| - \|x^* - x_m^*\| \geq \|x_m^* + G^* y^*\| - \frac{\varepsilon}{8}.$$

On utilise maintenant le fait que chaque élément de la boule unité de E_m est $\varepsilon/8$-orthogonal à W_m, et par conséquent $\|x_m^* + G^*y^*\| \geq (1-\varepsilon/8)(\|x_m^*\| + \|G^*y^*\|)$. Enfin, pour estimer la norme de G^*y, il suffit d'écrire que $y^* = \sum_{m+1}^{M} \alpha_k f_k^*$ pour obtenir

$$\|G^*y^*\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k G^* f_k^* \right\| \geq \prod_{n>m} (1-\varepsilon_n) \sum_{k=m+1}^{M} |\alpha_k| > (1-\frac{\varepsilon}{8}) \left\| \sum_{k=m+1}^{M} \alpha_k f_k^* \right\| \geq (1-\frac{\varepsilon}{8}).$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\|x^* + G^*y^*\| &\geq (1-\frac{\varepsilon}{8})(\|x_m^*\| + \|G^*y^*\|) - \frac{\varepsilon}{8} \\
&\geq (1-\frac{\varepsilon}{8})\big((1-\frac{\varepsilon}{8}) + (1-\frac{\varepsilon}{8})\big) - \frac{\varepsilon}{8} \\
&\geq (1-\frac{\varepsilon}{8})(2-\frac{\varepsilon}{4}) - \frac{\varepsilon}{8} \\
&\geq 2-\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

II.4 Quelques résultats de stabilité

Il est connu que les sommes ℓ^1 et ℓ^∞ d'espaces ayant la propriété de Daugavet ont encore la propriété de Daugavet [KadShvSiWer00, Lemma 2.15], et le même résultat est vrai pour les centres de Daugavet [BoKad10]. La proposition suivante apparait dans [Lu] pour $G_1 = I_{X_1}$ et $G_2 = I_{X_2}$.

Proposition II.4.1. *Soient $G_1 \in S_{B(X_1,Y_1)}$ et $G_2 \in S_{B(X_2,Y_2)}$ avec Y_1 et Y_2 deux espaces séparables. Alors $G_1 \oplus_\infty G_2 : X_1 \oplus_\infty X_2 \to Y_1 \oplus_\infty Y_2$ défini par $(G_1 \oplus_\infty G_2)(x_1, x_2) := (G_1x_1, G_2x_2)$ est un presque centre de Daugavet si et seulement si G_1 et G_2 sont des presque centres de Daugavet.*

Démonstration. Tout d'abord notons que $\|G_1 \oplus_\infty G_2\| = 1$. Commençons par sens réciproque. Supposons que $(e_n) \subset B_{X_1}$ et $(f_n) \subset B_{X_2}$ soient des suites telles que (G_1e_n) et (G_2f_n) soient deux suites ℓ^1-type canonique dans Y_1 et Y_2 respectivement. Alors $(G_1 \oplus_\infty G_2)(e_n, f_n) = (G_1e_n, G_2f_n)$ est une suite ℓ^1-type canonique dans $Y_1 \oplus_\infty Y_2$. En effet, $\|(e_n, f_n)\| = \max(\|e_n\|, \|f_n\|) \leq 1$ et pour $(y_1, y_2) \in Y_1 \oplus_\infty Y_2$,

$$\begin{aligned}
\lim_n \|(y_1, y_2) + (G_1e_n, G_2f_n)\| &= \lim_n \max(\|y_1 + G_1e_n\|, \|y_2 + G_2f_n\|) \\
&= \max(\lim_n \|y_1 + G_1e_n\|, \lim_n \|y_2 + G_2f_n\|) \\
&= \max(\|y_1\| + 1, \|y_2\| + 1) \\
&= \|(y_1, y_2)\| + 1.
\end{aligned}$$

Donc $G_1 \oplus_\infty G_2$ est un presque centre de Daugavet d'après le Théorème II.1.3.
Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(e_n, f_n) \subset B_{X_1 \oplus_\infty X_2}$ telle que $(G_1 e_n, G_2 f_n)$ soit une suite ℓ^1-type canonique dans $Y_1 \oplus_\infty Y_2$. Alors pour tout élément non nul $y_1 \in Y_1$,

$$\begin{aligned}\lim_n \|(y_1, 0) + (G_1 e_n, G_2 f_n)\| &= \|y_1\| + 1 \\ &= \lim_n \max(\|y_1 + G_1 e_n\|, \|G_2 f_n\|).\end{aligned}$$

Comme $\|G_2 f_n\| \leq 1$, les égalités précédentes montrent que $\lim_n \|y_1 + G_1 e_n\| = \|y_1\| + 1$. En particulier, $\lim_n \|G_1 e_n\| = 1$ et par conséquent $(G_1 e_n)$ est une suite ℓ^1-type canonique dans Y_1. Le même argument appliqué pour G_2 montre que $(G_2 f_n)$ est aussi une suite ℓ^1-type canonique. Donc G_1 et G_2 sont des presque centres de Daugavet. $\square$

Proposition II.4.2. *Soit $G \in S_{B(X_1, Y_1)}$ un presque centre de Daugavet et $T \in B(X_2, Y_2)$ avec $\|T\| \leq 1$, où Y_1 et Y_2 sont des espaces séparables. Alors $G \oplus_1 T : X_1 \oplus_1 X_2 \to Y_1 \oplus_1 Y_2$ défini par $(G \oplus_1 T)(x_1, x_2) := (Gx_1, Tx_2)$ est un presque centre de Daugavet.*

Démonstration. On a $\|G \oplus_1 T\| = 1$. Si $(e_n) \subset B_{X_1}$ est telle que $(Ge_n) \subset Y_1$ soit une suite ℓ^1-type canonique, alors $(G \oplus_1 T)(e_n, 0) = (Ge_n, 0)$ est une suite ℓ^1-type canonique dans $Y_1 \oplus_1 Y_2$. On conclut encore avec le Théorème II.1.3. $\square$

II.5 Exemples de presque centres de Daugavet

II.5.1 Sur ℓ^1

Il est clair d'après le Théorème II.1.1 que l'espace ℓ^1 des suites sommables à coefficients réels ou complexes a la propriété presque Daugavet (voir [KadSheWer, Proposition 2.6] pour une preuve directe). Nous allons donner un exemple de presque centre de Daugavet sur cet espace qui n'est pas l'identité.
Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction, et $u = (u_n)_{n\geq 1} \in \ell^\infty$. On définit formellement l'opérateur de composition à poids uC_φ par $uC_\varphi(x) = (u_n x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ pour chaque suite $x = (x_n)_{n\geq 1}$. Si $(e_n)_{n\geq 1}$ désigne la base canonique de ℓ^1, et si $\varphi^{-1}(\{N\}) = \{k_1, \ldots, k_m\}$, on a

$$uC_\varphi(e_N) = u_{k_1} e_{k_1} + \cdots + u_{k_m} e_{k_m} = \sum_{\varphi(k)=N} u_k e_k. \tag{II.5.1}$$

Commençons par caractériser la bornitude d'une telle application.

Proposition II.5.1. *L'opérateur uC_φ est borné sur ℓ^1 si et seulement si* $\sup\limits_N \sum\limits_{\varphi(k)=N} |u_k| < \infty$.

Dans ce cas, $\|uC_\varphi\| = \sup\limits_N \sum\limits_{\varphi(k)=N} |u_k|$.

Démonstration. La condition nécessaire est claire au regard de (II.5.1). Supposons maintenant que $\sup_N \sum_{\varphi(k)=N} |u_k| < \infty$. Alors si $x = \sum x_n e_n \in \ell^1$, on a

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi(x)\|_1 &= \left\|\sum_N x_N uC_\varphi(e_N)\right\|_1 = \left\|\sum_N x_N \left(\sum_{\varphi(k)=N} u_k e_k\right)\right\|_1 = \left\|\sum_k x_{\varphi(k)} u_k e_k\right\|_1 \\ &= \sum_k |x_{\varphi(k)} u_k| = \sum_N |x_N| \left(\sum_{\varphi(k)=N} |u_k|\right) \leq \left(\sup_N \sum_{\varphi(k)=N} |u_k|\right) \|x\|_1,\end{aligned}$$

ce qui montre que $uC_\varphi \in B(\ell^1)$ et que $\|uC_\varphi\| \leq \sup_N \sum_{\varphi(k)=N} |u_k|$. L'autre inégalité se montre en testant uC_φ sur les e_N. □

On suppose désormais que $\|uC_\varphi\| = 1$. Notons tout d'abord que l'opérateur de composition C_φ n'est pas nécessairement borné sur ℓ^1. En fait, la Proposition II.5.1 nous dit que C_φ est borné si et seulement φ est finie-valente, *i.e.* $\sup \operatorname{card}(\varphi^{-1}(\{N\}) < \infty$. Par exemple, si $u \in \ell^1$ on a toujours $uC_\varphi \in B(\ell^1)$ bien que φ puisse ne pas être finie-valente.
Le théorème suivant nous donne une caractérisation des opérateurs de composition à poids sur ℓ^1 qui sont des presque centres de Daugavet.

Théorème II.5.2. *Supposons que l'opérateur uC_φ soit borné sur ℓ^1 de norme* 1. *Alors uC_φ est un presque centre de Daugavet si et seulement si*

$$\varlimsup_N \sum_{\varphi(k)=N} |u_k| = 1.$$

Avant de donner une preuve de ce théorème, regardons d'abord un cas particulier. Si $\varphi(n) = n+1$ alors $uC_\varphi = B_u$ est le backward shift à poids u défini par $B_u e_1 = 0$, et $B_u e_{n+1} = u_n e_n$. Pour $u \in S_{\ell^\infty}$ on a $\|B_u\| = \|u\|_\infty = 1$, et B_u est un presque centre de Daugavet si et seulement si $\varlimsup |u_n| = 1$.
Démonstration. On va prouver ce résultat dans le cas où l'espace ℓ^1 est réel, sachant que le cas complexe s'obtient en suivant les mêmes arguments.
Commençons par le sens réciproque, et prenons une suite d'entiers strictement croissante (N_m) qui vérifie $\lim_m \sum_{\varphi(k)=N_m} |u_k| = 1$. On va montrer que la suite $(uC_\varphi(e_{N_m}))_m$ forme une suite ℓ^1-type canonique dans ℓ^1. Pour tout $x = \sum x_k e_k \in \ell^1$, on a

$$\begin{aligned}\|x + uC_\varphi(e_{N_m})\|_1 &= \left\|\sum_k x_k e_k + \sum_{\varphi(k)=N_m} u_k e_k\right\|_1 \\ &= \sum_{\varphi(k)\neq N_m} |x_k| + \sum_{\varphi(k)=N_m} |x_k + u_k| \\ &= \|x\|_1 + \sum_{\varphi(k)=N_m} (|x_k + u_k| - |x_k|).\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n_0 \geq 1$ tel que $\sum_{n \geq n_0} |x_n| < \varepsilon/2$. Il existe alors un entier $m_0 \geq 1$ tel que pour tout $m \geq m_0$ on ait $N_m > \max\{\varphi(1), \ldots, \varphi(n_0)\}$. Ainsi, $\{k \mid \varphi(k) = N_m\} \subset \{n_0+1, n_0+2, \ldots\}$ et par conséquent $\sum\limits_{\varphi(k)=N_m} |x_k| < \varepsilon/2$. On a alors

$$\begin{aligned}\left| \sum_{\varphi(k)=N_m} (|x_k + u_k| - |x_k|) - \sum_{\varphi(k)=N_m} |u_k| \right| &= \sum_{\varphi(k)=N_m} |x_k| + |u_k| - |x_k + u_k| \\ &\leq 2 \sum_{\varphi(k)=N_m} |x_k| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_m \sum_{\varphi(k)=N_m} (|x_k + u_k| - |x_k|) = \lim_m \sum_{\varphi(k)=N_m} |u_k| = 1,$$

ce qui montre que $\lim_m \|x + uC_\varphi(e_{N_m})\|_1 = \|x\|_1 + 1$. D'après le Théorème II.1.3, l'opérateur uC_φ est un presque centre de Daugavet.

Pour montrer le sens direct, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $0 < \rho < 1$ et $N_0 \geq 1$ tels que pour tout $N \geq N_0$ on ait

$$\sum_{\varphi(k)=N} |u_k| < \rho < 1.$$

Notons, pour $1 \leq N \leq N_0$, $A_N = \varphi^{-1}(\{N\})$. Supposons pour l'instant que les ensembles $A_1, \ldots, A_{N_0}$ ne soient ni tous finis ni tous infinis. Quitte à renuméroter les A_N, on peut supposer que les ensembles $A_1, \ldots, A_{n_0}$ sont infinis, et que $A_{n_0+1}, \ldots, A_{N_0}$ sont finis. Fixons $\delta \in (0, (1-\rho)/N_0)$, et notons $A_N = \{k_l^N,\ l \geq 1\}$ pour $1 \leq N \leq n_0$, où $(k_l^N)_l$ est strictement croissante. Comme

$$\sum_{\varphi(k)=N} |u_k| = \sum_{k \in A_N} |u_k| = \sum_{l=1}^{\infty} |u_{k_l^N}| \leq 1$$

pour tout $1 \leq N \leq n_0$, on peut trouver un indice $l_{\max} \geq 1$ tel que

$$\sum_{l > l_{\max}} |u_{k_l^N}| \leq \delta, \quad \forall N \in \{1, \ldots, n_0\}.$$

Notons ensuite

$$\begin{aligned} A &:= \bigcup_{N=1}^{N_0} A_N \\ \tilde{A} &:= \{k_l^N \mid 1 \leq N \leq n_0,\ 1 \leq l \leq l_{\max}\} \cup \left(\bigcup_{N=n_0+1}^{N_0} A_N \right). \end{aligned}$$

Puisque uC_φ est un presque centre de Daugavet, la condition $i)$ du Théorème II.1.3 affirme que l'épaisseur de uC_φ vaut 2. Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $uC_\varphi(S_{\ell^1})$ n'admet pas de $(2-\varepsilon)$-réseau fini dans S_{ℓ^1}. Par conséquent, pour tout $0 < \varepsilon < (1-\rho-N_0\delta)/(1+|\tilde{A}|)$, où $|\tilde{A}|$ désigne le cardinal de $\tilde{A}$, l'ensemble $\{\pm e_k \mid k \in \tilde{A}\} \subset S_{\ell^1}$ n'est pas un $(2-\varepsilon)$-réseau fini pour $uC_\varphi(S_{\ell^1})$ (dans le cas complexe, on utilise l'ensemble $\{\pm e_k,\ \pm ie_k \mid k \in \tilde{A}\}$). Il existe donc $x \in S_{\ell^1}$ tel que

$$\|e_k \pm uC_\varphi(x)\|_1 > 2-\varepsilon, \text{ pour tout } k \in \tilde{A}. \tag{II.5.2}$$

Si l'on note $x = \sum_n x_n e_n$, on a

$$\begin{aligned}\|e_k \pm uC_\varphi(x)\|_1 &= \sum_{n\neq k} |x_{\varphi(n)}u_n| + |1 \pm x_{\varphi(k)}u_k| \\ &= \|uC_\varphi(x)\|_1 - |x_{\varphi(k)}u_k| + |1 \pm x_{\varphi(k)}u_k|.\end{aligned}$$

En utilisant (II.5.2), on obtient

$$2-\varepsilon < \|uC_\varphi(x)\|_1 - |x_{\varphi(k)}u_k| + |1 + x_{\varphi(k)}u_k| \leq 2$$

et

$$-2 \leq -\|uC_\varphi(x)\|_1 + |x_{\varphi(k)}u_k| - |1 - x_{\varphi(k)}u_k| < -2+\varepsilon.$$

Ainsi, on a

$$\big||1 + x_{\varphi(k)}u_k| - |1 - x_{\varphi(k)}u_k|\big| < \varepsilon,$$

ce qui implique que $|x_{\varphi(k)}u_k| < \varepsilon$, pour tout $k \in \tilde{A}$. On a donc

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi(x)\|_1 &= \sum_N |x_N| \left(\sum_{\varphi(k)=N} |u_k|\right) \\ &= \sum_{N=1}^{N_0} |x_N| \sum_{\varphi(k)=N} |u_k| + \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| \sum_{\varphi(k)=N} |u_k| \\ &\leq \sum_{\varphi(k)\leq N_0} |x_{\varphi(k)}u_k| + \rho \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| \\ &\leq \sum_{k\in A} |x_{\varphi(k)}u_k| + \rho \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| \\ &\leq \sum_{k\in \tilde{A}} |x_{\varphi(k)}u_k| + \sum_{k\in A\setminus\tilde{A}} |x_{\varphi(k)}u_k| + \rho \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| \\ &\leq \varepsilon|\tilde{A}| + \sum_{N=1}^{n_0} \sum_{l>l_{\max}} |x_{\varphi(k_l^N)}u_{k_l^N}| + \rho \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| \\ &\leq \varepsilon|\tilde{A}| + N_0\delta + \rho \sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N|.\end{aligned}$$

Étant donné que $\|uC_\varphi(x)\|_1 \geq \|e_k + uC_\varphi(x)\|_1 - 1 > 1 - \varepsilon$ pour $k \in \tilde{A}$, on en déduit que

$$\sum_{N=N_0+1}^{\infty} |x_N| > \frac{1}{\rho}\left(1 - \varepsilon(1 + |\tilde{A}|) - N_0\delta\right) > \frac{1}{\rho}\left(1 - (1 - \rho - N_0\delta) - N_0\delta\right) \geq 1,$$

ce qui aboutit à une contradiction puisque $1 = \|x\|_1 \geq \sum_{N>N_0} |x_N| > 1$.
La même méthode s'applique dans le cas où les ensembles $A_1, \ldots, A_{N_0}$ sont tous finis ou tous infinis. □

II.5.2 Sur $C(K)$ et sur l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$

Soit K un espace compact séparé. Si K a un point isolé, alors l'espace $C(K)$ est de la forme $X \oplus_\infty \mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et d'après [KadSheWer, Proposition 2.7.], celui-ci n'a pas la propriété presque Daugavet. En fait, un argument similaire permet d'affirmer qu'il n'y a pas de presque centre de Daugavet sur $X \oplus_\infty \mathbb{K}$.
On se place désormais dans la situation où K_1 et K_2 sont des espaces compacts séparés sans point isolé. Les espaces $C(K_1)$ et $C(K_2)$ ont alors la propriété de Daugavet, et nous avons fourni de exemples de centres de Daugavet non triviaux de $C(K_1)$ dans $C(K_2)$ dans le chapitre I, qui sont *a fortiori* des presque centres de Daugavet. Nous allons montrer qu'en ce qui concerne les opérateurs de composition à poids, ces deux notions coïncident. Étant donné une fonction non identiquement nulle $u \in C(K_2)$ et une application continue φ de K_2 dans K_1, considérons l'opérateur $uC_\varphi : C(K_1) \to C(K_2)$. Rappelons que uC_φ est un centre de Daugavet si et seulement si $\varphi^{-1}(\{t\})$ est d'intérieur vide dans K_2 pour chaque $t \in K_1$ et $|u|$ est constant sur K_2.

Proposition II.5.3. *Soient K_1 et K_2 des ensembles compacts séparés sans point isolé, et $uC_\varphi : C(K_1) \to C(K_2)$ un opérateur de composition à poids. Supposons de plus que K_2 est métrisable. Alors uC_φ est un presque centre de Daugavet si et seulement si c'est un centre de Daugavet.*

Démonstration. Il faut juste montrer le sens direct, le sens réciproque étant immédiat. On peut supposer, quitte à multiplier uC_φ par une constante positive, que $\|u\|_\infty = \|uC_\varphi\| = 1$. Puisque K_2 est métrisable, nous pouvons nous placer sous les hypothèses du Théorème II.1.3. Il existe donc une suite (g_n) de $B_{C(K_1)}$ telle que $(uC_\varphi(g_n))$ soit une suite ℓ^1-type canonique. Supposons tout d'abord qu'il existe $a \in K_2$ vérifiant $|u(a)| < 1$. On peut alors trouver un voisinage $U \subset K_2$ de a tel que $|u| < 1 - \delta < 1$ sur U. Choisissons ensuite f dans la sphère unité de $C(K_2)$ satisfaisant la condition $|f| < 1 - \delta$ sur $K_2 \backslash U$. Alors

$$\|f + uC_\varphi(g_n)\|_\infty = \max\left(\sup_U |f + u(g_n \circ \varphi)|, \sup_{K \backslash U} |f + u(g_n \circ \varphi)|\right) < 2 - \delta,$$

et donc $\|f + uC_\varphi(g_n)\|_\infty \nrightarrow 2$, ce qui est absurde. Ainsi le module de u est constant égal à 1.
Supposons maintenant que φ soit constante égale à t sur un ouvert non vide $V \subset K_2$. Fixons $s_0 \in V$ et considérons une fonction $f \in S_{C(K_2)}$ positive qui vaut 1 en s_0 et qui est strictement inférieure à 1 ailleurs. On a alors

$$\|f + ug_n \circ \varphi\|_\infty = \max\left(\sup_{\overline{V}} |f + ug_n \circ \varphi|, \sup_{K_2 \setminus \overline{V}} |f + ug_n \circ \varphi|\right) \longrightarrow 2,$$

ce qui implique que

$$\sup_{x \in \overline{V}} |f(x) + u(x)g_n(t)| \longrightarrow 2.$$

Prenons $x_n \in \overline{V}$ réalisant le maximum de $|f + ug_n(t)|$ sur $\overline{V}$. Le fait que $|f(x_n) + u(x_n)g_n(t)|$ tende vers 2 implique que $|f(x_n)|$ tend vers 1. Mais de par la nature de f, il s'ensuit que la suite (x_n) converge vers s_0, et par conséquent $(f(x_n))$ converge vers 1, et donc $\lim_n u(x_n)g_n(t) = 1$. Ainsi la suite $(g_n(t))_n$ converge vers $1/u(s_0)$. En appliquant le même procédé mais avec $-f$ à la place de f, on obtient que $g_n(t) \to -1/u(s_0)$, ce qui est absurde. Donc $\varphi^{-1}\{t\}$ est d'intérieur vide, pour tout $t \in K_1$. □

En ce qui concerne l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$, nous avons vu dans le Théorème I.4.11 au chapitre I que uC_φ est un centre de Daugavet sur $A(\mathbb{D})$ si et seulement si φ est une fonction intérieure et u est un multiple d'une fonction intérieure.

Proposition II.5.4. *L'opérateur de composition à poids $uC_\varphi : A(\mathbb{D}) \to A(\mathbb{D})$ est un presque centre de Daugavet si et seulement si c'est un centre de Daugavet.*

La preuve, laissée au lecteur, utilise les même arguments que ceux de la preuve de la Proposition II.5.3.

II.6 Renormage

Nous avons vu dans la section II.3 que pour $G \in S_{B(X,Y)}$ avec Y un espace de Banach séparable, la condition « G est un presque centre de Daugavet » est équivalente à l'existence d'une suite $(e_n) \subset X$ telle que (Ge_n) soit une suite ℓ^1-type canonique dans Y. Puisque une suite ℓ^1-type canonique contient une sous-suite équivalente à la base canonique de ℓ^1, il s'ensuit qu'un presque centre de Daugavet fixe une copie isomorphique de ℓ^1. Par conséquent pour démontrer le Théorème II.1.6, il suffit de prouver le théorème suivant :

Théorème II.6.1. *Soient X et Y des espaces de Banach, et supposons Y séparable. Si l'opérateur $G \in S_{B(X,Y)}$ fixe une copie de ℓ^1, alors on peut renormer de manière équivalente les espaces X et Y de sorte que $G : X \to Y$ soit un presque centre de Daugavet de norme* 1 *pour*

les nouvelles normes.
Plus précisément, s'il existe des suites $(e_n) \subset X$ et $(f_n) \subset Y$ équivalentes à la base canonique de ℓ^1 telles que $Ge_n = f_n$, alors on peut renormer les espaces X et Y de manière équivalente de telle sorte que :

i) les suites (e_n) et (f_n) soient isométriquement isomorphes à la base canonique de ℓ^1,
ii) G soit de norme 1 pour les nouvelles normes,
iii) (Ge_n) soit une suite ℓ^1-type canonique dans Y.

Démonstration. La preuve se déroule en deux étapes.
Première étape : On commence par renormer X et Y de sorte que $i)$ et $ii)$ soient vraies. Notons $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_Y$ les normes originelles sur X et Y. Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ on ait

$$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right|_X \leq C\sum_{k=1}^{n}|a_k|,$$

$$\frac{1}{C}\sum_{k=1}^{n}|a_k| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k f_k\right|_Y \leq C\sum_{k=1}^{n}|a_k|.$$

Si l'on note E (resp. F) le sous-espace de X (resp. Y) engendré par la suite (e_n) (resp. (f_n)), alors on pose $\|\sum a_k e_k\|_E := \sum |a_k|$ et $\|\sum a_k f_k\|_F := \sum |a_k|$. Ainsi définies, les normes $\|\cdot\|_E$ et $|\cdot|_X$ sont équivalentes sur E, et $\|\cdot\|_F$ et $|\cdot|_Y$ sont équivalentes sur F. Quitte à multiplier $|\cdot|_X$ et $|\cdot|_Y$ par une même constante positive, ce qui ne change pas la norme de G, on peut supposer que $\|\cdot\|_E \leq 2|\cdot|_X$ et $\|\cdot\|_F \leq 2|\cdot|_Y$. Notons ensuite

$$B_X^{|\cdot|_X} := \{x \in X \mid |x|_X \leq 1\}, \quad B_E^{\|\cdot\|_E} := \{x \in E \mid \|x\|_E \leq 1\},$$

$$B_Y^{|\cdot|_Y} := \{y \in Y \mid |y|_Y \leq 1\}, \quad B_F^{\|\cdot\|_F} := \{y \in F \mid \|y\|_F \leq 1\},$$

et

$$C_X := \overline{\mathrm{co}}(B_X^{|\cdot|_X} \cup B_E^{\|\cdot\|_E}), \quad C_Y := \overline{\mathrm{co}}(B_Y^{|\cdot|_Y} \cup B_F^{\|\cdot\|_F}).$$

Alors C_X est un sous-ensemble convexe fermé de X, symétrique, contenant 0 dans son intérieur, et par conséquent on peut considérer la fonctionnelle de Minkowski associée à C_X, qu'on note j_X. Celle-ci définit une norme sur X équivalente à $|\cdot|_X$ dont la boule unité fermée est C_X. De plus, j_X et $\|\cdot\|_E$ coïncident sur E. De la même manière, on obtient une norme j_Y sur Y équivalente à $|\cdot|_Y$ et qui coïncide avec $\|\cdot\|_F$ sur F. La condition $i)$ est alors satisfaite. Comme $G : (X, j_X) \to (Y, j_Y)$ est continue, il suffit pour montrer $ii)$ de voir que $G(C_X) \subset C_Y$. Mais $G(B_X^{|\cdot|_X}) \subset B_Y^{|\cdot|_Y}$ car $|G| = \sup_{x\neq 0}(|Gx|_Y/|x|_X) = 1$, et $G(B_E^{\|\cdot\|_E}) \subset B_F^{\|\cdot\|_F}$ car $G : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ est devenu une isométrie. On conclut par convexité puis par densité.

Deuxième étape : On va encore renormer X et Y de sorte que la suite (Ge_n) forme une suite ℓ^1-type canonique dans Y.

Notons $\|\cdot\|_X = j_X$ et $\|\cdot\|_Y = j_Y$. La preuve qui suit est adaptée d'un argument W.B. Johnson donné dans [KadSheWer].
Supposons que l'espace Y soit réel. Soit (r_n) la suite des fonctions de Rademacher dans $L^\infty[0,1]$. On définit l'opérateur $T : F \to L^\infty[0,1]$ par $Tf_n = r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est une isométrie, et comme $L^\infty[0,1]$ est 1-injectif, on peut l'étendre en un opérateur de norme 1 sur Y qu'on note encore $T : Y \to L^\infty[0,1]$. On pose alors

$$\begin{aligned} |||y|||_Y &:= \|Ty\|_\infty + \|[y]\|_{Y/F},\ y \in Y, \\ |||x|||_X &:= \|TGx\|_\infty + \|[x]\|_{X/E},\ x \in X, \end{aligned}$$

où $[x]$ (resp. $[y]$) désigne la classe de x (resp. de y) dans l'espace quotient $X/_E$ (resp. $Y/_F$). On vérifie facilement que ce sont bien des normes. Notons que si $x \in E$, alors $|||Gx|||_Y = \|TGx\|_\infty = \|Gx\|_Y = \|x\|_X$, et $\|TGx\|_\infty = |||x|||_X$, autrement dit G est une isométrie de $(E, |||\cdot|||_X)$ sur $(F, |||\cdot|||_Y)$.
Vérifions que les normes $\|\cdot\|_X$ et $|||\cdot|||_X$ sont équivalentes. On a clairement $|||x|||_X \leq 2\|x\|_X$. Supposons que $\|x\|_X = 1$, et montrons que $|||x|||_X \geq 1/3$. Si $\|[x]\|_{X/E} \geq 1/3$, c'est clair. Sinon, on choisit $z \in E$ satisfaisant $\|x - z\|_X < 1/3$. Alors $\|TGz\|_\infty = \|Gz\|_Y = \|z\|_X > 2/3$, et donc

$$|||x|||_X \geq \|TGx\|_\infty \geq \|TGz\|_\infty - \|TG(x-z)\|_\infty > \frac{2}{3} - \|x - z\|_X > \frac{1}{3}.$$

On montre de la même manière que $\|\cdot\|_Y$ et $|||\cdot|||_Y$ sont équivalentes.
Comme les nouvelles normes coïncident avec les anciennes sur E et F, les suites (e_n) et (f_n) sont encore isométriquement isomorphes à la base canonique de ℓ^1, et donc i) est toujours satisfaite. Pour ii), si l'on note $|||G||| := \sup_{x \neq 0}(|||Gx|||_Y / |||x|||_X)$ la norme de G pour les nouvelles normes sur X et Y, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} |||Gx|||_Y &= \|TGx\|_\infty + \|[Gx]\|_{Y/F} \\ &\leq \|TGx\|_\infty + \|[x]\|_{X/E} \\ &\leq |||x|||_X, \end{aligned}$$

car $\|[Gx]\|_{Y/F} = d(Gx, F) = d(Gx, G(E)) \leq \|G\| d(x, E) \leq \|[x]\|_{X/E}$. Par conséquent, $|||G||| \leq 1$, et comme G est une isométrie de E sur F, on a $|||G||| = 1$. Enfin, pour tout $y \in Y$ on a

$$\begin{aligned} \lim_n |||y + Ge_n|||_Y &= \lim_n (\|Ty + TGe_n\|_\infty + \|[y + Ge_n]\|_{Y/F}) \\ &= \lim_n (\|Ty + r_n\|_\infty) + \|[y]\|_{Y/F} \\ &= \|Ty\|_\infty + 1 + \|[y]\|_{Y/F} \\ &= |||y|||_Y + 1, \end{aligned}$$

ce qui montre iii) et achève la preuve. $\square$

Notons que dans la deuxième étape de la preuve on suppose que Y est réel pour utiliser le fait que la suite des fonctions de Rademacher est isométrique à la base canonique de ℓ^1 dans l'espace réel $L_\infty[0,1]$. Si Y n'est plus réel, l'opérateur T n'est plus isométrique sur E. Dans ce cas on utilise la méthode donnée dans [KadSheWer] and [BoKad10] pour définir des nouvelles normes sur X et Y : Il existe une semi-norme $p : Y \to \mathbb{K}$ satisfaisant $p(y) \leq \|y\|_Y$ pour tout $y \in Y,\ p$ coïncide avec $\|\cdot\|_Y$ sur F et $\lim_n p(y+f_n) = p(y)+1$ pour tout $y \in Y$. On définit alors

$$|||y|||_Y := p(y) + \|[y]\|_{Y/F},\ y \in Y,$$
$$|||x|||_X := p(Gx) + \|[x]\|_{X/E},\ x \in X.$$

Ces nouvelles normes vérifient les conditions $i),\ ii)$ et $iii)$ du Théorème II.1.6.

Chapitre III

Normes essentielles d'opérateurs de composition à poids entre les espaces de Hardy H^p et H^q pour $1 \leq p, q \leq \infty$

III.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est l'étude de la compacité, et plus particulièrement de la norme essentielle des opérateurs de composition à poids entre différents espaces de Hardy. Depuis les années 1980 les opérateurs de composition ont été largement étudiés sur divers espaces de fonctions analytiques (voir par exemple le livre [CoMcC95] pour les espaces de Hardy et Bergman). Le cas des opérateurs de composition à poids uC_φ sur les espaces de Hardy H^p n'est traité qu'à partir des années 2000 (voir [ConH01] pour $1 \leq p < \infty$ et [ConDi99] pour $p = \infty$), bien que ceux-ci apparaissent naturellement dans différents contextes. En effet de Leeuw a montré en 1960 que les isométries sur l'espace de Hardy H^1 étaient de cette forme [dL60], avant que Forelli [For64] n'obtienne ce résultat pour les espaces H^p pour $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. D'autre part les opérateurs de composition à poids apparaissent également dans l'étude des opérateurs de composition sur des espaces de Hardy du demi-plan. En effet, un opérateur de composition sur un espace de Hardy du demi-plan est borné si et seulement si un certain opérateur de composition à poids est borné sur l'espace de Hardy du disque correspondant (voir [SharSi99] et [Mat99]).

La première question que l'on peut se poser est celle de la continuité : Quand uC_φ envoie-t-il continûment l'espace H^p dans lui-même ? La réponse est classique dans le cas où $u \equiv 1$, car le principe de subordination de Littlewood [CoMcC95, Corollary 2.24] nous assure la continuité automatique des opérateurs de composition sur H^p. Par conséquent la condition $u \in H^\infty$ suffit pour assurer la continuité de uC_φ. De plus, en considérant l'image des fonctions constantes, une condition nécessaire est que u appartienne à H^p. Néanmoins il s'avère qu'à la différence des opérateurs de composition, un opérateur de composition à poids n'est pas nécessairement continu sur H^p, et il est facile de trouver des exemples où $uC_\varphi(H^p) \nsubseteq H^p$ (voir [ConH03, Lemma 2.1] par exemple).

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux opérateurs de composition à poids agissant entre les différents espaces de Hardy H^p et H^q pour $p, q \in [1, \infty]$. La continuité et la compacité de tels opérateurs est caractérisée dans [ConH03] pour $1 \leq p \leq q < \infty$ en termes de mesures de Carleson, alors que les normes essentielles d'opérateurs de composition à poids sont estimées dans [CuZ07] pour $1 < p \leq q < \infty$ en terme d'opérateur intégral, et dans [Le09] pour $p = q = \infty$. Pour le cas $1 \leq q < p < \infty$, la continuité et la compacité de uC_φ sont étudiées dans [CuZ07], et Gorkin et MacCluer dans [GMcM04] donnent une estimation de la norme essentielle d'un opérateur de composition agissant entre H^p et H^q quand $1 < q < p < \infty$. Cependant nous n'avons pu trouver de référence concernant la norme essentielle de uC_φ pour les cas $p = 1 \leq q$ ou $q = 1 < p$, ce qui a motivé notre travail.

Le propos de ce chapitre est de compléter les différents cas restant dans l'estimation de la norme essentielle d'un opérateur de composition à poids. Dans les sections III.3 et III.4, nous donnons une estimation de la norme essentielle de uC_φ entre H^p et H^q pour $p = 1$ et $1 \leq q < \infty$ et pour $1 \leq p < \infty$ et $q = \infty$. Les sections III.5 et III.6 sont dévouées au cas $\infty \geq p > q \geq 1$.

III.2 Cadre et notations

On note $\overline{\mathbb{D}}$ le disque unité fermé $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D}$ le cercle unité. La mesure de Haar normalisée sur $\mathbb{T}$ sera notée $\mathrm{d}m = \mathrm{d}t/2\pi$. Si A est un borélien de $\mathbb{T}$, la notation $m(A)$ aussi bien que $|A|$ désignera la mesure de Haar de A. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ est l'espace des fonctions analytiques $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ satisfaisant la condition suivante

$$\|f\|_p = \sup_{0<r<1} \left(\int_{\mathbb{T}} |f(r\zeta)|^p \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{1/p} < \infty.$$

Muni de cette norme, $H^p(\mathbb{D})$ est un espace de Banach. L'espace $H^\infty(\mathbb{D})$ est constitué des fonctions analytiques bornées sur le disque unité, et sa norme est donnée par la norme infinie sur $\mathbb{D}$.
On rappelle qu'une fonction $f \in H^p(\mathbb{D})$ se prolonge à $\mathbb{T}$ en une fonction f^* par la formule suivante : $f^*(e^{i\theta}) = \lim_{r \nearrow 1} f(re^{i\theta})$. Cette limite existe presque partout d'après le théorème de Fatou, et $f^* \in L^p(\mathbb{T})$. De plus, $f \mapsto f^*$ est une isométrie de $H^p(\mathbb{D})$ dans $L^p(\mathbb{T})$ dont l'image, notée $H^p(\mathbb{T})$ est l'adhérence (adhérence préfaible pour $p = \infty$) de l'ensemble des polynômes dans $L^p(\mathbb{T})$. Par conséquent nous pouvons identifier $H^p(\mathbb{D})$ et $H^p(\mathbb{T})$, et l'on utilisera la notation H^p pour ces deux espaces. Pour plus d'informations sur les espaces de Hardy, on peut se référer à [Ko80] par exemple.

On rappelle que la *norme essentielle* d'un opérateur $T : X \to Y$, notée $\|T\|_e$, est définie par

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\|;\ K \text{ est compact de } X \text{ dans } Y\}.$$

Observons que $\|T\|_e \leq \|T\|$, et que $\|T\|_e$ est la norme de T vu comme un élément de l'espace quotient $B(X, Y)/K(X, Y)$ où $K(X, Y)$ désigne l'espace des opérateurs compacts de X dans Y.

Les premiers résultats importants sur la norme essentielle d'un opérateur de composition sur H^2 remontent à 1987, où J. Shapiro [Shap87] donna une formule exacte pour la norme essentielle de C_φ en terme de la fonction de comptage de Nevanlinna pour φ. Par la même occasion il caractérisa la compacité de C_φ en fonction des valeurs du symbole φ à l'intérieur du disque $\mathbb{D}$. Une autre caractérisation de la compacité de C_φ sur H^p fut donnée par B. McCluer [McC85] au moyen de mesures de Carleson. Cette caractérisation faisant intervenir la mesure image m_φ de la mesure de Lebesgue m par φ^*, elle ne dépend que des valeurs de φ^*, autrement dit des valeurs de φ au bord du disque unité. Il est intéressant de souligner que ces deux approches, pourtant différentes, sont en fait étroitement liées, comme le montrent les auteurs dans [LeLiQR]. Dans ce chapitre nous donnerons des résultats en adoptant le second point de vue, c'est-à-dire en fonction des valeurs au bord de φ.

Notation : on écrira $a \approx b$ s'il existe des constantes positives universelles c et C telles que $cb \leq a \leq Cb$. Dans la suite de ce chapitre, u désignera une fonction analytique non nulle définie sur $\mathbb{D}$ et φ sera une fonction analytique non constante définie sur $\mathbb{D}$ satisfaisant $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

III.3 $uC_\varphi \in B(H^1, H^q)$ POUR $1 \leq q < \infty$

Pour $a \in \mathbb{D}$ et $1 \leq p < \infty$ notons

$$k_a(z) = \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} \quad (z \in \mathbb{D})$$

le noyau normalisé dans H^1, et $k_{a,p} = k_a^{1/p}$. Alors $k_{a,p} \in H^p$ et $\|k_{a,p}\|_p = 1$. Pour $p = 2$ c'est simplement le noyau reproduisant normalisé dans H^2. Si $T : H^p \to H^q$ est un opérateur borné, alors on a clairement

$$\sup_{a \in \mathbb{D}} \|Tk_{a,p}\|_q \leq \|T\| < \infty.$$

On ne peut pas s'attendre à une réciproque de ce résultat en toute généralité. Cependant dans le cas des opérateurs de composition à poids nous avons le théorème suivant, démontré par Ž. Čučković et R. Zhao :

Théorème III.3.1. ([CuZ07, Theorem 4]) *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Pour $0 < p \leq q < \infty$, l'opérateur de composition à poids uC_φ est borné de H^p dans H^q si et seulement si*

$$\sup_{a\in\mathbb{D}} \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\varphi(\zeta)|^2}\right)^{q/p} \mathrm{d}m(\zeta) < \infty.$$

Non seulement les noyaux $k_{a,p}$ permettent de tester la continuité des opérateurs de compositions à poids, mais ils caractérisent également la compacité de tels opérateurs en fournissant une estimation de leur norme essentielle :

Théorème III.3.2. ([CuZ07, Theorem 5]) *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Supposons que uC_φ soit borné de H^p dans H^q avec $1 < p \leq q < \infty$. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \approx \limsup_{|a|\to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\varphi(\zeta)|^2}\right)^{q/p} \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Le but de cette section est de montrer que ce théorème est toujours valide dans le cas $p = 1$, en montrant le résultat suivant :

Théorème III.3.3. *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. On suppose que l'opérateur de composition à poids uC_φ est borné de H^1 dans H^q pour un certain $1 \leq q < \infty$. On a alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \approx \limsup_{|a|\to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\varphi(\zeta)|^2}\right)^{q} \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Avant de prouver ce théorème, nous avons besoin d'introduire la notion de mesure de Carleson.

III.3.1 (p,q)-mesures de Carleson pour $1 \leq p < q < \infty$

Supposons que μ soit une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{D}}$ et soit $p, q \in [1, \infty)$. On dit que la mesure μ est une (p,q)-mesure de Carleson si l'injection canonique $J_\mu : f \in H^p \mapsto f \in L^q(\mu)$ est bien définie. Dans ce cas, le théorème du graphe fermé assure que J_μ est continue. Autrement dit, μ est une (p,q)-mesure de Carleson s'il existe une constante $\gamma_1 > 0$ telle que pour tout $f \in H^p$,

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|^q \, \mathrm{d}\mu(z) \leq \gamma_1 \|f\|_p^q. \tag{III.3.1}$$

Soit I un arc de $\mathbb{T}$. On appelle fenêtre de Carleson l'ensemble $S(I)$ donné par

$$S(I) = \{z \in \mathbb{D} \mid 1 - |I| \leq |z| < 1,\ z/|z| \in I\}.$$

On note $\mu_{\mathbb{D}}$ et $\mu_{\mathbb{T}}$ les restrictions de μ à $\mathbb{D}$ et $\mathbb{T}$ respectivement. Le résultat suivant est une version d'un théorème de Duren (voir [Dur70], p.163) pour des mesures sur $\overline{\mathbb{D}}$:

Théorème III.3.4. ([BlJ05, Theorem 2.5]) *Soit* $1 \leq p < q < \infty$. *Une mesure borélienne positive finie* μ *sur* $\overline{\mathbb{D}}$ *est une* (p,q)*-mesure de Carleson si et seulement si* $\mu_{\mathbb{T}} = 0$ *et il existe une constante* $\gamma_2 > 0$ *telle que*

$$\mu_{\mathbb{D}}\left(S(I)\right) \leq \gamma_2 |I|^{q/p} \quad \textit{pour tout arc } I \subset \mathbb{T}. \tag{III.3.2}$$

Ajoutons que les meilleures constantes γ_1 et γ_2 dans (III.3.1) et (III.3.2) sont comparables, c'est-à dire qu'il existe une constante $\beta > 0$ indépendante de la mesure μ telle que $(1/\beta)\gamma_2 \leq \gamma_1 \leq \beta\gamma_2$.

La notion de mesure de Carleson fut introduite par Carleson dans [Ca62] dans son travail sur le théorème de la couronne. Il donna une caractérisation des mesures μ sur $\mathbb{D}$ pour lesquelles l'espace H^p s'injecte continûment dans $L^p(\mu)$.

Des exemples de mesures de Carleson sont fournis par des opérateurs de composition. Soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique et soit $p, q \in [1, \infty)$. La continuité de l'opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ entre H^p et H^q peut être reformulée en terme de (p,q)-mesure de Carleson. En effet, notons m_φ la *mesure image* de m par φ^*, c'est-à dire l'image de la mesure de Haar m de $\mathbb{T}$ par l'application φ^*, définie par

$$m_\varphi(A) = m\left(\varphi^{*^{-1}}(A)\right)$$

pour tout borélien A de $\overline{\mathbb{D}}$. Alors

$$\|C_\varphi(f)\|_q^q = \int_{\mathbb{T}} |f \circ \varphi|^q \, \mathrm{d}m = \int_{\overline{\mathbb{D}}} |f|^q \, \mathrm{d}m_\varphi = \|J_{m_\varphi}(f)\|_q^q$$

pour tout $f \in H^p$. Par conséquent C_φ envoie H^p continûment dans H^q si et seulement si m_φ est une (p,q)-mesure de Carleson.

Par la suite, nous noterons le disque de rayon r par $r\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{D} \mid |z| < r\}$ pour $0 < r < 1$. Nous aurons besoin du lemme suivant sur les (p,q)-mesures de Carleson :

Lemme III.3.5. *Soit* $0 < r < 1$ *et soit* μ *une mesure borélienne positive finie sur* $\overline{\mathbb{D}}$. *Notons*

$$N_r^* := \sup_{|a| \geq r} \int_{\overline{\mathbb{D}}} |k_a(w)|^{\frac{q}{p}} \, \mathrm{d}\mu(w).$$

Si μ *est une* (p,q)*-mesure de Carleson pour* $1 \leq p \leq q < \infty$ *alors* $\mu_r := \mu_{|_{\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D}}}$ *l'est également. De plus il existe une constante absolue* $M > 0$ *satisfaisant* $\|\mu_r\| \leq M N_r^*$ *où* $\|\mu_r\| := \sup_{I \subset \mathbb{T}} \dfrac{\mu_r\big(S(I)\big)}{|I|^{q/p}}$.

La preuve du Lemme III.3.5 est une petite modification de la preuve de Lemma 1 et Lemma 2 de [CuZ04] via l'utilisation du Théorème III.3.4.

III.3.2 Estimation de la norme essentielle de uC_φ

Commençons tout d'abord avec la majoration :

Proposition III.3.6. *Soit $uC_\varphi \in B(H^1, H^q)$ avec $1 \leq q < \infty$. Il existe alors une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$\|uC_\varphi\|_e \leq \gamma \limsup_{|a|\to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\varphi(\zeta)|^2} \right)^q \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dans la preuve de la majoration du Théorème III.3.2 dans [CuZ07], les auteurs utilisent une décomposition de l'opérateur identité de H^p de la forme $I = K_N + R_N$ où K_N est l'opérateur de somme partielle défini par $K_N\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, et utilisent le fait que la suite (K_N) est une suite d'opérateurs compact qui est uniformément bornée dans $B(H^p)$ et que R_N converge ponctuellement vers zéro sur H^p. Le problème ici est que la suite (K_N) n'est plus uniformément bornée dans $B(H^1)$. En fait, (K_N) est uniformément bornée dans $B(H^p)$ si et seulement si la projection de Riesz $P : L^p \to H^p$ est bornée [Z91, Theorem 2], ce qui est le cas si et seulement si $1 < p < \infty$. Par conséquent nous devons utiliser une décomposition différente pour le cas $p = 1$. Comme K_N est l'opérateur de convolution par le noyau de Dirichlet sur H^p, nous allons considérer le noyau de Fejér F_N d'ordre N qui est plus approprié dans notre contexte. On définit alors le nouvel opérateur $K_N : H^1 \to H^1$ comme étant l'opérateur de convolution associé à F_N, qui à $f \in H^1$ associe $K_N f = F_N * f \in H^1$ et $R_N = I - K_N$. Alors $\|K_N\| \leq 1$, K_N est compact et pour tout $f \in H^1$, $\|f - K_N f\|_1 \to 0$ d'après le théorème de Fejér. Si $f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n) z^n \in H^1$, alors on a

$$K_N f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \hat{f}(n) z^n.$$

Lemme III.3.7. *Soit $1 \leq q < \infty$ et supposons que $uC_\varphi \in B(H^1, H^q)$. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \leq \liminf_N \|uC_\varphi R_N\|.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi\|_e &= \|uC_\varphi K_N + uC_\varphi R_N\|_e \\
&= \|uC_\varphi R_N\|_e \qquad\qquad \text{car } K_N \text{ est compact} \\
&\leq \|uC_\varphi R_N\|
\end{aligned}$$

et l'on obtient le résultat en prenant la limite inférieure. □

Nous aurons besoin du lemme suivant pour une estimation du reste R_N :

Lemme III.3.8. *Soient $\varepsilon > 0$ et $0 < r < 1$. Alors $\exists N_0 = N_0(r) \in \mathbb{N}$, $\forall N \ge N_0$,*

$$|R_N f(w)|^q < \varepsilon \|f\|_1^q,$$

pour tout $|w| < r$ et pour tout f dans H^1.

Démonstration. Soit $K_w(z) = 1/(1 - \bar{w}z)$, $w \in \mathbb{D}$, $z \in \mathbb{D}$. K_w est une fonction analytique bornée sur $\mathbb{D}$. Il est facile de voir que pour tout $f \in H^1$,

$$\langle R_N f, K_w \rangle = \langle f, R_N K_w \rangle$$

où $|w| < r$, $N \ge 1$ et

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \, \mathrm{d}\theta$$

pour $f \in H^1$ et $g \in H^\infty$. On a alors $|R_N f(w)| = | \langle R_N f, K_w \rangle | = | \langle f, R_N K_w \rangle | \le \|f\|_1 \|R_N K_w\|_\infty$. Soit $|w| < r$ et choisissons $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \ge N_0$ on ait $r^N \le \varepsilon^{1/q}(1-r)/2$ et $1/N \sum_{n=1}^{N-1} n r^n \le (1/2)\varepsilon^{1/q}$. Puisque

$$R_N K_w(z) = R_N \left(\sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{n}{N} \bar{w}^n z^n + \sum_{n=N}^{\infty} \bar{w}^n z^n,$$

on a la majoration

$$\|R_N K_w\|_\infty < \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} n r^n + \sum_{n=N}^{\infty} r^n \le \varepsilon^{1/q}.$$

Ainsi $|R_N f(w)|^q \le \varepsilon \|f\|_1^q$ pour tout f dans H^1. □

Démonstration de la Proposition III.3.6. Notons μ la mesure qui est absolument continue par rapport à m et dont la densité est donnée par $|u|^q$, et soit $\mu_\varphi = \mu \circ \varphi^{-1}$ la mesure image de μ par φ. On se donne $0 < r < 1$. Pour tout $f \in H^1$, on a

$$\begin{aligned}
\|(uC_\varphi R_N) f\|_q^q &= \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \big| \big((R_N f) \circ \varphi \big)(\zeta) \big|^q \, \mathrm{d}m(\zeta) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \big| \big((R_N f) \circ \varphi \big)(\zeta) \big|^q \, \mathrm{d}\mu(\zeta) \\
&= \int_{\overline{\mathbb{D}}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) \\
&= \int_{\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) + \int_{r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) \\
&= I_1(N, r, f) + I_2(N, r, f).
\end{aligned} \tag{III.3.3}$$

Montrons d'abord que

$$\lim_N \sup_{\|f\|_1 = 1} I_2(N, r, f) = 0 \tag{III.3.4}$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, le Lemme III.3.8 fournit un entier $N_0(r)$ tel que pour tout $N \geq N_0(r)$,

$$\begin{aligned} I_2(N,r,f) &= \int_{r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1^q \mu_\varphi(r\mathbb{D}) \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1^q \mu_\varphi(\overline{\mathbb{D}}) \\ &\leq \varepsilon \|f\|_1^q \|u\|_q^q. \end{aligned}$$

Donc, r étant fixé, on a bien (III.3.4)

Nous voulons maintenant une estimation de $I_1(N,r,f)$. La continuité de uC_φ de H^1 dans H^q assure que μ_φ est une $(1,q)$-mesure de Carleson, et par conséquent $\mu_{\varphi,r} := \mu_{\varphi_{|_{\overline{\mathbb{D}}\setminus r\mathbb{D}}}}$ est aussi une $(1,q)$-mesure de Carleson d'après le Lemme III.3.5 appliqué pour $p = 1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathbb{D}}\setminus r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_{\varphi,r}(w) &\leq_1 \|R_N f\|_1^q \\ &\leq \beta \|\mu_{\varphi,r}\| \|R_N f\|_1^q \\ &\leq 2^q \beta M N_r^* \|f\|_1^q \end{aligned}$$

en utilisant le Lemme III.3.5 et le fait que $\|R_N\| \leq 1 + \|K_N\| \leq 2$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Prenons la borne supérieure sur B_{H^1} et ensuite la limite inférieure quand N tend vers l'infini dans (III.3.3) pour obtenir

$$\liminf_{N\to\infty} \|uC_\varphi R_N\|^q \leq 2^q \beta M N_r^*.$$

On fait maintenant tendre r vers 1 :

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 1} N_r^* &= \limsup_{|a|\to 1^-} \int_{\overline{\mathbb{D}}} |k_a(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) \\ &= \limsup_{|a|\to 1^-} \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1-|a|^2}{|1-\bar{a}\varphi(\zeta)|^2} \right)^q \mathrm{d}m(\zeta) \end{aligned}$$

et l'on obtient le résultat annoncé en utilisant le Lemme III.3.7. □

Passons maintenant à la minoration dans le Théorème III.3.2. Soit $1 \leq q < \infty$. Considérons F_N le noyau de Fejér d'ordre N, et définissons $K_N : H^q \to H^q$ l'opérateur de convolution associé à F_N et $R_N = I - K_N$. La suite $(K_N)_N$ est une suite d'opérateurs compacts qui est uniformément bornée dans $B(H^q)$, et $\|R_N f\|_q \to 0$ pour tout $f \in H^q$.

Lemme III.3.9. *Il existe $0 < \gamma \leq 2$ tel que pour tout opérateur de composition à poids uC_φ borné de H^1 dans H^q, où $1 \leq q < \infty$, on ait*

$$\frac{1}{C} \limsup_N \|R_N uC_\varphi\| \leq \|uC_\varphi\|_e.$$

Démonstration. Soit $K \in B(H^1, H^q)$ un opérateur compact. La suite (K_N) étant uniformément bornée, il existe $\gamma > 0$ tel que $\|R_N\| \leq 1 + \|K_N\| \leq \gamma$ pour tout $N > 0$, et :

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi + K\| &\geq \frac{1}{\gamma}\|R_N(uC_\varphi + K)\| \\ &\geq \frac{1}{\gamma}\|R_N uC_\varphi\| - \frac{1}{\gamma}\|R_N K\|.\end{aligned}$$

La suite (R_N) converge ponctuellement vers zéro sur H^q, et par conséquent (R_N) converge uniformément vers zéro sur le compact $\overline{K(B_{H^1})}$ quand N tend vers l'infini. Ainsi $\|R_N K\| \underset{N}{\longrightarrow} 0$, et

$$\|uC_\varphi + K\| \geq \frac{1}{\gamma} \limsup_N \|R_N uC_\varphi\|$$

pour tout opérateur compact $K : H^1 \to H^q$. Notons que l'on peut prendre $\gamma = \sup \|R_N\| \leq 2$ car $\|R_N\| \leq 1 + \|K_N\| \leq 2$. □

Proposition III.3.10. *Soient u et φ des fonctions analytiques définies sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. On suppose que $uC_\varphi \in B(H^1, H^q)$ avec $1 \leq q < \infty$. Alors il existe $0 < \gamma \leq 2$ tel que*

$$\|uC_\varphi\|_e \geq \frac{1}{\gamma} \limsup_{|a| \to 1^-} \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left(\frac{1 - |a|^2}{|1 - \bar{a}\varphi(\zeta)|^2} \right)^q \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Puisque k_a est un vecteur unité dans H^1, on a

$$\|R_N uC_\varphi\| = \|uC_\varphi - K_N uC_\varphi\| \geq \|uC_\varphi k_a\|_q - \|K_N uC_\varphi k_a\|_q. \tag{III.3.5}$$

Premier cas : $q > 1$

Comme (k_a) converge vers zéro pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{D}$ quand $|a|$ tend vers 1, et donc $uC_\varphi(k_a)$ aussi. La topologie de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathbb{D}$ et la topologie faible coïncident sur H^q, et donc $uC_\varphi(k_a)$ converge vers zéro pour la topologie faible de H^q quand $|a|$ tend vers 1. L'opérateur K_N étant compact, il est complètement continu, et donc envoie toute suite faiblement convergente vers zéro en une suite convergent vers zéro en norme. Donc $\|K_N\big(uC_\varphi(k_a)\big)\|_q \to 0$ quand $|a| \to 1$, et

$$\|R_N uC_\varphi\| \geq \limsup_{|a| \to 1^-} \|uC_\varphi(k_a)\|_q.$$

On obtient le résultat voulu en prenant la limite supérieure quand $N \to \infty$ et en utilisant le Lemme III.3.9.

Pour le deuxième cas, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme III.3.11. *Soient $a \in \mathbb{D}$ et $N \in \mathbb{N}^*$. Notons $\alpha_p(a)$ le coefficient de Fourier d'ordre p de $C_\varphi\left(k_a/(1-|a|^2)\right)$, de sorte que pour tout $z \in \mathbb{D}$ on ait*

$$k_a\big(\varphi(z)\big) = (1-|a|^2)\sum_{p=0}^{\infty}\alpha_p(a)z^p.$$

Alors il existe une constante $M = M(N) > 0$ dépendante de N telle que $|\alpha_p(a)| \leq M$ pour tout $p \leq N$ et tout $a \in \mathbb{D}$.

Démonstration du Lemme III.3.11. Écrivons $\varphi(z) = a_0 + \psi(z)$ avec $a_0 = \varphi(0) \in \mathbb{D}$ et $\psi(0) = 0$. Si on développe $k_a(z)$ en série de Taylor et remplace z par $\varphi(z)$, on obtient :

$$k_a\big(\varphi(z)\big) = (1-|a|^2)\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\varphi(z)^n.$$

Alors

$$\begin{aligned}\alpha_p(a) &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\varphi(z)^n, z^p \right\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}a_0^{n-j}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle.\end{aligned}$$

où $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\,\mathrm{d}m$. Notons que $\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle = 0$ pour $j > p$ car $\psi(0) = 0$, et par conséquent

$$\begin{aligned}\alpha_p(a) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\sum_{j=0}^{\min(n,p)}\binom{n}{j}a_0^{n-j}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{p}\sum_{n=j}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\binom{n}{j}a_0^{n-j}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{p}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle\sum_{n=j}^{\infty}(n+1)(\bar{a})^n\binom{n}{j}a_0^{n-j}.\end{aligned}$$

Dans le cas où $a_0 \neq 0$ on obtient

$$\begin{aligned}\alpha_p(a) &= \sum_{j=0}^{p}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle a_0^{-j}\sum_{n=j}^{\infty}(n+1)\binom{n}{j}(\bar{a}a_0)^n \\ &= \sum_{j=0}^{p}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle a_0^{-j}\frac{(j+1)(\bar{a}a_0)^j}{(1-\bar{a}a_0)^{j+2}} \\ &= \sum_{j=0}^{p}\left\langle \psi(z)^j, z^p\right\rangle \frac{(j+1)(\bar{a})^j}{(1-\bar{a}a_0)^{j+2}}\end{aligned}$$

en utilisant les inégalités suivantes avec $x = \bar{a}a_0 \in \mathbb{D}$:

$$\sum_{n=j}^{\infty}(n+1)\binom{n}{j}x^n = \left(\sum_{n=j}^{\infty}\binom{n}{j}x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^{j+1}}{(1-x)^{j+1}}\right)' = \frac{(j+1)x^j}{(1-x)^{j+2}}$$

La dernière expression obtenue pour $\alpha_p(a)$ est également vraie pour $a_0 = 0$. Ainsi, pour $0 \leq p \leq N$ nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
|\alpha_p(a)| &\leq \sum_{j=0}^{p} |\left\langle \psi(z)^j, z^p \right\rangle| \frac{j+1}{(1-|a_0|)^{j+2}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{p} \|\psi^j\|_\infty \frac{N+1}{(1-|a_0|)^{N+2}} \\
&\leq \frac{(N+1)^2}{(1-|a_0|)^{N+2}} \max_{0\leq j\leq N} \|\psi^j\|_\infty \\
&\leq M,
\end{aligned}$$

où M est une constante indépendante de a. □

Deuxième cas : $q = 1$
Ici, ce n'est plus pour la topologie faible mais pour la topologie préfaible de H^1 que $uC_\varphi(k_a)$ tend vers zéro quand $|a| \to 1$. Néanmoins, il est toujours vrai que $\|K_N uC_\varphi(k_a)\|_1 \to 0$ quand $|a| \to 1$. En effet, si $f(z) = \sum_{n\geq 0} \hat{f}(n)z^n \in H^1$, alors

$$K_N f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \hat{f}(n) z^n.$$

On a le développement suivant :

$$k_a\big(\varphi(z)\big) = (1-|a|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(a) z^n.$$

Notons u_n le n-ième coefficient de Fourier de u, de sorte que

$$uC_\varphi(k_a)(z) = (1-|a|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \alpha_p(a) u_{n-p}\right) z^n, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$

On a donc

$$\|K_N uC_\varphi(k_a)\|_1 \leq (1-|a|^2) \sum_{n=0}^{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \left| \sum_{p=0}^{n} \alpha_p(a) u_{n-p} \right| \|z^n\|_1.$$

En invoquant le Lemme III.3.11, on peut trouver une constante $M > 0$ indépendante de a telle que $|\alpha_p(a)| \leq M$ pour tout $a \in \mathbb{D}$ et $0 \leq p \leq N-1$. On utilise le fait que $\|z^n\|_1 = 1$ et $|u_p| \leq \|u\|_1$ pour en déduire qu'il existe une constante $M' > 0$ indépendante de a telle que

$$\|K_N u C_\varphi(k_a)\|_1 \leq M'(1-|a|^2)\|u\|_1$$

pour tout $a \in \mathbb{D}$. Ainsi $K_N u C_\varphi(k_a)$ converge vers zéro dans H^1 quand $|a| \to 1$, et l'on prend la limite supérieure dans (III.3.5) quand a tend vers 1^- pour obtenir

$$\|R_N u C_\varphi\| \geq \limsup_{|a|\to 1} \|u C_\varphi(k_a)\|_1, \quad \forall N \geq 0.$$

On conclut avec le Lemme III.3.9. $\square$

III.4 $uC_\varphi \in B(H^p, H^\infty)$ POUR $1 \leq p < \infty$

Soit u une fonction analytique bornée. Les caractérisations de la continuité et de la compacité de uC_φ de H^p dans H^∞ sont données dans [ConH03] pour $p \geq 1$. On a

$$uC_\varphi \in B(H^p, H^\infty) \text{ si et seulement si } \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|u(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} < \infty$$

et

$$uC_\varphi \text{ est compact si et seulement si } \|\varphi\|_\infty < 1 \text{ ou } \lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|u(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$$

Dans le cas où $\|\varphi\|_\infty = 1$ on note

$$M_\varphi(u) = \limsup_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{1}{p}}}.$$

Au regard du Theorem 1.7 dans [Le09], il semble raisonnable de penser que la norme essentielle de uC_φ est équivalente à la quantité $M_\varphi(u)$. Montrons d'abord une majoration :

Proposition III.4.1. *Soient u et φ des fonctions analytiques définies sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Supposons que uC_φ soit un opérateur borné de H^p dans H^∞ où $1 \leq p < \infty$ et que $\|\varphi\|_\infty = 1$. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \leq 2M_\varphi(u).$$

Démonstration. Soit ε un nombre réel strictement positif, et prenons $r < 1$ satisfaisant

$$\sup_{|\varphi(z)|\geq r} \frac{|u(z)|}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\frac{1}{p}}} \leq M_\varphi(u) + \varepsilon.$$

On approxime uC_φ par $uC_\varphi K_N$ où $K_N : H^p \to H^p$ est l'opérateur de convolution par le noyau de Fejér d'ordre N, où N est choisi de sorte que $|R_N f(w)| < \varepsilon \|f\|_1$ pour tout $f \in H^1$ et tout $|w| < r$ (Lemme III.3.8 pour $q = 1$). Nous allons montrer que $\|uC_\varphi - uC_\varphi K_N\| = \|uC_\varphi R_N\| \leq \max(2M_\varphi(u) + 2\varepsilon, \varepsilon\|u\|_\infty)$, ce qui prouvera notre résultat. Si f est un vecteur unité dans H^p, alors

$$\|uC_\varphi R_N(f)\|_\infty = \max\left(\sup_{|\varphi(z)| \geq r} |u(z)(R_N f) \circ \varphi(z)|, \sup_{|\varphi(z)| < r} |u(z)(R_N f) \circ \varphi(z)| \right).$$

Estimons d'abord le premier terme. Si $\omega \in \mathbb{D}$, on note δ_ω la forme linéaire sur H^p définie par $\delta_\omega(f) = f(\omega)$. Alors $\delta_\omega \in (H^p)^*$ et $\|\delta_w\|_{(H^p)^*} = 1/(1 - |w|^2)^{1/p}$ pour tout $w \in \mathbb{D}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\sup_{|\varphi(z)| \geq r} |u(z)(R_N f) \circ \varphi(z)| &\leq \sup_{|\varphi(z)| \geq r} |u(z)| \|\delta_{\varphi(z)}\|_{(H^p)^*} \|R_N f\|_p \\
&\leq 2 \sup_{|\varphi(z)| \geq r} \frac{|u(z)|}{(1 - |\varphi(z)|^2)^{\frac{1}{p}}} \\
&\leq 2 \left(M_\varphi(u) + \varepsilon \right),
\end{aligned}$$

où l'on utilise le fait que $\|R_N f\|_p \leq 2$.

Pour le second terme, on a

$$|u(z) R_N f\,(\varphi(z))| \leq \|u\|_\infty |R_N f\,(\varphi(z))\,| \leq \varepsilon \|u\|_\infty \|f\|_1 \leq \varepsilon \|u\|_\infty$$

car $|\varphi(z)| < r$, ce qui conclut la preuve. □

D'un autre coté, on a la minoration :

Proposition III.4.2. *Soit u une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique vérifiant $\|\varphi\|_\infty = 1$. On suppose que uC_φ est un opérateur borné de H^p dans H^∞, avec $1 \leq p < \infty$. Alors*

$$\frac{1}{2} M_\varphi(u) \leq \|uC_\varphi\|_e.$$

Démonstration. On peut supposer que uC_φ n'est pas compact, ce qui implique $M_\varphi(u) > 0$. Soit (z_n) une suite de $\mathbb{D}$ satisfaisant

$$\lim_n |\varphi(z_n)| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_n \frac{|u(z_n)|}{(1 - |\varphi(z_n)|^2)^{\frac{1}{p}}} = M_\varphi(u).$$

On considère la suite (f_n) définie par

$$f_n(z) = k_{\varphi(z_n)}(z)^{1/p} = \frac{(1 - |\varphi(z_n)|^2)^{\frac{1}{p}}}{\left(1 - \overline{\varphi(z_n)} z\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Chaque f_n est un vecteur unité de H^p. Soit $K : H^p \to H^\infty$ un opérateur compact.

Premier cas : $p > 1$
La suite (f_n) converge vers zéro pour la topologie faible dans H^p, et K étant complètement continu, la suite (Kf_n) converge vers zéro pour la topologie de la norme dans H^∞. On écrit que $\|uC_\varphi + K\| \geq \|uC_\varphi(f_n)\|_\infty - \|Kf_n\|_\infty$ et l'on prend la limite supérieure quand $n \to \infty$ pour obtenir

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi + K\| &\geq \limsup_n \|uC_\varphi(f_n)\|_\infty \\
&\geq \limsup_n |u(z_n)| \, |f_n(\varphi(z_n))| \\
&\geq \limsup_n \frac{|u(z_n)|}{(1 - |\varphi(z_n)|^2)^{\frac{1}{p}}} \\
&\geq M_\varphi(u).
\end{aligned}$$

Deuxième cas : $p = 1$
Soit $\varepsilon > 0$. La suite (f_n) n'est plus faiblement convergente vers zéro dans H^1, mais en passant à une sous-suite on peut supposer que la suite $(Kf_{n_k})_k$ converge dans H^∞, et donc est une suite de Cauchy. Il existe un entier $N > 0$ tel que pour tous $k, m \geq N$ on ait $\|Kf_{n_k} - Kf_{n_m}\| < \varepsilon$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi + K\| &\geq \left\| (uC_\varphi + K) \left(\frac{f_{n_k} - f_{n_m}}{2} \right) \right\|_\infty \\
&\geq \frac{1}{2} \|uC_\varphi(f_{n_k} - f_{n_m})\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{2} |u(z_{n_k})| \, |f_{n_k}(\varphi(z_{n_k})) - f_{n_m}(\varphi(z_{n_k}))| - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{|u(z_{n_k})|}{2\,(1 - |\varphi(z_{n_k})|^2)} - \frac{|u(z_{n_k})|\,(1 - |\varphi(z_{n_m})|^2)}{2\left|1 - \overline{\varphi(z_{n_m})}\varphi(z_{n_k})\right|^2} - \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

On prend la limite supérieure quand m tend vers l'infini (k étant fixé) en gardant à l'esprit que $\lim_m |\varphi(z_{n_m})| = 1$ et $|\varphi(z_{n_k})| < 1$ pour obtenir

$$\|uC_\varphi + K\| \geq \frac{|u(z_{n_k})|}{2\,(1 - |\varphi(z_{n_k})|^2)} - \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout $k \geq N$. On fait maintenant tendre k vers l'infini pour avoir

$$\|uC_\varphi + K\| \geq \frac{1}{2} M_\varphi(u) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

Les propositions III.4.1 et III.4.2 nous donnent les estimations suivantes :

Théorème III.4.3. *Soit u une fonction analytique sur $\mathbb{D}$ et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique vérifiant $\|\varphi\|_\infty = 1$. Supposons que uC_φ soit un opérateur borné de H^p dans H^∞, avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\|uC_\varphi\|_e \approx M_\varphi(u)$. Plus précisément, on a les inégalités :*

$$\frac{1}{2} M_\varphi(u) \leq \|uC_\varphi\|_e \leq 2M_\varphi(u).$$

Notons que dans le cas où $p > 1$ on peut remplacer la constante $1/2$ par 1.

III.5 $uC_\varphi \in B(H^\infty, H^q)$ POUR $\infty > q \geq 1$

Dans le cas $p = \infty$ et $1 \leq q < \infty$, la continuité de uC_φ est équivalente à la condition $u \in H^q$, et uC_φ est compact si et seulement si $u = 0$ ou $|E_\varphi| = 0$ où $E_\varphi = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid \varphi^*(\zeta) \in \mathbb{T}\}$ est l'ensemble extrémal de φ (voir [ConH03]). Nous donnons ici une estimation de la norme essentielle de uC_φ qui apparait dans [GMcM04] pour le cas spécial des opérateurs de composition :

Théorème III.5.1. *Soit $u \in H^q$, où $\infty > q \geq 1$, et $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors $\|uC_\varphi\|_e \approx \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}$. Plus précisément,*

$$\frac{1}{2}\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|uC_\varphi\|_e \leq 2\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Commençons par la majoration :

Proposition III.5.2. *Soit $u \in H^q$, où $\infty > q \geq 1$, et soit $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ une fonction analytique. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \leq 2\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $0 < r < 1$. Comme $\|r\varphi\|_\infty \leq r < 1$, l'ensemble $E_{r\varphi}$ est vide et par conséquent l'opérateur $uC_{r\varphi}$ est compact. On a donc $\|uC_\varphi\|_e \leq \|uC_\varphi - uC_{r\varphi}\|$. Mais

$$\|uC_\varphi - uC_{r\varphi}\|^q = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \big|f(\varphi(\zeta)) - f(r\varphi(\zeta))\big|^q \, \mathrm{d}m(\zeta). \tag{III.5.1}$$

Si $|E_\varphi| = 1$ alors l'intégrale dans (III.5.1) coïncide avec

$$\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \big|f(\varphi(\zeta)) - f(r\varphi(\zeta))\big|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)$$

qui est majoré par $2^q \int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \mathrm{d}m(\zeta)$. Si $|E_\varphi| < 1$ on note $F_\varepsilon = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid |\varphi^*(\zeta)| < 1 - \varepsilon\}$ pour $\varepsilon > 0$, qui est un ensemble non vide pour ε suffisamment petit. Rappelons

ici qu'un élément $\zeta \in \mathbb{T}$ peut n'appartenir ni à E_φ ni à $\bigcup_{\varepsilon>0} F_\varepsilon$. Il peut arriver que la limite radiale $\varphi^*(\zeta)$ n'existe pas, mais ceci arrive seulement pour des ζ appartenant à un ensemble de mesure nulle.
Nous utiliserons la distance pseudo-hyperbolique ρ sur $\mathbb{D}$ définie pour z et w dans le disque unité par $\rho(z,w) = |z-w|/|1-\bar{w}z|$. Le théorème de Pick-Schwarz nous dit que $\rho\big(f(z), f(w)\big) \le \rho(z,w)$ pour toute fonction $f \in B_{H^\infty}$. On en déduit que $|f(z)-f(w)| \le 2\rho(z,w)$ pour tous w et z dans $\mathbb{D}$.

Si ζ est un élément de F_ε alors

$$\rho\big(\varphi(\zeta), r\varphi(\zeta)\big) = \frac{(1-r)|\varphi(\zeta)|}{1-r|\varphi(\zeta)|^2} \le \frac{1-r}{1-r(1-\varepsilon)^2}.$$

On peut choisir $0<r<1$ tel que $\sup_{F_\varepsilon} \rho\big(\varphi(\zeta), r\varphi(\zeta)\big) < \varepsilon/2$, et donc

$$\big|f\big(\varphi(\zeta)\big) - f\big(r\varphi(\zeta)\big)\big| \le 2\sup_{F_\varepsilon} \rho\big(\varphi(\zeta), r\varphi(\zeta)\big) \le \varepsilon$$

pour tout $\zeta \in F_\varepsilon$ et pour toute fonction f dans la boule unité fermée de H^∞. Cette inégalité ainsi que (III.5.1) nous donnent

$$\begin{aligned}\|uC_\varphi - uC_{r\varphi}\|^q &\le \sup_{\|f\|_\infty \le 1} \left(\int_{F_\varepsilon} |u(\zeta)|^q \varepsilon^q \,\mathrm{d}m(\zeta) + \int_{\mathbb{T}\setminus F_\varepsilon} 2^q |u(\zeta)|^q \,\mathrm{d}m(\zeta) \right) \\ &\le \varepsilon^q \|u\|_q^q + 2^q \int_{\mathbb{T}\setminus F_\varepsilon} |u(\zeta)|^q \,\mathrm{d}m(\zeta).\end{aligned}$$

Il reste à faire tendre ε vers zéro pour obtenir le résultat annoncé. □

Passons maintenant à la minoration :

Proposition III.5.3. *Supposons que $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ soit fonction analytique et que $u \in H^q$, où $\infty > q \ge 1$. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \ge \frac{1}{2} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \,\mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Soit $K \in B(H^\infty, H^q)$ un opérateur compact. La suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans H^∞, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\ge 0}$ telle que la suite $\big(K(z^{n_k})\big)_{k\ge 0}$ converge dans H^q. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $k, m \ge N$ on ait $\|Kz^{n_k} - Kz^{n_m}\|_q < \varepsilon$. Si $0<r<1$, notons $g_r(z) = g(rz)$ pour une fonction g définie sur $\mathbb{D}$. Soit $k \ge N$. Il existe alors $0<r<1$ tel que

$$\|\left(u\varphi^{n_k}\right)_r\|_q \ge \|u\varphi^{n_k}\|_q - \varepsilon.$$

Pour tout $m \geq N$ on a

$$\begin{aligned}
\|uC_\varphi + K\| &\geq \left\|(uC_\varphi + K)\left(\frac{z^{n_k} - z^{n_m}}{2}\right)\right\|_q \\
&\geq \frac{1}{2}\|u(\varphi^{n_k} - \varphi^{n_m})\|_q - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}\|(u\varphi^{n_k})_r - (u\varphi^{n_m})_r\|_q - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\|(u\varphi^{n_k})_r\|_q - \|(u\varphi^{n_m})_r\|_q\right) - \frac{\varepsilon}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(\|u\varphi^{n_k}\|_q - \|(u\varphi^{n_m})_r\|_q\right) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Faisons tendre m vers l'infini, en gardant à l'esprit que $0 < r < 1$ et $\|\varphi_r\|_\infty < 1$:

$$\|\,(u\varphi^{n_m})_r\,\|_q \leq \|u\|_q\|(\varphi_r)^{n_m}\|_\infty \leq \|u\|_q\|\varphi_r\|_\infty^{n_m} \underset{m}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi $\|uC_\varphi + K\| \geq (1/2)\|u\varphi^{n_k}\|_q - \varepsilon$ pour tout $k \geq N$. On conclut en remarquant que

$$\|u\varphi^{n_k}\|_q = \left(\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)\varphi(\zeta)^{n_k}|^q \,\mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}} \underset{k}{\longrightarrow} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \,\mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

III.6 $uC_\varphi \in B(H^p, H^q)$ POUR $\infty > p > q \geq 1$

Dans [GMcM04], les auteurs donnent une estimation de la norme essentielle d'un opérateur de composition agissant entre H^p et H^q pour $1 < q < p < \infty$. La preuve utilise la projection de Riesz de L^q sur H^q, qui est bornée pour $1 < q < \infty$. Cependant cette dernière n'est pas bornée de L^1 dans H^1 (en fait H^1 n'est pas complémenté dans L^1), et l'on ne peut pas user d'argument similaire dans ce cas. Nous allons donc utiliser une autre approche pour obtenir des estimations dans le cas $q = 1$. Une solution est d'utiliser les mesures de Carleson comme dans la section III.3.

III.6.1 (p, q)-mesures de Carleson pour $1 \leq q < p < \infty$

Tout d'abord, nous donnerons une caractérisation de la continuité de uC_φ en termes de mesures de Carleson. Dans le cas $p > q$, les (p, q)-mesures de Carleson sur $\overline{\mathbb{D}}$ sont caractérisées dans [BlJ05]. Notons $\Gamma(\zeta)$ le domine de Stolz engendré par $\zeta \in \mathbb{T}$, *i.e.* l'intérieur de l'enveloppe convexe de l'ensemble $\{\zeta\} \cup (\alpha\mathbb{D})$, où $0 < \alpha < 1$ est arbitraire mais fixé.

Théorème III.6.1. ([BlJ05, Theorem 2.2]) *Soit μ une mesure borélienne positive finie sur $\overline{\mathbb{D}}$, $1 \leq q < p < \infty$ et $s = p/(p-q)$. Alors μ est une (p,q)-mesure de Carleson sur $\overline{\mathbb{D}}$ si et seulement si $\zeta \mapsto \int_{\Gamma(\zeta)} \dfrac{\mathrm{d}\mu(z)}{1-|z|^2}$ est dans $L^s(\mathbb{T})$ et $\mu_{\mathbb{T}} = F\mathrm{d}m$ pour une fonction $F \in L^s(\mathbb{T})$.*

Ce théorème nous donne une caractérisation de la continuité d'un opérateur de composition à poids agissant entre H^p et H^q :

Corollaire III.6.2. *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$ avec $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Pour $1 \leq q < p < \infty$, l'opérateur de composition à poids $uC_\varphi : H^p \to H^q$ est borné si et seulement si $G : \zeta \in \mathbb{T} \mapsto G(\zeta) = \int_{\Gamma(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\mu_\varphi(z)}{1-|z|^2}$ est dans $L^s(\mathbb{T})$ pour $s = p/(p-q)$ et $\mu_{\varphi_{|\mathbb{T}}} = F\mathrm{d}m$ pour un certain $F \in L^s(\mathbb{T})$, où $\mathrm{d}\mu = |u|^q \mathrm{d}m$ et $\mu_\varphi = \mu \circ \varphi^{-1}$ est la mesure image de μ par φ.*

Démonstration. uC_φ est borné si et seulement s'il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout $f \in H^p$, $\int_{\mathbb{T}} |u(\zeta)|^q \left|f \circ \varphi(\zeta)\right|^q \,\mathrm{d}m(\zeta) \leq \gamma \|f\|_p^q$, ce qui est équivalent (via un changement de variable) à $\int_{\overline{\mathbb{D}}} \left|f(z)\right|^q \,\mathrm{d}\mu_\varphi(z) \leq \gamma \|f\|_p^q$ pour tout $f \in H^p$. Ceci veut exactement dire que la mesure μ_φ est une (p,q)-mesure de Carleson. Il suffit alors d'utiliser le Théorème III.6.1. $\square$

Si $f \in H^p$, la fonction maximale non-tangentielle de Hardy-Littlewood Mf est définie par $Mf(\zeta) = \sup_{z \in \Gamma(\zeta)} |f(z)|$ pour $\zeta \in \mathbb{T}$. Pour $1 < p < \infty$, M est un opérateur borné de H^p dans L^p, et l'on notera sa norme par $\|M\|_p$. Le lemme suivant est l'analogue du Lemme III.3.5 dans le cas $p > q$.

Lemme III.6.3. *Supposons que μ soit une (p,q)-mesure de Carleson avec $1 \leq q < p < \infty$. Soient $0 < r < 1$ et $\mu_r := \mu_{|\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D}}$. Alors μ_r est une (p,q)-mesure de Carleson, et il existe une constante $\gamma > 0$ telle que pour tout $f \in H^p$,*

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} \left|f(z)\right|^q \,\mathrm{d}\mu_r(z) \leq \left(\|F\|_s + \gamma \|M\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s\right) \|f\|_p^q$$

où $\mathrm{d}\mu_{\mathbb{T}} = F\mathrm{d}m$ et $\widetilde{G_r}(\zeta) = \int_{\Gamma(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\mu_r(z)}{1-|z|^2}$. De plus, $\|\widetilde{G_r}\|_s \to 0$ quand $r \to 1$.

Nous utilisons la notation $\widetilde{G_r}$ pour éviter toute confusion avec la notation introduite auparavant pour φ et sa fonction radial φ_r.
Démonstration. Le fait d'être une (p,q)-mesure de Carleson ne dépend que du rapport p/q [BlJ05, Lemma 2.1], donc il suffit de montrer que μ_r est une $(p/q,1)$-mesure de Carleson.
Il est clair que $\widetilde{G_r} \leq G \in L^s(\mathbb{T})$. De plus $\mathrm{d}\mu_{r_{|\mathbb{T}}} = \mathrm{d}\mu_{\mathbb{T}} = F\mathrm{d}m \in L^s(\mathbb{T})$. Le Corollaire III.6.2 assure le fait que μ_r soit une (p,q)-mesure de Carleson.

Soit f appartenant à H^p. Alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^q \, \mathrm{d}\mu_r(\zeta) = \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^q \, \mathrm{d}\mu(\zeta) &= \int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^q F(\zeta) \, \mathrm{d}m(\zeta) \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{T}} |f(\zeta)|^p \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} \|F\|_s \\ &\leq \|f\|_p^q \|F\|_s \end{aligned} \tag{III.6.1}$$

où l'on a utilisé l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués p/q et s.
Pour $z \neq 0,\ z \in \mathbb{D}$, notons $\tilde{I}(z) = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid z \in \Gamma(\zeta)\}$. Autrement dit $\zeta \in \tilde{I}(z)$ si et seulement si $z \in \Gamma(\zeta)$. Alors

$$m\left(\tilde{I}(z)\right) \approx 1 - |z| \tag{III.6.2}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \, \mathrm{d}\mu_r(z) &\approx \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \left(\int_{\tilde{I}(z)} \mathrm{d}m(\zeta) \right) \frac{\mathrm{d}\mu_r(z)}{1 - |z|^2} \\ &= \int_{\mathbb{T}} \int_{\Gamma(\zeta)} |f(z)|^q \frac{\mathrm{d}\mu_r(z)}{1 - |z|^2} \, \mathrm{d}m(\zeta) \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} Mf(\zeta)^q \int_{\Gamma(\zeta)} \frac{\mathrm{d}\mu_r(z)}{1 - |z|^2} \, \mathrm{d}m(\zeta) \end{aligned}$$

où $Mf(\zeta) = \sup_{z \in \Gamma(\zeta)} |f(z)|$ est la fonction maximale non-tangentielle de Hardy-Littlewood. On applique encore l'inégalité de Hölder pour obtenir

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^q \, \mathrm{d}\mu_r(z) \leq \gamma \|Mf\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s \leq \gamma \|M\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s \|f\|_p^q, \tag{III.6.3}$$

où γ est une constante strictement positive qui apparaît dans (III.6.2). En combinant (III.6.1) et (III.6.3), on a

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|^q \, \mathrm{d}\mu_r(z) \leq (\|F\|_s + \gamma \|M\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s) \|f\|_p^q.$$

Il reste à montrer que $\|\widetilde{G_r}\|_s \to 0$ quand $r \to 1$. Pour cela on va utiliser le théorème de la convergence dominée de Lebesgue. On a clairement $0 \leq \widetilde{G_r} \leq G \in L^s(\mathbb{T})$, donc il suffit de montrer que $\widetilde{G_r}(\zeta) \to 0$ quand $r \to 1$ pour $m-$presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$. Soit $A = \{\zeta \in \mathbb{T} \mid G(\zeta) < \infty\}$. C'est un ensemble de mesure pleine ($m(A) = 1$) car $G \in L^s(\mathbb{T})$. Écrivons $\widetilde{G_r}(\zeta) = \int_{\Gamma(\zeta)} \tilde{f}_r(z) \, \mathrm{d}\mu(z)$ avec $\tilde{f}_r(z) = \mathbb{1}_{\overline{\mathbb{D}} \setminus r\mathbb{D}}(z)(1 - |z|^2)^{-1}$ pour $z \in \Gamma(\zeta)$. Pour tout $\zeta \in A$ on a

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{f}_r(z)\right| \leq \frac{1}{1 - |z|^2} \in L^1\left(\Gamma(\zeta), \mu\right) \text{ car } \zeta \in A, \\ &\tilde{f}_r(z) \underset{r \to 1}{\longrightarrow} 0 \text{ pour tout } z \in \Gamma(\zeta) \subset \mathbb{D}.\end{aligned}$$

Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue dans $L^1\left(\Gamma(\zeta), \mu\right)$ nous dit que $\widetilde{G_r}(\zeta) = \|\tilde{f}_r\|_{L^1(\Gamma(\zeta), \mu)}$ tend vers zéro quand r tend vers 1 pour $m-$presque tout $\zeta \in \mathbb{T}$, ce qui conclut la preuve. $\square$

III.6.2 Estimation de la norme essentielle

Théorème III.6.4. *Soient u et φ des fonctions analytiques sur $\mathbb{D}$, avec $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$. Supposons que uC_φ soit borné de H^p dans H^q, avec $\infty > p > q \geq 1$. Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \leq 2\|C_\varphi\|_{p/q}^{1/q} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^{\frac{pq}{p-q}} \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{p-q}{pq}},$$

où $\|C_\varphi\|_{p/q}$ est la norme de C_φ agissant sur $H^{p/q}$.

Démonstration. Nous allons suivre les même lignes que dans la preuve de la majoration de la Proposition III.3.6 : nous avons la décomposition $I = K_N + R_N$ dans $B(H^p)$, où K_N est l'opérateur de convolution par le noyau de Fejér, et

$$\|uC_\varphi\|_e \leq \liminf_N \|uC_\varphi R_N\|.$$

On a aussi, pour tout $0 < r < 1$,

$$\begin{aligned} \|(uC_\varphi R_N)f\|_q^q &= \int_{\mathbb{D}\setminus r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) + \int_{r\mathbb{D}} |R_N f(w)|^q \, \mathrm{d}\mu_\varphi(w) \\ &= I_1(N,r,f) + I_2(N,r,f). \end{aligned}$$

Comme dans le cas $p \leq q$, on montre que

$$\lim_N \sup_{\|f\|_p \leq 1} I_2(N,r,f) = 0.$$

La mesure μ_φ étant une (p,q)-mesure de Carleson, on utilise le Lemme III.6.3 afin d'obtenir l'inégalité suivante

$$I_1(N,r,f) \leq (\|F\|_s + \gamma\|M\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s)\|R_N f\|_p^q$$

pour tout $f \in H^p$. Par conséquent

$$\|uC_\varphi\|_e \leq \liminf_N \left(\sup_{\|f\|_p \leq 1} I_1(N,r,f) \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2(\|F\|_s + \gamma\|M\|_p^q \|\widetilde{G_r}\|_s)^{\frac{1}{q}}$$

où l'on a utilisé le fait que $\sup_N \|R_N\| \leq 2$. Faisons tendre r vers 1, en se rappelant que $\|\widetilde{G_r}\|_s \to 0$. On obtient

$$\|uC_\varphi\|_e \leq 2\|F\|_s^{1/q}.$$

Il reste à voir que l'on peut choisir F de sorte que

$$\|F\|_s \leq \|C_\varphi\|_{p/q} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^{\frac{pq}{p-q}} \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{1/s}.$$

En effet, si $f \in C(\mathbb{T}) \cap H^{p/q}$, on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués p/q et s pour avoir

$$\left|\int_{\mathbb{T}} f \, \mathrm{d}\mu_{\varphi,\mathbb{T}}\right| = \left|\int_{E_\varphi} |u|^q f \circ \varphi \, \mathrm{d}m\right| \leq \int_{E_\varphi} |u|^q |f \circ \varphi| \, \mathrm{d}m \leq \|C_\varphi(f)\|_{p/q} \left(\int_{E_\varphi} |u|^{sq} \, \mathrm{d}m\right)^{1/s},$$

ce qui signifie que $\mu_{\varphi,\mathbb{T}} \in \left(H^{p/q}\right)^*$, qui est isomorphiquement isométrique à $L^s(\mathbb{T})/H_0^s$, où H_0^s est le sous-espace de H^s constitué des fonctions qui s'annulent en zéro. Si l'on note $N(\mu_{\varphi,\mathbb{T}})$ la norme de $\mu_{\varphi,\mathbb{T}}$ vu comme un élément de $\left(H^{p/q}\right)^*$, alors on peut choisir $F \in L^s(\mathbb{T})$ satisfaisant $\|F\|_s = N(\mu_{\varphi,\mathbb{T}}) \leq \|C_\varphi\|_{p/q} \left(\int_{E_\varphi} |u|^{pq/(p-q)} \, \mathrm{d}m\right)^{1/s}$ et $\mu_{\varphi,\mathbb{T}} = F \, \mathrm{d}m$ (voir [Ko80], p. 194). Finalement on obtient

$$\|uC_\varphi\|_e \leq 2\|C_\varphi\|_{p/q}^{1/q} \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^{\frac{pq}{p-q}} \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{p-q}{pq}}.$$

□

Bien que nous n'ayons pas pu obtenir de minoration correspondante pour la norme essentielle de uC_φ de cette forme, nous avons le résultat suivant :

Proposition III.6.5. *Soit* $1 \leq q < p < \infty$, *et on suppose que* $uC_\varphi \in B(H^p, H^q)$. *Alors*

$$\|uC_\varphi\|_e \geq \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration. Prenons un opérateur compact K de H^p dans H^q. Il est donc complètement continu, et comme la suite (z^n) converge faiblement vers zéro dans H^p, la suite $(K(z^n))_n$ converge vers zéro dans H^q. Donc

$$\|uC_\varphi + K\| \geq \|(uC_\varphi + K)z^n\|_q \geq \|uC_\varphi(z^n)\|_q - \|K(z^n)\|_q$$

pour tout $n \geq 0$. On prend la limite quand n tend vers l'infini, et l'on obtient

$$\|uC_\varphi\|_e \geq \left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Problèmes

Nous concluons notre thèse par quelques questions :

1. Y a-t-il un lien entre le Théorème I.1.7 et le Théorème I.1.11 de D. Werner ? Autrement dit y a-t-il un lien entre les ensembles uniformément distribués et les complémentaires d'ensembles semi-Riesz ?
2. Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est Rosenthal si $C_\Lambda = L^\infty_\Lambda$. De manière équivalente, cela revient à dire que C_Λ a la propriété de Radon-Nikodym. Il est alors clair que si C_Λ a la propriété de Daugavet, l'ensemble Λ n'est pas Rosenthal. D'autre part, un théorème de C. Bessaga et A. Pełczyński nous permet d'affirmer que si C_Λ contient c_0, alors Λ n'est pas Rosenthal. Nous pouvons donc nous poser la question du lien entre « C_Λ a la propriété de Daugavet » et « $c_0 \subset C_\Lambda$ ». Ajoutons que pour les ensembles Λ uniformément distribués, un théorème de F. Lust-Piquard [LP89] affirme que $c_0 \subset C_\Lambda$.
3. Pour quelles parties $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ l'espace C_Λ a-t-il la propriété de Daugavet ?
4. Sous quelles conditions un espace de Banach X peut-il être renormé pour posséder la propriété de Daugavet ? Dans le cas de la propriété presque Daugavet, et pour un espace séparable, une telle chose est possible si et seulement si $X \supset \ell^1$.
5. Si $G : X \to Y$ est un centre de Daugavet non nul et $T \in B(X, Y)$ est un opérateur tel que $T^*(Y^*)$ soit séparable, alors l'équation $\|G + T\| = \|G\| + \|T\|$ est-elle vérifiée ? Est-ce vrai plus généralement si T ne fixe pas de copie de ℓ^1 ?
6. Le Théorème I.4.11 est-il toujours vrai si l'on remplace l'algèbre du disque par H^∞ ?
7. Le Théorème II.1.3 sur la caractérisation des presque centres de Daugavet est-il toujours valide sans hypothèse de séparabilité ?
8. Dans le chapitre III nous obtenons une estimation de la norme essentielle de $uC_\varphi \in B(H^1)$. Qu'en est-il des normes essentielles généralisées ? Notamment celle relative à la classe des opérateurs ayant la propriété de Dunford-Pettis ? Nous savons que uC_φ a la propriété de Dunford-Pettis si et seulement si $|E_\varphi| = 0$.
9. Dans la minoration de la norme essentielle de $uC_\varphi \in B(H^p, H^q)$ pour $1 \leq p <$

$q < \infty$, peut-on remplacer

$$\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^q \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{1}{q}}$$

par

$$\left(\int_{E_\varphi} |u(\zeta)|^{\frac{pq}{p-q}} \, \mathrm{d}m(\zeta) \right)^{\frac{p-q}{pq}} \ ?$$

Bibliographie

[AbAlBu91] Y. Abramovich, C. D. Aliprantis et O. Burkinshaw. *The Daugavet equation in uniformly convex Banach spaces.* J. Funct. Anal. **97** (1991), 215–230.

[An93] S. I. Ansari. *Essential disjointness and the Daugavet equation.* Houston J. Math. **19** (1993), 587–601.

[BeLin00] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss. *Geometric Nonlinear Functional Analysis, Vol. 1.* Colloquium Publication no. 48. Amer. Math. Soc., 2000.

[BiKadShvWer05] D. Bilik, V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy et D. Werner. *Narrow operators and the Daugavet property for ultraproducts.* Positivity **9** (2005), 45–62.

[BlJ05] O. Blasco et H. Jarchow. *A note on Carleson measures for Hardy spaces.* Acta Sci. Math. (Szeged) **71** (2005), 371–389.

[BoKad10] T. Bosenko et V. Kadets. *Daugavet centers.* Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom. **6** (2010), no. 1, 3–20, 134.

[Bou88] J. Bourgain. *On the maximal ergodic theorem for certain subsets of the integers.* Israel J. Math. **61** (1988), 39–72.

[Bou76] J. Bourgain. *Strongly exposed points in weakly compact convex sets in Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **58** (1976), 197–200.

[Ca62] L. Carleson *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem.* Ann. of Math. (2) **76** (1962), 547–559.

[ConDi99] M. D. Contreras et S. Díaz-Madrigal *Compact-type operators defined on H^∞.* Contemp. Math. **232** (1999), 111–118.

[ConH03] M. D. Contreras et A. G. Hernández-Díaz *Weighted Composition Operators between Different Hardy Spaces.* Integr. eq. oper. theory **46** (2003), 165–188.

[ConH01] M. D. Contreras et A. G. Hernández-Díaz *Weighted Composition Operators on Hardy Spaces.* J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 224–233.

[CoMcC95] C. C. Cowen et B. D. MacCluer. *Composition operators on spaces of analytic functions.* CRC Press, Boca Raton, 1995.

[CuZ07] Ž. Čučković et R. Zhao. *Weighted composition operators between different weighted Bergman spaces and different Hardy spaces.* Illinois J. Math. **51** no. 2 (2007), 479–498.

[CuZ04] Ž. Čučković et R. Zhao. *Weighted composition operators on the Bergman spaces.* J. London Math. Soc. (2) **51** (2004), 499–511.

[Dau63] I. K. Daugavet. *On a property of completely continuous operators in the space C.* Uspekhi Mat. Nauk **18.5** (1963), 157–158 (Russian).

[DunSch58] N. Dunford et J. T. Schwartz. *Linear operators. Part 1 : General Theory* Interscience Publishers, New York, 1958.

[Dur70] P. Duren. *Theory of H^p spaces.* Academic Press, New York, 1970.

[FoiSin65] C. Foiaş et I. Singer. *Points of diffusion of linear operators and almost diffuse operators in spaces of continuous functions.* Math. Z. **87** (1965), 434–450.

[For64] F. Forelli. *The isometries of H^p.* Canad. J. Math. **16** (1964), 721–728.

[GMcM04] P. Gorkin et B. D. MacCluer. *Essential Norms of Composition Operators.* Integr. eq. oper. theory **48** (2004), 27–40.

[HaWerWer93] P. Harmand, D. Werner et W. Werner. *M-ideals in Banach Spaces and Banach Algebras.* Lectures notes in Math. 1547. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1993.

[Ho88] K. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions.* Dover Publications, Inc., 1988.

[IKadWer07] Y. Ivakhno, V. Kadets et D. Werner. *The Daugavet property for spaces of Lipschitz functions.* Math. Scand. **101** (2007), No. 2, 261–279 ; corrigendum ibid. **104** (2009), No. 2, 319.

[Kad96] V.M. Kadets. *M. Some remarks concerning the Daugavet equation.* Quaestiones Math. **19** (1996), no. 1–2, 225–235.

[KadMarMer07] V.M. Kadets, M. Martín et J. Merí. *Norm equalities for operators on Banach spaces.* Indiana Univ. Math. J. **56** (2007), no. 5, 2385–2411.

[KadPo97] V.M. Kadets et M. M. Popov. *The Daugavet property for narrow operators in rich subspaces of the spaces $C[0,1]$ and $L^1[0,1]$.* St. Petersburg Math. J. **8** (1997), no. 4, 571–584.

[KadSheWer08] V.M. Kadets, V. Shepelska et D. Werner. *Quotients of Banach spaces with the Daugavet property.* Bull. Pol. Acad. Sci. **56** (2008), 131–147.

[KadSheWer] V.M. Kadets, V. Shepelska et D. Werner. *Thickness of the unit sphere, ℓ_1-types, and the almost Daugavet property.* Houston J. Math. **37** (2011), no. 3, 867–878.

[KadShvSiWer00] V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy, G.G. Sirotkin et D. Werner. *Banach spaces with the Daugavet property.* Trans Amer. Math. Soc. **352** (2000), 855–873.

[KadShvWer01] V.M. Kadets, R.V. Shvidkoy et D. Werner. *Narrow operators and rich subspaces of Banach spaces with the Daugavet property.* Studia Math. **147** (2001), no. 3, 269–298.

[Kam79] H. KAMOWITZ. *Compact operators of the form uC_φ.* Pacific J. Math. **80** (1979), 205–211.

[Kam81] H. KAMOWITZ. *Compact weighted endomorphisms of $C(X)$.* Proc. Amer. Math. Soc. **83** (1981), no. 3, 517–521.

[Ko80] P. KOOSIS. *Introduction to H_p spaces.* Cambridge University Press, 1980.

[KrMau81] J.-L. KRIVINE ET B. MAUREY. *Espaces de Banach stables.* Israel J. Math. **39** (1981), 273–295.

[dL60] K. DE LEEUW. *The isometries of H^1.* Mimeogaphed note, Stanford (1960) .

[Le09] P. LEFÈVRE. *Generalized Essential Norm of Weighted Composition Operators on some Uniform Algebras of Analytic Functions.* Integr. eq. oper. theory **63** (2009), 557–569.

[LeLiQR] P. LEFÈVRE, D. LI, H. QUEFFÉLEC ET L. RODRÍGUEZ-PIAZZA. *Nevanlinna counting function and Carleson function of analytic maps.* Math. Ann. **351** (2011), no2, 305–326.

[LiQR02] D. LI, H. QUEFFÉLEC ET L. RODRÍGUEZ-PIAZZA. *Some new thin sets of integers in harmonic analysis.* J. Anal. Math. **86** (2002), 105–138.

[Lo66] G. YA. LOZANOVSKII. *On almost integral operators in KB-spaces.* Vestnik Leningrad Univ. Math. Mekh. Astr. **21.7** (1966), 35–44 (Russian).

[Lu] S. LÜCKING. *Subspaces of almost Daugavet spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), 2777–2782.

[LP89] F. LUST-PIQUARD. *Bohr local properties of $C_\Lambda(\mathbb{T})$.* Colloq. Math. **58** (1989), 29–38.

[Mat99] V. MATACHE. *Composition operators on Hardy Spaces of a half-plane.* Proc. Amer. Math. Soc **127** (1999), 1483–1491.

[McC85] B. D. MCCLUER. *Compact composition operators on $H^p(B_N)$.* Michigan Math. J. **32** (1985), 237–248.

[Ph74] R. R. PHELPS. *Dentability and Extreme Points in Banach Spaces.* J. Functional Analysis **17** (1974), 78–90.

[Po08] M. M. POPOV. *An exact Daugavet type inequality for small into isomorphisms in L_1.* Arch. Math. **90** (2008), 537–544.

[Shap87] J. SHAPIRO. *The essential norm of a composition operator.* Annals of Math. **125** (1987), 375–404.

[SharSi99] S. D. SHARMA ET R. K. SINGH. *Composition operators on Hardy spaces of the upper half-plane.* Bull. Allahabad Math. Soc. **14** (1999), 129–145.

[Shv00] R. V. SHVIDKOY. *Geometric aspects of the Daugavet property.* J. Funct. Anal. **176** (2000), 198–212.

[St78] C. STEGALL. *The duality between Asplund spaces and spaces with the Radon-Nikodym property.* Israel J. Math. **9** (1978), no. 4, 408–412.

[Wea99] N. WEAVER. *Lipschitz algebras.* World Scientific, 1999.

[WeiWer98] L. WEIS ET D. WERNER. *The Daugavet equation for operators not fixing a copy of $C[0,1]$.* J. Operator Theory **39** (1998), no. 1, 89–98.

[Wer96] D. WERNER. *An elementary approach to the Daugavet equation.* Proc. Conf. Columbia 1994, Lectures Note in Pure and Applied Mathematics **175** (1996), 449–454.

[Wer01] D. WERNER. *Recent progress on the Daugavet property.* Irish Math. Soc. Bull. **46** (2001), 77–97.

[Wer97] D. WERNER. *The Daugavet equation for operators on function spaces.* J. Funct. Anal. **143** (1997), 117–128.

[Wh68] R. WHITLEY. *The size of the unit sphere.* Canadian J. Math. 20 (1968), 450–455.

[Wo92] P. WOJTASZCZYK, *Some remarks on the Daugavet equation.* Proc. Amer. Math. Soc. **115** (1992), 1047–1052.

[Z91] K. ZHU. *Duality of Bloch Spaces and Norm Convergence of Taylor Series.* Michigan Math. J. **38** (1991), no. 1, 89–101.