



HAL
open science

Etude du comportement dynamique et optimisation d'absorbeurs non linéaires : théorie et expérience

Tuan-Anh Nguyen

► **To cite this version:**

Tuan-Anh Nguyen. Etude du comportement dynamique et optimisation d'absorbeurs non linéaires : théorie et expérience. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2010. Français. NNT : 2010ECDL0003 . tel-00665137

HAL Id: tel-00665137

<https://theses.hal.science/tel-00665137>

Submitted on 1 Feb 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée devant

ECOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

FORMATION DOCTORALE: Génie Civil

ECOLE DOCTORALE MEGA (Mécanique, Energétique, Génie Civil, Acoustique)

ECL - INSA - UCBL - ENTPE

par

NGUYEN Tuan Anh

(Ingénieur génie civil de l'Ecole Supérieure de Génie Civil - Vietnam)

ETUDE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE ET OPTIMISATION D'ABSORBEURS NON LINEAIRES: THEORIE ET EXPERIENCE

soutenu le 14 janvier 2010 devant la commission d'examen:

M. Bruno COCHELIN	DR Professeur	ECM	Rapporteur
M. Pierre ARGOUL	HDR	ENPC	Rapporteur
M. Alain BERLIOZ	Professeur	UPS Toulouse	Examineur
M. Fabrice THOUVEREZ	Professeur	ECL	Examineur
M. Claude-Henri LAMARQUE	HDR	ENTPE	Directeur de thèse
M. Stéphane PERNOT	CR	ENTPE	Tuteur
M. Zoran DIMITRIJEVIC	CR	PSA	Invité

Résumé

Le concept de pompage énergétique qui a inspiré de nombreux travaux de recherche depuis plus d'une dizaine d'années, est un phénomène dynamique prometteur susceptible de susciter le développement d'innovations de premier plan. Les absorbeurs non linéaires qui utilisent ce principe de fonctionnement ont démontré une grande efficacité par rapport à des absorbeurs classiques linéaires dans certaines configurations de résonances. Le transfert des développements théoriques vers une application réelle exige une méthodologie d'optimisation des absorbeurs de vibrations non linéaire similaire au cas des absorbeurs linéaires. Un nouvel éclairage est donné dans cette thèse visant à répondre à ce propos en définissant des critères analytiques ou pseudo-analytiques de design optimal de la raideur non linéaire.

Sur la base de la méthodologie esquissée, nous avons proposé une application réelle de cette nouvelle génération d'absorbeur non linéaire sur un modèle de véhicule Peugeot 307-CC pour atténuer les vibrations dues au premier mode de torsion de caisse. La présente étude fait l'objet d'une collaboration industrielle PCA/CNRS/ENTPE qui consiste à diminuer la masse des absorbeurs ajoutés en utilisant le pompage énergétique. Des études analytique et numérique sont menées en parallèle avec une campagne d'essai dynamique sur un prototype hébergé à l'École ESTACA simulant le mode de torsion considéré du véhicule. Les premiers résultats semblent attester un début prometteur pour l'emploi des NES dans un cas réel.

Pour analyser des signaux de réponse de système dynamique non linéaire, souvent très complexes tant sur le plan temporel que sur le plan fréquentiel, un outil numérique ondelettes a été développé introduisant de nouveaux algorithmes rapides pour rendre efficace les calculs des analyses super-résolutions sur des grilles temps-fréquence denses.

Mots-clés: Absorbeur non linéaire, design optimal, pompage énergétique, ondelette, analyse ondelettes super-résolution.

Abstract

The concept of pumping energy which has inspired many studies for now a decade, seems to be an interesting dynamic phenomenon likely to urge the development of great innovations.

Nonlinear absorbers designed according to this principle proved to be very robust and efficient in numerous resonant cases by comparison with their standard linear counterpart. Eventual transfer from theory to a real application requires a methodology for optimizing nonlinear vibration absorbers similar to the case of linear absorbers. Present PhD thesis highlights new analytical and/or pseudo analytical criteria for designing optimal nonlinear stiffness of nonlinear absorbers.

Following our design rules, we introduce a real application of this new generation of nonlinear absorbers aimed to mitigate vibration in a Peugeot 307-CC car model induced by the first torsional mode of the car body. Present work that is also contracted with Peugeot/Citroën industrial car manufacturer aims to reduce the payload due to the attachment of two dampers by considering a nonlinear technology instead. Analytical and numerical studies are achieved in parallel with a dynamic testing campaign led on the ESTACA prototype simulating torsion mode of the vehicle of concern. Preliminary results happen to confirm promising starts for using NES absorbers in a real case.

A wavelet numerical software was developed in addition to analyze complex responses of investigated dynamic systems that implement the up to date version of new fast algorithms allowing to make more efficient computations of wavelet scalograms in relationship with dense super-resolution time-frequency grids.

Keywords: nonlinear absorber, optimal design, energy pumping, wavelet, super-resolution wavelet analysis.

Table des matières

Introduction	1
I Ondelettes et Outils d'analyse en dynamique	5
1 Analyse Multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$	7
1.1 Analyse en ondelettes	8
1.1.1 Les ondelettes	8
1.1.2 La transformée en ondelettes continue	8
1.1.3 La transformée en ondelettes discrète	10
1.2 Analyse multirésolution	10
1.2.1 Espaces d'approximation	11
1.2.2 Espaces de détail	12
1.2.3 Théorie des filtres miroirs	13
1.2.4 Algorithmes rapides de S. Mallat	14
1.3 Approche opérateur-ondelettes	16
1.3.1 Opérateur d'intégration-ondelettes	18
1.3.2 Opérateur de convolution-ondelettes	24
1.3.3 Opérateur de déconvolution-ondelettes	30
1.4 Conclusion	37
2 Analyse Super-Résolution	39
2.1 Introduction	40
2.2 Rappels préliminaires	40
2.2.1 Analyse surabondante de Perrier	41
2.2.2 Analyse Super-Résolution de S. Coutel	42
2.3 Implémentation rapide d'une analyse super-résolution	46
2.3.1 Filtres Super-résolutions	46
2.3.2 Filtres Super-résolutions Réduits	49
2.4 Présentation de l'Outil Scalogram	51
2.4.1 Structure et fonctionnalités principales de l'Outil Scalogram	51
2.4.2 Procédure de construction des scalogrammes	52
2.4.3 Validations des superMRA	58
2.5 Conclusion	60
3 Application des ondelettes en Traitement des signaux d'expérimentation	61
3.1 Modélisation de la dynamique d'une structure multiportique	62
3.1.1 Études d'une barre bi-encastée	62
3.1.2 Construction des fonctions de forme	63
3.1.3 Construction du système dynamique	63
3.1.4 Calcul des modes propres	65
3.1.5 Régime forcé (déplacement d'appui) avec l'amortissement	67

3.2	Expérimentation	69
3.2.1	Instrumentation	69
3.2.2	Analyse super-résolution des signaux expérimentaux	70
3.2.3	Estimation des coefficients d'approximation des FrF de la structure linéaire	70
3.3	Conclusion	74
 II Comportement dynamique et Optimisation des oscillateurs couplés à des absorbeurs essentiellement non linéaires		75
4	Pompage énergétique en régime instationnaire	77
4.1	Études théoriques d'un oscillateur attaché à un NES	78
4.1.1	Modèle considéré	78
4.1.2	Complexification et Échelles multiples	79
4.1.3	Scénarios de transfert énergétique - Énergie d'activation	82
4.2	Développement du design pour plusieurs NES	86
4.2.1	Modèle considéré	86
4.2.2	Pyramide d'activation des NES	90
4.3	Robustesse du critère de design	91
4.3.1	Exemple de design d'un NES	91
4.3.2	Exemple de design d'un couple de NESs en parallèle	92
4.4	Conclusions et Remarques	99
5	Pompage énergétique en régime stationnaire	101
5.1	Études analytiques	102
5.1.1	Description et simplification du Modèle considéré	102
5.1.2	Réponse fortement stationnaire - Points fixes	104
5.1.3	Analyse de stabilité linéaire	108
5.1.4	Approche échelles multiples	110
5.2	Vérifications numériques	115
5.3	Vérification expérimentale	126
5.4	Optimisation de la raideur non linéaire	127
5.5	Conclusions et Remarques	132
 III Design et optimisation d'un absorbeur passif non linéaire dans le cadre d'une application automobile		133
6	Présentation du problème et Mise en équation	135
6.1	Introduction	136
6.2	Modèle éléments finis T76 et réduction modale	138
6.2.1	Modèle en base physique T76 – code Nastran –	139
6.2.2	Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton	142
6.3	Modèle spectral avec NES balancier	144
6.3.1	Hypothèses de modélisation	145
6.3.2	Modèle continu avec NES balancier	146
6.3.3	Modèle dynamique discrétisé E.F.	149
6.3.4	Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton	151
6.4	Études analytiques des modèles non linéaires condensés	152
6.4.1	Comportement dynamique en régime libre	152
6.4.2	Étude du modèle NES balancier sous sollicitation de trépidation	154
6.5	Études numériques des modèles non linéaires condensés	155

6.5.1	Comparaison de l'efficacité des absorbeurs en régime libre	156
6.5.2	Comparaison de l'efficacité des absorbeurs dans le cas d'une excitation de trépidation	163
6.6	Conclusions	171
7	Expérimentation sur le prototype ESTACA	173
7.1	Solutions de technologie	174
7.1.1	Présentation du banc d'essai ESTACA	174
7.1.2	Conception des composants et des raccords du balancier	175
7.2	Résultats expérimentaux	178
7.3	Conclusion et remarques	183
	Conclusions et Perspectives	187

Introduction

Dans le monde automobile, l'architecture des véhicules induit un manque de rigidité en torsion, qui se traduit par une dégradation du confort vibratoire. La solution classique est d'atténuer les trépidations dues au premier mode de torsion de caisse par l'ajout de systèmes masse-ressort appelés batteurs dynamiques linéaires. C'est le cas pour les véhicules automobiles de marque commerciale Peugeot 307-CC dont les batteurs sont situés sous les longerons. Cette solution robuste a le gros inconvénient d'augmenter la masse du véhicule d'une vingtaine de kg. La solution proposée ici est de remplacer le système linéaire actuel par un système non linéaire beaucoup plus léger avec une efficacité au moins équivalente voire meilleure que celle des batteurs linéaires. C'est le principal objectif de cette présente étude qui fait également l'objet d'un contrat industriel PCA/CNRS-10-07-06.

Il s'agit d'une application du pompage énergétique qui vise le transfert irréversible (discutable ou non) de l'énergie vibratoire d'une structure principale vers une structure auxiliaire couplée dans un cas réaliste de véhicule. Pourquoi utilise-t-on cette nouvelle génération d'absorbeurs non linéaires ? Effectivement, cette notion de contrôle passif par pompage énergétique via une structure non linéaire dédiée a fait l'objet de nombreuses publications [8–12] depuis plus d'une dizaine d'années déjà. Récemment, E. Gourdon [15] a montré dans sa thèse la très bonne efficacité de l'absorbeur de vibrations ainsi construit, son avantage par rapport à des absorbeurs linéaires classiques et le passage possible de la théorie à une application réelle.

Le premier modèle proposé est déjà étudié par B. Vaurigaud [36] dans son master de recherche en utilisant des absorbeurs non linéaires séparés mais ce modèle montre certaines lacunes qui peuvent devenir rédhibitoires lors d'un fonctionnement en présence de forces de gravité. En effet, le point important et primordial du pompage énergétique est d'introduire la forte non linéarité dans la conception de la structure ajoutée. Malheureusement dans le cas réaliste d'un système automobile, le fonctionnement vertical des absorbeurs est toujours soumis à l'influence de la force de gravité qui peut casser le caractère essentiel de la non linéarité de raideur. La recherche d'autres solutions palliatives afin de minimiser le plus possible l'influence de la gravité a donné naissance à une nouvelle configuration d'absorbeurs non linéaires dits en balancier qui semblent convenir à des structures vibrant principalement selon un mode de torsion.

Les études dynamiques du système de véhicule automobile couplé à ces nouveaux absorbeurs non linéaires en balancier se portent à la fois sur des aspects analytiques, numériques et expérimentaux. Ce travail comprend des modélisations (éléments finis, condensation sur la base de Craig-Bampton), des simulations numériques avec les bases modales réduites, des expérimentations de réponses vibratoires sur une maquette représentative réalisées au sein du laboratoire Vibrations et Acoustique, École Supérieure des Techniques Aéronautiques et de Construction Automobile (ESTACA).

La réduction modale du problème conduit enfin à un système académique simplifié $2ddl$ s constitué d'un oscillateur linéaire couplé à une masse auxiliaire via une attache fortement non linéaire. Ce concept de pompage énergétique semble donc un phénomène dynamique innovant qui a inspiré plusieurs recherches dans la communauté scientifique. La plupart des études précédentes s'attachent à démontrer la faisabilité du pompage dans certaines configurations de résonances mais aucune d'elles n'a jusqu'alors envisagé de construire un critère de design de la raideur non linéaire caractérisant l'attache et permettant de garantir un fonctionnement efficace et robuste du phénomène de pompage énergétique. Cette thèse tente d'apporter un nouvel éclairage à ce propos en définissant des critères analytiques ou pseudo-analytiques de design optimal pour les absorbeurs non linéaires ajoutés. Les aspects suivants sont ainsi traités :

- Est-ce que le pompage énergétique est vraiment irréversible ou est-ce seulement un mécanisme de dissipation énergétique grâce à l'amortissement de l'attache rajoutée comme dans le cas des absorbeurs linéaires ?
- Quelle est la relation entre la raideur non linéaire optimale et l'énergie initiale en régime instationnaire ou l'énergie de la force en régime stationnaire par rapport au point de fonctionnement optimal ?
- Comment définir une quantification de l'efficacité du pompage ?
- Quelle est la limite d'efficacité du pompage en régime stationnaire ?

À côté de l'aspect du pompage énergétique, une partie de cette thèse porte aussi sur le développement d'un outil numérique performant permettant d'analyser des signaux de réponse du système dynamique non linéaire qui sont souvent très complexes tant sur le plan temporel que sur le plan fréquentiel. En effet, un tel outil ondelette a déjà été développé par S. Coutel et S. Pernot [4, 28] et utilisé au sein du laboratoire LGM. Ces études développent deux pistes différentes :

Le premier enjeu de recherche se concentre dans la construction d'une stratégie d'identification de structures linéaires avec l'approche des opérateurs-ondelettes dans le cadre des analyses multi-résolutions. Une des applications sous-jacentes à la convolution concerne l'identification de fonctions de réponse en fréquence (FrF's) d'un système directement à partir d'expériences comportant du bruit ou des perturbations. Le caractère multi-échelle de la méthodologie inverse permet de lisser les FrF's en filtrant le bruit de mesure.

Des recherches menées parallèlement en théorie du signal, ont permis d'aboutir à la construction de méthodes de cartographie d'un signal vibratoire afin d'en explorer le contenu temps-fréquence avec une possibilité de zoom adaptatif et permettent d'extraire les fréquences instantanées. Une méthodologie de cartographie quasi-continue introduite par S. Coutel [4] permettant de calculer des scalogrammes denses en résolution semble très utile et efficace. Mais les contraintes concernant le coût de calcul et de l'exigence massive de mémoire empêchent son application en pratique. À partir de ce contexte, de nouveaux algorithmes initiés par S. Pernot sont proposés dans cette thèse pour rendre efficaces les calculs des analyses super-résolutions.

De gros efforts sont portés sur le développement d'une Toolbox en l'environnement MATLAB permettant la mise en œuvre de ces nouvelles approches en ondelette. Il s'agit d'un outil performant grâce à une interface visuelle simple, des coûts de calcul très rapides et l'extension d'utilisation pour une large gamme de familles d'ondelettes. Il sera plus ou moins utilisé

dans les études du phénomène de pompage énergétique pour analyser des signaux de vibration numériques et expérimentaux.

Organisation du mémoire

Cette thèse est organisée en trois grandes parties dont chacune est composée de deux ou trois chapitres pour répondre à une problématique dédiée.

Dans une première partie, nous introduisons l'outil ondelette qui sera utilisé dans la suite de ces travaux. Après des rappels brefs des transformées en ondelettes continues et discrètes, les opérateurs linéaires et bilinéaires sont traités dans l'espace approximé des ondelettes en introduisant des algorithmes rapides sur les coefficients d'échelle des signaux. Le deuxième chapitre est ensuite consacré à présenter la nouvelle méthodologie de calcul rapide des scalogrammes pour des événements temps-fréquence. La construction et le tutoriel d'utilisation d'une Toolbox en environnement MATLAB sont aussi détaillées dans ce chapitre. Enfin, cet outil des ondelettes est appliqué à l'identification d'une structure simple de bâtiment à échelle réduite à quatre étages.

Dans une deuxième partie, nous apporterons des contributions à la théorie de base du pompage énergétique. En particulier, dans le quatrième chapitre, nous nous intéressons à ce phénomène en régime instationnaire, c'est à dire pendant le temps transitoire. Nous cherchons à décrire les relations énergétiques entre des modes non linéaires pour mieux comprendre le mécanisme de dissipation énergétique afin de donner un critère analytique de design optimal de la raideur non linéaire caractérisant l'attache de la masse ajoutée. Un développement du design pour plusieurs absorbeurs en parallèles est aussi étudié pour améliorer la plage d'énergie de l'efficacité du pompage énergétique en régime instationnaire. Ensuite, le cinquième chapitre se consacre à étudier le pompage énergétique en régime stationnaire, à savoir à long terme sous excitation périodique. Les zones des solutions quasi-périodiques représentant l'efficacité du pompage énergétique et le plafond de cette efficacité sont particulièrement intéressantes dans ces études. Des vérifications numériques en comparaison avec des absorbeurs non linéaires classiques permettent de pouvoir proposer un critère pseudo-analytique d'optimisation de la raideur non linéaire.

Une troisième partie expérimentale fait suite aux études théoriques du phénomène de pompage énergétique dans la partie précédente, nous tentons une application sur une structure réelle des véhicules automobiles Peugeot 307-CC. Nous commencerons par les études analytiques et numériques sur le modèle des éléments finis NASTRAN qui comprennent des condensations modales, des études analytiques sur le modèle condensé à un seul mode et des simulations numériques. Dans un deuxième temps, le volet expérimental est réalisé sur une maquette représentative du mode de vibration ciblé. Des solutions technologiques sont réalisées pour la mise en œuvre de vrais absorbeurs en balancier. Les résultats expérimentaux sont présentés et modélisés par un modèle analytique très simple permettent de donner des idées sur l'étape d'optimisation du balancier qui suit.

Enfin, des conclusions sont apportées en donnant des perspectives d'évolution de la thématique de recherche.

Première partie

**Ondelettes et Outils d'analyse en
dynamique**

Chapitre 1

Analyse Multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$

Ce chapitre tente de présenter brièvement la définition des transformées en ondelettes continues et discrètes dans l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R})$ et les propriétés fondamentales de l'Analyse Multirésolutions (AMR). Ensuite, nous abordons l'approche opérateur-ondelettes avec des algorithmes rapides des opérateurs dans l'espace approximé des ondelettes. Cet approche est appliquée d'abord à l'opérateur d'intégration qui sera utilisé pour obtenir des déplacements depuis des accélérations acquises dans les essais avec un système dynamique linéaire. Des représentations algébriques sont aussi construites pour les opérateurs de convolution et déconvolution sous forme de noyaux de Green dans l'analyse des systèmes linéaires. La robustesse de l'implémentation des opérateurs ondelettes sera validée sur des exemples d'oscillation harmonique.

Sommaire

1.1	Analyse en ondelettes	8
1.1.1	Les ondelettes	8
1.1.2	La transformée en ondelettes continue	8
1.1.3	La transformée en ondelettes discrète	10
1.2	Analyse multirésolution	10
1.2.1	Espaces d'approximation	11
1.2.2	Espaces de détail	12
1.2.3	Théorie des filtres miroirs	13
1.2.4	Algorithmes rapides de S. Mallat	14
1.3	Approche opérateur-ondelettes	16
1.3.1	Opérateur d'intégration-ondelettes	18
1.3.2	Opérateur de convolution-ondelettes	24
1.3.3	Opérateur de déconvolution-ondelettes	30
1.4	Conclusion	37

1.1 Analyse en ondelettes

1.1.1 Les ondelettes

Les ondelettes sont des fonctions oscillantes caractérisées par certaines propriétés mathématiques de régularité et qui sont utilisées pour représenter des signaux ou d'autres fonctions. Cette idée prit naissance à partir de la décomposition en série de Fourier qui se montre particulièrement bien adaptée à l'analyse des phénomènes stationnaires mais n'apporte pas de réponse satisfaisante quant à l'étude d'évènements transitoires comme des réflexions d'ondes de choc sur un système mécanique. L'analyse en ondelettes consiste à produire un assemblage d'atomes balayant l'ensemble du plan temps-fréquence. La spécificité des ondelettes tient à la construction des atomes à partir d'une seule et unique fonction analysante. Une façon commode d'obtenir une famille d'atomes temps-fréquence est de considérer des motifs translatés ou dilatés de la fonction de base, dite ondelette mère.

Définition 1.1 (Ondelette admissible). On appelle 'ondelette admissible' toute fonction $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété de régularité :

$$\hat{\psi}(0) = 0 \iff \int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0, \quad (1.1)$$

ainsi qu'une condition d'admissibilité :

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(f)|^2}{f} df < +\infty. \quad (1.2)$$

En combinant des translations¹ de paramètre b et des dilatations² de facteur d'échelle a avec l'ondelette mère ψ , on définit finalement les fonctions élémentaires $\psi_{a,b}$ de l'analyse en ondelettes par la relation :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{H}, \quad \psi_{a,b} = \tau_b D_a \psi = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{\cdot - b}{a} \right), \quad (1.3)$$

où \mathbb{H} est l'espace des paramètres temps-échelle :

$$\mathbb{H} = \{(a, b) : a > 0, b \in \mathbb{R}\}. \quad (1.4)$$

1.1.2 La transformée en ondelettes continue

De façon analogue à l'analyse de Fourier, les analyses en ondelettes réalisent la transformation intégrale d'un signal donné par projection sur un ensemble (continu ou dénombrable) de fonctions. Dans le cas des analyses en ondelettes, ces dernières fonctions sont des atomes temps-fréquence construits par dilatation et translation d'une seule et unique fonction analysante comme évoqué ci-dessus.

¹Effet d'une translation $\tau_b : \psi \rightarrow \psi(\cdot - b)$ et sa transformée de Fourier $\hat{\tau}_b(\psi)(\xi) = e^{-2i\pi b\xi} \hat{\psi}(\xi)$

²Effet d'une dilatation $D_a : \psi \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} \psi \left(\frac{\cdot}{a} \right)$ et sa transformée de Fourier $\widehat{D}_a(\psi)(\xi) = \sqrt{a} \hat{\psi}(a\xi)$

Définition 1.2 (Transformée en ondelettes). Soit une ondelette ψ , on appelle transformée en ondelette continue sur $L^2(\mathbb{R})$, l'application linéaire χ définie selon la relation :

$$\begin{aligned} \chi_\psi : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow L^2(\mathbb{H}), \\ f &\rightarrow \chi_\psi^f, \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec la relation :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{H} : \chi_\psi^f(a, b) = \langle f, \psi_{a,b} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \quad (1.6)$$

correspondant au produit scalaire de $f \in L^2(\mathbb{R})$ avec le motif dilaté-translaté $\psi_{a,b}$ de l'ondelette mère ψ . En remarquant que cette dernière vérifie la condition de nullité de son moment d'ordre 0 donnée par (1.1), ψ est un filtre passe-bande et χ_ψ s'exprime comme une convolution du signal avec ce filtre permettant de grossir certains niveaux de détails à la manière d'un zoom.

Théorème 1.3 (Transformée en ondelettes inverse). *Étant donnée une ondelette admissible ψ , alors un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ peut être reconstruit suivant l'intégrale double sur le demi-plan position-échelle \mathbb{H} :*

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_\psi^f(a, b) \psi_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}. \quad (1.7)$$

Une autre idée de l'analyse en ondelettes tient à l'analyse de signaux arbitraires $f \in L^2(\mathbb{R})$ selon différentes échelles de longueur. L'objectif est d'observer le signal avec une échelle de longueur adaptative de manière à mettre en évidence des approximations successives de f . C'est dans cette perspective que l'on a introduit la notion de fonction d'échelle définie ci-après :

Définition 1.4 (Fonction d'échelle admissible). Soit ψ une ondelette admissible, alors on appelle fonction d'échelle admissible toute fonction $\phi \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^{+\infty}(\mathbb{R})$ vérifiant les relations :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (t\partial_t + id)[\phi] = \psi(t), \quad (1.8)$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\phi(\xi)|^2 = \int_1^{+\infty} |\psi(a\xi)|^2 \frac{da}{a} = \int_\xi^{+\infty} \frac{|\psi(\nu)|^2}{\nu} d\nu, \quad (1.9)$$

où id désigne l'identité.

Définition 1.5 (Transformée en échelle). Soit ϕ une fonction d'échelle admissible, alors la transformée en échelle \mathcal{Z}_ϕ^f d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par la relation :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{H} \quad \mathcal{Z}_\phi^f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt. \quad (1.10)$$

La relation entre les coefficients d'échelles d'un signal et les coefficients de détails à une même résolution est donnée par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{H}, \quad \chi_\psi^f(a, b) = -a\partial_a \mathcal{Z}_\phi^f(a, b). \quad (1.11)$$

Cette relation montre que la voie de coefficients $\chi_\psi^f(a, b)$ reflète les variations infinitésimales des coefficients d'échelle $\mathcal{Z}_\phi^f(a, \cdot)$ selon l'axe de résolution. Elle caractérise donc un enrichissement des coefficients d'échelle selon des résolutions décroissantes.

Théorème 1.6 (Transformée en échelles inverse). *Soient ϕ une fonction d'échelle admissible et a un scalaire strictement positif, alors on définit les approximations 'filtrées' d'un signal $f \in L^2(\mathbb{R})$ à la résolution a par le produit de convolution :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sigma_a(t) = \frac{1}{C_\psi} \left[\mathcal{Z}_\phi^f(a, \cdot) \star \phi_a \right] (t). \quad (1.12)$$

Avec les hypothèses précédentes, les approximations filtrées σ_a convergent vers φ au sens de la norme $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si l'amplitude de ϕ est étalonnée de manière à satisfaire l'égalité $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$, c'est-à-dire :

$$\lim_{a \rightarrow 0} \|\sigma_a - f\| = 0. \quad (1.13)$$

1.1.3 La transformée en ondelettes discrète

La bonne lisibilité du demi-plan temps-fréquence \mathbb{H} et les propriétés de covariance par dilatation-translation font de la transformée en ondelettes continue un outil privilégié de la théorie du signal. Cet outil demeure cependant une théorie analytique en raison de la redondance des coefficients et des sommes continues mobilisées pour leur calcul. Le théorème d'échantillonnage de Shannon [32] montre néanmoins qu'il n'est pas nécessaire de connaître toutes les voies de décomposition mais qu'il est suffisant de considérer les coefficients d'ondelettes appartenant au réseau dyadique

$$\Omega = \{(2^m, n2^m) \in \mathbb{H}, \forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2\}, \quad (1.14)$$

pour reconstruire le signal analysé sans perte d'information.

Définition 1.7 (Transformée en ondelettes discrète). Les ondelettes discrètes $\psi_{j,k}$ associées au réseau Ω sont définies par :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad (1.15)$$

et la transformée discrète χ_ψ d'un signal f est une application linéaire :

$$\begin{aligned} \chi_\psi : L^2(\mathbb{R}) &\rightarrow l^2(\mathbb{Z}^2), \\ f &\rightarrow \chi_\psi^f, \end{aligned} \quad (1.16)$$

telle que $\forall (j, n) \in \mathbb{Z}^2 : \chi_\psi^f(j, n) = \langle f, \psi_{j,n} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}$.

1.2 Analyse multirésolution

L'analyse multirésolution (AMR) définie conjointement par S.Mallat [19, 20] et Y.Meyer [24, 25] consiste en une hiérarchie d'approximations représentant des contributions allant des échelles grossières jusqu'à l'échelle j et convergeant vers le signal analysé lorsque l'échelle j tend vers l'infini. Elle est faite à travers une suite d'espaces d'approximations $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ vérifiant la définition suivante :

1.2.1 Espaces d'approximation

Définition 1.8 (Espaces d'approximations). Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est définie par une suite de sous-espaces emboîtés de $L^2(\mathbb{R})$ vérifiant les propriétés :

$$(Espaces\ emboîtés) \quad \cdots \subset V_0 \subset \cdots \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (1.17)$$

$$(Fermeture) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0, \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}), \quad (1.18)$$

$$(Dilatation) \quad \forall f \in V_j, f(2 \cdot) \in V_{j+1}, \quad (1.19)$$

$$(Translation) \quad \forall f \in V_j, f(\cdot - k/2^j) \in V_j, \quad (1.20)$$

$$(Base\ orthonormée) \quad \exists \phi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tq } V_0 = \text{Vect}\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (1.21)$$

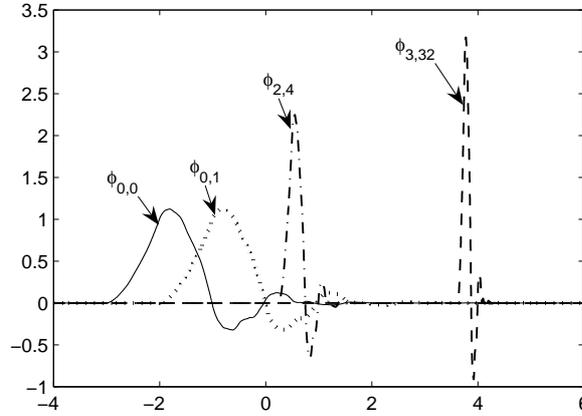


FIGURE 1.1 – Dilatées-translatées de la fonction d'échelle ϕ Daubechies d'ordre $N = 4$

Proposition 1.9 (Base orthonormée de V_j). Une base orthonormée de l'espace V_j est donnée par la collection $\underline{\phi} = \{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.22)$$

Quelques motifs dilatés-translatés de la fonction d'échelle Φ Daubechie d'ordre 4 sont représentés en Figure 1.1.

Proposition 1.10 (Série d'échelles). Soit P_j le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace d'approximation V_j donné par

$$P_j \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \mapsto V_j, \\ f & \mapsto P_j f = f s_j. \end{cases} \quad (1.23)$$

On a alors la décomposition en série d'échelles

$$f s_j = P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}, \quad (1.24)$$

avec l'approximation limite

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} P_j f \stackrel{L^2(\mathbb{R})}{=} f. \quad (1.25)$$

Les approximations successives de f sont de plus en plus précises en incorporant des détails lorsque l'échelle j croît. La différence d'information entre deux approximations successives $f s_j$ et $f s_{j+1}$ respectivement dans les espaces V_j et V_{j+1} symbolise en fait la voix de détails de la fonction f vivant à la résolution $a = 2^j$. Le concept des voix de détails est associé à celui d'espaces de détails comme suit :

1.2.2 Espaces de détail

Définition 1.11 (Espaces de détails). On appelle espaces de détails W_j d'une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ la suite de sous-espaces vérifiant les propriétés :

$$(Suppl. orthogonaux) \quad \forall j \in \mathbb{Z}, V_j \overset{\perp}{\oplus} W_j = V_{j+1}, \quad (1.26)$$

$$(Superposition de détails) \quad \overset{\perp}{\bigoplus}_{j \in \mathbb{Z}} W_j = V_0 \overset{\perp}{\bigoplus}_{j \geq 0} W_j = L^2(\mathbb{R}), \quad (1.27)$$

$$(Dilatation) \quad \forall f \in W_j, f(2 \cdot) \in W_{j+1}, \quad (1.28)$$

$$(Translation) \quad \forall f \in W_j, f(\cdot - k/2^j) \in W_j, \quad (1.29)$$

$$(Base orthonormée) \quad \exists \psi \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tq } W_0 = \text{Vect}\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}. \quad (1.30)$$

Proposition 1.12 (Base orthonormée de W_j). Une base orthonormée de l'espace de détails W_j est donnée par la collection $\underline{\psi} = \{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (1.31)$$

Quelques atomes dilatés-translatés de l'ondelette mère Ψ Daubechie d'ordre 4 sont représentés en Figure 1.2.

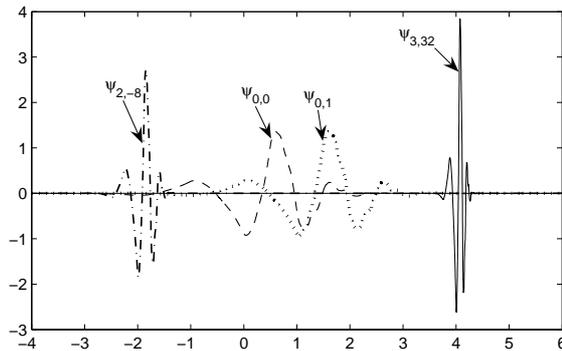


FIGURE 1.2 – Dilatées-translatées de l'ondelette mère ψ Daubechie d'ordre $N = 4$

Proposition 1.13 (Série d'ondelettes). En construisant Q_j le projecteur orthogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sur l'espace d'approximation W_j donné par :

$$Q_j \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \mapsto W_j, \\ f & \mapsto Q_j f = f d_j = P_{j+1} f - P_j f, \end{cases} \quad (1.32)$$

un signal f se décompose en série d'ondelettes selon l'identité

$$f d_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}. \quad (1.33)$$

A partir des voies d'approximation et de détails déterminées ci-dessus, le signal analysé peut être reconstruit sans perte d'information comme avec la transformée en ondelettes continues.

Proposition 1.14. *Étant donnée une AMR $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de $L^2(\mathbb{R})$ engendrées par le couple (ϕ, ψ) de fonctions d'échelle et de détails admissibles, alors toute fonction f de $L^2(\mathbb{R})$ peut être décomposée en la somme d'une voie d'approximation fs_{J_0} à une échelle $J_0 \in \mathbb{Z}$ et des voies de détails fd_j aux échelle $j \geq J_0$ telle que :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} fs_{J_0, n} \phi_{J_0, n}(t)}_{\text{voie d'approximation}} + \underbrace{\sum_{j=J_0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} fd_{j, k} \psi_{j, k}(t)}_{\text{voies de détails}}. \quad (1.34)$$

1.2.3 Théorie des filtres miroirs

L'objectif est ici de caractériser les fonctions d'échelles ϕ engendrant une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ en les reliant à la théorie des filtres. Le point clé est que ϕ et ψ sont complètement définies par un filtre passe-bas $m_H(\xi)$ et un filtre passe-haut $m_G(\xi)$ encore appelés filtre d'échelle et filtre de détail.

Le théorème suivant, dont une démonstration est établie par Cohen [3], fournit les conditions nécessaires et suffisantes d'existence de tels filtres alors appelés "filtres miroir conjugués".

Théorème 1.15 (Filtre miroir conjugué). *Soit ϕ une fonction de $L^2(\mathbb{R})$, alors elle engendre une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si le filtre discret $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ voit sa transformée de Fourier \hat{h} 1-périodique et continûment différentiable dans un voisinage de $\xi = 0$ telle que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |\hat{h}(\xi)|^2 + |\hat{h}(\xi + \frac{1}{2})|^2 = 2, \quad (1.35)$$

$$\hat{h}(0) = 2, \quad (1.36)$$

$$\inf_{\xi \in [-1/2, 1/2]} |\hat{h}(\xi)| > 0. \quad (1.37)$$

Définition 1.16 (Filtre d'échelle). *Soit ϕ une fonction d'échelle et $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ son filtre miroir conjugué vérifiant les hypothèses du théorème 1.15, alors la fonction ϕ admet l'équation d'échelle suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2t - n). \quad (1.38)$$

De manière équivalente en introduisant le filtre d'échelle 1-périodique m_H tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad m_H(\xi) = \frac{1}{2} \hat{h}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-2i\pi n \xi}. \quad (1.39)$$

La transformée de Fourier de ϕ vérifie le produit infini :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \hat{\phi}(\xi) &= m_H(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2) = \prod_{j=0}^{+\infty} m_H(\xi/2^j), \\ \hat{\phi}(0) &= 1. \end{cases} \quad (1.40)$$

Le filtre d'échelle m_H déterminant complètement la fonction ϕ selon la propriété (1.40) est un filtre passe-bas. Les approximations successives fs_j d'une fonction f s'interprètent comme étant des versions filtrées de f par convolution successives avec ce filtre. Ceci explique la coupure fréquentielle réalisée par les espaces d'approximation d'une AMR.

Théorème 1.17 (Filtres miroir en quadrature). *Soit ϕ une fonction d'échelle déterminée par son filtre miroir $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, alors il existe un filtre $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ conjugué à $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ qui détermine entièrement l'ondelette ψ à l'origine de la construction des espaces de détail $\{W_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ si et seulement si :*

$$\hat{g}(0) = 0 \text{ et } \hat{g}(1/2) = \sqrt{2}, \quad (1.41)$$

$$|\hat{g}(\xi)|^2 + |\hat{g}(\xi + 1/2)|^2 = 2, \quad (1.42)$$

$$\hat{h}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)} + \hat{h}(\xi + 1/2)\overline{\hat{g}(\xi + 1/2)} = 0. \quad (1.43)$$

Les filtre $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ et $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sont alors appelés *filtres miroir en quadrature*.

Définition 1.18 (Filtre de détail). *Soit ψ une ondelette donnée par son filtre $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ miroir en quadrature avec le filtre $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ d'une fonction d'échelle ϕ , alors la fonction ψ vérifie l'équation d'ondelettes suivante :*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n \phi(2t - n), \quad (1.44)$$

soit en introduisant le filtre de détail 1-périodique m_G tel que :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad m_G(\xi) = \frac{1}{2} \hat{g}(\xi) = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} g_n e^{-2i\pi n \xi}. \quad (1.45)$$

La transformée de Fourier de ψ vérifie le produit infini :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} \hat{\psi}(\xi) &= m_G(\xi/2) \hat{\phi}(\xi/2) = m_G(\xi/2) \prod_{j=2}^{+\infty} m_H(\xi/2^j), \\ \hat{\psi}(0) &= 0. \end{cases} \quad (1.46)$$

Les voies de détails fd_j correspondent aux détails d'une fonction f vivant à l'échelle j et sont extraites à l'aide d'une convolution entre l'approximation fs_j et le filtre de détail $m_G(\xi)$. De plus, les compositions du filtre passe-haut $m_G(\cdot/2^{j+1})$ en série avec le filtre passe-bas $\{m_H(\cdot/2^{j+i+1})\}_{i \geq 1}$ pour obtenir les voies de détails fd_j sont assimilables à des filtres passe-bande avec une résolution localisée autour de $a = 2^{-j}$.

Proposition 1.19 (Système (ϕ, ψ)). *L'ondelette ψ (resp. le filtre de détail $m_G(\xi)$) se déduit simplement de la fonction d'échelle ϕ (resp. du filtre d'échelle $m_H(\xi)$) à l'aide de la formule de quadrature :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad m_G(\xi) = e^{-2i\pi \xi} v(2\xi) \overline{m_H(\xi + 1/2)}, \quad (1.47)$$

où v est une fonction 2-périodique de module unitaire souvent prise égale à 1. Dans ce dernier cas, on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad g_n = (-1)^{1-n} \overline{h_{1-n}}. \quad (1.48)$$

1.2.4 Algorithmes rapides de S. Mallat

Étant donnée une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ engendrée par le couple (ϕ, ψ) , on considère l'approximation $fs_J \in V_J$ d'un signal f à la résolution J . L'idée de base est de construire la représentation temps-échelle $\{s_{J,k}(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de f_J ou de manière équivalente sa pyramide des coefficients d'ondelettes $\{s_{0,k}, d_{j,k}(f)\}_{(j,k) \in [0, J-1] \times \mathbb{Z}}$ en étudiant ses différentes projetées $(fs_j)_{0 \leq j \leq J}$ et $(fd_j)_{0 \leq j \leq J-1}$ respectivement sur les espaces d'approximation V_j et de détails W_j .

Comparable à l'efficacité connue de l'analyse de Fourier avec l'avènement de la transformée de Fourier rapide (FFT), S. Mallat a construit des algorithmes pyramidaux permettant un va-et-vient rapide entre les petites et les grandes échelles d'un signal à la manière d'un zoom tout en exhibant les détails vivant aux différentes échelles.

Théorème 1.20 (Algorithme de décomposition ou d'analyse). *Supposons avoir initialisé les coefficients $s_J(f) = (s_{J,k}(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ à l'échelle J , l'objectif est de décomposer $f s_J$ en $(f s_{J-1}, f d_{J-1})$ puis de proche en proche en $(f s_j, f d_j)$ jusqu'à l'échelle J_0 . A une échelle intermédiaire j , l'approximée $f s_j$ de f se décompose indifféremment en les série d'échelles et d'ondelettes par les formules suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{Z} \begin{cases} s_{j-1,n}(f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{k-2n} s_{j,k}(f), \\ d_{j-1,n}(f) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{k-2n} s_{j,k}(f). \end{cases} \quad (1.49)$$

Les coefficients d'échelles (resp. d'ondelettes) à la résolution $(j-1)$ sont donc obtenus à l'aide d'une convolution avec le filtre passe-bas \underline{h} (resp. passe-haut \underline{g}) suivie d'une opération $\boxed{2 \downarrow}$ de sous-échantillonnage consistant à ne sélectionner qu'un terme sur deux. Cette décomposition pyramidale est schématisée par le diagramme 1.3.

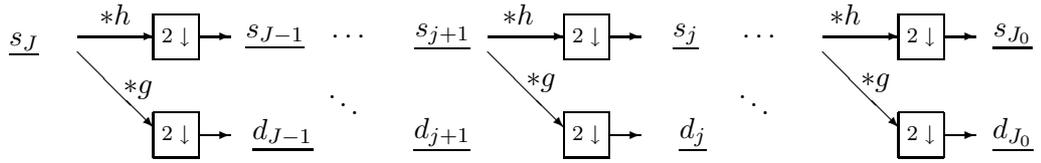


FIGURE 1.3 – Pyramide d'analyse d'un signal de l'échelle fine J à l'échelle grossière J_0

Théorème 1.21 (Algorithme de recombinaison ou de synthèse). *La série d'échelle d'un signal peut être reconstruite à partir de la pyramide de coefficients $\{s_{J_0}(f), d_{J_0}(f), \dots, d_{J-1}(f)\}$ en se servant de la recombinaison en cascade :*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad s_{j,n}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-2k} s_{j-1,k}(f) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_{n-2k} d_{j-1,k}(f). \quad (1.50)$$

Contrairement à l'algorithme de décomposition, la recombinaison s'identifie à la somme des contributions d'échelles (convolution avec le filtre passe-bas \underline{h}) et de détails (convolution avec le filtre passe-haut \underline{g}) préalablement sur-échantillonnées avec l'opérateur $\boxed{2 \uparrow}$. L'ensemble des phases de recombinaison est illustré par la figure 1.4.

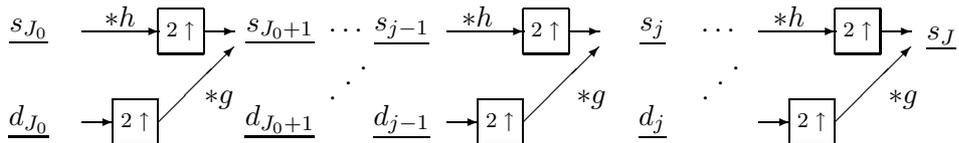


FIGURE 1.4 – Pyramide de synthèse d'un signal de l'échelle grossière J_0 à l'échelle fine J

Exemple 1.1 (Analyse d'un signal benchmark). Le signal analysé f est une fonction périodique de support compact $[0, 1]$ avec la fréquence pure $\xi_0 = 5$ et l'amplitude $a_0 = 1$, perturbée par un sinusoïde amortie de fréquence balayée de $\xi_{min} = 0$ à $\xi_{max} = 50$ et d'amplitude $a_1 = 0.25$ dont l'énergie se concentre au milieu du support. Le signal perturbé est à son tour multiplié par une

fenêtre qui tend vers 0 selon une enveloppe cosinus. L'expression analytique du signal perturbé donnée par :

$$f(t) = \sin(2\pi \cdot 5t) + 0.25e^{-100(x-0.5)^2} \sin(2\pi \cdot (50 - 100|t - 0.5|)(t - 0.5)),$$

et ce signal est à son tour multiplié par une fenêtre qui vaut 1 et tend vers 0 aux deux bords suivant un cosinus

$$w(t) = \begin{cases} (0,5 + 0,5 \cos(2\pi \frac{x-0,125}{0,25})) & \text{si } t \in [0, 0,125], \\ 1 & \text{si } t \in [0,125, (1-0,125)], \\ (0,5 + 0,5 \cos(2\pi \frac{x-(1-0,125)}{0,25})) & \text{si } t \in [(1-0,125), 1]. \end{cases}$$

En utilisant l'algorithme rapide de S. Mallat, on réalise l'analyse multirésolution du signal perturbé des échelles 10 à 4 à l'aide d'un couple de fonction d'échelle et de détails de Daubechies d'ordre 4. La figure 1.6 présente la superposition des voies de détails du signal théorique réalisé et la suite d'approximation de l'échelle 4 à l'échelle 10. Les erreurs cumulées en fonction du temps et des échelles sont présentées sur la figure 1.5 sous la forme d'un cascade des erreurs.

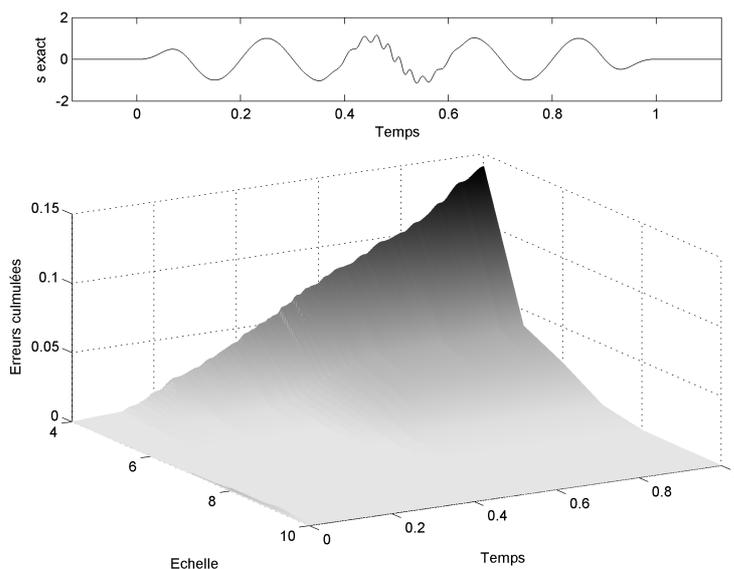
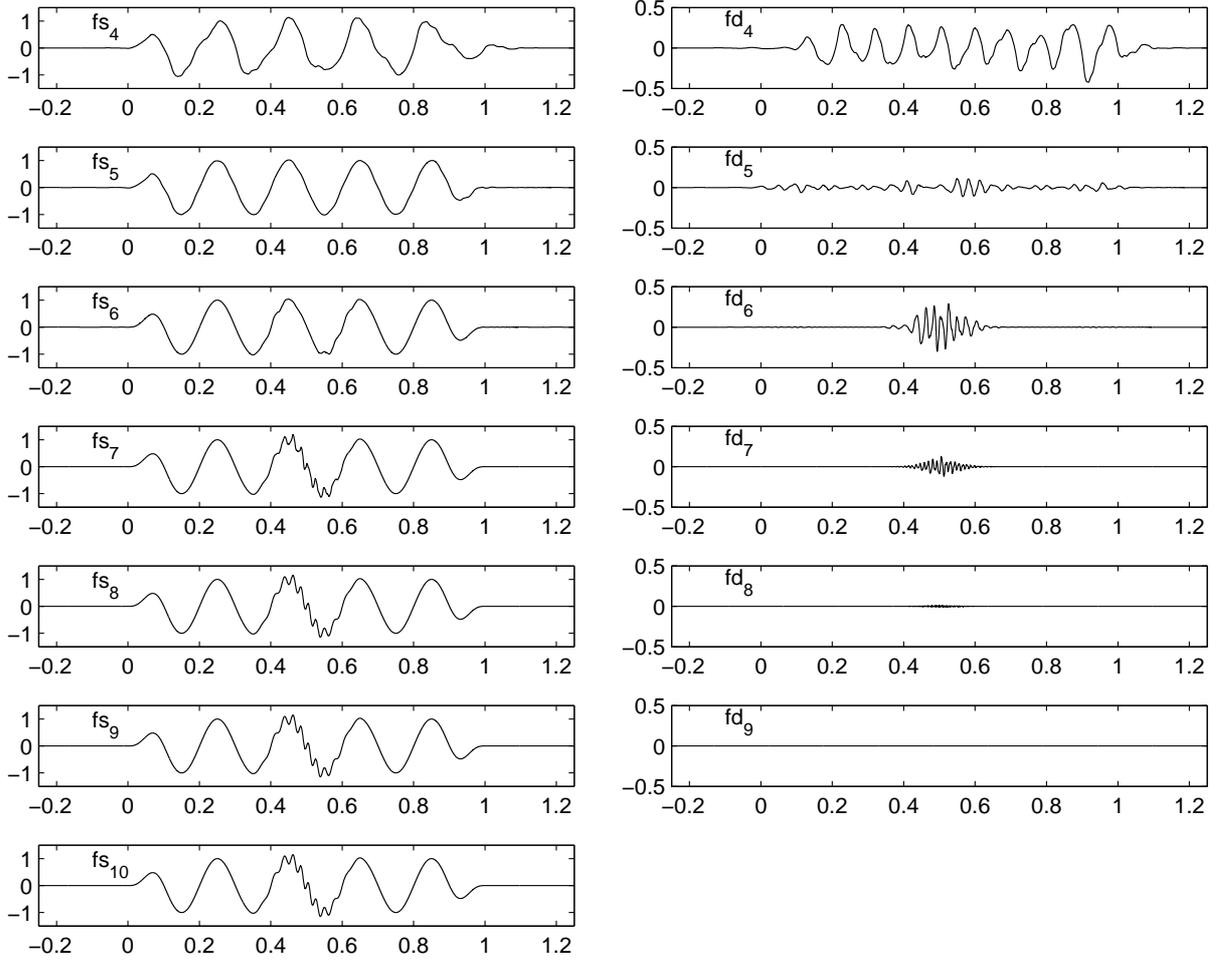


FIGURE 1.5 – *Signal exact et cascade des erreurs cumulées*

1.3 Approche opérateur-ondelettes

Une des applications marquantes des analyses multirésolution en dimension deux est l'algorithme BCR introduit par G. Beylkin, R. Coifman et V. Rokhlin [1] qui permet de construire une représentation multi-échelles d'une large classe d'opérateurs linéaires sur $L^2(\mathbb{R})$: l'idée est de décomposer un opérateur sur une base d'ondelettes qui s'inscrit dans le cadre d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R}^2)$ et de remplacer ainsi les calculs par des opérations matricielles plus simples. L'intérêt majeur de l'algorithme BCR est lié au fait qu'une transformation judicieuse de la matrice de l'opérateur associée à un arrangement astucieux de l'ordre des termes permet d'obtenir une représentation "creuse".

FIGURE 1.6 – Pyramide des voies d’approximation fs_j et de détails fd_j du signal pour $4 \leq j \leq 10$

On considère dans ce qui suit un opérateur \mathcal{T} appartenant à $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$, l’espace d’applications linéaires continues de $L^2(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R})$. L’objectif étant de décomposer l’opérateur \mathcal{T} dans les espaces d’approximations $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), V_J)$, on définit l’opérateur approché $\mathcal{T}_J : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_J$ de \mathcal{T} à l’échelle fine J décrit par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} & \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ u & \rightarrow v = \mathcal{T} \cdot u, \end{cases} \\
 \approx & \\
 \mathcal{T}_J & \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow V_J, \\ u & \rightarrow v_J = \mathcal{T}_J \cdot u = (P_J \mathcal{T} P_J)u, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.51}$$

faisant intervenir le projecteur orthogonal P_J introduit en proposition 1.10. On introduit de même le projecteur Q_j comme dans la proposition 1.13.

Il existe deux formes de représentations d’opérateurs désignées respectivement par les appellations “forme Standard” et “forme Non-Standard” :

1. La forme Standard utilise le changement de base entre motifs d’échelles $(\phi_{J,k})_{0 \leq k < 2^J} \in V_J$ et la base d’ondelettes $(\phi_{0,0}) \cup (\psi_{j,k})_{0 \leq k < 2^j}^{0 \leq j \leq J-1}$ de l’espace $V_0 \bigoplus_{j=0}^{J-1} W_j$,

2. La forme Non-Standard d'un opérateur est obtenue par un changement de base $V_J \otimes V_J$ des matrices sur V_J où les motifs d'échelles bidimensionnels $(\phi_{J,k} \otimes \phi_{J,k'})_{0 \leq k, k' < 2^J}$ sont décomposés sur la base d'ondelettes

$$(\phi_{0,0} \otimes \phi_{0,0}) \cup (\psi_{j,k} \otimes \psi_{j,k'}, \phi_{j,k} \otimes \psi_{j,k'}, \psi_{j,k} \otimes \phi_{j,k'})_{\substack{0 \leq j \leq J-1 \\ 0 \leq k, k' < 2^j}}.$$

Dans le cas où le tenseur d'un tel ou tel opérateur est plein, la "forme Standard" ou mieux encore la "forme Non-Standard" sont très judicieux grâce à leurs avantages comme la structure creuse ou la possibilité d'utiliser directement la pyramide des coefficients d'approximation et de détails. Cependant, les études des opérateurs, menées ci-dessous, se placent dans le cadre d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ engendrée par des familles d'ondelettes à support compact. Les tenseurs associés aux opérateurs considérés sont définis uniquement par des vecteurs de filtres à réponse impulsionnelle finie. C'est pourquoi nous ne travaillons qu'avec la forme classique \mathcal{T}_J à l'échelle fine J qui nous permettra de construire des algorithmes de calcul rapide beaucoup moins coûteux.

L'ensemble des algorithmes et des simulations qui suivent sont effectués dans le cadre d'une AMR Daubechies d'ordre N à support compact $[1 - N, N]$.

1.3.1 Opérateur d'intégration-ondelettes

On définit l'opérateur d'intégration \mathcal{T}_f par :

$$\mathcal{T}_f \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{T}_f(L^2(\mathbb{R})), \\ u & \rightarrow v(t) = \mathcal{T}_f \cdot u(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (1.52)$$

Sa représentation sur l'espace d'échelle à l'échelle J est donnée par :

$$\mathcal{T}_f^J \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow V_J, \\ u & \rightarrow v_J = P_J \left(\mathcal{T}_f(P_J(u)) \right). \end{cases} \quad (1.53)$$

La projection d'une fonction φ sur l'espace V_J est caractérisée par une unique suite de coefficients $\underline{s(\varphi)}_J \in l^2(\mathbb{R})$ représentant respectivement les produits scalaires de φ avec les fonctions $\{\phi_{J,n}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ d'une base de V_J . Il devient donc possible de définir un opérateur algébrique associé à l'application \mathcal{T}_f^J réalisant le calcul approché de l'intégration d'une fonction de V_J à partir de ses coefficients d'échelles.

Définition 1.22 (Opérateur algébrique d'intégration). On appelle opérateur algébrique d'intégration associé à \mathcal{T}_f^J l'application linéaire \mathcal{I}^J de $\mathcal{L}(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$ telle que :

$$\mathcal{I}^J \begin{cases} l^2(\mathbb{R}) & \rightarrow l^2(\mathbb{R}), \\ \underline{s(u)}_J & \rightarrow \underline{s(v)}_J = I^J \cdot \underline{s(u)}_J, \end{cases} \quad (1.54)$$

introduisant le tenseur bidimensionnel infini I^J dont les coefficients $I_{k,l}^J$ pour $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ sont donnés par :

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad I_{k,l}^J = \left\langle \mathcal{T}_f \phi_{J,l}, \phi_{J,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.55)$$

Preuve 1. Le calcul des coefficients du tenseur bidimensionnel peut être fait facilement en utilisant la formule de transformée en ondelettes discrètes (1.7) et d'approximation d'un signal définie en proposition 1.10.

Par conséquent, le tenseur d'intégration est entièrement déterminé par les atomes dilatés-translatés $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de la fonction d'échelle ϕ . Les propriétés de symétrie, d'homothétie, d'invariance par translation et de structure creuse sont alors développées dans les propositions suivantes.

Proposition 1.23. *Soit un couple (ϕ, ψ) de fonctions d'échelle et de détails engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$; alors le tenseur d'intégration I^J pour $J \in \mathbb{Z}$ vérifie les propriétés d'homothétie et de translation suivante :*

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}, \quad I_{k,l}^J = 2^{-J} I_{k,l}^0 = 2^{-J} I_{k-l,0}^0. \quad (1.56)$$

De plus, en supposant que ϕ est à support compact sur l'intervalle $[1 - N, N]$, le tenseur d'intégration est entièrement décrit par un vecteur de coefficients tels que :

$$I_{r,0}^0 = I_r \begin{cases} = 1 & \text{si } r \geq 2N - 1, \\ = 0 & \text{si } r \leq 1 - 2N. \end{cases} \quad (1.57)$$

Preuve 2. Suivant la formule de calcul des coefficients du tenseur d'intégration 1.55, on a :

$$I_{k,l}^J = \left\langle \mathcal{T}_J \phi_{J,l}, \phi_{J,k} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t \phi_{J,l}(\tau) d\tau \right) \overline{\phi_{J,k}(t)} dt, \quad (1.58)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t 2^{J/2} \phi(2^J \tau - l) d\tau \right) 2^{J/2} \overline{\phi(2^J t - k)} dt, \quad (1.59)$$

$$\stackrel{\text{chang. var.}}{=} 2^J \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^{2^{-J} t} \phi(2^J \tau - l) d\tau \right) \overline{\phi(t - k)} 2^{-J} dt, \quad (1.60)$$

$$\stackrel{\text{chang. var.}}{=} 2^{-J} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t \phi(\tau - l) d\tau \right) \overline{\phi(t - k)} dt = 2^{-J} I_{k,l}^0 = 2^{-J} I_{k-l,0}^0. \quad (1.61)$$

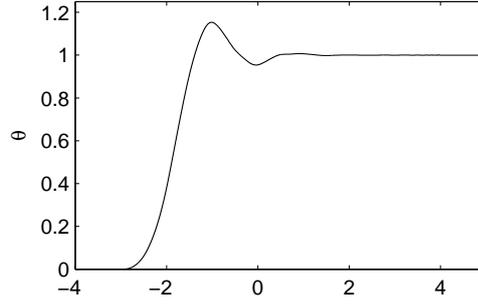
En se basant sur le support compact de ϕ , i.e $[1 - N, N]$, le support d'une primitive $\theta(t) = \int_{-\infty}^t \phi(t)$ (cf. [2]) dont un exemple est présenté sur la figure 1.7, peut être déterminé comme suit :

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq N, \\ 0 & \text{si } t \leq 1 - N, \end{cases} \quad (1.62)$$

et donc la propriété 1.57 peut être prouvée facilement en utilisant la propriété fondamentale d'une fonction d'échelle $\int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1$.

En vertu de la propriété d'homothétie établie en proposition 1.23, il suffit de connaître un unique vecteur \underline{I} pour engendrer le tenseur de l'opérateur I^J à une échelle quelconque $J \in \mathbb{Z}$.

$$\underline{I} = \left(\underbrace{\dots I_{1-2N}}_{=:0} \underbrace{I_{2-2N} \dots I_{2N-2}}_{I_S} \underbrace{I_{2N-1} \dots}_{=:1} \right).$$


 FIGURE 1.7 – Une primitive de la fonction d'échelle ϕ Daubechies d'ordre $N = 4$

En mettant à profit la relation d'échelle, donnée en Equation (1.38), vérifiée par la fonction ϕ , on établit dans le théorème suivant que \underline{I} est un vecteur propre associé à un problème aux valeurs propres.

Théorème 1.24. *Soit un couple (ϕ, ψ) de fonction d'échelle et de détails engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, soit \underline{h} le filtre passe-bas associé à la fonction d'échelle ϕ dont la réponse impulsionnelle est à support sur $[1-N, N]$; alors le vecteur \underline{I} caractéristique de l'opérateur d'intégration satisfait la propriété :*

$$I_r = \frac{1}{4} \sum_{k,l=1-N}^N h_k h_l I_{2r+l-k}. \quad (1.63)$$

Preuve 3. La relation donnée en Equation (1.63) s'obtient directement en injectant la relation d'échelle, donnée en Equation (1.38), dans l'expression des coefficients du tenseur d'intégration, donnée en Equation (1.55) :

$$I_r = I_{r,0}^0 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t \phi(\tau) d\tau \right) \phi(t-r) dt, \quad (1.64)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t \sum_{k=1-N}^N \phi(2\tau - k) d\tau \right) \sum_{l=1-N}^N \phi(2(t-r) - l) dt, \quad (1.65)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k,l=1-N}^N h_k h_l \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-\infty}^t \phi(\tau - k) d\tau \right) \phi(t - (2r+l)) dt, \quad (1.66)$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{k,l=1-N}^N h_k h_l I_{2r+l-k}. \quad (1.67)$$

Comme les coefficients du vecteurs \underline{I} en dehors du support $[2-2N, 2N-2]$ sont déjà connus (donnés en Equation (1.57)), le sous-vecteur \underline{I}_S du vecteur \underline{I} peut être déterminé par un système d'équations linéaires :

$$\left(\mathbb{I} - \frac{1}{4} \mathbb{P} \right) \underline{I}_S = \underline{c}, \quad (1.68)$$

où \underline{c} est un vecteur $(4N-3) \times 1$:

$$\underline{c} = [c_{2-2N} \ c_{3-2N} \ \dots \ c_{2N-2}]^T, \quad (1.69)$$

$$c_i = \sum_{\substack{2i-k-l > 2N-2 \\ k,l=1-N \dots N}} h_k h_l, \quad (1.70)$$

et \mathbb{P} est une matrice de dimension $(4N - 3) \times (4N - 3)$:

$$\mathbb{P} = [P_{ij}]_{2-2N \leq i, j \leq 2N-2}, \quad (1.71)$$

$$P_{ij} = \sum_{\substack{1-N \leq 2i-j-k \leq N \\ k=1-N \dots N}} h_k h_{2i-j-k}. \quad (1.72)$$



FIGURE 1.8 – Représentation matricielle de l'opérateur d'intégration-ondelette

À partir du vecteur \underline{I}_S obtenu, on peut construire le tenseur de l'opération d'intégration-ondelette dont la représentation matricielle est exposée sur la figure 1.8. Malgré la forme triangulaire de cette matrice, le calcul de l'opérateur d'intégration à haute échelle est toujours coûteux en temps et en mémoire pour le stockage d'un tenseur de grande dimension. Mais une remarque à considérer ici est qu'il existe une répétition d'un petit nombre de coefficients sur une bande étroite de cette matrice, les autres sont 0 ou 1. Cette propriété d'homothétie du tenseur d'intégration peut être exploitée pour définir un algorithme de calcul approché rapide de l'intégration d'une fonction.

Implémentation rapide d'un calcul d'intégration dans une AMR de $L^2(\mathbb{R})$

La fonction u utilisée à titre d'exemple dans ce paragraphe est supposée à support compact sur $[0, T]$ et ses coefficients d'approximation $\underline{s(u)}_J$ sont supposés connus. L'objectif est de calculer les coefficients d'approximation $\underline{s(v)}_J$ de la fonction $v = \mathcal{T}_J u$ en fonction des coefficients $\underline{s(u)}_J$ via un aller-retour dans le domaine de Fourier.

En restant très général, on peut supposer que la fonction v est aussi à support compact sur $[0, T]$ (car en dehors de $[0, T]$, la fonction reste constante à gauche et à droite). Par conséquent, les voies de coefficients d'approximation $\underline{s(u)}_J$ et $\underline{s(v)}_J$ sont à même support compact $[N_{inf}, N_{sup}]$, i.e dans le cas des ondelettes Daubechies d'ordre N c'est l'intervalle $[-N, 2^J T + N - 1]$. Le vecteur $\underline{s(v)}_J$ est déterminé par la relation :

$$\forall k \in [-N, 2^J T + N - 1], \quad s(v)_{J,k} = \sum_{l=-N}^{2^J T + N - 1} I_{k,l}^J s(u)_{J,l}, \quad (1.73)$$

$$= 2^{-J} \sum_{l=-N}^{2^J T + N - 1} I_{k-l} s(u)_{J,l}. \quad (1.74)$$

Donc, dans la formule de calcul des coefficients du vecteur $\underline{s(v)}_J$, il suffit de ne mobiliser que la partie sur l'intervalle de support $[2 - 2N, 2^J T + 2N - 1]$ du vecteur infini I . En plus, on peut constater que cette formule est semblable à celle donnée par la convolution discrète. Afin de transposer cette relation dans le domaine de Fourier (DFT), il est nécessaire de prolonger par zero-padding et par shifting les deux vecteurs $\underline{s(u)}_J$ et $I_{[2-2N, 2^J T + 2N - 1]}$ pour qu'ils aient le même support compact $[0, L - 1]$.

On définit deux vecteur $\underline{s(u)}_J^0$ et \underline{I}^0 tels que :

$$s(u)_l^{S0} = \begin{cases} s(u)_{J,l-N} & \text{si } l \in [0, 2^J T + 2N - 1], \\ 0 & \text{si } l \in [2^J T + 2N, 2^{J+1} T + 6N - 3], \end{cases} \quad (1.75)$$

$$I_r^{S0} = \begin{cases} I_{r+2-2N} & \text{si } r \in [0, 2^J T + 4N - 3], \\ 0 & \text{si } r \in [2^J T + 4N - 2, 2^{J+1} T + 6N - 3], \end{cases} \quad (1.76)$$

et le vecteur de convolution discrète :

$$s(v)_k^{S0} = 2^{-J} (\underline{I} \star \underline{s(u)})_k = \sum_{l=0}^{L-1=2^{J+1}T+6N-3} I_{k-l}^{S0} s(u)_l^{S0}, \quad (1.77)$$

$$\widehat{s(v)^{S0}}(z) = 2^{-J} \widehat{I^{S0}}(z) \widehat{s(u)^{S0}}(z) L, \quad (1.78)$$

en introduisant l'opérateur $\widehat{\cdot}$ de transformée en Fourier discrète sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$.

La relation entre le vecteur $\underline{s(v)}_J$ et le vecteur $\underline{s(v)}_J^{S0}$:

$$s(v)_{J,k} = 2^{-J} \sum_{l=-N}^{2^J T + N - 1} I_{k-l} s(u)_{J,l}, \quad \forall k \in [-N, 2^J T + N - 1], \quad (1.79)$$

$$= 2^{-J} \sum_{l=-N}^{2^J T + N - 1} I_{k-l+2N-2}^{S0} s(u)_{l+N}^{S0} = 2^{-J} \sum_{l=0}^{2^J T + 2N - 1} I_{(k+3N-2)-l}^{S0} s(u)_l^{S0}, \quad (1.80)$$

$$s(v)_{J,k} = s(v)_{k+3N-2}^{S0}. \quad (1.81)$$

Cette relation montre que le vecteur des coefficients d'approximation $\underline{s(v)}_J$ est un vecteur extrait du vecteur $\underline{s(v)}_J^{S0}$, déterminé selon la formule (1.77), précisément on a :

$$\underline{s(v)}_J = \underline{s(v)}_{[2N-2, 2^J T + 4N - 3]}^{S0}. \quad (1.82)$$

En conclusion, grâce à cet algorithme rapide lié aux transformées de Fourier rapides, on peut réduire le coût global de calcul des coefficients d'échelle de $\mathcal{O}(L^2)$, dans le domaine temporel, à $\mathcal{O}(L \log_2(L))$.

Exemple 1.2. L'opérateur d'intégration en ondelettes est appliqué à une fonction harmonique à support compact d'une période $f(t) = \cos(2\pi t)\mathbb{I}_{[0, 1]}(t)$ dont la primitive est donnée de façon analytique par :

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t)\mathbb{I}_{[0, 1]}(t).$$

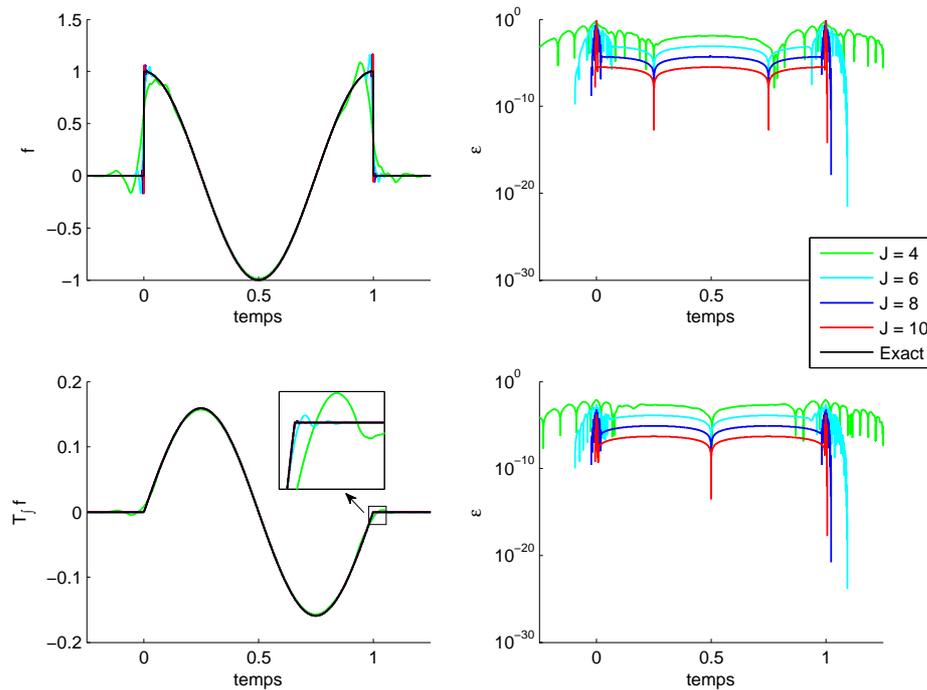


FIGURE 1.9 – Intégration de la fonction $f(t) = \cos(2\pi t)\mathbb{I}_{[0, 1]}(t)$: à gauche) voies d'approximations superposées avec les fonctions exactes ; à droite) erreur d'approximation

Les résultats sont présentés sur la figure 1.9, nous dessinons à gauche les fonctions exactes en les superposant avec les voies d'approximations et à droite des erreurs locales entre les fonctions approchées et les fonctions exactes.

La figure de la fonction initiale et ses approximées montrent des effets de Gibbs relatifs à une singularité de saut dans un signal mono-dimensionnel. Il y a toujours les décalages aux bords du signal. La croissance de l'échelle a pour unique effet de localiser ces erreurs mais l'amplitude ne diminue pas beaucoup. Une autre façon de supprimer les effets de Gibbs est d'utiliser l'Analyse Multirésolution sur l'Intervalle (AMRI) [27].

Malgré les effets de Gibbs dans les approximations de la fonction initiale, la convoluée approchée converge très rapidement vers la solution exacte en augmentant l'échelle d'approximation.

Un autre avantage de l'opérateur d'intégration en ondelette, c'est qu'il est possible de construire un signal de solution continu en temporel au lieu d'un signal échantillonné de même pas avec le signal initial qui ne peut pas être réalisé en utilisant l'intégration numérique.

En conclusion, cet opérateur peut être utilisé pour intégrer les accélérations acquises dans des essais dynamiques afin de remonter aux déplacements tout en supprimant les artefacts dus à la présence de composantes basse-fréquence non désirées.

1.3.2 Opérateur de convolution-ondelettes

En modélisant par éléments finis une structure mécanique linéaire, il est possible d'établir l'équation d'équilibre dynamique d'un système de N degrés de liberté s'écrit sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{X}}_{rel} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{X}}_{rel} + \underline{\underline{K}} \underline{X}_{rel} = \ddot{x}_{ent} \underline{\underline{\Pi}}, \quad (1.83)$$

où $\underline{\underline{\Pi}}$ correspond au vecteur de répartition des effets inertiels induits par l'accélération d'entraînement \ddot{x}_{ent} sur les degrés de liberté de la structure, $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{C}}$, $\underline{\underline{K}}$ représentent les matrices de masse, d'amortissement et de raideur associées à la modélisation en éléments finis de la structure réduite aux seuls degrés de liberté non contraints, et \underline{X}_{rel} est le vecteur des déplacements relatifs aux degrés de liberté de la structure selon l'axe Ox .

Il devient alors possible d'exprimer les déplacements relatifs de la structure $(x_{rel,i})_{i=1,\dots,N}$ comme la superposition de termes convolués :

$$\forall i \in [1, N] \quad x_{rel,i} = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \chi(\ddot{x}_{ent}, h_j), \quad (1.84)$$

dans laquelle $(\alpha_{i,j})_{1 \leq i,j \leq N}$ sont des coefficients pondérateurs modaux et telle que chaque fonction h_j désigne la réponse impulsionnelle du $j^{\text{ème}}$ mode propre de la structure donnée par l'expression :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_j(t) = \frac{1}{\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2}} e^{-\xi_j \omega_j t} \sin(\omega_j \sqrt{1 - \xi_j^2} t), \quad (1.85)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \widehat{h}_j(\omega) = \frac{1}{\omega_j^2 + 2i\xi_j \omega_j \omega - \omega^2}, \quad (1.86)$$

et l'opérateur de convolution sur $L^2(\mathbb{R})$ est noté χ , il est défini par :

$$\chi \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \\ (\varphi, \gamma) & \rightarrow \delta(t) = \chi(\varphi, \gamma)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)g(t - \tau)d\tau. \end{cases} \quad (1.87)$$

Alors chaque fonction de réponse en fréquence FrF_i , associée au déplacement $x_{rel,i}$ en un point M_i pour $i = 1, \dots, N$, vérifie dans le domaine de Fourier l'expression :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \widehat{FrF}_i(\omega) = \frac{\widehat{x}_{rel,i}(\omega)}{\widehat{x}_{ent}(\omega)} = \sum_{j=1}^N \alpha_{i,j} \widehat{h}_j(\omega). \quad (1.88)$$

Ceci permet alors d'exprimer les déplacements absolus $x_{abs,i}$ selon la relation :

$$x_{abs,i} = \chi(\ddot{x}_{ent}, FrF_i) + x_{ent}. \quad (1.89)$$

L'opération de convolution intervient de manière récurrente dans l'analyse des systèmes linéaires. Elle caractérise la notion de noyaux de Green, aussi appelés réponses impulsionnelles, permettant de prédire la réponse d'un système par convolution avec la sollicitation qui lui est imposée. Cette section est consacrée à l'étude de la restriction d'un opérateur de convolution à un sous espace d'approximation V_j de $L^2(\mathbb{R})$ dans le cadre d'une AMR.

La projection de cet opérateur de convolution sur l'espace des ondelettes à l'échelle J :

$$\chi_J \begin{cases} L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R}) & \rightarrow V_J, \\ (\varphi, \gamma) & \rightarrow \delta_J = P_J(\chi(P_J(\varphi), P_J(\gamma))). \end{cases} \quad (1.90)$$

Comme pour l'opérateur d'intégration, au lieu de travailler avec des fonctions temporelles, nous travaillons avec des voies de coefficients d'approximation des fonctions. C'est à dire nous devons définir un opérateur algébrique qui réalise le calcul de la convolution de deux fonctions de V_J à partir de leur coefficients relatifs à une base donnée de V_J .

Définition 1.25 (Opérateur algébrique de convolution). On appelle opérateur algébrique de convolution associé à χ_J l'application bilinéaire \mathcal{K}_J de $\mathcal{B}(l^2(\mathbb{R}), l^2(\mathbb{R}))$ telle que :

$$\mathcal{K}_J \begin{cases} l^2(\mathbb{R}) \otimes l^2(\mathbb{R}) & \rightarrow l^2(\mathbb{R}), \\ (\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J) & \rightarrow \underline{s(\delta)}_J = \mathcal{K}_J(\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J) = \underline{s(\varphi)}_J^t \cdot \mathcal{T}^J \cdot \underline{s(\gamma)}_J, \end{cases} \quad (1.91)$$

mettant en scène le tenseur tridimensionnel infini \mathcal{T}^J dont les coefficients $\mathcal{T}_{k,n,l}^J$ pour $(k, n, l) \in \mathbb{Z}^3$ sont calculés comme suit :

$$\forall (k, n, l) \in \mathbb{Z}^3, \quad \mathcal{T}_{k,n,l}^J = \langle \chi(\phi_{J,k}, \phi_{J,n}), \phi_{J,l} \rangle_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (1.92)$$

Pour des fonctions données $(\varphi_J, \gamma_J, \delta_J) \in V_J^3$, telles que $\delta_J = \chi_J(\varphi_J, \gamma_J)$, les coefficients $\underline{s(\delta)}_J$ sont fournis par la relation :

$$\forall l \in \mathbb{Z}, \quad \delta_l = \mathcal{K}_J(\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J)_l = \sum_{k,n \in \mathbb{Z}} s(\varphi)_{J,k} \mathcal{T}_{k,n,l}^J s(\gamma)_{J,n}. \quad (1.93)$$

Preuve 4. Le calcul des coefficients du tenseur tridimensionnel peut être fait facilement en introduisant la formule de transformée en ondelettes discrètes (1.7) et d'approximation d'un signal de la proposition 1.10 dans la formule de l'opérateur de convolution approché donnée en Equation (1.90).

Par conséquent, le tenseur de convolution est entièrement déterminé par les atomes dilatés-translatés $\{\phi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ de la fonction d'échelle ϕ . Les propriétés de symétrie, d'homothétie, d'invariance par translation et de forme creuse sont alors établies dans les propositions suivantes.

Proposition 1.26. Soit un couple (ϕ, ψ) de fonctions d'échelle et de détails engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$; alors le tenseur de convolution \mathcal{T}^J pour $J \in \mathbb{Z}$ vérifie la propriété d'homothétie suivante :

$$\forall (k, n, l) \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{T}_{k,n,l}^J = 2^{-J/2} \mathcal{T}_{k,n,l}^0 = 2^{-J/2} \mathcal{T}_{k-l+n,0,0}^0. \quad (1.94)$$

De plus, en supposant que ϕ est à support compact sur l'intervalle $[1-N, N]$, le tenseur de convolution est à bande limitée et il est entièrement décrit par les seuls $6N-4$ coefficients non triviaux tels que :

$$\mathcal{T}_{r,0,0}^0 = \mathcal{T}_r \neq 0 \quad \text{si} \quad r \in \mathbb{Z}/[2-3N, 3N-3]. \quad (1.95)$$

Afin de simplifier les notations, les coefficients $\mathcal{T}_{r,0,0}^J$ sont désormais notés \mathcal{T}_r^J . On peut alors introduire le vecteur $\underline{\mathcal{T}}$ des $6N-4$ coefficients non triviaux du tenseur de l'opérateur \mathcal{T}^J . En vertu de la propriété d'homothétie établie dans la proposition 1.26, il suffit de connaître l'unique vecteur $\underline{\mathcal{T}}$ pour engendrer le tenseur de l'opérateur \mathcal{T}^J à une échelle quelconque $J \in \mathbb{Z}$. En mettant à profit la relation d'échelle, donnée en Equation (1.38), vérifiée par la fonction ϕ , on établit dans le théorème suivant que les coefficients $\underline{\mathcal{T}}$ vérifient de manière univoque un problème aux valeurs propres contraint par une équation de normalisation unitaire.

Théorème 1.27. *Soit un couple (ϕ, ψ) de fonction d'échelle et de détails engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, soit \underline{h} le filtre passe-bas associé à la fonction d'échelle ϕ dont la réponse impulsionnelle est à support sur $[1 - N, N]$; alors le vecteur $\underline{\mathcal{T}}$ d'un opérateur de convolution satisfait les propriétés suivantes :*

i) \mathcal{T} est la droite vectorielle associée à la valeur propre unitaire du système linéaire :

$$u_r = \frac{1}{4} \sum_{k,n,l=1-N}^N h_k h_n h_l u_{2r+l-k}, \quad (1.96)$$

ii) *Contrainte de normalisation des coefficients du vecteur \mathcal{T} :*

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_r = 1. \quad (1.97)$$

Preuve 5. La relation donnée en Equation (1.96) s'obtient directement en injectant la relation d'échelle, donnée en Equation (1.38), dans l'expression des coefficients du tenseur d'intégration, donnée en Equation (1.92). La normalisation du vecteur \mathcal{T} peut être prouvée en changeant l'ordre d'intégration, de sommation et de convolution :

Suivant la définition du vecteur de convolution, on a :

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_r = \sum_{r \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \phi_{0,r}(t - \tau) \phi(\tau) d\tau \right) \phi(t) dt. \quad (1.98)$$

En admettant sans démonstration que les opérations de sommation, de convolution et d'intégration commutent (Cf. théorème de Lebesgue), on obtient :

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} \mathcal{T}_r = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left[\sum_{r \in \mathbb{Z}} \phi_r(t - \tau) \right]}_{=1} \phi(\tau) d\tau \right) \phi(t) dt, \quad (1.99)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}} \phi(\tau) d\tau}_{=1} \right) \phi(t) dt = \int_{\mathbb{R}} \phi(t) dt = 1. \quad (1.100)$$

En se référant à la propriété fondamentale 'Strang-fix' [33] vérifiée par la fonction d'échelle ϕ :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(t - k) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1.$$

La propriété de filtre à réponse impulsionnelle finie vérifiée par le tenseur de convolution peut alors être exploitée pour définir un algorithme de calcul approché rapide de la convolution de deux fonctions.

Implémentation rapide d'un calcul de convolution dans une AMR de $L^2(\mathbb{R})$

Cette section a pour objectif de présenter un algorithme rapide permettant de réaliser le calcul approché de la convolution de deux fonction $(\varphi, \gamma) \in L^2(\mathbb{R})$ par le biais d'un opérateur-ondelettes de convolution \mathcal{K}_J construit à l'échelle $J \in \mathbb{Z}$. En restant très général, les deux fonction φ, γ , utilisées à titre d'exemple dans cette section, sont supposées à support compact, resp. sur $[0, T_\varphi]$ et $[0, T_\gamma]$ et leurs coefficients d'approximation $\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J$ sont supposés connus. La méthode de calcul fournit alors les coefficients d'échelles $\underline{s(\delta)}_J$ de la fonction $\delta = \chi_J(\varphi, \gamma)$ en fonction des coefficients $\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J$ des fonctions φ et γ via un aller-retour dans le domaine de Fourier.

Par définition de l'opération de convolution sur $L^2(\mathbb{R})$, la convoluée de deux fonctions à support compact au-dessus est une fonction à support compact sur $[0, T_\varphi + T_\gamma]$. Par conséquent, la voie de coefficients d'approximation de la convoluée est également à support compact aussi dont la longueur est presque égale à la somme de celles des deux fonctions considérées.

Voici la relation de convolution algébrique entre $\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J$ et $\underline{s(\delta)}_J$:

$$\forall l \in [-N, 2^J(T_\varphi + T_\gamma) + N - 1],$$

$$s(\delta)_l = 2^{-J/2} \sum_{k=-N}^{(2^J T_\varphi + N - 1)} \sum_{n=-N}^{(2^J T_\gamma + N - 1)} s(\varphi)_{J,k} \mathcal{T}_{k-l+n} s(\gamma)_{J,n}. \quad (1.101)$$

Afin de transposer la relation donnée en Equation (1.93) dans le domaine de Fourier tout en garantissant la condition précédente portant sur le support de $\underline{s(\delta)}_J$, il est nécessaire de prolonger les vecteurs $\underline{s(\varphi)}_J$ et $\underline{s(\gamma)}_J$ par zero-padding et shifting.

On pose :

$$s(\varphi)_k^{S0} = \begin{cases} s(\varphi)_{J,k-N} & \text{si } k \in [0, 2^J T_\varphi + 2N - 1], \\ 0 & \text{si } k \in [2^J T_\varphi + 2N, 2^J(T_\varphi + T_\gamma) + 2N - 1], \end{cases} \quad (1.102)$$

$$s(\gamma)_n^{S0} = \begin{cases} s(\gamma)_{J,n-N} & \text{si } n \in [0, 2^J T_\gamma + 2N - 1], \\ 0 & \text{si } n \in [2^J T_\gamma + 2N, 2^J(T_\varphi + T_\gamma) + 2N - 1], \end{cases} \quad (1.103)$$

et

$$\mathcal{T}_r^{S0} = \begin{cases} \mathcal{T}_{3N-3-r} & \text{si } r \in [0, 6N - 5], \\ 0 & \text{si } r \in [6N - 4, 2^J(T_\varphi + T_\gamma) + 2N - 1]. \end{cases} \quad (1.104)$$

Une telle adaptation de support appliquée aux vecteurs $\underline{s(\varphi)}_J, \underline{s(\gamma)}_J$ et $\underline{\mathcal{T}}$ fournit une méthodologie de ré-écriture de l'Equation (1.93) qui mobilise un mécanisme de "Zero Padding" et un "Shifting". Les calculs de la convolution de deux fonctions réalisés par l'opérateur χ_J , à une échelle $J \in \mathbb{Z}$, peuvent alors être traduits dans le domaine de Fourier.

Proposition 1.28. *Soit un couple (ϕ, ψ) de fonctions d'échelle et de détails engendrant une AMR de $L^2(\mathbb{R})$. Soit \underline{h} le filtre passe-bas de la fonction ϕ dont la réponse impulsionnelle est à support compact sur $[1 - N, N]$. Soit φ et γ deux fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ à support compact $[0, T_\varphi]$ et $[0, T_\gamma]$, dont les projetées sur un espace d'approximation V_J , d'échelle $J \in \mathbb{Z}$, sont déterminées par les voies de coefficients $\underline{s(\varphi)}_J = (s(\varphi)_{J,-N}, \dots, s(\varphi)_{J,2^J T_\varphi + N - 1})$ et $\underline{s(\gamma)}_J =$*

$(s(\gamma)_{J,-N}, \dots, s(\gamma)_{J,2^J T_\gamma + N-1})$. Soit δ une fonction de V_J telle que $\delta = \chi_J(\varphi, \gamma)$; alors la voie de coefficients d'approximation $\underline{s(\delta)}_J$ vérifie dans le domaine de Fourier la relation suivante :

$$\forall z \in [0, L-1] \text{ tq } L = 2^J(T_\varphi + T_\gamma) + 2N,$$

$$\widehat{s(\delta)}_J^{S0}(z) = 2^{-J/2} L^2 \widehat{s(\varphi)}_J^{S0}(z) \widehat{\mathcal{T}}^{S0}(z) \widehat{s(\gamma)}_J^{S0}(z), \quad (1.105)$$

dans laquelle $\widehat{\cdot}$ définit l'opérateur de transformée en Fourier discrète sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ des suites et $\underline{s(\delta)}_J^{S0}$ correspond à un ré-arrangement du vecteur $\underline{s(\delta)}_J$ tel que :

$$\underline{s(\delta)}_J^{S0} = \left(\underline{s(\delta)}_{J,[4N-3, L-1]}, \underline{s(\delta)}_{J,[0, 4N-2]} \right). \quad (1.106)$$

Preuve 6. Si on définit le vecteur de convolution discrète général :

$$\begin{aligned} s(\delta)_{j,n}^{S0} &= 2^{-J/2} (\underline{s(\varphi)}_J^{S0} \star \underline{\mathcal{T}}^{S0} \star \underline{s(\gamma)}_J^{S0})_n = \sum_{k,l=0}^{L-1} s(\varphi)_{J,k}^{S0} \mathcal{T}_{n-k-l}^{S0} s(\gamma)_l^{S0}, \\ \widehat{s(\delta)}_J^{S0}(z) &= 2^{-J/2} L^2 \widehat{s(\varphi)}_J^{S0}(z) \widehat{\mathcal{T}}^{S0}(z) \widehat{s(\gamma)}_J^{S0}(z), \end{aligned} \quad (1.107)$$

analogue à l'implémentation rapide d'un calcul d'intégration, on peut montrer la relation entre $\underline{s(\delta)}_J^{S0}$ et $\underline{s(\delta)}_J$:

$$s(\delta)_{J,n}^{S0} = s(\delta)_{J,n-5N+3}.$$

Enfin, la relation (1.106) s'obtient facilement en mettant à profit la périodicité dans la transformée de Fourier discrète.

Cette proposition montre que les calculs de convolution peuvent être efficacement effectués dans le domaine de Fourier, selon une complexité algorithmique en $\mathcal{O}(L \log_2(L))$ au lieu de $\mathcal{O}(L^3)$ dans le domaine temporel. De plus, l'algorithme de convolution ondelettes donné par les équations (1.101) et (1.105) a une structure semblable à celui de la convolution discrète mis à part la présence de l'opérateur $\underline{\mathcal{T}}^J$ au milieu des formules en ondelettes.

Exemple 1.3. L'opérateur de convolution en ondelettes est illustré par une solution benchmark exacte $\delta(t) = \chi(\varphi, \gamma)$ avec $\alpha(t) = \sin(2\pi t) \mathbb{I}_{[0, 2]}(t)$ et $\gamma(t) = \cos(2\pi t) \mathbb{I}_{[0, 2]}(t)$ dont l'expression analytique est donnée par :

$$\delta(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) (t \mathbb{I}_{[0, 2]}(t) + (4-t) \mathbb{I}_{[2, 4]}(t)).$$

Une comparaison entre l'opérateur de convolution-ondelette et la convolution discrète standard montre que la convergence de la convolution ondelette est plus rapide que celle de la convolution discrète lorsque la fréquence d'échantillonnage augmente comme présenté sur la Figure 1.10.

Les deux signaux sont initialisés à l'échelle 15 (assez grande) pour qu'on puisse négliger les erreurs causées par l'étape d'initialisation. Chaque fois que l'on convole les approximations des deux signaux à telle ou telle échelle, on fait aussi une convolution discrète pour les deux signaux échantillonnés en même échelle. Sur la figure 1.10 on aperçoit clairement que la convoluée en ondelette converge plus rapidement vers la solution exacte que la convoluée discrète. De même que pour l'opérateur d'intégration, la convolution en ondelette nous donne une solution continue tandis que la convolution discrète ne donne qu'un échantillonnage de la convoluée.

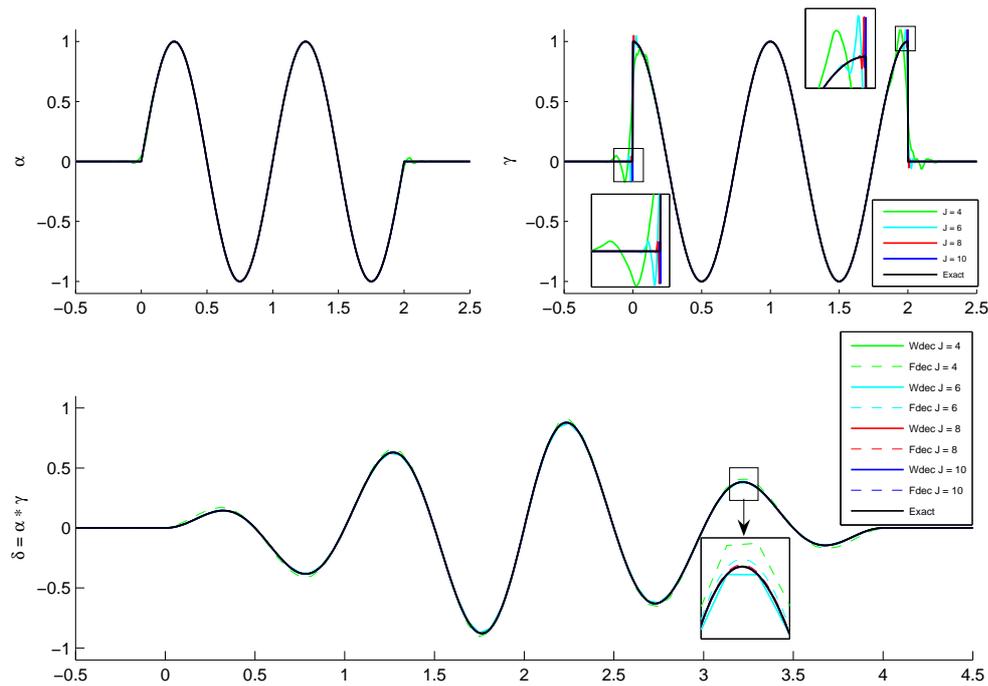


FIGURE 1.10 – Convolution de deux fonctions : comparaison entre la convolution en ondelette et la convolution discrète

Dans le cadre d'une AMR, l'opérateur de convolution-ondelettes est un opérateur approché sur l'espace d'échelle à une telle ou telle échelle dont le résultat est la superposition des motifs dilaté-translatés de la fonction d'échelle. Par conséquent, le résultat obtenu a une représentation fonctionnelle qui n'existe pas dans la convolution discrète. De plus, grâce à la propriété de coupure fréquentielle réalisée par les espaces d'approximation d'une AMR (cf. Section 1.2.3) on peut maîtriser la bande fréquentielle du signal convolué.

L'exemple ci-dessus a montré des avantages de la convolution en ondelette par rapport à la convolution discrète, mais pour l'utiliser efficacement dans l'analyse des système dynamique, il faut encore vérifier la robustesse au bruit de la convolution ondelette avec des signaux échantillonnés issus d'enregistrements. La section suivant aborde ce problème de résistance au bruit de la convolution en ondelette.

Robustesse de l'opérateur de convolution-ondelette

Parce que la convolution est faite entre deux fonctions, s'il y a des erreurs dans une des deux fonctions, ces dernières se propagent dans la convoluée. La robustesse est examinée à travers le relation entre les erreurs créés dans le résultat par rapport à celles causées dans la fonction de convolution. Cette vérification est effectuée sur l'analyse d'un système dynamique à un degré de liberté dont la réponse est la convoluée de la force et la fonction de transfert. Pour un oscillateur harmonique de fréquence propre $\omega_0 = 4 \text{ rad/s}$ et d'amortissement spécifique critique $\xi = 7\%$, la fonction de transfert est donnée par :

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0} e^{-\xi \omega_0 t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t). \quad (1.108)$$

D'abord on applique sur ce système une force de créneau $f(t) = \mathbb{I}_{[0, 1]}$ et on suppose que les amplitudes de cette force sont bruitées selon une loi uniforme

$$\tilde{f}(t) = (1 + \sigma.\theta(t)).f(t), \quad (1.109)$$

où $\theta(t)$ est une variable aléatoire uniforme d'écart-type 1 et σ est le niveau de bruit.

Nous créons $N = 100$ tirages de variables aléatoires et avec chaque tirage, il est possible d'obtenir la réponse du système en convoluant la force bruitée avec la fonction de transfert. La loi (forte) des grands nombres permet de calculer l'espérance et l'écart-type à chaque instant de la réponse. L'ensemble de ces simulations sont réalisées à l'intérieur d'une seule et même boucle programmée dans l'environnement Matlab.

Comme dans l'exemple 1.3, on fait aussi la comparaison de la robustesse de la convolution en ondelettes vis à vis de la convolution discrète en fonction de l'échelle d'échantillonnage et du niveau de bruit. Les résultats obtenus sont présentés sur les Figures de 1.11, 1.12 et 1.13.

Les résultats montrent que la convolution en ondelette nous permet d'obtenir une réponse pas plus bruitée qu'avec la convolution discrète mais les erreurs locales des réponses sont légèrement plus petites. Cette différence est surtout plus nette après le moment où la force s'arrête. En augmentant l'échelle d'approximation les signaux approchés sont plus proches des signaux exacts et on peut diminuer les écart-types. Ici, l'amplitude du bruit ne joue pas un rôle important car les écart-types sont presque linéaires avec l'amplitude du bruit comme illustré sur la figure 1.13.

De plus, malgré le niveau de bruit assez grand (10%) dans la force, on voit bien que l'écart-type dans la réponse est assez petit. Il faut noter ici que la fonction de transfert joue aussi le rôle d'un filtre, l'opérateur de convolution-ondelette peut être robuste pour ce type de force mais pas pour d'autres. Nous allons donc examiner la robustesse de la convolution en ondelette avec un autre type de force dont les résultats obtenus sont présentés sur les figures de 1.14, 1.15 et 1.16.

A travers deux exemples des forces différentes, nous pouvons conclure que la convolution en ondelette est résistante au bruit et plus pertinente que la convolution discrète lorsque le nombre d'échantillons convolués est de taille moyenne.

1.3.3 Opérateur de déconvolution-ondelettes

La relation donnée en Equation (1.89) montre que la connaissance empirique des fonctions de réponse en fréquence associées aux déplacements des nœuds de la structure permet de construire les opérateurs de Green G_i de cette dernière offrant, en théorie, la possibilité de prédire son comportement, en ces mêmes nœuds, pour des sollicitations quelconques. Il s'agit d'évaluer les fonctions de réponse en fréquence, selon l'axe Ox , des différents étages de la structure par rapport à l'accélération d'entraînement imposée. Cette section présente l'opérateur de déconvolution-ondelette permettant de satisfaire un tel objectif.

On considère un opérateur de convolution en ondelette à l'échelle J , noté χ_J , associé à une fonction d'échelle de Daubechies d'ordre N . Cet opérateur voit sa forme tensorielle $\underline{\underline{\mathcal{T}}}^J$ entièrement déterminée par un filtre $\underline{\mathcal{T}}$ de $6N - 4$ coefficients non triviaux (cf. section 1.3.2). L'objectif des calculs, présentés dans cette section, est d'évaluer les coefficients d'approximation $\underline{s}(h)_J$, à une échelle $J \in \mathbb{N}$ en fonction des coefficients d'approximation $\underline{s}(x)_J$ et $\underline{s}(f)_J$ des deux fonctions connues x et f telles que $x = \chi_J(h, f)$.

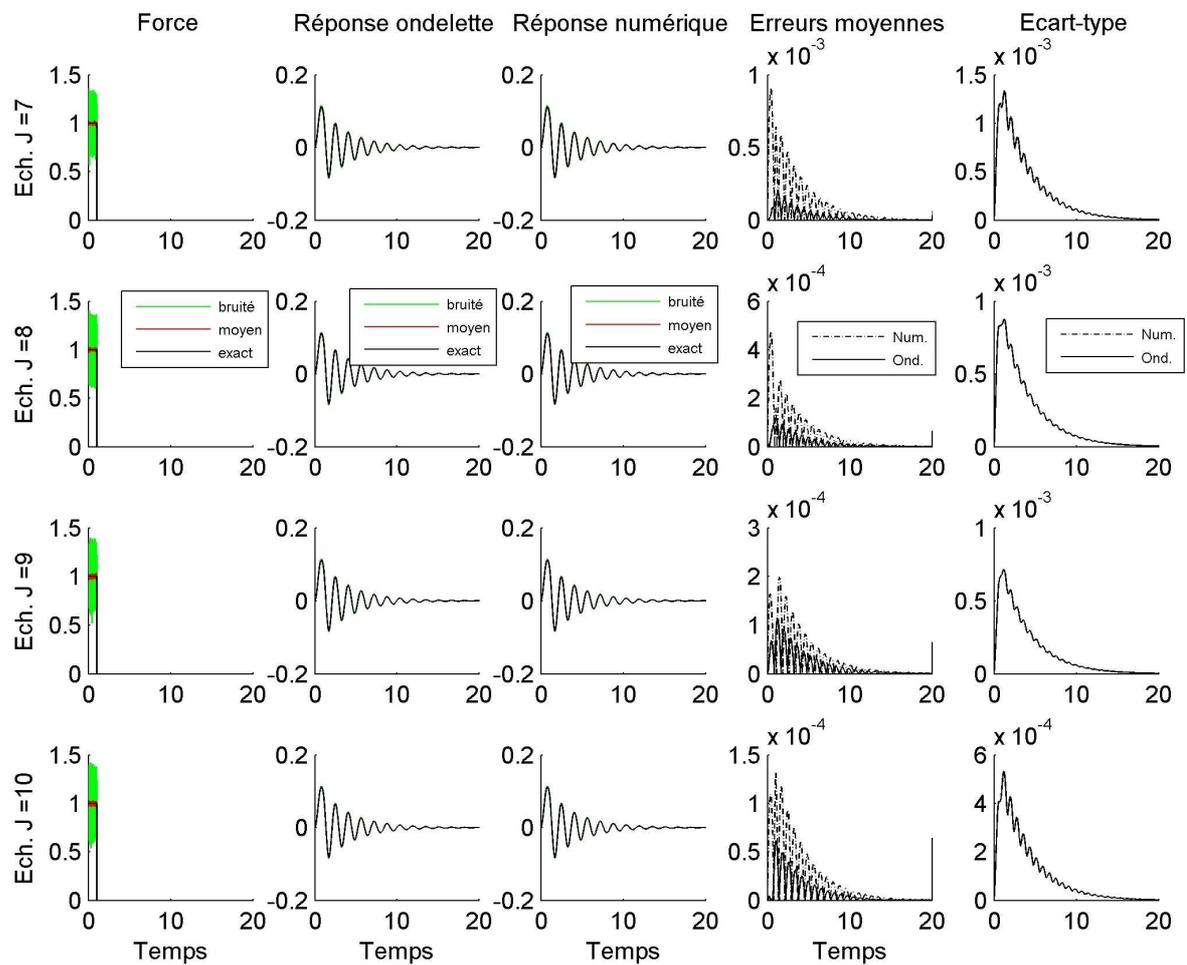


FIGURE 1.11 – Réponse et écart-type du système dynamique d'un degré de liberté sous l'action d'une force de créneau bruité

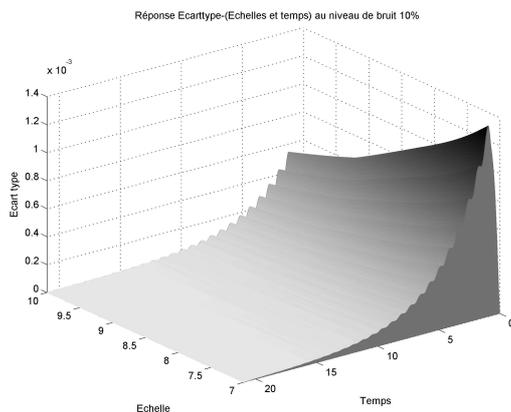


FIGURE 1.12 – Réponse Ecart-type en fonction des échelles sous l'action d'un créneau bruité

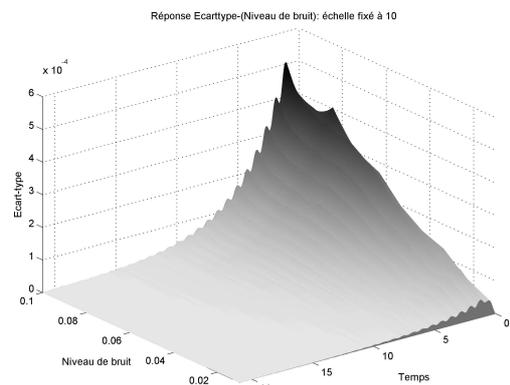


FIGURE 1.13 – Réponse Ecart-type en fonction des niveaux de bruit sous l'action d'un créneau bruité

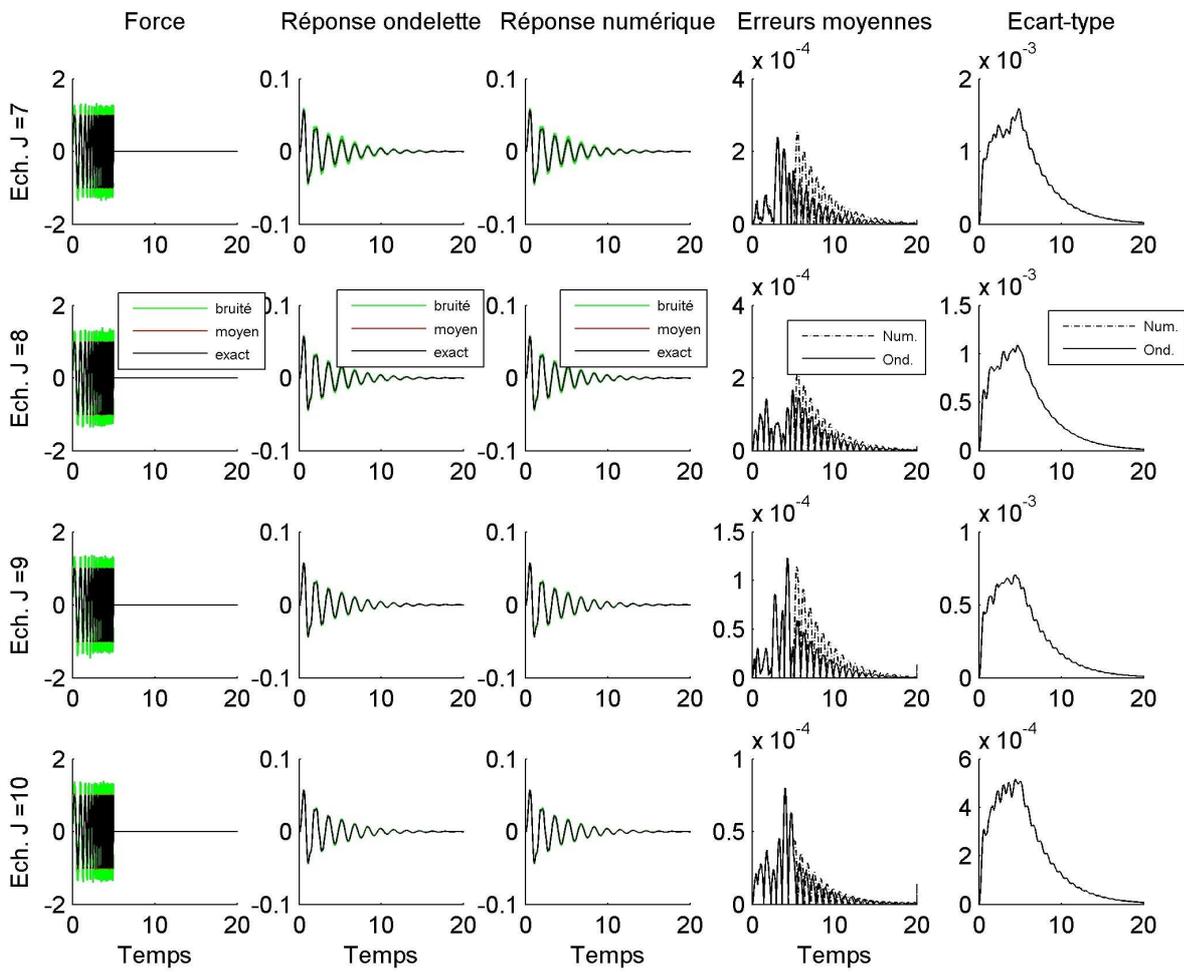


FIGURE 1.14 – Réponse et écart-type du système dynamique d'un degré de liberté sous l'action d'une force de spag bruité

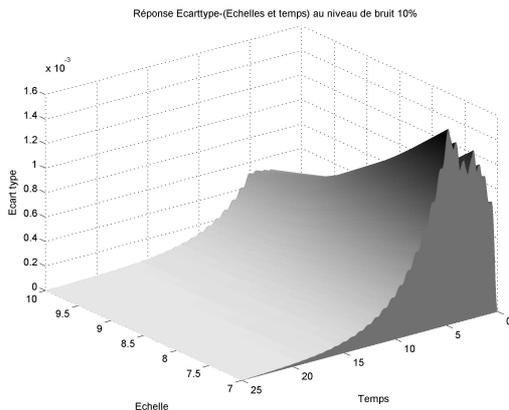


FIGURE 1.15 – Réponse Ecart-type en fonction des échelles sous l'action d'un spag bruité

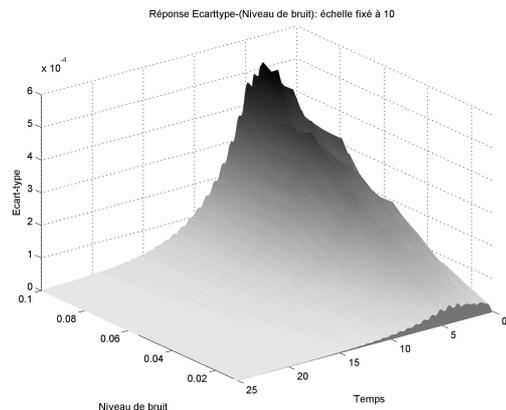


FIGURE 1.16 – Réponse Ecart-type en fonction des niveaux de bruit sous l'action d'un spag bruité

Ici, les deux fonctions de déconvolution sont supposées à support compact respectivement $[0, T_x]$ et $[0, T_f]$. Par définition de convolution et de déconvolution, la déconvoluée de deux fonctions est aussi à support compact $[0, T_x - T_f]$. Par conséquent, les voies d'approximation à l'échelle J de ces fonctions sont à support compact, i.e $[-N, 2^J T_x + N - 1]$ pour x , $[-N, 2^J T_f + N - 1]$ pour f et $[-N, 2^J(T_x - T_f) + N - 1]$ pour leur déconvoluée.

Selon la proposition 1.28, on a la relation des coefficients d'approximation des fonctions : $\forall z \in [0, L - 1]$ tq $L = 2^J T_x + 2N$

$$\widehat{s(x)}_J^0(z) = 2^{-J/2} L^2 \widehat{s(h)}_J^0(z) \widehat{\mathcal{T}}^0(z) \widehat{s(f)}_J^0(z), \quad (1.110)$$

où $\widehat{s(h)}_J^0$, $\widehat{s(f)}_J^0$ et $\widehat{\mathcal{T}}^0$ représentent les transformées en Fourier discrètes (DFT) sur $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ des vecteurs $\underline{s(h)}_J^0$, $\underline{s(f)}_J^0$ et $\underline{\mathcal{T}}^0$ obtenus par zero-padding et shifting des quantités $\underline{s(h)}_J$, $\underline{s(f)}_J$ et $\underline{\mathcal{T}}$ (cf. *Implémentation rapide d'un calcul de convolution dans une AMR de $L^2(\mathbb{R})$* dans la Section 1.2).

Les coefficients d'approximation $\underline{s(h)}_J$ de la déconvoluée sont données par les relations : $\forall z \in [0, L - 1]$ tq $L = 2^J T_x + 2N$,

$$\widehat{s(h)}_J^0(z) = \frac{\widehat{s(x)}_J^0(z)}{2^{-J/2} L^2 \widehat{\mathcal{T}}^0(z) \widehat{s(f)}_J^0(z)}, \quad (1.111)$$

$$\underline{s(h)}_J = \underline{s(x)}_{J, [0, 2^J(T_x - T_f) + 2N - 1]}^0. \quad (1.112)$$

Étant associé à l'opérateur de convolution-ondelette, l'opérateur de déconvolution peut être aussi efficacement utilisé dans le domaine de Fourier avec un algorithme rapide en $\mathcal{O}(L \log_2(L))$ par rapport au coût de $\mathcal{O}(L^3)$ dans le domaine temporel.

Exemple 1.4. On applique l'opérateur de déconvolution en ondelette pour déconvoluer la fonction $\delta(t) = \sin(2\pi t) \frac{1}{2} (t \mathbb{I}_{[0, 2]}(t) + (4 - t) \mathbb{I}_{[2, 4]}(t))$ par la fonction $\gamma(t) = \cos(2\pi t) \mathbb{I}_{[0, 2]}(t)$, dont la solution exacte est donnée par :

$$\alpha(t) = \sin(2\pi t) \mathbb{I}_{[0, 2]}(t).$$

Dans cet exemple, une comparaison entre la déconvolution en ondelette avec la déconvolution discrète est réalisée afin de montrer l'efficacité de l'opérateur en ondelettes. Les démarches d'initialisation et d'échantillonnage sont réalisés comme dans l'exemple 1.3. Les résultats sont présentés sur la figure 1.17.

Le taux de convergence de la déconvolution en ondelette est plus élevé que celui de la déconvolution discrète. Dans cet exemple, on a fait la déconvolution avec une fonction ayant des sauts aux deux bords qui causent des effets de Gibbs dans ses approximées. Mais dans la déconvoluée, on n'en voit guère.

Ensuite l'opérateur de déconvolution-ondelette est appliqué pour des fonctions qui ne causent pas d'effets de Gibbs dans leurs approximés, i.e les fonctions δ et α dans l'exemple ci-dessus. Les résultats sont présentés sur la figure 1.18.

On peut constater que les effets de Gibbs n'existent pas dans les deux fonctions initiales car il n'y a pas de saut dans ces fonctions. C'est pourquoi la déconvoluée en ondelette converge très

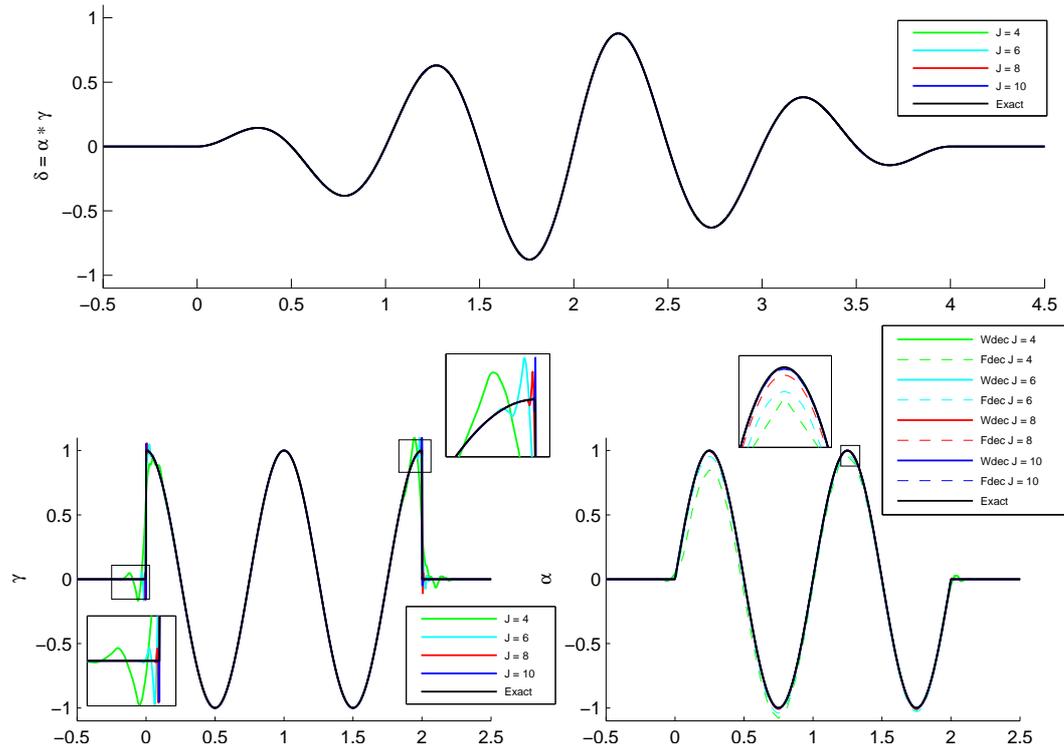


FIGURE 1.17 – Déconvolution de deux fonctions : comparaison entre la déconvolution en ondelette et la déconvolution discrète

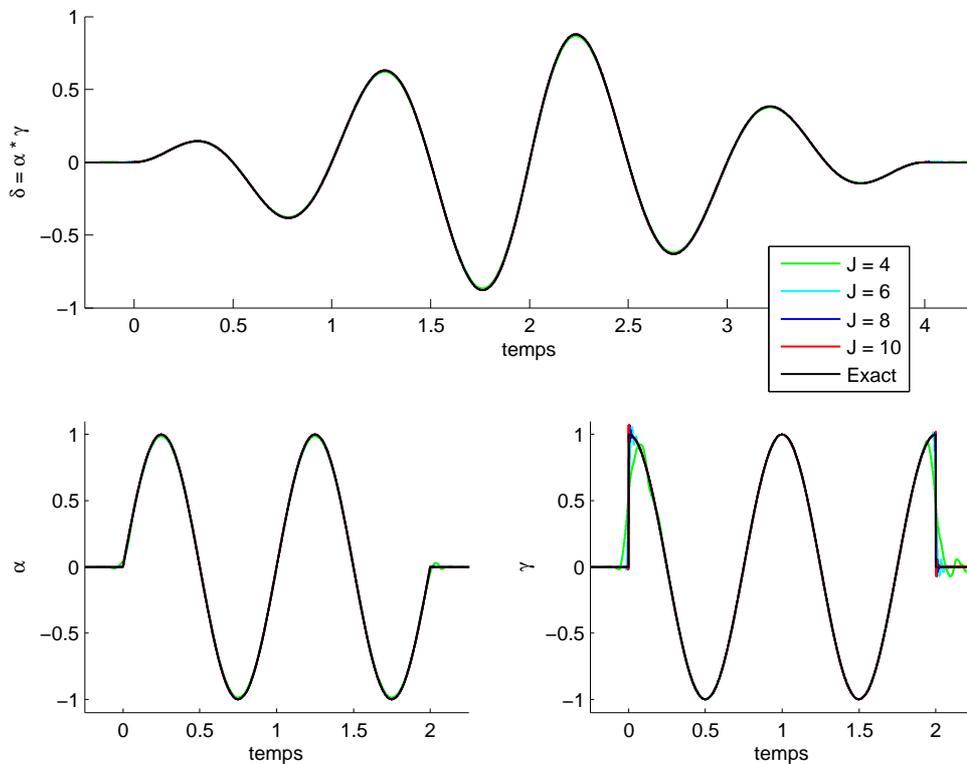


FIGURE 1.18 – Déconvolution en ondelette entre $\delta(t) = \frac{1}{2} \sin(2\pi t) (t \mathbb{I}_{[0, 2]}(t) + (4 - t) \mathbb{I}_{[2, 4]}(t))$ et la fonction $\alpha(t) = \sin(2\pi t) \mathbb{I}_{[0, 2]}(t)$

vite vers la solution exacte. Nous nous plaçons toujours dans le cadre d'une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ et la déconvoluée dispose des sauts aux deux bords de support compact. Par conséquent, les effets de Gibbs ne peuvent pas être éliminés. Afin d'éliminer ou de minimiser les effets de Gibbs, il est souhaitable de considérer le cas des convolués dans le contexte d'une Analyse Multirésolution sur l'Intervalle (AMRI) [27].

Une question demeure néanmoins mal comprise : *L'opérateur de déconvolution-ondelette est-il résistant au bruit ?* La section suivante a pour objectif de répondre à ce problème.

Robustesse de l'opérateur de déconvolution-ondelette

Dans cette section, on considère le même oscillateur que dans la section de robustesse de la convolution-ondelette. Nous nous intéressons ici à la fonction de transfert intrinsèque du système. En expérimentation, on mesure l'accélération des planchers et de la table vibrante qui nous permettent d'obtenir les déplacements relatifs des planchers par rapport à un référentiel fixe. La fonction de transfert est obtenue en déconvoluant ces déplacements relatifs avec la force appliquée. Cependant, il y a toujours des bruits éventuels intervenant dans la réponse et dans la force et il reste à vérifier la résistance de l'opérateur de déconvolution-ondelette par rapport à ces bruits. Pour cela, il suffit de créer des bruits appliqués sur ces signaux comme dans la section de convolution. Mais nous ne pouvons pas appliquer n'importe quel bruit sur la réponse car il y a toujours des relations entre la réponse et la force, c'est la fonction de transfert du système. Donc pour créer des bruit sur la réponse, on crée des bruit sur la fonction de transfert et comme des aléas sur le modèle et la réponse bruitée est la convoluée de cette fonction de transfert bruitée avec la force.

$$\tilde{f}(t) = (1 + \sigma_f \cdot \theta(t)) \cdot f(t), \quad (1.113)$$

$$\tilde{h}(t) = (1 + \sigma_h \cdot \gamma(t)) \cdot h(t), \quad (1.114)$$

$$\tilde{x}(t) = \chi(f, \tilde{h})(t). \quad (1.115)$$

Dans ce cas, on applique des bruits de niveaux 25% pour les amplitudes de la force et 10% pour les amplitudes de la fonction de transfert avec la loi aléatoire uniforme.

Pour chaque couple de tirage créé, on applique l'opérateur de déconvolution-ondelette sur la réponse bruitée et la force bruitée pour obtenir un tirage de la fonction de transfert. En se basant sur la loi (forte) des grands nombres nous calculons la moyenne et l'écart-type à chaque instant de la fonction de transfert. Une comparaison entre la déconvolution-ondelette avec la déconvolution discrète est aussi réalisée et on obtient les résultats illustrés sur les figures 1.19 et 1.20.

Pour le calcul de déconvolution discrète, les fonctions sont échantillonnées en même échelle avec la déconvolution en ondelette. La déconvolution entre ces signaux échantillonnés est effectuée en utilisant le zero-padding et la transformée en Fourier discrète (DFT).

L'erreur locale des moyennes par rapport à la fonction de transfert exacte (connues théoriquement pour chaque système dynamique) est aussi présentée sur la figure 1.19.

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0} e^{-\xi \cdot \omega_0 t} \cdot \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t). \quad (1.116)$$

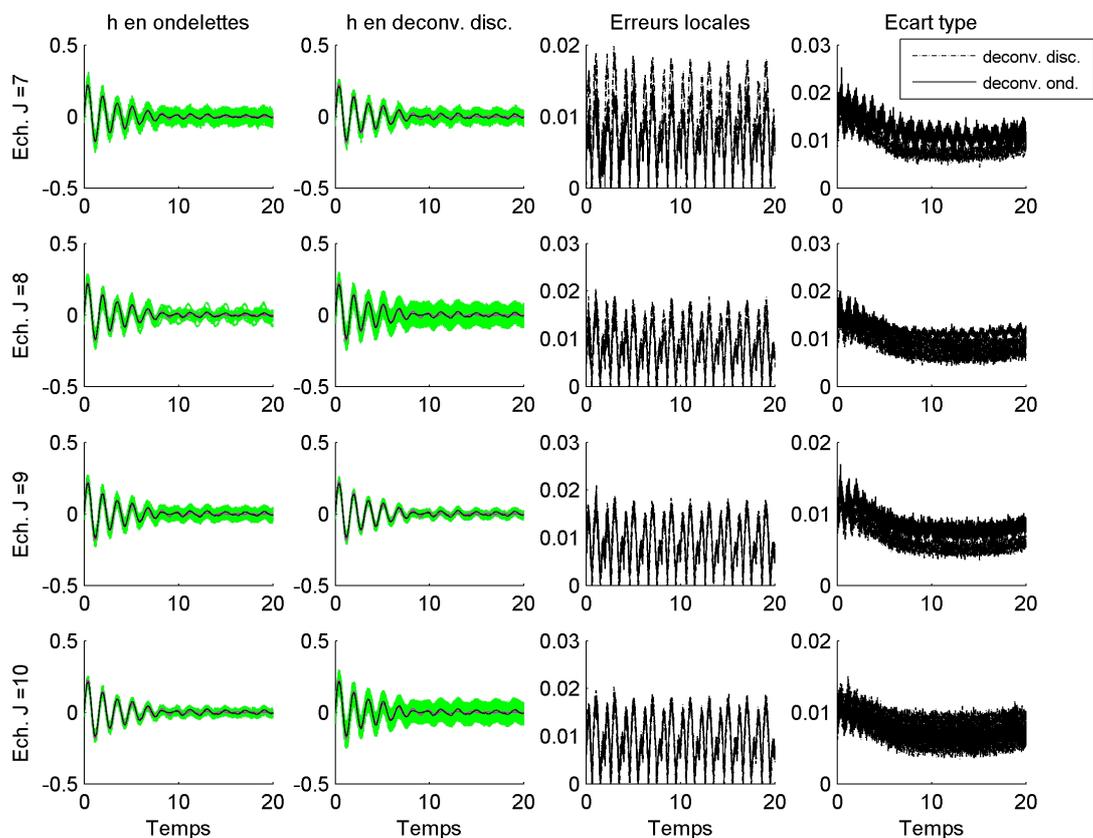


FIGURE 1.19 – Fonction de transfert du système dynamique d'un degré de liberté

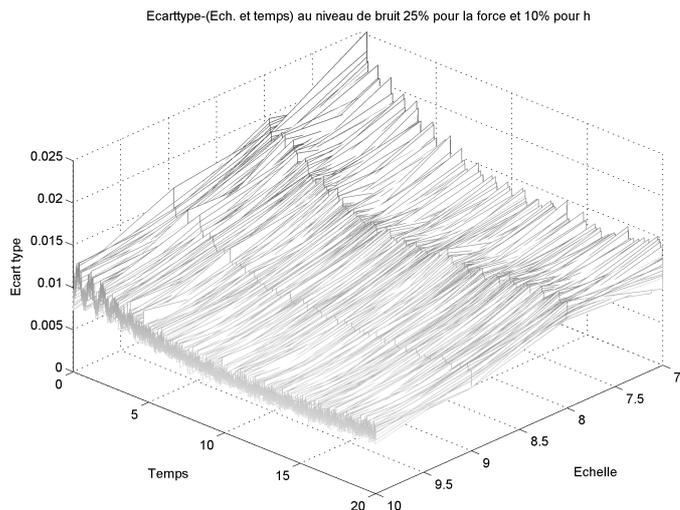


FIGURE 1.20 – Réponse Ecart-type de la fonction de transfert en fonction des échelles d'approximation

Il n'y a pas beaucoup de décalage des erreurs locales ou bien des écart-types entre les résultats de déconvolution en ondelette avec ceux de déconvolution discrète. Le niveau de bruit de la déconvoluée approximatif à 10% ne dépasse pas celui de la force et de la fonction de transfert aléatoire. Par conséquent, on peut dire que l'opérateur de déconvolution en ondelette est aussi robuste que la déconvolution discrète. Il sera utilisé pour l'analyse d'un système dynamique linéaire en pratique.

1.4 Conclusion

Ce chapitre a brièvement présenté les notions de l'outil analytique de la transformée en ondelette et l'Analyse Multirésolution (AMR) qui est devenue un outil numérique performant grâce aux algorithmes de calcul rapides de S. Mallat. En se basant sur les travaux de G. Beyclin [1] et de S. Pernot [28], les problèmes de construction des opérateurs d'intégration, de convolution et de déconvolution en ondelette sur $L^2(\mathbb{R})$ traités dans la Section 1.3 sont utilisés dans les chapitres suivants pour analyser la réponse expérimentale d'un système dynamique linéaire.

L'étude exhaustive des tenseurs bidimensionnels des opérateurs d'ondelette a permis de remplacer les multiplications matricielles très coûteuses dans l'espace temporel par des convolutions en introduisant des vecteurs de filtre à réponse impulsionnelle finie. Les calculs réalisés plus rapides mais moins coûteux dans le domaine de Fourier grâce à quelques techniques de zéro-padding et shifting facilitent l'utilisation pratique des opérateurs-ondelettes.

Quelques exemples sont présentés pour illustrer et montrer les avantages des opérateurs-ondelettes par rapport à des techniques d'intégrations numériques. Il reste cependant encore des problèmes liés à des effets de Gibbs, de la convergence et l'ordre d'erreurs des opérateurs qui ne sont pas résolus.

Chapitre 2

Analyse Super-Résolution

Ce chapitre propose une nouvelle contribution au concept de l'Analyse Super-Résolution (superMRA). Utilisant la nouvelle définition des grilles super-résolutions introduite par S. Coutel et S. Pernot [4], les calculs rapides sont reliés intrinsèquement à des convolutions rapides dans l'espace de Fourier. Le but final est d'explorer le contenu des fréquences instantanées des signaux échantillonnés ; une méthodologie de transformée en ondelettes continue est conçue pour réaliser avec succès les zoomings raffinés dans un scalogramme permettant d'analyser des fréquences instantanées. Une Toolbox "maison" est développée en environnement MATLAB dans le cadre de ces études dont le tutoriel détaillé sera présenté à la fin de ce chapitre.

Sommaire

2.1	Introduction	40
2.2	Rappels préliminaires	40
2.2.1	Analyse surabondante de Perrier	41
2.2.2	Analyse Super-Résolution de S. Coutel	42
2.3	Implémentation rapide d'une analyse super-résolution	46
2.3.1	Filtres Super-résolutions	46
2.3.2	Filtres Super-résolutions Réduits	49
2.4	Présentation de l'Outil Scalogram	51
2.4.1	Structure et fonctionnalités principales de l'Outil Scalogram	51
2.4.2	Procédure de construction des scalogrammes	52
2.4.3	Validations des superMRA	58
2.5	Conclusion	60

2.1 Introduction

D'un point de vue générale, une analyse temps-fréquence instantanée est dite robuste si elle permet exactement d'analyser et d'identifier les fréquences instantanées locales d'un signal sur le demi-plan temps-fréquence. Malheureusement, la plupart des transformées bien connues comme la transformée en Fourier [18], la transformée de Gabor [6, 7] ou encore la transformée de Wigner-Ville [21] souffrent des limitations dictées principalement par le principe d'Heisenberg [16] qui déclare qu'une fonction d'analyse n'atteint jamais une localisation optimale en temps et en fréquence. La transformée en ondelettes se basant sur la construction des atomes dilatés/translatés d'une fonction d'analyse appelée ondelette mère permet d'obtenir un bon compromis en respectant les limitations d'Heisenberg.

De plus, les ondelettes mères qui sont construites de manière que leur réponse en temps et en fréquence décroissent rapidement, sont bien localisées sur le demi-plan temps-fréquence. L'analyse en ondelettes continue définie en [21, 35] fournit en effet un bon compromis par la flexibilité ajoutée. Cependant les calculs pratiques des coefficients d'ondelettes $\mathcal{W}_f(\alpha, \tau)$ pour des événements temps-fréquence (τ, α) sont réalisés au moyen de séries tronquées calculées en espace de Fourier et caractérisées par une complexité élevée ou en utilisant l'algorithme "à trou" [16, 31] qui réalise avantageusement les convolutions successives rapides avec les filtres d'ondelette. Malgré son efficacité, l'algorithme "à trou" restreint le microscope de la transformée en ondelettes continue à une grille de densité médiocre des coefficients d'ondelette en terme de densité de résolution. En conséquence, l'obtention de certaines redondances en fréquence avec une densité de résolution élevée et pour un coût raisonnable est actuellement hors de portée.

Dans sa thèse soutenue en 2006, S. Coustel [4] a introduit une nouvelle approche appelée Analyse super-résolution (superMRA) permettant le calcul rapide de la transformée en ondelettes continue pour n'importe-quelle valeur dyadique inverse de résolution et un modèle d'ondelette arbitraire dérivé de l'analyse multirésolution de Perrier. En se basant sur les principes de l'analyse multirésolution surabondante périodisée développée par Perrier et al [30], une nouvelle définition de grille super-résolution est introduite en fournissant une suite d'outils algorithmiques permettant de réaliser des analyses parcélées sur le plan temps-fréquence dont la finalité vise la construction du squelette des fréquences instantanées d'un signal. Cependant, ces calculs sont basés sur les convolutions successives des voies de coefficients d'ondelette avec une banque des Filtres Surabondantes Factorisées ou Réduites (FSF ou FSR) pré-calculés qui restreint la flexibilité de changement de résolution. De plus, les convolutions demandent des allers-retours entre les espaces temporel et de Fourier qui conduisent à des coûts de calcul assez élevés. À partir de ce contexte, de nouveaux algorithmes sont proposés pour améliorer les calculs de l'Analyse en ondelettes contrôlée dont un Toolbox appelé Scalogram est déjà implémenté en environnement MATLAB pour les applications pratiques.

2.2 Rappels préliminaires

Cette section présentent quelques rappels de notions spécifiques aux analyses temps-fréquence puis détaille les mécanismes de discrétisation du plan temps-fréquence associés à une analyse surabondante de Perrier. La définition de l'analyse surabondante contrôlée est aussi rappelée ici avant l'introduction de nouveaux algorithmes dans les sections qui suivent.

2.2.1 Analyse surabondante de Perrier

À partir de la connaissance de la voie des coefficients d'approximation \mathcal{Z}_α appartenant à la résolution élevée $\alpha = N$ obtenue par moyen d'une quadrature d'ondelette spécifique [17, 28, 34], une pyramide de décomposition des voies des coefficients de détails \mathcal{X}_α est successivement calculée à basse résolutions grâce à l'algorithme rapide de S. Mallat[20]. Ces derniers coefficients sont généralement insuffisants pour le suivi des changements de fréquence dans le signal. Suivant les études sur l'analyse multirésolution en ondelettes périodisées introduite par [6, 29], le concept d'analyse surabondante sur l'intervalle \mathbb{T} d'un signal 1-périodique est défini pour apporter une redondance temps-fréquence à l'intérieur d'un espace d'approximation V_N en considérant une grille dense comportant des résolutions intermédiaires comme il suit :

Définition 2.1 (Analyse en ondelettes périodisées). Soit (α, τ) une paire d'événements en fréquence et en temps. Les fonctions d'échelle $\Phi_{\alpha,\tau}$ et de détail $\Psi_{\alpha,\tau}$ peuvent être définies comme les atomes périodisés dilatés et translatés des fonctions d'échelle et de détail (ϕ, ψ) dérivées d'une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$. Leur expression dans le domaine temporel est donnée par :

$$\Phi_{\alpha,\tau}(t) = \sqrt{\alpha} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \phi \left(\alpha \left(\frac{t-\tau}{T} + z \right) \right), \quad (2.1)$$

$$\Psi_{\alpha,\tau}(t) = \sqrt{\alpha} \sum_{z \in \mathbb{Z}} \psi \left(\alpha \left(\frac{t-\tau}{T} + z \right) \right). \quad (2.2)$$

Définition 2.2 (Grille surabondante G_N). Une grille $G_N = \mathbb{F}_N \times T\mathbb{D}_N \subset \mathbb{Q}^2$, dite grille surabondante, définit les couples (α, τ) tels que :

$$\mathbb{F}_N = \{ \alpha \in \mathbb{Q} / \alpha = N/q \text{ et } q = 2, 4, \dots, N \}, \quad (2.3)$$

$$\mathbb{D}_N = \{ \tau \in \mathbb{D} / \tau = k/N \text{ et } k = 0, \dots, N-1 \}. \quad (2.4)$$

Les coefficients surabondants d'approximation \mathcal{Z}_α d'un signal s projeté dans l'espace V_α , respectivement les coefficients surabondants de détail \mathcal{X}_α du signal f projeté dans l'espace W_α , vérifient alors les expressions suivantes :

$$(\mathcal{Z}_\alpha)_k = \mathcal{Z}_{\alpha,k} = \langle f_J, \Phi_{\alpha,k} \rangle = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{T}} f_J(t) \Phi_{\alpha,k}(t) dt, \quad (2.5)$$

$$(\mathcal{X}_\alpha)_k = \mathcal{X}_{\alpha,k} = \langle f_J, \Psi_{\alpha,k} \rangle = \frac{1}{T} \int_{\mathbb{T}} f_J(t) \Psi_{\alpha,k}(t) dt, \quad (2.6)$$

avec f_J la projection du signal f dans l'espace d'approximation V_J .

Définition 2.3 (Filtres Surabondants d'approximation). Soit α une fréquence relative de la grille G_N d'une analyse surabondante initialisée à l'échelle $J = \mathbb{E}(\log_2(N))$, alors on appelle filtre surabondant d'approximation, noté E_α , respectivement filtre surabondant de détail, noté F_α , les filtres fournissant les coefficients surabondants d'approximation \mathcal{Z}_α , respectivement les coefficients surabondants de détail \mathcal{X}_α par convolution avec les coefficients périodisés sf_J selon les relations en Fourier :

$$\widehat{\mathcal{Z}}_\alpha(k) = N \widehat{sf}_J(k) \overline{\widehat{E}_\alpha(k)}, \quad (2.7)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_\alpha(k) = N \widehat{sf}_J(k) \overline{\widehat{F}_\alpha(k)}. \quad (2.8)$$

Ces filtres sont déterminés à partir de la transformée des fonctions d'échelle et de détail de l'analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ (AMR) correspondante :

$$\widehat{E}_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} \cdot \widehat{\phi}(z/N) / \widehat{\phi}(z/\alpha), \quad (2.9)$$

$$\widehat{F}_\alpha(z) = \frac{1}{\sqrt{\alpha N}} \cdot \widehat{\psi}(z/N) / \widehat{\phi}(z/\alpha). \quad (2.10)$$

Bien que mathématiquement bien posée, l'analyse surabondante de Perrier recèle encore un manque de redondance en fréquence pour fournir une bonne analyse temps-fréquence : l'augmentation du nombre des résolutions dans la grille G_N exige en effet une valeur très élevée de la résolution fine N ce qui conduit à une complexité algorithmique des calculs $\mathbf{O}(N \log(N))$ – les coefficients surabondants sont calculés au moyen des convolutions de filtre réalisées en domaine de Fourier. Les études de S. Coutel [4] ont démontré que sous certaines hypothèses, l'analyse multirésolution surabondante peut être intrinsèquement contrôlée en préservant la structure pyramidale comme les algorithmes de Mallat avec une complexité $\mathbf{O}(N)$.

2.2.2 Analyse Super-Résolution de S. Coutel

L'analyse surabondante de Perrier est restreinte à une grille G_N de pauvre densité en temps-fréquence en étendant un signal en une espace d'approximation fine V_N relié à l'échelle fine $J = \log_2(N)$ qui reste fixée pendant l'analyse. Une suite de grilles super-résolutions peut être définie pour élargir les possibilités de la construction originale de Perrier.

Définition 2.4 (Grille super-résolution G_N^r). Soit $N = 2^J$ avec $J \in \mathbb{N}$ et r les paramètres d'enrichissement. Une grille super-résolution G_N^r peut être définie comme une collection des paires de temps fréquence (α_n, τ_k) satisfaisant les relations suivantes :

$$G_N^r = \begin{cases} (\alpha_n, \tau_k) \in \mathbb{D}^{-1} \times \mathbb{D}, \\ \alpha_n = 2^r N/n, & n = 2^{r+1}, 2^{r+1} + 2, \dots, 2^r N, \\ \tau_k = k/(2^r N), & k = 0, 1, \dots, 2^r N - 1. \end{cases} \quad (2.11)$$

Le critère de stabilité de Perrier [29] prouve simplement que pour tous $(\alpha, \tau_k) \in G_N^r$, les fonctions surabondantes d'échelle $\Phi_{\alpha, k}$ et respectivement de détail $\Psi_{\alpha, k}$ appartiennent à l'espace d'approximation $V_{2^r N}$. Par conséquent, il est possible d'injecter l'espace d'approximation V_N à l'intérieur d'un espace de résolution fine $V_{2^r N}$.

Définition 2.5 (Analyse Super-Résolution). Une analyse super-résolution (superMRA) limitée à la grille G_N^r peut être définie comme une collection des espaces surabondants d'approximation $\{V_\alpha\}_{\alpha \in G_N^r}$ et de détail $\{W_\alpha\}_{\alpha \in G_N^r}$ organisés comme suit :

$$V_\alpha = \text{Span}\{\Phi_{\alpha, \tau_k}\}_{\tau_k \in G_N^r}, \quad (2.12)$$

$$W_\alpha = \text{Span}\{\Psi_{\alpha, \tau_k}\}_{\tau_k \in G_N^r}. \quad (2.13)$$

Définition 2.6 (Voies des coefficients surabondants). Avec les hypothèses précédentes, un tel signal $f \in \mathbb{T}$ peut être indifféremment décomposé sur des repères obliques $\{V_\alpha\}_{\alpha \in G_N^r}$ et $\{W_\alpha\}_{\alpha \in G_N^r}$ de l'espace $V_{2^r N}$ rendant des séries d'approximation et de détail reliées respectivement aux voies des coefficients surabondants $\mathcal{Z}_\alpha = (\mathcal{Z}_\alpha(k))_k$ et $\mathcal{X}_\alpha = (\mathcal{X}_\alpha(k))_k$ qui sont donnés $\forall k \in [0, 2^r N[$ par :

$$\mathcal{Z}_\alpha(k) = \langle f, \Phi_{\alpha, \tau_k} \rangle_{\mathbb{T}}, \quad (2.14)$$

$$\mathcal{X}_\alpha(k) = \langle f, \Psi_{\alpha, \tau_k} \rangle_{\mathbb{T}}. \quad (2.15)$$

On peut noter clairement que l'augmentation du paramètre d'enrichissement r conduit en effet à une augmentation du nombre de résolutions disponibles dans une octave de la grille G_N^r définie comme suit :

Définition 2.7 (Octave des fréquences). Une octave des fréquences \mathcal{O}_j est une portion du demi-plan temps-fréquence délimitée par la propagation de fréquence $[2^{j-1}\xi_\psi, 2^j\xi_\psi]$ invoquant l'échelle j .

D'une façon générale, l'échelle associée à une résolution donnée α prend un nombre positif réel $s = \log_2(\alpha)$.

Définition 2.8 (Densité de résolution). Soit G une grille de du demi-plan temps-fréquence et soit $\lambda[j]$ le nombre de résolution $\alpha \in G$ tels que $\alpha\xi_\psi \in \mathcal{O}_j$. Une densité de résolution correspondant à l'octave \mathcal{O}_j peut être définie par $\rho_G[j] = (\lambda[j] - 1)/2^{j-1}$.

Propriétés des grilles super-résolutions G_N^r

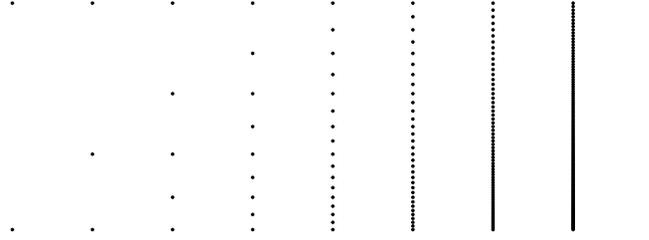


FIGURE 2.1 – Distribution des super-résolutions dans une octave correspondant à la croissance des valeurs du paramètre d'enrichissement r .

Propriété 2.9. Soit G_N^r une grille super-résolution définie par (2.4). Donc, la densité de résolution $\rho_N^r[j]$ de la grille G_N^r relative à une octave \mathcal{O}_j pour l'échelle $1 \leq j \leq \log_2(N)$ vérifie :

$$\rho_N^r[j] = 2^r \rho_N^0[j] = \frac{2^r N}{2^{2j}}. \quad (2.16)$$

Les résolutions α_n disponible dans l'octave \mathcal{O}_j sont définies $\forall n \in [-2^{r-j-2}N, 2^{r-j-2}N]$ par équation :

$$\alpha_n = \frac{2^r N}{3 \times 2^{r-j-1}N + 2n}. \quad (2.17)$$

Pour comparaison, la grille super-résolution G_N de Perrier est caractérisée par la densité de résolution $\rho_N[j] = N/2^{2j}$ pour $j < J$.

Le paramètre d'enrichissement r détermine complètement la topologie de la grille super-résolution G_N^r et caractérise la densité de résolution ou la redondance des fréquences dans les octaves. La distribution des résolutions disponibles dans une octave avec l'accroissement de r est présentée sur la Fig. 2.1. Les propriétés suivantes mettent en évidence la méthodologie pour construire une grille super-résolution convenable en assurant une densité de résolution donnée.

Propriété 2.10. Un signal $s \in V_N$ peut être analysé avec une densité de résolution ρ relative à l'octave \mathcal{O}_j , $j \in [1, \log_2(N)]$ si l'on considère une grille super-résolution G_N^r donnée par :

$$r \geq \max(0, \mathbb{E}(\log_2(2^{j-1}\rho)) + j - J + 2), \quad (2.18)$$

où \mathbb{E} désigne la fonction d'entier le plus proche.

Comme présenté précédemment, l'analyse super-résolution est connecté intérieurement à sa grille super-résolution correspondante. Une condition suffisante pour définir le paramètre d'enrichissement e convenable permettant d'accéder à une résolution donnée α est fournie ci-après.

Propriété 2.11. *Une résolution $\alpha \in \mathbb{D}^{-1}/G_N$ d'un signal $s \in V_N$ peut être accessible dans une grille super-résolution G_N^r dès que le paramètre d'enrichissement e est choisi tel que :*

$$r \geq \inf \{z \in \mathbb{Z} / 2^z N \alpha^{-1} \in \mathbb{N}\}. \quad (2.19)$$

Au contraire, une résolution $\alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{D}^{-1}$ n'est jamais accessible quelque soit la grille super-résolution G_N^r . L'investigation de la résolution "purement" rationnelle et de celle dyadique non-inversible est par conséquent incompatible avec le critère de stabilité de Perrier. Un théorème de densité permet quand même d'affirmer que pour n'importe-quelle résolution purement rationnelle $\alpha \in \mathcal{O}_j$, il existe une grille super-résolution G_N^r approchant une résolution au voisinage $\tilde{\alpha}^r$ telle que l'erreur $|\alpha - \tilde{\alpha}^r|$ vérifie l'inégalité suivante :

$\exists j \in [1, \log_2(N)], \exists r \in \mathbb{N}^*$

$$|\alpha - \tilde{\alpha}^r| \leq \frac{2^j}{2^{r-j}N + 2}. \quad (2.20)$$

Dans une certaine mesure on peut dresser une comparaison entre les analyses super-résolutions et les analyses surabondantes de Perrier dont elles sont issues. En effet, l'analyse super-résolution d'un signal $f \in \mathbb{T}$ sur une grille G_N^r réalise les mêmes calculs qu'une analyse surabondante de Perrier, initialisée par une voie de coefficients d'approximation $\mathcal{Z}_{2^r N}$ issue de la ré-injection sans détails de la voie de coefficients sf_N pour des résolutions compatibles entre les deux analyses. Malgré l'étape d'initialisation similaire, l'analogie ne peut pas être étendue au-delà de ce point. Pour un paramètre d'enrichissement e , ces deux analyses vérifient la propriété suivante :

$$G_N^r \subset G_{2N}^{r-1} \subset G_{2^2 N}^{r-2} \cdots \subset G_{2^r N}^0 = G_{2^r N}. \quad (2.21)$$

L'analyse de la distribution fréquentielle présenté sur Fig. 2.1 en terme de paramètre d'enrichissement r permet de dire que la densité fréquentielle est plus élevée dans le premier tiers de chaque octave et les fréquences devient plus creuses dans les deux autres tiers. Selon la définition 2.4, l'octave \mathcal{O}_j dans la grille super-résolution G_N^r accède à deux fois plus de fréquences que l'octave voisine plus fine \mathcal{O}_{j+1} au prix d'une propagation fréquentielle deux fois plus petite. Cette double hétérogénéité de distribution des résolutions induit dans le scalogramme d'un signal un sous-échantillonnage haute fréquence relatif dans chaque octave et absolu sur tout le plan temps/fréquence. Une grille quasi-continue est aussi introduite ci-après pour minimiser les effets de distorsion causés par la grille non-conforme G_N^r .

Définition 2.12 (Grille Quasi-continue \tilde{G}_N^r). Considérons une analyse super-résolution de V_N sur un cadre de $V_{2^r N}$ attaché à la grille G_N^r . En supposant que le paramètre d'enrichissement r est choisi tel que les fréquences λ restent accessibles dans l'octave fine \mathcal{O}_J , une grille quasi-continue \tilde{G}_N^r peut être définie comme la collection des paires $(\alpha_n, \tau_k)_{n,k}$ détaillées ci-après. Pour toute octave \mathcal{O}_j et $1 \leq j \leq J$, les fréquences $\alpha_n \in \mathcal{O}_j$ sont données $\forall p \in [0, (\lambda - 1)2^j/N]$ par :

$$\alpha_n = \begin{cases} \frac{(\lambda - 1)2^{j+1}N}{3(\lambda - 1)N - 2^{j+2}n}, & \text{si } n = \frac{pN^2}{2^{2(j+1)}}, \\ \frac{(\lambda - 1)2^{j+1}N}{3(\lambda - 1)N + 2^{j+2}n}, & \text{si } n = \frac{2pN^2}{2^{2(j+1)}}. \end{cases} \quad (2.22)$$

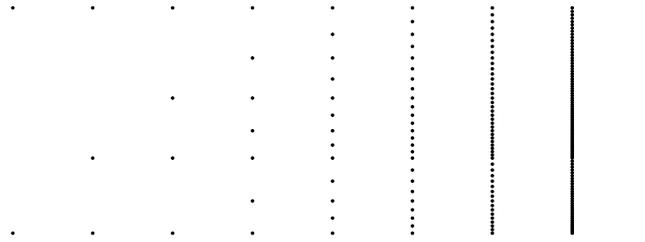


FIGURE 2.2 – *Distribution fréquentielle quasi-continue d'une octave donnée correspondant au paramètre d'enrichissement $r = 0 \dots 8$.*

Contrairement à la grille G_N^r , la grille quasi-continue \tilde{G}_N^r affichée sur la Fig. 2.2 pour les valeurs successives du paramètre d'enrichissement $r = 0, \dots, 8$ est caractérisée par une distribution fréquentielle presque homogène dans une octave. La cartographie quasi-continue peut facilement être connectée à une grille \tilde{G}_N^r en utilisant les filtres FSC (voir Section 2.3.1).

Pour des raisons pratiques, le calcul quasi-continu peut être motivé uniquement par la quantité $\mathcal{R} = 3 \times 2^r / N$ ce qui réfère à la densité de résolution en octave fine \mathcal{O}_J et ce qui est renommée résolution lorsque aucune confusion n'est permise.

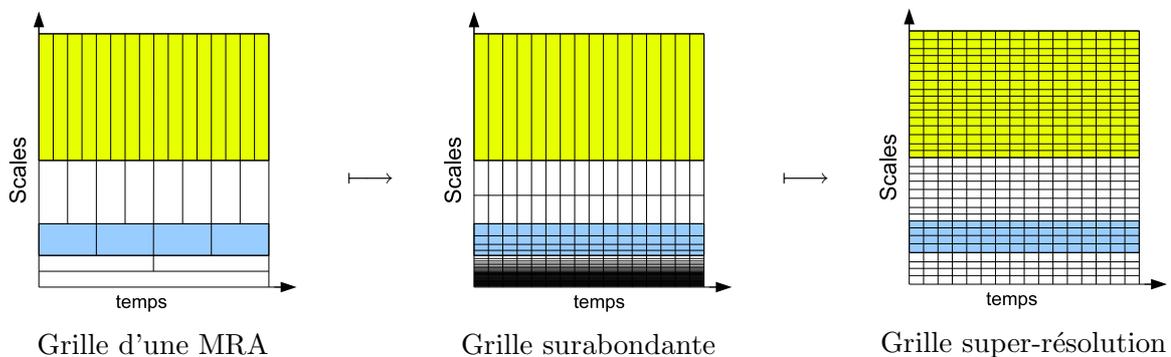


FIGURE 2.3 – *Comparaison des grilles*

Malgré la restriction de l'analyse super-résolution aux résolutions $\alpha = 2^r N / n$ avec $n = 2^{r+1}, 2^{r+1} + 2, 2^{r+1} + 4, \dots, 2^r N$, la grille temps-fréquence disponible est beaucoup plus fine que celle de Perrier et évidemment sans comparaison avec la grille dyadique "à trou". À première vue, l'analyse super-résolution sur la grille G_N^r semble être coûteuse avec une complexité d'ordre $\mathbf{O}(2^r \cdot N \log(2^r \cdot N))$. Des filtres surabondants factorisés et réduits sont proposés par S. Coutel pour accélérer ces calculs mais ils demandent toujours de pré-calculer les coefficients des filtres à qui pose des contraintes de flexibilité de changement de résolution. De plus, la réalisation des convolutions de filtres dans l'espace temporel n'est pas vraiment la meilleure solution en terme de vitesse de calcul. La section suivante vise à proposer de nouveaux algorithmes de calculs plus rapides mais moins coûteux en mémoire de stockage permettant améliorer la finesse de représentation d'un signal dans le demi-plan temps/fréquence dans le cadre d'une analyse super-résolution.

2.3 Implémentation rapide d'une analyse super-résolution

Comme l'analyse super-résolution est liée considérablement à la théorie des filtres miroirs en quadrature, le calcul des coefficients surabondants correspondant à la grille G_N^r peuvent être réalisés effectivement dans l'espace temporel en notant que les filtres peuvent être factorisés judicieusement. Mais en profitant des relations en transformée de Fourier comme dans l'analyse surabondante de Perrier, un ensemble des Filtres Super-résolutions est conçu pour réaliser le calcul des coefficients surabondants à l'octave élevée directement à partir de la connaissance des coefficients d'approximation standard sf_N à l'échelle fine $J = \log_2(N)$.

En s'appuyant sur l'algorithme rapide de Mallat et la stratégie de Hölschneider dans son algorithme "à trou", de nouveaux algorithmes rapides comportant des Filtres Super-résolution Réduit (FSR) sont introduits pour dériver itérativement les coefficients surabondants dans une octave à partir des coefficients appartenant à l'octave précédente. Par conséquent, il est simple de calculer progressivement les coefficients surabondants octave par octave une fois que l'octave fine a été initialisée en utilisant des filtres super-résolution compacts.

2.3.1 Filtres Super-résolutions

Une analogie avec l'analyse multirésolution de Perrier souligne qu'un signal $f \in V_N$ dont les coefficients d'échelle $sf_N \in \mathbb{R}^N$ sont connus peut être étendu dans une grille super-résolution G_N^r avec les coefficients surabondants $\mathcal{Z}_{2^r N}$ et $\mathcal{X}_{2^r N}$ obtenus en réalisant les ré-injections successives de sf_N dans les espaces d'approximations plus élevées selon l'algorithme rapide de Mallat présenté en Fig. 1.4. Le but ici est de démontrer que cette procédure de ré-injection fastidieuse liée au paramètre d'enrichissement r peut être évitée en notant que les coefficients surabondants \mathcal{Z}_α et \mathcal{X}_α reliés à la résolution α dans la grille super-résolution G_N^r peuvent être dérivés pertinemment à partir des coefficients sf_N au moyen des convolutions avec les deux séries des filtres N -périodique $(E_\alpha^{r,\delta})_{0 \leq \delta < 2^r - 1}$ et $(F_\alpha^{r,\delta})_{0 \leq \delta < 2^r - 1}$ appelés aussi les Filtres Super-résolutions.

Propriété 2.13 (Filtres Super-résolutions). *Soit sf_N les coefficients d'approximation d'un signal donné $f \in V_N$ et \mathcal{Z}_α (respectivement \mathcal{X}_α) ses coefficients d'approximation (respectivement de détail) à la résolution α dans une grille super-résolution G_N^r . Il existe un ensemble de filtres d'approximation (respectivement de détail) E_α^r (resp. F_α^r) $2^r N$ -périodiques définis $\forall k \in [0, 2^r N - 1]$ par :*

$$\mathcal{Z}_\alpha(k) = \sum_{n=0}^{N-1} sf_N(n) E_\alpha^r(k - 2^r n), \quad (2.23)$$

$$\mathcal{X}_\alpha(k) = \sum_{n=0}^{N-1} sf_N(n) F_\alpha^r(k - 2^r n). \quad (2.24)$$

Preuve 7. Pour la preuve de cette propriété ainsi que pour les propriétés et les corollaires qui suivent, la démonstration est faite à titre d'exemple pour la partie concernant l'espace de détail pour éviter des développements qui sont presque identiques dans l'espace d'approximation.

Développement des calculs des coefficients surabondants pour la résolution α appartenant à la grille G_N^r :

$$\mathcal{X}_\alpha(k) = \langle f, \Psi_{\alpha, \frac{k}{2^r N}} \rangle = \left\langle \sum_{n=0}^{N-1} sf_N(n) \Phi_{N, \frac{n}{N}}, \Psi_{\alpha, \frac{k}{2^r N}} \right\rangle_{\mathbb{T}}. \quad (2.25)$$

Lorsque l'espace d'approximation V_N satisfait la propriété des espaces emboîtés [26], $\Phi_{N, \frac{n}{N}}$ peut être représenté comme une série des atomes d'échelles fines $(\Phi_{2^r N, \frac{p}{2^r N}})_p$ par assimilation :

$$\Phi_{N, \frac{n}{N}} = \sum_{p=0}^{2^r N - 1} \langle \Phi_{N, \frac{n}{N}}, \Phi_{2^r N, \frac{p}{2^r N}} \rangle_{\mathbb{T}} \Phi_{2^r N, \frac{p}{2^r N}}. \quad (2.26)$$

Suivant les définitions de Perrier des filtres surabondants d'approximation E_α et de détails F_α (voir section 2.2.1) pour l'échelle fine $2^r N$, les filtres F_α^r satisfont similairement une série d'expansion définie $\forall n \in [0, 2^r N - 1]$ par :

$$F_\alpha^r(k) = \sum_{p=0}^{2^r N} E_N(p) F_\alpha(p - k). \quad (2.27)$$

Propriété 2.14 (Transformée de Fourier des filtres super-résolutions). *Soit α une résolution de la grille super-résolution G_N^r , on a la transformée de Fourier des filtres super-résolution entiers $\forall z \in [0, 2^r N - 1]$:*

$$\widehat{E}_\alpha^r(z) = \frac{\widehat{\phi}(\frac{z}{N}) \widehat{\phi}(\frac{-z}{\alpha})}{\sqrt{N\alpha} \widehat{\phi}(\frac{z}{2^r N}) \widehat{\phi}(\frac{-z}{2^r N})}, \quad (2.28)$$

$$\widehat{F}_\alpha^r(z) = \frac{\widehat{\phi}(\frac{z}{N}) \widehat{\psi}(\frac{-z}{\alpha})}{\sqrt{N\alpha} \widehat{\phi}(\frac{z}{2^r N}) \widehat{\phi}(\frac{-z}{2^r N})}. \quad (2.29)$$

Preuve 8. Cette propriété peut être obtenue facilement en introduisant la transformée de Fourier des filtres surabondants 1-périodiques E_α et F_α dans la transformée de Fourier de la relation (2.27).

Corollaire 2.15. *Soit α une résolution de la grille super-résolution G_N^r , la transformée de Fourier des coefficients surabondants d'approximation \mathcal{Z}_α (resp. de détails \mathcal{X}_α) peut être dérivée directement à partir des coefficients d'approximation périodiques sf_N calculés à l'échelle $J = \log 2(N)$ en multipliant avec la transformée de Fourier des filtres super-résolutions déterminés en Propriété 2.14 :*

$\forall z \in [0, 2^r N - 1]$

$$\widehat{\mathcal{Z}}_\alpha(z) = N \widehat{sf}_N(z) \widehat{E}_\alpha^r(z), \quad (2.30)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_\alpha(z) = N \widehat{sf}_N(z) \widehat{F}_\alpha^r(z). \quad (2.31)$$

Preuve 9. Transformation de la formule (2.23) en domaine de Fourier :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}_\alpha(z) &= \frac{1}{2^r N - 1} \sum_{k=0}^{2^r N - 1} \sum_{n=0}^{N-1} sf_N(n) F_\alpha^r(k - 2^r n) e^{-2\pi i \frac{k}{2^r N} z}, \\ &= \frac{1}{2^r N} \sum_{n=0}^{N-1} sf_N(n) e^{-2\pi i \frac{n}{N} z} \sum_{k=0}^{2^r N} F_\alpha^r(k) e^{-2\pi i \frac{k}{2^r N} z}, \\ &= N \widehat{sf}_N(z) \widehat{F}_\alpha^r(z). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ce corollaire montre que les Filtres Super-résolution (FS) permettent le calcul direct des coefficients surabondants à partir de leur homologue sf_N en analyse multirésolution standard en évitant les procédures de ré-injections qui consomment de la mémoire. Ces filtres sont presque les

mêmes que ceux de Perrier et leur transformée de Fourier est reliée directement aux fonctions de réponse $\widehat{\Phi}$ et $\widehat{\Psi}$. Mais cette façon de calcul des coefficients surabondants exige une étape de transformée de Fourier inverse pour des vecteurs de longueur $2^r N$ et puis un nombre élevé des calculs en domaine temporel. S. Coutel a démontré que ces filtres sont creux mais le nombre des coefficients retenus est encore énorme par rapport à N , donc il n'est pas tout-à-fait judicieux de pré-calculer et stocker ces filtres pour les utilisations de calculs en temporel. La performance de vitesse ainsi que la flexibilité en changement des densités de résolution sont limitées.

Cependant, on peut remarquer que la transformée de la voie des coefficients d'approximation sf_N est N -périodique ce qui est 2^r fois moins que la longueur $2^r N$ des filtres super-résolutions. Nous allons donc en profiter pour améliorer encore les calculs des coefficients surabondants en introduisant d'autres définitions des Filtres Super-résolutions Compacts (FSC).

Propriété 2.16 (Filtres Super-résolutions Compacts). *Soit sf_N les coefficients d'approximation d'un signal donné $f \in V_N$ et soit $\mathcal{Z}_\alpha^\delta$ (resp. $\mathcal{X}_\alpha^\delta$) ses coefficients d'approximation (resp. de détail) correspondant à la résolution α et le paramètre de décalage pour une sous-grille super-résolution $G_N^{r,\delta}$. Il existe une suite des filtres d'approximation $E_\alpha^{r,\delta}$ (resp. de détail $F_\alpha^{r,\delta}$) N -périodiques définis $\forall (p, \delta) \in [0, N-1] \times [0, 2^r - 1]$ par :*

$$\widehat{\mathcal{Z}}_\alpha^\delta(z) = N \widehat{sf_N}(z) \widehat{E}_\alpha^{r,\delta}(z), \quad (2.33)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_\alpha^\delta(z) = N \widehat{sf_N}(z) \widehat{F}_\alpha^{r,\delta}(z), \quad (2.34)$$

où $\mathcal{X}_\alpha^\delta(p) = \mathcal{X}_\alpha(2^r p + \delta)$ et la transformée de Fourier des filtres $E_\alpha^{r,\delta}$ (res. $F_\alpha^{r,\delta}$) est déduite directement de celle des FSEs :

$$\widehat{E}_\alpha^{r,\delta}(z) = \sum_{k \equiv z[N]}^{2^r N - 1} \widehat{E}_\alpha^r(k) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} \delta}, \quad (2.35)$$

$$\widehat{F}_\alpha^\delta(z) = \sum_{k \equiv z[N]}^{2^r N - 1} \widehat{F}_\alpha^r(k) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} \delta}. \quad (2.36)$$

Preuve 10. $\mathcal{X}_{\alpha,\delta}$ est un vecteur extrait de \mathcal{X}_α dont la distance entre des coefficients est constante de 2^r . La transformée de Fourier de $\mathcal{X}_{\alpha,\delta}$ peut être obtenue directement à partir de celle du vecteur complet \mathcal{X}_α :

$$\widehat{\mathcal{X}}_\alpha^\delta(z) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \mathcal{X}_\alpha^\delta(p) e^{-2\pi i \frac{p}{N} z}, \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \mathcal{X}_\alpha(2^r p + \delta) e^{-2\pi i \frac{p}{N} z}. \quad (2.38)$$

Supposons que la transformée de Fourier de \mathcal{X}_α soit calculée selon le Corollaire 2.15, en utilisant la transformée inverse on a :

$$\widehat{\mathcal{X}}_\alpha^\delta(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{X}_\alpha^\delta(k) e^{-2\pi i \frac{k}{N} z}, \quad (2.39)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{2^r N - 1} \widehat{\mathcal{X}}_\alpha(k) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} (2^r p + \delta)} e^{-2\pi i \frac{p}{N} z},$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2^r N - 1} \widehat{\mathcal{X}}_\alpha(k) e^{2\pi i \frac{k\delta}{2^r N}} \sum_{p=0}^{N-1} e^{-2\pi i \frac{p}{N} (z-k)}. \quad (2.40)$$

On a $\forall N$ entier :

$$\sum_{p=0}^{N-1} (e^{-2\pi i \frac{p}{N}(z-k)}) = \begin{cases} N, & \text{si } k \equiv z[N], \\ 0, & \text{si } k \not\equiv z[N], \end{cases} \quad (2.41)$$

et par conséquent :

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\alpha}^{\delta}(z) = \sum_{k \equiv z[N] \geq 0}^{2^r N - 1} \widehat{\mathcal{X}}_{\alpha}(k) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} \delta}, \quad (2.42)$$

$$= \sum_{k \equiv z[N] \geq 0}^{2^r N - 1} N \widehat{sf}_N(k) \widehat{F}_{\alpha}^r(k) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} \delta}. \quad (2.43)$$

En profitant de la N -périodicité de \widehat{sf}_N , on peut le mettre en dehors de la somme pour obtenir l'expression de la transformée des Filtres Super-résolutions Compacts comme décrite dans la relation (2.36).

2.3.2 Filtres Super-résolutions Réduits

Dans le sillage de l'algorithme de décomposition rapide de Mallat, les deux Filtres super-résolutions réduits (FSR) peuvent être introduits pour calculer les coefficients surabondants dans une octave \mathcal{O}_j directement à partir de leur coefficients voisins dans une octave calculée précédemment \mathcal{O}_{j+1} . Bien que le champ d'application de cet algorithme est restreint à la grille G_N^0 , les études peut facilement être étendues aux réseaux enrichis $G_N^r \subset G_{2^r N}^0$ en considérant $2^r N$ au lieu de N dans tous les développements suivants.

Propriété 2.17 (Filtres Super-résolutions Réduits). *Soit α une résolution choisie dans la grille super-résolution G_N^r , il existe des filtres d'approximation (resp. de détail) réduits $E_{\alpha, \alpha/2}^r$ (resp. $F_{\alpha, \alpha/2}^r$) connectant les coefficients surabondants $\mathcal{Z}_{\alpha/2}$ (resp. $\mathcal{X}_{\alpha/2}$) liés à la résolution $\alpha/2$ avec les coefficients \mathcal{Z}_{α} (resp. \mathcal{X}_{α}) liés à la résolution α grâce à des équations écrites en domaine de Fourier : $\forall z \in [0, N - 1]$*

$$\widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha/2}(z) = N \widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha}(z) \overline{\widehat{E}_{\alpha, \alpha/2}^r(z)}, \quad (2.44)$$

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\alpha/2}(z) = N \widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha}(z) \overline{\widehat{F}_{\alpha, \alpha/2}^r(z)}, \quad (2.45)$$

et les filtres FSRs sont définis $\forall z \in [0, 2^r N - 1]$ par :

$$\widehat{E}_{\alpha, \alpha/2}^r(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^r N} m_h(z/\alpha), \quad (2.46)$$

$$\widehat{F}_{\alpha, \alpha/2}^r(z) = \frac{\sqrt{2}}{2^r N} m_g(z/\alpha), \quad (2.47)$$

ainsi que dans le domaine temporel : $\forall n \in [0, 2^r N - 1]$

$$E_{\alpha, \alpha/2}^r(n) = \sqrt{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{2^r N}^{n, \alpha}} h_z, \quad (2.48)$$

$$F_{\alpha, \alpha/2}^r(n) = \sqrt{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{2^r N}^{n, \alpha}} g_z, \quad (2.49)$$

avec la définition d'un ensemble $\mathbb{Z}_N^{n, \alpha} = \{z \in \mathbb{Z} / z \frac{N}{\alpha} \equiv n [N]\}$.

Preuve 11. En combinant (2.30), (2.31) avec (2.28) et (2.29) on peut évidemment obtenir :

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\alpha/2}(z) = \widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha}(z) \frac{\widehat{\Psi}\left(\frac{z}{\alpha/2}\right)}{\widehat{\Phi}\left(\frac{z}{\alpha}\right)} = \widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha}(z) \sqrt{2} m_g\left(\frac{z}{\alpha}\right). \quad (2.50)$$

Cette formule met en évidence l'existence de tels Filtres Super-résolutions Réduits $F_{\alpha,\alpha/2}^r$ qui permettent les calculs des coefficients surabondants de détails à la résolution $\alpha/2$ à travers la convolution avec les coefficients d'approximation à la résolution α :

$$\mathcal{X}_{\alpha/2}(k) = \sum_{n=0}^{2^r N-1} \mathcal{Z}_{\alpha}(n) F_{\alpha,\alpha/2}^r(k-n). \quad (2.51)$$

En considérant la transformée de Fourier inverse du filtre $F_{\alpha,\alpha/2}^r$, on a $\forall n \in [0, 2^r N$:

$$F_{\alpha,\alpha/2}^r(n) = \frac{\sqrt{2}}{2^r N} \sum_{k=0}^{2^r N-1} m_g\left(\frac{k}{\alpha}\right) e^{2\pi i \frac{k}{2^r N} n}, \quad (2.52)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2^r N} \sum_{z \in \mathbb{Z}} g_z \sum_{k=0}^{2^r N-1} e^{-2\pi i \frac{k}{2^r N} (z \frac{2^r N}{\alpha} - n)}. \quad (2.53)$$

Comme la résolution α appartenant à la grille G_N^r , le terme $\frac{2^r N}{\alpha}$ est toujours entier, donc :

$$\sum_{k=0}^{2^r N-1} e^{-2\pi i \frac{k}{2^r N} (z \frac{2^r N}{\alpha} - n)} = \begin{cases} 2^r N, & \text{si } z \in \mathbb{Z}_{2^r N}^{n,\alpha}, \\ 0, & \text{si } z \notin \mathbb{Z}_{2^r N}^{n,\alpha}, \end{cases} \quad (2.54)$$

et par conséquent :

$$F_{\alpha,\alpha/2}^r(n) = \sqrt{2} \sum_{z \in \mathbb{Z}_{2^r N}^{n,\alpha}} g_z. \quad (2.55)$$

Le calcul des coefficients surabondants à une telle résolution $\alpha/2$ à partir des ceux à la résolution double α est très couteux en montant le paramètre d'enrichissement r . Bien que les filtres $F_{\alpha,\alpha/2}^r$ soient bien creux, il faut toujours mobiliser beaucoup de coefficients du vecteur complet des coefficients à la résolution α . Afin d'éviter cet inconvénient, les autres filtres dits Filtres Super-résolution Réduits Compacts (FSRC) sont introduits comme suit :

Propriété 2.18 (Filtres Super-résolution Compacts Réduits). *Soit \mathcal{Z}_{α} les coefficients d'approximation d'un signal donné $f \in V_N$ liés à la résolution α et soit $\mathcal{Z}_{\alpha/2}$ (resp. $\mathcal{X}_{\alpha/2}$) ses coefficients d'approximation (resp. de détail) liés à la résolution $\alpha/2$ dans une grille super-résolution G_N^r . Il existe un ensemble des filtres compacts H_{α}^r (resp. G_{α}^r) N -périodiques définis $\forall (p, \delta) \in [0, N-1] \times [0, 2^r - 1]$ par :*

$$\mathcal{Z}_{\alpha/2}^{\delta}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{Z}_{\alpha}^{\delta}(n) H_{\alpha}^r(k-n), \quad (2.56)$$

$$\mathcal{X}_{\alpha/2}^{\delta}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{Z}_{\alpha}^{\delta}(n) G_{\alpha}^r(k-n). \quad (2.57)$$

Preuve 12. En combinant (2.33), (2.34) avec (2.35) et (2.36), la transformée de Fourier du vecteur des coefficients surabondants à l'échelle basse $\alpha/2$ peut être écrite par :

$$\widehat{\mathcal{X}}_{\alpha/2}^{\delta}(z) = \widehat{\mathcal{Z}}_{\alpha}^{\delta}(z) \frac{\widehat{F}_{\alpha/2}^{r,\delta}(z)}{\widehat{E}_{\alpha}^{r,\delta}(z)} \Rightarrow \widehat{G}_{\alpha}^r = \frac{\widehat{F}_{\alpha/2}^{r,\delta}(z)}{\widehat{E}_{\alpha}^{r,\delta}(z)}. \quad (2.58)$$

Il faut noter ici que les filtres super-résolutions réduits compacts pour le passage va-et-vient entre deux résolutions sont toujours de longueur N équivalente à la longueur des Filtrés Super-résolutions Compacts (FSC). De plus, les calculs correspondants étant successifs (c.a.d. résolution par résolution), il est impossible de les programmer en parallèle. Ce dernier point augmente considérablement la durée d'exécution des calculs. Par conséquent, il est toujours préférable d'utiliser les filtres FSCs pour le calcul des analyses super-résolutions.

2.4 Présentation de l'Outil Scalogram

Afin de rendre accessible les algorithmes d'analyse super-résolution pour un large panel d'utilisateurs, une Toolbox a été développée en environnement Matlab version 2008 qui met à profit les performances de ce langage en calcul matriciel avec la programmation orientée objet (POO) permettant de développer des applications informatiques techniques complexes plus rapide qu'avec d'autres langages, tel que $C++$ ou $C\#$. Les fonctionnalités principales et les algorithmes de traitement d'image intégrés dans cet Outil sont succinctement décrits dans cette Section comme un tutoriel d'utilisation et suivis par des figures d'illustration à titre d'exemple.

2.4.1 Structure et fonctionnalités principales de l'Outil Scalogram

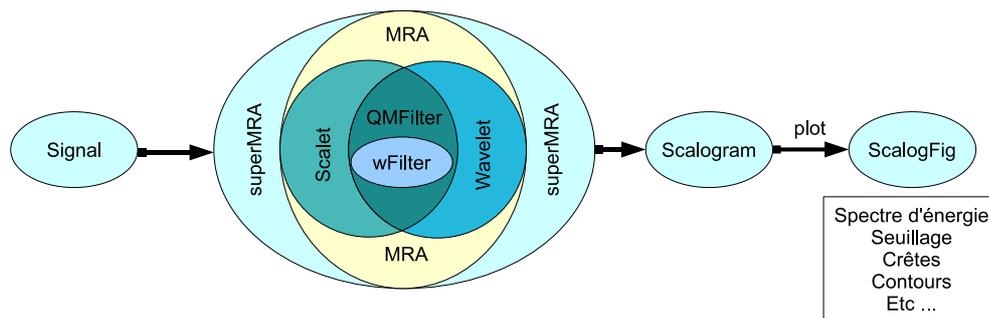


FIGURE 2.4 – Hiérarchie des classes de l'Outil Scalogram

Comme présenté dans les sections précédentes, l'analyse super-résolution (superMRA) s'est basée sur l'analyse multirésolution (MRA) qui est construite autour des atomes d'échelle (Scalet) et d'ondelette (Wavelet). Ces dernières sont complètement définies par des filtres miroirs en quadrature (QMFilter) dont le noyau est un filtre réponse fini ou infini (wFilter). La construction des classes est faite en suivant strictement cet ordre hiérarchique, il suffit de donner un vecteur des coefficients d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR) ou une fonction de réponse spectrale d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (IIR) avec un ordre de précision exigé pour construire l'ensemble de ces classes.

Exemple 2.1. Pour construire un motif MRA des ondelettes Daubechies d'ordre 4 :

```
db = [0.6830127; 1.1830127; 0.3169873; -0.1830127];
daub = MRA(db, 'name', 'Daubechies4');
```

On va avoir un objet de classe MRA correspondant aux filtres réponses finis de Daubechies.

Exemple 2.2. Pour construire un motif MRA des ondelettes Meyer :

```
% scalet and wavelet spectrum function
cf = [35 -84 70 -20];
nu = @(w) cf(1)*w.^7 + cf(2)*w.^6 + cf(3)*w.^5 + cf(4)*w.^4;
Fphi = @(w) ((abs(w) <= 1/3) + (abs(w) > 1/3).*(abs(w) <= 2/3) ...
.*cos(pi/2*nu(3*abs(w)-1).*(3*abs(w)-1).^4));
Fpsi = @(w) exp(pi*i*w).*(Fphi(w + 1)+Fphi(w-1)).*Fphi(w/2);
% mirror filter
mH = @(w) sqrt(2*pi)*Fphi(2*(w - round(w)));
% construction
flt = QMFilter(mH, 'name', 'Meyer', 'prec', 1e-6);
sc = Scalet(flt, 'phi_fresp', Fphi);
wv = Wavelet(sc, 'psi_fresp', Fpsi);
meyer = MRA(wv, 'type', 'L2R');
```

La classe superMRA est construite à partir de la classe MRA en ajoutant à priori une nouvelle fonction “mapping” pour calculer les coefficients surabondant d’un signal analysé. Finalement, une classe Scalogram a été déterminée pour simplifier et faciliter l’utilisation de l’outil. Donnant un signal binaire et un atome de MRA voire le nom d’une des ondelettes pré-construites, un scalogramme sera calculé en respectant des paramètres exigés comme :

- la résolution demandée du scalogramme (1 par défaut)
- la plus basse fréquence (0 par défaut)
- la plus haute fréquence (∞ par défaut)

Exemple 2.3. Pour calculer le scalogramme d’un signal x correspondant au temps t en utilisant les ondelettes de Meyer construite dans l’exemple 2.2 :

```
res = 3*2^5; % resolution density of scalogram
low_freq = 10; % lowest analysis frequency
high_freq = 100; % highest analysis frequency
scalogram = Scalogram(x,t,res,low_freq,high_freq, 'mra', meyer);
```

L’affichage de chaque scalogramme est réalisé par le biais d’une fonction “plot” intégrée dans la classe Scalogram qui renvoie non seulement la Figure correspondante de ce scalogramme appelée ScalogramFig mais aussi la clé de référence qui sert à manipuler et sauvegarder la figure au cas de besoin.

L’explication de l’utilisation de cet outil ainsi que la procédure recommandée pour la construction des scalogrammes seront présentées dans la Section suivante avec un signal analytique tabulé donné.

2.4.2 Procédure de construction des scalogrammes

La procédure de Cartographie quasi-continue (CQC) est divisée en deux étapes, premièrement une étape d’initialisation traitant la construction du canevas de cartographie à basse résolution

pour capturer les événements ciblés centraux du signal analysé et deuxièmement, une étape de propagation dans laquelle des zooms sur chaque événement détecté précédemment sont réalisés avec des résolutions de plus en plus élevées.

Une instance purement numérique comportant des migrations fréquentielles illustre les étapes successives de la procédure. Le test benchmark dépeint en Fig. 2.5 est un signal échantillonné à la fréquence 2^{15} contenant la superposition d'un train d'ondes sinusoïdales à fréquence centrale 25 Hz , d'un chirp linéaire inverse 1-périodique avec une bande de fréquences $[100, 125] \text{ Hz}$ et d'un chirp quadratique 1-périodique entre les fréquences respectives 225 et 250 Hz . Les deux signaux chirps sont modulés avec une distribution gaussienne normale. L'expression analytique du signal sur l'intervalle unitaire est donnée pour $t \in [0, 1[$ par :

$$p(t) = \sin(2\pi 25 t) + e^{-250(t-0.5)^2} (s_1(t) + s_2(t)), \quad (2.59)$$

où

$$s_1(t) = \sin(2\pi (100 + 150|t - 0.5|) (t - 0.5)), \quad (2.60)$$

$$s_2(t) = \sin(2\pi (250 - 2000|t - 0.5|^2) (t - 0.5)), \quad (2.61)$$

réfèrent respectivement aux chirps linéaire et quadratique.

Étape d'initialisation : construction du canevas de cartographie

Pour un signal binaire tabulé donné, les informations des fréquences et la durée des événements sont inconnues. Cette première étape consiste à localiser les blocs des coefficients significatifs en calculant un canevas de cartographie à basse résolution. Après l'achèvement des calculs, on va avoir une vue globale sur l'ensemble des sous-fenêtres $[\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}] \times [\tau_{n,1}, \tau_{n,2}]$ qui seront utilisée ultérieurement pour une procédure de zoom-ondelettes systématique à une résolution plus élevée.

```
t = 0:1/2^15:4-1/2^15;
res = 1;
low_freq = 0; high_freq = 500;
scalogram = Scalogram(p(t),t,res,low_freq,high_freq,'mra','Meyer');
h = plot(scalogram);
```

Le scalogramme benchmark est analysé sur une portion $t \in [0, 4] \times f \in [0, 500]$ du demi-plan avec une basse résolution $\mathcal{R} = 1/2^{15}$ comme présenté sur la Fig. 2.5 pour chaque voie \mathcal{X}_α reliée à la fréquence α , et l'énergie totale introduite comme :

$$\mathcal{E}(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{N} \sum_k |\mathcal{X}_{\alpha,k}|^2}, \quad (2.62)$$

permet de normaliser la contribution énergétique de la voie \mathcal{X}_α .

Cette distribution énergétique fournit des informations des fréquences centrales avec des maximums locaux ou des bosses importantes des fréquences. Par exemple, la Fig. 2.5 présente la distribution énergétique superposée avec le scalogramme du signal qui expose deux zones fréquentielles $[20, 50] \text{ Hz}$ qui dure tout au long du signal et $[75, 400] \text{ Hz}$ qui ne se présente pour quatre domaines temporels beaucoup plus courts dont les centres sont respectivement à $0.5, 1.5, 2.5$ et 3.5 s .

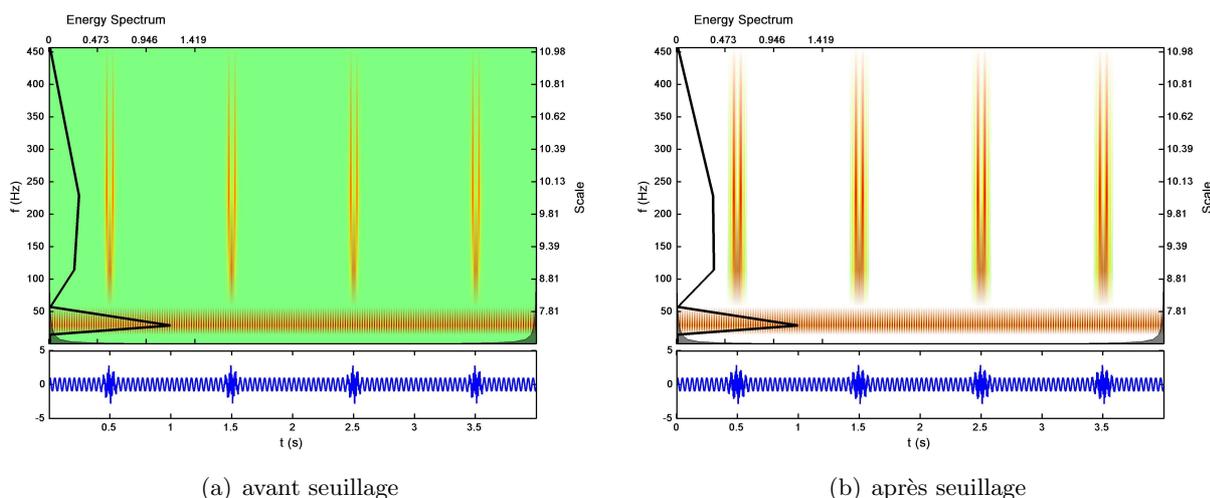


FIGURE 2.5 – Vers le haut : Scalogram quasi-continu à basse résolution $\mathcal{R} = 1/2^{15}$ et distribution énergétique par voie (noire), vers le bas : signal benchmark.

De plus, on peut appliquer un seuillage des voies de coefficients sélectionnées qui est réalisé de manière triviale en annulant dans cette dernière les coefficients dont l'amplitude est inférieure à un niveau donné. Ce dernier niveau de troncature est défini de manière à préserver un certain pourcentage de l'énergie de la voie de coefficients considérée. Il est généralement suffisant de conserver 95% de cette énergie pour éliminer le bruit de fond et conserver l'information significative.

Il devient alors possible d'identifier de manière visuelle le support $[\tau_{n,1}, \tau_{n,2}]$ de chacun des motifs transitoires repérés dans les voies de coefficients surabondants relatives aux zones fréquentielles $[\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}]$. Pour des raisons de définitions comme l'analyse surabondante de Perrier, l'analyse super-résolution ne traite que les signaux de longueur puissance de 2. Par conséquent, la taille des sous-fenêtre n'est pas prise quelconque mais toujours en puissance de 2. Par exemple, pour la zone de fréquences $[75, 400]$ Hz autour de l'instant 0.5 s, l'intervalle de temps choisi pour l'étape suivante est $[0.25, 0.75]$ s dont le nombre d'échantillon est de $2^{15}/2 = 2^{14}$.

Enfin, une telle procédure d'initialisation nous permet de sélectionner des sous-fenêtres des coefficients surabondants significatifs à étudier ultérieurement pour éviter des calculs trop coûteux et lents, pas nécessaires.

Étape de propagation : construction des cartographie à haute résolution

Soit $[\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}] \times [\tau_{n,1}, \tau_{n,2}]$ une sous-fenêtre temps-fréquence identifiée dans l'étape d'initialisation. Une analyse super-résolution locale est effectuée successivement en accroissant les résolution \mathcal{R} jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de changement dans le scalogramme. Ces calculs sont réalisés efficacement par le moyen des filtres FSC introduits dans la section 2.3.1.

```
t = 0.25:1/2^15:0.75-1/2^15;
res = 3; % 3*2^1; 3*2^2; 3*2^5
low_freq = 50; high_freq = 400;
scalogram = Scalogram(p(t),t,res,low_freq,high_freq,'mra','Meyer');
h = plot(scalogram);
```

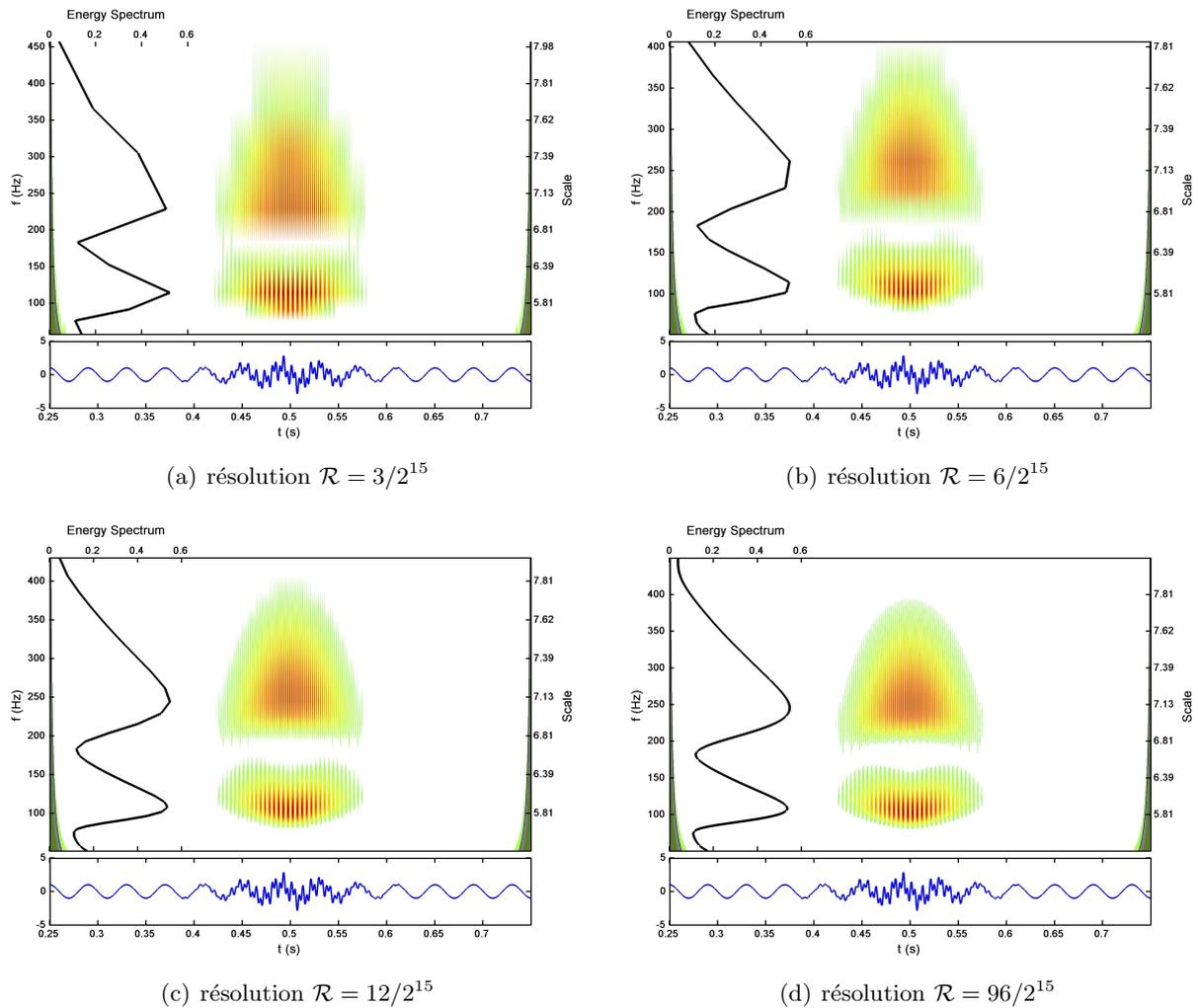


FIGURE 2.6 – Zoom sur les événements fréquentiels [50, 400 Hz] du signal : (a) définition pauvre ; (b) et (c) effet de scie ; et, (d) cartographie conforme.

La Fig. 2.6 montre certaines topologies des faisceaux obtenus en analysant les événements fréquentiels choisis avec des résolutions croissantes $\mathcal{R} = 3/2^{15}$, $6/2^{15}$, $12/2^{15}$, $96/2^{15}$. À basse résolution $\mathcal{R} = 3/2^{15}$, la cartographie montre des contours flous qui soulignent clairement un manque de résolution avec une ligne de distribution énergétique brisée. Lorsque le zoom est réalisé avec des résolutions un peu plus élevées $\mathcal{R} = 6/2^{15}$, $12/2^{15}$, on voit apparaître la séparation de 2 faisceaux différents limités par deux gammes de fréquences [75, 150 Hz] et [225, 350 Hz] mais les aberrations en dents de scie se produisent encore sur le dessin. Plus la résolution augmente, plus la cartographie obtenue est nette mais le coût de calcul, de mémoire et l'affichage deviennent plus lourds. Dans le cas de nécessité de haute résolution, un sous-échantillonnage temporel du signal est recommandé pour alléger le scalogramme.

Sur les scalogrammes calculés, on peut remarquer que chaque demi-période d'une fréquence est représentée par un patatoïde dont le centre correspond à l'amplitude maximale. Donc, le scalogramme présente non seulement l'énergie fréquentielle mais aussi les déphasage du signal à la fréquence considérée. Mais pour des fréquences élevées, les périodes sont très courtes de telle sorte que la séparation des patatoïdes n'est plus claire. La section suivante présente une solution pour s'affranchir de cet inconvénient.

Scalogramme Hilbert et Crêtes d'ondelettes

Le but est ici d'obtenir l'évolution des événements fréquentiels en éliminant les informations de déphasage. Un tel problème est déjà abordé dans [22] en se référant à la définition de la représentation analytique ou pseudo analytique d'un signal à l'aide de la transformée de Hilbert :

$$f_a(t) = f(t) + i \mathcal{H}(f)(t). \quad (2.63)$$

Par exemple pour le modèle à bandes étroites, la représentation analytique est :

$$f_a(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi) + i a(t) \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (2.64)$$

$$= a(t) [\cos(\omega_0 t + \varphi) + i \sin(\omega_0 t + \varphi)] = a(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (2.65)$$

On se limite au cas des ondelettes réelles, la transformée en ondelette d'un signal est évidemment égale à la partie réelle de celle de sa représentation analytique. Si on considère un signal analytique général $f_a(t) = a(t)e^{i\omega(t)}$ où l'amplitude $a(t)$ et la fréquence instantanée $\omega'(t)$ sont lentement variables, la transformée en ondelettes est :

$$\mathcal{X}_{\alpha,k}^a = \langle f_a, \psi_{\alpha,k} \rangle = \int f_a(t) \psi_{\alpha,k}(t) dt = \int a(t) e^{i\omega(t)} \sqrt{\alpha} \psi(\alpha(t-k)) dt, \quad (2.66)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a(k) e^{i\omega(k)} \widehat{\psi}\left(\frac{\omega'(k)}{\alpha}\right) \quad (\text{voir théorème 4.5 dans [22]}). \quad (2.67)$$

Le déphasage $\omega(k)$ toujours présent dans l'expression de cette transformée et par conséquent, dans la transformée en ondelettes du signal réel correspondant, on voit toujours le déphasage sur le scalogramme. Pour éliminer ce terme, on utilise le scalogramme normalisé défini par :

$$\mathcal{N}\mathcal{X}_{\alpha,k} = \sqrt{\alpha} |\mathcal{X}_{\alpha,k}^a| = a(k) \left| \widehat{\psi}\left(\frac{\omega'(k)}{\alpha}\right) \right|. \quad (2.68)$$

Dans cette condition, on peut suivre l'évolution des fréquences instantanées $\omega'(k)$ et de leurs énergies $a(k)$ suivant le temps de façon continue sans influence de déphasage sur l'affichage. En effet, c'est ce type de scalogramme Hilbert qui est calculé dans l'outil Scalogram en utilisant la transformée de Hilbert avant de lancer le calcul en ondelettes. La seule différence se trouve dans l'étape d'affichage à l'aide d'une option de la fonction "plot" :

- `plot(scalog, 'real')` : pour afficher le scalogramme réel,
- `plot(scalog, 'imag')` : pour afficher le scalogramme de phase,
- `plot(scalog, 'module')` : pour afficher le scalogramme Hilbert.

De plus, l'équation (2.68) montre que pour chaque instant k fixé le scalogramme atteint son maximum lorsque $\frac{\omega'(k)}{\alpha} = \xi_{max}$ la fréquence centrale intrinsèque de l'ondelette. L'ensemble de ces maximas sur le scalogramme appelé crêtes d'ondelettes représente l'évolution fréquentielle du signal analysé. Dans l'outil Scalogram, cette fonctionnalité est intégrée dans la classe Scalogram

et elle se situe dans le même menu qu'avec le seuillage énergétique et la construction des iso-contours.

La figure 2.7 montre le scalogramme Hilbert avec les crêtes calculées correspondant au signal benchmark 2.59. Ces crêtes donnent des fréquences instantanées des chirps linéaires et quadratiques comme décrits dans les expressions analytiques.

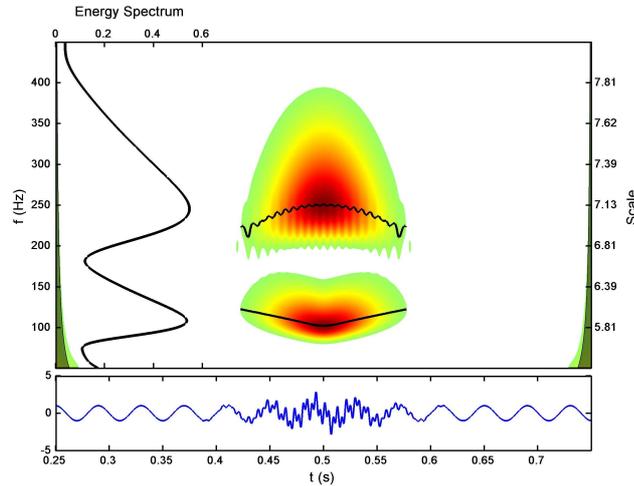


FIGURE 2.7 – Scalogramme Hilbert à résolution $\mathcal{R} = 384/2^{15}$ avec des crêtes d'ondelettes.

Interférence fréquentielle et Sub-fréquences

On peut constater que plus on s'éloigne du centre du chirp quadratique, plus les crêtes transitoires sont oscillantes à cause des interférences avec le chirp linéaire où les fréquences sont de plus en plus proches. Comme présenté dans [22], les deux composantes spectrales n'interfèrent pas si :

$$\frac{\omega'_1(k) - \omega'_2(k)}{\omega'_1(k)} \geq \frac{\Delta\omega}{\xi_{max}}, \quad (2.69)$$

où $\Delta\omega$ est la largeur de bande de $\widehat{\psi}$.

Ce qui signifie que l'interférence fréquentielle est décidée par la relation relative entre des fréquences. Partons d'une idée originale de GRIGNARD Nicolas (thèse en préparation ENTPE-DGCB), qui consiste à multiplier le signal analysé avec un sinus de basse fréquence $\delta\omega$ pour réduire les fréquences considérées mais pas l'écart entre des composantes. Par contre, cette multiplication fait apparaître deux bandes de fréquences supplémentaires $\omega - \delta\omega$ et $\omega + \delta\omega$ et la lisibilité du scalogramme est moins fine. On applique ce principe pour la représentation analytique du signal dont seules les fréquences positives sont considérées en multipliant avec un signal complexe $e^{-2\pi i \xi_{sub}}$ où ξ_{sub} est appelée sub-fréquence. Ces sub-fréquences nous permettent d'éviter l'existence de deux bandes fréquentielles et d'améliorer une partie des effets d'interférences. Il est nécessaire ici de signaler l'influence du choix de la sub-fréquence. Si elle est prise trop élevée, les fréquences inférieures à celle-ci deviennent négatives mais les valeurs absolues dépassent la zone des fréquences considérées. Les informations non désirées dans la zone de basses fréquences vont émerger et nuisent à la lisibilité du scalogramme.

Sur la figure 2.8, les sub-fréquences sont appliquées pour le scalogramme Hilbert du signal benchmark, les oscillations des crêtes d'ondelettes disparaissent peu à peu suivant la croissance

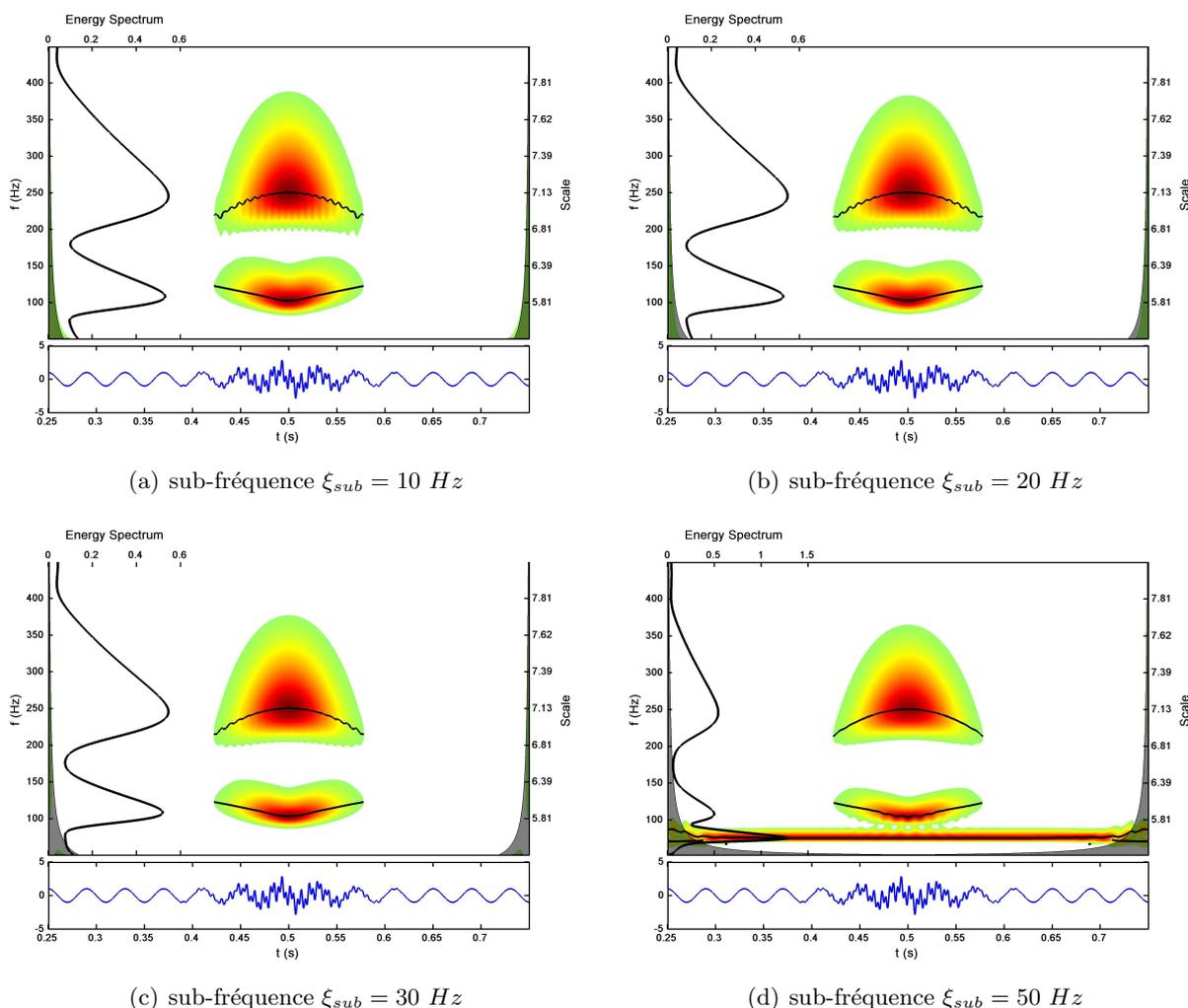


FIGURE 2.8 – Scalogramme Hilbert sous des sub-fréquences

des sub-fréquences. Quand la sub-fréquence devient trop énorme (50 Hz), les coefficients surabondants correspondant à la fréquence centrale 25 Hz du signal apparaissent et créent d'autres interférences sur le chirp linéaire.

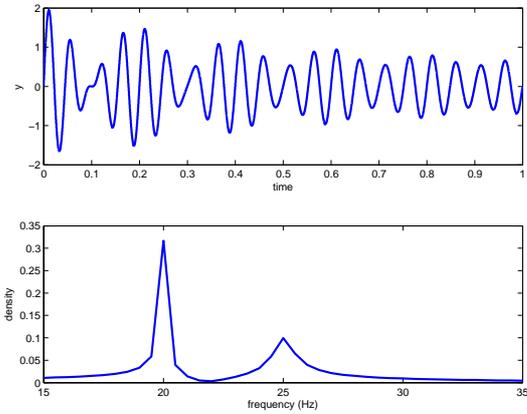
2.4.3 Validations des superMRA

Nous présentons ci-après quelques exemples simples de l'analyse super-résolution des signaux grâce à l'outil Scalogram. Des signaux de complexité croissantes sont utilisés pour mettre en évidence l'avantage de la nouvelle méthodologie.

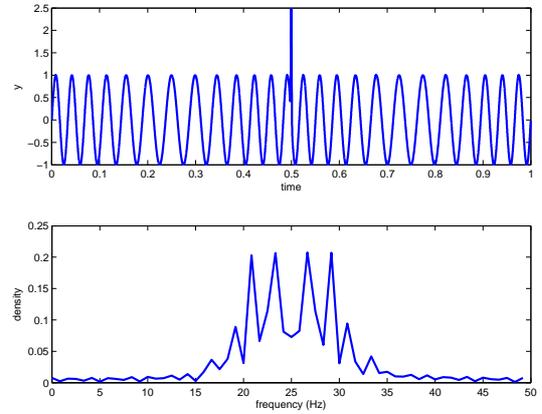
Exemple 2.4. La somme de deux sinus amortis à fréquences très proches :

$$f(t) = e^{-2.5t} \sin(2\pi 25t) + e^{-0.5t} \sin(2\pi 20t). \quad (2.70)$$

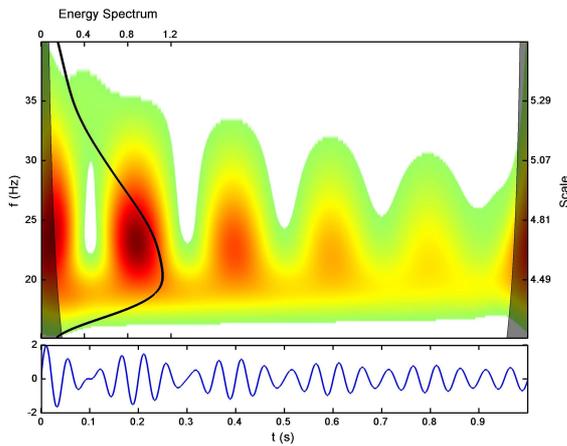
Un premier scalogramme Hilbert, représenté sur la Fig. 2.9(b), est construit selon une définition de 96 échelles par octave. La distribution énergétique superposée sur le scalogramme montre un seul maximum tandis que le spectre du signal présenté sur la figure 2.9(a) dispose deux fréquences significatives différentes 20 et 25 Hz . On en déduit qu'il existe des interférences sur le



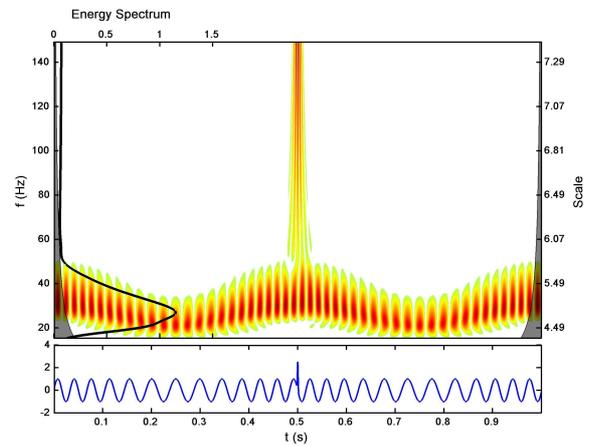
(a) Transformée de Fourier



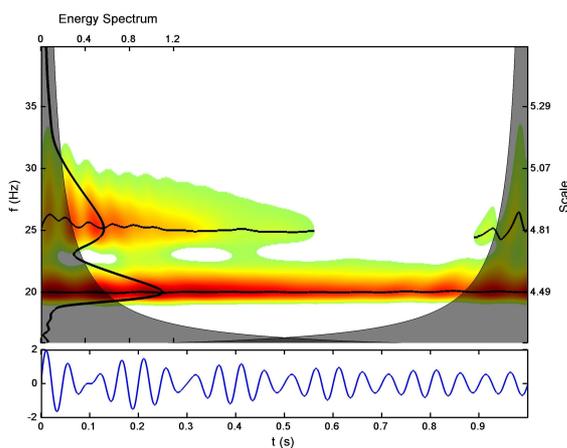
(a) Transformée de Fourier



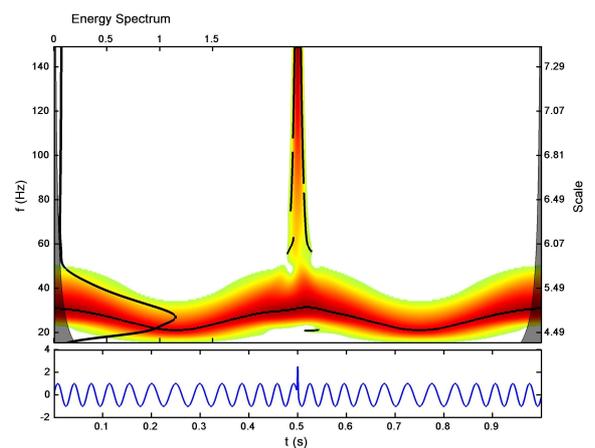
(b) Scalogramme Hilbert à résolution $\mathcal{R} = 96/2^{15}$



(b) Scalogramme à résolution $\mathcal{R} = 96/2^{15}$



(c) Scalogramme Hilbert avec sub-fréquence $\xi_{sub} = 15 \text{ Hz}$



(c) Scalogramme Hilbert

FIGURE 2.9 – Somme de deux sinus amortis à fréquences très proches

FIGURE 2.10 – Signal à fréquence lentement oscillante harmonique.

scalogramme calculé et qu'il faut appliquer des sub-fréquences adéquates pour mieux analyser le signal. La figure 2.9(c) donne un exemple de sub-fréquence jusqu'à 15 Hz ce qui montre bien deux fréquences principales du signal avec la décroissance d'énergie suivant le temps. Il faut bien noter ici que malgré les avantages indiscutables des scalogrammes, l'analyse de Fourier est la meilleure pour avoir les informations des fréquences. Pour chaque construction de scalogramme, il est convenable de recourir au spectre du signal analysé pour ne pas éviter des aberrations inattendues.

Exemple 2.5. La transformée de Fourier est la meilleure analyse selon l'aspect fréquentiel mais si les fréquences instantanées du signal évoluent suivant le temps, l'analyse en ondelettes continue est la seule pour capturer cette évolution. On considère un signal avec les fréquences oscillant entre 22.5 et 27.5 Hz avec un accident local proche d'un Dirac au milieu du signal :

$$f(t) = \sin(2\pi 25 t + 2.5 \sin(2\pi 2 t)) + e^{-1e6(t-0.5)^2}. \quad (2.71)$$

L'avantage des scalogrammes par rapport à l'analyse en Fourier est bien mis en exergue sur la figure 2.10. À part l'évolution lente des fréquences instantanées qui ne sont identifiées que dans le scalogramme, l'accident local Dirac occulté dans le spectre du signal est bien démasqué par le scalogramme par une bande infinie de fréquence en $t = 0.5$ s.

2.5 Conclusion

Une nouvelle méthodologie d'analyse super-résolution qui hérite des propriétés intéressantes de l'analyse surabondante de Perrier [30] et l'analyse surabondante contrôlée de S. Coutel et S. Pernot [4] est construite permettant le calcul des transformées en ondelettes continue sur une grille temps-fréquence quasi-continue. Les nouveaux filtres super-résolutions d'échelle et de détail (FSR) utilisés principalement par les convolutions via l'espace de Fourier, conduisent à un algorithme optimal de complexité $\mathbf{O}(N \log(N))$ ajoutant l'efficacité et la flexibilité à l'analyse surabondante contrôlée.

Cette nouvelle conception permet de calculer des scalogrammes sur des grilles de densité élevée à un coût raisonnable de temps sans demander trop de mémoire pour stocker des filtres pré-stockés comme dans l'analyse surabondante contrôlée. Une autre amélioration est aussi proposée en introduisant des sub-fréquences pour éliminer les effets d'interférence des fréquences proches. Par ailleurs, toutes ces performances numériques sont mises en œuvre par un Outil Scalogram en programmation MATLAB, ce résultat des travaux informatiques importants permet de réaliser l'analyse super-résolution des signaux discrets donnés.

Contrairement à l'analyse surabondante de Perrier qui n'est exacte que dans le cas des ondelettes splines d'ordre pair, l'analyse super-résolution est réalisable pour toute ondelette issue d'une analyse multirésolution. Les effets de bord ne sont pas encore convenablement traités. Aussi une perspective de cette analyse super-résolution est d'étendre son application à l'analyse multirésolution définie sur un intervalle.

Chapitre 3

Application des ondelettes en Traitement des signaux d'expérimentation

Ce chapitre est consacré à la modélisation théorique et à l'identification des caractéristiques d'une structure mécanique multiportique. On présente une méthode originale de modélisation par éléments finis vis-à-vis du problème de la prédiction du comportement dynamique de la structure. Et du côté pratique, le cœur du propos est la reconstruction des noyaux de Green de la structure à partir des données expérimentales à l'aide des opérateurs-ondelettes définis dans les chapitres précédents.

Sommaire

3.1	Modélisation de la dynamique d'une structure multiportique	62
3.1.1	Études d'une barre bi-encastrée	62
3.1.2	Construction des fonctions de forme	63
3.1.3	Construction du système dynamique	63
3.1.4	Calcul des modes propres	65
3.1.5	Régime forcé (déplacement d'appui) avec l'amortissement	67
3.2	Expérimentation	69
3.2.1	Instrumentation	69
3.2.2	Analyse super-résolution des signaux expérimentaux	70
3.2.3	Estimation des coefficients d'approximation des FrF de la structure linéaire	70
3.3	Conclusion	74

3.1 Modélisation de la dynamique d'une structure multipor- tique

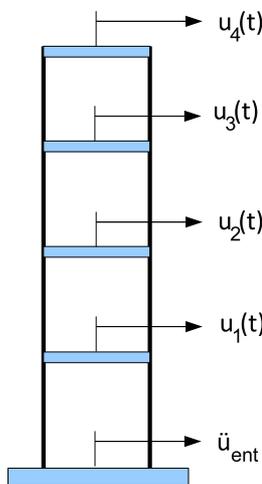


FIGURE 3.1 – Schéma bi-dimensionnel de la structure étudiée

Dans cette section, on réalise la modélisation de la dynamique d'une structure de 4 étages (Figure 3.1) suivant l'axe X (en faisant abstraction des modes suivant l'axe Y et de torsion). Pour cet objectif, on utilise les hypothèses de fonctionnement suivantes :

H1 : Déplacements horizontaux prédominants (i.e. pas de rotation des planchers).

H2 : Planchers indéformables $I_P^y \gg I_b^y$

H3 : Fréquences modales recherchées \ll fréquences propres des éléments verticaux bi-encastés

Conséquences : on peut utiliser les déplacements des planchers comme variables globales et on utilise la méthode de Ritz pour décomposer les déplacements $u(z, t)$ d'un point de la structure sous la forme :

$$u(z, t) = \sum_{i=1}^4 \Phi_i(z) * u_i(t) \text{ avec } \Phi_i(z_j) = \delta_{ij}, \quad (3.1)$$

dans laquelle, $u_i(t)_{i=1, \dots, 4}$ sont les déplacements des planchers. Il reste à choisir les fonctions Φ_i , dites fonctions de forme. Celle-ci doivent être cinématiquement admissibles.

Pour construire des fonctions de forme on se sert de l'hypothèse $H3$ impliquant que les éléments-barre fonctionnent en fait en régime quasi-statique.

3.1.1 Études d'une barre bi-encastée

Équation d'équilibre :

$$\lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial M}{\partial s} = T. \quad (3.3)$$

Pour une poutre en flexion pure, on a :

$$M = -EI \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \quad (3.4)$$

On en déduit l'équation de comportement :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = 0 + CL : \begin{cases} u(0) & = 0 \\ u(l) & = 1 \\ u'(0) & = 0 \\ u'(l) & = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

En effectuant le bilan, on a :

$$u(s) = \frac{s^2}{l^3}(3l - 2s), \quad (3.6)$$

$$M(s) = \frac{6EI}{l^3}(2s - l). \quad (3.7)$$

3.1.2 Construction des fonctions de forme

Fonctions de forme en local φ_i

En se basant sur les hypothèses au-dessus, on peut construire les fonctions de forme dont les définitions locales sont données par :

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{l^3}(s - l)^2(2s + l), \quad (3.8)$$

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{l^3}s^2(3l - 2s). \quad (3.9)$$

Fonctions de forme en global Φ_i

En rassemblant les fonctions de forme en local on peut obtenir 4 fonctions de forme correspondantes à 4 degrés de liberté (déplacement horizontal des planchers) en global comme l'indique la figure 3.2.

3.1.3 Construction du système dynamique

D'abord on travaille sur un seul étage et après on fait l'assemblage des matrices pour l'ensemble du système.

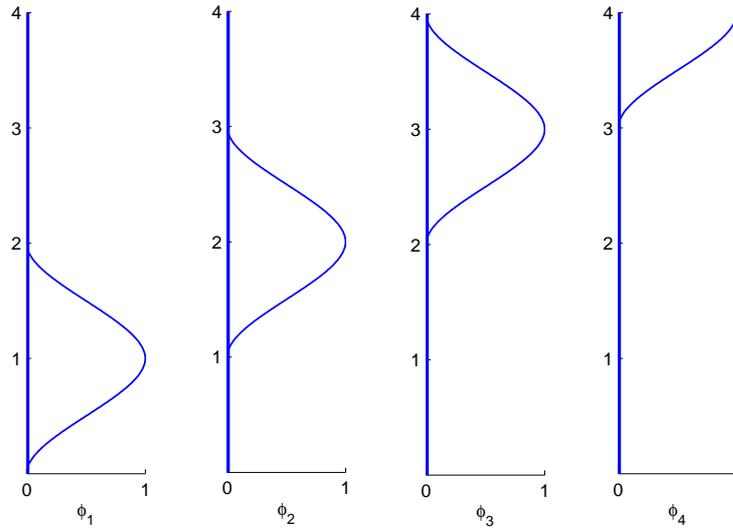


FIGURE 3.2 – Fonctions de formes en global

L'énergie cinétique s'écrit :

$$T = \frac{1}{2} m_P^j \dot{u}_j^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \lambda_b [\dot{u}(z, t)]^2 dz \quad (3.10)$$

$$= \frac{1}{2} m_P^j \dot{u}_j^2 + \int_0^l \frac{1}{2} \lambda_b [\dot{u}_i \varphi_1 + \dot{u}_j \varphi_2]^2 dz \quad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_i & \dot{u}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^l \lambda_b (\varphi_1)^2 dz & \int_0^l \lambda_b \varphi_1 \varphi_2 dz \\ \int_0^l \lambda_b \varphi_2 \varphi_1 dz & \int_0^l \lambda_b (\varphi_2)^2 dz + m_P^j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{u}_i & \dot{u}_j \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{104}{35} m_b & \frac{36}{70} m_b \\ \frac{36}{70} m_b & \frac{104}{35} m_b + m_P^j \end{bmatrix}}_{\underline{m}} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_j \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

L'énergie potentielle correspond à l'énergie élastique de déformation des barres, donc :

$$U = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dz + \frac{1}{2} \int_0^l \eta \frac{T^2}{GA} dz \right], \quad (3.14)$$

où :

$$\begin{cases} M(z, t) &= -EI_b \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z, t), \\ T &= \frac{\partial M}{\partial z} = -EI_b \frac{\partial^3 u}{\partial z^3}(z, t), \\ \eta &= \frac{A}{I^2} \iint_A \frac{S^2}{b^2} dA = \frac{6}{5}. \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\rightarrow U = 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^l EI_b \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{6 (EI_b)^2}{5 GA} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right)^2 dz \right] \quad (3.16)$$

$$= 4 \left[\frac{1}{2} \int_0^l EI_b (u_i \varphi_1'' + u_j \varphi_2'')^2 dz + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{6 (EI_b)^2}{5 GA} (u_i \varphi_1''' + u_j \varphi_2''')^2 dz \right] \quad (3.17)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_i & u_j \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{48EI_b}{l^3} + \frac{3456E^2I_b^2}{5GA l^5} & -\frac{48EI_b}{l^2} - \frac{3456E^2I_b^2}{5GA l^5} \\ -\frac{48EI_b}{l^3} - \frac{3456E^2I_b^2}{5GA l^5} & \frac{48EI_b}{l^3} + \frac{3456E^2I_b^2}{5GA l^5} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{k}}} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Assemblage des matrices

Après avoir calculé les matrices de masse et de raideur en locale, on peut obtenir ces matrices en global en assemblant ces matrices et supprimant des colonnes et des lignes associées à la base

Matrice de masse en globale :

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \frac{104}{35}m_b + m_p & \frac{36}{70}m_b & 0 & 0 \\ \frac{36}{70}m_b & \frac{104}{35}m_b + m_p & \frac{36}{70}m_b & 0 \\ 0 & \frac{36}{70}m_b & \frac{104}{35}m_b + m_p & \frac{36}{70}m_b \\ 0 & 0 & \frac{36}{70}m_b & \frac{52}{35}m_b + m_p + m_e \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Matrice de raideur en globale :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix} 96k_I + \frac{6912}{5}k_A & -48k_I - \frac{3456}{5}k_A & 0 & 0 \\ -48k_I - \frac{3456}{5}k_A & 96k_I + \frac{6912}{5}k_A & -48k_I - \frac{3456}{5}k_A & 0 \\ 0 & -48k_I - \frac{3456}{5}k_A & 96k_I + \frac{6912}{5}k_A & -48k_I - \frac{3456}{5}k_A \\ 0 & 0 & -48k_I - \frac{3456}{5}k_A & 48k_I + \frac{3456}{5}k_A \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\text{où } k_I = \frac{EI_b}{l^3} \text{ et } k_A = \frac{E^2I_b^2}{GA l^5}.$$

3.1.4 Calcul des modes propres

Equation des fréquences et des déformées propres :

$$(\underline{\underline{M}}^{-1}\underline{\underline{K}} - \omega^2\mathbb{I})\underline{\underline{\psi}} = 0. \quad (3.21)$$

De cette équation, on trouvera 4 valeurs propres ω_i^2 et 4 vecteurs propres correspondants ψ_i . Ces vecteurs propres vont être adimensionnalisés suivant la formule : ${}^t\underline{\underline{\psi}}_i \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\psi}}_i = 1$

Applications numériques

On considère ici une structure en acier de 4 étages avec les caractéristiques suivantes :



$$\left\{ \begin{array}{l} m_p = 0,187 \text{ kg} \\ m_b = 0,009875 \text{ kg} \\ m_e = 0,9 \text{ kg} \\ l = 0,125 \text{ m} \\ E = 200 \text{ GPa} \\ G = \frac{E}{2(1+\mu)} = 76,92 \text{ GPa} \\ I_b = 0,83333 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4 \\ A = 10^{-5} \text{ m}^2 \end{array} \right. \quad (3.22)$$

FIGURE 3.3 – Structure mécanique à 4 étages étudiée en régime forcé, imposé par une table vibrante uni-axiale

En introduisant ces valeurs numériques dans les équations (3.19) et (3.20), on obtient les matrices de masse et de raideur de la structure considérée. La résolution du problème aux valeurs propres (3.21) nous donne les vecteurs de déformées propres adimensionnalisés :

$$\left[\begin{array}{cccc} f_1 = 4,408Hz & f_2 = 14,433Hz & f_3 = 32,418Hz & f_4 = 41,264Hz \\ 0.2419 & 1.0801 & -1.5002 & 1.0719 \\ 0.4734 & 1.4301 & 0.0828 & -1.5334 \\ 0.6846 & 0.8134 & 1.4957 & 1.1216 \\ 0.8664 & -0.3532 & -0.1654 & -0.0712 \end{array} \right] \quad (3.23)$$

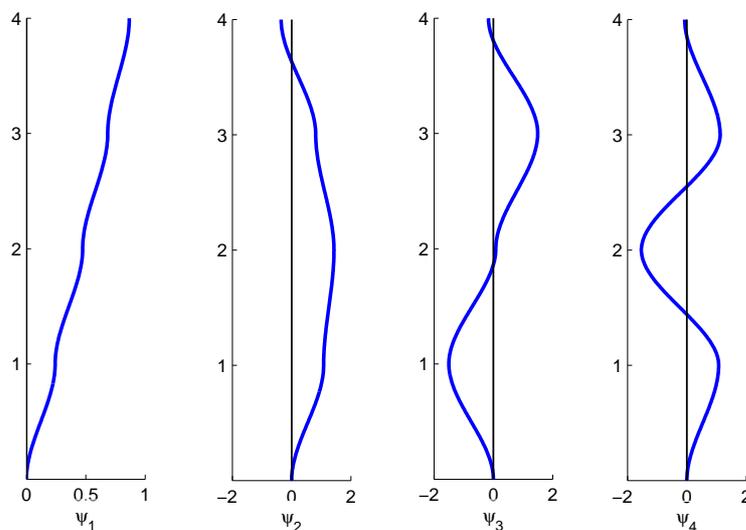


FIGURE 3.4 – Déformées propres du système dynamique

3.1.5 Régime forcé (déplacement d'appui) avec l'amortissement

Dans notre cas, la structure est soumise à des déplacements d'appui imposés par une table vibrante. Ajoutant la matrice des amortissements, nous avons comme équation d'équilibre dynamique :

$$\underline{\underline{M}} \ddot{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} \dot{\underline{U}} + \underline{\underline{K}} \underline{U} = -\underline{\underline{M}} \underline{\Delta} \ddot{u}_{ent} \quad (3.24)$$

où $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{K}}$ sont les matrices de masse et de raideur,
 $\underline{\underline{C}}$ est la matrice des amortissements critiques supposée obéir à l'hypothèse de Basile,

$\underline{\Delta}$ représente la direction du déplacement d'appui. Dans ce cas : $\underline{\Delta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

u_{ent} est le déplacement imposé sur l'appui,

\underline{U} est le vecteur des déplacement relatifs des planchers par rapport à la base.

Pour résoudre cette équation, on utilise la décomposition modale donnée par l'expression :

$$\underline{U}(t) = \sum_j q_j(t) \underline{\psi}_j = \underline{\underline{P}} \underline{Q}(t) \quad (3.25)$$

où $\underline{\underline{P}}$ est la matrice de changement de base.

Il nous reste à choisir quels modes utiliser dans cette décomposition. Un critère est de choisir les masses modales les plus importantes :

$$m_i = \frac{\left({}^t \underline{\psi}_i \underline{\underline{M}} \underline{\Delta} \right)^2}{{}^t \underline{\psi}_i \underline{\underline{M}} \underline{\psi}_i} \quad (3.26)$$

Pour ceci on calcule les pourcentages de masse modale. Nous prenons ensuite les modes qui ont des pourcentages élevés, et nous passerons à un système simplifié :

$$\mu_i = \frac{m_i}{m_T} = \frac{m_i}{\sum_j m_j} \quad (3.27)$$

Réduction modale

Pour notre structure, on a le tableau des masses modales et leur pourcentage :

Mode	m_i	μ_i
1	1,6250	91,23%
2	0,1270	7,13%
3	0,0249	1,40%
4	0,0043	0,24%

Les deux premiers modes concentrent plus de 95% de masse modale et on ne tient compte que de ces deux modes. Donc, on a la matrice de changement de base : $\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{\psi}}_1 \ \underline{\underline{\psi}}_2]$

En remplaçant (3.25) dans (3.24) nous obtenons :

$$\underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{Q}} + \underline{\underline{K}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{Q}} = -\underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{u}}_{ent}, \quad (3.28)$$

$$\rightarrow {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{U}} + {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{C}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{Q}} + {}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{P}} \underline{\underline{Q}} = -{}^t \underline{\underline{P}} \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}} \underline{\underline{u}}_{ent}. \quad (3.29)$$

En utilisant l'orthogonalité des modes propres par rapport aux matrices $\underline{\underline{M}}$, $\underline{\underline{K}}$ et l'hypothèse de Basile :

$${}^t \underline{\underline{\psi}}_i \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\psi}}_j = \delta_{ij}, \quad (3.30)$$

$${}^t \underline{\underline{\psi}}_i \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\psi}}_j = \delta_{ij} \omega_i^2, \quad (3.31)$$

$${}^t \underline{\underline{\psi}}_i \underline{\underline{C}} \underline{\underline{\psi}}_j = \delta_{ij} c_i. \quad (3.32)$$

Nous n'avons plus que des équations découplées :

$$\forall k = 1, 2 \quad \ddot{q}_k + 2\xi_k \omega_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k = -\frac{{}^t \underline{\underline{\psi}}_k \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Delta}}}{\underline{\underline{\psi}}_k^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\psi}}_k} \underline{\underline{u}}_{ent} = -\gamma_k \underline{\underline{u}}_{ent}. \quad (3.33)$$

La solution de ces équations est donnée par le noyau de Green :

$$q_k = -\gamma_k \chi(\underline{\underline{u}}_{ent}, h_k), \quad (3.34)$$

où h_k est la fonction de transfert du $k^{\text{ème}}$ mode propre de la structure donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h_k(t) = \frac{1}{\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2}} e^{-\xi_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \xi_k^2} t), \quad (3.35)$$

$$\forall \omega \in \mathbb{R} \quad \hat{h}_k(\omega) = \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\xi_k \omega_k \omega - \omega^2}. \quad (3.36)$$

Et les déplacements relatifs de la structures sont exprimés comme la superposition de termes convolués :

$$\forall i \in [1, 4] \quad u_i = \sum_{k=1}^2 \psi_k^i (-\gamma_k \chi(\underline{\underline{u}}_{ent}, h_k)) = \sum_{k=1}^2 \alpha_{i,k} \chi(\underline{\underline{u}}_{ent}, h_k). \quad (3.37)$$

Par conséquent, seule la connaissance des deux fonctions de transfert nous permet de prédire la réponse de la structure sous l'action de telle ou telle force externe. Donc l'objectif de chaque essai dynamique est de déterminer les fonctions de transfert de la structure. Dans notre cas ce sont celles de deux premiers modes propres qui exige seulement la connaissance de la réponse de la structure à deux planchers. Pour le premier mode, le déplacement maximal est au 4^{ème} plancher et pour le deuxième mode c'est celui du 2^{ème} plancher. C'est pourquoi on s'intéresse seulement aux déplacements de ces deux planchers dans l'expérimentation qui est le cœur de la section suivante.

3.2 Expérimentation

Dans cette étude, une expérimentation simple est réalisée qui consiste à solliciter par la base un ensemble de structures mécaniques, de type bâtiment, supposé linéaire. Il s'agit de présenter les équipements utilisés et les résultats obtenus des essais qui seront traités en appliquant des opérateurs définis dans les chapitres précédents pour identifier la réponse en fréquence de la structure considérée.

3.2.1 Instrumentation

On s'intéresse, dans cette section, à la présentation de l'instrumentation du banc d'essai. Les équipements électroniques de mesure du mouvement d'un dispositif mécanique expérimental constituent les éléments d'un banc d'essai qui se doivent d'être spécifiquement choisis afin de répondre au mieux aux exigences des expérimentations envisagées. La nature des mesures à effectuer impose donc une instrumentation permettant une mesure fine du contenu fréquentiel instantané des réponses dynamiques du dispositif étudié jusqu'à des niveaux d'accélération élevés. L'équipement de mesure retenu est ainsi constitué d'un marteau modal, de capteurs accélérométriques piézoélectriques modaux.



FIGURE 3.5 – Capteur modal triaxial



FIGURE 3.6 – Capteur accélérométrique à cisaillement



FIGURE 3.7 – Marteau modal

La modélisation par éléments finis de la structure (cf. Section 3.1) a montré la présence significative de 2 premiers modes propres entre 2 et 20 Hertz. Par conséquent, la structure est instrumentée au moyen de 2 capteurs accélérométriques, placés respectivement au centre du 2^{ème} et 4^{ème} plateaux horizontaux. Ces capteurs fournissent alors une mesure, échantillonnée à 2¹¹ Hertz, des accélérations absolues de la structure en leur point de fixation. Un troisième capteur est placé sur la table vibrante afin de mesurer l'accélération d'entraînement réellement appliquée à la structure.

Les données recueillies sur le dispositif expérimental correspondent à des accélérations absolues, mesurées par rapport à un référentiel fixe. La méthodologie présentée ci-dessous s'appuie alors sur deux étapes différentes. La première consiste en les analyses super-résolutions pour capturer les informations fréquentielles principales résidant dans les signaux à la sortie des essais. La deuxième revient aux analyses multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$ pour réaliser successivement l'intégration, le filtrage et la déconvolution de ces données expérimentales afin d'évaluer une approximation des FrF de la structure associées aux positions des capteurs.

3.2.2 Analyse super-résolution des signaux expérimentaux

En pratique, les signaux obtenus à l'issue des essais dynamiques sont préalablement analysés en Fourier pour identifier les informations principales et mettre en évidence des modes de la structure. Dans cette section, les analyses super-résolutions présentées dans le chapitre 2 sont appliqués aux signaux d'accélération du deuxième et du quatrième plancher du bâtiment soumis à des déplacements provoqués par la table vibrante.

Dans un premier temps, le dispositif expérimental est sollicité par une consigne en déplacement associée à un balayage sinusoïdal entre $[2, 6]$ Hz . Les analyses super-résolutions sont réalisées pour les signaux d'excitation et d'accélération mesurées au deuxième et quatrième étage. Comme nous considérons ici seulement les deux premiers modes de vibration, les scalogrammes sont calculés pour une gamme de fréquence entre $[2, 20]$ Hz dont les résultats sont présentés Figure 3.8. Les analyses super-résolution de l'excitation ont révélé la présence d'une plage de fréquence comprise entre $[6, 18]$ ce qui montre que les performances de la table ne permettent pas de garantir un fonctionnement assez stable. Cependant, les courbes en trait gras, représentant les crêtes instantanées d'ondelettes, montrent que les réponses de la maquette ont bien suivi la consigne fréquentielle de la table vibrante. Les scalogrammes des accélérations des étages 2 et 4 montrent clairement une région de haut relief ressortant autour de la fréquence $4.4 Hz$ et une autre autour du second mode $14.4 Hz$.

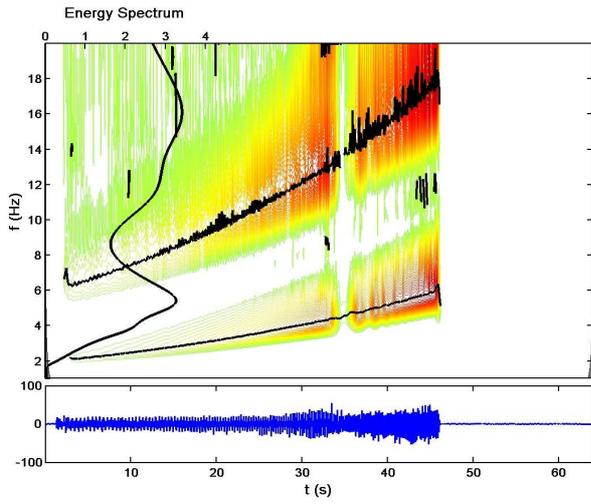
Dans un deuxième temps, un profil de bruit blanc est appliqué par la table vibrante. Il est possible de retrouver les deux fréquences propre $4.39 Hz$ et $14.42 Hz$ qui apparaissent fortement sur ces scalogrammes mais pas de façon continue (Figure 3.9). Cela signifie que ces deux fréquences ne sont pas toujours contenues dans les forces d'entraînement, mais si l'une d'entre elles existe, la structure va répondre plus intensivement. Les lignes de distribution énergétique des fréquences montrent aussi que le déplacement au deuxième étage favorise la fréquence $14.42 Hz$ avec une énergie d'échelle trois fois plus élevée que pour l'autre fréquence tandis que le quatrième étage réagit plus avec la fréquence $4.39 Hz$.

3.2.3 Estimation des coefficients d'approximation des FrF de la structure linéaire

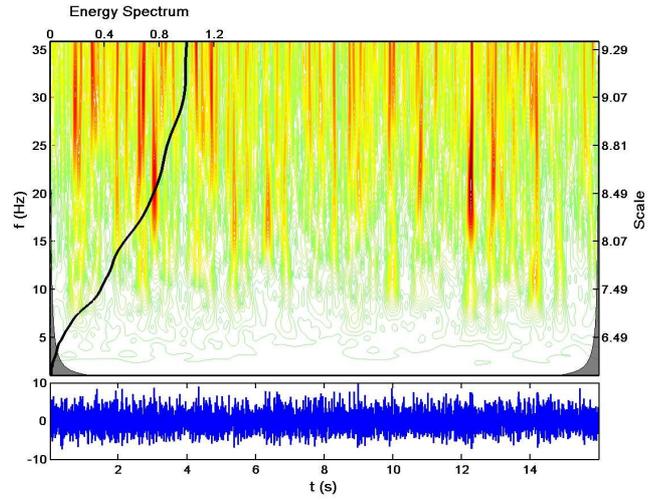
Intégration des données expérimentales par opérateurs ondelettes

Dans le cadre d'une AMR de $L^2(\mathbb{R})$, un opérateur d'intégration-ondelette \mathcal{T}_J peut être défini afin d'implémenter les coefficients d'approximation de l'intégrale d'un signal directement depuis ses coefficients d'approximation à une échelle donnée (cf. Section 1.3.1). Un calcul similaire avec un algorithme rapide peut être réalisé dans le cadre d'une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ en ce qui concerne l'intégration des accélérations des deux étages de la structure mécanique étudiée et de la table vibrante. Dans ce qui suit, on utilise une ondelette Daubechies d'ordre 4.

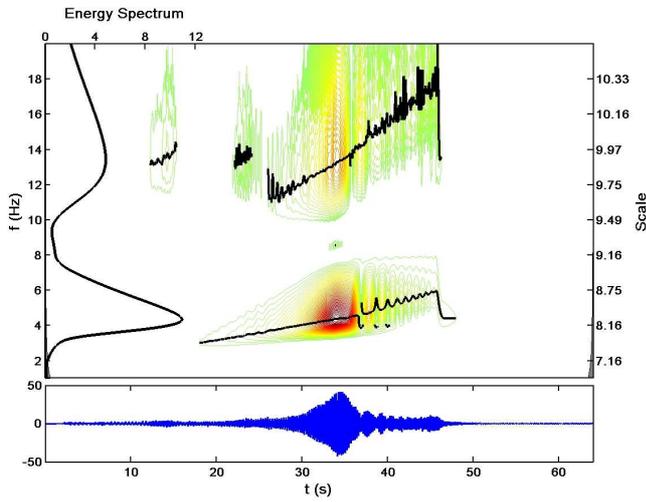
En l'absence de confusion entre l'accélération absolue d'un étage de la structure étudiée par rapport à un référentiel fixe et son accélération relative par rapport à la table vibrante, dans ce qui suit, on désigne par \ddot{u}_i l'accélération absolue du $i^{ème}$ étage de la structure. Par ailleurs, l'accélération absolue de la table vibrante est notée \ddot{u}_{ent} . Elles sont approximées dans un espace V_J , leurs coefficients d'approximations respectifs sont alors notés $\underline{s(\ddot{u}_i)}_J$ et $\underline{s(\ddot{u}_{ent})}_J$.



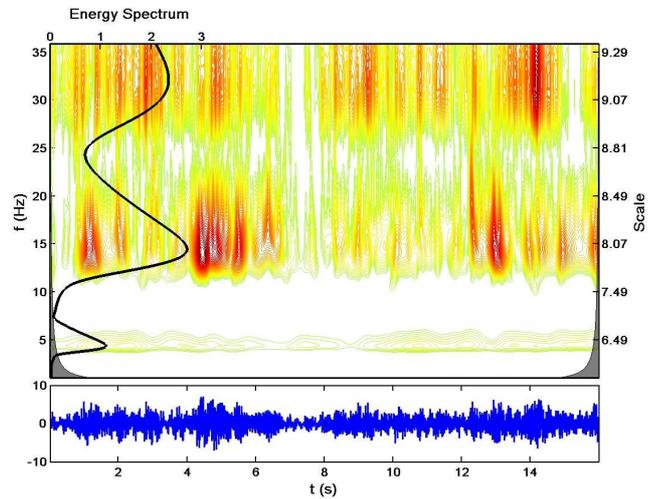
(a) Excitation



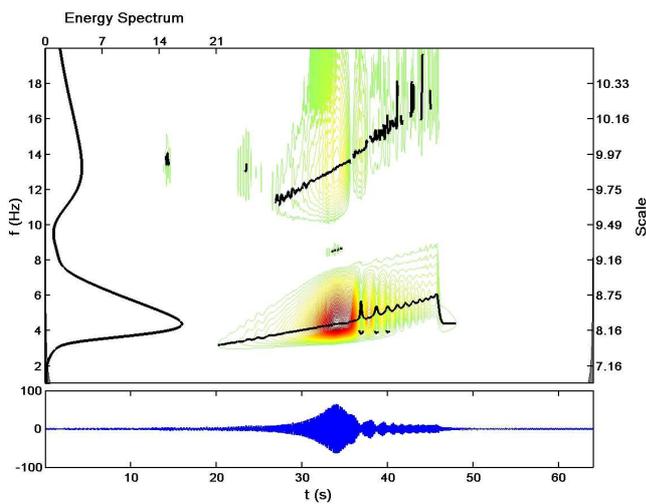
(a) Excitation



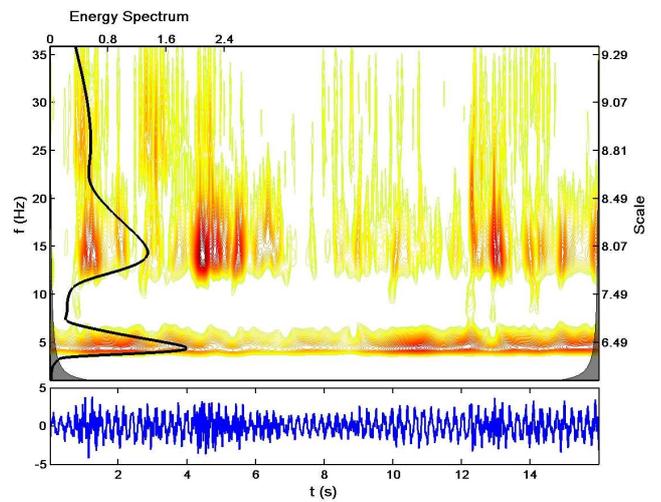
(b) Accélération mesurée au niveau du 2^{ème} plancher



(b) Accélération mesurée au niveau du 2^{ème} plancher



(c) Accélération mesurée au niveau du 4^{ème} plancher



(c) Accélération mesurée au niveau du 4^{ème} plancher

FIGURE 3.8 – Analyse super-résolution des résultats expérimentaux sous balayage sinusoïdal

FIGURE 3.9 – Analyse super-résolution des résultats expérimentaux sous bruit blanc

Les problèmes d'offset des capteurs accélérométriques, l'absence de connaissances précises sur les conditions initiales en déplacement et en vitesse ainsi que les bruits de mesures engendrent des perturbations globalement dans les résultats de l'intégration des signaux d'accélération. Ces effets de dérives essentiellement basse fréquence peuvent être filtrés au moyen de filtres passe-haut (Butterworth). Cependant il est difficile d'établir des critères objectifs permettant d'évaluer le support spectral sur lequel doit intervenir le filtrage. Une décomposition pyramidale des voies d'approximation dans le cadre d'une AMR de $L^2(\mathbb{R})$ permet de minimiser les effets de perturbations.

Selon la condition de régularité des ondelettes de Daubechies d'ordre N , les coefficients de détail de tout polynôme de degré inférieur ou égal à $N - 1$ sont nuls. Aussi, en réalisant la décomposition des voies $\underline{s}(u_i)_J$ en leur pyramides $\underline{s}(u_i)_{J_{min}}, \underline{d}(u_i)_{J_{min}}, \dots, \underline{d}(u_i)_{J-1}$ dans le cadre de l'AMR de $L^2(\mathbb{R})$ considérée, les voies de coefficients $\underline{s}(u_i)_J$ peuvent être approximées par la superposition des voies de coefficients de détails $\underline{s}(u_i)_{J_1}$ à $\underline{s}(u_i)_{J_2}$. Un tel traitement réalise un filtrage passe-bande des données intégrées supprimant tout effet polynômial et permettant en outre d'en contrôler le support spectral. Dans le cadre de cette étude, les signaux intégrés sont approximés par la superposition de leurs voies de détails d'une échelle 3 à une échelle 10.

Les résultats de cette méthodologie de filtrage passe-bande, appliquée aux signaux intégrés par opérateur ondelettes, sont présentés dans la figure 3.10 respectivement pour l'accélération de la table, l'accélération mesurée sur le deuxième et quatrième étage dans les essais de bruit blanc. A la fin on obtient les déplacements relatifs du deuxième et du quatrième étage par rapport à la table vibrante ainsi que leurs voies de coefficients d'approximations.

La méthode d'intégration-ondelettes filtrée reste donc pertinente tant que l'on continue de manipuler les seuls coefficients d'approximation et de détails des signaux étudiés. Dans ce qui suit, ces derniers coefficients d'approximation sont directement utilisés pour évaluer les coefficients d'approximation des fonctions de réponse en fréquence de la structure étudiée via un opérateur de déconvolution-ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$.

Estimation des coefficients d'approximation des FrF de la structure linéaire par opérateur de déconvolution-ondelettes

En appliquant l'opérateur de déconvolution-ondelettes (cf. Section 1.3.3) pour des signaux en déplacement déterminés par l'intégration des signaux expérimentaux, on obtient les fonctions de réponse en fréquence du deuxième et du quatrième étage de la structure mécanique. Les résultats sont présentés dans la figure 3.11. Les différentes figures montrent les représentations instantanées et dans le domaine de Fourier des approximation à l'échelle 10 des fonctions.

La représentation dans le domaine de Fourier des fonctions de réponse en fréquence identifiées révèlent clairement les deux premières fréquence propres de la structure mécanique, qui sont 4, 39 et 14, 42 Hertz.

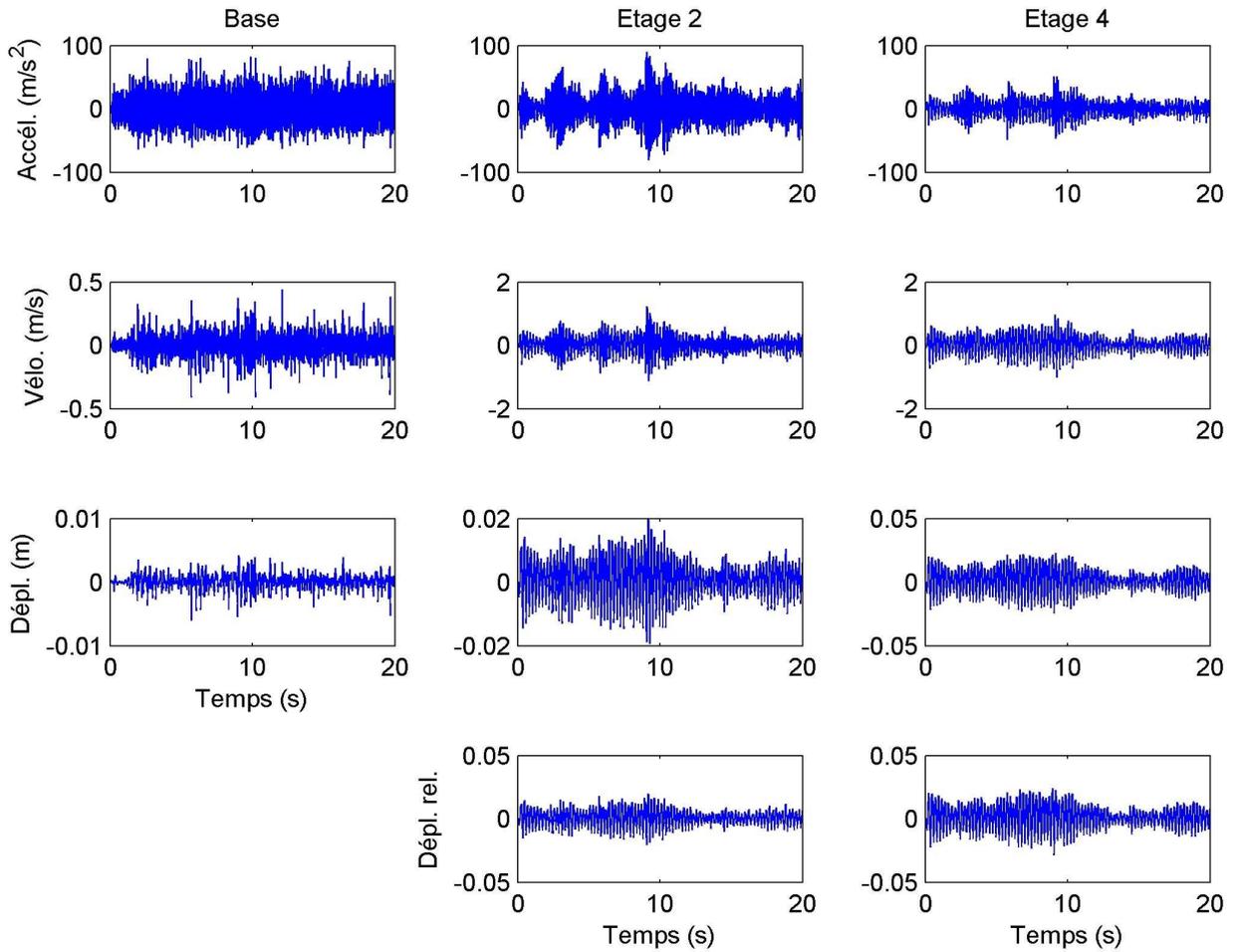


FIGURE 3.10 – Résultats d'intégration et filtrage par AMR des signaux en accélération

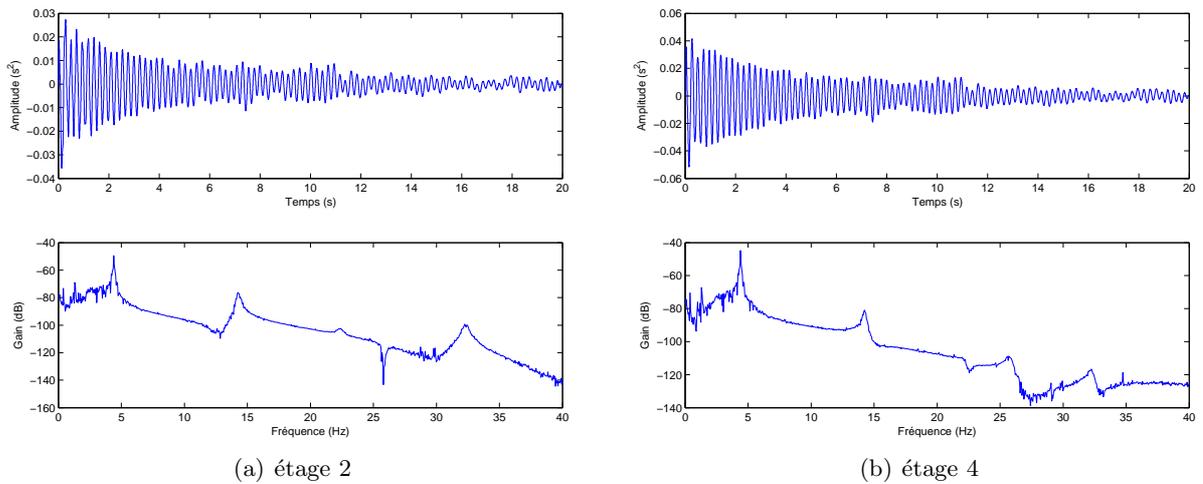


FIGURE 3.11 – Fonctions de réponse en fréquence des déplacements de l'étage 2 et 4

3.3 Conclusion

Les analyses multi-résolution sur $L^2(\mathbb{R})$ ainsi que les opérateurs ondelettes, présentes d'un bout à l'autre de l'étude expérimentale rapportée dans la Section 3.2, ont permis d'identifier les fonctions de réponse en fréquence relatives aux déplacements d'une structure mécanique pour un mode de sollicitation par la base. L'utilisation conjointe d'un opérateur d'intégration-ondelettes sur $L^2(\mathbb{R})$ et de la décomposition en voies de détails ont garanti la stabilité fréquentielle des signaux manipulés sur un support donné. Et l'application de l'opérateur de déconvolution-ondelettes nous rend une bonne estimation des fonctions de réponse en fréquence d'une structure mécanique linéaire.

Deuxième partie

Comportement dynamique et Optimisation des oscillateurs couplés à des absorbeurs essentiellement non linéaires

Chapitre 4

Pompage énergétique en régime instationnaire

L'objectif du pompage énergétique est d'être en mesure de concevoir un absorbeur d'énergie non linéaire efficace pour atténuer les vibrations transitoires. Les équations des échanges énergétiques peuvent être décrites à la première approximation à travers des variables adimensionnelles en donnant des critères analytiques de conception. Une expansion des études sur le système de plusieurs absorbeurs non linéaire est aussi effectuée pour améliorer l'efficacité du pompage. La robustesse du critère de design est notamment étudiée pour pouvoir le mettre en pratique.

Sommaire

4.1	Études théoriques d'un oscillateur attaché à un NES	78
4.1.1	Modèle considéré	78
4.1.2	Complexification et Échelles multiples	79
4.1.3	Scénarios de transfert énergétique - Énergie d'activation	82
4.2	Développement du design pour plusieurs NES	86
4.2.1	Modèle considéré	86
4.2.2	Pyramide d'activation des NES	90
4.3	Robustesse du critère de design	91
4.3.1	Exemple de design d'un NES	91
4.3.2	Exemple de design d'un couple de NESs en parallèle	92
4.4	Conclusions et Remarques	99

4.1 Études théoriques d'un oscillateur attaché à un NES

Les travaux portant sur le concept de transfert énergétique dans le domaine vibratoire ont fait l'objet de nombreuses publications [9–12] depuis plus d'une dizaine d'années déjà. Le pompage énergétique consiste à transférer de manière irréversible l'énergie d'un système maître vers un système auxiliaire NES par l'intermédiaire d'une liaison essentiellement non linéaire qui permet de déclencher des résonances entre les modes non linéaires sous-jacents. Le pompage se traduit généralement par l'apparition de bifurcations vers des branches de solutions plus stables pour lesquels l'énergie se trouve localisée dans le système auxiliaire. La plupart des études précédentes s'attachent à démontrer la faisabilité du pompage dans certaines configurations de résonances mais aucune d'elles n'a jusqu'alors envisagé de construire un critère de design de la raideur non linéaire caractérisant l'attache et permettant de garantir un fonctionnement efficace et robuste du phénomène de pompage énergétique. La présente étude tente d'apporter un nouvel éclairage à ce propos en définissant un critère de design optimal dans le cadre d'un oscillateur linéaire amorti couplé à un NES.

4.1.1 Modèle considéré

Pour un premier temps, on considère un système mécanique constitué d'un oscillateur linéaire couplé à une masse auxiliaire via un attachement à non linéarité cubique illustré en Figure 4.1 et régi par :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + m\ddot{y} = 0, \\ m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

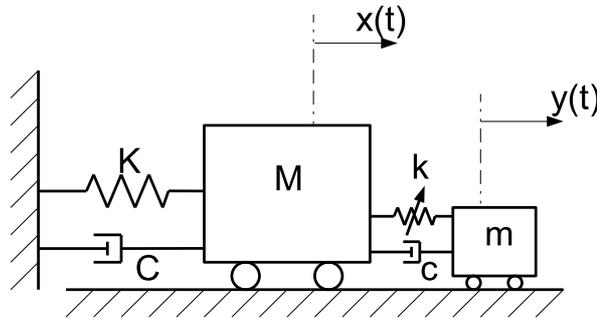


FIGURE 4.1 – *Système ajouté NES*

La structure primaire linéaire est excitée par une impulsion. On considère donc des oscillations libres des structures avec des conditions initiales :

$$y(t = 0) = x(t = 0) = 0; \quad \frac{dy}{dt}(t = 0) = 0; \quad \frac{dx}{dt}(t = 0) = C_I. \quad (4.2)$$

Pour simplifier le système d'équations, de nouveaux paramètres sont introduits :

$$\frac{m}{M} = \epsilon; \quad \frac{K}{M} = \omega_0^2; \quad \frac{C}{M} = \epsilon\lambda_0; \quad \frac{c}{m} = \lambda; \quad \frac{k}{m} = \Omega\omega_0^2; \quad (4.3)$$

où $\epsilon \ll 1$ représente le ratio de masse de l'attachement non linéaire qui doit être très petit.

Le système (4.1) devient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \epsilon\lambda_0\dot{x} + \omega_0^2x + \epsilon\ddot{y} = 0, \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon\lambda(\dot{y} - \dot{x}) + \epsilon\Omega\omega_0^2(y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

On introduit ensuite un changement de variables correspondant physiquement aux variables d'état décrivant le mouvement du centre de masses et le déplacement internes du NES :

$$v_0 = x + \epsilon y, \quad v_1 = x - y. \quad (4.5)$$

Ce changement de variables permet de réduire l'Equation (4.4) sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{v}_0 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda_0(\dot{v}_0 + \epsilon\dot{v}_1) + \frac{\omega_0^2}{1+\epsilon}(v_0 + \epsilon v_1) = 0, \\ -\frac{1}{1+\epsilon}(\ddot{v}_0 + \epsilon\ddot{v}_1) + \ddot{v}_1 + \lambda\dot{v}_1 + \Omega\omega_0^2v_1^3 = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

En appliquant certaines transformations algébriques simples et le développement de Taylor (en gardant seulement les termes jusqu'à l'ordre de $\mathcal{O}(\epsilon^1)$), les accélérations de chaque variable peuvent être séparées à partir du système(4.6) :

$$\begin{cases} (\ddot{v}_0 + \omega_0^2v_0) + \epsilon[\lambda_0\dot{v}_0 - \omega_0^2(v_0 - v_1)] = 0, \\ (\ddot{v}_1 + \omega_0^2v_1) + \lambda\dot{v}_1 + \omega_0^2(\Omega v_1^3 + v_0 - v_1) + \epsilon(\lambda_0\dot{v}_0 + \lambda\dot{v}_1 + \Omega\omega_0^2v_1^3) = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

4.1.2 Complexification et Échelles multiples

On introduit ensuite un changement de variable complexe 4.8 faisant appel à la méthode de complexification introduite par Manevitch [23] qui consiste en un changement de variables permettant de décomposer la dynamique du système en une dynamique lente et une dynamique rapide. L'amplitude φ_k possède une variation lente comparativement à la pulsation unitaire qui est exponentielle. L'évolution de la dynamique rapide est contrôlée par l'exponentielle. Le système maître et les batteurs sont supposés avoir des fréquences unitaires "rapides", l'évolution de ces fréquences étant modulée par le paramètre lent d'amplitude.

$$\begin{cases} \varphi_0 e^{i\omega_0 t} = \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} + iv_0, \\ \varphi_1 e^{i\omega_0 t} = \frac{\dot{v}_1}{\omega_0} + iv_1. \end{cases} \quad (4.8)$$

En tenant compte de ces changements de variables, le système (4.7) est récrit comme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi}_0 + \epsilon \left[\frac{1}{2}\xi_0(\varphi_0 + \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{i}{2}(\varphi_0 - \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega_0 t}) - \frac{i}{2}(\varphi_1 - \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega_0 t}) \right] = 0, \\ \frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2}\xi(\varphi_1 + \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{i}{2}(\varphi_1 - \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega_0 t}) + \Omega \left(-\frac{i}{2}(\varphi_1 e^{i\omega_0 t} - \overline{\varphi_1} e^{-i\omega_0 t}) \right)^3 \\ + \epsilon \left[\frac{1}{2}\xi(\varphi_1 + \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega_0 t}) - \Omega \left(\frac{i}{2}(\varphi_1 e^{i\omega_0 t} - \overline{\varphi_1} e^{-i\omega_0 t}) \right)^3 \right] \\ - \frac{i}{2}(\varphi_0 - \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega_0 t}) + \epsilon \frac{1}{2}\xi_0(\varphi_0 + \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega_0 t}) = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

où $\xi_0 = \frac{\lambda_0}{\omega_0}$ et $\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$ sont des coefficients d'amortissement spécifiques des masses primaire et ajoutée.

Une analyse aux échelles multiples est exécutée selon les développements suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \varphi_{p0} + \epsilon \varphi_{p1} + \epsilon^2 \varphi_{p2} + \dots, \quad \forall p = 0..1, \\ \tau_k &= \epsilon^k t, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (4.10)$$

Par substitution des développements (4.10) dans le système (4.9), on obtient à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ (temps "rapide") :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_0} = 0 \Rightarrow \varphi_{00} = \varphi_{00}(\tau_1, \tau_2, \dots), \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \xi (\varphi_{10} + \overline{\varphi_{10}} e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{i}{2} (\varphi_{10} - \overline{\varphi_{10}} e^{-2i\omega_0 t}) \\ - \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \overline{\varphi_{00}} e^{-2i\omega_0 t}) + \Omega \left(-\frac{i}{2} (\varphi_{10} e^{i\omega_0 t} - \overline{\varphi_{10}} e^{-i\omega_0 t}) \right)^3 = 0. \end{cases} \quad (4.11)$$

Les termes séculaires correspondant à l'échelle de temps τ_0 doivent être éliminés dans (4.11) car nous cherchons ici des solutions périodiques bornées :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{10}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \xi \varphi_{10} + \frac{i}{2} (\varphi_{10} - \varphi_{00}) - \frac{3i}{8} \Omega |\varphi_{10}|^2 \varphi_{10} = 0. \quad (4.12)$$

Selon la première équation du système (4.11), la variable φ_{00} est indépendante à l'échelle de temps τ_0 , et la deuxième équation de ce système décrit l'évolution de la variable φ_{10} correspondant à l'échelle de temps τ_0 . Il est possible de prouver que la variable φ_{10} évolue vers la valeur d'équilibre comme suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \xi \varphi_{10} + \frac{i}{2} \varphi_{10} - \frac{3i}{8} \Omega |\varphi_{10}|^2 \varphi_{10} = \frac{i}{2} \varphi_{00}(\tau_1, \tau_2, \dots), \\ \varphi_{10}(\tau_1, \dots) = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \varphi_{10}(\tau_0, \tau_1, \dots). \end{cases} \quad (4.13)$$

On peut dire aussi que $\varphi_{10}(\tau_1, \dots)$ est aussi le point fixe de $\varphi_{10}(\tau_0, \tau_1, \dots)$ par rapport aux temps "rapide" τ_0 si la solution est stable.

En ordre $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ (temps "lent"), on a :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 (\varphi_{00} + \overline{\varphi_{00}} e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \overline{\varphi_{00}} e^{-2i\omega_0 t}) - \frac{i}{2} (\varphi_{10} - \overline{\varphi_{10}} e^{-2i\omega_0 t}) = 0. \quad (4.14)$$

Les termes séculaires respectant à l'échelle de temps τ_0 sont absents si :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 \varphi_{00} + \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \varphi_{10}) = 0, \quad (4.15)$$

φ_{00} et φ_{10} sont indépendants de τ_0 . Donc à la limite $\tau_0 \rightarrow \infty$, on a une autre relation entre les tendances énergétiques des modes d'ensemble et interne :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 \varphi_{00} + \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \varphi_{10}) = 0. \quad (4.16)$$

Pour étudier l'évolution des comportements invariants, il est plus commode de décomposer les variables complexes en module et arguments comme suivant :

$$\varphi_{00} = R_0(\tau_1)e^{i\delta_0(\tau_1)}; \quad \phi_{10} = R_1(\tau_1)e^{i\delta_1(\tau_1)}. \quad (4.17)$$

L'équation en variables complexes (4.16) se ramène à deux équations réelles :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial R_0}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{2}\xi_0 R_0 + \frac{1}{2}R_1 \sin(\delta_0 - \delta_1), \\ \frac{R_0}{\omega_0} \frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} = -\frac{i}{2}R_0 + \frac{1}{2}R_1 \cos(\delta_0 - \delta_1). \end{cases} \quad (4.18)$$

Similairement, l'équation (4.13) se ramène au système :

$$\begin{cases} R_0 \sin(\delta_0 - \delta_1) = -\xi R_1, \\ R_0 \cos(\delta_0 - \delta_1) = R_1 \left(1 - \frac{3}{4}\Omega R_1^2\right). \end{cases} \quad (4.19)$$

En combinant ces deux derniers systèmes, les arguments peuvent être éliminés pour obtenir un système des modules :

$$\begin{cases} \frac{R_0}{\omega_0} \frac{\partial R_0}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{2}\xi_0 R_0^2 - \frac{1}{2}\xi R_1^2, \\ R_0^2 = R_1^2 \left[\xi^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\Omega R_1^2\right)^2 \right]. \end{cases} \quad (4.20)$$

Une autre simplification évidente est de poser $E_p = R_p^2, \forall p = 0..1$:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0}{\partial \tau_1} = -\lambda_0 E_0 - \lambda E_1, \\ E_0 = E_1 \left[\xi^2 + \left(1 - \frac{3}{4}\Omega E_1\right)^2 \right]. \end{cases} \quad (4.21)$$

En se référant aux relations des changements de variables (4.8) et (4.13), on peut comprendre la nature des variables E :

$$\begin{cases} E_0 = |\varphi_{00}|^2 = \frac{\dot{v}_0^2}{\omega_0^2} + v_0^2, \\ E_1 = |\phi_{10}|^2 = \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{\dot{v}_1^2}{\omega_0^2} + v_1^2 \right). \end{cases} \quad (4.22)$$

Ce qui signifie que E_0 représente le niveau d'énergie du centre des masses à la première approximation dans le cadre de l'analyse aux échelles multiples tandis que E_1 représente aussi ce type de niveau d'énergie du mode interne mais à la limite $\tau_0 \rightarrow \infty$. Autrement dit, E_1 décrit le comportement invariant correspondant à l'échelle de temps τ_1 qui est la solution de point fixe représentant le module moyenné de φ_1 en éliminant l'oscillation rapide à l'échelle de temps τ_0 .

La première équation du système (4.21) est naturellement raisonnable du point de vue physique. Le taux de dissipation énergétique du mode d'ensemble est équivalent à la somme de sa

propre énergie et de celle du mode interne pré-multipliés par les coefficients d'amortissement respectifs. La relation énergétique entre les modes ne dépend que du coefficient d'amortissement λ du NES mais pas de l'amortissement λ_0 du système maître ce qui permet de négliger la contribution de λ_0 dans (4.21) pour mieux étudier le rôle du coefficient d'amortissement du NES pendant le processus de pompage énergétique. Cette relation énergétique suppose que pour toute valeur positive de E_0 il existe au moins une solution positive de l'énergie du mode interne qui garantit toujours la dissipation monotone de l'énergie du système maître. Le problème de design optimal du NES est abordé en exploitant les relations (4.21) d'échanges énergétiques entre les modes d'ensemble et interne.

D'autre part, on peut remarquer que pendant les transferts énergétiques, E_1 joue le rôle d'une variable interne qui est pilotée par E_0 et qui décide du taux de dissipation de cette énergie centrale. Il est plus commode d'assurer une continuation possible pour E_0 mais pas pour E_1 au cours des simulations. De plus, étant donné que E_1 est seulement la solution de point fixe par rapport à l'échelle de temps rapide τ_0 ou bien la solution moyennée, le choix des conditions initiales pour la simulation du système (4.21) n'est pas évident. Pour une estimation, on accepte de prendre la valeur initiale de l'énergie centrale E_0 mais pas de l'énergie relative E_1 . Cette dernière sera calculée à partir de E_0 selon l'équation (4.21). Par conséquent, pour les investigations de l'efficacité du pompage énergétique plus tard, c'est la valeur initiale de l'énergie E_0 qui sera prise en compte.

4.1.3 Scénarios de transfert énergétique - Énergie d'activation

Un changement des variables : $Z_0 = \Omega E_0$, $Z_1 = \Omega E_1$ est introduit dans le système (4.21) :

$$\begin{cases} \frac{\partial Z_0}{\partial \tau_1} = -\lambda Z_1, \\ Z_0 = Z_1 \left[\xi^2 + \left(1 - \frac{3}{4} Z_1 \right)^2 \right]. \end{cases} \quad (4.23)$$

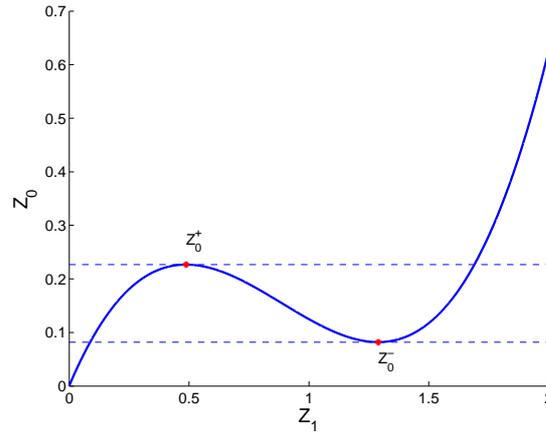
Le ratio de raideur non linéaire Ω est éliminé dans les équations et l'évolution des énergies E_0 et E_1 sera étudiée à travers les variables adimensionnelles Z_0 et Z_1 . Désormais, on ne considère que des variables et des paramètres adimensionnels ce qui est très favorable pour le problème de design des NES. C'est aussi le cœur de ces études en régime libre et aussi en régime forcé dans les sections qui viennent.

En différenciant la deuxième équation du système (4.23) :

$$\frac{dZ_0}{dZ_1} = \frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2), \quad (4.24)$$

il est possible de prouver l'existence d'un intervalle d'amortissement $\xi \in [0, \xi_{max} = \sqrt{1/3}]$ pour lequel l'énergie Z_1 possède de multiples racines fonctions de Z_0 correspondant à un saut brusque de l'énergie relative Z_1 comme le montre la Fig. 4.2. La courbe présente alors deux extrema donnés par :

$$\begin{aligned} \textit{maximum} & : Z_1^+ = \frac{4}{9}(2 - \gamma); \quad Z_0^+ = \frac{8}{81} [4 - \gamma^2(3 - \gamma)], \\ \textit{minimum} & : Z_1^- = \frac{4}{9}(2 + \gamma); \quad Z_0^- = \frac{8}{81} [4 - \gamma^2(3 + \gamma)]; \quad \gamma = \sqrt{1 - 3\xi^2}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

FIGURE 4.2 – Relation énergétique entre des modes d'ensemble et interne avec $\xi = 0.25$

et définissant une zone de dissipation efficace par transfert énergétique.

Comme plusieurs recherches récentes ont conclu, ce saut brusque de Z_1 dirige vers l'efficacité de la dissipation d'énergie. Cependant, l'objectif ici est d'être capable de concevoir un absorbeur non linéaire efficace pour atténuer l'énergie E_0 de vibrations vibratoires dans la masse primaire tandis qu'un saut brusque de Z_1 implique un taux de dissipation très petit (voir Eq. 4.23) et on peut dire que l'occurrence de ce saut marque la fin de l'efficacité du pompage énergétique.

En supposant une probable continuité de Z_1 avant et après le saut, l'évolution de cette tendance moyenne de l'énergie relative peut être décrite par l'intégrale première :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_0} \frac{dZ_1}{d\tau_1} &= -\frac{\xi Z_1}{\frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2)}, \\ \Rightarrow f(Z_1) &= \frac{27}{32} Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2) \ln(Z_1) = C - \omega_0 \xi \tau_1. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Selon les conditions initiales choisies, la relation énergétique va suivre soit la branche supérieure, soit la branche intermédiaire (instable) soit la branche inférieure. Les différents scénarios possibles sont illustrés en Fig. 4.3.

Une étude approfondie des scénarios de la Fig. 4.3 montre que le 3^{ème} et le 4^{ème} ne sont pas du tout efficace, le 2^{ème} est comparativement plus efficace mais instable; au final seul le 1^{er} scénario se révèle intéressant. En fait, quand Z_0 est proche de Z_0^+ par valeurs supérieures, la relation d'échange énergétique va être attirée par la branche supérieure mais la faible dynamique du système fait que la solution n'a pas réellement le temps d'atteindre cette branche et rejoint en chemin soit la branche intermédiaire, soit la branche inférieure qui correspondent aux scénarios 3 et 4. En résumé, le critère de design optimal pour lequel efficacité et robustesse du pompage sont exigés correspond au scénario 1 :

$$\Omega E_0 = Z_0 > Z_0^+ = \frac{8}{81} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right]. \quad (4.27)$$

C'est le critère crucial pour le design pratique des NES. Dès que l'énergie initiale E_0^{init} à atténuer dans la masse primaire est connue, on peut estimer la valeur de la raideur non linéaire

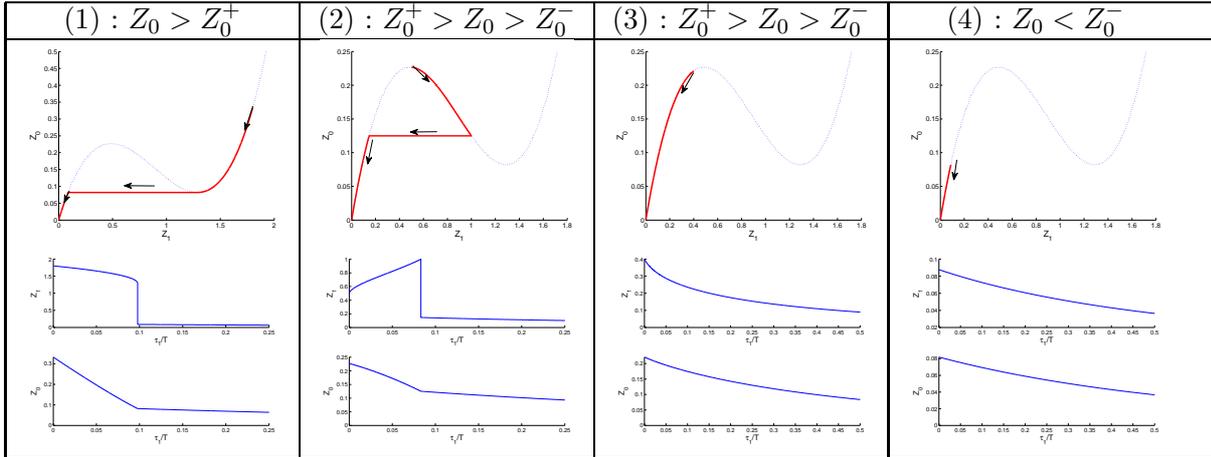


FIGURE 4.3 – Multiples scénarios de transfert énergétique

optimale :

$$k > k_{opt} = \Omega_{opt} \omega_0^2 = \frac{8}{81} \frac{m \omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right]. \quad (4.28)$$

Si on nous donne une plage d'énergie initiale $[E_{min}, E_{max}]$ à considérer, la raideur non linéaire doit être supérieure à la valeur optimale calculée pour l'énergie initiale minimale E_{min} . Le choix crucial de ce paramètre sera étudié prochainement dans les sections suivantes.

Influence de l'énergie initiale - Énergie d'activation

Le critère (4.27) permet de définir une énergie d'activation dépendant de la raideur non linéaire k du NES :

$$E_{act} = \frac{8}{81} \frac{m \omega_0^2}{k} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right]. \quad (4.29)$$

Lorsque $E_0^{init} > E_{act}$, le NES est actif et le comportement énergétique $Z_0 \leftrightarrow Z_1$ est assez stable pour suivre la courbe jusqu'au point minimum avant l'occurrence du saut comme montré la Fig. 4.4, il est possible de calculer le taux de chute :

$$P_{drop} = 1 - \frac{Z_0^-}{Z_0^{init}} = 1 - \frac{8}{81} \frac{4 - \gamma^2(3 + \gamma)}{Z_0^{init}}, \quad (4.30)$$

et la durée efficace du pompage énergétique en se basant sur Eq. (4.26) :

$$\epsilon T_{pump} = \frac{1}{2\pi\xi} [f(Z_1^{init}) - f(Z_1^-)]. \quad (4.31)$$

Il est facile de démontrer que la fonction $f(Z_1)$ décrite en Eq. (4.26) a le même comportement et les mêmes extrema avec la relation $Z_0(Z_1)$ décrite en Eq. (4.29). Donc, l'accroissement de E_0^{init} a pour effet d'augmenter le taux de chute mais aussi d'allonger la durée du pompage. Par conséquent, pour obtenir un pompage énergétique efficace, l'énergie initiale doit être supérieure à l'énergie d'activation (4.29) mais pas trop au risque de dégrader les performances liées au temps de chute.

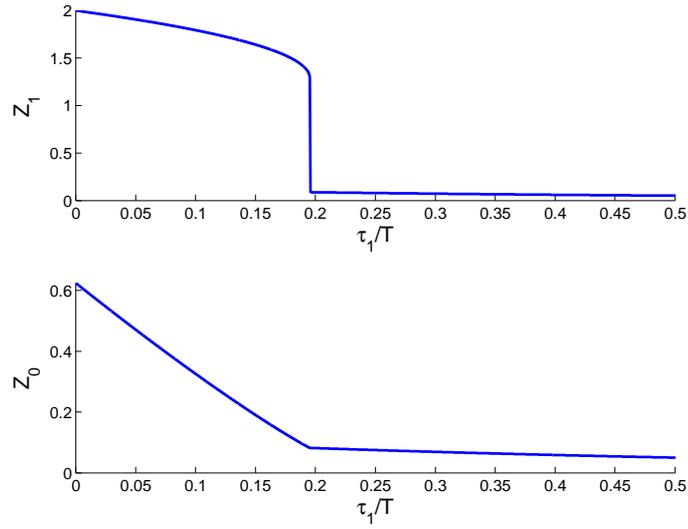


FIGURE 4.4 – Écoulement énergétique de Z_1 et Z_0 relié à l'échelle de temps lent τ_1/T avec $\xi = 0.25$

Influence de l'amortissement du NES

Considérons maintenant le cas optimal où l'énergie initiale se situe juste au dessus du seuil d'énergie d'activation du pompage. Le taux de chute se simplifie selon les expressions :

$$P_{drop} = 1 - \frac{Z_0^-}{Z_0^+} = \frac{(1 - 3\xi^2)^{3/2}}{4 - (1 - 3\xi^2)(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2})}. \quad (4.32)$$

Et la durée de pompage :

$$\begin{aligned} \epsilon T_{pump} &= \frac{1}{2\pi\xi} [f(Z_1^+) - f(Z_1^-)], \\ &= \frac{1}{2\pi\xi} \left[\frac{4}{3}\sqrt{1 - 3\xi^2} - (1 + \xi^2) \log \frac{2 + \sqrt{1 - 3\xi^2}}{2 - \sqrt{1 - 3\xi^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

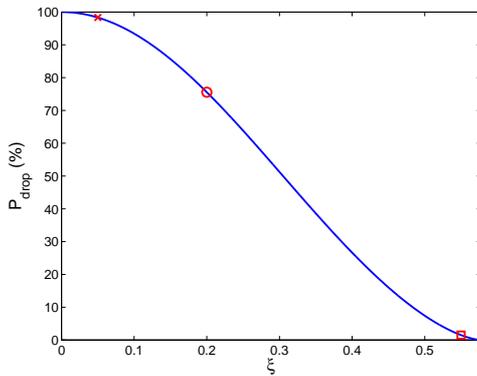


FIGURE 4.5 – Taux de chute P_{drop}

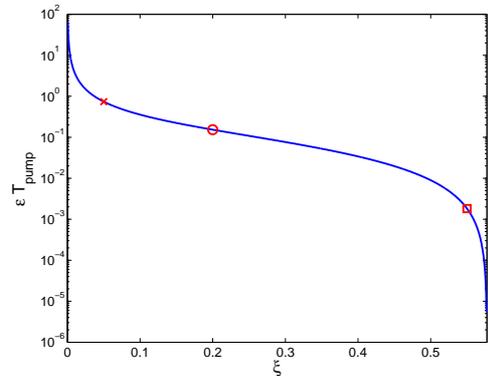


FIGURE 4.6 – Durée de pompage T_{pump}

L'influence de l'amortissement ξ est donnée par les Figs. 4.5 et 4.6 qui permettent de retrouver qualitativement le compromis nécessaire entre énergie et temps. Lorsque ξ tend vers 0, la durée de pompage va augmenter très vite vers l'infini et au contraire, quand ξ s'approche de la limite $\sqrt{1/3}$, le pompage énergétique est quasi-inefficace avec $P_{drop} \simeq 0$.

3 points de fonctionnement sont donnés à titre d'exemple :

point \times	:	$\xi = 0.05$;	$P_{drop} = 98.3\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.74$;
point o	:	$\xi = 0.2$;	$P_{drop} = 75.5\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.15$;
point \square	:	$\xi = 0.55$;	$P_{drop} = 1.5\%$;	$\epsilon T_{pump} = 0.002$.

En résumé, le choix de l'amortissement du NES est crucial pour effectuer un design efficace qui mérite d'être approfondi.

4.2 Développement du design pour plusieurs NES

Dans la Section précédente, le processus de transfert irréversible (pompage) énergétique de la structure maître à un attachement essentiellement non linéaire (NES) est étudié en donnant des critères analytique pour le pompage énergétique efficace de ce système. Les recherches récentes sont réalisées essentiellement sur un système maître attaché à seulement un NES qui ne représente qu'un seul niveau d'énergie d'activation qui joue le rôle comme un de pompage énergétique pour ce système. En réalité, il exige toujours une atténuation d'oscillation efficace sur la plage la plus large que possible de l'énergie initiale. Les études étendues sur le travail simultané de différents NES en parallèle sont étudiées dans cette Section pour pouvoir aboutir à une bonne combinaison entre eux dans le cadre d'un pompage énergétique efficace.

Les NES considérés ici ont le même ordre de ratio de masse et leur masse totale est toujours à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ par rapport à la masse primaire. On cherche aussi à obtenir des critères analytiques pour la conception optimale de ces NES.

4.2.1 Modèle considéré

On considère toujours le même oscillateur linéaire primaire mais couplé non linéairement dans ce cas avec N attachements dont le comportement dynamique est décrit par l'ensemble des $N + 1$ équations :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + \sum_{p=1}^N m_p \ddot{y}_p = 0, \\ m_p \ddot{y}_p + c_p (\dot{y}_p - \dot{x}) + k_p (y_p - x)^3 = 0, \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.34)$$

En introduisant les variables intrinsèques et les notations suivantes :

$$\frac{m_p}{M} = \epsilon_p; \quad \frac{c_p}{m_p} = \lambda_p; \quad \frac{k_p}{m_p} = \Omega_p \omega_0^2; \quad \sum_{p=1}^N \epsilon_p = \epsilon \frac{C}{M} = \epsilon \lambda_0; \quad \frac{K}{M} = \omega_0^2, \quad (4.35)$$

où $\epsilon_p \ll 1$ représente l'ordre petit des grandeurs des masses des attachements non linéaires.

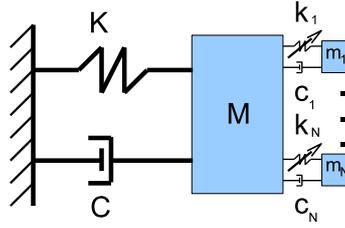


FIGURE 4.7 – Oscillateur couplé avec plusieurs NES

Le système d'équations (4.34) se réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \epsilon\lambda\dot{x} + \omega_0^2x + \sum_{p=1}^N \epsilon_p\ddot{y}_p = 0, \\ \epsilon_p\ddot{y}_p + \epsilon_p\lambda_p(\dot{y}_p - \dot{x}) + \epsilon_p\Omega_p\omega_0^2(y_p - x)^3 = 0, \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.36)$$

Un changement de variables

$$v_0 = x + \sum_{p=1}^N \epsilon_p y_p, \quad v_p = x - y_p, \quad \forall p = 1..N, \quad (4.37)$$

nous donne un nouveau système d'équations :

$$\begin{cases} \ddot{v}_0 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda_0\left(\dot{v}_0 + \epsilon\sum_{p=1}^N\alpha_p\dot{v}_p\right) + \frac{\omega_0^2}{1+\epsilon}\left(v_0 + \epsilon\sum_{p=1}^N\alpha_pv_p\right) = 0, \\ -\frac{1}{1+\epsilon}\left(\ddot{v}_0 + \epsilon\sum_{p=1}^N\alpha_p\ddot{v}_p\right) + \ddot{v}_p + \lambda_p\dot{v}_p + \Omega_p\omega_0^2v_p^3 = 0, \end{cases} \quad (4.38)$$

où $\alpha_p = \frac{\epsilon_p}{\epsilon} \in \mathcal{O}(\epsilon^0)$; $\forall p = 1..N$ ce qui signifie que les masses ajoutées sont de même ordre.

En effectuant un développement asymptotique pour ne conserver que les termes jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^1)$, le système (4.38) est réduit sous la forme :

$$\begin{cases} (\ddot{v}_0 + \omega_0^2v_0) + \epsilon\left[\lambda_0\dot{v}_0 - \omega_0^2\left(v_0 - \sum_{p=1}^N\alpha_pv_p\right)\right] = 0, \\ (\ddot{v}_p + \omega_0^2v_p) + \lambda_p\dot{v}_p + \omega_0^2(\Omega_pv_p^3 + v_0 - v_p) \\ + \epsilon\left[\lambda_0\dot{v}_0 + \sum_{q=1}^N\alpha_q(\lambda_q\dot{v}_q + \Omega_q\omega_0^2v_q^3)\right] = 0, \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.39)$$

Les variables complexes sont introduites suivant les relations :

$$\varphi_p e^{i\omega_0 t} = \frac{\dot{v}_p}{\omega_0} + iv_p, \quad \forall p = 0..N. \quad (4.40)$$

A partir de ce changement de variable complexe on réalise une analyse en échelles multiples selon les développements suivants :

$$\begin{aligned} \varphi_p &= \varphi_{p0} + \epsilon \varphi_{p1} + \epsilon^2 \varphi_{p2} + \dots, \quad \forall p = 0..N, \\ \tau_k &= \epsilon^k t, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \dots \end{aligned} \quad (4.41)$$

En utilisant les développements (4.41) combinés avec les changements (4.40), l'approximation à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ (temps "rapide") est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_0} = 0 \Rightarrow \varphi_{00} = \varphi_{00}(\tau_1, \tau_2, \dots), \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{p0}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \xi_p (\varphi_{p0} + \overline{\varphi_{p0}} e^{-2i\omega_0 t}) + \frac{i}{2} (\varphi_{p0} - \overline{\varphi_{p0}} e^{-2i\omega_0 t}) \\ - \frac{i}{2} (\varphi_{00} - \overline{\varphi_{00}} e^{-2i\omega_0 t}) + \Omega_p \left[-\frac{i}{2} (\varphi_{p0} - \overline{\varphi_{p0}} e^{-2i\omega_0 t}) \right]^3 e^{2i\omega_0 t} = 0, \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.42)$$

On cherche maintenant à annuler les termes séculaires en $e^{i\omega_0 t}$ dans les différentes approximations en échelles multiples :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{p0}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \xi_p \varphi_{p0} + \frac{i}{2} (\varphi_{p0} - \varphi_{00}) - \frac{3i}{8} \Omega_p |\varphi_{p0}|^2 \varphi_{p0} = 0, \quad \forall p = 1..N. \quad (4.43)$$

Selon la première équation du système (4.11), la variable φ_{00} est indépendante à l'échelle de temps τ_0 tandis que les dernières équations de ce système décrivent l'évolution des variables φ_{p0} correspondant à l'échelle de temps τ_0 . Il est possible de prouver que les variables φ_{p0} évoluent vers les valeurs d'équilibre selon :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \xi_p \phi_{p0} + \frac{i}{2} \phi_{p0} - \frac{3i}{8} \Omega_p |\phi_{p0}|^2 \phi_{p0} &= \frac{i}{2} \varphi_{00}(\tau_1, \dots), \quad \forall p = 1..N, \\ \phi_{p0}(\tau_1, \dots) &= \lim_{\tau_0 \rightarrow \infty} \varphi_{p0}(\tau_0, \tau_1, \dots). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Les termes séculaires de l'approximation d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^1)$ donnent la relation :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{01}}{\partial \tau_0} + \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 \varphi_{00} + \frac{i}{2} \left(\varphi_{00} - \sum_{p=1}^N \alpha_p \varphi_{p0} \right) = 0. \quad (4.45)$$

Comme déjà vu dans la Section 4.1, φ_{00} et ϕ_{p0} sont indépendants à l'échelle de temps τ_0 et à la limite $\tau_0 \rightarrow \infty$, les termes séculaires correspondant à l'échelle de temps τ_0 seront absents :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{\partial \varphi_{00}}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \xi_0 \varphi_{00} + \frac{i}{2} \left(\varphi_{00} - \sum_{p=1}^N \alpha_p \phi_{p0} \right) = 0. \quad (4.46)$$

Une décomposition des variables complexes sous forme de module et d'argument est introduite pour étudier l'évolution des comportements invariants :

$$\begin{cases} \varphi_{00} = R_0(\tau_1) e^{i\delta_0(\tau_1)}, \\ \phi_{p0} = R_p(\tau_1) e^{i\delta_p(\tau_1)}, \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.47)$$

L'équation en variables complexes (4.46) se ramène à deux équations réelles :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \frac{\partial R_0}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{2} \xi_0 R_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p R_p \sin(\delta_0 - \delta_p), \\ \frac{R_0}{\omega_0} \frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} = -\frac{i}{2} R_0 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p R_p \cos(\delta_0 - \delta_p), \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.48)$$

De même pour l'équation (4.44) :

$$\begin{cases} R_0 \sin(\delta_0 - \delta_p) = -\xi_p R_p, \\ R_0 \cos(\delta_0 - \delta_p) = R_p \left(1 - \frac{3}{4} \Omega_p R_p^2 \right), \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.49)$$

On peut ainsi tirer des équations précédentes le système sans la présence des arguments :

$$\begin{cases} \frac{R_0}{\omega_0} \frac{\partial R_0}{\partial \tau_1} = -\frac{1}{2} \xi_0 R_0^2 - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^N \alpha_p \xi_p R_p^2, \\ R_0^2 = R_p^2 \left[\xi_p^2 + \left(1 - \frac{3}{4} \Omega_p R_p^2 \right)^2 \right], \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.50)$$

C'est maintenant que l'on va introduire des variables énergétique $E_p = R_p^2, \forall p = 0..N$ pour simplifier les équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_0}{\partial \tau_1} = -\lambda_0 E_0 - \sum_{p=1}^N \alpha_p \lambda_p E_p, \\ E_0 = E_p \left[\xi_p^2 + \left(1 - \frac{3}{4} \Omega_p E_p \right)^2 \right], \quad \forall p = 1..N. \end{cases} \quad (4.51)$$

La nature de ces variables est déjà expliquée dans la Section 4.1, ce sont les énergies par unité de masse stockées dans les modes d'ensemble (E_0) et internes ($E_p, \forall p = 1..N$) correspondant à chaque attachement non linéaire mais à la limite $\tau_0 \rightarrow \infty$. Les choix des conditions propres initiales ainsi que la continuation de E_0 pendant les simulations sont déjà discutés dans la Section précédente. La question cruciale ici est d'étudier l'influence réciproque entre des NES et avec la masse primaire.

Tout d'abord, la première équation du système (4.51) indique le "principe d'additivité" dans le comportement dynamique non-conservatif des NES en parallèle : le taux de dissipation à l'échelle de temps lent du mode d'ensemble est équivalente à la somme linéaire de sa propre énergie et de celles des modes internes pré-multipliées par les coefficients d'amortissement respectifs. Les valeurs positives des énergies des modes internes résultant des dernières relations entre les modes décrites en (4.51) supposent la diminution monotone de celle du mode d'ensemble.

D'autre part, les relations en système (4.51) démontrent que l'énergie de chaque mode interne ne dépend que de celle du mode d'ensemble mais pas d'autres modes internes. Cette remarque met en évidence "l'activité séparée" des NES et qu'il n'existe aucun transfert énergétique entre eux à la première approximation en développement aux échelles multiples.

4.2.2 Pyramide d'activation des NES

Le “principe d’additivité” et “l’activité séparée” du comportement des NES nous permettent de conclure que l’efficacité de chaque NES en pompage énergétique est décidée seulement par les caractéristiques de lui-même et de l’oscillateur linéaire principal. Un tel problème d’efficacité pour un seul NES est déjà étudié dans la Section 4.1 en introduisant de nouvelles variables adimensionnelles $Z_{0p} = \Omega_p E_0$ et $Z_p = \Omega_p E_p$ correspondant à chaque $p^{ième}$ NES. On va avoir des relations cubiques pilotées par les coefficients d’amortissement :

$$Z_{0p} = Z_p \left[\xi_p^2 + \left(1 - \frac{3}{4} Z_p \right)^2 \right], \quad \forall p = 1..N. \quad (4.52)$$

Études de l’évolution de ces relations cubiques nous donnent le critère analytique du pompage énergétique efficace associé à chaque NES :

$$\Omega_p E_0 = Z_{0p} > Z_{0p}^+ = \frac{8}{81} \left[4 - (1 - 3\xi_p^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi_p^2} \right) \right], \quad \forall p = 1..N. \quad (4.53)$$

Ainsi, l’activation de chaque NES dépend du niveau d’énergie initiale dans la masse primaire que l’on appelle énergie d’activation qui est déterminée en fonction de la raideur non linéaire et du coefficient d’amortissement du NES :

$$E_p^{act} = \frac{8}{81} \frac{m_p \omega_0^2}{k_p} \left[4 - (1 - 3\xi_p^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi_p^2} \right) \right]. \quad (4.54)$$

À propos du problème de design, en se basant sur ce critère crucial on peut estimer la raideur non linéaire optimale d’un NES correspondant à une valeur initiale de l’énergie E_0^{init} stockée dans la masse primaire à atténuer :

$$k_p > k_p^{opt} = \Omega_p^{opt} \omega_0^2 = \frac{8}{81} \frac{m_p \omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi_p^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi_p^2} \right) \right]. \quad (4.55)$$

Comme le montrent ces résultats, l’addition d’un attachement non linéaire a pour effet d’augmenter le taux de dissipation de l’énergie du mode d’ensemble (principe d’additivité) mais elle n’influence pas l’activité ou bien l’efficacité d’autres NES (activité séparée). De plus, l’efficacité de chaque NES n’est activée que quand l’énergie initiale dépasse une telle ou telle valeur d’activation E_0^{act} déterminée en équation (4.54). En conséquence, l’utilisation de certains NES avec les mêmes caractéristiques (raideur non linéaire et amortissement) n’apporte pas beaucoup d’avantage, le taux de dissipation peut être augmenté mais l’intervalle d’énergie du pompage efficace reste toujours le même. En revanche, combinaison de plusieurs NES avec différentes caractéristiques dynamiques pourrait mettre à profit les niveaux d’énergie d’activation différents de ces NES pour élargir l’intervalle d’efficacité du pompage énergétique.

Supposons que chaque NES dispose d’une énergie d’activation correspondant E_{act}^p et ces niveaux d’énergie sont assez séparés suivant l’ordre : $E_1^{act} < E_2^{act} < \dots < E_N^{act}$.

Le nombre des NES en activité dépend de l’énergie initiale dans le système maître comme représenté par la Pyramide d’activation des NES sur la Fig. 4.8, chaque fois que cette énergie initiale dépasse une limite d’énergie d’activation plus élevée, on va avoir plus de NES en activité et le pompage énergétique atteint est plus efficace.

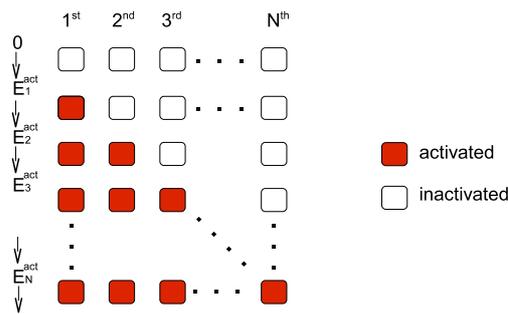


FIGURE 4.8 – Pyramide d'activation des NES

4.3 Robustesse du critère de design

Dans cette section, le critère de design proposé ci-dessous est appliqué dans la conception des NES dans le but d'atténuer le mieux possible l'oscillation libre d'un système maître linéaire dont les conditions initiales sont données par une vitesse initiale et un déplacement nul de la structure primaire.

Dans un premier temps, un seul NES est ajouté au système linéaire pour atténuer une énergie initiale afin de vérifier la robustesse du critère de design et pour mieux comprendre le comportement du NES ainsi que l'influence des paramètres pendant le processus de pompage.

Ensuite, un autre NES conçu pour un autre niveau d'énergie initiale plus bas sera ajouté au système considéré pour élargir la plage d'efficacité du pompage énergétique.

Pour chaque cas de design, des simulations numériques sont réalisées d'une part sur le modèle initial (4.1) et les résultats sont comparés avec les tendances de chutes énergétiques obtenues analytiquement. La robustesse du critère optimal est vérifiée par comparaison avec le régime libre de l'oscillateur amorti seul. L'influence de l'amortissement du NES et de l'énergie initiale est étudiée.

4.3.1 Exemple de design d'un NES

Choix des paramètres du système

Oscillateur principal : $M = 1 \text{ kg}$; $\xi_0 = 1 \text{ \epsilon}$; $K = 4\pi^2 \text{ Kg/m}$ correspondant à une fréquence propre $f_0 = 1 \text{ Hz}$,

NES : ratio de masse $\epsilon = 1\%$, amortissement du NES ξ fixé au choix à la valeur $\xi = 0.2$ ou $\xi = 0.05$,

Conditions initiales : $x_0 = 0 \text{ m}$; $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s} \Rightarrow E_0^{init} = \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} + x_0^2 = 2.5e - 4 \text{ m}^2$.

La raideur non linéaire optimale donnée en appliquant le critère (4.28) est :

$$k_{min} = \frac{8}{81} \frac{m\omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] = \begin{cases} 336 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.2, \\ 309 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.05. \end{cases} \quad (4.56)$$

Le choix considéré est le suivant : $\begin{cases} k = 400 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.2, \\ k = 325 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \xi = 0.05. \end{cases}$

Les simulations numériques sont réalisées pour différentes conditions initiales en vitesse : $\dot{x}_0 = 0.1$, $\dot{x}_0 = 0.09$ et $\dot{x}_0 = 0.2$, le déplacement initial étant fixé à zéro. Pour chaque jeu de paramètres, les énergies modales $E_0 = \frac{(\dot{x} + \epsilon y)^2}{\omega_0^2} + (x + \epsilon y)^2$ et $E_1 = \frac{(\dot{x} - y)^2}{\omega_0^2} + (x - y)^2$ sont dessinées en comparaison avec les prédictions analytiques comme l'illustre la Fig. 4.9.

La nette différence entre les figures 4.9.1 et 4.9.2 met en évidence un seuil d'énergie d'activation du pompage énergétique : pour une énergie initiale inférieure à ce seuil ($\dot{x}_0 = 0.09$) la courbe énergétique du système est presque identique à celle du système sans NES. Quand l'énergie dépasse le seuil d'activation ($\dot{x}_0 = 0.1$), le NES est activé et la chute d'énergie est beaucoup plus rapide que dans le cas libre.

La comparaison des chutes d'énergie pour les valeurs $\xi = 0.2$ (a) et $\xi = 0.05$ (b) met en exergue l'importante influence de l'amortissement sur l'efficacité du pompage énergétique : ce pompage est plus efficace sur l'aspect chute d'énergie quand l'amortissement est plus petit ($\xi = 0.05$) et en revanche, il est plus efficace en temps (plus rapide) quand l'amortissement est plus élevé ($\xi = 0.2$).

Le comportement de chute énergétique pour une énergie initiale importante ($\dot{x}_0 = 0.2$) présenté sur la Figure 4.9.3 souligne aussi l'influence de l'énergie initiale : le temps de chute est plus long dans ce cas mais le taux de chute est plus efficace quand l'énergie est proche du seuil d'énergie d'activation.

D'autres informations concernant la relation énergétique entre des modes d'ensemble et interne sont aussi obtenues pour ces simulations (voir Fig. 4.10). Après le régime transitoire, l'évolution de l'énergie est attirée par la relation cubique pilotée par ξ . Il est important de noter l'existence d'un phénomène de relaxation en temps qui empêche l'apparition instantanée d'une bifurcation de la solution associée à un saut de la branche supérieure à la branche inférieure prédite par la solution analytique. Cette relaxation induit des erreurs de prédiction après le saut de Z_1 .

4.3.2 Exemple de design d'un couple de NESs en parallèle

Pour ce deuxième exemple, on utilise toujours le même oscillateur linéaire que dans l'exemple précédent mais avec 2 NES différents à concevoir pour capturer deux niveaux d'énergie d'oscillation libre donnés par les vitesses initiales respectives : $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$ et $\dot{x}_0 = 0.05 \text{ m/s}$.

Dans ce cas, les coefficients d'amortissement spécifique des NES sont fixés à la valeur $\xi_1 = \xi_2 = 0.2$, la même valeur utilisée dans le premier exemple afin de réutiliser les résultats numériques calculés précédemment comme références de comparaison.

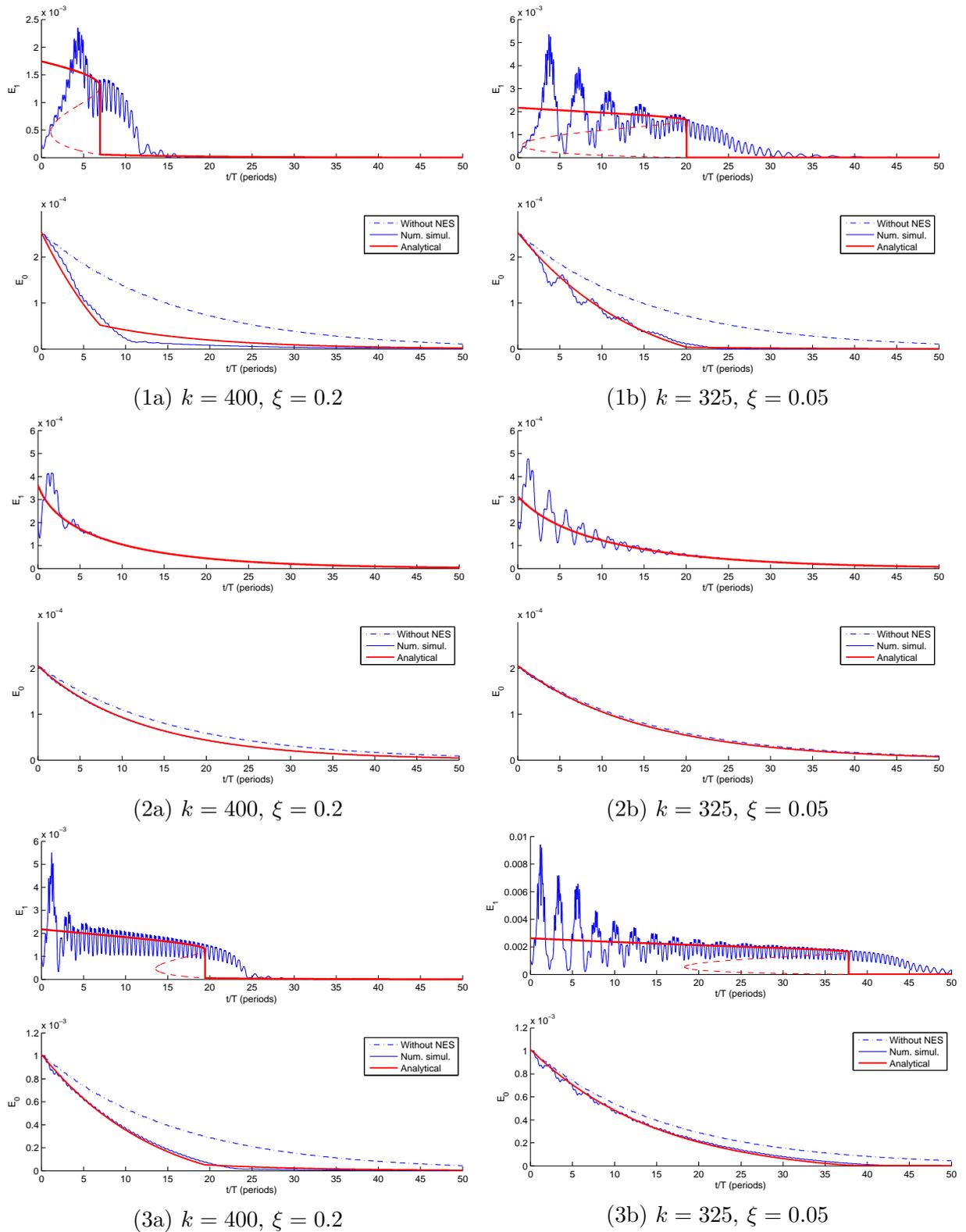


FIGURE 4.9 – Chutes énergétiques comparées entre résultats numériques (lignes minces bleu) et prédictions analytiques (lignes épaisses rouges) pour différentes conditions initiales : $x_0 = 0$; (1) $\dot{x}_0 = 0.1$; (2) $\dot{x}_0 = 0.09$ et (3) $\dot{x}_0 = 0.2$.

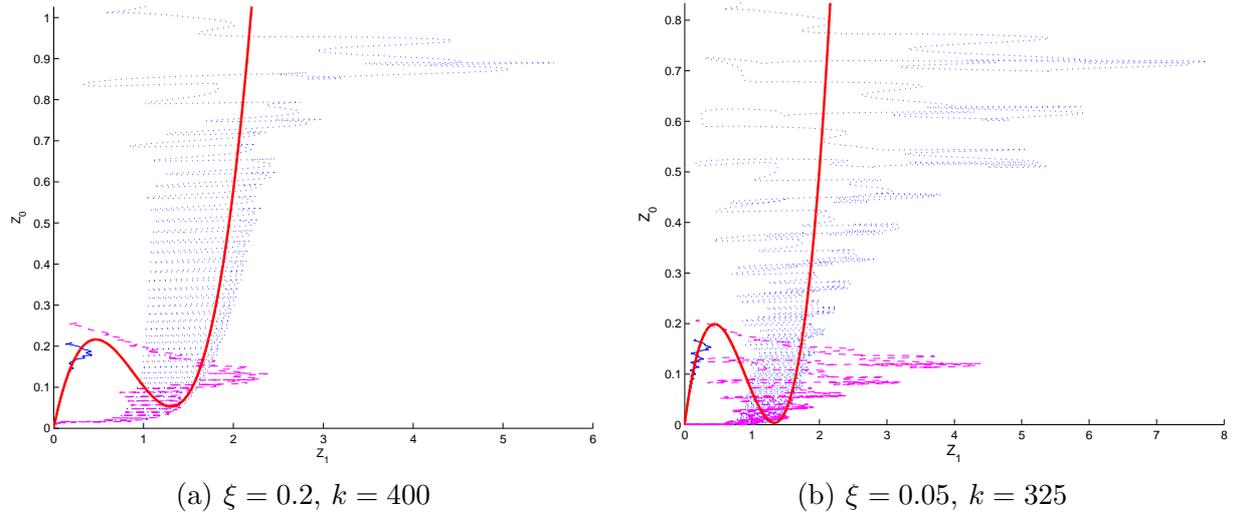


FIGURE 4.10 – Simulation de la relation énergétique $Z_0 \leftrightarrow Z_1$ pour différentes valeurs de vitesse initiale : $\dot{x}_0 = 0.09$ (ligne solide mince), $\dot{x}_0 = 0.1$ (ligne à tiret), $\dot{x}_0 = 0.2$ (ligne pointillés) en comparaison avec les prédictions analytiques (ligne solide épaisse).

Les énergies initiales d'activation à considérer sont :

$$E_0^{init} = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + x_0^2 = \begin{cases} = 2.533e - 4 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s,} \\ = 0.633e - 4 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.05 \text{ m/s.} \end{cases} \quad (4.57)$$

En appliquant le critère (4.28), les raideurs non linéaires optimales pour le pompage énergétique sont déterminées :

$$k_{min} = \frac{8}{81} \frac{m_1 \omega_0^2}{E_0^{init}} \left[4 - (1 - 3\xi^2) \left(3 - \sqrt{1 - 3\xi^2} \right) \right] \begin{cases} = 336 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s,} \\ = 1344 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.05 \text{ m/s.} \end{cases} \quad (4.58)$$

Les choix considérés sont les suivants : $\begin{cases} k = 400 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s,} \\ k = 1500 \text{ Kg/m}^3 & \text{pour } \dot{x}_0 = 0.05 \text{ m/s.} \end{cases}$

Pour illustrer l'efficacité du pompage énergétique réalisé dans le système dynamique considéré, les simulations numériques directes sont réalisées pour différentes conditions initiales en vitesse : $\dot{v}_0 = 0.2 \text{ m/s}$, $\dot{v}_0 = 0.1 \text{ m/s}$, $\dot{v}_0 = 0.09 \text{ m/s}$, $\dot{v}_0 = 0.05 \text{ m/s}$ et $\dot{v}_0 = 0.045 \text{ m/s}$ (Figures 4.11, 4.12 4.13) pour 2 types des systèmes de NES : (a) oscillateur linéaire couplé avec un seul NES dont $k = 400 \text{ Kg/m}^3$; (b) oscillateur linéaire couplé avec un couple des NES et (c) oscillateur linéaire couplé avec un seul NES dont $k = 400 \text{ Kg/m}^3$.

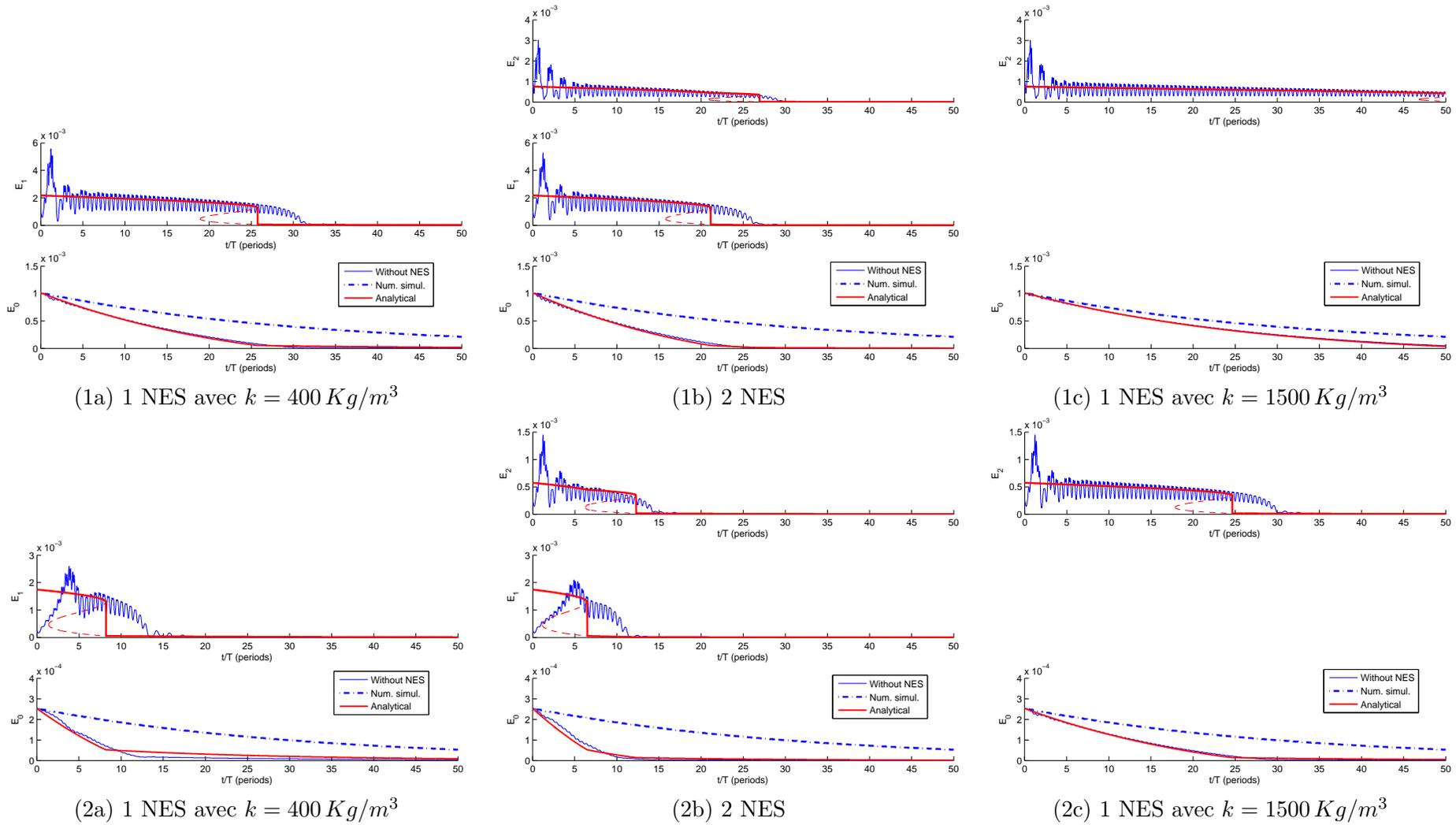


FIGURE 4.11 – Chutes énergétiques comparées entre résultats numériques (lignes minces bleu) et prédictions analytiques (lignes épaisses rouges) pour différentes conditions initiales : $x_0 = 0$; (1) $\dot{x}_0 = 0.2 \text{ m/s}$; (2) $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$

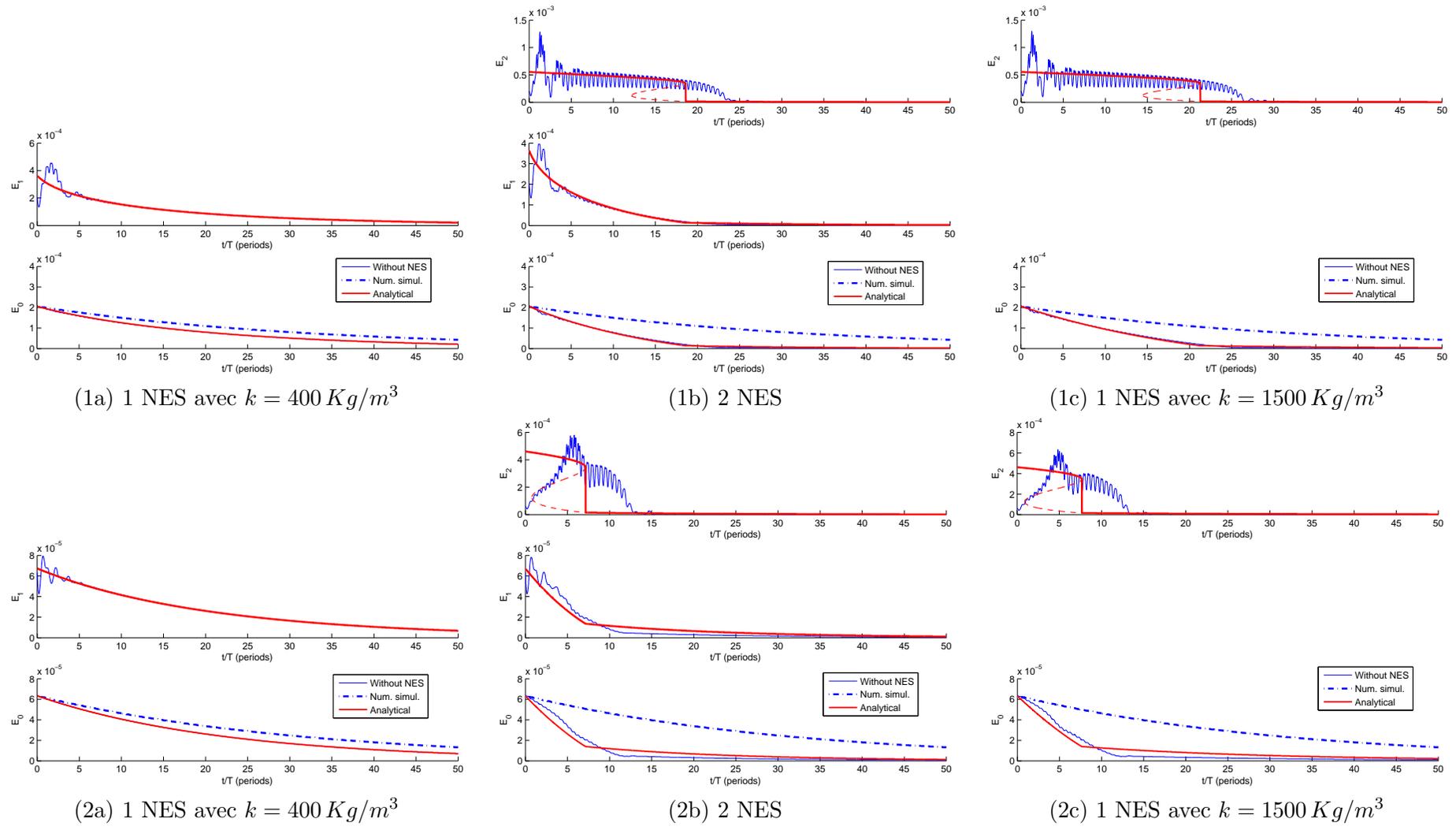


FIGURE 4.12 – Chutes énergétiques comparées entre résultats numériques (lignes minces bleu) et prédictions analytiques (lignes épaisses rouges) pour différentes conditions initiales : $x_0 = 0$; (1) $\dot{x}_0 = 0.09 \text{ m/s}$; (2) $\dot{x}_0 = 0.05 \text{ m/s}$

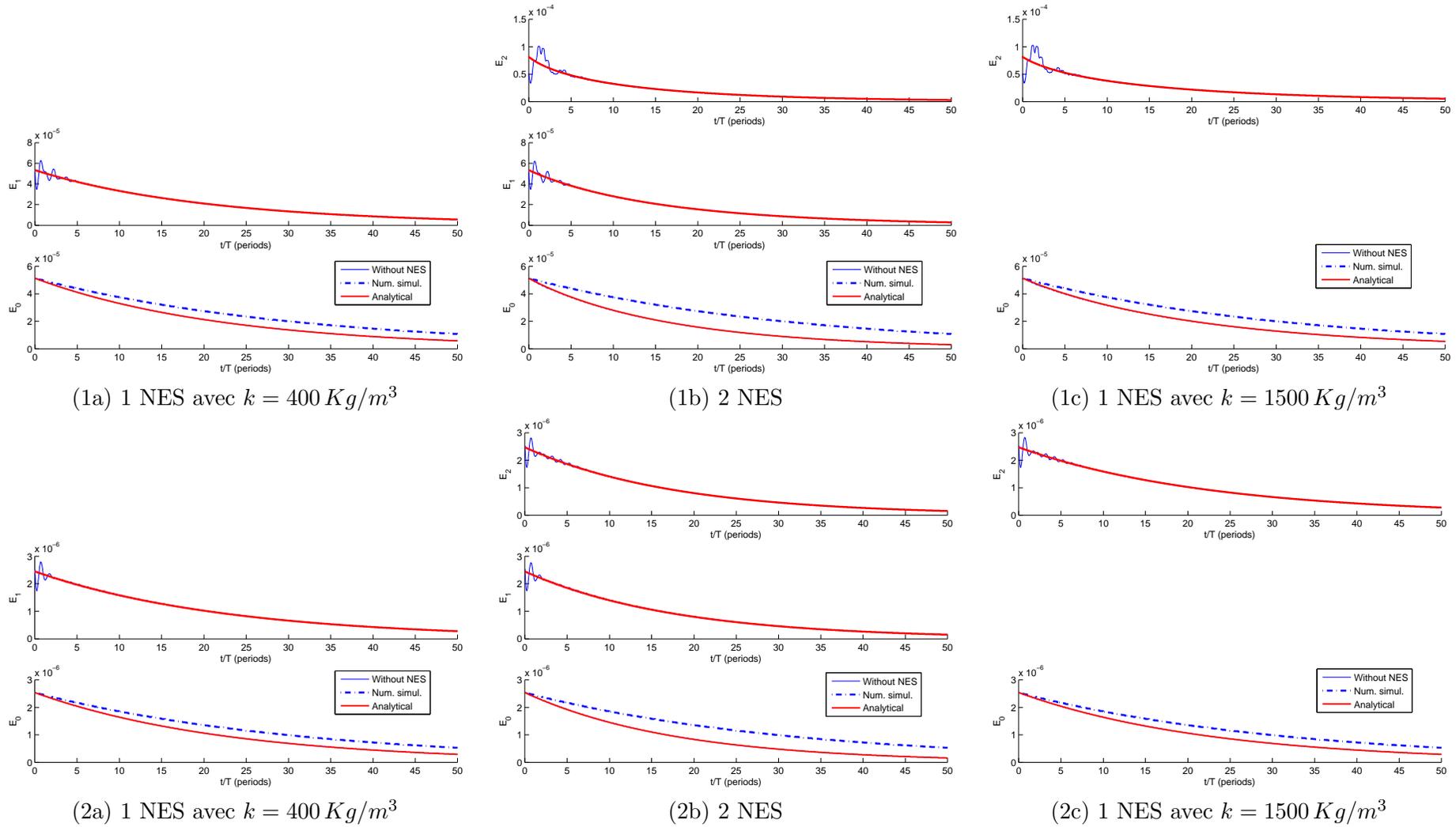


FIGURE 4.13 – Chutes énergétiques comparées entre résultats numériques (lignes minces bleu) et prédictions analytiques (lignes épaisses rouges) pour différentes conditions initiales : $x_0 = 0$; (1) $\dot{x}_0 = 0.045 \text{ m/s}$; (2) $\dot{x}_0 = 0.01 \text{ m/s}$

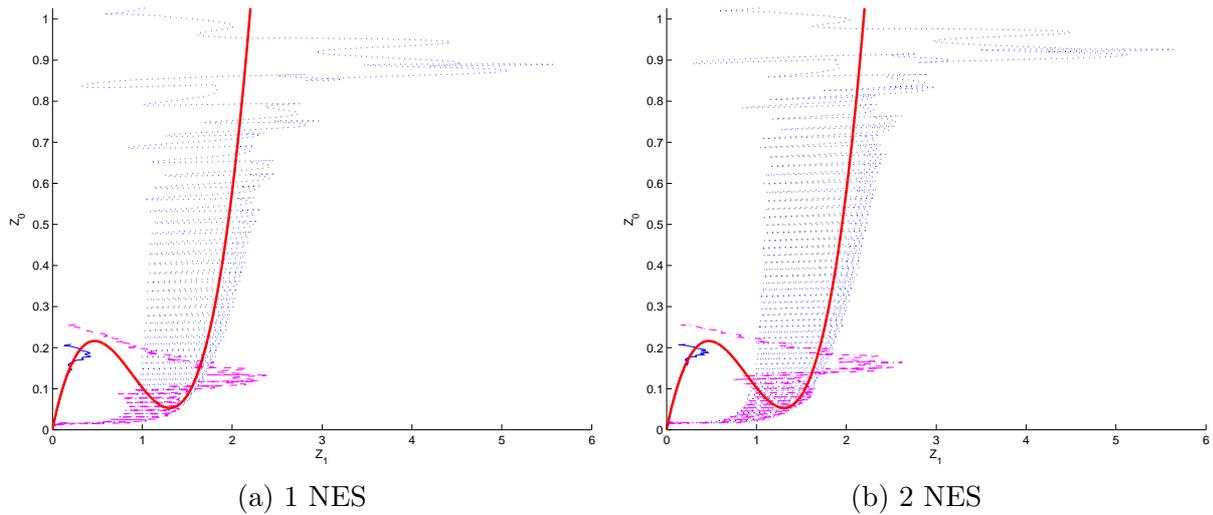


FIGURE 4.14 – Relation énergétique entre $Z_0 \leftrightarrow Z_1$ avec différentes valeurs des vitesses initiales : de haut en bas $\dot{x}_0 = 0.2 \text{ m/s}$, $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$, $\dot{x}_0 = 0.09 \text{ m/s}$ et $\dot{x}_0 = 0.045 \text{ m/s}$ en comparaison avec les prédictions analytiques (linge solide épaisse)

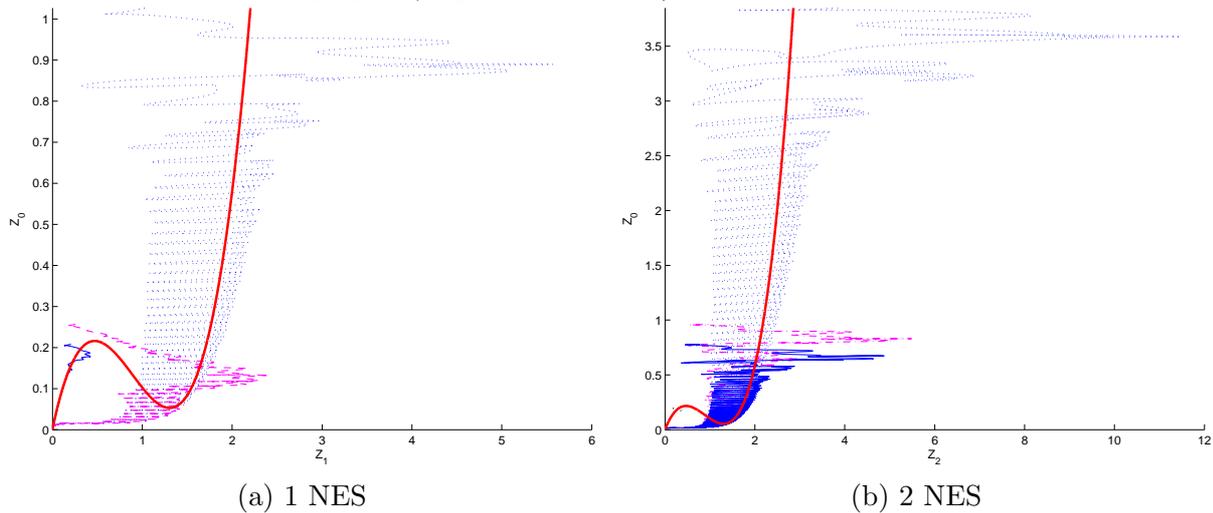


FIGURE 4.15 – Relation énergétique entre $Z_0 \leftrightarrow Z_2$ avec différentes valeurs des vitesses initiales : de haut en bas $\dot{x}_0 = 0.2 \text{ m/s}$, $\dot{x}_0 = 0.1 \text{ m/s}$, $\dot{x}_0 = 0.09 \text{ m/s}$ et $\dot{x}_0 = 0.045 \text{ m/s}$ en comparaison avec les prédictions analytiques (linge solide épaisse)

Ces résultats réaffirment la propriété de l'énergie d'activation des NES. Quelque soit la présence ou pas du deuxième NES, l'efficacité du premier NES reste toujours la même, il n'est activé que quand l'énergie dans la masse primaire dépasse le seuil d'activation correspondant à ce NES qui est décidé par la raideur non linéaire et le coefficient d'amortissement lui-même. Cette remarque met en exergue le principe d'activité séparée des NES en parallèle.

Évidemment, c'est tout à fait normal que pour tous les niveaux d'énergie libre, le pompage énergétique réalisé par le couple des NES est toujours plus efficace qu'un NES. Mais cet avantage se manifeste beaucoup plus nettement quand l'énergie initiale est inférieure au niveau d'énergie d'activation du premier NES ($\dot{x}_0 = 0.09 \text{ m/s}$ ou 0.05 m/s), ce dernier devient inefficace mais l'autre NES est encore en activité. Cette différence entre deux système explique la raison pour laquelle il vaudrait mieux utiliser en parallèle de différents NES disposant les niveaux d'activation séparés.

D'autres informations concernant la relation énergétique entre des modes d'ensemble et internes sont aussi obtenues pour ces simulations (Fig. 4.14 et 4.15). On retrouve encore un fois les relations cubiques avec la présence des bifurcations point-selles ainsi que le saut d'énergie de la branche supérieure à celle inférieure qui est suivi par une relaxation déjà expliquée dans le premier exemple.

La comparaison des comportements invariants entre Z_0 et Z_1 dans les deux cas, système avec un seul NES et avec un couple de NES montre une ressemblance entre eux. Ce qui met en évidence le phénomène de l'activité séparée des NES malgré la présence des autres.

4.4 Conclusions et Remarques

Une méthode analytique est proposée pour le design optimal de la raideur d'un absorbeur essentiellement non linéaire dont le rôle est d'atténuer les vibrations d'un système maître. Le dimensionnement et les simulations numériques attestent de la robustesse du critère proposé et mettent en exergue l'influence cruciale du choix de l'amortissement du NES (à optimiser) et de l'énergie initiale en régime libre.

Les analyses asymptotiques confirmées par les résultats numériques ont révélé l'existence des énergies d'activation des NES pour le processus de pompage énergétique irréversible qui sont pilotées par les caractéristiques intrinsèques de chaque NES. Les critères de taux de chute et la durée de pompage sont aussi introduits pour examiner leur efficacité.

Les investigations du cas de plusieurs NES en parallèle ont prouvé le "principe d'additivité" et en même temps "l'activité séparée" de ces NES ceux qui recommandent de combiner certains NES avec différentes caractéristiques dynamiques pour obtenir le pompage efficace sur une large plage d'énergie initiale.

Il faut aussi noter que pendant les études des solutions multiples, la stabilité et les bassins d'attraction de chaque branche de solution en fonction des conditions initiales entre les deux bifurcation point-selles ne sont pas encore abordés et les critères proposés sont fait sur le point de vue de design pratique.

Il reste aussi à étudier le phénomène de pompage énergétique pendant le régime stationnaire, pour notamment pouvoir comparer le NES ainsi construit avec les "tuned mass damper" classiques beaucoup utilisés dans l'industrie à ce jour.

Chapitre 5

Pompage énergétique en régime stationnaire

Le phénomène de pompage énergétique est étudié dans le régime stationnaire, à savoir à long terme sous excitation périodique. Les études analytiques permettent de prédire différents comportements dynamique du système avec l'étude de stabilité et de trouver les points de fonctionnement les plus dangereux autour de la résonance (1 :1) ce qui est vraiment instructif pour le problème de design. De nombreuses simulations numériques avec des absorbeurs passifs de vibrations linéaires classiques peuvent être réalisées dans but de comparer les performances respectives.

Sommaire

5.1	Études analytiques	102
5.1.1	Description et simplification du Modèle considéré	102
5.1.2	Réponse fortement stationnaire - Points fixes	104
5.1.3	Analyse de stabilité linéaire	108
5.1.4	Approche échelles multiples	110
5.2	Vérifications numériques	115
5.3	Vérification expérimentale	126
5.4	Optimisation de la raideur non linéaire	127
5.5	Conclusions et Remarques	132

5.1 Études analytiques

Dans le chapitre précédent, le comportement du système couplé avec des NES en régime libre est étudié en donnant une formule analytique des raideurs non linéaires optimales et du seuil d'activation des NES. Mais pour le problème de design des absorbeurs d'énergie, le comportement du système en régime forcé est indispensable et vaut le coût d'être bien étudié.

En fait, de récentes recherches [13, 14] ont introduit une procédure asymptotique appropriée pour l'inclusion explicite de l'amortissement dans le cadre des NNMs. L'objectif ici est d'explorer la réponse du système composé d'une masse primaire assez importante et d'un faible NES sous un forçage externe harmonique au voisinage de résonance la plus dangereuse (1 :1). Mais dans ces recherches, le terme d'amortissement du maître est souvent négligé pour simplifier les équations et on considère le système sous la force harmonique de fréquence propre du maître. Pourtant, des exemples numériques ont montré qu'à partir d'une certaine énergie de la force harmonique, la structure oscille beaucoup plus aux fréquences en dessous qu'à la fréquence propre et il existe pour quelques jeux de paramètres des zones de fréquences dont la solution n'est pas du tout périodique ou quasi-périodique mais plutôt chaotique.

Dans ce chapitre, on essaie d'ajouter l'amortissement du maître pour avoir une solution plus proche du système réel et d'étudier l'influence de l'énergie et aussi de la fréquence de la force sur le comportement dynamique non linéaire.

5.1.1 Description et simplification du Modèle considéré

On considère toujours le système académique soumis à une force harmonique de l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ qui est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx + m\ddot{y} = \epsilon F \cos(\omega t), \\ m\ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

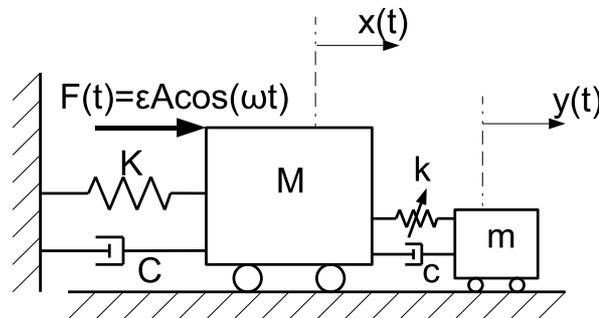


FIGURE 5.1 – *Système ajouté NES*

Dans le but de simplifier le système, de nouveaux paramètres sont introduits :

$$\frac{m}{M} = \epsilon; \quad \frac{K}{M} = \omega_0^2; \quad \frac{C}{M} = \epsilon\lambda_0; \quad \frac{c}{m} = \lambda; \quad \frac{k}{m} = \Omega\omega_0^2; \quad \frac{F}{M} = A\omega_0^2, \quad (5.2)$$

où $\epsilon \ll 1$ représente le ratio de masse de l'attachement non linéaire qui doit être très petit.

$$\begin{cases} \ddot{x} + \epsilon\lambda_0\dot{x} + \omega_0^2x + \epsilon\dot{y} = \epsilon A\omega_0^2 \cos(\omega t), \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon\lambda(\dot{y} - \dot{x}) + \epsilon\Omega\omega_0^2(y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

En introduisant un changement de variables

$$v_0 = x + \epsilon y, \quad v_1 = x - y, \quad (5.4)$$

on a un nouveau système d'équation :

$$\begin{cases} \ddot{v}_0 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\lambda_0(\dot{v}_0 + \epsilon\dot{v}_1) + \frac{\omega_0^2}{1+\epsilon}(v_0 + \epsilon v_1) = \epsilon A\omega_0^2 \cos(\omega t), \\ \frac{1}{1+\epsilon}\ddot{v}_1 + \lambda\dot{v}_1 + \Omega\omega_0^2v_1^3 - \frac{1}{1+\epsilon}\ddot{v}_0 = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

On considère ici la procédure de pompage énergétique non linéaire au voisinage de la résonance (1 :1), il est donc convenable d'introduire des variables complexes d'après les relations suivantes :

$$\varphi_0 e^{i\omega t} = \frac{\dot{v}_0}{\omega_0} + i v_0; \quad \varphi_1 e^{i\omega t} = \frac{\dot{v}_1}{\omega_0} + i v_1. \quad (5.6)$$

Les relations entre les variables complexes et réelles sont obtenues facilement :

$$\begin{cases} v_p = -\frac{i}{2}(\varphi_p e^{i\omega t} - \overline{\varphi_p} e^{-i\omega t}), \\ \dot{v}_p = \frac{\omega_0^2}{2}(\varphi_p e^{i\omega t} + \overline{\varphi_p} e^{-i\omega t}), \\ \ddot{v}_p + \omega_0^2 v_p = \omega_0 \dot{\varphi}_p e^{i\omega t} + i\omega_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right) \varphi_p e^{i\omega t}. \end{cases} \quad (5.7)$$

En tenant compte de ce changement de variables, le système (5.5) est récrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi}_0 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)\varphi_0 + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\left[\frac{1}{2}\xi_0(\varphi_0 + \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega t}) + \frac{i}{2}(\varphi_0 - \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega t})\right] \\ + \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\left[\frac{1}{2}\epsilon\xi_0(\varphi_1 + \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega t}) - \frac{i}{2}(\varphi_1 - \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega t})\right] = \epsilon\frac{A}{2}(1 + e^{-2i\omega t}), \\ \frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi}_1 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)\varphi_1 + \frac{i}{2}(\varphi_1 - \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega t}) + \frac{i}{8}(1+\epsilon)\Omega(\varphi_1 e^{i\omega t} - \overline{\varphi_1}e^{-i\omega t})^3 e^{-i\omega t} \\ + \frac{1}{2}(1+\epsilon)\xi(\varphi_1 + \overline{\varphi_1}e^{-2i\omega t}) = \frac{1}{\omega_0}\dot{\varphi}_0 + i\left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1\right)\varphi_0 + \frac{i}{2}(\varphi_0 - \overline{\varphi_0}e^{-2i\omega t}), \end{cases} \quad (5.8)$$

où $\xi_0 = \frac{\lambda_0}{\omega_0}$ et $\xi = \frac{\lambda}{\omega_0}$.

Le problème étudié est de trouver la réponse en régime forcé du système décrit en équations (5.8) dans le voisinage de la résonance (1 :1). Dans ces conditions, il est possible de suggérer que l'évolution des variables de modulation φ_0 et φ_1 peut être considéré comme très lente en comparaison avec l'oscillation rapide de la force externe. Par conséquent, la première approximation pour les variables de modulation est obtenue en prenant la moyenne des équations (5.8)

correspondant à l'échelle du temps rapide. Le système moyenné est présenté ainsi :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \varphi'_0 + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\xi_0 \varphi_0 + i \varphi_0) + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\epsilon \xi_0 \varphi_1 - i \varphi_1) = \epsilon \frac{A}{2}, \\ \frac{1}{\omega_0} \varphi'_1 + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \varphi_1 + \frac{i}{2} \varphi_1 + \frac{1}{2} (1+\epsilon) \xi \varphi_1 - \frac{3i}{8} (1+\epsilon) \Omega |\varphi_1|^2 \varphi_1 \\ = \frac{1}{\omega_0} \varphi'_0 + i \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right) \varphi_0 + \frac{i}{2} \varphi_0. \end{cases} \quad (5.9)$$

La dérivée par rapport au temps "lent" est notée par l'apostrophe pour distinguer avec celle formelle de temps rapide du problème original.

La prise en compte du voisinage de résonance (1 :1) :

$$\frac{\omega}{\omega_0} - 1 = \frac{\epsilon \sigma}{2}, \quad (5.10)$$

nous permet de réécrire le système sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \varphi'_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\epsilon \xi_0 - i) \varphi_1 = \epsilon \frac{A}{2}, \\ \frac{1}{\omega_0} \varphi'_1 + \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon) \xi + i \left(1 + \epsilon \sigma - \frac{3}{4} (1+\epsilon) \Omega |\varphi_1|^2 \right) \right] \varphi_1 = \frac{1}{\omega_0} \varphi'_0 + \frac{i}{2} (1+\epsilon \sigma) \varphi_0. \end{cases} \quad (5.11)$$

5.1.2 Réponse fortement stationnaire - Points fixes

Les points fixes des Équations (5.9) correspondent au régime stationnaire des Équations (5.1). Les conditions pour ces points fixes sont écrites comme :

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \varphi_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\epsilon \xi_0 - i) \varphi_1 = \epsilon \frac{A}{2}, \\ \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon) \xi + i \left(1 + \epsilon \sigma - \frac{3}{4} (1+\epsilon) \Omega |\varphi_1|^2 \right) \right] \varphi_1 = \frac{i}{2} (1+\epsilon \sigma) \varphi_0, \end{cases} \quad (5.12)$$

où φ_0 et φ_1 dénotent les valeurs constantes des fonctions de modulation aux points fixes.

En remplaçant l'expression de φ_0 déterminée par la second équation dans la première équation du système (5.11), on va obtenir une équation de φ_1 en fonction de A :

$$\begin{aligned} & \left\{ [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \left[1 - \frac{3}{4} \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon\sigma} \Omega |\varphi_1|^2 - i \frac{1+\epsilon}{1+\epsilon\sigma} \xi \right] + (\epsilon \xi_0 - i) \right\} \varphi_1 = (1+\epsilon) A, \\ \Rightarrow & \left\{ \left[\xi_0 + \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} \xi - \frac{\xi_0}{1+\epsilon\sigma} \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right] + i \left[\sigma - \frac{\xi \xi_0}{1+\epsilon\sigma} - \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right] \right\} \varphi_1 = A, \\ \Rightarrow & \left\{ \left[\xi_0 + \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} \xi - \frac{\xi_0}{1+\epsilon\sigma} \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right]^2 + \left[\sigma - \frac{\xi \xi_0}{1+\epsilon\sigma} - \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right]^2 \right\} |\varphi_1|^2 = A^2. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Une simplification est d'utiliser des variables adimensionnelles $Z_1 = \Omega |\varphi_1|^2$ et $Z_A = \Omega A^2$:

$$\Rightarrow \left\{ \left[\xi_0 + \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} \xi - \frac{3}{4} \frac{\xi_0}{1+\epsilon\sigma} Z_1 \right]^2 + \left[\sigma - \frac{\xi \xi_0}{1+\epsilon\sigma} - \frac{3}{4} \frac{1+\sigma+\epsilon\sigma}{1+\epsilon\sigma} Z_1 \right]^2 \right\} Z_1 = Z_A. \quad (5.14)$$

Cette équation peut être réécrite sous la forme polynomiale :

$$\begin{aligned} & \frac{9}{16} Z_1^3 \left[\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2 \right] - \frac{3}{2} Z_1^2 (1 + \epsilon\sigma) \left[\xi_0^2 + \sigma (1 + \sigma + \epsilon\sigma) \right] \\ & + Z_1 \left\{ \xi^2 \left[\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2 \right] + (1 + \epsilon\sigma)^2 (\xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi_0\xi) \right\} = (1 + \epsilon\sigma)^2 Z_A. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Revenons à la deuxième équation du système (5.12), en prenant le module multipliant avec le ration de fréquence Ω , on obtient aussi une autre équation des variables adimensionnelles :

$$Z_1 \left[(1 + \epsilon)^2 \xi^2 + \left(1 + \epsilon\sigma - \frac{3}{4}(1 + \epsilon)Z_1 \right)^2 \right] = (1 + \epsilon\sigma)^2 Z_0, \quad (5.16)$$

où $Z_0 = \Omega|\varphi_0|^2$ est aussi une variable adimensionnelle qui représente le niveau d'énergie dans le mode centre.

En se référant au changement des variables (5.4) et (5.6), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}}{\omega_0} + ix &= \frac{\varphi_0 + \epsilon\varphi_1}{1 + \epsilon} = \frac{1}{1 + \epsilon\sigma} \left\{ \xi + i \left[1 + \epsilon\sigma - \frac{3}{4}\Omega|\varphi_1|^2 \right] \right\} \varphi_1, \\ \Rightarrow \Omega \left| \frac{\dot{x}}{\omega_0} + ix \right|^2 &= \frac{1}{(1 + \epsilon\sigma)^2} \left\{ \xi^2 + \left[1 + \epsilon\sigma - \frac{3}{4}Z_1 \right]^2 \right\} Z_1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

La division de deux équations (5.17) et (5.14) nous donne le facteur d'amplification d'énergie :

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \mu &= \frac{\left| \frac{\dot{x}}{\omega_0} + ix \right|^2}{A^2} \\ &= \frac{\xi^2 + \left[1 + \epsilon\sigma - \frac{3}{4}Z_1 \right]^2}{\left[\xi_0(1 + \epsilon\sigma) + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)\xi - \frac{3}{4}\xi_0 Z_1 \right]^2 + \left[\sigma(1 + \epsilon\sigma) - \xi\xi_0 - \frac{3}{4}(1 + \sigma + \epsilon\sigma)Z_1 \right]^2}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

On peut remarquer ici que comme dans le cas du régime libre, la raideur non linéaire et l'énergie de la force harmonique extérieure sont combinées en une seule variable adimensionnelle. La réponse énergétique du système représentée par le facteur d'amplification d'énergie ne dépends que de ce paramètre adimensionné ce qui est très favorable pour le problème de design dans lequel on doit donner des critères analytiques ou quasi-analytiques sur des paramètres à concevoir.

Il est facile de montrer que pour toute valeur positive de $Z_A = \Omega A^2$, l'équation (5.15) rends au moins une solution positive pour la valeur $Z_1 = \Omega|\varphi_1|^2$. Le nombre des racines de cette équation dépends des paramètres intrinsèques du système (ξ_0 et ξ) et aussi de la force harmonique (amplitude A et fréquence à travers le paramètre σ). La fonction de membre de gauche de l'équation (5.15) peut être monotone ou avoir maximum et minimum. Dans le premier cas, la valeur de Z_A n'a aucun effet sur le nombre de solution. Mais dans l'autre cas, le changement va provoquer des bifurcations entre de multiples solutions.

Afin de distinguer entre ces différents cas, on peut vérifier quand la dérivée du membre de gauche de l'équation (5.15) va avoir des racines réelles :

$$\begin{aligned} & \frac{27}{16} \left[\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2 \right] Z_1^2 - 3(1 + \epsilon\sigma) \left[\xi_0^2 + \sigma (1 + \sigma + \epsilon\sigma) \right] Z_1 \\ & + \left\{ \xi^2 \left[\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2 \right] + (1 + \epsilon\sigma)^2 (\xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi_0\xi) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Si on prends les valeurs nulles pour ξ_0 et σ , i.e il n'y a pas d'amortissement du système primaire et on considère la force de fréquence propre du système, cette dérivée devient :

$$\frac{27}{16}Z_1^2 + \xi^2 = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation ne dispose pas de racine réelle, c'est-à-qu'il y a toujours une seule réponse possible pour ce cas ce qui n'a aucun intérêt pour le pompage énergétique non linéaire qui consiste toujours en bifurcation de solutions multiples.

Dans le cas général où les amortissements du système primaire et du NES sont fixés, en fonction de la relation entre la fréquence de la force harmonique et la fréquence propre $\sigma = \frac{1}{2\epsilon} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - 1 \right)$ le discriminant de l'équation (5.19) peut être positif ou négatif. Dans le cas positif, cette équation va disposer de deux racines correspondant aux deux extremas dans le comportement $Z_A \leftrightarrow Z_1$. Pour chaque pulsation réduite $\frac{\omega}{\omega_0}$ il existe une marge possible $[Z_A^-, Z_A^+]$ dans laquelle toute valeur de Z_A peut provoquer 3 solutions possibles pour la réponse dynamique dont la stabilité sera étudiée dans la Section suivante.

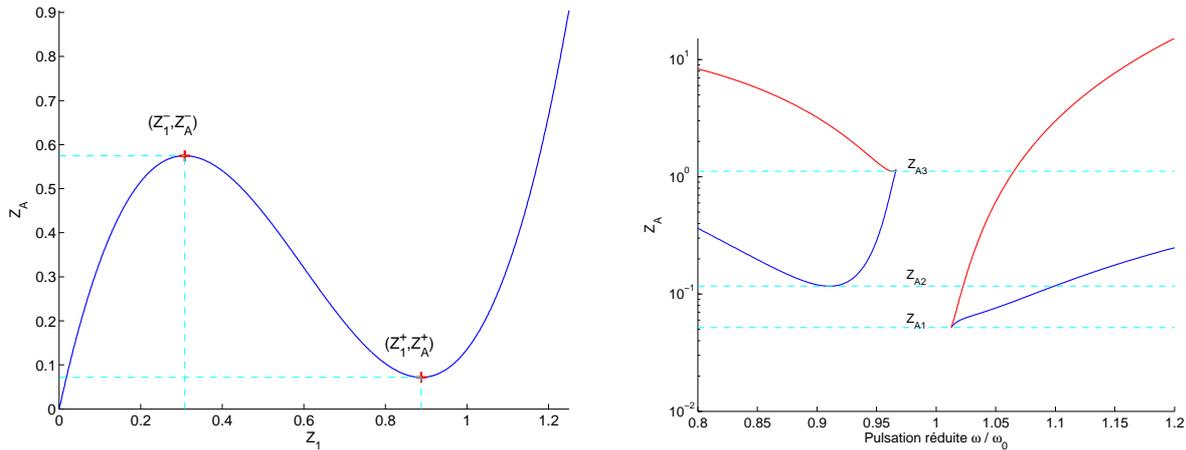


FIGURE 5.2 – Relation énergétique $Z_1 \leftrightarrow Z_A$ ($\frac{\omega}{\omega_0} = 0.95$) et Zones de solutions multiples pour $\xi_0 = 0.02$, $\xi = 0.05$

Sur la Figure 5.2, on présente un exemple de la relation $Z_A \leftrightarrow Z_1$ correspondant à la fréquence réduite $\frac{\omega}{\omega_0} = 0.95$ et la prédiction des zones limites de solutions multiples en fonction des pulsations réduites pour un couple d'amortissement spécifique $\xi_0 = 0.02$ et $\xi = 0.05$. Il existe deux zones séparées sur les deux côtés de la fréquence propre tandis que pour les pulsations réduites proches de la résonance 1 : 1, il n'y a qu'une seule solution pour n'importe quelle valeur de Z_A .

Une classification possible pour le nombre des réponses possibles du système considéré en fonction de la valeur de Z_A :

- $Z_A < Z_{A1}$: il y a une seule solution dynamique pour toute pulsation réduite,
- $Z_{A1} < Z_A < Z_{A2}$: il existe un intervalle à droite de la fréquence propre où il y a 3 branches possibles de réponses dynamiques,
- $Z_{A2} < Z_A$: il existe deux intervalles séparés à gauche et à droite de la fréquence propre,

- $Z_A \gg 1$: il y a une seule solution dynamique pour toute fréquence de la force extérieure.

Solutions asymptotiques extrêmes

On considère maintenant des cas extrêmes quand l'énergie de la force ou la raideur non linéaire est très élevée ou très petite. Du coup Z_A l'est aussi et on va avoir des comportements asymptotiques particuliers qui montre des caractéristiques physiques intéressantes.

D'abord, on détermine le facteur d'amplification d'énergie dans le cas du système libre (sans attachement non linéaire) pour avoir une référence de comparaison. L'équation qui décrit la dynamique de la structure primaire est :

$$\ddot{x} + \epsilon \lambda_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \epsilon A \omega_0^2 \cos(\omega t). \quad (5.21)$$

La réponse du système libre en régime forcé est déterminé facilement par des méthodes classiques, en supposant :

$$x = x_0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (5.22)$$

où :

$$x_0 = \frac{\epsilon A \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \epsilon^2 \xi_0^2 \omega^2}} = \frac{A}{\sqrt{(\sigma + \frac{1}{4}\epsilon\sigma^2)^2 + \xi_0^2 (1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma)^2}}. \quad (5.23)$$

Et maintenant on écrit l'expression de l'énergie moyenne (ici on annule seulement l'énergie harmonique et garde la valeur moyenne) stockée dans la structure :

$$E = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) x_0^2 = \frac{A^2 (1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma + \frac{1}{8}\epsilon^2\sigma^2)}{(\sigma + \frac{1}{4}\epsilon\sigma^2)^2 + \xi_0^2 (1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma)^2}, \quad (5.24)$$

et le facteur d'amplification d'énergie :

$$\epsilon^2 \mu_{free} = \frac{E}{A^2} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma + \frac{1}{8}\epsilon^2\sigma^2}{(\sigma + \frac{1}{4}\epsilon\sigma^2)^2 + \xi_0^2 (1 + \frac{1}{2}\epsilon\sigma)^2}. \quad (5.25)$$

Au premier lieu, lorsque Z_A tends vers 0, le facteur d'amplification d'énergie μ va tendre vers la valeur limite :

$$\epsilon^2 \mu_0 = \frac{\xi^2 + (1 + \epsilon\sigma)^2}{\xi^2 (\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2) + (1 + \epsilon\sigma)^2 (\xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi\xi_0)}. \quad (5.26)$$

Dans ce cas où Z_1 se situe au-dessous des limites de bifurcation pour le comportement $Z_1 \leftrightarrow Z_0$ et $Z_1 \leftrightarrow Z_A$, il existe une seule solution stable pour toute fréquence de la force dans le voisinage de la fréquence propre.

Dans l'autre direction, quand Z_A dépasse une telle ou telle valeur pour que la solution de Z_1 est toujours au-dessus des limites de bifurcation, la réponse du système va être stable à une unique solution pour toutes les fréquences de la force extérieure. Et si Z_A tends vers ∞ qui produits Z_1 tends aussi vers ∞ et le facteur d'énergie μ va tendre vers la limite :

$$\epsilon^2 \mu_\infty = \frac{1}{\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2}. \quad (5.27)$$

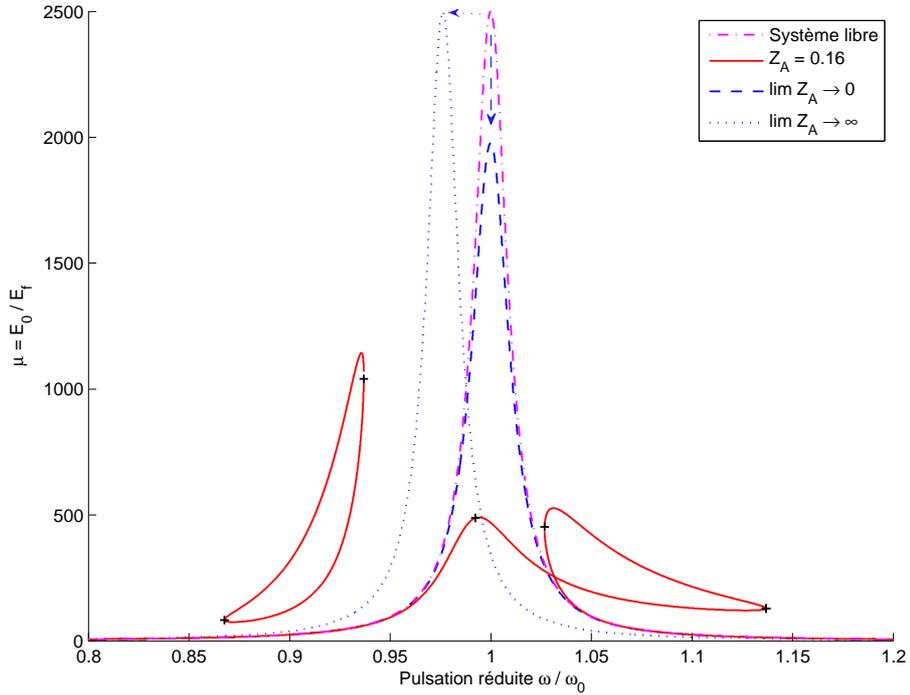


FIGURE 5.3 – Solutions analytiques pour différentes valeurs de Z_A : $Z_A \rightarrow 0$ (tiret), $Z_A \rightarrow \infty$ (pointillé) et $Z_A = 0.16$ (tiret pointillé) en comparaison avec le système linéaire pour $\xi_0 = 0.02$, $\xi = 0.05$ et $\epsilon = 5\%$

Comme l'a montré la Figure 5.3, qualitativement quand Z_A tends vers infini, le réponse stationnaire du système se réagit comme il y a un décalage du spectre système libre vers la gauche et la fréquence central va déplacer de ω_0 jusqu'à $\left(1 - \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}\right)\omega_0$. Physiquement ce phénomène est tout à fait raisonnable car le fait que Z_A tends vers infini a le même effet que la raideur non linéaire tends aussi vers infini ou bien comme on a ajouté une petite masse fixée dans la masse primaire dont la fréquence propre du système va diminuer jusqu'à :

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\omega_0 \approx \left(1 - \frac{\epsilon}{2(1+\epsilon)}\right)\omega_0.$$

D'autre part, quand Z_A tends vers 0, le système réagit comme on a augmenté son amortissement ; le pic va diminuer un peu mais sa position ne bouge pas. Ce phénomène explique le comportement asymptotique quand l'énergie de la force est très petite similaire au cas où la raideur non linéaire est nulle et où il n'y a que l'amortissement du NES qui a de l'influence sur le système.

5.1.3 Analyse de stabilité linéaire

L'approche standard pour l'exploration de la réponse quasi-périodique de l'absorbeur non linéaire invoque l'instabilité du régime stationnaire. Pour effectuer ces investigation, on linéarise les équations de modulations (5.11) dans le voisinage de la réponse stationnaire et étudie la stabilité

des points fixes en introduisant des petites perturbations :

$$\begin{cases} \varphi_0 = \Phi_0 + \delta_0, & |\delta_0| \ll |\Phi_0|, \\ \varphi_1 = \Phi_1 + \delta_1, & |\delta_1| \ll |\Phi_1|. \end{cases} \quad (5.28)$$

Le système d'équations linéarisées est écrit comme :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \delta_0' + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \delta_0 + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{1+\epsilon} (\epsilon\xi_0 - i) \delta_1 = 0, \\ \frac{1}{\omega_0} \delta_1' + \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon)\xi + \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon} \xi_0 + i \left(1+\epsilon\sigma - \frac{3}{2}(1+\epsilon)\Omega|\Phi_1|^2 \right) \right] \delta_1 - \\ - \frac{3}{8}(1+\epsilon)\Omega\Phi_1^2 \bar{\delta}_1 = \frac{1}{\omega_0} \delta_0' + i(1+\epsilon\sigma) \delta_0. \end{cases} \quad (5.29)$$

En effectuant quelques transformations algébriques simples, on obtient une équation différentielle de δ_1 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_0^2} \delta_1'' + \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon\xi + \epsilon\xi_0) + i \left(1+2\epsilon\sigma - \frac{3}{2}(1+\epsilon)Z_1 \right) \right] \delta_1' + \\ & + \frac{\epsilon}{4} \left[\xi\xi_0 - \sigma(1+\epsilon\sigma) + \frac{3}{2}(1+\sigma+\epsilon\sigma)Z_1 + i \left(\xi + \xi_0 + \sigma(1+\epsilon\xi + \epsilon\xi_0) - \frac{3}{2}\xi_0 Z_1 \right) \right] \delta_1 - \\ & - \frac{3}{8}(1+\epsilon)\Omega\Phi_1^2 \bar{\delta}_1' - \frac{3}{16}\epsilon [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \Omega\Phi_1^2 \bar{\delta}_1 = 0. \end{aligned} \quad (5.30)$$

On réécrit l'équation (5.30) en utilisant des opérateurs par rapport à δ_1 :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left[(1+\epsilon\xi + \epsilon\xi_0) + i \left(1+2\epsilon\sigma - \frac{3}{2}(1+\epsilon)Z_1 \right) \right] \frac{d}{d\tau} + \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon}{4} \left[\xi\xi_0 - \sigma(1+\epsilon\sigma) + \frac{3}{2}(1+\sigma+\epsilon\sigma)\Omega|\Phi_1|^2 + i \left(\xi + \xi_0 + \sigma(1+\epsilon\xi + \epsilon\xi_0) - \frac{3}{2}\xi_0 Z_1 \right) \right] \right\} \delta_1 \\ & = \frac{3}{8}\Omega\Phi_1^2 \left\{ (1+\epsilon)\frac{d}{d\tau} + \frac{1}{2} [\xi_0 + i(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \right\} \bar{\delta}_1, \end{aligned} \quad (5.31)$$

où $\tau = \omega_0 t$.

En combinant ces deux opérateurs avec l'opérateur de conjugaison complexe, on peut extraire une équation pure de δ_1 sans la partie conjuguée :

$$\frac{d^4 \delta_1}{d\tau^4} + (\xi + \epsilon\xi + \epsilon\xi_0) \frac{d^3 \delta_1}{d\tau^3} + \frac{1}{4} f_1(Z_1) \frac{d^2 \delta_1}{d\tau^2} + \frac{\epsilon}{4} f_2(Z_1) \frac{d\delta_1}{d\tau} + \frac{\epsilon^2}{16} f_3(Z_1) = 0, \quad (5.32)$$

où $f_1(Z_1)$, $f_2(Z_1)$ et $f_3(Z_1)$ sont des coefficients déterminés en fonction de Z_1 :

$$f_1(Z_1) = \frac{27}{16}(1+\epsilon)^2 Z_1^2 - 3(1+\epsilon\sigma + \epsilon^2\sigma)Z_1 + \quad (5.33)$$

$$+ (\xi + \epsilon\xi + \epsilon\xi_0)^2 + (\epsilon\sigma)^2 + (1+\epsilon\sigma)^2 + 2\epsilon\xi\xi_0,$$

$$f_2(Z_1) = \frac{27}{16}(1+\epsilon)\xi_0 Z_1^2 - 3(1+\epsilon\sigma)\xi_0 Z_1 + \quad (5.34)$$

$$+ \xi_0(\epsilon\sigma)^2 + \xi(1+\epsilon\sigma)^2 + \xi\epsilon\sigma^2 + \xi\xi_0(\xi + \epsilon\xi + \epsilon\xi_0),$$

$$f_3(Z_1) = \frac{27}{16} [\xi_0^2 + (1+\sigma+\epsilon\sigma)^2] Z_1^2 - 3(1+\epsilon\sigma) [\xi_0^2 + \sigma(1+\sigma+\epsilon\sigma)] \quad (5.35)$$

$$+ \xi^2 [\xi_0^2 + (1+\sigma+\epsilon\sigma)^2] + (1+\epsilon\sigma)^2 (\xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi\xi_0).$$

On cherche à trouver des solutions de (5.32) suivant la forme :

$$\delta_1 = r_1 e^{\nu\tau} = r_1 e^{\nu\omega_0 t}. \quad (5.36)$$

En remplaçant l'équation (5.36) dans (5.32), on peut obtenir les conditions pour l'exposant ν :

$$\nu^4 + (\xi + \epsilon\xi + \epsilon\xi_0)\nu^3 + \frac{1}{4}f_1(Z_1)\nu^2 + \frac{\epsilon}{4}f_2(Z_1)\nu + \frac{\epsilon^2}{16}f_3(Z_1) = 0, \quad (5.37)$$

avec f_1 , f_2 et f_3 déterminés comme précédemment.

L'équation (5.37) d'ordre 4 est résoluble par des méthodes standards. Correspondant à chaque solution Z_1 à fréquence ω , la racine ν de cette équation décide la stabilité et la force d'attraction de cette solution. Une classification complète des possibilités est représentée comme suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\nu) > 0 & : \text{ croissance exponentielle (instabilité)} \\ \mathcal{R}(\nu) < 0 & : \mathcal{I}(\nu) = 0 - \text{ attraction sur-amortie (stabilité)} \\ & \quad \mathcal{I}(\nu) \neq 0 - \text{ attraction avec oscillations (stabilité)} \end{aligned}$$

Et dans le cas de stabilité, c'est la valeur maximale de $\mathcal{R}(\nu)$ qui représente la force d'attraction de la solution. Plus $\mathcal{R}(\nu)$ tends vers $-\infty$, plus la solution est stable.

À première vue, on peut observer que l'expression de $f_3(Z_1)$ dans l'équation (5.35) est la même de celle de la dérivée de la relation ($Z_1 \leftrightarrow Z_A$) dans l'équation (5.19). Évidemment pour les solutions Z_1 vérifiant $f_3(Z_1) < 0$, i.e pour les solutions intermédiaires entre 3 solutions possibles, l'équation (5.37) dispose au moins une racine réelle positive qui ramène à l'instabilité de la solution considérée. En conséquence, on est sûr que les solutions intermédiaires dans les cas des solutions multiples si elles existent sont toujours instables et que la réponse du système sera attirée par les deux autres branches de solutions (inférieure ou supérieure).

Sur la Figure 5.4, on présente un exemple d'un système NES académique sur laquelle on trace la prédiction analytique avec l'histoire des zones d'instabilité des solutions analytiques possibles. Cette figure illustre bien la remarque ci-dessus : les solutions intermédiaires dans les cas de solutions multiples sont toujours instables. Mais en dehors de ces deux zones de solutions intermédiaires (voir Fig.), il y a une autre zone d'instabilité dont un segment autour de la fréquence propre ω_0 où il y a une seule solution. C'est à dire que dans ce petit segment autour de la fréquence propre, la réponse du système non linéaire n'est jamais stable.

Dans le prochain paragraphe, l'approche échelles multiples sera utilisée pour mieux étudier les zones d'instabilités et surtout le segment autour de la fréquence propre où l'on n'a pas encore une explication raisonnable.

5.1.4 Approche échelles multiples

Le traitement dans la Section précédente ne tient pas en compte de la caractéristique asymptotique de modulation décrite dans le système (5.11) de la structure dont le ratio de masse ϵ est suffisamment petit. Dans ce cas, ce système peut être analysé par l'approche asymptotique développée par Oleg V. Gendelman [13, 14] en respectant ce petit paramètre.

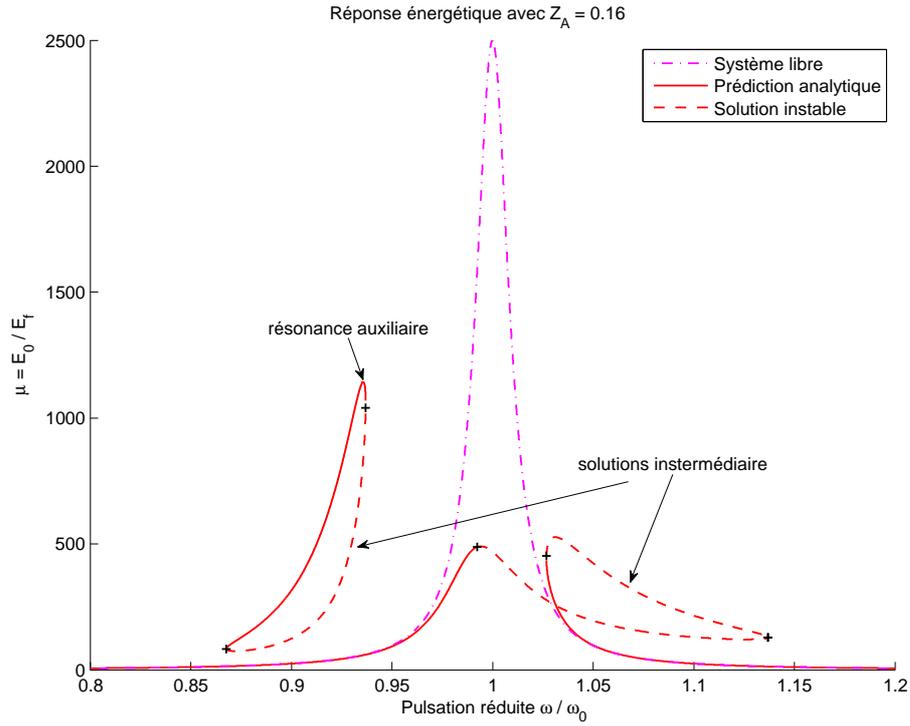


FIGURE 5.4 – Prédiction analytique avec des zones d'instabilité de solutions pour $Z_A = 0.16$, $\xi_0 = 0.02$, $\xi = 0.05$ et $\epsilon = 5\%$

Les échelles multiples sont introduites avec l'aide des substitutions suivantes :

$$\begin{cases} \varphi_0 &= \varphi_0(\tau_0, \tau_1, \dots), \\ \varphi_1 &= \varphi_1(\tau_0, \tau_1, \dots), \\ \tau_k &= \epsilon^k \omega_0 t, \quad k = 0, 1, \dots \\ \frac{1}{\omega_0} \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \dots \end{cases} \quad (5.38)$$

Substitution de (5.38) dans (5.11) nous donne l'approximation à l'échelle $\mathcal{O}(\epsilon^0)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_0} = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \varphi_0(\tau_1, \dots), \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \left[\xi + i \left(1 - \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right) \right] \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_0} + \frac{i}{2} \varphi_0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Les points fixes $\Phi_1(\tau_1)$ par rapport au temps rapide τ_0 est estimé comme :

$$\left[\xi + i \left(1 - \frac{3}{4} \Omega |\Phi_1(\tau_1)|^2 \right) \right] \Phi_1(\tau_1) = i \varphi_0(\tau_1). \quad (5.40)$$

Et si l'on multiplie le module de l'équation (5.40) avec le ratio de raideur non linéaire Ω , on va retrouver les variables adimensionnelles Z_0 et Z_1 comme :

$$Z_0(\tau_1) = \left[\xi^2 + \left(1 - \frac{3}{4} Z_1(\tau_1) \right)^2 \right] Z_1(\tau_1). \quad (5.41)$$

Encore une fois ici, on a toujours une relation cubique entre l'énergie dans les modes central et différentiel. Cette relation ne dépend que de l'amortissement du NES mais pas de la fréquence de la force représentée par σ . C'est en fonction de la valeur de ξ que cette relation dispose ou pas des maximum et minimum. On étudie les solutions de la dérivation de l'équation (5.41) :

$$\Delta_1(Z_1) = \frac{27}{16}Z_1^2 - 3Z_1 + (1 + \xi^2) = 0, \quad (5.42)$$

et par conséquent :

$$Z_{1,2} = \frac{4}{9} \left(2 \pm \sqrt{1 - 3\xi^2} \right). \quad (5.43)$$

C'est-à-dire pour $\xi < \sqrt{1/3}$, il existe un couple de points selles de bifurcation pour le comportement entre Z_0 et Z_1 avec 3 branches différentes : inférieure, intermédiaire et supérieure. Alors à l'échelle de temps τ_0 , le point de phase sera attiré par une de ces trois branches dont le taux d'attraction de chaque branche peut être étudié par linéarisation de l'équation (5.39) :

$$\varphi_1 = \Phi_1(\tau_1) + \delta_1(\tau_0), \quad |\delta_1| \ll |\Phi_1|. \quad (5.44)$$

Et l'équation linéarisée est écrite comme :

$$\frac{\partial \delta_1}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \left[\xi + \left(1 - \frac{3}{2} \Omega |\Phi_1|^2 \right) \right] \delta_1 - \frac{3}{8} \Omega \Phi_1^2 \bar{\delta}_1 = 0, \quad (5.45)$$

ou sous la forme d'opérateur :

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \frac{1}{2} \left[\xi + \left(1 - \frac{3}{2} \Omega |\Phi_1|^2 \right) \right] \right\} \delta_1 = \frac{3}{8} \Omega \Phi_1^2 \bar{\delta}_1. \quad (5.46)$$

À partir de ces opérateurs différentiels et conjugués, on peut extraire une équation différentielle de δ_1 :

$$\frac{\partial^2 \delta_1}{\partial \tau_0^2} + \xi \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau_0} + \frac{1}{4} \left(\frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + 1 + \xi^2 \right) = 0. \quad (5.47)$$

Cette équation admet la solution pour δ_1 :

$$\delta_1 = r_1 e^{\nu_1 \tau_0} = r_1 e^{\frac{1}{2} \left(-\xi \pm i \sqrt{\frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + 1} \right) \tau_0}. \quad (5.48)$$

Le point fixe $\Phi_1(\tau_1)$ est stable seulement quand la perturbation tends vers 0 lorsque τ_0 tends vers 0. Ainsi on en déduit une contrainte pour la solution Z_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\nu_1) &\leq 0, \\ \Leftrightarrow \frac{27}{16} Z_1^2 - 3Z_1 + 1 + \xi^2 &= \Delta_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Cette contrainte pour Z_1 démontre bien que les points fixes $\Phi_1(\tau_1)$ situés sur la branche intermédiaire (si $\xi < \sqrt{1/3}$) correspondant à la valeur négative du discriminant sont toujours instables (croissance exponentielle). Dans ces conditions, le saut de comportement énergétique se réalise si cela arrive seulement entre la branche inférieure et supérieure. Et après chaque saut, il faut le temps pour que l'harmonique énergétique se stabilise vers l'autre point fixe. La vitesse

exponentielle de stabilisation est caractérisée par la partie réelle de la fréquence complexe ν_1 . Ainsi d'après Equation 5.48, quand $Z_1 > 4/3$ ou $Z_1 < 4/9$ c'est le coefficient d'amortissement de l'attachement $\xi = 2|\mathcal{R}(\nu)|$ qui caractérise la vitesse de stabilisation de la relation énergétique autour de la courbe des points fixes à l'échelle de temps τ_1 .

Et maintenant pour étudier le comportement de $\Phi_1(\tau_1)$, on considère le problème à l'échelle $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} [\xi_0 + i(1 + \sigma)] \varphi_0 - \frac{i}{2} \varphi_1 = \frac{A}{2}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \left[\xi + i \left(\sigma - \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \right) \right] \varphi_1 = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau_1} + \frac{i}{2} \sigma \varphi_0. \end{cases} \quad (5.50)$$

En remplaçant la relation (5.39) dans la première équation du système (5.50), on obtient une équation différentielle d'ordre de φ_1 :

$$\begin{aligned} -2i \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau_0 \partial \tau_1} + \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\varphi_1 - i\xi \varphi_1 - \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \varphi_1 \right) - i [\xi_0 + i(1 + \sigma)] \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_0} - \frac{i}{2} \varphi_1 \\ + \frac{1}{2} [\xi_0 + i(1 + \sigma)] \left(\varphi_1 - i\xi \varphi_1 - \frac{3}{4} \Omega |\varphi_1|^2 \varphi_1 \right) = \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

On s'intéresse au comportement de la solution stable au voisinage du point fixe par rapport au temps rapide $\Phi_1(\tau_1) = \lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} \varphi_1(\tau_0, \tau_1)$. En remplaçant ce point fixe dans l'équation (5.51), on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\Phi_1 - i\xi \Phi_1 - \frac{3}{4} \Omega |\Phi_1|^2 \Phi_1 \right) - \frac{i}{2} \Phi_1 + \\ + \frac{1}{2} [\xi_0 + i(1 + \sigma)] \left(\Phi_1 - i\xi \Phi_1 - \frac{3}{4} \Omega |\Phi_1|^2 \Phi_1 \right) = \frac{A}{2}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Pour cette équation compliquée faisant intervenir la différentiation et un polynôme d'ordre 3, on se contente de chercher le point fixe de la solution par rapport au temps τ_1 estimé par :

$$\frac{1}{2} [\xi_0 + i(1 + \sigma)] \left(\tilde{\Phi}_1 - i\xi \tilde{\Phi}_1 - \frac{3}{4} \Omega |\tilde{\Phi}_1|^2 \tilde{\Phi}_1 \right) - \frac{i}{2} \tilde{\Phi}_1 = \frac{A}{2}, \quad (5.53)$$

$$\Rightarrow \left\{ \left[\xi(1 + \sigma) + \xi_0 \left(1 - \frac{3}{4} \Omega |\tilde{\Phi}_1|^2 \right) \right] + \left[\sigma - \xi \xi_0 - \frac{3}{4} (1 + \sigma) \Omega |\tilde{\Phi}_1|^2 \right] i \right\} \tilde{\Phi}_1 = A, \quad (5.54)$$

$$\Rightarrow \left\{ \left[\xi(1 + \sigma) + \xi_0 \left(1 - \frac{3}{4} Z_1 \right) \right]^2 + \left[\sigma - \xi \xi_0 - \frac{3}{4} (1 + \sigma) Z_1 \right]^2 \right\} Z_1 = Z_A. \quad (5.55)$$

L'équation (5.52) décrit l'évolution de $\Phi_1(\tau_1)$ dans le comportement invariant lent par rapport au temps rapide τ_0 du système moyenné (5.11). Donc naturellement le point fixe par rapport au temps τ_1 déterminé par l'équation (5.55) est aussi le point fixe du système initial (5.1).

Pour toute valeur positive de $Z_A = \Omega A^2$, il y a au moins une solution de Z_1 . Le nombre de racine de cette équation sera étudié au biais de l'investigation de sa dérivation :

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{27}{16} [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2] Z_1^2 - 3 [\xi_0^2 + \sigma(1 + \sigma)] Z_1 \\ &\quad + \xi^2 [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2]^2 + \xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi \xi_0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Naturellement ces résultats peuvent être déduits de ceux de la réponse fortement stationnaire (5.14) en ne gardant que des termes à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$. Mais le but le plus important ici est d'étudier la stabilité de la réponse dont la variation autour des points fixes par rapport au temps τ_0 est déjà étudiée. Et pour les points fixes par rapport au temps τ_1 , on considère la version linéarisée de l'équation (5.52) en introduisant une petite perturbation $|\delta_2| \ll |\tilde{\Phi}_1|$:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3}{2}\Omega|\tilde{\Phi}_1|^2 - i\xi\right) \frac{\partial\delta_2}{\partial\tau_1} - \frac{3}{4}\Omega\tilde{\Phi}_1^2 \frac{\partial\bar{\delta}_2}{\partial\tau_1} \\ & + \frac{1}{2}[\xi_0 + i(1 + \sigma)] \left[\left(1 - \frac{3}{2}\Omega|\tilde{\Phi}_1|^2 - i\xi\right) \delta_2 - \frac{3}{4}\Omega\tilde{\Phi}_1^2\bar{\delta}_2 \right] - \frac{i}{2}\delta_2 = 0, \end{aligned} \quad (5.57)$$

ou avec une écriture sous forme d'opérateurs :

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(1 - \frac{3}{2}Z_1 - i\xi\right) \frac{\partial}{\partial\tau_1} + \frac{1}{2} \left[\xi + \xi_0 - \frac{3}{2}Z_1 + i \left(\sigma - \xi\xi_0 - \frac{3}{2}(1 + \sigma)Z_1 \right) \right] \right\} \delta_2 \\ & = \frac{3}{4}\Omega\tilde{\Phi}_1^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial\tau_1} + \frac{i(1 + \sigma) + \xi_0}{2} \right\} \bar{\delta}_2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

En combinant avec l'opérateur de conjugaison et en appliquant quelques transformations algébriques, on a :

$$f_1(Z_1) \frac{\partial^2\delta_2}{\partial\tau_1^2} + f_2(Z_1) \frac{\partial\delta_2}{\partial\tau_1} + \frac{1}{4}f_3(Z_1)\delta_2 = 0, \quad (5.59)$$

où :

$$f_1 = \frac{27}{16}Z_1^2 - 3Z_1 + 1 + \xi^2, \quad (5.60)$$

$$f_2 = \frac{27}{16}\xi_0 Z_1^2 - 3\xi_0 Z_1 + \xi + \xi_0 + \xi^2\xi_0, \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{27}{16} [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2] Z_1^2 - 3 [\xi_0^2 + \sigma(1 + \sigma)] Z_1 \\ &+ \xi^2 [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2] + \xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi\xi_0. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Par conséquent :

$$\delta_2(\tau_1) = r_2 e^{\nu_2 \tau_1} = r_2 e^{\frac{-f_2 \pm \sqrt{f_2^2 - 4f_1 f_3}}{2f_1} \tau_1}. \quad (5.63)$$

D'une part, on peut constater que $f_1(Z_1)$ n'est rien d'autre que la différentiation $\Delta_1(Z_1)$ du comportement invariant énergétique au temps τ_0 décrit dans l'équation (5.42) et $f_3(Z_1)$ elle aussi est la différentiation $\Delta_2(Z_1)$ du point fixe par rapport au temps τ_1 . Et on a bien montré que la solution de point fixe $\Phi_1(\tau_1)$ n'est stable que quand :

$$f_1(Z_1) = \Delta_1(Z_1) \geq 0 \Rightarrow f_2(Z_1) = \xi_0 f_1(Z_1) + \xi > 0.$$

D'autre part, le critère pour que la solution de point fixe par rapport au temps τ_1 soit stable il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}(\nu_2) \leq 0 \\ & \Rightarrow f_3(Z_1) = \Delta_2(Z_1) = \frac{27}{16} [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2] Z_1^2 - 3 [\xi_0^2 + \sigma(1 + \sigma)] Z_1 \\ & + \xi^2 [\xi_0^2 + (1 + \sigma)^2] + \xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi\xi_0 \leq 0. \end{aligned} \quad (5.64)$$

On en déduit que les solutions situées sur la branche intermédiaire de la relation $Z_1 \leftrightarrow Z_A$ dont le discriminant correspondant est négatif ne sont jamais stables. Et en conclusion, il y a deux raisons à l'instabilité des solutions en régime forcé du système NES : le point fixe se situe soit sur la branche intermédiaire du comportement invariant $Z_1 \leftrightarrow Z_0$ soit sur la branche intermédiaire du comportement $Z_1 \leftrightarrow Z_A$.

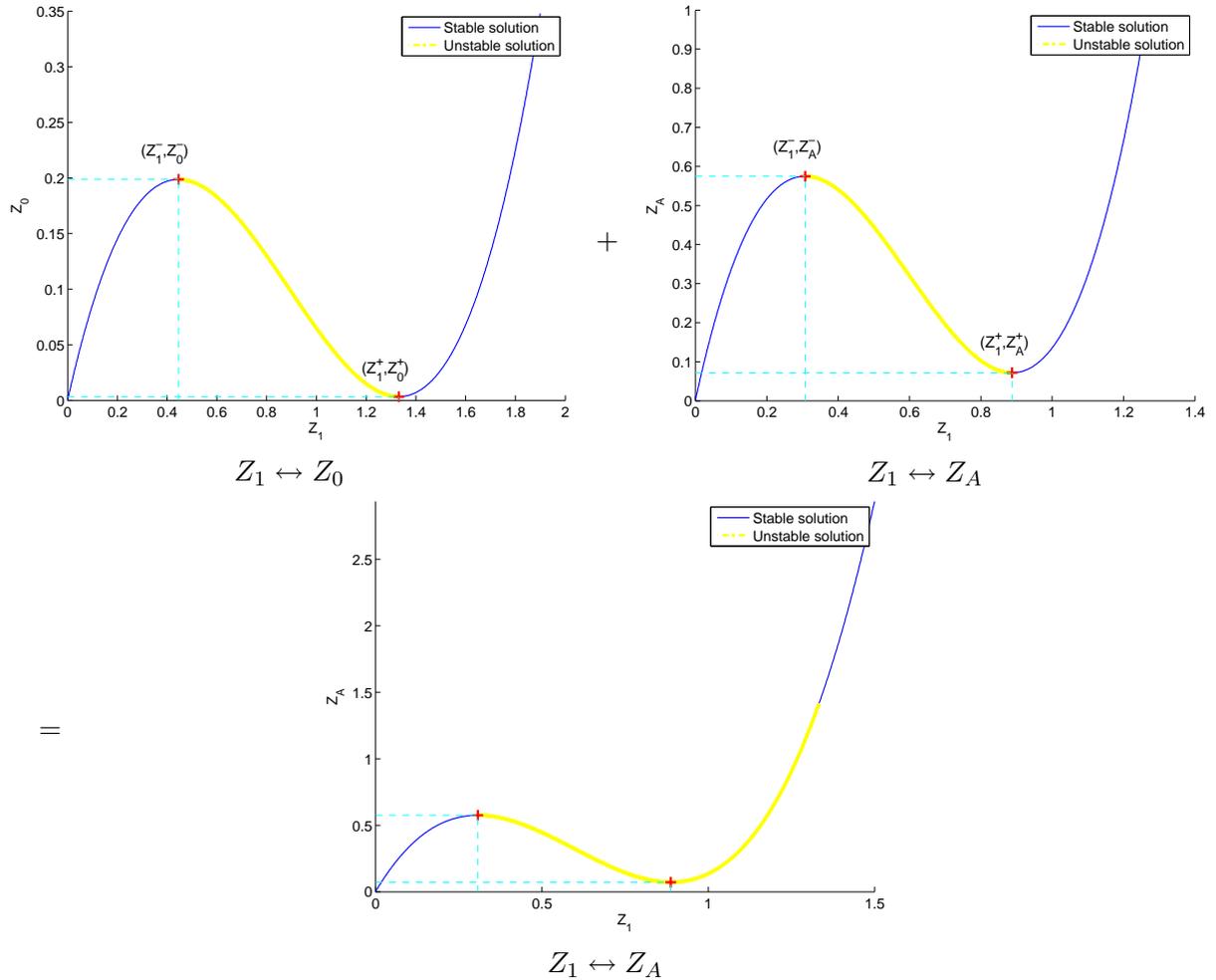


FIGURE 5.5 – Zones stables et instables des solutions stationnaires pour $\xi_0 = 0.02$, $\xi = 0.05$ et $\sigma = 2$

5.2 Vérifications numériques

Dans cette section, on réalise des simulations numériques sur un modèle académique décrit dans le système d'équation (5.1) avec des paramètres choisis comme suivant :

Oscillateur principal : masse $M = 1 \text{ kg}$; raideur linéaire $K = 1 \text{ Kg/m}$; amortissement spécifique $\xi_0 = \frac{C}{M\omega_0} = 2\%$,

NES : masse $m = 0.05 \text{ kg}$ ainsi le ratio de masse $\epsilon = 5\%$; amortissement critique $\xi = \frac{c}{m\omega_0} = 5\%$ fixé et raideur non linéaire $k = \Omega m\omega_0^2$ sera choisie à travers le ratio de raideur Ω .

Le régime forcé est toujours excité par des forcings purement harmoniques $f(t) = \epsilon F \cos(\omega t)$. Des simulations numériques sont réalisées en utilisant le schéma d'intégration numérique Runge-Kutta pour environ 500 périodes avec un pas de temps variable s'échelonnant entre 10^{-3} et 10^{-6} secondes. La convergence est réputée acquise lorsqu'à la fois une erreur relative de 10^{-5} et une erreur absolue de 10^{-10} sont atteintes.

Utilisées à titre d'indices de comparaison, les sorties sont adimensionnées par les relations :

$$\begin{cases} Z_0(t) &= \Omega \left[(x(t) + \epsilon y(t))^2 + (\dot{x}(t) + \epsilon \dot{y}(t))^2 \right], \\ Z_1(t) &= \Omega \left[(x(t) - y(t))^2 + (\dot{x}(t) - \dot{y}(t))^2 \right], \\ \mu(t) &= \frac{Z_0(t)}{\Omega A^2}, \quad \Omega = \frac{k/m}{K/M}. \end{cases} \quad (5.65)$$

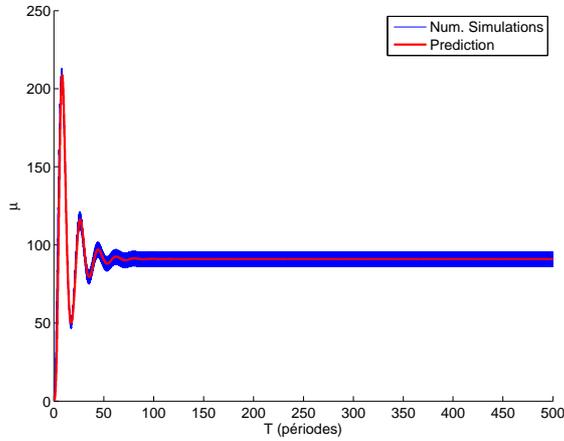
Dans un premier temps, quelques essais simples sont faits avec deux jeux de paramètres $\Omega = 1 m^{-2}$; $A = \frac{F}{M\omega_0^2} = 0.5 m$ et $\Omega = 4 m^{-2}$; $A = 0.25 m$ qui satisfont $Z_A = \Omega A^2 = cst = 0.25$. Les conditions initiales sont prises nulles et on vérifie avec 3 pulsations : $0.95 rad/s$; $1 rad/s$ et $1.05 rad/s$. Pour chaque cas considéré, on calcule le point fixe μ_0 suivant Equation (5.15) et aussi ν suivant Equation (5.37) comme indice de stabilité. Si la réponse est stable, la prédiction analytique sera déterminée par la formule :

$$\mu_{ana}(t) = \mu_0 \mathcal{R} (1 - e^{\nu\omega_0 t})^2. \quad (5.66)$$

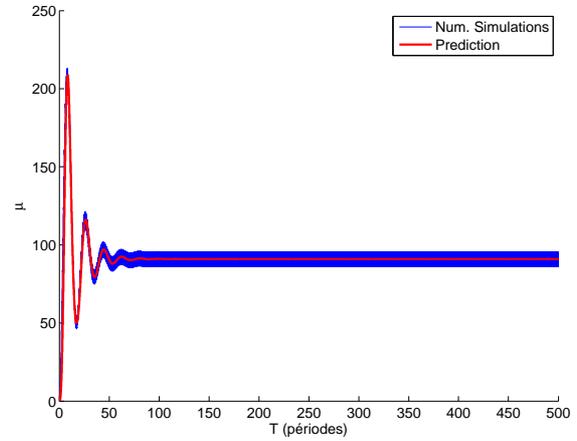
La Figure 5.6 montre les réponses du système primaire dans ces conditions à travers le facteur d'amplification $\mu(t)$ qui restent toujours stables par rapport aux changements de la raideur non linéaire k et de l'amplitude A à condition que $k A^2 = cst$. Ces résultats mettent en évidence la conclusion que les influences de la raideur non linéaire et de l'énergie de la force extérieure sur la réponse dynamique du système NES considéré peuvent être combinées en un seul paramètre adimensionnel Z_A . Par conséquent, pour les simulations numériques on considère seulement l'influence de Z_A en fixant la raideur non linéaire relative $\Omega = 1 m^{-2}$ et faisant changer l'amplitude A du forcing harmonique.

Grâce à l'Outil "maison" Scalogram que j'ai développé en environnement MATLAB avec l'aide de S. Pernot, on réalise des analyses en ondelette du déplacement de la masse primaire pour deux exemples : $\Omega = 1 m^{-2}$, $A = 0.5 m$ et $\omega = 0.95 rad/s$ correspondant au cas de réponse stable et $\Omega = 1 m^{-2}$, $A = 0.5 m$ et $\omega = 1 rad/s$ au cas de réponse instable. Ces cartographies présentées sur la Figure 5.7 révèlent bien la différence dans les deux cas. Pour la première, la fréquence de la sortie est stable à la valeur $0.1512 Hz$ en bon accord avec la pulsation $\omega = 0.95 rad/s$ de la force extérieure. Quant à la deuxième, on voit bien l'oscillation de la fréquence du déplacement de la masse primaire et l'énergie se concentre principalement à la fréquence $0.1561 Hz$ inférieure à celle de la force extérieure $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.1592 Hz$.

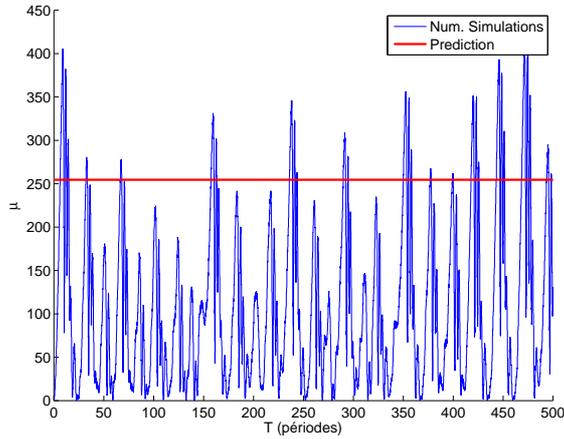
Comme déjà souligné dans la Section précédente, la plus dangereuse résonance n'est pas à la fréquence propre du système mais peut se trouver au-dessous de cette fréquence mais pas trop loin (la distance relative est de l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$) si l'énergie de la force extérieure atteint une valeur limite (qui sera étudiée prochainement). On va effectuer des essais numériques de balayage sinusoïdal de $0.8\omega_0$ à $1.2\omega_0$ (et à l'inverse de $1.2\omega_0$ à $0.8\omega_0$) avec différents niveaux d'accélération A pour analyser la dynamique du système autour de la fréquence de résonance. Afin de mettre en évidence les zones d'instabilités des réponses numériques, pour chaque fréquence on retient non



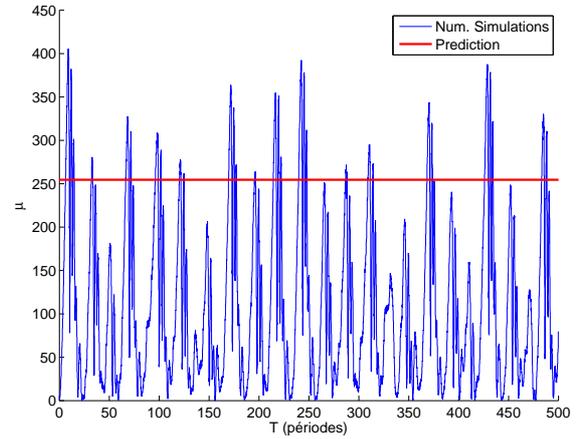
(1a) $\Omega = 1 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.5 \text{ m}$; $\omega = 0.95 \text{ rad/s}$



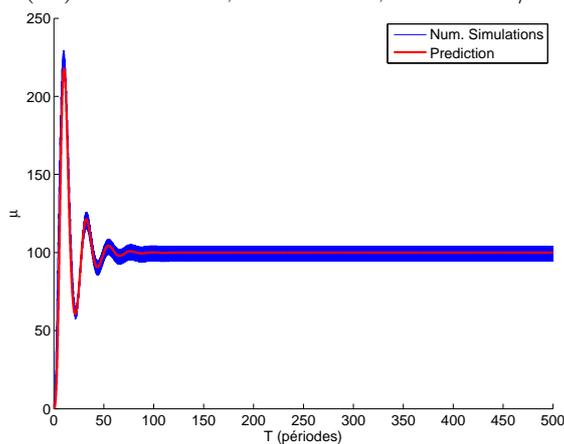
(1b) $\Omega = 4 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.25 \text{ m}$; $\omega = 0.95 \text{ rad/s}$



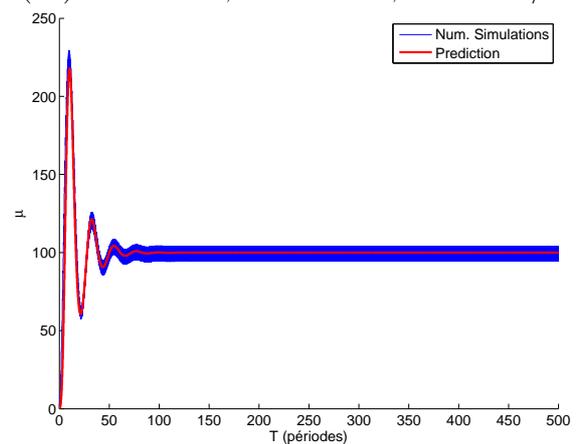
(2a) $\Omega = 1 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.5 \text{ m}$; $\omega = 1 \text{ rad/s}$



(2b) $\Omega = 4 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.25 \text{ m}$; $\omega = 1 \text{ rad/s}$

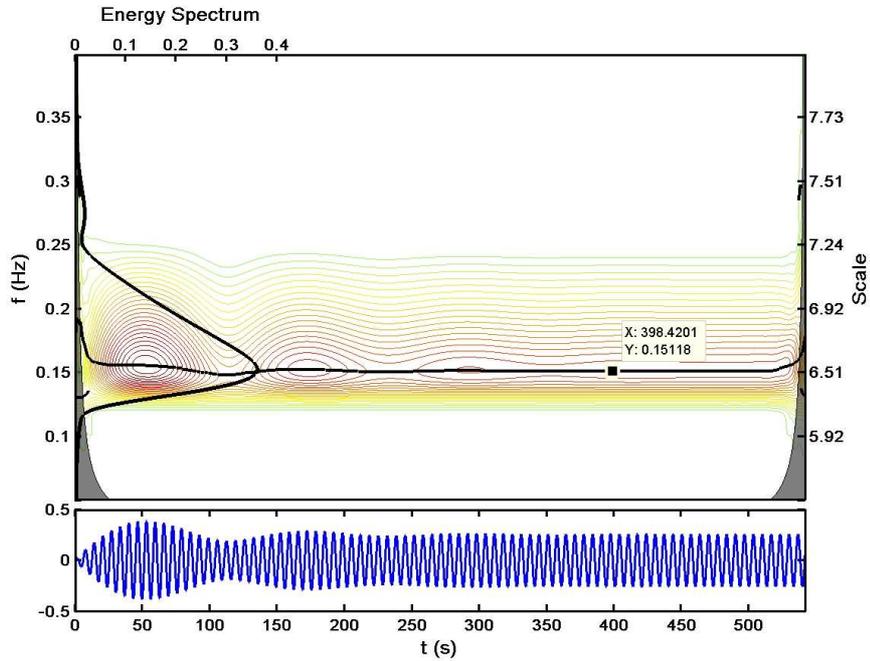


(3a) $\Omega = 1 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.5 \text{ m}$; $\omega = 1.05 \text{ rad/s}$

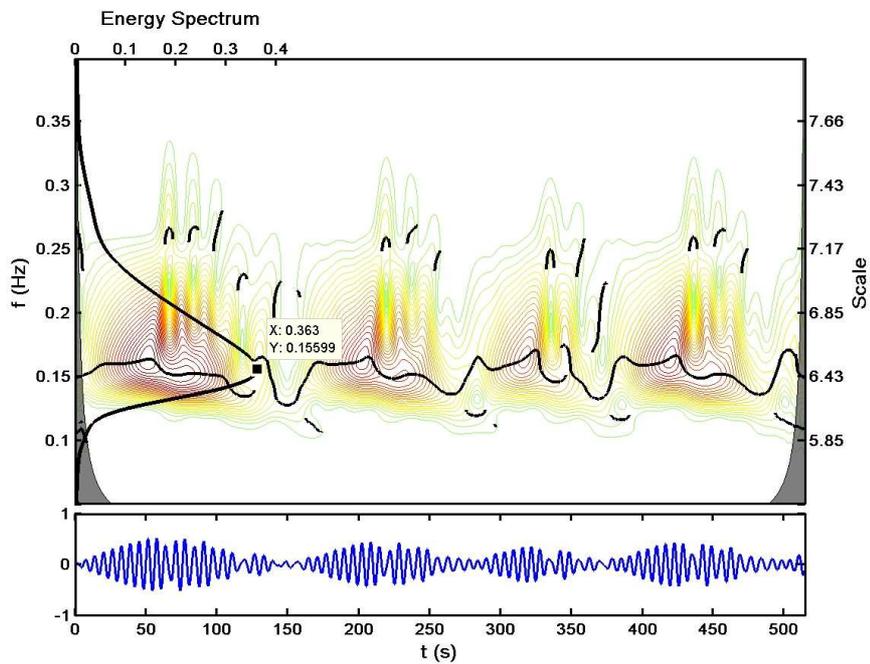


(3b) $\Omega = 4 \text{ m}^{-2}$; $A = 0.25 \text{ m}$; $\omega = 1.05 \text{ rad/s}$

FIGURE 5.6 – La réponse du système en régime forcé : facteur d'amplification d'énergie $\mu(t)$



(a) $\omega = 0.95 \text{ rad/s}$



(b) $\omega = 1 \text{ rad/s}$

FIGURE 5.7 – Analyse périodique des réponses dynamiques

seulement la valeur maximale (μ_{max}) du facteur d'amplification d'énergie mais aussi la valeur moyenne (μ_{moyen}) à long terme. Dans les simulations de balayage sinusoïdale, les conditions initiales pour chaque fréquence sont prises au moment où l'énergie dans la masse primaire est maximale (μ_{max}) pour assurer une continuation possible.

De plus, pour mieux comprendre le comportement et l'avantage d'un absorbeur de NES, on prend un autre absorbeur linéaire Frahm ("Tuned mass damper") de même masse et même amortissement mais une raideur optimale dont l'expression est connue comme :

$$\Omega_L = \frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} = \frac{1}{(1 + \epsilon)^2} \Leftrightarrow k_{LIN} = \frac{\epsilon}{(1 + \epsilon)^2} \omega_0^2 = 0.0454 \text{ Kg/m}. \quad (5.67)$$

Analytiquement, on peut calculer l'amplitude du mouvement de la masse principale :

$$X_L^2 = \frac{\epsilon^2 A^2 \left[\xi_1^2 \Omega_f + (\Omega_L - \Omega_f)^2 \right]}{\left[(1 - \Omega_f) (\Omega_L - \Omega_f) - \epsilon \xi \xi_1 \Omega_f - \epsilon \xi_1 \Omega_L \Omega_f \right]^2 + \Omega_f \left[\epsilon (\Omega_L - \Omega_f) \xi + (1 - (1 + \epsilon) \Omega_f) \xi_1 \right]^2}, \quad (5.68)$$

$$\text{où : } \Omega_f = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

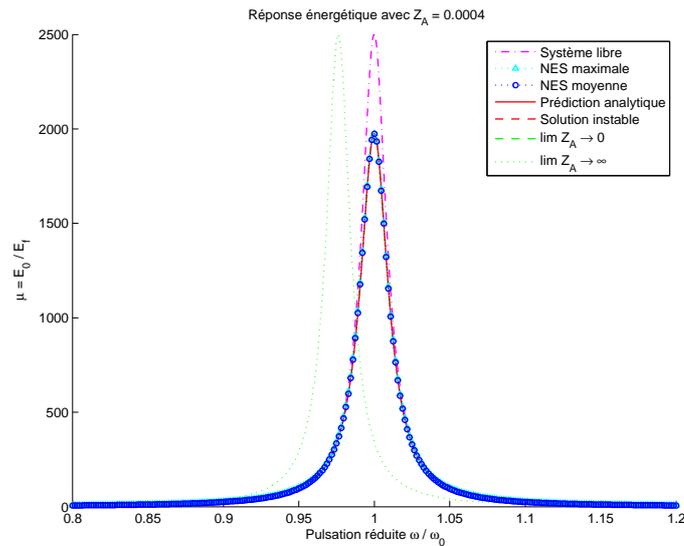
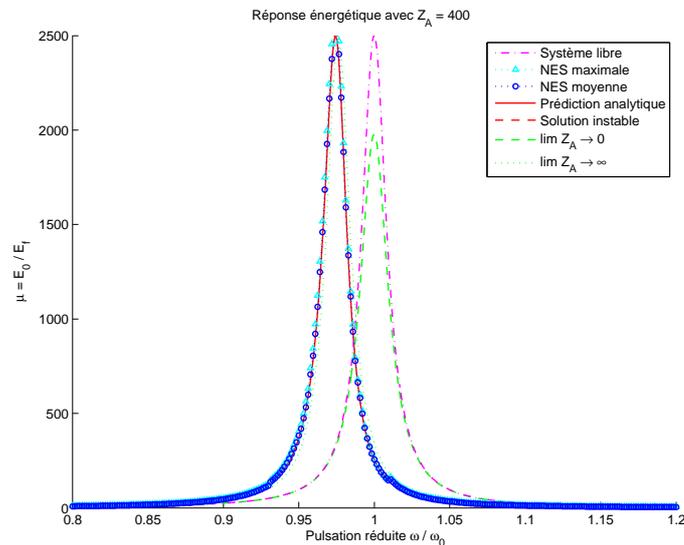
D'où le facteur d'amplification d'énergie pour un absorbeur TMD :

$$\mu_{TMD} = \frac{\frac{1}{2} (1 + \Omega_f) \left[\xi_1^2 \Omega_f + (\Omega_L - \Omega_f)^2 \right]}{\left[(1 - \Omega_f) (\Omega_L - \Omega_f) - \epsilon \xi \xi_1 \Omega_f - \epsilon \xi_1 \Omega_L \Omega_f \right]^2 + \Omega_f \left[\epsilon (\Omega_L - \Omega_f) \xi + (1 - (1 + \epsilon) \Omega_f) \xi_1 \right]^2}. \quad (5.69)$$

Pour commencer, on vérifie deux cas extrêmes qui sont déjà considérés analytiquement dans la Section 5.1.2 à travers deux valeurs différentes : $A = 0.02$ correspondant à $Z_A = 0.0004 \ll 1$ et $A = 20$ correspondant à $Z_A = 400 \gg 1$. On retrouve un bon accord entre les simulations numériques et les prédictions analytiques, la courbe des facteurs d'amplification d'énergie μ analytique (en trait tiret-pointillé rouge) se superpose bien avec la courbe numérique maximale (μ_{max}^{RK45} en cyan) et celle de la moyenne (μ_{moy}^{RK45} en bleu). Ces résultats attestent les remarques précédentes : sous faible excitation ou faible raideur non linéaire ($Z_A \ll 1$) le système réagit comme on lui a ajouté une valeur d'amortissement et d'autre part, sous excitation ou raideur non linéaire très élevée ($Z_A \gg 1$) le système réagit comme on lui a ajouté une petite masse qui modifie la fréquence de résonance mais pas le niveau du pic de la réponse spectrale. Dans les deux cas (énergie de force extérieure très faible ou très élevée), la réponse dynamique du système est toujours stable pour toute fréquence dans le voisinage de la fréquence propre. Mais en terme d'efficacité, ces deux cas ne montrent aucun avantage par rapport à l'absorbeur linéaire classique TMD où deux résonances peuvent apparaître (en fonctions de l'amortissement) mais toujours moins importants que ceux dans le cas des NES.

De la même manière, on effectue ces essais numériques pour d'autres valeurs de l'accélération A s'échelonnant entre 0.3 et 0.6 m dont les réponses sont illustrées sur les Figures 5.10 et 5.11 :

- système sans couplage en magenta,
- système avec l'absorbeur TMD en noir,
- système avec l'absorbeur NES numérique : maximale en cyan, moyenne en bleu,


 FIGURE 5.8 – Simulations de balayage sinusoïdale avec l'amplitude d'accélération $A = 0.02$

 FIGURE 5.9 – Simulations de balayage sinusoïdale avec l'amplitude d'accélération $A = 20$

- prédiction analytique en rouge tiret-pointillé dont les zones d'instabilité en jaune.

Les résultats obtenus mettent en évidence l'exactitude des prédictions analytiques avec l'histoire des points fixes et aussi des zones d'instabilité des solutions. En augmentant de façon monotone la valeur de Z_A , on voit apparaître de différents comportements du système dynamique comme prévus dans la Section des études analytiques :

- lorsque Z_A dépasse la première limite, il apparaît à droite de la fréquence propre différentes branches de réponses mais comme deux parmi ces trois branches sont toujours instables (marquées par la couleur jaune sur la figure), il nous reste seulement une solution possible,
- en montant la valeur de Z_A , une autre réponse de solutions multiples paraît et s'élargit au fur et à mesure tandis que la zone autour et à droite de la fréquence propre s'abaisse,

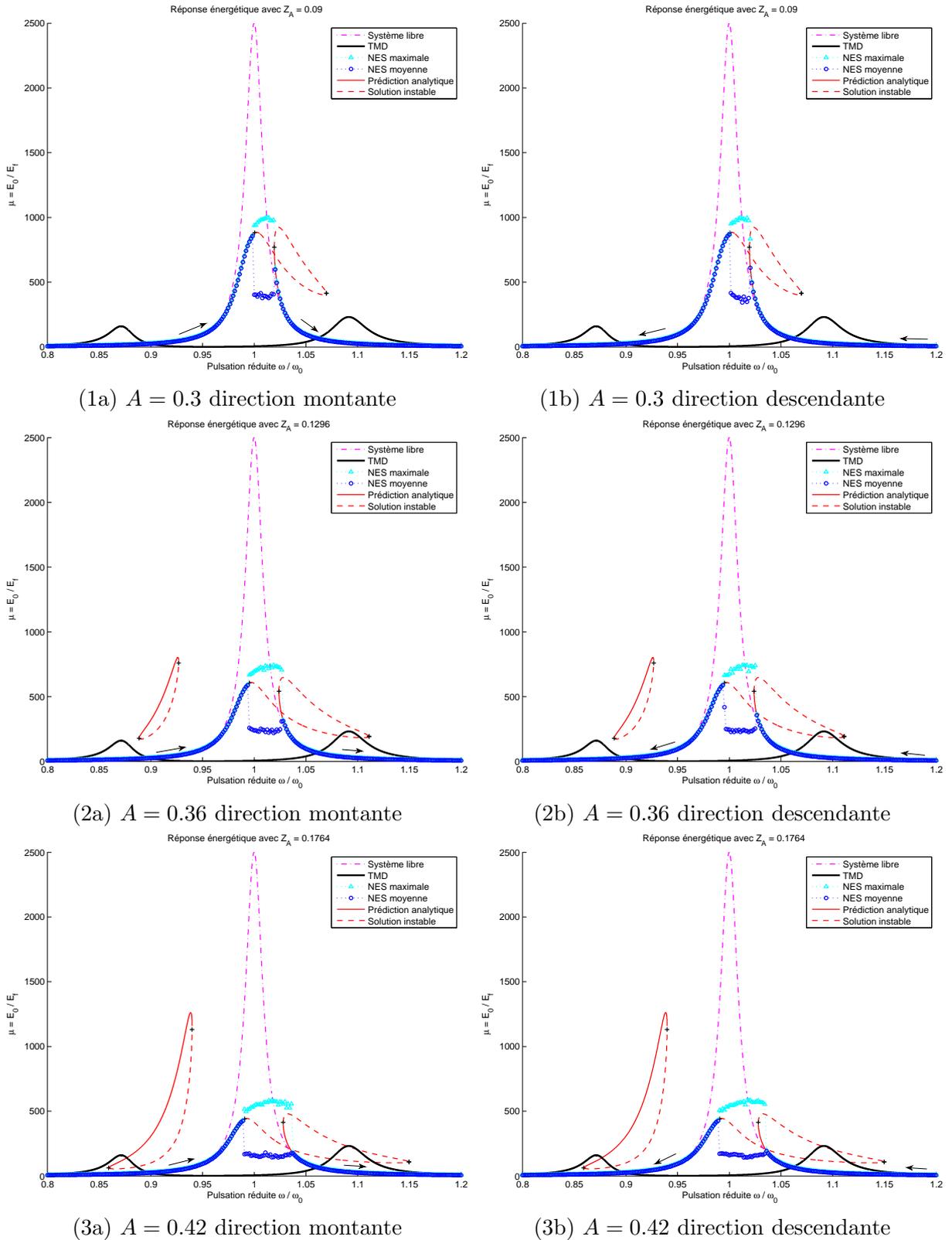


FIGURE 5.10 – Facteur d'amplification d'énergie dans les simulations de balayage sinusoïdale

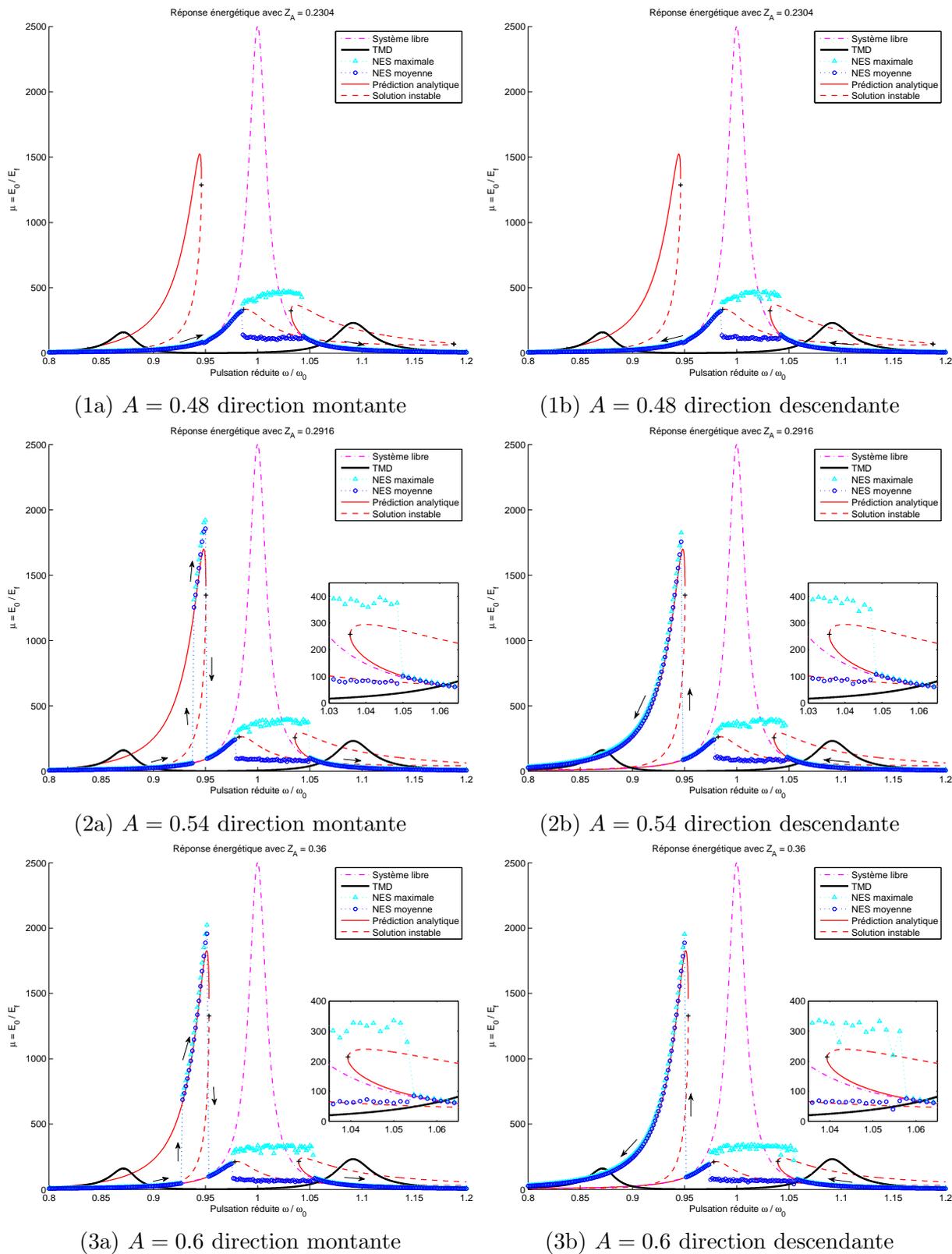


FIGURE 5.11 – Facteur d'amplification d'énergie dans les simulations de balayage sinusoïdale

- en dehors des zones de solutions multiples dont la branche intermédiaire est toujours instable, il existe au tour de la fréquence propre une petite zone d'instabilité qui paraît, s'élargit puis se rétracte et enfin disparaît au cours de la montée de la valeur de Z_A .

En comparaison avec l'absorbeur TMD, le système avec NES montre de plus en plus d'avantage quand Z_A n'est pas trop élevé, la réponse en facteur d'amplification d'énergie moyen est toujours en dessous de la réponse du système sans couplage ce qui n'est pas facile à atteindre par l'absorbeur classique TMD. Mais pour une valeur assez élevée de Z_A , cet avantage du NES n'existe plus à cause de la résonance auxiliaire à gauche de la fréquence propre qui a pour origine la branche supérieure des solutions multiples. En effet, ces branches analytiques ont déjà apparu avant l'occurrence de la résonance auxiliaire mais à ce moment là, les 3 branches sont totalement séparées, les branches supérieure et intermédiaire sont à un niveau beaucoup plus élevé que la branche inférieure et la réponse dynamique est aspirée par cette dernière à cause d'une continuation possible assurée pendant les simulations de balayage sinusoïdale. Et cette résonance auxiliaire est un inconvénient des NES que l'on n'attendait pas du tout pour le design optimal des absorbeurs non linéaires.

Une autre remarque est observée facilement sur ces figures, dans le cas où la résonance auxiliaire n'est pas présente, les réponses en direction montante et descendante des fréquences sont identiques même dans la zone d'instabilité. Mais dans le cas contraire, la différence entre les deux directions se trouve dans la zone des branches multiples à gauche. En direction montante, la réponse dynamique attrape la branche supérieure un peu tard tandis que cette branche est suivie tout au début jusqu'à la fin en direction descendante.

À propos de la stabilité des réponses, les études analytiques nous donnent de bonnes prédictions pour tous les niveaux d'énergie de la force extérieure sauf un petit segment à droite de la fréquence propre qui se trouve dans la zone de trois solutions (voir le zoom sur la Figure 5.11.(3b)) où il y a au moins une solution stable analytiquement mais les résultats numériques ne le sont pas. Pour mieux comprendre cette contradiction, on étudie maintenant à titre d'exemple un des cas considérés au-dessus avec : $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 5\%$, $A = 0.6 m$ et $\omega = 1.045 rad/s$ (Figure 5.11.3b) dont les résultats analytiques des points fixes sont présentés sur la Figure 5.12.

D'après la prédiction, il existe dans ce cas 3 points fixes mais deux entre eux se trouvent dans la zone d'instabilité. Par conséquent, il ne reste qu'un seul point fixe qui peut être la réponse stable du système dynamique. Pour vérifier, une simulation simple est effectuée en prenant des conditions initiales nulles pour obtenir les courbes du facteur d'amplification d'énergie et des relations énergétiques $Z_1 \leftrightarrow Z_0$ au cours du temps d'oscillation sur les Figure 5.13 et 5.14. Les observations montrent bien la cohérence entre les courbes numériques et analytiques juste après le début d'excitation harmonique. Comme les conditions initiales $Z_0 = Z_1 = 0$ ne coïncident pas avec le point fixe déterminé, la réponse dynamique du système va osciller à fréquence complexe $\nu = -0.012 + 0.037i$ (calculée à l'aide de l'équation polynomiale 5.37) autour de ce point avant de l'atteindre. Mais dans ce cas considéré, pendant le temps de stabilisation la courbe énergétique dépasse la limite de la branche inférieure (après environs 10 périodes, voir Figure 5.14.b). Suivant les études de l'approche multi-échelles dans Section 5.1.4, il y aura un saut de la branche inférieure à la branche supérieure dont la vitesse de stabilisation après le saut est caractérisée par l'amortissement ξ du NES. Dans cet exemple, la valeur de ξ prise égale à 5% est d'autant plus petite que la stabilisation n'est guère efficace avant le deuxième saut entre deux branches. Ce phénomène d'instabilité se répète cette fois pour la branche inférieure et encore en suite. Enfin, on a une réponse d'allure chaotique comme dans les cas où le point fixe se trouve dans la zone d'instabilité.

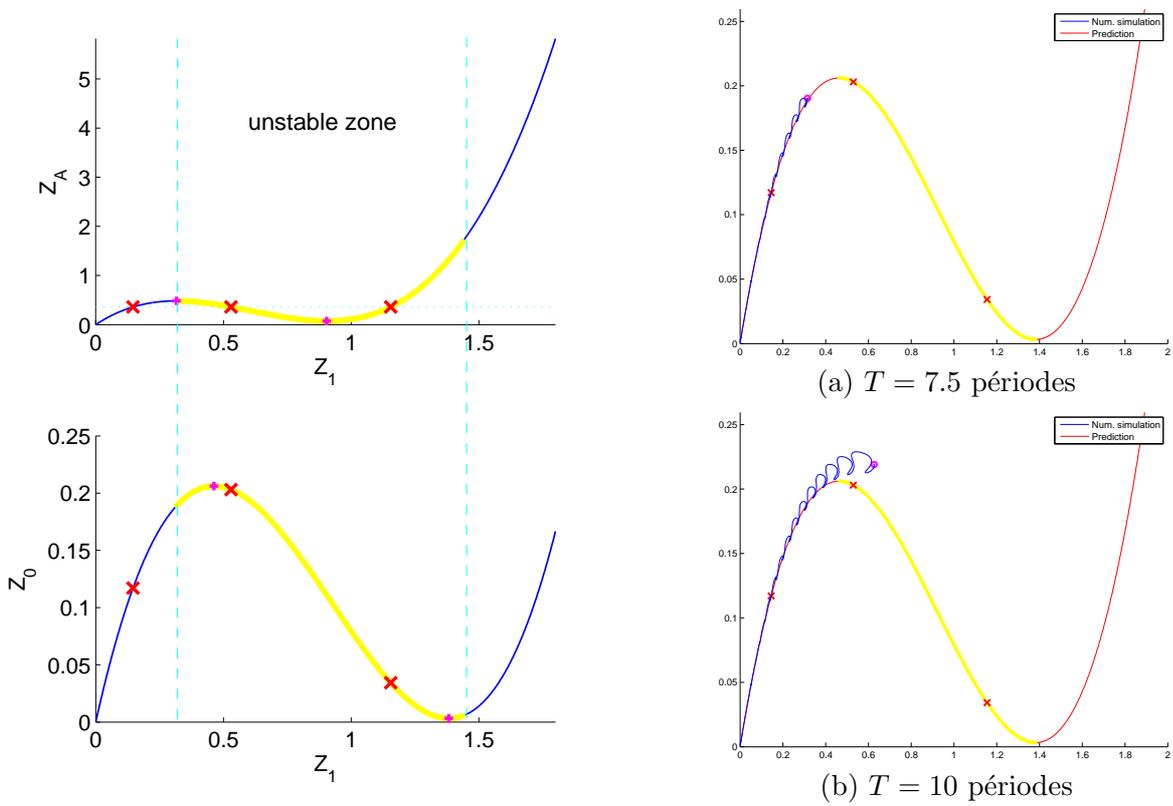


FIGURE 5.12 – Prédiction analytique des points fixes et leur stabilité pour $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 5\%$, $A = 0.6\text{ m}$ et $\omega = 1.045\text{ rad/s}$

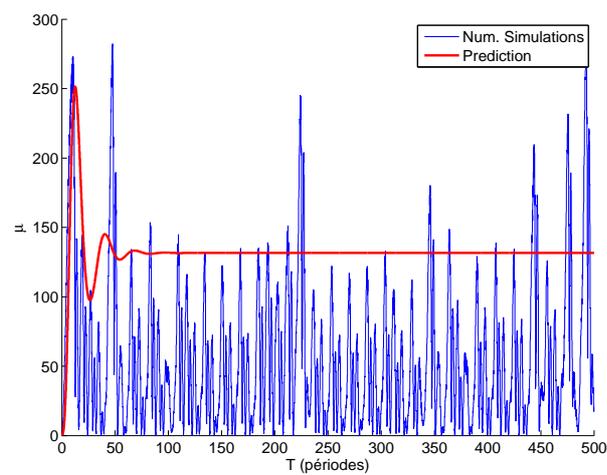


FIGURE 5.13 – Réponse en amplification d'énergie en régime forcé pour $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 5\%$, $A = 0.6\text{ m}$ et $\omega = 1.045\text{ rad/s}$

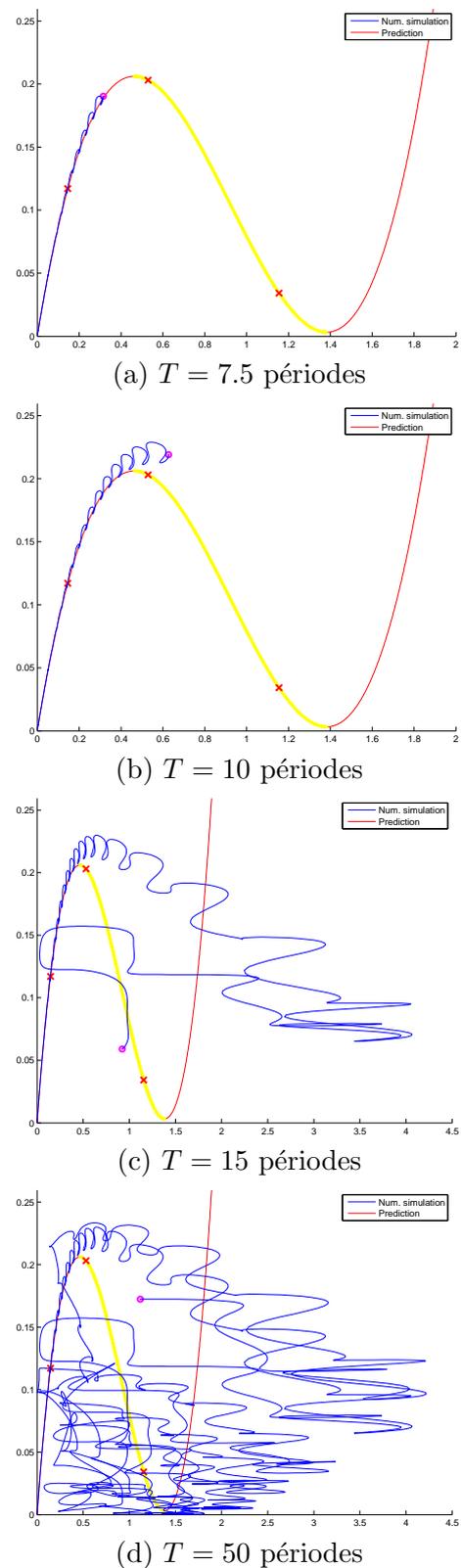


FIGURE 5.14 – Relation $Z_1 \leftrightarrow Z_0$ au cours du temps

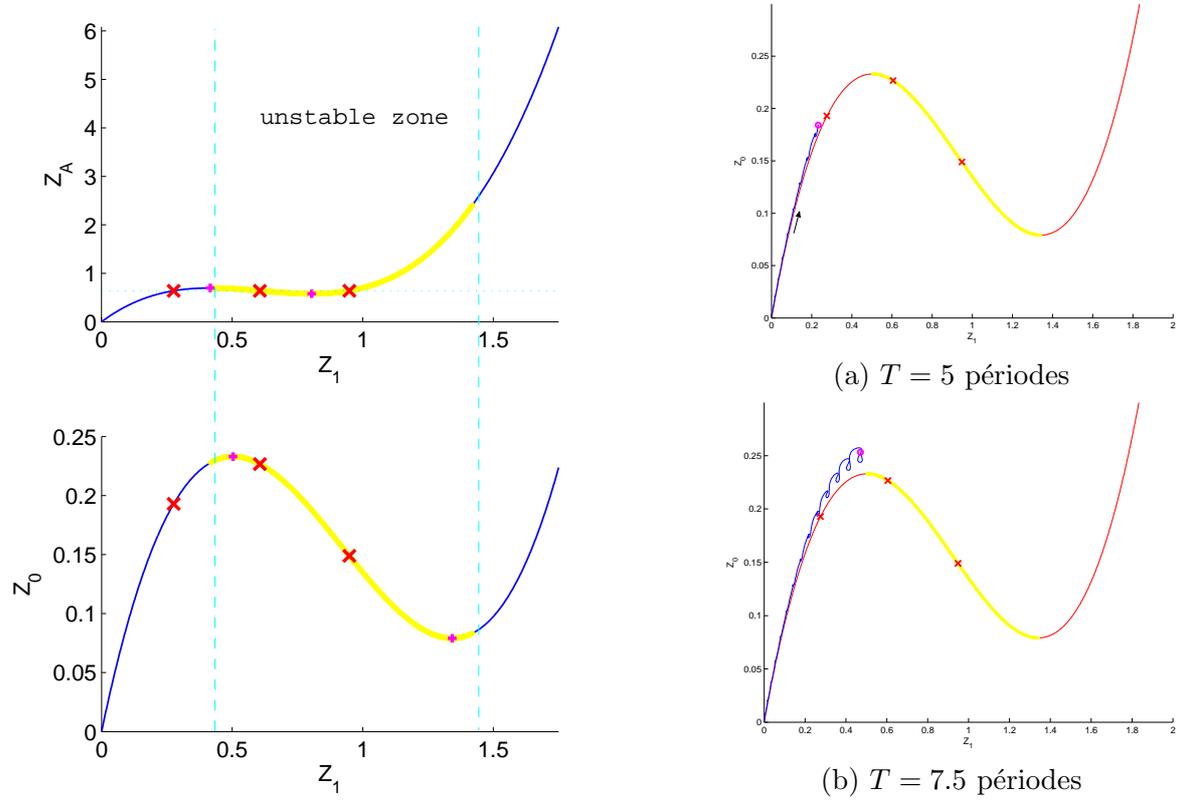


FIGURE 5.15 – Prédiction analytique des points fixes et leur stabilité pour $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 25\%$, $A = 0.8m$ et $\omega = 1.045 rad/s$

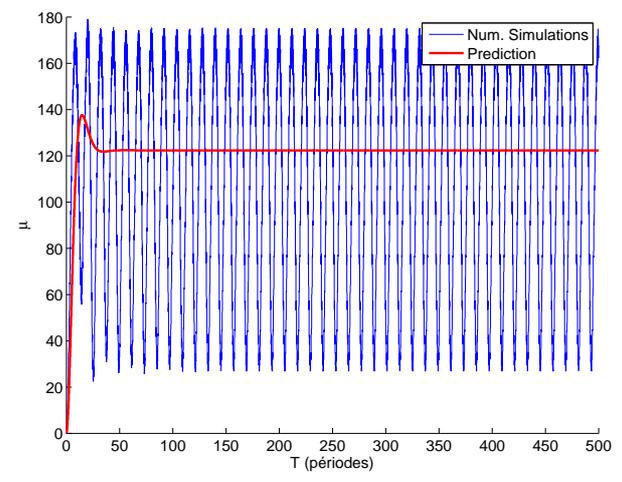


FIGURE 5.16 – Réponse en amplification d'énergie en régime forcé pour $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 25\%$, $A = 0.8m$ et $\omega = 1.045 rad/s$

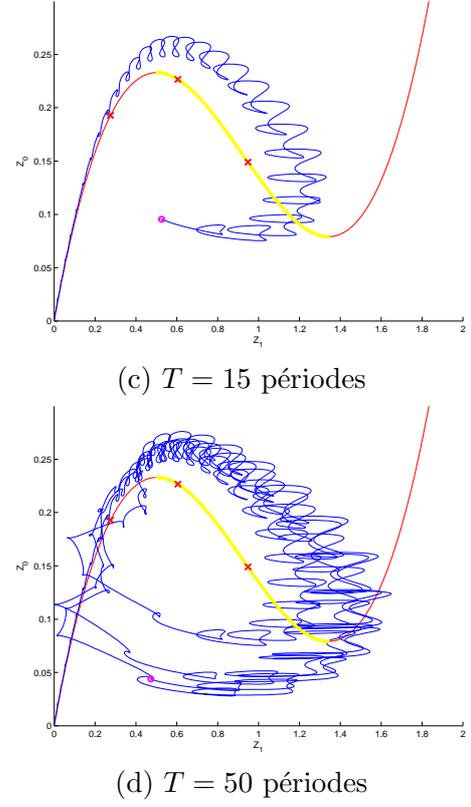


FIGURE 5.17 – Relation $Z_1 \leftrightarrow Z_0$ au cours du temps

Pour réaffirmer l'influence du coefficient d'amortissement du NES sur la stabilité des points fixes au voisinage de la zone d'instabilité, on donne une autre valeur plus grande $\xi = 25\%$ et on réalise la même démarche que précédemment. Les résultats présentés sur les Figure 5.15, 5.16 et 5.17 montrent la différence par rapport au cas de $\xi = 5\%$. Après chaque saut entre des branches, le comportement dynamique se stabilise assez rapide mais n'atteint jamais non plus le point fixe estimé. Dans cet exemple, on a une réponse quasi-périodique mais pas chaotique comme au-dessus.

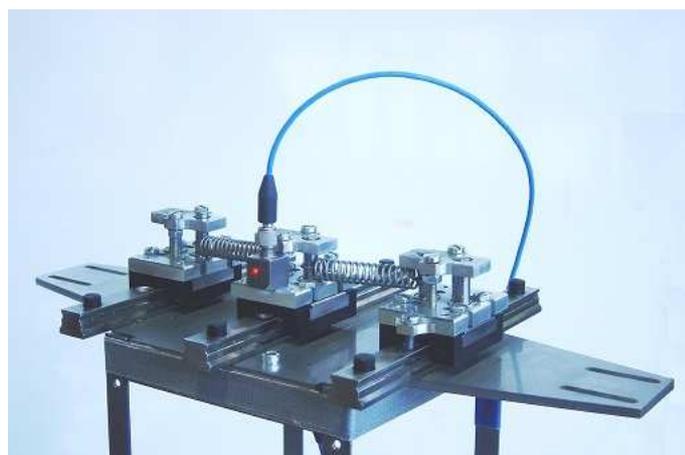
5.3 Vérification expérimentale

Le système expérimental considéré est montré sur la Figure 5.18. En particulier vous pouvez voir le modèle de bâtiment à échelle réduite et à quatre étages qui a été déjà étudié dans le chapitre 3 dont la première fréquence propre a été identifiée à 4.5 Hz . Le système est encastré sur une plaque de plexiglass montée sur une table vibrante, elle-même dirigée par un moteur linéaire électromagnétique Linmot. Ce dernier est contrôlé par un "Linmot E1000 MT controller" caractérisé par sa capacité à produire pratiquement tous les profils d'excitation : balayage sinus, bruits aléatoires, pulses, séismes. L'acquisition des données de 4 accéléromètres PCB piezotronics est réalisée en utilisant un analyseur PAK MKII à une fréquence d'échantillonnage de 1024 Hz , permettant ainsi de capturer la plus grande partie de l'information instantanée des réponses dynamiques. L'ensemble du banc d'essai est monté sur un bloc de béton très lourd isolé dynamiquement du sol.

La masse secondaire, celle de l'absorbeur, peut glisser le long d'un rail fixé sur la plaque supérieure du modèle de bâtiment. La conception de la structure ajoutée non linéaire est illustrée sur la Figure 5.18(b). Pour la structure primaire, on considère tout d'abord uniquement le premier mode. Ainsi, le bâtiment et l'absorbeur non linéaire peuvent être idéalisés par le modèle décrit sur la Figure 5.1.



(a) Banc d'essai



(b) NES

FIGURE 5.18 – *Système expérimental et configuration du NES*

Dans un premier temps, on utilise des ressorts linéaires de 400 N/m pour créer la raideur non linéaire du NES en jouant sur la géométrie. Un balayage sinus $3.5 \rightarrow 7 \text{ Hz}$ a été utilisé pour exciter la base du modèle de bâtiment à quatre étages avec les amplitudes 0.7 g , 1.05 g et 1.4 g .

Les profils de déplacements ont été calculés en intégrant successivement et en filtrant les profils d'accéléérations et de vitesses, qui sont présentés sur la Figure 5.19. Ces courbes amplitudes-fréquences expérimentales vérifient la théorie détaillée précédemment. En effet, quand l'énergie de la force extérieure est faible (la ligne en bleu pour l'amplitude $F = 0.7 g$), la présence de l'absorbeur non linéaire a pour unique effet d'ajouter l'amortissement au système linéaire, ce qui fait diminuer légèrement le pic à la fréquence propre. Plus l'amplitude de la force augmente, plus le pic diminue avec apparition de la zone des solutions quasi-périodiques. La courbe avec couplage (en vert pour $F = 1.05 g$) reste principalement au-dessous de la courbe sans couplage. Lorsque l'énergie de la force dépasse une certaine valeur (en rouge pour $F = 1.4 g$), l'efficacité de l'absorbeur non linéaire est détruite totalement par une résonance auxiliaire à gauche de la fréquence naturelle du système linéaire.

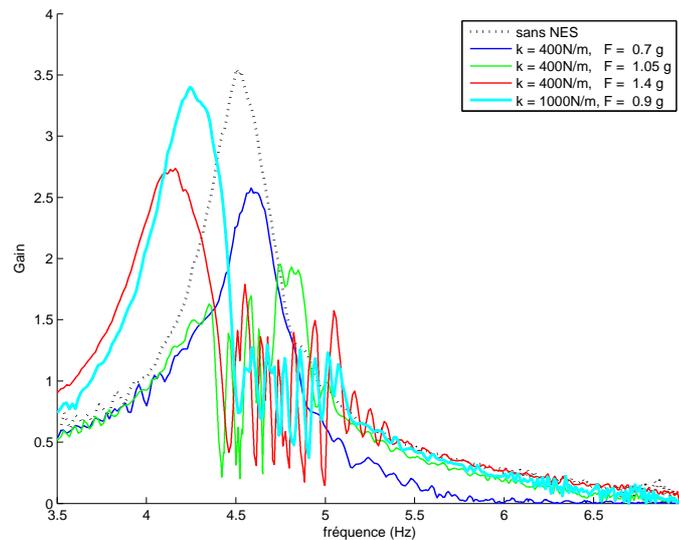


FIGURE 5.19 – Résultats expérimentaux avec une excitation de type balayage sinus $3.5 \rightarrow 7 Hz$: comparaison entre le comportement linéaire et la structure couplée avec le NES.

Comme cela a été souligné dans la section 5.1, la réponse en amplification d'énergie du système avec couplage dépend d'un paramètre adimensionnel $Z_A = \Omega A^2$. Pour vérifier cette remarque, nous avons utilisé d'autres ressorts de raideur $1000 N/m$, avec l'amplitude de la force $F = 0.9 g$, ce qui donne la valeur de Z_A équivalente à celle donnée par les ressorts de $400 N/m$ avec une amplitude de force $F = 1.4 g$. Les résultats de ce cas sont également présentés sur la Figure 5.19 par une courbe en cyan. Le comportement dynamique du système avec la nouvelle configuration (en cyan) et celui avec l'ancienne configuration (en rouge) sont assez proches : on observe la même plage de quasi-périodicité et une résonance auxiliaire à gauche. Évidemment, les courbes ne sont pas tout-à-fait identiques mais la table vibrante n'est pas assez stable pour suivre les profils des déplacements demandés sous l'influence des vibrations de la maquette et il existe une pré-tension non souhaitée dans les ressorts. Malgré tout, ces essais nous confirment la fiabilité et la robustesse de la théorie détaillée dans la section précédente dans des cas réalistes.

5.4 Optimisation de la raideur non linéaire

Nous nous plaçons dans le cadre des études de design optimal des absorbeurs essentiellement non linéaires. Le but de cette Section est de chercher un critère du transfert énergétique efficace en régime forcé correspondant à une raideur non linéaire optimale, dont l'analogie en régime ins-

tationnaire est déjà étudié dans le Chapitre précédent. À cause de difficultés mathématiques et méthodologique, un tel critère ne peut pas être tiré directement des relations d'échange énergétique ou des équations d'instabilité établies précédemment. On se contente d'utiliser les résultats numériques en réalisant plusieurs simulations de balayages sinusoidaux avec différents jeux de paramètres des NES.

En effet, comme nous l'avons déjà souligné dans la section précédente, plus on augmente la valeur du paramètre adimensionnel Z_A (en augmentant soit la raideur non linéaire k soit l'amplitude de la force A), plus la réponse en facteur d'amplification d'énergie diminue (figure 5.10). Mais si ce paramètre est trop important, une résonance auxiliaire va émerger et l'absorbeur ne sera plus efficace du tout (figure 5.11). L'essence de cette résonance auxiliaire se trouve dans le choix de branches de solutions que le système dynamique va suivre lorsqu'il existe des zones de solutions multiples à gauche de la fréquence propre du système maître. Quand Z_A n'est pas assez grand, c'est toujours la branche inférieure qui se produit et la réponse se trouve essentiellement au-dessous de celle du système primaire linéaire. Mais dans le cas contraire au-dessus d'une certaine valeur de Z_A , le comportement dynamique atteint la branche supérieure qui est beaucoup plus grande que la branche inférieure comme la réponse du système linéaire. C'est un cas très défavorable pour le problème de design des absorbeurs. Le but est ici de trouver le plafond de Z_A au-dessous duquel la résonance auxiliaire ne se produit pas.

Dans cet objectif, on réalise d'autres simulations de balayage sinusoidal avec une plage des valeurs de Z_A de pas 0.025 pour deux autres absorbeurs non linéaires avec des ratios de masse et des amortissements différents :

absorbeur 1 : ratio de masse $\epsilon = 5\%$, amortissement du NES $\xi = 10\%$,

absorbeur 2 : ratio de masse $\epsilon = 10\%$, amortissement du NES $\xi = 10\%$.

Sur les figures 5.20 et 5.21, on présente 3 cas typiques de réponse pour chaque absorbeur : le premier quand il n'existe pas la zone des solutions multiples à gauche, le deuxième juste avant et le troisième juste après l'occurrence de la résonance auxiliaire.

Dans les trois cas présentés sur les figures 5.11, 5.20 et 5.21, on note bien que la branche supérieure n'est jamais atteinte pendant que les trois branches de solutions multiples analytiques sont assez séparées. Dès que la branche intermédiaire qui est toujours instable touche la branche inférieure, le comportement dynamique sera propulsé tôt ou tard vers la branche supérieure et c'est là qu'on voit apparaître la résonance auxiliaire inattendue. Certainement, les conditions initiales ont beaucoup d'influences sur la réponse du système en régime forcé mais il faut que ces conditions soient physiquement admissible, c'est à dire qu'on ne peut pas prendre des conditions trop énormes de façon irraisonnable. C'est pour cette raison que l'on s'appuie sur les essais de balayage sinusoidal en supposant que les conditions initiales sont assurées par continuation et raisonnables en pratique. À partir de ces remarques intéressantes, il est logique de proposer un critère d'efficacité du pompage énergétique en régime forcé ce qui consiste en déterminer la valeur adimensionnelle de Z_A correspondant au cas où la branche intermédiaire instable et la branche inférieure sont en contact entre elles.

Notre tâche maintenant est d'estimer la valeur de Z_A définie ci-dessus en fonction du coefficient d'amortissement ξ du NES car la raideur non linéaire est déjà présente dans la variable adimensionnelle Z_A . Pour chaque fréquence réduite σ de la force, il existe une valeur de Z_A^c pour que les solutions inférieure et intermédiaire de Z_1 soient séparées et les réponses en facteur d'amplification correspondantes soient identiques. Et la valeur critique de Z_A^{opt} , dite seuil

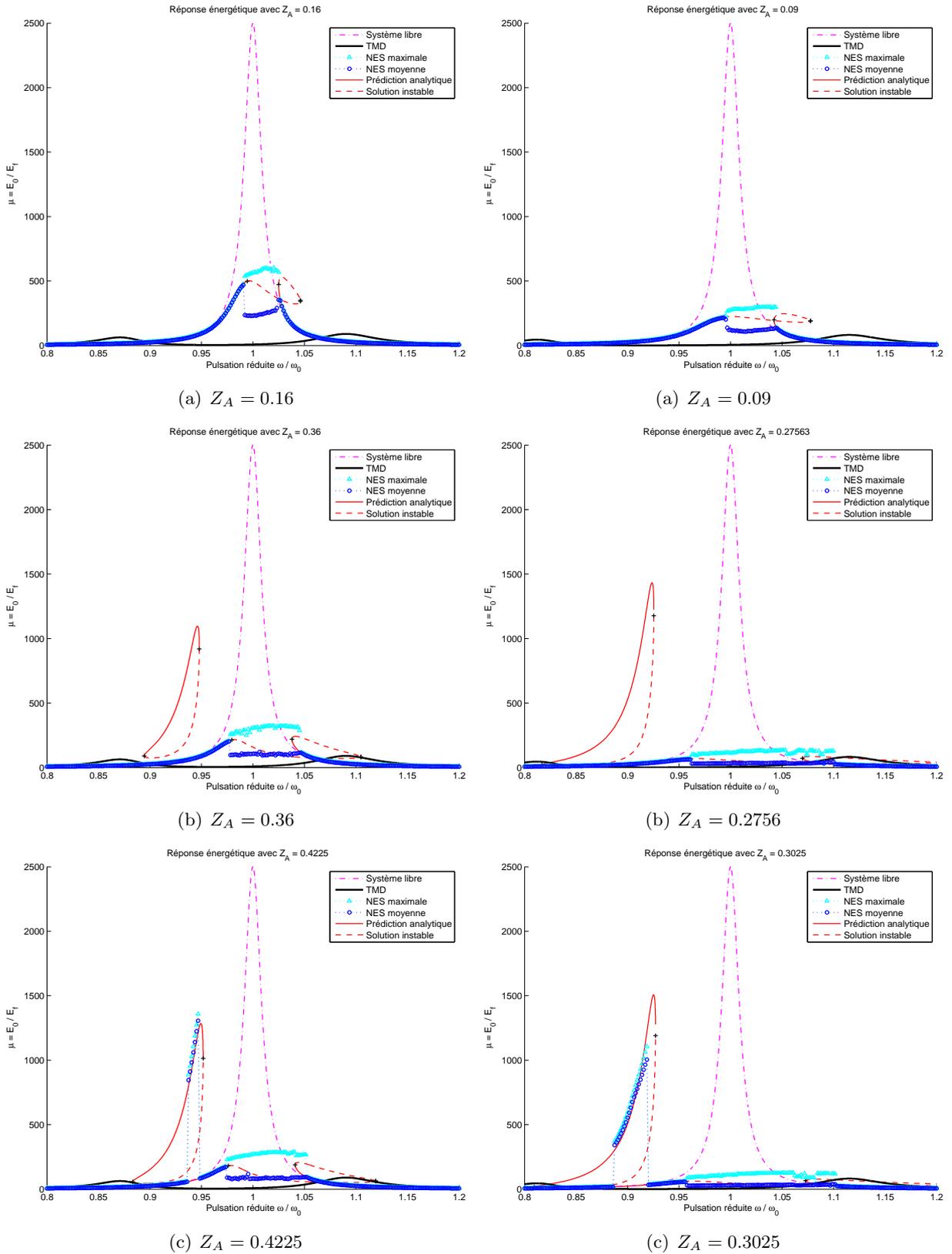


FIGURE 5.20 – Facteur d’amplification d’énergie dans les simulations de balayage sinusoïdale pour $\epsilon = 5\%$, $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 10\%$

FIGURE 5.21 – Facteur d’amplification d’énergie dans les simulations de balayage sinusoïdale pour $\epsilon = 10\%$, $\xi_0 = 2\%$, $\xi = 10\%$

de résonance auxiliaire, est le minimum de l'ensemble de ces valeurs Z_A^c . En nous référant aux équations 5.15 et 5.17, on peut mettre ces conditions pour Z_A^c en équations comme :

$$\begin{cases} a_1 Z_{11}^3 + b_1 Z_{11}^2 + c_1 Z_{11} & = & a_1 Z_{12}^3 + b_1 Z_{12}^2 + c_1 Z_{12} = (1 + \epsilon\sigma)^2 Z_A^c, \\ a_2 Z_{11}^3 + b_2 Z_{11}^2 + c_2 Z_{11} & = & a_2 Z_{12}^3 + b_2 Z_{12}^2 + c_2 Z_{12}, \end{cases} \quad (5.70)$$

où :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{9}{16} [\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2] & a_2 &= \frac{9}{16} \\ b_1 &= -\frac{3}{2} (1 + \epsilon\sigma) [\xi_0^2 + \sigma(1 + \sigma + \epsilon\sigma)] & b_2 &= -\frac{3}{2} (1 + \epsilon\sigma) \\ c_1 &= \xi^2 [\xi_0^2 + (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2] + (1 + \epsilon\sigma)^2 (\xi_0^2 + \sigma^2 + 2\xi_0\xi) & c_2 &= \xi^2 + (1 + \epsilon\sigma)^2 \end{aligned} \quad (5.71)$$

Quelques transformations algébriques nous donnent :

$$\begin{cases} [(b_1 a_2 - b_2 a_1) (Z_{11} + Z_{12}) + (c_1 a_2 - c_2 a_1)] (Z_{11} - Z_{12}) & = & 0, \\ \left[\frac{1}{4} a_2 (Z_{11} - Z_{12})^2 + \frac{3}{4} a_2 (Z_{11} + Z_{12})^2 + b_2 (Z_{11} + Z_{12}) + c_2 \right] (Z_{11} - Z_{12}) & = & 0. \end{cases} \quad (5.72)$$

Comme expliqué ci-dessus, on ne considère ici que des cas où les deux racines Z_{11} et Z_{12} sont différentes, et donc on peut récrire les équations :

$$\begin{cases} (b_1 a_2 - b_2 a_1) (Z_{11} + Z_{12}) + (c_1 a_2 - c_2 a_1) & = & 0, \\ \frac{1}{4} a_2 (Z_{11} - Z_{12})^2 + \frac{3}{4} a_2 (Z_{11} + Z_{12})^2 + b_2 (Z_{11} + Z_{12}) + c_2 & = & 0, \end{cases} \quad (5.73)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Z_{11} + Z_{12} & = & -\frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{b_1 a_2 - b_2 a_1} = -\frac{\sigma^2 + 2\xi\xi_0 - (1 + \sigma + \epsilon\sigma)^2}{\frac{3}{2} (1 + \sigma + \epsilon\sigma)}, \\ Z_{11} - Z_{12} & = & -3 (Z_{11} + Z_{12})^2 - 4 \frac{b_2}{a_2} (Z_{11} + Z_{12}) - 4 \frac{c_2}{a_2}. \end{cases} \quad (5.74)$$

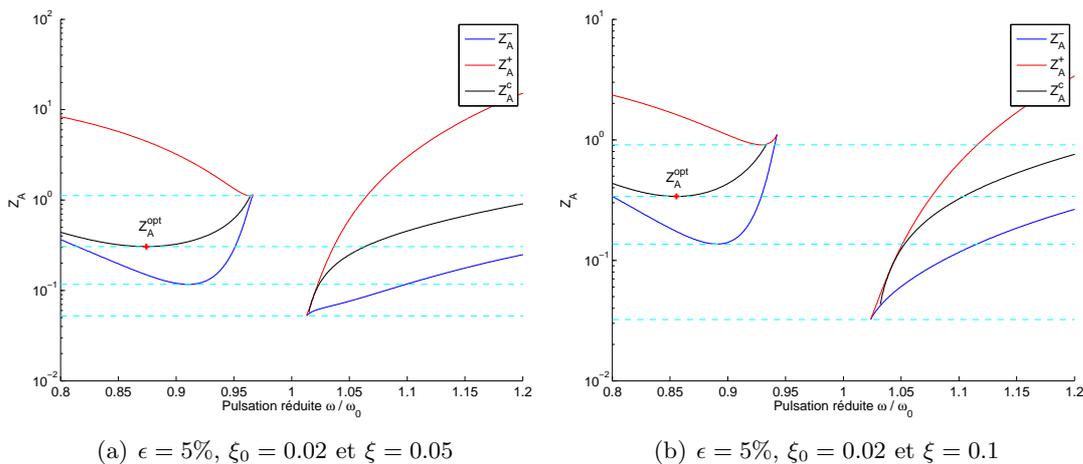


FIGURE 5.22 – Lignes des valeurs de Z_A^c des solutions croisées en fonction des fréquences réduites

Les racines obtenues facilement des équations linéaires 5.74 sont remplacées dans l'équation 5.70 pour calculer Z_A^c correspondant. Sur la figure 5.22(a) on présente la ligne des valeurs Z_A^c en fonction des fréquences réduites pour la configuration : $\epsilon = 5\%$, $\xi_0 = 0.02$ et $\xi = 0.05$. Cette figure montre que la valeur minimale de Z_A^c pour que les branches de solutions multiples à

gauche commencent à se croiser est de 0.306 tandis que pendant les simulations de balayage sinusoïdal la résonance auxiliaire apparaît pour $Z_A = 0.292$ au lieu de 0.306 (voir Fig. 5.11). Ces deux valeurs sont assez proches ce qui est une preuve de la justesse du seuil de résonance auxiliaire proposé.

Pour vérifier encore cette proposition, on trace aussi la ligne des valeurs de Z_A^c pour une autre configuration : $\epsilon = 10\%$, $\xi_0 = 0.02$ et $\xi = 0.1$ dont les résultats représentés sur la figure 5.22(b) montrent un seuil de résonance auxiliaire pour $Z_A^{opt} = 0.33$. Les simulations numériques sur la figure 5.21 présentent un autre seuil de l'ordre $Z_A = 0.30$ un peu inférieur à $Z_A^{opt} = 0.33$, mais la différence n'est pas énorme. Ainsi on peut estimer les seuils de résonance auxiliaire pour d'autres coefficients d'amortissement ξ et ξ_0 en utilisant le critère proposé dont les résultats sont exprimés sous forme des iso-contours sur la figure 5.23.

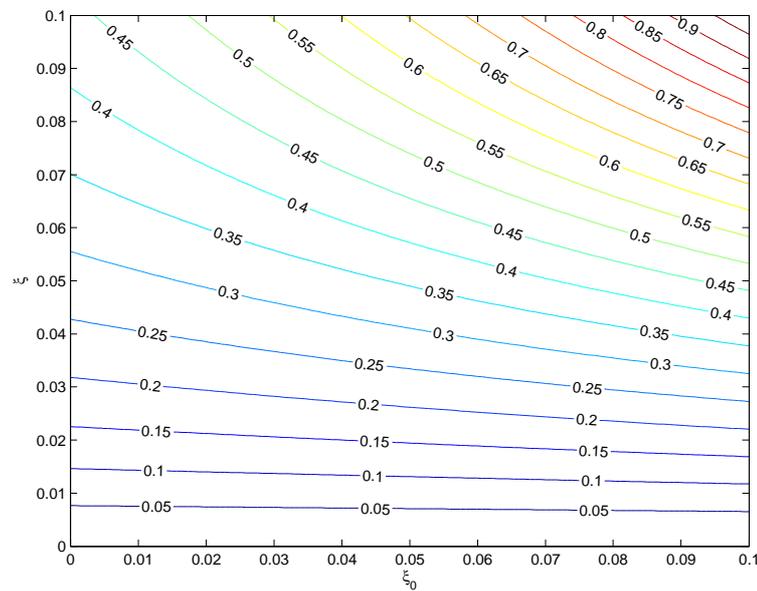


FIGURE 5.23 – *Seuils de résonance auxiliaire en fonction des coefficients d'amortissement*

Une remarque peut être faite facilement au vu cette figure : l'augmentation des coefficients d'amortissement du système linéaire ou du NES a pour effet de pousser le seuil de résonance auxiliaire plus haut et par conséquent, la zone d'efficacité de l'absorbeur non linéaire est plus large. Cet effet est logique car plus l'amortissement est élevé plus la dissipation d'énergie est réalisée et plus le système dynamique est stable.

Pour des applications, la connaissance de ce seuil de résonance auxiliaire nous permet de calculer l'amplitude maximale de la force dans la zone d'efficacité d'un NES de raideur non linéaire k :

$$A_{max} = \sqrt{\frac{Z_A^{opt}}{k}}. \quad (5.75)$$

D'autre part, pour une amplitude A de la force appliquée sur le système, la raideur non linéaire optimale pour le pompage énergétique en régime forcé peut être déterminé comme :

$$k_{opt} = \frac{Z_A^{opt}}{A^2}. \quad (5.76)$$

Dans la suite de ces études, on va essayer d'appliquer ce critère de raideur non linéaire optimale en régime forcé ainsi que celui en régime libre déterminé dans le chapitre précédent dans le design des absorbeurs non linéaires pour des modèles aux éléments finis complexes avant de considérer la mise en œuvre d'un tel dispositif sur des structures réelles.

5.5 Conclusions et Remarques

Les comportements dynamiques en régime forcé d'un système maître linéaire couplé à un absorbeur essentiellement non linéaire ont été considérés dans ce chapitre dont le cœur est de considérer toujours les variables adimensionnelles combinant la raideur non linéaire et l'amplitude au carré de la force harmonique extérieure et des modes non linéaire. Les coefficients d'amortissement du NES et aussi du système maître ont été pris en compte en même temps avec le changement de la fréquence de la force extérieure en révélant des caractéristiques intéressantes pour le design des NES.

Les études analytiques et numériques ont montré l'existence d'un plafond d'amplitude de la force harmonique extérieure pour que la résonance auxiliaire défavorable ne se produise pas pendant les essais de balayage sinusoïdal. Ce seuil de résonance auxiliaire nous permet de proposer une méthode analytico-numérique pour le design optimal de la raideur d'un absorbeur essentiellement non linéaire en donnant un tableau des iso-contours en fonction des amortissements du système maître et du NES.

Les investigations des points fixes ont donné des explications sur l'instabilité des réponses dynamiques au tour de la fréquence naturelle du système maître qui a été observée dans les essais expérimentaux réalisés par E. GOURDON et S. PERNOT [15]. Ainsi, les analyses asymptotiques confirmées par les résultats numériques ont mis en évidence l'influence des coefficients d'amortissement sur la stabilisation des réponses stationnaires autour de la tendance des relations cubiques entre des modes non linéaires et du point fixe final.

Les simulations numériques sont faites avec des balayages sinusoïdaux dans lesquels les conditions initiales sont toujours assurées par continuation. L'influence des conditions initiales sur la stabilité des réponses n'est guère abordée et donc elle mérite d'être étudiée d'avantage.

Une autre piste de recherche possible est d'étudier les bassins d'attraction des solutions multiples pour mieux comprendre le plafond d'efficacité en régime forcé ou bien le seuil de résonance auxiliaire qui est très important pour le design optimal des absorbeurs non linéaires.

Troisième partie

Design et optimisation d'un absorbeur passif non linéaire dans le cadre d'une application automobile

Chapitre 6

Présentation du problème et Mise en équation

Ce chapitre fait l'inventaire des différents modèles de véhicules développés en vue du dimensionnement des absorbeurs non linéaires NES et la vérification numérique de leur efficacité. A partir de la connaissance d'un modèle aux éléments finis NASTRAN T76 fourni par l'équipe PCA et décrivant la dynamique du véhicule en base physique, un modèle contraint a été condensé sur la base de Craig-Bampton afin d'incorporer les conditions aux limites imposées par l'excitation de trépidation. Des modifications sont tour à tour apportées pour tenir compte des liaisons additionnelles avec le NES balancier selon la configuration étudiée. Une simplification ne considérant que le mode de torsion du véhicule ramène le système dynamique complexe au cas académique déjà étudié dans la Partie II pour mettre à profit les critères d'efficacité optimale des absorbeurs non linéaires en régime libre et forcé. Une vérification numérique de la fiabilité et des performances des absorbeurs NES en balancier est effectuée par comparaison avec l'absorbeur de masse accordé actuellement monté sur le véhicule.

Sommaire

6.1	Introduction	136
6.2	Modèle éléments finis T76 et réduction modale	138
6.2.1	Modèle en base physique T76 – code Nastran –	139
6.2.2	Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton	142
6.3	Modèle spectral avec NES balancier	144
6.3.1	Hypothèses de modélisation	145
6.3.2	Modèle continu avec NES balancier	146
6.3.3	Modèle dynamique discrétisé E.F.	149
6.3.4	Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton	151
6.4	Études analytiques des modèles non linéaires condensés	152
6.4.1	Comportement dynamique en régime libre	152
6.4.2	Etude du modèle NES balancier sous sollicitation de trépidation	154
6.5	Études numériques des modèles non linéaires condensés	155
6.5.1	Comparaison de l'efficacité des absorbeurs en régime libre	156
6.5.2	Comparaison de l'efficacité des absorbeurs dans le cas d'une excitation de trépidation	163
6.6	Conclusions	171

6.1 Introduction

Les structures sont inéluctablement soumises à des sollicitations dynamiques provenant de leur environnement extérieur. La réponse à ces sollicitations peut aller du simple inconfort à la ruine totale. Il revêt aussi d'un enjeu majeur de pouvoir prédire et contrôler ces comportements dynamiques d'une part et d'autre part de pouvoir dimensionner les structures en conséquence. Les applications concernent aussi bien le contrôle vibratoire d'ouvrages d'art, de systèmes mécaniques ou acoustiques, etc. De nombreux systèmes ont été développés dans le but d'atténuer les désordres issus des réponses dynamiques, on en distingue principalement deux types : les systèmes actifs et passifs. Les systèmes passifs présentent l'intérêt d'être généralement de conception simple, robustes et complètement autonomes sur le plan énergétique. Ces caractéristiques en font aujourd'hui des systèmes très répandus. Le principe le plus utilisé consiste à coupler une structure auxiliaire au système à isoler afin d'établir un couplage dissipatif, et ainsi atténuer plus rapidement les vibrations.

L'analyse dynamique des structures a toujours cherché à linéariser le comportement des structures et à en effacer les composantes non linéaires, aux comportements souvent méconnus susceptibles de générer des excitations de modes inattendues. Il n'est donc pas surprenant que les absorbeurs passifs actuels soient réalisés au moyen de couplages linéaires. L'étude des systèmes non linéaires a depuis une dizaine d'années déjà montré la possibilité de générer des comportements dynamiques aboutissant à des transferts efficaces d'énergie vibratoire. Ce transfert a ainsi permis le développement de systèmes passifs de contrôle vibratoire. Ces absorbeurs utilisent aussi une structure auxiliaire couplée, le couplage étant cette fois essentiellement non linéaire. Les expérimentations ont mis en évidence des propriétés intéressantes de ces absorbeurs, comme la possibilité d'utiliser des masses auxiliaires plus réduites.

Dans le domaine automobile, les véhicules coupés cabriolets comportent généralement des faiblesses de rigidité intrinsèque à leur architecture. L'amélioration de la prestation en trépidations – vibrations aléatoires [5, 40] Hz typiques d'une route bosselée – passe souvent par l'ajout d'artifices comme des tirants (amortis ou non) ou des batteurs dynamiques linéaires – système composé idéalement d'une masse et d'un 'ressort linéaire' – sous la caisse pour diminuer la contribution du premier mode de torsion de caisse. De tels artifices se soldent par une masse augmentée de l'ordre d'une quinzaine de kilogrammes par véhicule ! Pour rappel de tels batteurs sont présents sur le modèle *T56* (cf. Fig. 6.1) au niveau des longeronnets avec une masse ajoutée de 17 kg afin de passer le critère en trépidation sur les points confort (volants et rétroviseur supérieur de baie).

Dans le cadre de l'amélioration du confort vibratoire et acoustique, le concept de batteur dynamique linéaire est donc appliqué comme palliatif. Il permet de diminuer la contribution d'un seul mode vibratoire (ou acoustique) responsable principalement de l'émergence constatée. Ce dispositif est cependant peu robuste : pour une efficacité maximale, le batteur doit être accordé finement à la même fréquence que le mode ciblé. Le second inconvénient correspond à la masse nécessaire pour pomper l'énergie du mode ciblé. Celle-ci est généralement de l'ordre de 10% de la masse de la structure principale (masse effective du mode ciblé). Le troisième inconvénient est la création de 2 émergences à égale distance de la fréquence 'filtrée' dont l'amplitude varie en fonction de l'amortissement du dispositif lui-même.

Les études théoriques dans la partie précédente ont montré que l'utilisation d'absorbeurs non linéaires – masse + ressort essentiellement non linéaire – encore connus sous la dénomination NES pour "Nonlinear Energy Sink" autorise un transfert énergétique de la structure principale

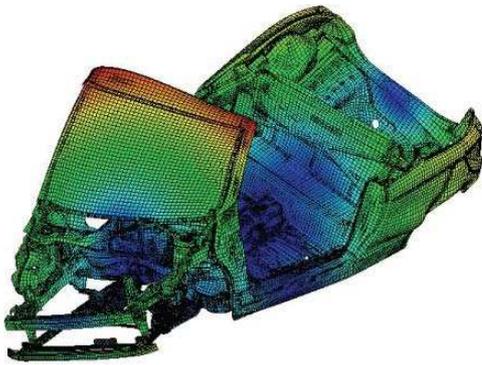


FIGURE 6.1 – Mode de torsion de la caisse *T76*.



FIGURE 6.2 – Arrière de peugeot 307CC

vibrante beaucoup plus efficace. En effet la présence de la non linéarité forte d'attache permet au batteur de résonner avec tout mode de la structure principale linéaire. Il a été également constaté qu'il est possible d'utiliser une masse inférieure au cas du batteur linéaire pour dissiper aussi efficacement les vibrations de la structure principale. Il apparaît alors évident que ce principe de pompage énergétique peut s'appliquer avantageusement sur un véhicule automobile et notamment dans l'isolation vibratoire de la caisse des excitations GMP et de la chaussée.

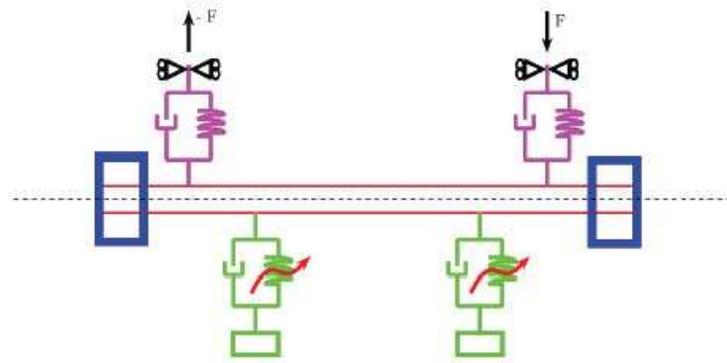


FIGURE 6.3 – Schéma cinématique du modèle.

En appliquant le principe du pompage énergétique, il est tout à fait envisageable de remplacer les batteurs linéaires par un/des absorbeur(s) fortement non linéaires illustré en Fig. 6.3. Le principe vise à renforcer le taux de dissipation de l'énergie vibratoire de la caisse via l'amortissement de l'absorbeur associé une relation énergétique non linéaire avec le système primaire. Ce processus peut s'opérer à la fois en régime stationnaire et transitoire et la capture de résonance se fait à l'intérieur d'une bande fréquentielle voisine mais relativement large de la fréquence du mode de torsion de caisse ce qui rend le fonctionnement plus robuste que dans le cas de l'amortisseur de Frahm. La difficulté majeure est liée au fait que le transfert efficace ne se déclenche qu'au delà d'un seuil d'activation régime instationnaire et qu'au dessous d'un seuil de résonance auxiliaire définis dans la partie II.

Les objectifs de cette étude sont donc de démontrer la faisabilité d'utiliser un (des) absorbeurs non-linéaires afin d'atténuer les vibrations dues au mode de torsion de caisse. De par la nature de l'objet de l'étude à savoir le modèle de véhicule *T76*, un dispositif d'absorbeurs non linéaires illustré en Fig. 6.4 va être étudiés du point de vue théorique et numérique. Cet assemblage

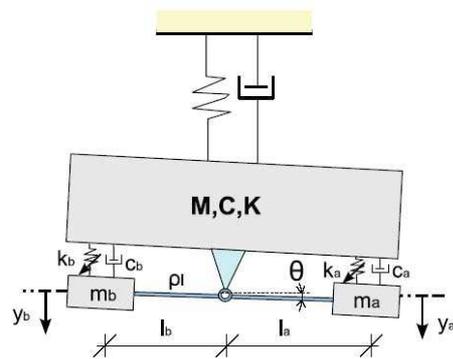


FIGURE 6.4 – Absorbeur avec montage balancier.

est fondé sur l'utilisation d'un balancier couplé au châssis du véhicule via une non-linéarité essentielle en ses extrémités et n'est pas soumise à la gravité mais fait appel à un renfort local du châssis jouant le rôle de centre de rotation et situé non loin d'un nœud du mode de torsion du véhicule. La technologie résultante nécessitera un équilibrage préalable du balancier.

La présente étude s'intéressera à l'application d'un de ces systèmes d'absorbeurs non linéaires au modèle de véhicule automobile T76. Il s'agit de remplacer le système linéaire actuel par un système non linéaire plus léger avec une efficacité au moins équivalente voire meilleure que celle des batteurs linéaires et ceci pour une moindre masse ajoutée et un fonctionnement adapté aux régimes transitoires. Il s'agit également d'optimiser le dimensionnement des NES vis à vis de leur masse propre, leur raideur non linéaire, leur amortissement spécifique et d'évaluer la fiabilité numérique relative à une modification d'une des propriétés modales caractéristiques du véhicule ou des NES.

6.2 Modèle éléments finis T76 et réduction modale

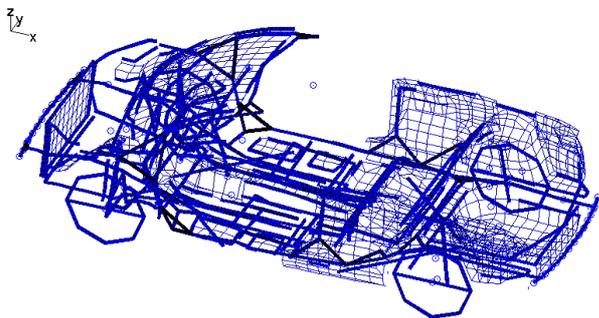


FIGURE 6.5 – Modèle éléments finis T76.

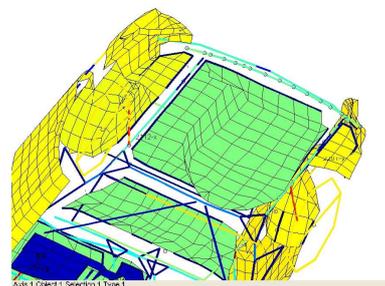


FIGURE 6.6 – Ancrages des batteurs.

L'étude se base sur un modèle éléments finis du véhicule PEUGEOT 307CC réalisé à l'aide du code NASTRAN. L'analyse modale a révélé la présence de 153 modes prépondérants. La figure Fig. 6.5 montre une vue de ce modèle éléments finis, avec un zoom rapproché au niveau de l'implantation des futurs batteurs en figure 6.6. Lorsque le véhicule est en circulation, la trépidation à laquelle sont soumis les pneumatiques par les défaut d'uni de la chaussée active

particulièrement un mode de torsion localisé à 15.39 Hz qui se trouve être particulièrement néfaste pour le confort des occupants du véhicule. Les effets se traduisent par une torsion du pare-brise, une vibration du rétroviseur et d'autres vibrations générant une sensation d'inconfort soulignée par de nombreux utilisateurs. L'enjeu est donc de parvenir à contrôler ce mode de torsion afin d'annihiler tous ces effets sur l'utilisateur. Une solution technique a déjà été apportée au problème par les concepteurs du véhicule à l'aide d'un système d'absorption passif de type Frahm accordé sur la fréquence du mode de torsion. Ce système est composé de deux batteurs accordés de masses respectives 7 kg et 10 kg illustré en Fig. 6.7. On se propose d'étudier l'efficacité et le design de deux configuration d'absorbeurs non linéaires utilisant le principe du pompage énergétique pour contrôler le mode de torsion du véhicule.

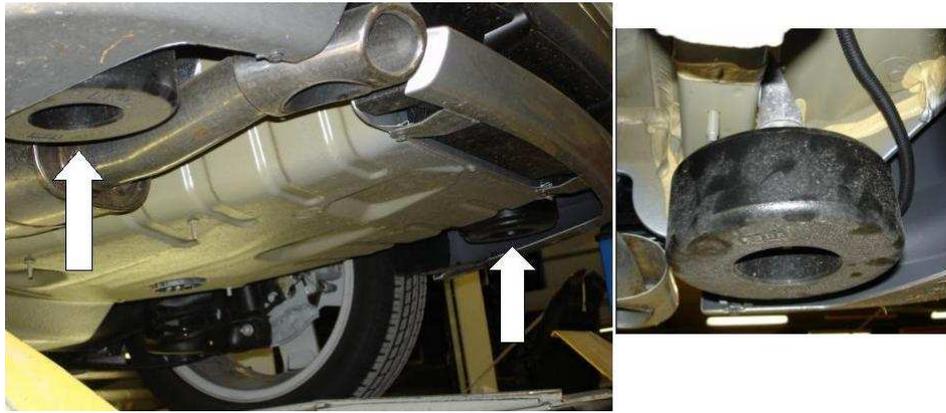


FIGURE 6.7 – Implantation des batteurs linéaires actuels

6.2.1 Modèle en base physique T76 – code Nastran –

6.2.1.1 Modèle discret T76 libre

Le modèle aux éléments finis T76 fourni par PCA et écrit dans la base physique avec des conditions aux limites libres met en scène les matrices généralisées de masse M_l , d'amortissement d'origine visqueuse C_l , de raideur K_l , d'amortissement hystérétique H_l et le vecteur de déplacements généralisés $X_l(t)$, le vecteur de forces généralisées F_l de dimension $N_l = 12055$ degrés de liberté. Une table de connectivité appelée *Case.dof* permet de relier les ddls assemblés dans X_l aux ddls du maillage du modèle de véhicule.

Au final, les équations du mouvement du modèle éléments fini du véhicule T76 en base physique sous conditions aux limites libres sont régies par le système différentiel suivant :

$$\underline{\underline{M}}_l \ddot{X}_l(t) + \underline{\underline{C}}_l \dot{X}_l(t) + \left(\underline{\underline{K}}_l + i \underline{\underline{H}}_l \right) X_l(t) = \underline{F}_l(t). \quad (6.1)$$

Une variante de modèle a été construite par élimination des degrés de liberté correspondant aux contacts des roues avec la route, ddls dénommés ci-après X_{br} . Le modèle aux éléments finis du véhicule T76 écrit en base physique avec des conditions de blocages des degrés de liberté des contacts de roues selon les directions 1 à 6 correspondant à une élimination des lignes et des colonnes associées aux ddls de roues dans les matrices du modèle libre s'établit selon les

équations :

$$\underline{\underline{M}}_b \ddot{\underline{X}}_b(t) + \underline{\underline{C}}_b \dot{\underline{X}}_b(t) + \left(\underline{\underline{K}}_b + i \underline{\underline{H}}_b \right) \underline{X}_b(t) = \underline{F}_b(t), \quad (6.2)$$

mettant en scène les matrices extraites M_b , C_b , K_b , H_b , le vecteur de déplacement X_b , le vecteur de forces F_b et $N_b = 12049$ ddls.

Une analyse spectrale du système homogène a permis de construire une base de $N = 153$ modes bloqués $\underline{\underline{\Phi}}$ associées aux fréquences propres $\underline{\omega}$ vérifiant les propriétés de diagonalisation simultanées suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{K}}_b \underline{\underline{\Phi}} &= \omega^2 \underline{\underline{M}}_b \underline{\underline{\Phi}}, \\ \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{M}}_b \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{M}}, \\ \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{K}}_b \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{K}}, \\ \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{C}}_b \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{C}}, \\ \underline{\underline{\Phi}}^T \underline{\underline{H}}_b \underline{\underline{\Phi}} &= \underline{\underline{H}}. \end{cases} \quad (6.3)$$

6.2.1.2 Formulation énergétique

Le système maître considéré dans le dimensionnement ultérieur des NES est le modèle de véhicule *T76* supposé linéaire, représenté par les matrices assemblées M_l , C_l , K_l , H_l et le vecteur de déplacements X_l . Ce système maître est désigné par (M) . Les matrices et vecteurs sont obtenus par discrétisation de Rayleigh-Ritz d'un modèle continu de véhicule. Le modèle continu est associé à un champ de déplacement continu $u(x, t)$ et fait intervenir des fonctions de forme polynômiales par morceaux $L_i(x)$ telles que

$$u(x, t) = \sum_i X_{l,i}(t) L_i(x), \quad (6.4)$$

et vérifiant les relations suivantes aux noeuds $(x_j)_j$ du maillage

$$L_i(x_j) = \delta_{i,j}. \quad (6.5)$$

L'objet de la présente section est de faire le bilan des différentes énergies en présence pour pouvoir appliquer le théorème d'Hamilton, à savoir les incréments d'énergie potentielle de déformation δU_M , d'énergie cinétique δT_M , du travail des forces conservatives δW_M^c , du travail des forces non conservatives δW_M^{nc} . Ces énergie sont associées à un champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible $\delta u(x, t)$ entre deux configurations de temps t_1 et t_2 tel que :

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0 \quad \forall x \in M. \quad (6.6)$$

Energie de déformation

$$\delta U_M = \int_{\Omega} \mathcal{A}(u(x, t)) \delta u(x, t) d\Omega \quad (6.7)$$

$$= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \mathcal{A}(L_i) L_j d\Omega X_i \delta X_j \quad (6.8)$$

$$\approx \underline{\delta X}^T \underline{\underline{K}}_b \underline{X}. \quad (6.9)$$

Energie cinétique

$$\delta T_M = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \delta \dot{u}(x, t) \, d\Omega \quad (6.10)$$

$$= - \sum_{i,j} \int_{\Omega} \rho L_i(x) L_j(x) \, d\Omega \, \ddot{X}_i \, \delta X_j \quad (6.11)$$

$$\approx - \underline{\delta X}^T \underline{\underline{M}}_l \underline{\ddot{X}}. \quad (6.12)$$

Travail des forces conservatives

$$\delta W_M^c = \int_{\Omega} f_{\Omega} \delta u(x, t) \, d\Omega + \int_{\Sigma} f_{\Sigma} \delta u(x, t) \, d\Sigma \quad (6.13)$$

$$= \sum_j \left[\int_{\Omega} f_{\Omega}(x) L_j(x) \, d\Omega + \int_{\Sigma} f_{\Sigma}(x) L_j(x) \, d\Sigma \right] \delta X_j \quad (6.14)$$

$$\approx \underline{\delta X}^T \underline{F}_l. \quad (6.15)$$

Travail des forces non conservatives

$$\delta W_M^{nc} = \int_{\Omega} \left(\alpha(x) \dot{u}(x, t) \delta u(x, t) + i \mathcal{B}(u(x, t)) \delta u(x, t) \right) \, d\Omega \quad (6.16)$$

$$= \sum_{i,j} \int_{\Omega} \alpha(x) L_i(x) L_j(x) \, d\Omega \, \dot{X}_i \, \delta X_j + i \int_{\Omega} \mathcal{B}(L_i) L_j \, d\Omega \, X_i \, \delta X_j \quad (6.17)$$

$$\approx \underline{\delta X}^T \underline{\underline{C}}_l \underline{\dot{X}} + i \underline{\delta X}^T \underline{\underline{H}}_l \underline{X}. \quad (6.18)$$

Principe d'Hamilton

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L_M dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta W_M^{nc}, \quad (6.19)$$

où $L_M = T_M - U_M + W_M^c$ est le Lagrangien du système (M).

En intégrant par partie la variation d'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2 on obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \delta \dot{u}(x, t) \, d\Omega \, dt &= \left[\int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \delta u(x, t) \, d\Omega \right]_{t_1}^{t_2} \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) \delta u(x, t) \, d\Omega \, dt, \end{aligned} \quad (6.20)$$

avec $\delta u(x_i, t) = \delta u(x, t) \delta_{x=x_i}(x)$ où $\delta_{x=x_i}(x)$ est la mesure de Stieljes.

Au final, une approximation du bilan énergétique discrétisé est donnée par :

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{\delta X}^T \left(\underline{\underline{M}}_l \underline{\ddot{X}} + \underline{\underline{C}}_l \underline{\dot{X}} + (\underline{\underline{K}}_l + i \underline{\underline{H}}_l) \underline{X} - \underline{F}_l \right) dt = 0, \quad (6.21)$$

C.L. : $\forall t_i, \quad \delta X(t_i) = 0, \quad i = 1, 2.$

On retrouve alors les équations du mouvement données par (6.1).

6.2.2 Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton

6.2.2.1 Equations condensées du mouvement

La prise en compte des conditions aux limites qu'impose le forçage de trépidation sur les roues du véhicule $T76$ est réalisée en adoptant la technique de réduction de Craig-Bampton sur le modèle libre en base physique $MCKHT_l$. Seule la contribution de la matrice de raideur K_l est prise en compte dans la réduction et les contributions des termes d'inertie M_l , d'amortissement visqueux C_l et hystérétique K_l sont négligées.

La sollicitation de trépidation due aux défauts de l'enrobé bitumineux impose des mouvements sur les degrés de liberté d'interface aux bases de roues. L'utilisation de la méthode de Craig-Bampton est adaptée au cas d'interfaces fixes ce qui impose de décomposer les degrés de liberté de la structure en deux catégories :

- les degrés de liberté 'frontières' : pour simplifier, on considère que ces degrés de liberté sont ceux pouvant potentiellement être chargés au cours du temps et ceux sur lesquels s'appliquent des conditions limites (les bases de roue du véhicule). Les chargements volumiques (tel le poids) n'influent pas sur la détermination des degrés de liberté frontières, sans quoi cette décomposition n'aurait pas de sens, ces degrés de liberté seront notés X_{br} et toute quantité Q y faisant référence sera indicée Q_{br} ,
- les degrés de liberté 'intérieurs' : il s'agit de tous les autres degrés de liberté (un chargement volumique peut éventuellement s'appliquer sur ces degrés de liberté), ces degrés de liberté seront notés X_b et coïncident avec les degrés de liberté du modèle de véhicule avec base de roues bloquées. Toute quantité Q y faisant référence sera indicée Q_b .

La théorie de Craig-Bampton [5] introduit une matrice de réduction T_{cb} liant les déplacements généralisés $X_l(t)$ aux déplacements condensés X_{cb} via les relations :

$$\underline{X}_l = \begin{bmatrix} X_{br} \\ X_b \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$= \underline{\mathbb{T}}_{cb} \cdot X_{cb} \quad (6.23)$$

$$= \begin{bmatrix} \underline{\mathbb{I}} & \underline{\mathbb{O}} \\ -\underline{\mathbb{K}}_{b,b}^{l,-1} \underline{\mathbb{K}}_{b,br}^l & \underline{\mathbb{K}}_{b,br}^l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_{br} \\ \underline{q} \end{bmatrix}. \quad (6.24)$$

où X_{br} et X_b désignent respectivement les degrés de liberté d'interface situés à la base des roues et imposés par la trépidation, les degrés de liberté internes au véhicule, Φ la matrice des modes bloqués ϕ_b et finalement q le vecteur des coordonnées modales réduites dans la base des modes bloqués aux interfaces.

En introduisant la matrice de raideur de relèvement statique $\underline{\mathbb{K}}_s$ définie par :

$$\underline{\mathbb{K}}_s = -\underline{\mathbb{K}}_{b,b}^{l,-1} \underline{\mathbb{K}}_{b,br}^l, \quad (6.25)$$

on en déduit la condensation :

$$\underline{X}_b = \underline{\Phi} \underline{q} + \underline{\mathbb{K}}_s \underline{X}_{br}. \quad (6.26)$$

En reportant la transformation de Craig-Bampton dans le modèle (6.1), on obtient :

$$\underline{\mathbb{T}}_{cb}^T \underline{\mathbb{M}}_l \underline{\mathbb{T}}_{cb} \ddot{\underline{X}}_{cb} + \underline{\mathbb{T}}_{cb}^T \underline{\mathbb{C}}_l \underline{\mathbb{T}}_{cb} \dot{\underline{X}}_{cb} + \underline{\mathbb{T}}_{cb}^T (\underline{\mathbb{K}}_l + i \underline{\mathbb{H}}_l) \underline{\mathbb{T}}_{cb} \underline{X}_{cb} = \underline{\mathbb{T}}_{cb}^T \underline{F}_l. \quad (6.27)$$

Le premier bloc d'équations qui exprime les réactions d'appuis imposées par les déplacements de trépidation est volontairement oublié. Au final, les équations du mouvement sont condensées dans la base des modes bloqués et sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbb{M}} \ddot{q} + \underline{\mathbb{C}} \dot{q} + (\underline{\mathbb{K}} + i \underline{\mathbb{H}}) q &= -\underline{\Phi}^T (\underline{\mathbb{M}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{M}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s) \ddot{\underline{X}}_{br} \\ &\quad - \underline{\Phi}^T (\underline{\mathbb{C}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{C}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s) \dot{\underline{X}}_{br} \\ &\quad - i \underline{\Phi}^T (\underline{\mathbb{H}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{H}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s) \underline{X}_{br} \\ &= \underline{\mu}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

faisant intervenir le vecteur de forces modales généralisées $\underline{\mu}$.

Dans le cas où la sollicitation de trépidation impose aux bases de roues un déplacement harmonique à la fréquence ω du type :

$$\underline{X}_{br}(t) = \underline{X}_{br,0} e^{i\omega t}, \quad (6.29)$$

alors le vecteur de forces modales $\underline{\mu}$ se simplifie sous la forme

$$\underline{\mu}(t) = -\underline{\Phi}^T \left(\underline{\mathbb{K}}_{cb} - \omega^2 \underline{\mathbb{M}}_{cb} + i(\omega \underline{\mathbb{C}}_{cb} + \underline{\mathbb{H}}_{cb}) \right) \underline{X}_{br,0} e^{i\omega t}, \quad (6.30)$$

faisant intervenir les matrices réduites¹

$$\begin{cases} \underline{\mathbb{M}}_{cb} &= \underline{\mathbb{M}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{M}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s, \\ \underline{\mathbb{C}}_{cb} &= \underline{\mathbb{C}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{C}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s, \\ \underline{\mathbb{K}}_{cb} &= \underline{\mathbb{K}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{K}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s, \\ \underline{\mathbb{H}}_{cb} &= \underline{\mathbb{H}}_{b,br}^l + \underline{\mathbb{H}}_{b,b}^l \underline{\mathbb{K}}_s. \end{cases} \quad (6.31)$$

6.2.2.2 Bilan énergétique

En appliquant la même démarche que précédemment, on obtient le bilan énergétique exprimé dans la base des modes bloqués :

Energie de déformation

$$\delta U_M = \int_{\Omega} \mathcal{A}(u(x,t)) \delta u(x,t) d\Omega \quad (6.32)$$

$$\approx \underline{\delta q}^T \underline{\mathbb{K}} q. \quad (6.33)$$

Energie cinétique

$$\delta T_M = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \delta \dot{u}(x,t) d\Omega \quad (6.34)$$

$$\approx -\underline{\delta q}^T (\underline{\mathbb{M}} \ddot{q} + \underline{\Phi}^T \underline{\mathbb{M}}_{cb} \ddot{\underline{X}}_{br}). \quad (6.35)$$

¹Par construction, la matrice réduite de de Craig-Bampton K_{cb} est nulle

Travail des forces extérieures conservatives

$$\delta W_M^c = 0. \quad (6.36)$$

Travail des forces non conservatives

$$\delta W_M^{nc} = \int_{\Omega} \left(\alpha(x) \dot{u}(x, t) \delta u(x, t) + i\mathcal{B}(u(x, t)) \delta u(x, t) \right) d\Omega \quad (6.37)$$

$$\approx \underline{\delta q}^T \left(\underline{\mathbf{C}} \dot{\underline{q}} + \Phi^T \underline{\mathbf{C}}_{cb} \dot{\underline{X}}_{br} \right) + i \underline{\delta q}^T \left(\underline{\mathbf{H}} \underline{q} + \Phi^T \underline{\mathbf{H}}_{cb} \underline{X}_{br} \right). \quad (6.38)$$

L'utilisation du principe d'Hamilton permet de retrouver les équations du mouvement (6.28).

6.3 Modèle spectral avec NES balancier

Ce modèle fait l'hypothèse d'un système d'absorption constitué de deux NES montés en pseudo-parallèle et implantés aux mêmes ancrages que le système linéaire d'absorption actuel, c'est à dire au niveau des longerons arrières (un de chaque côté) comme illustré en Fig. 6.7. Mais dans le cas du système automobile, le modèle avec des NES séparés présente certaines lacunes qui peuvent devenir rédhibitoires lors d'un fonctionnement en présence de forces de gravité. En effet ces dernières 'cassent' le caractère essentiel de la non linéarité de raideur en déplaçant le point d'équilibre des NES.

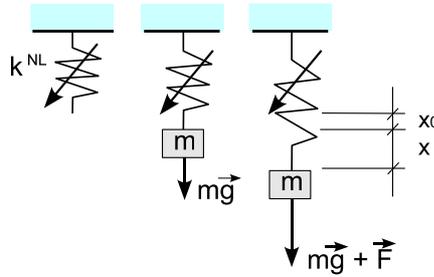


FIGURE 6.8 – Comportement des ressorts avec la gravité

Prenons l'exemple d'un système masse-ressort purement non linéaire cubique de raideur k^{NL} . En état d'équilibre statique, le ressort non linéaire subit une élongation x_0 telle que :

$$mg = k^{NL} x_0^3, \quad (6.39)$$

où m est la masse et g est l'accélération de gravité.

Quand on applique une force F sur la masse, la relation entre cette force de rappel et la déformation du ressort s'écrit comme suit :

$$mg + F = k^{NL} (x + x_0)^3, \quad (6.40)$$

$$\rightarrow F = k^{NL} [(x + x_0)^3 - x_0^3] = k^{NL} x^3 + (3k^{NL} x_0) x^2 + \underbrace{(3k^{NL} x_0^2)}_{k^L} x. \quad (6.41)$$

L'équation (6.40) montre que la relation entre la force de rappel et la déformation du ressort n'est plus purement non linéaire lorsqu'on tient compte de la gravité mais qu'il existe toujours une partie linéaire résiduelle de raideur équivalente : $k^L = 3\sqrt{m^2g^2k^{NL}}$ qui est très défavorable et qui peut remettre en cause le déclenchement du phénomène de pompage énergétique.

Plusieurs solutions palliatives ont été recherchées afin de minimiser le plus possible l'influence de la gravité sur les NES en état d'équilibre statique. Les solutions permettant de 'tuer' la gravité se révèlent très compliquées et trop coûteuses pour pouvoir être envisagées comme technologie de contrôle de vibrations dans le domaine automobile. Une piste alternative a été étudiée dans le contexte précis d'un mode de torsion à contrôler via l'ajout de 2 masses. L'idée est de profiter du couple induit par les deux masses pour équilibrer les poids grâce à un système de liaison.

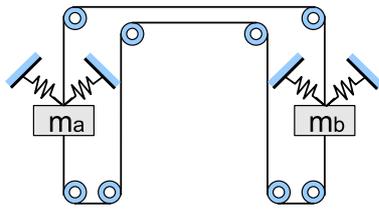


FIGURE 6.9 – Système poulie-cable

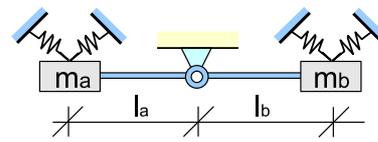


FIGURE 6.10 – Système balancier

Dans le cadre de cette étude, deux solutions de système de liaison ont été développées : un système de poulie-cable (cf Fig. 6.9) et un système de balancier (cf Fig. 6.10). Le système de poulie-cable, grâce à la souplesse des câbles, présente l'avantage de franchir des obstacles éventuels mais cette solution pose des problèmes de mise en tension des câbles et rajoute différentes causes de frottement. Cette solution a été abandonnée. Dans le cas du système balancier, les contraintes d'espace sont présentes mais il est possible de jouer sur la longueur des bras de levier pour assurer l'état d'équilibre statique et la conservation du caractère essentiel de la nonlinéarité des raideur autour de la position d'équilibre.

Dans cette section, nous allons étudier la modélisation du véhicule automobile contrôlé par des NES reliés par une technologie balancier comme indiqué en figure Fig. 6.11.

6.3.1 Hypothèses de modélisation

1. Le système masses-levier est supposé auto-équilibré à l'état statique et sans pré-tension interne aux ressorts,
2. Les déplacements horizontaux qui valent $l(1 - \cos \theta)$ sont négligés,
3. Le centre de rotation du levier coïncide avec un noeud du mode torsion du système maître,
4. Les bras de levier sont infiniment rigides, d'où la relation de liaison :

$$\begin{cases} y_a = u(x_o, t) + l_a \theta(t), \\ y_b = u(x_o, t) - l_b \theta(t), \end{cases} \quad (6.42)$$

où $\theta(t)$ est l'angle de rotation du levier autour du centre O .

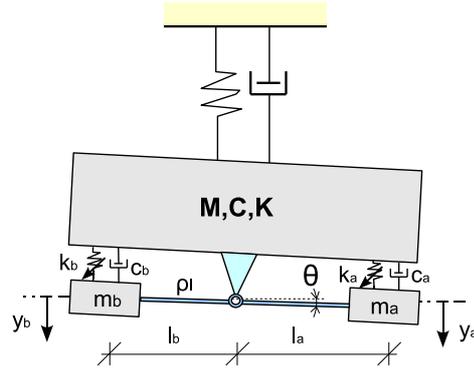


FIGURE 6.11 – Système véhicule + NES balancier

6.3.2 Modèle continu avec NES balancier

L'incrément d'énergie cinétique du système global s'écrit :

$$\delta T = \delta T_M + \delta T_{NES} + \delta T_{levier}, \quad (6.43)$$

avec :

- composante du maître :

$$\delta T_M = \int_{\Omega} \rho \dot{u}(x, t) \delta \dot{v}(x, t) d\Omega, \quad (6.44)$$

- composante des NES :

$$\delta T_{NES} = m_a \dot{y}_a \delta \dot{y}_a + m_b \dot{y}_b \delta \dot{y}_b \quad (6.45)$$

$$= \sum_{n=a,b} m_n \left(\dot{u}(x_o, t) + l_n \dot{\theta}(t) \right) \left(\delta \dot{v}(x_o, t) + l_n \delta \dot{\theta} \right) \quad (6.46)$$

$$= \left[(m_a l_a^2 + m_b l_b^2) \dot{\theta}(t) + (m_a l_a - m_b l_b) \dot{u}(x_o, t) \right] \delta \dot{\theta} + \left[(m_a + m_b) \dot{u}(x_o, t) + (m_a l_a - m_b l_b) \dot{\theta}(t) \right] \delta \dot{v}(x_o, t), \quad (6.47)$$

- composante du levier :

$$\delta T_{levier} = \int_L \rho l \dot{u}(l, t) \delta \dot{v}(l, t) dl \quad (6.48)$$

$$= \int_{-l_b}^{l_a} \rho l \left(\dot{u}(x_o, t) + l \dot{\theta}(t) \right) \left(\delta \dot{v}(x_o, t) + l \delta \dot{\theta} \right) dl \quad (6.49)$$

$$= \rho l \left[(l_a + l_b) \dot{u}(x_o, t) + \frac{l_a^2 - l_b^2}{2} \dot{\theta}(t) \right] \delta \dot{v}(x_o, t) + \rho l \left[\frac{l_a^2 - l_b^2}{2} \dot{u}(x_o, t) + \frac{l_a^3 + l_b^3}{3} \dot{\theta}(t) \right] \delta \dot{\theta} \quad (6.50)$$

$$= m_l \left[\dot{u}(x_o, t) + \frac{l_a - l_b}{2} \dot{\theta}(t) \right] \delta \dot{v}(x_o, t) + m_l \left[\frac{l_a - l_b}{2} \dot{u}(x_o, t) + \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} \dot{\theta}(t) \right] \delta \dot{\theta}. \quad (6.51)$$

L'incrément d'énergie potentielle du système global s'écrit :

$$\delta U = \delta U_M + \delta U_{NES} + \delta U_{levier}, \quad (6.52)$$

avec :

- composante du maître :

$$\delta U_M = \int_{\Omega} \mathcal{A}(u(x, t)) \delta v(x, t) d\Omega, \quad (6.53)$$

- composante des NES :

$$\delta U_{NES} = \sum_{n=a,b} \left[k_n (y_n - u(x_n, t))^3 (\delta y_n - \delta v(x_n, t)) - m_n g \delta y_n \right] \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=a,b} k_n (u(x_o, t) - u(x_n, t) + l_n \theta(t))^3 (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_n, t) + l_n \delta \theta) - \\ &\quad - \sum_{n=a,b} m_n g (\delta v(x_o, t) + l_n \delta \theta) \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} &= \left[k_a l_a (l_a \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_a, t))^3 + k_b l_b (l_b \theta(t) - u(x_o, t) + u(x_b, t))^3 \right] \delta \theta + \\ &\quad + k_a (l_a \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_a, t))^3 (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_a, t)) + \\ &\quad + k_b (-l_b \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_b, t))^3 (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_b, t)) - \\ &\quad - (m_a l_a - m_b l_b) g \delta \theta - (m_a + m_b) g \delta v(x_o), \end{aligned} \quad (6.56)$$

- composante du levier :

$$\delta U_{levier} = - \int_L \rho_l g \delta v(l, t) dl \quad (6.57)$$

$$= - \int_{-l_b}^{l_a} \rho_l (\delta v(x_o, t) + l \delta \theta) dl \quad (6.58)$$

$$= -\rho_l (l_a + l_b) g \delta v(x_o, t) - \frac{1}{2} \rho_l (l_a^2 - l_b^2) \delta \theta \quad (6.59)$$

$$= -m_l g \delta v(x_o, t) - m_l g \frac{l_a - l_b}{2}. \quad (6.60)$$

L'incrément d'énergie non conservative du système global s'exprime comme :

$$\delta W^{nc} = \delta W_M + \delta W_{NES}, \quad (6.61)$$

avec :

- composante du maître :

$$\delta W_M = \int_{\Omega} \alpha \dot{u}(x, t) \delta v(x, t) d\Omega, \quad (6.62)$$

- composante des NES :

$$\delta W_{NES} = \sum_{n=a,b} c_n (\dot{y}_n - \dot{u}(x_n, t)) (\delta y_n - \delta v(x_n, t)) \quad (6.63)$$

$$= \sum_{n=a,b} c_n \left(\dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_n, t) + l_n \dot{\theta}(t) \right) (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_n, t) + l_n \delta \theta) \quad (6.64)$$

$$= \left[(c_a l_a^2 + c_b l_b^2) \dot{\theta}(t) + c_a l_a (\dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_a, t)) - c_b l_b (\dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_b, t)) \right] \delta \theta + \\ + c_a (l_a \dot{\theta}(t) + \dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_a, t)) (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_a, t)) + \\ + c_b (-l_b \dot{\theta}(t) + \dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_b, t)) (\delta v(x_o, t) - \delta v(x_b, t)). \quad (6.65)$$

L'incrément des forces extérieures se développe en :

$$\delta W^{ext} = \int_{\Omega} f_{\Omega} \delta v(x, t) d\Omega + \int_{\Sigma} f_{\Sigma} \delta v(x, t) d\Sigma. \quad (6.66)$$

Le principe de moindre action de Hamilton nous donne la relation entre des incréments d'énergie entre la trajectoire naturelle effectivement suivie et toute trajectoire virtuelle infiniment voisine ayant les mêmes extrémités dans l'espace et dans le temps :

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = \int_{t_1}^{t_2} \delta W^{nc} dt, \quad (6.67)$$

où L est Lagrangien du système mécanique calculé par la formule :

$$L = T - U + W^{ext}. \quad (6.68)$$

On calcule d'abord la variation de l'intégrale d'action T :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_M dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \dot{u}(x, t) \delta \dot{v}(x, t) d\Omega \right) dt \quad (6.69)$$

$$= \left[\int_{\Omega} \rho \dot{u}(x, t) \delta v(x, t) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \ddot{u}(x, t) \delta v(x, t) \right) dt, \quad (6.70)$$

introduisant des conditions initiales : $\delta v(x, t_{i=1,2}) = \delta y_a = \delta y_b = 0$, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_M dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \ddot{u}(x, t) \delta v(x, t) \right) dt. \quad (6.71)$$

Identiquement pour les autres variations d'énergie cinétique, nous avons :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_{NES} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left[(m_a l_a^2 + m_b l_b^2) \ddot{\theta}(t) + (m_a l_a - m_b l_b) \ddot{u}(x_o, t) \right] \delta \theta dt - \quad (6.72)$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left[(m_a + m_b) \ddot{u}(x_o, t) + (m_a l_a - m_b l_b) \ddot{\theta}(t) \right] \delta v(x_o, t) dt, \quad (6.73)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T_{levier} dt = - \int_{t_1}^{t_2} m_l \left[\ddot{u}(x_o, t) + \frac{l_a - l_b}{2} \ddot{\theta}(t) \right] \delta v(x_o, t) dt - \\ - \int_{t_1}^{t_2} m_l \left[\frac{l_a - l_b}{2} \ddot{u}(x_o, t) + \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} \ddot{\theta}(t) \right] \delta \theta dt. \quad (6.74)$$

En remplaçant les incréments d'énergie dans la relation (6.67) et en choisissant des variations virtuelles cinématiquement admissibles, on peut enfin obtenir les équations dynamiques du système étudié :

- pour le maître :

$$\begin{aligned}
& [\rho \ddot{u}(x, t) + \alpha \dot{u}(x, t) + \mathcal{A}(u(x, t))] + \left[(m_a + m_b + m_l) \ddot{u}(x_o, t) + \left(m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2} \right) \ddot{\theta}(t) \right] \delta_{x_o} \\
& + c_a \left[l_a \dot{\theta}(t) + \dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_a, t) \right] (\delta_{x_o} - \delta_{x_a}) + c_b \left[-l_b \dot{\theta}(t) + \dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_b, t) \right] (\delta_{x_o} - \delta_{x_b}) \\
& + k_a \left[l_a \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_a, t) \right]^3 (\delta_{x_o} - \delta_{x_a}) + k_b \left[-l_b \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_b, t) \right]^3 (\delta_{x_o} - \delta_{x_b}) \\
& = f_\Omega + f_\Sigma + (m_a + m_b + m_l) g \delta_{x_o},
\end{aligned} \tag{6.75}$$

où δ_{x_i} sont les mesures de Stieljes,

- pour les NES :

$$\begin{aligned}
& \left(m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + m_l \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} m_l \right) \ddot{\theta}(t) + (c_a l_a^2 + c_b l_b^2) \dot{\theta}(t) + \\
& (m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2}) \ddot{u}(x_o, t) + c_a l_a [\dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_a, t)] - c_b l_b [\dot{u}(x_o, t) - \dot{u}(x_b, t)] \\
& + k_a l_a [l_a \theta(t) + u(x_o, t) - u(x_a, t)]^3 + k_b l_b [l_b \theta(t) - u(x_o, t) + u(x_b, t)]^3 \\
& = (m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2}) g.
\end{aligned} \tag{6.76}$$

6.3.3 Modèle dynamique discrétisé E.F.

D'après la méthode des éléments finis, le champ de déplacement peut se décomposer sur une base composée des fonctions de formes correspondant aux degrés de liberté choisis :

$$u(x, t) = \sum_i U_i(t) L_i(x) = {}^t \underline{L}(x) \underline{U}(t), \tag{6.77}$$

où $U_i(t)$ sont les déplacements en fonction du temps des ddls du système des éléments finis choisis et $\Psi_i(x)$ sont les fonctions d'interpolation d'espace.

En choisissant des variations virtuelles cinématiquement admissibles, on peut enfin obtenir des équations dynamiques en base modale :

- pour le maître :

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \rho \sum_i L_i(x) \ddot{U}_i(t) L_j(x) d\Omega + \int_\Omega \alpha \sum_i L_i(x) \dot{U}_i(t) L_j(x) d\Omega + \int_\Omega \sum_i A(L_i(x), L_j(x)) U_i(t) d\Omega \\
& + (m_a + m_b + m_l) \sum_i L_i(x_o) \ddot{U}_i(t) L_j(x_o) + (m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2}) \ddot{\theta} L_j(x_o) \\
& + c_a \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_a)] \dot{U}_i(t) [L_j(x_o) - L_j(x_a)] + c_a l_a [L_j(x_o) - L_j(x_a)] \dot{\theta}(t) \\
& + c_b \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_b)] \dot{U}_i(t) [L_j(x_o) - L_j(x_b)] - c_b l_b [L_j(x_o) - L_j(x_b)] \dot{\theta}(t) \\
& + k_a \left\{ l_a \theta(t) + \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_a)] U_i(t) \right\}^3 [L_j(x_o) - L_j(x_a)] \\
& + k_b \left\{ -l_b \theta(t) + \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_b)] U_i(t) \right\}^3 [L_j(x_o) - L_j(x_b)] \\
& = \int_\Omega f_\Omega(x) L_j(x) d\Omega + \int_\Sigma f_\Sigma L_j(x) d\Sigma + (m_a + m_b + m_l) g L_j(x_o),
\end{aligned} \tag{6.78}$$

- pour les NES :

$$\begin{aligned}
 & \left(m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + m_l \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} \right) \ddot{\theta}(t) + (m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2}) \sum_i L_i(x_o) \ddot{U}(t) + \\
 & + (c_a l_a^2 + c_b l_b^2) \dot{\theta}(t) + c_a l_a \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_a)] \dot{U}(t) - c_b l_b \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_b)] \dot{U}(t) \\
 & + k_a l_a \left\{ l_a \theta(t) + \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_a)] U_i(t) \right\}^3 + k_b l_b \left\{ l_b \theta(t) - \sum_i [L_i(x_o) - L_i(x_b)] U_i(t) \right\}^3 \\
 & = (m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2}) g.
 \end{aligned} \tag{6.79}$$

D'après la première hypothèse, le système masses-levier est auto-équilibre en état statique sans forces de rappel des ressorts et les ressorts ne sont mis en place qu'après la déformée statique, les équations (6.78) et (6.79) en état statique ont la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \sum_i A(L_i(x), L_j(x)) U_i^{st}(t) d\Omega = (m_a + m_b + m_l) g L_j(x_o), \tag{6.80}$$

$$m_a l_a - m_b l_b + m_l \frac{l_a - l_b}{2} = 0. \tag{6.81}$$

L'équation (6.80) se récrit sous forme matricielle :

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbb{K}} \underline{U}^{st} &= (m_a + m_b + m_l) g \underline{L}(x_o), \\
 \Rightarrow \underline{U}^{st} &= (m_a + m_b + m_l) g \underline{\mathbb{K}}^{-1} \underline{L}(x_o),
 \end{aligned} \tag{6.82}$$

où $K_{ij} = \int_{\Omega} A(L_i(x), L_j(x)) d\Omega$ dénote la raideur correspondant aux dills i et j .

Enfin, le système d'équations dynamiques simplifié est aussi écrit sous forme matricielle en supprimant les déplacements statiques et les termes nuls :

$$\text{Maître} \begin{cases} [\underline{\mathbb{M}} + (m_a + m_b + m_l) \underline{L}(x_o)^T \underline{L}(x_o)] \ddot{\underline{U}} + \underline{\mathbb{C}} \dot{\underline{U}} + \underline{\mathbb{K}} \underline{U} \\ - c_a \underline{L}^a (l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{L}^a \dot{\underline{U}}) - c_b \underline{L}^b (l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{L}^b \dot{\underline{U}}) \\ - k_a \underline{L}^a (l_a \theta - {}^T \underline{L}^a \underline{U})^3 - k_b \underline{L}^b (l_b \theta - {}^T \underline{L}^b \underline{U})^3 \\ = \underline{f}(t), \end{cases} \tag{6.83}$$

$$\text{NES} \begin{cases} \left(m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + m_l \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} \right) \ddot{\theta} \\ + c_a l_a (l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{L}^a \dot{\underline{U}}) + c_b l_b (l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{L}^b \dot{\underline{U}}) \\ + k_a l_a (l_a \theta - {}^T \underline{L}^a \underline{U})^3 + k_b l_b (l_b \theta - {}^T \underline{L}^b \underline{U})^3 \\ = 0, \end{cases} \tag{6.84}$$

$$\text{où :} \begin{cases} M_{ij} = \int_{\Omega} \rho L_i(x) L_j(x) d\Omega \\ C_{ij} = \int_{\Omega} \alpha L_i(x) L_j(x) d\Omega \\ \underline{L}^a = \underline{L}(x_a) - \underline{L}(x_o) \\ \underline{L}^b = \underline{L}(x_o) - \underline{L}(x_b) \end{cases}$$

6.3.4 Modèle condensé sur la base de Craig-Bampton

En introduisant la transformation dans la base de Craig-Bampton, on obtient :

$$\text{Maître} \quad \left\{ \begin{array}{l} {}^T \underline{\Phi} \left[\underline{\mathbb{M}}_{b,b} + (m_a + m_b + m_l) \underline{L}_b(x_o) {}^T \underline{L}_b(x_o) \right] \underline{\Phi} \ddot{q} + {}^T \underline{\Phi} \underline{\mathbb{C}}_{b,b} \underline{\Phi} \dot{q} + {}^T \underline{\Phi} \underline{\mathbb{K}}_{b,b} \underline{\Phi} q \\ -c_a {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^a \left[l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{L}_b^a \left(\underline{\Phi} \dot{q} + \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \right] - c_b {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^b \left[l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{L}_b^b \left(\underline{\Phi} \dot{q} + \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \right] \\ -k_a {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^a \left[l_a \theta - {}^T \underline{L}_b^a \left(\underline{\Phi} q + \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right) \right]^3 - k_b {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^b \left[l_b \theta - {}^T \underline{L}_b^b \left(\underline{\Phi} q + \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right) \right]^3 \\ = \underline{f}_I(t) - {}^T \underline{\Phi} \left[\left(\underline{\mathbb{M}}_{b,br} + \underline{\mathbb{M}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) \ddot{U}_{br} + \left(\underline{\mathbb{C}}_{b,br} + \underline{\mathbb{C}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) \dot{U}_{br} + \left(\underline{\mathbb{K}}_{b,br} + \underline{\mathbb{K}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) U_{br} \right], \end{array} \right. \quad (6.85)$$

$$\text{NES} \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + m_l \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3} \right) \ddot{\theta} \\ + c_a l_a \left[l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{L}_b^a \left(\underline{\Phi} \dot{q} + \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \right] + c_b l_b \left[l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{L}_b^b \left(\underline{\Phi} \dot{q} + \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \right] \\ + k_a l_a \left[l_a \theta - {}^T \underline{L}_b^a \left(\underline{\Phi} q + \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right) \right]^3 + k_b l_b \left[l_b \theta - {}^T \underline{L}_b^b \left(\underline{\Phi} q + \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right) \right]^3 \\ = 0. \end{array} \right. \quad (6.86)$$

On considère ce système en état statique et sans couplage avec le système balancier :

$$0 = -{}^T \underline{\Phi} \left(\underline{\mathbb{K}}_{b,br} + \underline{\mathbb{K}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) U_{br} \Rightarrow \underline{\mathbb{K}}_s = \underline{\mathbb{K}}_{b,b}^{-1} \underline{\mathbb{K}}_{b,br}. \quad (6.87)$$

Pour la simplification d'écriture, on introduit de nouveaux paramètres en base modale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbb{M}} = {}^T \underline{\Phi} \left[\underline{\mathbb{M}}_{b,b} + (m_a + m_b + m_l) \underline{L}_I(x_o) {}^T \underline{L}_I(x_o) \right] \underline{\Phi}, \\ \underline{\mathbb{K}} = {}^T \underline{\Phi} \underline{\mathbb{K}}_{b,b} \underline{\Phi}, \\ \underline{\mathbb{C}} = {}^T \underline{\Phi} \underline{\mathbb{C}}_{b,b} \underline{\Phi}, \\ \underline{\Delta}_a = {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^a = {}^T \underline{\Phi} \left[\underline{L}_b(x_a) - \underline{L}_b(x_o) \right] = \underline{\Phi}(x_a) - \underline{\Phi}(x_o), \\ \underline{\Delta}_b = {}^T \underline{\Phi} \underline{L}_b^b = {}^T \underline{\Phi} \left[\underline{L}_b(x_b) - \underline{L}_b(x_o) \right] = \underline{\Phi}(x_b) - \underline{\Phi}(x_o), \\ m L^2 = m_a l_a^2 + m_b l_b^2 + m_l \frac{l_a^2 - l_a l_b + l_b^2}{3}; \quad L = l_a + l_b. \end{array} \right. \quad (6.88)$$

On a le système réduit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\mathbb{M}} \ddot{q} + \underline{\mathbb{C}} \dot{q} + \underline{\mathbb{K}} q - c_a \underline{\Delta}_a \left(l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{\Delta}_a \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) - c_b \underline{\Delta}_b \left(l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{\Delta}_b \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \\ - k_a \underline{\Delta}_a \left(l_a \theta - {}^T \underline{\Delta}_a q - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 - k_b \underline{\Delta}_b \left(l_b \theta - {}^T \underline{\Delta}_b q - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 \\ = \underline{f}_I(t) - {}^T \underline{\Phi} \left[\left(\underline{\mathbb{M}}_{b,br} + \underline{\mathbb{M}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) \ddot{U}_{br} + \left(\underline{\mathbb{C}}_{b,br} + \underline{\mathbb{C}}_{b,b} \underline{\mathbb{K}}_s \right) \dot{U}_{br} \right] = \underline{F}(t), \end{array} \right. \quad (6.89)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m L^2 \ddot{\theta} + c_a l_a \left(l_a \dot{\theta} - {}^T \underline{\Delta}_a \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) + c_b l_b \left(l_b \dot{\theta} - {}^T \underline{\Delta}_b \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \\ + k_a l_a \left(l_a \theta - {}^T \underline{\Delta}_a q - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 + k_b l_b \left(l_b \theta - {}^T \underline{\Delta}_b q - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 \\ = 0. \end{array} \right. \quad (6.90)$$

Si l'on considère pour des conditions de design, la base de Craig-Bampton constituée du seul

mode de torsion alors les équations (6.89) et (6.90) deviennent :

$$\begin{cases} M \ddot{q} + C \dot{q} + K q - c_a \Delta_a \left(l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) - c_b \Delta_b \left(l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \\ -k_a \Delta_a \left(l_a \theta - \Delta_a q - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 - k_b \Delta_b \left(l_b \theta - \Delta_b q - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 \\ = F(t), \end{cases} \quad (6.91)$$

$$\begin{cases} m L^2 \ddot{\theta} + c_a l_a \left(l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) + c_b l_b \left(l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q} - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s \dot{U}_{br} \right) \\ +k_a l_a \left(l_a \theta - \Delta_a q - {}^T \underline{L}_b^a \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 + k_b l_b \left(l_b \theta - \Delta_b q - {}^T \underline{L}_b^b \underline{\mathbb{K}}_s U_{br} \right)^3 \\ = 0. \end{cases} \quad (6.92)$$

Les modèles dynamiques condensés avec technologie NES balancier construits dans cette section sont nécessaires au dimensionnement des absorbeurs NES. Ces modèles vont être étudiés en détails lors d'une analyse en régime libre utilisant des méthodes analytiques spécifiques, développées dans les sections qui suivent.

6.4 Études analytiques des modèles non linéaires condensés

Cette section fait la synthèse des études analytiques développées pour prédire le comportement transitoire en régime libre et stationnaire en régime forcé des modèles condensés de véhicule couplés avec les absorbeurs NES balancier. La méthode utilisée relève d'une approche asymptotique mêlant tour à tour une méthode de complexification à la Manevitch pour séparer la modulation lente de la solution dynamique rapide puis des développements par la méthode des échelles multiples. Les résultats généraux pour un système académique sont déjà présentés dans la Partie II. Ils font intervenir des critères de design pour un absorbeur simple couplé à des NES. Le but est ici de ramener le système complexe de plusieurs degrés de liberté à un nouveau système plus simple similaire au cas académique en appliquant des hypothèses dynamiquement admissibles pour pouvoir mettre en profit des résultats obtenus précédemment.

6.4.1 Comportement dynamique en régime libre

Les équations du mouvement condensées (6.89) et (6.90) sont maintenant transformées selon une approche asymptotique suivant la méthode développée dans [9] afin de déterminer le comportement du système avec NES balancier en régime libre. Il convient aussi de réduire le vecteur de coordonnées modales \underline{q} à sa seule composante scalaire associée au mode de torsion $\omega = 15,39 \text{ Hz}$ et de supprimer les termes d'excitation liés à la trépidation ou à tout autre forçage extérieur. Pour finir, l'étude fait l'hypothèse additionnelle que le terme d'amortissement hystérique h est négligeable et peut le cas échéant être remplacé par une contribution additionnelle de l'amortissement visqueux c recalée à la fréquence $\omega = 15,39 \text{ Hz}$.

On considère ici l'analyse instationnaire des modes normaux non linéaires du système (6.93) et (6.94) pour le cas de résonance 1 : 1 en utilisant l'approche asymptotique développée par Oleg V. Gendelman [9].

$$\begin{aligned}
M \ddot{q} + C \dot{q} + K q - c_a \Delta_a (l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q}) - c_b \Delta_b (l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q}) \\
- k_a \Delta_a (l_a \theta - \Delta_a q)^3 - k_b \Delta_b (l_b \theta - \Delta_b q)^3 = 0,
\end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\begin{aligned}
m L^2 \ddot{\theta} + c_a l_a (l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q}) + c_b l_b (l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q}) \\
+ k_a l_a (l_a \theta - \Delta_a q)^3 + k_b l_b (l_b \theta - \Delta_b q)^3 = 0.
\end{aligned} \quad (6.94)$$

On fait l'hypothèse de design que le centre de rotation du balancier est situé sur un nœud du mode de torsion de caisse, ce qui mathématiquement revient à considérer que la relation suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_a}{l_a} = \frac{\Delta_b}{l_b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{l_a + l_b} = \frac{\Phi_a - \Phi_b}{L} = \frac{\Delta}{L} = \beta, \\
\Rightarrow \frac{l_a}{L} = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \alpha ; \quad \frac{l_b}{L} = \frac{\Delta_b}{\Delta} = 1 - \alpha.
\end{aligned} \quad (6.95)$$

Le système d'équations (6.93) et (6.94) se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + \beta m \ddot{\theta} & = 0, \\ m \ddot{\theta} + (c_a l_a^2 + c_b l_b^2)(\dot{\theta} - \beta \dot{q}) + (k_a l_a^4 + k_b l_b^4)(\theta - \beta q)^3 & = 0. \end{cases} \quad (6.96)$$

On pose $x = \Delta q$ et $y = L\theta$ ce qui ramène les équations précédentes à :

$$\begin{cases} M \ddot{x} + C \dot{x} + K x + m \Delta^2 \ddot{y} & = 0, \\ m \ddot{y} + c(\dot{y} - \dot{x}) + k(y - x)^3 & = 0, \end{cases} \quad (6.97)$$

avec

$$\begin{cases} m & = m_a \alpha^2 + m_b (1 - \alpha)^2 + m_l (\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3}), \\ c & = c_a \alpha^2 + c_b (1 - \alpha)^2, \\ k & = k_a \alpha^4 + k_b (1 - \alpha)^4, \\ \Delta & = \Phi_a - \Phi_b. \end{cases} \quad (6.98)$$

Afin d'unitariser les équations du mouvement, on introduit les quantités intrinsèques :

$$\epsilon = \frac{m \Delta^2}{M}; \quad \lambda_0 = \frac{C}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{K}{M}; \quad \lambda = \frac{c}{m}; \quad \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (6.99)$$

L'équation (6.97) simplifiée pour les modes normaux non linéaires se réécrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \epsilon \lambda_0 \dot{x} + \omega_0^2 x + \epsilon \ddot{y} & = 0, \\ \epsilon \ddot{y} + \epsilon \lambda (\dot{y} - \dot{x}) + \epsilon \omega^2 (y - x)^3 & = 0. \end{cases} \quad (6.100)$$

Le comportement dynamique du système physique initial complexe en régime libre est condensé en un système académique qui est influencé principalement par les caractéristiques modales du mode de tension et du NES. Le transfert énergétique réalisé dans le cas académique est déjà étudié dans le chapitre 4 en définissant un critère de choix optimal pour la raideur non linéaire qui doit être calibrée en fonction de l'amortissement du NES et de l'énergie initiale à atténuer. L'application pratique sera étudiée dans la section des études numériques.

6.4.2 Etude du modèle NES balancier sous sollicitation de trépidation

On considère ici que le système maître est soumis à des déplacements imposés sur les degrés de liberté aux bases de roues alors que les degrés de liberté intérieurs ne sont soumis à aucune force extérieure. Le déplacement vertical imposé de trépidation aux quatre bases de roues est supposé purement harmonique de fréquence ω_f , d'amplitude nominale E_0 et s'écrit :

$$\underline{E}(t) = \underline{X}_{c0} E_0 \cos(\omega_f t), \quad (6.101)$$

où \underline{X}_{c0} est un vecteur unité ne contenant que des valeurs 0 (correspondant aux degrés de libertés fixés) et 1 ou -1 (correspondant aux degrés de libertés imposés par les déplacements de torsion) dont le signe + ou $-$ désigne la direction de déplacement (par exemple $\underline{X}_{c0} = [0; 0; 1; -1]$).

Le modèle de Craig-Bampton condensé à un mode devient alors

$$\begin{cases} M \ddot{q} + C \dot{q} + K q \\ -c_a \Delta_a \left[l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q} + k_s^a E_0 \omega_f \sin(\omega_f t) \right] - c_b \Delta_b \left[l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q} + k_s^b E_0 \omega_f \sin(\omega_f t) \right] \\ -k_a \Delta_a (l_a \theta - \Delta_a q - k_s^a E_0 \cos(\omega_f t))^3 - k_b \Delta_b (l_b \theta - \Delta_b q - k_s^b E_0 \cos(\omega_f t))^3 \\ = \underbrace{\left[{}^T \underline{\Phi} \left(\underline{\underline{M}}_{b,br} + \underline{\underline{M}}_{b,b\underline{\underline{K}}_s} \right) \underline{X}_{c0} \right]}_{f_M} E_0 \omega_f^2 \cos(\omega_f t) + \underbrace{\left[{}^T \underline{\Phi} \left(\underline{\underline{C}}_{b,br} + \underline{\underline{C}}_{b,b\underline{\underline{K}}_s} \right) \underline{X}_{c0} \right]}_{f_C} E_0 \omega_f \sin(\omega_f t), \end{cases} \quad (6.102)$$

$$\begin{cases} m L^2 \ddot{\theta} + c_a l_a \left[l_a \dot{\theta} - \Delta_a \dot{q} + k_s^a E_0 \omega_f \sin(\omega_f t) \right] + c_b l_b \left[l_b \dot{\theta} - \Delta_b \dot{q} + k_s^b E_0 \omega_f \sin(\omega_f t) \right] \\ + k_a l_a \left[l_a \theta - \Delta_a q - k_s^a E_0 \cos(\omega_f t) \right]^3 + k_b l_b \left[l_b \theta - \Delta_b q - k_s^b E_0 \cos(\omega_f t) \right]^3 \\ = 0, \end{cases} \quad (6.103)$$

où $k_s^a = {}^T \underline{\underline{L}}_b^a \underline{\underline{K}}_s \underline{X}_{c0}$ et $k_s^b = {}^T \underline{\underline{L}}_b^b \underline{\underline{K}}_s \underline{X}_{c0}$ correspondent aux déplacements relatifs après avoir retranché les déplacements dus aux modes statique de la base de Craig-Bampton.

Simplification et adimensionnalisation du problème

On suppose que le centre de rotation du balancier coïncide avec un nœud du mode bloqué, à savoir satisfaisant la relation :

$$\begin{cases} \frac{\Delta_a}{l_a} = \frac{\Delta_b}{l_b} = \frac{\Delta_a + \Delta_b}{l_a + l_b} = \frac{\Phi_a - \Phi_b}{L} = \frac{\Delta}{L} = \beta, \\ \frac{k_s^a}{l_a} = \frac{k_s^b}{l_b} = \frac{k_s^a + k_s^b}{L} = k_s. \end{cases} \quad (6.104)$$

Le système d'équation dynamique se simplifie comme suit :

$$\begin{cases} M \ddot{q} + C \dot{q} + K q + m L \Delta \ddot{\theta} = f_M E_0 \omega_f^2 \cos(\omega_f t) + f_C E_0 \omega_f \sin(\omega_f t), \\ m L^2 \ddot{\theta} + (c_a l_a^2 + c_b l_b^2) \left[\dot{\theta} + k_s E_0 \omega_f \sin(\omega_f t) - \beta \dot{q} \right] \\ + (k_a l_a^4 + k_b l_b^4) \left[\theta - k_s E_0 \cos(\omega_f t) - \beta q \right]^3 = 0. \end{cases} \quad (6.105)$$

On effectue alors le changement de variables : $x = \Delta q + L k_s E_0 \cos(\omega_f t)$ et $y = L \theta$ ce qui donne :

$$\begin{cases} M \ddot{x} + C \dot{x} + K x + m \Delta^2 \ddot{y} = \left[\Delta f_M + L k_s \left(\frac{K}{\omega_f^2} - M \right) \right] E_0 \omega_f^2 \cos(\omega_f t) \\ + (\Delta f_C - C L k_s) E_0 \omega_f \sin(\omega_f t), \\ m \ddot{y} + c (\dot{y} - \dot{x}) + k (y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (6.106)$$

En utilisant les mêmes notations que dans 6.99, on a :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \lambda\dot{x} + \omega^2 x + \epsilon\ddot{y} & = \epsilon \frac{F}{M} \cos(\omega_f t + \varphi) = \epsilon A \omega_0^2 \cos(\omega_f t + \varphi), \\ \ddot{y} + \lambda_N(\dot{y} - \dot{x}) + \omega_N^2 (y - x)^3 & = 0, \end{cases} \quad (6.107)$$

où :

$$\begin{cases} \epsilon F & = E_0 \omega_f \sqrt{\left[\Delta f_M + Lk_s \left(\frac{K}{\omega_f^2} - M \right) \right]^2 \omega_f^2 + (\Delta f_C - CLk_s)^2} \\ \varphi & = \arctan \left(\frac{-\Delta f_C + CLk_s}{\left[\Delta f_M + Lk_s \left(\frac{K}{\omega_f^2} - M \right) \right] \omega_f} \right) \end{cases} \quad (6.108)$$

Similaire au régime libre, les études du système NES balancier sous sollicitation de trépidation peuvent être réalisées à travers un système académique en régime forcé dont les résultats principaux sont déjà présentés dans le chapitre 5 révélant la présence possible de la résonance auxiliaire associée à un certain “plafond” de la raideur non linéaire.

6.5 Études numériques des modèles non linéaires condensés

Une vérification numérique de la fiabilité et des performances de l'absorbeur NES en balancier est effectuée par comparaison avec l'absorbeur de masse accordé actuellement monté sur le véhicule. La comparaison est faite en régime libre et sous balayage sinusoïdal correspondant à une excitation de trépidation. Les calculs effectués sont obtenus à partir du modèle aux éléments finis de véhicule condensé sur la base de Craig-Bampton comportant tour à tour le seul mode de torsion ou la base modale complète fournie par PCA. L'influence des paramètres de design sur la robustesse des absorbeurs non linéaires est étudiée à savoir le ratio de masse ajouté, la raideur non linéaire et l'amortissement des absorbeurs.

Les caractéristiques du mode de torsion ciblé :

$$\begin{cases} M & = 25.2149 \text{ kg} \\ K & = 2.0279e5 \text{ N/m} \\ \xi & = 0.0145 \\ \phi_a & = 4.7091 \\ \phi_b & = -5.8220 \\ \phi_0 & = -0.5657 \end{cases} \quad (6.109)$$

où ϕ_a , ϕ_b et ϕ_0 sont respectivement les déformées modales des nœuds d'accroches et du centre de rotation prévus pour le balancier.

Le but principal de cette étude est de remplacer le système linéaire actuel à savoir deux batteurs légèrement désaccordés de 7 et 9 *kgs* respectivement par un système non linéaire plus léger. Pour des raisonnements physiques et technologiques, les masses ajoutées des batteurs non linéaires pourraient être de quelques *kgs* (2, 3 ou 5 par exemple). Dans ce cas-là, le ratio de masse entre le NES (1 *kg* pour chaque masse à titre d'exemple) et la masse modale sera :

$$\epsilon = \frac{[m_a \alpha^2 + m_b (1 - \alpha)^2 + m_l (\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{3})] (\phi_a - \phi_b)^2}{M} > 2 \quad (6.110)$$

loin d'être considéré comme petite variable comme dans les études analytiques. Les résultats obtenus précédemment ne sont plus fiables dans ce cas, on se contente a priori d'étudier la robustesse des batteurs non linéaires à travers les simulations numériques.

6.5.1 Comparaison de l'efficacité des absorbeurs en régime libre

Le comportement dynamique du NES en balancier qui a été étudié au chapitre 4 via des méthodes analytiques multi-échelles, a débouché sur des conditions de design des absorbeurs en régime libre. Un choix optimal de raideur non linéaire des NES a été aussi défini ainsi que des conditions de liaisons entre les raideurs garantissant un fonctionnement des NES en opposition de phase durant le pompage énergétique. L'objet est ici de vérifier numériquement l'efficacité d'absorption vibratoire des NES par comparaison avec l'absorbeur de Frahm accordé. Un test de benchmark numérique dit en "régime libre" est effectué. Le test consiste à exciter le modèle Craig-Bampton de véhicule en régime sinusoïdal de trépidation à la pulsation de résonance du mode de torsion pendant une centaine de pseudo-périodes afin de rejoindre un régime périodique. Une fois le régime stationnaire atteint, un jeu de conditions initiales est extrait en base de Craig-Bampton et sert à définir les nouvelles conditions initiales pour les différentes configurations testées que sont le modèle condensé de véhicule seul, puis attaché au NES balancier et TMD PCA. Les conditions initiales des degrés de liberté des absorbeurs sont fixées arbitrairement à zéro. Ce test revient physiquement à considérer le véhicule d'abord excité en trépidation puis instantanément relié aux absorbeurs en état initial de repos et d'observer ensuite l'atténuation dans le temps des vibrations. Différents observables ont été étudiés comme les points d'attaches gauche et droit des batteurs sur les longerons du véhicule ou les points de confort situés sur le volant ou au niveau du rétroviseur. Les comportements étant sensiblement identiques, seul le point de confort dit **tsb** est retenu dans la comparaison des résultats. Le schéma d'intégration utilisé est le schéma de Runge Kutta *RK45* avec un pas de temps variable s'échelonnant entre 10^{-3} et 10^{-6} secondes. La convergence est réputée acquise lorsqu'à la fois une erreur relative de 10^{-4} et une erreur absolue de 10^{-6} sont atteintes.

L'objectif est ici d'étudier le comportement vibratoire des absorbeurs NES et de vérifier d'éventuelles interactions avec les modes du véhicule. Seront considérées les configurations où la base de projection de Craig Bampton est réduite aux 15 premiers modes du véhicule incluant le mode de torsion de caisse puis celle comprenant les 40 modes dominants.

a) Calcul avec $N = 15$ modes

La base de projection du modèle condensé de Craig-Bampton du véhicule est ici restreint aux quinze premier modes du véhicule incluant les modes de pompage des amortisseurs, les modes du groupe moteur GMP et le mode de torsion de caisse ciblé.

Influence de la raideur non linéaire

L'influence lié au choix de la raideur non linéaire est vérifiée en faisant varier k_a entre les valeurs 10^6 et $k_a = 10^{11} \text{ N/m}^3$ pour un niveau d'amortissement fixé $c_a = 30 \text{ SI}$ et des masses mobiles $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$. La figure Fig. 6.12 illustre la réponse transitoire en régime libre au point confort **tsb** pour les différentes configurations :

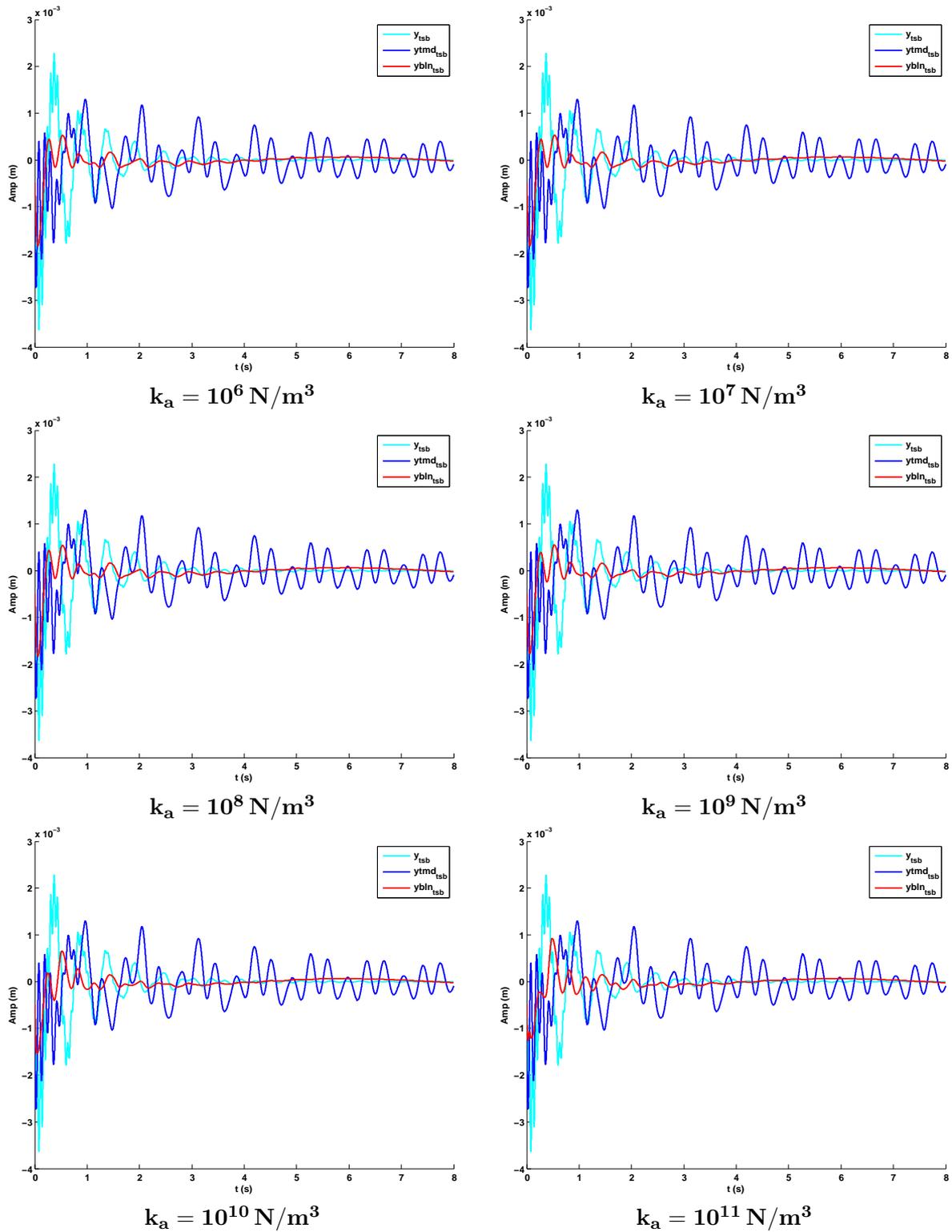


FIGURE 6.12 – Réponse en fréquence au point tsb (m) en fonction de la raideur non linéaire k_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$, $c_a = c_b = 30 \text{ SI}$, base de 15 modes

- modèle de véhicule sans absorbeurs y_{tsb} en cyan,
- modèle de véhicule avec les absorbeurs de masse accordés $y_{tmd_{tsb}}$ en bleu,
- modèle de véhicule avec les absorbeurs NES en configuration balancier $y_{bln_{tsb}}$ en rouge,

Dans la configuration NES, le pompage énergétique démarre rapidement dès la première oscillation et atténue sensiblement la réponse vibratoire au point **tsb** en moins d'une seconde. L'atténuation est sensiblement meilleure en régime transitoire que celle obtenue via les batteurs linéaires dont le temps de relaxation pour une atténuation équivalente est supérieure à 8 secondes. Il est notable qu'un choix de raideur non linéaire efficace ne semble pas restreint à un intervalle de faible amplitude, le comportement étant sensiblement le même pour les raideurs non linéaires allant de 10^6 et $k_a = 10^9 N/m^3$. Au delà de $k_a = 10^{10} N/m^3$, le temps de relaxation avec les NES augmente légèrement jusqu'à 2 secondes avec des pics d'amplitude plus importants lors des premières oscillations. La solution NES en balancier qui s'avère très efficace n'éteint cependant pas complètement la vibration mais produit une oscillation résiduelle basse fréquence inférieure à 1 Hz d'amplitude faible. Il conviendra alors de vérifier que cette solution ne réveille pas d'autres contributions modales en rajoutant un plus grand nombre de modes dans la base de projection du modèle de véhicule.

Influence de la masse des absorbeurs NES

L'influence de la masse ajoutée des absorbeurs est testée avec un choix de raideur dit "optimal" c'est-à-dire choisi en utilisant la règle de design analytique, pour différents choix de masses ajoutées $m_a = 2, 3, 5 \text{ kgs}$ et d'amortissement des absorbeurs $c_a = 15, 30, 60 \text{ SI}$.

De manière générale, les résultats obtenus en Fig. 6.13 montrent un bon comportement du NES balancier quelque soit la valeur de la masse ajoutée m_a ou d'amortissement c_a des absorbeurs. On observe qu'une augmentation de l'inertie des absorbeurs (verticalement) a pour effet de réduire l'amplitude des premières oscillations mais ne participe pas à l'atténuation à moyen terme des vibrations, ce qui est un point extrêmement positif bien qu'allant contre toute intuition. Une augmentation de l'amortissement c_a des NES joue à l'opposé un rôle néfaste car elle réduit l'efficacité du pompage énergétique à court terme. Cette observation corrobore les explications du phénomène de pompage : l'amortissement est nécessaire pour activer le mécanisme de pompage ; en revanche trop d'amortissement nuit à son efficacité.

Dans tous les cas, la solution NES en balancier reste bien plus efficace en terme d'absorption d'énergie vibratoire en comparaison avec la solution actuelle utilisée par PCA à savoir deux batteurs légèrement désaccordés de 7 et 9 *kgs* respectivement.

Influence de l'amortissement des absorbeurs non linéaires

Une étude est menée de manière similaire pour une raideur non linéaire fixée $k_a = 10^7 N/m^3$, valeur de référence pour l'ensemble des simulations en régime forcé de trépidation. Les résultats que montrent la figure Fig. 6.14 attestent de la robustesse de la solution NES balancier vis à vis du choix de masse ajoutée m_a ou de l'amortissement c_a .

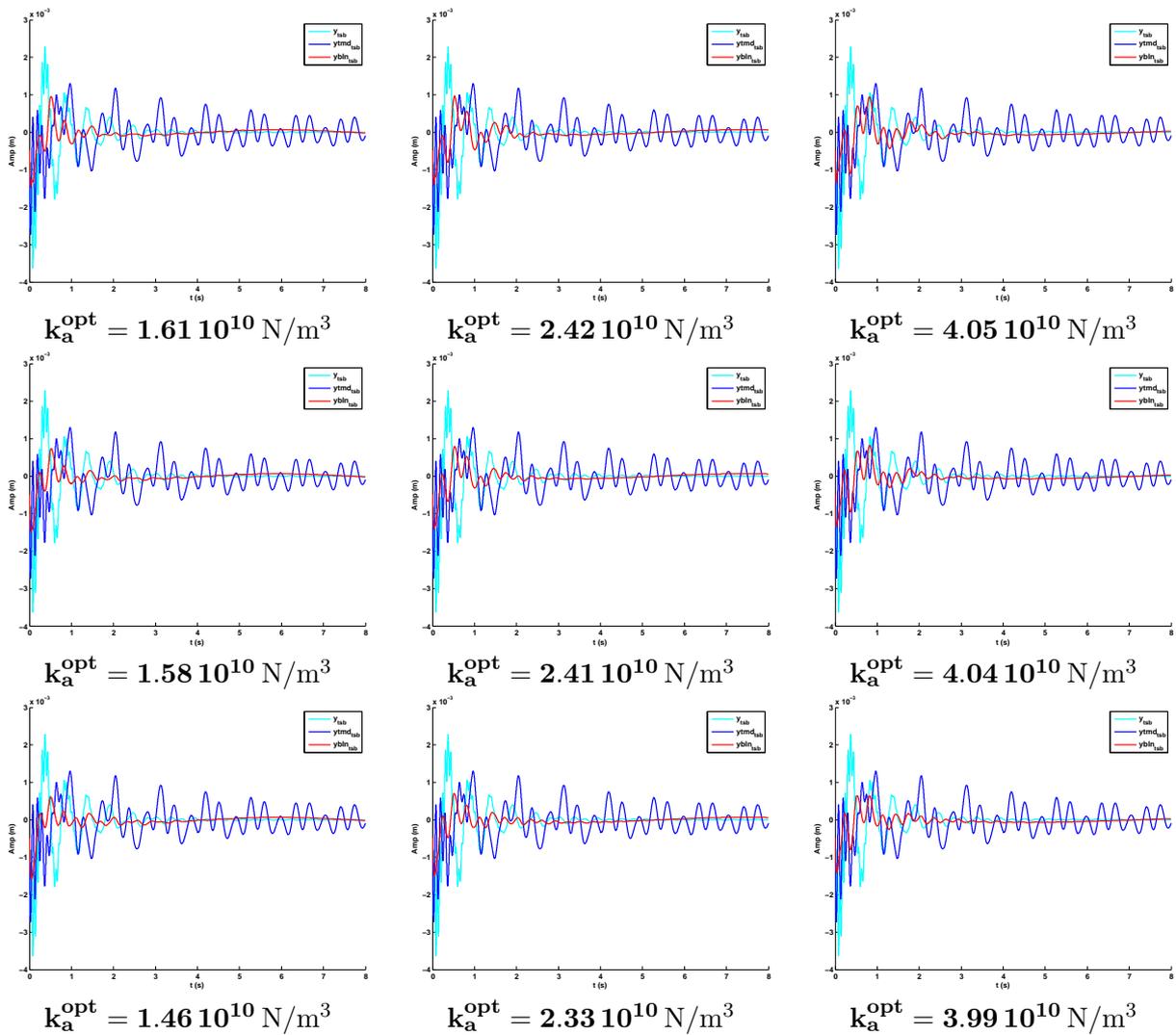


FIGURE 6.13 – Réponse en fréquence au point **tsb** (m) pour un choix de raideur optimal k_a^{opt} en régime libre en fonction de l'amortissement $c_a = 15, 30, 60 \text{ SI}$ (horizontal) et de la masse $m_a = 2, 3, 5 \text{ kg}$ (vertical); base de 15 modes

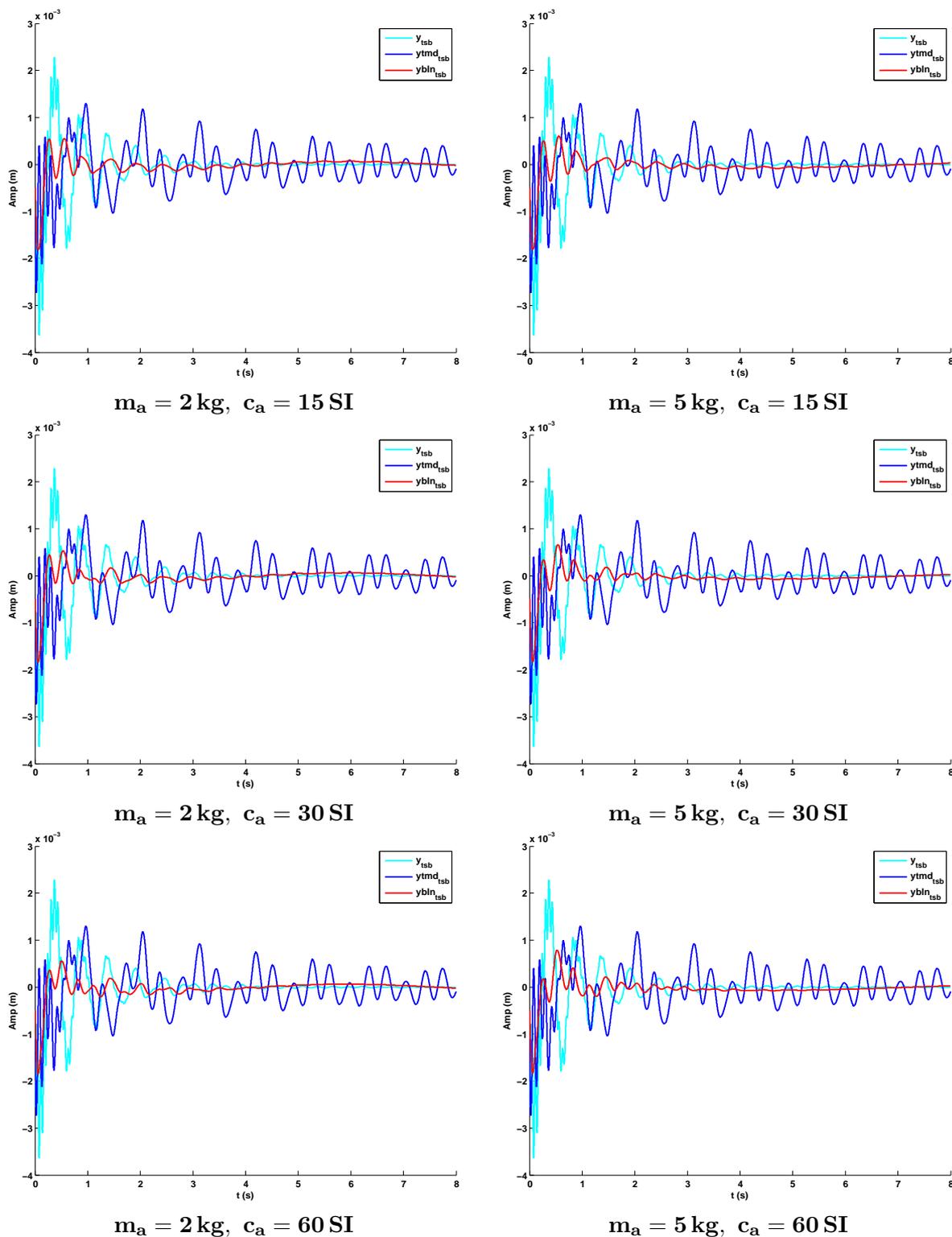


FIGURE 6.14 – Réponse en fréquence au point **tsb** (m) en fonction de l'amortissement non linéaire c_a et de la masse m_a ; paramètres : $k_a = 10^7 \text{ N/m}^3$, base de 15 modes

b) Calcul avec $N = 40$ modes

Les simulations précédentes sont réitérées avec une base de projection de Craig-Bampton incluant les 40 modes de véhicule les plus énergétiques afin d'observer d'éventuelles modifications du comportement des NES liés à des interactions modales plus riches.

Influence de la masse des absorbeurs NES

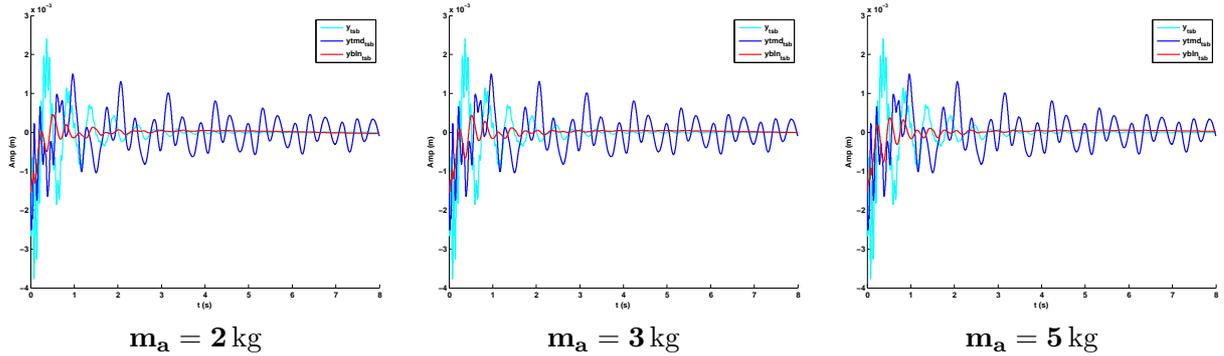


FIGURE 6.15 – Réponse en fréquence au point **tsb** (m) en fonction de la masse des NES $m_a = 2, 3, 5$ kg ; paramètres : $k_a = 10^7$ N/m³, $c_a = 30$ SI, base de 40 modes

La figure Fig. 6.15 confirme que l'influence du choix de masse ajoutée m_a n'est pas déterminante avec une atténuation qui reste très importante dès la valeur $m_a = 2$ kgs.

Influence de la raideur non linéaire

La vérification de l'influence du choix de la raideur non linéaire k_a pris entre les valeurs 10^6 et $k_a = 10^{11}$ N/m³ pour un niveau d'amortissement fixé $c_a = 30$ SI et des masses mobiles de respectivement $m_a = m_b = 2$ kgs et illustré en figure Fig. 6.16 ne modifie pas énormément l'atténuation des vibrations au point **tsb**. Le seul effet observable est lié à l'apparition d'une plus grande richesse harmonique lors des premières oscillations mais qui n'affecte pas le transfert énergétique irréversible vers le NES. Le niveau d'atténuation optimal $k_a \approx 10^7$ N/m³ ne semble pas en revanche coïncider avec le choix de raideur optimale donné par le critère de design $k_a^{opt} \approx 2 \times 10^{10}$ N/m³.

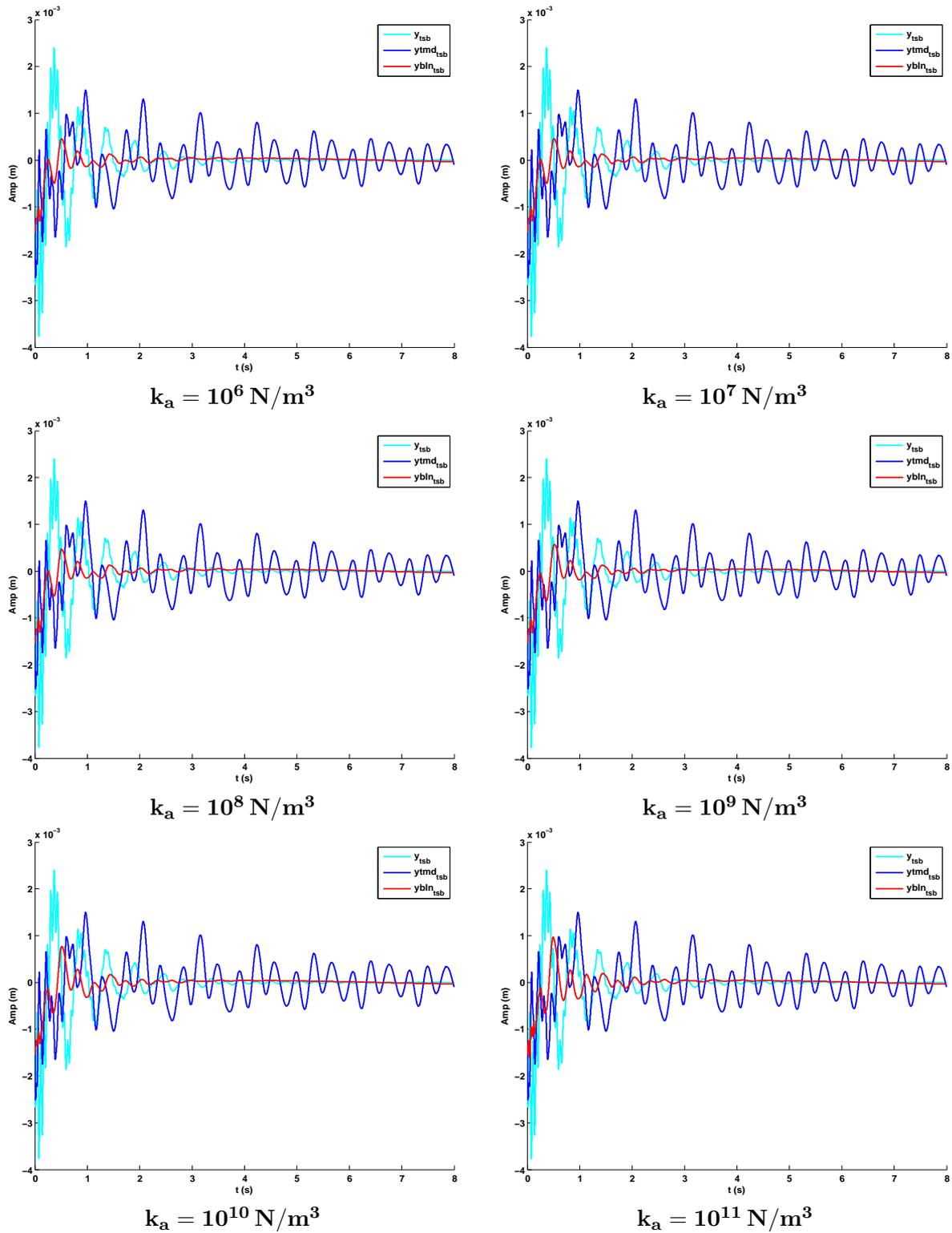


FIGURE 6.16 – Réponse en fréquence au point tsb (m) en fonction de la raideur non linéaire k_a ; paramètres : $m_a = 2 \text{ kgs}$, $m_b = 2.06 \text{ kgs}$, $c_a = c_b = 30 \text{ SI}$, base de 40 modes

6.5.2 Comparaison de l'efficacité des absorbeurs dans le cas d'une excitation de trépidation

Le comportement dynamique du NES en balancier est numériquement testé avec un forçage de trépidation du véhicule avec un sinus balayage de fréquence variable ω au choix entre 2 et 40 Hz puis entre 2 et 100 Hz. Le mode opératoire consiste à fixer les degrés de liberté des roues avant du véhicule et à imposer en base des roues arrières, une sollicitation en déplacement du type $E(t) = E_0 \sin(\omega t)$ avec $E_0 = 2\pi \frac{20 \cdot 10^{-3}}{\omega}$ en mètres, comptée positivement pour la roue arrière gauche et négativement pour la roue arrière droite. La condensation de Craig-Bampton permet de définir le vecteur de forces modales généralisées à appliquer au modèle condensé de véhicule. Une continuation utilisant le schéma de Runge Kutta *RK45* est effectuée afin de suivre les courbes d'hystérésis montante puis descendante et de tracer point par point les courbes de réponse et d'amplification en fréquence au point de confort **tsb**. L'influence des paramètres de design des NES est étudiée dans les deux cas d'une base réduite au seul mode de torsion de caisse puis la base complète de Craig-Bampton à 152 modes.

a) Calcul avec $N = 1$ mode (torsion)

La base de projection de Craig-Bampton est réduite au seul mode de torsion de caisse.

Influence de la raideur non linéaire

La vérification de l'amplification en fréquence vis à vis de la raideur non linéaire est considérée en faisant varier k_a entre les valeurs 10^6 et $k_a = 10^{10} \text{ N/m}^3$ pour un niveau d'amortissement fixé $c_a = 35 \text{ SI}$ et des masses mobiles de respectivement $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$. La figure Fig. 6.17 illustre le rapport d'atténuation en fréquence en régime forcé au point confort **tsb** et pour les différentes configurations d'absorbeurs. De manière générale, l'atténuation est satisfaisante pour la solution NES balancier au droit du pic de résonance du mode de torsion. Dans toutes les configurations étudiées de raideur, la solution d'absorbeurs TMD est la meilleure au droit de la résonance ciblée. Les batteurs TMDs en revanche amplifient assez fortement une plage de fréquences située entre 1 et 4 Hz alors que la solution NES reste en deçà de la courbe d'amplification linéaire sans absorbeurs pour les valeur de k_a entre 10^6 et $k_a = 10^8 \text{ N/m}^3$. Pour une raideur non linéaire k_a voisine de 10^{10} N/m^3 , les NES créent à leur tour une zone d'amplification au voisinage de 5 Hz que l'on a appelé résonance auxiliaire dans les études analytiques. Il appartient aussi de vérifier avec une base de Craig-Bampton plus riche si ces zones d'amplifications présentent un risque de réveil d'autres modes comme par exemple le mode GMP.

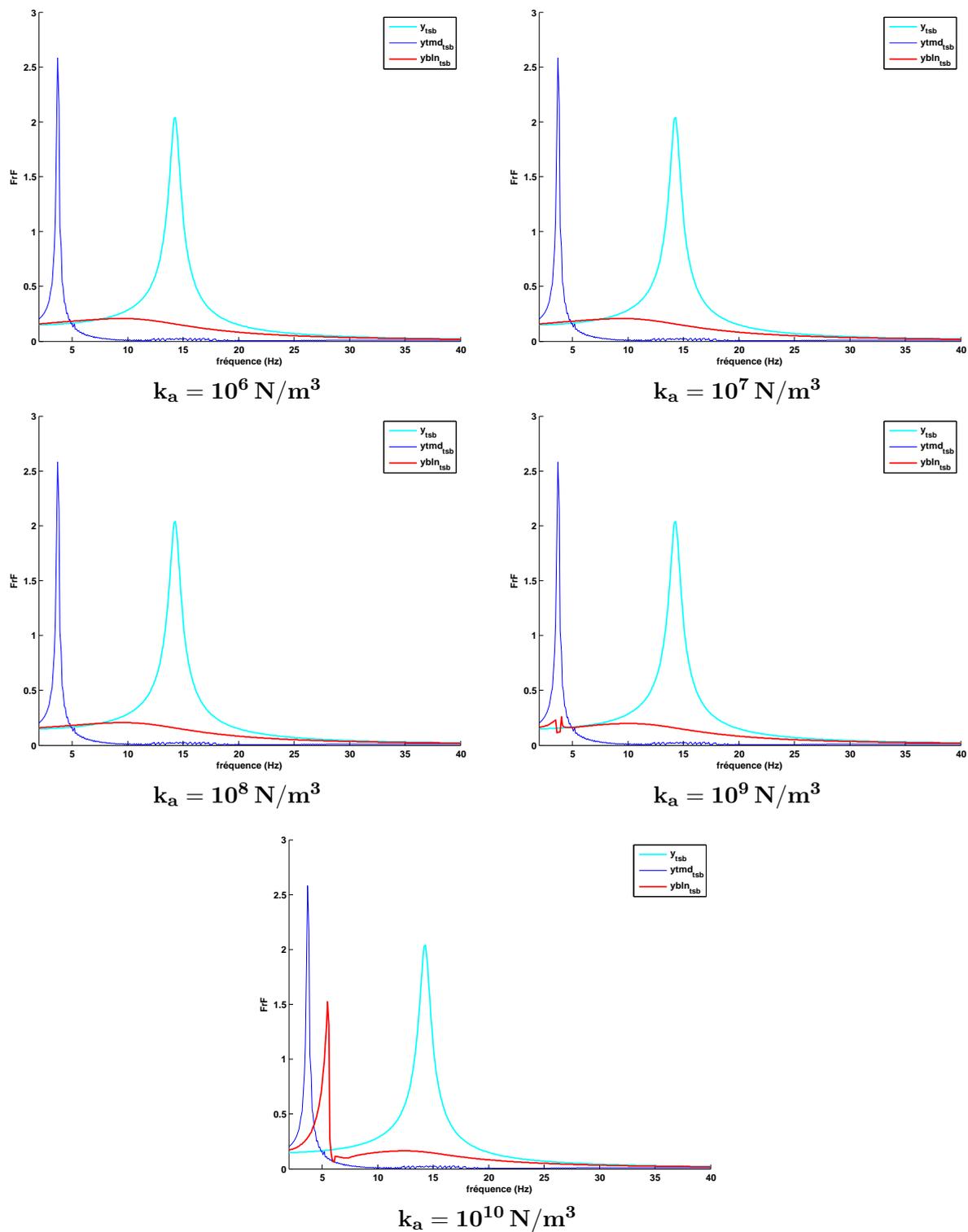


FIGURE 6.17 – Amplification fréquentielle au point **tsb** en fonction de la raideur non linéaire k_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$, $c_a = c_b = 35 \text{ SI}$, mode de torsion seul

Influence de l'amortissement des absorbeurs non linéaires

Les figures Fig. 6.18 et 6.19 illustrent le comportement en régime forcé vis à vis de l'amortissement non linéaire c_a dont la valeur s'échelonne entre 5 et 60 SI et pour la valeur de raideur non linéaire de référence $k_a = 10^7 N/m^3$. Pour cette raideur, la zone d'amplification basse fréquence disparaît et la courbe d'amplification reste toujours en dessous de celle du mode de torsion sans la présence d'absorbeurs. L'amortissement c_a joue un rôle à faible niveau en faisant croître le pic d'amplification du mode de torsion. La solution TMD linéaire qui est caractérisée par un amortissement relatif beaucoup plus important que celui des NES fait que l'amplification est meilleure au droit de la résonance ciblée.

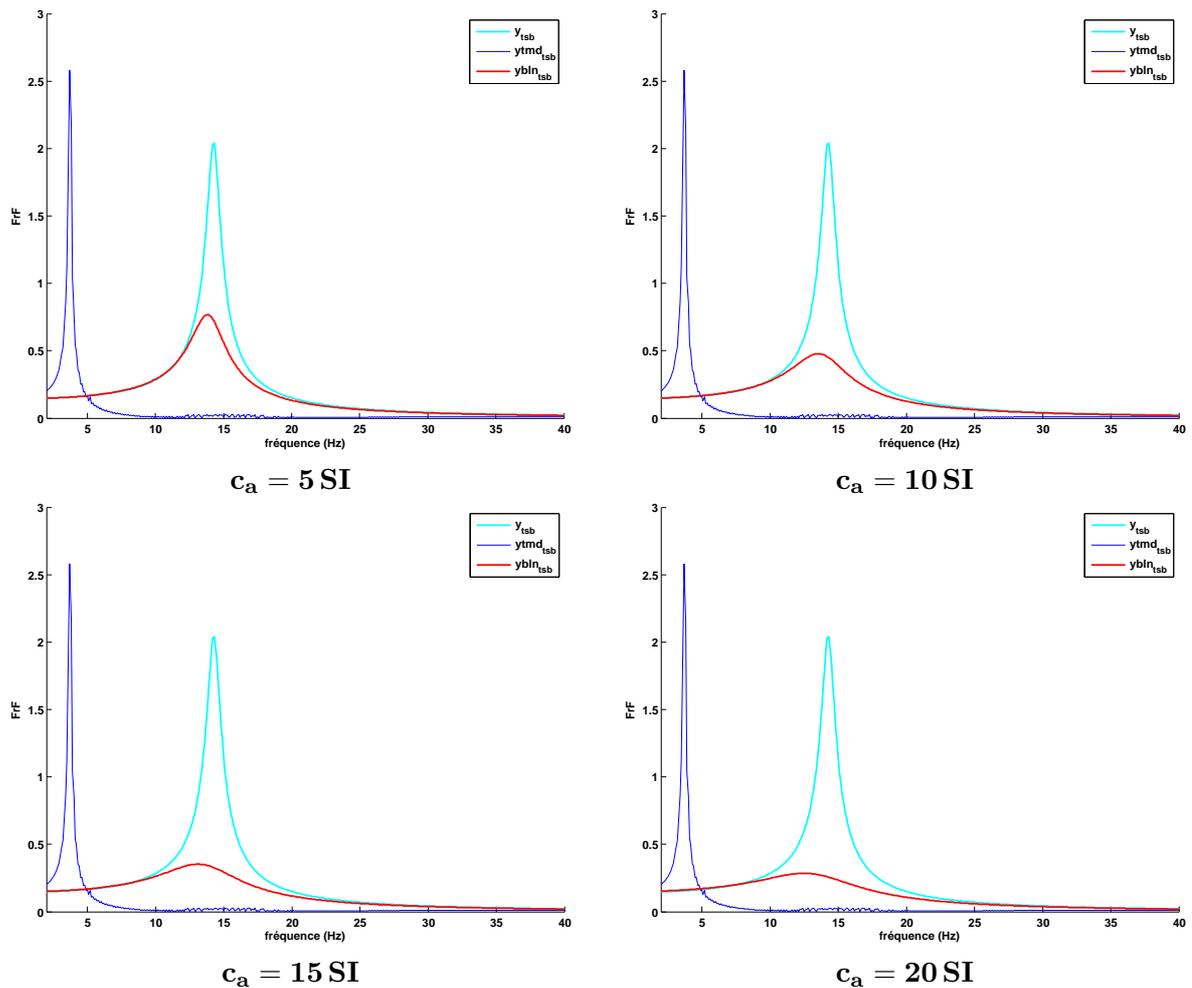


FIGURE 6.18 – Amplification fréquentielle au point **tsb** en fonction de l'amortissement non linéaire c_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2 kgs$, $k_a = 10^7 N/m^3$, mode de torsion seul

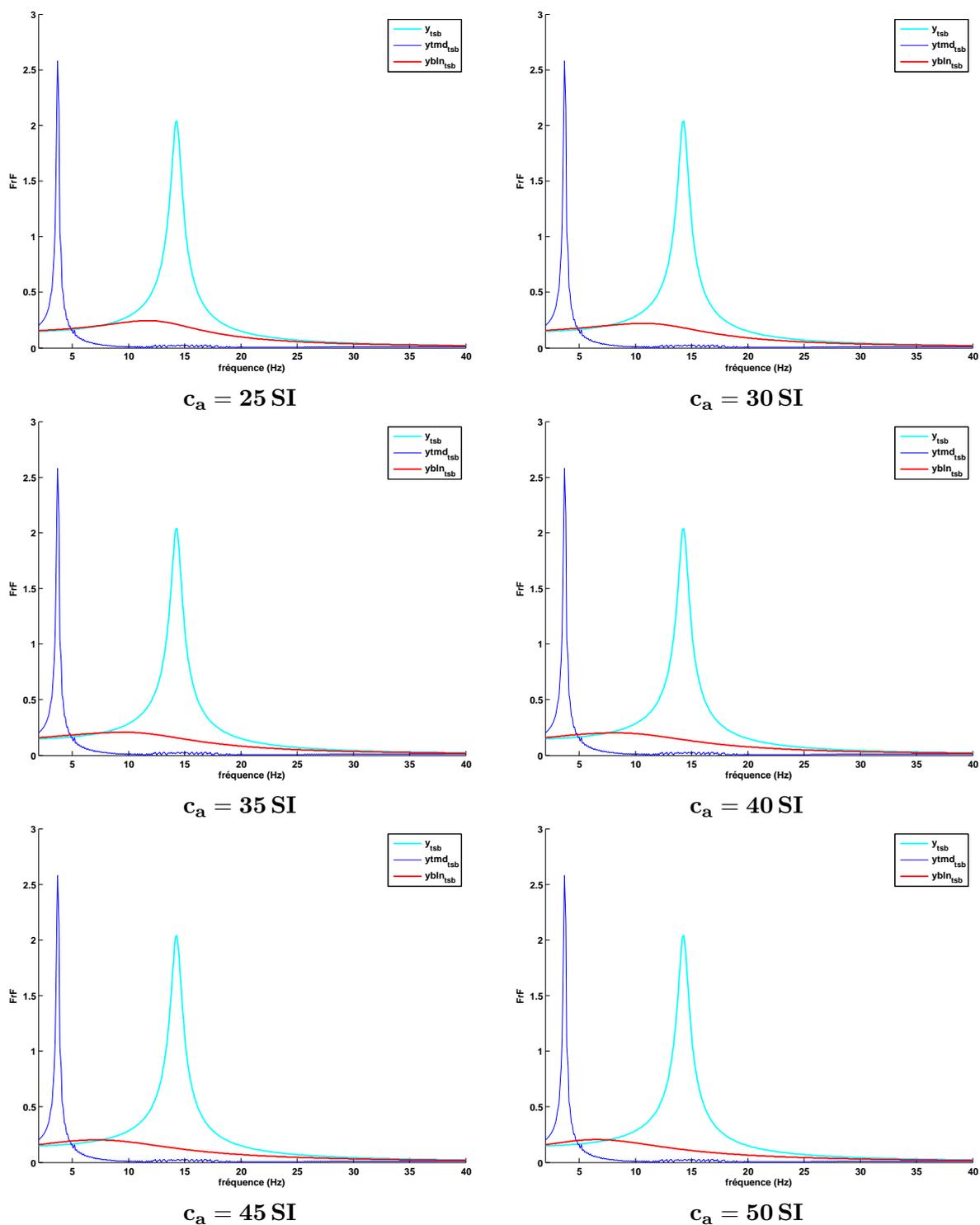


FIGURE 6.19 – Amplification fréquentielle au point **tsb** en fonction de l'amortissement non linéaire c_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$, $k_a = 10^7 \text{ N/m}^3$, mode de torsion seul

b) Calcul avec $N = 152$ modes

La base de projection de Craig-Bampton comprend l'ensemble des modes du véhicules à savoir 152 modes.

Influence de la raideur non linéaire

La figure Fig. 6.20 représente les différents comportements d'amplification pour des raideurs k_a comprises entre 10^6 et $10^9 N/m^3$ pour une valeur d'amortissement fixée $c_a = 30$ SI et calculés à partir de la base modale complète. De manière générale, la solution NES balancier a un pouvoir d'atténuation au droit du mode de torsion semblable à celui de la solution TMD linéaire, ceci avec une moindre masse ajoutée. Par ordre de pertinence, la configuration TMD est supérieure à celle des NES en balancier. En dehors de la zone du pic de torsion, la configuration d'absorbeurs TMD amplifie la dynamique aux alentours de la fréquence 5 Hz tandis que ce phénomène ne se produit pour la solution NES balancier qu'à partir d'une certaine valeur de la raideur non linéaire (environ $10^9 N/m^3$) mais avec une moindre amplification. La zone 20–25 Hz qui est peuplée de résonances de modes de torsion-flexion combinée est légèrement amplifiée par la solution NES balancier mais moins que la solution actuelle des TMDs. En dehors de ces zones de fréquences, les absorbeurs non linéaire et TMDs restent en deçà de l'enveloppe d'amplification imposée par les modes du véhicule. Les performances sont similaires pour les différentes valeurs de raideur k_a avec une amplification basse fréquence croissant légèrement avec la raideur non linéaire. La plage active de raideur non linéaire est donc large.

Influence de l'amortissement des absorbeurs non linéaires

Les résultats synthétisés en figure. 6.21 et montrant l'influence de la valeur de l'amortissement sont qualitativement semblables à ceux obtenus avec une base modale réduite au seul mode de torsion.

Influence de la masse des absorbeurs non linéaires

La figure Fig. 6.22 ne montre pas de variation sensible ou de dégradation des performances des NES en balancier lorsque la masse des absorbeurs passe de 2 à 3 kgs.

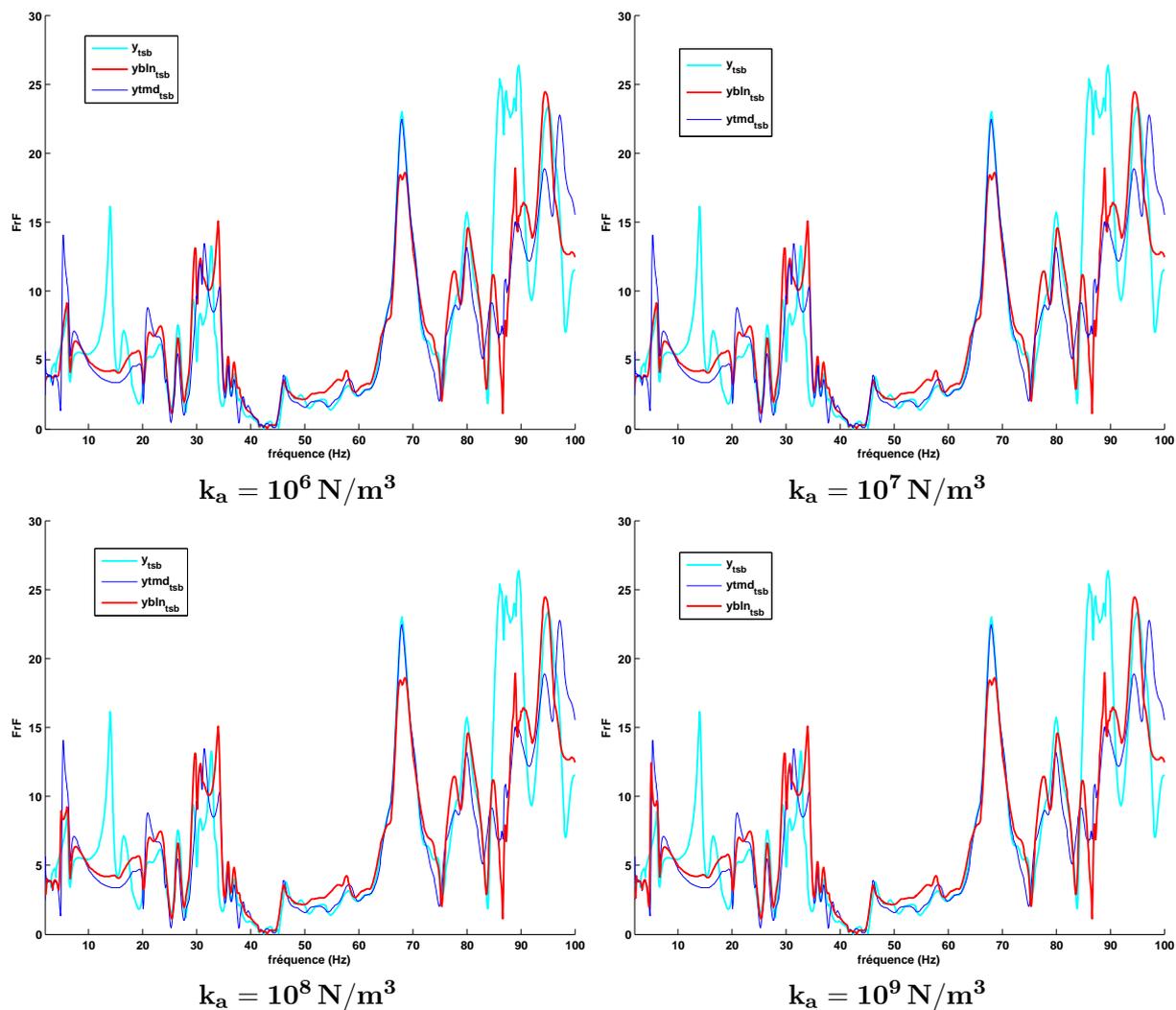


FIGURE 6.20 – Amplification fréquentielle au point **tsb** en fonction de la raideur non linéaire k_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2 \text{ kgs}$, $c_a = c_b = 30 \text{ SI}$, base à 152 modes

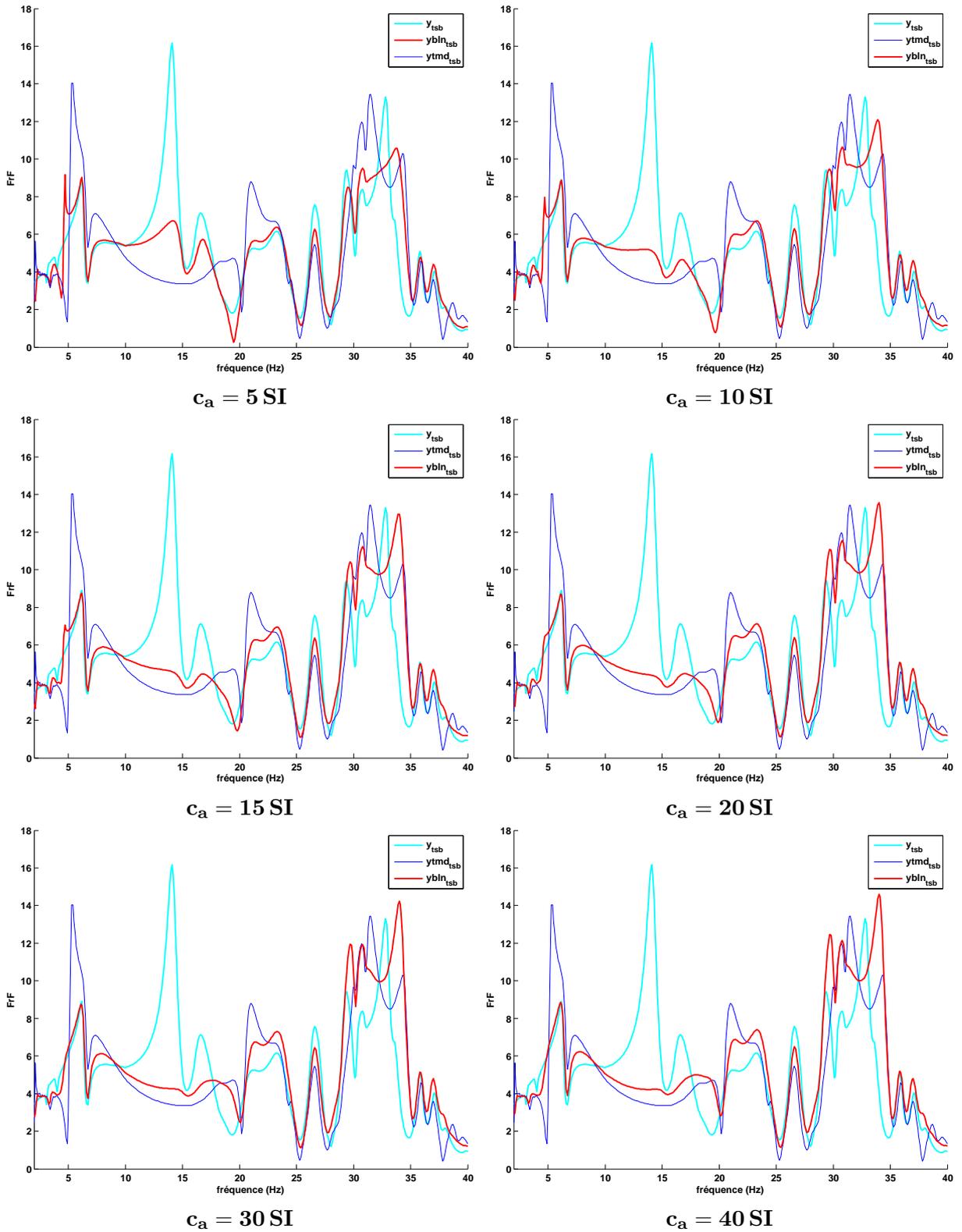


FIGURE 6.21 – Amplification fréquentielle au point **tsb** en fonction de l'amortissement non linéaire c_a ; paramètres : $m_a = m_b = 2$ kgs, $k_a = 10^7$ N/m³, base à 152 modes

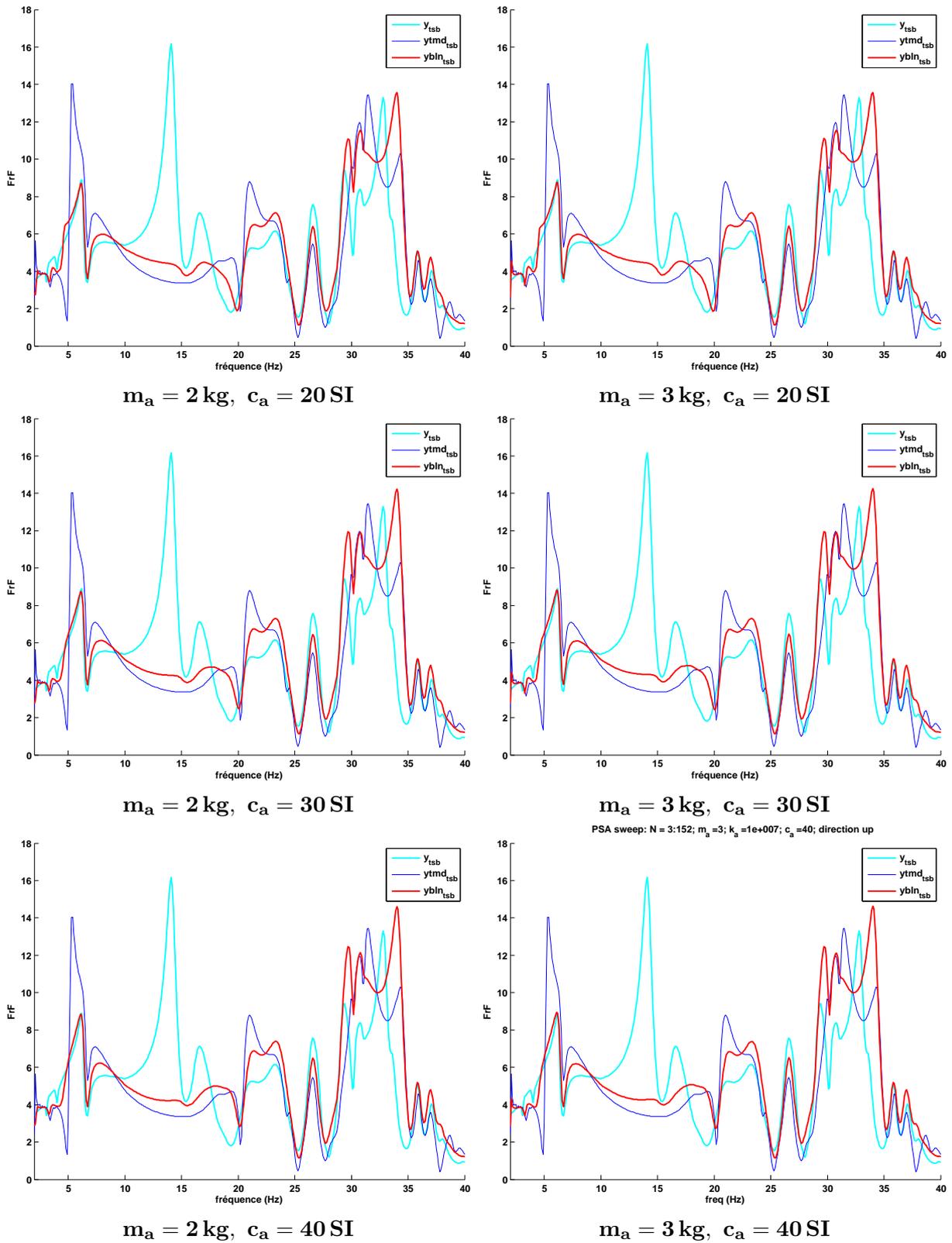


FIGURE 6.22 – Amplification fréquentielle au point **tsb** (mm) en fonction de l'amortissement non linéaire c_a ; paramètres : $k_a = 10^7 \text{ N/m}^3$, base à 152 modes

6.6 Conclusions

Les études analytiques et les simulations numériques présentées dans ce chapitre démontrent la fiabilité et la robustesse des absorbeurs non linéaires NES en balancier par comparaison avec les batteurs linéaires. Les principales caractéristiques mises en évidence sont que les NES fonctionnent de manière optimale aussi bien en régime libre qu'en régime forcé contrairement à leurs homologues TMDs, que leur performances sont stables vis à vis du choix de la masse mobile, de l'amortissement et de la raideur non linéaire choisie.

Les résultats numériques ont affirmé aussi que le comportement du système autour de la fréquence propre est qualitativement semblable pour deux bases modales différentes : réduite au seul mode de torsion ou à tous les 152 mode. Cette attestation de la condensation du système nous permet de réaliser les calculs avec un seul mode de torsion pour les prochaines études.

Il faut noter ici que le ratio de masse dans ce cas numérique considéré n'est pas du tout petit comme dans les études analytiques, l'influence de la raideur non linéaire n'est plus la même. Il nécessite d'autres études sur ce nouveau type de système non linéaire. Mais malgré ces inconvénient, quelques essais sont lancés sur une maquette représentative présentés dans le chapitre suivant pour vérifier non seulement la stabilité et la robustesse des absorbeurs non linéaire NES en balancier mais aussi tester la validité des matrices numériques du modèle NASTRAN disponible qui sont énormes.

Chapitre 7

Expérimentation sur le prototype ESTACA

Des solutions technologiques sont proposées dans ce chapitre pour réaliser un système de balancier qui sera appliqué dans un prototype d'essai simulant le mode de torsion considéré du véhicule. Une campagne expérimentale est effectuée sur ce banc d'essai muni du balancier fabriqué pour vérifier la robustesse des nouvelles théories analytiques présentées dans les chapitres précédents. Les premiers résultats obtenus sont prometteurs : ils sont présentés dans ce chapitre.

Sommaire

7.1	Solutions de technologie	174
7.1.1	Présentation du banc d'essai ESTACA	174
7.1.2	Conception des composants et des raccords du balancier	175
7.2	Résultats expérimentaux	178
7.3	Conclusion et remarques	183

7.1 Solutions de technologie

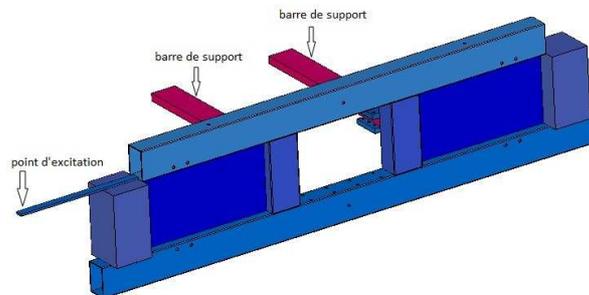
Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, il faut tout d'abord noter qu'en utilisant une analyse modale, le mode de torsion peut être modélisé par un oscillateur linéaire équivalent. Ainsi, le système analytique consiste en un oscillateur linéaire condensé, pour une structure de type véhicule, et d'une configuration de NES en balancier, pour l'absorbeur passif non linéaire (avec une faible masse). Dans un premier temps, avant d'appliquer sur une vraie voiture, nous allons concevoir d'abord un dispositif NES balancier pour une maquette représentative d'un cabriolet à l'échelle 1 (même inertie et même fréquence propre qu'avec le premier mode de torsion de caisse du véhicule). Les descriptions de cette maquette et les conceptions du modèle NES balancier sont respectivement présentées dans cette section.

7.1.1 Présentation du banc d'essai ESTACA

Dans le but d'étudier différents type de batteurs pour atténuer les trépidations dues au premier mode de torsion de caisse du véhicule, une maquette représentative simple a été développée au sein du laboratoire Vibrations et Acoustique, École Supérieure des Techniques Aéronautiques et de Construction Automobile (ESTACA). Ce système expérimental est montré et représenté sur la Figure 7.1. Il s'agit d'une structure soudée en acier se composant de barres creuses et de plaques pour renforcer la raideur. Des masses sont facilement montées sur les deux côtés de la maquette pour ajuster la fréquence naturelle de la structure.



(a) maquette ESTACA



(b) modèle Solidwork

FIGURE 7.1 – Système expérimental ESTACA

Le système est encastré sur deux piliers extrêmement rigides à travers deux barres de support dont la longueur est modifiable grâce à des liaisons boulonnées comme présentées sur la figure 7.2. L'ensemble du banc d'essai est monté sur un bloc de béton très lourd isolé dynamiquement du sol. L'excitation sur le système est transmise par une lamelle placée au bord gauche et entraînée par un pot vibrant (figure 7.3) contrôlé par un ordinateur qui peut produire efficacement quasiment n'importe quel profil d'excitation : balayage sinus, bruits blancs,...

Comme on l'a dit, cette maquette simule bien le premier mode de torsion de caisse du véhicule, dont la première fréquence naturelle est de 15.4 Hz et la déformée propre et la masse modale effective sont quasiment identiques à celles du véhicule. Ce système est déjà utilisé pour les études d'un batteur gyroscopique, une autre solution pour le problème d'atténuation des trépidations dues au premier mode de torsion. Dans notre cas, nous allons nous en resservir dans le but de



FIGURE 7.2 – Encastrement du système



FIGURE 7.3 – Pot d'excitation

tester la faisabilité du modèle NES balancier.

7.1.2 Conception des composants et des raccords du balancier

Nous allons dans cette partie réaliser le dimensionnement des composants du système NES balancier dans le but de le réaliser expérimentalement après. Ces composants sont d'abord esquissés sous l'environnement SolidWorks, un modèleur 3D utilisant la conception paramétrique, avant d'être fabriqués à l'usine.

Critères demandés pour le dimensionnement :

- ne pas modifier la structure initiale du banc ESTACA,
- faciliter le montage et le démontage du système balancier dont les masses mobiles et les ressorts devront être changés plusieurs fois pour tester différentes configurations,
- satisfaire les hypothèses supposées pendant les études analytiques : déplacement quasi-nul du centre de rotation, équilibre statique, travail vertical des masses mobiles ...

Positionnement du système : les expressions dans l'équation 6.88 ont montré que plus le déplacement modal du centre de rotation est élevé plus la masse modale concentrée est modifiée. Pour minimiser la modification de la fréquence naturelle du mode de torsion, il faut que le centre de rotation du balancier soit placé au point dont le déplacement modal est quasi nul. De plus, dans la Section 6.4 une autre hypothèse est posée sur la proportion entre les déplacements modaux différentiels et l'espacement des points d'accroche comme exprimée dans l'équation (6.95).

Pour raisons évidentes de symétrie du banc et de la déformée propre du mode de torsion, on choisit la position au milieu du banc pour le centre de rotation du balancier qui sera tenu par deux roulements à billes pour assurer que le balancier travaille toujours dans le plan vertical. Les points d'attaches des ressorts non linéaires sont placés des deux côtés par deux plaques en croix disposés à 0.7 m du centre. Pour avoir un large espace de fonctionnement des masses mobiles, l'ensemble du balancier se situe à mi-hauteur du banc comme présenté sur la Figure 7.4.

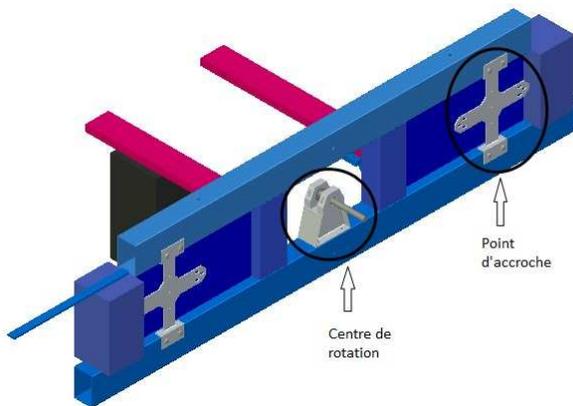


FIGURE 7.4 – Positionnement du balancier

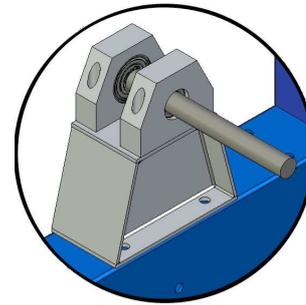


FIGURE 7.5 – Centre de rotation

Choix du bras de levier : le rôle principal du bras de levier est de compenser la gravité de deux masses mobiles placées sur ses deux côtés en état statique et dynamique. D'une part, il doit être suffisamment rigide dynamiquement pour assurer que les deux masses et le centre de rotation sont toujours alignés. Du coup, la première fréquence propre du bras de levier doit être assez élevée par rapport à celle du mode de torsion ce qui exige un grand moment d'inertie de flexion de la section droite dans le plan de travail. D'autre part, la masse de ce bras de levier ne joue pas grand chose dans la masse généralisée du NES (équation. 6.98) mais influence la matrice de masse du système maître (équation. 6.88). Du coup une barre légère est préférée dans ce cas. Avec les exigences posées, nous avons décidé d'utiliser un profilé aluminium modulaire creux $60 \times 20 \text{ mm}$ dont la masse linéique est de 1.28 kg/m et le moment d'inertie dans le plan vertical est de 16.09 cm^4 . La longueur total du bras de levier est de 1.6 m dont le premier mode est estimé environ à 82 Hz ce qui est assez élevé par rapport à la fréquence considérée.

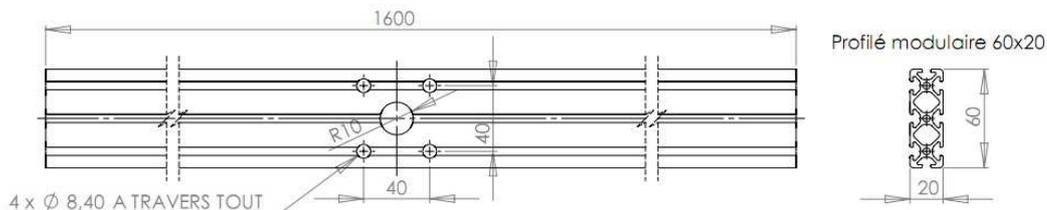


FIGURE 7.6 – Bras de levier en profilé aluminium modulaire

Les masses de l'absorbeur seront ajoutées aux deux bouts de ce bras de levier pour obtenir l'inertie maximum du NES.

Conception des ressorts non linéaires : les non linéarités sont réalisées à l'aide de raideurs géométriques (voir figure 7.7), il faut donc déterminer la valeur des raideurs linéaires nécessaires à l'obtention de la rigidité non linéaire recherchée pour le NES.

Les ressorts linéaires s'étirent axialement et sont libres en rotation autour de leurs supports. Le comportement de flexion des ressorts induit par les actions d'inertie est négligé. La relation asymptotique par développement en séries de Taylor entre la force de rappel f et le déplacement u est donnée par :

$$f = 2ku - \frac{2u(lk - P)}{\sqrt{l^2 + u^2}} \approx \frac{2P}{l}u + \frac{kl - P}{l^3}u^3 + \mathcal{O}(u^5) \quad (7.1)$$

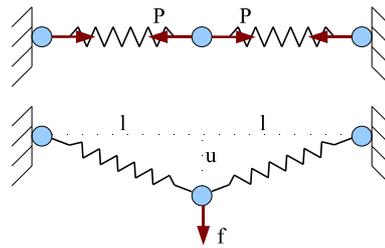


FIGURE 7.7 – Conception de la non linéarité cubique

où P est la force de pré-tension dans les ressorts.

Expérimentalement, P doit être gardée à un minimum et les points d'accroche des ressorts sur la partie mobile doivent toujours rester sur la verticale. Cette contrainte est garantie par un chariot glissant le long d'un rail guide en aluminium à roulements fixé sur les plaques en croix prévue aux deux côtés du banc d'essai. Les ressorts linéaires sont accrochés d'un côté sur l'axe fixé sur la plaque et de l'autre côté sur l'axe mobile placé sur le chariot du guidage linéaire. Ces deux axes sont maintenus par des cages en aluminium à travers des roulements à billes pour éviter les effets de flexions des ressorts. La figure 7.8 montre la description de ce dispositif expérimental.

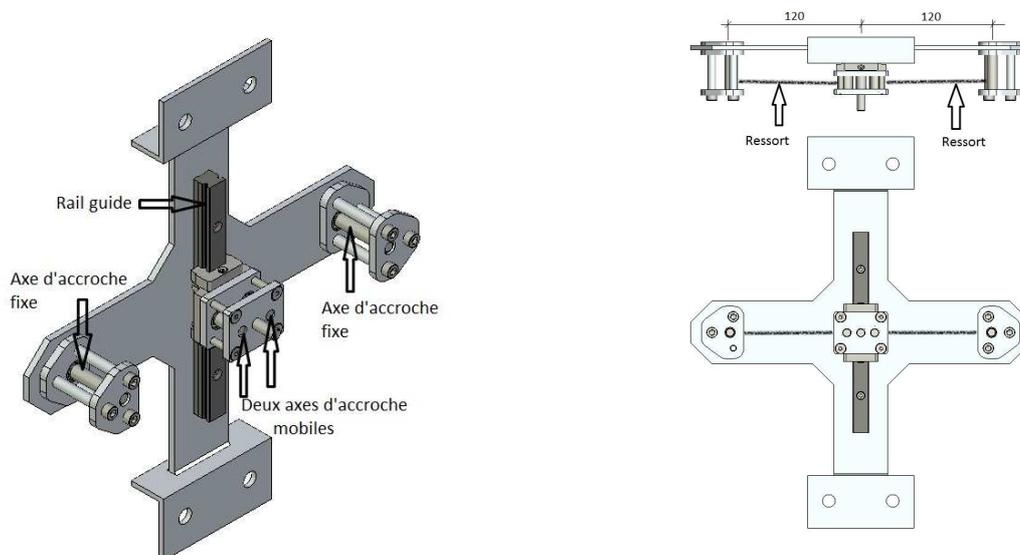


FIGURE 7.8 – Système d'accroche des ressorts non linéaires

Liaison ressorts non linéaires - bras de levier : comme les points d'accroche mobiles des ressorts non linéaires doivent rester toujours sur le rail guide vertical, la distance entre ces points et l'axe central du balancier n'est pas constante. De plus, l'angle entre le rail de guidage et le bras de levier varie aussi au cours des vibrations du système. Par conséquent, la liaison entre le bras de levier et les ressorts non linéaires doit assurer deux mouvements en même temps : la translation sur la barre et la rotation autour du point d'accroche mobile des ressorts. Pour atteindre ces objectifs, nous avons utilisé une douille à bille combinée avec un guidage linéaire à roulement dont l'ensemble va jouer le rôle d'une rotule mobile comme illustré sur la figure 7.9.

L'avantage de ce type de liaison est que l'axe de rotation peut être retiré facilement de la

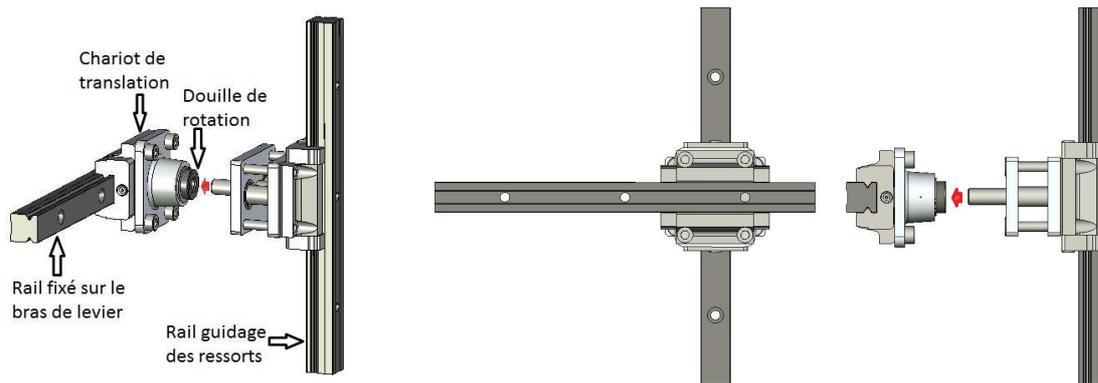


FIGURE 7.9 – Liaison rotulée entre le bras de levier et les ressorts non linéaires

douille à bille ce qui facilite le montage et le démontage du balancier pour les changement des ressorts.

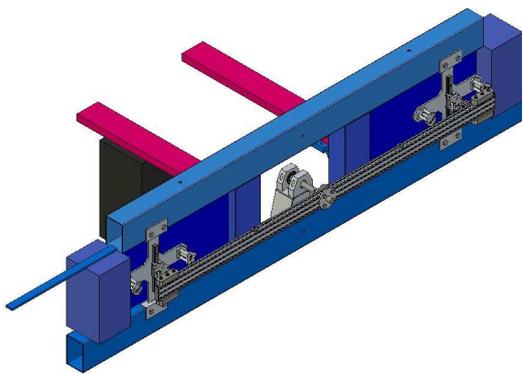
Montage du système expérimental : après la fabrication de tous les composants nécessaires, le montage du système expérimental se fait suivant l'ordre :

- Mise en place du système de l'axe de rotation du balancier et les plaques de supports des ressorts,
- Mise en place des guidages linéaires sur les deux plaques de supports,
- Pré-montage du bras de levier avec les masses ajoutées pour un équilibrage statique du système,
- Enlèvement du bras de levier avant la mise en place des cages d'accroche fixe des ressorts,
- Montage du bras de levier et fixation du système complet.

7.2 Résultats expérimentaux

Le but de cette première phase expérimentale est seulement de valider les résultats analytiques et la robustesse du balancier ce qui servira à la deuxième phase d'optimisation. La présente expérimentation a pour objectif de faire apparaître le pompage énergétique se produisant dans le nouveau système ajouté du NES balancier pour les forcings de balayage sinusoïdal autour de la première fréquence naturelle 15.4 Hz du système maître.

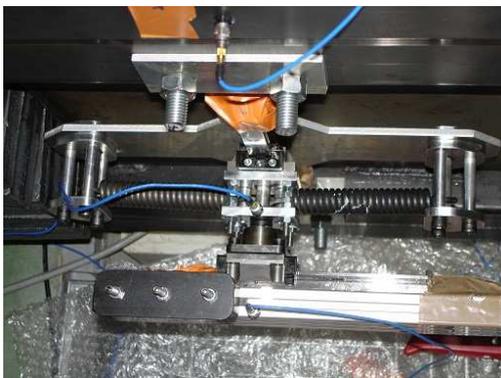
Différentes configurations des masses ajoutées et des ressorts linéaires sont testées avec différents niveaux de la consigne donnée par le pot vibrant. Mais les résultats sont à peine positifs comme attendus, le balancier ne tourne guère même quand le banc d'essai est excité le plus possible. La réponse du système dans tous les cas est un peu plus petite mais pas très différente par rapport à celle du système maître sans NES. Quelques explications possibles sont données pour ces résultats négatifs :



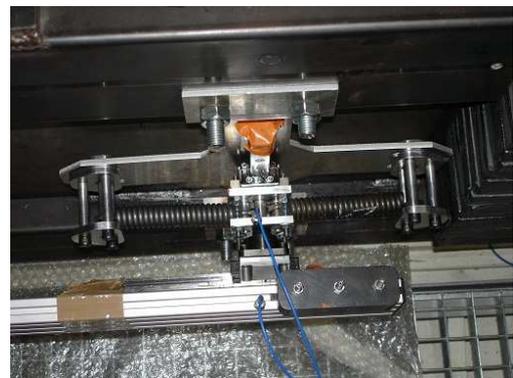
(a) Modèle SolidWorks



(b) Système expérimental complet



(c) NES gauche



(d) NES droit

FIGURE 7.10 – Système expérimental ajouté du système NES balancier

- Il y a peut-être trop de friction dans le système balancier due à la fabrication (des jeux dans les liaisons, le frottement dans les guidages linéaires et les roulements à billes ...). Cette explication n'est pas vraiment applicable car si c'est le cas, le balancier serait entraîné comme bloqué au système maître mais en réalité l'angle entre le bras de levier et la barre horizontale varie beaucoup.
- Si on recourt aux résultats analytiques présentés dans le chapitre 5, la réponse de ce système correspond au cas où le paramètre adimensionnel $Z_A = \frac{\omega_{NL}^2}{\omega_0^2} A^2$ tends vers 0 et le système réagit comme si on avait augmenté son amortissement. Cette explication semble plus raisonnable que la première.

Nous supposons maintenant que la deuxième explication est exacte, on doit chercher à augmenter la valeur du paramètre adimensionnel pour avoir un pompage énergétique plus efficace. Pour des raisons de sécurité pour le banc d'essai, l'augmentation de la consigne (A) n'est pas réalisable. D'autre part, l'augmentation des fréquences non linéaires ω_{NL} exige des ressorts linéaires plus rigides ce qui demande un peu de temps pour la fabrication. La seule solution qui nous reste est de réduire la fréquence naturelle ω_0 du mode de torsion du banc en allongeant le bras des deux barres de supports (voir figure 7.2) pour diminuer la raideur du système. En effet, on a déplacé tout le banc le plus possible pour avoir une fréquence naturelle la plus petite possible (environ 8.5 Hz suivant les informations fournies). Un profil d'excitation de balayage sinusoïdal entre 7 et 9.5 Hz est effectué dont la réponse amplitude-fréquence est illustrée sur la figure 7.11. Celle-ci montre bien la première fréquence 8.391 Hz du mode de torsion.

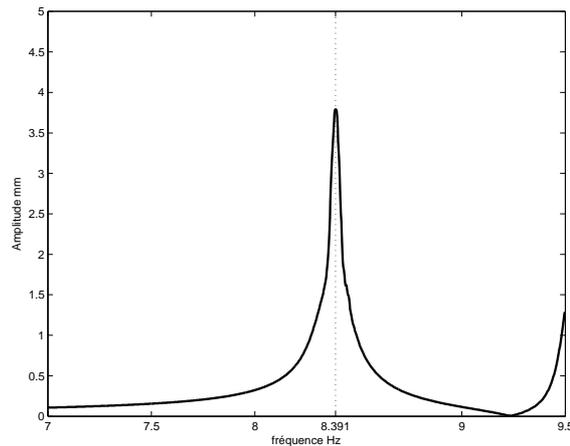


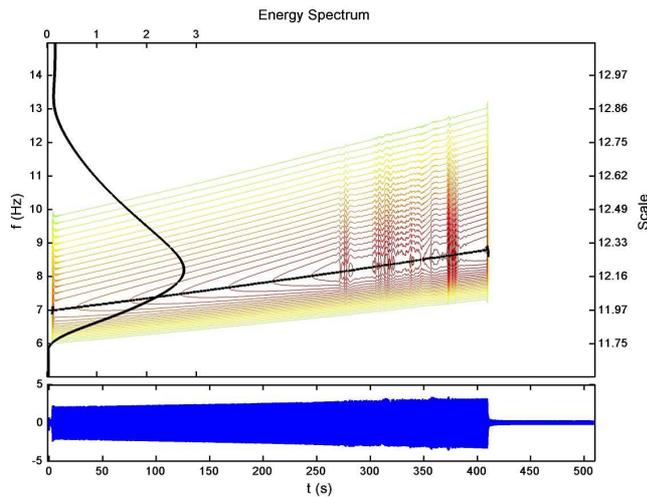
FIGURE 7.11 – Réponse amplitude-fréquence du nouveau système linéaire

Dans cette nouvelle expérimentation, on utilise les ressorts linéaires les plus rigides dont on dispose : leur raideur est de $k = 47.0 \text{ N/mm}$ et dans un premier temps aucune masse est ajoutée ; il n'y a que la masse du bras de levier pour le NES.

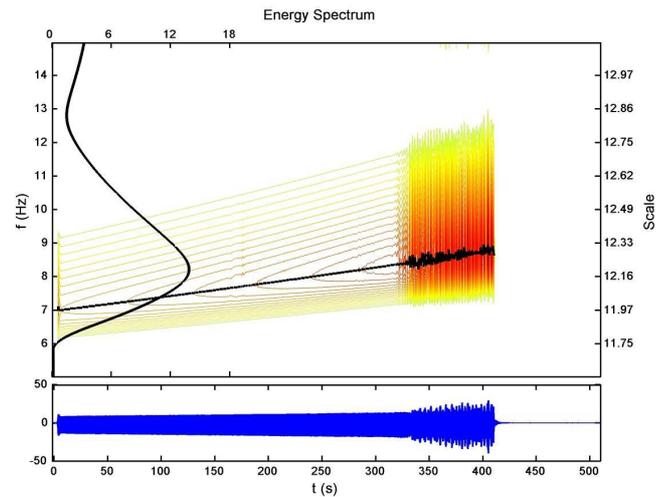
Il faut souligner que contrairement au cas linéaire qui met en évidence la forme des réponses stationnaires régulière, le comportement des systèmes non linéaires dépend clairement de l'énergie d'excitation comme l'a présenté le chapitre 5. On doit donc étudier le pompage énergétique sous forcing de balayage sinusoïdal pour différents niveaux d'excitation dont la commande sera fixée successivement à 2, 4, 6, 8, 10 et 12 mm de pic à pic. Pour chaque amplitude d'excitation, les fréquences sont balayées de 7 à 8.8 Hz avec une vitesse de 0.1 octave/min.

Pour une consigne fixe de 2 mm le comportement dynamique du système non linéaire est toujours stable et suit exactement l'évolution fréquentielle de l'excitation qui est illustrée sur la figure 7.12 à travers les crêtes d'ondelettes tracées sur les scalogrammes correspondants. Grâce à des iso-contours, on peut constater que la réponse dans ce cas est semblable à celle du cas d'un système linéaire dont le pic se trouve pas très loin de la fréquence de résonance. Mais tout est différent dans le cas d'une commande de 10 mm où il existe une large zone chaotique ou quasi-périodique autour de la fréquence naturelle comme présenté sur la figure 7.13. Dans cette zone de réponse, les fréquences de la réponse instable ne suivent plus celle de l'excitation mais varient fortement jusqu'au point où les crêtes d'ondelettes ne peuvent pas être exploitées sur le scalogramme. C'est une preuve de l'indépendance de la réponse quasi-périodique en fonction de la fréquence réduite $\frac{\omega_f}{\omega_0}$ et de l'amplitude de la force qui est détaillée théoriquement dans la partie précédente. Pour mieux vérifier cette indépendance, on a réalisé d'autres essais sur ce banc sous forcing sinusoïdal simple mais avec des amplitudes croissantes de 2 à 10 mm pour deux fréquences 8.1 et 8.47 Hz qui représentent respectivement la zone fréquentielle de réponse périodique et la zone quasi-périodique.

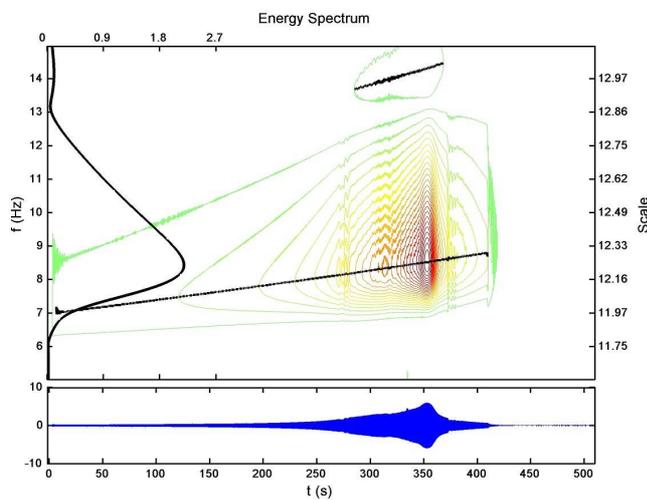
Des différences nettes se révèlent sur les scalogrammes dans les deux cas présentés sur les figures 7.14 et 7.15. Tandis que la réponse du système sous un sinus de 8.1 Hz est toujours stable pour toutes les amplitudes, celle pour le forcing de fréquence 8.47 Hz devient instable dès l'amplitude de 3 mm. La fréquence centrale de la réponse dans le deuxième cas n'est pas fixée à la fréquence du forcing comme dans le premier mais oscille autour de cette fréquence. Ce phénomène correspond à des sauts entre les branches stables supérieure et inférieure dans la relation énergétique entre des modes d'ensemble et interne dans la théorie détaillée précédemment pour le régime stationnaire.



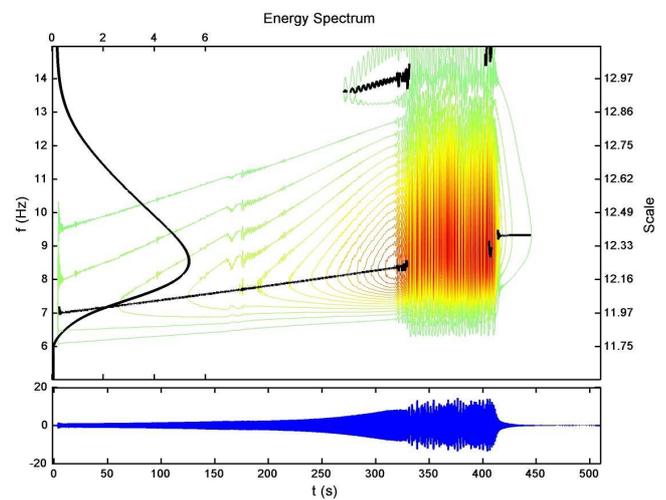
(a) Excitation



(a) Excitation



(b) Accélération du point d'accroche gauche



(b) Accélération du point d'accroche gauche

FIGURE 7.12 – Analyse en ondelette de l'excitation et de la réponse en accélération pour une commande fixe de 2 mm

FIGURE 7.13 – Analyse en ondelette de l'excitation et de la réponse en accélération pour une commande fixe de 10 mm

Une autre remarque qui est très importante en faveur du pompage énergétique que l'on peut observer dans ces essais : dans le premier cas la réponse stationnaire du système est stable et augmente linéairement suivant la croissance des amplitudes d'excitation mais dans le deuxième cas, dès que la quasi-périodicité est atteinte à partir de l'amplitude 3 mm, la réponse est instable mais reste toujours sous une certaine limite bien que l'excitation ne cesse d'augmenter.

De plus, les courbes amplitudes-fréquences expérimentales vérifient la remarque ci-dessus comme illustré sur la figure 7.16(a). L'augmentation des amplitudes du forcing a pour effet d'élargir la zone de quasi-périodicité et en même temps d'abaisser légèrement le seuil de cette zone. Pendant ce temps-là, la réponse du système dans la zone stable monte régulièrement comme dans le cas linéaire. Cette différence entre deux zones met en exergue l'efficacité du pompage énergétique quand le fonctionnement du NES est activé.

Les réponses en facteur d'amplification entre l'amplitude du point d'observation et l'amplitude

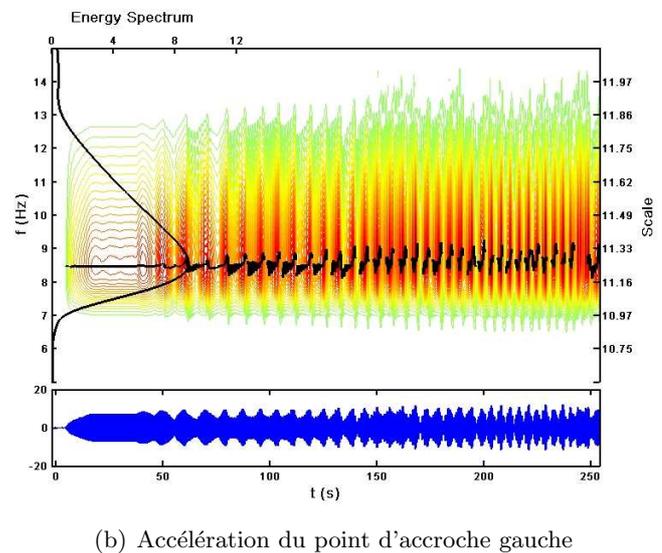
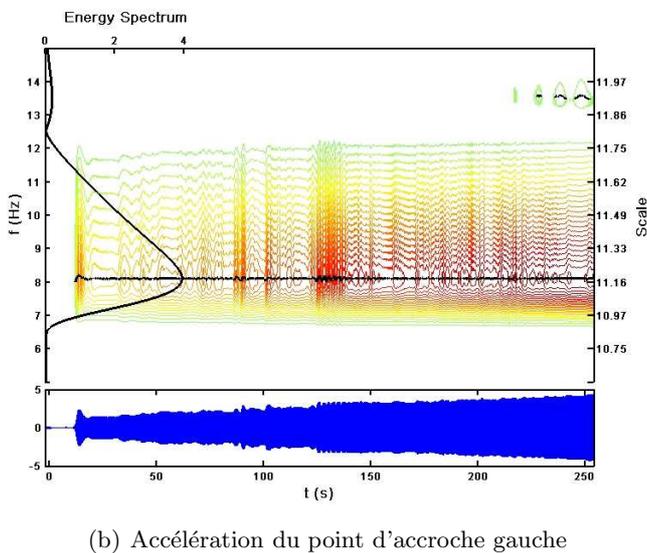
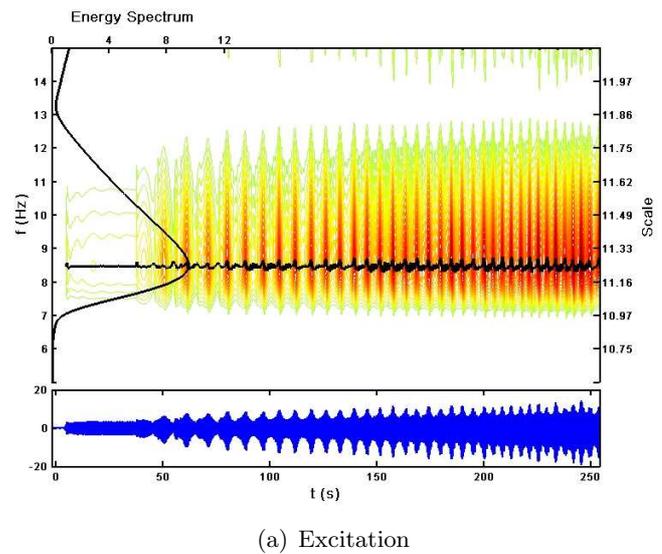
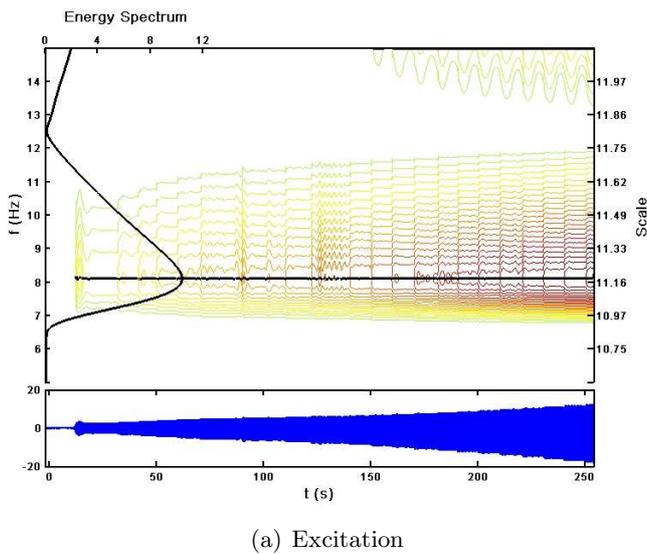


FIGURE 7.14 – Analyse en ondelette de l'excitation et de la réponse en accélération sous forcing d'un sinus de 8.1 Hz

FIGURE 7.15 – Analyse en ondelette de l'excitation et de la réponse en accélération sous forcing d'un sinus de 8.47 Hz

de la consigne sont aussi présentées sur la figure 7.16(b) en comparaison avec la réponse du système linéaire tout seul. En effet, les courbes avec couplage (présence de l'absorbeur non linéaire) se situent "en dessous" ou presque au même niveau de la courbe sans couplage (le cas où il n'y a pas d'absorbeur) pour différentes valeurs d'amplitude du forcing. On retrouve ici les comportements similaires au cas d'un système académique de 2 degrés de liberté présenté dans le chapitre 5 sauf que la résonance auxiliaire à gauche de la fréquence naturelle n'est pas encore présente. C'est-à-dire qu'on est encore au-dessous du seuil de cette résonance suivant la prédiction théorique. Mais parce que l'on ne peut pas avoir des ressorts plus rigides (temps de fabrication) et que l'augmentation de l'amplitude d'excitation est restreinte par sécurité du banc, cette phase d'expérimentation n'aboutit pas à retrouver le seuil d'efficacité du pompage énergétique en régime stationnaire.

Modélisation simple des résultats

Nous manquons d'informations plus précises sur le banc (les matrices de masse, d'amortissement et de raideur en base physique par exemple); en attendant nous nous contentons d'utiliser un modèle très simple pour simuler les phénomènes expérimentaux obtenus qui est déjà utilisé dans le chapitre 5 :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \epsilon\lambda_0\dot{x} + \omega_0^2x + \epsilon\ddot{y} = \mu\epsilon A\omega_0^2 \cos(\omega t), \\ \epsilon\ddot{y} + \epsilon\lambda(\dot{y} - \dot{x}) + \epsilon\Omega\omega_0^2(y - x)^3 = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

où :

- $\omega_0 = 2\pi 8.391 \text{ rad/s}$ est la fréquence propre du système linéaire,
- $\epsilon\lambda_0 = 0.75\%$ est l'amortissement critique du système maître déterminé à partir de la courbe amplitude-fréquence linéaire,
- A, ω sont l'amplitude et la fréquence de la consigne d'excitation,
- ϵ, λ et Ω sont respectivement le ratio de masse, l'amortissement et le ratio de fréquence non linéaire du NES à déterminer,
- μ est le coefficient de pondération entre les résultats analytique et expérimental.

Les paramètres à déterminer sont tout d'abord choisis d'une façon arbitraire et puis collés à la main pour que les courbes analytiques soient les plus proches possible. Après plusieurs essais avec pas mal de jeux de paramètres, on a trouvé des valeurs suivantes :

$$\begin{cases} \epsilon & = & 15\%, \\ \xi & = & 2.5\%, \\ \Omega & = & 1.5e5 \text{ m}^{-2}, \\ \mu & = & 0.0142. \end{cases} \quad (7.3)$$

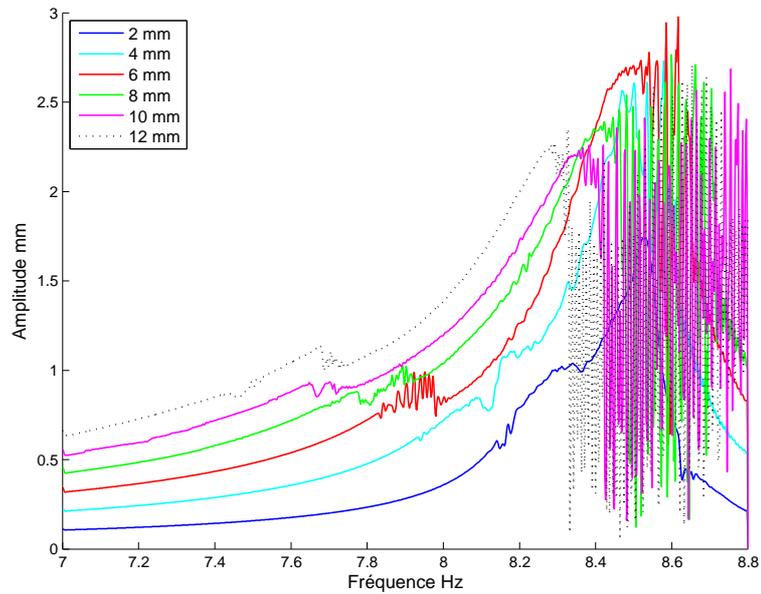
Et les résultats correspondants à ces paramètres sont présentés sur la figure 7.17. Évidemment, les courbes de prédiction analytique ne sont pas exactement collées sur les courbes expérimentales mais elles donnent quand même une bonne approximation sur la tendance de comportement et les zones de quasi-périodicité dans les réponses dynamiques. On peut conclure que la théorie présentée dans le chapitre 5 sur le régime stationnaire du pompage énergétique est vérifiée et robuste même pour un système réel complexe qui contient encore des imperfections non négligeables comme les jeux dans les liaisons, le déplacement non nul du centre de rotation du balancier, les légères pré-tensions dans les ressorts linéaires à cause du montage, ... etc. Ces résultats prometteurs nous permettent d'envisager la deuxième phase d'optimisation du système NES balancier pour le banc d'essai ESTACA avant d'être réalisé pour des systèmes plus complexes en pratique.

7.3 Conclusion et remarques

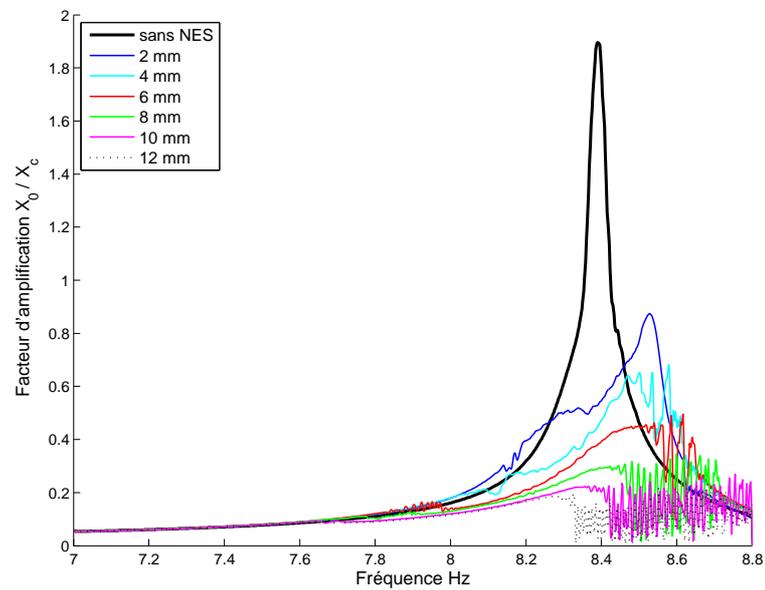
Pour la première fois, un tel dispositif de NES balancier est mise en œuvre et testé sur un gros prototype d'essai. Malgré les contraintes rencontrées dans la fabrication et aussi dans le

montage, le balancier se montre très efficace dans l'atténuation des vibrations du premier mode de torsion du véhicule qui est simulé par ce banc d'essai ESTACA. Ces résultats expérimentaux vérifient la théorie du pompage énergétique en régime stationnaire détaillée précédemment ainsi que la robustesse de ces nouveaux absorbeurs non linéaires dans un contexte réel. Cet absorbeur qui est presque inutile à basse excitation devient de plus en plus efficace suivant la croissance des amplitudes d'excitation en gardant la réponse du système maître toujours sous une certaine limite ce qui n'a jamais existé pour des absorbeurs linéaires classiques.

Cependant, les difficultés rencontrées (manque des ressorts plus rigides, les frictions énormes dans les liaisons à résoudre, limite d'excitation par sécurité ...) nous ont empêchés de tout vérifier, surtout la résonance auxiliaire qui représente le plafond d'efficacité du pompage énergétique n'est pas encore retrouvée. Ce travail nécessite d'autres essais avec différentes configurations (masses ajoutées, ressorts non linéaires) pour aboutir à une optimisation des NES. D'autre côté, il reste à résoudre des problèmes de pollutions sonores engendrées pendant les vibrations du balancier avant de pouvoir considérer la mise en œuvre d'un tel dispositif sur des vrais véhicules.



(a) Réponse en amplitude



(b) Réponse en facteur d'amplification

FIGURE 7.16 – Résultats expérimentaux sous forçage de balayage sinusoïdal

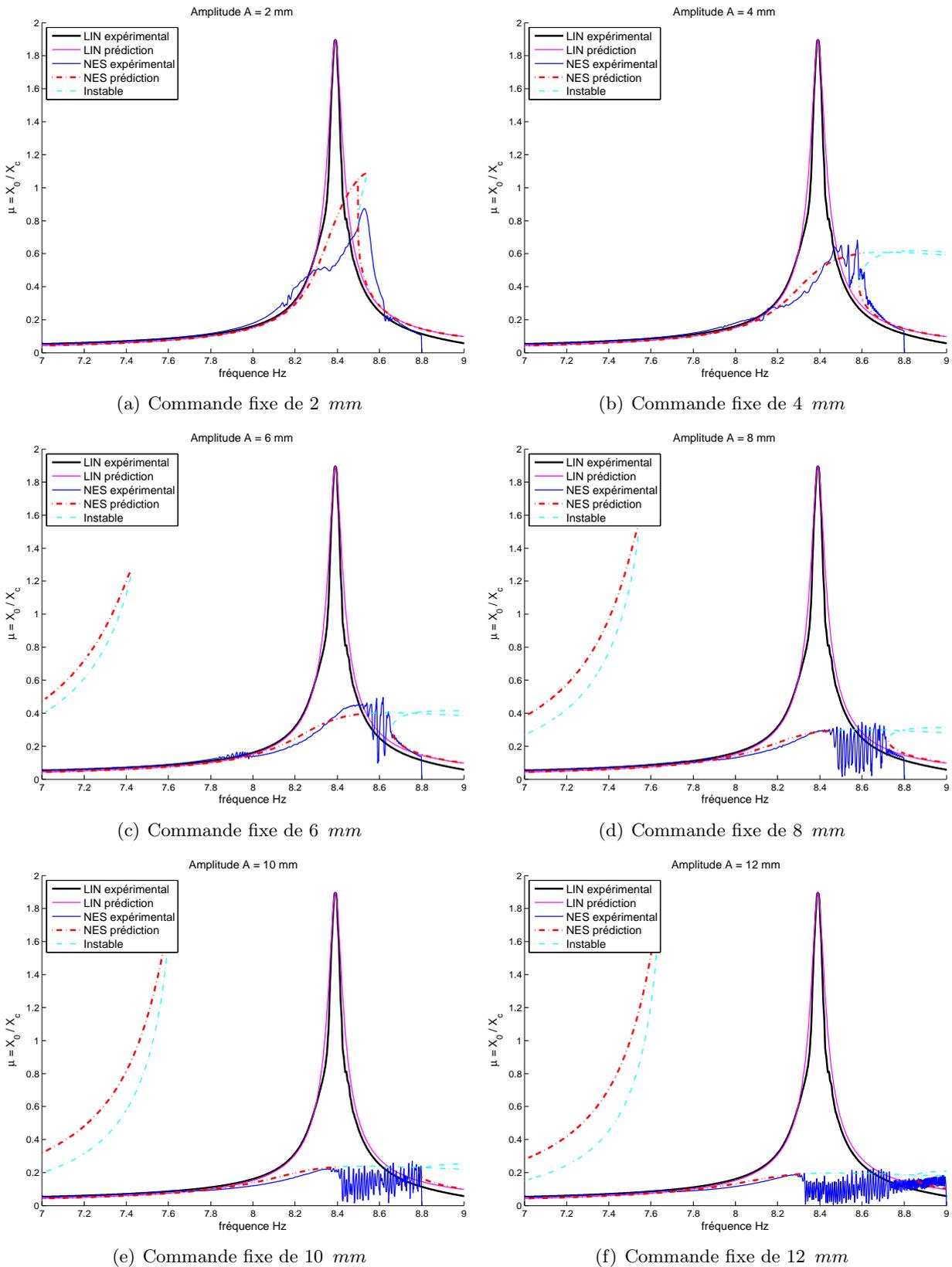


FIGURE 7.17 – Prédiction analytique du comportement non linéaire en fonction des amplitudes d'excitation différentes

Conclusions et Perspectives

Ce doctorat s'est construit autour de l'étude du phénomène de pompage énergétique concernant le développement d'une nouvelle génération d'absorbeur non linéaire : la théorie, l'application à une structure réelle et des outils ondelettes temps-fréquence pour l'analyse des signaux de réponse vibratoire sont tour à tour abordés.

Dans une première partie, les recherches dans le domaine des ondelettes se sont attachées, en premier lieu, à développer des opérateurs-ondelettes dans une analyse multi-résolution pour le calcul de l'intégration et de la convolution des fonctions continues de $L^2(\mathbb{R})$ ou des signaux échantillonnés expérimentaux. L'écriture sous forme générale classique en introduisant des vecteurs de filtres compacts à réponse impulsionnelle finie permet d'améliorer la performance des calculs de ces opérateurs qui sont mobilisés pour analyser expérimentalement des systèmes dynamiques linéaires. Le deuxième enjeu des ondelettes, traité dans le chapitre 2, concerne le calcul des cartographies pour l'identification fine des fréquences instantanées d'un signal. Bénéficiant des travaux de Perrier et de Coutel, de nouveaux algorithmes rapides sont introduits pour pouvoir envisager des densités de résolution plus élevées par des calculs proches du "temps réel". Un autre avantage de ces nouveaux algorithmes est qu'on peut utiliser plusieurs familles d'ondelettes, et plus seulement les splines utilisées par Perrier, pour calculer les cartographies.

En ce qui concerne les travaux de programmation, il a été nécessaire de développer une Toolbox fonctionnant sous MATLAB. Une architecture de classes bien structurées grâce aux nouvelles techniques de programmation orientée objet sous MATLAB a été construite qui fournit des fonctions nécessaires et une interface visuelle ergonomique pour l'analyse des signaux tabulés. Ce nouvel outil a été utilisé, dans le chapitre 3, pour l'identification d'un système dynamique linéaire et pour étudier le phénomène de pompage énergétique.

Les principes du pompage énergétique ont été abordés dans la deuxième partie de ce mémoire. Les études asymptotiques et numériques ont réaffirmé l'existence d'un seuil d'activation pour le processus de pompage énergétique en régime libre. Ce seuil individuel pour chaque NES nous permet de proposer une méthode analytique pour le design optimal de la raideur d'un absorbeur essentiellement non linéaire en considérant des variables adimensionnelles combinant la raideur non linéaire et des termes représentatifs d'énergie. Il est recommandé aussi de combiner plusieurs NES de différentes caractéristiques (raideur non linéaire, amortissement) pour obtenir un pompage efficace sur une plus large plage d'énergie initiale.

Le phénomène du pompage énergétique a été étudié, dans le chapitre 5, en régime forcé en prenant en compte tous les paramètres physiques du système maître ainsi que du NES pour étudier l'influence de chacun d'entre eux. Les investigations des points fixes ont donné des explications sur l'instabilité des réponses dynamiques autour de la fréquence naturelle du système maître qui représente l'efficacité du pompage énergétique en régime stationnaire. Le point le

plus intéressant de cette études est de prouver l'existence d'une résonance auxiliaire défavorable à gauche de la fréquence propre ce qui nous permet de définir un certain plafond de la raideur non linéaire par un critère pseudo-analytique.

Dans une troisième partie, nous avons visé l'application des absorbeurs non linéaires sur des structures concrètes, à savoir atténuer les vibrations dues au premier mode de torsion de caisse des véhicules automobiles de marque Peugeot 307-CC. Pour obtenir une forte non linéarité comme exigé par le pompage énergétique en présence de la gravité, nous avons élaboré la solution des NES en balancier qui semble être le meilleur compromis pour atténuer le mode de torsion. Nos apports sont donnés sur ce nouveau modèle d'absorbeur par des études analytiques, numériques et expérimentales.

La modélisation du comportement dynamique du système automobile a été réalisé à l'aide de la méthode de condensation de Craig-Bampton. Les études analytiques et numériques dans le chapitre 6 ont démontré la fiabilité et la robustesse des absorbeurs non linéaires NES en balancier par comparaison avec les batteurs linéaires. L'affirmation du comportement semblable du système autour de la fréquence propre pour deux bases modales différentes, réduite au seul mode de torsion ou à une base modale étendue, nous permet de réaliser les calculs avec un seul mode de torsion pour les études à venir.

Dans le cadre du contrat industriel avec PSA, un dispositif de NES balancier est mis en œuvre et testé sur un prototype d'essai à l'ESTACA. Les résultats obtenus ne sont pas parfaitement positif mais c'est quand même la première fois qu'on a montré l'efficacité de la nouvelle génération d'absorbeur non linéaire sur une structure proche de la réalité. Ils donnent non seulement de bonnes preuves de la théorie établie présentée dans ce doctorat mais aussi une opportunité de pousser plus loin en avant les études actuelles pour pouvoir monter ces NES balancier sur un véritable véhicule.

Bien sûr, de nombreuses perspectives se dessinent à l'issue de ces travaux de recherche, soit sur l'aspect théorique du pompage énergétique, soit sur la phase d'optimisation des NES balancier.

Des critères de design ont été proposés dans cette thèse mais seulement pour la raideur non linéaire, les autres paramètres ne sont pas suffisamment étudiés. Il reste alors à approfondir et à optimiser certains d'entre eux comme le ratio de masse ou le coefficient d'amortissement.

Dans les études du pompage énergétique en régime forcé, une méthode pseudo-analytique est construite de façon arbitraire à partir des simulations numériques. Nous pouvons étudier les bassins d'attraction des solutions multiples pour mieux comprendre le plafond d'efficacité en régime forcé ou bien le seuil de résonance auxiliaire qui est très important pour le design optimal des absorbeurs non linéaires.

Une autre piste de recherche possible est d'étudier le comportement des NES en parallèle en régime forcé pour mieux comprendre les transferts énergétiques entre eux et l'influence de l'un sur l'efficacité de l'autre pendant le processus de pompage énergétique.

Même si quelques essais sur le banc ESTACA couplé à des NES balancier ont donné des résultats positifs, nous avons du diminuer deux fois la fréquence propre du mode de torsion pour augmenter l'énergie de vibration du système maître afin d'activer le fonctionnement des

NES. En effet, des ressorts de raideur plus élevée vont bien tôt être fabriqués d'un côté pour pouvoir tester avec le système initial et d'autre côté pour trouver le plafond de la raideur non linéaire correspondant à l'apparition de la résonance auxiliaire comme prévu dans les études théoriques. Et une fois ces problèmes sont résolus, l'étape suivante sera l'application de cette nouvelle configuration d'absorbeur en balancier sur de vrais voitures.

Bibliographie

- [1] G. Beylkin, R. Coifman, and V. Rokhlin. Fast wavelet transforms and numerical algorithms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5 :156–201, 1998.
- [2] M. Chen, C. Hwang, and Y. Shih. The computation of wavelet-galerkin approximation on a bounded interval. *International Journal for numerical methods in engineering*, 39 : 2921–2944, 1996.
- [3] A. Cohen, I. Daubechies, and P. Vial. Wavelets on the interval and fast wavelet transforms. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1 :54–81, 1993.
- [4] S. Coutel. *Outils Ondelettes pour l'Analyse des Systèmes Dynamiques. Application à l'analyse multimodale et à la cartographie d'événements transitoires*. PhD thesis, Doctorat de Génie civil de l'institut national des sciences appliquées de Lyon, Lyon, France, 2006.
- [5] Roy R. Craig, Jr. Mervyn, and C. C. Bampton. Coupling of substructures for dynamic analysis. *AIAA Journal*, 6(7), July 1968.
- [6] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Math., Philadelphia, 1992. ISBN 0-89871-274-2.
- [7] D. Gabor. Theory of communication. *J. IEE (London)*, 93(III), 1946.
- [8] O.V. Gendelman. Transition of energy to a nonlinear localized mode in a tightly asymmetric system of two oscillators. *Nonlinear Dynamics*, 25 :237–253, 2001.
- [9] O.V. Gendelman. Bifurcations of nonlinear normal modes of linear oscillator with strongly nonlinear damped attachment. *Nonlinear Dynamics*, 37(2) :115–128, 2004. URL <http://dblp.uni-trier.de/db/journals/aim/aim20.html#Sloman99>.
- [10] O.V. Gendelman. Targeted energy transfer in systems with non-polynomial nonlinearity. *Journal of Sound and Vibration*, 315(3) :723–745, 2007.
- [11] O.V. Gendelman and C.H Lamarque. Dynamics of linear oscillator coupled to strongly nonlinear attachment with multiple states of equilibrium. *Chaos, Solutions and Fractals*, 24 :501–509, 2005.
- [12] O.V. Gendelman, E. Gourdon, and C.H Lamarque. Quasiperiodic energy pumping in coupled oscillators under periodic forcing. *Journal of Soud and Vibration*, 294 :651–662, 2006.
- [13] O.V. Gendelman, Y. Starosvetsky, and M. Feldman. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink i : Description of response regimes. *Nonlinear Dynamics*, 2007.
- [14] O.V. Gendelman, Y. Starosvetsky, and M. Feldman. Attractors of harmonically forced linear oscillator with attached nonlinear energy sink ii : Description of response regimes. *Dynamics, and Control in Condensed Systems and other media*, 2007.

- [15] E. Gourdon. *Contrôle passif de vibrations par pompage énergétique*. PhD thesis, Doctorat de Génie mécanique de l'Ecole centrale de Lyon, Lyon, France, 2006.
- [16] M. Holschneider. *Wavelets : an analytical tool*. Clarendon Press. Oxford, New York, 1995. 423 pages.
- [17] A. J. E. M. Janssen. The Zak transform and some counterexamples in time-frequency analysis. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 38(1) :168–171, 1992. ISSN 0018-9448.
- [18] J.P. Kahane and P.G. Lemarié-Rieusset. *Séries de Fourier et Ondelettes*. Nouvelle Bibliothèque mathématique. Cassini, Paris, 1998. 577 pages.
- [19] S. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $l^2(\mathbb{R})$. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 315 :69–87, 1989.
- [20] S. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11 :674–693, 1989.
- [21] Stéphane Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [22] Stéphane Mallat. *Exploration des signaux en ondelettes*. Ecole Polytechnique (12 septembre 2001), 2000.
- [23] L. Manevitch. Complex representation of dynamics of coupled non-linear oscillators. *Dynamics, and Control in Condensed Systems and other media*, Kluwer Academic Press, Plenum Publishers, NY :269–300, 1999.
- [24] Y. Meyer. Ondelettes et fonctions splines. *tech. rep., Centre de Mathématiques, Ecole polytechnique, Palaiseau, France, Séminaire équations aux dérivées partielles*, VI :86–87, 1986.
- [25] Y. Meyer. Les ondelettes. *tech. rep., UMR CNRS 7534, Université Paris IX-Dauphine, Paris, France, Rapport du Centre De Recherche en Mathématiques de la Décision*, 1988.
- [26] Y. Meyer and R. Ryan. *Wavelet : Algorithms and applications*. SIAM, Philadelphia,, 1993.
- [27] P. Monasse and V. Perrier. Orthonormal wavelet bases adapted for partial differential equations with boundary conditions. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 29(4) : 1040–1065, 1998.
- [28] S. Pernot. *Méthodes ondelettes pour l'étude des vibrations et de la stabilité des systèmes dynamiques*. PhD thesis, Doctorat de Génie civil de l'institut national des sciences appliqués de Lyon, Lyon, France, 2000.
- [29] V. Perrier. *Ondelettes et simulations numériques*. Thèse de doctorat en mathématiques appliquées, Université Paris VI, Paris, France, Février 1991. 241 pages.
- [30] V. Perrier and C. Basdevant. La décomposition en ondelettes périodiques, un outil pour l'analyse de champs inhomogènes : théorie et algorithmes. *La recherche aérospatiale*, 3 : 53–67, mai-juin 1989.
- [31] Olivier Rioul and P. Duhamel. Fast algorithms for the discrete and continuous wavelet transforms. *IEEE Trans. Info. Theory*, 38 :569–586, 1992.
- [32] C.E. Shannon. Communications in the presence of noise. *Proc. of the IRE*, 37 :10–21, 1949.
- [33] G. Strang and G. Fix. A fourier analysis of the finite element variational method. *Constructive Aspect of Functional Analysis, Rome : Edizioni Cremonese*, pages 196–830, 1971.

- [34] W. Sweldens. *The construction and application of wavelets in numerical analysis*. PhD thesis, University of South Carolina, May 1995. 198 pages.
- [35] B. Torrèsani. *Analyse continue par ondelettes*. Savoirs Actuels. InterÉditions / CNRS Éditions, 1995. ISBN 2-7296-0591-6, 239 pages.
- [36] B. Vaurigaud. Contrôle vibratoire de structures par pompage énergétique. application automobile. Master's thesis, Master MEGA Génie Civil, INSA de Lyon, Lyon, France, 2007.