



Etudes sur le comportement du champ magnétique terrestre durant les périodes de polarité stable

Claire Bouligand

► To cite this version:

Claire Bouligand. Etudes sur le comportement du champ magnétique terrestre durant les périodes de polarité stable. Géophysique [physics.geo-ph]. Institut de physique du globe de paris - IPGP, 2006. Français. NNT: . tel-00676769

HAL Id: tel-00676769

<https://theses.hal.science/tel-00676769>

Submitted on 6 Mar 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

CLAIRE BOULIGAND

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'INSTITUT DE PHYSIQUE DU GLOBE DE
PARIS**

**ÉTUDES SUR LE COMPORTEMENT DU CHAMP
MAGNÉTIQUE TERRESTRE DURANT LES
PÉRIODES DE POLARITÉ STABLE**

Soutenue le 13 septembre 2006 devant le jury composé de :

Jean-Jacques Schott	Rapporteur
Richard Blakely	Rapporteur
Vincent Courtillot	Examineur
Pascal Tarits	Examineur
Gauthier Hulot	Directeur de thèse
Jérôme Dymont	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je remercie tout d’abord Gauthier Hulot et Jérôme Dymont pour m’avoir permis de mener à bien ce travail, pour leurs conseils et leur écoute. Je suis particulièrement reconnaissante à Gauthier pour la rigueur de ses corrections (que j’ai parfois eu du mal à accepter mais qui s’est toujours révélée très bénéfique) et à Jérôme, pour son enthousiasme et sa grande disponibilité (pour répondre à toutes mes “petites questions”).

J’ai également beaucoup apprécié travailler avec Yves Gallet et Andrei Khokhlov. Je les remercie sincèrement pour le temps qu’ils m’ont consacré, pour leur gentillesse et leur patience face à mes questions.

Un grand merci à Philippe Patriat qui m’a accueilli quelques temps dans son laboratoire et m’a donné accès à la base de données géophysiques françaises dans l’Océan Indien. Merci à Gary Glatzmaier qui a fourni les simulations numériques de géodynamo.

J’exprime ma reconnaissance à Vincent Courtillot, Jean-Louis Le Mouél, Clément Narteau, Emmanuel Dormy et Julien Aubert pour leurs commentaires, suggestions et conseils et qui m’ont fourni un regard extérieur sur mon travail.

Je remercie également les membres du jury d’avoir accepté de lire ce manuscrit et de venir assister à ma soutenance.

J’ai beaucoup apprécié la campagne MAGOFOND 3 à bord du Suroit et cela grâce à une équipe scientifique très chaleureuse. Merci à Jérôme, Yves, Jean-Yves, Jean, Mitsuko (ma binôme de quart), Eva (ma binôme de cabine), Moon-Jeong, Benoît et Yujin. Je garde en mémoire les nombreux couchers de soleil, les barbecues sur la plage arrière ou les batailles au tuyau d’arrosage,... Un grand merci à l’équipage qui fut très sympathique et que j’espère peut-être revoir un jour à l’occasion d’une nouvelle campagne en mer.

Un grand merci à Olivier Sirol et Marie-Annie Dambo pour leur gentillesse et la rapidité avec laquelle ils ont su répondre à mes questions informatique ou administrative, à Danielle Fouassier qui m’a fourni des données de l’observatoire de Chambon-La-Forêt pour illustrer mon manuscrit.

Un grand merci à mes voisins de bureau : à Ann-Sophie qui m’a particulièrement encouragée tout au long de ma rédaction et qui fut un coach exemplaire, à Hagay, Luis et Catherine pour leurs réponses à mes nombreuses questions, à Eva pour sa gentillesse et son soutien. Merci également aux étudiants de géomagnétisme et de paléomagnétisme, à Marie-Luce et Mitsu pour leur bonne humeur et leur soutien.

Je remercie également mes parents et mon frère Jérôme qui m’ont soutenu dans les moments difficiles au cours de cette thèse et tout au long de mes années d’étude.

Enfin un immense merci à Laurent qui fut toujours là pour moi. Merci pour ta gentillesse et ta patience.

Résumé

Le comportement du champ magnétique de la Terre, à l'échelle d'un intervalle de polarité, peut être représenté à l'aide de modèles statistiques de type "Giant Gaussian Process" (GGP) permettant de décrire la valeur du champ moyen et la variabilité du champ autour de cette valeur moyenne (ou paléovariation séculaire). Dans un premier temps, le champ magnétique produit par des simulations numériques de géodynamo nous a permis de tester la validité de cette approche. L'étude de la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire au sein de ces simulations a montré que les modèles "GGP" peuvent fournir des informations sur le fonctionnement de la géodynamo et sur l'influence des conditions à la limite noyau manteau. Nous avons ensuite développé une nouvelle méthode permettant de tester les modèles "GGP" avec les mesures de directions paléomagnétiques, en prenant en compte les erreurs de mesures. Dans un second temps, les nombreux profils d'anomalies magnétiques marines de surface disponibles dans les bases de données nous ont permis de mettre en évidence de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde cohérentes sur de grandes distances (ou "tiny wiggles") et qui sont associées pour la plupart à des variations temporelles de l'intensité du champ géomagnétique. La distribution temporelle de ces tiny wiggles à l'intérieur des chrons et au cours de la période étudiée (83-41 Ma, chrons 33r à 19r) est homogène et suggère qu'ils reflètent simplement l'enregistrement filtré d'un régime de variation séculaire constant, contrastant avec l'évolution de la fréquence des inversions caractérisant la période étudiée.

Abstract

The behaviour of the Earth's magnetic field, at the timescale of a polarity interval, can be represented with the help of "Giant Gaussian Process" statistical models that describe the value of the mean field and the variability of the field about this mean value (or paleosecular variation). The magnetic field produced by numerical geodynamo simulations has first been used to test the validity of this approach. The study of the morphology of the mean field and the paleosecular variation in these simulations shows that "GGP" models can give information on the way the geodynamo works and on the influence of the core mantle boundary conditions. We next developed a new method to test "GGP" models against paleomagnetic directional data, taking measurement errors into account. Finally, the numerous sea-surface magnetic profiles available in databases have been used to show the existence of numerous coherent short wavelength anomalies (or "tiny wiggles") which are, for most of them, associated to temporal variations of the intensity of the Earth's magnetic field. The temporal distribution of these tiny wiggles within chrons and throughout the investigated period (83-41 Ma, chrons 33r to 19r) is homogenous and suggests that they simply correspond to a filtered record of a constant secular variation regime, contrasting with the evolution of the reversal frequency that characterises the investigated period.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Origine du champ magnétique de la Terre	5
1.2	Le champ magnétique historique	6
1.2.1	Sa mesure directe	6
1.2.2	Ses variations temporelles	8
1.2.3	Ses variations spatiales	10
1.3	Le champ paléomagnétique	15
1.3.1	Sa mesure indirecte	15
1.3.2	Ses variations temporelles	20
1.3.3	Ses variations spatiales	29
1.4	Problématique et organisation du mémoire	42
2	Que nous apprennent les simulations numériques de géodynamo sur la modélisation statistique du champ paléomagnétique ?	45
2.1	Présentation des simulations numériques	46
2.2	Test des hypothèses fondamentales des modèles paléomagnétiques statistiques	51
2.2.1	Comportement aléatoire	51
2.2.2	Stationnarité	54
2.2.3	Distribution gaussienne	56
2.2.4	Bilan	58
2.3	Propriétés de symétrie du champ moyen et de la paléovariation séculaire .	58
2.3.1	Symétries et conditions sur les coefficients de Gauss	58
2.3.2	Symétries dans les simulations numériques	60

2.4	Conséquences pour la modélisation statistique du champ paléomagnétique .	64
2.4.1	Origine des ruptures de symétrie	64
2.4.2	Conseil pour la modélisation statistique	67
2.5	Etude détaillée : <i>Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations</i>	68
2.6	Etude détaillée : <i>Statistical palaeomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation</i>	68
3	Test des modèles paleomagnetiques statistiques à partir des mesures de direction	105
3.1	Expression de la distribution des directions paléomagnétiques	106
3.2	Comparaison des distributions prédites et observées	108
3.3	Prise en compte des erreurs de mesure	112
3.4	Validation et application de la méthode	112
3.5	Etude détaillée : <i>Testing statistical paleomagnetic field models against directional data affected by measurement errors</i>	114
4	Etude des fluctuations temporelles de l'intensité du champ géomagnétique entre les chrons 33r et 19r (83-41 Ma) à partir des profils magnétiques marins de surface	151
4.1	Les mesures magnétiques marines	152
4.1.1	Acquisition	152
4.1.2	Origine des anomalies magnétiques marines	153
4.1.3	Modélisation de la source des anomalies magnétiques	157
4.1.4	Les anomalies magnétiques de courte longueur d'onde	159
4.1.5	Résolution temporelle des profils de surface	160
4.2	Données et traitement	164
4.2.1	Sélection des données	164
4.2.2	Réduction au pôle	164
4.2.3	Calage en temps	167
4.2.4	Sommation	168

4.2.5	Comparaison de stacks correspondant à des taux d'expansion différents	169
4.3	Résultats	172
4.4	Etude détaillée : <i>Geomagnetic field variations between chrons 33r and 19r (83-41 Ma) from sea-surface magnetic anomaly profiles</i>	174
5	Conclusions et perspectives	221
5.1	Modélisation statistique du champ paléomagnétique	221
5.2	Evolution à long terme des fluctuations du champ géomagnétique	223
5.3	Bilan	225
A	Zones d'étude sélectionnées pour l'étude des anomalies 19r à 33r	239

Chapitre 1

Introduction

1.1 Origine du champ magnétique de la Terre

Le champ magnétique de la Terre a plusieurs sources (figure 1.1). Sa source principale est localisée dans le noyau externe fluide de la Terre. Le champ magnétique y est généré et entretenu par effet dynamo : la circulation de fluide conducteur dans un champ magnétique provoque des courants électriques qui génèrent à leur tour un champ magnétique. L'intensité de ce champ d'origine "nucléaire" (ou champ principal) est d'environ 40000 nT à la surface de la Terre (variant de 30000 nT à l'équateur à 65000 nT aux pôles). Ce champ présente des variations temporelles à l'échelle du siècle, ou variation séculaire. L'aimantation de la croûte constitue une autre source de champ magnétique. L'intensité du champ d'origine crustale à la surface de la Terre est généralement de l'ordre de 100 nT (par exemple à la surface des océans) mais peut localement atteindre quelques milliers de nT (suivant la nature des roches rencontrées). Les sources crustales et nucléaires sont séparées par le manteau très peu conducteur et non aimanté. A ce champ d'origine interne, s'ajoute un champ d'origine externe, produit par des courants électriques dans la haute atmosphère (ionosphère et magnétosphère). Ce champ présente des variations temporelles très rapides (observables sur une journée de mesure). Au sol, l'intensité du champ externe est de l'ordre de 10 nT pendant les périodes calmes mais peut atteindre 1000 nT au cours d'un orage magnétique. Il existe d'autres sources secondaires de champ magnétique, comme par exemple des courants électriques au sein de la croûte, du manteau, ou des océans, leurs contributions sont d'amplitude moindre par rapport aux sources citées ci-dessus et seront donc négligées.

La contribution des différentes sources dépend de l'altitude ou de la profondeur des mesures (figure 1.1), en particulier, selon que l'on s'intéresse à des mesures acquises par

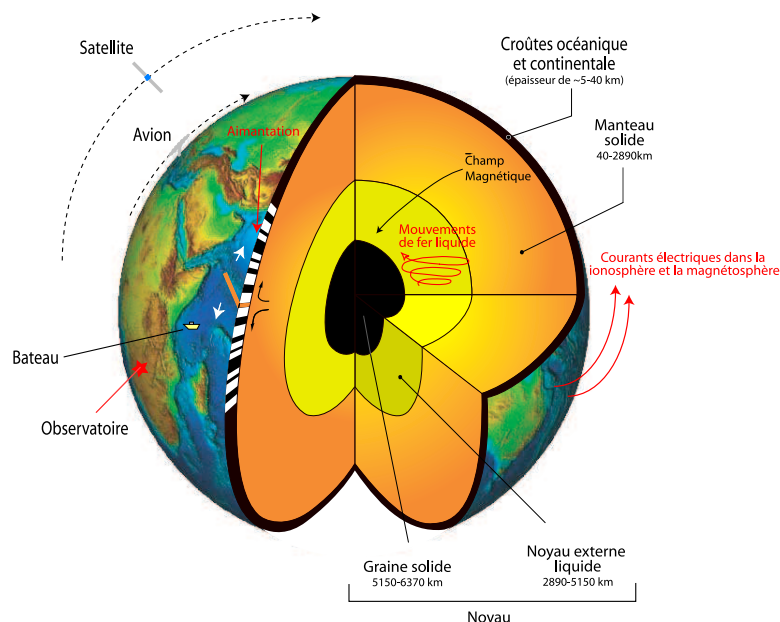


FIG. 1.1 – Le champ magnétique mesuré à la surface de la Terre a plusieurs sources : les circulations de fluide conducteur dans le noyau externe (champ principal), l'aimantation de la croûte (champ crustal) et des courants électriques dans la ionosphère et dans la magnétosphère (champ externe). Les contributions respectives de ces différentes sources varient suivant l'altitude de mesure.

satellite, par avion, à terre ou en mer, en surface ou à proximité du plancher océanique (mesures “deep-tow” ou par submersible).

1.2 Le champ magnétique historique

Cette section n'a pas pour objectif d'être exhaustive mais simplement d'introduire la façon dont on peut distinguer, à partir des mesures historiques, la contribution des différentes sources du champ magnétique de la Terre et de présenter les caractéristiques majeures du champ principal en termes de variations temporelle et spatiale.

1.2.1 Sa mesure directe

Le champ magnétique $\vec{B}$ est un vecteur (figure 1.2). Il est possible de mesurer ses trois composantes B_X , B_Y et B_Z (mesures vectorielles) ou de ne mesurer que sa norme F (mesures scalaires) ou sa direction, définie par l'inclinaison I et la déclinaison D (mesures directionnelles).

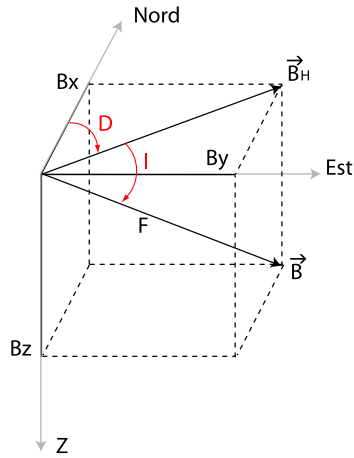


FIG. 1.2 – Décomposition du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ suivant les directions Nord (B_x), Est (B_y) et profondeur Z (B_z). La direction du vecteur $\vec{B}$ peut être définie par deux angles, l'inclinaison I (angle entre le vecteur $\vec{B}$ et son projeté dans le plan horizontal $\vec{B}_H$, compté positivement vers le bas) et la déclinaison D (angle entre le nord et $\vec{B}_H$, compté positivement vers l'est). F est la norme du vecteur $\vec{B}$.

Pour mesurer le champ magnétique produit par la Terre, il est nécessaire d'éloigner l'instrument de mesure, le magnétomètre, des sources artificielles de champ magnétique liées à l'activité humaine. C'est pourquoi, les observatoires sont localisés en milieu rural, loin des routes, et les magnétomètres embarqués sur des engins sont généralement tractés au bout d'un câble amagnétique, pour le cas des navires, ou fixés sur un bras amagnétique, pour le cas des satellites. Il n'est cependant pas toujours possible d'éloigner suffisamment l'instrument de mesure de l'engin, pour que les perturbations soient négligeables. C'est le cas, par exemple, des magnétomètres vectoriels embarqués à bord de navires et dont l'orientation doit être connue. Il est alors nécessaire d'effectuer une correction des mesures pour prendre en compte le champ magnétique créé par le navire.

De manière à contraindre à la fois ses variations temporelles et spatiales, le champ géomagnétique est mesuré de façon continue en des points fixes, dans des observatoires, ou le long de trajectoires à bord d'engins (bateau, ballon sonde, avion ou satellite). Ces différents types de mesures sont complémentaires. La mesure en observatoire permet de suivre les variations temporelles et sert de référence pour les mesures embarquées par des engins. Le nombre d'observatoires est cependant limité (environ 200) et leur répartition est hétérogène (figure 1.3a). Ils ne sont localisés que sur les terres émergées et principalement dans l'hémisphère Nord. Ces données remontent jusqu'au XIX^e siècle, le premier observatoire ayant été créé en 1839 à Göttingen. Les mesures par satellite fournissent au contraire un réseau dense de mesures réparties de façon homogène à la surface de la Terre (figure 1.3b) et permettent la réalisation de cartes du champ géomagnétique. Les données satellitaires ne couvrent cependant que la période très récente grâce aux données du satellite MAGSAT, lancé en 1979 et ayant fonctionné 6 mois, et des satellites Ørsted et CHAMP, lancés en 1999 et 2000 et fonctionnant encore aujourd'hui (pour une description

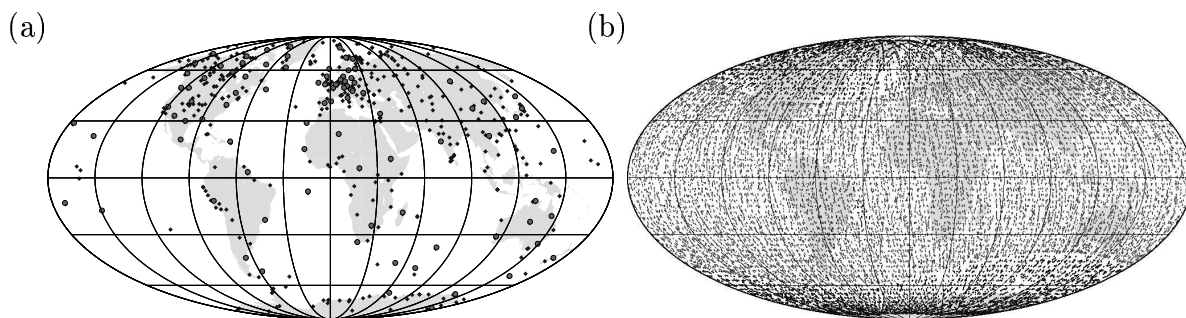


FIG. 1.3 – (a) Carte de répartition des observatoires magnétiques ayant fournis des données pendant le dernier quart de siècle (localisés par des losanges noirs) et appartenant au réseau INTERMAGNET (localisés par des cercles gris et pour lesquels les données sont disponibles à l'adresse <http://www.intermagnet.org/>). (b) Exemple de distribution spatiale de données acquises par le satellite Ørsted pendant la période 1999/2002 et sélectionnées pour la réalisation d'un modèle géomagnétique [Chambodut et al., 2005].

détaillée de ces missions, on pourra consulter Hulot et Mandeau [2003]). Les mesures à bord des navires et des avions permettent des études plus locales. Du fait de leur importance pour la navigation, les mesures du champ géomagnétique à bord des navires, en particulier de la déclinaison magnétique, sont assez abondantes dès le XVII^e siècle et ont permis la réalisation des premières cartes du champ géomagnétique [e.g., Jackson et al., 2000].

1.2.2 Ses variations temporelles

La mesure des variations temporelles du champ magnétique dans les observatoires permet de mettre en évidence un large spectre de constantes de temps associées, pour les plus rapides, au champ d'origine externe et, pour les plus lentes, au champ d'origine nucléaire. Une description détaillée des variations temporelles du champ d'origine externe est présentée par Campbell [1997]. On retiendra ici simplement deux grands types de comportements. Pendant les jours “calmes”, on observe une variation régulière d'une amplitude de $\sim 20\text{-}50$ nT se répétant d'un jour à l'autre (variation diurne, figure 1.4). Ces variations sont provoquées par le rayonnement solaire à l'origine d'une ionisation et d'une marée thermique de l'ionosphère. À ces variations régulières, s'ajoutent des variations irrégulières, observables les jours “agités”. L'amplitude de ces variations peut atteindre 100 à 1000 nT au cours des orages magnétiques (figure 1.4). La mesure du champ dans les observatoires permet ainsi de surveiller l'influence du champ externe et, en particulier, de déterminer si celui-ci peut être considéré raisonnablement négligeable à la surface de la Terre (en dehors des orages magnétiques) ou à l'altitude des satellites (mesures de nuit, les jours calmes).

A ces variations rapides, s'ajoute une variation plus lente (ou variation séculaire) associée au fonctionnement de la géodynamo. De manière à isoler la variation séculaire des variations rapides associées au champ d'origine externe, on peut simplement représenter les valeurs moyennes annuelles du champ magnétique mesuré dans les observatoires (figure 1.5). Les variations de la moyenne annuelle peuvent également contenir un signal associé au champ externe, cependant celui-ci est d'une amplitude négligeable devant la variation séculaire. Les observations accumulées pendant 300 ans montrent une évolution à l'échelle de la centaine d'années en direction et intensité ($\sim 10^\circ$ et ~ 2000 nT en 100 ans).

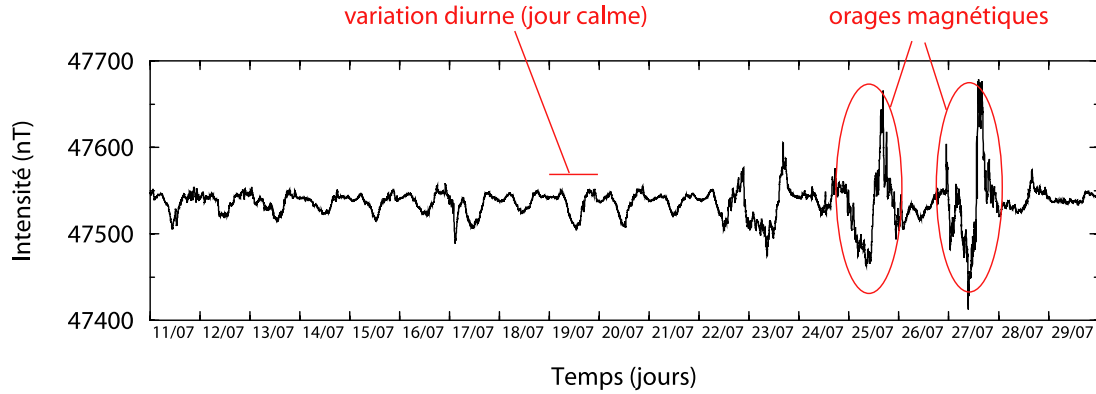


FIG. 1.4 – Variations temporelles de l'intensité mesurées à l'observatoire de Chambon-La-Forêt (Paris) entre les 11 et 29 juillet 2004. Données fournies par le réseau INTERMAGNET.

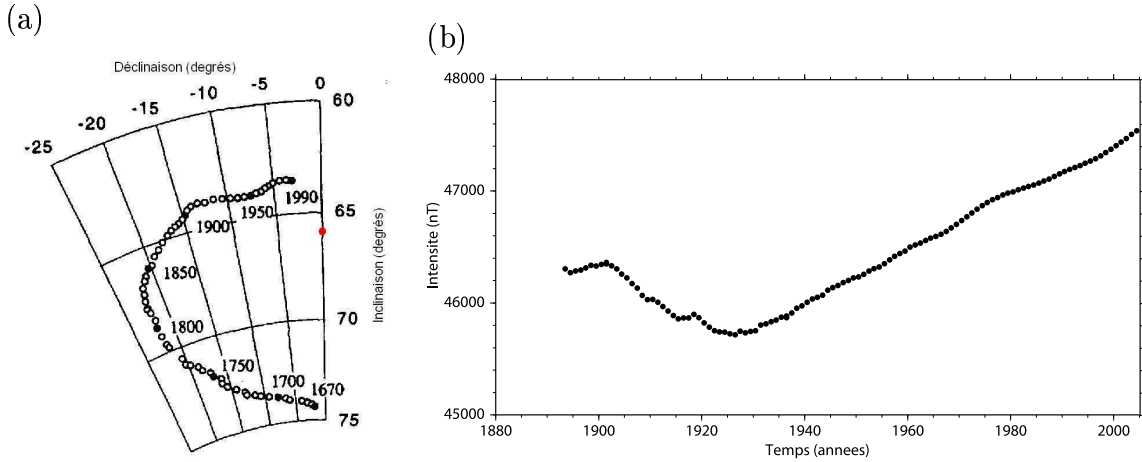


FIG. 1.5 – Variations temporelles de la valeur moyenne annuelle (a) de l'inclinaison I et de la déclinaison D (d'après Alexandrescu et al. [1996]) et (b) de l'intensité F du champ géomagnétique à l'observatoire de Chambon-La-Forêt (Paris). Le point rouge sur la figure (a) correspond à l'orientation qui serait mesurée si le champ était un dipôle axial géocentrique. Données fournies par le réseau INTERMAGNET.

1.2.3 Ses variations spatiales

L'ensemble des observations du champ géomagnétique peut être combiné pour réaliser des modèles globaux du champ géomagnétique développés sur la base des harmoniques sphériques. En effet, si on suppose que le milieu dans lequel sont effectuées les mesures est non conducteur, le champ magnétique $\vec{B}$ dérive d'un potentiel V , tel que :

$$\vec{B} = -\vec{\nabla}V \quad \text{avec} \quad \Delta V = 0 \quad (1.1)$$

Ce potentiel peut être exprimé à l'instant t , à la position (r, θ, ϕ) , r étant la distance au centre de la Terre, θ la colatitude et ϕ la longitude, de la façon suivante [e.g., Langel, 1987; Merrill et al., 1996] :

$$\begin{aligned} V(r, \theta, \phi, t) = & a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (g_n^m(t) Y_n^{mc}(\theta, \phi) + h_n^m(t) Y_n^{ms}(\theta, \phi)) \\ & + \left(\frac{r}{a}\right)^n \sum_{m=0}^n (q_n^m(t) Y_n^{mc}(\theta, \phi) + s_n^m(t) Y_n^{ms}(\theta, \phi)) \end{aligned} \quad (1.2)$$

a étant le rayon terrestre. Les fonctions $Y_n^{mc}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\phi$ et $Y_n^{ms}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\phi$ constituent la base des harmoniques sphériques partiellement normalisées à la façon de Schmidt (figure 1.6), P_n^m étant les fonctions de Legendre associées. Le degré n de l'harmonique sphérique indique le nombre total de lignes nodales, sur lesquelles la fonction s'annule. L'ordre m correspond au nombre de lignes nodales méridiennes, $(n - m)$ au nombre de lignes nodales parallèles. Certaines harmoniques présentent des propriétés de symétrie. Si $m = 0$, l'harmonique est axisymétrique, ou "zonale". Si $(n - m)$ est pair, l'harmonique est symétrique de part et d'autre de l'équateur, si $(n - m)$ est impair, l'harmonique est antisymétrique de part et d'autre de l'équateur.

Les mesures du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ en différentes positions (r, θ, ϕ) à l'instant t permettent le calcul des coefficients de Gauss $g_n^m(t)$, $h_n^m(t)$, $q_n^m(t)$ et $s_n^m(t)$, dont l'ensemble constitue un modèle géomagnétique global [e.g., Sabaka et al., 2004]. Ces modèles permettent d'interpoler la valeur du champ géomagnétique aux endroits où elle n'a pas été mesurée. Les coefficients (g_n^m, h_n^m) décrivent le champ d'origine interne, dont la contribution augmente lorsqu'on se rapproche de l'intérieur de la Terre (terme en $\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}$ dans l'équation 1.2). Les coefficients (q_n^m, s_n^m) décrivent le champ d'origine externe, dont la contribution augmente lorsqu'on s'éloigne de l'intérieur de la Terre (terme en $\left(\frac{r}{a}\right)^n$ dans l'équation 1.2). Gauss [1839] démontra, à partir de cette décomposition, que le champ géomagnétique est principalement d'origine interne.

Le champ d'origine externe présentant des variations temporelles très rapides, celui-ci est assez difficile à modéliser. C'est pourquoi, les modèles de champ interne [e.g., Jackson

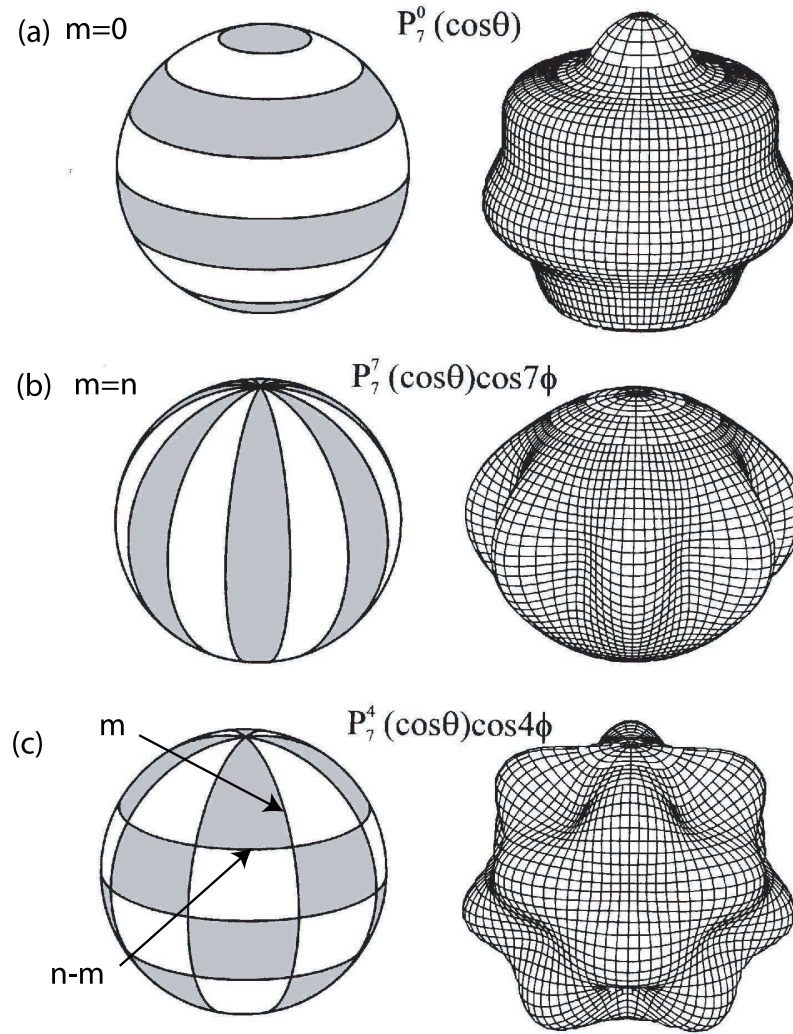


FIG. 1.6 – Exemple d’harmoniques sphériques $Y_n^{mc}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos\theta)\cos m\phi$. A gauche, représentation des lignes nodales (sur lesquelles la fonction s’annule) limitant des surfaces pour lesquelles la fonction est positive (en gris) ou négative (en blanc). A droite, représentation du “relief” de la fonction sur la sphère. m est le nombre de lignes nodales méridiens et $(n - m)$ le nombre de lignes nodales parallèles. (a) Cas d’une harmonique zonale, sans ligne nodale méridien, $m = 0$, (b) cas d’une harmonique sans ligne nodale parallèle, $m = n$, (c) cas d’une harmonique quelconque. D’après Merrill et al. [1996].

et al., 2000; Langlais et al., 2003; Olsen et al., 2006] sont généralement obtenus en sélectionnant les mesures pour lesquelles la contribution du champ externe est négligeable (mesures de nuit, les jours calmes). Ces modèles de champ interne permettent de distinguer les contributions respectives des sources crustale et nucléaire de champ magnétique. L'énergie R du champ magnétique d'origine interne intégré sur la surface de la Terre s'exprime en fonction des coefficients de Gauss :

$$R = \frac{1}{4\pi a^2} \int \int \vec{B}^2 dS = \sum_{n=1}^{\infty} R_n \quad (1.3)$$

$$\text{avec } R_n = (n+1) \sum_{m=0}^n \left((g_n^m)^2 + (h_n^m)^2 \right) \quad (1.4)$$

où R_n représente la contribution en énergie des harmoniques de degré n . Ce spectre en énergie, R_n , (figure 1.7) montre une décroissance rapide de l'énergie pour des degrés croissants jusque vers le degré 14, à partir duquel la pente du spectre diminue et devient légèrement positive. Jusqu'au degré 13, l'énergie du champ géomagnétique est dominée par le champ d'origine nucléaire, produit dans le noyau externe. Cette source étant très profonde, les courtes longueurs d'ondes, correspondant à des degrés élevés, sont plus atténuées que les grandes longueurs d'ondes, correspondant à des bas degrés. Au delà du degré 16, l'énergie du champ géomagnétique est dominée par le champ d'origine crustale. Ces sources étant superficielles, on n'observe pas de décroissance avec le degré.

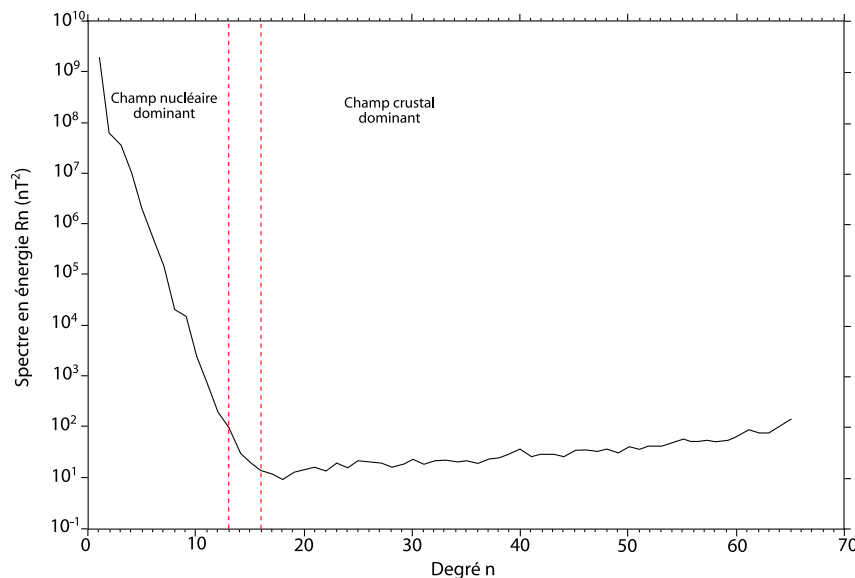


FIG. 1.7 – Spectre en énergie à la surface de la Terre, R_n , du champ magnétique d'origine interne, d'après le modèle CM_4 [Sabaka et al., 2004].

On ne connaît donc pas les petites échelles du champ magnétique créé par le noyau. Les modèles de champ principal sont obtenus en ne conservant que les treize premiers degrés

de la décomposition en harmoniques sphériques du champ géomagnétique. Les figures 1.8a-c représentent la composante radiale du champ magnétique calculé à la surface de la Terre, à partir de modèles de champ principal pour les années 1900, 1950 et 2000. Le champ y est principalement dipolaire (champ orienté vers l'extérieur dans l'hémisphère sud, vers l'intérieur dans l'hémisphère nord). Les lignes de niveau ne sont cependant pas rectilignes et l'équateur magnétique (au niveau duquel le champ radial est nul) est différent de l'équateur géographique. Dans l'hémisphère nord, on remarque deux lobes où le champ radial est maximal. Le champ géomagnétique comprend donc également des composantes non dipolaires et en particulier des composantes non zonales. On note une évolution progressive du champ géomagnétique entre les années 1900 et 2000 (voir en particulier au niveau du sud de l'Afrique). Les variations du champ géomagnétique d'origine interne sont cependant relativement faibles, à l'échelle de la centaine d'années. Le manteau ne contenant pas de source significative de champ magnétique, les modèles de champ principal permettent d'extrapoler les cartes du champ d'origine nucléaire à la limite noyau manteau. Les cartes ainsi prolongées à la limite noyau manteau (figures 1.8d-f) présentent des courtes longueurs d'onde qui sont fortement atténuées et masquées par les grandes longueurs d'onde à la surface de la Terre. On remarque également une évolution progressive de ces cartes entre les années 1900 et 2000 avec une dérive vers l'ouest des structures non-dipolaires (voir par exemple la "tache" positive située à l'ouest de Madagascar).

Les modèles de champ principal permettent également de calculer en tout point du globe la valeur du champ principal et donc de déduire à partir d'une mesure ponctuelle du champ la contribution des autres sources de champ magnétique (champ crustal et champ externe). Il existe une multitude de modèles de champ principal (différant par exemple par la sélection des mesures exploitées). De manière à disposer d'un modèle commun, des modèles de références du champ principal, "International Geomagnetic Reference Field" (IGRF), calculés jusqu'au degré et à l'ordre 10 sont établis tous les cinq ans [Maus et al., 2005]. La figure 1.8 a été obtenue à partir de ces modèles IGRF. Ces modèles permettent de calculer des anomalies magnétiques (scalaires, vectorielles ou de direction), c'est à dire la différence entre le champ mesuré et le champ principal calculé à partir d'un modèle IGRF. Le champ d'origine externe étant généralement négligeable devant le champ d'origine interne, les anomalies magnétiques ainsi calculées sont principalement associées à l'aimantation de croûte. Ceci n'est pas vrai lors des orages magnétiques. Ces événements peuvent cependant facilement être reconnus, parce qu'ils produisent des variations temporelles du champ magnétique qui sont très rapides et d'échelle planétaire et qui sont incompatibles avec le champ d'origine interne (figure 1.4). L'étude des anomalies magnétiques fournit ainsi une information indirecte sur l'aimantation de la croûte.

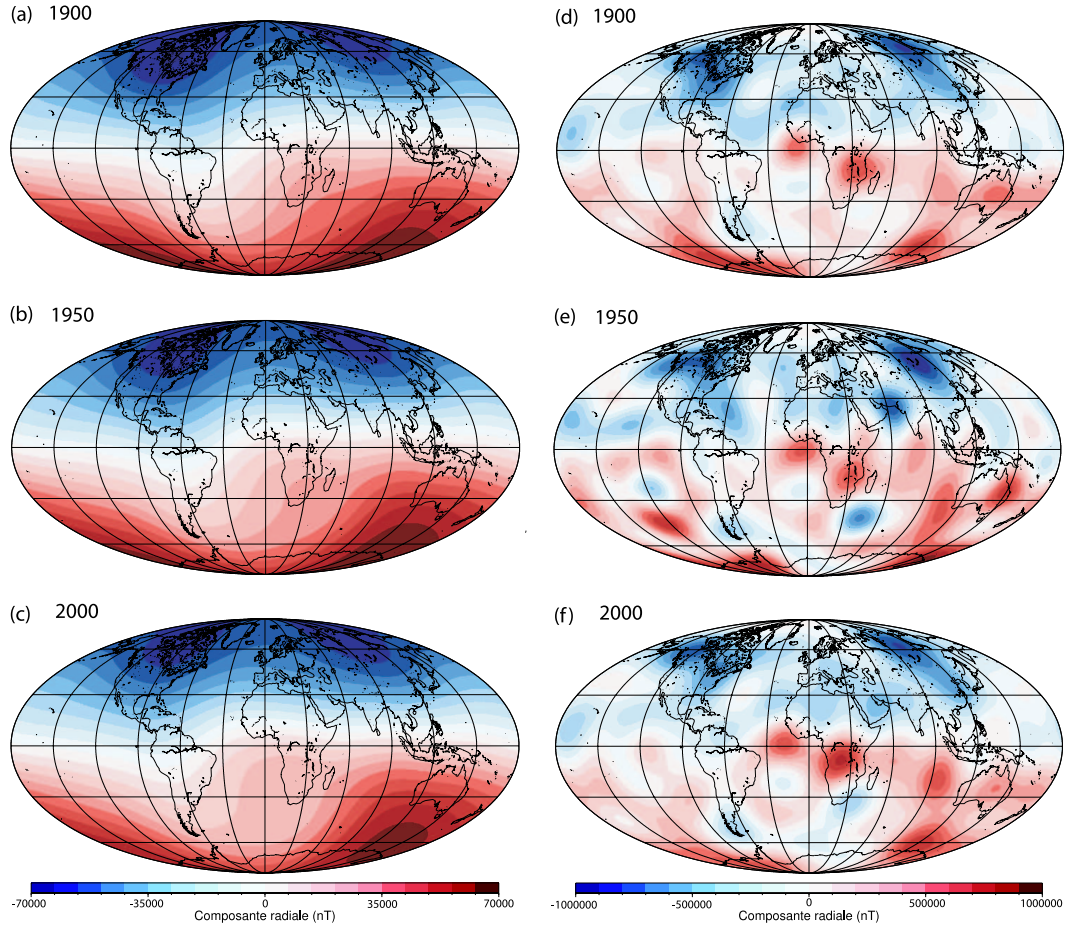


FIG. 1.8 – Cartes de la composante radiale du champ magnétique principal calculées à partir des modèles IGRF [Maus et al., 2005] à la surface de la Terre (a-c) et à la limite noyau manteau (d-f) pour les années 1900, 1950 et 2000. Le champ est dirigé vers l'extérieur (resp. l'intérieur) lorsque la composante radiale est positive, en rouge (resp. négative, en bleu).

La période sur laquelle on dispose d'observations directes du champ géomagnétique est courte (400 ans environ) par rapport au temps caractéristique des variations du champ géomagnétique d'origine nucléaire (de l'ordre de la centaine d'années [Hulot et Le Mouél, 1994]). L'étude du champ géomagnétique plus ancien est possible grâce à des méthodes indirectes exploitant l'aimantation rémanente des roches et d'objets en terre cuite. La quantité de mesures disponibles étant cependant beaucoup plus restreinte que pour l'étude du champ historique, elle ne permet pas de reconstituer les petites échelles spatiales du champ magnétique de la Terre. On suppose alors que ces mesures reflètent uniquement le champ principal (associé au fonctionnement de la géodynamo) et que le champ externe et le champ crustal sont d'une amplitude négligeable.

1.3 Le champ paléomagnétique

Cette section présente la façon dont le champ géomagnétique ancien peut être estimé, ses variations temporelles à moyen et à long terme et enfin la façon dont ses variations spatiales sont représentées, compte tenu des contraintes associées à la mesure du champ.

1.3.1 Sa mesure indirecte

Les supports de l'enregistrement du champ paléomagnétique

Pour les époques anciennes, on ne dispose pas de mesure directe du champ géomagnétique. Celui-ci peut cependant être étudié grâce à l'existence de roches possédant une aimantation naturelle stable (rémanente) ayant “fossilisé” le champ magnétique ancien. L'aimantation de ces roches est portée par des minéraux magnétiques tels que la magnétite. Lors de la mise en place de ces roches, celles-ci acquièrent une aimantation parallèle à l'orientation du champ magnétique ambiant et proportionnelle à son intensité. Cette aimantation reste ensuite “figée” lorsque le champ ambiant varie.

Ces roches peuvent être des roches volcaniques ou sédimentaires. Une lave se refroidissant en surface acquiert en effet une aimantation stable lorsque sa température passe en dessous d'un seuil de température, la température de Curie. On parle alors d'aimantation thermorémanente. Lors du dépôt des sédiments, l'orientation préférentielle des minéraux dans la direction du champ ambiant est à l'origine d'une aimantation rémanente détritique. La qualité de l'enregistrement du champ magnétique dans les roches volcaniques et les sédiments est assez différente. Tandis que l'acquisition de l'aimantation des roches volcaniques est rapide et permet un enregistrement quasi-instantané du champ géomagnétique,

le dépôt lent des sédiments assure un lissage des variations temporelles du champ géomagnétique. La qualité de l'enregistrement varie également selon que l'on s'intéresse à des roches continentales ou océaniques. En effet, sédiments et basaltes des fonds océaniques assurent un enregistrement quasi-continu des variations temporelles du champ géomagnétique pour les 160 derniers Ma. L'enregistrement sur les continents est beaucoup moins régulier, en particulier pour ce qui concerne le volcanisme dont le fonctionnement est sporadique. Si les roches étudiées n'ont pas subi de déformation, déplacement, rotation, altération ou chauffage ultérieurs à leur mise en place, l'étude de leur aimantation permet de connaître de façon indirecte le champ géomagnétique passé.

Estimation de la paléodirection du champ

Entre la mise en place d'une roche et son étude au laboratoire, celle-ci peut cependant acquérir une aimantation secondaire, par exemple une aimantation rémanente visqueuse associée au rééquilibrage de l'aimantation de certains des minéraux magnétiques dans l'orientation du champ ambiant. De manière à séparer l'aimantation primaire (acquise lors de la mise en place de la roche) d'éventuelles aimantations secondaires (acquises postérieurement à sa mise en place), on effectue une désaimantation de l'échantillon en le chauffant (ou en le soumettant à un champ magnétique alternatif) par paliers successifs de température croissante (ou de champ magnétique croissant). Pour un descriptif plus précis des différentes méthodes employées, on pourra par exemple consulter McElhinny et McFadden [2000]. La figure 1.9 montre un exemple de l'évolution de l'aimantation d'un échantillon à différents paliers de température. Celle-ci est suivie en représentant pour chaque palier de température les projetés du vecteur aimantation dans le plan horizontal et dans le plan vertical d'orientation nord-sud (diagramme de Zijdeveld [1967]). Dans cet exemple, on observe une variation de la direction de l'aimantation au cours des chauffes successives jusqu'à la température de 300°C. Celle-ci est liée à la décroissance des aimantations secondaires. Au delà de la température de 300°C, la direction de l'aimantation reste stable et fournit la direction de l'aimantation primaire.

L'erreur sur les mesures de direction paléomagnétique est relativement importante (de l'ordre de plusieurs degrés). En effet, il existe plusieurs sources d'erreur : orientation de l'échantillon, composante secondaire incomplètement retirée, etc. De manière à estimer une direction moyenne et une incertitude de mesure, plusieurs échantillons de même âge sont en général prélevés au même site de mesure. La distribution des directions obtenues pour un ensemble d'échantillons est classiquement décrite par une loi de Fisher :

$$f_{\kappa}(\Theta, \Phi) = \frac{\kappa \exp(\kappa \cos \Theta)}{2\pi (\exp(\kappa) - \exp(-\kappa))} \quad (1.5)$$

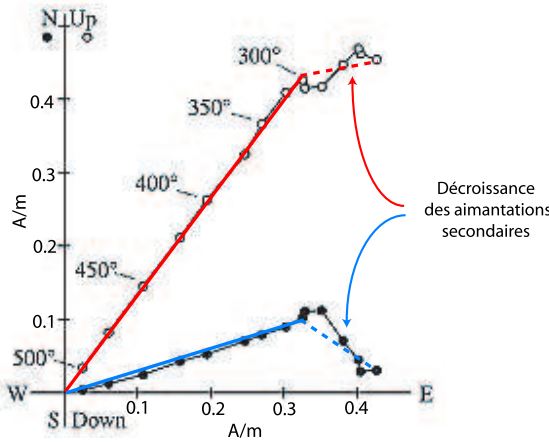


FIG. 1.9 – Diagramme de Zijderveld sur lequel sont représentées les composantes du vecteur aimantation dans le plan horizontal (cercles pleins) et dans le plan vertical d'orientation est-ouest (cercles vides) pour différents paliers de température. Au delà de la température de 300°C, la direction de l'aimantation reste stable et fournit la direction de l'aimantation primaire. D'après Genevey et Gallet [2002].

où (Θ, Φ) définissent la direction paléomagnétique en coordonnées sphériques dans un repère centré sur la direction moyenne. Θ est l'angle entre la direction mesurée et la direction moyenne. Φ est l'azimut. κ est le paramètre de précision. Lorsque κ augmente, la dispersion des directions diminue. Les paramètres de la loi de Fisher peuvent être estimés en calculant le vecteur somme des N vecteurs unitaires portant les directions mesurées (figure 1.10a). La direction de ce vecteur est une estimation de la direction moyenne et sa norme R permet d'estimer le paramètre κ . Lorsque la dispersion des directions n'est pas trop importante ($\kappa > 3$), une estimation du paramètre κ est donnée par la relation suivante [e.g., McElhinny et McFadden, 2000] :

$$\kappa = \frac{N - 1}{N - R} \quad (1.6)$$

La direction moyenne ainsi estimée suit également une loi de Fisher dont le paramètre de précision K peut également être estimé. Plus ce paramètre est élevé, plus l'incertitude sur l'estimation de la direction moyenne est faible. Cette incertitude peut être exprimée par un autre paramètre plus explicite, l'angle de confiance α_{95} , délimitant un cône autour de la direction moyenne et à l'intérieur duquel se trouve la vraie direction moyenne avec 95% de probabilité (figure 1.10b). Lorsque la dispersion des directions n'est pas trop importante ($\kappa > 3$), une estimation du paramètre de précision K et de l'angle de confiance α_{95} est donnée par les relations suivantes [e.g., McElhinny et McFadden, 2000] :

$$K = R \frac{N - 1}{N - R} \quad \text{et} \quad \alpha_{95} = \arccos \left(1 - \frac{N - R}{R} \left(\left(\frac{1}{0.05} \right)^{\frac{1}{N-1}} - 1 \right) \right) \quad (1.7)$$

Estimation de la paléointensité du champ

Une mesure absolue de l'intensité du champ paléomagnétique peut être obtenue à partir de l'étude des laves, puisque celles-ci acquièrent lors de leur refroidissement une

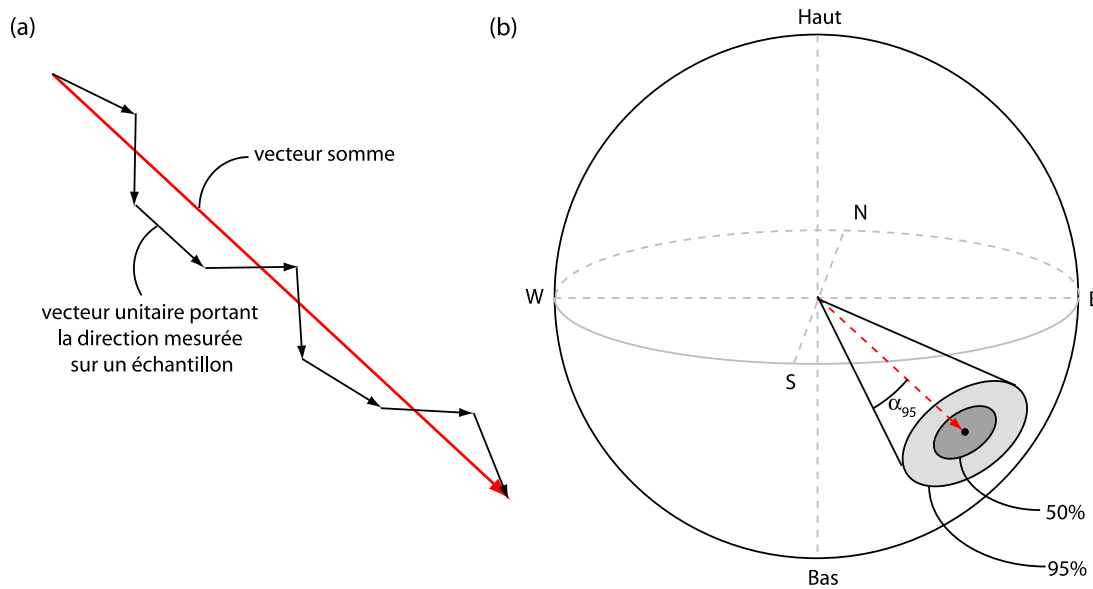


FIG. 1.10 – (a) La direction moyenne de l'échantillon est obtenue en sommant les vecteurs unitaires portant les directions mesurées (vecteurs noirs). (b) L'incertitude sur l'estimation de la direction moyenne est exprimée à l'aide de l'angle de confiance α_{95} délimitant un cône à l'intérieur duquel se trouve la vraie moyenne avec 95% de probabilité.

aimantation M_{NRM} proportionnelle au champ ambiant B_{ANCIEN} [Néel, 1949]. Le facteur de proportionnalité dépend cependant de plusieurs paramètres tels que la teneur en particules magnétiques, la minéralogie magnétique, etc. De manière à estimer ce facteur de proportionnalité, il est possible de remplacer l'aimantation naturelle M_{NRM} par une aimantation thermorémanente M_{TRM} acquise au laboratoire sous un champ magnétique B_{LAB} . Si les propriétés magnétiques de la roche n'ont pas évolué depuis sa mise en place, alors :

$$B_{ANCIEN} = B_{LAB} \frac{M_{NRM}}{M_{TRM}} \quad (1.8)$$

De manière à vérifier que la relation linéaire indiquée ci-dessus est satisfaite et qu'il ne se produit pas d'altération lors de la chauffe de l'échantillon, on réalise plusieurs chauffes successives à des paliers de température croissante T_i (méthode de Thellier et Thellier [1959]). L'échantillon est chauffé à une température T_i puis refroidi en champ nul, l'échantillon est ensuite chauffé une seconde fois à la température T_i puis refroidi dans un champ magnétique imposé B_{LAB} . La diminution de l'aimantation rémanente naturelle $M_{NRM}(T_i)$ lors de la première phase de chauffage est représentée en fonction de l'aimantation acquise $M_{TRM}(T_i)$ lors de la seconde phase de chauffage pour chaque palier de température T_i (figure 1.11). Si l'ensemble des points forme une droite, le champ magnétique ancien peut être estimé à partir de la pente de la droite [Nagata et al., 1963]. Si on observe un comportement non linéaire, l'échantillon ne peut pas être utilisé pour l'estimation de

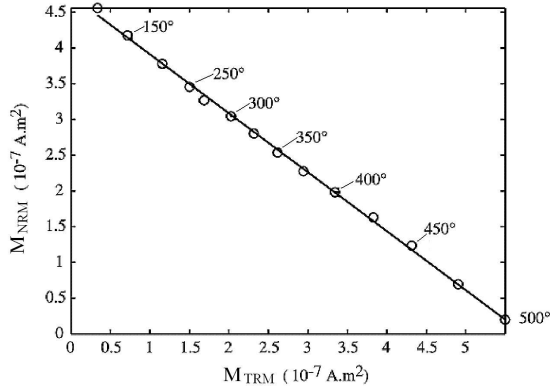


FIG. 1.11 – Estimation de la paléointensité à partir de la méthode de Thellier et Thellier [1959]. Diminution de l'aimantation naturelle (M_{NRM}) versus aimantation acquise au laboratoire (M_{TRM}) au cours des différentes phases de chauffe. D'après Genevey et Gallet [2002].

la paléointensité. En pratique, seul un faible pourcentage d'échantillons peut être utilisé pour les mesures de paléointensité. C'est pourquoi les bases de données paléomagnétiques comprennent majoritairement des données directionnelles et relativement peu de données de paléointensité.

Du fait du caractère sporadique des éruptions volcaniques, les laves ne fournissent qu'un enregistrement discontinu de l'intensité du champ géomagnétique. Les sédiments fournissent au contraire un enregistrement continu, en particulier en ce qui concerne les sédiments océaniques (auxquels on peut accéder à l'aide de carottage) car le taux de sédimentation y est en général assez monotone sur de longues périodes de temps. Pour qu'une carotte sédimentaire convienne pour l'étude de la paléointensité, il faut s'assurer de l'homogénéité des propriétés magnétiques et de la minéralogie magnétique sur la longueur de la carotte. L'aimantation rémanente détritique naturelle M_{NRM} des sédiments est proportionnelle à l'intensité du champ ambiant lors de leur mise en place B_{ANCIEN} . Le coefficient de proportionnalité dépend de la quantité de matériel magnétique contenu dans les échantillons. Pour obtenir les variations relatives de l'intensité, l'aimantation naturelle M_{NRM} est normalisée soit par la susceptibilité magnétique χ , soit par l'aimantation rémanente isotherme M_{IRM} (aimantation acquise en laboratoire à température constante en présence d'un champ magnétique fort), soit par l'aimantation rémanente anhystérétique M_{ARM} (aimantation acquise en laboratoire en champ alternatif décroissant vers zéro et en présence d'un champ magnétique faible constant). Pour une description plus détaillée des différentes méthodes de mesure de la paléointensité, on pourra consulter par exemple Tauxe [1993] et Valet [2003].

Etude des anomalies magnétiques océaniques

Seul un bref aperçu des apports de l'étude des anomalies magnétiques océaniques est fourni ici, l'origine et l'interprétation de ces anomalies étant développées plus en détails dans le chapitre 4. Les mesures magnétiques océaniques montrent des linéations magnétiques sensiblement symétriques de part et d'autre des dorsales [Vine et Matthews, 1963] (figure 1.12) associées à l'aimantation rémanente de la croûte océanique, normale ou inverse, selon la polarité du champ géomagnétique lors de sa mise en place au niveau des dorsales (figure 1.13). Le fonctionnement des dorsales fournit ainsi un enregistrement quasi-continu des changements de polarité du champ géomagnétique. L'étude de ces anomalies magnétiques océaniques a ainsi permis d'une part l'établissement de la chronologie des inversions géomagnétiques pour les 160 derniers millions d'années [Heirtzler et al., 1968; Kent et Gradstein, 1986; Cande et Kent, 1992a, 1995] et d'autre part la datation du plancher océanique [*e.g.*, Müller et al., 1997]. Outre les anomalies majeures liées aux inversions, les profils magnétiques océaniques montrent également des anomalies de plus courte longueur d'onde et de plus faible amplitude. Des mesures fond de mer à l'aide d'un magnétomètre tracté à une distance de 500 m environ du plancher océanique ont récemment permis d'obtenir un enregistrement de haute résolution des anomalies magnétiques océaniques pour la période Brunhes, couvrant les derniers 780000 ans. Les profils acquis autour de la dorsale Est Pacifique [Gee et al., 2000] et de la dorsale Centrale Indienne [Pouliquen et al., 2001a,b] montrent que les anomalies magnétiques de courte longueur d'onde sont très bien corrélées avec les données de paléointensité obtenues de manière indépendante en magnétostratigraphie [Valet et Meynadier, 1993; Guyodo et Valet, 1999; Valet et al., 2005] (figure 1.12d). En particulier, les variations d'intensité les plus importantes que constituent les excursions peuvent être reconnues. La croûte océanique semble donc être également un bon enregistreur des variations d'intensité du champ paléomagnétique. L'étude des anomalies magnétiques océaniques permet donc de contraindre de façon indirecte les variations temporelles du champ géomagnétique.

1.3.2 Ses variations temporelles

Les études de paléomagnétisme permettent ainsi de prolonger l'observation de la variation séculaire. Le champ géomagnétique présentant cependant à la fois des variations spatiales et temporelles, une représentation globale des mesures est nécessaire de manière à pouvoir comparer les observations effectuées à des sites distincts et pour des instants différents. Dans le cas d'un champ uniquement dipolaire géocentrique, il existe une relation simple reliant l'inclinaison du champ et la latitude du site de mesure. A partir des mesures de déclinaison et d'inclinaison, il est alors possible de calculer la position du pôle

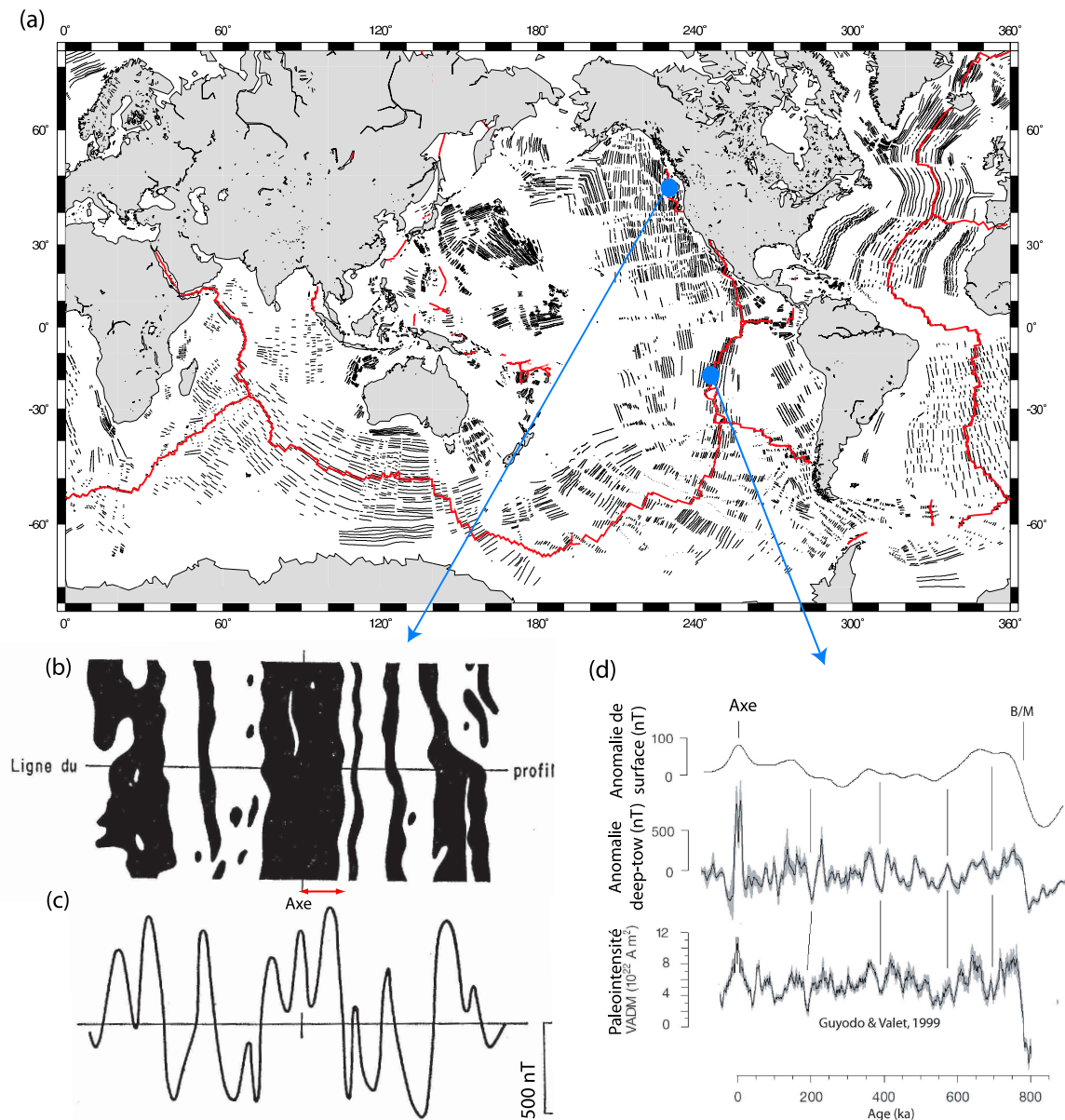


FIG. 1.12 – (a) Carte des linéations magnétiques océaniques, d'après Cande et al. [1989]. Les dorsales océaniques sont représentées en rouge. (b) Portion de la carte d'anomalies magnétiques de part et d'autre de l'axe de la dorsale Juan de Fuca, d'après Vine [1968]. Les anomalies positives (négatives) sont représentées en noir (blanc). (c) Profil observé le long de la ligne indiquée sur la carte en (b). (d) Comparaison pour la période Brunhes de profils magnétiques océaniques enregistrés en surface et à proximité du plancher océanique sur le flanc est de la dorsale Est Pacifique [Gee et al., 2000] avec les variations de l'intensité du champ géomagnétique déduites des mesures de magnétostratigraphie [Guyodo et Valet, 1999]. Ces profils de haute résolution correspondent à la partie du profil en (c), indiqué par la flèche rouge, et qui est bien moins résolu (enregistrement uniquement en surface et taux d'expansion plus faible). Les lettres "B/M" sur la figure (d) indiquent la transition entre la période Matuyama (de polarité inverse) et la période Brunhes (de polarité normale).

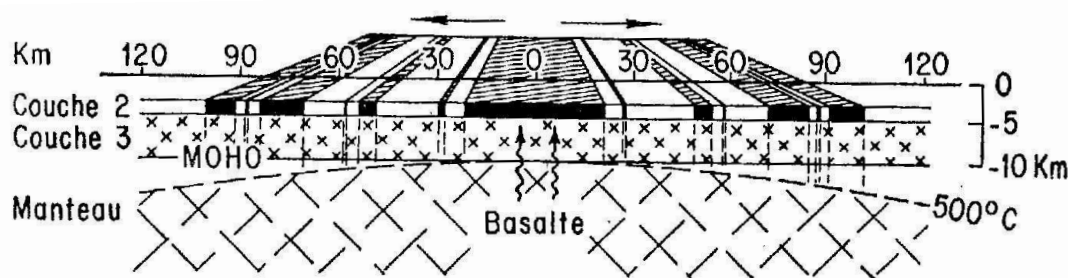


FIG. 1.13 – Les linéations magnétiques s’expliquent par la mise en place de la croûte océanique au niveau des dorsales. Lors de son refroidissement, celle-ci acquiert une aimantation rémanente normale ou inverse selon la polarité du champ de l’époque et migre de part et d’autre.

géomagnétique virtuel (“Virtual Geomagnetic Pole”, VGP), c’est à dire la position relative qu’aurait le pôle géomagnétique si le champ était uniquement dipolaire. De même, à partir de mesures de paléointensité et connaissant la paléolatitute du site de mesure, il est possible de calculer un moment dipolaire virtuel (“Virtual Dipolar Moment”, VDM). Du fait des composantes non dipolaires du champ géomagnétique, la position des VGPs et le VDM varient à la surface de la Terre à un instant donné. Leur interprétation est donc assez compliquée, une variation de la position du VGP et du VDM pouvant être associée soit à une variation du dipôle géomagnétique, soit à une variation des composantes non dipolaires du champ. On fait cependant généralement l’hypothèse que les composantes non dipolaires s’annulent lorsque le champ est moyenné à la surface de la Terre. L’orientation du dipôle et le moment dipolaire du champ géomagnétique peuvent alors être estimés en moyennant la position des VGPs et le VDM obtenus pour différents sites d’étude répartis à la surface de la Terre, pour un instant donné.

Fluctuations à l’échelle d’une période de polarité

Les mesures de direction permettent ainsi de suivre la trajectoire des VGPs autour de l’axe de rotation de la Terre (figure 1.14). Cette trajectoire est généralement assez complexe, montrant des accélérations et des changements de direction. Du fait des composantes non dipolaires du champ, la trajectoire est différente selon le site d’observation. Au cours d’une excursion, la trajectoire fait un écart beaucoup plus important que la normale par rapport au pôle géographique. Le VGP peut éventuellement passer dans l’hémisphère opposé puis revient se “stabiliser” autour du pôle géographique initial. Ces événements sont relativement courts (5-10 ka) et rares (une dizaine d’excursions sont observées au cours des derniers 700.000 ans) [Langereis et al., 1997]. Au cours d’une inversion, la di-

rection du dipôle axial géocentrique s'inverse. Le VGP change d'hémisphère suivant une trajectoire plus ou moins complexe puis se "stabilise" autour du pôle géographique opposé. La distinction entre variation séculaire, excursions et inversions est parfois difficile et est sans doute artificielle. Il existe un continuum dans les fluctuations temporelles du champ géomagnétique entre les deux manifestations extrêmes que sont la variation séculaire et les inversions.

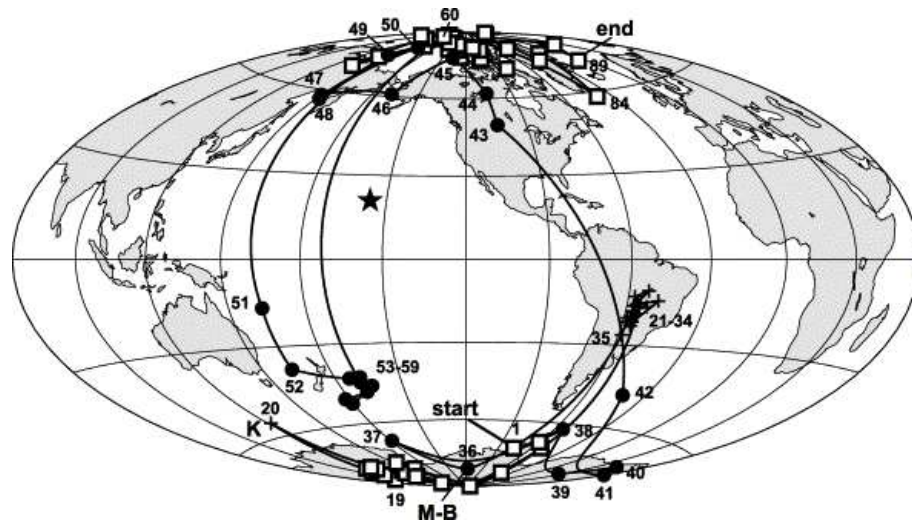


FIG. 1.14 – Trajectoire du pôle géomagnétique virtuel (VGP) déduit des mesures d'inclinaison et de déclinaison obtenues à l'île de Maui (Archipel d'Hawaii, Océan Pacifique, située sur la carte à l'aide d'une étoile) pour la période 140-960 ka couvrant une portion des périodes Brunhes et Matuyama (voir l'échelle des inversions représentée en haut de la figure 1.15). Les carrés indiquent la position des VGPs pendant les périodes Matuyama (1-19) et Brunhes (60-89), les croix pendant l'excursion Kamikatsura (20-35) et les cercles pendant l'inversion Matuyama-Brunhes (36-59). D'après Coe et al. [2004].

Les courbes de paléointensité relative montrent des fluctuations temporelles importantes, de l'ordre de 50% (figure 1.15). Des minima d'intensité sont associés aux excursions et aux inversions [Valet et Meynadier, 1993; Guyodo et Valet, 1999; Valet et al., 2005; Yamazaki et Oda, 2005; Langereis et al., 1997]. Valet et Meynadier [1993] ont observé une asymétrie des variations d'intensité de part et d'autre des inversions avec une décroissance lente suivie d'une remontée rapide, formant ainsi au cours des chrons successifs une courbe d'intensité en dents de scie (ou "sawtooth pattern"). Ces courbes en dents de scie n'ont cependant pas été observée dans la plupart des études suivantes [Kok et Tauxe, 1999; Yamazaki et Oda, 2005; Tauxe et Hartl, 1997]. En effet, la décroissance lente de l'intensité avant une inversion ne concernerait pas toute la polarité mais seulement une période de 60 à 80 ka [Valet et al., 2005].

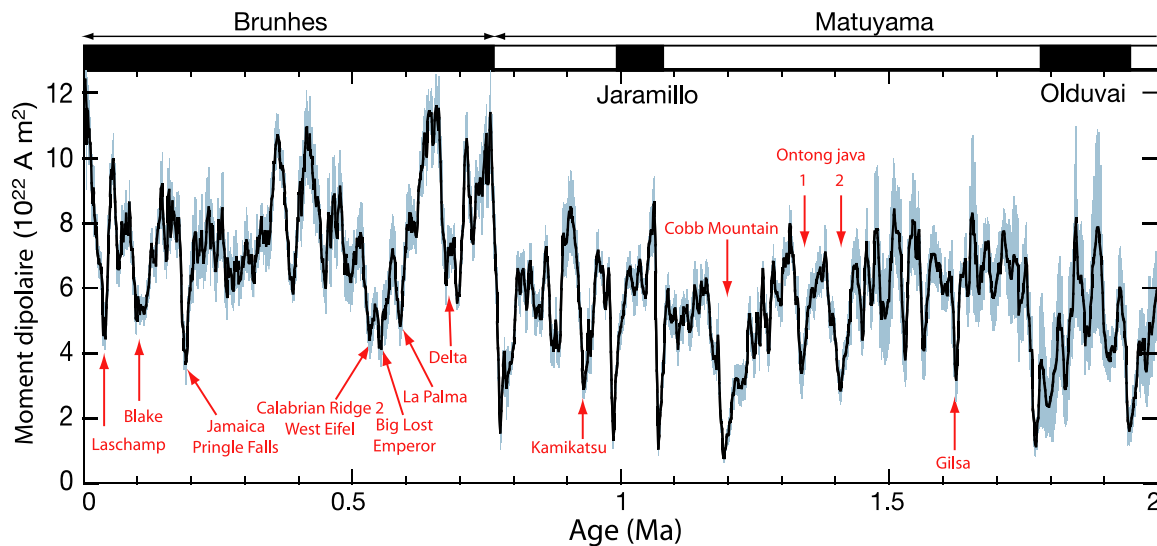


FIG. 1.15 – Variations du moment dipolaire (courbe noire) estimées en sommant les courbes de paléointensité relative obtenues à partir de l'étude de carottes sédimentaires réparties mondialement et calibrées à partir de mesures de paléointensité absolue effectuées dans les laves. L'intervalle de confiance à 95% est représenté en bleu ciel. La succession des intervalles de polarité normale (et inverse) est représentée par des bandes noires (et blanches). Les excursions sont reportées par des flèches rouges. D'après Valet et al. [2005].

Distribution des inversions

L'échelle des inversions (figure 1.16) montre une succession d'intervalles de polarité normale (identique à la polarité actuelle du champ) et inverse (opposée à la polarité actuelle du champ) de durées variées allant de la centaine de milliers d'années à plusieurs dizaines de millions d'années et dont la succession semble aléatoire. Des fluctuations de la fréquence des inversions s'observent à long terme, à l'échelle de plusieurs dizaines de millions d'années (figure 1.17). A côté d'époques pendant lesquelles le champ magnétique s'est inversé assez fréquemment, de l'ordre de plusieurs fois par millions d'années (pendant les 25 derniers millions d'années ou au Mésozoïque sur la période 160-130 Ma), il a existé des époques longues, ou superchrons, durant lesquelles le champ ne s'est pas inversé. Seul deux (ou trois) événements de ce type ont été observés sur les 500 derniers millions d'années. Au Crétacé, le champ s'est maintenu en polarité normale pendant 35 millions d'années; durant le Permien et le Carbonifère, il s'est maintenu en polarité inverse pendant 50 millions d'années [e.g., Opdyke et Channell, 1996]. L'existence d'un troisième superchron de polarité inverse d'une durée de 20 millions d'années environ durant l'Ordovicien a récemment été proposée par Pavlov et Gallet [2005].

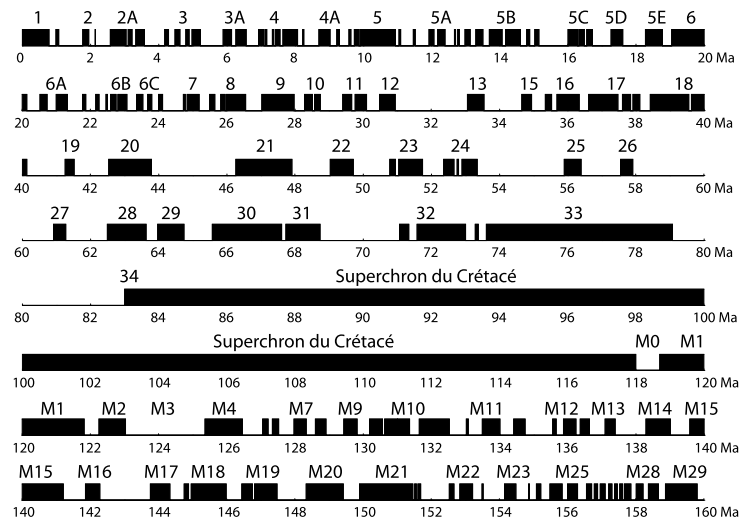


FIG. 1.16 – *Echelle des polarités géomagnétiques pour les 160 derniers millions d'années, dessiné par tranche de 20 Ma, d'après Kent et Gradstein [1986] et Cande et Kent [1995].*

La nature des fluctuations temporelles de la fréquence des inversions est décrite différemment selon les auteurs. McFadden et Merrill [1997] proposent une évolution progressive de la fréquence des inversions sur les 160 derniers Ma. Une diminution relativement rapide de la fréquence des inversions aboutit au superchron pendant lequel le processus à l'origine des inversions cesse et est suivi d'une augmentation lente jusqu'à la période actuelle (figure 1.17a). Gallet et Hulot [1997] proposent au contraire que la fréquence des inversions est restée constante au cours des périodes 160-130 Ma et 25-0 Ma (périodes A et C de la figure 1.17b) et que des fluctuations significatives de la fréquence des inversions ne s'observent que au cours de la période 130-25 Ma (période B de la figure 1.17b). Le superchron du Crétacé a lieu au début de cette période et est suivi d'une remontée progressive de la fréquence. Hulot et Gallet [2003] ont démontré ensuite, en utilisant une méthode développée par McFadden et Merrill [2000], qu'aucune tendance robuste n'est observée dans l'évolution de la fréquence des inversions sur les 30 Ma précédant le superchron du Crétacé. Aucun signe précurseur dans l'échelle des inversions (excepté éventuellement l'intervalle M1 durant 3 Ma) ne semble donc annoncer ce superchron.

La similitude des échelles de temps des variations de la fréquence des inversions avec celles de la convection mantellique, d'une part, et une possible corrélation de ces variations avec l'activité tectonique, d'autre part, ont conduit plusieurs auteurs à proposer que le manteau, et en particulier les conditions de flux de chaleur à la limite noyau manteau, soient à l'origine des variations de la fréquence des inversions [*e.g.*, Loper et McCartney, 1986; Courtillot et Besse, 1987; Larson et Olson, 1991]. L'influence possible des conditions de flux de chaleur a été confirmée par les modèles numériques de géodynamo en imposant à la limite noyau manteau différentes répartitions du flux de chaleur [Glatzmaier et al.,

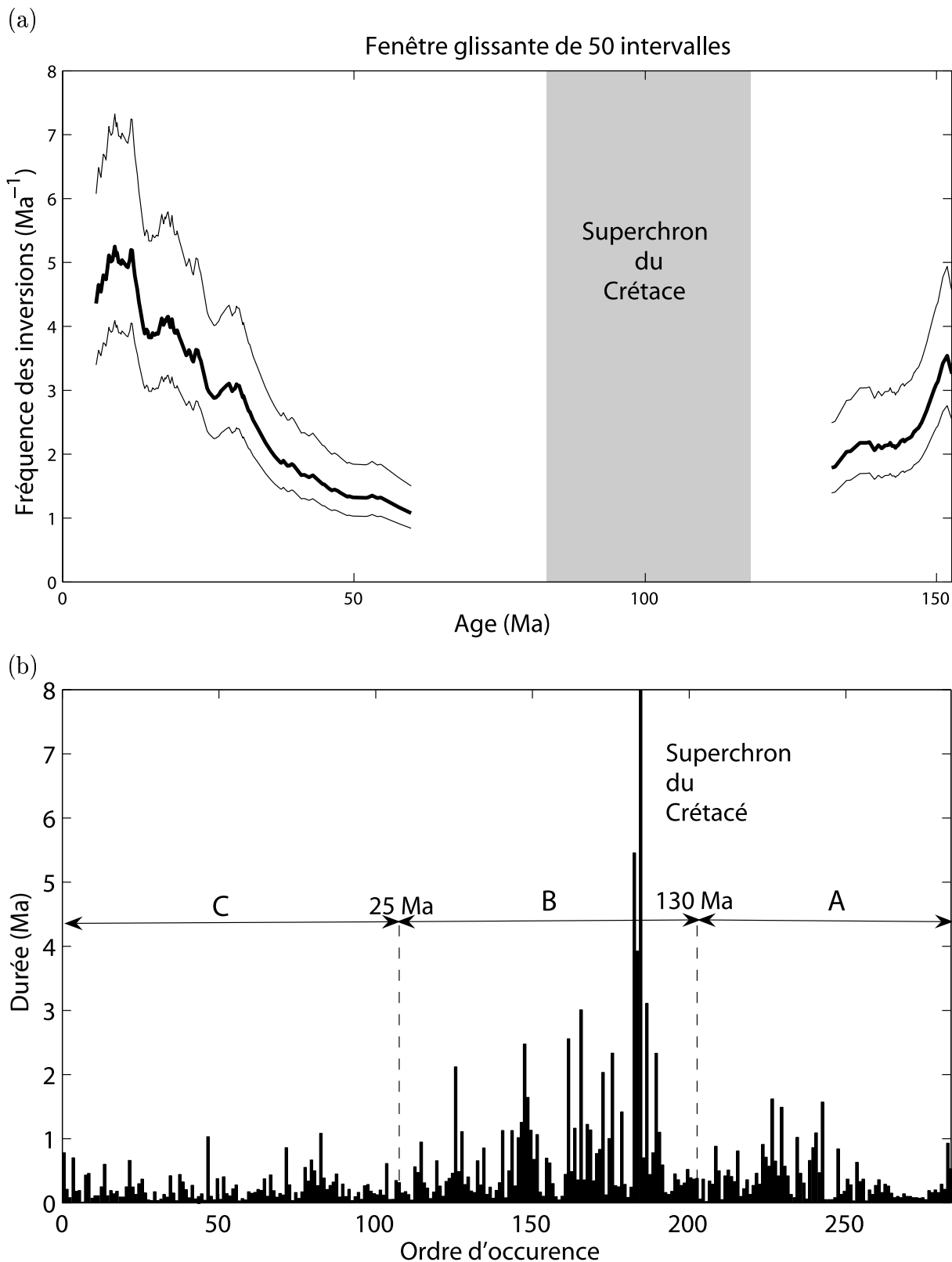


FIG. 1.17 – (a) *Fréquence des inversions* calculée sur fenêtre glissante de 50 intervalles. (b) *Durée des intervalles de polarité* en fonction de l'ordre d'occurrence. D'après les échelles de Cande et Kent [1995] pour les chrons 1 à 34 (0-118 Ma) et Kent et Gradstein [1985] pour les chrons M0 à M29 (118-160Ma). D'après Gallet et Hulot [1997].

1999]. Les variations de la fréquence des inversions pourraient donc être provoquées par des modifications de la répartition du flux de chaleur, associées par exemple à l'arrivée d'un plan de subduction froid [Gallet et Hulot, 1997] ou à l'émission d'un panache mantellique [Loper et McCartney, 1986; Larson et Olson, 1991]. Il se peut néanmoins que les variations de la fréquence des inversions, et en particulier le blocage du processus à l'origine des inversions au cours des superchrons, soient simplement des comportements spontanés de la géodynamo [Hulot et Gallet, 2003].

Une évolution à long terme de l'intensité du champ géomagnétique ?

De manière à comprendre l'origine des fluctuations de la fréquence des inversions, il peut être utile de connaître l'évolution des caractéristiques du champ magnétique en période de polarité stable sur ces échelles de temps. C'est pourquoi, plusieurs études ont tenté de déterminer si une évolution du moment dipolaire du champ géomagnétique s'observe en parallèle des variations de la fréquence des inversions ou si au contraire le moment dipolaire et la fréquence des inversions sont deux paramètres découplés. Une telle corrélation avait en effet été suggérée par Cox [1968] en remarquant que les fluctuations temporelles du champ non dipolaire peuvent aboutir plus "facilement" à une inversion lorsque le rapport de l'énergie du champ non dipolaire sur l'énergie du champ dipolaire est plus élevé.

A partir d'une compilation des mesures de paléointensité absolue obtenues dans les laves par la méthode de Thellier et Thellier [1959], Prévot et al. [1990] ont observé que les 50 Ma précédant le superchron du Crétacé, caractérisés par une fréquence des inversions très élevée, sont également caractérisés par un moment dipolaire anormalement faible. La quantité de mesures de paléointensité absolue disponibles était cependant très restreinte et insuffisante pour conclure à une corrélation. Les compilations plus récentes ont remis en cause le caractère anormalement faible du moment dipolaire pendant cette période et suggèrent, au contraire, que la valeur moyenne du moment dipolaire ne présente pas de variation significative au long terme sur les 300 derniers millions d'années [Pick et Tauxe, 1993; Juárez et al., 1998; Selkin et Tauxe, 2000]. Par contre, ces compilations semblent indiquer que la période récente serait caractérisée par un moment dipolaire moyen significativement supérieur à celui caractérisant les périodes anciennes (figure 1.18b-c) : $8 \cdot 10^{22}$ A.m² pour la période 0-0.3 Ma contre $5 \cdot 10^{22}$ A.m² pour la période 0.3-300 Ma. Ces différences peuvent avoir pour origine des fluctuations de la paléointensité à moyen terme, à l'échelle du million d'années, aboutissant à une intensité du champ géomagnétique contemporain relativement élevé par rapport à sa valeur moyenne [Selkin et Tauxe, 2000; Tauxe et Staudigel, 2004; Tauxe, 2006]. Ces différences peuvent cependant être également le signe d'erreurs dans l'estimation des moments dipolaires moyens, soit une

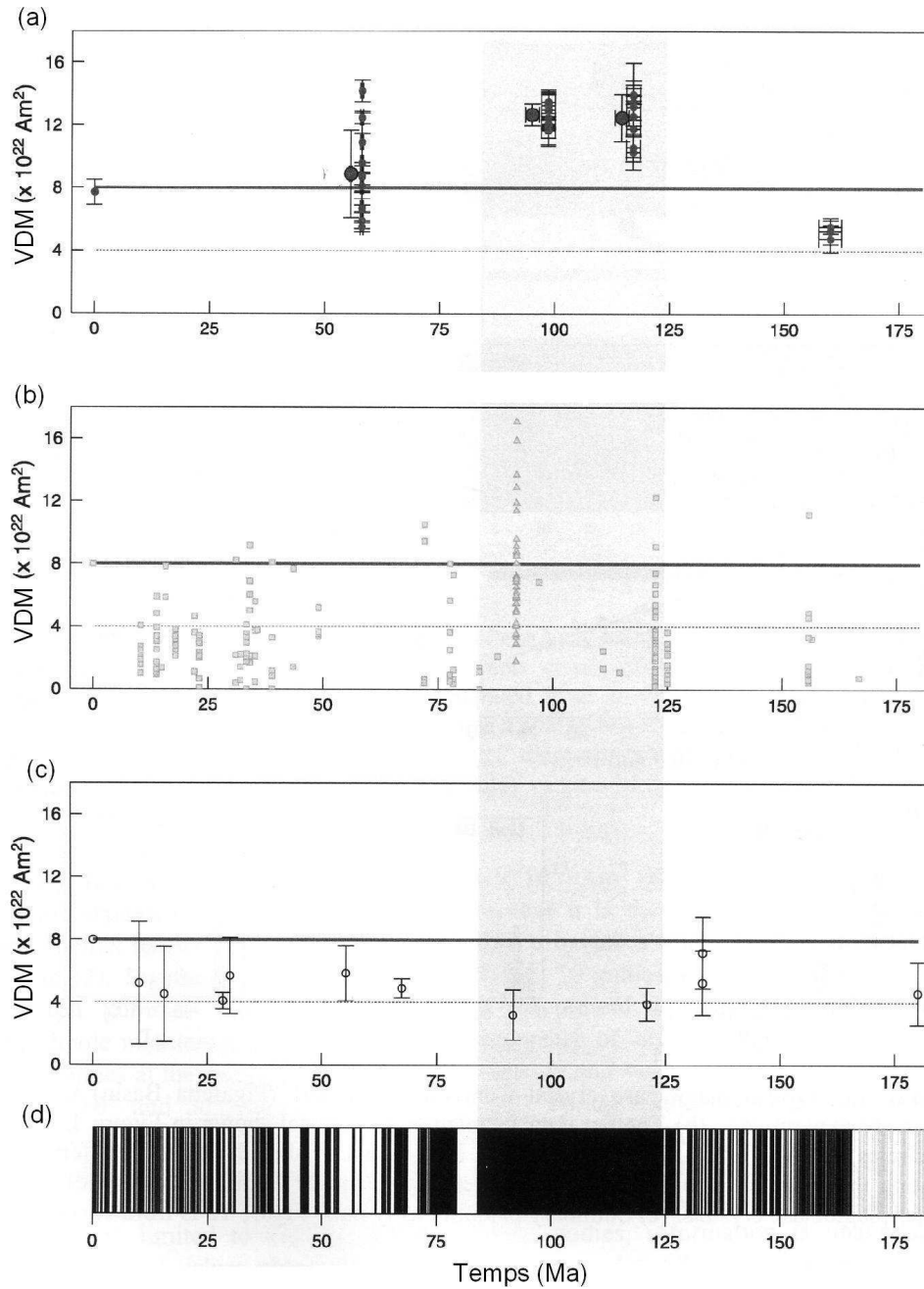


FIG. 1.18 – *Moment dipolaire virtuel (MDV) estimé à partir de mesures de paléointensité absolue à l'aide de la méthode de Thellier, obtenues pour la période 10-180 Ma sur (a) des feldspaths plagioclases, (b) des verres basaltiques, (c) des laves (roche entière). Chaque point en (a) représente la valeur moyenne obtenue à partir des différents échantillons d'une coulée, en (b) une mesure sur un échantillon et en (c) la valeur moyenne obtenue pour un site comprenant plusieurs coulées et plusieurs échantillons par coulées. Le trait gras représente la valeur du moment dipolaire actuel, correspondant également à la valeur du moment dipolaire moyen pour la période 0-03 Ma. (d) Echelle des inversions pour les 180 derniers Ma. D'après Tarduno et al. [2006].*

surestimation du moment dipolaire moyen récent (du fait d'un biais très important des mesures vers les périodes très récentes ou parce que la période étudiée est trop courte pour moyenner les fluctuations temporelles de la paléointensité), soit une sous-estimation du moment dipolaire moyen ancien (du fait d'une altération des propriétés magnétiques des roches anciennes, soit en place, soit lors des chauffes nécessaires à l'estimation de la paléointensité [Tarduno et Smirnov, 2004; Smirnov et Tarduno, 2003]).

Plusieurs études remettent cependant en cause l'absence d'évolution à long terme de la paléointensité. Une légère corrélation entre la paléointensité et la fréquence des inversions est suggérée par les études des variations relatives de la paléointensité à partir de carottes sédimentaires [Tauxe et Hartl, 1997; Valet et al., 2005]. Par ailleurs, la quantité de mesures de paléointensité absolue disponibles pour le superchron du Crétacé a significativement augmenté [Tauxe et Staudigel, 2004], permettant ainsi de mieux contraindre le moment dipolaire moyen au cours du superchron. Ces mesures semblent indiquer un moment dipolaire du même ordre de grandeur que le moment dipolaire actuel et supérieur au moment dipolaire caractérisant la période postérieure au superchron. Les mesures obtenues à partir de l'étude de l'aimantation rémanente de feldspaths fournissent des estimations du moment dipolaire significativement supérieures aux mesures effectuées sur roches entières ou sur les verres basaltiques pour ce qui concerne les périodes anciennes [Tarduno et Cottrell, 2005] (figure 1.18a). Tarduno et Smirnov [2004] et Smirnov et Tarduno [2003] proposent que ces dernières soient affectées par des phénomènes d'altération. Ces mesures obtenues à partir de l'étude des feldspaths semblent suggérer une corrélation entre la fréquence des inversions, la paléointensité absolue et l'amplitude de la variation séculaire [Tarduno et Cottrell, 2005]. Le superchron du Crétacé semble caractérisé par un moment dipolaire significativement supérieur et une dispersion des mesures plus faible que les périodes l'encadrant. La quantité de mesures actuellement disponibles à partir de ce type d'échantillons est cependant beaucoup trop réduite pour conclure définitivement à l'existence d'une corrélation.

1.3.3 Ses variations spatiales

Principe des modèles statistiques

Comme on l'a vu à la section 1.2.3, les variations spatiales du champ géomagnétique à la surface de la Terre peuvent être décrites à chaque instant par un ensemble de coefficients de Gauss définissant un vecteur $x(t) = (g_n^m(t), h_n^m(t))$. Les mesures historiques du champ géomagnétique permettent de reconstituer son évolution sur quelques centaines d'années (figures 1.8 et 1.19b). L'obtention de modèles en harmoniques sphériques à partir des

mesures paléomagnétiques pose cependant un certain nombre de difficultés. La connaissance du champ paléomagnétique est très parcellaire. Seules des mesures effectuées sur des roches volcaniques peuvent être facilement exploitées pour rendre compte de la variabilité du champ paléomagnétique, qui serait sous-estimée par l'exploitation des roches sédimentaires au sein desquelles l'enregistrement des variations temporelles du champ géomagnétique est lissé. La quantité de mesures paléomagnétiques disponibles dans les bases de données et exploitables pour la réalisation de modèles paléomagnétiques est limitée et répartie de façon hétérogène (figure 1.20). La majorité des observations disponibles est constituée de mesures directionnelles. Enfin, l'erreur de datation des laves (au mieux de l'ordre de 1%) est supérieure au temps caractéristique d'évolution du champ magnétique (de l'ordre de la centaine d'années [Hulot et Le Mouél, 1994]) et ne permet pas de synchroniser des observations provenant de sites distincts. Il est alors impossible de reconstruire des modèles instantanés du champ géomagnétique pour décrire l'évolution continue de la morphologie du champ, comme on le fait avec les mesures historiques. C'est pourquoi, on préfère caractériser le comportement moyen du champ (c'est à dire la loi de distribution des coefficients de Gauss, figure 1.19c) pour une époque donnée. On peut alors reconstituer une carte du champ moyen, caractérisé par la valeur moyenne des coefficients de Gauss, $\bar{x} = (\bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m)$ et apprécier la carte de la variabilité du champ autour de ce modèle moyen, caractérisée par l'écart-type des coefficients de Gauss ($\sigma(g_n^m), \sigma(h_n^m)$) (ou plus généralement par la matrice des covariances des coefficients de Gauss $Cov(x, x)$). Cette variabilité est ce que l'on nomme la paléovariation séculaire ("PaleoSecular Variation", PSV).

Cette approche n'est cependant valide que si les variations temporelles du champ géomagnétique, et en particulier des coefficients de Gauss, sont aléatoires. C'est à dire, que le champ géomagnétique perd la mémoire de ses valeurs précédentes au bout d'un certain temps. De manière à disposer d'un nombre suffisamment élevé de mesures indépendantes du champ paléomagnétique pour estimer son comportement moyen, il faut également que ce temps de mémoire soit petit (c'est à dire que les fluctuations du champ géomagnétique soient rapides) devant la durée de l'époque étudiée (par exemple la durée d'un intervalle de polarité). Cette approche suppose également que le comportement du champ soit stationnaire. La valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients doivent être constantes sur la période étudiée. C'est pourquoi, on exclut, pour ces études, les périodes où le champ s'inverse ou subit une excursion. Les modèles de type "Giant Gaussian Process (GGP)" introduits par Constable et Parker [1988] supposent également que les coefficients de Gauss suivent une distribution gaussienne. Le comportement moyen du champ à la surface de la Terre est alors complètement décrit en estimant la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss.

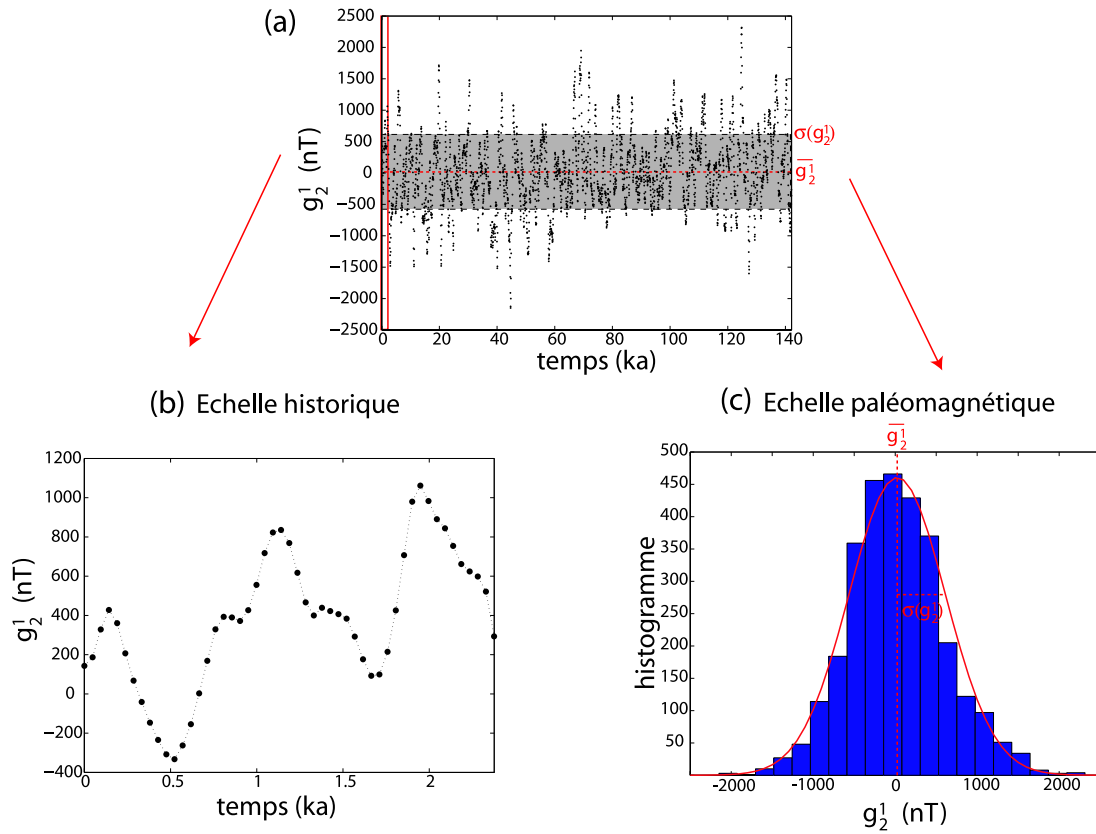


FIG. 1.19 – (a) Variations temporelles du coefficient de Gauss g_2^1 dans la simulation numérique de Glatzmaier et al. [1999] (période inverse du modèle 1 présenté au chapitre 2). (b) A l'échelle historique ou archéomagnétique (de la centaine au millier d'années), il est possible de calculer les coefficients de Gauss instantanés et de reconstituer leur évolution temporelle. (c) A l'échelle paléomagnétique (de la centaine de milliers d'années à plusieurs millions d'années), il n'est plus possible de reconstituer les variations continues des coefficients de Gauss. On préfère donc caractériser leur comportement moyen, c'est à dire la distribution de leurs valeurs. Les modèles de type "Giant Gaussian Process" supposent que la distribution des coefficients de Gauss est gaussienne. Le comportement moyen du coefficient g_2^1 est ainsi complètement décrit par sa valeur moyenne $\bar{g}_2^1$ et son écart-type $\sigma(g_2^1)$.

Les bases de données paléomagnétiques

Les études de la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire requièrent un grand nombre de mesures réparties le plus homogènement possible à la surface de la Terre. Ces études sont permises par la compilation des mesures paléomagnétiques obtenues dans différentes études. Plusieurs bases de données sont actuellement disponibles : celles obtenues à partir de l'étude des sédiments et celles obtenues à partir de l'étude des

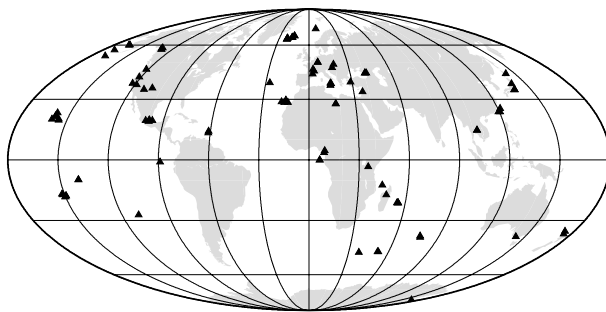


FIG. 1.20 – Localisation des 101 sites de mesure de la base de données paléomagnétique de Quidelleur et al. [1994] mise à jour en 1998 et disponible sur internet à l'adresse <http://www.ipgp.jussieu.fr/rech/paleomag/var-secu/>. Cette base de données rassemble les mesures effectuées sur des roches volcaniques datant des 5 derniers millions d'années.

laves. La base de données de Schneider et Kent [1990] rassemblant des études de carottes sédimentaires océaniques ne contient que des mesures d'inclinaison du champ, l'orientation de la carotte n'étant pas connue. Les compilations de mesures effectuées dans les laves comprennent des bases de données directionnelles (inclinaison et déclinaison) [Quidelleur et al., 1994; Johnson et Constable, 1996; McElhinny et McFadden, 1997] et des bases de données vectorielles (direction et intensité) [Tanaka et al., 1995; Perrin et Schnepf, 2004], beaucoup plus réduites que les précédentes. Chaque base de données comprend plusieurs sites d'étude, contenant chacun plusieurs mesures du champ correspondant à des instants différents (obtenus à partir de différentes strates ou différentes coulées). La variabilité de ces mesures rend compte de la variation séculaire au site d'étude. Chacune de ces mesures est elle-même obtenue en moyennant les mesures obtenues pour différents échantillons (supposés synchrones). La dispersion des mesures au sein de ces échantillons fournit l'incertitude de mesure.

De manière à homogénéiser la qualité des données au sein des différentes études, des critères de sélections ont été établis par les auteurs des bases de données. Ces critères portent sur la qualité des mesures et la représentativité du site en terme de variation séculaire. Enfin, les mesures du champ correspondant à des inversions ou des excursions sont éliminées en imposant comme critère une latitude minimum pour la position des pôles géomagnétiques virtuels ("virtual geomagnetic pole", VGP). Ce critère est cependant assez dangereux, la limite entre variation séculaire, excursions et inversions étant parfois floue et sans doute arbitraire.

Par exemple, les critères utilisés dans la base de données dans les laves de Quidelleur et al. [1994], mise à jour en 1998 et disponible à l'adresse <http://www.ipgp.jussieu.fr/rech/paleomag/var-secu/> sont les suivants :

1. Qualité des mesures :

- L'âge des coulées doit être suffisamment contraint.
 - Les sites ne doivent pas avoir été affectés par des événements tectoniques.
 - Les directions moyennes doivent être estimées à partir d'un minimum de 3 échantillons par coulées.
 - Le cône de confiance α_{95} (exprimant l'incertitude sur l'estimation de ces directions moyennes) doit être inférieur à 15° .
2. Représentativité du site en terme de variation séculaire :
- Le nombre de coulées échantillonnées doit être supérieur ou égal à 8.
 - La dispersion des directions mesurées dans les différentes coulées doit être suffisante (paramètre de la loi de Fisher, $k < 80$). Dans le cas contraire, la dispersion très faible des mesures peut indiquer que les coulées volcaniques se sont mises en place sur une période de temps trop courte pour que le champ évolue significativement. Dans ce cas, le site ne permet d'estimer ni l'amplitude de la variation séculaire, ni une valeur moyenne du champ.
3. Elimination des mesures transitionnelles :
- Les mesures pour lesquelles la latitude des VGPs est inférieure à 50° sont éliminées.

Recherche et test des modèles

Si les hypothèses nécessaires à la modélisation du champ paléomagnétique sont vérifiées et si l'évolution continue du champ était parfaitement connue à la surface de la Terre sur une période de temps T longue devant le temps caractéristique d'évolution du champ géomagnétique, alors la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss pourraient être simplement estimées à partir des relations suivantes :

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (1.9)$$

$$Cov(x, x) = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) - \bar{x})(x(t) - \bar{x})^T dt \quad (1.10)$$

Ces relations ne peuvent cependant pas être directement utilisées puisque l'évolution continue du champ n'est connue qu'à l'échelle historique, une période trop courte pour rendre compte de la variabilité du champ. En revanche, il est possible de rechercher le modèle de champ moyen et de paléovariation séculaire qui rende compte au mieux de la valeur moyenne et de la dispersion des mesures paléomagnétiques.

Les premières études ont porté sur la morphologie du champ moyen uniquement [*e.g.*, Schneider et Kent, 1990; McElhinny et al., 1996; Kelly et Gubbins, 1997; Johnson et Constable, 1997; Carlot et Courtillot, 1998]. Ces modèles ont principalement été établis à

partir de mesures de direction, en recherchant le modèle prédisant aux sites d'étude une direction du champ moyen qui reproduise au mieux l'estimation de la direction moyenne du champ. Cette direction moyenne est généralement obtenue en sommant les vecteurs unitaires portant la direction du champ paléomagnétique. Elle peut être légèrement différente de la direction du champ moyen, obtenue en sommant les vecteurs champs magnétiques (direction et intensité) et introduit donc une source d'erreurs. En effet, la valeur moyenne des directions mesurées à un site d'étude ne dépend pas que de la valeur du champ moyen mais également de la façon dont les valeurs du champ sont dispersées autour de ce champ moyen [Khokhlov et al., 2001; Kono, 1997] (voir chapitre 3). C'est pourquoi, il est préférable d'étudier conjointement le champ moyen et la paléovariation séculaire (comme le permettent les modèles de type "GGP").

Il est possible, à partir d'un modèle de type "GGP" donné, de prédire la distribution des observations paléomagnétiques (telles que l'inclinaison, la déclinaison, la position des VGPs, l'intensité ou le moment dipolaire virtuel) aux différents sites d'étude. Ces prédictions peuvent être obtenues de deux façons : soit en générant des bases de données paléomagnétiques synthétiques à partir de séries aléatoires de coefficients de Gauss dont les valeurs moyennes et la matrice des covariances sont définies par le modèle, soit en calculant de manière analytique la loi de distribution des observations paléomagnétiques à partir de la loi de distribution des coefficients de Gauss. Les premiers modèles proposés ont été estimés de manière empirique, en faisant varier les paramètres du modèle (valeur moyenne et écart-type des coefficients de Gauss) et en recherchant le modèle prédisant au mieux la distribution des observations paléomagnétiques disponibles dans les bases de données [Constable et Parker, 1988; Quidelleur et Courtillot, 1996; Constable et Johnson, 1999] (figure 1.21). Plus récemment des méthodes inverses ont été développées pour l'estimation de modèles "GGP" à partir des mesures directionnelles [Hatakeyama et Kono, 2002] et des mesures vectorielles [Kono et al., 2000].

La complexité du champ moyen

La carte du champ géomagnétique actuel (figure 1.8) montre que celui-ci est dominé par un dipôle incliné d'une dizaine de degrés par rapport à l'axe de rotation de la Terre et qu'il comprend également des composantes non-dipolaires. La mesure de ses fluctuations temporelles en un site donné montre que le pôle géomagnétique virtuel ("virtual geomagnetic pole", VGP) suit une trajectoire généralement centrée sur l'axe de rotation de la Terre. La distribution des VGPs obtenue à partir de mesures réparties à la surface de la Terre sur plusieurs milliers d'années étant centrée sur l'axe de rotation de la Terre [Hosper, 1954], on suppose généralement que le champ géomagnétique moyenné sur ces échelles de temps est un dipôle axial géocentrique g_1^0 ("Geocentric Axial Dipole" hypothesis). Dans

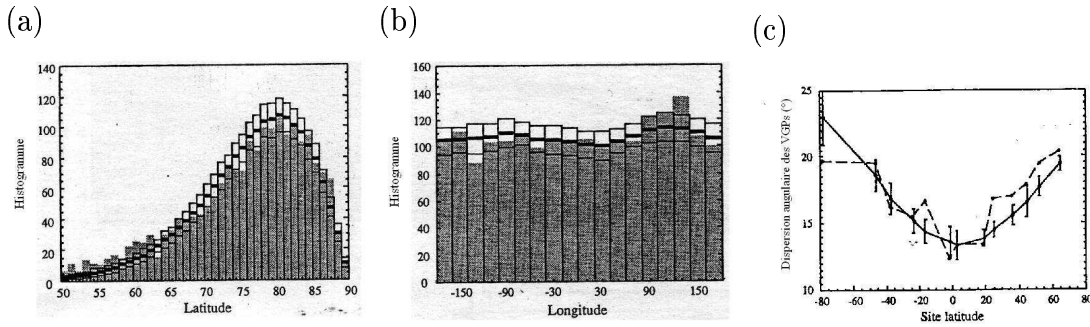


FIG. 1.21 – Comparaison des distributions de différentes observations paléomagnétiques prédites par le modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] (représentées en courbes pleines) et obtenues à partir de la base de données de Quidelleur et al. [1994] (représentées en grisé et en pointillé). Les distributions représentées sont la latitude (a) et la longitude (b) des VGP et la dispersion des VGP en fonction de la latitude du site d'observation (c). Les distributions prédites sont obtenues en générant 100 bases de données synthétiques contenant les mêmes sites d'étude que la base données de Quidelleur et al. [1994]. Celles ci permettent d'estimer une distribution moyenne et un écart-type.

ce cas, l'estimation de la direction moyenne du champ pour un site donné, à une époque donnée, permet d'estimer sa position relative par rapport à l'axe de rotation de la Terre. Les études paléomagnétiques ont ainsi permis avec succès de reconstituer le mouvement des plaques lithosphériques.

Une telle distribution des VGPs centrée sur l'axe de rotation de la Terre peut cependant également être observée si le champ contient d'autres termes zonaux (axisymétriques) permanents tels que le quadrupôle g_2^0 ou l'octupôle g_3^0 . L'accumulation de mesures paléomagnétiques a permis de mettre en évidence de légers écarts à l'hypothèse du dipôle axial géocentrique. En particulier, l'inclinaison moyenne estimée pour un site donné est généralement légèrement inférieure à l'inclinaison prédite par un dipôle axial géocentrique (figure 1.22). La position moyenne des VGPs se situe, par conséquent, à une distance angulaire généralement plus importante que la distance séparant le site du pôle géographique. Ce "far sided effect", mis en évidence par Wilson [1970, 1971] et confirmé par les bases de données récentes [e.g., Quidelleur et al., 1994] met en évidence l'existence d'un terme quadrupôle g_2^0 dans le champ moyen (figure 1.23). L'existence d'autres termes zonaux persistants et leur amplitude relative par rapport au dipôle g_1^0 ont été recherchés à partir de l'étude des variations en fonction de la latitude de l'anomalie moyenne d'inclinaison ΔI par rapport à l'inclinaison prédite par un dipôle axial géocentrique g_1^0 [e.g., Schneider et Kent, 1990; McElhinny et al., 1996]. Par exemple, la contribution d'un quadrupôle g_2^0 peut être distinguée de celle d'un octupôle g_3^0 car l'anomalie d'inclinaison associée est de

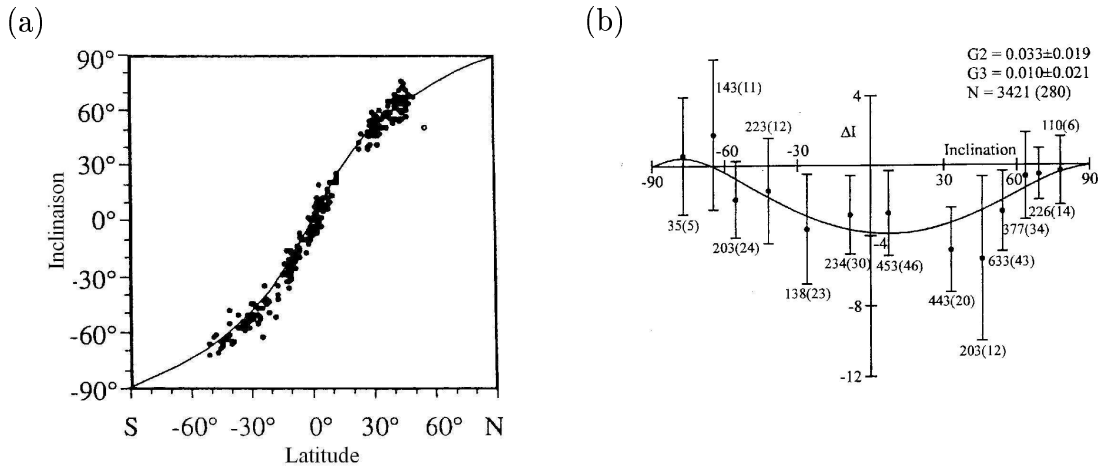


FIG. 1.22 – (a) Inclinaison moyenne en fonction de la latitude pour les périodes Brunhes et Matuyama (inclinaison multipliée par -1 en période inverse) à partir de mesures effectuées dans les sédiments océaniques. La courbe indique l'inclinaison I_0 prédite par un dipôle axial géocentrique ($\tan I_0 = 2 \tan \theta$, avec θ la latitude). D'après Schneider et Kent [1990]. (b) Valeur moyenne de l'anomalie d'inclinaison $\Delta I = I - I_0$ en fonction de l'inclinaison prédite par un dipôle axial géocentrique I_0 pour la période Brunhes à partir de mesures effectuées dans les sédiments océaniques et dans les laves. La dispersion des mesures d'inclinaison est donnée par les barres verticales. La courbe indique l'anomalie moyenne d'inclinaison produite un champ moyen composée d'un dipôle g_1^0 , d'un quadrupôle $g_2^0 = 0.033 \times g_1^0$ et d'un octupôle $g_3^0 = 0.010 \times g_1^0$. D'après McElhinny et al. [1996].

signe constant à la surface de la Terre dans le premier cas tandis qu'elle change de signe à l'équateur dans le second cas (figure 1.23).

La persistance de termes non zonaux a été initialement proposée à partir de l'observation d'un biais dans la distribution des longitudes des VGPs [Constable, 1992]. Ces observations n'ont cependant pas été confirmées par les bases de données récentes [e.g., Quidelleur et al., 1994] et étaient donc des artefacts associés à la distribution non uniforme des sites d'échantillonnage. Certains modèles de champ moyen, obtenus à partir de l'étude des mesures d'inclinaison, de déclinaison et occasionnellement de l'intensité du champ paléomagnétique en utilisant des méthodes d'inversion analogues à celles utilisées pour la modélisation du champ historique, proposent néanmoins l'existence de termes non zonaux persistants [Gubbins et Kelly, 1993; Johnson et Constable, 1995; Kelly et Gubbins, 1997]. Leurs cartes de la composante radiale du champ moyen à la limite noyau-manteau présentent notamment deux lobes, localisés dans l'hémisphère nord au niveau du Canada et de la Sibérie (figure 1.24d) et comparables aux lobes observables sur les cartes du champ historique (figure 1.8c). La persistance au long terme de telles structures peut être interprétée comme le résultat de l'influence du manteau sur les circulations de fluide à

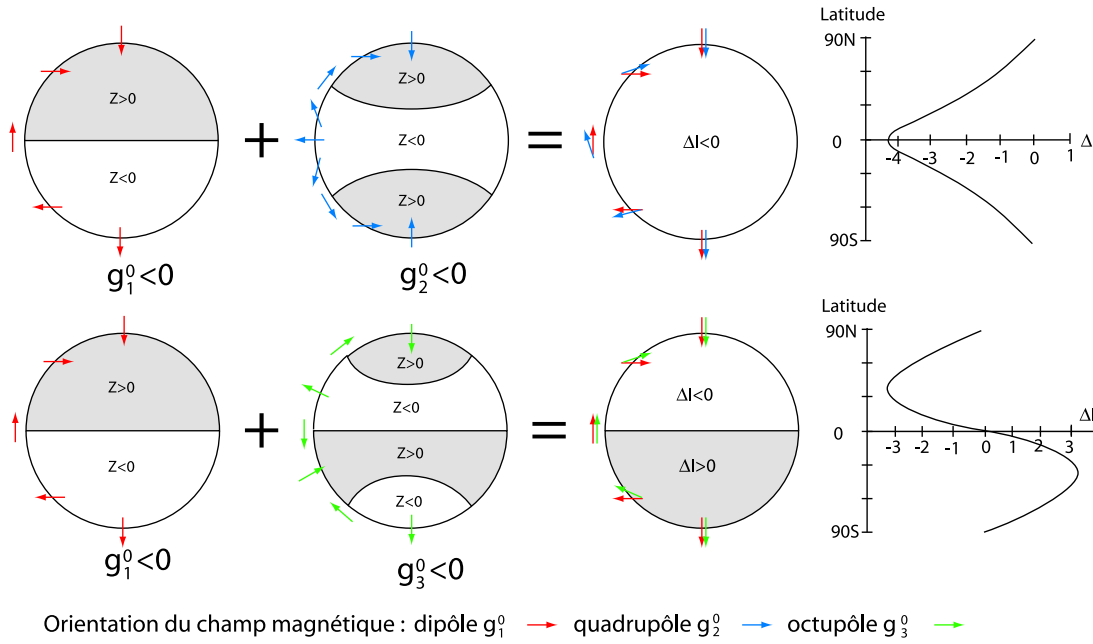


FIG. 1.23 – Anomalie d'inclinaison ΔI prédite par l'ajout d'un quadrupôle $g_2^0 = 0.05 \times g_1^0$ (en haut) ou d'un octupôle $g_3^0 = 0.05 \times g_1^0$ (en bas).

la surface du noyau. Ces résultats et cette interprétation ont cependant été remis en cause par plusieurs études ultérieures [Johnson et Constable, 1997; Carlut et Courtillot, 1998] (figure 1.24). L'erreur sur l'estimation des paramètres de ces modèles était sous-estimée car uniquement basée sur l'adéquation du modèle aux données, sans prendre en compte l'erreur intrinsèque contenue dans les mesures. La robustesse des différents termes dans les modèles de champ moyen a finalement été évaluée par Carlut et Courtillot [1998]. L'influence des erreurs de mesure sur la forme du champ moyen a été évaluée d'une part en ajoutant aux mesures un bruit aléatoire et d'autre part en séparant les données en différents sous-ensembles. La quantité et la qualité des mesures disponibles actuellement ne permet pas de détecter d'autres termes persistant que le dipôle g_1^0 et un quadrupôle $g_2^0 \simeq 4\%g_1^0$. La morphologie du champ moyen est donc beaucoup plus simple que celle du champ actuel. Les modèles de champ moyen permettent néanmoins de détecter une rupture de la symétrie sphérique (champ moyen non nul) et une dissymétrie entre les hémisphères nord et sud, le terme g_2^0 provoquant un léger décalage de l'équateur magnétique vers le nord. Par contre, les études actuelles ne permettent pas de détecter de rupture de la symétrie axiale (absence de termes non zonaux significatifs).

La morphologie du champ moyen a-t-elle évolué d'une époque à l'autre ? Cela a été proposé par Schneider et Kent [1988a,b] qui ont mis en évidence, à partir de l'étude de carottes sédimentaires, une variation de l'anomalie moyenne d'inclinaison par rapport à l'inclinaison prédite par un dipôle axial géocentrique, selon l'intervalle de polarité consi-

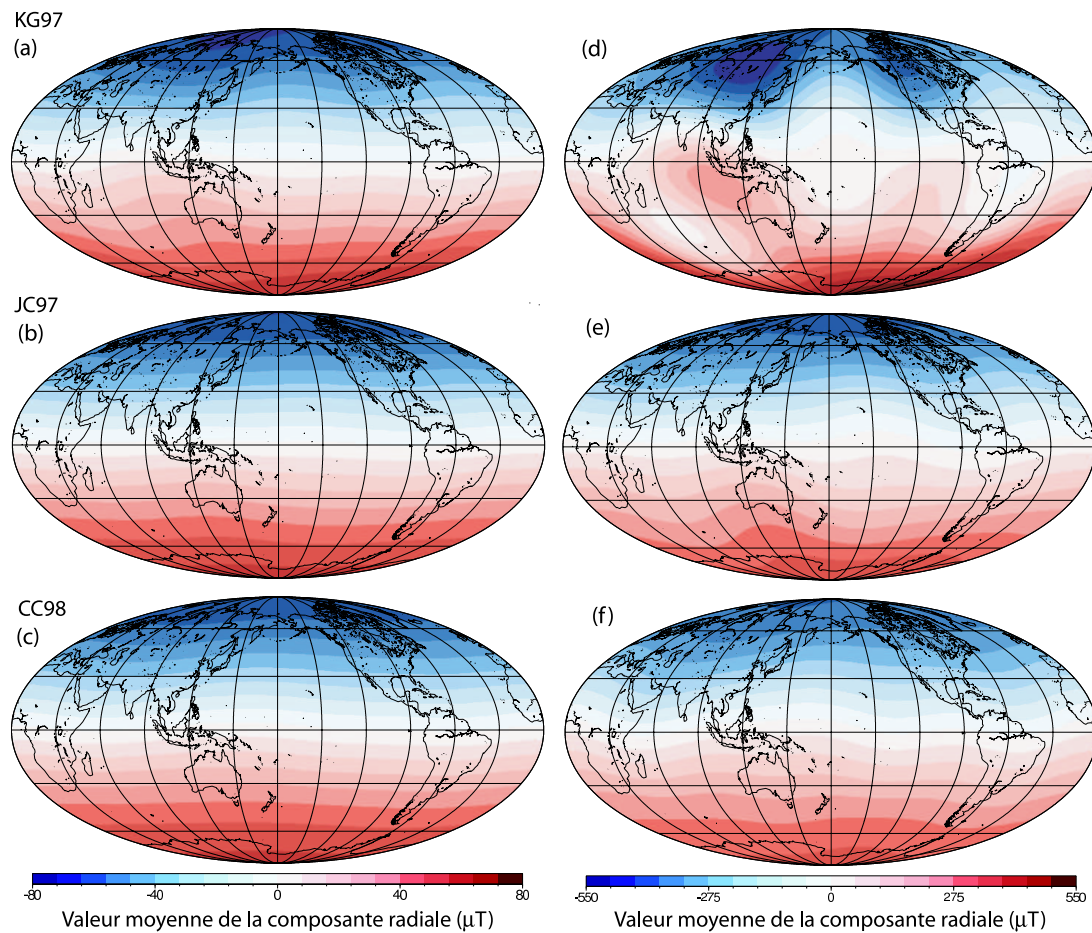


FIG. 1.24 – Carte de la valeur moyenne de la composante radiale du champ paléomagnétique à la surface de la Terre (a-c) et à la limite noyau manteau (d-f) selon les modèles de Kelly et Gubbins [1997] (modèle préféré : KG97), Johnson et Constable [1997] (modèle LSN1 en période normale : CJ97) et Carlot et Courtillot [1998] (modèle pour la période Brunhes obtenue à partir de Quidelleur et al. [1994] : CC98).

déré au cours des 5 derniers millions d'années. En particulier, Schneider et Kent [1990] proposent que les périodes Brunhes et Matuyama soient caractérisées par des rapports g_2^0/g_1^0 significativement différents (2.6% contre 4.6%) et des rapports g_3^0/g_1^0 non significativement différents (-2.9% contre -2.1%). Ces résultats ont cependant été remis en cause [e.g., McElhinny et al., 1996].

Ces études montrent également que l'interprétation des cartes du champ moyen nécessite au préalable, une étude minutieuse de chacun des termes (harmoniques), la complexité apparente des modèles proposés pouvant simplement être un artefact associé à la faible quantité de données disponibles, leur mauvaise répartition géographique et temporelle et les nombreuses sources d'erreurs potentielles. Il est difficile de savoir, par exemple, si la quantité de données exploitées et leur répartition temporelle sont suffisantes pour esti-

mer à chaque site d'étude le comportement moyen du champ. Du fait de la mauvaise répartition des sites d'étude, plusieurs modèles de champ moyen peuvent rendre compte des données disponibles dans les bases de données. On peut toujours trouver un modèle plus compliqué rendant compte des observations. Il est donc nécessaire de trouver un compromis entre l'adéquation du modèle aux données et la simplicité du modèle.

La complexité de la paléovariation séculaire

La morphologie de la paléovariation séculaire et celle du champ moyen peuvent être estimées conjointement en recherchant le modèle "GGP" rendant compte au mieux des observations paléomagnétiques. Le nombre de paramètres à estimer pour décrire ces modèles est cependant très élevé : il comprend l'ensemble des valeurs moyennes et des éléments de la matrice des covariances des coefficients de Gauss. C'est pourquoi, on recherche en général le modèle le plus simple qui soit compatible avec les observations. Les modèles publiés reposent donc tous sur des hypothèses simplificatrices sur la forme *a priori* du vecteur champ moyen $\bar{x}$ et de la matrice des covariances $Cov(x, x)$. Ces hypothèses ont pour conséquence d'imposer des contraintes sur la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire et en particulier sur leurs propriétés de symétrie. De manière à faire ressortir les symétries imposées par le choix des hypothèses simplificatrices considérées, les cartes de la valeur moyenne et de l'écart-type de la composante radial du champ ont été calculées à la surface de la Terre pour différents exemples de modèles "GGP" publiés (figure 1.25).

Le premier modèle de type "GGP" publié par Constable et Parker [1988] supposait un champ moyen assez simple, réduit au dipôle axial g_1^0 et à un quadrupôle axial g_2^0 (de l'ordre de quelques % du dipôle axial). La matrice des covariances était diagonale (coefficients de Gauss deux à deux indépendants) et l'écart-type des coefficients de Gauss ne dépendait que du degré n . Dans ce modèle (figure 1.25 CP), la variabilité du champ est constante à la surface de la Terre (symétrie sphérique), à la différence de la valeur moyenne du champ qui dépend de la latitude et de l'hémisphère dans lequel est situé le site d'observation. Les hypothèses de Constable et Parker [1988] sont cependant trop fortes. Leur modèle est incompatible avec les données récentes et ne rend en particulier pas compte de la dépendance en latitude des courbes de dispersion angulaire de la position des VGPs [Kono et Tanaka, 1995; Hulot et Gallet, 1996]. Cette dépendance peut cependant être reproduite si on suppose que les écart-types dépendent également de l'ordre m ou qu'il existe des corrélations entre les coefficients.

Dans les modèles publiés par la suite, les contraintes imposées sur la forme de la paléovariation séculaire ont petit à petit été relâchées autorisant une dépendance de l'écart-type

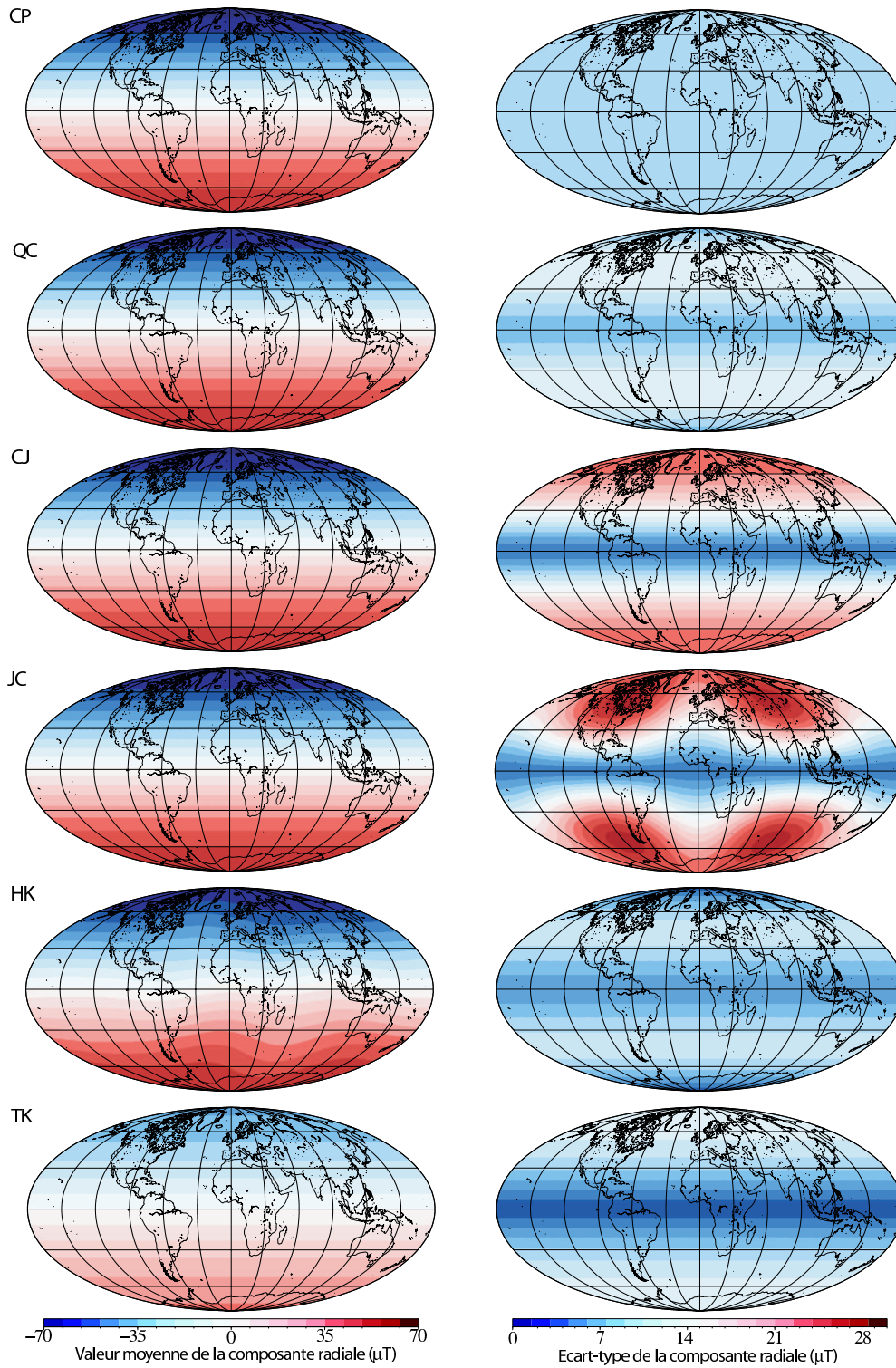


FIG. 1.25 – Cartes de la valeur moyenne et de l'écart-type de la composante radiale du champ magnétique à la surface de la Terre pour les modèles de type “GGP” proposés par Constable et Parker [1988] (modèle préféré : CP), Quidelleur et Courtillot [1996] (modèle C1 : QC), Constable et Johnson [1999] (modèle CJ98 : CJ; modèle CJ98.nz : JC), Hatakeyama et Kono [2002] (modèle final pour les polarités normales : HK) et Tauxe et Kent [2004] (modèle TK03.GAD : TK).

en fonction du degré n , de l'ordre m puis du coefficient g ou h . Quidelleur et Courtillot [1996] et Constable et Johnson [1999] montrent, par exemple, que la dépendance en latitude de la dispersion des VGPs peut être reproduite si on augmente l'écart-type des coefficients g_2^1 et h_2^1 par rapport à ceux des coefficients g_2^0 , g_2^2 et h_2^2 . Tauxe et Kent [2004] ont proposé un modèle simple pour lequel les écart-types des coefficients sont différents selon que ceux-ci correspondent à des harmoniques symétriques ($n - m$ pair) ou antisymétriques ($n - m$ impair) par rapport à l'équateur. La paléovariation séculaire dans ces trois modèles ne dépend que de la latitude, elle est axisymétrique (figure 1.25 QC, CJ et TK). Constable et Johnson [1999] ont aussi proposé un modèle pour lequel les écart-types des coefficients g_2^1 et h_2^1 sont différents, ce modèle présente une variabilité du champ dépendant de la longitude (figure 1.25 JC).

La paléovariation séculaire proposée par les différents modèles est assez variable (tant du point de sa morphologie que de son amplitude). Ces différences peuvent s'expliquer par le fait que ces différents modèles ont été obtenus à partir de bases de données différentes (prenant en compte des critères de sélection différents). Ces différences traduisent le peu de contraintes dont on dispose actuellement sur ces modèles et en particulier la nécessité d'une méthode rigoureuse permettant de tester ces modèles sur les bases de données récentes en prenant en compte les erreurs de mesure. Les modèles récemment proposés présentent néanmoins des caractéristiques communes, en particulier une dépendance de la paléovariation séculaire avec la latitude (rupture de la symétrie sphérique). Tous les modèles proposés jusqu'à maintenant supposent une symétrie de la paléovariation séculaire entre les hémisphères nord et sud (imposée par les hypothèses simplificatrices). Certains modèles proposent une rupture de la symétrie axiale [*e.g.*, Constable et Johnson, 1999] (figure 1.25 JC).

On remarque par ailleurs que les symétries imposées par les hypothèses simplificatrices sur la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire sont souvent différentes. Par exemple, Hatakeyama et Kono [2002] autorisent une rupture de l'axisymétrie pour le champ moyen, tandis que la paléovariation séculaire est supposée axisymétrique (figure 1.25 HK). Constable et Johnson [1999] autorisent, quant à eux, une rupture de l'axisymétrie pour la paléovariation séculaire, tandis que le champ moyen est supposée axisymétrique (figure 1.25 JC). La plupart des modèles "GGP" supposent que la variabilité du champ est symétrique entre les hémisphères nord et sud tandis que le champ moyen est dissymétrique par rapport à l'équateur (en raison du terme quadrupôle g_2^0). Il n'y a cependant pas de raison *a priori* pour que les propriétés de symétrie du champ moyen et de la paléovariation séculaire soient différentes.

La morphologie de la paléovariation séculaire a-t-elle évolué d'une époque à l'autre ? Cela a été proposé par McFadden et al. [1991] à partir de l'étude des courbes de dispersion

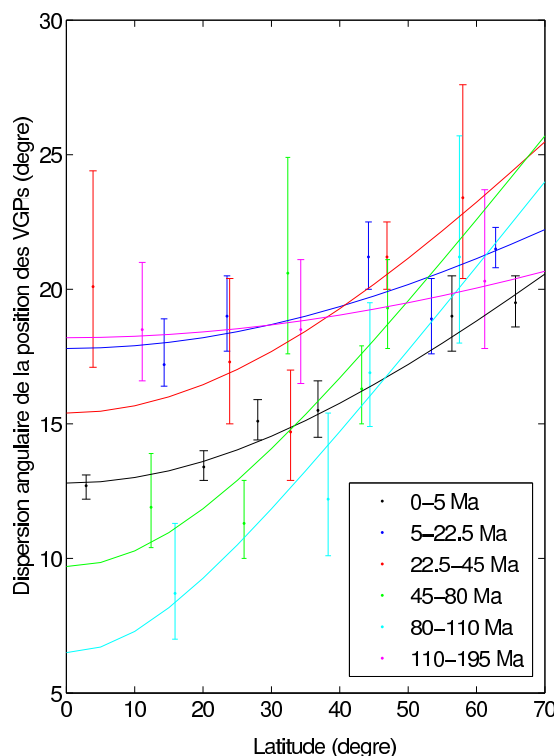


FIG. 1.26 – *Dispersion de la position des pôles géomagnétiques virtuels (points et intervalles de confiance à 95%) pour différentes bandes de latitude pour les périodes 0-5 Ma (en noir), 5-22.5 Ma (en bleu), 22.5-45 Ma (en rouge), 45-80 Ma (en vert), 80-110 Ma (en bleu turquoise) et 110-195 Ma (en rose). Les courbes de couleur sont les modèles proposés par McFadden et al. [1991] pour ces différentes périodes.*

angulaire de la position des VGPs obtenues pour différentes époques en exploitant la compilation de mesures de directions paléomagnétiques de Lee [1983]. La figure 1.26 montre en effet une variation de l'amplitude et de la dépendance en latitude de la dispersion des VGPs au cours du temps. L'incertitude sur l'estimation de ces courbes pour les périodes anciennes est cependant très importante, rendant difficile son interprétation.

1.4 Problématique et organisation du mémoire

Les fluctuations de la fréquence des inversions suggèrent une évolution à long terme (à l'échelle de plusieurs dizaines de millions d'années) dans le fonctionnement de la géodynamo. Plusieurs études ont proposé que celle-ci soit provoquée par une modification de la répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau. Pour déterminer si cela est effectivement le cas, il peut être utile de savoir si le comportement du champ en période de polarité stable est également affecté par une telle évolution à long terme (corrélée à l'évolution de la fréquence des inversions). C'est pour cette raison, qu'un effort important a été fourni par les équipes de paléomagnétisme pour caractériser le moment dipolaire du champ magnétique de la Terre pour les 160 derniers millions d'années. La conclusion de ces études est mitigée et ne permet pas encore actuellement de déterminer si une corrélation est réellement observée. On peut se demander également si les fluctuations de

la fréquence des inversions sont associées à une évolution dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire ou à une évolution de l'amplitude de la variation séculaire et de la fréquence des excursions. L'objectif de cette thèse est de fournir quelques éléments de réponse à cette question.

Les chapitres 2 et 3 portent sur la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire. Celle-ci peut être étudiée à partir des modèles de type “GGP”. Ces modèles, comme on l’a vu, peuvent permettre de détecter des ruptures de symétrie dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire, dont certaines pourraient, par exemple, être le “reflet” d’une influence des conditions à la limite noyau manteau (telle que la répartition du flux de chaleur). Ces modèles reposent cependant sur un certain nombre d’hypothèses sur le comportement du champ géomagnétique ne pouvant pas être facilement testées à partir des mesures du champ magnétique de la Terre. Le chapitre 2 s’est donc appuyé sur le champ magnétique produit par deux simulations numériques de Glatzmaier et al. [1999]. Ces deux simulations nous ont permis, dans un premier temps, d’apprécier la validité de l’approche “GGP”, pour ce qui concerne le champ magnétique produit par ces simulations numériques et, dans un deuxième temps, de tester si la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire peut être influencée par la répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau et, en particulier, de déterminer quelle peut être l’origine des ruptures de symétrie susceptibles d’être observées pour le champ magnétique de la Terre. Le chapitre 3 présente, quant à lui, une nouvelle méthode pour tester les modèles statistiques de type “GGP” sur les bases de données directionnelles, en prenant en compte l’incertitude de mesure. Cette méthode a permis, en particulier, de tester différents modèles de type “GGP” publiés à l’aide des mesures de direction disponibles dans la base de données de Quidelleur et al. [1994] mise à jour en 1998.

Le chapitre 4 porte sur l’étude des fluctuations temporelles de l’intensité du champ géomagnétique au long terme, au cours d’une période de temps caractérisée par une évolution de la fréquence des inversions. Les études de paléointensité relative étant principalement restreintes aux derniers millions d’années, les fluctuations de l’intensité du champ géomagnétique et la distribution des excursions sont très mal connues pour les périodes plus anciennes. Nous avons utilisé, dans ce chapitre, les nombreux profils magnétiques marins de surface disponibles dans les bases de données et dont les anomalies de courte longueur d’onde et de faible amplitude peuvent contenir un signal cohérent sur de grandes distances (les “tiny wiggles”) reflétant les fluctuations rapides du champ géomagnétique enregistrées par la croûte océanique. Le but de cette étude était, dans un premier temps, d’isoler ce signal géomagnétique puis dans un deuxième temps de déterminer si celui-ci indique l’existence ou non d’une évolution à long terme de la variation séculaire au cours de la période étudiée.

Chapitre 2

Que nous apprennent les simulations numériques de géodynamo sur la modélisation statistique du champ paléomagnétique ?

La modélisation statistique du champ paléomagnétique en termes de “Giant Gaussian Process” (GGP) est très intéressante puisqu’elle permet, en particulier, de détecter des ruptures de symétrie dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire. La validité de ces modèles repose cependant sur un certain nombre d’hypothèses fondamentales sur le comportement du champ géomagnétique (coefficients de Gauss avec un comportement aléatoire, stationnaire et gaussien à l’échelle d’une période de polarité). De manière à réduire le nombre de paramètres à estimer pour la description de ces modèles, ceux-ci reposent également sur des hypothèses simplificatrices sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss, ayant pour conséquence d’imposer *a priori* des contraintes (en particulier des propriétés de symétrie) sur la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire. Ces différentes hypothèses ne peuvent être facilement testées ni à partir des mesures historiques (couvrant une période de temps trop courte), ni à partir des mesures paléomagnétiques (à partir desquelles les coefficients de Gauss instantanés ne peuvent être évalués). Les progrès récents en modélisation numérique de la dynamo terrestre ont permis l’apparition de modèles dont le champ magnétique présente des caractéristiques similaires au champ géomagnétique, telles que la dominance d’un dipôle et l’existence d’inversions, malgré l’utilisation de paramètres très différents de leurs valeurs terrestres [Glatzmaier et Roberts, 1995; Kuang et Bloxham, 1997; Christensen et al., 1998]. Deux des modèles de Glatzmaier et al. [1999] sont exploités dans ce

chapitre. Ils diffèrent par leur répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau. Le plus simple est caractérisé par une répartition homogène du flux de chaleur, le second par une répartition se voulant plus “réaliste”, suivant la répartition des vitesses sismiques obtenue en tomographie sismique. Bien que ces simulations soient sans doute très différentes de la dynamo terrestre, il est intéressant de regarder si les hypothèses fondamentales utilisées pour la modélisation statistique du champ paléomagnétique y sont vérifiées. La morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire (valeur moyenne et matrice des covariances des coefficients de Gauss) a été évaluée dans ces deux simulations numériques. La comparaison de leurs propriétés de symétrie permet de comprendre l’origine des ruptures de symétrie susceptibles d’être observées dans les modèles statistiques du champ paléomagnétique et de déterminer si celles-ci peuvent être associées à une influence de la répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau. Enfin, ces simulations numériques peuvent nous aider à choisir les hypothèses simplificatrices pertinentes pour la construction des modèles de champ moyen et de paléovariation séculaire. Les résultats de cette étude sont présentés dans deux articles publiés à *Geophysical International Journal*. Une brève présentation des simulations numériques exploitées et un résumé de l’étude et de ses principaux résultats sont présentés ci-dessous.

2.1 Présentation des simulations numériques

Les simulations numériques de géodynamo exploitées dans ce chapitre sont deux modèles de Glatzmaier et al. [1999] (modèles g et h qui seront cependant appelés modèles 1 et 2, de manière à ne pas introduire de confusion avec les coefficients de Gauss g_n^m et h_n^m). Ces modèles reposent sur la résolution numérique dans les trois dimensions des équations de la magnétohydrodynamique dans le noyau externe représenté par une coquille sphérique de fluide conducteur autour d’une graine solide conductrice dans un référentiel en rotation autour de l’axe de rotation de la Terre. Le manteau entourant le noyau est supposé isolant (figure 2.1).

Glatzmaier et Roberts [1995] ont tout d’abord proposé une forme simplifiée de ce modèle reposant sur l’approximation de Boussinesq des équations de la magnétohydrodynamique (selon laquelle les variations de densité du fluide sont négligées sauf dans la force de flottaison intervenant dans l’équation de la conservation de la quantité de mouvement). L’approximation de Boussinesq est cependant assez peu appropriée pour le noyau de la Terre étant donné que la densité y varie avec la profondeur. Glatzmaier et Roberts [1996] ont ensuite proposé un modèle plus réaliste prenant en particulier en compte les variations de la densité avec la profondeur. Les moteurs de la convection (énergie du système) dans ce dernier modèle sont un gradient de température (associé au refroidissement de la

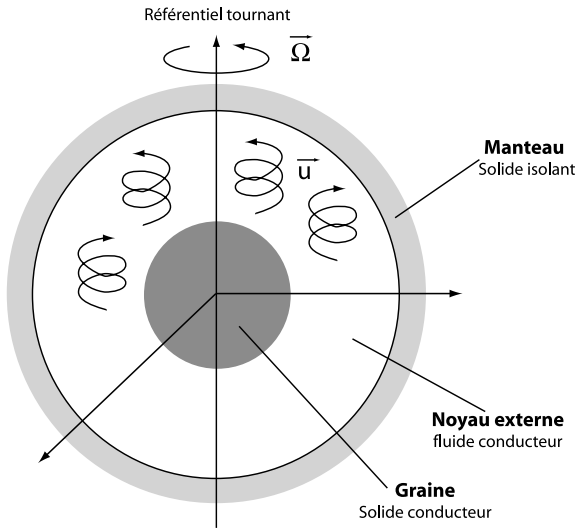


FIG. 2.1 – *Les modèles numériques de Glatzmaier et al. [1999] reposent sur la résolution des équations de la magnétohydrodynamique dans une coquille sphérique de fluide conducteur entourant un noyau solide conducteur dans un repère en rotation.*

Terre) et un gradient compositionnel (associé à l'enrichissement en éléments légers dans le noyau liquide lors de la cristallisation de la graine). Seul le gradient de température était pris en compte dans le modèle initial de Glatzmaier et Roberts [1995]. C'est à partir du modèle de Glatzmaier et Roberts [1996] qu'ont été réalisées les simulations numériques exploitées dans ce chapitre. Néanmoins, de manière à présenter d'une façon simple les ingrédients principaux intervenant dans le fonctionnement de ces modèles numériques, nous présentons ci-dessous les équations de la magnétohydrodynamique dans le cadre de l'approximation de Boussinesq utilisée par Glatzmaier et Roberts [1995].

Pour écrire ces équations, on suppose tout d'abord un état de référence dans lequel la pression P , la température T , la densité ρ , la viscosité cinématique ν , la diffusivité magnétique η (avec $\eta = 1/\mu_0\sigma$, σ étant la conductivité électrique et μ_0 la perméabilité magnétique du vide), le coefficient de dilatation thermique α , la diffusivité thermique κ sont constants. Soit P' , T' et ρ' les perturbations de pression, de température et de densité par rapport à cet état de référence. Dans le cas du modèle de Glatzmaier et Roberts [1995], la perturbation de densité ρ' est simplement proportionnelle à la perturbation de température T' ($\rho' = -\alpha T'$). Dans le fluide, le champ magnétique $\vec{B}$ et le champ de vitesse $\vec{u}$ sont décrits par les équations suivantes :

1. la conservation de la masse :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

2. la conservation du flux de champ magnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

3. la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}_{\text{inertie}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P'}_{\text{pression}} + \underbrace{\frac{\rho'}{\rho} \vec{g}}_{\text{flottaison}} + \underbrace{\nu \Delta \vec{u}}_{\text{viscosité}} + \underbrace{\frac{1}{\rho \mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}_{\text{Laplace}} - \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{u}}_{\text{Coriolis}} \quad (2.3)$$

avec Ω la vitesse de rotation angulaire de la Terre et $\vec{g}$ l'accélération de la gravité. L'accélération d'une particule de fluide dans un repère en rotation s'exprime comme la somme d'une force associées au gradient de pression, d'une force de flottaison, de la force liée aux frottements visqueux, de la force de Laplace (associée à l'existence de courants électriques dans un champ magnétique), des forces d'inertie et de la force de Coriolis (cette dernière étant associée à la rotation du référentiel). Les forces de marée et l'accélération centrifuge sont négligées.

4. l'équation d'induction :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = + \underbrace{\vec{\nabla} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{B})}_{\text{advection}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{B}}_{\text{diffusion}} \quad (2.4)$$

Les variations temporelles du champ magnétique (ou variation séculaire) sont provoquées par un terme diffusif (tendant à dissiper le champ magnétique) et un terme advectif (déformation des lignes de champ par la circulation des fluides). C'est ce terme advectif qui permet l'entretien du champ magnétique de la Terre.

5. la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = - \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T'}_{\text{advection}} + \underbrace{\kappa \Delta T'}_{\text{diffusion}} \quad (2.5)$$

Les variations temporelles de la perturbation de température sont provoquées par un terme advectif (transport de la chaleur par convection) et un terme diffusif (transport de la chaleur par conduction).

Dans la graine solide, seules les équations (2.2) et (2.4) sont considérées. Le noyau et le manteau peuvent être animés d'une rotation solide ($\vec{u}$ non nul), le moment angulaire du système complet (graine, noyau externe et manteau) restant nul dans le référentiel en rotation.

Ces équations sont adimensionnalisées, c'est à dire que les différentes variables (temps, distance, vitesse, etc) sont remplacées par des variables sans dimension (mise à l'échelle par leurs grandeurs caractéristiques). Cette adimensionnalisation fait apparaître dans les équations des nombres sans dimension (par exemple le nombre d'Ekman, le nombre de Prandtl). Certains de ces paramètres sont très différents de leur valeur terrestre [*e.g.*,

Dormy et al., 2000]. Par exemple, le nombre d’Ekman, rapport de la période de rotation sur le temps caractéristique de diffusion visqueuse, $E = \nu/\Omega r_c^2$ (r_c étant le rayon du noyau) est fixé à 10^{-6} dans le modèle au lieu de 10^{-15} pour le noyau terrestre (correspondant à une viscosité de $10^7 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ au lieu de $10^{-2} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ [Poirier, 1988]). Le terme visqueux dans l’équation de conservation de la quantité de mouvement n’est donc pas négligeable dans le modèle numérique alors qu’il l’est sans doute dans le noyau fluide terrestre. La valeur de la viscosité est choisie élevée pour des raisons numériques. Les mouvements de fluide à l’intérieur du noyau pouvant comporter de très petites échelles (du fait de la faible viscosité), il est nécessaire de résoudre les équations sur de très petites échelles spatiales (haut degré en harmonique sphérique) pour que le modèle soit juste. Ces calculs sont cependant trop lourds à réaliser compte tenu de la vitesse actuelle de calcul des ordinateurs. Lorsque la viscosité est plus importante, ces très petites échelles disparaissent et la circulation de fluide peut donc être calculée avec une résolution spatiale inférieure. Les auteurs justifient en partie l’excès de viscosité introduit dans leur modèle par la turbulence aux petites échelles spatiales (non résolues) provoquant comme effet macroscopique une augmentation de la viscosité (par rapport à la viscosité moléculaire, estimée dans un fluide au repos). De fait, des expériences récentes suggèrent qu’il est en effet possible qu’une telle augmentation de viscosité se produise dans le noyau [Brito et al., 2004]. Il faut noter également que les valeurs de la viscosité et du nombre d’Ekman citées ci-dessus sont celles s’appliquant aux grandes longueurs d’onde du champ de vitesse. En effet, au sein de ce modèle, la viscosité et les diffusivités thermique et magnétique ont des valeurs différentes selon la longueur d’onde (le degré de l’harmonique sphérique) des champs de vitesse, de température et magnétique (on parle d’hyperviscosité et d’hyperdiffusivité). La dissipation visqueuse des courtes longueurs d’onde est donc plus importante que celle des grandes longueurs d’ondes, privilégiant ainsi les grandes échelles par rapport aux petites échelles dans la circulation du fluide et la configuration du champ magnétique. Le nombre de Prandtl magnétique (rapport des temps de dissipation magnétique et visqueuse) est également très différent de sa valeur terrestre. Il est fixée à 725 au lieu de 10^{-6} pour le noyau terrestre. Par contre, le temps est défini de sorte que la vitesse de rotation angulaire de la Terre Ω corresponde à un tour par jour et que le temps de diffusion du dipôle magnétique $\tau_\eta = r_c^2/\pi^2\eta$ corresponde à la valeur terrestre probable de 20000 ans.

A ces équations sont ajoutées des conditions aux limites sur les différentes quantités décrivant le système (champ de vitesse, champ magnétique, champ électrique, champ de température, etc). Ces conditions sont décrites en détails par Glatzmaier et Roberts [1996] et Glatzmaier et al. [1999]. Les deux modèles exploités dans cette étude diffèrent par la répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau (figure 2.2a). Le modèle 1 est caractérisé par une répartition homogène du flux de chaleur, le modèle 2 par une répartition se voulant plus “réaliste”, suivant la répartition des vitesses sismiques à la base du

manteau, estimée en tomographie sismique [Su et al., 1994]. Cette méthode géophysique permet d'estimer des anomalies latérales de vitesse sismique par rapport à un modèle de référence pour lequel la vitesse des ondes sismiques ne dépend que de la distance au centre de la Terre (par exemple le modèle PREM [Dziewonski et Anderson, 1981]). Ces anomalies sont classiquement interprétées à la base du manteau en termes d'anomalies de température, elles peuvent être cependant également liées à des variations de la composition chimique du manteau. La convection dans le noyau étant beaucoup plus vigoureuse que dans le manteau, les variations latérales de température y sont d'amplitude beaucoup plus faible. Le flux de chaleur par conduction à la limite noyau manteau est supposé proportionnel au contraste de température entre le noyau et le manteau. Si on néglige les éventuelles variations d'épaisseur et de composition de cette couche limite, on peut supposer que la répartition du flux de chaleur suit la répartition des vitesses sismiques à la base du manteau. Ces deux modèles permettent ainsi d'étudier l'influence de la répartition du flux de chaleur à la limite noyau manteau sur le fonctionnement de la géodynamo et, en ce qui nous concerne, son influence sur la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire.

Ces simulations sont calculées à partir d'un état initial sur un pas de temps de 15 jours. Les mesures ne sont cependant conservées que tous les 50 ans (modèle 1) et 100 ans (modèle 2). Les simulations exploitées ont une durée de 300 000 ans environ (soit 15 fois le temps de diffusion du dipôle). La résolution des équations est effectuée dans le domaine spectral. Les champs magnétique, de vitesse, de température, de pression et de densité sont décomposés sur la base des harmoniques sphériques jusqu'au degré 21 (pour leur structure tangentielle à la sphère) et sur les polynômes de Chebyshev (pour leur structure radiale) jusqu'au degré 48 dans le noyau externe et 32 dans la graine solide.

Certains des paramètres utilisés pour le calcul des équations étant très différents de leur valeur terrestre, le bilan des forces au sein de ces dynamos numériques et au sein du noyau terrestre est différent. Le fonctionnement de la géodynamo, la géométrie des circulations de fluide, la morphologie du champ magnétique peuvent par conséquent être significativement différents. Le champ magnétique produit par ces simulations numériques présente cependant un certain nombre de caractéristiques communes avec le champ magnétique terrestre. Ce champ magnétique est principalement dipolaire en surface (figure 2.2b) et présente des structures non dipolaires observables à la limite noyau manteau (figure 2.2c) qui dérivent vers l'ouest. Des inversions du champ magnétique ont été observées (deux dans chacune des simulations étudiées, figure 2.2d). L'amplitude du dipôle g_1^0 dans ces modèles (figure 2.2e) est plus faible quoique du même ordre de grandeur, que l'amplitude du dipôle géomagnétique (de l'ordre de 15000 nT pour le modèle 1 et 5000 nT pour le modèle 2 contre 30000 nT pour la Terre). La dispersion de la position du pôle

magnétique est relativement faible dans le modèle 1, assez semblable à celle observée pour le champ magnétique de la Terre. Elle est beaucoup plus importante dans le modèle 2 (qui est également caractérisé par une amplitude du dipôle plus faible). Le champ magnétique du modèle 1 ressemble plus que celui du modèle 2 (dont la répartition du flux de chaleur se voulait pourtant plus réaliste) au champ magnétique de la Terre.

Il est possible de suivre dans ces simulations l'évolution de la carte du champ magnétique en surface, décomposée sur la base des harmoniques sphériques. Les séries temporelles des coefficients de Gauss (figure 2.2e) permettent d'une part de tester si les hypothèses utilisées pour la modélisation statistique du champ paléomagnétique sont vérifiées dans ces simulations, d'autre part d'étudier la forme du champ moyen et de la paléovariation séculaire et de rechercher si, par exemple, les conditions à la limite noyau-manteau ont une influence sur le comportement moyen du champ. Les propriétés statistiques des coefficients de Gauss ont été étudiées sur une période de polarité constante (période inverse pour le modèle 1 et période normale pour le modèle 2, flèches rouges sur la figure 2.2e).

2.2 Test des hypothèses fondamentales des modèles paléomagnétiques statistiques

Les modèles paléomagnétiques statistiques de type "GGP" reposent sur l'hypothèse que les coefficients de Gauss ont un comportement aléatoire (temps de mémoire court par rapport à la durée de l'intervalle de polarité), stationnaire et une distribution gaussienne. Cette section présente un résumé des tests effectués pour déterminer dans quelle mesure cette hypothèse est vérifiée pour le champ magnétique produit par les simulations numériques.

2.2.1 Comportement aléatoire

Le caractère aléatoire d'une série temporelle $X(t_i)$ (connue de manière discrète, à intervalle de temps constant Δt) peut être déterminé en calculant sa fonction d'autocorrélation (coefficient de corrélation calculé entre la série $X(t_i)$ et la même série décalée d'un déphasage τ multiple du pas d'échantillonnage, figure 2.3a) :

$$C(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(X(t_i) - \mu_X)(X(t_i + \tau) - \mu_X)}{\sigma_X^2} \quad (2.6)$$

où N est le nombre d'échantillons de la série temporelle. μ_X et σ_X sont la valeur moyenne et l'écart-type de $X(t_i)$. Si la série est aléatoire et si N tend vers l'infini, la fonction

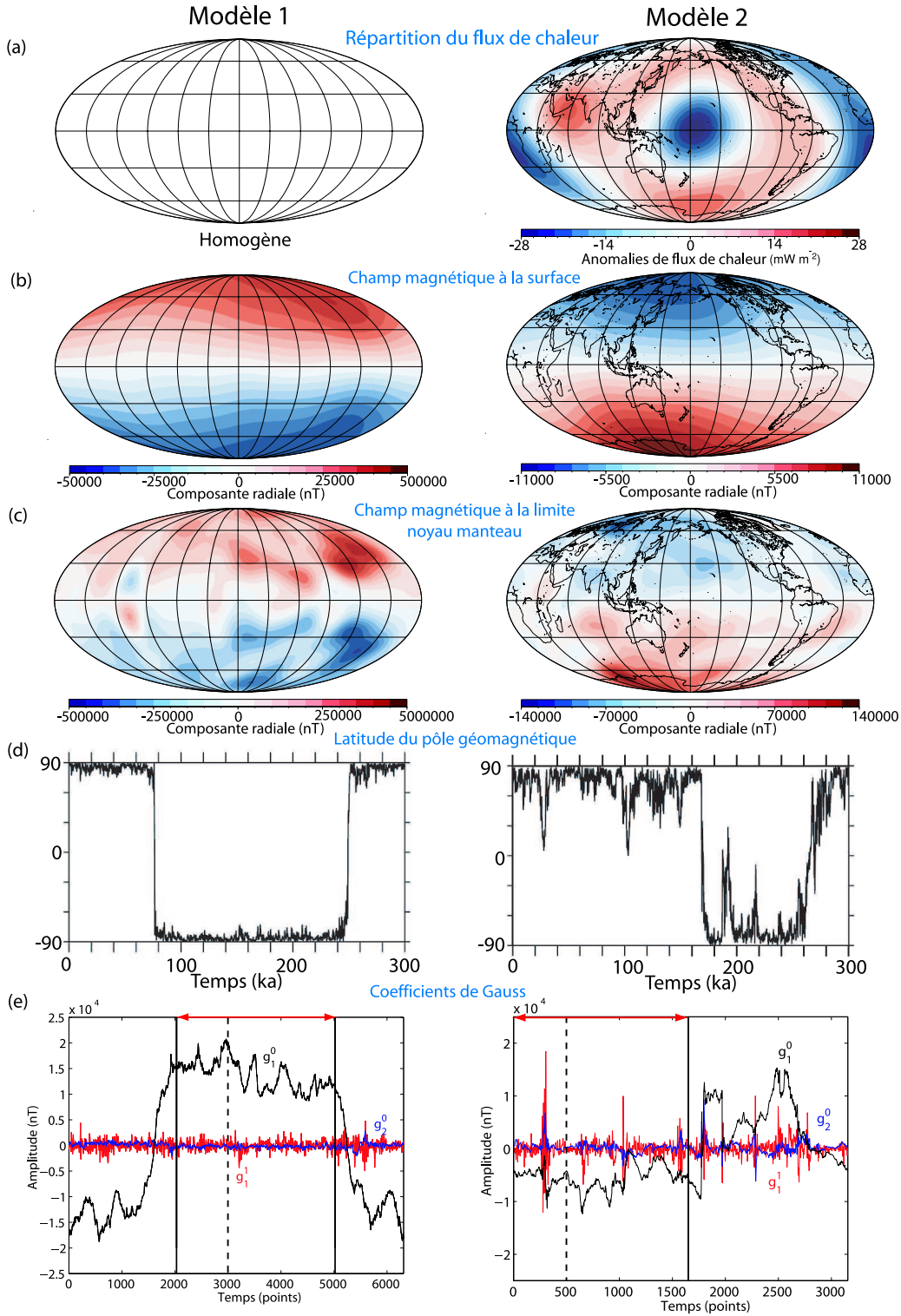


FIG. 2.2 – Cartes de la répartition du flux de chaleur (a), de la composante radiale du champ magnétique à la surface de la “Terre” (b) et à la limite noyau-manteau (c). Variations temporelles de la latitude du pôle sud magnétique (d) et des coefficients de Gauss (e) g_1^0 (en noir), g_2^0 (en bleu) et g_1^1 (en rouge) pour les deux simulations numériques étudiées (modèle 1 à gauche et modèle 2 à droite). Les cartes (b) et (c) sont des cartes instantanées correspondant à l’instant marqué par une barre pointillée sur les figures (e). Les flèches rouges sur la figure (e) indiquent les périodes pour lesquelles les propriétés statistiques du champ magnétique ont été étudiées.

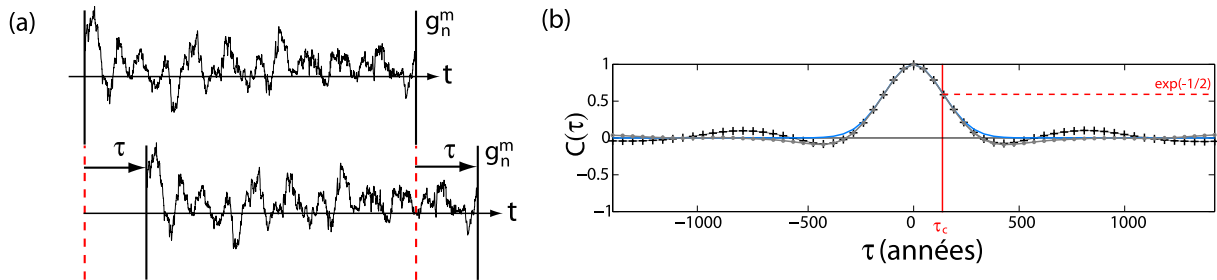


FIG. 2.3 – (a) La fonction d'autocorrélation $C(\tau)$ d'une série temporelle $X(t)$ est obtenue en calculant le coefficient de corrélation entre cette série et la même série décalée d'un déphasage τ . (b) Fonction d'autocorrélation des coefficients g_2^2 (en noir) et h_2^2 (en gris) pour le modèle 1. Le temps de mémoire τ_c est défini tel que $C(\tau_c) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$. La fonction théorique de la fonction d'autocorrélation définie par l'expression 2.7 est représentée en bleu.

d'autocorrélation est égale à 1 pour un déphasage nul et tend vers 0 lorsque le déphasage augmente.

La fonction d'autocorrélation des coefficients de Gauss (figure 2.3b) a en effet une forme en cloche et décroît relativement rapidement vers zéro. Celle-ci n'est pas nulle pour des déphasages de quelques pas d'échantillonnage, car la valeur des coefficients de Gauss a peu varié à cette échelle de temps (la centaine d'année). Hongre et al. [1998] ont proposé que la fonction d'autocorrélation des coefficients de Gauss, estimés à partir de l'étude du champ géomagnétique sur les derniers 2000 ans, soit de la forme :

$$C(\tau) = \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\tau_c}\right)^2\right) \quad (2.7)$$

où τ_c est le temps de mémoire des coefficients. Cette courbe suit en effet assez bien la fonction d'autocorrélation des coefficients de Gauss pour les petits déphasages (figure 2.3b). Plus le temps de mémoire est élevé, plus les variations temporelles des coefficients de Gauss sont lentes. On considère qu'un coefficient perd la mémoire d'une valeur précédente au bout d'un intervalle de temps $3\tau_c$. En effet, d'après la relation 2.7, $C(3\tau_c) \simeq 0.01$.

Le temps de mémoire des coefficients de Gauss a été estimé en recherchant la valeur pour laquelle la fonction d'autocorrélation est égale à $\exp\left(-\frac{1}{2}\right)$. Ces temps de mémoire dépendent du degré et de l'ordre du coefficient. Le temps de mémoire du dipôle g_1^0 est élevé (~ 5000 ans). Il est court pour les autres harmoniques (de l'ordre de quelques centaines d'années et diminue avec le degré et l'ordre) par rapport à la durée de l'intervalle de polarité étudié. Nous disposons donc pour ces coefficients d'un grand nombre de valeurs indépendantes permettant d'étudier leurs propriétés statistiques.

2.2.2 Stationnarité

La figure 2.2e montre les variations temporelles de quelques exemples de coefficients de Gauss. D'un point de vue statistique, ces fluctuations peuvent être décrites par une valeur moyenne et un écart-type. Un processus aléatoire stationnaire est caractérisé par une moyenne et un écart-type constant (plus généralement une loi de probabilité constante). Les inversions sont un exemple de comportement non stationnaire, le dipôle g_1^0 fluctue autour d'une valeur moyenne non nulle dont le signe change au moment des inversions (figure 2.2e). A l'intérieur d'une période de polarité, un comportement non stationnaire peut également être observé. Celui-ci est particulièrement flagrant pour le modèle 2, pour lequel on observe une alternance de périodes "calmes" et "agitées", ces dernières étant caractérisées par une dispersion très importante des valeurs. La moyenne et l'écart-type empiriques des coefficients de Gauss ont été évalués sur fenêtres glissantes de 5000 ans (figure 2.4). De manière à déterminer si les variations observées sont significatives, ces courbes ont été comparées à celles obtenues à partir de séries synthétiques aléatoires gaussiennes centrées réduites et dont le temps de mémoire est identique (figures 2.5 et 2.6).

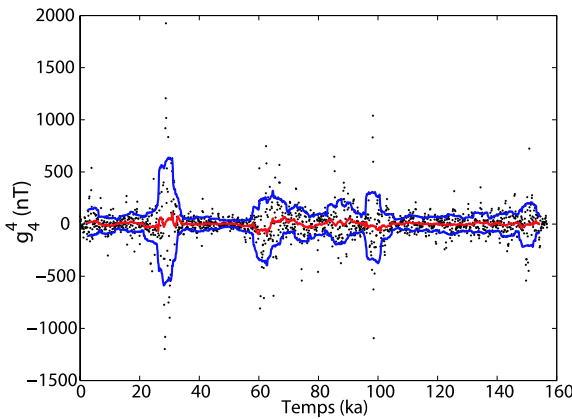


FIG. 2.4 – Moyenne (courbe rouge) et écart-type (distance entre les courbes bleues et la courbe rouge) estimés sur fenêtre glissante de 5000 ans à partir de la série temporelle (points noirs) du coefficient g_4^4 pour le modèle 2.

Pour le modèle 1, les courbes d'évolution de la moyenne obtenues pour les éléments non zonaux et les données synthétiques sont comparables. Par contre, la moyenne des éléments zonaux présente des variations légèrement plus importantes que celles observées pour la série synthétique. Des variations significatives de l'écart-type sont observées pour l'ensemble des coefficients. Ces variations de l'écart-type sont corrélées entre les coefficients g_n^m et h_n^m et également entre tous les coefficients dont $(n - m)$ a la même parité (même symétrie par rapport à l'équateur). Elles sont également corrélées avec les variations de la valeur moyenne des coefficients zonaux de même parité. Les coefficients de Gauss au sein du modèle 1 n'ont donc pas un comportement stationnaire. Ils peuvent cependant simplement être décrit comme le résultat d'un processus aléatoire modulé par une fonc-

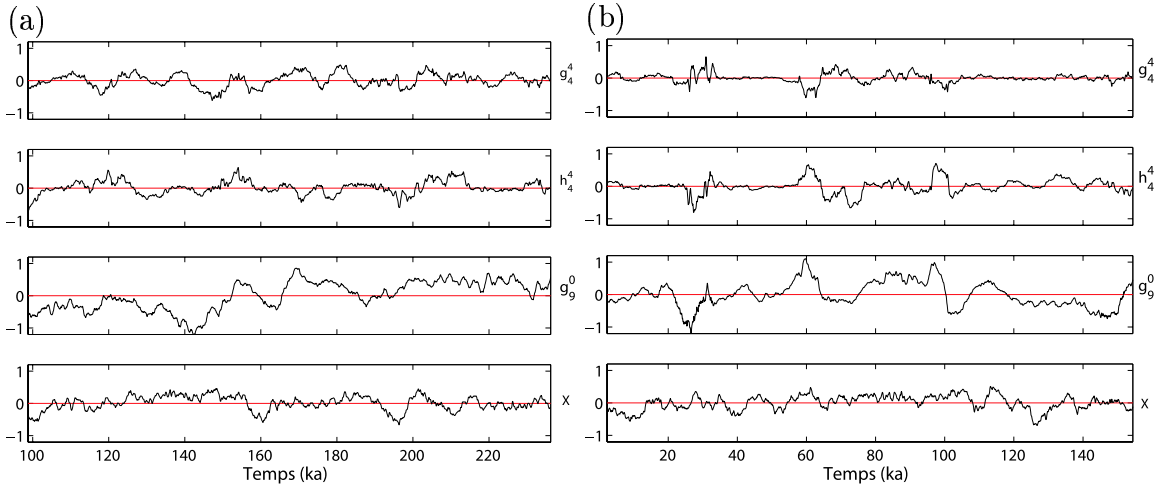


FIG. 2.5 – Comparaison des moyennes calculées sur fenêtre glissante entre les coefficients de Gauss g_4^4 , h_4^4 et g_9^0 (renormalisés en retranchant la valeur moyenne et en divisant par l'écart-type) et une série aléatoire gaussienne centrée réduite, X , pour les modèles 1 (a) et 2 (b). Ces quatre séries ont un temps de mémoire de 100 ans environ. La taille des fenêtres glissantes est de 5000 ans.

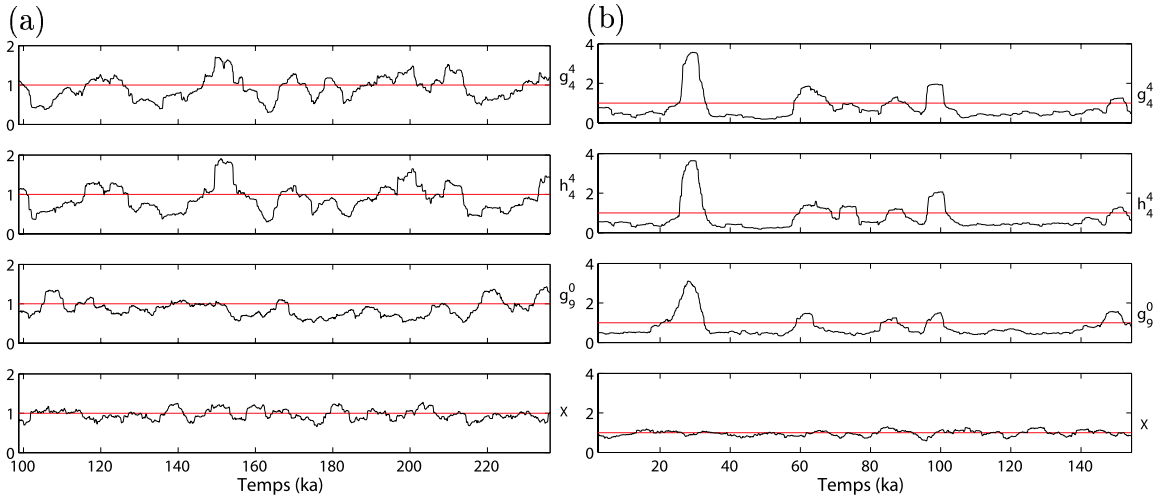


FIG. 2.6 – Comparaison des écart-types calculés sur fenêtre glissante entre les coefficients de Gauss g_4^4 , h_4^4 et g_9^0 (renormalisés en retranchant la valeur moyenne et en divisant par l'écart-type) et une série aléatoire gaussienne centrée réduite, X , pour les modèles 1 (a) et 2 (b). Ces quatre séries ont un temps de mémoire de 100 ans environ. La taille des fenêtres glissantes est de 5000 ans.

tion (différente selon que le coefficient est symétrique ou antisymétrique par rapport à l'équateur).

Pour le modèle 2, des variations significatives de la moyenne et de l'écart-type sont observées pour l'ensemble des coefficients. Les variations de l'écart-type sont corrélées entre tous les coefficients. Pas de corrélation claire avec les variations de la moyenne n'est observée. A la différence du modèle 1, la modulation de l'écart-type des coefficients de Gauss peut être décrite à l'aide d'une seule fonction.

Le comportement des coefficients de Gauss pour ces deux modèles n'est donc pas stationnaire au cours des intervalles de polarité. La non stationnarité est la plus marquée dans les fluctuations de l'écart-type. Elle est beaucoup plus importante au sein du modèle 2. Les fluctuations des propriétés statistiques des coefficients de Gauss s'observent à l'échelle de la dizaine de milliers d'années (temps de mémoire du dipôle g_1^0).

2.2.3 Distribution gaussienne

La distribution des coefficients de Gauss a été étudiée en représentant leur courbe cumulative : à chaque valeur de la série est associée la proportion des valeurs inférieures observées. Afin de n'utiliser que des points indépendants, chaque coefficient est échantillonné tous les $3\tau_c$ (τ_c étant le temps de mémoire). Les courbes cumulatives des coefficients renormalisés (corrigés de leur moyenne empirique et divisés par leur écart-type empirique) sont comparées avec celle d'une loi gaussienne centrée réduite. Une représentation particulière (figure 2.7) est adoptée de manière à mettre en évidence d'éventuels écarts à la courbe gaussienne sur les valeurs extrêmes. Dans la partie positive de l'axe des abscisses, les courbes sont remplacées par leur symétrique par rapport à la droite $y = 0.5$. Enfin, l'échelle des ordonnées est logarithmique. Dans cette représentation, la courbe cumulative d'une loi gaussienne est concave.

Pour le modèle 1, la courbe cumulative des coefficients de Gauss est assez proche d'une loi gaussienne (figure 2.8a), sauf pour les degrés et ordres élevés (auxquels les études paléomagnétiques ne peuvent cependant pas accéder), pour lesquelles des écarts relativement importants avec la courbe gaussienne sont observés. Pour le modèle 2, la courbe cumulative des coefficients de Gauss est très différente d'une loi gaussienne (figure 2.8b). La courbe cumulative des coefficients renormalisés par les fluctuations temporelles de l'écart-type des coefficients estimées sur fenêtre glissante est beaucoup plus proche de la courbe gaussienne indiquant que les écarts à la distribution gaussienne sont principalement associés à la non stationnarité.

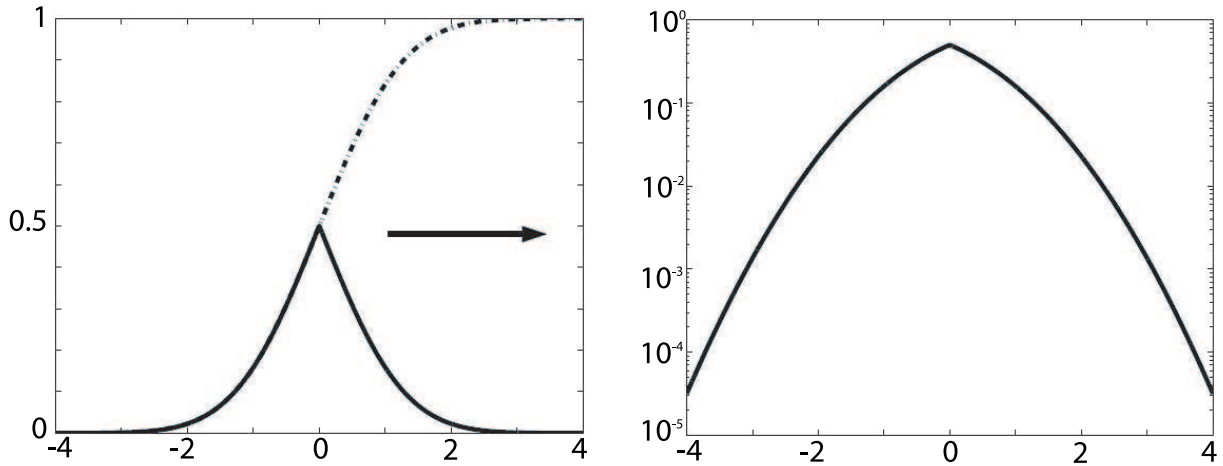


FIG. 2.7 – Les fonctions cumulatives (courbe pointillée) sont remplacées dans la partie positive de l'axe des abscisses par leurs symétriques (courbe continue) par rapport à la droite $y = 0.5$. Ces courbes sont ensuite dessinées dans un diagramme semi-logarithmique. La fonction cumulative gaussienne dessinée dans ce nouveau diagramme est concave.

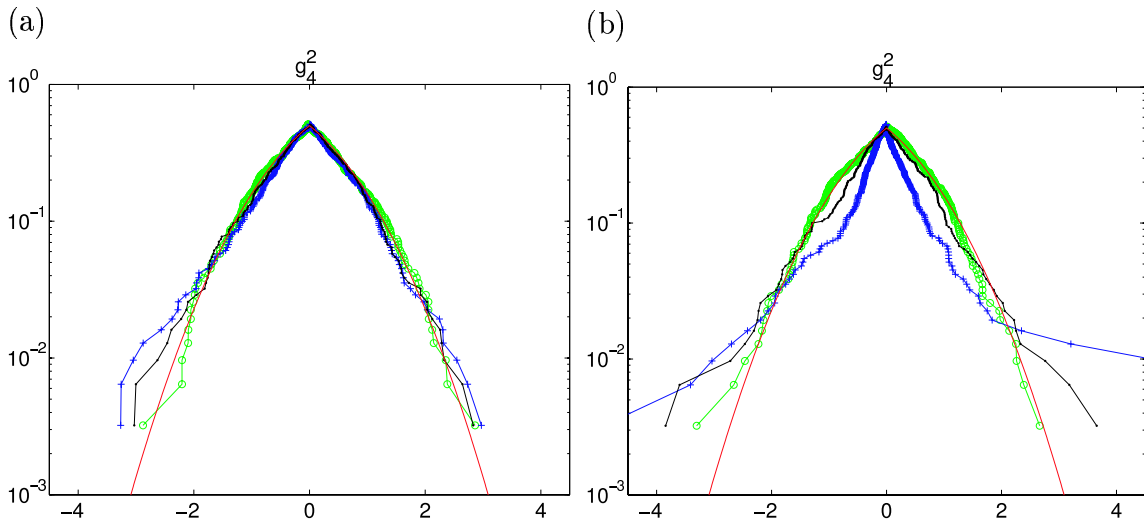


FIG. 2.8 – Fonction cumulative du coefficient g_4^2 , renormalisé en retranchant sa valeur moyenne et son écart-type (en bleu), de ce même coefficient renormalisé par les fluctuations temporelles de l'écart-type estimées sur fenêtre glissante (en noir) et d'une série aléatoire gaussienne centrée réduite (en vert) pour les modèles 1 (a) et 2 (b), d'après le mode de représentation présenté figure 2.7. La fonction cumulative théorique de la loi gaussienne centrée réduite est représentée en rouge. Le coefficient de Gauss est échantillonné tous les $3\tau_c$, de manière à ne prendre en compte que des valeurs indépendantes. La série synthétique comprend autant de points que ce coefficient.

2.2.4 Bilan

A l'échelle de l'intervalle de polarité, les coefficients de Gauss ont donc un comportement aléatoire justifiant une approche statistique pour décrire leurs fluctuations temporelles. En revanche, ils présentent un comportement non stationnaire (particulièrement important dans le modèle 2) ayant pour conséquence un écart à la distribution gaussienne (peu sévère pour le modèle 1, très sévère pour le modèle 2), en contradiction avec les hypothèses des modèles "GGP". Le champ magnétique produit par le modèle 1 ressemblant plus au champ géomagnétique que le modèle 2, on peut cependant espérer que les écarts au comportement stationnaire et à la distribution gaussienne restent faibles sur la Terre et que la modélisation statistique du champ paléomagnétique reste donc raisonnablement valide. Nous verrons d'ailleurs dans la section 3, qu'il est possible de trouver un modèle "GGP" dont les prédictions sont compatibles avec les observations paléomagnétiques.

2.3 Propriétés de symétrie du champ moyen et de la paléovariation séculaire

Le but de cette section est de déterminer les propriétés de symétrie du champ moyen et de la paléovariation séculaire au sein des deux simulations numériques et d'apprécier si celles-ci sont significativement différentes. Ceci peut être fait de deux façons : soit en représentant les cartes de la valeur moyenne et de l'écart-type des trois composantes du champ magnétique, soit en calculant la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss. Cette section présente, dans un premier temps, les symétries que l'on va rechercher et les conditions imposées par ces symétries sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss, puis, dans un second temps, les résultats de l'étude des propriétés de symétrie dans les simulations numériques.

2.3.1 Symétries et conditions sur les coefficients de Gauss

Dans le cas général, pour lequel aucune symétrie n'est imposée, les propriétés statistiques du champ magnétique dépendent *a priori* de la latitude et de la longitude du site d'observation, et la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss sont quelconques. Le nombre de paramètres à estimer pour décrire le comportement statistique du champ est alors élevé. L'existence d'une symétrie réduit le nombre de paramètres indépendants. Certains termes sont nuls. Parmi les termes non nuls, certains sont identiques. Il est possible de déterminer la forme générale qu'un modèle "GGP" doit satisfaire (conditions sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients

de Gauss) pour que les propriétés statistiques de son champ magnétique présentent une symétrie (sphérique, axiale ou équatoriale). Les conditions associées aux symétries du champ moyen sont triviales, celles associées aux symétries de la paléovariation séculaire le sont moins. La démonstration de ces conditions est fournie dans l'article intitulé *Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations* (section 2.5).

Symétrie sphérique :

Un modèle “GGP” présentant une symétrie sphérique est caractérisé par un champ magnétique dont les propriétés statistiques sont indépendantes de la position du site d'observation. Les conditions nécessaires et suffisantes sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss pour observer une telle symétrie sont :

- Tous les coefficients ont une valeur moyenne nulle :

$$\bar{g}_n^m = \bar{h}_n^m = 0 \quad (2.8)$$

- La matrice des covariances est diagonale (les coefficients sont indépendants deux à deux). Les termes diagonaux (et donc les écart-types) ne dépendent que du degré n de l'harmonique :

$$\text{Cov}(x_n^m, x_{n'}^{m'}) = 0 \quad \text{si} \quad x_n^m \neq x_{n'}^{m'} \quad \text{et} \quad \sigma(x_n^m) = \sigma_n \quad (2.9)$$

où x_n^m est un coefficient de Gauss quelconque (g_n^m ou h_n^m).

Symétrie axiale :

Un modèle “GGP” présentant une symétrie axiale est caractérisé par un champ dont les propriétés statistiques sont indépendantes de la longitude (mais peuvent dépendre de la latitude) du site d'observation. Les conditions nécessaires et suffisantes sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss pour observer une telle symétrie sont :

- Tous les coefficients non zonaux ont une valeur moyenne nulle :

$$\bar{g}_n^m = \bar{h}_n^m = 0 \quad \text{si} \quad m \neq 0 \quad (2.10)$$

- La covariance entre coefficients ne partageant pas le même ordre m est nulle. Parmi les termes non nuls de la matrice des covariances, certains ont une valeur identique (ou opposée) :

$$\text{Cov}(x_n^m, x_{n'}^{m'}) = 0 \quad \text{si} \quad m \neq m' \quad (2.11)$$

$$\text{Cov}(g_n^m, g_{n'}^m) = \text{Cov}(h_n^m, h_{n'}^m) \quad \text{si} \quad m \neq 0 \quad (2.12)$$

$$\text{Cov}(g_n^m, h_{n'}^m) = -\text{Cov}(h_n^m, g_{n'}^m) \quad (2.13)$$

Des corrélations peuvent donc exister entre les coefficients de même ordre m (la matrice n'est pas nécessairement diagonale). La condition (2.12) impose que les écart-types des coefficients g_n^m et h_n^m soient identiques.

Symétrie équatoriale :

Un modèle “GGP” présentant une symétrie (ou antisymétrie) équatoriale est caractérisé par un champ magnétique dont les propriétés statistiques sont indépendantes de l'hémisphère dans lequel se trouve le site d'observation (ou change de signe). Les conditions nécessaires et suffisantes sur la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss pour observer une telle symétrie sont :

- Les coefficients ayant une valeur moyenne non nulle sont tous symétriques ou tous antisymétriques par rapport à l'équateur :

$$\text{Soit } \bar{g}_n^m = \bar{h}_n^m = 0 \quad \text{si } n - m \text{ est impair} \quad (2.14)$$

$$\text{Soit } \bar{g}_n^m = \bar{h}_n^m = 0 \quad \text{si } n - m \text{ est pair} \quad (2.15)$$

- La covariance entre coefficients symétriques et antisymétriques est nulle (les familles de coefficients symétriques et antisymétriques sont indépendantes) :

$$\text{Cov}(x_n^m, x_{n'}^{m'}) = 0 \quad \text{si } n - m \text{ et } n' - m' \text{ sont de parités différentes} \quad (2.16)$$

2.3.2 Symétries dans les simulations numériques

Le champ magnétique étant très bien connu dans les simulations numériques (décomposition sur la base des harmoniques sphériques jusqu'au degré 21), il est possible d'estimer et de représenter la valeur moyenne et la matrice des covariances des 3 composantes du champ magnétique en tout point du globe. La valeur moyenne et l'écart-type de la composante radiale du champ magnétique estimés sur les périodes marquées en rouge sur la figure 2.2e sont représentés figure 2.9. Ces cartes présentent différentes propriétés de symétrie. La carte de la valeur moyenne du champ radial, pour le modèle 1, est complètement axisymétrique. Le champ moyen ne comprend donc que des composantes zonales, parmi lesquelles le dipôle g_1^0 est dominant. L'équateur magnétique est très légèrement décalé vers le sud en raison du terme g_2^0 (dissymétrie entre les hémisphères nord et sud). La même carte pour le modèle 2 n'est par contre pas axisymétrique, les lignes de niveau ne sont pas des parallèles. Le champ moyen contient donc des composantes non zonales. Un décalage de l'équateur magnétique vers le sud est également observé. La carte de l'écart-type du champ radial n'est apparemment axisymétrique ni dans le modèle 1 (à la différence du champ moyen), ni dans le modèle 2. Elle est quasi-symétrique par rapport

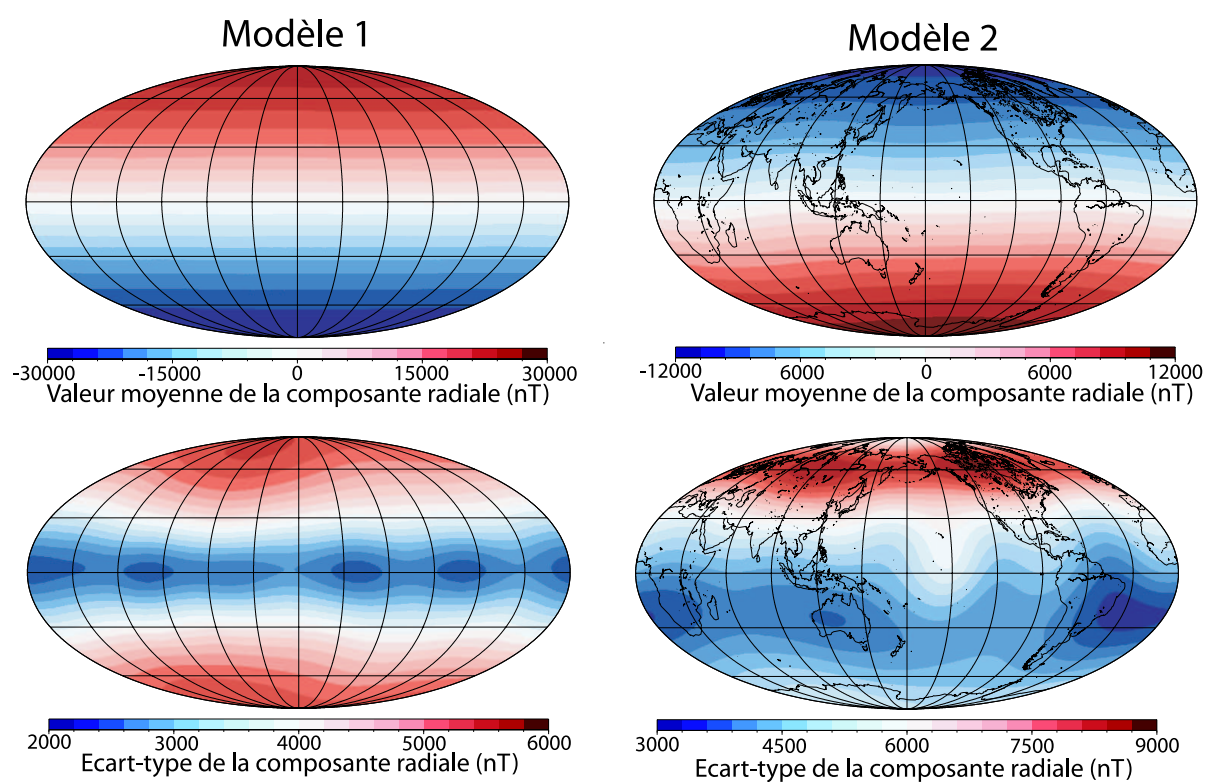


FIG. 2.9 – Carte de la valeur moyenne et de l'écart-type du champ radial à la surface de la "Terre" pour les modèles 1 (période inverse) et 2 (période normale).

à l'équateur pour le modèle 1 et non symétrique par rapport à l'équateur pour le modèle 2.

De la même manière que pour l'interprétation des cartes moyennes obtenues à partir des mesures paléomagnétiques, il faut cependant déterminer si le champ a été moyenné sur une période de temps suffisamment longue pour annuler toutes les structures non permanentes. Pour apprécier cela, il est nécessaire d'utiliser des tests statistiques. Les cartes présentées figure 2.9 contiennent cependant plusieurs longueurs d'onde (harmoniques) dont les fluctuations temporelles sont plus ou moins rapides (le temps de mémoire dépendant du degré et de l'ordre). Il est donc plus judicieux d'effectuer ces tests sur les coefficients de Gauss. La valeur moyenne et la matrice des covariances de l'ensemble des coefficients de Gauss ont donc été estimées de manière à déterminer quelles sont les conditions définies à la section 2.3.1 qui sont vérifiées et si les symétries (et ruptures de symétrie) observées dans les cartes du champ moyen et de la paléovariation séculaire sont robustes.

Champ moyen

Les propriétés de symétrie de la carte du champ moyen peuvent être déterminées en repérant les coefficients de Gauss qui ont une valeur significativement non nulle.

Pour cela, un test de Student [*e.g.*, Press et al., 1992] a été utilisé. Ce test s'applique à N tirages indépendants d'une variable aléatoire gaussienne. Soit μ_N et σ_N , la moyenne et l'écart-type empiriques associés. Si la variable a une moyenne nulle alors la grandeur $T_N = \frac{\sqrt{N}}{\sigma_N} \mu_N$ suit une loi de Student à $N - 1$ degrés de liberté. Il est possible de calculer une valeur seuil t_α pour laquelle la probabilité d'observer une valeur absolue $|T_N|$ plus élevée que t_α est α :

$$\alpha = P(|T_N| > t_\alpha) \quad (2.17)$$

On choisit en général α (le niveau du test) à 1% ou 5%. Si $|T_N| \leq t_\alpha$, la moyenne observée de la variable est compatible avec une valeur nulle, dans le cas contraire, elle est significativement non nulle.

La distribution des coefficients de Gauss dans ces deux modèles n'est pas exactement gaussienne (quasi-gaussienne pour le modèle 1 et non gaussienne pour le modèle 2, voir section 2.2.3). Ces différences ont cependant été négligées. Par ailleurs, les séries temporelles des coefficients de Gauss possédant un temps de mémoire τ_c , chaque coefficient a été échantillonné tous les $3\tau_c$, de manière à ne conserver que des valeurs indépendantes pour le calcul de la grandeur T_N .

Pour le modèle 1, seuls les coefficients zonaux g_n^0 (axisymétriques) ont une moyenne significativement non nulle (sauf g_{21}^0). Le champ moyen est donc parfaitement axisymé-

trique, comme le montre la figure 2.9. Pour le modèle 2, seul la moitié des coefficients zonaux sont non nuls. Huit coefficients non zonaux sont non nuls (principalement des coefficients d'ordre 2) brisant ainsi la symétrie axiale. Les deux modèles contiennent à la fois des termes symétrique ($n - m$ pair) et antisymétrique ($n - m$ impair) par rapport à l'équateur brisant la symétrie équatoriale.

Paléovariation séculaire

Les propriétés de symétrie de la carte de la paléovariation séculaire peuvent être estimées à partir la matrice des covariances des coefficients de Gauss, en particulier en recherchant si celle ci est diagonale (coefficients de Gauss indépendants) ou si des corrélations existent entre certains coefficients et en regardant si l'écart-type des coefficients dépend simplement de son degré n ou également de son ordre m ou du type de coefficient g ou h .

De manière à déterminer si deux séries temporelles sont corrélées de manière significative, nous avons utilisé la corrélation de Spearman [e.g., Van der Waerden, 1969; Press et al., 1992]. Soit deux séries aléatoires X et Y . Ces séries sont remplacées par les séries R et S , où R_i et S_i sont les rangs des éléments X_i et Y_i des séries ordonnées par valeur croissante. La corrélation de Spearman C_S est le coefficient de corrélation calculé à partir de ces deux vecteurs R et S . Soit alors le paramètre T_N :

$$T_N = C_S \sqrt{\frac{N-2}{1-C_S^2}} \quad (2.18)$$

où N est le nombre de valeurs contenues dans les séries aléatoires X et Y . Si les deux séries sont indépendantes alors T_N suit à peu près une loi de Student à $N - 2$ degrés de liberté. Un test de Student permet de déterminer si la corrélation est significative. Soit α le niveau du test et t_α tel que $\alpha = P(|T_N| > t_\alpha)$. Si $T_N > t_\alpha$, les séries sont corrélées ; si $T_N < -t_\alpha$, les séries sont anticorrélées ; si $-t_\alpha \leq T_N \leq t_\alpha$, la corrélation n'est pas significative.

De manière à ne prendre en compte que des valeurs indépendantes pour le calcul des corrélations, les coefficients de Gauss ont été échantillonnés tous les $\Delta t = 20$ pas d'échantillonnage pour le modèle 1 et $\Delta t = 11$ pas d'échantillonnage pour le modèle 2, les séries utilisées ont donc 150 points et le test de Student a 148 degrés de liberté.

La matrice des covariances pour le modèle 1 est en accord avec une symétrie axiale (mais non une symétrie sphérique) : la variance des coefficients g_n^m et h_n^m est identique mais dépend du degré n et de l'ordre m , des corrélations entre coefficients ne sont observées qu'entre ceux partageant le même ordre. Certaines corrélations entre coefficients d'ordre

différents s'observent parfois, cependant leur nombre est en accord avec le niveau du test (de l'ordre de quelque pour cent pour un test à 1%). Les structures non axisymétriques observées pour le modèle 1 sur la figure 2.9 ne sont donc pas permanentes. Cette matrice des covariances est par ailleurs presque en accord avec une symétrie équatoriale : les coefficients symétriques ($n - m$ pair) et antisymétriques ($n - m$ impair) par rapport à l'équateur sont pour la plupart indépendants (un comportement différents des coefficients symétriques et antisymétriques était en effet observable dans les fluctuations temporelles de leur valeur moyenne et écart-type).

La matrice des covariances pour le modèle 2 est en léger désaccord avec la symétrie axiale. A la différence du modèle 1, l'écart-type des coefficients g_n^m et h_n^m est parfois différent. Plus de corrélations sont observées entre les coefficients d'ordres différents, cependant le nombre de ce type de corrélations détectées par le test statistique est relativement faible. Cette matrice des covariances est également en désaccord avec une symétrie équatoriale : plus de corrélations entre les coefficients symétriques et antisymétriques par rapport à l'équateur sont observées. Les ruptures de symétrie observées sur la figure 2.9 pour le modèle 2 sont donc significatives.

2.4 Conséquences pour la modélisation statistique du champ paléomagnétique

2.4.1 Origine des ruptures de symétrie

L'étude minutieuse de la valeur moyenne et de la matrice des covariances des coefficients de Gauss dans les simulations 1 et 2 révèle des propriétés de symétrie différentes. Quelle est l'origine des ruptures de symétrie observées ? Comment peut-on interpréter les ruptures de symétrie observées pour le champ magnétique de la Terre ?

Les propriétés de symétrie de la réponse d'un système physique étant toujours soit identiques, soit inférieures aux propriétés de symétrie du système [*e.g.*, Gubbins et Zhang, 1993], les ruptures de symétrie observées dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire peuvent donc soit être associées à une dissymétrie du système, soit apparaître spontanément.

Le système au sein duquel le champ magnétique principal est généré est le noyau liquide en rotation autour de l'axe nord-sud. Ce système ne présente pas une symétrie sphérique mais une symétrie axiale et une symétrie équatoriale (qui peuvent être rompues si les conditions à la limite noyau manteau sont hétérogènes). Une rupture de la symétrie

sphérique s'observe en effet dans le champ magnétique produit par les simulations numériques et dans le champ magnétique de la Terre (champ moyen non nul et dépendance de la paléovariation séculaire avec la latitude).

Une rupture spontanée de la symétrie axiale est assez peu probable étant donnée que les structures non axisymétriques peuvent tourner autour de l'axe de rotation de la Terre (comme le suggère la dérive vers l'ouest des structures non-dipolaires observables sur les cartes du champ magnétique à la limite noyau manteau, figure 1.8d-f). Le champ moyen et la paléovariation séculaire caractérisant le modèle 1 (dont les conditions à la limite noyau manteau sont homogènes) présente en effet une symétrie axiale. Cette symétrie axiale est rompue dans le modèle 2 (dont les conditions à la limite noyau manteau sont hétérogènes). Les ruptures de la symétrie axiale proposées pour la morphologie du champ moyen (termes non zonaux persistants) et de la paléovariation séculaire (différence entre les écart-types des coefficients g_n^m et h_n^m) de la Terre, mais qui restent cependant à confirmer, seraient donc provoquées par une influence des conditions à la limite noyau manteau brisant la symétrie axiale du système. La rupture de la symétrie axiale observée dans le modèle 2 est cependant assez ténue et n'a pu être détectée que par une étude minutieuse de la valeur moyenne et de la matrice des covariances des coefficients de Gauss. Cela peut expliquer pourquoi les études statistiques du champ paléomagnétique sur les cinq derniers millions d'années n'ont pas su jusqu'à présent démontrer une rupture de l'axisymétrie dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire.

Une rupture spontanée de la symétrie équatoriale est plus probable, étant donné qu'il n'est pas possible d'échanger les hémisphères nord et sud sans passer par d'autres états du champ magnétique. Le champ magnétique peut donc se retrouver bloqué pendant une longue période de temps dans une configuration dissymétrique par rapport à l'équateur (de la même manière que le champ peut rester bloqué dans une polarité donnée). Une dissymétrie entre les hémisphères nord et sud est en effet observée au sein des deux simulations numériques. La dissymétrie entre les hémisphères nord et sud mise en évidence pour le champ moyen de la Terre (coexistence des termes g_1^0 et g_2^0) n'est donc pas forcément associée à une influence des conditions à la limite noyau manteau.

La dissymétrie entre les hémisphères nord et sud est cependant beaucoup moins marquée au sein du modèle 1 qu'au sein du modèle 2. En effet, le champ moyen du modèle 1 est dominé par la famille des coefficients antisymétriques par rapport à l'équateur et la paléovariation est quasi-symétrique (très peu de corrélations sont observées entre les coefficients de la famille symétrique et ceux de la famille antisymétrique par rapport à l'équateur). On peut se demander si la dissymétrie plus élevée du champ magnétique au sein du modèle 2 est provoquée par la dissymétrie des conditions à la limite noyau manteau. Un autre raisonnement peut cependant être proposé. Si on suppose que les

différents champs décrivant la dynamique du noyau (champs de vitesse, de pression, de température, ...) sont symétriques par rapport à l'équateur, alors la partie symétrique et antisymétrique du champ magnétique sont des solutions distinctes des équations de la magnétohydrodynamique [*e.g.*, Gubbins et Zhang, 1993] et celles-ci peuvent donc se comporter de manière indépendante. On a en effet pu vérifier que le champ de vitesse au sein du modèle 1 est plus symétrique par rapport à l'équateur que celui au sein du modèle 2. Le champ magnétique au sein du modèle 1 étant dominé par la famille antisymétrique (voir la figure 2.2b-c), celui-ci est à l'origine d'un champ de force de Lorentz quasi-symétrique par rapport à l'équateur. Le champ de vitesse peut donc ainsi rester quasi-symétrique par rapport à l'équateur et très peu de corrélations s'observent entre les coefficients des familles symétriques et antisymétriques.

Pour tenter de lever l'ambiguïté sur l'origine de la rupture de symétrie entre les hémisphères nord et sud observée dans le champ paléomagnétique et déterminer si cette dernière est effectivement associée à une dissymétrie des conditions à la limite noyau-manteau, on peut étudier le comportement du champ sur une période de temps comprenant plusieurs intervalles de polarité. En effet, si les conditions à la limite noyau-manteau sont symétriques par rapport à l'équateur, étant donnée une configuration initiale dissymétrique du champ magnétique (et des autres champs décrivant la dynamique du système), les trois états obtenus par les transformations suivantes sont alors des états équivalents vers lesquels la dynamo est susceptible d'évoluer (ils vérifient de la même manière les équations de la magnétohydrodynamique) :

1. un changement de signe du champ magnétique $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$
2. une réflexion sur le plan équatorial

3. une réflexion sur le plan équatorial et un changement de signe du champ magnétique

On s'attend donc à potentiellement pouvoir observer trois types de transitions. La première conduirait à une "inversion" complète du champ magnétique (avec un changement de signe des coefficients de Gauss appartenant aux deux familles). La deuxième conduirait à un changement de signe des seuls coefficients symétriques par rapport à l'équateur (dont le quadropôle g_2^0). La troisième conduirait enfin à un changement de signe des seuls coefficients antisymétriques par rapport à l'équateur (dont le dipôle g_1^0). Par contre, et c'est là le point important, si les conditions à la limite noyau-manteau ne sont pas symétriques par rapport à l'équateur, seul l'état obtenu par la première transformation (inversion complète du champ magnétique) est équivalent et seule la transition vers cet état est observée.

Le caractère opérationnel de ce test reste à démontrer sur de longues simulations numériques (caractérisées par des conditions homogènes et hétérogènes à la limite noyau-manteau) comprenant un grand nombre d'intervalles de polarité. Cette piste n'a en effet pas encore été explorée. En outre pour tester l'existence de ces différentes transitions dans

les données paléomagnétiques des précautions doivent être prises. Les inversions sont en effet classiquement définies par un changement de signe du dipôle g_1^0 et peuvent donc correspondre au premier et au troisième type de transformation. Le deuxième type de transformation est plus difficile à détecter puisqu'il implique un changement de signe du quadrupôle g_2^0 sans changement de signe du dipôle g_1^0 . De tels événements pourraient-ils se produire par exemple au cours des excursions? Pour tester tout cela, il conviendrait de réaliser des modèles de champ moyen pour les différents intervalles entre les inversions et les excursions, de manière à déterminer si les familles de coefficients symétriques et antisymétriques par rapport à l'équateur s'inversent toujours simultanément ou si elles peuvent également s'inverser de façon indépendante. Les modèles de champ moyen estimés pour les périodes Brunhes et Matuyama et les périodes normales et inverses au cours des 5 derniers millions d'années semblent indiquer que le signe du quadrupôle g_2^0 est resté identique au signe du dipôle g_1^0 [Johnson et Constable, 1997; Carlut et Courtillot, 1998; Hatakeyama et Kono, 2002]. Si les études ultérieures confirment l'absence d'inversions distinctes des familles symétriques et antisymétriques pour le champ magnétique de la Terre, tandis que celles-ci s'observent dans les simulations numériques de dynamo dont les conditions à la limite noyau manteau sont homogènes, cela signifierait que le champ magnétique de la Terre est capable de ressentir une dissymétrie des conditions à la limite noyau manteau. Cela étant dit, la façon la plus simple de détecter une influence des conditions à la limite noyau manteau sur le fonctionnement de la géodynamo reste, comme nous l'avons vu, de rechercher une rupture de la symétrie axiale dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire.

2.4.2 Conseil pour la modélisation statistique

Comme on vient de le voir, l'étude de la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire peut fournir des informations sur le fonctionnement de la géodynamo et sur l'influence des conditions à la limite noyau manteau. De manière à détecter les symétries (et ruptures de symétrie) du champ moyen et de la paléovariation séculaire, il est cependant indispensable de ne pas supposer une forme *a priori* trop simple pour la valeur moyenne et la matrice des covariances des coefficients de Gauss. Il est nécessaire en particulier d'autoriser l'existence de corrélations entre les coefficients, celles-ci étant observées dans les deux simulations étudiées ici.

Si on compare les conditions associées à un type de symétrie et les hypothèses simplificatrices utilisées dans les modèles publiés, on remarque que les hypothèses employées sont généralement plus fortes que les conditions associées à un type de symétrie donné. Par exemple, Quidelleur et Courtillot [1996] et Constable et Johnson [1999] proposent chacun

un modèle où l'écart-type des coefficients de Gauss dépend du degré n et de l'ordre m mais où les coefficients sont indépendants deux à deux. La paléovariation séculaire dans ces modèles présente donc une symétrie axiale et une symétrie équatoriale. Un certain nombre de corrélations entre coefficients auraient cependant été autorisées par ces symétries. La conséquence de cette condition supplémentaire est d'imposer des contraintes sur la façon dont la paléovariation séculaire varie avec la latitude. Il serait plus judicieux que les conditions *a priori* imposées sur la forme des modèles correspondent exactement à un type de symétrie de manière à déterminer quelle sont les symétries qui sont observées dans les propriétés statistiques du champ paléomagnétique.

Des hypothèses simplificatrices sont néanmoins nécessaires de manière à diminuer le nombre de paramètres à estimer. L'étude de la matrice des covariances au sein des simulations 1 et 2 montre que des corrélations significatives ne sont observées qu'entre les coefficients de Gauss caractérisés par des temps de mémoire pas trop différents. Un certain nombre de termes peuvent ainsi être éliminés sur la base des temps de mémoire des coefficients de Gauss, ceux-ci pouvant être estimés à partir des études historiques [Hulot et Le Mouél, 1994] et archéomagnétiques [Hongre et al., 1998] du champ magnétique de la Terre.

2.5 Etude détaillée : *Statistical palaeomagnetic field modeling and symmetry considerations*

2.6 Etude détaillée : *Statistical palaeomagnetic field modeling and dynamo numerical simulation*

Statistical palaeomagnetic field modelling and symmetry considerations

G. Hulot^{1,2} and C. Bouligand¹

¹Département de Géomagnétisme et Paléomagnétisme, CNRS UMR 7577, Institut de Physique du Globe de Paris, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France. E-mail: gh@ipgp.jussieu.fr

²NASA/GSFC, code 921, Greenbelt, MD 20771, USA

Accepted 2005 February 9. Received 2004 December 21; in original form 2004 March 2

SUMMARY

In the present paper, we address symmetry issues in the context of the so-called giant gaussian process (GGP) modelling approach, currently used to statistically analyse the present and past magnetic field of the Earth at times of stable polarity. We first recall the principle of GGP modelling, and for the first time derive the complete and exact constraints a GGP model should satisfy if it is to satisfy statistical spherical, axisymmetrical or equatorially symmetric properties. We note that as often correctly claimed by the authors, many simplifying assumptions used so far to ease the GGP modelling amount to make symmetry assumptions, but not always exactly so, because previous studies did not recognize that symmetry assumptions do not systematically require a lack of cross-correlations between Gauss coefficients. We further note that GGP models obtained so far for the field over the past 5 Myr clearly reveal some spherical symmetry breaking properties in both the mean and the fluctuating field (as defined by the covariance matrix of the model) and some equatorial symmetry breaking properties in the mean field. Non-zonal terms found in the mean field of some models and mismatches between variances defining the fluctuating field (in models however not defined in a consistent way) would further suggest that axial symmetry also is broken. The meaning of this is discussed. Spherical symmetry breaking trivially testifies for the influence of the rotation of the Earth on the geodynamo (a long-recognized fact). Axial symmetry breaking, if confirmed, could hardly be attributed to anything else but some influence of the core–mantle boundary (CMB) conditions on the geodynamo (also a well-known fact). By contrast, equatorial symmetry breaking (in particular the persistence of an axial mean quadrupole) may not trivially be considered as evidence of some influence of CMB conditions. To establish this, one would need to better investigate whether or not this axial quadrupole has systematically reversed its polarity with the axial dipole in the past and whether dynamo simulations run under equatorial symmetric CMB conditions display additional transitions (mirror transitions, which we describe) only allowed in such instances. This remains to be fully investigated.

Key words: dynamo theory, geomagnetism, geostatistics, palaeomagnetism, spherical harmonics, statistical methods.

1 INTRODUCTION

Thanks to the availability of many historical observations of the magnetic field of the Earth over the past few centuries and of many more high-precision satellite measurements of the near Earth's magnetic field in the past few decades, excellent spherical harmonic (SH) models of the main field (MF) produced in the core of the Earth have been constructed in the recent years (e.g. Jackson *et al.* 2000; Langlais *et al.* 2003), making it possible to infer some aspects of the current dynamical behaviour of both the field itself and of the liquid core (see e.g. Hulot *et al.* 2002). However, the

historical period only covers a very short period of time. To infer and understand the nature of the MF before that, we are forced to rely on indirect measurements available through human artefacts, lava flows and sediments that have been magnetized in the ancient field. Those magnetized samples can also be used to construct time varying SH models of the ancient field. However, this requires that enough samples are available at a given epoch and that they can be synchronized to well within the timescales over which the MF is likely to evolve. Because of those limitations, only the largest scales of the field over the past few millennia have yet successfully been modelled in this way (Hongre *et al.* 1998; Korte & Constable 2003).

A different approach is therefore required to access the information contained in the palaeomagnetic databases that are otherwise available for recent geological epochs (past 5 Myr). Two databases are of particular interest, the so-called palaeosecular variation (PSV) database (Quidelleur *et al.* 1994; Johnson & Constable 1996; McElhinny & McFadden 1997) and palaeointensity database (Tanaka *et al.* 1995). Both of them consist of data recovered from volcanic samples that have acquired their magnetization within much less time than needed for the MF to evolve significantly. Each sample in those databases can then be considered as an instantaneous spot value of the direction (for the PSV database) or of the full vector (for the palaeointensity database) of the ancient field, at a given known location, but at a relatively poorly known time. This time is nevertheless known with enough accuracy to identify the period of fixed polarity during which the sample acquired its magnetization. All samples corresponding to such a given period can therefore be expected to contain some statistical information about the local and global MF behaviour during that period of time.

Many different approaches have been used in the past to carry such analysis and derive so-called time-averaged field (TAF) and PSV models of the palaeomagnetic field (for a review, see e.g. Merrill *et al.* 1996). One approach in particular has proved successful in the recent years. The giant gaussian process (GGP) approach first introduced by Constable & Parker (1988) in a relatively restrictive form, next generalized by Kono & Tanaka (1995), and by Hulot & Le Mouél (1994) and Khokhlov *et al.* (2001) to also account for possible temporal and spatial correlations. This approach is particularly attractive as its formalism can be used to simultaneously analyse the historical (Constable & Parker 1988; Hulot & Le Mouél 1994), the archeomagnetic (Hongre *et al.* 1998) and the palaeomagnetic MF (Constable & Parker 1988 and many studies since, see e.g. Kono *et al.* 2000, Khokhlov *et al.* 2001 and references therein). None of the approaches proposed so far, including the more recent approach proposed by Love & Constable (2003), has so many powerful properties.

Like all previous approaches, the GGP approach however relies on a set of statistical assumptions, the most fundamental of which are required for the approach to be valid. Additional simplifying assumptions have also been introduced to ease the data analysis and reduce the number of free parameters needed to characterize the field behaviour. Although all those additional assumptions seem natural, they imply some restrictions on the way the field is *a priori* assumed to behave. It is the purpose of the present paper and of a companion paper (Bouligand *et al.* 2005, – this issue, hereafter referred to as Paper II) to investigate the meaning and validity of all those assumptions. This is done in two steps. First, by relying on symmetry considerations (present paper). We introduce the GGP approach and review the simplifying assumptions used so far. We next give the first derivation of the complete set of constraints a GGP model should satisfy if it is to satisfy spherical, axisymmetric or equatorial symmetric properties. This reveals that most of the assumptions used so far amount to make symmetry assumptions, albeit not always in a fully consistent way. We discuss the meaning of this and explain how symmetry properties could be used to better characterize the regime under which the geodynamo has been operating in the past, and possibly identify some influence of non-symmetrical core–mantle boundary (CMB) conditions. In a second step (Paper II), the issue is addressed from a more general point of view, by taking advantage of results from numerical simulations for which, contrary to the real-Earth case, all assumptions involved in GGP modelling can be tested.

2 GENERALIZED GIANT GAUSSIAN PROCESSES

At any given time t and location $\mathbf{r}$ outside the core, the MF is assumed to be curl-free, and is therefore written in the form

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

where:

$$V(\mathbf{r}, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m(t) Y_n^{mc}(\theta, \varphi) + h_n^m(t) Y_n^{ms}(\theta, \varphi)] \quad (2)$$

and a is an arbitrary reference radius, taken to be the planetary (Earth) radius where the field is usually observed; (r, θ, φ) are the spherical coordinates, $Y_n^{m(c,s)}(\theta, \varphi)$ the real SH functions of degree n and m , Schmidt quasi-normalized (this normalization is defined in more details in Appendix A) and the $[g_n^m(t), h_n^m(t)]$ are the so-called Gauss coefficients, which define a vector $\mathbf{x}(t)$ in a multidimensional model space.

Following and describing the evolution of the field in terms of a generalized GGP then amounts to assume that at times of stable polarity, $\mathbf{x}(t)$ can be described in terms of a single realization of a multidimensional stationary random Gaussian process in this model space. The field and its associated GGP model are then characterized by (like any multidimensional stationary random Gaussian process, see e.g. Gardner 1990):

$$\text{a statistical mean (or mean model)} E\{\mathbf{x}(t)\} = \boldsymbol{\mu}, \quad (3)$$

$$\text{a covariance matrix } E\{[\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}][\mathbf{x}(t') - \boldsymbol{\mu}]^T\} = \boldsymbol{\gamma}(t' - t), \quad (4)$$

where $E\{\}$ is the statistical expectation, $\boldsymbol{\mu}$ is a vector of components $[\mu(g_n^m), \mu(h_n^m)]$ defining a mean model in the model space, and $\boldsymbol{\gamma}(t' - t)$ is a matrix of elements $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, t' - t)$, with x and x' being either g or h .

A very useful property of such a stationary Gaussian process is that, provided its covariance matrix $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ decreases fast enough towards zero when τ becomes large, it is ergodic for both its mean and its covariance (Gardner 1990). In other words,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}_T = \boldsymbol{\mu} \quad \text{and} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{K}}_T(\tau) = \boldsymbol{\gamma}(\tau),$$

where we have introduced

$$\bar{\mathbf{x}}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt, \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_T][\mathbf{x}(t + \tau) - \bar{\mathbf{x}}_T]^T dt. \quad (6)$$

Thus, if we further assume that the field only has a short-term memory, which we will indeed assume for reasons outlined later on, both eqs (5) and (6) can be used to estimate $\boldsymbol{\mu}$ and $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ from temporal averages $\bar{\mathbf{x}}_T$ and $\bar{\mathbf{K}}_T(\tau)$ over the trajectory of $\mathbf{x}(t)$ in the model space.

In the GGP formalism and because of eq. (5), $\boldsymbol{\mu}$ may then be viewed as the TAF to be expected. In the same way and because of eq. (6), $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ may be viewed as defining the statistical properties of the fluctuating field about $\boldsymbol{\mu}$, hence of the PSV.

3 LOCAL EXPRESSION OF GGPs

When considering palaeomagnetic data, relying on eqs (5) and (6) to infer $\boldsymbol{\mu}$ and $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ is not possible because we do not have a direct

access to the Gauss coefficients [and thus to $\mathbf{x}(t)$]. We only have measurements of some field components at a single location $\mathbf{r}_i$ at a time t_i . Those provide some information about $\mathbf{x}(t)$ but only through eqs (1) and (2). However, the statistics produced by a GGP model for the field at any such location can also be predicted, and therefore used to recover some information about $\boldsymbol{\mu}$ and $\gamma(\tau)$.

This is straightforward for full vector measurements of the local field $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. The way a geomagnetic field model $\mathbf{x}(t)$ predicts $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ through eqs (1) and (2) can indeed always formally be written as

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{r})\mathbf{x}(t), \quad (7)$$

where $\mathbf{P}(\mathbf{r})$ is a matrix. Because of this linear relationship, if the MF is assumed to be the result of a generalized GGP, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ is predicted to behave as a realization of a 3-D stationary Gaussian process, the characteristics of which are directly related to those of the generalized GGP model through

$$E\{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)\} = \boldsymbol{\mu}_B(\mathbf{r}) = \mathbf{P}(\mathbf{r})\boldsymbol{\mu}, \quad (8)$$

$$E\{[\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) - \boldsymbol{\mu}_B(\mathbf{r})][\mathbf{B}(\mathbf{r}', t') - \boldsymbol{\mu}_B(\mathbf{r}')]^T\} = \gamma_B(\mathbf{r}, t' - t) = \mathbf{P}(\mathbf{r})\gamma(t' - t)\mathbf{P}(\mathbf{r}')^T. \quad (9)$$

Because of the short-term memory assumption, it also follows that this 3-D stationary Gaussian process is ergodic. Thus, in principle, temporal averages (of the type in eqs 5 and 6) can also be used to locally infer the values of $\boldsymbol{\mu}_B(\mathbf{r})$ and $\gamma_B(\mathbf{r}, \tau)$. Those can then be used to try and invert eqs (8) and (9) for $\boldsymbol{\mu}$ and $\gamma(t' - t)$.

Very often, however, the palaeomagnetic data to be used are not $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, but only its direction. This can make the problem trickier, because those quantities are not linearly related to $\mathbf{x}(t)$. However, it turns out that the statistics predicted for such directional data by a given generalized GGP can also exactly be computed (Khokhlov *et al.* 2001).

Thus, in principle, a procedure can always be devised to try and seek which, if any, generalized GGP can account for any given set of data. However, because (i) not so much data are available, (ii) the number of parameters needed to characterize a generalized GGP [i.e. needed to define $\boldsymbol{\mu}$ and $\gamma(t' - t)$] is potentially very large, and (iii) it is not easy to invert the data for $\boldsymbol{\mu}$ and $\gamma(t' - t)$, simplifying assumptions have always been introduced in all GGP models.

4 ASSUMPTIONS AND RESULTS FROM PUBLISHED GGP MODELS

In their analysis of the historical and archeomagnetic data, Hulot & Le Mouél (1994) and Hongre *et al.* (1998) assumed that $\boldsymbol{\mu}$ reduces to an axial dipole, that all Gauss coefficients behave independently from one another and that all those sharing the same degree n also share the same autocovariance function, i.e. that the covariance matrix takes the diagonal form

$$\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0 \text{ if } x_n^m \neq x_n^{m'} \quad \text{and} \quad \gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) = \gamma_n(\tau), \quad (10)$$

where

$$\gamma_n(\tau) = \sigma_n^2 \exp\left[-\frac{\tau^2}{2\tau_n^2}\right] \quad (11)$$

and τ_n can then be viewed as the typical correlation time, associated to all Gauss coefficients of degree n and characterizing how fast $\gamma_n(\tau)$ [and thus $\gamma(\tau)$] decreases to zero when τ increases. These assumptions made it possible to combine temporal with statistical averages, estimate the σ_n and infer values for the τ_n of the order of

a few centuries (for the lowest degrees) down to a few decades (for degree 13).

Those results and assumptions were consistent with the original assumptions Constable & Parker (1988) had introduced even earlier to analyse the PSV database of the past 5 Myr. They had assumed that each sample would correspond to statistically independent realizations of a GGP, that $\boldsymbol{\mu}$ reduces to an axial dipole with a small axial quadrupole (which changes signs together with the axial dipole at times of reversals, an important assumption as we shall later see) and that the covariance matrix takes the diagonal form (10), but with

$$\gamma_n(\tau) = \sigma_n^2 \delta(\tau) \quad (12)$$

in place of eq. (11), where $\delta(\tau)$ is the Dirac function and σ_n^2 is assumed to be of the form $\sigma_n^2 = \sigma_n^2(CP) = \sigma^2 n[(n+1)(2n+1)]^{-1}$ for $n \geq 2$, defining a flat spatial spectrum for the non-dipole field at the CMB.

Subsequent studies however revealed that the PSV data required a more complex GGP model. Kono & Tanaka (1995) were for instance led to assume that the covariance matrix can take the more general form

$$\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0 \text{ if } x_n^m \neq x_n^{m'} \quad \text{and} \quad \gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) = \sigma_n^{m^2} \delta(\tau), \quad (13)$$

which amounts to assume that $\gamma(\tau)$ is still forced to be diagonal, with negligible memory, but that it can now be a function of both degree n and order m . Kono & Tanaka (1995) indeed pointed out that the data could be explained by enhancing order 1 covariances and in particular $\sigma_{\frac{1}{2}}$, a suggestion soon confirmed by Quidelleur & Courtillot (1996).

As another interesting possibility and following an earlier suggestion of McFadden *et al.* (1988) that the dipole family component of the field [defined by all Gauss coefficients with $(n-m)$ odd] could behave independently from its quadrupole family component [Gauss coefficients with $(n-m)$ even], Kono & Tanaka (1995) also envisioned the possibility that the data could be explained by a GGP model satisfying eq. (13), but with $(\sigma_n^m)^2 = d\sigma_n^2(CP)$ if $(n-m)$ is odd and $(\sigma_n^m)^2 = (1-d)\sigma_n^2(CP)$ if $(n-m)$ is even, where d is thus a parameter defining the relative contributions of each family. Hulot & Gallet (1996) considered this proposal in some detail and showed that this would require a value of $d \approx 0.9$ [independently of the exact value chosen for $\mu(g_n^0)$]. Most recently, Tauxe & Kent (2004) indeed confirmed that a model based on those assumptions (with $d = 0.93$) could be considered. However, Hulot & Gallet (1996) noted that this would imply that on average over the past 5 Myr, more than 90 per cent of the energy of the non-dipole field would have been concentrated in its dipole family component, in stark contrast with the present-day situation, which sees a historical field with equal energy in both families.

Bearing this drawback in mind and having further shown that it is definitely not possible to explain the PSV with a covariance matrix of the form of eqs (10) and (12), whatever the value of σ_n , Hulot & Gallet (1996) next suggested that a covariance matrix of an even more general form than eq. (13), involving cross-covariance terms, and different values for $\gamma(g_n^m, g_n^m, \tau)$ and $\gamma(h_n^m, h_n^m, \tau)$, also be considered. Constable & Johnson (1999) positively tested this last possibility against the PSV data.

The study of Hulot & Gallet (1996) also underlined the need to simultaneously address the determination of $\boldsymbol{\mu}$ and $\gamma(\tau)$ when dealing with PSV data. This need was not considered significant in the early studies, because it was felt that the data did not call for a more complex mean field than the axial (dipole plus small quadrupole)

field assumed by Constable & Parker (1988). However, a series of investigations initiated by Gubbins & Kelly (1993), soon followed by others (see e.g. Johnson & Constable 1997, and references therein) suggested that non-zonal terms could be present in the TAF μ . Those conclusions have been questioned (McElhinny *et al.* 1996; Carlot & Courtillot 1998). Also, the method used to infer μ in those studies has some drawbacks. It relies on means of the local field direction and assumes that those mean directions are only a function of μ [and not of $\gamma(\tau)$], which is incorrect (Khokhlov *et al.* 2001; see also the perturbation study of Hatakeyama & Kono 2001). In any case, all those results clearly show that neither $\gamma(\tau)$ nor μ should *a priori* be considered too simple and that both quantities should be inverted simultaneously when dealing with PSV data. This is not an easy task (see e.g. Hatakeyama & Kono 2002, for a recent attempt).

The task is a little easier, at least in principle, if one deals with palaeointensity data of the type assembled by Tanaka *et al.* (1995), also covering the past few Myr. This database is made of full vector field measurements, and an approach based on eqs (8) and (9) can be used to independently invert the data for both μ and $\gamma(\tau)$. Kono *et al.* (2000) recently attempted such a computation. For that purpose, they assumed a covariance matrix of yet an even more general form:

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \text{ if } x_n^m \neq x_{n'}^{m'} \text{ and } \gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) = \sigma(x_n^m)^2 \delta(\tau). \quad (14)$$

Interestingly, their computation led to both a mean field and a covariance matrix significantly different from those found in the previous PSV data analysis. In particular, significant differences were found between some $\sigma(g_n^m)$ and $\sigma(h_n^m)$ sharing the same degree n and order m , a property that is not compatible with a matrix of the form (13).

5 SYMMETRY CONDITIONS

As often noted in the early papers, but never discussed or proven in detail, it turns out that most of the previous assumptions and results regarding the forms μ and $\gamma(\tau)$ may or should take can be interpreted in terms of symmetry conditions. Gubbins & Zhang (1993) already discussed the symmetry properties of the convective dynamo equations in a deterministic context. Here, however, we address the issue (and give complete proofs) in the more specific statistical context of GGP models and focus on the magnetic field one can observe.

First, consider a generalized GGP predicting the same statistical properties for the field at any location at the surface of the Earth, i.e. spherically symmetric. It can be shown (Appendix B) that the necessary and sufficient conditions for this to be the case is that, in any one frame $\mathfrak{R}$, μ and $\gamma(\tau)$ satisfy:

Conditions for spherical statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0, \quad (15a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \text{ if } x_n^m \neq x_{n'}^{m'} \quad \text{and} \quad \gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) = \gamma_n(\tau). \quad (15b)$$

A field compatible with a GGP process satisfying eq. (15) would then be a field insensitive to any specific frame of reference.

Next consider a generalized GGP predicting exactly the same statistical properties at any two locations sharing the same colatitude at the surface of the Earth, i.e. axially symmetric about the geographical axis. It can be shown (Appendix A) that the necessary and

sufficient conditions for this to be the case are now that, in any one frame $\mathfrak{R}$ with the z -axis being south–north, μ and $\gamma(\tau)$ satisfy:

Conditions for axial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } m \neq 0, \quad (16a)$$

$$\gamma(g_n^m, g_{n'}^{m'}, \tau) = \gamma(h_n^m, h_{n'}^{m'}, \tau) \quad \text{if } m \neq 0, \quad (16b)$$

$$\gamma(g_n^m, h_{n'}^{m'}, \tau) = -\gamma(h_n^m, g_{n'}^{m'}, \tau), \quad (16c)$$

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } m \neq m'. \quad (16d)$$

A field compatible with a GGP process satisfying eq. (16) would then be a field insensitive to any specific longitude.

Finally, consider the symmetry about the equatorial plane. The situation is slightly subtler, because individual SH functions are always either equatorial symmetric (E^S , using the terminology of Gubbins & Zhang 1993), or equatorial antisymmetric (E^A). That is, all $V = Y_n^{m(c,s)}(\theta, \varphi)$ with $(n - m)$ even satisfy (with $\mathbf{B} = -\nabla V$)

E^S symmetry

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r, \pi - \theta, \varphi) \quad \text{and}$$

$$[B_r, B_\theta, B_\varphi](r, \theta, \varphi) = [B_r, -B_\theta, B_\varphi](r, \pi - \theta, \varphi); \quad (17)$$

whereas, all $V = Y_n^{m(c,s)}(\theta, \varphi)$ with $(n - m)$ odd satisfy

E^A symmetry

$$V(r, \theta, \varphi) = -V(r, \pi - \theta, \varphi) \quad \text{and}$$

$$[B_r, B_\theta, B_\varphi](r, \theta, \varphi) = [-B_r, B_\theta, -B_\varphi](r, \pi - \theta, \varphi). \quad (18)$$

Thus two types of equatorial symmetry ought to be considered. A GGP will be said to be E^S symmetric if it remains invariant after reflecting in the equatorial plane and changing the polarity, and E^A symmetric if it does so after just reflecting in the equatorial plane. [Note that the magnetic field $\mathbf{B} = -\nabla V$ being a pseudo-vector, its potential V is a pseudo-scalar. Upon physical reflection in the equatorial plane, a sign change therefore occurs: $V(r, \theta, \varphi)$ becomes $-V(r, \pi - \theta, \varphi)$ and not $V(r, \pi - \theta, \varphi)$, as would be the case if V had been a proper scalar, (see e.g. Gubbins & Zhang 1993).] It can then easily be checked that a GGP will be said to be E^S or E^A symmetric if and only if, in any one frame $\mathfrak{R}$ with the z -axis being south–north, μ and $\gamma(\tau)$ satisfy:

Conditions for E^S equatorial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ is odd}, \quad (19a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ and } n' - m' \text{ are of different parities}, \quad (19b)$$

or

Conditions for E^A equatorial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ is even}, \quad (20a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ and } n' - m' \text{ are of different parities}. \quad (20b)$$

Finally, we will state that a GGP has equatorial symmetry if it has either E^S or E^A symmetries.

Then, all fields compatible with a GGP with an equatorial symmetry (i.e. satisfying 19 or 20) and only those, would be fields incapable of statistically distinguishing the Northern from the Southern Hemisphere. This can easily be checked, bearing in mind the important

additional property that the global polarity of the field cannot itself be taken as a preference for either hemisphere. This is because of the well-known property of rotating fluid dynamos, which states that if such a dynamo can produce a field $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, then the very same dynamo (defined by exactly the same boundary conditions and non-magnetic time-varying quantities, such as temperature field, velocity field, etc.) can also produce the exact opposite field $-\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (see e.g. Gubbins & Zhang 1993).

In terms of the alternative terminology we recalled earlier (and more often used in palaeomagnetism, see e.g. Merrill *et al.* 1996) of dipole family ($n - m$ odd) versus quadrupole family ($n - m$ even), we thus conclude that a GGP will have equatorial symmetry if and only if (i) its mean field exclusively belongs to either the dipole or the quadrupole family, and (ii) the dipole family and quadrupole family components of the fluctuating field behave independently.

6 SYMMETRIES IN GGP MODELS

Reconsider now the assumptions and results reviewed in Section 4, in terms of symmetry properties. The case of the mean field μ is trivial. All models involve non-zero mean fields and break the spherical symmetry (contradiction with eq. 15a). Early models only involve zonal mean fields and satisfy the axial symmetry about the rotation axis of the Earth (compatibility with eq. 16a). However, those zonal fields all involve at least a quadrupole axial contribution (with E^S symmetry) in addition to the axial dipole (with E^A symmetry), which prevents the whole mean field from having any of the two symmetries. They therefore break the equatorial symmetry. Finally, some of the most recent mean models seem to require non-zonal terms. This would involve axial symmetry breaking (contradiction with eq. 16a).

Consider now the less trivial case of the covariance matrix $\gamma(\tau)$. The first set of assumptions introduced, eq. (10), exactly corresponds to eq. (15b). Thus, the early GGP models simply assumed that the way the MF fluctuates would not be sensitive to any specific frame of reference and would comply with spherical symmetry. The fact that the PSV data conflict with eq. (10) whatever the functions $\gamma_n(\tau)$, as shown by Hulot & Gallet (1996), can then be interpreted as the proof that this is not the case, that the fluctuations of the field also break the spherical symmetry and that GGP models must account for that fact.

Consider then eq. (13) introduced by Kono & Tanaka (1995). These assumptions leave the possibility for the covariance matrix to break the spherical symmetry, because one may have $\gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) \neq \gamma(x_n^{m'}, x_n^{m'}, \tau)$ if $m \neq m'$, which conflicts with eq. (15b). On the other hand, it is easy to check that eq. (13) is compatible with both the axial and the equatorial symmetry conditions (16b–d) and (19b) or (20b). However, the reverse statement is not true and conditions (13) are therefore more restrictive than needed if it indeed turns out that the fluctuating field can break the spherical, but not necessarily the axial and/or equatorial symmetries.

Next consider the proposal of Kono *et al.* (2000) that eq. (14) rather than eq. (13) be used. If, as they tentatively suggest, some differences are to be found between the $\sigma(g_n^m)$ and $\sigma(h_n^m)$ sharing the same degree n and order m , then eq. (16b) would be violated and the axial symmetry no longer satisfied. However, eq. (14) only relaxes the constraint (16b), whereas axial symmetry breaking would also imply simultaneously relaxing eqs (16c) and (16d). This would then require that non-zero cross-covariances also be considered in $\gamma(\tau)$, as originally proposed by Hulot & Gallet (1996).

Finally, it should be noted that although eq. (14) breaks the axial symmetry it assumes an equatorial symmetry (compatibility with

eqs 19b or 20b). This we note is somewhat at odds with the fact that the mean field is found to break the equatorial symmetry (as testified by the need to introduce a zonal quadrupole in μ). To possibly account for a similar equatorial symmetry breaking in the fluctuating part of the field, non-zero cross-covariance would again need to be considered in $\gamma(\tau)$ (at least between coefficients not belonging to the same family).

From all those studies, it thus appears that clear indications are found for spherical, equatorial and perhaps axial symmetry breaking in both μ and $\gamma(\tau)$. However, inadequate assumptions with respect to the form $\gamma(\tau)$ may have often been made. It would be advisable to only rely on assumptions with clear symmetry meaning, such as eqs (15), (16), (19) and (20).

7 GEOPHYSICAL IMPLICATION

Relying on assumptions with clear symmetry meaning would make it possible to better identify the symmetries the field is indeed willing to brake, which would in turn provide us with some useful information about the way the geodynamo works and is possibly influenced by non-homogeneous boundary conditions. It is well known that the response of a physical system has symmetry that is either the same as or lower than that of the system itself (e.g. Gubbins & Zhang 1993). In the present case, the system is the rotating core with boundary conditions imposed on the corotating CMB. Because of the rotation, this system does not have a spherical symmetry and spherical symmetry breaking has to occur. The fact that in all recent GGP models, not only μ but also $\gamma(\tau)$ breaks this symmetry (and thus senses the rotation axis of the Earth) shows that this is indeed the case and that symmetry breaking can be detected in GGP models.

Axial and equatorial symmetry breaking results can bring additional information but require a more careful interpretation. Two possibilities are to be considered. One is that the CMB conditions are in fact symmetric and that symmetry breaking occurs only because the dynamo spontaneously takes advantage of the possibility it has to produce a field with lower symmetry than that of the system. The other is that CMB conditions are not homogeneous, significantly break the symmetries and therefore force the dynamo to produce a field breaking the symmetries in the same way. Which interpretation one should go for is not so obvious. However, useful suggestions can be made.

First, we note that spontaneous axial symmetry breaking under axisymmetrical CMB conditions is unlikely to occur. In such conditions, it indeed seems difficult for the system to keep a field (and all its characteristics) statistically fixed in longitude, given the possibility there is to rotate the whole system through infinitesimal steps about the rotation axis of the Earth. Results derived from numerical simulation clearly support this point of view (see Paper II). If confirmed (but see McElhinny *et al.* 1996; Carlot & Courtillot 1998), axial symmetry breaking, such as the one tentatively found in the mean field by several authors (Gubbins & Kelly 1993; Johnson & Constable 1997), would thus almost certainly testify for axial symmetry breaking in the CMB conditions.

By contrast to the previous case, we note that even if CMB conditions are symmetric about the equator, no such continuous way of exchanging the Northern and Southern Hemispheres can exist, making it less obvious for a dynamo solution displaying a statistical preference for one hemisphere to shift to the analogous state showing a preference for the opposite hemisphere. This situation would be analogous to the one encountered with the global polarity of the field, which can remain stable over long periods of time (or even forever, for some parameter regimes) even under homogeneous CMB

conditions, despite the fact already pointed out that a dynamo has no reason to prefer one polarity to another. Thus, a dynamo could easily remain locked in an equatorial symmetry breaking state, even if the CMB conditions are symmetric about the equator. In this respect, equatorial symmetry breaking by the field, such as the one implied by the need to introduce an axial quadrupole mean field $\mu(g_2^0)$ in all recent GGP models, cannot as such be taken as evidence of equatorial symmetry breaking by the CMB conditions. Again, results derived from numerical simulation would support this point of view (see Paper II).

However, more can be said. Consider an equatorial symmetry breaking state I, as sketched on Fig. 1(a). In such a state, it is important to point out that not only the magnetic field, but also all convection-related fields (temperature, flows, etc.) would have to break the equatorial symmetry (Gubbins & Zhang 1993). If that state was to arise as a result of a spontaneous locking of the geodynamo under equatorial symmetric CMB conditions, any of the three following states would be fully equivalent to it: state II, which would correspond to state I after a polarity transition changing $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ into $-\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (and leaving the convection pattern unchanged; Fig. 1b); state III, corresponding to state I after reflection in the equatorial plane (i.e. a mirror transition, which would then leave CMB conditions invariant, but would change both the magnetic and convection patterns; Fig. 1c); and state IV, corresponding to state I after both transitions (Fig. 1d). By contrast, if state I was to arise because of equatorial symmetry breaking CMB conditions, no mirror transition would be possible and only state II would be fully equivalent to state I.

Characterizing state I by $[\mu_I, \gamma_I(\tau)]$, this means that under equatorial symmetric CMB conditions, any of the three following transitions $\{ \text{to either state II, III, or IV characterized by } [\mu_{II}, \gamma_{II}(\tau)], [\mu_{III}, \gamma_{III}(\tau)] \text{ and } [\mu_{IV}, \gamma_{IV}(\tau)] \}$, could potentially be observed:

- (i) I→II transition, $\mu_{II} = -\mu_I$ and $\gamma_{II}(\tau) = \gamma_I(\tau)$ involving a full field reversal, but no change in the convective pattern;
- (ii) I→III transition,

$$\mu_{III}(x_n^m) = -(-1)^{(n-m)}\mu_I(x_n^m) \quad \text{and} \\ \gamma_{III}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = (-1)^{(n-m)+(n'-m')}\gamma_I(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$$

involving a quadrupole family field reversal (but leaving the dipole family field unchanged; recall that the magnetic field and potential are pseudo-vector and pseudo-scalar) and a mirror reversal of the convective pattern; or

- (iii) I→IV transition,

$$\mu_{IV}(x_n^m) = (-1)^{(n-m)}\mu_I(x_n^m) \quad \text{and} \\ \gamma_{IV}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = (-1)^{(n-m)+(n'-m')}\gamma_I(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$$

involving a dipole family field reversal (but leaving the quadrupole family field unchanged) and a mirror reversal of the convective pattern;

and that observing a lack of I→III or I→IV transitions, while many I→II transitions occur, would testify for the fact that the dynamo shows a very strong stability with respect to mirror reversals of the convective pattern (the one feature in common in I→III and I→IV transitions). This could then only occur either because of a strong spontaneous stability of the convective pattern (stronger than that of the magnetic polarity), or because the CMB conditions indeed significantly break the equatorial symmetry.

Both I→II and I→IV transitions would correspond to a sign change of $\mu(g_1^0)$, i.e. to what is usually taken as the definition of a field reversal. However, only I→II transitions would also involve a

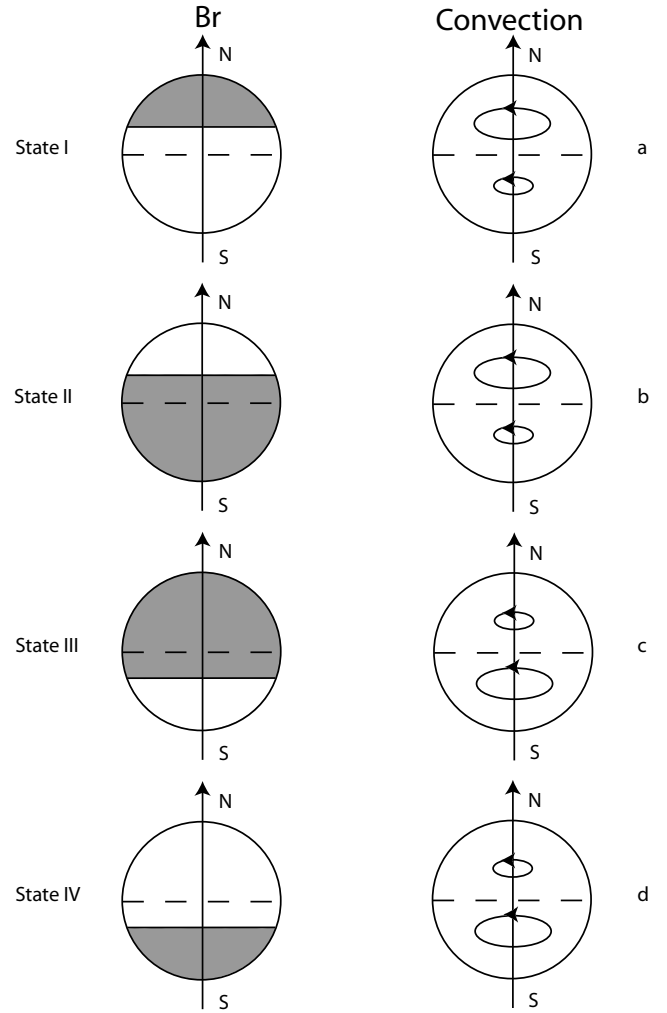


Figure 1. An equatorial symmetry breaking state I displays dissymmetry not only in its magnetic state but also in its convection state (a). If core–mantle boundary (CMB) conditions are symmetric with respect to the equator, from the point of view of the system, this state is equivalent to any of the three following states: (b) state II, obtained from state I by simply going through a polarity transition changing $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ into $-\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ (but leaving the convection pattern unchanged); (c) state III, obtained from state I by reflection in the equatorial plane, (a mirror transition, changing both the magnetic and convection patterns); and (d) state IV, corresponding to state I after both transitions. Going from state I to state II, would involve a full field reversal, but no change in the convective pattern; going from state I to state III would involve a quadrupole family field reversal and a mirror reversal of the convective pattern; going from state I to state IV would finally involve a dipole field reversal and a mirror reversal of the convective pattern. If the CMB conditions are not symmetric with respect to the equator, no mirror transition is possible and the system can only go from state I to state II.

simultaneous sign change of $\mu(g_n^0)$ with n even (quadrupole family component) and of $\mu(g_2^0)$ in particular. I→III transitions would be harder to look for. Those transitions would not involve a sign change of the mean axial dipole $\mu(g_1^0)$ and would thus be difficult to identify in the palaeomagnetic record. However, those I→III transitions could occur during so-called excursions, when the dynamo moves away from an initial state with a given $\mu(g_1^0)$ and finally settles back to another state with the same $\mu(g_1^0)$. Searching for a possible sign change in $\mu(g_2^0)$ not only at times of reversals but also at times of excursions could therefore also prove interesting.

Separate analysis of the data for normal and reverse polarity shows that a simultaneous sign change of $\mu(g_1^0)$ and $\mu(g_2^0)$ occurred during the last reversal (Bruhnes–Matuyama). This reversal must have been a I→II transition. Combined analysis of all recent (0–5 Myr) normal data on one hand and of all reverse data on another hand also lead to average fields that would argue in favour of reversals being systematically of that type (McElhinny *et al.* 1996; Johnson & Constable 1997; Carlot & Courtillot 1998; Hatakeyama & Kono 2002). If that is indeed the case, we note that this would then also mean that some coupling between the dipole and quadrupole family components of the field necessarily took place, in particular at times of reversal, as first envisioned by Merrill & McFadden (1988). However, such combined analysis could be biased by the fact that more than half of the data actually belongs to those two last chrons (Quidelleur *et al.* 1994; Johnson & Constable 1996). As a matter of fact, Schneider & Kent (1988) noted early on that some variations could occur in the value the ratio $\mu(g_2^0)/\mu(g_1^0)$ takes, depending on the chron considered. Schneider & Kent (1988) interpreted this as a sign that some standing non-dipole field could be present at times of reversals. However, it is tempting to argue that this could also be interpreted as an indication that some quadrupole family field reversals could have taken place during those chrons. This interpretation would also be consistent with the claim made a little later by the same authors (Schneider & Kent 1990) that, by contrast, the zonal octupole mean field component they found in their data analysis has a constant $\mu(g_3^0)/\mu(g_1^0)$ ratio. However, because all those results have since been dismissed (see e.g. McElhinny *et al.* 1996), they would clearly need to be double-checked by, for example, building models for individual chrons (and before and after excursions), and testing whether I→III and I→IV transitions could have possibly occurred. Until being possibly proven otherwise, it however seems reasonable to argue that the current data rather suggest a lack of any other transition than I→II, hence a lack of mirror transitions in favour of a strong stability of the convection pattern.

This finally prompts the issue of such stability possibly being a spontaneous feature of a dynamo under equatorial symmetric CMB conditions. This issue could soon be settled with the help of numerical simulation of dynamos run under such CMB conditions. When long runs displaying many successive reversals will be made available, it will become possible to search for mirror transitions (and I→III and I→IV transitions). If it turns out that such transitions can occur in those simulations, then only, the suggested palaeomagnetic evidence for a $\mu(g_2^0)$ reversing sign with $\mu(g_1^0)$ at times of reversals could be taken as serious evidence of equatorial symmetry breaking in the CMB.

8 CONCLUSION

Several conclusions can be drawn from the present study. First, that in attempts to find GGP models best describing the field over the past 5 Myr, most of the simplifying assumptions chosen so far turn out to correspond to strong symmetry assumptions. Secondly, that the failure of some of the early models to account for the data and the consequent need to introduce some complexity in those models can readily be explained in terms of symmetry breaking properties of the field. Thirdly, that such symmetry breaking properties can bring important information about the way the dynamo works and is possibly influenced by the CMB conditions.

We also noted that equatorial symmetry breaking states can exist even if CMB conditions display equatorial symmetry and that such states can potentially go through both polarity and mirror transitions, possibly leading to either a full field, a dipole family

field, or a quadrupole family field reversal. Thus, to prove that an equator symmetry breaking state (such as the one that seems to have characterized the recent palaeomagnetic field) is evidence for symmetry breaking CMB conditions, two conditions need to be satisfied: (i) that no mirror transition (hence neither dipole family field nor quadrupole family field reversals) be observed in the data and (ii) that by contrast such mirror transitions be observed in numerical simulations with equatorial symmetric CMB conditions. A careful comparison of the statistical behaviour of the field before and after both reversals and excursions could prove very useful to check (i). Future long runs from dynamo simulations could help address (ii).

Only evidence of axial symmetry breaking field properties could otherwise establish the reality of some influence of inhomogeneous CMB conditions on the geodynamo. Evidence for such symmetry breaking properties has also been tentatively found in the recent palaeomagnetic field, but only in the mean field μ so far. The present study further suggests that additional evidence could possibly be found in studying the covariance matrix $\gamma(\tau)$. This would however require that *a priori* simplifying assumptions of the type (10), (13) or (14), be abandoned and that the form $\gamma(\tau)$ is spontaneously willing to take in such instances be investigated. This is possible thanks to numerical simulation. In fact, those simulations can more generally be used to (i) assess the global validity of the generalized GGP approach, (ii) define the best simplifications one may use in $\gamma(\tau)$, (iii) investigate the symmetry breaking issues we raised in the present paper, all this under well-controlled conditions. This is being done in Paper II, devoted to the analysis of numerical simulations from the Glatzmaier & Roberts (1995, 1996, 1997; Glatzmaier *et al.* 1999) dynamo.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Cathy Constable and an anonymous reviewer for their constructive comments, which substantially helped improve the original manuscript. This research was completed while GH held a National Research Council Research Associateship Award at NASA Goddard Space Flight Center. Institut de Physique du Globe de Paris Contribution no. 2039 and Institut National des Sciences de l'Univers - Centre National de la Recherche Scientifique Contribution no. 377.

REFERENCES

- Bouligand, C., Hulot, G., Khokhlov, A. & Glatzmaier, G.A., 2005. Statistical palaeomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation, *Geophys. J. Int.*, doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02613 (this issue, Paper II).
- Carlot, J. & Courtillot, V., 1998. How complex is the time-averaged geomagnetic field over the past 5 Myr?, *Geophys. J. Int.*, **134**, 527–544.
- Constable, C.G. & Johnson, C.L., 1999. Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables, *Phys. Earth planet. Int.*, **115**, 35–51.
- Constable, C.G. & Parker, R.L., 1988. Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y., *J. geophys. Res.*, **93**, 11 569–11 581.
- Gardner, W.A., 1990. *Introduction to Random Processes: With Applications to Signal and Systems*, McGraw-Hill, New York.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth planet. Int.*, **91**, 63–75.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1996. An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection, *Physica D*, **97**, 81–94.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1997. Simulating the geodynamo, *Contemp. Phys.*, **38**, 269–288.

- Glatzmaier, G.A., Coe, R.S., Hongre, L. & Roberts, P.H., 1999. The role of the Earth's mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals, *Nature*, **401**, 885–890.
- Gubbins, D. & Kelly, P., 1993. Persistent patterns in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr, *Nature*, **365**, 829–832.
- Gubbins, D. & Zhang, K., 1993. Symmetry properties of the dynamo equations for palaeomagnetism and geomagnetism, *Phys. Earth planet. Int.*, **75**, 225–241.
- Hatakeyama, T. & Kono, M., 2001. Shift of the mean magnetic field values; effect of scatter due to secular variation and errors, *Earth Planets Space*, **53**, 31–44.
- Hatakeyama, T. & Kono, M., 2002. Geomagnetic field model for the last 5 My; time-averaged field and secular variation, Paleosecular variation and reversals of the Earth's magnetic field, *Phys. Earth planet. Int.*, **133**, 181–215.
- Hongre, L., Hulot, G. & Khokhlov, A., 1998. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years, *Phys. Earth planet. Int.*, **106**, 311–335.
- Hulot, G. & Gallet, Y., 1996. On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves, *Phys. Earth planet. Int.*, **95**, 37–53.
- Hulot, G. & Le Mouél, J.L., 1994. A statistical approach to the Earth's main magnetic field., *Phys. Earth planet. Int.*, **82**, 167–183.
- Hulot, G., Eymin, C., Langlais, B., Mande, M. & Olsen, N., 2002. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data, *Nature*, **416**, 620–623.
- Jackson, A., Jonkers, A.R.T. & Walker, M.R., 2000. Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 957–990.
- Johnson, C.L. & Constable, C.G., 1996. Paleosecular variation recorded by lava flow over the last 5 Myr., *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **354**, 89–141.
- Johnson, C.L. & Constable, C.G., 1997. The time averaged geomagnetic field: global and regional biases for 0–5 Ma, *Geophys. J. Int.*, **131**, 643–666.
- Khokhlov, A., Hulot, G. & Carlot, J., 2001. Towards a self-consistent approach to paleomagnetic field modeling, *Geophys. J. Int.*, **145**, 157–171.
- Kono, M. & Tanaka, H., 1995. Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation, *J. Geomag. Geoelectr.*, **47**, 115–130.
- Kono, M., Tanaka, H. & Tsukanawa, H., 2000. Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data: the case of linear mapping, *J. geophys. Res.*, **105**, 5817–5833.
- Korte, M. & Constable, C., 2003. Continuous global geomagnetic field models for the past 3000 years, *Phys. Earth planet. Int.*, **140**, 73–89.
- Langel, R.A., 1987. The Main Field, in, *Geomagnetism*, Vol. 1, pp. 249–512, ed. Jacobs, J.A., Academic, San Diego, CA.
- Langlais, B., Mande, M. & Ultré-Guérard, P., 2003. High-resolution magnetic field modeling: application to MAGSAT and Ørsted data, *Phys. Earth planet. Int.*, **135**, 77–91.
- Love, J.J. & Constable, C.G., 2003. Gaussian statistics for paleomagnetic vectors, *Geophys. J. Int.*, **152**, 515–565.
- McElhinny, M.W. & McFadden, P.L., 1997. Paleosecular variation over the past 5 Myr based on a new generalized database, *Geophys. J. Int.*, **131**, 240–252.
- McElhinny, M.W., McFadden, P.L. & Merrill, R.T., 1996. The time-averaged paleomagnetic field 0–5 Ma, *J. geophys. Res.*, **101**, 25 007–25 027.
- McFadden, P.L., Merrill, R.T. & McElhinny, M.W., 1988. Dipole/Quadrupole family modeling of paleosecular variation, *J. geophys. Res.*, **93**, 11 583–11 588.
- Merrill, R.T. & McFadden, P.L., 1988. Secular variation and the origin of magnetic field reversals, *J. geophys. Res.*, **93**, 11 589–11 597.
- Merrill, R.T., McElhinny, M.W. & McFadden, P.L., 1996. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Academic, San Diego, CA, p. 527.
- Quidelleur, X. & Courtillot, V., 1996. On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation, *Phys. Earth planet. Int.*, **95**, 55–78.
- Quidelleur, X., Valet, J.P., Courtillot, V. & Hulot, G., 1994. Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years: An updated secular variation database, *Geophys. Res. Lett.*, **21**, 1639–1642.
- Schneider, D.A. & Kent, D.V., 1988. Inclination anomalies from Indian ocean sediments and the possibility of a standing non-dipole field, *J. geophys. Res.*, **93**, 11 621–11 630.
- Schneider, D.A. & Kent, D.V., 1990. The time-averaged paleomagnetic field, *Rev. Geophys.*, **28**, 71–96.
- Tanaka, H., Kono, M. & Uchimura, H., 1995. Some global features of paleointensity in geological time, *Geophys. J. Int.*, **120**, 97–102.
- Tauxe, L. & Kent, D.V., 2004. A simplified statistical model for the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations: was the ancient magnetic field dipolar?, in *Timescales of the Paleomagnetic field*, eds Channell J. E. T., Kent D. V., Lowrie W. & Meert J., *Am. geophys. Un. Monogr.*, **145**, 101–115.
- Vilenkin, N. Ja., 1969. *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris, p. 626.

APPENDIX A: DERIVATION OF THE CONDITIONS FOR AXIAL STATISTICAL SYMMETRY

Let us first recall the definition of the Schmidt quasi-normalized SH functions used to define $V(\mathbf{r}, t)$ with the help of eq. (2) (see e.g. Langel 1987):

$$Y_n^{mc}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi; \quad Y_n^{ms}(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi; \quad (\text{A1})$$

where $n \geq 1$ and $0 \leq m \leq n$, and the associate Legendre functions $P_n^m(u)$ are then defined by

$$P_n^m(u) = \left[\frac{2(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{1/2} (1-u^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(u)}{du^m} \quad \text{for } m > 0, \quad (\text{A2})$$

$$P_n^0(u) = P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{du^n} (u^2 - 1)^n, \quad (\text{A3})$$

where $P_n(u)$ is the Legendre polynomial of degree n .

Let us next introduce the following useful alternative complex representation of the magnetic potential $V(\mathbf{r}, t)$:

$$V(\mathbf{r}, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=-n}^n b_n^m(t) Y_n^m(\theta, \varphi), \quad (\text{A4})$$

where the complex SH function $Y_n^m(\theta, \varphi)$ is now defined by

$$Y_n^m(\theta, \varphi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad \text{for } -n \leq m \leq n \quad (\text{A5})$$

and the definition of $P_n^m(\cos \theta)$ is extended to negative values of m with the help of

$$P_n^{-m}(u) = (-1)^m P_n^m(u) \quad \text{for } -n \leq m \leq n. \quad (\text{A6})$$

Because the potential $V(\mathbf{r}, t)$ is a real function, it can easily be checked that the complex Gauss coefficients $b_n^m(t)$ must satisfy

$$b_n^{m*} = (-1)^m b_n^{-m}, \quad (\text{A7})$$

where the star refers to the complex conjugate.

Identifying eqs (A4) and (2) then leads to the identities

$$b_n^m = [g_n^m - i h_n^m] \left(\frac{1 + \delta_{m,0}}{2} \right) \quad \text{for } 0 \leq m \leq n \quad (\text{A8})$$

(using eq. A7 makes it possible to derive a similar identity in the case $m < 0$) and

$$g_n^0 = b_n^0 \quad \text{and} \quad \begin{cases} g_n^m = b_n^m + (-1)^m b_n^{-m} \\ h_n^m = i [b_n^m - (-1)^m b_n^{-m}] \end{cases} \quad \text{for } 0 < m \leq n. \quad (\text{A9})$$

If we then consider a rotation of φ_0 of the frame of reference about the initial Oz axis, it is quite straightforward to check that, in the new frame of reference, the real $[g_n^m(\varphi_0), h_n^m(\varphi_0)]$ and complex $[b_n^m(\varphi_0)]$ Gauss coefficients are related to the Gauss coefficients in the original frame of reference (g_n^m, h_n^m, b_n^m) through:

$$b_n^m(\varphi_0) = b_n^m e^{im\varphi_0}, \quad (\text{A10})$$

$$\begin{cases} g_n^m(\varphi_0) = g_n^m \cos m\varphi_0 + h_n^m \sin m\varphi_0 \\ h_n^m(\varphi_0) = -g_n^m \sin m\varphi_0 + h_n^m \cos m\varphi_0. \end{cases} \quad (\text{A11})$$

Now let us assume the magnetic field can be defined as being the result of a generalized GGP, so that the real Gauss coefficients $[g_n^m(t), h_n^m(t)]$ define a vector $\mathbf{x}(t)$, which can be described in terms of a realization of a multidimensional stationary random Gaussian process. This process is then defined by eqs (3) and (4). Alternatively, the same process can also be defined by the more convenient (but equivalent) complex quantities:

$$E \{ b_n^m(t) \} = \beta_n^m \quad \text{and} \quad E \{ [b_n^m(t) - \beta_n^m] [b_n^{m'}(t') - \beta_n^{m'}]^* \}, \quad (\text{A12})$$

where we have introduced the notation β_n^m rather than $\mu(b_n^m)$ to ease notations in what follows.

After a change of frame of reference by rotation of φ_0 about Oz , those quantities become

$$E \{ b_n^m(\varphi_0, t) \} = \beta_n^m(\varphi_0) \quad \text{and} \quad E \{ [b_n^m(\varphi_0, t) - \beta_n^m(\varphi_0)] [b_n^{m'}(\varphi_0, t') - \beta_n^{m'}(\varphi_0)]^* \}. \quad (\text{A13})$$

For the process to be axially symmetric about the geographical axis and predict exactly the same statistical properties at any two locations sharing the same colatitude at the surface of the Earth, the necessary and sufficient conditions to be satisfied are then that:

$$\beta_n^m(\varphi_0) = \beta_n^m, \quad (\text{A14a})$$

$$E \{ [b_n^m(\varphi_0, t) - \beta_n^m(\varphi_0)] [b_n^{m'}(\varphi_0, t') - \beta_n^{m'}(\varphi_0)]^* \} = E \{ [b_n^m(t) - \beta_n^m] [b_n^{m'}(t') - \beta_n^{m'}]^* \}, \quad (\text{A14b})$$

whatever the value of φ_0 .

From eq. (A10) it is quite obvious that eq. (A14a) implies that

$$\beta_n^m = 0 \quad \text{if } m \neq 0, \quad (\text{A15a})$$

which is equivalent to eq. (16a) because of eqs (A7), (A8) and (A9).

Again, because of eq. (A10), it is straightforward to check that eq. (A14b) with eqs (A14a) and (A15a) then implies

$$E \{ [b_n^m(t) - \beta_n^m] [b_n^{m'}(t') - \beta_n^{m'}]^* \} = 0 \quad \text{if } m \neq m'. \quad (\text{A15b})$$

In the case $m \geq 0, m' \geq 0$, making use of eq. (A8) in eq. (A15b) then leads to:

if $m \neq m'$,

$$E \{ [g_n^m(t) - \mu(g_n^m)] [g_n^{m'}(t') - \mu(g_n^{m'})] \} = -E \{ [h_n^m(t) - \mu(h_n^m)] [h_n^{m'}(t') - \mu(h_n^{m'})] \}, \quad (\text{A16a})$$

$$E \{ [g_n^m(t) - \mu(g_n^m)] [h_n^{m'}(t') - \mu(h_n^{m'})] \} = E \{ [h_n^m(t) - \mu(h_n^m)] [g_n^{m'}(t') - \mu(g_n^{m'})] \}. \quad (\text{A16b})$$

Next, setting $m' \rightarrow -m'$ in eq. (A15b) and using eq. (A7) leads to

$$E \{ [b_n^m(t) - \beta_n^m] [b_n^{m'}(t') - \beta_n^{m'}] \} = 0 \quad \text{if } m \neq -m'. \quad (\text{A15c})$$

Again in the case $m \geq 0$, $m' \geq 0$, making use of eq. (A8) in eq. (A15c) finally leads to:

if $(m, m') \neq (0, 0)$,

$$\begin{cases} E \{ [g_n^m(t) - \mu(g_n^m)] [g_{n'}^{m'}(t') - \mu(g_{n'}^{m'})] \} = E \{ [h_n^m(t) - \mu(h_n^m)] [h_{n'}^{m'}(t') - \mu(h_{n'}^{m'})] \} \end{cases} \quad (\text{A17a})$$

$$\begin{cases} E \{ [g_n^m(t) - \mu(g_n^m)] [h_{n'}^{m'}(t') - \mu(h_{n'}^{m'})] \} = -E \{ [h_n^m(t) - \mu(h_n^m)] [g_{n'}^{m'}(t') - \mu(g_{n'}^{m'})] \}. \end{cases} \quad (\text{A17b})$$

Combining eq. (A16) with eq. (A17) and recalling eq. (4) then leads to eqs (16b), (16c), (16d) with $\tau = (t' - t)$.

Conversely, it is quite straightforward to check that eqs (16b), (16c), (16d) imply eq. (A15b) and thus eq. (A14b) (the case $m = m'$ being trivial). Thus, eq. (16) is the necessary and sufficient conditions to be satisfied in anyone frame $\mathfrak{R}$ with z-axis being south–north for the process to predict exactly the same statistical properties at any two locations sharing the same colatitude at the surface of the Earth.

APPENDIX B: DERIVATION OF THE CONDITIONS FOR SPHERICAL STATISTICAL SYMMETRY

Let us first consider the way Gauss coefficients are transformed after a rotation of θ_0 of the frame of reference about its Oy axis. The angular coordinates (θ, φ) [respectively (θ', φ')] of a point in the initial (respectively final) frame of reference, satisfy:

$$\begin{cases} \sin \theta \sin \varphi = \sin \theta' \sin \varphi' \\ \cos \theta = \cos \theta' \cos \theta_0 - \sin \theta' \cos \varphi' \sin \theta_0 \\ \sin \theta \cos \varphi = \cos \theta' \sin \theta_0 + \sin \theta' \cos \varphi' \cos \theta_0 \end{cases} \quad (\text{B1})$$

In such a case, the following theorem of addition for the complex SH functions applies:

$$a_m Y_n^m(\theta, \varphi) = \sum_{k=-n}^n a_k P_{mk}^n(\cos \theta_0) Y_n^k(\theta', \varphi'), \quad (\text{B2})$$

where the $Y_n^m(\theta, \varphi)$ are defined by eqs (A5), (A2), a_m is defined by

$$a_m = (i)^m \sqrt{\frac{1 + \delta_{m,0}}{2}} \quad (\text{B3})$$

and the $P_{mk}^n(u)$ functions are defined by

$$P_{mk}^n(u) = \frac{(-1)^{n-k} (i)^{k-m}}{2^n} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-k)!(n+k)!(n-m)!}} \times (1+u)^{-\left(\frac{m+k}{2}\right)} (1-u)^{\frac{k-m}{2}} \frac{d^{n-m}}{du^{n-m}} [(1-u)^{n-k} (1+u)^{n+k}]. \quad (\text{B4})$$

[We derived eq. (B2) with the help of Vilenkin (1969). It follows from eq. (3) of III-4-2 in Vilenkin (1969), given that eq. (B1) amounts to eqs (6) and (6)' of III-4-1 in Vilenkin (1969). Eq. (B4) is the same definition of $P_{mk}^n(u)$ as eq. (3) of III-3-4 in Vilenkin (1969).] The a_m factors defined by eq. (B3) arise because of our definition (A5) of the $Y_n^m(\theta, \varphi)$, which relies on the definition (A2) of the $P_n^m(u)$, normalized differently than the associate Legendre functions in Vilenkin (1969).

Relying on eq. (B2), it is then straightforward to check that the complex Gauss coefficients $b_n^m(\theta_0)$ in the new frame of reference are related to those b_n^m (in the original frame of reference) through

$$b_n^k(\theta_0) = \sum_{m=-n}^n b_n^m \frac{a_k}{a_m} P_{mk}^n(\cos \theta_0). \quad (\text{B5})$$

As in Appendix A, let us now assume that the magnetic field can be defined as being the result of a generalized GGP, defined by a multidimensional stationary random Gaussian process $\mathbf{x}(t)$, satisfying eqs (3) and (4), equivalent to eq. (A12).

Let us further assume that the process is spherically symmetric and predicts the same statistical properties at any location at the surface of the Earth. In particular, this implies that the process is axially symmetric about the geographical axis. We may thus already conclude that eqs (A15)–(A17) and their consequences eq. (16) all apply again in the present case.

However, now we request more. In particular, we further request the statistics to remain invariant after any rotation of θ_0 about the Oy axis of the original frame of reference. Introducing

$$E \{ b_n^m(\theta_0, t) \} = \beta_n^m(\theta_0), \quad (\text{B6})$$

this then implies that, whatever θ_0 :

$$\beta_n^m(\theta_0) = \beta_n^m, \quad (\text{B7a})$$

$$E \{ [b_n^m(\theta_0, t) - \beta_n^m(\theta_0)] [b_{n'}^{m'}(\theta_0, t') - \beta_{n'}^{m'}(\theta_0)]^* \} = E \{ [b_n^m(t) - \beta_n^m] [b_{n'}^{m'}(t') - \beta_{n'}^{m'}]^* \}. \quad (\text{B7b})$$

As far as the β_n^m are considered, because we already know that eq. (A15a) must be satisfied, we only need to deal with the special case $m = 0$. From eqs (B5) and (A15a), we infer

$$\beta_n^0(\theta_0) = \beta_n^0 P_{00}^n(\cos \theta_0) = \beta_n^0 P_n(\cos \theta_0). \quad (\text{B8})$$

However, we know that $P_n(\cos \theta_0)$ is not unity for all θ_0 . Hence, eq. (B8) with eq. (B7a) imply $\beta_n^0 = 0$, so that, given eq. (A15a),

$$\beta_n^m = 0 \quad \forall(n, m), \quad (\text{B9})$$

which is equivalent to eq. (15a) because of eqs (A7), (A8) and (A9).

Now consider the consequences of eq. (B7b). We already know that eq. (A15b) applies and it thus only remains to consider the case $m = m'$. Eqs (B5) and (B9) imply

$$E \{b_n^k(\theta_0, t)b_{n'}^{k*}(\theta_0, t')\} = \sum_{m=-n}^n \left| \frac{a_k}{a_m} \right|^2 P_{mk}^n(\cos \theta_0) P_{mk}^{n'*}(\cos \theta_0) E \{b_n^m(t)b_{n'}^{m*}(t')\}. \quad (\text{B10})$$

Integrating eq. (B10) over θ_0 , taking advantage of the orthogonality property (see eq. 7 of III-6-2 in Vilenkin 1969),

$$\int_{-1}^1 P_{mk}^n(u) P_{mk}^{n'*}(u) du = \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} \quad (\text{B11})$$

and given eq. (B7b) with eq. (B9), we infer

$$E \{b_n^k(t)b_{n'}^{k*}(t')\} = \frac{1}{2} \sum_{m=-n}^n \left| \frac{a_k}{a_m} \right|^2 \frac{2}{2n+1} \delta_{nn'} E \{b_n^m(t)b_{n'}^{m*}(t')\}. \quad (\text{B12})$$

If $n \neq n'$, this leads to

$$E \{b_n^k(t)b_{n'}^{k*}(t')\} = 0 \quad \text{if } n \neq n'. \quad (\text{B13})$$

If $n = n'$, eq. (B12) implies

$$\frac{1}{|a_k|^2} E \{b_n^k(t)b_n^{k*}(t')\} = \frac{1}{2n+1} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{|a_m|^2} E \{b_n^m(t)b_n^{m*}(t')\}. \quad (\text{B14})$$

Because the right-hand side of eq. (B14) is independent of k , we may conclude that eq. (B14) (with eq. B3) implies

$$E \{b_n^m(t)b_n^{m*}(t')\} = \frac{1 + \delta_{m,0}}{2} F(n, t, t'), \quad (\text{B15})$$

where $F(n, t, t')$ is a function of n, t, t' . (Note that eq. B15 then implies eq. B14.) It can easily be checked with the help of eqs (B14) and (A7) that $F(n, t, t') = F^*(n, t, t')$, showing that $F(n, t, t')$ is a real function. All in all, we may thus conclude that in addition to eq. (B9) (equivalent to eq. 15a), we also have (because of eqs A15, B13 and B15)

$$E \{b_n^m(t)b_{n'}^{m*}(t')\} = \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \frac{1 + \delta_{m,0}}{2} F(n, t, t'). \quad (\text{B16})$$

Relying on eqs (A8) and (A9), it is then quite straightforward to check that eq. (B16) is equivalent to eq. (15b). Thus, spherical symmetry implies eqs (B9) and (B16), equivalent to eq. (15).

Finally, it is important to check that eq. (15) (or eqs B9 and B16) are also sufficient conditions for spherical symmetry. This requires to check that once eqs (B9) and (B16) are satisfied in a given frame of reference (say the standard latitude/longitude frame), the process would be defined by exactly the same mean μ and covariance matrix $\gamma(t' - t)$ in any other frame of reference, hence after any type of rotation of the axis.

To prove this, we first check that eqs (B9) and (B16) imply eq. (B7), i.e. invariance of the process under any rotation about the Oy axis. Given eq. (B5), the case for eq. (B7a) is trivial. Proving eq. (B7b) is less trivial. Knowing that eq. (B7a) is satisfied, we need to calculate (taking eqs B9 and B5 into account)

$$E \{b_n^k(\theta_0, t)b_{n'}^{k*}(\theta_0, t')\} = \sum_{m=-n}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} E \{b_n^m(t)b_{n'}^{m'*}(t')\} \frac{a_k}{a_m} \frac{a_{k'}^*}{a_{m'}} P_{mk}^n(\cos \theta_0) P_{m'k'}^{n'*}(\cos \theta_0). \quad (\text{B17})$$

Given eq. (B16) and taking advantage of the two following properties,

$$P_{mk}^n(u) = P_{km}^n(u) \quad (\text{B18})$$

and

$$\sum_{m=-n}^n P_{km}^n(u) P_{k'm}^{n'}(u) = \delta_{kk'} \quad (\text{B19})$$

(eqs B18 and B19 are respectively eq. 5 of III-3-6 and eq. 11' of III-4-1 in Vilenkin 1969), together with eq. (B3), it can be checked that eq. (B17) implies

$$E \{b_n^k(\theta_0, t)b_{n'}^{k*}(\theta_0, t')\} = E \{b_n^k(t)b_{n'}^{k*}(t')\}. \quad (\text{B20})$$

Given eq. (B9), eq. (B20) is eq. (B7b).

Thus, it appears that eqs (B9) and (B16) (or equivalently eq. 15) are sufficient conditions for the process to be invariant under any rotation about the Oy axis. Because they also imply eq. (16), they also are sufficient conditions for the process to be invariant under any rotation about

the Oz axis. It then remains to show that they also are sufficient conditions for the process to be invariant under any other type of rotation (i.e. change of frame of reference).

To show this, we rely on the well-known property that any rotation can always be defined by three Euler angles defining three successive elementary rotations leading to the same final transformation. Let us denote $\mathfrak{N}_1$ and $\mathfrak{N}_4$ the initial and final frames of reference. The rotation of $\mathfrak{N}_1$ into $\mathfrak{N}_4$ can be decomposed into a first finite rotation of $\mathfrak{N}_1$ about the Oz_1 axis, leading to an intermediate frame $\mathfrak{N}_2$, a second finite rotation of $\mathfrak{N}_2$ about the Oy_2 axis, leading to another intermediate frame $\mathfrak{N}_3$, and a final finite rotation of $\mathfrak{N}_3$ about the Oz_3 axis leading to $\mathfrak{N}_4$.

If eqs (B9) and (B16) are satisfied in $\mathfrak{N}_1$, it follows from our earlier results that the process is invariant under any rotation about the Oz_1 axis. Thus, the process is defined by the same μ and $\gamma(\tau)$ in both $\mathfrak{N}_1$ and $\mathfrak{N}_2$. However, because eqs (B9) and (B16) (equivalent to eq. 15) make a definition of μ and $\gamma(\tau)$, it follows that eqs (B9) and (B16) are also satisfied in $\mathfrak{N}_2$. This then shows that the process is invariant under any rotation about the Oy_2 axis, and is again defined by the same μ and $\gamma(\tau)$ in $\mathfrak{N}_3$, where eqs (B9) and (B16) again hold. Hence, the process is again invariant under the rotation about the Oz_3 axis leading to $\mathfrak{N}_4$ where the process is finally defined by the same μ and $\gamma(\tau)$ as in $\mathfrak{N}_1$.

It therefore appears that eqs (B9) and (B16), or alternately eq. (15), are the necessary and sufficient conditions to be satisfied in any one frame of reference for the process to be spherically symmetric.

Statistical palaeomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation

C. Bouligand,¹ G. Hulot,^{1,2} A. Khokhlov^{1,3} and G. A. Glatzmaier⁴

¹Département de Géomagnétisme et Paléomagnétisme, CNRS UMR 7577, Institut de Physique du Globe de Paris, 4 Place Jussieu, 75252 Paris cedex 05, France

²NASA/GSFC, code 921, Greenbelt, MD 20771, USA. E-mail: gh@ipgp.jussieu.fr

³International Institute of earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, 79, b2, Warshavskoe shosse 117556, Moscow, Russia

⁴University of California, Santa Cruz, CA 95064, USA

Accepted 2005 February 9. Received 2004 December 21; in original form 2004 March 2

SUMMARY

By relying on two numerical dynamo simulations for which such investigations are possible, we test the validity and sensitivity of a statistical palaeomagnetic field modelling approach known as the giant gaussian process (GGP) modelling approach. This approach is currently used to analyse palaeomagnetic data at times of stable polarity and infer some information about the way the main magnetic field (MF) of the Earth has been behaving in the past and has possibly been influenced by core–mantle boundary (CMB) conditions. One simulation has been run with homogeneous CMB conditions, the other with more realistic non-homogeneous symmetry breaking CMB conditions. In both simulations, it is found that, as required by the GGP approach, the field behaves as a short-term memory process. Some severe non-stationarity is however found in the non-homogeneous case, leading to very significant departures of the Gauss coefficients from a Gaussian distribution, in contradiction with the assumptions underlying the GGP approach. A similar but less severe non-stationarity is found in the case of the homogeneous simulation, which happens to display a more Earth-like temporal behaviour than the non-homogeneous case. This suggests that a GGP modelling approach could nevertheless be applied to try and estimate the mean μ and covariance matrix $\gamma(\tau)$ (first- and second-order statistical moments) of the field produced by the geodynamo. A detailed study of both simulations is carried out to assess the possibility of detecting statistical symmetry breaking properties of the underlying dynamo process by inspection of estimates of μ and $\gamma(\tau)$. As expected (because of the role of the rotation of the Earth in the dynamo process), those estimates reveal spherical symmetry breaking properties. Equatorial symmetry breaking properties are also detected in both simulations, showing that such symmetry breaking properties can occur spontaneously under homogeneous CMB conditions. By contrast axial symmetry breaking is detected only in the non-homogeneous simulation, testifying for the constraints imposed by the CMB conditions. The signature of this axial symmetry breaking is however found to be much weaker than the signature of equatorial symmetry breaking. We note that this could be the reason why only equatorial symmetry breaking properties (in the form of the well-known axial quadrupole term in the time-averaged field) have unambiguously been found so far by analysing the real data. However, this could also be because those analyses have all assumed to simple a form for $\gamma(\tau)$ when attempting to estimate μ . Suggestions are provided to make sure future attempts of GGP modelling with real data are being carried out in a more consistent and perhaps more efficient way.

Key words: dynamo theory, geomagnetism, geostatistics, palaeomagnetism, spherical harmonics, statistical methods.

1 INTRODUCTION

The past decade has seen significant progress in our understanding of the origin and behaviour of the magnetic field (MF) of the Earth.

Several fully consistent 3-D fluid dynamo numerical simulations have been run with success, showing that a planet with a convecting metallic core, such as the Earth, could indeed spontaneously produce a MF by fluid dynamo action within its core (Glatzmaier &

Roberts 1995; Kuang & Bloxham 1997; Christensen *et al.* 1998). Surprisingly, even though those simulations have been run in parameter regimes known to still be very remote from that of the Earth, the fields produced happen to display a number of Earth-like features, such as a dipole dominant structure and the occurrence of reversals (for a recent review, see e.g. Dormy *et al.* 2000). Those encouraging results obviously call for both improved numerical simulations and more detailed comparisons of the simulated fields with the real main MF produced in the core of the Earth.

Such comparisons are relatively straightforward to carry over the historical period, for which spherical harmonic (SH) models of the MF are available (see e.g. Hulot *et al.* 2002). However, a different approach is required to compare the output of numerical simulations with the numerous, but sparse in time and location, data contained in the palaeomagnetic databases available for recent geological epochs. One approach is particularly well suited, the giant gaussian process (GGP) approach introduced by Constable & Parker (1988). This statistical approach relies on a single formalism that can be used to statistically analyse just as well the historical (Constable & Parker 1988; Hulot & Le Mouél 1994), the archeomagnetic (Hongre *et al.* 1998) and the palaeomagnetic MF (Constable & Parker 1988 and many studies since, see e.g. Kono *et al.* 2000a, Khokhlov *et al.* 2001 and references therein). As we shall see, it also is of straightforward use for analogous analysis of the field produced from numerical simulations.

The GGP approach however relies on a set of assumptions required for the approach to be valid. Observations show that the geomagnetic field experienced many significant changes on timescales of tens to a few thousand years, about a mainly axial dipole field. By contrast, this mean field only very occasionally (on timescales of several hundred thousand years) and suddenly (within a few thousand years) changed its polarity in the past, at times of so-called reversals (see e.g. Merrill *et al.* 1996). Although it would probably be advisable to try and develop a statistical formalism capable of also describing such events, the GGP approach deliberately restricts its scope to studying the field produced by the geodynamo at times of stable polarity, defined as the times when the field fluctuates about a non-zero mean field, with a strong stable axial dipole component. There are at least two reasons for this. One is that we do not yet know enough about reversals to propose a statistical formalism that could also account for them in a fully consistent way. The other is that the GGP approach precisely makes it possible to compare the statistical behaviour of the field before and after reversals. This can usefully shed some light about the exact nature of these events.

Additional simplifying assumptions have otherwise systematically been introduced to ease the data analysis. Those assumptions have been reviewed in a companion paper (Hulot & Bouligand 2005, – this issue, hereafter Paper I,) and shown to often amount to symmetry constraints imposed on the GGP models. However, it is not obvious that the MF of the Earth should satisfy those constraints. In fact and as further noted in Paper I, it would be advisable not to *a priori* enforce any such constraint. *A posteriori* analysis of the symmetries involved in a GGP model accounting for the field could indeed also offer a useful guide to characterize the regime under which the geodynamo has been operating in the past.

In the present paper, we take advantage of numerical simulations from the Glatzmaier & Roberts (1995, 1996, 1997; Glatzmaier *et al.* 1999) dynamo to test the fundamental assumptions underlying the GGP approach, address the symmetry issues raised in Paper I and discuss possible simplifying assumptions. Although quite a few detailed analyses of the field produced by those simulations (Glatzmaier *et al.* 1999; Coe *et al.* 2000; McMillan *et al.* 2001) or by

other analogous simulations (Bloxham 2000a,b; Kono *et al.* 2000b; Kono & Roberts 2002; Olson & Christensen 2002; Christensen & Olson 2003) have already been published, only a few (McMillan *et al.* 2001, and to a lesser extent Kono *et al.* 2000b and Kono & Roberts 2002) attempted some tests in connection with the GGP approach. None however, fully addressed the relevance of the GGP approach to characterize the field produced by a (numerical) dynamo. This is the main purpose of the present study.

2 GENERAL BACKGROUND

Let us first briefly introduce the background information we will need (for more details, see Paper I). In a GGP description of a field $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ at a time of stable polarity, it is assumed that, at any given time t and location $\mathbf{r}$ outside the core,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla V(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

where:

$$V(\mathbf{r}, t) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n [g_n^m(t) Y_n^{mc}(\theta, \varphi) + h_n^m(t) Y_n^{ms}(\theta, \varphi)]; \quad (2)$$

a is an arbitrary reference radius; (r, θ, φ) are the spherical coordinates; $Y_n^{m(c,s)}(\theta, \varphi)$ are the real SH functions of degree n and m , Schmidt normalized; and the $[g_n^m(t), h_n^m(t)]$ are the so-called Gauss coefficients that define a vector $\mathbf{x}(t)$, assumed to be a single realization of a multidimensional stationary random Gaussian process, with

$$\text{a statistical mean (or mean model)} E\{\mathbf{x}(t)\} = \boldsymbol{\mu}, \quad (3)$$

$$\text{a covariance matrix } E\{[\mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\mu}][\mathbf{x}(t') - \boldsymbol{\mu}]^T\} = \boldsymbol{\gamma}(t' - t), \quad (4)$$

where $E\{\}$ is the statistical expectation, $\boldsymbol{\mu}$ is a vector of components $[\mu(g_n^m), \mu(h_n^m)]$ and $\boldsymbol{\gamma}(t' - t)$ is a matrix of elements $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, t' - t)$, with x and x' being either g or h .

In addition, it is assumed that the covariance matrix $\boldsymbol{\gamma}(\tau)$ decreases fast enough towards zero when τ becomes large (i.e. that the process is short-term memory), to ensure that the process is ergodic for both its mean and its covariance, i.e. to ensure that

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{x}}_T = \boldsymbol{\mu} \quad \text{and} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\mathbf{K}}_T(\tau) = \boldsymbol{\gamma}(\tau),$$

where we have introduced the following time averages:

$$\bar{\mathbf{x}}_T = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{x}(t) dt, \quad (5)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_T(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}_T][\mathbf{x}(t + \tau) - \bar{\mathbf{x}}_T]^T dt. \quad (6)$$

Necessary and sufficient conditions can then be derived for a GGP to be either spherically, axially (about the rotation axis of the Earth), or equatorially symmetric in a statistical sense (see Paper I for proofs):

Conditions for spherical statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0, \quad (7a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \text{ if } x_n^m \neq x_{n'}^{m'} \quad \text{and} \quad \gamma(x_n^m, x_n^m, \tau) = \gamma_n(\tau); \quad (7b)$$

Conditions for axial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } m \neq 0, \quad (8a)$$

$$\gamma(g_n^m, g_{n'}^m, \tau) = \gamma(h_n^m, h_{n'}^m, \tau) \quad \text{if } m \neq 0, \quad (8b)$$

$$\gamma(g_n^m, h_n^m, \tau) = -\gamma(h_n^m, g_n^m, \tau), \quad (8c)$$

$$\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } m \neq m'; \quad (8d)$$

Conditions for E^S equatorial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ is odd}, \quad (9a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ and } n' - m' \text{ are of different parities}; \quad (9b)$$

Conditions for E^A equatorial statistical symmetry

$$\mu(g_n^m) = \mu(h_n^m) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ is even}, \quad (10a)$$

$$\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if } n - m \text{ and } n' - m' \text{ are of different parities}. \quad (10b)$$

As shown in Paper I, a GGP process satisfying eq. (7) would be invariant in any change of frame of reference and thus statistically insensitive to any specific frame of reference. One satisfying eq. (8) would be invariant in any rotation of the frame reference about the rotation axis of the Earth and thus insensitive to any specific longitude. One satisfying eq. (9) would be invariant after reflecting in the equatorial plane and changing the field polarity, and one satisfying eq. (10) would be invariant after reflecting in the equatorial plane. Either way, such a GGP would see both hemispheres in a statistically equivalent way. Thus, a field satisfying either eq. (9) or eq. (10) can be defined as being equatorially symmetric. Introducing the terminology often used in palaeomagnetism (Merrill *et al.* 1996) of dipole family ($n - m$ odd) versus quadrupole family ($n - m$ even), this amounts to say that a GGP will have an equatorial symmetry if and only if μ belongs exclusively to either the dipole or the quadrupole family and $\gamma(\tau)$ does not couple the two families (for more details, see Paper I).

The general question we now wish to address is the extent to which one may assume that a fluid dynamo of the type thought to be responsible for the main MF of the Earth produces a field that, at times of stable polarity: (i) reasonably complies with a GGP behaviour; (ii) displays meaningful and thus useful statistical symmetry properties that we can identify; and (iii) can be described with the help of reasonably simple μ and $\gamma(\tau)$.

3 CASE STUDY OF A HOMOGENEOUS NUMERICAL SIMULATION

To address those questions, we first consider the so-called homogeneous model g described in some detail in Glatzmaier *et al.* (1999) and Coe *et al.* (2000). This simulation has been generated by the dynamo model of Glatzmaier & Roberts (1997) that solves the non-linear magnetohydrodynamic (MHD) equations for the 3-D, time-dependent flow, MF and thermodynamic variables in a rotating, convecting, fluid sphere. Its main characteristic, as far as we are concerned here, is that the convection is thermally driven by homogeneous, i.e. spherically symmetric, thermal boundary conditions. This very high level of symmetry is what makes model g an interesting simulation to investigate first.

The simulation directly produced this field in the form of a time varying geomagnetic model $\mathbf{x}(t)$. Thus, estimates based on eqs (5) and (6) can directly be used to carry on tests. In practice however, we are slightly limited by the length of the simulation, and by the fact

that values of $\mathbf{x}(t)$ were saved only up to degree and order 21, and only every approximately 47.5 yr. (Gauss coefficients were indeed saved only every 1000 numerical time steps during the simulation. Because each numerical time step was approximately 17 days, this means that we dealt with snapshots of $\mathbf{x}(t)$ every 47.5 yr; see Glatzmaier *et al.* 1999, for more details.) Fortunately, those limitations do not seriously affect our capacity to draw conclusions. Note also that time in the model is scaled consistently with both the rotation period of the Earth (1 day) and the dipole magnetic diffusion time (20 000 yr). However, this model (like all current models of the geodynamo) should not directly be compared to the actual geodynamo, because the viscous diffusion time of the model is much shorter than the magnetic diffusion time of the Earth.

The simulation has been run over approximately 550 000 yr, but the Gauss coefficients were saved only for a little more than the last 350 000 yr. This amounts to approximately 7500 snapshots (which we will refer to as steps for the purpose of the statistical analysis described below, even though each such step actually represents 1000 time steps in the numerical simulation of Glatzmaier *et al.* 1999). The field produced went through two reversals, which have been studied in detail by Glatzmaier *et al.* (1999), Coe *et al.* (2000) and McMillan *et al.* (2001). Here, we mainly focus on the period of stable polarity between the two reversals. All tests described below therefore deal with the field behaviour between step 2030 and 5020, over a period of $T_0 \approx 142\,000$ yr (step 1 corresponding to the initial step of the last 350 000 yr of the run). In what follows and in order to simplify notations, all time averages $\bar{\mathbf{x}}_{T_0}$ and $\bar{\mathbf{K}}_{T_0}(\tau)$ (as defined by eqs 5 and 6 for the entire period $T = T_0$) will be denoted $\bar{\mathbf{x}}$ and $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$.

3.1 Short-term memory

Leaving the issue of stationarity for a later section, we first checked that the field produced by model g is indeed compatible with a covariance matrix $\gamma(\tau)$ decreasing fast to zero when τ becomes large. For each Gauss coefficient $x_n^m(t)$, we computed estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, \tau) / \bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the autocovariance function of $x_n^m(t)$ normalized to its value at $\tau = 0$. Fig. 1 shows the result of such a computation for all $x_n^m(t)$ with degree $n = 2$. It indeed reveals that $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, \tau)$ always decreases fast towards zero when τ increases. Similar pictures were obtained for all Gauss coefficients.

In fact, it turns out that all estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, \tau)$ take a form very similar to the Gaussian shape Hongre *et al.* (1998) had anticipated for $\gamma(x_n^m, x_n^m, \tau)$:

$$\gamma_n(\tau) = \sigma_n^2 \exp \left[-\frac{\tau^2}{2\tau_n^2} \right], \quad (11)$$

except for the fact that the typical correlation times τ_n involved are not only a function of the degree n , but also of the order m . The only parameter they are not sensitive to is the x character (g or h).

To illustrate this point further, for each Gauss coefficient $x_n^m(t)$, we defined and estimated a typical correlation time τ_n^m as the value of τ such that $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, \tau) / \bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0) = \exp(-1/2)$. Table 1 lists those estimates for the lowest degrees and Fig. 2 gives a visual account of all values. Again, we see that the τ_n^m strongly depend on both n and m , but are very nearly the same for $g_n^m(t)$ and $h_n^m(t)$ [the differences to be seen are of only a fraction of the time between saved snapshots (47.5 yr) and can therefore be attributed to the limited temporal resolution of the data we analyse]. This, we note, is not compatible with eq. (7b) and may therefore be viewed as a temporal manifestation of some spherical symmetry breaking. By

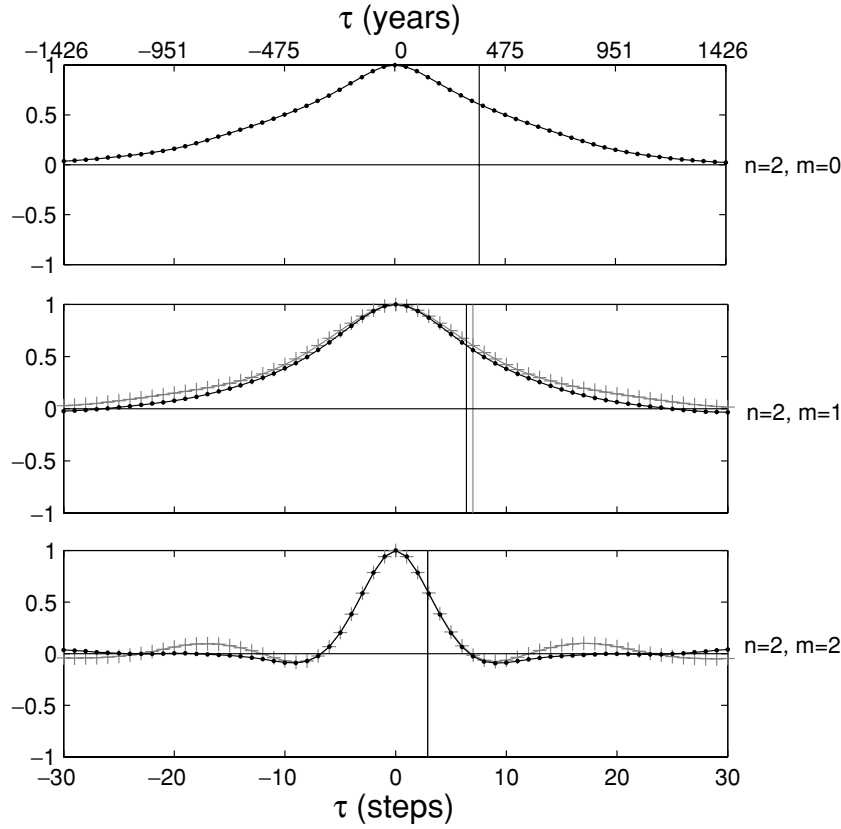


Figure 1. Model g: estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, \tau) / \bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the autocovariance functions normalized to their value at $\tau = 0$, for all Gauss coefficients with degree $n = 2$. The curves with black dots are for the $x = g$ coefficients and those with grey crosses for the $x = h$ coefficients. The time-shift τ is expressed in terms of steps between saved snapshots (lower scale, 1 step = 47.5 yr) and years (upper scale).

Table 1. Model g: estimates of the typical correlation times τ_n^m for the Gauss coefficients with low degrees.

n	m	g steps(yr)	h steps(yr)
1	0	100.4(4772)	
1	1	5.2(249)	4.7(222)
2	0	7.4(354)	
2	1	6.3(297)	6.9(327)
2	2	2.9(137)	2.9(137)
3	0	15.8(752)	
3	1	3.6(171)	3.3(156)
3	2	3.8(179)	3.8(181)
3	3	2.5(117)	2.4(112)
4	0	4.4(210)	
4	1	3.8(181)	3.9(186)
4	2	2.7(129)	2.5(121)
4	3	2.8(132)	2.7(128)
4	4	1.7(82)	1.8(87)

contrast, those results are consistent with the axial symmetry conditions (eq. 8b, with $n = n'$). (Note that timescales cannot bring any information with respect to the third, equatorial, symmetry as eq. 9b/10b involves no requirements on timescales.) Thus, not only is the temporal behaviour of the model g field compatible with a short-term memory process, it also reflects relevant symmetry properties.

3.2 Time-averaged field

We next checked that the field produced by model g is also compatible with a mean field μ displaying meaningful symmetry proper-

ties. We computed time-averaged estimates $\bar{\mu}$ of μ with the help of eq. (5) (Table 2). Of course, none of the $\bar{g}_n^m$ and $\bar{h}_n^m$ we get is exactly zero, because T_0 is not infinite and estimates can only be known to within some statistical bounds. To decide which of those estimates can be considered as significantly different from zero, we relied on the results of Table 1. For each Gauss coefficient $x_n^m(t)$, rather than using the continuous integral (5), we computed an average from samples taken every $\Delta t = 3\tau_n^m$. Those samples may then be considered independent from each other (Hongre *et al.* 1998), which makes it easy to decide whether the resulting average significantly differs from zero or not, with a standard Student's t-test (e.g. van der Waerden 1969; Press *et al.* 1992).

For $g_1^0(t)$, which has the largest τ_n^m ($\tau_1^0 \approx 4800$ yr, corresponding to approximately 100 time steps), we chose $\Delta t = 302$ steps and an estimate of $\mu(g_1^0)$ was therefore derived from only 10 independent values. The value inferred is nevertheless significantly different from zero at the 10^{-5} per cent level. For all other Gauss coefficients, a Student's t-test at a 1 per cent level was carried out. This leads to the conclusion that estimates of all $\mu(g_n^0)$ significantly differ from zero, except that of $\mu(g_{21}^0)$, which is close to being zero. By contrast, none of the estimates for the 462 non-axial terms appears to significantly differ from zero. This result is consistent with the 1 per cent level of the test over such a population (about four non-zero values being then possibly expected; in fact, the lowest probability we found for a mean non-axial term to be compatible with a zero expected value is of 2.28 per cent, again a reasonable value over such a population). We next reproduced the same test for coefficients up to degree and order 8, more accessible if we were to rely on models derived from observations, at the lower 5 per cent level of significance. Two of

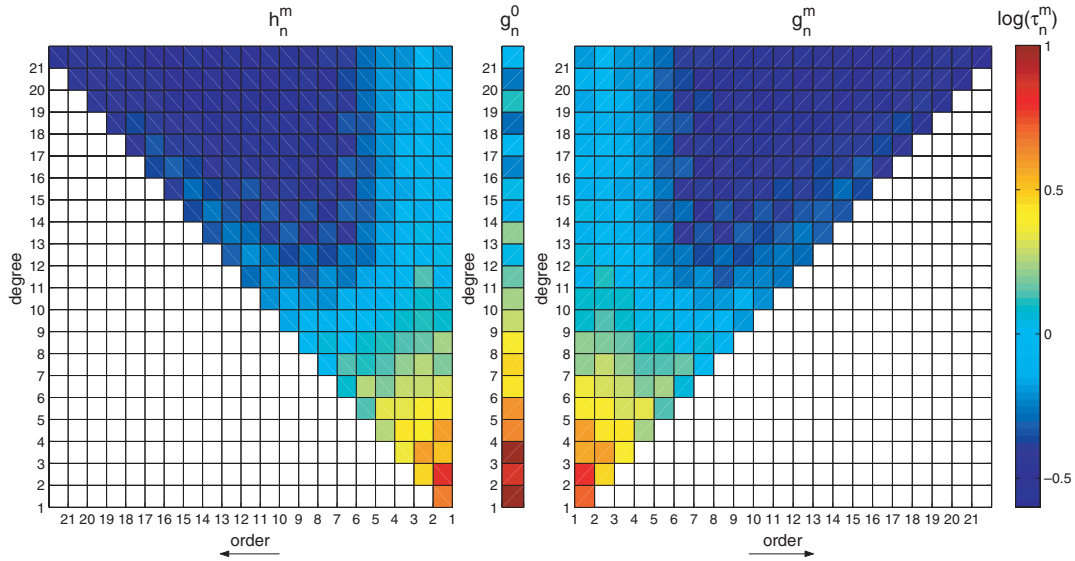


Figure 2. Model g: logarithm representation of the estimates of the typical correlation time $\log_{10}(\tau_n^m)$ for the g and h coefficients, where τ_n^m is scaled with respect to the time between saved snapshots. Hence $\log_{10}(\tau_n^m) = 0$ amounts to $\tau_n^m = 47.5$ yr. Note the central isolated column corresponding to the τ_n^0 only defined for g_n^0 coefficients. Note also the very strong similarity between the τ_n^m for g_n^m and h_n^m when $m \neq 0$.

the 72 estimates for the corresponding non-zonal coefficients were found to be significant (although up to three of those could have been expected; the lowest probability found was then 3.71 per cent).

It thus appears that the time-averaged estimate $\bar{\mu}$ of μ testifies not only for spherical symmetry breaking (eq. 7a is not satisfied) while complying with axial symmetry (eq. 8a is satisfied), but also for some equatorial symmetry breaking. This estimate indeed reveals a mixture of odd (dipole family) and even (quadrupole family) degree zonal fields. Note, however, that it also reveals a mean field quite strongly dominated by the dipole family, especially at the core surface (Table 2).

3.3 Covariances

Consider next the diagonal terms $\gamma(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the covariance matrix at time $\tau = 0$ (defining the variances of the x_n^m). Time-averaged estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of those can be computed with the help of eqs (5) and (6) (Fig. 3). These estimates are again consistent with some spherical symmetry breaking, as they do not only depend on the degree n , but also on the order m (which conflicts with eq. 7b). They also appear to be consistent with the prediction $\gamma(g_n^m, g_n^m, 0) = \gamma(h_n^m, h_n^m, 0)$ (recall eq. 8b) that axial symmetry be satisfied. Finally, we note that for each degree n , coefficients belonging to the dipole family ($n - m$ odd) again systematically dominate. They clearly display larger variances than those belonging to the quadrupole family ($n - m$ even).

Now, what about cross-covariances? Do estimates of those terms reveal the same symmetry properties? Fig. 4 provides a first answer. It shows estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) / \sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0) \bar{K}(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$ of $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) / \sqrt{\gamma(x_n^m, x_n^m, 0) \gamma(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$, for $x_n^m = g_n^m$ and various values of $x_{n'}^{m'}$ (the normalization by $\sqrt{\gamma(x_n^m, x_n^m, 0) \gamma(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$ being introduced to illustrate the relative importance of the various terms). Those estimates suggest that $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$ can be non-zero if $x_n^m \neq x_{n'}^{m'}$, in contradiction with eq. (7b). This again strongly argues in favour of spherical

Table 2. Model g: time-averaged estimates $\bar{g}_n^m$ and $\bar{h}_n^m$ of $\mu(g_n^m)$ and $\mu(h_n^m)$ (at the surface of the Earth and down-continued to the core–mantle boundary, CMB) during the period of reverse polarity.

n	m	At the surface of the Earth		At the CMB	
		$g(\text{nT})$	$h(\text{nT})$	$g(\text{nT})$	$h(\text{nT})$
1	0	13 700.029 55		83 709.909 32	
1	1	−16.846 94	−7.289 36	−102.938 16	−44.539 41
2	0	−229.104 36		−2559.217 41	
2	1	24.308 93	−18.503 17	271.543 66	−206.690 19
2	2	−17.531 07	17.318 42	−195.831 37	193.455 95
3	0	−372.170 02		−7600.351 31	
3	1	−9.295 33	−6.462 80	−189.826 61	−131.981 42
3	2	−6.698 83	−1.073 79	−136.801 52	−21.928 55
3	3	−2.552 11	15.621 77	−52.118 54	319.023 34
4	0	30.554 19		1140.726 33	
4	1	−0.448 67	9.828 58	−16.750 99	366.945 40
4	2	2.101 79	1.963 82	78.469 37	73.318 18
4	3	−4.766 06	−8.317 76	−177.938 55	−310.539 88
4	4	−1.164 23	4.140 66	−43.466 11	154.589 74
5	0	31.954 74		2181.044 38	
6	0	−3.476 56		−433.807 94	
7	0	3.042 79		694.125 05	
8	0	4.346 78		1812.807 92	
9	0	−2.949 96		−2249.150 45	
10	0	−0.186 80		−260.371 83	
11	0	−0.059 86		−152.540 02	
12	0	0.049 27		229.520 23	
13	0	−0.121 48		−1034.662 02	
14	0	−0.009 26		−144.239 63	
15	0	−0.010 23		−291.290 67	
16	0	−0.000 83		−43.096 80	
17	0	−0.001 91		−181.483 03	
18	0	−0.000 02		−3.152 69	
19	0	−0.000 30		−94.570 20	
20	0	−0.000 01		−4.217 14	
21	0	0.000 00		0.607 55	

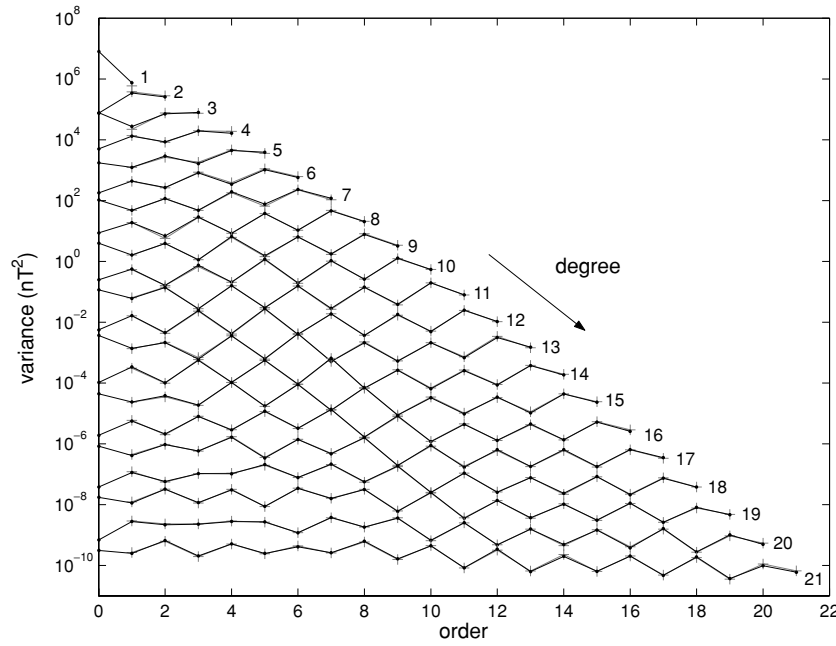


Figure 3. Model g: estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the variances. The black dots represent the values for the $x = g$ coefficients and the grey crosses the values for the $x = h$ coefficients. Coefficients ($x = g$ or h) sharing the same degree are linked for clarity. Note that $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ is a function of both n and m but not of x . In particular, estimates of variances with $(n - m)$ odd (dipole family) are always larger than those with $(n - m)$ even (quadrupole family).

symmetry breaking. However, those estimates also suggest that this only occurs when $m = m'$ (i.e. for $m = m' = 2$, in the present instance) in agreement with eq. (8d). As a matter of fact, Fig. 4 further suggests that not only eqs (8b) and (8d), but also eq. (8c) (i.e. all axial symmetry requirements) are satisfied. This is tested here for $(n, m) = (2, 2)$, for which estimates suggest that $\gamma(g_2^2, h_2^2, -\tau) = -\gamma(g_2^2, h_2^2, \tau)$ in agreement with the more general constraint:

$$\gamma(g_n^m, h_n^m, -\tau) = -\gamma(g_n^m, h_n^m, \tau), \quad (12)$$

equivalent to $\gamma(g_n^m, h_n^m, \tau) = -\gamma(h_n^m, g_n^m, \tau)$ required by eq. (8c). Finally, Fig. 4 would suggest that the equatorial symmetry conditions (9b)/(10b) also are satisfied. Given that eqs (8b–d) are already satisfied, this would indeed only require that $\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, \tau) = 0$, if n and n' are of different parities, and in particular that $\gamma(g_2^2, g_3^2, \tau) = \gamma(g_2^2, h_3^2, \tau) = 0$, which is what estimates in Fig. 4 indeed suggest is satisfied.

In fact, having visually inspected all cross-covariances in a similar way, we have been led to the conclusion that all estimates were compatible with axial and most equatorial symmetry conditions (8b–d) and (9b)/(10b) but often not compatible with those conditions (7b) not already included in eqs (8b–d) and (9b)/(10b). We could not afford to back this conclusion by systematic statistical tests (to check the level of significance of non-exactly-zero estimates when a zero value was actually expected). However, we did a number of additional calculations for the special case when $\tau = 0$ (i.e. for the estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^{m'}, 0)/\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)\bar{K}(x_n^{m'}, x_n^{m'}, 0)}$ of $\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, 0)/\sqrt{\gamma(x_n^m, x_n^m, 0)\gamma(x_n^{m'}, x_n^{m'}, 0)}$, as $\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, 0)$ is the cross-covariance value most relevant in the palaeomagnetic context.

Fig. 5(a) gives a visual account of those estimates, when considering $g_n^m(t)$ and $g_n^{m'}(t)$ up to degree and order $N = 15$. Based on eqs (7) and (8), symmetry breaking of the spherical symmetry without symmetry breaking of axial symmetry should manifest itself by

displaying a large number of significant non-zero values among the $m = m'$ estimated cross-covariances, but only a non-significant number of such values among the $m \neq m'$ estimated cross-covariances. This is what Fig. 5(a) suggests. Furthermore, it clearly appears that significant non-zero estimates of $\gamma(x_n^m, x_n^{m'}, 0)$ are mainly seen when n and n' are of the same parity (especially when $|n - n'| = 2$). Given that eq. (8) is satisfied, this would again suggest that eq. (9b)/(10b) is almost satisfied and that the fluctuating part of the field indeed tends to also satisfy the equatorial symmetry.

To be more quantitative, we finally relied on a Spearman rank-order correlation test (van der Waerden 1969; Press *et al.* 1992). Testing the significance of the departure of the estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^{m'}, 0)/\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)\bar{K}(x_n^{m'}, x_n^{m'}, 0)}$ from an expected zero value indeed amounts to test the significance of a possible correlation (or anticorrelation) between the two time-series $x_n^m(t)$ and $x_n^{m'}(t)$ when no time-shift is introduced. This can quantitatively be tested with a Spearman test, provided we sample $x_n^m(t)$ and $x_n^{m'}(t)$ every $\Delta t \geq 3\tau_n^m$ to avoid biases introduced by self-correlation memory issues. We sampled every $\Delta t = 20$ steps (snapshots), which is adequate for all cases, except for $g_1^0(t)$ and $g_3^0(t)$ (recall Table 1). However, this is not a major issue (for those coefficients, separate tests have also been carried out with adequate values of Δt and they led to answers in agreement with those provided here). The results of this Spearman test (also shown on Fig. 5a) confirm most of the previous qualitative results. Among the 119 cross-correlations identified as being significant at the 0.1 per cent level, 103 correspond to cases with $m = m'$ (among which 84 for $m = m' \neq 0$) and only 16 to cases with $m \neq m'$. This leads to a proportion of $103/665 = 15.5$ per cent ($84/560 = 15$ per cent for $m = m' \neq 0$), way above the 0.1 per cent threshold in the $m = m'$ case, which strongly confirms the spherical symmetry breaking. However, it only leads to a proportion of $16/8380 = 0.19$ per cent, very close to the 0.1 per cent threshold, in the $m \neq m'$ case, showing that, by contrast, the axial symmetry is hardly broken.

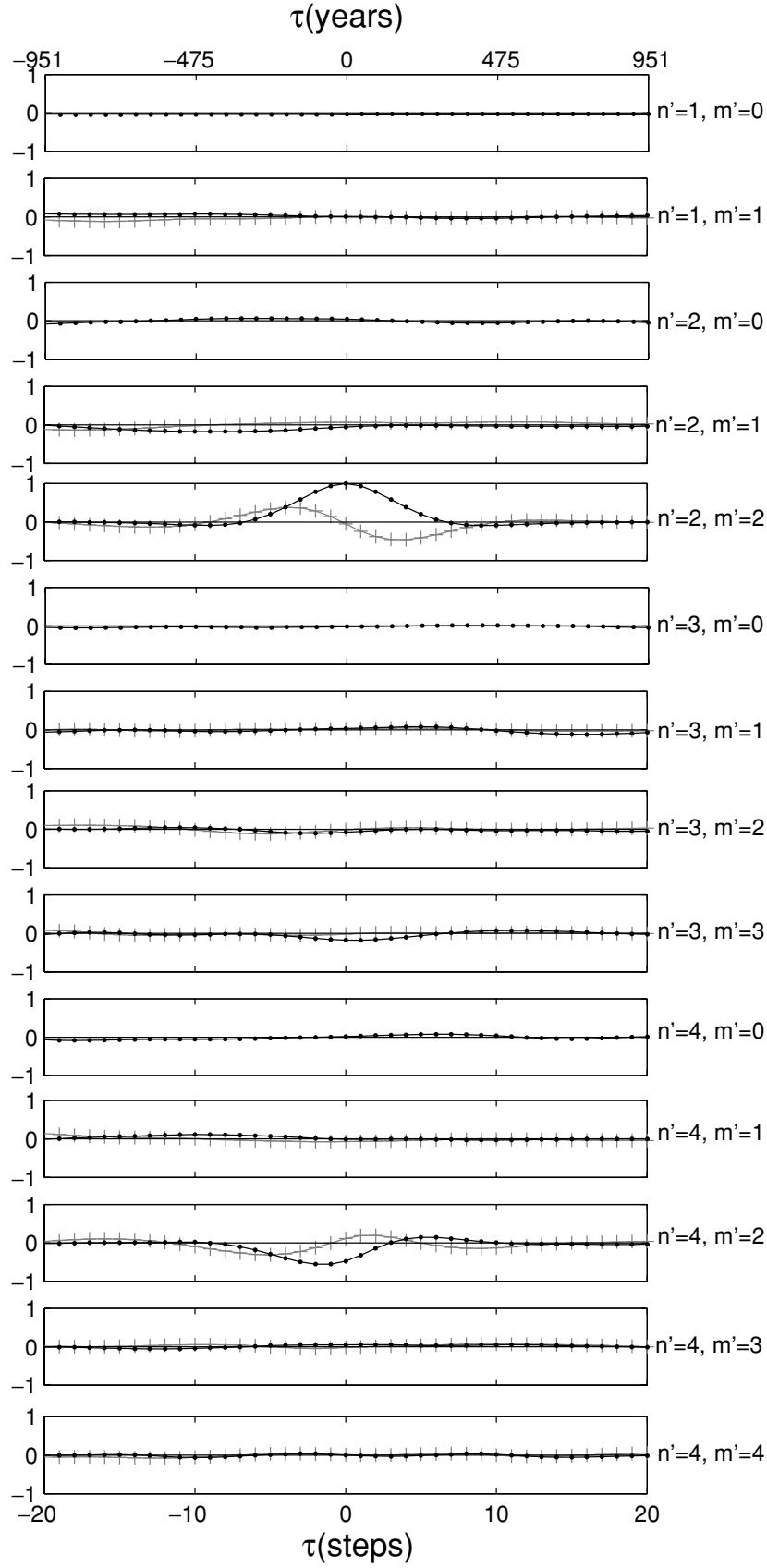


Figure 4. Model g: estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) / \sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0) \bar{K}(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$ for $x_n^m = g_2^2$ and all $x_{n'}^{m'}$ with degree $n' \leq 4$. The curves with black dots are for $x' = g$ coefficients and those with grey crosses for $x' = h$ coefficients. The time-shift τ is expressed in terms of steps between saved snapshots (lower scale, 1 step = 47.5 yr) and years (upper scale). Significant values are only found for $n' = 2, m' = 2$ and $n' = 4, m' = 2$.

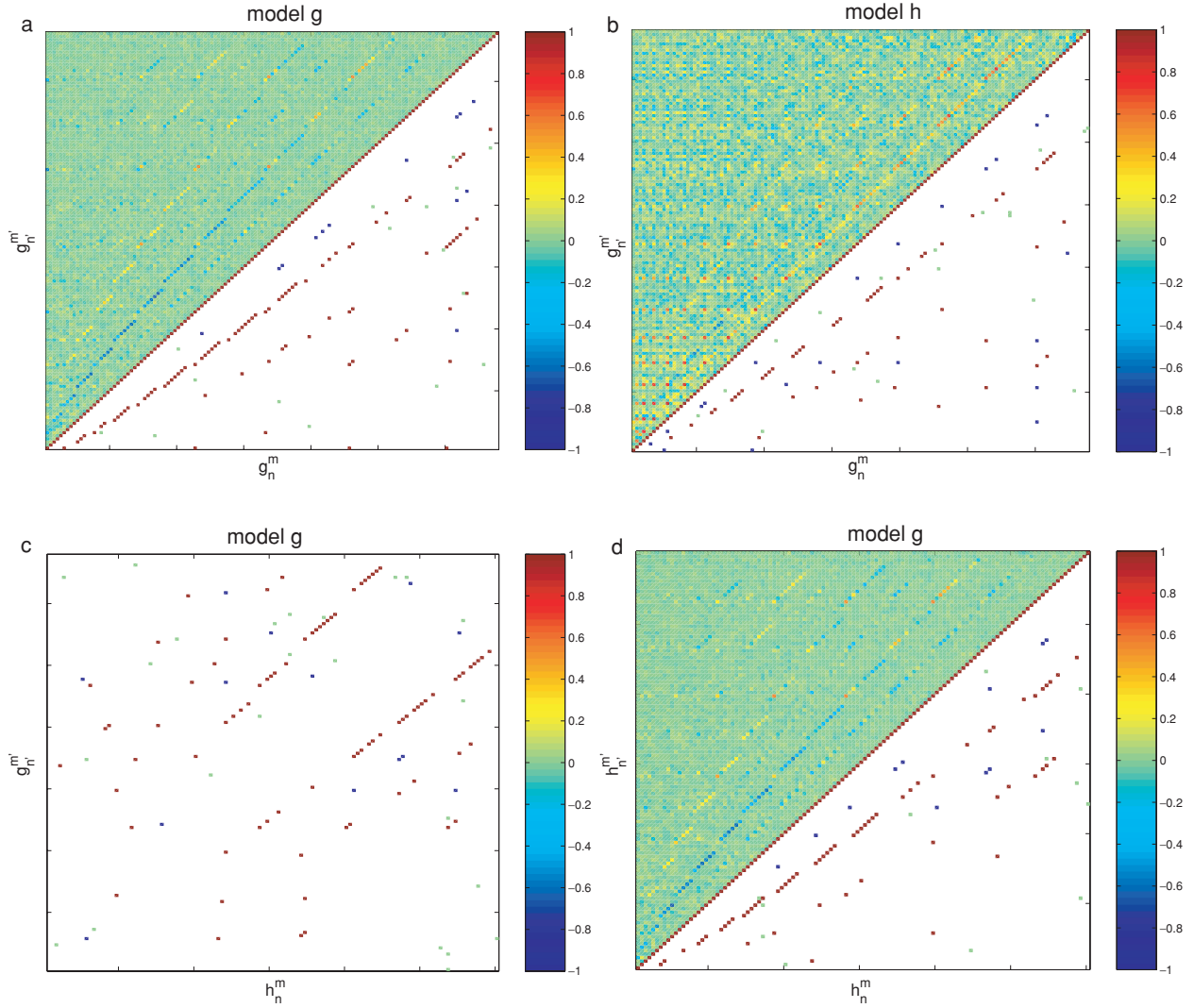


Figure 5. Matrices of the estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, 0)/\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)\bar{K}(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$. Results for model g are presented in (a) when $x = g, x' = g$, (c) when $x = h, x' = g$ and (d) when $x = h, x' = h$. Results for model h when $x = g, x' = g$, are otherwise also shown in (b) for comparison with (a). On each axis, the coefficients are ordered with degree and order increasing as follows: $g_1^0 g_1^1 g_2^0 g_2^1 g_2^2 g_3^0 \dots$ and $h_1^1 h_2^1 h_2^2 h_3^1 h_3^2 h_3^3 \dots$. The matrices (a), (b) and (d) being symmetrical by construction, the actual estimates of the cross-correlations are only shown in the upper triangle (see the coloured scale for the value of the estimates) and the result of the Spearman rank-order correlation test on those values at the 0.1 per cent level are shown in the lower triangle. This test is a Student t-test carried on the Spearman rank-order correlation computed with Gauss coefficients sampled every $\Delta t = 20$ steps. For model g, the correlation is thus for instance calculated with 150 points and follows a Student's law with 148 degrees of freedom. A white square means that the correlation is not significant whereas a coloured square means that the correlation is significant, in green when $m \neq m'$, in red when $m = m'$ and $n - n'$ is even, in blue when $m = m'$ and $n - n'$ is odd. For the (c) matrix, which is not intrinsically symmetric, only the results of the Spearman test are shown. Note that for model g significant correlations mainly occur on $m = m', n - n'$ even branches (in red for the Spearman test) and especially on the main branch with $|n - n'| = 2$. Note also the blurring of (b) compared with (a) and the larger number of occurrences of $m = m', n - n'$ odd correlations (in blue for the Spearman test), especially on the $|n - n'| = 1$ branch.

Very similar results are found when considering correlations between $g_n^m(t)$ and $h_{n'}^{m'}(t)$, and between $h_n^m(t)$ and $h_{n'}^{m'}(t)$ (Figs 5c and d). The proportions of significant Spearman cross-correlations then turn out to be of respectively $95/1240 = 7.7$ per cent and $76/560 = 13.6$ per cent, again way above the 0.1 per cent threshold in the $m = m'$ case, and of $24/14960 = 0.16$ per cent and $12/6580 = 0.18$ per cent, very close to the 0.1 per cent threshold in the $m \neq m'$ case. In fact, two additional axial symmetry requirements applying to $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, 0)$ when $m = m'$ can then also be checked. First, that $\gamma(g_n^m, g_{n'}^m, 0) = \gamma(h_n^m, h_{n'}^m, 0)$ for $m \neq 0$ (as a consequence of eq. 8b). Very similar values are indeed found

for the estimates $\bar{K}(g_n^m, g_{n'}^m, 0)/\sqrt{\bar{K}(g_n^m, g_n^m, 0)\bar{K}(g_{n'}^m, g_{n'}^m, 0)}$ and $\bar{K}(h_n^m, h_{n'}^m, 0)/\sqrt{\bar{K}(h_n^m, h_n^m, 0)\bar{K}(h_{n'}^m, h_{n'}^m, 0)}$ when $m = m' \neq 0$, contrary to the case for $m \neq m'$ (as one would have expected from small quantities differing from zero only because of statistical noise). Secondly, because of eq. (8c), that $\gamma(g_n^m, h_{n'}^m, 0) = -\gamma(h_n^m, g_{n'}^m, 0)$ and $\gamma(g_n^m, h_n^m, 0) = 0$. Those predictions have also been checked.

Finally, the fact that large non-zero estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^m, 0)$ are rarely seen when n and n' are of opposite parity can also be quantified. It turns out that approximately 3.0 per cent of all the $|n - n'|$

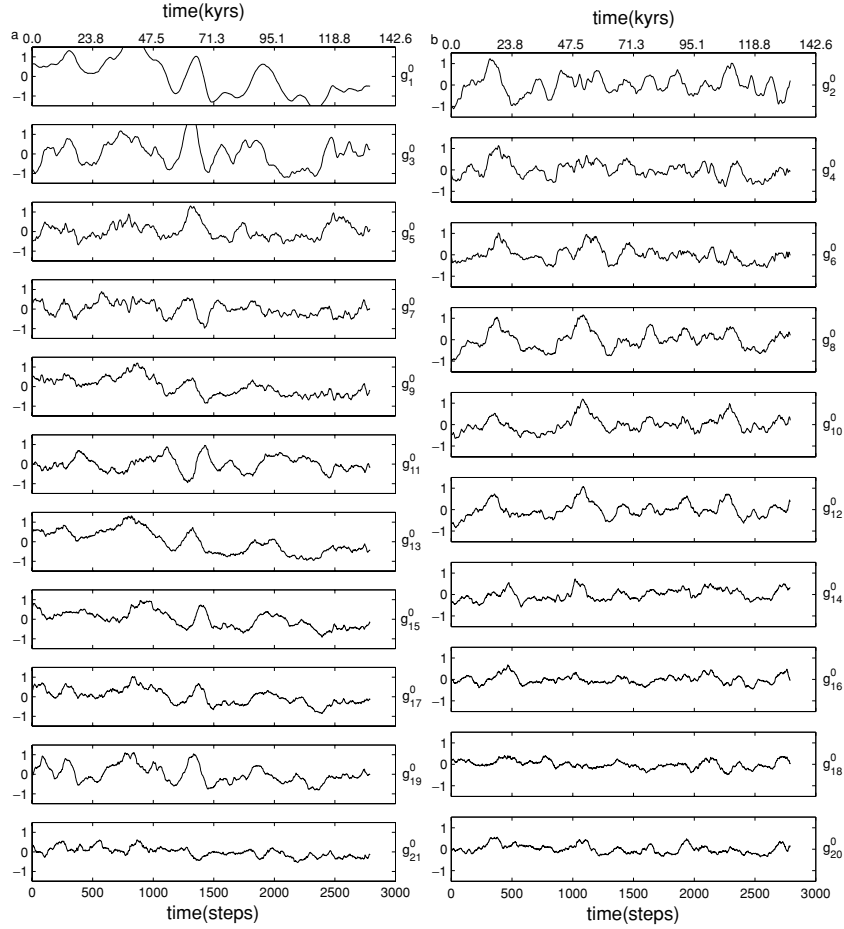


Figure 6. Model g: moving window time averages $\hat{x}_n^m(t)$ (as defined by eq. 13) of the zonal Gauss coefficients [with (a) odd and (b) even degree]. The length of the window is $T_{mw} = 101$ points (4750 yr). The first step of this figure corresponds to a window at the beginning of the period of reverse polarity (i.e. centred about step 2130 in the text).

odd cases up to degree 15 (Figs 5a, c and d) display a significant correlation at the 0.1 per cent level. This interesting result shows that $|n - n'|$ odd correlations are indeed rare, but nevertheless occur more often than possible by sheer chance, testifying for some slight but significant equatorial symmetry breaking.

From all this we conclude that, just as for $\bar{\mathbf{x}}$ with respect to μ , the time-averaged estimate $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ of the covariance matrix $\gamma(\tau)$ clearly testifies for spherical symmetry breaking while complying with axial symmetry requirements. Evidence for equatorial symmetry breaking is also found, but in a much weaker form than for μ . Finally and beyond any symmetry issue, it is important to note that significant non-zero estimates of $\gamma(x_n^m, x_{n'}^m, 0)$ are only found when $|n - n'|$ remains small.

3.4 Non-stationarity

Let us now address the stationarity issue. For each Gauss coefficient $x_n^m(t)$, we first computed moving window time averages of the coefficient itself, corrected for the estimated mean $\bar{x}_n^m$ over the whole period and renormalized by its estimated standard deviation $\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)}$:

$$\hat{x}_n^m(t) = \frac{1}{T_{mw}} \int_{-T_{mw}/2}^{T_{mw}/2} \frac{[x_n^m(t + \tau) - \bar{x}_n^m]}{\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)}} d\tau. \quad (13)$$

In practice, we chose $T_{mw} \approx 4750$ yr (such that the average in eq. 13 is computed over 101 point values).

Were the Gauss coefficients $x_n^m(t)$ to behave as expected, one would expect each $\hat{x}_n^m(t)$ to behave like a time-dependent estimate of the mean of a series produced by a stationary random Gaussian process, with the same memory, a unit variance and a zero mean. We checked and found this to reasonably be the case for the non-zonal coefficients. However, the situation was found to be different for the zonal coefficients $g_n^0(t)$. Fig. 6 clearly shows that, in addition to the expected short-term fluctuations, all $\hat{g}_n^0(t)$ show slower, larger than expected fluctuations. In addition, it appears that all $\hat{g}_n^0(t)$ with n odd (from the dipole family) on one hand and with n even (quadrupole family) on the other hand strongly tend to correlate with each other.

To complement those tests we next computed

$$\hat{\sigma}(x_n^m, t) = \left\{ \frac{1}{T_{mw}} \int_{-T_{mw}/2}^{T_{mw}/2} \left[\frac{x_n^m(t + \tau) - \bar{x}_n^m}{\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)}} - \hat{x}_n^m(t + \tau) \right]^2 d\tau \right\}^{1/2}, \quad (14)$$

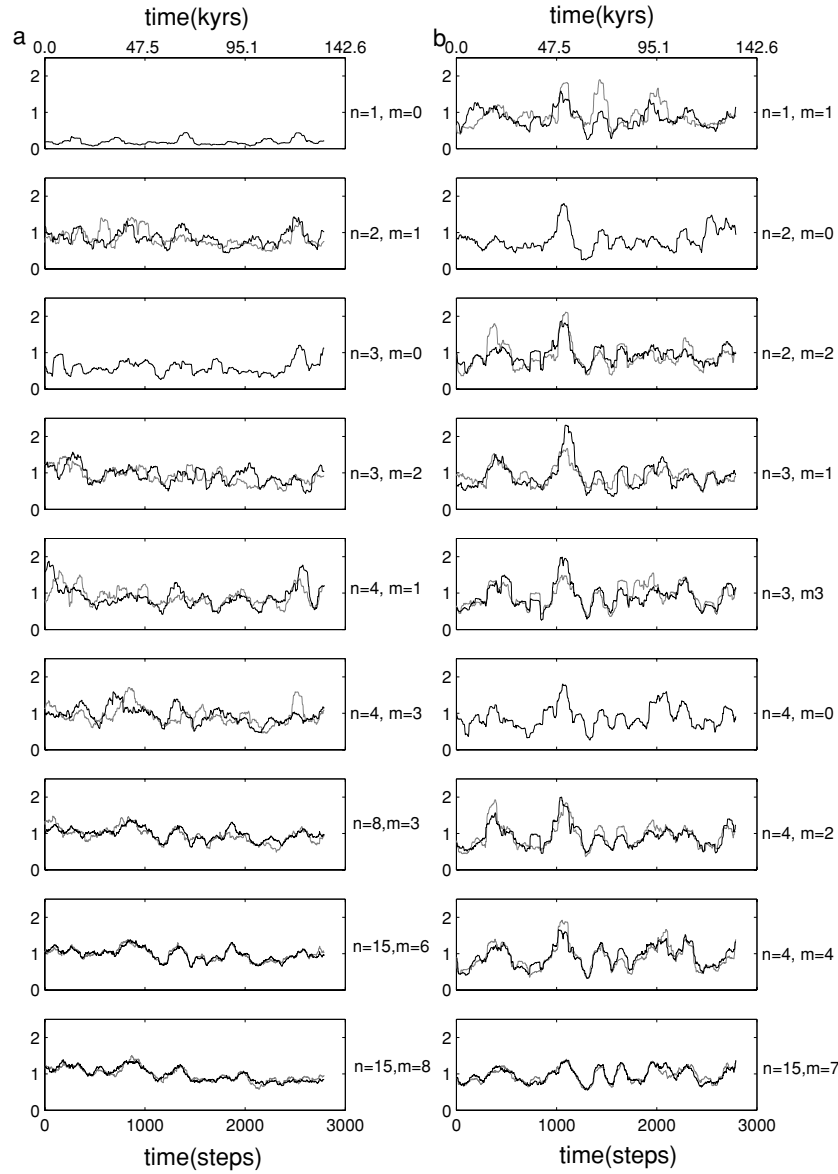


Figure 7. Model g: moving window normalized estimate $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ of the standard deviation (as defined by eq. 14). The black curves are for the g coefficients and the grey curves for the h coefficients. The length of the moving window and the timescale are the same as in Fig. 6.

which may be viewed as a time-dependent normalized estimate of the standard deviation of $x_n^m(t)$ over the same moving window. Fig. 7 shows the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ computed in this way up to degree and order 4 and for a few additional coefficients with higher degrees. Those again reveal strong long-term fluctuations that, as we tested, cannot be explained within the context of the stationary assumption. In fact, it further turns out that, again within each dipole/quadrupole family, those fluctuations tend to correlate with each other. We checked the extent of these correlations by using a Spearman approach identical to the one we used to investigate cross-covariances and constructed matrices analogous to those shown in Fig. 5. This led to the confirmation of the previous impression. It also led to the conclusion that by contrast virtually no correlations are to be found between $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ with $n - m$ of opposite parity (i.e. not belonging to the same dipole/quadrupole family).

In fact, it further turns out that all the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ from one family tend to also correlate with the $\hat{g}_n^0(t)$ from the same family. This

finally led us to compute stacks $\hat{\sigma}_d(t)$ and $\hat{\sigma}_q(t)$ of the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ for respectively the dipole ($n - m$ odd) and quadrupole ($n - m$ even) families, and to compare those to the following quantities:

$$G_d(t) = \frac{1}{T_{mw}\bar{g}_1^0} \int_{-T_{mw}/2}^{T_{mw}/2} g_1^0(t + \tau) d\tau$$

and

$$G_q(t) = \sum_{n \text{ even}} \frac{1}{T_{mw}\bar{g}_n^0} \int_{-T_{mw}/2}^{T_{mw}/2} g_n^0(t + \tau) d\tau, \quad (15)$$

which may be viewed as, respectively, the function that slowly modulates the mean dipole family field about its overall average value [$g_1^0(t)$ being the dominant dipole family coefficient], and the function that slowly and independently modulates the mean quadrupole family field (we take a stack because in the quadrupole family no clear coefficient dominates at the core–mantle boundary, CMB).

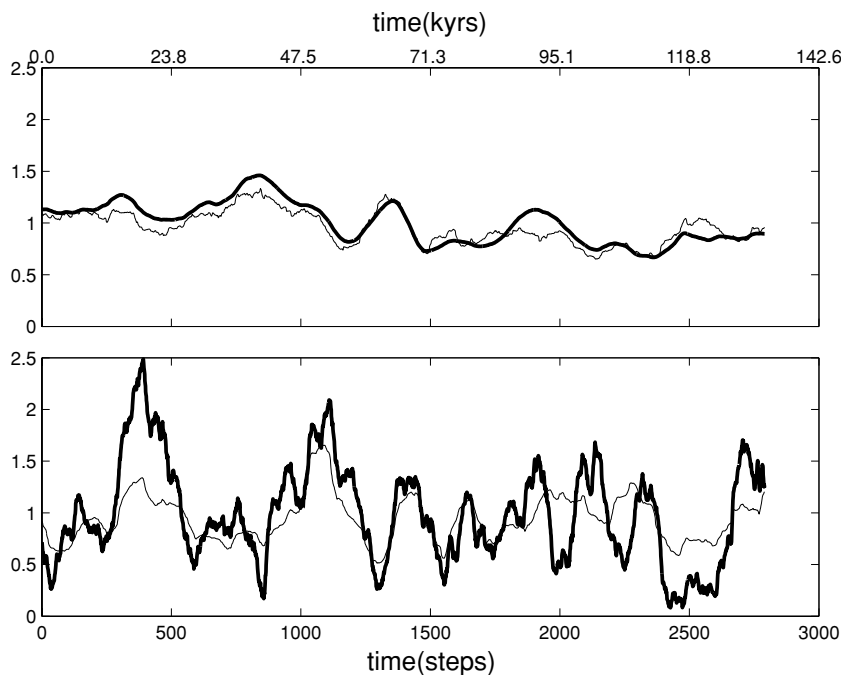


Figure 8. Model g: (upper figure) comparison of $G_d(t)$ (as defined by eq. 15; thick curve) with the stack $\hat{\sigma}_d(t)$ of the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ with $n - m$ odd (thin curve). (Lower figure) comparison of the stack $G_q(t)$ (as defined by eq. 15; thick curve) with the stack $\hat{\sigma}_q(t)$ of the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ with $n - m$ even (thin curve). The length of the moving window and the timescales are the same as in Fig. 6.

Fig. 8 shows that $\hat{\sigma}_d(t)$ and $\hat{\sigma}_q(t)$ are very similar to $G_d(t)$ and $G_q(t)$, respectively.

All those results show that, at times of stable polarity, the model g field cannot be viewed as the result of a stationary process. However, it could empirically be viewed as the result of two independent stationary processes modulated by two independent slowly varying functions $F_d(t)$ and $F_q(t)$. One process would describe the dipole family field, with slowly varying mean $F_d(t)\mu_d$ and covariance matrix $F_d(t)\gamma_d(\tau)$. The other would describe the quadrupole family field, with slowly varying mean $F_q(t)\mu_q$ and covariance matrix $F_q(t)\gamma_q(\tau)$. Both $\hat{\sigma}_d(t)$ and $G_d(t)$ would then provide estimates of $F_d(t)$ while both $\hat{\sigma}_q(t)$ and $G_q(t)$ would provide estimates of $F_q(t)$.

3.5 Near-Gaussian behaviour

The non-stationarity of the model g field is the first serious departure we have found so far from the properties required for the GGP approach to be valid. It could turn out to be a major problem. However, we note that the timescale involved in this non-stationarity (of order several hundred steps, i.e. of a couple of tens of thousands of years; Figs 6 and 7) is still relatively short with respect to the duration of the period of stable polarity (142 000 yr). Also, we know that palaeomagnetic samples often cannot be dated to within a couple of tens of thousands of years. In practice, GGP investigations of the properties of the field would thus likely ignore this chronology and simply consider, as a whole, all of the data belonging to a period of stable polarity. In that case, the GGP approach could still possibly prove useful, if the overall distribution of the values taken by each $x_n^m(t)$ over the period of stable polarity could be shown to remain consistent with a Gaussian distribution of mean μ_n^m , and variance $\gamma(x_n^m, x_n^m, 0)$.

This is partly supported by Fig. 9, which shows examples of cumulative distribution functions (CDFs) obtained by picking values every $\Delta t = 3\tau_n^m$ (to ensure independence), removing the estimated

mean $\bar{x}_n^m$ and renormalizing by the estimated standard deviation $\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)}$. Those CDFs are then to be compared with the CDFs of a zero mean unit variance Gaussian distribution, constructed with the same number of samples. Clearly the CDFs do a reasonable job, especially those corresponding to low degrees. However, some deviations are found for high degree coefficients, which tend to display too many large values and not enough small values. To assess whether those departures could be linked to the non-stationary behaviour previously identified, we finally also plotted on Fig. 9 the analogous CDFs for the $x_n^m(t)$ after renormalization by either $\hat{\sigma}_d(t)$ (for the dipole family field) or $\hat{\sigma}_q(t)$ (for the quadrupole family field). An encouraging improvement is indeed found.

4 CASE STUDY OF A NON-HOMOGENEOUS NUMERICAL SIMULATION

Let us now turn to the second simulation of interest, the so-called tomographic model h, also described in some detail in Glatzmaier *et al.* (1999) and Coe *et al.* (2000). Just like model g, this simulation has been generated by the dynamo model of Glatzmaier & Roberts (1997). Both simulations have the same basic characteristics (in particular, they are both thermally driven and share the same dimensional characteristics) except for one minor and one major difference. The minor difference is that the run for model h has only been sampled half as often (every 2000 time steps, so that snapshots, to which we will again refer to as steps in the statistical analysis that follows, are now separated by approximately 95 yr) and not always in a regular way, which forced us to rely on some interpolations. The major difference is of a geophysical nature. Whereas the thermal boundary conditions had been imposed in a uniform way at the CMB in model g, those conditions are now being imposed in a non-uniform way in model h (Fig. 10a). The pattern chosen is one

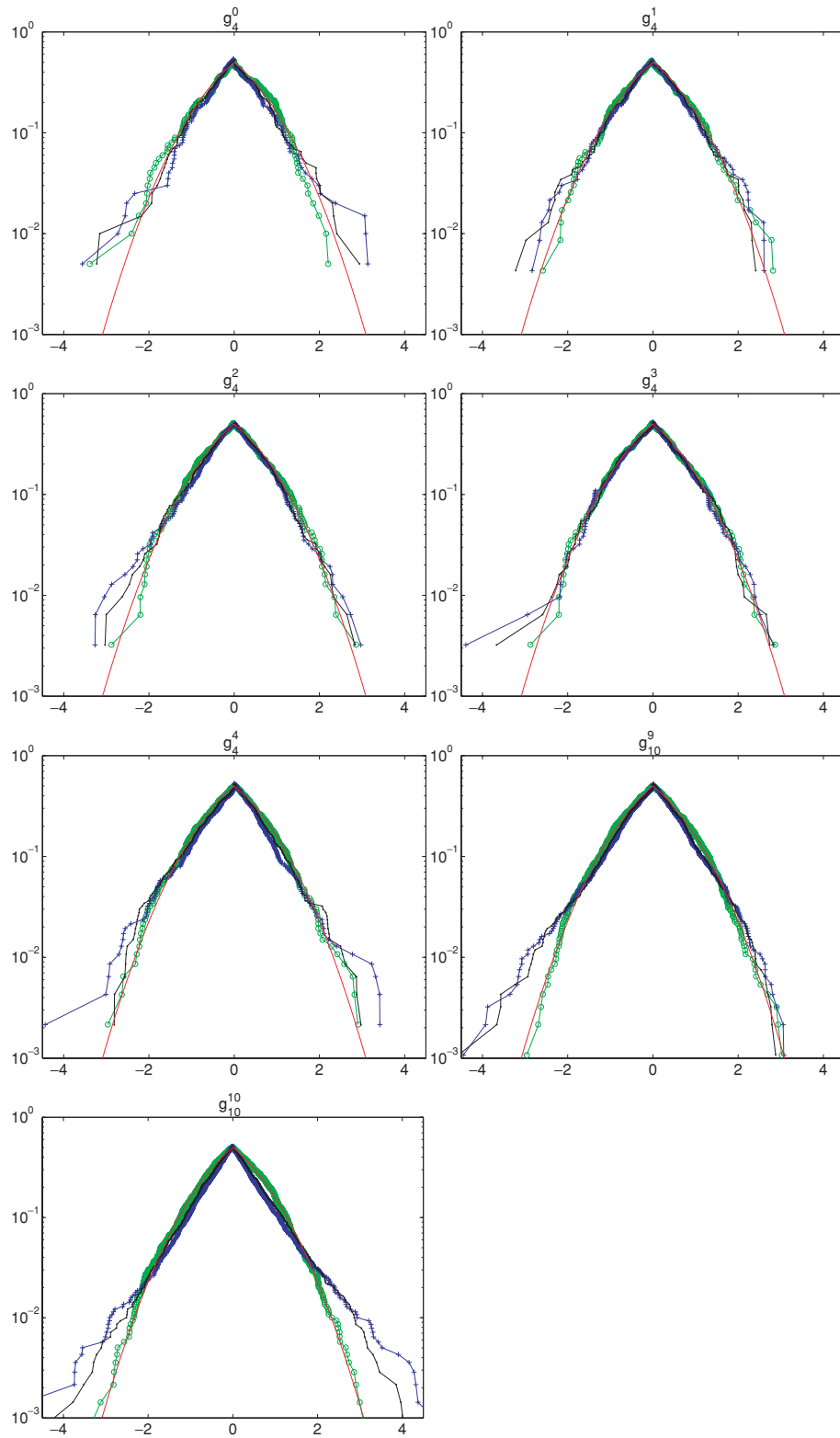
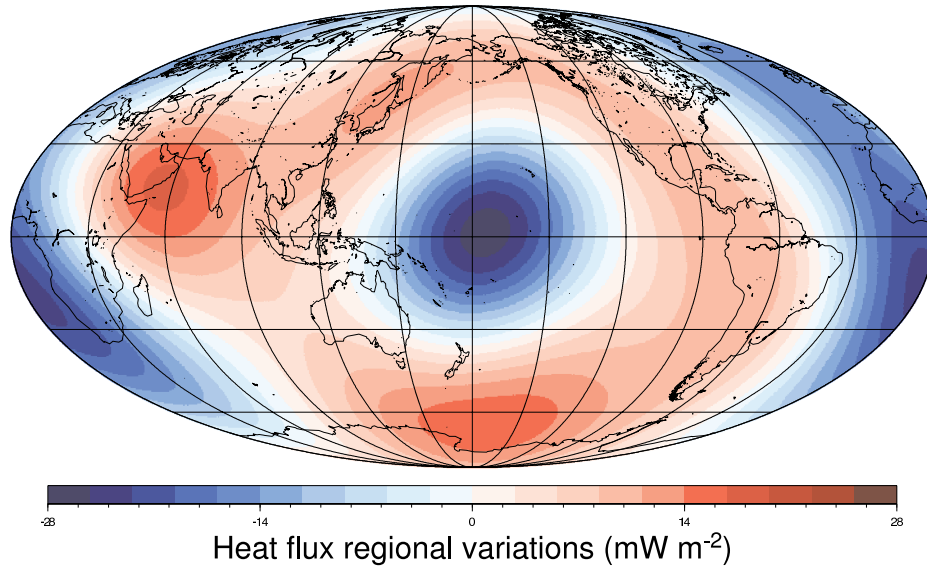


Figure 9. Model g: cumulative distribution functions (CDFs) for a number of Gauss coefficients. A logarithmic scale is used for the vertical scale (y) and the CDF is folded back about the $y = 0.5$ horizontal axis for values above 0.5. This representation makes it possible to better see the behaviour of the distribution away from the (central) most likely values. On each figure, the red curve represents the shape of a theoretical gaussian CDF with zero mean and unit variance. The green curve is a CDF produced from values drawn from such a unit gaussian random distribution, when the number of values is the one involved in the construction of the CDF for the Gauss coefficient of interest, shown in blue [after removal of $\bar{x}_n^m$ and renormalization by $\sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)}$]. Also shown in black, the CDF when the same data are first renormalized by either the stack $\hat{\sigma}_d(t)$ (if the coefficient belongs to the dipole family) or $\hat{\sigma}_q(t)$ (if it belongs to the quadrupole family). Note that the CDF is near, but clearly not exactly Gaussian (here mainly for the g_{10}^{10} coefficient) and that renormalizing by the stacks brings an improvement.

a



b

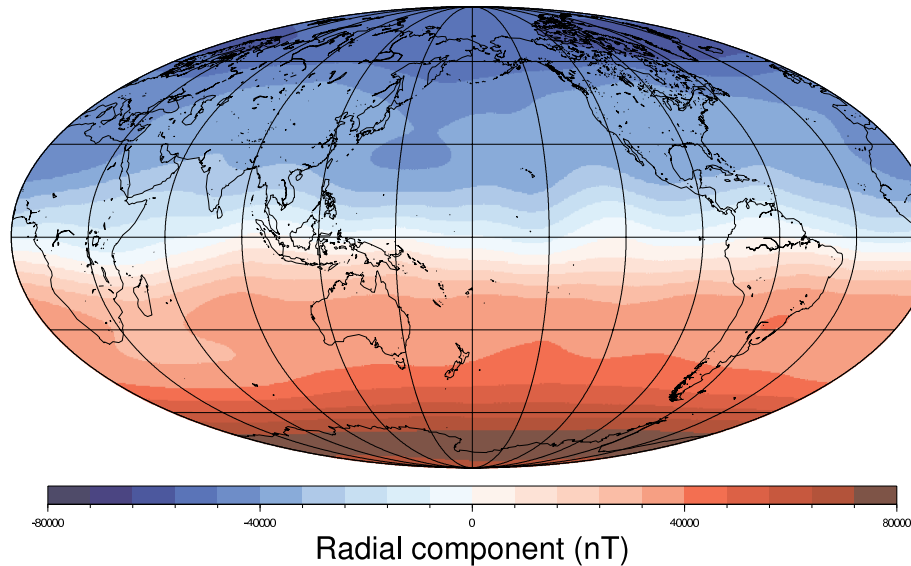


Figure 10. Model h: (a) heat-flux pattern imposed at the core–mantle boundary (CMB; colour scale from -28 to $+28 \text{ mW m}^{-2}$; for more details, see Coe *et al.* 2000); (b) radial component of the time-averaged field at the CMB calculated during the period of normal polarity (step 1 to 1650) (colour scale from $-80\,000$ to $+80\,000 \text{ nT}$).

reflecting the modern heat-flux pattern, assuming the geographical variations seen in the seismic tomography for the lowermost mantle of the Earth are mainly a result of thermal effects. In this respect, it may be viewed as a tentatively realistic, heat-flux pattern. Of particular interest is the fact that this pattern strongly breaks the axial symmetry. It also, but to a lesser extent, breaks the equatorial symmetry. It thus forces a complex geometry on the dynamo. As discussed in Paper I, this should lead to some comparable symmetry breaking in the statistical behaviour of the field. What we would therefore like to test is whether the same type of statistical analysis

as the one carried out on model g would be capable of detecting this. More generally, we would like to see how much change such more realistic, boundary conditions could introduce in the general statistical behaviour of the field. For that purpose, we basically reproduced all the tests we had done on model g. This was done on the longest period of stable (normal) polarity, between step 1 and step 1650 of the model h run (i.e. over $T_0 \approx 157\,000 \text{ yr}$, step 1 corresponding to the initial step of the reliable part of the run), which otherwise displayed two reversals (see Glatzmaier *et al.* 1999). This led to the following results.

Table 3. Model h: estimates of the typical correlation times τ_n^m for the Gauss coefficients with low degrees.

n	m	g steps(yr)	h steps(yr)
1	0	43.2(4109)	
1	1	2.0(191)	1.8(174)
2	0	13.3(1264)	
2	1	1.6(156)	1.9(180)
2	2	1.5(138)	1.3(128)
3	0	9.5(899)	
3	1	1.5(147)	1.6(153)
3	2	1.5(142)	1.7(158)
3	3	1.1(103)	1.1(104)
4	0	2.1(202)	
4	1	1.5(146)	1.5(143)
4	2	1.4(128)	1.3(124)
4	3	1.4(129)	1.2(111)
4	4	0.9(84)	1.0(94)

4.1 Short-term memory

We first produced figures analogous to Fig. 1, which confirmed that the model h field also displayed short-term memories. This then made it possible to again compute typical correlation times. Table 3 lists those values for the lowest degrees and Fig. 11 gives a visual account of all values. Comparing Table 3 with the analogous Table 1 shows that the timescales involved in both models are essentially of the same order of magnitude. The only very significant change is seen in the correlation time of $g_2^0(t)$, which increased from 354 yr (model g) to 1264 yr (model h). Otherwise and as expected, we again see a dependence of the correlation time with both the degree n and order m , testifying for the spherical symmetry breaking.

More of a surprise is the fact that no obvious indication of axial symmetry breaking [different correlation times for $g_n^m(t)$ and $h_n^m(t)$, recall eq. 8] is found for low degrees (Table 3, to be compared to Table 1). In fact, only weak indication can be found in the comparison of Fig. 11(left) with Fig. 11(right), which reveals slightly more

differences between the $g_n^m(t)$ and $h_n^m(t)$ than does the comparison of Fig. 2(left) with Fig. 2(right).

4.2 Time-averaged field

We next computed the time-averaged estimate $\bar{\mu}$ of μ with the help of eq. (5) (Table 4). This led to values significantly different from those obtained with model g in many respects. First, we note that estimates $\bar{g}_n^0$ of zonal coefficients are globally weaker. This is true for $\bar{g}_1^0$ (which is more than twice weaker), but also for all other coefficients. Secondly and more importantly, we note that by contrast all non-zonal estimates $\bar{g}_n^m$ and $\bar{h}_n^m$ appear to be much larger, to the extent that some of them now take values almost comparable to the estimate $\bar{g}_n^0$ of the zonal term sharing the same degree. To decide which of all those estimates can be considered as significantly different from zero, we relied on the same procedure as for model g.

For $g_1^0(t)$, which has the largest τ_n^m ($\tau_1^0 \approx 4100$ yr, corresponding to approximately 43 steps), we chose $\Delta t = 130$ steps and an estimate of $\mu(g_1^0)$ was therefore computed from only 13 independent values. The value inferred is then significantly different from zero at the 10^{-3} level. For all other Gauss coefficients, a Student's t-test at a 1 per cent level was otherwise again carried out. This led to the result that only about half of the estimates of the zonal terms $\mu(g_n^0)$ could actually be considered as significant (those with $n = 1, 5, 7, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20$). By contrast eight of the 462 estimates of the non-axial terms now appear to significantly differ from zero [$\mu(g_2^2)$, $\mu(g_3^2)$, $\mu(h_{11}^2)$, $\mu(h_{11}^5)$, $\mu(g_{14}^5)$, $\mu(g_{15}^5)$, $\mu(g_{16}^5)$ and $\mu(g_{17}^4)$]. This brings two conclusions. First, that the time-averaged estimate $\bar{\mu}$ of μ now shows signs of axial symmetry breaking (though quite marginally so, because four non-zero values could have been expected at the 1 per cent level). Secondly, that this estimate still shows signs of equatorial symmetry breaking, but in a different way than in model g. Co-existence of dipole and quadrupole family fields no longer only occurs in the zonal terms, but is also found in the non-zonal terms, to which the two families contribute more equally.

A similar conclusion is derived from the test at the 5 per cent level up to degree and order 8, which we also reproduced. In addition to

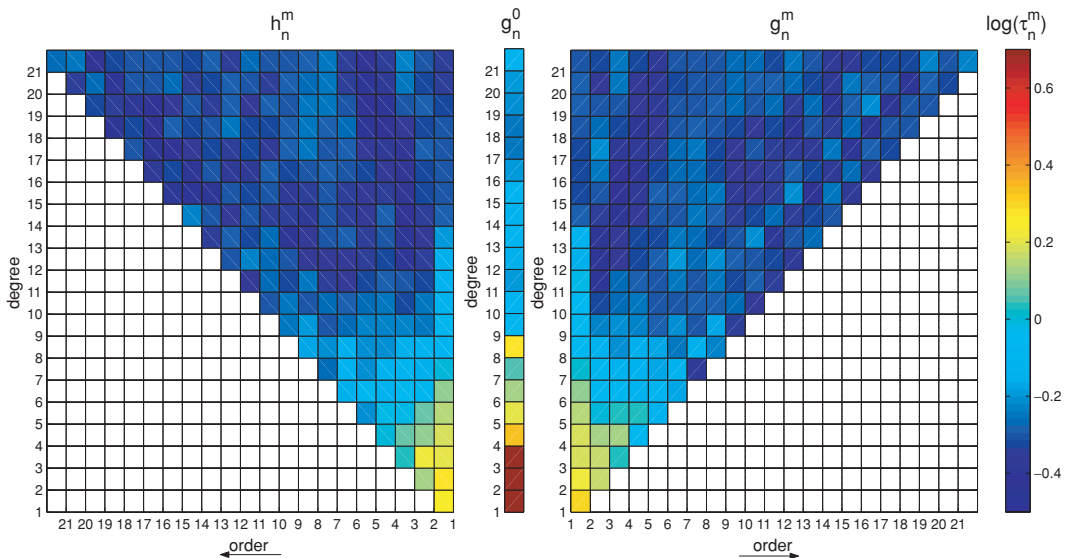


Figure 11. Model h: logarithm representation of the estimates of the typical correlation time $\log_{10}(\tau_n^m)$ for the g and h coefficients. The representation is the same as in Fig. 2 but now the step between saved snapshots is 95 yr. Note the stronger dissimilarities between estimates for the g and h coefficients, compared with model g (Fig. 2).

Table 4. Model h: time-averaged estimates $\bar{g}_n^m$ and $\bar{h}_n^m$ of $\mu(g_n^m)$ and $\mu(h_n^m)$ (at the surface of the Earth and down-continued to the core-mantle boundary, CMB) during the period of normal polarity.

<i>n</i>	<i>m</i>	At the surface of the Earth		At the CMB	
		<i>g</i> (nT)	<i>h</i> (nT)	<i>g</i> (nT)	<i>h</i> (nT)
1	0	−5423.421 58		−33 138.186 12	
1	1	−141.716 70	−90.481 62	−865.917 24	−552.860 70
2	0	242.555 54		2709.474 18	
2	1	32.883 59	49.665 79	367.327 20	554.793 22
2	2	−108.406 89	−48.147 62	−1210.962 55	−537.834 51
3	0	84.295 95		1721.468 23	
3	1	−8.950 96	−3.483 83	−182.793 94	−71.145 72
3	2	−32.690 93	24.635 94	−667.604 98	503.108 28
3	3	−2.933 16	−17.511 01	−59.900 25	−357.604 90
4	0	8.920 05		333.026 07	
4	1	−0.156 86	0.778 95	−5.856 44	29.081 58
4	2	0.704 30	6.038 83	26.294 60	225.456 89
4	3	−3.578 29	0.012 11	−133.593 83	0.452 24
4	4	0.782 88	1.918 17	29.228 60	71.614 03
5	0	−38.601 98		−2634.746 41	
6	0	3.775 55		471.115 60	
7	0	4.839 24		1103.933 34	
8	0	−0.617 04		−257.335 50	
9	0	0.863 91		658.671 94	
10	0	0.047 93		66.814 46	
11	0	−0.021 09		−53.752 87	
12	0	−0.027 48		−128.031 44	
13	0	0.024 71		210.447 50	
14	0	−0.002 43		−37.906 71	
15	0	−0.001 29		−36.824 75	
16	0	−0.000 57		−29.730 00	
17	0	0.000 19		18.212 87	
18	0	−0.000 03		−5.179 65	
19	0	0.000 02		7.758 12	
20	0	0.000 01		3.583 10	
21	0	0.000 00		3.474 54	

$\mu(g_2^2)$ and $\mu(g_3^2)$, estimates revealed two new significant non-zonal coefficients: $\mu(h_3^2)$ and $\mu(h_7^2)$ (four in all, whereas three non-zero values could have been found by chance). This result is again marginal but underlines one additional remarkable property: a dominance of the order 2 in the significant estimates of μ , especially at low degree. Such an order 2 signature is present in the boundary conditions driving model h (Fig. 10a), the pattern of which more generally bears some relation to the pattern of the time-averaged field at the CMB (Fig. 10b).

It thus appears that, as expected, the time-averaged estimate $\bar{\mathbf{x}}$ of μ not only reveals spherical symmetry breaking, but also some signs of the axial and equatorial symmetry breaking imposed by the CMB conditions. However, it clearly appears that only a careful inspection of the time-averaged field produced by a dynamo driven by inhomogeneous boundary conditions could potentially detect the symmetry breaking introduced by those conditions.

4.3 Covariances

Consider next the estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the diagonal terms $\gamma(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the covariance matrix at time $\tau = 0$, computed with the help of eqs (5) and (6) (Fig. 12, to be compared to Fig. 3). Like for model g, those estimates testify for the spherical symmetry breaking, as they do not only depend on the degree n , but also on the order m (which conflicts with eq. 7b). However, they now also provide indications of some axial symmetry breaking, as they now suggest that $\gamma(g_n^m, g_n^m, 0)$ often differs from $\gamma(h_n^m, h_n^m, 0)$ (in disagreement with eq. 8b). Thus, indications for both expected symmetry breakings are found. However, we note that those only occur in a weak way. Also, we note that, contrary to the case of model g, no major difference is to be found between the two dipole and quadrupole families, which now happen to contribute equally to the fluctuating part of the field.

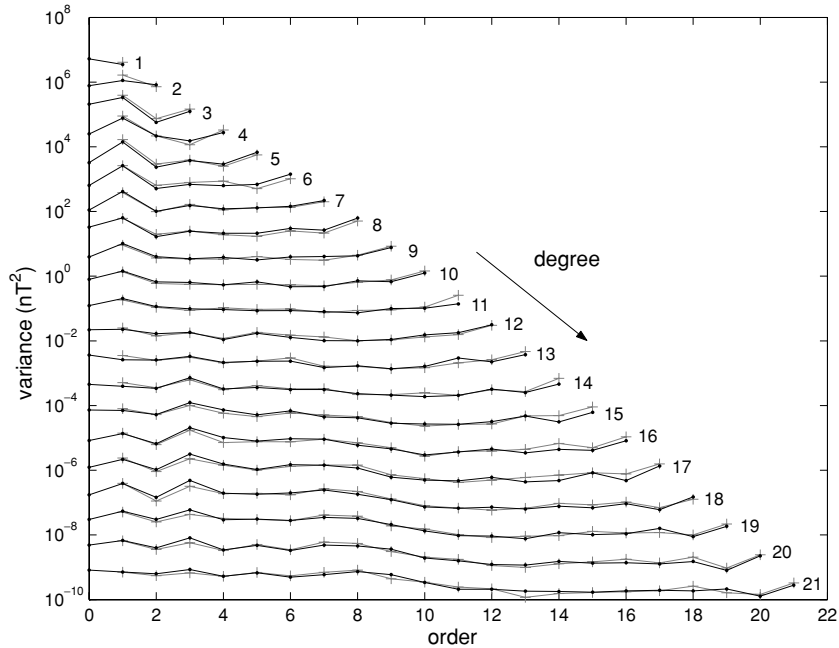


Figure 12. Model h: estimates $\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)$ of the variances. Same representation as in Fig. 3. Note that compared with Fig. 3 values for g and h no longer overlap and that the dipole family ($n - m$ odd) no longer dominates.

Like for model g, we next computed estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) / \sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)\bar{K}(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$ of the normalized cross-covariance functions for $x_n^m = g_2^2$ and various values of $x_{n'}^{m'}$ (analogous to those shown in Fig. 4). A clear signature for spherical symmetry breaking could again be seen in the estimate of the cross-covariance functions of g_2^2 with h_2^2 and x_4^2 (just like for model g, not shown). However, again, only weak evidence for additional axial and equatorial symmetry breaking could be found.

In search of additional, perhaps stronger, signatures of axial and equatorial symmetry breaking, we next turned to the systematic analysis of the estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, 0) / \sqrt{\bar{K}(x_n^m, x_n^m, 0)\bar{K}(x_{n'}^{m'}, x_{n'}^{m'}, 0)}$ of the normalized cross-covariance functions at time $\tau = 0$. We produced figures analogous to those shown for model g in Fig. 5. Fig. 5(b) shows the result of this when considering $g_n^m(t)$ and $g_{n'}^{m'}(t)$ up to degree and order $N = 15$ (analogous to Fig. 5a). This figure differs from Fig. 5(a) in an interesting way. Whereas nice bands corresponding to $m = m'$ and mainly $|n - n'|$ even $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, 0)$ estimates could clearly be identified against a relatively weak (greenish) background in Fig. 5(a), those bands are now not as easy to identify in Fig. 5(b) and the general background is noisier (colourful). This blurring of Fig. 5(a) into Fig. 5(b) is the type of signature we expected because of the axial symmetry breaking. Also, there clearly is much more of a signal in the $m = m'$, $|n - n'| = 1$, band, suggesting a stronger equatorial symmetry breaking than in model g (contradiction with eq. 9b/10b).

To quantify this, we again relied on the Spearman statistics at the 0.1 per cent level (i.e. counting the number of significant values identified in the bottom right of Fig. 5b). Slightly fewer (93 compared to 119, for model g) cross-correlations are now being identified as significant at this level. Among those, 75 (103 for model g) correspond to cases with $m = m'$ and 18 (compared to 16) to cases with $m \neq m'$. In the $m = m'$ case, this then leads to a proportion of 11.3 per cent (15.5 per cent for model g) way above the 0.1 per cent threshold, which clearly shows that, as expected, model h also strongly breaks the spherical symmetry. For the $m \neq m'$ case, which tests the axial symmetry breaking, the proportion found in model h now only raises to 0.21 per cent (from 0.19 per cent in model g) still very close to the 0.1 per cent threshold. This result is surprising. It would suggest that fluctuations in model h no more strongly break the axial symmetry than in model g, somewhat contradicting the impression given by the comparison of Figs 5(b) and (a). However, there is a reason for this: as axial symmetry breaking can now manifests itself through a very large number of no-longer forbidden coefficients in $\gamma(\tau = 0)$, those become difficult to identify individually in the estimate $\bar{K}(\tau = 0)$. In particular, the simple statistical tool used here fails to test the full matrix $\bar{K}(\tau = 0)$ for organized patterns such as those clearly seen in Fig. 5(b). By contrast, equatorial symmetry breaking can more easily be detected. It only requires detecting additional branches in the matrix $\bar{K}(\tau = 0)$. Indeed, model h displays even more equatorial symmetry breaking than model g. (5.8 per cent of the $m = m'$, $|n - n'|$ odd cases up to degree 15 are found to be significant in Fig. 5(b), compared with 3.6 per cent in Fig. 5(a). As a matter of fact, of all $m = m'$ significant terms we found, 13 per cent were found to be for $|n - n'|$ odd in model g, 28 per cent in model h.) Note finally that independently of any symmetry considerations and as was already the case of model g, significant correlations only occur when $|n - n'|$ remains small.

From those considerations, we conclude that a careful inspection of a time-averaged estimate of the covariance matrix can also potentially detect the symmetry breaking introduced by inhomogeneous

boundary conditions driving a dynamo, but not trivially so. In fact, what is best detected is an enhanced amount of coupling between the two dipole/quadrupole family components of the field, testifying for more intense equatorial symmetry breaking in the fluctuating component of the field than in model g. By contrast, detection of axial symmetry breaking, though possible in principle (recall the differences between Figs 5a and b), unfortunately remains elusive.

4.4 Non-stationarity

Like for model g, we next investigated the stationarity of the model h field, by computing $\hat{x}_n^m(t)$ (from eq. 13), and $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ (from eq. 14). Fig. 13 shows that the non-zonal $\hat{x}_n^m(t)$ now display a severe non-stationary behaviour. There clearly are periods when all $\hat{x}_n^m(t)$ take relatively weak values (such as between step 1000 and step 1500 in Fig. 13) and other periods when, by contrast, they all take large values. In particular, the $\hat{x}_n^m(t)$ corresponding to coefficients significantly contributing to the time-averaged field [Fig. 13 displays three of those $\hat{g}_2^2(t)$, $\hat{g}_3^2(t)$ and $\hat{h}_3^2(t)$] appear to contribute to the time-averaged field mainly through relatively short episodes of large values. This contrasts with the behaviour of the zonal terms, those of which contributing to the time-averaged field consistently do so throughout the whole period of interest. This suggests the way model h produces its non-zonal time-averaged field is very different from the way it and also model g produces its zonal time-averaged field. As a matter of fact, all $\hat{g}_n^0(t)$ in model h (Fig. 14) behave in quite the same way as in model g (Fig. 6), except for one significant difference. Whereas in model g the $\hat{g}_n^0(t)$ strongly tend to correlate with each other within the same dipole/quadrupole family, those correlations, though not systematic, now obviously reach across the two families.

Plotting $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ (Fig. 15, analogous to Fig. 7) leads to a similar conclusion. As was already observed for model g, strong correlations are found between the various $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$. However, here again, those correlations reach across the two dipole/quadrupole families. In fact, all the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ obey almost exactly the same very strong modulation. Unfortunately however, this common modulation of all $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ does not appear to be simply related to the way the $\hat{x}_n^m(t)$, especially the non-zonal ones, behave.

We did not attempt to further investigate the nature of this strong and complex non-stationarity, which clearly is in severe contradiction with the GGP assumption.

4.5 Non-Gaussian behaviour

What we did, though, is to finally investigate the extent to which this non-stationarity could also affect the CDFs of the Gauss coefficients. Fig. 16 shows examples of such CDFs for the same Gauss coefficients as those used in Fig. 9 for model g. As can be seen, those CDFs are now dramatically far from being Gaussian. This is again in severe contradiction with the GGP assumption. However, it is important to point out that this is mainly a result of the non-stationary behaviour of model h. To show this, we took advantage of the correlation we already noted among the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ and produced a stack of those, which we used to renormalize each of the $\hat{x}_n^m(t)$. The CDFs of those renormalized Gauss coefficients are also shown in Fig. 16. They now display much more of a Gaussian behaviour.

5 DISCUSSION

Having thoroughly investigated the statistical behaviour of models g and h, we can now draw a number of conclusions. Certainly the most

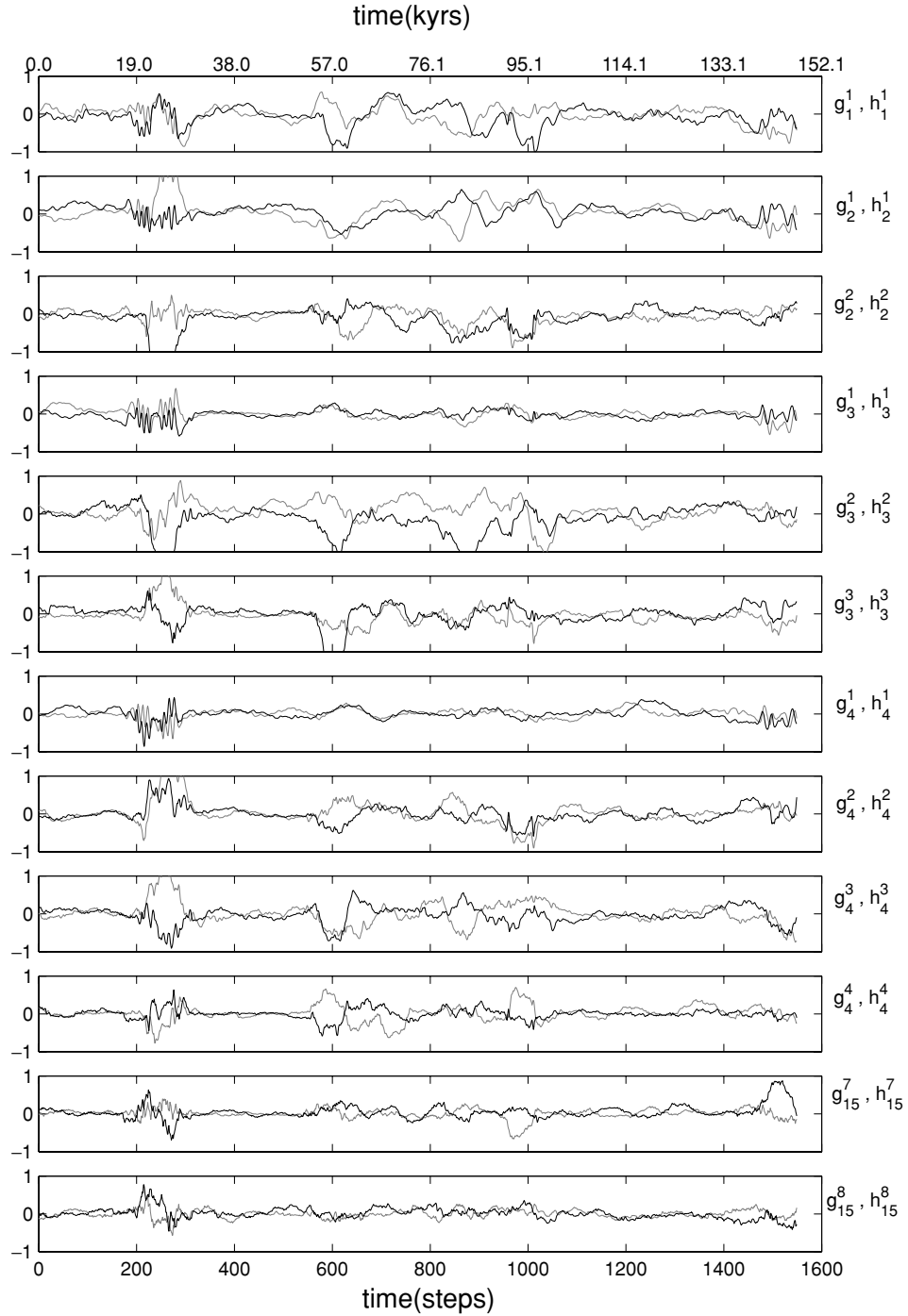


Figure 13. Model h: moving window time averages $\hat{x}_n^m(t)$ (as defined by eq. 13) of non-zonal Gauss coefficients. The length of the window is $T_{mw} = 51$ points (4750 yr). The black curves are for the g coefficients and the grey curves for the h coefficients. The first step of this figure corresponds to a window at the beginning of the period of normal polarity (i.e. centred about step 51 in the text).

important one is the fact that a field produced by a dynamo is indeed amenable to some statistical analysis. The basic assumptions needed for this are satisfied. The field behaves as a short-term memory process at times of stable polarity and periods of stable polarity last much longer than the correlation times of the process. Those properties are needed to define the first- and second-order statistical moments of the field (i.e. the mean μ eq. 3 and the covariance matrix $\gamma(\tau)$ eq. 4) in a consistent way, and to derive estimates of those from temporal averages (through eq. 5 and eq. 6). This is

very encouraging, as it strongly suggests that similar quantities may indeed be defined and estimated for the field produced by the real geodynamo.

A second important conclusion to be drawn is that a careful inspection of estimates of both μ and $\gamma(\tau)$ can bring some useful geophysical information about the state of the geodynamo, in particular in terms of its symmetry properties. In fact, all symmetry properties one could anticipate on theoretical grounds (Paper I) have been found.

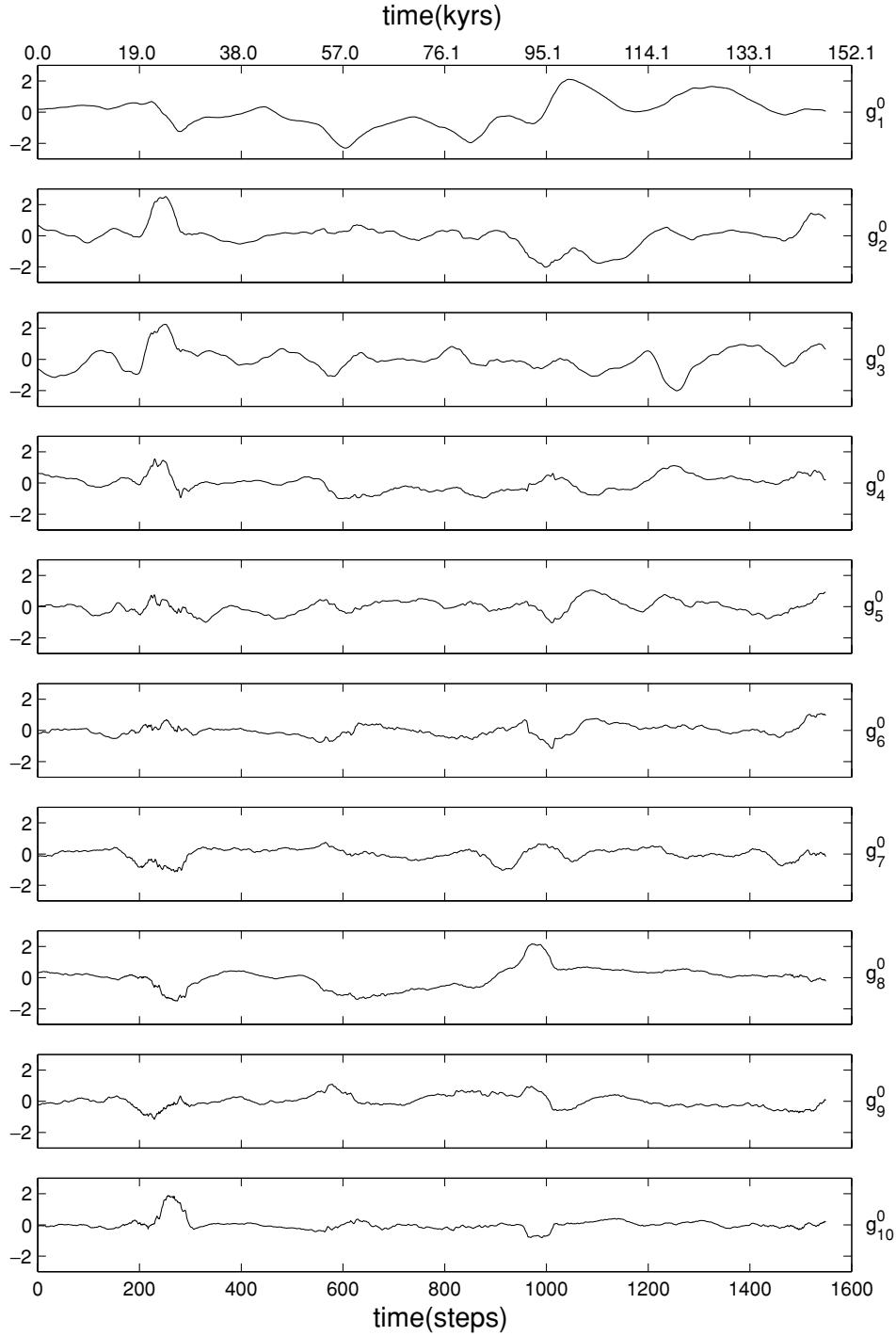


Figure 14. Model h: moving window time averages $\hat{\lambda}_n^m(t)$ (as defined by eq. 13) of the zonal Gauss coefficients. The length of the moving window and the timescales are the same as in Fig. 13.

Consider model g. This model has been run with homogeneous (i.e. spherically symmetric) CMB conditions. However, because of its rotation, the highest symmetry of the whole system is only the axial symmetry about the rotation axis. As noted in Paper I, this means that the field and thus both μ and $\gamma(\tau)$ should break the spherical symmetry. Additional symmetry breakings could also occur, but only as a result of a spontaneous symmetry breaking by the dynamo solution. They would not be mandatory. In fact, as also noted in Paper I, it is highly unlikely that the axial symmetry could

spontaneously be broken because of the ease with which a dynamo solution could shift about the rotation axis under axisymmetric CMB conditions. No similar continuous shift could possibly act against an equatorial symmetry breaking. Thus, it was anticipated that model g would break the spherical symmetry, satisfy the axial symmetry and possibly break the equatorial symmetry. This is what we found. Spherical symmetry breaking is clearly seen in estimates of both μ and $\gamma(\tau)$; axial symmetry is remarkably satisfied by estimates of both μ and $\gamma(\tau)$; and evidence for spontaneous equatorial

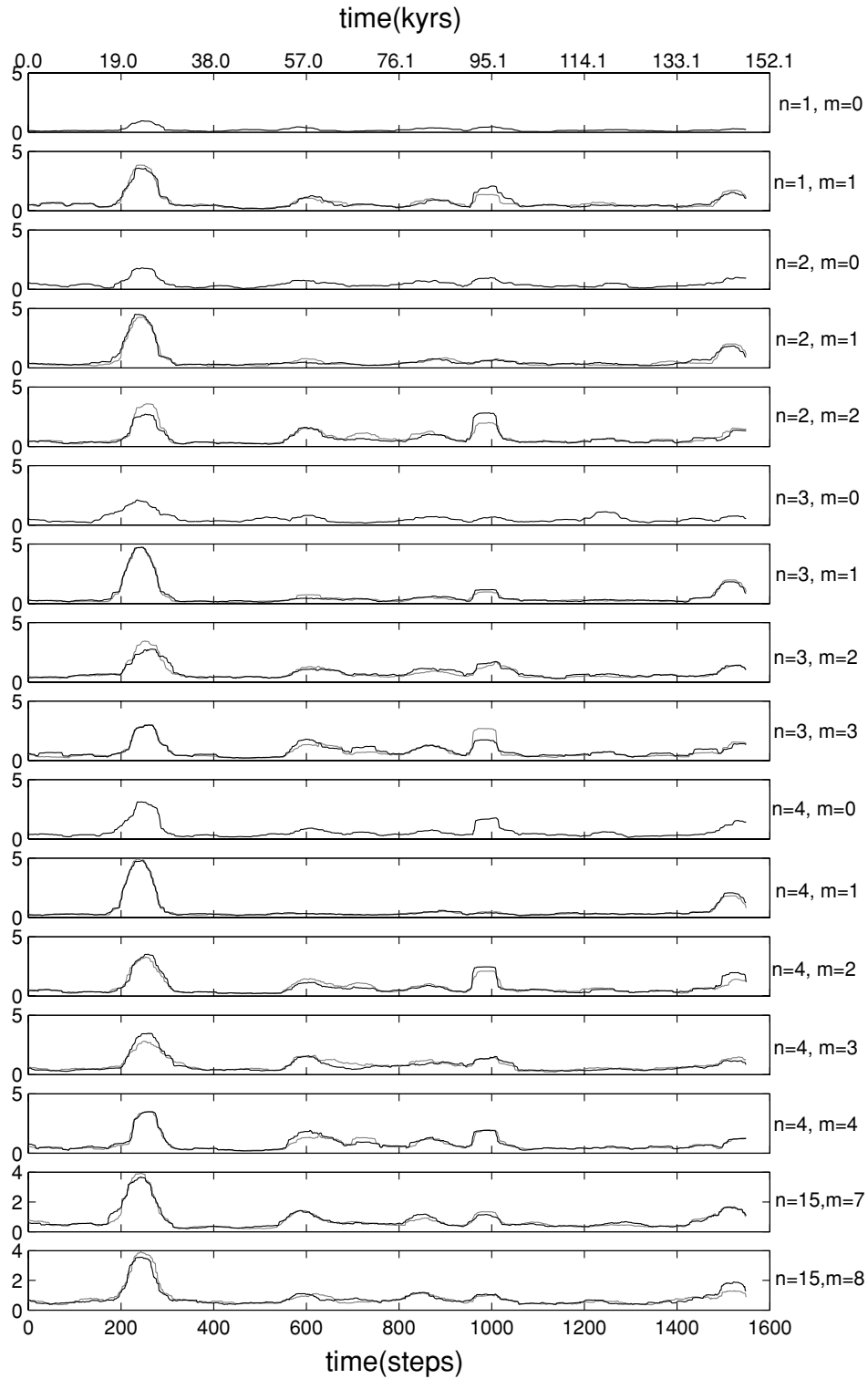


Figure 15. Model h: moving window normalized estimate $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$ of the standard deviation (as defined by eq. 14). The black curves are for the g coefficients and the grey curves for the h coefficients. The length of the moving window and the timescales are the same as in Fig. 13.

symmetry breaking was also found in estimates of μ and (in a subtler way) of $\gamma(\tau)$.

In fact, this spontaneous equatorial symmetry breaking is worth further emphasizing. It is responsible for the co-existence, with the dominant axial dipole mean field, of a quadrupole family zonal mean field and, in particular, of a term $\mu(g_2^0)$ estimated to be approximately

2 per cent the magnitude of the estimate of $\mu(g_1^0)$. From this, we infer that the only unquestionably robust non-dipole feature found so far in the palaeomagnetic mean field, an axial quadrupole field (of about 3–4 per cent the magnitude of the axial dipole field, Merrill & McFadden 2003), cannot alone be taken as evidence of equatorial symmetry breaking in the CMB conditions. In fact and as pointed

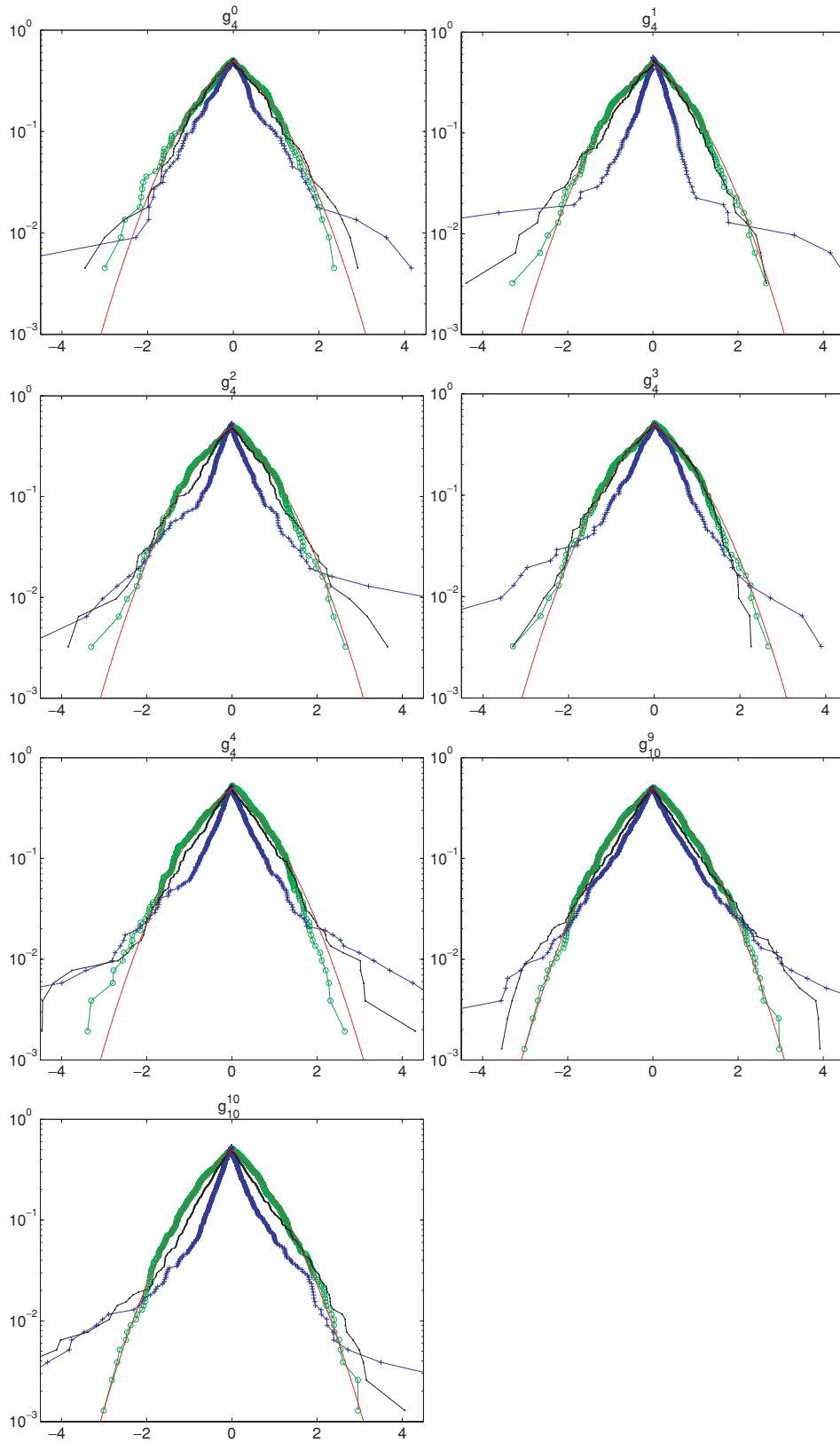


Figure 16. Model h: cumulative distribution functions (CDFs) for a number of Gauss coefficients. Same coefficients and same representation as in Fig. 9, except for the black curves, which now correspond to CDFs after renormalization by a global stack of all the $\hat{\sigma}(x_n^m, t)$. Note the much more serious departure of the CDF from the Gaussian case and the very significant improvement brought by renormalizing by the stack (i.e. correcting for the non-stationarity).

out in Paper I, checking whether this axial quadrupole term could be related to such CMB equatorial symmetry breaking would require further testing if it systematically reverses its sign together with the axial dipole at times of reversals, or not. The test would need to be carried out on both the palaeomagnetic data (palaeomagnetic time-averaged field models would suggest that this is the case, but the case remains to be better made) and the data produced by numerical models with equatorial symmetric CMB conditions, such as model g (the series we currently have are too short to carry out a significant test). If it turns out that the geodynamo can only go through full field reversals [involving a simultaneous sign change of $\mu(g_2^0)$ and $\mu(g_1^0)$], while symmetric CMB conditions dynamo can also go through quadrupole family field reversals [involving a sign change of $\mu(g_2^0)$ but not of $\mu(g_1^0)$] and/or dipole family field reversals [involving a sign change of $\mu(g_1^0)$ but not of $\mu(g_2^0)$], as one can anticipate based on symmetry considerations, then only, a claim could be made that the axial quadrupole component found in the palaeomagnetic mean field is related to some asymmetry in the CMB conditions (see Paper I for more details).

Consider now model h, run with inhomogeneous CMB conditions breaking the spherical, axial and, to a lesser extent, equatorial symmetries. Those conditions were expected to force model h, and thus estimates of both μ and $\gamma(\tau)$, to testify for similar symmetry breaking properties. Again, this is what we found. In particular, it was found that model h breaks the axial symmetry breaking properties in a way that distinguishes it from model g and testifies for the inhomogeneous CMB conditions imposed on the dynamo.

However, those symmetry breaking properties were only found in the form of weak and subtle signatures in the time-averaged estimates of μ and $\gamma(\tau)$, some of which turned out to be particularly elusive. Evidencing them required careful statistical assessments. As a matter of fact, earlier analysis of the very same numerical simulation by McMillan *et al.* (2001) failed to identify this signature and reached the opposite conclusion that non-zonal field statistics would not necessarily reflect heat flow conditions at the CMB. In the estimate $\bar{x}$ of μ indeed, only a fairly weak non-zonal field could be detected and proven significant. However, this was made possible because correlation times were also derived and taken into account in the statistical assessment. As a result of this, even though most estimates of non-zonal terms turned out to be smaller than zonal terms (Table 4), their shorter correlation times (Table 3) made it possible to prove that at least some of them were meaningful.

Clearly, those results also suggest that if similar significant non-zonal components were to be found in the time-averaged palaeomagnetic field as a result of non-homogeneous CMB conditions, those would likely be weak. Detecting them would again require some careful statistical analysis. In this respect, the fact that the detection of significant non-zonal terms in the actual time-averaged palaeomagnetic field is still a matter of debate (a claim made by e.g. Gubbins & Kelly 1993 and Johnson & Constable 1997, but challenged by e.g. McElhinny *et al.* 1996, Carlot & Courtillot 1998 and Merrill & McFadden 2003) is hardly a surprise. However, those results also show that future investigation of better-constrained time-averaged field models could possibly lead to some inference of the geometrical characteristics of the heat flux at the CMB. This, we should finally point out, would nevertheless require that additional progress in numerical dynamo modelling also be made. First, to better understand the connection between the heat-flux pattern and the pattern of the resulting time-averaged field (beyond the crude connection established in the case of model h). A recent study by Olson & Christensen (2002) suggests this should eventually be possible.

Secondly, to make sure that simulations are run with parameters closer to those of the real Earth. An indication that this is needed can be found in the fact that the time-averaged field computed from the recent tomographic model of Christensen & Olson (2003, their fig. 4d), which relies on different parameters than model h but uses similar tomographic boundary conditions, does show substantial differences with that of model h (Fig. 10b).

Another significant outcome of this study is the demonstration that one should not *a priori* assume too simple a diagonal form for $\gamma(\tau)$ in GGP models of dynamo fields. Indeed, in both models g and h, the time-averaged estimate $\bar{K}(\tau)$ of this matrix has been shown to contain many significant non-diagonal terms testifying for spherical, equatorial and axial symmetry breaking properties. In order to make the best of a statistical analysis of the palaeomagnetic data, one should thus acknowledge that: (i) the autocorrelations (or variances) $\gamma(x_n^m, x_n^m, \tau)$ may also depend on x , n and m ; and (ii) the cross-covariances $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$ can be non-zero, even at time $\tau = 0$ relevant to palaeomagnetism. Only point (i) above has yet been partially recognized by some authors (e.g. Kono & Tanaka 1995; Constable & Johnson 1999; Kono *et al.* 2000a; see Paper I for a full review) and point (ii) has been raised only once by Hulot & Gallet (1996). Taking both points into account would clearly be desirable. However, it would have one drawback: requesting that the palaeomagnetic data be inverted for a covariance matrix defined by many more parameters than if it were purely diagonal. Fortunately, this inconvenience can be kept to a minimum, thanks to the fact, we also found, that estimates $\bar{K}(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$ of the $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$ tend to take significant values only when $|n - n'|$ remains small. This is because the τ_n^m decrease as n increases (Tables 1 and 3; Figs 2 and 11) and because two Gauss coefficients with very different correlation times can hardly correlate with each other. This property can then be used to decide which $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau)$ may *a priori* be set to zero in the matrix, if we happen to be able to estimate the τ_n^m . Hulot & Le Mouél (1994; see also Harrison & Huang 1990) and Hongre *et al.* (1998) showed that historical and archeomagnetic data could provide enough information for this to be possible. Also, it turns out that the timescales involved are in fact quite similar to those found here for models g and h (see also Christensen & Olson 2003). Thus, taking the relevant non-diagonal $\gamma(\tau)$ terms into account by applying the rule

$$\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0 \quad \text{if} \quad \tau_n^m \ll \tau_{n'}^{m'} \quad \text{or} \quad \tau_n^m \gg \tau_{n'}^{m'} \quad (16)$$

would then guarantee that $\gamma(\tau)$ does not involve that many more parameters than if it were purely diagonal. Such an approach would then make it possible to also rely on estimates of the covariance matrix $\gamma(\tau)$ and not only of the mean field μ to further investigate the symmetry breaking properties of the palaeomagnetic field. In fact, if further size reduction of $\gamma(\tau)$ would really need to be implemented, then the best option would probably be to further assume eq. (8d) [i.e. $\gamma(x_n^m, x_{n'}^{m'}, \tau) = 0$ if $m \neq m'$], which would acknowledge the fact we found that detection of axial symmetry breaking in estimates of those terms anyway proves elusive.

Our results also revealed much more embarrassing characteristics of the fields produced by models g and h: some non-stationarity that can affect the MF produced by a dynamo and distort the distribution of the Gauss coefficients to the point it no longer is Gaussian. Those results are consistent with those of McMillan *et al.* (2001) who relied on a very different way of analysing the data. Taking those issues into account in the context of a GGP approach is not a simple matter. As illustrated by our results, the nature of this non-stationarity can indeed significantly differ from one case to another.

As pointed out by Coe *et al.* (2000) in an earlier study of the same simulations, it however turns out that artificial intensity records predicted from the model g field at the surface of the Earth compare quite well with the actual relative intensity records of deep-sea sediment cores, such as the one published by Valet & Meynadier (1993). Those cores indeed reveal significant intensity fluctuations on the 10 000 yr timescale, much more comparable to the modulations identified in model g (Fig. 8) than to those found in model h (Coe *et al.* 2000 also pointed out that similar predictions from model h did not compare well). [Incidentally, model g is also the one model producing a dominantly dipole family field (recall Table 2 and Fig. 3), a feature known to help produce a trend in the virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curve similar to that observed for the past 5 Myr (Kono & Tanaka 1995; Hulot & Gallet 1996; Tauxe & Kent 2004), although in the present instance, the trend produced does not appear to be strong enough to explain the data (Glatzmaier *et al.* 1999).] We saw that the main cause of the departure from a Gaussian distribution was non-stationarity and that the not-so-severe non-stationarity seen in model g did not seriously affect the distribution of the Gauss coefficients. Those remained near-gaussian. The comparable amount of non-stationarity seen in both model g and the sediment cores thus suggests that a GGP approach could also safely be used to analyse at least the recent palaeomagnetic data.

Finally, it is worth commenting the intriguing difference found between models g and h, namely, the existence of two independent long-term modulations in model g as opposed to a single more complex modulation in model h. This difference somewhat mirrors the one found in the estimate $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ of the correlation matrix $\gamma(\tau)$, revealing less correlations between the dipole and quadrupole families in model g than in model h. We noted that this meant that the fluctuating component of the model g field is statistically more symmetric with respect to the equator than that of model h. Unfortunately, no analogous statistical reasoning can be used to interpret the differences in the non-stationary modulations of models g and h. However, a very useful complementary deterministic approach can be invoked. It is indeed well known from kinematic dynamo theory that, if a dynamo flow is symmetric with respect to the equator, the two dipole and quadrupole family fields it generates become separable (i.e. are governed by two separate equations, Gubbins & Zhang 1993). Those fields may then behave independently, in very much the way they do in the case of model g [from the point of view of both the relative lack of correlation between the two families in $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ and the existence of independent modulations]. Indeed, we checked that, on average, the dynamo flow is more symmetric with respect to the equator in model g than in model h, though even in the case of model g, the flow is not found to be exactly symmetric. However, this observation also is not a surprise. A not-exactly-symmetric flow is indeed required to explain the weak but significant correlations found between the two families in model g [$\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ is almost, but not exactly, compatible with eq. 9b/10b]. Furthermore, because model g is the result of a fully dynamic and not simply kinematic simulation, Lorentz forces associated with the field produced by the dynamo are bound to influence the flow. As a consequence, the flow may not remain symmetric with respect to the equator if the field produced is a mixture of the dipole and quadrupole family components (e.g. Gubbins & Zhang 1993). In the case of model g however, both the mean and fluctuating components of the field are dominated by terms from the dipole family and only a weak quadrupole family component is to be found (Table 2; Fig. 3). This is how both the non-symmetric flow and the coupling between the two family fields can remain weak, allowing model g to enjoy a dual modulation and weak correlations between the two families. By contrast, model h displays families of

comparable magnitude (except of course for $\bar{g}_1^0$), especially in $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ (Table 4; Fig. 14), and enjoys both a single modulation and stronger correlations. In short, although from a purely statistical point of view, equatorial symmetry only requires that the mean field μ belongs to either the dipole or quadrupole family, while the fluctuating field can be a mixture of both families (provided they display no cross-correlations, i.e. conform to eq. 9b/10b), dynamical considerations show that as soon as both families contribute similarly, especially to the fluctuating field, coupling between the two families will arise and so will correlations in $\gamma(\tau)$.

6 CONCLUSION

In the present study, we addressed the pertinence of a GGP approach to characterize the statistical behaviour of fields produced by numerical simulations of dynamos. Those dynamos belong to the same general class of dynamos as the geodynamo producing the MF of the Earth. It may thus be argued that the conclusions reached here also likely pertain to the possibility of using a GGP approach to analyse the palaeomagnetic data and characterize the past behaviour of the geodynamo.

To be valid, the GGP approach requires that the Gauss coefficients define a vector $\mathbf{x}(t)$ behaving as the result of a multidimensional stationary Gaussian process with a short-term memory. Both models we investigated were found to enjoy a short-term memory. Some non-stationary behaviour was unfortunately found in both cases, causing some non-Gaussian behaviour, all the stronger that the non-stationarity was important. However, non-stationarity did not appear to be too serious of a problem if, as in model g, it remains within reasonable bounds, and occurs on timescales long compared to the memory of the process and short compared to the duration of a period of stable polarity. This seems to be the case for the real geodynamo, suggesting that a GGP approach can indeed be used to analyse the recent palaeomagnetic data.

However, estimating the mean field μ and the covariance matrix $\gamma(\tau)$ along the lines pioneered by Constable & Parker (1988) is not as simple a matter as one could wish, especially when one deals with (non-linear) directional data, in which case, as noted by Khokhlov *et al.* (2001), both μ and $\gamma(\tau)$ need to be estimated simultaneously. Because of that difficulty, all GGP modelling attempts made so far have relied on some additional assumptions with respect to the form $\gamma(\tau)$ may take. In particular, $\gamma(\tau)$ has always been assumed diagonal.

However, significant off-diagonal terms in the estimate $\bar{\mathbf{K}}(\tau)$ of $\gamma(\tau)$ (cross-covariances) have been found in both models g and h, and are to be found for all rotating dynamos, as all of them break the spherical symmetry. Even under the most symmetric conditions (axial and equatorial), cross-covariances are found between Gauss coefficients sharing the same order and belonging to the same dipole/quadrupole family. Additional cross-covariances reaching across the two dipole/quadrupole families are otherwise found if equatorial symmetry is lost and even more cross-covariances may be found if, in addition, axial symmetry is lost as in model h. Similar off-diagonal terms in $\gamma(\tau)$ must therefore exist in the case of the geodynamo. To make it possible to detect important symmetry breaking properties not only in μ but also in $\gamma(\tau)$, only the simple rule (16) based on timescales may safely be used to *a priori* decide which cross-covariances should be discarded.

As a matter of fact, the one symmetry breaking that appeared to be the easiest to detect, is equatorial symmetry breaking. However, it is found in both model h and the homogeneous model g. This

shows that, unfortunately, evidence of equatorial symmetry breaking possibly found in μ and $\gamma(\tau)$ [and in particular a $\mu(g_2^0)$ such as the one needed to explain the palaeomagnetic data], cannot as such be taken as evidence of equatorial symmetry breaking in the CMB conditions imposed on the dynamo. That is, unless, as pointed out in Paper I, the double case can be made that, every time the field reverses, both its dipole and quadrupole family components reverse simultaneously, while in the case of dynamos with equatorial symmetric CMB conditions, each family could reverse independently. Of course, we noted that stronger signatures for equatorial symmetry breaking are found in model h than in model g, suggesting that symmetry breaking CMB conditions could enhance the equatorial symmetry breaking properties of the field produced. However, we also noted that this enhancement is likely related to the fact that, contrary to that of model g, the fluctuating field of model h is not dominated by the dipole family. For dynamical reasons, this is bound to lead to stronger interactions between the two families. However, it is not unlikely that another dynamo regime running under equatorial symmetric CMB conditions could also be found, spontaneously breaking the equatorial symmetry like model g, and involving just as much quadrupole family and dipole family fluctuating fields as model h. This would then introduce more interactions between the two families, just as in model h.

Only axial symmetry breaking properties in μ and $\gamma(\tau)$ can in fact unambiguously testify for the influence of inhomogeneous CMB conditions. Such properties were found for model h (and not for model g). This shows that a similar influence could potentially be detected in the case of the real Earth. In $\gamma(\tau)$, this would involve detecting either non-zero cross-covariances contradicting eq. (8d), or violations of equalities between autocovariances (8b) or non-zero cross-covariances (8c). However, violations of eq. (8d) proves elusive to detect. From a practical point of view, ignoring the possibility of such violations, i.e. assuming eq. (8d) holds [which conveniently reduces the number of terms involved in $\gamma(\tau)$], and just checking for violations of eq. (8b-c), would probably be the most efficient way of investigating $\gamma(\tau)$ for possible influence of inhomogeneous CMB conditions. In μ , the signature to be looked for is simpler (non-zonal terms), more easily detected and likely to at least partly reflect the inhomogeneous CMB conditions responsible for it (see also, Olson & Christensen 2002). However, it turns out that non-zonal terms in estimates of μ remain quite weak. This, we noted, could be the reason why detection of non-zonal terms in the mean field derived from palaeomagnetic data still remains controversial. Our results suggest that additional data combined with a more appropriate treatment and analysis of the covariance matrix $\gamma(\tau)$ could help settle the issue.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Cathy Constable and an anonymous reviewer for their constructive comments, which substantially helped improve the original manuscript. This research was completed while GH held a National Research Council Research Associateship Award at NASA Goddard Space Flight Center. Model g and model h geodynamo simulations were run at the Pittsburgh Supercomputing Center. Institut de Physique du Globe de Paris Contribution no. 2040 and Institut National des Sciences de l'univers (Centre National de la Recherche Scientifique) Contribution no. 378.

REFERENCES

Bloxham, J., 2000a. Core-mantle interactions and the palaeosecular variation, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 1171–1179.

- Bloxham, J., 2000b. Sensitivity of the geomagnetic axial dipole to thermal core-mantle interactions, *Nature*, **405**, 63–65.
- Carlut, J. & Courtillot, V., 1998. How complex is the time-averaged geomagnetic field over the past 5 Myr?, *Geophys. J. Int.*, **134**, 527–544.
- Christensen, U.R. & Olson, P., 2003. Secular variation in numerical geodynamo models with lateral variations of boundary heat flow, *Phys. Earth planet. Int.*, **138**, 39–54.
- Christensen, U., Olson, P. & Glatzmaier, G.A., 1998. A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures, *Geophys. Res. Lett.*, **25**, 1565–1568.
- Coe, R.S., Hongre, L. & Glatzmaier, G.A., 2000. An examination of simulated geomagnetic reversals from a palaeomagnetic perspective, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 1141–1170.
- Constable, C.G. & Johnson, C.L., 1999. Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables, *Phys. Earth planet. Int.*, **115**, 35–51.
- Constable, C.G. & Parker, R.L., 1988. Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y., *J. geophys. Res.*, **93**, 11 569–11 581.
- Dormy, E., Valet, J.P. & Courtillot, V., 2000. Numerical models of the geodynamo and observational constraints, *Geochem. Geophys. Geosys.*, **1**, paper 2000GC000 062.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Phys. Earth planet. Int.*, **91**, 63–75.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1996. An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection, *Physica D*, **97**, 81–94.
- Glatzmaier, G.A. & Roberts, P.H., 1997. Simulating the geodynamo, *Contemp. Phys.*, **38**, 269–288.
- Glatzmaier, G.A., Coe, R.S., Hongre, L. & Roberts, P.H., 1999. The role of the Earth's mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals, *Nature*, **401**, 885–890.
- Gubbins, G. & Kelly, P., 1993. Persistent patterns in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr, *Nature*, **365**, 829–832.
- Gubbins, D. & Zhang, K., 1993. Symmetry properties of the dynamo equations for palaeomagnetism and geomagnetism, *Phys. Earth planet. Int.*, **75**, 225–241.
- Harrison, C.G.A. & Huang, Q., 1990. Rates of change of the Earth's magnetic field measured by recent analyses, *J. Geomag. Geoelectr.*, **42**, 897–928.
- Hongre, L., Hulot, G. & Khokhlov, A., 1998. An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years, *Phys. Earth planet. Int.*, **106**, 311–335.
- Hulot, G. & Bouligand, C., 2005. Statistical paleomagnetic field modelling and symmetry considerations, *Geophys. J. Int.*, doi:10.1111/j.1365-246X.2005.02612 (this issue, Paper I).
- Hulot, G. & Gallet, Y., 1996. On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves, *Phys. Earth planet. Int.*, **95**, 37–53.
- Hulot, G. & Le Mouél, J.L., 1994. A statistical approach to the Earth's main magnetic field, *Phys. Earth planet. Int.*, **82**, 167–183.
- Hulot, G., Eymin, C., Langlais, B., Mandea, M. & Olsen, N., 2002. Small-scale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data, *Nature*, **416**, 620–623.
- Johnson, C.L. & Constable, C.G., 1997. The time averaged geomagnetic field: global and regional biases for 0–5 Ma, *Geophys. J. Int.*, **131**, 643–666.
- Khokhlov, A., Hulot, G. & Carlot, J., 2001. Towards a self-consistent approach to paleomagnetic field modeling, *Geophys. J. Int.*, **145**, 157–171.
- Kono, M. & Roberts, P.H., 2002. Recent geodynamo simulations and observations of the geomagnetic field, *Rev. Geophys.*, **40**(4), 1013, 10.1029/2000RG000102.
- Kono, M. & Tanaka, H., 1995. Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation, *J. Geomag. Geoelectr.*, **47**, 115–130.
- Kono, M., Tanaka, H. & Tsukanawa, H., 2000a. Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data: the case of linear mapping, *J. geophys. Res.*, **105**, 5817–5833.

- Kono, M., Sakuraba, A. & Ishida, M., 2000b. Dynamo simulations and paleosecular variation models., *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 1123–1139.
- Kuang, W. & Bloxham, J., 1997. An Earth-like numerical dynamo model, *Nature*, **389**, 371–374.
- McElhinny, M.W., McFadden, P.L. & Merrill, R.T., 1996. The time-averaged paleomagnetic field 0–5 Ma, *J. geophys. Res.*, **101**, 25 007–25 027.
- McMillan, D.G., Constable, C.G., Parker R.L. & Glatzmaier, G.A., 2001. A statistical analysis of magnetic fields from some geodynamo simulations, *Geochem. Geophys. Geosys.*, **2**, paper 2000GC000 130.
- Merrill, R.T. & McFadden, P.L., 2003. The geomagnetic axial dipole field assumption, *Phys Earth planet. Int.*, **139**, 171–185.
- Merrill, R.T., McElhinny, M.W. & McFadden, P.L., 1996. *The Magnetic Field of the Earth: Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*, Academic, San Diego, CA, p. 527.
- Olson, P. & Christensen, U.R., 2002. The time-average magnetic field in numerical dynamos with non-uniform boundary heat flow, *Geophys. J. Int.*, **151**, 809–823.
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T. & Flannery, B.P., 1992. *The art of Scientific Computing, Numerical Recipes in C*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 994.
- Tauxe, L. & Kent, D., 2004. A simplified statistical model for the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations: was the ancient magnetic field dipolar?, in *Timescales of the Paleomagnetic field* eds Channell J.E.T., Kent D.V., Lowrie W. & Meert J. *Am. geophys. Un. Monogr.*, **145**, 101–115.
- Valet, J.P. & Meynadier, L., 1993. Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years, *Nature*, **366**, 234–238.
- van der Waerden, B.L., 1969. *Mathematical statistics*, Springer-Verlag, New York, p. 367.

Chapitre 3

Test des modèles paleomagnetiques statistiques à partir des mesures de direction

Les modèles paléomagnétiques statistiques de type “Giant Gaussian Process” (GGP) peuvent être testés à partir de mesures de l’aimantation dans les laves en comparant les distributions prédites et observées d’observables paléomagnétiques tels que l’inclinaison, la déclinaison, la paléointensité, la position du pôle géomagnétique virtuel ou le moment dipolaire virtuel. Pour des raisons pratiques, ces tests reposent généralement sur des simplifications. La majorité des mesures disponibles étant des mesures de direction paléomagnétique, la plupart de ces tests ne prennent pas en compte les mesures de paléointensité. Par exemple, la direction du champ moyen est estimée simplement en sommant les vecteurs unitaires portant la direction des aimantations mesurées. Cette estimation est juste si la distribution des directions paléomagnétiques suit une loi de Fisher, mais devient fausse lorsque leur distribution est plus compliquée. Les sites d’étude étant répartis de façon très hétérogène à la surface de la Terre et le nombre de mesures par site étant relativement restreint, les tests sont généralement effectués en réunissant les sites d’étude par bande de latitude [Constable et Parker, 1988; Kono et Tanaka, 1995; Hulot et Gallet, 1996; Quidelleur et Courtillot, 1996; Kono, 1997], présupposant ainsi que le champ moyen et la paléovariation séculaire sont axisymétriques. Par ailleurs, ces tests sont généralement effectués sur un seul paramètre à la fois sans prendre en compte les corrélations possibles entre paramètres (comme par exemple entre l’inclinaison et la déclinaison). Khokhlov et al. [2001] ont proposé une méthode rigoureuse pour tester les modèles de type “GGP” reposant sur le calcul des lois de probabilité de la direction du champ paléomagnétique en chaque site de mesure sans poser d’hypothèse *a priori* supplémentaire sur le modèle

paléomagnétique. Cette méthode a été adaptée pour prendre en compte les erreurs de mesure de direction paléomagnétique. Les principes et l'application de cette méthode sont résumés ci-dessous. L'étude détaillée à laquelle j'ai été associée fait l'objet d'un article accepté pour publication à *Geophysical Journal International*.

3.1 Expression de la distribution des directions paléomagnétiques

Soit le vecteur $x(t) = (g_n^m(t), h_n^m(t))$ contenant l'ensemble des coefficients de Gauss à l'instant t . Etant donné un modèle de champ moyen et de paléovariation séculaire, défini par les valeurs moyennes des coefficients de Gauss $\bar{x} = (\bar{g}_n^m, \bar{h}_n^m)$ et leurs variances $(\sigma(g_n^m), \sigma(h_n^m))$ (ou plus généralement la matrice des covariances $Cov(x, x)$), il est possible de calculer pour chaque site d'étude la distribution des trois composantes du champ magnétique (B_X, B_Y, B_Z) . En effet, le champ magnétique, $\vec{B}$, s'exprime en fonction des coefficients de Gauss, $x(t)$, par une relation linéaire dérivée de la relation 1.2, et dont les coefficients (présentés ici sous la forme d'une matrice A) dépendent du site d'observation (r, θ, ϕ) :

$$\vec{B}(r, \theta, \phi, t) = A(r, \theta, \phi) x(t) \quad (3.1)$$

Si les coefficients de Gauss suivent une loi de probabilité gaussienne, comme le supposent les modèles de type "GGP", alors le champ magnétique $\vec{B}$ suit une loi de probabilité gaussienne à trois dimensions,

$$f_{\vec{B}}(B_X, B_Y, B_Z) = \sqrt{\frac{\det \Lambda}{(2\pi)^3}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{B} - \vec{\mu}_B)^T \Lambda (\vec{B} - \vec{\mu}_B) \right] \quad (3.2)$$

caractérisé par un vecteur moyen $\vec{\mu}_B$ et une matrice des covariances Λ^{-1} :

$$\vec{\mu}_B = A(r, \theta, \phi) \bar{x} \quad (3.3)$$

$$\Lambda^{-1} = A(r, \theta, \phi) Cov(x, x) A(r, \theta, \phi)^T \quad (3.4)$$

Cette distribution peut être exprimée en coordonnées sphériques (B, Θ, Φ) , où B est la norme du champ magnétique et Θ et Φ définissent sa direction (colatitude et longitude de l'intersection du vecteur champ magnétique avec une sphère de rayon unitaire centrée sur le point d'origine du vecteur). La distribution des directions du champ magnétique, ou "Angular Gaussian Distribution", peut alors être estimée en intégrant la distribution du champ magnétique $\vec{B}$ selon sa norme (figure 3.1) :

$$f_{AGD}(\Theta, \Phi) = \int_{B=0}^{+\infty} f_{\vec{B}}(B, \Theta, \Phi) B^2 dB \quad (3.5)$$

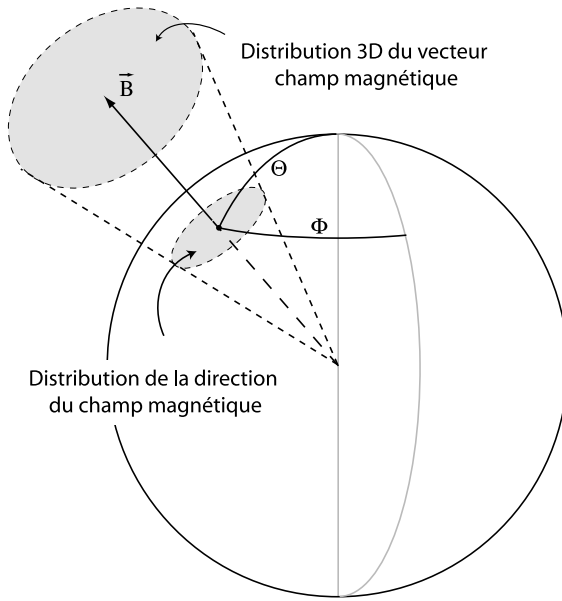


FIG. 3.1 – La direction du vecteur champ magnétique $\vec{B}$ est définie par la colatitude Θ et la longitude Φ de son intersection avec une sphère unitaire. Sa distribution est obtenue en intégrant la distribution du vecteur $\vec{B}$ selon sa norme.

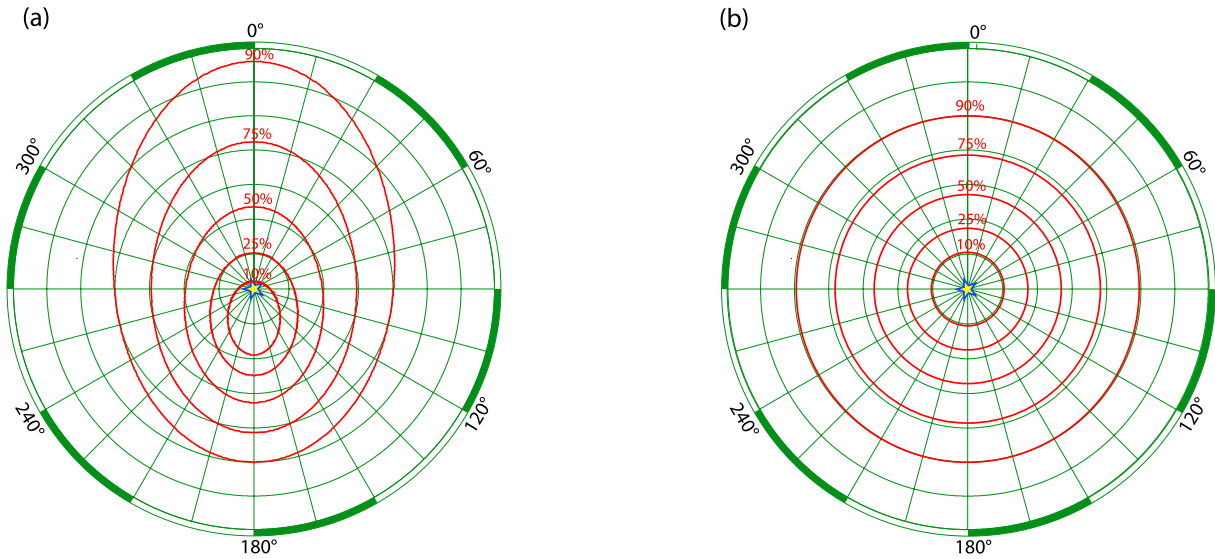


FIG. 3.2 – (a) Distribution des directions paléomagnétiques prédites d'après le modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] (dont le champ moyen a été simplifié à un dipôle axial g_1^0) pour un site localisé à Hawaï (longitude 205.0° , latitude 19.5°). Les courbes d'équiprobabilité, à l'intérieur desquelles 10%, 25%, 50%, 75% et 90% des directions sont attendues, sont représentées (en rouge) à l'aide d'une projection de Lambert. Le point central correspond à la direction du champ moyen, c'est à dire la direction du dipôle axial g_1^0 . Le nord est dirigé vers le haut et l'est vers la droite de la figure. (b) Pour comparaison, la distribution de Fisher (correspondant à un paramètre de concentration $K=25$) est également représentée à l'aide d'une projection de Lambert, le point central de la figure correspondant à la direction moyenne. Les distances angulaires par rapport au centre de la figure sont marqués tous les 5° .

La figure 3.2a présente un exemple de cette distribution pour laquelle sont représentées les courbes d'équiprobabilité. Ces courbes délimitent des cônes à section non circulaire, analogues aux cônes de confiance définis pour les lois de Fisher. Les différentes courbes d'équiprobabilité ont une forme ovale et ne sont pas centrées sur les mêmes points. L'allongement de ces courbes d'équiprobabilité signifie que les distributions des colatitudes Θ et longitudes Φ définissant la direction du champ magnétique ne sont pas indépendantes. Selon la valeur de la longitude Φ , la variance (ou dispersion) de la colatitude Θ est plus ou moins importante. Dans le cas d'une loi de Fisher, au contraire, les courbes d'équiprobabilité sont circulaires et centrées sur la direction moyenne, la dispersion de la direction moyenne est identique quelque soit la longitude Φ (figure 3.2b). La valeur moyenne des directions peut être estimée à partir de la distribution des directions. Dans le cadre des modèles de type "GGP", elle est différente de la direction du champ moyen et de la direction la plus probable [Khokhlov et al., 2001]. L'estimation de la direction du champ moyen à partir des mesures de direction seulement peut donc introduire une erreur.

3.2 Comparaison des distributions prédites et observées

La figure 3.3 représente les courbes d'équiprobabilité des directions paléomagnétiques calculées à partir du modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] pour un site d'étude localisé à Hawaï. Les courbes représentées délimitent les cônes à l'intérieur desquelles 10%, 25%, 50%, 75% et 90% des directions paléomagnétiques sont attendues si le modèle est en accord avec les mesures. Les mesures de directions paléomagnétiques disponibles dans la base de données sont également représentées. Il est ainsi possible de tester en chaque site la compatibilité du modèle avec les mesures de direction en comptant le nombre de points contenu à l'intérieur de chaque cône.

La forme de la distribution est différente pour chaque site de mesure et le nombre de mesures disponibles par site est relativement réduit. Pour effectuer un test global du modèle sur l'ensemble des mesures paléomagnétiques, il est nécessaire d'effectuer une uniformisation. Chaque direction (Θ_i, Φ_i) est remplacée par une quantité t_i définie comme la probabilité d'observer une direction de probabilité supérieure, c'est à dire la probabilité qu'une direction soit comprise dans le cône défini par la surface grisée (figure 3.3a) :

$$t_i = \int_{(\Theta, \Phi) | f_{AGD}(\Theta, \Phi) > f_{AGD}(\Theta_i, \Phi_i)} f_{AGD}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Phi d\Theta \quad (3.6)$$

Cette probabilité est comprise entre 0 (pour la direction la plus probable) et 1 (pour la direction la moins probable). Si les directions mesurées sont en accord avec le modèle

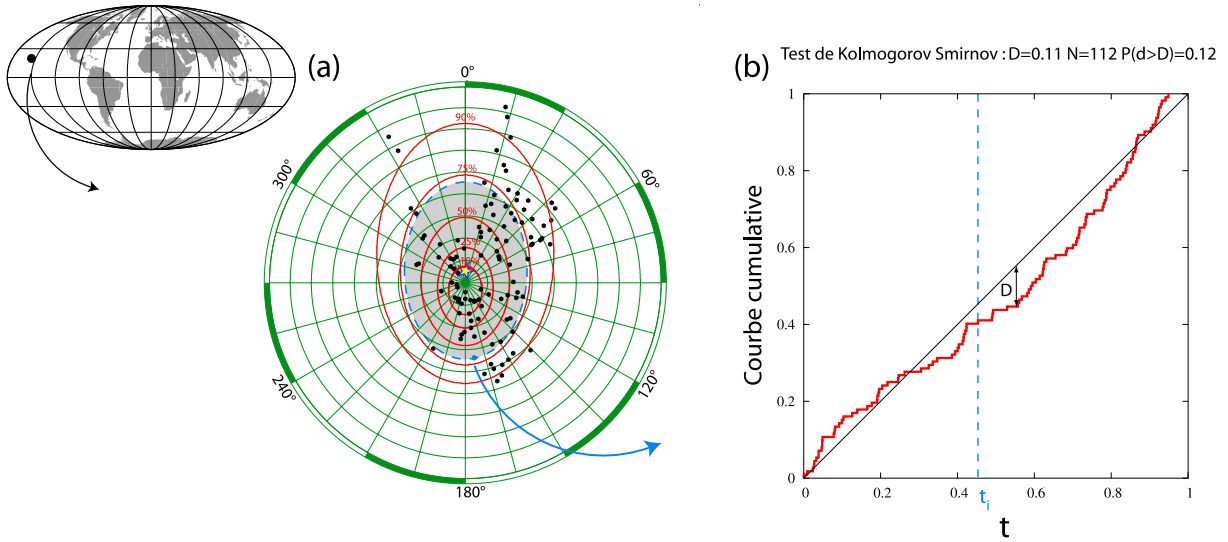
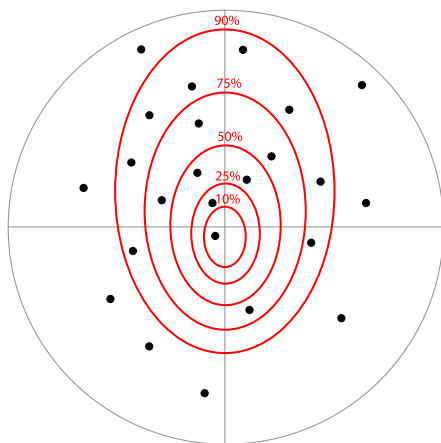


FIG. 3.3 – (a) Distribution (en rouge) des directions paléomagnétiques prédites d'après le modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] pour un site localisé à Hawaï. Le point central correspond à la direction du dipôle axial g_1^0 . Le nord est dirigé vers le haut et l'est vers la droite de la figure. L'étoile est la direction prédite par le champ moyen. Les points noirs sont les directions paléomagnétiques disponibles dans la base de données directionnelles à ce site pour la période Brunhes. (b) Courbe cumulative des variables t_i obtenues par uniformisation des directions paléomagnétiques (en rouge) et de la loi uniforme entre 0 et 1 (en noir). Le maximum D de la différence, en valeur absolue, entre ces deux courbes permet de déterminer, à l'aide d'un test de Kolmogorov-Smirnov, si la distribution des quantités t_i est significativement différente de la loi uniforme. Dans le cas présenté ici, la probabilité d'observer une distance plus importante que la distance D pour $N = 112$ échantillons d'une loi uniforme est de 12 % ($>5\%$). Le modèle C1 est donc compatible avec ces données.

alors l'ensemble des quantités t_i suit une loi de distribution uniforme entre 0 et 1. La figure 3.3b représente la courbe cumulative de la variable t_i et de la loi uniforme (droite de pente 1 passant par l'origine). La forme de la courbe cumulative permet, par exemple, de reconnaître si la distribution des mesures est plus, ou moins, concentrée que la distribution prédite par le modèle (figure 3.4). Un test statistique permet de déterminer si la distribution de la variable t_i est significativement différente de la loi uniforme. Différentes quantités peuvent être utilisées pour quantifier les différences entre les deux courbes. Le test de Kolmogorov-Smirnov utilise le maximum D de la différence en valeur absolue entre ces deux courbes (figure 3.3b). Si t_i suit une loi uniforme, il est possible de calculer la probabilité que cette distance D soit plus importante que celle observée [Press et al., 1992]. Si cette probabilité est inférieure à 0.05, le test est négatif, la distribution de la variable t_i est significativement différente d'une loi uniforme et le modèle est rejeté. Si cette probabilité est supérieure à 0.05, le test est positif, la distribution de la variable t_i n'est pas significativement différente d'une loi uniforme. Cependant, il n'est pas possible de dire exactement si le modèle est en accord avec les mesures de direction. En effet, l'uniformisation ayant simplifié un problème à deux dimensions en un problème à une dimension, différents modèles peuvent fournir un test positif. Cette méthode s'est révélée cependant très discriminante lorsque l'ensemble des sites de mesures sont exploités (sections 3.4 et 3.5).

Le modèle peut ainsi être testé de façon globale, en regroupant l'ensemble des quantités t_i obtenues sur l'ensemble des sites de mesure. Des tests locaux permettent par ailleurs de détecter les sites qui ne sont pas compatibles avec le modèle et d'en comprendre les raisons. Si le test global est positif et seuls quelques sites fournissent des tests négatifs, il se peut que les hypothèses requises pour l'interprétation des mesures paléomagnétiques en terme de "GGP" ne soient pas respectées. Le site peut par exemple avoir été affecté par des événements tectoniques. Si la distribution observée est beaucoup plus concentrée que celle prédite et éventuellement excentrée, il se peut que les mesures de direction ne soient pas indépendantes car correspondant à un laps de temps trop court. Une évolution significative du champ magnétique principal s'observe à l'échelle de quelques centaines d'années [Hulot et Le Mouél, 1994]. La mise en place des coulées de lave par les volcans est sporadique, pouvant alterner entre des phases courtes d'intense activité et des phases d'inactivités et dont les durées sont difficiles à évaluer. Si l'ensemble des échantillons étudiés ont été mis en place sur une période plus courte que la centaine d'années, ils représentent tous à peu près le même état du champ paléomagnétique et ne rendent donc pas compte de la paléovariation séculaire et du champ moyen.

(a) Distribution des mesures trop lâche



(b) Distribution des mesures trop concentrée

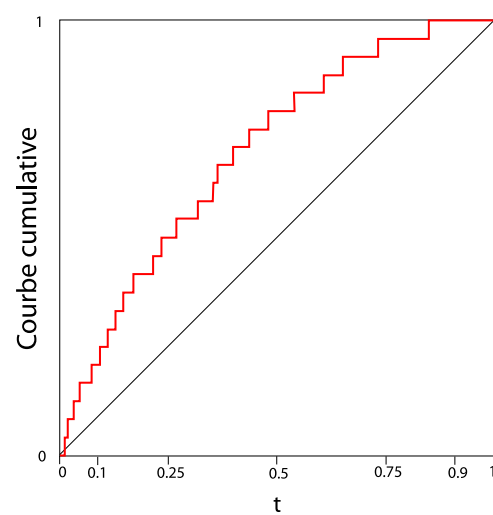
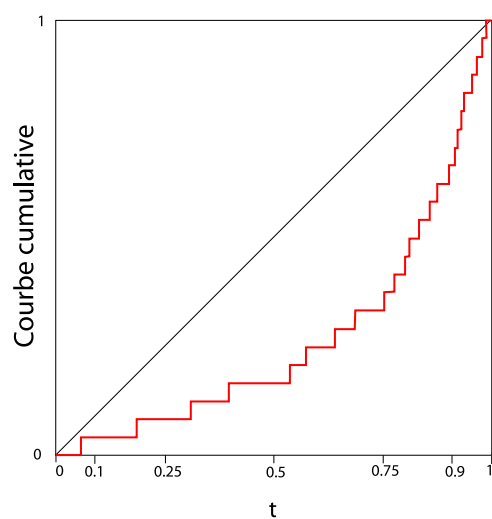
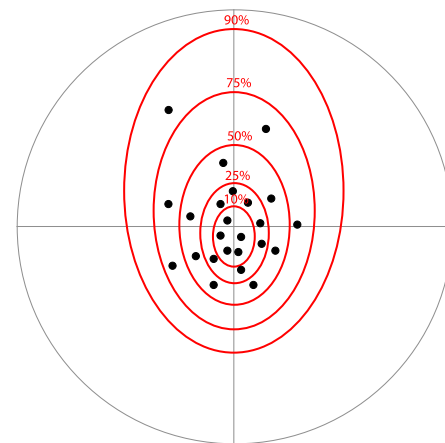


FIG. 3.4 – Exemple de mesures de direction en désaccord avec la distribution prédite : distribution des mesures trop lâche (a) ou trop concentrée (b).

3.3 Prise en compte des erreurs de mesure

L'erreur sur les mesures de direction paléomagnétique est généralement assez importante et peut affecter de manière significative la distribution des mesures de direction paléomagnétique. La distribution associée aux incertitudes de mesure est classiquement décrite par une loi de Fisher centrée sur la direction "vraie" du champ paléomagnétique. La probabilité de mesurer une direction donnée (Θ_m, Φ_m) dépend de la probabilité que le champ soit orienté dans une direction proche (Θ, Φ) et de la probabilité que l'erreur de mesure fournisse la valeur donnée. La loi de probabilité résultante de la paléovariation séculaire et des erreurs de mesure est donc la convolution de la distribution "Angular Gaussian Distribution", f_{AGD} et d'une loi de Fisher, f_K (figure 3.5) :

$$f(\Theta_m, \Phi_m) = \int_{\text{sphère}} f_K(\Theta_m - \Theta, \Phi_m - \Phi) f_{AGD}(\Theta, \Phi) \sin \Theta d\Phi d\Theta \quad (3.7)$$

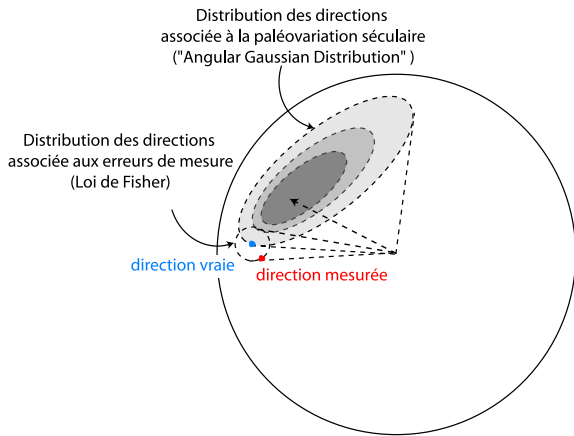


FIG. 3.5 – *La dispersion des mesures de direction paléomagnétique résulte de la paléovariation séculaire et des erreurs de mesure.*

La figure 3.6 présente les distributions des mesures de direction paléomagnétique calculée au site présenté figure 3.3 d'après le modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] en supposant une erreur de mesure nulle, de $\alpha_{95} = 5^\circ$ ou de $\alpha_{95} = 10^\circ$. Plus l'erreur de mesure est grande, plus les cônes de confiance sont élargis.

3.4 Validation et application de la méthode

La méthode présentée a été utilisée pour tester différents modèles publiés [Constable et Parker, 1988; Quidelleur et Courtillot, 1996; Constable et Johnson, 1999; Hatakeyama et Kono, 2002; Tauxe et Kent, 2004] (pour lesquels les cartes de la valeur moyenne et de l'écart-type de la composante radiale du champ à la surface de la Terre sont représentées sur la figure 1.25) à l'aide des mesures de direction paléomagnétique disponibles pour la période Brunhes dans la base de données de Quidelleur et al. [1994] (mise à jour en 1998

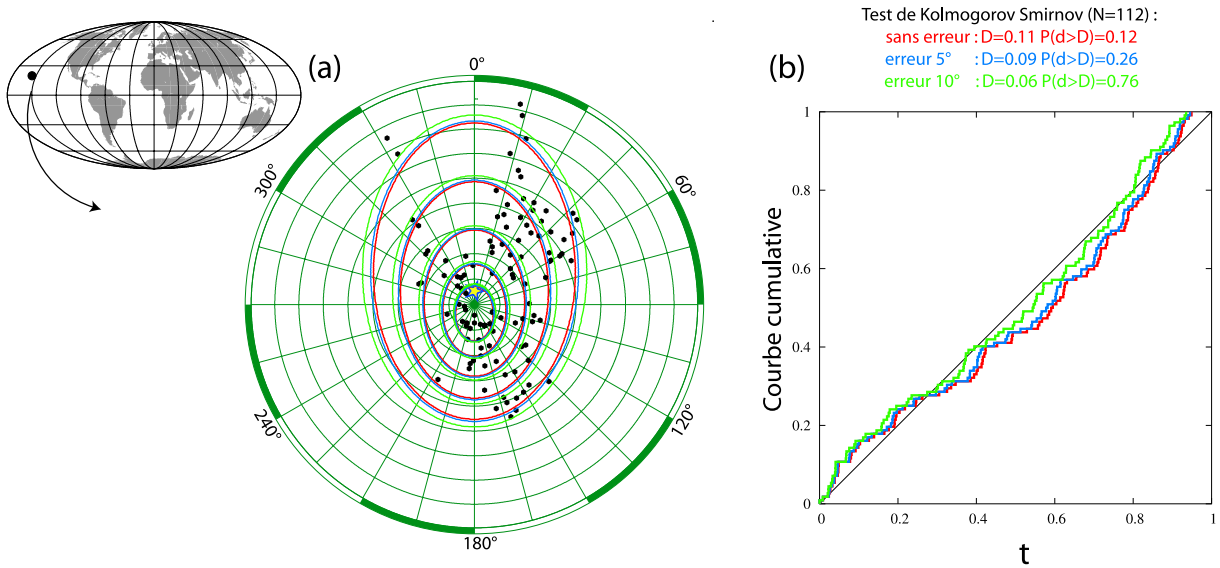


FIG. 3.6 – Distribution des directions paléomagnétiques (a) et courbes cumulatives des quantités t_i (b) calculées d’après le modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996] pour un site localisé à Hawaï en supposant une erreur nulle (en rouge), de $\alpha_{95} = 5^\circ$ (en bleu) et de $\alpha_{95} = 10^\circ$ (en vert). Les points noirs sont les directions paléomagnétiques disponibles dans la base de données directionnelle à ce site pour la période Brunhes.

et consultable à l’adresse <http://www.ipgp.jussieu.fr/rech/paleomag/var-secu/>. La méthode a été testée au préalable sur des bases de données synthétiques contenant la même quantité de mesures et pour les mêmes sites que la base de données réelle. Ces données synthétiques sont obtenues en générant des séries aléatoires gaussiennes de coefficients de Gauss dont les valeurs moyennes et écart-types sont donnés par un modèle “GGP”. Ces séries permettent de calculer la direction du champ magnétique à laquelle est ensuite ajoutée une erreur aléatoire. Différentes bases de données synthétiques sont ainsi créées pour les différents modèles “GGP” étudiés (avec différentes erreurs) et testées sur ces mêmes modèles (pour les mêmes erreurs), permettant ainsi de vérifier que le test est positif quand le modèle est celui à partir duquel la base de donnée a été créée. Pour tester si la méthode permet une discrimination entre les différents modèles proposés, la base de données synthétique correspondant au modèle C1 de Quidelleur et Courtillot [1996], pour une erreur $\alpha_{95}=4.7^\circ$ (correspondant à l’erreur moyenne des mesures de direction disponibles dans la base de données exploitée), a ensuite été testée par rapport à l’ensemble des modèles pour différentes erreurs. Seul le modèle initial est compatible pour des erreurs comprises entre $\alpha_{95}=2.5^\circ$ et $\alpha_{95}=7.5^\circ$. D’autres modèles apparaissent cependant compatibles lorsque l’erreur est surestimée. En pratique, cependant, l’erreur est connue, et ces tests prouvent donc que la méthode que nous avons développée est bien capable d’identifier le modèle “GGP” qui a permis de produire les données synthétiques bruitées.

Cette méthode peut donc être appliquée aux données réelles pour identifier le modèle “GGP” rendant compte au mieux des observations. Ceci nous a permis de montrer que parmi les différents modèles testés, seul le modèle de Quidelleur et Courtillot [1996] est compatible avec la base de donnée mise à jour de Quidelleur et al. [1994]. Cette conclusion doit cependant être tempérée car ce modèle a été établi à partir de cette même base de données (avant sa mise à jour, toutefois). Il serait donc intéressant de tester à nouveau ce modèle avec les autres bases de données disponibles. Ces résultats montrent cependant que la description du champ magnétique à l’échelle paléomagnétique en terme de “Giant Gaussian Process” est compatible avec les mesures de direction paléomagnétique et que le test proposé est très sensible.

L’exploitation de ce test sur des bases de données plus importantes permettra à terme de décider quel modèle “GGP” peut rendre compte au mieux des observations, compte tenu des erreurs de mesures, et en particulier de déterminer les ruptures de symétrie qui sont observées dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire. Il serait en effet particulièrement intéressant de déterminer si l’on peut effectivement mettre en évidence une rupture de la symétrie axiale, celle-ci pouvant être attribuée à une influence des conditions à la limite noyau manteau (comme on l’a vu à partir de l’étude du champ magnétique produit par les dynamos numériques, au chapitre 2). Cette méthode pourra également permettre de déterminer dans quelle mesure le champ ancien a pu se comporter de manière différente selon les époques considérées.

3.5 Etude détaillée : *Testing statistical paleomagnetic field models against directional data affected by measurement errors*

Testing statistical paleomagnetic field models against directional data affected by measurement errors

A. Khokhlov ^{*†} G. Hulot ^{†‡} C. Bouligand[†]

Submitted to Geophys. J. Int., December 30, 2005, revised July 07, 2006

Abstract

In a previous paper, [Khokhlov et al 2001] introduced a method to test the compatibility of so-called “Giant Gaussian Process” (GGP) statistical models of the paleomagnetic field against any paleosecular variation (PSV) database. This method did not take measurement errors into account. It therefore lacked practical usefulness. In the present paper, we remedy this and generalise the method to account for measurement errors in a way consistent with both the assumptions underlying the GGP approach and the nature of those errors. The method is implemented to test GGP models against any directional data set affected by Fisherian errors. Simulations show that the method can usefully discriminate which GGP model best explains a given data set. Applying the method to test six published GGP models against a test Bruhnes stable polarity data set extracted from the [Quidelleur et al 1994] database, it is found that all but one model (that of [Quidelleur & Courtillot 1996]) should be rejected. Although this result should be taken with care, and does not necessarily imply that this model is superior to other models ([Quidelleur & Courtillot 1996] precisely used the [Quidelleur et al 1994] database to infer their model), it clearly shows that in practice also, and with the databases currently available, the method can discriminate various candidate GGP models. It also shows that the statistical behaviour of the geomagnetic field at times of stable polarity can indeed be described in a consistent

^{*}International Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics 79, b2, Warshavskoe shosse 117556 Moscow, Russia.

[†]Equipe de Géomagnétisme, Institut de Physique du Globe de Paris (Institut de recherche associé au CNRS et à l’Université Paris 7), 4, Place Jussieu, 75252, Paris, France

[‡]Corresponding author (gh@ipgp.jussieu.fr)

way in terms of a GGP model. This “forward” testing method could ultimately be used to design an “inverse” approach to GGP modelling of the paleomagnetic field.

Introduction

Thanks to the large amount of magnetic data provided by satellite missions spherical harmonic models of the main magnetic field produced within the core can readily be computed, providing high resolution pictures of the way this field has been behaving over the past few decades [Hulot et al 2002]. Additional information can also be recovered from observations carried out by many generations of observers, explorers and navigators worldwide to produce spherical harmonic models describing the main magnetic field over the past four centuries [Jackson et al 2000]. Reconstructing similar, albeit much less accurate, spherical harmonic models of the Earth’s main magnetic field further back in time is also possible [Hongre et al 1998, Korte & Constable 2005]. This however requires that indirect measurements be used, only available through human artefacts, lava flows and sediments that have been magnetized in the ancient field. It also requires that a good age control of each sample is available to ensure a satisfying synchronization of the data used in computing spherical harmonic models for a given epoch. Because changes in the non-dipole component of the main field occur on time scales all the shorter than the spatial scales considered are smaller [Hulot & Le Mouél 1994], this unfortunately limits our ability to produce such spherical harmonic models back in time (so far, only up to 7000 years in the past, [Korte & Constable 2005]).

To recover information about the Earth’s main magnetic field further back in time, one must rely on paleomagnetic data and acknowledge the impossibility of accurately (within a few decades at most) synchronizing data acquired at different locations. This is especially true for the so-called paleosecular variation [Quidelleur et al 1994, Johnson & Constable 1996, McElhinny & McFadden 1997] and paleointensity [Tanaka et al 1995, Perrin & Schnepp 2004] databases covering the past few million years. Those databases encompass data recovered from volcanic samples and testifying for the instantaneous value of the direction and/or intensity of the field at well-known locations but poorly known times (typically within much more than a millennium). Fortunately, ages can nevertheless be measured with enough accuracy to identify the chron during which each of these samples acquired its magnetization. Assuming that the geodynamo essentially remained in a stationary state at times of stable polarity,

this then opens the possibility, recognized long ago (see e.g. [Merrill et al 1996] for an extensive review of earlier work), that at least some statistical properties could be recovered, characterizing the ancient field at times of stable polarity over the past millions years.

Several approaches have been used to try and infer such statistical properties (again, see e.g. [Merrill et al 1996]). One approach has drawn particular attention, the so-called Giant Gaussian Process (GGP) approach first introduced by [Constable & Parker 1988], and next generalized by [Hulot & Le Mouél 1994] and [Kono & Tanaka 1995]. In its most general form (see e.g., [Hulot & Bouligand 2005]), this approach consists in

- 1) using the classical spherical harmonic decomposition of the Main Field:

$$\mathbf{B}(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi, t) = -\nabla \left[a \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^l \left(\frac{a}{\mathfrak{R}} \right)^{l+1} \left(g_l^m(t) \cos m\Psi + h_l^m(t) \sin m\Psi \right) P_l^m(\cos \Theta) \right] \quad (1)$$

where $g_l^m(t)$ and $h_l^m(t)$ are the time-varying Gauss coefficients, a denotes Earth's radius and $\{\mathfrak{R}, \Theta, \Psi\}$ are the standard spherical coordinates (i.e., distance from the Earth's center, colatitude and longitude), and

- 2) assuming that the $g_l^m(t)$ and $h_l^m(t)$ are the coordinates of a vector $\mathbf{k}(t)$ in a multidimensional model space, which behaves as a single realization of a multidimensional stationary random Gaussian process characterized by a statistical mean (or mean model) $E(\mathbf{k}(t))$ and a covariance matrix $\text{Cov}(\mathbf{k}(t), \mathbf{k}(t'))$ (which may very well be non-diagonal).

In addition to being defined with the help of a fully consistent formalism, this GGP approach has the unique advantage of providing a common tool to analyse just as well the historical ([Constable & Parker 1988, Hulot & Le Mouél 1994]), archeomagnetic ([Hongre et al 1998]) and paleomagnetic fields ([Constable & Parker 1988] and many studies since, see e.g. [Kono et al 2000a, Tauxe & Kent 2004]). Even more, it can also be used to carry on similar analysis of the field produced by dynamo numerical simulations ([Kono et al 2000b, McMillan et al 2001, Bouligand et al 2005]). In the latter case, considerable advantage can be taken of the fact that the Gauss coefficients (and very long time series) are readily available and can thus be analyzed in much detail without having to worry about any observational errors. Those studies have shown that under reasonable circumstances, the field produced by a numerical dynamo is indeed compatible with a GGP description, which can then be used to detect very interesting statistical properties,

most notably, spontaneous and forced (because of the boundary conditions imposed at the core-mantle boundary) symmetry breaking properties ([Bouligand et al 2005, Hulot & Bouligand 2005]). The GGP approach thus appears to potentially be a tool of choice to characterize the Earth’s main magnetic field at various epochs (present and past), detect possible changes in the regime of the geodynamo, some of which could be due to changes in the boundary conditions, and decide whether a numerical dynamo simulation is “Earth-like” or not.

For this to be possible, we however need to have robust and sensitive numerical tools to actually decide which GGP model best fits a given data set. The issue is unfortunately not so trivial when the data to be analyzed are the paleomagnetic data from the paleosecular variation databases (the largest available paleomagnetic database for that type of study). In that case indeed, because the (directional) data are non-linearly related to the Gauss coefficients of the main field, no simple method is available to directly produce estimates of the mean and covariance matrix of the GGP process best describing the data. Furthermore, using approximate approaches can easily lead to biased estimates ([Khokhlov et al 2001, Hatakeyama & Kono 2001]). The purpose of the present paper, which expands on the earlier work of [Khokhlov et al 2001] (hereafter paper I), is to show that in fact a rigorous method can be implemented which 1) is fully consistent with all the assumptions involved in the GGP approach, 2) takes into account the measurement errors provided with each data point (a major improvement with respect to paper I), 3) provides a rigorous quantified assessment of the compatibility of any GGP model with any directional data set, and 4) proves very discriminating.

Dealing with error-free paleodirectional data

In this section, we first recall the approach proposed in paper I to test any error-free paleodirectional data set. [Note however that we will make use of slightly different notations to avoid confusion among the various quantities we need to define. As a general rule, in the present paper, we will indeed always make use of gothic letters, namely $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ and $\mathfrak{p}$ (possibly with indexes) for the various probability density functions we will need to introduce].

When dealing with such data, which consist in instantaneous values of the paleodirection recorded at times separated by much more than the memory of the GGP process, each paleomagnetic datum can be viewed as a local (both in time and space) independent realization of the GGP pro-

cess. As a result, the covariance matrix of the process can be assumed to be of the simplified form $\text{Cov}(\mathbf{k}(t), \mathbf{k}(t')) = \text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})\delta(t - t')$ and temporal correlations ignored altogether. Rewriting (1) in the simplified form $\mathbf{B}(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi, t) = A(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)\mathbf{k}(t)$, where $A(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)$ is a matrix projecting the multidimensional vector $\mathbf{k}(t)$ into the 3D vector $\mathbf{B}(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi, t)$, a given instantaneous value $\mathbf{B}$ of the field at a given location $(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)$ at the Earth's surface can then itself be viewed as a random drawing from a 3D Gaussian distribution of random vectors $\mathbf{V}$ characterized by $E(\mathbf{V}) = A(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)E(\mathbf{k})$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = A(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})A(\mathfrak{R}, \Theta, \Psi)^T$. Denote $\mathbf{g}$, the corresponding probability density function (pdf) in $\mathbb{R}^3$.

Next, introduce the spherical coordinates $(\mathbf{u}, \rho)$ of the vector $\mathbf{V}$ (where $\mathbf{u} = \mathbf{V}/|\mathbf{V}| \in \Sigma$, the unit sphere in $\mathbb{R}^3$, and $\rho = |\mathbf{V}|$ denotes the distance from the origin O of the sphere Σ). Denote $\mathbf{s}$ the probability density function associated with the direction $\mathbf{u}$ on Σ . This so-called Angular Gaussian distribution ([Bingham 1983], in paper I, we also referred to it as the Gaussian Directional distribution) is then defined by:

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \int_0^\infty \mathbf{g}(\rho\mathbf{u})d\rho. \quad (2)$$

In a local Cartesian coordinate system, we may write $E(\mathbf{V}) = \mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = [\text{cov}(V_i, V_j)]$. Then, let $\mathbf{\Lambda} = [\Lambda^{ij}]$ be the inverse (hence, also symmetric) matrix of $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$. With respect to this local Cartesian coordinates, the probability density function of $\mathbf{V}$ is:

$$\mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^3}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \Lambda^{ij} (x_i - m_i)(x_j - m_j) \right], \quad (3)$$

or

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^3}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\mathbf{\Lambda}(\mathbf{x} - \mathbf{m}), \mathbf{x} - \mathbf{m}) \right]. \quad (4)$$

Making use of the $\mathbf{\Lambda}$ -inner product $(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\mathbf{\Lambda}} = (\mathbf{\Lambda}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i,j=1}^3 \Lambda^{ij} x_i y_j$ together with the corresponding $\mathbf{\Lambda}$ -norm $|\mathbf{x}|_{\mathbf{\Lambda}} = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})_{\mathbf{\Lambda}}}$, and turning back to the spherical coordinates $(\mathbf{u}, \rho)$ in $\mathbb{R}^3$, we may then write:

$$\mathbf{g}(\rho\mathbf{u}) = \sqrt{\frac{\det \mathbf{\Lambda}}{(2\pi)^3}} e^{-\frac{1}{2} |\rho\mathbf{u} - \mathbf{m}|_{\mathbf{\Lambda}}^2} \rho^2, \quad (5)$$

and, after ρ -integration (2), finally get

$$\mathfrak{s}(\mathbf{u}) = e^{-\frac{1}{2}m^2} \cdot \frac{\sqrt{\det \Lambda}}{4\pi|\mathbf{u}|_\Lambda^3} \left[z\sqrt{\frac{2}{\pi}} + e^{\frac{1}{2}z^2}(1+z^2) \left[1 + \text{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) \right] \right], \quad (6)$$

where

$$z = \frac{(\mathbf{m}, \mathbf{u})_\Lambda}{|\mathbf{u}|_\Lambda}, \quad m = |\mathbf{m}|_\Lambda, \quad (7)$$

correspond to respectively the Λ -projection of $\mathbf{m}$ on the direction $\mathbf{u}$, and the Λ -norm of $\mathbf{m}$. Since Λ is positive $-m \leq z \leq m$.

Equation (6) makes it possible to predict the pdf of the direction of the field at any location at the Earth's surface. Any given GGP model can then easily be tested against the data set corresponding to such a location.

Unfortunately, relatively few data are usually available at a given location. In paper I, we explained how this drawback could be overcome, and sparse data distributed over various sites combined into a uniformized data set to globally test the GGP model.

This consists in converting the directional data set $\{\mathbf{u}_i\}$ under consideration (where the “i” index varies between 1 and N, the total amount of data) into a univariate data set $\{t_i\}$ with the help of:

$$t_i = P\{\mathbf{u}|\mathfrak{s}_i(\mathbf{u}) \geq \mathfrak{s}_i(\mathbf{u}_i)\} = \int_{\{\mathbf{u}|\mathfrak{s}_i(\mathbf{u}) \geq \mathfrak{s}_i(\mathbf{u}_i)\}} \mathfrak{s}_i(\mathbf{u}) dU \quad (8)$$

where dU is the elementary surface about $\mathbf{u}$ on Σ , and testing the distribution of the $\{t_i\}$ against a uniform probability density over the segment $[0, 1]$.

This uniformization procedure simply amounts, for each data $\mathbf{u}_i$, to identify on Σ the iso-probability line of the pdf $\mathfrak{s}_i(\mathbf{u})$ on which the data $\mathbf{u}_i$ lie (note that this pdf depends on the location the data $\mathbf{u}_i$ come from, which is why an “i” index is being added to $\mathfrak{s}_i(\mathbf{u})$), and to assign to t_i the value of the probability that $\mathbf{u}_i$ could have been lying on a higher iso-probability line on Σ . Then, if the GGP model is compatible with the data set (hence, if the $\mathbf{u}_i$ are compatible with the $\mathfrak{s}_i(\mathbf{u})$), the $\{t_i\}$ should be compatible with a uniform distribution on $[0, 1]$.

Whether this is indeed the case can finally be assessed with the help of various standard tests, (in paper I we used the Kolmogorov-Smirnov (KS) and the χ^2 tests). Note that this uniformization

procedure is very general and does not rely on any properties of the Angular Gaussian distribution. It can be applied in more general situations.

Taking measurement error into account

A main issue that paper I did not address is that of data measurement errors. The tests we just described are appropriate only in the event these errors are negligible. Unfortunately this is far from being the case and we now need to take this into account. In the case of directional data, these measurement errors are classically described in terms of a Fisher distribution characterized by a so-called concentration (or precision) parameter K . Within this Fisherian framework, stating that the observed direction $\mathbf{s}$ reflects the actual direction $\mathbf{u}$ on Σ with an error characterized by a concentration parameter K , amounts to state that $\mathbf{s}$ is the result of a random drawing from a Fisher distribution centered on $\mathbf{u}$ with pdf:

$$\mathfrak{f}_K(\mathbf{u}, \mathbf{s}) = \frac{K}{2\pi(e^K - e^{-K})} e^{K \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{s})}. \quad (9)$$

In spherical coordinates and when centered on $\mathbf{u}_0 = (\theta = 0, \varphi = 0)$, this takes the more usual form:

$$\mathfrak{f}_K(\mathbf{u}_0, \mathbf{s}) = \frac{K e^{K \cos \theta}}{2\pi(e^K - e^{-K})}. \quad (10)$$

This means that in order to test a given GGP model against a given data set $\{\mathbf{u}_i\}$ with associated errors characterized by $\{K_i\}$, we now need to test whether each $\mathbf{u}_i$ can be considered the result of a realization $\mathbf{s}$ of the GGP process (distributed over Σ with the pdf $\mathfrak{s}_i$), shifted to $\mathbf{u}_i$ as a result of an error with a Fisher distribution $\mathfrak{f}_{K_i}(\mathbf{s}, \mathbf{u})$ centered on $\mathbf{s}$ and a concentration parameter K_i .

The infinitesimal probability that the GGP process first produces a direction within the elementary surface dS about $\mathbf{s}$, and that the error next independently shifts this direction to within the elementary surface dU about $\mathbf{u}_i$ is:

$$\mathfrak{s}_i(\mathbf{s}) dS \cdot \mathfrak{f}_{K_i}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) dU. \quad (11)$$

Then, integrating over all possible intermediate $\mathbf{s}$ directions leads to the probability $\mathfrak{p}_i(\mathbf{u}) dU$ of

finding $\mathbf{u}_i$ within dU about $\mathbf{u}$, where:

$$\mathbf{p}_i(\mathbf{u}) = \int_{\Sigma} \mathbf{s}_i(\mathbf{s}) \mathbf{t}_{K_i}(\mathbf{s}, \mathbf{u}) dS \quad (12)$$

is the new pdf against which $\mathbf{u}_i$ should be tested. Thus, taking data errors into account only amounts to use $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ in place of $\mathbf{s}_i(\mathbf{u})$ in Eq.(8). Tests can then again be used, either on a site-by-site basis or, more interestingly, on a regional and global scale after using the uniformization procedure, which now becomes:

$$t_i = P\{\mathbf{u} | \mathbf{p}_i(\mathbf{u}) \geq \mathbf{p}_i(\mathbf{u}_i)\} = \int_{\{\mathbf{u} | \mathbf{p}_i(\mathbf{u}) \geq \mathbf{p}_i(\mathbf{u}_i)\}} \mathbf{p}_i(\mathbf{u}) dU \quad (13)$$

Practical implementation

In practice, testing a given GGP model against a given directional data set thus involves four successive steps: 1) for each data $\mathbf{u}_i$, to compute the error-free pdf $\mathbf{s}_i(\mathbf{u})$ predicted by the GGP model at the site where $\mathbf{u}_i$ was collected (the analytical form of which is given by (6)); 2) to compute the error-included pdf $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ through the convolution (12); 3) to produce the uniformized data t_i with the help of (13); 4) to test the uniformized data set $\{t_i\}$ against a uniform distribution over $[0, 1]$.

Unfortunately, no exact analytical solutions of (12) and (13) are known to us. In principle, this is not too much of a problem, since both (12) and (13) can be computed numerically. In practice however, the numerical implementation of formula (12) requires quite some computational time. This drawback can be considered negligible if we simply test a single GGP model against a small database, or if all data $\mathbf{u}_i$ coming from the same site share the same data error (in which case $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ only needs to be computed once for each of the typically thirty something sites). But if $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ needs to be computed for each data of the data set (i.e. typically a thousand times), this computational time can become very long (on the order of a few days on a current PC). For that kind of more realistic situations (and for the “forward” testing method we propose here to possibly become of any use for future much more computer-intensive “inverse” searches of *best models*), faster algorithms are clearly desirable. This prompted us to further look for an approximate, accurate enough, analytic solution to the convolution (12).

As is described in the appendix, one such approximation can indeed be found. For any given data

$\mathbf{u}_i$, this consists in approximating $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ by the Angular Gaussian distribution defined by (6) and (7), where $\mathbf{m}$ is then the mean field value predicted by the GGP model to be tested at the site associated with the data $\mathbf{u}_i$ (i.e., predicted by $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ as defined by (4) for the site associated with the data $\mathbf{u}_i$), and $\mathbf{\Lambda}$ is $\left(\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{|\mathbf{m}|^2}{K} \mathbf{I}\right)^{-1}$, where $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ is the covariance matrix associated with $\mathbf{g}_i(\mathbf{x})$ and $K(=K_i)$ is the concentration parameter characterizing the Fisherian error associated with $\mathbf{u}_i$.

In what follows, whenever we use this approximation of $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ to implement the tests, we will refer to the “approximate” method, and whenever a direct numerical implementation of the exact convolution (12) is used, we will refer to the “exact” method. It turns out that, as we shall see, the approximate method is most often just as good as the exact method, and about 100 times faster to run.

Models, data set, and statistical tools used in this study

To illustrate the power of the method we propose, several published GGP models have been tested.

We will refer to these as:

- CP model, which is the preferred model of [Constable & Parker 1988];
- QC model, C1 (preferred) model of [Quidelleur & Courtillot 1996];
- CJ model, which is the CJ98 model proposed by [Constable & Johnson 1999];
- JC model, which is the CJ98.nz model also proposed by [Constable & Johnson 1999];
- TK model, which is the TK03.GAD model recently proposed by [Tauxe & Kent 2004] and further discussed in [Tauxe 2005];
- HK model, which is the final model for the normal polarity of [Hatakeyama & Kono 2002].

Models CP, QC, CJ, JC and TK share many characteristics. They are defined by simple axisymmetric mean models for which only $E(g_1^0)$ and $E(g_2^0)$ can take non-zero values, and purely diagonal covariance matrices with $\text{Cov}(g_n^m, g_n^m) = \text{Cov}(h_n^m, h_n^m) = (\sigma_n^m)^2$, except in the case of model JC, which assumes different values for $\text{Cov}(g_2^1, g_2^1) = (\sigma(g_2^1))^2$ and $\text{Cov}(h_2^1, h_2^1) = (\sigma(h_2^1))^2$. In all but one case, for $n \geq 3$, the σ_n^m are further assumed to be independent of m and defined by $\sigma_n^m = \sigma_n$ where $\sigma_n = \alpha(c/a)^n / ((n+1)(2n+1))^{1/2}$. The only exception is model TK which distinguishes $\sigma_n^m = \sigma_n$ for $(n-m)$ even from $\sigma_n^m = \beta\sigma_n$ for $(n-m)$ odd. Table 1 gives the values of the relevant parameters for

each of those five models. Finally, model HK differs from the other models because of a more elaborate mean field, defined up to degree and order 4. But its covariance matrices are otherwise defined in much the same way. A full description of this model can be found in Table 2 of [Hatakeyama & Kono 2002].

All those models have been constructed in the hope that they would properly describe the statistical properties of the paleomagnetic field at times of normal polarity over the past five million years. In particular, they have been constructed with the help of databases including a large number (if not a majority) of directional data corresponding to the current Bruhnes chron (e.g. [Quidelleur et al 1994, Johnson & Constable 1996]). They are therefore good candidates for an example test against a well-controlled data set covering the Bruhnes chron and corresponding to volcanic directional data acquired at various sites distributed worldwide. Ideally, such a test data set would have to be built by extracting data from the most recent and permanently updated IAGA paleomagnetic reference database for paleofield direction available at the National Geophysical Data Center (<http://www.ngdc.noaa.gov/seg/geomag/paleo.shtml>), and by relying on a set of fine-tuned criteria agreeable to the community. This however is not a trivial matter since, as noted by one of the reviewers, there currently is no general agreement among investigators on what comprises a satisfactory database for this kind of study. Such a substantial endeavour, which we plan to carry on at a later stage, is therefore clearly beyond the scope of the present paper, which only intends to introduce, test, and illustrate a new methodology. For such a purpose, we felt that a simpler, more readily available data set (and one that at least already went through some type of selection processes relevant to the present study), would be appropriate enough.

We therefore decided to use a test data set extracted from the [Quidelleur et al 1994] database, originally used by [Quidelleur & Courtillot 1996] to build their QC model last updated in January 1998, and currently available at <http://www.ipgp.jussieu.fr/rech/paleomag/var-secu/>. We note however, even before proceeding further, that because of this choice, a close fit of the QC model to our test data set can be anticipated, so that test results reported here will necessarily not test the QC model as stringently as the other models. This test data set consists of a total of 990 independent estimates of the local direction of the paleomagnetic field at 36 sites (Figure 1, Table 2). Each site is located with the help of its latitude and longitude. At each site, each estimate is based on the direction of the resultant vector $\mathbf{R}$ of n (≥ 3) volcanic samples (unit vectors) and is given in the form of a declination

D and an inclination I together with both n and the norm $R = |\mathbf{R}|$ of the resultant vector. Although R is usually not published as such in the original papers, it can be accurately recomputed from the published material. This then makes it possible to present all the data in an homogeneous and complete form in the database. Indeed, and as is well known (e.g. [McElhinny & McFadden 2000]), an estimate of the local direction of the paleomagnetic field is completely characterized (with its Fisherian error) as soon as the four parameters D, I, n and R are given.

For each estimate, the corresponding vector $\mathbf{u}_i$ could then be located on the unit sphere Σ , and an estimate of the concentration parameter K_i defining the Fisherian error computed [with the help of $K = R \frac{(n-1)}{(n-R)}$; note that this is not the concentration parameter $k = \frac{(n-1)}{(n-R)}$ classically published with the data, which characterizes the dispersion of the n individual samples about their average direction, but the concentration parameter characterizing the error on $\mathbf{u}_i$]. Starting from $\mathbf{u}_i$ and K_i , and for each GGP model to be tested, a uniformized value t_i could finally be computed with the help of Eq. (13) to produce the final uniformized data set $\{t_i\}$.

To test this final data set against a uniform distribution over $[0, 1]$, we relied on two different well-known tests: the Kolmogorov-Smirnov test (KS-test) and the Anderson-Darling test (AD-test). These two tests rely on the fact that, if a given uniformized data set $\{t_i\}$ (with $i = 1$ to N) is indeed compatible with a uniform distribution over $[0, 1]$, its empirical cumulative distribution function (cdf) $F_N(x)$ should fluctuate within predictable limits about the theoretical cdf value $F(x) = x$. The null hypothesis should then be rejected if the empirical cdf $F_N(x)$ either departs too much from x , or remains too close to it (the latter revealing the presence of suspicious regularities within the $\{t_i\}$). The KS-test and AD-test differ in the measure chosen to assess how distant $F_N(x)$ is from x over $[0, 1]$:

- the KS-test (as defined by e.g. [Press et al 1996]) uses the maximum value M_N of $|F_N(x) - x|$ over $[0, 1]$, and is therefore most sensitive to departures of the $\{t_i\}$ from a uniform distribution towards the middle of the segment $[0, 1]$;
- the AD-test (as defined by e.g. [Marsaglia & Marsaglia 2004]) uses the integral quantity $I_N = N \int_0^1 \frac{(F_N(x) - x)^2}{x(1-x)} dx$. Because of the weight $[x(1-x)]^{-1}$, it is much more sensitive to the behaviour of $\{t_i\}$ at both extremes of the segment $[0, 1]$.

The KS and AD tests are both excellent tests for small samples and can also be used for large samples. Neither require any additional parameter and both can therefore be considered as completely objective. Also, they complement each other very well. In practice, for each of the uniformized data set $\{t_i\}$ we had to test, we therefore computed the values of M_N and I_N , together with (from known softwares, e.g. [Press et al 1996] and [Marsaglia & Marsaglia 2004]) the probabilities $P(M_N)$ and $P(I_N)$ for the null hypothesis to have possibly produced such large, or even larger, values for respectively M_N and I_N . Whenever $P(M_N)$ and $P(I_N)$ were found to take values very close to 0 (typically 0.05 or less) or to 1 (typically 0.95 or above), the null hypothesis had to be rejected and the GGP model under consideration had to be considered incompatible with the data-set at this level of confidence.

Validation and discriminating power of the method

Before actually implementing the testing method we propose, we ran a number of instructive validating tests. For that purpose, various artificial data sets have been produced in the following way. Starting from a given GGP model, we first produced random error-free directional data values. Exactly the same number of data values were produced for each of the 36 sites, as available in the (real) test data set (thus amounting to a total of 990 independent artificial values). This could easily be done by just randomly drawing 990 independent sets of Gauss coefficients (g_l^m, h_l^m) from a multidimensional gaussian generator with mean values and covariances matrices chosen as specified by the GGP model under consideration, and computing the predicted values at each site. A random directional error was next added to each of those 990 error-free directional data values. Because, as shown in the appendix, a Fisher distribution is extremely close to an Angular Gaussian distribution (for realistic Fisherian errors such as those we deal with here), this was actually done by introducing a random Angular Gaussian error (an easier procedure to control than that involved in producing random Fisherian errors). Using this procedure and starting from various specified GGP models, a number of artificial directional data sets affected by specified errors could be produced, which we used to validate our method.

We first validated the “exact” method and checked that for artificial data produced from any GGP models and perturbed by some known error, this method would always conclude to the compatibility of the data set with the starting GGP model, provided the data are assumed to be affected by the

correct amount of error. This first series of tests not only allowed us to validate the method. It also allowed us to check our software and the level of numerical accuracy needed to produce accurate results. It turns out that from a numerical point of view, the most sensitive step of the entire method is the numerical implementation of the uniformization procedure (i.e. the computation of Eq. (13)). This indeed requires the numerical computation of $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ on a grid over the unit sphere Σ . The most demanding computations, in terms of grid size, happen to be those corresponding to $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ predicting the largest dispersions of the $\mathbf{u}_i$ on the unit sphere Σ . In that case, when the grid is not tight enough, numerical errors happen to mainly affect the computation of the t_i lying close to 0 or 1. This in turn mainly affects the results of the AD-test which produces too large values of I_N , and therefore too small values of $P(I_N)$. As a result, the AD-test tends to more easily produce negative results than it should.

For the purpose of the present paper, we used a grid corresponding to a decent compromise, tight enough for the KS-test to always lead to an accurate result, but not too tight to make it possible to run all tests in a reasonable amount of time. This had the drawback that, for the reasons just outlined, the AD-test produced slightly erroneous results when testing the CJ and JC models. For those two models, we therefore concluded that only the KS-test could be considered reliable. For all other models (CP, QC, TK and HK), both the KS-test and the AD-test were otherwise found to be reliable. Those conclusions have been reached when testing artificial data affected by errors characterised by α_{95} of up to 12.5° . [Note also that to produce those artificial data sets and run all the tests reported in this study, all GGP models have been used only up to degree and order 7, since, as we shall later see, higher degrees contribute negligibly to the final results for all the GGP models we tested].

We next proceeded to compare the results of the “approximate” method to those of the “exact” method, using exactly the same artificial data sets in both cases. Again and as anticipated (see appendix), significant disagreements between the two methods were found to arise only when $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$ predicts large dispersions of the $\mathbf{u}_i$ on the unit sphere Σ . In practice, the approximate method was found to lead to accurate enough results for all the models we tested (testing artificial data with all levels of errors up to $\alpha_{95} = 12.5^\circ$), except when testing models CJ and JC against data affected by errors with α_{95} greater than 7.5° . Table 3 summarises the domain of validity of each type of test as established from all those preliminary tests.

We then went on to test the ability of the method to properly discriminate the source GGP model

and the level of error affecting the data. Because, as we shall soon see, the real data turn out to be compatible only with model QC (from the point of view of the tests described in the present paper), and since the average α_{95} for the 990 data in the real database is of 4.7° , this test was carried out on an artificial data set produced from model QC and affected by errors of $\alpha_{95} = 4.7^\circ$. This artificial data set was used to test all GGP models, assuming various possible levels of errors (0° , 2.5° , 5° , 7.5° , 10° , 12.5°). An additional test was also run to check that the method would properly conclude that this data set is compatible with the starting model QC when assuming an error of $\alpha_{95} = 4.7^\circ$. Since both the exact and approximate methods provide reliable results for errors of that magnitude, both methods have been used with the KS-test and AD-test (except for the the CJ and JC models for which only the KS test was used, for the reasons outlined above). Table 4 reports the results of those tests. [Note that Table 4 also provides a good illustration of the accuracy of the results of the approximate method, when compared to the results of the exact method].

This table shows that, as expected, the artificial data set is compatible with the starting model (QC model) provided the correct level of error affecting the data is being assumed ($\alpha_{95} = 4.7^\circ$). It also shows that by contrast, making a wrong a priori assumption with respect to the errors affecting the data can lead to a negative result. A minimum error of $\alpha_{95} = 2.5^\circ$ and a maximum error of $\alpha_{95} = 7.5^\circ$ is indeed required for the test with model QC to produce positive results (with no rejection at a 95% level of confidence by either of the KS or AD tests). Finally, Table 4 shows that the method also appears to be able to discriminate the various GGP models. The data set produced by QC with $\alpha_{95} = 4.7^\circ$ cannot be attributed to a CP model, unless (but marginally so) one wrongly assumes $\alpha_{95} = 10^\circ$. It can no more be attributed to a CJ, JC or HK model, unless one again wrongly assumes $\alpha_{95} = 12.5^\circ$. And it can hardly be attributed to a TK model, whatever the value assumed for α_{95} . Altogether those results thus show that the tests we introduced are sensitive to both the choice of the model to be tested and the level of error assumed to affect the data. In particular they show that if we have a reasonable knowledge of the error affecting the data, the method applied to the type of data set we deal with here (i.e. 990 data distributed over the 36 sites of Figure 1) makes it possible to fully discriminate the models. Indeed Table 4 shows that if we know a priori that the error affecting the data is somewhere between 2.5° and 7.5° , the method can detect that all of the CP, CJ, JC, HK and TK models are incompatible with the data set produced from QC model with $\alpha_{95} = 4.7^\circ$, at more than

a 95% level of confidence. Those encouraging results show that the method proposed in the present paper has enough discriminating power to decide which, if any, of the six GGP models can best explain the test data set we have assembled.

Testing the real data

Having validated the method, and assessed its limits and discriminating power, we then went on to test the various GGP models against the real test data set.

Global tests

In a first series of tests, we did not rely on the actual errors provided with the data. Rather, for each model tested, we successively assumed values of $\alpha_{95} = 0^\circ, 5^\circ, 7.5^\circ, 10^\circ$, and 12.5° . This made it possible to again run both the “exact” and “approximate” methods in parallel for further validation of the “approximate” method. It also provided us with a quick way of assessing which GGP model could possibly be considered compatible with the test data set. Table 5 shows the results of those tests.

Interestingly, we first note some common features with the results of the previous test (recall Table 4). Model QC is rejected at more than a 95% confidence level for $\alpha_{95} = 0^\circ, 10^\circ$, and 12.5° , but not for $\alpha_{95} = 5^\circ$ and 7.5° . Again we see that model CP shows a tendency to be compatible with the data if one assumes $\alpha_{95} = 10^\circ$, though this possibility is now clearly less likely. Finally we see that only by assuming $\alpha_{95} = 12.5^\circ$ can models CJ, JC, HK possibly be consistent with the data, while model TK is always rejected at a 99% confidence level. Based on these tests, we therefore reach the conclusion that if we were to ignore the actual level of error affecting the data in the test data set, all models would be rejected at more than a 95% confidence level except model QC when assuming $\alpha_{95} = 5^\circ$ or 7.5° , or model CJ and JC when assuming $\alpha_{95} = 12.5^\circ$.

The key point, now, is that we do have some knowledge of the errors affecting the data in the test data set. We already noted that on average, this error is of $\alpha_{95} = 4.7^\circ$. This value is clearly incompatible with the $\alpha_{95} = 12.5^\circ$ value needed for models CJ and JC to possibly be compatible with the test data set. But it seems compatible with the results for model QC.

To finally assess the issue, we eventually ran the test for all six models, no longer assuming the same a priori error for all the data of the test data set, but the true error associated (i.e. published)

with each of the 990 data. Since, as already noted, this requires considerably more computational time, only the approximate method was used for this comparative assessment [Note that all previous tests have anyway shown that for errors of the order of 5° , the approximate method always leads to accurate enough results]. Table 6 gives the results of this final test, and Figure 2 shows the cdfs of the corresponding uniformized data. Those results clearly show that only model QC is not rejected by the test data set. All other models can be rejected at more than a 99% confidence level, TK being the second, CP the third, HK the fourth, CJ the fifth and JC the sixth best models in terms of both the M_N and I_N measures (note that when both quantities are available in Table 6, M_N and I_N lead to the same relative ranking).

As an ultimate check and only for model QC, we finally duplicated this last test using the “exact” method. The result of this test (also shown in Table 6) confirms the previous results. Moreover, the difference found between those two results for model QC clearly appears to be much smaller than the differences among the results of the approximate method for all models. We therefore feel quite confident that these results can be trusted.

It is interesting to take advantage of model QC, the only model not rejected by the test data set so far, to also quickly address the issue of the number of Gauss coefficients that should be taken into account to carry on the tests. As stated earlier, we used all Gauss coefficients up to degree and order 7. But all models, including QC, assume non zero variances for all degrees up to infinity. However, the higher the degree n , the weaker the contribution of the coefficients to the local pdfs $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$, and thus to the final result. Table 7 illustrates this point and shows that the calculation is indeed already converged when taking into account all degrees up to 7. Note that this also shows that the test (applied to the test data set used in the present study), is therefore hardly sensitive to Gauss coefficients of the GGP models with degrees above seven.

Local tests

It is also important to keep in mind that whereas the results presented so far show that models CP, CJ, JC TK and HK should be rejected, they do not imply that model QC is fully compatible with the data. Those results only correspond to a global test, for which all the 990 data $\mathbf{u}_i$ have been uniformized into a single global distribution of $\{t_i\}$ over $[0, 1]$, and it may be that model QC, not rejected by this

global test, could be rejected by a more local test. Table 8 shows results of such tests. The same testing procedure has been used as before (with both the exact and approximate method, using both the KS and AD tests and assuming the true error), except for the fact that for each test, only the data from one of the 36 sites of the test data set have been used at a time, to produce the (then much less numerous) uniformized $\{t_i\}$.

Those results show that the KS-test reveals four sites (sites 17, 18, 30 and 35) rejecting model QC at a 99% confidence level because of too low values of $P(M_N)$. This amounts to about 10% of the sites, an uncomfortably high number. By contrast, the AD-test only reveals two such sites (sites 3 and 18). But it confirms the strong level of disagreement of site 18 with model QC. This site clearly needs to be double-checked. Indeed, a closer look at sites 17 and 18, reveals some interesting features. Those sites are geographically very close to one another, at latitude 50.0° and longitude 7.0° . Site 17 (data selected from [Böhnel et al 1987]), is in the quaternary East-Eifel volcanic field, whereas site 18 (data selected from [Böhnel et al 1982]), is in the quaternary West-Eifel volcanic field. For those two sites, we show in Figure 3 how the selected data $\mathbf{u}_i$ plot on the unit sphere Σ . On the same plots, we also show the isovalues of the $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$, which have been computed assuming $\alpha_{95} = 2.76^\circ$ for site 17 and $\alpha_{95} = 4.68^\circ$ for site 18. Those values correspond to the average errors for all data from respectively sites 17 and 18. (Using such averages is done here mainly for illustrative purpose, the plotted isovalues being then simultaneously meaningful for all the data shown on the same plot). Also shown in Figure 3 are the cdfs for the $\{t_i\}$ corresponding to this calculation, and the analogous cdfs corresponding to the exact calculation (i.e. when the true, rather than the average, error is being used for each individual data). The reasons sites 17 and 18 reject model QC are clear: for site 17, the data tend to display too little dispersion compared to the expected distribution (producing too many low values for the $\{t_i\}$), whereas for site 18, the data show a strong tendency to lie East of the expected distribution (producing too many high values for the $\{t_i\}$).

The interesting observation here is that beyond the disagreement of each site with model QC, we see that both sites also disagree with each other. Since they share virtually the same location, this would suggest that two different stable polarity data sets acquired at the same location but at different times during the Bruhnes chron, could disagree. Quite an embarrassing finding in view of the stationarity assumption underlying the GGP modelling approach. Fortunately, a closer look at the

[Böhnel et al 1982, Böhnel et al 1987] papers provides us with an explanation for this disagreement. As far as site 17 is concerned, it simply appears that the 44 data selected in the [Quidelleur et al 1994] database are not fully independent. In seven instances, several data points appear to have basically recorded the same field (each time reflecting a single volcanic event). Those events correspond to low values of t_i and bias the distribution of the $\{t_i\}$ towards low values. Site 18 is a slightly different story. In that case, [Böhnel et al 1987] make a good case that a subset of the data they published must have recorded a relatively short-lived excursion or event during the Bruhnes chron, biasing the data set towards the East. Although [Quidelleur et al 1994] rejected most of those transitional data (based on the selection criteria that the data must correspond to a period of stable polarity) some of the data biased towards that transitional direction have clearly been included within the database. Thus the issue with sites 17 and 18 appears to be more one of ill-sampling than one of overall disagreement with model QC. Interestingly, we further note that if we actually bin the two sites into a single one, as is also shown in Figure 3, the local test no longer rejects model QC. This then leaves only two sites (30 and 35) out of 36 truly rejecting model QC at a 99% confidence level because of too low values of $P(M_N)$, and only one site (site 3) rejecting QC because of a too low value of $P(I_N)$. These are no longer unexpected proportions and model QC thus indeed appears to be compatible with the [Quidelleur et al 1994] Bruhnes stable polarity data set.

Conclusion

In the present paper we introduced the first quantitative method capable of assessing the compatibility of a GGP model with a given paleodirectional database in a way consistent with both the statistical assumptions underlying the GGP approach, and the nature of the measurement error affecting paleodirectional data.

The method was successfully implemented and tested, in its exact form, but also in an approximate form, relying on some useful approximations which we introduced to significantly reduce the computational burden of the tests. The limits of the approximate method have been assessed. Those limits are reached when both the GGP model and the measurement errors introduce strong dispersions of the directional data on the unit sphere. For realistic measurement errors, this approximate method however turns out to be just as good as the exact method. This brought many encouraging results.

First, it was shown that the method is usefully discriminating. A GGP model is compatible with an artificial data set affected by a given (known) level of measurement error only if the model tested is the same as the model used to produce the artificial data and if the correct level of error affecting the data is assumed when carrying the test. But if one assumes either too small or too large an error affecting the data, or tests a GGP model different from the starting model, this conclusion may no longer be reached. The method we propose thus appears to be relevant for deciding which GGP model, if any, best describes the statistical behaviour of the past geomagnetic field.

We applied the method to test six published GGP models against paleodirectional Bruhnes stable polarity data from the [Quidelleur et al 1994] database. All but one model (model QC) had to be rejected. This shows that in practice also, our method can successfully discriminate GGP models attempting to describe a given paleomagnetic data set.

The method we propose further offers the possibility of assessing a GGP model at any scale, local, regional or global. This makes it possible to better scrutinise a GGP model which first passed tests at a global scale. Any disagreement between the prediction of the GGP model and the data set at a local level can then be used to double-check not only the GGP model, but also the data set itself. Applying this checking procedure to model QC allowed us to identify such problems with two sites of the [Quidelleur et al 1994] database and to confirm the compatibility of this model with the rest of the test data set.

This success of at least one GGP model is motivating. It shows, for the first time, that the statistical behaviour of the geomagnetic field at times of stable polarity can indeed be described in a consistent way in terms of a GGP model. However the specific success of model QC should not be overemphasised. This model was inferred in an empirical way by [Quidelleur & Courtillot 1996] from the [Quidelleur et al 1994] database from which our test data set was also extracted. All other models were inferred (also in empirical ways) from different databases, and even though all those databases share many common data, they may very well not be fully compatible with each other and with our own data set. Part of the failure of those GGP models at being compatible with our test data set might originate from this. With this respect, it is quite clear that finally confirming the success of the QC model (and the failure of other models) would still require a more thorough study, involving a more recent, extensive and independently assessed data set, extracted from databases such as the

IAGA paleomagnetic reference database we mentioned early on.

As a matter of fact, it is interesting to note that such a data set could also include paleointensity data extracted from databases such as the IAGA paleointensity reference database (PINT, [Perrin & Schnepp 2004]). Indeed, although the present paper mainly described the way to deal with paleodirectional data, paleointensity data could easily be taken into account [if such data provide the full 3D paleofield at a given location, the way those data plot in 3D can be compared with the local 3D Gaussian statistics predicted by the GGP model (i.e., $\mathbf{g}$) by using just the same kind of uniformization procedure as the one we described, see paper I; and taking measurement error into account would just consist in making use of a modified, but still Gaussian, 3D statistics of the type $\mathbf{g}_a$ as defined in the appendix, where $\mathbf{g}_e$ is then directly the Gaussian error assumed to affect the data]. In fact such tests might eventually show that model QC also is incompatible with such a more complete data set. But if such is the case, the method we propose here could be used to seek yet another model. Several strategies could then be pursued. One could involve using the same kind of empirical procedure as those used by [Quidelleur & Courtillot 1996] to first guess which parameter of the GGP model should be changed, and using our method to assess the improvement brought. Another strategy, more advanced and much more far fetched at this point, could involve designing a more systematic “inverse” approach based on the present “forward” testing method. In either case however, several issues would still have to be faced. In particular, we mentioned the fact that the method is not sensitive to parameters corresponding to degrees above 7, which reflects the weak contribution of those high degrees to the geomagnetic field observed at the Earth’s surface. But we did not investigate in detail the sensitivity of our test to the various parameters defining the mean field ($E(\mathbf{k})$) and the covariance matrix ($\text{Cov}(\mathbf{k}, \mathbf{k})$) of a GGP model. Assessing this would help us better understand how complex a GGP model, and in particular its mean field, really needs to be to explain the data. For the time being, and as far as the present test study can suggest, the Bruhnes stable polarity data does not seem to call for more complex a model than model QC: a mean field with only a g_1^0 and a weak g_2^0 contribution, and a simple diagonal covariance matrix only involving an enhanced σ_2^1 contribution along the lines first suggested by [Kono & Tanaka 1995] and [Hulot & Gallet 1996].

We plan to make our software available upon request (please be in touch with the corresponding author: gh@ipgp.jussieu.fr).

Appendix: Introducing useful analytic approximations

Fisher and Angular Gaussian distributions

Let us first note that a Fisher distribution $\mathfrak{f}_K(\mathbf{u}, \mathbf{s})$ centered on $\mathbf{u} \in \Sigma$ with concentration parameter K is very close (when K is large enough) to the Angular Gaussian distribution derived from a 3D Gaussian distribution characterized by $\mathbf{m}$ and $\Lambda^{ij} = \sigma^{-2} \delta_j^i$, provided $\mathbf{u} = \mathbf{m}/|\mathbf{m}|$ and $\sigma = |\mathbf{m}|K^{-\frac{1}{2}}$. This fairly intuitive result (see also Love and Constable (2003)), is in the same line as the better known result that a Fisher distribution is very close to a 2D Gaussian distribution within the plane tangent to Σ at $\mathbf{u}$ (see e.g., [Merrill et al 1996]).

In spherical coordinates, and when assuming the Fisher distribution centered on $\mathbf{u}_0 = (\theta = 0, \varphi = 0)$, from (7) we infer $z = m \cos \theta$ and $m = K^{\frac{1}{2}}$. Then, the (axisymmetric) Angular Gaussian distribution (with θ as natural argument) takes the form:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}(\theta) = & \frac{K^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{K}{2}} \cos \theta}{2\sqrt{2}\pi^{3/2}} + \\ & + \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}K(\sin \theta)^2} \left(1 + K \cos^2 \theta\right) \left[1 + \text{Erf}\left(\frac{K^{\frac{1}{2}} \cos \theta}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned} \quad (14)$$

To leading order when K becomes large, this becomes:

$$\mathfrak{s}(\theta) \approx \frac{K (\cos \theta)^2}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}K(\sin \theta)^2} \quad (15)$$

which, to leading order when θ is small enough, further becomes:

$$\mathfrak{s}(\theta) \approx \frac{K}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}K\theta^2} \quad (16)$$

This indeed is the approximate form $\mathfrak{f}_K(\mathbf{u}_0, \mathbf{s})$ (as defined by (10)) takes when K is large enough, and θ small enough.

To numerically show that for useful values of the concentration parameter K , $\mathfrak{s}(\theta)$ is indeed very close to the $\mathfrak{f}_K(\mathbf{u}_0, \mathbf{s})$ Fisher distribution, we computed the P -probability angles $\alpha(P)$ (defined as the maximum angle the direction may depart from the mean direction $\mathbf{u}_0$ with probability P) predicted

by $\mathbf{k}_K(\mathbf{u}_0, \mathbf{s})$:

$$\alpha_{\{P\}} = \arccos \left[\frac{1}{K} \log \left(e^K + P e^{-K} - P e^K \right) \right] \quad (17)$$

and checked that for those angles, the Angular Gaussian distribution $\mathbf{s}(\theta)$ given by (14), leads to a correct prediction of P . For various relevant values of K and P , Table (9) shows values of the departure $\varepsilon(P)$ of the probability predicted by the Angular Gaussian distribution from the expected probability P :

$$\varepsilon(P) = 2\pi \int_{\{\theta \leq \alpha_{\{P\}}\}} \mathbf{s}(\theta) \sin \theta d\theta - P \quad (18)$$

As can be seen, $\varepsilon(P)$ never exceeds 0.01 and gets all the smaller that K increases.

This then suggests that for our purposes, data error could be taken into account with the help of an equivalent Angular Gaussian distribution in place of the more conventional Fisher distribution.

Expanding the directional error into a 3D error

The near-equivalence we just established between the Fisher distribution and an Angular Gaussian distribution shows that a good approximation of the convolution (12) defining $\mathbf{p}_i(\mathbf{u})$, could be obtained by computing the convolution between two Angular Gaussian distributions. Unfortunately there is again no simple analytic form for the result of such a convolution. But this result suggests that yet another approximation could usefully be made (in this appendix, we will drop the “i” indexes for simplicity, since only a single data $\mathbf{u}_i$ is to be considered at a time).

To see this, first recall that $\mathbf{s}(\mathbf{u})$ is in fact the projection on Σ of the 3D Gaussian distribution $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ predicted by the GGP process at the site associated with the data to be tested. This then suggests that we:

- seek a 3D Gaussian distribution $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$ expending in 3D the directional error,
- compute the convolution of $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ with $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^3$, which would then analytically lead to yet another 3D Gaussian distribution $\mathbf{g}_a(\mathbf{x})$ and,
- analytically compute the Angular Gaussian distribution $\mathbf{s}_a(\mathbf{u})$ associated with this new 3D Gaussian distribution (thanks to (6)).

Provided $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$ is properly chosen, we may then hope that the final Angular Gaussian distribution

$\mathfrak{s}_a(\mathbf{u})$ provides an accurate enough approximation of $\mathfrak{p}(\mathbf{u})$ as defined by the convolution (12).

In the limit case the GGP process predicts a $\mathfrak{g}(\mathbf{x})$ distribution characterized by $E(\mathbf{V}) = \mathbf{m}$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0$, while the directional error is characterized by the concentration parameter K , we already know that choosing $E(\mathbf{V}_e) = 0$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}_e, \mathbf{V}_e) = \frac{|\mathbf{m}|^2}{K} \mathbf{I}$ for $\mathfrak{g}_e(\mathbf{x})$ would do the trick. In that case indeed, $\mathfrak{s}_e(\mathbf{u})$ reduces to the single direction $\mathbf{m}/|\mathbf{m}|$ so that $\mathfrak{p}(\mathbf{u})$ given by (12) reduces to a Fisher distribution centered on $\mathbf{m}/|\mathbf{m}|$ with a concentration parameter K . In the same time, $\mathfrak{g}_a(\mathbf{x})$ would be characterized by $E(\mathbf{V}_a) = \mathbf{m}$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_a) = \frac{|\mathbf{m}|^2}{K} \mathbf{I}$ which leads to $\mathfrak{s}_a(\mathbf{u})$. This, we just saw, is very close to a Fisher distribution centered on $\mathbf{m}/|\mathbf{m}|$ with a concentration parameter K .

In the more general case when, for $\mathfrak{g}(\mathbf{x})$, $\text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V})$ is non-zero but remains small enough, we can next anticipate that sticking to the same 3D expansion $\mathfrak{g}_e(\mathbf{x})$ would also do the trick. Then $\mathfrak{g}_a(\mathbf{x})$ would be characterized by $E(\mathbf{V}_a) = \mathbf{m}$ and $\text{Cov}(\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_a) = \text{Cov}(\mathbf{V}, \mathbf{V}) + \frac{|\mathbf{m}|^2}{K} \mathbf{I}$, and hopefully, $\mathfrak{s}_a(\mathbf{u})$ would again be close enough to $\mathfrak{p}(\mathbf{u})$.

Note that this again can only be an approximation, and that in fact, $\mathfrak{s}_a(\mathbf{u})$ is not even be the exact result of the convolution of $\mathfrak{s}(\mathbf{u})$ with $\mathfrak{s}_e(\mathbf{u})$ (the near-Fisherian Angular Gaussian distribution associated with $\mathfrak{g}_e(\mathbf{x})$). This is qualitatively illustrated in Figure (4), which shows that the same 3D Gaussian error $\mathfrak{g}_e(\mathbf{x})$ applied to two different realizations $\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{V}_2$ of $\mathfrak{g}(\mathbf{x})$ with $|\mathbf{V}_1|$ larger than $|\mathbf{V}_2|$, would lead to an Angular Gaussian error on Σ smaller for $\mathbf{u}_1 = \mathbf{V}_1/|\mathbf{V}_1|$ than for $\mathbf{u}_2 = \mathbf{V}_2/|\mathbf{V}_2|$. Figure (4) however also shows that provided $|\mathbf{m}|$ is large enough compared to the dispersion implied by $\mathfrak{g}(\mathbf{x})$ and $\mathfrak{g}_e(\mathbf{x})$, the distortion introduced should remain small. For the GGP models we have tested, this fortunately happens to be the case most of the time.

Acknowledgements

We thank Richard Holme and two anonymous reviewers for their constructive comments. IPGP contribution 2147.

References

- [Bingham 1983] Bingham, C.: A series expansion for Angular Gaussian Distribution. Appendix C. *in book* Watson, G.: Statistics on spheres, Wiley-Interscience pub., New York (1983)

- [Böhnelt et al 1987] Böhnelt, H., Reismann, N., Jäger, G., Haverkamp, U., Negendank, J.F.W., Schmincke, H.-U., Paleomagnetic investigation of Quaternary West Eifel volcanics (Germany): indication for increased volcanic activity during geomagnetic excursion/event? *J. Geophys.*, **62**, 50–61, (1987).
- [Böhnelt et al 1982] Böhnelt, H., Kohnen, H., Negendank, J., Schmincke, H.-U., Palaeomagnetism of Quaternary volcanics of the East-Eifel, Germany, *J. Geophys.*, **51**, 29–37, (1982)
- [Bouligand et al 2005] Bouligand, C., Hulot, G., Khokhlov, A., Glatzmaier, G.A., Statistical paleomagnetic field modelling and dynamo numerical simulation, *Geophys. J. Int.*, **161**, 603–626, (2005)
- [Constable & Parker 1988] Constable, C. G., and Parker, R. L.: Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 Myr, *J. Geophys. Res.*, **93**, 11569–11581, (1988)
- [Constable & Johnson 1999] Constable, C. G., and Johnson, C. L.: Anisotropic paleosecular variation models: implications for geomagnetic field observables, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **115**, 35–51, (1999)
- [Hatakeyama & Kono 2001] Hatakeyama, T., Kono, M., Shift of the mean magnetic field values; effect of scatter due to secular variation and errors, *Earth Planets Space*, **53**, 31–44, (2001)
- [Hatakeyama & Kono 2002] Hatakeyama, T., Kono, M., Geomagnetic field model for the last 5 My; time-averaged field and secular variation, Paleosecular variation and reversals of the Earth’s magnetic field, *Phys. Earth Planet. Int.*, **133**, 181–215, (2002)
- [Hongre et al 1998] Hongre, L., Hulot, G., Khokhlov, A.: An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years, *Phys. Earth Planet. Int.*, **106**, 311–315, (1998)
- [Hulot & Bouligand 2005] Hulot, G., Bouligand, C., Statistical paleomagnetic field modelling and symmetry considerations, *Geophys. J. Int.*, **161**, 591–602, (2005)
- [Hulot et al 2002] Hulot, G., Eymin, C., Langlais, B., Mandea, M., Olsen, N.: Smallscale structure of the geodynamo inferred from Oersted and Magsat satellite data, *Nature*, **416**, 620–623, (2002)
- [Hulot & Gallet 1996] Hulot, G., Gallet, Y.: On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves, *Phys. Earth Planet. Int.*, **95**, 37–53, (1996)

- [Hulot & Le Mouél 1994] Hulot, G., Le Mouél, J-L.: A statistical approach to the Earth's main magnetic field, *Phys. Earth Planet. Int.*, **82**, 167–183, (1994)
- [Jackson et al 2000] Jackson, A., Jonkers, A.R.T., Walker, M.R.: Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records, *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 957–990., (2000)
- [Johnson & Constable 1996] Johnson, C., and Constable, C.: Paleosecular variation recorded by lava flows over the last 5 Myr, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **354**, 89–141, (1996)
- [Khokhlov et al 2001] Khokhlov A., Hulot G., Carlot J.: Towards a self-consistent approach to paleomagnetic field modelling, *J. Int. Geoph.*, **145**, 157–171, (2001)
- [Kono et al 2000a] Kono, M., Tanaka, H., Tsukanawa, H., Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data: the case of linear mapping, *J. Geophys. Res.*, **105**, 5817–5833, (2000a)
- [Kono et al 2000b] Kono, M., Sakuraba, A., Ishida, M., Dynamo simulations and paleosecular variation models., *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A*, **358**, 1123–1139, (2000b)
- [Kono & Tanaka 1995] Kono, M., and Tanaka, H.: Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation, *J. Geomag. Geoelectr.*, **47**, 115–130, (1995)
- [Korte & Constable 2005] Korte, M., Constable, C.G., Continuous geomagnetic field models for the past 7 millennia: 2. CALS7K *Geochem. Geophys. Geosys.*, **6**, 2004GC000801, (2005)
- [Love & Constable 2003] Love, J.J., Constable, C.G., Gaussian statistics for paleomagnetic vectors, *Geophys. J. Int.*, **152**, 515–565, (2003)
- [Marsaglia & Marsaglia 2004] Marsaglia, G., Marsaglia, J.C.W.: Evaluating the Anderson-Darling Distribution, *Journal Statistical Software*, **9**, Issue 5, (2004)
- [McElhinny & McFadden 2000] McElhinny, M., McFadden, P.: Paleomagnetism Continents and oceans, *International Geophysics Series*, **73**, Academic Press (2000)
- [McElhinny & McFadden 1997] McElhinny, M., McFadden, P.: Paleosecular variation over the past 5Myr based on a new generalized database, *Geophys. J. Int.*, **131**, 240–252, (1997)

- [McMillan et al 2001] McMillan, D.G., Constable, C.G., Parker R.L., Glatzmaier, G.A.: A statistical analysis of magnetic fields from some geodynamo simulations, *Geochem. Geophys. Geosys.*, **2**, 2000GC000130, (2001)
- [Merrill et al 1996] Merrill, R., McElhinny, M., McFadden, P.: The magnetic field of the Earth, *Academic Press*, London (1996)
- [Perrin & Schnepf 2004] Perrin, M., and Schnepf, E.: IAGA paleointensity database: distribution and quality of the data set, *Phys. Earth Planet. Int.*, **147**, 255–267, (2004)
- [Press et al 1996] Press, C., Teukolsky, S., Vetterling, W., Flannery, B.: Numerical Recipes in C. Second edition, Cambridge (1996), see also <http://library.lanl.gov/numerical/index.html>.
- [Quidelleur & Courtillot 1996] Quidelleur, X., and Courtillot, V.: On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation, *Phys. Earth Planet. Int.*, **95**, 55–77, (1996)
- [Quidelleur et al 1994] Quidelleur, X., Valet, J.-P., Courtillot, V., and Hulot, G.: Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years: an updated secular variation database, *Geophys. Res. Lett.*, **15**, 1639–1642, (1994)
- [Tanaka et al 1995] Tanaka, H., Kono, M., Uchimura, H.: Some global features of paleointensity in geological time, *Geophys. J. Int.*, **120**, 97–102. (1995)
- [Tauxe 2005] Tauxe, L.: Inclination flattening and the geocentric axial dipole, *Earth Planet. Sci. Lett.*, **233**, 247–261, (2005)
- [Tauxe & Kent 2004] Tauxe, L., Kent, D. V.: A simplified statistical model for the the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations: was the ancient magnetic field dipolar? in *Timescales of the Paleomagnetic field*, eds Channell J. E. T., Kent D. V., Lowrie W., Meert J., *Am. Geophys. Un. Monogr.*, **145**, 101–115, (2004)

	CP	QC	CJ	JC	TK
$E(g_1^0)$	-30.0	-30.0	-30.0	-30.0	-18.0
$E(g_2^0)$	-1.8	-1.2	-1.5	-1.5	0.0
σ_1^0	3.0	3.0	11.72	11.72	6.36
σ_1^1	3.0	3.0	1.67	1.67	1.67
σ_2^0	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
$\sigma(g_2^1)$	2.14	4.3	4.06	1.16	2.20
$\sigma(h_2^1)$	2.14	4.3	4.06	8.12	2.20
σ_2^2	2.14	1.3	1.16	1.16	0.58
α	27.7	27.7	15.0	15.0	7.5
β					3.8

Table 1: Parameters defining models CP, QC, CJ, JC and TK. Units are in μT , except for β only defined for model TK and which is dimensionless (see main text for further details). Parameters defining model HK are to be found in Table 2 of [Hatakeyama & Kono 2002].

Site	Lat (deg)	Lon (deg)	N
1	19.50	205.00	112
2	39.00	29.00	16
3	-35.50	173.60	21
4	43.40	2.80	31
5	38.70	332.80	21
6	4.50	9.50	14
7	3.50	9.00	37
8	-38.80	77.50	14
9	-21.10	55.50	17
10	-46.50	52.20	40
11	-46.50	51.70	34
12	-46.90	37.80	16
13	19.00	-99.00	36
14	-27.10	250.80	53
15	35.10	139.00	8
16	46.00	3.00	38
17	50.00	7.00	44
18	50.00	7.00	44
19	19.00	261.00	39
20	37.70	241.00	33
21	35.00	139.00	35
22	35.00	139.00	23
23	-1.00	271.00	16
24	-38.00	77.00	25
25	-21.00	55.00	27
26	-36.90	174.80	17
27	71.10	8.20	10
28	38.20	140.50	11
29	38.50	14.90	33
30	41.70	238.50	19
31	57.20	189.70	8
32	60.00	194.00	13
33	19.30	-101.00	9
34	20.10	-155.50	10
35	38.20	15.30	45
36	28.80	342.30	21

Table 2: Site number, latitude, longitude and number of directional estimates available for each of the 36 sites of the test data set used in the present study.

	CP	QC	CJ	JC	TK	HK
KS-Test with exact method	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5	12.5
KS-Test with app. method	12.5	12.5	7.5	7.5	12.5	12.5
AD-Test with exact method	12.5	12.5	N.A.	N.A.	12.5	12.5
AD-Test with app. method	12.5	12.5	N.A.	N.A.	12.5	12.5

Table 3: Domain of validity of the tests used in the present study. The test can be considered reliable if the error affecting the data is less than the α_{95} value shown in the table (units in degrees).

model	error	KS				AD			
		approx.		exact		approx.		exact	
		M_N	$P(M_N)$	M_N	$P(M_N)$	I_N	$P(I_N)$	I_N	$P(I_N)$
CP	0.0			0.0855	0.00			22.3	0.00
	2.5	0.0804	0.00	0.0807	0.00	19.5	0.00	19.7	0.00
	4.7	0.0692	0.00	0.0705	0.00	13.7	0.00	14.3	0.00
	5.0	0.0666	0.00	0.0687	0.00	12.8	0.00	13.5	0.00
	7.5	0.0521	0.01	0.0539	0.01	5.88	0.00	6.90	0.00
	10.0	0.0374	0.12	0.0371	0.13	2.88	0.03	3.73	0.01
	12.5	0.0747	0.00	0.0728	0.00	6.73	0.00	6.76	0.00
QC	0.0			0.0415	0.06			2.57	0.05
	2.5	0.0360	0.15	0.0358	0.15	1.90	0.10	1.87	0.11
	4.7	0.0243	0.60	0.0247	0.58	0.766	0.51	0.734	0.53
	5.0	0.0230	0.67	0.0221	0.71	0.636	0.61	0.616	0.63
	7.5	0.0231	0.66	0.0274	0.44	0.590	0.66	0.869	0.43
	10.0	0.0467	0.03	0.0547	0.01	12.4	0.00	13.8	0.00
	12.5	0.0658	0.00	0.0779	0.00	25.2	0.00	27.5	0.00
CJ	0.0			0.169	0.00				
	2.5	0.163	0.00	0.161	0.00				
	4.7	0.149	0.00	0.143	0.00				
	5.0	0.146	0.00	0.139	0.00				
	7.5	0.121	0.00	0.108	0.00				
	10.0	0.0892	0.00	0.0709	0.00				
	12.5	0.0593	0.00	0.0371	0.13				
JC	0.0			0.203	0.00				
	2.5	0.193	0.00	0.190	0.00				
	4.7	0.171	0.00	0.163	0.00				
	5.0	0.167	0.00	0.157	0.00				
	7.5	0.128	0.00	0.115	0.00				
	10.0	0.0893	0.00	0.0657	0.00				
	12.5	0.0455	0.03	0.0259	0.51				
TK	0.0			0.0709	0.00			9.12	0.00
	2.5	0.0673	0.00	0.0650	0.00	8.27	0.00	7.93	0.00
	4.7	0.0586	0.00	0.0532	0.01	6.62	0.00	5.62	0.00
	5.0	0.0568	0.00	0.0508	0.01	6.39	0.00	5.30	0.00
	7.5	0.0525	0.01	0.0464	0.03	5.11	0.00	3.49	0.02
	10.0	0.0560	0.00	0.0441	0.04	6.42	0.00	5.28	0.00
	12.5	0.0683	0.00	0.0761	0.00	12.2	0.00	12.8	0.00
HK	0.0			0.156	0.00			68.8	0.00
	2.5	0.148	0.00	0.149	0.00	62.8	0.00	62.5	0.00
	4.7	0.133	0.00	0.131	0.00	49.3	0.00	48.8	0.00
	5.0	0.130	0.00	0.129	0.00	47.1	0.00	46.6	0.00
	7.5	0.102	0.00	0.0980	0.00	27.8	0.00	27.6	0.00
	10.0	0.0646	0.00	0.0638	0.00	11.3	0.00	11.6	0.00
	12.5	0.0365	0.14	0.0404	0.08	2.22	0.07	2.88	0.03

Table 4: Testing all models against an artificial data set produced from model QC and affected by errors of $\alpha_{95} = 4.7^\circ$. Results are shown for all models (first column), assuming various possible levels of errors (second column). For each of the KS and AD tests, both the approximate and exact methods have been used. Results are reported in the form of the M_N and $P(M_N)$ values for the KS test, and the I_N and $P(I_N)$ values for the AD test. Non-zero values of the $P(M_N)$ and $P(I_N)$ have been highlighted in bold. The AD test for the CJ and JC models being unreliable, their results have not been reported. Note also that when no error is being assumed (i.e. for a 0° error), the approximate method is not relevant and the calculation is directly carried out with the help of (8) in place of (13).

model	error	KS				AD			
		approx.		exact		approx .		exact	
		M_N	$P(M_N)$	M_N	$P(M_N)$	I_N	$P(I_N)$	I_N	$P(I_N)$
CP	0.0			0.0978	0.00			22.3	0.00
	5.0	0.0780	0.00	0.0787	0.00	13.2	0.00	13.9	0.00
	7.5	0.0574	0.00	0.0605	0.00	6.83	0.00	7.90	0.00
	10.0	0.0406	0.07	0.0430	0.05	4.49	0.01	5.83	0.00
	12.5	0.0757	0.00	0.0752	0.00	9.16	0.00	10.5	0.00
QC	0.0			0.0481	0.02			4.41	0.01
	5.0	0.0365	0.14	0.0382	0.11	1.60	0.16	1.48	0.18
	7.5	0.0247	0.58	0.0289	0.37	0.648	0.60	1.11	0.30
	10.0	0.0435	0.05	0.0555	0.00	2.97	0.03	5.00	0.00
	12.5	0.0715	0.00	0.0861	0.00	10.5	0.00	15.1	0.00
CJ	0.0			0.154	0.00				
	5.0	0.131	0.00	0.124	0.00				
	7.5	0.107	0.00	0.0957	0.00				
	10.0	0.0749	0.00	0.0574	0.00				
	12.5	0.0601	0.00	0.0419	0.06				
JC	0.0			0.168	0.00				
	5.0	0.136	0.00	0.129	0.00				
	7.5	0.105	0.00	0.0898	0.00				
	10.0	0.0737	0.00	0.0470	0.02				
	12.5	0.0530	0.01	0.0225	0.69				
TK	0.0			0.0642	0.00			8.53	0.00
	5.0	0.0566	0.00	0.0529	0.01	6.34	0.00	5.17	0.00
	7.5	0.0630	0.00	0.0567	0.00	5.64	0.00	3.98	0.01
	10.0	0.0706	0.00	0.0602	0.00	7.65	0.00	6.56	0.00
	12.5	0.0844	0.00	0.0701	0.00	14.0	0.00	15.0	0.00
HK	0.0			0.156	0.00			82.3	0.00
	5.0	0.134	0.00	0.133	0.00	56.5	0.00	54.4	0.00
	7.5	0.107	0.00	0.103	0.00	34.2	0.00	31.8	0.00
	10.0	0.0689	0.00	0.0703	0.00	14.7	0.00	13.1	0.00
	12.5	0.0409	0.07	0.0442	0.04	2.89	0.03	2.95	0.03

Table 5: Testing all models against the real test data set, assuming various error levels (this error being assumed to be the same for each data of the test data set). Results are presented as in Table 4.

model	KS		AD	
	M_N	$P(M_N)$	I_N	$P(I_N)$
“approximate” method				
CP	0.0773	0.00	13.1	0.00
QC	0.0319	0.26	1.48	0.18
CJ	0.131	0.00		
JC	0.138	0.00		
TK	0.0552	0.00	6.38	0.00
HK	0.125	0.00	54.3	0.00
“exact” method				
QC	0.0322	0.25	1.46	0.19

Table 6: Testing all models against the real test data set, using the true (published) error for each data. Those tests have been run only using the “approximate” method except in the case of model QC for which the “exact” method was also used (last line).

degree	KS		AD	
	M_N	$P(M_N)$	I_N	$P(I_N)$
1	0.362	0.00	645.	0.00
2	0.0808	0.00	21.3	0.00
3	0.0467	0.03	4.36	0.01
4	0.0356	0.16	2.13	0.08
5	0.0330	0.23	1.64	0.15
6	0.0323	0.25	1.52	0.17
7	0.0319	0.26	1.48	0.18
8	0.0319	0.26	1.47	0.18

Table 7: Convergence test. Model QC is tested here against the real test data set, using the true errors and the “approximate” method. The test is repeated eight times, taking into account more and more of the Gauss coefficients, up to successively degree 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, and finally 8.

site	KS				AD			
	approx.		exact		approx.		exact	
	M_N	$P(M_N)$	M_N	$P(M_N)$	I_N	$P(I_N)$	I_N	$P(I_N)$
1	0.106	0.15	0.105	0.16	1.81	0.12	1.73	0.13
2	0.149	0.84	0.163	0.75	0.626	0.62	0.598	0.65
3	0.284	0.05	0.286	0.05	3.63	0.01	3.63	0.01
4	0.106	0.86	0.105	0.86	0.485	0.76	0.478	0.77
5	0.122	0.90	0.115	0.93	0.576	0.67	0.542	0.70
6	0.162	0.82	0.162	0.82	1.01	0.35	0.991	0.36
7	0.0745	0.98	0.0762	0.98	0.401	0.85	0.413	0.83
8	0.288	0.16	0.287	0.16	2.96	0.03	2.92	0.03
9	0.265	0.15	0.264	0.16	1.28	0.24	1.27	0.24
10	0.208	0.05	0.211	0.05	3.46	0.02	3.33	0.02
11	0.167	0.27	0.165	0.29	1.46	0.19	1.46	0.19
12	0.199	0.50	0.198	0.51	0.469	0.78	0.458	0.79
13	0.156	0.32	0.158	0.30	2.08	0.08	2.23	0.07
14	0.0867	0.80	0.0878	0.79	0.686	0.57	0.625	0.62
15	0.304	0.38	0.325	0.30	2.71	0.04	2.88	0.03
16	0.116	0.66	0.108	0.74	0.876	0.43	0.789	0.49
17	0.234	0.01	0.233	0.01	2.81	0.03	2.83	0.03
18	0.287	0.00	0.288	0.00	8.67	0.00	8.76	0.00
19	0.185	0.12	0.195	0.09	2.31	0.06	2.49	0.05
20	0.136	0.55	0.136	0.54	0.618	0.63	0.614	0.63
21	0.212	0.07	0.201	0.10	1.88	0.11	1.67	0.14
22	0.200	0.28	0.198	0.30	1.77	0.12	1.85	0.11
23	0.199	0.51	0.199	0.50	1.08	0.32	1.08	0.32
24	0.147	0.62	0.158	0.52	1.79	0.12	1.91	0.10
25	0.198	0.21	0.199	0.21	2.41	0.06	2.48	0.05
26	0.0941	1.00	0.0916	1.00	0.301	0.94	0.315	0.93
27	0.222	0.65	0.239	0.56	0.796	0.48	0.846	0.45
28	0.368	0.08	0.373	0.07	2.64	0.04	2.79	0.04
29	0.140	0.50	0.141	0.50	0.908	0.41	0.994	0.36
30	0.364	0.01	0.357	0.01	2.52	0.05	2.43	0.05
31	0.327	0.30	0.321	0.32	1.64	0.15	1.64	0.15
32	0.179	0.76	0.179	0.76	1.45	0.19	1.40	0.20
33	0.209	0.78	0.210	0.77	0.925	0.40	0.927	0.40
34	0.273	0.38	0.274	0.38	1.47	0.19	1.45	0.19
35	0.248	0.01	0.240	0.01	3.42	0.02	3.23	0.02
36	0.119	0.91	0.112	0.94	0.480	0.77	0.455	0.79

Table 8: Testing model QC against the real test data set on a site by site basis. The true errors and both the “approximate” and “exact” methods are being used. For each site, results are provided for both the KS and AD tests.

K	$\alpha_{\{0.95\}}$	$\varepsilon(0.1)$	$\varepsilon(0.2)$	$\varepsilon(0.3)$	$\varepsilon(0.4)$	$\varepsilon(0.5)$	$\varepsilon(0.6)$	$\varepsilon(0.7)$	$\varepsilon(0.8)$	$\varepsilon(0.9)$
25	28.3°	0.004	0.006	0.009	0.009	0.009	0.009	0.006	0.003	0.000
100	14°	0.001	0.001	0.002	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000
225	9.4°	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
400	7.0°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
625	5.6°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2500	2.8°	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Table 9: Departure $\varepsilon(P)$ (as defined by (18)) of the probability P predicted by the Angular Gaussian distribution from that of the Fisher distribution it approximates, for various values of P and of the concentration parameter K (and corresponding α_{95} values).

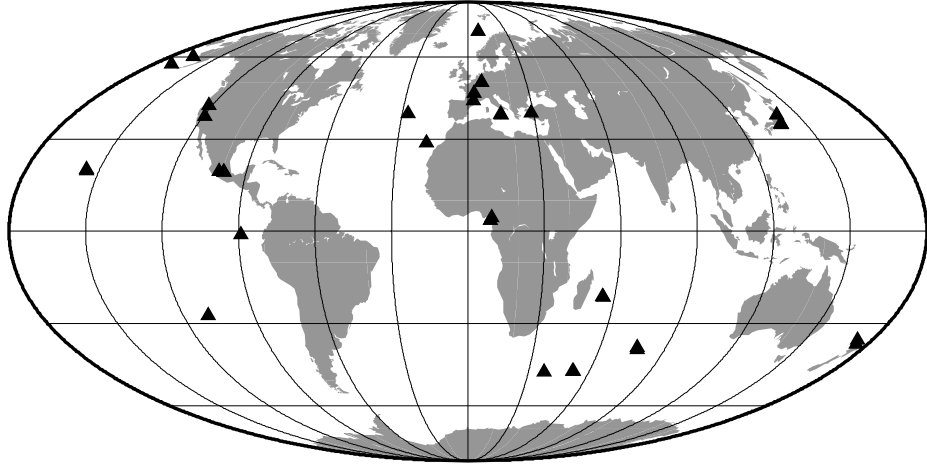


Figure 1: Locations of the 36 sites of the test data set used in the present study.

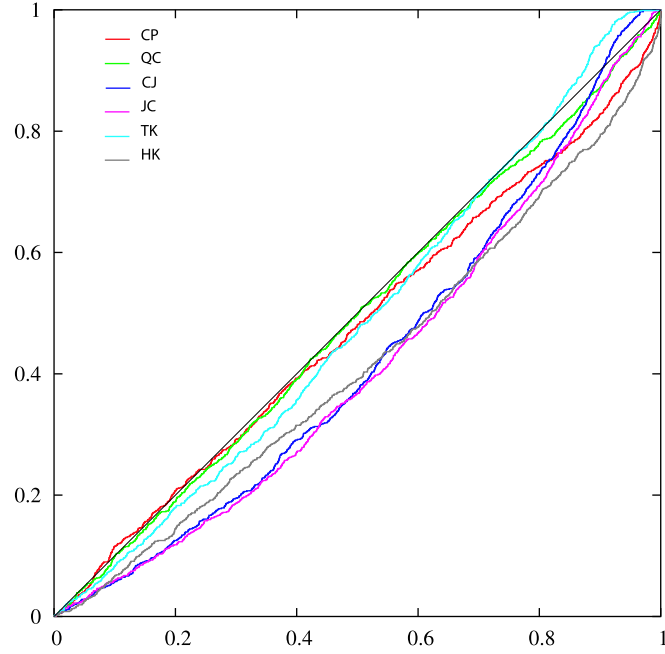


Figure 2: Cumulative distribution functions (cdf) of the $N=990$ uniformized data $\{t_i\}$ for each of the six models, when testing them against the real test data set, assuming the true errors and using the “approximate” method. Those cdfs lead to the M_N , $P(M_N)$, I_N , $P(I_N)$ shown in Table 6. In the case of model QC, the cdf obtained when using the “exact” method leads to a cdf almost indistinguishable from the one shown here. Color code: CP(red), QC(green), CJ(dark blue), JC(pink), TK(light blue), HK(black).

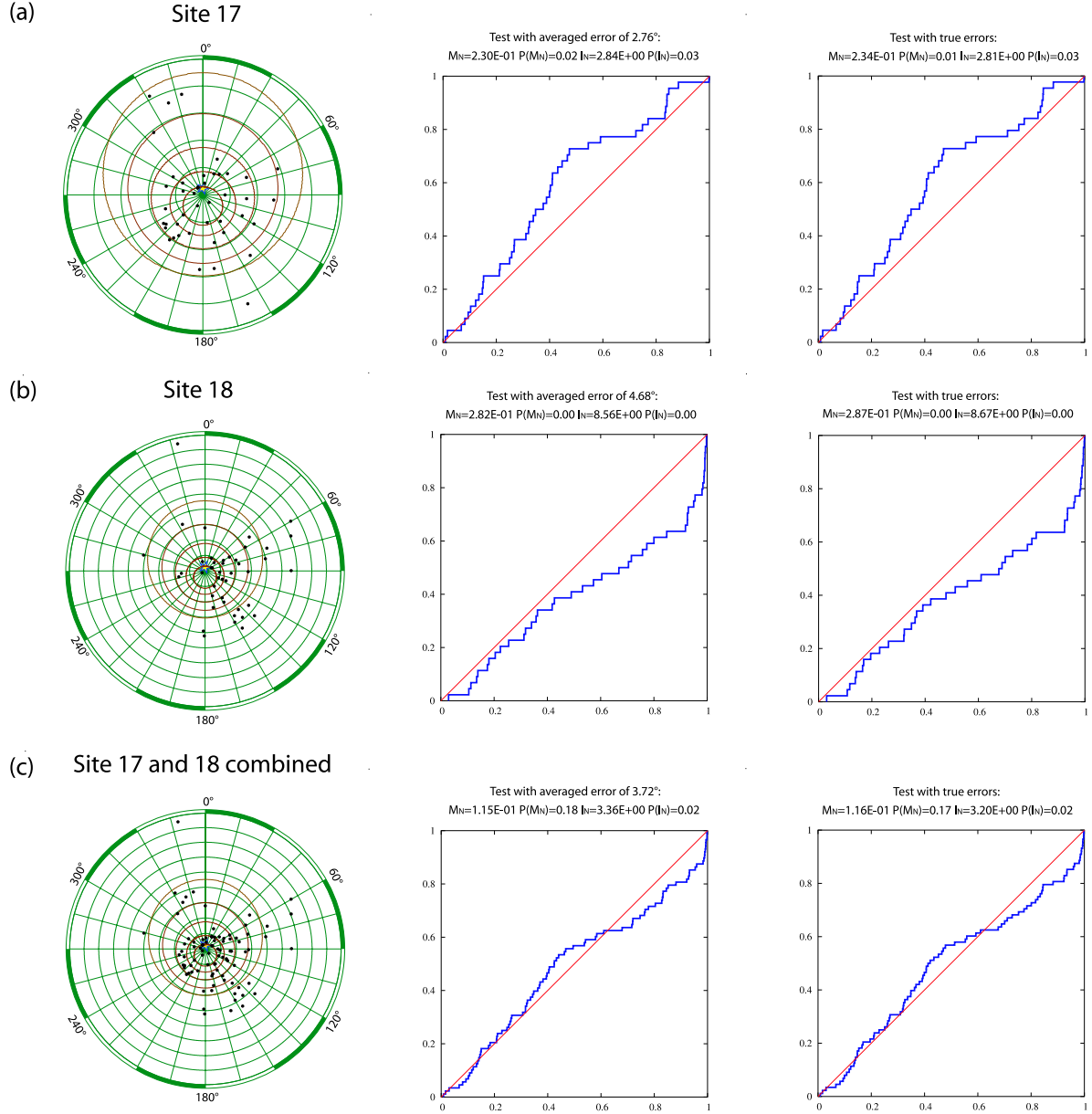


Figure 3: Local tests for model QC at sites 17 (a), 18 (b), and both sites combined (c). Left column shows the way the directional data plots on the unit sphere Σ which is Lambert-projected, the centre point (pointing downwards through the page) corresponding to the direction produced by a pure axial dipole at the site; North is towards the top of the page, East towards the right. Angular distances with respect to the centre of the plot are shown every 5° (green circles). Isovalues of the $p_i(\mathbf{u})$ (computed with $\alpha_{95} = 2.76^\circ$ for site 17 (a), $\alpha_{95} = 4.68^\circ$ for site 18 (b), and $\alpha_{95} = 3.72^\circ$ for both sites combined (c)) are also shown as red ellipses. Those correspond to the bounds within which respectively 10%, 30%, 50%, 70%, 90% of the data points should plot. Central column shows the cdf of the corresponding uniformized data $\{t_i\}$. Right column shows the analogous cdf when the true errors are used.

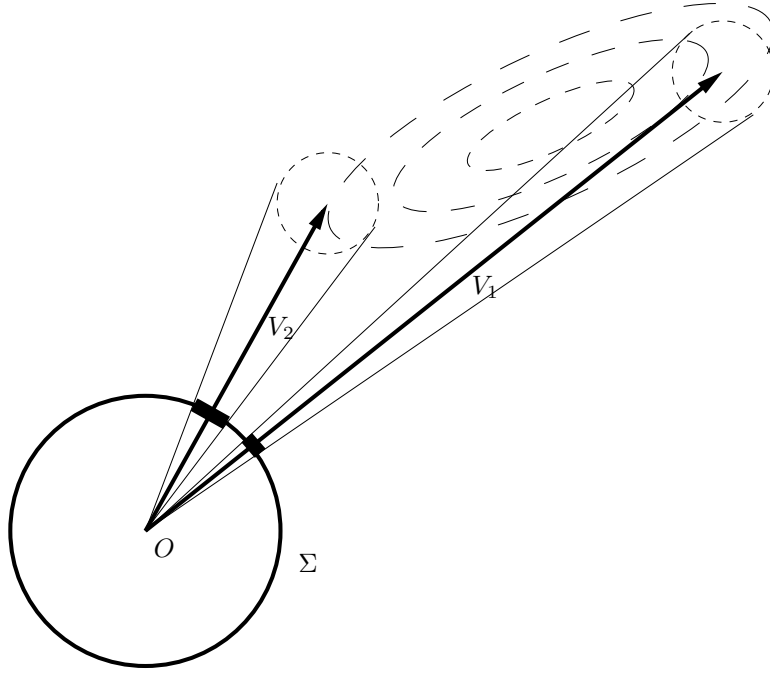


Figure 4: Applying the same 3D Gaussian error $\mathbf{g}_e(\mathbf{x})$ (as symbolised by the two small-dash circles) to two different realisations $\mathbf{V}_1$ and $\mathbf{V}_2$ of a general 3D Gaussian distribution $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ (symbolised by the dashed ellipses), leads to different Angular Gaussian errors on the unit sphere Σ if $|\mathbf{V}_1|$ is larger than $|\mathbf{V}_2|$ (as symbolised by the thick arcs on Σ).

Chapitre 4

Etude des fluctuations temporelles de l'intensité du champ géomagnétique entre les chrons 33r et 19r (83-41 Ma) à partir des profils magnétiques marins de surface

Le but de ce chapitre est l'étude des fluctuations temporelles de l'intensité du champ géomagnétique au cours d'une longue période de temps, entre les chrons 33r et 19r (83-41 Ma). Cette période étant caractérisée par une augmentation progressive de la fréquence des inversions, on peut se demander si une évolution de l'amplitude de la variation séculaire s'observe en parallèle. Dans ce but, nous avons utilisé les nombreux profils magnétiques de surface disponibles dans les bases de données et dont les anomalies de courte longueur d'onde peuvent fournir des informations sur les variations rapides du champ géomagnétique.

De manière à distinguer parmi les anomalies de courte longueur d'onde celles associées aux fluctuations temporelles du champ géomagnétique de celles associées à des complexités de la structure de la croûte océanique, on recherche si ces anomalies sont observées de façon semblable dans des régions éloignées les unes des autres. Dans ce but, plusieurs zones d'étude ont été sélectionnées dans les océans Indien et Pacifique, caractérisés par des taux d'expansion élevés et bénéficiant donc d'une meilleure résolution temporelle. De manière à pouvoir comparer les mesures effectuées dans ces différentes zones distantes, les profils d'anomalies magnétiques sont tout d'abord réduits au pôle (cette transformation consiste à calculer les profils d'anomalies magnétiques qui seraient observés dans le cas

où l'aimantation de la croûte et le champ magnétique ambiant sont verticaux). Au sein de chaque zone d'étude, les profils sont ensuite calés en temps et sommés de manière à ne conserver que le signal cohérent. La comparaison des stacks ainsi obtenus permet de mettre en évidence de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde cohérentes sur de grandes distances (ou “tiny wiggles”). Ces tiny wiggles peuvent être associés soit à des fluctuations d'intensité du champ géomagnétique, soit à des intervalles courts de polarité. La nature et la distribution temporelle de ces événements a été étudiée.

Ce chapitre présente tout d'abord les mesures magnétiques marines de surface et leur signification puis le traitement effectué pour la mise en évidence des tiny wiggles, enfin un résumé succinct des résultats de l'étude. Cette étude fait l'objet d'un article accepté pour publication à *Earth and Planetary Science Letters*.

4.1 Les mesures magnétiques marines

4.1.1 Acquisition

Les données exploitées dans cette étude sont des mesures d'intensité du champ géomagnétique acquises par un magnétomètre à précession de protons tracté à la surface de l'océan. Ce dispositif permet d'obtenir des mesures magnétiques scalaires absolues, en éloignant le magnétomètre des perturbations magnétiques causées par le navire. En revanche, il ne permet pas d'obtenir des mesures vectorielles des trois composantes du champ. La figure 4.1 présente le dispositif utilisé pour l'acquisition des mesures magnétiques de surface durant la campagne MAGOFOND 3 (à laquelle j'ai participé en juillet-août 2005). La position du navire est connue grâce à une antenne GPS.

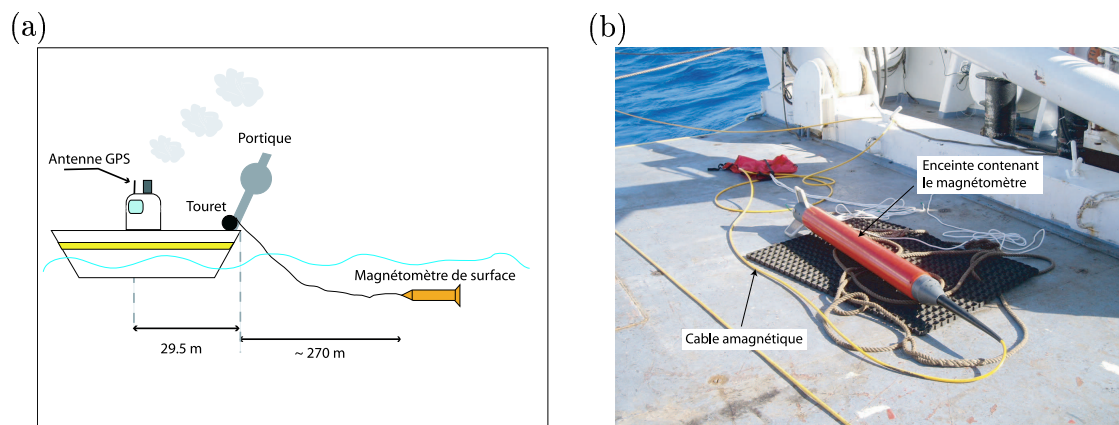


FIG. 4.1 – Schéma du dispositif (a) et image du magnétomètre (b) utilisés pour les mesures magnétiques scalaires de surface pendant la campagne MAGOFOND 3.

4.1.2 Origine des anomalies magnétiques marines

Comme on l'a vu au chapitre 1, le champ géomagnétique mesuré à la surface de la Terre peut avoir plusieurs sources : le fonctionnement de la géodynamo dans le noyau externe (champ principal), l'aimantation de la croûte, enfin des courants électriques dans la ionosphère et la magnétosphère (champ externe). Le champ principal est bien connu grâce aux mesures par satellites et dans les observatoires. Il correspond aux grandes longueurs d'onde du champ géomagnétique (harmoniques sphériques de bas degré). La contribution du champ principal peut être facilement retranchée. A partir d'une mesure ponctuelle de l'intensité du champ géomagnétique, on calcule une anomalie magnétique de champ total (anomalie scalaire) en retranchant à l'intensité du champ mesurée celle du champ principal calculée à partir d'un modèle IGRF (*International Geomagnetic Reference Field*) [Maus et al., 2005]. Soit $\vec{B}$ le champ principal, $\Delta\vec{B}$ la contribution des autres sources de champ magnétique, l'anomalie de champ total vaut alors :

$$\Delta T = \underbrace{\left| \vec{B} + \Delta\vec{B} \right|}_{\text{mesuré}} - \underbrace{\left| \vec{B} \right|}_{\text{calculé}} \quad (4.1)$$

Le champ d'origine externe étant généralement négligeable devant le champ d'origine interne (excepté lors des orages magnétiques), les anomalies magnétiques ainsi calculées sont donc principalement associées à l'aimantation de la croûte. Par ailleurs, le champ d'origine crustale étant généralement très petit par rapport au champ principal, l'anomalie ΔT est à peu près égale au projeté de $\Delta\vec{B}$ dans la direction du champ principal $\vec{B}$.

La structure verticale de la croûte océanique formée à taux d'expansion rapide est relativement simple. Les études de sismique ont montré qu'elle comprend différentes couches horizontales caractérisées par différentes vitesses des ondes sismiques. L'aimantation y est principalement portée par la couche la plus superficielle constituée de basaltes extrusifs (mis en place à la surface du plancher océanique, sous l'eau) sur une épaisseur de 500 m environ [*e.g.*, Dyment et Arkani-Hamed, 1995]. Dans les océans dont le taux d'expansion est lent, la croûte océanique est beaucoup moins épaisse que dans les océans rapides (voir discontinuë) et généralement affectée par des failles normales. Des roches plus profondes peuvent également porter une aimantation non négligeable associée à la formation de magnétite par serpentinisation de l'olivine lors de l'altération du manteau superficiel et/ou de la croûte [Dyment et al., 1997]. Les mesures magnétiques exploitées dans ce chapitre provenant d'océans dont le taux d'expansion est rapide, nous avons supposé par la suite que l'aimantation de la croûte est portée par une couche de 500 m d'épaisseur. Une couche plane d'aimantation uniforme ne créant pas de champ magnétique [*e.g.*, Blakely, 1996], les anomalies magnétiques observées à la surface des océans sont donc associées soit à la

topographie de la couche aimantée, soit à des contrastes d'aimantation dans la couche aimantée.

L'aimantation de la croûte océanique comprend une partie induite et une partie rémanente. L'aimantation rémanente est une aimantation "figée", proportionnelle au champ magnétique ancien lors de la mise en place de la roche (refroidissement pour une lave). L'aimantation induite est une aimantation "non figée" proportionnelle au champ ambiant actuel (le facteur de proportionnalité s'appelle la susceptibilité magnétique). Le champ ambiant pouvant être considéré comme uniforme à l'échelle locale, en l'absence de topographie et de variations des propriétés magnétiques des roches de la croûte, l'aimantation induite de la croûte océanique ne crée pas de champ magnétique. Par ailleurs, le facteur de Koenigsberger (rapport de l'aimantation rémanente sur l'aimantation induite) des basaltes étant de l'ordre de 10 [*e.g.*, Wooldridge et al., 1990], les anomalies magnétiques océaniques sont principalement associées à l'aimantation rémanente du niveau basaltique extrusif de la croûte océanique.

La figure 4.2 présente une zone du Pacifique Nord sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques d'orientation est-ouest disponibles. Ces profils magnétiques sont très bien corrélés et montrent des linéations nord-sud. Ces linéations magnétiques montrent que la structure horizontale de la croûte océanique est relativement simple au premier abord. Les linéations magnétiques s'expliquent par la mise en place de la croûte océanique au niveau des dorsales [Vine et Matthews, 1963]. Lors de son refroidissement, celle-ci acquiert une aimantation rémanente proportionnelle au champ ambiant puis migre, au fur et à mesure que de la nouvelle croûte est mise en place à l'axe de la dorsale. Les roches du plancher océanique enregistrent de cette façon les variations temporelles du champ géomagnétique. Les profils magnétiques marins acquis selon une direction perpendiculaire aux linéations magnétiques montrent une succession caractéristique d'anomalies, dont les plus importantes sont associées à l'enregistrement des inversions du champ géomagnétique par la croûte. En effet, ces anomalies peuvent être assez bien prédites si on suppose que la croûte est constituée d'une succession de prismes rectangulaires, allongés selon la direction des linéations, d'aimantation normale et inverse [Vine et Matthews, 1963]. La limite entre les "blocs" d'aimantation alternativement inverse et normale n'est en réalité pas verticale. Les coulées de lave mises en place à l'axe de la dorsale s'étendent sur une certaine largeur. La partie supérieure de la croûte océanique, à une distance donnée de la dorsale, est donc composée d'une superposition de coulées de laves d'âges différents et donc d'aimantations différentes. Les changements de polarité sont ainsi enregistrés par les basaltes extrusifs sur un plan incliné, sur une distance horizontale de l'ordre du kilomètre [Macdonald et al., 1983; Tivey et al., 1998]. Si on suppose que la répartition du volume de lave mis en place suit une loi gaussienne centrée sur l'axe de la dorsale, ce qui n'est

pas déraisonnable, le profil d'aimantation est le résultat de la convolution des variations temporelles du champ géomagnétique et d'une demi-gaussienne [Schouten et McCamy, 1972]. Les processus d'accrétion à la dorsale ont donc pour conséquence un lissage des variations temporelles enregistrées par la croûte océanique.

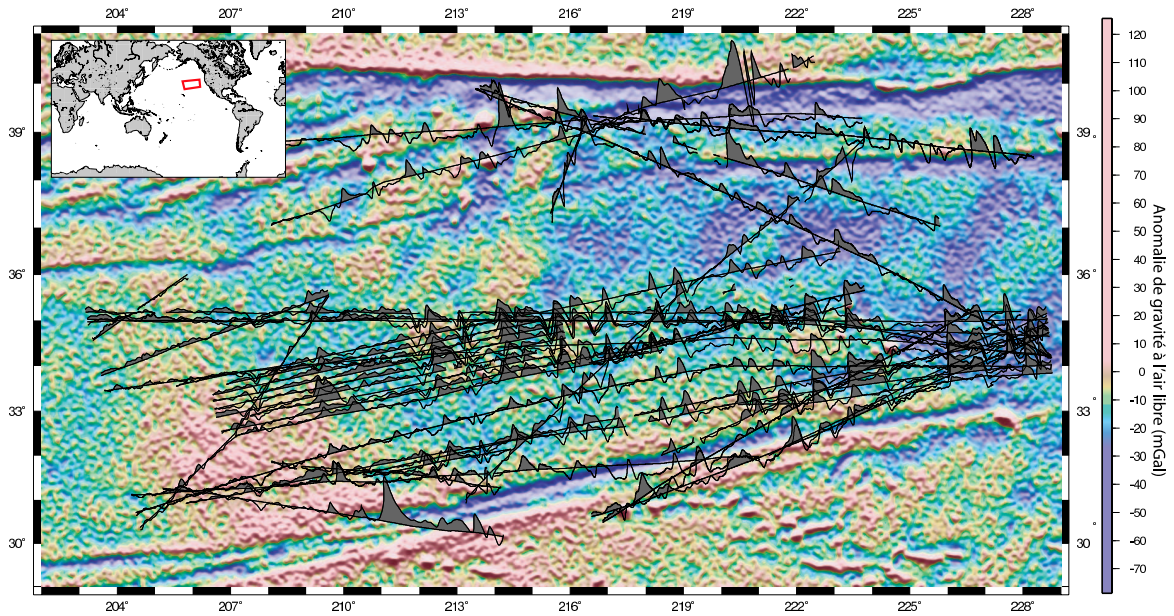


FIG. 4.2 – Zone du Pacifique Nord (localisée dans l'encadré) sur laquelle sont représentés la carte des anomalies de gravité à l'air libre de Sandwell et Smith [1997] (échelle de couleur) ainsi que des profils d'anomalies magnétiques représentés de part et d'autre de la route des navires. Les valeurs de l'anomalie magnétique sont représentées en rabattus, c'est à dire projetées le long des routes suivant la perpendiculaire à la direction d'expansion. Les anomalies positives sont grisées. La carte des anomalies de gravité fournit une image de la structure du plancher océanique et permet la localisation des complexités de la croûte océanique au niveau desquelles le signal associé à l'enregistrement des variations temporelles du champ géomagnétique peut être altéré.

Les linéations magnétiques sont rarement continues sur de très grandes distances. Dans certaines zones, les anomalies magnétiques ne montrent pas de cohérence. Des anomalies peuvent en effet être associées à des complexités de la structure du plancher océanique (topographie, zone de fracture, monts sous-marins, etc), elles-mêmes liées aux processus d'accrétion ou à une tectonique postérieure à sa mise en place. Les zones de fracture,

héritées du fonctionnement de deux segments de dorsale décalés, sont reconnues par un décalage des linéations magnétiques. Le contraste d'aimantation associé au contact de deux croûtes d'âges différents et la topographie du socle basaltique peuvent produire une anomalie magnétique importante à l'aplomb de ces zones de fracture. Les mesures bathymétriques et gravimétriques, généralement effectuées en même temps que les mesures magnétiques, permettent de contrôler la structure du plancher océanique. Lorsque la croûte océanique est âgée, le socle basaltique (porteur de l'aimantation) est généralement "ennoyé" sous une épaisse couche de sédiments cachant les structures telles que les zones de fracture et les monts sous-marins. Les mesures bathymétriques n'apportent pas d'informations. Les mesures gravimétriques permettent néanmoins de "voir" ces structures parce que les sédiments ont une densité plus faible que les roches du socle basaltique. Ces mesures en mer peuvent également être complétées par des mesures satellitaires. Une image de la structure du plancher océanique est ainsi fournie par la carte des anomalies de gravité à l'air libre de Sandwell et Smith [1997] déduites des mesures de la topographie des océans par altimétrie satellitaire. Cette carte obtenue par mesures satellitaires a une résolution spatiale beaucoup plus faible que les mesures de gravité effectuées à bord des navires, de l'ordre de 20 km. Elle ne permet pas en particulier de voir les structures les plus fines. Elle a cependant l'avantage de couvrir de façon homogène la surface des océans, en particulier aux endroits où les mesures directs de la gravité ne sont pas disponibles. C'est cette carte des anomalies de gravité à l'air libre qui est représentée en fond de carte sur la figure 4.2. Elle montre une région relativement homogène au niveau de laquelle les linéations magnétiques sont régulières et qui est encadrée au nord et au sud par des zones de fractures d'orientation approximative est-ouest. Des anomalies magnétiques importantes ne s'alignant pas avec les linéations sont observées au nord et au sud de la carte, à l'aplomb de ces zones de fractures.

L'étude des profils d'anomalies magnétiques orientés selon la direction d'expansion fournit donc des informations sur les fluctuations temporelles du champ géomagnétique. De manière à distinguer les anomalies associées à ce "signal" géomagnétique de celles associées à la structure de la croûte océanique, il est nécessaire d'étudier un grand nombre de profils répartis sur des régions distantes, de regarder si ces anomalies présentent des linéations magnétiques et si la succession des anomalies observées dans différents bassins de même âge peuvent s'expliquer par les mêmes fluctuations du champ géomagnétique (par exemple, la même succession d'intervalles de polarité).

4.1.3 Modélisation de la source des anomalies magnétiques

Les anomalies magnétiques associées à l'enregistrement des fluctuations temporelles du champ géomagnétique (et en particulier des inversions) pour une période donnée ne sont pas identiques d'un bassin à l'autre. Elles montrent des différences dans leur forme et leur amplitude en raison des différences d'orientation et d'intensité des vecteurs champ magnétique et aimantation, et du taux d'expansion. Pour comprendre la nature des sources et des fluctuations temporelles du champ géomagnétique responsables des anomalies magnétiques observées, on peut calculer des profils synthétiques d'anomalies magnétiques et les comparer aux profils mesurés.

Les profils synthétiques d'anomalies magnétiques océaniques peuvent être calculés à l'aide de l'algorithme de Talwani et Heirtzler [1964] en supposant que les sources magnétiques sont constituées de prismes rectangulaires d'aimantation normale ou inverse allongés selon la direction des linéations magnétiques [Vine et Matthews, 1963]. Un plan infini d'aimantation uniforme ne produisant pas de champ magnétique, comme nous l'avons déjà dit, le calcul est simplifié en ne prenant en compte que les blocs d'aimantation normale auxquels est attribuée une aimantation double [*e.g.*, Dyment, 1991]. La dimension horizontale des prismes est donnée par la durée des intervalles de polarité enregistrés par la croûte océanique, en supposant un taux d'expansion connu. On peut par exemple utiliser l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995]. La dimension verticale des blocs est fixée à 500 m. En raison de la subsidence thermique de la lithosphère océanique, la profondeur du plancher océanique augmente avec son âge. La profondeur des sources est donnée par la relation empirique de Parsons et Sclater [1977]. Le lissage du profil d'anomalies associé à la "largeur" des transitions de polarité dans la croûte océanique est reproduit simplement en calculant les anomalies magnétiques pour un taux d'expansion plus faible que le taux réel (méthode des "taux fictifs" [Tisseau et Patriat, 1981]). La direction et l'intensité de l'aimantation de la croûte océanique peuvent être estimées si les paléolatitudes et paléodirection d'expansion lors de sa mise en place sont connues grâce à des reconstructions paléogéographiques (par exemple celles de Royer et al. [1992]), joint à un modèle de dérive des pôles pour l'une des plaques (par exemple celui de Besse et Courtillot [1991] pour l'Afrique). Le vecteur aimantation est alors simplement proportionnel au champ magnétique ancien dont on suppose une géométrie dipolaire axiale géocentrique. Le champ ambiant actuel, auquel se superpose le signal de l'aimantation, est connu grâce aux modèles IGRF [Maus et al., 2005] (ou en supposant au premier ordre que le champ actuel est dipolaire).

La figure 4.3 présente des profils synthétiques d'anomalies magnétiques ainsi calculés dans la direction d'expansion pour un taux de 4 cm/an. Les profils calculés à l'aplomb d'une croûte océanique mise place et reposant aux pôles magnétiques, où les vecteurs

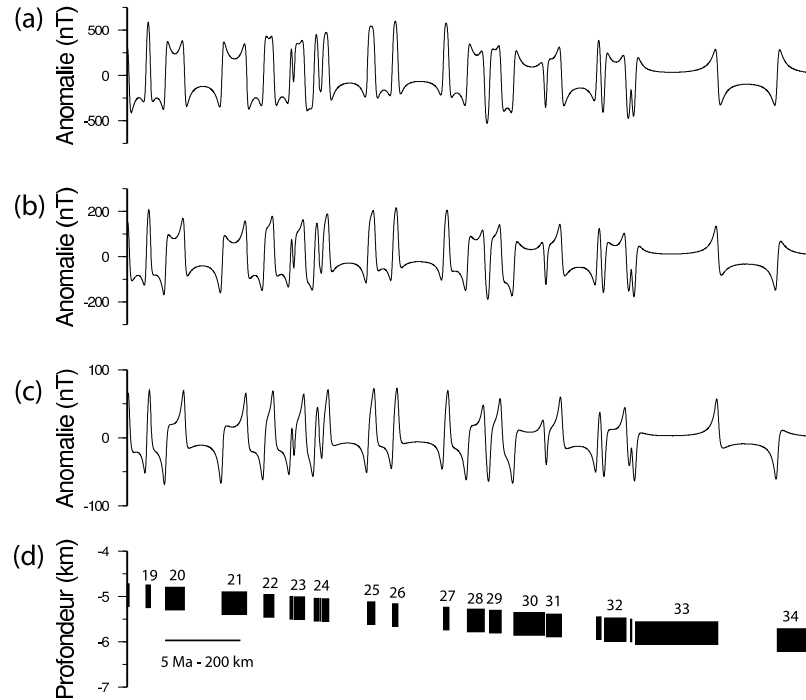


FIG. 4.3 – *Profils synthétiques d'anomalies magnétiques calculés à l'aplomb d'une croûte océanique mise en place pendant la période 40-85 Ma : (a) au pôle (création et observation au pôle Nord), (b) dans l'Océan Pacifique Nord, dans des conditions similaires à la zone présentée figure 4.2 (création et observations aux latitudes de 25°N et 35°N, dans une direction d'expansion N260) et (c) toujours dans l'Océan Pacifique Nord, dans une zone à plus basse latitude (création et observations aux latitudes de 10°N et 20°N, dans une direction d'expansion N260). (d) Modèle de blocs utilisé pour les calculs des profils synthétiques (périodes normales en noir).*

champ magnétique $\vec{B}$ et aimantation $\vec{M}$ sont alors verticaux, présentent des anomalies magnétiques symétriques localisées au dessus des blocs qui en sont la source (figure 4.3a). Pour les blocs les plus larges, l'anomalie magnétique est plus importante en limite de bloc, à l'aplomb du contraste d'aimantation, et décroît vers le centre du bloc. Selon la durée des périodes de polarité voisines, les anomalies ne sont cependant pas toujours exactement symétriques (voir par exemple les anomalies 30 et 31). Aux latitudes plus basses, les vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{M}$ ont une orientation quelconque et les anomalies magnétiques présentent une distorsion ou “skewness” (figures 4.3b et 4.3c). Les anomalies magnétiques sont affectées d'une phase non nulle et sont donc constituées de lobes positif et négatif qui donnent l'impression qu'elles sont décalées par rapport aux blocs qui en sont la source. L'amplitude

des anomalies dépend également de l'orientation des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{M}$ (figure 4.3). Elle est maximale aux pôles, lorsque ces vecteurs sont verticaux. Elle est minimale lorsque l'un des vecteurs $\vec{M}$ ou $\vec{B}$ est horizontal et orienté dans la direction d'allongement des blocs. Dans le cas où l'aimantation $\vec{M}$ est horizontale et orientée dans la direction des linéations magnétiques, le champ d'origine crustale $\Delta\vec{B}$ est nul. Dans le cas où le champ principal $\vec{B}$ est horizontal et orienté dans la direction des linéations magnétiques, le champ d'origine crustale $\Delta\vec{B}$ est perpendiculaire au champ principal $\vec{B}$. Par exemple, l'amplitude des linéations magnétiques d'orientation nord-sud observées dans l'Océan Pacifique Nord diminue lorsqu'on se rapproche de l'équateur (voir l'échelle verticale des figures 4.3b et 4.3c). En effet, le champ d'origine crustale $\Delta\vec{B}$ est orienté dans un plan vertical d'orientation est-ouest et est à peu près perpendiculaire au champ magnétique $\vec{B}$ horizontal et dirigé vers le nord.

4.1.4 Les anomalies magnétiques de courte longueur d'onde

Les profils synthétiques d'anomalies magnétiques calculés à partir de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995] rendent bien compte de la forme générale des anomalies magnétiques (on peut comparer les profils de la figure 4.2 au profil synthétique de la figure 4.3b). Les profils mesurés montrent également de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde et de faible amplitude. Certaines peuvent être associées à la structure de la croûte océanique, certaines peuvent être corrélées de profils à profils et sont donc sans doute associées à l'enregistrement des fluctuations temporelles du champ géomagnétique, ce qui nous intéresse tout particulièrement.

L'existence d'anomalies de très courtes longueur d'onde cohérentes sur de grande distances (ou “tiny wiggles”) a été mise en évidence par plusieurs études [Blakely et Cox, 1972; Blakely, 1974; Rea et Blakely, 1975; Cande et LaBrecque, 1974; Wilson et Hey, 1981; Cande et Kent, 1992a,b]. Ces anomalies sont associées soit à des intervalles courts de polarité, soit à des variations de l'intensité du dipôle géomagnétique. De manière à préciser leur origine, plusieurs études de magnétostratigraphie ont recherché la présence de courts intervalles de polarité pouvant correspondre à ces tiny wiggles. Ces études montrent que l'échelle des inversions telle que nous la connaissons [Cande et Kent, 1995] est à peu près complète. Seul un nombre restreint de tiny wiggles semblent être associés à de courts intervalles de polarité [*e.g.*, Acton et al., 2006]. La plupart des tiny wiggles semblent donc être associés à des fluctuations de l'intensité du champ géomagnétiques comme par exemple celles associées aux excursions [*e.g.*, Gee et al. 1996, 2000; Pouliquen et al. 2001a,b pour les périodes Brunhes et Matuyama; Bowles et al. 2003; Evans et

Channell 2003; Krijgsman et Kent 2004 pour le chron 5n.2n; Lanci et Lowrie 1997; Lanci et al. 2005 pour les chrons 12r et 13r].

L'étude des tiny wiggles peut donc fournir des informations sur les fluctuations de l'intensité du dipôle géomagnétique au cours des périodes anciennes et compléter les informations fournies par les études de magnétostratigraphie, principalement disponibles pour les derniers millions d'années [*e.g.*, Guyodo et Valet, 1999; Valet et al., 2005]. Dans l'étude présentée dans ce chapitre, nous avons exploité les nombreux profils de surface disponibles dans les bases de données pour rechercher de façon systématique l'existence d'anomalies de courte longueur d'onde cohérentes entre les différents bassins océaniques. Cette étude a porté sur une longue période de temps (41-83 Ma) de manière à étudier la distribution temporelle des événements associés à ces anomalies. Cette période de temps étant caractérisée par une augmentation progressive de la fréquence des inversions, nous souhaitons notamment regarder s'il existe une évolution similaire dans la distribution des tiny wiggles. Avant la présentation du traitement des données nécessaire à la mise en évidence des tiny wiggles, une discussion est présentée dans la section suivante sur la résolution temporelle des profils de surface.

4.1.5 Résolution temporelle des profils de surface

La résolution temporelle des profils de surface dépend de la hauteur d'eau (de la distance aux sources) et du taux d'expansion. Le plancher océanique des zones d'étude est daté de 41 à 83 Ma, sa profondeur théorique varie donc de ~ 4750 m à ~ 5550 m (d'après la relation de Parsons et Sclater [1977]). Le taux d'expansion varie de manière significative d'une zone d'étude à l'autre et au cours du temps (de 2cm/an à 10cm/an).

La résolution temporelle des profils de surface peut être estimée en représentant le spectre en énergie des profils magnétiques [*e.g.*, Schouten et McCamy, 1972; Blakely et al., 1973].

Spectre en énergie

Le spectre en énergie (transformée de Fourier au carré) obtenu à partir de profils d'anomalies magnétiques de surface montre une décroissance de l'énergie avec le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde (figure 4.4). On distingue dans ce spectre deux parties, caractérisées par des pentes différentes et correspondant sans doute à des sources différentes. Pour les nombres d'onde k inférieurs à 1.2 rad/km (longueurs d'onde supérieures à ~ 5 km), la pente du spectre est raide (pente de 11.7 km). Pour les nombres

d'onde supérieurs à 1.2 rad/km (longueurs d'onde inférieures à ~ 5 km), la pente du spectre est très faible (pente de 0.17 km, spectre quasi-plat).

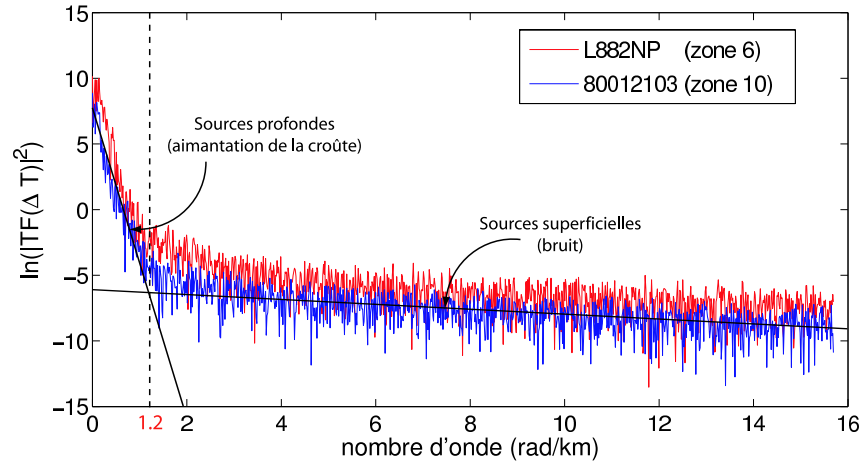


FIG. 4.4 – Logarithme népérien du spectre en énergie de deux profils d'anomalies magnétiques de surface en fonction du nombre d'onde ($k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde). Les deux profils présentés, L882NP et 80012103, sont extraits des zones 6 et 10 sélectionnées pour l'étude des anomalies 19r à 33r (voir l'annexe A).

On s'attend à observer un spectre plat pour une distribution aléatoire de sources magnétiques situées à l'altitude de mesure. Par contre, lorsque les sources sont profondes, les hautes fréquences sont plus atténuées que les basses fréquences. Le spectre présente une pente d'autant plus raide que les sources sont distantes de l'altitude de mesure. Si la distribution des sources est aléatoire, la pente du logarithme népérien du spectre en énergie en fonction du nombre d'onde est $-2z$, où z est la profondeur des sources [Spector et Grant, 1970]. La pente très faible du spectre en énergie pour les hautes fréquences indique que ces sources sont très superficielles. La profondeur estimée est de 86 m sous le niveau de la mer. Ces hautes fréquences sont dominées par le bruit. Ce bruit peut avoir diverses sources : bruit instrumental, perturbations du navire, champ externe, champ magnétique produit par les circulations océaniques, etc. La pente du spectre pour les basses fréquences indique une profondeur des sources à 5.85 km. Cette partie du spectre correspond au champ magnétique créé par l'aimantation rémanente de la croûte océanique.

La plus petite longueur d'onde au dessus du niveau de bruit est d'environ 5 km (correspondant à peu près à la hauteur d'eau). Ceci signifie qu'il n'est pas possible de détecter des micro-anomalies plus proches l'une de l'autre que 5 km environ et qu'une micro-anomalie dont la longueur d'onde est 5 km peut être provoquée par des fluctuations de l'aimantation de la croûte dont la longueur d'onde est de 5 km mais également par des fluctuations de plus courte longueur d'onde (mais dont le contenu spectral montre de plus grandes longueurs d'onde). Pour un taux d'expansion de 5 cm/an, une longueur d'onde de 5 km

correspond à une période de 100 ka. Ces effets peuvent être mis en évidence en calculant des profils d'anomalies magnétiques synthétiques.

Ambiguïté d'interprétation des profils d'anomalies magnétiques

La figure 4.5 présente des profils synthétiques calculés au pôle pour une hauteur d'eau de 5 km et un taux d'expansion de 5 cm/an, en supposant qu'une période normale longue de 4 Ma est interrompue par un intervalle court de polarité inverse ou de faible intensité. Les anomalies magnétiques produites par un intervalle inverse de 10 ka, une diminution d'intensité de 58.3% sur 50 ka ou de 76.5% sur 100 ka sont ainsi par exemple tout à fait semblables (longueur d'onde et intensité similaires). La "largeur" de l'anomalie produite, définie par la distance entre les points d'inflexion encadrant le minimum d'intensité, est alors de 5 km, correspondant à durée de 100 ka pour le taux d'expansion de 5 cm/an. Les anomalies magnétiques produites par des diminutions d'intensité sur des périodes de 200 ka ou 400 ka ont une "largeur" supérieure. La "largeur" minimale des anomalies observées sur ces profils synthétiques est donc de 5 km, correspondant à la hauteur d'eau. La longueur d'onde exacte des variations temporelles à l'origine de telles anomalies ne peut être connue à partir de l'étude seule de profils de surface.

La figure 4.6 présente des profils synthétiques calculés en supposant deux intervalles de polarité inverse de 10 ka. Lorsque ceux-ci sont distants de plus de 5 km (soit une durée de 100 ka pour un taux d'expansion de 5 cm/an), on observe deux minima d'intensité magnétique centrés chacun sur un des intervalles. Lorsque ceux-ci sont distants de moins de 5 km, un seul minimum est observé. L'anomalie observée est similaire à l'anomalie produite par un seul intervalle inverse de durée plus longue.

Les profils magnétiques de surface ne fournissent donc qu'un enregistrement filtré des variations temporelles du champ géomagnétique. Il n'est pas possible de distinguer les anomalies magnétiques produites par des variations rapides du champ géomagnétique telles que des intervalles courts de polarité ou des excursions, de celles produites par des variations d'intensité sur des périodes de temps plus longues. Enfin si la succession de fluctuations est vraiment très rapide, l'anomalie résultante ne permet plus la détection des événements individuels. Pour bénéficier d'une meilleure résolution, il est nécessaire de sélectionner des zones d'étude caractérisées par un taux d'expansion élevé ou de se rapprocher des sources en effectuant des mesures à proximité du plancher océanique. La quantité de profils magnétiques fond de mer actuellement disponibles est cependant trop réduite pour le but de notre étude. Les limites citées ci-dessus sont à garder en mémoire pour l'interprétation des tiny wiggles observés sur les profils de surface.

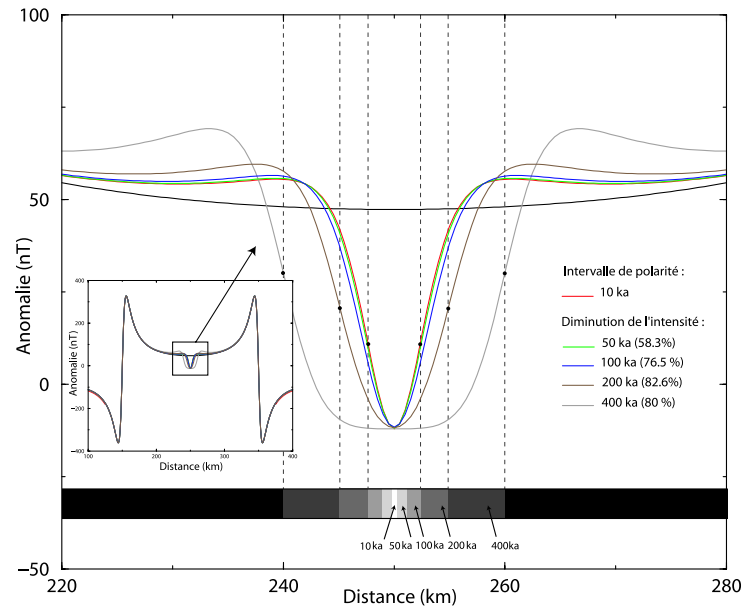


FIG. 4.5 – Profils synthétiques d'anomalies magnétiques au pôle calculés pour un taux d'expansion de 5 cm/an et une hauteur d'eau de 5 km, en supposant une période normale de 4 Ma, d'intensité constante (courbe noire); au cours de laquelle est observée un intervalle inverse de 10 ka (courbe rouge); une diminution d'intensité de 58.3% sur 50 ka (courbe verte); de 76.5% sur 100 ka (courbe bleue); de 82.6% sur 200 ka (courbe marron); de 80% sur 400 ka (courbe grise). Encadré : profils comprenant la période normale en entier. Figure principale : agrandissement montrant les 600 ka autour de l'intervalle court.

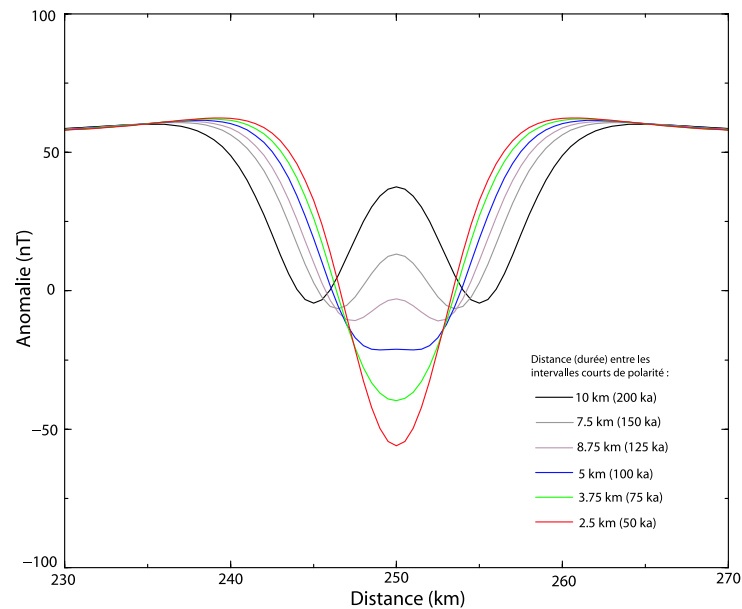


FIG. 4.6 – Profils synthétiques d'anomalies magnétiques au pôle calculés pour un taux d'expansion de 5 cm/an et une hauteur d'eau de 5 km, en supposant une période normale de 4 Ma, d'intensité constante au cours de laquelle sont observés deux intervalles courts inverses de 10 ka séparés par une période normale de 50 ka (courbe rouge); de 75 ka (courbe verte); de 100 ka (courbe bleue); de 125 ka (courbe marron); de 150 ka (courbe grise); de 200 ka (courbe noire).

4.2 Données et traitement

4.2.1 Sélection des données

Plusieurs zones d'étude ont été sélectionnées dans les océans Indien et Pacifique, caractérisés par des taux d'expansion élevés durant la période considérée, et pour lesquelles les profils d'anomalies magnétiques de surface bénéficient par conséquent d'une meilleure résolution temporelle. Dans chaque zone d'étude, les profils magnétiques, dont l'orientation est proche de la direction d'expansion, ont été extraits de deux bases de données :

- La *Marine Trackline Geophysics Database* fournie par le *National Geophysical Data Center* de Boulder, aux Etats-Unis (<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/geodas/trackline.html>)
- La base de données géophysiques françaises de l'Océan Indien maintenue par l'Institut de Physique du Globe de Strasbourg (http://barkeria.u-strasbg.fr/archivage/diffu_indien.html)

Les mesures bathymétriques et gravimétriques (disponibles également dans ces bases de données) et la carte des anomalies de gravité à l'air libre de Sandwell et Smith [1997] nous permettent de contrôler la nature des anomalies magnétiques de surface, et en particulier de sélectionner des mesures magnétiques qui ne sont pas affectées par des zones de fractures, des volcans sous-marins, ou d'autres complexités du plancher océanique qui risqueraient d'altérer le signal d'origine géomagnétique. La carte des anomalies de gravité des différentes zones d'étude, ainsi que l'ensemble des profils d'anomalies magnétiques de surface disponibles sont fournis et interprétés (en termes de linéations magnétiques et zones de fracture) dans l'annexe A.

4.2.2 Réduction au pôle

Comme nous l'avons vu, la forme des anomalies dépend de l'orientation du champ magnétique ambiant $\vec{B}$ et de l'aimantation $\vec{M}$ et une même distribution d'aimantation $M(x)$ produira des anomalies de formes différentes selon sa localisation géographique. De manière à s'affranchir de l'orientation de $\vec{B}$ et $\vec{M}$ et pouvoir comparer les profils d'anomalies magnétiques acquis dans des régions distantes, il est cependant possible d'effectuer une correction, dite réduction au pôle, qui consiste à calculer le profil d'anomalies qui aurait été mesuré si les orientations du champ magnétique et de l'aimantation avaient été verticales. Dans le domaine de Fourier, ce profil d'anomalies réduit au pôle ΔT_r est obtenu en multipliant le spectre du profil d'anomalies ΔT par un opérateur complexe :

$$F(\Delta T_r) = F(\Delta T) C \exp(isgn(k)\theta) \quad (4.2)$$

$$\text{avec } C = \frac{\sin I'_B \sin I'_M}{\sin I_B \sin I_M} \quad \text{et} \quad \theta = I'_B + I'_M - \pi \text{ [Schouten et McCamy, 1972]}$$

où $k = 2\pi/\lambda$ est le nombre d'onde et λ , la longueur d'onde. C est un facteur d'amplitude et l'angle θ corrige l'effet de distorsion (ou “skewness”) des anomalies. I_B et I_M sont les inclinaisons réelles des vecteurs champ magnétique et aimantation. I'_B et I'_M sont les inclinaisons apparentes, c'est à dire les inclinaisons des projetés de ces deux vecteurs dans le plan vertical contenant la direction d'expansion (figure 4.7).

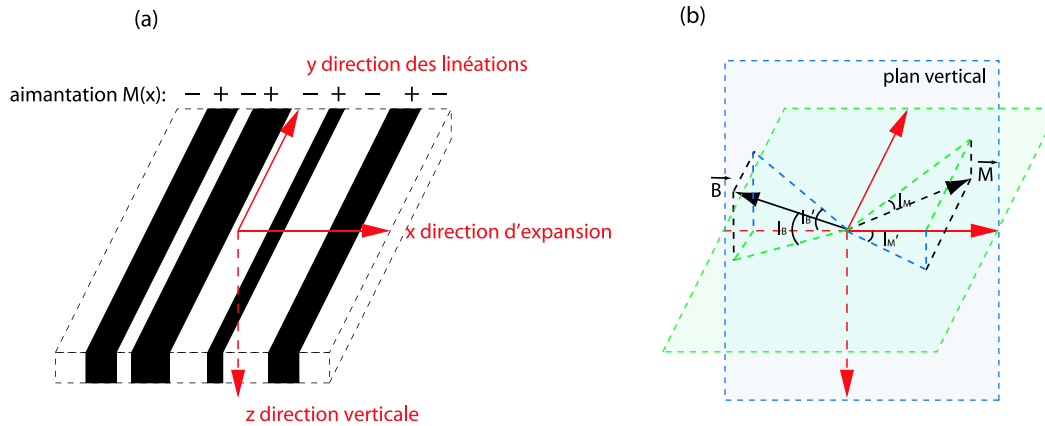


FIG. 4.7 – (a) Modèle simplifié des sources aimantées dans la croûte océanique : juxtaposition de prismes rectangulaires d'aimantation inverse ou normale dont l'allongement est selon la direction des linéations. (b) Orientation des vecteurs champ magnétique $\vec{B}$ et aimantation $\vec{M}$ dans le référentiel lié aux linéations magnétiques. I_B et I_M sont les inclinaisons des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{M}$; I'_B et I'_M , les inclinaisons de leurs projetés dans le plan vertical contenant la direction d'expansion.

Dans la présente étude, seul l'effet de distorsion a cependant été corrigé. En effet, une correction d'amplitude aurait modifié le niveau de bruit des profils et altéré la qualité de la sommation que nous souhaitons effectuer de manière à faire ressortir le signal cohérent entre les différents profils. L'angle de correction θ peut être estimé lorsque la paléolatitute et la paléodirection d'expansion sont connues. En raison de l'incertitude sur les reconstructions paléogéographiques, une méthode visuelle a été préférée (figure 4.8). L'angle de correction est estimé en recherchant l'angle θ de l'opérateur pour lequel le profil résultant est le plus proche du profil synthétique calculé au pôle, dont la distorsion est nulle [Schouten et McCamy, 1972]. La valeur adéquate varie dans le temps (selon l'anomalie considérée) et dans l'espace (d'un profil à l'autre). Nous avons supposé que ces variations au sein d'une zone d'étude sont suffisamment petites pour l'objet de cette étude. L'ensemble des profils d'une zone d'étude est donc corrigé avec une même valeur de θ , relativement satisfaisante pour l'ensemble des profils. La figure 4.9 présente ainsi les

profils magnétiques de la zone présentée figure 4.2, corrigés de l'effet de distorsion avec un angle de 40° .

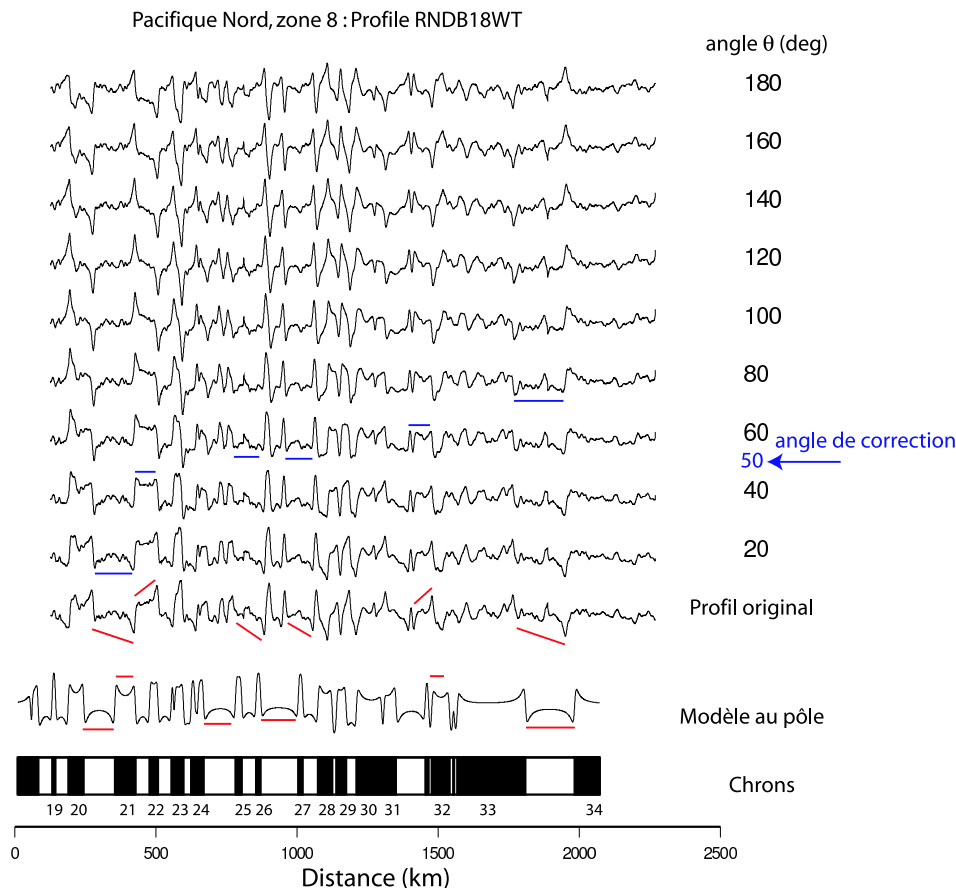


FIG. 4.8 – Estimation visuelle de l'angle adéquate θ , de correction de l'effet de distorsion, pour un profil enregistré dans le Pacifique Nord. L'opérateur de réduction au pôle est appliqué pour différentes valeurs de θ . Le profil résultant est comparé à un modèle d'anomalies au pôle. L'angle de correction retenu (dans ce cas 50°) est celui pour lequel le profil résultant est le plus proche du modèle d'anomalies au pôle.

Après réduction au pôle des profils d'anomalies magnétiques, une distorsion résiduelle, ou "anomalous skewness", est parfois observée [Cande et Kent, 1976]. Son amplitude est trop élevée pour être simplement liée aux incertitudes des reconstructions paléogéographiques. Elle est cependant généralement négligeable pour les dorsales rapides et est d'autant plus importante que le taux d'expansion est faible [Roest et al., 1992; Dyment et al., 1994]. Cette distorsion résiduelle peut s'expliquer, dans les océans dont le taux d'expansion est lent, si on suppose un modèle de sources à deux couches, la couche superficielle étant alors constituée des basaltes extrusifs et la couche inférieure, de croûte profonde et/ou de manteau superficiel serpentinisés (au sein desquels les transitions de polarité sont inclinées suivant l'isotherme de Curie) [Dyment et Arkani-Hamed, 1995; Dyment

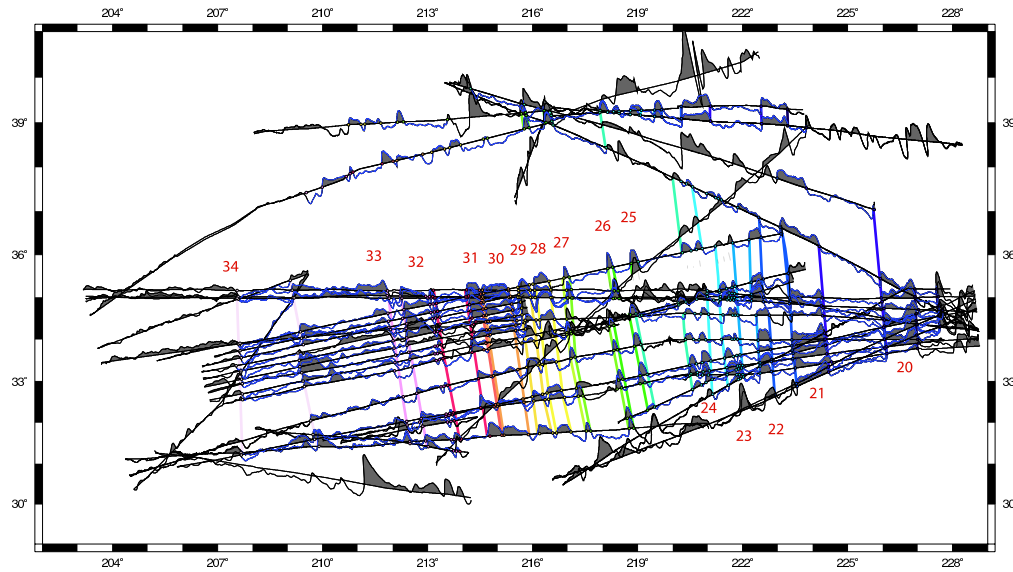


FIG. 4.9 – Zone du Pacifique Nord (localisée dans l'encadré figure 4.2) sur laquelle sont représentés des profils d'anomalies magnétiques corrigés de l'effet de distorsion. Les droites de couleur marquent les linéations. Le nom des anomalies est reporté en rouge. Les points de couleur sont les points d'ancrage utilisés pour le calage en temps des profils. Les profils surlignés en bleu sont ceux conservés pour le stack (figure 4.10).

et al., 1997]. La détermination visuelle de l'angle de correction de l'effet de distorsion permet de toute façon de s'affranchir d'une éventuelle distorsion résiduelle, bien que celle-ci soit généralement négligeable aux taux d'expansion rapides considérés ici.

4.2.3 Calage en temps

La comparaison des anomalies magnétiques avec un modèle d'anomalies au pôle permet ensuite une datation précise du plancher océanique (figure 4.9). Pour cela, les changements de polarité sont précisément localisés en recherchant le point d'inflexion (extremum de la dérivée) sur les profils d'anomalies magnétiques réduits au pôle. Ceux-ci fournissent alors des points d'ancrage, dont l'âge est fourni par l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995]. Le calage en temps des profils est réalisé en supposant un taux d'expansion constant entre ces points d'ancrage (figure 4.10). Cette hypothèse n'étant certainement pas vérifiée pour les périodes de polarité (ou chrons) les plus longues, des micro-anomalies cohérentes

de profils à profils, que l'on suppose synchrones, sont également utilisées comme points d'ancrages secondaires. Deux points d'ancrages secondaires ont par exemple été choisis pour le chron 33, dont la durée est de 5 Ma environ (figure 4.10d).

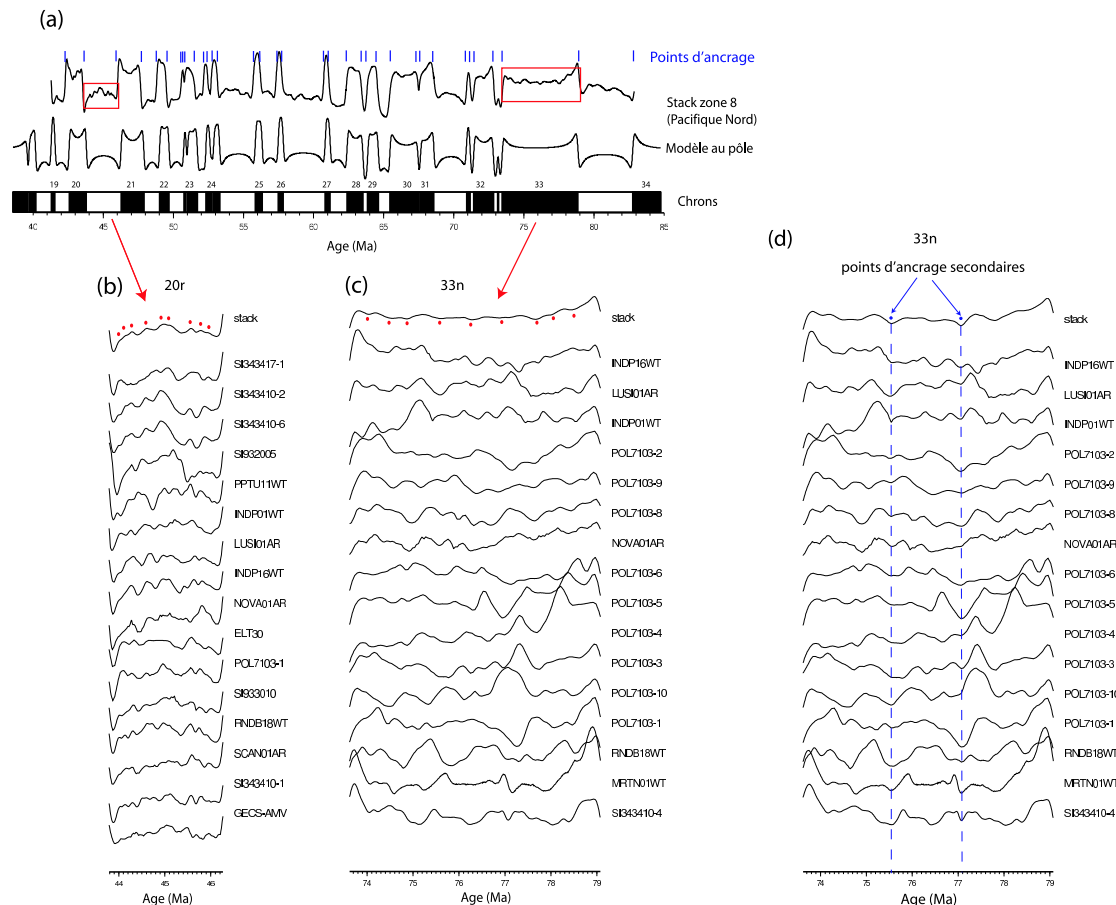


FIG. 4.10 – Comparaison du stack pour la zone du Pacifique Nord (localisée dans l'encadré figure 4.2) obtenu à partir des profils surlignés en bleu de la figure 4.9 avec un modèle d'anomalie au pôle (a). Ensemble des profils individuels utilisés pour le calcul du stack pour les chrons 20r (b) et 33n avant (c) et après (d) ajout de deux points d'ancrage secondaires.

4.2.4 Somme

Les profils sont ensuite sommés (ou "stackés") de manière à augmenter le rapport signal sur bruit, c'est à dire ne conserver que la partie du signal cohérente sur la zone d'étude. Le stack résultant obtenu pour la zone présentée figures 4.2 et 4.9 est représenté figure 4.10a. Ce stack montre les anomalies majeures associées aux changements de polarité magnétique mais également de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde.

Il est nécessaire de tester la robustesse des micro-anomalies observées avant de les interpréter. L'écart-type estimé à partir de l'ensemble des profils individuels n'apporte pas d'information car celui-ci est principalement sensible aux variations de l'amplitude des anomalies principales associées aux changements de polarité et ne reflète pas la variabilité des anomalies de courte longueur d'onde. Le nombre de profils utilisés pour la sommation étant relativement réduit, le stack résultant peut contenir des fluctuations résiduelles n'ayant pas de signification géomagnétique. Un stack obtenu à partir de n séries aléatoires indépendantes d'écart-type σ présente des fluctuations dont l'écart-type est $\sigma/\sqrt{n}$. Si les profils individuels sont indépendants, l'amplitude des anomalies dans le stack résultant devrait être divisée par $\sqrt{n}$ (soit un facteur $\sqrt{16} = 4$ pour les chrons 20r et 33n présentés figures 4.10b et 4.10c). Les figures 4.10b et 4.10c présentent des agrandissements du stack pour les chrons 20r et 33n ainsi que l'ensemble des profils utilisés pour la sommation. L'amplitude des anomalies au sein du stack est en effet plus faible que celle au sein des profils individuels, néanmoins les micro-anomalies observées dans le stack (localisées par des points rouges) sont observées également dans la plupart des profils individuels. Par ailleurs, il n'est pas surprenant que le stack résultant soit lissé, étant donné que la même micro-anomalie peut être légèrement décalée d'un profil à l'autre en raison de fluctuations du taux d'expansion à court terme.

Plusieurs méthodes peuvent être adoptées pour tester la robustesse des micro-anomalies observées. Il est possible, par exemple de suivre l'évolution du stack lorsqu'un profil est retiré de manière à vérifier que les micro-anomalies observées ne reposent pas sur un seul profil, ou de séparer l'ensemble des profils en deux groupes et comparer les stacks résultants. Le nombre de profils disponibles étant relativement restreint, nous avons préféré comparer les stacks obtenus dans différentes zones d'études.

4.2.5 Comparaison de stacks correspondant à des taux d'expansion différents

Lorsque le taux d'expansion diminue, les fluctuations du champ magnétique sont enregistrées sur une longueur plus courte de croûte océanique. Les profils magnétiques recalés en temps et le stack résultant apparaissent beaucoup plus lisses. Il n'est donc pas possible de comparer directement des profils magnétiques correspondant à des taux d'expansion différents.

Un lissage similaire est observé lorsqu'un profil est enregistré à une distance plus élevée des sources. A partir d'un profil ΔT_{z_1} enregistré à une distance z_1 , il est possible de calculer le profil ΔT_{z_2} qui serait enregistré à une distance z_2 , $z_2 > z_1$. Ce prolongement vers le haut est effectué dans le domaine de Fourier en multipliant le spectre du profil d'anomalies par

un opérateur :

$$F(\Delta T_{z_2}) = F(\Delta T_{z_1}) \exp(-|k|(z_2 - z_1)) \quad (4.3)$$

où k est le nombre d'onde. L'amplitude des anomalies décroît de manière exponentielle lorsque la distance aux sources augmente. Cette décroissance est plus rapide pour les anomalies de courte longueur d'onde (k élevé) que pour les anomalies de grande longueur d'onde (k petit). Le prolongement vers le haut introduit donc un lissage des profils d'anomalies.

Nous proposons une méthode simple, basée sur le prolongement vers le haut, permettant à partir d'un profil correspondant à un taux d'expansion rapide de reproduire le lissage introduit par une diminution du taux d'expansion. Soit deux profils enregistrés à l'aplomb d'une croûte océanique de même âge mise en place à des taux d'expansion V_1 et V_2 , $V_1 < V_2$ (figure 4.11). Soit h_1 , la hauteur d'eau. Le profil 2 est prolongé vers le haut d'une hauteur Δh tel que le rapport des hauteurs d'eau soit égal au rapport des taux d'expansion :

$$\frac{\Delta h + h_1}{h_1} = \frac{V_2}{V_1} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta h = h_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) \quad (4.4)$$

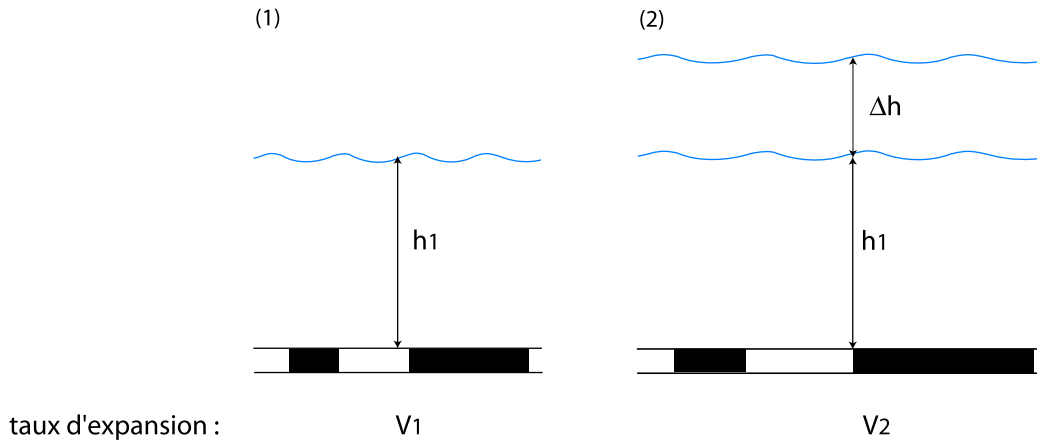


FIG. 4.11 – Méthode basée sur le prolongement vers le haut pour permettre la comparaison de profils d'anomalies magnétiques enregistrés à l'aplomb d'une croûte océanique mise en place à des taux d'expansion différents. Soit V_1 et V_2 , les taux d'expansion ($V_1 < V_2$) et h_1 , la hauteur d'eau. Le profil 2 est prolongé vers le haut sur une hauteur Δh , tel que le rapport des hauteurs h_1 et $h_1 + \Delta h$ soit égal au rapport des taux d'expansion V_1 et V_2 .

Dans ce cas, le système (2) est simplement un agrandissement du système (1) par un facteur V_2/V_1 et les profils 1 et 2 devraient être d'aspect similaire. Le facteur de proportion n'est toutefois pas vérifié pour l'épaisseur de la couche aimantée. Si on fait l'hypothèse

classique que la couche aimantée a une épaisseur constante de 500 m, ces profils ne seront donc pas strictement identiques. Ils présenteront des différences d'amplitude mais également des différences spectrales dont on peut cependant espérer qu'elles seront négligeables. Pour le vérifier, cette méthode a été testée à l'aide de profils synthétiques calculés pour des taux d'expansion de 7 cm/an, 5 cm/an et 3 cm/an à l'aide de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995], à laquelle un certain nombre d'intervalles inverses ont été ajoutés pour rendre compte des anomalies de courte longueur d'onde observées dans les profils magnétiques (figure 4.12). Le profil obtenu pour le taux d'expansion le plus élevé, 7 cm/an, est prolongé vers le haut des hauteurs $\Delta h = 2000$ m et $\Delta h = 6667$ m et comparé aux profils obtenus pour les taux d'expansion de 5 cm/an et 3 cm/an, respectivement. L'amplitude des anomalies des profils prolongés vers le haut est très réduite (voir les échelles verticales). Par contre, la forme générale des anomalies de grande et courte longueur d'onde est tout à fait similaire. Dans le détail, de légères différences peuvent être observées. Les anomalies de courte longueur d'onde sont légèrement plus accentuées dans le profil prolongé vers le haut, mais ces différences sont négligeables pour l'objet de notre étude.

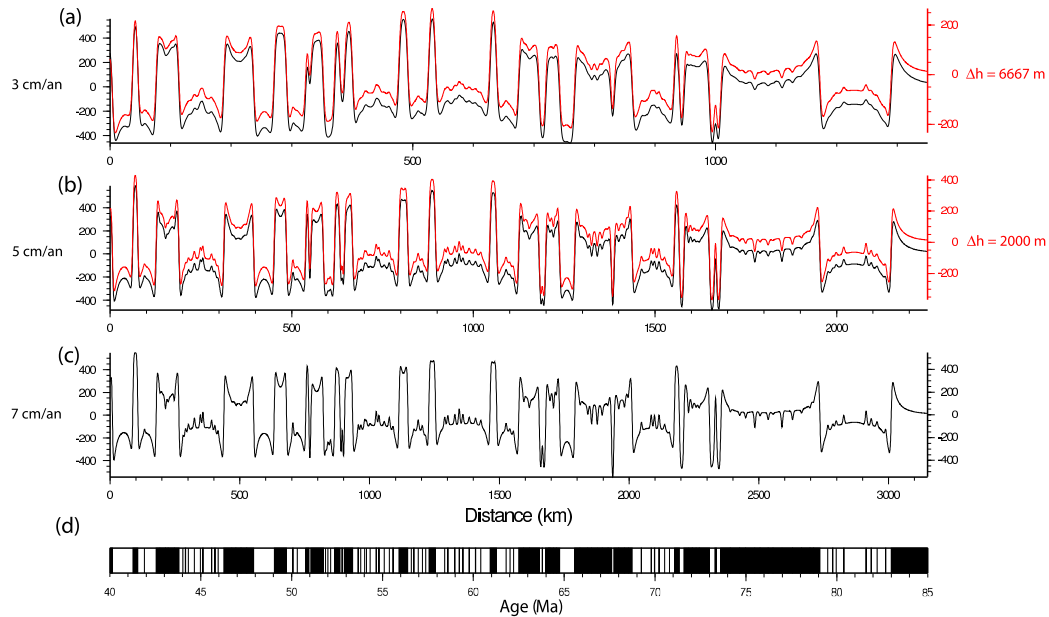


FIG. 4.12 – *Profils synthétiques d'anomalies magnétiques (en noir) calculés au pôle à des taux d'expansion de 3 cm/an (a), 5 cm/an (b) et 7 cm/an (c) à partir de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995] complétée par l'échelle des cryptochrons définie plus loin (d). Les profils en rouges sont obtenus après prolongement vers le haut du profil obtenu pour le taux d'expansion le plus élevé, 7 cm/an, d'une hauteur $\Delta h = 2000$ m (b) et $\Delta h = 6667$ m (a).*

La figure 4.13 montre un exemple d'application de cette méthode pour des stacks obtenus pour différentes zones des océans Indien et Pacifique pour les chrons 20r et 24r. Le stack obtenu pour la zone caractérisée par le taux d'expansion le plus élevé est prolongé vers le haut puis comparé avec les stacks des autres zones d'études. Le stack prolongé vers le haut est relativement cohérent avec l'ensemble des stacks obtenus dans les autres zones, indiquant que les micro-anomalies observées sont effectivement liées aux variations temporelles du champ géomagnétique.

4.3 Résultats

Les stacks de profils d'anomalies magnétiques de surface calculés pour la période 83-41 Ma (chrons 33r-19r) dans les différentes zones d'étude sélectionnées dans les océans Indien et Pacifique présentent de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde. La comparaison de ces stacks, à l'aide de la méthode basée sur le prolongement vers le haut (présentée à la section 4.2.5), a montré que les profils d'anomalies sont cohérents, bien que leur résolution soit différente lorsque le taux d'expansion varie. Cette méthode a ainsi permis la mise en évidence de nombreuses anomalies de courte longueur d'onde cohérentes, ou “tiny wiggles”, associées à des fluctuations du champ géomagnétique. Un stack global a été calculé à partir de profils sélectionnés dans les zones caractérisées par les taux d'expansion les plus élevés. Il constitue l'enregistrement de plus haute résolution des fluctuations du champ géomagnétique que l'on puisse obtenir à partir des mesures magnétiques marines de surface.

Ces anomalies peuvent être provoquées soit par des changements de polarité, soit par des fluctuations d'intensité. Comme le montre la section 4.1.3, il n'est pas possible de connaître à partir de profils de surface la dimension exacte d'une source à l'origine d'une anomalie de courte longueur d'onde, et en particulier de distinguer une anomalie produite par un intervalle de polarité très court de celle causée par une fluctuation de l'intensité à plus long terme. La modélisation des tiny wiggles en terme de cryptochrons, courts intervalles de polarité, conduit cependant à des durées généralement plus brèves que 10 ka, vraisemblablement trop courtes pour correspondre à de véritables changements de polarité, une inversion se produisant en 5 ka environ [Clement, 2004]. Il est donc probable que la plupart des tiny wiggles soient associés à des fluctuations d'intensité plutôt qu'à des changements de polarité, comme le suggèrent d'ailleurs les mesures de magnétostratigraphie.

Nous avons ensuite étudié la distribution des tiny wiggles, de manière à rechercher s'il existe une évolution de celle-ci, d'une part, à l'intérieur des chrons et, d'autre part, au cours de la période étudiée. Un résumé des tests et de leurs résultats est fourni ici, ceux-ci

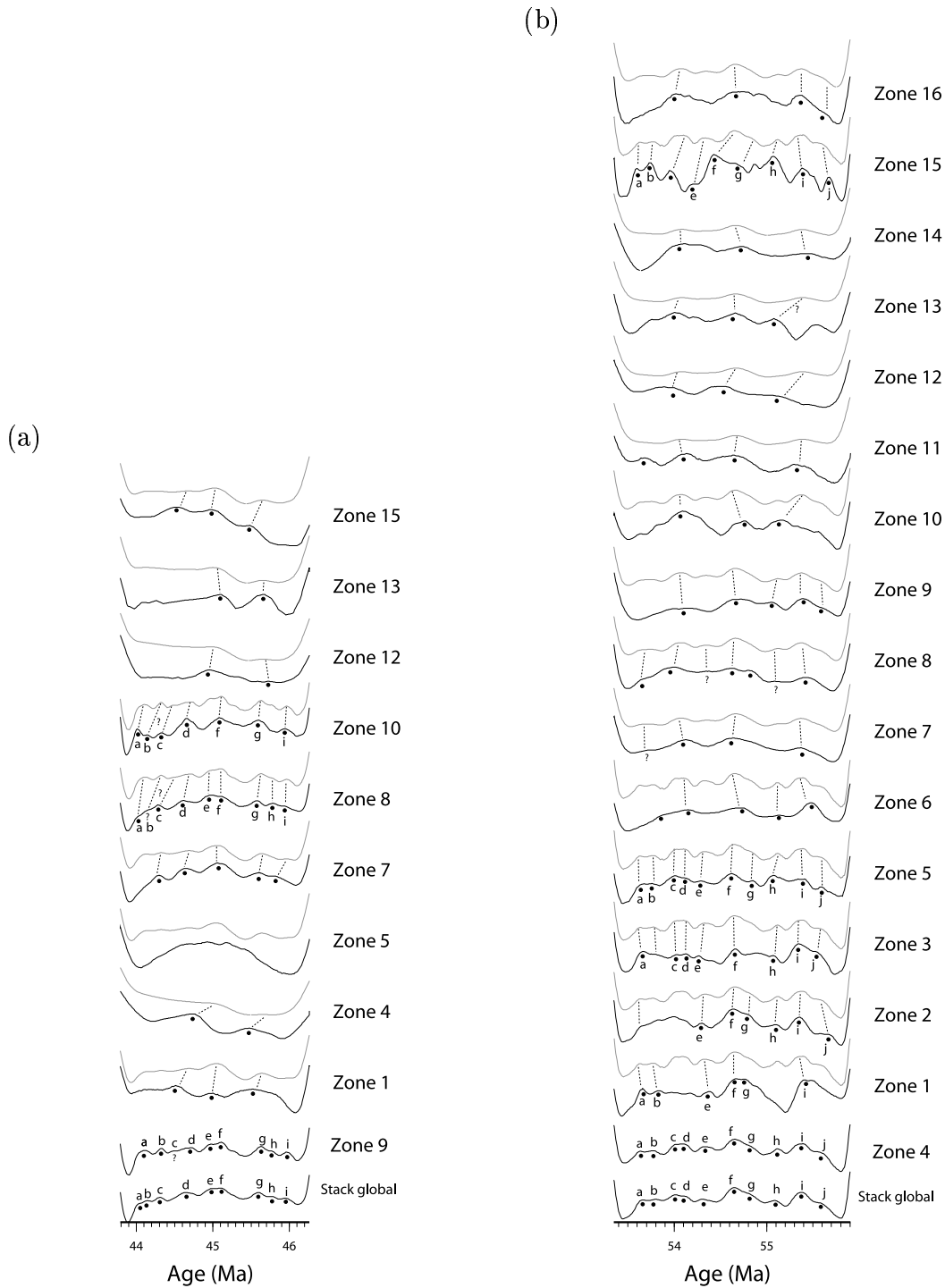


FIG. 4.13 – Comparaison des stacks obtenus pour différentes zones d'étude pour les chrons 20r (a) et 24r (b). Le stack obtenu pour la zone caractérisée par le taux d'expansion le plus élevé (zone 9 pour le chron 20r, zone 4 pour le chron 24r) est prolongé vers le haut (en gris) et comparé avec les stacks obtenus pour les autres zones (en noir). Le stack global de haute résolution est également représenté. Les micro-anomalies sont signalées par des points. Les corrélations avec le stack prolongé vers le haut sont marquées par des pointillés.

sont présentés plus en détails dans l'article qui suit. Nous avons tout d'abord représenté la courbe cumulative de la position relative des tiny wiggles à l'intérieur des chrons. Celle-ci indique que la distribution des tiny wiggles à l'intérieur des chrons est homogène, à l'exception de zones de 10 km environ (soit 80 à 250 ka selon le taux d'expansion dans le stack global) aux deux extrémités du chron et où aucun tiny wiggle n'est observé. Dans ces zones, l'anomalie principale liée au changement de polarité empêche la détection d'éventuels tiny wiggles. En dehors de ces "zones d'ombre", les fluctuations d'intensité ne semblent donc ni amplifiées avant, ni inhibées après une inversion. Nous avons ensuite calculé la fréquence des tiny wiggles pour les différents chrons. Aucune tendance à long terme ne semble être observée dans cette courbe. Par contre, celle-ci est corrélée avec les variations du taux d'expansion dans le stack global. Nous avons pu montrer, par ailleurs, qu'en dehors des zones d'ombre l'espacement des tiny wiggles est relativement constant avec une distance moyenne de 16 km environ (proche de la limite de résolution des profils magnétiques de surface, qui est de 5 km environ). Ceci suggère que les tiny wiggles reflètent simplement l'enregistrement filtré d'une variation séculaire uniforme sur la période d'étude. Ce comportement est en contraste avec l'augmentation de la fréquence des inversions qui caractérise cette époque. Les mesures exploitées ici ne montrent donc pas d'évolution à long terme de la variation séculaire en parallèle des variations de la fréquence des inversions.

4.4 Etude détaillée : *Geomagnetic field variations between chrons 33r and 19r (83-41 Ma) from sea-surface magnetic anomaly profiles*

Geomagnetic field variations between chrons 33r and 19r (83-41 Ma) from sea-surface magnetic anomaly profiles

C. Bouligand^{*}, J. Dyment, Y. Gallet, G. Hulot

Institut de Physique du Globe de Paris (Institut de recherche associé au CNRS et à l'Université Paris 7), 4 place Jussieu, 75005 Paris, France

Submitted to *Earth Planet. Sci. Lett.*, April 6, 2006, revised June 15, 2006.

Abstract

Sea-surface magnetic profiles exhibit coherent short wavelength "micro-anomalies" (or "tiny wiggles") superimposed to the main anomalies due to reversals. In this study, we investigate the nature and distribution of these tiny wiggles on oceanic crust formed during the ~ 42 Myr-long period following the Cretaceous Normal Superchron. To this end, we compute stacks of anomaly profiles from different areas in the Indian and Pacific oceans. Using a simple method based on upward continuation, we demonstrate that, the tiny wiggles are consistent worldwide although their patterns exhibit different resolutions at different spreading rates. They are therefore confidently ascribed to past fluctuations of the geomagnetic dipole moment. A high resolution record of these fluctuations is obtained by selecting and stacking profiles from areas with the highest spreading rates. Modeling the micro-anomalies as short magnetic polarity intervals yields durations for these intervals generally shorter than 10 kyr, likely too short to be indeed "true" subchrons. Moreover, the number of detected tiny wiggles clearly depends on the spreading rate. These results support geomagnetic intensity fluctuations as being the cause of most tiny wiggles, as also

suggested by recent magnetostratigraphic data. The tiny wiggles are uniformly distributed within chrons, indicating that paleointensity fluctuations are neither inhibited after, nor enhanced before, a reversal beyond a "blind" zone of about 10 km (corresponding to 80 to 250 kyr depending on the spreading rate) for which the anomalies due to reversals prevent the detection of tiny wiggles. Most tiny wiggles probably represent a filtered record of a uniform secular variation regime, as suggested by their uniform spatial distribution over the whole investigated period.

Key words: marine magnetic anomalies, tiny wiggles, paleosecular variation, paleointensity, Late Cretaceous - Cenozoic

1 Introduction

The analysis of sea-surface magnetic anomaly profiles has revealed many coherent micro-anomalies in addition to the major anomalies linked to reversals (e.g. [1–6]). The correlation of these micro-anomalies, or "tiny wiggles", among distant oceanic basins demonstrate that most of them are related to paleo-variations of the Earth's magnetic field and not to local magnetic sources in the oceanic crust [7,6]. Although often modeled as short magnetic polarity intervals (the so-called "cryptochrons" of Cande and Kent [7,6]), they may in fact be due to strong geomagnetic field intensity variations such as those occurring during excursions [8–10]. Up to now, the detection of tiny wiggles has been performed over only a limited number of short intervals and has often been based on favorable profiles from one ocean basin, occasionally complemented by a limited set of profiles from other oceans [3,6]. In this study, we conduct an extensive investigation of the occurrence and distribution of tiny wiggles over a long period, namely between chrons 33r and 19r (83-41 Ma), from profiles obtained in the Indian, North and South Pacific oceans, characterized by fast spreading rates at that time. A

* Corresponding author. Tel.: 33 1 4427 2407; fax: 33 1 4427 3777.

Email addresses: bouligan@ipgp.jussieu.fr (C. Bouligand), jdy@ipgp.jussieu.fr (J. Dyment), gallet@ipgp.jussieu.fr (Y. Gallet), gh@ipgp.jussieu.fr (G. Hulot).

large number of scalar sea-surface magnetic anomaly profiles are used to compute regional stacks in the different studied areas. Selecting areas displaying the fastest local spreading rates, we finally compute a composite high resolution stack. This work provides new constraints on the distribution of tiny wiggles during a period characterized by a low to moderate magnetic reversal frequency and offers the possibility to make comparisons with the recent period for which the magnetic reversal frequency is high and the geomagnetic excursion distribution rather well known [10].

2 Data

The data used in this study are sea-surface total-field magnetic profiles extracted from two databases: the Marine Trackline Geophysics Database compiled by the U.S. National Geophysical Data Center (<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/fliers/03mgg02.html>) and a French database for the Indian Ocean (http://barkeria.u-strasbg.fr/archivage/diffu_indien.html).

We use the magnetic lineation map of Cande et al. [11] as a guideline to select areas with a simple tectonic context (parallel magnetic lineations over wide areas) and relatively fast spreading rate (Figure 1). In each investigated area, only profiles crossing the magnetic lineations with a maximum angle of 45° from the spreading direction are selected (Figure 1). We reject parts of profiles crossing major transform faults, identified seamounts or any other significant structural perturbations in the topography as depicted in the free-air gravity anomaly map [12]. We also reject profiles showing no clear magnetic anomaly sequence or too sparsely sampled.

Five areas are selected in the Indian Ocean. The Central Indian Ridge (CIR) and the South East Indian Ridge (SEIR) underwent an important decrease of the spreading rate followed by a major reorganization in spreading orientation between anomalies 22 and 18, i.e. 49-38 Ma [13,14]. The selected areas correspond to oceanic crust produced before these major modifications. Conjugate areas produced at the CIR axis are the western part of Central Indian Basin (area 2) and the Madagascar Basin (area

4); conjugate areas produced at the SEIR axis are the eastern part of Central Indian Basin (area 1) and the Crozet Basin (area 3). Western and eastern parts of the Central Indian Basin are separated by the Indian triple junction trace [14]. The fifth area (area 5), in the Wharton Basin, was formed on the southern flank of a fossil ridge which separated the Indian and Australian Plates and was connected to the western part of the SEIR before the major change of spreading configuration at anomalies 18-22. The spreading direction is north-south in these five areas, so the anomaly amplitude is large (± 400 nT). The total amount of data selected in the Indian Ocean includes 160 profiles collected during 71 cruises.

Five areas are selected in the North Pacific Ocean (Figure 1). In these areas, the tectonic is rather simple: major transform faults limit lithospheric compartments which have been formed along a westward spreading direction. In the northern end, the spreading direction changes and becomes oriented southward. We select one area with southward spreading direction (area 6 located south of the Aleutian Subduction Zone and north of the Chinook Trough) and four areas with westward spreading direction. The latter four areas are limited by transform faults (from north to south): area 7 north of the Mendocino Fracture Zone (FZ), area 8 between Mendocino and Murray FZ, area 9 between Murray and Molokai FZ and area 10 between Molokai and Clarion FZ. As the spreading direction in these four areas is oriented east-west, the amplitude of the observed anomalies decreases close to the magnetic equator (from ± 350 nT on area 7 at latitude $\sim 45^\circ\text{N}$ to ± 100 nT on area 10 at latitude $\sim 20^\circ\text{N}$). The signal to noise ratio thus also decreases close to the Equator, in particular in area 10 where the major anomalies due to reversals are more difficult to recognize than in the other areas. Area 6 is characterized by large anomaly amplitudes (± 500 nT). Many data are available in this area. However most of them have been acquired before 1970. For this reason, the overall quality of these records is rather poor and the sampling interval is often large (the majority of the profiles are sampled with intervals larger than 2 km). The total amount of data selected in the North Pacific Ocean includes 325 profiles collected during 102 cruises.

Six areas are selected in the South Pacific Ocean (Figure 1). The spreading history of this ocean is complex and only few data are available. Nevertheless, some of those profiles are very interesting

because of a very fast local spreading rate [15]. Areas 11 to 13 are located on the Pacific Plate and areas 14 to 16 on the Antarctic plate. The Pacific-Antarctic Ridge produced areas 11 (south of FZ 8.5, see the location of the FZ in McAdoo and Laxon [16]) and 12 (north of FZ 8.5 and south of Heezen FZ) on its western flank, and area 14 (south of Heezen FZ) on its eastern flank. Area 15 (north of FZ V and south of Humbolt FZ) is the young extension of area 13 (north of Heezen FZ). They were both produced on the Pacific Plate, on the western flank of the Pacific-Aluk Ridge, but were later separated by a ridge jump, area 15 being transferred to the Antarctic Plate [15]. Areas 13 and 15 are characterized by a very fast spreading rate, about 80 km/Ma [6,15]. Area 16 (north of Heezen FZ and south of FZ V) was produced on the north-western flank of the Aluk-Antarctic Ridge [15]. The anomaly amplitude in all these areas is relatively large (± 300 nT). The total amount of data selected in the South Pacific Ocean includes 89 profiles collected from 36 cruises.

3 Profile analysis

First of all, we compute the scalar magnetic anomaly by correcting the magnetic measurement for the strength of the main field calculated up to the degree 10. The Gauss coefficients of the main field are interpolated between the coefficients given by the International Geomagnetic Reference Field (IGRF) models [17] calculated every five years. The coordinates of the profiles are projected along the spreading direction (Table 1). Each profile is resampled at a constant interval equal to the mean sampling interval. All individual profiles are reduced to the pole in order to allow for comparisons among profiles obtained from distant areas. To this end, we correct the magnetic profiles for the skewness. But we do not correct the amplitude effect to keep the noise at a comparable level on all profiles. The correction is obtained by applying the inverse phase filter $\exp(i\theta)$ [18]. The skewness is determined visually by searching for the best angle θ so that the corrected profile resembles the anomaly model computed to the pole with the algorithm of Talwani and Heirtzler [19] using the Cande and Kent [20] magnetic polarity time scale. Although the skewness angle varies both in space and time (because of the varying regional field and magnetization directions), we assume here that

these variations remain small enough within the different areas, and we apply the same angle θ to all profiles from each area (Table 1). This method amounts to a reduction to the pole, as the anomalous skewness first evidenced by Cande and Kent [21] is negligible for fast spreading rates [22,23].

On each profile, the reversals are precisely located by picking the inflection points of the magnetic anomaly (i.e. the extrema of the derivative of the magnetic anomaly). The distances between reversals are transformed into time using the polarity timescale established by Cande and Kent [20], assuming a constant spreading rate between two successive reversals. Finally, the profiles from a given area are resampled with the same time interval (10 kyr) and stacked.

4 Regional stacks and spreading rates in the different areas

We carefully examine all profiles from each area and eliminate those which seem suspicious because they display micro-anomalies with different length-scales or larger amplitudes than the neighboring profiles. The latter may have been affected by instrumental noise or perturbation due to anomalous topography or structural features. Before computing a "final" regional stack and picking the micro-anomalies, we check that the pattern of tiny wiggles can be recognized in most profiles from one area. To this end, the influence of individual profiles is tested by recomputing a stack after removing one of the profiles and checking the stack variability. The profiles which introduce micro-anomalies in one stack that are not present in the others are eliminated except if the total number of available profiles is small (i.e. less than three profiles) or if the richer content of these profiles can be explained by a locally faster spreading rate.

All computed regional stacks are presented in Figure 2. One may notice a residual skewness in some stacks, especially for older (chrons 32n to 33r) and younger (chrons 19r to 20r) ages, which reflects the fact that all profiles from a given area were deskewed with the same angle θ . The stacks display many short wavelength anomalies, positive or negative. As in Cande and Kent [6], we define micro-anomalies (or tiny wiggles) as negative (positive) short wavelength anomalies in normal (reverse)

polarity chrons and locate their center (blue ticks on Figure 2). The mean spreading rate variations computed for all studied areas are presented in Figure 3. The real spreading rate fluctuations within each area are likely smoother, the steps in the curves being artifacts due to the assumption of a constant spreading rate between reversals. Sharp spreading rate variations (and large relative uncertainties on the measured distances) coincide with the shortest chrons (see for instance chron 30r at about 68 Ma). More generally, some spreading rate variations are correlated among different basins and oceans (see for instance chrons 32n to 33n, 71-79 Ma) and likely reflect uncertainties in the reversal time-scale [20]. Figures 2 and 3 show that the density of tiny wiggles observed in each basin strongly depends on the spreading rate. In the Indian Ocean, the density of tiny wiggles is the highest between chrons 31n and 22r (i.e. 69-50 Ma), a period of very fast spreading corresponding to the northward motion of India. Similarly, a high density of tiny wiggles and faster spreading rate are observed in the North Pacific Ocean between chrons 21n and 19r (i.e. 48-41 Ma). The tectonic context in the South Pacific Ocean is more complex and the spreading rates are geographically variable. Area 13 and 15 are characterized by a very fast spreading rate and reveal a very detailed tiny wiggle content.

5 Comparison between the different regional stacks

To test the consistency between different regional stacks and identify a reliable sequence of micro-anomalies, we start with a simple technique. To compare two profiles (or stack profiles) from areas with different spreading rates, we simply apply an upward continuation of height Δh to the fastest profile. This height Δh was chosen in the following way. If V_1 and V_2 are respectively the slow and fast spreading rates and h_1 is the initial water depth (identical for seafloors of same age, e.g. [24]), Δh is such that:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{h_1 + \Delta h}{h_1} \quad \text{i.e.,} \quad \Delta h = h_1 \left(\frac{V_2}{V_1} - 1 \right) \quad (1)$$

For the anomalies considered in this study, h_1 ranges from about 4750 m to about 5550 m (according to Parsons and Sclater [24]). In practice, we used $h_1 = 5000$ m.

Indeed, if the magnetization pattern is identical in the two systems with different spreading rates, the geometry of the slow spreading system is almost a scaled down version of that of the upward-continued fast spreading system, and the resulting magnetic profiles are therefore very similar. They would be strictly identical if the magnetized layer at fast spreading rate was thicker by a factor V_2/V_1 . The classical assumption of a constant thickness for the magnetized layer affects the amplitude of the anomalies but also, to a lesser extent, the shape of the power spectrum. However, modeling anomaly profiles with different realistic spreading rates shows that our technique introduces only minor differences between the slow and upward-continued fast spreading rate profiles, which are negligible for the purpose of this study. Downward-continuing the slow spreading rate profiles to compare them with faster spreading rate profiles was not an option, as it increases the noise level and would prevent the accurate detection of the tiny wiggles.

For each chron, we select the stack from the area characterized by the fastest spreading rate and upward-continue it for comparison with the stacks from areas with slower spreading rates (Figure 4). Three different types of areas are considered: 1) areas with fast spreading rates where a detailed pattern of tiny wiggles can be recovered; 2) areas with intermediate spreading rates which give a magnetic signal smoother than the previous ones, but can still be used to test the consistency of records from faster spreading rate areas; 3) areas with slow spreading rates, where the magnetic records do not have enough resolution to display any micro-anomaly. A general description of the regional stacks is summarized in Table 2. Below we only describe a few selected chrons in detail.

Chron 20r The spreading rate is much faster in the North Pacific than in the Indian and South Pacific oceans, characterized by smoother stacks. In the North Pacific Ocean, the spreading rate decreases from South to North (Figure 3b), so the computed stacks are smoother from South to North (areas 10 to 7). Areas 10 and 9 show the highest resolution. However, as previously stated, the anomaly amplitude is low in area 10 (± 100 nT) and the resulting stack may therefore be noisier. The general shape of the stacks from areas 7 to 10 exhibits a very nice correlation: the five bumps of the smooth area 7 are recognized with finer details in the three other areas. With increasing spreading rate, the

bump at 44.3 Ma splits into three tiny wiggles (a, b, and c, areas 9 and 10), the one at 45 Ma into two tiny wiggles (e and f, areas 8 and 9) and those at 45.6 and 45.8 Ma become three tiny wiggles (g, h, and i, area 8 and 9). The upward continued profiles obtained from the stack of area 9 are consistent with the stacks of other areas, including areas from Indian and South Pacific oceans, except for area 5 characterized by a very smooth anomaly. Nine tiny wiggles (a - i) are identified for this period.

Chron 23r Three tiny wiggles (a - c) are recognized in all stacks from the Indian Ocean (areas 1 to 5), characterized by a faster spreading rate. The upward-continued stack from area 1 is consistent with those from the other areas.

Chron 24r A good correlation exists between the stacks from different areas in the Indian Ocean, especially areas 2, 4 and 5 which include a larger number of profiles. The upward-continued stack from area 4 is consistent with all but two stacks from the other areas. In area 6, located close to the Aleutian Subduction Zone in the North Pacific Ocean, chron 24r is recorded with a very fast spreading rate, comparable to the one found in the Indian Ocean; however the stack in area 6 is much smoother than it should be according to its spreading rate. This may be due to the wide sampling interval of the old magnetic anomaly profiles available in this region. Despite its lower resolution, this stack displays the three large bumps that are recognized in areas with slower spreading rate. The stack from area 15 correlates well with the upper-continued one from area 4 if we allow for a quite significant shift of the anomalies, which probably reflects large spreading rate variations during this period in this area. Ten tiny wiggles (a - j) are finally recognized.

For chrons 25r and 26r, area 15 in the South Pacific Ocean is characterized by a faster spreading rate than areas in the Indian Ocean but includes only a few profiles. For this reason, two figures present the upward-continued stacks from area 5 in the Indian Ocean and from area 15 in the South Pacific, respectively.

Chron 25r A good correlation is observed between stacks from the Indian Ocean. The upward-continued stack from area 15 in the South Pacific Ocean is not consistent with the shape of the stacks of other areas; the spreading rate is very fast for chron 25r (about 120 km/Myr) compared to the

previous and following chrons 24r and 26r (about 70 km/Myr), a quite suspicious observation that may reflect some local tectonic complexity (a ridge jump?). The upward-continued stacks from area 5 are consistent with the stacks of other areas. Five clear tiny wiggles (a, b and d - f) and possibly a sixth one (c) are found.

Chron 26r The stacks from the Indian Ocean correlate well. The upward-continued stack from area 15 in the South Pacific is consistent with stacks from all other areas, except for the young part of the chron (58 - 58.5 Ma) which may be affected by a tectonic complication. Variations in the shape of the stacks are observed in the North and South Pacific where the spreading rate is rather slow. It may be due to irregular spreading in a slow spreading rate context. Eight clear tiny wiggles (a - h) and possibly a ninth one (i) are recognized in area 1, 2, 3 and 5.

Chron 30n Nice correlations are found between the stacks from areas 3, 5 and 13 and the one from area 1, which is smoother because it has been computed with more profiles (9 profiles compared to 3, 2, and 2 profiles for areas 3, 5, and 13, respectively). A relatively large positive anomaly is recognized around the middle of the chron. In area 3, this anomaly (noted A, between c and d) is shifted, maybe because of an irregular spreading rate. The upward-continued stack from area 13 is consistent with the others areas. Six tiny wiggles (a - f) are obtained in areas 1, 3, 5 and 13.

Chron 31r Although the different regional stacks display quite different shapes, the upward-continued stack from area 13 is rather consistent with those from all areas except areas 6 and 8 which show no micro-anomaly. The stack from area 6 includes profiles with highly variable, strong amplitude micro-anomaly patterns, which suggests a local tectonic complexity. However, some individual profiles show similarities with the stack from area 13. The stack from area 8 includes profiles with low amplitude micro-anomalies. The clearest tiny wiggle is the first bump (a) recognized in all but areas 5, 6 and 8. Seven tiny wiggles (a - g) are recognized in areas 1, 5 and 13.

Chron 33n In the Indian Ocean, only one profile is available in areas 3 and 5. These two profiles correlate very well. However, it should be mentioned that areas 3 and 5 were close to each other, on the southern flank of the Southeast Indian Ridge prior the major change in spreading configuration

at anomalies 18 and 22, and may have shared the same spreading history. The stack from area 1 includes only two profiles (many other profiles are noisy or suspicious). This stack is smoother than the profiles from areas 3 and 5; however some micro-anomalies are recognized, in particular two tiny wiggles (B and C) that are used in a later section as secondary tie-points to improve the stacks. In the North Pacific, areas 8 and 9 show many correlated micro-anomalies. Some correlations are also possible with area 10 (which includes only one profile). In these three areas, we identify micro-anomalies B and C as defined above. Area 7 includes only 3 profiles which are very different from each other and therefore suspicious. In the South Pacific, several micro-anomalies are also identified (including B and C), in particular in area 13 characterized by a very fast spreading rate. The upward-continued stack from area 13 is consistent with stacks from all areas. Good correlations are observed with areas 3, 5, 8 and 9. Twelve tiny wiggles (a - i, B, and C) are finally obtained.

Chron 33r Area 13 in the South Pacific is characterized by a very fast spreading rate but includes only one profile. For these reasons, we present two figures comparing stacks from various areas with the upward-continued stacks from areas 8 and 13. The stacks from most areas reveal two major bumps (a and b), and some profiles from different areas present local similarities. Despite the poor similarities of the stacks from various areas with the upward-continued stack from area 13, acceptable correlations between the upward-continued stack from area 8 and the other areas are observed for the longer wavelengths variations.

The stacks obtained for chrons 20n and 20r in the North Pacific are very precisely correlated among each others even though the spreading rate varies progressively from area 10 to 7. This is likely due to the fast and very regular spreading rate and the large amount of available data which are favorable conditions for a high quality record in the North Pacific during chron 20n and 20r. In contrast, correlations are not so good for chrons 24r-26r in the Indian Ocean or for chron 33n worldwide. But, areas in the Indian Ocean, where chrons 24r to 26r are recorded with a very fast spreading rate, are affected by long-offset fracture zones and the number of adequately long profiles is limited. Finally, the spreading rate is slower during chron 33n in all areas and the quality of the geomagnetic record is

therefore not surprisingly poorer. More generally, we note that the spreading rate is certainly not the only parameter controlling the quality of the geomagnetic field recorded by the oceanic crust. The amplitude of the anomalies compared to that of the noise level is also an important factor which is controlled by geographic and geological parameters, such as the latitude and the orientation of the magnetic lineations, or the structure and magnetic properties of the oceanic crust, hence the conditions of its formation at the ridge axis and its alteration on the ridge flank. Given these limitations, the stacks from different areas appear to be remarkably consistent.

6 Constructing a global high-resolution stack

The comparison between the different regional stacks reveals the occurrence of many micro-anomalies. Because they are quite consistent worldwide, these micro-anomalies can be ascribed to past fluctuations of the geomagnetic dipole moment. The overall good consistency observed between the different stacks further supports the computation of a composite, high resolution tiny wiggles record by stacking selected profiles from the areas displaying the highest spreading rates (Figure 3).

To this end, we select the following areas:

- for chrons 19r to 21r (41-49 Ma), areas 8, 9 and 10 from the North Pacific Ocean;
- for chrons 22n to 29r (49-66 Ma), areas from the Indian Ocean (except area 4 for chron 27r and areas 1 and 4 and for chron 29n, which display a slower spreading rate); and
- for chrons 30n to 33r (66-83 Ma), the best individual profiles (i.e. with the fastest spreading rates and the highest anomaly amplitudes) from all investigated oceans since the spreading rates are rather slow in almost all oceans.

For chron 33r, only the longer wavelengths (i.e. tiny wiggles a and b, in Figure 4) are consistent within regional stacks. However, several individual profiles display consistent shorter wavelengths; we therefore select these profiles to compute the high resolution stack and tentatively identify several additional tiny wiggles. Because these tiny wiggles are not observed in the regional stacks, we

consider them as less reliable.

In the case of long chrons, the hypothesis of a constant spreading rate is most likely incorrect. To improve the quality of the stacks, we introduce secondary tie points. Such a procedure is potentially dangerous, as it may artificially reinforce correlations between distant profiles. For this reason, we only consider three well-recognized anomaly patterns: tie point A within chron 30n, and tie points B and C within chron 33n. No secondary tie-point is considered within the long chron 33r. As already noted tie point A is a positive anomaly within a normal chron; however its very characteristic shape makes it the best candidate. Figure 5 indeed shows that introducing secondary tie-points B and C does not drastically modify the stacks within chron 33n for each area (compare with Figure 2 without secondary tie-points). However it does reinforce the tiny wiggles in the global stack, suggesting that their poor adjustment in our original global stack is indeed due to spreading-rate variations.

The age estimate for each secondary tie-point is derived from the median value of the age interpolated between the two bounding reversals for each stack profiles. The uncertainty is given by the standard deviation. These estimates are indicated below (with the number of profiles used for the computations):

- A (chron 30n) $t = 66.642 \pm 0.079$ Ma (14 profiles)
- B (chron 33n) $t = 75.493 \pm 0.162$ Ma (55 profiles)
- C (chron 33n) $t = 76.994 \pm 0.205$ Ma (55 profiles)

The standard deviation for point A is small because we only use the 14 profiles displaying the highest spreading rates, whereas the standard deviations for points B and C are larger because we use profiles with a larger range of spreading rates.

Figure 6 shows the resulting high resolution stack after data selection and the inclusion of secondary tie-points. In order to better appreciate the quality of this record, Figure 7 shows enlargements of the stack for chrons 29n, 30n, 31n, 31r, 32n.2n, 33n and 33r together with the profiles used for the computation. The correlation among individual profiles and with the resulting stack is generally good.

Due to short-term spreading rate fluctuations, tiny wiggles may be slightly shifted from one profile to another resulting in smoother stacks, with wider anomalies and smaller amplitudes than the original profiles (see examples on Figure 7). Although not critical for the purpose of the present study, these effects should be kept in mind for the interpretation of the resulting stacks.

Following Cande and Kent [7,6,20], we model the identified tiny wiggles in terms of cryptochrons, i.e. polarity intervals shorter than 30 kyr. This choice is guided by three considerations. First, it makes comparisons between our results and the earlier results of Cande and Kent [7,6,20] most straightforward. Second, this representation is anyway a convenient zero-order equivalent representation of the observed geomagnetic variation signal. Third, as we shall see, it provides a simple mean to address the issue of the origin of tiny wiggles. We construct the cryptochron time scale by selecting consistent micro-anomalies that are observed both on the global stack and on regional stacks from at least two different areas. By doing so, eight uncertain tiny wiggles (marked as "possible" on Table 2) are no longer considered. The naming scheme of Cande and Kent [7,6] is hereafter adopted for the remaining cryptochrons. The center of the cryptochrons is estimated by localizing the minimum (maximum) of negative (positive) micro-anomaly in normal (reverse) polarity chrons as observed in the high resolution stack (red dots on Figure 6). We first set the duration of each cryptochron to 10 kyr and then adjust it so that the amplitude of observed and modeled micro-anomalies (normalized to the amplitude of the nearby reversal anomaly) is similar. The results are shown in Figure 6 and the ages of the cryptochrons are reported in Table 3 (see Electronic Supplement).

7 Discussion

Our study allows one to detect a large number of tiny wiggles which are either due to short polarity intervals or to large paleointensity fluctuations, the latter being possibly related to excursions generally associated with a large directional variation. For marine magnetic anomaly profiles, the Earth filter bandpass depends on the water depth and on the spreading rate [18]. Power spectra of individual sea-surface profiles used in this study show that the smallest wavelength above the noise level (for which

the spectrum is flat) is ~ 5 km which is about the water depth. For a spreading rate of 60 km/Myr, a wavelength of 5 km would correspond to a timescale of 80 kyr. This means that sharp geomagnetic variations such as polarity intervals or excursions occurring on timescales shorter than 80 kyr (but with some possible spectral content at timescales of 80 kyr and above) could produce anomalies with similar wavelengths as genuine intensity fluctuations on the 80 kyr timescale. Sea-surface magnetic anomaly profiles cannot distinguish between those two types of signal which, in addition, are likely smoothed and biased towards longer timescales by the stacking procedure (see above). As a result, the duration of individual geomagnetic events cannot be unambiguously determined. Total field marine magnetic profiles do not permit to discriminate between long-term paleointensity fluctuations and excursions which can be as short as 5-10 kyr [10].

Useful insight on the origin of tiny wiggles can however be gained from the few available high-resolution magnetostratigraphic paleointensity studies covering the past few Myr (see for instance, [25] for the Brunhes period; [26] for the Matuyama period; [27] for the Matuyama and late Gauss periods; [9] for the past 2 Myr; [8] for the past 4 Myr; [28] for chrons 5n; [29] for chrons 6Bn to 13n; [30] for chrons 12r to 13r). These studies have shown that the magnetic polarity time scale mainly determined from marine magnetic anomalies is almost complete and that only a few tiny wiggles detected so far can be ascribed to additional short polarity intervals (e.g. [31–33]). Most tiny wiggles thus appear to be due to geomagnetic intensity variations [6]. A similar conclusion is also suggested by recent deep-tow magnetic measurements which revealed a detailed pattern of micro-anomalies that correlates very well with paleointensity fluctuations inferred from magnetostratigraphic studies ([34], for the Brunhes period; [35,36] for the Brunhes and Matuyama periods; [37,28] for chron 5n.2n).

Our modeling of the tiny wiggles in terms of cryptochrons provides even more evidence and suggests that those conclusions also hold over the 83-41 Ma time period. Indeed, the duration of the cryptochrons we found varies from 2 kyr to 26 kyr (Table 3, see Electronic Supplement), 82% of these values being lower than 10 kyr. Considering that a full magnetic reversal does not take place in less than about five thousand years, and that polarity intervals can hardly be shorter than some ten thousand years (e.g. [38]) this again shows that most tiny wiggles must reflect paleointensity

fluctuations.

To further investigate the nature of tiny wiggles, we next look into their distribution within chrons. We compute the relative position of each tiny wiggle within each chron, i.e. the time elapsed since the beginning of the chron normalized to the duration of the chron. This parameter x varies between 0 (beginning of the chron) and 1 (end of the chron). The cumulative distribution function of this variable x is a straight line between $x = 0.1$ and 0.9 (Figure 8a). No tiny wiggle is found for values of x lower than about 0.1 and greater than about 0.9, i.e. within typically 10 km of a nearby reversal. This, we suggest, reflects the fact that the "secondary" signal of tiny wiggles is obscured by the main signal produced by reversals. Indeed, no tiny wiggle is detected for the shortest chrons and most identified tiny wiggles are indeed found in long chrons. Also, this could explain why few tiny wiggles have been detected so far within the past 30 Myr, a period characterized by a reversal frequency higher than that of the time interval investigated in the present study (e.g., [39]). As a matter of fact, computing the relative position x' of the tiny wiggle within each chron after excluding a "blind" zone of 10 km at both ends of the chron provides a simple picture. The resulting cumulative distribution function of x' then appears to be a straight line with a slope equal to 1 (Figure 8b), and suggests that the distribution of tiny wiggles is homogenous within chrons, except perhaps within the vicinity of reversals where no information is available.

This prompts us to assess the tiny wiggle frequency within each chron by simply taking the inverse of the average duration between successive tiny wiggles. As can be seen (Figure 9), this tiny wiggle frequency appears to be correlated with the mean spreading rate of the high resolution stack with a correlation coefficient of 0.87. This correlation is particularly clear for chrons 20r-24r and chron 29n, although some exceptions (for instance chrons 27r-28n) are also observed. This correlation shows up even after selecting areas characterized by the highest spreading rate for each chron and again underlines the strong influence of spreading rate on the detection of tiny wiggles. To directly check that this is indeed the case and to take into account the "blinding" effect discussed above, we next build a fictitious timescale by excluding time intervals bounded by two tiny wiggles and containing a reversal. For each event of this modified timescale, we plot the distance to the origin (the first

tiny wiggle) against the order of occurrence (Figure 10). As can be seen, all points fall on a straight line with a slope yielding a constant mean distance between tiny wiggles of ~ 16 km. Clearly, the possibility of detecting a tiny wiggle is more related to the amount of sea-floor available to record this geomagnetic signal than to the time elapsed. This behaviour can indeed be expected if tiny wiggles are mainly due to long-term paleointensity fluctuations. Geomagnetic secular variation includes a very large temporal spectrum which is fairly flat in the frequency range of interest here, with periods above ~ 50 kyr [40]. If tiny wiggles are a filtered record of this secular variation, increasing the spreading rates, simply amounts to increase the resolution of the magnetic record which will systematically increase the number of detected tiny wiggles per time units, but not the amount of tiny wiggles per units of seafloor. This is what we found with a spatial tiny wiggle frequency (one per 16 km) logically close to the resolution of the marine magnetic anomaly profiles (5 km).

Assuming from now on that tiny wiggles are indeed mainly due to paleointensity variations, it is next interesting to note that their uniform distribution within chrons as shown in Figure 8 would indicate that paleointensity variations are neither inhibited after, nor enhanced before, reversals beyond the "blind" period of about 10 km already identified (i.e. 250-80 kyr for spreading rates of 40-120 km/Myr). This behavior contrast with the long-term "memory" of the dipole field considered by Cande [41] to account for the anomalous skewness of marine magnetic anomalies, and by Valet and Meynadier [8] to account for the "sawtooth pattern" observed in the paleointensity fluctuations over the past 4 Myr. But it is not in contradiction with the recent update by Valet et al. [9], which now argues in favour of a slow decrease in paleointensity only during a period of about 60-80 kyr before reversals.

Finally our results would suggest that the secular variation remains rather uniform throughout the studied period. Although this conclusion only applies to the longer wavelengths of the secular variation that are attainable through the analysis of sea-surface magnetic anomalies, such a uniform behavior of the secular variation would strongly contrast with the marked variation of the reversal rate observed during the investigated period, increasing from zero during the Cretaceous Normal Superchron (118-83 Ma), to a reversal rate of about $2\text{-}3 \text{ Myr}^{-1}$ at ~ 40 Ma. Further analysis of high

resolution records such as deep-tow magnetic profiles should bring new constraints on this particular point.

Beyond their interest for geomagnetic studies, tiny wiggles are also useful as fine scale markers of seafloor spreading. Our new geomagnetic timescale over 42 Myr (Table 3, see Electronic Supplement) may therefore help to better identify major anomalies, increase the resolution of seafloor dating, and improve reconstructions of the plate tectonic history of oceanic basins (e.g. [42]).

Acknowledgments

We thank Philippe Patriat for providing us with the French data in the Indian Ocean. We are grateful to Clément Narteau and Jean-Louis Le Mouél for their help and comments. We also thank an anonymous reviewer for his constructive comments. This is IGP contribution no. 2146.

Appendix A. Supplementary data

Supplementary data associated with this article can be found, in the online version, at [doi:10.1016/j.epsl.2006.06.051](https://doi.org/10.1016/j.epsl.2006.06.051).

References

- [1] R. J. Blakely, A. Cox, Evidence for short geomagnetic polarity intervals in the Early Cenozoic, *J. Geophys. Res.* 77 (1972) 7065–7072.
- [2] R. J. Blakely, Geomagnetic reversals and crustal spreading rates during the Miocene, *J. Geophys. Res.* 79 (1974) 2979–2985.
- [3] S. C. Cande, J. L. LaBrecque, Behavior of the Earth’s paleomagnetic field from small scale marine magnetic anomalies, *Nature* 247 (1974) 26–28.

- [4] D. K. Rea, R. J. Blakely, Short-wavelength magnetic anomalies in a region of rapid seafloor spreading, *Nature* 255 (1975) 126–128.
- [5] D. S. Wilson, R. N. Hey, The Galapagos axial magnetic anomaly: Evidence for the Emperor event within the Brunhes and for a two-layer magnetic source, *Geophys. Res. Lett.* 8 (1981) 1051–1054.
- [6] S. C. Cande, D. V. Kent, Ultrahigh Resolution Marine Magnetic Anomaly Profiles: A Record of Continuous Paleointensity Variations?, *J. Geophys. Res.* 97 (1992) 15075–15083.
- [7] S. C. Cande, D. V. Kent, A New Geomagnetic Polarity Time Scale for the Late Cretaceous and Cenozoic, *J. Geophys. Res.* 97 (1992) 13917–13951.
- [8] J.-P. Valet, L. Meynadier, Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years, *Nature* 366 (1993) 234–238.
- [9] J.-P. Valet, L. Meynadier, Y. Guyodo, Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years, *Nature* 435 (2005) 802–805.
- [10] C. G. Langereis, M. J. Dekkers, G. J. de Lange, M. Paterne, P. J. M. van Santvoort, Magnetostratigraphy and astronomical calibration of the last 1.1 Myr from an eastern Mediterranean piston core and dating of short events in the Brunhes, *Geophys. J. Int.* 129 (1997) 75–94.
- [11] S. C. Cande, J. L. LaBrecque, R. L. Larson, W. C. Pitman III, X. Golovchenko, W. F. Haxby, Magnetic lineations of the World's ocean basins (map), American Association of Petroleum Geologists, Tulsa, Oklahoma, 1989.
- [12] D. T. Sandwell, W. H. F. Smith, Marine gravity anomaly from Geosat and ERS-1 satellite altimetry, *J. Geophys. Res.* 102 (1997) 10039–10050.
- [13] P. Patriat, J. Achache, India-Eurasia collision chronology has implications for crustal shortening and driving mechanism of plates, *Nature* 311 (1984) 615–621.
- [14] P. Patriat, J. Segoufin, Reconstruction of the Central Indian Ocean, *Tectonophysics* 155 (1988) 211–234.
- [15] S. C. Cande, E. M. Herron, B. R. Hall, The early Cenozoic tectonic history of the southeast Pacific, *Earth Planet. Sci. Lett.* 57 (1982) 63–74.

- [16] D. McAdoo, S. Laxon, Antarctic Tectonics: Constraints From an ERS-1 Satellite Marine Gravity Field, *Science* 276 (1997) 556–560.
- [17] C. E. Barton, R. T. Baldwin, D. R. Barraclough, S. Bushati, M. Chiappini, Y. Cohen, R. Coleman, G. Hulot, P. Kotze, V. P. Golovkov, A. Jackson, R. A. Langel, F. J. Lowes, D. J. McKnight, S. MacMillan, L. R. Newitt, N. W. Peddie, J. M. Quinn, T. J. Sabaka, International Geomagnetic Reference Field, 1995 revision Presented by IAGA Division V, Working Group 8, *Phys. Earth Planet. Int.* 97 (1996) 23–26.
- [18] H. Schouten, K. McCamy, Filtering marine magnetic anomalies, *J. Geophys. Res.* 77 (1972) 7089–7099.
- [19] M. Talwani, J. R. Heirtzler, Computation of magnetic anomalies caused by two dimensional structures of arbitrary shape, in: G. Parks (Ed.), *Computers in the mineral industries*, Vol. 9, Stanford Univ. Publ., Stanford, California, 1964, pp. 464–480.
- [20] S. C. Cande, D. V. Kent, Revised calibration of the geomagnetic polarity timescale for the late Cretaceous and Cenozoic, *J. Geophys. Res.* 100 (1995) 6093–6095.
- [21] S. C. Cande, D. V. Kent, Constraints Imposed by the Shape of Marine Magnetic Anomalies on the Magnetic Source, *J. Geophys. Res.* 81 (1976) 4157–4162.
- [22] J. Dyment, S. C. Cande, J. Arkani-Hamed, Skewness of marine magnetic anomalies created between 85 and 40 Ma in the Indian Ocean, *J. Geophys. Res.* 99 (1994) 24121–24134.
- [23] J. Dyment, J. Arkani-Hamed, Spreading rate dependent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from the anomalous skewness of marine magnetic anomalies, *Geophys. J. Int.* 121 (1995) 789–804.
- [24] B. Parsons, J. G. Sclater, An analysis of the variation of ocean floor bathymetry and heat flow with age, *J. Geophys. Res.* 82 (1977) 802–827.
- [25] Y. Guyodo, J.-P. Valet, Global changes in intensity of the Earth’s magnetic field during the past 800 kyr, *Nature* 399 (1999) 249–252.
- [26] Y. S. Kok, L. Tauxe, A relative geomagnetic paleointensity stack from Ontong-Java Plateau sediments for the Matuyama, *J. Geophys. Res.* 104 (1999) 25401–25414.
- [27] T. Yamazaki, H. H. Oda, A geomagnetic paleointensity stack between 0.8 and 3.0 Ma from equatorial Pacific sediment cores, *Geochem., Geophys., Geosyst.* 6 (2005) Q11H20, doi:10.1029/2005GC001001.

- [28] J. Bowles, L. Tauxe, J. Gee, D. McMillan, S. Cande, Source of tiny wiggles in Chron C5: A comparison of sedimentary relative intensity and marine magnetic anomalies, *Geochem., Geophys., Geosyst.* 4(6) (2003) 1049, doi:10.1029/2002GC000489.
- [29] L. Tauxe, P. Hartl, 11 million years of Oligocene geomagnetic field behaviour, *Geophys. J. Int.* 128 (1997) 217–229.
- [30] L. Lanci, W. Lowrie, Magnetostratigraphic evidence that "tiny wiggles" in the oceanic magnetic anomaly record represent geomagnetic paleointensity variations, *Earth Planet. Sci. Lett.* 148 (1997) 581–592.
- [31] J. M. Parés, L. Lanci, A complete Middle Eocene-Early Miocene magnetic polarity stratigraphy in Equatorial Pacific sediments (ODP Site 1220), in: J. E. T. Channell, D. V. Kent, W. Lowrie, J. Meert (Eds.), *Timescales of the Paleomagnetic Field*, Vol. 145, AGU Geophysical Monograph, 2004, pp. 131–140.
- [32] W. Krijgsman, D. V. Kent, Non-uniform occurrence of short-term polarity fluctuations in the geomagnetic field? New results from Middle to Late Miocene sediments of the North Atlantic (DSDP Site 608), in: J. E. T. Channell, D. V. Kent, W. Lowrie, J. Meert (Eds.), *Timescales of the Paleomagnetic Field*, Vol. 145, AGU Geophysical Monograph, 2004, pp. 161–174.
- [33] G. Acton, Y. Guyodo, S. Brachfeld, The nature of a cryptochron from a paleomagnetic study of chron C4r.2r recorded in sediments off the Antarctic Peninsula, *Phys. Earth Planet. Int.* 156 (2006) 213–222.
- [34] J. S. Gee, S. C. Cande, J. A. Hildebrand, K. Donnelly, R. L. Parker, Geomagnetic intensity variations over the past 780 kyr obtained from near-seafloor magnetic anomalies, *Nature* 408 (2000) 827–832.
- [35] G. Pouliquen, Y. Gallet, J. Dyment, P. Patriat, C. Tamura, Correction to "A geomagnetic record over the last 3.5 million years from deep-tow magnetic anomaly profiles across the Central Indian Ridge", *J. Geophys. Res.* 106 (2001) 30549.
- [36] G. Pouliquen, Y. Gallet, J. Dyment, P. Patriat, C. Tamura, A geomagnetic record over the last 3.5 million years from deep-tow magnetic anomaly profiles across the Central Indian Ridge, *J. Geophys. Res.* 106 (2001) 10941–10960.
- [37] N. E. Bowers, S. C. Cande, J. S. Gee, J. A. Hildebrand, R. L. Parker, Fluctuations of the paleomagnetic

field during chron C5 as recorded in near-bottom marine magnetic anomaly data, *J. Geophys. Res.* 106 (2001) 26379–26396.

[38] B. M. Clement, Dependence of the duration of geomagnetic polarity reversals on site latitude, *Nature* 428 (2004) 637–640.

[39] Y. Gallet, V. Courtillot, Geomagnetic reversal behaviour since 100 Ma, *Phys. Earth Planet. Int.* 92 (1995) 235–244.

[40] C. Constable, C. Johnson, A paleomagnetic power spectrum, *Phys. Earth Planet. Int.* 153 (2005) 61–73.

[41] S. C. Cande, Anomalous behavior of the paleomagnetic field inferred from the skewness of anomalies 33 and 34, *Earth Planet. Sci. Lett.* 40 (1978) 275–286.

[42] J. Dyment, Evolution of the Carlsberg Ridge between 60 and 45 Ma: Ridge propagation, spreading asymmetry, and the Deccan-Reunion hotspot, *J. Geophys. Res.* 103 (1998) 24067–24084.

List of Figures

- 1 Map of the World's oceanic magnetic lineations (in blue), after Cande et al. [11].
The areas selected in our study are in red and the selected profiles in black.
Areas in the Indian Ocean: 1. Central Indian Basin, east of the Indian Ocean Triple Junction trace; 2. Central Indian Basin, west of the Indian Ocean Triple Junction trace; 3. Crozet Basin; 4. Madagascar Basin; 5. Wharton Basin;
Areas in the North Pacific: 6. Aleutian Abyssal Plain, north of Chinook Trough; 7. Aleutian Abyssal Plain, north of Mendocino Fracture Zone (FZ); 8. Pacific Plate between Mendocino and Murray FZ; 9. Pacific Plate between Murray and Molokai FZ; 10. Pacific Plate between Molokai and Clarion FZ;
Areas in the South Pacific: 11. Pacific Plate south of FZ 8.5; 12. Pacific Plate north of FZ 8.5 and south of Heezen FZ; 13. Pacific Plate north of Heezen FZ; 14. Antarctic Plate south of Heezen FZ; 15. Antarctic Plate between Humbolt FZ and FZ V; 16. Antarctic Plate between FZ V and Heezen FZ. 26
- 2 Stacks computed in the different areas from the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans and global stacks calculated with all profiles available in the corresponding ocean. The stacks are drawn in red if they are computed with only one or two profiles. We report most tiny wiggles (blue ticks). The dashed lines indicate the correlations between stacks. For each ocean, the number of profiles available for each magnetic polarity interval in each ocean is also specified. 27
- 3 Mean (half) spreading rates computed in the different areas from the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans. The gray line indicate the mean spreading rate averaged for each ocean. 30

- 4 Application of the upward continuation method which allows one to compare stacks from different areas. For each chron, the stack computed for the area characterized by the fastest spreading rate (or eventually an area with enough profiles to be representative) is selected (second black curve from bottom), upward-continued (gray curves) and then compared to stacks from other areas (black curves) having various slower spreading rates. The global high resolution stack is also represented (black curve at the bottom). Micro-anomalies are shown by dots and correlations with the upward-continued stack are marked by dotted line. For chrons 25r, 26r and 33r, two panels are presented with upward-continued stacks from two different areas. 33

- 5 Stacks computed for chron 33n, that take into account secondary tie-points B and C (marked by gray vertical lines). The vertical scale has been adjusted so that the amplitude is the same for all areas. The number of profiles used in the computation and the mean half-spreading rate are specified for each area. 37

- 6 High resolution stack based on selected areas with the highest spreading rate. Tiny wiggles are marked by red dots. A model has been computed to the pole (i.e. assuming vertical magnetization and magnetic field vectors) using the geomagnetic polarity timescale of Cande and Kent [20] and incorporating the cryptochrons deduced from this study (Table 3, see Electronic Supplement). 38

- 7 Individual profiles used to compute the high resolution stack, for chrons 29n, 30n, 31n and 31r (a) and for chrons 32n.2n, 33n and 33r (b). A, B, C are secondary tie-points (see text). The name of cruises is specified according the scheme of NGDC database (<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/fliers/03mgg02.html>) and the French database for the Indian Ocean (http://barkeria.u-strasbg.fr/archivage/diffu_indien.html). The extension after the dash sign indicates the profile number when several profiles were obtained during the same cruise. Our area number is also given. 39

- 8 Cumulative distribution function (CDF) of the relative positions x and x' of tiny wiggles within the polarity events respectively before (a) and after the rejection of a “blind” zone of ~ 10 km at both ends of the chron (b). 41
- 9 Frequency of tiny-wiggles within each chron (in black) and mean spreading rate (in red) computed using the high resolution stack. Chrons having less than two tiny wiggles are not shown. The black bars are shorter than the chron durations because our frequency estimates were performed between the first and last tiny wiggles in order to exclude the “blind” period at both ends of chron. 42
- 10 Distance as a function of the order of occurrence of each tiny wiggle in a fictitious timescale that excludes the time intervals bounded by two tiny wiggles and containing a reversal. The dots define a straight line yielding a constant mean distance of ~ 16 km between successive tiny wiggles. The name of the longer chron are reported for reference. 43

List of Tables

- 1 Spreading directions and skewness corrections applied to profiles in the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans. 44
- 2 Description and comparison of the regional stacks for each chron, with the list of areas where the spreading rate allows a high (HR) or medium (MR) resolution record of the geomagnetic field fluctuations. We summarize the stack consistency with the other stacks and the number of identified tiny wiggles. 45
- 3 Cryptochrons found in our study from chron 19r to chron 33r. Names follow the convention of Cande and Kent [7,6]. 46

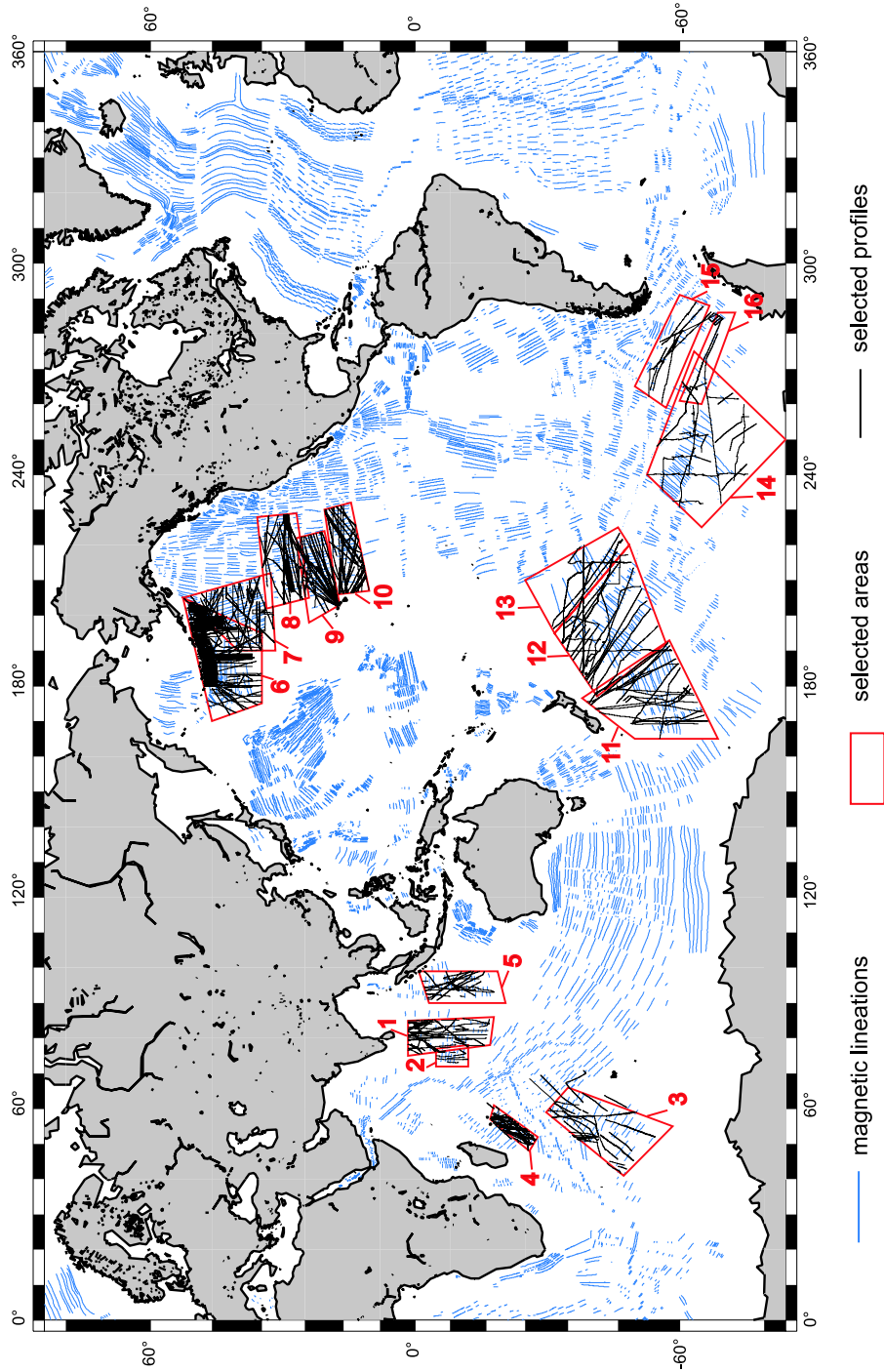


Fig. 1. Map of the World's oceanic magnetic lineations (in blue), after Cande et al. [11]. The areas selected in our study are in red and the selected profiles in black.

Areas in the Indian Ocean: 1. Central Indian Basin, east of the Indian Ocean Triple Junction trace; 2. Central Indian Basin, west of the Indian Ocean Triple Junction trace; 3. Crozet Basin; 4. Madagascar Basin; 5. Wharton Basin; Areas in the North Pacific: 6. Aleutian Abyssal Plain, north of Chinook Trough; 7. Aleutian Abyssal Plain, north of Mendocino Fracture Zone (FZ); 8. Pacific Plate between Mendocino and Murray FZ; 9. Pacific Plate between Murray and Molokai FZ; 10. Pacific Plate between Molokai and Clarion FZ; Areas in the South Pacific: 11. Pacific Plate south of FZ 8.5; 12. Pacific Plate north of FZ 8.5 and south of Heezen FZ; 13. Pacific Plate north of Heezen FZ; 14. Antarctic Plate south of Heezen FZ; 15. Antarctic Plate between Humbolt FZ and FZ V; 16. Antarctic Plate between FZ V and Heezen FZ.

(a)

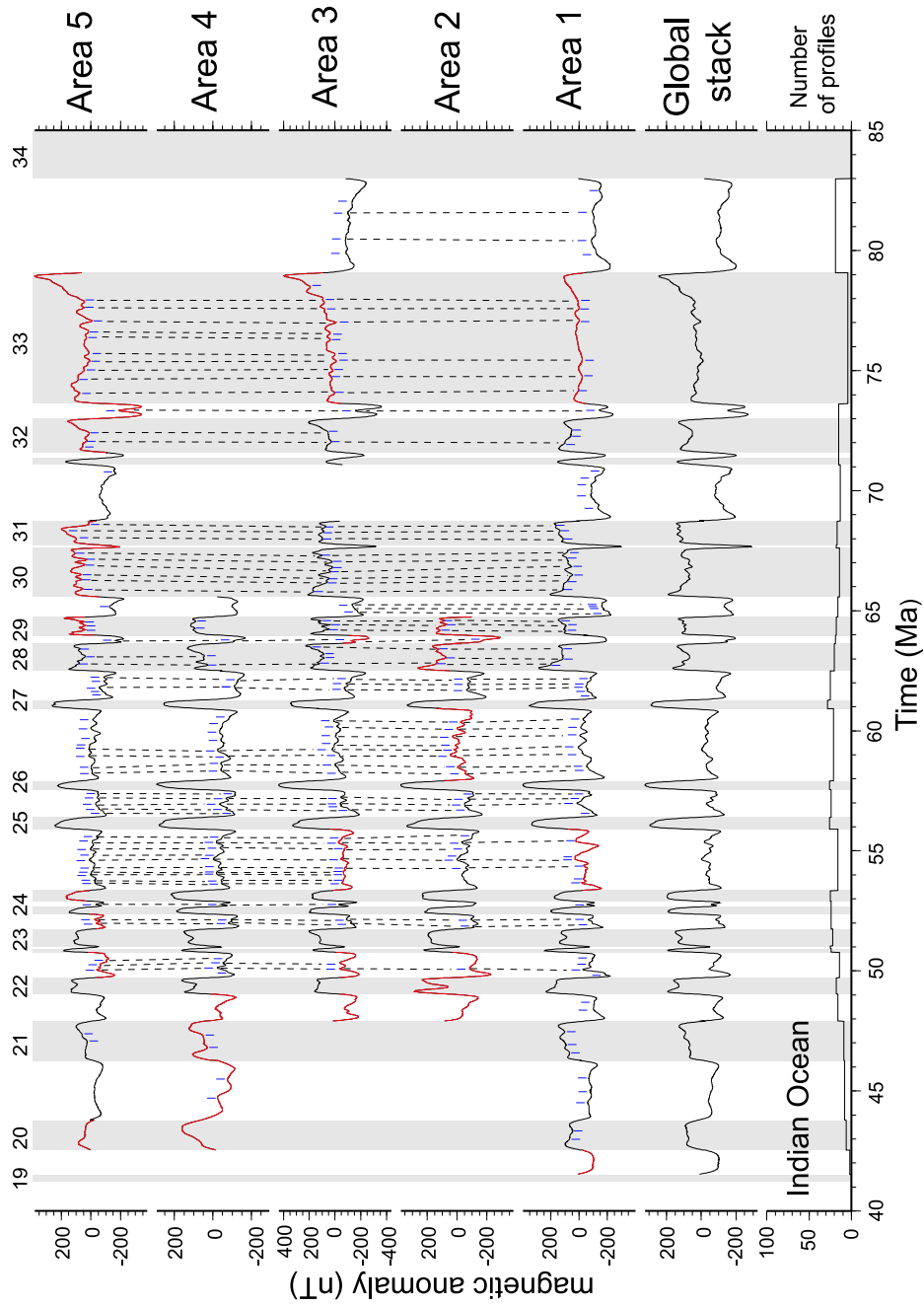
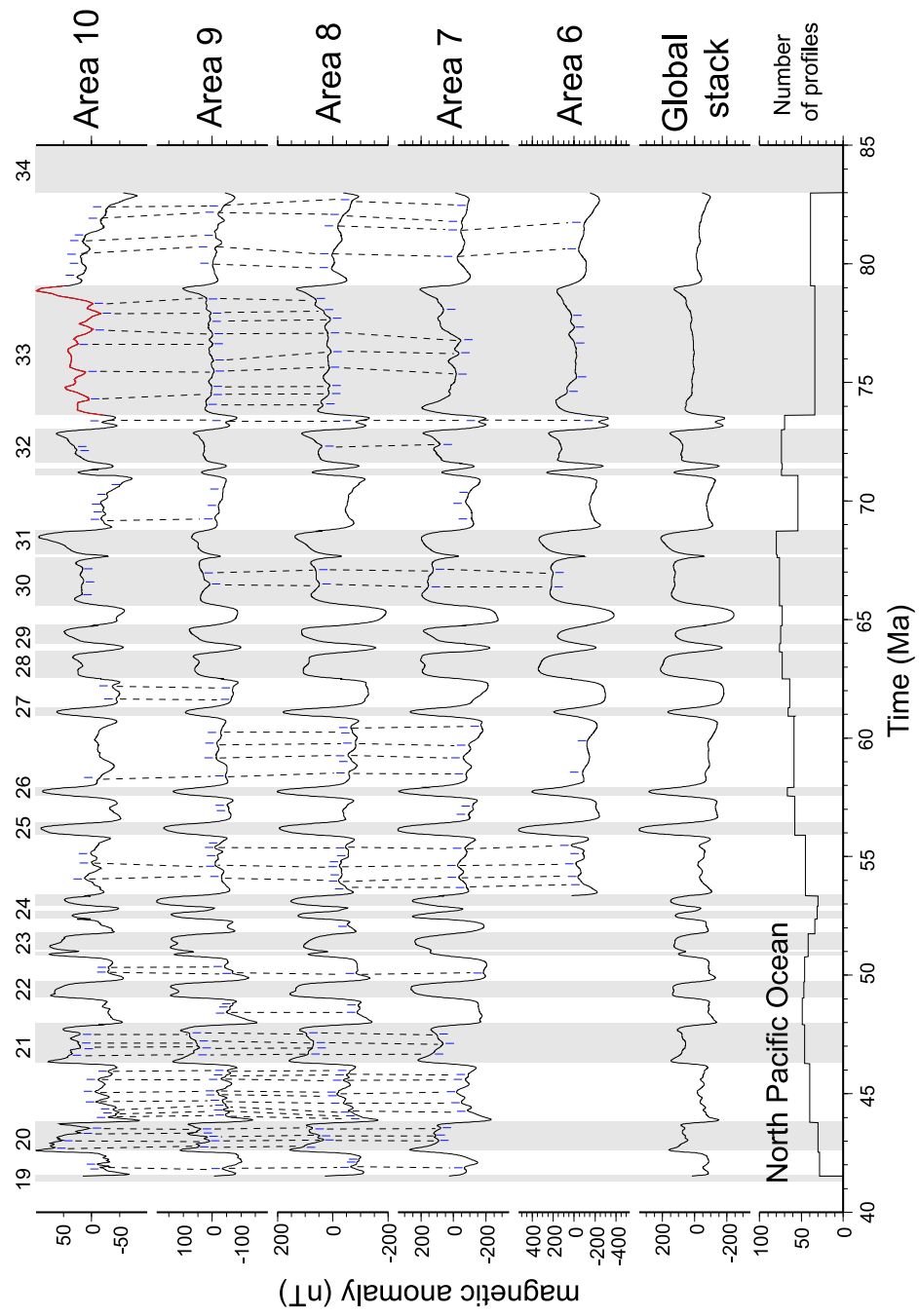
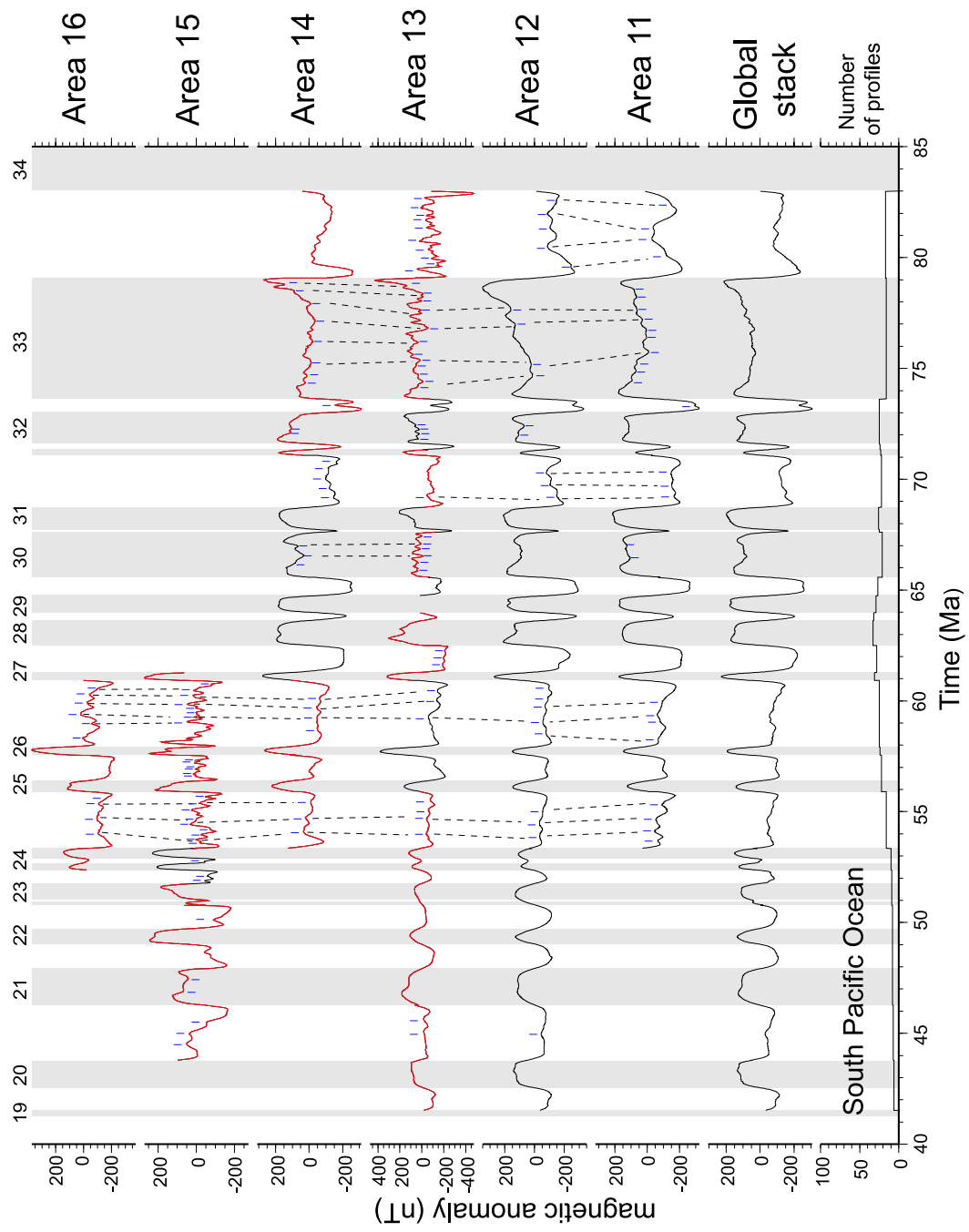


Fig. 2. Stacks computed in the different areas from the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans and global stacks calculated with all profiles available in the corresponding ocean. The stacks are drawn in red if they are computed with only one or two profiles. We report most tiny wiggles (blue ticks). The dashed lines indicate the correlations between stacks. For each ocean, the number of profiles available for each magnetic polarity interval in each ocean is also specified.

(b)



(c)



(a)

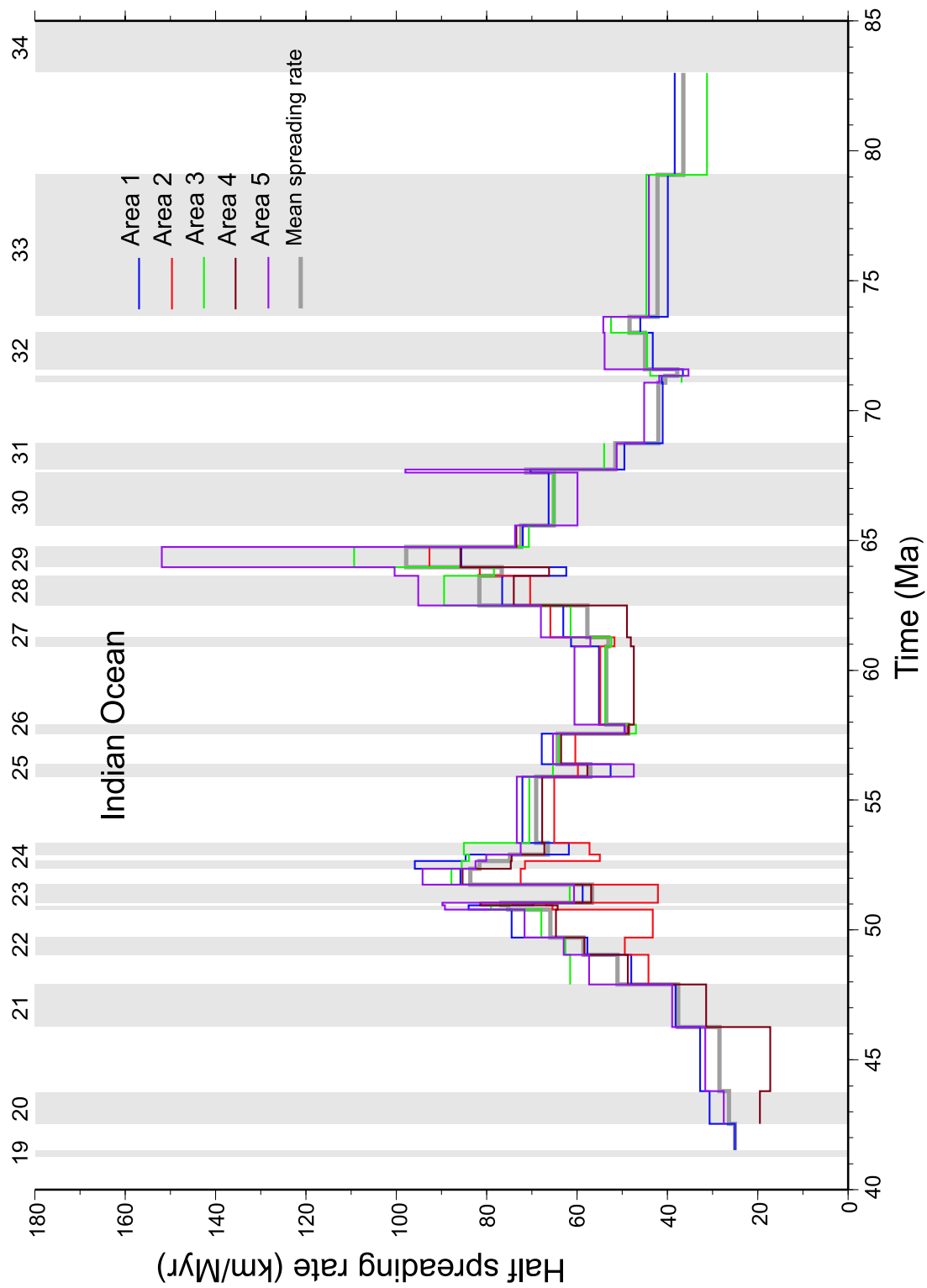
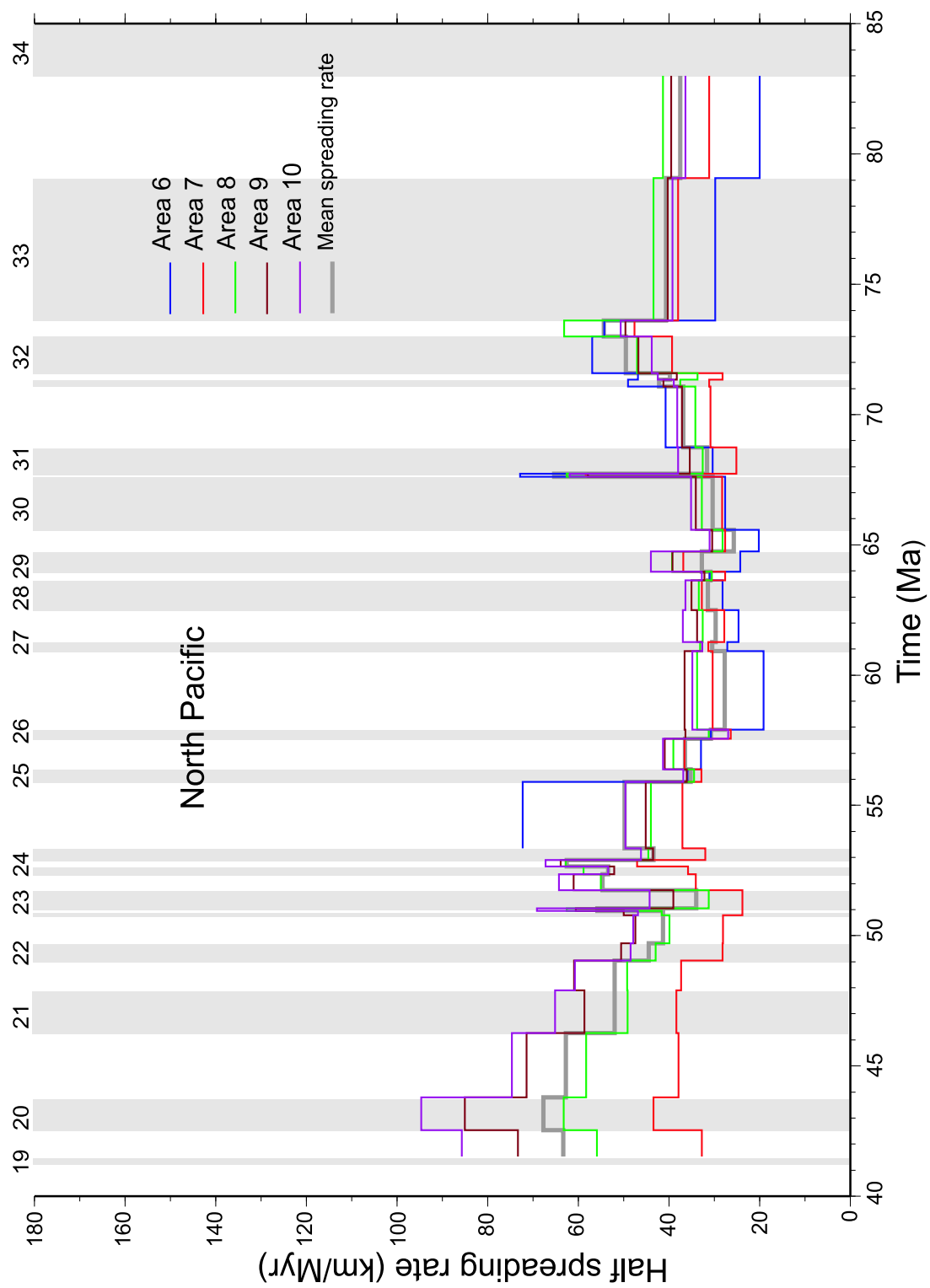
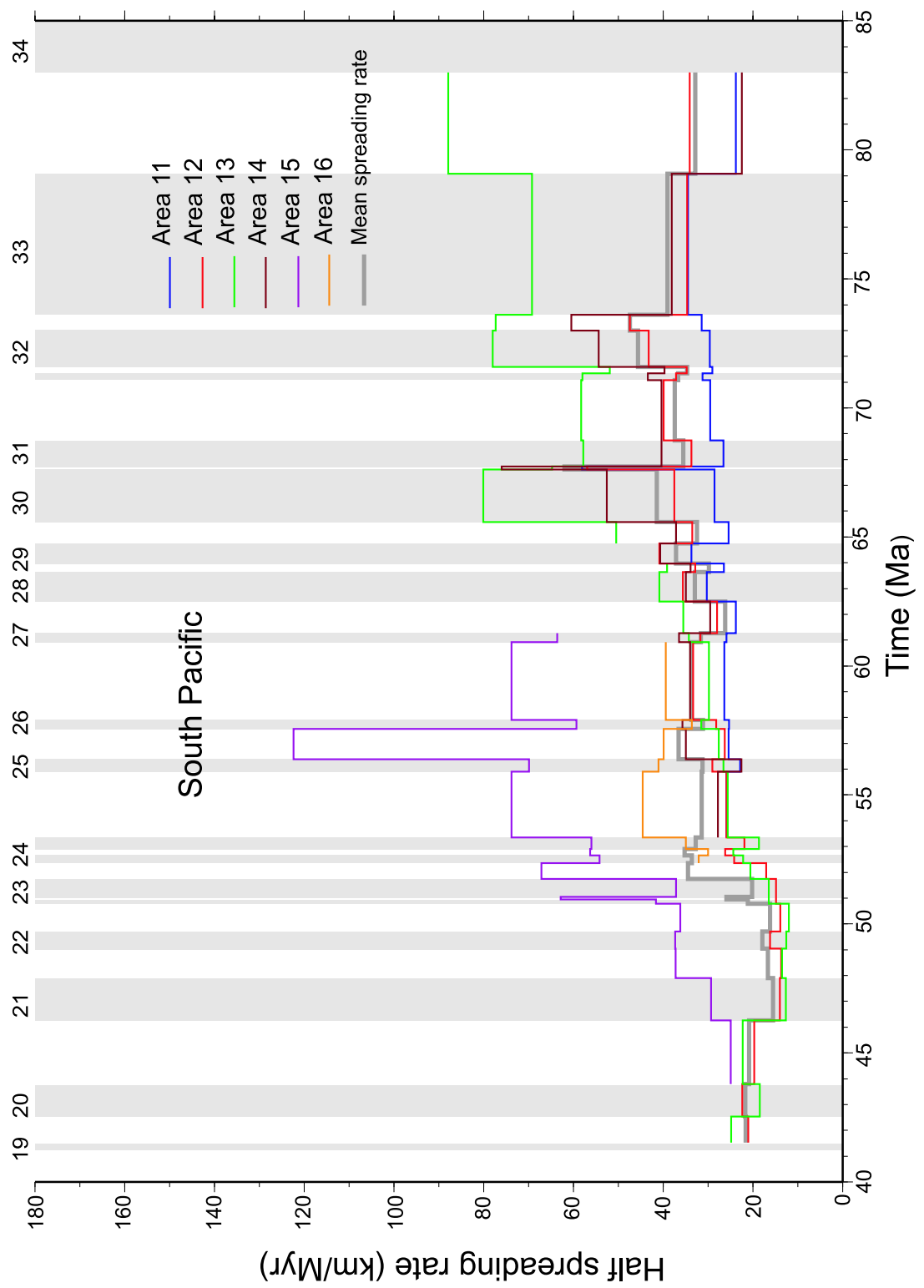


Fig. 3. Mean (half) spreading rates computed in the different areas from the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans. The gray line indicate the mean spreading rate averaged for each ocean.

(b)



(c)



(a)

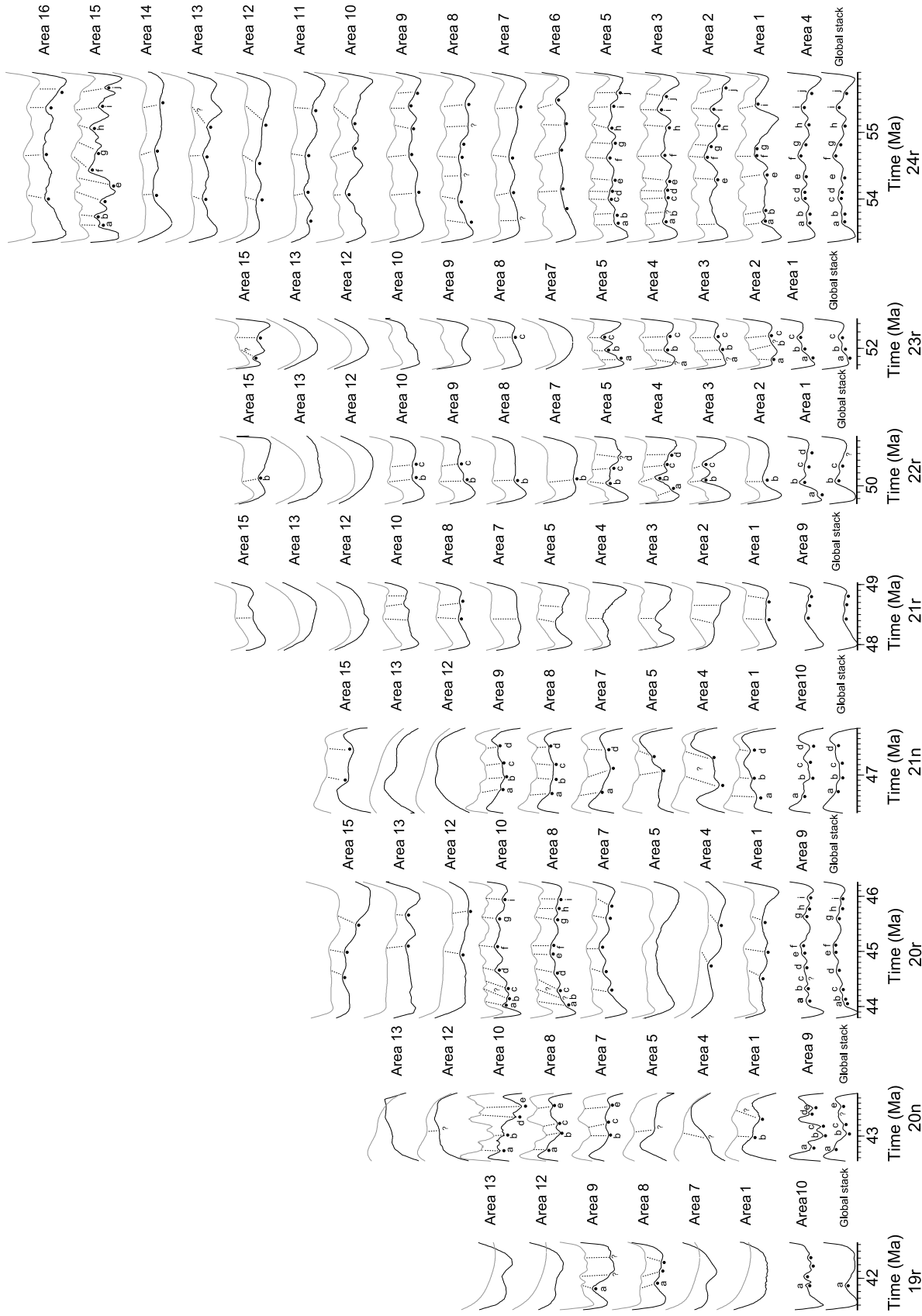
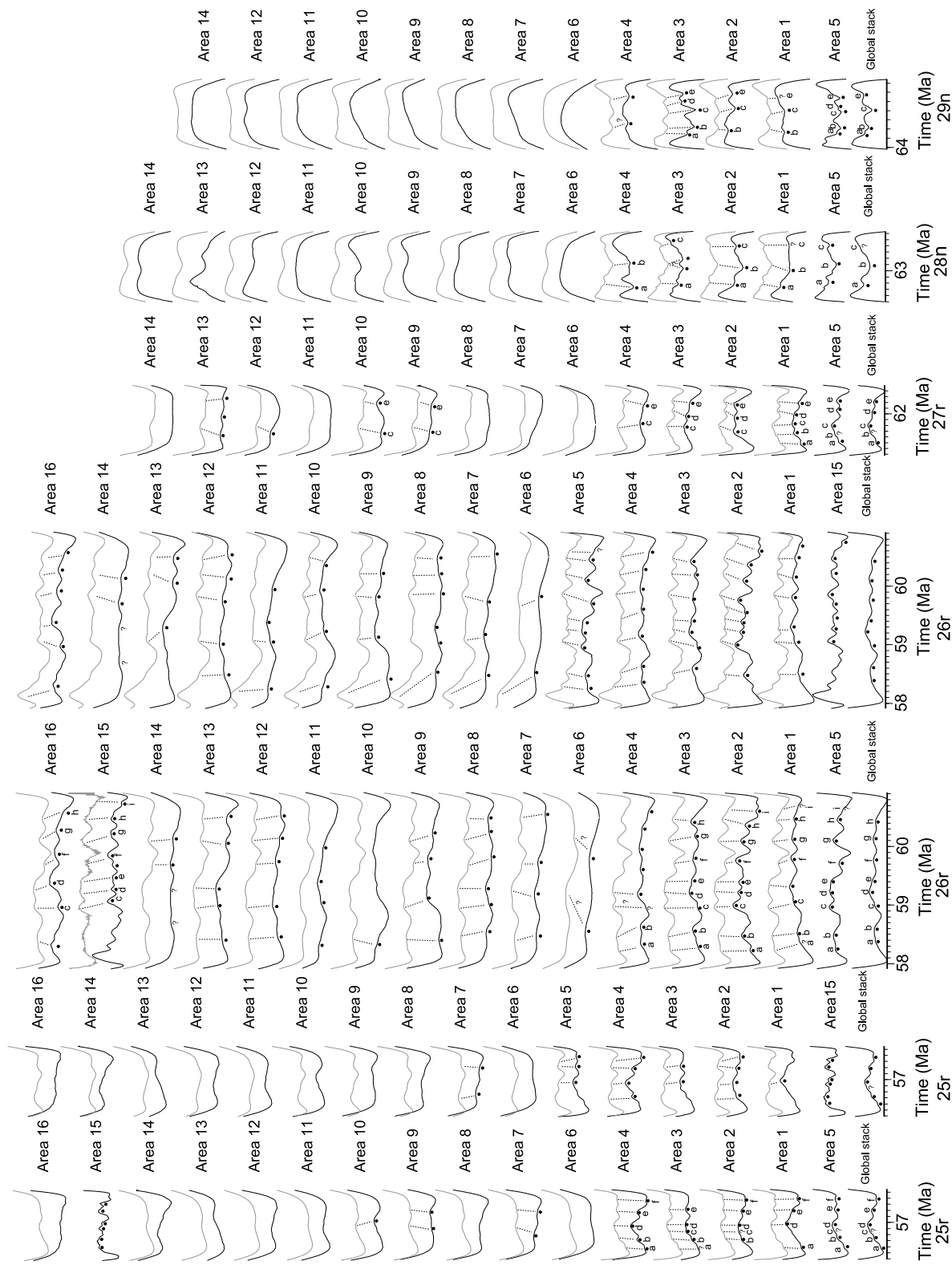
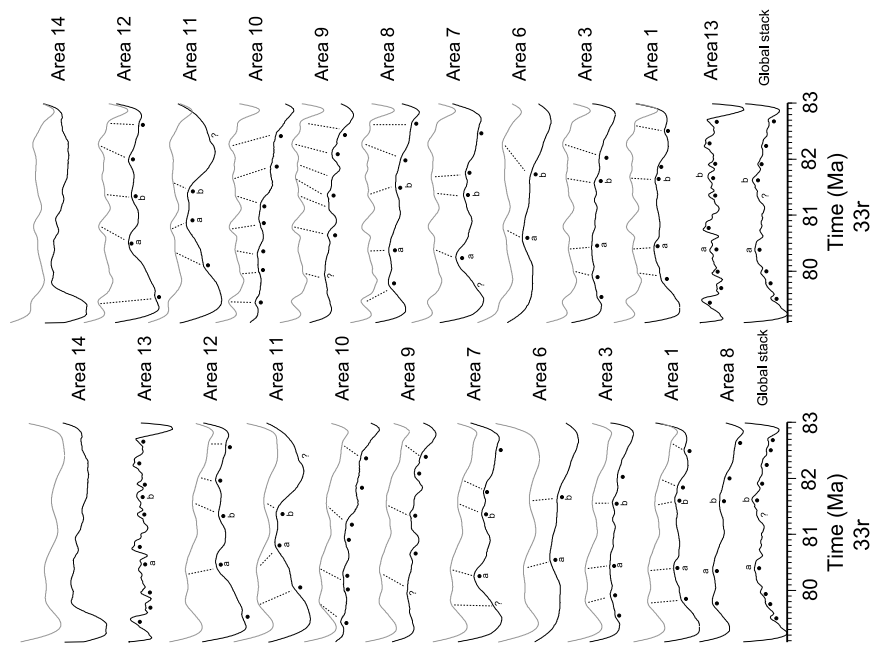


Fig. 4. Application of the upward continuation method which allows one to compare stacks from different areas. For each chron, the stack computed for the area characterized by the fastest spreading rate (or eventually an area with enough profiles to be representative) is selected (second black curve from bottom), upward-continued (gray curves) and then compared to stacks from other areas (black curves) having various slower spreading rates. The global high resolution stack is also represented (black curve at the bottom). Micro-anomalies are shown by dots and correlations with the upward-continued stack are marked by dotted line. For chrons 25r, 26r and 33r, two panels are presented with upward-continued stacks from two different areas.

(b)



(d)



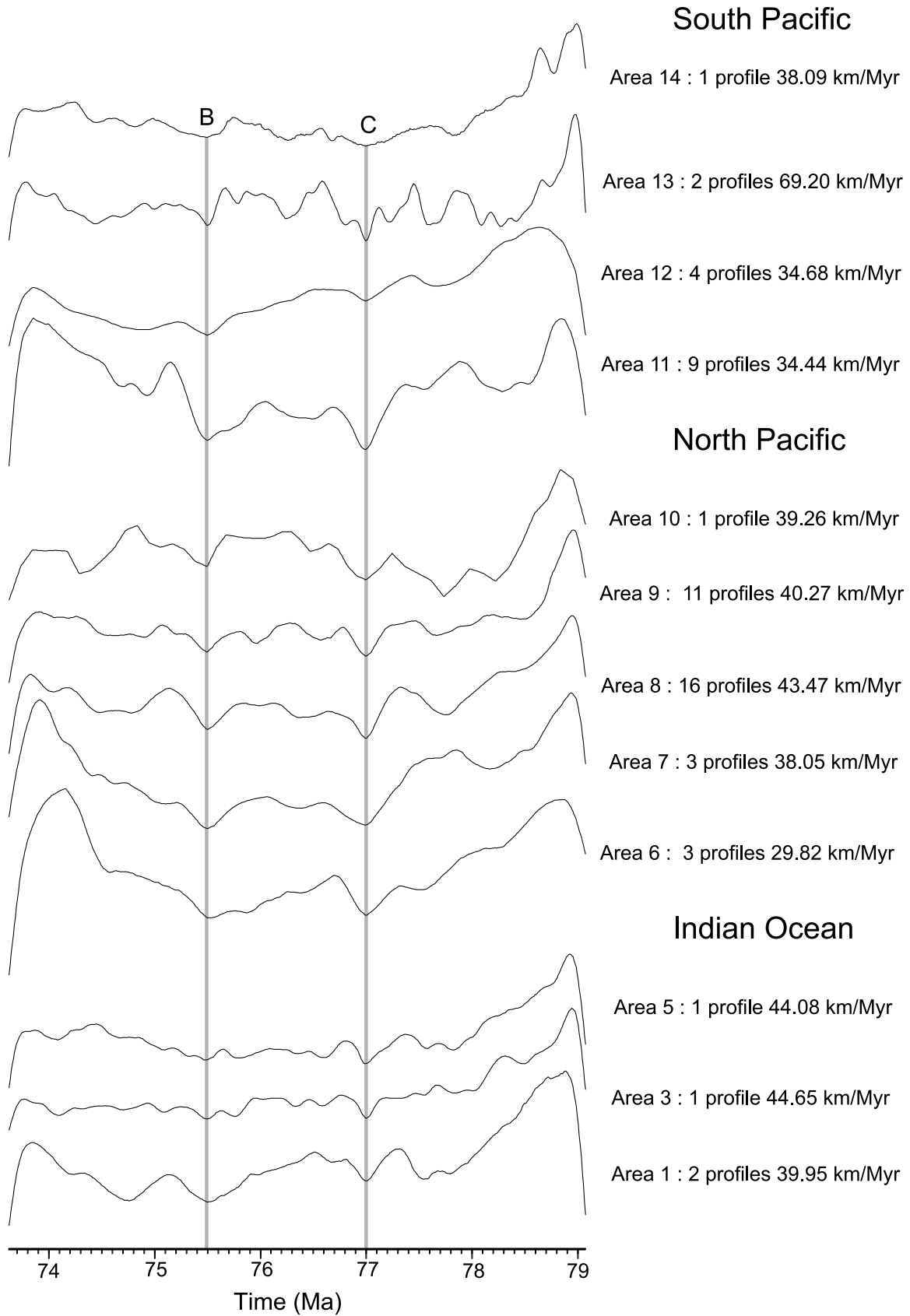


Fig. 5. Stacks computed for chron 33n, that take into account secondary tie-points B and C (marked by gray vertical lines). The vertical scale has been adjusted so that the amplitude is the same for all areas. The number of profiles used in the computation and the mean half-spreading rate are specified for each area.

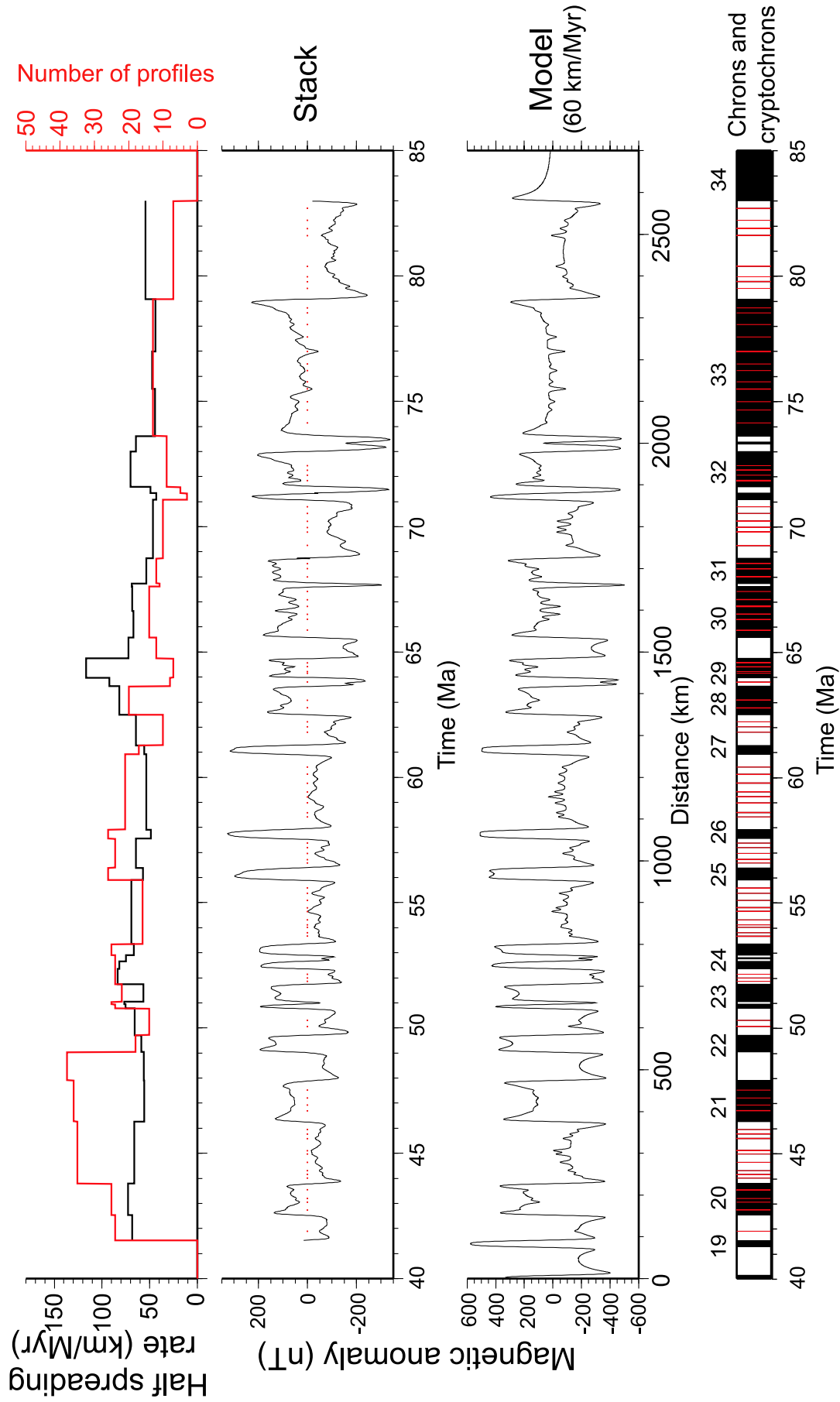


Fig. 6. High resolution stack based on selected areas with the highest spreading rate. Tiny wiggles are marked by red dots. A model has been computed to the pole (i.e. assuming vertical magnetization and magnetic field vectors) using the geomagnetic polarity timescale of Cande and Kent [20] and incorporating the cryptochrons deduced from this study (Table 3, see Electronic Supplement).

(a)

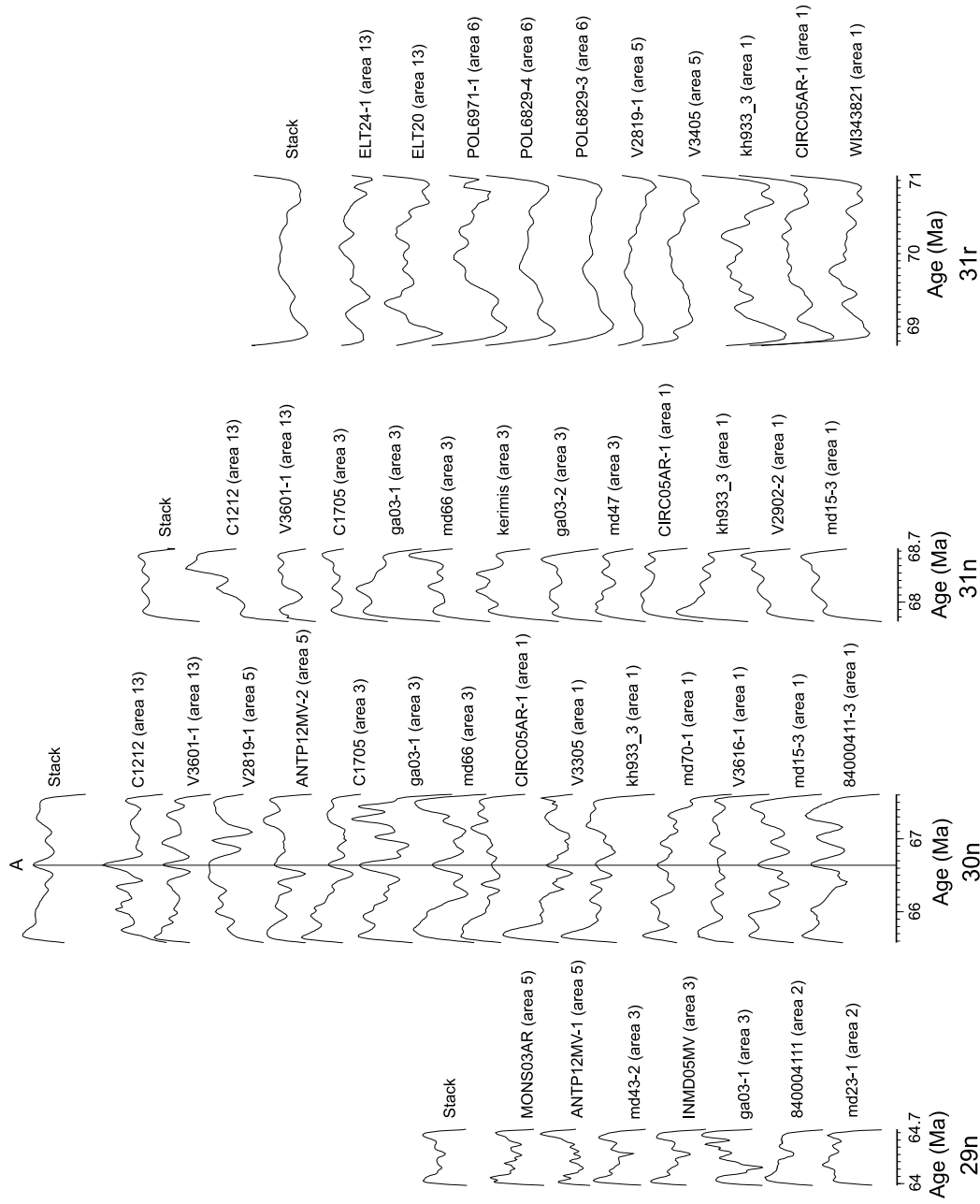
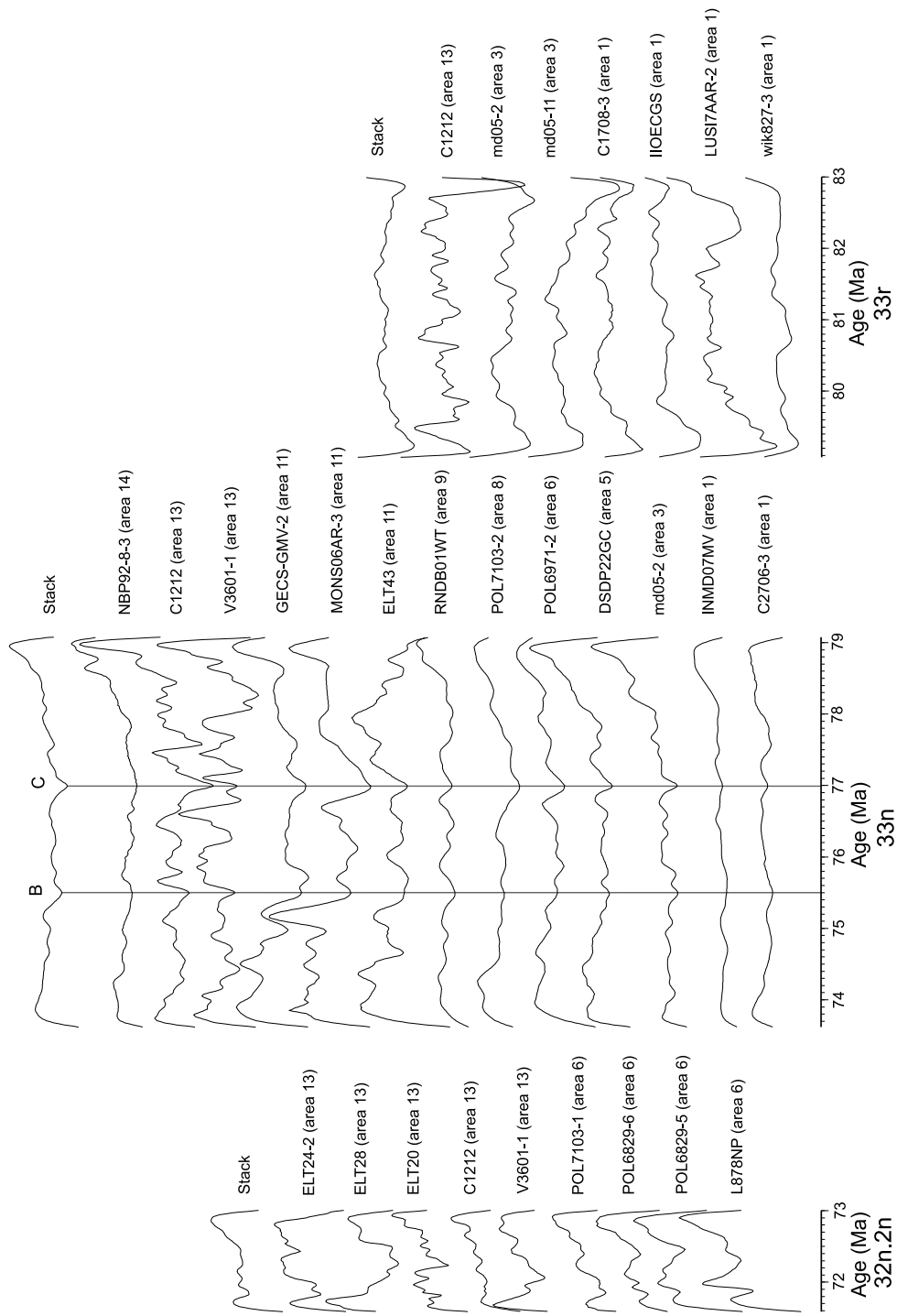
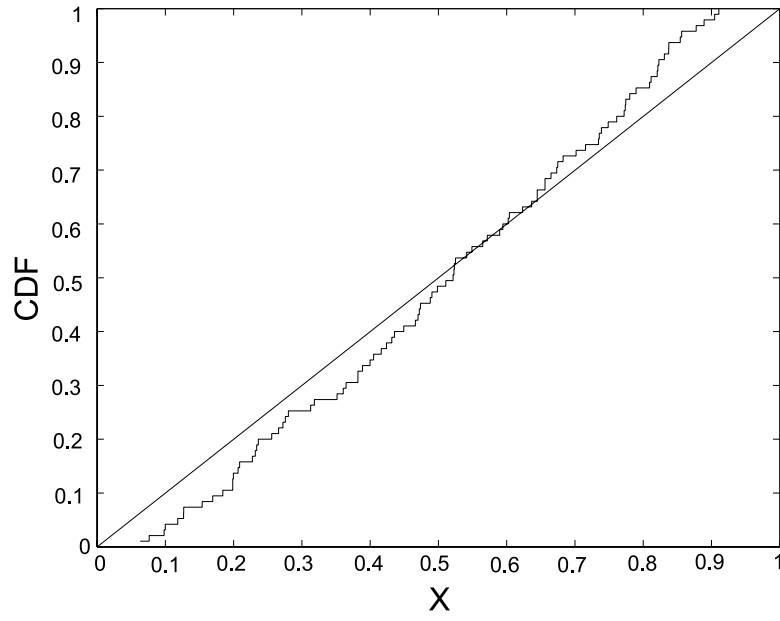


Fig. 7. Individual profiles used to compute the high resolution stack, for chronos 29n, 30n, 31n and 31r (a) and for chronos 32n, 29n, 33n and 33r (b). A, B, C are secondary tie-points (see text). The name of cruises is specified according the scheme of NGDC database (<http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/fliers/03mgg02.html>) and the French database for the Indian Ocean (http://barkeria.u-strasbg.fr/archivage/diffu_indien.html). The extension after the dash sign indicates the profile number when several profiles were obtained during the same cruise. Our area number is also given.

(b)



(a)



(b)

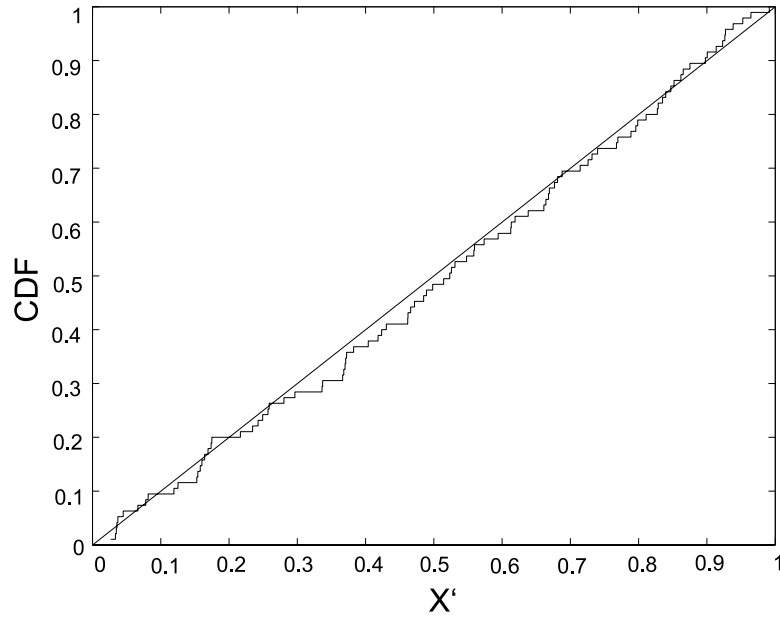


Fig. 8. Cumulative distribution function (CDF) of the relative positions x and x' of tiny wiggles within the polarity events respectively before (a) and after the rejection of a “blind” zone of ~ 10 km at both ends of the chron (b).

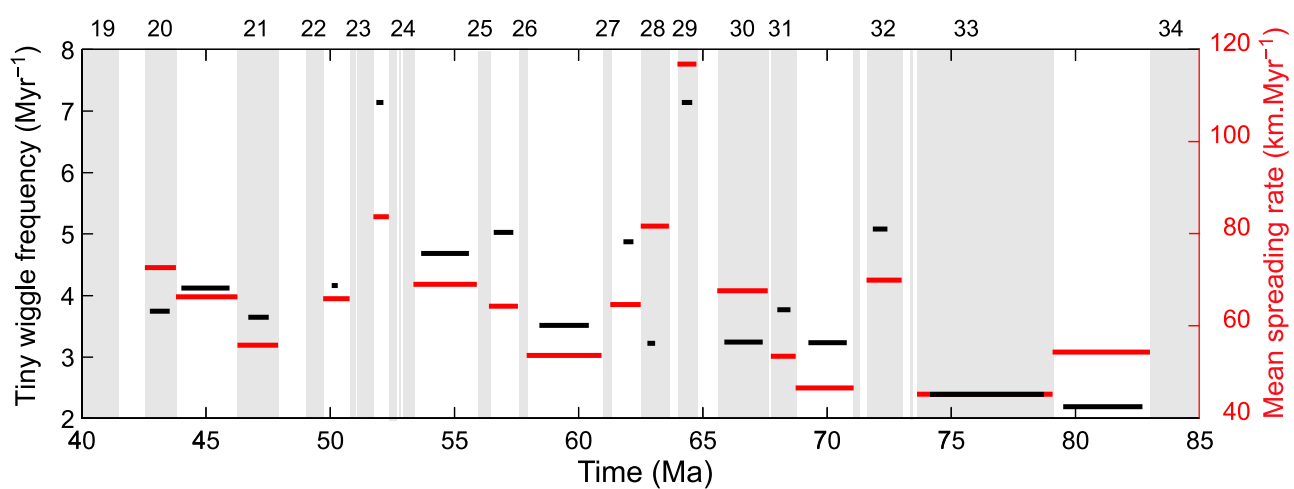


Fig. 9. Frequency of tiny-wiggles within each chron (in black) and mean spreading rate (in red) computed using the high resolution stack. Chrons having less than two tiny wiggles are not shown. The black bars are shorter than the chron durations because our frequency estimates were performed between the first and last tiny wiggles in order to exclude the “blind” period at both ends of chrons.

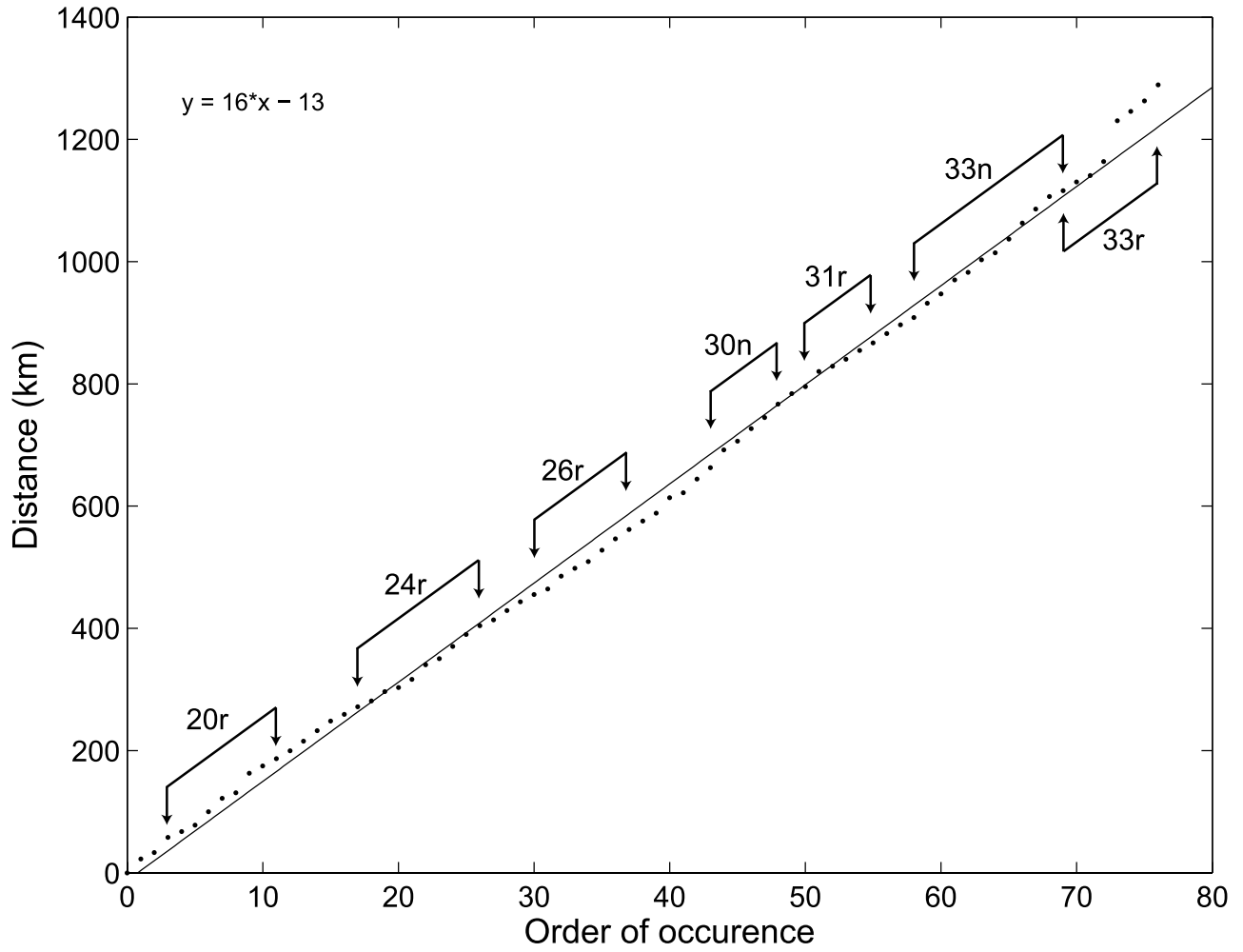


Fig. 10. Distance as a function of the order of occurrence of each tiny wiggle in a fictitious timescale that excludes the time intervals bounded by two tiny wiggles and containing a reversal. The dots define a straight line yielding a constant mean distance of ~ 16 km between successive tiny wiggles. The name of the longer chrons are reported for reference.

(a)

Area	Spreading direction (deg)	Skewness (deg)
1	N 0	80
2	N 5	80
3	N 210	-30
4	N 218	-35
5	N 180	-70

(b)

Area	Spreading direction (deg)	Skewness (deg)
6	N 180	80
7	N 252	40
8	N 260	40
9	N 260	60
10	N 260	80

(c)

Area	Spreading direction (deg)	Skewness (deg)
11	N 340	25
12	N 320	30
13	N 320	30
14	N 128	0
15	N 279	15
16	N 340	20

Table 1: Spreading directions and skewness corrections applied to profiles in the Indian (a), North Pacific (b) and South Pacific (c) oceans.

Chrons	HR areas	MR areas	Stacks consistency	Number of tiny wiggles
19r	8-10		Area 10 consistent with area 8 but not with area 9	1 (a)
20n	8-10	7	good	4 (a,b,c,e), possibly 5 (d)
20r	8-10	1,5,7,15	good (except area 5 characterised by low anomalies amplitude)	9 (a-i)
21n	8-10	1,4,5,7,15	good	4 (a-d)
21r			poor (poor resolution and varying shape between the stacks)	0
22r	1,3,4,5	2,8-10	good (especially between area 1 and 4 which include a large amount of data)	3 (b-d), possibly 4 (a)
23r	1-5	8-10,15	good	3 (a-c)
24r	1-5,6,15	7-14,16	good	10 (a-j)
25r	1-5,15		good (except area 15)	5 (a,b,d-f), possibly 6 (c)
26r	1-5,15	7-14,16	good in fast spreading rate areas, lower in slow spreading rate	8 (a-h), possibly 9 (i)
27r	1-5		good (except for younger part, lower resolution of areas 2-4)	3 (c-e), possibly 5 (a,b)
28n	1-5		good (except area 4)	2 (a,b), possibly 3 (c)
29n	1-5		good (except area 4)	3 (b,c,e), possibly 5 (a,d)
29r	1,3,4,5		poor	0
30n	1,3,5,13	6-12,14	good	6 (a-f)
31n	1,3,5		good	3 (a-c)
31r	1,5,13	6-12,14	good (especially between areas 1, 5 and 13)	7 (a-g)
32n.2n	5,6,13,14	1,3,7-10	good (except area 6, poor resolution)	4 (a-d)
33n	1,3,5,7-14	6	partly consistent	12 (a-j,B,C)
33r	13	1,3,7-12,14	partly consistent	at least 2 (a,b)

Table 2: Description and comparison of the regional stacks for each chron, with the list of areas where the spreading rate allows a high (HR) or medium (MR) resolution record of the geomagnetic field fluctuations. We summarize the stack consistency with the other stacks and the number of identified tiny wiggles.

Interval (Ma) Name			Interval (Ma) Name			Interval (Ma) Name		
41.888	41.892	C19r-1	55.577	55.583	C24r-10	68.525	68.535	C31n-3
42.737	42.743	C20n-1	56.579	56.581	C25r-1	69.245	69.255	C31r-1
43.045	43.055	C20n-2	56.720	56.724	C25r-2	69.782	69.797	C31r-2
43.198	43.202	C20n-3	56.955	56.965	C25r-3	69.962	69.977	C31r-3
43.535	43.545	C20n-4	57.187	57.193	C25r-4	70.212	70.227	C31r-4
44.007	44.013	C20r-1	57.373	57.377	C25r-5	70.527	70.533	C31r-5
44.147	44.153	C20r-2	58.415	58.425	C26r-1	70.793	70.797	C31r-6
44.307	44.313	C20r-3	58.585	58.595	C26r-2	71.830	71.850	C32n.2-1
44.636	44.644	C20r-4	58.975	58.985	C26r-3	72.046	72.054	C32n.2-2
44.964	44.976	C20r-5	59.212	59.228	C26r-4	72.258	72.262	C32n.2-3
45.103	45.117	C20r-6	59.415	59.425	C26r-5	72.428	72.432	C32n.2-4
45.586	45.594	C20r-7	59.767	59.773	C26r-6	74.138	74.142	C33n-1
45.767	45.773	C20r-8	60.117	60.123	C26r-7	74.658	74.662	C33n-2
45.947	45.953	C20r-9	60.407	60.413	C26r-8	74.987	74.993	C33n-3
46.699	46.701	C21n-1	61.796	61.804	C27r-1	75.486	75.504	C33n-4
46.929	46.931	C21n-2	62.008	62.012	C27r-2	75.778	75.782	C33n-5
47.209	47.211	C21n-3	62.206	62.214	C27r-3	76.226	76.234	C33n-6
47.520	47.524	C21n-4	62.765	62.775	C28n-1	76.489	76.491	C33n-7
50.053	50.067	C22r-1	63.076	63.084	C28n-2	76.981	76.999	C33n-8
50.299	50.301	C22r-2	63.784	63.810	C28r-1	77.565	77.575	C33n-9
51.857	51.863	C23r-1	64.148	64.152	C29n-1	78.068	78.072	C33n-10
51.987	51.993	C23r-2	64.215	64.225	C29n-2	78.528	78.532	C33n-11
52.136	52.144	C23r-3	64.401	64.419	C29n-3	78.728	78.732	C33n-12
53.655	53.665	C24r-1	64.564	64.576	C29n-4	79.506	79.514	C33r-1
53.797	53.803	C24r-2	65.866	65.874	C30n-1	79.778	79.782	C33r-2
54.011	54.019	C24r-3	66.295	66.305	C30n-2	79.967	79.973	C33r-3
54.107	54.113	C24r-4	66.500	66.520	C30n-3	80.385	80.395	C33r-4
54.309	54.311	C24r-5	66.810	66.830	C30n-4	81.612	81.628	C33r-5
54.643	54.657	C24r-6	67.085	67.095	C30n-5	81.896	81.904	C33r-6
54.795	54.805	C24r-7	67.408	67.413	C30n-6	82.217	82.223	C33r-7
55.088	55.092	C24r-8	67.995	68.005	C31n-1	82.695	82.705	C33r-8
55.365	55.375	C24r-9	68.315	68.325	C31n-2			

Table 3: Cryptochrons found in our study from chron 19r to chron 33r. Names follow the convention of Cande and Kent [7,6].

Chapitre 5

Conclusions et perspectives

5.1 Modélisation statistique du champ paléomagnétique

Le premier résultat de cette thèse est de démontrer à partir de l'étude d'une part du champ magnétique produit par deux simulations numériques de dynamo et d'autre part des bases de données paléomagnétiques que l'approche "Giant Gaussian process" (GGP) utilisée pour la modélisation du champ paléomagnétique est raisonnablement valide. Cette approche suppose que les coefficients de Gauss ont un comportement aléatoire, stationnaire et une distribution gaussienne à l'échelle de la période de polarité. Le champ magnétique produit par les simulations numériques est, en effet, caractérisé par des coefficients de Gauss dont le comportement peut être considéré comme aléatoire (temps de mémoire court devant la durée d'un intervalle de polarité) justifiant l'approche statistique utilisée pour la description du champ paléomagnétique. Un comportement non stationnaire provoquant des écarts à la distribution gaussienne des coefficients de Gauss est cependant observé. Cette non stationnarité est néanmoins relativement faible pour le modèle caractérisé par un flux de chaleur homogène à la limite noyau manteau et qui est également celui dont le champ magnétique ressemble le plus à celui de la Terre. Les coefficients de Gauss y ont une distribution quasi-gaussienne. Une étude similaire sur le comportement des coefficients de Gauss n'était pas possible pour le champ géomagnétique à l'échelle d'une période de polarité. Néanmoins, le test mis au point au chapitre 3 a permis de montrer qu'il est possible de trouver un modèle "GGP" dont les prédictions en terme de distribution des directions paléomagnétiques sont globalement en accord avec les observations disponibles aux sites d'étude d'une base de données paléomagnétique. Ce test prend en compte les incertitudes dans la mesure des directions paléomagnétiques qui peuvent affecter de manière significative leur distribution. Bien que le champ magnétique produit par les simulations numériques présente des contradictions avec les hypothèses

des modèles “GGP”, les données paléomagnétiques sont globalement compatibles avec ce type de représentation.

Le deuxième résultat de cette thèse est de montrer que l'étude de la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire et notamment de leurs propriétés de symétrie peut fournir des informations sur le fonctionnement de la géodynamo et sur une éventuelle influence des conditions à la limite noyau manteau. Les simulations étudiées et le champ paléomagnétique montrent une rupture de la symétrie sphérique (champ moyen non nul et dépendance de la variabilité du champ avec la latitude) associée à l'influence de la rotation de la Terre. Par contre, une rupture de la symétrie axiale n'est observée que dans la simulation numérique dont la répartition du flux de chaleur est hétérogène. L'observation d'une telle rupture de la symétrie axiale dans le champ paléomagnétique (si elle est confirmée) serait donc associée à une influence des conditions à la limite noyau manteau. La dissymétrie entre les hémisphères nord et sud observée dans le champ magnétique des deux simulations numériques et pour le champ paléomagnétique (terme g_2^0 dans le champ moyen) n'est par contre pas forcément associée à une dissymétrie des conditions à la limite noyau manteau entre les hémisphères nord et sud. Pour savoir si une telle dissymétrie existe, il serait nécessaire d'étudier le comportement du champ sur plusieurs périodes de polarité et rechercher si la famille des coefficients antisymétriques (compre-nant le dipôle g_1^0) et la famille des coefficients symétriques (compre-nant le quadrupôle g_2^0) s'inversent toujours simultanément ou peuvent au contraire s'inverser indépendamment.

Les deux résultats présentés ci-dessus sont encourageants et suggèrent plusieurs pistes à suivre pour l'avenir. La méthode développée au chapitre 3 s'est montrée très discriminante, permettant de distinguer, parmi six modèles, un modèle (en l'occurrence le modèle C1 proposé par Quidelleur et Courtillot [1996]) dont les prédictions sont en accord avec une base de données paléomagnétique (en l'occurrence la base de données de Quidelleur et al. [1994] mise à jour en 1998). Ce modèle ayant été construit à partir de cette même base de données, ce résultat n'est pas surprenant mais très encourageant. Il conviendrait maintenant de répéter ces tests sur les bases de données plus récentes (en y incluant également les mesures de paléointensité disponibles) et de rechercher le modèle qui rend compte au mieux de l'ensemble des observations paléomagnétiques pour les 5 derniers millions d'années. Il n'est cependant pas évident que les différentes bases de données disponibles soient cohérentes entre elles. En effet, celles-ci utilisent des critères de sélections généralement différents pouvant avoir des conséquences importantes sur la distribution des observations paléomagnétiques. Un travail de fond sur le choix des critères de sélection est donc nécessaire au préalable, avant la recherche d'un nouveau modèle. Enfin de manière à mettre en évidence les ruptures de symétries observées dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire, il est nécessaire de ne pas supposer une

forme trop simple *a priori* pour les modèles de champ moyen et de paléovariation séculaire (autoriser par exemple l'existence de corrélations entre les coefficients de Gauss). Des suggestions sur les simplifications éventuelles ont été proposées.

Cette nouvelle méthode devrait permettre également de tester si la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire a évolué de manière significative au cours du temps. La réalisation de modèles séparés pour les intervalles entre les inversions et les excursions peut permettre par exemple de détecter si les familles de coefficients symétriques et antisymétriques par rapport à l'équateur s'inversent toujours de façon simultanée au cours des inversions (en raison d'une dissymétrie des conditions à la limite noyau manteau entre les hémisphères nord et sud) ou peuvent parfois s'inverser séparément. La réalisation de modèles pour les périodes anciennes pourrait permettre de rechercher si une variation de la morphologie du champ paléomagnétique (et de ses propriétés de symétrie) associée à des variations des conditions à la limite noyau manteau (modifiées par la convection mantellique) s'observe en parallèle des variations de la fréquence des inversions. La réalisation de tels modèles est cependant beaucoup plus difficile pour les périodes très anciennes. La quantité de données disponibles est très inférieure. D'autre part, la position des continents a varié de manière significative. Des reconstitutions paléogéographiques permettent de retrouver leur position approximative, cependant ces reconstitutions reposent en général sur l'hypothèse que le champ moyen est un dipôle axial géocentrique, alors que l'on souhaite justement retrouver la morphologie du champ moyen dans le passé.

Les conclusions déduites de l'étude des deux simulations numériques suggèrent également des études complémentaires sur le champ magnétique produit par les simulations numériques. Les modèles exploités sont caractérisés par des paramètres très différents de ceux de la Terre. Le comportement statistique des coefficients de Gauss reste-t-il comparable lorsque les paramètres sont plus proches de ceux de la Terre ? Les modèles exploités ici sont relativement courts. Il serait également utile d'exploiter de longues séries temporelles de coefficients de Gauss pour y étudier par exemple le comportement des familles de coefficients symétriques et antisymétriques par rapport à l'équateur au cours des inversions et des excursions.

5.2 Evolution à long terme des fluctuations du champ géomagnétique

Le troisième résultat de cette thèse est de montrer que l'étude des anomalies magnétiques marines, en particulier de leur signal de courte longueur d'onde, peut permettre d'extraire un enregistrement filtré de la variation séculaire. La réalisation et la comparai-

son de stacks de profils obtenus pour différentes régions a en effet permis de mettre en évidence de nombreuses anomalies cohérentes à l'échelle mondiale (les “tiny wiggles”). Bien qu'il ne soit pas possible en toute rigueur de distinguer, parmi ces anomalies, celles associées à des intervalles de polarité très courts de celles associées à des fluctuations d'intensité du champ géomagnétique, plusieurs arguments indiquent que ces anomalies reflètent pour la plupart des fluctuations d'intensité. Leur distribution à l'intérieur des chrons et durant la période étudiée (83-41 Ma, chrons 33r à 19r) est cohérente avec l'enregistrement filtré d'un régime de variation séculaire uniforme, en contraste avec l'augmentation progressive de la fréquence des inversions qui caractérise cette époque. Si la variation séculaire est effectivement uniforme durant la période étudiée, ceci indiquerait que l'amplitude de la variation séculaire et la fréquence des inversions sont deux phénomènes découplés. Il se peut également que seul le signal de grande longueur d'onde de la variation séculaire soit uniforme au cours de la période étudiée tandis que le signal de courte longueur d'onde, auquel les mesures magnétiques marines de surface n'ont pas accès, présente une évolution. Les données étudiées ici ne permettent pas de mettre en évidence une évolution à long terme de la variation séculaire en parallèle de l'évolution de la fréquence des inversions.

Cette étude suggère également des pistes à poursuivre. Il serait en particulier intéressant de poursuivre la recherche des tiny wiggles dans le superchron du Crétacé. La difficulté supplémentaire pour l'étude de cet évènement est l'absence de marqueurs caractéristiques tels que les inversions pour le calage des profils avant leur sommation. Une étude préliminaire des anomalies de courte longueur d'onde pour le superchron du Crétacé dans l'Océan Atlantique a été réalisée au cours d'un stage de Master 2 [Hoise, 2006], que j'ai contribué à encadrer. Les données exploitées étaient des mesures magnétiques de surface et fond de mer acquises lors de la campagne MAGOFOND 3 [Gallet et al., 2005], à laquelle j'ai également participé. Cette étude montre la présence d'anomalies cohérentes dont la longueur d'onde et l'amplitude sont comparables à celles observées par exemple dans l'intervalle 33r et qui sont sans doute associées à des fluctuations d'intensité. Ceci suggérerait que le régime de variation séculaire au cours du superchron est comparable à celui caractérisant les intervalles de polarité suivants. Ces résultats restent cependant à confirmer, notamment en poursuivant la recherche des tiny wiggles sur d'autres zones d'étude.

Enfin, l'interprétation des mesures magnétiques marines de surface est limitée du fait de leur faible résolution temporelle. Cette résolution peut être augmentée si on se rapproche des sources en effectuant des mesures fond de mer. Il serait intéressant de comparer le contenu fréquentiel de profils fond de mer obtenus pour des périodes caractérisées par différentes fréquences des inversions. Pour que la comparaison ait un sens, la résolution temporelle des profils doit être la même (même rapport distance aux sources sur taux

d'expansion). Un prolongement vers le haut peut être nécessaire avant la comparaison des profils.

Les tiny wiggles ainsi mis en évidence fournissent enfin des marqueurs temporels supplémentaires et peuvent faciliter la reconnaissance des anomalies magnétiques marines (notamment dans les bassins où le nombre d'inversions successives enregistrées par la croûte océanique est petit). L'échelle des cryptochrons fournie dans cette étude peut en effet être utilisée en complément de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995] de manière à prédire une forme plus "réaliste" des anomalies magnétiques océaniques (avec leur contenu de courte longueur d'onde). Ces tiny wiggles devraient ainsi permettre de mieux dater le plancher océanique.

5.3 Bilan

La question qui nous intéressait dans cette thèse était de savoir si les variations à long terme de la fréquence des inversions peuvent être associées à une évolution du comportement du champ magnétique en période de polarité stable (dans la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire ou dans l'amplitude de la variation séculaire). Les études du champ moyen et de la paléovariation séculaire ne permettent pas encore de connaître l'évolution de la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire (et si celle-ci a été significativement différente durant certaines époques). Néanmoins, notre étude a montré que la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire est sensible aux conditions à la limite noyau-manteau. La réalisation de modèles "GMP" pour les périodes anciennes pourra donc potentiellement nous permettre de comprendre si les fluctuations de la fréquence des inversions peuvent être associées à une variation des conditions à la limite noyau-manteau. Le lien entre la morphologie du champ moyen et de la paléovariation séculaire et les conditions à la limite noyau-manteau reste cependant à préciser. En attendant, on peut également remarquer que les conditions à la limite noyau-manteau peuvent influencer l'amplitude de la variation séculaire. En effet, la variation séculaire est d'amplitude beaucoup plus élevée au sein de la simulation numérique dont les conditions de flux de chaleur à la limite noyau-manteau sont hétérogènes qu'au sein de celle dont les conditions sont homogènes. Aucune évolution à long terme dans l'amplitude de la variation séculaire n'a pu cependant être observée dans notre étude à partir des mesures magnétiques marines de surface suggérant plutôt que les variations de la fréquence des inversions reflètent simplement un comportement spontané de la géodynamo. La résolution des profils magnétiques de surface étant bien évidemment limitée, la question reste ouverte.

Bibliographie

- Acton, G., Y. Guyodo, et S. Brachfeld (2006). The nature of a cryptochron from a paleomagnetic study of chron C4r.2r recorded in sediments off the Antarctic Peninsula. *Phys. Earth Planet. Int.* 156, 213–222.
- Alexandrescu, M., V. Courtillot, et J.-L. Le Mouél (1996). Geomagnetic field direction in Paris since the mid-sixteenth century. *Phys. Earth Planet. Int.* 98, 321–360.
- Besse, J. et V. Courtillot (1991). Revised and synthetic apparent polar wander paths of the African, Eurasian, North American and Indian plates, and true polar wander since 200 Ma. *J. Geophys. Res.* 96, 4029–4050.
- Blakely, R. J. (1974). Geomagnetic reversals and crustal spreading rates during the Miocene. *J. Geophys. Res.* 79, 2979–2985.
- Blakely, R. J. (1996). *Potential Theory in Gravity and Magnetic Applications*. Cambridge University Press, New York, NY.
- Blakely, R. J. et A. Cox (1972). Evidence for short geomagnetic polarity intervals in the Early Cenozoic. *J. Geophys. Res.* 77, 7065–7072.
- Blakely, R. J., A. Cox, et E. J. Iufer (1973). Vector Magnetic Data for Detecting Short Polarity Intervals in Marine Magnetic Profiles. *J. Geophys. Res.* 78, 6977–6983.
- Bowles, J., L. Tauxe, J. Gee, D. McMillan, et S. Cande (2003). Source of tiny wiggles in Chron C5 : A comparison of sedimentary relative intensity and marine magnetic anomalies. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 4, 10.1029/2002GC000489.
- Brito, D., J. Aurnou, et P. Cardin (2004). Turbulent viscosity measurements relevant to planetary core-mantle dynamics. *Phys. Earth Planet. Int.* 141, 3–8.
- Campbell, W. H. (1997). *Introduction to Geomagnetic Fields*. Cambridge University Press, Cambridge, UK.

- Cande, S. C. et D. V. Kent (1976). Constraints Imposed by the Shape of Marine Magnetic Anomalies on the Magnetic Source. *J. Geophys. Res.* 81, 4157–4162.
- Cande, S. C. et D. V. Kent (1992a). A new geomagnetic polarity time scale for the late Cretaceous and Cenozoic. *J. Geophys. Res.* 97, 13917–13951.
- Cande, S. C. et D. V. Kent (1992b). Ultrahigh resolution marine magnetic anomaly profiles - A record of continuous paleointensity variations? *J. Geophys. Res.* 97, 15075–15083.
- Cande, S. C. et D. V. Kent (1995). Revised calibration of the geomagnetic polarity timescale for the late Cretaceous and Cenozoic. *J. Geophys. Res.* 100, 6093–6095.
- Cande, S. C. et J. L. LaBrecque (1974). Behavior of the Earth's paleomagnetic field from small scale marine magnetic anomalies. *Nature* 247, 26–28.
- Cande, S. C., J. L. LaBrecque, R. L. Larson, W. C. Pitman III, X. Golovchenko, et W. F. Haxby (1989). *Magnetic lineations of the World's ocean basins (carte)*. American Association of Petroleum Geologists, Tulsa, Oklahoma, USA.
- Carlut, J. et V. Courtillot (1998). How complex is the time-averaged geomagnetic field over the past 5 Myr? *Geophys. J. Int.* 134, 527–544.
- Chambodut, A., B. Langlais, et M. Manda (2005). Candidate main-field models for the definitive geomagnetic reference field 1995.0 and 2000.0. *Earth Planets Space* 57, 1197–1202.
- Christensen, U., P. Olson, et G. A. Glatzmaier (1998). A dynamo model interpretation of geomagnetic field structures. *Geophys. Res. Lett.* 25, 1565–1568.
- Clement, B. M. (2004). Dependence of the duration of geomagnetic polarity reversals on site latitude. *Nature* 428, 637–640.
- Coe, R. S., B. S. Singer, M. S. Pringle, et X. Zhao (2004). Matuyama-Brunhes reversal and Kamikatsura event on Maui : paleomagnetic directions, $^{40}\text{Ar}/^{39}\text{Ar}$ ages and implications. *Earth Planet. Sci. Lett.* 222, 667–684.
- Constable, C. (1992). Link between geomagnetic reversal paths and secular variation of the field over the past 5 Myr. *Nature* 358, 230–233.
- Constable, C. G. et C. L. Johnson (1999). Anisotropic paleosecular variation models : implications for geomagnetic field observables. *Phys. Earth Planet. Int.* 115, 35–51.
- Constable, C. G. et R. L. Parker (1988). Statistics of the geomagnetic secular variation for the past 5 m.y. *J. Geophys. Res.* 93, 11569–11581.

- Courtillot, V. et J. Besse (1987). Magnetic field reversals, polar wander, and core-mantle coupling. *Science* 237, 1140–1147.
- Cox, A. (1968). Length of Geomagnetic Polarity Intervals. *J. Geophys. Res.* 73, 3247–3260.
- Dormy, E., J.-P. Valet, et V. Courtillot (2000). Numerical models of the geodynamo and observational constraints. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 1, 2000GC000062.
- Dyment, J. (1991). *Structure et évolution de la lithosphère océanique dans l’océan Indien : apport des anomalies magnétiques*. Ph. D. thesis, Ecole et Observatoire de Physique du Globe de Strasbourg.
- Dyment, J. et J. Arkani-Hamed (1995). Spreading rate dependent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from the anomalous skewness of marine magnetic anomalies. *Geophys. J. Int.* 121, 789–804.
- Dyment, J., J. Arkani-Hamed, et A. Ghods (1997). Contribution of serpentized ultramafics to marine magnetic anomalies at slow and intermediate spreading centres : Insights from the shape of the anomalies. *J. Geophys. Res.* 102, 691–701.
- Dyment, J., S. C. Cande, et J. Arkani-Hamed (1994). Skewness of marine magnetic anomalies created between 85 and 40 Ma in the Indian Ocean. *J. Geophys. Res.* 99, 24121–24134.
- Dziewonski, A. M. et D. L. Anderson (1981). Preliminary reference Earth model. *Phys. Earth Planet. Int.* 25, 297–356.
- Evans, H. F. et J. E. T. Channell (2003). Upper Miocene magnetic stratigraphy at ODP site 1092 (sub-Antarctic South Atlantic) : recognition of ‘cryptochrons’ in C5n.2n. *Geophys. J. Int.* 153, 483–496.
- Gallet, Y., J. Dyment, M. Kitazawa, C. Bouligand, E. Hoise, M. Kim, J. Savary, J. Royer, Y. Choi-Dyment, et B. Gotab (2005). The Cretaceous Quiet Zone : How Quiet ? *AGU Fall Meeting Abstracts*, A29.
- Gallet, Y. et G. Hulot (1997). Stationary and nonstationary behaviour within the geomagnetic polarity time scale. *Geophys. Res. Lett.* 24, 1875–1878.
- Gauss, C. F. (1839). *Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus*. Leipzig.
- Gee, J., S. C. Cande, J. Hildebrand, K. Donnelly, et R. Parker (2000). Geomagnetic intensity variations over the past 780 kyr obtained from near-seafloor magnetic anomalies. *Nature* 408, 827–832.

- Gee, J., D. A. Schneider, et D. V. Kent (1996). Marine magnetic anomalies as recorders of geomagnetic intensity variations. *Earth Planet. Sci. Lett.* 144, 327–335.
- Genevey, A. et Y. Gallet (2002). Intensity of the geomagnetic field in western Europe over the past 2000 years : New data from ancient French pottery. *J. Geophys. Res.* 107, 2285.
- Glatzmaier, G. A., R. S. Coe, L. Hongre, et P. H. Roberts (1999). The role of the Earth's mantle in controlling the frequency of geomagnetic reversals. *Nature* 401, 885–890.
- Glatzmaier, G. A. et P. H. Roberts (1995). A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle. *Phys. Earth Planet. Int.* 91, 63–75.
- Glatzmaier, G. A. et P. H. Roberts (1996). An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection. *Physica D* 97, 81–94.
- Gubbins, D. et P. Kelly (1993). Persistent patterns in the geomagnetic field over the past 2.5 Myr. *Nature* 365, 829–832.
- Gubbins, D. et K. Zhang (1993). Symmetry properties of the dynamo equations for palaeomagnetism and geomagnetism. *Phys. Earth Planet. Int.* 75, 225–241.
- Guyodo, Y. et J.-P. Valet (1999). Global changes in intensity of the Earth's magnetic field during the past 800 kyr. *Nature* 399, 249–252.
- Hatakeyama, T. et M. Kono (2002). Geomagnetic field model for the last 5 My : time-averaged field and secular variation. *Phys. Earth Planet. Int.* 133, 181–215.
- Heirtzler, J. R., G. O. Dickson, E. M. Herron, W. C. Pittman III, et X. LePichon (1968). Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents. *J. Geophys. Res.* 73, 2119–2136.
- Hoise, E. (2006). Variations temporelles du champ magnétique durant le superchron du Crétacé : Apports des données de la campagne Magofond 3. Master's thesis, Institut de Physique du Globe de Paris.
- Hongre, L., G. Hulot, et A. Khokhlov (1998). An analysis of the geomagnetic field over the past 2000 years. *Phys. Earth Planet. Int.* 106, 311–335.
- Hosper, J. (1954). Rock magnetism and polar wandering. *Nature* 173, 1183.
- Hulot, G. et Y. Gallet (1996). On the interpretation of virtual geomagnetic pole (VGP) scatter curves. *Phys. Earth Planet. Int.* 95, 37–53.

- Hulot, G. et Y. Gallet (2003). Do superchrons occur without any paleomagnetic warning? *Earth Planet. Sci. Lett.* 210, 191–201.
- Hulot, G. et J. L. Le Mouél (1994). A statistical approach to the Earth's main magnetic field. *Phys. Earth Planet. Int.* 82, 167–183.
- Hulot, G. et M. Manda (2003). Observation, modélisation et interprétation du champ géomagnétique à l'ère spatiale. *Rapport quadriennal 1999-2002 du CNFGG, UGGI XXIII*, 186–216.
- Jackson, A., A. R. T. Jonkers, et M. R. Walker (2000). Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 358, 957–990.
- Johnson, C. L. et C. G. Constable (1995). The Time-Averaged Geomagnetic Field as Recorded by Lava Flows Over the Past 5 Myr. *Geophys. J. Int.* 122, 489–519.
- Johnson, C. L. et C. G. Constable (1996). Paleosecular variation recorded by lava flows over the last 5 Myr. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 354, 89–141.
- Johnson, C. L. et C. G. Constable (1997). Long Term Structure in the Geomagnetic Field : Global and Regional Biases 0-5 Ma. *Geophys. J. Int.* 131, 643–666.
- Juárez, M. T., L. Tauxe, J. S. Gee, et T. Pick (1998). The intensity of the Earth's magnetic field over the past 160 million years. *Nature* 394, 878–881.
- Kelly, P. et D. Gubbins (1997). The geomagnetic field over the past 5 Myr. *Geophys. J. Int.* 128, 1–16.
- Kent, D. V. et F. M. Gradstein (1985). A Cretaceous and Jurassic chronology. *Geol. Soc. Am. Bull.* 46, 1419–1423.
- Kent, D. V. et F. M. Gradstein (1986). A Jurassic to recent chronology. In *The Western North Atlantic Region*, P. R. Vogt et B. E. Tucholke (Eds.), pp. 45–50. Geological Soc. of America, Boulder, Colorado.
- Khokhlov, A., G. Hulot, et J. Carlot (2001). Towards a self-consistent approach to palaeomagnetic field modelling. *Geophys. J. Int.* 145, 157–171.
- Kok, Y. S. et L. Tauxe (1999). A relative geomagnetic paleointensity stack from Ontong-Java Plateau sediments for the Matuyama. *J. Geophys. Res.* 104, 25401–25414.
- Kono, M. (1997). Paleosecular Variation in Field Directions Due to Randomly Varying Gauss Coefficients. *J. Geomag. Geoelectr.* 49, 615–631.

- Kono, M. et H. Tanaka (1995). Mapping the Gauss coefficients to the pole and the models of paleosecular variation. *J. Geomag. Geoelectr.* 47, 115–130.
- Kono, M., H. Tanaka, et H. Tsunakawa (2000). Spherical harmonic analysis of paleomagnetic data : The case of linear mapping. *J. Geophys. Res.* 105, 5817–5834.
- Krijgsman, W. et D. V. Kent (2004). Non-uniform occurrence of short-term polarity fluctuations in the geomagnetic field? New results from Middle to Late Miocene sediments of the North Atlantic (DSDP Site 608). In *Timescales of the Paleomagnetic Field*, J. E. T. Channell, D. V. Kent, W. Lowrie, et J. Meert (Eds.), Vol. 145, pp. 161–174. AGU Geophysical Monograph.
- Kuang, W. et J. Bloxham (1997). An Earth-like numerical dynamo model. *Nature* 389, 371–374.
- Lanci, L., J. E. T. Channell, et D. V. Kent (2005). Oligocene magnetostratigraphy from Equatorial Pacific sediments (ODP sites 1218 and 1219, leg 199). *Earth Planet. Sci. Lett.* 237, 617–634.
- Lanci, L. et W. Lowrie (1997). Magnetostratigraphic evidence that ‘tiny wiggles’ in the oceanic magnetic anomaly record represent geomagnetic paleointensity variations. *Earth Planet. Sci. Lett.* 148, 581–592.
- Langel, R. A. (1987). The main field. In *Geomagnetism*, J. A. Jacobs (Ed.), Vol. 1, pp. 249–512. Academic Press, London.
- Langereis, C. G., M. J. Dekkers, G. J. de Lange, et M. Paterne (1997). Magnetostratigraphy and astronomical calibration of the last 1.1 Myr from an eastern Mediterranean piston core and dating of short events in the Brunhes. *Geophys. J. Int.* 129, 75–94.
- Langlais, B., M. Mandea, et P. Ultré-Guérard (2003). High-resolution magnetic field modeling : application to MAGSAT and Ørsted data. *Phys. Earth Planet. Int.* 135, 77–91.
- Larson, R. L. et P. Olson (1991). Mantle plumes control magnetic reversal frequency. *Earth Planet. Sci. Lett.* 107, 437–447.
- Lee, S. A. (1983). *A Study of the Time-averaged Paleomagnetic Field for the last 195 Million Years*. Ph. D. thesis, Australian Natl. Univ., Canberra.
- Loper, D. E. et K. McCartney (1986). Mantle plumes and the periodicity of magnetic field reversals. *Geophys. Res. Lett.* 13, 1525–1528.

- Macdonald, K. C., S. P. Miller, B. P. Luyendyk, T. M. Atwater, et L. Shure (1983). Investigation of a Vine Matthews magnetic lineation from a submersible : The source and character of marine magnetic anomalies. *J. Geophys. Res.* 88, 3403–3418.
- Maus, S., S. Macmillan, T. Chernova, S. Choi, D. Dater, V. Golovkov, V. Lesur, F. Lowes, H. Lühr, W. Mai, S. McLean, N. Olsen, M. Rother, T. Sabaka, A. Thomson, et T. Zvereva (2005). The 10th generation international geomagnetic reference field. *Phys. Earth Planet. Int.* 151, 320–322.
- McElhinny, M. W. et P. L. McFadden (1997). Palaeosecular variation over the past 5 Myr based on a new generalized database. *Geophys. J. Int.* 131, 240–252.
- McElhinny, M. W. et P. L. McFadden (2000). *Paleomagnetism, continents and oceans*. Academic Press, San Diego, California.
- McElhinny, M. W., P. L. McFadden, et R. T. Merrill (1996). The time-averaged paleomagnetic field 0-5 Ma. *J. Geophys. Res.* 101, 25007–25028.
- McFadden, P. L. et R. T. Merrill (1997). Asymmetry in the reversal rate before and after the Cretaceous Normal Polarity Superchron. *Earth Planet. Sci. Lett.* 149, 43–47.
- McFadden, P. L. et R. T. Merrill (2000). Evolution of the geomagnetic reversal rate since 160 Ma : Is the process continuous? *J. Geophys. Res.* 105, 28455–28460.
- McFadden, P. L., R. T. Merrill, M. W. McElhinny, et S. Lee (1991). Reversals of the Earth's magnetic field and temporal variations of the dynamo families. *J. Geophys. Res.* 96, 3923–3933.
- Merrill, R. T., M. W. McElhinny, et P. L. McFadden (1996). *The Magnetic Field of the Earth : Paleomagnetism, the Core, and the Deep Mantle*. Academic Press, San Diego, California.
- Müller, R. D., W. R. Roest, J.-Y. Royer, L. M. Gahagan, et J. G. Sclater (1997). Digital isochrons of the world's ocean floor. *J. Geophys. Res.* 102, 3211–3214.
- Nagata, T., Y. Arai, et K. Momose (1963). Secular Variation of the Geomagnetic Total Force during the Last 5000 Years. *J. Geophys. Res.* 68, 5277–5281.
- Néel, L. (1949). Théorie du traînage magnétique des ferromagnétiques en grains fins avec applications aux terres cuites. *Ann. Geophys.* 5, 99–136.
- Olsen, N., H. Lühr, T. J. Sabaka, M. Manda, M. Rother, L. Tøffner-Clausen, et S. Choi (2006). CHAOS a model of the Earth's magnetic field derived from CHAMP,

- Ørsted, and SAC-C magnetic satellite data. *Geophys. J. Int.* 165, 10.1111/j.1365–246X.2006.02959.x.
- Opdyke, N. et J. Channell (1996). *Magnetostratigraphy*. Academic Press, San Diego, California.
- Parsons, B. et J. G. Sclater (1977). An analysis of the variation of ocean floor bathymetry and heat flow with age. *J. Geophys. Res.* 82, 802–827.
- Patriat, P. et J. Segoufin (1988). Reconstruction of the Central Indian Ocean. *Tectonophysics* 155, 211–234.
- Pavlov, V. et Y. Gallet (2005). A third superchron during the Early Paleozoic. *Episodes* 28, 78–84.
- Perrin, M. et E. Schnepf (2004). IAGA paleointensity database : distribution and quality of the data set. *Phys. Earth Planet. Int.* 147, 255–267.
- Pick, T. et L. Tauxe (1993). Geomagnetic palaeointensities during the Cretaceous normal superchron measured using submarine basaltic glass. *Nature* 366, 238–242.
- Poirier, J. P. (1988). Transport properties of liquid metals and viscosity of the earth's core. *Geophys. Jour.* 92, 99–105.
- Pouliquen, G., Y. Gallet, J. Dyment, P. Patriat, et C. Tamura (2001a). A geomagnetic record over the last 3.5 million years from deep-tow magnetic anomaly profiles across the Central Indian Ridge. *J. Geophys. Res.* 106, 10941–10960.
- Pouliquen, G., Y. Gallet, J. Dyment, P. Patriat, et C. Tamura (2001b). Correction to "A geomagnetic record over the last 3.5 million years from deep-tow magnetic anomaly profiles across the Central Indian Ridge". *J. Geophys. Res.* 106, 30549.
- Press, W. H., S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, et B. P. Flannery (1992). *Numerical recipes in FORTRAN (2nd ed.) : the art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York, NY, USA.
- Prévot, M., M. E.-M. Derder, M. McWilliams, et J. Thompson (1990). Intensity of the Earth's magnetic field - Evidence for a Mesozoic dipole low. *Earth Planet. Sci. Lett.* 97, 129–139.
- Quidelleur, X. et V. Courtillot (1996). On low-degree spherical harmonic models of paleosecular variation. *Phys. Earth Planet. Int.* 95, 55–77.

- Quidelleur, X., J.-P. Valet, V. Courtillot, et G. Hulot (1994). Long-term geometry of the geomagnetic field for the last five million years : An updated secular variation database. *Geophys. Res. Lett.* *21*, 1639–1642.
- Rea, D. K. et R. J. Blakely (1975). Short-wavelength magnetic anomalies in a region of rapid seafloor spreading. *Nature* *255*, 126–128.
- Roest, W. R., J. Arkani-Hamed, et J. Verhoef (1992). The seafloor spreading rate dependence of the anomalous skewness of marine magnetic anomalies. *Geophys. J. Int.* *109*, 653–669.
- Royer, J.-Y., R. D. Müller, L. M. Gahagan, L. A. Lawver, C. L. Mayes, D. Nürnberg, et J. G. Sclater (1992). A global isochron chart. Technical Report 117, University of Texas Institute for Geophysics.
- Sabaka, T. J., N. Olsen, et M. E. Purucker (2004). Extending comprehensive models of the Earth's magnetic field with Ørsted and CHAMP data. *Geophys. J. Int.* *159*, 521–547.
- Sandwell, D. T. et W. H. F. Smith (1997). Marine gravity anomaly from Geosat and ERS-1 satellite altimetry. *J. Geophys. Res.* *102*, 10039–10050.
- Schneider, D. A. et D. V. Kent (1988a). Inclination anomalies from Indian Ocean sediments and the possibility of a standing nondipole field. *J. Geophys. Res.* *93*, 11621–11630.
- Schneider, D. A. et D. V. Kent (1988b). The Paleomagnetic Field from Equatorial Deep-Sea Sediments : Axial Symmetry and Polarity Asymmetry. *Science* *242*, 252–256.
- Schneider, D. A. et D. V. Kent (1990). The time-averaged paleomagnetic field. *Rev. Geophys.* *28*, 71–96.
- Schouten, H. et K. McCamy (1972). Filtering marine magnetic anomalies. *J. Geophys. Res.* *77*, 7089–7099.
- Selkin, P. A. et L. Tauxe (2000). Long-term variations in palaeointensity. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* *368*, 1065–1088.
- Smirnov, A. V. et J. A. Tarduno (2003). Magnetic hysteresis monitoring of Cretaceous submarine basaltic glass during Thellier paleointensity experiments : evidence for alteration and attendant low field bias. *Earth Planet. Sci. Lett.* *206*, 571–585.
- Spector, A. et S. Grant (1970). Statistical models for interpreting aeromagnetic data. *Geophysics* *35*, 293–302.

- Su, W.-J., R. L. Woodward, et A. M. Dziewonski (1994). Degree 12 model of shear velocity heterogeneity in the mantle. *J. Geophys. Res.* **99**, 6945–6980.
- Talwani, M. et J. R. Heirtzler (1964). Computation of magnetic anomalies caused by two dimensional structures of arbitrary shape. In *Computers in the mineral industries*, G. Parks (Ed.), pp. 464–480. Stanford Univ. Publ., Stanford, California.
- Tanaka, H., M. Kono, et H. Uchimura (1995). Some global features of palaeointensity in geological time. *Geophys. J. Int.* **120**, 97–102.
- Tarduno, J. A. et R. D. Cottrell (2005). Dipole strength and variation of the time-averaged reversing and nonreversing geodynamo based on Thellier analyses of single plagioclase crystals. *J. Geophys. Res.* **110**, B11101.
- Tarduno, J. A., R. D. Cottrell, et A. V. Smirnov (2006). The paleomagnetism of single silicate crystals : Recording geomagnetic field strength during mixed polarity intervals, superchrons, and inner core growth. *Rev. Geophys.* **44**, G1002.
- Tarduno, J. A. et A. V. Smirnov (2004). The paradox of low field values and the long-term history of the geodynamo. In *Timescales of the Paleomagnetic field*, J. E. T. Channell, D. V. Kent, W. Lowrie, et J. Meert (Eds.), pp. 75–84. Am. Geophys. Un. Monogr.
- Tauxe, L. (1993). Sedimentary records of relative paleointensity of the geomagnetic field : Theory and practice. *Rev. Geophys.* **31**, 319–354.
- Tauxe, L. (2006). Long term trends in paleointensity : The contribution of DSDP/ODP submarine basaltic glass collections. *Phys. Earth Planet. Int.* **156**, 223–241.
- Tauxe, L. et P. Hartl (1997). 11 million years of Oligocene geomagnetic field behaviour. *Geophys. J. Int.* **128**, 217–229.
- Tauxe, L. et D. V. Kent (2004). A simplified statistical model for the geomagnetic field and the detection of shallow bias in paleomagnetic inclinations : was the ancient magnetic field dipolar ? In *Timescales of the Paleomagnetic field*, J. E. T. Channell, D. V. Kent, W. Lowrie, et J. Meert (Eds.), pp. 101–115. Am. Geophys. Un. Monogr.
- Tauxe, L. et H. Staudigel (2004). Strength of the Geomagnetic Field in the Cretaceous Normal Superchron : New Data from Submarine Basaltic Glass of the Troodos Ophiolite. *Geochem. Geophys. Geosyst.* **5**, 10.1029/2003GC000635.
- Thellier, E. et O. Thellier (1959). Sur l'intensité du champ magnétique terrestre dans le passé historique et géologique. *Ann. Geophys.* **15**, 285–376.

- Tisseau, J. et P. Patriat (1981). Identification des anomalies magnétiques sur les dorsales à faible taux d'expansion : Méthode des taux fictifs. *Earth Planet. Sci. Lett.* 52, 381–396.
- Tivey, M. A., H. P. Johnson, C. Fleutelot, S. Hussenoder, R. Lawrence, C. Waters, et B. Wooding (1998). Direct measurement of magnetic reversal polarity boundaries in a cross-section of oceanic crust. *Geophys. Res. Lett.* 25, 3631–3634.
- Valet, J.-P. (2003). Time variations in geomagnetic intensity. *Rev. Geophys.* 41, 10.1029/2001RG000104.
- Valet, J.-P. et L. Meynadier (1993). Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years. *Nature* 366, 234–238.
- Valet, J.-P., L. Meynadier, et Y. Guyodo (2005). Geomagnetic dipole strength and reversal rate over the past two million years. *Nature* 435, 802–805.
- Van der Waerden, B. (1969). *Mathematical Statistics*. Springer-Verlag.
- Vine, F. J. (1968). Magnetic anomalies associated with mid-ocean ridges. In *The history of the Earth's crust*, R. Phinney (Ed.), pp. 73–89. Princeton University Press.
- Vine, F. J. et D. H. Matthews (1963). Magnetic anomalies over ocean ridges. *Nature* 199, 947–949.
- Wilson, D. S. et R. N. Hey (1981). The Galapagos axial magnetic anomaly : evidence for the Emperor event within the Brunhes and for a twolayer magnetic source. *Geophys. Res. Lett.* 8, 1051–1054.
- Wilson, R. L. (1970). Permanent aspects of the Earth's non-dipole magnetic field over upper Tertiary times. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 19, 417–437.
- Wilson, R. L. (1971). Dipole offset - the time-averaged palaeomagnetic field over the past 25 million years. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 22, 491–504.
- Wooldridge, A. L., S. E. Haggerty, P. A. Rona, et C. G. A. Harrison (1990). Magnetic properties and opaque mineralogy of rocks from selected seafloor hydrothermal sites at oceanic ridges. *J. Geophys. Res.* 95, 12351–12374.
- Yamazaki, T. et H. Oda (2005). A geomagnetic paleointensity stack between 0.8 and 3.0 Ma from equatorial Pacific sediment cores. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 6, 10.1029/2005GC001001.
- Zijderveld, J. D. A. (1967). A.C. demagnetization of rocks. In *Methods in Palaeomagnetism*, D. W. Collinson et S. K. Creer, K. M. and Runcorn (Eds.), pp. 256–287. Elsevier, New York.

Annexe A

Zones d'étude sélectionnées pour
l'étude des anomalies 19r à 33r

Les zones d'étude et les profils magnétiques marins sélectionnés pour l'étude des tiny wiggles observés dans les anomalies 33r à 19r, correspondant à la période 83-41 Ma (voir chapitre 4), sont présentés dans cette annexe. Les zones d'étude ont été sélectionnées dans les océans Pacifique et Indien, caractérisés par des taux d'expansion élevés à cette époque et pour lesquels les profils d'anomalies magnétiques bénéficient donc d'une meilleure résolution temporelle. Aucune zone n'a été sélectionnée dans la partie équatoriale de l'Océan Pacifique parce que les anomalies magnétiques y ont une amplitude très faible et sont par conséquent difficiles à reconnaître. La carte de la figure A.1 présente la localisation des 16 zones d'étude sélectionnées. La figure A.2 présente un modèle d'anomalies magnétiques calculé au pôle à partir de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995] pour la période 85-40 Ma. La comparaison de ce modèle avec les profils d'anomalies magnétiques disponibles sur les différentes zones d'étude permet de reconnaître les anomalies majeures associées aux inversions.

Pour chaque zone, deux cartes sont présentées. La première montre la carte des anomalies de gravité à l'air libre de Sandwell et Smith [1997], en fond de couleur ($1\text{mGal} = 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$), ainsi que les profils d'anomalies magnétiques, corrigés de l'effet de distorsion, dessinés de part et d'autre de la route du navire. La deuxième carte, sur laquelle sont également représentés les profils d'anomalies magnétiques, présente l'interprétation de la première carte en termes de linéations magnétiques, représentées en rouge, et zones de fracture ("Faulting Zone", F.Z.), représentées en vert. Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

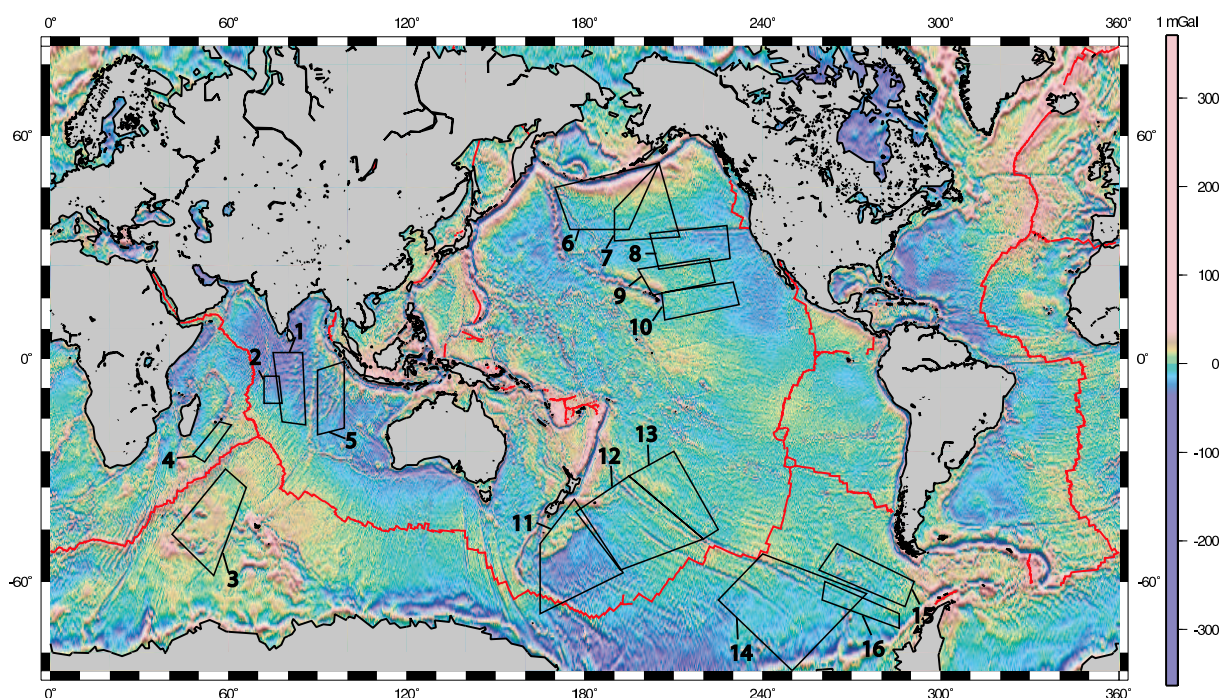


FIG. A.1 – Localisation des 16 zones d'étude (polygones noirs) sélectionnées pour l'étude des anomalies magnétiques marines 33r à 19r. Le fond de couleur représente la carte des anomalies de gravité à l'air libre. Les dorsales médio-océaniques sont reportées en rouge.

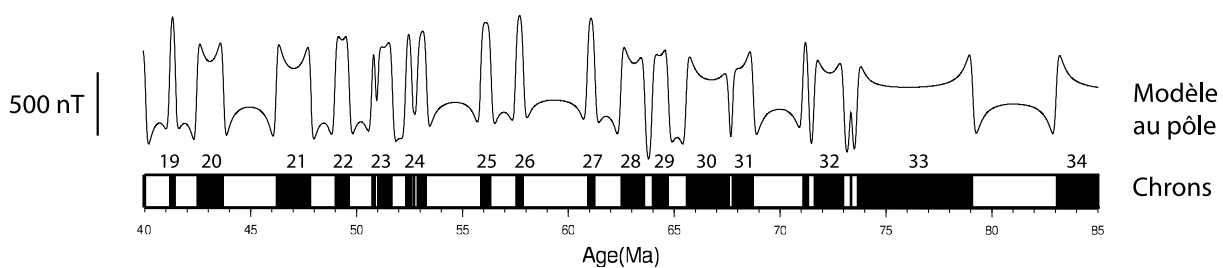


FIG. A.2 – Profil synthétique d'anomalies magnétiques calculé au pôle à partir de l'échelle des inversions de Cande et Kent [1995] pour la période 85-40 Ma en supposant un taux d'expansion de 4 cm/an.

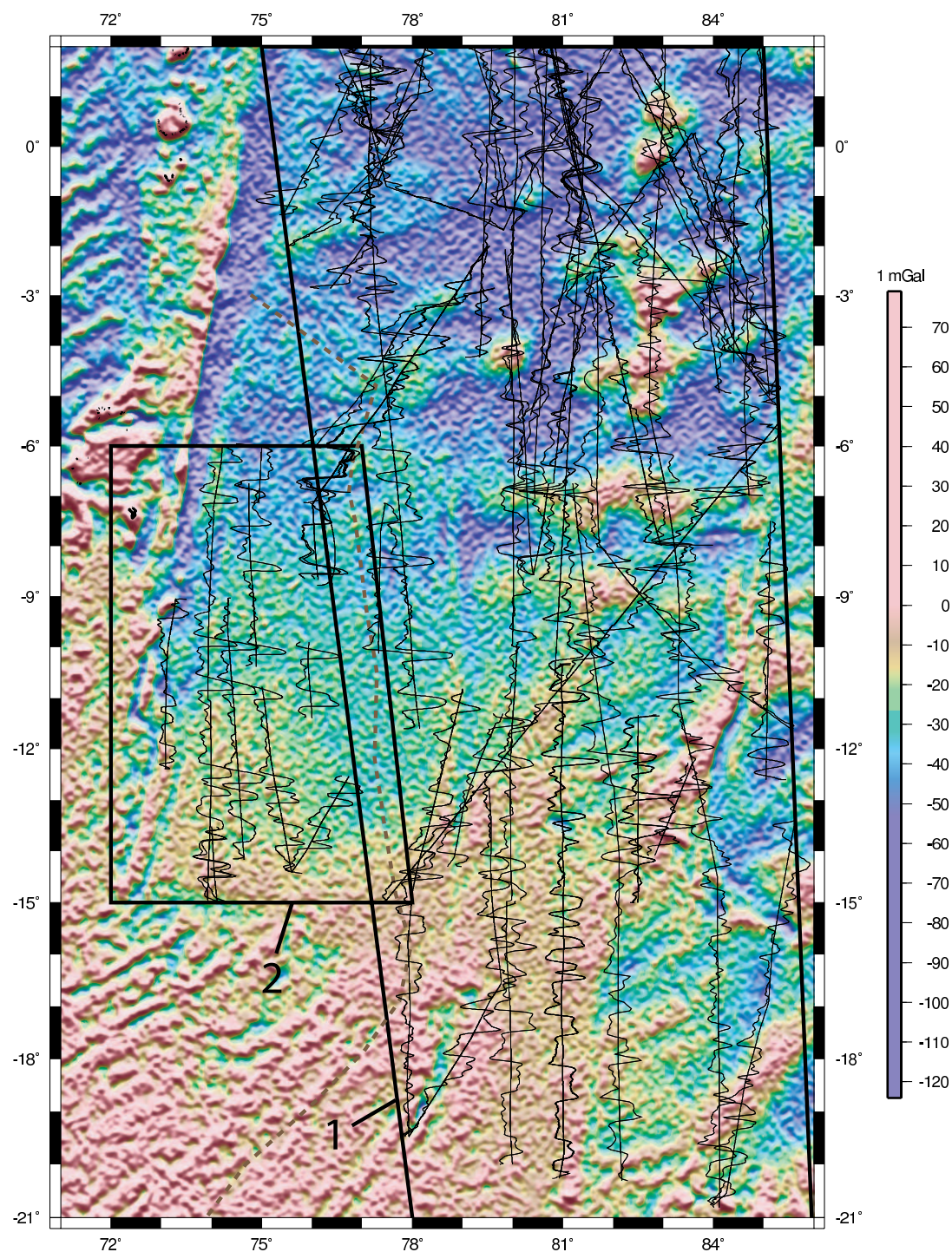


FIG. A.3 – Zones 1 et 2 (Océan Indien, Bassin Indien Central) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines. Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs. La trace du point triple de l'Océan Indien, d'après Patriat et Segoufin [1988], est reportée en pointillés marrons.

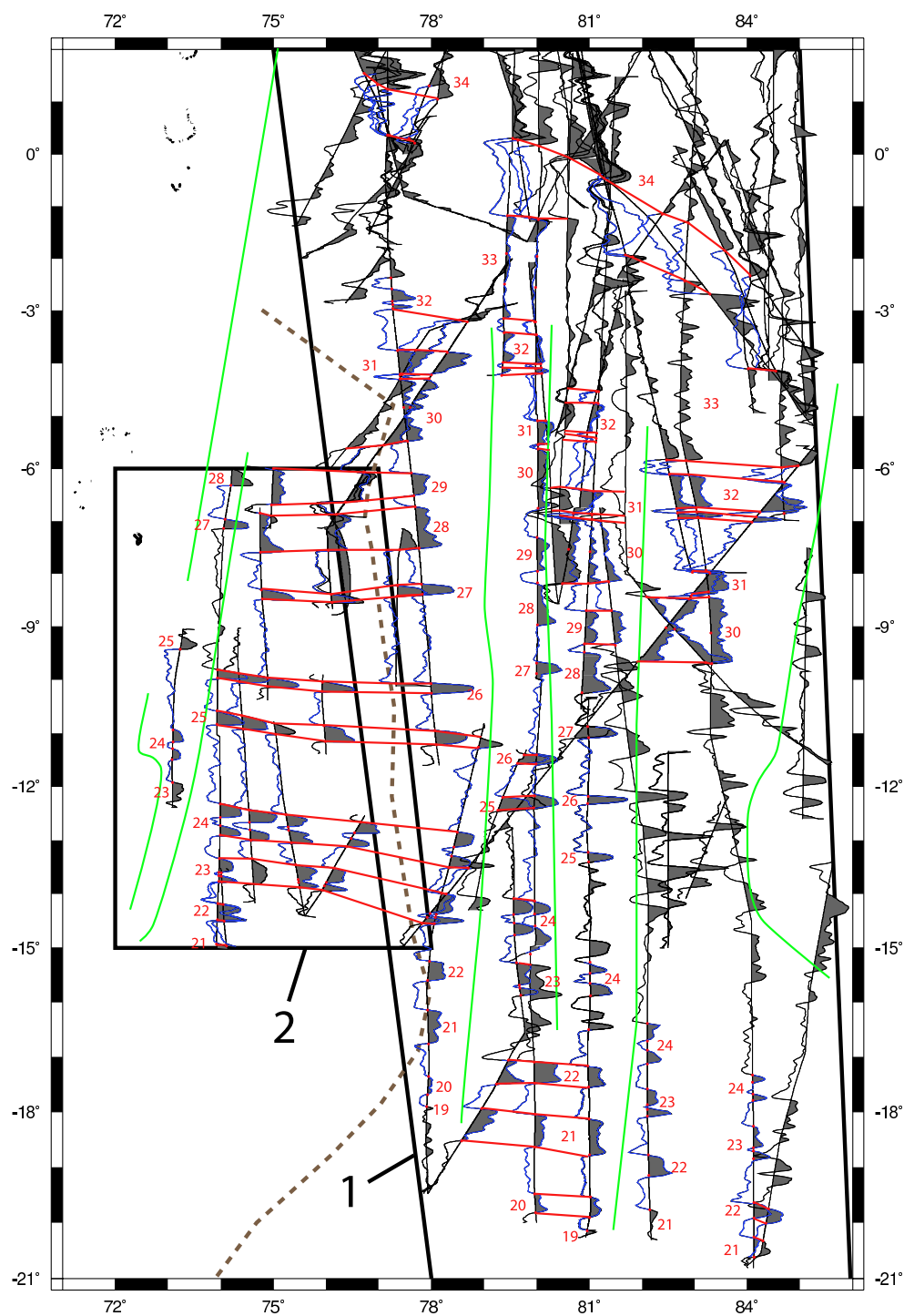


FIG. A.4 – Zones 1 et 2 (Océan Indien, Bassin Indien Central) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu. Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs. La trace du point triple de l'Océan Indien, d'après Patriat et Segoufin [1988], est reportée en pointillés marrons.

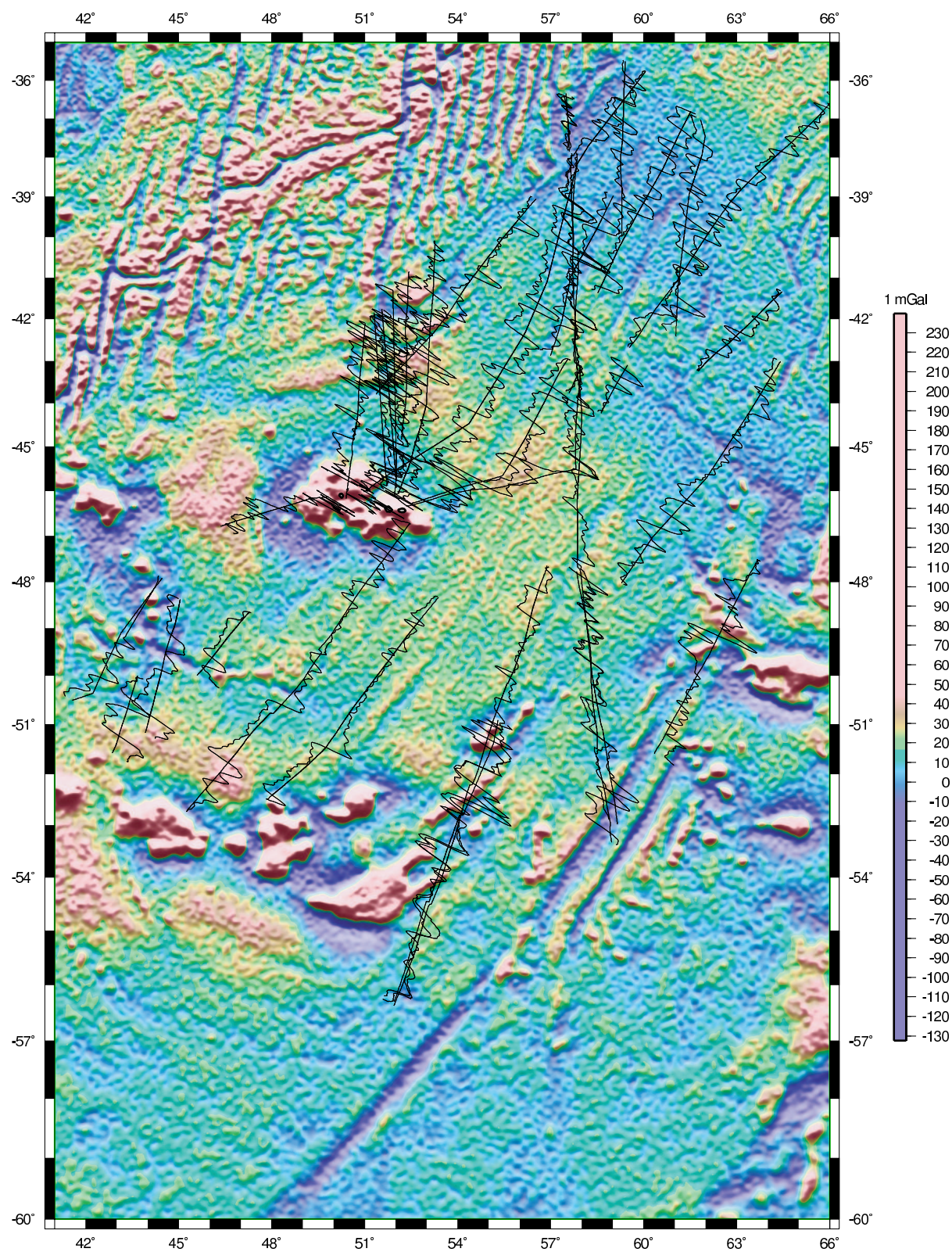


FIG. A.5 – Zone 3 (Océan Indien, Bassin de Crozet) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

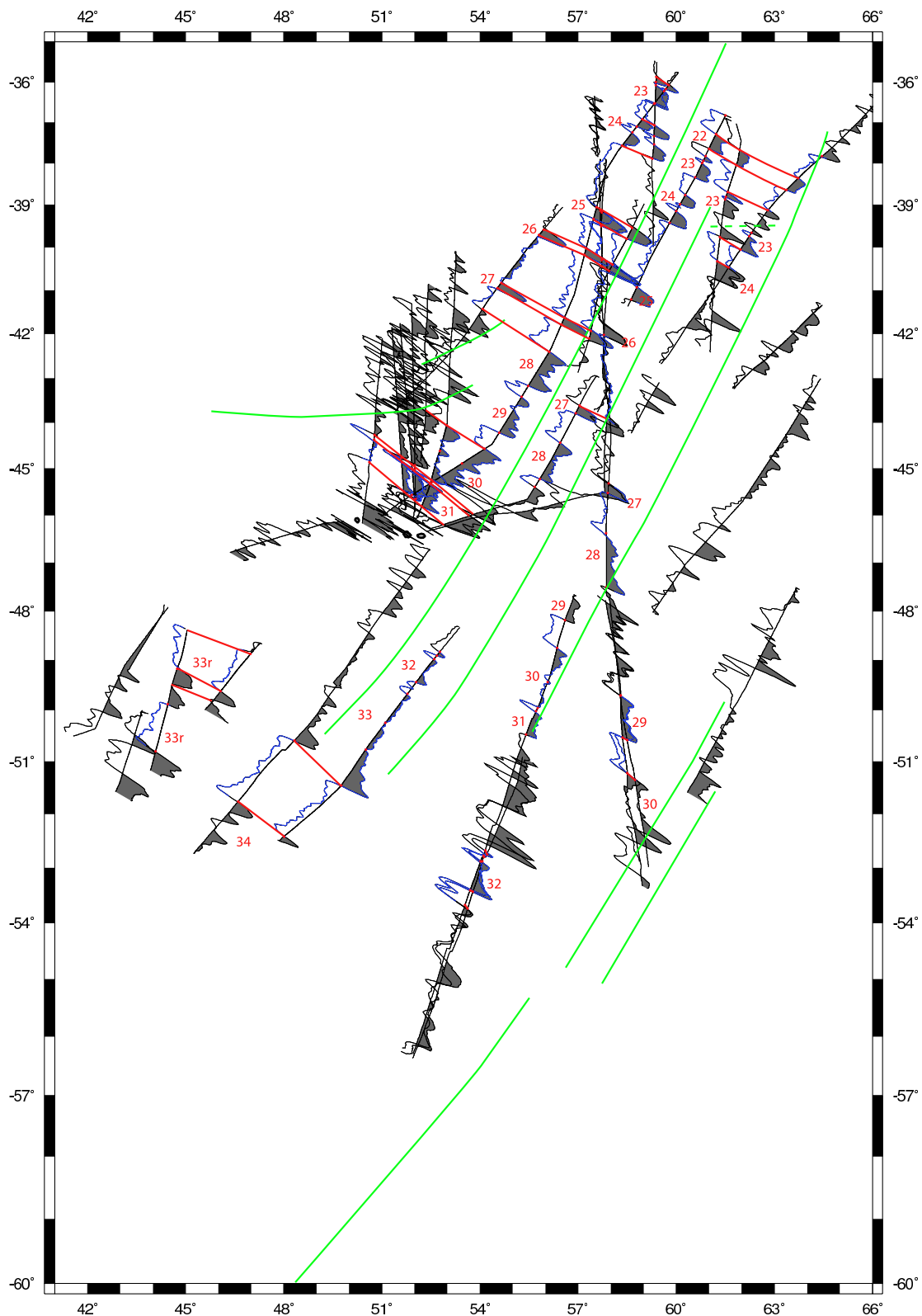


FIG. A.6 – Zone 3 (Océan Indien, Bassin de Crozet) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

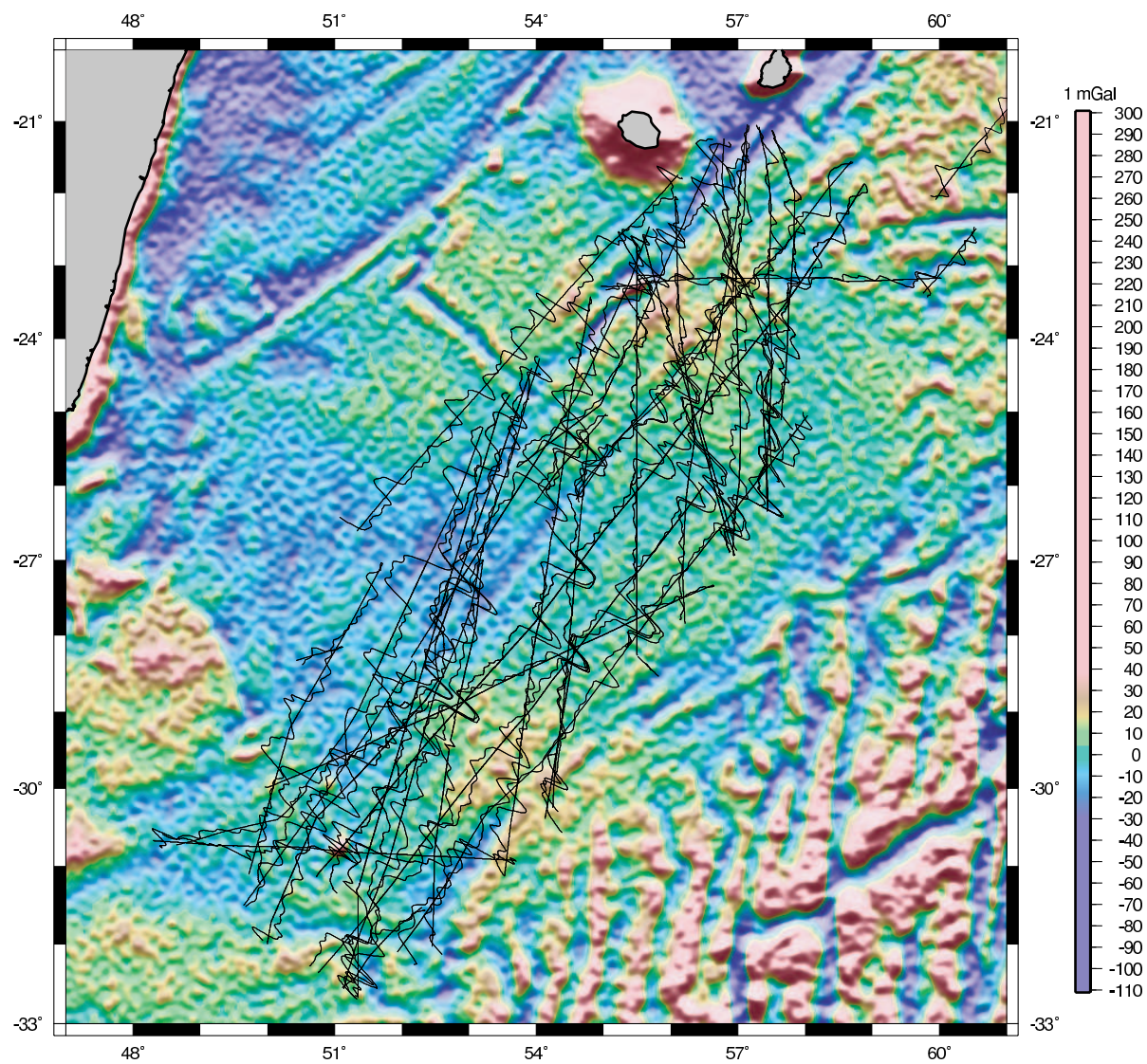


FIG. A.7 – Zone 4 (Océan Indien, Bassin de Madagascar) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

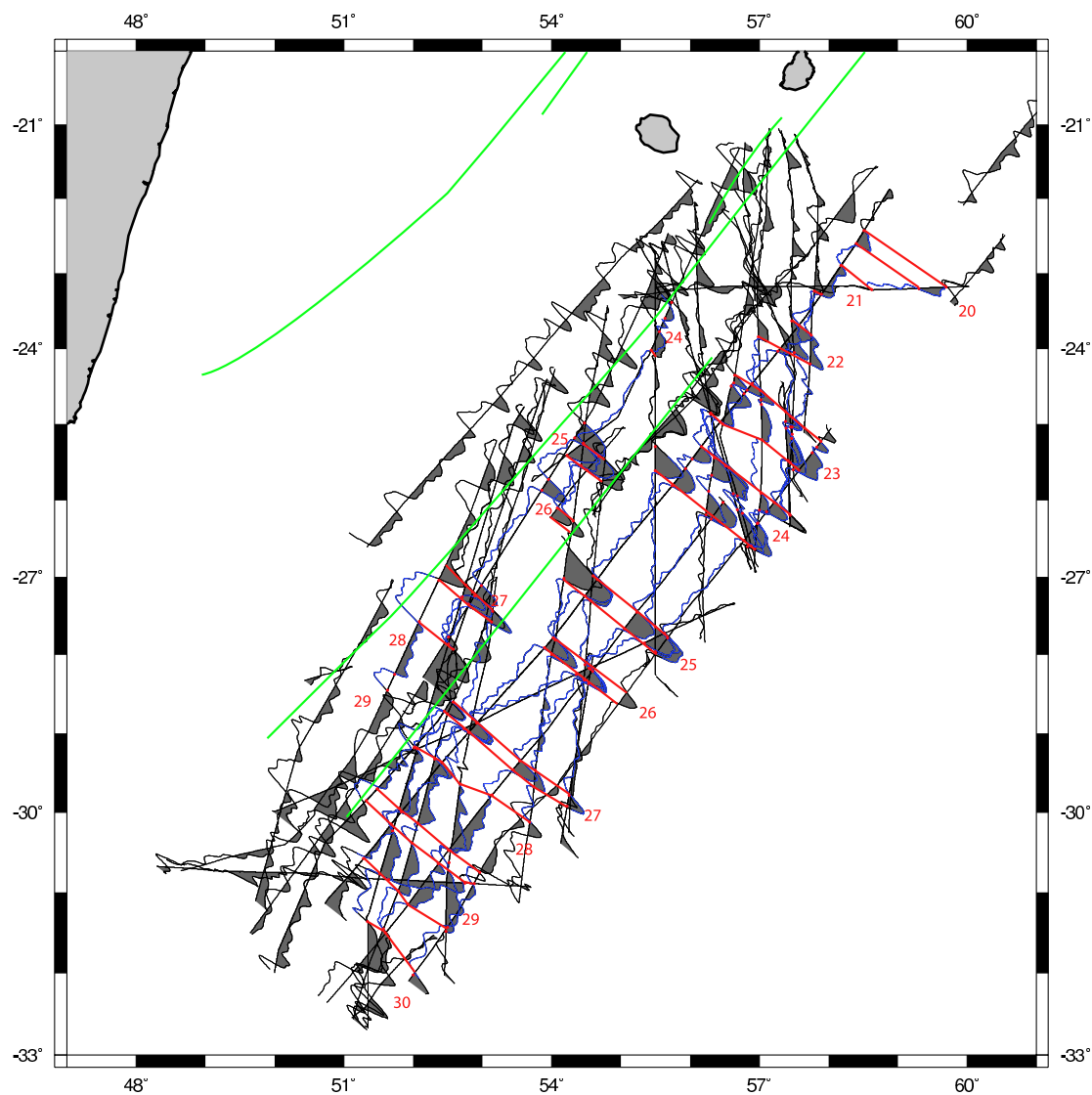


FIG. A.8 – Zone 4 (Océan Indien, Bassin de Madagascar) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

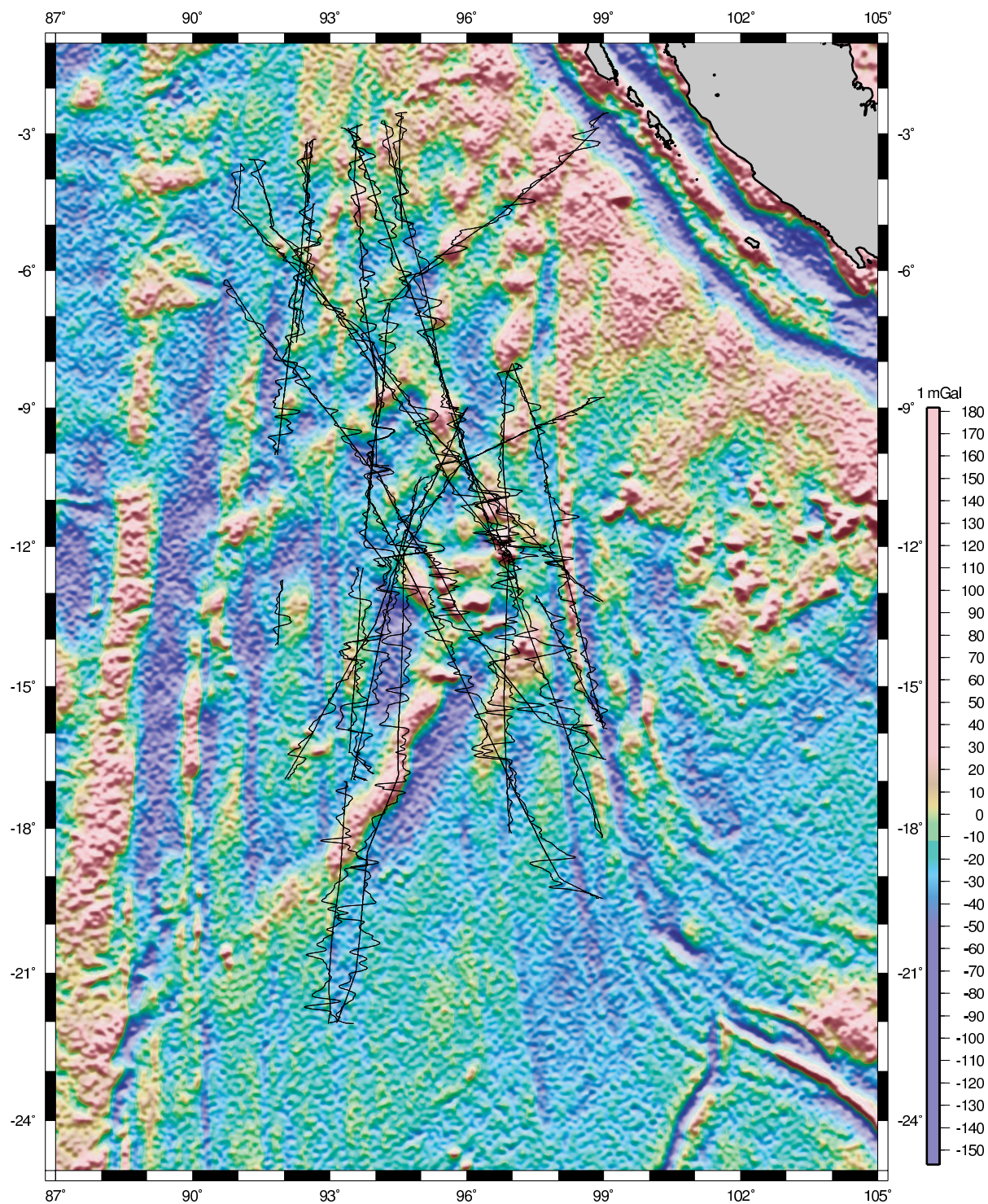


FIG. A.9 – Zone 5 (Océan Indien, Bassin de Wharton) : carte des anomalies de gravité à l'air libre sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

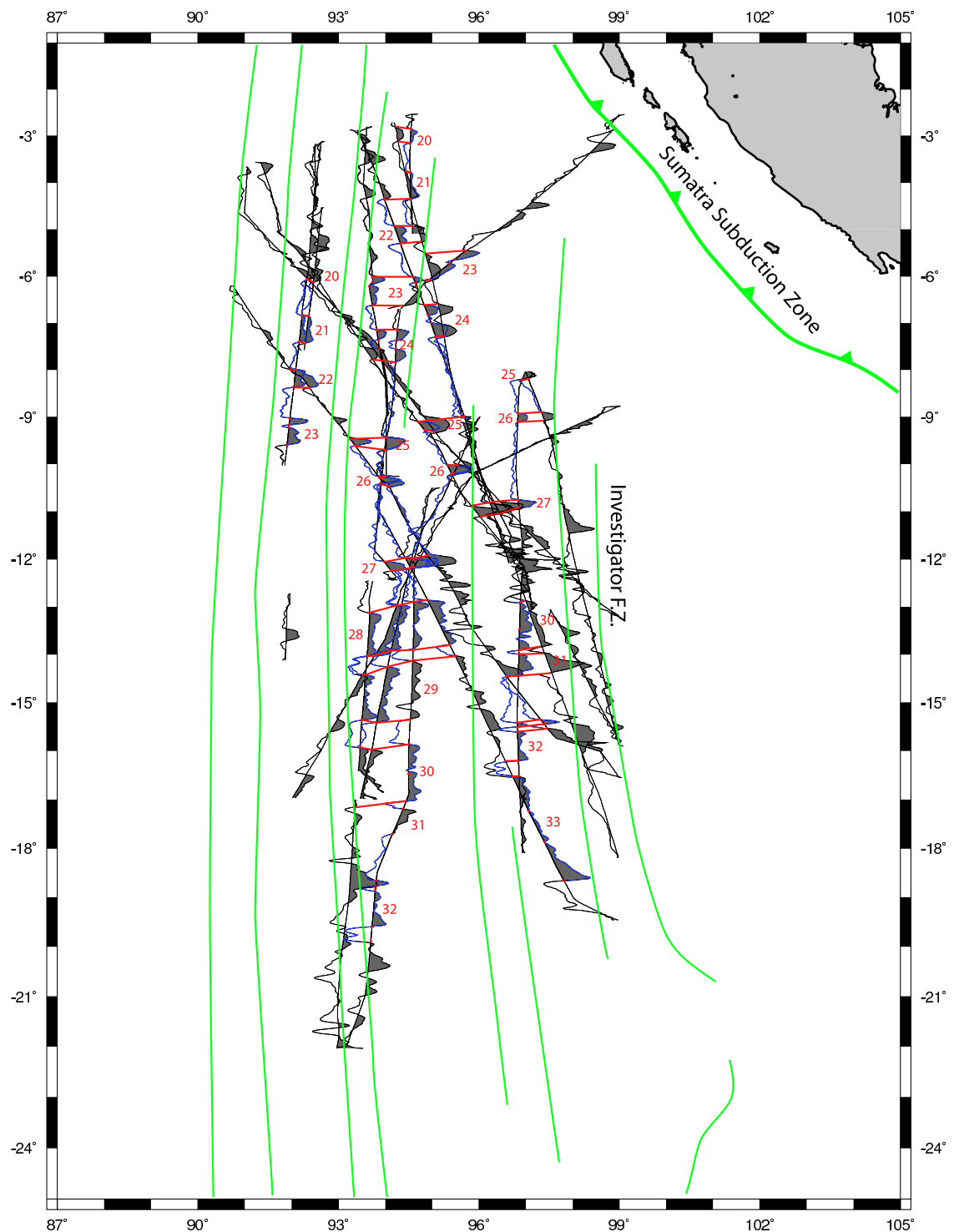


FIG. A.10 – Zone 5 (Océan Indien, Bassin de Wharton) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

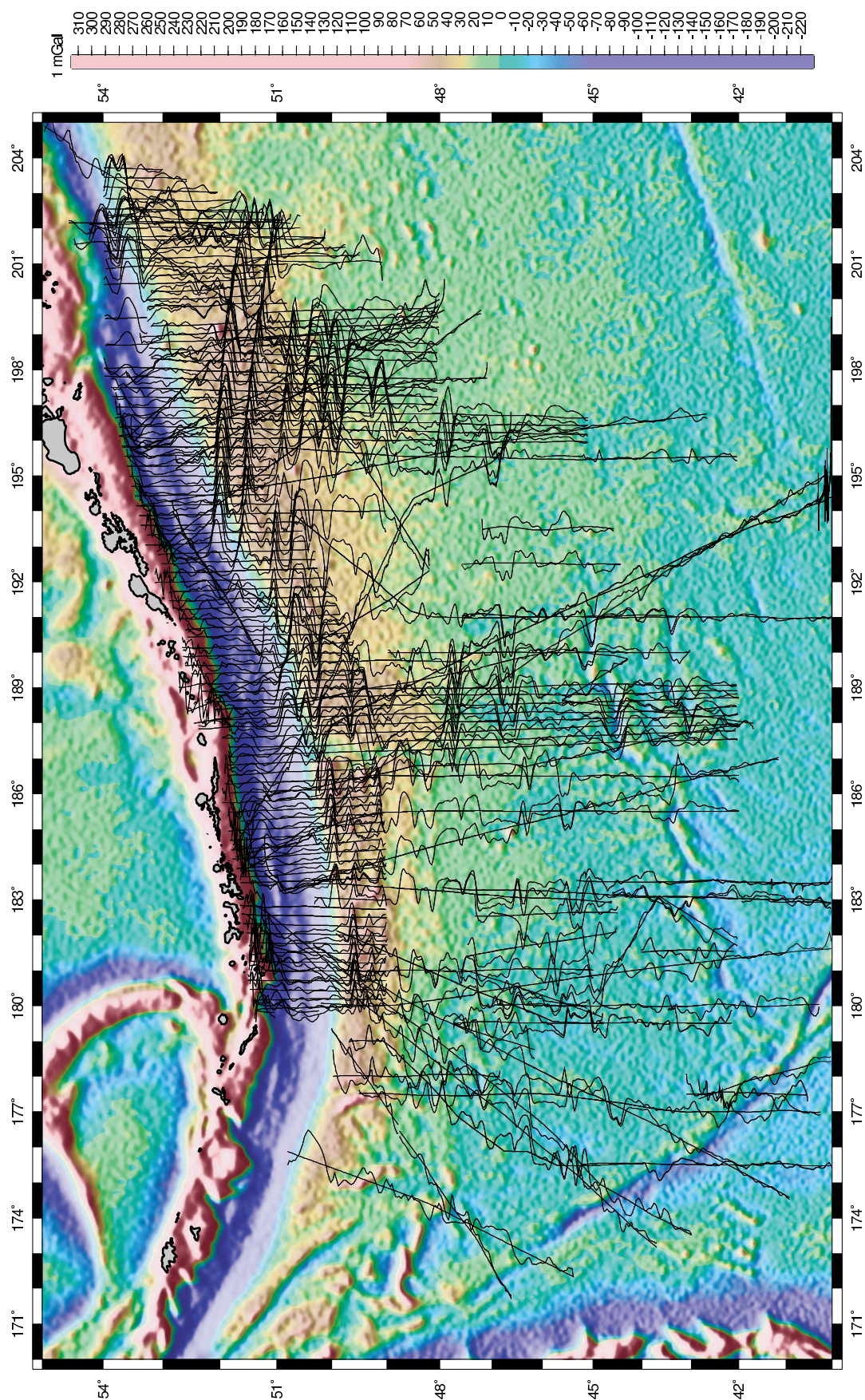


FIG. A.11 – Zone 6 (Océan Pacifique Nord) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

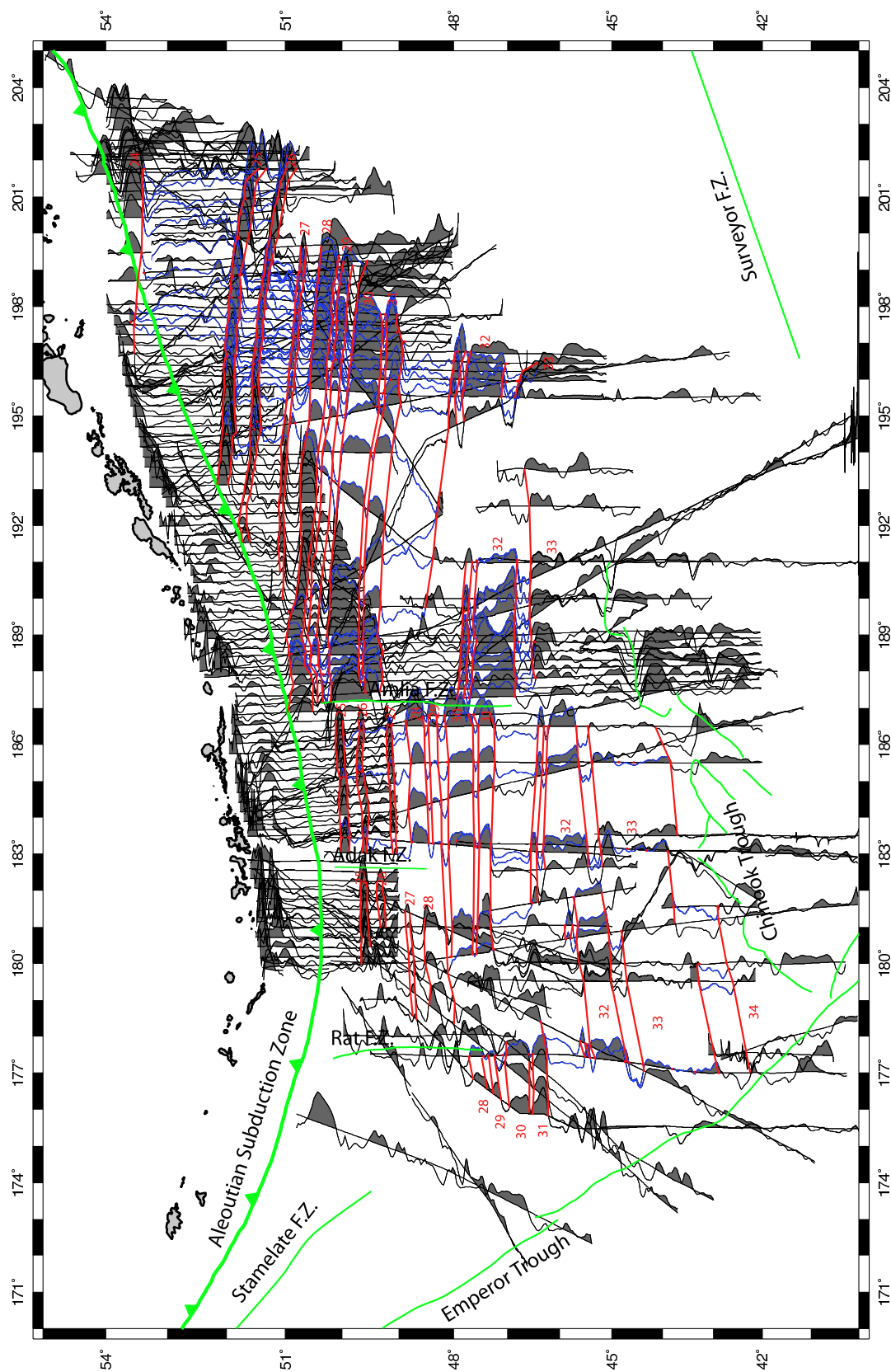


FIG. A.12 – Zone 6 (Océan Pacifique Nord) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

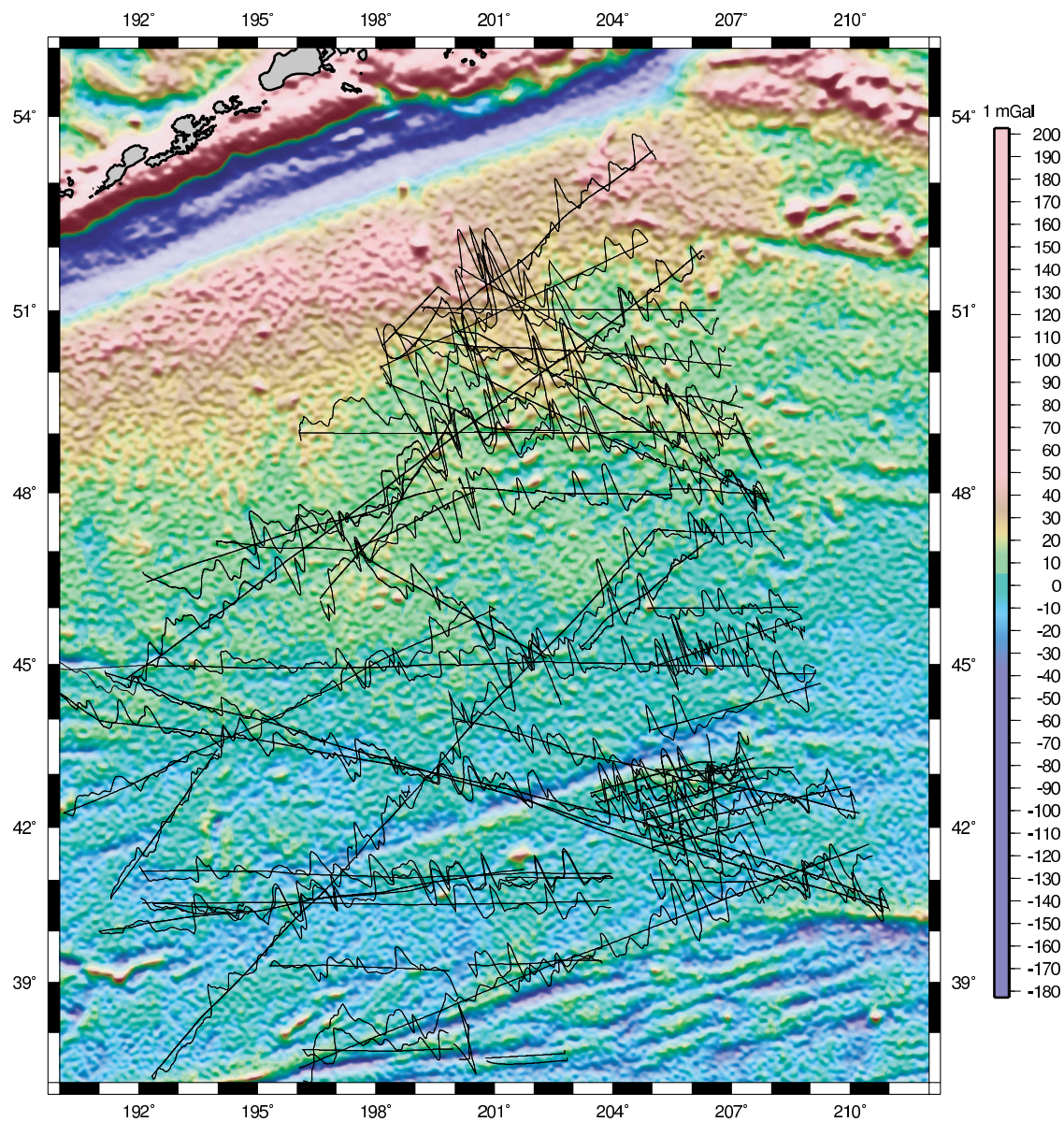


FIG. A.13 – Zone 7 (Océan Pacifique Nord) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

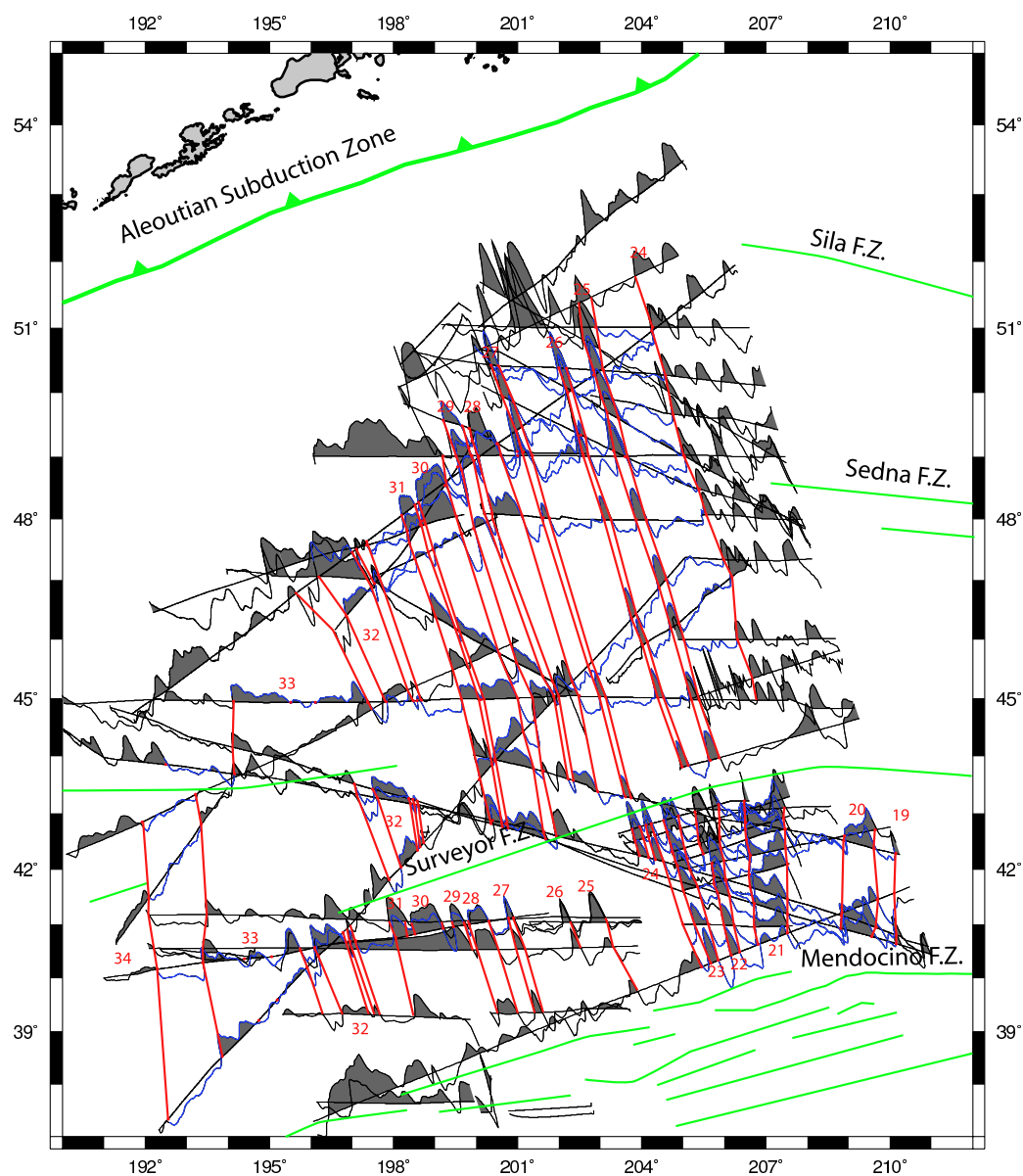


FIG. A.14 – Zone 7 (Océan Pacifique Nord) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

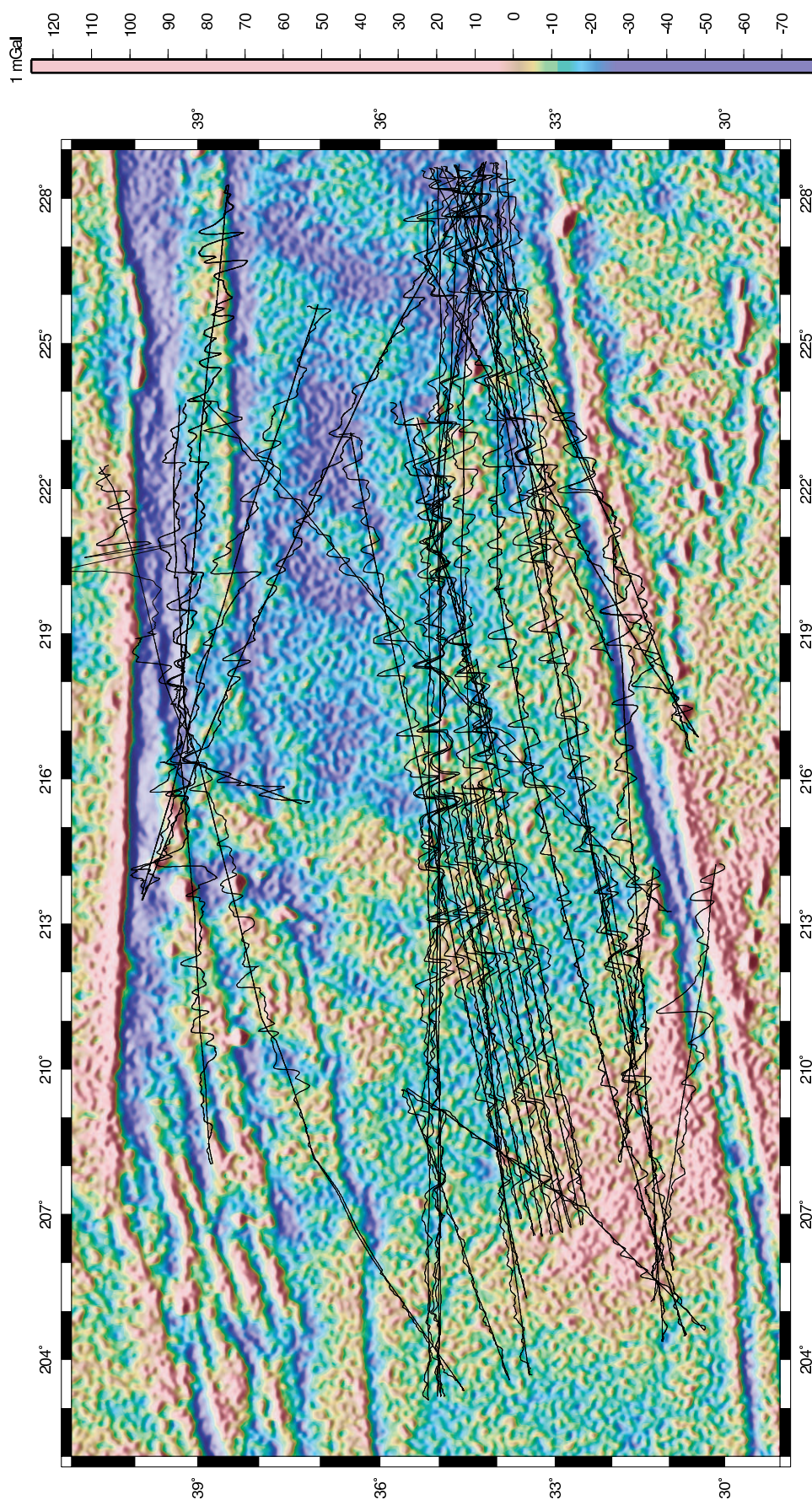


FIG. A.15 – Zone 8 (Océan Pacifique Nord) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

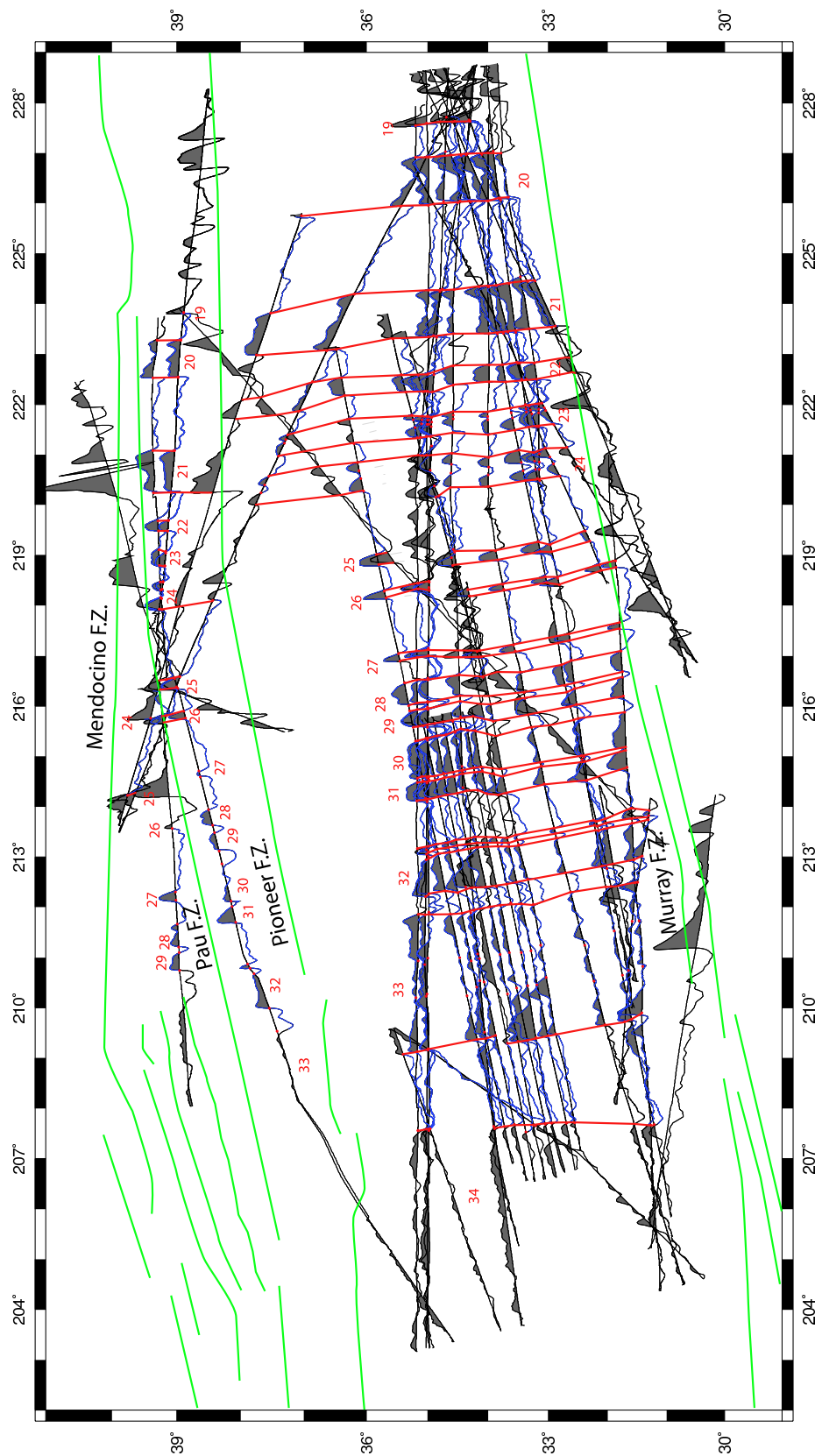


FIG. A.16 – Zone 8 (Océan Pacifique Nord) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

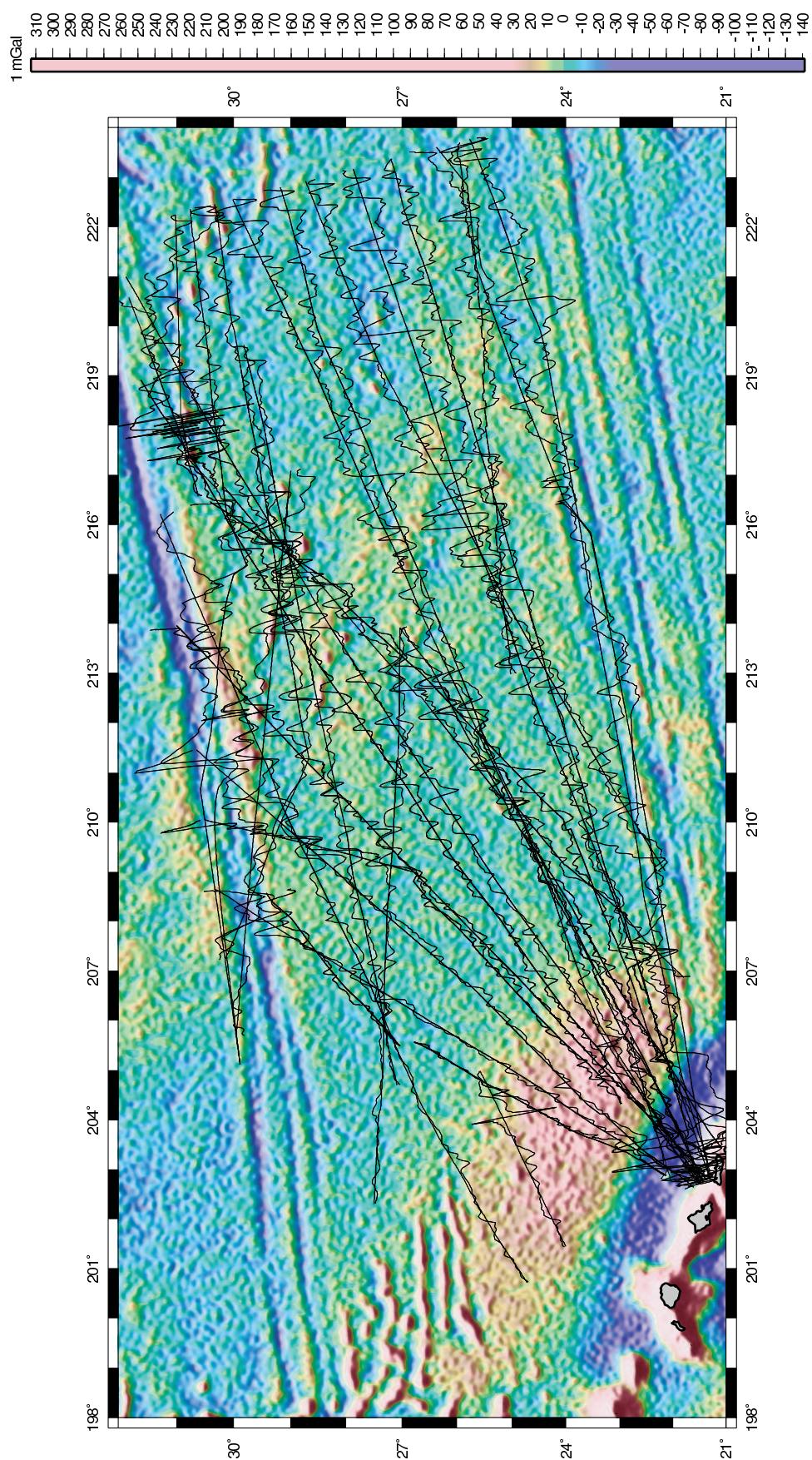


FIG. A.17 – Zone 9 (Océan Pacifique Nord) : carte des anomalies de gravité à l'air libre dans la zones 9 située entre les Zones de Fracture, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

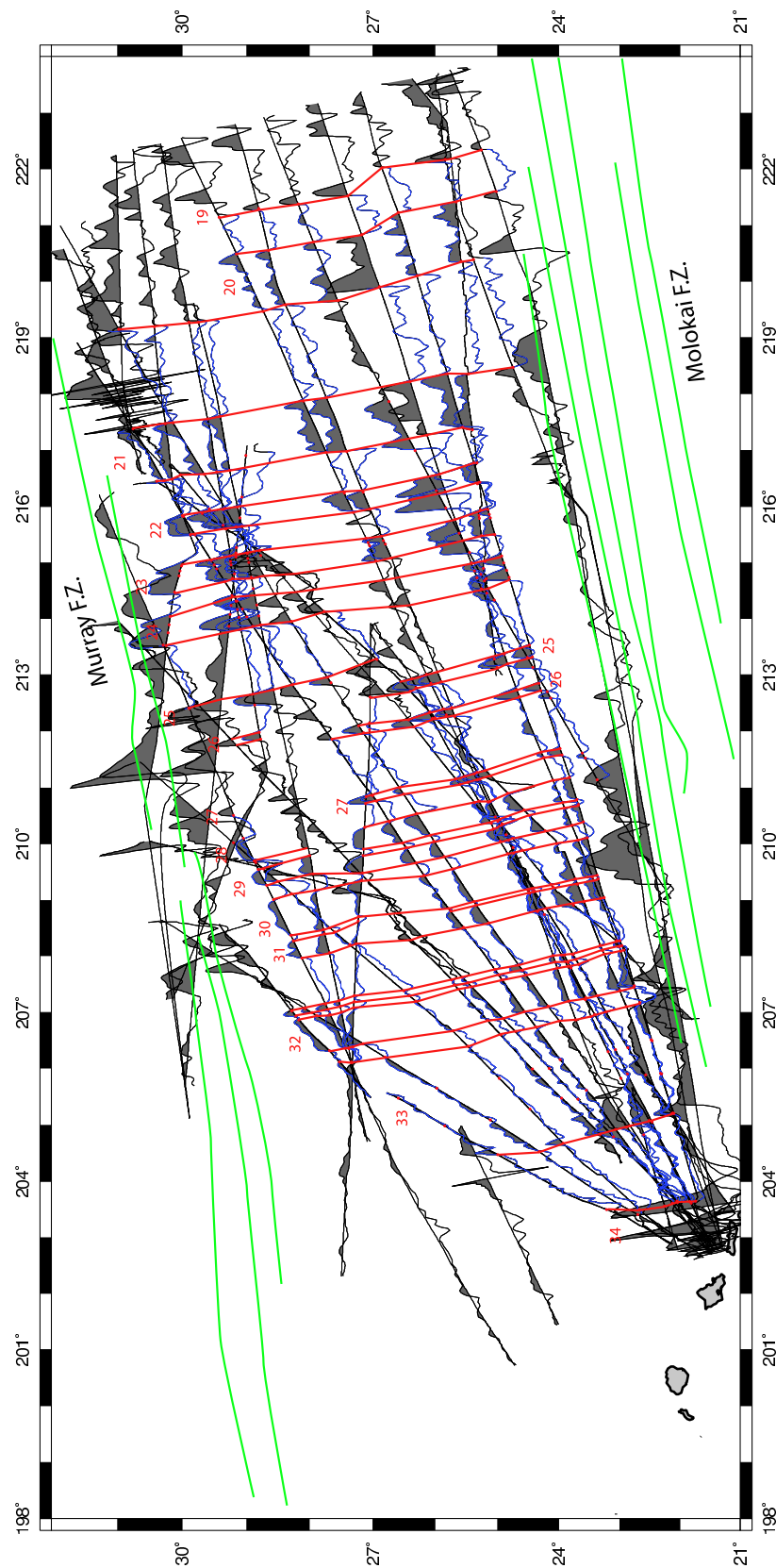


FIG. A.18 – Zone 9 (Océan Pacifique Nord) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

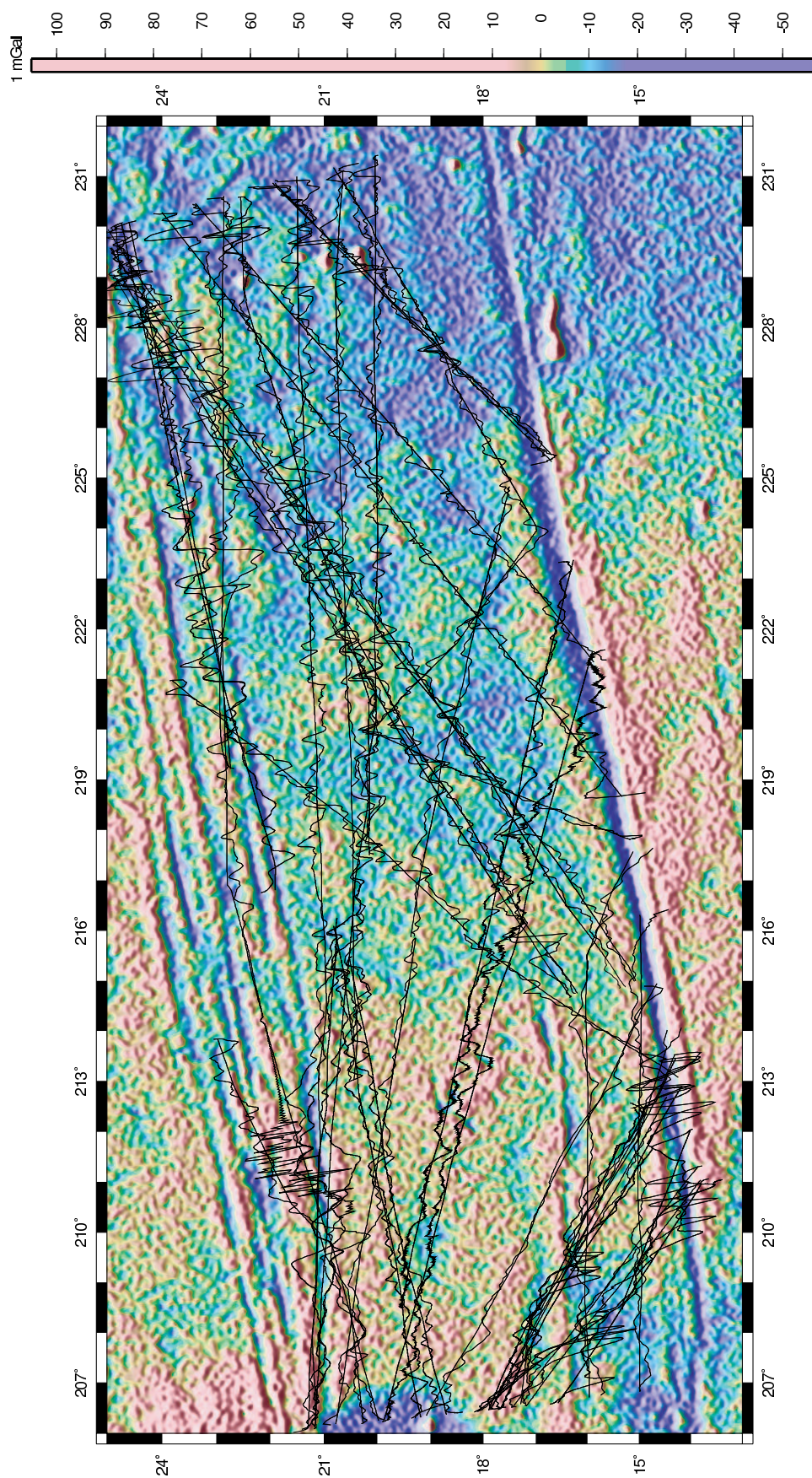


FIG. A.19 – Zone 10 (Océan Pacifique Nord) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

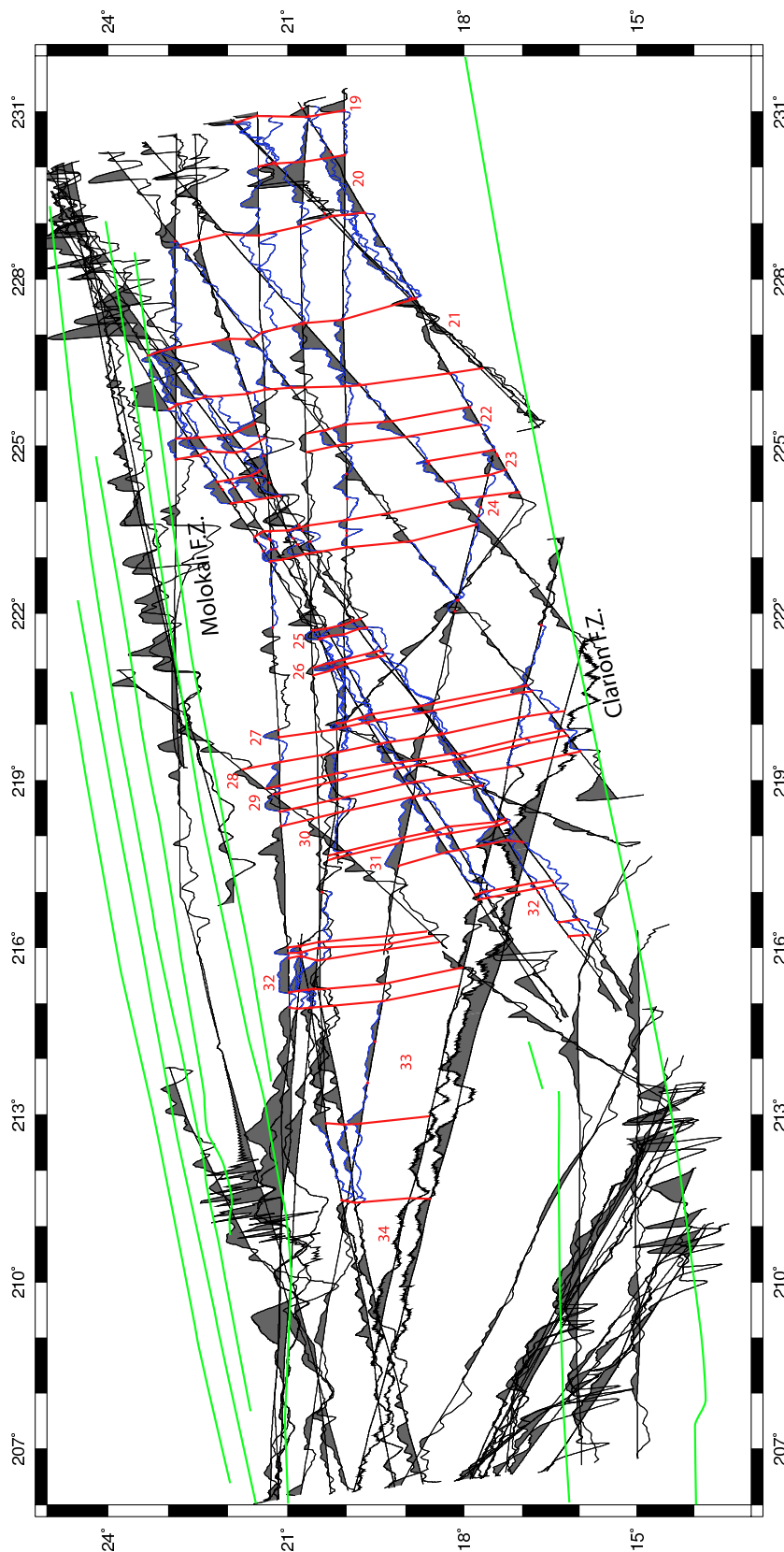


FIG. A.20 – Zone 10 (Océan Pacifique Nord) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

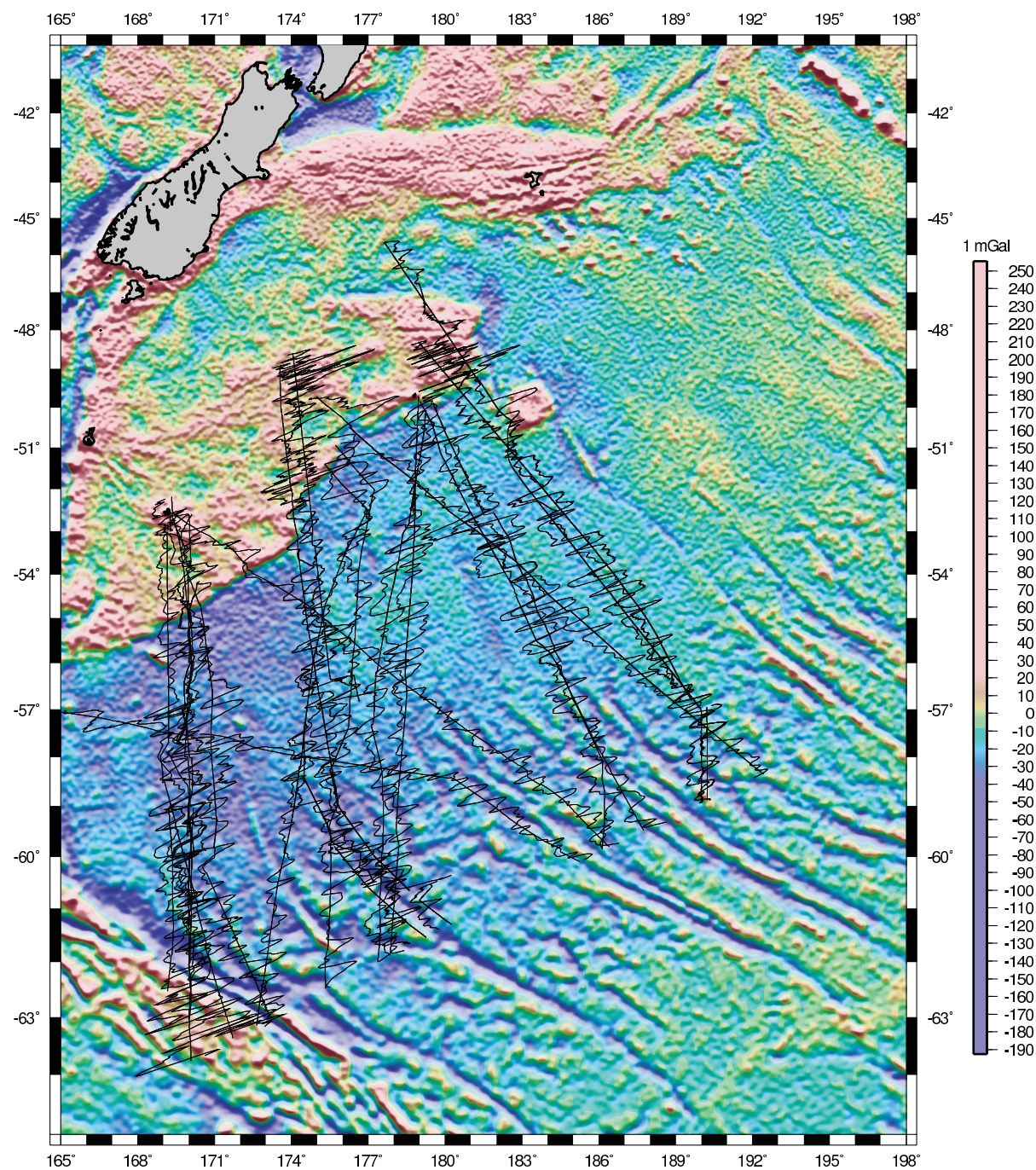


FIG. A.21 – Zone 11 (Océan Pacifique Sud) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

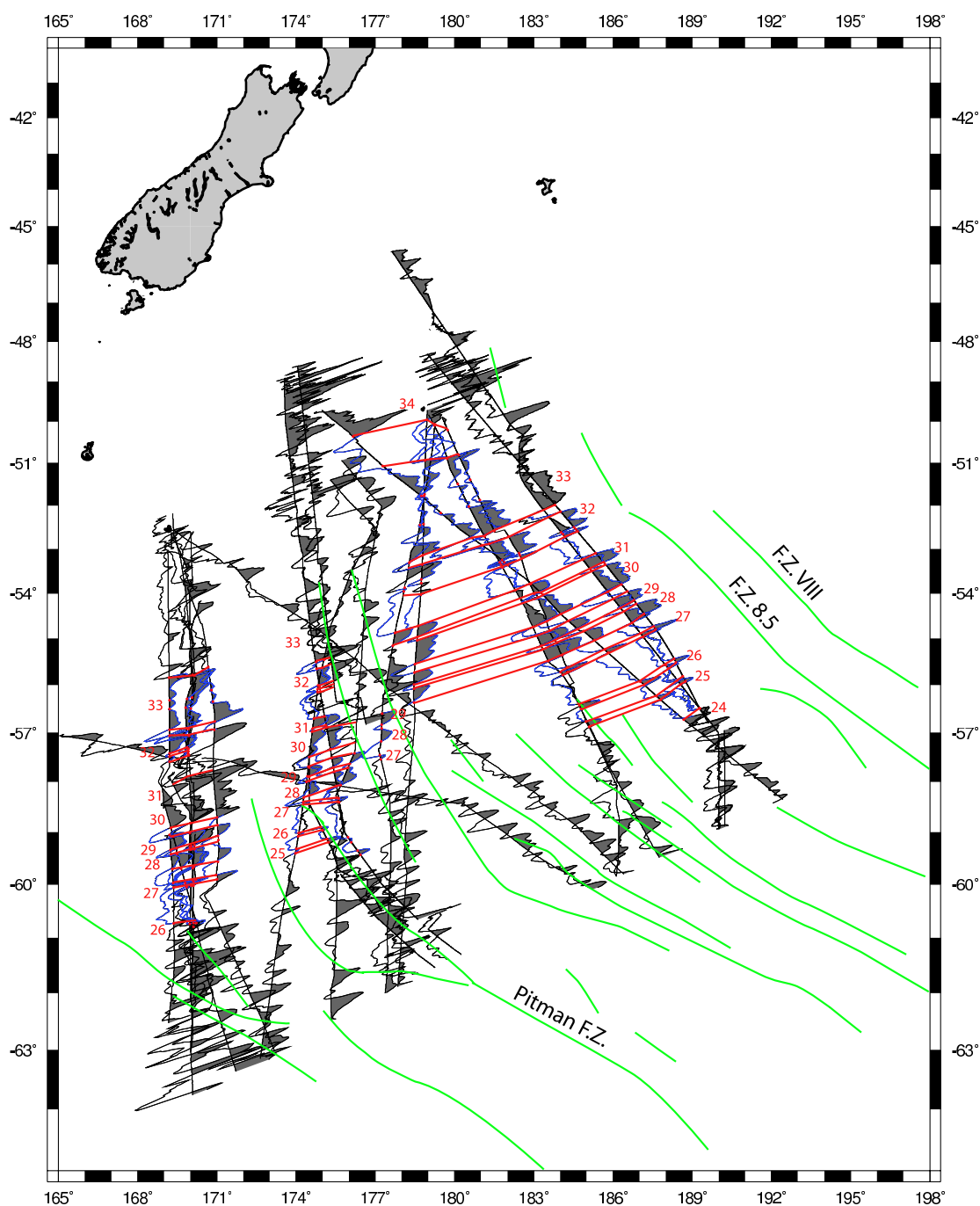


FIG. A.22 – Zone 11 (Océan Pacifique Sud) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

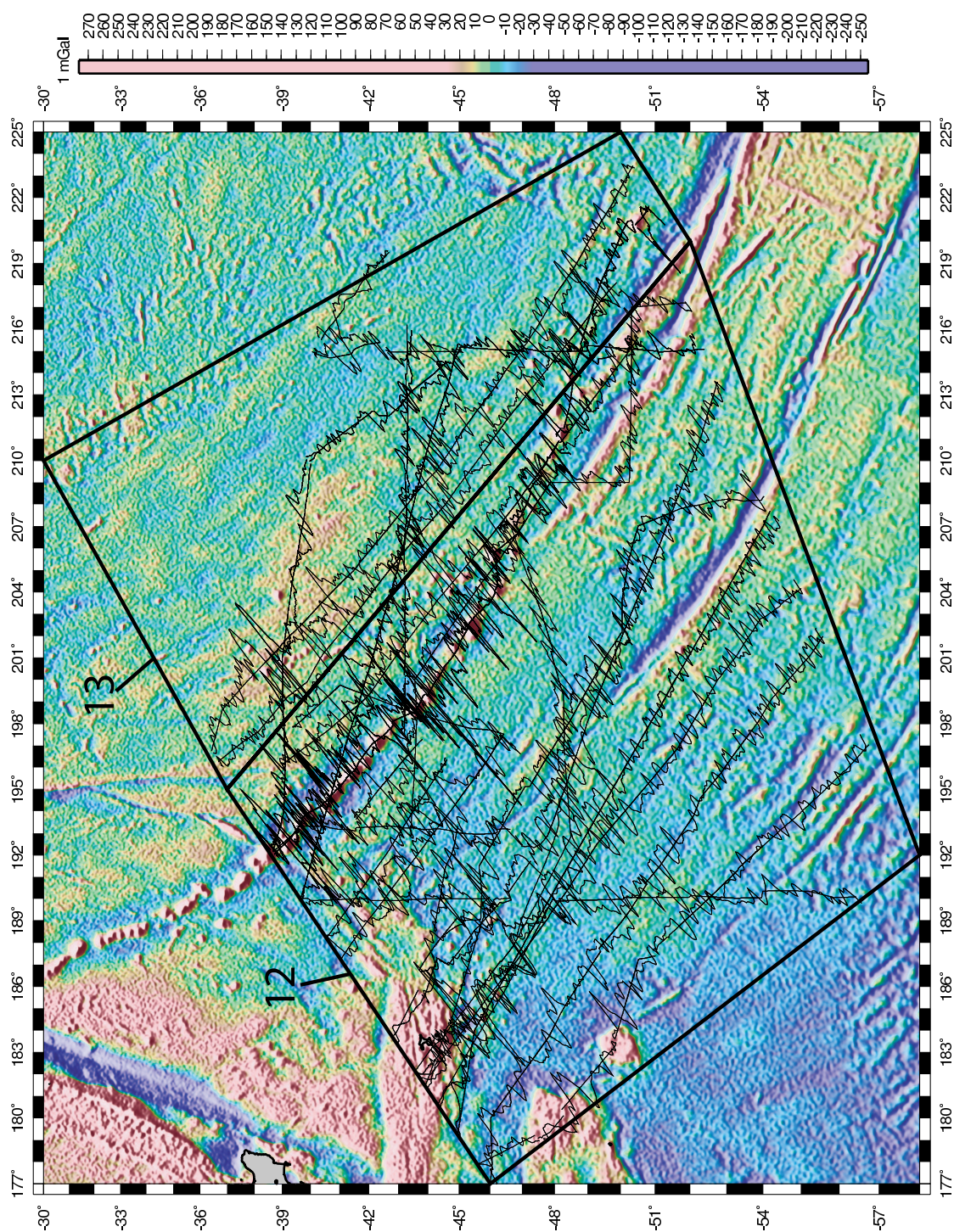


FIG. A.23 – Zone 12 et 13 (Océan Pacifique Sud) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines. Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs.

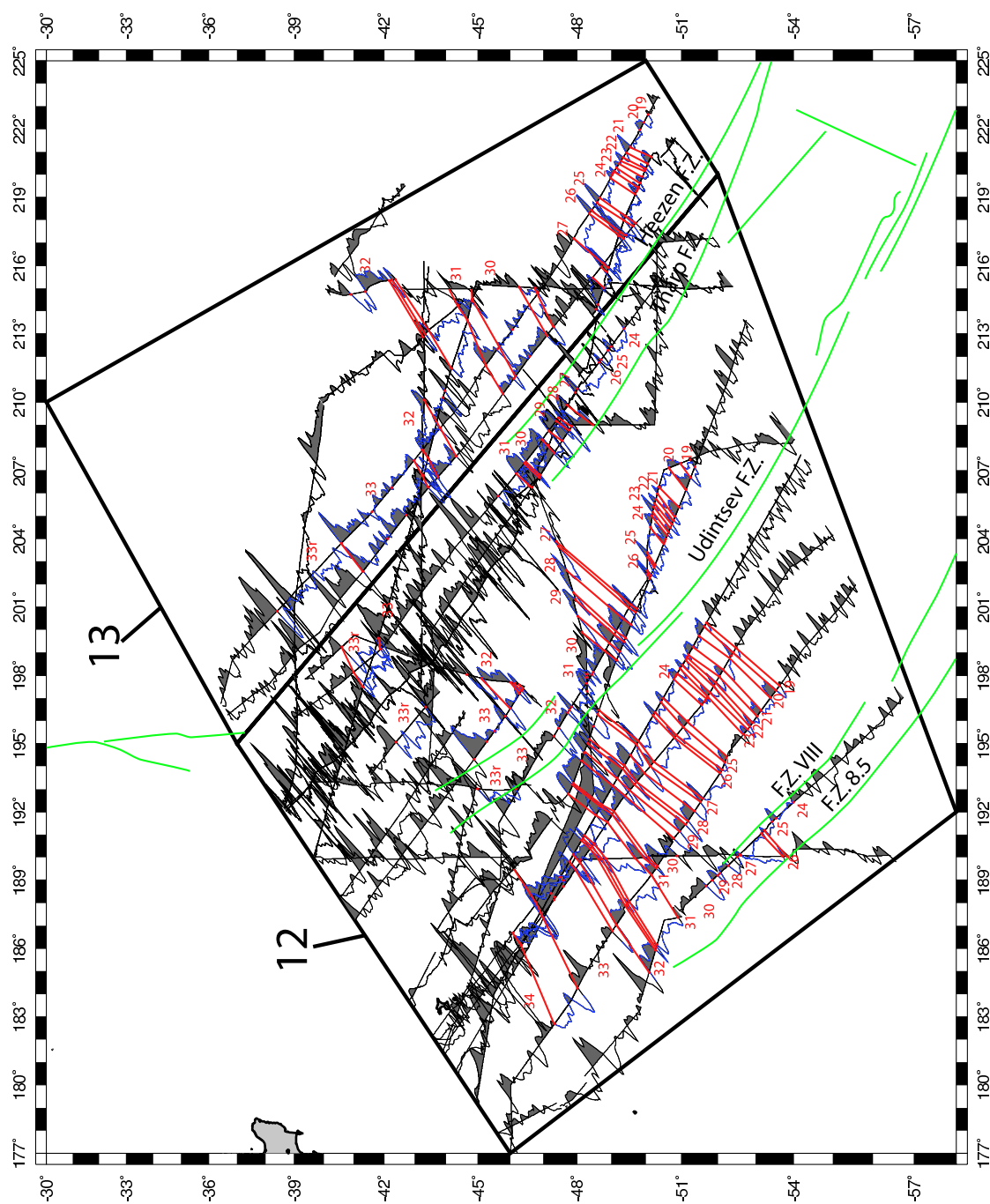


FIG. A.24 – Zone 12 et 13 (Océan Pacifique Sud) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu. Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs.

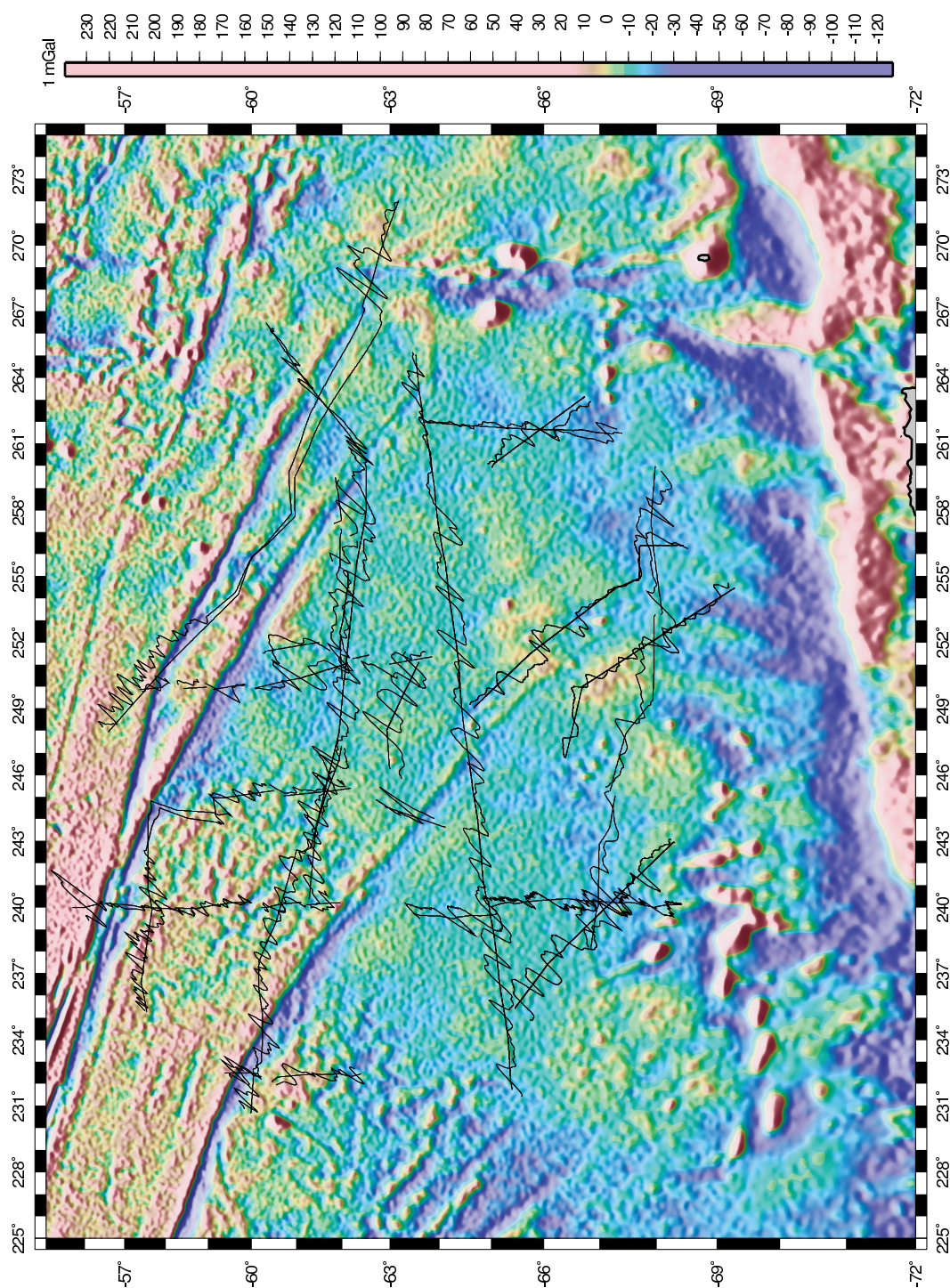


FIG. A.25 – Zone 14 (Océan Pacifique Sud) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines.

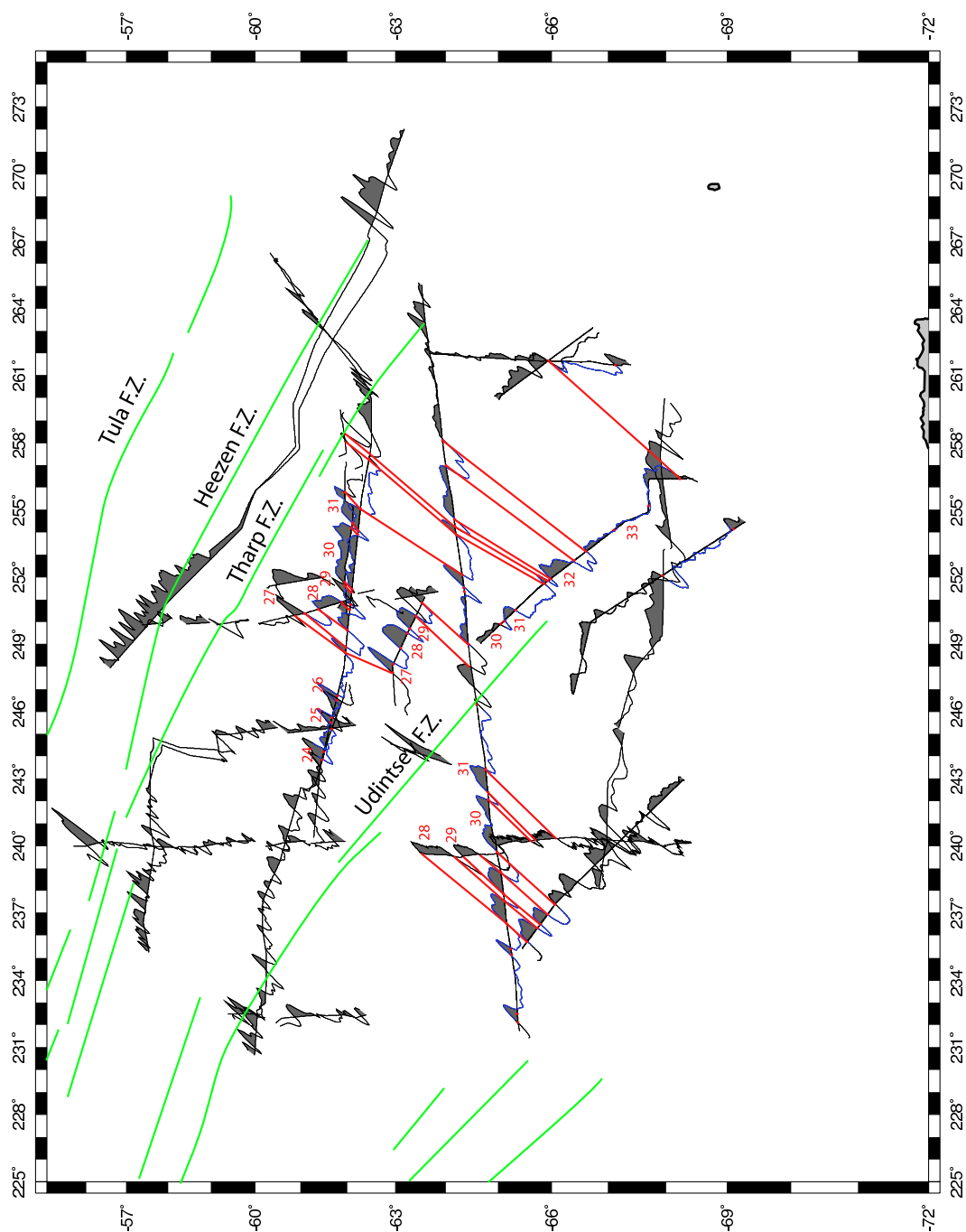


FIG. A.26 – Zone 14 (Océan Pacifique Sud) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.

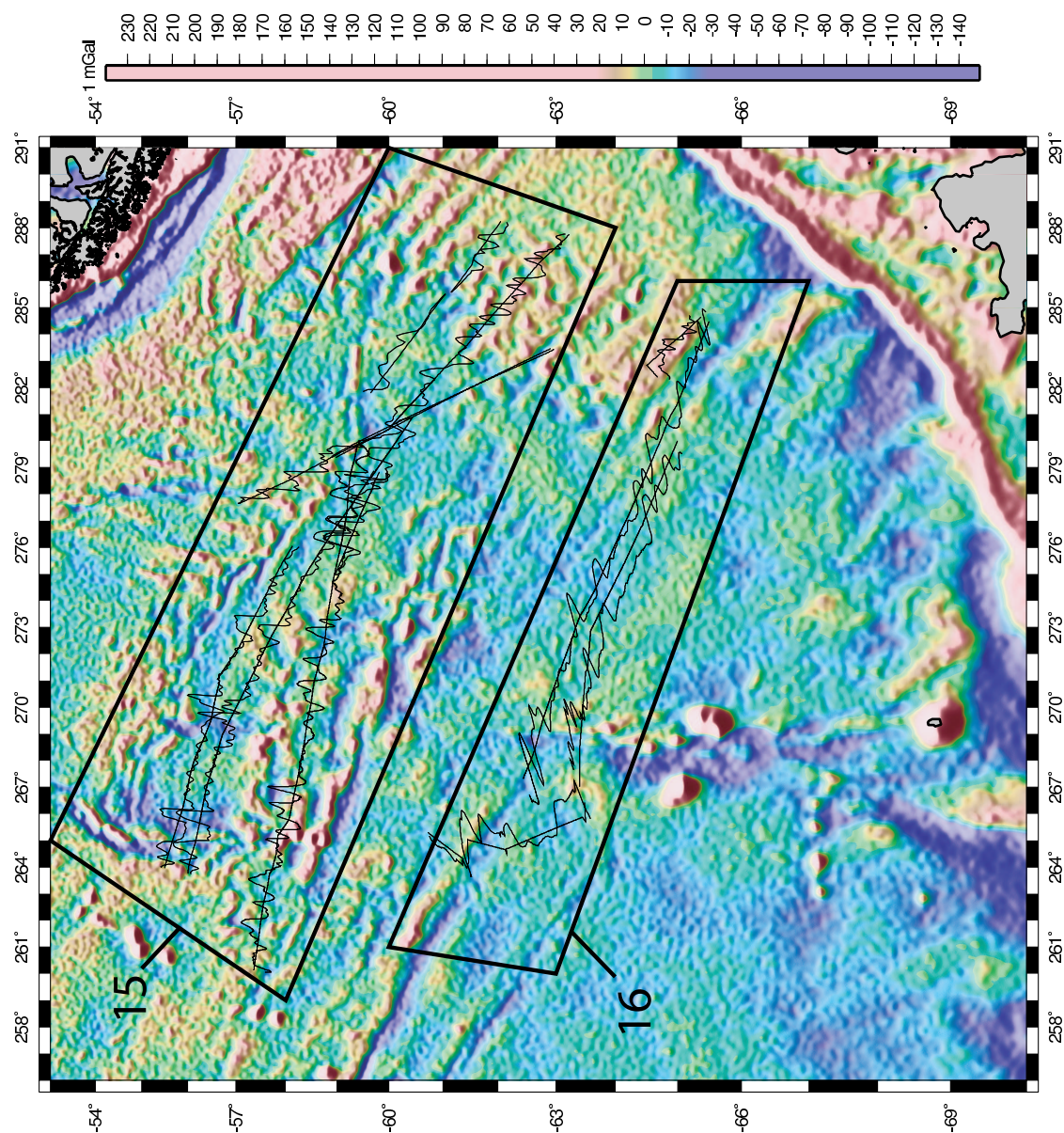


FIG. A.27 – Zones 15 et 16 (Océan Pacifique Sud) : carte des anomalies de gravité à l'air libre, sur laquelle sont représentés les profils d'anomalies magnétiques marines. Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs.

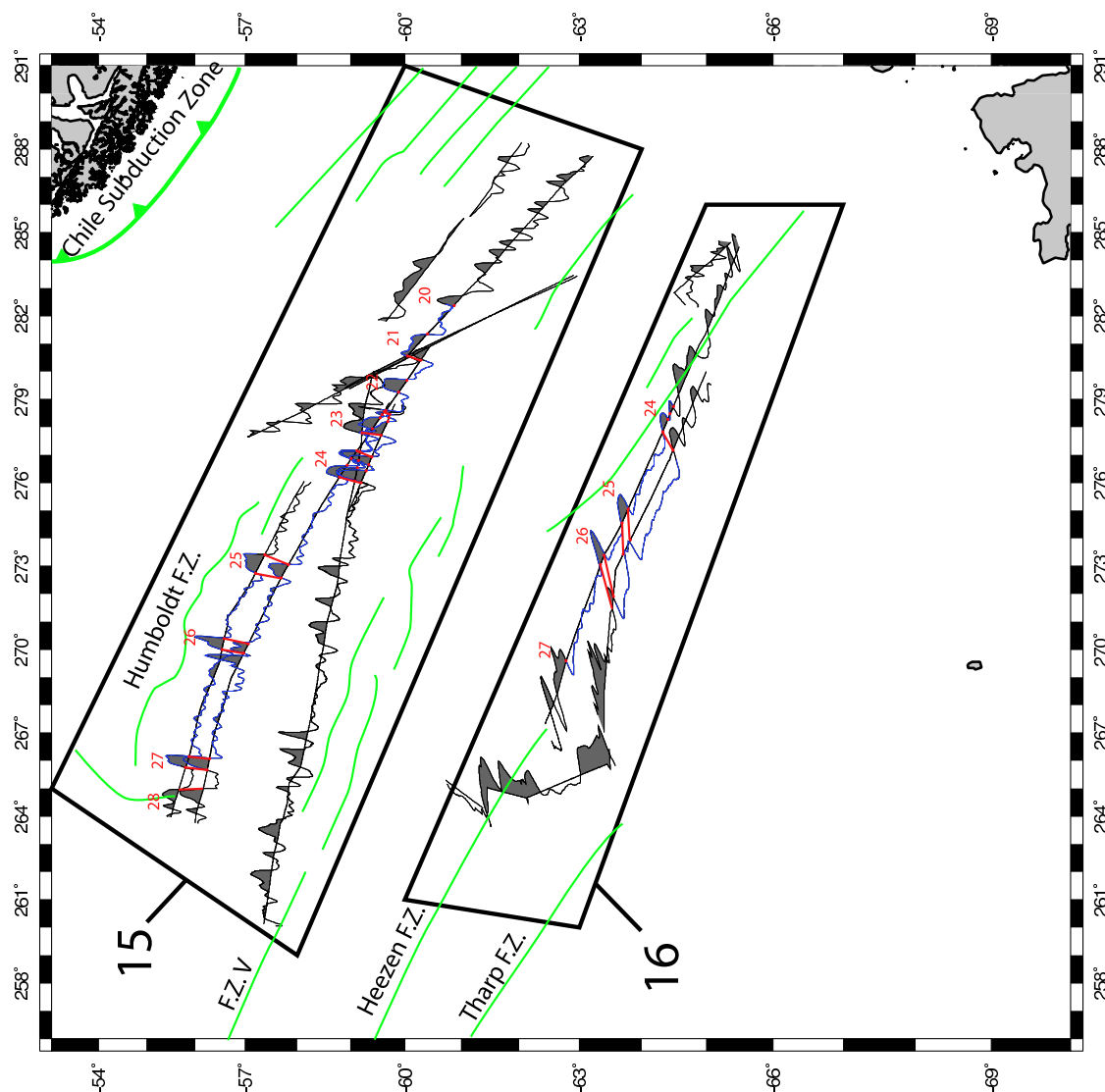


FIG. A.28 – Zones 15 et 16 (Océan Pacifique Sud) : carte représentant les linéations magnétiques (en rouge) et zones de fractures (en vert), sur laquelle sont reportés les profils d'anomalies magnétiques marines (anomalies positives grisées). Les zones d'étude sont localisées par des polygones noirs. Les points d'ancrage et les portions de profils conservées pour le calcul des stacks régionaux sont respectivement marqués par des points rouges et surlignées en bleu.