



**HAL**  
open science

# La théorie de la viabilité au service de la modélisation mathématique du développement durable. Application au cas de la forêt humide de Madagascar

Claire Bernard

► **To cite this version:**

Claire Bernard. La théorie de la viabilité au service de la modélisation mathématique du développement durable. Application au cas de la forêt humide de Madagascar. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2011. Français. NNT : 2011CLF22158 . tel-00678594

**HAL Id: tel-00678594**

**<https://theses.hal.science/tel-00678594>**

Submitted on 13 Mar 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : D.U. 2158



**UNIVERSITE BLAISE PASCAL**  
**U.F.R. Sciences et Technologies**

**ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES**  
**N° 685**

# **THESE**

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR D'UNIVERSITE**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

par **Claire BERNARD**

Master Recherche en Mathématiques Appliquées

**La théorie de la viabilité au service de la  
modélisation mathématique du  
développement durable  
Application au cas de la forêt humide de  
Madagascar**

Soutenue publiquement le 19 septembre 2011 devant la commission d'examen.

*Président :* **Patrick SAINT-PIERRE**  
Professeur, Université Paris Dauphine, Paris

*Rapporteurs :* **Michel DE LARA**  
Professeur, Ecole des Ponts ParisTech, Paris  
**Luc DOYEN**  
Directeur de Recherche, CNRS, Paris

*Directeur de thèse :* **Bernard SARAMITO**  
Professeur, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

*Encadrante :* **Sophie MARTIN**  
Chargée de Recherche, Cemagref, Clermont-Ferrand



# Résumé

Le développement durable, défini à l'origine comme un mode de développement qui répond aux besoins du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs, souffre aujourd'hui des limites de cette définition. On dénombre en effet des centaines de définitions rendant le concept flou au point que mesures politiques et économiques les plus diverses se revendiquent durables.

L'objectif de cette thèse est de modéliser le développement durable à l'aide des outils mathématiques de la théorie de la viabilité et de rendre sa définition opérationnelle. La théorie de la viabilité permet en effet d'intégrer les principales caractéristiques d'un développement durable : l'approche multi-objectifs, la prise en compte d'un horizon temporel infini, la possibilité de déterminer plusieurs politiques d'actions viables et le respect de l'équité intergénérationnelle. Le principe de la viabilité est l'étude de systèmes dynamiques contrôlés soumis à un ensemble de contraintes. Le concept central est celui de noyau de viabilité, ensemble regroupant tous les états initiaux à partir desquels il existe une évolution restant dans l'ensemble de contraintes.

Après avoir mis en évidence les limites des méthodes utilisées dans la modélisation du développement durable telles que l'analyse multicritères, notre démarche scientifique s'appuie sur le développement de deux modèles mathématiques appliqués à la gestion durable du corridor forestier de Fianarantsoa (Madagascar). L'enjeu est alors de déterminer des politiques d'actions permettant de satisfaire un double objectif : la conservation de la forêt et la satisfaction des besoins de la population locale. Nous démontrons alors l'utilité de la théorie de la viabilité pour atteindre ces objectifs en définissant les contraintes adaptées et en calculant des noyaux de viabilité.



# Abstract

Sustainable development, initially defined as a mode of development that meets present needs without compromising the ability of future generations to meet their own needs, now suffers from the limitations of this definition. Since then, there are hundreds of definitions making the concept so vague that the most diverse political and economic measures claim to be sustainable.

The aim of this thesis is to develop a model for sustainable development using the mathematical tools of the viability theory and to make this definition operational. The viability theory enables to integrate the main features of sustainable development : the multi-objective approach, the infinite time horizon, the possibility of determining several viable policies and actions and the respect of generational equity. The principle of viability is the study of dynamical controlled systems subjected to a constraint set. The main concept is the viability kernel, which is the set of all the initial states from which there is an evolution that remain in the constraint set.

After underlying the limits of methods used in the modeling of sustainable development such as multi-criteria analysis, our scientific approach is based on the development of two mathematical models applied to the sustainable management of the forest corridor of Fianarantsoa (Madagascar). The challenge is to determine policy actions that meet two objectives : the conservation of the forest and the satisfaction of the needs of local people. Then, we demonstrate the usefulness of the theory of viability to achieve these objectives by defining the appropriate constraints and calculating the viability kernels.



# Avant-propos

Ce travail de thèse s'est déroulé dans le cadre d'un projet ANR<sup>1</sup> nommé "Dédution", débuté en janvier 2007 et répondant à l'appel d'offre "Agriculture et Développement durable". L'objectif du projet est de tester l'hypothèse selon laquelle le formalisme de la théorie de la viabilité associé à l'évaluation de propriétés comme la résilience constitue un outil efficace pour l'ingénierie du développement durable. Pour cela, sont associés des laboratoires fondamentaux proposant des formalismes mathématiques originaux, en particulier la théorie de la viabilité, et des partenaires maîtrisant des applications représentatives des enjeux liés au développement durable. Une première application concerne les forêts tempérées, plus particulièrement un peuplement de Pin Maritime dans la forêt des Landes, sa résistance et sa résilience face à des événements tels que la résistance au vent. L'autre application porte sur le corridor forestier de Fianarantsoa (Madagascar). L'enjeu est de déterminer des politiques d'actions durables permettant le maintien du niveau de vie de la population locale ainsi que la sauvegarde des surfaces forestières existantes.

Après rencontres avec les différents partenaires du projet, j'ai choisi de m'intéresser au cas d'application malgache. Afin de répondre à l'objectif du projet, il s'agissait d'identifier le problème de gestion durable, de créer des modèles mathématiques, puis de les étudier grâce aux outils fournis par le formalisme de la théorie de la viabilité, et enfin d'analyser l'efficacité de cette méthode et de la généraliser à d'autres cas de gestion durable.

Afin de comprendre les enjeux malgaches, j'ai effectué deux séjours à Madagascar, dans la région de Fianarantsoa. J'ai eu de nombreux échanges avec les équipes partenaires du projet travaillant sur place : l'IRD Madagascar<sup>2</sup> et l'Université de Fianarantsoa. Ces discussions sur place, puis ensuite de nombreux échanges de mails m'ont permis de comprendre le contexte et les problématiques malgaches. Les connaissances et suggestions des équipes malgaches ont été essentielles dans l'élaboration des différents modèles mathématiques.

Pour la formalisation mathématique, j'ai travaillé avec les équipes partenaires du projet : le laboratoire LASTRE<sup>3</sup> ainsi que le laboratoire LISC<sup>4</sup>. Plusieurs séjours parisiens avec les membres de LASTRE m'ont permis de m'approprier les notions essentielles de la théorie de la viabilité. Travaillant quotidiennement au sein du LISC, j'ai complété ma formation sur la théorie de la viabilité grâce aux discussions informelles avec les autres membres du laboratoire.

---

<sup>1</sup>Agence Nationale de la Recherche

<sup>2</sup>Institut de Recherche pour le Développement

<sup>3</sup>Laboratoire d'Applications des Systèmes Tychastiques Régulés

<sup>4</sup>Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes



# Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Sophie Martin qui a encadré ce travail. Sa disponibilité, son soutien et ses encouragements, ses conseils et idées toujours suggérés jamais imposés m'ont permis de mener à bien cette thèse dans d'excellentes conditions.

Je remercie également Bernard Saramito d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse.

Mes remerciements vont également aux membres du jury Michel De Lara et Luc Doyen qui ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Leurs conseils et suggestions ont été particulièrement enrichissants et ont permis l'amélioration de ce document.

Je souhaite également remercier Patrick Saint-Pierre non seulement d'avoir accepté d'être Président du Jury mais également pour ses enseignements, ses conseils et sa disponibilité tout au long de cette thèse.

Je remercie bien entendu Guillaume Deffuant qui m'a accueillie au sein du Lisc et qui m'a donné de bons conseils tout au long de ce travail. Merci également à tous les membres du Lisc pour tous ces agréables moments partagés, plus particulièrement merci à Benoît, Thomas et Maxime dont j'ai successivement partagé les bureaux avec beaucoup de plaisir.

Mes remerciements suivants vont à l'ensemble des membres du projet Déduction. En particulier, je tiens à remercier Dominique Hervé ainsi que toute l'équipe malgache et Marie-Hélène Durand qui m'ont tous apporté une aide précieuse pour l'élaboration du premier modèle malgache. Merci également à Anya Désilles dont les compétences informatiques m'ont été très utiles.

Enfin, je remercie toutes les personnes qui me sont proches pour leur soutien sans failles durant ces années.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Théorie</b>	<b>5</b>
<b>1 Développement durable</b>	<b>7</b>
1.1 Multidisciplinarité et coopération . . . . .	7
1.1.1 Un concept à cheval sur plusieurs disciplines . . . . .	7
1.1.2 Une nécessité de coopération . . . . .	8
1.2 Multi-échelles . . . . .	9
1.2.1 L'échelle temporelle . . . . .	9
1.2.2 L'échelle géographique . . . . .	9
1.3 Définition . . . . .	10
1.3.1 Un concept qui rassemble... au départ . . . . .	10
1.3.2 Un concept critiqué . . . . .	10
1.3.3 Un concept qui ne fait pas l'unanimité ... in fine . . . . .	11
1.4 Besoin d'expertise . . . . .	11
1.4.1 Une nécessité de formalisation . . . . .	11
1.4.2 Les outils existants . . . . .	12
1.5 Analyse multicritères . . . . .	12
1.5.1 Le principe . . . . .	12
1.5.2 Quelques exemples . . . . .	13
1.5.3 Les limites de l'analyse multicritères . . . . .	14
<b>2 Viabilité</b>	<b>17</b>
2.1 Apport et intérêt de la viabilité . . . . .	18
2.2 Introduction à la théorie de la viabilité . . . . .	20
2.2.1 Évolution et système contrôlé . . . . .	20
2.2.2 Contrôle et régulon . . . . .	20
2.2.3 Évolution et ensemble viable . . . . .	20
2.2.4 Noyau de viabilité . . . . .	21
2.2.5 Caractérisation du noyau de viabilité . . . . .	21
2.2.6 Théorème de semiperméabilité . . . . .	23
2.2.7 Outils de la théorie de la viabilité . . . . .	23
2.3 Applications . . . . .	25
2.3.1 Plusieurs applications à la gestion durable . . . . .	26
2.3.2 Deux applications de gestion durable de pêcheries détaillées . . . . .	28
2.4 Conclusion . . . . .	32

<b>3</b>	<b>Calcul de noyaux de viabilité</b>	<b>35</b>
3.1	Calcul exact de noyaux de viabilité . . . . .	35
3.1.1	Modèle d'Abrams-Strogatz . . . . .	36
3.1.2	Calcul exact du noyau de viabilité . . . . .	37
3.1.3	Modèle de Minett-Wang . . . . .	40
3.2	Algorithmes de viabilité . . . . .	41
<b>II</b>	<b>Application</b>	<b>47</b>
<b>4</b>	<b>Madagascar et le corridor forestier de Fianarantsoa</b>	<b>49</b>
4.1	Madagascar . . . . .	49
4.2	Une forêt exceptionnelle . . . . .	50
4.3	La population locale . . . . .	52
4.4	Une pression sur le corridor forestier . . . . .	52
4.5	Les mesures de protection de la forêt . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Outils de la viabilité pour une gestion durable</b>	<b>55</b>
5.1	Intérêt de la modélisation . . . . .	56
5.2	Le Modèle . . . . .	57
5.2.1	Choix des variables et contrôles . . . . .	57
5.2.2	Dynamiques du modèle . . . . .	58
5.2.3	Contraintes . . . . .	60
5.2.4	Reformulation du modèle pour une étude mathématique efficace	61
5.2.5	Paramètres . . . . .	62
5.3	Analyse viabiliste . . . . .	62
5.3.1	Traduire les enjeux de gestion durable dans le formalisme de la théorie de la viabilité . . . . .	63
5.3.2	Résoudre les enjeux de gestion durable par l'algorithme de viabilité . . . . .	66
5.3.3	Ajout d'une seconde contrainte économique . . . . .	68
5.3.4	Ajout de transferts monétaires . . . . .	70
5.3.5	Effets de la valeur de la borne maximale des transferts monétaires sur le volume du noyau de viabilité . . . . .	74
5.3.6	Choix des transferts monétaires minimaux au cours du temps pour assurer la viabilité . . . . .	77
5.4	Conclusion . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Du modèle dynamique à l'analyse viabiliste</b>	<b>83</b>
6.1	Le second modèle mathématique . . . . .	84
6.1.1	Choix des variables et contrôles . . . . .	84
6.1.2	Dynamiques du modèle . . . . .	85
6.1.3	Bornes des contrôles . . . . .	88
6.1.4	Modèle mathématique complet . . . . .	89

<b>Table des matières</b>	<b>xi</b>
6.1.5 Contraintes . . . . .	89
6.1.6 Paramètres . . . . .	90
6.2 Travail préparatoire à l'utilisation de l'algorithme de viabilité . . . . .	93
6.2.1 Le modèle discret . . . . .	93
6.2.2 La résolution avec l'algorithme cinq dimensions . . . . .	94
6.3 Résultats . . . . .	98
6.3.1 Noyaux de viabilité en trois dimensions . . . . .	98
6.3.2 Noyau de viabilité en cinq dimensions . . . . .	100
<b>7 Conclusion</b>	<b>105</b>
<b>III Annexe</b>	<b>109</b>
<b>A Calcul des frontières exactes d'un noyau de viabilité en dimension trois</b>	<b>111</b>
<b>B Description des paramètres</b>	<b>143</b>
B.1 Modèle du chapitre 5 . . . . .	143
B.2 Modèle du chapitre 6 . . . . .	145
<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>



# Table des figures

3.1	Définition de l'ensemble E . . . . .	39
4.1	Répartition de la couverture forestière à Madagascar en 2005 . . . . .	51
5.1	Ensemble de contraintes $\mathcal{K}$ pour le système (5.5) . . . . .	65
5.2	Noyau de viabilité $\text{Viab}_S(\mathcal{K})$ sans transfert monétaire soumis aux contraintes (5.1), (5.2) et (5.4) . . . . .	66
5.3	Trajectoires dans le noyau de viabilité $\text{Viab}_S(\mathcal{K})$ . . . . .	67
5.4	Noyau de viabilité avec la contrainte supplémentaire $k \geq 0$ . . . . .	68
5.5	Deux évolutions viables à partir de la même situation à l'intérieur du noyau de viabilité avec la contrainte supplémentaire $k' \geq 0$ . . . . .	69
5.6	Noyaux de viabilité avec la contrainte supplémentaire $k' \geq 0$ , et avec $\tau_{max} = 0$ et $\tau_{max} = 10^7$ . . . . .	70
5.7	Plusieurs vues du noyau de viabilité avec la contrainte économique supplémentaire $k' \geq 0$ et des transferts monétaires ( $\tau_{max} = 10^7$ ) . . . . .	71
5.8	Valeurs du contrôle "effort d'aménagement" sur la frontière du noyau de viabilité . . . . .	72
5.9	Valeurs du contrôle "transferts monétaires" minimales viables à la frontière du noyau de viabilité . . . . .	73
5.10	Volume du noyau de viabilité en fonction des transferts monétaires maximaux ( $\tau_{max}$ ) . . . . .	75
5.11	Noyau de viabilité pour un transfert monétaire maximal $\tau_{max} = 10^8$ . . . . .	76
5.12	Noyau de viabilité pour un transfert monétaire maximal $\tau_{max} = 10^5$ . . . . .	76
5.13	Trajectoire à l'intérieur du noyau de viabilité avec contrainte économique supplémentaire et transferts monétaires ( $\tau_{max} = 10^7$ ) . . . . .	78
5.14	Valeur des transferts monétaires au cours du temps le long de la trajectoire de la figure 5.13 . . . . .	78
6.1	Noyau de viabilité pour le système 6.1.4 soumis à l'ensemble $\mathcal{K}$ avec $\tilde{\alpha} = -3.2$ et $\rho_2 = 0.5$ . . . . .	101



# Liste des tableaux

5.1	Valeurs des paramètres et bornes des contrôles et contraintes pour le modèle 5.2 . . . . .	62
5.2	Lien entre transferts monétaires maximaux ( $\tau_{max}$ ) et volume du noyau de viabilité. . . . .	74
5.3	Extrait des valeurs des transferts monétaires pour la trajectoire de la figure 5.13 sur la période de 0 à 19 années et de 107 à 128 années	79
6.1	Valeurs des paramètres pour le modèle 6.1 . . . . .	91
6.2	Valeurs des bornes des contrôles pour le modèle 6.1 . . . . .	91
6.3	Valeurs des bornes des contraintes pour le modèle 6.1 . . . . .	92
6.4	Nouvelles valeurs des paramètres pour le modèle 6.1 . . . . .	100
B.1	Valeur des paramètres et bornes des contrôles et contraintes pour le modèle 5.2 . . . . .	145
B.2	Valeurs des bornes des contrôles pour le modèle 6.1 . . . . .	146
B.3	Valeurs des paramètres pour le modèle 6.1 . . . . .	147



# Introduction

Ce travail de thèse est axé sur la thématique du développement durable, et de sa modélisation mathématique à l'aide des outils de la théorie de la viabilité. Une application à un cas de gestion durable de la forêt malgache permet d'illustrer cette démarche.

## Modélisation du développement durable

Le développement durable est défini comme un développement qui répond aux besoins des générations du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs. De sa naissance jusqu'à aujourd'hui, le concept de développement durable a pris une importance considérable. Les entreprises, les gouvernements, et le monde de la recherche se sont tous intéressés à ce concept. De nouveaux articles scientifiques portant sur ce sujet sont publiés chaque année. Nous cherchons dans cette thèse à mettre en évidence les éléments clés d'un développement durable. Par exemple, la notion d'échelles, à la fois spatiale et temporelle, est indispensable, tout comme une démarche pluridisciplinaire. A partir de ces éléments, nous étudions les différentes méthodes utilisées pour modéliser un problème de développement durable, en s'intéressant notamment au travail des économistes. Dans un grand nombre de cas, la hiérarchisation et l'agrégation de différents critères correspondant aux différents points à prendre en compte dans un problème de gestion durable a semblé être indispensable. La recherche d'une solution optimale est la stratégie majoritairement adoptée. Nous détaillons cette revue bibliographique dans le chapitre 1.

## Théorie de la viabilité, application au développement durable

Les méthodes existantes nécessitent généralement de faire un choix ordonné entre les différents aspects de la durabilité. Or, il est préférable de déterminer des solutions qui satisfassent tous les critères nécessaires à un développement durable. La théorie mathématique de la viabilité [Aubin, 1991] répond à ces exigences (partie 2.1). En effet, par la définition d'un ensemble de contraintes regroupant les propriétés désirées et la recherche de toutes les solutions satisfaisant ces contraintes, il n'est plus nécessaire d'agréger et de hiérarchiser les critères souhaités. En particulier, l'ensemble de toutes les situations à partir desquelles il existe au moins une évolution telle que les contraintes soient satisfaites indéfiniment, appelé le noyau de viabilité, constitue un élément clé de cette théorie. Les outils de la viabilité utiles dans ce travail sont définis dans la partie 2.2.

Le cadre de la viabilité a déjà été abordé dans la modélisation de problèmes de gestion durable. Le domaine de la pêche notamment est largement étudié.

Nous présenterons les travaux existants dans ce domaine dans la partie 2.3. Nous reviendrons en détail sur des modèles de pêche traités avec les outils de la viabilité [De Lara et Martinet, 2009], [Martinet *et al.*, 2007], ainsi que sur un modèle de production/consommation avec une ressource non-renouvelable [Martinet et Doyen, 2007].

## Calcul de noyaux de viabilité

Dans chacun des travaux présentés, une étape importante est le calcul du noyau de viabilité. Il est possible de faire un calcul exact dans certains cas. Nous présentons deux calculs de noyau de viabilité en dimension deux et en dimension trois, dans le cadre de l'étude de modèles sur la coexistence de deux langues. Ce calcul est présenté dans la partie 3.1.

Cependant, devant la complexité de certains modèles mathématiques, il n'est pas toujours possible de calculer les noyaux de viabilité de façon théorique. Il faut alors faire appel à des méthodes numériques. Nous présenterons l'algorithme développé par Patrick Saint-Pierre [Saint-Pierre, 1994]. Dans le cadre du projet "Déduction", des améliorations ont été apportées à cet algorithme afin de pouvoir étudier des modèles de dimension supérieure à 3. D'autres algorithmes existent et utilisent les SVMs<sup>5</sup> pour calculer des noyaux de viabilité [Deffuant *et al.*, 2007]. Ces outils numériques seront présentés dans la partie 3.2.

## Application au corridor forestier de Fianarantsoa

Comme nous l'avons évoqué précédemment, la théorie de la viabilité semble opportune dans la modélisation du développement durable. L'utilisation d'algorithme de viabilité pour définir des politiques d'actions viables est une solution appropriée étant donné la complexité des modèles ainsi que leur dimension. Afin d'illustrer les différentes étapes de l'étude d'un cas de gestion durable, nous avons fait le choix de nous intéresser au cas du corridor forestier de Fianarantsoa (Madagascar). Le projet ANR Déduction nous a permis de travailler en collaboration avec des équipes malgaches<sup>6</sup> ainsi qu'avec des spécialistes de la viabilité<sup>7</sup>. Nous présentons le contexte malgache dans la partie 4.

En nous basant sur les études des experts scientifiques travaillant à l'IRD et à l'université de Fianarantsoa, nous avons élaboré un premier modèle mathématique reprenant les enjeux d'une gestion durable du corridor malgache, à savoir la conservation de la forêt existante et le maintien du niveau de vie de la population locale. Nous avons intégré dans ce modèle les outils de la théorie de la viabilité. Les détails de ce modèle, ainsi que les données relatives, sont présentés dans le chapitre 5. Sont

---

<sup>5</sup>Support Vector Machine

<sup>6</sup>L'IRD Madagascar (institut de recherche pour le développement) et l'université de Fianarantsoa à Madagascar

<sup>7</sup>Le laboratoire LASTRE (Laboratoire d'Applications des Systèmes Tychastiques Régulés) ainsi que le laboratoire LISC (Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes)

également exposés dans ce chapitre l'analyse de viabilité pour ce modèle comprenant le calcul de noyaux grâce aux algorithmes existants et l'analyse des résultats obtenus.

Suite à ce premier modèle, un certain nombre de précisions apparaissant importantes un second modèle avec cinq dimensions a donc été élaboré. L'étape suivante la construction d'un modèle est la discrétisation de ce modèle afin de pouvoir l'implémenter dans l'algorithme de viabilité à notre disposition. Nous retrouverons la présentation de ce modèle et sa discrétisation, ainsi que les résultats obtenus dans la partie 6.

## Plan de la thèse

La première partie de cette thèse, théorique, s'intéresse au choix de modéliser le développement durable à l'aide des outils de la théorie de la viabilité. Le chapitre 1 est consacré à la bibliographie du développement durable ainsi qu'à sa modélisation mathématique. Les principaux outils de la théorie de la viabilité, et les applications à la gestion durable sont exposés dans le chapitre 2. Dans le chapitre 3, nous montrons comment un noyau de viabilité peut être calculé de façon théorique pour des modèles en deux ou trois dimensions. Ce calcul théorique n'étant pas toujours possible, nous exposons ensuite les principales étapes du fonctionnement de l'algorithme permettant d'approcher un noyau de viabilité.

La seconde partie est appliquée et illustre le choix de la théorie de la viabilité pour la modélisation du développement durable à travers le cas de la déforestation à Madagascar. Le contexte malgache est décrit dans le chapitre 4. Un premier modèle en dimension trois est étudié dans le chapitre 5, tandis qu'un modèle en dimension cinq est exposé dans le chapitre 6.

Dans le chapitre 7, nous dressons le bilan de ce travail de thèse. Nous revenons sur l'intérêt de l'utilisation de la théorie de la viabilité dans la modélisation du développement durable. Par ailleurs, nous formulons les possibles suites à donner à ce travail.



Première partie

**Théorie**



# Modélisation mathématique du développement durable

---

## Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Multidisciplinarité et coopération</b> . . . . .	<b>7</b>
1.1.1	Un concept à cheval sur plusieurs disciplines . . . . .	7
1.1.2	Une nécessité de coopération . . . . .	8
<b>1.2</b>	<b>Multi-échelles</b> . . . . .	<b>9</b>
1.2.1	L'échelle temporelle . . . . .	9
1.2.2	L'échelle géographique . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>Définition</b> . . . . .	<b>10</b>
1.3.1	Un concept qui rassemble... au départ . . . . .	10
1.3.2	Un concept critiqué . . . . .	10
1.3.3	Un concept qui ne fait pas l'unanimité ... in fine . . . . .	11
<b>1.4</b>	<b>Besoin d'expertise</b> . . . . .	<b>11</b>
1.4.1	Une nécessité de formalisation . . . . .	11
1.4.2	Les outils existants . . . . .	12
<b>1.5</b>	<b>Analyse multicritères</b> . . . . .	<b>12</b>
1.5.1	Le principe . . . . .	12
1.5.2	Quelques exemples . . . . .	13
1.5.3	Les limites de l'analyse multicritères . . . . .	14

---

## 1.1 Multidisciplinarité et coopération

### 1.1.1 Un concept à cheval sur plusieurs disciplines

Le développement durable cherche à définir un développement viable sur trois aspects essentiels des activités humaines : les aspects économique, social et environnemental. Dans les années 1970, la prise de conscience de l'existence de ressources limitées sur la planète a conduit à l'émergence de la question écologique. Dans un premier temps, le but était d'établir un compromis entre protection de l'environnement et bonne santé de l'économie. Cependant, ces deux aspects sont apparus comme insuffisants pour étudier dans son ensemble un problème de gestion durable. L'aspect sociologique a alors également été considéré.

En effet, l'impact de la société sur l'environnement, ainsi que l'adaptation de la société à son environnement jouent un rôle non négligeable. [Rauch, 1998] cite par exemple le cas de la gestion durable de l'écosystème d'un lac. Les modèles classiques prennent en compte la concentration de polluants dans le lac et le coût de traitement de cette pollution pour assainir l'eau. L'étude montre que le coût est tel que ce traitement anti-pollution ne peut être maintenu éternellement, ce qui conduit à une situation dégradée. Or, en pratique, la prise de conscience de la population de son environnement endommagé peut la pousser à modifier ses habitudes de façon à réduire ses émissions de polluants et permettre de rétablir la qualité environnementale du lac. C'est pourquoi l'aspect sociologique doit intervenir dans la modélisation du développement durable.

Autre aspect primordial, l'éducation constitue un outil indispensable à l'élaboration d'un développement durable. Que ce soit au sein des gouvernements, dans les entreprises, ou à l'Université, décideurs ou citoyens, tous doivent recevoir une formation les sensibilisant aux enjeux d'un développement durable, et ceci afin d'entraîner une prise de conscience et une modification des comportements de chacun [Jansen, 2003]. On constate aujourd'hui une augmentation du nombre d'universités et de grandes écoles qui intègrent la durabilité dans leur programme. Citons l'AGS-WSC (Association for Global Sustainability - World Student Council) un réseau international d'associations universitaires qui œuvre à la promotion du développement durable, commune au MIT<sup>1</sup>, à l'Université de Tokyo, à l'ETH<sup>2</sup> en Suisse et à l'Université de Technologie de Chalmers en Suède.

Outre les ressources naturelles, les connaissances et les technologies à notre disposition aujourd'hui doivent être préservées pour les générations futures. Chaque nouvelle génération doit disposer au moins du même socle de connaissances que la précédente afin d'assurer son développement.

### 1.1.2 Une nécessité de coopération

Étant donnés les trois piliers fondateurs du développement durable, celui-ci ne peut pas être étudié dans un unique champ disciplinaire. Pour être efficace dans la gestion durable d'un problème, il doit donc y avoir coopération au sein de la communauté scientifique, ainsi qu'entre les secteurs scientifiques et politiques.

Premièrement, il doit y avoir coopération entre scientifiques de plusieurs disciplines. La recherche doit s'organiser autour de travaux pluridisciplinaires incluant économie, sciences de la nature, sciences humaines et sociales, etc. Toutefois, on constate bien souvent un fossé séparant les différentes disciplines, rendant ainsi difficiles les collaborations [Dasgupta *et al.*, 2000]. En effet, chaque discipline a son propre vocabulaire, sa propre façon de penser et des approches qui lui sont propres. Une coopération entre scientifiques de divers domaines est possible mais prend du

---

<sup>1</sup>Massachusetts Institute of Technology

<sup>2</sup>Swiss Federal Institute of Technology

temps. Les projets pluridisciplinaires sont encouragés par un nombre croissant de programmes notamment par l'ANR<sup>3</sup> en France.

Deuxièmement, ce travail scientifique doit s'accompagner de mesures politiques. En effet, [Dasgupta *et al.*, 2000] insistent sur la nécessité pour les scientifiques de s'interroger sur les liens entre économie et écologie, puis ensuite d'utiliser ces informations pour construire des stratégies pour atteindre un développement durable. Ce programme est en partie scientifique et en partie politique. Par ailleurs, la clarté apportée par un travail scientifique sur le développement durable pourrait permettre d'élever le débat politique à un niveau plus pragmatique et moins basé sur des émotions [Solow, 1993].

## 1.2 Multi-échelles

### 1.2.1 L'échelle temporelle

Dans un premier rapport datant de 1980, *World Conservation Strategy : Living Resource Conservation for Sustainable Development*, il est rappelé que pour être durable, un développement doit pouvoir prendre en compte à la fois le long terme et le court terme. Cela implique qu'aucune préférence ne peut être accordée à une génération donnée. Beaucoup de travaux sur le développement durable proposent soit une modélisation qui privilégie la génération actuelle (dictature du présent) soit une modélisation qui privilégie les générations lointaines (dictature du futur). [Chichilnisky, 1997] préconise l'utilisation d'un critère satisfaisant l'équité intergénérationnelle, critère que nous détaillerons dans les paragraphes de la section 1.5.2.

### 1.2.2 L'échelle géographique

A cet enjeu concernant l'échelle temporelle, s'ajoute la problématique de l'échelle spatiale. Selon l'endroit où l'on se trouve sur le globe, les priorités écologiques peuvent être différentes. Ainsi les mesures globales peuvent parfois être difficiles à adapter à une échelle locale. Contrôler ses émissions de  $CO_2$ , par exemple, alors même que l'accès à la nourriture, à l'eau potable ou aux soins n'est pas maîtrisé peut sembler illusoire dans certains pays.

A l'inverse, un problème écologique local peut ne pas en être un à l'échelle globale [Dasgupta *et al.*, 2000]. Par exemple, le problème d'érosion des sols peut être grave localement, mais ne constitue pas une priorité au niveau mondial.

---

<sup>3</sup>Agence Nationale de la Recherche

## 1.3 Définition

### 1.3.1 Un concept qui rassemble... au départ

Le développement durable défini comme “un développement qui répond aux besoins des générations du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs” apparaît pour la première fois en 1987 dans le rapport Brundtland [Brundtland, 1987]. Cette définition a permis de trouver un compromis entre ceux pour qui il était nécessaire de limiter la croissance et donc la pollution pour protéger les ressources naturelles, et ceux pour qui cette croissance était indispensable pour réduire la pauvreté. Largement reprise depuis, cette définition a eu le mérite de rassembler des personnes de divers horizons : scientifiques, politiques, dirigeants d’entreprises, etc, autour d’une idée commune [Mitcham, 1995]. Ce qui a permis de rassembler autour de cette définition commune est le fait qu’elle permette plusieurs interprétations. Elle est suffisamment vague pour que chacun puisse y retrouver son point de vue [Mebratu, 1998]. L’intérêt de cette définition réside dans sa capacité à faire consensus et à créer une vision commune.

### 1.3.2 Un concept critiqué

Par la suite, la définition du développement durable proposée par le rapport Brundtland a rencontré un grand nombre de critiques : termes contradictoires, définition approximative, vague, imprécise.

Avant même d’étudier la définition, certains critiquent les termes choisis de “développement” et “durable” qui apparaissent comme étant en contradiction. Il y a opposition entre d’un côté, la croissance et le développement, et d’un autre côté la durabilité écologique et sociale. Le terme de durabilité est préféré à celui de développement durable par le monde académique, la recherche et les ONGs. La durabilité met l’accent sur la capacité des humains à vivre avec des contraintes environnementales, tandis que le terme “développement” implique croissance et donc la poursuite du modèle économique actuel [Robinson, 2004]. Ce terme est ainsi préféré par les gouvernements et les organisations du secteur privé.

Quant à la définition en elle-même, on lui appose toutes sortes de critiques parmi lesquelles la plus fréquente est son caractère vague et imprécis [Gibson, 1991]. On reproche à l’expression “développement durable” de prendre des significations différentes selon les interlocuteurs. L’absence d’indicateurs et d’outils de mesure permettant de distinguer un développement durable d’un développement non-durable a pour conséquence une perte de sens du terme “développement durable” qui apparaît comme un mot-cliché approuvé par tous [Mitcham, 1995]. On constate aujourd’hui, que l’étiquette “durable” est apposée autant sur des actions politiques que sur des produits sans aucune garantie de durabilité effective. Alors que cette définition vague a initialement permis de trouver un consensus, elle est par la suite

devenue “dangereusement vague” au point d’être difficilement utilisable comme un guide dans nos actions pour un changement [Daly, 1996].

Ce caractère vague et imprécis se retrouve également dans la notion de “besoins”. Il est clair que la définition prend bien en compte la différence qui existe entre les besoins actuels et ceux du futur. Par contre, les besoins ne sont pas les mêmes selon les cultures, selon l’endroit où l’on se trouve sur la planète. Pour certains, des besoins matériels viendront bien avant le fait de réduire la pollution. Or la définition du rapport Brundtland est pensée à l’échelle globale. Ceux qui vont mettre en place un développement durable s’attachent à ce que les besoins de tous soient satisfaits, mais ils pensent le mot “besoins” avec une définition propre à leur culture [Redclift, 2009].

### 1.3.3 Un concept qui ne fait pas l’unanimité ... in fine

Le fait qu’il n’existe aucun critère clair et précis permettant de distinguer durable de non-durable laisse le champ libre à toutes les contestations. Chaque mesure prise en faveur de la durabilité pourra être contestée selon l’interprétation que l’on fera de la définition du développement durable. Ainsi, alors qu’à l’origine, cette définition a permis de trouver un consensus, on constate aujourd’hui, que sans définition d’un critère universel, il ne peut y avoir de rassemblement autour du développement durable.

## 1.4 Besoin d'expertise

### 1.4.1 Une nécessité de formalisation

Les discussions autour du concept de “développement durable” sont plus souvent l’expression d’émotions et d’attitudes que l’analyse formelle de chemins durables pour l’industrie moderne [Solow, 1993]. C’est pourquoi le développement durable a besoin d’expertise et nécessite une théorie ayant pour objet la formalisation mathématique de la durabilité. Cette théorie devra être claire et prendre en compte l’ensemble des idées présentes dans le concept de développement durable.

La pluridisciplinarité est une composante inhérente au développement durable. Les objectifs à satisfaire sont nombreux, puisqu’il faut tenir compte des aspects économiques, sociaux et écologiques. Les outils de formalisation devront permettre de restituer cette diversité.

Par ailleurs, le développement durable s’intéresse aux générations actuelles tout autant qu’aux générations futures, ce qui implique un horizon temporel infini. La théorie développée intègrera donc cette échelle de temps.

De plus, il s’agira aussi de traiter le futur et le présent sur un pied d’égalité. Les outils retenus pour la formalisation de la durabilité devront assurer l’équité intergénérationnelle [Chichilnisky, 1997].

### 1.4.2 Les outils existants

#### Indicateur faible

Les indicateurs usuels de l'économie doivent désormais intégrer une composante environnementale et sociale. [Pearce et Atkinson, 1993] proposent par exemple la définition d'un indicateur de durabilité. Les ressources naturelles non-renouvelables sont prises en compte sous la forme d'un capital naturel. L'hypothèse est faite que le capital naturel et le capital manufacturé peuvent se substituer l'un à l'autre. L'économie d'un pays est qualifiée de durable quand l'épargne ( $S$ ) est supérieure à la valeur de dépréciation du capital naturel ( $\delta_N$ ) ajoutée à celle du capital manufacturé ( $\delta_M$ ). On a donc, avec  $Z$  l'indicateur de durabilité :

$$Z > 0 \Leftrightarrow S > (\delta_N + \delta_M) \quad (1.1)$$

Quand aucune condition n'est posée sur la substitution entre capital naturel et manufacturé, l'indicateur est dit faible. Cependant, même avec cette définition, un grand nombre de pays n'a pas une économie durable [Pearce et Atkinson, 1993]. C'est par exemple le cas de Madagascar, du Mali ou de l'Indonésie (données datant de 1990).

#### Indicateur fort

On peut également définir un indicateur fort de durabilité. Dans ce cas, capital naturel et capital manufacturé seront traités indépendamment : il ne pourra pas y avoir de substitution. L'exemple suivant est une proposition de définition d'un indicateur fort.

[Baumgärtner et Quaas, 2009] étudient la durabilité forte sous incertitudes. Le choix de la durabilité forte est souhaitable car on cherche à conserver différents stocks de capital humain, naturel ou économique de façon indépendante. On étudie la durabilité sous incertitudes car les besoins du futur ne sont pas connus et même s'ils l'étaient, on ne connaît pas précisément les conséquences de nos actions d'aujourd'hui sur le futur. Pour étudier la durabilité forte sous incertitudes, les auteurs utilisent le concept de viabilité. Ils définissent la viabilité d'un projet comme un projet pour lequel la probabilité de maintenir les stocks des différentes ressources et services est au dessus d'une certaine valeur seuil. On peut à partir de là définir un ensemble de viabilité ou le degré de viabilité d'un projet.

## 1.5 Analyse multicritères

### 1.5.1 Le principe

L'analyse multicritères a été largement adoptée dans la modélisation du développement durable. L'avantage d'un modèle multicritères est qu'il permet de considérer un grand nombre de données, d'objectifs et de relations, comme cela est souvent le cas dans un problème réel d'aide à la gestion durable (*cf* paragraphe

1.1). On pourra déterminer si une action est meilleure qu'une autre selon un certain critère. En général, il n'y a pas de solution satisfaisant tous les critères. On cherchera donc une solution optimale. Pour cela, il est nécessaire de définir un critère d'optimalité. On agrège donc les différents critères. Une approche standard consiste à les réduire à une même échelle pour qu'ils soient comparables, puis à en faire une somme pondérée. Le choix des poids à affecter à chacun de ces critères dépend de l'objectif du modélisateur. Il peut choisir de favoriser l'aspect économique d'un problème, ou bien l'aspect environnemental, ou encore accorder la même importance aux différents aspects du problème étudié. Le choix des poids à affecter à chacun des critères est un vrai défi. Il semble très difficile de trouver des poids permettant de considérer chaque aspect d'un problème de façon équitable. Par ailleurs, les résultats obtenus seront fortement dépendants de l'importance accordée à chacun des critères et de la méthode de classification de ces critères. Ainsi, le plus important dans une analyse multicritères n'est pas le résultat en lui-même, mais le résultat au regard du processus de décision permettant la définition du critère d'optimalité [Munda, 2005].

### 1.5.2 Quelques exemples

Le caractère multidisciplinaire du développement durable rend sa modélisation difficile. Le critère d'optimalité inclut des critères environnementaux, des critères sociaux ainsi que des critères économiques. Par ailleurs, ces aspects étant souvent liés, la définition du critère est rendu d'autant plus complexe. D'autre part, il est également nécessaire de tenir compte de l'échelle temporelle infinie et de traiter chaque génération de la même façon.

[Greening et Bernow, 2004] dressent un état de l'art des méthodes multicritères utilisées pour la modélisation du développement durable : les méthodes de dominance, les méthodes maximin, minimax et maximax, les méthodes de pondération, les méthodes conjointes et disjointes. Nous présentons dans les paragraphes suivants quelques exemples de critères utilisés.

**Le critère utilitariste** Le critère défini doit tenir compte de l'échelle temporelle particulière propre au développement durable. Chaque génération  $t$  a une préférence représentée par une fonction d'utilité  $u$  qui dépend de la consommation  $c_t$  et du stock de ressources disponible au temps  $t$ ,  $s_t$ . L'objectif est la maximisation de la somme infinie actualisée des utilités, soit :

$$\max \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c_t, s_t)}{(1 + \delta)^t} \quad (1.2)$$

où  $\delta \geq 0$  est le taux d'actualisation. Ce taux intervient dans le critère pour prendre en compte deux principes : le fait que la valeur d'un bien de consommation tend à se déprécier avec le temps, mais également le fait qu'il existe une préférence à consommer un bien aujourd'hui plutôt que demain.

Si  $\delta \neq 0$ , ce critère conduit à une utilité décroissant vers 0 pour les générations les plus éloignées. Cette méthode avantage la génération actuelle.

**Maximin** La méthode du Maximin consiste à maximiser l'utilité de la génération la moins favorisée, soit :

$$\max \min_t u(c_t, s_t) \quad (1.3)$$

**Critère de Heal** Une méthode consiste à maximiser l'utilité que l'on a à l'infini [Heal, 1998].

$$\max \lim_{t \rightarrow \infty} u(c_t, s_t) \quad (1.4)$$

Afin de maximiser l'utilité des générations les plus éloignées, ce critère conduit à une consommation nulle des ressources naturelles et donc au maintien d'un stock de ressources égal au stock initial  $s_0$ . Les générations actuelles sont donc pénalisées.

Une fois le critère choisi, l'étape suivante consiste à définir les contraintes pour une économie durable : conserver un stock de ressources naturelles, préserver un niveau d'utilité non décroissant, etc. Un poids est attribué à chacun des objectifs, il s'agit ensuite de définir des trajectoires optimales.

**Critère de Chichilniski** [Chichilnisky, 1997] a montré que les critères usuels tels que le critère de Heal ou la somme des utilités actualisées sont des dictatures du futur pour le premier et du présent pour le second. Elle propose un critère qui ne favorise ni le présent ni le futur. Le critère de Chichilnisky est la somme pondérée des deux critères précédents :

$$\alpha \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(c_t, s_t)}{(1 + \delta)^t} + (1 - \alpha) \lim_{t \rightarrow \infty} u(c_t, s_t) \quad (1.5)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de pondération de l'utilité du présent strictement compris entre 0 et 1.

En prenant comme premier terme la somme des utilités escomptées, Chichilniski s'assure que son critère n'est pas une dictature du futur, et ajoutant le critère de maximisation de l'utilité à l'infini, son critère ne peut pas être une dictature du présent<sup>4</sup>. Cependant, ce critère n'évite pas la nécessité de choisir un poids ( $\alpha$ ) pour chacune de ses composantes.

### 1.5.3 Les limites de l'analyse multicritères

Comme évoqué précédemment, l'analyse multicritères nécessite la définition d'un critère d'optimalité. Cette étape est délicate. Il s'agit d'agréger un certain nombre de critères. Il faut donc faire un choix dans le traitement de ces critères, définir leur importance les uns par rapport aux autres. Or ce choix va dépendre

<sup>4</sup>Voir [Chichilnisky, 1997] pour la démonstration.

fortement du point de vue du modélisateur ou des discussions avec les parties prenantes. Mais le critère défini ne pourra pas avoir une valeur universelle. Il pourra toujours être contestable. Or, c'est ce que nous cherchons à éviter.

D'autre part, des phénomènes de compensation risquent de se produire. Il est possible qu'une solution satisfasse le critère d'optimalité, en remplissant les conditions d'un objectif et en en négligeant un autre.

Citons également le non-respect de l'équité intergénérationnelle par un grand nombre de critères (*cf* paragraphe 1.4.1).

Enfin, un aspect difficile à étudier avec l'analyse multicritères est le traitement du futur. Sans connaissance du futur, le modélisateur va faire un certain nombre de choix définitifs concernant le futur. Par exemple, ne connaissant pas le taux d'accroissement d'une population pour les 20 prochaines années, une hypothèse fixant un scénario de variations de ce taux devra être faite.

Nous avons identifié dans ce chapitre les caractéristiques du développement durable ainsi que les principaux outils utilisés. L'analyse multicritères constitue une méthode largement répandue pour la modélisation du développement durable. Nous avons cependant mis en valeur certaines limites de cette démarche. C'est pourquoi nous proposons dans la suite de cette thèse une alternative à l'analyse multicritères en faisant appel au formalisme de la théorie mathématique de la viabilité.



CHAPITRE 2

# Viabilité

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Apport et intérêt de la viabilité . . . . .</b>	<b>18</b>
<b>2.2</b>	<b>Introduction à la théorie de la viabilité . . . . .</b>	<b>20</b>
2.2.1	Évolution et système contrôlé . . . . .	20
2.2.2	Contrôle et régulon . . . . .	20
2.2.3	Évolution et ensemble viable . . . . .	20
2.2.4	Noyau de viabilité . . . . .	21
2.2.5	Caractérisation du noyau de viabilité . . . . .	21
2.2.6	Théorème de semiperméabilité . . . . .	23
2.2.7	Outils de la théorie de la viabilité . . . . .	23
<b>2.3</b>	<b>Applications . . . . .</b>	<b>25</b>
2.3.1	Plusieurs applications à la gestion durable . . . . .	26
2.3.2	Deux applications de gestion durable de pêcheries détaillées .	28
<b>2.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>32</b>

---

Nous avons mis en évidence certaines limites des techniques usuelles de l'analyse multicritères dans la partie 1.5 du chapitre 1. Nous nous intéressons dans ce chapitre à la théorie mathématique de la viabilité. Elle permet, dans le traitement du développement durable, de dépasser certaines limites rencontrées avec l'analyse multicritères. Nous abordons dans la partie 2.1 les différents avantages de la viabilité.

La théorie de la viabilité est l'étude de *systèmes dynamiques contrôlés* soumis à un ensemble de *contraintes de viabilité*. Pour chaque état du système, il existe un certain nombre d'évolutions gouvernées par le système dynamique contrôlé. On cherche à déterminer les suites de contrôles qui permettent à une évolution de satisfaire pour toujours les contraintes de viabilité. Les évolutions qui restent dans l'ensemble de contraintes pour toujours sont dites *viables*. L'ensemble de tous les états du système à partir desquels part au moins une évolution viable est appelé le *noyau de viabilité*. Ces définitions sont développées et complétées en décrivant d'autres outils de la théorie de la viabilité dont nous avons besoin dans la suite de ce travail, dans la partie 2.2.

Nous présentons dans la partie 2.3 différentes applications de la viabilité. En particulier, nous nous intéressons au cas de la gestion durable d'une pêcherie, étudié par [Martinet *et al.*, 2007] et développons un exemple d'application de l'outil *temps de crise minimal*.

## 2.1 Apport et intérêt de la viabilité

### Viabilité vs Optimisation

#### Adaptation

Les méthodes d'optimisation nécessitent une connaissance du futur. Des hypothèses sont donc faites une fois pour toutes. Or les évolutions de plusieurs variables décrivant des systèmes en biologie ou en sciences sociales n'évoluent pas de façon déterministe. En réalité, elles s'adaptent à leur environnement au cours du temps. La théorie de la viabilité permet cette adaptation d'une évolution à son environnement en ne faisant qu'un nombre réduit d'hypothèses sur le futur. En effet, on fixe uniquement des bornes à l'intérieur desquelles des contrôles prendront n'importe quelles valeurs. Les évolutions sont soumises à un ensemble de contraintes. Grâce aux contrôles, elles vont respecter dans la mesure du possible ces contraintes [Aubin et Saint-Pierre, 2002]. En effet, le choix des contrôles n'est pas fait a priori. Au contraire, ceux-ci changent à tout instant afin de prendre en compte les possibles modifications de l'environnement du système, ceci permettant donc l'adaptation aux contraintes.

#### Solutions générales et indépendantes

Dans la théorie du contrôle optimal, nous avons vu qu'il était nécessaire de définir un critère d'optimalité. Cela nécessite de faire des choix dans le traitement des différents critères. Cette étape est délicate dans la mesure où ces choix peuvent être arbitraires ou difficilement justifiables. Bien souvent, ces choix conviendront à certaines parties prenantes d'un projet, mais il semble difficile qu'ils contentent l'ensemble des partenaires. Évidemment, la solution optimale obtenue dépend du critère d'optimalité défini (cf paragraphe 1.5.1). La théorie de la viabilité permet d'éviter cette étape de hiérarchisation des différents critères. Pour cela, on définit un ensemble, appelé *ensemble de contraintes*, à l'intérieur duquel tous les critères sont satisfaits. Par exemple, dans le cas d'un modèle d'agriculture durable, on peut imaginer deux critères : avoir une récolte suffisante ( $R_{min}$ ) chaque année et ne pas dépasser une quantité maximale d'engrais ( $E_{max}$ ). Plutôt que de prendre en compte ces deux contraintes en les pondérant, nous allons définir un ensemble  $K \in \mathbb{R}^2$  définie par :

$$K = \{(E, R) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq E \leq E_{max} \text{ et } R_{min} \leq R\}$$

où  $E$  est la quantité d'engrais utilisée chaque année, et  $R$  la récolte par année.

Après avoir décrit l'ensemble des évolutions des variables  $E$  et  $R$ , on pourra ensuite chercher celles qui satisfont l'ensemble des critères indéfiniment.

La définition d'un ensemble de contraintes permet donc d'éviter le choix de poids à attribuer à chacun des critères. Seules les bornes des variables doivent être fixées pour définir cet ensemble, et ce choix est propre à chacune des contraintes et ne nécessite donc pas d'avantager ou de défavoriser une contrainte par rapport à une autre.

### Plusieurs politiques d'actions possibles

L'analyse multicritères nous donne au final une unique solution optimale, c'est à dire la solution qui satisfait le mieux le critère défini. L'étude d'un modèle avec les outils de la viabilité va nous donner un ensemble de solutions, appelé *noyau de viabilité*. Le calcul de ce noyau de viabilité nous donnera un ensemble de situations initiales pour lesquelles il est possible de trouver une évolution qui soit solution du système dynamique contrôlé défini dans notre modèle, et qui reste dans l'ensemble de contraintes. Parmi les évolutions viables, toutes satisferont les contraintes, mais pas de la même façon. Certaines resteront proches des limites fixées dans les contraintes, d'autres changeront le moins possible de direction. Il existe un certain nombre d'outils mathématiques permettant de choisir la solution possédant les propriétés les plus pertinentes pour notre étude.

Ainsi, alors que l'analyse multicritères renvoie une solution optimale, c'est-à-dire satisfaisant au mieux le critère défini, le noyau de viabilité est un ensemble à l'intérieur duquel toutes les contraintes sont satisfaites. Quand il n'est pas possible de trouver des évolutions satisfaisant l'ensemble des contraintes, le noyau de viabilité est vide. Il est alors nécessaire de relâcher les contraintes ou de modifier les dynamiques du système étudié.

### Équité intergénérationnelle

L'équité intergénérationnelle est un enjeu majeur dans la modélisation du développement durable [Chichilnisky, 1997]. Parmi l'ensemble de solutions satisfaisant les contraintes de viabilité, certaines respecteront une équité entre les générations tandis que d'autres autoriseront que certaines générations soient "sacrifiées" [Durand *et al.*, 2010]. Un moyen d'éviter cette situation est d'ajouter une contrainte qui sera, par exemple, qu'un niveau minimal de ressources soit toujours conservé. Ainsi, chaque génération atteindra au moins ce niveau seuil de ressources. On peut durcir cette contrainte en imposant que le niveau de ressources augmente chaque année. La théorie de la viabilité permet donc de tenir compte de l'équité entre les générations en définissant simplement une nouvelle contrainte.

### Horizon temporel infini

Dans le paragraphe 1.5.2 sont présentés les différents critères permettant de tenir compte de l'échelle temporelle de plusieurs générations. Le critère utilitariste fait appel à un taux d'actualisation ( $\delta$ ). Cependant, selon le choix fait pour la valeur de ce taux, il peut y avoir dictature du futur ou du présent. Dans la théorie de la viabilité, le taux d'actualisation n'intervient pas. Les contraintes définies à l'instant  $t$  sont les mêmes que celles qui devront être satisfaites à l'instant  $t + 1$ .

## 2.2 Introduction à la théorie de la viabilité

### 2.2.1 Évolution et système contrôlé

Soit  $X \subset \mathbb{R}^n$  l'espace des états du système.

Une *évolution*  $t \in [0, +\infty[ \rightarrow x(t) \in X$  décrit l'état du système pour tout  $t \in [0, +\infty[$ . Elle peut être influencée par des actions extérieures appelées *contrôles*.

Lorsque l'évolution de l'état du système est gouvernée par un système dynamique contrôlé, les conditions suivantes sont remplies :

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \text{ pour presque tout } t \geq 0 \quad (2.1)$$

Les contrôles  $u(t)$  appartiennent à un ensemble  $U(x(t)) \subset \mathbb{R}^p$  qui dépend de l'état du système au temps  $t$ . La correspondance  $U : X \rightsquigarrow Y$  décrit l'ensemble des contrôles  $u(x) \in Y$  admissibles lorsque le système est dans l'état  $x$ .

A partir d'un état initial  $x_0$ , il peut exister plusieurs évolutions possibles, en fonction des différents choix de contrôles au cours du temps  $t \rightarrow u(t)$ . Une solution du système (2.1) est une évolution  $t \rightarrow x(t)$  telle qu'il existe une fonction de contrôle mesurable  $t \rightarrow u(t)$  telle que les conditions de (2.1) soient vérifiées presque partout. On note  $\mathcal{S}(x)$  l'ensemble des évolutions issues de  $x$  gouvernées par le système contrôlé  $\mathcal{S}$ , i.e. :

$$\mathcal{S}(x) = \left\{ x(\cdot) \left| x(0) = x \text{ et } \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \text{ pour presque tout } t \geq 0 \right. \right\}$$

### 2.2.2 Contrôle et régulon

La nature des variables de contrôle  $u \in U(x)$  diffère selon les cas étudiés. On distingue les contrôles des régulons. Quand un décisionnaire pilote le système, fait le choix des contrôles comme un ingénieur, on utilise le terme "contrôle". Quand il n'y a pas d'agent clairement identifié qui agit, on emploie le terme "régulon". Le fitness (facteur de sélection naturelle) en biologie, comme nous le verrons dans le paragraphe 2.3, ou les codes culturels en sociologie peuvent être considérés comme des régulons.

Dans la partie II, nous utiliserons des contrôles et des régulons. Dans les modèles décrivant les dynamiques de déforestation dans le corridor forestier malgache, nous aurons par exemple, un contrôle portant sur l'effort d'aménagement de nouvelles surfaces, ou bien sur les transferts monétaires, car il y a ici un agent identifié. Nous définirons aussi un régulon portant sur le taux de natalité.

### 2.2.3 Évolution et ensemble viable

L'originalité de la théorie de la viabilité est de s'intéresser à des systèmes contrôlés soumis à des contraintes de viabilité. Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un *ensemble de*

*contraintes de viabilité.* Une évolution est *viable* dans  $K$  si sa trajectoire reste toujours dans l'ensemble de contraintes  $K$  :

$$\forall t \geq 0, x(t) \in K$$

Un ensemble  $K$  est viable pour le système contrôlé (2.1), si pour tout  $x \in K$ , il existe une solution de (2.1) partant de  $x$  et viable dans  $K$ .

### 2.2.4 Noyau de viabilité

Le *noyau de viabilité* associé au système dynamique contrôlé (2.1) et soumis à l'ensemble de contraintes de viabilité  $K$ , noté  $\text{Viab}_{2.1}(K)$ , est l'ensemble de tous les états initiaux  $x_0 \in K$  pour lesquels il existe une solution  $x(\cdot)$  au système (2.1) partant de  $x_0$  et viable dans  $K$  :

$$\text{Viab}_{2.1}(K) = \{x_0 \in K \mid \exists x(\cdot) \in \mathcal{S}(x_0) \text{ telle que } \forall t \geq 0, x(t) \in K\}$$

### 2.2.5 Caractérisation du noyau de viabilité

L'idée développée dans le théorème de viabilité est que si l'on peut trouver en chaque point de la frontière de l'ensemble  $K$  une dérivée tangente qui permette à la trajectoire de rentrer à l'intérieur de  $K$  ou de rester sur la frontière de  $K$ , alors l'ensemble  $K$  est viable. Nous avons donc besoin de rappeler quelques notions concernant la tangentialité.

#### Cône contingent

**Définition 2.1** Une direction  $v \in X$  appartient au cône contingent à l'ensemble  $K$  en  $x \in K$  si  $v$  est la limite d'une suite de directions  $v_n$  et s'il existe une suite  $h_n \rightarrow 0_+$  telle que  $x + h_n v_n \in K \forall n$ .

L'ensemble de ces directions constitue un cône fermé  $T_K(x)$  appelé le cône contingent à  $K$  en  $x$ . Il s'écrit encore comme l'ensemble des directions  $v$  telles que :

$$T_K(x) = \left\{ v \in X \mid \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d_K(x + hv)}{h} = 0 \right\}$$

En particulier, si  $x$  appartient à l'intérieur de  $K$ , alors le cône contingent à  $K$  en  $x$  est l'espace  $X$  tout entier.

Nous aurons besoin dans l'énoncé du théorème de viabilité des trois définitions suivantes.

#### Correspondance de régulation

**Définition 2.2** On associe au système dynamique contrôlé (2.1) et à l'ensemble de contraintes  $K$ , une correspondance de régulation  $R_K$ . A tout  $x \in K$ , elle relie le sous-ensemble  $R_K(x)$  contenant les contrôles ou régulateurs  $u \in U(x)$  pour lesquels

le système (2.1) gouverne des évolutions viables, c'est à dire tels que  $f(x, u)$  soit tangent à  $K$  en  $x$  :

$$R_K(x) = \{u \in U(x) \mid f(x, u) \in T_K(x)\}$$

### Système contrôlé Marchaud

**Définition 2.3** Soit  $U : X \rightarrow Y$  et  $f : X \times Y \rightarrow X$ .  $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud si

- $\text{Graph}(U)$  est fermé;
- $f$  est continue;
- $f$  et  $U$  sont à croissance linéaire <sup>1</sup>
- les ensembles  $\{f(x, u) \mid u \in U(x)\}$  sont convexes pour tout  $x \in \text{Dom}(U)$ <sup>2</sup>.

### Domaine de viabilité

**Définition 2.4** Un sous-ensemble fermé  $D \in \text{Dom}(U)$  est un domaine de viabilité pour le système contrôlé (2.1) si et seulement si

$$\forall x \in D, \bigcup_{u \in U(x)} \{f(x, u)\} \cap T_K(x) \neq \emptyset$$

### Théorème de viabilité

Le théorème de viabilité permet de caractériser le noyau de viabilité, d'où son importance. En pratique, il est très utile, et nous permettra de calculer les frontières exactes d'un noyau de viabilité dans le paragraphe 3.1.

**Théorème 2.1** Soit  $(U, f)$  un système contrôlé Marchaud. Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Alors  $K$  est viable pour le système dynamique contrôlé (2.1) si et seulement si la correspondance de régulation  $R_K$  a des valeurs non vides pour tout  $x \in K$ , c'est à dire si  $K$  est un domaine de viabilité.

L'idée du théorème est de montrer que si en chaque point d'un ensemble  $K$ , on peut trouver un contrôle  $u$  telle que le vecteur  $f(x, u)$  appartienne au cône contingent à l'ensemble  $K$ , alors cet ensemble  $K$  est viable. Le point crucial concerne les frontières de l'ensemble  $K$ . En effet, pour un point situé à l'intérieur de  $K$ , le cône contingent est l'espace tout entier, donc, il est aisé de trouver un contrôle adéquat. Par contre, si l'on se trouve sur la frontière de  $K$ , il s'agit alors de trouver un contrôle  $u$  tel que  $f(x, u)$  appartienne au cône contingent à l'ensemble  $K$ .

**Théorème 2.2** Soit  $(U, f)$  un système contrôlé Marchaud. Soit  $K \subset \text{Dom}(U)$  fermé. Alors le noyau de viabilité de  $K$  existe et est égal au plus grand sous-ensemble fermé de  $K$  viable pour (2.1).

<sup>1</sup> $F$  est à croissance linéaire si  $\exists c > 0$  tel que  $\forall x \in X \quad \sup_{v \in F(x)} \|v\| \leq c(\|x\| + 1)$

<sup>2</sup> $\text{Dom}(U) = \{x \in X \mid U(x) \neq \emptyset\}$

Ainsi, le noyau de viabilité  $\text{Viab}_{2.1}(K)$  est le plus grand domaine de viabilité inclus dans l'ensemble de contraintes  $K$ .

Le théorème de viabilité sera particulièrement utile dans la partie 3.1 où nous chercherons à calculer les frontières théoriques d'un noyau de viabilité associé à un système dynamique contrôlé. Nous commencerons ce calcul par caractériser un ensemble viable grâce au théorème. L'étape suivante dans le calcul des frontières théoriques sera de montrer que le domaine de viabilité est le plus grand et qu'il s'agit donc d'un noyau de viabilité.

### 2.2.6 Théorème de semiperméabilité

Il existe une propriété particulière concernant la frontière d'un noyau de viabilité [Quincampoix, 1992]. Si le noyau de viabilité est strictement inclus dans l'ensemble de contraintes  $K$ , alors toute évolution partant de la frontière est viable sur la frontière. Cette évolution ne peut pas entrer à l'intérieur du noyau de viabilité. C'est ce qu'on appelle la propriété de semi-perméabilité de la frontière.

Rappelons dans un premier temps la définition de la frontière.

**Définition 2.5** Soit  $D \subset K \subset X$  deux ensembles de  $X$ . Les ensembles

$$\partial_K D = \overline{D} \cap \overline{K \setminus D} \quad \overset{\circ}{\partial}_K D = D \cap \overline{K \setminus D}$$

sont appelés respectivement frontière et pré-frontière du sous-ensemble  $D$  relativement à  $K$ .

**Définition 2.6** Soit  $D \subset X$  un sous-ensemble et soit  $\mathcal{S}$  un système dynamique contrôlé. On dit que  $D$  satisfait la propriété de semi-perméabilité si partant de  $x \in \overset{\circ}{\partial}_X D$ , toutes les évolutions viables dans  $D$  sont en fait viables dans  $\overset{\circ}{\partial}_X D$ .

**Théorème 2.3** Soit  $K$  un ensemble fermé et soit  $\mathcal{S}$  un système dynamique contrôlé semi-continue inférieurement. Alors l'intersection  $\text{Viab}_{\mathcal{S}}(K) \cap \text{Int}(K)$  satisfait la propriété de semi-perméabilité.

Ce théorème implique que la propriété de semi-perméabilité ne s'applique pas sur les frontières communes au noyau de viabilité et à l'ensemble de contraintes. Seules les frontières de l'ensemble des contraintes contenues strictement à l'intérieur du noyau sont semi-perméables.

### 2.2.7 Outils de la théorie de la viabilité

Le noyau de viabilité permet de distinguer les évolutions viables des évolutions non viables. Que faire de cette information dans le cas d'une situation non-viable ? La première question qui vient à l'esprit est de se demander au bout de combien de temps les contraintes seront violées. On utilisera pour y répondre la fonction *temps de sortie*. Dans le cas d'une évolution non-viable, la viabilité peut être rétablie par la suite. La fonction *temps de crise* permet d'évaluer le temps qu'une évolution passe en dehors de l'ensemble des contraintes.

### Fonction de temps de sortie maximal

A partir d'un état qui appartient à l'ensemble des contraintes mais pas au noyau de viabilité, nécessairement toutes les évolutions quittent l'ensemble des contraintes en temps fini. La fonction temps de sortie mesure le temps durant lequel les contraintes sont satisfaites. La fonction temps de sortie maximal associe à un état du système le temps de sortie maximal sur l'ensemble des évolutions issues de ce point : cette fonction prend une valeur nulle hors de l'ensemble des contraintes, infinie dans le noyau de viabilité et finie dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité. Pour un état dans l'ensemble des contraintes mais hors du noyau de viabilité, elle permet de déterminer le temps maximal durant lequel une évolution peut satisfaire les contraintes avec des fonctions de contrôles adaptées. Cette information est importante, elle permet de savoir de combien de temps l'on dispose pour trouver de nouveaux contrôles possibles sur le système qui permettraient éventuellement d'assurer sa viabilité.

**Définition 2.7** [*Aubin, 1991*] La fonction temps de sortie maximal est définie par :

$$\tau_K^\#(x) := \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \tau_K(x(\cdot)) := \sup_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \inf \{t \in [0, \infty[ \mid x(t) \notin K\}$$

### Fonction temps de crise minimal

Distinguer situations viables de situations non viables à l'aide du noyau de viabilité donne une première information. Intéressons-nous au cas non-viable. Une évolution est non-viable si elle viole les contraintes de viabilité durant au moins un certain laps de temps. Il peut arriver qu'une évolution ne satisfasse pas ces contraintes durant un laps de temps  $T$  avant de revenir à l'intérieur de l'ensemble des contraintes. On parlera dans ce cas d'évolutions viables pour l'ensemble de contraintes  $K$  à l'échelle  $T$ . Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\mu(t \mid x(t) \notin K) \leq T$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue. Cette notion de viable à l'échelle  $T$  englobe la notion usuelle de viable en prenant  $T = 0$ .

La fonction temps de crise mesure le temps passé par une évolution hors de l'ensemble des contraintes. Si l'évolution est viable, le temps de crise est nul ; si l'évolution quitte  $K$  avant de revenir dans le noyau de viabilité de  $K$  et d'y rester, son temps de crise est fini ; si elle quitte  $K$  sans jamais y revenir, son temps de crise est infini. La fonction temps de crise minimal définie sur l'ensemble des états prend le temps de crise minimal sur toutes les évolutions issues de cet état. Si l'état appartient au noyau de viabilité, nécessairement, la valeur du temps de crise minimal est nulle, sinon il est strictement positif. Ainsi, on a la définition mathématique suivante :

**Définition 2.8** [*Doyen et Saint-Pierre, 1997*] La fonction temps de crise minimal est définie par :

$$C_K(x) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \mu(t|x(t) \notin K) = \inf_{x(\cdot) \in \mathcal{S}(x)} \int_0^{+\infty} X_{K^c}(x(s)) ds$$

où  $\mu$  est la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}$  et  $X_{K^c}$  est la fonction caractéristique sur  $X \setminus K$ , i.e. :

$$X_{K^c}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K \\ 1 & \text{si } x \notin K \end{cases}$$

On pose  $C_K(x) = +\infty$  quand toutes les trajectoires partant de  $x$  violent les contraintes  $K$  pendant un temps infini.

**Remarque 2.1** [*Doyen et Saint-Pierre, 1997*] Le temps de crise minimal permet d'élargir le concept de noyau de viabilité. On peut regarder l'étude du temps de crise minimal comme un problème de noyau de viabilité avec cible. Le noyau de viabilité devient une cible. Et on étudie le temps passé par une évolution hors de l'ensemble des contraintes avant d'atteindre le noyau.

La théorie de la viabilité étudie les systèmes contrôlés soumis à des contraintes. Un sous-ensemble de l'ensemble des contraintes, appelé noyau de viabilité, regroupe l'ensemble des états initiaux à partir desquels il existe au moins une évolution viable. Des méthodes et des outils ont été développés afin de caractériser le noyau de viabilité. En l'absence de viabilité, d'autres outils permettent de caractériser des évolutions non-viables.

Dans de nombreux domaines, on retrouve des questions et enjeux posés dans ces termes : un système évoluant dans le temps soumis à certaines contraintes et piloté par un agent. L'objectif est alors de déterminer les contrôles permettant à une évolution d'être viable. Nous présentons dans la suite de ce chapitre une sélection d'applications faisant appel à la théorie de la viabilité. Nous nous consacrons ensuite à des applications environnementales et montrons comment les outils décrits dans cette section peuvent être utilisés.

## 2.3 Applications

Nous allons voir dans cette section que la théorie de la viabilité est utilisée dans de nombreux domaines et en particulier dans celui de la gestion durable [*De Lara et Doyen, 2008*]. Nous développons plus particulièrement deux modèles de gestion durable d'une pêcherie. Le domaine de la pêche avec la mise en place de quotas visant à la sauvegarde d'espèces menacées est un thème au cœur des préoccupations environnementales.

**En génétique** Citons une application en génétique sur la question du maintien du polymorphisme génétique<sup>3</sup> lors des mécanismes de reproduction. Pour maintenir le polymorphisme au sein d'une population, les fréquences des différentes versions d'un gène doivent être maintenues entre deux bornes. Un certain nombre de facteurs (sélection naturelle, mutation génétique, etc) influe sur ces fréquences. [Bonneuil et Saint-Pierre, 2000] utilisent la notion de noyau de viabilité pour déterminer les fréquences initiales qui conduisent au maintien du polymorphisme. Les facteurs influents comme le facteur de sélection naturelle appelé fitness sont modélisés comme étant des régulons car leurs valeurs ne sont pas contrôlées par un agent identifié.

**En démographie** Une autre application concerne le cycle de vie. Quels sont les choix, notamment en ce qui concerne les enfants, qui peuvent être faits afin de se garantir un certain niveau de vie, de pouvoir partir à la retraite avec un certain capital, et de pouvoir élever ses enfants. C'est à cette question que répondent [Bonneuil et Saint-Pierre, 2008] grâce aux outils de la viabilité.

**En finance** La gestion de portefeuille d'actifs financiers peut également être étudiée grâce aux outils de la viabilité [Aubin *et al.*, 2005].

**En aéronautique** A partir d'un modèle décrivant l'atterrissage d'un avion, [Tomlin *et al.*, 2003] cherchent à déterminer la poussée et l'angle d'attaque à appliquer pour que l'atterrissage se passe dans les conditions imposées.

### 2.3.1 Plusieurs applications à la gestion durable

Plusieurs applications de la théorie de la viabilité existent dans la modélisation de problèmes de gestion durable.

[Durand *et al.*, 2010] étudient l'apport des outils de la viabilité dans l'analyse des modèles économiques classiques du développement durable<sup>4</sup>. L'article montre comment ces modèles étudiés avec la viabilité permettent de tenir compte de l'équité intergénérationnelle et du respect de contraintes de durabilité pour toujours.

Citons également une application dans la gestion durable d'une forêt [Rapaport *et al.*, 2006]. Dans ce cas, il s'agit de gérer un stock de bois divisé en catégories selon l'âge des arbres. Une variable de contrôle correspond à l'abattement des arbres. Les contraintes sont là aussi d'ordre économique (assurer des

---

<sup>3</sup>Le polymorphisme est la coexistence de plusieurs versions d'un même gène présentes chez au moins 1% de la population. Le maintien du polymorphisme revêt une importance particulière pour les populations puisqu'il constitue une réserve génétique permettant l'adaptation des populations à leur environnement.

<sup>4</sup>Cette étude a été réalisée dans le cadre du projet ANR "Déduction".

revenus grâce à l'abattement des arbres) et écologique (conserver un nombre suffisant d'arbres). L'étude viabiliste va permettre de répondre à des questions du type : quelle est la plus grande valeur possible de récolte telle que le noyau de viabilité soit non vide, quelles sont les politiques d'actions pour conserver une certaine quantité d'arbres ?

Une autre étude<sup>5</sup> porte sur l'état des forêts dans le monde, le stock de  $CO_2$  présent dans l'atmosphère en relation avec l'activité économique humaine [Andrés-Domenech *et al.*, 2008]. Le modèle étudié décrit les dynamiques de la surface de forêt, du stock de  $CO_2$  présent dans l'atmosphère, ainsi que des émissions de  $CO_2$ . Le taux de déforestation, le taux de reforestation, le taux d'émissions de  $CO_2$  ainsi que les transferts monétaires sont les variables de contrôles prises en compte. L'objectif est de déterminer les situations initiales (en terme de surface de forêt, stock de  $CO_2$  et émissions de  $CO_2$ ) à partir desquelles il est possible de trouver des fonctions de contrôles permettant de satisfaire des contraintes. Dans ce cas, les contraintes sont à la fois économiques et environnementales. La particularité de cette étude est l'obtention d'un noyau de viabilité nul. Cela signifie que le système économique-environnemental actuel n'est pas viable.

[Martinet et Doyen, 2007] étudient grâce aux outils de la viabilité la durabilité d'une économie avec une ressource épuisable. Le modèle étudié est un modèle dynamique contrôlé sous contraintes. On prend en compte le stock de ressources non-renouvelables ( $S$ ) et le capital ( $K$ ). Le stock de ressources évolue en fonction du flux d'extraction ( $r \geq 0$ ). Le capital varie avec la consommation ( $c$ ), la production ( $f(K, r)$ ) et une éventuelle dépréciation du capital ( $\lambda K$ ). Le flux d'extraction des ressources ainsi que la consommation sont des variables de contrôles.

Les contraintes de viabilité considérées sont : préserver un stock minimal de ressources et un seuil minimal de consommation pour chaque génération. Ainsi, l'équité intergénérationnelle sera assurée. L'objectif est de déterminer s'il existe des fonctions de contrôles, flux d'extraction et consommation, qui permettent la satisfaction des contraintes de viabilité. Les outils de la théorie de la viabilité, en particulier le noyau de viabilité, vont devenir des indicateurs de durabilité. En effet, dans le cas où le noyau obtenu est vide, cela signifie que le modèle actuel ne permet de réaliser les objectifs, ce modèle économique peut alors être qualifiée de non-durable.

Les résultats de cette étude dépendent de la fonction de production choisie dans la dynamique du capital. Par exemple, dans le cas où la ressource est fortement essentielle à la production, c'est-à-dire où le flux d'extraction est strictement positif, les ressources naturelles vont s'appauvrir et le noyau de viabilité obtenu sera alors vide : la durabilité n'existe pas. Dans le cas où les ressources naturelles ne sont pas essentielles à la production, c'est à dire où il est possible d'avoir un flux d'extraction

<sup>5</sup>Cette étude a été réalisée avec le soutien du projet ANR "Déduction".

nul, et de produire des biens de consommation sans ressources naturelles, l'économie est durable dans le sens où le noyau obtenu n'est pas vide.

### 2.3.2 Deux applications de gestion durable de pêcheries détaillées

Le sujet de la gestion durable dans le domaine de la pêche est d'une part assez représentatif des enjeux du développement durable avec la protection de la biodiversité marine sans pour autant menacer l'économie maritime et d'autre part il constitue un enjeu important pour les années à venir. Plusieurs modèles ont été élaborés et étudiés dans le cadre viabiliste, c'est le cas de [Béné *et al.*, 2001]<sup>6</sup> ou [De Lara et Martinet, 2009] ou encore de deux autres exemples que nous détaillons dans les paragraphes suivants. Le premier dû à [Martinet et Blanchard, 2009] utilise le calcul de noyaux de viabilité pour déterminer dans quelles conditions objectifs économiques et écologiques peuvent être conciliés; le second de [Martinet *et al.*, 2007] permet en plus d'illustrer l'utilisation et l'intérêt d'un autre outil de la théorie de la viabilité, le temps de crise minimal.

#### Noyau de viabilité : application à la gestion d'une pêcherie

Dans [Martinet et Blanchard, 2009], les objectifs à satisfaire sont à la fois économique et écologique. Les revenus de la population locale sont assurés par la pêche des crevettes grises de Guyane Française. A chaque pêche, on compte une certaine quantité de rejets. Ces rejets ont une influence négative sur la biodiversité maritime. Cependant, ils jouent aussi un rôle positif sur le maintien de la population des oiseaux marins. C'est à cette influence positive que les auteurs s'attachent. Il s'agit donc de construire et d'étudier un modèle dans le but de préserver la biodiversité des oiseaux tout en garantissant la viabilité économique.

Le modèle développé prend en compte les dynamiques du stock de crevettes ( $B(t)$ ), des revenus dus aux activités de pêche ( $\Pi(t)$ ) et de la population d'oiseaux ( $F(t)$ ). Le stock de crevettes dépend des naissances et de la croissance naturelle  $R(B_t)$ , et des prises par les pêcheurs  $H_t = qB_tE_t$  où  $q$  est la capturabilité des crevettes et  $E_t$  est l'effort de pêche :

$$B_{t+1} = B_t + R(B_t) - H_t.$$

Les revenus de la pêche augmentent avec la vente des crevettes  $((p + \tau)H_t$  où  $p$  est le prix des crevettes et  $\tau$  les subventions) et diminuent avec le coût de la pêche ( $cE_t$ ) :

$$\Pi_t = (p + \tau)H_t - cE_t.$$

Enfin, la quantité d'oiseaux dépend des rejets ( $D_t$ ) qui sont une partie du stock de crevettes pêchées et de l'arrivée de nouveaux oisillons ( $F_0$ ) :

$$F_t = sD_t + F_0$$

---

<sup>6</sup>Notons que [Béné *et al.*, 2001] est une des premières publications importantes dans ce domaine, et a introduit une caractérisation de la surexploitation d'une ressource grâce à l'outil temps de crise.

où  $s$  est un paramètre décrivant l'effet de la source de nourriture due aux rejets.

Le double objectif se traduit par les contraintes de viabilité suivantes : d'une part la population d'oiseaux ne doit pas être inférieure à un seuil  $F_{min}$ , d'autre part les revenus de l'activité de pêche doivent être positifs, ce qui revient à avoir un taux de capture de crevettes supérieur ( $h_t = qB_t$ ) à un seuil  $h_{min}$  :

$$h_t \geq h_{min} \quad F_t \geq F_{min}.$$

Afin de satisfaire ces contraintes de viabilité, l'effort de pêche peut être modulé. L'effort de pêche est une variable de contrôle. Il n'est pas fixé a priori, mais peut varier entre deux bornes fixées. L'enjeu est de déterminer les politiques d'actions en matière de pêche qui permettent de respecter les deux contraintes. Le noyau de viabilité va être l'ensemble des stocks de crevettes initiaux pour lesquelles il est possible de trouver des efforts de pêche satisfaisant les dynamiques et les contraintes pour toujours. Le calcul du noyau de viabilité permet de déterminer la taille du stock en deçà de laquelle il n'existe aucune politique durable. Dans le cas où le noyau obtenu est vide, c'est-à-dire dans le cas où il n'existe aucune politique d'actions permettant de satisfaire les contraintes de viabilité, est alors envisagé l'assouplissement des contraintes ou bien d'autres actions sur les dynamiques du système.

Les contraintes économiques et écologiques peuvent être amenées à changer. La contrainte économique par exemple dépend du contexte économique qui varie. Il est intéressant de faire une analyse de sensibilité afin de connaître les réactions du noyau de viabilité à des changements dans les contraintes. Deux contraintes économiques et deux contraintes écologiques différentes vont être comparées. L'étude montre que pour atteindre l'objectif de conservation, c'est-à-dire pour obtenir un noyau de viabilité non vide, la contrainte écologique doit être inférieure à une limite dépendant du contexte économique. Ainsi, les contraintes écologiques et économiques sont liées.

L'étude va être complétée par la description des liens entre les deux contraintes afin d'obtenir une expression du coût annuel nécessaire à la conservation des oiseaux. Dans un premier temps, la contrainte économique (taux de capture minimale  $h_{min}$ ) est fixée, et l'objectif est de déterminer le seuil maximal d'oiseaux ( $F_{min}$ ) pour lequel le noyau de viabilité est non vide, noté  $\mathcal{F}(h_{min})$ . Une expression de  $F_{min}$  en fonction de  $h_{min}$  est ainsi obtenue. Pour que les objectifs de conservation puissent être atteints à partir de certaines conditions initiales,  $F_{min}$  doit vérifier :  $F_{min} \leq \mathcal{F}(h_{min})$ .

Dans un deuxième temps, l'opération réciproque est effectuée : l'objectif est de déterminer le taux de capture maximal qui permet, pour une contrainte écologique fixée  $F_{min}$  de conserver un noyau de viabilité non vide, noté  $\mathcal{H}(F_{min})$ . Pour satisfaire les contraintes de viabilité sous certaines conditions initiales, le taux  $h_{min}$  doit vérifier  $h_{min} \leq \mathcal{H}(F_{min})$ .

Cette étude montre non seulement que le calcul du noyau de viabilité constitue un indicateur pertinent pour évaluer la durabilité d'une situation ; elle montre en plus que l'étude de l'existence d'un noyau non vide en fonction des seuils de contraintes permet d'exhiber des relations entre ces différents seuils, et donc entre contraintes écologiques et économiques. Il est ainsi possible de distinguer des cas où une durabilité est possible en fonction du stock, de cas où elle est impossible.

### Temps de crise minimal : application à la gestion d'une pêcherie

Toujours dans le domaine des pêcheries, le travail de [Martinet *et al.*, 2007] illustre cette fois l'intérêt d'un autre outil de la théorie de la viabilité associé au noyau de viabilité, le temps de crise minimal (*cf* paragraphe 2.2.7). Martinet, Thébaud et Doyen s'intéressent, en effet, au cas de la gestion durable d'une pêcherie, et au passage d'une situation de crise à une situation où les contraintes de viabilité désirées sont satisfaites.

L'enjeu pour la gestion durable d'une pêcherie est d'une part écologique et d'autre part économique et sociologique. Soit un stock de pêche caractérisé par sa biomasse ( $B_t$ ) et la taille de la flotte ( $K_t$ ). Il est possible d'agir sur ces variables grâce à des contrôles permettant de faire varier l'effort de pêche par jour et par bateau ( $e_t$ ) et la taille de la flotte ( $\xi_t$ ). La dynamique concernant les prises globales ( $C_t$ ) (pour toute la flotte) va dépendre de la biomasse, de la taille de la flotte, de l'effort de pêche et de la capturabilité des ressources ( $q$ ) :

$$C_t = qB_t e_t K_t. \quad (2.2)$$

La croissance du stock des ressources suit un courbe logistique :  $R(B_t) = rB_t(1 - \frac{B_t}{B_{sup}})$ . Ainsi, la dynamique de la ressource est la suivante :

$$B_{t+1} = B_t + R(B_t) - C_t. \quad (2.3)$$

Le déchargement des ressources ( $L_t$ ) est une partie des prises par bateau, l'autre partie est rejetée en mer au taux  $\tau_d$  :

$$L_t = (1 - \tau_d)qB_t e_t. \quad (2.4)$$

A partir de ce déchargement des ressources et de leur prix ( $p$ ), le profit par navire ( $\pi_t$ ) est défini comme une part ( $\lambda$ ) du rendement brut du navire :

$$\pi_t = pL_t \frac{1}{\lambda} - (\omega_f + \omega_v e_t). \quad (2.5)$$

$\omega_f$  correspond à des coûts fixes, et  $\omega_v$  est le coût pour une unité d'effort de pêche. Enfin, la dynamique sur la taille de la flotte est donnée par l'équation suivante :

$$K_{t+1} = K_t + \xi_t. \quad (2.6)$$

Afin d'assurer la viabilité de cette pêcherie, des contraintes d'ordre écologique sont définies dans un premier temps. Pour préserver les ressources, un stock minimal doit toujours être conservé :

$$B_t \geq B_{min}. \quad (2.7)$$

A cette contrainte écologique, il faut ajouter une contrainte économique concernant le profit par navire :

$$\pi_t \geq \pi_{min}. \quad (2.8)$$

Enfin, l'aspect social est pris en compte en s'intéressant à la taille de la flotte :

$$K_t \geq K_{min}. \quad (2.9)$$

D'autres contraintes existent concernant la taille de la flotte. Un nombre limité de bateaux  $\xi_{max}$  peut entrer dans la pêcherie au même moment en raison de contraintes techniques. Par ailleurs, pour raisons sociales et politiques, le nombre de bateaux doit être maintenu au delà d'un seuil  $\xi_{min}$  :

$$\xi_{min} \leq \xi_t \leq \xi_{max}. \quad (2.10)$$

L'effort de pêche, quant à lui est limité par un maximum  $e_{max}$  correspondant au nombre de jours maximum passés en mer :

$$0 \leq e_t \leq e_{max}. \quad (2.11)$$

Une première étude a permis de déterminer le noyau de viabilité pour les dynamiques et contraintes décrites précédemment dans le cas de la pêcherie de langoustine dans le golfe de Gascogne (cf [Martinet *et al.*, 2007]). Certaines situations sont viables, c'est à dire qu'il existe un choix de politiques d'actions permettant de satisfaire les trois contraintes écologique, économique et sociale. Par exemple, avec un stock de biomasse initiale assez élevé (25 000 tonnes) et une taille de flotte moyenne (250 navires), il est possible en faisant des bons choix de gestion de conserver une situation viable sur tous les plans pour un temps très long. Par contre, pour une situation initiale avec le même nombre de navires mais un stock de ressources plus faible (12 500 tonnes), il n'est pas possible de satisfaire toutes les contraintes.

Pour ces situations non viables qui nécessairement quitteront l'ensemble des contraintes, les auteurs cherchent à évaluer le temps passé hors de l'ensemble des contraintes. En effet, une évolution qui sort de l'ensemble des contraintes n'est pas nécessairement condamnée à ne plus jamais les satisfaire. Cette information est obtenue par le calcul du temps de crise (cf paragraphe 2.2.7 de ce chapitre). En fonction des contrôles utilisés, ce temps de crise peut varier, l'objectif est d'obtenir le temps de crise minimal. L'évolution passant le moins de temps à l'extérieur de l'ensemble des contraintes est sélectionnée : quels que soient les contrôles employés, le temps passé en dehors de l'ensemble des contraintes sera au moins de cette valeur là. Mathématiquement, pour une situation initiale  $((B_0, K_0))$ , le temps minimal de

crise  $C(B_0, K_0)$  est défini par la formule suivante, où l'intégrale de la définition (2.2.7) est remplacée par une somme puisque le modèle est à temps discret :

$$C(B_0, K_0) = \left\{ \begin{array}{l} \inf \\ (B(\cdot), K(\cdot), e(\cdot), \xi(\cdot)) \\ \text{chemins possibles} \end{array} \sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}(B_t, K_t, e_t, \xi_t) \right.$$

où  $\mathbb{1}$  est la fonction caractéristique du complémentaire de l'ensemble des contraintes.

Ainsi, pour un temps minimal de crise égal à 0, l'ensemble obtenu est le noyau de viabilité. Pour un temps minimal supérieur ou égal à une unité de temps, l'ensemble de situations initiales obtenu contient le noyau de viabilité.

Par exemple, la situation non viable évoquée précédemment avec un stock de ressources de 12500 tonnes et une flotte de 250 navires voit son temps minimal de crise égal à 1. Cela signifie qu'il existe une trajectoire partant de cette situation qui va violer les contraintes économiques, sociales ou écologiques pendant une unité de temps avant de les satisfaire pour toujours et donc d'intégrer le noyau de viabilité.

## 2.4 Conclusion

La théorie de la viabilité, dont l'objet est l'étude de systèmes dynamiques contrôlés soumis à des contraintes, apparaît tout à fait pertinente dans le cadre d'applications au domaine de la gestion durable. En effet, un problème de gestion durable peut se traduire sous la forme d'un système dynamique qui doit être piloté par un gestionnaire, et qui doit satisfaire un certain nombre de contraintes telles que la conservation d'une certaine quantité de ressources mais aussi la satisfaction d'objectifs économiques et sociaux.

Le concept essentiel est celui de noyau de viabilité qui est l'ensemble des situations initiales à partir desquelles il existe au moins une évolution viable. Nous avons énoncé le théorème de viabilité et la propriété de semiperméabilité qui permettent de caractériser explicitement le noyau à l'aide de propriétés tangentielles. Dans le chapitre 3, nous calculerons un noyau de viabilité explicitement à l'aide de ces outils.

En dehors du noyau de viabilité, des informations supplémentaires peuvent être obtenues grâce aux notions de temps de sortie qui mesure le temps durant lequel les contraintes sont satisfaites et de temps de crise qui est le temps passé par une évolution hors de l'ensemble des contraintes. Deux exemples dans le domaine de la pêche ont été exposés et mettent en valeur l'apport des outils de la viabilité.

Dans la partie application de cette thèse (*cf* chapitre 5), un modèle de gestion durable de la forêt de Fianarantsoa à Madagascar est développé. Dans cette application, l'objectif est de sauvegarder la forêt tout en s'assurant du maintien du niveau de vie de la population locale. Un premier modèle décrit les dynamiques de la

population, de la surface forestière et du capital. Afin de déterminer des politiques d'actions conduisant au respect du double objectif économique et environnemental, des variables de contrôles sont définies : l'effort d'aménagement (c'est-à-dire la surface défrichée chaque année), la proportion de travailleurs salariés, et les transferts monétaires. Une des études réalisées cherche à déterminer les situations initiales à partir desquelles on peut trouver une politique d'actions assurant le respect de l'objectif de départ.



# Calcul de noyaux de viabilité

---

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Calcul exact de noyaux de viabilité . . . . .</b>	<b>35</b>
3.1.1	Modèle d'Abrams-Strogatz . . . . .	36
3.1.2	Calcul exact du noyau de viabilité . . . . .	37
3.1.3	Modèle de Minett-Wang . . . . .	40
<b>3.2</b>	<b>Algorithmes de viabilité . . . . .</b>	<b>41</b>

---

Le noyau de viabilité est l'outil principal de la théorie de la viabilité. Rappelons qu'il est constitué de toutes les situations initiales à partir desquelles il existe au moins une évolution viable, il s'agit donc d'un ensemble de points. Son calcul est donc une tâche difficile. Dans la partie 3.1 de ce chapitre, nous verrons un exemple de calcul exact des frontières du noyau de viabilité sur un modèle de langues en compétition au sein d'une population. Pour cela, nous ferons appel aux théorèmes énoncés dans le chapitre 2. Cependant, le calcul exact est souvent extrêmement complexe, et parfois il est impossible à réaliser. Dans ce cas, nous cherchons une approximation du noyau de viabilité à l'aide des algorithmes de viabilité présentés dans la partie 3.2 de ce chapitre.

## 3.1 Calcul exact de noyaux de viabilité

Peu de noyaux de viabilité exacts ont été calculés dans la littérature. Un calcul exact a été effectué dans le cas d'un modèle économique simple ([Aubin, 1991], p204 et suivantes).

Nous avons calculé un noyau de viabilité exacte pour des modèles de compétition entre langues au sein d'un même population<sup>1</sup>. Nous détaillons dans cette section le calcul pour le modèle en deux dimensions publié dans l'annexe de l'article [Chapel *et al.*, 2010]. Le calcul plus difficile dans le cas du modèle en trois dimensions fait l'objet d'un article en cours de soumission et est reproduit dans l'annexe A.

---

<sup>1</sup>D'autres études de ces modèles ont été réalisés dans le formalisme de la théorie de la viabilité et font l'objet d'une publication [Alvarez *et al.*, 2011]

### 3.1.1 Modèle d'Abrams-Strogatz

**Variables d'états** Nous proposons dans cette partie le calcul des frontières théoriques du noyau de viabilité dans le cas d'un modèle en deux dimensions. Ce modèle, proposé par Abrams et Strogatz [Abrams, 2003], étudie une population où deux langues sont en compétition. L'objectif est de connaître l'évolution des densités de personnes parlant chaque langue, et pouvoir ainsi déterminer si la coexistence des deux langues est possible, ou si l'une des deux dominera l'autre à terme. La taille de la population est supposée constante.

$\sigma_A$  est la proportion de personnes parlant la langue A, comprise entre 0 et 1,  $\sigma_B$  la densité de personnes parlant la langue B,  $s$  le prestige associé à la langue A et  $1 - s$  le prestige de la langue B,  $s$  varie ainsi entre 0 et 1. Les personnes bilingues ne sont pas prises en compte dans ce modèle.  $\sigma_B$  peut donc être déduit de  $\sigma_A$  :  $\sigma_B = 1 - \sigma_A$ . On retiendra donc deux variables pour ce modèle,  $\sigma_A$  noté dorénavant  $\sigma$ , et  $s$  avec :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma \leq 1 \\ 0 &\leq s \leq 1 \end{aligned}$$

**Dynamiques du modèle** La langue A évolue en fonction de la densité de personnes parlant la langue A et du prestige associé à cette langue. Le prestige d'une langue ne peut pas varier brutalement. Des campagnes publicitaires ou certaines mesures politiques par exemple peuvent faire varier le prestige d'une langue lentement. C'est pourquoi nous avons introduit un contrôle  $u$  sur la variation du prestige. Ce contrôle  $u$  est compris entre deux bornes  $u \in [u_{min}; u_{max}]$  afin de rendre compte d'une évolution d'un prestige lente. Les dynamiques du modèle<sup>2</sup>,  $(\sigma', s') = F(\sigma, s, u)$ , sont définies par :

$$\begin{cases} \sigma' = F_\sigma(\sigma, s) = (1 - \sigma)\sigma(\sigma^{a-1}s - (1 - \sigma)^{a-1}(1 - s)) \\ s' = u \quad ; u \in [u_{min}; u_{max}] \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $a$  est un paramètre fixé.

**Contraintes** L'objectif poursuivi est la coexistence des deux langues. Afin qu'aucune des deux langues ne s'éteigne, nous ajoutons une contrainte sur la densité de personnes parlant la langue A :  $\sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max}$ . Quant au prestige, il n'y a aucune contrainte à lui appliquer. Ainsi l'ensemble de contraintes  $K$  est défini par :

$$K = \{(\sigma, s) \mid \sigma_{min} \leq \sigma \leq \sigma_{max} \text{ et } 0 \leq s \leq 1\} = [\sigma_{min}; \sigma_{max}] \times [0; 1]$$

**Remarque 3.1** Dans la suite de ce chapitre et pour le calcul exact du noyau de viabilité, nous prendrons les valeurs  $u_{min} = -0.1$ ,  $u_{max} = 0.1$ ,  $\sigma_{min} = 0.2$  et  $\sigma_{max} = 0.8$ .

<sup>2</sup>Plus de détails et d'explications sur les dynamiques de ce modèle sont donnés dans l'article [Chapel et al., 2010].

**Noyau de viabilité associé** Nous cherchons à déterminer l'ensemble de toutes les situations initiales, en terme de proportion de personnes parlant la langue A et de prestige associé, telles qu'avec des évolutions de prestige adaptées, la coexistence des deux langues soit possible. En terme de viabilité, nous cherchons donc le noyau de viabilité de  $F$  soumis à l'ensemble de contraintes  $K$ ,  $Viab_F(K)$ .

### 3.1.2 Calcul exact du noyau de viabilité

Afin de déterminer les frontières exactes du noyau de viabilité, nous allons procéder par étapes. Dans un premier temps, nous définissons un ensemble  $E$  qui semble être un bon candidat pour être le noyau de viabilité. Puis, nous montrons que cet ensemble  $E$  est un domaine de viabilité, c'est à dire tous les points à l'intérieur de cet ensemble sont viables. Enfin, nous démontrons que ce domaine  $E$  est le plus grand domaine de viabilité pour le système (3.1) soumis à l'ensemble  $K$ . Le plus grand domaine de viabilité étant le noyau de viabilité<sup>3</sup>, on aura ainsi mis en évidence que l'ensemble  $E$  est le noyau de viabilité recherché.

#### Définition de l'ensemble $E$

**Courbe  $C_1$**  On définit la courbe  $C_1$  comme l'ensemble des points  $C_1 = \{(\sigma(t), s(t)), t \in [0; +\infty[ \}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \sigma'(t) = -(1 - \sigma(t))\sigma(t)(\sigma^{a-1}(t)s(t) - (1 - \sigma(t))^{a-1}(1 - s(t))) \\ s'(t) = 0.1 \\ \sigma_1(0) = \sigma_1 = 0.8 \text{ and } s_1(0) = s_1 = \frac{(0,2)^{a-1}}{0,8^{a-1} + (0,2)^{a-1}} \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $s_1$  est choisi tel que  $\sigma'(0) = 0$ .

Il s'agit d'une évolution satisfaisant le système inverse<sup>4</sup> du système (3.1) avec le choix de contrôle  $s' = -0.1$  et partant de l'état initial  $(\sigma_1, s_1)$ .

On a :  $C_1 = \{(\sigma, s) \in \mathbb{R}^2 \mid \sigma = f_1(s), s \geq s_1\}$  où

$$f_1(s) := \sigma_1 + \frac{1}{0.1} \int_{s_1}^s -(1 - f_1(\tilde{s}))f_1(\tilde{s})(f_1(\tilde{s})^{a-1}\tilde{s} - (1 - f_1(\tilde{s}))^{a-1}(1 - \tilde{s}))d\tilde{s}.$$

Montrons que  $f_1$  est strictement décroissante pour  $s > s_1$  et  $f_1(s) \in ]0; 1[$ . On commence par montrer que sous ces conditions  $f_1'(s) < 0$ .

La dérivée seconde de la fonction  $f_1$  est donnée par :

$$\begin{aligned} f_1''(s) = & -\frac{1}{0.1} * f_1'(s) * (1 - f_1(s)) * [f_1(s)^{a-1}s - (1 - f_1(s))^{a-1}(1 - s)] \\ & + \frac{1}{0.1} * f_1(s) * f_1'(s) * [f_1(s)^{a-1}s - (1 - f_1(s))^{a-1}(1 - s)] \\ & - \frac{1}{0.1} * f_1(s) * (1 - f_1(s)) * [f_1(s)^{a-1} + (a - 1)f_1'(s)f_1(s)^{a-2}s + \\ & (1 - f_1(s))^{a-1} + (a - 1)f_1'(s)(1 - f_1(s))^{a-2}(1 - s)] \end{aligned}$$

<sup>3</sup>cf paragraphe 2.2.5.

<sup>4</sup>Il s'agit donc du système suivant :

$$\begin{cases} \sigma' = -F_\sigma(\sigma, s) \\ s' = -u \end{cases}$$

Si  $f_1'(s) = 0$ , la dérivée seconde devient alors :

$$f_1''(s) = -\frac{1}{0.1} * f_1(s) * (1 - f_1(s)) * [f_1(s)^{a-1} + (1 - f_1(s))^{a-1}]$$

Donc, si de plus  $f_1(s) \in ]0; 1[$ , alors  $f_1''(s) < 0$ .

Or, d'après le choix de  $s_1$ ,  $f_1(s_1) = \sigma_1 = 0.8 \in ]0; 1[$  et  $f_1'(s_1) = 0$ , on a alors  $f_1''(s_1) < 0$ .

D'après le choix de  $s_1$ ,  $f_1'(s_1) = 0$  et on a alors  $f_1''(s_1) < 0$ . Donc

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } f_1'(s) < 0 \forall s \in ]s_1; s_1 + \epsilon[.$$

Supposons  $\exists \bar{s} > s_1$  tel que 
$$\begin{cases} f_1'(\bar{s}) = 0 \\ f_1(s) \in ]0; 1[ \forall s \in [s_1; \bar{s}] \\ f_1'(s) < 0 \forall s \in ]s_1; \bar{s}[ \end{cases}.$$

Comme  $f_1'(\bar{s}) = 0$ , on a  $f_1''(s) < 0$ . Donc

$$\exists \epsilon > 0 \text{ tel que } f_1'(s) > 0 \forall s \in ]\bar{s} - \epsilon; \bar{s}[,$$

ce qui contredit  $f_1'(s) < 0 \forall s \in ]s_1; \bar{s}[$ .

On a donc

$$\forall s > s_1 \text{ avec } f_1(s) \in ]0; 1[, f_1'(s) < 0.$$

Ainsi on a montré que  $f_1$  est strictement décroissante pour  $s > s_1$  et tant que  $f_1(s) \in ]0; 1[$ .

**Courbe  $C_2$**  On définit la courbe  $C_2$  comme l'ensemble des points de  $C_2 = \{(\sigma(t), s(t)), t \in [0; +\infty[ \}$  satisfaisant

$$\begin{cases} \sigma'(t) = -(1 - \sigma(t))\sigma(t)(\sigma^{a-1}(t)s(t) - (1 - \sigma(t))^{a-1}(1 - s(t))) \\ s'(t) = -0.1 \\ \sigma_2(0) = \sigma_2 = 0.2 \text{ and } s_2(0) = s_2 = \frac{(0.8)^{a-1}}{0.2^{a-1} + (0.8)^{a-1}} \end{cases}$$

où  $s_2$  est choisi tel que  $\sigma'(0) = 0$ .

Il s'agit d'une évolution satisfaisant le système inverse du système (3.1) avec le choix de contrôle  $s' = 0.1$  et partant de l'état initial  $(\sigma_2, s_2)$ .

On a :  $C_2 = \{(\sigma, s) \in R^2 | \sigma = f_2(s), s \leq s_2\}$  où

$$f_2(s) := \sigma_2 - \frac{1}{0.1} \int_{s_2}^s -(1 - f_2(\tilde{s}))f_2(\tilde{s})(f_2(\tilde{s})^{a-1}\tilde{s} - (1 - f_2(\tilde{s}))^{a-1}(1 - \tilde{s}))d\tilde{s}.$$

Notons que  $f_2'(s_2) = 0$ , de part le choix de  $s_2$ .

Par le même raisonnement que précédemment, on montre que  $f_2''(s) > 0$  quand  $f_2(s) \in ]0; 1[$  et  $f_2'(s) = 0$ .

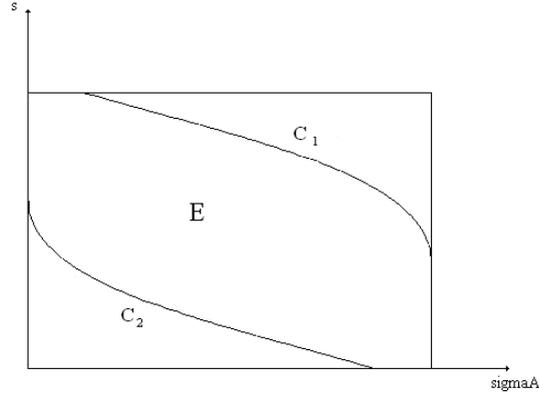
Par conséquent,  $f_2'(s) < 0$  quand  $s < s_2$  et  $f_2(s) \in ]0; 1[$ .

### Proposition 3.1.1

Soit  $E \subset K$  l'ensemble défini par :

$$\left\{ (\sigma, s) \in K \mid \begin{cases} \sigma \leq f_1(s) \text{ si } s \geq s_1 \\ \sigma \geq f_2(s) \text{ si } s \leq s_2 \end{cases} \right\}$$

alors  $E = \text{Viab}_F(K)$ .

FIG. 3.1 – Définition de l'ensemble  $E$ 

### $E$ est un domaine de viabilité

D'après le théorème de viabilité 2.2.5,  $E$  est un domaine de viabilité s'il existe en chaque point de sa frontière un contrôle  $u$  tel que  $F(\sigma, s, u)$  appartienne au cône contingent à l'ensemble  $E$ . Cela est vérifié pour tous les points à l'intérieur de  $E$ . Nous allons donc prouver que pour tout point  $(\sigma(t), s(t)) \in \partial E$  (où  $\partial E$  est la frontière de  $E$ ), il existe au moins un contrôle  $u$  tel que  $F(\sigma, s, u)$  appartienne au cône contingent de  $E$  au point  $(\sigma, s)$ , noté  $T_E(\sigma, s)$ .

Soit  $x = (\sigma, s) \in \partial E$  :

- si  $\sigma = 0.2$ , comme  $f_2'(s) < 0$  quand  $s < s_2$  et  $f_2(s) \in [0.2; 0.8]$ , nécessairement  $s \geq s_2$ . De plus,  $s \leq \min(1, f_1^{-1}(0.2))$ .  
Si  $s = s_2$ ,  $F(\sigma, s, 0) = 0 \in T_E(\sigma, s)$ , si  $s_2 < s < \min(1, f_1^{-1}(0.2))$ ,  $F(\sigma, s, u) \in T_E(\sigma, s)$  pour tout  $u \in [-0.1; 0.1]$ ,
- si  $s = 1$ , ou si  $(\sigma, s) \in C_1$ ,  $\sigma < 0.8$ ,  $F(\sigma, s, -0.1) \in T_E(\sigma, s)$ ,
- si  $\sigma = 0.8$ , comme  $f_1'(s) < 0$  quand  $s > s_1$  et  $f_1(s) \in [0.2; 0.8]$ , nécessairement  $s \leq s_1$ . De plus,  $s \geq \max(0, f_2^{-1}(0.8))$ .  
Si  $s = s_1$ ,  $F(\sigma, s, 0) = 0 \in T_E(\sigma, s)$ , si  $\max(0, f_2^{-1}(0.8)) < s < s_1$ ,  $F(\sigma, s, u) \in T_E(\sigma, s)$  pour tout  $u \in [-0.1; 0.1]$ ,
- si  $s = 0$ , ou si  $(\sigma, s) \in C_2$ ,  $\sigma > 0.2$ ,  $F(\sigma, s, +0.1) \in T_E(\sigma, s)$ .

### $E$ est le plus grand domaine de viabilité

Montrons maintenant que  $E$  est le plus grand domaine de viabilité pour le système (3.1) soumis à l'ensemble de contraintes  $K$ . Au préalable, introduisons quelques notations :

- Soit  $(\bar{\sigma}; \bar{s}) \in K/E$ . On peut supposer que  $\bar{s} > f_1^{-1}(\bar{\sigma})$ . Les mêmes arguments conviendraient dans le cas  $\bar{s} < f_2^{-1}(\bar{\sigma})$ .
- Soit  $(\bar{\sigma}(t); \bar{s}(t))_{t \in [0; +\infty[}$  une évolution partant de  $(\bar{\sigma}; \bar{s})$  et satisfaisant le système (3.1).

– Soit  $(\sigma^*(t); s^*(t))_{t \in [0; +\infty[}$  défini par :

$$\begin{cases} \sigma'^*(t) = (1 - \sigma^*(t))\sigma^*(t)(\sigma^{*a-1}(t)s^*(t) - (1 - \sigma^*(t))^{a-1}(t)(1 - s^*(t))) \\ s'^*(t) = -0.1 \\ \sigma^*(0) = \bar{\sigma} \text{ and } s^*(0) = f_1^{-1}(\bar{\sigma}) \end{cases}$$

Ensuite,  $(\sigma^*(0); s^*(0)) \in C_1$  et il existe  $T$  tel que  $(\sigma^*(T); s^*(T)) = (\sigma_1; s_1)$  et  $(\sigma^*(t); s^*(t)) \in C_1 \forall t \in [0; T]$ .

On a  $\bar{s}(0) > s^*(0)$  et comme  $s^{*'}(t) = -0.1$  et  $\bar{s}'(t) = u \in [-0.1; 0.1]$ ,  $\forall t \in [0; T]$ ,  $\bar{s}(t) > s^*(t)$ .

Par ailleurs,  $\bar{\sigma}(0) = \sigma^*(0)$  et  $\bar{\sigma}'(0) = F_\sigma(\bar{\sigma}, \bar{s}) > F_\sigma(\bar{\sigma}, s^*(0)) = \sigma^{*'}(0)$ , donc il existe  $\hat{t} > 0$  tel que  $\bar{\sigma}(t) > \sigma^*(t)$  pour tout  $t \in ]0; \hat{t}]$ .

On suppose qu'il existe  $\tilde{t} \in ]\hat{t}; T]$  tel que  $\bar{\sigma}(t) > \sigma^*(t)$  pour tout  $t \in [\hat{t}; \tilde{t}]$  et  $\bar{\sigma}(\tilde{t}) = \sigma^*(\tilde{t})$ .

Alors, nécessairement  $\bar{\sigma}'(\tilde{t}) \leq \sigma^{*'}(\tilde{t})$ .

Mais

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}'(\tilde{t}) &= F_\sigma(\bar{\sigma}(\tilde{t}), \bar{s}(\tilde{t})) > F_\sigma(\sigma^*(\tilde{t}), s^*(\tilde{t})) = \sigma^{*'}(\tilde{t}) \\ &\text{tant que } \bar{\sigma}(\tilde{t}) = \sigma^*(\tilde{t}) \text{ et } \bar{s}(\tilde{t}) > s^*(\tilde{t}). \end{aligned}$$

Donc, on a contradiction, d'où  $\forall t \in [0; T]$ ,  $\bar{\sigma}(t) > \sigma^*(t)$ .

Par conséquent,  $\bar{\sigma}(T) > 0.8$ , donc  $(\bar{\sigma}(T); \bar{s}(T)) \notin K$ .

Ainsi, toute évolution issue de  $(\bar{\sigma}, \bar{s})$  quitte  $K$  en temps fini, donc  $(\bar{\sigma}, \bar{s}) \notin \text{Viab}_F(K)$  et  $E$  est bien le plus grand domaine de viabilité.

### 3.1.3 Modèle de Minett-Wang

Le modèle d'Abrams-Strogatz néglige l'influence des personnes bilingues. Minett et Wang [Minett et Wang, 2008] ont voulu étudier cette influence ce qui les a conduit à un modèle en trois dimensions construit à partir du modèle d'Abrams-Strogatz. Les variables considérées sont donc la proportion de personnes parlant uniquement la langue A notée  $\sigma_A$ , la proportion de personnes parlant uniquement la langue B notée  $\sigma_B$  et le prestige associé à la langue A noté  $s$ , avec :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma_A \leq 1 \\ 0 &\leq \sigma_B \leq 1 \\ 0 &\leq s \leq 1 \end{aligned}$$

Le prestige associé à la langue B se déduit de  $s$  et vaut  $1 - s$ . Ce modèle prend en compte l'existence de personnes parlant les langues A et B,  $1 - \sigma_A - \sigma_B$  représente donc la proportion de personnes bilingues.

De même que pour le modèle d'Abrams-Strogatz, la proportion de personnes parlant une langue évolue en fonction du nombre de personnes parlant cette langue ainsi que du prestige associé. Le prestige varie lentement, d'où l'introduction d'un

contrôle compris entre deux bornes  $[-c; c]$  sur son évolution. Les dynamiques  $(\sigma'_A, \sigma'_B, s') = F(\sigma_A, \sigma_B, s, u)$ , sont définies par :

$$\begin{cases} \sigma'_A = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s) \\ \sigma'_B = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a (1 - s) - \sigma_B \sigma_A^a s \\ s' \in [-c; c] ; c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où  $a$  est un paramètre fixé.

L'objectif dans ce modèle est de déterminer s'il est possible de conserver une proportion de personnes parlant une seule langue. L'ensemble de contraintes défini est alors :

$$K = \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in [\sigma_{A,min}; 1] \times [\sigma_{B,min}; 1] \times [0; 1] ; \sigma_A + \sigma_B \leq 1\} \quad (3.3)$$

Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations initiales en terme de proportion de personnes parlant A, de personnes parlant B et de prestige de la langue, pour lesquels avec des évolutions de prestige adaptées, il puisse y avoir coexistence de personnes parlant chacune des deux langues. Cet ensemble est le noyau de viabilité associé à  $F$  soumis à l'ensemble de contraintes  $K$ .

Dans le cas de ce modèle en dimension trois, nous avons réussi à trouver un domaine de viabilité en suivant la même méthode que précédemment. Néanmoins, la tâche est bien plus difficile que pour le modèle d'Abrams-Strogatz en dimension deux. La démonstration de ce calcul en dimension trois se trouve dans l'article soumis "Maintaining viability and resilience of endangered languages" reproduit dans l'annexe A de cette thèse.

## 3.2 Algorithmes de viabilité

Face à la complexité des démonstrations pour calculer les frontières exactes d'un noyau de viabilité, la nécessité de développer des algorithmes d'approximation d'un noyau s'est faite ressentir. Les premiers travaux sur les algorithmes de viabilité datent du début des années 1990 avec en particulier l'article de Saint-Pierre [Saint-Pierre, 1994]. Nous présentons dans cette section les principales étapes effectuées par cet algorithme d'approximation.

Soit  $X$  un espace vectoriel de dimension finie, et soit  $K$  un sous-ensemble compact de  $X$ .

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} x'(t) \in F(x) \\ x(0) = x_0 \in K \end{cases} \quad (3.4)$$

où  $F$  est une correspondance Marchaud <sup>5</sup> définie de  $X$  à valeurs dans  $X$ .

Le noyau de viabilité de  $F$  soumis à l'ensemble de contraintes  $K$ , noté  $\text{Viab}_F(K)$ , est l'ensemble des états initiaux de  $K$  pour lesquels il existe une évolution partant de cet état et restant dans  $K$  pour toujours. L'objectif de l'algorithme développé par [Saint-Pierre, 1994] est de calculer une approximation du noyau de viabilité  $\text{Viab}_F(K)$ . Il définit donc un système dynamique discret en temps associé au système (3.4), puis un système discret en temps et en espace. L'ensemble de contraintes  $K$  est également discrétisé  $K_n$ . Il montre ensuite que le noyau de viabilité du système discret en temps et en espace peut s'écrire comme une intersection d'ensembles finis. Lorsque les pas de temps et d'espace du noyau discrétisé tendent vers 0, alors, avec les hypothèses adéquates, les noyaux discrets convergent vers le noyau du système initial. Détaillons ces résultats.

### Système dynamique discret associé

A partir du système dynamique (3.4), Saint-Pierre construit un système dynamique discret associé :

$$\begin{cases} x^{n+1} \in G_\rho(x^n) & \forall n \geq 0 \\ x^0 = x_0 \in K_\rho \end{cases} \quad (3.5)$$

où  $G_\rho$  est une correspondance de  $X$  à valeurs dans  $X$  définie à partir de  $F$  :

$$G_\rho = 1 + \rho F + \frac{Ml}{2} \rho^2 \mathcal{B}$$

où  $\rho$  est le pas de temps,  $\mathcal{B}$  la boule unité pour la norme de  $X$  et dans le cas particulier où  $F$  est  $l$ -Lipschitz et  $M$ -bornée.

$K_\rho$  est l'ensemble des contraintes dilaté défini par :

$$K_\rho = K + \frac{\rho}{2} \mathcal{B}.$$

On note  $\mathcal{S}_{G_\rho}(x_0)$  l'ensemble des solutions du système (3.5) partant de  $x_0$ .

Le noyau de viabilité discret pour le système (3.5) soumis à l'ensemble  $K_\rho$ , noté  $\text{Viab}_{G_\rho}(K_\rho)$ , est défini de la même façon que dans le cas continu, à savoir un ensemble qui contient tous les états initiaux  $x^0$  tels qu'il existe une séquence  $(x^n)_n$  solution de (3.5) qui reste toujours dans  $K_\rho$  :

$$\forall n \geq 0 \ x^n \in K_\rho.$$

Il peut également être écrit sous la forme suivante :

$$\text{Viab}_{G_\rho}(K_\rho) = \{x \in K_\rho \text{ tels que } \exists (x^n)_n \in \mathcal{S}_{G_\rho}(x) \text{ telle que } x^n \in K_\rho \ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

<sup>5</sup> Soit  $U : X \rightarrow Y$  et  $f : X \times Y \rightarrow X$ .  $(U, f)$  est un système contrôlé Marchaud si  $\text{Graph}(U)$  est fermé;  $f$  est continue;  $f$  et  $U$  sont à croissance linéaire; les ensembles  $\{f(x, u) \mid u \in U(x)\}$  sont convexes pour tout  $x \in \text{Dom}(U)$ .

**Algorithme de calcul du noyau de viabilité d'un système discret en temps****Viab $_{G_\rho}(K_\rho)$** 

Soit une séquence de sous-ensemble  $K_\rho^0 = K_\rho, K_\rho^1, \dots, K_\rho^n, \dots$  définis par :

$$K_\rho^{n+1} = \{x \in K_\rho^n \text{ tel que } G_\rho(x) \cap K_\rho^n \neq \emptyset\}.$$

Saint-Pierre montre que :

$$\text{Viab}_{G_\rho}(K_\rho) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_\rho^n.$$

**Convergence des noyaux discrets en temps vers le noyau du système (3.4)**

Saint-Pierre démontre que lorsque  $\rho$  tend vers 0, alors  $\text{Viab}_{G_\rho}(K_\rho)$  tend vers  $\text{Viab}_F(K)$ .

**Discrétisation de l'espace des états**

L'étape suivante est la discrétisation de l'espace des états.

A tout  $h \in \mathbb{R}$ , Saint-Pierre associe  $X_h$  un sous-ensemble dénombrable, appelé grille, de parties de  $X$  tel que :

$$\forall x \in X, \exists x_h \in X_h \text{ tel que } \|x - x_h\| \leq \alpha(h)$$

où  $\alpha(h)$  tend vers 0 quand  $h \rightarrow 0$ .

**Système dynamique discret en temps et en espace associé**

A partir du système dynamique discret en temps (3.5), Saint-Pierre construit un système dynamique discret en temps et en espace :

$$\begin{cases} x_h^{n+1} \in G_{\rho,h}(x_h^n) & \forall n \geq 0 \\ x_h^0 = x_0 \in K_{\rho,h} \end{cases} \quad (3.6)$$

où  $G_{\rho,h} : X_h \rightarrow X_h$  est une correspondance définie par :

$$G_{\rho,h}(x_h^n) = (G_\rho(x_h) + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h;$$

et où  $K_{\rho,h} \subset \text{Dom}(G_{\rho,h}) \subset X_h$  est un sous-ensemble défini par :

$$K_{\rho,h} = (K_\rho + \alpha(h)\mathcal{B}) \cap X_h.$$

Le noyau de viabilité discret en temps et en espace pour le système (3.6) soumis à l'ensemble  $K_{\rho,h}$ , noté  $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h})$ , est défini de la même façon que dans le cas continu, à savoir un ensemble qui contient tous les états initiaux  $x^0$  tel qu'il existe une séquence  $(x^n)_n$  solution de (3.6) qui reste toujours dans  $K_{\rho,h}$ .

### Algorithme de calcul du noyau de viabilité d'un système discret en temps et en espace $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h})$

Soit une séquence de sous-ensemble  $K_{\rho,h}^0 = K, K_{\rho,h}^1, \dots, K_{\rho,h}^n, \dots$  définis par :

$$K_{\rho,h}^{n+1} = \{x_h \in K_{\rho,h}^n \text{ tel que } G_{\rho,h}(x_h) \cap K_{\rho,h}^n \neq \emptyset\}$$

Saint-Pierre démontre alors que

$$\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} K_{\rho,h}^n$$

De plus, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h}) = K_{\rho,h}^p$ . Le cardinal des ensembles  $K_{\rho,h}$  étant fini, le calcul d'un noyau de viabilité discret  $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h})$  est alors faisable à l'aide d'un ordinateur.

### Convergence des noyaux discrets en temps et en espace vers le noyau du système (3.4)

Saint-Pierre démontre que lorsque  $\rho$  et  $h$  tendent vers 0 sous de bonnes hypothèses, alors  $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_{\rho,h})$  tend vers  $\text{Viab}_F(K)$ .

Dans le programme implémenté à partir de cet algorithme, la première étape est le calcul du noyau de viabilité exact du système dynamique discret en temps et en espace (3.6) sur une grille fixée. Ensuite, on passe à une grille de pas plus petit et on calcule à nouveau le noyau de viabilité exact pour le système dynamique discret associé. Les noyaux de viabilité discrétisés  $\text{Viab}_{G_{\rho,h}}(K_h)$  sur des grilles de plus en plus fines convergent vers le noyau de viabilité  $\text{Viab}_F(K)$  pour des choix de  $G_{\rho,h}$  et  $K_h$  adaptés.

Le calcul des noyaux de viabilité pour un système dynamique discret se fait de manière exhaustive. Chaque point  $x_h^n$  de la grille  $X_h$  est testé : si aucun de ses successeurs  $x_h^{n+1}$  n'appartient à l'ensemble  $K_h^p$ , il est retiré au pas suivant. Chaque point de la grille a plusieurs successeurs dépendant des valeurs des contrôles. Il est possible de choisir de tester les valeurs des contrôles de la plus petite à la plus grande, ou dans le sens contraire. Cela aura un intérêt dans le chapitre 5 où nous pourrons ainsi déterminer le contrôle minimal permettant d'assurer la viabilité.

### Dimension de l'espace des états

Le programme implémenté à partir de l'algorithme de viabilité permet l'approximation de noyaux de viabilité pour des systèmes dynamiques en dimension deux et trois. A partir de la dimension quatre, le temps de calcul et l'espace mémoire constituent un obstacle. Depuis mars 2009, dans le cadre du projet "Dédution", des améliorations ont été apportées par Anya Désilles et permettent désormais de calculer dans des temps raisonnables des noyaux de viabilité en dimension quatre et

cinq. Dans le chapitre 6, nous étudions un système dynamique de cinq dimensions. Nous avons donc utilisé ce dernier programme.



Deuxième partie

Application



# Madagascar et le corridor forestier de Fianarantsoa

---

## Sommaire

<b>4.1</b>	<b>Madagascar</b> . . . . .	<b>49</b>
<b>4.2</b>	<b>Une forêt exceptionnelle</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>4.3</b>	<b>La population locale</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.4</b>	<b>Une pression sur le corridor forestier</b> . . . . .	<b>52</b>
<b>4.5</b>	<b>Les mesures de protection de la forêt</b> . . . . .	<b>53</b>

---

Afin d'illustrer l'apport des concepts développés dans la partie I dans la modélisation du développement durable, nous nous intéressons dans cette thèse au cas de la gestion durable d'une forêt. Dans le cadre du projet ANR "Déduction", nous avons eu l'opportunité d'analyser en détails le cas de la forêt malgache et plus précisément la forêt située à l'est de Fianarantsoa. Dans cette région, la forêt est particulièrement menacée par l'activité humaine, notamment car les hommes vivent dans des conditions difficiles et dans une grande pauvreté. L'objectif est donc de réussir à déterminer des stratégies et des politiques d'actions pour sauvegarder la forêt sans que la pression sur la population locale ne soit trop forte.

Les outils de la théorie de la viabilité sont particulièrement adaptés à l'étude de ce cas de gestion durable. En effet, ils nous ont permis de déterminer un ensemble de stratégies satisfaisant notre double objectif : économique et écologique.

## 4.1 Madagascar

Madagascar est une île de l'océan indien séparée de l'Afrique par le Canal du Mozambique, sa population atteignait 20 millions d'habitants en 2009. Madagascar est la cinquième plus grande île du monde avec une superficie de 587000km<sup>2</sup>, soit une surface plus importante que la France métropolitaine.

Madagascar est l'un des pays les plus pauvres du monde. Plus de 72% de la population vit en dessous du seuil de pauvreté et ce taux augmente si l'on considère uniquement les populations rurales. La population est jeune et le taux de fécondité très élevé. L'espérance de vie est d'un peu plus de 55 ans, et 84 enfants sur 1000 meurent avant l'âge de 5 ans<sup>1</sup>. Le manque d'hygiène, la malnutrition chronique et le

---

<sup>1</sup>Source : International Fund for Agricultural Development (IFAD)

manque d'accès à l'eau potable favorisent le développement de maladies infectieuses telles que les affections respiratoires, la tuberculose et l'hépatite. La pauvreté se concentre essentiellement dans les familles d'agriculteurs, dans les zones rurales où les conditions de vie tendent à se détériorer ces dernières années en termes d'accès aux transports, à la santé et à l'éducation. La production agricole des fermiers est parfois insuffisante pour nourrir leur famille et un enfant sur deux souffre de malnutrition.

De part son caractère insulaire et la diversité des climats et reliefs, Madagascar fait partie des pays les plus riches du monde en termes de biodiversité en faune et flore. Il existe à Madagascar des espèces que l'on ne rencontre nulle part ailleurs comme les lémuriens ou bien certaines espèces de baobabs. Cependant, la déforestation, due à l'agriculture et à la production de charbon de bois, est un problème majeur pour l'île tant d'un point de vue écologique qu'économique. Les conséquences sont multiples, les réserves d'eau se tarissent, l'habitat de nombreuses espèces se réduit les menaçant fortement, les répercussions sont désastreuses pour les paysans.

## 4.2 Une forêt exceptionnelle

Le parc national de Ranomafana, créé en 1991, abrite une des forêts tropicales les plus riches du monde par sa faune et sa flore. Situé à l'est de Fianarantsoa, il ne compte pas moins de douze espèces de lémuriens, ainsi qu'un grand nombre d'espèces de reptiles, d'amphibiens, et d'oiseaux [Tan, 1999]. A plusieurs kilomètres au sud, on trouve le parc national d'Andringitra, créé en 1921 sous la colonisation française. Il est composé de pâturages et d'une zone de forêt reconnue pour sa très grande biodiversité. Un couloir de forêt large de 5 à 20 km et long de 120 km relie ces deux aires protégées. Ce corridor "Ranomafana-Andringitra", lui aussi à forte biodiversité, jouerait un rôle écologique important en permettant aux espèces animales de circuler et aux végétaux de se propager sans devoir s'exposer à un milieu hostile. Il servirait aussi de réservoir d'eau pour les bassins versants de l'est et de l'ouest<sup>2</sup>. De part et d'autre du corridor, les paysages et le climat sont très différents. A l'ouest, la région des Hautes-Terres est située à une altitude 1200 mètres. De grands escarpements fracturent le paysage et délimitent l'est de l'ouest. A l'est, la région du Bas-Pays, en contrebas, est situé à 500 mètres d'altitude.

Dans le cadre de notre étude, nous parlerons de corridor forestier Ranomafana-Andringitra, et cela désignera les deux parcs protégés, la zone élargie du corridor, c'est à dire comprenant les populations vivant le long du corridor et les terres qu'elles cultivent.

---

<sup>2</sup>Réunion de l'ATI (Action Transversale Interdépartementale) Aires protégées, Centre IRD d'Orléans, 14-15 décembre 2004, Thème Madagascar, Une aire protégée composite : parcs et corridors dans la région de Fianarantsoa (Centre Est malgache), Hervé D., Carrière S., Toillier A., Serpantié G., Rakoto H., Blanc-Pamard C., Andriamahefazafy F., Andrianambinina D., Méral P., Aumeeruddy-Thomas Y., Ranaivoarivelo N., Rakotoarimanana V., Froger G.

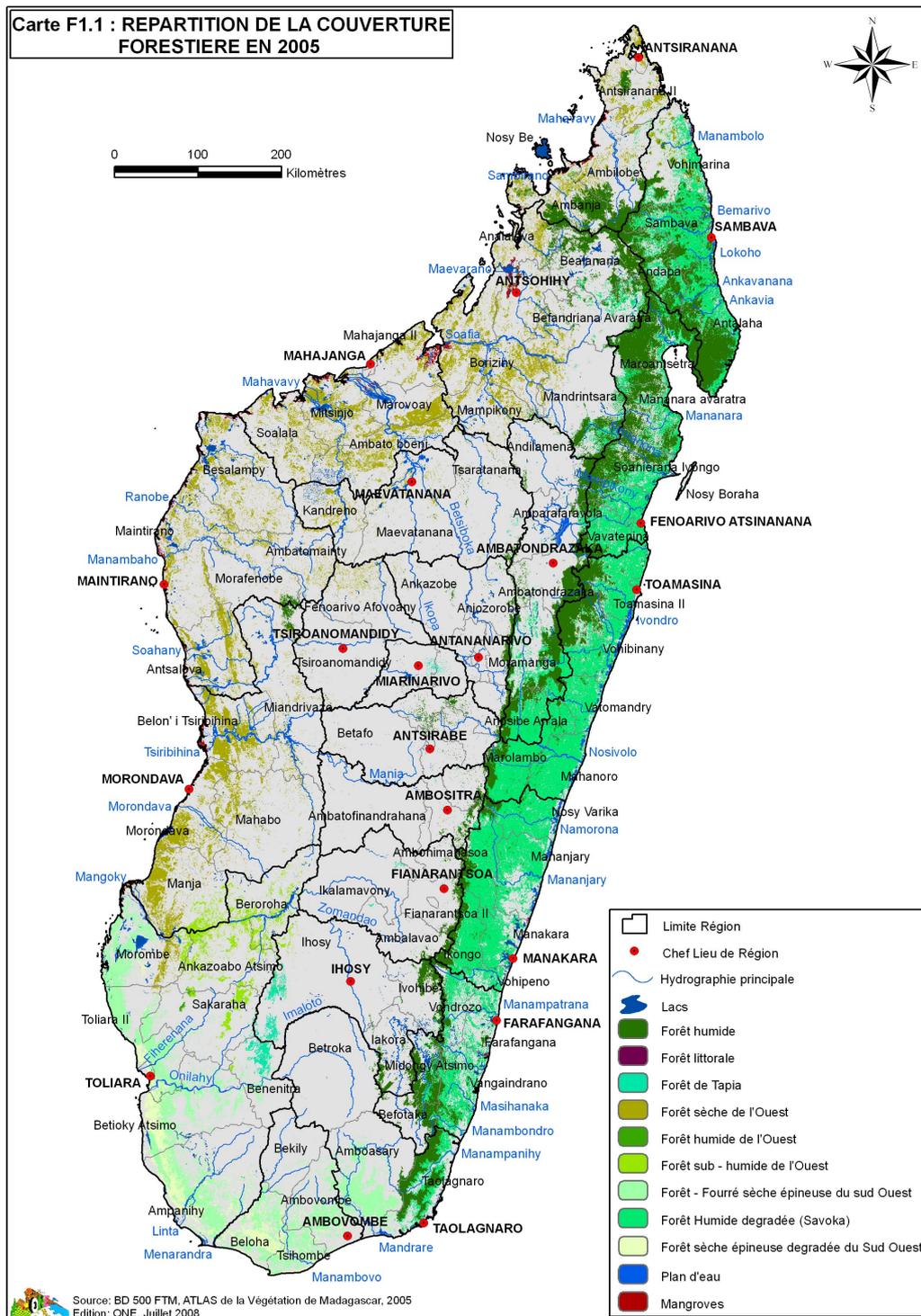


FIG. 4.1 – Répartition de la couverture forestière à Madagascar en 2005  
Source : BD 500 FTM - Atlas de la végétation de Madagascar - 2005 Édition : ONE - Juillet 2008

### 4.3 La population locale

A l'ouest du corridor, la région des Hautes-terres est située à une altitude de 1200 mètres, elle connaît une forte densité de population avec 54 hab/km<sup>2</sup>. On y trouve une succession de collines, puis une bande de forêt. L'ethnie majoritaire, les Betsileo, vit à la lisière de la forêt. Les bas-fonds sont aménagés pour la culture du riz. C'est un travail long et coûteux : on commence par défricher une surface, puis suivent des travaux d'installation de canaux de drainage, de nivellement et de diguettes. Enfin, l'aménagement en casier est effectif, la culture peut commencer. Sur les pentes, on retrouve principalement des cultures vivrières pour la période de soudure<sup>3</sup>. Par ailleurs, les Betsileo se servent de la forêt pour l'élevage et pour la collecte de produits forestiers.

A l'est du corridor se trouve la région du Bas-Pays peuplée principalement par les Tanala et où la densité de population avoisine les 33 hab/km<sup>2</sup>. Un grand escarpement délimite cette région, qui est à une altitude de 500 mètres. La population vit au pied de cette falaise et pratique la culture de riz pluvial itinérante sur abattis brûlis, technique consistant à abattre les arbres à la hache, puis à mettre le feu afin de rendre la terre plus fertile, ainsi que quelques cultures de rente (café, banane). D'autre part, les Tanala utilisent les ressources de la forêt pour se chauffer (bois), se soigner (plantes médicinales), se nourrir (miel), pour revendre des espèces de bois précieux (bois de rose), pour la construction (matériaux divers),... La forêt joue aussi un rôle dans le patrimoine de ces peuples, qui y érigent des stèles et autres lieux de culte.

Ces deux peuples ont des liens forts. Les saisons agricoles sont en décalage de part et d'autre du corridor en raison des conditions climatiques, on observe donc de nombreux transferts de travailleurs entre l'est et l'ouest. En fin d'année, les Tanala emploient des salariés Betsileo pour l'aménagement des rizières. En début d'année, ce sont les Tanala qui participent à l'aménagement des rizières Betsileo [Toillier, 2009]. Outre ce transfert de travailleurs saisonniers, on constate également de nombreux échanges commerciaux entre les deux peuples : rhum, riz, bananes contre tabac, riz (selon la saison).

### 4.4 Une pression sur le corridor forestier

De part et d'autre du corridor, la population exerce une pression sur le corridor forestier, qui est menacé de disparition. En pays Betsileo, l'aménagement des bas-fonds, et la démographie importante de ces dernières années est à l'origine de la déforestation. La frontière Est du corridor est moins menacée. Il n'y a pas de bas-fonds à aménager, et le riz cultivé par les Tanala ne s'adapte pas à ces hautes altitudes. En revanche, les reliques de forêt en pays Tanala sont fortement menacées par la pratique du "tavy", encore appelé abattis-brûlis [Serpantié et Toillier, 2007].

---

<sup>3</sup>La période de soudure désigne la période entre deux récoltes où la nourriture et l'eau peuvent venir à manquer

D'autre part, le système d'accès à la terre joue un rôle traditionnellement important dans la déforestation. En effet, pour posséder un terrain, il faut le défricher. Les enfants, par exemple, auront accès aux terres défrichées par leurs parents.

Il faut toutefois signaler que certaines zones déforestées, cultivées mais non-aménagées en casier et irriguées, sont revenues à l'état forêt après un temps suffisamment long [Ratiarson *et al.*, 2007].

## 4.5 Les mesures de protection de la forêt

Depuis le début du xx<sup>e</sup> siècle, des politiques de protection de la forêt malgache sont mises en place. Cependant, elles ne prennent pas toujours en compte les pratiques agricoles des populations. Il s'agit de mesures de mise en défens<sup>4</sup> de certaines aires forestières. La forêt faisant partie du patrimoine culturel de la population, et en raison de la pauvreté et d'une faible nutrition, il est difficile de faire appliquer ces mesures et la déforestation continue.

Depuis les années 1990, un plan national d'action environnemental (PNAE) a été mis en place pour assurer une protection de l'environnement tout en agissant pour un développement durable. Les communautés locales sont devenues partie intégrante du programme et certains agriculteurs sont désormais en charge de mettre en place les actions environnementales. Des zones protégées sont mises en place souvent sans lien avec les pratiques agricoles, ce qui conduit à un bilan mitigé, et le niveau de vie des populations locales ne s'est pas amélioré.

Afin de rendre plus efficace ces politiques, la protection de la forêt doit s'accompagner de mesures pour améliorer les conditions de vie de la population locale. Comment trouver un équilibre entre sauvegarde de la forêt et développement économique des populations locales ? Quels sont les choix de politiques de gestion qui permettraient d'y accéder ? Des transferts monétaires en provenance d'ONG, du gouvernement, d'autres pays peuvent-ils être utiles dans la satisfaction de cet objectif ? Si oui, comment les investir ?

La théorie de la viabilité peut offrir des réponses. Nous proposons dans les deux chapitres suivants des modèles mathématiques étudiés dans le cadre viabiliste permettant d'identifier des politiques d'actions durables.

---

<sup>4</sup>La mise en défens est un dispositif de protection d'un zone interdisant son exploitation.



# Corridor forestier de Fianarantsoa : définir une politique de gestion durable à l'aide des outils de la viabilité.

---

## Sommaire

---

<b>5.1 Intérêt de la modélisation</b> . . . . .	<b>56</b>
<b>5.2 Le Modèle</b> . . . . .	<b>57</b>
5.2.1 Choix des variables et contrôles . . . . .	57
5.2.2 Dynamiques du modèle . . . . .	58
5.2.3 Contraintes . . . . .	60
5.2.4 Reformulation du modèle pour une étude mathématique efficace	61
5.2.5 Paramètres . . . . .	62
<b>5.3 Analyse viabiliste</b> . . . . .	<b>62</b>
5.3.1 Traduire les enjeux de gestion durable dans le formalisme de la théorie de la viabilité . . . . .	63
5.3.2 Résoudre les enjeux de gestion durable par l'algorithme de viabilité . . . . .	66
5.3.3 Ajout d'une seconde contrainte économique . . . . .	68
5.3.4 Ajout de transferts monétaires . . . . .	70
5.3.5 Effets de la valeur de la borne maximale des transferts monétaires sur le volume du noyau de viabilité . . . . .	74
5.3.6 Choix des transferts monétaires minimaux au cours du temps pour assurer la viabilité . . . . .	77
<b>5.4 Conclusion</b> . . . . .	<b>80</b>

---

Dans le cadre du projet ANR “Dédution”, nous avons travaillé en collaboration avec l’IRD Madagascar<sup>1</sup> et l’Université de Fianarantsoa à Madagascar. Ces partenaires nous ont permis de prendre connaissance des problématiques malgaches. Le projet ANR Dédution était aussi composé d’équipes travaillant sur la viabilité, le laboratoire LASTRE<sup>2</sup> ainsi que le laboratoire LISC<sup>3</sup>. Nous avons mis nos connais-

<sup>1</sup>Institut de Recherche pour le Développement

<sup>2</sup>Laboratoire d’Applications des Systèmes Tychastiques Régulés

<sup>3</sup>Laboratoire d’Ingénierie des Systèmes Complexes

sances sur la théorie de la viabilité au service de la modélisation d'enjeux tels que la déforestation à Madagascar.

Ainsi, cette démarche pluridisciplinaire nous a conduits à l'élaboration d'un premier modèle dynamique décrivant les enjeux sur le corridor forestier de Fianarantsoa<sup>4</sup>. Ce modèle est présenté dans la partie 5.2. L'étude de ce modèle grâce à un algorithme de calcul de noyaux de viabilité décrit dans la partie 3.2, nous a donné les résultats présentés dans la partie 5.3.

## 5.1 Intérêt de la modélisation

Comme décrit dans le chapitre 4, le contexte malgache présente une forte compétition entre conservation de la biodiversité et maintien du niveau de vie de la population locale. Certaines mesures politiques ont, par le passé, négligé la population locale pour assurer la conservation de la forêt. Or, pour une gestion durable du corridor, prendre en compte l'aspect environnemental n'est pas suffisant. En effet, un développement durable englobe les champs environnementaux, mais aussi les aspects socio-économiques (*cf* paragraphe 1.1). Nous proposons ici, une gestion durable du corridor en prenant en compte à la fois la conservation de la biodiversité et le développement économique de la population locale. Nous allons chercher des politiques de gestion durable satisfaisant ces deux aspects.

Les méthodes d'optimisation, largement utilisées pour des problèmes similaires (*cf* paragraphe 1.5), n'apparaissent pas satisfaisantes pour ce cas si nous ne voulons pas privilégier l'un ou l'autre des aspects du problème. Les contraintes environnementales et socio-économiques doivent être considérées de la même façon. Comme souligné dans la partie 2.1, les outils de la théorie de la viabilité sont particulièrement adaptés à l'étude de ce problème. Nous nous plaçons donc dans ce cadre pour l'étude du corridor forestier.

Ainsi, en reprenant les outils énoncés dans la partie 2.2, nous traduisons notre problème de gestion durable dans le formalisme de la théorie de la viabilité. Nous commençons par modéliser les principales dynamiques, puis nous précisons les possibilités d'action et définissons des contrôles. Ensuite, la conciliation des aspects socio-économiques et écologiques est traduite par un ensemble de contraintes. A partir de ces définitions est énoncé le problème de viabilité permettant de distinguer les politiques d'actions durables. Par la suite, nous calculons l'ensemble des solutions viables grâce aux algorithmes de viabilité. Enfin, la description et l'analyse de ces résultats permettent de définir les politiques durables assurant le maintien de la biodiversité et l'amélioration du niveau de vie de la population locale. Il est notamment possible de déterminer le montant des transferts monétaires nécessaires.

---

<sup>4</sup>Les premiers résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication [Bernard, 2009]

## 5.2 Le Modèle

### 5.2.1 Choix des variables et contrôles

**Variables d'état** Le modèle dynamique présenté dans cette partie a pour objectif de représenter les principaux comportements économiques des malgaches de la région du corridor de Ranomafana-Andringitra. Nous rappelons que nous sommes intéressés par les liens entre la conservation de la biodiversité, qui passe par la sauvegarde des surfaces forestières et le maintien voire l'amélioration du niveau de vie de la population locale. Dans un premier temps, nous avons privilégié un modèle avec un nombre restreint de variables. En effet, l'algorithme de viabilité dont nous disposons alors est performant avec un maximum de trois variables. Avec un nombre de variables plus élevé, les temps de calcul ainsi que l'espace-mémoire requis deviennent très grands. Lors de l'élaboration du modèle avec les experts malgaches, nous nous sommes donc imposés un maximum de 3 variables d'états pour décrire les dynamiques des processus principaux.

Un des aspects primordial du projet est la conservation de la biodiversité. Cela implique une conservation de la forêt. Cette dernière est représentée par une variable de surface forestière ( $F$ ), et donc une variable de ce modèle est la surface aménagée ( $S$ ) liée à  $F$  par  $S(t) = F_0 - F(t)$  où  $F_0$  est la surface forestière de référence<sup>5</sup>.

A l'origine de la déforestation actuelle, on retrouve une forte croissance démographique (cf paragraphe 4.4). C'est pourquoi il nous a semblé important que la population soit une variable du modèle, elle est décrite par le nombre d'individus ( $P$ ). Par ailleurs, les variations du taux d'accroissement de la population sont aussi cruciales dans la modélisation du corridor. Ne pouvant faire l'hypothèse d'un taux d'accroissement pour le futur, nous avons décidé de prendre en compte le taux d'accroissement sous la forme d'un régulon<sup>6</sup>, noté  $r$ .

Enfin, La gestion du corridor qui nous intéresse est une gestion qui ne considère pas uniquement l'environnement mais qui englobe également des aspects socio-économiques. C'est pourquoi nous prendrons en compte le capital ( $K$ ) commun à cette population afin de pouvoir rendre compte de son niveau de vie.

**Contrôles** Nous avons fait un choix des contrôles nous permettant d'agir sur le modèle. En effet, nous cherchons à définir des politiques viables écologiquement et économiquement (cf paragraphe 4.5). Nous avons déterminé un certain nombre de moyens à notre disposition.

La plupart des politiques de gestion développées jusqu'à présent (cf paragraphe 4.5) ont majoritairement agi sur l'interdiction ou la limitation de défriche de nouvelles surfaces. Nous reprenons donc ici ce moyen d'action avec le contrôle "effort d'aménagement de nouvelles surfaces", noté  $\delta$ .

Nous avons remarqué qu'il y a une alternance des saisons entre les deux côtés du corridor (cf paragraphe 4.3) et donc les travailleurs de chaque village sont amenés à

<sup>5</sup>Nous choisirons par la suite de prendre la surface forestière en 1960 comme surface de référence.

<sup>6</sup>cf paragraphe 2.2.2

se déplacer et travailler dans un autre village contre une rémunération. Ainsi, il est possible d'augmenter ou de diminuer le nombre de personnes qui partent travailler à l'extérieur. Nous avons pris en compte ce moyen d'action par le contrôle "proportion de travailleurs extérieurs" noté  $\rho_2$ .

Enfin, nous avons ajouté un contrôle "transferts monétaires" noté  $\tau$ , correspondant à un ajout directement sur le capital de la part d'organisations internationales ou de gouvernements par exemple.

**Résumé** Ainsi notre modèle est un modèle en 3 dimensions  $(S, P, K)$  avec trois contrôles  $(\tau, \delta, \rho_2)$  et un régulon  $r$ . L'algorithme de viabilité de Patrick Saint-Pierre [Saint-Pierre, 1994] permet l'étude d'un modèle de trois dimensions avec quatre contrôles et régulon.

### 5.2.2 Dynamiques du modèle

**La surface** L'aire étudiée est le corridor forestier Ranomafana-Andringitra. Une partie de cette surface est de la forêt  $(F(t))$ . L'autre partie est considérée comme étant une surface aménagée  $(S(t))$ . Cela signifie que cette aire a été défrichée et irriguée. La surface  $(S(t))$  augmente en fonction des nouvelles surfaces qui sont aménagées. On appelle  $\delta(t)$  cet effort d'aménagement par personne et par unité de temps, c'est une variable de contrôle du modèle. On note  $\rho_2(t)$  la proportion de travailleurs à l'extérieur. La proportion de travailleurs disponibles pour l'aménagement est donc  $1 - \rho_2(t)$ . La variation de la surface aménagée est donc décrite par :

$$S'(t) = \delta(t)(1 - \rho_2(t))P(t).$$

La variation de la surface de forêt peut être déduite de celle de la surface aménagée.

**La population** Nous avons ensuite choisi de prendre en compte le nombre d'individus  $(P(t))$  vivant dans le corridor. Cependant, ne pouvant connaître a priori le taux d'accroissement de cette population pour les prochaines années, nous avons introduit un régulon (*cf* paragraphe 2.2.2 du chapitre 2). Cela nous évite d'avoir à déterminer des taux d'accroissement pour le futur. On fera uniquement l'hypothèse que ce taux d'accroissement  $(r(t))$  varie entre deux bornes  $r_{min}$  et  $r_{max}$ . On pourra par exemple choisir pour  $r_{min}$  le taux d'accroissement minimal mesuré par le passé sur le corridor, et prendre le taux d'accroissement maximal pour  $r_{max}$  :

$$P'(t) = r(t)P(t).$$

**Le capital** Nous avons mis en évidence, dans le paragraphe 4.3, l'alternance des saisons entre pays Tanala et Betsileo et donc l'échange de travailleurs. Le modèle prend en compte l'existence de travailleurs extérieurs en s'intéressant à la proportion de travailleurs extérieurs  $(\rho_2(t))$ . Ainsi, avec un salaire  $(\omega)$  par salarié, la contribution au capital commun de la part des travailleurs extérieurs est de  $\omega\rho_2(t)P(t)$ .

La riziculture constitue la plus grande part des revenus agricoles. Nous avons fait le choix de négliger les cultures sur pente, celles-ci servant d'appoint en période de soudure (absence de riz). Nous considérons donc que toutes les surfaces qui ne sont pas "forêt" sont des surfaces cultivées en riz ( $S(t)$ ). Etant donné qu'une partie de la population travaille en dehors du village (travailleurs extérieurs), la proportion des personnes disponibles est donc égale à  $(1 - \rho_2(t))P(t)$ . Si ( $\gamma$ ) est la surface maximale qu'une personne peut cultiver, alors la surface de terres cultivées dépend du nombre de travailleurs présents, elle est donc égale à  $\min(S(t), \gamma(1 - \rho_2(t))P(t))$ . Avec  $p$  le prix du riz et  $e$  la productivité de la terre par unité de temps, l'apport des surfaces cultivées par unité de temps est  $pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho_2(t))P(t))$ .

Nous prenons aussi en compte la consommation de la population locale. On considère que  $\underline{c}$  est la consommation minimale pour une personne et par unité de temps, les dépenses liées à la consommation sont donc  $\underline{c}P(t)$ .

Par ailleurs, le phénomène de déforestation est modélisé par l'aménagement de nouvelles surfaces prêtes à être cultivées. L'effort d'aménagement ( $\delta(t)$ ) varie selon les décisions des habitants. Cependant, déforester une surface a un coût non négligeable : un grand nombre de personnes doit être mobilisé pendant plusieurs jours. Avec  $\beta$  le coût pour défricher un hectare de forêt,  $\delta(t)$  la surface en hectare que l'on décide de défricher et  $((1 - \rho_2(t))P(t))$  les personnes disponibles, le coût chaque unité de temps pour la déforestation est évalué à  $\beta\delta(t)(1 - \rho_2(t))P(t)$ .

Enfin, nous prenons en compte d'éventuels transferts monétaires ( $\tau(t)$ ). Ce sont les subventions et dons que font les gouvernements ou l'aide internationale. Dans cette étude, nous avons simplement décidé de l'ajouter au capital commun comme un revenu supplémentaire.

Ainsi, le capital varie en fonction des revenus de l'agriculture, des salaires des travailleurs externes, de la consommation, de l'investissement fait dans l'aménagement de nouvelles surfaces et des transferts monétaires :

$$K'(t) = -\underline{c}P(t) - \beta\delta(t)(1 - \rho_2(t))P(t) + pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho_2(t))P(t)) + \omega\rho_2(t)P(t) + \tau(t).$$

**Le modèle** En résumé, nous avons un modèle en trois dimensions, qui décrit les variations de la surface aménagée ( $S(t)$ ), de la population ( $P(t)$ ), et du capital ( $K(t)$ ). Nous disposons de trois variables de contrôles,  $\delta(t)$ ,  $\rho_2(t)$ , et  $\tau(t)$ , afin de tester différentes politiques d'actions. On suppose que les valeurs prises par ces contrôles au cours du temps sont comprises entre deux bornes.

La surface qu'une personne défriche par unité de temps est bornée par la surface maximale qu'une personne peut défricher par unité de temps ( $\delta_{max}$ ) :

$$0 \leq \delta(t) \leq \delta_{max}.$$

La proportion de travailleurs extérieurs est, en toute logique, comprise entre 0 et 1 :

$$0 \leq \rho_2(t) \leq 1.$$

Les transferts monétaires vont varier entre 0 et une valeur maximale ( $\tau_{max}$ ). Cette dernière dépend de l'hypothèse faite sur les investissements que sont prêts à faire d'autres pays pour la conservation de la biodiversité :

$$0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}.$$

Enfin, un régulon a été choisi pour prendre en compte le taux d'accroissement de la population que nous ne connaissons pas *a priori*. Toutefois il reste compris entre deux bornes dépendant des taux d'accroissement minimal et maximal observés ces dernières années à Madagascar ou dans d'autres pays avant et après d'éventuelles transitions démographiques :

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}.$$

On suppose que ce taux d'accroissement s'ajustera pour prendre les valeurs favorisant la viabilité.

Finalement, nous avons donc le modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(t) = \delta(t)(1 - \rho_2(t))P(t) \\ P'(t) = r(t)P(t) \\ K'(t) = -cP(t) - \beta\delta(t)(1 - \rho_2(t))P(t) \\ \quad + pe \min(S(t), \gamma(1 - \rho_2(t))P(t)) + \omega\rho_2(t)P(t) + \tau(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \delta(t) \leq \delta_{max} \\ 0 \leq \rho_2(t) \leq 1 \\ 0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max} \\ r_{min} \leq r(t) \leq r_{max}. \end{array} \right.$$

### 5.2.3 Contraintes

L'enjeu de ce travail de modélisation est de déterminer les politiques d'actions assurant à la fois la sauvegarde de la forêt et le maintien du niveau de vie de la population locale. Afin de satisfaire ce double objectif environnemental et économique, nous définissons les contraintes suivantes.

**La contrainte environnementale** Du point de vue environnemental, l'objectif est de préserver la biodiversité du corridor forestier. Nous avons choisi de le traduire par la conservation d'une surface minimale de forêt ( $F_{min}$ ). Nous avons donc la contrainte environnementale suivante :

$$0 \leq S(t) \leq F_0 - F_{min} = S_{max} \quad (5.1)$$

où ( $F_0$ ) est la surface forestière de référence.

**Les contraintes économiques** Economiquement, le but est d'assurer à la population locale le maintien de son niveau de vie. Nous avons traduit cet objectif par deux contraintes sur le capital.

Dans un premier temps, nous imposons que les futurs revenus *per capita* soient supérieurs aux actuels ( $k_{min}$ ). Ainsi la première contrainte économique est :

$$k_{min} \leq K/P(t). \quad (5.2)$$

Puis, dans un second temps, nous ajoutons une contrainte plus forte en exigeant que le capital *per capita* ne décroisse jamais. Ceci signifie que le niveau de vie actuel ne doit pas seulement être maintenu, il doit augmenter d'année en année. Nous avons donc la seconde contrainte économique suivante :

$$(K/P)'(t) \geq 0. \quad (5.3)$$

Cette dernière contrainte assure l'équité intergénérationnelle : une génération ne peut pas être moins avantagée que la précédente.

**La contrainte sur la population** La population doit être supérieure à un niveau minimal ( $P_{min}$ ), cela revient à imposer la conservation d'une présence humaine dans le corridor. Elle doit également être inférieure à un niveau maximal ( $P_{max}$ ). La justification de la présence de  $P_{max}$  est avant tout algorithmique, pour que l'ensemble de contraintes  $K$  soit compact et  $K_h$  fini (*cf* paragraphe 3.2). Elle peut correspondre à une capacité d'accueil du corridor définie *a priori*. Mais on pourra également choisir une valeur suffisamment grande pour qu'elle n'influe pas sur le noyau. Nous avons donc la contrainte suivante sur la population :

$$P_{min} \leq P \leq P_{max}. \quad (5.4)$$

#### 5.2.4 Reformulation du modèle pour une étude mathématique efficace

Afin de faciliter l'étude mathématique de ce modèle et son implémentation dans l'algorithme de viabilité, nous avons effectué un changement de variables. Nous considérons désormais une variable ( $s(t)$ ) de surface aménagée par individu, on a donc  $s(t) = \frac{S(t)}{P(t)}$ , ainsi qu'une variable ( $k(t)$ ) de capital par individu, d'où  $k(t) = \frac{K(t)}{P(t)}$ . On obtient le système dynamique  $\mathcal{S}$  pour les variables ( $s, P, k$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} s'(t) = \delta(t)(1 - \rho_2(t)) - r(t)s(t) \\ P'(t) = r(t)P(t) \\ k'(t) = -\underline{c} - \beta\delta(t)(1 - \rho_2(t)) \\ \quad \quad \quad + p\epsilon \min(s(t), \gamma(1 - \rho_2(t))) + \omega\rho_2(t) + \frac{\tau(t)}{P(t)} - r(t)k(t) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

avec comme contraintes obtenues à partir de 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4 :

$$\begin{aligned}
0 &\leq s(t)P(t) \leq F_0 - F_{min} \\
k_{min} &\leq k \\
k' &\geq 0 \\
P_{min} &\leq P \leq P_{max}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

### 5.2.5 Paramètres

Ce modèle, élaboré avec les experts de l'IRD et de l'Université de Fianarantsoa, représente les dynamiques des variables caractéristiques du corridor forestier. Le but de l'étude de ce modèle n'est pas la reproduction de la réalité ni la prédiction du futur mais l'exploration des scénarios possibles et l'illustration de l'usage qui peut être fait des outils de la théorie de la viabilité dans un problème de gestion durable.

Parmi les valeurs des paramètres décrites dans le tableau ci-dessous, certaines ont été obtenues suite aux discussions avec les experts du projet Dédution, d'autres sont issues de la littérature. Nous détaillons le calcul de ces valeurs dans l'annexe B.

Définition	Notation	Unité	Valeur
Besoins physiologiques de la population	$\underline{c}$	US\$/capita/an	200
Coût de défriche d'1 ha	$\beta$	US\$/ha	25
Prix du riz	$p$	US\$/kg	0.30
Productivité d'1 ha	$e$	kg/ha/an	1000
Surface cultivable maximale	$\gamma$	ha/capita	0.46
Salaire agricole	$\omega$	US\$/capita/an	200
Effort d'aménagement maximal	$\delta_{max}$	ha/capita/an	0.008
Transferts monétaires maximaux	$\tau_{max}$	US\$/an	1000000
Taux d'accroissement minimal	$r_{min}$	sans unité/an	0
Taux d'accroissement maximal	$r_{max}$	sans unité/an	0.04
Surface forestière de référence	$F_0$	ha	110000
Surface forestière minimale	$F_{min}$	ha	65000
Capital minimal	$k_{min}$	US\$	400000000
Population minimale	$P_{min}$	capita	500000
Population maximale	$P_{max}$	capita	10000000

TAB. 5.1 – Valeurs des paramètres et bornes des contrôles et contraintes pour le modèle 5.2

## 5.3 Analyse viabiliste

Nous venons de définir un système dynamique contrôlé. Il décrit les principales caractéristiques de la déforestation et des dynamiques d'occupation des bas-fonds sur le corridor forestier de Fianarantsoa. Les contrôles représentent les possibilités d'actions. Un certain nombre de contraintes environnementales et économiques ont été définies afin d'assurer un développement durable de cette zone d'étude. Il

existe différentes évolutions satisfaisant le système (5.5), correspondant à différents choix de contrôles. Certaines vont satisfaire les contraintes que nous avons définies, d'autres les violeront en un temps fini. Notre objectif est d'une part de déterminer les évolutions qui vont satisfaire les contraintes pour un temps infini, appelées évolutions viables, et d'autre part, de connaître la suite de contrôles qui a été choisie pour chacune de ces évolutions. L'ensemble des points desquels part au moins une évolution viable est appelé le noyau de viabilité. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.2, il existe un algorithme de viabilité permettant de calculer ce noyau de viabilité.

Nous proposons dans cette partie d'exprimer le modèle établi précédemment dans le formalisme de la théorie de la viabilité, puis d'étudier la sensibilité du noyau de viabilité face à différentes contraintes plus ou moins fortes. Puis, nous focaliserons notre étude sur l'ajout de transferts monétaires. Ces ajouts permettent-ils de rendre la situation actuelle viable ? Les transferts monétaires à apporter sont-ils identiques au cours du temps ou bien existe-t-il des périodes propices à l'injection de transferts monétaires ?

### 5.3.1 Traduire les enjeux de gestion durable dans le formalisme de la théorie de la viabilité

Rappelons que notre modèle est un système dynamique contrôlé de trois variables. En prenant les notations du chapitre 2, les équations du système (5.5) gouvernent les dynamiques  $x'(t) = (s'(t), P'(t), k'(t))$  des variables d'état  $x(t) = (s(t), P(t), k(t))$ . Ces dynamiques dépendent à la fois des variables d'état  $x(t)$ , des contrôles  $u(t) = (\delta(t), \rho_2(t), \tau(t))$  et du régulon  $r(t)$ .

Les variables d'état  $x(t)$  appartiennent à l'ensemble  $X$  défini par :

$$X := [0; +\infty[ \times [0; +\infty[ \times [0; +\infty[ \subset \mathbb{R}^3.$$

Les contrôles sont dans l'ensemble des contrôles admissibles  $U$  défini par :

$$U := [0; \delta_{max}] \times [0; 1] \times [0; \tau_{max}] \subset \mathbb{R}^3.$$

Enfin le régulon  $r(t)$  appartient à l'ensemble  $V$  défini par :

$$V := [r_{min}; r_{max}] \subset \mathbb{R}.$$

Dans l'ensemble  $U \times V$ , différents choix peuvent être faits pour chacun des contrôles et régulons. On note  $\mathcal{S}$  le système dynamique contrôlé défini par :

$$\mathcal{S} \begin{cases} x'(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \\ u(t) \in U \\ v(t) \in V \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{pour presque tout } t \geq 0 \\ \text{pour presque tout } t \geq 0 \end{array} \quad (5.7)$$

où  $f$  est définie par :

$$f : \begin{array}{ll} X \times U \times V & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x(t), u(t), v(t)) & \mapsto (s'(t), P'(t), k'(t)) \end{array}$$

où  $(s'(t), P'(t), k'(t))$  est donné par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} s'(t) = \delta(t)(1 - \rho_2(t)) - r(t)s(t) \\ P'(t) = r(t)P(t) \\ k'(t) = -c - \beta\delta(t)(1 - \rho_2(t)) \\ \quad + pe \min(s(t), \gamma(1 - \rho_2(t))) + \omega\rho_2(t) + \frac{\tau(t)}{P(t)} - r(t)k(t). \end{array} \right. \quad (5.8)$$

On note  $\mathcal{S}(x)$  l'ensemble des évolutions<sup>7</sup> issues de  $x$  et gouvernées par le système contrôlé  $\mathcal{S}$ .

Ainsi, de chaque état initial part éventuellement une infinité de solutions suivant les fonctions de contrôles et régulon. L'objectif va être de déterminer parmi ces évolutions celles qui satisfont les contraintes environnementales et économiques définies dans le paragraphe 5.2.3 .

Regroupons les différentes contraintes en un ensemble de contraintes noté  $\mathcal{K}$ . Celui-ci est l'ensemble de toutes les valeurs des variables d'états qui satisfont les contraintes (5.1), (5.2) et (5.4)<sup>8</sup>. Mathématiquement, cet ensemble est défini de la façon suivante :

$$\mathcal{K} = \left\{ (s, P, k) \in X \left| \begin{array}{l} 0 \leq s(t)P(t) \leq F_0 - F_{min} \\ k_{min} \leq k(t) \\ P_{min} \leq P(t) \leq P_{max} \end{array} \right. \right\}$$

La représentation graphique de cet ensemble est donné par la figure 5.1 . Sur chacun des axes est représenté une variable d'état<sup>9</sup>. L'ensemble de contraintes est la zone grisée du graphique. Tous les états pour lesquels la contrainte environnementale (5.1) est satisfaite  $(s(t)P(t) \leq F_0 - F_{min})$ <sup>10</sup>, c'est à dire les états appartenant à la zone grisée sont à l'intérieur de l'ensemble de contraintes. Ces états satisfont aussi la contrainte économique (5.2), c'est à dire que  $k(t) \geq k_{min}$ , et satisfont également la contrainte sur la population (5.4), ainsi  $P_{min} \leq P(t) \leq P_{max}$ .

**Remarque 5.1** *L'ensemble de contraintes décrit n'est pas un ensemble compact. En effet, il n'y a pas de contrainte sur une valeur maximale du capital par habitant. Or, les besoins de l'algorithme de viabilité impliquent de travailler à l'intérieur d'un cube, ce cube étant considéré comme un ensemble de contraintes. Si nous ajoutons une contrainte  $k = k_{max}$ , toute évolution qui aurait un capital supérieur à  $k_{max}$  serait considérée comme étant non-viable, ce qui semble absurde. C'est pourquoi,*

<sup>7</sup> cf définition dans le paragraphe 2.2.3.

<sup>8</sup>Nous ne prenons pas en compte la contrainte (5.3) concernant l'équité intergénérationnelle dans la première partie de cette étude.

<sup>9</sup>La graduation a été ramené à l'ensemble  $[0; 1]$  pour les besoins de l'algorithme. Par exemple, la population  $P$  appartenant initialement à l'intervalle  $[P_{min}; P_{max}]$  est désormais dans l'intervalle  $[0; 1]$ . Nous reviendrons sur les modifications que cela implique dans la partie 6.2 du chapitre 6 pour une application similaire.

<sup>10</sup> $F_0 - F_{min}$  est noté  $S_{max}$  sur la figure 5.1

nous faisons l'hypothèse qu'une fois la valeur  $k = k_{max}$  atteinte par une évolution, celle-ci est considérée comme viable. Cette hypothèse signifie qu'à partir d'un certain seuil de capital par habitant, la population a les moyens de gérer elle-même son patrimoine forestier. La frontière  $k = k_{max}$  est appelée une cible, on calculera donc dans la suite de cette étude des noyaux de viabilité avec cible.

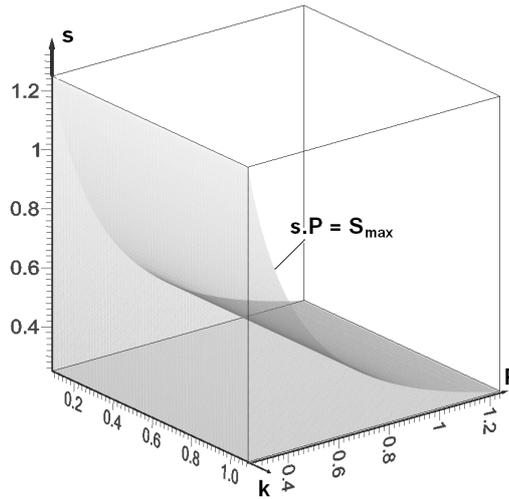


FIG. 5.1 – Ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$  pour le système (5.5)

Rappelons qu'une évolution est dite viable si elle reste toujours dans l'ensemble de contraintes. L'ensemble des états initiaux pour lesquels il existe une évolution viable est appelé le noyau de viabilité et noté  $\text{Viab}_S(\mathcal{K})$ .

Pour chaque état initial  $(s_0, P_0, k_0) \in \mathcal{K}$ , nous cherchons à déterminer s'il existe des fonctions de contrôles  $(\delta(\cdot), \rho_2(\cdot), \tau(\cdot))$  et régulon  $r(\cdot)$  telles que l'évolution partant de  $(s_0, P_0, k_0)$  et satisfaisant l'équation différentielle (5.5) reste toujours dans l'ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$ . Cela revient à déterminer la surface aménagée, le nombre d'habitants et le capital initial pour lesquels il est possible de trouver une stratégie politique (ce qui correspond à un choix de contrôles) permettant le respect des contraintes environnementales et économiques pour toujours.

Pour chaque triplet (surface / population / capital), nous testons l'existence d'au moins une série de mesures politiques permettant le respect des contraintes au cours du temps. Les mesures politiques correspondent aux différentes valeurs des contrôles dans le temps et peuvent être par exemple, à certains moments le défrichement de nouvelles aires ( $\delta = \delta_{max}$ ), ou bien l'augmentation du nombre de travailleurs extérieurs ( $\rho_2 = 0, 7$ ).

Dans le cadre de la théorie de la viabilité, répondre à ces questions revient à calculer le noyau de viabilité pour le système (5.5) soumis aux contraintes (5.1), (5.2) et (5.4).

### 5.3.2 Résoudre les enjeux de gestion durable par l'algorithme de viabilité

Nous proposons dans cette première étude de résoudre le problème de gestion décrit par le système (5.5) soumis à la contrainte environnementale (5.1), à la contrainte économique (5.2) et à la contrainte sur la population (5.4). Rappelons que, dans ce cas, nous ne prenons pas en compte l'existence de transferts monétaires. Il s'agit donc de déterminer les situations initiales à partir desquelles il est possible de trouver des évolutions qui permettent le respect des contraintes environnementale et économique sans intervention extérieure. On pose donc  $\tau_{max} = 0$ . D'autre part, nous ne nous intéressons pas à la contrainte économique (5.3) concernant l'équité intergénérationnelle pour le moment. Nous cherchons uniquement le maintien du niveau de vie actuel pour la population locale.

L'objectif est d'obtenir le noyau de viabilité pour le système (5.5) soumis aux contraintes (5.1), (5.2) et (5.4). Ce noyau de viabilité est calculé numériquement grâce à l'algorithme de viabilité de Saint-Pierre [Saint-Pierre, 1994]. L'algorithme nécessitant une discrétisation de l'espace, un travail préalable consiste à discrétiser le modèle et l'ajuster. Nous ne détaillons pas cette partie dans l'étude de ce modèle, car ce travail est décrit précisément dans le cas d'un second modèle dans le paragraphe 6.2.2 .

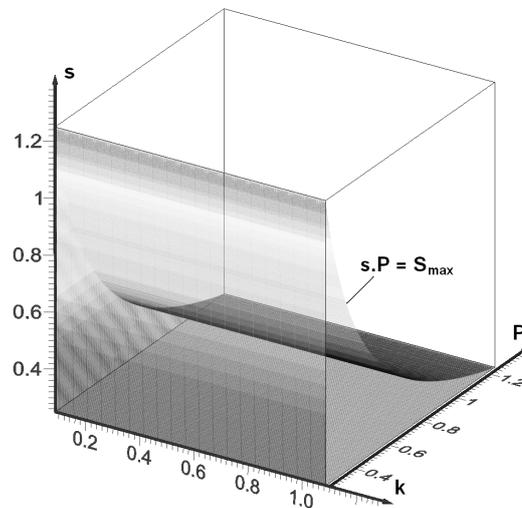


FIG. 5.2 – Noyau de viabilité  $\text{Viabs}_S(\mathcal{K})$  sans transfert monétaire soumis aux contraintes (5.1), (5.2) et (5.4)

La figure 5.2 représente le noyau de viabilité recherché, qui est la zone grisée dans le graphique. Dans cette première étude, on constate que le noyau de viabilité est confondu avec l'ensemble de contraintes dans son ensemble. Cela signifie que pour chacune des situations surface aménagée/population/capital satisfaisant les

contraintes initialement, il est possible de trouver des mesures, des actions assurant la satisfaction des contraintes pour toujours. L'étape suivante consiste donc à déterminer les actions qui assurent le respect des contraintes pour toujours, ce qui revient à déterminer les valeurs successives prises par les contrôles au cours du temps pour une évolution viable donnée.

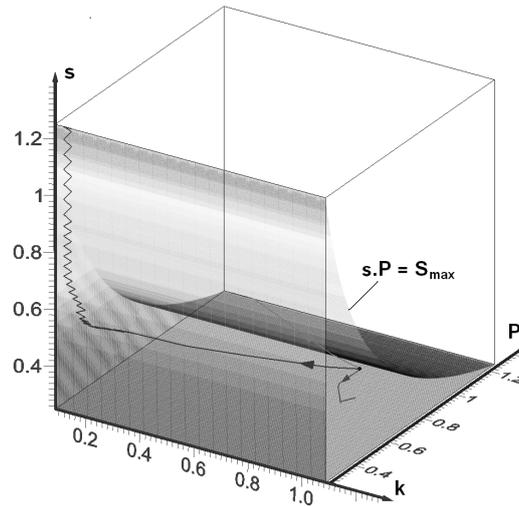


FIG. 5.3 – Deux trajectoires dans le noyau de viabilité  $\text{Viab}_S(\mathcal{K})$ , issues de la même situation initiale et représentées par les deux lignes fléchées

De chaque triplet à l'intérieur du noyau de viabilité part au moins une évolution viable. Plusieurs exemples d'évolutions viables partant d'une même situation initiale sont représentés sur la figure 5.3. Dans ce cas, la situation initiale correspond à un triplet avec une surface aménagée par habitant  $s$  peu importante, une population  $P$  moyenne et un niveau de capital par habitant assez élevé. A partir de cette situation, deux évolutions sont représentées. Elles correspondent donc à deux possibilités d'assurer la viabilité. Pour la plus petite, la viabilité est assurée par une réduction de la population, et par conséquent par une augmentation du capital par individu. Pour l'autre évolution, il est nécessaire d'investir dans l'aménagement de nouvelles surfaces. En faisant ce dernier choix, la contrainte économique (5.2) reste satisfaite ( $k \geq k_{min}$ ). Cependant, on constate que dans ce cas, le capital par individu diminue ( $k' < 0$ ). Nous verrons dans les études suivantes le graphe des valeurs prises par chaque contrôle au cours du temps.

Pour chaque triplet du noyau de viabilité, on peut étudier la ou les évolutions qui en partent. On peut avoir les valeurs successives que doivent prendre chacun des contrôles, et ainsi déterminer les mesures politiques qui doivent être prises pour assurer un développement durable. L'étude de ce problème de gestion du corridor, avec pour seule contrainte économique la contrainte (5.2), aboutit à un noyau de

viabilité égal à l'ensemble de contraintes. Ainsi l'ensemble des situations actuelles respectant les trois contraintes serait viable. Cependant, en étudiant les valeurs prises par les contrôles pour les évolutions de la figure 5.3, nous avons mis en évidence que dans certains cas, le respect des contraintes se faisait au détriment de l'augmentation du niveau de vie de la population locale. C'est pourquoi, nous ajoutons une nouvelle contrainte économique définie par la contrainte (5.3) qui exige que le capital par habitant ne décroisse jamais ( $k'(t) \geq 0$ ). Les études présentées dans les sections suivantes prendront donc désormais en compte cette seconde contrainte économique.

### 5.3.3 Ajout d'une seconde contrainte économique

Nous avons constaté dans le paragraphe précédent une diminution du capital par individu pour certaines évolutions, ce qui implique qu'une génération ait un capital supérieur à celui de sa descendance. Or afin de répondre à la demande d'une gestion durable, l'équité intergénérationnelle doit être satisfaite (*cf* paragraphe 1.2), nous ajoutons donc dans cette nouvelle étude la contrainte (5.3) définie dans le paragraphe 5.2.3 :

$$k' \geq 0 \quad (5.9)$$

Ainsi, en imposant une augmentation du capital par individu, on évite qu'une génération soit moins favorisée que la précédente.

Nous reprenons l'étude précédente en ajoutant cette seconde contrainte économique. Ainsi, nous cherchons le noyau de viabilité pour le système (5.5) soumis aux contraintes (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4). Nous considérons toujours que les transferts monétaires sont inexistant ( $\tau_{max} = 0$ ).

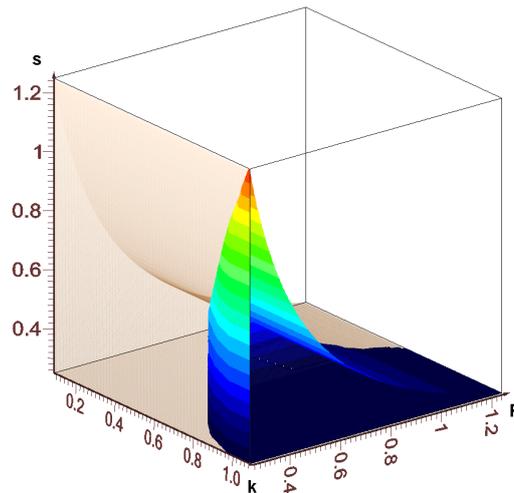


FIG. 5.4 – Noyau de viabilité (en dégradé de couleurs selon la surface aménagée par habitant  $s$ ) avec la contrainte supplémentaire  $k' \geq 0$

La figure 5.4 représente le noyau de viabilité soumis à ces 4 contraintes (environnementale, économiques et concernant la population). Sur le graphique, la zone beige représente l'ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$ , la zone en dégradé de couleurs arc-en-ciel représente le noyau de viabilité. Ainsi, les triplets viables sont situés dans la zone arc-en-ciel, là où le capital est le plus élevé. On constate donc qu'avec l'ajout d'une contrainte économique pour assurer l'équité intergénérationnelle, les situations avec un faible capital de départ ne sont plus viables. Seules les situations où le capital par individu est suffisamment élevé vont respecter l'ensemble des contraintes indéfiniment ou avant d'atteindre la cible  $k = k_{max}$ .

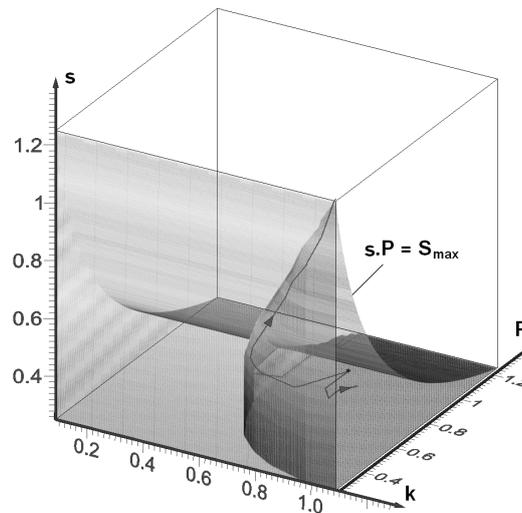


FIG. 5.5 – Deux exemples d'évolutions viables à partir de la même situation à l'intérieur du noyau de viabilité avec la contrainte supplémentaire  $k' \geq 0$ , représentées par les deux lignes fléchées

Pour chacune des situations à l'intérieur du noyau de viabilité, il existe au moins une évolution viable, c'est à dire qu'il est possible de trouver des contrôles permettant à cette évolution de satisfaire les 4 contraintes. La figure 5.5 montre deux exemples d'évolutions viables issues d'une même situation initiale. A partir de cette situation avec une importante population et un fort capital par individu mais une surface aménagée par individu assez petite, il y a au moins deux possibilités pour satisfaire les contraintes économiques et écologiques. La première consiste à investir dans l'aménagement de nouvelles rizières mais à condition que le taux d'accroissement de la population soit faible et qu'ainsi la population diminue. Suivre une telle stratégie implique ainsi parier sur une transition démographique à la fois proche dans le temps et brusque. Dans ce cas, l'évolution atteint la frontière  $k = k_{max}$ . L'autre évolution consiste elle aussi à investir dans de nouvelles surfaces mais dans de moindres mesures, cette évolution atteint également la cible  $k = k_{max}$ <sup>11</sup>.

<sup>11</sup> cf remarque 5.1

### 5.3.4 Ajout de transferts monétaires

Comme les situations avec un faible capital par habitant de départ ne sont pas viables, nous nous intéressons dans cette partie à l'effet des transferts monétaires sur le nombre de situations viables, autrement dit sur le volume du noyau de viabilité. Ainsi dans cette étude, nous considérons toujours le système dynamique (5.5) soumis aux 4 contraintes (5.1), (5.2), (5.3) et (5.4). Désormais, nous tiendrons également compte d'éventuels transferts monétaires. Nous fixons donc  $\tau_{max} > 0$  et dans un premier temps  $\tau_{max} = 10^7$ .

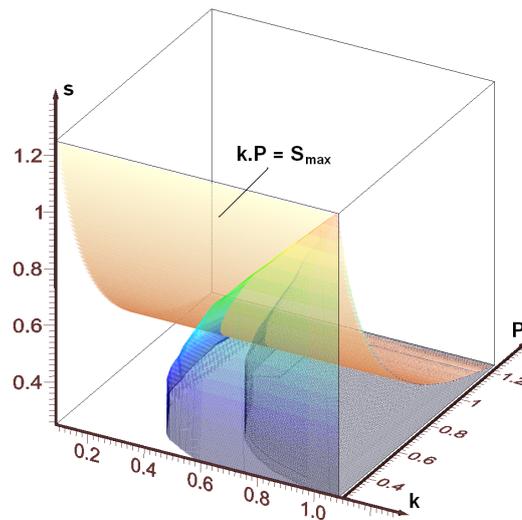


FIG. 5.6 – Deux noyaux de viabilité avec la contrainte supplémentaire  $k' \geq 0$ , et pour deux valeurs maximales des transferts monétaires,  $\tau_{max} = 0$  (pas de transferts monétaires) et  $\tau_{max} = 10^7$

Sur la figure 5.6, sont représentés l'ensemble de contraintes  $\mathcal{K}$ , le noyau de viabilité de la partie 5.3.3 (c'est à dire sans transferts monétaires), ainsi que le noyau de viabilité de l'étude actuelle (c'est à dire avec des transferts monétaires). On constate donc qu'avec un apport de capital supplémentaire, le noyau de viabilité englobe un plus grand nombre de situations initiales. Nous précisons ce lien entre volume du noyau de viabilité et transferts monétaires dans l'étude suivante (*cf* paragraphe 5.3.5).

La figure 5.7 représente différentes vues du noyau de viabilité avec des transferts monétaires  $\tau_{max} = 10^7$ .

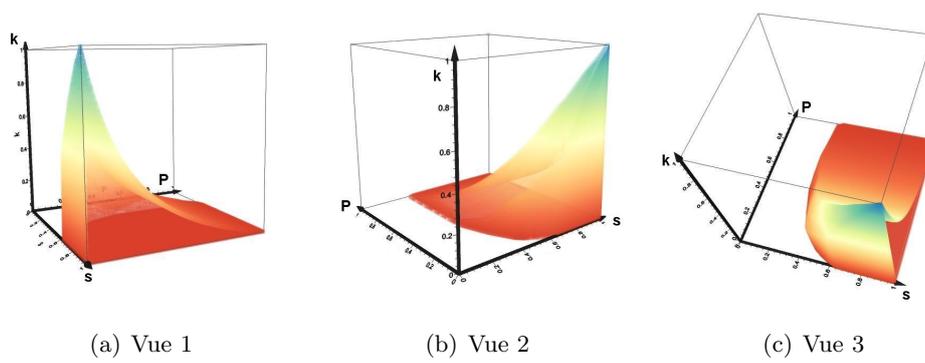


FIG. 5.7 – Plusieurs vues du noyau de viabilité avec la contrainte économique supplémentaire  $k' \geq 0$  et des transferts monétaires ( $\tau_{max} = 10^7$ )

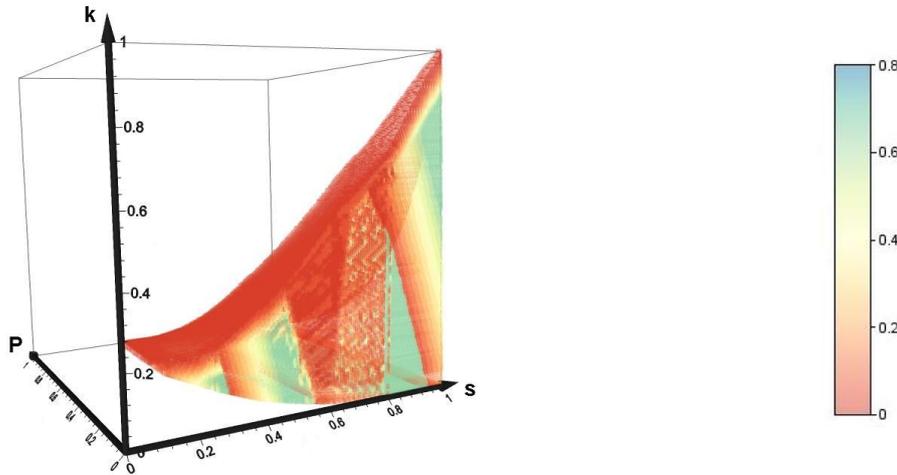


FIG. 5.8 – Valeurs du contrôle “effort d’aménagement” sur la frontière du noyau de viabilité; effort d’aménagement nul en rouge, maximal en bleu

Pour chaque trajectoire viable, il est intéressant de connaître les valeurs des contrôles viables au cours du temps, afin de pouvoir mettre en place des politiques de gestion durable. A l’intérieur du noyau de viabilité, tous les contrôles sont viables<sup>12</sup>. Par contre, cela n’est pas nécessairement le cas sur la frontière du noyau de viabilité. L’algorithme nous donne les valeurs minimales ou maximales prises par les contrôles sur la frontière du noyau de viabilité<sup>13</sup>.

La figure 5.8 représente les valeurs de l’effort d’aménagement maximal viable selon la position sur le noyau de viabilité. Les zones colorées en rouge foncé représentent un effort d’aménagement maximal viable nul (aucune nouvelle surface ne doit être aménagée pour espérer rester viable), alors que les zones colorées en bleu représentent un effort d’aménagement maximal viable égal à la valeur maximale que peut prendre ce contrôle (ici,  $\delta_{max}=0.8$ ). Il existe plusieurs valeurs de contrôles sur l’effort d’aménagement viables, nous avons représenté sur le graphe les valeurs maximales. Cela nous permet de connaître la surface maximale qu’il est possible de défricher chaque année. Toutes les situations situées sur la frontière du noyau de viabilité où  $s * P = S_{max}$  c’est-à-dire dans la zone où toute la surface disponible et autorisée a été défrichée, seul un effort d’aménagement nul permet d’assurer la viabilité. Par contre, sur les autres frontières du noyau, il est encore possible de défricher (effort d’aménagement maximal viable non nul).

Les valeurs des transferts monétaires minimaux viables en fonction de la position sur le noyau de viabilité sont exposées dans la figure 5.9. Les zones en bleu sont des zones où les transferts monétaires minimaux viables à apporter pour espérer rester viable sont maximaux (ici,  $\tau_{max} = 10^7$ ), tandis que les transferts monétaires

<sup>12</sup>En effet, nous avons vu dans le paragraphe 2.2.5 du chapitre 2 que le cône contingent à l’ensemble  $K$  en un point situé à l’intérieur de  $K$  est l’espace  $X$  tout entier.

<sup>13</sup>L’algorithme de viabilité nous permet en effet d’obtenir les valeurs de contrôle minimales ou maximales. Plus de détails seront donnés dans le paragraphe 5.3.6

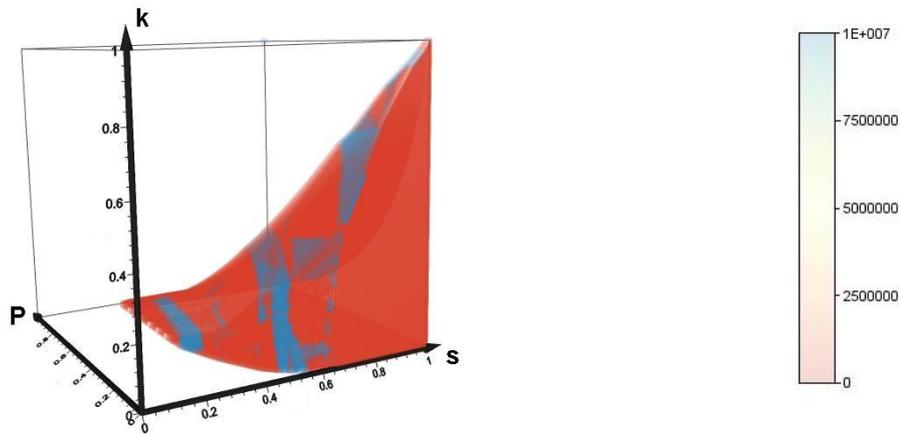


FIG. 5.9 – Valeurs du contrôle “transferts monétaires” minimal viable à la frontière du noyau de viabilité ; transferts monétaires minimaux en rouge, maximaux en bleu

minimaux viables sont nuls dans les zones rouges. Il est intéressant de constater que les transferts monétaires ne sont pas toujours utiles. Nous détaillons les valeurs successives des transferts monétaires à injecter dans le capital sur l'exemple d'une trajectoire viable dans le paragraphe 5.3.6.

### 5.3.5 Effets de la valeur de la borne maximale des transferts monétaires sur le volume du noyau de viabilité

L'ajout de transferts monétaires augmente le volume du noyau de viabilité. Afin de déterminer les transferts monétaires minimaux à apporter pour assurer la viabilité de tous les états initiaux de l'ensemble de contraintes (si cela est possible), nous allons modifier les bornes du contrôle "transferts monétaires" et calculer le noyau ainsi obtenu. L'algorithme de viabilité dont nous disposons nous donne alors le volume du noyau de viabilité.

Les transferts monétaires évoluent entre deux bornes 0 et  $\tau_{max}$ . Nous calculons le volume du noyau de viabilité pour différentes valeurs du transfert monétaire maximal  $\tau_{max}$ . Les résultats sont exposés dans le tableau 5.2 et représentés par la courbe de la figure 5.10.

Transferts monétaires maximaux	Volume du noyau par rapport à l'ensemble de contraintes $K$
0	42.041%
$10^4$	42.042%
$10^5$	42.071%
$10^6$	42.566%
$5 * 10^6$	44.628%
$10^7$	47.209%
$2 * 10^7$	57.130%
$3 * 10^7$	73.274%
$4 * 10^7$	93.115%
$5 * 10^7$	95.671%
$10^8$	99.694%
$10^9$	100%

TAB. 5.2 – Lien entre transferts monétaires maximaux ( $\tau_{max}$ ) et volume du noyau de viabilité.

On constate qu'avec des transferts maximaux suffisants ( $\tau_{max} = 10^9$ ), l'ensemble de contraintes  $K$  tout entier est viable. Par exemple, pour des transferts monétaires maximaux  $\tau_{max} = 10^8$ , le noyau de viabilité représenté dans la figure (5.11) est très proche de l'ensemble de contraintes. Seule une zone où la surface aménagée par habitant est petite et la population grande n'est pas viable.

En connaissant la situation actuelle, il est possible de déterminer les transferts monétaires maximaux minimaux à apporter pour assurer la viabilité. Il suffit pour cela d'augmenter la valeur des transferts monétaires maximaux jusqu'à ce que la situation actuelle soit dans le noyau de viabilité.

Cette étude nous permet également de dire qu'en dessous d'un certain seuil, les transferts monétaires n'ont que très peu d'effets. Le volume du noyau de viabilité reste quasi identique (entre 42.041% et 42.566% de l'ensemble de contraintes) pour des transferts monétaires maximaux allant de 0 à  $10^6$  USD. La figure (5.12) représente un noyau de viabilité pour des transferts monétaires maximaux  $\tau_{max} = 10^5$ . Il en est de même au delà d'un certain seuil. A partir de  $\tau_{max} = 10^8$ , le noyau

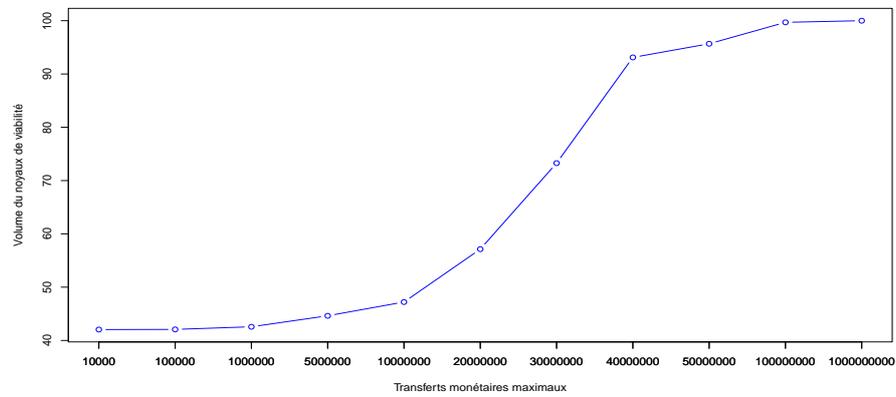


FIG. 5.10 – Volume du noyau de viabilité en fonction des transferts monétaires maximaux ( $\tau_{max}$ )

de viabilité obtenu représente 99% de l'ensemble de contraintes. Il n'est donc pas utile d'augmenter les transferts monétaires maximaux à une somme supérieure à  $10^8$ .

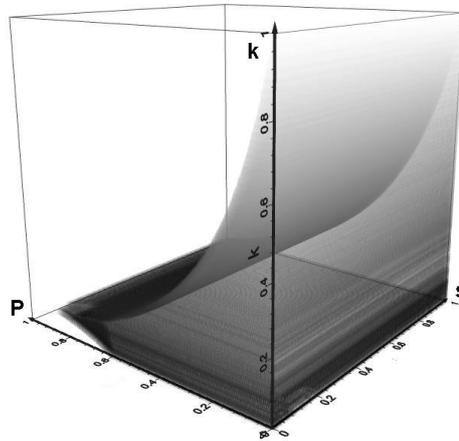


FIG. 5.11 – Noyau de viabilité pour un transfert monétaire maximal  $\tau_{max} = 10^8$

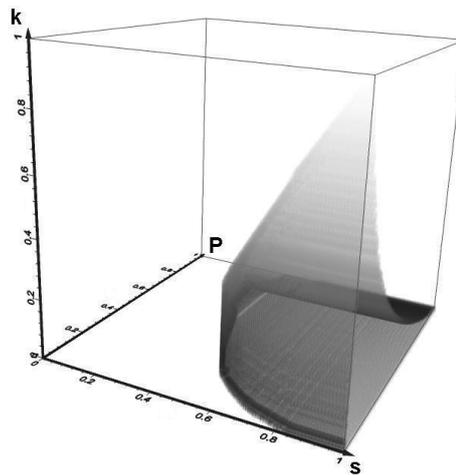


FIG. 5.12 – Noyau de viabilité pour un transfert monétaire maximal  $\tau_{max} = 10^5$

### 5.3.6 Choix des transferts monétaires minimaux au cours du temps pour assurer la viabilité

Nous avons vu qu'il était possible d'assurer la viabilité de tous les états de l'ensemble de contraintes en choisissant un transfert monétaire maximal suffisant. On peut alors se demander si pour une situation donnée, les transferts monétaires à apporter au cours du temps sont toujours les mêmes, ou bien s'ils doivent être plus importants durant certaines périodes. C'est l'objet de cette nouvelle étude.

A partir d'une situation à l'intérieur du noyau de viabilité, il est possible d'exhiber une trajectoire viable. Étudions pour une trajectoire viable donnée, la séquence des contrôles sur le transfert monétaire. L'algorithme de viabilité teste pour chaque point  $x_n$  de la grille de l'espace des états les différentes valeurs des contrôles afin de déterminer si le point suivant  $x_{n+1}$  appartient à l'ensemble de contraintes. Dans la section 3.2, nous avons précisé qu'il était possible de tester les valeurs des contrôles en commençant par la valeur minimale ou bien en partant de la plus grande jusqu'à la plus petite. Pour cette étude, nous allons tester les valeurs des transferts monétaires en partant du transfert monétaire minimal jusqu'au transfert maximal. Ainsi, pour une trajectoire viable donnée, nous connaissons les valeurs minimales du transfert monétaire à apporter à chaque instant.

Nous nous plaçons dans le cas d'un transfert monétaire maximal  $\tau_{max} = 10^7$ . La figure 5.13 représente une trajectoire viable partant d'un état initial situé dans le noyau de viabilité. Nous avons représenté dans la figure 5.14 les valeurs des transferts monétaires à appliquer à cette même trajectoire pour assurer sa viabilité. Ces différentes valeurs sont représentées par des changements de couleurs (du blanc au rouge) le long de la trajectoire, le blanc représentant des transferts monétaires nuls et le rouge des transferts monétaires maximaux ( $10^7$ US\$ dans cet exemple). Le tableau 5.3 nous donne un extrait des valeurs de ces transferts au cours d'une période donnée. On constate qu'il peut y avoir de fortes différences au niveau des transferts monétaires à apporter selon les années. Les valeurs que nous avons ici sont les valeurs minimales à apporter. Il est intéressant de constater que ces valeurs ne sont pas toujours égales au transfert monétaire maximal et qu'il est parfois inutile d'ajouter des transferts monétaires pendant plusieurs années consécutives.

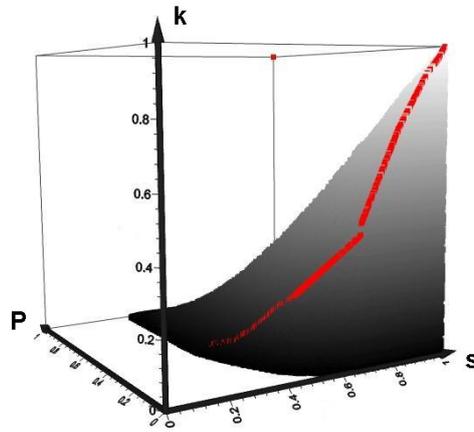


FIG. 5.13 – Trajectoire (en rouge) à l'intérieur du noyau de viabilité avec contrainte économique supplémentaire et transferts monétaires ( $\tau_{max} = 10^7$ )

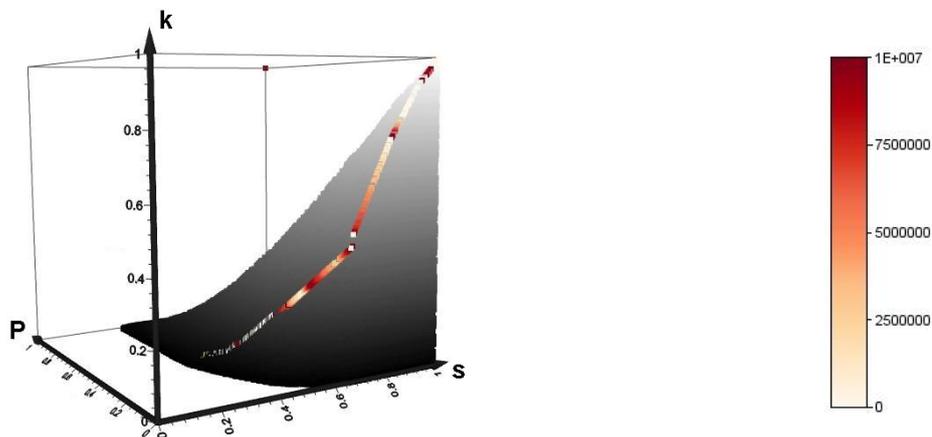


FIG. 5.14 – Valeur des transferts monétaires au cours du temps le long de la trajectoire de la figure 5.13, transferts monétaires nuls en blanc, maximaux en rouge

Transferts Monétaires (en $10^5$ US\$)	Temps (en années)	Transferts Monétaires (en $10^5$ US\$)	Temps (en années)
0	0,46076	15	107,59018
0	0,92295	150	108,24325
0	1,38657	15	108,89498
0	1,85163	15	109,54538
0	2,31814	10	110,1949
0	2,78611	10	110,84311
0	3,25555	10	111,49001
0	3,72646	10	112,13561
0	4,19885	10	112,77992
0	4,67273	5	113,42337
0	5,14811	5	114,06554
0	5,625	5	114,70644
0	6,1034	5	115,34608
0	6,58332	5	115,98445
0	7,06476	0	116,62199
0	7,54774	0	117,25829
0	8,03226	100	117,74779
0	8,51832	95	118,23664
0	9,00594	85	118,72569
0	9,49512	75	119,21491
0	9,98586	65	119,70425
0	10,47817	55	120,19369
35	10,97173	45	120,68318
30	11,46687	35	121,17269
25	11,96359	25	121,66218
20	12,4619	15	122,15162
15	12,96181	5	122,64097
10	13,46333	0	123,12952
5	13,96646	0	123,6166
0	14,4712	0	124,10222
0	14,97749	0	124,58639
0	15,48533	0	125,06912
0	15,99472	0	125,55043
0	16,50565	0	126,03032
0	17,01812	0	126,50881
0	17,53213	0	126,98591
0	18,04767	0	127,46162
0	18,56474	0	127,93596

TAB. 5.3 – Extrait des valeurs des transferts monétaires pour la trajectoire de la figure 5.13 sur la période de 0 à 19 années et de 107 à 128 années

## 5.4 Conclusion

Nous avons commencé notre étude par un premier calcul de noyau de viabilité pour lequel nous avons considéré une contrainte environnementale consistant à conserver une surface minimale de forêt ainsi qu'une contrainte économique telle que les futurs revenus soient supérieurs aux revenus  $k_{min}$  (valeur des revenus actuels). Cette première étude montre que l'ensemble de contraintes tout entier est viable. Cependant dans ce cas, l'équité intergénérationnelle n'est pas respectée. Ainsi, il est possible de prendre des mesures permettant d'assurer le maintien d'une surface de forêt minimale et le maintien de niveau de vie de la population locale à un seuil minimal. Par contre, il est possible que certaines générations se voient moins favorisées que les générations précédentes.

Nous avons donc, dans une deuxième étude ajouté une contrainte économique afin d'éviter ce genre de situations. Dans cette étude, pour qu'une situation soit viable, il est nécessaire que chaque génération ait un capital supérieur à celui de la génération précédente. Dans ce cas, une partie des situations de l'ensemble de contraintes n'est pas viables. Il s'agit des cas où le capital initial est faible.

L'idée est donc dans une troisième étude d'ajouter des transferts monétaires afin de voir si cela permet d'obtenir un ensemble de situations viables plus grand. C'est le cas. Avec des transferts monétaires ajoutés directement au capital, des situations pour lesquelles il n'était possible précédemment d'assurer le respect des contraintes économiques et environnementales se retrouvent désormais viables.

Nous avons précisé le lien entre transferts monétaires maximaux et volume du noyau de viabilité; cette étude nous a montré qu'en dessous d'un certain seuil, l'ajout de transferts monétaires n'avait pas une forte incidence sur le nombre de situations viables. De même, une fois obtenu un noyau de viabilité égal à l'ensemble de contraintes, il n'est plus nécessaire d'augmenter les transferts monétaires maximaux. Par contre, entre ces deux seuils, la valeur choisie pour les transferts monétaires maximaux (entre  $10^7$  et  $5 * 10^7$  US\$ par an) a un effet important sur le volume du noyau de viabilité. A partir de ce résultat, on peut évaluer les transferts monétaires nécessaires à rendre viable la situation actuelle.

Connaître la répartition des transferts monétaires au cours du temps est également primordial afin d'assurer une gestion efficace de l'aide internationale. Nous avons donc évalué, sur une trajectoire viable donnée, les valeurs minimales des transferts monétaires à apporter chaque année pour assurer la viabilité. Il est intéressant de constater qu'il existe des périodes de plusieurs années consécutives où aucune aide n'est utile. D'autres périodes nécessitent des apports en capital différents selon les années.

---

Le modèle mathématique développé pour ces études nous a permis d'explorer l'intérêt de transferts monétaires par rapport au développement économique et environnemental de la population. Nous avons fait l'hypothèse au cours du travail de modélisation que les transferts monétaires viendraient directement s'ajouter au capital de la population. Suite à ces résultats, tester l'effet de transferts monétaires investis dans des secteurs précis et non plus injectés uniquement dans le capital est une piste intéressante pour la poursuite de cette étude. Nous pourrions par exemple considérer que le capital est investi dans la riziculture et permet d'augmenter la productivité de la terre. Il serait également intéressant de connaître les effets de l'éducation à la santé reproductive visant à réduire le taux d'accroissement de la population.

Afin de tester ces hypothèses, nous avons élaboré un second modèle mathématique dans lequel est précisé le taux d'accroissement de la population ainsi que la productivité de certaines surfaces. Nous avons également approfondi les caractéristiques du modèle actuel, nous détaillons ce modèle dans le chapitre suivant.



# Corridor forestier de Fianarantsoa : du modèle dynamique à l'analyse viabiliste

---

## Sommaire

---

<b>6.1 Le second modèle mathématique</b> . . . . .	<b>84</b>
6.1.1 Choix des variables et contrôles . . . . .	84
6.1.2 Dynamiques du modèle . . . . .	85
6.1.3 Bornes des contrôles . . . . .	88
6.1.4 Modèle mathématique complet . . . . .	89
6.1.5 Contraintes . . . . .	89
6.1.6 Paramètres . . . . .	90
<b>6.2 Travail préparatoire à l'utilisation de l'algorithme de viabilité</b>	<b>93</b>
6.2.1 Le modèle discret . . . . .	93
6.2.2 La résolution avec l'algorithme cinq dimensions . . . . .	94
<b>6.3 Résultats</b> . . . . .	<b>98</b>
6.3.1 Noyaux de viabilité en trois dimensions . . . . .	98
6.3.2 Noyau de viabilité en cinq dimensions . . . . .	100

---

Le premier modèle sur les dynamiques d'occupation des bas-fonds dans le corridor forestier de Fianarantsoa permettait une description simple de l'évolution de la surface forestière, de la population locale et du capital de la population. Des contraintes traduisant nos objectifs environnementaux et économiques avaient été définies. Enfin, nous disposions d'un certain nombre de leviers pour atteindre ces objectifs. Nous avons choisi de réaliser ce premier modèle en trois dimensions car le calcul de noyau de viabilité en dimension trois était aisé.

Nous disposons désormais d'un nouvel algorithme, conçu dans le cadre du projet "Déduction" par Anya Desilles. Celui-ci reprend l'algorithme de Patrick Saint-Pierre, et le rend plus performant pour des modèles aux dimensions supérieures à trois. C'est pourquoi il nous a paru intéressant d'apporter des précisions au modèle précédent en prenant en compte de nouvelles variables. Nous proposons dans ce chapitre un modèle en dimension cinq décrivant plus précisément les dynamiques du corridor forestier de Fianarantsoa.

Dans un premier temps, nous décrivons le nouveau modèle élaboré, nous détaillons le choix des variables, des contrôles et réglons ainsi que la définition

des contraintes. Puis, nous développons l'analyse du modèle préalable au calcul du noyau de viabilité avec les algorithmes existants<sup>1</sup>. Enfin, nous donnons les résultats obtenus ainsi que leur analyse.

## 6.1 Le second modèle mathématique

### 6.1.1 Choix des variables et contrôles

**Variables d'état** L'enjeu de ce modèle restant la sauvegarde de la forêt tropicale et l'amélioration des conditions de vie de la population locale, le choix des trois variables initiales reste le même. Nous avons donc une variable sur la surface forestière  $F$ , une variable sur la population  $P$  et une autre sur le capital commun à toute la population  $K$ .

Une part importante de la déforestation actuelle est due à une population en augmentation (cf partie 4.4). Outre la variable  $P$  sur la population, il nous a semblé important de prendre en compte les variations du taux de natalité dans le corridor. En effet, dans le modèle précédent, le taux d'accroissement de la population pouvait varier brutalement, nous souhaitons dans ce modèle pouvoir borner le taux de variation du taux de natalité. Nous avons donc décomposé le taux de natalité en deux parties : un taux fixe (le taux actuel) et un taux de correction. Ce taux de correction est variable, il permet d'ajuster le taux de natalité global aux fluctuations de ce taux au cours du temps. Nous avons donc une quatrième variable d'état sur le taux de natalité correctif de la population  $\tilde{\alpha}$ .

Dans la présentation du contexte malgache, nous avons exposé l'alternance des saisons de part et d'autre du corridor, et donc mis en évidence l'existence de travailleurs salariés (cf partie 4.3). Nous avons pris en compte cet aspect du problème dans le modèle précédent par une variable de contrôle. Cependant, le choix de modélisation que nous avons fait impliquait la possibilité d'un changement brutal de la proportion de travailleurs salariés. Afin d'éviter ceci, nous avons choisi ici de nous intéresser aux variations du nombre de travailleurs salariés. C'est pourquoi, nous avons une cinquième variable d'état sur la proportion de travailleurs salariés  $\rho_2$ .

Ainsi, nous avons cinq variables d'état : la surface forestière  $F$ , la population  $P$ , le taux de natalité  $\tilde{\alpha}$ , le capital commun  $K$  et la proportion de travailleurs salariés  $\rho_2$ .

**Contrôles** Nous conservons certains contrôles du modèle précédent (cf partie 5.2). L'effort d'aménagement  $\delta$ , c'est à dire les nouvelles surfaces que la population va défricher, est un contrôle crucial pour étudier la déforestation. D'autre part, le contrôle sur les transferts monétaires  $\tau$  est lui aussi important.

Nous avons dans ce modèle une variable d'état sur le taux de natalité correctif  $\tilde{\alpha}$ . Ce taux correctif évolue en fonction du temps. Cependant, ces variations ne peuvent

<sup>1</sup>Cette étape n'a pas été évoquée dans le chapitre 5, nous avons choisi de l'exposer pour ce second modèle.

pas être brutales. En effet, les variations d'un taux de natalité se font lentement, au fur et à mesure des changements de la société. C'est pourquoi nous avons borné les variations de ce taux de natalité correctif  $\tilde{\alpha}' = u$  avec  $u \in [u_{min}, u_{max}]$ . La variable  $u$  est donc un régulon (cf partie 2.2.2) : ainsi, il pourra à chaque pas de temps évoluer entre deux bornes  $u_{min}$  et  $u_{max}$ , et s'ajuster de façon à prendre des valeurs favorisant la viabilité. Cette hypothèse est donc moins forte que dans le modèle du chapitre 5 où la dynamique du taux d'accroissement n'était pas bornée rendant brutales les variations de ce taux.

Une des nouvelles variables d'état que nous avons introduites dans ce modèle est la proportion de travailleurs extérieurs  $\rho_2$ . Cette proportion de travailleurs salariés évolue au cours du temps. Cependant, il est à noter que ces variations ne peuvent avoir lieu brutalement. En effet, dans ce cas, il s'agit d'un changement dans la société et celui-ci ne peut se produire du jour au lendemain. C'est pourquoi, nous avons borné cette variation de la proportion de travailleurs extérieurs  $\rho_2' = w$  avec  $w \in [w_{min}, w_{max}]$ . Ici,  $w$  est un contrôle car nous pouvons agir sur les variations de cette proportion par des mesures d'incitations par exemple.

Nous savons qu'il existe des échanges de travailleurs de part et d'autre du corridor (cf partie 4.3). Ainsi des personnes partent travailler à l'extérieur ( $\rho_2$ ), mais il y a aussi des personnes qui viennent de l'extérieur pour venir travailler dans le village en cas de nécessité. Ainsi, cette proportion de travailleurs en provenance de l'extérieur notée  $W_0$  est un moyen d'action à notre disposition, il s'agit d'un contrôle.

Nous avons donc quatre contrôles  $(\delta, \tau, w, W_0)$  et un régulon  $(u)$ .

**Résumé** Nous disposons donc d'un modèle en dimension cinq  $(F, P, \tilde{\alpha}, K, \rho_2)$  avec quatre contrôles  $(\delta, \tau, w, W_0)$  et un régulon  $(u)$ . Nous proposons dans la suite de ce travail de définir les dynamiques associées à ces cinq variables d'état.

## 6.1.2 Dynamiques du modèle

### 6.1.2.1 Forêt

La surface de forêt  $F$  varie en fonction de la déforestation et aussi en fonction de sa régénération<sup>2</sup> (cf partie 4). La déforestation est représentée par le contrôle  $\delta$ . Pour la croissance naturelle de la forêt, suivant le travail de [Andrés-Domenech *et al.*, 2008], nous avons choisi de la représenter par une fonction logistique :

$$\eta \left( 1 - \frac{F}{F_0} \right) F. \quad (6.1)$$

$F_0$  représente la capacité maximale de forêt que l'on peut avoir sur la surface étudiée. Dans notre cas, il s'agit de la surface de forêt existante en 1960. Cette fonction traduit le fait que la forêt tend à converger naturellement vers une surface

<sup>2</sup>Dans le modèle précédent, on ne prenait en compte que la déforestation.

stable. Le terme  $\eta$  est un paramètre correspondant au taux maximal de croissance de la forêt par régénération.

Ainsi, l'évolution de la surface forestière s'écrit comme la somme de cette fonction logistique décrivant la croissance naturelle de la forêt et d'un terme de déforestation  $\delta$  par personne. On a donc l'équation suivante où  $L(t)$  le nombre de travailleurs disponibles sera détaillé dans le paragraphe suivant :

$$F'(t) = \eta \left( 1 - \frac{F(t)}{F_0} \right) F(t) - \delta(t)L(t). \quad (6.2)$$

### 6.1.2.2 Population et taux de natalité

La population  $P$  répartie sur la zone d'étude augmente avec le nombre de naissances  $\alpha(t)$  et diminue avec celui des décès  $\beta$ . Nous avons volontairement fait le choix de négliger la variation de la population due aux migrations. Ainsi, une première équation du modèle est la suivante :

$$P'(t) = (\alpha(t) - \beta)P(t). \quad (6.3)$$

Comme nous l'avons évoqué précédemment, le taux de natalité  $\alpha(t)$  se décompose en un taux fixe correspondant au taux actuel  $\bar{\alpha}$  et en un taux correctif  $\tilde{\alpha}(t)$  qui influence le taux de natalité :

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} + \tilde{\alpha}(t). \quad (6.4)$$

Le taux correctif voit son évolution bornée. En effet, son évolution est décrite par un régulon  $u$  qui varie entre deux bornes  $u_{min}$  et  $u_{max}$ , afin de traduire le fait qu'il ne peut y avoir de modifications brutales de ce taux correctif au cours du temps :

$$\tilde{\alpha}'(t) = u(t) \in [u_{min}, u_{max}]. \quad (6.5)$$

### 6.1.2.3 Capital

On considère un capital commun à l'ensemble de la population. Son évolution au cours du temps dépend des revenus dus à la culture du riz et autres plantes et céréales, des revenus dus au travail salarié, du coût nécessaire à la satisfaction des besoins de la population, du coût d'aménagement de nouvelles surfaces cultivables. Nous prendrons aussi en compte la dépréciation du capital et les transferts monétaires.

**Force de travail** Commençons par quantifier la force de travail disponible  $L(t)$ . Parmi la population totale, nous allons exclure les personnes âgées ainsi que les enfants qui ne travaillent pas,  $\rho_1$  est la proportion de travailleurs effectifs au sein de la population.

D'autre part, il existe de nombreux liens entre Betsileo et Tanala. Notamment, les saisons n'étant pas exactement les mêmes, les Betsileo partent travailler chez les Tanala et inversement. Nous considérerons ce travail salarié. La proportion de la population qui part travailler pour un temps donné à l'extérieur de sa communauté est appelée  $\rho_2(t)$  (c'est une des cinq variables d'état définies précédemment). Ainsi  $\rho_2(t)\rho_1P(t)$  désigne le nombre de personnes travaillant à l'extérieur. A l'inverse,  $W_0(t)$  représentant la proportion de travailleurs provenant de l'extérieur, le terme  $W_0(t)\rho_1P(t)$  représente donc le nombre de travailleurs venant de l'extérieur pour travailler au sein de la communauté. Ainsi, la force de travail disponible pour travailler est décrite par l'équation suivante :

$$L(t) = ((1 - \rho_2(t)) + W_0(t))\rho_1P(t). \quad (6.6)$$

**Revenus provenant de l'agriculture** Comme cela a été fait dans des modèles similaires [Brooks *et al.*, 2009], nous avons choisi de définir une fonction de production décrivant les revenus dus à l'agriculture à l'aide d'une fonction de Cobb-Douglas [Cobb et Douglas, 1928]. Ainsi la fonction de production dépend de la surface dédiée à l'agriculture  $F_0 - F(t)$  et de la main d'œuvre disponible  $L(t)$ . Les paramètres  $\theta$  et  $\gamma$  mesurent l'élasticité entre main d'œuvre et surface disponible :

$$eL(t)^\gamma(F_0 - F(t))^\theta. \quad (6.7)$$

Le paramètre  $e$  représente la productivité de la surface considérée.

La productivité  $e$  est différente selon la surface que l'on considère. Quand il s'agit d'une surface qui vient d'être brûlée et qui donc commence juste à être cultivée, la productivité est meilleure qu'au bout de quelques années. Ainsi, nous distinguerons deux cas : une productivité  $e_1$  pour les surfaces récentes et une productivité  $e_2$  pour les surfaces plus anciennes. On note  $T$  la période durant laquelle une surface a une productivité supérieure  $e_1$ . Ainsi, les nouvelles surfaces sont celles défrichées entre le temps  $t - T$  et  $t$ , c'est-à-dire  $F(t - T) - F(t)$ <sup>3</sup>. Les surfaces plus anciennes ont été défrichées avant le temps  $t - T$ , cela correspond donc au terme  $F_0 - F(t - T)$ . Ainsi on peut affiner la fonction de production précédente par le terme suivant, où  $s$  est le prix du riz :

$$se_1L(t)^\gamma(F(t - T) - F(t))^\theta + se_2L(t)^\gamma(F_0 - F(t - T))^\theta. \quad (6.8)$$

**Salaires perçus et versés** Dans ce modèle, nous considérons une proportion de travailleurs extérieurs ( $\rho_2(t)$ ) ainsi qu'une proportion de personnes venant de l'extérieur pour travailler ( $W_0(t)$ ).  $w$  étant le salaire pour une unité de temps de travail, le capital varie avec les salaires perçus ( $\omega\rho_2(t)\rho_1P(t)$ ) et versés aux travailleurs ( $\omega W_0(t)\rho_1P(t)$ ) :

$$\omega\rho_1P(t)(\rho_2(t) - W_0(t)). \quad (6.9)$$

<sup>3</sup>En effet, la surface agricole au temps  $t$  est égale à  $F_0 - F(t)$ .

**Besoins de la population** Il faut également considérer les besoins de la population locale. Nous avons fixé un seuil minimal correspondant à la satisfaction des besoins physiologiques de la population noté  $\underline{c}$ . Ainsi, le capital va diminuer en fonction de ce terme sur les besoins de la population :

$$\underline{c}P(t). \quad (6.10)$$

**Coût de la déforestation** Comme nous l'avons remarqué dans le chapitre précédent (cf partie 5.2.2), l'effort d'aménagement de nouvelles surfaces a un coût. Avec  $\mu$  le coût pour défricher un hectare de forêt,  $\delta(t)$  la surface en hectare que l'on décide de défricher et  $L(t)$  les personnes disponibles, le coût par unité de temps pour la déforestation est évalué à  $\mu\delta(t)L(t)$ . D'où une diminution du capital par unité de temps :

$$\mu\delta(t)L(t). \quad (6.11)$$

**Dépréciation du capital** Nous considérons un terme correspondant à la dépréciation du capital  $\lambda K(t)$ , où  $\lambda$  est un facteur fixé. Le capital diminue donc par unité de temps de :

$$\lambda K(t). \quad (6.12)$$

**Transferts monétaires** Enfin, nous nous intéressons toujours aux effets d'éventuels transferts monétaires  $\tau(t)$ . Nous rappelons que ce terme est un contrôle. Il nous faut donc ajouter le terme suivant aux variations du capital par unité de temps :

$$\tau(t). \quad (6.13)$$

**Evolution du capital** L'évolution du capital peut donc être décrite par l'équation suivante :

$$K'(t) = se_1L(t)^\gamma(F(t-T) - F(t))^\theta + se_2L(t)^\gamma(F_0 - F(t-T))^\theta + \omega\rho_1P(t)(\rho_2(t) - W_0(t)) - \underline{c}P(t) - \mu\delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t). \quad (6.14)$$

#### 6.1.2.4 Proportion de personnes salariées

La proportion de personnes salariées  $\rho_2(t)$  peut varier. Son évolution est décrite par un contrôle  $w$ . Cependant, afin d'éviter que cette proportion ne passe brutalement d'un extrême à un autre, nous avons choisi de borner son évolution :

$$\rho_2'(t) = w(t) \in [w_{min}, w_{max}]. \quad (6.15)$$

#### 6.1.3 Bornes des contrôles

Afin de modéliser les différentes actions possibles pour un gestionnaire, nous avons défini quatre contrôles et un régulon. Au cours du temps, ces contrôles et régulon peuvent prendre différentes valeurs comprises entre des bornes fixées.

Le régulon sur la variation du taux de natalité correctif  $u$  varie entre les bornes  $u_{min}$  et  $u_{max}$  où  $u_{min} < 0$  et  $u_{max} > 0$ .

L'effort d'aménagement de nouvelles surfaces  $\delta$  est compris entre 0 (pas d'aménagement) et  $\delta_{max} \geq 0$ .

L'évolution de la proportion de travailleurs extérieurs  $\rho_2$  est décrite par le contrôle  $w$  variant entre  $w_{min}$  et  $w_{max}$  où  $w_{min} < 0$  et  $w_{max} > 0$ .

La proportion de personnes venant de l'extérieur de la communauté  $W_0$  varie entre  $W_{0,min}$  et  $W_{0,max}$  où  $W_{0,min} = 0$  et  $W_{0,max} \geq 0$ .

Enfin, les transferts monétaires peuvent prendre des valeurs situées entre  $\tau_{min}$  et  $\tau_{max}$  où  $\tau_{min} = 0$  et  $\tau_{max} \geq 0$ .

#### 6.1.4 Modèle mathématique complet

Nous avons donc un système dynamique en dimension cinq avec quatre contrôles et un régulon :

$$\left\{ \begin{array}{l} F'(t) = \eta \left( 1 - \frac{F(t)}{F_0} \right) F(t) - \delta(t)L(t) \\ P'(t) = (\alpha(t) - \beta)P(t) \\ K'(t) = se_1 L(t)^\gamma (F(t-T) - F(t))^\theta + se_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t-T))^\theta \\ \quad + \omega \rho_1 P(t) (\rho_2 - W_0) - \underline{c}P(t) - \mu \delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t) \\ \tilde{\alpha}'(t) = u(t) \\ \rho_2'(t) = w(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{min} \leq u \leq u_{max} \\ \delta_{min} \leq \delta \leq \delta_{max} \\ w_{min} \leq w \leq w_{max} \\ W_{0,min} \leq W_0 \leq W_{0,max} \\ \tau_{min} \leq \tau \leq \tau_{max}. \end{array} \right.$$

#### 6.1.5 Contraintes

Dans le modèle de la partie 5.2, nous avons défini des contraintes environnementales, économiques et sur la population, ces contraintes décrivant notre objectif d'une gestion durable du corridor. Dans ce nouveau modèle, les objectifs restent les mêmes. Ainsi nous avons toujours les mêmes contraintes environnementales et économiques.

**Contrainte environnementale** Un objectif est de protéger la biodiversité présente dans le corridor forestier. Nous traduisons cette contrainte écologique par le respect d'une surface fixe minimale de forêt  $F_{min}$  à préserver :

$$F_{min} \leq F(t). \quad (6.16)$$

**Contrainte économique** L'autre objectif est économique : assurer les besoins de la population locale. Le capital futur doit être toujours supérieur au capital actuel  $K_{min}$  :

$$K_{min} \leq K(t). \quad (6.17)$$

**Contrainte sur la population** Nous avons également une contrainte sur la population. Le renouvellement de la population doit être assuré, on considère donc que la population doit toujours être supérieure à une borne  $P_{min}$ . La population doit également rester inférieure à un niveau maximal  $P_{max}$ <sup>4</sup> :

$$P_{min} \leq P(t) \leq P_{max}. \quad (6.18)$$

**Contrainte sur le taux de natalité correctif** Nous avons également fixé des bornes minimale  $\tilde{\alpha}_{min}$  et maximale  $\tilde{\alpha}_{max}$  entre lesquelles doit rester le taux correctif de natalité :

$$\tilde{\alpha}_{min} \leq \tilde{\alpha}(t) \leq \tilde{\alpha}_{max}. \quad (6.19)$$

**Contrainte sur la proportion de travailleurs à l'extérieur** Afin que toute la population ne parte pas travailler à l'extérieur, nous avons fixé une proportion maximale pouvant partir travailler à l'extérieur. Cela correspond à la moitié de la population qui peut se déplacer à l'extérieur :

$$0 \leq \rho_2(t) \leq 0.5. \quad (6.20)$$

On peut donc définir mathématiquement ces contraintes comme l'ensemble  $\mathcal{K}$  de toutes les situations qui satisfont :

$$\mathcal{K} = \left\{ (F, P, K, \tilde{\alpha}, \rho_2) \left| \begin{array}{l} F_{min} \leq F(t) \\ P_{min} \leq P(t) \leq P_{max} \\ K_{min} \leq K(t) \\ \tilde{\alpha}_{min} \leq \tilde{\alpha}(t) \leq \tilde{\alpha}_{max} \\ 0 \leq \rho_2(t) \leq 0.5. \end{array} \right. \right\}$$

### 6.1.6 Paramètres

Comme pour le cas du chapitre 5, nous ne disposons pas de toutes les données nécessaires pour caler tous les paramètres de ce modèle. Nous avons donc déterminé les valeurs des paramètres soit en nous basant sur la littérature, soit sur les connaissances des experts du projet "Dédution". Les détails concernant l'estimation de ces paramètres est donné dans l'annexe B.

<sup>4</sup>La justification de ce terme  $P_{max}$  est algorithmique, cf paragraphe 5.2.3 du chapitre 5.

Définition	Notation	Unité	Valeur
Taux de décès	$\beta$	sans unité	1.4%
Taux de natalité actuel	$\bar{\alpha}$	sans unité	4.4%
Taux de croissance de la forêt	$\eta$	sans unité	$2.58.10^{-3}$
Coefficient d'élasticité	$\gamma$	sans unité	0.39
Coefficient d'élasticité	$\theta$	sans unité	0.36
Salaire agricole	$\omega$	US\$/capita/an	200
Coefficient de dépréciation du capital	$\lambda$	sans unité	0.005
Coût de défriche d'1 ha	$\mu$	US\$/an/ha	4224
Besoins physiologiques de la population	$\underline{c}$	USD/capita/an	8.4
Proportion de travailleurs effectifs	$\rho_1$	sans unité	0.6
Productivité des nouvelles surfaces	$e_1(K)$	t/ha	2.5
Productivité des anciennes surfaces	$e_2(K)$	t/ha	1.0
Prix du riz	$s$	US\$/t	300
Surface forestière en 1960	$F_0$	ha	110000

TAB. 6.1 – Valeurs des paramètres pour le modèle 6.1

Définition	Notation	Unité	Valeur
Variation minimale du taux de natalité correctif	$u_{min}$	sans unité	-0.1
Variation maximale du taux de natalité correctif	$u_{max}$	sans unité	0.1
Effort d'aménagement minimal	$\delta_{min}$	ha/capita/an	0
Effort d'aménagement maximal	$\delta_{max}$	ha/capita/an	0.008
Proportion minimale de travailleurs de l'extérieur	$W_{0,min}$	sans unité	0
Proportion maximale de travailleurs de l'extérieur	$W_{0,max}$	sans unité	0.05
Variation minimale de la proportion de travailleurs extérieurs	$w_{min}$	sans unité	-0.001
Variation maximale de la proportion de travailleurs extérieurs	$w_{max}$	sans unité	0.01
Transferts monétaires minimaux	$\tau_{min}$	US\$	0
Transferts monétaires maximaux	$\tau_{max}$	US\$	1000000

TAB. 6.2 – Valeurs des bornes des contrôles pour le modèle 6.1

Définition	Notation	Unité	Valeur
Proportion minimale de travailleurs extérieurs	$\rho_{2,min}$	sans unité	0
Proportion maximale de travailleurs extérieurs	$\rho_{2,max}$	sans unité	0.5
Population minimale	$P_{min}$	capita	$0.5 * 10^6$
Population maximale	$P_{max}$	capita	$2 * 10^6$
Taux minimal correctif de natalité	$\tilde{\alpha}_{min}$	sans unité	-3.2%
Taux maximal correctif de natalité	$\tilde{\alpha}_{max}$	sans unité	0.2%
Surface forestière minimale	$F_{min}$	ha	$6.5 * 10^4$
Surface forestière maximale	$F_{max}$	ha	$9 * 10^4$
Capital minimal	$K_{min}$	US\$/an	$6 * 10^8$

TAB. 6.3 – Valeurs des bornes des contraintes pour le modèle 6.1

## 6.2 Travail préparatoire à l'utilisation de l'algorithme de viabilité

### 6.2.1 Le modèle discret

Une première étape pour pouvoir utiliser le modèle 6.1 dans l'algorithme de viabilité est de passer à une version discrète.

Ainsi les dynamiques de la surface forestière, la population, le taux de natalité correctif, le capital et la proportion de travailleurs salariés sont discrétisées, pour un pas de temps  $dt$  :

$$F(t + dt) = F(t) + dt * ((\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0}))F(t) - \delta(t)L(t)); \quad (6.21)$$

$$P(t + dt) = P(t) + dt * (\bar{\alpha} + \tilde{\alpha}(t) - \beta)P(t); \quad (6.22)$$

$$\tilde{\alpha}(t + dt) = \tilde{\alpha}(t) + dt * u(t). \quad (6.23)$$

On pose  $T = kdt$  avec  $k \in \mathbb{N}$ , où  $T$  est la période de productivité  $e_1$ .

$$\begin{aligned} K(t + dt) = & K(t) + dt * (s * e_1 L(t)^\gamma (F(t - kdt) - F(t))^\theta \\ & + s * e_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t - kdt))^\theta \\ & + \omega \rho_1 P(t) (\rho_2 - W_0) - \underline{c}P(t) - \mu \delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t)) \end{aligned} \quad (6.24)$$

Pour simplifier, on choisit d'approcher  $F(t - kdt) - F(t)$  par  $-kdtF'(t) = -kdt \left( \left( \eta \left( 1 - \frac{F(t)}{F_0} \right) \right) F(t) - \delta(t)L(t) \right)$  et  $F(t - kdt)$  par  $F(t)$ .

Si on choisit  $dt = T$ ,  $k = 1$  et on a alors :

$$\begin{aligned} K(t + dt) = & K(t) + dt * (s * e_1 L(t)^\gamma (-dt(\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0}))F(t) - \delta(t)L(t))^\theta \\ & + s * e_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t))^\theta \\ & + \omega \rho_1 P(t) (\rho_2 - W_0) - \underline{c}P(t) - \mu \delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t)). \end{aligned} \quad (6.25)$$

En ce qui concerne l'équation de la dynamique du travail salarié :

$$\rho_2(t + dt) = \rho_2(t) + dt * w(t). \quad (6.26)$$

On conserve les bornes suivantes pour les contrôles :

$$\begin{aligned} u_{min} & \leq u \leq u_{max} \\ \delta_{min} & \leq \delta \leq \delta_{max} \\ w_{min} & \leq w \leq w_{max} \\ W_{0,min} & \leq W_0 \leq W_{0,max} \\ \tau_{min} & \leq \tau \leq \tau_{max}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

On conserve les bornes suivantes pour les contraintes :

$$\begin{aligned}
 P_{min} &\leq P(t) \leq P_{max} \\
 \tilde{\alpha}_{min} &\leq \tilde{\alpha}(t) \leq \tilde{\alpha}_{max} \\
 F_{min} &\leq F(t) \\
 K_{min} &\leq K(t) \\
 0 &\leq \rho_2(t) \leq 0.5.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

## 6.2.2 La résolution avec l'algorithme cinq dimensions

Depuis mars 2011, nous disposons d'un algorithme réalisé par Anya Désilles permettant de calculer des noyaux de viabilité en dimension cinq.

Nous étudions un modèle en dimension cinq. Chaque dimension va être représentée par une grille de 100 points, ainsi le nombre de points traités par l'algorithme sera  $100^5 = 10^{10}$ . Pour chaque variable d'état  $x$ , il est nécessaire de vérifier que les variations de  $x$  à chaque pas de temps ne vont pas être systématiquement trop petites et donc invisibles sur la grille mais suffisamment petites pour ne pas sortir artificiellement de la grille. Nous allons pour chacune des variables, comparer les variations à chaque pas de temps, c'est-à-dire  $x(t + dt) - x(t)$  avec la distance entre deux points de la grille  $(x_{max} - x_{min})/100$ .

### 6.2.2.1 Population

**Distance entre deux points de la grille** On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 P_{current} &= 10^6 \\
 P_{min} &= 0.5 * 10^6 \\
 P_{max} &= 2 * 10^6
 \end{aligned}$$

$P_{current}$  représente une valeur estimée de la population actuelle que nous utilisons pour cette étude. On a donc  $P_{max} - P_{min} = 1.5 * 10^6$ , et donc la distance entre deux points de la grille est  $(P_{max} - P_{min})/100 = 1.5 * 10^4$ .

**Variation à chaque pas de temps** A chaque pas, la variation de la population est :

$$P(t + dt) - P(t) = (\bar{\alpha} + \tilde{\alpha}(t) - \beta)P(t)dt. \tag{6.29}$$

On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 \bar{\alpha} &= 4.4\% \\
 \beta &= 1.4\% \\
 \tilde{\alpha}_{min} &= -3.2\% \\
 \tilde{\alpha}_{max} &= 0.2\% \\
 P_{current} &= 10^6.
 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant  $\tilde{\alpha}(t) = -3.2\%(\tilde{\alpha}_{min})$ , on obtient  $P(t + dt) - P(t) = -0.2 * 10^4 dt$ . Et en prenant  $\tilde{\alpha}(t) = 0.2\%(\tilde{\alpha}_{max})$ , on obtient  $P(t + dt) - P(t) = 3.2 * 10^4 dt$

**Choix du  $dt$**  On a  $(P_{max} - P_{min})/100 = 1.5 * 10^4$  et  $P(t + dt) - P(t) = -0.2 * 10^4 dt$ , donc, en prenant  $dt \geq 5$ , la variation de la population à chaque pas de temps est visible. Cela reste vrai avec le cas  $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}_{max}$ .

**6.2.2.2 Évolution du taux de natalité correctif**

**Distance entre deux points de la grille** On a les valeurs suivantes :

$$\tilde{\alpha}_{min} = -3.2\%$$

$$\tilde{\alpha}_{max} = 0.2\%$$

On a donc  $\tilde{\alpha}_{max} - \tilde{\alpha}_{min} = 3.4 * 10^{-2}$ , et donc la distance entre deux points de la grille est  $(\tilde{\alpha}_{max} - \tilde{\alpha}_{min})/100 = 3.4 * 10^{-4}$ .

**Variation à chaque pas de temps** A chaque pas, la variation du taux de natalité est :

$$\tilde{\alpha}(t + dt) - \tilde{\alpha}(t) = dt * u(t). \tag{6.30}$$

Rappelons que l'on a les valeurs suivantes :

$$u_{min} = -0.1\%$$

$$u_{max} = 0.1\%.$$

Ainsi la variation  $dt * u(t)$  est visible sur la grille même si  $dt = 1$ .

**Choix du  $dt$**  La variation du taux de natalité correctif à chaque pas de temps est d'autant plus visible que  $dt$  est grand. On peut donc choisir par exemple  $dt = 5$ .

**6.2.2.3 Surface forestière**

**Distance entre deux points de la grille** On a les valeurs suivantes :

$$F_{current} = 8 * 10^4$$

$$F_{min} = 6.5 * 10^4$$

$$F_{max} = 9 * 10^4.$$

De même que pour  $P_{current}$ ,  $F_{current}$  est une valeur qui estime la surface forestière actuelle, valeur utilisée dans cette étude. On a donc  $F_{max} - F_{min} = 2.5 * 10^4$ , et donc la distance entre deux points de la grille est  $(F_{max} - F_{min})/100 = 2.5 * 10^2$ .

**Variation à chaque pas de temps** A chaque pas, la variation de la surface forestière est :

$$F(t + dt) - F(t) = dt * \left( \eta \left( 1 - \frac{F(t)}{F_0} \right) F(t) - \delta(t)L(t) \right). \tag{6.31}$$

avec :

$$L(t) = ((1 - \rho_2) + W_0)\rho_1 P(t) \tag{6.32}$$

Rappelons les valeurs suivantes :

$$\eta = 2.58 * 10^{-3}$$

$$F_0 = 11 * 10^4$$

$$F_{current} = 8 * 10^4.$$

Le terme correspondant à la régénération de la forêt  $\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0})F(t)$  a une valeur d'environ  $56.29 * dt$  lorsque  $F$  est de l'ordre de  $F_{current}$ .

De plus, on a :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.6 \\ \rho_{2,min} &= 0 \\ \rho_{2,max} &= 0.5 \\ W_{0,min} &= 0 \\ W_{0,max} &= 0.05 \\ \delta_{min} &= 0 \\ \delta_{max} &= 8 * 10^{-3}.\end{aligned}$$

La variation de la surface forestière due à la déforestation peut valoir :  $\delta(t) * 0.6 * 0.5 * P(t) \approx 8 * 10^{-3} * 0.6 * 0.5 * 10^6 \approx 2 * 10^2$

**Choix du  $dt$**  Comme la distance entre deux points de la grille est  $(F_{max} - F_{min})/100 = 2.5 * 10^2$ , la variation de la surface forestière à chaque pas de temps sera visible avec  $dt = 1$ .

#### 6.2.2.4 Capital

**Distance entre deux points de la grille** On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}K_{min} &= 2 * 10^8 \\ K_{max} &= 8 * 10^8.\end{aligned}$$

Nous avons considéré précédemment que le capital n'était pas borné supérieurement. Afin d'estimer la distance entre deux points de la grille, on choisit dans cette étude une valeur du capital suffisamment grande pour qu'il soit possible de considérer qu'à partir de cette valeur de  $K_{max}$ , la population a les moyens de gérer elle-même son patrimoine forestier, hypothèse que nous avons également faite dans le modèle du chapitre 5. On considère une grille commençant en  $K_{min}$  et finissant en  $K_{max}$ . On a donc  $K_{max} - K_{min} = 6 * 10^8$ , et donc la distance entre deux points de la grille est  $(K_{max} - K_{min})/100 = 6 * 10^6$ .

**Variation à chaque pas de temps** A chaque pas, la variation du capital est :

$$\begin{aligned}K(t) + dt * (s * e_1 L(t)^\gamma (-dt(\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0}))F(t) - \delta(t)L(t))^\theta \\ + s * e_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t))^\theta \\ + \omega \rho_1 P(t)(\rho_2 - W_0) - \underline{c}P(t) - \mu \delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t)\end{aligned} \quad (6.33)$$

avec

$$L(t) = (1 - \rho_2(t))\rho_1 P(t) + W_0(t)\rho_1 P(t). \quad (6.34)$$

**Main d'œuvre disponible** On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_1 &= 0.6 \\ \rho_{2,min} &= 0 \\ \rho_{2,max} &= 0.5\end{aligned}$$

Revenu rizicole	$s * e_1 L(t)^\gamma (-dt(\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0}))F(t) - \delta(t)L(t))^\theta$	$+6.8 * 10^6$
Revenu rizicole	$s * e_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t))^\theta$	$+6.9 * 10^6$
Salaires	$\omega(\rho_2(t)\rho_1 P(t) - W_0(t)\rho_1 P(t))$	$+0.2 * 10^6$
Consommation et déforestation	$\underline{c}P(t) + \mu\delta L(t)$	$-9 * 10^6$
Dépréciation du capital	$-\lambda K(t)$	$-2 * 10^6$
Transferts monétaires	$\tau(t)$	$+10^6$

$$W_{0,min} = 0$$

$$W_{0,max} = 0.05.$$

On peut donc avoir des valeurs de  $L(t)$  de l'ordre de :  $L(t) = 0.6 * 0.5 * P(t) + 0.05 * 0.6 * P(t) \approx 3 * 10^5$ .

**Revenus de la riziculture** Par ailleurs, on a :

$$s * e_1 = 2.5 * 300 = 750$$

$$s * e_2 = 1.0 * 300 = 300$$

$$\theta = 0.36$$

$$\gamma = 0.39$$

$$L(t) \approx 3 * 10^5$$

$$F_0 - F_{current} = 3 * 10^4$$

$$\delta_{min} = 0$$

$$\delta_{max} = 8 * 10^{-3}.$$

On peut approcher le terme  $s * e_1 L(t)^\gamma (-dt(\eta(1 - \frac{F(t)}{F_0}))F(t) - \delta(t)L(t))^\theta$  par  $6.8 * 10^6$ .

On peut approcher le terme  $s * e_2 L(t)^\gamma (F_0 - F(t))^\theta$  par  $6.9 * 10^6$ .

Le terme dû aux revenus de la riziculture peut ainsi être de l'ordre de :  $13.7 * 10^6$ .

**Les revenus du travail à l'extérieur et les salaires versés aux travailleurs extérieurs** Le terme  $\omega(\rho_2(t)\rho_1 P(t) - W_0(t)\rho_1 P(t))$  peut valoir  $0.69(0.5 * 0.6 * 10^6 - 0.05 * 0.6 * 10^6) \approx 2 * 10^5$ .

Les gains totaux peuvent être de l'ordre de  $13.9 * 10^6$ .

**Consommation et coût de la déforestation**  $\underline{c}P(t) + \mu\delta L(t)$  peut prendre des valeurs de l'ordre de  $3.3 * 10^6 + 4224 * 0.008 * 2 * 10^5 = 9 * 10^6$

**Dépréciation du capital** Le terme  $\lambda K(t)$  peut prendre des valeurs de l'ordre de  $0.005 * 4 * 10^8 = 2 * 10^6$ .

**Les transferts monétaires**  $\tau_{max}$  est choisi égal à  $10^6$ .

**Récapitulatif** On a donc  $K(t + dt) - K(t) = dt * (13.9 * 10^6 - 9 * 10^6 + 10^6) - 2 * 10^6 * dt = 3.9 * 10^6$ .

**Choix du  $dt$**  Comme la distance entre deux points de la grille est  $(K_{max} - K_{min})/100 = 6 * 10^6$ , et que la variation du capital peut être approchée à chaque pas de temps par  $3.9 * 10^6$ , on peut prendre  $dt = 1$ .

### 6.2.2.5 Évolution de la proportion de travailleurs extérieurs

**Distance entre deux points de la grille** On a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}\rho_{2min} &= 0 \\ \rho_{2max} &= 0.5.\end{aligned}$$

On a donc  $\rho_{2max} - \rho_{2min} = 0.5$ , et donc la distance entre deux points de la grille est  $(\rho_{2max} - \rho_{2min})/100 = 5 * 10^{-3}$ .

**Variation à chaque pas de temps** A chaque pas, la variation de la proportion de travailleurs extérieurs est :

$$\rho_2(t + dt) - \rho_2(t) = dt * w(t). \quad (6.35)$$

Rappelons que l'on a les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}w_{min} &= -0.01 \\ w_{max} &= 0.01.\end{aligned}$$

Ainsi la variation  $dt * w(t)$  est visible sur la grille même si  $dt = 1$ .

**Choix du  $dt$**  La variation de la proportion de travailleurs extérieurs à chaque pas de temps est d'autant plus visible que  $dt$  est grand. On peut donc choisir par exemple  $dt = 5$ .

Ainsi, pour que les variations de toutes les variables soient suffisamment grandes pour être visibles mais pas trop pour ne pas sortir artificiellement de la grille, le choix de  $dt = 5$  convient.

## 6.3 Résultats

Étudier un modèle en cinq dimensions n'est pas aisé. Dans un premier temps, nous avons fixé deux des cinq variables d'état puis calculé un noyau de viabilité en trois dimensions. Selon le choix des valeurs pour les variables fixées, nous avons obtenu différents résultats exposés ci-après (paragraphe 6.3.1). Dans un second temps, nous avons directement calculé un noyau de viabilité en cinq dimensions, ce qui a mis en évidence un certain nombre de difficultés détaillées dans le paragraphe 6.3.2.

### 6.3.1 Noyaux de viabilité en trois dimensions

Nous avons réalisé une première étude à partir du modèle en cinq dimensions décrit dans ce chapitre. Deux variables ont été fixées : le taux de natalité correctif

$\tilde{\alpha}$  ainsi que la proportion de travailleurs salariés  $\rho_2$ . Les variables considérées sont donc la forêt  $F$ , la population  $P$  et le capital  $K$ .

Des simplifications ont également été faites sur l'évolution du capital. Les revenus provenant de l'agriculture ne sont plus partagés entre les nouvelles surfaces agricoles et celles plus anciennes. Cela revient dans l'équation sur la dynamique du capital à considérer pour les revenus provenant de l'agriculture la formule (6.7) à la place de la formule (6.8). On a donc l'équation suivante :

$$K'(t) = seL(t)^\gamma(F_0 - F(t))^\theta + \omega\rho_1P(t)(\rho_2 - W_0) - \underline{c}P(t) - \mu\delta(t)L(t) - \lambda K(t) + \tau(t) \quad (6.36)$$

Les résultats exposés ici ont été réalisés à partir d'un taux de natalité correctif  $\tilde{\alpha} = -3.2$ . Différentes valeurs ont été choisies pour la proportion de travailleurs salariés  $\rho_2$ .

### 6.3.1.1 Simulations avec les paramètres initiaux

Nous avons calculé des noyaux de viabilité pour les valeurs de la proportion de travailleurs salariées suivantes :  $\rho_2 = 0$ ,  $\rho_2 = 0.1$ ,  $\rho_2 = 0.2$ ,  $\rho_2 = 0.3$ ,  $\rho_2 = 0.4$ . Pour chacune de ces valeurs, nous avons obtenu un noyau de viabilité vide. Ces résultats paraissent surprenant au regard des résultats obtenus dans le chapitre 5. En raison de la difficulté à évaluer au plus juste les valeurs des paramètres, il semble intéressant de réaliser de nouvelles simulations avec des paramètres différents. Le paragraphe suivant présente ces nouveaux résultats.

### 6.3.1.2 Simulations avec de nouveaux paramètres

Pour l'étude qui suit, nous avons choisi les valeurs de paramètres décrites dans le tableau 6.4.

**Cas ( $\rho_2 = 0.5$ )** Avec une proportion de travailleurs salariés  $\rho_2 = 0.5$ , c'est-à-dire avec la moitié des travailleurs étant salariée à l'extérieur, on obtient le noyau de viabilité représenté sur la figure 6.1. On constate que seules les situations pour lesquelles le capital et la surface de forêt sont élevés ne sont pas viables. Lorsque la surface forestière augmente, la surface agricole diminue. Une zone forestière trop grande peut donc nuire à la population en l'empêchant de subvenir à ses besoins.

D'autres études sont nécessaires afin de préciser le rôle des transferts monétaires ainsi que celui des autres variables de contrôles.

**Cas ( $\rho_2 = 0.1$ ) et ( $\rho_2 = 0.3$ )** Les résultats obtenus pour ces deux valeurs de la proportion de travailleurs salariés ne sont pas satisfaisant. En effet, la visualisation des résultats laisse apparaître des zones qui devraient être à l'intérieur du noyau et où pourtant aucun point n'est représenté. Cependant, ces résultats tendent à montrer l'existence d'un noyau de viabilité de volume supérieur au cas  $\rho_2 = 0.5$ . Une proportion de travailleurs salariés peu élevée (entre 10 et 30%) serait donc

Définition	Notation	Unité	Valeur
Taux de décès	$\beta$	sans unité	1.4%
Taux de natalité actuel	$\bar{\alpha}$	sans unité	4.4%
Taux de croissance de la forêt	$\eta$	sans unité	$2.58 \cdot 10^{-3}$
Coefficient d'élasticité	$\gamma$	sans unité	0.39
Coefficient d'élasticité	$\theta$	sans unité	0.36
Salaire agricole	$\omega$	US\$/capita	200
Coefficient de dépréciation du capital	$\lambda$	sans unité	0.005
Coût de défriche d'1 ha	$\mu$	US\$/an/ha	25
Besoins physiologiques de la population	$\underline{c}$	USD/capita/an	12.5
Proportion de travailleurs effectifs	$\rho_1$	sans unité	0.6
Productivité des nouvelles surfaces	$e_1(K)$	t/ha	1.5
Productivité des anciennes surfaces	$e_2(K)$	t/ha	0
Prix du riz	$s$	US\$/t	300
Surface forestière en 1960	$F_0$	ha	110000

TAB. 6.4 – Nouvelles valeurs des paramètres pour le modèle 6.1

un atout pour atteindre le double-objectif de conservation de la population et de satisfaction des besoins de la population. Ce résultat est surprenant et mérite donc d'être confirmé par de nouvelles simulations.

Nous avons également réalisé des simulations pour des valeurs du taux de natalité correctif  $\alpha$  différentes. Pour  $\alpha = 0$ , aucune situation n'est viable : le noyau de viabilité obtenu est vide. Le taux de natalité doit être suffisamment faible pour que les contraintes soient satisfaites. Cela confirme les résultats obtenus avec le modèle en dimension trois.

Ces calculs de noyaux de viabilité en dimension trois pour le modèle en cinq dimensions impliquent de fixer des valeurs dans deux dimensions. Les résultats précédents constituent uniquement un point de départ à l'étude de ce modèle. La partie suivante aborde l'étude du modèle en cinq dimensions dans son ensemble.

### 6.3.2 Noyau de viabilité en cinq dimensions

**Temps de calcul** Calculer un noyau de viabilité pour un modèle en trois dimensions nécessite un temps de calcul non négligeable. Le temps de calcul pour un modèle en cinq dimensions est plus élevé. Plus le nombre de points par dimension augmente, plus ce temps de calcul est long : il faut compter deux à cinq heures pour un calcul avec moins de 200 points par dimension et plus de douze heures pour des simulations avec 500 points par dimension.

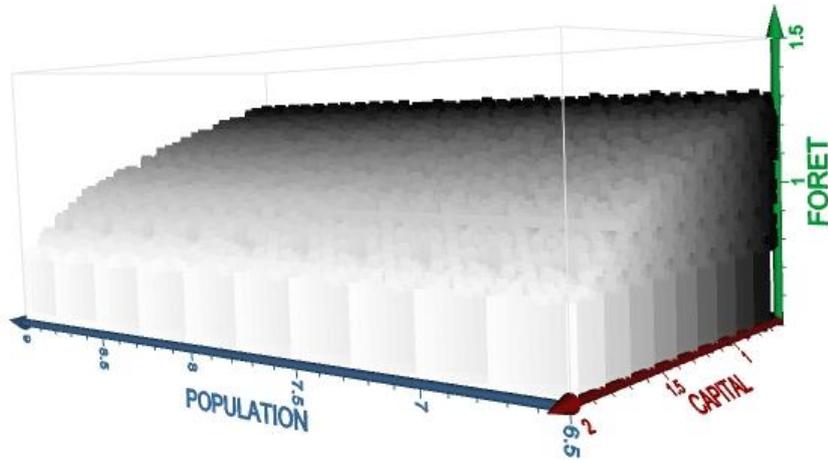


FIG. 6.1 – Noyau de viabilité pour le système 6.1.4 soumis à l'ensemble  $\mathcal{K}$  avec  $\tilde{\alpha} = -3.2$  et  $\rho_2 = 0.5$

**Taille des fichiers de retour** L'algorithme de viabilité pour un modèle en cinq dimensions renvoie un fichier de points. Une difficulté majeure concerne la taille de ce fichier retour. En effet, plus la grille de calcul est fine, plus les fichiers retours sont gros, et plus il est difficile de les traiter. Chaque étude du modèle en cinq dimensions devant être la plus précise possible, les fichiers obtenus sont de très grande taille (9 Gigaoctets pour 51 points par dimension) et la plupart des logiciels courants ne permettent pas de les traiter. Nous avons donc divisé ces fichiers en plusieurs fichiers en effectuant des coupes selon les différentes valeurs prises par les variables d'état. L'intérêt de cette division est l'obtention de fichiers de taille moindre permettant l'utilisation d'un logiciel de visualisation.

**Visualisation** Le dernier obstacle rencontré concerne la visualisation. Comment exposer des résultats quand il s'agit d'un ensemble en cinq dimensions? Nous avons choisi de faire des coupes selon les valeurs des variables d'état. Afin d'y parvenir, un programme<sup>5</sup> est actuellement en cours de réalisation, il permettra de traiter de très gros fichiers et de faire des coupes pour chaque variable d'état aux valeurs souhaitées.

<sup>5</sup>Ce programme est réalisé par Anya Désilles.

De part la jeunesse de l'algorithme de viabilité pour la dimension cinq, et en raison des obstacles évoqués précédemment, nous ne sommes pas encore capables d'exhiber un noyau de viabilité. En effet, les résultats obtenus pour le modèle en cinq dimensions sont encore en cours de traitement.





# Conclusion

---

## Apport de la théorie de la viabilité dans la modélisation du développement durable

Le développement durable est un développement qui répond aux besoins des générations du présent sans compromettre la capacité des générations futures à répondre aux leurs. A partir de cette définition, il existe de nombreux outils mathématiques permettant de rendre opérationnelle cette définition théorique. Les études sur la modélisation du développement durable font généralement appel à l'analyse multicritères, le principe étant de définir des critères correspondant aux différents aspects d'un problème, puis de les agréger en leur affectant un poids afin d'obtenir un seul critère. Or, nous avons vu qu'il existait des inconvénients à cette méthode, le principal étant que le résultat obtenu dépend des différents poids affectés à chacun des aspects et du critère finalement défini. Citons également l'absence d'équité intergénérationnelle, à l'exception près du critère de Chichilniski. Une autre difficulté apparaît dans le traitement du futur. Un certain nombre d'hypothèses sont faites a priori.

Nous avons, au cours de cette thèse, mis en valeur l'intérêt de la théorie de la viabilité pour la modélisation du développement durable. Celle-ci consiste à étudier un système dynamique contrôlé soumis à un certain nombre de contraintes. La définition d'un ensemble de contraintes permet d'éviter le choix d'un critère. Le noyau de viabilité nous donne des situations pour lesquelles il existe des solutions qui satisfont tous les critères réunis pour un temps infini. Le résultat obtenu est donc un ensemble de solutions qui ne dépend pas d'un critère défini. L'équité intergénérationnelle est satisfaite par l'ajout d'une contrainte. Les hypothèses concernant le futur sont moins fortes par l'ajout d'une variable appelée régulon évoluant entre deux bornes. Seules sont faites des hypothèses sur les bornes entre lesquelles varie le régulon. D'autre part, grâce à des variables de contrôles, il est possible de prendre en compte les actions possibles pour un gestionnaire, de tester différents scénarios et de sélectionner les actions ou mesures politiques conduisant à un développement durable. Le noyau de viabilité constitue l'outil principal de la théorie de la viabilité. Il permet de distinguer une situation viable d'une situation non-viable. Ainsi, il nous fournit un outil efficace pour distinguer une gestion durable d'une gestion non-durable. D'autres outils, tels que le temps de sortie qui mesure le temps durant lequel les contraintes sont satisfaites et le temps de crise

qui évalue le temps durant lequel les contraintes sont violées, existent et apportent des informations complémentaires pour l'étude d'un problème de gestion durable.

Le calcul du noyau de viabilité n'est pas aisé. Nous avons montré qu'il est possible, dans certains cas, de calculer un noyau de viabilité théorique. Les cas en deux dimensions et en trois dimensions présentés dans cette thèse révèlent cependant la complexité des démonstrations. C'est pourquoi il est bien souvent nécessaire de faire appel aux algorithmes de viabilité à notre disposition.

## Modélisation en dimension supérieure à trois et viabilité

Afin d'illustrer à quel point la viabilité constitue un outil pertinent pour la modélisation du développement durable, nous avons étudié le cas de la déforestation à Madagascar. Il s'agit d'élaborer un modèle mathématique prenant en compte les objectifs environnementaux et économiques de la région de Fianarantsoa, et de l'étudier ensuite dans le formalisme de la théorie de la viabilité.

Le premier modèle élaboré est un modèle en trois dimensions décrivant l'évolution des surfaces aménagées, de la population et du capital. Les contraintes à satisfaire consistaient à conserver une surface minimale de forêt, ainsi qu'un capital au delà d'un seuil acceptable. Nous disposons de contrôles tels que le travail salarié dans une autre zone, l'effort d'aménagement de nouvelles surfaces et les transferts monétaires. L'étude de ce modèle et l'obtention d'un noyau de viabilité montre que seules les situations avec un fort capital initial sont viables. Dès lors, l'intégration de transferts monétaires dans le modèle s'est avérée pertinente. Les études suivantes ont permis de quantifier les transferts monétaires minimaux à apporter pour rendre viable la situation actuelle ainsi que les transferts monétaires minimaux à apporter au cours du temps.

Le second modèle élaboré s'intéresse, en plus des variables précédentes, au taux de natalité correctif qui permet d'ajuster le taux d'accroissement de la population ainsi qu'à la proportion de travailleurs salariés qui est caractérisé par le nombre de personnes partant travailler à l'extérieur du village, il s'agit donc d'un modèle en cinq dimensions. L'étude d'un modèle de ce type avec les outils de la viabilité est semée d'obstacles. L'algorithme permettant le calcul d'un noyau de viabilité pour un modèle de cette dimension est récent. Le temps de calcul ou encore la taille des fichiers obtenus sont autant de difficultés à surmonter. La visualisation des ensembles de points obtenus est délicate, il est difficile alors de rendre compte d'une vision complète du noyau de viabilité. Nous avons cependant obtenu des résultats intéressants. Nous avons commencé par le calcul d'un noyau en trois dimensions, en fixant deux des variables d'états à des valeurs différentes. Nous avons ensuite calculé un noyau de viabilité en dimension cinq dont l'étude est actuellement en cours.

---

Alors qu'un modèle en trois dimensions faisant des hypothèses fortes sur le contexte malgache nous a permis d'obtenir des résultats intéressants et significatifs, nous n'avons pas réussi à aller aussi loin dans l'exploitation du modèle en cinq dimensions, plus précis sur les dynamiques de variables représentées et faisant des hypothèses plus faibles. Ceci pour deux types de raisons : tout d'abord l'algorithme cinq dimensions est récent, disponible uniquement depuis mars 2011, et bien qu'intégrant plusieurs prouesses informatiques, les temps de calcul de l'ordre de 5 à 12 heures pour le calcul d'un noyau en cinq dimensions est encore long ; le second type de raisons concerne l'absence d'outils de présentation des noyaux de viabilité lorsque la dimension est strictement supérieure à trois et que les graphes classiques ne suffisent plus. Or de tels outils semblent désormais indispensables pour tester les résultats de l'algorithme de viabilité en dimension supérieure à 3, puis pour les exposer.

## Perspectives

### Amélioration des modèles malgaches

L'étude du modèle malgache en dimension trois a montré la nécessité de transferts monétaires versés à différents moments au cours du temps pour assurer la viabilité. Cependant, cette solution implique une intervention financière extérieure au corridor malgache quasi-permanente. Or, il est important de déterminer s'il existe des solutions viables sans cette intervention ou avec des interventions moins fréquentes ou moins coûteuses. C'est pourquoi il serait intéressant d'approfondir cette étude en étudiant l'efficacité de transferts monétaires non plus injectés directement dans le capital de la population, mais répartis différemment. Par exemple, ces transferts pourraient favoriser une meilleure productivité des terres ou encore encourager le travail salarié par la création de structures créant des emplois (parcs naturels et centres de recherche sur la biodiversité existent déjà sur le corridor forestier). Le contrôle "transfert monétaire" pourrait être séparé en plusieurs contrôles agissant sur la productivité ou la proportion de travailleurs salariés, et les noyaux de viabilité obtenus en choisissant d'activer certains de ces contrôles pourraient être comparés afin de sélectionner la politique la plus efficace, en terme de répartition des transferts monétaires.

### Approfondir l'étude d'un modèle en dimension cinq

Les résultats obtenus pour le modèle malgache en cinq dimensions constituent une première étape. Cependant, ce modèle ne donne encore que très peu de conclusions opérationnelles. Rappelons que le calcul d'un noyau de viabilité pour un modèle en cinq dimensions est effectué pour la première fois avec l'algorithme dédié aux dimensions supérieures à trois réalisé dans le cadre du projet "Dédution", c'est pourquoi cette étude nécessite d'être approfondie. Une analyse de sensibilité aux différents paramètres devra être effectuée. Il faudra également déterminer quelles

sont les valeurs des coupes des variables d'état les plus pertinentes. La visualisation des résultats sera également un point vers lequel la réflexion devra être poussée. Le calcul des noyaux en cinq dimensions en est encore à ses débuts, et ce travail de thèse ne constitue qu'un point de départ.

L'étude du modèle malgache en dimension cinq a d'ores et déjà donné des résultats intéressants. Cependant, il est difficile d'avoir une compréhension globale des résultats en cinq dimensions, faute d'outils qui sont encore à imaginer.

Une autre piste pour approfondir l'analyse de la modélisation du problème de gestion durable malgache est d'utiliser d'autres outils de la viabilité tels que les fonctions temps de sortie et temps de crise. L'étude de la fonction temps de crise pour un modèle en trois dimensions revient à ajouter une quatrième dimension correspondant au temps et de calculer un noyau de viabilité avec cible, celle-ci étant le noyau de viabilité du modèle initial. L'algorithme de viabilité permettant des calculs en dimension cinq sera alors performant pour calculer cette fonction.

### **Application à d'autres enjeux de l'environnement**

Nous avons mis en évidence l'intérêt de la théorie de la viabilité dans la modélisation de la déforestation et plus généralement du développement durable. D'autres enjeux scientifiques existent dans le domaine de l'environnement. Citons par exemple le cas du principe de précaution. Ce principe, défini en 1992 au cours du Sommet de Rio, peut être formulé de la manière suivante : "en cas de risque de dommages graves ou irréversibles, l'absence de certitude scientifique absolue ne doit pas servir de prétexte pour remettre à plus tard l'adoption de mesures effectives visant à prévenir la dégradation de l'environnement". Comme dans le cas du développement durable, cette définition souffre d'une absence de formalisme mathématique et d'une définition opérationnelle. La théorie de la viabilité pourrait être une piste intéressante pour proposer un outil mathématique modélisant ce principe. Les variables de contrôles modélisant les actions à entreprendre, on peut imaginer que lorsqu'une évolution approche de la frontière du noyau de viabilité à une certaine distance, il est alors nécessaire de changer les contrôles afin de respecter le principe de précaution. Approfondir cette idée est une suite envisageable à ce travail de thèse.

Troisième partie

Annexe



ANNEXE A

**Calcul des frontières exactes  
d'un noyau de viabilité en  
dimension trois**

---

# Building strategies to ensure language coexistence in presence of bilingualism

C. Bernard, S. Martin\*

*Cemagref - Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Complexes - 24 av. des Landais BP  
50085 - 63172 Aubière Cedex - France*

---

## Abstract

For twenty years many authors have attempted to model language competition. Some models involve two different languages, others include also a bilingual population. The issues are to understand one language extinction or to determine in which parameter range coexistence is possible. A key parameter is the prestige of one language compare to the other. If this parameter remains constant, coexistence is not sustainable. However, prestige may vary with time. In this article, thanks to the viability theory concepts and tools, we study a set of prestige variations which would allow language coexistence in presence of a bilingual population. Among this set, we emphasise slow viable evolutions with the lowest prestige variations that guarantee coexistence.

*Keywords:* viability domain, slow viable strategies, language coexistence, bilingualism

---

## 1. Introduction

Many languages might become extinct [1]. It is, therefore, an important challenge to understand language dynamics, and to recognise whether there are measures that can help us preserve some of them. The situation has attracted the interest of many researchers who have analysed language

---

\*Corresponding author

*Email addresses:* [claire.bernard@cemagref.fr](mailto:claire.bernard@cemagref.fr) (C. Bernard),  
[sophie.martin@cemagref.fr](mailto:sophie.martin@cemagref.fr) (S. Martin)

dynamics and developed models of the evolution of the number of their speakers. Among them, Abrams and Strogatz [2] have proposed a mathematical model for studying language competition. The model obtains a good fit to a number of empirical data sets : it satisfactorily fits historical data on the decline of Welsh, Scottish Gaelic, Quechua and other endangered languages, predicts that one of the competing languages will inevitably die out. Actually, the model predicts that whenever two languages compete for speakers, one language will eventually become extinct, the language that dies depending on the initial proportions of speakers of each language and their relative prestige.

Bilingual societies do in fact exist.

In the case of two mutual unintelligible languages, when one language becomes dominant due to political, economical or social advantages, bilingualism may be a transitional stage toward the extinction of the subordinate language [3]. Baggs and Freedman [4] have developed a model for the dynamics of interactions between a bilingual component and a monolingual component of a population. Conditions under which both components of the population will approach a unique and stable steady state were investigated. This two-dimensional model is based on Lotka-Volterra and Holling predator-prey paradigms. Wyburn and Hayward [5] identified four possible scenarios in the long-term future of the bilingual population depending on the model parameter values. El-Owaidy and Ismail [6] have extended the model to describe the dynamics of the interactions of a population with three monolingual components and a component which is trilingual in these three languages and derived criteria for persistence or extinction of these groups. Bilingual societies are thought by Abrams and Strogatz [2] to be, in most cases at least, unstable situations resulting from the recent merging of formerly separate communities with different languages. However, Mira and Paredes [7] have extended the Abrams and Strogatz's work to model bilingualism explicitly, accounting for the fact that some individuals may speak both of the competing languages. They propose a three-dimensional model which variables are the expected aggregate behaviour of the whole population split into three groups : monolingual speakers of the first language, monolingual speakers of the second language and bilingual speakers. They suggest that stable bilingualism may be possible, and that whether it occurs or not may depend on the degree of similarity between the two competing languages. Castello et al. [8] also propose a generalisation of the microscopic version of the Abrams and Strogatz's model for two socially equivalent lan-

guages, to include the effects of bilingualism. A global consensus state is reached with probability one. Within the assumptions and limitations of their model, their results imply that bilingualism is not an efficient mechanism to stabilise language diversity.

Minett and Wang [9] propose a slightly different model with the same three state variables as Mira and Paredes' one. Guided by Crystal's work [1] on the main mechanisms of intervention by which language coexistence may be attempted, they consider the possibility of an evolution of the two languages relative prestige (the prestige was considered as a constant parameter in the previously cited references). They define several prestige evolution functions and they study their influence on the language coexistence.

The prestige measures the status associated to a language due to individual and social advantages related to the use of that language, being higher according to its presence in education, religion, administration and the media. Modifying the prestige of one language is one of the six main mechanisms of intervention identified by [1]. As Chapel et al. [10] in the absence of bilingualism, we assume that public action can modify the prestige of a language, but that its variation at each time step is bounded. In the context of the explicit modelling of a bilingual group, we aim at determining a set of strategies that allow maintenance of both monolingual groups. This is an inverse problem different from Minett and Wang's problematic [9] that is the direct problem of the determination of the efficiency of predefined strategies.

We adopt a viability theory approach [11]: viability theory provides theoretical concepts and practical tools, to study the compatibility between a control dynamical system and a subset in the state space; especially, a viability domain is defined as a subset of the state space such that an evolution starting from it can be maintained inside it. The determination of a viability domain also provides a regulation map that allows to build strategies to remain inside it; in the context of language maintenance, it provides sets of prestige variations according to the system state that allows coexistence of two monolingual groups.

This paper is organised as follows: first, we introduce the language competition model with two monolingual groups and a bilingual one with a brief stability analysis; then, we describe the constraint set defined by the coexistence criteria and how to build inside it a viability domain thanks to the concept of contingent cone; finally, we derive the associated regulation map, which allows to build strategies ensuring coexistence, the slow viable strategies in particular, that exhibit the lowest prestige variations along the

evolution.

## 2. The model description

In the Abrams and Strogatz's model [2] and in those inspired from it, the assumption is made that the population size remains constant. And, consequently, the variables are the proportion of different groups of speakers. The population is made of two groups, the monolingual speakers of language  $A$  and the monolingual speakers of language  $B$ , and the model is one-dimensional with  $\sigma_A$  the proportion of speakers of  $A$  ( $\sigma_B = 1 - \sigma_A$ ). In the model including bilingualism, the population is made of three groups, the monolingual speakers of language  $A$ , the monolingual speakers of language  $B$ , and the bilingual speakers  $AB$ ; and the model is two-dimensional with  $\sigma_A$  the proportion of speakers of  $A$  and  $\sigma_B$  the proportion of speakers of  $B$  ( $\sigma_{AB} = 1 - \sigma_A - \sigma_B$ ).

In any linguistic subpopulation, there are forces and influences which one group exerts on members of the other to switch languages. In the Abrams and Strogatz's model, the rate at which speakers of one language switch to become speakers of the second language depends on the attractiveness of this second language. In their most general conception of attractiveness, Abrams and Strogatz assume that a language has greater attractiveness the more monolingual speakers it has and the greater its prestige is. They state  $P_{B \rightarrow A}$ , the fraction of group  $B$  that transfers to group  $A$  per unit time :

$$P_{B \rightarrow A} = s_A \sigma_A^a. \quad (1)$$

$s_A$  denotes the prestige of language  $A$ , and  $a$  is a parameter that models how the attractiveness of  $A$  scales with the proportion of speakers of  $A$ . The attractiveness of  $B$  to speakers of  $A$  can be stated similarly.

The rate of change of  $\sigma_A$  is given by

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \sigma_B P_{B \rightarrow A} - \sigma_A P_{A \rightarrow B} \quad (2)$$

(with analogous equation for  $\frac{d\sigma_B}{dt}$ ).

Extending the Abrams and Strogatz's model by explicitly modelling bilingualism, and consequently introducing a third class of speakers,  $AB$ , who speak both  $A$  and  $B$ , Equation (2) becomes :

$$\frac{d\sigma_A}{dt} = \sigma_B P_{B \rightarrow A} + \sigma_{AB} P_{AB \rightarrow A} - \sigma_A (P_{A \rightarrow B} + P_{A \rightarrow AB}) \quad (3)$$

(with analogous equations for  $\frac{d\sigma_B}{dt}$  and  $\frac{d\sigma_{AB}}{dt}$ ).

The transitions  $A \rightarrow B$  and  $B \rightarrow A$  are exceedingly rare in practice [12]. We therefore model only transitions of the four types  $A \rightarrow AB$ ,  $AB \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow AB$ , and  $AB \rightarrow B$  as [8] and [9] ( $P_{A \rightarrow B} = P_{B \rightarrow A} = 0$ ).

The moving rates depend on the Abrams and Strogatz's definition of language attractiveness (Eq. 1). As [8], we assume an asymmetry between monolinguals and bilinguals:  $A \rightarrow AB$  (resp.  $B \rightarrow AB$ ) at a rate proportional to the attractiveness of the monolingual speakers of  $A$  (resp.  $B$ );  $AB \rightarrow A$  (resp.  $AB \rightarrow B$ ) at a rate proportional to the attractiveness of the whole speakers of  $A$ , including the bilingual ones (hence, some bilinguals can become monolingual speakers of  $A$  even if  $A$  has no monolingual speakers):

$$\begin{aligned} P_{AB \rightarrow A} &= (1 - \sigma_B)^a s_A \\ P_{A \rightarrow AB} &= \sigma_B^a s_B. \end{aligned} \quad (4)$$

Consequently, the two-dimensional model is defined by

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_A}{dt} &= (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s_A - \sigma_A \sigma_B^a s_B \\ \frac{d\sigma_B}{dt} &= (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a s_B - \sigma_B \sigma_A^a s_A. \end{aligned} \quad (5)$$

For convenience, we will assume, that  $s_A + s_B = 1$ , allowing us to substitute  $s_A = s$  and  $s_B = 1 - s_A$ .

**Remark 1.** If the value of the prestige,  $s$ , is constant in  $]0; 1[$ , the dynamics (5) has three equilibria :  $(0, 1)$  and  $(1, 0)$  which are stable and  $(\sigma_{A,e}, \sigma_{B,e})$ ,  $\sigma_{A,e} > 0$ ,  $\sigma_{B,e} > 0$  which is unstable. Consequently, one language is doomed to become extinct.

In this study, we consider that the prestige,  $s$ , can evolve (modified by public action for instance), but that its variation at each time step is bounded. We also assume a kind of equivalence between the two languages in the ability of increasing their prestige, so the lower bound of the set of admissible controls,  $U$ , is the opposite of its upper one:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= u \\ u &\in U := [-\bar{u}; \bar{u}], \quad \bar{u} > 0. \end{aligned} \quad (6)$$

We propose to find strategies on the prestige variations to maintain a given level of monolingual speakers in both languages,  $\underline{\sigma}$ , that is to solve the following viability problem :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_A}{dt} = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s) \\ \frac{d\sigma_B}{dt} = (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_A)^a (1 - s) - \sigma_B \sigma_A^a s \\ \frac{ds}{dt} = u \\ u \in U \end{cases} \quad (7)$$

and

$$\forall t \geq 0, \begin{cases} 0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_A(t) \leq 1 \\ 0 < \underline{\sigma} \leq \sigma_B(t) \leq 1 \\ 0 \leq s(t) \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Necessarily,  $\bar{u} > 0$  and  $0 < \underline{\sigma} \leq 0.5$ . In the following sections of this paper, we do not fix a value for  $\underline{\sigma}$ , but we consider that reasonable values for this parameter are lower than 0.3.

**Remark 2.** Let the functions  $f_1, f_2, f$  defined on  $\mathbb{R}^{+2} \times \mathbb{R}^2$  by :

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &:= (1 - x - y)(1 - y)^a z - xy^a(1 - z) \\ f_2(x, y, z) &:= (1 - x - y)(1 - x)^a (1 - z) - x^a y z \end{aligned} \quad (9)$$

and

$$f(x, y, z, u) := (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), u) \quad (10)$$

The control system  $(U, f)$  defines the dynamics of the model :

$$\begin{cases} (\sigma'_A, \sigma'_B, s') = f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \\ u \in U. \end{cases} \quad (11)$$

1. The control system  $(U, f)$  is Marchaud<sup>1</sup>.
2. The functions  $f_1$  and  $f_2$  have the following symmetry property :

$$f_1(x, y, z) = f_2(y, x, (1 - z)). \quad (12)$$

---

<sup>1</sup>It satisfies the following conditions :

- (i) Graph( $U$ ) is closed
- (ii)  $f$  is continuous
- (iii) the velocity subsets  $F(x) := \{f(x, u)\}_{u \in U(x)}$  are convex
- (iv)  $f$  and  $U$  have linear growth

### 3. Building a viability domain

#### 3.1. Definition of a viability domain and the viability theorem

We first recall the definitions of the contingent cone and the viability domain [11]. Let  $X$  be a finite dimensional vector space.

**Definition 1 (Contingent cone).** Let  $K$  be a subset of  $X$  and  $x \in K$ , the contingent cone  $T_K(x)$  to  $K$  at  $x$  is the closed cone of elements  $v$  such that

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(x + hv, K)}{h} = 0 \quad (13)$$

If  $K$  is differentiable at  $x$ , the contingent cone is the tangent space.

**Definition 2 (Viability domain).** Let  $F : X \rightsquigarrow X$  be a non trivial set-valued map. A subset  $K \subset \text{Dom}^2(F)$  is a viability domain of  $F$  if and only if

$$\forall x \in K, F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad (14)$$

Aubin [11] also shows the link between viability domains and the existence of viable solutions.

**Definition 3 (Viable function).** Let  $K$  be a subset of  $X$ . A function  $x(\cdot)$  from  $[0; +\infty[$  is viable in  $K$  if  $\forall t \geq 0, x(t) \in K$ .

**Definition 4 (Regulation map).** Consider a system  $(U, f)$  described by a feedback map  $U$  and dynamics  $f$ . We associate with any subset  $K \subset \text{Dom}(U)$  the regulation map  $R_K : K \rightsquigarrow U$  defined by

$$\forall x \in K, R_K(x) := \{u \in U(x) | f(x, u) \in T_K(x)\}$$

It is worth noting that  $K$  is a viability domain if and only if the regulation map  $R_K$  is strict (has nonempty values).

---

<sup>2</sup>Let  $F : X \rightsquigarrow X$  be a non trivial set-valued map,

$$\text{Dom}(F) = \{x \in X \text{ such that } F(x) \neq \emptyset\}$$

**Theorem 1** (Viability theorem). *Let us consider a Marchaud control system  $(U, f)$  and a closed subset  $K \subset \text{Dom}(U)$  of  $X$ . Let  $F(x) := \{f(x, u)\}_{u \in U(x)}$ . If  $K$  is a viability domain under  $F$ , then for any initial state  $x_0 \in K$ , there exists a viable solution on  $[0, +\infty[$  to differential inclusion:*

$$\begin{cases} \text{For almost all } t \geq 0, x'(t) = f(x(t), u(t)) \\ \text{where } u(t) \in U(x(t)) \end{cases} \quad (15)$$

Furthermore, any control function regulating a viable solution  $x(\cdot)$  obeys the regulation law

$$\text{for almost all } t, u(t) \in R_K(x(t)). \quad (16)$$

Consequently, if the whole constraint set is a viability domain, whatever the initial state, there exists a control function that governs an evolution which remains in this constraint set. If the whole constraint set is not a viability domain, finding a subset which is a viability domain guarantees the existence of a viable evolution from any starting point inside it.

### 3.2. Geometric description of the constraint set associated with the coexistence of both monolingual groups

We denote by  $K$  the constraint set corresponding to the coexistence of both monolingual groups (Eq. 8). Its boundary is made of 5 faces with  $\underline{\sigma} \in ]0; 0.3]$  (Fig. 1):

- $F_0 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, s = 0\}$
- $F_1 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, s = 1\}$
- $F_2 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B = 1, 0 \leq s \leq 1\}$
- $F_3 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A = \underline{\sigma}, \sigma_B \geq \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$
- $F_4 : \{(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \mathbb{R}^3 \mid \sigma_A \geq \underline{\sigma}, \sigma_B = \underline{\sigma}, \sigma_A + \sigma_B \leq 1, 0 \leq s \leq 1\}$

### 3.3. Intersection between the set-valued map describing the dynamics, $F$ , and the contingent cones to the constraint set, $T_K$

If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{K}^3$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^3$  and consequently,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) \cap F(\sigma_A, \sigma_B, s) \neq \emptyset$ .

We then study the intersection on the boundary of  $K$ .

---

<sup>3</sup> $\overset{\circ}{K} := \{x \in K \mid \exists \epsilon > 0 \text{ such that } B_o(x, \epsilon) \subset K\}$  where  $B_o(x, \epsilon) := \{y \in X \mid \|x - y\| < \epsilon\}$

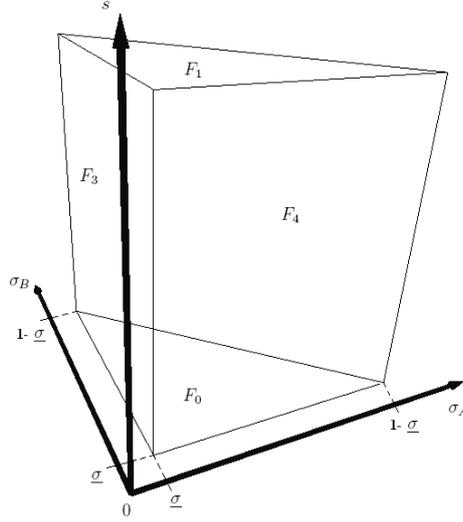


Figure 1: The constraint set  $K$

3.3.1. On faces  $F_0$ ,  $F_1$  and  $F_2$

- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{F}_0$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , so  $\forall u \in [0, \bar{u}] \subset [-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_K(\sigma_A, \sigma_B, s)$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{F}_1$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ , so  $\forall u \in [-\bar{u}, 0] \subset [-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_K(\sigma_A, \sigma_B, s)$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{F}_2$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y \leq 0\}$ , so  $\forall u \in [-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_K(\sigma_A, \sigma_B, s)$ .

Then,

- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in F_0 \cap F_2$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , so  $\forall u \in [0, \bar{u}] \subset [-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_K(\sigma_A, \sigma_B, s)$ .
- If  $\forall (\sigma_A, \sigma_B, s) \in F_1 \cap F_2$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ , so  $\forall u \in [-\bar{u}, 0] \subset [-\bar{u}, \bar{u}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_K(\sigma_A, \sigma_B, s)$ .

### 3.3.2. On faces $F_3$ and $F_4$

We study the intersection between  $F$  and  $T_K$  on  $F_3$  and  $F_4$ . We remind that the dynamics has a symmetry property (Remark. 2). Furthermore, the constraint set is symmetrical by the transformation :

$$(\sigma_A, \sigma_B, s) \rightarrow (\sigma_B, \sigma_A, 1 - s).$$

Consequently the results for  $F_4$  will be deduced from the ones for  $F_3$ .

If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \hat{F}_3$ ,  $T_K(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ .

And  $f_1(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \geq 0 \Leftrightarrow s \geq \frac{\underline{\sigma}\sigma_B^a}{(1-\underline{\sigma}-\sigma_B)(1-\sigma_B)^a + \underline{\sigma}\sigma_B^a} := s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)$ .

So, if  $s < s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)$ ,  $T_K(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \cap F(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) = \emptyset$ .

So  $K$  is not a viability domain. Figure 2 summarizes this study on the intersection between the contingent cones to the constraint set and the dynamics.

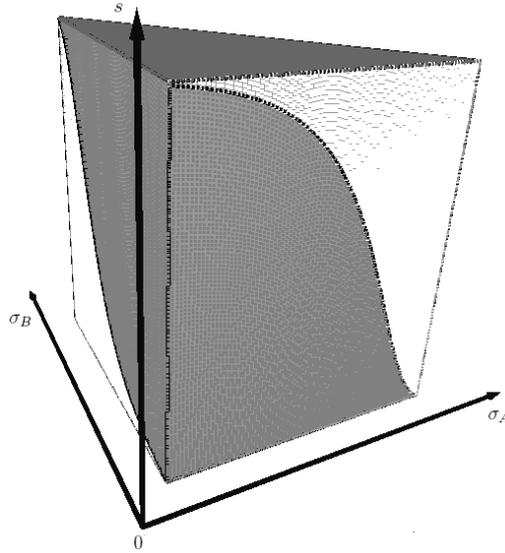


Figure 2: The area where the intersection between the contingent cone to the constraint set and the dynamics is not empty is colored grey. The area where it is empty is white dashed.

### 3.4. Sculpting the constraint set

On face  $F_3$ ,  $\sigma_A = \underline{\sigma}$ , and when  $s = s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)$ ,  $\sigma'_A(\underline{\sigma}, \sigma_B, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)) = f_1(\underline{\sigma}, \sigma_B, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)) = 0$ . Then to go on analysing the

possible constraint violation, we have to study the sign of  $\sigma_A''$ .

$$\frac{\partial^2 \sigma_A}{\partial t^2}(\sigma_A, \sigma_B, s) = df_1(\sigma_A, \sigma_B, s) \cdot (f_1(\sigma_A, \sigma_B, s), f_2(\sigma_A, \sigma_B, s), u) \quad (17)$$

From (Eq. 9),  $df_1(\sigma_A, \sigma_B, s) = d((1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a s - \sigma_A \sigma_B^a (1 - s))$  and

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_A}(\sigma_A, \sigma_B, s) &= -((1 - \sigma_B)^a s + (1 - s)\sigma_B^a) \\ \frac{\partial f_1}{\partial \sigma_B}(\sigma_A, \sigma_B, s) &= -((1 - \sigma_B)^a s + a(1 - s)\sigma_A \sigma_B^{a-1} + a(1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^{a-1}) \\ \frac{\partial f_1}{\partial s}(\sigma_A, \sigma_B, s) &= (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a + \sigma_A \sigma_B^a \end{aligned} \quad (18)$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_A}{\partial t^2} &= - \left( (1 - \sigma_B)^a s + (1 - s)\sigma_B^a \right) f_1(\sigma_A, \sigma_B, s) \\ &\quad - \left( (1 - \sigma_B)^a s + a(1 - s)\sigma_A \sigma_B^{a-1} + a(1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^{a-1} s \right) f_2(\sigma_A, \sigma_B, s) \\ &\quad + \left( (1 - \sigma_A - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a + \sigma_A \sigma_B^a \right) u \end{aligned} \quad (19)$$

So  $\frac{\partial^2 \sigma_A}{\partial t^2}(\underline{\sigma}, \sigma_B, s = s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)) \geq 0$ , when :

$$\begin{aligned} - \left( (1 - \sigma_B)^a s + a(1 - s)\underline{\sigma} \sigma_B^{a-1} + a(1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^{a-1} s \right) f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \\ + \left( (1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a + \underline{\sigma} \sigma_B^a \right) u \\ \geq 0 \end{aligned} \quad (20)$$

That is, since  $u$  multiplicative factor is strictly positive on  $F_3$  ( $\sigma_B \geq \underline{\sigma} > 0$ ) :

$$\begin{aligned} u &\geq \frac{(1 - \sigma_B)^a s + a(1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^{a-1} s + a(1 - s)\underline{\sigma} \sigma_B^{a-1}}{(1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \sigma_B)^a + \underline{\sigma} \sigma_B^a} f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \\ &= \frac{\partial s_0}{\partial \sigma_B}(\underline{\sigma}, \sigma_B) f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \end{aligned} \quad (21)$$

As  $u \in U = [-\bar{u}; \bar{u}]$ , a necessary and sufficient condition for the existence of a control such that  $\frac{\partial^2 \sigma_A}{\partial t^2}(\underline{\sigma}, \sigma_B, s = s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B))$  is greater or equal to 0 is that:

$$c(\underline{\sigma}, \sigma_B) := \frac{\partial s_0}{\partial \sigma_B}(\underline{\sigma}, \sigma_B) f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \leq \bar{u} \quad (22)$$

Figure 3 displays the plot of function  $c : \sigma_B \rightarrow c(\underline{\sigma}, \sigma_B)$  for different values of  $\underline{\sigma} \in ]0; 0.3]$ .

We first note that  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B)$  and  $f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B))$  have the same sign since  $\frac{\partial s_0}{\partial \sigma_B}(\underline{\sigma}, \sigma_B) \geq 0$  (Eq. 22).

And  $f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)) \leq 0$  when  $s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B) \geq s_1(\underline{\sigma}, \sigma_B) := \frac{(1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \underline{\sigma})^a}{(1 - \underline{\sigma} - \sigma_B)(1 - \underline{\sigma})^a + \sigma_B \underline{\sigma}^a}$ .

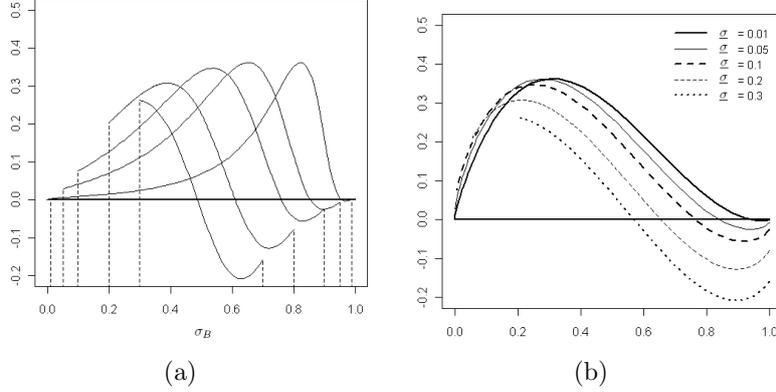


Figure 3: Plot of function  $c(\underline{\sigma}, \cdot)$  : (a)  $\sigma_B \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \rightarrow c(\underline{\sigma}, \sigma_B)$ , (b)  $s \in [s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}); 1] \rightarrow c(\underline{\sigma}, s)$  for different values of  $\underline{\sigma} \in ]0; 0.3]$ .

Let  $\bar{\sigma}(\underline{\sigma})$  such that  $s_0(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}(\underline{\sigma})) = s_1(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}(\underline{\sigma}))$ ,  $\bar{\sigma}(\underline{\sigma}) < 1 - \underline{\sigma}$  and for all  $\sigma_B \in [\bar{\sigma}(\underline{\sigma}); 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $f_2(\underline{\sigma}, \sigma_B, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_B)) \leq 0$  and  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) \leq 0$ .

Moreover, let  $\hat{\sigma}(\underline{\sigma}, \bar{u}) = \min\{\sigma_B \in [\underline{\sigma}, \bar{\sigma}] | \forall \sigma \geq \sigma_B, c(\underline{\sigma}, \sigma) \leq \bar{u}\}$ . Necessarily,  $\hat{\sigma} < \bar{\sigma} < 1 - \underline{\sigma}$  since  $\bar{u} > 0$ .

Three situations may occur depending on the values of  $\underline{\sigma}$  and  $\bar{u}$  as illustrated in Figure 4.

- Case 1 :  $\hat{\sigma} = \underline{\sigma}$  (Figure 4(a))
- Case 2 :  $\hat{\sigma} > \underline{\sigma}$  and for all  $\underline{\sigma} \leq \sigma_B < \hat{\sigma}$ ,  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) > \bar{u}$  (Figure 4(b))
- Case 3 :  $\hat{\sigma} > \underline{\sigma}$  and there exists  $\tilde{\sigma}$  such that  $\underline{\sigma} \leq \tilde{\sigma} < \hat{\sigma}$  and for all  $\sigma_B | \underline{\sigma} \leq \sigma_B \leq \tilde{\sigma}$ ,  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) \leq \bar{u}$  (Figure 4(c))

Depending on case 1, 2 or 3, the building procedure of the viability domain is slightly different :

#### 3.4.1. Case 1 : $\hat{\sigma} = \underline{\sigma}$

Let  $\Phi(\sigma, t) : [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that

$$\begin{cases} \Phi(\sigma, 0) &= (\underline{\sigma}, \sigma, s_0(\underline{\sigma}, \sigma)) \\ \frac{\partial \Phi(\sigma, t)}{\partial t} &= (-f_1(\Phi(\sigma, t)), -f_2(\Phi(\sigma, t)), -\bar{u}). \end{cases} \quad (23)$$

We are interested in the intersection between  $\{\Phi(\sigma, t) | (\sigma, t) \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times [0; +\infty[ \}$  and the constraint set  $K$ .

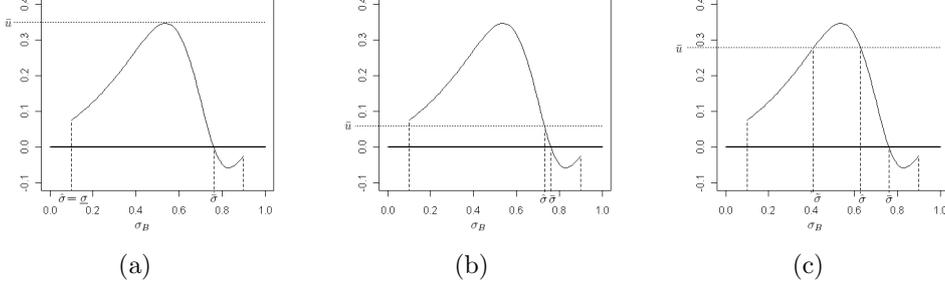


Figure 4: Plot of  $c(\underline{\sigma}, \cdot)$  for  $\underline{\sigma} = 0.1$ . Three situations can occur depending on the value of  $\bar{u}$ .

We first note that  $\forall \sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $\Phi(\sigma, 0) \in K$ . Then,  $\forall \sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $\exists T \in [0; 1/\bar{u}]$  such that  $\Phi(\sigma, T) \notin K$  since  $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$  and the projection of  $\Phi(\sigma, t)$  on the  $s$ -coordinate decreases from  $s_0(\sigma)$  with constant speed  $-\bar{u}$  (Eq.23).

We denote  $T(\sigma) = \max\{T | \forall t \in [0; T], \Phi(\sigma, t) \in K\}$ .  $\forall \sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $T(\sigma) \leq 1/\bar{u}$ .

**Lemma 1.**  $T(\underline{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(\underline{\sigma}, T(\underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_4$   
 $T(1 - \underline{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(1 - \underline{\sigma}, T(1 - \underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_2$ .

PROOF.  $\Phi(\underline{\sigma}, 0) = (\underline{\sigma}, \underline{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_4$  and

$$\begin{aligned}
-f_2(\Phi(\underline{\sigma}, 0)) &= -f_2(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma})) \\
&= -f_1(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 1 - s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma})) \quad (\text{symmetry property}) \\
&< -f_1(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma})) \quad (f_1 \text{ increases with } s \text{ and} \\
&\quad s_0(\underline{\sigma}, \underline{\sigma}) < 0.5 \text{ when } \underline{\sigma} < 0.3) \\
&< 0
\end{aligned} \tag{24}$$

So  $T(\underline{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(\underline{\sigma}, T(\underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_4$ .

$\Phi(1 - \underline{\sigma}, 0) = (\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) \in F_3 \cap F_2$  and  $-f_1(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) - f_2(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) > 0$ , so  $T(1 - \underline{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(1 - \underline{\sigma}, T(1 - \underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_2$ . ■

**Lemma 2.** Let  $\sigma_0 \in [\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}]$ . If  $\{\Phi(\sigma_0, t) \mid t \in [0, T(\sigma_0)]\} \cap \partial K = \{\Phi(\sigma_0, 0)\} \cup \{\Phi(\sigma_0, T(\sigma_0))\}$ , then  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma, T(\sigma))$  is continuous at  $\sigma_0$ .

PROOF. By the definition of  $T(\sigma_0)$  and since  $\Phi$  is continuous, there exists  $\bar{\epsilon} > 0$  such that  $\forall \delta$  such that  $0 \leq \epsilon < \bar{\epsilon}$ ,  $\Phi(\sigma_0, T(\sigma_0) + \epsilon) \notin K$ .

Let  $dist$  be the Euclidean distance in  $\mathbb{R}^3$ .

Let  $d = dist(K, \Phi(\sigma_0, T(\sigma_0) + \epsilon)) > 0$  ( $K$  is a closed subset of  $X$ ).

As  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\sigma, t)$  is bounded on any compact subset of  $[\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0; +\infty[$ ,  $\exists \delta_\sigma > 0$  such that  $\forall \delta \mid |\delta| \leq \delta_\sigma \mid \mid \Phi(\sigma_0 + \delta, T(\sigma_0) + \epsilon) - \Phi(\sigma_0, T(\sigma_0) + \epsilon) \mid \mid \leq d/2$ .

Therefore,  $\Phi(\sigma_0 + \delta, T(\sigma_0) + \epsilon) \notin K$  and  $T(\sigma_0 + \delta) \leq T(\sigma_0) + \epsilon$ .

If  $\sigma_0 = \underline{\sigma}$  or  $\sigma_0 = 1 - \underline{\sigma}$ ,  $T(\sigma_0) = 0$ , and  $\forall 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}$ ,  $\exists \delta_\sigma > 0$  such that  $|\delta| < \delta_\sigma$  implies  $T(\sigma_0 + \delta) \leq \epsilon$ . So  $T$  is continuous at  $\sigma_0$ .

If  $\sigma_0 \in ]\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}[$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\sigma_0, 0) = 0$  and  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\sigma_0, 0) = \alpha > 0$ . So  $T(\sigma_0) > 0$ .

Moreover, since  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$  is continuous,  $\exists \tilde{\epsilon} > 0$ ,  $\exists \tilde{\delta}_\sigma > 0$  such that  $\forall \delta \mid |\delta| \leq \tilde{\delta}_\sigma$ ,  $\forall \epsilon \mid 0 \leq \epsilon \leq \tilde{\epsilon}$ ,  $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(\sigma_0 + \delta, \epsilon) > \frac{\alpha}{2}$  and  $\Phi(\sigma_0 + \delta, \epsilon) \in \overset{\circ}{K}$ .

Let  $\tilde{d} = \min_{t \in [\tilde{\epsilon}; T(\sigma_0) - \epsilon]} dist(K, \Phi(\sigma_0, t))$ ,  $\tilde{d} > 0$  with the assumption of the lemma  $\{\Phi(\sigma_0, t) \mid t \in [0, T(\sigma_0)]\} \cap \partial K = \{\Phi(\sigma_0, 0)\} \cup \{\Phi(\sigma_0, T(\sigma_0))\}$ . So  $\exists \bar{\delta}_\sigma > 0$ , such that  $\forall t \in [\tilde{\epsilon}; T(\sigma_0) - \epsilon]$ ,  $\forall \delta \mid |\delta| \leq \bar{\delta}_\sigma$ ,  $\mid \Phi(\sigma_0 + \delta, t) - \Phi(\sigma_0, t) \mid \leq \tilde{d}/2$ .

So,  $\forall \delta \mid |\delta| \leq \min(\tilde{\delta}_\sigma, \bar{\delta}_\sigma)$ ,  $T(\sigma_0 + \delta) \geq T(\sigma_0) - \epsilon$ .

Finally,  $T$  is continuous at  $\sigma_0$ . As  $\Phi$  is continuous on  $[\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times \mathbb{R}^+$ , so  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma, T(\sigma))$  is also continuous at  $\sigma_0$ . ■

Figure 5 displays the plot of  $T(\sigma)$  for the pair  $\underline{\sigma} = 0.2$  and  $\bar{u} = 0.32$  belonging to case 1.

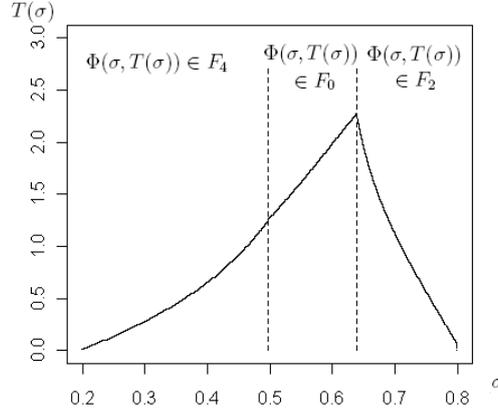


Figure 5:  $\underline{\sigma} = 0.2$  and  $\bar{u} = 0.32$ . Plot of the function  $T : [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \rightarrow \mathbb{R}^+$

Figure 5 also describes the face  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  belongs to :

- there exists  $\underline{\sigma} \leq \sigma_1$ , such that for all  $\sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_1]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_4$
- there exists  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ , such that for all  $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_0$
- and for all  $\sigma \in [\sigma_2; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_2$ .

**Corollary 1.**  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma, T(\sigma))$  is continuous on  $[\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}]$

PROOF. Suppose  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  is not continuous at  $\sigma_0$ .

From lemma 2,  $\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0^-} \Phi(\sigma, T(\sigma))$  (or  $\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_0^+} \Phi(\sigma, T(\sigma))$ ) equals  $\Phi(\sigma_0, T_1) \neq \Phi(\sigma_0, T(\sigma_0))$  with  $\Phi(\sigma_0, T_1) \in \partial K$  and  $T_1 < T(\sigma_0)$ .

So  $(-f_1(\Phi(\sigma_0, T_1)), -f_2(\Phi(\sigma_0, T_1)), -\bar{u})$  belongs to the contingent cone of  $K$  at  $\Phi(\sigma_0, T_1)$ .

Consequently,  $\Phi(\sigma_0, T_1) \notin F_0$  and  $\Phi(\sigma_0, T_1) \notin F_2$  (see subsection 3.3.1).

Moreover,  $\Phi(\sigma_0, T_1) \notin F_4$  if (H1)  $\bar{u} > |\min_{\sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]} c(\underline{\sigma}, \sigma)|$ .

Actually, if  $\Phi(\sigma_0, T_1) \in F_4$ ,  $f_2(\Phi(\sigma_0, T_1)) = 0$ , and by the symmetry property,  $\exists \sigma$  such that  $\Phi(\sigma, T_1) = (\sigma, \underline{\sigma}, 1 - s_0(\underline{\sigma}, \sigma))$ . Moreover, let  $\Phi_{\sigma_B}$  be the projection of  $\Phi$  on the  $\sigma_B$ -coordinate,  $\frac{\partial^2 \Phi_{\sigma_B}}{\partial t^2}(\sigma, T_1) \geq 0$  implies, using the symmetry property and following the same development as Eq. 20, Eq. 21 and Eq. 22, that  $-\bar{u} \geq c(\underline{\sigma}, \sigma)$  which contradicts the assumption (H1).

As  $\max_{\sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]} c(\underline{\sigma}, \sigma) > |\min_{\sigma \in [\underline{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]} c(\underline{\sigma}, \sigma)|$  (Fig. 4(a)), assumption (H1) is satisfied in case 1. ■

Figure 6 displays a 3D plot of the intersection between  $K$  and the surface  $\{\Phi(\sigma, t) | (\sigma, t) \in [\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0, T(\sigma)]\}$ .

3.4.2. Case 2 :  $\hat{\sigma} > \underline{\sigma}$  and (H2) for all  $\underline{\sigma} \leq \sigma_B < \hat{\sigma}$ ,  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) > \bar{u}$

Let  $\Phi(\sigma, t) : [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times [0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}^3$  defined as in Eq. (23).

As in case 1,  $T(\sigma) := \max\{T | \forall t \in [0; T] \Phi(\sigma, t) \in K\}$  and  $\forall \sigma \in [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $T(\sigma) \leq 1/\bar{u}$ .

**Lemma 3.**  $T(\hat{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(\hat{\sigma}, T(\hat{\sigma})) \in \overset{\circ}{F}_3$   
 $T(1 - \underline{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(1 - \underline{\sigma}, T(1 - \underline{\sigma})) \in F_3 \cap F_2$ .

PROOF. By the definition of  $\hat{\sigma}$ ,  $f_1(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) = 0$ .

Moreover,  $df_1(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) \cdot f(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}), \bar{u}) = 0$ .

And let  $h(\sigma_A, \sigma_B, s) := df_1(\sigma_A, \sigma_B, s) \cdot f((\sigma_A, \sigma_B, s, \bar{u}))$ ,

$$dh(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))(0, 1, \frac{\partial s_0}{\partial \sigma}(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) < 0.$$

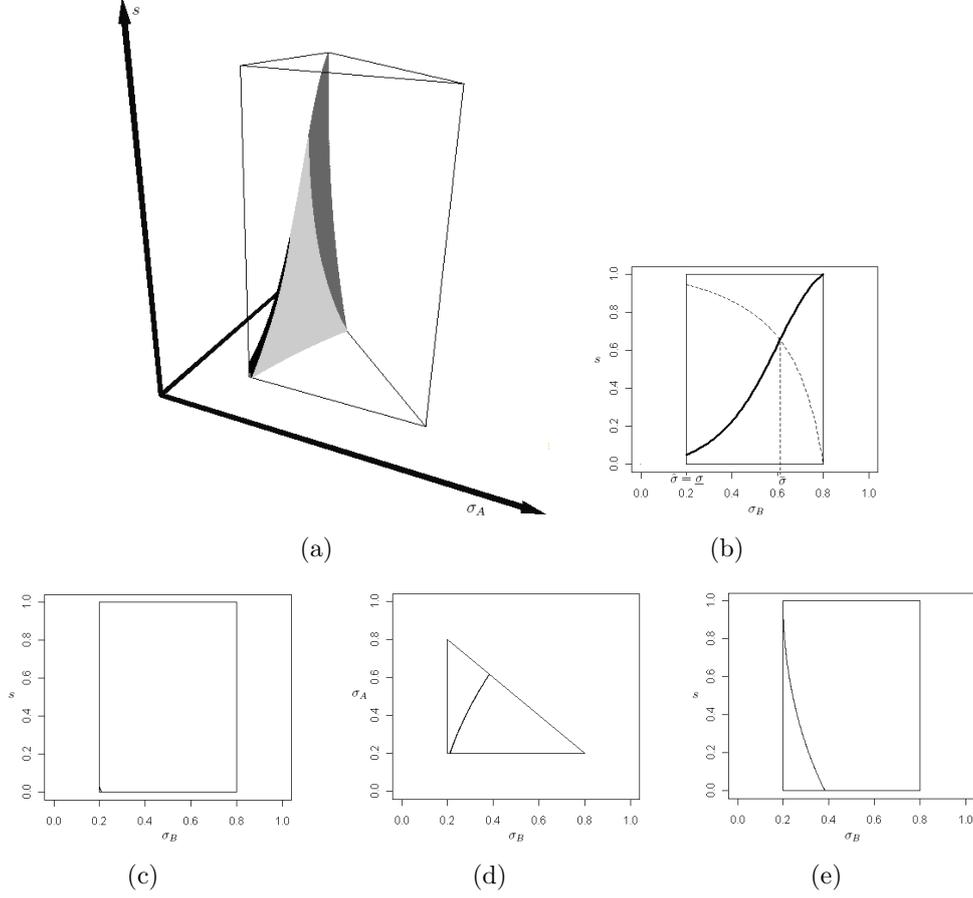


Figure 6: 6(a) The Euler approximation of  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0, T(\sigma)]\}$  for  $\underline{\sigma} = 0.2$  and  $\bar{u} = 0.32$ . The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_4\}$  is colored black. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_0\}$  is colored light gray. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_2\}$  is colored dark gray. 6(b), 6(c), 6(d), 6(e), the intersection between  $\Phi(\sigma, t)$  and  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_0$  and  $F_2$ .

Let  $\Phi_{\sigma_A}$  be the  $\sigma_A$ -component of  $\Phi$ ,  $\frac{\partial \Phi_{\sigma_A}}{\partial t}(\hat{\sigma}, 0) = -f_1(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) = 0$ .  
 $\frac{\partial^2 \Phi_{\sigma_A}}{\partial t^2}(\hat{\sigma}, 0) = -df_1(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) \cdot f(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}), \bar{u}) = 0$ .

Furthermore,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \Phi_{\sigma_A}(\hat{\sigma}, 0)}{\partial t^3} &= dh(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))(-f_1(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})), -f_2(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})), -\bar{u}) \\ &= dh(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))(0, -f_2(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})), -\bar{u}) \end{aligned} \quad (25)$$

But,  $(0, -f_2(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})), -\bar{u})$  and  $(0, -1, -\frac{\partial s_0}{\partial \sigma}(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))$  are collinear with the same direction since  $c(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}) = \bar{u}$ , so there exists  $\lambda > 0$  such that :

$$\begin{aligned} dh(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))(0, -f_2(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})), -\bar{u}) &= \lambda dh(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}, s_0(\underline{\sigma}, \hat{\sigma}))(0, -1, -\frac{\partial s_0}{\partial \sigma}(\underline{\sigma}, \hat{\sigma})) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (26)$$

So  $\frac{\partial^3 \Phi_{\sigma_A}(\hat{\sigma}, 0)}{\partial t^3} < 0$ ,  $T(\hat{\sigma}) = 0$  and  $\Phi(\hat{\sigma}, T(\hat{\sigma})) \in \overset{\circ}{F}_3$ . ■

Figure 7 displays the plot of  $T(\sigma)$  for the pair  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.006$  belonging to case 2.

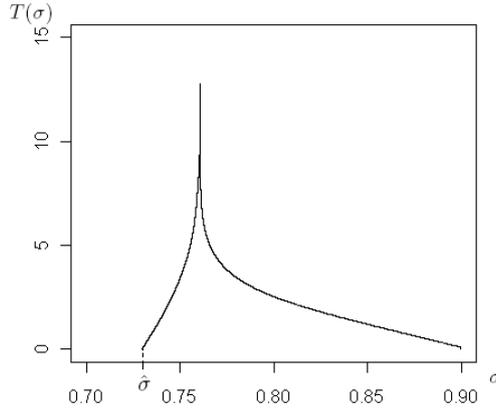


Figure 7:  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.06$ .  $\hat{\sigma} \approx 0.73$ . Plot of the function  $T : [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \rightarrow \mathbb{R}^+$

We can not represent on figure 7 the face  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  belongs to since some bounds are very close but :

- there exists  $\underline{\sigma} \leq \sigma_1$ , such that for all  $\sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_1]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_3$
- there exists  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ , such that for all  $\sigma \in [\sigma_1; \sigma_2]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_4$
- there exists  $\sigma_2 \leq \sigma_3$ , such that for all  $\sigma \in [\sigma_2; \sigma_3]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_0$

- and for all  $\sigma \in [\sigma_3; 1 - \underline{\sigma}]$ ,  $\Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_2$ .

Moreover,

**Corollary 2.** *If (H1) is satisfied,  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma, T(\sigma))$  is continuous on  $[\hat{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}]$ .*

PROOF. We use the same notations as corollary 1.

From lemma 2 and lemma 3,  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  is continuous at  $\hat{\sigma}$  and  $1 - \underline{\sigma}$ .

From corollary 1, if (H1) and if  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  is not continuous at  $\sigma_0$ ,  $\Phi(\sigma_0, T_1) \notin F_0 \cup F_2 \cup F_4$ .

If  $\Phi(\sigma_0, T_1) \in F_3$ , since  $\Phi(\sigma_0, 0) \in F_3$  and  $T_1 > 0$ ,  $\exists T_2 \in ]0; T_1[$  such that  $\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2) > \underline{\sigma}$ ,  $\frac{\partial \Phi_{\sigma_A}}{\partial t}(\sigma_0, T_2) = 0$  and  $\frac{\partial^2 \Phi_{\sigma_A}}{\partial t^2}(\sigma_0, T_2) \leq 0$ .

Hence, following the same development as Eq. 20, Eq. 21 and Eq. 22,

$$\bar{u} \leq c(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2), \Phi_{\sigma_B}(\sigma_0, T_2)). \quad (27)$$

We recall that  $\hat{\sigma}(\sigma_A) = \min\{\sigma_B \in [\sigma_A; 1 - \sigma_A] \mid \forall \sigma \geq \sigma_B, c(\sigma_A, \sigma) \leq \bar{u}\}$ . Let  $\hat{s}(\sigma_A) = s_0(\sigma_A, \hat{\sigma}(\sigma_A))$ .  $\hat{s}$  decreases with  $\sigma_A$  as illustrated in Fig. 3(b). So,  $\hat{s}(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2)) \leq \hat{s}(\underline{\sigma})$ . Moreover, since Eq. 27,  $\Phi_{\sigma_B}(\sigma_0, T_2) \leq \hat{\sigma}(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2))$  and  $\Phi_s(\sigma_0, T_2) \leq \hat{s}(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2))$  since  $s_0(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_2), \cdot)$  is increasing. Moreover,  $\frac{\partial \Phi_s}{\partial t} = -\bar{u}$ , then  $\Phi_s(\sigma_0, T_1) < \hat{s}(\underline{\sigma})$ .

Finally,  $\Phi_{\sigma_B}(\sigma_0, T_1) < \hat{\sigma}$  since  $s_0(\underline{\sigma}, \cdot)$  is increasing. And  $\frac{\partial^2 \Phi_{\sigma_A}}{\partial t^2}(\sigma_0, T_1) \geq 0$ , that is  $\bar{u} \geq c(\Phi_{\sigma_A}(\sigma_0, T_1) = \underline{\sigma}, \Phi_{\sigma_B}(\sigma_0, T_1) < \hat{\sigma})$  which contradicts the assumption (H2). ■

Figure 8 displays a 3D plot of the intersection between  $K$  and the surface  $\{\Phi(\sigma, t) \mid (\sigma, t) \in [\hat{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0, T(\sigma)]\}$ .

*3.4.3. Case 3 :  $\hat{\sigma} > \underline{\sigma}$  and (H3) there exists  $\tilde{\sigma}$ ,  $\underline{\sigma} < \tilde{\sigma} < \hat{\sigma}$ , such that  $\forall \sigma_B \in [\underline{\sigma}, \tilde{\sigma}]$ ,  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) \leq \bar{u}$*

On the contrary to case 2, with the assumption (H3), there may exist  $\sigma_d \in ]\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}[$  and  $\sigma_e \in ]\underline{\sigma}, \tilde{\sigma}[$  such that  $\Phi(\sigma_d, T_1) = (\underline{\sigma}, \sigma_e, s_0(\underline{\sigma}, \sigma_e))$  with  $0 < T_1 < T(\sigma_d)$ . The assumption of lemma 2 is not satisfied at  $\sigma_d$  and  $T(\sigma)$  and  $\Phi(\sigma, T(\sigma))$  are not continuous at  $\sigma_d$  :  $\lim_{\sigma \rightarrow \sigma_d^-} \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in \overset{\circ}{F}_3$ , but  $\Phi(\sigma_d, T(\sigma_d)) \in F_4 \cup F_0$ .

To complete the surface, we then have to extend the definition domain of  $\Phi : [\underline{\sigma}; \sigma_e] \cup ]\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$  as illustrated in Figure 9. Especially, Figure 9(b) shows the intersection between  $\Phi(\sigma, t)$  and  $F_4$  with the noticeable values  $\sigma_d$  and  $\sigma_e$ .

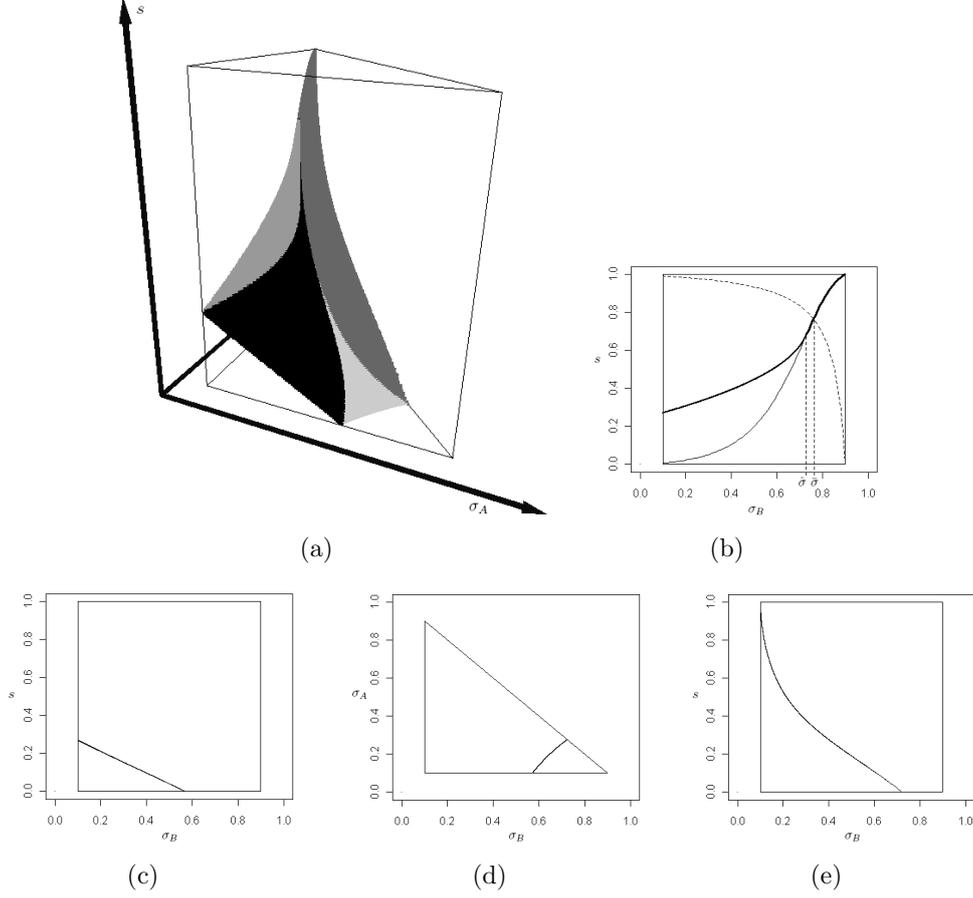


Figure 8: 8(a) The Euler approximation of  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\hat{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0, T(\sigma)]\}$  for  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.06$ . The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_3\}$  is colored gray. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_4\}$  is colored black. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_0\}$  is colored light gray. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_2\}$  is colored dark gray. 8(b), 8(c), 8(d), 8(e), the intersection between  $\Phi(\sigma, t)$  and  $F_3$ ,  $F_4$ ,  $F_0$  and  $F_2$ .

### 3.5. Defining the viability domain inside the constraint set

We denote

$$D_{N_0} := \{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e] \cup [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}], t \in [0; T(\sigma)]\} \quad (28)$$

We denote  $D_{N_1}$  the symmetric of  $D_{N_0}$  by the transformation  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \rightarrow (\sigma_B, \sigma_A, 1 - s)$ .

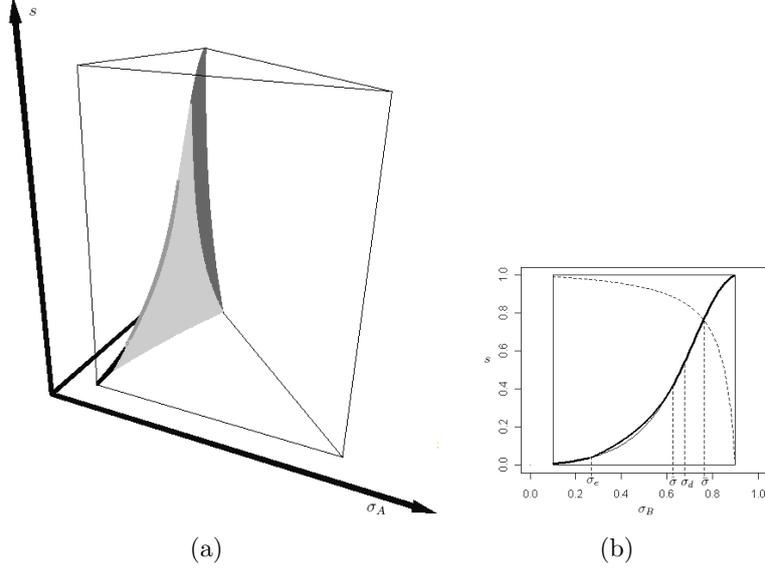


Figure 9: 9(a) The Euler approximation of  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e] \cup [\hat{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}] \times [0, T(\sigma)]\}$  for  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.28$ . The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e]\}$  is colored black. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_3\}$  is colored gray. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_0\}$  is colored light gray. The area  $\{\Phi(\sigma, t) | \sigma \in [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \Phi(\sigma, T(\sigma)) \in F_2\}$  is colored dark gray. 9(b) displays the intersection between  $\Phi(\sigma, t)$  and  $F_3$ .

**Remark 3.**

$$D_{N_1} := \{\bar{\Phi}(\sigma, t) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e] \cup [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}], t \in [0; \bar{T}(\sigma)]\} \quad (29)$$

where  $\bar{\Phi}(\sigma, t) : [\underline{\sigma}; \sigma_e] \cup [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}] \times [0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(\sigma, 0) &= (\sigma, \underline{\sigma}, 1 - s_0(\underline{\sigma}, \sigma)) \\ \frac{\partial \bar{\Phi}(\sigma, t)}{\partial t} &= (-f_1(\bar{\Phi}(\sigma, t)), -f_2(\bar{\Phi}(\sigma, t)), \bar{u}). \end{cases} \quad (30)$$

and  $\bar{T}(\sigma) = \max\{T | \forall t \in [0; T], \bar{\Phi}(\sigma, t) \in K\}$ .

$D_{N_0}$  separates  $K$  into two subsets. We denote

$$\begin{aligned} \bar{D} := \{x \in K \mid &\exists x(\cdot) \text{ continuous } : [0, 1] \rightarrow K, x(0) = x, x(1) = (1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 1), \\ &\forall t \in [0, 1], x(t) \in K, \\ &\{x(t) | t \in ]0, 1]\} \cap D_{N_1} = \emptyset\}. \end{aligned} \quad (31)$$

In the same manner,  $D_{N_1}$  separates  $K$  into two subsets. We denote

$$\underline{D} := \{x \in K \mid \exists x(\cdot) \text{ continuous } : [0, 1] \rightarrow K, x(0) = x, x(1) = (\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 0), \\ \forall t \in [0, 1], x(t) \in K, \\ \{x(t) \mid t \in ]0, 1[ \} \cap D_{N_1} = \emptyset\} \quad (32)$$

Let  $D \subset K$  defined by

$$D := \bar{D} \cap \underline{D} \quad (33)$$

Figure 10 displays different 3d-plots of such a subset  $D$  when  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.06$ .

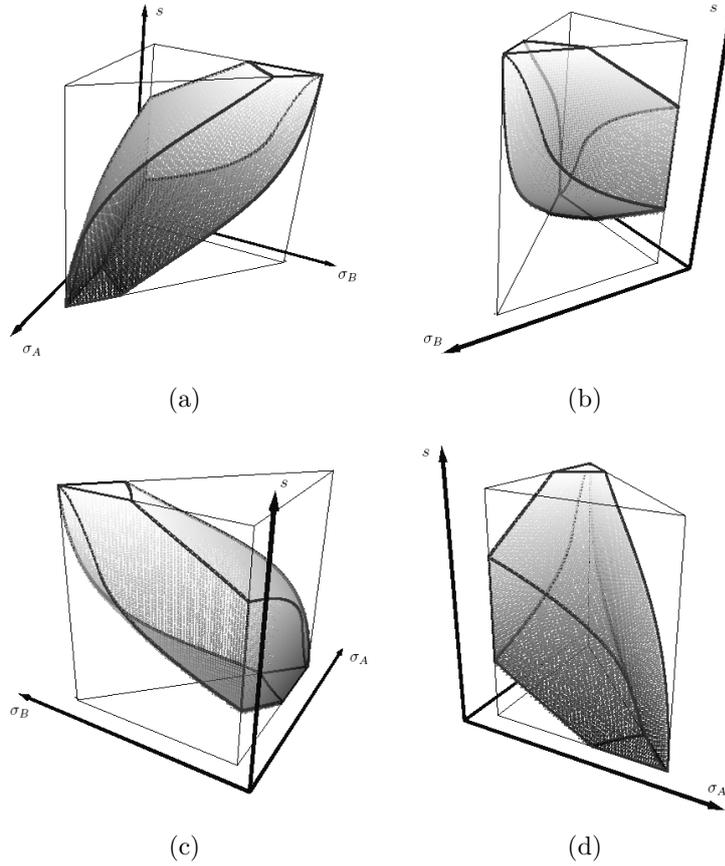


Figure 10: Four different views of the 3D-viability kernel for  $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.06$ .

**Theorem 2.**  $D$  is a viability domain under  $F$ .

PROOF. We denote  $D_{F_0} := D \cap F_0$ ,  $D_{F_1} := D \cap F_1$ ,  $D_{F_2} := D \cap F_2$ ,  $D_{F_3} := D \cap F_3$ , and  $D_{F_4} := D \cap F_4$ . The boundary of  $D$ ,  $\partial D$  equals :

$$\partial D = D_{F_0} \cup D_{F_1} \cup D_{F_2} \cup D_{F_3} \cup D_{F_4} \cup D_{N_0} \cup D_{N_1}.$$

- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_0}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [0, \bar{u}]$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_1}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^-$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [-\bar{u}, 0]$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_2}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \{(x, y, z) | x+y \leq 0\}$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in U$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_3}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2$ , and  $f_1(\sigma_A, \sigma_B, s) > 0$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in U$ .
- We have the same, if  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_4}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in U$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{N_0}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = \bar{u}$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{N_1}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = -\bar{u}$ .

Moreover,

- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \widehat{\overset{\circ}{D}_{F_0} \cap \overset{\circ}{D}_{F_2}}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \{(x, y, z) | x+y \leq 0, z \geq 0\}$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [0, \bar{u}]$  since  $(f_1(\sigma_A, \sigma_B, s) + f_2(\sigma_A, \sigma_B, s)) \leq 0$  when  $(\sigma_A + \sigma_B) = 1$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \widehat{\overset{\circ}{D}_{F_0} \cap \overset{\circ}{D}_{F_4}}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [0, \bar{u}]$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \overset{\circ}{D}_{F_0} \cap \overset{\circ}{D}_{N_0}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = \bar{u}$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \widehat{\overset{\circ}{D}_{F_3} \cap \overset{\circ}{D}_{F_4}}$ ,  $T_D(\sigma_A, \sigma_B, s) = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ , so  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in U$  since  $f_1(\sigma_A, \sigma_B, s) > 0$  and  $f_2(\sigma_A, \sigma_B, s) > 0$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \widehat{\overset{\circ}{D}_{F_4} \cap \overset{\circ}{D}_{N_0}}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = \bar{u}$ .

- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in \widehat{D_{F_2} \cap D_{N_0}}$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = \bar{u}$ .
- If  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \in D_{F_3} \cap D_{N_0}$ ,
  - if  $\sigma_B \in [\underline{\sigma}, \sigma_e[$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [c(\underline{\sigma}, \sigma_B), \bar{u}]$ .
  - if  $\sigma_B \in [\sigma_e, \hat{\sigma}]$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u = \bar{u}$
  - if  $\sigma_B \in [\hat{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}[$ ,  $f(\sigma_A, \sigma_B, s, u) \in T_D(\sigma_A, \sigma_B, s)$  for  $u \in [c(\underline{\sigma}, \sigma_B), \bar{u}]$ .
  - and  $f(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1, u) \in T_D(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)$  for  $u \in [c(\underline{\sigma}, \sigma_B), 0]$ .

The proof of the non emptiness of the intersection between the contingent cone and the dynamics on the other points of the boundary of  $D$  can be deduced from the problem symmetry by the transformation  $(\sigma_A, \sigma_B, s) \rightarrow (\sigma_B, \sigma_A, 1 - s)$ . ■

#### 4. Control strategy using the viability domain

##### 4.1. The regulation map

$D$  is a viability domain. Consequently, it allows to build a regulation map,  $R_D$ , with non empty values on  $D$ . That means that any  $x \in D$  is viable. Moreover, there exists a viable evolution governed by the differential inclusion associated with the regulation map (theorem 1).

The regulation map is directly defined from the intersection between the dynamics and the contingent cone of  $D$  (Def. 4):

$$\forall x \in D, R_D(x) := \{u \in U(x) | f(x, u) \in T_D(x)\}.$$

Let :

$$\underline{D}_{N_0} := D_{N_0} - \{\Phi(\sigma, 0) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e \cup [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]]\} \quad (34)$$

$$\underline{D}_{N_1} := D_{N_1} - \{\bar{\Phi}_1(\sigma, 0) | \sigma \in [\underline{\sigma}; \sigma_e \cup [\hat{\sigma}; 1 - \underline{\sigma}]]\} \quad (35)$$

From the proof of theorem 2,

- for  $x \in \underline{D}_{N_0}$ ,  $R_D(x) = \bar{u}$  ; for  $x \in \underline{D}_{N_1}$ ,  $R_D(x) = -\bar{u}$
- for  $x \in \overset{\circ}{D}_{F_0} \cup (\widehat{D_{F_0} \cap D_{F_2}}) \cup (\widehat{D_{F_0} \cap D_{F_4}})$ ,  $R_D(x) = [0; \bar{u}]$
- for  $x \in \overset{\circ}{D}_{F_1} \cup (\widehat{D_{F_1} \cap D_{F_2}}) \cup (\widehat{D_{F_1} \cap D_{F_3}})$ ,  $R_D(x) = [-\bar{u}; 0]$

- for  $(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in D_{N_0} - (\underline{D}_{N_0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$ ,  $R_D(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) = [c(\underline{\sigma}, \sigma_B), \bar{u}]$
- for  $(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) \in D_{N_1} - (\underline{D}_{N_1} \cup \{(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0)\})$ ,  $R_D(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) = [-\bar{u}, -c(\underline{\sigma}, \sigma_A)]$
- $R_D(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) = [c(\underline{\sigma}, \sigma_B), 0]$
- $R_D(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0) = [0, -c(\underline{\sigma}, \sigma_B)]$
- for  $x \in D - D_{N_0} \cup D_{N_1} \cup D_{F_0} \cup D_{F_1}$ ,  $R_D(x) = U$ .

#### 4.2. Viable evolutions

From theorem 1, any control function regulating a viable solution  $x(\cdot)$  in  $D$  obeys the regulation law

$$\text{for almost all } t, u(t) \in R_D(x(t)). \quad (36)$$

That means that thanks to this regulation map, if the present situation lies in the viability domain, we can control the system to remain in the constraint set, and therefore preserve coexistence of both monolingual groups. At each time, there may be several controls that ensure viability. The next issue that arises is the choice of an effective univocal control function.

#### 4.3. Slow viable evolutions

From a political viewpoint, the strategy that minimises control strength at each time may be attractive since it reduces the strength of the measures to carry out. We derive from the regulation map such a strategy below.

##### 4.3.1. Minimal selection of the regulation map

We first consider the minimal selection,  $R_D^*$ , of the regulation map  $R_D$ . Actually, the values of the regulation map  $R_D$  are closed and convex, so we can associate with  $x \in D$  the viable control with minimal norm :

$$\begin{aligned} R_D^*(x) &:= m(R_D(x)) \\ &:= \{u \in R_D(x) \mid \|u\| = \min_{y \in R_D(x)} \|y\|\} \end{aligned} \quad (37)$$

$R_D^*$  is then defined on  $D$  by :

- for  $x \in \underline{D}_{N_0}$ ,  $R_D^*(x) = \bar{u}$  ; for  $x \in \underline{D}_{N_1}$ ,  $R_D^*(x) = -\bar{u}$
- for  $x \in \overset{\circ}{D}_{F_0} \cup (D_{F_0} \overset{\circ}{\cap} D_{F_2}) \cup (D_{F_0} \overset{\circ}{\cap} D_{F_4})$ ,  $R_D^*(x) = \{0\}$

- for  $x \in D_{F1}^\circ \cup (D_{F1} \overset{\circ}{\cap} D_{F2}) \cup (D_{F1} \overset{\circ}{\cap} D_{F3})$ ,  $R_D^*(x) = \{0\}$
- for  $(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in D_{N0} - (\underline{D}_{N0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$ ,  $R_D^*(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) = \{\max(0, c(\underline{\sigma}, \sigma_B))\}$
- for  $(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) \in D_{N1} - (\underline{D}_{N1} \cup \{(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0)\})$ ,  $R_D^*(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) = \{\min(-c(\underline{\sigma}, \sigma_A), 0)\}$
- $R_D^*(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) = \{0\}$
- $R_D^*(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0) = \{0\}$
- for  $x \in D - D_{N0} \cup D_{N1} \cup D_{F0} \cup D_{F1}$ ,  $R_D^*(x) = \{0\}$ .

**Theorem 3.** For any initial state  $x_0 \in D$ , there exists a viable solution starting at  $x_0$  which is regulated by  $R_D^*$  in the sense that  $\begin{cases} \text{for almost all } t \geq 0, \\ u(t) \in R_D^*(x(t)) \end{cases}$

PROOF. Let  $\hat{R}_D$  the set-valued map defined by

- for  $x \in \underline{D}_{N0}$ ,  $\hat{R}_D(x) = [0; \bar{u}]$
- for  $x \in \underline{D}_{N1}$ ,  $\hat{R}_D(x) = [-\bar{u}; 0]$
- for  $x \in D_{F0}^\circ \cup (D_{F0} \overset{\circ}{\cap} D_{F2}) \cup (D_{F0} \overset{\circ}{\cap} D_{F4})$ ,  $\hat{R}_D(x) = \{0\}$
- for  $x \in D_{F1}^\circ \cup (D_{F1} \overset{\circ}{\cap} D_{F2}) \cup (D_{F1} \overset{\circ}{\cap} D_{F3})$ ,  $\hat{R}_D(x) = \{0\}$
- for  $(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in D_{N0} - (\underline{D}_{N0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$ ,  $\hat{R}_D(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) = [0; \bar{u}]$
- for  $(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) \in D_{N1} - (\underline{D}_{N1} \cup \{(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0)\})$ ,  $\hat{R}_D(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) = [-\bar{u}; 0]$
- $\hat{R}_D(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) = [0; \bar{u}]$
- $\hat{R}_D(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0) = [-\bar{u}; 0]$
- for  $x \in D - D_{N0} \cup D_{N1} \cup D_{F0} \cup D_{F1}$ ,  $\hat{R}_D(x) = \{0\}$ .

$\hat{R}_D$  is a selection of  $F$  (Def. 5) with convex values. So, from theorem 4 in Appendix A, for any initial state  $x_0 \in D$ , there exists a viable solution to control system (7) starting at  $x_0$  which is regulated by the selection  $S(\hat{R}_D)$  of the regulation map  $R_D$ , in the sense that

$$\begin{cases} \text{for almost all } t \geq 0, \\ u(t) \in S(\hat{R}_D)(x(t)) := R_D(x(t)) \cap \hat{R}_D(x(t)) \end{cases} \quad (38)$$

$S(\hat{R}_D)(x)$  is defined by

- for  $x \in \underline{D}_{N_0}$ ,  $S(\hat{R}_D)(x) = \bar{u}$  ; for  $x \in \underline{D}_{N_1}$ ,  $S(\hat{R}_D)(x) = -\bar{u}$
- for  $x \in \overset{\circ}{D}_{F_0} \cup (D_{F_0} \overset{\circ}{\cap} D_{F_2}) \cup (D_{F_0} \overset{\circ}{\cap} D_{F_4})$ ,  $S(\hat{R}_D)(x) = \{0\}$
- for  $x \in \overset{\circ}{D}_{F_1} \cup (D_{F_1} \overset{\circ}{\cap} D_{F_2}) \cup (D_{F_1} \overset{\circ}{\cap} D_{F_3})$ ,  $S(\hat{R}_D)(x) = \{0\}$
- for  $(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in D_{N_0} - (\underline{D}_{N_0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$ ,  $S(\hat{R}_D)(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) = [\max(c(\underline{\sigma}, \sigma_B), 0); \bar{u}]$
- for  $(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) \in D_{N_1} - (\underline{D}_{N_1} \cup \{(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0)\})$ ,  $S(\hat{R}_D)(\sigma_A, \underline{\sigma}, s) = [-\bar{u}; \min(-c(\underline{\sigma}, \sigma_A), 0)]$
- $S(\hat{R}_D)(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1) = \{0\}$
- $S(\hat{R}_D)(1 - \underline{\sigma}, \underline{\sigma}, 0) = \{0\}$
- for  $x \in D - D_{N_0} \cup D_{N_1} \cup D_{F_0} \cup D_{F_1}$ ,  $S(\hat{R}_D)(x) = \{0\}$ .

$S(\hat{R}_D)$  only differs from  $R_D^*$  for  $(\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in D_{N_0} - (\underline{D}_{N_0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$  and for the symmetric.

Assume that  $x_0 = (\underline{\sigma}, \sigma_B, s) \in N_{D_0} - (\underline{N}_{D_0} \cup \{(\underline{\sigma}, 1 - \underline{\sigma}, 1)\})$ .

Let  $x(\cdot)$  be a viable evolution starting at  $x_0$  and regulated by  $S(\hat{R}_D) : u(0) \in [\max(c(\underline{\sigma}, \sigma_B), 0); \bar{u}]$ .

- if  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) \leq 0$ ,  $u(0) \in [0; \bar{u}]$  and  $\exists \delta > 0$  such that  $\forall t \in ]0; \delta[$ ,  $x(t) \in \overset{\circ}{D}$  and for almost all  $t \in [0, \delta[$ ,  $u(t) = \{0\} \in R_D^*(x(t))$
- if  $c(\underline{\sigma}, \sigma_B) > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  such that  $\forall t \in [0; \delta[$ ,  $x(t) \in \underline{N}_{D_0}$ , so for almost all  $t \in [0; \delta[$ ,  $u(t) = c(\underline{\sigma}, \sigma_B(t)) \in R_D^*(x(t))$ .

Consequently, for any initial state  $x_0 \in D$ , there exists a viable solution to control system (7) starting at  $x_0$  which is regulated by the minimal selection  $R_D^*$ . ■

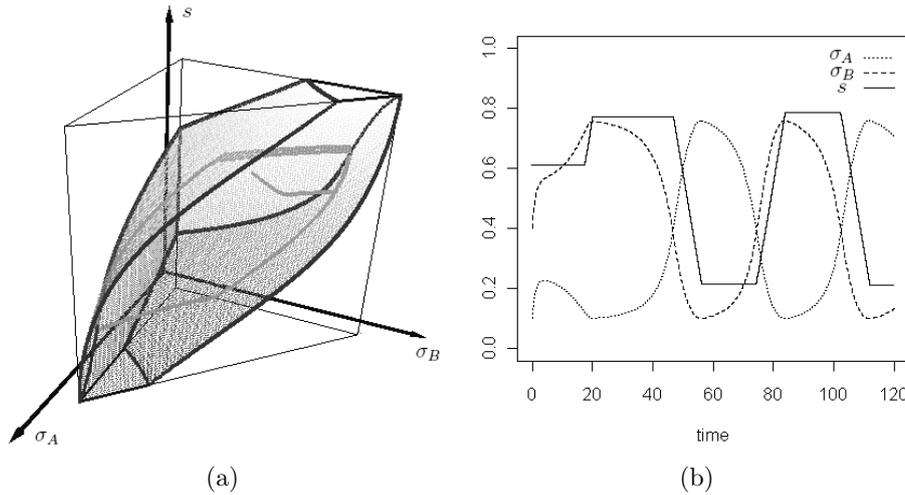


Figure 11: An example of slow viable evolution : the 3D-plot of its trajectory 11(a) and the evolution of the three variable values over time 11(b) ( $\underline{\sigma} = 0.1$  and  $\bar{u} = 0.06$ ).

#### 4.4. The computation of a particular slow viable evolution

The slow viable evolution consists in choosing at each time the control with minimal norm. In the case of the language competition model, the control is the variation speed of the relative prestige of both languages. Consequently, the slow viable evolution exhibits constant relative prestige periods until viability is at stake. For instance, in the case of the slow viable evolution starting with 10% of monolingual speakers of language  $A$ , 40% of monolingual speakers of language  $B$  (and consequently 50% of bilingual speakers), described in figure 11, the relative prestige remains constant between  $t = 0$  and  $t = 17.5$ ,  $t = 20.2$  and  $t = 47.0$ ,  $t = 56.3$  and  $t = 74.4$ , and  $t = 84.1$  and  $t = 102.3$ . However, these constant relative prestige periods are separated by prestige variation periods. Actually, a constant prestige evolution would lead to exit the viability domain (remark 1). The cumulative length of the variation prestige periods during this simulation represents 26% of the full simulation length.

It is also worth noting that to ensure coexistence prestige variation politics have to be undertaken when the constant prestige evolution reaches the boundary of the viability domain. That means that measures may have to be undertaken relatively far from the constraint set boundary : for instance, at

time  $t = 47.0$ , measures to increase the relative prestige of language  $B$  have to be undertaken to prevent language  $B$  community to go below the given threshold, but at that time, both communities size are far this threshold :  $\sigma_A = 41\%$  and  $\sigma_B = 37\%$ . This illustrates the viability analysis as a tool of anticipation to take measures to prevent future viability loss.

## 5. Conclusion

Abrams and Strogatz [2] end their paper of the analysis of their model of language competition by the statement that ”‘ Contrary to the models stark prediction, bilingual societies do, in fact, exist. [...] The example of Quebec French demonstrates that language decline can be slowed by strategies such as policy-making, education and advertising, in essence increasing an endangered languages status.’” Following this way, we have considered the status, the prestige, as a variable in a model of language competition taking explicitly into account the bilingual subpopulation. Crystal [1] describes the main mechanisms that make the prestige vary. We do not go into this detail but assume that the variations of this prestige with time are bounded (policy making as education take time).

We have then answered the question of determining a set of prestige variations that preserve both monolingual subpopulations following a viability theory approach.

- we have defined in the state space the constraint set representing the preservation of both monolingual subpopulations
- this constraint set is not a viability domain, so we have built inside it a viability domain : from all states of a viability domain there exists a control such that the evolution remains in the viability domain. This domain is a true set where both monolingual subpopulations can be preserved
- we have then proposed a selection of the regulation map that governs slow viable evolutions
- finally, we have illustrated this method from a given state, showing how a slow viable evolution made of constant control periods separated by specified interventions allow to preserve both monolingual subpopulations, although constant policy would lead to the extinction of one of them.

## Appendix A. Selection of viable solutions : a definition and a theorem

**Definition 5 (Selection Procedure).** Let  $Y$  a normed space. A selection procedure of a set-valued map  $F : X \rightsquigarrow Y$  is a set-valued map  $S_F : X \rightsquigarrow Y$  satisfying

$$\begin{cases} (i) & \forall x \in \text{Dom}(F), S(F(x)) := S_F(x) \cap F(x) \neq \emptyset \\ (ii) & \text{the graph of } S_F \text{ is closed} \end{cases}$$

The set-valued map  $S(F) : x \rightsquigarrow S(F(x))$  is called the selection of  $F$ .

**Theorem 4.** *Let us consider a Marchaud control system  $(U, f)$  and suppose that  $K$  is a viability domain. Let  $S_{R_K}$  be a selection of the regulation map  $R_K$ . Suppose that the values of  $S_{R_K}$  are convex. Then, for any initial state  $x_0 \in K$ , there exists a viable solution starting at  $x_0$  and a viable control to control system  $(U, f)$  which are regulated by the selection  $S(R_K)$  of the regulation map  $R_K$ , in the sense that*

$$\begin{cases} \text{for almost all } t \geq 0, \\ u(t) \in S(R_K)(x(t)) := R_K(x(t)) \cap S_{R_K}(x(t)) \end{cases}$$

- [1] D. Crystal, *Language Death*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [2] D. Abrams, S. Strogatz, Modelling the dynamics of language death, *Nature* 424 (6951) (2003) 900.
- [3] D. Crystal, *The Cambridge Encyclopedia of Language*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [4] I. Baggs, H. I. Freedman, A mathematical model for the dynamics of interactions between a unilingual and a bilingual population : Persistence versus extinction, *J. Math. Sociol.* 16 (1) (1990) 51–75.
- [5] J. Wyburn, J. Hayward, The future of bilingualism : An application of the baggs and freedman model, *J. Math. Sociol.* 32 (2008) 267–284.
- [6] H. El-Owaidy, M. Ismail, A mathematical model of bilingualism, *Appl. Math. Comput.* 131 (2002) 415–432.
- [7] J. Mira, A. Paredes, Interlinguistic similarity and language death dynamics, *Europhys. Lett.* 69 (2005) 1031–1034.
- [8] X. Castello, V. Eguíluz, M. S. Miguel, Ordering dynamics with two non-excluding options: bilingualism in language competition, *New J. Phys.* 8 (2006) 308–322.
- [9] J. Minett, W. Wang, Modelling endangered languages: the effects of bilingualism and social structure, *Lingua* 118 (2008) 19–45.
- [10] L. Chapel, X. Castellò, C. Bernard, G. Deffuant, V. M. Eguíluz, S. Martin, M. S. Miguel, Viability and resilience of languages in competition, *PLoS ONE* 5 (1) (2010) e8681. doi:10.1371/journal.pone.0008681.
- [11] J. Aubin, *Viability Theory*, Birkhäuser, Basel, 1991.
- [12] W.-Y. Wang, J. Minett, The invasion of language: emergence, change and death, *Trends in Ecology and Evolution* 20 (5) (2005) 263–269.



# Description des paramètres

---

Nous donnons dans cette annexe les détails concernant les valeurs des paramètres utilisées dans les modèles en trois dimensions (section B.1) et en cinq dimensions (section B.2) du problème de gestion durable. La plupart de ces données proviennent de l'expérience et l'observation sur le terrain de nos équipes partenaires à Madagascar. Pour les autres valeurs, les sources sont spécifiées.

## B.1 Modèle du chapitre 5

### Variables d'états

#### Surface forestière

La surface forestière a été difficile à estimer. En effet, certaines données concernent la forêt primaire alors que d'autres données incluent la forêt primaire et la forêt secondaire. De plus, selon les sources, ces données diffèrent. L'USAID <sup>1</sup> (dont les données sont utilisées par le gouvernement malgache) donne la surface de forêt primaire uniquement. A partir de cette surface (57 764 hectares en 2005), nous extrapolons la surface forestière totale à  $F_{min} = 65000$  ha. L'estimation de la surface forestière en 1960 est difficile à obtenir. A l'échelle de la zone d'étude, la donnée la plus ancienne dont nous disposons date de 1990, et est fournie par l'USAID (il s'agit donc de forêt primaire), elle est de 77 358 hectares. Nous avons estimé la surface forestière en 1960 sur le corridor à 110000 hectares, en reprenant les données sur la couverture forestière sur l'île toute entière. Nous disposons pour cela de données à des dates différentes provenant de diverses sources ([Muttenger, 2006], page 118).

#### Population

L'estimation de la population n'est pas aisée car le corridor forestier Ranomafana-Andringitra se trouve à cheval sur plusieurs régions. Nous avons donc réalisé une estimation de la population à partir des données de l'INSTAT<sup>2</sup> (1993). Nous avons fixé une population minimale de  $P_{min} = 500000$  hab. La population maximale est une donnée qui n'intervient pas sur le calcul du noyau de viabilité, sa justification est uniquement algorithmique. Nous l'avons choisi volontairement élevée dans ce but :  $P_{max} = 10000000$  hab.

---

<sup>1</sup>United States Agency for International Development

<sup>2</sup>Institut National de la Statistique de Madagascar

## Capital

L'estimation du capital minimal correspond à 800 US\$ par individu et par an, en considérant la population minimale. Cette estimation, plutôt optimiste, s'appuie sur les discussions avec les équipes de recherche présentes sur le terrain.

## Variables de contrôles

### Taux d'accroissement

Le taux d'accroissement de la population en milieu rural est 3.1 % à Madagascar (Source INSTAT, recensement de 1993). Nous ne disposons pas de données spécifiques pour notre région d'étude, ni de données plus récentes (aucun nouveau recensement n'ayant été effectué). Nous cherchons à déterminer des taux d'accroissement minimaux et maximaux à l'intérieur desquels les taux d'accroissement futurs vont évoluer. En nous basant sur les extrapolations réalisées par l'INSTAT à partir des données de 1993, nous estimons que ces taux peuvent évoluer entre  $r_{min} = 0$  et  $r_{max} = 0.4$ .

### Effort d'aménagement maximal

Nous avons pu déterminer cette valeur grâce aux discussions sur le terrain, qui nous ont donné le nombre de 50 à 60 hommes par jour pour défricher un hectare de forêt et de 70 à 100 hommes par jour pour aménager en casiers prêt à recevoir des cultures un hectare de terrain défriché. Nous avons donc  $\delta_{max} = 0.46$  ha/capita.

### Transferts monétaires maximaux

Les transferts monétaires maximaux sont fixés à  $\tau_{max} = 10^7$  US\$. L'objectif étant de mesurer l'effet de ce transfert monétaire, nous avons donc testé plusieurs valeurs pour le transfert monétaire maximal.

## Autres paramètres

### Besoins physiologiques

Les besoins physiologiques de la population ont été calculés à partir du niveau de pauvreté relative. Celui-ci correspond à 60% du revenu moyen. Les revenus moyens par habitant à Madagascar nous ont été fournis par l'INSTAT (2003).

### Salaire agricole

Lorsqu'un homme travaille dans une exploitation agricole, il n'est payé en général qu'en alimentation. Nous avons donc converti ce "salaire" en US\$. Par ailleurs, un homme travaillant pour une ONG peut obtenir un salaire trois fois supérieur à celui d'un travailleur agricole. Nous avons donc fait une moyenne entre ces deux valeurs.

### Prix du riz

Nous avons considéré le prix auquel était acheté le riz au producteur. A partir des données de l'INSTAT (2003), nous avons estimé ce prix à 0.3 US\$/kg.

### Productivité d'un hectare

Selon l'INSTAT, la productivité d'un hectare de riz est de 2008 kg/ha en moyenne sur la commune de Fianarantsoa. Notre région d'étude disposant de conditions climatiques moins favorables (altitude), la productivité est plus faible. On considère donc une productivité de 1000 kg/ha.

### Autres valeurs

Suite aux discussions avec les équipes malgaches, nous avons pu déterminer la valeur du coût de défriche d'un hectare ainsi que la surface maximale cultivable.

Définition	Notation	Unité	Valeur
Besoins physiologiques de la population	$\underline{c}$	US\$/capita/an	200
Coût de défriche d'1 ha	$\beta$	US\$/ha	25
Prix du riz	$p$	US\$/kg	0.30
Productivité d'1 ha	$e$	kg/ha/an	1000
Surface cultivable maximale	$\gamma$	ha/capita	0.46
Salaire agricole	$\omega$	US\$/capita/an	200
Effort d'aménagement maximal	$\delta_{max}$	ha/capita/an	0.008
Transferts monétaires maximaux	$\tau_{max}$	US\$/an	1000000
Taux d'accroissement minimal	$r_{min}$	sans unité/an	0
Taux d'accroissement maximal	$r_{max}$	sans unité/an	0.04
Surface forestière de référence	$F_0$	ha	110000
Surface forestière minimale	$F_{min}$	ha	65000
Capital minimal	$k_{min}$	US\$	400000000
Population minimale	$P_{min}$	capita	500000
Population maximale	$P_{max}$	capita	10000000

TAB. B.1 – Valeur des paramètres et bornes des contrôles et contraintes pour le modèle 5.2

## B.2 Modèle du chapitre 6

### Variables de contrôles

#### Variation du taux de natalité

Nous avons fixé des bornes sur la variation du taux de natalité correctif, ceci afin d'éviter des variations trop brutales. Les valeurs retenues  $u_{min} = -0.1$  et  $u_{max} = 0.1$  traduisent une évolution lente.

Définition	Notation	Unité	Valeur
Variation minimale du taux de natalité correctif	$u_{min}$	sans unité	-0.1
Variation maximale du taux de natalité correctif	$u_{max}$	sans unité	0.1
Effort d'aménagement minimal	$\delta_{min}$	ha/capita/an	0
Effort d'aménagement maximal	$\delta_{max}$	ha/capita/an	0.008
Proportion minimale de travailleurs de l'extérieur	$W_{0,min}$	sans unité	0
Proportion maximale de travailleurs de l'extérieur	$W_{0,max}$	sans unité	0.05
Variation minimale de la proportion de travailleurs extérieurs	$w_{min}$	sans unité	-0.001
Variation maximale de la proportion de travailleurs extérieurs	$w_{max}$	sans unité	0.01
Transferts monétaires minimaux	$\tau_{min}$	US\$	0
Transferts monétaires maximaux	$\tau_{max}$	US\$	1000000

TAB. B.2 – Valeurs des bornes des contrôles pour le modèle 6.1

### Effort d'aménagement

On conserve les mêmes valeurs des bornes de l'effort d'aménagement minimal et maximal que pour le modèle du chapitre 5, c'est-à-dire  $\delta_{min} = 0$ ha/capita/an et  $\delta_{max} = 0.008$ ha/capita/an.

### Proportion de travailleurs de l'extérieur

La proportion minimale de travailleurs provenant de l'extérieur est nulle. Une proportion maximale de travailleurs de l'extérieur de 5% a été considérée comme étant raisonnable. Cela permet de limiter le nombre de travailleurs de l'extérieur qui ne viennent qu'en cas de surcharge de travail.

### Variation de la proportion de travailleurs extérieurs

De même que pour le taux de natalité correctif, nous avons également fixé des bornes sur la variation de la proportion de travailleurs salariés  $w_{min} = -0.001$  et  $w_{max} = 0.01$ .

### Transferts monétaires

On conserve les mêmes valeurs des bornes des transferts monétaires minimaux et maximaux que pour le modèle du chapitre 5, c'est-à-dire  $\tau_{min} = 0$ US\$ et  $\tau_{max} = 1000000$ US\$.

Définition	Notation	Unité	Valeur
Taux de décès	$\beta$	sans unité	1.4%
Taux de natalité actuel	$\bar{\alpha}$	sans unité	4.4%
Taux de croissance de la forêt	$\eta$	sans unité	$2.58.10^{-3}$
Coefficient d'élasticité	$\gamma$	sans unité	0.39
Coefficient d'élasticité	$\theta$	sans unité	0.36
Salaire agricole	$\omega$	US\$/capita/an	200
Coefficient de dépréciation du capital	$\lambda$	sans unité	0.005
Coût de défriche d'1 ha	$\mu$	US\$/an/ha	4224
Besoins physiologiques de la population	$\underline{c}$	USD/capita/an	8.4
Proportion de travailleurs effectifs	$\rho_1$	sans unité	0.6
Productivité des nouvelles surfaces	$e_1(K)$	t/ha	2.5
Productivité des anciennes surfaces	$e_2(K)$	t/ha	1.0
Prix du riz	$s$	US\$/t	300
Surface forestière en 1960	$F_0$	ha	110000

TAB. B.3 – Valeurs des paramètres pour le modèle 6.1

### Autres paramètres

#### Taux d'accroissement

D'après le recensement de 1993, le taux de natalité est 4.4% tandis que le taux de mortalité est de 1.4%. Ces données, fournies par l'INSTAT concerne Madagascar dans son ensemble, et non pas uniquement la région du corridor forestier de Fianarantsoa.

#### Croissance de la forêt

Le taux de croissance de la forêt concerne la forêt mondiale et non uniquement Madagascar. Nous avons repris l'estimation  $\eta = 2.58.10^{-3}$  calculé dans [Andrés-Domenech *et al.*, 2008].

#### Coefficient d'élasticité

Les valeurs choisies pour les coefficients d'élasticité  $\gamma = 0.39$  et  $\theta = 0.36$  ont été évaluée à partir de [Brooks *et al.*, 2009].

#### Salaire agricole

Le salaire agricole  $\omega = 200\text{US}\$/\text{capita}/\text{an}$  est calculé de la même façon que pour le modèle du chapitre 5. Cependant, la valeur obtenue est un salaire journalier.

#### Coefficient de dépréciation du capital

Le coefficient de dépréciation du capital est  $\lambda = 0.005$ .

### Coût de défriche d'un hectare

Suite aux discussions sur le terrain avec les équipes malgaches, nous avons réalisé une nouvelle estimation du coût de défriche d'un hectare à  $\mu = 4224$  US\$. Cette estimation diffère du modèle du chapitre 5 en raison du sens attribué au mot "défriche". La charge de travail considérée dans la défriche n'est pas toujours identique selon les interlocuteurs.

### Besoins physiologiques de la population

Les besoins physiologiques de la population ont été évalués à 8.4US\$, ce qui constitue une vision assez pessimiste. Contrairement au modèle précédent, nous nous sommes basés pour cette estimation sur les discussions avec les équipes sur le terrain, où les besoins sont souvent exprimés en quantité de riz nécessaire à une personne.

### Proportion de travailleurs effectifs

Selon l'âge et le sexe, les travaux effectués par chacun diffèrent. Il est difficile d'évaluer la proportion de travailleurs effectifs. Les équipes malgaches nous ont fourni des estimations de l'âge minimum et maximum pour travailler ainsi que les le type de travaux effectués par chacun. Les plus jeunes travailleurs ont 10 ans et commencent par effectuer des tâches moins physiques que la défriche. Cette dernière est réservée aux hommes entre 15 et 50 ans. A partir de ces données, nous avons estimé la proportion de travailleurs effectifs à 0.6.

### Productivité

Pour les estimations de la productivité, nous nous sommes basés sur les travaux de [Tsujiimoto *et al.*, 2009] qui portent sur la possibilité d'amélioration de la productivité du riz sur le corridor forestier à Madagascar.

### Prix du riz

Cette valeur est identique à celle du modèle du chapitre 5, c'est-à-dire  $s = 0.30$ US\$.

### Surface forestière de référence

Cette valeur est identique à celle du modèle du chapitre 5, c'est-à-dire  $F_0 = 110000$ ha.

# Bibliographie

- [Abrams, 2003] ABRAMS, D.M., S. S. (2003). Modelling the dynamics of language death. *Nature*, 424(6951):900. 36
- [Alvarez *et al.*, 2011] ALVAREZ, I., BERNARD, C., MARTIN, S. et SAINT-PIERRE, P. (2011). Competition linguistique : strategies pour favoriser la coexistence durable en présence de bilinguisme. In *48 ème colloque ASRDLF (Association de Science Regionale de Langue Française)*. 35
- [Andrés-Domenech *et al.*, 2008] ANDRÉS-DOMENECH, P., SAINT-PIERRE, P. et ZACCOUR, G. (2008). Forest conservation and co2 emissions : A viable approach. *Les cahiers du GERAD*, G-2008-86:25. 27, 85, 147
- [Arrow *et al.*, 1996] ARROW, K., BOLIN, B., COSTANZA, R., DASGUPTA, P., FOLKE, C., HOLLING, C., JANSSON, B.-O., LEVIN, S., MÄLER, K.-G., PERRINGS, C. et PIMENTEL, D. (1996). Economic growth, carrying capacity, and the environment. *Ecological Applications*, 6(1):13–15.
- [Aubin et Saint-Pierre, 2002] AUBIN, J. et SAINT-PIERRE, P. (2002). *An Introduction to Viability Theory and Management of Renewable Resources*, chapitre 2. 18
- [Aubin, 1991] AUBIN, J.-P. (1991). *Viability Theory*. Birkhäuser. 1, 24, 35
- [Aubin et Haddad, 2002] AUBIN, J.-P. et HADDAD, G. (2002). History path dependent optimal control and portfolio valuation and management. *Positivity*, 6(3):331–358.
- [Aubin *et al.*, 2005] AUBIN, J.-P., PUJAL, D. et SAINT-PIERRE, P. (2005). Dynamic management of portfolios with transaction costs under tyochastic uncertainty. In BRETON, M. et BEN-AMEUR, H., éditeurs : *Numerical Methods in Finance*, pages 59–89. Springer US. 26
- [Baumgärtner et Quaas, 2009] BAUMGÄRTNER, S. et QUAAS, M. (2009). Ecological-economic viability as a criterion of strong sustainability under uncertainty. *Ecological Economics*, 68(7):2008–2020. 12
- [Bernard, 2009] BERNARD, C. (2009). Mathematical modelling of sustainable development : an application to the case of the rain-forest of madagascar. In *9th International Symposium on Mathematical and Computational Biology - BIOMAT 2009 , 01/08/2009-06/10/2009, Brasilia, BRA / Biomat 2009. Mondaini, RP.*, pages 152–166, Brésil. Mondaini RP. 56
- [Béné *et al.*, 2001] BÉNÉ, C., DOYEN, L. et GABAY, D. (2001). A viability analysis for a bio-economic model. *Ecological Economics*, 36(3):385–396. 28
- [Bonneuil, 2003] BONNEUIL, N. (2003). Making ecosystem models viable. *Bulletin of Mathematical Biology*, 65:1081–1094.

- [Bonneuil et Saint-Pierre, 2000] BONNEUIL, N. et SAINT-PIERRE, P. (2000). Protected polymorphism in the two-locus haploid model with unpredictable fitnesses. *Journal of Mathematical Biology*, 40(3):251–277. 26
- [Bonneuil et Saint-Pierre, 2008] BONNEUIL, N. et SAINT-PIERRE, P. (2008). Beyond optimality : Managing children, assets, and consumption over the life cycle. *Journal of Mathematical Economics*, 44:227 – 241. 26
- [Brooks *et al.*, 2009] BROOKS, C. P., HOLMES, C., KRAMER, K., BARNETT, B. et KEITT, T. H. (2009). The role of demography and markets in determining deforestation rates near ranomafana national park, madagascar. *PLoS ONE*, 4(6):e5783. 87, 147
- [Brundtland, 1987] BRUNDTLAND, G. (1987). Our common future. *Report of the World Commission on Environment and Development*. 10
- [Chapel *et al.*, 2010] CHAPEL, L., CASTELLÒ, X., BERNARD, C., DEFFUANT, G., EGUÌLUZ, V., MARTIN, S. et SAN MIGUEL, M. (2010). Viability and resilience of languages in competition. *PLoS ONE*, 5(1). 35, 36
- [Chichilnisky, 1997] CHICHILNISKY, G. (1997). What is sustainable development ? *Land Economics*, 73(4):467–491. 9, 11, 14, 19
- [Cobb et Douglas, 1928] COBB, C. et DOUGLAS, P. (1928). A theory of production. *American Economic Review*, 18(Suppl):139–165. 87
- [Daly, 1996] DALY, H. (1996). *Beyond Growth : The Economics of Sustainable Development*. 11
- [Dasgupta *et al.*, 2000] DASGUPTA, P., LEVIN, S. et LUBCHENCO, J. (2000). Economic pathways to ecological sustainability. *BioScience*, 50(4):339–345. 8, 9
- [De Lara et Doyen, 2008] DE LARA, M. et DOYEN, L. (2008). *Sustainable management of natural resources. Mathematical Models and Methods*. Springer-Verlag, Berlin. 25
- [De Lara et Martinet, 2009] DE LARA, M. et MARTINET, V. (2009). Multi-criteria dynamic decision under uncertainty : A stochastic viability analysis and an application to sustainable fishery management. *Mathematical Biosciences*, 217(2):118–124. 2, 28
- [Deffuant *et al.*, 2007] DEFFUANT, G., CHAPEL, L. et MARTIN, S. (2007). Approximating viability kernels with support vector machines. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5):933–937. 2
- [Doyen *et al.*, 2008] DOYEN, L., DUMAS, P. et AMBROSI, P. (2008). Optimal timing of co2 mitigation policies for a cost-effectiveness model. *Mathematical and Computer Modelling*, 48:882 – 897.
- [Doyen et Saint-Pierre, 1997] DOYEN, L. et SAINT-PIERRE, P. (1997). Scale of viability and minimal time of crisis. *Set-Valued Analysis*, 5(3):227–246. 25
- [Durand *et al.*, 2010] DURAND, M.-H., MARTIN, S. et SAINT-PIERRE, P. (2010). Viabilité et développement durable. *Les cahiers du GERAD*, G-2010-29:23. 19, 26

- [Eppink et van den Bergh, 2007] EPPINK, F. V. et van den BERGH, J. C. (2007). Ecological theories and indicators in economic models of biodiversity loss and conservation : A critical review. *Ecological Economics*, 61(2-3):284 – 293.
- [Ferraro et Simpson, 2002] FERRARO, P. J. et SIMPSON, R. D. (2002). The cost-effectiveness of conservation payments. *Land Economics*, 78(3):pp. 339–353.
- [Gibson, 1991] GIBSON, R. (1991). Should environmentalists pursue sustainable development ? *Probe Post*, 13:22–25. 10
- [Goldin et Winters, 1995] GOLDIN, I. et WINTERS, L. (1995). *The Economies of Sustainable Development*.
- [Greening et Bernow, 2004] GREENING, L. et BERNOW, S. (2004). Design of coordinated energy and environmental policies : Use of multi-criteria decision-making. *Energy Policy*, 32(6):721–735. 13
- [Heal, 1998] HEAL, G. (1998). Valuing the future : Economic theory and sustainability. *Columbia University Press*. 14
- [Jansen, 2003] JANSEN, L. (2003). The challenge of sustainable development. *Journal of Cleaner Production*, 11(3):231–245. 8
- [Martin, 2004] MARTIN, S. (2004). The cost of restoration as a way of defining resilience : A viability approach applied to a model of lake eutrophication. *Ecology and Society*, 9(2).
- [Martinet et Blanchard, 2009] MARTINET, V. et BLANCHARD, F. (2009). Fishery externalities and biodiversity : Trade-offs between the viability of shrimp trawling and the conservation of frigatebirds in french guiana. *Ecological Economics*, 68(12):2960 – 2968. 28
- [Martinet et Doyen, 2007] MARTINET, V. et DOYEN, L. (2007). Sustainability of an economy with an exhaustible resource : A viable control approach. *Resource and Energy Economics*, 29(1):17 – 39. 2, 27
- [Martinet et al., 2007] MARTINET, V., THÉBAUD, O. et DOYEN, L. (2007). Defining viable recovery paths toward sustainable fisheries. *Ecological Economics*, 64(2): 411–422. 2, 17, 28, 30, 31
- [Mebratu, 1998] MEBRATU, D. (1998). Sustainability and sustainable development : Historical and conceptual review. *Environmental Impact Assessment Review*, 18(6):493 – 520. 10
- [Minett et Wang, 2008] MINETT, J. et WANG, W.-Y. (2008). Modelling endangered languages : The effects of bilingualism and social structure. *Lingua*, 118(1):19–45. 40
- [Mitcham, 1995] MITCHAM, C. (1995). The concept of sustainable development : its origins and ambivalence. *Technology in Society*, 17(3):311 – 326. 10
- [Munda, 2005] MUNDA, G. (2005). ”measuring sustainability” : A multi-criterion framework. *Environment, Development and Sustainability*, 7(1):117–134. 13

- [Muttенzer, 2006] MUTTENZER, F. (2006). *Déforestation et droit coutumier à Madagascar, l'historicité d'une politique foncière*. Thèse de doctorat, Université de Genève, Faculté des sciences économiques et sociales, Institut universitaire d'études et du développement. 143
- [Pearce et Atkinson, 1993] PEARCE, D. et ATKINSON, G. (1993). Capital theory and the measurement of sustainable development : an indicator of "weak" sustainability. *Ecological Economics*, 8(2):103–108. 12
- [Quincampoix, 1992] QUINCAMPOIX, M. (1992). Differential inclusions and target problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 30(2):324–335. 23
- [Rakotoasimbahoaka et al., 2007] RAKOTOASIMBAHOAKA, C., SERPANTIÉ, G., TOILLIER, A., TREUIL, J., RAMAMONJISOA, A. et HERVÉ, D. (2007). Un automate cellulaire pour modéliser l'aménagement des bas-fonds en fonction du peuplement. *In Transitions agraires, dynamiques écologiques et conservation, Actes du Séminaire GEREM, Antananarivo, 9-10 novembre 2006*, pages 69–77. Serpantié G., Rasolofohariniro, Carrière S.
- [Ramsey, 1928] RAMSEY, F. P. (1928). A mathematical theory of saving. *The Economic Journal*, 38(152):pp. 543–559.
- [Rapaport et al., 2006] RAPAPORT, A., TERREAUX, J. et DOYEN, L. (2006). Viability analysis for the sustainable management of renewable resources. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(5-6):466–484. 26
- [Ratiarson et al., 2007] RATIARSON, V., TREUIL, J., RAMAMONJISOA, B., CARRIÈRE, S., RANDRIAMALALA, J. et HERVÉ, D. (2007). Simulation stochastique de l'historique de parcelles forestières depuis leur première défriche : le cas du couloir forestier de fianarantsoa, madagascar. *In Transitions agraires, dynamiques écologiques et conservation, Actes du Séminaire GEREM, Antananarivo, 9-10 novembre 2006*, pages 117–125. Serpantié G., Rasolofohariniro, Carrière S. 53
- [Rauch, 1998] RAUCH, W. (1998). Problems of decision making for a sustainable development. *Water Science and Technology*, 38(11):31–39. 8
- [Redclift, 2009] REDCLIFT, M. (2009). Sustainable development (1987-2005) - an oxymoron comes of age. *Problemy Ekorozwoju*, 4(1):33–50. 11
- [Robinson, 2004] ROBINSON, J. (2004). Squaring the circle? some thoughts on the idea of sustainable development. *Ecological Economics*, 48(4):369–384. 10
- [Rotillon, 2005] ROTILLON, G. (2005). *Economie des ressources naturelles*. Numéro 406. La Découverte, Paris.
- [Saint-Pierre, 1994] SAINT-PIERRE, P. (1994). Approximation of the viability kernel. *Applied Mathematics & Optimization*, 29(2):187–209. 2, 41, 42, 58, 66
- [Serpantié et Toillier, 2007] SERPANTIÉ, G. et TOILLIER, A. (2007). Dynamiques rurales betsileo à l'origine de la déforestation actuelle. *In Transitions agraires, dynamiques écologiques et conservation, Actes du Séminaire GEREM, Antananarivo, 9-10 novembre 2006*, pages 57–68. Serpantié G., Rasolofohariniro, Carrière S. 52

- [Singh et Lou, 2006] SINGH, A. et LOU, H. H. (2006). Hierarchical pareto optimization for the sustainable development of industrial ecosystems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 45(9):3265–3279.
- [Solow, 1974] SOLOW, R. M. (1974). Intergenerational equity and exhaustible resources. *The Review of Economic Studies*, 41:pp. 29–45.
- [Solow, 1993] SOLOW, R. M. (1993). An almost practical step toward sustainability. *Resources Policy*, 19(3):162 – 172. 9, 11
- [Tiwari et al., 1999] TIWARI, D., LOOF, R. et PAUDYAL, G. (1999). Environmental-economic decision-making in lowland irrigated agriculture using multi-criteria analysis techniques. *Agricultural Systems*, 60(2):99–112.
- [Toillier, 2009] TOILLIER, A. (2009). *Capacités d'adaptation des agriculteurs à la conservation des forêts dans le corridor Ranomafana-Andringitra (Madagascar). Perspectives pour un aménagement intégré des territoires.* Thèse de doctorat, AgroParisTech : ABIÉS. 52
- [Tomlin et al., 2003] TOMLIN, C., MITCHELL, I., BAYEN, A. et OISHI, M. (2003). Computational techniques for the verification of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, 91(7):986 – 1001. 26
- [Tsujiimoto et al., 2009] TSUJIMOTO, Y., HORIE, T., RANDRIAMIHARY, H., SHIRAIWA, T. et HOMMA, K. (2009). Soil management : The key factors for higher productivity in the fields utilizing the system of rice intensification (sri) in the central highland of madagascar. *Agricultural Systems*, 100(1-3):61–71. 148