

# Étude d'équations aux dérivées partielles hyperboliques en mécanique des fluides

Nicolas Seguin

▶ **To cite this version:**

Nicolas Seguin. Étude d'équations aux dérivées partielles hyperboliques en mécanique des fluides. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2011. tel-00667830

**HAL Id: tel-00667830**

**https://theses.hal.science/tel-00667830**

Submitted on 8 Feb 2012

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598
Université Pierre et Marie Curie-Paris 6 & CNRS

Habilitation à diriger des recherches en mathématiques

# Étude d'équations aux dérivées partielles hyperboliques en mécanique des fluides

*Nicolas Seguin*

*Rapporteurs* :

**François BOUCHUT**
Directeur de recherche, CNRS

**Kenneth H. KARLSEN**
Professor, University of Oslo

**Constantine M. DAFERMOS**
Alumni-Alumnae University Professor, Brown University

**Roberto NATALINI**
Dirigente di Ricerca, CNR

*Soutenance le 8 décembre 2011 devant le jury* :

**François BOUCHUT**
Directeur de recherche, CNRS

**Robert EYMARD**
Professeur, Université Paris-Est Marne-la-Vallée

**Edwige GODLEWSKI**
Professeur, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6

**Jacques SEGRÉ**
Ingénieur-chercheur, Centre CEA de Saclay

**Constantine M. DAFERMOS**
Alumni-Alumnae University Professor, Brown University

**Olivier GLASS**
Professeur, Université Paris-Dauphine

**François JAMES**
Professeur, Université d'Orléans

# Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier François Bouchut, Constantine M. Dafermos, Kenneth H. Karlsen et Roberto Natalini d'avoir accepté de rédiger un rapport sur ce mémoire et mes travaux. Leurs commentaires, bien qu'intimidants, m'encouragent à poursuivre dans cette voie et redoublent ma motivation. Quant à Robert Eymard, Olivier Glass, Edwige Godlewski François James et Jacques Segré, je leur adresse un grand merci pour avoir participé à mon jury. J'espère que le pot aura été à la hauteur !

Tous les travaux qui suivent ont été réalisés au cours de nombreuses collaborations, toutes fructueuses et enrichissantes. Elles ont constitué un moteur pour moi, j'espère que mes collaboratrices et collaborateurs, des plus jeunes aux plus... illustres, en auront retiré autant de plaisir que moi.

Une composante essentielle de ces dernières années a été le « BurEx », le fameux 2D24, un grand merci à toutes les personnes qui ont contribué à son ambiance. Pour une liste exhaustive de ses membres officiels et officieux et pour tous les détails croustillants, voir [Bou11].

Plus largement, je remercie tous les membres du laboratoire Jacques-Louis Lions, ainsi que tous ceux du LRC Manon. J'ai pu évoluer dans un environnement extrêment stimulant, grâce à l'ouverture d'esprit, la bonne humeur et la compétence de toutes et tous.

Enfin, un immense merci à tous mes proches, qu'ils sachent qu'ils ignorent toute l'importance qu'ils ont eue dans la réalisation de ce projet, concrétisé par ce mémoire.

*Knowing is not enough, you must apply*
Bruce Lee

# Table des matières

**Avis au lecteur pressé.**
Plusieurs parties de ce mémoire ne contiennent que des résultats connus et non inclus dans les travaux de l'auteur. Celles-ci sont signalées par le symbole ☕.


**Préambule** **1**

**I Systèmes hyperboliques et méthodes volumes finis** **3**
1 Rappels sur les systèmes hyperboliques ☕ . . . 3
2 Hiérarchie de modèles . . . 4
2.1 Relaxation ☕ . . . 4
2.2 Asymptotique parabolique ☕ . . . 5
2.3 Systèmes avec contraintes . . . 6
3 Schémas volumes finis . . . 7
3.1 Schéma de Godunov ☕ . . . 9
3.2 Schémas VFRoe et VFRoe-ncv . . . 10
3.3 Schémas de type Godunov et approximation par relaxation . . . 10
3.3.1 Formalisme de Harten, lax et van Leer ☕ . . . 10
3.3.2 Schéma de relaxation pour les lois de conservation ☕ . . . 11
3.3.3 Schéma de relaxation pour les équations d'Euler ☕ . . . 13
3.3.4 Schéma de relaxation pour les modèles de fluides . . . 14
3.4 Schémas pour les hiérarchies de modèles . . . 17
3.4.1 Relaxation ☕ . . . 17
3.4.2 Asymptotique parabolique . . . 17
3.4.3 Systèmes avec contraintes . . . 20

**II Écoulements diphasiques** **21**
1 Modèles d'écoulements diphasiques compressibles . . . 21
1.1 Modèles moyennés à deux pressions . . . 21
1.1.1 Dérivation du modèle ☕ . . . 22
1.1.2 Fermeture par l'analyse mathématique . . . 24
1.1.3 Approximation numérique . . . 26
1.2 Modèles de dérive . . . 27
1.3 Modèles homogènes avec transition de phase . . . 29
1.3.1 Construction de modèles de mélange avec transition de phase . . . 29
1.3.2 Analyse des modèles construits . . . 30
1.3.3 Approximation des modèles construits . . . 32
2 Équations de Saint-Venant avec topographie . . . 32
2.1 Adaptation du schéma de Godunov . . . 33

2.2 Adaptation du schéma de VFRoe-ncv . . . . . 36
2.3 Adaptation du schéma de relaxation (dans le cas de la dynamique des gaz en tuyère) . . . 37
2.4 Schéma VFRoe-ncv et reconstruction hydrostatique . . . . . 39

**III Interfaces dans les équations hyperboliques** **41**
1 Équations scalaires avec interfaces minces . . . . . 41
1.1 Lois de conservation . . . . . 41
1.1.1 Loi de conservation avec un flux discontinu en espace . . . . . 42
1.1.2 Loi de conservation avec contrainte sur le flux . . . . . 43
1.2 Un modèle simple d'interaction fluide-structure . . . . . 46
1.2.1 Équations scalaires avec terme source singulier . . . . . 47
1.2.2 Le modèle complet d'interaction . . . . . 48
2 Couplage de systèmes hyperboliques . . . . . 51
2.1 Systèmes de même dimension . . . . . 51
2.2 Systèmes de dimension différente . . . . . 53
2.3 Adaptation de modèle . . . . . 53

**Publications de l'auteur citées dans le mémoire** **57**

**Bibliographie** **59**

# Préambule

*La plupart des travaux mentionnés dans ce mémoire sont présentés sous une forme simplifiée ou dans un cadre restreint pour des raisons de lisibilité et de concision. Ainsi, que le lecteur qui s'aviserait de jeter un œil sur les articles originaux ne soit pas surpris des différences éventuelles avec ce qui est exposé dans ce mémoire.*

Le sujet abordé dans ce mémoire est l'analyse et l'approximation numérique d'équations aux dérivées partielles hyperboliques. Les différentes études présentées ici sont pour la plupart motivées par des applications précises ou par un souci de compréhension de phénomènes particuliers. Le plan de ce mémoire tient compte de cette spécificité. En outre, nous avons tenté de proposer un plan le plus progressif et logique possible, alors que le cheminement de la recherche est souvent bien moins déterminé... Heureusement, projets et collaborations y ont apporté et apportent encore de la cohérence. Citons à titre d'exemples l'étude des écoulements diphasiques compressibles, avec EDF R&D (et en particulier Jean-Marc Hérard, Thierry Gallouët, Frédéric Coquel et Khaled Saleh) et avec le CEA Saclay et le LRC Manon (avec entre autres Annalisa Ambroso, Jacques Segré, Samuel Kokh, Stéphane Dellacherie et plusieurs membres du Laboratoire J.-L. Lions), ou la construction et l'analyse de modèles d'interaction entre particule(s) et fluides non visqueux (avec Frédéric Lagoutière et Takéo Takahashi, puis Boris Andreianov en renfort).

Nous avons donc voulu proposer dans ce mémoire une étude *compréhensive* de chaque sujet, par opposition à (pour caricaturer) un catalogue de résultats ou à une présentation plus mathématique (nous aurions pu avoir pour chapitre « Étude de la résonance dans les équations hyperboliques », ou encore « Approximation des équations avec terme source »...). Toujours par souci de cohérence, la thématique autour de la modélisation des écoulements rénaux (avec Aurélie Edwards, Benoît Perthame et Magali Tournus) n'est pas abordée ici, car elle diffère nettement du contenu de ce mémoire tant par l'application que par les techniques mathématiques utilisées (voir [27] pour s'en convaincre).

Le premier chapitre de ce mémoire traite des systèmes hyperboliques et de leur approximation par des schémas volumes finis. Le point de vue est général, on insiste cependant sur la notion de hiérarchie de modèles, c'est-à-dire de connexion entre différents modèles à travers des procédés asymptotiques.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation, l'analyse et l'approximation numérique d'écoulements diphasiques. Le terme « diphasique » comprend ici les mélanges de fluides, un même fluide avec transition de phase et les écoulements d'eau à surface libre.

Le dernier chapitre compile différents travaux sur des modèles de fluides dans lesquels apparaissent des interfaces ayant une origine extérieure à l'écoulement lui-même : changement brusque du milieu environnant, présence d'une particule dans un fluide en une dimension, changement de modèle et de méthode numérique dû à un couplage de codes, remplacement local d'un modèle par un modèle simplifié pour l'optimisation d'un code.

# Chapitre I

# Systèmes hyperboliques et méthodes volumes finis

## 1 Rappels sur les systèmes hyperboliques ☕

On étudie dans ce mémoire des modèles qui, pour la plupart, peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x f(u(t,x)) = 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tag{I.1}$$

où $u\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \Omega$ est l'inconnue, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ le *flux* et $\Omega$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^m$ appelé *ensemble des états admissibles* ($m$ étant un entier naturel non nul). On associe à ce modèle, une condition initiale

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{I.2}$$

où $u_0\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \Omega$ est la donnée initiale. Pour plus de détails concernant l'analyse et l'approximation de ces modèles on renvoie le lecteur aux ouvrages [GR91, GR96, Ser96a, Ser96b, Daf05]. À noter que la présentation est effectuée dans un cadre unidimensionnel, mais la plupart des modèles et méthodes numériques développées dans la suite s'étendent naturellement au cas multidimensionnel.

L'*hyperbolicité* des systèmes de la forme (I.1) correspond au fait que la matrice jacobienne du flux $f$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Il n'est cependant pas rare que des modèles de fluides complexes n'aient pas cette propriété, on en verra quelques exemples dans la suite. Dans chaque cas, on s'attachera à préciser en quel sens cette condition n'est pas vérifiée. Il est important de noter que jusqu'à présent, aucune théorie classant les différents types de perte d'hyperbolicité et des conséquences en regard de la théorie classique n'existe.

Il est bien connu que les solutions du problème de Cauchy (I.1-I.2) peuvent admettre des discontinuités, donc il est nécessaire de comprendre le problème au sens faible. De plus, pour sélectionner les solutions admissibles parmi toutes les solutions faibles, il est nécessaire d'introduire la notion d'entropie. Un *couple entropie-flux d'entropie* est formé d'une fonction $\eta \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ et d'une fonction $F \in \mathscr{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ qui ont les propriétés suivantes :

- la fonction $\eta$ est strictement convexe, au sens où $\forall u \in \Omega$, la matrice $\eta''(u)$ est définie positive,
- la fonction $F$ vérifie $\forall u \in \Omega$, $F'(u) = \eta'(u)^T f'(u)$.

On impose alors aux solutions faibles de vérifier au sens faible l'inégalité

$$\partial_t \eta(u(t,x)) + \partial_x F(u(t,x)) \leqslant 0. \tag{I.3}$$

On parle alors de *solution faible entropique*.

En terme d'analyse du problème de Cauchy (I.1-I.2), on peut schématiquement distinguer trois cas :

– le cas linéaire : l'analyse est complètement standard en une dimension comme en plusieurs dimensions d'espace,
– le cas scalaire ($m = 1$) : l'analyse, due à Oleinik [Ole59] et Kruzhkov [Kru70], s'appuie sur l'existence d'une infinité d'entropie, ce qui permet d'obtenir un principe de comparaison $\mathbf{L}^1_{\text{loc}}$ et donc l'unicité (l'existence peut s'obtenir par construction d'approximation — visqueuse, numérique...),
– le cas système non linéaire : l'analyse générale est restreinte au cas unidimensionnel et à des données de faible variation (voir par exemple l'article [BB05] et les références incluses, ainsi que le livre [Daf05]) ; un des points-clés reste l'analyse du *problème de Riemann*, qui est un problème de Cauchy avec pour condition initiale

$$u(0,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}, \tag{I.4}$$

$u_g$ et $u_d$ étant donnés dans $\Omega$ [1].

# 2 Hiérarchie de modèles

On aborde dans cette section différentes notions de hiérarchie de modèles hyperboliques. Le principe est le même dans chaque cas : on part d'un modèle incluant un petit paramètre (obtenue après adimensionnement et rendant compte de petites échelles) et quand ce paramètre tend vers zéro, on obtient un modèle réduit. Les questions naturelles concernent la justification de ce régime asymptotique en montrant par exemple la convergence des solutions du modèle initial vers celles du modèle limite et la construction de schémas numériques préservant cette asymptotique.

## 2.1 Relaxation ☕

L'exemple le plus connu est la relaxation [Liu88, CLL94, Yon99, Yon04, HN03, BHN07]. Éventuellement après adimensionnement, on considère un système de la forme

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x g(w,v) = \frac{1}{\varepsilon} s(w,v), \end{cases} \tag{I.5}$$

où $\varepsilon$ est un paramètre positif, petit. On introduit la notion d'*équilibre*, qui correspond aux états qui annulent le terme source et on suppose qu'on peut les paramétrer à l'aide d'une fonction $v_e$ telle que

$$\forall w, \quad s(w, v_e(w)) = 0. \tag{I.6}$$

À la limite $\varepsilon \to 0$, on s'attend à obtenir le système

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ v = v_e(w). \end{cases} \tag{I.7}$$

Attention, contrairement au cas des systèmes dynamiques, si la donnée initiale dans le problème de Cauchy associé à (I.5) appartient à la variété d'équilibre $\{(w,v)\ ;\ v = v_e(w)\}$, alors la solution n'appartient pas nécessairement à cette variété. On dit que l'équilibre $v = v_e(w)$ n'est pas une involution [Daf05].

Pour étudier la stabilité et la convergence des solutions de (I.5) vers celles de (I.7), plusieurs critères existent (pour une comparaison de ces critères, voir [Bou04b]). Le critère le plus naturel repose sur l'entropie. On suppose qu'il existe $(H,G)$ un couple entropie-flux d'entropie pour le système (I.5) tel que

$$\partial_v H(w,v)^T s(v,w) \leqslant 0. \tag{I.8}$$

1. Dans la suite, les solutions de problèmes de Riemann seront par défaut composées d'états constants séparés par des ondes.

Les solutions de (I.5) vérifient donc $\forall \varepsilon > 0$

$$\partial_t H + \partial_x G \leqslant 0. \tag{I.9}$$

On peut alors montrer que le couple $(\eta, F)(w) := (H, G)(w, v_e(w))$ est bien un couple entropie-flux d'entropie pour le système (I.7). On dit qu'une entropie qui vérifie la condition (I.8) est une *entropie dissipative*.

Une autre manière d'envisager le comportement des solutions du modèle de relaxation (I.5) quand $\varepsilon \to 0$ est d'étudier ces solutions dans le cas où elles sont des perturbations autour de solutions du modèle équilibre (I.7). On appellera abusivement cette méthode le *développement de Chapman-Enskog*. L'abus de langage est que dans ce mémoire, cela consistera à considérer une solution

$$(w, v) \quad \text{où} \quad v = v_e(w) + \varepsilon v^1 + \mathscr{O}(\varepsilon^2) \tag{I.10}$$

et à en déduire du système (I.5) la perturbation au premier ordre $v^1$ et un système approché pour ces solutions. En injectant une solution du type (I.10) dans (I.5), on obtient après quelques calculs

$$v_1(w) = (\partial_v s(w, v_e(w)))^{-1} \Big( \partial_x g(w, v_e(w)) - v_e'(w)^T \partial_x f(w, v_e(w)) \Big) + \mathscr{O}(\varepsilon)$$

et le système

$$\partial_t w + \partial_x f(w, v_e(w)) = \varepsilon \partial_x (\partial_v f(w, v_e(w)) v_1(w)) + \mathscr{O}(\varepsilon^2). \tag{I.11}$$

Ce système permet donc d'obtenir un système intermédiaire entre le système de relaxation (I.5) et le système équilibre (I.7). On peut remarquer que ce système est d'ordre 2 et une condition de stabilité de la relaxation est d'imposer qu'il est dissipatif. La condition résultante est parfois appelée *condition de Whitham* [Whi74] (on en réfère une nouvelle fois à [Bou04b]).

## 2.2 Asymptotique parabolique

Le cas présent consiste à étudier les solutions en temps long du système précédent. Pour cela, un changement d'échelle en temps est aussi nécessaire, ce qui donne après adimensionnement

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t w + \partial_x f(w, v) = 0, \\ \varepsilon \partial_t v + \partial_x g(w, v) = \frac{1}{\varepsilon} s(w, v). \end{cases} \tag{I.12}$$

Les hypothèses générales pour dériver le modèle asymptotique sont assez fastidieuses à énumérer, le lecteur intéressé peut se référer à [BLT11]. On va plutôt se concentrer sur deux exemples canoniques.

Prenons tout d'abord l'exemple de l'équation des ondes (ou du télégraphe, ou de Goldstein-Taylor) :

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t w + \partial_x v = 0, \\ \varepsilon \partial_t v + \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon} v. \end{cases} \tag{I.13}$$

L'équilibre associé est $\{v = 0\}$. De manière intermédiaire, un développement de Chapman-Enskog sur $v$ revient à prendre $v = -\varepsilon \partial_x w + \mathscr{O}(\varepsilon^2)$. Le système limite associé s'écrit donc

$$\begin{cases} \partial_t w - \partial_{xx}^2 w = 0, \\ v = 0, \end{cases} \tag{I.14}$$

et correspond tout simplement à l'équation de la chaleur. On peut effectuer le même calcul pour les équations d'Euler avec gravité et friction

$$\begin{cases} \varepsilon \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0, \\ \varepsilon \partial_t (\rho v) + \partial_x (\rho v^2 + p) = \rho g - \frac{1}{\varepsilon} \rho v, \\ \varepsilon \partial_t (\rho E) + \partial_x (\rho E v + p v) = \rho g v - \frac{1}{\varepsilon} \rho v^2, \end{cases} \tag{I.15}$$

où $E = v^2/2 + e$ et $p = \mathscr{P}(\rho, \rho e)$, dont l'équilibre est $\{v = 0\}$. En utilisant un développement de Chapman-Enskog sur $v$, on obtient $\rho v = \varepsilon(\rho g - \partial_x p(\rho)) + \mathscr{O}(\varepsilon^2)$. On obtient alors le système limite

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v_1) = 0, \\ \partial_t(\rho e) + \partial_x(\rho e v_1) + p\partial_x v_1 = 0, \\ \rho v_1 = \rho g - \partial_x p, \end{cases} \tag{I.16}$$

qui est un système parabolique non linéaire. La convergence des solutions du modèle (I.15) vers celles du modèle (I.16) a notamment été étudiée dans [HMP05] et [CG07b].

Deux travaux autour de ce type d'asymptotique sont présents dans ce mémoire : le premier, dans la section 3.4.2, reprend le système (I.15) pour lequel est construit un schéma numérique compatible avec le régime $\varepsilon \to 0$, et le second, dans la section 1.2, permet la dérivation d'un modèle diphasique dit « de dérive ».

## 2.3 Systèmes avec contraintes

Ce travail se base sur le formalisme développé dans [Des07], où est décrit la manière de définir des solutions d'un problème de Cauchy (I.1-I.2) soumis à une contrainte du type

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \quad u(t,x) \in K, \tag{I.17}$$

où $K$ est ensemble fermé non vide strictement inclus dans $\Omega$. La difficulté est qu'en toute généralité, le fait que la donnée initiale $u_0$ soit à valeur dans $K$ n'assure pas la contrainte (I.17) pour tout $t > 0$ (excepté dans le cas scalaire ou dans certains cas très particuliers), ce n'est donc pas une involution [Daf05]. La hiérarchie de modèles est donc la suivante : on a un modèle dit *libre* qui est (I.1) et un sous-modèle, dit modèle *avec contrainte*, qui est (I.1)-(I.17).

L'idée principale dans [Des07] est de se placer dans l'espace de la variable entropique $v$ définie par $v = \eta'(u)$ pour projeter la solution du modèle libre exprimée en variable entropique sur l'ensemble $\eta(K)$. Pour que cette projection soit licite, on suppose que $\eta'(K)$ est un ensemble convexe de $\mathbb{R}^m$. Il en découle la définition suivante :

**Définition I.1.** Une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est une *solution faible contrainte* si, pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $u(t,x) \in K$ et si $\forall\, \bar{V} \in \eta'(K)$ et $\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ positive on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[ \langle u \mid \bar{v} \rangle \partial_t + \langle f(u) \mid \bar{v} \rangle \partial_x \right] \varphi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \langle u_0(x) \mid \bar{v} \rangle \, \varphi(0,x) \, dx \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} \left[ \eta(u)\partial_t + F(u)\partial_x \right] \varphi \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} \eta(u_0(x)) \varphi(0,x) \, dx \end{aligned} \tag{I.18}$$

où $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^m$.

Cette formulation inclut les solutions faibles entropiques vérifiant la contrainte (I.17) et permet de dériver des relations de saut de Rankine-Hugoniot généralisées, qui sont appliquées avec succès à la caractérisation des chocs élastoplastiques.

Dans [14], nous étudions le cas où le système (I.1) est linéaire, c'est-à-dire que $f(u) = Au$, où $A$ est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^{m \times m}$ à coefficients constants — bien que le système soit linéaire, le problème global ne l'est pas forcément à cause de la contrainte. Dans ce cas, l'entropie est simplement (par exemple)

$$\eta(u) = \frac{|u|^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} (u_i)^2$$

et la variable entropique n'est autre que l'inconnue elle-même, $v = \eta'(u) = u$. On peut alors réécrire la formulation (I.18) de manière plus simple :

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} \big[|u-\bar v|^2\partial_t\varphi + \langle u-\bar v \mid A(u-\bar v)\rangle\,\partial_x\varphi\big]dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)-\bar v|^2\varphi(0,x)\,dx \geqslant 0 \tag{I.19}$$

et obtenir le résultat qui suit (qui est étendu au cas $x \in \mathbb{R}^d, d \geqslant 1$ dans [14]).

**Théorème I.2.** *Soit $T > 0$ et $u_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R},K)^m$. Alors il existe une unique solution faible contrainte $u \in \mathbf{L}^2([0,T]\times\mathbb{R},K)^m$ au problème (I.1)-(I.17) dans le cas d'un flux $f$ linéaire. De plus, cette solution appartient à $\mathscr{C}([0,T],\mathbf{L}^2(\mathbb{R},K)^m)$ et si $u_0 \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R},K)^m$, alors $u \in \mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^1(\mathbb{R},K)^m)$.*

La formulation (I.19) est très proche de celle utilisée par Kruzhkov [Kru70] et effectivement, elle nous permet d'obtenir l'unicité de la solution faible contrainte par dédoublement de variable. L'existence de cette solution est obtenue par convergence d'un schéma numérique basé sur une méthode de splitting, voir la section 3.4.3. Enfin, on étudie le modèle intermédiaire

$$\partial_t u + A\partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(p_K(u) - u) \tag{I.20}$$

où $p_K$ est le projecteur sur $K$. Ce modèle donne (I.1) le modèle libre quand $\varepsilon \to +\infty$ et devient le modèle contraint quand $\varepsilon \to 0$.

*Remarque* 1. L'écriture (I.20) peut faire penser aux modèles de relaxation (I.5). De même, on pourrait interpréter le modèle équilibre (I.7) comme un modèle avec contrainte, on aurait alors comme espace des contraintes $K' = \{(w,v)\ ;\ v = v_e(w)\}$. D'ailleurs, la condition d'entropie dissipative (I.8) pour la relaxation est très proche de la notion de projection sur le convexe $K$. Mais les deux théories ne coïncident que dans peu de cas. En effet, dans la théorie des systèmes avec relaxation [CLL94, Yon99], $K'$ n'est pas du tout nécessairement convexe. *A contrario*, un modèle contraint issu de la théorie [Des07] n'est pas nécessairement conservatif, donc il ne peut pas être réduit à une forme du type (I.7).

# 3 Schémas volumes finis

Les méthodes numériques exposées dans ce mémoire entre toutes dans la classe des méthodes *volumes finis* (voir par exemple [GR96, EGH00, LeV02, Tor09, Bou04a]).

Rappelons brièvement le principe de ces méthodes numériques. L'espace $\mathbb{R}$ est discrétisé à l'aide d'une suite croissante de points $(x_{i+1/2})_{i\in\mathbb{Z}}$ tels que $x_{i+1/2} - x_{i-1/2} = \Delta x$, où $\Delta x$ est le pas d'espace, définissant les mailles $K_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ séparées par les interfaces situées en $x_{i+1/2}$, $i \in \mathbb{Z}$. La dimension temporelle $\mathbb{R}_+$ est discrétisée en utilisant des temps successifs $t^n = n\Delta t$ où $\Delta t$ est le pas de temps. La formule de Green appliquée à (I.1) sur $[t^n,t^{n+1}[\times K_i$ donne

$$\begin{aligned}\Delta x\int_{K_i} u(t^{n+1},x)\,dx - \Delta x\int_{K_i} u(t^n,x)\,dx \\ + \Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(t,x_{i+1/2}^-))\,dt - \Delta t\int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(t,x_{i-1/2}^+))\,dt = 0\end{aligned} \tag{I.21}$$

et en utilisant les relations de saut de Rankine-Hugoniot, on a à chaque interface

$$f(u(t,x_{i+1/2}^-)) = f(u(t,x_{i+1/2}^+)). \tag{I.22}$$

Sur la base de l'équation (I.21), on définit la suite $(u_i^n)_{n\in\mathbb{N},i\in\mathbb{Z}}$ par

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad u_i^0 = \frac{1}{\Delta x}\int_{K_i} u_0(x)\,dx, \tag{I.23}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)\big), \tag{I.24}$$

où la fonction $g\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}^m$ est le *flux numérique*, c'est elle qui définit le schéma numérique. On impose sur ces flux numériques la consistance,

$$\forall u \in \Omega, \quad g(u,u) = f(u),$$

la conservativité étant directement assurée par l'écriture (I.24). Même si en général, on ne sait pas démontrer la convergence de ces schémas numériques dans le cas $m > 1$ — par manque de compacité — il est naturel d'imposer que, s'ils convergent, alors ils convergent vers une solution faible entropique. Pour cela, on demande l'existence d'un flux numérique d'entropie $G\colon \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$, consistant avec $F$ (c'est-à-dire que $\forall u \in \Omega$, $G(u,u) = F(u)$), tel que le schéma vérifie l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \eta(u_i^{n+1}) \leqslant \eta(u_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(G(u_i^n, u_{i+1}^n) - G(u_{i-1}^n, u_i^n)\big). \tag{I.25}$$

On dit alors que le schéma numérique est *entropique*. Cette propriété est en général la plus difficile à obtenir (voir à ce sujet le livre [Bou04a]).

Un des intérêts majeurs de ce type de méthode est que leur généralisation au cas multidimensionnel est directe. Soit le problème de Cauchy en $d$ dimensions d'espace

$$\begin{cases} \partial_t u + \operatorname{div}_x f(u) = 0, & (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{I.26}$$

où $f$ est maintenant une fonction allant de $\Omega$ dans $\Omega\times\mathbb{R}^d$. On se donne un maillage $\mathscr{M}$ de $\mathbb{R}^d$, c'est-à-dire une partition d'ouverts polygonaux disjoints (mailles). Si $K$ et $L$ sont deux mailles voisines (on pourra noter $L \in \mathscr{V}(K)$ et inversement $K \in \mathscr{V}(L)$), on définit l'arête en 2D ou la face en 3D $e_{KL} = \bar{K}\cap\bar{L}$ ainsi que la normale unitaire $n_{KL}$ orientée de $K$ vers $L$. On définit de manière analogue à (I.23) l'approximation de la donnée initiale

$$u_K^0 = \frac{1}{|K|}\int_K u_0(x)\,dx.$$

On intègre maintenant (I.26) sur $[t^n, t^{n+1}[\times K$, ce qui donne

$$\int_K u(t^{n+1},x)\,dx - \int_K u(t^n,x)\,dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{L\in\mathscr{V}(K)} \int_{e_{KL}} f(u(t,x))\cdot n_{KL}\,d\gamma\,dt = 0.$$

On en déduit alors le schéma volumes finis suivant :

$$u_K^{n+1} = u_K^n - \frac{\Delta t}{|K|}\sum_{L\in\mathscr{V}(K)} |e_{KL}|\; g(u_K^n, u_L^n; n_{KL}) \tag{I.27}$$

où le flux numérique $g$ est une fonction définie de $\Omega\times\Omega\times\mathbf{S}^{d-1}$ dans $\mathbb{R}^m$. Ce flux numérique doit alors vérifier les propriétés de base suivantes : la conservativité, $g(u,v;n) = -g(v,u;-n)$ pour tout $(u,v;n) \in \Omega\times\Omega\times\mathbf{S}^{d-1}$, et la consistance, $g(u,u;n) = f(u)\cdot n$ pour tout $(u,n) \in \Omega\times\mathbf{S}^{d-1}$. Le caractère entropique peut lui aussi se définir par un flux numérique d'entropie $G$ tel que

$$\eta(u_K^{n+1}) \leqslant \eta(u_K^n) - \frac{\Delta t}{|K|}\sum_{L\in\mathscr{V}(K)} |e_{KL}|\; G(u_K^n, u_L^n; n_{KL})$$

consistant avec le flux d'entropie $F$. Dans le cas où le système (I.26) est invariant galiléen, le flux numérique $g$ est simplement le flux numérique dans le cas unidimensionnel projeté dans la direction normale à l'interface. Par conséquent, tous les schémas qui suivent peuvent être directement étendus au cas multidimensionnel.

## 3.1 Schéma de Godunov

Le schéma le plus naturel est le schéma de Godunov [God59]. Celui-ci se base sur la résolution exacte à chaque interface du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x f(u(t,x)) = 0, \quad (t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0 \\ u_d & \text{si } x > 0 \end{cases}, \end{cases} \tag{I.28}$$

où $u_g, u_d \in \Omega$. Si on note $\mathscr{U}(x/t; u_g, u_d)$ la solution faible entropique auto-similaire de ce problème, alors le flux numérique du schéma de Godunov est défini par

$$g_{\text{Godunov}}(u_g, u_d) = f(\mathscr{U}(0; u_g, u_d)) \tag{I.29}$$

sous la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)

$$2 \max_{n,i,k} |\lambda_k(u_i^n, u_{i+1}^n)| \, \Delta t \leqslant \Delta x \tag{I.30}$$

où $(\lambda_k(u_g, u_d))_k$ sont les vitesses des ondes apparaissant dans la solution $\mathscr{U}(\cdot; u_g, u_d)$.

Le schéma de Godunov peut être interprété d'une autre manière. Étant donné la solution approchée constante par maille correspondant à $(u_i^n)_i$, ce schéma consiste à résoudre exactement le problème de Cauchy (il est en fait composé d'une succession de problèmes de Riemann apparaissant à chaque interface du maillage) puis à prendre la moyenne de cette solution exacte dans chaque maille. La condition CFL (I.30) assure que les ondes de chaque problème de Riemann n'interagit pas avec les centres des mailles et par conséquent, les ondes d'un problème de Riemann ne rencontrent pas celles d'un problème de Riemann voisin. Ainsi, le schéma numérique (I.24)-(I.29) peut aussi s'écrire

$$u_i^{n+1} = \int_0^{\Delta x/2} \mathscr{U}(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n) \, dx + \int_{-\Delta x/2}^0 \mathscr{U}(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n) \, dx. \tag{I.31}$$

Ce schéma étant basé sur la résolution *exacte* du problème de Riemann (I.28), on peut supposer que c'est le meilleur choix possible dans le cadre des schémas volumes finis explicites d'ordre un. On peut aisément montrer qu'il est conservatif et consistant. On peut également montrer qu'il est entropique : la solution $\mathscr{U}$ est entropique et comme l'entropie est convexe, l'intégration (I.31) fait aussi décroître l'entropie par l'inégalité de Jensen. Le flux numérique d'entropie intervenant dans l'inégalité (I.25) est simplement

$$G_{\text{Godunov}}(u_g, u_d) = F(\mathscr{U}(0; u_g, u_d))$$

où $F$ est le flux d'entropie associé à $\eta$.

Malheureusement, la résolution du problème de Riemann (I.28) est en général très compliquée et très coûteuse en temps calcul. Par conséquent, il est naturel de s'orienter vers des schémas numériques plus simples.

## 3.2 Schémas VFRoe et VFRoe-ncv

Une première classe de schéma numérique est basée sur la résolution d'un problème de Riemann approchant (I.28), dont la solution $\tilde{\mathscr{U}}(x/t,u_g,u_d)$ correspond donc à une approximation de $\mathscr{U}(x/t,u_g,u_d)$. On injecte cette solution dans (I.29), ce qui donne

$$g_{\text{VFRoe}}(u_g,u_d) = f(\tilde{\mathscr{U}}(0;u_g,u_d)). \tag{I.32}$$

Le problème de Riemann approché à résoudre se base sur une linéarisation de (I.28). Pour cela, on introduit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi\colon u\in\Omega\mapsto w\in\mathbb{R}^m$ et on résout

$$\begin{cases} \partial_t w(t,x) + B(\bar{w}(w_g,w_d))\partial_x w(t,x) = 0, \quad (t,x)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}, \\ w(0,x) = \begin{cases} w_g := \varphi(u_g) & \text{si } x<0 \\ w_d := \varphi(u_d) & \text{si } x>0 \end{cases}, \end{cases} \tag{I.33}$$

où $B(\varphi(u)) = \varphi'(u)f'(u)(\varphi')^{-1}(u)$ et $\bar{w}(w_g,w_d) = (w_g+w_d)/2$. Ce problème étant linéaire, sa résolution est immédiate et notons $\tilde{\mathscr{W}}(x/t,u_g,u_d)$ sa solution. On définit alors

$$\tilde{\mathscr{U}}(x/t,u_g,u_d) = \varphi^{-1}\big(\tilde{\mathscr{W}}(x/t,u_g,u_d)\big). \tag{I.34}$$

Dans le cas où $\varphi$ est l'identité, le schéma numérique (I.32-I.34) a été introduit dans [GM96, MFG99], c'est le *schéma VFRoe*. L'extension utilisant une variable non conservative $w$ a été proposée dans [BGH98, BGH00] (on retombe notamment sur des schémas qui avaient été introduits bien avant [Tor09]), aboutissant aux *schémas VFRoe-ncv* (ncv : nonconservative variable).

L'intérêt de ces méthodes est que le problème de Riemann est linéaire, donc simple à résoudre, comme c'est aussi le cas pour le schéma de Roe. Mais contrairement à celui-ci, la construction de la matrice $B(\bar{w}(w_g,w_d))$ est très simple, quel que soit le système considéré. Ces schémas sont tous consistants et conservatifs mais pas entropiques. Il convient alors de leur appliquer une correction entropique, comme cela est pratiqué aussi pour le schéma de Roe [Roe81] (voir par exemple [HH83]), bien que cela ne permette pas de construire un schéma entropique de manière générale.

Dans [15, 16], nous proposons une étude détaillée de l'influence du choix de $\varphi$ sur la précision et la robustesse de ces schémas numériques dans le cas des équations d'Euler, avec différentes lois d'état (on constate notamment une perte de précision au niveau des discontinuités de contact pour des lois d'état « complexes » et on propose une modification de ces schémas pour retrouver un comportement classique dans [15]). En effet, tout comme le schéma de Roe, il n'est pas assuré que la solution numérique vérifie des propriétés requises sur la solution (positivité de la masse volumique et de la température, principe du maximum pour les concentrations...). Dans les cas étudiés, l'utilisation d'une variable $w$ telle que la matrice $B(\bar{w}(w_g,w_d))$ est « la plus diagonale possible » permet d'obtenir de meilleurs résultats.

*Remarque* 2. Dans un cas simple, cette intuition peut être validée en construisant un schéma de type VFRoe-ncv pour lequel il existe un résultat de positivité [BM08], en interprétant ce schéma comme une méthode de relaxation (voir la section suivante). De plus, la connexion entre les schémas utilisant une linéarisation du système initial et les schémas de type Godunov (voir la section suivante) est étudiée dans [LP01].

## 3.3 Schémas de type Godunov et approximation par relaxation

### 3.3.1 Formalisme de Harten, lax et van Leer

Les *schémas de type Godunov* sont des schémas volumes finis définis par le formalisme développé dans [HLvL83]. Ce formalisme est basé sur la formule du schéma de Godunov (I.31). La construction

des schémas de type Godunov repose sur la construction d'un *solveur de Riemann approché* $\tilde{\mathscr{W}}$, qui doit vérifier les conditions de consistance $\tilde{\mathscr{W}}(\cdot;u,u) \equiv u$ et la formule intégrale

$$\forall u_g, u_d \in \Omega, \quad \int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \tilde{\mathscr{W}}(x/\Delta t; u_g, u_d)\, dx = \frac{\Delta x}{2}(u_g + u_d) - \Delta t (f(u_d) - f(u_g)), \tag{I.35}$$

sous la condition

$$2 \max_k |\tilde{\lambda}_k|\, \Delta t \leqslant \Delta x \tag{I.36}$$

où les $\tilde{\lambda}_k$ sont les vitesses des ondes apparaissant dans la solution $\tilde{\mathscr{W}}$. Le schéma de type Godunov associé à $\tilde{\mathscr{W}}$ s'écrit alors

$$u_i^{n+1} = \int_0^{\Delta x/2} \tilde{\mathscr{W}}(x/\Delta t; u_{i-1}^n, u_i^n)\, dx + \int_{-\Delta x/2}^{0} \tilde{\mathscr{W}}(x/\Delta t; u_i^n, u_{i+1}^n)\, dx. \tag{I.37}$$

Ce schéma numérique peut aussi se mettre sous la forme classique (I.24), en définissant le flux numérique

$$\begin{aligned} g_{\mathrm{HLL}}(u_g, u_d) &= f(u_g) - \int_{-\infty}^{0} (\tilde{\mathscr{W}}(\xi; u_g, u_d) - u_g)\, d\xi \\ &\Big( = f(u_d) + \int_0^{\infty} (\tilde{\mathscr{W}}(\xi; u_g, u_d) - u_d)\, d\xi \Big). \end{aligned} \tag{I.38}$$

(Voir [HLvL83, GR96, Bou04a] pour plus de détails.)

Il existe de nombreux solveurs de Riemann approchés et on peut montrer dans certains cas qu'ils conduisent à des schémas entropiques (on peut en effet exhiber des conditions suffisantes sur le solveur de Riemann approché). On peut citer notamment les travaux [Gal03, Des01, LP01].

Une méthode de construction de tels solveurs est l'utilisation de l'approximation par relaxation [JX95, CP98, CGP+01, Bou04a]. En quelques mots, cette approximation est basée sur la construction d'un sur-système linéaire ou linéairement dégénéré (de sorte que la résolution exacte du problème de Riemann associé est facile) avec un terme source de relaxation assurant qu'en temps long (ou dans le régime où le temps caractéristique du terme source tend vers zéro), les solutions de ce sur-système convergent vers les solutions de (I.1).

Dans [12], nous proposons une méthode de construction de schéma de type Godunov (ou de relaxation donc) pour une large classe de systèmes hyperboliques que nous présentons maintenant. Avant de détailler le cas général, présentons deux exemples simples : le cas d'une loi de conservation et le cas des équations d'Euler dans le cas barotrope.

### 3.3.2 Schéma de relaxation pour les lois de conservation ☕

Prenons une loi de conservation

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0, \tag{I.39}$$

où le flux $f$ est non linéaire. Le but est de s'affranchir de la résolution exacte du problème de Riemann associé en introduisant un solveur de Riemann approché qui peut être interprété comme un solveur de Riemann exact pour un autre système. Celui-ci s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + a^2 \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v), \end{cases} \tag{I.40}$$

où $v$ est une inconnue supplémentaire et $a$ est un paramètre positif. Ce système est linéaire — la non linéarité n'apparaît plus que dans le terme source — et il entre dans le cadre des systèmes avec relaxation,

comme ceux présentés dans la section 2.1. Si on considère des solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ proches de l'équilibre, le développement de Chapman-Enskog

$$v_\varepsilon = f(u) + \varepsilon v_\varepsilon^1 + \mathscr{O}(\varepsilon^2) \tag{I.41}$$

injecté dans le système (I.40) donne après quelques simples calculs

$$\partial_t u_\varepsilon + \partial_x f(u_\varepsilon) = \varepsilon \partial_x \big( (a^2 - f'(u_\varepsilon)^2) \partial_x u_\varepsilon \big) + \mathscr{O}(\varepsilon^2) \tag{I.42}$$

qui est une approximation visqueuse de l'équation (I.39) dès lors que la *condition de Whitham* [Whi74]

$$a^2 > \sup f'(u)^2 \tag{I.43}$$

est vérifiée. D'un point de vue numérique, l'idée est la suivante. Pour passer de l'itération $n$ à l'itération $n+1$, on utilise la méthode de splitting qui consiste à résoudre d'abord par le schéma de Godunov le système sans terme source

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x v = 0, \\ \partial_t v + a^2 \partial_x u = 0, \end{cases} \tag{I.44}$$

pour passer de $(u,v)_i^n$ à $(u,v)_i^{n+1-}$ puis à prendre en compte le terme source dans le régime limite $\varepsilon \to 0$, ce qui revient à

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^{n+1-}, \\ v_i^{n+1} = f(u_i^{n+1-}). \end{cases} \tag{I.45}$$

Un point important de ce schéma est que $\forall i, n$, on a $v_i^n = f(u_i^n)$. Ainsi, sous la condition CFL

$$2\, a\, \Delta t \leqslant \Delta x, \tag{I.46}$$

les ondes des différents problèmes de Riemann n'interagissent avec les centre des mailles $x_i$ et, pour $t \in [t^n, t^{n+1-}[$, l'état à l'interface $x_i$ est $(u_i^n, f(u_i^n))$. On a bien que

**Proposition I.3.** *Notons $W = (u,v)$ et soit $\mathscr{W}(x/t; W_g, W_d)$ la solution du problème de Riemann (I.44) avec pour données $W_g$ et $W_d$. Alors $\tilde{\mathscr{W}}(\cdot; u_g, u_d) := \mathscr{W}^{(1)}(\cdot; (u_g, f(u_g)), (u_d, f(u_d)))$ est un solveur de Riemann approché pour la loi de conservation (I.39).*

*Démonstration.* Comme la résolution du système (I.44) se fait par le schéma de Godunov, le solveur $\mathscr{W}$ est exact pour ce système et il vérifie

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathscr{W}(x/\Delta t; W_g, W_d) = \frac{\Delta x}{2}(W_g + W_d) - \Delta t (G(W_d) - G(W_g)) \tag{I.47}$$

où $G(W) = (v, a^2 u)$ est le flux du système (I.44). Comme $\forall i, n$ on a $v_i^n = f(u_i^n)$, on peut supposer que $W_g = (u_g, f(u_g))$ et $W_d = (u_d, f(u_d))$. La première équation de (I.47) est donc

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \mathscr{W}^{(1)}(x/\Delta t; u_g, u_d) = \frac{\Delta x}{2}(u_g + u_d) - \Delta t (f(u_d) - f(u_g)),$$

ce qui donne bien (I.35). □

Cela signifie que le schéma de relaxation basé sur (I.40) est un schéma de type Godunov et il n'est basé que sur des résolutions de systèmes linéaires. Si on pousse un peu plus loin les calculs, on peut remarquer que le flux numérique associé à ce schéma est

$$g(u_1, u_2) = \frac{1}{2}(f(u_1) + f(u_2)) - \frac{a}{2}(u_2 - u_1)$$

qui n'est autre que le flux numérique du schéma de Rusanov [Rus61].

### 3.3.3 Schéma de relaxation pour les équations d'Euler ☕

Passons maintenant aux équations d'Euler barotrope

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0, \end{cases} \tag{I.48}$$

où $\rho$ est la masse volumique, $v$ la vitesse et la pression $p$ est définie par une loi d'état du type

$$p = \mathscr{P}(\tau), \quad \tau = \frac{1}{\rho},$$

la fonction $\mathscr{P}$ étant strictement décroissante. Dans le cas de la loi de conservation (I.39), rappelons que pour construire le système de relaxation (I.40), on a introduit une variable supplémentaire à la place de la non linéarité $f$. Le système (I.48) contient deux termes non linéaires, tous deux présents dans la deuxième équation : $\rho u^2$ et $p$. Ils sont de nature différente, le premier est dû à la convection alors que le second provient des caractéristiques thermodynamiques du modèle. D'ailleurs, en coordonnées lagrangiennes $D_t = \partial_t + u\partial_x$ et $\rho\partial_m = \partial_x$, le système (I.48) devient

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \mathrm{D}_t v + \partial_m p = 0, \end{cases} \tag{I.49}$$

et comme on est placé dans le repère du fluide, seule la non linéarité due à la pression persiste et c'est sur elle qu'on va appliquer l'approximation par relaxation, comme on l'a fait pour approcher (I.39) par (I.40). On introduit donc le système de relaxation en coordonnées lagrangiennes

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \mathrm{D}_t v + \partial_m \pi = 0, \\ \mathrm{D}_t \pi + a^2 \partial_m v = \frac{1}{\varepsilon}(\mathscr{P}(\tau) - \pi), \end{cases} \tag{I.50}$$

où $\pi$ est l'inconnue supplémentaire et $a$ un paramètre positif. En variables eulériennes, ce système devient

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \pi) + \partial_x(\rho v \pi + a^2 v) = \frac{\rho}{\varepsilon}(\mathscr{P}(\tau) - \pi). \end{cases} \tag{I.51}$$

Contrairement à (I.40), ce système n'est pas linéaire, c'est le système (I.50) qui l'est. Plus précisément, on a :

**Proposition I.4.** *Le système de relaxation (I.51) admet trois valeurs propres : $v$ et $v \pm a\tau$. Les champs caractéristiques associés à ces ondes sont tous linéairement dégénérés.*

En vue d'une généralisation, on utilise une autre inconnue que $\pi$, notée $\mathscr{T}$, qui vérifie une équation du type $\mathrm{D}_t \mathscr{T} = ...$ (les points de suspension sont des termes d'ordre 0) et $\pi$ est maintenant donnée par une équation du type $\pi = \Pi(\tau, \mathscr{T})$ qui vérifie $\Pi(\tau, \tau) = \mathscr{P}(\tau)$. On obtient facilement après quelques calculs qu'une fonction $\Pi$ admissible est

$$\Pi(\tau, \mathscr{T}) = \mathscr{P}(\mathscr{T}) + a^2(\mathscr{T} - \tau) \tag{I.52}$$

On a vu précédemment que l'algorithme de splitting n'utilise que la partie différentielle dans le premier pas puis l'équilibre dans le second pas. De ce point de vue, on peut modifier le terme source de relaxation

pourvu que l'équilibre associé soit le même. On remplace alors le système de relaxation (I.51) par le système suivant (qui n'est pas équivalent du fait de la modification du terme source)

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathscr{T}) + \partial_x(\rho v \mathscr{T}) = \frac{\rho}{\varepsilon}(\tau - \mathscr{T}), \end{cases} \tag{I.53}$$

avec $\pi = \Pi(\tau, \mathscr{T})$. En effectuant à nouveau un développement de Chapman-Enskog du type $\mathscr{T} = \tau + \varepsilon T_\varepsilon^1 + \mathscr{O}(\varepsilon^2)$, on obtient le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = \varepsilon \partial_x((a^2 + \mathscr{P}'(\tau))\partial_x v) + \mathscr{O}(\varepsilon^2), \end{cases} \tag{I.54}$$

avec $p = \mathscr{P}(\tau)$. On obtient donc la condition de Whitham

$$a^2 > \sup |\mathscr{P}'(u)|. \tag{I.55}$$

La méthode numérique associée suit le même principe que celle pour la loi de conservation (I.39) (basée sur le splitting (I.44)-(I.45)). Donc sous la condition CFL (I.46), le schéma obtenu est bien un schéma de type Godunov, la démonstration est la même que celle de la proposition I.3. Le schéma numérique obtenu est semblable au schéma HLL [HLvL83].

### 3.3.4 Schéma de relaxation pour les modèles de fluides

Passons maintenant à la généralisation de cette construction, qui est l'objet de [12]. L'idée est toujours de se placer en coordonnées lagrangiennes puis d'opérer l'approximation par relaxation. Pour cela, on utilise le cadre défini dans [Des01]. De manière simplifiée (et approximative), le résultat de ce travail dont on se sert est le suivant. Si un système hyperbolique vérifie les conditions suivantes :

- ses solutions régulières sont réversibles en temps,
- il est invariant galiléen,
- ses inconnues sont $(\mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{v}, E) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ et $E = |\mathbf{v}|^2/2 + e(\mathbf{y}, \mathbf{t}, s)$ (variables convectées, variables intensives, vitesses et énergie totale),
- l'entropie $s$ du système vérifie en coordonnées lagrangiennes $\mathrm{D}_t s = 0$,

alors il s'écrit en coordonnées lagrangiennes sous la forme

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \mathbf{y} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{t} - N \partial_m \mathbf{v} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{v} - N^T \partial_m(\partial_{\mathbf{t}} e) = 0, \\ \mathrm{D}_t s = 0, \end{cases} \tag{I.56}$$

où $N$ est une matrice $d \times d$ à coefficients constants. Dans la suite, on va se placer dans le cas barotrope et supposer que la variable $\mathbf{y}$ n'a pas d'incidence (le cas général est étudié dans [12], ces hypothèses sont effectuées pour simplifier le propos). On en déduit que l'énergie interne $e$ ne dépend que de $v$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \mathbf{t} - N \partial_m \mathbf{v} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{v} - N^T \partial_m e'(\mathbf{t}) = 0. \end{cases} \tag{I.57}$$

On peur reconnaître une structure semblable à celle du $p$-système (I.49) et la non linéarité est due au terme $e'(\mathbf{t})$. En suivant les exemples précédents, on introduit le système de relaxation similaire à (I.53)

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \mathbf{t} - N \partial_m \mathbf{v} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{v} - N^T \partial_m \boldsymbol{\pi} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{T} = \frac{1}{\varepsilon}(\mathbf{t} - \mathbf{T}), \end{cases} \tag{I.58}$$

avec la loi de fermeture $\pi = \Pi(\mathbf{t},\mathbf{T})$, où

$$\Pi(\mathbf{t},\mathbf{T}) = e'(\mathbf{T}) + \theta'(\mathbf{T}) - \theta'(\mathbf{t}) \tag{I.59}$$

et $\theta$ est une nouvelle énergie interne. On peut de nouveau appliquer le développement de Chapman-Enskog $\mathbf{T} = \mathbf{t} + \varepsilon \mathbf{T}^1_\varepsilon + \mathscr{O}(\varepsilon^2)$, ce qui permet d'aboutir au système

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \mathbf{t} - N\partial_m \mathbf{v} = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathbf{v} - N^T \partial_m e'(\mathbf{t}) = \varepsilon \partial_m \big( N^T (\theta''(\mathbf{t}) - e''(\mathbf{t})) N \partial_m \mathbf{v} \big) + \mathscr{O}(\varepsilon^2). \end{cases} \tag{I.60}$$

Ce système est parabolique sous la condition de Whitham

$$\forall \mathbf{t}, \quad \text{la matrice } \theta''(\mathbf{t}) - e''(\mathbf{t}) \text{ est définie positive.} \tag{I.61}$$

Pour que le système (I.58) soit linéaire, il suffit de prendre $\theta''(\mathbf{t}) = A^2$, où $A$ est une matrice carrée à coefficients constants de dimension $d$.

**Proposition I.5.** *Si la fonction $\theta$ est quadratique et qu'elle vérifie la condition de Whitham (I.61), alors le modèle (I.58) est hyperbolique et linéaire. Soient $(\sigma_i)^2$ les $d$ valeurs propres, positives, de la matrice constante $N^T \theta'' N$. Le système (I.58) admet pour valeurs propres $0$ (de multiplicité algébrique $d$) et $\pm\sigma_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Le système (I.58) écrit en coordonnées eulériennes est hyperbolique et linéairement dégénéré.*

Le modèle en coordonnées eulériennes est assez compliqué à décrire, le lecteur intéressé devra se reporter à [12]. Sur la base du modèle de relaxation (I.58), on peut une fois encore construire un solveur de Riemann approché :

**Proposition I.6.** *Notons $W = (\mathbf{t},\mathbf{v},\mathbf{T})$ et soit $\mathscr{W}(x/t; W_g, W_d)$ la solution du problème de Riemann associé au système (I.58) sans terme source, avec pour données $W_g$ et $W_d$. Alors $\tilde{\mathscr{W}}(\cdot;(\mathbf{t}_g,\mathbf{v}_g),(\mathbf{t}_d,\mathbf{v}_d)) := \mathscr{W}^{(\mathbf{t},\mathbf{v})}(\cdot;(\mathbf{t}_g,\mathbf{v}_g,\mathbf{t}_g),(\mathbf{t}_d,\mathbf{v}_d,\mathbf{t}_d))$ est un solveur de Riemann approché pour le système (I.57) (la notation $\mathscr{W}^{(\mathbf{t},\mathbf{v})}$ correspond aux $2r$ premières composantes du vecteur $\mathscr{W}$). Le même résultat est vrai en coordonnées eulériennes.*

La *démonstration* est en tout point identique à la démonstration de la proposition I.3 : il suffit d'utiliser le fait que $\mathscr{W}$ est le solveur exact pour le système (I.58) sans terme source et que les données sont prises à l'équilibre $\mathbf{T} = \mathbf{t}$.

Le schéma de type Godunov se construit à l'aide de la formule (I.38), en coordonnées lagrangiennes comme en coordonnées eulériennes. En outre, on peut rappeler que Wagner [Wag87] a montré l'équivalence entre les solutions faibles entropiques en coordonnées lagrangiennes et en coordonnées eulériennes. Ainsi, on peut déduire directement le solveur de Riemann approché en coordonnées eulériennes du solveur de Riemann approché en coordonnées lagrangiennes. Enfin, grâce à la condition de Whitham (I.61) qui assure le caractère dissipatif de l'approximation par relaxation, on a aussi au niveau discret :

**Proposition I.7.** *Le schéma de type Godunov associé au solveur de Riemann approché $\tilde{\mathscr{W}}$ de la proposition I.6 est entropique sous la condition CFL (I.36) et sous la condition de Whitham (I.61) qui doivent être vérifiées à chaque interface.*

Ce résultat est vrai en coordonnées lagrangiennes et eulériennes et est obtenu en utilisant une entropie du système de relaxation (I.58) compatible avec le système initial.

Dans [12], on présente une application de cette méthode au système de la magnétohydrodynamique et aux équations de Saint-Venant. Dans le premier cas, le schéma numérique obtenu diffère de ceux de [BKW09]. Dans le second cas, on retombe sur le schéma HLL classique et on présente un cas test bidimensionnel à la figure I.1. Le maillage utilisé est non structuré. En effet, la construction précédente qui est unidimensionnelle n'a pour but que la construction d'un flux numérique d'un schéma volumes finis classique. Par conséquent, une fois ce flux numérique connu, on peut étendre directement le schéma au cas multidimensionnel non structuré par la formule (I.27). De plus, la donnée initiale comporte des zones sèches, ce qui met en défaut les schémas numériques non positifs.

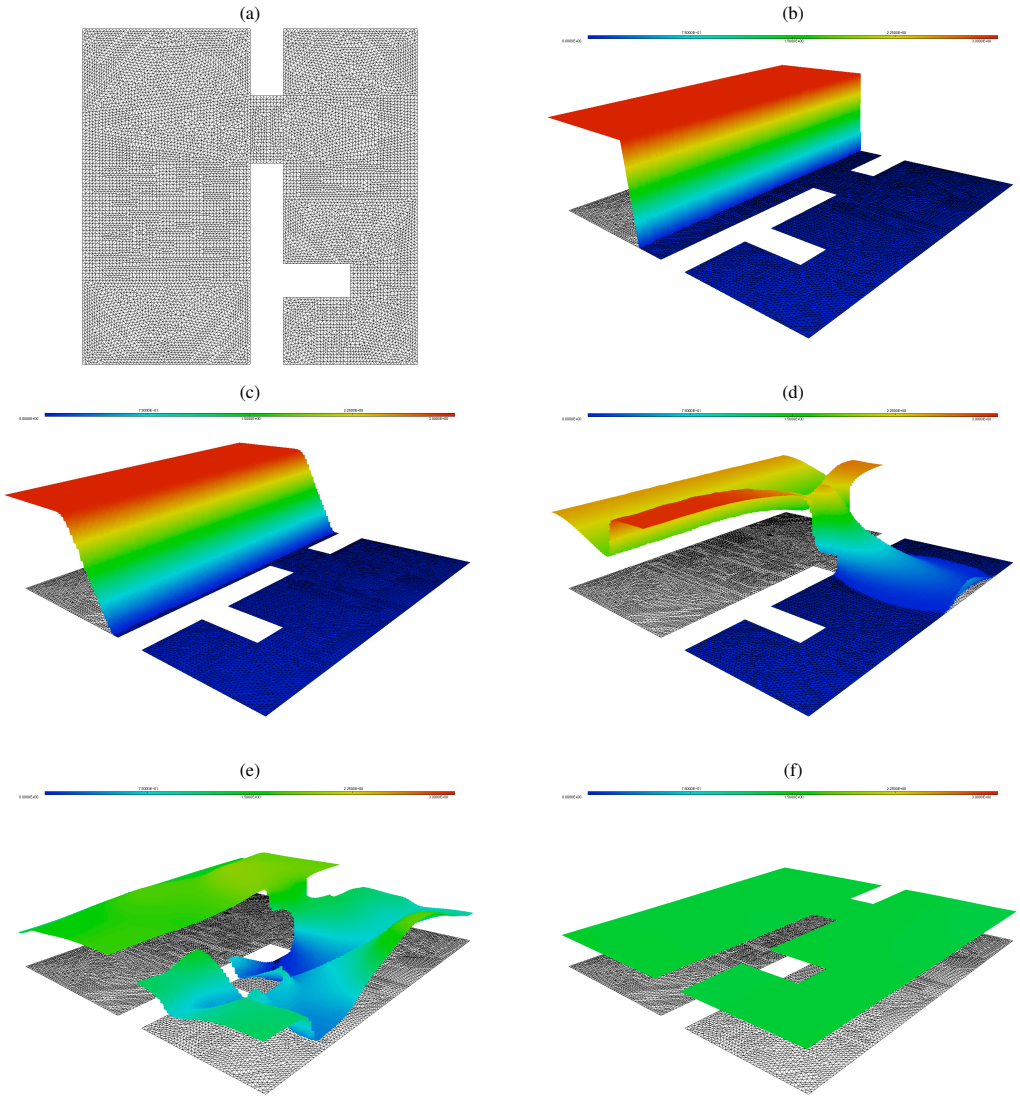



FIGURE I.1 – (a) Le domaine et le maillage ; (b) la donnée initiale ; (c) la surface au temps $t = 0.1$ ; (d) la surface au temps $t = 0.8$ ; (e) la surface au temps $t = 4$ ; (f) la surface au temps $t = 30$.

## 3.4 Schémas pour les hiérarchies de modèles

### 3.4.1 Relaxation ☕

La littérature sur les schémas numériques pour les modèles avec relaxation est absolument gigantesque ; tellement gigantesque qu'on ne s'essaiera pas à dresser une bibliographie sur le sujet... En revanche, présentons la méthode basique permettant d'obtenir des résultats largement acceptables dans bien des cas : la méthode de splitting. Celle-ci consiste à séparer la partie convective du terme source. Pour obtenir l'approximation $(w_i^{n+1}, v_i^{n+1})_i$ à partir de $(w_i^n, v_i^n)_i$, on résout à chaque itération en temps

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x g(w,v) = 0, \end{cases}$$

à l'aide d'un schéma volumes finis standard sur un pas de temps $\Delta t$ et on obtient $(w_i^{n+1-}, v_i^{n+1-})_i$ puis à partir de cette solution approchée, on résout le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} \partial_t w = 0, \\ \partial_t v = \frac{1}{\varepsilon} s(w,v) \end{cases}$$

toujours sur un pas de temps $\Delta t$. La résolution de ce dernier système nécessite souvent des algorithmes implicites ou semi-implicites pour ne pas pénaliser le pas de temps, $\varepsilon$ étant petit. On peut noter que les méthodes de relaxation de la section précédente sont des méthodes de splitting avec une résolution implicite du terme source dans la limite $\varepsilon \to 0$.

### 3.4.2 Asymptotique parabolique

Dans [8], nous proposons une méthode numérique qui permet de résoudre le système des équations d'Euler avec gravité et friction (I.15) pour des valeurs de $\varepsilon$ très variées, dont des régimes dans lesquels l'utilisation du modèle asymptotique (I.16) est justifiée.

Rappelons tout d'abord les équations d'Euler avant adimensionnement :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = \rho g - \kappa \rho v, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E v + p v) = \rho g v - \kappa \rho v^2, \end{cases} \tag{I.62}$$

où $E = v^2/2 + e$, $p = \mathscr{P}(\rho, \rho e)$ et $\kappa$ est le coefficient de friction qui est supposé positif. L'adimensionnement conduisant au modèle (I.15) s'obtient en considérant un coefficient $\kappa$ grand et des solutions en temps long.

Un schéma numérique standard permet bien sûr d'approcher les solutions des équations (I.62), même si $\kappa$ est grand. La difficulté est d'obtenir des résultats précis à maillage fixe, pour différentes valeurs de $\kappa$. D'un point de vue « différences finies », cela signifie que l'erreur de consistance doit être indépendante de $\kappa$. Pour illustrer cela, on présente à la figure I.2 les résultats numériques pour une solution de (I.62), dans le cas où le régime asymptotique parabolique est valide. On présente les résultats obtenus par la méthode de splitting (cf. section 3.4.1), à gauche, et par un schéma numérique compatible avec l'asymptotique, à droite, pour différents maillages et à $\kappa$ fixé. Dans la méthode de splitting, le terme source est résolu avec la méthode d'Euler implicite, ce qui donne

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)\big) + \Delta t\ s(u_i^{n+1}),$$

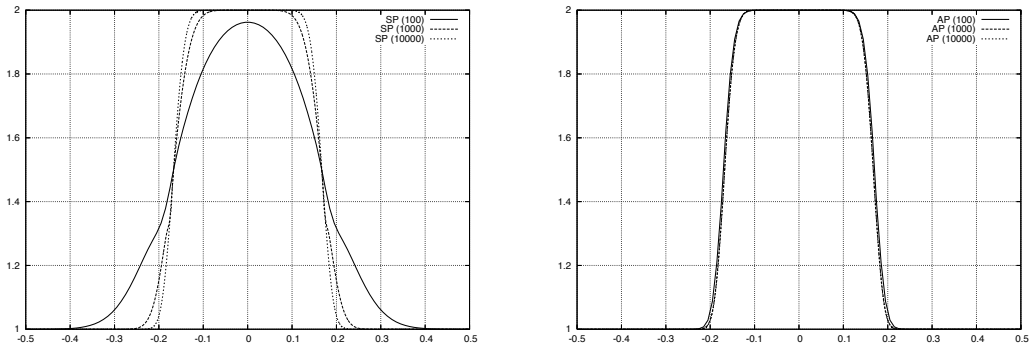



FIGURE I.2 – Comparaison de la méthode de splitting avec le schéma préservant l'asymptotique ($\rho$ *vs* $x$).

où $u = (\rho, \rho v, \rho E)$, $g$ est un flux numérique classique (ici le schéma de relaxation) consistant avec le flux et $s$ correspond au terme source : $s(u) = (0, \rho g - \kappa\rho v, \rho g v - \kappa\rho v^2)$ (le schéma préservant l'asymptotique est présenté plus bas). Même si les deux méthodes semblent bien converger vers la même solution, on remarque qu'à maillage grossier, le schéma standard donne des résultats bien moins précis que le schéma préservant l'asymptotique et l'erreur numérique associée à ce dernier semble seulement due à la discrétisation de la solution sur le maillage puisque toutes les courbes sont superposées.

La construction du schéma numérique préservant l'asymptotique, présentée dans [8], peut se résumer en deux parties : la première consiste à proposer une méthode permettant d'inclure les termes sources de manière fine et la seconde revient à montrer que le schéma numérique est compatible avec l'asymptotique parabolique. Cette dernière partie est délicate dans le contexte du système (I.62) car il est non linéaire et les démonstrations ne sont pas forcément évidentes (voire impossibles).

L'idée du schéma numérique préservant l'asymptotique est d'incorporer le terme source dans le calcul du flux numérique. Pour cela, on se base sur les schémas de type Godunov et donc sur les solveurs de Riemann approchés, comme dans la section 3.3, en incluant cette fois le terme source. La condition de consistance sur le solveur de Riemann approché (I.35) devient maintenant $\forall u_g, u_d \in \Omega$

$$\int_{-\Delta x/2}^{\Delta x/2} \tilde{\mathscr{W}}(x/\Delta t; u_g, u_d) = \frac{\Delta x}{2}(u_g + u_d) - \Delta t(f(u_d) - f(u_g)) + \Delta t\ \Delta x\ \tilde{s}(\Delta x; u_g, u_d), \tag{I.63}$$

où l'approximation du terme source vérifie

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ u_g, u_d \to u}} \tilde{s}(\Delta x; u_g, u_d) = s(u). \tag{I.64}$$

On peut remarquer qu'on impose que le solveur de Riemann est auto-similaire, ce qui n'est pas vrai si on considère la solution exacte du problème de Riemann pour un système de la forme $\partial_t u + \partial_x f(u) = s(u)$. Le solveur de Riemann approché qui est choisi est basé sur celui du schéma HLLC, et il s'écrit

$$\tilde{\mathscr{W}}(x/\Delta t; u_g, u_d) = \begin{cases} u_g & \text{si } x/t < \tilde{\lambda}_1, \\ u_g^\star & \text{si } \tilde{\lambda}_1 < x/t < \tilde{\lambda}_2, \\ u_d^\star & \text{si } \tilde{\lambda}_2 < x/t < \tilde{\lambda}_3, \\ u_d & \text{si } \tilde{\lambda}_3 < x/t, \end{cases} \tag{I.65}$$

où $\tilde{\lambda}_1 = v_g - a/\rho_g$, $\tilde{\lambda}_2 = v^\star$ et $\tilde{\lambda}_3 = v_d + a/\rho_d$, $v^\star$ étant la vitesse des états intermédiaires, qui est commune à $u_g^\star$ et à $u_d^\star$ du fait de la conservation de la masse.

Pour calculer les états intermédiaires, on utilise les relations de saut classiques pour les ondes de vitesse $\tilde{\lambda}_1$ et $\tilde{\lambda}_3$ et le terme source est pris en compte à travers l'onde de vitesse $\lambda_2$, en utilisant la relation de consistance (I.63) avec pour approximation du terme source $s$

$$\tilde{s}(\Delta x; u_g, u_d) = \frac{\rho_g + \rho_d}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ g - \kappa v^\star \\ g v^\star - \kappa (v^\star)^2 \end{pmatrix}. \tag{I.66}$$

On peut déduire notamment la définition de la vitesse intermédiaire :

$$v^\star = \frac{1}{1 + \kappa \frac{\Delta m}{2a}} \left( \frac{v_g + v_d}{2} - \frac{1}{2a}(p_d - p_g - g\Delta m) \right) \tag{I.67}$$

où $\Delta m = (\rho_g + \rho_d)\Delta x/2$. Il est intéressant de noter que si $\kappa = 0$ on retombe sur le schéma HLLC classique et si on suppose que $\Delta t \sim \Delta m/(2a)$, alors le facteur correspond au coefficient qu'on rencontre dans la méthode d'Euler implicite pour l'équation $y'(t) = -\kappa y(t)$. Sur la base de ce solveur de Riemann, on utilise alors la formule (I.37) pour définir le schéma de type Godunov, ce qui revient à la formule plus classique

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_{\mathrm{HLL}}(u_i^n, u_{i+1}^n) - g_{\mathrm{HLL}}(u_{i-1}^n, u_i^n)) + \frac{\Delta t}{2}(\tilde{s}(\Delta x; u_{i-1}^n, u_i^n) + \tilde{s}(\Delta x; u_i^n, u_{i+1}^n)) \tag{I.68}$$

où $g_{\mathrm{HLL}}$ reste défini par la formule (I.38).

Comme la construction de ce schéma reste très proche de celle des schémas de type Godunov, on peut proposer une interprétation par relaxation avec une prise en compte du terme source source inspirée de [CL94]. Cela permet de montrer le résultat suivant :

**Proposition I.8.** *Le schéma de type Godunov (I.68) préserve la masse volumique et la température positives et il est entropique sous la condition CFL (I.36).*

Cette proposition est valable à $\kappa$ fixé. Il reste à déterminer le comportement du schéma numérique lorsque $\kappa$ devient grand et qu'on s'intéresse aux solutions en temps long.

**Proposition I.9.** *Le schéma de type Godunov (I.68) préserve l'asymptotique parabolique, au sens où, après changement d'échelle, il devient un schéma numérique consistant avec le modèle (I.16).*

Pour attester du bon comportement de ce schéma numérique, on peut se reporter à la figure I.2 qui correspond donc à un cas où l'asymptotique parabolique est justifiée. On voit bien que le schéma numérique donne des résultats très précis même sur maillage grossier.

*Remarque* 3. Dans [BT10], un schéma proche de celui-ci est construit. La différence principale est que le terme source est concentré sur une onde de vitesse nulle, alors qu'ici il est concentré sur l'onde de transport. Par conséquent, si le modèle étudié est écrit en coordonnées lagrangiennes, l'onde de transport étant de vitesse nulle, les deux schémas coïncident.

*Remarque* 4. La proposition I.9 n'assure que la consistance du schéma avec l'asymptotique. En effet, on ne montre pas que le schéma reste stable tout au long de cette asymptotique et cela paraît difficile. On pourrait même dire faux car si on reprend cette méthodologie de construction de schéma numérique dans le cas du système de Goldstein-Taylor (I.13), on retombe dans le cadre de [GT02, GT03] où les auteurs montrent que la condition de stabilité dégénère durant l'asymptotique, c'est-à-dire que si $\kappa \to +\infty$, alors nécessairement $\Delta t \to 0$ (vu la remarque précédente, le schéma présenté dans [BT10] souffre du même problème). Ils proposent alors une modification de ce schéma numérique, mais qui semble difficile à envisager directement dans le cas non linéaire en coordonnées eulériennes (I.62) (mais des travaux en cours sont menés...).

### 3.4.3 Systèmes avec contraintes

Pour approcher le modèle avec contrainte (I.1)-(I.17), nous utilisons dans [14] une méthode de splitting pour le modèle de relaxation (I.20) dans la limite $\varepsilon \to 0$ : à chaque itération en temps on résout d'abord le système libre

$$\partial_t u + A\partial_x u = 0$$

par le schéma de Rusanov [Rus61] entre $t^n$ et $t^{n+1-}$, puis on projette le résultat $u_i^{n+1-}$ sur l'ensemble $K$ :

$$u_i^{n+1} = p_K(u_i^{n+1-}).$$

On montre que cette méthode numérique vérifie des estimations *a priori* standard, ce qui permet d'en déduire :

**Théorème I.10.** *La méthode de splitting « modèle libre-projection » converge dans* $\mathbf{L}^2_{\text{loc}}$ *vers la solution faible contrainte.*

Il peut être utile de mentionner que cette démonstration peut s'étendre simplement au cas non linéaire, sous les hypothèses du théorème de Lax-Wendroff.

# Chapitre II

# Écoulements diphasiques

## 1 Modèles d'écoulements diphasiques compressibles

Les modèles diphasiques dans le cas compressible sont légion, voir par exemple [DP98, IH06]. L'approche ici est celle privilégiée au CEA et à EDF R&D qui est celle de modèles moyennés, c'est-à-dire que les quantités étudiées ne sont pas exactes car les petites échelles sont négligées. En effet, les écoulements sont en général très hétérogènes car ils peuvent comporter de nombreuses interfaces, dues à la présence de bulles ou de gouttelettes et l'échelle d'étude (et de simulation) est trop grossière. On introduit des opérateurs de moyenne (en temps, en espace ou statistique) qui permettent d'obtenir des modèles sur les quantités moyennées. La difficulté est que les fermetures de nombreux termes dépendent de l'opérateur de moyenne et de l'écoulement considéré. Pour les obtenir, on peut faire appel par exemple à des essais expérimentaux ou bien à l'étude empirique de configurations simplifiées. Ici, on propose deux méthodes : l'une par dérivation, l'autre par analyse mathématique, dans le cas du système à deux vitesses et deux pressions. On présente ensuite différents modèles diphasiques compressibles en précisant les liens les unissant. La présentation pourra paraître assez « bancale », suivant le lecteur. Le mathématicien pourra regretter le manque d'analyse des modèles alors que le mécanicien des fluides pourra être en manque de lien avec la Physique décrite par ces modèles.

### 1.1 Modèles moyennés à deux pressions

On démarre par le modèle le plus compliqué (hors phénomènes de transfert de masse, effets visqueux et turbulence). Celui-ci apparaît notamment dans [BN86, SA99, GS02]. Ce modèle décrit l'évolution de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale de chaque phase et il s'écrit

$$\partial_t \alpha_1 + v_I(u)\partial_x \alpha_1 = \lambda_p(u)(p_1 - p_2), \tag{II.1a}$$
$$\partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 v_1) = 0, \tag{II.1b}$$
$$\partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 v_2) = 0, \tag{II.1c}$$
$$\partial_t(\alpha_1\rho_1 v_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 (v_1)^2 + \alpha_1 p_1) - p_I(u)\partial_x\alpha_1 = \lambda_v(u)(v_2 - v_1), \tag{II.1d}$$
$$\partial_t(\alpha_2\rho_2 v_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 (v_2)^2 + \alpha_2 p_2) - p_I(u)\partial_x\alpha_2 = \lambda_v(u)(v_1 - v_2), \tag{II.1e}$$
$$\partial_t(\alpha_1\rho_1 E_1) + \partial_x((\alpha_1\rho_1 E_1 + \alpha_1 p_1)v_1) + p_I(u)\partial_t\alpha_1 = \lambda_v(u)v_I(u)(v_2 - v_1), \tag{II.1f}$$
$$\partial_t(\alpha_2\rho_2 E_2) + \partial_x((\alpha_2\rho_2 E_2 + \alpha_2 p_2)v_2) + p_I(u)\partial_t\alpha_2 = \lambda_v(u)v_I(u)(v_1 - v_2), \tag{II.1g}$$

avec $u = (\alpha_1, \alpha_1\rho_1, \alpha_2\rho_2, \alpha_1\rho_1 v_1, \alpha_2\rho_2 v_2, \alpha_1\rho_1 E_1, \alpha_2\rho_2 E_2)$. Ce système est complété par les relations de fermeture

$$E_k = e_k + \frac{1}{2}(v_k)^2, \qquad k = 1,2, \tag{II.1h}$$

$$p_k = \mathscr{P}_k(\rho_k, \rho_k e_k), \qquad k = 1,2, \tag{II.1i}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \tag{II.1j}$$

où les fonctions $\mathscr{P}_k$ sont des lois de pression vérifiant les conditions classiques. Il reste à définir les fonctions $v_I$, $p_I$, $\lambda_p$ et $\lambda_v$. Ces deux dernières fonctions sont des fonctions positives et n'influent pas sur les propriétés des solutions de (II.1) et on suppose qu'il existe deux fonctions $\beta_v$ et $\beta_p$ à valeur dans $[0,1]$ telles que

$$v_I(u) = \beta_v(u)v_1 + (1-\beta_v(u))v_2 \quad \text{et} \quad p_I(u) = \beta_p(u)p_1 + (1-\beta_p(u))p_2. \tag{II.2}$$

Les fonctions $\alpha_k$, $\rho_k$, $v_k$, $E_k$, $e_k$, $p_k$ sont respectivement le taux de présence, la masse volumique, la vitesse l'énergie totale, l'énergie interne et la pression de la phase $k$ (ce sont toutes des fonctions moyennées). L'ensemble des états admissibles est

$$\Omega = \{u \in \mathbb{R}^7 \ ; \ \alpha_1 \in [0,1], \rho_k > 0, e_k > 0\}. \tag{II.3}$$

On présente dans la suite la dérivation (formelle), l'analyse et l'approximation de ce modèle.

### 1.1.1 Dérivation du modèle ☕

Pour simplifier la présentation, on se restreint au cas de deux fluides barotropes, comme dans [20]. Comme cela a été mentionné plus haut, il existe plusieurs approches pour obtenir ce genre de système. En utilisant les opérateurs de moyenne en temps [IH06] ou statistique [DP98], il est difficile d'obtenir le système (II.1) au complet, en général manquent les termes sources qui sont ajoutés *a posteriori* de manière empirique. On va présenter ici une manière de dériver complètement le modèle (II.1) à partir d'une formulation locale instantanée. Pour cela, on adapte l'étude initiée dans [SW84] à notre cadre. On suppose que la configuration est stratifiée et que le fluide 1 est sous le fluide 2, voir la figure II.1 pour les différents notations. Les différentes inconnues dépendent de $t$, $x$ et $z$ (notées $\bar{}$) et l'objectif est

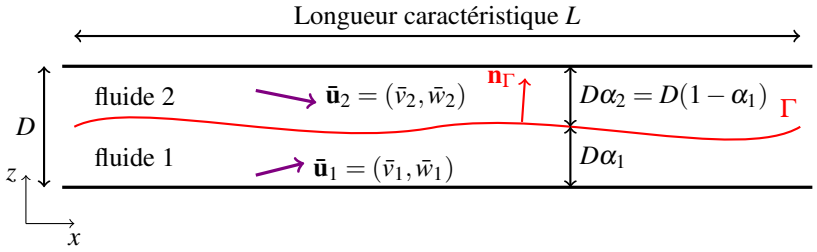



FIGURE II.1 – Configuration supposée de l'écoulement diphasique.

d'obtenir les équations (II.1) sur des grandeurs moyennes, ne dépendant donc que de $t$ et $x$. Pour cela, on va supposer que $L \gg D$, c'est-à-dire que le diamètre du tuyau est petit devant la longueur (cette hypothèse est du même type que l'hypothèse d'écoulements de faible profondeur dans le cadre de la dérivation des équations de Saint-Venant).

Le modèle (II.1) inclut des termes de traînée, qui proviennent du frottement entre les deux fluides. Depuis D'Alembert (et son paradoxe), on sait que pour qu'il y ait frottement, le fluide doit être visqueux.

On suppose donc que chaque fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes

$$\partial_t \bar\rho_k + \mathrm{div}(\bar\rho_k \bar{\mathbf{u}}_k) = 0 \tag{II.4a}$$
$$\partial_t (\bar\rho_k \bar{\mathbf{u}}_k) + \mathrm{div}(\bar\rho_k \bar{\mathbf{u}}_k \otimes \bar{\mathbf{u}}_k - \bar\sigma_k) = 0 \tag{II.4b}$$

avec $\bar\sigma_k = -p_k(\bar\rho_k)\mathbf{I} + \mu_k((\nabla \otimes \bar{\mathbf{u}}_k) + (\nabla \otimes \bar{\mathbf{u}}_k)^T)$ et $\mu_k$ est le coefficient constant de viscosité. Ces équations sont posées sur $\Omega_k$, où

$$\Omega_1 = \{(t,x,z)\ ;\ t>0, z \in [0, D\alpha_1(t,x)]\}$$
$$\text{et} \quad \Omega_2 = \{(t,x,z)\ ;\ t>0, z \in [D\alpha_1(t,x), D]\}.$$

Pour assurer qu'une fois moyennés, les deux fluides soient de vitesse non négligeable, on impose aux bords les conditions de type Navier

$$\begin{cases} (\kappa_1 \bar v_1 - \mu_1 \partial_z \bar v_1)(t,x,0) = 0 \\ \bar w_1(t,x,0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} (\kappa_2 \bar v_2 + \mu_2 \partial_z \bar v_2)(t,x,D) = 0 \\ \bar w_2(t,x,D) = 0 \end{cases} \tag{II.4c}$$

où $\kappa_k$ est un coefficient de friction, et à l'interface $\Gamma = \{(t,x,z)\ ;\ z = D\alpha_1(t,x)\}$ on suppose les conditions de raccord classiques

$$\bar{\mathbf{u}}_1(t,x,D\alpha_1(t,x)) = \bar{\mathbf{u}}_2(t,x,D\alpha_1(t,x)) \qquad =: \mathbf{v}_I(t,x) \tag{II.4d}$$
$$\bar\sigma_1(t,x,D\alpha_1(t,x)) \cdot n_\Gamma(t,x) = \bar\sigma_2(t,x,D\alpha_1(t,x)) \cdot n_\Gamma(t,x) \tag{II.4e}$$

où $n_\Gamma = (-\partial_x(D\alpha), 1)^T / \sqrt{1 + (\partial_x(D\alpha_1))^2}$ et on note dans la suite $\mathbf{v}_I = (v_I, w_I)$.

On suppose dans la suite que $L = 1$ que $D$ est petit (ce qui entraînera que les variations des différentes quantités dans la direction $z$, comme $w_k$ par exemple, sont d'ordre $D$). On impose de plus que les coefficients de viscosité et de friction sont aussi d'ordre $D$ : $\mu_k = D\mu_k^0$ et $\kappa_k = D\kappa_k^0$.

Passons maintenant à la dérivation du modèle (II.1) à partir du modèle (II.4). L'équation cinématique de l'interface $\Gamma$ donne de manière exacte

$$\partial_t \alpha_1 + v_I \partial_x \alpha_1 = \frac{w_I}{D}. \tag{II.5}$$

On introduit les différentes quantités moyennées :

$$\rho_1(t,x) = \frac{1}{D\alpha_1} \int_0^{D\alpha_1} \bar\rho_1(t,x,z)\, dz \quad \text{et} \quad \rho_1 u_1(t,x) = \frac{1}{D\alpha_1} \int_0^{D\alpha_1} \bar\rho_1 \bar v_1(t,x,z)\, dz. \tag{II.6}$$

En intégrant (II.4a) avec $k=1$ entre 0 et $D\alpha_1$, on obtient de manière exacte l'équation (II.1b)

$$\partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 v_1) = 0$$

(idem pour (II.1c)). Après quelques calculs, la première composante de (II.4b) donne une fois moyennée

$$\partial_t(\alpha_1\rho_1 v_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 v_1^2 + \alpha_1 p_1(\rho_1)) - p_1(\bar\rho_1(t,xD\alpha_1))\partial_x\alpha_1 = \mu_1^0 \partial_z \bar v_1(t,xD\alpha_1) - \kappa_1^0 v_1 + \mathscr{O}(D). \tag{II.7}$$

On a fait commuter ici le carré de $v_1$ et la loi de pression $p_1$ avec la moyenne. Il reste à obtenir $v_I$ et $w_I$ dans (II.5) et $p_1(\bar\rho_1(D\alpha_1))$ et $\partial_z \bar v_1(D\alpha_1)$. Pour cela on fait appel aux conditions à l'interface (II.4d) et (II.4e). Tous calculs faits, on aboutit au modèle moyenné (et approché à $D$ près)

$$\begin{cases} \partial_t \alpha_1 + v_I \partial_x \alpha_1 = \lambda_p (p_1 - p_2) \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 v_1) = 0 \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 v_2) = 0 \\ \partial_t(\alpha_1\rho_1 v_1) + \partial_x(\alpha_1\rho_1 v_1^2 + \alpha_1 p_1) - p_I \partial_x \alpha_1 = -\kappa_1^0 v_1 + \lambda_v (v_2 - v_1) \\ \partial_t(\alpha_2\rho_2 v_2) + \partial_x(\alpha_2\rho_2 v_2^2 + \alpha_2 p_2) - p_I \partial_x \alpha_2 = -\kappa_2^0 v_2 + \lambda_v (v_1 - v_2) \end{cases} \tag{II.8a}$$

où les quantités interfaciales sont définies par

$$v_I = \frac{\mu_1^0 \alpha_2}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} v_1 + \frac{\mu_2^0 \alpha_1}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1} v_2 \quad \text{et} \quad p_I = \frac{p_1 + p_2}{2} \tag{II.8b}$$

et les coefficients de relaxation sont donnés par

$$\lambda_p = \frac{1}{D} \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 \mu_2^0 + \alpha_2 \mu_1^0} \quad \text{et} \quad \lambda_v = \frac{1}{D} \frac{2\mu_1^0 \mu_2^0}{\mu_1^0 \alpha_2 + \mu_2^0 \alpha_1}. \tag{II.8c}$$

*Remarque* 5. On déduit facilement de (II.8c) que $v_1 - v_2 = \mathscr{O}(D)$ et $p_1 - p_2 = \mathscr{O}(D)$. Or le modèle (II.8) n'est lui-même valable qu'à $D$ près, donc il n'est finalement pas justifié de considérer deux vitesses et deux pressions distinctes. Cette section était donc là à titre illustratif et pour pouvoir obtenir une dérivation avec un « vrai » modèle à deux vitesses et deux pressions, il faut remplacer les conditions d'interface (II.4d-II.4e) par des conditions de type Navier entre les deux fluides (c'est l'objet d'un travail en cours avec Emmanuel Audusse (Université Paris 13 Nord) et Khaled Saleh (EDF R&D et UPMC-Paris 6)).

### 1.1.2 Fermeture par l'analyse mathématique

Un autre point de vue, adopté dans [11, 18], est d'étudier l'impact des définitions de $v_I$ et $p_I$ sur les solutions de la partie convective du modèle (II.1). Commençons par énoncer les propriétés de ce modèle qui sont indépendantes de la définition de $v_I$ et $p_I$.

**Proposition II.1.** *Le système (II.1) est* non strictement hyperbolique *sur $\Omega$, c'est-à-dire qu'il admet toujours des valeurs propres réelles, qui sont*

$$\begin{gathered} \lambda_1(u) = v_I(u), \\ \lambda_2(u) = v_1 - c_1(u),\ \lambda_3(u) = v_1(u),\ \lambda_4(u) = v_1 + c_1(u), \\ \lambda_5(u) = v_2 - c_2(u),\ \lambda_6(u) = v_2(u),\ \lambda_7(u) = v_2 + c_2(u), \end{gathered} \tag{II.9}$$

*et les vecteurs propres associés engendrent $\mathbb{R}^7$ si et seulement si*

$$u \in \Omega_h := \{u \in \Omega\ ;\ v_I(u) \neq v_k \pm c_k,\ k = 1,2\}. \tag{II.10}$$

*Si un état u appartient à $\Omega_r := \Omega \setminus \Omega_h$, on dit que c'est un état* résonnant.

Cette propriété est déjà très importante. En effet, les modèles où on suppose que $p_1 = p_2$ sont *conditionnellement hyperboliques*, ce qui signifie que les valeurs propres peuvent devenir complexes pour des états appartenant à un sous-domaine de $\Omega$ (voir par exemple [Sai95]). En outre, celles-ci sont très difficiles à expliciter.

On cherche maintenant à définir $v_I$. On peut aisément vérifier que $\alpha_1$ est un invariant de Riemann fort pour l'onde associée à $\lambda_1$, donc $\alpha_1$ est constant à travers toutes les autres ondes. Il est naturel de supposer que si $\alpha_1$ admet une discontinuité initialement, alors celle-ci reste une discontinuité et n'est pas « étalée » sous les seuls effets convectifs. On peut donc en déduire que le champ caractéristique associé à cette onde doit être linéairement dégénéré et on obtient les fermetures suivantes pour $v_I$ :

**Proposition II.2.** *Supposons que la vitesse interfaciale $v_I$ soit de la forme*

$$v_I(u) = \beta_v v_1 + (1 - \beta_v) v_2 \tag{II.11}$$

*où $\beta_v$ et une fonction de $\alpha_1$, $\rho_1/\rho_2$ et $p_1/p_2$. Alors le champ caractéristique associé à l'onde de vitesse $v_I$ est linéairement dégénéré si et seulement si*

$$\beta_v = 1,\ 0 \text{ ou } \frac{\alpha_1 \rho_1}{\alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2}\ . \tag{II.12}$$

Il reste maintenant à définir la pression interfaciale $p_I$. Pour cela, on va imposer que le système (II.1) homogène admet une entropie. L'entropie naturelle associée à ce système est

$$\eta(u) = -(\alpha_1\rho_1 s_1 + \alpha_2\rho_2 s_2) \tag{II.13}$$

où $s_k$ est l'entropie spécifique (classique) associée à la loi d'état $\mathscr{P}_k$, $k = 1,2$. Le flux d'entropie associé est

$$F(u) = -(\alpha_1\rho_1 s_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 s_2 v_2). \tag{II.14}$$

Il est important de noter que l'entropie $\eta$ (II.13) est convexe mais pas strictement convexe. Si on écrit l'équation vérifiée par le couple $(\eta, F)$, on remarque que les termes non conservatifs du système (II.1) y contribue de manière non conservative. On en déduire une définition de la pression interfaciale $p_I$ :

**Proposition II.3.** *Si la pression interfaciale est définie par*

$$p_I(u) = \frac{(1-\beta_v)T_1 p_1 + \beta_v T_2 p_2}{(1-\beta_v)T_1 + \beta_v T_2} \tag{II.15}$$

*où $T_k$ est la température associée à la loi d'état $\mathscr{P}_k$, $k = 1,2$, alors les solutions régulières du système (II.1) homogène vérifient l'équation*

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x F(u) = 0 \tag{II.16}$$

*et les solutions régulières du système (II.1) (avec les termes sources) vérifient l'inégalité*

$$\partial_t \eta(u) + \partial_x F(u) \leqslant 0. \tag{II.17}$$

Si $\beta_v = 0$ ou 1, on retombe sur le système proposé dans [BN86]. les fermetures (II.11-II.12) et (II.15) sont originales dans le cas $\beta_v = \frac{\alpha_1\rho_1}{\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2}$. En particulier, elles ne coïncident pas avec celles proposées dans [SA99, MSNA02, CDS04] ni avec celles obtenues par dérivation (II.8b).

La partie convective du système (II.1) est maintenant fermée. On peut vérifier que ce système est *résonnant* au sens défini dans [IT95, AGG04] et [GL04]. Une propriété importante est que les termes non conservatifs ne sont portés que par l'onde de vitesse $v_I$ dont le champ caractéristique est linéairement dégénéré. Par conséquent, il n'y a pas d'ambiguïté quant à leur caractérisation. On obtient finalement le résultat suivant concernant le problème de Riemann :

**Théorème II.4.** *On considère le problème de Riemann associé au système (II.1) homogène, avec pour fermetures (II.11-II.12) et (II.15) avec pour données gauche et droite $(u_g, u_d) \in \Omega \times \Omega$. Alors :*

- *si $\alpha_{1g} = \alpha_{1d}$, il existe unique solution, qui est composée de deux solutions découplées des équations d'Euler pour chaque phase,*
- *si $u_g$ et $u_d$ sont proches et si ils sont loin de la résonance (donc loin de l'ensemble $\Omega_r$), alors il existe une unique solution,*
- *si $u_g$ et $u_d$ sont dans le voisinage d'un état résonnant $u^* \in \Omega_r$, alors il existe entre une et trois solutions.*

Une étude globale du problème de Riemann semble hors de portée, même si des tentatives existent, voir [AW04, SWK06]. Une description de la non unicité est faite dans la section 2.1 dans le cadre des équations de Saint-Venant avec topographie (la structure des deux systèmes est identique).

Concernant les termes sources, on a vu dans la proposition II.3 que leur présence ajoute de la dissipation d'entropie, au sens de l'inégalité (I.8). Mais comme l'entropie $\eta$ n'est pas strictement convexe, on ne peut pas appliquer les résultats de la théorie classique des systèmes avec relaxation [CLL94, Yon99]. On peut néanmoins se référer à [Del03] pour leur étude formelle.

### 1.1.3 Approximation numérique

Pour approcher le système (II.1) avec les fermetures (II.11-II.12) et (II.15), on a étendu dans [18] le schéma VFRoe-ncv présenté dans la section 3.2 au cas d'un système non conservatif. On réécrit tout d'abord ce système sous la forme

$$\partial_t u + \partial_x f(u) + d(u)\partial_x \alpha_1 = 0 \tag{II.18}$$

où $d(u) = (v_I(u), 0, -p_I(u), -p_I(u)v_I(u), 0, p_I(u), p_I(u)v_I(u))$. Pour le résoudre, on utilise le schéma VFRoe-ncv suivant :

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\big(f(u_{i+1/2}^n) - f(u_{i-1/2}^n)\big) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\big(d(u_{i-1/2}^n) + d(u_{i+1/2}^n)\big)\big((\alpha_1)_{i+1/2}^n - (\alpha_1)_{i-1/2}^n\big) \tag{II.19}$$

où $u_{i+1/2}^n = \varphi^{-1}\big(\tilde{\mathscr{V}}(0; u_i^n, u_{i+1}^n)\big)$, $\tilde{\mathscr{V}}$ étant la solution du problème de Riemann linéaire (I.33), avec cette fois

$$B(v) = \varphi'(\varphi^{-1}(v))[f' + d](\varphi^{-1}(v))(\varphi')^{-1}(\varphi^{-1}(v))$$

pour prendre en compte les termes non conservatifs. La variable $v$ utilisée est

$$v = \varphi(u) := (\alpha_1, s_1, v_1, p_1, s_2, v_2, p_2),$$

en accord avec les constatations de stabilité de [16] (voir aussi la section 3.2). La convergence de ce schéma n'est bien sûr pas claire, sauf si $\alpha_1$ est régulier. Néanmoins, le choix de $v_I$ assure que les termes non conservatifs ne sont portés que par des champs caractéristiques linéairement dégénérés, hors phénomène de résonance, donc les problèmes relevés dans [HL94] n'apparaissent pas. Les termes sources de relaxation sont pris en compte par la méthode de splitting décrite à la section 3.4.1 et résolus par une méthode semi-implicite (voir [18] pour plus de détails).

Pour illustrer la stabilité du système et du schéma numérique, un cas test largement répandu est celui du robinet de Ransom [Ran87]. On considère un tuyau vertical soumis à la gravité, rempli initialement à 80% d'eau de manière homogène sur toute sa longueur (la fraction $\alpha_1$ permet dans ce cas de localiser directement l'interface). L'eau et l'air sont initialement de vitesse nulle avec en entrée un débit positif imposé pour l'eau et toujours une proportion de 80% d'eau et en sortie seule les pressions sont imposées. En début de simulation, la colonne tombe sous l'action de la gravité alors que dans le haut du domaine l'eau accélère et le colonne rétrécit. Un front entre cette partie rétrécie et le reste de la colonne initiale se propage vers le bas. On peut voir figure II.2 la donnée initiale, la solution approchée pour un temps petit puis la solution en temps long, pour lequel la solution devient stationnaire. Dans le cas de simula-

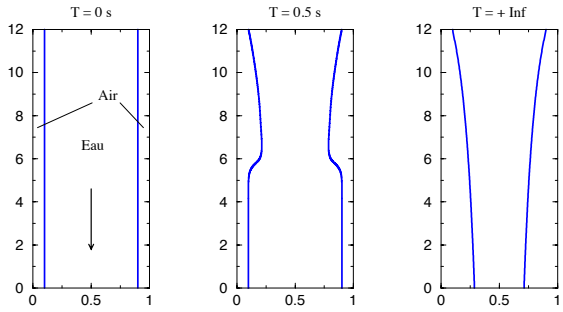



FIGURE II.2 – Problème du robinet de Ransom.

tions obtenues à partir d'un modèle dit « à une pression », des oscillations apparaissent pour les temps

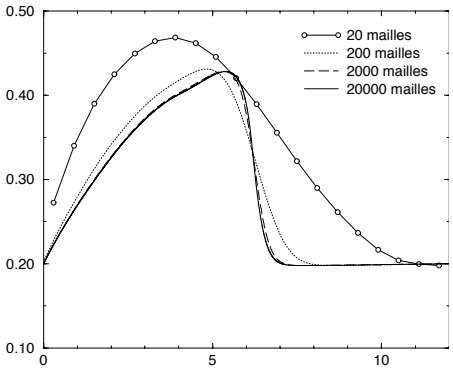



FIGURE II.3 – Augmentation du maillage pour le robinet de Ransom ($\alpha_1$ *vs* $x$).

correspondant à la figure du milieu quand le maillage est raffiné. Celles-ci sont dues aux valeurs propres complexes de ce modèle, provoquant des instabilités jusqu'à obtenir des valeurs de $\alpha_1$ hors de $[0,1]$ pour des maillages comprenant au plus quelques milliers de mailles. Si on se réfère à la figure II.3, qui correspond aux résultats obtenus avec le schéma VFRoe-ncv pour le système à deux pressions (II.1), on remarque que le terme de relaxation en pression introduit une régularisation stable.

## 1.2 Modèles de dérive

Un autre modèle, plus simple (au sens où il comporte moins d'EDP !), d'écoulement diphasique utilisé dans l'industrie nucléaire et dans l'industrie pétrolière est le *modèle de dérive* [ZF65, HI03, GM05]. Celui-ci s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho Y) + \partial_x\big(\rho v Y + \rho Y(1-Y)v_r\big) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x\big(\rho v^2 + p + \rho Y(1-Y)(v_r)^2\big) = \rho(1-Y)f_1 + \rho Y f_2, \end{cases} \tag{II.20}$$

où $\rho$, $v$, $p$, et $v_r$ sont respectivement la masse volumique, la vitesse moyenne, la pression et la vitesse relative du mélange diphasique, $Y$ est la fraction massique de la phase 2 et $f_k$ correspond aux forces extérieures agissant sur la phase $k$. Pour compléter ce modèle, on suppose que le comportement thermodynamique de la phase $k$ est donnée par une loi de pression $\mathscr{P}_k(\rho_k)$, $\rho_k$ étant la masse volumique de la phase $k$. La pression du modèle (II.20) est donnée par l'équilibre entre les pressions de chaque phase :

$$p(\rho, Y) = \mathscr{P}_1\left(\rho\frac{1-Y}{1-\alpha_2}\right) = \mathscr{P}_2\left(\rho\frac{Y}{\alpha_2}\right) \tag{II.21}$$

où $\alpha_2$ est la fraction de volume de la phase 2, obtenue en réalisant l'équilibre entre les deux pressions — sous des hypothèses classiques sur les lois $\mathscr{P}_k$, on peut montrer l'unicité et l'existence de $\alpha_2$ dans $]0,1[$. Enfin, il reste à définir la vitesse relative $v_r$ qui correspond à la vitesse de la phase 2 moins la vitesse de la phase 1. Il existe de nombreuses relations de fermeture, toutes du type

$$v_r = \mathscr{V}_r(\rho, \rho Y, \rho v). \tag{II.22}$$

Ces modèles sont en général obtenus directement par dérivation directe et leur compatibilité avec d'autres modèles d'écoulements diphasiques n'est pas claire. Dans [1], nous relions un modèle diphasique à deux vitesses et deux pressions du type (II.1) à un modèle de dérive, par le biais d'une étude asymptotique en

deux étapes. Le modèle de départ est le modèle à deux vitesses et deux pressions barotrope (II.8a) sans friction ($\kappa_1^0 = \kappa_2^0 = 0$) et avec des forces extérieures $\alpha_k \rho_k f_k$. Les coefficients de relaxation sont

$$\lambda_p = \frac{\Theta}{\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad \lambda_v = \frac{\Lambda}{\varepsilon^2}|v_1 - v_2|$$

où $\Theta$ et $\Lambda$ sont des fonctions positives et $\varepsilon$ est un paramètre positif. En définissant les variables de mélange

$$\begin{aligned} &\rho = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2, && \rho v = \alpha_1\rho_1 v_1 + \alpha_2\rho_2 v_2, && v_r = v_2 - v_1, \\ &\rho Y = \alpha_2\rho_2, && p = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, && p_r = p_2 - p_1, \end{aligned}$$

on peut vérifier que les solutions du modèle à deux vitesses et deux pressions vérifient les équations du modèles de dérive (II.20) et les équations

$$\begin{cases} \partial_t v_r + \partial_x(v v_r) + \partial_x((1/2 - Y)(v_r)^2) + \rho/(\rho_1\rho_2)\partial_x p_r \\ \qquad + [\beta_p/(\rho Y) + (1-\beta_p)/(\rho(1-Y)) + 1/\rho_1 - 1/\rho_2] p_r \partial_x \alpha_2 \\ \qquad + (1/\rho_2 - 1/\rho_1)\partial_x p = f_2 - f_1 - \Lambda |v_r| v_r/(\varepsilon^2 \rho Y(1-Y)), \\ \partial_t p_r + v_r \partial_x p + (\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2)(\partial_x v - v_r \partial_x Y) + (Y\rho_1 c_1^2 + (1-Y)\rho_2 c_2^2)\partial_x v_r \\ \qquad + (\alpha_1 v_1 - \alpha_2 v_2)\partial_x p_r + (\beta_v \rho_2 c_2^2/\alpha_2 - (1-\beta_v)\rho_1 c_1^2/\alpha_1 - p_r) v_r \partial_x \alpha_2 \\ \qquad = -(\rho_1 c_1^2/\alpha_1 + \rho_2 c_2^2/\alpha_2)\Theta p_r/\varepsilon^2, \end{cases} \tag{II.23}$$

L'équilibre est donné par $p_r = v_r = 0$ et un développement de Chapman-Enskog autour de cet équilibre injecté dans les équations (II.23) donne

$$p_r = \mathscr{O}(\varepsilon^2) \quad \text{et} \quad v_r|v_r| = \varepsilon^2(\rho Y(1-Y))(f_2 - f_1 + (1/\rho_1 - 1/\rho_2)\partial_x p) + \mathscr{O}(\varepsilon^4).$$

Ici, l'objectif n'est pas de faire tendre $\varepsilon$ vers 0 mais seulement de le prendre petit. On obtient donc le modèle composé des équations (II.20), de la loi de pression (II.21) et de la loi définissant la vitesse relative

$$v_r|v_r| = (\varepsilon^2/\Lambda)(\rho Y(1-Y))(f_2 - f_1 + (1/\rho_1 - 1/\rho_2)\partial_x p). \tag{II.24}$$

Il faut cependant remarquer que l'équation de quantité de mouvement du mélange comporte un terme en $(v_r)^2$, qui est d'ordre $\varepsilon^2$. Vu le développement précédent, il faudrait le négliger, mais compte-tenu des formes classiques des modèles de dérive, nous l'avons maintenu.

La loi (II.24) est différentielle, donc le modèle (II.20-II.21)-(II.24) comporte des termes différentiels d'ordre 2. Pour obtenir une loi du type (II.22), il suffit de se placer à l'équilibre hydrostatique, défini par

$$\partial_x p = \rho((1-Y)f_1 + Y f_2). \tag{II.25}$$

On en déduit alors la loi de fermeture pour la vitesse interfaciale

$$v_r|v_r| = (\mathscr{V}_r|\mathscr{V}_r|)(\rho, \rho Y, \rho v) := (\varepsilon^2/\Lambda)(\rho Y(1-Y))(f_2 - f_1 + (\rho/\rho_1 - \rho/\rho_2)((1-Y)f_1 + Y f_2)) \tag{II.26}$$

qui permet bien de retrouver les lois de la littérature [HI03, GM05].

*Remarque* 6. Même si le passage du modèle à deux vitesses et deux pressions au modèle intermédiaire parabolique (II.20-II.21)-(II.24) peut rappeler l'asymptotique parabolique de la section 2.2, il semble difficile de retrouver un adimensionnement semblable pour le cas traité ici. Si c'était le cas, la vitesse relative apparaissant dans les équations (II.20) serait d'ordre 0 par rapport à $\varepsilon$, ce qui est contraire à l'idée que l'écoulement est suit globalement la vitesse moyenne du mélange $v$ et que la vitesse relative $v_r$ est petite devant $v$. De même, nous n'avons pas réussi à trouver un adimensionnement permettant d'obtenir la loi de dérive (II.26) sans passer par l'étape intermédiaire d'une fermeture pour la vitesse relative $v_r$ différentielle (II.24).

## 1.3 Modèles homogènes avec transition de phase

Dans les modèles précédents, la masse de chaque fluide est conservé. Dans [21], nous proposons un moyen simple de construire un modèle thermodynamique pour un fluide pouvant subir des transitions de phase : supposons par exemple qu'on étudie un écoulement d'eau, alors les indices 1 et 2 correspondent à l'eau respectivement sous forme vapeur et sous forme liquide.

### 1.3.1 Construction de modèles de mélange avec transition de phase

On considère deux phases, $k = 1, 2$, de masse $M_k \geqslant 0$, occupant un volume $V_k \geqslant 0$ et d'énergie interne $E_k \geqslant 0$. Le comportement thermodynamique de chaque phase est décrit par son entropie

$$\begin{array}{rccc} S_k : & (\mathbb{R}_+)^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (M_k, V_k, E_k) & \longmapsto & S_k(M_k, V_k, E_k) \end{array} . \tag{II.27}$$

De manière classique, on suppose que ces entropies sont positivement homogènes de degré 1 et concave par rapport à $W_k = (M_k, V_k, E_k)$. On en déduit la température $T_k > 0$, la pression $p_k > 0$ et le potentiel chimique $\mu_k$ (aussi appelée énergie spécifique de Gibbs) grâce à la relation

$$T_k \mathrm{d}S_k = \mathrm{d}E_k + p_k \mathrm{d}V_k - \mu_k \mathrm{d}M_k$$

et en utilisant la relation d'Euler, on peut obtenir la relation de Gibbs $\mu_k M_k = E_k + p_k V_k - T_k S_k$. On considère maintenant un mélange de phases 1 et 2 de masse $M$, occupant un volume $V$ et d'énergie interne $E$. L'entropie de ce mélange $\Sigma$ est donné par la somme des entropies

$$\Sigma(W_1, W_2) = S_1(W_1) + S_2(W_2) \quad \text{et} \quad W = W_1 + W_2. \tag{II.28}$$

L'équilibre thermodynamique est obtenu en maximisant l'entropie de mélange et on déduit l'*entropie de mélange à l'équilibre*

$$S(W) = \max_{0 \leqslant W_1 \leqslant W} \Sigma(W_1, W - W_1). \tag{II.29}$$

On obtient donc un problème de maximisation sous contrainte dont la solution vérifie :

**Proposition II.5.** *Soit $W \in (\mathbb{R}_+)^3$. Si*

$$W_1^{eq} = \operatorname*{argmax}_{0 \leqslant W_1 \leqslant W} \Sigma(W_1, W - W_1)$$

*est dans $]0, W[$ (composante par composante), alors à l'équilibre, les pressions, les températures et les potentiels chimiques de chaque phase sont égaux.*

On retrouve donc l'équilibre thermodynamique classique. Mais si $W_1^{eq} \notin ]0, 1[$, alors la caractérisation du mélange n'est pas claire, excepté quand $W_1 = 0$ (phase 2 pure) ou $W_1 = W$ (phase 1 pure), puisque une phase pourrait avoir par exemple une masse non nulle et un volume et une énergie interne nuls.

*Remarque* 7. La formule (II.29) peut se réécrire

$$S(W) = (S_1 \square S_2)(W)$$

où $\square$ est l'opérateur de *sup-convolution*. Combinée avec la transformée de Legendre (notée $(\cdot)^\star$), on peut montrer que

$$S(W) = \left((S_1)^\star + (S_2)^\star\right)^\star(W).$$

Cette formule peut permettre de construire des lois d'état de mélange en utilisant la transformée de Legendre rapide [HM11].

L'entropie de mélange peut aussi être définie en utilisant des variables intensives. Soient $\tau = V/M$ le volume spécifique, $e = E/M$ l'énergie spécifique et $\alpha = V_1/V$, $\varphi = M_1/M$ et $z = E_1/E$ les fractions de volume, de masse et d'énergie de la phase 1. On peut définir l'entropie spécifique du mélange par

$$s(\tau, e; \alpha, \varphi, z) = \varphi s_1(\alpha\tau/\varphi, ze/\varphi) + (1-\varphi)s_2((1-\alpha)\tau/(1-\varphi), (1-z)e/(1-\varphi)) \tag{II.30}$$

où $s_k(V_k/M_k, E_k/M_k) = S_k(1, V_k/M_k, E_k/M_k)$ est l'entropie spécifique de la phase $k$, qui dépend du volume spécifique $\tau_k = V_k/M_k$ et de l'énergie spécifique $e_k = E_k/M_k$ de la phase $k$. L'entropie spécifique de mélange à l'équilibre est obtenue par maximisation par rapport aux fractions :

$$s_e(\tau, e) = \max_{(\alpha,\varphi,z)\in[0,1]^3} s(\tau, e; \alpha, \varphi, z).$$

Un exemple simple est celui de deux phases dont le comportement thermodynamique est régi par des lois de type gaz parfaits. Dans ce cas, on retombe sur le modèle de transition de phase proposé dans [Jao01]. D'autres développements et résultats autour de cette modélisation peuvent être trouvés dans [21] et [AFK11, HM11].

D'un point de vue dynamique, cette équation d'état peut être couplée aux équations d'Euler

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0, \\ \partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho E v + pv) = 0, \end{cases} \tag{II.31}$$

avec $E = \frac{1}{2}v^2 + e$, $\tau = 1/\rho$ et

$$p = \frac{\partial_\tau s_e}{\partial_e s_e}(\tau, e), \tag{II.32}$$

où toutes les inconnues concernent le mélange. En toute généralité, il peut être difficile de construire l'entropie à l'équilibre $s_e$. Pour remédier à cela, on approche le système (II.31-II.32) par le système (II.31) complété par

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial_\tau s}{\partial_e s}(\tau, e; \alpha, \varphi, z) \\ &\begin{cases} \partial_t \alpha + u\partial_x \alpha = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha_e - \alpha), \\ \partial_t \varphi + u\partial_x \varphi = \frac{1}{\varepsilon}(\varphi_e - \varphi), \\ \partial_t z + u\partial_x z = \frac{1}{\varepsilon}(z_e - z), \end{cases} \end{aligned} \tag{II.33}$$

où les fonctions $\alpha_e$, $\varphi_e$ et $z_e$ sont définies par

$$(\alpha_e, \varphi_e, z_e)(\tau, e) = \operatorname*{argmax}_{(\alpha,\varphi,z)\in[0,1]^3} s(\tau, e; \alpha, \varphi, z).$$

On s'attend à ce que les solutions du modèle (II.31)-(II.33) approchent celle du modèle (II.31-II.32) quand $\varepsilon$ tend vers 0.

### 1.3.2 Analyse des modèles construits

**Le cas général** ☕ L'analyse de ces modèles (le modèle à l'équilibre (II.31-II.32) et le modèle de relaxation (II.31)-(II.33)) n'est pas directe, car l'entropie à l'équilibre $s_e$ n'est pas explicite. Néanmoins, comme cela a été démontré dans [AFK11], le modèle à l'équilibre (II.31-II.32) est strictement hyperbolique. De plus, dans la zone de mélange, donc quand $(\alpha, \varphi, z) \in ]0,1[^3$, alors la relaxation associée au modèle (II.31)-(II.33) est dissipative (voir notamment [CLL94] et [Bou04b]).

**Le cas isotherme** Considérons maintenant un fluide isotherme, c'est-à-dire que le changement de phase correspond exclusivement à de la cavitation. De manière étonnante, ce cas est plus complexe que le cas avec énergie, comme on l'a constaté dans [19]. La loi de pression du mélange à l'équilibre s'écrit

$$\mathscr{P}_e(\tau) = \begin{cases} \mathscr{P}_l(\tau) & \text{si } 0 < \tau < \tau_l^*, \\ p_s & \text{si } \tau_l^* \leqslant \tau \leqslant \tau_v^*, \\ \mathscr{P}_v(\tau) & \text{si } \tau_v^* < \tau, \end{cases} \tag{II.34}$$

où les lois de phase pure vérifient $\mathscr{P}_k' < 0$, $\mathscr{P}_k'' > 0$ pour $k = l, v$ et $\mathscr{P}_l(\tau) < \mathscr{P}_v(\tau)$ pour tout $\tau > 0$. La

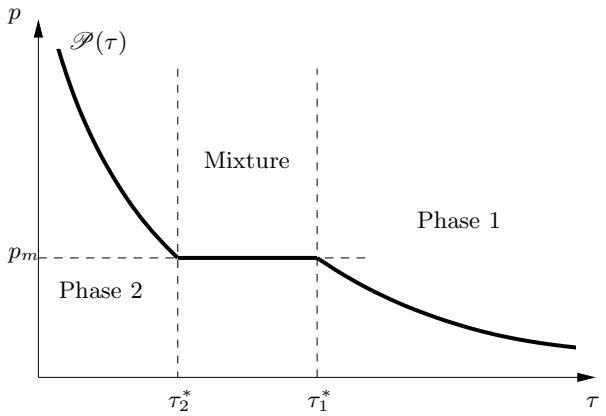



FIGURE II.4 – Loi de pression pour un modèle de transition de phase isotherme.

pression de saturation $p_s$ et les volumes spécifiques $\tau_l^*$ et $\tau_v^*$ sont reliés par la relation $p_s = \mathscr{P}_l(\tau_l^*) = \mathscr{P}_v(\tau_v^*)$ (mais $p_s$ est arbitraire). Si on couple cette loi de pression avec le $p$-système (on aurait les mêmes résultats en considérant le cas eulérien)

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \mathrm{D}_t v + \partial_m \mathscr{P}_e(\tau) = 0, \end{cases} \tag{II.35}$$

on a :

**Proposition II.6.** *Si $\tau \in ]0, \tau_l^*[ \cup ]\tau_v^*, +\infty[$, alors le système (II.35)-(II.34) est strictement hyperbolique : il admet pour valeurs propres $\lambda_\pm(u) = \pm\sqrt{-\mathscr{P}_e'(\tau)}$ et les vecteurs propres associés $r_\pm(u)$ sont linéairement indépendants. De plus, les champs caractéristiques sont vraiment non linéaires.*

*Si $\tau \in ]\tau_l^*, \tau_v^*[$, alors le système (II.35)-(II.34) admet $\lambda(u) = 0$ pour valeur propre double et les vecteurs propres associés sont linéairement dépendants. De plus, le champ caractéristique est linéairement dégénéré.*

Le modèle devient donc dégénéré dans la zone de mélange. À notre connaissance, ce type de perte d'hyperbolicité n'avait jamais été répertorié. Néanmoins, une analyse classique (construction des courbes d'onde et analyse de leur intersection) permet d'aboutir au résultat positif suivant :

**Théorème II.7.** *Le problème de Riemann associé au système (II.35)-(II.34) avec pour données gauche et droite $(u_g, u_d) \in (]0, +\infty[ \times \mathbb{R})^2$ admet une et une seule solution, notons-la $\mathscr{U}(x/t; u_g, u_d)$. De plus, pour tout $L > 0$ et tous les couples $(u_g, u_d), (\tilde{u}_g, \tilde{u}_d) \in (]0, +\infty[ \times \mathbb{R})^2$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\int_{-L}^{L} |\mathscr{U}(\xi; u_g, u_d) - \mathscr{U}(\xi; \tilde{u}_g, \tilde{u}_d)| d\xi \leqslant C(|u_g - u_d| + |\tilde{u}_g - \tilde{u}_d|) \tag{II.36}$$

*où* $|\cdot|$ *est la norme euclidienne de* $\mathbb{R}^2$.

*Remarque* 8. L'analyse du problème de Cauchy associé au système (II.35)-(II.34) est probablement faisable pour des données en phase pure, en se basant sur [CP03]. En revanche, si la donnée initiale inclut une zone de mélange, il se peut que la solution ne dépende plus de manière continue des données et donc que le problème de Cauchy soit mal posé.

### 1.3.3 Approximation des modèles construits

L'approximation du modèle de transition de phase (II.31-II.32) se fait en utilisant la méthode de splitting (cf. section 3.4.1) pour le modèle (II.31)-(II.33). À chaque itération en temps, on résout d'abord le modèle (II.31) et (II.33) sans terme source par une méthode volumes finis conservative standard puis on prend en compte les termes source de (II.33) dans la limite $\varepsilon \to 0$ en prenant $(\alpha, \varphi, z)_i^{n+1} = (\alpha_e, \varphi_e, z_e)(\tau_i^{n+1}, e_i^{n+1})$. L'avantage de cette méthode est qu'elle reporte la difficulté du calcul de la loi de mélange $s_e$ au calcul des fonctions $\alpha_e$, $\varphi_e$ et $z_e$ (on peut se référer notamment à [21] et [AFK11]).

# 2 Équations de Saint-Venant avec topographie

Les équations de Saint-Venant [SV71] décrivent l'évolution d'un écoulement d'eau à surface libre, de faible profondeur, l'eau étant supposée incompressible et non visqueuse. Le modèle s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + gh^2/2) = -gha'(x) \end{cases} \tag{II.37}$$

où $h$ est la hauteur d'eau, $v$ une moyenne verticale de la vitesse horizontale, $g$ la constante de la gravité, $a \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ l'altitude de la topographie (on notera dans la suite $u = (h, hv)$ et $f(u) = (hv, hv^2 + gh^2/2)$). Une fois encore, ce modèle est présenté en une dimension d'espace, mais il s'étend naturellement au cas bidimensionnel. L'ensemble des états admissibles est ici

$$\Omega = \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \cup \{(0,0)\}. \tag{II.38}$$

Il est important d'inclure l'état $(0,0)$ qui correspond à un état *sec*, comme un banc de sable ou le bord d'une rivière. Le système (II.37) admet pour couple entropie-flux d'entropie

$$\eta(u,a) = \frac{h}{2}(v^2 + g(h+2a)) \quad F(u,a) = \eta(u,a)v + g\frac{h^2}{2}v. \tag{II.39}$$

et les solutions de (II.37) vérifient l'inégalité d'entropie (I.3). On peut noter que cette entropie prend directement en compte la topographie, mais elle n'est strictement convexe que par rapport à $u$.

On présente ici différents travaux visant à construire des schémas numériques dits *équilibre*, c'est-à-dire qu'ils préservent numériquement certains états stationnaires du modèle (II.37) (voir entre autres [GL96b], [GL96a], [LeV98], [Gos01], [PS01], [Jin01], [BPV03], [PC04], [ABB$^+$04], [Bou04a], [AB05], [NXS07]...). Les états stationnaires se décrivent par

$$\begin{aligned} &\partial_x(hv) = 0, \\ &\partial_x(v^2/2 + g(h+a)) = 0, \end{aligned} \tag{II.40}$$

où $h$ est strictement positif et $h$ et $v$ sont réguliers. On peut coupler ces états stationnaires avec des chocs stationnaires, qui vérifient donc les relations de saut de Rankine-Hugoniot

$$\begin{aligned} &[hv] = 0, \\ &[hv^2 + gh^2/2] = 0, \end{aligned} \tag{II.41}$$

où $[\cdot]$ désigne le saut des variables à travers le choc. Il est *a priori* illusoire (et peu utile en pratique) de préserver exactement les états stationnaires définis comme des fonctions $\mathscr{C}^1$ par morceaux, les parties régulières vérifiant (II.40) et les discontinuités (II.41). En général, on ne se concentre finalement que sur les états stationnaires correspondant schématiquement à un *lac au repos*, définis par

$$\begin{aligned} &hv = 0, \\ &\partial_x(h+a) = 0, \end{aligned} \tag{II.42}$$

couplés de manière continue avec des zones sèches.

On attend donc d'une méthode numérique performante qu'elle préserve exactement les états définis par (II.42) et qu'elle puisse traiter simplement les transitions entre zones sèches et zones mouillées :

**Définition II.8.** Soit un schéma volumes finis à trois points définissant la suite d'approximations $(u_i^n)_{i,n}$ et soit $a_i = \frac{1}{\Delta x}\int_{K_i} a(x)\,dx$. On dit que le schéma est *équilibre* pour les états (II.42) si

$$\begin{cases} h_j^n + a_j = H_0 \\ (hv)_j^n = 0 \end{cases} \quad j = i-1, i, i+1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} h_i^{n+1} + a_i = H_0 \\ (hv)_i^{n+1} = 0 \end{cases} \tag{II.43}$$

où $H_0$ est une constante. On dit que le schéma est *positif* si

$$(h_j^n, (hv)_j^n) \in \Omega \quad j = i-1, i, i+1 \quad \Longrightarrow \quad (h_i^{n+1}, (hv)_i^{n+1}) \in \Omega. \tag{II.44}$$

La difficulté est la prise en compte du terme source de topographie dans le schéma numérique. L'idée suivie dans les trois travaux présentés dans la suite est due à LeRoux *et al.* [GL96a, GL96b, LeR99]. Au lieu d'approcher directement le modèle (II.37), on construit le schéma sur le modèle intermédiaire

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + gh^2/2) = -gha'_\Delta(x), \end{cases} \tag{II.45}$$

où

$$a_\Delta(x) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \mathbf{1}_{K_i}(x). \tag{II.46}$$

Le terme source dans (II.45) est maintenant composé d'une somme de mesures de Dirac localisées sur les interfaces du maillage. Si, comme dans la section 3, on applique la formule de Green à ce système, on obtient à nouveau la formule (I.21), mais cette fois la continuité du flux (I.22) à travers les interfaces n'est plus vérifiée à cause de la présence du terme source. Il est alors naturel de considérer deux flux numériques par interfaces, $g^-(u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1}-a_i)$ et $g^+(u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1}-a_i)$, ce qui donne comme formule de mise à jour du schéma numérique

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g^-(u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1}-a_i) - g^+(u_{i-1}^n, u_i^n, a_i - a_{i-1})). \tag{II.47}$$

On présente trois méthodes de construction de tels flux numériques (la quatrième, correspondant à [23], n'est en fait pas détaillée).

## 2.1 Adaptation du schéma de Godunov

Dans [10], on présente une extension naturelle du schéma de Godunov aux équations de Saint-Venant avec topographie. Les flux numériques de ce schéma sont

$$g^\pm(u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1}-a_i) = f(\mathscr{U}(0^\pm; u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1}-a_i)) \tag{II.48}$$

où $\mathscr{U}(x/t;u_g,u_d,\delta a)$ est la solution exacte du problème de Riemann associé au système (II.45), qui peut se réécrire ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t a = 0, \\ \partial_t h + \partial_x(hv) = 0, \\ \partial_t(hv) + \partial_x(hv^2 + gh^2/2) + gh\partial_x a = 0, \\ (a,u)(0,x) = \begin{cases} (0,u_g) & \text{si } x < 0 \\ (\delta a, u_d) & \text{si } x > 0 \end{cases}. \end{cases} \tag{II.49}$$

Ici, $a$ est comprise comme une fonction de $(t,x)$ et la première équation assure qu'elle est indépendante de $t$. De plus cette écriture permet de voir que la solution est auto-similaire. Il reste à résoudre ce problème de Riemann... et c'est là que les ennuis commencent. En effet, une étude simple du système (II.49) conduit au résultat suivant :

**Proposition II.9.** *Le système (II.49) est* non strictement hyperbolique *sur $\Omega$, c'est-à-dire qu'il admet toujours des valeurs propres réelles, qui sont*

$$\lambda_0(u) = 0, \quad \lambda_1(u) = v - c(u), \quad \lambda_2(u) = v + c(u), \tag{II.50}$$

*et les vecteurs propres associés engendrent $\mathbb{R}^3$ si et seulement si*

$$u \in \Omega_h := \{u \in \Omega \ ; \ v \neq \pm c(u)\}, \tag{II.51}$$

*où $c(u) = \sqrt{gh}$ est la vitesse des ondes de surface. Si un état u appartient à $\Omega_r := \Omega \setminus \Omega_h$, on dit que c'est un état* résonnant. *Le champ caractéristique associé à $\lambda_0$ est linéairement dégénéré et ceux associés à $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont vraiment non linéaires.*

La structure du système (II.49) fait apparaître un phénomène de *résonance* qui est similaire à celui du modèle d'écoulements diphasiques à deux pressions, c'est-à-dire le système (II.1) sans terme source, avec pour fermetures (II.11-II.12) et (II.15). On retombe donc dans le cadre défini dans [GL04]. En combinant les résultats de [LeR99], [10] et [25], on a le résultat suivant :

**Théorème II.10.** *Soit $u_g, u_d \in \Omega$ et $\delta a \in \mathbb{R}$. Le problème de Riemann (II.49) admet entre une et trois solutions.*

Les relations de saut à travers l'onde stationnaire sont obtenues en suivant [LeR99], où est proposé de régulariser l'interface et d'étudier les solutions stationnaires. La paramétrisation de l'onde obtenue ainsi revient à celle proposée dans [IT95] et [GL04].

La perte d'unicité apparaît pour des états proches de la résonance (voir aussi [IT95, GL04]). Dans ce cas, le semi-groupe associant la donnée initiale à la solution n'est pas continu. Pour illustrer la perte d'unicité, on peut se reporter à la figure II.5. Elle représente dans l'espace des états la courbe $\mathscr{C}_{0,1}(u_g)$ — qui correspond à l'ensemble des états joignables à partir de $u_g$ par une 1-onde (éventuellement composite) et par une 0-onde (qui peut être comprise entre deux parties de 1-onde) — et la courbe $\mathscr{C}_2(u_d)$ — qui correspond à l'ensemble des états joignables à partir de $u_d$ par une 2-onde. Sur cette figure, les trois points d'intersection $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2$ et $\mathscr{U}_3$ correspondent aux trois solutions admissibles. Concernant la non continuité du semi-groupe, il suffit de fixer $u_g$ et de faire varier $(hv)_d$, ce qui revient à déplacer la courbe $\mathscr{C}_2(u_d)$ vers la gauche et vers la droite. Si on déplace cette courbe vers la gauche en faisant décroître $(hv)_d$, il faut choisir la solution $\mathscr{U}_3$ pour assurer la continuité. *A contrario*, si on augmente $(hv)_d$, la courbe $\mathscr{C}_2(u_d)$ est donc déplacée vers la droite et seule la solution $\mathscr{U}_1$ permet d'assurer la continuité. Le seul moyen permettant de retrouver une notion de continuité serait d'introduire le concept d'*hystérésis* [Vis94], mais cela ne paraît pas pertinent dans ce contexte. Outre ce problème de non continuité, il ne semble exister aucun critère permettant de privilégier une solution plutôt qu'une autre. Néanmoins, sur la base du théorème II.10, on a les propriétés suivantes pour le schéma de Godunov :

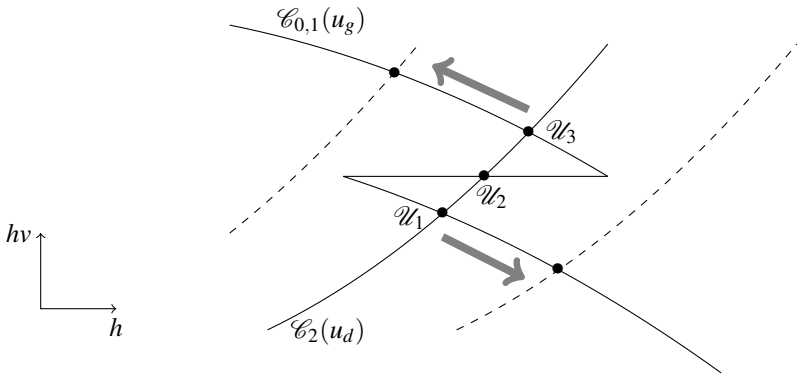



FIGURE II.5 – Résonance et non unicité.

**Proposition II.11.** *Le schéma numérique adapté du schéma de Godunov (II.47)-(II.48) est positif, équilibre et entropique sous la condition CFL*

$$2\max_{n,i,k}|\lambda_k(u_i^n,u_{i+1}^n,a_{i+1}-a_i)|\,\Delta t\leqslant\Delta x$$

*où* $(\lambda_k(u_g,u_d,\delta a))_k$ *sont les vitesses des ondes apparaissant dans la solution* $\mathscr{U}(\cdot;u_g,u_d,\delta a)$.

Ce schéma possède donc toutes les propriétés désirées mais en pratique, la solution du problème de Riemann est extrêmement compliquée à mettre en œuvre (voir [25], [10] ou [LT07]). On peut tout de même citer [IT95] et [AGG04] où est démontrer la convergence de ce schéma dans le cas scalaire avec un terme source régulier.

Pour illustrer le phénomène de résonance, on présente deux résultats de simulations numériques où une onde de choc est superposée à la discontinuité de topographie, située en $x=12,5$. Il s'agit d'un problème de Riemann avec pour états $(h_g,(hv)_g,a_g)=(3,0,4)$ et $(h_d,(hv)_d,a_d)=(4,0,0)$. On peut remarquer sur la figure II.6 que la 1-onde de détente est résonnante car $u=c$ en $x=12,5$. Sur la figure II.7 sont tracés les deux invariants de Riemann associés à l'onde stationnaire : $hv$ et $v^2/2+g(h+a)$. On peut remarquer que le deuxième invariant de Riemann est discontinu, ce qui indique qu'un choc stationnaire est présent au niveau de la discontinuité de topographie. Si $hv$ est continu, à l'oscillation numérique près, c'est simplement dû au fait que la relation de saut de Rankine-Hugoniot $[hv]=0$ est valide pour toute solution faible, même résonnante.

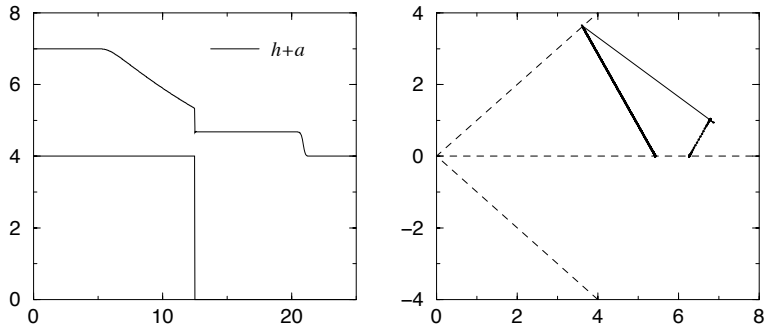



FIGURE II.6 – Cas test avec résonance. Gauche : $h+a$ *vs* $x$. Droite : $v$ *vs* $c$.

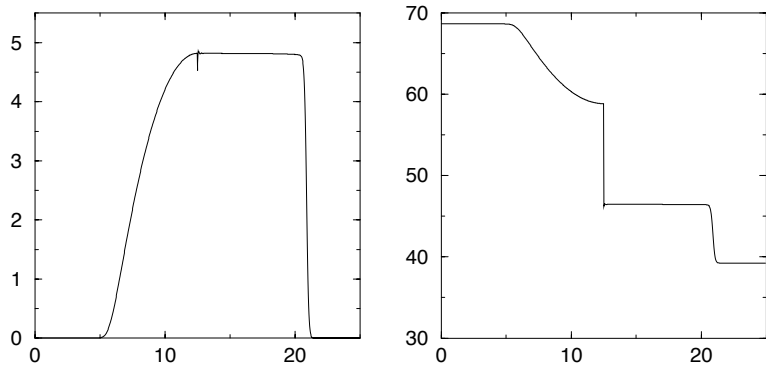



FIGURE II.7 – Cas test avec résonance. Gauche : $hv$ *vs* $x$. Droite : $v^2/2+g(h+a)$ *vs* $x$.

Dans le but de vérifier la présence de ce choc stationnaire — qui correspond à une 1-onde puisque la vitesse est positive à travers l'onde stationnaire — on régularise la topographie et on présente les résultats pour un temps final plus long, de sorte que la 2-onde de choc sorte du domaine. La topographie régularisée est

$$a(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } 0 \leq x < 25/3, \\ -(12/25)x+8 & \text{si } 25/3 < x < 50/3, \\ 0 & \text{si } 50/3 < x \leq 25. \end{cases}$$

Les résultats obtenus avec le schéma de Godunov modifié sont représentés sur la figure II.8. On voit bien apparaître la 1-onde de choc stationnaire (le pic juste après la discontinuité est numérique) sur la figure de gauche et on remarque sur la figure de droite que la courbe traverse bien la droite critique $v = c(u)$ (on a en plus superposé sur cette figure la courbe de la figure II.6-droite). Les cercles présents sur la figure II.8-gauche correspondent au résultat au même temps mais sans régularisation de la topographie, avec une translation, pour montrer que les solutions sont identiques hors de la zone de variation de $a$.

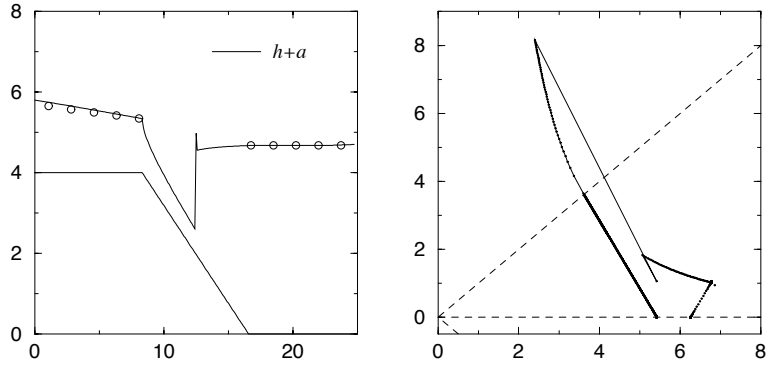



FIGURE II.8 – Cas test avec résonance, topographie régularisée. Gauche : $h+a$ *vs* $x$. Droite : $v$ *vs* $c$.

## 2.2 Adaptation du schéma de VFRoe-ncv

Pour simplifier la résolution du problème de Riemann (II.49), une idée est de le linéariser, comme cela est fait dans la construction des schémas de type VFRoe-ncv, voir la section 3.2. Le schéma reste

basé sur la formule (II.47), où les flux numériques sont

$$g^{\pm}(u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1} - a_i) = f(\tilde{\mathscr{U}}(0^{\pm}; u_i^n, u_{i+1}^n, a_{i+1} - a_i)). \tag{II.52}$$

Dans la formule (II.52), le solveur $\tilde{\mathscr{U}}(x/t; u_g, u_d, \delta a)$ est la solution exacte du problème de Riemann linéaire

$$\begin{cases} \partial_t w + B(\tilde{w}(w_g, w_d))\partial_x w = 0, \\ w(0,x) = \begin{cases} w_g := \varphi(0, u_g) & \text{si } x < 0 \\ w_d := \varphi(\delta a, u_d) & \text{si } x > 0 \end{cases}, \end{cases} \tag{II.53}$$

où $w$ est obtenu par un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme $\varphi\colon (a,u) \in \mathbb{R} \times \Omega \mapsto w \in \mathbb{R}^3$ et la matrice $B$ est donnée par

$$B(\varphi(a,u)) = \varphi'(a,u) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ gh & & f'(u) \end{pmatrix} (\varphi')^{-1}(a,u)$$

avec toujours $\bar{w}(w_g, w_d) = (w_g + w_d)/2$. On en déduit $\tilde{\mathscr{U}}$ en appliquant $\varphi^{-1}$ à la solution du problème de Riemann (II.53) et en gardant les deux dernières composantes, qui correspondent à $u$.

Dans [17], plusieurs variables $w$ sont utilisées et le choix final retenu est $w = (a, c, u)$, qui est celui qui en pratique permet d'avoir les meilleurs résultats dans le cas de zones sèches (à noter que si on s'en tient à la formule (II.52), la composante du flux associée à l'équation sur $h$ n'est pas continue mais il suffit de prendre la moyenne arithmétique entre $g^-$ et $g^+$ sur cette composante pour assurer la conservation de la masse). Comme dans le cas classique de la section 3.2, ce schéma n'est ni entropique ni positif mais on a le résultat suivant :

**Proposition II.12.** *Le schéma numérique adapté du schéma VFRoe-ncv en variables $(a,c,u)$ est équilibre sous la condition CFL*

$$2 \max_{n,i,k} |\lambda_k(\varphi(a_i, u_i^n), \varphi(a_{i+1}, u_{i+1}^n))| \, \Delta t \leqslant \Delta x$$

*où $(\lambda_k(w_g, w_d))_k$ sont les valeurs propres de la matrice $B(\bar{w}(w_g, w_d))$.*

*Remarque* 9. Si l'état $\bar{w}(w_g, w_d)$ est résonnant, alors la matrice $B(\bar{w}(w_g, w_d))$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et le problème de Riemann linéaire (II.53) ne peut plus être résolu dans le cadre classique. Dans ce cas, soit on modifie l'état $\bar{w}(w_g, w_d)$ pour le rendre non résonnant, soit on continue de prendre les états en $x/t = 0^{\pm}$ dans la formule (II.52) sans tenir compte de la mesure de Dirac qui apparaît en $x/t = 0$.

Ce schéma numérique n'est ni positif ni entropique, mais en pratique il fonctionne dans des cas avec découvrement et recouvrement de zones sèches et on peut lui adjoindre une correction entropique [HH83]. À la figure II.9, on présente un résultat numérique faisant intervenir du découvrement au-dessus d'une bosse. Au bord gauche on impose une paroi et au bord droit, on met une sortie libre. Initialement, l'altitude de la surface de l'eau est 50 cm et la vitesse est nulle. Plusieurs temps successifs sont représentés et on voit qu'en temps long, il reste de l'eau seulement entre la paroi et la butte, la surface affleurant le haut de la butte.

## 2.3 Adaptation du schéma de relaxation (dans le cas de la dynamique des gaz en tuyère)

Dans le travail [13], on étudie l'adaptation du schéma de relaxation au système de la dynamique des gaz barotropes en tuyère. Ce système est extrêmement proche des équations de Saint-Venant avec topographie, il rentre d'ailleurs dans le cadre des systèmes résonnants de [GL04]. Ce modèle s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) = -\dfrac{\rho v}{\alpha(x)} \alpha'(x), \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + p) = 0, \end{cases} \tag{II.54}$$

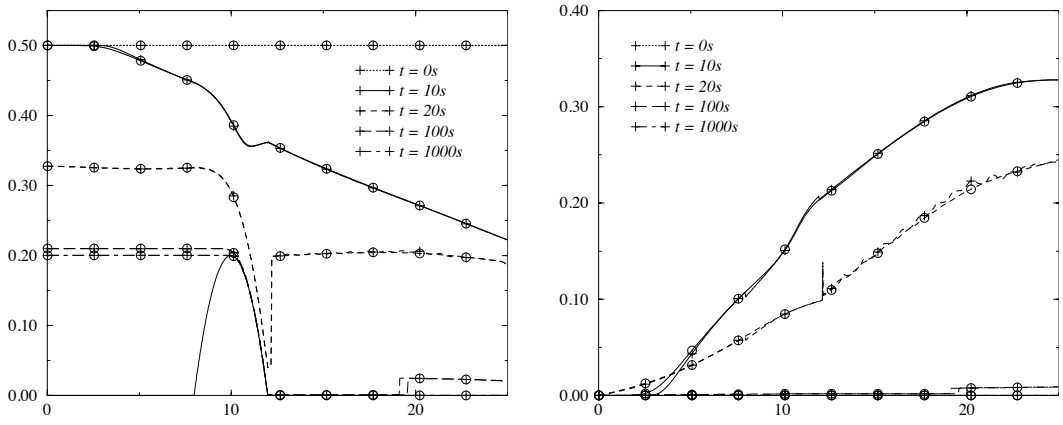



FIGURE II.9 – Vidage par la droite au-dessus d'une butte. Gauche : $h+a$ *vs* $x$. Droite : $hv$ *vs* $c$.

où $p = \mathscr{P}(\rho)$ et $\alpha$ correspond à la section de la tuyère ($\alpha$ est donc positif). En suivant le formalisme des méthodes de relaxation (voir la section 3.3 et le modèle (I.53)) et l'idée de concentrer le terme source sur l'interface (comme dans le modèle (II.49)), on résout donc à chaque interface le problème de Riemann associé au système

$$\begin{cases} \partial_t \alpha = 0, \\ \partial_t \rho + \partial_x(\rho v) + \dfrac{\rho v}{\alpha}\partial_x \alpha = 0, \\ \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \pi) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathscr{T}) + \partial_x(\rho v \mathscr{T}) = 0, \end{cases} \tag{II.55}$$

où $\pi = \Pi(\tau, \mathscr{T})$, $\Pi$ étant donné par (I.52) qui est, on le rappelle

$$\Pi(\tau, \mathscr{T}) = \mathscr{P}(\mathscr{T}) + a^2(\mathscr{T} - \tau),$$

$a$ étant toujours un paramètre positif (on a omis le terme source de relaxation qui devrait être présent dans la dernière équation). Ce système, dont les solutions sont à chercher dans

$$\Omega = \{W \in \mathbb{R}^3 \ ; \ \rho > 0, \rho\mathscr{T} > 0\}, \tag{II.56}$$

($W$ est ici $(\rho, \rho v, \rho\mathscr{T})$ et notons que $W = (\rho, \rho v, 1)$ correspond à un état à l'équilibre) possède les propriétés suivantes :

**Proposition II.13.** *Le système (II.55) est* non strictement hyperbolique *sur* $\Omega$*, c'est-à-dire qu'il admet toujours des valeurs propres réelles, qui sont*

$$\lambda_0(W) = 0, \quad \lambda_1(W) = v - a/\rho, \quad \lambda_2(W) = v, \quad \lambda_3(W) = v + a/\rho, \tag{II.57}$$

*et les vecteurs propres associés engendrent* $\mathbb{R}^3$ *si et seulement si*

$$W \in \Omega_h := \{W \in \Omega \ ; \ v \neq \pm a/\rho\}. \tag{II.58}$$

*Si un état* $W$ *appartient à* $\Omega_r := \Omega \setminus \Omega_h$*, on dit que c'est un état* résonnant*. Tous les champs caractéristiques sont linéairement dégénérés.*

Du fait de la résonance, le problème de Riemann reste difficile à résoudre, malgré le fait que le système soit linéairement dégénéré. En particulier, les solutions de ce problème peuvent inclure une

mesure de Dirac en $x/t = 0$. Dans le but d'obtenir au final un schéma numérique entropique, on contraint les solutions à faire décroître le flux de l'énergie du système de relaxation (II.55) à travers l'interface $x/t = 0$ (voir [13] pour une définition plus précise). Après une étude détaillée de chaque configuration d'ondes, on obtient le résultat suivant :

**Théorème II.14.** *Soit $W_g, W_d \in \Omega$ et $\alpha_g, \alpha_d > 0$. Le problème de Riemann associé au (II.55) avec pour données $W_g$ et $W_d$ admet une solution $\mathscr{W}(x/t; (\alpha_g, W_g), (\alpha_d, W_d))$ dans $\Omega$ dès lors que le problème de Riemann sans terme source (donc avec pour données $(\alpha_g, W_g)$ et $(\alpha_g, W_d)$)) admet une solution dans $\Omega$.*

La condition sur la solution dans le cas sans terme source revient à vérifier pour $a$ la condition de Whitham classique pour les équations d'Euler (I.55).

Passons à la construction du schéma numérique. La notion de solveur de Riemann approché (I.35) repose sur une intégration du système sur les mailles décalées. Comme ici le terme source est concentré sur les interfaces, on ne peut plus utiliser cette notion. On en vient donc à définir directement les flux numériques, sans passer par la notion de solveur de Riemann approché :

$$g^{\pm}(u_i^n, u_{i+1}^n, \alpha_i, \alpha_{i+1}) = h^{(\rho,\rho v)}(\mathscr{W}(0^{\pm}; (\alpha_i, u_i^n, 1), (\alpha_{i+1}, u_{i+1}^n, 1))), \tag{II.59}$$

où $h$ est le flux du système de relaxation (I.53) et $h^{(\rho,\rho v)}$ correspond à ses deux premières composantes.

**Théorème II.15.** *Le schéma numérique adapté de la méthode de relaxation (II.47)-(II.59) est positif et entropique sous la condition CFL (I.36) et sous la condition de Whitham (I.55).*

Ici aussi, on ne précise pas exactement la condition de Whitham, le lecteur intéressé pourra se référer à [13] pour tous les détails.

*Remarque* 10. On a pu remarquer que la résonance peut faire apparaître des mesures de Dirac dans le cas linéaire et dans le cas linéairement dégénéré, mais pas dans le cas incluant des champs caractéristiques vraiment non linéaires.

## 2.4 Schéma VFRoe-ncv et reconstruction hydrostatique

Dans [23], le schéma VFRoe-ncv pour les équations de Saint-Venant *sans* terme source en variable $(c, u)$ est combiné avec la méthode de reconstruction hydrostatique proposée dans [ABB+04]. Cette méthode permet d'étendre tout schéma volumes finis classique pour les équations de Saint-Venant *sans* terme source aux équations de Saint-Venant avec topographie (II.37). On n'insiste pas sur cette partie car elle ne correspond pas à la proposition d'un véritable nouveau schéma numérique, le travail [23] étant plutôt une étude de faisabilité de simulations complexes avec cette méthode numérique.

# Chapitre III

# Interfaces dans les équations hyperboliques

On présente dans ce chapitre différentes problématiques qui incluent toutes l'apparition d'une interface infiniment mince. Par opposition à des ondes classiques comme des ondes de choc ou des discontinuités de contact, ces interfaces nécessitent un ajout d'information pour pouvoir définir le comportement des solutions à travers elles. Cette information provient du problème étudié et n'est pas forcément aisée à inclure directement dans un formalisme mathématique. Plusieurs exemples sont abordés et on tâchera de motiver à chaque fois la manière de définir le comportement des solutions au niveau de ces interfaces.

## 1 Équations scalaires avec interfaces minces

On présente différents modèles scalaires dans lesquels une interface mince apparaît. Puisqu'on est dans le cas scalaire, on s'attend à pouvoir établir une théorie d'existence et d'unicité des solutions. Mais comme cela est évoqué plus haut, la première des difficultés est de donner une définition des solutions.

### 1.1 Lois de conservation

On considère tout d'abord le problème d'interface le plus simple, qui est celui d'une interface dans une loi de conservation scalaire. Le problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(k(x)f(u)) = 0, & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \\ k(x) = \begin{cases} k_g & \text{si } x<0, \\ k_d & \text{si } x>0, \end{cases} \end{cases} \tag{III.1}$$

où $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$, $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $k_g, k_d \in \mathbb{R}$. La formulation ci-dessus implique tout d'abord la continuité du flux à l'interface $x=0$

$$k_g f(u(t,0^-)) = k_d f(u(t,0^+)) \tag{III.2}$$

pour presque tout $t>0$ et pour peu que les traces de la solution existent (voir [Pan07] à ce sujet). Si on suppose que $u$ est une solution entropique pour $x<0$ et $x>0$ et qu'elle vérifie la relation (III.2), $u$ n'est pas unique. En effet, dans le cas simple $k_g = k_d$, il faut aussi imposer une condition d'entropie à l'interface pour retrouver une solution entropique standard. Les modèles du type (III.1) interviennent dans de

très nombreux domaines et les relations à l'interface à vérifier en plus de (III.2) dépendent du problème considéré. Par conséquent, la littérature concernant les modèles pouvant entrer dans le cadre (III.1) est immense et on ne peut malheureusement pas donner une bibliographie représentative, même partiellement.

### 1.1.1 Loi de conservation avec un flux discontinu en espace

Le cadre qui nous intéresse dans [26] est celui d'un écoulement diphasique, eau-huile par exemple, dans un milieu poreux, où $u$ représente la saturation et $k$ la perméabilité, ce qui conduit à prendre

$$u_0, u \in [0,1], \quad k > 0 \quad \text{et} \quad f(u) = u(1-u). \tag{III.3}$$

Dans ce type de problème, il est naturel de considérer que la discontinuité de $k$ représente un changement brusque de perméabilité, mais qui à une échelle plus petite est régulier. On considère donc une perméabilité régularisée $k_\varepsilon$ telle que

$$k_\varepsilon \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \text{ est monotone et } k_\varepsilon(x) = k(x) \text{ si } |x| \geqslant \varepsilon$$

et on y associe le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x(k_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{III.4}$$

Ce problème de Cauchy entre dans le cadre d'application du théorème de Kruzhkov [Kru70], qui assure l'existence et l'unicité de la solution faible entropique dans $\mathbf{L}^\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$. Il est donc légitime de considérer que la solution $u$ du problème (III.1) est la limite de la suite de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ du problème (III.4). On est alors amené à considérer des solutions définies ainsi :

**Définition III.1.** Soit $u_0$ une fonction mesurable à valeur dans $[0,1]$. Une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est une *solution faible entropique* du problème de Cauchy (III.1)-(III.3) si elle est à valeur dans $[0,1]$ et si pour tout $\kappa \in [0,1]$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ positive on a

$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}} (|u(t,x) - \kappa| \partial_t + k(x) \Phi(u(t,x), \kappa) \partial_x) \varphi(t,x) \, dx \, dt \\ + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - \kappa| \varphi(0,x) \, dx + |k_g - k_d| \int_{\mathbb{R}_+} f(\kappa) \varphi(t,0) \, dt \geqslant 0 \tag{III.5}$$

où $\Phi(a,b) = \operatorname{sgn}(a-b)(f(a) - f(b))$.

Cette définition a initialement été donnée dans [Tow00] et a été reprise dans [26]. En particulier, cette définition implique comme condition d'interface supplémentaire

$$f'(u(t,0^+)) > 0 \Longrightarrow f'(u(t,0^-)) \geqslant 0 \tag{III.6}$$

pour presque tout $t > 0$ (les traces existent car le flux est vraiment non linéaire de part et d'autre de l'interface [Vas01]). Cette condition combinée avec la relation (III.2) permet de décrire les traces admissibles des solutions faibles entropiques (et de construire le *germe* associé à la définition III.1, voir plus loin). Dans [26], on montre le caractère bien posé de ce problème dans $\mathbf{L}^\infty$ :

**Théorème III.2.** *Le problème de Cauchy (III.1)-(III.3) admet une unique solution faible entropique. De plus, soient $u_0$ et $v_0$ deux données initiales et $u$ et $v$ les solutions faibles entropiques associées, alors pour tout $R > 0$ et presque tout $T > 0$, on a*

$$\int_{-R}^{R} |u(T,x) - |v(T,x)| \, dx \leqslant \int_{-R-LT}^{R+LT} |u_0(x) - v_0(x)| \, dx \tag{III.7}$$

*où $L = \max(k_g, k_d) \max_{s \in [0,1]} |f'(s)|$.*

L'existence est démontrée en étudiant la suite de solutions $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ du problème régularisé (III.4). On établit des bornes $\mathbf{L}^\infty$ et BV (la solution n'est pas à variation totale décroissante mais c'est cependant le cas pour une fonction de Temple de la solution [Tem82]) et en utilisant le théorème de Helly, on peut extraire une sous-suite de $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui converge et qui vérifie la définition III.1. L'unicité est obtenue en utilisant le dédoublement de variable de Kruzhkov [Kru70] et le fait que la condition (III.6) assure que l'interface est dissipative.

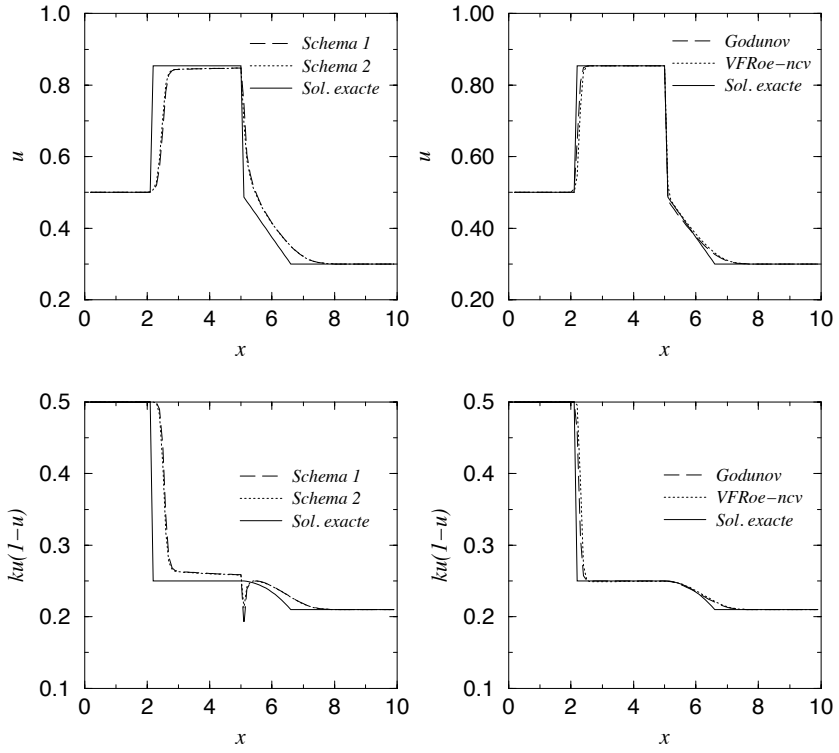



FIGURE III.1 – Schémas issus de l'industrie pétrolière (à gauche) et schéma de Godunov et schéma VFRoe-ncv (à droite).

Outre cette analyse, on propose dans [26] plusieurs schémas numériques améliorant les résultats des schémas issus de l'industrie pétrolière. Sans entrer dans les détails, les schémas proposés sont des extensions du schéma de Godunov et du schéma VFRoe-ncv et on peut voir à la figure III.1 que les résultats produits par ces deux schémas numériques sont bien plus précis que ceux issus de l'industrie pétrolière.

Depuis ce travail, il fait signaler que l'analyse de ce type de problème a été généralisée, notamment dans la thèse [Bac05]. Par ailleurs, la notion de condition d'entropie sur l'interface a été étudiée profondément et formalisée dans les travaux successifs [AMVG05, GNPT07, BKT09, AKR11]. Ces travaux ont notamment permis d'aborder le travail suivant.

### 1.1.2 Loi de conservation avec contrainte sur le flux

Restons dans le même contexte d'écoulements en milieux poreux, même si le travail suivant était initialement motivé par une application en trafic routier (voir l'ouvrage [GP06]). On suppose que le milieu est constitué d'une roche de perméabilité $k = 1$ sauf en un point $x = 0$, où se trouve une roche

de perméabilité $K$ inférieure à 1. On s'attend à ce que l'écoulement soit perturbé par cette interface. En pratique, cela revient à s'intéresser à la limite du problème pour $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \partial_x(k_\varepsilon(x) f(u_\varepsilon)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \\ k_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| > \varepsilon, \\ K & \text{si } |x| < \varepsilon. \end{cases} \end{cases} \tag{III.8}$$

Dans [CG07a], les auteurs construisent le modèle limite associé, qui est

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}, \\ f(u(t,0^-)) = f(u(t,0^+)) \leqslant K\bar{f} & t > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{III.9}$$

où $\bar{f} = \max_{s\in[0,1]} f(s)$ (on suppose toujours que $f(u) = u(1-u)$). Les solutions du problème régulier (III.8) sont celles construites dans la section précédente et les discontinuités sont donc prises en compte au sens de la définition III.1. Les auteurs de [CG07a] introduisent donc la définition du problème (III.9) suivant :

**Définition III.3.** Soit $u_0$ une fonction mesurable à valeur dans $[0,1]$. Une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est une *solution faible entropique* du problème de Cauchy (III.9) si elle est à valeur dans $[0,1]$ et si pour tout $\kappa \in [0,1]$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ positive on a

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (|u(t,x)-\kappa|\partial_t + \Phi(u(t,x),\kappa)\partial_x)\varphi(t,x)\,dx\,dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x)-\kappa|\varphi(0,x)\,dx + 2|1-K|\int_{\mathbb{R}_+} f(\kappa)\varphi(t,0)\,dt \geqslant 0 \tag{III.10}$$

et

$$f(u(t,0^-)) = f(u(t,0^+)) \leqslant K\bar{f} \tag{III.11}$$

pour presque tout $t > 0$.

On remarque aisément que la formulation (III.10) correspond à la formulation (III.5) avec la perméabilité du problème régularisé (III.8) pour $\varepsilon \to 0$. Cette définition permet d'obtenir l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la convergence des solutions du problème régularisé (III.8) vers celles du problème avec contrainte (III.9). Pour l'unicité, on est à nouveau amené à déduire une condition d'interface de la définition III.3, qui est

$$\begin{aligned} (u(t,0^-),u(t,0^-)) \in \mathscr{G}(K) := &\{(a,b) \in [0,1]^2 \,;\, a > b, f(a) = f(b) = K\bar{f}\} \\ &\cup \{(a,a) \in [0,1]^2 \,;\, f(a) \leqslant K\bar{f}\} \\ &\cup \{(a,b) \in [0,1]^2 \,;\, a < b, f(a) = f(b) \leqslant K\bar{f}\}. \end{aligned} \tag{III.12}$$

La première partie de $\mathscr{G}(K)$ correspond à un choc stationnaire non entropique saturant la contrainte et les deux autres parties correspondent à des solutions entropiques classiques satisfaisant la contrainte. Dans la terminologie définie dans [AKR11], l'ensemble $\mathscr{G}(K)$ est appelé *germe*.

Dans [4], nous construisons une classe de méthodes volumes finis à même de tenir compte *simplement* de la contrainte $f(u)(t,0) \leqslant K\bar{f}$. Soit un flux numérique standard $g(\cdot,\cdot)$ consistant avec $f$, lipschitzien et monotone, c'est-à-dire que $g(\nearrow,\searrow)$. On définit le maillage de manière à assurer que $x_{1/2} = 0$ et on propose dans [4] comme flux numérique à cette interface

$$g^n_{1/2} = \min(g(u^n_0,u^n_1), K\bar{f}). \tag{III.13}$$

Aux autres interfaces, on garde le flux numérique standard $g^n_{i+1/2} = g(u^n_i, u^n_{i+1})$ et le schéma numérique s'écrit donc

$$u^{n+1}_i = u^n_i - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g^n_{i+1/2} - g^n_{i-1/2}). \tag{III.14}$$

Comme $g$ est un flux numérique quelconque, on ne peut pas obtenir d'estimation BV générale. Par conséquent, on fait appel à la théorie des *solutions entropiques processus* [EGH00] (voir aussi [DiP85]). Cette théorie permet de n'utiliser que des estimations $\mathbf{L}^\infty$ mais les limites sont des fonctions $\mathbf{L}^\infty$ paramétrées. Ensuite, il suffit de démontrer que ces limites sont indépendantes du paramètre supplémentaire et de les identifier avec les solutions classiques (cette description rapide ne satisfera probablement pas le lecteur averti...). Ici, la difficulté majeure pour utiliser cette théorie réside dans la contrainte (III.11), qui utilise les traces de la solution (on rappelle qu'elles existent puisque $f$ est non linéaire [Vas01]) car le cadre des solutions entropiques processus n'autorise pas leur utilisation. Par conséquent, un première étape a été de définir une notion de solution adéquate, pouvant être étendue au cadre des solutions entropiques processus.

**Proposition III.4.** *Une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ est solution faible entropique du problème de Cauchy (III.9) si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout couple $(\kappa_g, \kappa_d) \in [0,1]^2$ et toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ positive on a*

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}} (|u(t,x) - \kappa(x)|\partial_t + \Phi(u(t,x),\kappa(x))\partial_x)\varphi(t,x)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}} |u_0(x) - \kappa(x)|\varphi(0,x)\, dx + M\int_{\mathbb{R}_+} \mathrm{dist}((\kappa_g,\kappa_d),\mathscr{G}(K))\varphi(t,0)\, dt \geqslant 0 \tag{III.15}$$

*où $\kappa(x) = \kappa_g$ si $x < 0$ et $\kappa_d$ si $x > 0$.*

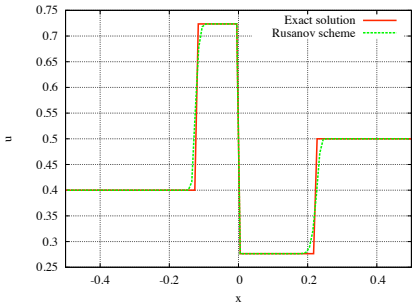
Cette définition fait appel à la notion d'entropie adaptée [BJ97, AP05] et n'utilise pas les traces de la solution. On peut donc étendre cette définition au cadre des solutions entropiques processus et montrer la convergence du schéma numérique (III.13-III.14) vers la solution du problème (III.9) (à quelques « détails » techniques près). Par ailleurs, on peut montrer que le germe est *dissipatif*, ce qui signifie que si on compare deux solutions, le terme interfacial fait décroître l'écart entre les deux solutions. On en déduit alors :

**Théorème III.5.** *Le problème de Cauchy (III.9) admet une unique solution faible entropique au sens de la définition III.3. De plus, soient $u^1_0$ et $u^2_0$ deux données initiales, $K^1$ et $K^2$ deux perméabilités et $u^1$ et $u^2$ les solutions faibles entropiques associées, alors pour tout $R > 0$ et presque tout $T > 0$, on a*

$$\int_{-R}^{R} |u^1(T,x) - |u^2(T,x)|\, dx \leqslant 2\bar{f}\int_0^T |K^1 - K^2|\, dt + \int_{-R-LT}^{R+LT} |u^1_0(x) - u^2_0(x)|\, dx \tag{III.16}$$

*où $L = \max(k_g, k_d)\max_{s\in[0,1]}|f'(s)|$. Enfin, le schéma numérique (III.13-III.14) converge dans $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ pour tout $1 \leqslant p < +\infty$ vers la solution faible entropique de (III.9).*

Du point de vue numérique, un fait notable qui avait déjà été remarqué dans [26] est que la présence de la discontinuité ou de la contrainte n'altère pas l'ordre de convergence des schémas numériques. Il est connu que, dans le cas d'un flux non linéaire comme celui considéré ici, un schéma volumes finis monotone à trois points est d'ordre 1. Ici, on pourrait assimiler l'interface en $x = 0$ à une discontinuité de contact et s'attendre à ce que l'ordre de convergence chute à $1/2$. Le cas test présenté à la figure III.2 représente le résultat avec le flux de Rusanov [Rus61] pour des données $u_g = 0,4$, $u_d = 0,5$ et $K = 0,5$. On remarque tout d'abord que le schéma numérique fournit une solution précise et sur le tableau, on voit finalement que l'ordre de convergence est bien 1.




| Nb de mailles | Erreur $\mathbf{L}^1$ | Ordre |
|---|---|---|
| 100 | $4.1938 \times 10^{-3}$ | — |
| 300 | $1.2356 \times 10^{-3}$ | 1.112 |
| 1000 | $3.7494 \times 10^{-4}$ | 0.990 |
| 3000 | $1.1864 \times 10^{-4}$ | 1.047 |
| 10000 | $3.6899 \times 10^{-5}$ | 0.970 |
| 30000 | $1.2945 \times 10^{-5}$ | 0.953 |
| 100000 | $3.6448 \times 10^{-6}$ | 1.053 |
| 300000 | $1.2199 \times 10^{-6}$ | 0.996 |

FIGURE III.2 – Comparaison du schéma numérique avec la solution exacte au temps $T = 1$ (à gauche). Mesures de l'ordre de convergence (à droite).

*Remarque* 11. Une étude théorique de l'ordre de convergence dans le cas de l'utilisation du flux de Godunov dans le schéma (III.13-III.14) est effectuée dans [7]. Celle-ci repose sur des estimations BV obtenues par une analyse fine du comportement du schéma numérique au niveau de l'interface $x_{1/2}$ et sur la technique du dédoublement de variable [Kru70, Kuz76].

## 1.2 Un modèle simple d'interaction fluide-structure

On s'intéresse maintenant à un modèle couplant un fluide modélisé par l'équation de Burgers avec une particule ponctuelle. Plusieurs tentatives de tels modèles existent, notamment dans [VZ03, VZ06, Hil05]. Dans ces modèles, le fluide est visqueux, ce qui interdit l'apparition de discontinuités. Dans [22], nous nous intéressons à la possible interaction entre des ondes de choc et la particule, ce qui nous amène à considérer une force de traînée entre le fluide et la particule. Le modèle introduit dans [22] prend donc la forme

$$\partial_t u(t,x) + \partial_x \frac{u^2}{2}(t,x) = \lambda\,(h'(t) - u(t,x))\,\delta_0(x - h(t)), \tag{III.17}$$

$$m\,h''(t) = \lambda\,(u(t,h(t)) - h'(t)), \tag{III.18}$$

où $u$ est la vitesse du fluide, $h$ la position de la particule et $m$ sa masse, $\lambda > 0$ le coefficient de traînée et $\delta_0(x)$ est la mesure de Dirac en $x = 0$. La force de traînée est linéaire mais on peut aussi considérer une force de traînée quadratique $(h' - u)|h' - u|$. La première équation (III.17) correspond à l'équation de Burgers avec une force de traînée localisée au niveau de la position de la particule et la deuxième équation (III.18) correspond au principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule. On peut vérifier formellement que l'impulsion totale est conservée :

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} (u(t,x) + m h'(t))\,dx = 0 \tag{III.19}$$

et que l'énergie cinétique totale décroît :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} (u^2(t,x) + m(h')^2(t))\,dx = -\lambda\,(h(t) - u(t,h(t)))^2 \leqslant 0. \tag{III.20}$$

L'analyse de ce problème n'est pas simple. Citons deux difficultés majeures : le terme source dans l'équation de Burgers (III.17) inclut un produit *a priori* non défini entre la fonction $u \in \mathbf{L}^\infty$ et la mesure $\delta_0(x - h(t))$ et l'équation différentielle (III.18) nécessite la connaissance de la vitesse $u$ sur la trajectoire de la particule, c'est-à-dire en $x = h(t)$, alors que $u$ est une fonction $\mathbf{L}^\infty$ et peut être discontinue à travers cette trajectoire. On s'intéresse d'abord au problème de la définition du second membre de l'équation (III.17) puis on aborde le problème complet.

### 1.2.1 Équations scalaires avec terme source singulier

Pour définir le produit du terme source présent dans (III.17), on suppose que la trajectoire de la particule est donnée et constante. Après un changement de variable, on peut se ramener au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \partial_x \dfrac{u^2}{2}(t,x) = -\lambda u(t,x)\delta_0(x), & t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases} \tag{III.21}$$

où $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$. La première difficulté est de donner une définition du terme source, c'est-à-dire du comportement de la solution à travers la discontinuité due à la particule en $x=0$. Pour cela, on suit à nouveau l'idée proposée dans [LeR99], qui est d'introduire une variable supplémentaire pour transformer le modèle (III.21) en un système non conservatif équivalent :

$$\begin{cases} \partial_t a = 0, \\ \partial_t u(t,x) + \partial_x \dfrac{u^2}{2}(t,x) + \lambda u \partial_x a = 0, \\ u(0,x) = u_0(x), \\ a(0,x) = H(x), \end{cases} \tag{III.22}$$

où $H$ est la fonction d'Heaviside. Pour déterminer les relations de saut admissibles à travers l'onde stationnaire $x=0$, on procède comme dans [LeR99] : on régularise $a$ et on cherche les solutions stationnaires admissibles dans la régularisation. Plus précisément, on considère $H_\varepsilon \in C^1(\mathbb{R})$ une fonction monotone croissante telle que $H_\varepsilon(x) = H(x)$ quand $|x| \geqslant \varepsilon$, ce qui revient à épaissir la particule. On fait alors l'hypothèse suivante pour obtenir le comportement des solutions de (III.21) à travers la discontinuité de la particule :

**Définition III.6.** Soit $t>0$, les traces de la solution $u(t,0^-)$ et $u(t,0^+)$ de part et d'autre de la discontinuité sont *admissibles* si il existe une solution faible entropique au problème au limite suivant :

$$\begin{cases} (U_\varepsilon^2/2)'(x) + \lambda U_\varepsilon(x)\partial_x H_\varepsilon(x) = 0, & x\in[-\varepsilon,\varepsilon], \\ U_\varepsilon(-\varepsilon) = u(t,0^-), \\ U_\varepsilon(\varepsilon) = u(t,0^+). \end{cases} \tag{III.23}$$

La notion de solution faible entropique signifie que la solution $U_\varepsilon$ peut être discontinue et que ses discontinuités doivent vérifier $U_\varepsilon(x_0^-) = -U_\varepsilon(x_0^+) > 0$.

Cette construction de l'ensemble des traces admissibles a notamment été justifiée dans [26]. Sur cette base, on peut définir le *germe* $\mathscr{G}_\lambda$, qui est l'ensemble des couples de traces admissibles (pour les détails, voir [22] et [6]) : $\mathscr{G}_\lambda = \mathscr{G}_\lambda^1 \cup \mathscr{G}_\lambda^2 \cup \mathscr{G}_\lambda^3$, où

- $\mathscr{G}_\lambda^1 = \{(a, a-\lambda), a\in\mathbb{R}\}$,
- $\mathscr{G}_\lambda^2 = [0,\lambda]\times[-\lambda,0]$,
- $\mathscr{G}_\lambda^3 = \{(a,b)\in(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^-)\setminus\mathscr{G}_\lambda^2,\ -\lambda\leqslant a+b\leqslant\lambda\}$.

On retombe donc sur la théorie développée dans [AKR11] et on introduit la définition de solution suivante.

**Définition III.7.** Une fonction $u\in\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R})$ est *solution faible entropique* du problème de Cauchy (III.21) si c'est une solution faible entropique de l'équation de Burgers pour $x<0$ et $x>0$ et si ses traces sont dans le germe : $(u(t,0^-), u(t,0^+)) \in \mathscr{G}_\lambda$ pour presque tout $t>0$.

Une fois encore, on peut montrer que le germe $\mathscr{G}_\lambda$ est *dissipatif*, ce qui entraîne l'unicité de la solution faible entropique. En ce qui concerne l'existence, nous proposons dans [6] une classe de schémas volumes

finis adaptés à ce problème, qui fournit une approximation numérique convergente. Ces schémas sont à nouveau basés sur un flux numérique consistant et monotone $g$. L'idée des schémas qu'on propose est celle des schémas équilibres, déjà évoqués par la définition II.8 et dans la section 2. Les solutions stationnaires sur lesquelles on base la construction de ces schémas sont

$$\forall t \geqslant 0, \quad u(t,x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad \text{où} \quad (u_g, u_d) \in \mathscr{G}_\lambda^1. \tag{III.24}$$

On place à nouveau l'interface $x_{1/2} = 0$ et on définit le schéma numérique par

$$\forall i \neq 0, 1, \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g(u_{i-1}^n, u_i^n)), \tag{III.25}$$

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_\lambda^-(u_0^n, u_1^n) - g(u_{-1}^n, u_0^n)), \tag{III.26}$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g(u_1^n, u_2^n) - g_\lambda^+(u_0^n, u_1^n)), \tag{III.27}$$

où

$$g_\lambda^-(a,b) = g(a, b+\lambda) \quad \text{et} \quad g_\lambda^+(a,b) = g(a-\lambda, b). \tag{III.28}$$

On peut vérifier aisément que ce schéma numérique est équilibre pour les solution stationnaires (III.24), par consistance de $g$. Combiné avec la monotonie de $g$, on en déduit que le schéma numérique est entropique. De plus, on peut montrer des estimations *a priori* en espace de type $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $\mathrm{BV}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Par extraction diagonale (voir [BGKT08, BKT09]), on obtient la convergence du schéma numérique.

**Théorème III.8.** *Le problème de Cauchy (III.21) admet une unique solution faible entropique au sens de la définition III.7. De plus, soient $u_0$ et $v_0$ deux données initiales et $u$ et $v$ les solutions faibles entropiques associées, alors pour tout $R > 0$ et presque tout $T > 0$, on a*

$$\int_{-R}^{R} |u(T,x) - |v(T,x)|\, dx \leqslant \int_{-R-LT}^{R+LT} |u_0(x) - v_0(x)|\, dx \tag{III.29}$$

*où $L = \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)$. Enfin, le schéma numérique (III.25-III.28) converge dans $\mathbf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ vers la solution faible entropique de (III.21).*

Ce résultat est complètement original dans le contexte d'équations avec terme source singulier. Le système (III.22) est résonnant mais n'entre pas dans le cadre de [IT95, GL04], c'est pourquoi la solution est unique même dans le cas singulier. Les travaux de la littérature considère ou bien le cas résonnant avec une fonction $a$ régulière [IT95, AGG04]) ou bien un terme source singulier mais non résonnant [Gos02, GT03, AGG04] (cela reste une bibliographie partielle cependant).

### 1.2.2 Le modèle complet d'interaction

La partie « fluide » du modèle complet (III.17-III.18) est bien comprise grâce aux travaux présentés dans la section précédente. Il reste maintenant à définir les solutions du modèle complet. On complète le modèle (III.17-III.18) par les conditions initiales

$$\begin{aligned} &u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ &(h(0), h'(0)) = (h_0, v_0), \end{aligned} \tag{III.30}$$

où $u_0 \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R})$ et $h_0, v_0 \in \mathbb{R}$.

**Définition III.9.** Un couple $(u,h) \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+)$ est *solution faible entropique* du problème de Cauchy (III.17-III.18)-(III.30) si

1. $u$ est une solution faible entropique de l'équation de Burgers sur $\{x < h(t), t \geqslant 0\} \cup \{x > h(t), t \geqslant 0\}$ avec pour donnée initiale $u_0$,
2. les traces de $u$ sont dans le germe :
   pour presque tout $t > 0$, $(u(t,h(t)^-), u(t,h(t)^+)) \in \mathscr{G}_\lambda(h'(t)) := (h'(t), h'(t)) + \mathscr{G}_\lambda$,
3. $h$ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{aligned} mh''(t) = &\big(u(t,h(t)^-)^2/2 - h'(t)u(t,h(t)^-)\big) \\ &- \big(u(t,h(t)^+)^2/2 - h'(t)u(t,h(t)^+)\big) \end{aligned} \tag{III.31}$$

   avec pour données initiales $(h_0, v_0)$.

Le second membre de l'équation (III.31) correspond au saut du flux de l'équation de Burgers dans le référentiel de la particule, ce qui permet d'assurer, cette fois rigoureusement, la conservation de l'impulsion totale (III.19).

À partir de cette définition, on peut étudier le problème de Riemann, ce qui revient à prendre

$$h_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < 0, \\ u_d & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{III.32}$$

dans (III.30), avec $u_g, u_d \in \mathbb{R}$.

**Théorème III.10.** *Le problème de Riemann (III.17-III.18)-(III.30)-(III.32) admet au moins une solution, pour tout $u_g, u_d, v_0 \in \mathbb{R}$.*

La démonstration dans [22] est une étude minutieuse, au cas par cas. La minutie est requise car la solution n'est pas auto-similaire, la particule possédant une trajectoire qui n'est pas forcément rectiligne ; elle peut donc interagir plusieurs avec les ondes dans un même problème de Riemann et même en créer de nouvelles (voir la figure III.3).



FIGURE III.3 – Exemples de solution du problème de Riemann pour le modèle complet ($t$ *vs* $x$). La courbe en gras correspond à la trajectoire de la particule.

Concernant l'étude du problème de Cauchy, c'est bien sûr très difficile. Même si dans [5] des résultats sont annoncés, leur démonstration étant encore en cours de rédaction nous ne les aborderons pas ici. Toujours dans [5], on propose une méthode numérique qui est utilisant le schéma équilibre (III.25-III.28) pour la partie « fluide ». Celui-ci se décompose ainsi :

1. Soit $(u_i^n)_{i\in\mathbb{Z}}$, $h^n$ et $v^n$ les discrétisations de $u$, $h$ et $h'$. Soit $I_n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_{I_n+1/2} = h^n$ (on suppose que la particule est toujours située sur une interface du maillage).

2. **Mise à jour de la vitesse du fluide.** Soit $g_v$ un flux numérique monotone, consistant avec le flux $u^2/2 - v$ (donc $g_0$ est consistant avec $u^2/2$). Le schéma numérique pour $u$ s'écrit

$$\forall i \neq I_n, I_n+1, \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_0(u_i^n, u_{i+1}^n) - g_0(u_{i-1}^n, u_i^n)), \tag{III.33}$$

$$(\Delta x + v^n \Delta t)\, \tilde{u}_{I_n}^{n+1} = u_{I_n}^n - \Delta t\, (g_{v^n}(u_{I_n}^n, u_{I_n+1}^n + \lambda) - g_0(u_{I_n-1}^n, u_{I_n}^n)), \tag{III.34}$$

$$(\Delta x - v^n \Delta t)\, \tilde{u}_{I_n+1}^{n+1} = u_{I_n+1}^n - \Delta t\, (g_0(u_{I_n}^n, u_{I_n+1}^n) - g_{v^n}(u_{I_n}^n - \lambda, u_{I_n+1}^n)). \tag{III.35}$$

Les deux dernières lignes correspondent à une intégration sur un maillage dont l'interface associée à la particule est inclinée.

3. **Mise à jour de la vitesse de la particule.** On calcule la nouvelle vitesse de la particule de manière à assurer la conservation de l'impulsion totale :

$$v^{n+1} = v^n - \frac{\Delta t}{m}\left(g_{v^n}(u_{I_n}^n - \lambda, u_{I_n+1}^n) - g_{v^n}(u_{I_n}^n, u_{I_n+1}^n + \lambda)\right).$$

4. **Projection aléatoire autour de la particule.** On se donne $y \in (0, \Delta x)$ au hasard et on définit :

$$\text{si } v^n > 0 \begin{cases} u_{I_n}^{n+1} = \tilde{u}_{I_n}^{n+1} \\ (I_{n+1}, u_{I_n+1}^{n+1}) = \begin{cases} (I_n+1, \tilde{u}_{I_n}^{n+1}) & \text{si } y < v^n \Delta t \\ (I_n, \tilde{u}_{I_n+1}^{n+1}) & \text{sinon} \end{cases} \end{cases},$$

$$\text{si } v^n < 0 \begin{cases} (I_{n+1}, u_{I_n}^{n+1}) = \begin{cases} (I_n, \tilde{u}_{I_n}^{n+1}) & \text{si } y > -v^n \Delta t \\ (I_n - 1, \tilde{u}_{I_n+1}^{n+1}) & \text{sinon} \end{cases} \\ u_{I_n+1}^{n+1} = \tilde{u}_{I_n+1}^{n+1} \end{cases}.$$

La particule se situe à nouveau sur une interface du maillage.

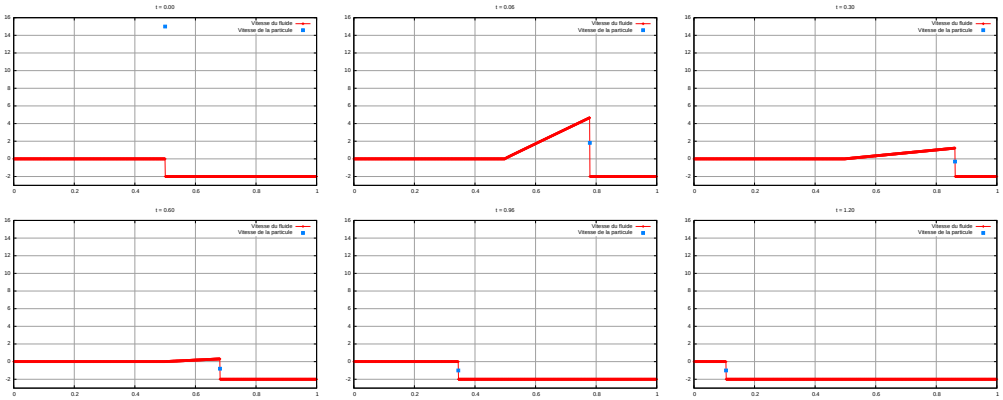


FIGURE III.4 – Simulation par le schéma numérique à différents temps (vitesse *vs* position).

On présente à la figure III.4 le résultat d'une simulation qui correspond à une solution composée d'une onde de détente et d'une discontinuité située sur la particule puis l'onde de détente « disparaît » dans la particule quand celle-ci repart vers la gauche. On peut noter que la discontinuité associée à la particule n'est pas diffusée, car on utilise un algorithme de projection de type Glimm dans l'étape 4.

# 2 Couplage de systèmes hyperboliques

On aborde ici une problématique plus générale que les précédentes. On cherche à coupler deux systèmes hyperboliques différents à travers une interface située en $x = 0$. Ce problème provient du cas où deux codes numériques $A$ et $B$ sont développés indépendamment pour simuler un même phénomène physique avec des modèles et des méthodes numériques différentes. Dans un même domaine de calcul $\mathscr{D}$, il peut être pertinent d'utiliser le code $A$ dans un sous-domaine $\mathscr{D}_A$ et le code $B$ dans le sous-domaine complémentaire $\mathscr{D}_B = \mathscr{D} \setminus \mathscr{D}_A$. Il est alors nécessaire de coupler ces codes numériques à travers l'interface (ou l'ensemble des interfaces) $\Sigma = \bar{\mathscr{D}}_A \cap \bar{\mathscr{D}}_B$ qui sépare les sous-domaines.

Ici, on s'intéresse au couplage de deux systèmes hyperboliques en une dimension d'espace, à travers une interface située en $x = 0$. Il n'y a pas de zone de raccord, l'interface est supposée infiniment mince. De plus, le couplage doit se faire de manière non intrusive, donc on n'a accès qu'à l'utilisation des conditions aux limites pour chaque code.

## 2.1 Systèmes de même dimension

Abordons tout d'abord le cas du couplage de deux systèmes de même taille :

$$\begin{cases} \partial_t u + f_g(u) = 0, & t > 0, x < 0, \\ \partial_t u + f_d(u) = 0, & t > 0, x > 0, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{III.36}$$

où $u$ et les flux $f_g$ et $f_d$ sont à valeur dans $\mathbb{R}^m$. Comme précédemment, il est nécessaire de définir des conditions de couplage entre les traces $u(t,0^-)$ et $u(t,0^+)$. La difficulté est que le problème de couplage auquel on s'intéresse est arbitraire. Par conséquent, il n'existe pas de principe permettant de choisir des conditions plutôt que d'autres.

Par exemple, si les deux systèmes correspondent aux équations d'Euler avec des lois de pressions $\mathscr{P}_g$ et $\mathscr{P}_d$ différentes, on peut penser à plusieurs conditions : continuité des variables conservatives $(\rho, \rho v)$, continuité des variables primitives $(v, p)$, continuité du flux $(\rho v, \rho v^2 + p)$... Toutes ces conditions de couplage donnent des solutions différentes, on est donc amené à définir un formalisme général du couplage pour laisser le choix du meilleur couplage à l'utilisateur final.

Soient $\varphi_g$ et $\varphi_d$ deux $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes de $\mathbb{R}^m$ et on cherche imposer à l'interface la condition

$$\varphi_g(u(t,0^-)) = \varphi_d(u(t,0^+)). \tag{III.37}$$

Pour les équations d'Euler, il suffit de prendre $\varphi_g = \varphi_d$ pour la continuité des variables conservatives, $\varphi_\alpha(u) = (v, \mathscr{P}_\alpha(\rho))$ pour la continuité des variables primitives, mais attention, le couplage par flux ne rentre *a priori* pas dans ce cadre car les flux $f_\alpha$ ne sont en général pas des fonctions inversibles.

On peut envisager ce couplage comme deux problèmes avec des conditions à la limite $x = 0$ couplées. On sait cependant que pour les systèmes hyperboliques les conditions aux limites de type Dirichlet ne peuvent pas être imposées de manière forte. En suivant [DL88], on introduit la version affaiblie de la condition (III.37) :

$$\begin{aligned} u(t,0^-) &\in \mathscr{O}_g([\varphi_g^{-1} \circ \varphi_d](u(t,0^+))), \\ u(t,0^+) &\in \mathscr{O}_d([\varphi_d^{-1} \circ \varphi_g](u(t,0^-))), \end{aligned} \tag{III.38}$$

où

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_g(b) &= \{\mathscr{U}_g(0^-; v, b), v \in \mathbb{R}^m\}, \\ \mathscr{O}_d(b) &= \{\mathscr{U}_d(0^+; b, v), v \in \mathbb{R}^m\}, \end{aligned} \tag{III.39}$$

sont les ensembles des traces admissibles avec comme $b$ donnée au bord. La version faible du couplage (III.38-III.39) a été introduit dans [GR04, GLTR05].

**Définition III.11.** Une fonction $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})^m$ est une *solution faible entropique* du problème de couplage (III.36-III.37) si c'est une solution faible entropique sur $\{x < 0, t \geqslant 0\} \cup \{x > 0, t \geqslant 0\}$ et si elle vérifie les conditions de couplage (III.38-III.39). On dit qu'une solution est *fortement couplée* si elle réalise la condition de couplage forte (III.37) et qu'elle est *faiblement couplée* sinon.

Dans un premier travail [3], on a étudié le couplage de modèles écrits en coordonnées lagrangiennes. Dans ce cas, l'interface de couplage est situé sur l'onde de matière. Différents modèles sont abordés, du $p$-système aux systèmes fluides de Després (voir [Des01] et la section 3.3.4). Du fait de la structure particulière des systèmes en coordonnées lagrangiennes, on a :

**Théorème III.12.** *Soient deux systèmes écrits en coordonnées lagrangiennes définis par $f_g$ et $f_d$, ne différant que par leur loi de pression. Alors les fonctions $f_g$ et $f_d$ sont des $\mathscr{C}^1$-difféomorphismes et si on définit le couplage par flux, donc $\varphi_\alpha = f_\alpha$ où $\alpha = g, d$, alors le problème de Riemann associé au modèle couplé (III.36)-(III.38-III.39) admet une et une seule solution faible entropique au sens de la définition III.11. Cette solution est fortement couplée, donc conservative.*

Ce résultat s'obtient par une analyse onde par onde, on est donc restreint à une hypothèse de proximité des données dans le cas de systèmes lagrangiens généraux (les détails se trouvent dans [3]).

Dans le cas du couplage de systèmes généraux non lagrangiens, il est impossible de dégager des résultats pertinents. Pour illustrer cette difficulté, présentons les résultats obtenus dans [9] pour le cas où les deux systèmes sont les équations d'Euler polytropiques avec des lois d'état différentes, donc

$$u = (\rho, \rho v, \rho E) \quad \text{et} \quad f_\alpha(u) = (\rho v, \rho v^2 + \mathscr{P}_\alpha, \rho E v + \mathscr{P}_\alpha). \tag{III.40}$$

On suppose bien sûr que les lois de pression vérifie les hypothèses standards et on note $c_\alpha$ la vitesse du son associée à la loi $\mathscr{P}_\alpha$.

**Théorème III.13.** *On considère le couplage (III.38-III.39) des équations d'Euler (III.36)-(III.40) en variables primitives $\varphi_\alpha(u) = (\rho, v, \mathscr{P}_\alpha)$. Alors,*

- *si $|v| \ll c_\alpha$, alors le problème de Riemann admet une unique solution fortement couplée,*
- *si $|v| \approx c_\alpha$, alors le problème de Riemann admet une famille de solutions fortement couplées,*
- *le problème de Riemann admet au plus une solution faiblement couplée, qui apparaît seulement si $|v| \approx c_\alpha$.*

Là aussi, la démonstration de ces résultats se fait par une étude détaillée des courbes d'onde. Les conditions sur le nombre de Mach dans le théorème peuvent être précisées, mais elles font appel à des points d'intersection de différentes courbes, ce qui serait fastidieux à présenter ici.

D'un point de vue numérique, le couplage est très simple à réaliser. Soit $g_\alpha(\cdot,\cdot)$ un flux numérique consistant avec le flux $f_\alpha$ et on place l'interface $1/2$ en $x = 0$. Le schéma numérique dédié au couplage (III.36)-(III.38-III.39) s'écrit

$$\forall i < 0, \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_g(u_i^n, u_{i+1}^n) - g_g(u_{i-1}^n, u_i^n)), \tag{III.41}$$

$$\forall i > 1, \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_d(u_i^n, u_{i+1}^n) - g_d(u_{i-1}^n, u_i^n)), \tag{III.42}$$

$$u_0^{n+1} = u_0^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_g(u_0^n, [\varphi_g^{-1} \circ \varphi_d](u_1^n)) - g_g(u_{-1}^n, u_0^n)), \tag{III.43}$$

$$u_1^{n+1} = u_1^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(g_d(u_1^n, u_2^n) - g_d([\varphi_d^{-1} \circ \varphi_g](u_0^n), u_1^n)), \tag{III.44}$$

On peut remarquer que les deux dernières lignes prennent en compte le couplage (III.37) comme des conditions aux limites de type Dirichlet. Ce schéma est très proche de celui utilisé pour l'approximation de l'équation scalaire avec terme source singulier (III.25-III.28), à ceci près que les états stationnaires maintenus sont ceux définis par le couplage (III.37).

**Proposition III.14.** *Le schéma numérique (III.41-III.44) préserve exactement toute solution stationnaire du problème de couplage (III.36-III.37) du type*

$$u(t,x) = \begin{cases} u_g & si\ x < 0, \\ u_d & si\ x > 0, \end{cases}$$

*où* $\varphi_g(u_g) = \varphi_d(u_d)$.

Cette propriété est donc une propriété de type équilibre pour le couplage (III.37).

## 2.2 Systèmes de dimension différente

Il existe de nombreux cas où les systèmes à coupler à travers l'interface n'ont pas le même nombre d'équations. On se restreint ici au cas où les deux systèmes appartiennent à une même hiérarchie de relaxation, au sens de la section 2.1 :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } t>0, x<0, & \text{pour } t>0, x>0, \\ \begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x g(w,v) = \frac{1}{\varepsilon} s(w,v), \end{cases} & \begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ v = v_e(w). \end{cases} \end{array} \tag{III.45}$$

où $(w,v) \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$.

Dans [2], nous étudions numériquement plusieurs types de couplage dans le cadre des modèles de transition de phase de la section 1.3. Le modèle de gauche est le modèle de relaxation (II.31)-(II.33) (avec l'équilibre partiel $\alpha = \alpha_e$ et $z = z_e$) et le modèle de droite est le modèle équilibre associé (II.31-II.32). Le couplage se fait à nouveau à l'aide de changements de variables, mais pour simplifier la présentation, supposons qu'on désire transmettre les variables conservatives. Dans ce cas, le modèle de gauche prend pour donnée au bord $(w(t,0^+), v_e(w(t,0^+)))$ et le modèle de droite prend pour donnée au bord $w(t,0^-)$.

L'idée de construction des schémas numériques reste la même. Le terme source est traité par la méthode de splitting et seules les parties convectives sont couplées numériquement. En se basant à nouveau sur le schéma dans le cas de systèmes de même dimension (III.41-III.44), il suffit de reprendre la même idée en redéfinissant les flux numériques à l'interface de couplage. On obtient à travers l'interface de couplage $x_{1/2} = 0$

$$\begin{cases} g_g(u_0^n, (w_1^n, v_e(w_1^n))) & \text{pour la maille } i = 0 \\ g_d(w_0^n, w_1^n) & \text{pour la maille } i = 1 \end{cases}$$

(où $g_g \colon (\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2})^2 \to \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ est consistant avec $f_g$ et $g_d \colon (\mathbb{R}^{m_1})^2 \to \mathbb{R}^{m_1}$ est consistant avec $f_d$).

Les résultats présentés dans [2] illustrent le fait que suivant les tests numériques, le choix du couplage peut avoir une influence importante, mais comme on l'a dit plus haut, cette étude ne fournit pas de choix canonique de la variable de couplage.

## 2.3 Adaptation de modèle

Le couplage (III.36) est un prototype de domaine où plusieurs modèles et codes numériques sont utilisés. Les domaines dans lesquels chaque code est utilisé sont supposés connus et fixes en espace. Dans cette section, on propose une méthodologie pour que le domaine de chaque modèle soit déterminé automatiquement, de manière à obtenir un compromis entre la difficulté de résolution et la précision.

Dans [24], on se place dans le cas où le modèle de référence, dit *modèle fin*, est un modèle de relaxation

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ \partial_t v + \partial_x g(w,v) = \frac{1}{\varepsilon} s(w,v), \end{cases} \tag{III.46}$$

où $\varepsilon$ est une constante positive. On suppose que le terme source est difficile et coûteux à résoudre numériquement.

On veut proposer une méthode numérique qui permet d'obtenir des résultats similaires à une simulation directe du modèle fin (III.46), à moindre coût. Pour cela, on introduit le modèle équilibre associé, dit *modèle grossier*,

$$\begin{cases} \partial_t w + \partial_x f(w,v) = 0, \\ v = v_e(w). \end{cases} \tag{III.47}$$

Ce modèle étant composé de moins d'équations aux dérivées partielles à résoudre, on suppose qu'il est moins complexe (et moins coûteux) à résoudre que le modèle fin (III.46).

À chaque itération en temps $n$, on désire déterminer les domaines $\mathscr{D}_F^n$ et $\mathscr{D}_G^n$ dans lesquels les modèles fin et grossier vont respectivement être résolus. Il est donc nécessaire d'avoir une mesure de l'erreur commise si on remplace le modèle fin (III.46) par le modèle grossier (III.47). Pour cela, on utilise le développement de Chapman-Enskog présenté dans la section 2.1 et on obtient formellement que les solutions du modèle fin quand on est proche de l'équilibre vérifient le système parabolique (I.11) et que

$$\|v - v_e(w)\| = \varepsilon \left\| (\partial_v s(w, v_e(w)))^{-1} \Big( \partial_x g(w, v_e(w)) - v_e'(w)^T \partial_x f(w, v_e(w)) \Big) \right\| \tag{III.48}$$

Le second membre permet donc d'avoir un indicateur de la différence entre une solution du modèle fin et une solution du modèle grossier. On peut insister sur le fait que ce n'est pas un estimateur au sens classique car son obtention est totalement formelle, elle nécessite de la régularité pour chaque solution et que le modèle fin soit proche de l'équilibre. Néanmoins, quand ces hypothèses sont mises en défaut, on peut penser que le second membre de (III.48) explose.

On peut effectuer de manière analogue le développement de Chapman-Enskog sur les schémas numériques et obtenir une discrétisation $e_i^{n+1}$ du second membre de (III.48) en fonction des inconnues au temps $t^n$, sans avoir à résoudre le terme source (qu'on avait supposé coûteux à résoudre). L'algorithme d'adaptation de modèle s'écrit ainsi :
Soit $\Theta > 0$ une tolérance et on se donne $(w_i^n, v_i^n)_{i\in\mathbb{Z}}$.

1. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on calcule l'indicateur $e_i^{n+1}$.
2. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, si $e_i^{n+1} < \Theta$
   la maille $K_i$ est dans le domaine grossier $\mathscr{D}_G^n$
   sinon
   la maille $K_i$ est dans le domaine fin $\mathscr{D}_F^n$.
3. On résout le modèle fin dans $\mathscr{D}_F^n$ et le modèle grossier dans $\mathscr{D}_G^n$.
   À chaque interface entre $\mathscr{D}_F^n$ et $\mathscr{D}_G^n$, on résout le problème de couplage à l'aide de la méthode de la section précédente.
4. Pour tout $K_i \in \mathscr{D}_G^n$, on calcule $v_i^{n+1} = v_e(w_i^{n+1})$.

On présente le résultat d'un cas test académique où le modèle fin est le $p$-système pour les gaz de Chaplygin

$$\begin{cases} \mathrm{D}_t \tau - \partial_m v = 0, \\ \mathrm{D}_t v + \partial_m \pi = 0, \\ \mathrm{D}_t \mathscr{T} = \frac{1}{\varepsilon}(\tau - \mathscr{T}), \end{cases} \tag{III.49}$$

avec la fermeture $\pi = \mathscr{P}(\mathscr{T}) + a^2(\mathscr{T} - \tau)$, $\mathscr{P}$ étant une loi de pression classique et $a$ un coefficient positif tel que $a^2 > \sup|\mathscr{P}'(\tau)|$ (voir la section 3.3.3 pour les détails sur ce modèle). Le modèle grossier associé est le $p$-système (I.49) $= \mathscr{P}(\tau)$. On utilise pour les deux modèles le schéma de Rusanov et le terme source de (III.49) est traité par la méthode d'Euler implicite. On présente à la figure III.5 le résultat de l'adaptation de modèle pour un cas test de type problème de Riemann. On voit que l'utilisation du

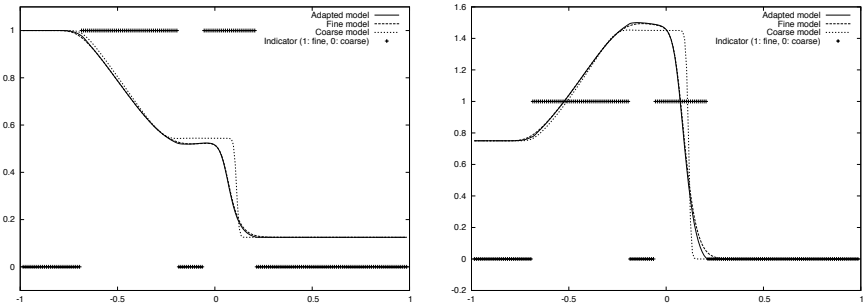



FIGURE III.5 – Adaptation de modèle pour le $p$-système : masse volumique à gauche et vitesse à droite.

modèle fin est localisé sur les ondes et que la solution donnée par l'algorithme adaptatif est superposée à celle du modèle fin alors que la solution du modèle grossier est très différente.

# Publications de l'auteur citées dans le mémoire


[1] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, T. GALIÉ, E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The drift-flux asymptotic limit of barotropic two-phase two-pressure models. *Commun. Math. Sci.*, 6(2):521–529, 2008.

[2] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The coupling of homogeneous models for two-phase flows. *Int. J. Finite Volumes*, 4(1):1–39, 2007.

[3] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Coupling of general Lagrangian systems. *Math. Comp.*, 77(262):909–941, 2008.

[4] B. ANDREIANOV, P. GOATIN et N. SEGUIN : Finite volume schemes for locally constrained conservation laws. *Numer. Math.*, 115(4):609–645, 2010.

[5] B. ANDREIANOV, F. LAGOUTIÈRE, N. SEGUIN et T. TAKAHASHI : Small solids in an inviscid fluid. *Networks Het. Media*, 5(3):385–404, 2010.

[6] B. ANDREIANOV et N. SEGUIN : Analysis of a burgers equation with singular resonant source term and convergence of well-balanced schemes. *Accepté pour publication dans Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A (DCDS-A)*, 2011.

[7] C. CANCÈS et N. SEGUIN : Error estimate for godunov approximation of locally constrained conservation laws. *Soumis pour publication*, 2011.

[8] C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter-dependent source. The case of Euler system with friction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 20(11):2109–2166, 2010.

[9] C. CHALONS, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN : The interface coupling of the gas dynamics equations. *Quart. Appl. Math.*, 66(4):659–705, 2008.

[10] A. CHINNAYYA, A.-Y. LEROUX et N. SEGUIN : A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *Int. J. Finite Volumes*, pages 1–33, 2004.

[11] F. COQUEL, T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : Closure laws for a two-fluid two-pressure model. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(10):927–932, 2002.

[12] F. COQUEL, E. GODLEWSKI et N. SEGUIN : Relaxation of fluid systems. *Accepté pour publication dans Math. Mod. Meth. Appl. Sci.*, 2011.

[13] F. COQUEL, K. SALEH et N. SEGUIN : Relaxation and numerical approximation for fluid flows in a nozzle. *Soumis pour publication*, 2011.

[14] B. DESPRÉS, F. LAGOUTIÈRE et N. SEGUIN : Weak solutions to Friedrichs systems with convex constraints. *Nonlinearity*, 24(11):3055–3081, 2011.

[15] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : A hybrid scheme to compute contact discontinuities in one-dimensional Euler systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36(6):1133–1159, 2002.

[16] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : On the use of symmetrizing variables for vacuums. *Calcolo*, 40(3):163–194, 2003.

[17] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Comput. & Fluids*, 32(4):479–513, 2003.

[18] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD et N. SEGUIN : Numerical modeling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 14(5):663–700, 2004.

[19] E. GODLEWSKI et N. SEGUIN : The Riemann problem for a simple model of phase transition. *Commun. Math. Sci.*, 4(1):227–247, 2006.

[20] E. GODLEWSKI et N. SEGUIN : Modèles hyperboliques d'écoulements complexes dans le domaine de l'énergie. Cours de M2, Université Pierre et Marie Curie, 2011.
URL : http://www.ljll.math.upmc.fr/seguin/enseignement.php.

[21] P. HELLUY et N. SEGUIN : Relaxation models of phase transition flows. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 40(2):331–352, 2006.

[22] F. LAGOUTIÈRE, N. SEGUIN et T. TAKAHASHI : A simple 1D model of inviscid fluid-solid interaction. *J. Differential Equations*, 245(11):3503–3544, 2008.

[23] F. MARCHE, P. BONNETON, P. FABRIE et N. SEGUIN : Evaluation of well-balanced bore-capturing schemes for 2D wetting and drying processes. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 53(5):867–894, 2007.

[24] H. MATHIS et N. SEGUIN : Model adaptation for hyperbolic systems with relaxation. *In Finite volumes for complex applications, VI (Prague, 2011)*, pages 673–681. Springer, 2011.

[25] N. SEGUIN : Génération et validation de Rozavel, un code équilibre en hydraulique 2d. Mémoire de D.E.A., GRAMM, Université Bordeaux I, 1999.

[26] N. SEGUIN et J. VOVELLE : Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficients. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 13(2):221–257, 2003.

[27] M. TOURNUS, A. EDWARDS, N. SEGUIN et B. PERTHAME : Analysis of a simplified model of the urine concentration mechanism. *Soumis pour publication*, 2011.

**N. B.** Les travaux [11, 15, 16, 17, 18, 26] ont été effectués durant la thèse de Doctorat.

# Bibliographie


[AB05] E. AUDUSSE et M.-O. BRISTEAU : A well-balanced positivity preserving "second-order" scheme for shallow water flows on unstructured meshes. *J. Comput. Phys.*, 206(1):311–333, 2005.

[ABB+04] E. AUDUSSE, F. BOUCHUT, M.-O. BRISTEAU, R. KLEIN et B. PERTHAME : A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(6):2050–2065 (electronic), 2004.

[AFK11] G. ALLAIRE, G. FACCANONI et S. KOKH : Modelling and simulation of liquid-vapor phase transition in compressible flows based on thermodynamical equilibrium. *À paraître dans M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 2011. To appear.

[AGG04] D. AMADORI, L. GOSSE et G. GUERRA : Godunov-type approximation for a general resonant balance law with large data. *J. Differential Equations*, 198(2):233–274, 2004.

[AKR11] B. ANDREIANOV, K. H. KARLSEN et N. H. RISEBRO : A theory of $L^1$-dissipative solvers for scalar conservation laws with discontinuous flux. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2011. Available on line.

[AMVG05] ADIMURTHI, S. MISHRA et G. D. VEERAPPA GOWDA : Optimal entropy solutions for conservation laws with discontinuous flux-functions. *J. Hyperbolic Diff. Eq.*, 2(4):783–837, 2005.

[AP05] E. AUDUSSE et B. PERTHAME : Uniqueness for scalar conservation laws with discontinuous flux via adapted entropies. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 135(2):253–265, 2005.

[AW04] N. ANDRIANOV et G. WARNECKE : The Riemann problem for the Baer-Nunziato two-phase flow model. *J. Comput. Phys.*, 195(2):434–464, 2004.

[Bac05] F. BACHMANN : *Équations hyperboliques scalaires à flux discontinu*. Thèse de doctorat, Université de Provence, 2005.

[BB05] S. BIANCHINI et A. BRESSAN : Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems. *Ann. of Math. (2)*, 161(1):223–342, 2005.

[BGH98] T. BUFFARD, T. GALLOUËT et J.-M. HÉRARD : A naive Godunov scheme to compute a non-conservative hyperbolic system. *Int. Series Num. Math.*, 129:129–138, 1998.

[BGH00] T. BUFFARD, T. GALLOUËT et J.-M. HÉRARD : A sequel to a rough Godunov scheme. Application to real gas flows. *Comput. & Fluids*, 29(7):813–847, 2000.

[BGKT08] R. BÜRGER, A. GARCÍA, K. H. KARLSEN et J. D. TOWERS : A family of numerical schemes for kinematic flows with discontinuous flux. *J. Engrg. Math.*, 60(3-4):387–425, 2008.

[BHN07] S. BIANCHINI, B. HANOUZET et R. NATALINI : Asymptotic behavior of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(11):1559–1622, 2007.

[BJ97] P. BAITI et H. K. JENSSEN : Well-posedness for a class of $2 \times 2$ conservation laws with $L^\infty$ data. *J. Differential Equations*, 140(1):161–185, 1997.

[BKT09] R. BÜRGER, K. H. KARLSEN et J. D. TOWERS : An Engquist–Osher-type scheme for conservation laws with discontinuous flux adapted to flux connections. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3):1684–1712, 2009.

[BKW09] F. BOUCHUT, C. KLINGENBERG et K. WAAGAN : An approximate Riemann solver for ideal MHD based on relaxation. *In Hyperbolic problems : theory, numerics and applications*, volume 67 de *Proc. Sympos. Appl. Math.*, pages 439–443. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

[BLT11] C. BERTHON, P. G. LEFLOCH et R. TURPAULT : Late-time/stiff relaxation asymptotic-preserving approximations of hyperbolic equations. *Soumis pour publication*, 2011.

[BM08] C. BERTHON et F. MARCHE : A positive preserving high order VFRoe scheme for shallow water equations : a class of relaxation schemes. *SIAM J. Sci. Comput.*, 30(5):2587–2612, 2008.

[BN86] M. R. BAER et J. W. NUNZIATO : A two-phase mixture theory for the deflagration-to-detonation transition (DDT) in reactive granular materials. *Int. J. Multiphase Flow*, 12:861–889, 1986.

[Bou04a] F. BOUCHUT : *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2004.

[Bou04b] F. BOUCHUT : A reduced stability condition for nonlinear relaxation to conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 1(1):149–170, 2004.

[Bou11] L. BOUDIN : *Modélisation cinétique et hydrodynamique pour la physique, la chimie et la santé, analyse mathématique et numérique*. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, 2011.

[BPV03] R. BOTCHORISHVILI, B. PERTHAME et A. VASSEUR : Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Math. Comp.*, 72(241):131–157 (electronic), 2003.

[BT10] C. BERTHON et R. TURPAULT : Asymptotic preserving HLL schemes. *Numer. Meth. P.D.E.*, 27(6):1396–1422, 2010.

[CDS04] A. CHINNAYYA, E. DANIEL et R. SAUREL : Modelling detonation waves in heterogeneous energetic materials. *J. Comput. Phys.*, 196(2):490–538, 2004.

[CG07a] R. M. COLOMBO et P. GOATIN : A well posed conservation law with a variable unilateral constraint. *J. Differential Equations*, 234(2):654–675, 2007.

[CG07b] J.-F. COULOMBEL et T. GOUDON : The strong relaxation limit of the multidimensional isothermal Euler equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359:637–648, 2007.

[CGP+01] F. COQUEL, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME, A. IN et P. RASCLE : Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems. *In Godunov methods (Oxford, 1999)*, pages 179–188. Kluwer/Plenum, New York, 2001.

[CL94] P. CARGO et A.-Y. LEROUX : Un schéma équilibre adapté au modèle d'atmosphère avec termes de gravité. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 318(1):73–76, 1994.

[CLL94] G. Q. CHEN, C. D. LEVERMORE et T. P. LIU : Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy. *Comm. Pure Appl. Math.*, 47(6):787–830, 1994.

[CP98] F. COQUEL et B. PERTHAME : Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 35(6):2223–2249 (electronic), 1998.

[CP03] R. M. COLOMBO et F. S. PRIULI : Characterization of Riemann solvers for the two phase $p$-system. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(7-8):1371–1389, 2003.

[Daf05] C. M. DAFERMOS : *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, volume 325 de *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, seconde édition, 2005.

[Del03] S. DELLACHERIE : Relaxation schemes for the multicomponent Euler system. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 37(6):909–936, 2003.

[Des01] B. DESPRÉS : Lagrangian systems of conservation laws. *Numer. Math.*, 89(1):99–134, 2001.

[Des07] B. DESPRÉS : A geometrical approach to nonconservative shocks and elastoplastic shocks. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 186(2):275–308, 2007.

[DiP85] R. J. DIPERNA : Measure-valued solutions to conservation laws. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 88(3):223–270, 1985.

[DL88] F. DUBOIS et P. G. LEFLOCH : Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. *J. Differential Equations*, 71(1):93–122, 1988.

[DP98] D. A. DREW et S. PASSMAN : *Theory of Multicomponent Fluids*. Springer, New-York, 1998.

[EGH00] R. EYMARD, T. GALLOUËT et R. HERBIN : Finite volume methods. *In Handbook of numerical analysis, Vol. VII*, Handb. Numer. Anal., VII, pages 713–1020. North-Holland, Amsterdam, 2000.

[Gal03] G. GALLICE : Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in Lagrangian or Eulerian coordinates. *Numer. Math.*, 94(4):673–713, 2003.

[GL96a] L. GOSSE et A.-Y. LEROUX : A well balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws. *C. R. Acad. Sci. Paris*, I(323):543–546, 1996.

[GL96b] J. M. GREENBERG et A.-Y. LEROUX : A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(1):1–16, 1996.

[GL04] P. GOATIN et P. G. LEFLOCH : The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(6):881–902, 2004.

[GLTR05] E. GODLEWSKI, K.-C. LE THANH et P.-A. RAVIART : The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. II. The case of systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 39(4):649–692, 2005.

[GM96] T. GALLOUËT et J.-M. MASELLA : A rough Godunov scheme. *C. R. Acad. Sci. Paris*, I(323):77–84, 1996.

[GM05] O. GRÉGOIRE et M. MARTIN : Derivation of a well-posed and multidimensional drift-flux model for boiling flows. *C. R. Mecanique*, 333(6):459–466, 2005.

[GNPT07] M. GARAVELLO, R. NATALINI, B. PICCOLI et A. TERRACINA : Conservation laws with discontinuous flux. *Netw. Heterog. Media*, 2(1):159–179, 2007.

[God59] S. K. GODUNOV : A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Mat. Sb. (N.S.)*, 47 (89):271–306, 1959.

[Gos01] L. GOSSE : A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 11(2):339–365, 2001.

[Gos02] L. GOSSE : Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws. *Math. Comp.*, 71(238):553–582 (electronic), 2002.

[GP06] M. GARAVELLO et B. PICCOLI : *Traffic flow on networks*, volume 1 de *AIMS Series on Applied Mathematics*. American Institute of Mathematical Sciences (AIMS), Springfield, MO, 2006. Conservation laws models.

[GR91] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : *Hyperbolic systems of conservation laws*, volume 3/4 de *Mathématiques & Applications (Paris) [Mathematics and Applications]*. Ellipses, Paris, 1991.

[GR96] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1996.

[GR04] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART : The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws. I. The scalar case. *Numer. Math.*, 97(1):81–130, 2004.

[GS02] S. GAVRILYUK et R. SAUREL : Mathematical and numerical modelling of two phase compressible flows with inertia. *J. Comp. Phys.*, 175(1):326–360, 2002.

[GT02] L. GOSSE et G. TOSCANI : An asymptotic-preserving well-balanced scheme for the hyperbolic heat equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(4):337–342, 2002.

[GT03] L. GOSSE et G. TOSCANI : Space localization and well-balanced schemes for discrete kinetic models in diffusive regimes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(2):641–658 (electronic), 2003.

[HH83] A. HARTEN et J. M. HYMAN : A self-adjusting grid for the computation of weak solutions of hyperbolic conservation laws. *J. Comp. Phys.*, 50:235–269, 1983.

[HI03] T. HIBIKI et M. ISHII : One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46:4935–4948, 2003.

[Hil05] M. HILLAIRET : Asymptotic collisions between solid particles in a Burgers-Hopf fluid. *Asymptot. Anal.*, 43(4):323–338, 2005.

[HL94] X. HOU et P. G. LEFLOCH : Why non conservative schemes converge to wrong solutions : error analysis. *Mathematics of computation*, 62(206):497–530, 1994.

[HLvL83] A. HARTEN, P. D. LAX et B. van LEER : On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Rev.*, 25(1):35–61, 1983.

[HM11] P. HELLUY et H. MATHIS : Pressure laws and fast Legendre transform. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 21(4):745–775, 2011.

[HMP05] F. HUANG, P. MARCATI et R. PAN : Convergence to the Barenblatt solution for the compressible Euler equations with damping and vacuum. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 176(1):1–24, 2005.

[HN03] B. HANOUZET et R. NATALINI : Global existence of smooth solutions for partially dissipative hyperbolic systems with a convex entropy. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 169(2):89–117, 2003.

[IH06] M. ISHII et T. HIBIKI : *Thermo-fluid dynamics of two-phase flow*. Springer, New York, 2006. With a foreword by Lefteri H. Tsoukalas.

[IT95] E. ISAACSON et B. TEMPLE : Convergence of the $2 \times 2$ Godunov method for a general resonant nonlinear balance law. *SIAM J. Applied Math.*, 55(3):625–640, 1995.

[Jao01] S. JAOUEN : *Étude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase*. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, France, 2001.

[Jin01] S. JIN : A steady-state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 35(4):631–645, 2001.

[JX95] S. JIN et Z. P. XIN : The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 48(3):235–276, 1995.

[Kru70] S. N. KRUZHKOV : First order quasilinear equations with several independent variables. *Mat. Sb. (N.S.)*, 81(123):228–255, 1970.

[Kuz76] N. N. KUZNETSOV : The accuracy of certain approximate methods for the computation of weak solutions of a first order quasilinear equation. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 16(6):1489–1502, 1627, 1976.

[LeR99] A.-Y. LEROUX : Riemann solvers for some hyperbolic problems with a source term. *In Actes du 30ème Congrès d'Analyse Numérique, CANum '98 (Arles, 1998)*, pages 75–90, Paris (France), 1999. Soc. Math. Appl. Indust.

[LeV98] R. J. LEVEQUE : Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : the quasi-steady wave-propagation algorithm. *J. Comp. Phys.*, 146:346–365, 1998.

[LeV02] R. J. LEVEQUE : *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[Liu88] T. P. LIU : Hyperbolic conservation laws with relaxation. *Comm. Math. Phys.*, 108:153–175, 1988.

[LP01] R. J. LEVEQUE et M. PELANTI : A class of approximate Riemann solvers and their relation to relaxation schemes. *J. Comput. Phys.*, 172(2):572–591, 2001.

[LT07] P. G. LEFLOCH et M. D. THANH : The Riemann problem for the shallow water equations with discontinuous topography. *Commun. Math. Sci.*, 5(4):865–885, 2007.

[MFG99] J.-M. MASELLA, I. FAILLE et T. GALLOUËT : On an approximate Godunov scheme. *Int. J. of Comp. Fluid Dyn.*, 12:133–149, 1999.

[MSNA02] J. MASSONI, R. SAUREL, B. NKONGA et R. ABGRALL : Some models and eulerian methods for interface problems between compressible fluids with heat transfer. *Internat. J. Heat Mass Transfer*, 45(6):1287–1307, 2002.

[NXS07] S. NOELLE, Y. XING et C.-W SHU : High-order well-balanced finite volume WENO schemes for shallow water equation with moving water. *J. Comput. Phys.*, 226(1):29–58, 2007.

[Ole59] O. A. OLEĬNIK : Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation. *Uspehi Mat. Nauk*, 14(2 (86)):165–170, 1959.

[Pan07] E. Yu. PANOV : Existence of strong traces for quasi-solutions of multidimensional conservation laws. *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 4(4):729–770, 2007.

[PC04] C. PARÉS et M. CASTRO : On the well-balance property of Roe's method for nonconservative hyperbolic systems. Applications to shallow-water systems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(5):821–852, 2004.

[PS01] B. PERTHAME et C. SIMEONI : A kinetic scheme for the Saint-Venant system with a source term. *Calcolo*, 38(4):201–231, 2001.

[Ran87] V. H. RANSOM : *Numerical benchmark tests, Multiphase Science and Technology*. Hemisphere publishing corporation, G.F. Hewitt, J.M. Delhaye & N. Zuber édition, 1987.

[Roe81] P. L. ROE : Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, 43:357–372, 1981.

[Rus61] V. V. RUSANOV : The calculation of the interaction of non-stationary shock waves with barriers. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 1:267–279, 1961.

[SA99] R. SAUREL et R. ABGRALL : A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows. *J. Comput. Phys.*, 150(2):425–467, 1999.

[Sai95] L. SAINSAULIEU : Contribution à la modélisation mathématique et numérique des écoulements diphasiques constitués d'un nuage de particules dans un écoulement de gaz. Habilitation à diriger des recherches, Université Pierre et Marie Curie, 1995.

[Ser96a] D. SERRE : *Systèmes de lois de conservation. I*. Fondations. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves].

[Ser96b] D. SERRE : *Systèmes de lois de conservation. II*. Fondations. [Foundations]. Diderot Editeur, Paris, 1996. Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes. [Geometric structures, oscillation and mixed problems].

[SV71] J.-C. SAINT-VENANT : Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 73:147–154, 1871.

[SW84] H. B. STEWART et B. WENDROFF : Two-phase flow : models and methods. *J. Comput. Phys.*, 56(3):363–409, 1984.

[SWK06] D. W. SCHWENDEMAN, C. W. WAHLE et A. K. KAPILA : The Riemann problem and a high-resolution Godunov method for a model of compressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, 212(2):490–526, 2006.

[Tem82] B. TEMPLE : Global solution of the Cauchy problem for a class of $2 \times 2$ nonstrictly hyperbolic conservation laws. *Adv. in Appl. Math.*, 3(3):335–375, 1982.

[Tor09] E. F. TORO : *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 2009. A practical introduction.

[Tow00] J. D. TOWERS : Convergence of a difference scheme for conservation laws with a discontinuous flux. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(2):681–698, 2000.

[Vas01] A. VASSEUR : Strong traces for weak solutions to multidimensional conservation laws. *Arch. of Rat. Mech. Anal.*, 160(3):181–193, 2001.

[Vis94] A. VISINTIN : *Differential models of hysteresis*, volume 111 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[VZ03] J. L. VÁZQUEZ et E. ZUAZUA : Large time behavior for a simplified 1D model of fluid-solid interaction. *Comm. Partial Differential Equations*, 28(9-10):1705–1738, 2003.

[VZ06] J. L. VÁZQUEZ et E. ZUAZUA : Lack of collision in a simplified 1D model for fluid-solid interaction. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 16(5):637–678, 2006.

[Wag87] D. H. WAGNER : Equivalence of the Euler and Lagrangian equations of gas dynamics for weak solutions. *J. Differential Equations*, 68(1):118–136, 1987.

[Whi74] G. B. WHITHAM : *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1974. Pure and Applied Mathematics.

[Yon99] W.-A. YONG : Singular perturbations of first-order hyperbolic systems with stiff source terms. *J. Differential Equations*, 155(1):89–132, 1999.

[Yon04] W.-A. YONG : Entropy and global existence for hyperbolic balance laws. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 172(2):247–266, 2004.

[ZF65] N. ZUBER et J. A. FINDLAY : Average volumetric concentration in two-phase flow systems. *J. Heat Transfer*, 68:453–468, 1965.