



**HAL**  
open science

# Modelisation macroscopique de mouvements de foule

Aude Roudneff

► **To cite this version:**

Aude Roudneff. Modelisation macroscopique de mouvements de foule. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris Sud - Paris XI, 2011. Français. NNT : 2011PA112304 . tel-00678596

**HAL Id: tel-00678596**

**<https://theses.hal.science/tel-00678596>**

Submitted on 13 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre :

UNIVERSITÉ PARIS-SUD  
FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

**THÈSE**

*présentée pour obtenir*

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI

Spécialité : Mathématiques

*par*

Aude ROUDNEFF-CHUPIN

*Sujet :*

**MODÉLISATION MACROSCOPIQUE DE  
MOUVEMENTS DE FOULE.**

Soutenue le 12 décembre 2011 devant la Commission d'examen :

M. VINCENT CALVEZ	(Examineur)
M. PIERRE DEGOND	(Examineur)
M. ALESSIO FIGALLI	(Rapporteur)
M. FRANCIS FILBET	(Rapporteur)
M. BERTRAND MAURY	(Directeur de thèse)
M. FILIPPO SANTAMBROGIO	(Examineur)



## Remerciements

Mes premiers remerciements vont sans aucun doute à mon directeur de thèse, Bertrand Maury. Merci de m’avoir proposé un sujet de thèse aussi original et intéressant, qui m’a non seulement permis de découvrir le domaine passionnant qu’est le transport optimal, mais également de faire partager à des non-initiés ce que pouvait être la “recherche en maths”. Merci surtout pour ton enthousiasme et ta confiance, même après que je t’ai avoué vouloir enseigner, puis attendre un bébé... Je ne désespère pas de trouver du temps entre les biberons et les paquets de copies pour continuer un peu la recherche !

Je souhaite aussi remercier Alessio Figalli et Francis Filbet pour le temps qu’ils ont consacré à rapporter ma thèse, et pour avoir fait le déplacement lors de ma soutenance. Je remercie également Vincent Calvez, Pierre Degond et Filippo Santambrogio qui ont accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens d’autre part à remercier Frédéric Pascal et Guillemette Chapuisat, qui m’ont judicieusement conseillé de rejoindre les “mauriettes”, et d’intégrer ainsi l’équipe ANEDP. J’ai eu le plaisir d’y rencontrer des personnes très disponibles, avec qui les discussions – mathématiques ou autres – se font très simplement autour d’un café dans la salle de thé. Je ne remercierai jamais assez Sylvain Faure et Loïc Gouarin pour le temps passé à m’expliquer comment fonctionne mon ordinateur (et à retrouver un certain fichier gcc malencontreusement égaré...). Merci à Catherine Poupon et à Valérie Lavigne, pour leur efficacité sans pareille, et pour leur écoute réconfortante à chaque passage dans leur bureau. Je souhaite également remercier mon presque voisin de bureau, Frédéric Lagoutière, dont le cours de M1 m’a donné envie de faire des “maths appli”. Enfin, je tiens à remercier celui que je considère depuis longtemps comme mon co-directeur de thèse officieux, Filippo Santambrogio. Un grand merci pour ton aide si précieuse tout au long de ma thèse, pour ta sympathie, et pour ta bonne humeur italienne.

Le très bon souvenir que je garde de ces années tient beaucoup à l’excellente ambiance qui règne dans les bureaux 256–258. Merci aux anciens d’avoir su instaurer ce climat si particulier, et aux nouveaux de le perpétuer (avec Guilhem comme relève je ne me fais pas de souci pour l’ambiance future!). Un merci tout particulier à mes grandes sœurs de thèse, Aline, pour son exemple de matheuse et de maman, et Juliette, qui m’a conseillée et aidée durant ces années, et qui a eu la gentillesse (et le courage!) de relire ce manuscrit intégralement. Un très grand merci à Adeline et Jennifer, pour toutes nos discussions autour d’un thé et d’une tablette de chocolat, et à Benoît et Frédéric, pour avoir survécu sans râler – ou presque – dans ce bureau de filles.

Il me tient à coeur de remercier mes deux familles, ainsi que mes amis. Bien que certains parmi vous soient légèrement allergiques aux maths, vous avez tous su m’entourer et me soutenir dans mes choix. Un grand merci en particulier à mes parents, qui ont su me transmettre le virus des mathématiques et de l’enseignement, en laissant traîner involontairement calculatrices et polyèdres parmi mes jouets.

Enfin, les mots ne suffiront pas pour remercier ma petite famille. Merci à Mikado pour ses ronrons sur mes genoux quand je travaille. Merci à toi, Antoine, à la fois mon mari, mon meilleur ami et mon confident, pour ton amour et ton soutien en toutes circonstances. Et merci à notre fille Élodie, la plus belle et la plus adorable (en toute objectivité), qui nous émerveille à tout instant. Je vous aime chaque jour un peu plus...



## Résumé

Nous étudions dans ce travail les mouvements de foule intervenant dans les situations d'urgence. Nous proposons un modèle macroscopique (la foule est représentée par une densité de personnes) obéissant à deux principes très simples. Tout d'abord, chaque personne possède une vitesse souhaitée (typiquement celle qui la mène vers la sortie), qu'elle adopterait en l'absence des autres. Ensuite, la foule doit respecter une contrainte de congestion, et la densité de personnes doit rester inférieure à une valeur fixée. Cette contrainte impose une vitesse de déplacement différente de la vitesse souhaitée. Nous choisissons de prendre comme vitesse réelle celle qui est la plus proche, au sens des moindres carrés, de la vitesse souhaitée, parmi les champs de vitesses admissibles, au sens où ils respectent la contrainte de densité maximale.

Le modèle obtenu s'écrit sous la forme d'une équation de transport impliquant une vitesse peu régulière a priori, et qui ne peut être étudiée par des méthodes classiques. Nous démontrons un résultat d'existence grâce à la théorie du transport optimal, tout d'abord dans le cas d'une vitesse donnée comme le gradient d'une fonction, puis dans le cas général.

Nous mettons également en œuvre un schéma numérique de type catching-up : à chaque pas de temps, la densité est déplacée selon le champ de vitesse souhaitée, puis est projetée sur l'ensemble des densités admissibles. Les résultats obtenus fournissent des temps d'évacuation dont l'ordre de grandeur est proche de la réalité.

---

## Abstract

In this work, we aim at modelling crowd motion in emergency situations. We propose a macroscopic model (where people are represented as a density) following two basic principles. First, each individual has a spontaneous velocity (typically, the one which leads to the nearest exit) which would be fulfilled in the absence of other people. On the other hand, the crowd has to respect a congestion constraint, and its density must remain underneath a critical density. This constraint prevents people from following their desired velocity. The actual velocity we consider is the closest, in a mean square sense, to the desired one, among the velocities which respect the maximal density constraint.

The mathematical formulation writes as a transport equation which cannot be studied with classical methods, since the real velocity field has no a priori regularity, even if the desired velocity is smooth. Thanks to the optimal transport theory, we prove an existence result, first in the case where the desired velocity is the gradient of a given function, and then in the general framework.

We also propose a numerical scheme which follows the catching-up principle : at each time step, we move the density according to the spontaneous velocity, and then project it onto the space of admissible densities. The numerical results we obtain reproduce qualitatively the experimental observations.





# Table des matières

Liste des notations	xiii
Introduction	1

---

---

## Partie I Modèles et analyse mathématique

---

---

### Chapitre 1 Modélisation

1.1 Etat de l'art . . . . .	8
1.1.1 Modéliser les mouvements de foule . . . . .	8
1.1.2 Description d'un modèle microscopique . . . . .	11
1.2 Description du modèle étudié . . . . .	15
1.3 Etude de deux exemples . . . . .	18
1.3.1 Un exemple en dimension 1 . . . . .	18
1.3.2 Couloir convergent . . . . .	19

### Chapitre 2 Existence d'une solution

2.1 Formulation mathématique du modèle . . . . .	24
2.1.1 Cas d'un domaine fermé . . . . .	24
2.1.2 Ajout de sorties . . . . .	25
2.2 Cadre flots-gradients . . . . .	26
2.2.1 Reformulation du problème à l'aide des flots-gradients . . . . .	26

2.2.2	Premiers résultats incomplets . . . . .	29
2.2.3	Existence dans le cas sans porte . . . . .	31
2.2.4	Ajout de sorties . . . . .	41
2.3	Cas d'une vitesse générale . . . . .	48
2.3.1	Formulation sous forme d'une inclusion différentielle . . . . .	48
2.3.2	Description du schéma . . . . .	49
2.3.3	Existence d'une solution pour une vitesse générale . . . . .	52

### Chapitre 3 Modèle à plusieurs populations dans le cas saturé

3.1	Description du modèle . . . . .	60
3.2	Existence d'une solution . . . . .	62
3.3	Retour vers le modèle à une population . . . . .	70

---



---

## Partie II Etude numérique

---



---

### Chapitre 4 Premiers schémas envisagés

4.1	Utilisation du schéma JKO . . . . .	78
4.1.1	Description de l'algorithme . . . . .	78
4.1.2	Cas de la dimension 1 . . . . .	80
4.1.3	Cas de la dimension 2 . . . . .	87
4.2	Algorithme inspiré du modèle microscopique . . . . .	89
4.2.1	Cas de la dimension 1 . . . . .	89
4.2.2	Généralisation en dimension 2 . . . . .	92

### Chapitre 5 Présentation et étude du schéma numérique adopté

5.1	Présentation du schéma numérique . . . . .	98
5.1.1	Utilisation du schéma de splitting . . . . .	98
5.1.2	Etape de transport . . . . .	99
5.1.3	Etape de projection . . . . .	101

---

5.2	Résultats partiels de convergence . . . . .	102
5.2.1	Convergence dans un cas particulier en dimension 1 . . . . .	103
5.2.2	Algorithmes de type DLA . . . . .	105
5.2.3	Balayage d'une mesure . . . . .	108
5.3	Convergence numérique . . . . .	111
5.3.1	Ordre de convergence en temps . . . . .	111
5.3.2	Etude de la projection stochastique . . . . .	112

---



---

## Partie III Programmation et tests numériques

---



---

<b>Chapitre 6 Programmation</b>
---------------------------------

6.1	Prise en compte du domaine . . . . .	118
6.1.1	Principe des labels . . . . .	118
6.1.2	Prise en compte automatique des géométries . . . . .	119
6.2	Calcul de la vitesse souhaitée . . . . .	120
6.3	Algorithme de splitting . . . . .	123
6.3.1	Etape de transport . . . . .	123
6.3.2	Etape de projection . . . . .	124

<b>Chapitre 7 Tests numériques</b>
------------------------------------

7.1	Premières géométries . . . . .	128
7.1.1	Evacuation de deux pièces . . . . .	128
7.1.2	Evacuation d'un métro . . . . .	129
7.1.3	Evacuation d'un théâtre . . . . .	130
7.2	Comparaison avec le modèle microscopique . . . . .	131
7.2.1	Densité d'une configuration microscopique . . . . .	131
7.2.2	Comparaison sur un cas particulier . . . . .	133
7.2.3	Différences entre microscopique et macroscopique . . . . .	135
7.3	Un exemple concret : l'évacuation du Stade de France . . . . .	137

---

<b>Chapitre 8 Suivi des personnes au sein de la foule</b>
---

8.1 Calcul de la pression et de la vitesse réelle . . . . .	142
8.2 Test dans le cas du cône convergent . . . . .	144
8.3 Exemples numériques . . . . .	145
8.3.1 Calcul de la pression . . . . .	145
8.3.2 Suivi des personnes . . . . .	147

---



---

## Perspectives

---

<b>Chapitre 9 Perspectives</b>
--------------------------------

9.1 Vers un modèle à plusieurs populations . . . . .	154
9.2 Ajout de stratégies : modéliser les ralentissements . . . . .	155
9.3 Un modèle de chimiotaxie . . . . .	159

---



---

## Annexes

---

Annexe A Transport optimal	165
Annexe B Exemple du cône convergent	171
Annexe C Détails de la démonstration informelle d'existence	179
Annexe D Principe du maximum pour une vitesse variable	185
Bibliographie	187

# Liste des notations

$\mathcal{A}(B)$	Aire du domaine $B$ (longueur de $B$ en dimension 1)
$C_\rho$	Ensemble des vitesses admissibles
$D$	Distance géodésique à la sortie
$\delta_x$	Mesure de dirac en $x$
$\partial\phi$	Sous-différentiel de Fréchet de $\phi$
$F_\rho$	Fonction de répartition de la mesure $\rho$ en dimension 1
$\Gamma_{out}$	Sorties
$H_\rho^1(\Omega)$	Espace des pressions sur la zone saturée
$I_K$	Fonction indicatrice de l'ensemble $K$
$K$	Ensemble des densités admissibles
$\mathcal{L}^d$	Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$
$m_p(\mu)$	Moment d'ordre $p$ de la mesure $\mu$
$\mu \otimes \nu$	Mesure produit des mesures $\mu$ et $\nu$
$\Omega$	Domaine dans lequel évolue la foule
$\pi^i$	Projection sur la $i^{\text{ème}}$ composante
$\Pi(\mu, \nu)$	Ensemble des plans de transport entre $\mu$ et $\nu$
$\mathcal{P}(\Omega)$	Ensemble des mesures de probabilité sur $\Omega$
$\mathcal{P}^a(\Omega)$	Ensemble des mesures absolument continues de $\mathcal{P}_p(\Omega)$
$\text{Tan}_\mu \mathcal{P}(\Omega)$	Espace tangent en $\mu$ à $\mathcal{P}(\Omega)$
$\mathbf{t}_\# \mu$	Mesure image de $\mu$ par le transport $\mathbf{t}$
$\mathbf{U}$	Vitesse souhaitée de la foule
$W_p$	Distance de Wasserstein d'ordre $p$



# Introduction

Nous nous intéressons dans ce travail à la modélisation des mouvements de foule lors de situations d'évacuation. Nous proposons un modèle macroscopique prenant en compte de façon forte les contacts entre les individus.

## Modéliser les mouvements de foule

La modélisation mathématique des mouvements de foule est au centre de nombreux travaux depuis quelques décennies, et connaît aujourd'hui un regain d'intérêt certain. En effet, les études de sécurité lors de la construction de bâtiments ou de l'organisation d'événements font de plus en plus appel à des modèles théoriques pour évaluer les risques en cas d'évacuation. Ces modèles permettent d'estimer par exemple les temps de sortie moyens ainsi que les zones les plus embouteillées, et peuvent servir à modifier certains éléments (emplacement des piliers, largeur des portes, emplacement de panneaux indicateurs,...) afin de faciliter une éventuelle évacuation. Ces données sont en effet très difficiles à obtenir expérimentalement. De fait, il n'est pas envisageable de faire des tests en situation réelle pour des évacuations : non seulement, il n'est pas évident de simuler la panique, et un tel exercice serait dangereux pour les volontaires.

De nombreux modèles très différents permettent d'étudier théoriquement les mouvements piétonniers. La plupart utilisent une représentation microscopique de la foule : chaque personne est modélisée indépendamment, et la dynamique globale est le résultat de l'évolution de chaque individu. Une façon peu coûteuse de modéliser cette évolution consiste à représenter l'espace comme une grille, dont chacune des cases est soit vide, soit occupée par une personne. C'est la méthode la plus employée par les logiciels de simulations d'évacuations, qui utilisent pour la plupart des automates cellulaires ou des graphes. Une autre méthode très répandue consiste à introduire des *forces sociales* entre individus, qui rendent compte du comportement des piétons. Ces forces font intervenir en particulier des termes de répulsion lorsque deux personnes se rapprochent trop, permettant ainsi d'éviter les collisions. Le modèle peut être enrichi afin de modéliser de nombreuses situations, comme par exemple le fait que les personnes évitent les zones les plus encombrées.

Bien que plus rares, certains modèles macroscopiques représentent la foule par une densité de personnes, et étudient directement l'évolution de cet ensemble d'individus. L'usage de densité permet en particulier de modéliser le comportement d'une foule importante sans limitation numérique sur le nombre de personnes. La plupart de ces modèles généralisent les principes utilisés dans le transport routier, et la vitesse est alors donnée

comme une fonction de la densité. D'autres modèles reprennent le principe des forces sociales déjà utilisées dans le cas microscopique, et font intervenir des forces de répulsion entre individus. Celles-ci permettent d'empêcher de trop grandes concentrations de la foule, et comportent par exemple un terme pénalisant les densités élevées.

Remarquons que tous ces modèles prennent en compte de façon détournée les contacts entre individus, comme dans le cas des automates cellulaires, voire même évitent ces contacts, par exemple avec l'ajout de forces sociales. Ces collisions caractérisent pourtant les situations d'urgence où les individus, en proie à la panique, peuvent se pousser et se bousculer mutuellement. La prise en compte explicite des contraintes entre personnes permet ainsi d'accéder à des informations très utiles, comme par exemple les pressions exercées entre individus, et de juger du danger que ces contacts peuvent engendrer sur les individus. Un tel modèle a été étudié par Maury et Venel (voir [Ven08]) dans le cas microscopique, et permet de retrouver de nombreux comportements connus dans les évacuations de foule. Nous proposons ici de reprendre les principes à l'origine de ce modèle dans le cas macroscopique.

## Description du modèle proposé

Nous considérons que l'évolution de la foule obéit à deux principes très simples. D'une part, chaque individu possède une vitesse souhaitée, celle qu'il adopterait en l'absence des autres. Cette vitesse peut, par exemple, être celle qui le mène le plus directement possible vers la sortie la plus proche. D'autre part, les personnes doivent respecter une contrainte d'encombrement maximal : la densité de la foule ne doit pas dépasser une valeur critique fixée. La vitesse réelle adoptée doit donc être différente de la vitesse souhaitée, en particulier dans les zones situées au niveau des issues ou des obstacles, qui ont tendance à concentrer les personnes. Un choix naturel de vitesse consiste à prendre celle la plus proche (au sens des moindres carrés) de la vitesse souhaitée parmi les vitesses respectant la contrainte de densité maximale.

Le modèle mathématique obtenu prend la forme d'une équation de transport dont la vitesse est très peu régulière a priori. Celle-ci est en effet définie comme la projection de la vitesse souhaitée sur un ensemble dépendant fortement de la densité de personnes. Ainsi les outils classiques, basés par exemple sur le calcul de trajectoires, ne sont pas applicables ici. L'existence d'une solution peut tout de même être démontrée grâce à la théorie du transport optimal (voir [Vil03, Vil09] et l'annexe A). En effet, dans le cas où la vitesse s'exprime comme le gradient d'une fonction, le problème d'évolution peut être reformulé comme une équation de flot-gradient dans l'espace de Wasserstein (voir [AS06, AGS05]), pour laquelle nous montrons l'existence d'une solution. Dans le cas d'une vitesse souhaitée quelconque, nous avons recours à un schéma de type *catching-up*, qui a déjà été utilisé dans l'étude du modèle microscopique : à chaque étape, la densité est transportée à la vitesse souhaitée, puis est reprojétée sur l'ensemble des densités admissibles. Il est possible de montrer que ce schéma converge vers une solution du problème initial.

La résolution numérique de ce système est également délicate. En effet, le calcul de la projection de la vitesse souhaitée est d'une part compliqué à mettre en œuvre car la géométrie de la zone saturée dépend de la densité à chaque instant, et fait de plus apparaître des champs de vitesse peu réguliers. Pour contourner ces difficultés, nous proposons de

---

mettre en oeuvre le schéma de catching-up décrit précédemment. Si l'étape de transport à vitesse souhaitée ne pose pas de problème, la projection sur l'ensemble des densités admissibles pour la distance de Wasserstein impose la mise au point d'un algorithme particulier.

## Présentation des travaux effectués

La première partie de cette thèse est consacrée à la description des modèles et à leur analyse théorique. Dans le chapitre 1, nous décrivons les modèles existants, en particulier le modèle microscopique dont nous reprenons les principes de base. Nous détaillons ensuite le modèle que nous proposons d'étudier, puis présentons deux cas particuliers dans lesquels la solution exacte est connue. Le chapitre 2 donne la formulation rigoureuse des principes décrits dans le chapitre 1, ainsi que sa mise sous forme de flot-gradient dans le cas d'une vitesse donnée comme le gradient d'une fonction. Nous démontrons dans ce cas particulier l'existence d'une solution grâce à la théorie du transport optimal. Enfin, nous démontrons en utilisant la convergence d'un schéma de type catching-up que ce résultat d'existence reste vrai dans le cas général. Le chapitre 3 est quant à lui consacré à l'étude d'un modèle à plusieurs populations ayant des vitesses souhaitées distinctes, dans le cas où le domaine est entièrement saturé. Ce cas particulier n'a que peu de justification dans le contexte des mouvements de foule, mais permet de modéliser l'évolution de milieux cellulaires, en particulier le phénomène de migration de cellules à travers un milieu biologique passif.

Dans une deuxième partie, nous présentons l'étude numérique du modèle. Le chapitre 4 décrit les difficultés que nous avons rencontrées. Nous montrons tout d'abord que le schéma JKO (Jordan-Kinderlehrer-Otto) intervenant dans la formulation flot-gradient du problème n'est pas directement utilisable en pratique. Il fait en effet intervenir un problème de minimisation dont la complexité est très importante en dimension 2. Nous décrivons également un algorithme consistant à rassembler la foule en petits groupes saturés, puis à utiliser l'algorithme du modèle microscopique pour les déplacer. Malheureusement ce modèle sur-contraint fortement le problème d'origine et ne rend pas compte du déplacement réel de la foule. Nous présentons dans le chapitre 5 l'algorithme que nous avons choisi d'adopter. Il consiste à mettre en pratique le schéma de catching-up utilisé dans la démonstration d'existence d'une solution dans le cas d'une vitesse quelconque. L'étape de projection fait appel à un processus stochastique, ce qui complique énormément toute démonstration de convergence. Nous présentons quelques résultats qui justifient notre approche, et détaillons en particulier les liens qui existent entre la distance de Wasserstein, le processus de balayage (voir [Gus, GS94]) et les algorithmes DLA (Diffusion Limited Aggregation, voir [LP10]), proches de notre algorithme stochastique. Enfin, nous donnons quelques résultats de convergence sur des cas tests dont la solution est connue explicitement.

La troisième partie présente les résultats numériques obtenus grâce à l'algorithme présenté dans le chapitre 5. Nous décrivons dans le chapitre 6 la mise en oeuvre pratique de l'algorithme grâce au logiciel `Matlab`. Nous utilisons en particulier la toolbox de Fast-Marching réalisée par Peyré (voir [Pey08]) pour calculer la distance géodésique aux sorties, et en déduire la vitesse souhaitée pour une géométrie quelconque. Nous donnons au chapitre 7 les résultats obtenus pour différentes géométries. Nous comparons en par-

ticulier les comportements du modèle macroscopique à ceux obtenus grâce à l'algorithme microscopique, et mettons en évidence des différences entre les deux approches. Enfin, nous présentons le cas concret de l'évacuation du Stade de France. Dans le chapitre 8, nous proposons une méthode permettant de retrouver la vitesse réelle des personnes ainsi que la pression subie par la foule. Ceci permet en particulier de suivre individuellement des individus au sein de la foule. Nous comparons les résultats obtenus avec les solutions exactes dans l'exemple du couloir convergent, et présentons quelques exemples de champs de pression et de trajectoires.

Enfin, le chapitre 9 présente quelques perspectives autour de ce modèle macroscopique. Nous reprenons le modèle à plusieurs populations, décrit dans le cas saturé au chapitre 3, et exposons les difficultés rencontrées dans le cas général. Nous décrivons également comment prendre en compte des vitesses souhaitées plus complexes, permettant de modéliser plus finement les comportements sociaux de la foule, et dépendant par exemple de la densité. Enfin, nous présentons un modèle de chimiotaxie prenant en compte une contrainte de congestion, où la vitesse souhaitée est donnée comme le gradient d'un chemoattractant dépendant lui-même de la densité.

Le résultat d'existence dans le cas d'une vitesse donnée comme le gradient d'une fonction a fait l'objet d'une publication en collaboration avec Santambrogio (voir [MRCS10]). Le modèle de plusieurs populations a été développé dans le cadre de la migration de cellules (voir [DMMRC12]) dans un travail en commun avec Dambrine et Meunier. Enfin, la comparaison des modèles microscopique et macroscopique, ainsi que la démonstration d'existence dans le cas général sont décrits dans un article en commun avec Santambrogio et Venel (voir [MRCSV11]). Leur contenu ayant été intégralement repris, développé et réorganisé, ces articles ne sont pas joints au présent document.

# Première partie

## Modèles et analyse mathématique



# Chapitre 1

## Modélisation

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Etat de l'art</b>	<b>8</b>
1.1.1	Modéliser les mouvements de foule	8
1.1.2	Description d'un modèle microscopique	11
<b>1.2</b>	<b>Description du modèle étudié</b>	<b>15</b>
<b>1.3</b>	<b>Etude de deux exemples</b>	<b>18</b>
1.3.1	Un exemple en dimension 1	18
1.3.2	Couloir convergent	19

---

Ce chapitre est consacré à la présentation du modèle de mouvements de foule que nous étudions. Nous commençons par donner un aperçu des modèles existants, et décrivons en particulier un modèle microscopique dont nous avons repris les principes de base. Nous présentons ensuite le modèle étudié, ainsi que deux exemples pour lesquels la solution exacte peut être calculée.

## 1.1 Etat de l'art

### 1.1.1 Modéliser les mouvements de foule

Au cours des dernières années, de nombreux modèles ont été développés pour décrire les mouvements de foule. Ces modèles ont des objectifs similaires, comme par exemple estimer des temps de sortie ou bien déterminer les zones particulièrement encombrées lors d'une évacuation. Cependant, les stratégies adoptées sont très différentes, et ce sur plusieurs points.

Tout d'abord, il existe deux méthodes principales pour représenter la foule. Les modèles *microscopiques*, qui sont les plus répandus, sont basés sur une représentation de la foule individu par individu. A l'inverse, les modèles *macroscopiques* considèrent la foule dans son ensemble, et la représentent par une densité de personnes. Remarquons que les modèles microscopiques permettent une étude plus fine des stratégies et des comportements de chaque individu, mais présentent l'inconvénient de comporter un nombre important d'inconnues, proportionnel au nombre de personnes au sein de la foule.

Il est également nécessaire de distinguer les différentes méthodes utilisées pour gérer les interactions entre individus. La plupart des modèles prennent en compte ces contacts de façon *relaxée*, en utilisant des forces de répulsion, qui agissent dès que deux personnes se rapprochent, et qui permettent d'intégrer des facteurs sociaux (les gens ne souhaitent pas se rapprocher trop les uns des autres). Cette méthode permet également de gérer la contrainte d'encombrement stérique (deux personnes ne peuvent pas se trouver au même endroit) en utilisant des forces de répulsion raides explosant quand la distance entre deux individus diminue. Cependant, certains modèles, comme celui que nous proposons dans la suite, prennent en compte de façon explicite les contacts entre individus. Les collisions ne sont pas évitées, et la contrainte d'encombrement stérique est prise en compte de façon *forte*.

Avant de présenter quelques-uns des modèles utilisés, remarquons qu'il est très difficile de comparer les résultats obtenus à l'expérience. En effet, il existe très peu de données expérimentales sur les évacuations d'urgence, étant donné que provoquer la panique dans un groupe de personnes est à la fois difficile et dangereux pour les volontaires.

### Modèles microscopiques

Une première classe très répandue de modèles microscopiques utilise des automates cellulaires (voir [Nag98, BA01, BKSZ01, Sch01, SKN03]). L'espace est alors représenté par une grille, dont chaque case est soit vide soit occupée par une personne. Le déplacement des individus peut se faire de deux façons différentes : soit les individus se déplacent les uns après les autres, dans un ordre choisi aléatoirement (*Random Sequential Update*),

soit le déplacement se fait de façon globale, en établissant des règles lorsque plusieurs personnes souhaitent occuper la même case (*Parallel Update*). Une autre classe de modèle utilise quant à elle des graphes pour représenter le milieu dans lequel évoluent les personnes. Chaque individu occupe alors un nœud du graphe, et les chemins empruntés par la foule sont calculés grâce à des critères déterministes (*Route Choice Models*, voir [BT86b, BT86a]), comme par exemple la longueur du trajet de chaque personne, ou bien grâce à des files d'attente (*Queuing Models*, voir [Løv94, YS89]). Remarquons que ces deux classes de modèles sont à la base de nombreux logiciels de simulation de mouvements piétonniers, parmi lesquels les logiciels Legion [Sti00], SimPed [Daa04], ou buildingEXODUS [GGLF01].

Un modèle totalement différent, appelé modèle de *forces sociales*, a été introduit par Helbing dans [HM95, HFV00, HMS94], et consiste à décrire le mouvement des piétons grâce à un système d'équations différentielles portant sur leurs vitesses. Chaque individu  $\alpha$  est en effet soumis à des forces de natures différentes. Tout d'abord, une force d'accélération l'entraîne dans une direction privilégiée, et s'exprime par

$$\mathbf{F}_\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha}(v_\alpha^0 \mathbf{e}_\alpha - \mathbf{v}_\alpha),$$

où  $\mathbf{e}_\alpha$  est la direction souhaitée de la personne,  $v_\alpha^0$  sa vitesse souhaitée,  $v_\alpha$  sa vitesse, et  $\tau_\alpha$  un temps de relaxation. D'autre part, des forces de répulsion tendent à le maintenir à une certaine distance des autres personnes, ainsi que des obstacles et des bords du domaine. Ces forces s'exercent à courte portée, et modifient peu la trajectoire empruntée ailleurs. Enfin, il est possible d'ajouter au modèle des forces d'attraction vers des cibles, ainsi que des fluctuations pour prendre en compte le caractère aléatoire du comportement des personnes. Un exemple de simulation pour des piétons se dirigeant avec la même vitesse souhaitée vers une sortie est présenté à la figure 1.1.

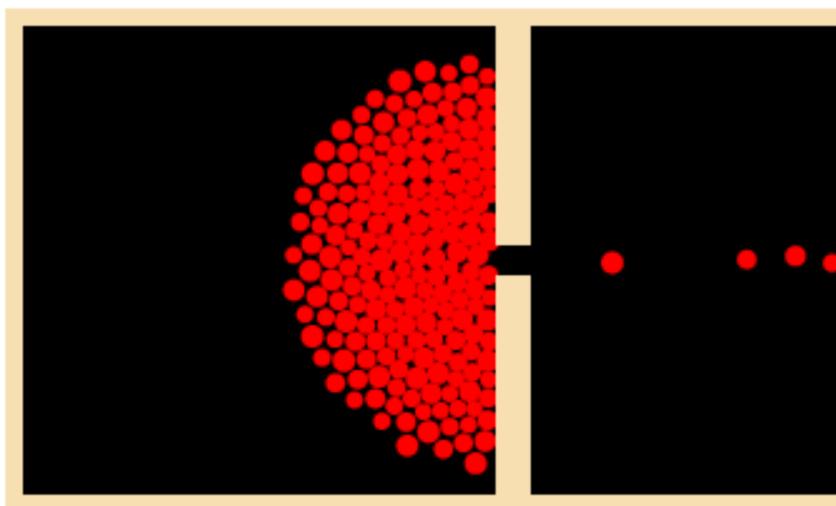


FIGURE 1.1 – Exemple de simulation pour le modèle de forces sociales.

## Modèles macroscopiques

Le mouvement piéton a été pour la première fois assimilé à celui d'un fluide par Henderson (voir [Hen71, Hen74]). Depuis, de nombreux modèles ont été développés dans cette direction, voir par exemple [Hel92, HB00]. Ceux-ci utilisent la théorie cinétique des gaz, et font appel plus particulièrement à des équations de type Maxwell-Boltzmann pour estimer la fonction de distribution des vitesses.

Une autre classe de modèles, introduite par Hughes dans [Hug02, Hug03], s'inspire des modèles de transport routier pour décrire le mouvement piétonnier. Ces modèles, développés également dans [CR05, Cha07a, Cha07b], décrivent l'évolution de la densité dans une file grâce à l'équation d'évolution

$$\partial_t \rho + \partial_x q(\rho) = 0,$$

où  $q(\rho) = \rho v(\rho)$  est le flux de piétons. Ce flux, dont un exemple est représenté à la figure 1.2, distingue deux plages pour les densités : l'une intervenant lors de circonstances normales, et la deuxième correspondant aux situations de panique, pour laquelle la densité dépasse un seuil critique. L'étude de ces modèles fait apparaître des chocs lors des transitions entre régimes libre et encombré.

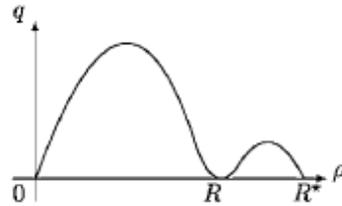


FIGURE 1.2 – Exemple de flux pour les modèles inspirés du trafic routier.

En dimension 2, de nombreux modèles font appel à un système de type forces sociales pour décrire l'évolution de la vitesse de la foule. Ces modèles s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F}(\rho, \mathbf{v}), \end{cases}$$

où  $\mathbf{F}$  est la somme des différentes forces qui influencent le mouvement de la foule. Dans le modèle proposé par Bellomo et Dogbé (voir [BD08, Dog08]), ces forces sont constituées d'un terme de relaxation vers une vitesse d'équilibre  $v_e(\rho) \boldsymbol{\nu}_0$  :

$$\mathbf{F}_1 = \alpha(v_e(\rho) \boldsymbol{\nu}_0 - \mathbf{v}),$$

ainsi que d'un terme de répulsion incitant les gens à s'éloigner des zones de forte densité. Ce deuxième terme peut prendre différentes formes, et il est également possible d'ajouter à ce modèle un comportement spécifique aux situations de panique. Le même type de modèle est utilisé dans [DNBS10, DHN] pour étudier le comportement d'un troupeau de

moutons. La force  $\mathbf{F}$  dépend alors d'un terme de pression qui explose lorsque la densité atteint une densité critique.

D'autres modèles privilégient l'ordre 1 et décrivent donc la vitesse de la foule grâce à une équation d'état. C'est le cas par exemple des modèles développés par Hughes (voir [Hug02, Hug03]), ou bien du modèle présenté dans [CC08]. Dans ce dernier, la norme et la direction de la vitesse de la foule dépendent à la fois d'une cible à atteindre, et de la densité locale de la foule :

$$\mathbf{v} = \varphi(\rho, \nabla\rho)\boldsymbol{\nu}(\rho).$$

Il est également possible d'ajouter une dépendance vis-à-vis des obstacles présents dans la pièce. Piccoli et Tosin proposent dans [PT11, PT09] un modèle relevant des mêmes principes. La densité de la foule évolue selon une vitesse constituée de deux termes : le premier décrit la vitesse qu'aurait une personne seule, et le deuxième est un terme d'interaction, qui peut faire dévier les gens de leur direction souhaitée s'ils entrent dans une zone saturée.

### Vers une contrainte de congestion forte

Notons que peu de modèles microscopiques choisissent de traiter de façon explicite les contacts. Dans la section 1.1.2, nous présentons cependant un modèle avec une contrainte de congestion forte, régi par les mêmes principes que notre propre modèle.

Les modèles macroscopiques font eux aussi appel majoritairement à des contraintes de congestion relaxées. Citons toutefois le modèle décrit dans [BJO07] : les auteurs cherchent à estimer le transport optimal ainsi que les géodésiques entre deux densités données, sous certaines contraintes d'obstacle ou de congestion. La méthode utilisée est celle décrite par Benamou et Brenier dans [BB01], et la contrainte de congestion peut être exprimée de façon forte, comme dans le dernier exemple présenté où la densité doit rester inférieure à une valeur fixée (voir la figure 1.3 p.12).

## 1.1.2 Description d'un modèle microscopique

Le modèle que nous décrivons ici est un modèle microscopique qui prend en compte de façon explicite les contacts entre les personnes. Il a été développé par Maury et Venel, et a fait l'objet de la thèse de cette dernière (voir [Ven08]).

Son principe, décrit dans [MV07, MV08], est simple. Les gens sont représentés par des disques et observent les deux règles suivantes :

- chaque personne cherche à atteindre sa vitesse souhaitée, celle qu'elle adopterait en l'absence des autres ;
- une contrainte de congestion forte doit être respectée : les disques représentant les individus ne peuvent se chevaucher.

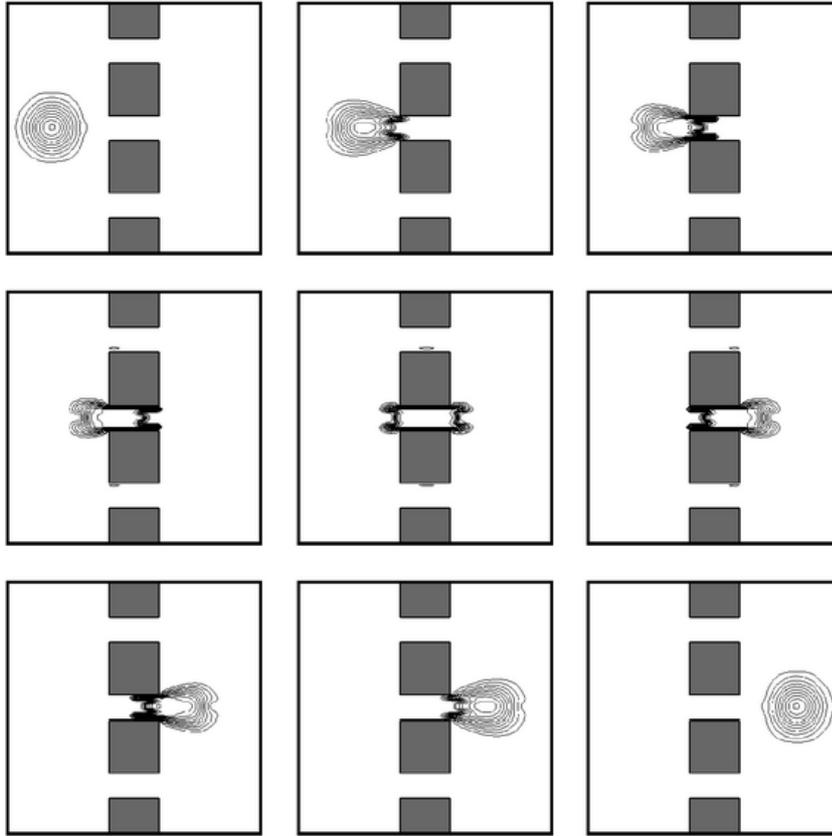


FIGURE 1.3 – Densités à différents pas de temps entre deux densités fixées de départ et d’arrivée, sous contrainte de congestion forte.

Plus précisément, notons  $N$  le nombre de personnes,  $r_i$  le rayon du disque représentant la  $i^{\text{ème}}$  personne et  $\mathbf{q}_i$  sa position (voir la figure 1.4). La configuration de la foule est alors donnée par le vecteur position  $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N}$ .

Notons  $D_{ij}(\mathbf{q})$  la distance relative entre les personnes  $i$  et  $j$  d’une configuration  $\mathbf{q}$ . La contrainte de non-chevauchement est alors satisfaite si et seulement si  $\mathbf{q}$  appartient à l’ensemble

$$K = \{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2N}, D_{ij}(\mathbf{q}) \geq 0, \forall i < j\}.$$

Soit  $\mathbf{U}_i(\mathbf{q})$  la vitesse souhaitée de la  $i^{\text{ème}}$  personne. Cette vitesse peut dépendre de la géométrie du domaine, en particulier des obstacles, mais également de la présence de panneaux de signalisation ou même encore de la position des autres personnes dans le cas de stratégies (voir [Ven10]). La foule souhaite alors se déplacer à la vitesse

$$\mathbf{U}_{\mathbf{q}} = (\mathbf{U}_1(\mathbf{q}), \dots, \mathbf{U}_N(\mathbf{q})).$$

Cependant, le déplacement suivant la vitesse admissible peut violer la contrainte de non-chevauchement. En effet, le champ de vitesse souhaitée a tendance à concentrer les personnes, au niveau des sorties en particulier.

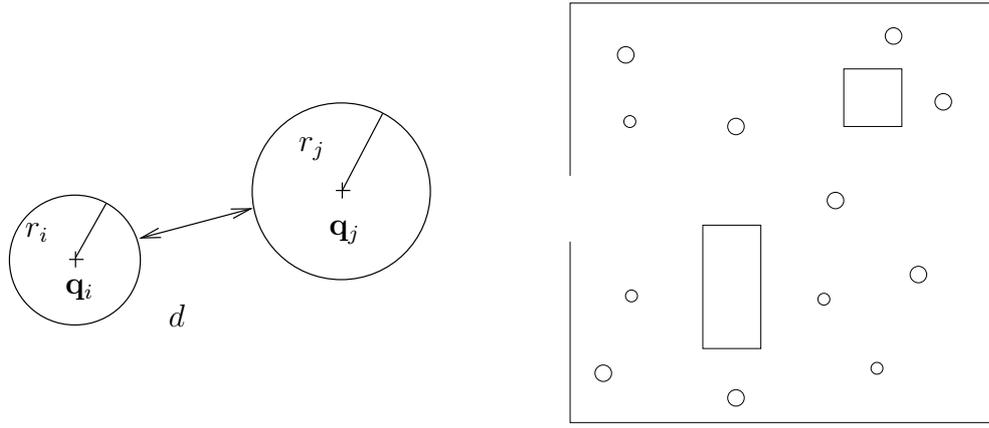


FIGURE 1.4 – Modèle microscopique.

Il est donc nécessaire d'introduire un ensemble de vitesses dites *admissibles*, respectant la contrainte de congestion :

$$C_{\mathbf{q}} = \{ \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{2N}, \forall i < j, D_{ij}(\mathbf{q}) = 0 \Rightarrow \nabla D_{ij}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v} \geq 0 \}.$$

Ces champs de vitesses ne peuvent ainsi rapprocher deux personnes déjà en contact. Le mouvement de la foule se fait alors à la vitesse la plus proche (au sens  $L^2$ ) de la vitesse souhaitée, parmi les vitesses admissibles :

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = P_{C_{\mathbf{q}}} \mathbf{U}_{\mathbf{q}}.$$

Cette équation d'évolution, bien que se formulant très simplement, pose de nombreux problèmes à la fois théoriques et numériques. Remarquons en particulier que l'ensemble des vitesses admissibles ne dépend pas continûment de la configuration  $\mathbf{q}$ .

Ainsi, la preuve d'existence et d'unicité d'une solution (voir [MV11]) fait appel à des outils issus de l'analyse convexe. En particulier, elle utilise la théorie des *processus de rafle*, introduite par Moreau à la fin des années 70 (voir [Mor77]). L'équation d'évolution peut en effet être reformulée grâce à une inclusion différentielle, dont le caractère bien posé peut être prouvé à partir des résultats issus de [ET05, ET06].

Du point de vue numérique, le schéma adopté est un schéma de type *catching-up* (voir [MV09]) : à chaque pas de temps, la configuration  $\mathbf{q}^n$  est déplacée grâce au champ de vitesse souhaitée, puis projetée sur un ensemble  $K_{\mathbf{q}^n}$  approchant (au voisinage de  $\mathbf{q}^n$ ) l'ensemble des configurations admissibles  $K$  :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}^n &= \mathbf{q}^{n-1} + \tau \mathbf{U}_{\mathbf{q}^{n-1}}, \\ \mathbf{q}^n &= P_{K_{\mathbf{q}^n}} \tilde{\mathbf{q}}^n. \end{cases}$$

La convergence de ce schéma a été démontrée dans [Ven, BV]. Des simulations ont été réalisées sur de nombreux cas tests (voir par exemple la figure 1.5), grâce au logiciel SCoPI (Simulation de Collections de Particules en Interaction) développé par Lefebvre-Leptot au cours de sa thèse [Lef07].

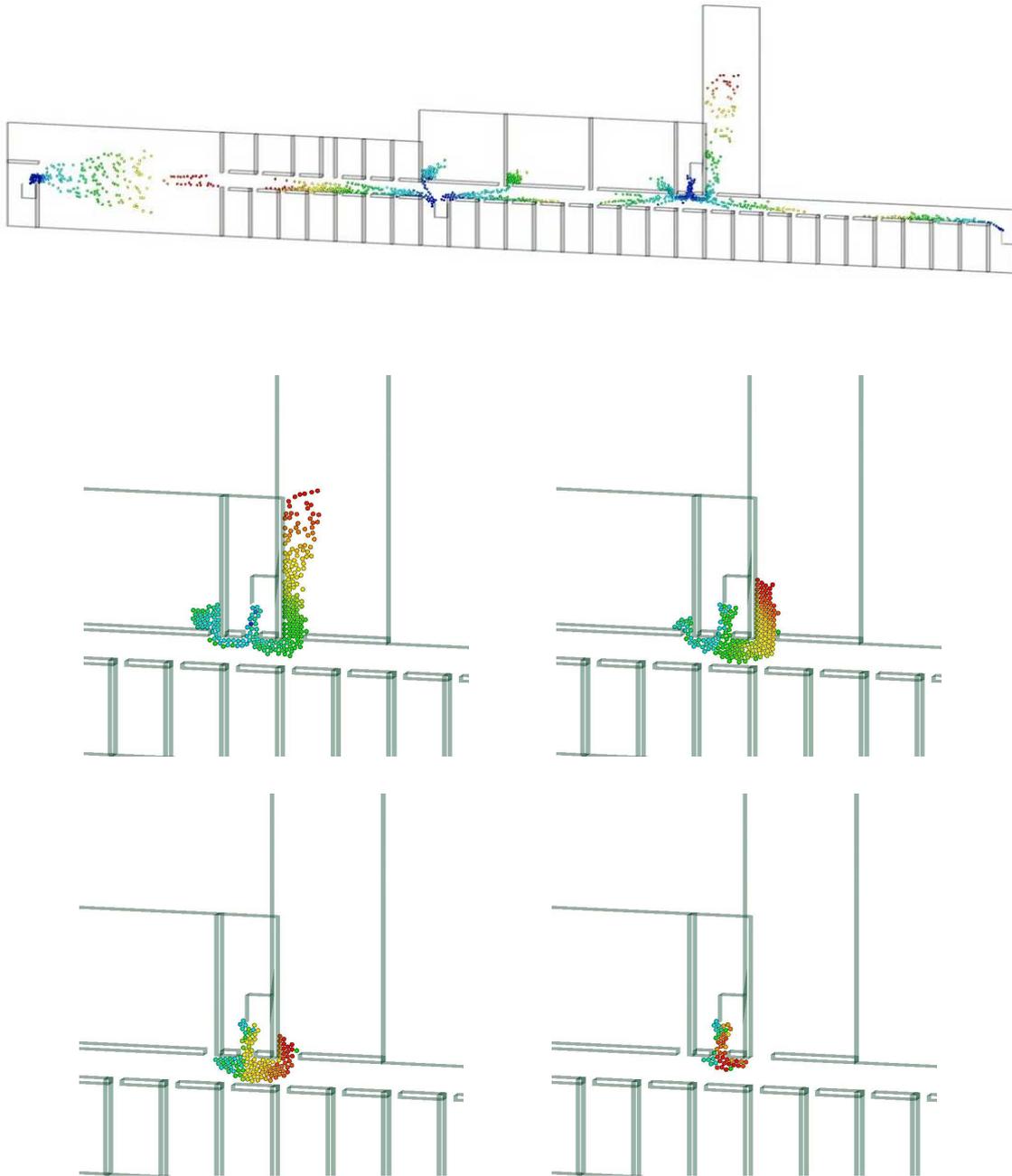


FIGURE 1.5 – Evacuation d'un étage du Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

## 1.2 Description du modèle étudié

Nous présentons à présent le modèle que nous étudions dans la suite. Nous reprenons les principes du modèle microscopique décrit précédemment à la section 1.1.2, dans le cadre macroscopique.

La foule est cette fois représentée par une densité de personnes notée  $\rho$ . Celle-ci évolue dans un domaine  $\Omega$  représentant par exemple une pièce, pouvant contenir des obstacles ainsi que des sorties (voir la figure 1.7). Nous notons  $\Gamma_{out}$  la partie du bord de  $\Omega$  par laquelle les gens sont autorisés à sortir. Le complémentaire  $\Gamma_w = \partial\Omega \setminus \Gamma_{out}$  désigne les murs du domaine, qui sont eux infranchissables.

L'évolution de la foule obéit alors à deux règles simples, les mêmes qui régissent le modèle microscopique évoqué plus haut à la section 1.1.2 :

1. Chaque personne cherche à atteindre sa vitesse souhaitée, celle qu'elle adopterait en l'absence des autres.
2. Une contrainte de congestion forte doit être respectée : la densité ne doit pas dépasser une densité maximale fixée.

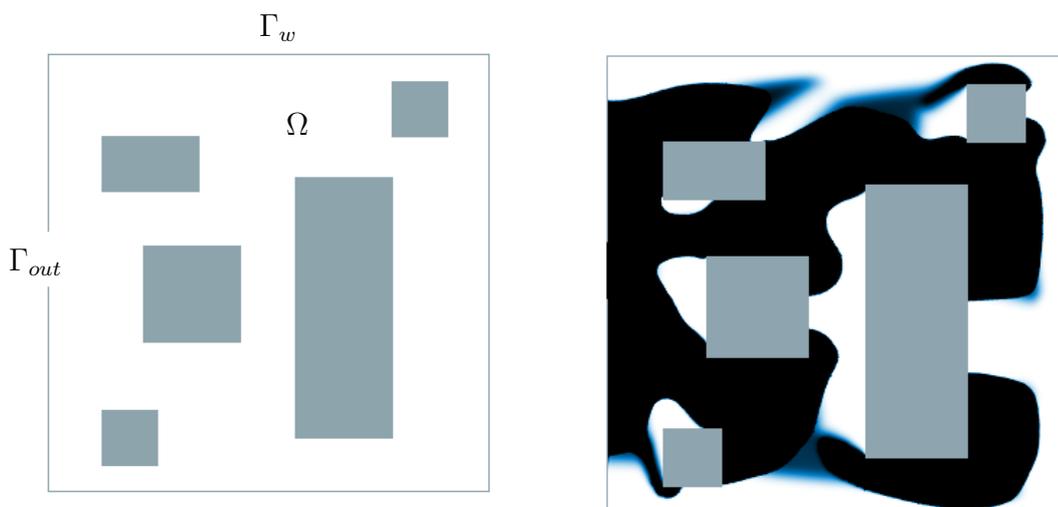


FIGURE 1.6 – A gauche : Exemple de domaine comportant 5 obstacles, ainsi qu'une sortie sur la gauche. A droite : représentation de la densité en niveaux de bleus ; les zones noires sont saturées, tandis que les blanches ne contiennent aucun individu.

Nous notons  $K$  l'ensemble des densités admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des densités inférieures à la densité maximale autorisée, que nous prendrons ici égale à 1.

### Vitesse souhaitée

Le champ de vitesse souhaitée de la foule, noté  $\mathbf{U}$ , est déterminé par la géométrie de la pièce, et décrit le comportement qu'aurait un piéton s'il devait se déplacer seul jusqu'à la sortie. En particulier, le champ de vitesse souhaitée peut tenir compte des obstacles (ainsi que de la manière de les éviter), de panneaux indicateurs ou encore des conditions de visibilité.

Un choix privilégié consiste à prendre comme vitesse souhaitée celle qui conduit les individus à emprunter le plus court chemin vers la sortie (voir la section 2.2.1 p.26). Cette vitesse est à la fois réaliste dans les situations de panique où les personnes cherchent à sortir le plus rapidement possible sans tenir compte de la foule qui les entoure, et est également facilement calculable pour toutes les géométries. Un exemple de tel champ de vitesse souhaitée est donné à la figure 1.7.

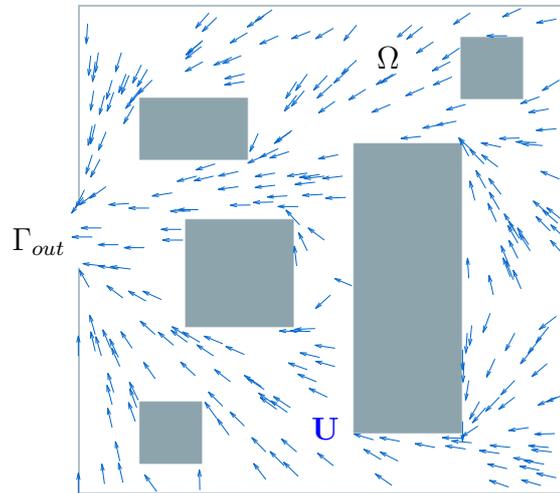


FIGURE 1.7 – Exemple de champ de vitesse souhaitée dirigée par le plus court chemin.

Un choix plus élaboré de la vitesse souhaitée permet d'intégrer des stratégies au modèle. Dans la section 9.2 p.155 par exemple, nous faisons dépendre la vitesse souhaitée de la densité locale de personnes.

### Vitesses admissibles

Du fait de la contrainte de densité maximale, la foule ne peut être déplacée à n'importe quelle vitesse. En particulier, les champs de vitesses concentrant la foule dans les zones déjà saturées sont proscrits.

Notons  $C_\rho$  l'ensemble des vitesses dites admissibles, au sens où elles ne conduisent pas à une violation de la contrainte de densité maximale. De façon informelle, ce sont les

vitesse qui ont une divergence positive sur les zones saturées, et qui sont rentrantes sur les bords saturés de  $\Omega$ <sup>1</sup>.

### Vitesse réelle

La vitesse souhaitée de la foule n'est pas, en général, un champ de vitesses admissibles. En particulier, au niveau des sorties ou en amont des obstacles, la vitesse souhaitée tend à concentrer encore plus une foule de densité maximale.

Il est donc nécessaire de transporter la foule à une vitesse réelle  $\mathbf{u}$  différente de la vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$ . Nous choisissons ici de prendre comme vitesse réelle la vitesse la plus proche (au sens  $L^2$ ) de la vitesse souhaitée, parmi les vitesses admissibles. L'évolution de la densité de personnes est alors donnée par l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $P_{C_\rho}$  désigne la projection sur  $C_\rho$  pour la norme  $L^2$  (au sens des moindres carrés).

Remarquons que la vitesse réelle de la foule ne diffère de la vitesse souhaitée que dans les zones de densités maximales. En effet, les contraintes imposées aux vitesses admissibles ne portent que sur ces zones saturées.

**Remarque 1.2.1** (Formulation point-selle). *La projection de la vitesse souhaitée qui intervient dans le problème (1.1) admet une formulation point-selle naturelle. La vitesse réelle  $\mathbf{u}$  est en effet la solution minimisant la norme  $L^2$  du problème de type Darcy suivant :*

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{U}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} \geq 0 \quad \text{sur } [\rho = 1], \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $p$  est une pression positive, nulle en dehors de la zone saturée.

### Formulation et étude mathématiques

Remarquons tout d'abord qu'il est nécessaire de définir rigoureusement les ensembles  $K$  et  $C_\rho$  introduits plus haut, ainsi que le sens donné à l'équation d'évolution 1.1. Ce travail est effectué à la section 2.1 p.24.

Le modèle mathématique obtenu, d'une grande simplicité formelle, se révèle délicat à étudier. En effet, la vitesse effective de transport ne possède aucune régularité a priori (autre que  $L^2$ ), ce qui rend impossible l'application des outils classiques, comme par exemple le calcul de trajectoires. Ainsi, même pour des champs de vitesse souhaitée très réguliers, il nous a paru nécessaire de recourir à d'autres méthodes (en particulier la théorie du transport optimal) pour montrer l'existence d'une solution.

---

1. Cette deuxième condition est délicate : la vitesse peut en effet être sortante sur les bords non saturés, mais conduit alors instantanément à une saturation de la densité, qui active la contrainte de non-pénétration des murs. Nous verrons au chapitre suivant que ces caractérisations des vitesses admissibles admettent une formulation duale naturelle.

## Prise en compte des sorties

Le modèle présenté ci-dessus ne prend pas explicitement en compte la présence de sorties. Dans le cadre des mouvements de foule, nous étudions l'évolution des personnes uniquement jusqu'à ce qu'elles atteignent une issue, considérant qu'une fois sorties de la pièce, elles ont atteint leur objectif. Cependant, la non-conservation de la masse de la foule pose problème en pratique, notamment dans l'application de la théorie du transport optimal. Nous avons donc fait le choix d'immobiliser artificiellement sur  $\Gamma_{out}$  les personnes sorties du domaine. La contrainte de densité maximale est alors relâchée sur l'ensemble des sorties.

Remarquons que la foule doit donc être représentée par une mesure constituée d'une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité bornée par 1, mais qui comporte également une mesure de simple couche concentrée sur  $\Gamma_{out}$ . Nous verrons que cette dernière complique considérablement l'étude théorique du modèle.

## 1.3 Etude de deux exemples

Nous présentons dans cette section deux exemples dans lesquels le modèle décrit plus haut se résout explicitement.

### 1.3.1 Un exemple en dimension 1

L'exemple le plus simple en dimension 1 consiste à prendre une densité constituée de plusieurs blocs saturés, représentant des ensembles de personnes se déplaçant dans un couloir, sans possibilité de se doubler (voir la figure 1.8).

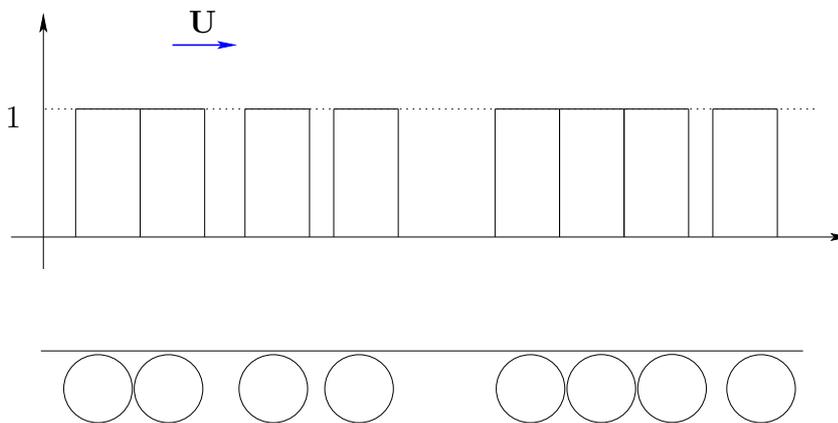


FIGURE 1.8 – Exemple en dimension 1. Le déplacement de blocs saturés pour le modèle macroscopique (en haut) décrit la même évolution que le modèle microscopique (en bas).

L'évolution est alors très simple, du fait de l'ordre imposé par la géométrie. En effet, la vitesse a pour seule contrainte d'être croissante sur chaque bloc saturé. Plus précisément,

chaque bloc avance à sa vitesse souhaitée jusqu'à ce qu'il rencontre un obstacle ou un autre bloc, auquel cas il adopte la vitesse de ce dernier.

Remarquons que sur cet exemple, le modèle macroscopique décrit exactement la même évolution que le modèle microscopique, ce qui se révèle faux dans le cas général. En effet, en dimension 2, les blocs saturés peuvent par exemple se déformer. Nous verrons dans la section 7.2 une comparaison détaillée de ces deux modèles.

**Remarque 1.3.1.** *Ce cas particulier possède des points communs avec les solutions de type sticky blocs apparaissant dans un modèle proposé par Bouchut, Brenier, Cortes et Ripoll dans [BBCR00], et étudié en particulier par Berthelin (voir [Ber02]). Les auteurs s'intéressent à un écoulement diphasique, constitué d'un gaz sans pression et d'un liquide incompressible. Ce modèle fait apparaître une contrainte sur la fraction volumique de liquide, qui doit rester comprise entre 0 et 1, et prend en compte les effets inertiels. La vitesse du liquide est en effet régie par une équation d'ordre 1 en temps, et le modèle est donc d'ordre 2 en temps pour les positions, contrairement au modèle de mouvements de foule auquel nous nous intéressons.*

### 1.3.2 Couloir convergent

Nous nous plaçons maintenant en dimension 2. Prenons pour  $\Omega$  une portion  $[a, R]$  de cône, qui représente par exemple un couloir qui se rétrécit. Supposons que les gens souhaitent tous se diriger vers la partie étroite de ce cône, et aient donc pour vitesse souhaitée  $\mathbf{U} = -\mathbf{e}_r$  en coordonnées polaires. On considère le cas d'une densité initiale constante  $\rho^0 \leq 1$ , et on cherche l'évolution de  $\rho(t, \cdot)$ .

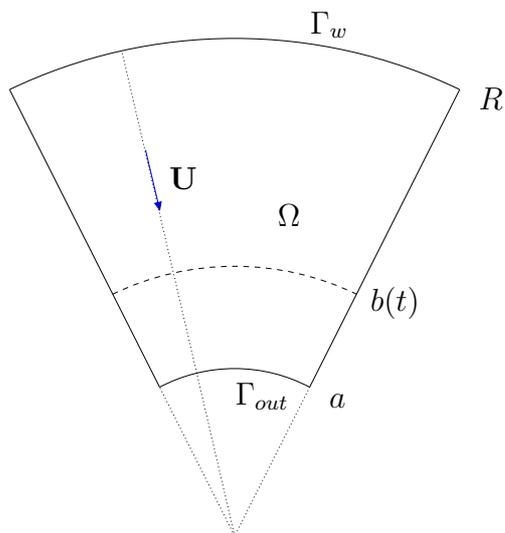


FIGURE 1.9 – Exemple d'un couloir convergent.

Nous présentons dans la suite les résultats détaillés dans l'annexe B p.171.

Tant que la densité reste inférieure à la densité maximale 1, la vitesse réelle est égale à la vitesse souhaitée, et la solution se calcule directement à l'aide de la méthode des caractéristiques :

$$\rho(t, r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) & \text{si } r \in ]a, R - t], \\ 0 & \text{si } r > R - t. \end{cases}$$

On observe ensuite l'apparition d'une zone saturée  $[a, b(t)[$ . La densité est alors donnée par

$$\rho(t, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) & \text{si } r \in ]b(t), R - t], \\ 0 & \text{si } r > R - t. \end{cases}$$

La résolution du problème de point-selle présenté à la remarque 1.2.1 permet de calculer la pression ainsi que la vitesse réelle, qui s'écrivent, en coordonnées polaires,

$$p(t, r) = \begin{cases} \frac{b(t) - a}{\ln(b(t)/a)} \ln \frac{r}{a} - (r - a) & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$u(t, r) = \begin{cases} \frac{b(t) - a}{r \ln(b(t)/a)} & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la pression est maximale non pas à la sortie, mais en

$$r_m = \frac{b(t) - a}{\ln(b(t)/a)},$$

qui est compris strictement entre  $a$  et  $b(t)$  d'après le théorème des accroissements finis.

Ce même théorème permet d'affirmer que  $u(t, b(t)) < 1$  et  $u(t, a) > 1$ . Ainsi, la foule est ralentie à l'entrée de la zone saturée, mais est accélérée au niveau de la sortie. Remarquons également que bien que la vitesse souhaitée soit  $\mathcal{C}^\infty$ , la vitesse effective est dans cet exemple discontinue à l'interface  $b(t)$ .

Enfin, le calcul de l'interface  $b(t)$  entre les zones saturée et non saturée s'obtient en utilisant la conservation de la masse de la foule, et est solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} b'(t) = f(t, b(t)) \\ b(0) = a, \end{cases} \quad \text{avec } f(t, r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) - \frac{r - a}{r \ln(r/a)}}{1 - \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right)} & \text{si } r \leq R - t \\ -\frac{r - a}{r \ln(r/a)} & \text{si } r > R - t. \end{cases}$$

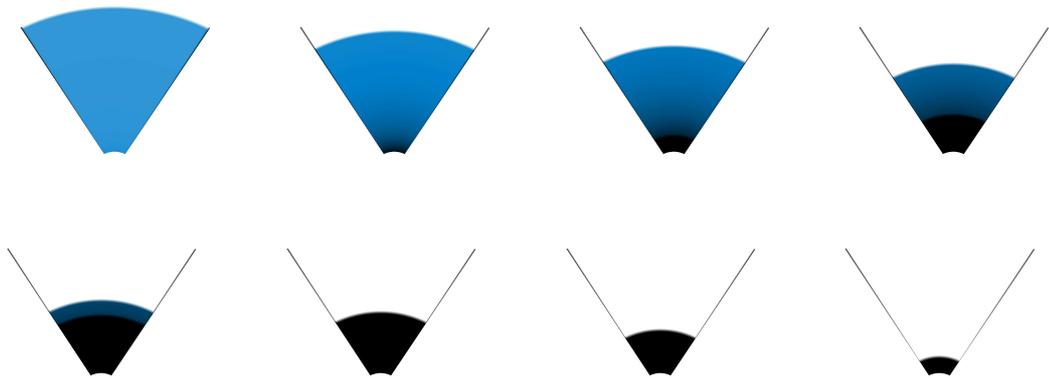


FIGURE 1.10 – Evolution de la densité dans l'exemple du cône convergent.

La figure 1.10 montre l'évolution de la densité pour une densité initiale de 0.4.

Cet exemple sera particulièrement intéressant dans la suite pour comparer les solutions obtenues numériquement avec une solution exacte connue.



# Chapitre 2

## Existence d'une solution

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Formulation mathématique du modèle</b> . . . . .	<b>24</b>
2.1.1	Cas d'un domaine fermé . . . . .	24
2.1.2	Ajout de sorties . . . . .	25
<b>2.2</b>	<b>Cadre flots-gradients</b> . . . . .	<b>26</b>
2.2.1	Reformulation du problème à l'aide des flots-gradients . . . . .	26
2.2.2	Premiers résultats incomplets . . . . .	29
2.2.3	Existence dans le cas sans porte . . . . .	31
2.2.4	Ajout de sorties . . . . .	41
<b>2.3</b>	<b>Cas d'une vitesse générale</b> . . . . .	<b>48</b>
2.3.1	Formulation sous forme d'une inclusion différentielle . . . . .	48
2.3.2	Description du schéma . . . . .	49
2.3.3	Existence d'une solution pour une vitesse générale . . . . .	52

---

Nous présentons dans ce chapitre les résultats théoriques obtenus. Nous commençons par donner la formulation mathématique rigoureuse du modèle décrit au chapitre 1. Nous montrons ensuite que dans le cas particulier d'une vitesse donnée comme le gradient d'une fonction, le problème peut se mettre sous la forme d'une équation de flot-gradient dans l'espace de Wasserstein. L'existence d'une solution peut alors être démontrée grâce à la théorie du transport optimal. Enfin, nous montrons que ce résultat est encore vrai dans le cas d'une vitesse quelconque.

## 2.1 Formulation mathématique du modèle

Nous donnons dans cette section un cadre rigoureux au modèle décrit dans la section 1.2.

### 2.1.1 Cas d'un domaine fermé

Commençons par étudier le cas d'un domaine ne comportant aucune sortie. La foule est représentée par une famille de mesures de probabilité  $(\rho(t, \cdot))_{t>0}$ , évoluant dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^d$ . La contrainte de congestion se traduit par une contrainte de densité maximale : la mesure de probabilité représentant la foule doit être absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et sa densité, que l'on notera toujours  $\rho(t, \cdot)$ , doit rester inférieure à une densité maximale, prise ici égale à 1 sans perte de généralité.

L'ensemble des densités admissibles est alors donné par

$$K = \{\rho \in \mathcal{P}(\Omega), \rho \ll \mathcal{L}^d, \rho \leq 1 \text{ p.p.}\}. \quad (2.1)$$

Nous notons  $\mathbf{U}$  le champ de vitesse souhaitée.

L'ensemble des vitesses admissibles est défini par

$$C_\rho = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^2, \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla q \leq 0 \quad \forall q \in H_\rho^1(\Omega) \right\}, \quad (2.2)$$

$$\text{avec } H_\rho^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), q \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, q = 0 \text{ p.p. dans } [\rho < 1]\}. \quad (2.3)$$

Cette formulation traduit de façon duale grâce à l'espace de pressions  $H_\rho^1(\Omega)$  le fait que les vitesses doivent avoir une divergence positive sur la zone saturée.

Rappelons qu'étant donnée une densité initiale  $\rho^0 \in K$ , l'évolution de la densité de la foule est donnée par le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $P_{C_\rho}$  désigne la projection sur  $C_\rho$  pour la norme  $L^2$ .

Remarquons que la projection sur l'ensemble des vitesses admissibles est bien définie, car cet ensemble est un convexe fermé de  $L^2$ .

Il reste à préciser ce que l'on appelle solution de l'équation de transport définie précédemment.

**Définition 2.1.1** (Solutions de l'équation de transport). Soit  $(\rho(t, \cdot))_{t>0}$  une famille de mesures de densité sur  $\Omega$ , et  $\mathbf{v} : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \mathbf{v}(t, x) \in \Omega$  un champ de vitesse mesurable qui vérifie la propriété suivante :

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}(t, x)| \rho(t, x) dx < +\infty.$$

On dit que  $\rho(t, \cdot)$  vérifie l'équation de transport pour le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  avec condition initiale  $\rho^0$  si pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \Omega)$  on a

$$\int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t \varphi(t, x) + \nabla \varphi(t, x) \cdot \mathbf{v}(t, x)) \rho(t, x) dx + \int_{\Omega} \varphi(0, x) \rho^0(x) dx = 0.$$

Rappelons que si  $\rho(t, \cdot)$  est solution d'une équation de transport, il existe une courbe absolument continue  $\tilde{\rho}(t, \cdot)$  telle que  $\rho(t, \cdot) = \tilde{\rho}(t, \cdot)$  pour presque tout  $t$ . Sauf exception, on choisira ce représentant continu pour la solution.

**Remarque 2.1.2** (Formulation point-selle). La formulation point-selle évoquée dans la section 1.2 à la remarque 1.2.1 peut s'exprimer de façon rigoureuse à l'aide de l'espace des pressions  $H_\rho^1$ . En effet, trouver  $\mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}$  revient à chercher  $(\mathbf{u}, p) \in L^2(\Omega)^2 \times H_\rho^1$  tel que

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{U}, \\ \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q \leq 0 \quad \forall q \in H_\rho^1, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec la relation de complémentarité

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla p = 0.$$

## 2.1.2 Ajout de sorties

Pour tenir compte de l'ajout de sorties  $\Gamma_{out}$  sur le bord du domaine, il est nécessaire de modifier certains points du modèle. En particulier, nous ajoutons à la densité de la foule sur le domaine  $\Omega$  une mesure supportée par la sortie  $\Omega$  qui représente les personnes déjà sorties du domaine. La foule est donc représentée cette fois par une famille de mesures qui ne sont pas absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue.

L'ensemble des mesures admissibles est donné par

$$K = \{\rho \in \mathcal{P}(\Omega), \rho = \rho_{out} + \rho_\Omega, \rho_\Omega \leq 1 \text{ p.p.}, \text{supp } \rho_{out} \subset \Gamma_{out}\}. \quad (2.6)$$

L'ensemble des vitesses admissibles doit lui aussi tenir compte de la sortie. Plus particulièrement, l'espace de pression  $H_\rho^1(\Omega)$  doit être modifié afin que les pressions soient nulles sur la sortie :

$$H_\rho^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), q \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, q = 0 \text{ p.p. dans } [\rho < 1], q_{\Gamma_{out}} = 0\}.$$

Le modèle d'évolution de la foule est alors le même que précédemment.

## 2.2 Cadre flots-gradients

Dans le cas particulier où vitesse souhaitée s'exprime comme le gradient d'une fonction, il est possible d'exprimer le modèle décrit ci-dessus sous forme d'une équation de flot-gradient. Ce cadre permet d'obtenir un premier résultat d'existence.

### 2.2.1 Reformulation du problème à l'aide des flots-gradients

#### Flots-gradients dans l'espace de Wasserstein

Nous nous intéressons dans cette section au cas où la vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$  s'exprime comme le gradient d'une fonction. Cette hypothèse est justifiée dans le contexte des évacuations de foule, où un choix naturel pour la vitesse souhaitée est l'opposé du gradient de la distance géodésique à la sortie.

**Hypothèse 2.2.1.** *La vitesse souhaitée est donnée par*

$$\mathbf{U} = -\nabla D,$$

où  $D$  est la distance géodésique à la sortie du domaine.

L'hypothèse 2.2.1 consiste à dire qu'à chaque instant, une personne seule dans la pièce se dirige dans la direction où la distance à la sortie diminue le plus. Ce type d'évolution rentre dans le cadre des flot-gradients, où les trajectoires sont celles qui minimisent une fonctionnelle d'insatisfaction, ici la distance à la sortie (voir la figure 2.1).

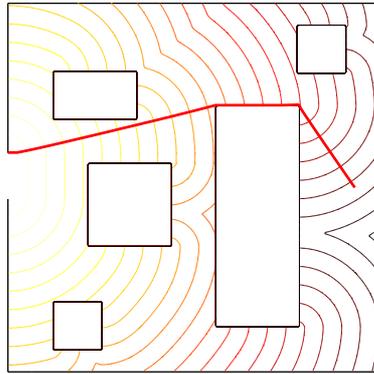


FIGURE 2.1 – Exemple de trajectoire de flot-gradient pour la fonctionnelle d'insatisfaction définie comme la distance géodésique à la sortie (pièce contenant 5 obstacles avec sortie à gauche).

On cherche à exprimer l'évolution de la foule sous la forme d'un flot-gradient dans l'espace des mesures de probabilités. Pour cela, il est nécessaire tout d'abord de définir

une distance sur cet ensemble qui rende compte du déplacement entre deux mesures. La théorie du transport optimal (voir annexe A) fournit une telle distance, appelée distance de Wasserstein, et notée  $W_2$ . L'espace  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), W_2)$ , appelé espace de Wasserstein, est alors un espace métrique complet. Afin de définir des trajectoires de flot-gradients, il faut également disposer d'une généralisation du gradient pour des fonctionnelles peu régulières dans un espace métrique.

**Définition 2.2.2** (Sous-différentiel de Fréchet dans l'espace de Wasserstein, cas absolument continu). *Soit  $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle,  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et  $\mathbf{v} \in L^2(\mu; \mathbb{R}^d)$ . On dit que  $\mathbf{v}$  appartient au sous-différentiel de Fréchet de  $\Phi$  en  $\mu$ , noté  $\partial\Phi(\mu)$ , si l'inégalité suivante est vérifiée pour tout  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  :*

$$\Phi(\nu) - \Phi(\mu) \geq \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{t}_\mu^\nu(x) - x \rangle d\mu(x) + o(W_2(\mu, \nu)), \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{t}_\mu^\nu$  désigne le transport optimal de  $\mu$  à  $\nu$ .

On dit que  $\mathbf{v}$  appartient au sous-différentiel fort si pour tout transport  $\mathbf{t}$  on a l'inégalité :

$$\Phi(\mathbf{t}_\# \mu) - \Phi(\mu) \geq \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathbf{v}(x), \mathbf{t}(x) - x \rangle d\mu(x) + o(\|\mathbf{t} - \mathbf{id}\|_{L^2(\mu)}). \quad (2.8)$$

Il est alors possible de définir les flots-gradients dans l'espace de Wasserstein.

**Définition 2.2.3** (Flots-gradients dans l'espace de Wasserstein, cas absolument continu). *Soit  $(\mu(t, \cdot))_{t>0}$  une famille de mesures de probabilité dans  $\mathcal{P}(\Omega)$  absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et absolument continue en temps. Soit  $\Phi = \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonctionnelle donnée. On dit que  $\mu$  est solution du flot-gradient associé à  $\Phi$  s'il existe une famille de champs de vitesses  $\mathbf{v}(t, \cdot)_{t>0}$  telle que*

$$\begin{cases} \partial_t \mu + \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) = 0, \\ \mathbf{v} \in -\partial\Phi(\mu). \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce cadre très général (voir par exemple les livres d'Ambrosio et al. [AGS05, AS06], et de Villani [Vil03, Vil09]) permet d'étudier de nombreuses équations d'évolution, comme par exemple l'équation de la chaleur, de Fokker-Planck, des milieux poreux, ou même des équations faisant intervenir des interactions non locales (voir [JKO98, Ott01, CGT04, CFF<sup>+</sup>]).

Munis de ces outils, nous allons montrer dans le reste de cette section qu'il est possible de reformuler l'équation d'évolution (1.1) décrivant l'évolution de la foule sous la forme d'un flot-gradient pour la fonctionnelle d'insatisfaction

$$\Phi(\rho) = J(\rho) + I_K(\rho), \quad (2.10)$$

où  $J$  est la fonctionnelle définie par

$$J(\rho) = \int_{\Omega} D(x) d\rho(x), \quad (2.11)$$

et  $I_K$  est la fonction indicatrice associée à  $K$ , définie par

$$I_K(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \in K, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Mouvements minimisants

Un outil particulièrement utile dans l'étude des flot-gradients, décrit par DeGiorgi [DeG93] et Ambrosio [Amb95], est l'existence d'une suite de familles de densités constantes par morceaux qui converge vers la solution de l'équation de flots-gradients.

**Définition 2.2.4** (Schéma JKO (Jordan-Kinderlehrer-Otto)). *Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $\rho_\tau^1, \dots, \rho_\tau^{n-1}$ . La densité  $\rho_\tau^n$  est alors donnée par*

$$\rho_\tau^n = \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho) \right\}. \quad (2.12)$$

**Remarque 2.2.5.** *Ce schéma est l'équivalent dans l'espace de Wasserstein du schéma d'Euler implicite. En effet, si l'on considère l'équation de flot-gradient dans  $\mathbb{R}^d$  pour une fonctionnelle  $\phi$  régulière et convexe*

$$\frac{dq}{dt} = -\nabla \Phi(q),$$

*l'équivalent du schéma JKO est donné par*

$$q_\tau^n = \operatorname{argmin}_{q \in \mathbb{R}^d} \left\{ \Phi(q) + \frac{1}{2\tau} |q - q_\tau^{n-1}|^2 \right\}.$$

*Or résoudre le problème de minimisation ci-dessus revient dans  $\mathbb{R}^d$  à résoudre*

$$\nabla \Phi(q^n) + \frac{q^n - q_\tau^{n-1}}{\tau} = 0,$$

*qui est exactement l'expression du schéma d'Euler implicite.*

**Définition 2.2.6** (Vitesses discrètes). *Soit  $(\rho_\tau^n)_n$  définie par 2.12, et  $\mathbf{t}_\tau^n$  le transport optimal entre  $\rho_\tau^n$  et  $\rho_\tau^{n-1}$ . On définit des vitesses discrètes comme suit*

$$\mathbf{v}_\tau^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n}{\tau}. \quad (2.13)$$

Il est intéressant de remarquer (voir [AS06]) que ces vitesses discrètes vérifient la propriété

$$\mathbf{v}_\tau^n \in -\partial \Phi(\rho_\tau^n).$$

Définissons enfin les quantités  $\mathbf{E}_\tau^n = \rho_\tau^n \mathbf{v}_\tau^n$ . Sous de bonnes hypothèses (voir [AGS05]), les familles  $(\rho_\tau(t, \cdot))_{t>0}$ ,  $(\mathbf{v}_\tau(t, \cdot))_{t>0}$  et  $(\mathbf{E}_\tau(t, \cdot))_{t>0}$  définies par

$$\begin{cases} \rho_\tau(t, \cdot) = \rho_\tau^n \\ \mathbf{v}_\tau(t, \cdot) = \mathbf{v}_\tau^n & \text{si } t \in ](n-1)\tau, n\tau], \\ \mathbf{E}_\tau(t, \cdot) = \mathbf{E}_\tau^n \end{cases} \quad (2.14)$$

et appelées mouvements minimisants convergent alors vers une solution de l'équation de flot-gradient (2.9). C'est cette propriété que nous allons utiliser dans la démonstration d'existence de solution.

### 2.2.2 Premiers résultats incomplets

Nous cherchons dans un premier temps à appliquer directement les résultats de convergence des mouvements minimisants présentés ci-dessus. Nous verrons que cette méthode ne permet pas d'aboutir à un résultat d'existence. Elle permet toutefois d'explicitier différents points du modèle. Les démonstrations des propriétés énoncées ci-dessous sont détaillées dans l'annexe C.

Commençons par rappeler précisément les hypothèses énoncées dans [AS06] :

**Théorème 2.2.7.** *Soit  $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  une fonction propre, semi-continue inférieurement, et  $\lambda$ -géodésiquement convexe, c'est-à-dire que pour tout couple  $(\mu^1, \mu^2)$  de mesures, la géodésique  $\mu^t$  reliant  $\mu^1$  à  $\mu^2$  vérifie*

$$\Phi(\mu^t) \leq (1-t)\Phi(\mu^1) + t\Phi(\mu^2) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)W_2^2(\mu^1, \mu^2).$$

On suppose de plus que les sous-niveaux

$$\left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \Phi(\mu) \leq C, \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(x) \leq C \right\}$$

sont compacts dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ .

Alors il existe une unique solution à l'équation de flot-gradient 2.9, et elle est limite des mouvements minimisants.

Nous nous plaçons, dans cette sous section uniquement, dans le cas simplifié suivant :

**Hypothèses 2.2.8** (Cadre flot-gradient, sans mur ni porte).

- (a)  $\Omega = \mathbb{R}^2$ ,
- (b) le support de la densité initiale  $\rho^0$  est borné,
- (c)  $\mathbf{U} = -\nabla D$ , où  $D$  est une fonction semi-continue inférieurement  $\lambda$ -convexe, c'est-à-dire vérifiant :

$$\Phi((1-t)x + ty) \leq (1-t)\Phi(x) + t\Phi(y) - \frac{\lambda}{2}|x-y|^2,$$

et telle qu'il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que  $D(x) \geq -A - B|x|^2$ .

On peut par exemple choisir pour  $D$  la distance à un point du domaine.

Sous ses hypothèses, il est possible de montrer (voir en annexe C) que la fonctionnelle  $\Phi$  définie en (2.10) vérifie les hypothèses du théorème 2.2.7.

**Lemme 2.2.9.** *Sous le jeu d'hypothèses 2.2.8,  $\Phi$  est une fonctionnelle propre, semi-continue inférieurement et  $\lambda$ -géodésiquement convexe.*

**Remarque 2.2.10** (Convexité du domaine). *Remarquons que pour la démonstration de la  $\lambda$ -convexité de  $\Phi$ , il est nécessaire de montrer que les géodésiques entre deux points de l'ensemble des densités admissibles  $K$  restent admissibles. Dans le cas où  $\Omega$  est un domaine non convexe, on ne peut plus démontrer la  $\lambda$ -convexité de la fonctionnelle  $\Phi$ . En effet, la géodésique entre deux densités de  $K$  peut contenir des densités non nulles à l'extérieur de  $\Omega$ , donc peut ne pas appartenir à  $K$ .*

D'après le théorème 2.2.7, il existe alors une solution à l'équation de flot-gradient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} \in -\partial\Phi(\rho). \end{cases} \quad (2.15)$$

Il reste à montrer que la vitesse  $\mathbf{u}$  définie à l'aide du sous-différentiel de  $\Phi$  est bien la projection de la vitesse souhaitée sur l'ensemble de vitesses admissibles.

Pour cela, une idée naturelle consiste à utiliser dans l'inégalité 2.8 du sous-différentiel un transport de la forme  $\mathbf{t}_\varepsilon = \mathbf{id} + \varepsilon \mathbf{v}$ , où  $\mathbf{v}$  est un champ de vitesse admissible. En supposant que  $\mathbf{t}_{\varepsilon \#} \rho$  soit une densité admissible, puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient alors que tout vecteur  $\mathbf{w} \in -\partial\Phi$  vérifie l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla D + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \, d\rho \geq 0. \quad (2.16)$$

Ceci implique que  $\mathbf{u}$  vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbf{U} - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\rho \leq 0$$

pour tout champ  $\mathbf{v}$  admissible, c'est-à-dire que  $\mathbf{U} - \mathbf{u}$  appartient au cône polaire de  $C_\rho$ . On peut de plus montrer que  $\mathbf{u}$  est lui même un champ de vitesse admissible (voir l'annexe C), et en déduire que  $\mathbf{u}$  est bien la projection de  $\mathbf{U}$  sur  $C_\rho$ .

Malheureusement, de façon générale, la densité  $\mathbf{t}_{\varepsilon \#} \rho$  n'est pas admissible. Il est possible de montrer que pour des champs  $\mathbf{v}$  réguliers, à divergence positive sur la zone saturée, l'inégalité (2.16) est toujours vérifiée. En effet, on peut alors approcher la densité  $\mathbf{t}_{\varepsilon \#} \rho$  par une densité admissible obtenue en redistribuant localement la masse dans les endroits sur-saturés (voir l'annexe C pour plus de détails).

Cependant, bien que l'inclusion

$$\overline{\{\mathbf{v} \in C^\infty(\mathbb{R}^2) : \nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0 \text{ sur } [\rho = 1]\}}^{L^2(\mathbb{R}^2)} \subset C_\rho$$

soit évidente, l'inclusion inverse n'est pas vraie dans le cas général, de telle sorte qu'une démonstration basée sur ces principes n'a pu être finalisée, et qu'une autre approche (détaillée dans la section suivante) a du être suivie.

### 2.2.3 Existence dans le cas sans porte

Les résultats qui suivent sont issus d'un travail en commun avec F. Santambrogio (voir [MRCS10]).

Reprenons les notations de la section 2.2.1 : la fonctionnelle d'insatisfaction qui nous intéresse est celle définie en (2.10) :

$$\Phi(\rho) = J(\rho) + I_K(\rho),$$

où  $J$  et  $I_K$  sont donnés par

$$J(\rho) = \int_{\Omega} D(x) d\rho(x), \quad I_K(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } \rho \in K, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons  $\rho_{\tau}^n$  la suite de densités obtenue grâce au schéma JKO

$$\rho_{\tau}^n = \operatorname{argmin}_{\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)} \left\{ \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{\tau}^{n-1}, \rho) \right\}, \quad (2.17)$$

$\mathbf{v}_{\tau}^n$  les vitesses discrètes données par

$$\mathbf{v}_{\tau}^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{t}_{\tau}^n}{\tau}, \quad (2.18)$$

où  $\mathbf{t}_{\tau}^n$  désigne le transport optimal de  $\rho_{\tau}^n$  à  $\rho_{\tau}^{n-1}$ , et  $\mathbf{E}_{\tau}^n = \rho_{\tau}^n \mathbf{v}_{\tau}^n$ . Les familles  $(\rho_{\tau}(t, \cdot))_{t>0}$ ,  $(\mathbf{v}_{\tau}(t, \cdot))_{t>0}$  et  $(\mathbf{E}_{\tau}(t, \cdot))_{t>0}$  sont à nouveau définies par

$$\begin{cases} \rho_{\tau}(t, \cdot) = \rho_{\tau}^n \\ \mathbf{v}_{\tau}(t, \cdot) = \mathbf{v}_{\tau}^n \\ \mathbf{E}_{\tau}(t, \cdot) = \mathbf{E}_{\tau}^n \end{cases} \quad \text{si } t \in ](n-1)\tau, n\tau]. \quad (2.19)$$

Nous allons montrer un théorème d'existence dans le cadre des hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.2.11** (Cadre flot-gradient, sans porte).

- (a)  $\Omega$  est un domaine convexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,
- (b)  $\mathbf{U} = -\nabla D$ , où  $D : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue  $\lambda$ -convexe,
- (c)  $\rho^0$  est une densité initiale admissible,
- (d) le domaine ne possède pas de sortie  $\Gamma_{out} = \emptyset$ .

Le théorème d'existence s'énonce alors :

**Théorème 2.2.12** (Existence d'une solution, cas sans porte). *Sous le jeu d'hypothèses 2.2.11, il existe une famille de densités de probabilité  $(\rho(t, \cdot))_{t>0}$  et une famille de champs de vitesses  $(\mathbf{u}(t, \cdot))_{t>0}$  tels que la famille  $(\rho_{\tau}(t, \cdot), \mathbf{E}_{\tau}(t, \cdot))$  définie à l'équation 2.19 converge étroitement vers  $(\rho(t, \cdot), \rho(t, \cdot) \mathbf{u}(t, \cdot))$  pour presque tout  $t$ . De plus,  $(\rho, \mathbf{u})$  est solution du problème (1.1) :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = P_{C_p} \mathbf{U}. \end{cases}$$

**Remarque 2.2.13.** *L'hypothèse de  $\lambda$ -convexité sur  $D$  est classique en théorie des flots-gradients, car elle permet d'obtenir des résultats d'unicité et de stabilité. Cette hypothèse pourrait être supprimée dans ce théorème d'existence, mais elle permet de simplifier la preuve et est d'autre part assez naturelle pour les fonctionnelles  $D$  utilisées dans le problème de mouvements de foule (pour les pièces sans obstacles en particulier).*

### Résultats préliminaires

Commençons par montrer le lemme suivant :

**Lemme 2.2.14.** *Soit  $D$  vérifiant les hypothèses 2.2.11, et  $\bar{\rho} \in K$ . Alors il existe  $\tau^*$  tel que pour tout  $\tau < \tau^*$  :*

- (i) *La fonctionnelle  $\phi(\rho) = \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau}W_2^2(\rho, \bar{\rho})$  admet un unique minimiseur  $\rho_m$ .*
- (ii) *Il existe un potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}$  de  $\rho_m$  à  $\bar{\rho}$  tel que :*

$$\int_{\Omega} \left( D + \frac{\bar{\varphi}}{\tau} \right) \rho_m \leq \int_{\Omega} \left( D + \frac{\bar{\varphi}}{\tau} \right) \rho \quad \text{pour tout } \rho \leq 1 \text{ p.p.} \quad (2.20)$$

*Démonstration.* (i) L'existence d'un minimiseur se démontre facilement en considérant une suite minimisante de  $\phi$ . Pour l'unicité, on utilise le même principe que dans la démonstration de la  $\lambda$ -convexité de  $\Phi$  (voir le lemme 2.2.9). Soient  $\rho_1$  et  $\rho_2$  deux minimiseurs distincts de  $\phi$ , et  $\mathbf{r}_i$  le transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho_i$ . On définit alors  $\mathbf{r}_t := (1-t)\mathbf{r}_1 + t\mathbf{r}_2$ , et  $\rho_t = \mathbf{r}_t \# \bar{\rho}$ . Comme  $\bar{\rho}$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, on a

$$\rho_t = \frac{\bar{\rho}}{|\det \nabla \mathbf{r}_t|} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1}.$$

De plus,  $\nabla \mathbf{r}_1$  et  $\nabla \mathbf{r}_2$  sont définies positives, et on montre comme dans le lemme 2.2.9 que l'application  $M \mapsto (\det M)^{-1}$  est convexe sur l'ensemble des matrices définies positives. On en déduit l'inégalité

$$\rho_t(x) \leq \left( \frac{1-t}{\det \nabla \mathbf{r}_1} + \frac{t}{\det \nabla \mathbf{r}_2} \right) \bar{\rho} \circ (\mathbf{r}_t)^{-1}(x).$$

Or  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux densités admissibles, donc

$$\frac{\bar{\rho}}{\det \nabla \mathbf{r}_i} \leq 1 \text{ p.p.,}$$

et  $\rho_t$  est admissible pour tout  $t$ . La fonctionnelle  $\phi$  s'exprime alors

$$\phi(\rho_t) = \int_{\Omega} D((1-t)\mathbf{r}_1(x) + t\mathbf{r}_2(x)) \bar{\rho}(x) dx + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_t, \bar{\rho}).$$

Comme  $D$  est  $\lambda$ -convexe, on a

$$D((1-t)\mathbf{r}_1(x) + t\mathbf{r}_2(x)) \leq (1-t)D(\mathbf{r}_1(x)) + tD(\mathbf{r}_2(x)) - \frac{\lambda}{2}t(1-t)|\mathbf{r}_1(x) - \mathbf{r}_2(x)|^2.$$

De plus, le lemme 9.2.1 p. 206 de [AGS05] montre que  $\rho \mapsto \frac{1}{2}W_2^2(\rho, \bar{\rho})$  est 1-convexe le long de l'interpolation  $\rho_t$ . On a donc, pour  $\tau$  assez petit

$$\phi(\rho_t) < (1-t)\phi(\rho_1) + t\phi(\rho_2) = \inf_K \phi(\rho),$$

ce qui est absurde.

(ii) Supposons tout d'abord que  $\bar{\rho} > 0$  presque partout, ce qui implique l'existence d'un unique potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}$  de  $\rho_m$  à  $\bar{\rho}$  satisfaisant  $\bar{\varphi}(x_0) = 0$  (où  $x_0$  est un point quelconque de  $\Omega$ ). Définissons alors une petite perturbation de  $\rho_m$  : soit  $\rho \leq 1$  une densité de probabilité fixée,  $\varepsilon > 0$ , et

$$\rho_\varepsilon = \rho_m + \varepsilon(\rho - \rho_m) \in K.$$

Comme  $\rho_m$  minimise  $\phi$ , on a

$$J(\rho_\varepsilon) - J(\rho_m) + \frac{1}{2\tau}(W_2^2(\rho_\varepsilon, \bar{\rho}) - W_2^2(\rho_m, \bar{\rho})) \geq 0. \quad (2.21)$$

La première partie du terme de gauche se calcule facilement

$$J(\rho_\varepsilon) - J(\rho_m) = \int_{\Omega} D(x)(\rho_\varepsilon - \rho_m)(x) dx = \varepsilon \int_{\Omega} D(x)(\rho - \rho_m)(x) dx.$$

Pour la deuxième partie, notons  $(\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon)$  un couple de potentiels de Kantorovich de  $\bar{\rho}$  à  $\rho_\varepsilon$ . Ils vérifient

$$\begin{cases} \frac{1}{2}W_2^2(\rho_\varepsilon, \bar{\rho}) &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x)\rho_\varepsilon(x) dx + \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(y)\bar{\rho}(y) dy \\ \frac{1}{2}W_2^2(\rho_m, \bar{\rho}) &\geq \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x)\rho_m(x) dx + \int_{\Omega} \psi_\varepsilon(y)\bar{\rho}(y) dy. \end{cases}$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}(W_2^2(\rho_\varepsilon, \bar{\rho}) - W_2^2(\rho_m, \bar{\rho})) \leq \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x)(\rho_\varepsilon - \rho_m)(x) dx = \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x)(\rho - \rho_m)(x) dx,$$

et l'inégalité (2.21) implique alors

$$\int_{\Omega} D(x)(\rho - \rho_m)(x) dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(x)(\rho - \rho_m)(x) dx \geq 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ admissible.}$$

Faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0 :  $\varphi_\varepsilon$  converge vers l'unique potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}$  de  $\rho_m$  à  $\bar{\rho}$ , et on en déduit l'inégalité souhaitée

$$\int_{\Omega} D(x)(\rho - \rho_m)(x) dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \bar{\varphi}(x)(\rho - \rho_m)(x) dx \geq 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ admissible.}$$

Revenons à présent au cas général. Soit  $\bar{\rho}_\delta$  une densité de probabilité vérifiant  $\bar{\rho}_\delta > 0$  et  $\bar{\rho}_\delta \leq 1$  p.p., et convergeant vers  $\bar{\rho}$  quand  $\delta$  tend vers 0. D'après (i), il existe un unique

minimiseur  $\rho_{m,\delta}$  de  $\rho \mapsto \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau}W_2^2(\rho, \rho_\delta)$ , et il converge vers  $\rho_m$  quand  $\delta$  tend vers 0. De plus, on a

$$\int_{\Omega} D(x)(\rho - \rho_{m,\delta})(x) dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_\delta(x)(\rho - \rho_{m,\delta})(x) dx \geq 0 \quad \text{pour tout } \rho \text{ admissible,}$$

avec  $\bar{\varphi}_\delta$  qui converge vers un potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}$  de  $\rho_m$  à  $\bar{\rho}$ . En prenant la limite quand  $\delta$  tend vers 0, on obtient bien l'inégalité souhaitée.  $\square$

**Remarque 2.2.15.** *La propriété (i) implique que le schéma JKO définit de façon unique la suite  $(\rho_\tau^n)_n$ . Dans le cas où  $D$  n'est pas  $\lambda$ -convexe, on ne peut plus prouver l'unicité du minimiseur de  $\phi$ . Cependant, le point (ii) est encore vrai si  $D$  n'est pas  $\lambda$ -convexe. En effet, dans la deuxième partie de la preuve de (ii), on peut définir  $\rho_{m,\delta}$  comme le minimiseur de  $\rho \mapsto \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau}W_2^2(\rho, \rho_\delta) + c_\delta W_2^2(\rho, \rho_m)$ , où  $\rho_m$  est un minimiseur choisi de  $\phi$ . En choisissant  $c_\delta$  tendant vers 0 plus lentement que les autres termes, on obtient l'inégalité pour ce  $\rho_m$  choisi.*

Montrons maintenant une propriété concernant les vitesses discrètes  $\mathbf{v}_\tau^n$ .

**Lemme 2.2.16** (Décomposition de la vitesse souhaitée). *La vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$  peut se décomposer de la façon suivante*

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_\tau^n + \nabla p_\tau^n \quad \text{avec } p_\tau^n \in H_{\rho_\tau^n}^1. \quad (2.22)$$

*Démonstration.* D'après le lemme 2.2.14, il existe un potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}$  de  $\rho_\tau^n$  à  $\rho_\tau^{n-1}$  tel que  $\rho_\tau^n$  soit solution du problème de minimisation suivant

$$\rho_\tau^n \in \operatorname{argmin}_{\rho \in K} \left\{ \int_{\Omega} D(x)\rho(x) dx + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \bar{\varphi}(x)\rho(x) dx \right\},$$

ce qui implique que  $\rho_\tau^n$  vérifie

$$\begin{cases} \rho_\tau^n = 1 & \text{sur } [F < l] \\ \rho_\tau^n \leq 1 & \text{sur } [F = l] \\ \rho_\tau^n = 0 & \text{sur } [F > l], \end{cases} \quad \text{avec } F : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto D(x) + \frac{\bar{\varphi}(x)}{\tau}, \end{cases}$$

et  $l \in \mathbb{R}$  choisi de façon à ce que  $\rho_\tau^n$  soit de masse totale 1. On peut alors définir

$$p_\tau^n(x) := (l - F(x))_+ = \left( l - D(x) - \frac{\bar{\varphi}(x)}{\tau} \right)_+ \quad (2.23)$$

qui vérifie  $p_\tau^n \geq 0$ ,  $p_\tau^n = 0$  sur  $[\rho_\tau^n < 1]$ , et qui appartient donc à l'espace des pressions  $H_{\rho_\tau^n}^1$ . De plus,  $p_\tau^n$  vérifie sur  $[\rho_\tau^n > 0]$

$$\nabla p_\tau^n = -\nabla D - \frac{\nabla \bar{\varphi}}{\tau}.$$

Or la vitesse discrète peut s'exprimer à l'aide de  $\bar{\varphi}$  de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_\tau^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n}{\tau} = \frac{\nabla \bar{\varphi}}{\tau},$$

et  $\mathbf{v}_\tau^n$  peut être définie comme on le souhaite sur  $[\rho_\tau^n = 0]$ , donc on a finalement démontré la décomposition suivante pour la vitesse souhaitée

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_\tau^n + \nabla p_\tau^n.$$

□

Pour la suite de la démonstration, nous avons besoin de définir des interpolations continues de  $\rho_\tau^n$  et  $\mathbf{v}_\tau^n$  : la famille  $\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)$  est définie comme l'interpolation le long des géodésiques de  $\rho_\tau^n$ , à savoir

$$\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot) = \left( \frac{t - (n-1)\tau}{\tau} (\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n) + \mathbf{t}_\tau^n \right) \# \rho_\tau^n, \quad t \in [(n-1)\tau, n\tau], \quad (2.24)$$

et nous définissons  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, \cdot)$  comme l'unique champ de vitesse vérifiant :

$$\tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, \cdot) \in \text{Tan}_{\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)} \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) = \overline{\{\nabla \varphi : \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\}}^{L^2(\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot), \mathbb{R}^d)}$$

et tel que  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{v}}_\tau)$  vérifie l'équation de transport :

$$\partial_t \tilde{\rho}_\tau + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_\tau \tilde{\mathbf{v}}_\tau) = 0.$$

A nouveau,  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  est défini par  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau = \tilde{\rho}_\tau \tilde{\mathbf{v}}_\tau$ .

Rappelons que  $\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)$  est une courbe absolument continue dans l'espace de Wasserstein, dont la vitesse est donnée sur chaque intervalle  $[(n-1)\tau, n\tau]$  par  $\frac{1}{\tau} W_2^2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n-1})$ . Sa dérivée métrique par rapport à la distance de Wasserstein, notée  $|\tilde{\rho}'_\tau|_{W_2}$ , vérifie alors :

$$\int_0^T |\tilde{\rho}'_\tau|_{W_2}^2(t) dt = \sum_n \frac{W_2^2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n-1})}{\tau}. \quad (2.25)$$

D'autre part, on sait que la suite  $\rho_\tau^n$  a un comportement hölderien, et même  $H^1$ . En effet, comme  $\rho_\tau^n$  est défini comme un minimiseur par le schéma JKO, on a l'inégalité suivante :

$$W_2^2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n-1}) \leq 2\tau(\Phi(\rho_\tau^{n-1}) - \Phi(\rho_\tau^n)).$$

Or  $\Phi$  coïncide avec  $J$  pour des densités admissibles, et  $J$  est bornée sur  $K$  par  $\max_\Omega D|\Omega|$ . On a donc une estimation de type Hölder :

$$W_2^2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n-1}) \leq C\tau.$$

En sommant sur  $n$ , on obtient également l'estimation  $H^1$  suivante

$$\sum_n \frac{W_2^2(\rho_\tau^n, \rho_\tau^{n-1})}{\tau} \leq 2\Phi(\rho^0), \quad (2.26)$$

qui implique la compacité de la courbe  $\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)$ , ainsi qu'une estimation höldérienne sur ses variations, étant donné que  $H^1 \subset C^{0, \frac{1}{2}}$ .

Munis de ces estimations, nous pouvons à présent montrer des estimations a priori sur les interpolées définies précédemment.

**Lemme 2.2.17** (Estimations a priori).

(i)  $\mathbf{v}_\tau$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), L^2_{\rho_\tau}(\Omega))$ , et  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), L^2_{\tilde{\rho}_\tau}(\Omega))$ .

(ii)  $p_\tau$  est  $\tau$ -uniformément borné dans  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$ .

(iii)  $\mathbf{E}_\tau$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  sont des mesures  $\tau$ -uniformément bornées.

*Démonstration.* (i)  $\mathbf{v}_\tau$  vérifie les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega \rho_\tau^n |\mathbf{v}_\tau^n|^2 \\ &= \sum_n \left( \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} dt \right) \left( \int_\Omega \rho_\tau^n(x) \frac{|x - \mathbf{t}_\tau^n(x)|^2}{\tau^2} dx \right) \\ &= \sum_n \tau \frac{W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n)}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \sum_n W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n). \end{aligned}$$

L'estimation (2.26) donne alors

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 \leq 2\Phi(\rho^0). \quad (2.27)$$

L'estimation pour  $\tilde{\mathbf{v}}$  est directement donnée par (2.25) et (2.26).

(ii) D'après le lemme 2.2.16,  $\nabla p_\tau = -\nabla D - \mathbf{v}_\tau$ , ce qui implique

$$\int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\nabla p_\tau|^2 \leq 2 \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 + 2 \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\nabla D|^2 \leq C.$$

Or  $p_\tau = 0$  sur  $[\rho_\tau < 1]$ , donc on a en réalité

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla p_\tau|^2 = \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\nabla p_\tau|^2 \leq C.$$

(iii) L'estimation (i) et le théorème de Cauchy-Schwarz donnent

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\mathbf{E}_\tau| &= \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau| \leq \int_0^T \left( \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_\Omega \rho_\tau \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \leq \int_0^T \left( \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{T} \left( \int_0^T \int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C. \end{aligned}$$

L'estimation pour  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  se fait de manière similaire en utilisant les inégalités (2.25) et (2.26).  $\square$

Montrons enfin une estimation générale pour des mesures à densité bornée.

**Lemme 2.2.18.** Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, dont la densité est bornée par une même constante  $C$ . Alors, pour tout  $f \in H^1(\Omega)$ , on a l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} f d(\mu - \nu) \leq \sqrt{C} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} W_2(\mu, \nu). \quad (2.28)$$

*Démonstration.* Notons  $\mu_t$  la géodésique reliant  $\mu$  et  $\nu$ , et  $\mathbf{w}_t$  le champ de vitesse tel que  $(\mu_t, \mathbf{w}_t)$  vérifie l'équation de transport et  $\|\mathbf{w}_t\|_{L^2(\mu_t)} = W_2(\mu, \nu)$ . On peut montrer avec la méthode utilisée dans le lemme 2.2.14 que  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité  $\rho_t$  bornée par  $C$ . On a donc, pour  $f \in H^1(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d(\mu - \nu) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} f(x) d\mu_t(x) \right) dt = \int_0^1 \int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{w}_t d\mu_t dt \\ &\leq \left( \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\mu_t dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \int_{\Omega} |\mathbf{w}_t|^2 d\mu_t dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{C} \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} W_2(\mu, \nu). \end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.19.** La même méthode permet de montrer l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} f d(\mu - \nu) \leq C^{\frac{1}{p}} \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} W_q(\mu, \nu)$$

pour tout  $f \in W^{1,p}(\Omega)$  et  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . De façon générale, si  $\mu, \nu \in L^r(\Omega)$  vérifient  $\|\mu\|_{L^r}, \|\nu\|_{L^r} \leq C$ , on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} f d(\mu - \nu) \leq C^{\frac{1}{q}} \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} W_q(\mu, \nu)$$

pour tous  $p, q$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{qr}$ .

### Démonstration du théorème d'existence

*Démonstration.* Nous pouvons à présent démontrer le théorème 2.2.12.

*Etape 1 : Convergence de  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{E}}_\tau)$  et  $(\rho_\tau, \mathbf{E}_\tau)$ .*

D'après les estimations a priori du lemme 2.2.17,  $\tilde{\rho}_\tau$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  sont des mesures  $\tau$ -uniformément bornées, donc il existe  $(\rho, \mathbf{E})$  tel que  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{E}}_\tau)$  converge étroitement vers  $(\rho, \mathbf{E})$ . Montrons que  $(\rho_\tau, \mathbf{E}_\tau)$  converge vers la même limite.

Commençons par la convergence de  $\rho_\tau$ . En réalité, la courbe  $\tilde{\rho}_\tau$  converge uniformément sur  $[0, T]$  pour la distance de Wasserstein. De plus, les courbes  $\rho_\tau$  et  $\tilde{\rho}_\tau$  coïncident sur

les temps  $n\tau$ . La courbe  $\rho_\tau$  est constante sur chaque intervalle  $](n-1)\tau, n\tau]$ , et  $\tilde{\rho}_\tau$  est  $\frac{1}{2}$ -höldérienne, ce qui implique

$$W_2(\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot), \rho_\tau(t, \cdot)) \leq C\tau^{\frac{1}{2}},$$

et donc  $\rho_\tau$  admet la même limite  $\rho$  que  $\tilde{\rho}$ .

Pour la convergence de  $\mathbf{E}_\tau$ , montrons que pour tout  $f \in C_c^\infty([0, T] \times \Omega)$  :

$$\int_0^T \int_\Omega f \left( \tilde{\mathbf{E}}_\tau - \mathbf{E}_\tau \right) \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

On sait que pour  $t \in ](n-1)\tau, n\tau]$ , on a  $\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot) = \mathbf{T}_t^n \# \rho_\tau^n$  avec

$$\mathbf{T}_t^n = (t - (n-1)\tau)\mathbf{v}_\tau^n + \mathbf{t}_\tau^n.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\tau(t+h, \cdot) &= (\mathbf{T}_t^n + h\mathbf{v}_\tau^n) \# \rho_\tau^n \\ &= ((\mathbf{id} + h\mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}) \circ \mathbf{T}_t^n) \# \rho_\tau^n \\ &= (\mathbf{id} + h\mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}) \# \tilde{\rho}_\tau(t, \cdot). \end{aligned}$$

Pour  $h$  assez petit, on en déduit que le transport optimal entre  $\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)$  et  $\tilde{\rho}_\tau(t+h, \cdot)$  est exactement  $\mathbf{id} + h\mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}$ . La vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau$  est donc donnée par

$$\tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, \cdot) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{t}_{\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)}^{\tilde{\rho}_\tau(t+h, \cdot)} - \mathbf{id}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}}{h} = \mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1},$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(t, x) \tilde{\rho}_\tau(t, x) \tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, x) dx &= \int_\Omega f(t, \mathbf{T}_t^n(x)) \rho_\tau^n(x) \tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, \mathbf{T}_t^n(x)) dx \\ &= \int_\Omega f(t, \mathbf{T}_t^n(x)) \rho_\tau^n(x) \mathbf{v}_\tau^n(x) dx. \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega f \left( \tilde{\mathbf{E}}_\tau - \mathbf{E}_\tau \right) &\leq \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega |f(t, x) - f(t, \mathbf{T}_t^n(x))| |\mathbf{v}_\tau^n(x)| \rho_\tau^n(x) dx dt \\ &\leq \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega \text{Lip} f |x - \mathbf{T}_t^n(x)| |\mathbf{v}_\tau^n(x)| \rho_\tau^n(x) dx dt \\ &\leq \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega \text{Lip} f \tau |\mathbf{v}_\tau^n(x)|^2 \rho_\tau^n(x) dx dt \\ &\leq C \text{Lip} f \tau, \end{aligned}$$

d'après l'estimation (2.27).

*Etape 2 : Existence de la vitesse limite.*

Montrons que  $\mathbf{E}$  est absolument continu par rapport à  $\rho$ . Pour cela, définissons, pour une mesure scalaire  $\theta$  et une mesure vectorielle  $\mathbf{F}$ , la fonction  $\Theta$  suivante

$$\Theta(\theta, \mathbf{F}) = \begin{cases} \int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{F}|^2}{\theta} & \text{si } \mathbf{F} \ll \theta \text{ p.p. } t \in [0, T] \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\Theta$  est semi-continue inférieurement pour la convergence faible-\* des mesures, et d'après le lemme 2.2.17 (i), on a la borne uniforme en  $\tau$

$$\int_0^T \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{E}_{\tau}|^2}{\rho_{\tau}} \leq C,$$

ce qui implique à la limite ( $\tau \rightarrow 0$ ) que  $\Theta(\rho, \mathbf{E}) < +\infty$ . On en déduit qu'il existe un champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \cdot) \in L^2(\rho(t, \cdot))$  tel que  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{u}$ . De plus,  $(\rho, \rho \mathbf{u})$  vérifie l'équation de transport, comme limite de  $(\tilde{\rho}_{\tau}, \tilde{\mathbf{E}}_{\tau})$ .

Montrons à présent que  $\mathbf{u}(t, \cdot) \in C_{\rho(t, \cdot)}$ . Soit  $h > 0$  et  $q \in H_{\rho(t_0, \cdot)}^1$ . Comme  $\mathbf{u}$  vérifie l'équation de transport, on a, pour presque tout  $t_0 \in ]0, T[$ ,

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t, x) \rho(t, x) dx = \int_{\Omega} (\rho(t_0 + h, x) - \rho(t_0, x)) q(x) dx.$$

Comme  $\rho(t_0, x) = 1$  là où  $q$  est non nul, et  $\rho(t_0 + h, x) \leq 1$  presque partout, on a

$$\int_{\Omega} (\rho(t_0 + h, x) - \rho(t_0, x)) q(x) dx \leq 0.$$

On en déduit

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t, x) \rho(t, x) dx \leq 0,$$

et en faisant tendre  $h$  vers 0 :

$$\int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t_0, x) \rho(t_0, x) dx \leq 0.$$

Comme  $q$  s'annule sur  $[\rho < 1]$ , on a finalement montré que

$$\int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t_0, x) dx \leq 0 \text{ pour tout } q \in H_{\rho(t_0, \cdot)}^1,$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{u}(t_0, \cdot) \in C_{\rho(t_0, \cdot)}$ .

En utilisant la même méthode entre  $t_0 - h$  et  $t_0$ , on montre de même que  $-\mathbf{u}(t_0, \cdot) \in C_{\rho(t_0, \cdot)}$ , et on obtient donc la relation de complémentarité suivante

$$\int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t, x) dx = 0 \text{ pour tout } q \in H_{\rho(t, \cdot)}^1. \quad (2.29)$$

*Etape 3 : La vitesse limite est la projection de la vitesse souhaitée.*

Montrons tout d'abord la décomposition  $\mathbf{U} = \mathbf{u}(t, \cdot) + \nabla p(t, \cdot)$  pour presque tout  $t$ . On a

$$\mathbf{E}_\tau = \rho_\tau \mathbf{v}_\tau = -\rho_\tau (\nabla D + \nabla p_\tau) = -\rho_\tau \nabla D - \nabla p_\tau$$

puisque  $p_\tau = 0$  sur  $[\rho_\tau < 1]$ . D'après le lemme 2.2.17, on a  $p_\tau$   $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ , donc il existe  $p$  tel que  $p_\tau$  converge faiblement vers  $p$  dans  $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ . On a évidemment  $p \geq 0$ , mais il est plus délicat de montrer que  $p(t, \cdot) = 0$  sur  $[\rho(t, \cdot) < 1]$ . Considérons les fonctions moyennes suivantes :

$$p_\tau^{a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^b p_\tau(t, \cdot) dt \quad \text{et} \quad p^{a,b} = \frac{1}{b-a} \int_a^b p(t, \cdot) dt.$$

Comme  $p_\tau = 0$  sur  $[\rho_\tau < 1]$ , on a

$$\int_a^b \int_\Omega p_\tau(t, x) (1 - \rho_\tau(t, x)) dx dt = 0,$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{b-a} \left( \int_a^b \int_\Omega p_\tau(t, x) (1 - \rho_\tau(a, x)) dx dt + \int_a^b \int_\Omega p_\tau(t, x) (\rho_\tau(a, x) - \rho_\tau(t, x)) dx dt \right) = 0.$$

Comme  $p_\tau^{a,b}$  converge faiblement dans  $H^1(\Omega)$  – donc fortement dans  $L^2(\Omega)$  – vers  $p^{a,b}$ , et que  $\rho_\tau(a, \cdot)$  converge faible-\* dans  $L^\infty(\Omega)$ , la première intégrale vérifie :

$$\int_\Omega p_\tau^{a,b}(x) (1 - \rho_\tau(a, x)) dx \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \int_\Omega p^{a,b}(x) (1 - \rho(a, x)) dx.$$

De plus, pour presque tout  $a$  (en fait pour tout  $a$  point de Lebesgue de  $p(\cdot, x)$ ), on a  $p^{a,b} \xrightarrow{b \rightarrow a} p(a, \cdot)$ , ce qui implique

$$\int_\Omega p^{a,b}(x) (1 - \rho(a, x)) dx dt \xrightarrow{b \rightarrow a} \int_\Omega p(a, x) (1 - \rho(a, x)) dx.$$

En utilisant le lemme 2.2.18, on obtient donc pour la seconde intégrale :

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_\Omega p_\tau(t, x) (\rho_\tau(a, x) - \rho_\tau(t, x)) dx dt \\ & \leq \int_a^b \|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \underbrace{W_2(\rho_\tau(a, \cdot), \rho_\tau(t, \cdot))}_{\leq C\sqrt{b-a}} dt \\ & \leq C\sqrt{b-a} \left( \int_a^b \|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C(b-a) \left( \int_a^b \|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus,  $p_\tau$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2([0, T], H^1(\Omega))$ , donc  $\|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$  converge faiblement vers une mesure  $\mu$ . On a donc, pour presque tout  $a$  :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_{\Omega} p_\tau(t, x) (\rho_\tau(a, x) - \rho_\tau(t, x)) dx dt \leq C \sqrt{\mu([a, b])} \xrightarrow{b \rightarrow a} 0.$$

On obtient

$$\int_{\Omega} p(a, x) (1 - \rho(a, x)) dx = 0 \quad \text{p.p. } a.$$

On a donc  $\mathbf{E} = -\rho \nabla D - \nabla p$ , avec  $p \in H^1(\Omega)$ ,  $p \geq 0$  et  $p = 0$  p.p. sur  $[\rho < 1]$ , c'est-à-dire  $p \in H_\rho^1(\Omega)$ . Et donc finalement

$$\rho \mathbf{u} = \mathbf{E} = \rho(\mathbf{U} - \nabla p)$$

ce qui implique la décomposition suivante pour la vitesse souhaitée :

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \nabla p, \quad \text{avec } p \in H_\rho^1(\Omega).$$

De plus, on a montré en (2.29) la relation de complémentarité

$$\int_{\Omega} \nabla p(t, x) \cdot \mathbf{u}(t, x) dx = 0,$$

donc  $\mathbf{u}$  vérifie la formulation point-selle du problème de projection (voir la remarque 1.2.1), et on a bien

$$\mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}.$$

□

## 2.2.4 Ajout de sorties

L'ajout de la porte (voir section 2.1.2) modifie considérablement l'ensemble des mesures admissibles  $K$ , et lui fait perdre certaines propriétés qui étaient essentielles dans la démonstration précédente. En particulier,  $K$  n'est plus géodésiquement convexe, du fait de la partie singulière  $\rho_{out}$  sur la porte. Prenons par exemple une densité constante  $\rho_0$  valant 1 sur une partie de  $\Omega$ , et une mesure  $\rho_1$  concentrée sur  $\Gamma_{out}$ . La géodésique  $\rho_t$  les reliant aura une densité d'ordre  $\frac{1}{1-t}$  au niveau de la porte, et donc  $\rho_t$  n'appartient pas à  $K$  pour  $t \in ]0, 1[$ .

Pour contourner ce problème, il est nécessaire d'estimer la distance entre deux mesures de  $K$ . Le résultat suivant est démontré dans la proposition 4.1 de [MRCS10] :

**Proposition 2.2.20** (Continuité de la longueur entre deux mesures de  $K$ ). *Soient  $\mu, \nu$  deux mesures de  $K$ . On définit la longueur entre  $\mu$  et  $\nu$  par :*

$$L(\mu, \nu) = \inf \left\{ \int_0^1 |\sigma'|_{W_2}(t) dt : \sigma(t, \cdot) \in K, \sigma(0, \cdot) = \mu, \sigma(1, \cdot) = \nu \right\}. \quad (2.30)$$

La longueur  $L$  est finie, et définit une distance sur  $K$  qui est continue pour la convergence étroite : si  $(\mu_n)$  et  $(\nu_n)$  sont deux suites qui convergent étroitement dans  $K$  vers des mesures  $\mu$  et  $\nu$ , alors  $L(\mu_n, \nu_n)$  converge vers  $L(\mu, \nu)$ .

Nous pouvons à présent généraliser le résultat du théorème 2.2.12 dans le cas suivant :

**Hypothèses 2.2.21** (Cadre flot-gradient, avec porte).

- (a)  $\Omega$  est un domaine convexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,
- (b)  $\mathbf{U} = -\nabla D$ , où  $D : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue  $\lambda$ -convexe,
- (c)  $\rho^0$  est une densité initiale admissible,
- (d)  $D$  est minimale et constante sur le bord  $\Gamma_{out}$ .

**Théorème 2.2.22** (Existence d'une solution dans le cas avec porte). *Le théorème 2.2.12 est encore vrai sous les hypothèses 2.2.21 précédentes.*

Commençons par montrer que les lemmes techniques de la section précédente sont encore vrais dans le cas général.

### Généralisation des lemmes techniques

*Lemme 2.2.14 :*

Tout d'abord, on ne peut plus prouver l'unicité du minimiseur au (i), étant donné que les géodésiques entre deux mesures de  $K$  ne sont plus nécessairement admissibles. Le point (ii) peut toutefois être démontré pour un minimiseur choisi  $\rho_m$  à l'aide du principe de sélection expliqué dans la remarque 2.2.15. Plus précisément, le cas où la densité  $\bar{\rho}$  est strictement positive sur  $\Omega$  ne pose pas de problème, mais dans le cas général, on définit  $\rho_{m,\delta}$  comme le minimiseur de

$$\phi_\delta(\rho) := \int_{\Omega} D d\rho + I_K(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho, \bar{\rho}_\delta) + c_\delta W_2^2(\rho, \rho_m),$$

avec  $c_\delta$  qui converge vers 0 plus lentement que  $W_2^2(\bar{\rho}, \bar{\rho}_\delta)$ . Comme  $\rho_{m,\delta}$  et  $\rho_m$  minimisent respectivement  $\phi_\delta$  et  $J$ , on a

$$\begin{cases} \int_{\Omega} D d\rho_{m,\delta} + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{m,\delta}, \bar{\rho}_\delta) + c_\delta W_2^2(\rho_{m,\delta}, \rho_m) \leq \int_{\Omega} D d\rho_m + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_m, \bar{\rho}_\delta), \\ \int_{\Omega} D d\rho_m + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_m, \bar{\rho}) \leq \int_{\Omega} D d\rho_{m,\delta} + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{m,\delta}, \bar{\rho}). \end{cases}$$

On en déduit, en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} W_2^2(\rho_{m,\delta}, \rho_m) &\leq \frac{1}{2\tau c_\delta} [W_2^2(\rho_{m,\delta}, \bar{\rho}) - W_2^2(\rho_{m,\delta}, \bar{\rho}_\delta) + W_2^2(\rho_m, \bar{\rho}_\delta) - W_2^2(\rho_m, \bar{\rho})] \\ &\leq \frac{C}{2\tau c_\delta} W_2(\bar{\rho}, \bar{\rho}_\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ceci implique que  $\rho_{m,\delta}$  converge vers  $\rho_m$  lorsque  $\delta$  tend vers 0, et on obtient l'inégalité souhaitée pour  $\rho_m$  à la limite.

*Remarques sur le plan de transport optimal entre  $\rho_\tau^n$  et  $\rho_\tau^{n-1}$ .*

Remarquons tout d'abord que la masse transportée sur la porte n'en bouge plus. Plus précisément, si l'on note  $\gamma_\tau^n$  un plan de transport optimal entre  $\rho_\tau^n$  et  $\rho_\tau^{n-1}$ , alors pour tout

$(x, y) \in \text{supp } \gamma_\tau^n$  tels que  $y \in \Gamma_{out}$  on a  $y = x$ . Cela signifie que toute la masse qui était déjà sur la porte pour  $\rho_\tau^{n-1}$  ne bouge plus. Cette propriété se démontre en considérant l'application :  $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \rightarrow \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$  définie par

$$F(x, y) = \begin{cases} (y, y) & \text{si } y \in \Gamma_{out} \\ (x, y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La mesure  $F_\# \gamma_\tau^n$  est un plan de transport entre une nouvelle mesure  $\rho$  et  $\rho_\tau^n$ , qui réduit le coût de transport ainsi que la valeur de la fonctionnelle  $J$ , étant donné que  $D$  est constante et minimale sur la porte. De plus,  $\rho$  est obtenue à partir de  $\rho_\tau^n$  en bougeant de la masse uniquement sur  $\Gamma_{out}$ , donc  $\rho$  est admissible. On a donc contradiction avec l'optimalité de  $\rho_\tau^n$ , excepté dans le cas  $F_\# \gamma_\tau^n = \gamma_\tau^n$ , c'est-à-dire dans le cas où la masse n'a pas bougé sur la porte.

Cette propriété permet de montrer l'unicité du plan de transport optimal  $\gamma_\tau^n$ . En effet, en considérant le transport inverse entre  $\rho_\tau^{n-1}$  et  $\rho_\tau^n$ , on peut décomposer le problème en une partie fixe sur  $\Gamma_{out}$ , et correspondant à  $\rho_\tau^{n-1} \mathbf{1}_{\Gamma_{out}}$ , et le reste qui est un transport d'une densité absolument continue  $\rho_\tau^{n-1} \mathbf{1}_\Omega$ .

On peut ainsi définir les vitesses discrètes  $\mathbf{v}_\tau^n$  sur  $\Omega$  comme en 2.13, où l'on note  $\mathbf{t}_\tau^n$  le transport optimal entre  $\rho_\tau^n$  et  $\rho_\tau^{n-1}$ , bien défini sur  $\Omega$ . De même,  $\mathbf{E}_\tau^n = \rho_\tau^n \mathbf{v}_\tau^n$  est bien défini sur  $\Omega$ .

*Lemme 2.2.16.*

La solution du problème de minimisation

$$\rho_\tau^n \in \operatorname{argmin}_{\rho \in K} \left\{ \int_\Omega D(x) d\rho(x) + \frac{1}{\tau} \int_\Omega \bar{\varphi}(x) d\rho(x) \right\}$$

n'est plus nécessairement la même dans le cas général, étant donné qu'il n'y pas de contrainte de densité maximale sur  $\Gamma_{out}$ . On définit

$$l := \inf_{x \in \Gamma_{out}} F(x) \quad \text{et} \quad \Gamma_{min} = \{x \in \Gamma_{out} : F(x) = l\},$$

$$\text{où } F : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto D(x) + \frac{\bar{\varphi}(x)}{\tau}, \end{cases}$$

Si  $|[F < l]| \geq 1$ , la solution est la même que dans le cas sans porte. En revanche, si  $|F < l| < 1$ , il est moins coûteux de placer une partie de la masse sur  $\Gamma_{out}$ , ce qui donne comme solution

$$\begin{cases} \rho_\tau^n = 1 & \text{sur } [F < l], \\ \rho_\tau^n > 0 & \text{sur } \Gamma_{min}, \text{ avec } \rho_\tau^n(\Gamma_{min}) = 1 - |[F < l]|, \\ \rho_\tau^n \leq 1 & \text{sur } [F = l] \setminus \Gamma_{min}, \\ \rho_\tau^n = 0 & \text{sur } [F > l]. \end{cases}$$

Comme précédemment, la pression définie par

$$p_\tau^n(x) := (l - F(x))_+ = \left( l - D(x) - \frac{\bar{\varphi}(x)}{\tau} \right)_+$$

appartient bien à  $H_{\rho_\tau^n}^1$  et vérifie la décomposition

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_\tau^n + \nabla p_\tau^n.$$

*Remarques sur les interpolées continues.*

Les courbes  $\tilde{\rho}_\tau$  sont à nouveau définies par (2.24), et n'appartiennent donc plus nécessairement à l'ensemble  $K$ . On définit les mesures  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  de façon à ce que l'équation de transport soit toujours vérifiée. On peut écrire  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  sous la forme

$$\tilde{\mathbf{E}}_\tau(t, \cdot) = (\pi_{(n\tau-t)/\tau})_\# \left( \frac{x-y}{\tau} \cdot \gamma_\tau^n \right), \quad t \in ](n-1)\tau, n\tau],$$

avec  $\pi_s(x, y) = (1-s)x + sy$ .

Pour comparer  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  et  $\mathbf{E}_\tau$ , nous aurons besoin d'une troisième mesure vectorielle, notée  $\hat{\mathbf{E}}_\tau$ , et définie de la même façon que  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$ , en ignorant la partie sur  $\Gamma_{out}$  afin de faciliter la comparaison avec  $\mathbf{E}_\tau$  :

$$\hat{\mathbf{E}}_\tau(t, \cdot) = (\pi_{(n\tau-t)/\tau})_\# \left( \frac{x-y}{\tau} \cdot \gamma_\tau^n \mathbf{1}_\Omega \right), \quad t \in ](n-1)\tau, n\tau].$$

*Lemme 2.2.17.*

On a à présent l'égalité suivante

$$W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n) = \tau^2 \int_\Omega \rho_\tau^n |\mathbf{v}_\tau^n|^2 + \int_{\Gamma_{out} \times \Omega} |x-y|^2 d\gamma_\tau^n(x, y),$$

ce qui implique l'estimation

$$\int_\Omega \rho_\tau |\mathbf{v}_\tau|^2 \leq \frac{1}{\tau^2} W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n).$$

L'estimation (i) sur  $\mathbf{v}_\tau$ , ainsi que l'estimation (ii) sont donc toujours valables. Quant à l'estimation (iii), elle se démontre exactement de la même façon que dans le cas sans porte.

*Lemme 2.2.18.*

Le lemme n'est plus vrai dans le cas général, étant donné que la géodésique reliant  $\mu$  et  $\nu$  n'appartient plus nécessairement à  $K$ . Nous allons démontrer le lemme suivant, plus général.

**Lemme 2.2.23.** *Soient  $\mu, \nu \in K$ , et  $f \in H^1(\Omega)$  qui s'annule sur  $\Gamma_{out}$ . On a alors l'inégalité*

$$\int_\Omega f d(\mu - \nu) \leq \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} L(\mu, \nu),$$

où  $L(\mu, \nu)$  est la longueur du plus court chemin dans  $K$  reliant  $\mu$  et  $\nu$  (voir la propriété 2.2.20).

*Démonstration.* On se propose d'adapter la preuve du lemme 2.2.18. Soit  $\sigma_t$  une courbe de longueur minimale dans  $K$  reliant  $\mu$  et  $\nu$ , et soit  $\mathbf{w}_t$  un champ de vitesse tel que  $(\sigma_t, \mathbf{w}_t)$  vérifie l'équation de transport, et tel que  $\|\mathbf{w}_t\|_{L^2(\sigma_t)} = L(\mu, \nu)$ . Comme  $f$  s'annule sur  $\Gamma_{out}$ , la partie de  $\sigma_t \mathbf{w}_t$  sur  $\Gamma_{out}$  n'apparaît pas dans le calcul suivant

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d(\mu - \nu) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} f d\sigma_t \right) = \int_0^1 \int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{w}_t d\sigma_t dt \\ &\leq \left( \int_0^1 \int_{\Omega} |\nabla f|^2 d\sigma_t dt \right)^{1/2} \left( \int_0^1 \int_{\Omega} |\mathbf{w}_t|^2 d\sigma_t dt \right)^{1/2} \\ &\leq \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)} L(\mu, \nu), \end{aligned}$$

car  $\sigma_t \leq 1$  sur  $\Omega$ . □

### Généralisation de la preuve d'existence

*Etape 1 : Convergence de  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{E}}_\tau)$  et  $(\rho_\tau, \mathbf{E}_\tau)$ .*

La convergence de  $\rho_\tau$  et  $\tilde{\rho}_\tau$  vers une mesure admissible  $\rho$  ne pose pas de problème, car  $\rho_\tau$  appartient bien à  $K$  (même si ce n'est pas le cas pour  $\tilde{\rho}_\tau$ ). De plus, la contrainte de densité maximale sur  $\Omega$  implique que la partie absolument continue de  $\rho_\tau$  converge bien vers  $\rho \mathbf{1}_\Omega$ .

On peut également montrer comme dans le cas sans porte que  $\mathbf{E}_\tau$  et  $\hat{\mathbf{E}}_\tau$  convergent vers une même limite  $\mathbf{E}$ . Il reste donc à montrer que  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  et  $\hat{\mathbf{E}}_\tau$  ont la même limite, et pour cela, nous allons montrer que leur différence tend vers 0 :

$$\int_0^T \left( \int_{\bar{\Omega}} d \left| \tilde{\mathbf{E}}_\tau(t, \cdot) - \hat{\mathbf{E}}_\tau(t, \cdot) \right| \right) dt \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.$$

Il suffit d'estimer la différence sur  $\Gamma_{out}$ , c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \left( \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \frac{|x-y|}{\tau} \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \bar{\Omega}} d\gamma_\tau^n \right) dt = \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} |x-y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \bar{\Omega}} d\gamma_\tau^n.$$

Or on sait que la masse située en  $\Gamma_{out}$  ne se déplace plus, donc on a

$$|x-y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \bar{\Omega}} d\gamma_\tau^n = |x-y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \Omega} d\gamma_\tau^n.$$

De plus, la masse de  $\mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \Omega} d\gamma_\tau^n$  vaut exactement  $M_\tau^n := \rho_\tau^n(\Gamma_{out}) - \rho_\tau^{n-1}(\Gamma_{out})$ , et on peut l'estimer à l'aide du lemme suivant :

**Lemme 2.2.24.** *Soient  $\nu_1, \nu_2 \in K$  et  $M = |\nu_1(\Gamma_{out}) - \nu_2(\Gamma_{out})|$ . Alors il existe une constante  $C$ , dépendant de la géométrie de  $\Omega$  et de  $\Gamma_{out}$ , telle que :*

$$M \leq CW_2^{\frac{2}{3}}(\nu_1, \nu_2).$$

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $\nu_2(\Gamma_{out}) \geq \nu_1(\Gamma_{out})$ , et notons  $\gamma$  un plan de transport optimal entre  $\nu_1$  et  $\nu_2$ . On définit alors :  $\gamma' = \mathbf{1}_{\Omega \times \Gamma_{out}} \gamma$  : c'est une mesure de masse totale  $M'$  supérieure ou égale à la différence de masse entre  $\nu_1$  et  $\nu_2$ , c'est-à-dire  $M$ . On considère alors la projection  $\nu'$  de  $\gamma'$  par rapport à la première variable  $x$ . C'est une mesure de masse totale  $E'$ , absolument continue par rapport à  $\nu_1 \mathbf{1}_\Omega$ , et donc absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et de densité majorée par 1. On en déduit

$$\begin{aligned} W_2^2(\nu_1, \nu_2) &= \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |x - y|^2 d\gamma(x, y) \\ &\geq \int_{\Omega \times \Gamma_{out}} |x - y|^2 d\gamma'(x, y) \\ &\geq \int_{\Omega \times \Gamma_{out}} d(x, \Gamma_{out})^2 d\gamma'(x, y) \\ &= \int_{\Omega} d(x, \Gamma_{out})^2 d\nu'(x). \end{aligned}$$

Il suffit alors de minorer cette dernière intégrale. Notons  $d(x) = d(x, \Gamma_{out})$ . On sait qu'il existe une constante  $C$ , dépendant de la géométrie, telle que  $d$  vérifie  $|\{d \leq \ell\}| \leq C\ell$ . On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} d(x)^2 d\nu'(x) &= \int_{\ell=0}^{\infty} \nu'(\{d^2 > \ell\}) d\ell \\ &= \int_0^{\infty} (M' - \nu'(\{d \leq \sqrt{\ell}\})) d\ell \\ &\geq \int_0^{\infty} (M' - |\{d \leq \sqrt{\ell}\}|)_{+} d\ell \\ &\geq \int_0^{(M'/C)^2} M' - C\sqrt{\ell} d\ell \\ &= C(M')^3 \geq CM^3. \end{aligned}$$

□

On peut alors estimer la différence de masse entre  $\mathbf{E}_\tau$  et  $\hat{\mathbf{E}}_\tau$ , en utilisant le lemme précédent ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |x - y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \overline{\Omega}} d\gamma_\tau^n &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |x - y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \overline{\Omega}} d\gamma_\tau^n \\ &\leq \sum_{n=1}^{T/\tau} \left( \int_{\Gamma_{out} \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma_\tau^n \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Gamma_{out} \times \Omega} d\gamma_\tau^n \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.2.24, on a

$$\int_{\Gamma_{out} \times \Omega} d\gamma_\tau^n \leq CW_2^{\frac{2}{3}}(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n),$$

donc on en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |x - y| \mathbf{1}_{\Gamma_{out} \times \overline{\Omega}} d\gamma_\tau^n &\leq \sqrt{C} \sum_{n=1}^{T/\tau} W_2^{\frac{4}{3}}(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n) \\
&\leq \sqrt{C} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} W_2(\rho_\tau^{n-1}, \rho_\tau^n)^2 \right)^{\frac{2}{3}} \left( \sum_{n=1}^{T/\tau} 1 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \sqrt{C} (2\Phi(\rho^0)\tau)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{T}{\tau} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{d'après (2.26) p.35} \\
&= \text{cte } \tau^{\frac{1}{3}} \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

*Etape 2 : Existence de la vitesse limite.*

On prouve de la même manière que dans le cas sans porte que  $\mathbf{E}$  est absolument continu par rapport à la mesure  $\rho \mathbf{1}_\Omega$ , que l'on notera  $\rho_\Omega$ . Il existe donc un champ de vitesses  $\mathbf{u}$  tel que  $\mathbf{E} = \rho_\Omega \mathbf{u}$ . Avec les mêmes arguments, on montre que  $\mathbf{u}$  satisfait l'équation de transport, et que l'on a  $\mathbf{u} \in C_\rho$ , ainsi que la relation de complémentarité

$$\int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \forall q \in H_\rho^1.$$

*Etape 3 : La vitesse limite est la projection de la vitesse souhaitée.* Les premières estimations sont inchangées, étant donné que  $p_\tau$  s'annule sur  $\Gamma_{out}$ . Cependant, on doit utiliser le lemme 2.2.23 à la place du lemme 2.2.18 pour estimer

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{\Omega} p_\tau(t, x) (\rho_\tau(a, x) - \rho_\tau(t, x)) dx dt &\leq \int_a^b \|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} L(\rho_\tau(a, \cdot), \rho_\tau(t, \cdot)) dt \\
&\leq \left( \int_a^b \|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b L(\rho_\tau(a, \cdot), \rho_\tau(t, \cdot))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

La proposition 2.2.20 donne alors pour la limite quand  $\tau$  tend vers 0 :

$$\begin{aligned}
\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_{\Omega} p_\tau(t, x) (\rho_\tau(a, x) - \rho_\tau(t, x)) dx dt \\
\leq \frac{1}{b-a} \sqrt{\mu([a, b])} \left( \int_a^b L(\rho(a), \rho(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où  $\mu$  est la limite faible de  $\|\nabla p_\tau(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Comme à la limite, on a  $\rho \in K$ , on a également :

$$L(\rho(a), \rho(t)) \leq \int_a^t |\rho'|_{W_2}(s, \cdot) ds \leq \left( \int_a^t |\rho'|_{W_2}^2(s, \cdot) ds \right)^{1/2} (t-a)^{1/2} \leq C(b-a)^{1/2}.$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_a^b \int_{\Omega} p_{\tau}(t, x) (\rho_{\tau}(a, x) - \rho_{\tau}(t, x)) \, dx \, dt \\ \leq \frac{1}{b-a} \sqrt{\mu([a, b])} \left( \int_a^b C^2(b-a) \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ = C \sqrt{\mu([a, b])} \xrightarrow{b \rightarrow a} 0 \text{ pour presque tout } a, \end{aligned}$$

et on conclut la preuve comme dans le cas sans porte.

## 2.3 Cas d'une vitesse générale

Nous nous intéressons à présent au cas général où la vitesse n'est plus nécessairement donnée comme le gradient d'une fonction. Il n'est plus possible d'utiliser directement la théorie des flots-gradients dans l'espace de Wasserstein, mais nous allons nous servir des résultats précédents afin de montrer l'existence d'une solution.

### 2.3.1 Formulation sous forme d'une inclusion différentielle

Nous nous inspirons dans la suite de la méthode utilisée dans le cas microscopique. Ce dernier entre dans le cadre des processus de rafle, introduits par Moreau (voir [Mor77]). Le modèle qu'il considère consiste à étudier l'évolution d'un point  $q(t)$  soumis à rester en chaque instant  $t$  dans un ensemble  $K(t)$ , où la famille  $K(t)$  est une suite de convexes fermés d'un espace de Hilbert  $V$ . En considérant la trajectoire minimisant la vitesse  $\dot{q}$ , l'évolution du point  $q$  se fait alors suivant l'inclusion différentielle

$$\frac{dq}{dt} \in -N_{K(t)}(q), \quad (2.31)$$

où  $N_K(q)$  désigne le cône normal sortant de  $K$  en  $q$ , défini par

$$N_K(q) = \{v \in V, \exists \alpha > 0, q \in P_K(q + \alpha v)\}.$$

Sous des hypothèses de régularité pour la suite  $K(t)$ , il est possible de montrer l'existence d'une solution grâce à un algorithme dit de *catching-up*. Considérant un pas de temps  $\tau > 0$ , la position du point  $q^n$  à l'instant  $t^n$  est donnée comme la projection de la position à l'instant précédent  $q^{n-1}$  sur l'ensemble  $K(t^n)$ , c'est-à-dire

$$q^n = P_{K(t^n)}(q^{n-1}).$$

La projection sur l'ensemble convexe fermé  $K(t^n)$  étant bien définie et contractante, on peut montrer (voir [Mor77]) que la suite constante par morceaux valant  $q^n$  aux instant  $t^n$  converge vers une solution de (2.31).

Le modèle microscopique (voir la section 1.1.2) s'inscrit dans ce cadre, excepté que le domaine  $K$  y est fixé, et correspond aux configurations admissibles, tandis que le point

$\mathbf{q}$  représentant l'ensemble des personnes tend à se déplacer selon la vitesse souhaitée. L'évolution de la foule vérifie alors l'inclusion différentielle

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} + N_K(\mathbf{q}) \ni \mathbf{U}_{\mathbf{q}},$$

et le schéma discret s'écrit

$$\mathbf{q}^n = P_K(\mathbf{q}^{n-1} + \tau \mathbf{U}_{\mathbf{q}^{n-1}}).$$

L'existence d'une solution fait intervenir le caractère *prox-régulier* de l'ensemble  $K$  ( $K$  n'est pas convexe, mais la projection sur  $K$  est bien définie dans un voisinage de sa frontière) et utilise les travaux d'Edmond et Thibault (voir [ET05], [ET06]).

Dans le cas macroscopique, il est également possible de formuler l'évolution de la foule à l'aide d'une inclusion différentielle. Le cône normal sortant correspond ici au sous-différentiel de Fréchet (voir définition 2.2.2 p. 27) de l'indicatrice de l'ensemble  $K$ ,  $\partial I_K$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{v} \in N_K(\rho) \Leftrightarrow \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \cdot (\mathbf{t}(x) - x) d\rho(x) \leq o(\|\mathbf{t} - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)})$$

pour tout transport  $\mathbf{t}$  tel que  $\mathbf{t}_{\#}\rho$  appartienne à  $K$ . Le problème d'évolution se formule alors de la façon suivante :

$$\mathbf{u} + N_K(\rho) \ni \mathbf{U}.$$

Il est alors naturel d'utiliser à nouveau un schéma de type catching-up pour tenter de montrer l'existence d'une solution.

### 2.3.2 Description du schéma

Nous définissons à nouveau une suite de densités discrètes, non plus à l'aide du schéma JKO (voir 2.2.4), mais grâce au schéma de type catching-up suggéré plus haut.

**Définition 2.3.1** (Schéma de splitting). *Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $\rho_{\tau}^1, \dots, \rho_{\tau}^{n-1}$ . La densité  $\rho_{\tau}^n$  est alors donnée par*

$$\begin{cases} \hat{\rho}_{\tau}^n &= (\mathbf{id} + \tau \mathbf{U})_{\#} \rho_{\tau}^{n-1} & (\text{étape de prédiction}), \\ \rho_{\tau}^n &= P_K \hat{\rho}_{\tau}^n & (\text{étape de correction}). \end{cases} \quad (2.32)$$

Dans l'étape de correction, la projection sur l'ensemble des densités admissibles  $K$  est effectuée pour la distance de Wasserstein :

$$P_K \mu = \operatorname{argmin}_{\rho \in K} W_2(\mu, \rho).$$

**Remarque 2.3.2.** *Ce type de schéma est au coeur de l'étude théorique et numérique du modèle discret (voir la section 1.1.2), et il est donc naturel d'adopter la même démarche*

dans le cas macroscopique. Nous verrons toutefois que les deux approches diffèrent beaucoup dans l'analyse de ce schéma, en particulier en ce qui concerne l'étape de projection. En effet, l'ensemble des configurations admissibles dans le modèle microscopique est uniformément prox-régulier (voir [MV11, Ven08]), ce qui n'est plus le cas de l'ensemble  $K$  (voir [MRCSV11]).

Nous nous plaçons dans la suite de cette section dans le cadre des hypothèses suivantes :

**Hypothèses 2.3.3** (Vitesse générale, sans porte).

- (a)  $\Omega$  est un domaine convexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,
- (b)  $\mathbf{U} \in C^1$  vérifie  $(\mathbf{id} + \tau\mathbf{U})(\Omega) \subset \Omega$  pour  $\tau$  assez petit,
- (c)  $\rho^0$  est une densité initiale admissible,
- (d)  $\Gamma_{out} = \emptyset$ .

Sous ses conditions, nous allons montrer que l'étape de projection est bien définie. Remarquons tout d'abord que l'ensemble  $K$  est géodésiquement convexe. En effet, on a montré dans la preuve lemme 2.2.9 que la géodésique reliant deux densités de  $K$  est admissible pour tout temps. Malheureusement, la fonction  $W_2^2(\rho, \cdot)$  ne vérifie pas les propriétés de convexité nécessaires pour montrer directement l'existence et l'unicité de la projection sur cet ensemble (en réalité,  $W_2^2(\rho, \cdot)$  vérifie même une inégalité de concavité le long des géodésiques, voir [AGS05]).

Il est ainsi nécessaire d'utiliser à nouveau les géodésiques généralisées, comme au lemme 2.2.14 lors de la démonstration d'unicité pour le schéma JKO, pour montrer que la projection sur  $K$  est bien définie.

**Proposition 2.3.4** (Propriétés de la projection sur  $K$ ). *Pour tout  $\rho \in \mathcal{P}^a(\Omega)$ , la distance de Wasserstein à l'ensemble  $K$  est atteinte en un unique point  $P_K\rho$ . De plus, l'opérateur  $P_K : \mathcal{P}^a(\Omega) \rightarrow K$  est continu.*

*Démonstration.* L'existence et l'unicité de la projection sur  $K$  sont un cas particulier du point (i) démontré dans le lemme 2.2.9. En effet, on y a montré l'existence et l'unicité d'un minimiseur pour la fonctionnelle

$$\phi(\mu) = J(\mu) + I_K(\mu) + \frac{1}{2\tau}W_2^2(\rho, \mu),$$

donc le cas  $J = 0$  correspond exactement à l'existence et l'unicité de la projection sur  $K$ .

Montrons à présent que  $P_K$  est un opérateur continu. Soient  $\rho^1, \rho^2 \in \mathcal{P}^a(\Omega)$ , et  $\rho_t^1, \rho_t^2$  les deux géodésiques généralisées définies par

$$\begin{cases} \rho_t^1 &= \mathbf{r}_t^1 \# \rho^1 & \text{avec } \mathbf{r}_t^1 &= (1-t)\mathbf{t}_{\rho^1}^{P_K\rho^1} + t\mathbf{t}_{\rho^1}^{P_K\rho^2}, \\ \rho_t^2 &= \mathbf{r}_t^2 \# \rho^2 & \text{avec } \mathbf{r}_t^2 &= (1-t)\mathbf{t}_{\rho^2}^{P_K\rho^2} + t\mathbf{t}_{\rho^2}^{P_K\rho^1}, \end{cases}$$

où  $\mathbf{t}_{\mu}^{\nu}$  désigne le transport optimal de  $\mu$  à  $\nu$  (voir la figure 2.2).

Pour  $\mu$  fixé, la fonction  $\rho \mapsto \frac{1}{2}W_2^2(\mu, \rho)$  est 1-convexe le long des géodésiques généralisées (voir le lemme 9.2.1 p.206 de [AGS05]), donc on a les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} W_2^2(\rho^1, \rho_t^1) &\leq (1-t)W_2^2(\rho^1, P_K\rho^1) + tW_2^2(\rho^1, P_K\rho^2) - t(1-t)W_2^2(P_K\rho^1, P_K\rho^2), \\ W_2^2(\rho^2, \rho_t^2) &\leq (1-t)W_2^2(\rho^2, P_K\rho^2) + tW_2^2(\rho^2, P_K\rho^1) - t(1-t)W_2^2(P_K\rho^1, P_K\rho^2). \end{cases}$$

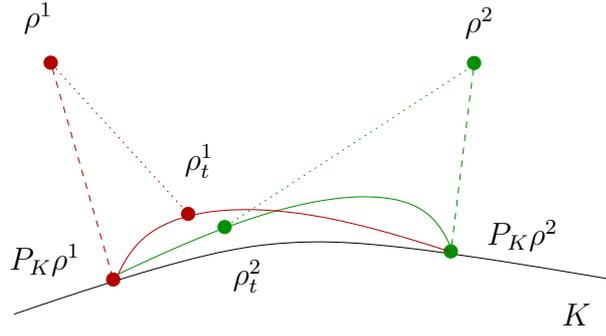


FIGURE 2.2 – Courbes interpolées.

De plus, toujours comme dans le lemme 2.2.9, on peut montrer que ces courbes appartiennent à  $K$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , donc on a  $W_2^2(\rho^i, P_K \rho^i) \leq W_2^2(\rho^i, \rho_t^i)$ , et en sommant les deux inégalités précédentes, on obtient

$$\begin{aligned} W_2^2(\rho^1, P_K \rho^1) + W_2^2(\rho^2, P_K \rho^2) &\leq W_2^2(\rho^1, \rho_t^1) + W_2^2(\rho^2, \rho_t^2) \\ &\leq (1-t)(W_2^2(\rho^1, P_K \rho^1) + W_2^2(\rho^2, P_K \rho^2)) \\ &\quad + t(W_2^2(\rho^1, P_K \rho^2) + W_2^2(\rho^2, P_K \rho^1)) \\ &\quad - 2t(1-t)W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2). \end{aligned}$$

En simplifiant les termes qui s'annulent, puis en divisant par  $t > 0$ , on a

$$2(1-t)W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2) \leq W_2^2(\rho^1, P_K \rho^2) + W_2^2(\rho^2, P_K \rho^1) - W_2^2(\rho^1, P_K \rho^1) - W_2^2(\rho^2, P_K \rho^2).$$

De plus, l'inégalité triangulaire donne

$$\begin{aligned} W_2^2(\rho^1, P_K \rho^2) &\leq (W_2(\rho^1, \rho^2) + W_2(\rho^2, P_K \rho^2))^2 \\ &\leq W_2^2(\rho^1, \rho^2) + W_2^2(\rho^2, P_K \rho^2) + 2W_2(\rho^1, \rho^2)W_2(\rho^2, P_K \rho^2), \end{aligned}$$

et de même

$$W_2^2(\rho^2, P_K \rho^1) \leq W_2^2(\rho^1, \rho^2) + W_2^2(\rho^1, P_K \rho^1) + 2W_2(\rho^1, \rho^2)W_2(\rho^1, P_K \rho^1).$$

En reportant dans l'inégalité précédente, on obtient

$$(1-t)W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2) \leq W_2^2(\rho^1, \rho^2) + W_2(\rho^1, \rho^2)(W_2(\rho^1, P_K \rho^1) + W_2(\rho^2, P_K \rho^2)),$$

et en faisant tendre  $t$  vers 0, on a

$$W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2) \leq W_2(\rho^1, \rho^2) (W_2(\rho^1, \rho^2) + (W_2(\rho^1, P_K \rho^1) + W_2(\rho^2, P_K \rho^2))).$$

Fixons la densité  $\rho^1$ , et faisons tendre  $\rho^2$  vers  $\rho^1$  pour la distance de Wasserstein. On a alors  $W_2(\rho^1, P_K \rho^1)$  fixé, et  $W_2(\rho^2, P_K \rho^2)$  borné par

$$W_2(\rho^2, P_K \rho^2) \leq W_2(\rho^2, P_K \rho^1) \leq W_2(\rho^2, \rho^1) + W_2(\rho^1, P_K \rho^1),$$

donc le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0, ce qui implique :

$$W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2) \xrightarrow{W_2(\rho^1, \rho^2) \rightarrow 0} 0,$$

et donc on a bien  $P_K$  continue sur  $\mathcal{P}^a(\Omega)$ .  $\square$

**Remarque 2.3.5.** En réalité, on a montré que  $P_K$  a un comportement höldérien dans un voisinage de  $K$ . En effet, pour tous  $\rho^1, \rho^2 \in \mathcal{P}^a(\Omega)$  tels que  $W_2(\rho^i, K) \leq C$ , avec  $C$  une constante fixée, on a montré l'inégalité :

$$W_2^2(P_K \rho^1, P_K \rho^2) \leq W_2^2(\rho^1, \rho^2) + 2CW_2(\rho^1, \rho^2),$$

donc  $P_K$  est  $\frac{1}{2}$ -höldérienne dans un voisinage de  $K$ .

### 2.3.3 Existence d'une solution pour une vitesse générale

Nous avons à nouveau besoin de définir des vitesses discrètes. Celles-ci doivent tenir compte des deux étapes du schéma de splitting 2.3.1. Pour cela, notons  $\mathbf{r}_\tau^n$  le transport optimal entre la densité projetée  $\rho_\tau^n$  et  $\hat{\rho}_\tau^n$ , et  $\mathbf{t}_\tau^n = (\mathbf{id} + \tau \mathbf{U})^{-1}$  (voir figure 2.3). Définissons alors les vitesses discrètes de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_\tau^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n \circ \mathbf{r}_\tau^n}{\tau}. \quad (2.33)$$

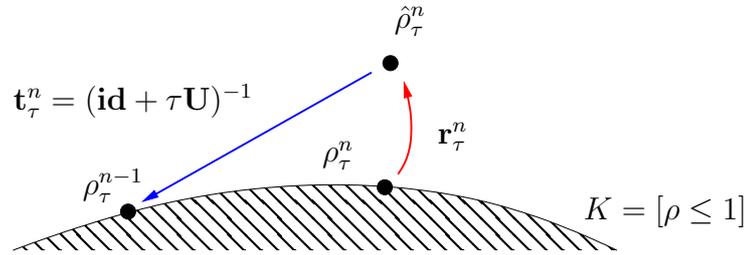


FIGURE 2.3 – Définition des transports discrets.

On note à nouveau  $\mathbf{E}_\tau^n = \rho_\tau^n \mathbf{v}_\tau^n$ , et on définit comme en 2.14 les interpolées constantes par morceaux

$$\begin{cases} \rho_\tau(t, \cdot) = \rho_\tau^n \\ \mathbf{v}_\tau(t, \cdot) = \mathbf{v}_\tau^n \\ \mathbf{E}_\tau(t, \cdot) = \mathbf{E}_\tau^n \end{cases} \quad \text{si } t \in ](n-1)\tau, n\tau].$$

Nous allons reprendre la même stratégie que dans la section précédente pour montrer le théorème suivant.

**Théorème 2.3.6** (Existence d'une solution pour une vitesse générale, dans le cas sans porte). *Le théorème 2.2.12 est encore vrai sous les hypothèses 2.3.3 précédentes.*

### Lemmes techniques

Le lemme 2.2.16 de décomposition de la vitesse souhaitée n'est plus valable, mais on peut montrer une décomposition approchée.

**Lemme 2.3.7** (Décomposition de la vitesse discrète). *La vitesse  $\mathbf{v}_\tau$  se décompose de la façon suivante :*

$$\mathbf{U} = \mathbf{v}_\tau^n + \nabla p_\tau^n + \varepsilon_\tau, \quad \text{avec } p_\tau^n \in H_{\rho_\tau}^1$$

où  $\varepsilon_\tau$  est une fonction qui converge uniformément vers 0 quand  $\tau$  tend vers 0.

*Démonstration.* Regardons tout d'abord l'étape de projection. On peut la considérer comme une étape du schéma JKO pour la fonctionnelle  $\Phi = I_K$  (qui correspondrait à une vitesse souhaitée nulle), et appliquer le lemme 2.2.16 à la "vitesse" donnée uniquement à l'aide du transport  $\mathbf{r}_\tau^n$  :

$$0 = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{r}_\tau^n}{\tau} + \nabla p_\tau^n \quad \text{avec } p_\tau^n \in H_{\rho_\tau}^1.$$

On a donc  $\mathbf{r}_\tau^n$  qui s'exprime

$$\mathbf{r}_\tau^n = \mathbf{id} + \tau \nabla p_\tau^n.$$

D'autre part, on sait que  $(\mathbf{t}_\tau^n)^{-1} = \mathbf{id} + \tau \mathbf{U}$ , donc comme  $\mathbf{U}$  est  $C^1$ , on a

$$\mathbf{t}_\tau^n = \mathbf{id} - \tau \mathbf{U} + \tau \varphi_\tau,$$

avec  $\varphi_\tau$  qui converge uniformément vers 0 quand  $\tau$  tend vers 0. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_\tau^n &= \frac{1}{\tau} (\mathbf{id} - (\mathbf{id} - \tau \mathbf{U} + \tau \varphi_\tau) \circ (\mathbf{id} + \tau \nabla p_\tau^n)) \\ &= \frac{1}{\tau} (\mathbf{id} - (\mathbf{id} + \tau \nabla p_\tau^n - \tau \mathbf{U} \circ (\mathbf{id} + \tau \nabla p_\tau^n) + \tau \varphi_\tau \circ (\mathbf{id} + \tau \nabla p_\tau^n))) \\ &= \frac{1}{\tau} (-\tau \nabla p_\tau^n + \tau \mathbf{U} - \tau \varepsilon_\tau) \\ &= -\nabla p_\tau^n + \mathbf{U} - \varepsilon_\tau, \end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_\tau$  qui converge uniformément vers 0 quand  $\tau$  tend vers 0. □

Il est à nouveau nécessaire de démontrer des estimations a priori sur les interpolées :

**Lemme 2.3.8** (Estimations a priori). *On a les estimations suivantes :*

- (i)  $\mathbf{v}_\tau$  est  $\tau$ -uniformément borné dans  $L^2((0, T), L_{\rho_\tau}^2(\Omega))$ .
- (ii)  $p_\tau$  est  $\tau$ -uniformément borné dans  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$ .
- (iii)  $\mathbf{E}_\tau$  est une mesure  $\tau$ -uniformément bornée.

*Démonstration.* (i) En utilisant l'inégalité  $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ , on obtient les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_\tau|^2 \rho_\tau &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_{\Omega} |\mathbf{v}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n \\ &= \sum_n \left( \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} dt \right) \left( \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n \circ \mathbf{r}_\tau^n|^2}{\tau^2} \rho_\tau^n \right) \\ &\leq \frac{2}{\tau} \sum_n \left( \int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{r}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n + \int_{\Omega} |\mathbf{r}_\tau^n - \mathbf{t}_\tau^n \circ \mathbf{r}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n \right). \end{aligned}$$

Or, comme  $\mathbf{r}_\tau^n$  est le transport optimal de  $\rho_\tau^n$  à  $\hat{\rho}_\tau^n$ , on a

$$\int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{r}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n = W_2^2(\hat{\rho}_\tau^n, \rho_\tau^n).$$

Comme  $\rho_\tau^n$  est la projection de  $\hat{\rho}_\tau^n$  sur  $K$ , et  $\rho_\tau^{n-1} \in K$ , on a de plus :

$$W_2^2(\hat{\rho}_\tau^n, \rho_\tau^n) \leq W_2^2(\hat{\rho}_\tau^n, \rho_\tau^{n-1}) \leq \int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n|^2 \hat{\rho}_\tau^n,$$

car  $\mathbf{t}_\tau^n$  est un transport de  $\hat{\rho}_\tau^n$  à  $\rho_\tau^{n-1}$ .

De plus, on a

$$\int_{\Omega} |\mathbf{r}_\tau^n - \mathbf{t}_\tau^n \circ \mathbf{r}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n = \int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n|^2 \hat{\rho}_\tau^n.$$

On en déduit

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_\tau|^2 \rho_\tau \leq \frac{4}{\tau} \sum_n \int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n|^2 \hat{\rho}_\tau^n.$$

Or on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\mathbf{id} - \mathbf{t}_\tau^n|^2 \hat{\rho}_\tau^n &= \int_{\Omega} |(\mathbf{t}_\tau^n)^{-1} - \mathbf{id}|^2 \rho_\tau^{n-1} \\ &= \int_{\Omega} |(\mathbf{id} + \tau \mathbf{U}) - \mathbf{id}|^2 \rho_\tau^{n-1} \\ &= \tau^2 \int_{\Omega} |\mathbf{U}|^2 \rho_\tau^{n-1} \\ &\leq \tau^2 \|\mathbf{U}\|_2^2. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_\tau|^2 \rho_\tau \leq \frac{4}{\tau} \sum_n \tau^2 \|\mathbf{U}\|_2^2 \tag{2.34}$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_\tau|^2 \rho_\tau \leq 4T \|\mathbf{U}\|_2^2,$$

ce qui donne bien la propriété (i).

(ii) D'après le lemme 2.3.7, on a, en utilisant l'inégalité  $|a + b + c|^2 \leq 3(|a|^2 + |b|^2 + |c|^2)$  :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla p_{\tau}|^2 \rho_{\tau} &= \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{U} - \mathbf{v}_{\tau} - \varepsilon_{\tau}|^2 \rho_{\tau} \\
&\leq 3 \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_{\tau}|^2 \rho_{\tau} + 3 \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{U}|^2 \rho_{\tau} + 3 \int_0^T \int_{\Omega} |\varepsilon_{\tau}|^2 \rho_{\tau} \\
&\leq 12T \|\mathbf{U}\|_2^2 + 3T \|\mathbf{U}\|_2^2 + 3 \int_0^T \int_{\Omega} C \rho_{\tau} \\
&\leq 15T \|\mathbf{U}\|_2^2 + 3TC.
\end{aligned}$$

En effet, comme  $\varepsilon_{\tau}$  converge uniformément vers 0, il existe  $C$  tel que pour  $\tau$  assez petit,  $|\varepsilon_{\tau}|^2 \leq C$ . De plus, on a  $p_{\tau} = 0$  là où  $\rho_{\tau} < 1$ , donc

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\nabla p_{\tau}|^2 \rho_{\tau} = \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla p_{\tau}|^2,$$

et la propriété (ii) est donc bien démontrée.

(iii) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{E}_{\tau}| &= \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_{\tau}| \rho_{\tau} \\
&\leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} |\mathbf{v}_{\tau}|^2 \rho_{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_{\Omega} \rho_{\tau} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \\
&\leq \sqrt{T} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\mathbf{v}_{\tau}|^2 \rho_{\tau} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2T \|\mathbf{U}\|_2 \quad \text{d'après (2.34),}
\end{aligned}$$

ce qui implique la propriété (iii).  $\square$

On souhaite à présent définir des interpolées continues. On ne peut plus utiliser les géodésiques entre les densités discrètes, car celles-ci ne prennent pas en compte le splitting et donc la vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$ . On choisit à la place de définir

$$\tilde{\rho}_{\tau}(t, \cdot) = \left( \frac{t - (n-1)\tau}{\tau} (\mathbf{id} - \mathbf{t}_{\tau}^n \circ \mathbf{r}_{\tau}^n) + \mathbf{t}_{\tau}^n \circ \mathbf{r}_{\tau}^n \right)_{\#} \rho_{\tau}^n \quad \text{si } t \in [(n-1)\tau, n\tau].$$

On note alors

$$\mathbf{T}_t^n = \frac{t - (n-1)\tau}{\tau} (\mathbf{id} - \mathbf{t}_{\tau}^n \circ \mathbf{r}_{\tau}^n) + \mathbf{t}_{\tau}^n \circ \mathbf{r}_{\tau}^n = (t - (n-1)\tau) \mathbf{v}_{\tau}^n + \mathbf{t}_{\tau}^n \circ \mathbf{r}_{\tau}^n,$$

et on définit la vitesse interpolée  $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau}$  de la façon suivante :

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\tau}(t, \cdot) = \mathbf{v}_{\tau}^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1} \quad \text{si } t \in [(n-1)\tau, n\tau].$$

Enfin, on définit  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  comme précédemment,

$$\tilde{\mathbf{E}}_\tau = \tilde{\rho}_\tau \tilde{\mathbf{v}}_\tau.$$

Dans le cas des géodésiques, il était évident que  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{v}}_\tau)$  étaient solutions de l'équation de transport. Il nous faut ici le démontrer.

**Lemme 2.3.9.** *Les interpolées continues  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{v}}_\tau)$  sont solutions de l'équation de transport*

$$\partial_t \tilde{\rho}_\tau + \nabla \cdot (\tilde{\rho}_\tau \tilde{\mathbf{v}}_\tau) = 0.$$

*Démonstration.* On considère une fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[ \times \Omega)$ . On a alors

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (\partial_t \varphi(t, x) + \nabla \varphi(t, x) \cdot \tilde{\mathbf{v}}_\tau(t, x)) \tilde{\rho}_\tau(t, x) dx \\ &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega (\partial_t \varphi(t, x) + \nabla \varphi(t, x) \cdot \mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}(x)) (\mathbf{T}_t^n)_\# \rho_\tau^n(x) dx \\ &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega (\partial_t \varphi(t, \mathbf{T}_t^n(x)) + \nabla \varphi(t, \mathbf{T}_t^n(x)) \cdot \mathbf{v}_\tau^n(x)) \rho_\tau^n(x) dx \\ &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega \frac{d}{dt} \varphi(t, \mathbf{T}_t^n(x)) \rho_\tau^n(x) dx \\ &= - \int_\Omega \varphi(0, x) \rho^0(x) dx. \end{aligned}$$

□

Nous pouvons alors montrer des estimations a priori sur les interpolées continues

**Lemme 2.3.10.** *La vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), L^2_{\tilde{\rho}_\tau}(\Omega))$ , et  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$  est une mesure  $\tau$ -uniformément bornée.*

*Démonstration.* On a, par définition de la vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |\tilde{\mathbf{v}}_\tau|^2 \tilde{\rho}_\tau &= \sum_{n=1}^{T/\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega |\mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}|^2 (\mathbf{T}_t^n)_\# \rho_\tau^n \\ &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_\Omega |\mathbf{v}_\tau^n|^2 \rho_\tau^n \\ &\leq 4T \|\mathbf{U}\|_2^2 \quad \text{d'après (2.34)}. \end{aligned}$$

On obtient bien la première propriété, et en appliquant la même méthode qu'au (iii) du lemme 2.3.8, on obtient l'estimation sur  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$ . □

### Démonstration du théorème d'existence

On reprend le même plan de démonstration que pour le théorème 2.2.12.

*Etape 1 : Convergence de  $(\rho_\tau, \mathbf{E}_\tau)$  et  $(\tilde{\rho}_\tau, \tilde{\mathbf{E}}_\tau)$  vers une même limite.*

Le raisonnement est le même pour la convergence de  $\rho_\tau$  et  $\tilde{\rho}_\tau$ . Cette fois, la vitesse  $\mathbf{v}_\tau$  n'est pas la vitesse géodésique, mais on a l'inégalité

$$\int_0^T |\tilde{\rho}'_\tau|_{W_2}^2(t) dt \leq \int_0^T \int_\Omega |\tilde{\mathbf{v}}_\tau|^2 \tilde{\rho}_\tau \leq 4T \|\mathbf{U}\|_2^2.$$

On a donc toujours une borne indépendante de  $\tau$  pour la dérivée métrique de  $\tilde{\rho}_\tau$ , ce qui implique la convergence uniforme de  $\tilde{\rho}_\tau$ , ainsi qu'une estimation sur les variations de  $\tilde{\rho}_\tau$  :

$$W_2(\tilde{\rho}_\tau(t, \cdot), \tilde{\rho}_\tau(t+h, \cdot)) \leq C\sqrt{h}.$$

Comme  $\rho_\tau$  est constante par morceaux sur les intervalles  $](n-1)\tau, n\tau]$ , on en déduit

$$W_2(\rho_\tau(t, \cdot), \tilde{\rho}_\tau(t, \cdot)) \leq C\sqrt{\tau},$$

et donc  $\rho_\tau$  et  $\tilde{\rho}_\tau$  convergent uniformément vers la même limite.

Pour la convergence de  $\mathbf{E}_\tau$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_\tau$ , on estime à nouveau la différence

$$\int_0^T \int_\Omega f(\tilde{\mathbf{E}}_\tau - \mathbf{E}_\tau).$$

Cette fois la vitesse est directement donnée par  $\tilde{\mathbf{v}}_\tau = \mathbf{v}_\tau^n \circ (\mathbf{T}_t^n)^{-1}$ , et l'estimation se fait exactement par la même méthode.

*Etape 2 : Existence de la vitesse limite.*

Grâce aux estimations a priori, le raisonnement est exactement le même.

*Etape 3 : Etude de la vitesse limite.*

La décomposition discrète est à présent de la forme :

$$\mathbf{E}_\tau = \rho_\tau(\mathbf{U} - \nabla p_\tau - \varepsilon_\tau) = \rho_\tau \mathbf{U} - \nabla p_\tau - \rho_\tau \varepsilon_\tau,$$

puisque  $p_\tau = 0$  dès que  $\rho_\tau < 1$ . La convergence de  $p_\tau$  vers  $p \in H_\rho^1$  est inchangée. De plus,  $\rho_\tau \varepsilon_\tau$  converge vers 0 quand  $\tau$  tend vers 0, donc on a bien à la limite la décomposition

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \nabla p,$$

ainsi que la relation de complémentarité, ce qui implique finalement :

$$\mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}.$$



# Chapitre 3

## Modèle à plusieurs populations dans le cas saturé

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>60</b>
<b>3.2</b>	<b>Existence d'une solution</b>	<b>62</b>
<b>3.3</b>	<b>Retour vers le modèle à une population</b>	<b>70</b>

---

Nous présentons dans ce chapitre comment étendre notre modèle dans le cas où plusieurs populations entrent en jeu, avec des objectifs et donc des vitesses souhaitées différentes. Nous traitons ici le cas où le domaine est entièrement saturé, situation qui peut modéliser par exemple l'évolution de milieux cellulaires. Nous verrons au chapitre 9 que le cas général est bien plus complexe.

### 3.1 Description du modèle

Nous nous intéressons ici au cas où plusieurs populations souhaitent se déplacer chacune selon une stratégie propre, et ont donc une vitesse souhaitée différente. Remarquons que cette situation ne pose pas de problème dans le contexte microscopique, étant donnée la nature lagrangienne de sa formulation. Dans le cas macroscopique, au contraire, il est beaucoup moins évident de suivre une personne donnée au sein de la foule, et donc de différencier plusieurs populations.

Nous nous intéressons dans la suite au cas particulier où ces populations saturent intégralement le domaine. Cette hypothèse n'a que peu de sens pour des mouvements de foule, mis à part certaines situations particulières de foules très denses. Cependant, ce modèle peut décrire dans ce cadre l'évolution de milieux cellulaires. L'article [DMMRC12] présente ainsi plusieurs exemples d'applications, comme la migration de cellules, où l'une des espèces est passive et a donc une vitesse souhaitée nulle.

Précisons les notations que nous allons employer : nous considérons deux populations, de densités respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et ayant pour vitesses souhaitées  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$ . Ces deux populations saturent intégralement le domaine  $\Omega$ , et la somme de leurs densités doit donc valoir en tout point la densité maximale 1 :

$$\rho_1 + \rho_2 = 1.$$

Quitte à renormaliser ces populations, nous pouvons donc définir l'ensemble des densités admissibles de la façon suivante.

**Définition 3.1.1** (Densités admissibles pour deux populations, cas saturé). *L'ensemble des densités admissibles est donné par*

$$K = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 : \rho_i \ll \mathcal{L}^d, \rho_1 + \rho_2 = 1 \text{ p.p.}\}. \quad (3.1)$$

Pour satisfaire la contrainte de congestion, il est nécessaire d'introduire une vitesse de correction commune  $\mathbf{w}$  qui assure que les populations évoluent à l'intérieur de  $K$ . On choisit cette vitesse de telle sorte qu'elle minimise la norme  $L^2$ . Le modèle peut alors se formaliser de la manière suivante.

**Définition 3.1.2** (Modèle multi-populations). *Les densités des populations 1 et 2 vérifient les équations d'évolution*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1(\mathbf{U}_1 + \mathbf{w})) = 0, \\ \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2(\mathbf{U}_2 + \mathbf{w})) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

où la vitesse de correction  $\mathbf{w}$  est donnée par le problème de point-selle : trouver  $(\mathbf{w}, p) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)$  solution de

$$\begin{cases} \mathbf{w} + \nabla p = 0, \\ \int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 \mathbf{U}_2 + \mathbf{w}) \cdot \nabla q = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{cases} \quad (3.3)$$

**Remarque 3.1.3.** *La généralisation à un nombre quelconque de populations est immédiate, et ne pose pas de problème supplémentaire.*

**Remarque 3.1.4.** *Nous présentons dans l'article [DMMRC12] une extension possible de ce modèle, en considérant une population passive, et l'autre ayant une vitesse souhaitée dépendant d'un chemoattractant lui-même émis par les cellules. Ce modèle de chimiotaxie s'écrit*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 (\mathbf{U}_1 + \mathbf{w})) = 0, \\ \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{w}) = 0, \\ \mathbf{U}_1 = \nabla S, \\ S - \Delta S = \rho, \end{cases}$$

avec la vitesse de correction  $\mathbf{w}$  donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{w} + \nabla p = 0, \\ \int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{U}_1 + \mathbf{w}) \cdot \nabla q = 0, \quad \forall q \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

En dimension 1, pour des conditions de flux nul au bord, nous retrouvons exactement le modèle de chimiotaxie à sensibilité logistique (voir [DP09, DS05]), qui s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho (1 - \rho) \partial_x S) = 0, \\ S - \partial_{xx} S = \rho. \end{cases}$$

Ces deux modèles diffèrent cependant en dimension supérieure.

Malgré sa formulation relativement simple, et proche du cas d'une seule population, ce modèle pose plusieurs problèmes. En particulier, l'ensemble des densités admissibles n'est plus géodésiquement convexe. En effet, prenons par exemple en dimension 1 :

$$\begin{cases} \rho_1^i = \mathbf{1}_{[-1,0]}, \\ \rho_2^i = \mathbf{1}_{[0,1]}, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_1^f = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}, \\ \rho_2^f = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}. \end{cases}$$

On a  $(\rho_1^i, \rho_2^i)$  et  $(\rho_1^f, \rho_2^f)$  admissibles, mais les géodésiques sont données par

$$\begin{cases} \rho_1^t(x) = \frac{\rho_1^i \left( \frac{x-t}{1+t} \right)}{1+t}, \\ \rho_2^t(x) = \frac{\rho_2^i \left( \frac{x+t}{1+t} \right)}{1+t}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \rho_1^t(x) = \frac{1}{1+t} \mathbf{1}_{[-1,t]}, \\ \rho_2^t(x) = \frac{1}{1+t} \mathbf{1}_{[-t,1]}, \end{cases}$$

et vérifient

$$\rho_1^t + \rho_2^t = \frac{2}{1+t} > 1 \quad \text{sur } [-t, t].$$

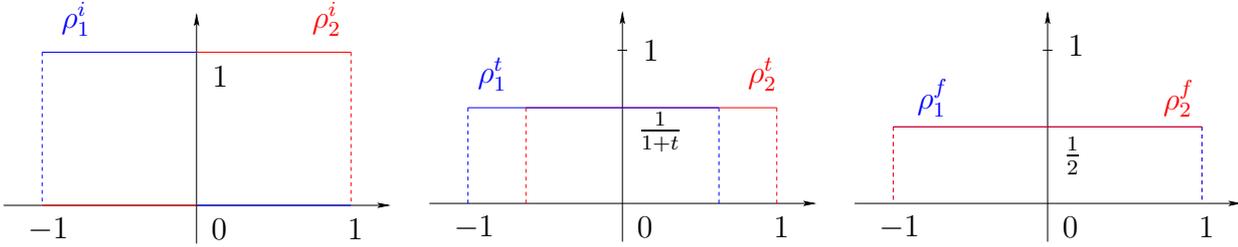


FIGURE 3.1 – Géodésiques entre densités admissibles.

## 3.2 Existence d'une solution

Le résultat d'existence établi au chapitre 2 se généralise dans le cas de plusieurs populations saturant le domaine, et sous les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 3.2.1** (Deux populations, cadre flot-gradient sans porte).

- (a)  $\Omega$  est un domaine convexe borné de  $\mathbb{R}^d$ ,
- (b)  $\mathbf{U}_i = -\nabla D_i$ , où  $D_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue  $\lambda$ -convexe,
- (c)  $(\rho_1^0, \rho_2^0)$  sont des densités initiales vérifiant  $\rho_1^0 + \rho_2^0 = 1$  p.p.,
- (d) le domaine ne possède pas de sortie :  $\Gamma_{out} = \emptyset$ .

Nous reprenons la même démarche qu'au chapitre 2, et définissons à nouveau deux suites de densités discrètes.

**Définition 3.2.2** (Schéma discret, cas de deux populations). Soit  $(\rho_1^0, \rho_2^0)$  des densités initiales admissibles, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $(\rho_{\tau,1}^1, \rho_{\tau,2}^1), \dots, (\rho_{\tau,1}^{n-1}, \rho_{\tau,2}^{n-1})$ . Les densités  $(\rho_{\tau,1}^n, \rho_{\tau,2}^n)$  sont alors données par

$$(\rho_{\tau,1}^n, \rho_{\tau,2}^n) := \underset{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2}{\operatorname{argmin}} \left\{ \Phi(\rho_1, \rho_2) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_1, \rho_{\tau,1}^{n-1}) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_2, \rho_{\tau,2}^{n-1}) \right\} \quad (3.4)$$

où la fonctionnelle  $\Phi$  est donnée par  $\Phi = J + I_K$ , avec

$$J(\rho_1, \rho_2) = \int_{\Omega} D_1 d\rho_1 + \int_{\Omega} D_2 d\rho_2.$$

Remarquons que ce schéma peut être interprété comme un schéma JKO dans l'espace  $\mathcal{P}_2(\Omega \times \Omega)$  pour la fonctionnelle

$$\int_{\Omega \times \Omega} (D_1(x) + D_2(y)) d\rho(x, y) + I_{\tilde{K}}(\rho),$$

où  $I_{\tilde{K}}$  est la fonction indicatrice de l'ensemble

$$\tilde{K} = \{ \rho \in \mathcal{P}_2(\Omega \times \Omega) : \rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \rho_i \ll \mathcal{L}^d, \rho_1 + \rho_2 = 1 \text{ p.p.} \}.$$

En effet, la distance de Wasserstein vérifie la propriété suivante :

**Lemme 3.2.3.** *Si  $\mu, \nu \in K$  sont telles que  $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2$  et  $\nu = \nu_1 \otimes \nu_2$ , on a*

$$W_2^2(\mu, \nu) = W_2^2(\mu_1, \nu_1) + W_2^2(\mu_2, \nu_2).$$

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{t}_1$  (resp.  $\mathbf{t}_2$ ) le transport optimal entre  $\mu_1$  et  $\nu_1$  (resp.  $\mu_2$  et  $\nu_2$ ). Alors  $\mathbf{t} := (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  est un transport de  $\mu$  à  $\nu$ , donc on a

$$\begin{aligned} W_2^2(\mu, \nu) &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega \times \Omega} (|x_1 - \mathbf{t}_1(x_1)|^2 + |x_2 - \mathbf{t}_2(x_2)|^2) \mu_1(x_1) \mu_2(x_2) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |x_1 - \mathbf{t}_1(x_1)|^2 \mu_1(x_1) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |x_2 - \mathbf{t}_2(x_2)|^2 \mu_2(x_2) \\ &\leq W_2^2(\mu_1, \nu_1) + W_2^2(\mu_2, \nu_2). \end{aligned}$$

Pour l'inégalité inverse, notons  $\varphi_1, \psi_1$  (resp.  $\varphi_2, \psi_2$ ) les potentiels de Kantorovich de  $\mu_1$  à  $\nu_1$  (resp.  $\mu_2$  à  $\nu_2$ ). Ils vérifient

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(x_1) + \psi_1(y_1) \leq \frac{1}{2}|x_1 - y_1|^2 \\ W_2^2(\mu_1, \nu_1) = \int_{\Omega} \varphi_1 \mu_1 + \int_{\Omega} \psi_1 \nu_1, \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_2(x_2) + \psi_2(y_2) \leq \frac{1}{2}|x_2 - y_2|^2 \\ W_2^2(\mu_2, \nu_2) = \int_{\Omega} \varphi_2 \mu_2 + \int_{\Omega} \psi_2 \nu_2. \end{array} \right.$$

On définit

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2), \\ \psi(y_1, y_2) = \psi_1(y_1) + \psi_2(y_2). \end{array} \right.$$

On a alors

$$\varphi(x_1, x_2) + \psi(y_1, y_2) \leq \frac{1}{2}|x_1 - y_1|^2 + \frac{1}{2}|x_2 - y_2|^2,$$

donc par définition duale de la distance de Wasserstein

$$\begin{aligned} W_2^2(\mu, \nu) &\geq \int_{\Omega \times \Omega} \varphi \mu_1 \mu_2 + \int_{\Omega \times \Omega} \psi \nu_1 \nu_2 \\ &\geq \int_{\Omega} \varphi_1 \mu_1 + \int_{\Omega} \psi_1 \nu_1 + \int_{\Omega} \varphi_2 \mu_2 + \int_{\Omega} \psi_2 \nu_2 \\ &\geq W_2^2(\mu_1, \nu_1) + W_2^2(\mu_2, \nu_2). \end{aligned}$$

On en déduit bien l'égalité annoncée. □

**Remarque 3.2.4.** *Les inégalités ci-dessus permettent également d'affirmer que si  $\mathbf{t}_1$  (resp.  $\mathbf{t}_2$ ) est un transport optimal de  $\mu_1$  à  $\nu_1$  (resp.  $\mu_2$  à  $\nu_2$ ), alors  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)$  est un transport optimal de  $\mu_1 \otimes \mu_2$  à  $\nu_1 \otimes \nu_2$ .*

Nous définissons également les vitesses discrètes

$$\mathbf{v}_{\tau,i}^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{t}_{\tau,i}^n}{\tau},$$

où  $\mathbf{t}_{\tau,i}^n$  est le transport optimal de  $\rho_{\tau,i}^n$  à  $\rho_{\tau,i}^{n-1}$  (définis en (3.4)), et nous notons  $\mathbf{E}_{\tau,i}^n = \rho_{\tau,i}^n \mathbf{v}_{\tau,i}^n$ . Comme précédemment, les interpolées constantes par morceaux de ces quantités sont définies par

$$\begin{cases} \rho_{\tau,i}(t, \cdot) = \rho_{\tau,i}^n \\ \mathbf{v}_{\tau,i}(t, \cdot) = \mathbf{v}_{\tau,i}^n \\ \mathbf{E}_{\tau,i}(t, \cdot) = \mathbf{E}_{\tau,i}^n \end{cases} \quad \text{si } t \in ](n-1)\tau, n\tau]. \quad (3.5)$$

Nous pouvons à présent énoncer le théorème d'existence de solution.

**Théorème 3.2.5** (Existence d'une solution pour deux populations, cas saturé et sans porte). *Sous le jeu d'hypothèses 3.2.1, il existe des familles de densités de probabilité  $(\rho_1(t, \cdot))_{t>0}$  et  $(\rho_2(t, \cdot))_{t>0}$  et une famille de champs de vitesses  $(\mathbf{w}(t, \cdot))_{t>0}$  tels que la famille  $(\rho_{\tau,i}(t, \cdot), \mathbf{E}_{\tau,i}(t, \cdot))$  définie en 3.5 converge étroitement vers  $(\rho_i(t, \cdot), \rho_i(t, \cdot) (\mathbf{U}_i + \mathbf{w}(t, \cdot)))$  pour presque tout  $t$ . De plus,  $(\rho_1, \rho_2, \mathbf{w})$  est solution du problème d'évolution présenté à la définition 3.1.2 :*

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 (\mathbf{U}_1 + \mathbf{w})) = 0, \\ \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2 (\mathbf{U}_2 + \mathbf{w})) = 0, \\ \mathbf{w} + \nabla p = 0, \\ \rho_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 \mathbf{U}_2 + \mathbf{w} = 0. \end{cases}$$

Nous reprenons la même stratégie de démonstration que dans le chapitre précédent.

## Résultats préliminaires

Commençons par montrer un lemme semblable au lemme 2.2.14.

**Lemme 3.2.6.** *Soient  $(\bar{\rho}_1, \bar{\rho}_2) \in K$ , et  $(\rho_{1,m}, \rho_{2,m})$  un minimiseur de la fonctionnelle*

$$\phi(\rho_1, \rho_2) = \Phi(\rho_1, \rho_2) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_1, \bar{\rho}_1) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_2, \bar{\rho}_2).$$

*Il existe alors des potentiels de Kantorovich  $\bar{\varphi}_i$  de  $\rho_{i,m}$  vers  $\bar{\rho}_i$  tels que pour toute densité de probabilité  $\rho_1$  vérifiant  $0 \leq \rho_1 \leq 1$  p.p. on ait*

$$\int_{\Omega} \left( D_1 - D_2 + \frac{1}{\tau} (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) \right) (\rho_1 - \rho_{1,m}) \geq 0,$$

et de façon symétrique, pour toute densité de probabilité  $\rho_2$  vérifiant  $0 \leq \rho_2 \leq 1$  p.p. on ait

$$\int_{\Omega} \left( D_2 - D_1 + \frac{1}{\tau}(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1) \right) (\rho_2 - \rho_{2,m}) \geq 0.$$

*Démonstration.* On se place dans le cas où  $\bar{\rho}_1 > 0$  p.p.,  $\bar{\rho}_2 > 0$  p.p. et où il existe un unique minimiseur de  $\phi$  (le cas général s'en déduit en appliquant la même méthode que dans la démonstration du lemme 2.2.14). Il existe alors un unique potentiel de Kantorovich  $\bar{\varphi}_i$  de  $\rho_{i,m}$  vers  $\bar{\rho}_i$  vérifiant  $\bar{\varphi}_i(x_0) = 0$  pour un point  $x_0$  fixé. On définit une petite perturbation de  $\rho_{1,m}$ . Soit  $\rho_1 \leq 1$  une densité de probabilité,  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , on pose

$$\rho_{1,\varepsilon} = \rho_{1,m} + \varepsilon(\rho_1 - \rho_{1,m}).$$

On a bien  $0 \leq \rho_{1,\varepsilon} \leq 1$ , et en notant  $\rho_2 = 1 - \rho_1$ , on a

$$\rho_{2,\varepsilon} = \rho_{2,m} + \varepsilon(\rho_2 - \rho_{2,m})$$

qui vérifie  $\rho_{1,\varepsilon} + \rho_{2,\varepsilon} = 1$  p.p., donc  $(\rho_{1,\varepsilon}, \rho_{2,\varepsilon}) \in K$ . Comme  $(\rho_{1,m}, \rho_{2,m})$  minimise  $\phi$ , on en déduit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} D_1 \rho_{1,m} + \int_{\Omega} D_2 \rho_{2,m} + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{1,m}, \bar{\rho}_1) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{2,m}, \bar{\rho}_2) \\ & \leq \int_{\Omega} D_1 \rho_{1,\varepsilon} + \int_{\Omega} D_2 \rho_{2,\varepsilon} + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{1,\varepsilon}, \bar{\rho}_1) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{2,\varepsilon}, \bar{\rho}_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

On a d'une part

$$\int_{\Omega} D_i \rho_{i,\varepsilon} - \int_{\Omega} D_i \rho_{i,m} = \varepsilon \int_{\Omega} D_i (\rho_i - \rho_{i,m}).$$

Il reste à estimer la deuxième partie de l'inégalité. Soient  $(\varphi_{i,\varepsilon}, \psi_{i,\varepsilon})$  des potentiels de Kantorovich de  $\bar{\rho}_i$  vers  $\rho_{i,\varepsilon}$ . On a

$$\begin{cases} \frac{1}{2} W_2^2(\rho_{i,\varepsilon}, \bar{\rho}_i) = \int_{\Omega} \varphi_{i,\varepsilon} \rho_{i,\varepsilon} + \int_{\Omega} \psi_{i,\varepsilon} \bar{\rho}_i \\ \frac{1}{2} W_2^2(\rho_{i,m}, \bar{\rho}_i) \geq \int_{\Omega} \varphi_{i,\varepsilon} \rho_{i,m} + \int_{\Omega} \psi_{i,\varepsilon} \bar{\rho}_i. \end{cases}$$

On a donc

$$\frac{1}{2} (W_2^2(\rho_{i,\varepsilon}, \bar{\rho}_i) - W_2^2(\rho_{i,m}, \bar{\rho}_i)) \leq \int_{\Omega} \varphi_{i,\varepsilon} (\rho_{i,\varepsilon} - \rho_{i,m}) = \varepsilon \int_{\Omega} \varphi_{i,\varepsilon} (\rho_i - \rho_{i,m}),$$

et on déduit de (3.6) l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} D_1 (\rho_1 - \rho_{1,m}) + \int_{\Omega} D_2 (\rho_2 - \rho_{2,m}) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \varphi_{1,\varepsilon} (\rho_1 - \rho_{1,m}) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \varphi_{2,\varepsilon} (\rho_2 - \rho_{2,m}) \geq 0.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,  $\varphi_{i,\varepsilon}$  converge vers  $\bar{\varphi}_i$ , et on obtient

$$\int_{\Omega} D_1 (\rho_1 - \rho_{1,m}) + \int_{\Omega} D_2 (\rho_2 - \rho_{2,m}) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_1 (\rho_1 - \rho_{1,m}) + \frac{1}{\tau} \int_{\Omega} \bar{\varphi}_2 (\rho_2 - \rho_{2,m}) \geq 0.$$

Or  $\rho_2 - \rho_{2,m} = 1 - \rho_1 - (1 - \rho_{1,m}) = \rho_{1,m} - \rho_1$ , donc on retrouve bien l'inégalité souhaitée.  $\square$

Les inégalités précédentes permettent d'obtenir des informations séparément sur  $\rho_{\tau,1}^n$  et  $\rho_{\tau,2}^n$ . On peut donc en déduire un équivalent du lemme 2.2.16.

**Lemme 3.2.7** (Décomposition des vitesses souhaitées). *Il existe  $p_\tau^n \in H^1$  tel que les vitesses souhaitées s'écrivent*

$$\begin{cases} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{v}_{\tau,1}^n + \nabla p_\tau^n, \\ \mathbf{U}_2 &= \mathbf{v}_{\tau,2}^n + \nabla p_\tau^n. \end{cases}$$

Remarquons que les deux décompositions font intervenir la même pression  $p_\tau^n$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 3.2.6, on sait qu'il existe des potentiels de Kantorovich  $\bar{\varphi}_i$  de  $\rho_{\tau,i}^n$  vers  $\rho_{\tau,i}^{n-1}$  tels que

$$\rho_{\tau,1}^n \in \operatorname{argmin}_{\rho_1 \in \mathcal{P}(\Omega), \rho_1 \leq 1} \left\{ \int_{\Omega} \left( D_1 - D_2 + \frac{1}{\tau} (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) \right) \rho \right\},$$

ce qui implique pour  $\rho_{\tau,1}^n$

$$\begin{cases} \rho_{\tau,1}^n = 1 & \text{sur } [F_1 < l_1] \\ \rho_{\tau,1}^n \leq 1 & \text{sur } [F_1 = l_1] \\ \rho_{\tau,1}^n = 0 & \text{sur } [F_1 > l_1], \end{cases} \quad \text{avec } F_1 = D_1 - D_2 + \frac{1}{\tau} (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2),$$

et  $l_1$  choisi tel que  $\rho_{\tau,1}^n$  soit de masse totale 1. On définit alors la pression discrète

$$p_{\tau,1}^n = (l_1 - F_1)_+ = \left( l_1 - (D_1 - D_2) - \frac{1}{\tau} (\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}_2) \right)_+$$

satisfaisant  $p_{\tau,1}^n \geq 0$  et  $p_{\tau,1}^n = 0$  sur  $[\rho_{\tau,1}^n < 1]$ . De plus, sur  $[\rho_{\tau,1}^n > 0]$  on a

$$\nabla p_{\tau,1}^n = -\nabla D_1 + \nabla D_2 - \frac{1}{\tau} (\nabla \bar{\varphi}_1 - \nabla \bar{\varphi}_2).$$

Comme les vitesses discrètes vérifient

$$\mathbf{v}_{\tau,i}^n = \frac{1}{\tau} (\mathbf{id} - \mathbf{t}_i^n) = \frac{1}{\tau} \nabla \bar{\varphi}_i,$$

on en déduit

$$\nabla p_{\tau,1}^n = \mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}^n - (\mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2}^n).$$

En échangeant les rôles de  $\rho_{\tau,1}^n$  et  $\rho_{\tau,2}^n$ , on trouve de même qu'il existe  $p_{\tau,2}^n \geq 0$ ,  $p_{\tau,2}^n = 0$  sur  $[\rho_{\tau,2}^n < 1]$ , telle que

$$\nabla p_{\tau,2}^n = \mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2}^n - (\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}^n).$$

On en déduit que  $\nabla(p_{\tau,1}^n + p_{\tau,2}^n) = 0$ . Or on a

$$\text{sur } [\rho_{\tau,1}^n < 1] : p_{\tau,1}^n = 0, \text{ donc } \nabla p_{\tau,1}^n = 0 \text{ et } \nabla p_{\tau,2}^n = 0,$$

$$\text{sur } [\rho_{\tau,2}^n < 1] : p_{\tau,2}^n = 0, \text{ donc } \nabla p_{\tau,2}^n = 0 \text{ et } \nabla p_{\tau,1}^n = 0.$$

On a de plus  $\rho_{\tau,1}^n + \rho_{\tau,2}^n = 1$  p.p., donc nécessairement en presque tout point, on a soit  $\rho_{\tau,1}^n < 1$ , soit  $\rho_{\tau,2}^n < 1$ , donc finalement  $\nabla p_{\tau,1}^n = \nabla p_{\tau,2}^n = 0$  p.p. sur  $\Omega$ , et on en déduit qu'il existe  $p_\tau^n \in H^1$  telle que

$$\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}^n = \mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2}^n = \nabla p_\tau^n.$$

□

On définit à nouveau les courbes  $\tilde{\rho}_{\tau,i}$  qui interpolent  $\rho_{\tau,i}^n$  le long des géodésiques :

$$\tilde{\rho}_{\tau,i}(t) = \left( \frac{t - (n-1)\tau}{\tau} (\mathbf{id} - \mathbf{t}_{\tau,i}^n) + \mathbf{t}_{\tau,i}^n \right)_{\#} \rho_{\tau,i}^n, \quad t \in [(n-1)\tau, n\tau[,$$

où  $\mathbf{t}_{\tau,i}^n$  est le transport optimal de  $\rho_{\tau,i}^n$  à  $\rho_{\tau,i}^{n-1}$ . La vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}$  est alors définie comme l'unique champ de vitesses appartenant à  $\text{Tan}_{\tilde{\rho}_{\tau,i}} \mathcal{P}_2(\Omega)$  et tel que  $(\tilde{\rho}_{\tau,i}, \tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i})$  vérifie l'équation de transport. On pose également  $\tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i} = \tilde{\rho}_{\tau,i} \tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}$ .

On démontre comme dans le cas d'une seule population des estimations a priori sur les interpolées constantes par morceaux ou continues.

**Lemme 3.2.8** (Estimations a priori).

(i)  $\mathbf{v}_{\tau,i}$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), L^2_{\rho_{i,\tau}}(\Omega))$ , et  $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), L^2_{\rho_{i,\tau}}(\Omega))$ .

(ii)  $p_\tau$  est  $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$ .

(iii)  $\mathbf{E}_{\tau,i}$  et  $\tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i}$  sont des mesures  $\tau$ -uniformément bornées.

*Démonstration.* (i) On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,i} |\mathbf{v}_{\tau,i}|^2 &= \sum_n \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} \int_{\Omega} \rho_{\tau,i} |\mathbf{v}_{\tau,i}|^2 \\ &= \sum_n \left( \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} dt \right) \left( \int_{\Omega} \rho_{\tau,i} \frac{|x - \mathbf{t}_{\tau,i}^n(x)|^2}{\tau^2} dx \right) \\ &= \sum_n \tau \frac{W_2^2(\rho_{\tau,i}^{n-1}, \rho_{\tau,i}^n)}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} \sum_n W_2^2(\rho_{\tau,i}^{n-1}, \rho_{\tau,i}^n). \end{aligned}$$

Or  $(\rho_{\tau,1}^n, \rho_{\tau,2}^n)$  est solution du problème de minimisation 3.2.2 p. 62. On a donc en particulier

$$\int_{\Omega} D_1 \rho_{\tau,1}^n + \int_{\Omega} D_2 \rho_{\tau,2}^n + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{\tau,1}^n, \rho_{\tau,1}^{n-1}) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_{\tau,2}^n, \rho_{\tau,2}^{n-1}) \leq \int_{\Omega} D_1 \rho_{\tau,1}^{n-1} + \int_{\Omega} D_2 \rho_{\tau,2}^{n-1},$$

ce qui implique

$$W_2^2(\rho_{\tau,1}^n, \rho_{\tau,1}^{n-1}) + W_2^2(\rho_{\tau,2}^n, \rho_{\tau,2}^{n-1}) \leq 2\tau \left( \int_{\Omega} D_1(\rho_{\tau,1}^{n-1} - \rho_{\tau,1}^n) + \int_{\Omega} D_2(\rho_{\tau,2}^{n-1} - \rho_{\tau,2}^n) \right).$$

En sommant, on obtient

$$\frac{1}{\tau} \sum_n (W_2^2(\rho_{\tau,1}^{n-1}, \rho_{\tau,1}^n) + W_2^2(\rho_{\tau,2}^{n-1}, \rho_{\tau,2}^n)) \leq 2 \left( \int_{\Omega} D_1 \rho_{\tau,1}^0 + \int_{\Omega} D_2 \rho_{\tau,2}^0 \right) = C,$$

et donc finalement

$$\int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,1} |\mathbf{v}_{\tau,1}|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,2} |\mathbf{v}_{\tau,2}|^2 \leq C,$$

ce qui implique bien le premier point de (i). Pour montrer la même estimation sur  $\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}$ , il suffit de remarquer que l'on a directement

$$\int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} |\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}|^2 = \frac{1}{\tau} \sum_n W_2^2(\rho_{\tau,i}^{n-1}, \rho_{\tau,i}^n),$$

et d'utiliser les estimations précédentes.

(ii) On a  $\nabla p_{\tau} = \mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1} = \mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2}$ . Comme on sait que  $\rho_{\tau,1} + \rho_{\tau,2} = 1$ , on a de plus  $\nabla p_{\tau} = (\rho_{\tau,1} + \rho_{\tau,2})(\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}) = \rho_{\tau,1}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}) + \rho_{\tau,2}(\mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2})$ . On en déduit, en utilisant à deux reprises l'inégalité  $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$  :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla p_{\tau}|^2 &= \int_0^T \int_{\Omega} |\rho_{\tau,1}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1}) + \rho_{\tau,2}(\mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2})|^2 \\ &\leq 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\rho_{\tau,1}(\mathbf{U}_1 - \mathbf{v}_{\tau,1})|^2 + 2 \int_0^T \int_{\Omega} |\rho_{\tau,2}(\mathbf{U}_2 - \mathbf{v}_{\tau,2})|^2 \\ &\leq 4 \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,1} |\mathbf{U}_1|^2 + 4 \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,1} |\mathbf{v}_{\tau,1}|^2 \\ &\quad + 4 \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,2} |\mathbf{U}_2|^2 + 4 \int_0^T \int_{\Omega} \rho_{\tau,2} |\mathbf{v}_{\tau,2}|^2, \quad \text{car } \rho_{\tau,i}^2 \leq \rho_{\tau,i} \\ &\leq 4C + 4 \int_0^T \int_{\Omega} (|\mathbf{U}_1|^2 + |\mathbf{U}_2|^2) \leq C', \end{aligned}$$

ce qui donne bien la propriété (ii).

(iii) On a

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i}| = \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} |\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}| \leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} |\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left( \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=1} \leq \int_0^T \left( \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} |\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant à nouveau Cauchy-Schwarz, ainsi que la borne obtenue au (i), on obtient finalement

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i}| \leq \sqrt{T} \left( \int_0^T \int_{\Omega} \tilde{\rho}_{\tau,i} |\tilde{\mathbf{v}}_{\tau,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{TC}.$$

On obtient de la même manière une borne sur  $\mathbf{E}_{\tau,i}$ .

□

### Démonstration du théorème d'existence

*Etape 1 : Convergence de  $(\tilde{\rho}_{\tau,i}, \tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i})$  et  $(\rho_{\tau,i}, \mathbf{E}_{\tau,i})$ .*

Grâce aux estimations a priori 3.2.8, on montre exactement de la même manière que  $(\tilde{\rho}_{\tau,i}, \tilde{\mathbf{E}}_{\tau,i})$  et  $(\rho_{\tau,i}, \mathbf{E}_{\tau,i})$  convergent vers une même limite  $(\rho_i, \mathbf{E}_i)$ .

*Etape 2 : Existence des vitesses limites.*

À nouveau, on montre avec les mêmes arguments que  $\mathbf{E}_i$  est absolument continue par rapport à  $\rho_i$ . Ainsi, il existe  $\mathbf{u}_i$  tel que  $\mathbf{E}_i = \rho_i \mathbf{u}_i$ . De plus,  $(\rho_i, \mathbf{u}_i)$  vérifie l'équation de transport, donc on a encore, pour  $t_0 \in ]0, T[$ ,  $h > 0$  et  $q \in H^1_+$

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}_i(t, x) \rho_i(t, x) dx = \int_{\Omega} (\rho_i(t_0 + h, x) - \rho_i(t_0, x)) q(x) dx.$$

En sommant les deux égalités, et en utilisant le fait que  $\rho_1 + \rho_2 = 1$ , on obtient

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot (\mathbf{u}_1(t, x) \rho_1(t, x) + \mathbf{u}_2(t, x) \rho_2(t, x)) dx = 0,$$

et en divisant par  $h > 0$ , puis en faisant tendre  $h$  vers 0, on a finalement

$$\int_{\Omega} \nabla q(x) \cdot (\mathbf{u}_1(t_0, x) \rho_1(t_0, x) + \mathbf{u}_2(t_0, x) \rho_2(t_0, x)) dx = 0. \quad (3.7)$$

*Etape 3 : Etude du système limite.*

Montrons que la décomposition discrète 3.2.7 passe à la limite. On a :

$$\mathbf{E}_{\tau,i} = \rho_{\tau,i} \mathbf{V}_{\tau,i} = \rho_{\tau,i} (\mathbf{U}_i - \nabla p_{\tau}),$$

avec  $p_{\tau}$   $\tau$ -uniformément bornée dans  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$ . On en déduit que  $p_{\tau}$  converge vers une limite  $p \in L^2((0, T), H^1(\Omega))$ . À la limite, on a donc finalement

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{U}_i - \nabla p,$$

et les équations de transport s'écrivent

$$\partial_t \rho_i + \nabla \cdot (\rho_i (\mathbf{U}_i - \nabla p)) = 0.$$

De plus, l'équation (3.7) implique

$$\int_{\Omega} \nabla q \cdot ((\mathbf{U}_1 - \nabla p) \rho_1 + (\mathbf{U}_2 - \nabla p) \rho_2) = 0,$$

soit, pour tout  $q \in H^1$

$$\int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 \mathbf{U}_2 - \nabla p) \cdot \nabla q = 0.$$

Le système d'évolution 3.1.2 est donc bien vérifié.

**Remarque 3.2.9** (Multi-populations). *Cette démonstration se généralise de façon immédiate au cas de  $N$  populations dont la somme des densités vaut 1 sur tout le domaine.*

**Remarque 3.2.10.** *Cette démonstration n'est possible que dans le cas saturé, pour lequel la densité  $\rho_2$  peut être obtenue facilement à partir de  $\rho_1$ . Nous verrons que dans le cas général (voir le chapitre 9) cette méthode ne peut être appliquée car il est difficile d'obtenir des résultats sur les deux densités séparément.*

### 3.3 Retour vers le modèle à une population

Remarquons que le cas saturé avec une deuxième population de vitesse souhaitée nulle semble très proche du cas à une population. Cependant, leur comportement est différent : la présence d'une deuxième espèce gêne la progression de la première, contrairement au cas d'une seule population, où celle-ci se déplace en quelque sorte dans le "vide". Nous illustrons ces différences sur deux exemples en dimension 1.

**Exemple 3.3.1** (Ralentissement). *Nous nous plaçons sur l'intervalle  $[-1, 1]$ , supposé fermé aux deux extrémités, et nous prenons une densité initiale  $\rho^0 = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}$ . Pour une vitesse souhaitée égale à 1, la densité à l'instant  $t$  est alors de la forme*

$$\rho(t, \cdot) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1+t, 1-t]} + \mathbf{1}_{[1-t, 1]}.$$

*Supposons à présent que l'on ajoute une deuxième espèce, de vitesse souhaitée nulle, et de densité initiale  $1 - \rho_1$ . La densité  $\rho_1$  vérifie alors*

$$\rho_1(t, \cdot) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1+\frac{t}{2}, 1-\frac{t}{2}]} + \mathbf{1}_{[1-\frac{t}{2}, 1]},$$

*c'est-à-dire que l'évolution est la même que dans le cas d'une seule population, mais a lieu deux fois plus lentement.*

**Exemple 3.3.2** (Zone de mélange). *Nous nous plaçons dans la même situation que précédemment, mais en prenant pour densité initiale  $\rho^0 = \mathbf{1}_{[-1,0]}$ . Dans le cas d'une seule population, l'évolution est la translation à vitesse souhaitée de  $\rho^0$  (voir la figure 3.2 en haut). En revanche, dans le cas où une deuxième espèce est présente, une zone de mélange se forme dès le début (voir la figure 3.2 en bas).*

Les deux modèles ont donc des comportements bien différents, du fait que la population immobile gêne celle qui souhaite se déplacer. Une idée pour approcher le modèle à une population consiste alors à faire tendre la "masse" de la deuxième population vers 0, au sens où l'on effectue une projection pour une norme  $L^2$  à poids, avec une pondération de la deuxième population tendant vers 0. Montrons que la limite formelle de ce système est proche de l'équation d'évolution donnée à la section 2.1 p.24.

Remarquons tout d'abord que le problème défini en 3.1.2 peut, dans le cas saturé, se réécrire de la façon suivante :

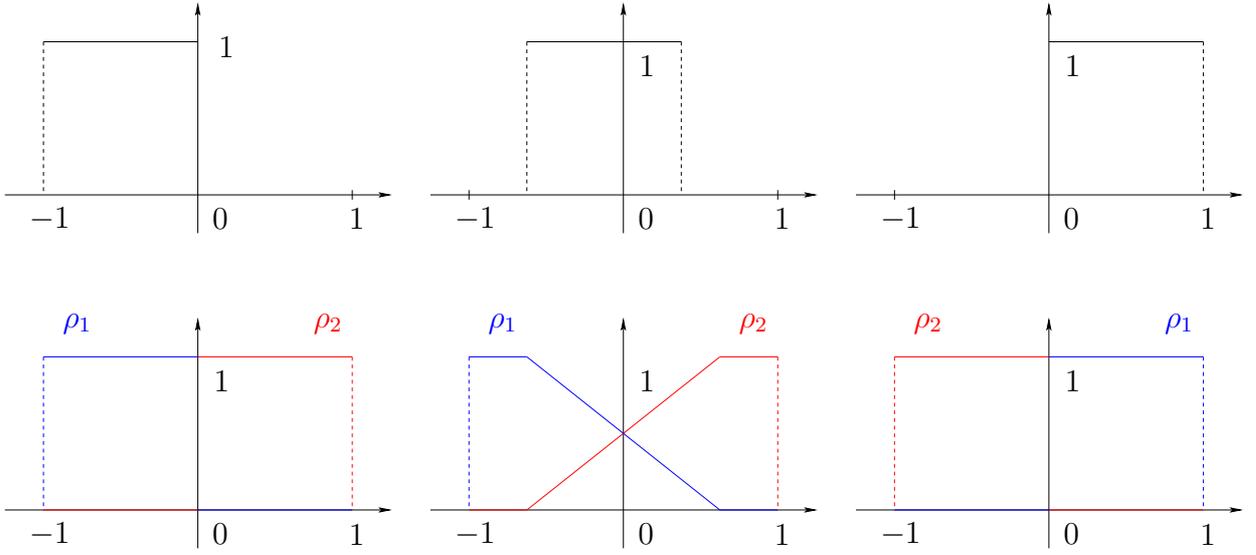


FIGURE 3.2 – Zone de mélange.

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1 \mathbf{u}_1) = 0, \\ \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2 \mathbf{u}_2) = 0, \end{cases}$$

avec les vitesses réelles  $\mathbf{u}_1$  et  $\mathbf{u}_2$  vérifiant

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \operatorname{argmin}_{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in C_{\rho_1, \rho_2}} \int_{\Omega} (|\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1|^2 \rho_1 + |\mathbf{U}_2 - \mathbf{u}_2|^2 \rho_2),$$

et où  $C_{\rho_1, \rho_2}$  est le cône des vitesses admissibles défini par

$$C_{\rho_1, \rho_2} = \left\{ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) : \int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{v}_1 + \rho_2 \mathbf{v}_2) \cdot \nabla q \leq 0, \quad \forall q \in H^1 \right\}.$$

Nous remplaçons alors la projection sur  $C_{\rho_1, \rho_2}$  par la projection à poids suivante :

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \operatorname{argmin}_{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in C_{\rho_1, \rho_2}} \int_{\Omega} (|\mathbf{U}_1 - \mathbf{u}_1|^2 \rho_1 + |\mathbf{U}_2 - \mathbf{u}_2|^2 \varepsilon \rho_2), \quad (3.8)$$

et nous faisons tendre  $\varepsilon$  vers 0.

La formulation variationnelle associée à cette projection revient à chercher  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, p) \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2 \times H^1$  tel que pour tout  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, q) \in L^2(\Omega)^2 \times L^2(\Omega)^2 \times H^1$  on ait

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \rho_1 (\mathbf{u}_1 + \nabla p) \cdot \mathbf{v}_1 + \int_{\Omega} \rho_2 (\varepsilon \mathbf{u}_2 + \nabla p) \cdot \mathbf{v}_2 = \int_{\Omega} \rho_1 \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \int_{\Omega} \rho_2 (\varepsilon \mathbf{U}_2) \cdot \mathbf{v}_2, \\ \int_{\Omega} \rho_1 \mathbf{u}_1 \cdot \nabla q + \int_{\Omega} \rho_2 \mathbf{u}_2 \cdot \nabla q = 0. \end{cases}$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 dans la première équation, on trouve

$$\int_{\Omega} \rho_1 (\mathbf{u}_1 + \nabla p) \cdot \mathbf{v}_1 + \int_{\Omega} \rho_2 \nabla p \cdot \mathbf{v}_2 = \int_{\Omega} \rho_1 \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{v}_1,$$

qui peut s'écrire

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 + \nabla p = \mathbf{U}_1 & \rho_1 - \text{presque partout,} \\ \nabla p = 0 & \rho_2 - \text{presque partout,} \end{cases}$$

et en utilisant le fait que dans le cas saturé  $\rho_1 + \rho_2 = 1$ , et donc que  $\rho_2$  est nulle uniquement sur la zone saturée pour  $\rho_1$ , on en déduit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_1 + \nabla p = \mathbf{U}_1 & \rho_1 - \text{p.p.}, \\ \nabla p = 0 & \text{sur } [\rho_1 < 1], \\ \int_{\Omega} \mathbf{u}_1 \cdot \nabla q = 0 & \forall q \in H^1, \text{ supp } q \subset [\rho_1 = 1]. \end{cases}$$

Nous retrouvons ainsi les équations du modèle à une population donné à la section 2.1 p.24. Cependant, bien que la pression  $p$  soit constante sur la zone non saturée, elle n'y est pas nécessairement nulle. De plus, elle peut prendre des valeurs distinctes sur les différentes composantes connexes de cette zone, et n'appartient donc pas nécessairement à l'ensemble des pressions  $H_1^p$  défini en 2.3. L'exemple suivant suggère tout de même que le problème limite est bien celui espéré.

**Exemple 3.3.3.** Nous prenons comme densités initiales  $\rho_1^0$  et  $\rho_2^0$  définies par

$$\rho_1^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } \rho_2^0 = 1 - \rho_1^0.$$

Nous considérons que la population 1 souhaite se diriger vers la droite et a pour vitesse souhaitée  $\mathbf{U}_1 = 1$ , tandis que la deuxième est passive et obéit donc à  $\mathbf{U}_2 = 0$ . La condition aux limites en  $x = M$  est de type mur La projection à poids donnée à l'équation (3.8) peut alors se résoudre explicitement. On obtient comme vitesse réelle pour la population 1 la vitesse

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1 - \rho_1}{\varepsilon \rho_1 + (1 - \rho_1)}.$$

L'équation de transport vérifiée par  $\rho_1$  s'écrit donc

$$\partial_t \rho_1 + \partial_x \left( \frac{\rho_1(1 - \rho_1)}{\varepsilon \rho_1 + (1 - \rho_1)} \right) = 0.$$

La solution entropique peut être calculée explicitement, elle vérifie

$$\rho_1(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < -\frac{t}{\varepsilon}, \\ \frac{1}{1 - \varepsilon} \left( 1 - \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - \frac{x}{t}(1 - \varepsilon)}} \right) & \text{si } x \in [-\frac{t}{\varepsilon}, t], \\ 0 & \text{si } x > t. \end{cases}$$

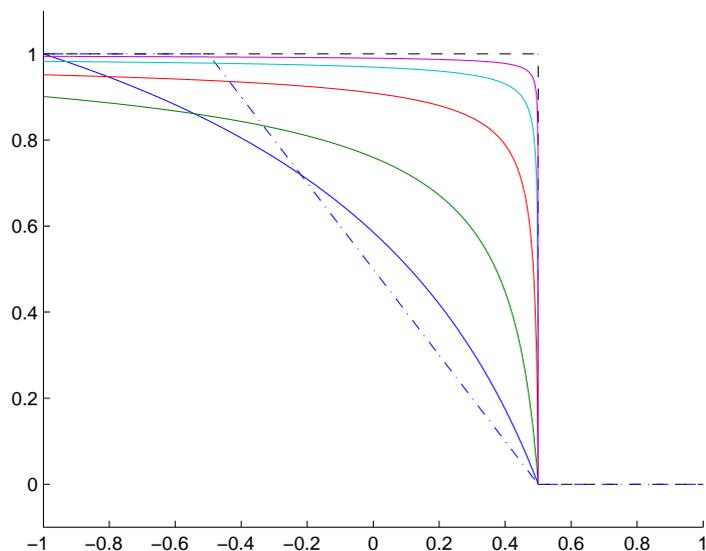


FIGURE 3.3 – Convergence du modèle à poids vers le modèle à une population. En pointillé simple, la solution du modèle à une population au temps  $t = 0.5$ , en pointillé double, celle du modèle à deux espèces, et en trait plein, les valeurs des solutions pour  $\varepsilon = 0.5, 0.1, 0.01, 0.001$  et  $0.0001$ .

Cette solution converge bien vers la translatée à vitesse 1 de la solution initiale, comme illustré sur la figure 3.3.

On constate que la population 1 passe de plus en plus facilement “à travers” la population passive. La vitesse réelle de cette dernière est donnée par

$$\mathbf{u}_1 = -\frac{\rho_1}{\varepsilon\rho_1 + (1 - \rho_1)},$$

qui tend vers  $-\infty$  lorsque  $\rho_1$  s’approche de 1 et  $\varepsilon$  tend vers 0 : la population passive est envoyée de plus en plus rapidement vers  $-\infty$  pour laisser la population 1 avancer à sa vitesse souhaitée.

**Remarque 3.3.4.** Une application possible de cette constatation serait de résoudre numériquement le problème à deux populations (voir [DMMRC12]) pour des  $\varepsilon$  petits afin d’approcher les solutions du modèle à une population.

Remarquons que nous avons à l’inverse utilisé notre modèle dans le cas d’une population pour reprendre un cas test réalisé dans [DMMRC12] sur le phénomène de chimiotaxie. Les résultats numériques, présentés à la section 9.3 p.159, sont très ressemblants à ceux obtenus pour deux populations par Dambrine dans [DMMRC12].



Deuxième partie  
Etude numérique



# Chapitre 4

## Premiers schémas envisagés

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Utilisation du schéma JKO</b>	<b>78</b>
4.1.1	Description de l'algorithme	78
4.1.2	Cas de la dimension 1	80
4.1.3	Cas de la dimension 2	87
<b>4.2</b>	<b>Algorithme inspiré du modèle microscopique</b>	<b>89</b>
4.2.1	Cas de la dimension 1	89
4.2.2	Généralisation en dimension 2	92

---

Nous décrivons dans ce chapitre deux schémas numériques qui ont été envisagés dans un premier temps, puis abandonnés au profit de l'algorithme décrit au chapitre 5. Tout d'abord nous nous intéressons au schéma JKO qui intervient naturellement dans la formulation flot-gradient du problème, et montrons que sa résolution numérique est bien trop coûteuse en dimension 2. Nous décrivons également une approche inspirée du modèle microscopique, qui s'avère raisonnable en dimension 1, mais inutilisable en dimension supérieure.

## 4.1 Utilisation du schéma JKO

Nous présentons ici les difficultés rencontrées pour utiliser numériquement le schéma discret JKO. En particulier, nous verrons que ce schéma fait intervenir un problème de minimisation contenant un grand nombre d'inconnues et de contraintes, ce qui implique des temps de calculs très longs en dimension 2.

### 4.1.1 Description de l'algorithme

Rappelons tout d'abord l'expression du schéma JKO, donné à la définition 2.2.4.

**Définition 4.1.1** (Schéma JKO). *Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $\rho_\tau^1, \dots, \rho_\tau^{n-1}$ . La densité  $\rho_\tau^n$  est alors donnée par*

$$\rho_\tau^n = \underset{\rho \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)}{\operatorname{argmin}} \left\{ \Phi(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\rho_\tau^{n-1}, \rho) \right\}. \quad (4.1)$$

Remarquons que cette expression fait intervenir la distance de Wasserstein, qui est elle-même définie grâce à un problème de minimisation. Il convient donc de reformuler le schéma précédent de façon à obtenir un seul problème de minimisation. Ceci peut se faire en utilisant les plans de transport entre densités (voir annexe A).

**Proposition 4.1.2.** *Soit  $\bar{\rho}$  une densité admissible fixée. On a équivalence entre les deux problèmes suivants*

$$\begin{aligned} \rho_m &= \underset{\rho \in K}{\operatorname{argmin}} \left\{ J(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\bar{\rho}, \rho) \right\} & (4.2) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_m \in \underset{\substack{\pi_{\#}^1 \gamma = \bar{\rho} \\ \pi_{\#}^2 \gamma \in K}}{\operatorname{argmin}} \left\{ J(\pi_{\#}^2 \gamma) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma(x, y) \right\}, \\ \rho_m = \pi_{\#}^2 \gamma_m, \end{cases} & (4.3) \end{aligned}$$

où  $\pi^k$  représente la projection par rapport à la  $k^{\text{ième}}$  variable.

*Démonstration.* Soit  $(\gamma_m, \rho_m)$  une solution de (4.3). Supposons que  $\rho_m$  ne soit pas solution de (4.2), il existerait alors  $\rho \in K$  tel que

$$J(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\bar{\rho}, \rho) < J(\rho_m) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\bar{\rho}, \rho_m). \quad (4.4)$$

Notons alors  $\gamma$  un plan de transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho$  : on a alors

$$W_2^2(\bar{\rho}, \rho) = \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma(x, y).$$

De plus, comme  $\gamma_m$  minimise le problème (4.3),  $\gamma_m$  est nécessairement un plan de transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho_m$ , donc on a également

$$W_2^2(\bar{\rho}, \rho_m) = \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma_m(x, y).$$

L'inégalité (4.4) donne donc

$$J(\rho) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma(x, y) < J(\rho_m) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma_m(x, y),$$

ce qui est absurde par minimalité de  $\gamma_m$ .

Réciproquement, soit  $\rho_m$  une solution de (4.2) et  $\gamma_m$  un plan de transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho_m$ . Supposons que  $(\gamma_m, \rho_m)$  ne soit pas solution de (4.3), il existe  $(\gamma, \rho)$  tels que

$$J(\pi_{\#}^2 \gamma) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma(x, y) < J(\pi_{\#}^2 \gamma_m) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma_m(x, y).$$

Or  $\gamma_m$  (resp.  $\gamma$ ) est un plan de transport optimal entre  $\bar{\rho}$  et  $\rho_m$  (resp.  $\rho$ ), donc l'inégalité précédente s'écrit

$$J(\rho) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\bar{\rho}, \rho) < J(\rho_m) + \frac{1}{2\tau} W_2^2(\bar{\rho}, \rho_m),$$

ce qui contredit la minimalité de  $\rho_m$ . □

Le schéma JKO peut donc se réécrire en terme de plans de transport.

**Définition 4.1.3** (Schéma JKO, version plans de transport). *Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $\rho_\tau^1, \dots, \rho_\tau^{n-1}$ . La densité  $\rho_\tau^n$  est alors donnée par :*

$$\begin{cases} \gamma_\tau^n \in \underset{\substack{\pi_{\#}^1 \gamma = \rho_\tau^{n-1} \\ \pi_{\#}^2 \gamma \in K}}{\operatorname{argmin}} \left\{ J(\pi_{\#}^2 \gamma) + \frac{1}{2\tau} \int_{\Omega \times \Omega} |x - y|^2 d\gamma(x, y) \right\}, \\ \rho_\tau^n = \pi_{\#}^2 \gamma_\tau^n. \end{cases} \quad (4.5)$$

Il est ensuite nécessaire de discrétiser ce schéma en espace, comme expliqué dans les sections suivantes.

### 4.1.2 Cas de la dimension 1

#### Présentation du schéma

Par souci de simplicité, nous nous plaçons sur l'intervalle  $I = [0, 1]$ , et nous considérons une subdivision de  $I$  en  $M$  intervalles de même longueur  $h = \frac{1}{M}$ , et de centres  $x_i = ih - \frac{h}{2}$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Notons  $\rho_i^n$  l'approximation de la densité au temps  $n\tau$  sur l'intervalle de centre  $x_i$ , et définissons les vecteurs  $\mathbf{x} = (x_i)_{i=1\dots M}$  et  $\boldsymbol{\rho}^n = (\rho_i^n)_{i=1\dots M}$ . Un plan de transport discret entre  $\boldsymbol{\rho}^{n-1}$  et  $\boldsymbol{\rho}^n$  est alors donné par une matrice  $(\gamma_{i,j}^n)_{i,j=1\dots M}$  de taille  $M$  vérifiant :

$$\begin{cases} \gamma_{i,j} \geq 0, \\ \sum_j \gamma_{i,j} = \rho_i^{n-1}, \quad \forall i = 1, \dots, M, \\ \sum_i \gamma_{i,j} = \rho_j^n, \quad \forall j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

À chaque itération, le problème de minimisation (4.5) peut être approché par le schéma suivant :

*Schéma JKO discretisé en dimension 1*

Soit  $\boldsymbol{\rho}^0$  un vecteur densité initial, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définis les vecteurs de densité  $\boldsymbol{\rho}^1, \dots, \boldsymbol{\rho}^{n-1}$ . La densité  $\boldsymbol{\rho}^n$  est alors donnée par

$$\begin{cases} \gamma^n \in \underset{\substack{\sum_j \gamma_{i,j} = \rho_i^{n-1} \\ \sum_i \gamma_{i,j} \leq 1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i,j=1}^M \left( D(x_j) + \frac{1}{2\tau} |x_i - x_j|^2 \right) \gamma_{i,j} \right\}, \\ \rho_j^n = \sum_i \gamma_{i,j}^n. \end{cases} \quad (4.6)$$

On obtient un problème de minimisation linéaire sous contrainte linéaire, pouvant se reformuler de la façon suivante :

$$X^n = \underset{X \in K^n}{\operatorname{argmin}} \langle F, X \rangle,$$

avec  $X^n$  et  $F$  les vecteurs de taille  $M^2$  définis par

$$X_{(j-1)M+i}^n = \gamma_{i,j}^n \quad \text{et} \quad F_{(j-1)M+i} = D(x_j) + \frac{1}{2\tau} |x_i - x_j|^2,$$

et l'espace des contraintes  $K^n$  donné par

$$X \in K^n \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0, \\ A_{eq} X = \boldsymbol{\rho}^{n-1}, \\ AX \leq 1, \end{cases}$$

où  $A_{eq}$  et  $A$  désignent respectivement les matrices de  $\mathcal{M}_{M,M^2}(\mathbb{R})$

$$A_{eq} = (I_M \dots I_M) \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ce type de problème peut se résoudre à l'aide de l'algorithme du simplexe, et le vecteur densité au temps  $n\tau$  s'obtient simplement par

$$\rho^n = AX^n.$$

**Remarque 4.1.4** (Sortie du domaine). *Ce schéma considère les bords de l'intervalle comme des murs. Il est cependant possible de traiter le cas de sortie libre en effectuant peu de modifications. L'idée est d'ajouter une case fictive supplémentaire au bord de l'intervalle, et de relâcher la contrainte de densité maximale sur cette case. On obtient alors un problème de minimisation de taille  $(M + 1)^2$ , que l'on résout exactement de la même manière que précédemment.*

### Quelques résultats numériques

Nous nous proposons de tester cet algorithme dans le cas où les gens souhaitent tous se diriger vers l'extrémité droite de l'intervalle, c'est-à-dire en prenant

$$D(x) = |1 - x|.$$

Remarquons que dans le cas d'une sortie libre à droite, la solution est exactement la translatée de la densité initiale à vitesse constante 1, ce qui ne présente que peu d'intérêt (en particulier, la contrainte de densité maximale n'est jamais atteinte).

Nous nous intéressons donc au cas où la sortie à droite est fermée. Les résultats présentés sur la figure 4.1 donnent l'évolution de la densité pour plusieurs densités initiales (de masse totale 0.4) et pour les valeurs numériques  $M = 50$  et  $\tau = 0.1$ . Le comportement des densités est là encore assez simple, puisque celles-ci sont translatées jusqu'au moment où elles touchent le bord de l'intervalle. À partir de cet instant, la masse est accumulée à la densité maximale 1 et ne bouge plus. Remarquons que la densité finale est toujours la même.

### Choix du pas de temps

Il est intéressant de remarquer que cet algorithme est adapté à des pas de temps assez longs. En effet, l'expression à minimiser comporte deux termes qui se font concurrence : la fonctionnelle d'insatisfaction, qui tend à déplacer la densité vers l'extrémité de l'intervalle, contrebalancée par la distance de Wasserstein, qui empêche la densité de trop s'éloigner de la densité précédente. Ainsi, si l'on choisit un pas de temps trop petit par rapport au pas d'espace, la partie Wasserstein l'emporte sur la fonctionnelle d'insatisfaction, et la

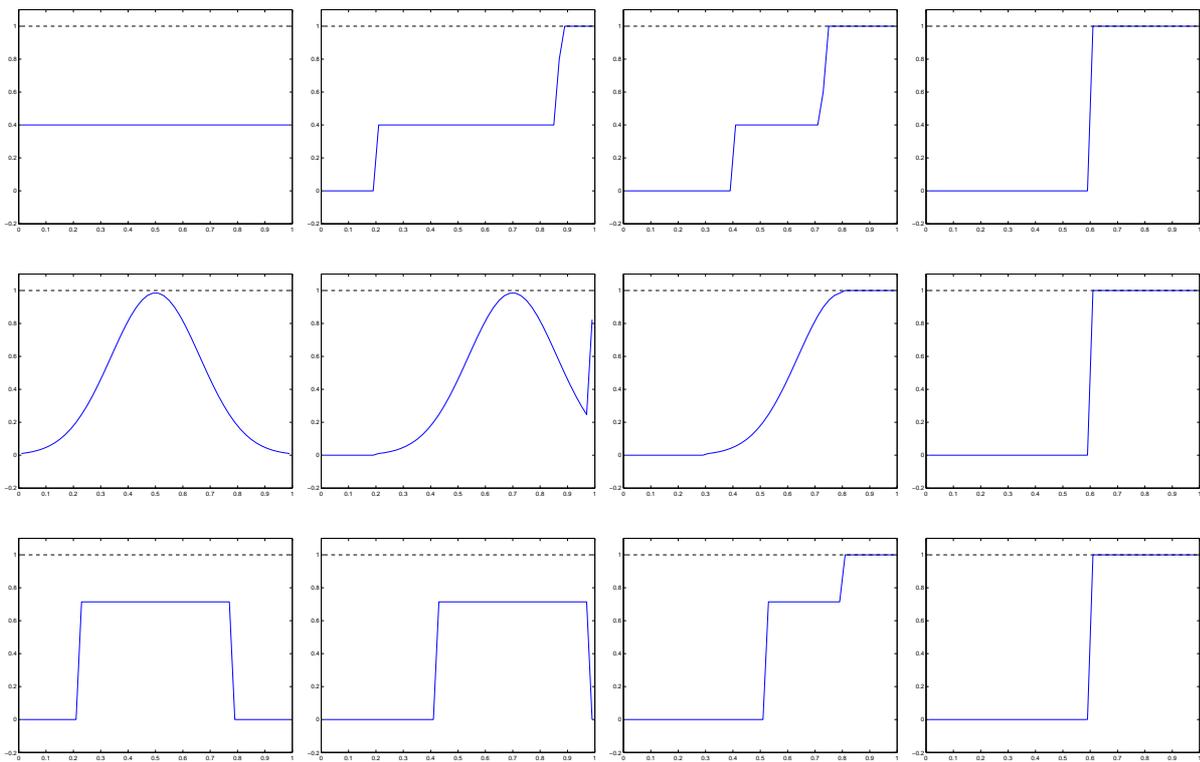


FIGURE 4.1 – Evolution de la densité pour une densité initiale constante, pour une gaussienne, puis pour une fonction en escalier.

densité n'est pas modifiée. On a donc une condition entre les pas de temps et d'espace qui, à l'inverse d'une condition de type CFL, impose un pas de temps grand par rapport au pas d'espace.

Plus précisément, il existe un pas de temps  $\tau_0(M)$  tel que le schéma (4.6) soit stationnaire pour tout pas de temps  $\tau$  vérifiant

$$\tau < \tau_0(M).$$

En effet, à chaque pas de temps, le problème de minimisation (4.6) s'écrit :

$$\gamma^n \in \underset{\substack{\sum_j \gamma_{i,j} = \rho_i^{n-1} \\ \sum_i \gamma_{i,j} \leq 1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left( D \left( \frac{2j-1}{2M} \right) + \frac{1}{2\tau M^2} |i-j|^2 \right) \gamma_{i,j} \right\},$$

Pour  $i$  fixé, notons

$$\alpha_i(x) = D \left( \frac{2x-1}{2M} \right) + \frac{1}{2\tau M^2} |i-x|^2.$$

La fonction  $\alpha_i$  atteint son minimum en

$$x_0 = i - \tau M D' \left( \frac{2x-1}{2M} \right),$$

donc pour  $\tau$  assez petit, plus précisément pour

$$\tau < \frac{1}{2M \|D'\|_\infty},$$

l'entier le plus proche de  $x_0$  est  $i$ . Le minimum du problème de minimisation s'obtient donc en prenant  $\gamma_{i,j}$  non nul uniquement pour  $i = j$ . La contrainte sur  $\gamma$  implique alors :

$$\gamma_{i,j}^n = \begin{cases} \rho_i^{n-1} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

c'est-à-dire  $\rho^n = \rho^{n-1}$  : le schéma est stationnaire.

Remarquons que dans le cas particulier étudié  $D(x) = |1-x|$ , la condition sur  $\tau$  s'exprime simplement en fonction du pas d'espace :

$$\tau < \frac{1}{2M},$$

et on obtient exactement la contrainte inverse de la condition CFL classique. Ce comportement peut être retrouvé numériquement : la figure 4.2 représente le pas de temps critique  $\tau_0$  en fonction de  $M$  pour une densité initiale en escalier.

Cette constatation a des implications importantes. En particulier, elle fait apparaître une quantification entre les pas de temps et d'espace, dont le rapport doit être entier pour que ce schéma donne des résultats raisonnables. On ne peut ainsi espérer un comportement consistant que dans le cas d'une asymptotique  $\frac{\tau}{h}$  tendant vers  $+\infty$ , ce qui impose de raffiner énormément le maillage pour pouvoir utiliser de petits pas de temps.

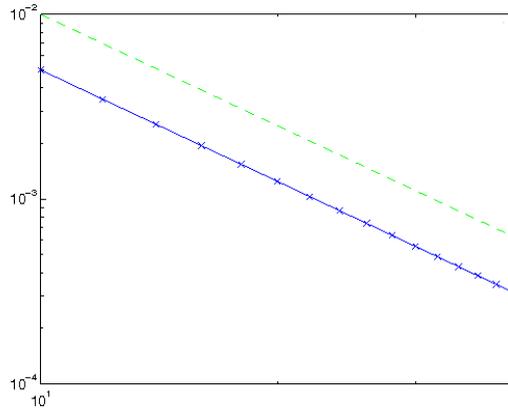


FIGURE 4.2 – Pas de temps critique  $\tau_0(M)$  en échelle logarithmique. La courbe de la fonction  $M \mapsto \frac{1}{M}$  est représentée en pointillés.

### Etude de l'erreur et du temps de calcul

Il est possible de résoudre explicitement le problème en dimension 1 pour une vitesse constante  $\mathbf{U} = U_0 \mathbf{e}_x$ , en utilisant la même méthode que dans l'exemple du cône convergent (voir la section 1.3.2). Comme expliqué à la remarque 4.1.4, la solution dans le cas avec porte est simplement la translatée de la densité initiale à vitesse  $\mathbf{U}$ . Nous nous plaçons donc dans le cas sans sortie, un peu moins rudimentaire. Considérons pour simplifier une densité initiale  $\rho^0$  strictement positive sur l'intervalle  $[0, 1]$ . La méthode des caractéristiques donne alors

$$\rho(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < U_0 t \\ \rho^0(x - U_0 t) & \text{si } x \in [U_0 t, b(t)[ \\ 1 & \text{si } x > b(t), \end{cases}$$

avec  $b(t)$  vérifiant la condition initiale  $b(0) = 1$  ainsi que l'équation différentielle

$$b'(t) = -U_0 \frac{\rho^0(b(t) - U_0 t)}{1 - \rho^0(b(t) - U_0 t)}.$$

Il est alors facile de calculer l'erreur à chaque pas de temps entre la solution donnée par le schéma JKO et la solution exacte.

Les tests pour une densité initiale de type gaussienne montrent que l'erreur est assez faible pour des pas de temps et d'espace vérifiant

$$\frac{\tau}{h} \in \mathbb{N},$$

alors qu'elle devient très importante, même en raffinant le maillage, pour

$$\frac{\tau}{h} \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}.$$

Ceci s'explique par l'étude effectuée précédemment sur le pas de temps : lorsque le rapport  $\frac{\tau}{h}$  appartient à  $\mathbb{N} + \frac{1}{2}$ , le déplacement par la fonctionnelle  $J$  est contrebalancé par le terme venant de la distance de Wasserstein, et l'on bascule d'un déplacement sur une case à un déplacement sur la case suivante.

Lorsque l'on se limite à un rapport  $\frac{\tau}{h}$  entier, l'erreur diminue bien avec le pas d'espace. La figure 4.3 montre l'évolution de l'erreur moyenne pour un pas de temps fixé  $\tau = 0.1$ , et pour un pas d'espace allant de 0.1 à 0.01.

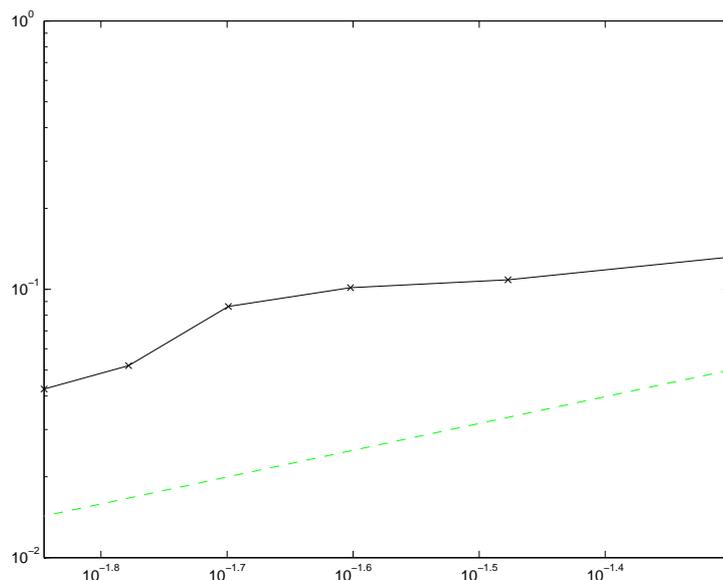


FIGURE 4.3 – Erreur moyenne en fonction du pas d'espace.

Outre cet inconvénient de quantification des pas de temps et d'espace, le gros problème posé par cet algorithme concerne le temps de calcul. En effet, le problème de minimisation sur les plans de transport fait intervenir un nombre de contraintes et d'inconnues conséquent, et est très coûteux à résoudre numériquement. En pratique, le temps de calcul pour une subdivision de 70 mailles monte déjà à plus de 10 minutes. Cette méthode paraît donc peu exploitable sur des cas plus compliqués, en particulier en dimension 2.

### Retour sur l'exemple du cône convergent

Il est intéressant de remarquer que le problème du cône convergent (voir 1.3.2) se ramène à un problème en dimension 1 sur l'intervalle  $[a, R]$ . En effet, la symétrie radiale permet d'exprimer toutes les quantités grâce à la variable  $r$ . La différence avec les calculs précédents vient du fait que toutes les intégrales étudiées font apparaître un poids  $f(r) = r$  : même dans le cas d'une sortie libre, il est possible de saturer la densité maximale.

Un calcul simple permet d'exprimer le schéma JKO discrétisé dans le cas du cône, en utilisant les mêmes notations que dans le cas de la dimension 1.

*Schéma JKO discretisé, cas du cône*

Soit  $\rho^0$  un vecteur densité initial, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définis les vecteurs de densité  $\rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ . La densité  $\rho^n$  est alors donnée par

$$\begin{cases} \gamma^n \in \underset{\substack{\sum_j x_j \gamma_{i,j} = \rho_i^{n-1} \\ \sum_i x_i \gamma_{i,j} \leq 1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i,j=1}^M \left( |x_j| + \frac{1}{2\tau} |x_i - x_j|^2 \right) x_i x_j \gamma_{i,j} \right\}, \\ \rho_j^n = \sum_i x_i \gamma_{i,j}^n. \end{cases} \quad (4.7)$$

Les résultats numériques sont à nouveau proches de la solution exacte pour des pas de temps et d'espace vérifiant  $\frac{\tau}{h} \in \mathbb{N}$ , mais très éloignés dans le cas  $\frac{\tau}{h} \in \mathbb{N} + \frac{1}{2}$ . La figure 4.4 montre l'évolution de la densité dans le cas avec sortie, pour  $\tau = 2h$ . La densité initiale est constante égale à 0.7, et le nombre de subdivisions est de 70.

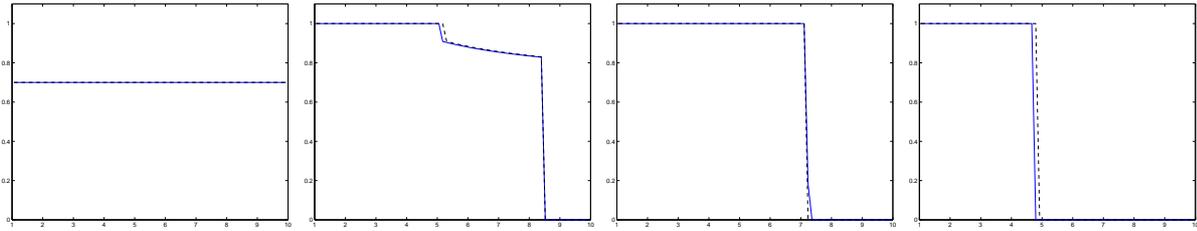


FIGURE 4.4 – Evolution de la densité dans le cas du cône, pour un pas de temps  $\tau = 2h$ .

Remarquons enfin que le schéma JKO se résout de façon explicite dans ce cas particulier (voir l'annexe B). L'interface entre la zone saturée et non saturée est donnée, pour un pas de temps  $\tau$ , par

$$(b_\tau^k)^2 - a^2 - \rho_0 (b_\tau^k + k\tau)^2 = (b_\tau^{k-1})^2 - r_e^2 - \rho_0 (b_\tau^{k-1} + (k-1)\tau)^2$$

si  $b_\tau^{k-1} < R - (k-1)\tau$ , et

$$(b_\tau^k)^2 - a^2 = (b_\tau^{k-1})^2 - r_e^2$$

si  $b_\tau^{k-1} \geq R - (k-1)\tau$ , où  $r_e$  désigne le rayon tel que les gens situés entre  $a$  et  $r_e$  au temps  $(k-1)\tau$  atteignent la sortie au temps  $k\tau$ . Ce rayon peut-être calculé comme le minimum d'une fonctionnelle impliquant une intégrale, donnée en B.

Ce résultat permet d'estimer un ordre de convergence en temps du schéma JKO sur ce cas particulier. La figure 4.5 donne l'erreur entre l'interface exacte et l'interface  $b_\tau$  au temps  $T = 1$ , pour  $\tau$  tendant vers 0, et suggère une convergence en temps d'ordre 1.

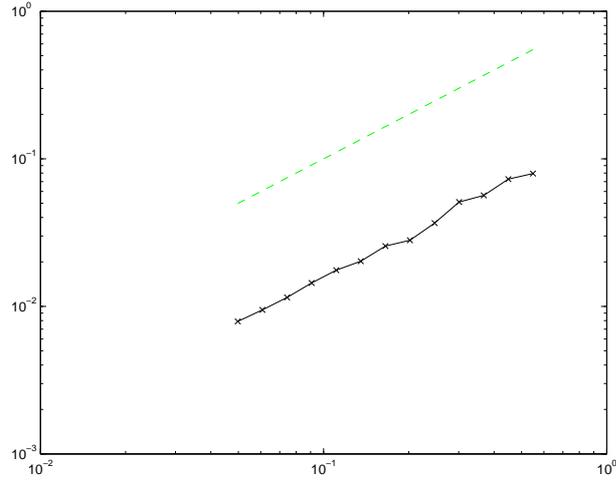


FIGURE 4.5 – Ordre de convergence en temps du schéma JKO : en trait plein, la courbe d'erreur  $\tau \mapsto |b(T) - b_\tau(T)|$ , et en pointillés, la courbe  $\tau \mapsto \tau$ .

### 4.1.3 Cas de la dimension 2

#### Algorithme et résultats numériques

Bien que les résultats soient peu encourageants en dimension 1, il est assez facile de généraliser la démarche en dimension supérieure. Nous nous plaçons sur  $\Omega = [0, 1]^2$ , et considérons un maillage cartésien constitué de  $M^2$  cases de centres  $x_{i,j}$ . Notons  $\rho_{i,j}^n$  la densité approchée au temps  $n\tau$  et au point  $x_{i,j}$ , et  $\rho^n$  la matrice des densités au temps  $n\tau$ . Le schéma JKO discrétisé en espace peut alors s'écrire de la façon suivante :

*Schéma JKO discrétisé en dimension 2*

Soit  $\rho^0$  une matrice de densités initiale, et  $\tau > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les matrices de densités  $\rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ . La matrice  $\rho^n$  est alors donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^n \in \underset{\substack{\sum_{k,l} \gamma_{i,j,k,l} = \rho_{i,j}^{n-1} \\ \sum_{i,j} \gamma_{i,j,k,l} \leq 1}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i,j,k,l=1}^M \left( D(x_{k,l}) + \frac{1}{2\tau} |x_{i,j} - x_{k,l}|^2 \right) \gamma_{i,j,k,l} \right\}, \\ \rho_{k,l}^n = \sum_{i,j} \gamma_{i,j,k,l}^n \end{array} \right. \quad (4.8)$$

On obtient à nouveau un problème de minimisation d'une fonctionnelle linéaire sous contrainte linéaire, que l'on peut résoudre grâce à l'algorithme du simplexe. La difficulté

vient du fait que le nombre de contraintes et d'inconnues est de l'ordre de  $M^4$ , ce qui limite énormément le raffinement possible du maillage.

La figure 4.6 présente l'évolution d'une densité initiale gaussienne pour deux choix de distances :  $D(x, y) = \|(x, y) - (2, 2)\|$  et  $D(x, y) = |x - 2|$ . Nous avons choisi un maillage  $10 \times 10$ , et le temps de calcul est déjà de plusieurs minutes !

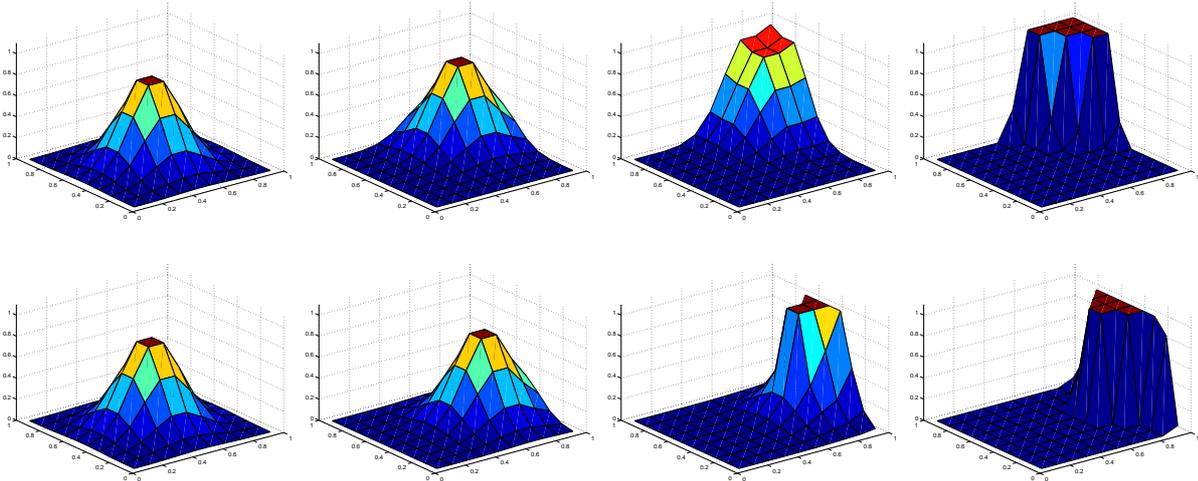


FIGURE 4.6 – Evolution de la densité, pour  $D(x, y) = \|(x, y) - (2, 2)\|$  (en haut) et pour  $D(x, y) = |x - 2|$  (en bas).

### Conclusions et améliorations envisageables

La résolution du problème de minimisation intervenant dans le schéma JKO nécessite des temps de calcul bien trop importants pour pouvoir être utilisable en pratique, en particulier en dimension 2.

Une première amélioration envisagée consisterait à considérer des plans de transport qui ne relieraient que des mailles proches, afin de réduire considérablement le nombre d'inconnues. Ce cas a été testé en dimension 1, en considérant uniquement des plans de transport reliant deux cases voisines. Sous la condition

$$\frac{h}{2} < \tau < \frac{h}{U_0},$$

cet algorithme fournit exactement les mêmes résultats que pour des plans de transport quelconques. Malheureusement, ce principe est beaucoup plus délicat à mettre en œuvre en dimension supérieure. Il est en effet très difficile de localiser les cellules qui vont recueillir la masse redistribuée, et considérer des plans de transport ne reliant que les cases voisines ajoute une contrainte bien trop forte sur le déplacement de la densité.

Une deuxième idée serait de reformuler le schéma JKO à l'aide des fonctions de répartition. En effet, le transport optimal entre deux densités  $\mu$  et  $\nu$  est donné en dimension 1 par

$$\mathbf{t}_\mu^\nu = F_\nu^{-1} \circ F_\mu$$

où  $F_\rho$  représente la fonction de répartition de  $\rho$ , à savoir

$$F_\rho(s) = \int_{-\infty}^s d\rho(x).$$

Cependant, il paraît difficile de généraliser ce type de résultat en dimension supérieure, même si certaines pistes sont envisageables, comme le suggèrent des travaux récents de Carrillo (voir [CM09]).

## 4.2 Algorithme inspiré du modèle microscopique

Nous présentons dans cette section un algorithme très simple consistant à remplacer la densité par un ensemble de personnes fictives qui ne doivent pas se chevaucher, de déplacer de façon lagrangienne ces individus, puis de les “reprojeter” pour obtenir la densité au temps suivant.

Malheureusement nous verrons que ce processus présente plusieurs inconvénients. En particulier, il nécessite l'utilisation d'un maillage très fin pour de petits pas de temps, et sa généralisation en dimension 2 n'est pas naturelle.

### 4.2.1 Cas de la dimension 1

#### Description du schéma

Nous nous plaçons à nouveau sur l'intervalle  $[0, 1]$ , que nous divisons en  $M$  sous intervalles de même largeur  $h = \frac{1}{M}$  et de centres  $x_i = i h - \frac{h}{2}$ . Une densité de population  $\rho$  est alors approchée par un vecteur  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_i)_{i=1\dots M}$ .

Remplaçons à présent chaque intervalle par un intervalle réduit, représentant la place qu'occuperait la population si elle avait une densité maximale 1 (voir figure 4.7). Les  $M$  intervalles ainsi obtenus représentent les personnes fictives évoquées précédemment. Ces intervalles ont même centres  $x_i$  que les intervalles précédents, et ont une largeur  $h_i$  vérifiant

$$h_i = h \rho_i.$$

Nous souhaitons déplacer ces personnes fictives de façon lagrangienne, à l'aide d'une vitesse  $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1\dots M}$ , tout en respectant la contrainte de densité maximale. Celle-ci peut à présent s'exprimer comme une contrainte de non chevauchement de ces intervalles réduits. Plus précisément, une vitesse discrète  $\mathbf{u}$  est admissible pour la densité  $\boldsymbol{\rho}$  si et seulement si elle vérifie la contrainte suivante :

$$\begin{aligned} x_{i+1} - \frac{h_{i+1}}{2} + u_{i+1} dt - \left( x_i + \frac{h_i}{2} + u_i dt \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{x_{i+1} - x_i}_h - \frac{1}{2} \underbrace{(h_{i+1} + h_i)}_{h(\rho_{i+1} + \rho_i)} + (u_{i+1} - u_i) dt &\geq 0, \end{aligned}$$

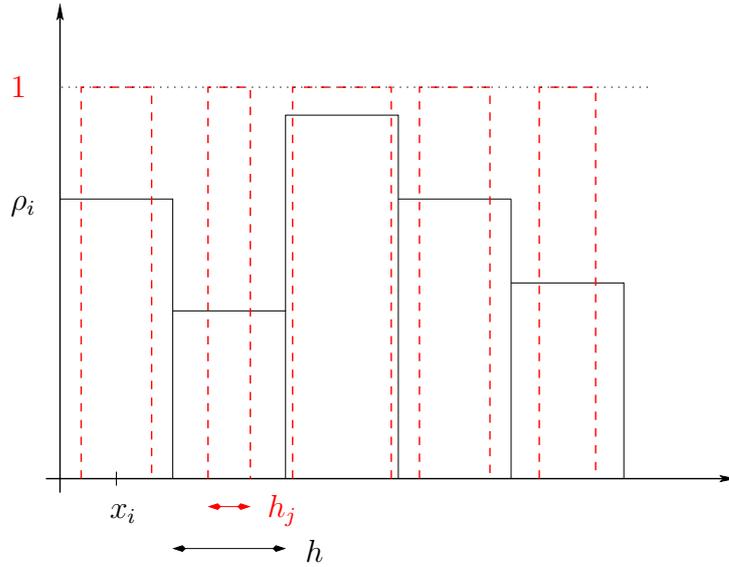


FIGURE 4.7 – Intervalles réduits en fonction de la densité qu'ils représentent.

qui peut s'exprimer comme une condition sur la dérivée discrète de la vitesse.

**Définition 4.2.1** (Contrainte sur les vitesses discrètes). *Une vitesse  $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1\dots M}$  est admissible pour la densité  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_i)_{i=1\dots M}$  si et seulement si elle appartient à l'ensemble*

$$K(\boldsymbol{\rho}) = \left\{ \mathbf{v} : \frac{v_{i+1} - v_i}{h} \geq -\frac{1}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i) \right), i = 1, \dots, M-1 \right\}. \quad (4.9)$$

**Remarque 4.2.2.** *La condition (4.9) est auto-correctrice : si la densité dépasse 1 sur une maille, la dérivée de la vitesse doit être strictement positive, ce qui a pour effet de diminuer la densité à cet endroit.*

**Remarque 4.2.3** (Conditions aux limites). *L'ensemble  $K(\boldsymbol{\rho})$  prend uniquement en compte la contrainte de non chevauchement, et n'impose aucune contrainte sur la sortie du domaine. Pour imposer une condition au bord de type mur, il faut donc ajouter une contrainte supplémentaire. Par exemple, si l'on souhaite empêcher les gens de sortir en  $x = 1$ , il est nécessaire d'imposer que la vitesse  $u_M$  vérifie*

$$u_M \leq \frac{h}{2dt} (1 - \rho_M),$$

*condition qui modifie légèrement la définition de l'ensemble  $K(\boldsymbol{\rho})$ .*

Le schéma discret peut alors s'écrire simplement :

*Schéma type microscopique en dimension 1*

Soit  $\rho^0$  un vecteur densité initial, et  $dt > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définis les vecteurs de densité  $\rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ . Nous effectuons alors les trois étapes suivantes.

1. Calcul des intervalles réduits :  $h_i^{n-1} = h \rho_i^{n-1}$ .
2. Choix de la vitesse de déplacement admissible la plus proche de la vitesse souhaitée :

$$\mathbf{u}^n = \underset{\mathbf{v} \in K(\rho^{n-1})}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M |U(x_i) - v_i|^2. \quad (4.10)$$

3. Reconstruction de la densité en projetant les contributions des intervalles déplacés sur le maillage d'origine :

$$\rho_i^n = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^M \left| [x_i, x_{i+1}] \cap [x_k - \frac{h_k^{n-1}}{2} + u_k^n dt, x_k + \frac{h_k^{n-1}}{2} + u_k^n dt] \right|. \quad (4.11)$$

## Résultats numériques

Le problème (4.10) est un problème de minimisation quadratique sous contrainte, qui peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v} \in K^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \mathbf{v}) - (\mathbf{U}, \mathbf{v}) \right\}, \quad \text{avec} \quad K^n = \{ \mathbf{v} : C\mathbf{v} \leq \mathbf{d}^n \},$$

où  $C$  et  $\mathbf{d}^n$  sont dans le cas de conditions de sortie libre

$$C = \frac{dt}{h} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}^n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\rho_1^n + \rho_2^n) \\ \vdots \\ 1 - \frac{1}{2}(\rho_{M-1}^n + \rho_M^n) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour le cas d'un mur en  $x = 1$ , il suffit de modifier  $C$  et  $\mathbf{d}$  en posant

$$C(M, M) = \frac{dt}{h} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}^n(M) = \frac{1}{2} (1 - \rho_M^n).$$

Ce type de problème peut se résoudre grâce à l'algorithme d'Uzawa par exemple. La figure 4.8 présente les résultats obtenus à l'aide de `Matlab`, pour les valeurs numériques  $M = 100$ ,  $dt = 0.05$ , et pour différentes conditions initiales. On retrouve exactement les mêmes comportements que dans les résultats obtenus à l'aide du schéma JKO (voir la section 4.1).

## Choix du pas de temps

Remarquons qu'ici encore, choisir un pas de temps trop petit empêche toute évolution. Il est en effet nécessaire de déplacer suffisamment les intervalles réduits pour qu'ils

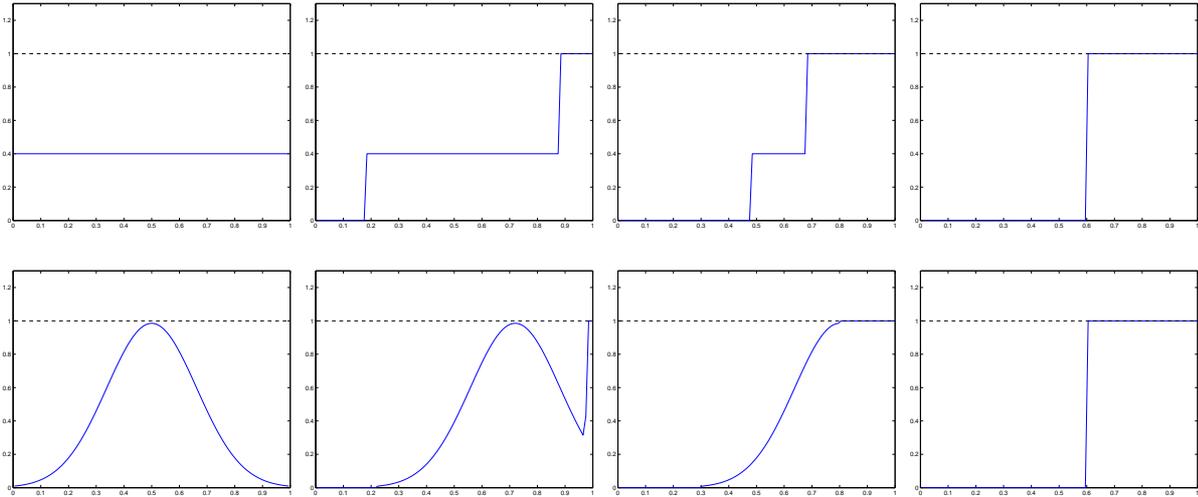


FIGURE 4.8 – Evolution de la densité, pour une condition initiale constante (en haut), et gaussienne (en bas).

atteignent la maille suivante. Plus précisément, la densité sur la maille  $i$  sera déplacée si et seulement si

$$x_i + \frac{h_i}{2} + u_i dt > x_{i+1} - \frac{h}{2},$$

c'est-à-dire

$$dt > \frac{h - h_i}{2u_i} = \frac{h}{2u_i} (1 - \rho_i).$$

Ainsi, en choisissant un pas de temps trop petit, les intervalles sur lesquels la densité est trop faible ne se vident pas complètement, voir même pas du tout. Ceci implique qu'il est nécessaire d'avoir un maillage très fin pour des petits pas de temps, ce qui représente un gros inconvénient pour cet algorithme.

## 4.2.2 Généralisation en dimension 2

### Présentation du schéma

Considérons un maillage cartésien du domaine, de pas d'espace  $h$ , et de taille  $M_x \times M_y$ . Nous notons à nouveau  $x_{i,j}$  les centres des mailles, et  $\rho_{i,j}$  une approximation de la densité sur la case  $(i, j)$ .

Il existe plusieurs choix pour représenter la densité sur chaque maille par une personne fictive. Une première solution consisterait à utiliser des disques, afin d'adopter la méthode microscopique développée par J. Venel. Cependant, on aurait chevauchement de ces disques dans les zones saturées. Un moyen de résoudre ce problème serait de prendre une densité plus grande que 1 sur ces disques, typiquement  $\rho_c = \frac{\pi}{4}$ , afin d'obtenir une configuration admissible pour les disques même dans les zones saturées. Cependant, on relâcherait ainsi la contrainte de densité maximale.

Une autre solution, qui est la plus naturelle pour généraliser la méthode développée en dimension 1, est de réduire les mailles sous forme de carrés (voir 4.9) de centre  $x_{i,j}$  et

de côté  $h_{i,j}$  vérifiant

$$h_{i,j} = h \sqrt{\rho_{i,j}}.$$

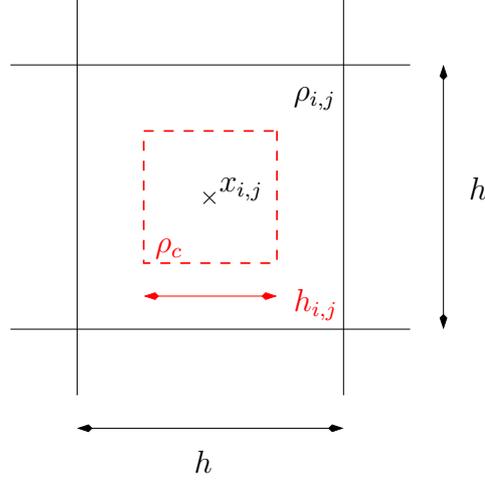


FIGURE 4.9 – Mailles réduites sous forme de carrés.

La vitesse a à présent deux composantes, et peut donc être représentée par deux matrices

$$\mathbf{u} = (v, w) \quad \text{avec } u_{i,j} = (v_{i,j}, w_{i,j}).$$

La façon la plus simple d'imposer que les carrés déplacés ne se chevauchent pas est d'imposer que leur ordre reste le même horizontalement et verticalement. Plus précisément, on impose les conditions suivantes

$$\begin{cases} x_{i+1,j} - \frac{h_{i+1,j}}{2} + v_{i+1,j} dt - (x_{i,j} + \frac{h_{i,j}}{2} + v_{i,j} dt) \geq 0, \\ x_{i,j+1} - \frac{h_{i,j+1}}{2} + w_{i,j+1} dt - (x_{i,j} + \frac{h_{i,j}}{2} + w_{i,j} dt) \geq 0. \end{cases}$$

**Définition 4.2.4** (Contraintes directionnelles sur les vitesses discrètes). *Une vitesse  $\mathbf{u} = (v, w)$  est admissible pour la densité  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{i,j})_{i,j=1\dots M}$  si et seulement si elle appartient à l'ensemble  $K(\boldsymbol{\rho})$  défini par les contraintes directionnelles suivantes*

$$\begin{cases} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} \geq -\frac{1}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{\rho_{i,j}} + \sqrt{\rho_{i+1,j}}) \right), \\ \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{h} \geq -\frac{1}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{\rho_{i,j}} + \sqrt{\rho_{i,j+1}}) \right). \end{cases} \quad (4.12)$$

Ces contraintes peuvent s'interpréter comme des conditions sur les dérivées horizontales et verticales de la vitesse. Remarquons qu'elles sont à nouveau auto-correctrices.

Le schéma numérique suit alors exactement le même principe qu'en dimension 1.

*Schéma type microscopique en dimension 2*

Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $dt > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités  $\rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ . Nous effectuons alors les trois étapes suivantes.

1. Calcul des mailles réduites :  $h_{i,j}^{n-1} = h \sqrt{\rho_{i,j}^{n-1}}$ .
2. Choix de la vitesse admissible la plus proche de la vitesse souhaitée :

$$\mathbf{u}^n = \underset{\mathbf{u}=(v,w) \in K(\rho^{n-1})}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{M_x} \sum_{j=1}^{M_y} (|V(x_{i,j}) - v_{i,j}|^2 + |W(x_{i,j}) - w_{i,j}|^2) \right\}, \quad (4.13)$$

où  $V$  et  $W$  sont les composantes horizontales et verticales de  $\mathbf{U}$ .

3. Reconstruction de la densité en projetant les contributions des carrés déplacés sur le maillage d'origine :

$$\rho_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{M_x} \sum_{l=1}^{M_y} \mathcal{A}[(\text{maille } (i,j)) \cap (\text{maille } (k,l) \text{ déplacée})], \quad (4.14)$$

où  $\mathcal{A}(B)$  désigne l'aire de  $B$ .

**Remarque 4.2.5** (Indépendance des contraintes). *Grâce à l'indépendance des contraintes horizontales et verticales, le problème de minimisation (4.13) peut se reformuler en  $M_x + M_y$  problèmes de taille  $M_x$  ou  $M_y$  :*

$$\begin{cases} \underset{(v_{i,j})_{i=1 \dots M_x} \in K_j^x(\rho^n)}{\operatorname{argmin}} \sum_i |V(x_{i,j}) - v_{i,j}|^2, & j = 1 \dots M_y, \\ \underset{(w_{i,j})_{j=1 \dots M_y} \in K_i^y(\rho^n)}{\operatorname{argmin}} \sum_j |W(x_{i,j}) - w_{i,j}|^2, & i = 1 \dots M_x, \end{cases}$$

où les espaces de contraintes  $K_j^x(\rho)$  et  $K_i^y(\rho)$  sont donnés par

$$\begin{cases} (v_{i,j})_{i=1 \dots M} \in K_j^x(\rho) & \Leftrightarrow \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} \geq -\frac{1}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{\rho_{i,j}} + \sqrt{\rho_{i+1,j}}) \right), \\ (w_{i,j})_{j=1 \dots M} \in K_i^y(\rho) & \Leftrightarrow \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{h} \geq -\frac{1}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} (\sqrt{\rho_{i,j}} + \sqrt{\rho_{i,j+1}}) \right). \end{cases}$$

**Remarque 4.2.6** (Prise en compte des murs et des obstacles). *Il est à nouveau possible d'empêcher la sortie du domaine ou bien le passage sur une maille en ajoutant des contraintes sur les vitesses. Par exemple, si la case  $(i,j)$  est occupée par obstacle, il faudra imposer la contrainte suivante sur la vitesse  $v_{i-1,j}$  :*

$$v_{i-1,j} \leq \frac{h}{dt} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\rho_{i-1,j}} \right).$$

Ceci modifie légèrement le problème de minimisation (4.13).

### Résultats numériques et conclusions

Les tests numériques suivants ont été réalisés sous `Matlab`. La densité initiale est constante, et le maillage considéré est une grille cartésienne  $100 \times 80$ . Les figures 4.10 et 4.11 présentent l'évolution de la densité (en niveaux de bleus) pour deux géométries différentes, la deuxième comportant un obstacle.

Deux problèmes principaux apparaissent. Tout d'abord, les zones où la densité est trop faible se vident très difficilement, tout comme en dimension 1. Il serait nécessaire de raffiner énormément le maillage pour obtenir des résultats corrects.

D'autre part, la contrainte sur le déplacement des mailles réduites se fait dans les directions horizontales et verticales. Ceci impose des directions privilégiées au problème qui ne sont pas naturelles, et tend à concentrer sans raison la densité dans certaines zones. Cette approche sur-contraint donc fortement le modèle étudié, et ne rend pas compte du comportement réel de la foule.

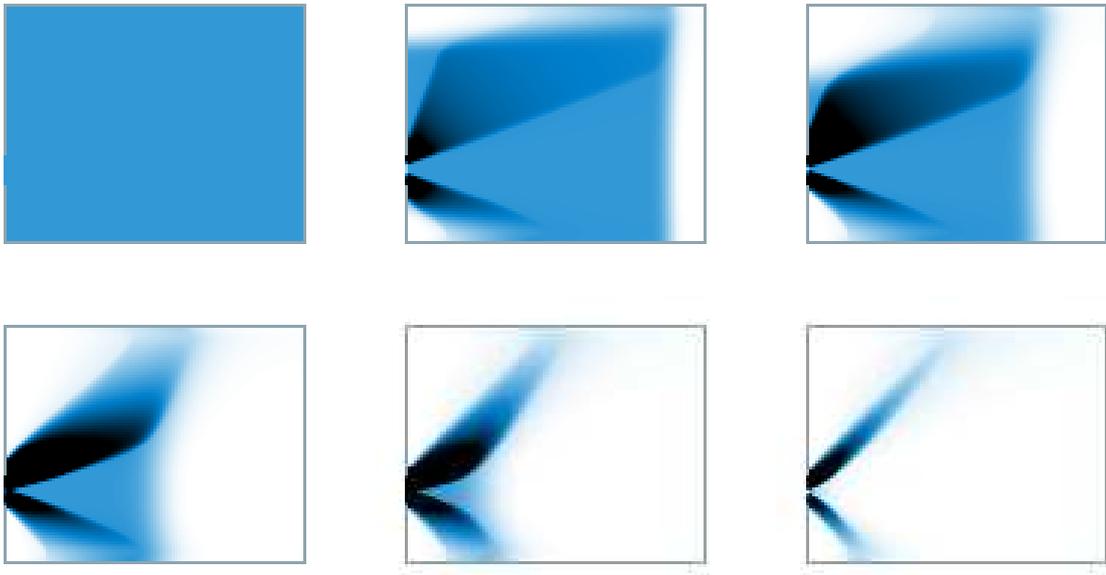


FIGURE 4.10 – Géométrie sans obstacle.

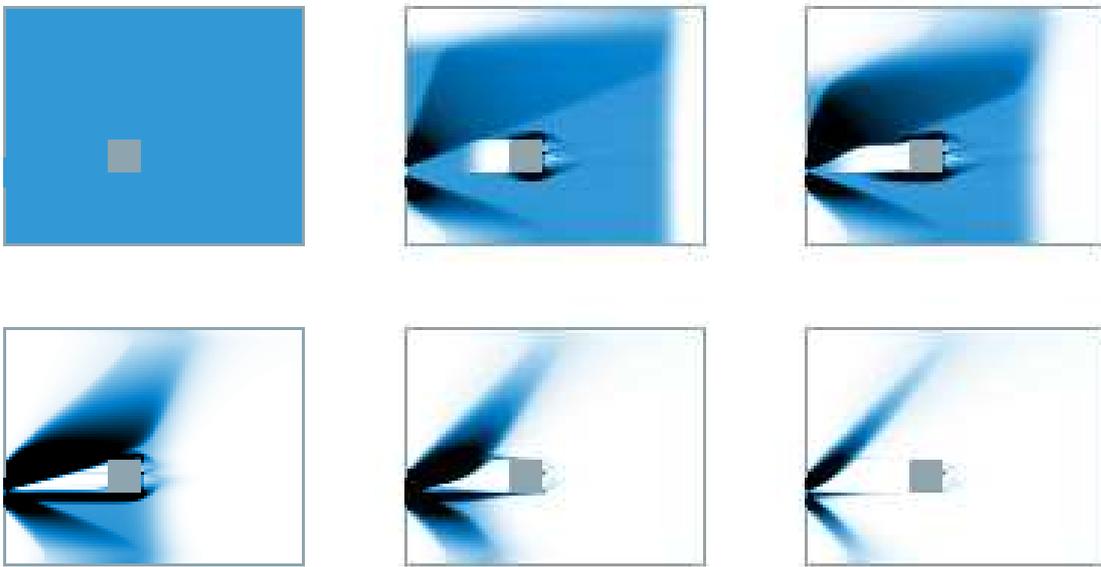


FIGURE 4.11 – Géométrie avec un obstacle.

# Chapitre 5

## Présentation et étude du schéma numérique adopté

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Présentation du schéma numérique</b>	<b>98</b>
5.1.1	Utilisation du schéma de splitting	98
5.1.2	Etape de transport	99
5.1.3	Etape de projection	101
<b>5.2</b>	<b>Résultats partiels de convergence</b>	<b>102</b>
5.2.1	Convergence dans un cas particulier en dimension 1	103
5.2.2	Algorithmes de type DLA	105
5.2.3	Balayage d'une mesure	108
<b>5.3</b>	<b>Convergence numérique</b>	<b>111</b>
5.3.1	Ordre de convergence en temps	111
5.3.2	Etude de la projection stochastique	112

---

Ce chapitre est consacré à l'étude du schéma de catching-up qui intervient dans la démonstration d'existence dans le cas d'une vitesse quelconque, et que nous avons choisi de mettre en oeuvre numériquement. Bien qu'une démonstration complète de la convergence de ce schéma n'a pas été obtenue, nous présentons quelques résultats partiels confortant notre démarche. Nous donnons également quelques tests numériques de convergence dans des cas particuliers où la solution exacte est connue.

## 5.1 Présentation du schéma numérique

Nous décrivons ici le schéma numérique que nous avons choisi d'adopter dans la suite. Celui-ci s'inspire du schéma de type catching-up, déjà utilisé dans le cas du modèle microscopique.

### 5.1.1 Utilisation du schéma de splitting

Nous nous proposons de mettre en oeuvre le principe de splitting temporel, décrit dans la section 2.3.3, et qui a déjà permis de prouver l'existence d'une solution dans le cas d'une vitesse générale. Nous rappelons la formulation continue en espace de ce schéma :

**Définition 5.1.1** (Schéma de splitting). *Soit  $\rho^0$  une densité initiale, et  $dt > 0$  un pas de temps fixé. Supposons définies les densités discrètes  $\rho^1, \dots, \rho^{n-1}$ . La densité  $\rho^n$  au temps suivant est alors donnée par*

$$\begin{cases} \hat{\rho}^n &= (\mathbf{id} + dt \mathbf{U})_{\#} \rho^{n-1} & (\text{étape de prédiction}), \\ \rho^n &= P_K \hat{\rho}^n & (\text{étape de correction}). \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans l'étape de correction, la projection sur l'ensemble des densités admissibles  $K$  est effectuée pour la distance de Wasserstein

$$P_K \mu = \underset{\rho \in K}{\operatorname{argmin}} W_2(\mu, \rho).$$

Considérons à présent un maillage cartésien de centres  $x_{i,j}$ , de pas d'espace  $h$  et de taille  $M_x \times M_y$  de l'espace  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ . Notons  $\rho_{i,j}$  une approximation de la densité sur la maille  $(i, j)$ . Le schéma numérique sur la densité approchée peut alors s'écrire de la façon suivante.

#### *Algorithme de splitting*

Soit  $\rho_{i,j}^0$  donnée. À chaque pas de temps on effectue les opérations suivantes :

- **Étape de prédiction** :  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j} = \text{transport de } (\rho_{i,j}^{n-1})_{i,j} \text{ par } \mathbf{U} \text{ pendant } dt,$
- **Étape de correction** :  $(\rho_{i,j}^n)_{i,j} = \text{projection de } (\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j} \text{ sur } K.$

L'étape de transport peut se traiter de façon eulérienne ou lagrangienne, et correspond à des schémas numériques classiques décrits dans la section 5.1.2. L'étape de projection, en revanche, nécessite la mise en place d'une méthode adaptée à la distance de Wasserstein. La section 5.1.3 décrit le schéma choisi.

### 5.1.2 Etape de transport

Nous avons choisi d'utiliser un schéma upwind pour l'étape de transport. Ce schéma nécessite de définir la vitesse aux interfaces des mailles. Notons donc (voir la figure 5.1) :

$$\begin{cases} (V_{i-\frac{1}{2},j})_{i,j} & : i = 1 \dots M_x + 1, \quad j = 1 \dots M_y, \\ (W_{i,j-\frac{1}{2}})_{i,j} & : i = 1 \dots M_x, \quad j = 1 \dots M_y + 1, \end{cases}$$

les composantes horizontales (resp. verticales) de la vitesse souhaitée aux milieux des arêtes verticales (resp. horizontales).

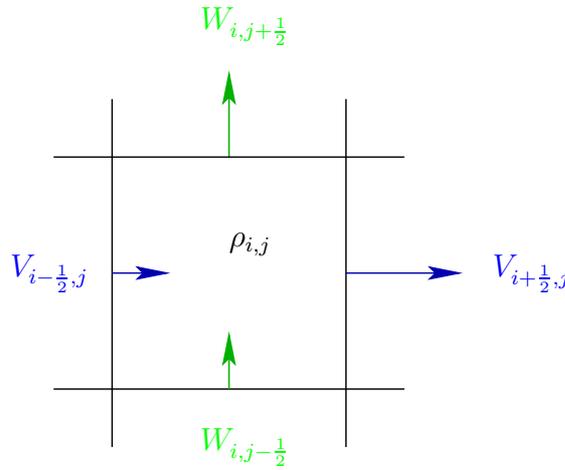


FIGURE 5.1 – Vitesses horizontales et verticales aux interfaces.

Le schéma upwind s'écrit alors de la façon suivante.

*Etape de transport : schéma upwind*

Soit  $(\rho_{i,j}^{n-1})_{i,j}$  la densité au temps  $(n-1) dt$ . La densité transportée  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j}$  vérifie

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{i,j}^n = \rho_{i,j}^{n-1} & - \frac{dt}{h} \left[ A^{up}(V_{i+\frac{1}{2},j}, \rho_{i,j}^{n-1}, \rho_{i+1,j}^{n-1}) - A^{up}(V_{i-\frac{1}{2},j}, \rho_{i-1,j}^{n-1}, \rho_{i,j}^{n-1}) \right] \\ & - \frac{dt}{h} \left[ A^{up}(W_{i,j+\frac{1}{2}}, \rho_{i,j}^{n-1}, \rho_{i,j+1}^{n-1}) - A^{up}(W_{i,j-\frac{1}{2}}, \rho_{i,j-1}^{n-1}, \rho_{i,j}^{n-1}) \right], \end{aligned} \quad (5.2)$$

où  $A^{up}$  est défini par

$$A^{up}(u, c^-, c^+) = \begin{cases} u c^- & \text{si } u > 0 \\ u c^+ & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce schéma a l'avantage de fournir une expression explicite de la densité transportée, et de nécessiter très peu de temps de calcul et d'espace mémoire. De plus, il est conservatif, stable et conserve la positivité sous la condition CFL

$$\frac{dt}{h} < \frac{\|\mathbf{U}\|_{\infty}}{2}.$$

**Remarque 5.1.2** (Transport lagrangien). *Le schéma upwind présente certains inconvénients. En particulier, il est diffusif, et nécessite de très petits pas de temps à mesure que l'on raffine le maillage, c'est pourquoi il peut être intéressant d'utiliser plutôt une méthode lagrangienne pour l'étape de transport. Le principe, illustré à la figure 5.2, consiste simplement à déplacer chaque maille à vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$  pendant un pas de temps  $dt$ , puis à sommer les contributions des mailles déplacées sur la grille d'origine.*

Plus précisément, soit  $(\rho_{i,j}^{n-1})_{i,j}$  la densité au temps  $(n-1)dt$ . La densité transportée  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j}$  s'obtient en deux étapes :

1. Transport de la maille  $(i, j)$  sur le carré de côté  $h$  et de centre :

$$\hat{x}_{i,j} = x_{i,j} + dt \mathbf{U}.$$

2. Reconstruction de la densité en projetant les contributions des carrés déplacés sur le maillage d'origine :

$$\hat{\rho}_{i,j}^n = \frac{1}{h^2} \sum_{k=1}^{M_x} \sum_{l=1}^{M_y} \rho_{k,l}^{n-1} \mathcal{A}[(\text{maille } (i, j)) \cap (\text{maille } (k, l) \text{ déplacée})],$$

où  $\mathcal{A}(B)$  désigne l'aire de  $B$ .

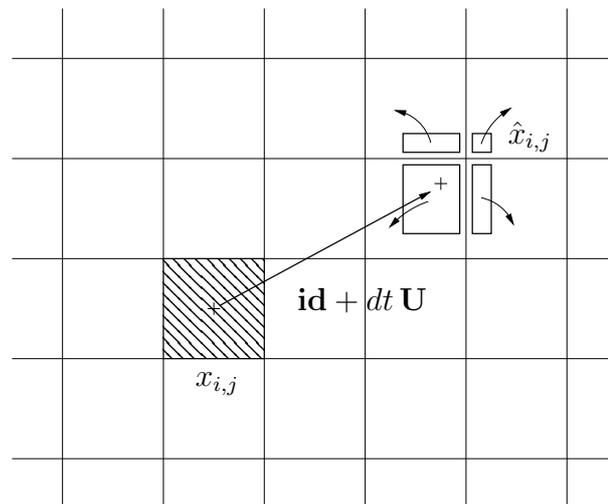


FIGURE 5.2 – Transport lagrangien de la densité.

Ce schéma a l'avantage d'être non diffusif, et de permettre d'utiliser de grands pas de temps même pour un maillage fin. Cependant, nous avons privilégié le schéma upwind dans la suite. Celui-ci s'avère plus facile à implémenter vectoriellement, et de plus les pas de temps utilisés en pratique sont petits afin de redistribuer peu de masse dans l'étape de projection.

### 5.1.3 Etape de projection

Le problème de la projection sur l'ensemble  $K$  pour la distance de Wasserstein est bien plus délicat que l'étape de transport traitée précédemment. En effet, il n'existe pas d'algorithme connu pour calculer cette projection efficacement.

Une première idée consisterait à exprimer la projection comme un problème de minimisation sur l'ensemble des plans de transports admissibles. Cependant nous avons vu que cette méthode, développée dans la section 4.1 pour résoudre numériquement le schéma JKO, s'avère totalement inefficace en dimension 2.

Il est donc nécessaire de trouver un schéma approché. La méthode que nous proposons s'inspire du raisonnement informel suivant : considérons un domaine  $\omega$  ouvert et borné, et  $\mu$  une densité strictement positive de support  $\bar{\omega}$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , la projection de  $1_\omega + \varepsilon\mu$  sur  $K$  est la fonction caractéristique d'un ensemble contenant  $\bar{\omega}$ . Notons  $\varepsilon\mathbf{u}$  le champ de déplacement tel que le transport optimal entre  $1_\omega + \varepsilon\mu$  et  $P_K(1_\omega + \varepsilon\mu)$  s'écrive

$$\mathbf{t}_\varepsilon = \mathbf{id} + \varepsilon\mathbf{u}.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\mathbf{t}_\varepsilon$  est injectif, donc  $\mu$  vérifie

$$1 = \frac{1 + \varepsilon\mu}{|\det \nabla(\mathbf{id} + \varepsilon\mathbf{u})|},$$

ce qui implique, au premier ordre en  $\varepsilon$  :

$$\nabla \cdot (\varepsilon\mathbf{u}) = \varepsilon\mu.$$

Comme  $\mathbf{t}_\varepsilon$  est un transport optimal, on sait de plus qu'il existe un champ  $p$  tel que  $\mathbf{u} = -\nabla p$ . Ce champ  $p$  vérifie alors

$$-\Delta p = \mu.$$

Trouver la masse qui sort en chaque point du domaine  $\omega$  revient alors à trouver la composante normale de  $\mathbf{u}$ , c'est-à-dire à calculer  $-\frac{\partial p}{\partial n}$ . Une façon d'accéder à cette quantité est de choisir une position aléatoirement selon la loi  $\mu$ , et de considérer un mouvement brownien dont le point de départ suit cette position aléatoire. Notons  $Y$  le point de première sortie de  $\omega$  de ce mouvement brownien : sa loi sur  $\partial\omega$  est alors exactement  $-\frac{\partial p}{\partial n}$ .

L'algorithme proposé consiste donc à répartir la masse dépassant 1 de la densité  $\hat{\rho}^n$  grâce à des marches aléatoires de la façon suivante (voir la figure 5.3).

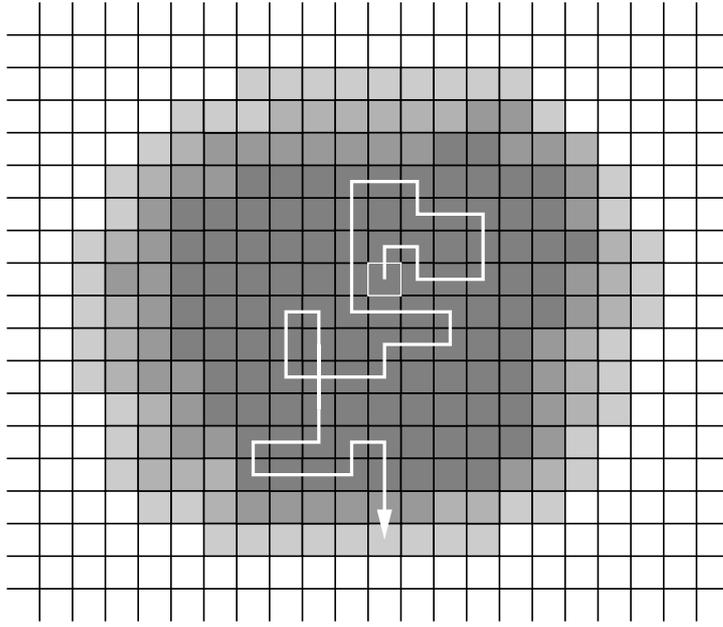
*Etape de projection : schéma stochastique*

Soit  $(\hat{\rho}_{i,j})_{i,j}$  une densité non admissible. Pour chaque maille  $(i, j)$  sur laquelle la densité est sur-saturée, on effectue les étapes suivantes :

1. Départ d'une marche aléatoire transportant la densité supplémentaire

$$\mu_{i,j} = \hat{\rho}_{i,j} - 1.$$

2. Lorsque que cette marche aléatoire rencontre une case non saturée, dépôt maximal de masse pouvant être ajoutée sans dépasser 1.
3. Arrêt de la marche lorsque la masse transportée a été entièrement redistribuée.

FIGURE 5.3 – Projection stochastique sur l'ensemble  $K$ .

À chaque pas de temps, la densité  $(\rho_{i,j}^n)_{i,j}$  obtenue ainsi à partir de la densité transportée  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j}$  est bien admissible, et correspond, en un sens approché que nous précisons dans la suite, à la projection de  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j}$  sur  $K$  pour la distance de Wasserstein.

## 5.2 Résultats partiels de convergence

L'étude menée à la section 2.3.3 montre que le schéma de splitting continu en espace converge bien quand le pas de temps tend vers 0 vers la solution de l'équation d'évolution (1.1). Malheureusement, la discrétisation en espace complique énormément l'étude de convergence, en particulier en ce qui concerne l'étape de projection. A défaut d'une véritable démonstration de convergence, nous présentons dans la suite quelques résultats partiels qui confortent le choix d'un tel algorithme.

L'étape de transport pose peu de problème : sous condition CFL, le schéma upwind est stable et consistant avec l'équation de transport

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0.$$

Or la solution au temps  $dt$  de l'équation

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \\ \rho(0, \cdot) = \rho^{n-1} \end{cases}$$

vérifie, d'après la proposition 2.22 de [AS06] :

$$\frac{1}{dt} W_2(\rho(t+h, \cdot), (\mathbf{id} + dt \mathbf{U})_{\#} \rho^{n-1}) \xrightarrow{dt \rightarrow 0} 0,$$

donc la densité obtenue grâce au schéma upwind converge vers la densité transportée  $(\mathbf{id} + dt \mathbf{U})_{\#} \rho^{n-1}$  quand les pas de temps et d'espace tendent vers 0 sous condition CFL.

En revanche, la convergence de l'étape de projection se révèle bien plus délicate. Nous présentons dans la suite la démonstration dans un cas particulier, puis quelques éléments qui permettent de relier notre algorithme stochastique avec la projection au sens de Wasserstein.

### 5.2.1 Convergence dans un cas particulier en dimension 1

**Théorème 5.2.1** (Convergence de la projection stochastique dans un cas particulier). *Soit  $\mu$  une densité positive sur l'intervalle  $[-L, L]$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $\rho_\varepsilon = \mathbf{1}_{[-L, L]} + \varepsilon\mu$ . Notons  $\nu_\varepsilon$  le résultat en espérance de l'algorithme stochastique partant de  $\rho_\varepsilon$ , après convergence du pas d'espace vers 0. On a alors*

$$\frac{1}{\varepsilon} W_2(\nu_\varepsilon, P_K(\rho_\varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

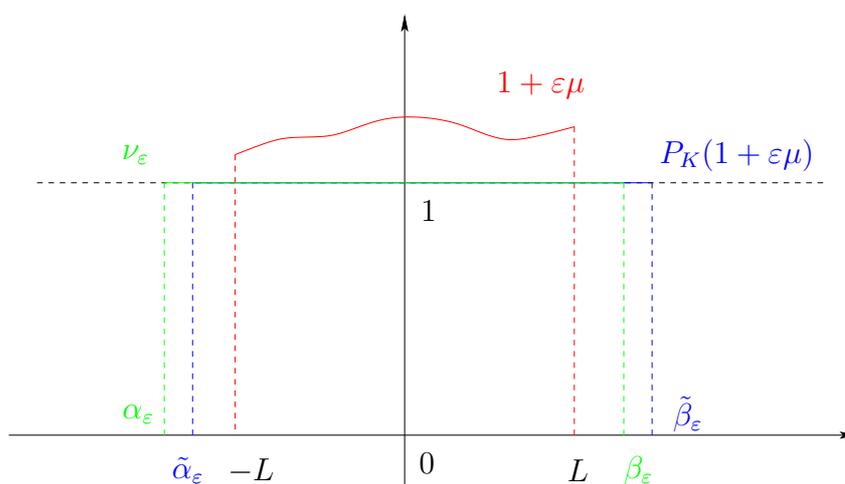


FIGURE 5.4 – Algorithme stochastique sur un cas particulier.

*Démonstration.* Commençons par déterminer le résultat de l'algorithme stochastique dans ce cas particulier. Étant donnée la forme de la densité de départ, la densité finale  $\nu_\varepsilon$  s'écrit

$$\nu_\varepsilon = \mathbf{1}_{[-\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon]}.$$

Il suffit donc de déterminer quelle proportion de la mesure supplémentaire  $\varepsilon\mu$  est envoyée à gauche de l'intervalle  $[-L, L]$ . Celle-ci est donnée par

$$M_\varepsilon = \int_{-L}^L P(x \text{ sort à gauche}) \varepsilon\mu(x) dx.$$

Or la probabilité qu'une particule partant du point  $x$  sorte de l'intervalle  $[-L, L]$  en  $-L$  est exactement

$$P(x \text{ sort à gauche}) = \frac{L-x}{2L}.$$

On en déduit la masse envoyée à gauche

$$M_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2L} \int_{-L}^L (L-x)\mu(x) dx,$$

puis la valeur de  $\alpha_\varepsilon$

$$\alpha_\varepsilon = L + \frac{\varepsilon}{2L} \int_{-L}^L (L-x)\mu(x) dx.$$

Calculons à présent la projection sur  $K$  de  $\rho_\varepsilon$  pour la distance de Wasserstein. Celle-ci est à nouveau de la forme

$$P_K(\rho_\varepsilon) = \mathbf{1}_{[-\tilde{\alpha}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon]}.$$

Par monotonie du transport en dimension 1, on a de plus, pour tout transport  $\mathbf{t}$  de  $\rho_\varepsilon$  sur  $\mathbf{1}_{[-\alpha, \beta]}$

$$\int_{-\alpha}^{\mathbf{t}(x)} dx = \int_{-L}^x (1 + \varepsilon\mu(s)) ds,$$

ce qui implique :

$$\mathbf{t}(x) = x + L - \alpha + \varepsilon \int_{-L}^x \mu(s) ds.$$

Or le transport optimal  $\mathbf{t}_\varepsilon$  minimise la distance de Wasserstein entre  $\rho_\varepsilon$  et  $\mathbf{1}_{[-\tilde{\alpha}_\varepsilon, \tilde{\beta}_\varepsilon]}$ , ce qui implique que  $\tilde{\alpha}_\varepsilon$  minimise la fonctionnelle

$$J(\alpha) = \int_{-L}^L \left| L - \alpha + \varepsilon \int_{-L}^x \mu(s) ds \right|^2 (1 + \varepsilon\mu(x)) dx.$$

Le minimum de cette fonctionnelle quadratique est donné par :

$$\tilde{\alpha}_\varepsilon = \frac{\int_{-L}^L \left( L + \varepsilon \int_{-L}^x \mu(s) ds \right) (1 + \varepsilon\mu(x)) dx}{\int_{-L}^L (1 + \varepsilon\mu(x)) dx}$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}_\varepsilon = L + \frac{\varepsilon}{2L + \varepsilon \int_{-L}^L \mu(x) dx} \int_{-L}^L \int_{-L}^x \mu(s)(1 + \varepsilon\mu(x)) ds dx.$$

Comparons maintenant  $\nu_\varepsilon$  et  $P_K(\rho_\varepsilon)$ . Le transport optimal entre ces deux densités étant donné par  $\mathbf{r}_\varepsilon(x) = x + \tilde{\alpha}_\varepsilon - \alpha_\varepsilon$ , on a

$$W_2^2(\nu_\varepsilon, P_K(\rho_\varepsilon)) = \int_{\alpha_\varepsilon}^{\tilde{\alpha}_\varepsilon} |\tilde{\alpha}_\varepsilon - \alpha_\varepsilon|^2 dx$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_\varepsilon - \alpha_\varepsilon &= \frac{\varepsilon}{2L} \left( \int_{-L}^L \int_{-L}^x \mu(s) ds dx - \int_{-L}^L (L-x)\mu(x) dx \right) \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2L} \int_{-L}^L \left( \int_{-L}^x \mu(s) ds \right) \left( \mu(x) - \frac{1}{2L} \int_{-L}^L \mu(t) dt \right) dx + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Or la première intégrale peut s'écrire

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^x \mu(s) ds dx = \int_{-L}^L \left( \int_s^L dx \right) \mu(s) ds = \int_{-L}^L (L-s)\mu(s) ds,$$

et donc on a finalement  $\tilde{\alpha}_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = O(\varepsilon^2)$ , et

$$W_2^2(\nu_\varepsilon, P_K(\rho_\varepsilon)) = O(\varepsilon^4).$$

□

On a donc montré qu'en dimension 1, les deux problèmes ont le même comportement asymptotique. L'analyse de convergence de la projection stochastique dans le cas général est bien plus délicate. Même en dimension 1, le calcul de la projection sur  $K$ , rendu possible grâce aux fonctions de répartition, se complique énormément pour une densité quelconque.

Dans la suite, nous exposons cependant deux notions qui permettent de relier l'algorithme stochastique et la projection sur  $K$  pour la distance de Wasserstein.

### 5.2.2 Algorithmes de type DLA

La méthode de projection que nous utilisons s'inspire du processus stochastique appelé DLA (Diffusion Limited Aggregation) et décrit par exemple dans [LP10]. L'algorithme DLA classique consiste à placer  $n$  particules au centre d'un maillage, et à les laisser l'une après l'autre effectuer une marche aléatoire jusqu'à trouver une maille inoccupée et s'y fixer. Plus généralement, l'algorithme DLA permet de répartir la masse supplémentaire d'une densité à valeurs entières pour construire une densité proche appartenant à l'ensemble  $K$ .

#### *Algorithme DLA*

Soit  $\sigma_h : h\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{N}$  une densité à valeurs entières sur le maillage cartésien  $h\mathbb{Z}^d$ . Pour chaque maille sur laquelle la densité dépasse 1, on effectue les étapes suivantes :

1. Départ d'une marche aléatoire de masse 1.
2. Arrêt de la marche aléatoire dès qu'elle rencontre une maille inoccupée.

Le résultat de cet algorithme est une densité à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Remarquons qu'il est défini uniquement pour des densités à valeurs entières, contrairement à notre algorithme stochastique pour lequel les marches aléatoires transportent une densité quelconque, et ont de plus la possibilité de déposer la masse transportée sur plusieurs mailles.

Un autre algorithme permettant de répartir la masse supplémentaire, appelé algorithme tas de sable, est décrit dans [LP10]. Celui-ci utilise une méthode déterministe pour construire une densité appartenant à  $K$ .

*Algorithme tas de sable*

Soit  $\sigma_h : h\mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  une densité à valeurs réelles sur le maillage cartésien  $h\mathbb{Z}^d$ .

Tant que la densité dépasse 1 sur une maille, on effectue les étapes suivantes :

1. Choix d'une maille sursaturée.
2. Répartition de la densité supplémentaire de façon équitable sur les mailles voisines.

Remarquons que cet algorithme ne converge pas en un nombre fini d'étapes : en pratique, il est nécessaire de fixer une tolérance  $\varepsilon$  et l'algorithme fournit une densité inférieure à  $1 + \varepsilon$ . De plus, le choix des cases n'est pas commutatif, mais le lemme 3.1 de [LP10] montre que la densité obtenue à la limite ne dépend pas de l'ordre choisi.

Nous présentons ici quelques résultats de convergence de ces schémas, qui incitent à penser que notre algorithme stochastique converge lui aussi. L'étude menée dans [LP10] permet d'affirmer que sous de bonnes conditions, les algorithmes DLA et tas de sable convergent vers une même limite quand le pas d'espace tend 0. Dans la suite, nous présenterons donc les résultats uniquement pour l'algorithme tas de sable.

Commençons par définir une fonction discrète sur le maillage  $h\mathbb{Z}^d$ , appelée fonction odomètre.

**Définition 5.2.2** (Fonction odomètre discrète). *La fonction odomètre  $u_h$  est définie en chaque point  $x$  du maillage comme la quantité totale de masse émise depuis  $x$ .*

Remarquons que les points du maillage sur lesquels il y a eu redistribution de masse sont ceux pour lesquels  $u_h$  est strictement positive. De plus,  $u_h$  vérifie l'équation de Laplace discrète

$$\Delta_h u_h = \nu_h - \sigma_h,$$

où  $\sigma_h, \nu_h$  représentent respectivement la densité initiale et finale, et  $\Delta_h$  est le laplacien discret donné par

$$\Delta_h u_h = \frac{1}{2d} \sum_{y \text{ voisin de } x} (u_h(y) - u_h(x)).$$

Cette fonction odomètre peut être caractérisée de la façon suivante (voir lemme 1.1 de [LP10]) :

**Proposition 5.2.3.** *Soit  $\sigma_h$  une fonction positive sur  $h\mathbb{Z}^d$ , de support fini. Alors la fonction odomètre vérifie*

$$u_h = s_h - \gamma_h \sigma_h,$$

où  $\gamma_h$  est un opérateur défini tel que  $\Delta_h(\gamma_h \sigma_h) = \sigma_h - 1$ , et où  $s_h$  est donnée par

$$s_h = \inf \{f : \Delta_h f \leq 0, f \geq \gamma_h \sigma_h\}.$$

L'idée est de généraliser au cas continu cette fonction odomètre pour en déduire la convergence de l'algorithme tas de sable. Soit donc  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  une densité bornée, et  $G$  l'opérateur défini par

$$G\sigma(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x, y)\sigma(y)dy, \quad (5.3)$$

avec  $g$  solution fondamentale du Laplacien :

$$g(x, y) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi} \log |x - y| & \text{si } d = 2, \\ \frac{2}{(d-2)|\mathcal{B}(0, 1)|} |x - y|^{2-d} & \text{si } d \geq 3. \end{cases}$$

Il est alors possible de définir la fonction odomètre continue comme suit.

**Définition 5.2.4** (Fonction odomètre continue). *On définit la fonction odomètre  $u$  par :*

$$u = s - \gamma\sigma \quad \text{avec} \quad \begin{cases} s = \inf \{f : \Delta f \leq 0, f \geq \gamma\sigma\}, \\ \gamma\sigma(x) = -|x|^2 - G\sigma(x) \end{cases} \quad (5.4)$$

Le domaine sur lequel  $u$  est strictement positive est appelé domaine de non-coïncidence, et est noté  $D$ .

Sous de bonnes conditions, il est possible de montrer la convergence des ensembles  $D_h$  des sites totalement remplis à l'issue de l'algorithme tas de sable vers l'ensemble  $D$ .

**Définition 5.2.5** (Convergence d'ensembles). *Un ensemble  $A_h$  de  $h\mathbb{Z}^d$  converge au sens ensembliste vers un ensemble  $D \subset \mathbb{R}^d$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $h_0$  tel que pour  $h \leq h_0$ , on ait*

$$(D_\varepsilon \cap h\mathbb{Z}^d) \subset A_h \subset D^\varepsilon, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D_\varepsilon = \{x \in D : \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subset D\}, \\ D^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^d : \mathcal{B}(x, \varepsilon) \not\subset D\}. \end{cases} \quad (5.5)$$

Le théorème 3.9 de [LP10] donne alors un résultat de convergence de l'algorithme tas de sable.

**Théorème 5.2.6** (Convergence de l'algorithme tas de sable). *Soit  $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction vérifiant les propriétés suivantes :*

- (i)  $\sigma$  est à support compact, et il existe  $M$  tel que  $0 \leq \sigma \leq M$ .
- (ii) L'ensemble des points de discontinuité de  $\sigma$  est de mesure nulle.
- (iii) Il existe  $\lambda \in [0, 1[$  tel que pour tout  $x$ , on ait soit  $\sigma(x) \geq 1$ , soit  $\sigma(x) \leq \lambda$ .
- (iv)  $\{\sigma \geq 1\} = \overline{\{\sigma \geq 1\}^\circ}$ .

Soit  $D_h$  l'ensemble des sites totalement occupés à la fin de l'algorithme tas de sable à partir de la densité initiale  $\sigma_h$  sur la maillage  $h\mathbb{Z}^d$  définie par

$$\sigma_h(x) = h^{-d} \int_{[x-\frac{h}{2}, x+\frac{h}{2}]} \sigma(y) dy \quad \forall x \in h\mathbb{Z}^d.$$

Alors  $D_h$  converge au sens ensembliste (5.5) vers le domaine de non-coïncidence  $D$ .

La densité limite  $\nu$  du processus tas de sable issu de  $\sigma$  est donc donnée par

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{x : u(x) > 0\}, \\ \sigma & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $u$  est la fonction odomètre définie en (5.4). Cette densité a en apparence peu de rapport avec la projection de  $\sigma$  sur  $K$  pour la distance de Wasserstein. Le lien entre les deux problèmes est donné par la théorie du balayage, que nous décrivons dans le paragraphe suivant.

### 5.2.3 Balayage d'une mesure

Le problème de balayage est un type de problème de frontière libre en théorie du potentiel. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème de balayage partiel par une mesure de référence, qui est décrit par exemple dans [Gus] et [GS94]. Etant donnée une densité positive  $\lambda$  de référence, et une mesure  $\sigma$  positive, le problème de balayage partiel consiste à trouver la mesure  $\text{Bal}(\sigma, \lambda) \leq \lambda$  la plus proche de  $\sigma$  pour la norme d'énergie

$$\|\mu\|_e^2 = \int_{\mathbb{R}^d} G\mu(x) d\mu(x),$$

où  $G$  est l'opérateur défini en (5.3).

Sous certaines hypothèses (voir [GS94]), et pour  $\lambda = 1$ , la densité  $\text{Bal}(\sigma, 1)$  peut être caractérisée de la façon suivante :

$$\text{Bal}(\sigma, 1) = -\Delta V \quad \text{avec} \quad V = \sup \left\{ f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) : f \leq \frac{1}{2d} G\sigma, -\Delta f \leq 1 \right\}.$$

De plus, la fonction  $v = \frac{1}{2d} G\sigma - V$  est la plus petite fonction vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} v \geq 0 & \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \Delta v \leq 1 - \sigma & \text{dans } \mathbb{R}^d, \\ \Delta v = 1 - \sigma & \text{dans } \{x : v(x) > 0\}. \end{cases}$$

On a donc finalement

$$\text{Bal}(\sigma, 1) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \{x : v(x) > 0\}, \\ \sigma & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.7)$$

#### Lien entre balayage et algorithme tas de sable

Montrons que la caractérisation (5.7) redonne exactement la densité  $\nu$  issue de l'algorithme tas de sable (5.6).

**Proposition 5.2.7** (Lien entre balayage et algorithme tas de sable). *Soit  $\sigma$  une mesure positive vérifiant les propriétés du théorème 5.2.6 ainsi que les hypothèses nécessaires à la caractérisation (5.7). Notons  $\nu$  la densité limite du processus tas de sable issu de  $\sigma$ , et  $\text{Bal}(\sigma, 1)$  le balayage de  $\sigma$  par la mesure de Lebesgue. On a alors*

$$\nu = \text{Bal}(\sigma, 1).$$

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les fonctions  $u$  et  $v$  des caractérisations (5.6) et (5.7) sont strictement positives sur le même ensemble. Pour cela, considérons la fonction

$$t(x) = \frac{u(x)}{2d} = \frac{s(x) + |x|^2 + G\sigma(x)}{2d}.$$

Par définition de  $s$  en (5.4), on a, pour toute fonction  $f$  vérifiant  $\Delta f \leq 0$  et  $f \geq \gamma\sigma$  :

$$t(x) \leq \frac{1}{2d} (f(x) + |x|^2 + G\sigma(x)),$$

c'est-à-dire

$$t(x) \leq g(x)$$

pour toute fonction  $g$  satisfaisant

$$\begin{cases} \Delta g \leq \frac{1}{2d} \Delta(|x|^2 + G\sigma), \\ g \geq \frac{1}{2d} (\gamma\sigma - |x|^2 - G\sigma). \end{cases}$$

Or on a  $\Delta(G\sigma) = -2d\sigma$ , donc finalement  $t$  est définie par

$$t = \inf \{g : \Delta g \leq 1 - \sigma, g \geq 0\}.$$

On retrouve exactement la définition de  $v$ , donc on a montré que  $u = 2dv$ , ce qui prouve que les deux fonctions sont strictement positives sur le même ensemble.  $\square$

### Lien entre balayage et projection au sens de Wasserstein

Il reste à déterminer le lien entre le balayage d'une mesure et la projection au sens de Wasserstein. La proposition suivante montre que dans un cas particulier, ces deux problèmes sont équivalents asymptotiquement.

**Proposition 5.2.8** (Lien entre balayage et projection sur  $K$ ). *Soit  $\omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\varepsilon > 0$ , et  $\omega_\varepsilon, \tilde{\omega}_\varepsilon$  les deux domaines définis de la façon suivante :*

$$\begin{cases} \mathbf{1}_{\omega_\varepsilon} = \text{Bal}((1 + \varepsilon)\mathbf{1}_\omega, 1), \\ \mathbf{1}_{\tilde{\omega}_\varepsilon} = P_K((1 + \varepsilon)\mathbf{1}_\omega). \end{cases}$$

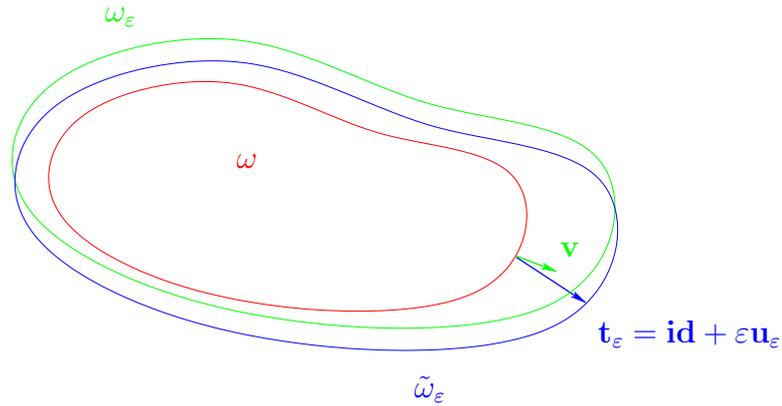
*Notons  $\mathbf{v}$  la vitesse de l'interface  $\omega_\varepsilon$  au temps 0, et  $\mathbf{u}_\varepsilon$  la vitesse issue du transport optimal entre  $\mathbf{1}_\omega$  et  $\mathbf{1}_{\tilde{\omega}_\varepsilon}$ . On a alors convergence faible de  $\mathbf{u}_\varepsilon$  vers  $\mathbf{v}$  lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0.*

*Démonstration.* Le problème de balayage de la mesure  $(1 + \varepsilon)\mathbf{1}_\omega$  par 1 peut être vu comme un problème d'évolution de type Hele-Shaw (voir [Gus]). Celui-ci consiste à observer l'évolution du domaine occupé par un fluide coincé entre deux plaques de verre qui se resserrent. Cette évolution est un problème de frontière libre qui peut s'exprimer à l'aide du balayage. En effet, un problème équivalent consiste à injecter uniformément du fluide entre deux plaques fixes. Le domaine  $\mathbf{1}_{\omega_t}$  occupé par le fluide à l'instant  $t$  est alors donné par

$$\mathbf{1}_{\omega_t} = \text{Bal}((1 + t)\mathbf{1}_\omega, 1).$$

De plus, la vitesse de l'interface est de la forme  $\mathbf{v} = -\nabla p$  où  $p$  satisfait l'EDP

$$\begin{cases} -\Delta p = 1 & \text{dans } \omega_t, \\ p = 0 & \text{sur } \partial\omega_t. \end{cases}$$

FIGURE 5.5 – Balayage et projection sur  $K$ .

Estimons à présent le transport optimal  $\mathbf{t}_\varepsilon$  entre  $\mathbf{1}_\omega$  et  $\mathbf{1}_{\tilde{\omega}_\varepsilon}$ . On a, pour tout  $x \in \omega$ ,

$$1 = \frac{1 + \varepsilon}{\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon(x)}. \quad (5.8)$$

Or  $\mathbf{t}_\varepsilon$  est le gradient d'une fonction convexe, donc il existe deux fonctions  $\lambda_\varepsilon^i$  strictement positives sur  $\omega$  et des matrices  $P_\varepsilon$  telles que

$$\nabla \mathbf{t}_\varepsilon(x) = P_\varepsilon^{-1}(x) \begin{pmatrix} \lambda_\varepsilon^1(x) & 0 \\ 0 & \lambda_\varepsilon^2(x) \end{pmatrix} P_\varepsilon(x).$$

Comme les fonctions  $\lambda_\varepsilon^i$  convergent uniformément vers 1 quand  $\varepsilon$  tend vers 0 (car  $\mathbf{t}_\varepsilon$  converge vers l'identité), il existe deux fonctions  $\alpha_\varepsilon^i$  qui convergent uniformément vers 0 telles que

$$\lambda_\varepsilon^i = 1 + \alpha_\varepsilon^i.$$

De plus, l'optimalité de  $\mathbf{t}_\varepsilon$  implique que ces fonctions  $\alpha_\varepsilon^i$  sont positives (sinon on aurait un rétrécissement du domaine  $\omega$  dans certaines directions, ce qui est absurde). L'équation (5.8) donne alors

$$(1 + \alpha_\varepsilon^1)(1 + \alpha_\varepsilon^2) = 1 + \varepsilon,$$

ce qui implique

$$\alpha_\varepsilon^1 + \alpha_\varepsilon^2 = \varepsilon + o(\varepsilon).$$

Or la vitesse  $\mathbf{u}_\varepsilon$  est donnée par

$$\mathbf{u}_\varepsilon = \frac{\mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}}{\varepsilon},$$

donc sa divergence vérifie

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\lambda_\varepsilon^1 + \lambda_\varepsilon^2 - 2) = 1 + o(1).$$

On obtient finalement, pour toute fonction test  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\omega)$ ,

$$\int_\omega (\mathbf{v} - \mathbf{u}_\varepsilon) \cdot \nabla \varphi = \int_\omega (\Delta p + \nabla \cdot \mathbf{u}_\varepsilon) \varphi = o(1).$$

□

## 5.3 Convergence numérique

Nous décrivons dans la suite quelques tests de convergence de notre algorithme sur certains cas particuliers.

### 5.3.1 Ordre de convergence en temps

Nous reprenons l'exemple du couloir convergent donné à la section 1.3.2. Il est possible de calculer sur cet exemple la solution du schéma de splitting temporel, et ainsi d'estimer l'ordre de convergence en temps du schéma.

En effet, l'étape de transport à vitesse souhaitée se résout simplement grâce à la méthode des caractéristiques. L'étape de projection est un peu plus délicate. Il est nécessaire d'estimer la distance de Wasserstein entre la densité obtenue après transport et les densités admissibles les plus proches. Cette distance prend la forme d'une somme d'intégrales que l'on doit minimiser (voir l'annexe B).

L'erreur calculée est la norme  $L^1$  en temps de la différence entre la frontière  $b(t)$  théorique et de celle obtenue par splitting temporel. Numériquement, nous avons considéré une précision assez grande dans le calcul des intégrales et dans les méthodes de minimisation afin de ne pas interférer dans le calcul d'erreur.

Le résultat, affiché à la figure 5.6, montre une convergence d'ordre 1 en temps du schéma de splitting.

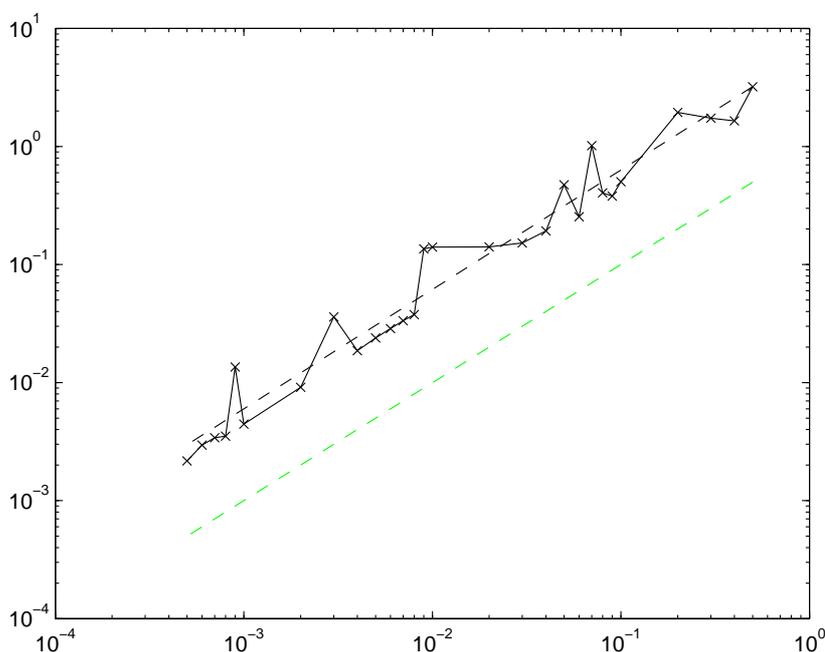


FIGURE 5.6 – Erreur entre la solution exacte et la densité obtenue grâce au schéma de splitting. En pointillés verts, la courbe de la fonction  $dt \mapsto dt$ .

### 5.3.2 Etude de la projection stochastique

Nous comparons ici la projection stochastique et le processus de balayage sur un exemple dont on connaît une solution explicite (voir [Gus] et [LP10]).

Cet exemple consiste à injecter de la matière en deux points de l'espace, et à étudier l'évolution de la densité obtenue sous la contrainte de rester inférieure à 1. Comme expliqué dans la section 5.2.3.0, on peut modéliser ainsi le processus de Hele-Shaw, qui décrit l'évolution d'un fluide coincé entre deux plaques.

Cette situation correspond dans notre modèle à une vitesse souhaitée nulle, et fait apparaître un terme source dans l'équation d'évolution, qui s'écrit alors

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1),$$

où la vitesse  $\mathbf{u}$  est celle de norme  $L^2$  minimale parmi les champs de vitesses admissibles, au sens où ils ne conduisent pas à une violation de la contrainte

$$\rho(t, \cdot) \in K \quad \text{p.p. } t.$$

Le problème de balayage associé peut être résolu explicitement. En effet, le balayage de la mesure

$$\mu_t = \frac{t}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$$

par la mesure de Lebesgue est la fonction caractéristique d'un ensemble  $\Omega(t)$ , défini comme l'union de 2 disques pour  $t \leq 2\pi$ ,

$$\Omega(t) = B(-1, \sqrt{t/2\pi}) \cup B(1, \sqrt{t/2\pi}),$$

et comme le domaine de frontière donnée par l'équation algébrique

$$(x^2 + y^2)^2 - \frac{t}{\pi}(x^2 + y^2) - 2(x^2 - y^2) = 0$$

dans le cas  $t > 2\pi$ .

Le schéma de splitting utilisé pour les mouvements de foule se généralise facilement dans le cas où de la matière est injectée. Il s'écrit simplement

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^n &= \rho^{n-1} + \frac{dt}{2}(\delta_{-1} + \delta_1), \\ \rho^n &= P_K \tilde{\rho}^n. \end{cases}$$

Pour des pas de temps suffisamment petits, la densité obtenue grâce à l'algorithme stochastique et la solution exacte diffèrent uniquement sur les mailles situées à la frontière du domaine  $\Omega(t)$ . L'erreur est donc du même ordre de grandeur que le pas d'espace. Nous représentons à la figure 5.7 les solutions obtenues à différents pas de temps.

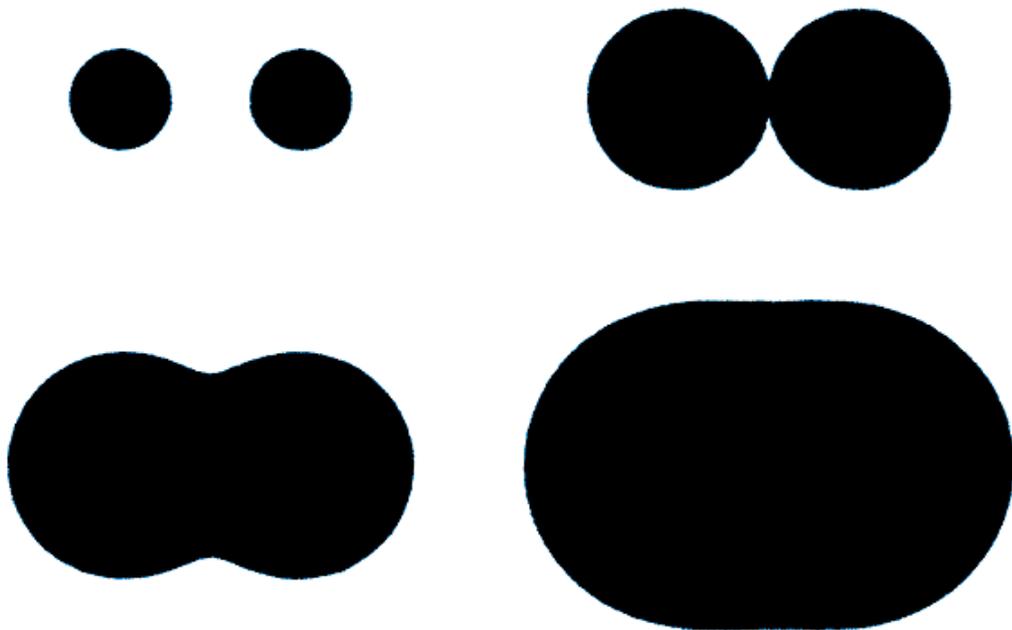


FIGURE 5.7 – Domaines obtenus pour différentes quantités de masse injectée.



Troisième partie

Programmation et tests numériques



# Chapitre 6

## Programmation

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Prise en compte du domaine</b>	<b>118</b>
6.1.1	Principe des labels	118
6.1.2	Prise en compte automatique des géométries	119
<b>6.2</b>	<b>Calcul de la vitesse souhaitée</b>	<b>120</b>
<b>6.3</b>	<b>Algorithme de splitting</b>	<b>123</b>
6.3.1	Etape de transport	123
6.3.2	Etape de projection	124

---

Nous décrivons dans ce chapitre la mise en oeuvre pratique sous `Matlab` du schéma de catching-up. Nous commençons par décrire la méthode employée pour prendre en compte la géométrie du domaine. Puis nous détaillons comment calculer la vitesse souhaitée de façon automatique dans le cas où celle-ci est donnée comme l'opposé du gradient de la distance géodésique à la sortie. Enfin, nous présentons comment ont été programmées les deux étapes du schéma de catching-up.

Nous reprenons les notations introduites dans la section 5.1. Nous considérons un maillage cartésien de centres  $x_{i,j}$ , de pas d'espace  $h$  et de taille  $M_x \times M_y$  de l'espace  $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ , et notons  $\mathbf{Rho}$  la matrice de taille  $M_x \times M_y$  où  $\rho_{i,j}$  est une approximation de la densité sur la maille  $(i, j)$ .

## 6.1 Prise en compte du domaine

La géométrie du domaine conditionne à la fois la vitesse souhaitée de la foule et son déplacement réel. Nous présentons ici une méthode qui permet de prendre en compte les obstacles, murs et sorties dans le reste de l'algorithme.

### 6.1.1 Principe des labels

La discrétisation du domaine  $\Omega$  est effectuée grâce à une matrice notée  $\mathbf{Dom}$  de taille  $M_x \times M_y$ . Celle-ci est formée de labels permettant de repérer la position d'une maille par rapport aux obstacles et aux sorties. Ces labels  $d_{i,j}$  sont définis comme suit.

$d_{i,j}$	Position de la maille $(i, j)$
-1	Obstacle sur la maille
2	Sortie sur la maille
0	Aucun obstacle à proximité et aucune sortie sur la maille
1/10/100/1000	Obstacle en dessous / à droite / au dessus / à gauche
11/101/1001	Obstacle en dessous et : à droite / au dessus / à gauche
110/1010	Obstacle à droite et : au dessus / à gauche
1100	Obstacle au dessus et à gauche

FIGURE 6.1 – Définition des labels de la matrice  $\mathbf{Dom}$ .

Un exemple de labels pour une géométrie simple est donné à la figure 6.2.

```

-1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1
-1  1100 100 100 100 100 100 100 110 -1
-1  1000 0  0  0  0  0  0  10  -1
-1  1000 0  0  1  1  0  0  10  -1
 2   0  0  10 -1 -1 1000 0  10  -1
 2   0  0  10 -1 -1 1000 0  10  -1
-1  1000 0  0 100 100  0  0  10  -1
-1  1000 0  0  0  0  0  0  10  -1
-1  1001 1  1  1  1  1  1  11  -1
-1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1  -1

```

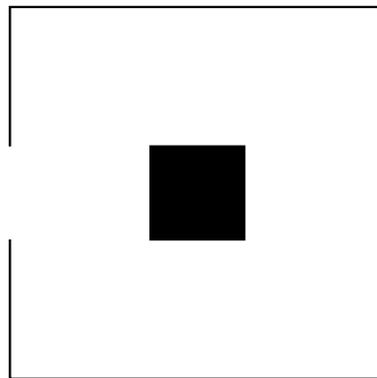


FIGURE 6.2 – Exemple de labels

### 6.1.2 Prise en compte automatique des géométries

Une première façon pour définir une géométrie est de la traduire manuellement en écrivant sa matrice associée *Dom*. Cependant, pour des géométries complexes, ce procédé peut devenir très fastidieux.

Il est cependant possible d'obtenir la matrice *Dom* de façon automatique à partir d'une image de la géométrie que l'on souhaite étudier. Pour cela, considérons une image de taille  $M_x \times M_y$  pixels représentant le domaine grâce au code de couleurs suivant :

Couleur	Signification
Noir	Obstacle ou mur
Rouge	Sortie
Blanc	Reste du domaine

FIGURE 6.3 – Usage de couleurs pour définir une géométrie.

La fonction `geometrie.m` du code repère alors ces différentes couleurs, en utilisant la fonction Matlab `imread`, et leur attribue respectivement les labels  $-1$ ,  $2$  et  $0$ . Il reste ensuite à déterminer les labels indiquant la proximité d'un obstacle. Pour cela, il suffit de repérer les mailles contenant un obstacle, et de reporter les labels correspondant dans les mailles voisines.

Ce procédé peut également être utilisé pour définir la densité initiale des personnes. En effet, il suffit pour cela de repérer par la couleur bleue la position initiale de la foule sur l'image représentant la géométrie du domaine (voir un exemple à la figure 6.4). La matrice `Rho` est alors initialisée à une densité fixée  $\rho^0$  sur ces mailles, et à  $0$  ailleurs.

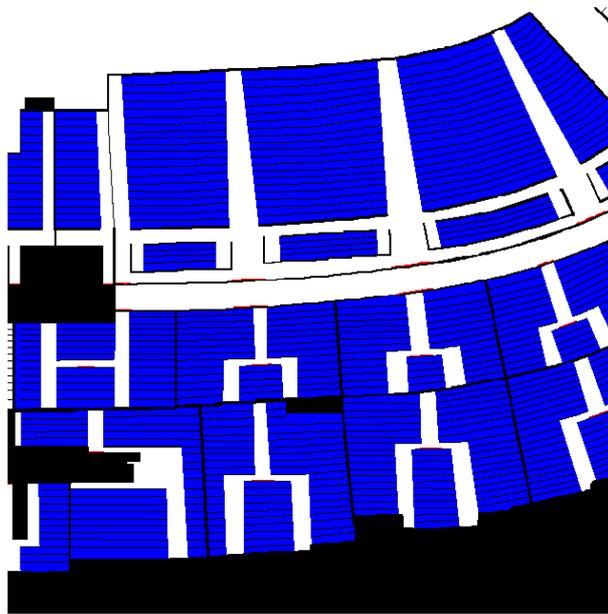


FIGURE 6.4 – Géométrie d'une partie du Stade de France.

**Remarque 6.1.1** (Taille du domaine). *Cette méthode présente l'inconvénient de fixer la taille du maillage de façon automatique, le nombre de mailles étant égal exactement au nombre de pixels. Il serait envisageable de raffiner le maillage en associant à chaque pixel non pas une maille, mais un bloc carré de 4, 9, ... mailles.*

## 6.2 Calcul de la vitesse souhaitée

Nous souhaitons définir la vitesse souhaitée de la foule au niveau des interfaces des mailles pour pouvoir utiliser l'algorithme upwind décrit dans la section 5.1.2. Nous présentons ici une méthode pour calculer cette vitesse  $\mathbf{U}$  lorsqu'elle est donnée comme l'opposé du gradient de la distance géodésique à la sortie  $D$  :

$$\mathbf{U} = -\nabla D.$$

Si cette distance  $D$  est connue sur chacune des mailles, les composantes horizontales et verticales de  $\mathbf{U}$  peuvent alors s'exprimer de manière approchée de la façon suivante

$$\begin{cases} V_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{D_{i+1,j} - D_{i,j}}{h}, \\ W_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{D_{i,j+1} - D_{i,j}}{h}. \end{cases}$$

Il reste à calculer efficacement cette distance à la sortie. L'algorithme de Fast Marching, destiné à résoudre numériquement l'équation eikonale, peut être utilisé pour calculer des distances géodésiques (voir [KS96, Set99]) en résolvant de façon approchée l'équation :

$$|\nabla D| = 1.$$

Son principe est le suivant : les points du maillage sont séparés en 3 catégories. Tout d'abord, les points dits éclairés désignent ceux pour lesquels la valeur de  $D$  est fixée. Ensuite, la zone de pénombre est constituée des points voisins des points éclairés, pour lesquels une valeur de  $D$  a été calculée, mais n'a pas encore été fixée. Enfin, la zone d'ombre désigne les points éloignés pour lesquels aucune valeur de  $D$  n'a été calculée, et où  $D$  vaut par défaut  $+\infty$ .

On initialise les points correspondant à la sortie à 0, et l'on attribue  $+\infty$  aux points situés sur des obstacles (ces derniers sont fixés, mais ne correspondent en réalité à aucune des 3 zones, car ils ne seront pas utilisés comme points éclairés dans la suite).

La distance en un point  $(i, j)$  de la zone de pénombre est calculée afin qu'elle vérifie une version approchée de  $|\nabla D| = 1$  :

$$\max(\delta_{i,j}^x, -\delta_{i+1,j}^x, 0)^2 + \max(\delta_{i,j}^y, -\delta_{i,j+1}^y, 0)^2 = 1, \quad (6.1)$$

où  $\delta_{i,j}^x$  et  $\delta_{i,j}^y$  sont les dérivées approchées de  $D$  dans les directions horizontales et verticales

$$\delta_{i,j}^x = \frac{D_{i,j} - D_{i-1,j}}{h} \quad \text{et} \quad \delta_{i,j}^y = \frac{D_{i,j} - D_{i,j-1}}{h}.$$

L'algorithme de Fast-Marching se déroule alors de la façon suivante :

*Algorithme de Fast Marching*

Tant que la distance  $D_{i,j}$  n'est pas fixée sur tout le domaine :

- déterminer le point de la zone de pénombre pour lequel la distance  $D$  est la plus petite, et l'ajouter aux points éclairés,
- ajouter ses voisins à la zone de pénombre, et calculer la valeur de  $D$  en ces nouveaux points grâce à l'équation (6.1).

Nous présentons à la figure 6.5 une étape de Fast Marching sur un exemple.

Cet algorithme peut être programmé de façon efficace en utilisant un algorithme de tas pour déterminer à chaque étape la plus petite valeur de  $D$  sur la zone de pénombre.

$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$h$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$0$	$h$	$+\infty$	$+\infty$
$0$	$h$	$+\infty$	$+\infty$
$h$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

$2h$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$h$	$h + \frac{h}{\sqrt{2}}$	$+\infty$	$+\infty$
$0$	$h$	$+\infty$	$+\infty$
$0$	$h$	$+\infty$	$+\infty$
$h$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

FIGURE 6.5 – Algorithme de Fast Marching : la zone éclairée est représentée en vert, la zone de pénombre en bleu.

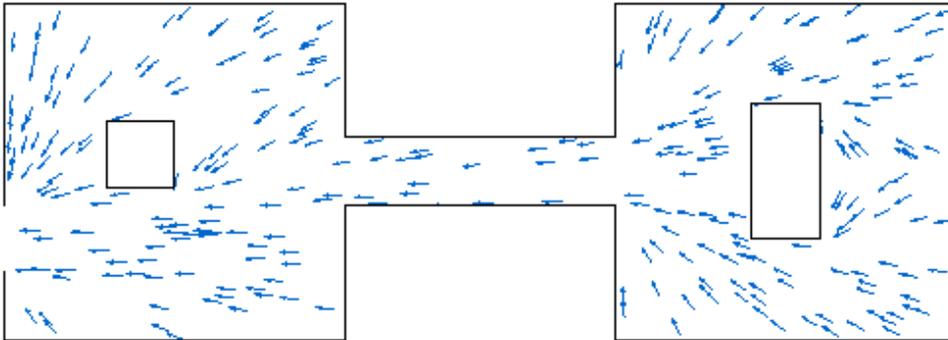


FIGURE 6.6 – Exemple de champ de vitesse souhaitée.

La fonction `vitesse_souhaitee.m` du code utilise la toolbox créée par Peyré (voir [Pey08]) et disponible en ligne pour calculer la distance géodésique, et en déduit la vitesse souhaitée pour les différentes géométries considérées dans la suite. Un exemple de champ de vitesse souhaitée est représenté à la figure 6.6.

**Remarque 6.2.1** (Concentration aux coins des obstacles). *La vitesse souhaitée calculée grâce à cette méthode est peu régulière aux coins des obstacles, en particulier aux bords des sorties. Ce problème peut être corrigé en régularisant légèrement la vitesse  $\mathbf{U}$  obtenue.*

## 6.3 Algorithme de splitting

Nous présentons ici les méthodes utilisées dans les deux étapes principales du schéma numérique : le transport à vitesse souhaitée, puis la projection sur l'ensemble des densités admissibles.

### 6.3.1 Etape de transport

#### Transport eulérien

Le schéma upwind présenté dans la section 5.1.2 se programme facilement de façon vectorielle. La fonction `transport_upwind.m` calcule ainsi la densité transportée à vitesse souhaitée pendant un temps  $dt$ . Elle utilise la fonction `Aup.m` qui calcule le flux upwind.

#### Transport lagrangien

Le transport lagrangien est plus compliqué à programmer, et nécessite de connaître la vitesse aux centres du maillage. La fonction `transport_lagrangien.m` effectue donc plusieurs étapes.

La première consiste à approcher la vitesse souhaitée aux centres des mailles en effectuant la moyenne des vitesses connues aux interfaces de la maille.

Ensuite, le transport des centres des mailles à vitesse souhaitée pendant un temps  $dt$  est effectué de façon vectorielle.

Enfin, l'étape de projection sur le maillage d'origine est plus délicate : il est nécessaire, pour chaque maille déplacée, de repérer les cases du maillage d'origine qu'elle intersecte, et de calculer leur aire commune. Cette étape ne peut se faire de façon vectorielle.

#### Correction sur les obstacles

Remarquons qu'après l'étape de transport, une partie de la foule peut se trouver sur des obstacles. Il peut donc être nécessaire de projeter ces personnes sur le domaine. Pour cela, nous proposons une méthode semblable à celle utilisée dans l'étape de projection.

*Correction sur les obstacles : schéma stochastique*

Soit  $(\hat{\rho}_{i,j})_{i,j}$  la densité transportée. Pour chaque maille  $(i,j)$  représentant un obstacle sur laquelle la densité est non nulle, on effectue les étapes suivantes :

1. Départ d'une marche aléatoire transportant la densité  $\hat{\rho}_{i,j}$ .
2. Lorsque que cette marche aléatoire rencontre une case ne représentant pas un obstacle, ajout de la densité transportée à la densité sur cette maille.

Le densité obtenue est une densité qui peut dépasser 1, mais qui est supportée par le domaine sans obstacle. Remarquons que cet algorithme stochastique tend à déposer la masse à l'endroit le plus proche de l'obstacle sur lequel elle était située, ce qui approche bien la projection sur l'extérieur des obstacles.

La fonction `correction_obstacles.m` utilise les labels de la matrice `Dom` afin de déterminer les mailles dont la densité doit être redistribuée, ainsi que les cases sur lesquelles elle peut être déposée.

### 6.3.2 Etape de projection

La fonction `proj_stoch.m` calcule l'étape de projection décrite dans la section 5.1.3 en utilisant les labels de la matrice `Dom`.

La première étape consiste à repérer les mailles sur lesquelles la densité dépasse 1. Pour chacune de ces mailles, on démarre une marche aléatoire qui se calcule de la façon suivante : sur la maille actuelle, les directions admissibles, c'est-à-dire qui ne conduisent pas à un obstacle, sont repérées grâce aux labels de la matrice `Dom`. Une direction est ensuite tirée au hasard parmi celles-ci, et la marche se déplace sur la maille correspondante. On se débarrasse alors de toute la masse qui peut y être déposée, et la marche continue jusqu'à ce que la masse transportée soit nulle.

**Remarque 6.3.1** (Temps de calcul). *L'étape de projection est celle qui nécessite le plus long temps de calcul. En effet, elle ne peut se programmer de façon vectorielle, et il est donc nécessaire de traiter chaque point sur-saturé séparément. Remarquons toutefois que la version stochastique est bien plus rapide que l'algorithme tas de sable décrit dans la section 5.2.2.*

**Remarque 6.3.2.** *Nous avons choisi d'effectuer une unique marche aléatoire pour chaque point sur-saturé. En présence d'une grande quantité de masse dépassant 1, il serait cependant judicieux de redistribuer cet excédent en plusieurs fois, à l'aide de plusieurs marches aléatoires. Ceci a un effet régularisant sur la redistribution de masse, comme illustré à la figure 6.7.*

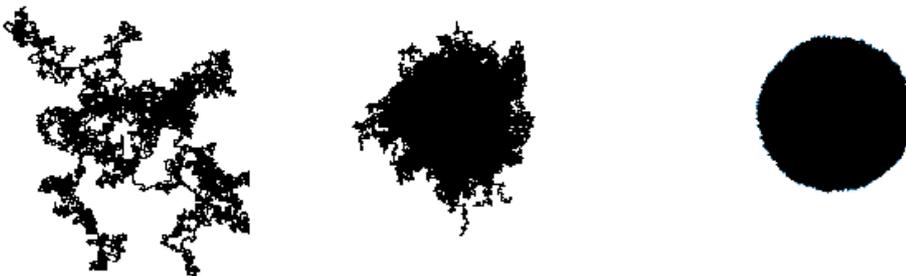


FIGURE 6.7 – Régularisation avec plusieurs marches aléatoires : à gauche, la projection d'un dirac en 0 à l'aide d'une seule marche aléatoire, au milieu avec 100, et à droite avec 10000.

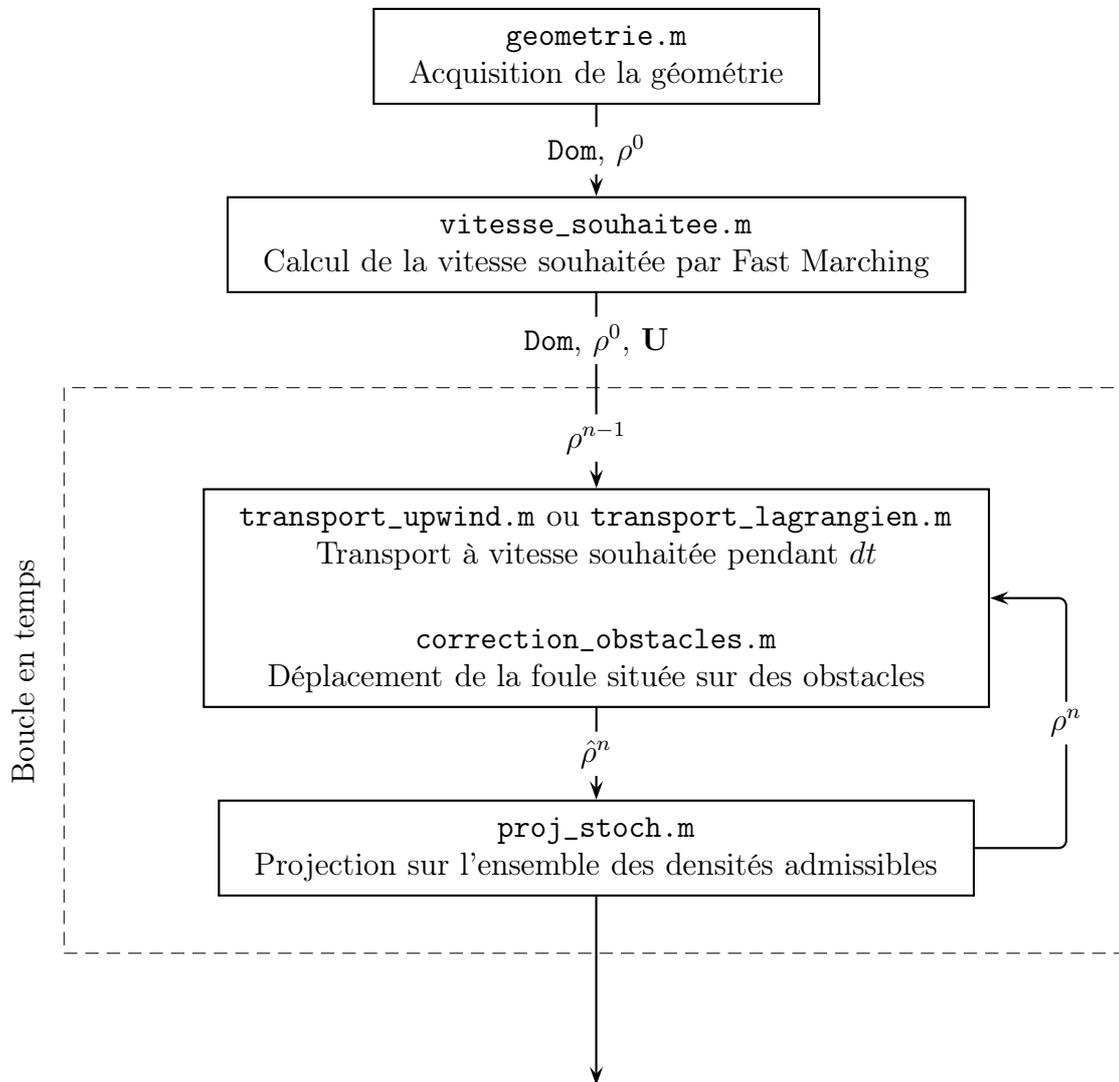


FIGURE 6.8 – Algorithme général.



# Chapitre 7

## Tests numériques

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Premières géométries</b>	<b>128</b>
7.1.1	Evacuation de deux pièces	128
7.1.2	Evacuation d'un métro	129
7.1.3	Evacuation d'un théâtre	130
<b>7.2</b>	<b>Comparaison avec le modèle microscopique</b>	<b>131</b>
7.2.1	Densité d'une configuration microscopique	131
7.2.2	Comparaison sur un cas particulier	133
7.2.3	Différences entre microscopique et macroscopique	135
<b>7.3</b>	<b>Un exemple concret : l'évacuation du Stade de France</b>	<b>137</b>

---

Nous décrivons dans ce chapitre les tests effectués sur différentes géométries. Nous comparons en particulier les résultats obtenus avec ceux donnés par le modèle microscopique. Enfin, nous étudions un exemple concret : l'évacuation du Stade de France.

## 7.1 Premières géométries

Les premiers tests de l'algorithme décrit précédemment ont été réalisés sur des géométries simples, afin d'observer le comportement général de la foule. Les deux premières géométries présentées reprennent des cas tests étudiés par J. Venel au cours de sa thèse (voir [Ven08]).

### 7.1.1 Evacuation de deux pièces

Dans un premier exemple, nous considérons le cas de deux pièces reliées par un couloir. La géométrie et la vitesse souhaitée correspondante ont été données à la figure 6.6 du chapitre précédent. La densité initiale est fixée à 0.2 sur tout le domaine.

La figure 7.1 présente l'évolution de la densité à différents temps. Remarquons la formation en amont des obstacles de lignes de séparation : les personnes adoptent le plus court chemin vers la sortie, et se dirigent donc vers la gauche ou la droite d'un obstacle en fonction de leur position d'origine. Nous pouvons également constater la formation de zones saturées aux coins des obstacles ainsi qu'aux bords de la porte. Ces endroits sont effectivement ceux où l'on a concentration du champ de vitesse souhaitée.

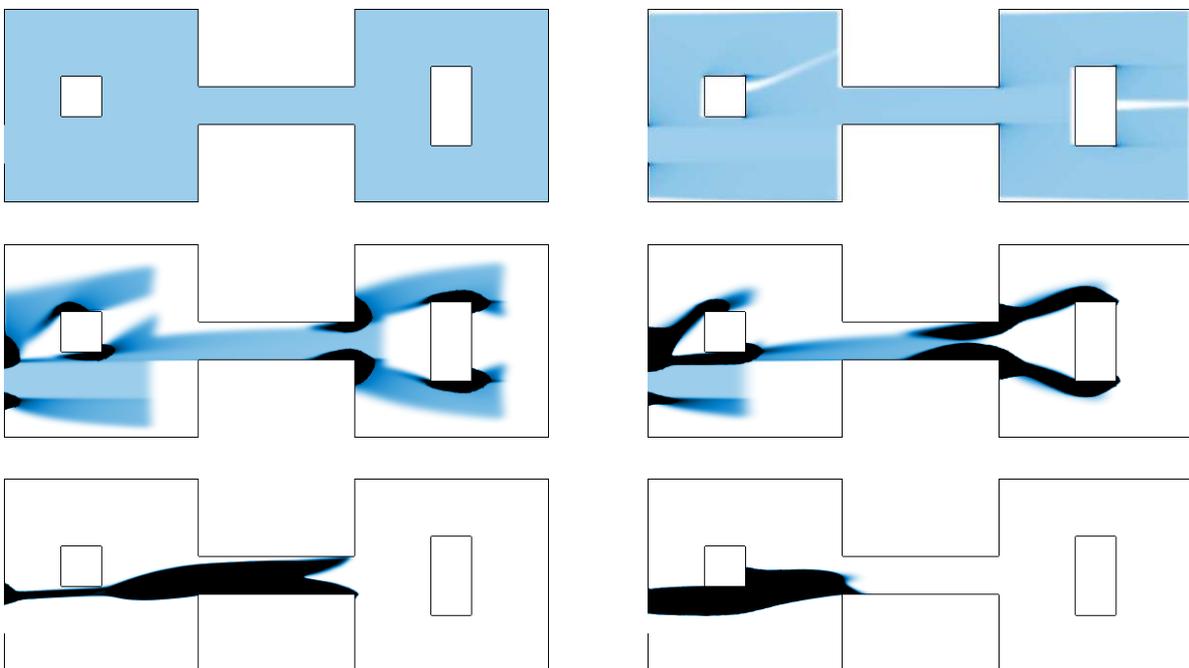


FIGURE 7.1 – Evacuation de deux pièces.

### 7.1.2 Evacuation d'un métro

Ce cas test représente l'évacuation de trois wagons de métro. Le champ de vitesse souhaitée est donné à la figure 7.2.

On retrouve la formation de zones saturées aux coins des sorties. De plus, on constate sur les dernières images que les personnes, comme dans le modèle microscopique, ont tendance à former une zone saturée en forme de cercle autour de la sortie.

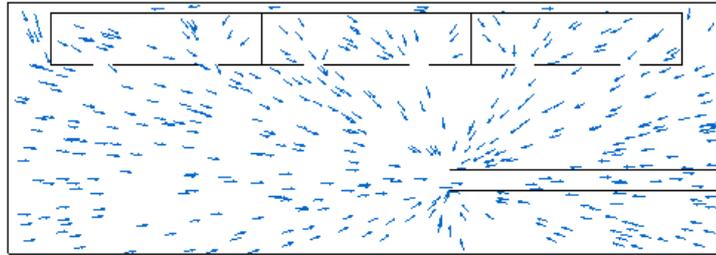


FIGURE 7.2 – Champ de vitesse souhaitée pour l'évacuation d'un métro.

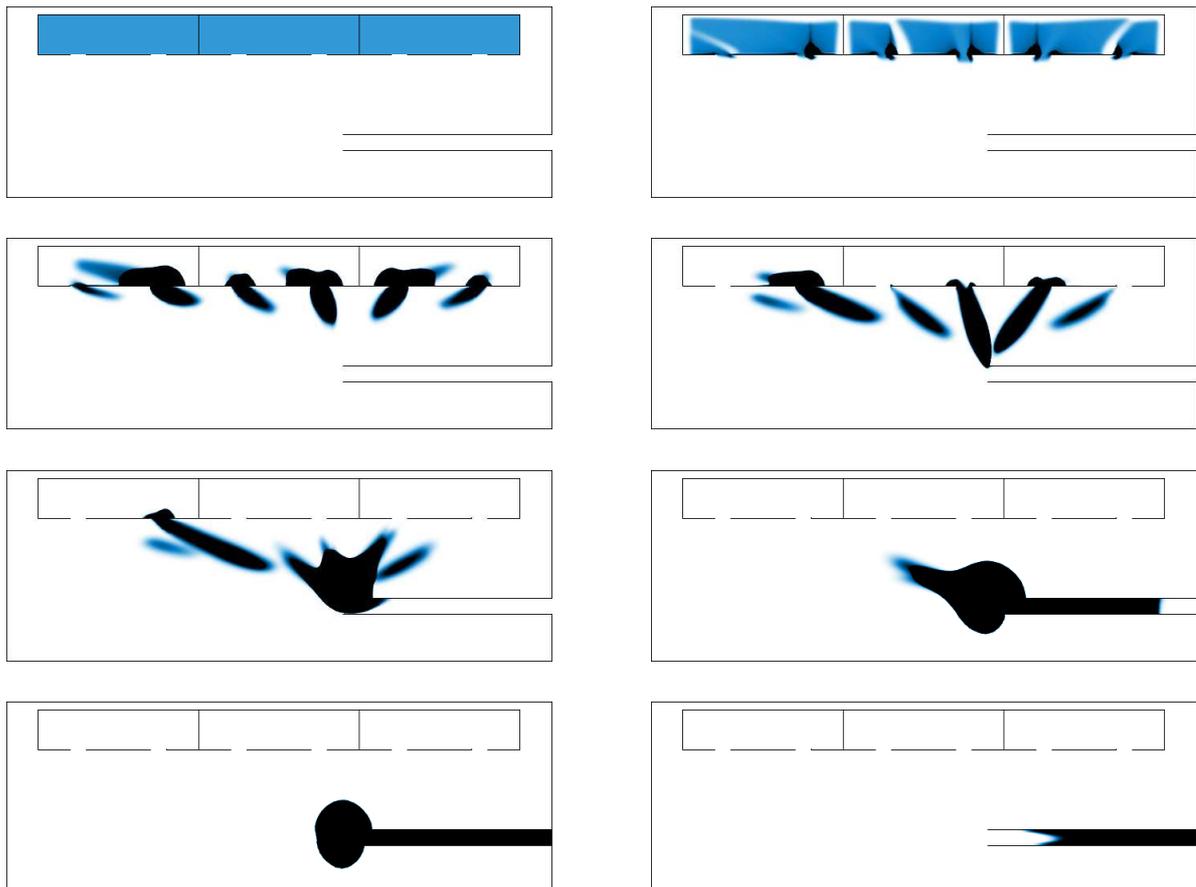


FIGURE 7.3 – Evacuation d'un métro.

### 7.1.3 Evacuation d'un théâtre

Nous présentons dans ce cas test l'évacuation d'un théâtre. La densité initiale de la foule est saturée sur les sièges, et nulle ailleurs.

Remarquons à nouveau la formation de lignes de séparation au milieu des rangées, dépendant de la quantité de personnes sortant à gauche ou à droite.

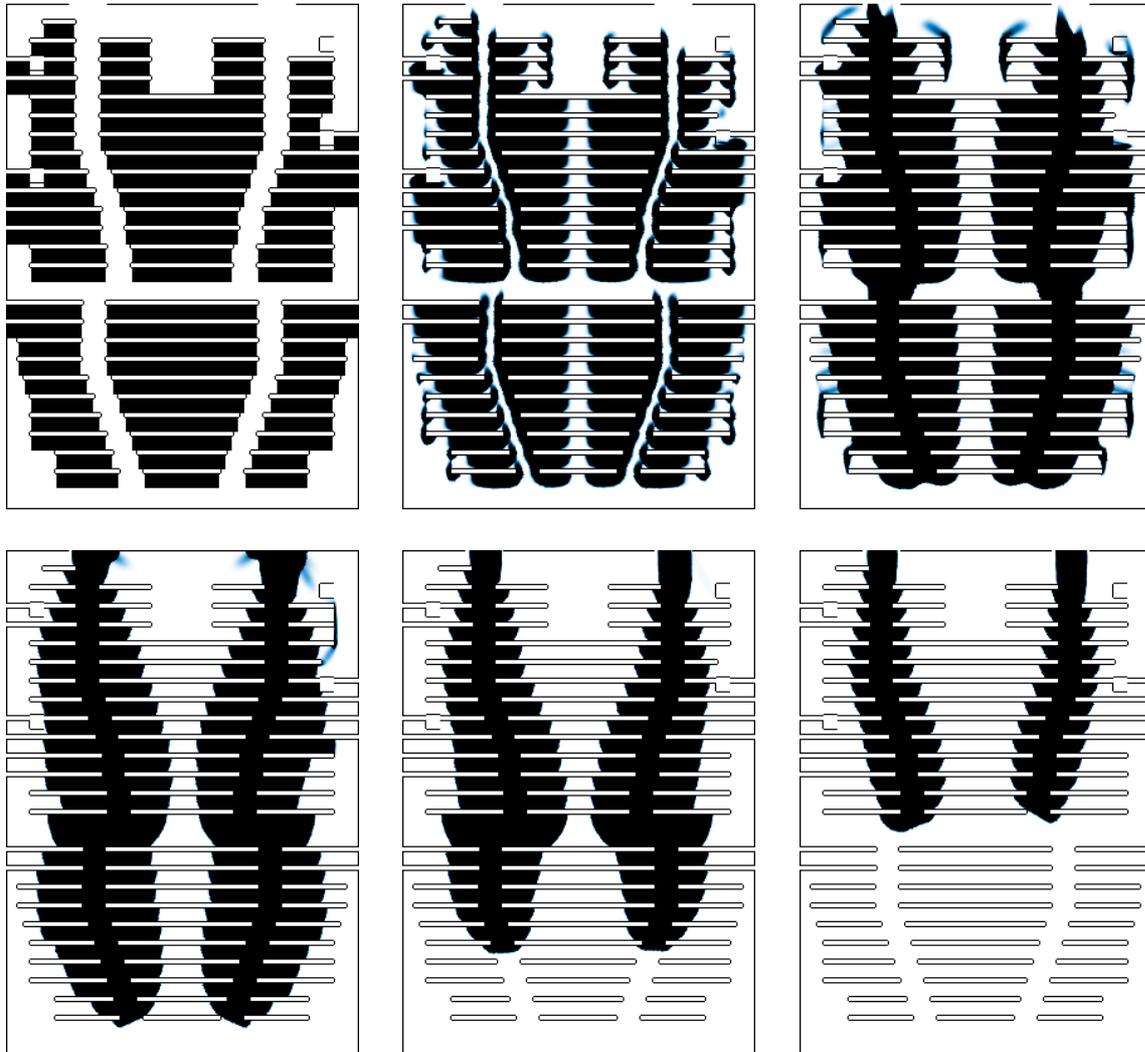


FIGURE 7.4 – Evacuation d'un théâtre.

**Remarque 7.1.1** (Suivi des personnes). *Au fur et à mesure de l'évacuation, le nombre de personnes dans chaque rangée diminue. Une question naturelle est de savoir si les gens attendent chacun dans la rangée où ils se trouvaient initialement, ou bien si une partie des gens avance dans le couloir avant d'être à nouveau coincée dans une rangée. Il est impossible de répondre à cette question en observant uniquement la densité de la foule, car on ne peut suivre l'évolution d'un individu en particulier. Le chapitre 8 permet de répondre en partie à ces questions.*

## 7.2 Comparaison avec le modèle microscopique

Nous avons présenté dans la section précédente des cas tests qui reprenaient des géométries étudiées par J. Venel grâce au modèle microscopique. Nous avons constaté un comportement global de la foule assez semblable pour les deux modèles, en particulier concernant les zones saturées. Ils présentent cependant des différences profondes. En particulier, le modèle macroscopique ne reproduit pas les blocages observés dans le modèle microscopique.

Dans la suite, nous nous proposons de comparer plus précisément ces deux approches (voir également [MRCV11]).

### 7.2.1 Densité d'une configuration microscopique

Le principal problème rencontré pour associer une densité à une configuration microscopique est que la notion de densité maximale pour un ensemble de disques n'est pas définie de façon claire. En effet, il est connu que pour des disques de même rayon, on ne peut trouver de configuration ayant une densité supérieure à  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \simeq 0.9069$  en dimension 2, et  $\frac{\pi}{3\sqrt{2}} \simeq 0.74048$ . Ces densités maximales correspondent en dimension 2 à un réseau triangulaire des centres des disques, et en dimension 3 à un arrangement tétraédrique en "pile d'orange" (voir la figure 7.5).

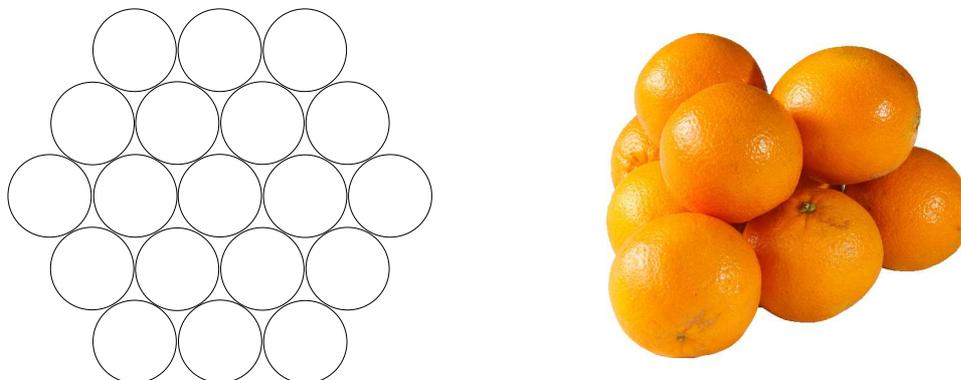


FIGURE 7.5 – Configurations de disques et sphères de densité maximale.

Cependant, certaines configurations, de densité strictement inférieure à ces densités maximales, peuvent être des configurations rigides, pour lesquelles aucun disque ne peut être déplacé sans bouger également tous les autres disques du système (voir [TTD00, LS90]). C'est le cas par exemple du réseau cartésien, de densité  $\frac{\pi}{4} \simeq 0.79\dots$ , ou du réseau triangulaire creux qui a pour densité  $\frac{\pi\sqrt{3}}{8} \simeq 0.68\dots$  (voir la figure 7.6).

Il est ainsi difficile de trouver la densité maximale qu'il convient d'utiliser pour comparer les modèles microscopiques et macroscopiques. Les tests numériques confirment cette indétermination. En effet, en évaluant par exemple la densité moyenne des disques au

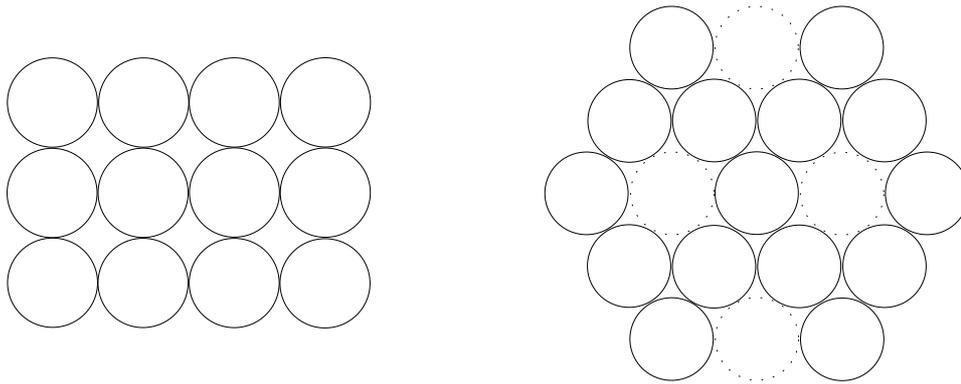


FIGURE 7.6 – Configurations bloquées de densité inférieure à 0.9.

voisinage d'une sortie, on trouve des densités maximales variant entre 0.85 et 0.87 pour des disques de même rayon (voir figure 7.7).

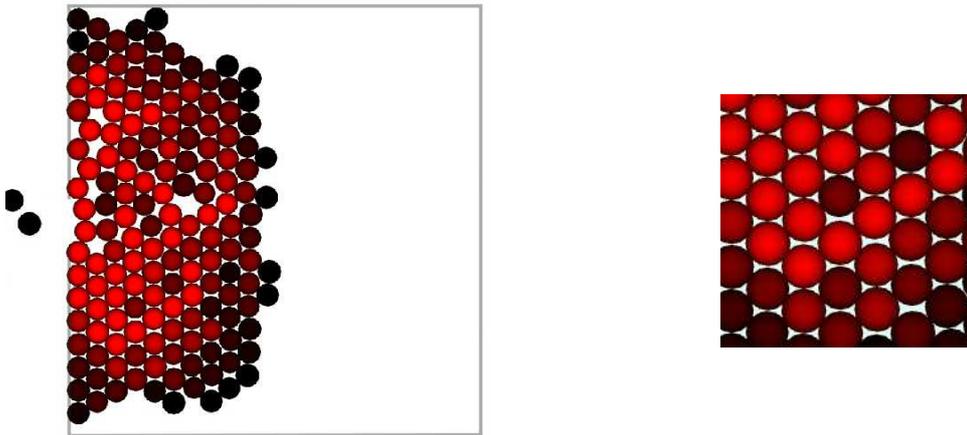


FIGURE 7.7 – Densité maximale au voisinage d'une sortie.

### 7.2.2 Comparaison sur un cas particulier

Nous nous proposons de comparer les deux modèles numériquement sur le cas particulier suivant : considérons une pièce comportant 5 obstacles, dont la géométrie et la vitesse souhaitée sont représentées à la figure 1.7.

Comme expliqué précédemment, il est délicat de trouver la densité macroscopique correspondant le mieux à une configuration microscopique initiale donnée. Dans le cas d'une densité initiale uniforme, nous avons choisi d'adopter la méthode suivante : nous évaluons tout d'abord la densité moyenne de la configuration microscopique initiale, puis nous la renormalisons par la densité maximale rencontrée lors de ce cas test. Dans ce cas particulier (voir la figure 7.8), la densité moyenne de départ est de 0.53, et la densité maximale de 0.81, ce qui donne une densité macroscopique initiale de 0.65.

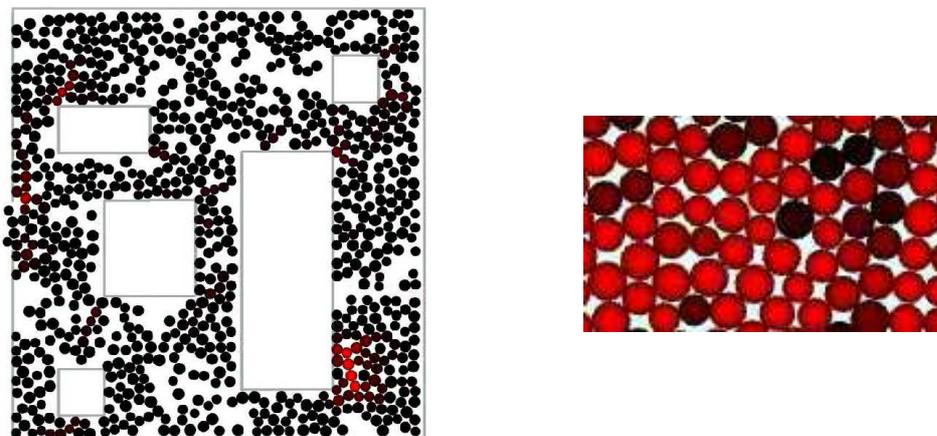


FIGURE 7.8 – Configuration microscopique initiale et densité maximale.

Comparons l'évolution des deux modèles pour plusieurs pas de temps. Au début de l'évacuation (voir la figure 7.9 en haut), la formation des zones saturées est très proche dans les deux modèles. On remarque la formation des mêmes lignes de séparation, et les zones vides sont sensiblement situées aux mêmes endroits.

Cependant, le comportement au niveau de la sortie est très différent pour les deux modèles. En effet, le modèle macroscopique est beaucoup plus fluide en amont de la sortie, et l'évacuation s'y fait donc plus rapidement (voir la figure 7.9 au milieu et en bas). Ce comportement est expliqué plus en détails dans la section suivante.

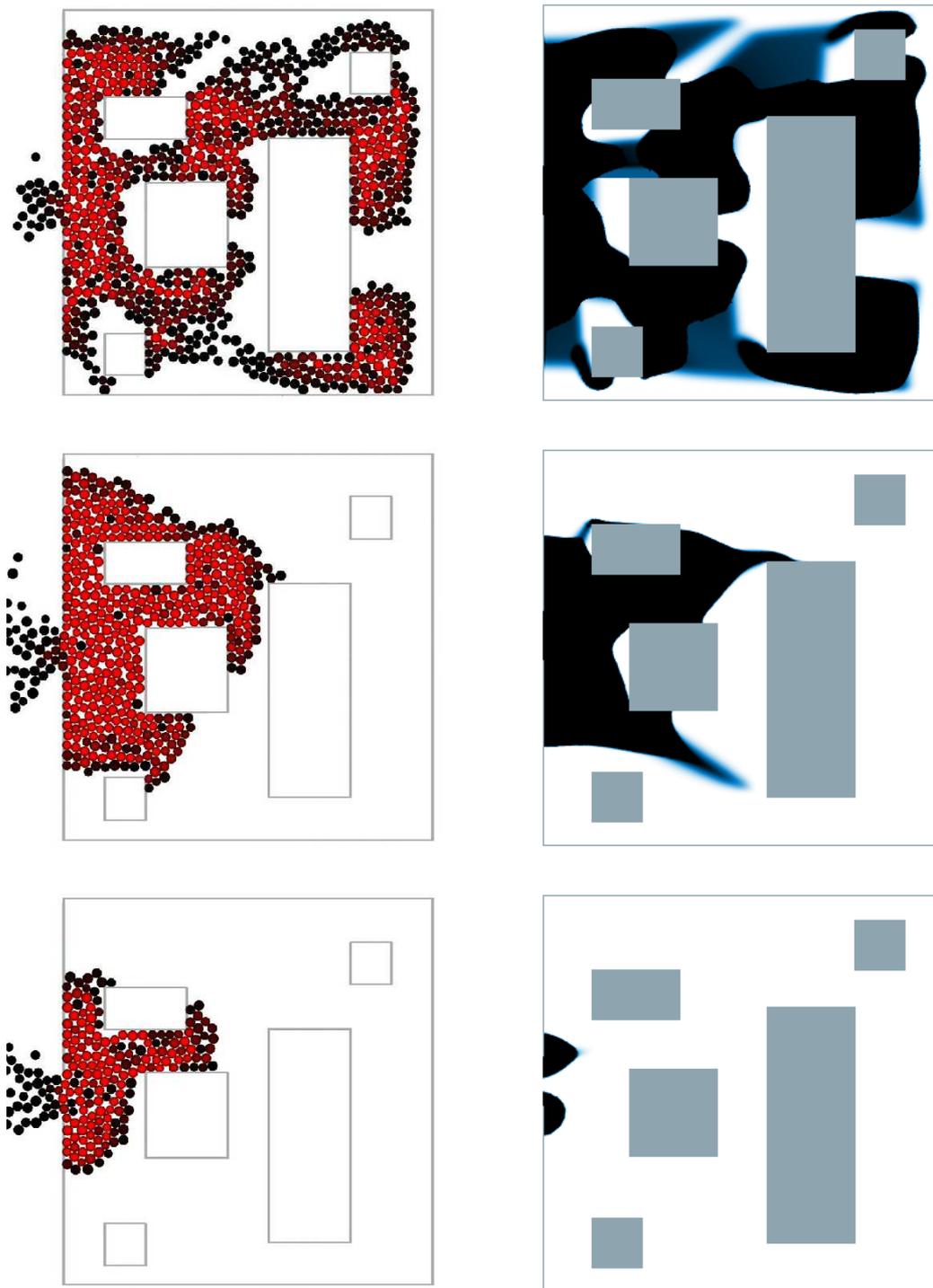


FIGURE 7.9 – Evacuation d’une pièce comportant 5 obstacles : configurations microscopiques (à gauche) et macroscopiques (à droite) pour différents pas de temps.

### 7.2.3 Différences entre microscopique et macroscopique

#### Situations de blocage

Une des principales différences entre les deux modèles est que l'évolution microscopique dépend énormément de l'arrangement géométrique des disques. En effet, la formation de configurations bloquées entre certains disques ralentit l'évacuation comme nous l'avons constaté sur les simulations précédentes. Le modèle microscopique permet même de retrouver la formation d'arches bloquées au niveau des sorties, qui est un phénomène observé en pratique dans des évacuations réelles.

Dans le modèle macroscopique, en revanche, l'évacuation est toujours réalisée de façon "fluide". En particulier, il est impossible de voir apparaître un blocage au niveau de la sortie. En effet, considérons une zone saturée en amont d'une porte. La composante normale de la vitesse réelle au niveau de la porte est exactement

$$V = \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} - \frac{\partial p}{\partial n},$$

où la pression  $p$  vérifie une équation de Poisson sur la zone saturée, avec des conditions de Neumann homogènes sur le mur, et des conditions de Dirichlet homogènes sur la sortie et sur la frontière de la zone saturée (voir la figure 7.10). D'après le principe du maximum, on a  $p$  positive sur la zone saturée, et donc

$$\frac{\partial p}{\partial n} \leq 0$$

sur la sortie. Or la vitesse  $\mathbf{U}$  est sortante, donc  $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} > 0$  et la vitesse réelle  $V$  est strictement positive au niveau de la sortie. On en déduit que les gens ne sont jamais bloqués à la sortie, et que dans le cas saturé, ils sortent même plus rapidement qu'en suivant leur vitesse souhaitée.

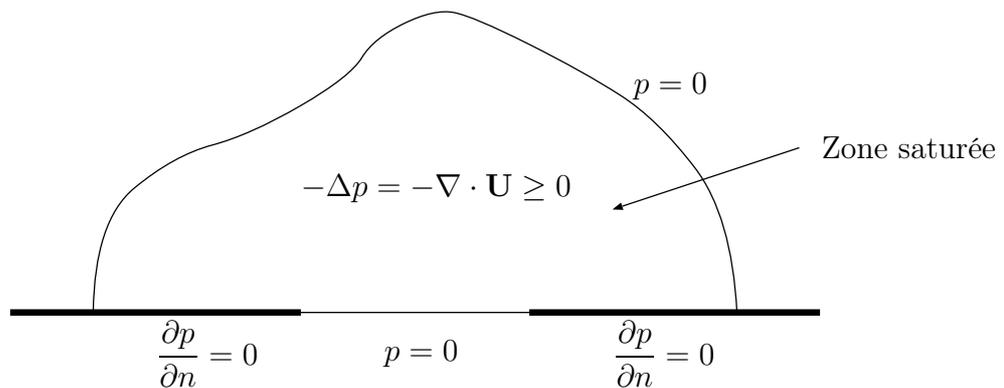


FIGURE 7.10 – Comportement du modèle macroscopique à la sortie

Dans le même ordre d'idée, le modèle microscopique permet de retrouver qu'ajouter un obstacle en amont d'une porte fluidifie la sortie des personnes et permet une évacuation plus rapide. Ce principe bien connu pour des évacuations réelles ne pourra pas être retrouvé dans le modèle macroscopique. Pour ce dernier, l'ajout d'un obstacle ralentit toujours l'évacuation de la foule.

## Convergence

Malgré les différences soulignées dans le paragraphe précédent, il est naturel de se demander si le modèle microscopique converge en un certain sens vers le modèle macroscopique.

Notons que la notion de convergence demande à être précisée. Tout d'abord, il est nécessaire d'associer à tout ensemble de disques une densité : pour une configuration microscopique de  $N$  disques de rayon  $r$ , considérons la densité valant 1 sur les disques et 0 ailleurs, et renormalisons la par la densité maximale d'un ensemble de disques (1 en dimension 1,  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$  en dimension 2, ...) pour obtenir la densité macroscopique associée  $\rho_N$ . L'idée est alors de faire tendre le nombre de disques  $N$  vers  $+\infty$  dans une configuration initiale  $\rho_N^0$  (tout en gardant une masse constante, donc en faisant tendre  $r$  vers 0 de façon à ce que  $Nr^d$  reste constant), et de regarder si l'évolution microscopique  $\rho_N$  converge bien vers l'évolution macroscopique obtenue à partir de la limite  $\rho^0$ .

**Remarque 7.2.1** (Renormalisation des densités). *Il est nécessaire de renormaliser la densité de la configuration microscopique par la densité maximale afin d'obtenir une densité macroscopique comprise entre 0 et 1. En effet, même dans le cas du réseau triangulaire, faire tendre le nombre de disques vers  $+\infty$  permet d'obtenir une densité macroscopique maximale de  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ .*

Dans le cas de la dimension 1, une telle convergence semble possible. En effet, les configurations bloquées sont exactement les configurations de densité maximale. En revanche, le cas de la dimension 2 est bien plus délicat. Nous présentons deux exemples pour lesquels il ne peut y avoir convergence.

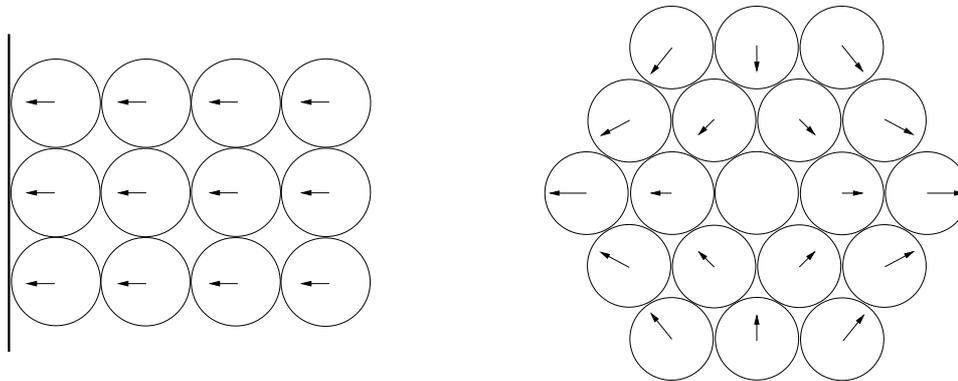


FIGURE 7.11 – Contre-exemples pour la convergence du modèle microscopique.

Considérons tout d'abord le cas du réseau cartésien, avec un champ de vitesse souhaitée  $\mathbf{U} = -\mathbf{e}_x$  (voir la figure 7.11 à gauche). Cette configuration est bloquée pour le modèle microscopique. Cependant, la densité limite macroscopique n'est pas saturée, car la densité du réseau cartésien est strictement inférieure à celle du réseau triangulaire. On a donc concentration jusqu'à atteindre une densité saturée pour le modèle macroscopique, et aucune évolution pour le microscopique.

Il existe également d'autres problèmes que la différence entre densité maximale et configuration bloquée. Prenons cette fois l'exemple du réseau triangulaire, qui conduit à une densité macroscopique saturée. Les champs de vitesses admissibles dans le cas microscopique doivent vérifier à la limite des contraintes dans chacune des 3 directions principales du réseau. A l'inverse, dans le cas macroscopique, la contrainte doit avoir lieu dans toutes les directions. La figure 7.11 (à droite) présente un champ de vitesse microscopique admissible ne diminuant pas la densité du réseau, tandis que le champ macroscopique associé

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x \\ -y \end{pmatrix}$$

est lui strictement expansif.

**Remarque 7.2.2** ( $\Gamma$ -convergence). *Dans le cas où la vitesse souhaitée est un gradient, les modèles microscopique et macroscopique peuvent tous deux s'exprimer comme des flots-gradients. Or la convergence d'une suite de flots-gradients peut se déduire, sous certaines conditions (voir [Ser]), de la  $\Gamma$ -convergence de la suite de fonctionnelles d'insatisfaction associées.*

Rappelons qu'une suite de fonctionnelles  $(\Phi_n)_n$   $\Gamma$ -converge vers  $\Phi$  si pour tout  $x$ , on a

$$\Phi(x) \leq \liminf_{+\infty} \Phi_n(x_n)$$

pour toute suite  $(x_n)$  qui tend vers  $x$ , et si cette borne inférieure est optimale, c'est-à-dire que pour tout  $x$ , il existe une suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$  telle que

$$\Phi(x) \geq \limsup_{+\infty} \Phi_n(x_n).$$

À nouveau, une telle convergence semble vérifiée en dimension 1 dans notre cas, mais pas en dimension supérieure.

## 7.3 Un exemple concret : l'évacuation du Stade de France

Nous présentons ici les résultats obtenus en simulant l'évacuation du Stade de France. La géométrie a été obtenue en utilisant un schéma de ce stade (voir la figure 6.4), et la densité initiale a été choisie saturée sur les bancs, et nulle ailleurs.

La vitesse souhaitée pour une partie du stade est donnée à la figure 7.12.

L'évacuation du stade est très similaire à l'évacuation du théâtre évoquée plus haut. On remarque à nouveau la formation de lignes de séparation au milieu des rangées, et la concentration de la foule au niveau des sorties et des couloirs qui y mènent.

Remarquons que l'évacuation est très efficace, du fait que le stade est divisé en de nombreuses tribunes possédant toutes une sortie accessible. Pour une vitesse souhaitée de 0.5 m/s, qui est la vitesse moyenne de marche dans un escalier (voir [Fru71]), on trouve un temps d'évacuation d'environ 4 minutes. Ce temps est du même ordre de grandeur que le record d'évacuation réelle du stade jusqu'au parvis, qui est de 7 minutes.

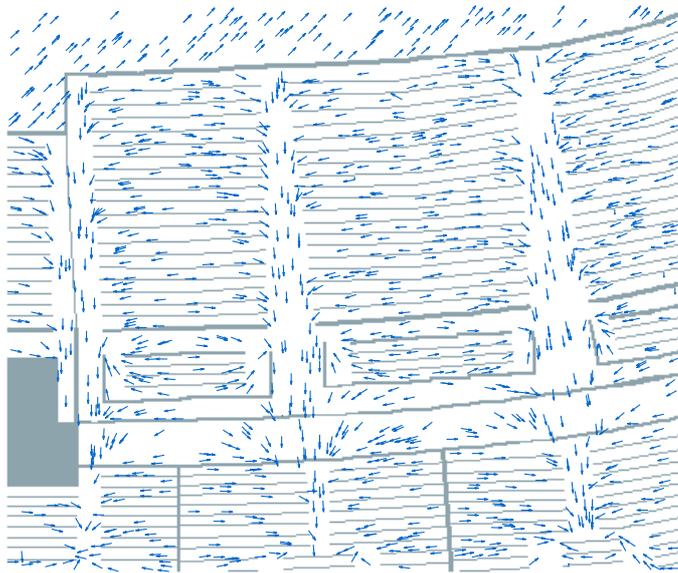


FIGURE 7.12 – Vitesse souhaitée pour l'évacuation du Stade de France.

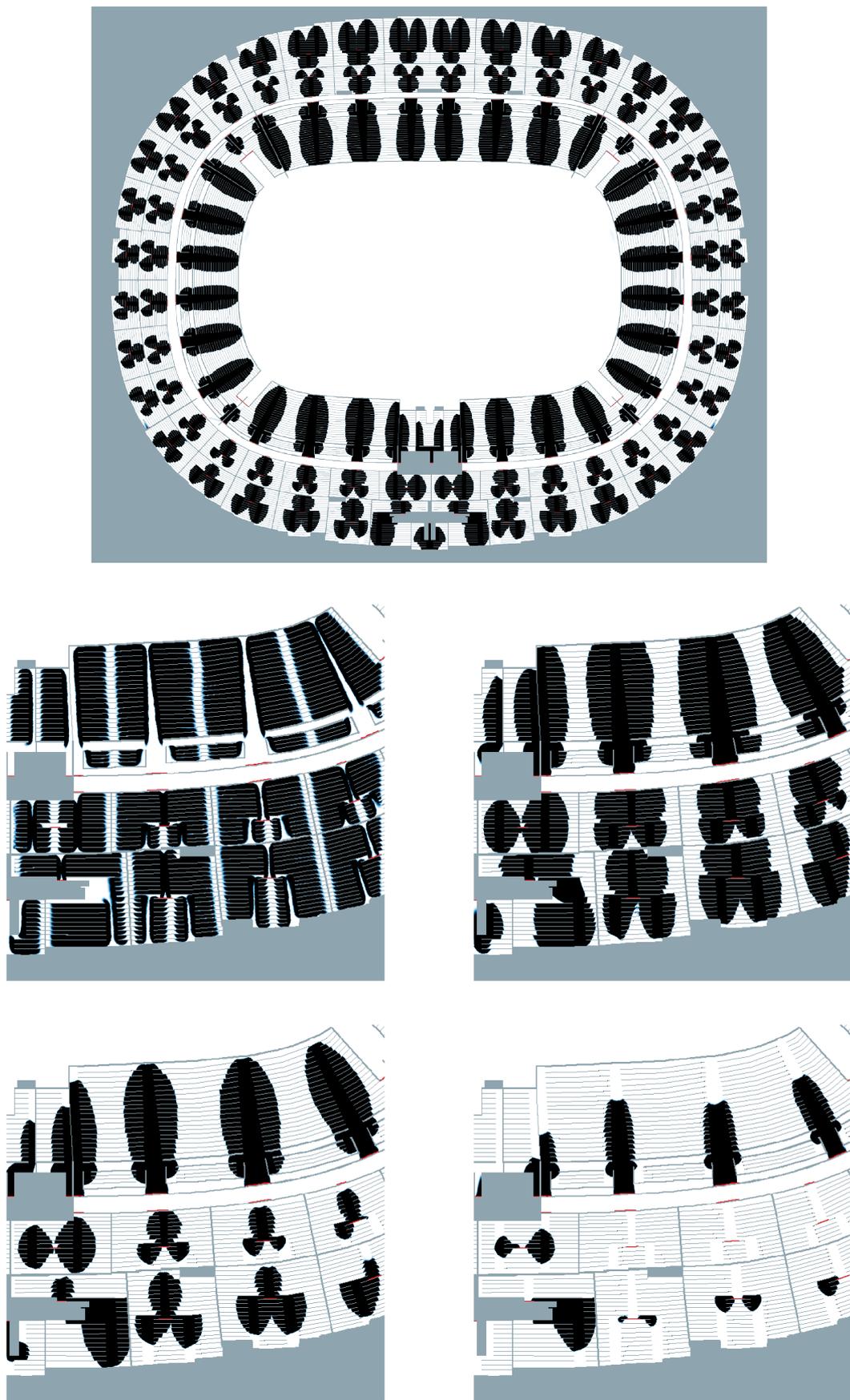


FIGURE 7.13 – Evacuation du Stade de France.



# Chapitre 8

## Suivi des personnes au sein de la foule

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Calcul de la pression et de la vitesse réelle</b>	<b>142</b>
<b>8.2</b>	<b>Test dans le cas du cône convergent</b>	<b>144</b>
<b>8.3</b>	<b>Exemples numériques</b>	<b>145</b>
8.3.1	Calcul de la pression	145
8.3.2	Suivi des personnes	147

---

Comme souligné précédemment, le suivi des personnes pour le modèle macroscopique ne peut se faire à partir de la densité : il est nécessaire de connaître la vitesse réelle de la foule, qui n'est pas calculée par l'algorithme de splitting. Nous présentons ici une méthode permettant de calculer cette vitesse réelle au cours de l'étape de projection.

## 8.1 Calcul de la pression et de la vitesse réelle

L'idée est de calculer la pression sur la zone saturée, et d'en déduire la vitesse réelle grâce à la relation :

$$\mathbf{U} = \mathbf{u} + \nabla p.$$

Une première solution consisterait à utiliser l'équation de Poisson vérifiée par  $p$  sur la zone saturée, avec des conditions de Neumann homogènes sur les murs, et des conditions de Dirichlet homogènes ailleurs. Cependant, résoudre une EDP sur la zone saturée est un problème délicat. En effet, cette zone peut avoir une géométrie complexe, et est modifiée à chaque étape. Une méthode de pénalisation peut être envisagée, mais serait assez coûteuse.

Nous avons donc privilégié une autre solution, inspirée des algorithmes stochastiques présentés à la section 5.2.2. Considérons  $\hat{\rho}^n$ , la densité transportée pendant un pas de temps  $dt$ , et effectuons l'algorithme tas de sable. La fonction odomètre  $u^n$  (voir la définition 5.2.2), représentant la quantité totale de masse émise par chaque case du maillage, est une fonction positive, ayant pour support la zone saturée, et vérifiant l'équation discrète en dimension 2 :

$$\frac{1}{4} (u_{i-1,j}^n + u_{i+1,j}^n + u_{i,j-1}^n + u_{i,j+1}^n) - u_{i,j}^n = 1 - \hat{\rho}_{i,j}^n.$$

Montrons formellement que cette fonction approche, à une constante multiplicative près, la pression  $p^n$ . Rappelons (voir la section 2.3.3) que la pression  $p^n$  vérifie

$$\frac{\mathbf{id} - \mathbf{r}^n}{dt} + \nabla p^n = 0,$$

où  $\mathbf{r}^n$  est le transport optimal entre la densité projetée  $\rho^n$  et la densité transportée  $\hat{\rho}^n$ . Or on a vu (voir la section 5.1.3) que la vitesse discrète

$$\mathbf{w}^n = \frac{\mathbf{id} - \mathbf{r}^n}{dt}$$

vérifie, au premier ordre en  $dt$  :

$$\nabla \cdot (dt \mathbf{w}^n) = \hat{\rho}^n - 1.$$

On en déduit que  $p^n$  vérifie l'équation de Poisson suivante

$$\Delta p^n = \frac{1}{dt} (1 - \hat{\rho}^n).$$

En discrétisant  $p^n$  sur le maillage, on obtient l'équation discrète suivante

$$\frac{p_{i+1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i-1,j}^n}{h^2} + \frac{p_{i,j+1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j-1}^n}{h^2} = \frac{1}{dt} (1 - \hat{\rho}_{i,j}^n).$$

Cette équation est à un facteur multiplicatif près l'équation vérifiée par  $u^n$ . On a donc, au moins formellement,

$$p^n = \frac{h^2}{4 dt} u^n.$$

Nous proposons ainsi l'algorithme suivant pour calculer la pression.

*Calcul de la pression : algorithme stochastique*

Soit  $(\hat{\rho}_{i,j}^n)_{i,j}$  la densité transportée pendant un temps  $dt$ . Pour chaque maille  $(i, j)$  sur laquelle la densité est sur-saturée, on effectue les étapes suivantes :

1. Ajout de la masse supplémentaire renormalisée à la pression  $p_{i,j}^n$

$$p_{i,j}^n = p_{i,j}^n + \frac{h^2}{4 dt} m_{i,j},$$

où  $m_{i,j} = \hat{\rho}_{i,j} - 1$ , et départ d'une marche aléatoire transportant  $m_{i,j}$ .

2. Lorsque cette marche aléatoire rencontre une case  $(k, l)$  sous-saturée, dépose d'autant de masse qui peut y être ajoutée sans dépasser 1. Ajout de la masse qui reste (renormalisée) à la pression  $p_{k,l}^n$ .

3. Arrêt de la marche lorsque la masse transportée a été entièrement redistribuée.

**Remarque 8.1.1.** *Il suffit de modifier l'algorithme de projection stochastique pour calculer la pression en même temps, ce qui n'ajoute aucun temps de calcul par rapport à l'algorithme de base.*

Le calcul de la vitesse réelle  $\mathbf{u}^n$  est ensuite très simple : il suffit de calculer le gradient discret de la pression  $p^n$  obtenue pour trouver la vitesse au bord des mailles. Ainsi, les composantes horizontales et verticales  $(v^n, w^n)$  de  $\mathbf{u}^n$  sont données à partir des composantes  $(V, W)$  de la vitesse souhaitée par

$$\begin{cases} v_{i-\frac{1}{2},j}^n = V_{i-\frac{1}{2},j} - \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{h}, \\ w_{i,j-\frac{1}{2}}^n = W_{i,j-\frac{1}{2}} - \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{h}. \end{cases} \quad (8.1)$$

**Remarque 8.1.2.** *En pratique, la pression obtenue par l'algorithme stochastique est très irrégulière. Il est donc nécessaire d'effectuer la moyenne de plusieurs marches aléatoires pour obtenir un champ de vitesse raisonnable. Il est aussi possible de régulariser légèrement la pression avant de calculer son gradient discret.*

## 8.2 Test dans le cas du cône convergent

Nous reprenons ici le cas du cône convergent, dont la géométrie et le champ de vitesse souhaitée sont donnés à la figure 1.9. Nous avons calculé à la section 1.3.2 la solution exacte dans ce cas particulier, et nous nous proposons de comparer ces résultats à l'algorithme précédent.

Pour cela, nous appliquons l'algorithme sur une portion de cône  $[a, R]$ , avec  $a = 3$  et  $R = 10$ , et nous faisons la moyenne de la pression et de la vitesse réelle obtenues le long des rayons  $r \in [a, R]$ . Nous traçons ensuite ces valeurs moyennées en fonction de  $r$ , et les comparons avec la pression et la vitesse réelle théorique.

La figure 8.1 présente les résultats à deux pas de temps distincts. On constate des oscillations dues à la faible régularité de la pression calculée grâce à l'algorithme stochastique. Cependant, les résultats sont assez proches de la solution théorique, comme espéré.

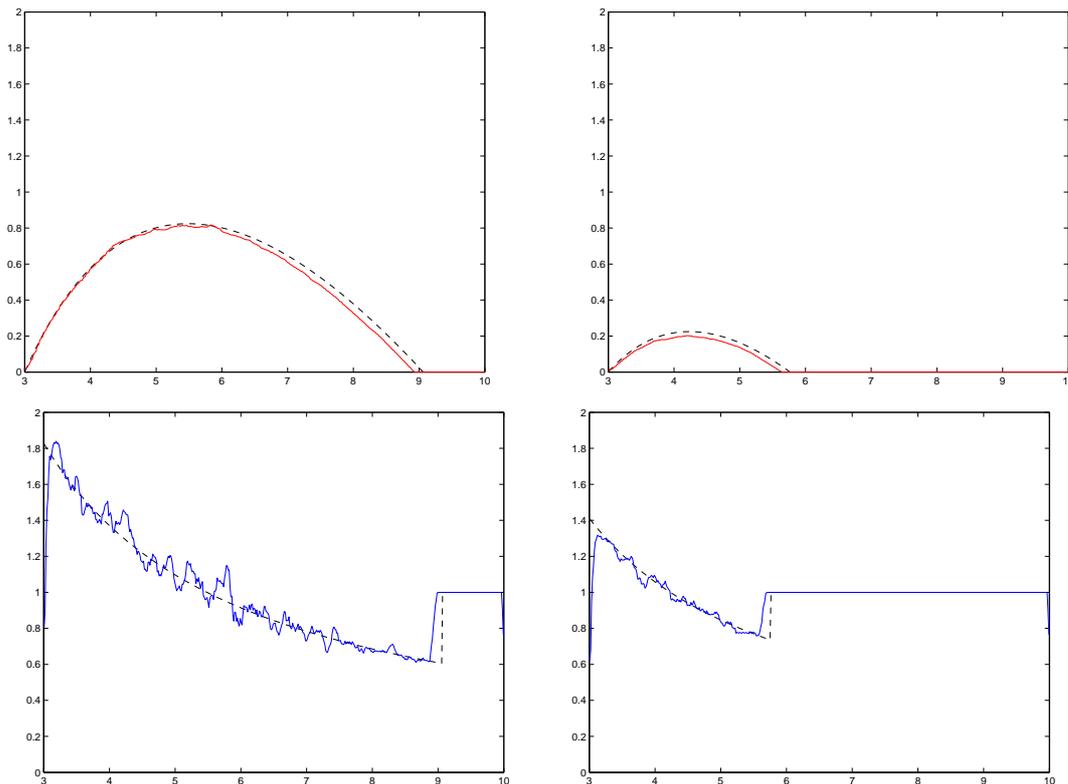


FIGURE 8.1 – Pression et vitesse réelle : en pointillés, la solution exacte, et en trait plein la solution calculée grâce à l'algorithme stochastique.

## 8.3 Exemples numériques

### 8.3.1 Calcul de la pression

Nous présentons tout d'abord le calcul de la pression réalisé à l'aide de l'algorithme stochastique. Nous traçons cette pression sur la zone saturée en niveaux de rouges : le rouge correspond à la pression maximale, et le noir à une pression nulle.

La figure 8.2 représente le champ de pression à différents pas de temps pour l'exemple du théâtre décrit plus haut. On remarque que la pression est maximale dans les couloirs, et est nulle à l'extrémité des rangées.

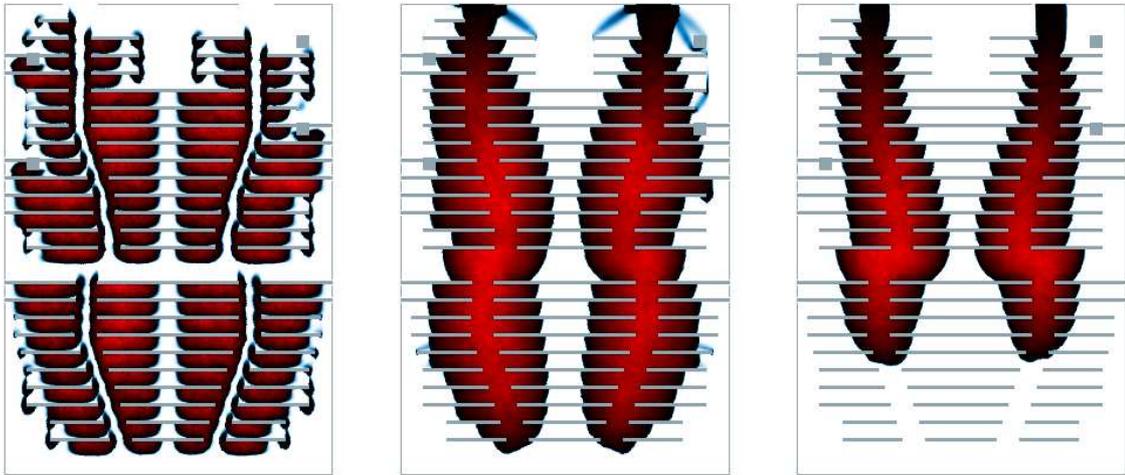


FIGURE 8.2 – Champ de pression pour l'évacuation du théâtre.

La figure 8.3 compare le champ de pression obtenu pour le modèle macroscopique et celui obtenu dans le cas microscopique (représenté lui aussi en niveaux de rouges). Remarquons la grande similarité entre les zones de pression maximale.

Enfin, la figure 8.4 présente les lignes de niveaux de la pression au niveau d'une sortie dans les cas microscopique et macroscopique. On constate à nouveau le même comportement dans les deux modèles : la pression est maximale au milieu de la zone saturée, et diminue en amont du bouchon, et plus étonnamment au niveau de la sortie. En réalité, les personnes qui arrivent au voisinage de la sortie sont en quelque sorte protégées par celles qui se pressent en amont, et la compression se relâche juste avant de sortir.

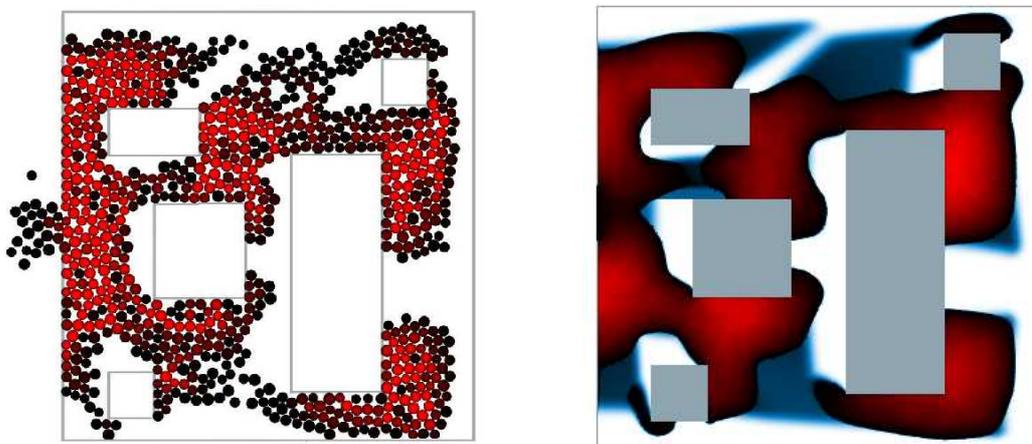


FIGURE 8.3 – Champ de pression microscopique (à gauche) et macroscopique (à droite).

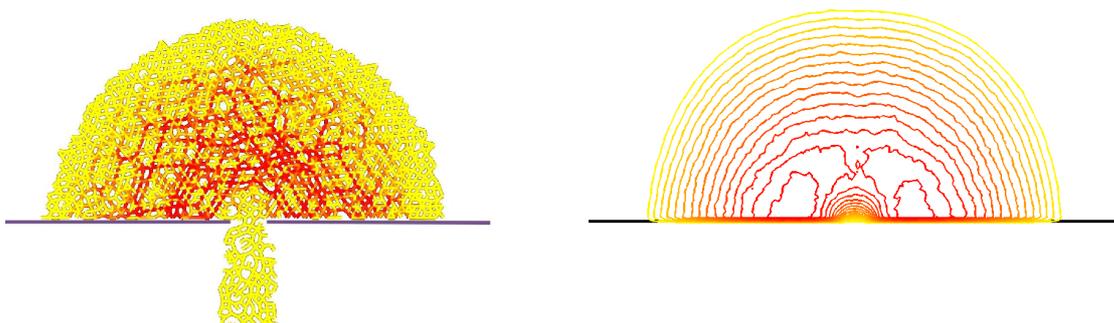


FIGURE 8.4 – Lignes de niveau de la pression au niveau d'une sortie.

### 8.3.2 Suivi des personnes

Une fois le champ de vitesse réelle connu, il est facile de suivre l'évolution d'une personne au milieu de la foule.

La figure 8.5 présente l'évolution de 10 personnes réparties aléatoirement dans une pièce contenant 5 obstacles. On constate un comportement général conforme à l'intuition : les personnes ralentissent à l'entrée d'un bouchon, et sont accélérées à la sortie. On peut également remarquer que certaines personnes peuvent se retrouver coincées dans une zone saturée au bord d'un obstacle pendant un long moment, avant de réussir à repartir, au plus tard lorsque la zone n'est plus saturée. Ce comportement a déjà été constaté dans le modèle microscopique : il arrive que certaines personnes, pourtant très proches de la sortie, se retrouvent bloquées par la foule sans pouvoir sortir de la pièce.

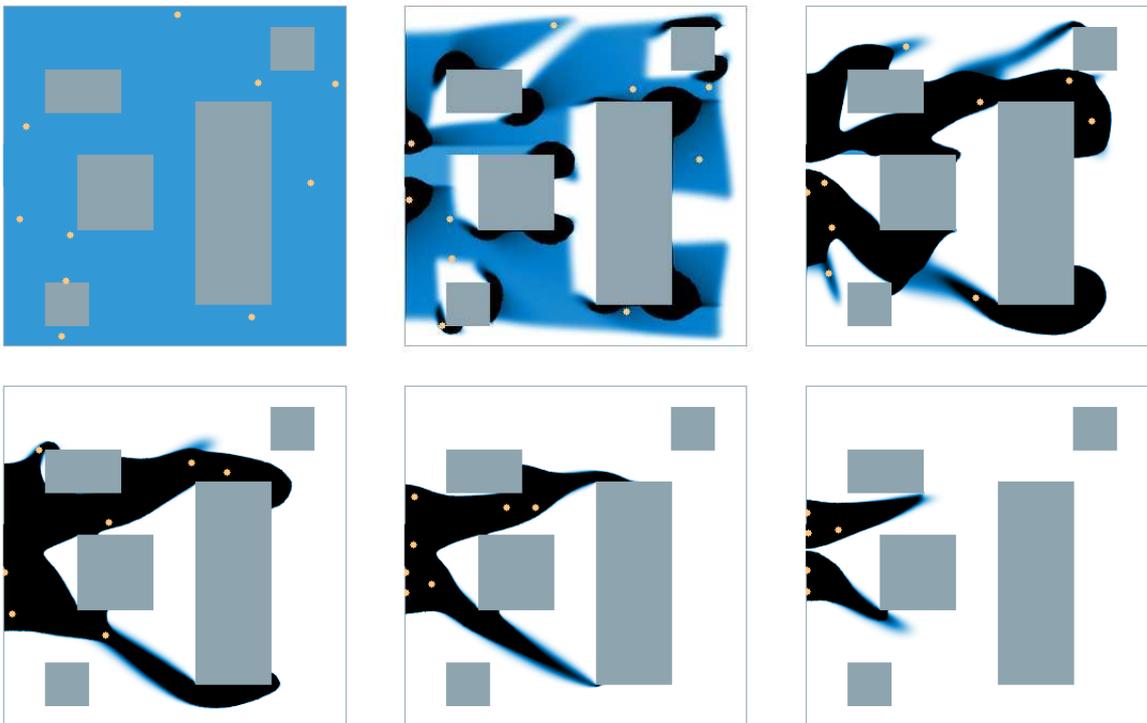


FIGURE 8.5 – Suivi de personnes pour une pièce contenant 5 obstacles.

La figure 8.6 représente l'évolution de 15 personnes réparties aléatoirement dans les rangées d'un théâtre. Le comportement remarqué plus haut est ici flagrant : une grande majorité des individus se retrouvent bloqués dans leur rangée de départ, et n'atteignent le couloir que lorsque les personnes situées devant elles sont passées. Une fois le couloir atteint, cependant, elle rejoignent très vite la sortie.

Enfin, nous avons tracé sur la figure 8.7 quelques trajectoires pour ces deux exemples. Les couleurs représentent l'évolution dans le temps : en vert sont représentés les emplacements des personnes au temps initial, et au fur et à mesure que le temps avance, la



FIGURE 8.6 – Suivi de personnes lors de l'évacuation du théâtre.

trajectoire change de couleur jusqu'à atteindre le rouge. Les figures de gauche représentent les trajectoires pour une densité initiale de la foule très faible (0.05 ici). On constate que les trajectoires sont alors quasiment des trajectoires de flot-gradient. En revanche, sur les figures de droite, la densité initiale est plus élevée (0.4 dans le cas des 5 obstacles, 1 pour le théâtre). Les trajectoires sont alors fortement déviées du plus court chemin vers la sortie, en particulier aux abords des obstacles. On remarque même dans le cas du théâtre que de nombreuses trajectoires sont stoppées pendant un long moment contre le bord d'un obstacle.

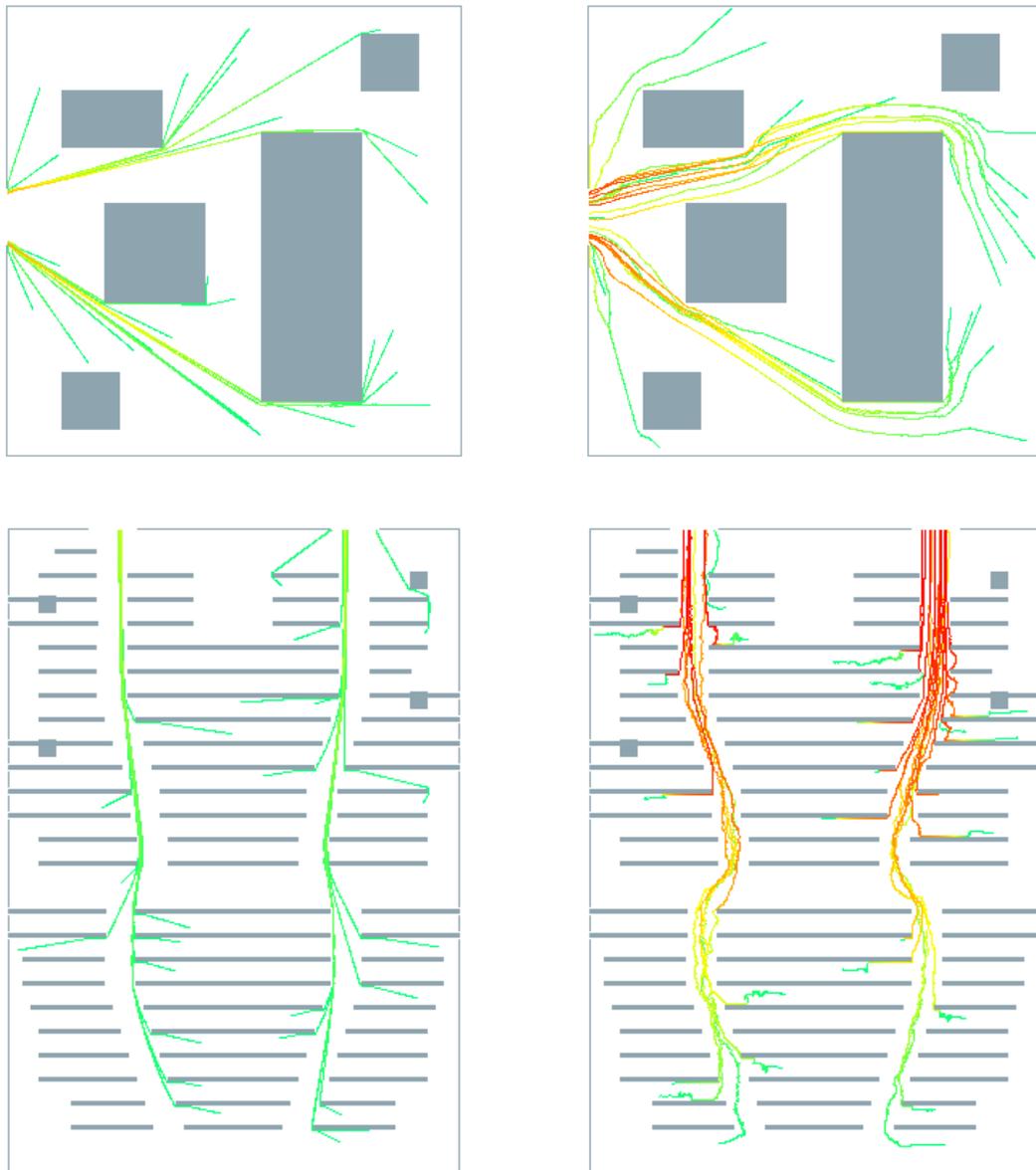


FIGURE 8.7 – Trajectoires pour deux densités initiales.



# Perspectives



# Chapitre 9

## Perspectives

### Sommaire

---

9.1	Vers un modèle à plusieurs populations . . . . .	154
9.2	Ajout de stratégies : modéliser les ralentissements . . . . .	155
9.3	Un modèle de chimiotaxie . . . . .	159

---

Nous présentons dans ce dernier chapitre quelques perspectives envisageables pour améliorer notre modèle. Nous détaillons tout d'abord comment prendre en compte plusieurs populations ayant des vitesses souhaitées distinctes, sans que le domaine soit totalement saturé comme au chapitre 3. Nous donnons quelques exemples de stratégies pouvant être incluses dans le modèle afin de prendre mieux en compte les aspects sociaux des mouvements de foule. Enfin, nous décrivons un modèle de chimiotaxie comportant une contrainte de congestion, qui peut être étudié grâce aux mêmes principes que le modèle de mouvements de foule.

## 9.1 Vers un modèle à plusieurs populations

Il est naturel de s'intéresser au cas où plusieurs populations poursuivent des objectifs différents au sein de la foule. Nous avons montré au chapitre 3 p.59 que dans le cas saturé, ce modèle se formalise très bien et admet au moins une solution. Le cas général ne permet pas d'exprimer l'une des densités en fonction de l'autre, et ne peut donc être étudié grâce à la même méthode.

Rappelons les notations introduites au chapitre 3 : nous considérons deux populations 1 et 2, de densités respectives  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , et ayant pour vitesses souhaitées  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$ . Ces deux populations doivent vérifier la contrainte de densité maximale dans leur ensemble, c'est-à-dire que la somme de leurs densités ne doit pas excéder 1 :

$$\rho_1 + \rho_2 \leq 1.$$

Il est nécessaire d'introduire une vitesse de correction commune  $\mathbf{w}$  qui assure que cette contrainte de congestion globale est bien vérifiée. Nous choisissons à nouveau la vitesse minimisant la norme  $L^2$ . L'évolution des deux populations est alors donnée par le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_1(\mathbf{U}_1 + \mathbf{w})) = 0, \\ \partial_t \rho_2 + \nabla \cdot (\rho_2(\mathbf{U}_2 + \mathbf{w})) = 0, \end{cases}$$

où la vitesse de correction  $\mathbf{w}$  doit vérifier le problème de point-selle : trouver  $\mathbf{w} \in L^2(\Omega)$  et  $p$  dans l'espace des pressions

$$H_{\rho_1, \rho_2}^1(\Omega) = \{q \in H^1(\Omega), q \geq 0 \text{ p.p. dans } \Omega, q = 0 \text{ p.p. dans } [\rho_1 + \rho_2 < 1]\},$$

tels que  $(\mathbf{w}, p)$  vérifient

$$\begin{cases} \mathbf{w} + \nabla p = 0, \\ \int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 \mathbf{U}_2 + \mathbf{w}) \cdot \nabla q \leq 0, \quad \forall q \in H_{\rho_1, \rho_2}^1(\Omega), \end{cases}$$

ainsi que la relation de complémentarité

$$\int_{\Omega} (\rho_1 \mathbf{U}_1 + \rho_2 \mathbf{U}_2 + \mathbf{w}) \cdot \nabla p = 0.$$

Il n'est plus possible d'exprimer l'une des densités en fonction de l'autre comme dans le cas saturé. La démonstration d'existence du chapitre 3 n'est donc plus valable, car nous ne pouvons pas découpler les deux densités pour obtenir la décomposition de la vitesse souhaitée et faire apparaître une pression commune sur la zone saturée.

Remarquons que l'approche catching-up pose également problème. Cette dernière consisterait à déplacer les densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$  à leur vitesse souhaitée, puis à projeter, pour la distance de Wasserstein dans  $\mathcal{P}(\Omega) \times \mathcal{P}(\Omega)$ , le couple  $(\rho_1, \rho_2)$  sur l'ensemble des densités admissibles donné ici par

$$K = \{(\rho_1, \rho_2) \in \mathcal{P}(\Omega)^2 : \rho_i \ll \mathcal{L}^d, \rho_1 + \rho_2 \leq 1 \text{ p.p.}\}.$$

Malheureusement, cet ensemble ne vérifie plus certaines hypothèses utilisées dans la démonstration d'existence. En particulier, nous avons montré au chapitre 3 (voir la figure 3.1) qu'il n'est plus géodésiquement convexe.

## 9.2 Ajout de stratégies : modéliser les ralentissements

Comme pour le cas de plusieurs populations, l'ajout de stratégies individuelles (en particulier si les individus ont des comportements différents) dans le cas macroscopique est rendu difficile par le caractère eulérien du modèle. Il est toutefois possible de rendre compte de certains comportements de la foule. En particulier, il est naturel de considérer que la vitesse souhaitée des personnes dépende de la densité locale de la foule, à l'instar des modèles de trafic routier.

Nous présentons ici une façon simple de prendre en compte le fait que les personnes ont tendance à vouloir ralentir dans les zones fortement saturées. La façon la plus naturelle de tenir compte de ce ralentissement est de faire dépendre la vitesse souhaitée de la densité locale instantanée : à l'instant  $t$ , les personnes situées au point  $x \in \Omega$  auront pour vitesse souhaitée  $\mathbf{U}_{\rho(t,x)}(t, x)$ . Pour modéliser un ralentissement dans les zones congestionnées, il suffit alors de prendre une vitesse  $\mathbf{U}_\rho$  de la forme

$$\mathbf{U}_\rho = \alpha(\rho)\mathbf{U}, \tag{9.1}$$

où  $\mathbf{U}$  est la vitesse souhaitée d'une personne seule, qui est fixée, et  $\alpha(\rho)$  est un coefficient d'amortissement positif, décroissant en  $\rho$ . Remarquons que seule la norme de la vitesse souhaitée dépend de la densité locale : les personnes ne cherchent pas à modifier leur direction, et donc n'essayeront pas de "contourner" les bouchons, mais ralentissent lorsqu'elles sont dans une zone à forte densité.

L'évolution de la foule est alors donnée par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}_\rho, \end{cases}$$

où  $\mathbf{U}_\rho$  est donnée par l'équation 9.1.

Il reste à choisir le comportement du facteur d'amortissement  $\alpha(\rho)$ . Des expériences menées sur des piétons permettent de tracer l'évolution de la vitesse des personnes en

fonction de leur densité. Le diagramme de la figure 9.1 provient des travaux de Seyfried et al. (voir [SSKB05]) et de ceux de Weidmann (voir [Wei93]).

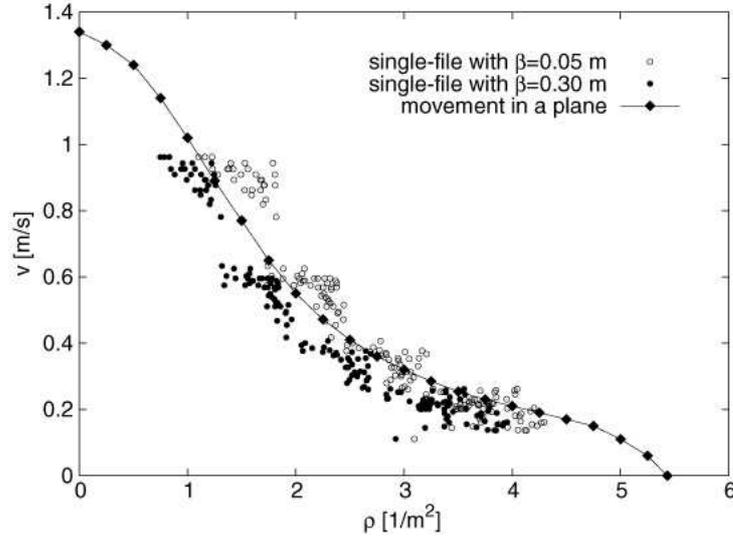


FIGURE 9.1 – Diagramme fondamental reliant vitesse et densité des piétons.

Un choix possible pour le facteur  $\alpha$  consiste alors à reproduire ce comportement pour la vitesse souhaitée. Il est possible par exemple de supposer que dans une zone saturée, un piéton souhaite ralentir, et adopter une vitesse minimale de norme inférieure à sa vitesse souhaitée

$$\|\mathbf{U}_{min}\|_{\infty} = \lambda \|\mathbf{U}\|_{\infty}.$$

Le coefficient  $\alpha$  peut alors être choisi en interpolant entre  $\lambda$  et 1, selon la courbe représentée à la figure 9.1.

Le schéma de catching-up permet à nouveau de calculer l'évolution de la densité. Il suffit simplement d'estimer à chaque étape la vitesse souhaitée de la foule.

Pour cela, nous choisissons la méthode suivante : les vitesses horizontales et verticales sont modifiées en tenant compte de la direction dans laquelle elles pointent. Par exemple (voir la figure 9.2), si la vitesse  $V_{i-\frac{1}{2},j}$  est strictement positive, et donc si  $\mathbf{U}$  pointe vers la maille  $(i, j)$ , la nouvelle vitesse pour cette interface est donnée par

$$V_{i-\frac{1}{2},j}^n = \alpha(\rho_{i,j}^n) V_{i-\frac{1}{2},j}.$$

Ce choix est naturel dans le sens où les personnes adaptent leur vitesse en fonction des gens qui se trouvent devant elles.

Il est intéressant de remarquer que si le facteur d'amortissement  $\alpha$  satisfait certaines propriétés, la densité  $\rho$  vérifie un principe du maximum discret pour l'étape de transport, et l'étape de projection sur l'ensemble des densités admissibles devient alors inutile. En

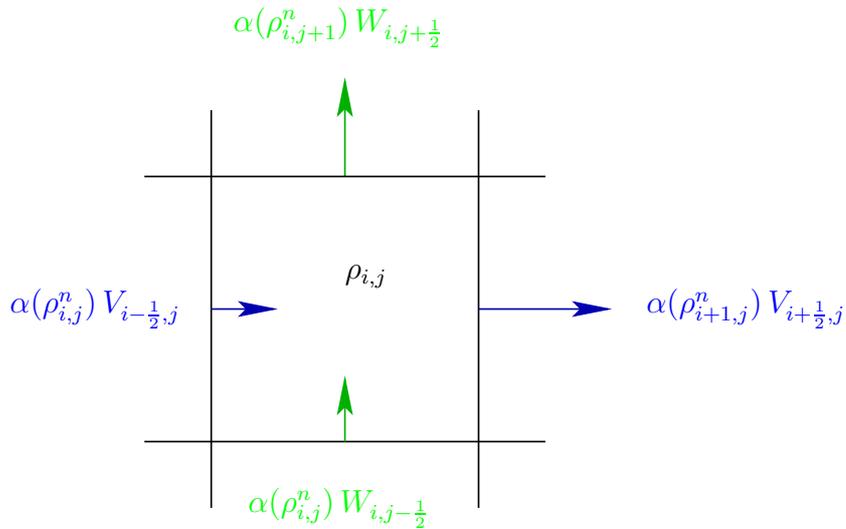
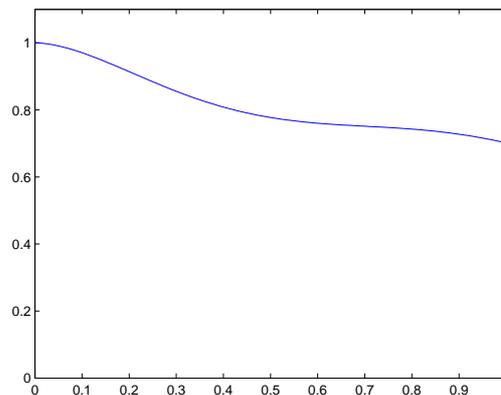


FIGURE 9.2 – Vitesses modifiées aux interfaces.

particulier, dans le cas où  $\alpha$  s'annule sur un intervalle  $[1 - \beta, 1]$ , il est possible de montrer que la densité discrète vérifie le principe du maximum. Nous décrivons plus précisément ce résultat dans l'annexe **D**.

Nous testons ce modèle sur le cas d'une pièce comportant 5 obstacles, pour une densité initiale de 0.2. Le facteur d'amortissement utilisé suit le comportement naturel de la foule constaté expérimentalement, et est donné à la figure 9.3.

FIGURE 9.3 – Facteur d'amortissement  $\alpha$  utilisé dans les simulations.

Nous représentons sur la figure 9.4 l'évolution de la densité dans le cas d'une vitesse variable à gauche, et d'une vitesse souhaitée fixe à droite. Notons que la formation des zones saturées est plus lente dans le cas d'une vitesse variable : les personnes ont en effet tendance à ralentir lorsque la densité augmente. Leur forme est également plus allongée, du fait que les gens ont tendance à ralentir et non à se presser autour de la sortie.

Globalement, remarquons enfin que l'évacuation se fait plus lentement que dans le cas d'une vitesse fixée, comme nous pouvions le prévoir en réduisant le module de la vitesse souhaitée.

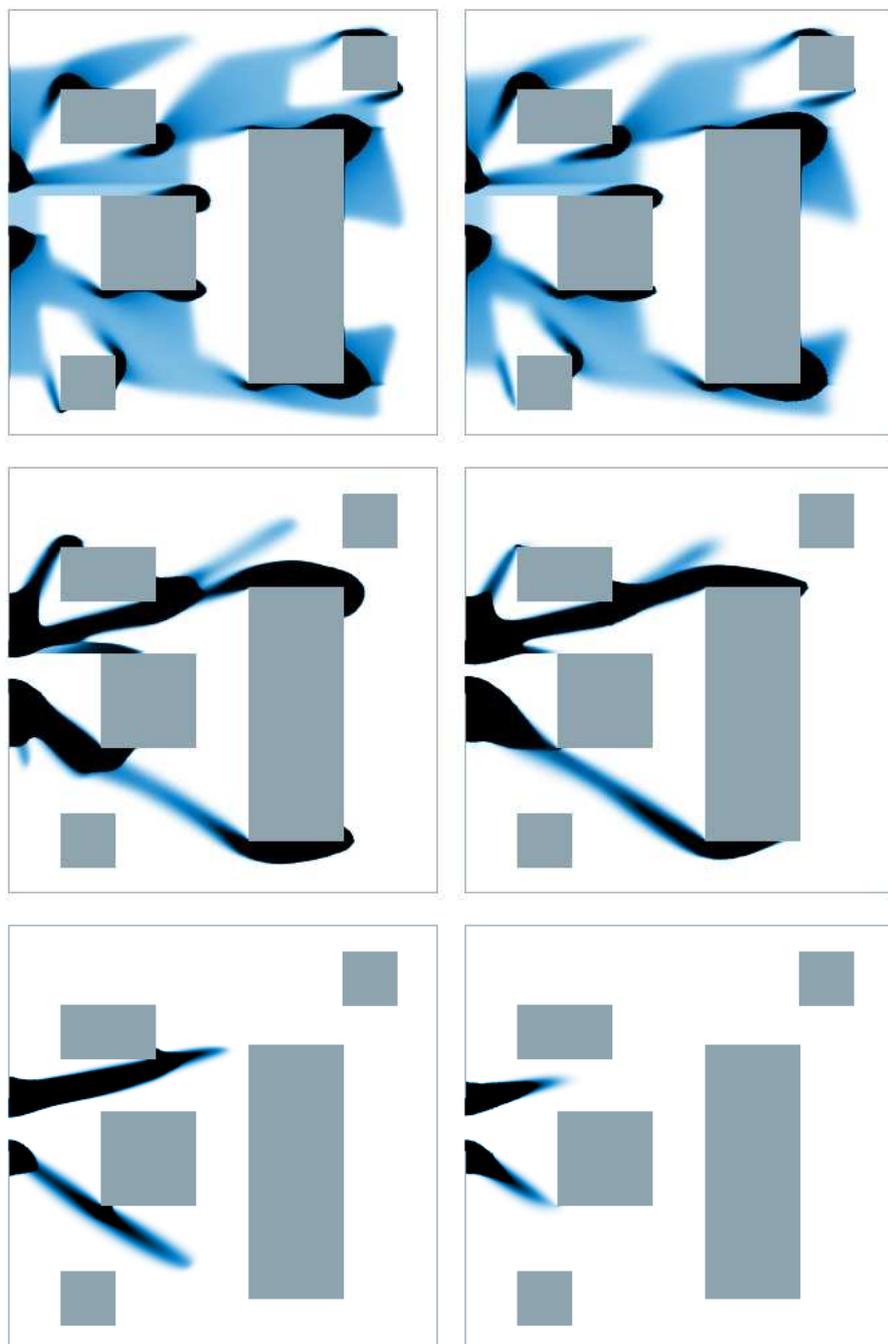


FIGURE 9.4 – Densité dans le cas d'une vitesse variable (à gauche) et fixée (à droite).

### 9.3 Un modèle de chimiotaxie

Nous présentons enfin un modèle de chimiotaxie prenant en compte la congestion des cellules, et pouvant être étudié à l'aide de notre modèle.

Remarquons qu'un modèle très proche a été étudié dans [DMMRC12]. Le cadre y était cependant différent, puisque deux espèces étaient considérées, l'une inerte et constituant le milieu biologique, l'autre active et émettant un chemoattractant.

Nous considérons ici une seule population de cellules, de densité  $\rho$ , évoluant dans le vide et étant soumise à une contrainte de congestion. Sa vitesse naturelle s'exprime comme le gradient d'un chemoattractant  $S$  (voir [KS71]) :

$$\mathbf{U} = \nabla S.$$

Ce chemoattractant est lui même produit par les cellules, et vérifie l'équation

$$\partial_t S - \Delta S = \rho - S.$$

Nous supposons dans la suite que la diffusion de  $S$  dans le milieu est instantanée, et donc que  $S$  vérifie en réalité l'équation stationnaire

$$S - \Delta S = \rho.$$

Supposons à nouveau que la densité de cellules ne peut dépasser un certain seuil, que nous prendrons ici égal à 1. Comme pour le modèle de mouvements de foule, il est alors naturel de supposer que l'évolution de la densité de cellules se fait à la vitesse la plus proche de leur vitesse naturelle, parmi les vitesses admissibles. L'équation vérifiée par  $\rho$  est alors la suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} = P_{C_\rho} \mathbf{U}, \\ \mathbf{U} = \nabla S, \\ S - \Delta S = \rho. \end{array} \right. \quad (9.2)$$

Remarquons que ce modèle ne rentre pas directement dans le cadre théorique de la première partie, dans laquelle nous avons montré l'existence d'une solution. En effet, la vitesse naturelle des cellules et la densité sont ici couplées, et ce de façon fortement non linéaire. Il serait cependant possible de reprendre l'approche flot-gradient en remplaçant la fonctionnelle

$$J(\rho) = \int_{\Omega} D(x) d\rho(x)$$

par la fonctionnelle

$$F(\rho) = - \int_{\Omega} (S(\rho)^2(x) + |\nabla S(\rho)|^2(x)) dx,$$

où  $S(\rho)$  est donné par l'équation

$$S - \Delta S = \rho.$$

Concernant l'étude numérique, plusieurs méthodes sont utilisées pour résoudre l'équation de Keller-Segel, parmi lesquelles le schéma JKO (voir [BCC08]) ou encore des schémas implicites de type volumes finis (voir [Fil06]). Dans le cas contraint (9.2), nous proposons d'utiliser à nouveau l'algorithme de catching-up pour calculer l'évolution de la densité :

$$\begin{cases} \hat{\rho}^n &= (\mathbf{id} + dt \mathbf{U}^n)_{\#} \rho^{n-1} & (\text{étape de prédiction}), \\ \rho^n &= P_K \hat{\rho}^n & (\text{étape de correction}). \end{cases}$$

Il est cependant nécessaire ici de calculer à chaque pas de temps une nouvelle vitesse souhaitée, dépendant de la densité. Pour cela, nous devons résoudre les équations

$$\begin{cases} S - \Delta S &= \rho, \\ \mathbf{U} &= \nabla S. \end{cases}$$

Nous avons choisi d'utiliser un schéma de différences finies pour obtenir une approximation  $S_{i,j}^n$  du chemoattractant  $S$  sur la maille  $(i, j)$  et à l'instant  $n dt$ . Nous déduisons la valeur des composantes horizontale et verticale de la vitesse souhaitée à l'instant  $n$  de la façon suivante

$$\begin{cases} V_{i-\frac{1}{2},j}^n &= \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{h}, \\ W_{i,j-\frac{1}{2}}^n &= \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{h}. \end{cases}$$

Dans un premier exemple, dont les résultats sont présentés à la figure 9.5, nous nous plaçons sur le domaine  $[-1, 1]^2$ , et nous supposons le bord du domaine infranchissable. Nous prenons une densité initiale aléatoire entre 0 et 1 sur l'ensemble du domaine, et laissons évoluer le système. Le résultat est conforme à l'intuition : les cellules s'attirent les unes aux autres grâce à la production de chemoattractant, et tendent à former un disque au centre du domaine.

Nous reprenons également les cas tests présentés dans l'article [DMMRC12] pour le cas de deux populations, en nous plaçant sur le même domaine, mais en prenant à présent des conditions bi-périodiques. La forme finale de l'agglomérat de cellules dépend alors du pourcentage de cellules initial. Ainsi, pour une proportion de 10%, la forme finale sera un disque (voir la figure 9.6), tandis que pour 50%, on obtient un cylindre (voir la figure 9.7). Remarquons cependant que le comportement est le même dans les deux cas, les cellules s'attirent pour former des amas de plus en plus gros, et ces amas se rejoignent peu à peu.

Les résultats obtenus sont, comme espéré, visuellement proches des cas tests effectués dans [DMMRC12], mais la vitesse d'agglomération est plus rapide, du fait qu'il n'y a pas, dans ce cas, de milieu cellulaire passif gênant la progression des cellules.

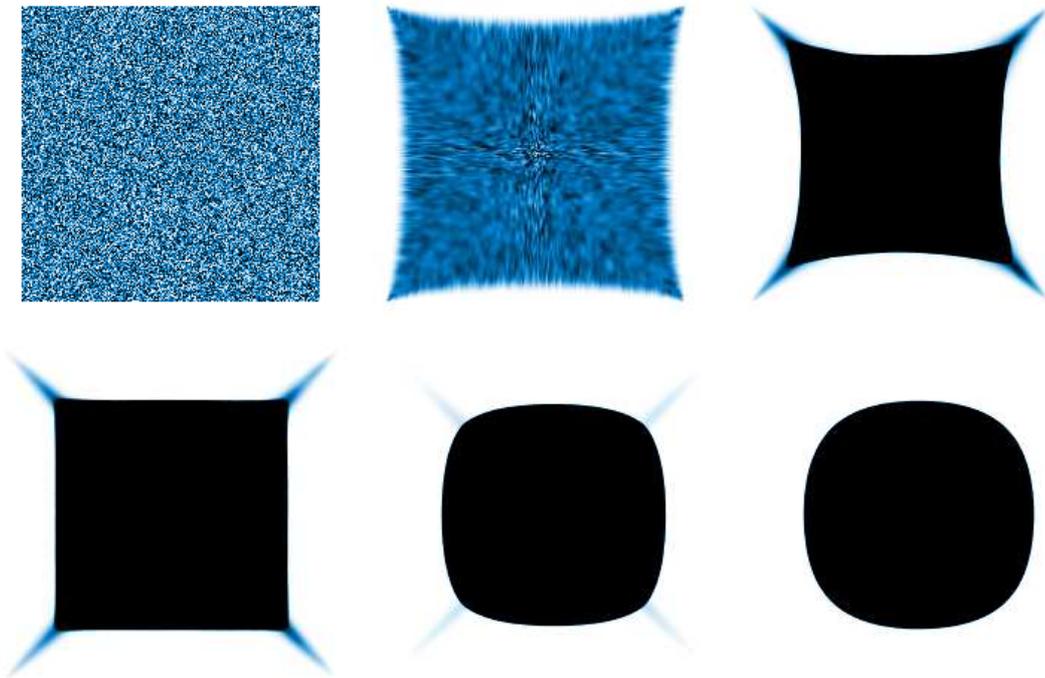


FIGURE 9.5 – Evolution des cellules pour des conditions limites de type mur.

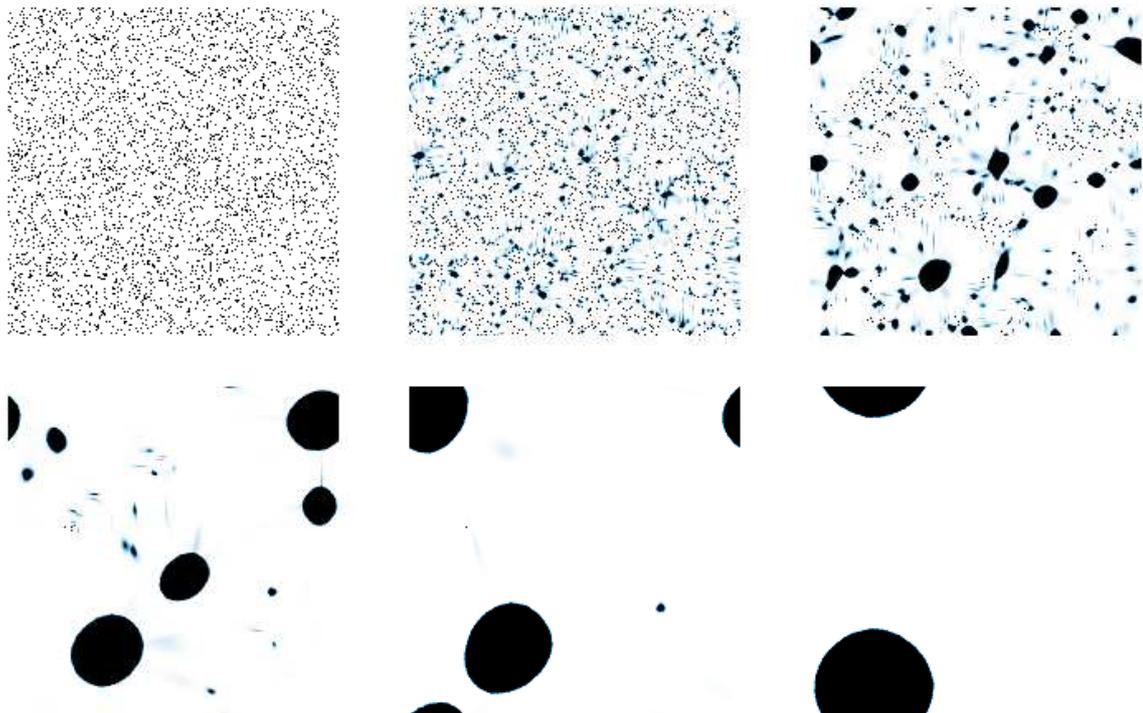


FIGURE 9.6 – Evolution des cellules pour des conditions périodiques (cas 10%).

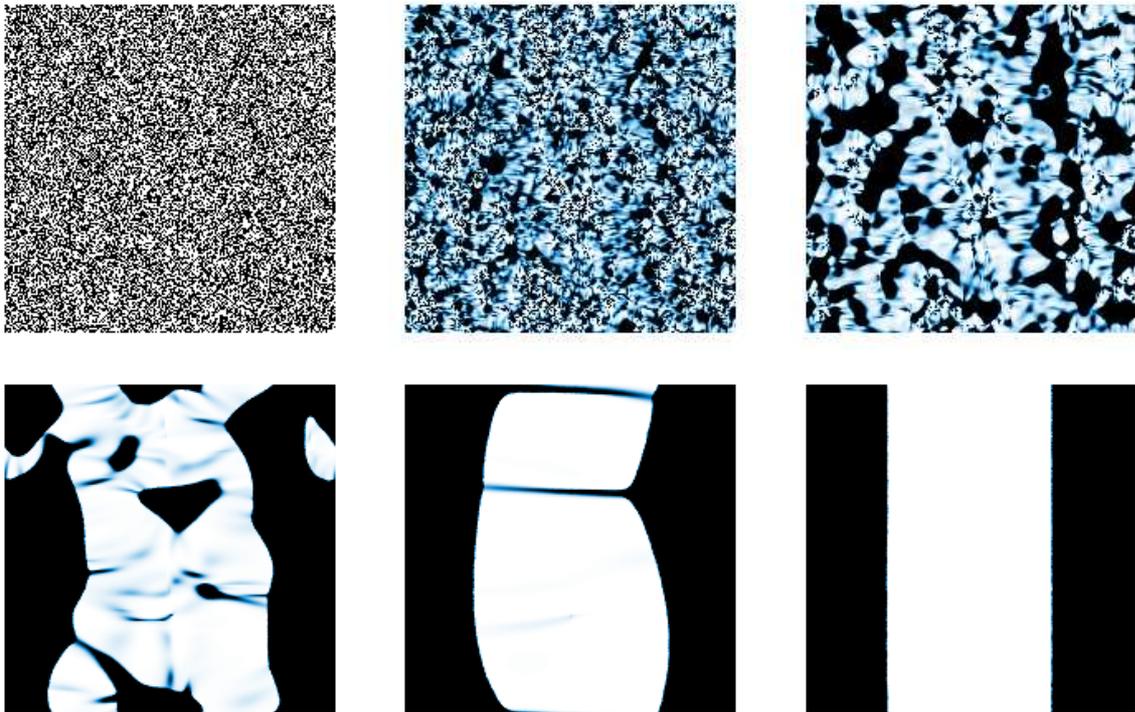


FIGURE 9.7 – Evolution des cellules pour des conditions périodiques (cas 50%).

# Annexes



# Annexe A

## Transport optimal

Nous présentons ici les principes du transport optimal. Un aperçu plus complet de cette théorie peut être trouvé dans [Vil03, Vil09, AS06, AGS05].

### Présentation du problème de transport optimal

Le problème du transport optimal a été proposé pour la première fois par Monge à la fin du 18<sup>ème</sup> siècle (voir [Mon81]). Ce dernier s'intéressait à des problèmes de déblais et remblais, et plus particulièrement au moyen de déplacer du sable depuis des mines jusqu'aux trous à combler en fournissant le moins d'efforts possibles.

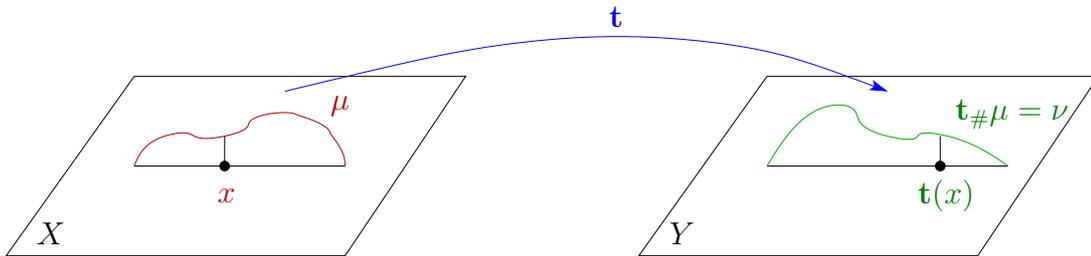


FIGURE A.1 – Transport entre  $\mu$  et  $\nu$ .

Ce problème peut se formaliser de la façon suivante : considérons deux espaces métriques  $X$  et  $Y$ , et  $\mu$  (resp.  $\nu$ ) une mesure de probabilité sur  $X$  (resp.  $Y$ ). Commençons par définir ce qu'est un transport de  $\mu$  à  $\nu$  :

**Définition A.1** (Transport de  $\mu$  à  $\nu$ ). *Soit  $\mathbf{t} : X \mapsto Y$  une fonction mesurable. On dit que  $\mathbf{t}$  est un transport de  $\mu$  à  $\nu$ , et l'on note  $\mathbf{t}_\# \mu = \nu$ , si la mesure image de  $\mu$  par  $\mathbf{t}$  est égale à  $\nu$ .*

Rappelons que la mesure image de  $\mu$  par  $\mathbf{t}$ , que l'on notera  $\mathbf{t}_\# \mu$  est la mesure qui vérifie

$$\mathbf{t}_\# \mu(B) = \mu(\mathbf{t}^{-1}(B))$$

pour tout ensemble mesurable  $B$  de  $X$ , ce qui revient à imposer

$$\int_Y f(y) d\mathbf{t}_{\#}\mu(y) = \int_X f(\mathbf{t}(x)) d\mu(x)$$

pour toute fonction  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mesurable bornée.

**Exemple A.2** (Transport d'un dirac). Prenons par exemple  $\mu = \delta_{x_0}$  avec  $x_0 \in X$ . La mesure image de  $\mu$  par un transport  $\mathbf{t}$  est alors exactement  $\delta_{\mathbf{t}(x_0)}$ .

**Exemple A.3** (Marginales d'une mesure). Soient  $X_1, X_2$  deux espaces métriques, et  $\pi^i : X_1 \times X_2 \mapsto X_i$  la projection sur  $X_i$ . Les marginales d'une mesure  $\mu$  sur  $X_1 \times X_2$  sont exactement les mesures images de  $\mu$  par les transports  $\pi^i$ .

**Remarque A.4** (Formule de changement de variables). Si  $X = \mathbb{R}^d$ , et si  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors on a, pour tout transport  $\mathbf{t}$  injectif  $\mu$ -p.p.

$$\mathbf{t}_{\#}\mu = \frac{\mu}{|\det \nabla \mathbf{t}|} \circ \mathbf{t}^{-1}.$$

Supposons à présent que l'on dispose d'une fonction de coût :  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $c(x, y)$  représente le coût qu'il faut dépenser pour se déplacer de  $x$  à  $y$ . Le problème de transport optimal consiste à chercher un transport  $\mathbf{t}$  de  $\mu$  à  $\nu$  qui minimise le coût total de déplacement. Ceci s'exprime sous la forme du problème de minimisation suivant.

**Définition A.5** (Problème de Monge). Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité fixées. On cherche un transport optimal  $\mathbf{t}^0$  entre  $\mu$  et  $\nu$  vérifiant

$$\mathbf{t}^0 \in \underset{\mathbf{t}_{\#}\mu = \nu}{\operatorname{argmin}} \int_X c(x, \mathbf{t}(x)) d\mu(x). \quad (\text{A.1})$$

Notons que ce problème est fortement non linéaire : le coût total à minimiser, ainsi que les contraintes sont non linéaires. De plus, le problème est mal posé sous cette forme. En effet, l'existence d'un transport entre deux mesures  $\mu$  et  $\nu$  fixées n'est pas garantie. Prenons par exemple  $\mu = \delta_{x_0}$  avec  $x_0 \in X$ , et  $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{y_1} + \delta_{y_2})$ , avec  $y_1$  et  $y_2$  distincts dans  $Y$ . Pour tout transport  $\mathbf{t}$ , on a alors :

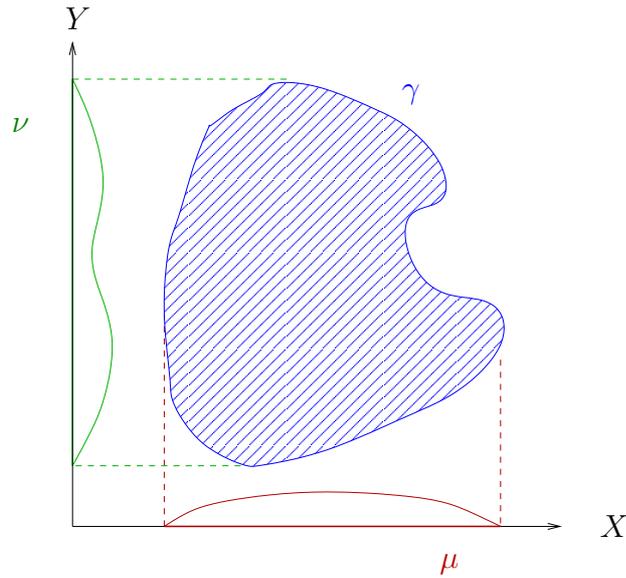
$$\mathbf{t}_{\#}\mu = \delta_{\mathbf{t}(x_0)} \neq \nu.$$

Il est donc nécessaire de trouver une autre formulation pour ce problème de minimisation. Celle-ci a été proposée par Kantorovich au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle (voir [Kan42]), et fait intervenir des mesures sur l'espace produit  $X \times Y$ , appelées plans de transport.

**Définition A.6** (Plan de transport entre  $\mu$  et  $\nu$ ). Soit  $\gamma$  une mesure sur l'espace produit  $X \times Y$ . On dit que  $\gamma$  est un plan de transport entre  $\mu$  et  $\nu$  si les marginales de  $\gamma$  sont respectivement  $\mu$  et  $\nu$ , c'est-à-dire si :

$$\begin{cases} \pi_{\#}^X \gamma = \mu \\ \pi_{\#}^Y \gamma = \nu, \end{cases}$$

où  $\pi^X$  et  $\pi^Y$  sont les projections sur  $X$  et  $Y$ . On notera  $\Pi(\mu, \nu)$  l'ensemble des plans de transports entre  $\mu$  et  $\nu$ .

FIGURE A.2 – Plan de transport entre  $\mu$  et  $\nu$ .

Remarquons que s'il existe un transport  $\mathbf{t}$  entre  $\mu$  et  $\nu$ , alors la mesure de probabilité définie par

$$\gamma_{\mathbf{t}} = (\mathbf{id}, \mathbf{t})_{\#}\mu$$

est un plan de transport entre  $\mu$  et  $\nu$ .

Le problème dit de Monge-Kantorovich s'exprime alors de la façon suivante :

**Définition A.7** (Problème de Monge-Kantorovich). *Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures de probabilité fixées. On cherche un plan de transport optimal  $\gamma^0$  entre  $\mu$  et  $\nu$  vérifiant*

$$\gamma^0 \in \operatorname{argmin}_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma(x, y). \quad (\text{A.2})$$

Ce problème est cette fois linéaire par rapport aux plans de transport  $\gamma$  sur lesquels on minimise, et il est bien posé, car il existe toujours un plan de transport entre deux mesures  $\mu$  et  $\nu$ , par exemple la mesure produit  $\mu \otimes \nu$ . De plus, il généralise le problème de Monge, au sens où pour un plan de transport issu d'un transport  $\mathbf{t}$ , le coût à minimiser est exactement le coût correspondant au problème de Monge

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\gamma_{\mathbf{t}}(x, y) = \int_{X \times Y} c(x, y) d((\mathbf{id}, \mathbf{t})_{\#}\mu)(x, y) = \int_X c(x, \mathbf{t}(x)) d\mu(x).$$

## Problème dual et existence d'un transport optimal

Le problème de minimisation de Monge-Kantorovich (A.2) étant un problème d'optimisation linéaire sous contrainte, il admet un problème dual, défini comme suit.

**Définition A.8** (Problème dual). *Le problème dual de (A.2) consiste à chercher un couple de fonctions  $\varphi \in L^1(\mu), \psi \in L^1(\nu)$  solutions de*

$$\sup_{\varphi(x)+\psi(y)\leq c(x,y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \right\}. \quad (\text{A.3})$$

Il est possible de montrer qu'il suffit de chercher  $\varphi$  et  $\psi$  sous la forme  $\psi = \varphi^c$ , où  $\varphi^c$  est une généralisation de la transformée de Legendre, appelée  $c$ -transformée de  $\varphi$ , et définie par

$$\varphi^c(y) = \inf_{x \in X} \{c(x, y) - \varphi(x)\}.$$

De plus, il est possible de choisir la fonction  $\varphi$   $c$ -concave, c'est-à-dire vérifiant elle-même  $\varphi = \chi^c$ .

L'utilisation de la dualité permet alors de montrer le théorème suivant :

**Théorème A.9** (Existence d'un transport optimal). *Nous nous plaçons dans le cas où  $X = Y, X \subset \mathbb{R}^d$ , et où la fonction de coût est définie par*

$$c(x, y) = h(x - y),$$

avec  $h$  une fonction strictement convexe.

Alors pour toutes densités de probabilité  $\mu$  et  $\nu$ , il existe au moins un plan de transport optimal solution de (A.2), ainsi qu'une fonction  $\varphi$   $c$ -concave telle que  $(\varphi, \varphi^c)$  soit solution du problème dual (A.3), et l'on a

$$\min_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} c d\gamma = \max_{\varphi(x)+\varphi^c(y)\leq c(x,y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_X \varphi^c d\nu \right\}.$$

De plus, si  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ce plan de transport optimal est unique, et issu de l'unique transport  $\mathbf{t}$  solution du problème de Monge (A.1). Dans ce cas, le transport  $\mathbf{t}$  et la fonction  $\varphi$  sont reliés par la relation

$$\mathbf{t}(x) = x - (\nabla h^*)(\nabla \varphi)(x),$$

où  $h^*$  est la transformée de Legendre de  $h$ .

Les solutions du problème dual sont appelées potentiels de Kantorovich. Dans le cas où  $\mu$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, le gradient  $\nabla \varphi$  est défini de façon unique  $\mu$  presque partout. En particulier, si  $\mu$  a une densité strictement positive presque partout,  $\varphi$  est définie de façon unique sur  $X$  à une constante additive près.

**Remarque A.10** (Coût quadratique). *Il est possible de montrer que dans le cas du coût quadratique  $c(x, y) = |x - y|^2$ , le transport optimal  $\mathbf{t}$  coïncide  $\mu$ -p.p. avec le gradient d'une fonction convexe.*

## Espaces de Wasserstein

Nous nous plaçons dans le cas  $X = Y$ ,  $X$  domaine de  $\mathbb{R}^d$ , et  $c(x, y) = |x - y|^p$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . Notons  $W_p(\mu, \nu)$  la valeur minimale renormalisée du coût de transport total entre  $\mu$  et  $\nu$  :

$$W_p(\mu, \nu) = \left( \inf_{\gamma \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times X} |x - y|^p d\gamma(x, y) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (\text{A.4})$$

Rappelons que  $W^p$  peut également être définie par dualité de la façon suivante :

$$\frac{1}{p} W_p^p(\mu, \nu) = \sup_{\varphi(x) + \varphi^c(y) \leq \frac{1}{p} |x - y|^p} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_X \varphi^c d\nu \right\}. \quad (\text{A.5})$$

Notons que la définition (A.5) diffère légèrement de la définition donnée par le problème dual. Nous appellerons cependant potentiels de Kantorovich les solutions  $(\varphi, \varphi^c)$  de (A.5). Remarquons également que le théorème d'existence A.9 ne s'applique pas au cas  $p = 1$ . On peut toutefois montrer que la formule de dualité (A.5) est encore valable dans ce cas.

Les quantités  $W_p$  vérifient alors le théorème suivant :

**Théorème A.11** (Distances de Wasserstein). *Pour tout  $p \geq 1$ ,  $W_p$  définit une distance sur l'ensemble des probabilités sur  $X$  de moment d'ordre  $p$  borné  $\mathcal{P}_p(X)$ , et  $(\mathcal{P}_p(X), W_p)$  est un espace complet appelé espace de Wasserstein. De plus, pour toute suite  $(\mu_n)_n$  de  $\mathcal{P}_p(X)$ , on a :*

$$W_p(\mu_n, \mu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_n \text{ converge étroitement vers } \mu, \\ m_p(\mu_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} m_p(\mu), \end{cases}$$

où  $m_p(\mu)$  désigne le moment d'ordre  $p$  de  $\mu$ .

Remarquons que cette distance représente bien le transport qu'il est nécessaire d'effectuer entre  $\mu$  et  $\nu$ . En effet, considérons par exemple une densité  $\mu$  en créneau valant 1 ou 0 sur des intervalles de taille  $h$  (voir figure A.3), et  $\nu$  la densité translatée de  $h$ . La distance de Wasserstein  $W_2$  entre  $\mu$  et  $\nu$  est d'ordre  $h$  et tend bien vers 0 quand  $h$  tend vers 0. Par contre, leur différence en norme  $L^p$  est d'ordre 1 et ne converge jamais vers 0.

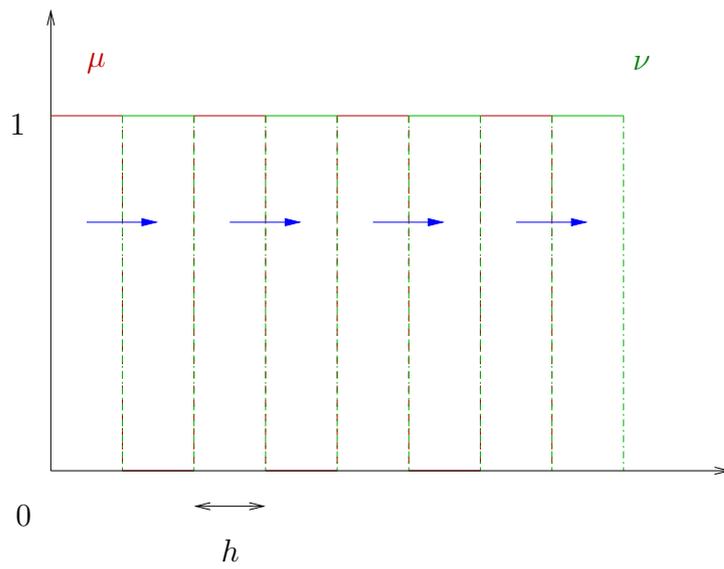


FIGURE A.3 – Distance de Wasserstein et transport.

# Annexe B

## Exemple du cône convergent

Nous détaillons ici l'étude de l'exemple du cône convergent décrit à la section [1.3.2](#) p.19.

### Résolution exacte

Le problème présente une symétrie radiale, et incite donc à travailler en coordonnées polaires. On note  $\rho(t, r)$  et  $\mathbf{u}(t, r) = -u(t, r)\mathbf{e}_r$  la densité et la vitesse effective au rayon  $r$ . L'équation de transport s'écrit alors

$$\partial_t \rho - u \partial_r \rho - \rho \partial_r u - \frac{1}{r} \rho u = 0.$$

### Calcul de la densité

Tant que la densité n'est pas saturée, la vitesse effective  $u$  est égale à la vitesse souhaitée, donc  $u(t, r) = 1$ . La méthode des caractéristiques donne alors

$$\rho(t, r) = \begin{cases} \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) & \text{si } r \in ]a, R - t], \\ 0 & \text{si } r > R - t. \end{cases}$$

La densité est maximale en  $r = a$ , et atteint la densité maximale au temps

$$t_0 = a \left( \frac{1}{\rho_0} - 1 \right).$$

Pour  $t > t_0$ , il apparaît une zone saturée dans  $[a, b(t)]$ . La densité est donc donnée par :

$$\rho(t, r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) & \text{si } r \in ]b(t), R - t], \\ 0 & \text{si } r > R - t. \end{cases}$$

Il reste à déterminer l'évolution de la frontière  $b(t)$  qui délimite la zone saturée. Pour cela, il est nécessaire de calculer la vitesse effective  $\mathbf{u}$ .

### Calcul de la pression et de la vitesse effective

La forme duale du problème s'écrit

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{U}, \\ -\nabla \cdot \mathbf{u} \leq 0. \end{cases}$$

Chercher  $\mathbf{u}$  revient donc à chercher en chaque instant la pression  $p(t, \cdot)$  qui minimise le problème suivant :

$$p(t, \cdot) = \operatorname{argmin}_{q \in H^1_{\rho(t, \cdot)}(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{U} - \nabla q|^2.$$

On obtient en coordonnées polaires :

$$p(t, \cdot) = \operatorname{argmin}_{q \in H^1_{\rho(t, \cdot)}(\Omega)} \frac{1}{2} \int_a^{b(t)} |1 + \partial_r q(t, r)|^2 r dr,$$

dont la solution est donnée par

$$p(t, r) = \begin{cases} \frac{b(t) - a}{\ln(b(t)/a)} \ln \frac{r}{a} - (r - a) & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La vitesse effective est alors donnée par

$$u(t, r) = \begin{cases} \frac{b(t) - a}{r \ln(b(t)/a)} & \text{si } r \in ]a, b(t)], \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

### Calcul de l'évolution de l'interface

Revenons à présent au calcul de  $b(t)$ . La conservation de la masse totale de la foule implique que la variation du nombre de personnes à l'intérieur de  $\Omega$  doit être égale au flux de sortie en  $a$ , c'est-à-dire :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_a^R \rho(t, r) r dr \right) = -a \rho(t, a) \frac{b(t) - a}{a \ln(b(t)/a)}.$$

En utilisant l'expression de  $\rho(t, r)$  en fonction de  $b(t)$ , on obtient que  $b(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} b'(t) = f(t, b(t)) \\ b(0) = a, \end{cases} \quad \text{avec } f(t, r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right) - \frac{r-a}{r \ln(r/a)}}{1 - \rho_0 \left(1 + \frac{t}{r}\right)} & \text{si } r \leq R - t \\ -\frac{r-a}{r \ln(r/a)} & \text{si } r > R - t. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

## Illustration des résultats

Il suffit à présent de résoudre numériquement l'équation différentielle vérifiée par  $b(t)$ . Les résultats présentés ont été obtenus en utilisant `Matlab`, pour les valeurs numériques :  $a = 1$ ,  $R = 10$ , et  $\rho_0 = 0.4$ .

La figure B.1 présente l'évolution de la frontière  $b(t)$  en fonction du temps.

La figure B.2 donne elle le tracé de la densité, de la pression et de la vitesse effective en fonction du rayon à différents pas de temps. Remarquons que la pression n'apparaît que dans la zone saturée. Quant à la vitesse effective, on constate bien la discontinuité à l'interface. On retrouve également le ralentissement à l'entrée de la zone saturée, ainsi que l'accélération à la sortie.

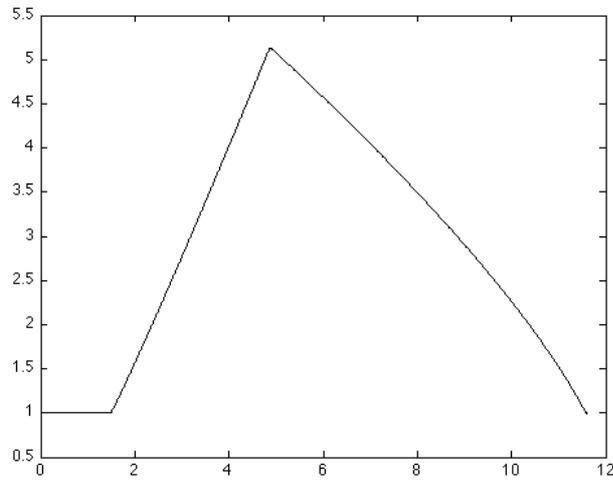


FIGURE B.1 – Evolution de la frontière  $b(t)$  en fonction du temps.

## Schéma JKO

Grâce à la symétrie radiale, le problème de minimisation du schéma JKO peut s'écrire comme une minimisation sur les champs de transport, et être résolu explicitement. On cherche  $\mathbf{t}^n$  transport de  $\rho_\tau^{n-1}$  à  $\rho_\tau^n$  vérifiant

$$\mathbf{t}^n \in \operatorname{argmin}_{\mathbf{t} \# \rho_\tau^{n-1} \in K} \left\{ \int_a^R \left( \mathbf{t}(r) + \frac{1}{2\tau} |r - \mathbf{t}(r)|^2 \right) \rho_\tau^{n-1}(r) r \, dr \right\}. \quad (\text{B.2})$$

Tant que la densité n'est pas saturée, la contrainte sur le transport n'est pas activée, et on a

$$\rho_\tau^n = \begin{cases} \rho_0 \left( 1 + \frac{n\tau}{r} \right) & \text{sur } [a, R - n\tau[, \\ 0 & \text{sur } [R - n\tau, R]. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

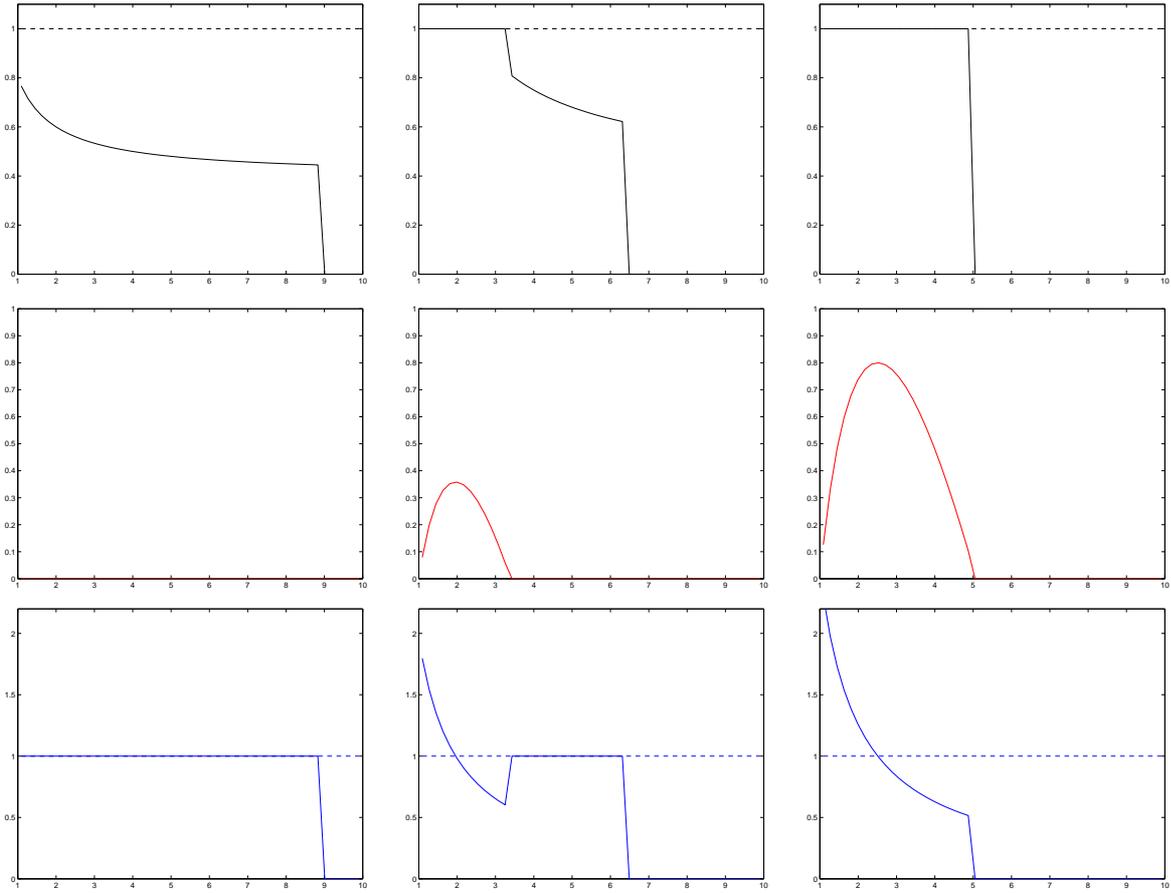


FIGURE B.2 – Densité, pression et vitesse à différents pas de temps.

La densité est donc saturée en premier en  $r = a$  et au temps  $n_0$  tel que :

$$\rho_0 \left(1 + \frac{n_0 \tau}{r}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad n_0 = \frac{a}{\tau} \frac{1 - \rho^0}{\rho^0}.$$

Ensuite,  $\rho_\tau^n$  vérifie

$$\rho_\tau^n = \begin{cases} 1 & \text{sur } [a, b_\tau^n[, \\ \rho_0 \left(1 + \frac{n\tau}{r}\right) & \text{sur } [b_\tau^n, R - n\tau[, \\ 0 & \text{sur } [R - n\tau, R], \end{cases}$$

où  $b_\tau^n$  est la frontière entre les zones saturée et non saturée. De plus, tout transport  $\mathbf{t}$  entre  $\rho_\tau^{n-1}$  et  $\rho_\tau^n$  vérifie

$$\begin{cases} \mathbf{t}(r) = a & \text{si } r < r_e, \\ \rho_\tau^n(\mathbf{t}(r)) = \frac{r \rho_\tau^n(r)}{\mathbf{t}'(r) \mathbf{t}(r)} & \text{si } r \geq r_e, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

où  $r_e$  désigne le rayon à partir duquel tous les gens qui étaient situés entre  $a$  et  $r_e$  à

l'instant  $n - 1$  sont sortis à l'instant  $n$ . On distingue alors plusieurs cas.

- Tant que  $b_\tau^{n-1} \leq r_e$ .

Le transport est donné par

$$\begin{cases} \mathbf{t}(r) = a & \text{si } r < r_e, \\ \mathbf{t}'(r)\mathbf{t}(r) = \rho_0(r + (n-1)\tau) & \text{si } \mathbf{t}(r) \in [a, b_\tau^n], \text{ i.e. si } r \in [r_e, b_\tau^n + \tau], \\ \mathbf{t}(r) = r - \tau & \text{si } r \geq b_\tau^n + \tau. \end{cases}$$

En intégrant la deuxième expression entre  $r_e$  et  $r$ , on obtient

$$\mathbf{t}(r) = \begin{cases} a & \text{sur } [a, r_e], \\ \sqrt{a^2 + \rho_0(r + (n-1)\tau)^2 - \rho_0(r_e + (n-1)\tau)^2} & \text{sur } [r_e, b_\tau^n + \tau], \\ r - \tau & \text{sur } [b_\tau^n + \tau, R]. \end{cases}$$

On a de plus une relation entre  $r_e$  et  $b_\tau^n$ . En effet, par conservation de la masse on a

$$\begin{aligned} \int_{r_e}^{R-(n-1)\tau} \rho_\tau^{n-1}(r)r dr &= \int_a^{R-n\tau} \rho_\tau^n(r)r dr \\ \Rightarrow \int_{r_e}^{R-(n-1)\tau} \rho_0(r + (n-1)\tau) dr &= \int_a^{b_\tau^n} r dr + \int_{b_\tau^n}^{R-n\tau} \rho_0(r + n\tau) dr \\ \Rightarrow -\rho_0(r_e + (n-1)\tau)^2 &= (b_\tau^n)^2 - a^2 - \rho_0(b_\tau^n + n\tau)^2. \end{aligned}$$

Cette relation entre  $r_e$  et  $b_\tau^n$  permet de transformer (B.2) en un problème de minimisation à un paramètre, dont la résolution permet de déterminer  $r_e$  et d'en déduire  $b_\tau^n$ .

- Si  $b_\tau^{n-1} > r_e$  et tant que  $b_\tau^{n-1} < R - (n-1)\tau$ .

On a cette fois

$$\begin{cases} \mathbf{t}(r) = a & \text{si } r < r_e, \\ \mathbf{t}'(r)\mathbf{t}(r) = r & \text{si } r \in [r_e, b_\tau^{n-1}], \\ \mathbf{t}'(r)\mathbf{t}(r) = \rho_0(r + (n-1)\tau) & \text{si } r \geq b_\tau^{n-1} \text{ et } \mathbf{t}(r) < b_\tau^n, \text{ i.e. si } r \in [b_\tau^{n-1}, b_\tau^n + \tau], \\ \mathbf{t}(r) = r - \tau & \text{si } r \geq b_\tau^n + \tau, \end{cases}$$

et en intégrant on obtient

$$\mathbf{t}(r) = \begin{cases} a & \text{sur } [a, r_e], \\ \sqrt{r^2 + a^2 - r_e^2} & \text{sur } [r_e, b_\tau^{n-1}], \\ \sqrt{(b_\tau^{n-1})^2 + a^2 - r_e^2 + \rho_0(r + (n-1)\tau)^2 - \rho_0(b_\tau^{n-1} + (n-1)\tau)^2} & \text{sur } [b_\tau^{n-1}, b_\tau^n + \tau], \\ r - \tau & \text{sur } [b_\tau^n + \tau, R]. \end{cases}$$

Par conservation de la masse, on obtient dans ce cas la relation suivante entre  $r_e$  et  $b_\tau^n$

$$(b_\tau^{n-1})^2 - r_e^2 - \rho_0(b_\tau^{n-1} + (n-1)\tau)^2 = (b_\tau^n)^2 - a^2 - \rho_0(b_\tau^n + n\tau)^2,$$

et pour conclure on doit donc à nouveau résoudre un problème de minimisation à un paramètre.

- Si  $b_\tau^{n-1} \geq R - (n-1)\tau$ .

A nouveau, on calcule le transport

$$\begin{cases} \mathbf{t}(r) = a & \text{si } r < r_e, \\ \mathbf{t}'(r)\mathbf{t}(r) = r & \text{si } r \geq r_e, \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{t}(r) = \begin{cases} a & \text{sur } [a, r_e[, \\ \sqrt{r^2 + a^2 - r_e^2} & \text{sur } [r_e, R], \end{cases}$$

et on obtient grâce à la conservation de la masse la relation

$$(b_\tau^{n-1})^2 - r_e^2 = (b_\tau^n)^2 - a^2,$$

qui permet de conclure comme précédemment.

## Schéma de splitting

Nous cherchons à présent à résoudre le schéma de type catching-up défini à la section 5.1 par

$$\begin{cases} \hat{\rho}^n = (\mathbf{id} + dt \mathbf{U})_{\#} \rho^{n-1}, \\ \rho^n = P_K \hat{\rho}^n. \end{cases}$$

La densité au temps  $(n-1)dt$  s'écrit

$$\rho^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{sur } [a, b^{n-1}[, \\ \rho_0 \left( 1 + \frac{(n-1)dt}{r} \right) & \text{sur } [b^{n-1}, R - (n-1)dt[, \\ 0 & \text{sur } [R - (n-1)dt, R], \end{cases}$$

certaines des intervalles pouvant éventuellement être vides, comme par exemple dans le cas où  $b^{n-1} > R - (n-1)dt$ .

L'étape de transport à vitesse souhaitée pendant un temps  $dt$  se calcule simplement grâce à la méthode des caractéristiques et donne

$$\hat{\rho}^n = \begin{cases} 1 + \frac{dr}{r} & \text{sur } [a, b^{n-1} - dt[, \\ \rho_0 \left( 1 + \frac{ndt}{r} \right) & \text{sur } [b^{n-1} - dt, R - ndt[, \\ 0 & \text{sur } [R - ndt, R]. \end{cases}$$

L'étape de projection est plus délicate, et nécessite de différencier trois situations.

- Si  $b^{n-1} - dt \leq a$  et  $\hat{\rho}^n(a) > 1$ .

La zone saturée est en train de se former. On cherche alors à trouver le transport envoyant  $\hat{\rho}^n$  vers la densité admissible la plus proche. De telles densités vérifient

$$\rho = \begin{cases} 1 & \text{sur } [a, \beta[, \\ \rho_0 \left(1 + \frac{ndt}{r}\right) & \text{sur } [\beta, R - ndt[, \\ 0 & \text{sur } [R - ndt, R], \end{cases}$$

où  $\beta$  est supérieur à  $b^{n-1} - dt$ .

Soit  $\mathbf{t}$  un transport entre  $\hat{\rho}^n$  et  $\rho$ . En notant  $\alpha$  le rayon à partir duquel  $\mathbf{t}$  envoie la densité sur la porte, on a, par conservation de la masse,

$$\int_{\alpha}^r \hat{\rho}^n(s) ds = \int_a^{\mathbf{t}(r)} \rho(s) ds$$

pour tout  $r \in ]\alpha, \beta]$ . En remplaçant  $\hat{\rho}^n$  et  $\rho$  par leurs valeurs, on obtient

$$\mathbf{t}(r) = \sqrt{a^2 + \rho_0(r^2 - \alpha^2) + 2\rho_0ndt(r - \alpha)}.$$

De plus, on sait que  $\mathbf{t}(\beta) = \beta$ , ce qui donne la relation entre  $\alpha$  et  $\beta$

$$\beta^2 = a^2 + \rho_0(\beta^2 - \alpha^2) + 2\rho_0ndt(\beta - \alpha),$$

et permet ainsi d'exprimer  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ . Il suffit alors de minimiser la distance

$$W_2^2(\hat{\rho}^n, \rho) = \int_a^{\alpha} |a - r|^2 \hat{\rho}^n(r) dr + \int_{\alpha}^{\beta} |\mathbf{t}(r) - r| \hat{\rho}^n(r) dr,$$

qui s'exprime à présent comme une fonction d'une seule variable,  $\alpha$ . On en déduit la valeur de  $\beta$  minimisante, et on obtient la densité  $\rho^n$  en posant  $b^n = \beta$ .

- Si  $a \leq b^{n-1} - dt \leq R - ndt$ .

On applique exactement la même méthode que précédemment. Cette fois, le transport  $\mathbf{t}$  est donné par

$$\mathbf{t}(r) = \begin{cases} a & \text{sur } [a, \alpha], \\ \sqrt{a^2 + r^2 - \alpha^2 + 2dt(r - \alpha)} & \text{sur } [\alpha, b^{n-1} - dt], \\ \sqrt{a^2 + (b^{n-1} - dt)^2 - \alpha^2 + 2dt(b^{n-1} - dt - \alpha)} \dots & \text{sur } [b^{n-1} - dt, \beta]. \\ \dots + \rho_0(r^2 - (b^{n-1} - dt)^2) + 2\rho_0ndt(r - (b^{n-1} - dt)) & \end{cases}$$

On obtient à nouveau une relation entre  $\beta$  et  $\alpha$  en notant que  $\mathbf{t}(\beta) = \beta$ . La distance  $W_2^2(\hat{\rho}^n, \rho)$  s'exprime à nouveau comme une fonction de  $\alpha$ , qu'il est possible de minimiser pour en déduire  $b^n = \beta$ .

- Si  $b^{n-1} - dt \geq R - ndt$ .

Le transport  $\mathbf{t}$  s'écrit

$$\mathbf{t}(r) = \begin{cases} a & \text{sur } [a, \alpha], \\ \sqrt{a^2 + r^2 - \alpha^2 + 2dt(r - \alpha)} & \text{sur } [\alpha, b^{n-1} - dt]. \end{cases}$$

On a cette fois  $\mathbf{t}(b^{n-1} - dt) = \beta$ , ce qui permet à nouveau d'exprimer  $\beta$  en fonction de  $\alpha$ . On minimise  $W_2^2(\hat{\rho}^n, \rho)$  en fonction de  $\alpha$ , et on conclut comme précédemment.

# Annexe C

## Détails de la démonstration informelle d'existence

Nous détaillons dans cette annexe les démonstrations des résultats énoncés dans la section 2.2.2.

Commençons par montrer que la fonctionnelle  $\Phi$  définie en (2.10) vérifie bien les hypothèses du théorème 2.2.7.

**Lemme C.1.** *Sous le jeu d'hypothèses 2.2.8,  $\Phi$  est une fonctionnelle propre, semi-continue inférieurement et  $\lambda$ -géodésiquement convexe.*

*Démonstration.* Le domaine de  $\Phi$  est égal à l'ensemble des densités admissibles  $K$  (voir définition 2.1 p. 24) qui est évidemment non vide, donc  $\Phi$  est une fonction propre.

Montrons que  $\Phi$  est semi-continue inférieurement. Soit  $\rho^n$  une suite de mesures de  $K$  qui converge vers  $\rho$  pour la distance de Wasserstein. Alors  $\rho \in K$  également, car la convergence pour la distance de Wasserstein implique la convergence étroite de la suite  $\rho^n$ . De plus, l'exemple 3.4 p.32 de [AS06] montre que sous les hypothèses 2.2.8, la fonctionnelle  $J$  définie en (2.11) est semi-continue inférieurement, donc  $\Phi$  l'est également.

Il reste à montrer que  $\Phi$  est bien  $\lambda$ -convexe. D'après la proposition 3.5 p.32 de [AS06], on sait que  $J$  est  $\lambda$ -convexe. Il suffit donc de montrer que toute géodésique joignant deux points de  $K$  appartient à  $K$ . Soient  $\rho_1, \rho_2$  dans  $K$ . Comme  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, il existe un transport optimal  $\mathbf{r}$  de  $\rho_1$  à  $\rho_2$ , et la géodésique entre  $\rho_1$  et  $\rho_2$  est donnée par

$$\rho_t = ((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r})_{\#}\rho_1.$$

On sait d'après le théorème 2.6 p.11 et le lemme 2.2 p.6 de [AS06] que  $\rho_t$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et que sa densité vaut

$$\rho_t(x) = \frac{\rho_1}{\det \nabla((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r})} \circ ((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r})^{-1}(x)$$

pour presque tout  $x$ . On sait qu'il existe une fonction convexe  $\psi$  telle que  $\mathbf{r} = \nabla\psi$ , donc  $\nabla\mathbf{r} = \nabla^2\psi$  est une matrice symétrique positive. Son déterminant étant non nul (voir le

lemme 2.2 p.6 de [AS06]), elle est même définie positive. Soient  $\lambda_i > 0$  ses valeurs propres, on a

$$\det \nabla((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r}) = \prod_{i=1}^d (1-t+t\lambda_i) = \exp\left(\sum_{i=1}^d \ln(1-t+t\lambda_i)\right).$$

La concavité de la fonction logarithme donne donc

$$\det \nabla((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r}) \geq \exp\left(t \ln \prod_{i=1}^d \lambda_i\right) = (\det \nabla \mathbf{r})^t.$$

Or  $\rho_2 \in K$ , donc on a pour presque tout  $x$

$$\frac{\rho_1(x)}{\det \nabla \mathbf{r}(x)} \leq 1.$$

On en déduit que  $(\det \nabla \mathbf{r})^t \geq \rho_1^t \geq \rho_1$ , et finalement

$$\det \nabla((1-t)\mathbf{id} + t\mathbf{r}) \geq \rho_1$$

presque partout, c'est-à-dire  $\rho_t \leq 1$  presque partout.  $\square$

Montrons ensuite que le champ  $\mathbf{u}$  solution de l'équation de flot-gradient est un champ de vitesse admissible.

**Proposition C.2.** *Soit  $(\rho, \mathbf{u})$  une solution de l'équation de flot-gradient*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \mathbf{u} \in -\partial \Phi(\rho). \end{cases}$$

Alors  $\mathbf{u}$  appartient à l'ensemble des vitesses admissibles  $C_\rho$ .

*Démonstration.* Soit  $h > 0$  et  $q \in H^1_{\rho(t_0, \cdot)}$ . Comme  $\mathbf{u}$  vérifie l'équation de transport, on a, pour presque tout  $t_0 \in ]0, T[$  :

$$\int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t, x) \rho(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} (\rho(t_0+h, x) - \rho(t_0, x)) q(x) dx.$$

Comme  $\rho(t_0, x) = 1$  là où  $q$  est non nul, et  $\rho(t_0+h, x) \leq 1$  presque partout, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\rho(t_0+h, x) - \rho(t_0, x)) q(x) dx \leq 0.$$

On en déduit :

$$\frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t, x) \rho(t, x) dx \leq 0,$$

et en faisant tendre  $h$  vers 0 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t_0, x) \rho(t_0, x) dx \leq 0.$$

Comme  $q$  s'annule sur  $[\rho < 1]$ , on a finalement montré que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \nabla q(x) \cdot \mathbf{u}(t_0, x) dx \leq 0 \text{ pour tout } q \in H_{\rho(t_0, \cdot)}^1,$$

c'est-à-dire que  $\mathbf{u}(t_0, \cdot) \in C_{\rho(t_0, \cdot)}$ .

En utilisant la même méthode entre  $t_0 - h$  et  $t_0$ , on montre de même que  $-\mathbf{u}(t_0, \cdot) \in C_{\rho(t_0, \cdot)}$ .  $\square$

Nous montrons à présent que pour des champs admissibles réguliers, l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla D + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \rho \geq 0$$

est bien vérifiée.

**Lemme C.3** (Caractérisation du sous-différentiel de  $\Phi$ ). *Soit  $\rho$  une densité admissible, et  $\mathbf{v}$  régulière vérifiant  $\nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0$  sur la zone saturée  $[\rho = 1]$ . Alors, pour tout  $\mathbf{w} \in -\partial\Phi(\rho)$  :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla D + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v} \rho \geq 0. \quad (\text{C.1})$$

*Démonstration.* Soit  $\rho \in K$ , et  $\mathbf{v} \in C_\rho$ . On commence par construire, à l'aide de  $\mathbf{v}$ , un transport qui envoie  $\rho$  sur une densité admissible. Soit  $\varepsilon > 0$ , et  $\mathbf{t}_\varepsilon$  le transport suivant :

$$\mathbf{t}_\varepsilon = \mathbf{id} + \varepsilon \mathbf{v} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{V},$$

où  $\mathbf{V}$  est un champ de vitesse régulier vérifiant  $\nabla \cdot \mathbf{V} \geq \beta$  pour un  $\beta > 0$  fixé.

Montrons que pour  $\varepsilon$  assez petit,  $\mathbf{t}_\varepsilon$  est injectif. Dans le cas contraire, il existe  $x \neq y$  tels que  $\mathbf{t}_\varepsilon(x) = \mathbf{t}_\varepsilon(y)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} x + \varepsilon \mathbf{v}(x) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{V}(x) &= y + \varepsilon \mathbf{v}(y) + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \mathbf{V}(y) \\ \Rightarrow x - y &= \varepsilon (\mathbf{v}(y) + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}(y) - \mathbf{v}(x) - \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}(x)) \\ \Rightarrow |x - y| &\leq \varepsilon K |x - y|, \end{aligned}$$

où  $K$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$  qui majore la constante de Lipschitz de  $\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}$ . Cette dernière égalité est absurde dès que  $\varepsilon < \frac{1}{K}$ , donc pour  $\varepsilon$  assez petit, on a bien  $\mathbf{t}_\varepsilon$  injectif.

Le lemme 2.2 p.6 de [AS06] donne alors la formule suivante pour la densité de  $\rho_\varepsilon = \mathbf{t}_\varepsilon \# \rho$  :

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{\rho(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x))}{|\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon|(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x))}. \quad (\text{C.2})$$

Si  $\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x) \notin \text{supp } \rho$ , on a alors  $\rho_\varepsilon(x) = 0$ . Sinon, on définit

$$\mathcal{O} = \bigcup \{ \omega : \omega \text{ ouvert tel que } \rho = 1 \text{ p.p. sur } \omega \},$$

et on distingue deux situations.

*Cas 1* :  $t_\varepsilon^{-1}(x) \in \mathcal{O}$ .

On a alors :  $\rho(t_\varepsilon^{-1}(x)) = 1$ , donc on doit estimer :  $|\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon|(t_\varepsilon^{-1}(x))$ . Comme  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{V}$  sont réguliers, on a  $\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon \geq 0$  pour  $\varepsilon$  assez petit, et plus précisément :

$$\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon = 1 + \varepsilon \nabla \cdot (\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}) + \varepsilon^2 \det \nabla (\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}).$$

Par hypothèse, on a  $\nabla \cdot \mathbf{v} \geq 0$  et  $\nabla \cdot \mathbf{V} \geq \beta$ . De plus, le support de  $\rho$  est borné en temps fini, donc  $\det \nabla (\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V})$  est uniformément borné sur  $\mathbf{t}_\varepsilon(\mathcal{O})$  par une constante  $L$  indépendante de  $\varepsilon$ . On en déduit que pour tout  $x$  tel que  $t_\varepsilon^{-1}(x) \in \mathcal{O}$ , on a :

$$\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x)) \geq 1 + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \beta - \varepsilon^2 L.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit, plus précisément  $\varepsilon \leq \left(\frac{\beta}{L}\right)^2$ , on a donc  $\det \nabla \mathbf{t}_\varepsilon(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x)) \geq 1$ , ce qui implique  $\rho_\varepsilon(x) \leq 1$ .

*Cas 2* :  $t_\varepsilon^{-1}(x) \in (\text{supp } \rho) \setminus \mathcal{O}$ .

L'ensemble  $(\text{supp } \rho) \setminus \mathcal{O}$  est fermé et borné, donc compact : on peut le recouvrir par un nombre fini de boules de centres  $x_i^\delta \in (\text{supp } \rho) \setminus \mathcal{O}$  et de rayon  $\delta$ , comme l'illustre la figure C.1. On note  $\Omega_i^\delta$  les cellules de Voronoi de centres  $x_i^\delta$ . L'union disjointe des  $\Omega_i^\delta$  est alors exactement  $(\text{supp } \rho) \setminus \mathcal{O}$ .

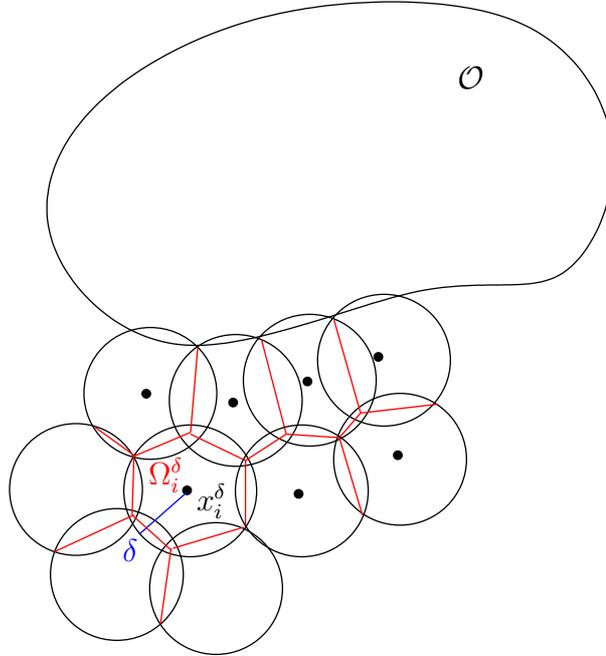


FIGURE C.1 – Représentation de la zone saturée  $\mathcal{O}$  et des  $\Omega_i^\delta$ .

Sur chacun des  $\Omega_i^\delta$ , on a :

$$\begin{aligned} \int_{t_\varepsilon(\Omega_i^\delta)} (1 - \rho_\varepsilon(x)) dx &= \int_{\Omega_i^\delta} (|\det \nabla t_\varepsilon|(y) - \rho(y)) dy \\ &= \int_{\Omega_i^\delta} (1 - \rho(y)) dy + \varepsilon \int_{\Omega_i^\delta} (\nabla \cdot (\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V})(y)) dy \\ &\quad + \varepsilon^2 \int_{\Omega_i^\delta} \det(\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V})(y) dy. \end{aligned}$$

Or par construction, on a :

$$\min_i \int_{\Omega_i^\delta} (1 - \rho(y)) dy = m^\delta > 0,$$

et de plus  $\nabla \cdot (\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}) + \varepsilon \det(\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V})$  est uniformément borné sur  $\text{supp } \rho$  par une constante  $M$ , donc on a :

$$\varepsilon \leq \frac{m^\delta}{2M \max_i |\Omega_i^\delta|} \Rightarrow \int_{t_\varepsilon(\Omega_i^\delta)} (1 - \rho_\varepsilon(x)) dx \geq \frac{m^\delta}{2}.$$

On en déduit que pour  $\varepsilon$  assez petit, la masse dépassant 1 peut être redistribuée au sein de chaque cellule. On peut donc trouver un transport  $\mathbf{r}_\varepsilon$  envoyant  $t_\varepsilon(\Omega_i^\delta)$  dans lui-même, et valant l'identité sur  $\mathcal{O}$  tel que  $\mathbf{r}_\varepsilon \# \rho_\varepsilon$  soit admissible. De plus, d'après la formule (C.2), on a  $\rho_\varepsilon \leq 1 + \varepsilon M$  sur chaque  $\Omega_i^\delta$ . Le transport  $\mathbf{r}_\varepsilon$  vérifie alors :

$$W_2(\rho_\varepsilon, \mathbf{r}_\varepsilon \# \rho_\varepsilon) \leq C M \varepsilon \delta, \quad (\text{C.3})$$

où  $C$  est une constante indépendante de  $\delta$  et  $\varepsilon$ .

L'étude précédente fournit un transport  $\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon$  tel que  $(\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon) \# \rho$  soit admissible. On utilise ce transport dans l'inégalité du sous-différentiel (2.8). Comme  $\rho$  et  $(\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon) \# \rho$  sont admissibles, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} D(x) (\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon) \# \rho(x) dx - \int_{\mathbb{R}^2} D(x) \rho(x) dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^2} \langle -\mathbf{w}(x), \mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho(x) dx + o(\|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)}). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Le membre de gauche de cette inégalité peut encore s'écrire :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} (D(\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x)) - D(x)) \rho(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x), \mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho(x) dx + o(\|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)}). \end{aligned}$$

On obtient donc de (C.4) :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho(x) dx + o(\|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)}) \geq 0.$$

On peut séparer le premier terme en deux en introduisant le transport  $\mathbf{t}_\varepsilon$  :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - \mathbf{t}_\varepsilon(x) \rangle \rho(x) dx + \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho(x) dx.$$

La première intégrale se majore de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - \mathbf{t}_\varepsilon(x) \rangle \rho(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x)) + \mathbf{w}(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x)), \mathbf{r}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho_\varepsilon(x) dx \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla D(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x)) + \mathbf{w}(\mathbf{t}_\varepsilon^{-1}(x))|^2 \rho_\varepsilon(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{r}_\varepsilon(x) - x|^2 \rho_\varepsilon(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla D(x) + \mathbf{w}(x)|^2 \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} W_2(\rho_\varepsilon, \mathbf{r}_\varepsilon \# \rho_\varepsilon) \\ &\leq \|\nabla D + \mathbf{w}\|_{L^2(\rho)} C M \varepsilon \delta \end{aligned}$$

d'après l'estimation **C.3**.

Pour la deuxième intégrale, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x \rangle \rho(x) dx = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{v}(x) \rangle \rho(x) dx + o(\varepsilon).$$

Il reste à estimer  $o(\|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)})$  :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - x|^2 \rho(x) dx \\ &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon(x) - \mathbf{t}_\varepsilon(x)|^2 \rho(x) dx + 2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{t}_\varepsilon(x) - x|^2 \rho(x) dx \\ &\leq 2(C M \varepsilon \delta)^2 + 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbf{v} + \sqrt{\varepsilon} \mathbf{V}|^2 \rho(x) dx \\ &\leq O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donc  $o(\|\mathbf{r}_\varepsilon \circ \mathbf{t}_\varepsilon - \mathbf{id}\|_{L^2(\rho)}) = o(\varepsilon)$ . On a finalement montré l'inégalité suivante :

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} \langle \nabla D(x) + \mathbf{w}(x), \mathbf{v}(x) \rangle \rho(x) dx + O(C M \varepsilon \delta) + o(\varepsilon) \geq 0.$$

Prenons maintenant  $\varepsilon$  dépendant de  $\delta$  de la façon suivante :

$$\varepsilon(\delta) = \min \left\{ \frac{1}{2K}; \left( \frac{\beta}{L} \right)^2; \frac{m^\delta}{2M \max_i |\Omega_i^\delta|}; \delta \right\}.$$

En divisant l'inégalité précédente par  $\varepsilon(\delta)$ , et faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient bien l'inégalité souhaitée.  $\square$

# Annexe D

## Principe du maximum pour une vitesse variable

Nous précisons ici le fait que pour une vitesse souhaitée de la forme

$$\mathbf{U}(\rho) = \alpha(\rho)\mathbf{U},$$

tenant compte du ralentissement de la foule, la densité de la foule peut rester inférieure à 1 au cours des étapes de transport.

**Proposition D.1** (Principe du maximum discret en dimension 1). *Supposons que le facteur d'amortissement  $\alpha$  soit continu, positif, décroissant et vérifie  $\alpha(0) = 1$ , ainsi que la condition*

$$\alpha(\rho) = 0, \quad \forall \rho \in [1 - \beta, 1],$$

avec  $0 < \beta < 1$ . Soit  $\rho$  une densité admissible, et  $\mathbf{U}$  un champ de vitesse de norme bornée par 1. Alors, pour un pas de temps  $dt$  vérifiant la condition CFL

$$\frac{dt}{h} \leq \frac{\beta}{2},$$

la densité transportée  $\hat{\rho}$  par le champ  $\alpha(\rho)\mathbf{U}$  vérifie le principe du maximum

$$0 \leq \hat{\rho}_i \leq 1.$$

*Démonstration.* Supposons pour simplifier que le champ de vitesse souhaitée  $\mathbf{U}$  soit positif. La densité  $\hat{\rho}$  s'exprime alors de la façon suivante

$$\hat{\rho}_i = \rho_i + \frac{dt}{h} \left( \alpha(\rho_i)U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1} - \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i \right).$$

Remarquons tout d'abord que  $\hat{\rho}_i$  est positive sous condition CFL. En effet, l'équation précédente peut se réécrire

$$\hat{\rho}_i = \left( 1 - \frac{dt}{h} \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}} \right) \rho_i + \frac{dt}{h} \alpha(\rho_i)U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1}.$$

Or le coefficient devant  $\rho_i$  est positif sous condition CFL, donc  $\hat{\rho}_i$  l'est également.

Montrons à présent que  $\hat{\rho}_i$  est inférieur à 1. Le cas où l'on a

$$\alpha(\rho_i)U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1} - \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i \leq 0$$

est évident. Plaçons nous donc dans le cas où ce terme est positif, et supposons tout d'abord que  $\rho_i \in [1 - \beta, 1]$ . On a alors  $\alpha(\rho_i) = 0$ , et donc

$$\hat{\rho}_i = \rho_i - \frac{dt}{h} \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i \leq 1.$$

Reste le cas où  $\rho_i < 1 - \beta$ . On a alors  $\hat{\rho}_i \leq 1$  si et seulement si

$$\frac{dt}{h} \leq \frac{1 - \rho_i}{\alpha(\rho_i)U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1} - \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i},$$

condition qui est bien vérifiée dès que le pas de temps vérifie la condition CFL.  $\square$

**Remarque D.2.** Supposer que  $\alpha$  s'annule en 1 n'est pas suffisant. En effet, plaçons nous dans le cas où  $\mathbf{U} = 1$ ,  $\rho_{i+1} = \rho_{i-1} = 1$  et  $\rho_i$  tend vers 1. On a alors

$$\alpha(\rho_i)U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1} - \alpha(\rho_{i+1})U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i = \alpha(\rho_i) \geq 0,$$

et donc  $\hat{\rho}_i \leq 1$  si et seulement si

$$\frac{dt}{h} \leq \frac{1 - \rho_i}{\alpha(\rho_i)}.$$

Prenons alors  $\alpha(\rho) = \sqrt{1 - \rho}$ . Le terme de droite tend alors vers 0 lorsque  $\rho_i$  tend vers 1, ce qui implique que l'on ne peut trouver de condition indépendante de  $\rho$  sur le pas de temps pour assurer le principe du maximum.

**Remarque D.3.** Remarquons que le choix de discrétiser la vitesse  $\alpha(\rho)\mathbf{U}$  en utilisant la direction vers laquelle est tournée le piéton est importante. En effet, si l'on utilise au contraire la direction d'où vient la personne, la densité transportée est alors, dans le cas précédent

$$\hat{\rho}_i = \rho_i + \frac{dt}{h} \left( \alpha(\rho_{i-1})U_{i-\frac{1}{2}}\rho_{i-1} - \alpha(\rho_i)U_{i+\frac{1}{2}}\rho_i \right).$$

Prenons alors  $\mathbf{U} = 1$ ,  $\rho_i = 1$  et  $\rho_{i-1} < 1 - \beta$ . On a

$$\hat{\rho}_i = 1 + \frac{dt}{h} \alpha(\rho_{i-1})\rho_{i-1} > 1,$$

et donc l'étape de projection est alors indispensable.

# Bibliographie

- [AGS05] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Lectures in Mathematics, ETH Zürich, 2005.
- [Amb95] L. Ambrosio. Movimenti minimizzanti. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Sci. Fis. Natur.*, 113 :191–246, 1995.
- [AS06] L. Ambrosio and G. Savaré. Gradient flows in spaces of probability measures, 2006.
- [BA01] V. Blue and J.L. Adler. Cellular automata microsimulation for modeling bi-directional pedestrian walkways. *Transport. Res. Part B*, 35 :293–312, 2001.
- [BB01] J.-D. Benamou and Y. Brenier. A computational fluid mechanics solution to the monge-kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84(3) :375–393, 2001.
- [BBCR00] F. Bouchut, Y. Brenier, J. Cortes, and J.-F. Ripoll. A hierarchy of models for two-phase flows. *J. Nonlinear Sci.*, 10(6) :639–660, 2000.
- [BCC08] A. Blanchet, V. Calvez, and J.A. Carrillo. Convergence of the mass-transport steepest descent scheme for the sub-critical patlak-keller-segel model. *SIAM J. Numer. Anal.*, 46(2) :691–721, 2008.
- [BD08] N. Bellomo and C. Dogbé. On the modelling crowd dynamics from scaling to hyperbolic macroscopic models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(Suppl.) :1317–1345, 2008.
- [Ber02] F. Berthelin. Existence and weak stability for a pressureless model with unilateral constraint. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(2) :249–272, 2002.
- [BJO07] G. Buttazzo, C. Jimenez, and E. Oudet. An optimization problem for mass transportation with congested dynamics. *SIAM J. Control Optim.*, 2007.
- [BKSZ01] C. Burstedde, K. Klauck, A. Schadschneider, and J. Zittartz. Simulation of pedestrian dynamics using a two-dimensional cellular automaton. *Physica A*, 295 :507–525, 2001.
- [BT86a] A. Borgers and H. Timmermans. City centre entry points, store location patterns and pedestrian route choice behavior : A microlevel simulation model. *Socio-Economic Planning Sciences*, 20 :25–31, 1986.

- [BT86b] A. Borghers and H. Timmermans. A model of pedestrian route choice and demand for retail facilities within inner-cityshopping areas. *Geophysical Analysis*, 18 :115–128, 1986.
- [BV] F. Bernicot and J. Venel. Convergence order of a numerical scheme for sweeping process. *submitted, available at <http://arxiv.org/abs/1009.2837>*.
- [CC08] V. Coscia and C. Canavesio. First-order macroscopic modelling of human crowd dynamics. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18 :1217–1247, 2008.
- [CFF<sup>+</sup>] J. A. Carrillo, M. Di Francesco, A. Figalli, T. Laurent, and D. Slepcev. Confinement in nonlocal interaction equations. *to appear in Nonlinear Anal.*
- [CGT04] J.A. Carrillo, M.P. Gualdani, and G. Toscani. Finite speed of propagation in porous media by mass transportation methods. *R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, 338 :815–818, 2004.
- [Cha07a] C. Chalons. Numerical approximation of a macroscopic model of pedestrian flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 29(2) :539–555, 2007.
- [Cha07b] C. Chalons. Transport-equilibrium schemes for pedestrian flows with non-classical shocks. *Traffic and Granular Flows'05, Springer*, pages 347–356, 2007.
- [CM09] J. A. Carrillo and J. S. Moll. Numerical simulation of diffusive and aggregation phenomena in nonlinear continuity equations by evolving diffeomorphisms. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31 :4305–4329, 2009.
- [CR05] R.M. Colombo and M.D. Rosini. Pedestrian flows and non-classical shocks. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28 :1553–1567, 2005.
- [Daa04] W. Daamen. Modelling passenger flows in public transport facilities. *PhD Thesis, Technische Universiteit Delft, <http://repository.tudelft.nl/view/ir/uuid:e65fb66c-1e55-4e63-8c49-5199d40f60e1/>*, 2004.
- [DeG93] E. DeGiorgi. New problems on minimizing movements. *Boundary Value Problems for PDE and Applications, C. Baiocchi and J. L. Lions eds.*, pages 81–98, Masson, 1993.
- [DHN] P. Degond, J. Hua, and L. Navoret. Numerical simulations of the euler system with congestion constraint. *to appear*.
- [DMMRC12] J. Dambrine, B. Maury, N. Meunier, and A. Roudneff-Chupin. A congestion model for cell migration. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11(1) :243–260, 2012.
- [DNBS10] P. Degond, L. Navoret, R. Bon, and D. Sanchez. Congestion in a macroscopic model of self-driven particles modeling gregariousness. *J. Stat. Phys.*, 138 :85–125, 2010.
- [Dog08] C. Dogbé. On the numerical solutions of second order macroscopic models of pedestrian flows. *Comput. Appl. Math.*, 56(7) :1884–1898, 2008.
- [DP09] A.L. Dalibard and B. Perthame. Existence of solutions of the hyperbolic keller-segel model. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 361(5) :2319–2335, 2009.

- 
- [DS05] Y. Dolak and C. Schmeiser. The keller-segel model with logistic sensitivity function and small diffusivity. *SIAM J. Appl. Math.*, 66(1) :286–308, 2005.
- [ET05] J.F. Edmond and L. Thibault. Relaxation of an optimal control problem involving a perturbed sweeping process. *Math. Program Ser B*, 104(2–3) :347–373, 2005.
- [ET06] J.F. Edmond and L. Thibault. Bv solutions of nonconvex sweeping process differential inclusion with perturbation. *J. Differential Equations*, 226(1) :135–179, 2006.
- [Fil06] F. Filbet. A finite volume scheme for the patlak-keller-segel chemotaxis model. *Numerische Mathematik*, 104 :457–488, 2006.
- [Fru71] J. Fruin. *Pedestrian planning and design*. Metropolitan Association of Urban Designers and Environmental Planners, New York, N.Y., 1971.
- [GGLF01] S. Gwynne, E.R. Galea, P.J. Lawrence, and L. Filippidis. Modelling occupant interaction with fire conditions using the buildingexodus evacuation model. *Fire safety journal*, 36(4) :327–357, 2001.
- [GS94] B. Gustafsson and M. Sakai. Properties of some balayage operators, with applications to quadrature domains and moving boundary problems. *Non-linear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 22(10) :1221–1245, 1994.
- [Gus] B. Gustafsson. Lectures on balayage.
- [HB00] S.P. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy. Gas-kinetic modeling and simulation of pedestrian flows. *Transp. Res.c Record*, (1710) :28–36, 2000.
- [Hel92] D. Helbing. A fluid dynamic model for the movement of pedestrians. *Complex Systems*, 6 :391–415, 1992.
- [Hen71] L.F. Henderson. The statistics of of crowd fluids. *Nature*, (229) :381–383, 1971.
- [Hen74] L.F. Henderson. On the fluid mechanics of human crowd motion. *Transport. Res.*, (8) :509–515, 1974.
- [HFV00] D. Helbing, I. Farkas, and T. Vicsek. Simulating dynamical features of escape panic. *Nature*, 407 :487, 2000.
- [HM95] D. Helbing and P. Molnar. Social force model for pedestrian dynamics. *Phys. Rev. E*, 51 :4282–4286, 1995.
- [HMS94] D. Helbing, P. Molnar, and F. Schweitzer. Computer simulations of pedestrian dynamics and trail formation. *Evolution of Natural Structures, Sonderforschungsbereich, Stuttgart*, 230 :229–234, 1994.
- [Hug02] R. L. Hughes. A continuum theory for the flow of pedestrian. *Transport. Res. Part B*, 36 :507–535, 2002.
- [Hug03] R. L. Hughes. The flow of human crowds. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 35 :169–182, 2003.
- [JKO98] R. Jordan, D. Kinderlehrer, and F. Otto. The variational formulation of the fokker-planck equation. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(1) :1–17, 1998.

- 
- [Kan42] L. V. Kantorovich. On the transfer of masses. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 37 :227–229, 1942.
- [KS71] E.F. Keller and L.A. Segel. Model for chemotaxis. *J. Theor. Biol.*, 30 :225–234, 1971.
- [KS96] R. Kimmel and J. Sethian. Fast marching methods for computing distance maps and shortest paths. *CPAM, Univ. of California, Berkeley*, Technical Report 660, 1996.
- [Lef07] A. Lefebvre. Modélisation numérique d’écoulements fluide/particules, prise en compte des forces de lubrification. *PhD Thesis, Université Paris-Sud XI, Faculté des Sciences d’Orsay*, 2007.
- [Løv94] G.G. Løvås. Modelling and simulation of pedestrian traffic flow. *Transport. Res. Part B*, 28 :429–443, 1994.
- [LP10] L. Levine and Y. Peres. Scaling limits for internal aggregation models with multiple sources. *J. Anal. Math.*, 11 :151–220, 2010.
- [LS90] B. D. Lubachevsky and F. H. Stillinger. Geometric properties of random disk packings. *J. Stat. Phys.*, 60(5/6) :561–583, 1990.
- [Mon81] G. Monge. Mémoire sur la théorie des déblais et remblais. *Histoire de l’Académie Royale des Sciences de Paris*, pages 666–704, 1781.
- [Mor77] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a hilbert space. *J. Differential Equations*, 26(3) :346–374, 1977.
- [MRCS10] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, and F. Santambrogio. A macroscopic crowd motion model of gradient flow type. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(10) :1787–1821, 2010.
- [MRCSV11] B. Maury, A. Roudneff-Chupin, F. Santambrogio, and J. Venel. Handling congestion in crowd motion modeling. *Netw. Heterog. Media*, 6(3) :485–519, 2011.
- [MV07] B. Maury and J. Venel. Un modèle de mouvements de foule. *ESAIM : Proc.*, 18 :143–152, 2007.
- [MV08] B. Maury and J. Venel. A mathematical framework for a crowd motion model. *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser I*, 346 :1245–1250, 2008.
- [MV09] B. Maury and J. Venel. Handling of contacts on crowd motion simulations. *Traffic and Granular Flow '07, Springer*, pages 171–180, 2009.
- [MV11] B. Maury and J. Venel. A discrete contact model for crowd motion. *ESAIM : M2AN*, 45(1) :145–168, 2011.
- [Nag98] K. Nagel. From particle hopping models to traffic flow theory. *Transportation Research Record*, 1644 :1–9, 1998.
- [Ott01] F. Otto. The geometry of dissipative evolution equations : the porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(1–2) :101–174, 2001.
- [Pey08] G. Peyre. Toolbox fast marching - a toolbox for fast marching and level sets computations. *Software*, 2008.

- 
- [PT09] B. Piccoli and A. Tosin. Pedestrian flows in bounded domains with obstacles. *Contin. Mech. Thermodyn.*, 21(2) :85–107, 2009.
- [PT11] B. Piccoli and A. Tosin. Time-evolving measures and macroscopic modeling of pedestrian flow. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 199(3) :707–738, 2011.
- [Sch01] A. Schadschneider. Cellular automaton approach to pedestrian dynamics-theory. In *Pedestrian and Evacuation Dynamics Eds M. Schreckenberg and S. D. Sharma*, pages 75–85, Springer Berlin, 2001.
- [Ser] S. Serfaty. Gamma-convergence of gradient flows on hilbert and metric spaces and applications. *to appear in Comm. Nonlin. Analysis*.
- [Set99] J.A. Sethian. *Level Set Methods and Fast Marching Methods Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge Monograph on Applied and Computational Mathematics, 1999.
- [SKN03] A. Schadschneider, A. Kirchner, and K. Nishinari. From ant trails to pedestrian dynamics. *Applied Bionics and Biomechanics*, 1 :11–19, 2003.
- [SSKB05] A. Seyfried, B. Steffen, W. Klingsch, and M. Boltes. The fundamental diagram of pedestrian movement revisited. *J. Stat. Mech.*, 10 :P10002, 2005.
- [Sti00] G.K. Still. Crowd dynamics. *PhD thesis, University of Warwick*, <http://www.gkstill.com/PhDThesis.html>, 2000.
- [TTD00] S. Torquato, T. M. Truskett, and P. G. Debenedetti. Is random close packing of spheres well defined. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :2064–2067, 2000.
- [Ven] J. Venel. A numerical scheme for a class of sweeping processes. *to appear in Numerische Mathematik*.
- [Ven08] J. Venel. Modélisation mathématique et numérique des mouvements de foule. *PhD thesis, available at <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00346035/fr>*, 2008.
- [Ven10] J. Venel. Integrating strategies in numerical modelling of crowd motion. *Pedestrian and Evacuation Dynamics '08, Springer*, pages 641–646, 2010.
- [Vil03] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. Grad. Stud. Math. 58, AMS, Providence, 2003.
- [Vil09] C. Villani. *Optimal Transport, Old and New*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften , Vol. 338, 2009.
- [Wei93] U. Weidmann. Transporttechnik der fussgänger. *Schriftenreihe des IVT, 90(zweite ergänzte Auflage (ETH) Zürich)*, 1993.
- [YS89] S.J. Yuhaski and J.M. Macgregor Smith. Modelling circulation systems in buildings using state dependent queueing models. *Queueing Systems*, 4 :319–338, 1989.