HAL
open science

Déformations homotopiques dans les images digitales n-aires

Loïc Mazo

To cite this version:

Loïc Mazo. Déformations homotopiques dans les images digitales n-aires. Traitement des images [eess.IV]. Université de Strasbourg, 2011. Français. NNT : . tel-00660049

HAL Id: tel-00660049

https://theses.hal.science/tel-00660049

Submitted on 15 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N°d'ordre : **1279**

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

École Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur

UdS – INSA – ENGEES

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Strasbourg

Discipline : Informatique

par

Loïc Mazo

Déformations homotopiques dans les images digitales n-aires

Soutenue publiquement le 1 décembre 2011

Membres du jury

Directeur de thèse :	M. Christian Ronse, Professeur, Université de Strasbourg (Strasbourg)
Co-Directeur de thèse :	M. Michel Couprie, Professeur, École Supérieure d'Ingénieurs en Électronique et Électrotechnique (Noisy-le-Grand)
Rapporteurs externes :	M. Jacques-Olivier Lachaud, Professeur, Université de Savoie (Chambery)
	M. Rémy Malgouyres, Professeur, Université d'Auvergne (Clermont-Ferrand)
Examinateurs :	M. Jean-François Dufourd, Professeur Émérite, Université de Strasbourg (Strasbourg)
	M. Nicolas Passat, Maître de Conférences, Université de Strasbourg (Strasbourg)

Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection (LSIIT) — UMR 7005

Remerciements

Merci à Christian Ronse et Michel Couprie, mes deux directeurs de thèse, pour les précieux conseils qu'ils m'ont prodigués tout au long de ces trois années mais aussi pour leur soutien efficace dans les moments de doute qui n'ont pas manqué de survenir.

Merci à Jacques-Olivier Lachaud et Rémy Malgouyres d'avoir bien voulu accepter de rapporter ma thèse.

Merci à Jean-François Dufourd – avec qui j'ai découvert avec beaucoup de plaisir il y a quelques années, alors que j'étais en master, la théorie des types et des preuves constructives – de me faire l'honneur de participer à mon jury de thèse.

Enfin, un grand merci à Nicolas Passat qui m'a initié au traitement d'image et à la recherche, et qui m'a suivi et encouragé durant presque cinq ans.

À Joëlle

Table des matières

Table des matières 5

Table des figures 9

1 Introduction générale 1

I Modèles topologiques pour les images digitales 3

2 Les graphes d'adjacence et la topologie digitale 9

3 Des topologies « classiques » pour les images digitales 19
3.1 Les espaces ordonnés connexes . . . 21
3.2 Les complexes cellulaires . . . 24
3.3 Les ensembles partiellement ordonnés . . . 29

4 Déformations homotopiques 35
4.1 Le groupe fondamental . . . 35
4.2 Les notions de point et d'ensemble simples . . . 42
4.2.1 Définitions dans $\mathbb{Z}^2$ . . . 42
4.2.2 Définitions dans $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 3$ . . . 43
4.2.3 Définitions dans un ensemble partiellement ordonné . . . 47
4.2.3.1 Points unipolaires . . . 49
4.2.3.2 Points β-simples . . . 51
4.2.3.3 Points γ-simples . . . 54

5 Topologie dans les images de labels 59

II Déformations homotopiques des images binaires : contributions 63

6 Chemins digitaux et chemins continus 67
6.1 Compléments sur les ensembles partiellement ordonnés . . . 68
6.1.1 Continuité et connexité . . . 68
6.1.2 Homotopie . . . 69
6.2 Chemins et arcs . . . 71
6.2.1 Chemins finis . . . 71
6.2.2 Arcs . . . 76
6.3 Simplicité . . . 82
6.3.1 Simplicité et dualité . . . 82
6.3.2 Complexes et simplicité . . . 83
6.4 Conclusion . . . 90

7 De l'espace digital à l'espace cellulaire **91**
7.1 Images régulières . . . 92
7.1.1 Correspondance bi-univoque entre les images digitales et complexes . . . 92
7.1.2 Dualité . . . 96
7.1.3 Calcul direct des valeurs d'une image régulière . . . 98
7.1.4 Images régulières et ouverts/fermés réguliers . . . 102
7.2 Chemins et lacets . . . 104
7.2.1 Composantes connexes . . . 104
7.2.2 Groupes fondamentaux en dimension 2 et 3 . . . 109
7.3 Conclusion . . . 114

III Modèles topologiques et points simples pour les images de labels **115**

8 Les calques **117**
8.1 Introduction . . . 117
8.2 Images de calques . . . 118
8.3 Images à supports fermés . . . 124
8.3.1 Coupes . . . 125
8.3.2 Équivalence homotopique . . . 130
8.4 Images de calques régulières . . . 133
8.4.1 Images régulières et régularisées . . . 133
8.4.2 Images régulières dans un treillis booléen . . . 134
8.4.3 Xels digitalement simples . . . 136
8.5 Conclusion . . . 139

9 Les revêtements **145**
9.1 Introduction . . . 145
9.2 Revêtements . . . 146
9.2.1 Revêtements réguliers . . . 148
9.2.2 Simplicité . . . 150
9.2.3 Dualité . . . 151
9.3 Revêtements 1-réguliers et calques réguliers . . . 153
9.3.1 Revêtement associé à une image de calques . . . 153
9.3.2 Image de calques associée à un revêtement . . . 154
9.4 Revêtements réguliers sur $\mathbb{F}^3$ . . . 156
9.4.1 Revêtements $(-1,1,-1)$-réguliers . . . 157
9.4.2 Revêtements $(1,-1,1)$-réguliers . . . 167
9.5 Conclusion . . . 172

10 Conclusions et perspectives **175**

Liste des publications **177**

A Topologie **179**
A.1 Définition 179
A.2 Fonctions continues et classification des espaces topologiques 179
A.3 Attributs topologiques 180
A.4 Topologie algébrique 180
A.5 Complexes simpliciaux 181
A.6 Complexes polyédraux 182

B Ordres et treillis **185**
B.1 Ensembles partiellement ordonnés 185
B.2 Treillis 186

C Propriétés combinatoires des complexes cubiques utilisées au chapitre 7 **187**

Index **189**

Bibliographie **191**

Table des figures

1.1 Segments discrets 6

2.1 Pavages du plan 10
2.2 Sommets des pavages du plan 10
2.3 Dodécaèdre rhombique 11
2.4 Graphes de connexité associés au pavages du plan 12
2.5 Connexité de l'objet v. connexité du fond 13
2.6 Octaèdre tronqué 13
2.7 6-adjacence sur grille cubique 2D 14
2.8 Adjacence objet-fond 14
2.9 Opérations booléennes sur les objets 15
2.10 Images bien-formées 16

3.1 Critère pour reconnaître les adjacences topologiques 20
3.2 Topologies de Marcus-Wyse et de Khalimsky sur $\mathbb{Z}^2$ 22
3.3 Définitions des COTS (1969) 22
3.4 Droite de Khalimsky 23
3.5 Plan de Khalimsky 24
3.6 Motivation pour l'usage des complexes cellulaires (Kovalevsky) 25
3.7 Analogue topologique (Kovalevsky) 28
3.8 Analogue topologique en $(4, 8)$-adjacence 28
3.9 Fonctions d'éclairage (Ayala *et al.*) 30
3.10 Complexe, diagramme de Hasse et complexe des chaînes 31
3.11 Complexes cubiques « tout ou rien » (Bertrand et Couprie) 33

4.1 Groupe fondamental digital 37
4.2 Groupe fondamental de Khalimsky 38
4.3 Groupe fondamental de Boxer (1) 39
4.4 Groupe fondamental de Boxer (2) 39
4.5 Complexes simpliciaux abstraits de Grandis 40
4.6 Homotopie de chemins dans le complexe simplicial abstrait de Grandis 41
4.7 Fonctions d'éclairage et groupe fondamental 41
4.8 Compter les composantes connexes, ou les tunnels, ne suffit pas 44
4.9 Points simples de Tourlakis et Mylopoulos 46
4.10 Attache d'une face dans un complexe 47
4.11 Noyau critique d'un complexe 48
4.12 Points haut-unipolaire et bas-unipolaire 50
4.13 Une face non β-simple contre-intuitive 53
4.14 Amincissement dans $\mathbb{F}^2$ par retrait de points β-simples 54
4.15 Ensemble n-contractile 56

4.16 Amincissement dans $\mathbb{F}^3$ par retrait de points γ-simples 57
4.17 Le complexe des chaînes de l'EPO de la figure 4.13-(a) 57

5.1 Couples d'adjacences objet/fond dans une image de labels 60
5.2 Topologie des labels et topologie de la partition 61

6.1 Construction des intervalles dans la preuve du théorème 6.2.4 73
6.2 Étirements élémentaires 77
6.3 Preuve de la proposition 6.2.11 78
6.4 Preuve du théorème 6.2.12 (1) 80
6.5 Preuve du théorème 6.2.12 (2) 81
6.6 Étapes de la preuve de la proposition 6.3.7 85
6.7 Exemples de noyaux d'une « sphère » percée 85
6.8 Preuve du lemme 6.3.13 89
6.9 Contre-exemple du théorème 6.3.12 lorsque l'hypothèse sur la dualité est omise . . . 90

7.1 Faces opposées par rapport à une face donnée 93
7.2 Deux exemples d'images régulières dans $\mathbb{F}^2$ et $\mathbb{F}^3$ 93
7.3 Images régulières associées à une même image de $\mathbb{Z}^2$ 94
7.4 Images régulières associées à une même image de $\mathbb{Z}^3$ 95
7.5 Différence entre les fonctions de connexité $(1,-1,-1)$ et $(-1,-1,-1)$ 96
7.6 Fonction de connexité associée aux $(6,18)$ et $(18,6)$-adjacences 97
7.7 Images régulières et dualité dans $\mathbb{F}^2$ 99
7.8 Images régulières et dualité dans $\mathbb{F}^3$ 99
7.9 Trièdre 100
7.10 Région localement plane de la surface dans une image régulière 103
7.11 Preuve du lemme 7.2.5 (1) 107
7.12 Preuve du lemme 7.2.5 (2) 108
7.13 Preuve de la proposition 7.2.9 110
7.14 Preuve du lemme 7.2.11 (1) 111
7.15 Preuve du lemme 7.2.11 (2) 111
7.16 Preuve du lemme 7.2.11 (3) 112
7.17 Preuve du lemme 7.2.11 (4) 113

8.1 Diagramme de Hasse des labels dans une image digitale 118
8.2 Exemples d'images de calques 119
8.3 Supports dans une image de calques 120
8.4 Simplicité dans une image de calques 121
8.5 Non localité de la simplicité avec un treillis des labels non distributif 123
8.6 Amincissement/expansion de labels dans $\mathbb{F}^2$ par modifications de points simples . . . 124
8.7 Points simples et images à supports fermés 125
8.8 Paire libre dans une image de calques 126
8.9 Coupe dans une image de calques 128
8.10 Coupe avec un treillis des labels non distributif (1) 128
8.11 Coupe avec un treillis des labels non distributif (2) 129

8.12 Étapes de la preuve du théorème 8.3.13 131
8.13 Contre-exemple du théorème 8.3.13 lorsque l'hypothèse de la sphère percée est omise 132
8.14 Calque non régulier dans une image régulière avec un treillis des labels non distributif 134
8.15 Xels digitalement simples, ou non, dans une image de labels régulière 137
8.16 Attache d'un xel dans une image de calques régulière 137
8.17 Étapes de la preuve de la proposition 8.4.10 138
8.18 La condition sur le nombre de labels dans la proposition 8.4.10 n'est pas nécessaire . 140
8.19 Amincissement/expansion de labels dans $\mathbb{Z}^2$ à l'aide de l'algorithme 1 141
8.20 Comparaison entre « ML-simple points » et xels digitalements simples 143

9.1 De $\mathbb{Z}^2$ à $\mathbb{F}^2$ avec des labels et des objets ouverts (1) 145
9.2 De $\mathbb{Z}^2$ à $\mathbb{F}^2$ avec des labels et des objets ouverts (2) 146
9.3 Codage des fibres et des labels dans un revêtement 147
9.4 Exemple de revêtement régulier 149
9.5 Changement de label dans une image digitale avec objets ouverts (1) 158
9.6 Changement de label dans une image digitale avec objets ouverts (2) 159
9.7 Notations de la section 9.4.1 160
9.8 Prédicats sur les 1-faces de $\mathbb{F}^3$ dans les revêtements 161
9.9 Preuve du lemme 9.4.2 162
9.10 Preuve du lemme 9.4.3 165
9.11 Modification d'un label dans un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier 167
9.12 Amincissement des labels d'un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier (1) 168
9.12 Amincissement des labels d'un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier (2) 169
9.13 Amincissement des labels d'un revêtement $(1, -1, 1)$-régulier 171

A.1 Collapsus et rétraction par déformation 183

B.1 Diagramme de Hasse d'un ensemble partiellement ordonné 185

C.1 Preuve du lemme C.0.2 188
C.2 Preuve du lemme C.0.3 188

Chapitre 1

Introduction générale

De nombreux procédés utilisés en analyse ou en traitement d'image modifient les objets d'intérêt de l'image dans une suite d'opérations, menées séquentiellement ou parallèlement, consistant à enlever, ou à ajouter, des points à ces objets (cela vaut aussi bien pour les images binaires, que pour les images n-aires (plus souvent appelées images de labels) et pour les images à niveau de gris (la modification d'un niveau de gris en un point revient à ajouter ou enlever un point sur une ligne, ou une surface, de niveau). Suivant le procédé considéré, il n'est pas rare que la conservation de la topologie de l'objet traité soit une qualité recherchée. La prise en compte de ce besoin a conduit au développement de la topologie discrète, une branche de l'informatique graphique qui s'intéresse à la définition et à la reconnaissance de la topologie des objets représentés sur les images numériques ainsi qu'aux conditions de préservation de celle-ci. Une des questions les plus étudiées depuis cinquante ans dans ce domaine a été précisément de trouver les conditions pour pouvoir supprimer un point – on a d'abord parlé de point supprimable, on dit plutôt aujourd'hui point simple – ou un ensemble de points à topologie constante. Cette notion de topologie constante peut être déclinée de plusieurs manières mais dans le cadre d'objets qui sont le plus généralement finis, la notion d'homéomorphisme, et plus généralement toutes les notions qui font intervenir des bijections entre les points des objets considérés sont clairement inutilisables : si on supprime un point dans un objet fini, il n'y a aucune chance qu'il puisse être en bijection avec l'objet initial. Par contre, la notion de type d'homotopie, et plus particulièrement de rétraction par déformation, semble être bien adaptée à la formulation et à la résolution des problématiques liées aux points simples. Ces notions ont ainsi servi de fil conducteur dans les travaux présentés ici.

Il y a plusieurs façons d'aborder la question de la topologie discrète. On peut considérer qu'une image numérique est un échantillonnage d'une réalité euclidienne – par exemple, chaque point d'une image numérique 2D peut représenter un carré du plan euclidien – et utiliser alors la topologie euclidienne. Une autre façon est de définir directement sur la grille de l'image digitale des notions topologiques (par exemple, il n'est pas difficile de définir sur une telle grille une notion de voisinage). Les deux méthodes peuvent être mixées, la réalité euclidienne sous-jacente permettant d'inspirer ou de justifier *a posteriori* des définitions et propriétés données pour la grille discrète. Il y a aussi des méthodes intermédiaires qui consistent à ajouter des points « imaginaires » pour obtenir une structure d'espace topologique sans pour autant quitter le monde discret (et comme pour les nombres complexes, ces points imaginaires peuvent être présentés comme de nouveaux points ou comme des k-uplets de points réellement présents dans l'image). Ces grands courants de la topologie discrète sont présentés dans la partie I. Le parti pris adopté dans notre travail est de travailler dans un monde discret, tout en utilisant, aussi loin que possible, la topologie classique (qui, dans un espace discret, peut être très différente de la topologie euclidienne), ne serait-ce que pour bénéficier des résultats obtenus par une branche des mathématiques particulièrement vivante. Ce parti pris a eu des conséquences importantes sur le déroulement de notre travail, initialement tourné vers les images de labels.

Nous nous sommes demandés pourquoi la notion de chemin (et au delà toute l'homotopie) est systématiquement réécrite dans le cadre de la topologie discrète plutôt qu'utilisée telle quelle. Existe-t-il une raison théorique à cela, ou uniquement des raisons pragmatiques ? Le chapitre 6 tente de répondre à cette question. Ensuite, l'utilisation de la topologie classique nous a conduit à nous poser la question de la façon d'ajouter à la grille digitale initiale les points supplémentaires nécessaires pour obtenir une structure algébrique engendrant une topologie avec, dans le cahier des charges, la nécessité d'englober le cas des images n-aires pour n non nécessairement égal à 2. Dans le chapitre 7 nous proposons un *modus operandi* pour cet enrichissement de la grille d'une image digitale (binaire ici, mais les formules utilisées sont clairement extensibles à d'autres types d'images). Nous abordons enfin le cas des images de labels dans la partie III. À notre connaissance, il n'y a pas eu d'étude théorique générale sur ce qu'est la topologie d'une image de labels. Il est clair qu'une telle notion doit englober les topologies des différents blocs de l'espace étiquetés par les labels. Il est tout aussi clair qu'on attend quelque chose d'autre : le tout est beaucoup plus que la somme des parties. Nous avons fait le choix de considérer que ce tout est le treillis engendré par les parties, c'est-à-dire que toute union de parties doit être envisagée – et conservée le cas échéant – lorsqu'on parle de topologie de labels. Il est possible, et en fait probable, que sur bien des images de labels ce choix soit trop exigeant et d'une inutile complexité algorithmique. C'est pourquoi nous n'imposons finalement qu'un treillis atomique qui n'est pas nécessairement un treillis des parties. Néanmoins, l'utilisation d'un treillis non distributif peut nous priver de beaucoup de propriétés intéressantes. Dans le chapitre 8, nous décrivons une image de labels comme une superposition de calques, chaque calque représentant un des labels de l'image initiale. Sur ces images nous décrivons des points simples sur lesquels la suppression d'un label, ou sa modification, ne change la topologie d'aucune superposition de calques. Nous donnons aussi des conditions permettant l'utilisation de cette notion directement sur l'image initiale (avant extension de l'espace ambiant). Le chapitre 9 propose un autre modèle d'image de labels dans lequel une image de labels est constituée d'un ensemble de feuillets binaires, chacun représentant une union particulière des blocs initiaux (il y a donc beaucoup plus de feuillets dans ce modèle que de calques dans le précédent modèle). Ce modèle est plus général que le précédent, il permet de couvrir un plus grand nombre d'interprétations d'une image discrète. Dans ce modèle nous définissons une notion de point simple dont la modification préserve la topologie de tous les feuillets et nous donnons deux exemples d'utilisation dans $\mathbb{Z}^3$. Enfin, nous concluons ce travail en indiquant notamment des questions auxquelles nous n'avons pas pu, faute de temps, ou tout simplement pas su, apporter de réponse et qui, à notre avis, mériteraient d'être étudiées dans de futurs travaux.

Signalons en outre que des annexes, rassemblées en fin d'ouvrage, proposent quelques rappels d'algèbre et de topologie. Ces annexes sont surtout l'occasion de présenter la terminologie et les notations utilisées dans notre manuscrit. Un index permet par ailleurs de retrouver la définition de certaines notions dans le texte. Pour terminer, mentionnons ici quelques notations ou conventions : l'inclusion large est notée $\subseteq$ et l'inclusion stricte $\subset$; les relations et opérations sur les fonctions sont toujours définies point à point (par exemple, $f < g$ signifie $f(x) < g(x)$ pour tout x) et, pour une fonction de plusieurs variables une notation telle que $f(x,.)$ désigne la fonction $y \mapsto f(x,y)$ (x est fixé, y est libre) ; l'ensemble des parties d'un ensemble E est noté $\mathcal{P}(E)$ et le complémentaire dans E d'une partie A est noté A^c.

Première partie

Modèles topologiques pour les images digitales

Introduction

Informellement, on peut définir les images digitales comme des tableaux de nombres, stockables dans la mémoire d'un ordinateur et manipulables par celui-ci, donc finis. Néanmoins, cette description n'est pas complète. Ainsi, Rosenfeld (1969) fait remarquer que cela n'aurait pas de sens de calculer les valeurs propres d'une image digitale (considérée comme une matrice). Ce qui caractérise une image par rapport à un tableau de nombres ordinaire, c'est la notion à la fois géométrique et topologique de proximité, de voisinage ou d'adjacence : traitée qualitativement elle permet de faire de la topologie et quantitativement de la géométrie. Les images digitales sont donc des structures associant une fonction λ (le tableau de nombre) et une (ou des) relation(s) permettant de définir cette notion de proximité. L'ensemble sur lequel est défini la fonction λ, le *domaine* de l'image, ou son *support*, est constitué de *points*, encore appelés *pixels* (pour « picture elements ») en 2D, *voxels* (« volume elements ») en 3D ou simplement *xels* [1] généralement disposés sur une grille régulière de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$, typiquement une partie rectangulaire de $\mathbb{Z}^n$.

L'ensemble d'arrivée de la fonction λ, son *codomaine*, peut être booléen (images binaires en noir et blanc), numérique (images à niveaux de gris), vectoriel (images couleurs ou multispectrales) ou ensembliste (images de labels). Lorsque le codomaine est booléen ($\{0, 1\}$), la définition fonctionnelle est généralement remplacée par une définition ensembliste dans laquelle l'*objet* de l'image λ est l'ensemble $\lambda^{-1}(\{1\})$ et le *fond* de l'image λ est l'ensemble $\lambda^{-1}(\{0\})$, c'est-à-dire, le complémentaire de l'objet relativement au domaine de l'image.

Le domaine peut être fini (Rosenfeld, 1979a) mais, pour éviter d'avoir à traiter des cas particuliers du fait des bords de l'image (le nombre de voisins diffère suivant qu'un xel est à l'intérieur ou au bord de l'image), on préfère le plus souvent prendre pour domaine $\mathbb{Z}^n$ tout entier (Kong et Rosenfeld, 1989) ou tout ensemble infini dénombrable (Bertrand, 1999), en précisant éventuellement que seul le fond de l'image est infini (Kong et Rosenfeld, 1989, Klette et Rosenfeld, 2004) (néanmoins cette restriction pose des problèmes si l'on a besoin de prendre le négatif de l'image). Le domaine peut même être tout à fait quelconque (Herman, 1993), le caractère digital de l'image résultant alors uniquement de l'existence d'une relation de voisinage. Observons encore que le fait d'utiliser $\mathbb{Z}^n$ comme domaine de l'image ne signifie pas nécessairement que l'image soit bâtie sur une grille cubique $k \cdot \mathbb{Z}^n$ ($k \in \mathbb{R}$). En effet, en toute rigueur, il faudrait distinguer le domaine de la fonction λ constitué de coordonnées, ou plus généralement d'adresses, du support de l'image constitués des xels identifiés par ces coordonnées ou ces adresses (Kiselman, 2004). Mais, à condition que le système de coordonnées « transporte » la relation d'adjacence, cette distinction est inutile en topologie (ce n'est pas le cas en géométrie où des problèmes de mesure surviennent). La figure 2.2, page 10, montre des supports qui ne sont pas dans $\mathbb{Z}^2$ avec un domaine dans $\mathbb{Z}^2$.

Les images digitales peuvent provenir d'un matériel d'acquisition (scanner à rayons X, à résonance magnétique nucléaire ou à émission de positons, microscope électronique ou à sonde locale, téléscope, caméra ou appareil photographique numérique). Dans ce cas, les points du domaine de l'image peuvent être interprétés comme les centres de pavés du plan ou de l'espace auxquels sont affectés un résumé statistique de la grandeur physique mesurée sur ces pavés par les cellules des capteurs des appareils d'acquisition. Ainsi dans le traité Géométrie discrète et images numé-

1. On utilise également le terme *spel* (spatial element) à la place de xel.

RIQUES (Coeurjolly *et al.*, 2007), les auteurs définissent les images numériques 2D comme « la représentation d'une distribution d'intensité lumineuse sur une partition dénombrable de $\mathbb{R}^2$ ». Notons ici qu'obtenir une véritable partition soulève une question topologique sur les bords des éléments de la partition, question que nous retrouverons au chapitre suivant avec la recherche de relations d'adjacence dans l'image [2]. Les images binaires et de labels qui relèvent de cette première catégorie d'images sont généralement obtenues par segmentation d'une image à niveaux de gris.

La deuxième catégorie d'image digitale à considérer est celle des images créées directement dans les ordinateurs à l'aide de logiciels spécialisés. De telles images, qui ne résultent pas d'un processus d'acquisition, sont utilisées notamment pour la modélisation et la simulation. Elles peuvent être nativement binaires ou segmentées et ne sont pas nécessairement bruitées, mais peuvent néanmoins contenir des configurations dérangeantes d'un point de vue topologique (par exemple les deux « droites » qui se croisent sur la figure 1.1 n'ont pas de point d'intersection). Dans cette catégorie, nous rangeons aussi des images totalement abstraites comme celles décrites dans Cohen (2004) dont les points sont des structures de données et qui sont utilisées pour définir un langage de programmation s'appuyant sur des notions de topologie.

0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	**1**	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	**1**	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0	0
0	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	0	0	0

FIGURE 1.1 – Notre œil peut identifier deux segments de droite sur cette figure. Ces « droites » ne sont pas parallèles. Pour autant, elles ne sont pas sécantes : elles n'ont aucun « point » en commun.

Certains auteurs excluent, en totalité ou en partie, du champ de leur étude les images de la deuxième catégorie (Rosenfeld, 1969) car l'analyse et le traitement de l'image qui n'est plus contraint, ou guidé, par l'existence d'une réalité physique sous-jacente (perçue comme euclidienne et souvent appelée *analogue continu*) relève de méthodes différentes. De même, le comité technique n°18 de l'IAPR [3] définit ainsi la topologie et la géométrie digitale : « The discipline of "Digital Geometry and Topology" deals with discrete sets modelling digitized subsets of Euclidean spaces ».

Ici, nous avons fait le choix de ne pas lier le traitement de l'image à l'existence d'un analogue continu. L'image digitale est un objet d'étude (topologique) en soi, quitte à devoir accepter des confi-

2. D'un autre côté, les sites photosensibles des capteurs optiques forment en général seulement une partition partielle du capteur ce qui supprime le problème des frontières et pourrait conduire à utiliser une topologie digitale floue basée sur des probabilités de connexité (ici, c'est la connexité qui apparaît floue plutôt que les valeurs de l'image en chaque xel). Une brève présentation de la topologie floue est donnée dans le chapitre 2.

3. International Association of Pattern Recognition.

gurations difficilement interprétables physiquement, au moins à l'echelle macroscopique, comme les intersections d'objets.

Dans cette première partie, nous décrivons les principaux modèles qui ont été proposés depuis les débuts de l'informatique graphique pour construire, dans les images digitales, des notions topologiques pertinentes.

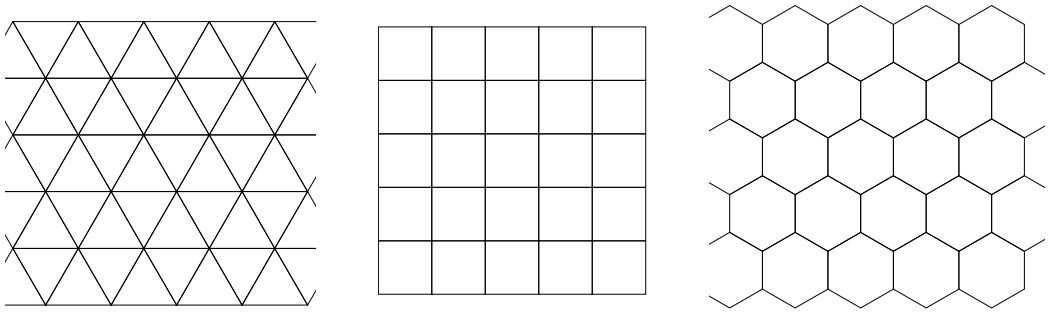
Chapitre 2

Les graphes d'adjacence et la topologie digitale

Historiquement, la première façon de munir les images digitales d'une structure topologique a consisté à définir une relation d'*adjacence* entre les points de l'image (Rosenfeld et Pfaltz, 1966). Lorsque les points de l'image sont vus comme des résumés statistiques d'une grandeur physique sur les membres d'une subdivision de $\mathbb{R}^n$, on considère que deux points sont adjacents si les carreaux de la subdivision auxquels ils sont associés ont des frontières qui s'intersectent en un ou plusieurs points. On peut exiger que cette intersection soit au moins de dimension k ($k \in \mathbb{N}$), on parle alors de k-adjacence. On désigne aussi les adjacences par le nombre de points adjacents que possède chaque point du domaine (à condition que ce soit le même pour tous les points du domaine). Cette dernière désignation est d'ailleurs plus répandue que la première et la confusion entre les deux n'est guère possible (certains auteurs utilisent les deux en même temps (Fiorio, 2008)). Ainsi, dans le cas d'une subdivision de $\mathbb{R}^2$ en carrés centrés sur les points à coordonnées entières, on définit deux adjacences, la 0-adjacence – ou 8-adjacence – (deux points sont adjacents si les carrés associés ont au moins un sommet en commun ; chaque point a alors huit voisins) et la 1-adjacence – ou 4-adjacence – (deux points seront adjacents si ces carrés ont un côté en commun ; chaque point a alors quatre voisins). Ces adjacences sont représentées sur la figure 2.4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'une grille cubique, on définit de même les 0, 1 et 2-adjacences (resp. 26, 18 et 6-adjacences). Plus généralement, sur la grille cubique de $\mathbb{R}^n$, les $(2n)$-adjacence et $(3^n - 1)$-adjacence (nombre de voisins) correspondent aux 0-adjacence et $(n - 1)$-adjacence (dimensions). Dans la suite, nous n'utilisons plus que la dénomination par le nombre de voisins.

Les n-cubes ne sont pas la seule façon de paver l'espace. Par exemple, en dimension 2, le pavage par des triangles permet de définir deux types d'adjacences (suivant que l'on exige ou non le partage d'une arête et pas seulement d'un sommet) dans lesquels un point peut avoir 3 ou 12 voisins (Deutsch, 1972). À noter que certains pavages, comme le pavage hexagonal dans le plan, ou les pavages par des octaèdres tronqués dans l'espace, ne définissent chacun qu'un seul type d'adjacence (respectivement la 6-adjacence dans le plan et la 14 adjacence dans l'espace). Ce dernier pavage, comme celui par des dodécaèdres rhombiques (qui définit deux adjacences avec 12 ou 18 voisins) présentent l'avantage pour les applications de visualisation d'objets 3D d'avoir des sommets moins saillants que ceux du pavage cubique, ce qui permet, à coût mémoire constant, d'obtenir des rendus plus lisses (Herman, 1998).

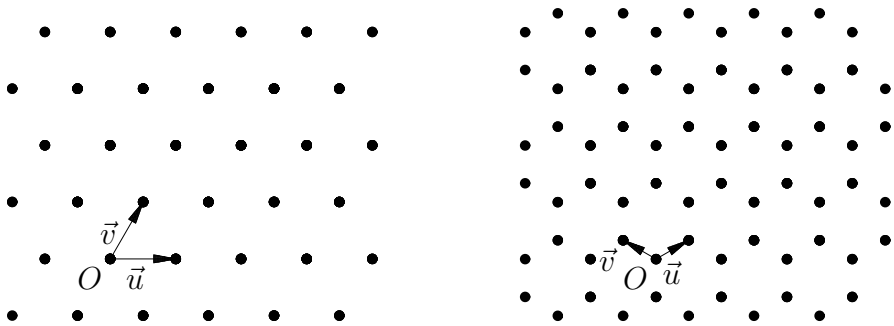
Lorsque les points de l'image sont vus comme l'ensemble des points à coordonnées entières d'une partie rectangulaire de $\mathbb{R}^2$, ou plus généralement de $\mathbb{R}^n$, il est naturel de poser qu'un point est adjacent à ses plus proches voisins pour la distance euclidienne. Dans ce cas, chaque point de l'image, sauf ceux du bord si l'image est finie, est adjacent à $2n$ autres points et nous retrouvons la $(2n)$-adjacence. Plus généralement, en considérant que le domaine de l'image est un en-



(a) (b) (c)

FIGURE 2.1 – Pavages du plan. (a) Pavage triangulaire. (b) Pavage cubique. (c) Pavage hexagonal.

semble rectangulaire de coordonnées de points de $\mathbb{R}^n$ dans un repère (non nécessairement orthonormal), on peut définir d'autres adjacences comme la 6-adjacence en dimension 2 et la 12-adjacence dans l'espace, obtenues en prenant des repères du plan ou de l'espace dont les axes forment entre eux des angles de 60° (voir figure 2.2). En généralisant encore cette approche, on peut utiliser d'autres distances que la distance euclidienne, comme, par exemple, la distance d_∞ définie sur $\mathbb{R}^n$ par $d_\infty(x,y) = \max(\{|x_i - y_i| \mid 1 \leq i \leq n\})$ où $x = (x_i)_{i=1}^n$ et $y = (y_i)_{i=1}^n$. On retrouve alors la $(3^n - 1)$-adjacence.



(a) (b)

FIGURE 2.2 – Sommets des pavages du plan. (a) Le domaine est une partie polygonale de $\mathbb{Z}^2$. Un point (p,q) du domaine adresse un xel $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$ (le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(1,0)$ et le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$). Les xels adressés sont les sommets du pavage triangulaire de la figure 2.1(a) ou les centres des cellules du pavage hexagonal de la figure 2.1(c). Chaque xel a six plus proches voisins pour la distance euclidienne. (b) Le domaine est une partie rectangulaire de $\mathbb{Z}^2$. Un point (p,q) du domaine adresse un xel $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + (p \bmod 2) \cdot \vec{u} + \lfloor \frac{3q+1-(p \bmod 2)}{2} \rfloor \cdot (\vec{u} + \vec{v})$ (le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ et le vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$). Les xels adressés sont les sommets du pavage hexagonal de la figure 2.1(c) ou les centres des cellules du pavage triangulaire de la figure 2.1(a). Chaque xel a trois plus proches voisins pour la distance euclidienne.

Les diagrammes de Voronoï permettent de relier les deux façons de définir des adjacences que nous venons de décrire (Klette et Rosenfeld, 2004). Un diagramme de Voronoï d'un ensemble discret A de points de $\mathbb{R}^n$ est un pavage de $\mathbb{R}^n$ par les polyèdres P_a, lieux des points de l'espace plus proche

(pour la distance euclidienne) du point a de A que de tout autre point de A. Par exemple, le diagramme de Voronoï du reseau cubique à faces centrées, associé à la 12-adjacence mentionnée ci-dessus, pave l'espace $\mathbb{R}^3$ par des dodécaèdres rhombiques (voir la figure 2.3).

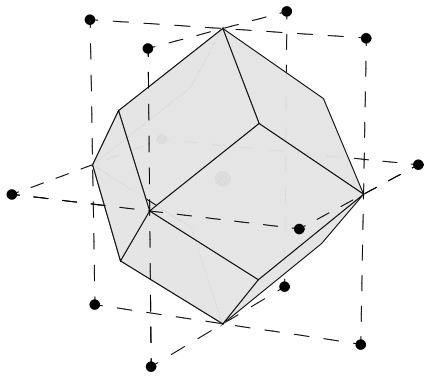


FIGURE 2.3 – Une cellule de Voronoï du reseau cubique à faces centrées (un dodécaèdre rhombique).

Formellement, une (relation d') adjacence α entre points d'une image digitale est une relation binaire irréflexive et symétrique. En tant que telle, elle peut être décrite par un graphe simple (sans arête double ni boucle) non-orienté $G = (S, A)$, appelé *graphe d'adjacence* où S, ensemble des sommets du graphe, est le domaine de l'image et A, ensemble des arêtes du graphe, est l'ensemble des paires de points adjacents dans l'image ($A \subseteq S \times S$). La figure 2.4 montre les graphes d'adjacence des 3-, 4-, 6-, 8-, 12-adjacences dans le plan. Si α est une relation d'adjacence et x un point de l'image, alors l'ensemble formé par x et les points du domaine adjacents à x forment l'*α-voisinage* de x, noté $V_\alpha(x)$. L'ensemble $V^\star_\alpha(x) = V_\alpha(x) \setminus \{x\}$ est appelé l'α-voisinage propre de x. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation d'adjacence utilisée, nous oublierons souvent le préfixe α pour les voisinages et les notions liées.

La notion topologique classique de connexité s'obtient par fermeture transitive de la notion d'adjacence. Plus précisément, étant donné un sous-ensemble X du domaine, un *α-chemin de a à b dans X* est une suite $\gamma = (z_i)_{i=0}^r$ ($r \geq 0$ est la *longueur* du chemin) de points de X tels que $a_0 = a$, $a_r = b$ et z_i est adjacent à z_{i-1} pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Les points a et b sont les *extrémités* du chemin. Autrement dit, un chemin de a à b dans X est un chemin dans le graphe G partant de a, arrivant en b, et dont tous les sommets sont dans X. Un sous-ensemble X du domaine de l'image est *α-connexe* si, pour tout couple (a, b) de points de X, il existe un α-chemin de a à b dans X. Les sous-ensembles connexes de X, maximaux pour l'inclusion, sont les *composantes connexes* de X.

Malheureusement cette notion de connexité pose des problèmes dès lors que nous souhaitons modéliser des objets du « monde continu », c'est-à-dire des objets de $\mathbb{R}^n$, avec des images digitales. Un exemple est donné dans la figure 2.5, extraite de Rosenfeld et Pfaltz (1966). Si l'on utilise la 4-adjacence pour interpréter cette image comme l'image binaire d'un objet de $\mathbb{R}^2$ (l'ensemble des 1), celui-ci à huit composantes connexes et le fond en a deux. Ainsi, la « scène » représente un ensemble de huit carrés disjoints (si chaque 1 est interprété comme un carré élémentaire du plan euclidien) entourant une composante connexe du fond. Une telle scène est impossible [1] dans $\mathbb{R}^2$. Si l'on utilise

1. On peut le vérifier en calculant la caractéristique d'Euler de l'objet de deux façons différentes. D'une part, dans une scène 2-dimensionnelle, cette caractéristique est égale au nombre de composantes connexes de l'objet moins le nombre de composantes connexes du fond plus 1, ce qui fait 7 ici. D'autre part, la caractéristique d'Euler d'objets disjoints est

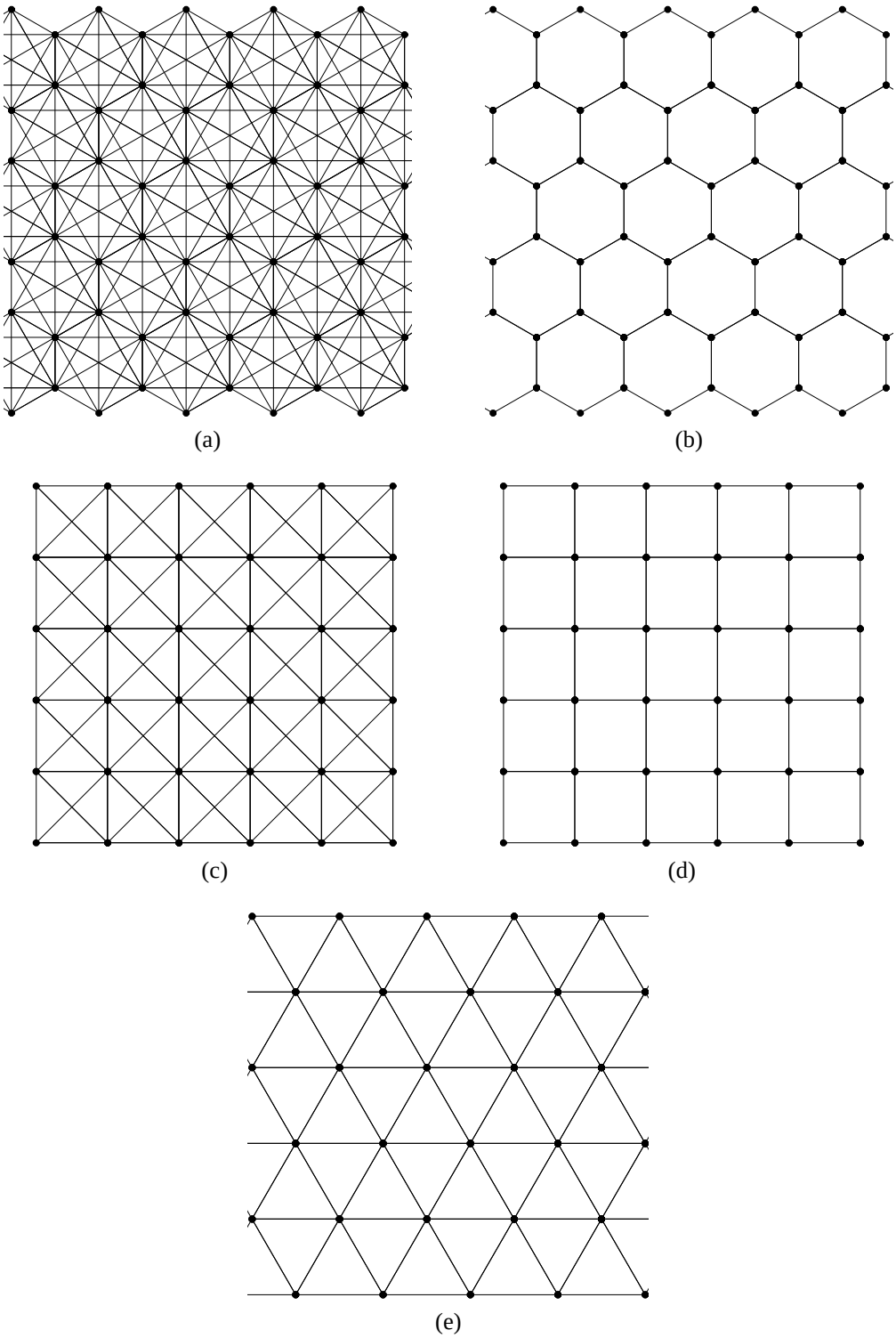


FIGURE 2.4 – Graphes de connexité associés au pavages du plan (chaque point représente un pavé et est situé au centre de ce pavé). (a–b) Pavage triangulaire : 12-adjacence et 3-adjacence. (c–d) Pavage cubique : 8-adjacence et 4-adjacence. (e) Pavage hexagonal : 6-adjacence. (a,c,e) Deux pavés sont adjacents s'ils partagent au moins un sommet. (b,d,e) Deux pavés sont adjacents s'ils partagent au moins une arête.

0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	**1**	0	0	0
0	0	**1**	0	**1**	0	0
0	**1**	0	0	0	**1**	0
0	0	**1**	0	**1**	0	0
0	0	0	**1**	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

FIGURE 2.5 – Une image digitale qui ne peut pas être interprétée dans $\mathbb{R}^2$ à l'aide de la seule 4-adjacence ou de la seule 8-adjacence (voir texte).

la 8-adjacence pour interpréter l'image, alors l'objet est une chaîne fermée de carrés et pour autant cette chaîne ne sépare pas le fond en deux parties (une partie intérieure à la chaîne et une partie extérieure à la chaîne) puisque quatre des 0 situés au centre de l'image sont adjacents à des 0 situés à l'extérieur de la chaîne [2]. Pour éviter ce type d'interprétation d'une image digitale dans laquelle des pavés représentant des pixels du fond et de l'objet forment une configuration en damier, une solution est d'utiliser des grilles hexagonales dans le plan (ou cubiques faces centrées dans l'espace) sur les appareils d'acquisition ou de visualisation Golay (1969), Kong et Roscoe (1985). Toutefois de telles grilles, nécessitant des matériels spéciaux, sont peu utilisées dans la pratique. Kovalevsky (1984b) propose également l'utilisation de la 6-adjacence dans le plan (et plus généralement de la $(2(2^n - 1))$-adjacence en dimension n ; voir figure 2.6) avec des grilles cubiques. L'inconvénient est qu'il en résulte une forte anisotropie de l'espace (voir figure 2.7).

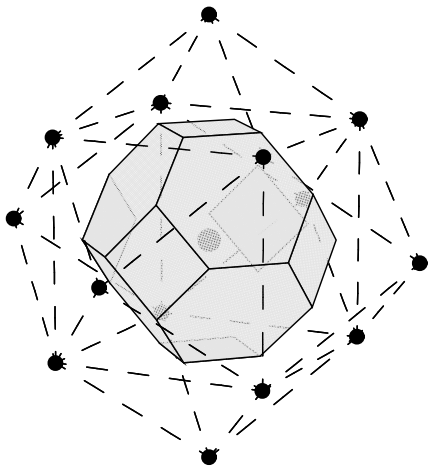


FIGURE 2.6 – 14-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$ ($2\,(2^n - 1)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^n$). La 14-adjacence est obtenue en pavant l'espace avec des octaèdres tronqués. C'est aussi le pavage de Voronoï du réseau cubique centré (représenté par les points noirs). L'intersection de deux pavés est vide ou est une 2-face commune aux deux pavés si bien qu'on peut munir en même temps le fond et l'objet de cette adjacence.

la somme de leurs caractéristiques d'Euler, ce qui donne ici une caractéristique d'Euler égale à 8. Nous avons bien une impossibilité.

2. Par contre, si l'image 2D est la projection d'une scène 3D alors la configuration observée n'a rien de paradoxal (Ptak *et al.*, 1997).

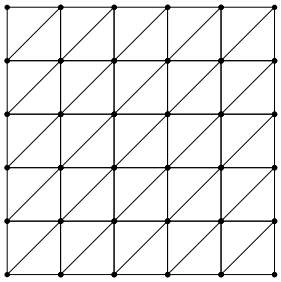


FIGURE 2.7 – $(2(2^n - 1))$-adjacence sur grille cubique nD ($n = 2$).

Finalement, la solution largement adoptée a été proposée par Duda *et al.* (1967) et développée par Rosenfeld (1970). Elle consiste à utiliser deux adjacences différentes pour le fond et pour l'objet, soit, dans le plan, la 4-adjacence pour l'objet et la 8-adjacence pour le fond, ou l'inverse. Rosenfeld (1979a) a prouvé qu'en utilisant l'un de ces deux couples d'adjacences dans le plan, les courbes fermées simples [3] satisfont une version digitale du théorème de Jordan. Cette version du théorème est une version « épaisse », c'est-à-dire que la courbe de Jordan considérée est constituée de pixels. Cela conduit Rosenfeld à choisir comme relation d'adjacence entre les pixels de l'objet et ceux du fond l'adjacence du fond (voir la figure 2.8). Par contre, Herman (1993) qui s'intéresse à une version « mince » du théorème utilise une troisième adjacence, appelée *proto-adjacence*, incluse dans les adjacences de l'objet et du fond et telle que le domaine soit connexe pour cette adjacence (en pratique cette proto-adjacence est souvent la $(2n)$-adjacence). Bogomolny (1988) remarque que le fait

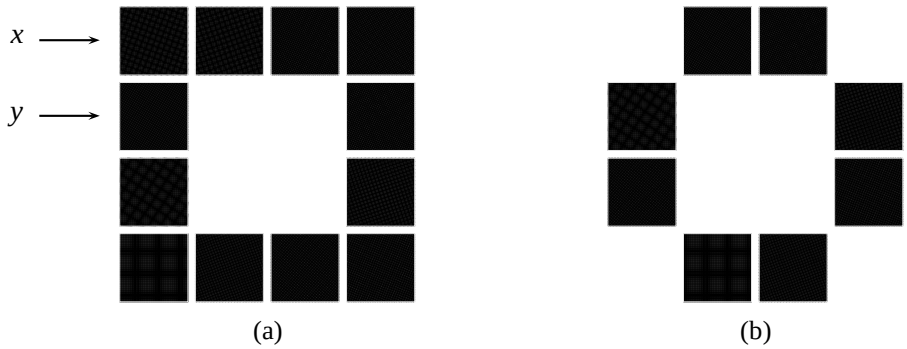


FIGURE 2.8 – Adjacence objet-fond. (a) Une courbe fermée simple en $(4, 8)$-adjacence (cette courbe n'est pas simple en $(8, 4)$-adjacence car le pixel y est alors adjacent à trois pixels de la courbe). Pour satisfaire un analogue discret du théorème de Jordan, la courbe doit être la frontière des deux composantes connexes du fond qu'elle sépare. Donc, tous les pixels de la courbe doivent être adjacents à ces deux composantes connexes. Cela nécessite d'utiliser la 8-adjacence comme adjacence objet-fond (sinon, par exemple, le pixel x n'est pas adjacent à la composante connexe finie du fond). (b) Une courbe fermée simple en $(8, 4)$-adjacence. La 4-adjacence suffit à assurer que tout pixel de la courbe est adjacent aux deux composantes connexes du fond. De plus, si cette courbe est la frontière d'un objet, en choisissant la 4-adjacence pour l'adjacence objet-fond, on évite qu'un pixel intérieur à l'objet ne soit adjacent au fond.

3. Une courbe fermée simple dans une image digitale $V = (S, A)$ est un chemin de $\mathbb{Z}^2$, de longueur au moins égale à 4, resp. 5, en 8-, resp. 4-, adjacence, dont les deux extrémités coïncident et tel que tout point du chemin est adjacent à exactement deux autres points du chemin.

d'utiliser des adjacences différentes pour l'objet et pour le fond est en accord avec notre perception qui naturellement « voit » des objets fermés et un fond ouvert (au sens topologique). Ronse (1985, 1990) développe ce point de vue, en associant aux pixels d'une image 2D des carrés fermés et à ceux du fond des carrés ouverts, c'est-à-dire sans bords et en remplaçant les opérations booléennes union, intersection, complémentation, nécessaires pour créer des objets dans $\mathbb{R}^2$ associés à des ensembles de plusieurs pixels comme pour modifier ces objets, par les opérations équivalentes dans les treillis des fermés réguliers [4] (pour l'objet) et celui des ouverts réguliers (pour le fond). La figure 2.9 illustre ces opérations.

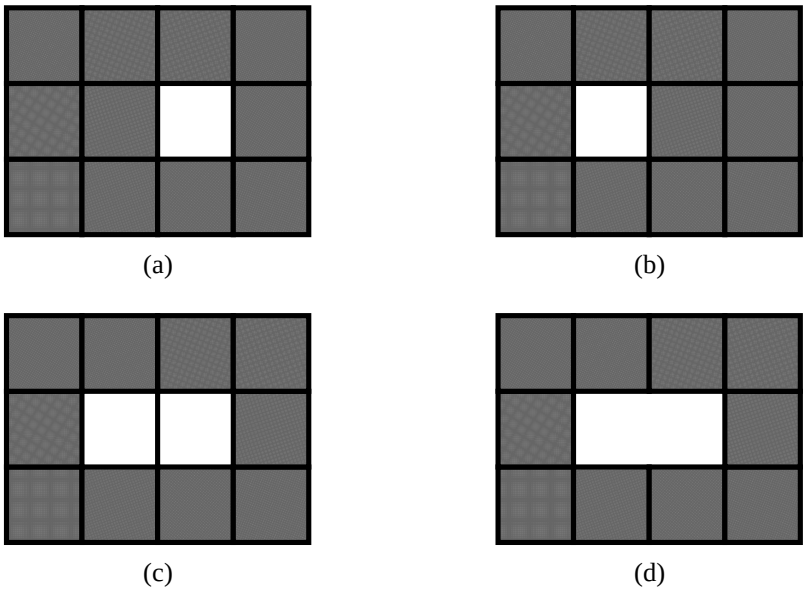


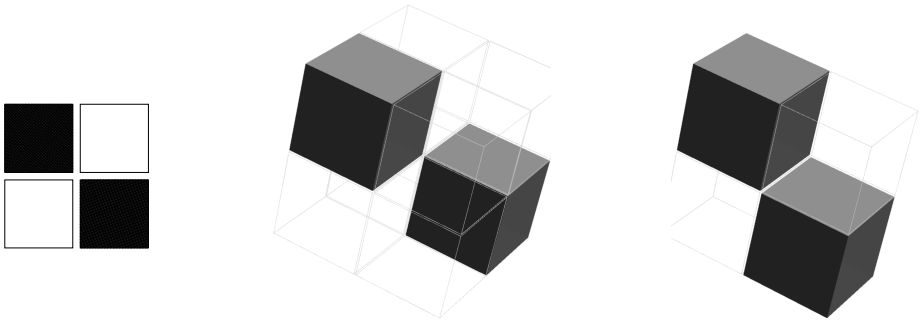
FIGURE 2.9 – Opérations booléennes sur les objets. (a, b) Deux fermés réguliers de $\mathbb{R}^2$ associés aux objets de deux images digitales interprétées avec la $(4, 8)$-adjacence. (c) L'intersection des deux fermés réguliers n'est pas régulière. On ne peut pas lui associer une image digitale. (d) L'infimum (dans le treillis des fermés réguliers) des deux fermés réguliers.

Une abondante littérature a été consacrée à la recherche de bonnes paires d'adjacences dans $\mathbb{Z}^n$, pour lesquelles un analogue du théorème de Jordan-Brouwer est vérifié (voir, par exemple, Kong et Roscoe (1985), Herman (1993), Udupa (1994), Lachaud et Montanvert (2000), Brimkov et Klette (2005)). Dans la pratique, les couples d'adjacences les plus couramment utilisés sont les couples $(4, 8)$ et $(8, 4)$ en dimension 2 et les couples qui associent la 6-adjacence avec la 18-adjacence ou la 26-adjacence en dimension 3.

Si le fait de devoir munir l'ensemble des 1 et des 0 d'une image binaire de deux adjacences différentes ne pose pas trop de problèmes lorsque l'image représente un objet plongé dans un espace ambiant sans signification, dans d'autres images cette différence de traitement a peu de justification alors qu'elle influe sur la topologie des deux parties de l'image. Par ailleurs, dans une image n-aire, $n \geq 3$, la solution consistant à utiliser deux adjacences ne peut plus fonctionner (voir le chapitre 5). Latecki (Latecki *et al.*, 1995, Latecki, 1997) a proposé une solution pour munir dans une

4. Voir les annexes A.1 et B.2

grille cubique objet et fond de la même relation d'adjacence, en l'occurrence la $(2n)$-adjacence. Elle consiste à travailler exclusivement dans la classe des images *bien-formées* (« well-composed ») qui ne possèdent pas de configuration en damier ou leur équivalent dans l'espace (voir la figure 2.10).



(a) (b) (c)

FIGURE 2.10 – Configurations interdites dans des images binaires bien-formées. (a) Dans $\mathbb{Z}^2$. (b–c) Dans $\mathbb{Z}^3$ (la configuration (b) ne doit pas apparaître non plus lorsqu'on intervertit les couleurs dans l'image, c'est-à-dire lorsqu'on échange le fond et l'objet).

Dans une image bien-formée, l'analogue continu de l'objet, obtenu en associant à chaque point de $\mathbb{Z}^n$ le cube unitaire (fermé) de $\mathbb{R}^n$ centré en ce point, a des composantes connexes dont les surfaces sont des variétés topologiques [5] qui vérifient la propriété de séparation du théorème de Jordan-Brouwer ce qui est dans bien des applications une propriété attendue des objets et ce qui n'est pas le cas lorsqu'une image digitale contient l'une des configurations de la figure 2.10. Inversement, selon Latecki, un processus de numérisation qui conserve la topologie produit toujours des images bien formées (Latecki *et al.*, 1995, Latecki, 1998). Par exemple, si lors de la numérisation d'une image 2D, le processus consiste à associer la valeur 1 à tout pixel centre d'un cube fermé qui intersecte l'objet numérisé et si la résolution est suffisamment fine pour qu'une boule de rayon $\sqrt{2}$ unités puisse rouler partout à la surface de l'objet (côté extérieur) alors l'image digitale résultante est bien formée. Lorsque malgré tout l'image digitale n'est pas bien formée, on peut recourir à des algorithmes de « réparation » pour transformer une image binaire 3D quelconque en image bien formée (Latecki, 1998, Siqueira *et al.*, 2008).

Pour terminer ce chapitre consacré aux images digitales vues comme les graphes de relations d'adjacence, signalons l'existence de nombreux travaux sur l'adjacence et la connectivité floues (voir Bloch 2005 pour un panorama de ces travaux et Udupa et Grevera 2002 pour un plaidoyer en faveur de ce type d'approche). Cette approche, basée sur la notion d'ensemble flou developpée par Zadeh (1965), veut notamment rendre compte du caractère incertain de l'étiquetage des xels lors de la phase de segmentation d'une image. Ainsi, une image binaire floue est une fonction à valeurs dans $[0, 1]$ et non plus dans $\{0, 1\}$. Cette fonction associe à chaque point du domaine de l'image le *degré d'appartenance* de ce point à l'objet, c'est-à-dire, en langage commun, la « pro-

5. Voir l'annexe A.

babilité » que le point appartienne à l'objet [6]. Cette fonction peut être utilisée sur un domaine muni d'une adjacence « dure » ou d'une adjacence floue qui est alors elle-même un degré d'adjacence, c'est-à-dire une fonction de $X \times X$ (où X est le domaine de l'image) à valeurs dans $[0, 1]$, souvent définie à partir de la distance euclidienne séparant les points de l'image et variant en sens inverse de celle-ci (Bloch, 1997), éventuellement multipliée par la fonction caractéristique de l'α-voisinage du point (Udupa et Samarasekera, 1996). Ces notions d'appartenance floue à l'objet et d'adjacence floue permettent de définir une notion de connexité floue. Le degré de connexité (Rosenfeld, 1979b) entre deux points x, y d'une image digitale floue est défini comme le plus grand des minimums des degrés d'appartenance à l'objet sur tout chemin joignant x à y. Autrement dit, si l'on « fixe » l'objet en lui attribuant tous les points dont le degré d'appartenance est supérieur à une valeur λ donnée, alors deux points x et y sont dans la même composante connexe de l'objet si et seulement si leur degré de connexité est supérieur ou égal à λ.

La topologie digitale que nous venons de présenter a permis le développement de très nombreux algorithmes efficaces permettant la modification d'une image digitale sans altération de sa topologie ou en accord avec une topologie donnée *a priori*. Néanmoins, le choix d'une paire d'adjacence peut paraître arbitraire dans une image pour laquelle la dichotomie objet/fond ne fait pas sens ou lorsqu'on envisage une extension de cette approche aux images n-aires ($n \geq 3$) (Kovalevsky, 1984b). De plus, définie en marge de la topologie classique, la topologie digitale ne profite pas des résultats obtenus par la première depuis trois siècles. Dans le chapitre suivant nous étudions d'autres modèles s'insérant, plus ou moins, dans le cadre de la topologie classique.

6. Le langage commun est trompeur ici. Le fait qu'un point particulier appartienne à l'objet n'est pas un fait aléatoire mais un fait certain dont nous ne connaissons pas la valeur de vérité.

Chapitre 3

Des topologies « classiques » pour les images digitales

La topologie digitale présentée dans le chapitre précédent n'est pas une topologie au sens classique du terme. Cela oblige à redéfinir des notions analogues à celles utilisées en topologie, telles que la connexité, à chaque fois que des considérations d'ordre topologique s'avèrent nécessaires pour le traitement des images digitales, et ces besoins augmentent rapidement avec la dimension de l'espace alors même que les traitements d'images de dimension 3 et plus sont devenus courants. Pour éviter d'avoir ainsi à rebâtir ce qui existe déjà par ailleurs, l'idéal aurait été que pour chaque graphe d'adjacence utilisé en imagerie, on puisse trouver au moins une topologie *compatible*, c'est-à-dire telle que les ensembles connexes pour cette topologie sont exactement les ensembles connexes de sommets dans le graphe d'adjacence (on parle alors d'*adjacence topologique*).

Néanmoins, cet espoir a été rapidement déçu. S'il existe une topologie compatible avec la 4-adjacence dans le plan (Rosenfeld, 1973), la topologie de Marcus-Wyse (voir section 3.1), et plus généralement une topologie compatible avec la $(2n)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^n$ (Herman, 1998), il n'existe pas de topologie de $\mathbb{Z}^2$ compatible avec la 8-adjacence (Chassery, 1979). Latecki (1993), puis Herman (1998), donnent un critère simple pour montrer qu'une adjacence n'est pas topologique : si le graphe d'adjacence contient le sous-graphe de la figure 3.1 alors l'adjacence n'est pas topologique. Ce critère s'obtient très facilement si on utilise la caractérisation des graphes d'adjacences topologiques obtenue par Préa (1992) puis Neumann-Lara et Wilson (1995) : un graphe est compatible avec une topologie si et seulement si ce graphe est un graphe de comparabilité, c'est-à-dire s'il est le graphe non orienté d'une relation d'ordre stricte. Ce critère permet à Latecki de retrouver de façon simple le résultat de Chassery et permet à Herman de montrer que la 6-adjacence dans le plan n'est pas topologique.

Ptak *et al.* (1997) font une étude systématique des relations d'adjacence sur $\mathbb{Z}^2$ incluses dans la 8-adjacence et *homogènes* (invariantes par translation). Ils obtiennent quatre types d'adjacence : la 0-adjacence (l'espace est totalement discret [1] et son graphe d'adjacence n'a pas d'arêtes), les deux 2-adjacences (adjacences horizontale et verticale) et la 4-adjacence. Eckhardt et Latecki (2003) recherchent pour leur part toutes les topologies compatibles avec une relation d'adjacence sur $\mathbb{Z}^n$, $n \in \{2, 3\}$, *locale* (incluse dans la $(3^n - 1)$-adjacence et incluant la $(2n)$-adjacence). Pour $n = 2$, ils obtiennent deux topologies, la topologie de Marcus-Wyse déjà évoquée, et la topologie de Khalimsky associée à une relation d'adjacence mixte : 4-adjacence pour les points dont la somme des coordonnées est impaire et 8-adjacence pour les points dont la somme des coordonées est paire (ou l'inverse). Nous décrivons plus en détail cette topologie dans les sections 3.1 et 3.2. Pour $n = 3$, après avoir montré qu'il existe une infinité de topologies compatibles avec une relation d'adjacence locale, ils restreignent leur étude aux topologies pour lesquelles le plus petit voisinage d'un point

1. Voir annexe A.1.

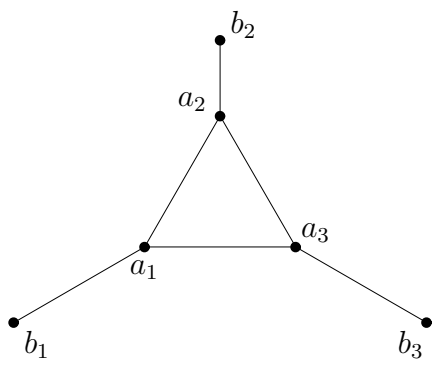


FIGURE 3.1 – Critère pour reconnaître les adjacences topologiques : le sous-graphe représenté sur la figure ne peut pas apparaître dans un graphe de comparabilité. Supposons le contraire et notons $<$ la relation d'ordre stricte associée au graphe de comparabilité. L'ensemble $\{a_1, a_2, a_3\}$ est une clique donc $a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < a_{\sigma(3)}$ où σ est une permutation de $\{1, 2, 3\}$. Il est impossible de ranger $b_{\sigma(2)}$ par rapport à $a_{\sigma(2)}$ sans ajouter une arête dans le graphe (entre $b_{\sigma(2)}$ et $a_{\sigma(1)}$ ou entre $b_{\sigma(2)}$ et $a_{\sigma(3)}$). Nous avons donc une contradiction avec la définition d'un sous-graphe.

est 6-connexe [2] (il est facile de vérifier que le fait de limiter les adjacences topologiques aux adjacences locales implique l'existence d'un plus petit voisinage – au sens topologique – inclus dans le 26-voisinage). Ils obtiennent alors cinq topologies : la topologie de Marcus-Wyse pour $\mathbb{Z}^3$ (associée à la 6-adjacence), celle de Khalimsky/Kovalesky et trois topologies mixtes (dont les projections sur des plans parallèles aux axes de coordonnées sont de type Marcus-Wyse ou de type Khalimsky) [3]. Kong (2002) étudie les relations d'adjacence topologiques locales sur $\mathbb{Z}^n$ telles que le voisinage d'adjacence est $(2\,n)$-connexe. Il en dénombre deux sur $\mathbb{Z}^2$, quatre sur $\mathbb{Z}^3$ et 16 sur $\mathbb{Z}^4$ (à une isométrie près). Pour $n \in \{2, 3\}$, les topologies associées à ces adjacences sont celles décrites par Eckhardt et Latecki. Il montre également que le problème est équivalent à trouver toutes les façons de choisir des sommets sur un n-cube sans jamais prendre deux sommets sur la même arrête. Dans un second article, Kong (2003) montre que les topologies *admissibles* de $\mathbb{Z}^n$, c'est-à-dire telles que la famille des ensembles topologiquement connexes contient la famille des ensembles $(2n)$-connexes et est incluse dans la famille des ensembles (3^n-1)-connexes, et pour lesquelles $\mathbb{Z}^n$ est simplement connexe sont les topologies de Khalimsky. Ce résultat implique en particulier que $\mathbb{Z}^n$ n'est pas simplement connexe pour la topologie de Marcus-Wyse associée à la $(2n)$-adjacence. Par exemple, un carré unitaire ne peut pas être homotopiquement réduit à un point.

On voit donc que, hormis la $(2n)$-adjacence, associée à un espace topologique qui n'est pas simplement connexe, les adjacences les plus utilisées ne sont pas topologiques. On pourrait donc conclure ici que « we cannot, without a serious loss of its general applicability, embed our theory into one in which the connectedness of a set of spels is defined as topological connectedness due to some topology (in the classical sense) ; For this reason, we cannot expect our theory of digital spaces to be derivable from established results of classical topology » (Herman, 1998). Néanmoins, nous allons voir dans les sections suivantes qu'il est possible d'allier adjacence et topologie classique

2. Cette dernière hypothèse est équivalente à demander que l'α-voisinage d'un point (où α est la relation d'ajacence étudiée) soit 6-connexe. Avec l'hypothèse de localité, elle est utilisée par Herman (1993), sous le nom de « very tight adjacency », dans son étude des paires d'adjacence qui permettent l'obtention de surfaces de Jordan.

3. Ces résultats exposés en 1998 par les auteurs dans une communication privée n'ont été publiés qu'en 2003.

à condition d'introduire conceptuellement, ou matériellement dans la mémoire de l'ordinateur, des éléments « invisibles » intermédiaires entre les xels des images digitales. C'est d'ailleurs ce que fait Herman en définissant des élements de surfaces comme des paires de voxels (proto-)adjacents.

3.1 Les espaces ordonnés connexes

Le milieu des années 80 voit la publication d'une série d'articles d'E. Khalimsky (*e.g.* Khalimsky 1986, 1987a, 1988) proposant de substituer, ou tout au moins d'adosser, à l'approche graphe de la topologie des images digitales une approche purement topologique. Celle-ci s'appuie sur les travaux antérieurs de l'auteur sur les segments d'entiers en les étendant à $\mathbb{Z}^n$ par produit cartésien. En effet, presque 20 ans auparavant, en 1969, E. Khalimsky soutient en URSS une thèse de doctorat et publie deux articles (Khalimsky, 1969a,b) sur les espaces topologiques qu'il nomme *segments généralisés* ou *COTS (connected ordered topological spaces)* [4]. En particulier, il obtient une topologie non totalement discrète sur $\mathbb{Z}$ ou tout segment de $\mathbb{Z}$. À la même époque, et de façon parfaitement indépendante, D. Marcus soumet le problème suivant (Wyse et Marcus, 1970) aux lecteurs de American Mathematical Monthly, journal de l'association américaine de mathématiques (MAA) : « Is it possible to topologize the integers in such a way that the connected sets are the sets of consecutive integers ? Generalize to the lattice points of n-space ». Plusieurs lecteurs (dont D. Marcus) envoient des réponses, identiques dans leur résultat – la topologie est unique à une dualité près. La version retenue et publiée par le journal est celle du groupe de résolution de problème de l'université de Cleveland dont F. Wyse est l'animateur. Cette topologie sur $\mathbb{Z}$, qui est la même que celle construite par Khalimsky, est aujourd'hui connue sous le nom de topologie de Khalimsky ou de topologie de Marcus-Wyse. Wyse *et al.* proposent une extension à $\mathbb{Z}^2$ de leur topologie dont les paires connexes sont exactement les paires de points 4-adjacents de $\mathbb{Z}^2$ (Rosenfeld, 1973). Cette topologie sur $\mathbb{Z}^2$ diffère du produit cartésien utilisé par Khalimsky *et al.* (voir la figure 3.2).

Les COTS sont des espaces topologiques connexes tels que tout triplet (x, y, z) de points de l'espace peut être ordonné de façon à ce que le retrait du second point déconnecte l'espace et les deux autres points appartiennent à des composantes connexes différentes de l'espace résultant (Khalimsky *et al.*, 1990b). La nécessité de la seconde hypothèse n'est pas apparue tout de suite à Khalimsky. En effet, dans le premier article publié en 1969 (Khalimsky, 1969a), l'auteur définit un segment comme un espace E tel que, pour tout point $x \in E$, sauf pour au plus deux points, appelés extrémités, le sous-espace $X \setminus \{x\}$ possède exactement deux composantes connexes, U_x^1 et U_x^2. Dans le second, publié la même année, il corrige cette définition en ajoutant la seconde hypothèse sous la forme suivante : si la composante U_x est incluse dans les composantes U_y et U_z alors U_y est inclus dans U_z ou l'inverse. Cette dernière hypothèse est necessaire pour écarter des espaces tels que celui décrit sur la figure 3.3.

Partant de cette définition, il construit une relation d'ordre stricte totale $<$ sur le COTS telle que, pour tout élément x du COTS, les intervalles $\{y \mid y < x\}$ et $\{y \mid x < y\}$ sont connexes. Inversement, il montre que tout espace topologique connexe totalement ordonné tel que $\{y \mid y < x\}$ et $\{y \mid x < y\}$ sont connexes est un COTS. En particulier, les (deux) topologies sur $\mathbb{Z}$ compatibles avec la relation d'ordre sont des COTS. Il faut noter que dans un COTS, les intervalles $\{y \mid y < x\}$ et $\{y \mid x < y\}$ ne

4. Les travaux de Khalimsky, d'abord menés en URSS, n'ont été diffusés dans la communauté travaillant sur la topologie digitale qu'à partir de 1986, lorsqu'il a rejoint la CUNY (City University of New York).

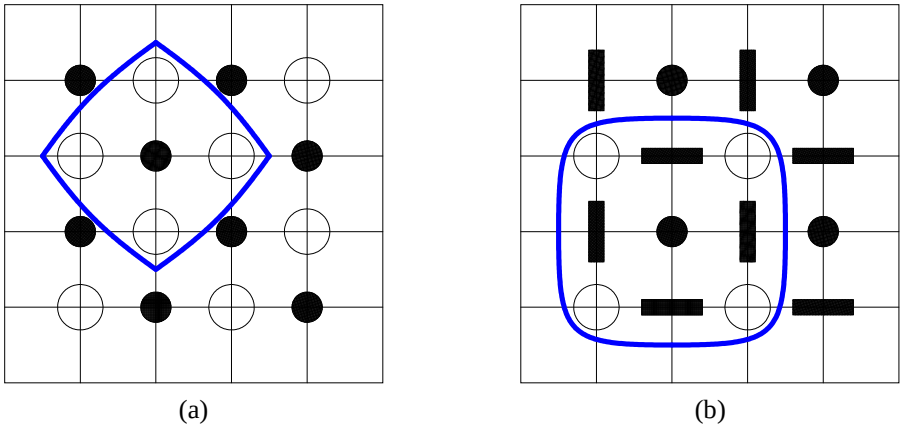


FIGURE 3.2 – Topologies de Marcus-Wyse et de Khalimsky sur $\mathbb{Z}^2$. Les cercles représentent les points « ouverts » de $\mathbb{Z}^2$ (les singletons qui les contiennent sont des ouverts). Les disques noirs représentent les points « fermés ». Les rectangles noirs symbolisent les autres points de $\mathbb{Z}^2$ (qui ne sont ni ouverts ni fermés). Les courbes bleues enlacent un ouvert qui est le plus petit voisinage d'un point fermé. La famille de ces ouverts est une pré-base de la topologie. (a) $\mathbb{Z}^2$ est muni de la topologie de Marcus-Wyse. (b) $\mathbb{Z}^2$ est muni de la topologie de Khalimsky.

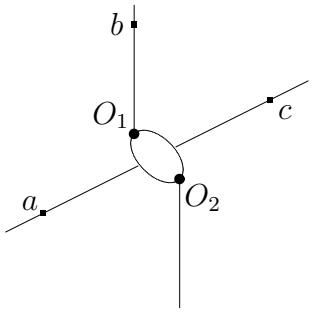


FIGURE 3.3 – Définition des COTS : nécessité de la seconde hypothèse. L'ensemble représenté est constitué de deux copies de la droite réelle dont tous les points sont identifiés, sauf les origines O_1 et O_2, et de deux demi-droites réelles (deux copies de $\mathbb{R}_+$) dont les origines sont identifiées respectivement avec O_1 et O_2. La suppression de n'importe quel point de cet ensemble le sépare en deux composantes connexes mais la suppression d'un des trois points a, b, c, ne sépare pas les deux autres : cet espace vérifie donc la première définition des COTS mais pas la seconde.

sont pas nécessairement des ouverts. Donc, en général, la topologie d'un COTS est différente de la topologie de l'ordre (LOTS : linearly ordered topological space) engendrée par les intervalles. Dans un LOTS, un singleton est toujours fermé : les LOTS sont des espaces de Hausdorff, c'est-à-dire qu'ils ont la propriété de séparation T_2 (voir l'annexe A.3) alors que dans un COTS un singleton est fermé ou ouvert (mais jamais les deux à la fois à cause de la connexité) : un singleton (constitué d'un point non maximal) est ouvert si et seulement si son successeur existe et est fermé (un point non maximal qui n'a pas de successeur est fermé). Ce point est très important car les seuls espaces topologiques finis intéressants sont les espaces T_0, non T_1 (voir la section 3.3). Un COTS possédant au moins trois points est toujours T_0. Il est T_1, et même T_2, si et seulement si aucun point n'a de

successeur. Si un point fermé a un prédécesseur et un successeur, il existe un plus petit ouvert qui le contient, formé de ces trois points. La figure 3.4 montre la topologie d'un COTS contenant 5 points.

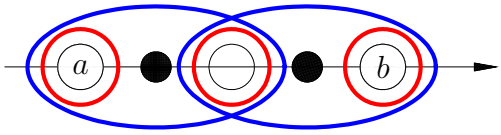


FIGURE 3.4 – Topologie de la droite de Khalimsky : ensemble $\{V(x) \mid x \in [\![a, b]\!]\}$ des plus petits voisinages pour la topologie de Khalimsky sur un segment $[\![a, b]\!]$ de $\mathbb{Z}$ où $b = a + 4$. Les points « ouverts » sont représentés par des cercles. Pour tout point x ouvert, on a $V(x) = \{x\}$ (ces voisinages sont représentés par des cercles rouges). Les points « fermés » sont représentés par des disques noirs. Pour tout point x fermé, le singleton $\{x\}$ est fermé et on a $V(x) = \{x - 1, x, x + 1\}$ (ces voisinages sont représentés par des ellipses bleues).

On étend à $\mathbb{Z}^n$ la topologie de Khalimsky par produit cartésien. La figure 3.5 montre, pour $n = 2$, la base d'ouverts minimale de cette topologie (formée par les plus petits voisinages des points de $\mathbb{Z}^2$). Il y a quatre types de points, les points « ouverts » ($\{x\}$ est ouvert), les points « fermés », les points mixtes dont le plus petit voisinage est de type $\{i - 1, i, i + 1\} \times \{j\}$ et les points mixtes dont le plus petit voisinage est de type $\{i\} \times \{j - 1, j, j + 1\}$ ($i, j \in \mathbb{Z}$). Chaque point ouvert et chaque point fermé est adjacent à huit autres points et chaque point mixte est adjacent à quatre autres points (voir la figure 3.5).

La topologie de Khalimsky sur $\mathbb{Z}$, et par suite ses produits cartésiens, introduisent une inhomogénéité de l'espace qui peut paraître rédhibitoire. Pour parer à cette critique, Khalimsky *et al.* plaident pour une implantation en machine dissociant les points affichés de l'ensemble des n-uples mémorisés (le domaine). Par exemple, dans $\mathbb{Z}^2$, seuls les points dont les deux coordonnées sont impaires, les points ouverts, doivent être affichés. L'espace, du point de vue de l'observateur est alors parfaitement homogène (on a donc aussi deux systèmes de coordonnées, celui de l'observateur et celui utilisé dans le programme et en mémoire pour coder l'image). Cette dichotomie peut être comprise comme propre à la nature mathématique d'un découpage de l'espace euclidien en union d'intervalles. En effet, la topologie de Khalimsky peut être vue comme la topologie quotient associée à la partition de $\mathbb{R}$ obtenue en prenant les intervalles ouverts $]k, k + 1[$, $k \in \mathbb{Z}$, et les singletons $\{k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. Cette partition, et par suite la droite des entiers de Khalimsky, est constituée d'éléments perceptibles, les intervalles de mesure 1, et d'éléments imperceptibles, les singletons de mesure 0.

Dès les premiers articles de 1969, E. Khalimsky propose de nouvelles notions de chemin dans un espace topologique en remplaçant l'intervalle $[0, 1]$ par un COTS : un *chemin digital* dans X (selon la terminologie utilisée dans Khalimsky *et al.*, 1990b) est une application continue d'un COTS dans X. À l'aide de ces chemins, il reconstruit une théorie de l'homotopie et l'homologie (Khalimsky, 1969a) – une référence plus accessible est Kopperman (1994). Au début des années 90, Khalimsky *et al.* (voir aussi Kong et Rosenfeld, 1991) établissent une version du théorème de Jordan dans $\mathbb{Z}^2$ muni de la topologie produit de Khalimsky en utilisant des *courbes de Jordan* définies à l'aide de la notion de chemin digital. La démonstration du théorème est purement digitale et ne fait pas appel au théorème de Jordan dans $\mathbb{R}^2$. Kopperman *et al.* (1991) puis Shortt (1990) étendent ce théorème aux n-surfaces de $\mathbb{Z}^n$ (toujours muni de la topologie produit de Khalimsky) mais ces extensions font appel à des analogues continus et utilisent le théoèreme de Jordan-Brouwer dans $\mathbb{R}^n$. Ils obtiennent aussi une nouvelle preuve – topologique – de la version du théorème de Jordan donnée

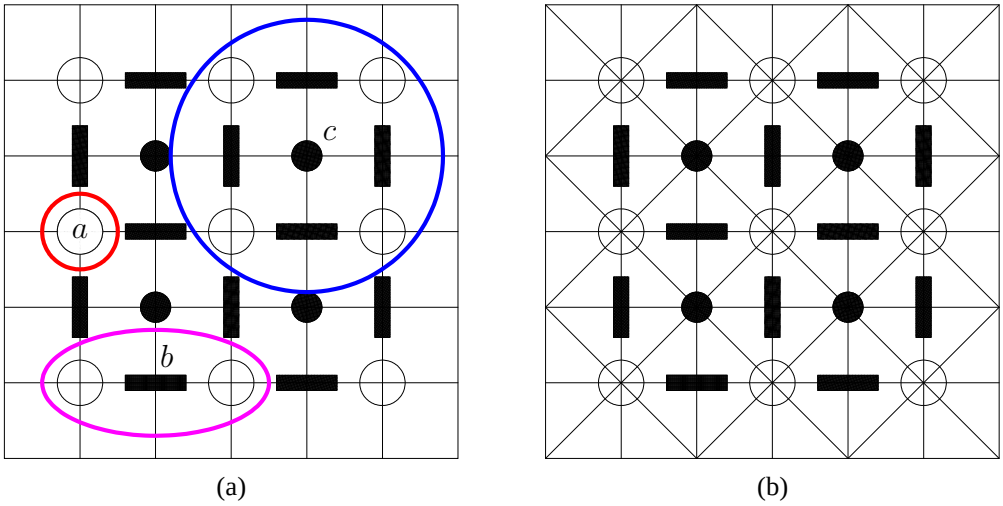


FIGURE 3.5 – Une partie rectangulaire de $\mathbb{Z}^2$ munie de la topologie de Khalimsky. (a) On distingue trois types de points : les points ouverts repésentés par des cercles noirs, les points fermés repésentés par des disques noirs et les points mixtes repésentés par des rectangles noirs. Les points mixtes sont les points à coordonnées mixtes : l'une est paire, l'autre est impaire. On associe généralement les points ouverts aux coordonnées impaires et les points fermés aux coordonnées paires mais l'inverse est bien entendu possible. Le plus petit voisinage d'un point ouvert est un singleton. Par exemple, sur la figure on a représenté par un cercle rouge le voisinage $V(a) = \{a\}$ du point ouvert a. Le plus petit voisinage d'un point mixte contient trois points. Sur la figure, on a représenté le voisinage $V(b)$ du point mixte b par une ellipse magenta. Le plus petit voisinage d'un point fermé contient neuf points disposés en carré centré sur le point. Sur la figure on a représenté par un cercle bleu le voisinage $V(c)$ du point fermé c. (b) Le graphe d'adjacence associée à la topologie de Khalimsky. On remarque qu'il n'y a que deux types de nœuds : les nœuds correspondants aux points « purs » (ouverts ou fermés) d'où partent huit arêtes et les nœuds correspondants aux points mixtes d'où partent quatre arêtes.

par Rosenfeld (1970) en plongeant $\mathbb{Z}^2$ dans l'ensemble des points à coordonnées de même parité de $\mathbb{Z}^2$ (Khalimsky *et al.*, 1990a). Dans le même article, les auteurs associent à toute partition de $\mathbb{Z}^2$ en sous-ensembles 4-connexes une partition dans le plan de Khalimsky en ouverts réguliers connexes complétée par l'union de leurs frontières (au sens topologique). Chaque frontière est une courbe de Jordan ; cette courbe est un fermé topologique donc non affichée, ce qui est cohérent avec la réalité euclidienne dans laquelle le bord d'un solide est de mesure nulle.

3.2 Les complexes cellulaires

À peu près à la même époque qui voit la publication des travaux liant la topologie de Khalimsky aux images digitales des ordinateurs, d'autres auteurs s'intéressent aux décompositions de l'espace euclidien en complexes cellulaires (Herman et Webster 1983, Ankeney et Ritter 1983, Klette 1983, Kovalevsky 1984a). L'article qui aura le plus de retentissement est celui de Kovalevsky (1989).

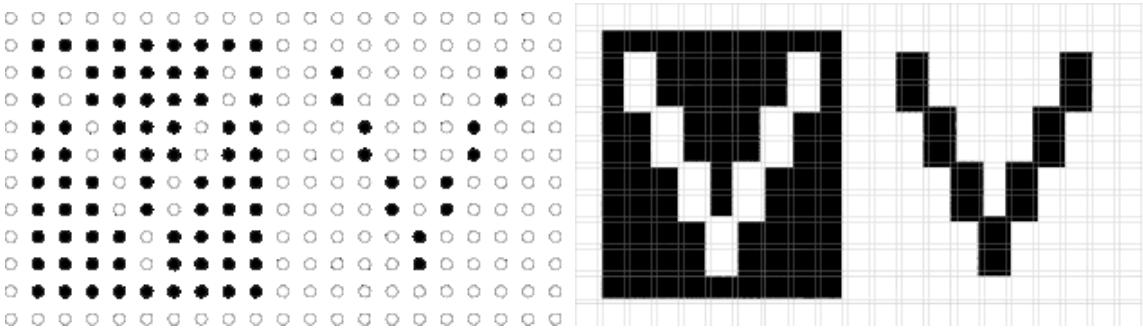
Les complexes cellulaires ont été introduits en topologie par Listing (1861) (voir l'article de Klette (2000) sur les différentes déclinaisons de la notion de complexe cellulaire depuis Listing jusque dans les années 1970).

Un complexe cellulaire abstrait est un triplet $(X, B, \dim)$ où X est un ensemble non vide, B une

relation d'ordre stricte et dim une fonction strictement croissante de X dans $\mathbb{N}$ (c'est-à-dire telle que $(x,y) \in B \Rightarrow \dim(x) < \dim(y)$). La relation B est la *relation d'incidence* du complexe cellulaire abstrait et dim est sa *fonction dimension*. Soient x, y des éléments de X. Si $(x,y) \in B$ on dit que x est *incident* à y ou que x est une *face propre* de y. L'entier $\dim(x)$ est la *dimension* de x. Un triplet $(Y, B', \dim')$ est un sous-complexe du complexe $(X, B, \dim)$ si $Y \subseteq X$, $B' = B \cap (Y \times Y)$ et $\dim' = \dim_{|Y}$ ($\dim'$ est la restriction à Y de la fonction dim). Un sous-complexe d'un complexe cellulaire abstrait est un complexe cellulaire abstrait.

Dans (Kovalevsky, 1989), l'auteur démontre que tout espace topologique T_0 fini X peut être muni d'une structure de complexe cellulaire abstrait dans laquelle la relation d'incidence B est donnée par l'appartenance à la frontière (x est incident à y si x appartient à la frontière (au sens topologique) de $\{y\}$) et la dimension est une fonction quelconque vérifiant $xBy \Rightarrow \dim(x) < \dim(y)$. Il propose comme exemple de fonction dimension, la fonction $x \in X \mapsto \max\{\mathrm{Card}(V(y)) \mid y \in X\} - \mathrm{Card}(V(x))$ où $V(a)$ désigne le plus petit voisinage de a dans X. Observons avec Herman (1990) que cette fonction dim attribue respectivement les dimensions 0, 6 et 8 aux points, côtés et carrés de la décomposition cellulaire cubique de $\mathbb{R}^2$ et donc ne correspond pas avec la dimension géométrique. Kovalevsky déduit de son théorème d'« isomorphisme » entre les espaces topologiques finis et les complexes cellulaires abstraits finis que, dans l'étude des images digitales, les questions topologiques doivent être abordées sous le prisme des complexes cellulaires et donne l'exemple des décompositions cellulaires cubiques de $\mathbb{R}^n$ dont les n-cubes sont associés aux xels de l'image digitale.

Dans ce cadre, le problème des configurations en damier dans les images digitales définies sur $\mathbb{Z}^2$ est résolu par l'ajout des faces de dimensions 1 et 0 aux carrés associés aux éléments de $\mathbb{Z}^2$ et le choix d'une *règle d'appartenance* (« membership predicate ») qui permet d'attribuer les k-faces de $\mathbb{Z}^2$ ($k \in \{0,1\}$) à l'objet, ou plus généralement à un label, ou au fond (voir la figure 3.6, extraite de Kovalevsky, 1989).



(a) (b)

FIGURE 3.6 – Motivation pour l'usage des complexes cellulaires en topologie digitale (Kovalevsky, 1989). Kovalevsky remarque qu'aucune paire d'adjacence ne permet d'interpréter les deux lettres V représentées sur la figure (a) comme des ensembles connexes dont la frontière sépare le plan digital en exactement deux régions. Le fait d'introduire une structure de complexe cellulaire en ajoutant des faces de dimension 0 et 1 (figure (b)) permet de surmonter cette difficulté. Cependant, la question demeure de trouver une règle globale qui permettrait un étiquetage automatique des nouvelles faces et qui donnerait un résultat satisfaisant sur une telle figure contenant un motif et son négatif. Aucune des règles globales proposées par Kovalevsky ne permet d'atteindre cet objectif.

Les approches de Khalimsly et de Kovalevsky sont équivalentes lorsqu'on identifie les points de $\mathbb{Z}^n$ aux points ouverts de l'espace de Khalimsky d'une part et aux n-cubes d'une décomposition cellulaire cubique de $\mathbb{R}^n$ d'autre part Klette (2002). Cependant, les complexes cellulaires ont l'avantage de pouvoir être utilisés avec d'autres types de cellules que les k-cubes. Dans tous les cas, la difficulté principale est l'attribution des faces de dimension (géométrique) non maximale à l'objet ou au fond (ou encore aux labels).

Kovalevsky propose quelques règles d'appartenance globales (à utiliser sur toute l'image) pour les images digitales définies sur $\mathbb{Z}^2$ telles que l'appartenance au label de la 2-cellule située au sud-est (équivalente à la 6-adjacence) ou l'appartenance au label maximal (resp. minimal) conduisant pour une image binaire à valeurs dans $\{0, 1\}$ à l'équivalent de la $(8, 4)$, resp. $(4, 8)$,-adjacence. Comme les règles précédentes ne permettent pas de traiter l'exemple de la figure 3.6, dans lequel l'image possède à la fois des lignes obliques noires et des lignes obliques blanches, Kovalevsky décrit encore une autre règle dans laquelle la décision se fait en fonction de la présence ou non d'une ligne mince dans un certain masque (lorsqu'il y a conflit, la règle du label maximal, ou minimal, s'applique). Face au surcoût potentiel ($\times 2^n$) en mémoire d'une image cellulaire cubique par rapport à une image digitale, Kovalevsky fait remarquer que, dans une image 2D, il est inutile de coder les faces de dimension 1 (si les objets de l'image sont réguliers, au sens topologique – ce qui est implicitement supposé ici – les 1-faces n'apportent pas d'information sur la connexité. Cet argument recoupe celui utilisé par Kong *et al.* (1991) pour justifier que, dans l'espace de Khalimsky, les frontières des objets associés aux objets digitaux ne sont pas déterminées de façon unique de sorte que le coût à assumer pour travailler sur des images topologiquement bien définies dans $\mathbb{Z}^2$ est de $\times 2$ au lieu de $\times 4$. Herman (1990) étend les résulats de Kovalevsky aux espaces localement bornés (c'est-à-dire dans lesquels la taille des plus petits voisinages est bornée), la borne, $\max\{\mathrm{Card}(V)(y) \mid y \in X\}$, permettant, comme on l'a vu, à Kovalevsky – et à Herman – de définir la fonction dimension sur l'espace topologique. Mais Herman critique l'affirmation de Kovalevsky selon laquelle « the topology of cellular complexes is the only possible topology on finite sets ». Pour Herman, un complexe cellulaire abstrait fini est un espace topologique fini avec une notion supplémentaire de dimension et cette notion supplémentaire est perdue lorsqu'on passe du complexe à l'espace topologique fini, preuve que les deux structures ne sont pas « isomorphes » (c'est le terme utilisé par Kovalevsly dans son théorème). En effet, considérons un complexe cellulaire abstrait $C = (X, B, \dim)$ et Y une partie propre de X. Si au sous-complexe C' engendré par Y on associe un espace topologique (Y, T) selon le procédé décrit par Kovalevsky puis à cet espace topologique on associe le complexe cellulaire abstrait C'' toujours suivant la construction décrite dans l'article de Kovalevsky, alors C'' ne sera pas en général un sous-complexe de C car la fonction dimension ne sera pas la restriction de la fonction dim à Y. Kovalevsky et Kopperman (1994) donnent une autre fonction dimension [5] qui n'est autre que la dimension géométrique des complexes de chaînes d'Alexandroff (voir la section 3.3) ce qui permet de lier en partie la dimension géométrique et la dimension abstraite. Cependant, les auteurs observent que la restriction à un sous-espace diminue généralement la dimension d'une face du complexe (lorsque le sous-espace est fermé, la dimension est conservée).

Kovalevsky (2006) donne une axiomatique de la topologie digitale « comprehensible for prac-

5. Cet article décrit des algorithmes pour l'analyse et le traitement d'images dans le cadre des espaces de Khalimsky. Même si aucun des mots de l'expression « complexe cellulaire abstrait » n'apparaît dans cet article (le mot cellule – cell – apparaît une fois), l'introduction de l'article, de même que sa référence à (Kovalevsky, 1989), témoignent que l'équivalence des approches de Khalimsky et de Kovalevsky ne fait pas de doute aux yeux des deux auteurs.

tically oriented researchers » qui permet de définir une topologie (au sens classique) des images digitales ainsi qu'une structure de complexe cellulaire abstrait. Les axiomes sont les suivants.

- Chaque point de l'espace possède au moins un voisinage fini.
- L'intersection de deux voisinages d'un même point est un voisinage de ce point.
- Il y a des points dont le voisinage n'est pas singulier.
- Les frontières sont minces (la frontière d'un objet O est l'ensemble des points de l'espace dont tout voisinage contient un point de l'objet et de son complément ; la frontière de O est mince si elle ne contient pas un couple de points, l'un dans O, l'autre dans son complément, tel que tout voisinage de l'un contient l'autre).
- La frontière d'une frontière est la frontière elle-même.

Dans cet article, Kovalevsky définit une notion d'*analogue topologique* : un complexe géométrique [6] est un analogue topologique d'une image digitale muni d'un graphe d'adjacence si l'adhérence dans l'objet (resp. dans le fond) de tout union de facettes associé à un ensemble de points de l'objet digital (resp. du fond de l'image digitale) est connexe si et seulement si l'ensemble de points digitaux considéré est lui-même connexe dans le graphe d'adjacence (voir figures 3.7 et 3.8). Kovalevsky démontre que les seuls couples d'adjacence de la topologie digitale qui permettent de construire des analogues topologiques sur la grille cubique sont les couples dont l'une des adjacences est la $(3^n - 1)$-adjacence (voir la figure 3.7). Kovalevsky étudie également une classe d'images définies par Kong et Rosenfeld (1991) comme analogues continus d'images digitales associées à un graphe d'adjacence. Les images digitales topologiques *facettes-convexes* sont des complexes cubiques géométriques dont les n-cubes sont associés aux points d'une image digitale et tels que l'intersection de deux n-cubes de l'objet (resp. du fond) est vide ou tout entière dans l'objet (resp. le fond) [7]. Kovalevsky montre que l'analogue topologique des images facettes-convexes n'existe que si le couple d'adjacence de l'image digitale est $(2\,n, 3^n - 1)$ ou $(3^n - 1, 2\,n)$.

La figure 3.8, extraite de (Kovalevsky, 2006), est présentée par l'auteur comme la preuve que « the set created by an adjacency pair has a strange topological structure ». Mais elle semble plutôt prouver que l'exigence de transporter sur l'adhérence des analogues la connexité de toutes les parties de l'objet et du fond est trop forte. Dans le cas particulier de la $(4, 8)$-adjacence, on associe généralement un ouvert régulier de $\mathbb{R}^2$ à l'objet de l'image. Il semblerait donc préférable de remplacer dans la définition de l'analogue topologique l'adhérence par l'intérieur de l'adhérence dans le cas de l'objet (et de garder l'adhérence pour le fond).

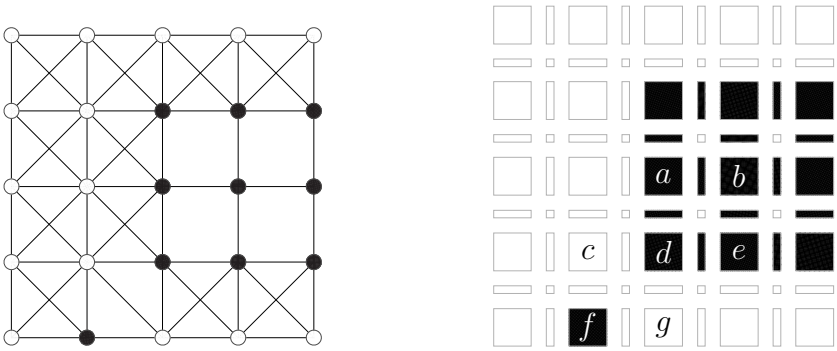
Ayala *et al.* (1997, 2002, 2003, 2004) ont développé un modèle basé sur la notion de complexe cellulaire abstrait. Une image digitale de dimension n est définie sur un complexe K de cellules polyédrales convexes, pur et localement fini (chaque cellule est face d'un nombre fini non nul de n-cellules). Notons K_n l'ensemble des n-cellules de K. L'*objet digital* O est une partie de K_n, l'*étoile* dans O d'une cellule α, $\mathrm{st}(\alpha, O)$, est l'ensemble des n-cellules de l'objet qui incluent α et le *support* de l'objet digital est l'ensemble des cellules du complexe K qui sont égales à l'intersection des n-cellules de leur étoile dans O : $\mathrm{supp}(O) = \{\alpha \in K \mid \{\alpha\} = \bigcap \mathrm{st}(\alpha, O)\}$ (voir figure 3.9). Les règles d'appartenance à utiliser pour les faces de dimensions non maximales sont appelées *fonctions*

6. Voir les annexes A.5 et A.6.

7. Le modèle développé au chapitre 7 fournit des images qui ne sont pas facettes-convexes (voir par exemple l'objet de la figure 7.8 dans lequel deux 3-faces de l'objet ont une intersection dans l'objet réduite à une 0-face alors que leur intersection dans $\mathbb{F}^3$ est une 1-face).

(a) (b)

FIGURE 3.7 – Analogue topologique (Kovalevsky). (a) Un tore digital formé par 6 voxels noirs et deux voxels blancs. (b) Sachant que l'image digitale doit être interprétée avec la $(6, 18)$-adjacence, comment faut-il affecter les k-faces, $k \leqslant 2$, à l'objet et au fond pour obtenir un analogue topologique dans l'espace cellulaire ? La paire $\{a, b\}$ est connexe dans l'image digitale donc la 2-face entre a et b doit être attibuée à l'objet. Il en est de même pour toutes les 2-faces en vert sur la figure. La paire $\{a, c\}$ n'est pas connexe en $(6, 18)$-adjacence dans l'image digitale donc la 1-face intersection de a et c doit être attibuée au fond (de même pour les autres 1-faces jaunes visibles sur la figure). En $(6, 18)$-adjacence, les deux voxels blancs ne sont pas adjacents. Donc, la 0-face centrale ne peut pas appartenir au fond dans l'analogue topologique de Kovalevsky. De même, la partie $\{a, d\}$ n'est pas un ensemble connexe dans l'image digitale. Donc, la 0-face centrale de la figure ne doit pas appartenir non plus à l'objet. Ainsi, il n'existe pas d'analogue topologique (au sens de Kovalevsky) pour ce tore interprété en $(6, 18)$-adjacence.



(a) (b)

FIGURE 3.8 – Analogue topologique en $(4, 8)$-adjacence (Kovalevsky, 2006). (a) Une image digitale sur $\mathbb{Z}^2$ avec son graphe d'adjacence ($(4, 8)$-adjacence). (b) Son « analogue topologique » (voir texte). Les deux pixels du fond, c et g, forment une paire connexe dans l'image digitale, donc la fermeture, relativement au fond, de cette paire est également connexe dans l'image cellulaire. Ainsi, nécéssairement la 0-face à l'intersection de c et g est dans le fond. La paire $\{d, f\}$ est une partie non connexe dans le graphe d'adjacence et sa fermeture, relativement à l'objet, dans l'image cellulaire n'est pas connexe. La propriété qui définit l'analogue topologique est vérifiée ici de la façon souhaitée. Toutefois, le même raisonnement conduit à attribuer la 0-face à l'intersection des quatre pixels a, b, d, e au fond ce qui rend l'objet non simplement connexe de façon innatendue. Il faudrait donc rejeter la $(4, 8)$-adjacence.

d'éclairage (« lighting function »). Ce sont des fonctions $f : \mathcal{P}(K_n) \times K \to \{0, 1\}$ qui vérifient les propriétés énumérées ci-dessous ($\mathcal{P}(X)$ désigne l'ensemble des parties de X).

(i) $\alpha \notin \mathrm{supp}(O) \Rightarrow f(O, \alpha) = 0$ (hors du support de l'objet, aucune face n'est éclairée) ;

(ii) $\omega \in O \Rightarrow f(O, \omega) = 1$ (toutes les faces de l'objet sont éclairées) ;

(iii) $f(O, \alpha) = f(\mathrm{st}(\alpha, O), \alpha)$ (l'éclairage d'une face ne dépend que de la configuration locale de l'objet) ;

(iv) $f(O, \alpha) \leqslant f(K_n, \alpha)$ (l'éclairage est maximal lorsque toutes les cellules de l'étoile dans K_n sont dans l'objet).

À partir de (Ayala *et al.*, 2002), les auteurs utilisent des *fonctions d'éclairage faibles* afin de pouvoir appliquer leur modèle aux surfaces de $\mathbb{R}^3$. Pour cela la condition de localité (iii) est affaiblie en remplaçant l'étoile par l'*étoile étendue* (voir la figure 3.9). Mais cela oblige à ajouter une cinquième propriété (assez technique) dans la définition pour maintenir une topologie satisfaisante pour le fond de l'image. Comme dans cette thèse, nous nous sommes principalement intéressés aux objets « épais » plutôt qu'aux surfaces, nous ne détaillerons pas davantage ces fonctions d'éclairage faible.

En s'appuyant sur la représentation sous forme de complexe cellulaire, nommée *niveau matériel* (« device level »), Ayala *et al.* extraient quatre autres représentations, le graphe d'adjacence, nommé *niveau logique* (« logical level »), le graphe de la relation d'incidence dans le complexe cellulaire, nommé *niveau conceptuel* (« conceptual level »), le complexe simplicial des chaînes du graphe d'incidence (voir la section 3.3), nommé *analogue simplicial* (« simplicial analogue ») et enfin la réalisation géométrique dans $\mathbb{R}^n$ du complexe de chaînes, nommé *analogue continu* (« continuous analogue »). Pour obtenir une notion de connexité à la fois pour un ensemble de cellules de K_n considéré comme objet et considéré comme fond, Ayala *et al.* définissent une notion d'adjacence avec *obstacle* de la façon suivante. Soient O et O' deux objets disjoints du complexe K. Deux cellules ω_1 et ω_2 de l'objet O sont *O'-adjacentes* s'il existe une cellule α incluse dans ω_1 et ω_2 telle que $f(O', \alpha) = 0$ et $f(O \cup O', \alpha) = 1$ (voir la figure 3.9). En prenant $O' = \emptyset$, on obtient la connexité de O en tant qu'objet et en prenant $O' = K_n \setminus O$, on obtient la connexité de O en tant que fond associé à l'objet O'. Cette notion d'adjacence, et par suite de connexité, est compatible avec tous les niveaux de leur représentation (les composantes connexes de l'objet et du fond des différents niveaux se correspondent naturellement). De plus, ils exhibent des fonctions d'éclairage pour les (α, β)-adjacences de $\mathbb{Z}^3$, $\alpha, \beta \in \{6, 18, 26\}$: les composantes connexes (objet et fond) de leur modèle sont les mêmes que celles obtenues avec le graphe d'adjacence.

3.3 Les ensembles partiellement ordonnés

Le point commun aux approches topologiques étudiées dans les deux sections précédentes est la construction de topologies dans lesquelles chaque point possède un voisinage fini. Ces espaces ont été étudiés par Alexandroff (1937) qui les appelle *espaces discrets* (« diskrete räume »). Pour éviter toute confusion avec les espaces discrets au sens mathématique (voir l'annexe A.1), nous les appelons *espaces d'Alexandroff*. Dans un espace d'Alexandroff, une intersection quelconque d'ouverts est un ouvert et chaque point x possède un plus petit voisinage (nécessairement ouvert) que nous notons $V(x)$. Remarquons que dans un tel espace, les ouverts et les fermés satisfont aux mêmes propriétés caractéristiques : $\emptyset$ et l'espace tout entier sont des ouverts, resp. des fermés, toute union et toute intersection d'ouverts, resp. de fermés, est un ouvert, resp. un fermé. Ainsi, il est possible d'échanger l'ensemble des ouverts avec celui des fermés pour former la *topologie duale*. Un espace d'Alexandroff qui possède la propriété de séparation T_1 est totalement discret. En effet, dans un espace T_1, tout singleton est fermé et dans un espace d'Alexandroff tout union de fermés est fermée. Donc,

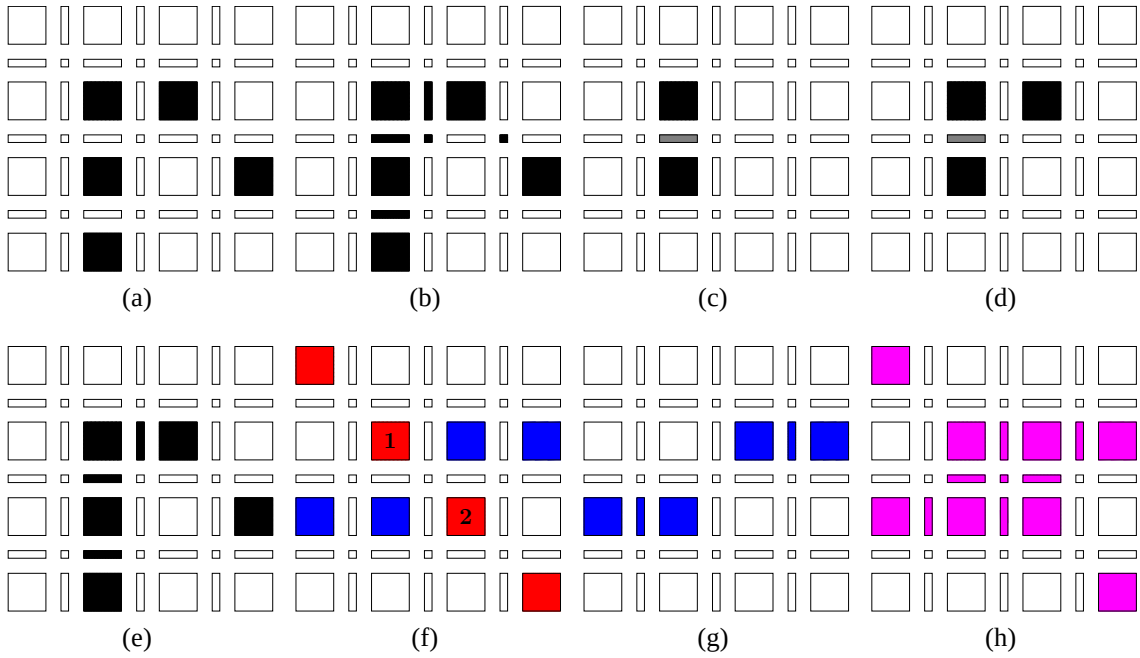


FIGURE 3.9 – Fonctions d'éclairage (partiellement adapté de Ayala *et al.*, 2002). (a) Un objet O dans la décomposition cellulaire cubique de $\mathbb{R}^2$. (b) Le support de O, $\mathrm{supp}(O)$. (c) Une face α (en gris) et son étoile dans O, $\mathrm{st}(O, \alpha)$, (en noir). (d) L'étoile élargie de α dans O (en noir). (e) Les faces éclairées par la fonction d'éclairage g définie par $g(O, \alpha) = 1$ si et seulement si $\alpha \in \mathrm{supp}(O)$ et $\mathrm{st}(\alpha, O) \subseteq O$ (Ayala *et al.* associe g à la 4-adjacence). (f) Deux objets disjoints : O, en rouge, et O', en bleu. Les deux faces ω_1 et ω_2, repérées respectivement par un 1 et un 2 sur la figure, appartiennent à O et s'intersectent en une 0-face α (au centre de la figure). (g) Les faces éclairées par la fonction d'éclairage g (voir (e)) pour l'objet O'. En particulier, on voit que α n'est pas éclairée. (h) Les faces éclairées par la fonction d'éclairage g (voir (e)) pour l'objet $O \cup O'$. La 0-face α est éclairée. On en déduit que les faces ω_1 et ω_2 de l'objet O sont O'-adjacentes.

dans un espace d'Alexandroff T_1 tous les sous-ensembles de l'espace sont fermés et par suite tous les sous-ensembles sont ouverts. Avec la topologie totalement discrète, les seules parties connexes sont les singletons ce qui est sans intérêt en analyse d'image. On voit ainsi que les seuls espaces d'Alexandroff intéressants sont les espaces non T_1. À l'opposé, on souhaite pouvoir distinguer – d'un point de vue topologique – les points de l'espace les uns des autres. Cela nécessite la propriété de séparation T_0. Nous appelons *A-espace* un espace d'Alexandroff ayant la propriété de séparation T_0. Il est toujours possible de se placer dans un A-espace. En effet, McCord (1966) a montré qu'en identifiant les points qui possèdent le même plus petit voisinage dans un espace d'Alexandroff non T_0, on obtient un espace quotient homotopiquement equivalent qui est un A-espace.

Dans un espace topologique non T_1, on peut définir un pré-ordre appelé *(pré-)ordre de spécialisation* : $x \leq y$ si y appartient à tout ouvert contenant x (intuitivement, y est plus « spécial » que x car il appartient à un plus grand nombre d'ouverts que x). On peut, de façon équivalente, définir ce pré-ordre par $x \leq y$ si $x \in \mathrm{A}(y)$ ($\mathrm{A}(y)$ désignant l'adhérence de $\{y\}$). Dans un espace T_1, l'ordre de spécialisation est vide. Dans un espace T_0, ce pré-ordre est un ordre et l'espace est donc un EPO (Ensemble Partiellement Ordonné). Inversement, étant donné un EPO $(X, \leq)$, la famille U

des ensembles hauts (voir l'annexe B.1) est une topologie sur X et (X, U) est un A-espace tel que $V(x) = \{y \in X \mid x \leq y\}$ pour tout $x \in X$. Nous disons que U est la topologie d'Alexandroff associée à l'ordre $\leq$ (sur X). La topologie d'Alexandroff associée à l'ordre dual de $\leq$ est la topologie duale de la topologie d'Alexandroff associée à l'ordre $\leq$. À notre connaissance, le (pré-)ordre de spécialisation a été introduit pour la première fois, de façon indépendante, par Alexandroff (1937) et Birkhoff (1937).

Alexandroff (1937) a montré qu'il y a un lien étroit entre les A-espaces et les complexes simpliciaux. En effet, dans un A-espace X, les points sont les sommets d'un complexe simplicial $\mathcal{K}(X)$ dont les simplexes sont les chaînes finies de X pour l'ordre de spécialisation (voir la figure 3.10). Le complexe $\mathcal{K}(X)$ est appelé le *complexe des chaînes* de l'EPO X. Inversement, l'ensemble des simplexes d'un complexe simplicial K muni de la relation d'inclusion est un EPO noté $\mathcal{X}(K)$. Le complexe simplicial $\mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ n'est pas égal à K mais à sa subdivision barycentrique. Cette correspondance entre A-espaces et complexes simpliciaux n'est pas uniquement combinatoire : la topologie d'Alexandroff d'un côté et la topologie de la réalisation géométrique de l'autre côté sont également concernées. En effet, la fonction $\varphi_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$ qui à chaque point M de la réalisation géométrique de $\mathcal{K}(X)$ associe le plus grand élément de l'unique simplexe (rappelons qu'ici un simplexe est une chaîne) dont l'intérieur de la réalisation géométrique contient M est une équivalence d'homotopie faible.

Théorème 3.3.1. *[McCord, 1966] Soit X un A-espace. Il existe une équivalence d'homotopie faible $\varphi_X : |\mathcal{K}(X)| \to X$. De plus, à chaque fonction continue $f : X \to Y$ entre deux A-espaces on peut associer une application simpliciale $|\mathcal{K}(f)|$ telle que le diagramme suivant soit commutatif :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] & Y \\ |\mathcal{K}(X)| \arrow[u, "\varphi_X"] \arrow[r, "|\mathcal{K}(f)|"'] & |\mathcal{K}(Y)| \arrow[u, "\varphi_Y"'] \end{tikzcd}$$

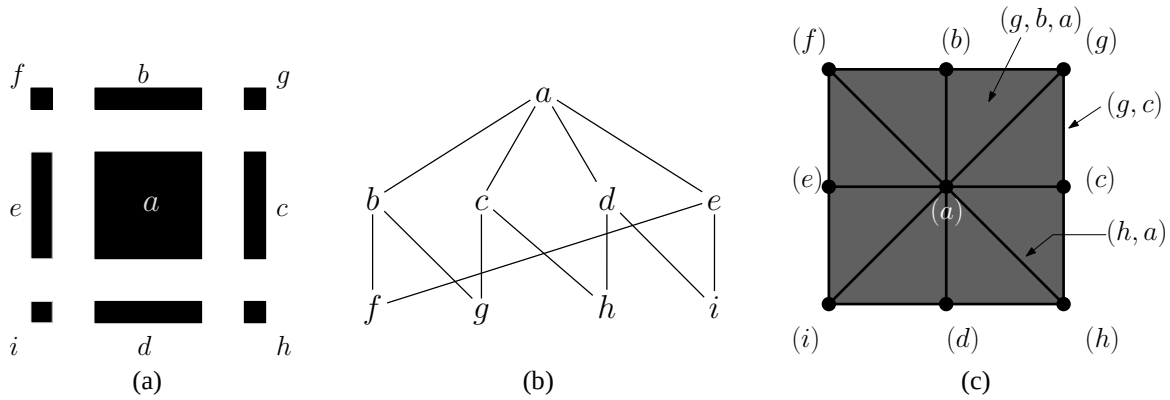


FIGURE 3.10 – (a) L'adhérence d'une 2-face d'un complexe cellulaire abstrait qui modèle un pixel de $\mathbb{Z}^2$. (b) Le diagramme de Hasse de $\mathcal{X}(f)$. (c) Le complexe simplicial $\mathcal{K}(\mathcal{X}(f))$.

Bertrand (1999) et Bertrand et Couprie (1999) sont les premiers à proposer d'utiliser directement les ensembles partiellement ordonnés comme cadre conceptuel pour les images digitales (Herman (1990) dans sa critique de l'« isomorphisme » de Kovalevsky entre les espaces topologiques T_0 finis et les complexes cellulaires abstraits avait déjà noté que les ensembles partiellement ordonnés

couvrent une classe d'espaces topologiques suffisante pour toute l'analyse d'image). Dans ce cadre, qui embrasse ceux utilisés par Khalimsky et Kovalevsky, ils s'intéressent aux notions de point simple (voir le chapitre 4) et de surface discrète. Bertrand définit en particulier une notion d'homotopie dans les EPO en remplaçant, comme l'avait fait Khalimsky, l'intervalle $[0, 1]$ par un intervalle de $\mathbb{Z}$ muni d'une topologie de COTS. Ces homotopies lui permettent ensuite de définir, comme en topologie classique, des notions de rétracte par déformation et d'ensemble contractile. Parmi les articles qui utilisent cette approche par les EPO, citons par exemple : Couprie *et al.* (2003) (discrétisation), Couprie et Bertrand (2002) (segmentation), Lohou et Bertrand (1999) (amincissement), Daragon *et al.* (2005) (surfaces et frontières).

À l'espace digital $\mathbb{Z}^n$ ($n \geqslant 1$), Bertrand associe l'EPO $\mathbb{F}^n$ des complexes cubiques abstraits défini de la façon suivante. Les ensembles $\mathbb{F}_0^1$ et $\mathbb{F}_1^1$ sont définis par $\mathbb{F}_0^1 = \{\{a\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$ et $\mathbb{F}_1^1 = \{\{a, a+1\} \mid a \in \mathbb{Z}\}$. Soit m un entier compris entre 0 et n. Un sous-ensemble f de $\mathbb{Z}^n$ qui est le produit cartésien de m élements de $\mathbb{F}_1^1$ et de $n - m$ élements de $\mathbb{F}_0^1$ (dans n'importe quel ordre) est un *m-cube* de $\mathbb{Z}^n$ ou, plus simplement, un *cube* de $\mathbb{Z}^n$. L'ensemble de tous les m-cubes, $m \in [\![0, n]\!]$ fixé, est noté $\mathbb{F}_m^n$ et l'ensemble de tous les m-cubes, m décrivant l'intervalle $[\![0, n]\!]$, est noté $\mathbb{F}^n$. Si f est un m-cube de $\mathbb{Z}^n$ ($m \in [\![0, n]\!]$) et g un cube de $\mathbb{Z}^n$ tel que $f \subseteq g$, on dit que f est une *m-face* de g, ou, plus simplement, une *face* de g. Si de plus $f \neq g$, on dit que f est une (m-)face *propre* de g.

L'ensemble $\mathbb{F}^n$ muni de la relation d'ordre $\subseteq$ est un ensemble partiellement ordonné qui, muni de sa topologie d'Alexandroff, est homéomorphe à $\mathbb{Z}^n$ muni de la topologie de Khalimsky (on a par définition $\mathbb{F}^n = (\mathbb{F}^1)^n$ et il est facile de vérifier que la fonction qui à $\{a\}$ associe $2a$ et à $\{a, a+1\}$ associe $2a+1$ est un homéomorphisme de $\mathbb{F}^1$ sur la droite de Khalimsky). En définissant, pour tout élément f de $\mathbb{F}^n$, $\dim(f)$ comme l'entier m tel que f est un m-cube (ou, si l'on préfère, le logarithme en base 2 du cardinal de f), on obtient un complexe cellulaire abstrait $(\mathbb{F}^n, \subseteq, \dim)$. Considérant une image digitale λ définie sur $\mathbb{Z}^n$, Bertrand et Couprie définissent deux images définies sur l'EPO des complexes cubiques, l'une, μ^m, associée à l'interprétation de λ avec la $(2n, 3^n - 1)$-adjacence et l'autre, μ^h, avec l'interprétation duale ($(3^n - 1, 2n)$-adjacence). Pour construire l'image $\mu^m : \mathbb{F}^n \to \{0, 1\}$, il faut d'abord déterminer l'ensemble des cubes de $\mathbb{F}^n$ qui sont inclus dans $S = \lambda^{-1}(\{1\})$ puis retirer jusqu'à stabilité un certain nombre de cubes « superflus » (voir l'exemple de la figure 3.11). Pour construire l'image $\mu^h : \mathbb{F}^n \to \{0, 1\}$, il faut déterminer l'ensemble des cubes de $\mathbb{F}^n$ qui intersectent S puis retirer certains cubes avec le même algorithme que pour l'image μ^m. La figure 3.11, partiellement extraite de Bertrand et Couprie (1999), illustre cette définition des images μ^m et μ^h. Bertrand et Couprie valident leur approche en montrant qu'ils retrouvent les points simples et les surfaces de la topologie digitale dans le cas $n = 3$ en utilisant des notions de point simple et de surface définies sur $\mathbb{F}^n$ (et plus généralement sur un EPO) et appliquées aux images μ^m et μ^h.

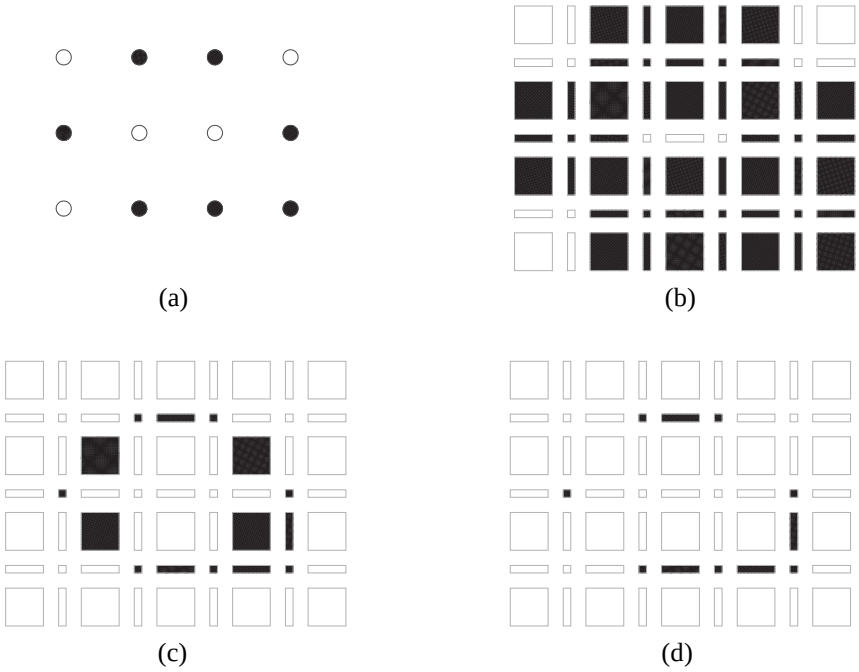


FIGURE 3.11 – Complexes cubiques « tout ou rien » associés à une image digitale (figure partiellement extraite de Bertrand et Couprie, 1999). (a) Une image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$. (b) L'ensemble des m-cubes de $\mathbb{F}^2$ qui intersectent $\lambda^{-1}(\{1\})$ sont colorés en noir. Les 0-cubes $\{a\}$ de $\mathbb{F}^2$ sont repésentés par des petits disques centrés en a, les 1-cubes par des rectangles situés entre les deux 0-cubes dont ils sont la réunion et les 2-cubes par des carrés situés entre les quatre 0-cubes dont ils sont la réunion. (c) L'image μ^m associée à λ, obtenue – à partir de l'image (b) – en colorant en blanc itérativement, jusqu'à stabilité, tous les cubes noirs qui n'ont qu'une seule face propre colorée en noir. (d) L'ensemble des m-cubes de $\mathbb{F}^2$ qui sont inclus dans l'ensemble $\lambda^{-1}(\{1\})$ sont colorés en noir. Comme aucun cube noir n'inclut exactement une face propre noire, on obtient directement l'image μ^h associée à λ.

Chapitre 4

Déformations homotopiques

On s'intéresse dans ce chapitre à la façon dont la notion de déformation continue est traduite dans un espace discret. Il y a au moins deux raisons pour s'intéresser aux déformations continues. La première est qu'elle permet en topologie classique de définir le groupe fondamental et plus généralement les groupes d'homotopie. Or ceux-ci sont des invariants algébriques puissants. En définissant des outils équivalents dans les espaces discrets, on se donne la possibilité de les utiliser pour valider la modification d'une image digitale du point de vue topologique. Notons que généralement, il n'est pas nécessaire de les calculer pour obtenir cette validation. Il suffit d'être en mesure de prouver qu'ils n'ont pas été modifiés. C'est le cas par exemple si la transformation envisagée est une équivalence homotopique faible.

Une autre raison pour s'intéresser aux déformations continues est que les algorithmes d'amincissement, ou d'expansion, sont utilisés dans de nombreuses applications (par exemple, en squelettisation, segmentation, recalage ou déformation). Or la préservation de la topologie des objets lors des phases d'amincissement, ou d'expansion, est souvent un critère de qualité recherché. Cette préservation peut être obtenue en déterminant des conditions suffisantes pour qu'une modification de l'image en un point ne change pas les caractéristiques topologiques de l'image telles que les composantes connexes, les trous et les tunnels (en 3D). C'est ce qui conduit à la définition des points simples.

4.1 Le groupe fondamental

On trouve essentiellement trois manières d'aborder le problème de la définition d'un groupe fondamental utilisable avec des images digitales. La première est de définir une notion de déformation homotopique sur les α-chemins du graphe d'adjacence de l'image comme une suite de modifications locales, élémentaires du chemin. Dans ce cadre, nous présentons ci-dessous la solution de Kong (1989). La seconde façon de construire un groupe fondamental est de reconstruire la théorie de l'homotopie en remplaçant l'intervalle continu $[0, 1]$ avec lequel sont définis les chemins et les homotopies par un intervalle discret de $\mathbb{Z}$ (après avoir éventuellement plongé l'espace discret dans un espace topologique). En effet, le déroulement continu du temps lors du parcours d'un chemin discret ne semble guère approprié. Cette démarche a été suivie par plusieurs auteurs sous des formes diverses. Nous en présentons quelques unes dans cette section. Enfin, la troisième façon de procéder est d'utiliser directement le groupe fondamental classique après avoir plongé l'espace digital de l'image dans un espace topologique, en conservant donc le déroulement continu du temps malgré son opposition apparente au caractère discret de l'espace ambiant. À notre connaissance, cette dernière méthode n'a pas été proposée dans le cadre de l'imagerie digitale bien que les espaces finis soient utilisés en topologie classique, notamment pour la classification algébrique des espaces topologiques. Nous n'évoquerons donc pas cette solution dans ce chapitre mais elle fait l'objet du chapitre 6.

Les notions classiques de lacets, équivalence de lacets, concaténation de chemins, de groupe fondamental et plus généralement de groupes d'homotopie sont rappelées dans l'annexe A, section A.4.

Kong (1989) définit le *groupe fondamental digital* d'une partie de $\mathbb{Z}^n$, $n \in \{2,3\}$, l'espace $\mathbb{Z}^n$ étant muni d'une structure d'*espace fortement normal* c'est-à-dire d'un couple (α,β) d'adjacences locales (voir l'introduction du chapitre 3), identifiées à un ensemble de segments de $\mathbb{R}^n$, telles que :

- aucune α-adjacence ne coupe une β-adjacence ;
- dans chaque carré unitaire de $\mathbb{Z}^n$, il y a au total deux adjacences diagonales (de types α et/ou β) ;
- deux composantes connexes de l'objet et du fond (α- ou β-) adjacentes sont aussi $(2n)$-adjacentes.

Ces conditions sont vérifiées par les paires d'adjacences usuelles ($(4,8)$ et son dual pour $n = 2$ et $(6,26)$, $(6,18)$ et leurs duaux pour $n = 3$) mais aussi par les adjacences associées au pavage hexagonal du plan et aux grilles cubiques centrées ou faces centrées dans l'espace et par les adjacences des espaces de Khalimsky (voir la figure 3.5). Par contre, les fonctions de connexité décrites dans le chapitre 7 induisent, pour certaines d'entre-elles, des adjacences sur $\mathbb{Z}^n$ qui ne rentrent pas dans le formalisme des espaces fortement normaux.

Le groupe fondamental digital lui-même peut être défini de deux façons, l'une continue, l'autre discrète. Soit E une partie de l'espace fortement normal $(\mathbb{Z}^n,\alpha,\beta)$ et a un point de E. Un lacet de E enraciné en a est un lacet de $\mathbb{R}^n$ tracé sur le sous-graphe E_α de $(\mathbb{Z}^n,\alpha)$ induit par E (vu comme une partie de $\mathbb{R}^n$) passant par a. Deux lacets enracinés en a sont équivalents s'ils sont équivalents au sens classique dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ privé de $\mathbb{Z}^n \setminus E$ si $n = 2$ ou privé du sous-graphe $\overline{E}_\beta$ de $(\mathbb{Z}^n,\beta)$ induit par $\mathbb{Z}^n \setminus E$ si $n = 3$. L'opération usuelle de concaténation étant clairement compatible avec cette restriction de l'équivalence usuelle, on peut définir l'ensemble quotient $\pi(E,a)$ et le munir de la concaténation qui en fait un groupe, le groupe fondamental digital de point de base a.

La définition discrète est la suivante. Un α-lacet dans E enraciné en a est un α-chemin dans E dont les deux extrémités sont égales à a. Deux α-lacets c_1, c_2 dans E enracinés en a sont *immédiatement équivalents* s'il existe quatre α-chemins p, q_1, q_2, r, dans E tels que [1] $c_1 = p.q_1.r$ et $c_2 = p.q_2.r$ où q_1 et q_2 sont inscrits dans un même carré de $\mathbb{Z}^2$ si $n = 2$ ou, si $n = 3$, dans un même cube de $\mathbb{Z}^3$ n'ayant pas deux sommets opposés adjacents dans $\overline{E}_\beta$. La relation d'équivalence entre les lacets de E enracinés en a est la fermeture transitive de la relation « être immédiatement équivalent ». Le groupe fondamental est ensuite défini par passage au quotient et muni de la concaténation des chemins.

Les deux groupes fondamentaux digitaux résultant des définitions précédentes sont isomorphes (Kong *et al.*, 1992). De plus, Kong *et al.* montrent l'existence d'un « analogue continu » $C(E)$ de l'ensemble discret E possédant les propriétés suivantes :

- E_α est inclus dans $C(E)$;
- $\overline{E}_\beta$ est inclus dans $\mathbb{R}^n \setminus C(E)$;
- l'injection $i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$ induit des correspondances bi-univoques entre les composantes connexes de E et de $C(E)$ d'une part, et de $\mathbb{Z}^n \setminus E$ et de $\mathbb{R}^n \setminus C(E)$ d'autre part ;
- pour tout point $a \in \mathbb{Z}^n$, l'injection $i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n$ induit un isomorphisme entre le groupe fondamental digital $\pi(E,a)$, resp. $\pi(\mathbb{Z}^n \setminus E, a)$, et le groupe fondamental euclidien $\pi_1(C(E),a)$ si $a \in E$, resp. $\pi_1(\mathbb{R}^n \setminus C(E),a)$ si $a \in \mathbb{Z}^n \setminus E$;

1. Nous donnons ici la description de Malgouyres (2000) de l'immédiate équivalence, plus simple que la définition originale de Kong.

– la frontière d'une composante connexe X de $C(E)$ intersecte la frontière d'une composante connexe Y de $\mathbb{R}^n \setminus C(E)$ si et seulement si un point de $X \cap E$ est β-adjacent à un point de $Y \cap (\mathbb{Z}^n \setminus E)$.

Malgouyres (2000) a montré que dans $\mathbb{Z}^2$ équipé de la 4-adjacence, ou de la 8-adjacence, le groupe fondamental digital d'un objet connexe est un groupe libre dont le nombre de générateurs est égal au nombre de trous de l'objet [2]. Dans Malgouyres (2001), l'auteur donne un algorithme pour déterminer le groupe fondamental d'un objet connexe de $\mathbb{Z}^3$.

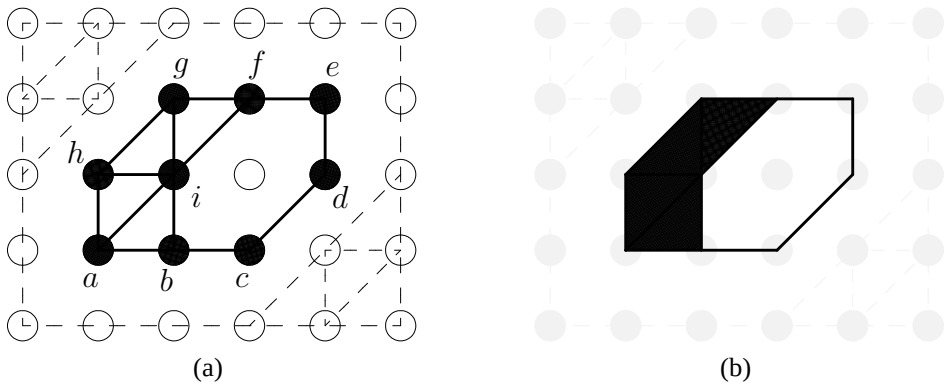


FIGURE 4.1 – Groupe fondamental digital (Kong). (a) Un ensemble E dans l'espace fortement normal $(\mathbb{Z}^2, \omega, \omega)$ où ω est la 6-adjacence de $\mathbb{Z}^2$ définie par $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \omega$ si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont 8-adjacents et $x_1 - x_2 \neq y_2 - y_1$. Les points de E sont représentés par des disques noirs. Le graphe E_ω (voir texte) est en traits pleins et le graphe $\overline{E}_\omega$ en traits pointillés. Les ω-chemins $c_1 = (a, b, i, h, a)$, $c_2 = (a, b, i, g, h, a)$, $c_3 = (a, b, i, f, g, h, a)$ et $c_4 = (a, b, c, d, e, f, g, h, a)$ sont des lacets dans E enracinés en a. Les lacets c_1 et c_2 sont immédiatement équivalents, les lacets c_2 et c_3 aussi. Les lacets c_1 et c_3 sont équivalents mais pas immédiatement équivalents. Le lacet c_4 n'est équivalent à aucun des lacets c_1, c_2, c_3. (b) L'analogue continue $C(E)$ de l'ensemble discret E. Le groupe fondamental digital $\pi(E, a)$ et le groupe fondamental euclidien de $\pi_1(C(E), a)$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{Z}$.

Les travaux de Khalimsky (1987b) se rattachent à la deuxième façon d'aborder l'homotopie dans un espace digital. En fait, à notre connaissance, c'est le premier à procéder de cette façon. Il définit un chemin dans un espace topologique X comme une application continue d'un COTS dans X. La figure 4.2 montre un chemin fermé (un lacet) dans $\mathbb{Z}^2$ muni de la topologie de Khalimsky. Si f, g sont deux fonctions continues entre les espaces topologiques X et Y, une homotopie entre f et g est une fonction continue $H : X \times T \to Y$ telle que $H(., a) = f$ et $H(., b) = g$ avec T COTS d'extrémités a, b. Deux lacets dans X, $f_1 : T_1 \to X$, $f_2 : T_2 \to X$, sont équivalents s'il existe un COTS T et deux fonctions continues $g_i : T \to T_i$, $i \in \{1, 2\}$, et une homotopie H entre $f_1 \circ g_1$ et $f_2 \circ g_2$. Les fonctions g_i sont nécessaires pour pouvoir comparer des lacets définis sur des COTS de longueurs différentes, ce qui est indispensable pour l'opération de concaténation (c'est une différence notable avec les chemins définis sur l'intervalle réel $[0, 1]$). Le groupe fondamental s'obtient ensuite classiquement par passage au quotient.

2. Un groupe libre est un ensemble de mots de longueurs finies écrits avec un alphabet constitué des générateurs et de leurs inverses. La loi du groupe est la concaténation.

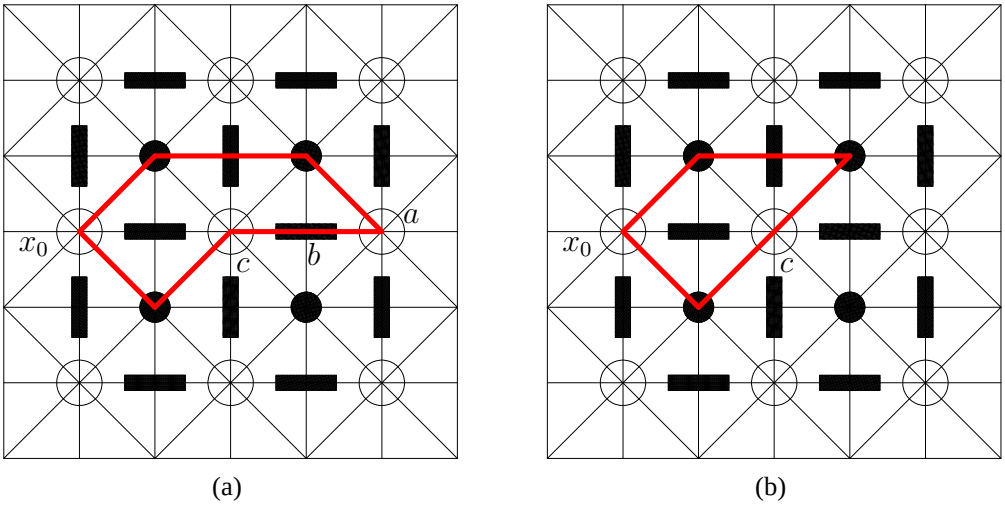
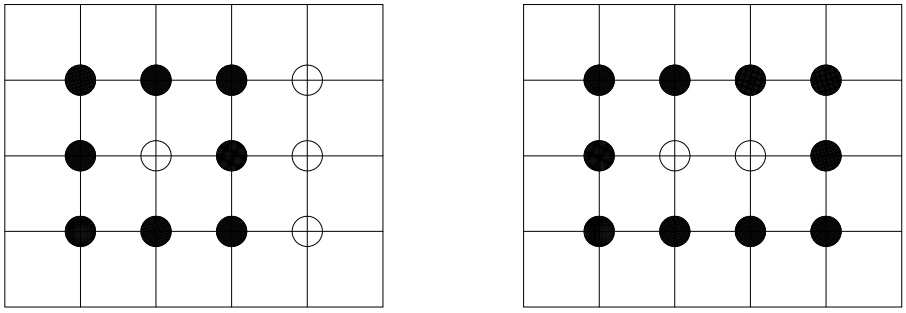


FIGURE 4.2 – Groupe fondamental de Khalimsky. (a) Un lacet $f_1 : [\![0,8]\!] \to \mathbb{Z}^2$ au sens de Khalimsky. On a $f_1(0) = f_1(8) = x_0$, $f_1(4) = a$, $f_1(5) = b$ et $f_1(6) = c$. (b) Un lacet $f_2 : [\![0,6]\!] \to \mathbb{Z}^2$ avec $f_2(0) = f_2(6) = x_0$ et $f_2(4) = c$. Soit $g_2 : [\![0,8]\!] \to [\![0,6]\!]$ la fonction définie par $g_2(i) = i$ si $i \in [\![0,3]\!]$, $g_2(i) = 4$ si $i \in \{4,5,6\}$ et $g_2(i) = i-2$ sinon. La fonction g_2 est continue. Il existe une homotopie $H : [\![0,8]\!] \times [\![0,2]\!] \to \mathbb{Z}^2$ entre f_1 et $f_2 \circ g_2$ définie par $H(4,1) = b$, $H(4,2) = H(5,2) = c$ et $H(i,j) = f_1(i,j)$ sinon. Ainsi, le lacet f_2 est homotope au lacet f_1.

De son côté, Boxer (1999) définit un groupe fondamental digital pour les objets de $\mathbb{Z}^n$ munis d'une adjacence α classique ($\alpha \in \{4,8\}$ si $n = 2$, $\alpha \in \{6,18,26\}$ si $n = 3$ et $\alpha = 2n$ si $n \geqslant 4$). Han (2008) étend les résultats de Boxer à toutes les adjacences basées sur la dimension de l'intersection des cubes unitaires de $\mathbb{R}^n$ centrés sur les points de $\mathbb{Z}^n$ (voir l'introduction du chapitre 2). Il est important de remarquer que la méthode de Boxer ne tient compte que de l'adjacence des objets (voir la figure 4.4). Pour définir son groupe fondamental, Boxer commence par étendre la notion de fonction continue digitale de Rosenfeld (1986) : une fonction $f : X \to Y$ ($X \subseteq \mathbb{Z}^{n_0}$, $Y \subseteq \mathbb{Z}^{n_1}$) est (α,β)-*continue* si l'image d'une partie α-connexe de X est β-connexe dans Y. Un chemin dans une partie finie X de $\mathbb{Z}^n$ muni d'une adjacence α est alors une fonction $(2,\alpha)$-continue d'un intervalle $[\![a,b]\!]$ de $\mathbb{Z}$, muni de la 2-adjacence (l'adjacence naturelle), dans X. De manière évidente, l'image d'un tel chemin est un α-chemin au sens défini dans le chapitre 2. De même, deux fonctions $f,g : X \to Y$, (α,β)-continues sont homotopes s'il existe une fonction $H : X \times [\![0,a]\!]$ telle que $H(x,.)$ soit $(2,\beta)$-continue pour tout $x \in X$ et $H(.,t)$ soit (α,β)-continue pour tout $t \in [\![0,a]\!]$. Notons que la notion d'homotopie ainsi construite ne correspond pas à notre intuition euclidienne. Ainsi, par définition même de la continuité, il est impossible d'envoyer continuement l'ensemble A de la figure 4.3 vers l'ensemble B de la même figure. Ces deux ensembles ne peuvent donc pas avoir le même type d'homotopie. Plus généralement, Boxer (2005) prouve que deux courbes simples non-contractiles de cardinaux distincts ne peuvent pas avoir le même type d'homotopie.

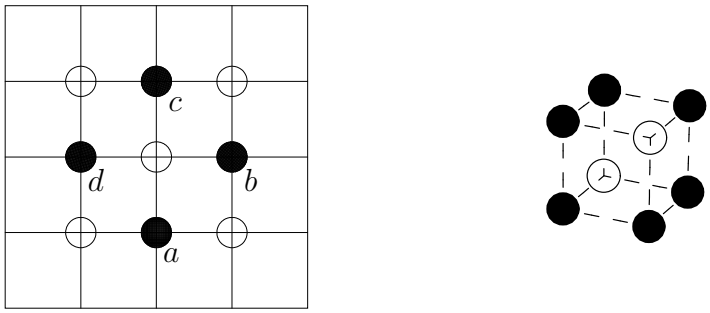
Après avoir défini l'homotopie de fonctions, Boxer suit la construction classique du groupe fondamental. Boxer prouve que son groupe fondamental est isomorphe au groupe de Kong pour la $(4,8)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^2$ et la $(6,18)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$. Mais il observe lui-même que, par exemple, la 8-adjacence dans $\mathbb{Z}^2$ est inappropriée pour sa théorie de l'homotopie en donnant un exemple de



(a) (b)

FIGURE 4.3 – Groupe fondamental de Boxer. (a) Un ensemble digital A. (b) Un ensemble digital B. A et B sont des courbes fermées simples en 4-adjacence. Il n'existe pas de fonction $(4,4)$-continue de A sur B car toute fonction qui envoie A sur B déconnecte deux points de A. Les ensembles A et B ont donc des types d'homotopie distincts.

lacet contractile en 8-adjacence et entourant un pixel du fond (figure 4.4(a)). Par ailleurs, nous pensons qu'il y a une erreur dans corollaire 4.19 de Boxer (1999) utilisé dans la preuve du théorème d'isomorphisme avec le groupe de Kong. Par exemple, le lacet de la figure 4.4(b) n'est pas $(2,6)$-homotope à un lacet constant (dans l'ensemble formé par les points noirs de l'image) alors qu'il est immédiatement équivalent à un lacet constant en $(6,18)$-adjacence pour l'homotopie de Kong.



(a) (b)

FIGURE 4.4 – Groupe fondamental de boxer. (a) Le 8-lacet (a,b,c,d,a) est 8-contractile par $(a,b,c,d,a) \to (a,a,d,a,a) \to (a,a,a,a,a)$ (Boxer, 1999). (b) Ce 6-lacet n'est pas 6-contractile (quelle que soit l'adjacence du fond qui n'intervient pas dans les définitions de la $(2,\alpha)$-homotopie de Boxer).

Grandis (2002) construit une théorie de l'homotopie sur un complexe simplicial abstrait. Ces complexes simpliciaux peuvent être, par exemple, des points de l'espace euclidien vus à différentes échelles et qui définissent un simplexe dès lors qu'ils sont suffisament près les uns des autres relativement à un étalon (voir la figure 4.5).

Soit X un complexe simplicial abstrait. Une *ligne* est une application simpliciale $\ell : \mathbb{Z} \to X$ où $\mathbb{Z}$ est vu comme un 1-complexe dont les 1-simplexes sont les paires $\{i, i+1\}$. Une ligne n'est donc rien d'autre qu'une suite $(\ell_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de points de X tels que les $\{\ell_i, \ell_{i+1}\}$ sont des arêtes de X (voir figure 4.6). Les lignes sont munies d'une structure simpliciale L dont les simplexes sont les ensembles finis Λ de

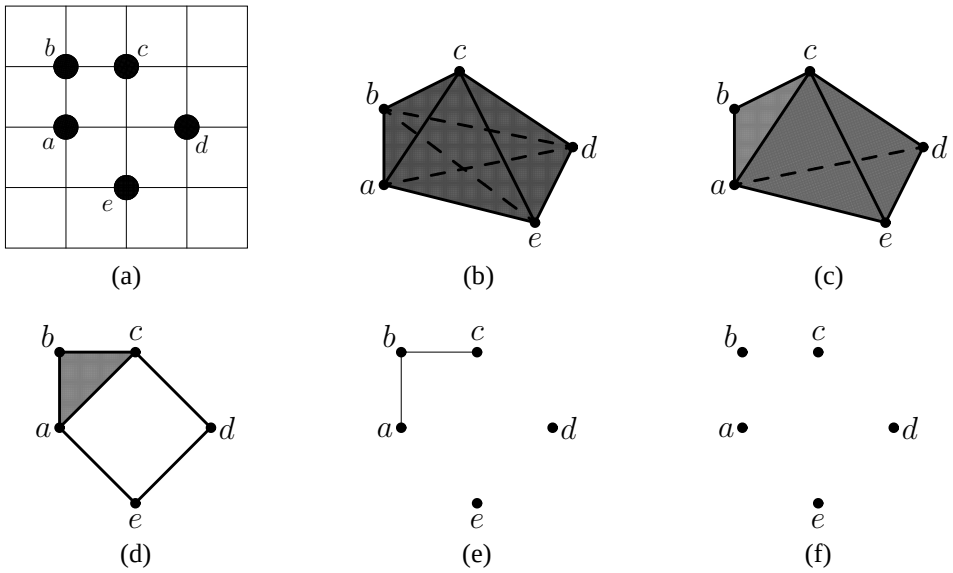


FIGURE 4.5 – Complexes simpliciaux abstraits de Grandis. (a) Un ensemble E composé de cinq points de $\mathbb{R}^2$. Une partie A de E est un simplexe du complexe simplicial E_ε si $\forall a, b \in A, \mathrm{d}(a, b) \leq \varepsilon$ où d est la distance euclidienne. (b–f) Des représentations de E_ε pour cinq valeurs de ε : $\varepsilon = 3, \varepsilon = 2, \varepsilon = 1.4, \varepsilon = 1, \varepsilon = 0.5$ (sur la figure (b), E_ε est 4-simplexe complet (avec toutes ses faces) et sur la figure (c), E_ε est l'union d'un 3-simplexe complet et d'un 2-simplexe complet se partageant une arête.

lignes tels que $\bigcup_{\ell \in \Lambda} \{\ell_i, \ell_{i+1}\}$ est un simplexe de X pour tout $i \in \mathbb{Z}$. En particulier, une arête du complexe des lignes est un ensemble de deux lignes $\{a, b\}$ telles que, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\{a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}\}$ est un 3-simplexe de X. Un chemin est une ligne à support fini (constante sauf en dehors d'un intervalle fini de $\mathbb{Z}$) (en fait le support du chemin est défini modulo les translations sur $\mathbb{Z}$). Une homotopie de chemins est alors un chemin (dans le complexe des lignes) entre des chemins ayant les mêmes extrémités. La construction du groupe fondamental du complexe simplicial s'en déduit naturellement. Grandis montre l'isomorphisme de ce groupe fondamental avec celui, au sens classique, de la réalisation géométrique du complexe. La preuve se fait via le groupe des lacets d'arêtes du complexe (voir l'annexe A.5). Il donne aussi une version simpliciale du théorème de Seifert-Van Kampen (qui permet de ramener le calcul du groupe fondamental d'un ensemble au calcul du groupe fondamental de sous-parties).

Ayala *et al.* (2003, 2004) définissent pour leur modèle cellulaire un groupe fondamental très proche de celui de Khalimsky. La différence notable est que les fonctions qui remplacent les chemins de Khalimsky sont contraintes à associer à un point ouvert de la droite de Khalimsky, $\mathbb{Z}$, une cellule de dimension maximale dans le complexe sur lequel est défini l'objet (voir la figure 4.7). De cette façon les lacets de leur modèle sont finalement des lacets digitaux et peuvent être comparés avec ceux de Kong. Ayala *et al.* définissent également le groupe fondamental d'un ensemble de cellules considérées comme fond par rapport à un autre objet (suivant le même principe que celui utilisé pour la connexité, voir la section 3.2). Ces groupes fondamentaux (objet et fond) sont isomorphes aux groupes fondamentaux classiques des analogues continus définis dans leur modèle (avec les fonctions d'éclairage faible, le morphisme est uniquement surjectif pour le groupe fondamental du fond).

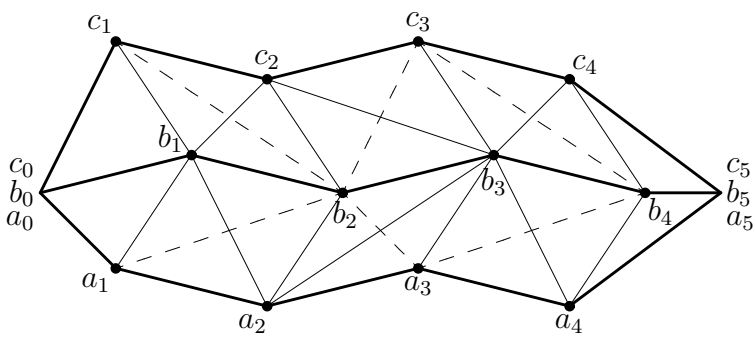
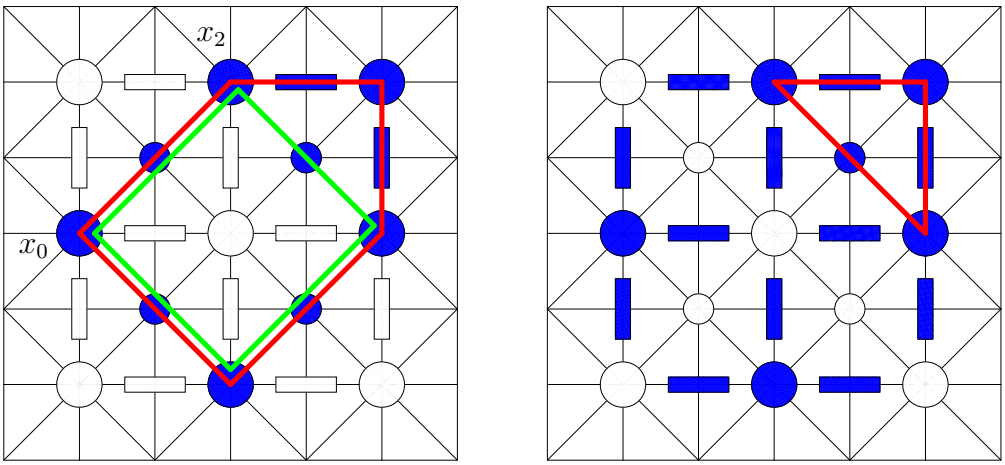


FIGURE 4.6 – Homotopie de chemins dans le complexe simplicial abstrait de Grandis (2002). Les points a_i, b_i, c_i, $i \in [\![0,5]\!]$, sont les sommets d'un complexe simplicial abstrait X. Les chemins $a = (a_i)_{i=0}^5, b = (b_i)_{i=0}^5, c = (c_i)_{i=0}^5$ sont des parcours finis sur les arêtes du complexe. L'homotopie de chemins (a, b, c) est un parcours fini sur les arêtes du complexe simplicial des lignes : pour tout $i \in [\![0,4]\!]$, $\{a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}\}$ et $\{b_i, b_{i+1}, c_i, c_{i+1}\}$ appartiennent à X.

La démonstration se fait ici aussi en utilisant le groupe des lacets d'arêtes du complexe simplicial associé au modèle. Enfin, sous certaines conditions, Ayala *et al.* établissent une version digitale du théorème de Seifert-Van Kampen.



(a) (b)

FIGURE 4.7 – Fonctions d'éclairage et groupe fondamental. (a) Un objet (les grands disques bleus) et son support en bleu. La fonction d'éclairage est la fonction qui éclaire tout le support (fonction d'éclairage maximale, associée à la 8-adjacence). Un lacet $f_1 : [\![0,10]\!] \to \mathbb{Z}^2$ (en rouge) est tracé dans la partie éclairée. Une cellule sur deux du lacet est une cellule de dimension maximale de l'objet. On a en particulier $f_1(0) = f_1(10) = x_0$, $f_1(2) = x_2$. En vert, un lacet $f_2 : [\![0,8]\!] \to \mathbb{Z}^2$ avec en particulier $f_2(0) = f_2(8) = x_0$ et $f_2(2) = x_2$. Soit $g_2 : [\![0,2]\!] \to \mathbb{Z}^2$ la fonction constante égale à x_0. La concaténation $f_2.g_2$ de f_2 et de g_2 est homotope à f_1 par l'homotopie $H : [\![0,10]\!] \times [\![0,6]\!] \to \mathbb{Z}^2$ définie par $H(.,0) = f_1$, $H(t,1) = f_2(t)$ si $t - i \leqslant 1$, $H(t,i) = f_2(2+i)$ si $t - i \in \{2,3,4\}$, $H(t,i) = f_2(t-2)$ si $t - i \geqslant 5$ et $H(.,2) = f_2.g_2$. On en conclut que le lacet f_2 est homotope au lacet f_1 au sens de Ayala *et al.* Le groupe fondamental de l'objet est isomorphe à $\mathbb{Z}$. (b) L'objet est maintenant constitué par les disques blancs (la fonction d'éclairage est toujours la même). Le fond a trois composantes connexes dont les groupes fondamentaux sont triviaux (en rouge, le seul lacet non trivial du fond).

Notons pour terminer que toutes les méthodes que nous avons présentées dans cette section, sauf la méthode purement digitale de Kong, permettent d'envisager la définition de groupes d'homotopie d'ordres supérieurs.

4.2 Les notions de point et d'ensemble simples

Vouloir modifier une image digitale de façon topologiquement neutre conduit naturellement à la notion d'*ensemble simple*, et tout particulièrement de *point simple*, grossièrement un ensemble, ou un point, sur lequel on peut modifier la valeur de l'image sans modifier « la topologie » de celle-ci. Bien sûr, il est nécessaire de préciser ce qu'on entend par « modifier la valeur de l'image » et par « modifier la topologie ». Dans cette section, nous nous intéressons uniquement à des images binaires et il n'y a donc pas d'ambiguïté sur ce qu'est une modification de la valeur de l'image. Cependant, parce que la littérature sur les images binaires oppose généralement un objet au fond, et que l'attention est principalement portée sur l'objet, et parce qu'une étape utilisée depuis longtemps en pré-traitement d'image pour la reconnaissance de forme est l'amincissement de l'objet, les ensembles (ou points) simples des images binaires sont définis généralement comme des ensembles (ou points) de l'objet susceptibles de passer au fond de l'image. Au chapitre 5, nous verrons comment la notion de point simple est abordée dans les images de labels.

4.2.1 Définitions dans $\mathbb{Z}^2$

L'espace de dimension 2 a ceci de particulier que la définition des points simples ne requiert que l'utilisation de la notion topologique de connexité. Elle peut donc être donnée naturellement dans le cadre de la représentation de l'image digitale par un graphe d'adjacence.

Un des premiers critères topologiques proposés pour la définition des points simples [3] d'une image digitale 2D définie sur $\mathbb{Z}^2$ et munie de la $(\alpha, 12-\alpha)$-adjacence ($\alpha \in \{4, 8\}$) a été la conservation du nombre de composantes connexes de l'objet et du fond (Rosenfeld, 1970). Rosenfeld donne une caractérisation locale d'un tel point simple sous reserve que le fond n'ait qu'une seule composante connexe (l'objet est donc sans trou). Ronse (1988) montrera que cette condition sur le nombre de composantes connexes du fond n'est pas nécessaire. D'un point de vue algorithmique, Rosenfeld montre que les composantes connexes simplement connexes (sans trou) de l'objet peuvent être réduites à un unique point par retrait glouton de points simples (le choix du point simple à retirer, lorsqu'il y en a plusieurs, n'a pas d'importance). Dans (Rosenfeld, 1973), il obtient un résultat semblable pour les objets possédant un trou : dans $\mathbb{Z}^2$ muni de la $(4, 8)$-adjacence, tout objet possédant un trou peut être aminci en une courbe fermée simple par retrait glouton de points simples. Mylopoulos et Pavlidis (1971) définissent la notion d'objets *c-équivalents* (le prefixe « c » renvoyant aux composantes connexes) : deux objets X et X' d'une image digitale binaire interprétée avec la $(4, 8)$-adjacence sont c-équivalents si leurs composantes connexes sont en correspondance bi-univoque de telle sorte que, si la composante C de X est en correspondance avec la composante C' de X', il est possible de passer de C à C' par suppression et ajout de points simples (en partant de l'image digitale dont C est l'objet). Mylopoulos et Pavlidis montrent que dans $\mathbb{Z}^2$, deux objets sont

3. Aux débuts de la topologie digitale, on parlait de point *supprimable* (« deletable point ») avant que l'expression point simple ne l'emporte.

c-équivalents si et seulement si ils ont le même nombre de composantes 4-connexes, chaque paire de composantes connexes en correspondance ayant le même nombre de trous. Par ailleurs, chaque objet 4-connexe à k trous est c-équivalent à un rectangle à k trous ne contenant qu'un pixel du fond.

A priori, la simple conservation du nombre de composantes connexes peut paraître insuffisante dans de nombreux contextes, par exemple dans un processus d'amincissement. En effet, on souhaite généralement que les diverses composantes connexes se correspondent (Ronse, 1986) : si X est l'ensemble des points de l'image, Y l'objet de cette image et Z une partie simple de Y, la suppression de Z dans Y ne doit pas :

- couper une composante connexe de l'objet en plusieurs composantes ;
- supprimer une composante connexe de l'objet ;
- réunir plusieurs composantes connexes du fond en une seule ;
- créer une nouvelle composante connexe du fond.

Ces propriétés sont illustrées sur la figure 4.8. Comme deux points de $Y \setminus Z$ qui appartiennent à la même composante connexe de $Y \setminus Z$ sont par définition reliés par un α-chemin dans $Y \setminus Z$ qui est aussi un α-chemin dans Y, ils appartiennent à la même composante connexe de Y. Donc, l'injection $i_1 : Y \setminus Z \to Y$ induit, par passage au quotient, une application φ_1 entre les composantes connexes de $Y \setminus Z$ et les composantes connexes de Y. Le même raisonnement vaut pour les composantes connexes du fond : l'injection $i_2 : X \setminus Y \to (X \setminus Y) \cup Z$ induit une application φ_2 entre les composantes connexes de $X \setminus Y$ et celles de $(X \setminus Y) \cup Z$. Les quatre conditions énoncées précédemment se traduisent alors par la bijectivité des applications φ_1 et φ_2. Autrement dit, chaque composante connexe de Y doit inclure exactement une composante connexe de $Y \setminus Z$ et chaque composante connexe de $(X \setminus Y) \cup Z$ doit inclure exactement une composante connexe de $X \setminus Y$. Dans ce cas, Ronse dit que Z est *fortement supprimable* (« strongly deletable »). Ronse montre que lorsque l'ensemble Z est 4-connexe, il est fortement supprimable si et seulement si son retrait de l'objet conserve le nombre de composantes connexes de l'objet et du fond. En particulier, tout point simple (au sens de Rosenfeld) est fortement supprimable. De plus, Ronse montre que tout ensemble fortement supprimable peut être retiré de l'objet par suppression gloutonne de points simples.

4.2.2 Définitions dans $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 3$

En dimension 3, la préservation des composantes connexes de l'objet et du fond n'est pas un critère suffisant pour la conservation de la topologie. En effet, la suppression d'un point, et *a fortiori* d'un ensemble de points, dans un objet digital, peut créer un tunnel dans l'objet ou dans le fond (voir la figure 4.8(c–d)).

Par conséquent, plusieurs auteurs (*e.g.*, Morgenthaler 1981, Tsao et Fu 1982, Toriwaki *et al.* 1982, Bertrand et Malandain 1994) définissent les points simples de $\mathbb{Z}^3$ comme des points dont le retrait de l'objet ne peut pas créer ou scinder une composante connexe de l'objet ou du fond, ni détruire ou réunir des composantes connexes de l'objet ou du fond (comme en 2D) et dont le retrait ne peut pas créer ou ajouter un tunnel de l'objet ou du fond, chaque tunnel étant caractérisé par des lacets non contractiles de l'objet ou du fond. Différentes caractérisations locales des points simples respectant les critères précédents ont été proposées par ces auteurs débouchant sur des algorithmes efficaces d'« amincissement homotopique » 3D. Néanmoins certains termes utilisés dans les preuves de ces caractérisations locales ne sont pas définis de façon précise et constante comme par exemple

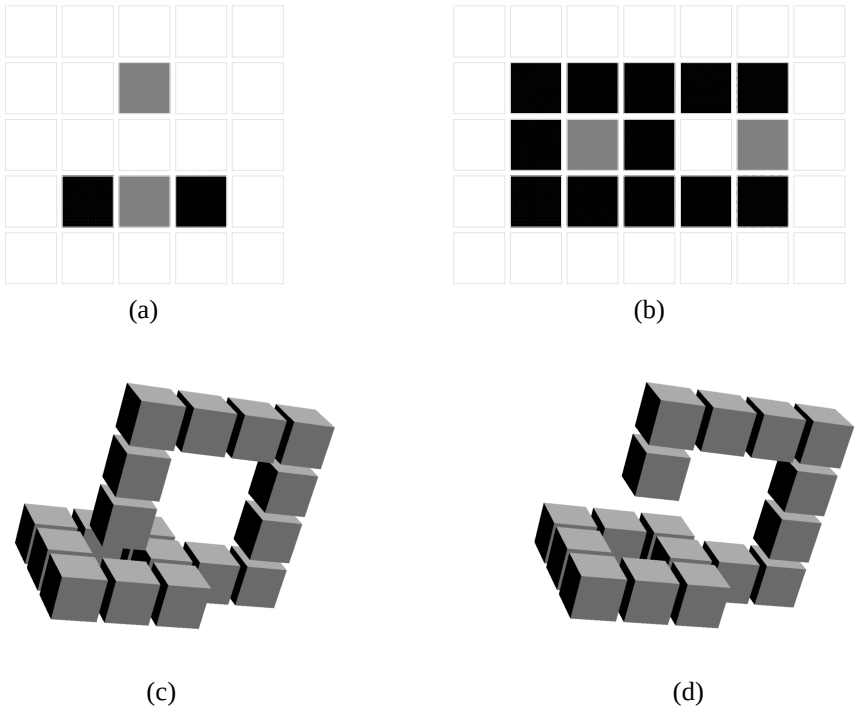


FIGURE 4.8 – Compter les composantes connexes, ou les tunnels, ne suffit pas à assurer une conservation satisfaisante de la topologie. (a–b) Exemples d'amincissements d'un objet qui ne modifient ni le nombre de composantes connexes de l'objet ni celui du fond mais qui ne permettent pas de relier « canoniquement » les composantes de l'image modifiée à celles de l'image initiale. (a) Le retrait des deux pixels gris de l'objet scinde une composante connexe de l'objet en deux et supprime une autre composante connexe de l'objet. (b) Le retrait des deux pixels gris de l'objet réunit deux composantes connexes du fond et crée une nouvelle composante connexe du fond. (c–d) (D'après Fourey et Malgouyres, 2003) Si, quelle que soit la dimension, la modification d'un unique pixel ne peut pas changer le nombre de composantes connexes de l'objet ou du fond (la preuve de cette propriété donnée pour la 2D dans Lachaud et Malgouyres (2007) est valable en toute dimension), en dimension 3, comme le montrent les deux figures (c) et (d), le retrait d'un seul voxel peut supprimer un tunnel de l'objet et en créer un autre.

le nombre de tunnels de l'objet ou du fond [4] ou encore la notion de déformation utilisée pour décider si un lacet est contractile ou non. Cela peut conduire à utiliser des propriétés qui ne sont pas toujours vérifiées comme l'égalité du nombre de tunnels de l'objet et du fond (le groupe fondamental d'un nœud est $\mathbb{Z}$ tandis que celui de son complémentaire dans l'espace dépend du type de noeud et, par exemple, celui du complémentaire du noeud de trèfle possède trois générateurs liés par deux relations).

S'appuyant sur la caractérisation des tunnels par les classes de lacets, Kong (1989) étend à la 3D les critères donnés par Ronse pour la 2D de la façon suivante. Un sous-ensemble Y d'une partie X de $\mathbb{Z}^3$ est simple pour cette partie si :

– chaque composante connexe de X contient exactement une composante connexe de $X \setminus Y$;

4. « It is actually quite hard to define a "tunnel" in such a way the term "number of tunnels" have a precise meaning » (Kong et Rosenfeld, 1989).

- chaque composante connexe de $(\mathbb{Z}^3 \setminus X) \cup Y$ contient exactement une composante connexe de $\mathbb{Z}^3 \setminus X$;
- pour chaque point $x \in X \setminus Y$, l'inclusion $i : \mathbb{Z}^3 \setminus Y \to \mathbb{Z}^3$ induit un isomorphisme des groupes fondamentaux digitaux de $X \setminus Y$ et de X ;
- pour chaque point $x \in \mathbb{Z}^3 \setminus X$, l'inclusion i induit un isomorphisme des groupes fondamentaux digitaux de $\mathbb{Z}^3 \setminus X$ et de $(\mathbb{Z}^3 \setminus X) \cup Y$.

Fourey et Malgouyres (2003) montrent que lorsque Y est un singleton et lorsque $\mathbb{Z}^3$ est muni de la $(6, 26)$ ou de la $(26, 6)$-adjacence, la quatrième condition est induite par les trois premières. Comme leur preuve utilise les *nombres topologiques* de Bertrand et Malandain, ils démontrent incidemment que cette caractérisation par les nombres topologiques satisfait les quatre critères ci-dessus.

Supposons qu'on ait défini une notion d'analogue continu d'un objet digital, $C : \mathcal{P}(\mathbb{Z}^n) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Une autre façon de définir la simplicité est la suivante. Un sous-ensemble Y d'une partie X de $\mathbb{Z}^n$, $n \geqslant 2$, est simple pour X si l'analogue continu de $X \setminus Y$, $C(X \setminus Y)$ est un rétracte par déformation de l'analogue continu de l'objet digital, $C(X)$. Cette définition a été envisagée par Hilditch (1969) (cité par Kong et Rosenfeld, 1989) pour $\mathbb{Z}^2$ en prenant comme analogue continu d'un pixel de $\mathbb{Z}^2$ un carré unitaire de $\mathbb{R}^2$. Les collapsus sont des types particuliers de rétraction. Tourlakis et Mylopoulos (1973) les utilisent, non pas pour définir leur notion de point simple dans $\mathbb{Z}^n$ muni de la $2n$-adjacence mais plutôt pour justifier *a posteriori* cette définition. Nous détaillons ci-dessous leur construction.

La *base* d'un point x dans l'objet X (les objets sont des parties finies de l'espace) est l'ensemble des points y du $(3^n - 1)$-voisinage de x tels que le cube dont $\{x, y\}$ est une diagonale soit tout entier inclus dans l'objet (les cubes sont définis de la même façon que les cubes de Bertrand dans la section 3.3). À chaque cube inclus dans X est associé un polyèdre cubique de $\mathbb{R}^n$ ayant pour sommets les sommets du cube et la réunion de tous ces polyèdres cubiques forme un polyèdre Π_X associé à X (on suppose que l'espace discret est plongé dans l'espace euclidien). La figure 4.9 illustre cette définition.

La définition de la simplicité d'un point est récursive et est liée à la définition d'ensemble discret *contractile* (« shrinkable »). Un point $x \in X$ est simple pour X si sa base dans X est contractile. Un ensemble Y est contractile si Y est un singleton ou si Y possède un point simple y pour Y et si l'ensemble $Y \setminus \{y\}$ est contractile. Cette définition récursive est valide puisque le cardinal de la base de n'importe quel point de X est strictement inférieur à celui de X et, de plus, la dimension de la base est strictement inférieure à celle de X. Deux objets X et Y sont *réductibles* l'un à l'autre si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite de retraits et d'ajouts de points simples. À partir de là, Tourlakis et Mylopoulos obtiennent plusieurs résultats qui montrent la pertinence de leurs définitions.

- Si x est simple pour X alors $\Pi_X \setminus \{x\}$ est un collapsus [5] de Π_X.
- Si X et Y sont réductibles l'un à l'autre, Π_X et Π_Y ont le même type d'homotopie.
- Si x est simple pour X alors il existe une isotopie ambiante dans une « sphère » S^n (au sens topologique) [6] du complémentaire, dans S^n, d'un voisinage régulier de Π_X à celui d'un voisinage régulier de $\Pi_X \setminus \{x\}$ (voir la figure 4.9).

Le dernier résultat entraîne, par exemple, qu'un nœud de trèfle n'est pas réductible à une simple boucle.

5. Voir l'annexe A.6.
6. Une isotopie ambiante dans X de Y à Z est une isotopie $h : X \times [0, 1] \to X$ telle que $h(Y, 1) = Z$.

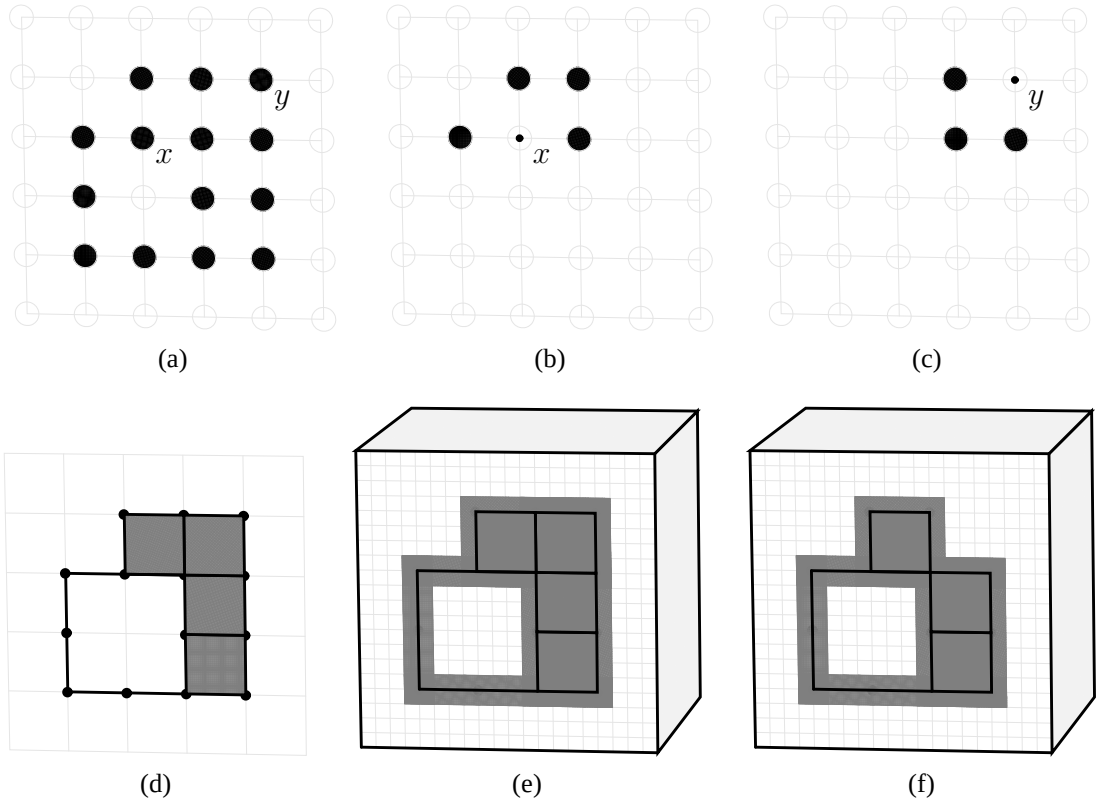
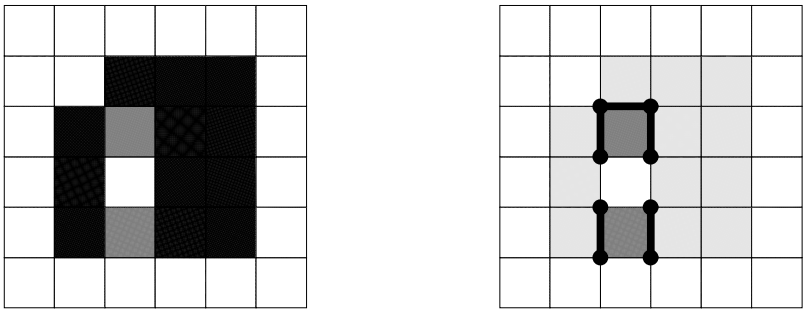


FIGURE 4.9 – (a) En noir, un sous-ensemble X fini de $\mathbb{Z}^2$. (b) La base du point $x \in X$. Cette base n'est pas contractile au sens de Tourlakis et Mylopoulos donc le point x n'est pas simple. (c) La base du point $y \in X$. Cette base est contractile donc le point y est simple pour X. (d) Le polyèdre cubique Π_X associé à X. (e) En gris, un voisinage régulier de X et en blanc son complément dans la sphère S_2. (f) En gris, un voisinage régulier de $X \setminus \{y\}$ et en blanc son complément dans la sphère S_2.

Pour Kong et Rosenfeld (1989), la notion de réductibilité n'est pas adaptée aux opérations d'amincissement car elle ne conserverait que le nombre de composantes connexes, de tunnels et de cavités sans lier les positions de ces différents éléments. Ce reproche nous paraît en partie infondé. Aucun retrait ou ajout de point simple ne peut supprimer, scinder ou faire appaître un tunnel ou une cavité puisque ce retrait, ou cet ajout, correspond à un collapse, ou une expansion, sur le polyèdre associé. On a donc toujours une correspondance « canonique » entre les différentes composantes et les différents tunnels. Par contre, cette correspondance n'est plus donnée par l'inclusion et les différents éléments topologiques peuvent être effectivement géométriquement déplacés.

Kong (1997) utilise la structure cellulaire cubique de $\mathbb{R}^n$ (induite par les points à coordonnées entières) et identifie les points de l'espace digital (les xels) aux n-cubes fermés du complexe cellulaire. L'espace digital est muni de la $(3^n - 1, 2n)$-adjacence. Un point x d'un objet X est simple (pour X) si $X \setminus \{x\}$ est un rétracte par déformation forte de X. Dans ce cadre, Kong obtient une caractérisation locale nécessaire et suffisante d'un point simple, valable jusqu'à la dimension 4, basée sur la notion d'*attache* (voir la figure 4.10) : l'attache de x à X est l'ensemble des cubes de $\mathbb{R}^n$ inclus dans x et dans le polyèdre cubique $\bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} y$. L'attache est donc un complexe géométrique. Un xel est simple si et

seulement si (la réalisation géométrique de) son attache à l'objet est connexe, le complément de cette attache dans le bord du xel est également connexe et la caractéristique d'Euler de cette attache est 1. L'espace étant muni d'une structure cellulaire, le calcul de la caractéristique ne pose pas de problème ici. Toutes les rétractions utilisées dans la preuve de cette caractérisation sont des collapsus.



(a) (b)

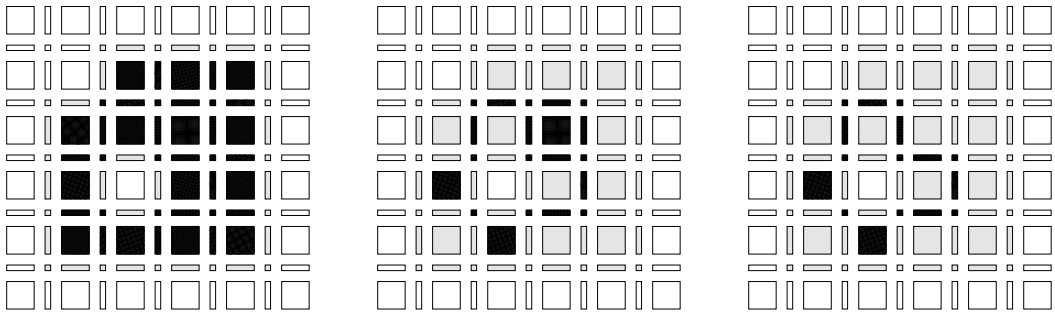
FIGURE 4.10 – Attache d'une face dans un complexe. (a) En noir et gris, un ensemble X dans une image digitale 2D au sens de Kong (1997) (cette image correspond à celle de la figure 4.9 (a)). (b) En noir, les attaches dans X des deux pixels gris de l'image (ce sont des complexes géométriques). L'attache du pixel inférieur n'est pas connexe donc ce pixel n'est pas simple. L'attache du pixel supérieur est connexe, de caractéristique d'Euler 1, donc ce pixel est simple (en 2D, il est inutile de vérifier la troisième condition).

Dans le cadre des complexes simpliciaux abstraits [7] (voir annexe A.5), Bertrand (2007) reprend le travail de Kong en posant qu'un simplexe x est un point simple du complexe simplicial X si X collapse sur le sous-complexe de X, appelé *détachement* de x dans X, engendré par la suppression de x et de ses faces ou, de manière équivalente, si le complexe engendré par x collapse sur l'attache de x à X. Un simplexe $x \in X$ est une face *essentielle* de X s'il est égal à l'intersection des simplexes maximaux qui l'incluent : $x = \bigcap\{y \in X^+ \mid x \subseteq y\}$ où X^+ désigne l'ensemble des simplexes de X maximaux pour l'inclusion (voir figure 4.11). L'ensemble des faces essentielles correspond au support des fonctions d'éclairage d'Ayala *et al.* (1997). Les faces essentielles qui collapsent sur le complexe engendré par les faces essentielles de leur frontière sont qualifiées de *régulières*. Les autres forment le *noyau critique*. Bertrand montre que tout complexe simplicial collapse sur son noyau critique. Les simplexes maximaux de celui-ci peuvent être de dimensions inférieures à celle de l'espace ambiant mais un complexe simplicial X collapse également sur tout sous-complexe incluant son noyau critique et dont les faces essentielles sont incluses dans ses propres faces essentielles ce qui permet d'envisager par exemple des amincissements purement digitaux (c'est-à-dire sans recours apparent à une structure cellulaire) géométriquement bien équilibrés dans $\mathbb{Z}^n$ muni de la $(3^n - 1, 2n)$-adjacence. De plus, le processus d'amincissement peut être réitéré jusqu'à stabilité pour obtenir un squelette minimal (voir la figure 4.11).

4.2.3 Définitions dans un ensemble partiellement ordonné

Indépendamment des travaux précédents menés dans la communauté informatique pour obtenir des algorithmes de traitement d'image qui respectent la topologie des objets et éventuellement du

7. La méthode s'adapte sans difficulté aux complexes cubiques abstraits.



(a) (b) (c)

FIGURE 4.11 – Noyau critique d'un complexe. (a) Les faces essentielles du complexe abstrait X associé à l'ensemble digital de la figure 4.9 (a) d'après Bertrand (2007). (b) Le noyau critique de X, $X_0 = \mathrm{Critic}(X)$ (voir texte). (c) Le noyau critique de X_0, $X_1 = \mathrm{Critic}(X_0)$. Ce dernier est stable pour l'opérateur Critic : $X_1 = \mathrm{Critic}(X_1)$.

fond d'une image digitale, d'autres études des propriétés topologiques des ensembles finis, ou munis d'une topologie d'Alexandroff (voir section 3.3), ont été conduits dans la communauté mathématique (Stong 1966, McCord 1966, Hardie et Vermeulen 1993, Osaki 1999, Barmak et Minian 2007, Kukieła 2010). Un des buts de ces travaux est d'obtenir une classification des types d'homotopie des complexes simpliciaux à l'aide d'espaces finis minimaux. La recherche de ces espaces minimaux conduit tout naturellement à la caractérisation de points simples. Cependant suivant les objectifs poursuivis, les contraintes pour définir des points simples ne sont pas les mêmes. En effet, supposons que $\mathbb{Z}^n$ soit plongé dans un espace topologique, par exemple un espace cellulaire, les points de $\mathbb{Z}^n$ étant envoyés sur les cellules de dimension n. En traitement d'image, on cherchera les points simples parmi ces cellules de dimension n parce que ce sont les seules qui sont effectivement codées dans l'image initiale. Par contre, si le but est d'obtenir un espace minimal, il n'y a aucune raison de s'imposer cette contrainte. L'exemple des collapsus donné auparavant montre que finalement les deux approches ne sont pas incompatibles.

Exemple 4.2.1. *Pour illustrer les différentes notions de points simples qui vont suivre, notamment pour faire apparaître leurs différences de puissance, considérons l'exemple suivant. L'espace est $\mathbb{F}^3$, l'espace des complexes cubiques défini à la section 3.3. Il est muni de sa topologie d'Alexandroff pour l'ordre partiel $\subseteq$. On choisit une facette x_0 de $\mathbb{F}^3$ et x_1 une face de x_0. On définit alors les ensembles $X_0 = \mathbb{F}^3 \setminus \{x_0\}$ et $X_1 = X_0 \setminus \{x_1\}$. Le but est de comparer du point de vue topologique les espaces X_0 et X_1 et de voir si le point x_1 peut être qualifié de simple pour telle ou telle définition.*

Jusqu'à la fin de cette section, l'espace X est un A-espace muni de sa topologie d'Alexandroff et l'ordre de spécialisation associé est noté $\leq$ (voir section 3.3). L'ordre dual est noté $\geq$. Lorsque $x \leq y$ et $x \neq y$ (resp. $x \geq y$ et $x \neq y$) nous écrivons $x < y$ (resp. $x > y$). Nous utilisons aussi les notations suivantes :

- $x^{\uparrow} = \{y \in X \mid x \leq y\}$ et $x^{\uparrow\star} = x^{\uparrow} \setminus \{x\} = \{y \in X \mid x < y\}$;
- $x^{\downarrow} = \{y \in X \mid y \leq x\}$ et $x^{\downarrow\star} = x^{\downarrow} \setminus \{x\} = \{y \in X \mid y < x\}$;
- $x^{\updownarrow} = x^{\uparrow} \cup x^{\downarrow}$ et $x^{\updownarrow\star} = x^{\updownarrow} \setminus \{x\}$.

Lorsque $x^{\updownarrow}$ est fini pour tout point $x \in X$, nous disons que l'espace X est *localement fini* [8].

4.2.3.1 Points unipolaires

Dans les années soixante, Stong (1966) a introduit la notion de *point unipolaire* [9] pour classifier les espaces finis en fonction de leur type d'homotopie. Dans le même article, et dans le même but, Stong définit aussi le *noyau* (« core ») d'un espace fini qui est le plus petit sous-ensemble de X qui lui est homotopiquement équivalent. La plupart des définitions et résultats présentés dans cette sous-section ont été donnés par Stong pour des espaces finis mais peuvent être directement étendus aux A-espaces ou aux A-espaces localement finis.

Définition 4.2.2 (Point unipolaire)**.** *Soit X un EPO. Un point $x \in X$ est :*
- bas-unipolaire *si $x^{\downarrow\star}$ a un maximum ;*
- haut-unipolaire *if $x^{\uparrow\star}$ a un minimum ;*
- unipolaire *s'il est bas-unipolaire ou haut-unipolaire.*

Propriété 4.2.3 (Stong, 1966)**.** *Soit X un EPO et x un point unipolaire de X. Alors $X \setminus \{x\}$ est un rétracte par déformation forte de X.*

Au chapitre 6 (proposition6.2.8), nous établissons la réciproque de cette propriété.

Bertrand (1999) a montré que, dans des EPO localement finis et dénombrables, des points bas-unipolaires peuvent être supprimés en parallèle [10], c'est-à-dire , si x et y sont bas-unipolaires, $x \neq y$, dans X alors y est bas-unipolaire dans $X \setminus \{x\}$. Bien évidemment, nous avons la même propriété avec des points haut-unipolaires. Cela n'est plus vrai pour des points unipolaires (en omettant le qualificatif « bas » ou « haut ») comme le montre l'exemple de la figure 4.12. Cependant, nous donnons la proposition suivante qui permet, par la suppression de points unipolaires de même hauteur, la construction d'algorithmes d'amincissement parallèle bien équilibrés.

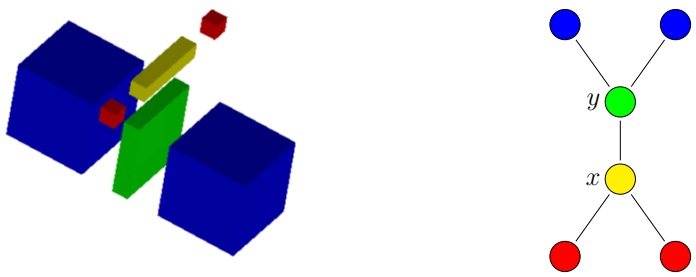
Proposition 4.2.4. *Soit x et y deux points unipolaires distincts dans X. Alors, soit y est unipolaire dans $X \setminus \{x\}$, soit, pour l'un des deux ordres $\leq$ ou $\geq$ sur X, x est haut-unipolaire, y est bas-unipolaire et couvre x, et la fonction $\varphi : X \setminus \{x\} \to X \setminus \{y\}$ définie par $\varphi(z) = z$ si $z \neq y$ et $\varphi(y) = x$ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Soit $x \neq y$ deux points unipolaires dans X.
- Si x et y ne sont pas comparables, y est unipolaire dans $X \setminus \{x\}$ puisque la définition 4.2.2 des points unipolaires ne fait intervenir que des points comparables.
- Supposons maintenant que $x \leq y$ (le cas $x \geq y$ est similaire).

8. Dans la littérature sur les A-espaces on trouve deux définitions pour l'expression « localement fini ». Quand l'article privilégie la vision topologique classique, l'expression désigne le plus souvent le fait que les plus petits voisinages ouverts, c'est-à-dire les ensembles $x^{\uparrow}$, sont finis. Quand l'accent est mis plutôt sur la structure algébrique, on trouve souvent la définition que nous avons adoptée. Notre choix repose sur l'observation du comportement des algorithmes implantés qui montre que, même si *in fine* on ne s'interesse qu'aux points hauts de l'espace, la meilleure efficacité est obtenue lorsqu'on utilise de la même façon la relation d'ordre et son dual.

9. Stong les appelle « (co)linear points ». Plus récemment, May (2008) les nomme « beatpoints », dénomination reprise par Barmak et Minian. Bertrand (1999) qui découvre ces points de façon indépendante les appelle « unipolar points ». Nous avons adopté cette dernière dénomination.

10. Les hypothèses de finitude locale et de dénombrabilité sont en fait inutiles et ne sont d'ailleurs pas utilisées par Bertrand dans sa preuve.



(a) (b)

FIGURE 4.12 – Points haut-unipolaire et bas-unipolaire. (a) Un sous-espace X de $\mathbb{F}^3$. (b) Le diagramme de Hasse de X. La 1-face x est haut-unipolaire et la 2-face y est bas-unipolaire. Ni x dans $X \setminus \{y\}$ ni y dans $X \setminus \{x\}$ ne sont unipolaires.

- Si y est haut-unipolaire, y est unipolaire dans $X \setminus \{x\}$ car la définition 4.2.2 appliquée à y ne fait intervenir que l'ensemble $y^{\uparrow\star}$ qui n'est pas modifié lorsqu'on retire x de X.
- Si y est bas-unipolaire, appelons z le maximum de $y^{\downarrow\star}$. Alors, pour tout $t \in X$,

$$t < y \Leftrightarrow t \leq z. \qquad \textbf{(1)}$$

  * Si $x \neq z$, l'équivalence **(1)** reste vraie pour tout $t \in X \setminus \{x\}$ donc y est unipolaire dans $X \setminus \{x\}$.
  * Si $x = z$ et x est bas-unipolaire, on a clairement $\max(y^{\downarrow\star} \cap (X \setminus \{x\}) = \max(x^{\downarrow\star})$ donc y est unipolaire dans $X \setminus \{x\}$.
  * Si $x = z$ et x est haut-unipolaire, nécessairement y est le minimum de $x^{\uparrow\star}$: pour tout $t \in X$,

$$x < t \Leftrightarrow y \leq t. \qquad \textbf{(2)}$$

  Nous définissons alors la fonction $\varphi : X \setminus \{x\} \to X \setminus \{y\}$ par $\varphi(t) = t$ si $t \neq y$ et $\varphi(y) = x$. Trivialement, φ est une bijection et, de **(1)** et **(2)**, nous déduisons que φ et φ^{-1} sont croissantes, c'est-à-dire continues. □

Définition 4.2.5 (Noyau)**.** *Soit $(X, \leq)$ un EPO. Une partie Y de X est un* noyau *de X si Y n'a pas de point unipolaire et Y est un rétracte par déformation forte de X.*

Propriété 4.2.6 (Stong, 1966)**.**

1. *Tout EPO fini possède un noyau.*
2. *Si un EPO a deux noyaux finis, ceux-ci sont homéomorphes.*
3. *Deux EPO à noyaux finis sont homotopiquement équivalents si et seulement si ils ont des noyaux homéomorphes.*

La question de l'extension de ces propriétés à des espaces infinis est ouverte. On sait (Kukieła, 2010) que si l'EPO n'a pas d'antichaîne infinie et si chaque chaîne admet un supremum et un infimum, les trois propriétés sont encore vraies (et le noyau est fini) [11]. D'un autre côté la droite de

11. Kukieła montre également que l'extension des propriétés 2 et 3 aux EPO localement finis possédant un noyau obtenue par Arenas (1999) est erronée.

Khalimsky a deux noyaux non-homéomorphes, elle-même et $\{0\}$ (voir encadré).

La droite de Khalimsky n'a pas de point unipolaire mais est contractile... par retraits de points unipolaires. La droite de Khalimsky n'a pas de point unipolaire ; elle est donc son propre noyau. Néanmoins, il est possible de construire une rétraction par déformation forte (décrite ci-après) de la droite de Khalimsky sur $\{0\}$ qui est donc aussi un noyau de $\mathbb{Z}$. Ainsi, $\mathbb{Z}$ a deux noyaux non homéomorphes. La rétraction H consiste à enlever les points unipolaires de l'intervalle $[\![-k, k]\!]$ au temps $\frac{1}{k+1}$. Plus précisément :

- $H(k, t) = k$ si t est inférieur à $|\frac{1}{k+1}|$, strictement si k est pair, au sens large sinon.
- $H(k, t) = \ell$, ℓ compris entre 0 inclus et k exclu, si t est compris entre $\frac{1}{|\ell|+2}$ et $\frac{1}{|\ell|+1}$, strictement si ℓ est pair, au sens large sinon.

H est une rétraction par déformation forte de la droite de Khalimsky sur $\{0\}$.

L'image réciproque du plus petit voisinage $\{k\}$ d'un point pair, strictement positif par exemple, est $\{k\} \times [0, \frac{1}{k+1}[\cup[k, +\infty[\times]\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k+1}[$ et l'image réciproque du plus petit voisinage $\{k-1, k, k+1\}$ d'un point impair, strictement positif, est $\{k-1, k, k+1\} \times [0, \frac{1}{k}[\cup[k+1, +\infty[\times]\frac{1}{k+3}, \frac{1}{k}[$ (en posant $\frac{1}{0} = 1$).

La propriété 4.2.6 implique en particulier que pour obtenir un noyau d'un EPO fini, il suffit d'enlever les points unipolaires de façon gloutonne. Le résultat sera homéomorphe à tout autre noyau du même EPO. De plus, il est possible de privilégier un noyau bien équilibré spatialement en retirant en parallèle tous les points bas-unipolaires puis tous les points haut-unipolaires, etc. jusqu'à stabilité (Bertrand, 1999) ou en retirant en parallèle les points de même hauteur (proposition 4.2.4). En particulier, quand l'EPO est contractile, nous avons le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.7. *Si X est fini et contractile, il existe une suite $(x_i)_{i=0}^r$ ($r \in \mathbb{N}$) de points de X telle que $X = \{x_j\}_{j=0}^r$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, x_i est unipolaire dans $\{x_j\}_{j=0}^i$. De plus, si x est un point unipolaire de X, nous pouvons choisir $x_r = x$.*

Démonstration. Le fait que X est contractile signifie que X est homotopiquement équivalent à un point. Comme X est fini, X a un noyau et tout noyau de X est un singleton (propriété 4.2.6). Il n'est pas difficile de voir que cela entraîne qu'on peut construire de manière gloutonne une suite $(x_i)_{i=0}^r$ ($r \in \mathbb{N}$) de points de X telle que $X = \{x_j\}_{j=0}^r$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, x_i est unipolaire dans $\{x_j\}_{j=0}^i$. □

Considérons maintenant l'image binaire définie dans l'exemple 4.2.1. Toutes les 2-faces de x_0 sont unipolaires dans X_0. Donc, si $\dim(x_1) = 2$, l'ensemble X_1 est un rétracte par déformation fort de X_0. Si $\dim(x_1) \leq 1$, x_1 n'est pas unipolaire et il est facile de montrer que X_1 n'est même pas un simple rétracte de X_0. En effet, x_1 appartient à au moins 9 paires de points connexes (25 s'il est de dimension 0) et toute fonction de X_0 dans X_1 qui laisse invariant les points de X_1 déconnecte nécessairement une de ces paires. Cet exemple montre que les points unipolaires sont peu puissants dans les procédures d'amincissement ou d'expansion.

4.2.3.2 Points β-simples

La notion de point *β-simple* a été introduite par Bertrand (1999) dans le but de construire des algorithmes d'amincissement topologiquement fondés dans le cadre des EPO. Barmak et Minian (2008b) construisent, de façon indépendante, la même notion [12] pour définir une opération de « collapsus »

12. En fait, Bertrand utilise une définition *ad hoc* du type d'homotopie qui coïncide avec la définition classique si X est compact (ceci est une conséquence de notre proposition 6.2.7) mais avec laquelle, par exemple, la droite de Khalimsky n'est pas contractile, tandis que Barmak et Minian utilisent la définition classique. Ici, nous utilisons la définition classique.

dans les EPO finis qui corresponde à la notion classique de collapsus dans le complexe simplicial associé.

Définition 4.2.8 (point β-simple)**.** *Soit X un EPO. Un point $x \in X$ est :*
- bas-β-simple (dans X) *si $x^{\downarrow\star}$ est contractile ;*
- haut-β-simple (dans X) *si $x^{\uparrow\star}$ est contractile ;*
- β-simple (dans X) *s'il est bas-β-simple ou haut-β-simple.*

Il est possible de définir la notion de point β-simple sans introduire les points bas-β-simple et haut-β-simple comme le montre la propriété ci-dessous.

Propriété 4.2.9 (Barmak et Minian, 2008a)**.** *Soit X un EPO fini et x un point de X. L'ensemble $x^{\updownarrow\star}$ est contractile si et seulement si $x^{\downarrow\star}$ ou $x^{\uparrow\star}$ est contractile.*

La propriété suivante nous permet de vérifier que la notion de point β-simple est une extension de la notion de point unipolaire.

Propriété 4.2.10 (Stong, 1966)**.** *Soit X un EPO. Si X a un maximum, ou un minimum, alors X est contractile. En particulier, pour tout $x \in X$, $x^{\downarrow}$ et $x^{\uparrow}$ sont contractiles. De plus, pour tout $x \in X$, $x^{\updownarrow}$ est contractile.*

Nous donnons la preuve de cette propriété parce qu'elle illustre bien, de par sa grande simplicité, comment fonctionne la continuité dans les EPO.

Démonstration. Soit X un EPO possédant un minimum m. On définit l'homotopie H par $H(x,t) = x$ si $t < 1$ et $H(x,1) = m$ ($x \in X$). H est continue sur $X \times [0,1]$ car l'image réciproque d'un ouvert U de X ne contenant pas le minimum m est $U \times [0,1[$ qui est clairement un ouvert de $X \times [0,1]$ et, puisque m est le minimum de X, le seul ouvert de X contenant m est X lui-même dont l'image réciproque est bien évidemment $X \times [0,1]$.
Le cas où X possède un maximum M est analogue. On définit H par $H(x,0) = x$ et $H(x,t) = M$ si $t \neq 0$ et on remarque que tous les ouverts de X contiennent M puisque celui-ci est le maximum de X. L'image réciproque d'un ouvert U de X est alors $U \times \{0\} \cup X \times]0,1]$ qui est égal à $U \times [0,1] \cup X \times]0,1]$ et est donc bien un ouvert.
Notons que nous avons démontré un peu plus que la contractilité de X. En effet, H laisse le minimum m, ou le maximum M, fixe donc H est une rétraction par déformation forte. Pour montrer que $x^{\updownarrow}$ est contractile, on étend la première homotopie pour rétracter $x^{\updownarrow}$ sur $x^{\downarrow}$ puis la deuxième homotopie pour rétracter $x^{\downarrow}$ sur $\{x\}$. □

Le fait que les points unipolaires sont des points β-simples est une conséquence immédiate de la propriété 4.2.10 car si x est bas-unipolaire, $x^{\downarrow\star}$ a un maximum et si x est haut-unipolaire, $x^{\uparrow\star}$ a un minimum.

Nous avons vu dans la section 4.2.3.1 (propriété 4.2.3) que le retrait d'un point unipolaire est une rétraction par déformation forte. Cela n'est plus vrai pour un point β-simple comme nous pouvons le vérifier en examinant le cas de l'ensemble X_0 de l'exemple 4.2.1.
- Si $\dim(x_1) = 2$, nous avons déjà vu que x_1 est unipolaire, donc il est aussi β-simple (et dans ce cas, $X_1 = X_0 \setminus \{x_0\}$ est bien un rétracte par déformation forte de X_0).

– Si $\dim(x_1) = 1$, le diagramme de Hasse de ${x_1}^{\uparrow\star}$ dans l'EPO X_0 est composé de quatre 2-faces de $\mathbb{F}^3$ incluant x_1 et des trois 3-faces de $\mathbb{F}^3$ incluant x_1 et distinctes de x_0. Donc, ${x_1}^{\uparrow\star}$ est clairement contractile par retraits successifs de ses deux 2-faces haut-unipolaires puis de deux de ses 3-faces devenues bas-unipolaires après les deux suppressions précédentes et enfin par suppression des deux dernières 3-faces. Il vient que x_1 est haut-β-simple. Or, nous avons montré à la fin de la section précédente (section 4.2.3.1) que, si $\dim(x_1) \leqslant 1$, il n'existe pas de rétraction de X_0 sur X_1.
– Si $\dim(x_1) = 0$, soient y_0, y_1, y_2 les trois 2-faces incluant x_1 et incluses dans x_0. Le lecteur peut vérifier sur la figure 4.13 que ces trois faces sont unipolaires dans ${x_1}^{\uparrow\star}$ et que ${x_1}^{\uparrow\star} \setminus \{y_0, y_1, y_2\}$ est un noyau de ${x_1}^{\uparrow\star}$. Il s'en suit que ${x_1}^{\uparrow\star}$ n'est pas contractile et x_1 n'est pas β-simple.

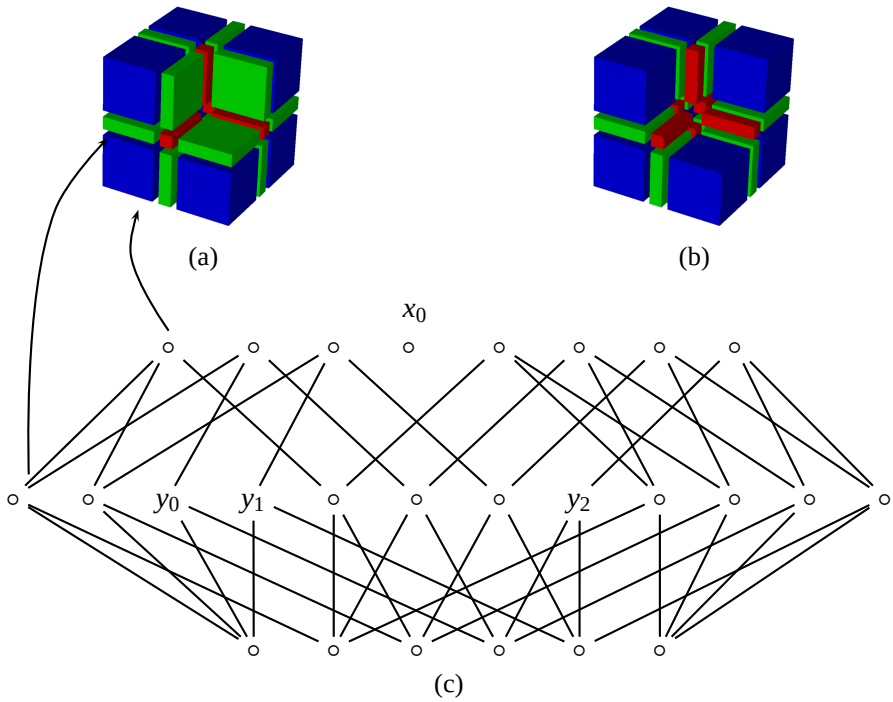


FIGURE 4.13 – Une face non β-simple contre-intuitive. (a) Le sous-ensemble ${x_1}^{\uparrow\star}$ de X_0 dans le cas où $\dim(x_1) = 0$ (voir texte). (b) Le noyau de ${x_1}^{\uparrow\star}$. (c) Le diagramme de Hasse de ${x_1}^{\uparrow\star}$. Les faces sont parcourues de bas en haut, de gauche à droite et de l'avant à l'arrière.

Bien que le retrait d'un β-point dans un EPO X ne soit pas généralement une rétraction, le théorème suivant, établi par Barmak et Minian, assure que la suppression d'un point β-simple dans un EPO fini correspond à une rétraction par déformation forte dans le complexe simplicial associé à X.

Théorème 4.2.11 (Barmak et Minian, 2008b)**.** *Soit X un EPO fini et x un point de X. Soit $\mathcal{K}(X)$ et $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$ les complexes simpliciaux associés respectivement à X et $X \setminus \{x\}$. Si x est β-simple alors :*
– *l'inclusion $i : X \setminus \{x\} \to X$ est une équivalence d'homotopie faible ;*
– *$\mathcal{K}(X)$ collapse sur $\mathcal{K}(X \setminus \{x\})$.*

D'un point de vue algorithmique, les points β-simples ont de bonnes propriétés, analogues à celles des points unipolaires, puisqu'ils peuvent être retirés en parallèle. En effet, si x et y sont deux

points appartenant à X, de même hauteur, le retrait du point x de l'ensemble X ne modifie pas les voisinages stricts de y, $y^{\downarrow\star}$ et $y^{\uparrow\star}$. De plus, comme nous l'avons vu précédemment, la contractilité peut être vérifiée de façon gloutonne. Ainsi, un algorithme d'amincissement préservant la topologie dans un EPO fini ℓ peut être obtenu en répétant jusqu'à stabilité [13] le retrait des points β-simples de hauteur k pour k variant de 0 à ℓ (la figure 4.14 donne un exemple d'un tel amincissement).

(a) (b)

FIGURE 4.14 – Amincissement dans $\mathbb{F}^2$ par retrait de points β-simples. (a) L'image originale. (b) Un squelette obtenu par suppression de points β-simples de même dimension jusqu'à stabilité.

4.2.3.3 Points γ-simples

Le fait que les faces de dimension 0 du point x_1 ne soient pas des points β-simples dans l'ensemble X_0 de l'exemple 4.2.1 montre que la notion de point β-simple n'a pas encore la puissance souhaitée pour des opérations d'amincissement topologique dans une image digitale.

Bertrand (1999) définit une famille de points *n-simples* qui prolonge celle des points β-simples. Formellement, la définition des points n-simples est proche de celle des points simples de Tourlakis et Mylopoulos (voir section 4.2.2) : un point x dans un EPO X est haut-n-simple (resp. bas-n-simple) si $x^{\uparrow\star}$ (resp. $x^{\downarrow\star}$) est $(n-1)$-contractile. Un ensemble Y est *p-contractile* si $p = 0$ et Y est un singleton, ou si la suite double $(Y_i, Z_i)_{i\geqslant 0}$ définie par $Y_0 = Y$, Z_i est l'ensemble des points bas-p-simples, ou l'ensemble des points haut-p-simples de Y_i et $Y_{i+1} = Y_i \setminus Z_i$ ($i \in \mathbb{N}$), est constante et égale à $(\{y\}, \emptyset)$ à partir d'un certain rang (y est un point de Y). La figure 4.15 montre que le point x_1 de l'ensemble X_0 de l'exemple 4.2.1 est 3-simple lorsque $\dim(x_1) = 0$. L'ensemble ${x_1}^{\uparrow\star}$ et son diagramme de Hasse sont représentés sur la figure 4.13. Pour le vérifier, il faut prouver que $Y = {x_1}^{\uparrow\star}$ est 2-contractile. Cet ensemble ne contient aucun point bas-2-simple (tous les voisinages-bas $(y^{\downarrow\star})$ des points y du diagramme sont non connexes ou contiennent des cycles), par contre les trois 2-

13. Si l'EPO n'est pas fini, cet algorithme peut ne pas terminer comme le montre l'exemple de la droite de Khalimsky.

faces notées y_1, y_2, y_3 sur le diagramme de la figure 4.13 sont haut-1-simples donc également haut-2-simples (Lohou et Bertrand, 1999, sec. 3.1). Plus précisément, on a, avec les notations utilisées ci-dessus pour la définition de la n-contractilité, $Z_0 = \{y_1, y_2, y_3\}$. Le diagramme de Hasse de l'ensemble $Y_1 = Y_0 \setminus Z_0$ est représenté sur la figure 4.15 (a) L'ensemble Y_1 contient trois points bas-2-simples (les trois faces de X_0 incluant les trois 2-faces y_1, y_2, y_3) qui forment l'ensemble Z_1. Le diagramme de Hasse de l'ensemble $Y_2 = Y_1 \setminus Z_1$ est représenté sur la figure 4.15 (b). Toutes les 0-faces de Y_2 et six de ses 1-faces sont haut-2-simples. L'ensemble Y_3 est représenté sur la figure 4.15 (c). L'ensemble Y_4 contient trois faces 2-simples (car 1-simples) et l'ensemble Y_5 est un singleton (figure 4.15 (c-d)). Une étude détaillée d'algorithmes d'amincissement utilisant la notion de point n-simple peut être trouvée dans Lohou (2001).

La définition et les propriétés suivantes sont dues à Barmak et Minian (2008a).

Définition 4.2.12. *Soit X un EPO. Un point x de X est un point* γ-simple *si l'EPO $x^{\updownarrow\star}$ est homotopiquement trivial, c'est-à-dire s'il est connexe et tous ses groupes d'homotopie sont triviaux.*

La notion de point γ-simple est un extension de celle de point β-simple puisqu'un espace contractile est bien évidemment homotopiquement trivial. En général, le contraire n'est pas vrai (et nous le vérifierons en examinant notre exemple dans le cas où $\dim(x_1) = 0$). Néanmoins, pour tout point x, si la longueur de X n'excède pas 2 (c'est-à-dire pratiquement si l'image digitale est de dimension 2), ou pour tout point x non minimal et non maximal si $\dim(X) = 3$, les ensembles $x^{\uparrow\star}$ et $x^{\downarrow\star}$ sont de dimensions inférieures ou égales à 1 et les points γ-simples coïncident avec les points β-simples (Barmak et Minian, 2008a).

Contrairement au cas des points unipolaires et des points β-simples, il n'est pas possible de définir l'ensemble des points γ-simples à partir de points bas et hauts-γ-simples. On a cependant une condition suffisante qui permet de réduire la complexité moyenne de la recherche des points γ-simples.

Propriété 4.2.13 (Barmak et Minian, 2008a)**.** *Soit X un EPO fini et x un point de X. Si $x^{\downarrow\star}$ ou $x^{\uparrow\star}$ est homotopiquement trivial alors l'ensemble $x^{\updownarrow\star}$ est homotopiquement trivial.*

La propriété suivante assure que le retrait d'un point γ-simple ne modifie pas les groupes d'homotopie et correspond à une équivalence d'homotopie simple pour les complexes simpliciaux associés.

Théorème 4.2.14 (Barmak et Minian, 2008a)**.** *Soit X un EPO fini et $x \in X$ un point γ-simple. Soit $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})|$ et $|\mathcal{K}(X)|$ les complexes simpliciaux associés respectivement à X et $X \setminus \{x\}$. On a :*

- *l'inclusion $i : X \setminus \{x\} \to X$ est une équivalence d'homotopie faible ;*
- *les ensembles $|\mathcal{K}(X \setminus \{x\})|$ et $|\mathcal{K}(X)|$ ont même type d'homotopie simple.*

Lorsque X est une partie finie de $\mathbb{F}^3$, le coût pour décider si l'ensemble $x^{\updownarrow\star}$ est homotopiquement trivial n'est pas très élevé. En effet, $\mathcal{K}(x^{\updownarrow\star})$ est un complexe simplicial 2-dimensionnel qui est soit une sphère soit un complexe réalisable dans $\mathbb{R}^2$. Une alternative pour rechercher les points β-simples, en toute dimension, est de retirer les points β-simples dans $x^{\updownarrow\star}$ jusqu'à stabilité. Si le résultat est un singleton, $x^{\updownarrow\star}$ est faiblement homotopiquement équivalent à un point et par suite homotopiquement trivial (théorème 4.2.11). Néanmoins, cette méthode ne permet pas de conclure si le test échoue. Par ailleurs, le schéma proposé à la fin de la section 4.2.3.2 pour un amincissement homotopique

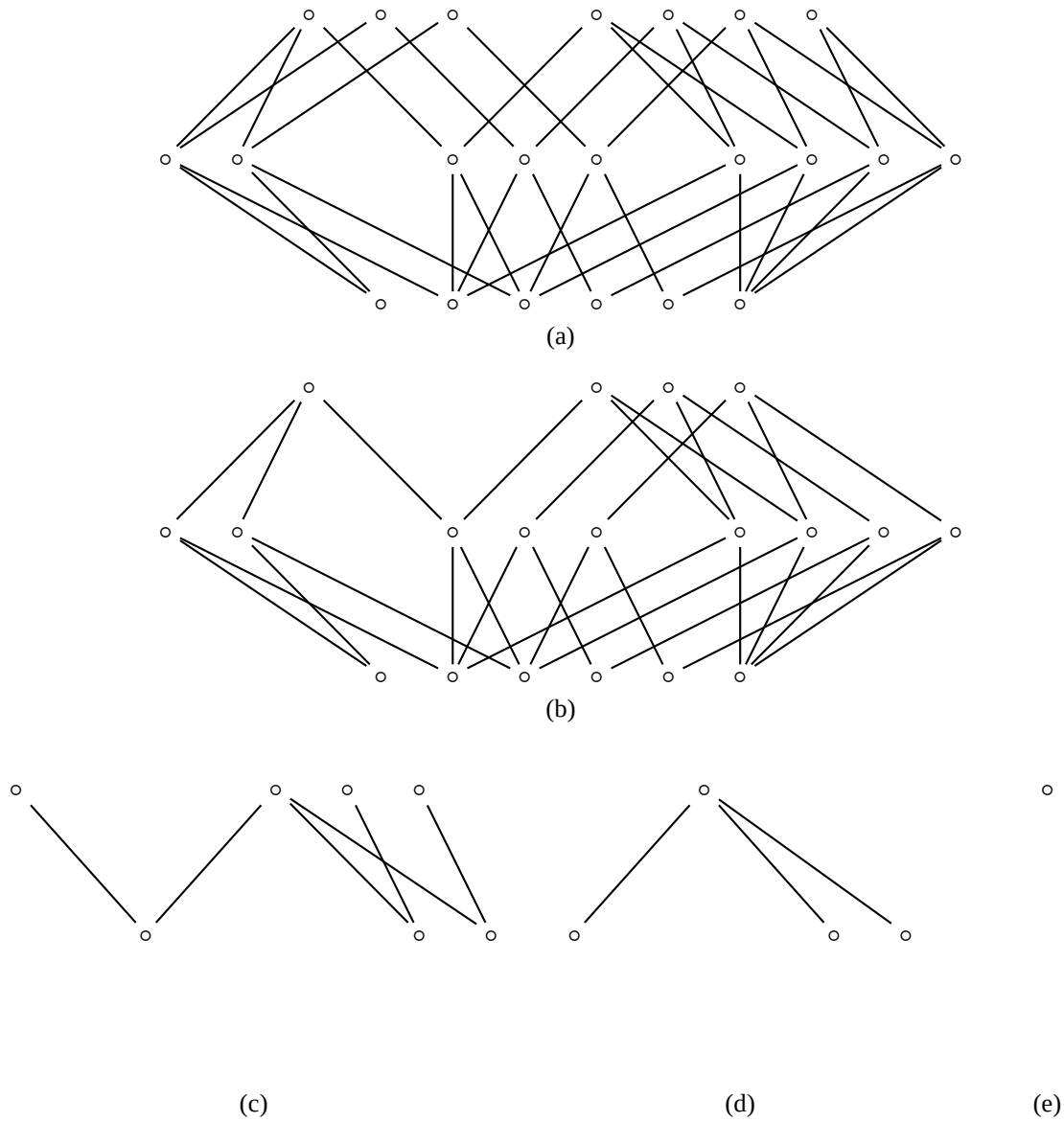
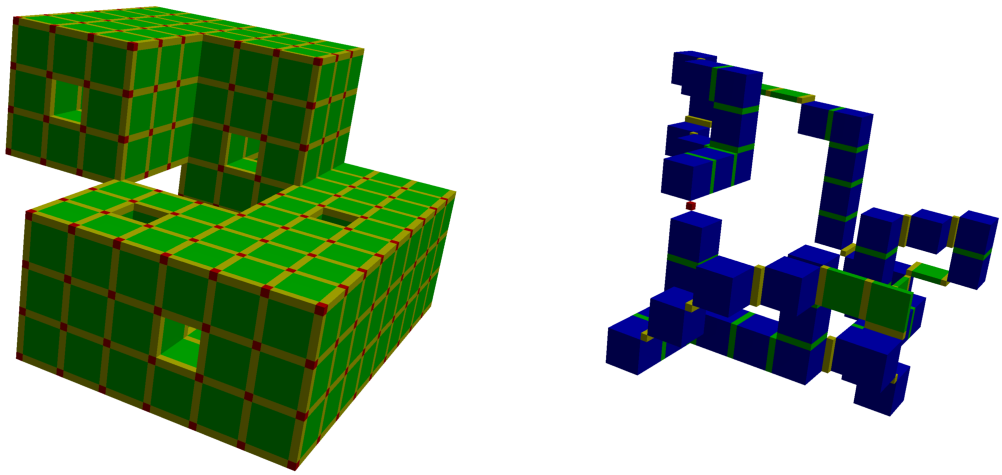


FIGURE 4.15 – Ensemble 2-contractile (voir texte). L'ensemble Y_0 est celui de la figure 4.13 (c). (a) Y_1. (b) Y_2. (c) Y_3. (d) Y_4. (e) Le singleton Y_5.

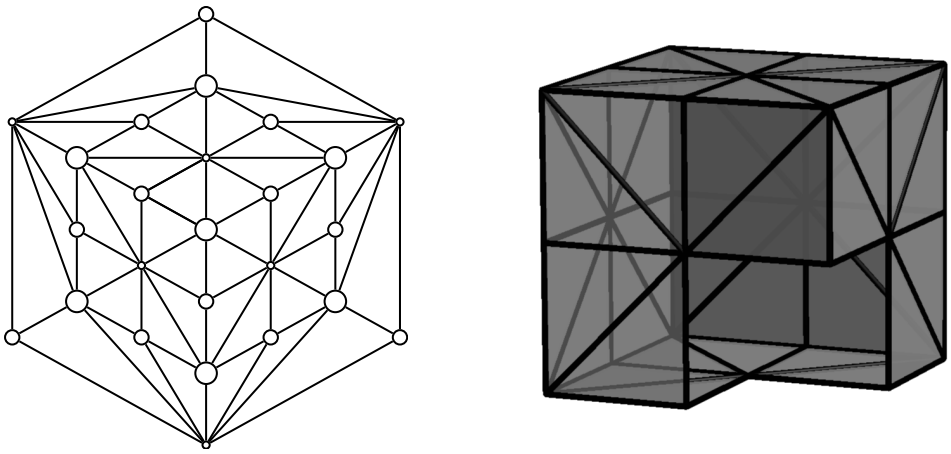
par retraits de points β-simples est encore valide : des points γ-simples de mêmes hauteurs peuvent être retirés en parallèle. Sur la figure 4.16, nous donnons un exemple d'amincissement homotopique utilisant ce schéma sur une image 3-D.

Considérons à nouveau l'ensemble X_0 de l'exemple 4.2.1. Nous avons vu que x_1 est un point β-simple si et seulement si $\dim(x_1) \geq 1$. Supposons maintenant que $\dim(x_1) = 0$. Le complexe de chaînes $\mathcal{K}({x_1}^{\uparrow\star})$ (voir section 3.3) est représenté sur la figure 4.17 dans un espace de dimension 2 et dans un espace de dimension 3. Il est clairement contractile si bien que $x^{\uparrow\star}$ est homotopiquement trivial (théorème 3.3.1). Ainsi, x_1 est un point γ-simple et l'injection $i : X_1 \to X_0$ est une équivalence d'homotopie faible.



(a) (b)

FIGURE 4.16 – Amincissement par suppression de points γ-simples sur une image 3D. (a) Un tore creux, pincé et percé de cinq petits trous. (b) Le même tore après la suppression des points γ-simples, dimension par dimension, jusqu'à stabilité.



(a) (b)

FIGURE 4.17 – (a) Le pur 2-complexe simplicial $\mathcal{K}({x_1}^{\uparrow\star})$ dans un espace 2D (${x_1}^{\uparrow\star}$ est représenté sur la figure 4.13-(a)). Les grands/moyens/petits cercles sont les sommets associés aux 3-/2-/1-faces de ${x_1}^{\uparrow\star}$. (b) Le complexe $\mathcal{K}({x_1}^{\uparrow\star})$ dans un espace 3D. Les sept sommets associés aux 3-faces de ${x_1}^{\uparrow\star}$ sont les coins du cube et les sommets associés aux 1-faces sont aux centres des 2-faces du complexe.

Chapitre 5

Topologie dans les images de labels

Les images de labels nécessitent une approche particulière en matière de topologie. En effet, si les labels définissent des objets qui, individuellement, relèvent de la topologie classique ou digitale, l'image de labels contient aussi une information sur les relations de voisinage entre les différents labels. Tout traitement d'image multi-objets attentif à la topologie doit donc à la fois surveiller les objets mais aussi leurs inter-relations. Cela nécessite de préciser ce que sont ces relations entre les différents labels, de trouver un modèle pour les représenter ou un critère qui permette par exemple d'affirmer, ou de vérifier, qu'une transformation, un algorithme, conserve la topologie de l'image dans toute sa richesse. Une autre difficulté est de construire des algorithmes efficaces pour le traitement de ces images alors que le nombre de labels peut être élevé. Par exemple, Liu *et al.* (2009) mentionnent qu'ils utilisent un atlas comportant 137 labels. On conçoit que, sans optimisation, la surveillance des relations entre ces 137 labels puisse être extrêmement coûteuse. Malgré un besoin croissant d'outils intégrant des considérations topologiques de cet ordre, notamment dans le domaine du traitement d'images médicales, la littérature sur la topologie des images de labels est, à notre connaissance, encore peu fournie et essentiellement dédiée à des applications dans des domaines particuliers. L'approche la plus répandue ne considère qu'un seul label à la fois, les autres labels étant temporairement, et tour à tour, identifiés avec le fond d'une image binaire (*e.g.* Poupon *et al.* 1998, Bazin et Pham 2007, Liu *et al.* 2009). Dans ce cas, soit les relations inter-labels sont perdues, soit il faut adjoindre une structure comme un arbre d'adjacence de régions pour les mémoriser au risque de perdre certaines informations comme la présence de tunnels ou les entrelacements. Même dans les cas où la configuration topologique des différents objets de l'image permet facilement un traitement binaire (dans Mangin *et al.* 1995, Miri *et al.* 2008, les objets sont des sphères concentriques), quelques questions se posent. Dans une image binaire, il y a normalement un seul objet d'intérêt et un fond considéré comme une sorte d'« éther » sans importance. Le choix du couple d'adjacences peut donc se faire uniquement en fonction de l'objet. Par contre, dans une image ayant deux labels (et pas de fond), il y a deux régions d'intérêt et le fait de munir l'une de la 6-adjacence et la seconde de la 26-adjacence par exemple peut ne pas être satisfaisant suivant la nature des objets. Dans Miri *et al.* (2008) le choix se fait en fonction de la nature des objets (épaisseur) tandis que dans Mangin *et al.* (1995) le choix semble plutôt de nature algorithmique (si bien que le même objet peut être traité avec les deux adjacences). Beaucoup de méthodes utilisent une fonction de coût (ou d'énergie), dépendant du contexte applicatif, et un critère de simplicité pour attacher ou non un label donné à un point du fond (Pham *et al.* 2010). Ainsi, les points vont du fond aux labels ou *vice versa* mais pas d'un label à l'autre. Parfois, certains points peuvent acquérir un status indéterminé parce qu'aucun label ne peut leur être attribué sans briser une topologie définie par une connaissance *a priori* ou pour éviter des intersections d'objets lorsque ceux-ci sont interprétés à l'aide de la 8-adjacence dans le plan ou la 26-adjacence dans l'espace (voir figure 5.1). Comme nous l'avons déjà évoqué, la question des adjacences à utiliser dans une image digitale de labels est une difficulté récurrente. En effet, quand

les objets de l'image sont traités un par un, jouant tour à tour le rôle de « l'objet » d'une image binaire puis celui d'une partie du fond, ils sont inévitablement vus sous des adjacences différentes. Par exemple, un objet peut avoir une composante connexe à un stade du processus utilisé et avoir deux composantes connexes à un autre stade de ce processus alors qu'aucun changement n'est intervenu concernant l'objet (voir figure 5.1).

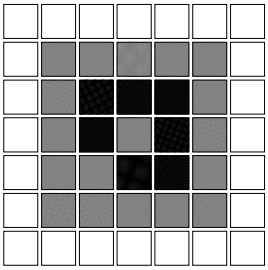


FIGURE 5.1 – Une image avec deux labels représentés respectivement en gris et noir et un fond, représenté en blanc. Si nous considérons le label gris comme l'objet de l'image en utilisant la 8-adjacence pour l'objet et la 4-adjacence pour le fond, l'objet est un anneau. Les pixels noirs forment alors une composante connexe finie du fond (un « trou » de l'objet) tandis que les pixels blancs constituent la composante connexe infinie du fond. Par contre, si nous considérons les pixels noirs comme formant l'objet de la figure (toujours avec le même couple d'adjacences objet/fond) et rejetons les pixels gris dans le fond de l'image, ces derniers doivent être regardés avec la 4-adjacence et ils apparaissent comme ayant deux composantes connexes, l'une à l'intérieur de l'anneau noir et l'autre à l'extérieur.

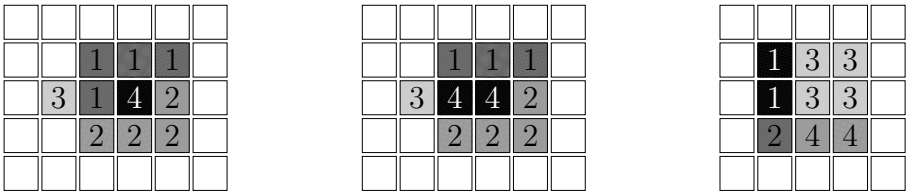
Pour surmonter ce problème, une solution est d'utiliser la classe des images « bien composées » de Latecki (voir chapitre 2) puisque dans cette classe on utilise la même relation d'adjacence pour l'objet et pour le fond (nécessairement la 4-adjacence pour les images 2D et la 6-adjacence pour les images 3D). De plus, lorsqu'une image de labels contient des configurations interdites, un algorithme permet de les « réparer » Siqueira *et al.* (2008). Cependant comme les labels sont réparés séquentiellement dans cet algorithme, il est nécessaire d'attribuer préalablement un ordre sur les labels ce qui peut être très arbitraire et biaiser le résultat.

L'approche de Cointepas *et al.* (2001) prend davantage en compte la spécificité des images de labels. Elle utilise une notion d'« ensemble d'homotopie » (« homotopy set »), ensemble des labels qui peuvent être attribués à un point sans modification de la topologie de chaque label concerné et de son complément dans l'image. Ici l'espace est de dimension 3 et les modifications topologiques envisagées sont la création ou la suppression de composantes connexes ou de tunnels dans un des objets ou dans son complément. Un critère local permet de savoir si un label donné appartient ou non à l'ensemble d'homotopie d'un point. Ainsi, un point peut changer de label et pas seulement passer au fond ou *vice versa*.

Bazin *et al.* (2007) vont plus loin encore dans la prise en compte de la particularité des images de labels et demandent que tout changement de label sur un point préserve la topologie des labels modifiés mais aussi des unions de deux labels en 2D et de trois labels en 3D (voir figure 5.2). Les auteurs obtiennent ces valeurs en faisant le raisonnement suivant. La topologie est décrite par les caractéristiques d'Euler des objets et de leurs unions. Or, en vertu du principe d'inclusion-exclusion vérifiée par la caractéristique d'Euler (les objets considérés ici se ramènent à des complexes cubiques), celle-ci peut être calculée à l'aide des caractéristiques des différentes intersections des objets considérés.

En 2D, resp. 3D, il est suffisant de s'intéresser aux intersections de 2 objets, resp. 3 objets, car des points ne peuvent apparaître ou disparaître que si des lignes voient leurs caractéristiques modifiées. Il est donc suffisant de surveiller les caractéristiques des unions de deux objets en 2D et des unions de trois objets en 3D.

Cependant, il apparaît que ces valeurs ne sont pas suffisantes. La figure 5.2(c), extraite de Bazin *et al.* (2007), fournit un contre-exemple en 2D qui montre la nécessité de considérer aussi les unions de trois labels, sauf peut-être avec des images bien composées.



(a) (b) (c)

FIGURE 5.2 – Topologie des labels et topologie de la partition. (a) Une image avec quatre labels. (b) Le label d'un seul pixel a été changé. Ni les topologies des labels ni celles de leurs complementaires dans l'image ne sont modifiées. Cependant, la topologie de la partition n'est pas conservée dans la mesure où l'union 1 + 2 devient contractile, $1+3$ est séparé en deux composantes connexes en 4-adjacence, $3+4$ perd une composante connexe, $2+3+4$ perd une composante connexe en 4-adjacence. (c) Cet exemple est tiré de Bazin *et al.* (2007). Les auteurs observent que, si nous interprétons l'image avec la $(8,4)$-adjacence, le pixel central peut passer du label 3 au label 2 sans altérer la topologie des quatre labels et des six paires de labels (considérés tour à tour comme des objets) mais ils ne prennent pas en considération l'union 1 + 3 + 4 bien que sa topologie passe de celle d'une balle à celle d'un anneau.

Damiand *et al.* (2011) étudient les images de labels 3D avec une approche frontière, c'est-à-dire que les objets de l'image, et les relations de voisinage de ces objets sont entièrement caractérisés par les frontières des objets. L'image est divisée en régions 6-connexes, chacune étant associée à un label. Par ailleurs, seule la 6-adjacence entre régions est prise en considération. Ainsi aucune intersection d'objets, ou d'unions d'objets, ne peut se produire. Pour déplacer un pixel x d'une région A à une region B, les auteurs demandent que les surfaces entre le voxel x et la région $A \setminus \{x\}$ d'une part et entre x et la région $B \setminus \{x\}$ d'autre part soient homéomorphes à un disque. De plus, pour chaque région C 6-adjacente à x, la frontière entre la region A et C avant la modification de l'image, resp. entre B et C après la modification, doit collapser sur la frontière correspondante après la modification (resp. avant la modification). Ces critères sont repris dans la section 8.5 et sur la figure 8.20 pour les comparer avec nos propres critères (chapitre 8).

Deuxième partie

Déformations homotopiques des images binaires : contributions

Introduction

Nous avons vu dans la première partie que plusieurs approches coexistent pour traiter les questions d'ordre topologique dans des espaces finis tels que ceux qui supportent les images digitales. Schématiquement, elles sont au nombre de trois.

- Une première approche (cf. chapitre 2), abandonnant la notion d'ensemble ouvert ou fermé, rebâtit la topologie autour de la notion d'adjacence sur un graphe, reformulant les notions de la topologie classique au fur et à mesure des besoins de la communauté : connexité, surface, anse (ou tunnel), déformation homotopique, etc.
- À l'opposé, plusieurs travaux, essentiellement dans la communauté mathématique (cf. section 4.2.3), supposent donnée l'existence d'une structure topologique, ou algébrique, et utilisent des résultats généraux de topologie pour déterminer les propriétés de ces espaces finis et les classifier.
- Enfin, une approche intermédiaire (cf. chapitre 3) enrichit l'espace support d'une image digitale de façon à pouvoir munir ce support d'une topologie classique. Si l'espace est enrichi, il reste néanmoins fini et certaines notions usuelles, comme celle de continuité, qui paraissent trop inadaptées aux univers finis sont abandonnées, éventuellement au profit de notions similaires entièrement reconstruites [1].

Nous nous sommes intéressés dans cette partie aux liens entre ces trois approches. Le chapitre 6 se penche sur la notion de continuité à travers celle de chemin (ou d'arc paramétré) dans un espace topologique fini ou « discret » (plus précisément, un EPO). Nous étudions les relations entre ces chemins et leurs supports géométriques et nous étudions également les correspondances entre les déformations continues de tels chemins et des modifications élémentaires des supports géométriques. Le chapitre 7 propose une mise en correspondance biunivoque, topologiquement neutre, entre les images digitales définies sur $\mathbb{Z}^n$ et une classe d'images « enrichies », définies sur $\mathbb{F}^n$.

1. Voici, par exemple, ce qu'écrivent Eckhardt et Latecki (1994) : « General topology deals mainly with continuous functions. Such functions have no counterparts in discrete structures. However, it would be useful for many applications to have such a concept as 'discrete continuity' ».

Chapitre 6

Chemins digitaux et chemins continus

Si les travaux d'Alexandroff (1937), et dans une moindre mesure de Birkhoff (1937), sont plutôt bien connu en imagerie numérique (voir section 3.3), et donc s'il est communément admis que la finitude des espaces considérés n'est nullement incompatible avec la définition d'une topologie classique, ceux de McCord (1966) et de Stong (1966) ne sont presque jamais cités dans les articles de topologie digitale. Cela explique peut-être pourquoi plusieurs notions de topologie générale sont systématiquement redéfinies pour être adaptées aux images digitales sans que la preuve de l'inaptitude des définitions classiques à embrasser les particularités du monde discret ne soit clairement apportée. C'est le cas en particulier de la notion fonctionnelle de chemin, et *a fortiori* d'homotopie, qui, à notre connaissance, ont toujours été remplacées par des définitions « locales » à l'analyse et au traitement d'image. Il est certain que dans ces domaines les considérations d'efficacité algorithmique sont primordiales et justifient l'utilisation de notions spécifiques, d'autant plus que ces notions sont conformes à un cahier des charges (topologiques) largement approuvé. Néanmoins, toute perturbation d'une définition conduit à renoncer à un corpus de connaissances et il n'est pas inintéressant d'essayer de discerner les perturbations indispensables de celles qui pourraient être évitées. Ces reflexions nous ont conduit à étudier les conséquences de l'utilisation de la définition standard d'un chemin en topologie algébrique – une fonction continue de l'intervalle $[0, 1]$ vers l'espace considéré – dans le domaine de la topologie digitale. Nous décrivons les images de ces chemins continus dans un espace discret et les comparons avec les chemins utilisés par des auteurs tels que Khalimsky *et al.* (1990b) ou Kovalevsky (1989) qui ont défini des topologies pour les images digitales sans toutefois conserver la notion classique de chemin. Nous montrons que ces différentes définitions conduisent à des notions véritablement proches. Notre premier résultat (théorème 6.2.4) établit que, sous chaque chemin continu p, se trouve un autre chemin continu qui est constant par morceaux, nous disons un *chemin fini*, dont l'image est incluse dans celle de p et qui est égale à p en au moins un point de chaque intervalle sur lequel ce second chemin est constant. Nous étudions également les équivalences d'homotopie entre les chemins et décrivons leur contreparties discrètes que nous appelons des *déformations*. Nous montrons que deux chemins finis ayant la même image sont homotopiquement équivalents et notre second théorème (théorème 6.2.12) montre que deux chemins finis sont homotopiquement equivalents si et seulement si l'image de l'un est une déformation de l'image de l'autre. Ainsi, nous retrouvons (et de fait étendons, puisque nous ne supposons pas que l'espace ambiant est fini), sans l'utilisation d'un ensemble d'arguments de haut niveau, des résultats récemment prouvés en topologie algébrique (Barmak et Minian, 2007) qui établissent que le groupe fondamental d'un espace digital est isomorphe au groupe obtenu en ne considérant les lacets de l'espace sous un angle géométrique et non plus fonctionnel. Enfin, dans la section 6.3, nous comparons plusieurs notions de points simples (voir section 4.2) faisant toutes appel à des déformations continues et utilisables dans un EPO. Ces sortes de points simples sont utilisés dans la partie sur les images de label (partie III). Notre principal résultat dans cette section énonce qu'un point β-simple pour un

sous-ensemble de l'espace des complexes cubiques, $\mathbb{F}^n$ est γ-simple pour l'ensemble complémentaire (théorème 6.3.12).

6.1 Compléments sur les ensembles partiellement ordonnés

Nous donnons quelques propriétés topologiques des EPO et nous précisons notre terminologie et nos notations. On rappelle que la topologie que nous utilisons dans les EPO est la topologie d'Alexandroff (voir la section 3.3) et que cette topologie admet pour base l'ensemble $\{x^\uparrow \mid x \in X\}$. En particulier, $x^\uparrow$ est le plus petit ouvert contenant x.

6.1.1 Continuité et connexité

Propriété 6.1.1 (Stong 1966)**.** *Soit X, Y deux EPO. Une fonction $f : X \to Y$ est continue si et seulement si elle est croissante.*

Démonstration. (Stong suppose que X et Y sont finis, mais il n'utilise pas cette hypothèse dans sa preuve.) Supposons que f soit continue. Soit $x_1 \leq x_2$ deux points dans X. Puisque f est continue, $f^{-1}(f(x_1)^\uparrow)$ est un ouvert et cet ouvert contient x_1. Donc, il inclut $x_1^\uparrow$, le plus petit ouvert contenant x_1. En particulier, $x_2 \in f^{-1}(f(x_1)^\uparrow)$, c'est-à-dire $f(x_1) \leq f(x_2)$. Réciproquement, supposons que f soit croissante. Soit $y \in Y$ et $x \in f^{-1}(y^\uparrow)$. Alors, $y \leq f(x)$ et, pour tout $x' \in x^\uparrow$, $f(x) \leq f(x')$ car f est croissante. Donc, $f(x^\uparrow) \subseteq y^\uparrow$. Ainsi, $x^\uparrow \subseteq f^{-1}(y^\uparrow)$ pour tout $x \in f^{-1}(y^\uparrow)$, ce qui implique que $f^{-1}(y^\uparrow)$ est un ouvert. La fonction f est donc continue. □

Soit x et y deux points d'un EPO X. Nous disons que x et y sont *adjacents* si l'ensemble $\{x, y\}$ est connexe. Une suite $(x_i)_{i=0}^r$ ($r \geqslant 0$) de points de X est un *arc* dans X (*de x_0 à x_r*) si, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, x_{i-1} et x_i sont distincts et adjacents. L'entier r est la *longueur* de l'arc $(x_i)_{i=0}^r$. Si pour tout x_i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, $x_{i-1} < x_i \Leftrightarrow x_i > x_{i+1}$, nous disons que l'arc est *minimal* [1]. Si pour tout $x, y \in X$ il existe un arc dans X de x à y, nous disons que X est *connexe par points* [2].

Propriété 6.1.2. *Soit X un EPO. Deux points dans X sont adjacents si et seulement si ils sont comparables.*

Démonstration. On considère x et y, deux points de X, et on pose $S = \{x, y\}$. Si x et y ne sont pas comparables alors $x \notin y^\uparrow$ et $y \notin x^\uparrow$. Donc, $x^\uparrow \cap S = \{x\}$ et $y^\uparrow \cap S = \{y\}$ sont deux ouverts disjoints de S. Par suite, l'ensemble S n'est pas connexe. Réciproquement, si x, y sont comparables, par exemple $x \leq y$, tout ouvert contenant x inclut $x^\uparrow$ donc contient y de sorte qu'il est impossible de séparer S en deux ouverts disjoints non vides. Donc S est connexe. □

Lemme 6.1.3 (Stong (1966))**.** *Soit X un EPO. Si x et y sont comparables, il existe un chemin de x à y.*

1. La définition d'un chemin (« path ») par Kovalevsky (1989) dans le cadre des complexes cellulaires correspond à notre définition d'un arc tandis que la définition d'un chemin digital (« digital path ») de Kong *et al.* (1991) dans le cadre de la topologie de Khalimsky correspond à notre définition d'un arc minimal.

2. La langue de Descartes est ici un peu confuse puisque la connexité par arc en topologie désigne la connexité à l'aide de chemins.

Démonstration. (Stong suppose que X et Y sont finis mais n'utilise pas cette hypothèse dans sa preuve.) On peut supposer, sans perte de généralité, que $x \leq y$. Soit $p : [0,1] \to X$ la fonction définie par $p(t) = x$ si $t \leqslant \frac{1}{2}$ et $p(t) = y$ si $t > \frac{1}{2}$. Vérifions que p est continue, c'est-à-dire que p est un chemin. Pour cela, il est suffisant de prouver que pour tout ouvert $z^{\uparrow}$ $(z \in X)$, $p^{-1}(z^{\uparrow})$ est un ouvert de $[0,1]$. Si $x, y \notin z^{\uparrow}$, alors $p^{-1}(z^{\uparrow})$ est vide et par conséquent est ouvert. Si $x \in z^{\uparrow}$, $z \leq x \leq y$ de sorte que $y \in z^{\uparrow}$ et $p^{-1}(z^{\uparrow}) = [0,1]$ est ouvert. Si $x \notin z^{\uparrow}$ et $y \in z^{\uparrow}$, alors $p^{-1}(z^{\uparrow}) =]\frac{1}{2}, 1]$ qui est un ouvert de $[0,1]$. □

La matière pour la propriété suivante est aussi dans Stong (1966).

Propriété 6.1.4. *Soit X un EPO. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *X est connexe ;*
2. *X est connexe par arc ;*
3. *X est connexe par points.*

Démonstration. Pour prouver que $1 \Rightarrow 3$, supposons que X est connexe et prenons un point $x \in X$. Grâce au lemme 6.1.3, il est facile de montrer que l'ensemble A des points dans X qui sont reliés à x par un arc et son complémentaire, $B = X \setminus A$, sont des ouverts. Comme X est connexe et $A \neq \emptyset$, B est vide. Donc X est connexe par points. L'implication $3 \Rightarrow 2$ provient directement de la définition d'un arc et du lemme 6.1.3. L'implication $2 \Rightarrow 1$ est vraie dans tout espace topologique. □

Concrètement, la propriété précédente, signifie que, dans un EPO, la définition de la connexité de la topologie classique et la définition, à l'aide d'arcs, utilisée en imagerie digitale conduisent aux mêmes composantes connexes.

6.1.2 Homotopie

Soit f, g deux fonctions continues d'un espace topologique Y vers un EPO X. Nous écrivons $f \leq g$ quand $f(a) \leq g(a)$ pour tout $a \in Y$. Il est clair que la relation $\leq$ est un ordre partiel sur $C(Y,X)$, l'ensemble des fonctions continues de Y vers X. Pour $x_1, x_2 \in X, y_1, y_2 \in Y$ donnés, nous posons $C(Y,X)_\star = \{f \in C(Y,X) \mid f(y_1) = x_1, f(y_2) = x_2\}$. Contrairement à la plupart des textes qui traitent de la topologie de l'ensemble $C(Y,X)$ (Stong 1966, Arenas 1999, May 2008, Kukieła 2010), nous n'utilisons pas ici la topologie compacte-ouverte sur les fonctions continues mais la topologie d'Alexandroff sur l'EPO $(C(Y,X), \leq)$.

Proposition 6.1.5. *Soit X un EPO et Y un espace topologique. Soit $p, p' \in C(Y,X)$, $p' \leq p$, deux fonctions continues comparables. Il existe une homotopie h entre p et p' telle que, pour tout $y \in Y$, $p(y) = p'(y) \Rightarrow \forall u \in [0,1], h(y,u) = p(y) = p'(y)$.*

Démonstration. Considérons la fonction $h : Y \times [0,1] \to X$ définie par $h(y,t) = p(y)$ si $t < 1$ et $h(y,1) = p'(y)$. Nous montrons que h est une homotopie de p à p'. Soit $x^{\uparrow}$ un ouvert de la base d'ouvert minimale de X. Alors, $h^{-1}(x^{\uparrow}) = p^{-1}(x^{\uparrow}) \times [0,1[\cup p'^{-1}(x^{\uparrow}) \times \{1\}$. Par ailleurs, $y \in p'^{-1}(x^{\uparrow}) \Rightarrow p'(y) \in x^{\uparrow} \Rightarrow p(y) \in x^{\uparrow}$ (car $p' \leq p$) $\Rightarrow y \in p^{-1}(x^{\uparrow})$. Par suite, $p'^{-1}(x^{\uparrow}) \subseteq p^{-1}(x^{\uparrow})$ et $h^{-1}(x^{\uparrow}) = p^{-1}(x^{\uparrow}) \times [0,1[\cup p'^{-1}(x^{\uparrow}) \times [0,1]$. Comme p et p' sont continues, $p^{-1}(x^{\uparrow})$ et $p'^{-1}(x^{\uparrow})$ sont des ouverts et par conséquent $h^{-1}(x^{\uparrow})$ est un ouvert, ce qui établit la continuité de h. □

Le corollaire suivant est une conséquence directe de la propriété 6.1.5 (en prenant $Y = [0,1]$). Elle est particulièrement importante pour notre étude des chemins dans les EPOs.

Corollaire 6.1.6. *Soit X un EPO et a, b deux points de X. Soit p, p' deux chemins dans X de a à b tels que $p' \leq p$. Alors, p et p' sont equivalents* [3].

Du corollaire précédent et de la propriété 6.1.4, nous obtenons la propriété suivante.

Corollaire 6.1.7. *Soit X un EPO et Y un espace topologique. Les composantes connexes de $C(Y,X)$ (resp. $C(Y,X)_\star$) sont incluses dans les classes d'homotopie de $C(Y,X)$ (resp. $C(Y,X)_\star$).*

Démonstration. Soit f et g deux fonctions de $C(Y,X)$ (resp. $C(Y,X)_\star$) appartenant à la même composante connexe. Des propriétés 6.1.4 et 6.1.2 (appliquées à l'EPO $C(Y,X)$ ou $C(Y,X)_\star$), on déduit qu'il existe une suite de chemins $(q_i)_{i=0}^r$ $(0 \leq i \leq r)$ dans $C(Y,X)$ $(C(Y,X)_\star)$ tels que $q_0 = f$, $q_r = g$ et, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, q_{i-1}, q_i sont comparables, et donc, grâce à la propriété 6.1.5, homotopiques. Il vient que f et g sont homotopiques (si $f, g \in C(Y,X)_\star$, il existe une homotopie h telle que, pour tout $t \in [0,1]$, $h(.,t) \in C(Y,X)_\star$). □

Le corollaire précédent est démontré par Stong sous forme d'une égalité des classes d'homotopie et des composantes connexes pour la topologie compacte-ouverte de $C(Y,X)$ et lorsque X et Y sont des EPO finis. Kukieła (2010) montre que cette égalité peut être étendue (toujours avec la topologie compacte-ouverte) à tout espace topologique X si Y est un EPO, fini ou non, et plus généralement si Y vérifie le premier axiome de dénombrabilité [4].

Pour la démonstration d'un des principaux résultats de ce chapitre, le théorème 6.2.12, nous avons besoin d'un résultat analogue, sous forme d'égalité, pour la topologie d'Alexandroff de l'EPO $C(Y,X)$. Le théorème 6.2.12 énonce que la notion d'homotopie de chemin peut être traduite de façon fidèle dans un EPO par une notion de déformation géométrique et la preuve repose sur le fait que l'homotopie de chemin se ramène peu ou prou à la comparabilité des chemins. Or ceci est acquis si les classes d'homotopie de $C([0,1],X)$ sont les composantes connexes $C([0,1],X)$ puisque la connexité dans un EPO est équivalente à la connexité par points. Stong a montré que, pour X fini, la topologie d'Alexandroff de $C(Y,X)$ est plus fine ou égale à sa topologie compacte-ouverte, plus précisement, l'intersection de tous les ouverts de $C(Y,X)$ pour la topologie compact-ouverte, contenant une fonction continue f donnée, est $f^\uparrow$. Mais en général, il n'y a pas égalité entre les deux topologies (Kukieła 2010, qui relève l'erreur d'Arenas 1999 à ce propos). Dans (Mazo *et al.*, 2011, Property 6), nous avons proposé ce corollaire, avec la topologie d'Alexandroff de $C(Y,X)$, sous la forme d'une égalité des composantes connexes et des classes d'homotopie. Mais la preuve comporte une erreur et toute tentative de corriger cette erreur (tout en restant dans le même schéma de preuve) est vaine puisque la preuve proposée consiste à prouver qu'une homotopie $h : Y \times [0,1] \to X$ induit une fonction continue $h_\star : [0,1] \to C(Y,X)$, définie par $h_\star(t)(y) = h(y,t)$, ce qui est faux comme le montre l'exemple suivant.
On prend $Y = [0,1]$ et $X = \{a,b\}$ avec $a < b$. On considère alors l'homotopie $h : Y \times [0,1] \to X$

3. voir l'annexe A.4.
4. Un espace topologique vérifie le premier axiome de dénombrabilité si tout point de l'espace possède une base dénombrable de voisinages. Étant donné un point x de l'espace, une famille de voisinages de x est une base de voisinages de x si tout voisinage de x inclut un voisinage de la base.

définie par $h(y,t) = a$ si $y \leq t$ et $h(y,t) = b$ sinon. D'un côté, la fonction h est bien continue car la pré-image de l'unique ouvert non trivial, $\{b\}$, est l'ouvert $\{(y,t) \mid t < y\}$ de $[0,1] \times [0,1]$. D'un autre côté, considérons par exemple la fonction $f = h(., \frac{1}{2}) : Y \to X$. La fonction f appartient à $C(Y,X)$ car h est continue. La pré-image par la fonction $h_\star$ de l'ouvert $f^\uparrow$ de $C(Y,X)$ est égal à $\{t \in [0,1] \mid h_\star(t) \geq f\}$, c'est-à-dire à $\{t \in [0,1] \mid \forall y \in Y, h(y,t) \geq h(y, \frac{1}{2})\}$. Il est alors facile de voir que $h_\star^{-1}(f^\uparrow) = [0, \frac{1}{2}]$ qui n'est pas un intervalle ouvert de $[0,1]$.

Comme il n'y a pas d'espoir de corriger notre erreur, et que nous n'avons pas trouvé d'autre schéma de preuve dans le cas général (où Y est un espace topologique quelconque), nous nous sommes restreint au cas $Y = [0,1]$ qui est celui qui est requis pour le théorème 6.2.12. Nous avons trouvé un preuve de l'égalité des composantes connexes et des classes d'homotopie de $C([0,1],X)$ qui utilise le théorème 6.2.4. Ce théorème permet de remplacer, dans la même classe d'homotopie, un chemin quelconque par un chemin « fini » (le terme sera défini dans la section suivante) beaucoup plus simple à traiter. Notre résultat est présenté à la fin de la section 6.2.1 (proposition 6.2.7).

6.2 Chemins et arcs

Le but de la section 6.2 est de comprendre precisément comment un chemin se comporte dans un EPO et, tout particulièrement, d'étudier le lien entre leurs images et les arcs définis à la section 6.1.1. Dans le reste de ce chapitre, $(X, \leq)$ est un EPO (X n'est pas supposé fini, ni même localement fini).

6.2.1 Chemins finis

Nous disons qu'une fonction $f : [0,1] \to X$ est *constante par morceaux* s'il existe un nombre fini d'intervalles $(I_i)_{i=0}^r$ ($r \in \mathbb{N}$) tel que f est constant sur chaque I_i et $[0,1] = \bigcup_{i=0}^r I_i$. Si pour tout $i \in [1,r]$, $\sup(I_{i-1}) = \inf(I_i)$ et $f(I_{i-1}) \neq f(I_i)$, nous écrivons $f = \sum_{i=0}^r x_i \mathbf{1}_{I_i}$ où $\{x_i\} = f(I_i)$ (le symbole de sommation utilisé ici est simplement une notation sans signification particulière).

Puisqu'un chemin est une fonction continue définie sur $[0,1]$ et puisque $[0,1]$ est compact, l'image d'un chemin p dans un EPO X est un sous-espace compact de X. Comme ce sous-espace $p(X)$ est recouvert par la famille d'ouverts $(x^\uparrow)_{x \in p(X)}$, il est également recouvert par une partie finie de cette famille. Donc, si X est un EPO localement fini (comme c'est le cas sur les EPO modélisant les images digitales), tous les ouverts $x^\uparrow$, $x \in p(X)$, sont finis et par suite, l'ensemble $p(X)$ des points de X parcourus par le chemin p est fini. Néanmoins, cela ne signifie pas que p est constant par morceaux ni que le mouvement dans l'espace X induit par la fonction p soit facile à concevoir. Par exemple, soit $x \leq y$ deux points de X et $p : [0,1] \to \{x,y\}$ la fonction définie par $p(0) = x$, $p\left(\left]\frac{1}{2r+1}, \frac{1}{2r}\right[\right) = \{y\}$ et $p\left(\left[\frac{1}{2r}, \frac{1}{2r-1}\right]\right) = \{x\}$ pour tout entier r positif ou nul. La fonction p est un lacet enraciné en x dans X (la continuité de p est évidente car $\emptyset, \{y\}, \{x,y\}$ sont les seuls ouverts de $\{x,y\}$) mais ce chemin passe en x et y une infinité de fois et il est impossible de décrire le parcours de p immédiatement après $t = 0$. Pour l'instant, contentons-nous de remarquer que p est plus grand que le chemin constant $p_0 : [0,1] \to \{x\}$ et inférieur au chemin $p_1 : [0,1] \to X$ défini par $p_1(0) = x, p\left(\left]0, \frac{1}{2}\right[\right) = \{y\}, p\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \{x\}$. Il est donc homotopiquement équivalent à ces deux chemins (propriété 6.1.5).

Définition 6.2.1 (chemin fini)**.** *Un chemin p dans X est un* chemin fini *si p est constant par morceaux : $p = \sum_{i=0}^r x_i \mathbf{1}_{I_i}$. La suite $(I_i)_{i=0}^r$ est appelée* suite des intervalles *de p et la suite $(x_i)_{i=0}^r$ la* trace

de p. Un chemin fini est régulier *s'il n'y a pas de singleton dans sa suite d'intervalles. Un chemin fini est* minimal *si pour tout x_i, $1 \leqslant i \leqslant r-1$, dans la trace de p, $x_{i-1} < x_i \Leftrightarrow x_i > x_{i+1}$.*

Proposition 6.2.2. *La trace d'un chemin fini est un arc, et tout arc est la trace d'un chemin fini régulier.*

Démonstration. Soit $p = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$, $(r \geqslant 0)$, un chemin fini. Si $r = 0$, il est évident que χ est un arc. Si $r \geqslant 1$, considérons un entier $i \in [\![1, r]\!]$. L'ensemble $\{x_{i-1}, x_i\} = p(I_{i-1} \cup I_i)$ est connexe puisque $I_{i-1} \cup I_i$ est connexe et p est continu. Donc, χ is an arc. Soit $\chi = (x_i)_{i=0}^{r}$ $(r \geqslant 0)$ un arc. Si $r = 0$, le chemin constant p défini par $p([0,1]) = \{x_0\}$ a pour trace χ. Si $r = 1$, du lemme 6.1.3 et de sa preuve, on déduit qu'il existe un chemin régulier de x_0 à x_1. Si $r \geqslant 2$, la concaténation $p_1 \dots p_r$ des chemins réguliers p_i de x_{i-1} à x_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ est un chemin de trace χ et on peut facilement voir, de par la définition même de la concaténation, que la concaténation de chemins réguliers est un chemin régulier. □

Le lemme ci-dessous donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction constante par morceaux soit continue, c'est-à-dire soit un chemin. Le symbole $\asymp$ désigne la comparabilité dans un EPO (voir l'annexe B).

Lemme 6.2.3. *Une fonction constante par morceaux $p = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ est un chemin dans X si et seulement si pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, $x_i \asymp x_{i+1}$ et $x_i \leq x_{i+1} \Leftrightarrow \sup(I_i) \in I_i$.*

Démonstration. Supposons que p soit un chemin fini. Soit $i \in [\![0, r-1]\!]$. De la proposition 6.2.2, nous obtenons $x_i \asymp x_{i+1}$. Si $x_i \leq x_{i+1}$, alors $x_i \notin {x_{i+1}}^{\uparrow}$ (car, quand nous écrivons $p = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$, nous avons $x_i \neq x_{i+1}$ par convention). Donc, l'ouvert $p^{-1}({x_{i+1}}^{\uparrow})$ inclut l'intervalle I_{i+1} mais pas l'intervalle I_i. On en déduit que $\inf(I_{i+1}) = \sup(I_i)$ n'est pas dans I_{i+1}, c'est-à-dire $\sup(I_i) \in I_i$. Si l'inegalité $x_i \leq x_{i+1}$ est fausse, alors $x_{i+1} \notin {x_i}^{\uparrow}$ et l'ouvert $p^{-1}({x_i}^{\uparrow})$ inclut l'intervalle I_i mais pas l'intervalle I_{i+1}. Ainsi, $\sup(I_i)$ n'est pas dans I_i. Par conséquent, nous avons l'équivalence $x_i \leq x_{i+1} \Leftrightarrow \sup(I_i) \in I_i$. Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $s \geqslant 0$ tel que toute fonction $\sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ constante par morceaux avec $r \leqslant s$ est continue quand, pour tout $i \in [\![0, r-1]\!]$, $x_i \asymp x_{i+1}$ et $x_i \leq x_{i+1} \Leftrightarrow \sup(I_i) \in I_i$. Soit $p = \sum_{i=0}^{s+1} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ une fonction constante par morceaux telle que, pour tout $i \in [0, s]$, $x_i \asymp x_{i+1}$ et $x_i \leq x_{i+1} \Leftrightarrow \sup(I_i) \in I_i$. Clairement, pour tout $i \in [0, s-1]$, $x_i \asymp x_{i+1}$ et $x_i \leq x_{i+1} \Leftrightarrow \sup(I_i) \in I_i$ donc la fonction constante par morceaux $p' = \sum_{i=0}^{s-1} x_i \mathbf{1}_{I_i} + x_s \mathbf{1}_{I_s \cup I_{s+1}}$ est continue. Soit U un ouvert dans X. Si $x_s, x_{s+1} \notin U$, ou $x_s, x_{s+1} \in U$, alors $p^{-1}(U) = p'^{-1}(U)$ est ouvert. Si $x_s \in U$ et $x_{s+1} \notin U$, alors nécessairement l'inégalité $x_s \leq x_{s+1}$ est fausse ce qui implique que $\sup(I_s) \notin I_s$. Il vient que I_{s+1} est un fermé et $p^{-1}(U) = p'^{-1}(U) \setminus I_{s+1}$ est ouvert. Si $x_s \notin U$ et $x_{s+1} \in U$ alors, puisque x_s et x_{s+1} sont comparables, $x_s \leq x_{s+1}$ et, par hypothèse, $\sup(I_s) \in I_s$. On en déduit que I_{s+1} est ouvert et $p^{-1}(U) = p'^{-1}(U) \cup I_{s+1}$ est ouvert. Comme, dans chaque cas, la préimage d'un ouvert est un ouvert, p est continue. En observant que, si $s = 0$, la fonction p est constante et par suite continue, nous pouvons conclure par induction. □

Le théorème 6.2.4 est le principal résultat de cette section. Il affirme que tout chemin p dans un EPO est équivalent à un chemin fini dont la trace est « très proche » de l'image de p. Ainsi, ce théorème est le premier lien entre la notion fonctionnelle de chemin et celle, discrète, d'arc.

Théorème 6.2.4. *Pour tout $x, y \in X$ et tout chemin p de x à y, il existe un chemin fini régulier minimal de x à y, p', tel que :*
- *p' est inférieur à p ;*
- *la trace de p' est incluse dans l'image de p ;*
- *dans chaque intervalle I de la suite d'intervalles de p', il y a un réel t tel que $p'(t) = p(t)$.*

Démonstration. Soit p un chemin de x à y dans X. Pour tout $t \in [0,1]$, $p^{-1}(p(t)^{\uparrow})$ est un ouvert qui contient t. Soit J_t la composante connexe de $p^{-1}(p(t)^{\uparrow})$ contenant t (J_t est un intervalle ouvert de $[0,1]$). Comme $[0,1]$ est compact et la famille $(J_t)_{t \in [0,1]}$ est un recouvrement d'ouverts de $[0,1]$, il existe une famille finie A de $[0,1]$, telle que $(J_t)_{t \in A}$ recouvre $[0,1]$. Si, pour certains couples $t, t' \in A$, $J_t \cap J_{t'} \neq \emptyset$ et $p(t) \leq p(t')$, nous enlevons t' de A et nous remplaçons J_t par $J_t \cup J_{t'}$ de sorte que nous pouvons maintenant affirmer que $J_t \cap J_{t'} \neq \emptyset \Rightarrow p(t) \nless p(t')$ (notons que cela implique que t' ne peut pas appartenir à J_t). Soit $(t_i)_{i=0}^r$ la suite strictement ordonnée des réels de A (où r est le cardinal de A moins un). Puisque quels que soient t et t' on a $t' \notin J_t$, les suites $(\inf(J_{t_i}))_{i=0}^r$ et $(\sup(J_{t_i}))_{i=0}^r$ sont strictement croissantes et $J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i} \neq \emptyset$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, nous avons $J_{t_{i-1}} \cap J_{t_{i+1}} = \emptyset$ pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$. Finalement, pour chaque entier i de l'intervalle $[\![1, r]\!]$, nous choisissons un réel w_i dans $J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$ et nous posons $w_0 = -\infty$, $w_{r+1} = +\infty$, $p(w_0) = x$, $p(w_{r+1}) = y$. Nous avons en particulier, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p(t_{i-1}) < p(w_i)$ et $p(t_i) < p(w_i)$. Nous posons $J_{w_0} = \{0\} \cup [0, \frac{t_0}{2}[$ (autrement dit $J_{w_0} = \{0\}$ si $t_0 = 0$ et $J_{w_0} = [0, \frac{t_0}{2}[$ sinon), $J_{w_{r+1}} = \{1\} \cup]\frac{t_r+1}{2}, 1]$ et, pour $i \in [\![1, r]\!]$, si $\overline{J_{w_i}} \not\subseteq J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$, nous remplaçons J_{w_i} par un intervalle ouvert J tel que $w_i \in J \subset \overline{J} \subset J_{w_i} \cap J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$ (voir la figure 6.1). Nous définissons maintenant la fonction $p' : [0,1] \to p([0,1])$ par :

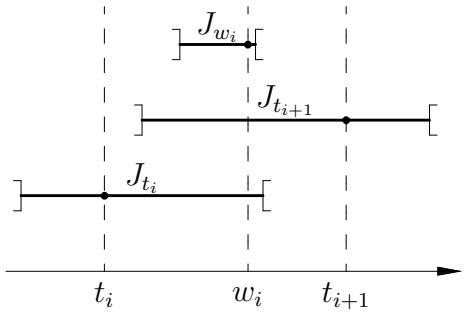


FIGURE 6.1 – Preuve du théorème 6.2.4. Pour tout t de l'intervalle J_a, on a $p(t) \geq p(a)$. Les faces $p(t_i)$ et $p(t_{i+1})$ ne sont pas comparables. Par contre, puisque w_i appartient à la fois à J_{t_i} et à $J_{t_{i+1}}$, on a $p(t_i) \leq p(w_i) \geq p(t_{i+1})$.

$$p'(t) = \begin{cases} p(w_i) & \text{si} \quad t \in J_{w_i} \ (0 \leqslant i \leqslant r+1), \\ p(t_i) & \text{si} \quad t \in [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})] \ (0 \leqslant i \leqslant r), \end{cases}$$

Puisque $[\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})] \subset J_{t_i}$ et, pour tous $t \in [0,1]$ et $u \in J_t$, $p(t) \leq p(u)$, nous avons clairement $p' \leq p$. De plus, p' est constante par morceaux. Nous avons dit auparavant que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $p(t_{i-1}) < p(w_i)$ et $p(t_i) < p(w_i)$. Donc, afin de prouver la minimalité de p' et, grâce au lemme 6.2.3, sa continuité, nous devons encore examiner ses extrémités, c'est-à-dire, comparer $p(w_0)$ avec $p(t_0)$ et $p(t_r)$ avec $p(w_{r+1})$. Si $p(t_0) = p(w_0) = x$, alors $p'(t) = p(t_0) = x$ sur $[0, \inf(J_{w_1})]$, sinon $p(t_0) < p(w_0)$ car $0 \in J_{t_0}$ et $p(0) = p(w_0) = x$. De la même façon, si $p(t_r) = p(w_{r+1}) = y$, alors $p'(t) = p(t_r) = y$ sur $[\sup(J_{t_r}), 1]$, sinon $p(t_r) < p(w_{r+1})$ car $1 \in J_{t_r}$ et $p(1) = p(w_{r+1}) = y$. Maintenant, nous pouvons conclure que p' est un chemin fini minimal de x à y. Comme pour tout

$i \in [\![1, r]\!]$, $\overline{J_{w_i}} \subset J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$, nous avons $\emptyset \subset]\sup(J_{i-1}), \inf(J_{i+1})[\subset [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})]$ et p' est régulier. Puisque $w_i \in J_{w_i}$ et $t_i \in [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})]$ (car $t_i \notin J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$ et $t_i \notin J_{t_i} \cap J_{t_{i+1}}$), dans chaque intervalle I de la suite d'intervalles de p', il existe un élément t tel que $p'(t) = p(t)$. □

Il n'y a pas d'espoir de trouver dans le cas général des chemins finis plus grand qu'un chemin donné. Par exemple, considérons l'EPO $X = \{x, y, z\}$ où $x \leq y, x \leq z$ et $y \nleq z$ (X peut être obtenu par exemple comme sous-ensemble de l'espace $\mathbb{Z}^n$ muni de l'ordre de spécialisation de la topologie de Khalimsky). Soit $p : [0, 1] \to X$ la fonction définie par $p(t) = x$ si t appartient à l'ensemble de Cantor C (*i.e.*, t a une écriture en base 3 sans chiffre « 1 »), $p(t) = y$ si $t \notin C$ et le premier « 1 » dans une écriture de t en base 3 est en position impaire après la virgule, $p(t) = z$ si $t \notin C$ et le premier « 1 » dans une écriture de t en base 3 est en position paire après la virgule. La fonction p est continue car $p^{-1}(\{y\}) =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[\cup]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}[\cup]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}[\cup]\frac{19}{27}, \frac{20}{27}[\cup]\frac{25}{27}, \frac{26}{27}[\cup \ldots$ est ouvert et $p^{-1}(\{z\}) =]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\cup \ldots$ est ouvert. Or, tout ouvert de $[0, 1]$ contenant 0 contient des nombre réels avec une écriture en base 3 dont le premier « 1 » est en position paire ou impaire. Ainsi, un chemin fini plus grand que p devrait avoir une valeur près de 0 plus grande que y et z. Une telle valeur n'existe pas dans X. Donc, il n'existe pas de chemin fini supérieur à p dans X.

Les deux lemmes techniques suivants et la proposition 6.2.7 seront utilisés dans les preuves de la proposition 6.2.11 et du théorème 6.2.12.

Lemme 6.2.5. *Pour tous $x, y \in X$ et tous chemins p_1, p_2, p_3 de x à y tels que $p_1 \leq p_2$ et $p_3 \leq p_2$, il existe trois chemins finis de x à y, $p'_1 \leq p_1, p'_2 \leq p_2, p'_3 \leq p_3$, tels que $p'_1 \leq p'_2$ et $p'_3 \leq p'_2$.*

Démonstration. La preuve est voisine de celle du théorème 6.2.4. Cependant, nous avons besoin de faire quelques changements pour obtenir les inégalités souhaitées. Pour tout $t \in [0, 1]$, définissons maintenant J_t comme un intervalle contenant t et inclus dans $p_1^{-1}(p_1(t)^{\uparrow}) \cap p_2^{-1}(p_2(t)^{\uparrow}) \cap p_3^{-1}(p_3(t)^{\uparrow})$. L'ensemble fini A est tel que $(J_t)_{t \in A}$ est un recouvrement minimal de $[0, 1]$ (pour tout sous-ensemble strict B de A, $(J_t)_{t \in B}$ ne recouvre pas $[0, 1]$) et les suites $(t_i)_{i=0}^r$, $(w_i)_{i=0}^r$ sont définies comme dans la preuve du théorème 6.2.4. Notons qu'il n'est plus possible d'imposer que $t_{i-1}, t_i \notin J_{t_{i-1}} \cap J_{t_i}$ et par conséquent, il est possible que $p(t_{i-1}) = p(w_i)$ ou $p(t_i) = p(w_i)$. Les fonctions p'_k, $k \in \{1, 2, 3\}$, sont définies par :

$$p'_k(t) = \begin{cases} p_k(w_i) & \text{si} \quad t \in J_{w_i} \ (0 \leqslant i \leqslant r+1), \\ p_k(t_i) & \text{si} \quad t \in [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})] \ (0 \leqslant i \leqslant r). \end{cases}$$

Manifestement, nous avons toujours $p'_k \leq p_k$ pour chaque $k \in \{1, 2, 3\}$ et, pour les trois fonctions, la preuve de la continuité n'a pas besoin d'être modifiée (sauf que nous remplaçons $p(t_{i-1}) < p(w_i)$ et $p(t_i) < p(w_i)$ par $p(t_{i-1}) \leq p(w_i)$ et $p(t_i) \leq p(w_i)$). De plus, pour tout réel t de l'intervalle $[0, 1]$, nous avons $t \in J_{w_i}$ pour un certain $i \in [\![0, r+1]\!]$ ou $t \in [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})]$ pour un certain $i \in [\![0, r]\!]$. Si, par exemple, $t \in J_{w_i}$, on a $p'_1(t) = p_1(w_i) \leq p_2(w_i) = p'_2(t)$ et, de même, $p'_3(t) \leq p'_2(t)$. Le cas $t \in [\sup(J_{w_i}), \inf(J_{w_{i+1}})]$ est similaire. Donc, les inégalités $p'_1 \leq p'_2$ et $p'_3 \leq p'_2$ sont vérifiées. □

Lemme 6.2.6.

- *Soit p un chemin fini. Il existe un chemin fini régulier p' ayant la même trace que p et inférieur à celui-ci.*
- *Soit $p_1 \leq p_2$ deux chemins finis. Il existe deux chemins finis réguliers p'_1, $p'_1 \leq p_1$, et p'_2, $p'_2 \leq p_2$, ayant respectivement les mêmes traces que p_1 et p_2 et tels que $p'_1 \leq p'_2$.*

Démonstration.

– Soit p un chemin fini non régulier. Soit $u \in [0,1]$ tel que $\{u\}$ est un intervalle de la suite d'intervalles de p. On note I, J les intervalles avant et après $\{u\}$ dans la suite d'intervalles de p (si $u = 0$ ou $u = 1$, nous posons $I = \emptyset$ ou $J = \emptyset$). Soit x le point de X tel que $p(u) = x$. D'après le lemme 6.2.3, x est inférieur aux valeurs de p sur les intervalles I et J (car $\{u\}$ est un intervalle fermé). Par ailleurs, p étant continu, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $p\,(]u-\varepsilon, u+\varepsilon[) \subseteq x^{\uparrow}$ et nous pouvons choisir ε tel que $]u-\varepsilon, u[\cap[0,1] \subseteq I,]u, u+\varepsilon[\cap[0,1]) \subseteq J$. Soit $p_x^\varepsilon : [0,1] \to X$, la fonction définie par $p_x^\varepsilon(t) = x$ si $t \in [u - \frac{\varepsilon}{2}, u + \frac{\varepsilon}{2}]$ et $p_x^\varepsilon(t) = p(t)$ sinon. Il est clair que $p_x^\varepsilon \leq p$ et, du lemme 6.2.3, nous déduisons que p_x^ε est un chemin fini (car p est lui-même un chemin fini) qui a la même trace que p. De cette façon, nous pouvons retirer tous les singletons de la suite d'intervalles de p pour construire un chemin régulier $p' \leq p$ ayant la même trace que p.

– Soit $p_1 \leq p_2$ deux chemins finis. Grâce à la première partie de la preuve, nous savons qu'il existe un chemin fini régulier $p_1' \leq p_1 \leq p_2$. Nous modifions légèrement la construction du chemin p' ci-dessus afin d'obtenir un chemin p_2' tel que $p_1' \leq p_2'$. Soit $u \in [0,1]$ tel que $\{u\}$ est un intervalle de la suite d'intervalles de p_2 et I_2, J_2 les intervalles avant et après $\{u\}$ dans cette suite d'intervalles (si $u = 0$, ou $u = 1$, nous posons $I_2 = \emptyset$ ou $J_2 = \emptyset$). Soit $x = p(u)$ et ε un réel strictement positif tel que $p\,(]u-\varepsilon, u+\varepsilon[) \subseteq x^{\uparrow}$, $]u-\varepsilon, u[\cap[0,1] \subseteq I,]u, u+\varepsilon[\cap[0,1]) \subseteq J$ et, soit $]u-\varepsilon, u]$, soit $[u, u+\varepsilon[$ est inclus dans un intervalle de la suite d'intervalles de p_1' (un tel choix est possible car p_1' est regulier). Supposons, par exemple, que $[u, u+\varepsilon[$ est inclus dans un intervalle de la suite d'intervalle de p_1' (l'autre cas est similaire) et par conséquent $u \neq 1$, $J \neq \emptyset$, et il existe un point $y \leq x$ (car $p_1' \leq p_2$) dans X tel que $p_1'([u, u+\varepsilon[) = \{y\}$. Posons $p_x^\varepsilon : [0,1] \to X$, la fonction définie par $p_x^\varepsilon(t) = x$ si $t \in [u, u+\frac{\varepsilon}{2}]$ et $p_x^\varepsilon(t) = p_2(t)$ sinon. Comme dans la première partie de la preuve, nous obtenons que p_x^ε est continu et inférieur ou égal à p_2. De plus, nous avons aussi $p_1' \leq p_x^\varepsilon$. En faisant successivement cette construction pour tous les singletons de la suite d'intervalles de p_2, nous obtenons un chemin régulier p_2' ayant la même trace que p_2 et tel que $p_1' \leq p_2' \leq p_2$. □

Proposition 6.2.7. *Les composantes connexes de $C([0,1], X)$ (resp. $C([0,1], X)_\star$) sont les classes d'homotopie de $C([0,1], X)$ (resp. $C([0,1], X)_\star$). De plus, si f et g sont deux chemins finis réguliers homotopes dans X, il existe un arc de f à g dans $C([0,1], X)$ ne comportant que des chemins finis réguliers.*

Démonstration. Nous avons déjà montré avec le corollaire 6.1.7 que les composantes connexes de l'EPO $C([0,1], X)$ sont incluses dans les classes d'homotopies de $C([0,1], X)$. Réciproquement, soit $h : [0,1]\times[0,1] \to X$ une homotopie entre deux fonctions f et g de $C([0,1], X)$ (resp. avec $h(0,t) = x_0$ et $h(1,t) = x_1$ pour tout $t \in [0,1]$). Soit $t \in [0,1]$. Comme h est continue, pour tout $y \in [0,1]$, il existe des intervalles ouverts $V_y \subseteq [0,1], I_y \subseteq [0,1]$ tels que $y \in V_y, t \in I_y$ et $h(V_y \times I_y) \subseteq h(y,t)^{\uparrow}$. La compacité de $[0,1]$ implique qu'il existe un sous-espace fini A de $[0,1]$ tel que $\{V_y\}_{y\in A}$ est un recouvrement fini minimal de $[0,1]$. Comme dans la preuve du théorème 6.2.4, on peut supposer que si deux intervalles V_y et V_z du recouvrement fini s'intersectent, alors $h(y,t)$ et $h(z,t)$ ne sont pas comparables : si, par exemple, $h(y,t) \leq h(z,t)$, on remplace V_y par $V_y \cup V_z$, I_y par $I_y \cap Y_z$ et on supprime V_z du recouvrement fini. À nouveau comme dans la preuve du théorème 6.2.4, nous choisissons un réel w dans chaque intersection $V_y \cap V_z$ non vide ($y, z \in A$) et nous restreignons l'intervalle V_w de façon à ce que son adhérence soit incluse dans $V_y \cap V_z$. Les points w_0, w_{r+1}, avec $r = \mathrm{Card}(A) - 1$, et les intervalles V_{w_0}, $V_{w_{r+1}}$ sont définis comme dans la preuve du théorème 6.2.4 (en posant $x = h(0,t)$

et $y = h(1,t)$). On note B la réunion de A et de l'ensemble des points w_i, $i \in [\![0, r+1]\!]$. Enfin, on définit la fonction $h_t : [0,1] \to X$ comme la fonction p' de la preuve du théorème (en remplaçant p par $h(.,t)$) et on pose $J_t = \bigcap_{y \in B} I_y$. J_t est un intervalle ouvert de $[0,1]$ contenant t. En particulier, $h_t \leq h(.,t)$ et, pour tout $y \in B$, on a $h_t(y) = h(y,t)$. De plus, par définition des intervalles V_y et I_y, et par définition de la fonction h_t, pour tout $u \in J_t, z \in [0,1]$, il existe $y \in B$, $z \in V_y$, $h_t(z) = h_t(y)$ et $h(z,u) \in h(V_y \times J_t) \subseteq h(V_y \times I_y) \subseteq h(y,t)^{\uparrow} = h_t(y)^{\uparrow}$. Autrement dit, on a $h_t \leq h(.,u)$ pour tout $u \in J_t$. Du recouvrement de $[0,1]$ par les intervalles ouverts J_t, $t \in [0,1]$, on extrait un recouvrement fini minimal $(J_t)_{t \in C}$ (C est une partie finie de $[0,1]$). Posons $C = \{t_{2i-1}\}_{1 \leqslant i \leqslant s}$ avec $s \in \mathbb{N}$ et $t_{2i+1} < t_{2j+1}$ si $i < j$. Dans chaque intervalle ouvert $J_{t_{2i-1}} \cap J_{t_{2i+1}}$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, on choisit un réel t_{2i} et on pose $h_{t_{2i}} = h(.,t_{2i})$. On pose également $h_0 = f$ et $h_{2s} = g$. La suite de chemins $(h_{t_i})_{0 \leqslant i \leqslant 2s}$ est un arc dans $C([0,1],X)$ (resp. $C([0,1],X)_\star$) car, d'après la construction des chemins h_t, t impair, pour tout $i \in [\![0, 2s]\!]$ $h_{2i} \geq h_{2i+1} \leq h_{2i+2}$ (si deux chemins successifs sont égaux, on supprime l'un des deux). Nous pouvons enfin conclure qu'il existe un arc dans $C([0,1],X)$ (resp. $C([0,1],X)_\star$) de f à g et donc que les fonctions f et g sont dans la même composante connexe de $C([0,1],X)$ (resp. $C([0,1],X)_\star$). De plus, dans l'arc $(h_{t_i})_{i \in [\![0,2s]\!]}$, tous les termes d'indice impairs sont, par construction, des chemins finis réguliers minimaux. Si un terme d'indice i pair, $2 \leq i \leq 2s-2$, n'est pas un chemin fini régulier, grâce aux lemmes 6.2.5 et 6.2.6, il est possible de remplacer h_{i-1}, h_i et h_{i+1} par trois chemins finis réguliers h'_{i-1}, h'_i et h'_{i+1} tels que $h'_{i-1} \leq h_{i-1}$, $h'_i \leq h_i$, $h'_{i+1} \leq h_{i+1}$ et $h'_{i-1} \leq h'_i \geq h'_{i+1}$. □

Nous donnons ci-dessous une application du théorème 6.2.4 qui complète un résultat de Stong (propriété 4.2.3).

Proposition 6.2.8. *Soit X un EPO et x un point de X. Le sous-espace $X \setminus \{x\}$ est un rétracte par déformation forte de X si et seulement si x est unipolaire.*

Démonstration. Supposons que $Y = X \setminus \{x\}$ soit un rétracte par déformation fort de X. Alors, il existe une homotopie $h : X \times [0,1] \to X$ telle que $h(y,t) = y$ pour tout $(y,t) \in Y \times [0,1]$, $h(x,0) = x$ et $h(x,1) \neq x$. La fonction $h(x,.) : [0,1] \to X$ est un chemin dans X de x à $h(x,1)$. Donc, en vertu du théorème 6.2.4, il existe un chemin fini régulier $p = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$, $r \geqslant 1$, de x à $h(x,1)$, inférieur à $h(x,.)$ et tel que dans tout intervalle I de la suite d'intervalles de p, il existe un élément t tel que $p(t) = h(x,t)$. Soit $t_1 \in I_1$ verifiant $p(t_1) = h(x,t_1) = x_1$ qui est un élément de Y comparable à x (proposition 6.2.2). La fonction $h(.,t_1) : X \to X$ est continue et, par conséquent, croissante (propriété 6.1.1). Donc, pour tout $y \in Y$, $y < x \Rightarrow y \leq x_1$ et $x < y \Rightarrow x_1 \leq y$ (car $h(.,t_1)$ est la fonction identité sur Y). Comme x_1 est comparable à x, nous en concluons que x est unipolaire (bas-unipolaire si $x_1 \leq x$, haut-unipolaire si $x \leq x_1$). La réciproque est la propriété 4.2.3 (démontrée par Stong). □

6.2.2 Arcs

Le théorème 6.2.4 signifie que chaque chemin dans un EPO est homotope à un chemin fini dont la trace est un arc. En traitement d'images digitales, on s'intéresse généralement aux arcs et on ignore l'aspect fonctionnel de la définition d'un chemin ou alors on lie les arcs avec les chemins d'un analogue continu. Dans cette section, nous portons notre attention sur les relations entre les arcs et les chemins de l'EPO lui-même.

Nous pouvons voir la trace (d'un chemin fini) comme une fonction de l'ensemble des chemins finis sur celui des arcs (proposition 6.2.2). Il est évident que cette fonction n'est pas injective. La proposition suivante précise les liens entre les antécédents d'un même arc.

Proposition 6.2.9. *Deux chemins finis dans X ayant la même trace sont équivalents.*

Démonstration. Soit $p = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ et $p' = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{J_i}$ deux chemins dans X ayant la même trace (r est un entier naturel). Pour chaque $i \in [\![0, r]\!]$, nous désignons par α_i et β_i (resp. α'_i et β'_i) les bornes inférieure et supérieure des intervalles I_i (resp. J_i). Grâce au lemme 6.2.3, nous savons que, pour chaque $i \in [\![0, r]\!]$, les intervalles I_i et J_i ont la même forme : $\alpha_i \in I_i \Leftrightarrow \alpha'_i \in J_i$ et $\beta_i \in I_i \Leftrightarrow \beta'_i \in J_i$. Pour tout $u \in [0, 1]$, nous notons $K_{i,u}$ l'intervalle ayant la même forme que I_i et J_i et dont les bornes sont $(1-u)\alpha_i + u\alpha'_i$ et $(1-u)\beta_i + u\beta'_i$. Du lemme 6.2.3 de nouveau, nous déduisons que la fonction constante par morceaux $p_u = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{K_{i,u}}$ est un chemin fini. Soit $h : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ la fonction définie par $h(t, u) = p_u(t)$. Nous avons $h(t, 0) = p(t)$ et $h(t, 1) = p'(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$. Il est facile de voir que, pour tout ouvert U, $h^{-1}(U)$ est une union de trapèzes ouverts, inclus dans $[0, 1] \times [0, 1]$, dont les bases sont les segments $p^{-1}(U) \times \{0\}$ et $p'^{-1}(U) \times \{1\}$. Il vient que h est continue : p et p' sont équivalents. □

Maintenant, une nouvelle question se pose : s'il n'est pas difficile de voir que la réciproque de la proposition précédente est fausse (à moins que X ne soit un singleton, il y a dans X des chemins finis équivalents qui ont des traces distinctes), que peut-on dire des traces de deux chemins finis homotopes ? Pour répondre à cette question, nous avons besoin d'introduire des modifications élémentaires sur les arcs qui sont illustrées par la figure 6.2 (voir aussi Cointepas *et al.* 1998, Kong 2003).

Définition 6.2.10 (étirement élémentaire, déformation)**.** *Un arc $\chi = (x_i)_{i=0}^{r}$ ($r \geqslant 2$) est un* étirement élémentaire *d'un arc χ' s'il existe $j \in [\![1, r-1]\!]$ tel que $\chi' = (x_i)_{i=0, i\neq j}^{r}$, ou bien $x_{j-1} = x_{j+1}$ et $\chi' = (x_i)_{i=0, i\neq j-1, i\neq j}^{r}$. Un arc χ est une* déformation *d'un arc χ' s'il existe une suite $(\chi_i)_{i=0}^{s}$ d'arcs dans X tels que $\chi_0 = \chi, \chi_s = \chi'$ et pour tout $i \in [1, s]$, soit χ_i est un étirement élémentaire de χ_{i-1}, soit χ_{i-1} est un étirement élémentaire de χ_i.*

Nous appellerons également étirement élémentaire la transformation entre un arc et un étirement élémentaire de cet arc. Observons que si $\chi = (x_i)_{i=0}^{r}$ est un étirement élémentaire de $\chi' = (x_i)_{i=0, i\neq j}^{r}$, nécessairement les trois points x_{j-1}, x_j, x_{j+1} sont mutuellement comparables. Barmak et Minian (2007) définissent une notion similaire qui conduit aux mêmes déformations : un arc $\chi = (x_i)_{i=0}^{r}$ ($r \geqslant 2$) est *près* (« close to ») d'un arc χ' s'il existe trois entiers $j \leqslant k \leqslant j'$ dans l'intervalle $[\![1, r-1]\!]$ tels que $\chi' = (x_i)_{i=0, i\notin[j,j']}^{r}$ et $x_j \leq \ldots \leq x_k \geq \ldots \geq x_{j'}$ ou $x_j \geq \ldots \geq x_k \leq \ldots \leq x_{j'}$.

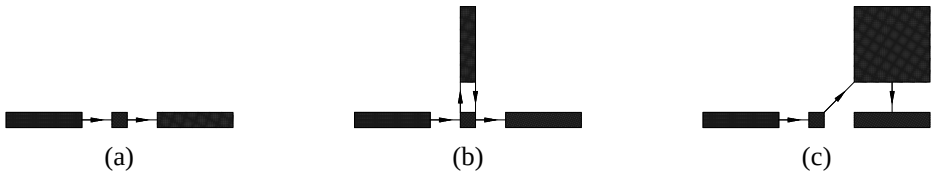


FIGURE 6.2 – Étirements élémentaires. (a) Un arc χ dans $\mathbb{F}^2$. Les flèches indiquent l'ordre dans lequel les points de l'espace sont traversés. (b–c) Deux étirements élémentaires de χ.

Proposition 6.2.11. *Soit p, p' deux chemins finis ayant pour traces χ et χ'. Si χ' est une déformation de χ, alors p et p' sont équivalents.*

Démonstration. Soit p et p' deux chemins finis dans X ayant pour traces χ et χ'. Puisqu'une déformation est une suite d'étirements élémentaires et l'équivalence de chemins est une relation d'équivalence, il est suffisant de prouver le résultat pour un étirement élémentaire. Nous supposons donc que χ' est un étirement élémentaire de χ et, grâce au lemme 6.2.6, nous pouvons aussi supposer que p et p' sont réguliers. Posons $p = \sum_{i=0,i\neq j}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ ou $\sum_{i=0,i\neq j-1,i\neq j}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ et $p' = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{J_i}$ ($2 \leqslant r$ et $1 \leqslant j \leqslant r-1$). Nous allons définir un chemin fini p_1 ayant la même trace que p et comparable à p'. Si $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$ ou $x_{j+1} < x_j < x_{j-1}$, nous posons $p_1(t) = p'(t)$ si $t \in \bigcup_{i\neq j} J_i$ et $p_1(J_j) = \{x_{j-1}\}$. Sinon ($x_j < x_{j-1}$ et $x_j < x_{j+1}$, ou $x_{j-1} < x_j$ et $x_{j+1} < x_j$), soit α et β les bornes inférieures et supérieures de J_j ($\alpha \neq \beta$ car p' est régulier) et $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Nous posons $p_1(t) = p'(t)$ si $t \in \bigcup_{i\neq j} J_i$, $p_1(t) = x_{j-1}$ si $t \in [\alpha, \gamma[$, $p_1(t) = x_{j+1}$ si $t \in]\gamma, \beta]$ et $p_1(\gamma) = x_{j-1}$ si $x_{j-1} \leq x_{j+1}$, $p_1(\gamma) = x_{j+1}$ si $x_{j+1} \leq x_{j-1}$ (voir la figure 6.3). Dans chaque cas, nous déduisons du lemme 6.2.3 que p_1 est un chemin. Comme les traces de p_1 et p sont les mêmes, p_1 et p sont équivalents. De plus, il est facile de voir que $p_1 \leq p'$ ou $p' \leq p_1$. Donc, p_1 et p' sont équivalents et, par transitivité, p et p' sont équivalents. □

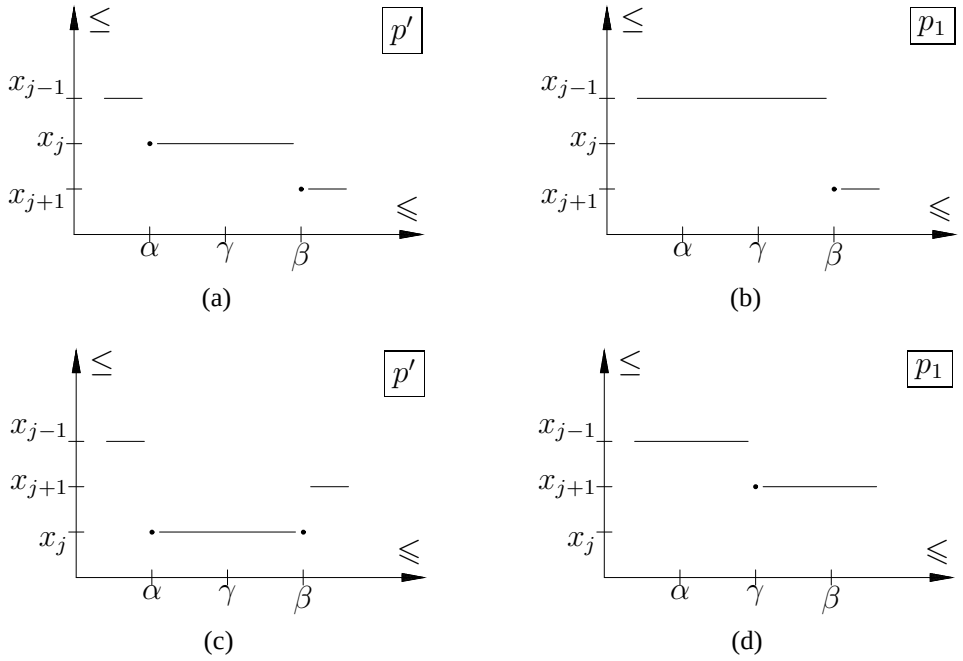


FIGURE 6.3 – Preuve de la proposition 6.2.11. (a–b) Cas $x_{j+1} < x_j < x_{j-1}$ (le cas $x_{j-1} < x_j < x_{j+1}$ est similaire). (c–d) Cas $x_{j-1} > x_j < x_{j+1}$ (le cas $x_{j-1} < x_j > x_{j+1}$ est similaire avec J_j, intervalle ouvert). Dans ce cas, il peut arriver que $x_{j-1} = x_{j+1}$.

Nous pouvons maintenant montrer que la notion de déformation est la contrepartie discrète de la notion continue d'équivalence homotopique.

Théorème 6.2.12. *Deux chemins finis p et p' dans X ayant des traces χ et χ' distinctes sont équivalents si et seulement si χ est une déformation de χ'.*

Démonstration. Soit p et p', $p \neq p'$, deux chemins finis équivalents dans X du point a au point b et $\Pi_{a,b}$ l'EPO des chemins dans X de a à b. Comme p et p' sont équivalents, il existe un arc de p à

p' dans $\Pi_{a,b}$ dont tous les éléments sont des chemins finis réguliers (proposition 6.2.7). Ainsi, pour prouver que la trace de p est une déformation de la trace de p', il est suffisant de le faire pour deux chemins finis de a à b, réguliers et comparables, $q = \sum_{i=0}^{r} x_i \mathbf{1}_{I_i}$ et $q' = \sum_{j=0}^{s} y_j \mathbf{1}_{J_j}$ avec $q \leq q'$ (et $q \neq q'$). Comme les deux chemins sont réguliers, on peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que les intervalles I_i $(0 \leqslant i \leqslant r)$ n'ont pas de borne commune avec les intervalles J_j $(0 \leqslant j \leqslant s)$. Soit $(\alpha_k)_{k=0}^{r+s+1}$ la suite strictement croissante dont les éléments sont les bornes des intervalles I_i et J_j : $\alpha_0 = 0, \alpha_{r+s+1} = 1$ et, pour tout $k \in [\![1, r+s]\!]$, soit q, soit q', mais pas les deux, change de valeur en α_k et aucun autre changement ne se produit. Pour tout $k \in [\![1, r+s]\!]$, nous définissons les fonctions constantes par morceaux q_k et q'_k par $q_k(t) = q'(t)$ si $t < \alpha_k$, $q_k(t) = q(t)$ sinon et $q'_k(t) = q'(t)$ si $t < \frac{\alpha_k+\alpha_{k+1}}{2}$, $q'_k(t) = q(t)$ sinon (les fonctions q_k et q'_k sont représentées sur la figure 6.4 respectivement au voisinage des points α_k et $\frac{\alpha_k+\alpha_{k+1}}{2}$). En particulier, $q_1 = q$ et $q'_{r+s} = q'$ (car $q'(0) = q(0)$ et $q'(1) = q(1)$). Nous appelons χ_k et χ'_k les traces de q_k et q'_k $(k \in [\![1, r+s]\!])$. Du lemme 6.2.3, nous déduisons facilement que les fonctions q_k et q'_k sont des chemins finis de a à b. Nous voulons maintenant prouver que, pour tout $k \in [\![1, r+s]\!]$, soit χ_k (resp. χ_{k+1}) est egal à χ'_k, soit χ_k (resp. χ_{k+1}) est un étirement élémentaire de χ'_k ou l'inverse. La preuve consiste à examiner les 2×4 configurations relatives à q_k et q'_k d'une part et à q'_k et q_{k+1} d'autre part. Ces huit configurations sont représentées sur les figures 6.4 et 6.5. Le lecteur peut vérifier facilement que dans tous les cas, nous avons un étirement ou l'égalité (dans ces figures, nous notons $f(t^-)$ et $f(t^+)$ les valeurs prises par un chemin fini régulier f sur les intervalles $]t-\varepsilon, t[$, $]t, t+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ suffisament petit pour que f soit constant sur chacun de ces intervalles. La partie réciproque de la preuve est apportée par la proposition 6.2.11. □

Pour continuer le parallèlisme entre les chemins et leurs homotopies d'une part et les arcs et leurs déformations d'autre part, nous introduisons maintenant une opération binaire sur les arcs, appelée *produit* et notée « . », définie par $(x_0, \ldots, x_r).(y_0, \ldots, y_s) = (x_0, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s)$. Plus formellement, nous avons la définition suivante.

Définition 6.2.13 (Produit (d'arcs))**.** *Soit $\chi_1 = (x_i)_{i=0}^{r}$ et $\chi_2 = (y_i)_{i=0}^{s}$ $(r, s \geqslant 0)$ deux arcs tels que $x_r = y_0$. Le produit de χ_1 et χ_2 est l'arc noté $\chi_1.\chi_2$ défini par $\chi_1.\chi_2 = (z_i)_{i=0}^{r+s}$ avec $z_i = x_i$ si $i \leqslant r$ et $z_i = y_{i-r}$ si $i \geqslant r$.*

Soit x un point de X. Il est facile de vérifier que « être une déformation de, ou être égal à » est une relation d'équivalence dans l'ensemble des arcs de x à x dans X. Nous notons $[\chi]$ la classe d'équivalence de l'arc χ et $\rho(X, x)$ l'ensemble des classes d'équivalence. Il n'est pas plus difficile de vérifier que cette relation d'équivalence est compatible avec le produit que nous venons de définir : le produit de deux déformations des arcs χ_1 et χ_2 est une déformation de $\chi_1.\chi_2$. Ainsi, nous pouvons définir sans ambiguïté le produit de deux classes d'équivalence par $[\chi_1].[\chi_2] = [\chi_1.\chi_2]$. De plus, $\rho(X, x)$ muni de ce dernier produit est un groupe dont l'élément neutre est $[(x)]$ (la classe d'équivalence de l'arc de x à x de longueur 0) et tel que l'inverse de $[(x_i)_{i=0}^{r}]$ est $[(x_i)_{i=r}^{0}]$.

Théorème 6.2.14. *Soit x un point de X. Le groupe fondamental de X ayant pour point de base x, $\pi_1(X, x)$, est isomorphe au groupe $\rho(X, x)$.*

Démonstration. Grâce au théorème 6.2.4, nous savons qu'il existe des chemins finis dans toutes les classes de $\pi_1(X, x)$ et, grâce au théorème 6.2.12, nous pouvons définir une fonction $\varphi : \pi_1(X, x) \to \rho(X, x)$ par $\varphi([p]) = [\chi]$ où χ est la trace de tout chemin fini équivalent à p. De la proposition 6.2.11,

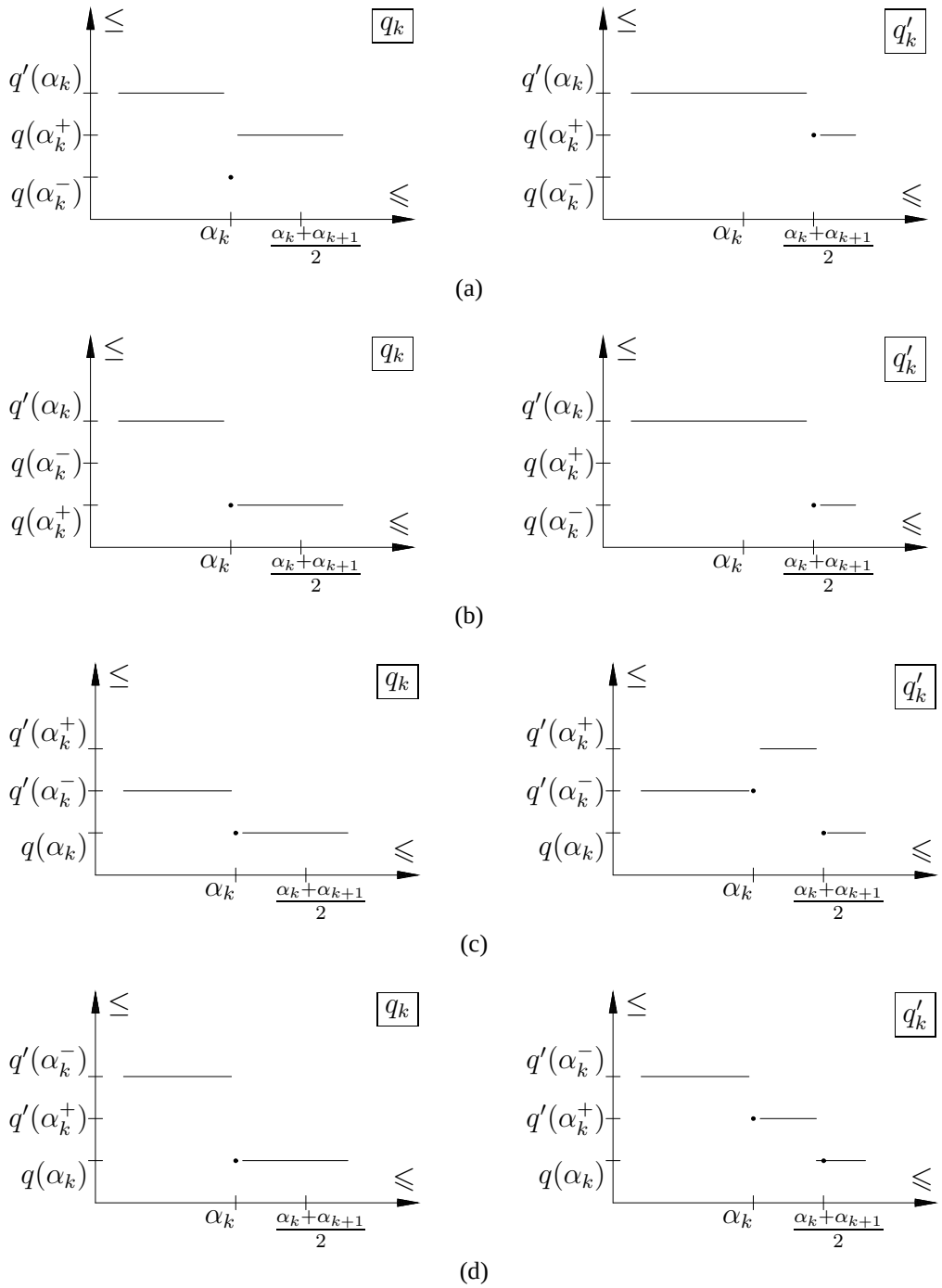


FIGURE 6.4 – Preuve du théorème 6.2.12. Comparaison des chemins χ_k et χ'_k. (a) χ_k est un étirement élémentaire de χ'_k (selon que $q(\alpha_k^+) = q'(\alpha_k)$ ou pas, nous utilisons un des deux cas de la définition d'un étirement élémentaire). (b) $\chi_k = \chi'_k$. (c) χ'_k est un étirement élémentaire de χ_k. (d) Si $q'(\alpha_k^+) \neq q(\alpha_k)$, χ'_k est un étirement élémentaire de χ_k, sinon $\chi_k = \chi'_k$.

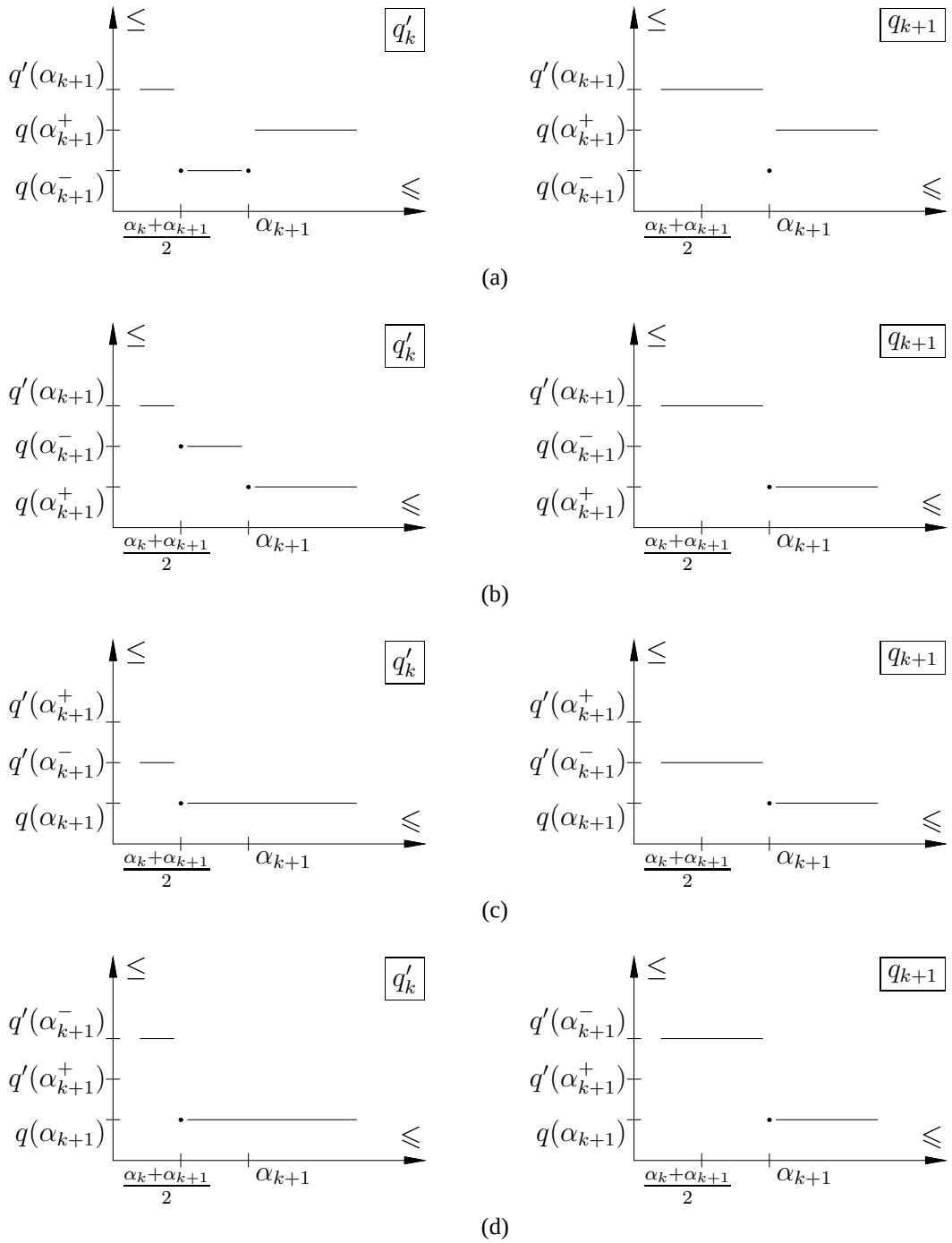


FIGURE 6.5 – Preuve du théorème 6.2.12. Comparaison des chemins χ'_k et χ_{k+1}. (a) $\chi'_k = \chi_{k+1}$. (b) Si $q'(\alpha_k) \neq q(\alpha^-_{k+1})$, χ'_k est un étirement élémentaire de χ_{k+1}, sinon $\chi'_k = \chi_{k+1}$. (c) et (d) $\chi'_k = \chi_{k+1}$.

nous déduisons que φ est injective et de la proposition 6.2.2 nous obtenons que φ est surjective. Enfin, φ est un morphisme car, de manière évidente, la trace du produit de deux chemins finis est le produit des traces de ces deux chemins finis. □

Remarque 6.2.15. *Barmak et Minian (2007) ont démontré le même résultat d'une manière très différente et pour des EPO finis. Ils établissent un isomorphisme entre $\rho(X, x)$ et le groupe des lacets d'arêtes du complexe simplicial $\mathcal{K}(X)$ associé à X (voir section 3.3), puis utilisent l'isomorphisme entre le groupe des lacets d'arêtes d'un complexe simplicial et le groupe fondamental de sa réalisation géométrique (voir l'annexe A.5). Ils concluent en utilisant l'équivalence d'homotopie faible entre $|\mathcal{K}(X)|$ et X obtenue par McCord (1966) (voir section 3.3).*

6.3 Simplicité

Dans la partie traitant des images de label (partie III), nous utiliserons plusieurs notions de point simple parmi celles présentées à la section 4.2 : les paires libres, les points unipolaires et les points β- ou γ-simples (voir les sections 4.2.2 et 4.2.3). Nous établissons ici quelques éléments de comparaison supplémentaires entre ces différentes possibilités (d'autres éléments ont déjà été donnés dans la section 4.2.3). Le principal résultat obtenu est le théorème 6.3.12 qui établit, sous certaines hypothèses, que la β-simplicité vis-à-vis de l'objet entraîne la γ-simplicité vis-à-vis du fond.

6.3.1 Simplicité et dualité

L'étude des relations qu'entretiennent les différents types de points simples avec la dualité est nécessaire pour l'obtention du théorème 6.3.12. Intuitivement, on peut dire que l'échange du premier plan et de l'arrière plan d'une image conduit à échanger les ouverts et les fermés de la topologie et que cela revient à prendre l'ordre dual dans un EPO (voir section 3.3).

Comme un point bas-unipolaire dans un EPO $(X, \leq)$ est un point haut-unipolaire dans l'EPO $(X, \geq)$, et inversement, on peut déduire du corollaire 4.2.7 et de la propriété 4.2.3 le corollaire suivant.

Corollaire 6.3.1. *Un EPO fini $(X, \leq)$ est contractile si et seulement si l'EPO dual $(X, \geq)$ est contractile.*

Du corollaire 6.3.1, nous obtenons immédiatement la proposition suivante.

Proposition 6.3.2. *Soit $(X, \leq)$ un EPO et x un point β-simple de X. Alors, x est β-simple dans l'EPO $(X, \geq)$.*

Comme, de manière évidente, le complexe $\mathcal{K}(X)$ (voir section 3.3) des chaînes d'un EPO $(X, \leq)$ n'est pas modifié si nous prenons l'ordre dual sur X, le théorème 3.3.1 implique que les groupes d'homotopie de l'EPO $(X, \leq)$ sont isomorphes à ceux de son dual $(X, \geq)$. Nous en déduisons la proposition suivante.

Proposition 6.3.3. *Soit X un EPO et x un point γ-simple de X. Alors, x est un point γ-simple de X muni de l'ordre dual et de la topologie duale.*

6.3.2 Complexes et simplicité

Dans toute la section 6.3.2, X est un complexe cubique inclus dans $\mathbb{F}^n$. En particulier, on a $x^{\downarrow} = \{y \in \mathbb{F}^n \mid y \subseteq x\}$ pour tout point $x \in X$. Le symbole $\sqcup$ désigne l'union disjointe.

Lemme 6.3.4. *Soit X un complexe cubique ou simplicial et x une m-face de X ($0 \leq m \leq \dim(X)$).*

(i) Soit y une k-face de x ($0 \leq k \leq m$). Dans $x^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$, il existe exactement $m-k$ faces qui couvrent y et $m-k$ faces couvertes par x.

(ii) Soit x_1, x_2 deux faces de x telles que x couvre x_1 et $x = x_1 \sqcup x_2$. Soit Z l'ensemble des faces de x qui intersectent à la fois x_1 et x_2. La fonction $\theta : Z \to {x_1}^{\downarrow}$ définie par $\theta(z) = z \cap x_1$ est une bijection et $\dim(\theta(z)) = \dim(z) - 1$ pour tout $z \in Z$.

Démonstration.

(i) Si $k = m$, la première assertion du lemme 6.3.4 est triviale. Nous supposons maintenant que $k < m$.

- Si X est un complexe simplicial, il y a $m+1$ sommets dans x et $k+1$ sommets dans y. Donc, il existe exactement $(m+1)-(k+1) = m-k$ faces de x de dimension $k+1$, resp. $m-1$, incluant y : les faces $y \cup \{z\}$, resp. $x \setminus \{z\}$, où z est un sommet appartenant à $x \setminus y$.
- Si X est un n-complexe cubique, nous pouvons poser, sans perte de généralité, $x = \prod_{i=1}^n I_i$ où $I_i \in \mathbb{F}_1^1$ si $i \leqslant m$, $I_i \in \mathbb{F}_0^1$ sinon (voir la section 3.3) et $y = \prod_{i=1}^n J_i$ où $\emptyset \subset J_i \subset I_i$ si $i \leqslant m-k$ et $J_i = I_i$ sinon. Il est évident que les seules $(k+1)$-faces, resp. $(m-1)$-faces, de x incluant y sont les $m-k$ faces z_j, resp. z'_j, $1 \leqslant j \leqslant m-k$ définies par $z_j = \prod_{i=1}^n K_i$, resp. $z'_j = \prod_{i=1}^n K'_i$, avec $K_i = J_i$ si $i \neq j$ et $K_j = I_j$, resp. avec $K'_i = I_i$ if $i \neq j$ et $K_j = J_j$.

(ii)
- Si X est un complexe simplicial, les hypothèses $\dim(x_1) = \dim(x)-1$ et $x = x_1 \sqcup x_2$ entraînent que x_2 est un singleton (une 0-face). Alors, pour tout $z \in Z$, $\theta(z) = z \cap x_1 = z \setminus x_2$. Donc, θ est une bijection dont l'inverse θ^{-1} est définie par $\theta^{-1}(z) = z \cup x_2$. De plus, pour tout $z \in Z$, $\dim(z) > 0$ et le simplexe $z \cap x_1 = z \setminus x_2$ a pour dimension $k-1$.
- Si X est un complexe cubique, l'hypothèse $x = x_1 \sqcup x_2$ entraîne que $\dim(x_2) = \dim(x_1) = m-1$. Comme ci-dessus, nous pouvons supposer que $x = \prod_{i=1}^n I_i$ avec $I_i \in \mathbb{F}_1^1$ si $i \leq m$, $I_i \in \mathbb{F}_0^1$ sinon, $x_1 = \prod_{i=1}^n J_i^1$ et $x_2 = \prod_{i=1}^n J_i^2$ avec $J_i^1 = J_i^2 = I_i$ si $i \neq m$, $\emptyset \subset J_m^1 \subset I_m$ et $J_m^2 = I_m \setminus J_m^1$. On voit alors facilement que $Z = \{\prod_{i=1}^n K_i \mid K_i = I_i \text{ si } i \geq m, \text{ et } \emptyset \subset K_i \subseteq I_i, \text{ sinon}\}$ et $\theta(\prod_{i=1}^n K_i) = \prod_{i=1}^n K'_i$ où $K'_m = J_m^1$ et $K'_i = K_i$ sinon. Donc, θ est bijective. De plus, de manière évidente, $\mathrm{Card}(\{i \mid K'_i \in \mathbb{F}_1^1\}) = \mathrm{Card}(\{i \mid K_i \in \mathbb{F}_1^1\}) - 1$, c'est-à-dire $\dim(\theta(z)) = \dim(z) - 1$. □

Comme conséquence facile du lemme 6.3.4, on a le fait que la frontière $x^{\downarrow\star}$ d'un simplexe ou d'une cellule de $\mathbb{F}^n$ n'est pas contractile car, pour toute k-face y de x, il existe au moins deux $(k+1)$-faces de x incluant y, sauf si y est maximal dans $x^{\downarrow\star}$, et deux $(k-1)$-faces de x incluses dans y, sauf si y est minimal dans $x^{\downarrow\star}$, et par conséquent $x^{\downarrow\star}$ n'a pas de point unipolaire. Ainsi, $x^{\downarrow\star}$ n'est pas contractile (corollaire 4.2.7).

Corollaire 6.3.5. *Soit X un complexe cubique ou simplicial. La frontière d'un point de X n'est pas contractile.*

Définition 6.3.6. *Un EPO X a la* propriété de la sphère percée *si, pour toute paire (x, y) de points de X telle que x couvre y, l'ensemble $x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ est homotopiquement trivial.*

La proposition suivante montre que la propriété de la sphère percée est satisfaite par tout complexe cubique ou simplicial. Nous établissons une version forte de cette propriété qui sera utilisée dans la preuve du théorème 6.3.12. Les étapes de la preuve sont illustrées par la figure 6.6.

Proposition 6.3.7. *Soit X un complexe cubique ou simplicial et x un point de X. Soit y une face de x couverte par x. Soit Y un sous-ensemble de l'adhérence de y incluant y. Alors, $x^{\downarrow\star} \setminus Y$ est contractile.*

Démonstration. Posons $m = \dim(x)$ et $X_0 = x^{\downarrow\star} \setminus Y$ (voir figure 6.6(a–b)). Si $m = 1$, la proposition 6.3.7 est triviale (X_0 est un singleton). Supposons maintenant que $m \geqslant 2$. On note y' la face opposée à y dans $x^{\downarrow}$: $x = y \sqcup y'$. On a $\dim(y') = 0$ si X est un complexe simplicial et $\dim(y') = m-1$ si X est un complexe cubique. La preuve consiste à contracter X_0 sur $\{y'\}$ par suppression de points unipolaires. D'abord, nous retirons les faces de X_0 qui sont sur la frontière de y, dans l'ordre des dimensions décroissantes. Pour toute $(m-2)$-face z de $y^{\downarrow} \setminus Y$, d'après le lemme 6.3.4 il y a deux $(m-1)$-faces de x incluant z dont l'une est y. Donc, z est haut-unipolaire dans X_0 et, grâce aux propriétés 4.2.3 et 4.2.4, nous obtenons que l'ensemble $X_1 = \{z \in X_0 \mid z \notin y^{\downarrow} \text{ ou } \dim(z) < m-2\}$ est un rétracte par déformation forte de X_0. Puisque, en accord avec le lemme 6.3.4, toute $(m-k)$-face de y est couverte par exactement k faces de x et par $k-1$ faces de y, nous pouvons itérativement supprimer de X_0 toutes les faces propres de y avec les mêmes arguments que ceux que nous venons d'utiliser. Ainsi, $X_0 \setminus y^{\downarrow}$ est un rétracte par déformation forte de X_0 (voir figure 6.6(c)). La seconde étape consiste à supprimer les faces de $Z = (X_0 \setminus y^{\downarrow}) \setminus y'^{\downarrow}$ dans l'ordre croissant de leurs dimensions en montrant qu'elles deviennent successivement bas-unipolaires au cours du processus. Remarquons que, puisque $x = y \sqcup y'$, toutes les 0-faces de x sont soit dans y, soit dans y'. Donc il n'y a pas de 0-face dans Z. Notons également que Z est précisément l'ensemble Z du lemme 6.3.4 pour $x_1 = y$ et $x_2 = y'$ si X est un complexe simplicial ou éventuellement $x_1 = y'$ et $x_2 = y$ si X est un complexe cubique. Supposons que nous ayons retiré de Z toutes les faces de dimensions inférieures strictement à k $(1 \leq k \leq m-1)$ et considérons une k-face z de x appartenant à Z. Si X est un complexe cubique, le lemme 6.3.4-*(ii)* assure qu'il existe dans $z^{\downarrow\star}$ exactement une $(k-1)$-face de y', précisément $z \cap y'$, et, si X est un complexe simplicial, on a de manière évidente $z^{\downarrow\star} \cap y'^{\downarrow} = \{y'\}$. Ainsi, z est bas-unipolaire dans $Z_k = \{t \in Z \mid \dim(t) \geq k\} \cup y'^{\downarrow}$ (les ensembles Z_2 et $y'^{\downarrow}$ sont représentés sur la figure 6.6(d-e)). De cette façon, nous pouvons itérativement supprimer toutes les faces de Z ce qui prouve que $y'^{\downarrow}$ est un rétracte par déformation forte de X_0. Comme $y'^{\downarrow}$ est contractile (il possède un maximum, y'), le résultat est établi. □

Corollaire 6.3.8. *Les complexes cubiques et simpliciaux ont la propriété de la sphère percée.*

Remarque 6.3.9. *La proposition 6.3.7 est fausse si nous supprimons l'hypothèse* $\dim(y) = \dim(x)-1$ *et si* $\dim(x) \geqslant 3$. *En effet, quand la dimension m de x est supérieure ou égale à 3, pour toute face $y \in x^{\downarrow}$ avec $0 < \dim(y) < m-1$, l'ensemble $X = x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ n'a pas de point unipolaire : d'une part dans l'espace $\mathbb{F}^n$, toute k-face couvre $2k$ faces et, dans un complexe simplicial, toute k-face couvre $k+1$ faces et, d'autre part, d'après le lemme 6.3.4, toute k-face de $x^{\downarrow\star}$ est couverte par $m-k$ faces de $x^{\downarrow}$. Ainsi, toute k-face, $k \in [\![1, m-1]\!]$, dans X couvre au moins 2 faces et toute k-face, $k \in [\![0, m-2]\!]$, dans X est couverte par au moins 2 faces. Par conséquent, Y est son propre noyau et n'est pas contractile. Un tel ensemble X est représenté sur la figure 6.7(a) dans $\mathbb{F}^3$ avec* $\dim(y) = 1$. *Dans l'espace $\mathbb{F}^3$, quand* $\dim(y) = 0$, *il est facile de vérifier que la suppression des points unipolaires dans X conduit à retirer les 1-faces de $x^{\downarrow}$ incluant y et s'arrête après ces m étapes sur un noyau de*

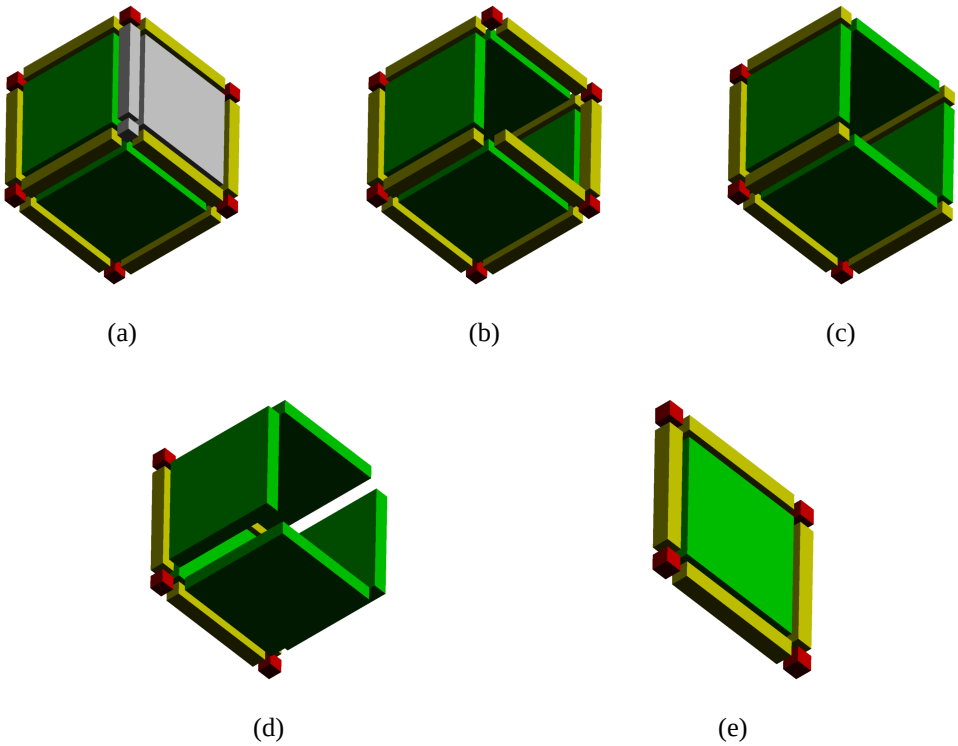


FIGURE 6.6 – Les principales étapes de la preuve de la proposition 6.3.7. (a) L'ensemble $x^{\downarrow\star}$ avec $\dim(x) = 3$. En gris, le sous-ensemble Y (y est la 2-face de Y). (b) L'ensemble $X_0 = x^{\downarrow\star} \setminus Y$. (c) L'ensemble $Z \cup y'^{\downarrow}$. (d) L'ensemble $\{z \in Z \mid \dim(z) \geq 2\} \cup y'^{\downarrow}$. (e) L'ensemble $y'^{\downarrow}$.

Y (voir la figure 6.7-(b)). Par contre, un simplexe de dimension 3 privé de l'une de ses 0-faces est contractile (par suppression des trois 1-faces, puis des trois 2-faces, incluant la 0-face manquante et enfin des faces non maximales restantes).

FIGURE 6.7 – Noyaux des complexes $x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ quand x est une 3-face et y est (a) une 1-face ; (b) une 0-face.

La proposition 6.3.7 peut être exprimée en termes de β-simplicité : soit x un point dans un com-

plexe X muni de l'ordre $\subseteq$, y une face propre de x de dimension maximale et Y un sous-ensemble de l'adhérence de y contenant y ($y \in Y \subseteq y^{\downarrow}$). Alors, le point x est β-simple dans $X \setminus Y$. Comme nous l'avons montré dans la remarque 6.3.9, cela n'est plus généralement vrai si $\dim(y) < \dim(x) - 1$. Néanmoins, si on remplace la β-simplicité par la γ-simplicité, alors il est possible d'étendre le résultat aux faces non maximales de la frontière de x de la façon suivante.

Proposition 6.3.10. *Soit X un complexe cubique ou simplicial muni de l'ordre $\subseteq$. Soit x un point de X et Y un sous-ensemble de la frontière de x ayant un maximum ou un minimum. Alors, le point x est γ-simple dans $X \setminus Y$.*

Démonstration. Prouver que x est γ-simple dans $X \setminus Y$ revient à établir que $x^{\downarrow\star} \setminus Y$ est homotopiquement trivial.

- Premier cas : Y a un maximum noté y. La preuve se fait par récurrence sur m, la dimension de x. Si $m = 1$, le resultat est évident. Nous supposons maintenant que $m \geq 2$. Si $\dim(y) = m - 1$, nous appliquons la proposition 6.3.7. Si $\dim(y) \leq m - 2$, soit z une $(m-1)$-face de $x^{\downarrow}$ incluant y. Par hypothèse de récurrence, $z^{\downarrow\star} \setminus Y$ est homotopiquement trivial. Donc, z est un γ-point dans $x^{\downarrow\star} \setminus Y$. Par suite, $x^{\downarrow\star} \setminus (Y \cup \{z\})$ est faiblement equivalent à $x^{\downarrow\star} \setminus Y$ (propriété 4.2.14). Or, en appliquant la proposition 6.3.7 à x, z et au sous-ensemble $Y \cup \{z\}$ de l'adhérence de z, on obtient que $x^{\downarrow\star} \setminus (Y \cup \{z\})$ est contractile. Donc, par transitivité, $x^{\downarrow\star} \setminus Y$ est homotopiquement trivial.
- Second cas : Y a un minimum noté y. La preuve se fait par récurrence sur le cardinal de Y. Si $\mathrm{Card}(Y) = 1$, c'est-à-dire $Y = \{y\}$, nous utilisons la première partie de la preuve pour conclure. Supposons maintenant $\mathrm{Card}(Y) \geq 2$. Soit z, $z \neq y$, une face dans Y telle que $\dim(z) = \min\{\dim(t) \mid t \in Y \setminus \{y\}\}$. On a $z^{\downarrow\star} \cap Y = \{y\}$. On pose alors $Z = (x^{\downarrow\star} \setminus Y) \cup \{z\} = x^{\downarrow\star} \setminus (Y \setminus \{z\})$. Comme $\mathrm{Card}(Y \setminus \{z\}) < \mathrm{Card}(Y)$, on déduit de l'hypothèse de récurrence que Z est homotopiquement trivial. Vérifions que z est un γ-point pour Z. On a $z^{\downarrow\star} \cap Z = z^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ qui, d'après la première partie de la preuve est homotopiquement trivial. Donc, z est un point γ-simple dans Z. Par conséquent, l'injection $i : x^{\downarrow\star} \setminus Y \to Z$ est une équivalence d'homotopie faible. Il s'en suit directement que $x^{\downarrow\star} \setminus Y$ est homotopiquement trivial. □

La proposition suivante donne quelques éléments de comparaison dans un complexe cubique ou simplicial entre les paires libres et les points unipolaires ou β-simples.

Proposition 6.3.11. *Soit X un complexe cubique ou simplicial et x un point de X.*

(i) Si $x \in X$ est unipolaire, alors x est haut-β-simple et il existe $y \in X$ tels que (y, x) est une paire libre.

(ii) Si $x \in X$ est β-simple, il existe $y, z \in x^{\uparrow\star}$ tel que (y, z) est une paire libre.

(iii) Si (x, y) est une paire libre, y est haut-unipolaire et x est bas-β-simple dans $X \setminus \{y\}$.

Démonstration.

(i) Soit $x \in X$ un point unipolaire. Puisque X est un complexe, on a $x^{\downarrow} \subseteq X$ et par conséquent, x ne peut pas être bas-unipolaire (une m-face dans un complexe cubique ou simplicial couvre $2m$ ou $m + 1$ faces). Donc, x est haut-unipolaire, ce qui signifie que $x^{\uparrow\star}$ a un minimum, que nous notons y. Comme $x^{\uparrow\star}$ a un minimum, il est contractile (propriété 4.2.10) et x est haut-β-simple. De plus $\dim(y) = \dim(x) + 1$ (car X est un complexe simplicial ou cubique) et y étant la seule

face de $x^{\uparrow\star}$ avec cette dimension, nous déduisons du lemme 6.3.4*(i)* qu'il n'existe pas de face $z \in x^{\uparrow\star}$ telle que $\dim(z) > \dim(y)$. Donc, (y, x) est une paire libre dans X.

(ii) Soit $x \in X$ un point β-simple. Alors, $x^{\uparrow\star}$ est contractile (car $x^{\downarrow\star}$ n'est pas contractile d'après le corollaire 6.3.5). Donc, soit $x^{\uparrow\star}$ est un singleton, soit il existe un point y unipolaire dans $x^{\uparrow\star}$ (corollaire 4.2.7). Si $x^{\uparrow\star}$ est un singleton $\{y\}$, (y, x) est une paire libre. S'il existe un point y bas-unipolaire dans $x^{\uparrow\star}$ alors $\dim(y) \geqslant \dim(x) + 2$. Or, d'après le lemme 6.3.4(a), il existe $\dim(y) - \dim(x) \geq 2$ faces couvertes par y qui incluent x ce qui contredit le fait que y est bas-unipolaire. Donc, s'il existe un point y unipolaire dans $x^{\uparrow\star}$, il est nécessairement haut-unipolaire. En raisonnant comme dans la partie *(i)* de la preuve, on peut alors montrer qu'il existe une face z dans $x^{\uparrow\star}$ telle que (z, y) est une paire libre dans X.

(iii) Soit (x, y) une paire libre. Le point x est le seul point dans $y^{\uparrow\star}$ donc y est haut-unipolaire et, puisque X est un complexe, $\dim(y) = \dim(x) - 1$. De plus, grâce à la proposition 6.3.10, nous pouvons conclure que x est bas-β-simple dans $X \setminus \{y\}$ (car $x^{\downarrow\star} \cap (X \setminus \{y\}) = x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$). □

Nous avons vu dans la section 4.2 qu'un critère usuel pour qu'un point y d'un espace digital X de dimension 3 soit qualifié de « simple », c'est-à-dire pour que schématiquement sa suppression de l'objet Y de l'image se fasse à topologie constante, est que *(i)* l'inclusion $i : Y \setminus \{y\} \to Y$ induise une correspondance bi-univoque entre les composantes connexes de l'objet avant et après la suppression, *(ii)* l'inclusion $i' : X \setminus Y \to (X \setminus Y) \cup \{y\}$ induise une correspondance bi-univoque entre les composantes connexes du fond avant et après la suppression, *(iii)* l'inclusion i induise des isomorphismes entre les groupes fondamentaux des composantes connexes de l'objet avant et après la suppression, *(iv)* l'inclusion i' induise des isomorphismes entre les groupes fondamentaux des composantes connexes du fond avant et après la suppression (Kong et Rosenfeld, 1989). Fourey et Malgouyres (2003) ont montré, à l'aide de la notion d'*enlacement* emprunté à la théorie des nœuds, que, dans des images digitales 3D munies de la paire d'adjacence (6,26) ou (26,6), il est inutile de considérer les groupes fondamentaux du fond car leurs preservations est impliquée par les trois premières conditions. Nous démontrons un théorème équivalent, valable en toutes dimensions, dans l'espace des complexes cubiques.

Théorème 6.3.12. *Soit X un EPO isomorphe à un complexe cubique et dont le dual est également isomorphe à un complexe cubique. Soit Y un sous-espace propre de X et y un point β-simple dans Y. Alors y est γ-simple dans $(X \setminus Y) \cup \{y\}$.*

Avant de pouvoir démontrer ce théorème nous devons établir un résultat préliminaire.

Lemme 6.3.13. *Soit X un complexe cubique ou simplicial et x un point de X de dimension m. Soit y une k-face de x ($k \in [\![0, m-1]\!]$). L'ensemble $x^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$ est homéomorphe à l'ensemble des parties d'un ensemble à $(m-k)$ éléments (considéré comme un EPO pour l'inclusion) par un homéomorphisme φ tel que $\mathrm{Card}(\varphi(z)) = \dim(z) - k$ pour tout $z \in x^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$.*

Démonstration. Soit V l'ensemble des $(k+1)$-faces de x appartenant à $y^{\uparrow}$. On a $\mathrm{Card}(V) = m - k$ (lemme 6.3.4). Nous allons prouver par une récurrence finie que $x^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$ est homéomorphe à l'ensemble des parties de V, $\mathcal{P}(V)$, muni de l'inclusion. Pour cela, on considère une suite $(x_i)_{i=k}^{m}$ de faces de $y^{\uparrow} \cap x^{\downarrow}$ telles que, pour tout i, x_i est de dimension i et, pour tout i différent de m, $x_i \subset x_{i+1}$ (on a en particulier $x_k = y$ et $x_m = x$). On note V_i l'ensemble des $(k+1)$-faces de $x_i^{\downarrow} \cap y^{\uparrow\star}$ ($V_k = \emptyset$). La figure 6.8 illustre les notations utilisées dans la preuve.

– Nous définissons $\varphi_k : x_k{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow} = \{y\} \to V_k$ par $\varphi_k(y) = \emptyset$ (on a donc $\mathrm{Card}(\varphi_k(y)) = \mathrm{Card}(\emptyset) = 0$).
– Soit i un entier supérieur ou égal à k et strictement inférieur à m. Supposons que nous ayons défini un homéomorphisme $\varphi_i : x_i{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow} \to \mathcal{P}(V_i)$ tel que $\mathrm{Card}(\varphi(z)) = \dim(z) - k - 1$ pour tout $z \in x_i{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$. Par le lemme 6.3.4 *(i)*, il existe une face a dans V telle que $V_{i+1} = V_i \sqcup \{a\}$. On appelle x'_i la face incluse dans x_{i+1} telle que $x_{i+1} = x_i \sqcup x'_i$ (x'_i est une 0-face si X est un complexe simplicial et une i-face si X est un complexe cubique).
Soit Y_i l'ensemble des faces incluses dans x_{i+1} qui intersectent à la fois x_i et x'_i. Nous définissons la fonction $\theta_i : Y_i \to x_i{}^{\downarrow}$ par :
$$\theta_i(z) = z \cap x_i.$$
La fonction θ_i est une bijection (lemme 6.3.4 *(ii)*). De plus, $\theta_i(z) \in x_i{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$ si et seulement si $z \in x_{i+1}{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$ (car $y \subseteq x_i$).
Pour toute face b dans $x_{i+1}{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$, nous posons :
$$\varphi_{i+1}(b) = \begin{cases} \varphi_i(b) & \text{si } b \text{ est inclus dans } x_i \\ \{a\} \cup \varphi_i(\theta_i(b)) & \text{sinon.} \end{cases}$$
La fonction $\varphi_{i+1} : x_{i+1}{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow} \to \mathcal{P}(V_{i+1})$ est bien définie car, si b n'est pas inclus dans x_i, alors $b \in Y_i$ (b n'est pas inclus dans x'_i puisque $y \in b$).
Inversement, pour tout $Z \in \mathcal{P}(V_{i+1})$, nous posons :
$$\psi_{i+1}(Z) = \begin{cases} \varphi_i^{-1}(Z) & \text{si } Z \subseteq V_i \\ \theta_i^{-1}(\varphi_i^{-1}(Z \setminus \{a\})) & \text{sinon.} \end{cases}$$
La fonction φ_{i+1} est une bijection dont la fonction réciproque est ψ_{i+1}.
Soit b une face dans $x_{i+1}{}^{\downarrow} \cap y^{\uparrow}$. Si $b \in x_i{}^{\downarrow}$, $\mathrm{Card}(\varphi_{i+1}(b)) = \mathrm{Card}(\varphi_i(b)) = \dim(b) - k - 1$ par l'hypothèse de récurrence. Si $b \notin x_i{}^{\downarrow}$, $\mathrm{Card}(\varphi_{i+1}(b)) = 1 + \mathrm{Card}(\varphi_i(\theta_i(b))) = 1 + \dim(\theta_i(b)) - k - 1 = \dim(b) - k - 1$ (pour la dernière égalité, nous utilisons le lemme 6.3.4-*(ii)*). De l'égalité $\mathrm{Card}(\varphi_{i+1}(b)) = \dim(b) - k - 1$, nous déduisons que φ_{i+1} est croissante (pour l'inclusion). Puisque φ_{i+1} est une bijection, φ_{i+1}^{-1} est aussi croissante et, grâce à la propriété 6.1.1, φ_{i+1} est un homéomorphisme. □

Démonstration. (**Preuve du théorème 6.3.12**) Soit $y \in Y \subset X$ un point β-simple dans Y. Alors $y^{\downarrow\star} \cap Y$ ou $y^{\uparrow\star} \cap Y$ est contractile.
– Supposons que $y^{\downarrow\star} \cap Y$ soit contractile. Grâce au corollaire 4.2.7, on sait qu'il existe une suite de points $(x_i)_{i=0}^r$ ($r \geq 0$) telle que $y^{\downarrow\star} \cap Y = \{x_i\}_{i=0}^r$ et x_j est unipolaire dans $\{x_i\}_{i=0}^j$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$. La preuve consiste à établir que x_j est un point γ-simple dans $y^{\downarrow\star} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{j-1}$ pour tout $j \in [\![1, r]\!]$. Cela impliquera (par transitivité) que l'injection de $y^{\downarrow\star} \setminus Y$ dans $y^{\downarrow\star} \setminus \{x_0\}$ est une équivalence d'homotopie faible. Comme $y^{\downarrow\star} \setminus \{x_0\}$ est homotopiquement trivial (proposition 6.3.10), on en deduira que $y^{\downarrow\star} \setminus Y$ est aussi homotopiquement trivial, c'est-à-dire que y est un point γ-simple de $X \setminus Y \cup \{y\}$.
  • Supposons d'abord que x_j est bas-unipolaire dans $\{x_i\}_{i=0}^j$ pour un certain $j \in [\![1, r]\!]$. On pose $Y_j = x_j{}^{\downarrow\star} \cap \{x_i\}_{i=0}^j$. De la proposition 6.3.10, nous déduisons que $x_j{}^{\downarrow\star} \setminus Y_j$ est homotopiquement trivial (car Y_j a un maximum). Comme $x_j{}^{\downarrow\star} \cap (y^{\downarrow\star} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{j-1}) = x_j{}^{\downarrow\star} \setminus Y_j$, x_j est un point γ-simple dans $y^{\downarrow\star} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{j-1}$.

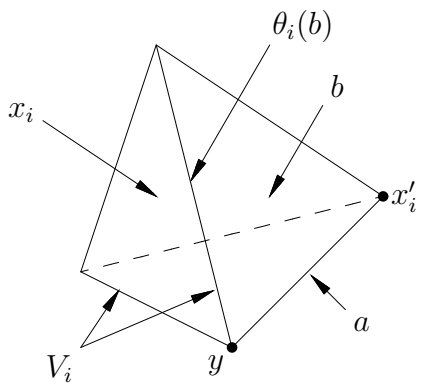


FIGURE 6.8 – (Preuve du lemme 6.3.13). Le point x de X est un simplexe incluant le 3-simplexe x_{i+1} représenté sur la figure. Ici, y est une 0-face de x. Le simplexe x_{i+1} est la réunion disjointe du 2-simplexe x_i (qui contient y) et de la 0 face x'_i. L'ensemble V_i est formé des 1-faces de x_i contenant y. L'ensemble V_{i+1} est formé des 1-faces de x_{i+1} contenant y. L'ensemble V_{i+1} est aussi la réunion de V_i et de l'arête $\{a\}$. La 2-face b de x_{i+1} intersecte à la fois x_i et x'_i. Son intersection avec x_i, c'est-à-dire $\theta_i(b)$, est une arête de x_i.

- Supposons maintenant que x_j soit haut-unipolaire dans $\{x_i\}_{i=0}^{j}$ et posons $Y_j = {x_j}^{\uparrow\star} \cap \{x_i\}_{i=0}^{j}$. On remarque que Y_j a un minimum. Grâce au lemme 6.3.13, on sait qu'il existe un homéomorphisme $\varphi : y^{\downarrow} \cap {x_j}^{\uparrow} \to \mathcal{P}(E)$ où E est un ensemble fini non vide. De la propriété 6.1.1 (toute fonction continue entre deux EPO est croissante), nous déduisons que $\varphi(y^{\downarrow\star} \cap {x_j}^{\uparrow\star})$ est $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset, E\}$, c'est-à-dire la frontière du simplexe (abstrait) E, et que $\varphi(Y_j)$ a un minimum (car Y_j a un minimum). Puis nous invoquons la proposition 6.3.10 pour affirmer que $\varphi((y^{\downarrow\star} \cap {x_j}^{\uparrow\star}) \setminus Y_j) = E \setminus \varphi(Y_j)$ est homotopiquement trivial. Donc, $(y^{\downarrow\star} \cap {x_j}^{\uparrow\star}) \setminus Y_j = {x_j}^{\uparrow\star} \cap (y^{\downarrow\star} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{j-1})$ est homotopiquement trivial et x_j est un point γ-simple dans $y^{\downarrow\star} \setminus \{x_i\}_{i=0}^{j-1}$.

– Nous supposons maintenant que $y^{\uparrow\star} \cap Y$ est contractile. En prenant l'ordre inverse sur X (par hypothèse, $(X, \supseteq)$ est également un complexe cubique), nous déduisons de la proposition 6.3.2 que y est un point β-simple pour Y et, du corollaire 6.3.1 que $y^{\downarrow\star} \cap Y$ est contractile. Ensuite, de la première partie de la preuve, il vient que y est un point γ-simple pour $(X \setminus Y) \cup \{y\}$ muni de l'ordre $\supseteq$ et nous en concluons, en invoquant la proposition 6.3.3, que y est un point γ-simple pour $(X \setminus Y) \cup \{y\}$ avec l'ordre initial. □

Remarque 6.3.14. *Nous ne savons pas si le théorème 6.3.12 demeure vrai en toute dimension si on remplace l'hypothèse « y est un point β-simple » par « y est un point γ-simple ». Cependant, si la dimension de X est 2, les points γ-simples sont des points β-simples, donc dans ce cas le résultat reste vrai. De plus, nous avons vérifié, en testant toutes les configurations à l'aide d'un programme informatique, que le résultat reste vrai dans $\mathbb{F}^3$, l'espace des complexes cubiques de dimension 3. La figure 6.9 fournit un contre-exemple du théorème 6.3.12 dans le cas où l'hypothèse selon laquelle l'espace X doit être un complexe pour l'ordre dual n'est pas vérifiée.*

L'ensemble $\mathbb{F}^n$ des complexes cubiques fournit un exemple essentiel de complexe qui est aussi un complexe pour l'ordre dual. Remarquons qu'il n'y a pas de propriété analogue pour les complexes simpliciaux.

Proposition 6.3.15. *Pour tout $n \geq 1$, l'EPO $(\mathbb{F}^n, \supseteq)$ est isomorphe à un complexe cubique.*

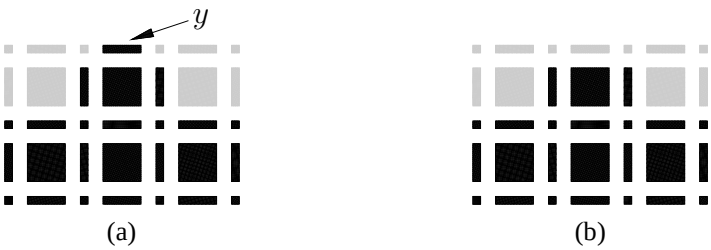


FIGURE 6.9 – Le théorème 6.3.12 est généralement faux quand l'EPO $(X, \leq)$ est un complexe cubique mais $(X, \geq)$ n'est pas un complexe cubique. (a) Un complexe cubique X dont le dual n'est pas un complexe cubique (à cause du bord de l'image). En noir un objet Y dans X. Le point y est une 1-face de Y. En gris clair, le complément de Y dans X, $X \setminus Y$. (b) En noir, l'ensemble $Y \setminus \{y\}$. En gris clair, l'ensemble $(X \setminus Y) \cup \{y\}$. Clairement, y est un point β-simple de Y (y est haut-unipolaire dans Y) mais y n'est pas γ-simple pour $(X \setminus Y) \cup \{y\}$ car ce dernier ensemble n'a pas le même nombre de composantes connexes que $X \setminus Y$.

Démonstration. Il suffit de montrer que, dans $\mathbb{F}^n$, le nombre de faces couvertes par, resp. couvrant, une face de dimension k est égal au nombre de faces couvrant, resp. couvertes par, une face de dimension $n - k$.
Soit x une k-face de $\mathbb{F}^n$ $(0 \leq k \leq n)$. Nous pouvons poser, sans perte de généralité, $x = \prod_{i=1}^{n} I_i$ où $I_i \in \mathbb{F}_1^1$ si $i \leqslant k$ et $I_i \in \mathbb{F}_0^1$ sinon.

- Si $k > 0$, la face x couvre les faces $\prod_{i=1}^{n} J_i$ telles qu'il existe un entier j, $1 \leq j \leq k$, avec $\emptyset \subset J_i \subset I_i$ si $i = j$ et $J_i = I_i$ sinon. Comme chaque ensemble de $\mathbb{F}_1^n$ possède deux sous-ensembles propres non vides, toute k-face de $\mathbb{F}^n$ couvre exactement $2k$ faces de $\mathbb{F}^n$.
- Si $k < n$, la face x est couverte par les faces $\prod_{i=1}^{n} J_i$ telles qu'il existe un entier j, $k+1 \leq j \leq n$, avec $I_i \subset J_i$ et $J_i \in \mathbb{F}_1^n$ si $i = j$ et $J_i = I_i$ sinon. Comme chaque ensemble de $\mathbb{F}_0^n$ est inclus dans deux ensembles de $\mathbb{F}_1^n$, toute k-face de $\mathbb{F}^n$ est couverte par exactement $2(n - k)$ faces de $\mathbb{F}^n$.

La conclusion est immédiate. □

6.4 Conclusion

Les résultats obtenus dans ce chapitre montrent que la notion de chemin continu n'est pas très éloignée de la notion d'adjacence dans le graphe de comparabilité d'un EPO et que celle d'homotopie possède sa traduction fidèle sur ce graphe. Ce rapprochement entre les méthodes du continu et celles du discret nous permettent d'enrichir la gamme des outils utilisables en topologie digitale, comme par exemple en y intégrant les points β-simples et γ-simples. Cela suppose cependant que l'espace digital soit muni d'une relation d'ordre ce qui n'est *a priori* pas le cas du support d'origine d'une image digitale. On devra donc, si l'on souhaite utiliser de tels outils, glisser des éléments « minces » entre les points de $\mathbb{Z}^n$.

Chapitre 7

De l'espace digital à l'espace cellulaire

La topologie digitale est sans doute le cadre de travail le plus utilisé pour développer des outils de traitement d'image intégrant des considérations topologiques. En effet, le support effectif des images digitales est presque toujours une partie de $\mathbb{Z}^n$ et, comme la topologie digitale est définie directement dans $\mathbb{Z}^n$, les méthodes qui s'appuient sur celle-ci fournissent des résultats également dans $\mathbb{Z}^n$ ce qui constitue généralement une propriété recherchée dans la plupart des applications. De plus, comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, une abondante litterature a déjà été consacrée à la conservation du type d'homotopie en topologie digitale, particulièrement grâce au concept de point simple (Bertrand et Malandain 1994, Bertrand 1996, Malgouyres et Lenoir 2000, Fourey et Malgouyres 2003, Couprie et Bertrand 2009). Il n'est donc pas étonnant que relativement peu d'applications intégrant des considérations relatives au type d'homotopie aient été développées dans un des cadres alternatifs présentés au chapitre 3. Citons, à titre d'exemple, Cointepas *et al.* (2001) et Daragon et Couprie (2002) pour la segmentation d'images basée sur les complexes cubiques ou les EPO, ou Bertrand et Couprie (2008) pour la squelettisation parallèle basée sur les complexes cubiques. Dans le cadre de la topologie digitale, on trouve au contraire de nombreuses applications utilisant des méthodes garantissant la conservation du type d'homotopie. Citons, sans exhaustivité, Han *et al.* (2003), Bai *et al.* (2009) pour les modèles déformables, Mangin *et al.* (1995), Dokládal *et al.* (1999) pour la segmentation, Aktouf *et al.* (2002), Passat *et al.* (2005) pour la correction d'images ou Faisan *et al.* (2011) pour la déformation d'images.

Du fait de cet usage prépondérant de la topologie digitale, il peut être intéressant de garantir qu'il existe une compatibilité entre la topologie digitale et les autres approches topologiques utilisées en imagerie (et plus généralement avec la topologie classique). Cela suppose, en particulier, de pouvoir plonger une image initialement définie sur $\mathbb{Z}^n$ dans un espace plus riche (autorisant la définition d'une topologie *stricto sensu*), tout en respectant l'interprétation de l'image donnée par le choix de la paire d'adjacences dans $\mathbb{Z}^n$ et les caractéristiques topologiques qui en découlent (voir, *e.g.*, Kong et Roscoe 1985, Ayala *et al.* 1997, Lachaud et Montanvert 2000, Alayrangues et Lachaud 2002).

Ici, nous nous intéressons à l'espace topologique des complexes cubiques $\mathbb{F}^n$. Comme les complexes sont définis comme des structures fermées pour l'inclusion, les images définies sur $\mathbb{F}^n$ sont le plus souvent associées à des images digitales définies sur $\mathbb{Z}^n$ muni de la $(3^n - 1, 2n)$-adjacence (voir, *e.g.*, Kong, 1997). Dans Bertrand et Couprie (1999), une méthode est proposée pour inclure et étendre la topologie digitale dans le cadre des EPO, mais le cas des $(6, 18)$- et $(18, 6)$-adjacences n'est pas considéré. Dans Ayala *et al.* (1997, 2003, 2004), les auteurs donnent une construction permettant de plonger les objets de $\mathbb{Z}^n$ dans un complexe polyédral en accord avec le type de connexité digitale choisie (voir la section 3.2). Cependant, ils ne prennent pas la topologie intrinsèque à $\mathbb{F}^n$ mais utilisent cet espace comme un intermédiaire entre l'espace digital $\mathbb{Z}^n$ et l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Cela les conduit, comme nous l'avons vu aux sections 3.2 et 4.1, à définir des notions spécifiques de connexité et d'homotopie dans $\mathbb{F}^n$. Au contraire, dans ce chapitre, nous proposons de plonger une

image digitale dans l'EPO des complexes cubiques, de façon à mettre en correspondance les composantes connexes et les types d'homotopie des objets de $\mathbb{Z}^n$, muni de la topologie digitale, et de $\mathbb{F}^n$, muni de sa topologie d'EPO pour l'inclusion.

Dans tout le chapitre, la lettre λ désigne une image digitale binaire ($\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0,1\}$) et la lettre μ désigne une image complexe binaire ($\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$). Comme dans les chapitres précédents, l'objet (resp. le fond) de l'image $\theta : X \to \{0,1\}$ (avec $X = \mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{F}^n$) est l'ensemble $\theta^{-1}(\{1\})$ (resp. $\theta^{-1}(\{0\})$). Si $a = (a_i)_{i=1}^n$ est un point de $\mathbb{Z}^n$ ($a_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$), $\breve{a}$ désigne la facette de $\mathbb{F}^n$ définie par $\breve{a} = \prod_{i=1}^n \{a_i, a_i+1\}$ (la fonction de $\mathbb{Z}^n$ vers $\mathbb{F}^n$ qui à a associe $\breve{a}$ met en correspondance bi-univoque les points de $\mathbb{Z}^n$ et les facettes de $\mathbb{F}^n$).

7.1 Images régulières

Dans cette section, nous introduisons une classe d'images, définies sur $\mathbb{F}^n$, que nous associons de manière bi-univoque aux images binaires définies sur $\mathbb{Z}^n$. Nous étudions quelques unes de leurs propriétés et nous établissons des résultats qui seront utilisés dans la section 7.2 où nous démontrons le bien-fondé du modèle proposé. Schématiquement, le but avec ce modèle est, premièrement, de rendre explicite l'interprétation d'une image digitale sous-tendue par le choix d'une paire d'adjacences dans $\mathbb{Z}^n$ et, deuxièmement, de plonger une image digitale dans un espace topologique dans lequel les notions de la topologie classique peuvent être directement utilisées.

Si μ est une image complexe, nous écrivons $\bigvee_{x\in X} \mu(x)$ (resp. $\bigwedge_{x\in X} \mu(x)$) pour le maximum (resp. minimum) de l'ensemble $\{\mu(x) \mid x \in X\}$ et nous écrivons également $\mu(a)\vee\mu(b)$ (resp. $\mu(a)\wedge\mu(b)$) pour $\bigvee_{x\in\{a,b\}} \mu(x)$ (resp. $\bigwedge_{x\in\{a,b\}} \mu(x)$). Notons que $(\{0,1\}, \vee, \wedge)$ est un treillis booléen dont l'opération de complémentation est notée $\neg$: $\neg 0 = 1$ et $\neg 1 = 0$.

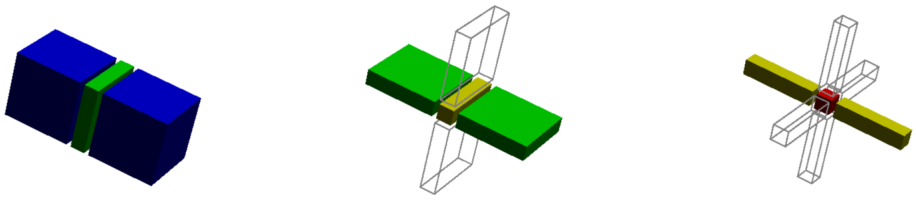
Tout au long de ce chapitre nous fournissons des représentations intuitives des points de $\mathbb{F}^n$ en utilisant différentes boîtes rectangulaires pour des faces de dimensions différentes. De plus, dans $\mathbb{F}^2$, les points de l'objet sont représentés en noir tandis que ceux du fond sont représentés en blanc cerclé de noir, ou ne sont pas du tout représentés, et, dans $\mathbb{F}^3$, nous utilisons différentes couleurs pour les faces de l'objet en fonction de leurs dimensions (bleu : 3-faces ; vert : 2-faces ; jaune : 1-faces ; rouge : 0-faces) tandis que le fond n'est pas représenté.

7.1.1 Correspondance bi-univoque entre les images digitales et complexes

Quand deux faces $g, h \in \mathbb{F}^n$ couvrent une face $f \in \mathbb{F}^n$ et leurs plus petits voisinages ne s'intersectent pas (*i.e.*, $g^\uparrow \cap h^\uparrow = \emptyset$), nous disons qu'elle sont *opposées* par rapport à f (voir la figure 7.1). Nous notons $\mathrm{opp}(f)$ l'ensemble de toutes les paires $\{g, h\}$ avec g opposé à h par rapport à f. Intuitivement, la face f sert à « connecter localement » les faces g et h. Quand f est une facette de $\mathbb{F}^3$, on a $\mathrm{opp}(f) = \emptyset$.

Définition 7.1.1 (image régulière)**.** *Soit* $\varepsilon : [\![1,n]\!] \to \{-1,1\}$ *une fonction appelée* fonction de connexité [1]. *Une fonction* $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ *est une* image ε-régulière *(ou simplement une* image

1. Par abus de notation, nous noterons souvent une fonction de connexité $\varepsilon : [\![1,n]\!] \to \{-1,1\}$ par la liste de ses valeurs, c'est-à-dire en écrivant $(\varepsilon(i))_{i=1}^n$ à la place de ε, comme par exemple dans la légende de la figure 7.3(b,c). Nous utilisons aussi le symbole « . » à la place de $\varepsilon(i)$ quand la valeur de $\varepsilon(i)$ n'a pas d'influence sur le comportement de la fonction ε vis-à-vis d'un objet donné, comme cela est fait par exemple dans la légende de la figure 7.4(a). Pour alléger les notations, nous écrivons aussi $\varepsilon = 1$ (ou $\varepsilon = -1$) quand ε est une fonction constante, comme dans la légende de la figure 7.3(a,d).



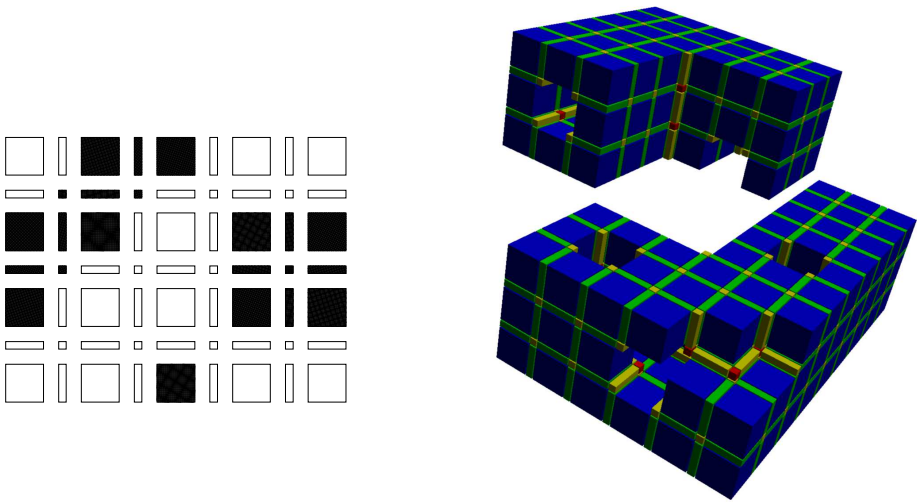
(a) (b) (c)

FIGURE 7.1 – Deux faces opposées dans $\mathbb{F}^3$ par rapport à une face f : (a) de dimension 2, (b) de dimension 1, (c) de dimension 0. (b–c) Les boîtes en pointillés montrent d'autres paires de faces opposées par rapport à f.

régulière*) si pour tout* $m \in [\![1, n]\!]$ *et* $f \in \mathbb{F}^n_{m-1}$*, on a, récursivement :*

$$\mu(f) = \begin{cases} \bigwedge_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \vee \mu(b) & \text{si } \varepsilon(m) = 1 \\ \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \wedge \mu(b) & \text{si } \varepsilon(m) = -1 \end{cases}$$

Des exemples d'images régulières sont donnés sur la figure 7.2.



(a) (b)

FIGURE 7.2 – Deux images ε-régulières (a) sur $\mathbb{F}^2$, avec $\varepsilon(2) = -1, \varepsilon(1) = 1$, (b) sur $\mathbb{F}^3$, avec $\varepsilon(3) = -1, \varepsilon(2) = \varepsilon(1) = 1$.

Remarque 7.1.2. *Pour chaque fonction de connexité* $\varepsilon : [\![1, n]\!] \to \{-1, 1\}$*, nous définissons la fonction* $\zeta_\varepsilon : \{0,1\}^{\mathbb{Z}^n} \to \{0,1\}^{\mathbb{F}^n}$ *qui envoie une image digitale* λ *sur l'unique image complexe* ε*-régulière* $\zeta_\varepsilon(\lambda)$ *telle que, pour tout* $a \in \mathbb{Z}^n$*, on a* $\zeta_\varepsilon(\lambda)(\check{a}) = \lambda(a)$*. Il est évident que, pour toute fonction de connexité* ε*, la fonction* ζ_ε *est une bijection entre l'ensemble des images digitales* $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^n}$ *et le sous-ensemble de* $\{0,1\}^{\mathbb{F}^n}$ *constitué des images* ε*-régulières. De plus, par le choix de la fonction de connexité* ε*, nous pouvons construire avec précision l'image régulière définie sur* $\mathbb{F}^n$ *pour représenter la connexité désirée dans* $\mathbb{Z}^n$ *(voir la figure 7.3). En particulier, nous pouvons retrouver les paires*

$n = 2$		$n = 3$				$n \in \mathbb{N}^*$	
$(4, 8)$	$(8, 4)$	$(6, 26)$	$(6, 18)$	$(18, 6)$	$(26, 6)$	$(2n, 3^n - 1)$	$(3^n - 1, 2n)$
$\varepsilon = -1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$	$\varepsilon(3) = -1$ $\varepsilon(2) = 1$ $\varepsilon(1) = -1$	$\varepsilon(3) = 1$ $\varepsilon(2) = -1$ $\varepsilon(1) = 1$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = -1$	$\varepsilon = 1$
Fig. 7.3(a)	Fig. 7.3(d)	Fig. 7.4(a) Fig. 7.5(b) Fig. 7.6(b)	Fig. 7.4(a) Fig. 7.6(a)	Fig. 7.4(b) Fig. 7.6(c)	Fig. 7.4(d)		

TABLE 7.1 – Correspondances entre les paires d'adjacences dans $\mathbb{Z}^n$ et les fonctions de connexité. La dernière ligne du tableau renvoie aux figures illustrant la fonction de connexité.

d'adjacence usuelles[2] *de* $\mathbb{Z}^n$ *(voir les figures 7.3 à 7.6 et la table 7.1). Dans la section 7.2, les correspondances données dans la table 7.1 seront justifiées par deux théorèmes montrant que ces correspondances permettent de préserver les composantes connexes et les groupes fondamentaux des objets et des fonds des images.*

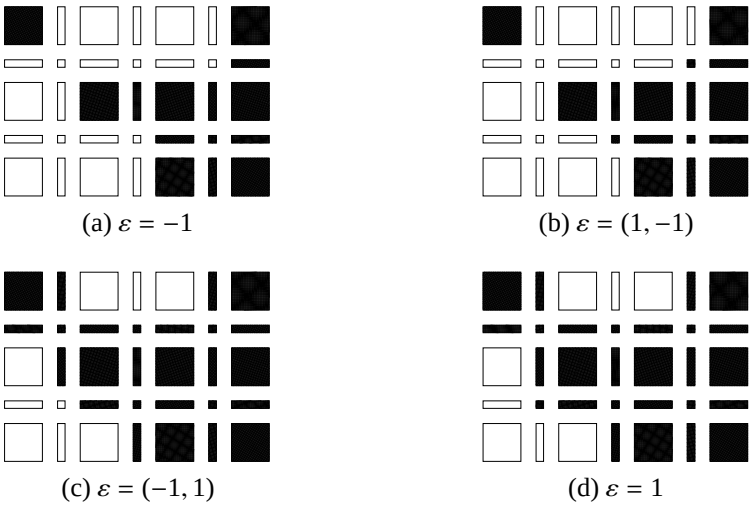
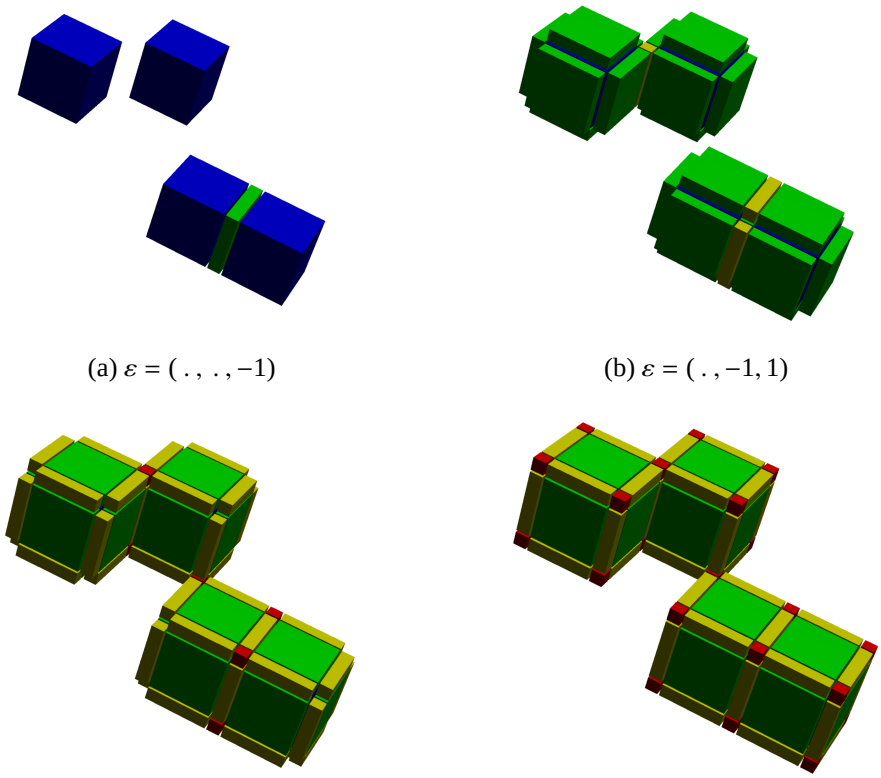


FIGURE 7.3 – Images $\zeta_\varepsilon(\lambda) : \mathbb{F}^2 \to \{0, 1\}$ associées à une même image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^2 \to \{0, 1\}$.

Lorsque la fonction ε est constante, la définition 7.1.1 peut être simplifiée : quand $\varepsilon = -1$, $\mu(f) = 1$ si et seulement si $\mu(a) = 1$ pour toute facette a incluant f et quand $\varepsilon = 1$, $\mu(f) = 1$ si et seulement si il existe une facette a incluant f telle que $\mu(a) = 1$ (le cas $\varepsilon = -1$ correspond à la $2n$-adjacence dans $\mathbb{Z}^n$, tandis que le cas $\varepsilon = 1$ correspond à la $(3^n - 1)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^n$: voir la table 7.1). On rappelle que, dans un EPO, la notation $f^{\uparrow +}$ désigne l'ensemble des points maximaux (ici les facettes) supérieurs à f (cf. Annexe B).

2. Si d'un côté, certaines des 2^n fonctions de connexités $\varepsilon : [\![1, n]\!] \to \{-1, 1\}$ permettent de retrouver les couples d'adjacences standard (éventuellement de façon apparemment redondante, voir la figure 7.4(c,d)), d'autres fonctions de connexité ne peuvent être associées à aucune paire d'adjacences classique, comme le montre l'exemple de la figure 7.6(d).



(a) $\varepsilon = (\,.\,,\ .\,,-1)$ (b) $\varepsilon = (\,.\,,-1,1)$

(c) $\varepsilon = (-1,1,1)$ (d) $\varepsilon = 1$

FIGURE 7.4 – Images $\zeta_\varepsilon(\lambda) : \mathbb{F}^3 \to \{0,1\}$ associées à une même image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^3 \to \{0,1\}$. (a) Avec $\varepsilon(3) = -1$, nous obtenons la 6-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$. (b) Avec $\varepsilon(3) = 1$ et $\varepsilon(2) = -1$, nous obtenons la 18-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$. (c, d) Avec $\varepsilon(3) = \varepsilon(2) = 1$, nous obtenons la 26-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$.

Proposition 7.1.3. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière. Soit f une face de $\mathbb{F}^n$.*

(i) Si $\forall m > \dim(f), \varepsilon(m) = -1$, alors on a :

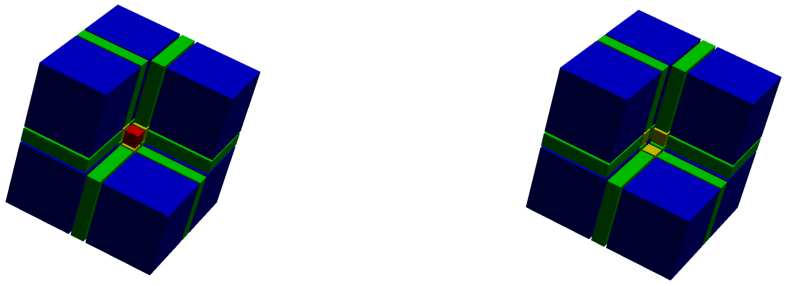
$$\mu(f) = \bigwedge_{f \prec a} \mu(a) = \bigwedge_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a).$$

(ii) Si $\forall m > \dim(f), \varepsilon(m) = 1$, alors on a :

$$\mu(f) = \bigvee_{f \prec a} \mu(a) = \bigvee_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a).$$

En particulier, si $\varepsilon = -1$ (resp. $\varepsilon = 1$) alors, pour tout $f \in \mathbb{F}^n$, $\mu(f) = \bigwedge_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a)$ (resp. $\mu(f) = \bigvee_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a)$).

Démonstration. Nous donnons la preuve de la partie (i) de la proposition, la preuve de la partie (ii) est en tout point similaire. La preuve se fait par récurrence sur $k = n - \dim(f) \geq 1$. Quand $k = 1$ et $\varepsilon(n) = -1$, il y a deux facettes g, h telles que $f^{\uparrow +} = \{g, h\}$ et $\mathrm{opp}(f) = \{\{g, h\}\}$. Comme $\varepsilon(n) = -1$, on a $\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \wedge \mu(b) = \mu(g) \wedge \mu(h) = \bigwedge_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a) = \bigwedge_{f \prec a} \mu(a)$. Supposons maintenant que,



(a) $\varepsilon = (1, -1, -1)$ (b) $\varepsilon = (-1, -1, -1)$

FIGURE 7.5 – La (très petite) différence entre les fonctions de connexité $(1, -1, -1)$ et $(-1, -1, -1)$.

pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$, on ait $\varepsilon(m) = -1$ pour tout $m \geq n-k$ et $\mu(b) = \bigwedge_{b \prec a} \mu(a) = \bigwedge_{a \in f^{\uparrow +}} \mu(a)$ pour toute face b de dimension $n-k$. Soit f un face de dimension $n-k-1$. De la définition 7.1.1, on obtient $\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \wedge \mu(b)$, et, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient alors :

$$\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \left(\left(\bigwedge_{c \in a^{\uparrow +}} \mu(c) \right) \wedge \left(\bigwedge_{c \in b^{\uparrow +}} \mu(c) \right) \right)$$

puis,

$$\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \bigwedge_{c \in a^{\uparrow +} \cup b^{\uparrow +}} \mu(c).$$

Du lemme C.0.1(*ii*) , on a $f^{\uparrow +} = a^{\uparrow +} \cup b^{\uparrow +}$ pour toute paire $(a, b) \in \mathrm{opp}(f)$. On en déduit que :

$$\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(f)} \bigwedge_{c \in f^{\uparrow +}} \mu(c) = \bigwedge_{c \in f^{\uparrow +}} \mu(c).$$

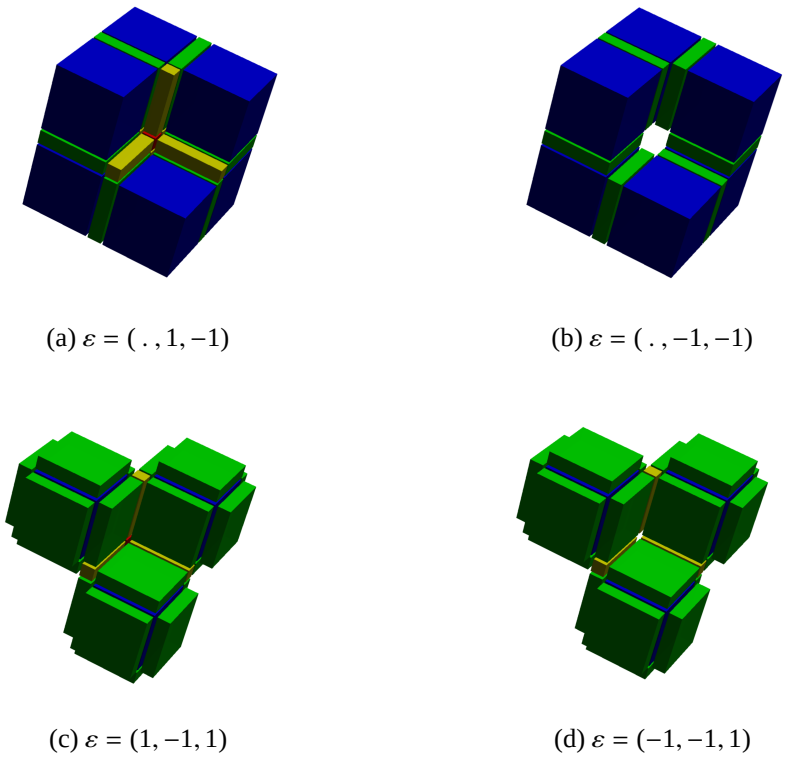
En utilisant à nouveau l'hypothèse de récurrence, nous obtenons finalement :

$$\bigwedge_{f \prec a} \mu(a) = \bigwedge_{f \prec a} \bigwedge_{b \in a^{\uparrow +}} \mu(b) = \bigwedge_{b \in f^{\uparrow +}} \mu(b) = \mu(f).$$

□

7.1.2 Dualité

Maintenant, nous regardons comment la correspondance proposée dans ce chapitre entre les images digitales et les images complexes se comporte quand nous prenons le négatif d'une image, c'est-à-dire quand nous intervertissons l'objet et le fond. Nous montrons que l'image complexe associée au négatif d'une image digitale λ est le négatif de l'image complexe associée à l'image λ, pourvu que nous changions la fonction de connexité ε en son opposée $-\varepsilon$. Cette caratéristique nous permettra d'établir en une seule fois des propriétés valables pour l'objet et pour le fond, ou comme dans la proposition 7.2.3, des propriétés pour une paire d'adjacences (α, β) et pour la paire inverse (β, α).



(a) $\varepsilon = (\,.\,,1,-1)$ (b) $\varepsilon = (\,.\,,-1,-1)$

(c) $\varepsilon = (1,-1,1)$ (d) $\varepsilon = (-1,-1,1)$

FIGURE 7.6 – (a,b) Un tore construit avec six 3-faces illustre comment les deux sortes de 6-adjacence sont obtenues. Il y a deux 3-faces du fond qui intersectent les six 3-faces du tore. Ces deux faces blanches sont 26-adjacentes mais dans (a) elles ne s'intersectent pas dans le fond (car le tore est un tore à trou nul) tandis que dans (b) leur intersection appartient au fond. De cette façon, dans (a), nous modélisons la $(6,18)$-adjacence tandis que dans (b) nous modélisons la $(6,26)$-adjacence. (c,d) Deux objets construits à partir des trois mêmes facettes en utilisant deux fonctions de connexité qui peuvent *a priori* être utilisées pour modéliser la 18-adjacence (voir la figure 7.4(b)). Sur (c) nous pouvons apercevoir une 0-face rouge entre les trois cubes. C'est ce qui est attendu car le fond doit être muni de la 6-adjacence. Sur (d), il y a un trou à la place de la 0-face rouge, ce qui n'est pas correct en 18-adjacence.

Soit $\theta : X \to \{0,1\}$ avec ($X = \mathbb{Z}^n$ ou $\mathbb{F}^n$) une image. Nous définissons l'*image négative* de θ, $\neg\theta : X \to \{0,1\}$, par $\neg\theta(x) = \neg(\theta(x)) = 1 - \theta(x)$, pour tout $x \in X$. Dans ce qui suit, ε est une fonction de connexité arbitraire.

Proposition 7.1.4. *L'image négative d'une image ε-régulière est $(-\varepsilon)$-régulière.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{F}^n_{m-1}$, avec $1 \leq m \leq n$. Supposons que $\varepsilon(m) = 1$. Alors, nous avons :

$$(\neg\mu)(f) = \neg(\mu(f)) = \neg(\bigwedge_{\{a,b\}\in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \vee \mu(b)).$$

Des lois de De Morgan, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned}(\neg\mu)(f) &= \bigvee_{(a,b)\in \mathrm{opp}(f)} \neg(\mu(a)) \wedge \neg(\mu(b)) \\ &= \bigvee_{(a,b)\in \mathrm{opp}(f)} (\neg\mu)(a) \wedge (\neg\mu)(b).\end{aligned}$$

Le cas $\varepsilon(m) = -1$ est similaire. Ainsi, $\neg\mu$ est une image $(-\varepsilon)$-régulière. □

Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière. Nous définissons l'image $-\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ par $(-\mu)(f) = \mu(f)$ pour tout $f \in \mathbb{F}^n_n$ et μ est $(-\varepsilon)$-régulière. La figure 7.7 illustre cette définition.

Proposition 7.1.5. *Pour toute image ε-régulière, $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$, on a l'égalité $\neg(-\mu) = -(\neg\mu)$.*

$$\begin{tikzcd} \mu \arrow[r, "\neg"] \arrow[d, "-"'] & \neg\mu \arrow[d, "-"] \\ -\mu \arrow[r, "\neg"] & -(\neg\mu) \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $f \in \mathbb{F}^n_n$. On a $(\neg(-\mu))(f) = \neg((-\mu)(f)) = \neg(\mu(f)) = (\neg\mu)(f) = (-(\neg\mu))(f)$. De plus, $-\mu$ et $\neg\mu$ sont $(-\varepsilon)$-régulières. Donc, $\neg(-\mu)$ et $-(\neg\mu)$ sont ε-régulières (proposition 7.1.4). D'où, $\neg(-\mu) = -(\neg\mu)$. □

Des définitions et propositions précédentes, nous déduisons facilement le résultat suivant.

Proposition 7.1.6. *Pour toute image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0,1\}$ et toute fonction de connexité $\varepsilon : [\![1,n]\!] \to \{-1,1\}$, on a l'égalité $\neg(\zeta_\varepsilon(\lambda)) = \zeta_{-\varepsilon}(\neg\lambda)$.*

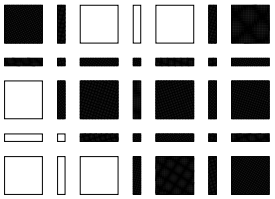
$$\begin{tikzcd} \lambda \arrow[r, "\neg"] \arrow[d, "\zeta_\varepsilon"'] & \neg\lambda \arrow[d, "\zeta_{-\varepsilon}"] \\ \zeta_\varepsilon(\lambda) \arrow[r, "\neg"] & \zeta_{-\varepsilon}(\neg\lambda) \end{tikzcd}$$

Les propositions 7.1.5 et 7.1.6 sont illustrées par les figures 7.7 et 7.8.

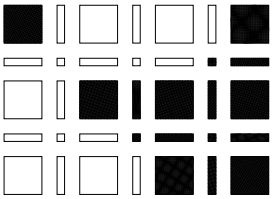
Remarque 7.1.7. *Schématiquement, la proposition 7.1.6 signifie que les notions d'objet et de fond peuvent être échangées sans perte de généralité, pourvu que la paire d'adjacence et la fonction de connexité associée soient modifiées en conséquence.*

7.1.3 Calcul direct des valeurs d'une image régulière

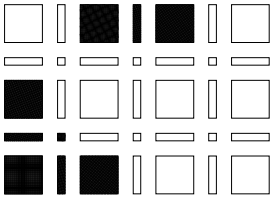
Intuitivement, on peut supposer qu'il existe un lien entre le nombre de facettes appartenant à l'objet dans l'étoile d'une face donnée et la valeur de l'image en cette face. Il nous a paru intéressant d'interroger ce lien. En effet, partant d'une image digitale, cela peut nous permettre d'accélérer le calcul de l'image régulière associée, sous réserve que ce lien soit suffisament simple. Cela peut nous permettre également d'obtenir la valeur d'une image en un point donné sans devoir auparavant calculer la valeur de cette image sur toutes les faces de l'étoile de ce point. Cela peut simplifier la comparaison entre les composantes connexes de $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{F}^n$.



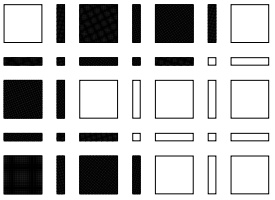
(a) μ



(b) $-\mu$

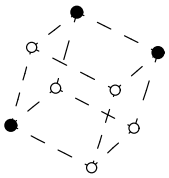


(c) $\neg\mu$

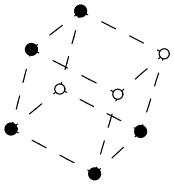


(d) $-(\neg\mu) = \neg(-\mu)$

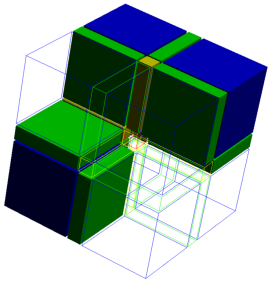
FIGURE 7.7 – (a) Une image $(-1,1)$-régulière $\mu : \mathbb{F}^2 \to \{0,1\}$. (b) L'image $(1,-1)$-régulière $-\mu$. (c) L'image $(1,-1)$-régulière $\neg\mu$. (d) L'image $(-1,1)$-régulière $-(\neg\mu) = \neg(-\mu)$.



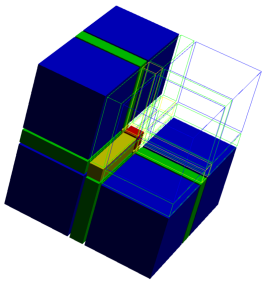
(a) λ



(b) $\neg\lambda$ (après rotation)

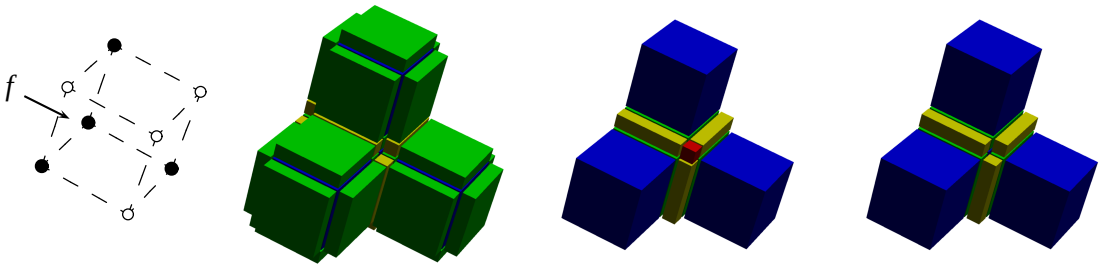


(c) $\zeta_\varepsilon(\lambda)$



(d) $\zeta_{-\varepsilon}(\neg\lambda) = \neg(\zeta_\varepsilon(\lambda))$

FIGURE 7.8 – (a) Une image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}$. (b) L'image négative $\neg\lambda$ associatée à λ. (c) L'image ε-régulière $\zeta_\varepsilon(\lambda)$ associatée à λ avec $\varepsilon = (-1,-1,1)$. (d) L'image $(-\varepsilon)$-régulière $\zeta_{-\varepsilon}(\neg\lambda)$ associée à $\neg\lambda$. Les images (b,d) ont été tournées de $-\pi/2$ le long de l'axe vertical pour faciliter la visualisation de (d).



(a) (b) $\varepsilon = (-1, -1, 1)$ (c) $\varepsilon = (1, 1, -1)$ (d) $\varepsilon = (-1, 1, -1)$

FIGURE 7.9 – (a) Représentation symbolique d'un trièdre associé à une face $f \in \mathbb{F}^n$ telle que $\dim(f) = n - 3$. Points noirs : $f_1^{\uparrow+}$; points blancs $f^{\uparrow+} \setminus f_1^{\uparrow+}$ (voir texte). Les lignes pointillées symbolisent l'existence d'une face de dimension $n - 1$, intersection de deux facettes de $f^{\uparrow+}$. (b–d) Exemples de trièdres, avec trois fonctions de connexité différentes (une des facettes bleues est cachée).

Ainsi, le but de la section 7.1.3 est de trouver si la valeur d'une image ε-régulière en un point est une fonction de ε et du nombre de facettes appartenant à l'objet dans l'étoile du point. Dans $\mathbb{F}^2$, la réponse est positive et facile. Dans $\mathbb{F}^3$, la réponse demande d'étudier minutieusement une configuration particulière (représentée sur la figure 7.9) et, comme nous allons le montrer, bien que la réponse soit en fait négative, elle n'est pas loin d'une réponse positive. Dans des espaces de dimensions supérieures, la réponse est négative et les configurations à étudier trop nombreuses pour espérer obtenir un résultat utile.

Soit $f \in \mathbb{F}^n$, avec $n \geq 3$. Si $\dim(f) = n - 3$, l'EPO $(f^{\uparrow}, \subseteq)$ a un unique élément minimal, à savoir f, et 8 éléments maximaux, les facettes formant $f^{\uparrow+}$. Du point de vue des adjacences, ces facettes sont géometriquement organisées comme les 8 sommets d'une structure cubique. Nous notons $f_1^{\uparrow+}$ les facettes de $f^{\uparrow+}$ dont les valeurs sont égales à 1. Quand $f_1^{\uparrow+}$ est organisé comme dans la configuration représentée sur la figure 7.9(a) (modulo rotations et symétries), nous disons que $f_1^{\uparrow+}$ est un *trièdre*. Nous définissons deux fonctions, très proches du cardinal, nécessaires pour couvrir le cas de la configuration du trièdre : $\mathrm{Card}^-(E) = 3$ et $\mathrm{Card}^+(E) = 5$, si E est un trièdre, et $\mathrm{Card}^-(E) = \mathrm{Card}^+(E) = \mathrm{Card}(E)$ sinon.

Pour chaque fonction de connexité ε, nous définissons récursivement la fonction δ_ε par :

$$\left|\begin{array}{lccl} \delta_\varepsilon : & [\![0, n]\!] & \to & [\![1, 2^n]\!] \\ & 0 & \mapsto & 1 \\ & i+1 & \mapsto & \begin{cases} 2\delta_\varepsilon(i) - 1 & \text{si } \varepsilon(n-i) = 1 \\ 2\delta_\varepsilon(i) & \text{si } \varepsilon(n-i) = -1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Il est facile de vérifier, à l'aide d'une récurrence, que, pour tout $m \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\delta_\varepsilon(m) = 1 + \sum_{k=1}^{m} (1 - \varepsilon(n - k + 1)).2^{m-k-1}.$$

La fonction δ est la réponse (partielle) au problème soulevé en introduction à la présente section comme le montre la proposition suivante.

Proposition 7.1.8. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière et f une k-face de $\mathbb{F}^n$ (avec $n-3 \leq k \leq n-1$).*

(i) Si $\mathrm{Card}^-(f_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(n-k)$, *alors* $\mu(f) = 1$.

(ii) Si $\mu(f) = 1$, *alors* $\mathrm{Card}^+(f_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(n-k)$.

Démonstration. On pose $m = n - \dim(f) = n-k$ (on a donc $1 \leq m \leq 3$). Si $m = 1$, alors $\delta_\varepsilon(m)$ est égal à 1 quand $\varepsilon(n) = 1$ et est égal à 2 quand $\varepsilon(n) = -1$. Puisque, dans le cas $m = 1$, $f^{\uparrow +}$ contient exactement deux faces, qui sont des facettes opposées par rapport à f, les assertions (i) et (ii) sont trivialement vraies pour $m = 1$. Maintenant, supposons que $m \in [\![2,3]\!]$ et que les deux assertions soient vraies pour $m-1$. Comme la relation entre $\delta_\varepsilon(m)$ et $\delta_\varepsilon(m-1)$ dépend de la valeur de $\varepsilon(n-m+1)$ (c'est-à-dire de $\varepsilon(\dim(f)+1)$), nous étudions séparément les deux possibilités.

- Premier cas : $\varepsilon(\dim(f)+1) = -1$.
  - Si $\mathrm{Card}^-(f_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m) = 2\delta_\varepsilon(m-1)$, alors nous déduisons du lemme C.0.2 qu'il existe deux faces g et h, opposées par rapport à f, telles que $\mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$ et $\mathrm{Card}(h_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$. Comme la dimension des faces g et h est supérieure ou égale à $n-2$, nous avons $\mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}^-(g_1^{\uparrow +})$ et $\mathrm{Card}(h_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}^-(h_1^{\uparrow +})$, ce qui nous permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour obtenir $\mu(g) = \mu(h) = 1$. En se souvenant que $\varepsilon(\dim(f)+1) = -1$, nous avons $\mu(f) = \bigvee_{\{a,b\}\in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \wedge \mu(b) \geq \mu(g) \wedge \mu(h) = 1$, et par suite $\mu(f) = 1$, ce qui prouve *(i)*.
  - Inversement, si $\mu(f) = 1$, de la définition 7.1.1, nous obtenons facilement qu'il existe $\{g,h\} \in \mathrm{opp}(f)$ tels que $\mu(g) = \mu(h) = 1$. Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons $\mathrm{Card}^+(g_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$ et $\mathrm{Card}^+(h_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}(h_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$. Puisque g et h sont opposées par rapport à f, nous déduisons du lemme C.0.1 que $\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) + \mathrm{Card}(h_1^{\uparrow +})$. Ainsi, $\mathrm{Card}^+(f_1^{\uparrow +}) \geq \mathrm{Card}(f_1^{\uparrow +}) \geq 2\delta_\varepsilon(m-1) = \delta_\varepsilon(m)$. L'assertion (ii) est donc vérifiée.
- Second cas : $\varepsilon(\dim(f)+1) = 1$.
  - Si $\mathrm{Card}^-(f_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m) = 2\delta_\varepsilon(m-1) - 1$, alors (c'est une conséquence du lemme C.0.1(ii)) dans chaque couple de faces opposées par rapport à f, il existe une face g telle que $\mathrm{Card}^-(g_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$. Donc, par l'hypothèse de récurrence, dans chaque couple de faces opposées par rapport à f, il existe une face dont la valeur est égale à 1. Par conséquent, $\mu(f) = \bigwedge_{\{a,b\}\in \mathrm{opp}(f)} \mu(a) \vee \mu(b) \geq \bigwedge_{\{a,b\}\in \mathrm{opp}(f)} 1 = 1$. Ainsi, nous avons prouvé (i).
  - Inversement, si $\mu(f) = 1$, de la définition 7.1.1 nous déduisons qu'il existe dans chaque couple de faces opposées par rapport à f une face g telle que $\mu(g) = 1$ ce qui, avec l'hypothèse de récurrence, implique que $\mathrm{Card}^+(g_1^{\uparrow +}) = \mathrm{Card}(g_1^{\uparrow +}) \geq \delta_\varepsilon(m-1)$. Nous déduisons finalement du lemme C.0.3 que $\mathrm{Card}^+(f_1^{\uparrow +}) \geq 2\delta_\varepsilon(m-1) - 1 = \delta_\varepsilon(m)$ ce qui prouve (ii). □

De la proposition 7.1.8 et de la définition 7.1.1 (requise quand $f_1^{\uparrow +}$ est un trièdre), nous déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 7.1.9. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière et f une k-face de $\mathbb{F}^n$ ($n-3 \leq k \leq n-1$). Alors $\mu(f) = 1$ si et seulement si l'ensemble $f_1^{\uparrow +}$ satisfait la condition de cardinalité C_ε donnée dans la table 7.2.*

$\dim(f) = n-2$				
ε	$(\dots,1,1)$	$(\dots,-1,1)$	$(\dots,1,-1)$	$(\dots,-1,-1)$
C_ε	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 1$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 2$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 3$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 4$
$\dim(f) = n-3$				
ε	$(\dots,1,1,1)$	$(\dots,-1,1,1)$	$(\dots,1,-1,1)$	$(\dots,-1,-1,1)$
C_ε	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 1$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 2$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 3$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 4$ $f_1^{\uparrow+}$ n'est pas un trièdre
ε	$(\dots,1,1,-1)$	$(\dots,-1,1,-1)$	$(\dots,1,-1,-1)$	$(\dots,-1,-1,-1)$
C_ε	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 5$ ou $f_1^{\uparrow+}$ est un trièdre	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 6$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) \geq 7$	$\mathrm{Card}(f_1^{\uparrow+}) = 8$

TABLE 7.2 – Conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $\mu(f) = 1$ (voir le corollaire 7.1.9).

7.1.4 Images régulières et ouverts/fermés réguliers

Nous avons défini l'objet et le fond d'une image régulière $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ comme les sous-ensembles $\mu^{-1}(\{1\})$ et $\mu^{-1}(\{0\})$ de $\mathbb{F}^n$. Nous montrons dans cette section qu'ils n'ont pas de parties minces ni de trous minces (par « mince », nous voulons dire de dimension plus petite que l'espace ambiant). Ce point est particulièrement important en construction géométrique (voir par exemple à ce propos la section 3.2 de Blackmore et Peters (2007)).

La première proposition – facile à démontrer par récurrence – assure que, dans une région dont les facettes ont toutes la même valeur, l'image a une valeur constante sur les faces de toutes dimensions.

Proposition 7.1.10. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image régulière. Soit $\mathfrak{d} \in \{0,1\}$ et $f \in \mathbb{F}^n$. Si, pour chaque facette g dans $f^{\uparrow+}$, $\mu(g) = \mathfrak{d}$, alors $\mu(f) = \mathfrak{d}$.*

Grâce à la proposition 7.1.10 nous pouvons maintenant établir que l'interieur, resp. l'adhérence, de l'objet (ou du fond) d'une image régulière est un ouvert, resp. un fermé, régulier (la définition des ouverts/fermés réguliers est rappelée en Annexe A.1).

Proposition 7.1.11. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière. Soit $\mathfrak{d} \in \{0,1\}$. Alors $(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}))^\circ$ est un ouvert régulier et $(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}))^\downarrow$ est un fermé régulier.*

Démonstration. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{F}^n$. Les deux chaînes d'implications suivantes sont faciles à établir :

$$f \in (E^\downarrow)^\circ \Rightarrow f^\uparrow \subseteq E^\downarrow \Rightarrow f^{\uparrow+} \subseteq E^\downarrow \Rightarrow f^{\uparrow+} \subseteq E$$
$$\exists g \in f^{\uparrow+}, g \in E \Rightarrow \exists g \geq f, g \in E^\circ \Rightarrow f \in (E^\circ)^\downarrow$$

Maintenant, nous prenons $E = \mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$. De la proposition 7.1.10, nous obtenons $f^{\uparrow+} \subseteq E \Rightarrow f \in E$. En prenant la forme contraposée de la proposition 7.1.10, on a aussi $f \in E \Rightarrow \exists g \in f^{\uparrow+}, g \in E$. On a donc $E^{\downarrow\circ} \subseteq E \subseteq E^{\circ\downarrow}$. On en déduit facilement que :

$$E^{\downarrow\circ\downarrow} \subseteq E^\downarrow \subseteq E^{\circ\downarrow\downarrow} = E^{\circ\downarrow} \subseteq E^{\downarrow\circ\downarrow}$$

où la dernière inclusion vient de $E \subseteq E^{\downarrow}$. On a donc l'égalité $E^{\downarrow\circ\downarrow} = E^{\downarrow}$ ce qui signifie que $E^{\downarrow}$ est un fermé régulier. La preuve de l'égalité $E^{\circ\downarrow\circ} = E^{\circ}$ est similaire. □

Quand la fonction de connexité est constante, la proposition 7.1.11 peut être simplifiée car l'objet et le fond de l'image sont dans ce cas des ouverts ou des fermés.

Corollaire 7.1.12. *Soit $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$ une image ε-régulière. Si $\varepsilon = -1$, alors $\mu^{-1}(\{1\})$, resp. $\mu^{-1}(\{0\})$, est un ouvert, resp. un fermé régulier. Si $\varepsilon = 1$, alors $\mu^{-1}(\{1\})$, resp. $\mu^{-1}(\{0\})$, est un fermé, resp. un ouvert, régulier.*

Démonstration. Si $\varepsilon = -1$, il est clair que $g \supseteq f \Rightarrow g^{\uparrow+} \subseteq f^{\uparrow+} \Rightarrow \bigwedge_{h\in g^{\uparrow+}} \mu(h) \geq \bigwedge_{h\in f^{\uparrow+}} \mu(h) \Rightarrow \mu(g) \geq \mu(f)$. Alors, $g \supseteq f$ et $f \in \mu^{-1}(\{1\})$ implique $g \in \mu^{-1}(\{1\})$, c'est-à-dire $\mu^{-1}(\{1\})$ est un ouvert. Par suite, $\mu^{-1}(\{1\}) = (\mu^{-1}(\{1\}))^{\circ}$ est un ouvert régulier (proposition 7.1.11). De la même façon, si $\varepsilon = 1$, $g \subseteq f$ implique $\mu(g) \geq \mu(f)$. Donc, $\mu^{-1}(\{1\})$ est un fermé régulier. Le résultat pour $\mu^{-1}(\{0\})$ s'obtient par dualité (voir la remarque 7.1.7). □

Remarque 7.1.13. *Le fait que l'intérieur de l'objet et du fond d'une image régulière sont des ouverts réguliers peut être étendu aux surfaces entre les objets et le fond. En effet, considérons une k-face de $\mathbb{F}^n$, $0 \leq k < n$, qui est dans une* région localement plane *de la surface dans une image ε-régulière μ, c'est-à-dire telle qu'il existe une paire $(a,b) \in \mathrm{opp}(f)$ verifiant $a^{\uparrow+} \subset \mu^{-1}(\{0\})$ et $b^{\uparrow+} \subset \mu^{-1}(\{1\})$ (voir la figure 7.10). Il est facile de montrer que toutes les i-faces, $k < i < n$, dans $f^{\uparrow}$ qui ne sont ni dans*

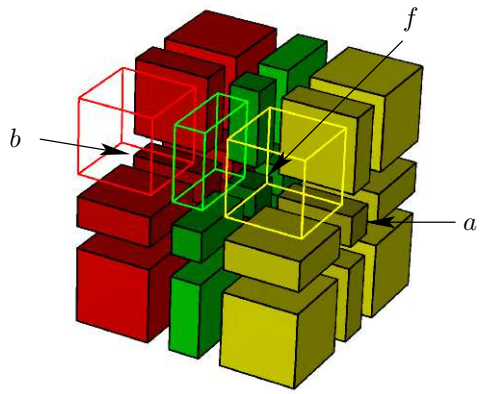


FIGURE 7.10 – En vert : une région localement plane de la surface dans une image ε-régulière μ. La face f (voir texte) est la 0-face au centre de l'image. En rouge : l'objet. En jaune : le fond.

$a^{\uparrow}$ ni dans $b^{\uparrow}$, sont aussi dans la région localement plane de la surface. En particulier, dans chaque paire de faces opposées par rapport à une $(n-1)$-face de $f^{\uparrow} \setminus (a^{\uparrow} \cup b^{\uparrow})$, il y a une facette de l'objet et une facette du fond. Donc, ces $(n-1)$-faces sont toutes dans l'objet ou elles sont toutes dans le fond (suivant la valeur de $\varepsilon(n)$). Maintenant, examinons à nouveau le cas de la k-face f. Par la définition même d'une image ε-régulière, nous avons :

– *si* $\varepsilon(k+1) = 1$,

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \left(\bigwedge_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \vee \mu(d)\right) \wedge (\mu(a) \vee \mu(b)) \\ &= \left(\bigwedge_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \vee \mu(d)\right) \wedge 1 \\ &= \bigwedge_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \vee \mu(d) \ ;\end{aligned}$$

– *si* $\varepsilon(k+1) = -1$,

$$\begin{aligned}\mu(f) &= \left(\bigvee_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \vee \mu(d)\right) \vee (\mu(a) \wedge \mu(b)) \\ &= \left(\bigvee_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \wedge \mu(d)\right) \vee 0 \\ &= \bigvee_{(c,d)\in \mathrm{opp}(f)\setminus\{\{a,b\}\}} \mu(c) \wedge \mu(d).\end{aligned}$$

Ces égalités prouvent que la valeur de $\mu(f)$ *dépend seulement des valeurs de* μ *sur les* $(k+1)$*-faces de* $f^{\uparrow} \setminus \{a,b\}$ *qui sont dans la région localement plane de la surface. Ainsi, on peut facilement montrer par récurrence que* $\mu(f)$ *dépend seulement de la valeur de* $\varepsilon(n)$ *et est égal à* $\mu(g)$ *pour tout* $g \in f^{\uparrow} \setminus (a^{\uparrow} \cup b^{\uparrow})$*. Cela prouve que toutes les faces de la région localement plane de la surface dans l'image* μ *partagent la même valeur.*

7.2 Chemins et lacets

Dans cette section, nous étudions comment les fonctions ζ_ε définies dans la section 7.1 se comportent vis-à-vis des chemins dans $\mathbb{Z}^n$ et $\mathbb{F}^n$. Les principaux résultats sont les théorèmes 7.2.8 et 7.2.13. Le théorème 7.2.8 affirme que la fonction ζ_ε induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes de l'objet (resp. du fond) d'une image digitale $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0,1\}$ et l'ensemble des composantes connexes de l'objet (resp. du fond) de l'image régulière $\mu = \zeta_\varepsilon(\lambda) : \mathbb{F}^n \to \{0,1\}$, la fonction ε étant choisie en accord avec la paire d'adjacences utilisée dans $\mathbb{Z}^n$. Le théorème 7.2.13 énonce que ζ_ε induit un isomorphisme entre le groupe fondamental digital de $\lambda^{-1}(\{1\})$ (resp. $\lambda^{-1}(\{0\})$) de point de base a ($a \in \mathbb{Z}^n$) et le groupe fondamental de $\mu^{-1}(\{1\})$ (resp. $\mu^{-1}(\{0\})$) de point de base $\breve{a}$.

7.2.1 Composantes connexes

Nous expliquons ici comment nous associons à un α-chemin digital un arc dans $\mathbb{F}^n$ et nous montrons que cette association respecte les composantes connexes de l'objet et du fond. Les notions d'α-chemin (digital), d'arc et de chemin fini régulier dans un EPO sont définies respectivement aux chapitres 2 et 6 (sections 6.1.1 et 6.2.1).

Soit χ et χ' deux arcs dans $\mathbb{F}^n$. Nous écrivons [3] $\chi \leq \chi'$ s'il existe deux chemins $p \leq p'$ dans $\mathbb{F}^n$ dont les traces sont χ et χ' (tous les chemins dans $\mathbb{F}^n$ considérés dans la section 7.2 sont des chemins finis réguliers).

Définition 7.2.1. *Soit ω une relation d'adjacence sur $\mathbb{Z}^n$ et $\gamma = (p_i)_{i=0}^r$ $(r \geq 0)$ un ω-chemin dans $\mathbb{Z}^n$. L'arc $\zeta(\gamma)$ dans $\mathbb{F}^n$ est défini par $\zeta(\gamma) = (q_j)_{j=0}^{2r}$ avec, pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, $q_{2i} = \check{p}_i$ et $q_j = q_{j-1} \cap q_{j+1}$ si j est impair ($j \in [\![1, 2r-1]\!]$).*

Il est évident que la suite de faces $\zeta(\gamma)$ définie ci-dessus est effectivement un arc dans $\mathbb{F}^n$, et celui-ci est lui-même la trace d'un chemin fini régulier dans $\mathbb{F}^n$ (proposition 6.2.2). Il est important de noter que la fonction ζ de la définition 7.2.1 ne dépend pas de la valeur de ω. Cependant, pour comparer les relations de connexité dans $\mathbb{Z}^n$ et dans $\mathbb{F}^n$, nous avons besoin de préciser le lien entre le choix de la paire d'adjacence dans $\mathbb{Z}^n$ et le choix de la fonction de connexité dans $\mathbb{F}^n$ (le lecteur reconnaîtra la correspondance déjà donnée dans la table 7.1).

Définition 7.2.2. *Soit (α, β) une paire d'adjacences sur $\mathbb{Z}^n$. La fonction de connexité $\tau(\alpha, \beta)$: $[\![1, n]\!] \to \{-1, 1\}$ est définie par :*

$$\tau(\alpha,\beta) = \begin{cases} -1 & si \quad (\alpha,\beta) = (2n, 3^n - 1) \\ 1 & si \quad (\alpha,\beta) = (3^n - 1, 2n) \\ (-1, 1, -1) & si \quad n = 3 \text{ et } (\alpha,\beta) = (6, 18) \\ (1, -1, 1) & si \quad n = 3 \text{ et } (\alpha,\beta) = (18, 6). \end{cases}$$

Dans la suite de la section 7.2, nous utilisons les notations suivantes qui ne seront rappelées que dans les énoncés des théorèmes :

- (α, β) est une paire d'adjacences sur $\mathbb{Z}^n$;
- ε est la fonction de connexité $\tau(\alpha, \beta)$;
- $\mathfrak{d}$ est un entier égal à 0 ou 1 ;
- ω est égal à α si $\mathfrak{d} = 1$ et est égal à β si $\mathfrak{d} = 0$;
- $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0, 1\}$ est une image sur $\mathbb{Z}^n$;
- μ est l'image sur $\mathbb{F}^n$ égale à $\zeta_\varepsilon(\lambda)$.

La proposition suivante affirme que la fonction ζ associe à un chemin dans l'objet (resp. dans le fond), de l'image digitale λ, un arc dans l'objet (resp. dans le fond) de l'image complexe μ. La conséquence principale de cette proposition est que les images, par la fonction ζ_ε, des composantes connexes de l'objet (resp. du fond) de l'image digitale λ sont incluses dans les composantes connexes de l'objet (resp. du fond) de l'image complexe μ.

Proposition 7.2.3. *L'image, par la fonction ζ, d'un ω-chemin dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ est un arc dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$.*

Démonstration. La preuve est donnée pour $(\alpha, \beta) = (3^n - 1, 2n)$ et ($n = 3$ et $(\alpha, \beta) = (18, 6)$). Les cas $(\alpha, \beta) = (2n, 3^n - 1)$ et ($n = 3$ et $(\alpha, \beta) = (6, 18)$) s'obtiennent par dualité (voir la remarque 7.1.7).

- Cas $(\alpha, \beta) = (3^n - 1, 2n)$.
  On a $\varepsilon(k) = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Si $\gamma = (p_i)_{i=0}^r$ $(r \geq 0)$ est un α-chemin dans $\lambda^{-1}(\{1\})$, du corollaire 7.1.9 et de la table 7.2, on obtient directement que $\mu(\check{p}_{i-1} \cap \check{p}_i) = 1$ pour tout

3. La notation $\chi \leq \chi'$ ne signifie pas que $\leq$ est un ordre (c'est en fait un pré-ordre sur l'ensemble des chemins finis réguliers). Par exemple, si $a \subset b \subset c$ sont trois faces distinctes de $\mathbb{F}^n$, on vérifie facilement que $(a, c) \leq (a, b, c) \leq (a, c)$.

$i \in [\![1, r]\!]$, c'est-à-dire que $\zeta(\gamma)$ est un arc dans $\mu^{-1}(\{1\})$. Si γ est un β-chemin dans $\lambda^{-1}(\{0\})$, alors $\dim(\check{p_{i-1}} \cap \check{p_i}) = n - 1$ et, par suite, $\mu(\check{p_{i-1}} \cap \check{p_i}) = \mu(\check{p_{i-1}}) \vee \mu(\check{p_i}) = 0 \vee 0 = 0$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Il vient que $\zeta(\gamma)$ est an arc dans $\mu^{-1}(\{0\})$.

– Cas $n = 3$ et $(\alpha, \beta) = (18, 6)$.
La fonction de connexité ε est telle que $\varepsilon(3) = 1$ et $\varepsilon(2) = -1$. Si γ est un 18-chemin dans $\lambda^{-1}(\{1\})$, alors toutes les faces de γ ont une dimension supérieure ou égale à 1. Ainsi, à nouveau grâce au corollaire 7.1.9 et à la table 7.2, on trouve que $\mu(\check{p_{i-1}} \cap \check{p_i}) = 1$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$: $\zeta(\gamma)$ est un arc dans $\mu^{-1}(\{1\})$. Si γ est un 6-chemin dans $\lambda^{-1}(\{0\})$, nous utilisons la preuve du cas $(\alpha, \beta) = (3^n - 1, 2n)$. □

La proposition suivante est évidente.

Proposition 7.2.4. *La fonction ζ est un homomorphisme pour le produit des chemins digitaux et le produit des arcs : pour tous ω-chemins $\gamma, \gamma' \in \mathbb{Z}^n$, $\zeta(\gamma.\gamma') = \zeta(\gamma).\zeta(\gamma')$.*

L'injectivité de ζ est évidente car deux n-xels distincts $a, b \in \mathbb{Z}^n$ sont associés à des facettes distinctes $\check{a}, \check{b} \in \mathbb{F}^n$. La proposition 7.2.7 prouve la surjectivité de ζ modulo les déformations : tout arc χ de $\check{a}$ à $\check{b}$ dans l'objet (resp. dans le fond) d'une image régulière $\zeta_\varepsilon(\lambda)$ est la déformation d'un arc $\zeta(\gamma)$ pour un certain chemin γ de a à b dans l'objet (resp. le fond) de l'image digitale λ (étant entendu que la fonction de connexité ε est correctement associée à la paire d'adjacences de l'image λ). Nous établissons une version forte de la surjectivité, impliquant des chemins dans $\mathbb{F}^n$, dont nous aurons besoin dans la section suivante traitant des groupes fondamentaux. Le lemme 7.2.5 est le point clef de la preuve de la proposition 7.2.7.

Lemme 7.2.5. *Soit p un chemin dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont la trace est (f, g, h) avec $f \supset g \subset h$. Soit $a, b \in \mathbb{Z}^n$ deux xels de $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ tels que $\check{a} \supset f$ et $h \subset \check{b}$. Il existe un ω-chemin γ dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ de a à b et un chemin q, $q \geq p$, dont la trace est $\zeta(\gamma)$.*

Démonstration. La preuve est donnée pour $\mathfrak{d} = 1$. Le cas $\mathfrak{d} = 0$ est obtenu par dualité (cf. remarque 7.1.7). Si $a = b$, nous posons $\gamma = (a)$ et $q = \check{a}\mathbf{1}_{[0,1]}$ et le lemme est démontré. Supposons maintenant que $a \neq b$. On pose $g' = \check{a} \cap \check{b}$. Il existe trois intervalles inclus dans $[0, 1]$ tels que $p = f\mathbf{1}_I + g\mathbf{1}_J + h\mathbf{1}_K$. Puisque $\check{a} \supset f \supset g \subset h \subset \check{b}$, nous avons $g \subset g'$.

– Si $\varepsilon = -1$, comme $g \in \mu^{-1}(\{1\})$, nous obtenons de la proposition 7.1.3 que toutes les facettes dans $g^{\uparrow}$ ont pour valeur 1. Ainsi, il est très facile de construire un ω-chemin $\gamma = (d_i)_{i=0}^k$, $1 \leq k \leq n$, de a à b dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ tel que $g \subseteq \check{d_i}$ pour tout $i \in [\![0, k]\!]$. De plus, nous pouvons facilement définir un chemin q dans $\mu^{-1}(\{1\})$ dont la trace est $\zeta(\gamma)$ et tel que $q \geq p$.
– Si $\varepsilon = 1$, à nouveau grâce à la proposition 7.1.3, on a $g' \in \mu^{-1}(\{1\})$ car $\check{a} \in g'^{\uparrow +}$ et $\mu(\check{a}) = 1$. Donc, nous pouvons poser $\gamma = (a, b)$ (γ est un ω-chemin car ici $\omega = 3^n - 1$) et définir q par $q(t) = \check{a}$ si $p(t) = f$, $q(t) = g'$ si $p(t) = g$ et $q(t) = \check{b}$ si $p(t) = h$.
– Si $n = 3$ et $\varepsilon = (1, -1, 1)$, nous déduisons de la table 7.2 que si $\dim(g') \geq 1$, alors $g' \in \mu^{-1}(\{1\})$ et on conclut comme ci-dessus en posant $\gamma = (a, b)$ (ici, $\omega = 18$).
Si $\dim(g') = 0$, alors $g' = g$ et, encore grâce à la table 7.2, nous savons qu'il existe au moins une facette supplémentaire $\check{c}$, $c \neq a$ et $c \neq b$, dans $g^{\uparrow +} \cap \mu^{-1}(\{1\})$. La figure 7.11 montre la configuration (modulo rotations et symétries). Nous pouvons alors poser $\gamma = (a, c, b)$ et la définition d'un chemin q plus grand que p ne pose pas de difficulté.

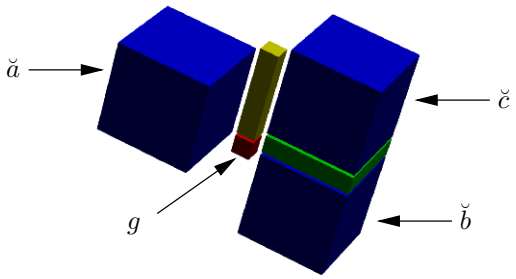


FIGURE 7.11 – Preuve du lemme 7.2.5 : cas $n = 3$, $\varepsilon = (1, -1, 1)$ et $\dim(g') = 0$ (voir texte).

– Si $n = 3$ et $\varepsilon = (-1, 1, -1)$, ce qui correspond à $(\alpha, \beta) = (6, 18)$, comme dans le cas précédent, nous trouvons en consultant la table 7.2 qu'il existe dans $g^{\uparrow +} \cap \mu^{-1}(\{1\})$ suffisament de facettes pour construire un 6-chemin dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ de a à b :
Si $\dim(g) = 2$, alors $g' = g$ et nous posons $\gamma = (a, b)$ (q peut être défini comme dans le cas $\varepsilon = 1$).
Si $\dim(g) = 1$ (resp. $\dim(g) = 0$) alors il existe au moins trois (resp. six) facettes dans l'étoile de g, parmi lesquelles $\breve{a}$ et $\breve{b}$,de sorte que nous pouvons facilement définir un 6-chemin γ dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ et un chemin q dans $\mu^{-1}(\{1\})$ dont la trace est $\zeta(\gamma)$ et qui est supérieur ou égal à p.
La figure 7.12 montre toutes les configurations minimales possibles (modulo rotations et symétries) quand $\dim(g) = 0$ ou $\dim(g) = 1$ (par minimales, nous entendons que l'étoile de g dans l'objet contient au moins les faces représentées sur la figure). □

Dans la preuve de la proposition 7.2.7 nous utiliserons aussi le résultat suivant.

Lemme 7.2.6. *Soit $(X, \leq)$ un EPO. Le produit des chemins est compatible avec la relation d'ordre : pour tout $a, b, c \in X$ et tous chemins $p \leq p'$ de a à b et $q \leq q'$ de b à c, on a $p.q \leq p'.q'$.*

Démonstration. Soit $t \in [0, 1]$. Si $t \leq \frac{1}{2}$, alors, $p.q(t) = p(2t) \leq p'(2t) = p'.q'(t)$. Si $t \geq \frac{1}{2}$, alors $p.q(t) = q(2t - 1) \leq q'(2t - 1) = p'.q'(t)$. □

Proposition 7.2.7. *Soit $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Soit χ un arc de la facette $\breve{a}$ à la facette $\breve{b}$ dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ et p un chemin dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont la trace est χ. Il existe un ω-chemin γ de a à b dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ et un chemin q dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, $q \geq p$, dont la trace est $\zeta(\gamma)$.*

Démonstration. La preuve est donnée pour $\mathfrak{d} = 1$. Le cas $\mathfrak{d} = 0$ est obtenu par dualité (cf. remarque 7.1.7). Soit $\chi = (q_i)_{i=0}^r$ ($r \geq 0$) un arc de la facette $\breve{a}$ à la facette $\breve{b}$ dans $\mu^{-1}(\{1\})$ et $p = \sum_{i=0}^r q_i \mathbf{1}_{I_i}$ un chemin dont la trace est χ. La preuve se fait par récurrence sur r, la longueur de χ. Si $r = 0$, la proposition est évidente. Supposons maintenant que la propriété est vraie quand la longueur de χ est strictement inférieure à un entier $r \geq 2$ ($r = 1$ est impossible). Soit $j \in [\![1, r-1]\!]$ le plus petit entier tel que q_j est un minimum local de χ, c'est-à-dire tel que $q_{j-1} \supset q_j \subset q_{j+1}$ (souvenons-nous que $q_0 = \breve{a}$ et $q_r = \breve{b}$ sont des facettes) et soit $k \in [\![j+1, r]\!]$ le plus petit entier tel que q_k est un maximum local de χ, c'est-à-dire $q_{k-1} \subset q_k \supset q_{k+1}$. Soit t le centre de l'intervalle I_k et $\varphi : [0, 1] \to [0, 1]$ la fonction bijective qui envoie t sur $\frac{1}{2}$ et est lineaire entre 0 et t et entre t et 1. On a $p \circ \varphi^{-1} = (\sum_{i=0}^k q_i \mathbf{1}_{(2\varphi)(I_i')}).(\sum_{i=k}^r q_i \mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I_i'')})$ où $I_i' = I_i$ si $0 \leq i < k$, $I_k' = I_k \cap [0, t]$, $I_k'' = I_k \cap [t, 1]$ et $I_i'' = I_i$ si $k < i \leq r$. De la forme contraposée de l'assertion de la proposition 7.1.10, on déduit

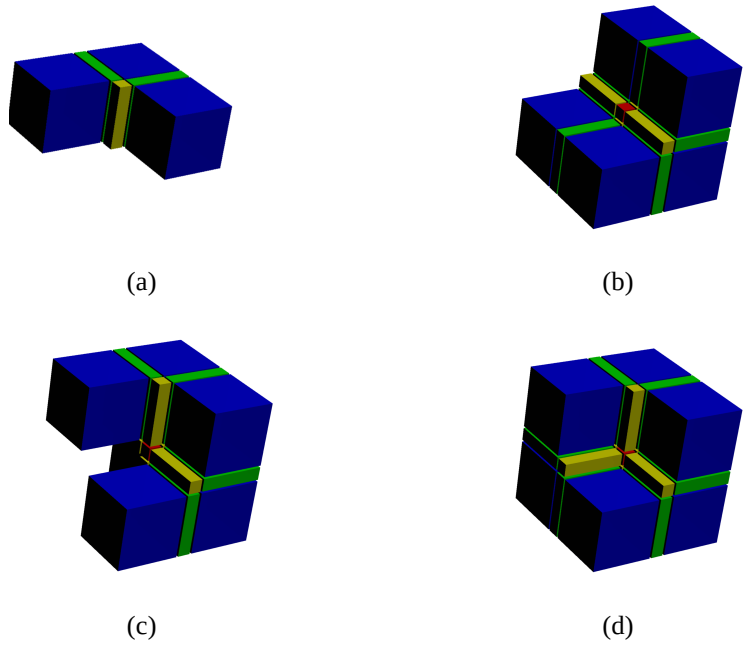


FIGURE 7.12 – Preuve du lemme 7.2.5 : cas $n = 3$, $\varepsilon = (-1, 1, -1)$ et $\dim(g) \leq 1$ (voir texte). (a) g est une 1-face (en jaune) ; $\breve{a}$ et $\breve{b}$ sont deux des trois 3-faces (en bleu). (b–d) g est la 0-face (en rouge) ; $\breve{a}$ et $\breve{b}$ sont deux des six 3-faces (en bleu).

qu'il existe un xel $c \in \mathbb{Z}^n$, tel que $c \in \lambda^{-1}(\{1\})$ et $q_k \subseteq \breve{c}$ (si q_k est une facette de $\mathbb{F}^n$, $\breve{c} = q_k$). Comme $\breve{c}\mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I''_k)} + \sum_{i=k+1}^{r} q_i \mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I''_i)}$ est un chemin de $\breve{c}$ à $\breve{b}$ dont la longueur est strictement inférieure à r, par hypothèse de récurrence, il existe un ω-chemin $\gamma^{(2)}$ de c à b dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ et un chemin $q^{(2)}$ de $\breve{c}$ à $\breve{b}$ tel que $\zeta(\gamma^{(2)})$ est la trace de $q^{(2)}$ et $q^{(2)} \geq \breve{c}\mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I''_k)} + \sum_{i=k+1}^{r} q_i \mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I''_i)} \geq \sum_{i=k}^{r} q_i \mathbf{1}_{(2\varphi-1)(I''_i)}$. D'un autre côté, grâce au lemme 7.2.5, nous pouvons définir dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ un ω-chemin $\gamma^{(1)}$ de a à c et un chemin dans $\mu^{-1}(\{1\})$, $q^{(1)} \geq \breve{a}\mathbf{1}_{(2\varphi)(I)} + q_j \mathbf{1}_{(2\varphi)(I'_j)} + \breve{c}\mathbf{1}_{(2\varphi)(J)} \geq \sum_{i=0}^{k} q_i \mathbf{1}_{(2\varphi)(I'_i)}$, où $I = \bigcup_{i=0}^{j-1} I'_i$ et $J = \bigcup_{i=j+1}^{k} I'_i$, dont la trace est $\zeta(\gamma^{(1)})$. Finalement, nous posons $\gamma = \gamma^{(1)}.\gamma^{(2)}$ et $q = q^{(1)}.q^{(2)}$. Puisque ζ est un morphisme (proposition 7.2.4), $\zeta(\gamma)$ est la trace de q et, grâce au lemme 7.2.6, on a $q \geq p \circ \varphi^{-1}$ et par conséquent, $q \circ \varphi \geq p$. Il est clair que $q \circ \varphi$ a la même trace que q, ce qui termine la preuve. □

Nous pouvons maintenant établir notre premier théorème qui affirme que la correspondance entre les images digitales et les images régulières proposée dans ce chapitre conserve les composantes connexes d'une image digitale quelle que soit l'interprétation de l'image retenue par le choix d'une paire d'adjacences classiques.

Théorème 7.2.8. *Soit (α, β) une paire d'adjacences sur $\mathbb{Z}^n$. Soit ε la fonction de connexité $\tau(\alpha, \beta)$. Soit $\mathfrak{d} \in \{0, 1\}$. Soit $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0, 1\}$ une image dans $\mathbb{Z}^n$ et $\mu = \zeta_\varepsilon(\lambda)$ l'image corespondante dans $\mathbb{F}^n$. La fonction qui associe au xel $a \in \mathbb{Z}^n$ la facette $\breve{a} \in \mathbb{F}^n$ induit une correspondance bi-univoque entre les composantes connexes de $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ et les composantes connexes de $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$.*

Démonstration. Par les propositions 7.2.3 et 7.2.7, nous savons que deux points a, b dans $\mathbb{Z}^n$ sont dans la même composante connexe de $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ si et seulement si $\breve{a}$ et $\breve{b}$ sont dans la même composante

connexe de $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$. De plus, de la forme contraposée de l'assertion de la proposition 7.1.10 (et du fait que, si f, g sont des faces de $\mathbb{F}^n$ et $f \subset g$, alors (f, g) est un arc), nous obtenons qu'il n'existe pas de composante connexe de $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ sans facette. □

7.2.2 Groupes fondamentaux en dimension 2 et 3

Le but de cette section est de comparer le groupe fondamental digital défini par Kong (voir section 4.1) pour des sous-ensembles de $\mathbb{Z}^n$, $n \in \{2, 3\}$, avec le groupe fondamental classique des sous-espaces de $\mathbb{F}^n$. Jusqu'à la fin du chapitre 7, la dimension n de l'espace est restreinte à 2 ou 3.

D'abord nous montrons que lorsque deux chemins digitaux sont équivalents, les arcs correspondants sont des déformations l'un de l'autre.

Proposition 7.2.9. *Si γ et γ' sont deux ω-chemins équivalents dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, alors l'arc $\zeta(\gamma')$ est une déformation de l'arc $\zeta(\gamma)$ dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$.*

Démonstration. La preuve est donnée pour $\mathfrak{d} = 1$. Le cas $\mathfrak{d} = 0$ est obtenu par dualité (cf. remarque 7.1.7). Puisque ζ est un homomorphisme (proposition 7.2.4) et « être une déformation de ou égal à » est une relation d'équivalence, nous déduisons de la définition de l'équivalence des chemins digitaux (voir section 4.1) qu'il suffit d'obtenir la conclusion du lemme pour deux chemins digitaux γ, γ' immédiatement équivalents. Cela revient à considérer un lacet γ dans $\lambda^{-1}(\{1\})$ de a à a ($a \in \mathbb{Z}^n$), inclus dans un carré unitaire si $n = 2$ ou $n = 3$ et $\beta = 26$, ou inclus dans un cube unitaire, et à montrer que $\zeta(\gamma)$ est une déformaton de l'arc constant $\breve{a}$. Nous appelons C le carré, ou le cube, unitaire considéré. On peut supposer, sans restreindre la généralité de la démonstration, que le lacet γ est élémentaire, c'est-à-dire que tous les points de γ, hormis les extrémités sont distincts (sinon, on applique autant de fois que nécessaire le résultat obtenu pour les arcs élémentaires). Si la longueur de γ est inférieure ou égale à 2, alors la propriété à démontrer est évidente. Maintenant, nous supposons que la longueur de γ est supérieure ou égale à 3. On note m la face de $\mathbb{F}^n$ située à l'intersection des facettes $\breve{b}$, $b \in C$. Notons que l'arc $\zeta(\gamma)$ est inclus dans $m^{\uparrow}$. Puisqu'au moins trois facettes distinctes de C appartiennent à $\mu^{-1}(\{1\})$, nous déduisons de la table 7.2 que, si $\alpha = 3^n - 1$ ou ($n = 3$ et $\alpha = 18$), alors $m \in \mu^{-1}(\{1\})$ et nous pouvons très facilement construire [4] une suite d'étirements élémentaires de (a) à $\zeta(\gamma)$ [5]. Nous supposons maintenant que $\alpha = 2n$. Pour terminer la démonstration, nous examinons tous les lacets élémentaires qui peuvent être construits dans un carré, ou un cube, unitaire de $\mathbb{Z}^n$ (modulo rotations et symétries). Le lecteur peut vérifier sur la figure 7.13 que, dans chaque cas, l'arc $\zeta(\gamma)$ peut être déformé (dans $\mu^{-1}(\{1\})$) en un arc constant en introduisant la face m dans $\zeta(\gamma)$. □

Maintenant, nous nous intéressons à la réciproque de la proposition 7.2.9, qui est plus difficile à obtenir. Nous montrons d'abord (lemme 7.2.10) que, si un arc dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ est un étirement élémentaire d'un autre arc dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, il existe un chemin digital γ dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont l'image $\zeta(\gamma)$ est supérieure aux deux arcs. Ensuite, nous prouvons (lemme 7.2.11) que, si les images de deux chemins digitaux dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ sont plus grands que le même arc dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, ces deux chemins digitaux sont équivalents. De ces deux lemmes, il n'est pas difficile de conclure (proposition 7.2.12).

4. On pourrait aussi invoquer l'existence d'un minimum pour en déduire la contractilité de $m^{\uparrow} \cap \lambda^{-1}(\{1\})$ (propriété 4.2.10).

5. Si $\zeta(\gamma) = (f_i)_{i=0}^{r}$ ($r \geq 2$ et $f_0 = f_r = a$) nous utilisons la suite d'étirements élémentaires $(f_0) \to (f_0, m, f_r) \to (f_0, m, f_{r-1}, f_r) \to \ldots \to (f_0, m, f_1, \ldots, f_r) \to (f_0, f_1, \ldots, f_r)$.

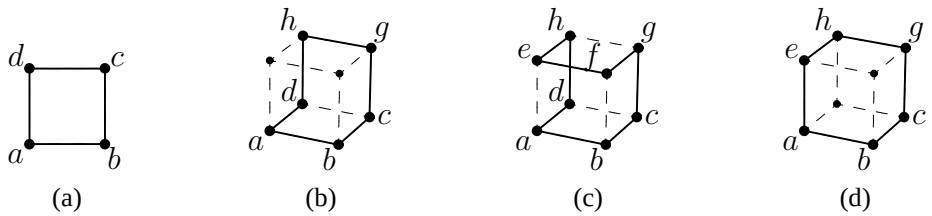


FIGURE 7.13 – Preuve de la proposition 7.2.9. Nous utilisons l'ordre dual dans $\mathbb{F}^n$ pour représenter le carré/cube unitaire : les facettes sont représentées par des points, les $(n-1)$-faces par des arêtes et ainsi de suite. En particulier, la face m (voir texte) est vue comme le carré $\{a,b,c,d\}$ ou le cube $\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$. L'arc $\zeta(\gamma)$ est dessiné en traits pleins. Comme $\zeta_\varepsilon(\lambda)$ est une image régulière, quelle que soit la fonction de connexité ε, quand deux sommets 4/6-adjacents (qui sont en réalité des facettes) du polyèdre représenté sont sur $\zeta(\gamma)$, l'arête qui les relie appartient à $\mu^{-1}(\{1\})$ et quand les quatre sommets d'un carré sont sur $\zeta(\gamma)$, alors le carré appartient à $\mu^{-1}(\{1\})$. (a) Tous les sommets, et donc m, sont dans $\mu^{-1}(\{1\})$. (b–d) Ces trois figures ne concernent que le cas $(\alpha,\beta) = (6,18)$, c'est-à-dire $\varepsilon = (-1,1,-1)$. Sur chaque figure, la longueur de γ est supérieure ou égale à 6, donc, de la table 7.2, on déduit que $m \in \mu^{-1}(\{1\})$.

Lemme 7.2.10. *Soit $a,b \in \mathbb{Z}^n$. Soit χ et χ' deux arcs de $\breve{a}$ à $\breve{b}$ dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$. Si χ' est un étirement élémentaire de χ, alors il existe dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ un ω-chemin γ de a à b tel que $\zeta(\gamma) \geq \chi$ et $\zeta(\gamma) \geq \chi'$.*

Démonstration. Il y a deux cas dans la définition d'un étirement élémentaire. Ces deux cas sont très voisins aussi nous ne donnons la preuve que pour l'un des deux. On pose $\chi = (f_i)_{i=0}^r$ $(r \geq 1)$ et $\chi' = (f_i)_{i=0}^{i_0}.(f_{i_0}, f, f_{i_0+1}).(f_i)_{i=i_0+1}^r$ avec $i_0 \in [\![0, r-1]\!]$. On peut supposer, sans perte de généralité, que $f_{i_0} \subset f_{i_0+1}$.

- Cas $f \subset f_{i_0+1}$.
  On considère un chemin $p = \sum_{i=0}^r f_i \mathbf{1}_{I_i}$ dont la trace est χ (un tel chemin existe d'après la proposition 6.2.2). Grâce à la proposition 7.2.7, nous savons qu'il existe un ω-chemin γ dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ de a à b et un chemin q dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont la trace est $\zeta(\gamma)$ et tel que $q \geq p$. On pose $y = \max(I_{i_0}) = \inf(I_{i_0+1})$ (puisque $f_{i_0} \subset f_{i_0+1}$, l'intervalle I_{i_0} est fermé à droite (proposition 6.2.3)). Soit $\delta > 0$ un réel tel que $y - 2\delta \in I_{i_0}$ et $y + 2\delta \in I_{i_0+1}$ (δ existe car p est régulier). On pose $p' = \sum_{i=0}^{i_0-1} f_i \mathbf{1}_{I_i} + f_{i_0}\mathbf{1}_I + f\mathbf{1}_{I'} + f_{i_0+1}\mathbf{1}_{I''} + \sum_{i=i_0+2}^r f_i \mathbf{1}_{I_i}$ où $I' = [y-\delta, y+\delta]$, si $f \subset f_{i_0}$ et $I' =]y, y+\delta]$ si $f_{i_0} \subset f \subset f_{i_0+1}$, $I = I_{i_0} \setminus I'$ et $I'' = I_{i_0+1} \setminus I'$. Ainsi, p' est continu et il est manifeste que la trace de p' est χ' et $p' \leq p$. On a donc $p' \leq p \leq q$. Puis, $\zeta(\gamma) \geq \chi$ et $\zeta(\gamma) \geq \chi'$.
- Cas $f_{i_0+1} \subset f$.
  Toujours grâce aux propositions 6.2.2 et 7.2.7, nous commençons par construire un ω-chemin γ' dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ de a à b et deux chemins $p' = \sum_{i=0}^{i_0} f_i \mathbf{1}_{I_i} + f\mathbf{1}_I + \sum_{i=i_0+1}^r f_i \mathbf{1}_{I_i}$, q' dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont les traces sont χ' et $\zeta(\gamma')$ et tels que $q' \geq p'$. On pose $p = \sum_{i=0}^{i_0} f_i \mathbf{1}_{I_i} + f_{i_0+1}\mathbf{1}_{I'} + \sum_{i=i_0+2}^r f_i \mathbf{1}_{I_i}$ où $I' = I \cup I_{i_0+1}$. Alors, p est un chemin dont la trace est χ et $p \leq p' \leq q'$. D'où, $\zeta(\gamma') \geq \chi$ et $\zeta(\gamma') \geq \chi'$. □

Lemme 7.2.11. *Soit $a,b \in \mathbb{Z}^n$. Soit χ un arc de la facette $\breve{a}$ à la facette $\breve{b}$ dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ et γ, γ' deux ω-chemins de a à b dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ tels que $\zeta(\gamma) \geq \chi$ et $\zeta(\gamma') \geq \chi$. Alors γ et γ' sont équivalents dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$.*

Démonstration. Soit p, p_0, q, q'_0 quatre chemins dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ dont les traces sont respectivement χ, χ, $\zeta(\gamma)$, $\zeta(\gamma')$ et tels que $p \leq q$ et $p_0 \leq q'_0$. Si $p \neq p_0$, puisque ces deux chemins finis réguliers ont

la même trace, les intervalles de leurs séquences d'intervalles sont deux à deux homéomorphes (le i^{e} intervalle de l'une des deux suites est fermé à gauche (resp. à droite) si et seulement si le i^{e} intervalle de l'autre suite est fermé à gauche (resp. à droite)). Donc, il existe un homéomorphisme φ, linéaire par morceaux, tel que $p_0 = p \circ \varphi$. On pose $q' = q'_0 \circ \varphi^{-1}$. Comme $q'_0 \geq p_0$, on a $q' \geq p$. De manière évidente, la trace de q' est $\zeta(\gamma')$. On pose aussi $p = \sum_{i=0}^{r} f_i \mathbf{1}_{I_i}$, $q = \sum_{i=0}^{s} g_i \mathbf{1}_{J_i}$ et $q' = \sum_{i=0}^{t} h_i \mathbf{1}_{K_i}$ $(r, s, t \geq 0)$. Nous prouvons le lemme par récurrence sur r, la longueur de χ. Pour $r = 0$, le résultat est évident. Supposons maintenant que la propriété est vraie quand la longueur de χ est strictement inférieure à r ($r \geq 2$ car r ne peut pas être égal à 1). Soit $j \in [\![1, r]\!]$ le plus petit entier tel que f_j est un minimum local de χ, c'est-à-dire tel que $f_{j-1} \supset f_j \subset f_{j+1}$ ($f_0 = \breve{a}$ et $f_r = \breve{b}$ sont des facettes donc f_j existe) et soit $j' \in [\![j+1, r]\!]$ le plus petit entier tel que $f_{j'}$ est un maximum local de χ (voir la figure 7.14 sur laquelle l'arc χ est représenté par une ligne rouge, l'arc $\zeta(\gamma)$ par une ligne pointillée noire et l'arc $\zeta(\gamma')$ par une ligne noire pleine). Si $j' = r$, c'est-à-dire $f_{j'} = \breve{b}$, alors $\zeta(\gamma)$ et $\zeta(\gamma')$ sont

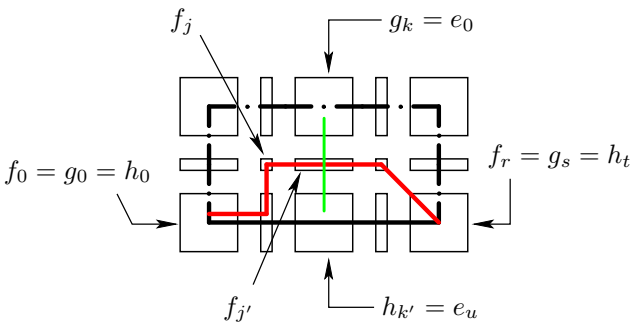


FIGURE 7.14 – Les arcs χ (en rouge), $\zeta(\gamma)$ (en pointillés noirs), $\zeta(\gamma')$ (en trait plein, noir) et χ'_0 (en vert).

inclus dans $f_j^{\uparrow}$, donc γ et γ' sont inclus dans le même carré 2×2 de $\mathbb{Z}^n$ (si $\dim(f_j) \geq n-2$) ou dans le même cube $2 \times 2 \times 2$ de $\mathbb{Z}^n$ (si $\dim(f_j) = n-3$). De plus, si $n = 3$, $\dim(f_j) = 0$, $(\alpha, \beta) = (6, 26)$ et $\mathfrak{d} = 1$ (ou $(\alpha, \beta) = (26, 6)$ et $\mathfrak{d} = 0$), alors nous déduisons de la proposition 7.1.3 qu'il n'y a pas de facette ayant la valeur $1 - \mathfrak{d}$ dans $f_j^{\uparrow}$. Ainsi, en utilisant la définition de l'équivalence entre chemins digitaux, nous trouvons que les arcs γ et γ' sont immédiatement équivalents. Sinon ($j' < r$), on pose $I_{j'} =]y, z[$ avec $0 < y < z < 1$ (comme $f_{j'}$ est un maximum local, on déduit de la proposition 6.2.3 que $I_{j'}$ est un intervalle ouvert de $[0, 1]$). Soit $k \in [\![0, s]\!]$ et $k' \in [\![0, t]\!]$ les entiers pairs définis par $z \in J_k \cup J_{k+1}$ et $z \in K_{k'} \cup K_{k'+1}$. Puisque $p \leq q$, $p \leq q'$ et $g_k, h_{k'} \in \mathbb{F}_n^n$ (en particulier J_k et $K_{k'}$ sont ouverts sur la gauche), la définition de k et k' assure que $g_k \supseteq f_{j'} \subseteq h_{k'}$ et, par suite, que $g_i \in f_j^{\uparrow}$ pour tout $i \leq k$ et $h_i \in f_j^{\uparrow}$ pour tout $i \leq k'$ (voir les figures 7.14 et 7.15). Si $f_{j'} \in \mathbb{F}_n^n$, alors nécessairement

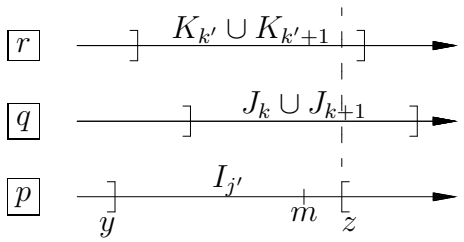


FIGURE 7.15 – Positions relatives des intervalles $I_{j'}$, $J_k \cup J_{k+1}$, $K_{k'} \cup K_{k+1}$ et des réels y, z, m (voir texte).

$q_k = h_{k'} = f_{j'}$ et nous posons $\chi'_0 = (f_{j'})$. Sinon ($\dim(f_{j'}) < n$), nous posons $\chi'_0 = (g_k, f_{j'}, h_{k'})$ (χ'_0 est représenté en vert sur la figure 7.14). Dans les deux cas, χ'_0 est un arc dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ donc, de la proposition 7.2.7, nous déduisons qu'il existe un ω-chemin γ'_0 dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ tel que $\zeta(\gamma'_0) \geq \chi'_0$ (en 2D, comme dans l'exemple représenté sur la figure 7.14, on a nécessairement $\zeta(\gamma'_0) = \chi'_0$). On pose ensuite $\zeta(\gamma'_0) = (e_i)_{i=0}^{u}$ ($u \geq 0$) et on a $e_0 = g_k$ et $e_u = h_{k'}$. De plus, χ'_0 est un arc dans ${f_{j'}}^{\uparrow}$ qui est inclus dans ${f_j}^{\uparrow}$ de sorte que $\zeta(\gamma'_0)$ est aussi un arc dans ${f_j}^{\uparrow}$. Soit γ_0, γ_1 et γ'_1 les ω-chemins dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ tels que $\zeta(\gamma_0) = (g_i)_{i=0}^{k}$, $\zeta(\gamma_1) = (g_i)_{i=k}^{s}$ et $\zeta(\gamma'_1) = (h_i)_{i=k'}^{t}$. On pose $\gamma'' = \gamma_0.\gamma'_0.\gamma'_1$ (les arcs $\zeta(\gamma_0)$, $\zeta(\gamma'_0)$ et $\zeta(\gamma'_1)$ sont représentés sur la figure 7.16). Puisque $\zeta(\gamma'') = \zeta(\gamma_0).\zeta(\gamma'_0).(h_{k'}, \ldots, h_t)$, il diffère de $\zeta(\gamma') = (h_0, \ldots, h_{k'}).(h_{k'}, \ldots, h_t)$ seulement dans ${f_j}^{\uparrow}$. Ainsi, quelle que soit la relation d'adjacence, on peut conclure comme ci-dessus que les arcs γ'' et γ' sont équivalents.

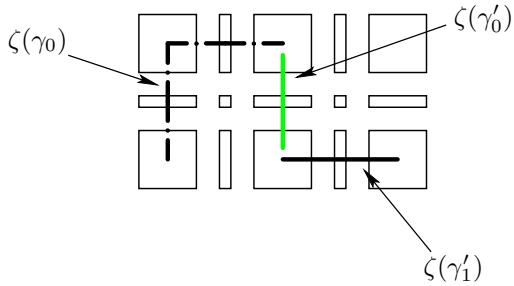


FIGURE 7.16 – Les trois arcs définissant $\zeta(\gamma'')$.

Pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence, nous définissons maintenant trois nouveaux chemins. Pour cette définition, nous devons choisir un nombre réel $m \in]y, z[\cap (J_k \cup J_{k+1}) \cap (K_{k'} \cup K_{k'+1})$. Un tel nombre existe car $J_k \cup J_{k+1}$ et $K_{k'} \cup K_{k'+1}$ sont ouverts à gauche et contiennent z (voir la figure 7.15). Le premier chemin est obtenu à partir de p en enlevant toutes ses faces avant $f_{j'}$ et en les remplaçant par la facette g_k : $p_1 = g_k \mathbf{1}_{[0,y[} + f_{j'} \mathbf{1}_{[y,z[} + (p)_{[z,1]}$ où la notation $(p)_I$ désigne la restriction de la fonction p à l'intervalle I (p_1 est représenté par une ligne rouge sur la figure 7.17). Comme nous enlevons au moins deux faces (f_0 et f_j) et comme nous ajoutons juste une face, la longueur de la trace de p_1 est strictement inférieure à r. Nous devons vérifier que tous les nouveaux chemins sont réguliers. Cela implique d'examiner le premier intervalle dans $p_{[y,1]}$. Cet intervalle est $[y, z[$ (car $]y, z[= I_{j'}$ donc $p(z) \neq f_{j'}$) et n'est pas un singleton. Le second chemin, q_1, est obtenu d'une façon similaire à p_1 : on enlève à q toutes ses faces avant g_k, de sorte que la trace de q_1 est $\zeta(\gamma_1)$: $q_1 = g_k \mathbf{1}_{[0,m[} + (q)_{[m,1]}$ (q_1 est représentée par une ligne pointillée noire sur la figure 7.17). Le premier intervalle dans $(q)_{[m,1]}$ est soit associé à g_k (et dans ce cas doit être réuni avec $[0, m[$), soit associé à g_{k+1} si $m \in J_{k+1}$. Mais dans ce dernier cas, par définition de k, z est aussi dans J_{k+1} de sorte que le premier intervalle de $(q)_{[m,1]}$ ne peut jamais être un singleton. Le troisième chemin q'_1 est obtenu de q' en enlevant toutes les faces avant $h_{k'}$ et en ajoutant avant $h_{k'}$ les faces de l'arc $\zeta(\gamma'_0)$ avec, pour le choix des intervalles, la contrainte que q'_1 doit être égal à q_1 et p_1 sur $[0, y[$: $q'_1 = g_k \mathbf{1}_{[0,y[} + \sum_{i=1}^{u} e_i \mathbf{1}_{K'_i} + (q')_{[m,1]}$ où les intervalles K'_i sont supposés bien définis pour assurer la continuité (q'_1 est représenté par une ligne noire pleine sur la figure 7.17). La trace de q'_1 est $\zeta(\gamma'_0).\zeta(\gamma'_1) = \zeta(\gamma'_0.\gamma'_1)$. Le premier intervalle dans $(q'_1)_{[m,1]}$ est soit associé à $h_{k'} = e_u$ (et dans ce cas doit être réuni avec K'_u), soit associé à $h_{k'+1}$ mais dans ce cas, comme ci-dessus, z est aussi dans cet intervalle de sorte que le premier intervalle ne peut jamais être un singleton. Ainsi, nous avons trois chemins réguliers p_1, q_1, q'_1 égaux à p, q, q'

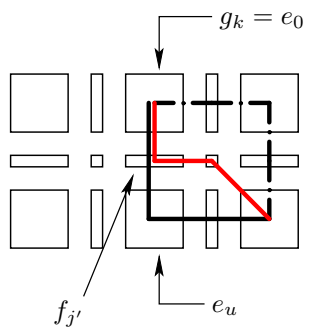


FIGURE 7.17 – Les traces des trois chemins p_1 (en rouge), q_1 (en pointillé) et q'_1 (en noir).

sur $[m, 1]$ si bien que $q_1 \geq p_1$ et $q'_1 \geq p_1$ sur $[m, 1]$. Les trois chemins sont identiques (à g_k) sur $[0, y[$. Sur $[y, m[$, $p_1 = f_{j'}$ qui est une face incluse dans g_k, la trace de q_1 sur l'intervalle $[y, m[$. De plus, la face $f_{j'}$ est incluse dans toutes les faces de $\zeta(\gamma'_0)$, la trace de q'_1. Ainsi, $q_1 \geq p_1$ et $q'_1 \geq p_1$ sur $[0, 1]$. Nous pouvons maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence : les ω-chemins γ_1 et $\gamma'_0.\gamma'_1$ sont équivalents. Par suite, les ω-chemins $\gamma = \gamma_0.\gamma_1$ et $\gamma'' = \gamma_0.\gamma'_0.\gamma'_1$ sont équivalents. Comme nous avons prouvé auparavant que γ'' et γ' sont équivalents, nous pouvons finalement conclure que γ et γ' sont équivalents. □

Proposition 7.2.12. *Soit $a, b \in \mathbb{Z}^n$. Soit γ et γ' deux ω-chemins de a à b dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$. Si l'arc $\zeta(\gamma')$ est un déformation dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ de l'arc $\zeta(\gamma)$, alors γ et γ' sont équivalents dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$.*

Démonstration. Soit γ, γ' deux ω-chemins de a à b dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ tels que $\zeta(\gamma')$ est un déformation de $\zeta(\gamma)$. Par définition, il existe un entier $r \geq 0$ et une suite S d'arcs dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ (avec $\mu = \zeta_\varepsilon(\lambda)$ où ε est la fonction de connexité associée à (α, β)), $S = (\chi_0 = \zeta(\gamma), \ldots, \chi_i, \ldots, \chi_r = \zeta(\gamma'))$, telle que, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, soit χ_i est un étirement élémentaire de χ_{i-1} soit χ_{i-1} est un étirement élémentaire de χ_i. Du lemme 7.2.10, nous déduisons qu'il existe une suite S_p de ω-chemins dans $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, $S_p = (\gamma_0, \ldots, \gamma_i, \ldots, \gamma_{r+1})$ tels que $\gamma_0 = \gamma$, $\gamma_{r+1} = \gamma'$ et, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $\zeta(\gamma_i) \geq \chi_{i-1}$ et $\zeta(\gamma_i) \geq \chi_i$. Enfin, par le lemme 7.2.11, nous obtenons que, pour tout $i \in [\![1, r+1]\!]$, γ_{i-1} est équivalent à γ_i. On en conclut que γ est équivalent à γ'. □

Soit $a \in \lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$. Soit $\pi_D(\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), a)$ le groupe fondamental digital de $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ avec point de base a et $\rho(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), \breve{a})$ le groupe des arcs dans $\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ de $\breve{a}$ à $\breve{a}$, modulo les déformations.

Grâce aux propositions 7.2.3 et 7.2.9, nous pouvons valablement définir la fonction $\breve{\zeta}$ par :

$$\left| \begin{array}{lccc} \breve{\zeta} : & \pi_D(\lambda^{-1}(\mathfrak{d}), a) & \to & \rho(\mu^{-1}(\mathfrak{d}), \breve{a}) \\ & [\gamma] & \mapsto & [\zeta(\gamma)] \end{array} \right.$$

où $[\theta]$ dénote la classe d'équivalence de θ (pour la relation d'équivalence sur les chemins digitaux de $\mathbb{Z}^n$ du côté gauche et pour les déformations sur les arcs de $\mathbb{F}^n$ du côté droit). La proposition 7.2.4 s'interprète alors comme l'affirmation que $\breve{\zeta}$ est un morphisme. La proposition 7.2.12 établit l'injectivité de $\breve{\zeta}$. Comme deux chemins comparables sont équivalents (corollaire 6.1.6), la proposition 7.2.7 prouve la surjectivité de $\breve{\zeta}$. Nous en concluons que les deux groupes $\pi_D(\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), a)$ et $\rho(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), \breve{a})$ sont isomorphes et, puisque $\rho(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), \breve{a})$ et $\pi(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), \breve{a})$ sont isomorphes (théorème 6.2.14), nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 7.2.13. *Soit* (α, β) *une paire d'adjacences sur* $\mathbb{Z}^n$. *Soit* $\varepsilon = \tau(\alpha, \beta)$ *la fonction de connexité associée à* (α, β). *Soit* $\lambda : \mathbb{Z}^n \to \{0, 1\}$ *une image dans* $\mathbb{Z}^n$ *et* $\mu = \zeta_\varepsilon(\lambda)$ *l'image correspondante dans* $\mathbb{F}^n$. *Pour tout* $a \in \lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$, *le groupe fondamental digital de* $\lambda^{-1}(\{\mathfrak{d}\})$ *avec point de base a est isomorphe au groupe fondamental de l'EPO* $(\mu^{-1}(\{\mathfrak{d}\}), \subseteq)$ *avec point de base* $\breve{a}$.

7.3 Conclusion

Nous avons proposé un *modus operandi* pour plonger une image digitale binaire muni d'une paire d'adjacences standards dans l'espace des complexes cubiques. Nous avons vérifié en particulier que ce plongement préserve les composantes connexes et leurs groupes fondamentaux, tant dans l'objet que dans le fond de l'image. De plus, ces plongements ont été définis de façon à pouvoir être étendus à d'autres sortes d'images, en particulier aux images de labels. Si nous pouvons transporter la partition associée à une image de label dans un espace topologique tel que celui des complexes cubiques, nous aurons alors à notre disposition une palette d'outils suffisants pour contrôler de façon robuste la topologie de chaque élément de la partition initiale et des partitions plus grossières qu'elle engendre.

Troisième partie

Modèles topologiques et points simples pour les images de labels

Chapitre 8

Les calques

8.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'étudier la topologie des images de labels en suivant l'idée qu'un processus qui préserve la topologie d'une image de labels doit conserver non seulement la topologie des labels pris isolément mais aussi la topologie de leurs unions (voir section 5), ce qui revient à exiger que de tels processus ne modifient pas les caractéristiques topologiques des éléments d'une partition donnée de $\mathbb{Z}^n$ ni de toute partition plus grossière que la partition initiale. En d'autres termes encore, nous faisons l'hypothèse que les véritables objets d'intérêt d'une image de labels, plus que les éléments d'une partition, sont les éléments de l'ensemble des parties de la partition.

Nous avons adopté un point de vue assez théorique afin de pouvoir couvrir une large palette de situations. Dans le modèle proposé, toute paire d'adjacence de $\mathbb{Z}^n$ peut être utilisée pourvu qu'elle soit modélisable dans un EPO (voir le chapitre 7), il n'y a pas d'hypothèse sur la topologie initiale des objets (nous n'utilisons pas de connaissance *a priori*) et les intersections d'objets sont acceptées. Les comparaisons topologiques entre les images utilisent l'équivalence homotopique faible entre espaces finis (qui correspond à l'équivalence homotopique dans les espaces continus). Pour éviter les inconvénients rencontrés lorsqu'on utilise des paires d'adjacences différentes sur le même objet (voir section 5), nous plongeons l'espace digital dans un espace muni d'une topologie classique, un EPO dont les points maximaux sont les points de l'image digitale. Ce premier plongement du support de l'image nous conduit à plonger également les labels de l'image initiale dans un ensemble de labels enrichi par des labels « composites », plus précisément dans un treillis atomique dont les atomes sont les labels initiaux. De cette façon, nous pouvons étendre l'image digitale initiale sur l'EPO qui lui est associé en affectant des labels étendus aux points supplémentaires et nous pouvons définir des modifications graduelles de l'image bien adaptées à la conservation de la topologie.

Le chapitre est organisé comme suit. La section 8.2 introduit le modèle proposé pour la prise en charge topologique des images de labels. Nous y décrivons une notion de *point simple pour un label* permettant une modification locale de l'image tout en conservant les groupes d'homotopie des objets d'intérêt de l'image (pour être plus précis, nous avons des équivalences d'homotopie faible). Quand l'EPO est l'espace des complexes cubiques, l'utilisation des points simples permet également la préservation des groupes d'homotopie des complémentaires des objets. De plus, des modifications peuvent être menées en parallèle sous certaines conditions, conduisant ainsi à des algorithmes d'amincissement ou de croissance de régions spatialement bien équilibrés. La section 8.3 s'intéresse aux images dans lesquelles les ensembles de points qui portent un même label sont des ensembles fermés (au sens topologique), comme c'est le cas avec des images digitales interprétées en $(26, 6)$-adjacence. Dans ce cas, nous définissons une modification élémentaire inspirée des collapsus de la topologie combinatoire, appelée *coupe* qui, en plus de conserver la topologie des objets, maintient leur caractère fermé. La section 8.4 s'attache aux *images régulières* dans lesquelles le label d'un

point de l'EPO est déterminé par les labels des points maximaux situés au dessus de lui. Les images régulières sont associées de manière bi-univoque aux images digitales définies sur $\mathbb{Z}^n$ et, dans un certain sens (voir le chapitre 7), partagent leurs composantes connexes et groupes fondamentaux avec celles-ci. Nous donnons des conditions suffisantes pour utiliser les coupes à l'intérieur de la classe des images régulières (autorisant ainsi des aller-retours entre $\mathbb{Z}^n$ et l'EPO associé). La section 8.5 conclut le chapitre.

8.2 Images de calques

Soit L un EPO fini avec un élément minimal, noté $\perp$, et tel que deux éléments distincts dans $L \setminus \{\perp\}$ ne sont pas comparables. Nous écrivons $L^\star$ pour $L \setminus \{\perp\}$ et nous définissons ℓ comme étant le cardinal de $L^\star$. Les éléments de $L^\star$ sont appelés les *proto-labels*. Le diagramme de Hasse de l'EPO L est représenté sur la figure 8.1. Une *image de labels digitale* est une fonction définie sur $\mathbb{Z}^n$ (ou sur une partie Z de $\mathbb{Z}^n$) et à valeurs dans L.

Soit $l \in L^\star$, un proto-label et λ une image de labels digitale. L'ensemble $\lambda^{-1}(\{l\})$ est le *support* du proto-label l (dans l'image de labels digitale λ). L'union des supports de tous les proto-labels est le *domaine* de l'image λ. L'ensemble $\lambda^{-1}(\{\perp\})$ est le *fond* de l'image λ. Le fond et les supports forment une partition de la partie Z de $\mathbb{Z}^n$ considérée.

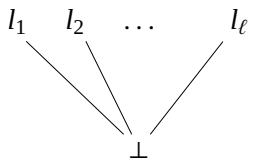


FIGURE 8.1 – Diagramme de Hasse de l'ensemble des labels $L = \{l_i\}_{i=1}^{\ell} \cup \{\perp\}$ (voir texte).

Pour munir l'ensemble discret Z d'une topologie, nous l'enrichissons en ajoutant des points de dimensions strictement inférieures à n dont le rôle est de lier les xels adjacents et de conférer à Z une structure d'EPO. Typiquement, l'espace que nous obtenons alors est l'espace des complexes cubiques, $\mathbb{F}^n$, ou tout EPO associé à une décomposition cellulaire de l'espace. Plus généralement, les images de labels digitales considérées dans ce chapitre sont définies sur un EPO localement fini $(X, \leq)$ (nous ne voulons lier les points de $\mathbb{Z}^n$ qu'à un nombre fini de voisins). Par conséquent, les ensembles $x^{\uparrow\star}$ et $x^{\downarrow\star}$ qui apparaissent dans les définitions des points β/γ-simples sont toujours finis. Cela nous permet d'utiliser tous les résultats de la section 4.2.3. De plus, nous supposons que le plongement de Z dans X met en correspondance bi-univoque les points de Z avec les points maximaux de X. Dans la suite de ce chapitre, nous identifions les points de Z avec leurs images dans X et nous appelons *xels* les points maximaux de X.

Le fait d'enrichir l'espace digital initial avec des faces de dimensions non maximales pour obtenir à la fois un espace topologique et une structure algébrique, nous conduit naturellement à faire de même avec l'ensemble des labels afin de pouvoir attribuer aux faces servant de lien entre les xels des labels qui symbolisent ces liens. C'est pourquoi nous plongeons l'ensemble des labels dans un treillis atomique $(T, \leq)$ dont le minimum est associé à $\perp$ et dont les atomes sont associés aux proto-labels de L (qui seront aussi appelés *labels atomiques*). Les définitions et propriétés utilisées dans ce chapitre et relatives aux treillis sont rassemblées dans l'annexe B.2.

Dans la suite du chapitre, nous identifions les éléments de L avec leurs images dans T. Le maximum de T est noté $\top$. Un *label* est un élément de T. Étant donné un ensemble de proto-labels $L^\star$ le plus petit treillis T incluant L est $T = L \cup \{\top\}$. C'est le treillis utilisé par Ronse et Agnus (2005, 2008) pour définir des opérateurs morphologiques sur les images de labels digitales. Le plus grand treillis atomique dans lequel nous pouvons plonger L est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(L^\star)$ (avec le plongement naturel qui associe $\emptyset$ à $\perp$ et le singleton $\{l\}$ à tout proto-label l).

La façon d'attribuer des labels à des points de X qui ne sont pas maximaux est évoquée dans Kovalevsky (1989), Ayala *et al.* (1997). Dans le chapitre 7, nous avons proposé un *modus operandi* pour étendre à $\mathbb{F}^n$ une image digitale binaire initialement définie sur $\mathbb{Z}^n$. Cette méthode peut être appliquée également aux images digitales de labels après avoir plongé l'ensemble des proto-labels dans un treillis. C'est ce que nous ferons à la section 8.4. Mais auparavant, pour rester dans un cadre plus général, nous posons simplement la définition suivante.

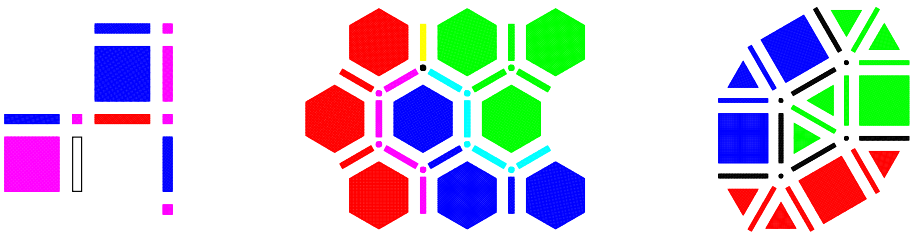
Définition 8.2.1 (Image de calques)**.** *Soit X un EPO localement fini et T un treillis atomique.*

– *Une* image de calques *est une fonction $\mu : X \to T$.*
– *Soit l un atome de T. L'image binaire μ_l, notée aussi $\mu \wedge l$, définie par :*

$$\begin{array}{rccc} \mu_l : & X & \to & \{\perp, l\} \\ & x & \mapsto & \mu(x) \wedge l \end{array}$$

est appelée calque *(de μ).*

La figure 8.2 montre quelques exemples d'images de calques.



(a) (b) (c)

FIGURE 8.2 – Images de calques. Les proto-labels sont r, g, b (représentés en rouge, vert et bleu). Les autres labels sont obtenus en utilisant la synthèse additive des couleurs (*e.g.*, le label $\{r, b\}$ est représenté en magenta) sauf $\top$ qui est représenté en noir et $\perp$ qui est représenté en blanc. (a) X est un sous-ensemble de $\mathbb{F}^2$. T est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{r, g, b\})$. Notons que dans cette image, les points maximaux n'ont pas tous la même dimension. (b) X est construit sur un pavage hexagonal. T est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{r, g, b\})$. Les labels des points non maximaux sont calculés avec la règle qui sera utilisée dans la section 8.4 : un label est le supremum des labels des points maximaux du voisinage. (c) X est construit sur un pavage semi-régulier. Les labels sont calculés avec la même règle que pour (b) mais T n'est plus l'ensemble des parties : $T = \{\perp, r, g, b, \top\}$.

La proposition suivante montre que μ est le supremum de tous ses calques.

Proposition 8.2.2. *Si $\mu : X \to T$ est une image de calques et $L^\star$ l'ensemble des atomes de T, alors μ est le supremum de ses calques :*

$$\mu = \bigvee_{l \in L^\star} \mu_l$$

Démonstration. Soit x un point dans X. Soit $A \subseteq L^\star$ l'ensemble des atomes de T qui sont inférieurs ou égaux à $\mu(x)$. Alors, $\mu(x) = \bigvee_{a\in A} a$ car T est atomique. Soit $l \in L^\star$, un atome dans T. On a $(\mu \wedge l)(x) = \mu(x) \wedge l = (\bigvee_{a\in A} a) \wedge l$. Il est clair que $(\mu \wedge l)(x) = l$ si et seulement si $l \in A$ et $(\mu \wedge l)(x) = \perp$ si et seulement si $l \notin A$ ($\mu(x) \wedge l = l$ équivaut à $l \leq \mu(x)$ qui équivaut à $l \in A$). Par conséquent, $\mu(x) = \bigvee_{a\in A} a = \bigvee_{a\in A}(\mu(x) \wedge a) = \bigvee_{l\in L^\star}(\mu(x) \wedge l) = \bigvee_{l\in L^\star}(\mu \wedge l)(x)$. □

Nous avons vu que, lorsqu'une image de labels digitale $\lambda : Z \subseteq \mathbb{Z}^n \to L$ est donnée, nous construisons une image de calques $\mu : X \to T$ telle que les labels des points maximaux de X (les xels) sont les atomes de T (les proto-labels) ou le label du fond $\perp$. Quand une image de calques a cette propriété, nous disons que l'image est *pure*. Si les labels des xels de X sont tous des proto-labels, c'est-à-dire des atomes de T, nous disons que l'image est *strictement pure*.

Soit $\mu : X \to T$ un image de calques et $t \in T$ un label. Le *support de t dans μ* est le sous-ensemble $\langle t\rangle_\mu$ de X égal à $\{x \in X \mid \mu(x) \wedge t \neq \perp\}$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous disons aussi *support de t* à la place de support de t dans μ et nous écrivons $\langle t\rangle$ à la place de $\langle t\rangle_\mu$. Le support d'un proto-label (dans une image de calques) est le sous-ensemble de X dont les points ont un label supérieur ou égal à ce proto-label.
Le support d'un label $t \neq \perp$ est la réunion des supports des proto-labels appartenant à $t^\downarrow$:

$$x \in \langle t\rangle \Leftrightarrow \mu(x) \wedge t \neq \perp \Leftrightarrow \exists l \in L^\star, l \leq \mu(x) \wedge t \Leftrightarrow \exists l \in L^\star, l \leq t \text{ et } x \in \langle l\rangle.$$

Le support du label $\perp$ est l'ensemble vide. Le *cosupport de t dans μ* (ou le *cosupport de t*) est le complément dans X du support de t dans μ. Nous le notons $\langle t\rangle_\mu^c$ ou $\langle t\rangle^c$. La figure 8.3 illustre ces définitions.

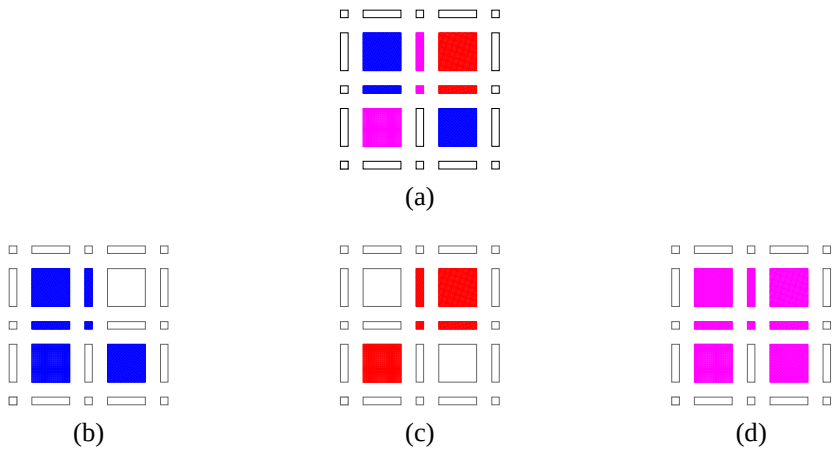


FIGURE 8.3 – Supports dans une image de calques. (a) un image de calques dont le domaine est $\mathbb{F}^2$ et dont le codomaine est l'ensemble des parties $T = \mathcal{P}(\{b, r\}) = \{\emptyset, \{b\}, \{r\}, \{b, r\}\}$ muni de l'inclusion. Les points ayant le label $\{b\}$ sont représentés en bleu, ceux ayant le label $\{r\}$ en rouge et ceux ayant le label $\{b, r\}$ en magenta. Les points du fond (label $\perp = \emptyset$) sont représentés en blanc avec un bord noir ou ne sont pas représentés. (b) En bleu, le support du label $\{b\}$. (c) En rouge, le support du label $\{r\}$. (d) En magenta, le support de $\top = \{b, r\}$.

Nous avons dit dans la section 8.1 que si l'on souhaite conserver toutes les relations topologiques dans une image de labels digitale, c'est-à-dire aussi bien les relations intra-labels que les relations inter-labels, il est important, quand on effectue un changement de label en un point de l'image, de

maintenir la topologie de toute union de supports. Dans une image de calques, les supports des labels sont les sous-ensembles de X qui correspondent exactement aux unions des supports des proto-labels dans l'image digitale. Par conséquent, les supports des labels de T sont les ensembles dont nous devons pouvoir assurer l'invariance topologique. Cela nous conduit à poser la définition suivante, illustrée par la figure 8.4.

Définition 8.2.3 (Point simple pour un label)**.** *Soit $\mu : X \to T$ une image de calques. Soit $t \in T$ un label. Un point $x \in X$ est un* point simple *pour (le label) t si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) pour tout label $u \in T$ tel que $u \wedge \mu(x) \neq \perp$ et $u \wedge t = \perp$, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle$;

(ii) pour tout label $u \in T$ tel que $u \wedge \mu(x) = \perp$ et $u \wedge t \neq \perp$, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle \cup \{x\}$.

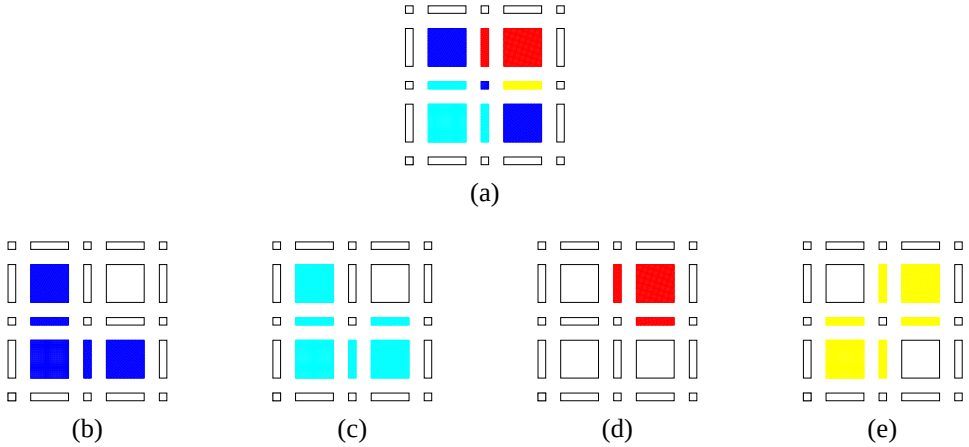


FIGURE 8.4 – Simplicité dans une image de calques. (a) Une image de calques μ dont le domaine est $\mathbb{F}^2$ et dont le codomaine est l'ensemble de parties $T = \mathcal{P}(\{r, g, b\})$ muni de l'inclusion. Les labels sont représentés comme sur la figure 8.3 plus les labels $\{g, b\}, \{r, g\}$ qui sont représentés respectivement en cyan et jaune. Le point x est la 0-face au centre de la figure. Nous avons $\mu(x) = \{b\}$. Nous voulons tester si le point x est simple pour le label $t = \{r\}$. Il y a deux labels u tels que $u \wedge \mu(x) \neq \perp$ et $u \wedge t = \perp$: $\{b\}$ et $\{g, b\}$. (b) En bleu, l'ensemble $x^{\uparrow\star} \cap \langle\{b\}\rangle$ qui est contractile. (c) En cyan, l'ensemble $x^{\uparrow\star} \cap \langle\{g, b\}\rangle$ qui est contractile. Ainsi, le résultat de la première partie du test (c'est-à-dire le test de la condition (i) de la définition 8.2.3) est positif. Maintenant, considérons les labels u pour lesquels $u \wedge \mu(x) = \perp$ et $u \wedge t \neq \perp$: $\{r\}$ et $\{r, g\}$. (d) En rouge, l'ensemble $x^{\uparrow\star} \cap \langle\{r\}\rangle$ qui est contractile. (e) En jaune, l'ensemble $x^{\uparrow\star} \cap \langle\{r, g\}\rangle$ qui n'est pas contractile (il a deux composantes connexes). Le résultat de la seconde partie du test (c'est-à-dire le test de la condition (ii) de la définition 8.2.3) est donc négatif. On en déduit que le point x n'est pas simple pour le label $\{r\}$ (donner le label $\{r\}$ à x réunirait deux composantes connexes du label $\{r, g\}$).

Dans la première condition de la définition précédente, les hypothèses $u \wedge \mu(x) \neq \perp$ et $u \wedge t = \perp$ signifient que x est dans le support de u dans μ mais qu'il ne sera plus dans ce support si l'image est modifiée en donnant le label t à x. De même, dans la seconde condition, les hypothèses $u \wedge \mu(x) = \perp$ et $u \wedge t \neq \perp$, signifient que x n'est pas dans le support de u dans μ mais qu'il appartiendra à ce support si l'image est modifiée en donnant le label t à x. Dans chaque cas, en demandant que x soit β-simple pour les ensembles $\langle u \rangle_\mu$, ou $\langle u \rangle_\mu \cup \{x\}$, nous nous assurons qu'il existe une équivalence d'homotopie faible entre chaque support avant et après la modification de l'image μ et, si $X = \mathbb{F}^n$, que les co-supports seront aussi faiblement homotopiquement équivalents (voir plus loin la proposition 8.2.7).

Dans une image binaire (c'est-à-dire avec $T = \{\bot, \top\}$), la définition 8.2.3 revient à demander que x soit β-simple dans $\langle\top\rangle$ ou que x soit β-simple dans $\langle\top\rangle \cup \{x\}$, suivant que x est dans l'objet ou dans le fond. Observons aussi que tout point dans $\mu^{-1}(\{t\})$ est simple pour le label t.

Puisque l'EPO X est localement fini, les ensembles $x^{\uparrow\star}$ et $x^{\downarrow\star}$ sont finis. Donc, en accord avec le corollaire 4.2.7, nous pouvons tester la simplicité d'un point $x \in X$ en supprimant de manière gloutonne les points unipolaires dans les ensembles $x^{\uparrow\star} \cap Y$ et $x^{\downarrow\star} \cap Y$ avec $Y = \langle u\rangle$ ou $Y = \langle u\rangle \cup \{x\}$, pour tout $u \in T$. Quand le treillis T est distributif, la proposition suivante nous permet d'accélerer le test de simplicité en réduisant temporairement la taille de T en identifiant les atomes de T qui ne sont pas « présents » dans $\mu(x^{\updownarrow})$ avec le label $\bot$. Notons que si le treillis T est distributif et μ est défini à partir d'une image de labels digitale $\lambda : Z \subseteq \mathbb{Z}^n \to L$ comme suggéré dans l'introduction de la section 8.2, alors T est un treillis fini, atomique et distributif dont les atomes sont identifiés avec les éléments de $L^\star$, c'est-à-dire que T est l'ensemble de parties $\mathcal{P}(L^\star)$.

Proposition 8.2.4. *Soit $\mu : X \to T$ un image de calques, x un point de X et t un label de T. Soit L_x l'ensemble des atomes de T qui sont inférieurs ou égaux à au moins un label de $\mu(x^{\updownarrow})$ et $\varphi : T \to T$ la fonction définie par $\varphi(u) = \bigvee\{a \in L_x \mid a \leq u\}$, pour tout $u \in T$.*

(*i*) *Si le point x est simple pour t dans μ, alors $t \in \varphi(T)$ et x est simple pour t dans l'image $\varphi \circ \mu : X \to \varphi(T)$.*

(*ii*) *Inversement, si le treillis T est distributif, si $t \in \varphi(T)$, et si x est simple pour t dans l'image $\varphi \circ \mu$, alors le point x est simple pour t dans μ.*

Démonstration.

– (*i*) Nous supposons que x est simple pour t dans μ. Supposons que $t \notin \varphi(T)$. Alors, il existe un atome $a \notin L_x$ tel que $a \leq t$ (sinon $t = \varphi(t) \in \varphi(T)$). Ce label a est tel que $a \wedge \mu(x) = \bot$ (par définition de a et L_x) et $a \wedge t \neq \bot$. Mais x ne peut pas être β-simple pour l'ensemble $\langle a\rangle_\mu \cup \{x\}$ car $x^{\updownarrow\star} \cap \langle a\rangle_\mu$ est vide (par définition de a et L_x). Donc, nous avons une contradiction avec la simplicité de x pour t dans μ. Il vient que $t \in \varphi(T)$. Montrons maintenant que x est simple pour t dans l'image $\varphi \circ \mu$. Pour cela nous testons les deux conditions de la définition 8.2.3.
  - Condition (*i*). Soit u un label dans $\varphi(T)$ tel que $u \wedge \varphi(\mu(x)) \neq \bot$ et $u \wedge t = \bot$. Puisque, trivialement, φ est réduit à l'identité sur $\mu(x^{\updownarrow})$, on a $u \wedge \mu(x) = u \wedge \varphi(\mu(x)) \neq \bot$. Comme x est simple pour t dans l'image μ et que $u \wedge \mu(x) \neq \bot$ et $u \wedge t = \bot$, on en déduit que x est β-simple pour l'ensemble $\langle u\rangle_\mu$. Nous avons déjà observé que les images μ et $\varphi \circ \mu$ sont égales sur $x^{\updownarrow}$. Notons de plus que la β-simplicité implique seulement un sous-ensemble de $x^{\updownarrow}$. Donc, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u\rangle_{\varphi\circ\mu}$.
  - Condition (*ii*). De la même manière, quand u est un label de $\varphi(T)$ tel que $u \wedge \varphi(\mu(x)) = \bot$ et $u \wedge t \neq \bot$, nous concluons comme ci-dessus que x est β-simple pour l'ensemble $\langle u\rangle_{\varphi\circ\mu} \cup \{x\}$.

  Ainsi, x est simple pour t dans $\varphi \circ \mu$.

– (*ii*) Nous supposons maintenant que x est simple pour t dans $\varphi \circ \mu$ avec $t \in \varphi(T)$. Montrons que x est simple pour t dans l'image μ en testant les deux conditions de la définition 8.2.3.
  - Condition (*i*). Soit u un label de T tel que $u \wedge \mu(x) \neq \bot$ et $u \wedge t = \bot$. Par la définition de L_x, on a $u \wedge \mu(x) = \varphi(u \wedge \mu(x))$. Donc, $\varphi(u \wedge \mu(x)) \leq u$ et $\varphi(u \wedge \mu(x)) \leq \mu(x)$. Alors, puisque φ est une ouverture (voir l'annexe B.2), on a $\varphi(u \wedge \mu(x)) \leq \varphi(u)$ et $\varphi(u \wedge \mu(x)) \leq \varphi(\mu(x))$. Par suite, $u \wedge \mu(x) = \varphi(u \wedge \mu(x)) \leq \varphi(u) \wedge \varphi(\mu(x))$. On en déduit que $\varphi(u) \wedge \varphi(\mu(x)) \neq \bot$. On a aussi $\varphi(u) \wedge t = \varphi(u) \wedge \varphi(t)$, car une ouverture est idempotente et $t \in \varphi(T)$, et $\varphi(u) \wedge \varphi(t) \leq u \wedge t$,

car une ouverture est anti-extensive. Donc, on obtient $\varphi(u) \wedge t = \bot$. Comme x est simple pour t dans $\varphi \circ \mu$, $\varphi(u) \wedge \varphi(\mu(x)) \neq \bot$ et $\varphi(u) \wedge t = \bot$, nous en déduisons que x est β-simple pour l'ensemble $\langle \varphi(u) \rangle_{\varphi \circ \mu}$ ce qui implique que x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle_\mu$ (en effet, $x^{\updownarrow\star} \cap \langle u \rangle_\mu = x^{\updownarrow\star} \cap \langle \varphi(u) \rangle_{\varphi \circ \mu}$ car d'un côté $\varphi \circ \mu(y) \wedge \varphi(u) \leq \mu(y) \wedge u$ et d'un autre côté, tout atome inférieur à $\mu(y) \wedge u$ avec $y \in x^{\updownarrow\star}$ est un atome de L_x donc est invariant par φ et par suite est aussi inférieur à $\varphi \circ \mu(y) \wedge \varphi(u)$).

- Condition (*ii*). Quand u est un label dans T tel que $u \wedge \mu(x) = \bot$ et $u \wedge t \neq \bot$, on a $\varphi(u) \wedge \varphi(\mu(x)) = \bot$ (car φ est anti-extensive). Supposons maintenant que T soit distributif. Il est facile de vérifier alors que $t \in \varphi(T)$ implique que $u \wedge t \in \varphi(T)$ (tout atome inférieur ou égal à t est dans L_x). Il vient que $\bot \neq u \wedge t = \varphi(u \wedge t) \leq \varphi(u) \wedge \varphi(t) = \varphi(u) \wedge t$. Nous en concluons, comme précédemment, que x est β-simple pour $\langle u \rangle_\mu \cup \{x\}$. □

Contre-exemple 8.2.5 (Proposition 8.2.4)**.** *La figure 8.5 illustre le fait que la proposition 8.2.4 est généralement fausse dans un treillis non distributif.*

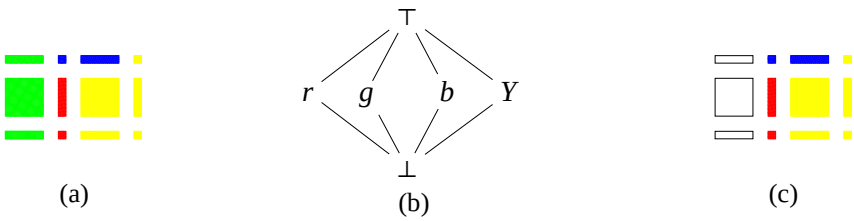


FIGURE 8.5 – Contre-exemple 8.2.5. (a) Une image de calques $\mu : X \to T$. (b) Le diagramme de Hasse de T (T n'est pas distributif). Les labels $\bot, r, g, b, y, \top$ sont représentés respectivement en blanc, rouge, vert, bleu, jaune et noir. La 2-face jaune x n'est pas simple pour le label $\top$ car le label g est tel que $g \wedge y = \bot$ et $g \wedge \top \neq \bot$ mais x n'est pas β-simple pour $\langle g \rangle \cup \{x\}$. (c) L'image de calques $\varphi \circ \mu : X \to \varphi(T)$ (φ est définie dans l'énoncé de la proposition 8.2.4). Dans cette image, le point x est simple pour le label $\top$.

Nous revenons maintenant sur les propriétés topologiques conservées lorsque nous modifions un point simple pour un label dans une image de calques.

Définition 8.2.6. *Soit $\mu, \nu : X \to T$ deux images de calques.*

- *Si, pour tout label $t \in T$, $\langle t \rangle_\mu$ et $\langle t \rangle_\nu$ sont faiblement homotopiquement équivalents, nous disons que ces images sont* équivalentes *et nous écrivons $\mu \approx \nu$.*
- *Si, de plus, $\langle t \rangle_\mu^c$ et $\langle t \rangle_\nu^c$ sont faiblement homotopiquement équivalents pour tout $t \in T$, nous disons que les images sont* fortement équivalentes.

Nous écrivons $\mu + (x, t)$ pour l'image égale à μ sauf en x, où sa valeur est t.
Avec ses définitions, nous avons le résultat suivant.

Proposition 8.2.7. *Soit $\mu : X \to T$ une image de calques. Soit x un point simple pour le label t. Alors, μ et $\mu + (x, t)$ sont équivalentes, fortement équivalentes si $X = \mathbb{F}^n$.*

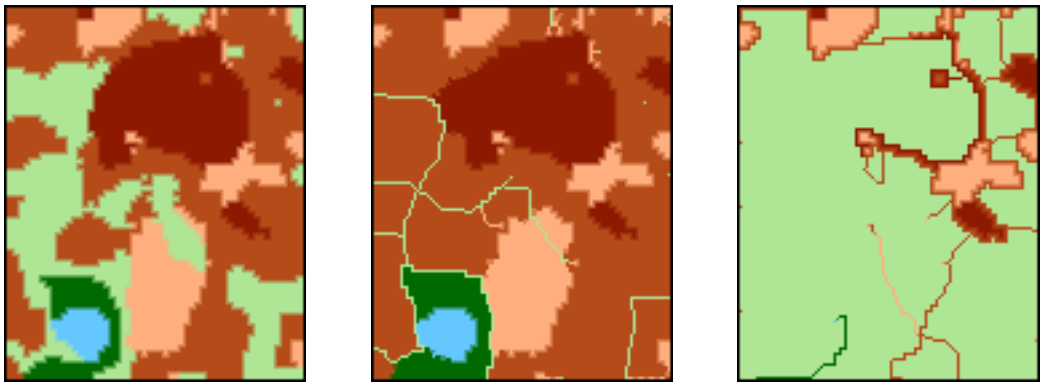
Démonstration. Soit ν l'image $\mu + (x, t)$. Soit u un label. Par définition de l'image ν, les supports $\langle u \rangle_\mu$ et $\langle u \rangle_\nu$ sont égaux, sauf éventuellement en x. Par conséquent, si ($u \wedge \mu(x) = \bot$ et $u \wedge t = \bot$) ou ($u \wedge \mu(x) \neq \bot$ et $u \wedge t \neq \bot$), alors $\langle u \rangle_\nu = \langle u \rangle_\mu$. Dans les autres cas, par la définition 8.2.3, x

est β-simple pour $\langle u\rangle_\mu$ (si $x \in \langle u\rangle_\mu$) ou x est β-simple pour $\langle u\rangle_\mu \cup \{x\}$ (si $x \notin \langle u\rangle_\mu$). Donc, $\langle u\rangle_\nu$ est faiblement homotopiquement équivalent à $\langle u\rangle_\mu$. Si $X = \mathbb{F}^n$, nous déduisons du théorème 6.3.12 que x est γ-simple pour $\langle u\rangle_\mu^c$ (si $x \in \langle u\rangle_\mu$) ou x est γ-simple pour $\langle u\rangle_\mu^c \cup \{x\}$ (si $x \notin \langle u\rangle_\mu$). Par suite, $\langle u\rangle_\nu^c$ et $\langle u\rangle_\mu^c$ sont faiblement homotopiquement équivalents (propriété 4.2.14). □

La prochaine proposition est une conséquence directe des définitions 4.2.8 et 8.2.3. D'un point de vue applicatif, c'est une propriété qui n'est pas à négliger car elle autorise l'écriture d'algorithmes parallèles d'amincissement, ou de croissance, dans les images de calques en modifiant simultanément les labels des points simples de même hauteur dans l'EPO.

Proposition 8.2.8. *Soit $\mu_0 : X \to T$ une image de calques. Soit $t \in T$ un label et $Y = \{y_i\}_{i=0}^k$ $(k \geq 1)$ un ensemble de points de même hauteur, simples pour le label t. Alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, y_i est un point simple pour le label t dans l'image $\mu_i = \mu_{i-1} + (y_{i-1}, t)$.*

La figure 8.6 fournit un exemple d'amincissement et de croissance d'un label t n'utilisant que des points simples pour des labels $u \neq t$ (amincissement) ou pour le label t (croissance) en traitant les points de même hauteur lors du même parcours de l'image.



(a) (b) (c)

FIGURE 8.6 – Amincissement/expansion de labels dans $\mathbb{F}^2$ par modifications de points simples. (a) Une image de calques définie sur $\mathbb{F}^2$ et à valeurs dans $T = \mathcal{P}(L^\star)$ où $L^\star$ contient 6 proto-labels. (b) Le label vert clair a été réduit par retrait de points simples dans son support, dimension par dimension, jusqu'à stabilité. (c) Le même label a été étendu par ajout de points simple à son support, dimension par dimension, jusqu'à stabilité.

8.3 Images à supports fermés

Dans cette section, nous nous intéressons aux images de calques qui peuvent être associées à des images de labels digitales munies de la $(3^n - 1, 2n)$-adjacence ($(3^n - 1)$-adjacence pour les objets associés aux proto-labels et $(2n)$-adjacence pour le fond éventuel). Cette paire d'adjacences correspond à des objets fermés dans l'espace continu (Ronse, 1985) ce qui nous a conduits à étudier les images de calques dans lesquelles le support de chaque label est un fermé. Nous appelons ces images des *images (de calques) à supports fermés*. La proposition suivante montre que les images de calques à supports fermés sont les applications décroissantes de $(X, \leq)$ vers $(T, \leq)$. Autrement dit, les images de calques à supports fermés sont les applications continues de $(X, \geq)$ vers $(T, \leq)$ (propriété 6.1.1).

Proposition 8.3.1. *Soit $\mu : X \to T$ une image de calques. Les supports des labels dans μ sont fermés si et seulement si μ est une application décroissante de $(X, \leq)$ vers $(T, \leq)$.*

Démonstration. Supposons que, pour tout $t \in T$, $\langle t \rangle$ est un fermé de X. Soit x, y deux points de X tels que $y \leq x$. Si $\mu(x) = \bot$, on a trivialement $\mu(x) \leq \mu(y)$. Nous supposons maintenant que $\mu(x) \neq \bot$. Pour tout atome $a \in T$ et tout point $z \in X$, on a de manière évidente $a \leq \mu(z) \Leftrightarrow \mu(z) \wedge a = a \Leftrightarrow \mu(z) \wedge a \neq \bot \Leftrightarrow z \in \langle a \rangle$. Or, puisque $\langle t \rangle$ est fermé et $y \in x^{\downarrow}$, $x \in \langle t \rangle \Rightarrow y \in \langle t \rangle$. On a donc pour tout atome a, $a \leq \mu(x) \Rightarrow x \in \langle a \rangle \Rightarrow y \in \langle a \rangle \Rightarrow a \leq \mu(y)$. Comme T est atomique, on en déduit que $\mu(x) \leq \mu(y)$.

Réciproquement, supposons que μ soit décroissante. Soit t un label et x un point dans $\langle t \rangle^c$. Alors, pour tout $y \in x^{\uparrow}$, on a $\mu(y) \leq \mu(x)$ (car μ est décroissante) et, par suite, $\mu(y) \wedge t \leq \mu(x) \wedge t = \bot$, c'est-à-dire $y \in \langle t \rangle^c$. Nous en concluons que $x^{\uparrow} \subseteq \langle t \rangle^c$ pour tout $x \in \langle t \rangle^c$. Donc, $\langle t \rangle^c$ est un ouvert et par suite $\langle t \rangle$ est un fermé. □

8.3.1 Coupes

Dans la section 8.2 nous avons donné des conditions suffisantes pour qu'une modification élémentaire d'image de calques préserve la topologie. Maintenant, si nous voulons travailler dans la classe des images à supports fermés, nous devons chercher des conditions qui non seulement maintiennent la topologie mais aussi le caractère fermé des supports. Or, ceci n'est pas garanti si on utilise des points simples comme on peut le voir sur la figure 8.7.

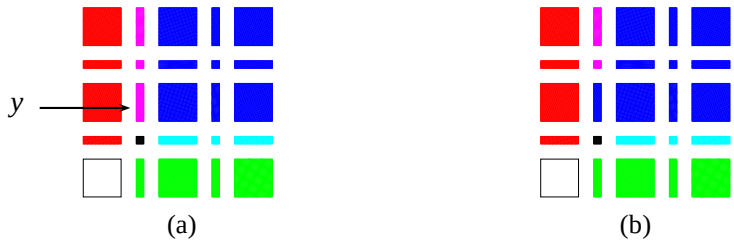


FIGURE 8.7 – Points simples et images à supports fermés. (a) Une image à supports fermés $\mu : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}(\{r, g, b\})$. Les labels sont représentés comme sur la figure 8.2. Le point y, qui a pour label $\mu(y) = \{r, b\}$, est simple pour le label $\{b\}$. (b) l'image $\mu + (y, \{b\})$ n'est plus une image à supports fermés (le support du label rouge n'est pas fermé).

Dans un EPO, un ensemble F est fermé si et seulement si , pour tout point $x \in F$, les points inférieurs à x sont aussi dans F. C'est une propriété analogue à celle que l'on trouve dans les complexes simpliciaux où toute face d'un simplexe est encore dans le complexe. Or, il est bien connu que l'ensemble des complexes simpliciaux est fermé pour les collapsus : le collapsus d'un complexe simplicial est un complexe simplicial. De plus, les collapsus « préservent » la topologie (Whitehead, 1939). C'est pourquoi nous avons adapté cette notion de collapsus aux images de calques afin d'être en mesure de conserver à la fois la topologie des supports et leur caractère fermé. Schématiquement, nous avons trouvé que cette adaptation pouvait être obtenue en demandant aux supports de certains labels dans l'EPO $x^{\updownarrow}$ d'être contractiles (où x est le point dont nous voulons modifier le label).

Proposition 8.3.2. *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés. Soit $y \leq x$ deux points dans X. Les affirmations suivantes sont équivalentes.*

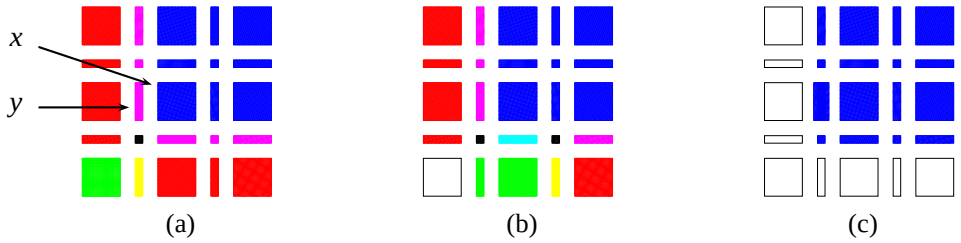


FIGURE 8.8 – Trois images de calques : $\mathbb{P}^2 \to \mathcal{P}(\{r,g,b\})$. Les labels sont représentés comme sur la figure 8.2. (a) (x,y) est un paire libre pour le label $\{b\}$: le seul label u tel que $y \in \langle u \rangle$ et $x \notin \langle u \rangle$ est $\{r\}$ et l'ensemble $x^{\downarrow\star} \cap \langle \{r\} \rangle$ est clairement contractile. (b) (x,y) n'est pas une paire libre pour $\{b\}$ car $\langle \{r\} \rangle \cap x^{\downarrow}$ n'est pas connexe (cet ensemble contient y, la 0-face en magenta et les deux 0 faces en noir). (c) (x,y) est libre pour le label $\{b\}$ (comme il n'y a pas de label u tel que $y \in \langle u \rangle$ et $x \notin \langle u \rangle$, la définition 8.3.3 se ramène ici à la définition classique d'une paire libre dans un complexe).

(i) Pour tout $u \in T$ tel que $y \in \langle u \rangle$, $x^{\updownarrow} \cap \langle u \rangle$ est contractile.

(ii) Pour tout $u \in T$ tel que $y \in \langle u \rangle$ et $x \notin \langle u \rangle$, x est β-simple pour $\langle u \rangle \cup \{x\}$.

(iii) Le point x est simple pour le label $\mu(y)$.

Démonstration. $(i) \Rightarrow (ii)$ Soit u un label tel que $y \in \langle u \rangle$ et $x \notin \langle u \rangle$. Alors, $x^{\updownarrow\star} \cap (\langle u \rangle \cup \{x\}) = x^{\updownarrow} \cap \langle u \rangle$ est contractile par hypothèse. Donc, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle \cup \{x\}$ (définition 4.2.8 et propriété 4.2.9).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ D'abord, nous observons que, puisque μ est un image à supports fermés, μ est décroissante (proposition 8.3.1). Donc, $\mu(x) \leq \mu(y)$ et, par suite, $u \wedge \mu(x) \leq u \wedge \mu(y)$ pour tout $u \in T$. Il vient qu'il n'existe pas de label u tel que $u \wedge \mu(x) \neq \bot$ et $u \wedge \mu(y) = \bot$. Si u est un label tel que $u \wedge \mu(x) = \bot$ et $u \wedge \mu(y) \neq \bot$, par hypothèse, x est β-simple pour $\langle u \rangle \cup \{x\}$. Donc, x est simple pour $\mu(y)$.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Soit u un label tel que $y \in \langle u \rangle$. Alors, soit $x \in \langle u \rangle$ et, puisque l'ensemble $x^{\updownarrow}$ est contractile dans tout EPO (propriété 4.2.10), il l'est en particulier dans l'EPO $\langle u \rangle$, c'est-à-dire que $x^{\updownarrow} \cap \langle u \rangle$ est contractile, soit $x \notin \langle u \rangle$ et, par hypothèse, x est β-simple pour $\langle u \rangle \cup \{x\}$, c'est-à-dire $x^{\updownarrow} \cap \langle u \rangle = x^{\updownarrow\star} \cap (\langle u \rangle \cup \{x\})$ est contractile. □

Définition 8.3.3 (Paire libre)**.** *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés et $t \in T$ un label. Une paire (x,y) de points dans $\langle t \rangle$ est une* paire libre pour le label *t si x est le seul point dans $\langle t \rangle$ tel que $y < x$ et les assertions de la proposition 8.3.2 sont satisfaites par la paire (x,y).*

Le label t impliqué dans la définition 8.3.3 ne peut pas être le label $\bot$ car $\langle t \rangle$ contient au moins les deux points de la paire libre (x et y) et $\langle \bot \rangle = \emptyset$. Nous illustrons cette définition sur la figure 8.8.

La proposition suivante est l'analogue de la proposition 8.2.4 pour les paires libres.

Proposition 8.3.4. *Soit $\mu : X \to T$ une image de calques. Soit t un label et x, y deux points dans $\langle t \rangle$. Soit L_x l'ensemble des atomes de T qui sont inférieurs ou égaux à au moins un élément de $\mu(x^{\downarrow})$. Soit $\varphi : T \to T$ la fonction qui envoie le label u sur le label $\varphi(u) = \bigvee\{a \in L_x \mid a \leq u\}$. Si la paire (x,y) est libre pour t dans μ alors (x,y) est libre pour t dans l'image à supports fermés $\varphi \circ \mu : X \to \varphi(T)$. Inversement, si le treillis T est distributif et (x,y) est un paire libre pour t dans l'image $\varphi \circ \mu$, alors la paire (x,y) est libre pour t dans μ.*

Démonstration. D'abord, remarquons que la définition de L_x donnée ici revient à celle de la proposition 8.2.4. En effet, tout atome a inférieur ou égal à un élément $\mu(z)$, $z \geq x$, est inférieur ou égal à $\mu(x)$ car ici μ est décroissante (proposition 8.3.1). Donc les deux définitions coïncident.
Maintenant, supposons que (x, y) est libre pour t dans μ. Puisque φ est une ouverture (voir l'annexe B.2) et puisqu'une ouverture est croissante, $\varphi \circ \mu$ est décroissante et par suite φ est une image à supports fermés (proposition 8.3.1). De plus, φ est anti-extensive donc $\mu(z) \wedge t = \bot \Rightarrow \varphi \circ \mu(z) \wedge t = \bot$ et φ n'est rien d'autre que l'identité sur $\mu(x)^{\updownarrow}$ (en particulier $\varphi(\mu(x)) = \mu(x)$). Donc, $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\varphi\circ\mu} = y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\mu} = \{x\}$. Or, par la définition 8.3.3 et la proposition 8.2.4, nous trouvons que x est simple pour le label $\mu(y)$ dans l'image $\varphi \circ \mu$. On en conclut que (x, y) est une paire libre pour t dans l'image $\varphi \circ \mu$.
Inversement, supposons que le treillis T soit distributif et que (x, y) soit libre pour t dans l'image $\varphi \circ \mu$. Comme $\varphi(\mu(y)) = \mu(y)$, nous déduisons de la définition 8.3.3 et de la proposition 8.2.4 que x est simple pour le label $\mu(y)$ dans l'image μ. De plus, soit z un point dans $y^{\uparrow\star}$ tel que $\mu(z) \wedge t \neq \bot$. Comme μ est décroissante, tout atome de T inférieur ou égal à $\mu(z)$ est inférieur ou égal à $\mu(y)$ et appartient par conséquent à L_x. Donc, $\varphi(\mu(z)) = \mu(z)$ et $\varphi(\mu(z)) \wedge t \neq \bot$. Puisque, par hypothèse, (x, y) est une paire libre de l'image $\varphi \circ \mu$, nous avons $z = x$. Ainsi, $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\mu} = \{x\}$ et (x, y) est une paire libre pour le label t dans μ. □

La définition des paires libres dans une image de calques est une extension de la notion de paire libre dans les complexes : si X est un complexe simplicial ou cubique, $\mu : X \to T$ une image de calques et (x, y) une paire libre pour le label t dans μ, alors (x, y) est une paire libre pour le complexe $\langle t \rangle_{\mu}$. La proposition suivante montre que la définition 8.3.3 se ramène à la définition classique de paire libre quand les deux points dans la paire partagent le même label.

Proposition 8.3.5. *Soit μ une image à supports fermés, $t \in T$ un label et (x, y) une paire de points dans $\langle t \rangle$. Si $\mu(x) = \mu(y)$ et $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle = \{x\}$, alors (x, y) est une paire libre pour le label t.*

Démonstration. Puisque $\mu(x) = \mu(y)$, il n'y a pas de label $u \in T$ tel que $y \in \langle u \rangle$ et $x \notin \langle u \rangle$ donc l'assertion *(ii)* de la proposition 8.3.2 est satisfaite. □

La proposition 8.3.6 énonce quelques petites propriétés des paires libres qui seront utiles par la suite.

Proposition 8.3.6. *Soit μ une image à supports fermés, $t \in T$ un label et (x, y) une paire libre pour t. Alors, x est un élément maximal dans $\langle t \rangle$, y est haut-unipolaire dans $\langle t \rangle$ et $y \prec x$ dans X.*

Démonstration. Le point x est un élément maximal de $\langle t \rangle$ car x est le seul point dans $\langle t \rangle$ tel que $x \leq y$. Le point y est haut-unipolaire pour la même raison. Enfin, comme $\langle t \rangle$ est un fermé, $x^{\downarrow}$ est inclus dans $\langle t \rangle$ et il n'existe pas de point dans $\langle t \rangle$ entre x et y car $y^{\uparrow} \cap \langle t \rangle = \{x, y\}$. D'où $y \prec x$. □

La définition suivante introduit la notion de *coupe*. Schématiquement, une coupe du label t dans une image à supports fermés μ consiste à supprimer le label t sur une paire libre (x, y) pour t. Bien sûr, afin de maintenir les frontières entre les supports, le label de y doit se déplacer vers les autres points de $x^{\downarrow\star}$ et les labels « derrière la frontière », c'est-à-dire les labels de $y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}$, doivent remplacer t sur $\{x, y\}$. La figure 8.9 illustre cette définition. La figure 8.10 montre que les coupes sont de peu d'intérêt dans un treillis qui n'est pas distributif car il peut arriver que le label censé être supprimé par la coupe soit encore présent dans la coupe.

Définition 8.3.7 (Coupe)**.** *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés, $t \in T$ un label et (x, y) une paire libre pour le label t. L'image de calques $\mu_{y,t} : X \to T$ définie par :*

$$\mu_{y,t} = \begin{cases} \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) & \text{si } z \in \{x, y\} \\ \mu(z) \vee \mu(y) & \text{si } z \in x^{\downarrow\star} \setminus \{y\} \\ \mu(z) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une coupe de t en y dans μ *(si $y^{\uparrow\star} \setminus \{x\} = \emptyset$, nous posons $\mu(x) = \mu(y) = \bot$).*

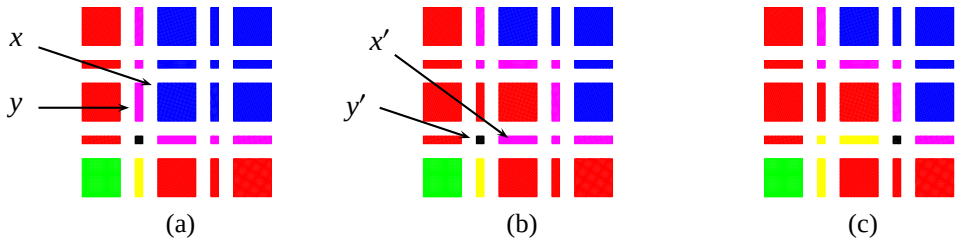


FIGURE 8.9 – Coupe dans une image de calques. (a) Une image μ avec une paire libre (x, y) pour le label $\{b\}$ (voir la figure 8.8(a)).
(b) La coupe $\mu' = \mu_{y,\{b\}}$. La paire (x', y') est libre pour $\{b\}$ dans μ'. (c) La coupe $\mu'_{y',\{b\}}$.

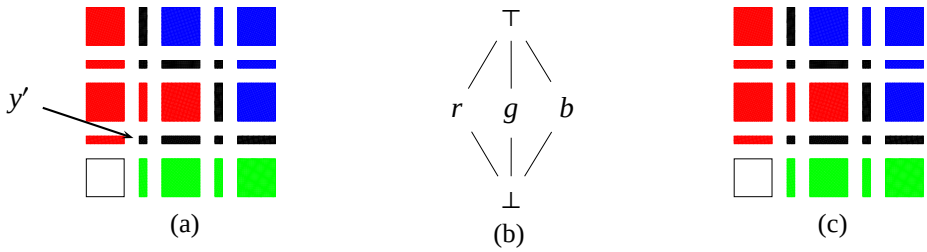


FIGURE 8.10 – Coupe stationnaire avec un treillis des labels non distributif. (a) Une image à supports fermés $\mu : X \to T$. Le diagramme de Hasse de T est représenté en (b) (T n'est pas distributif). Les labels $\bot, r, g, b, \top$ sont représentés respectivement en blanc, rouge, vert, bleu et noir. (c) La coupe $\mu' = \mu_{y,b}$ qui est égale à μ.

La notion de coupe est une extension aux images de calques de la notion de collapsus pour les complexes. Quand X est un complexe simplicial ou cubique et T est distributif, la proposition suivante montre qu'une coupe pour le label t est un collapsus pour le support de t et en particulier si $T = \{\bot, \top\}$, c'est-à-dire quand μ est une image binaire, une coupe n'est rien d'autre qu'un collapsus.

Proposition 8.3.8. *Soit μ_0 et μ_1 deux images à supports fermés définies sur un complexe X et à valeurs dans un treillis distributif T. Soit $t \in T$ un label. Si μ_1 est une coupe de μ_0 pour t, alors $\langle t \rangle_{\mu_1}$ est un collapsus de $\langle t \rangle_{\mu_0}$.*

Démonstration. Soit μ_0 une image à supports fermés, (x, y) une paire libre de μ_0 pour le label t et μ_1 la coupe $\mu_{y,t}$. De la définition 8.3.3, nous avons immédiatement que la paire (x, y) est libre pour l'ensemble $\langle t \rangle_{\mu_0}$ et de la définition 8.3.7, nous avons que les supports de t dans μ_0 et μ_1 sont égaux

sauf éventuellement dans $x^{\downarrow}$. Comme μ_0 est une image à supports fermés, $x^{\downarrow}$ est inclus dans $\langle t\rangle_{\mu_0}$ et, puisque $\mu_1(z) = \mu_0(z) \vee \mu_0(y)$ pour tous $z \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$, l'ensemble $x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ est encore inclus dans $\langle t\rangle_{\mu_1}$. Le label des points x, y dans l'image μ_1 est $\bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu_0(z)$. Puisque x est le seul point dans $\langle t\rangle_{\mu_0} \cap y^{\uparrow\star}$ et que nous supposons ici que T est distributif, on a $\mu_1(x) \wedge t = \mu_1(y) \wedge t = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} (\mu_0(z) \wedge t) = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \perp = \perp$. Donc, ni x ni y n'est dans $\langle t\rangle_{\mu_1}$ et $\langle t\rangle_{\mu_1} = \langle t\rangle_{\mu_0} \setminus \{x, y\}$. On en conclut que le complexe $\langle t\rangle_{\mu_1}$ est un collapsus de $\langle t\rangle_{\mu_0}$. □

Quand le treillis T est distributif, la proposition suivante permet de préciser quels supports sont modifiés par une coupe. Si le treillis T n'est pas distributif, cette proposition est fausse (voir le contre-exemple 8.3.10).

Proposition 8.3.9. *Soit T un treillis distributif et $\mu : X \to T$ une image à supports fermés. Soit (x, y) une paire libre pour le label $t \in T$ et $\mu_{y,t}$ la coupe de t en y dans μ. Pour tout label $u \in T$ dont le support ne contient pas y, on a $\langle u\rangle_{\mu_{y,t}} = \langle u\rangle_{\mu}$.*

Démonstration. Soit u un label tel que $y \notin \langle u\rangle_{\mu}$ et, puisque μ est une image à supports fermés, $x \notin \langle u\rangle_{\mu}$. De la définition 8.3.7, nous avons $\mu_{y,t}(z) = \mu(z)$ pour tout point $z \in \langle u\rangle_{\mu}$ qui n'est pas dans $x^{\downarrow}$. Comme μ est décroissante, $\mu(z) \leq \mu(y)$ pour tout $z \geq y$. Donc, $\bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) \leq \mu(y)$. Ainsi, $\mu_{y,t}(y) \wedge u = \mu_{y,t}(x) \wedge u = (\bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z)) \wedge u \leq \mu(y) \wedge u = \perp$, c'est-à-dire $x, y \notin \langle u\rangle_{\mu_{y,t}}$. Enfin, pour tout point $z \in x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$, $\mu_{y,t}(z) = \mu(z) \vee \mu(y)$ d'où $z \in \langle u\rangle_{\mu_{y,t}}$ (c'est-à-dire $\mu_{y,t}(y) \wedge u \neq \perp$) si et seulement si $z \in \langle u\rangle_{\mu}$ (car T est distributif). □

Contre-exemple 8.3.10 (Proposition 8.3.9)**.** *La figure 8.11 illustre le fait que la proposition 8.3.9 est généralement fausse dans un treillis non distributif. De plus, cette figure montre que le nombre de composantes connexes des supports n'est pas conservé par une coupe dans un tel treillis. Par conséquent, ce contre-exemple est aussi un contre-exemple pour le théorème 8.3.13 quand le treillis n'est pas distributif.*

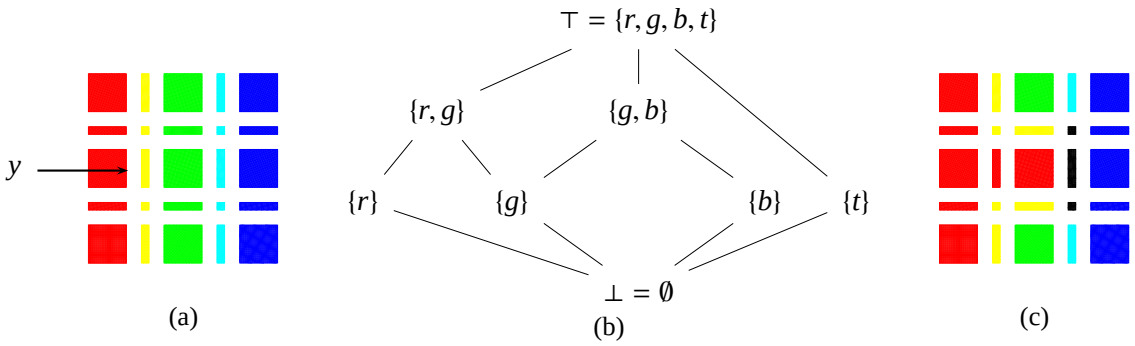


FIGURE 8.11 – Contre-exemple 8.3.10. (a) Une image à supports fermés $\mu : X \to T$ avec $T = \{\emptyset, \{r\}, \{g\}, \{b\}, \{t\}, \{r, g\}, \{g, b\}, \{r, g, b, t\}\}$, muni de l'inclusion. (b) Le diagramme de Hasse de T : T n'est pas distributif comme on le voit en calculant $\{g, b\} \wedge (\{t\} \vee \{b\})$ et $(\{g, b\} \wedge \{t\}) \vee (\{g, b\} \wedge \{b\}$. Les labels $\{r\}, \{g\}, \{b\}, \{r, g\}, \{g, b\}, \{r, g, b, t\}$ sont représentés respectivement en rouge, vert, bleu, jaune, cyan et noir. (c) La coupe $\mu_{y,\{g\}}$. Dans l'image μ, le support de t est vide. Mais, dans la coupe $\mu_{y,g}$, le support de t, n'est plus vide (il contient les trois points en noir).

Comme nous l'avons dit au début de la section 8.3.1, le prinipal avantage des paires libres et des coupes sur les points simples pour labels est de permettre d'effectuer des modifications des images de calques avec contraintes topologiques tout en restant dans la classe des images à support fermés.

Proposition 8.3.11. *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés, $t \in T$ un label et (x, y) une paire libre pour le label t. Alors, la coupe $\mu_{y,t}$ est une image à supports fermés.*

Démonstration. Soit (x, y) une paire libre pour un label t dans un image μ. Par hypothèse, μ est à supports fermés, donc décroissante (proposition 8.3.1). Montrons que $\mu_{y,t}$ est aussi décroissante. Soit a, b deux points dans X tels que $b \leq a$ et, par conséquent, tels que $\mu(a) \leq \mu(b)$. La preuve est conduite par exhaustion.

- Si $b \notin x^{\downarrow}$ alors $a \notin x^{\downarrow}$. Il vient que $\mu_{y,t}(b) = \mu(b)$ et $\mu_{y,t}(a) = \mu(a)$. Dans ce cas, de manière évidente, on a $\mu_{y,t}(a) \leq \mu_{y,t}(b)$.
- si $b \in \{x, y\}$ et $a \notin x^{\downarrow}$ alors $a \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}$ et $\mu_{y,t}(a) = \mu(a) \leq \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) = \mu_{y,t}(b)$. Donc, $\mu_{y,t}(a) \leq \mu_{y,t}(b)$.
- Si $a, b \in \{x, y\}$ alors $\mu_{y,t}(a) = \mu_{y,t}(b)$.
  Remarquons qu'il est impossible d'avoir $b \in \{x, y\}$ et $a \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ car $x \prec y$ dans X (proposition 8.3.6).
- Si $b \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ et $a \notin x^{\downarrow}$ alors $\mu_{y,t}(a) = \mu(a) \leq \mu(b) \leq \mu(b) \vee \mu(y) = \mu_{y,t}(b)$.
- Si $b \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ et $a \in \{x, y\}$, alors $\mu_{y,t}(a) = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) \leq \mu(y)$ (car μ est décroissante) et $\mu(y) \leq \mu(b) \vee \mu(y) = \mu_{y,t}(b)$, donc $\mu_{y,t}(a) \leq \mu_{y,t}(b)$.
- Si $a, b \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$, alors $\mu_{y,t}(a) = \mu(a) \vee \mu(y)$ et $\mu_{y,t}(b) = \mu(b) \vee \mu(y)$, d'où $\mu_{y,t}(a) \leq \mu_{y,t}(b)$.

Dans chaque cas, on a bien $\mu_{y,t}(a) \leq \mu_{y,t}(b)$. Donc, $\mu_{y,t}$ est décroissante. □

Quand une image de calques μ est obtenue à partir d'une image de labels digitale (définie sur une partie de $\mathbb{Z}^n$) par la procédure que nous avons décrite au début de la section 8.2, cette image est pure ($\mu(x)$ est un proto-label, ou $\perp$, pour tout xel x). Les coupes conservent la pureté sous une hypothèse qui est satisfaite, par exemple, par les pseudo-variétés (voir, *e.g.*, Spanier 1994).

Proposition 8.3.12. *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés, pure (resp. strictement pure). Soit $t \in T$ un label et (x, y) une paire libre pour le label t. Si tous les points de X couverts par un xel sont couverts par exactement deux points de X et ces deux points sont des xels alors $\mu_{y,t}$ est pure (resp. strictement pure).*

Démonstration. Si x n'est pas un xel, alors les xels de X ont le même label dans $\mu_{y,t}$ que dans μ (car seuls les points de $x^{\downarrow}$ voient leur label modifié). Si x est un xel, alors, d'après l'hypothèse, il existe un xel z de X tel que $y^{\uparrow\star} \setminus \{x\} = \{z\}$. Par conséquent (définition 8.3.7), $\mu_{y,t}(x) = \mu(z)$ et $\mu(z)$ est un atome ou $\perp$ car μ est pure (resp. un atome car μ est strictement pure). □

8.3.2 Équivalence homotopique

Le théorème 8.3.13 montre que les composantes connexes et les groupes d'homotopie sont conservés par les coupes à condition que le domaine de l'image ait la propriété de la sphère percée (voir section 6.3.2) et que le codomaine soit distributif. La figure 8.12 illustre la suite des modifications de l'image décrite dans la preuve. Le contre-exemple 8.2.5 montre que le nombre de

composantes connexes n'est pas conservé quand le codomaine n'est pas distributif et le contre-exemple 8.3.14 montre que le type d'homotopie n'est pas conservé quand X n'a pas la propriété de la sphère percée.

Théorème 8.3.13. *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés et (x, y) une paire libre pour le label $t \in T$. Si X a la propriété de la sphère percée et si le treillis T est distributif, la coupe $\mu_{y,t}$ est équivalente à μ et, si $X = \mathbb{F}^n$, $\mu_{y,t}$ est fortement équivalente à μ.*

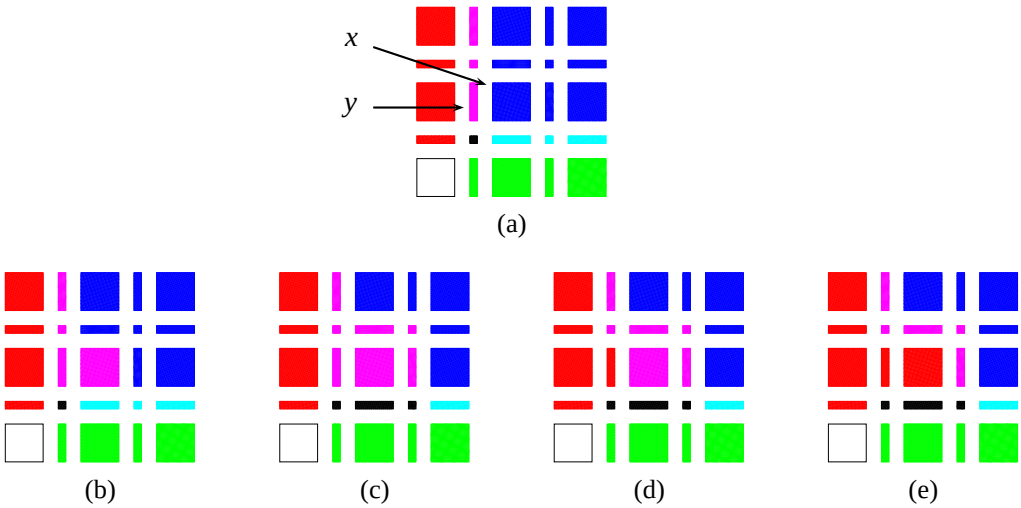


FIGURE 8.12 – Les quatre étapes de la preuve du théorème 8.3.13. (a) L'image initiale à supports fermés μ avec une paire libre (x, y) pour le label $\{b\}$ (voir la figure 8.8 (b)). (b) L'image $\mu + (x, \mu(y))$. (c) La plus petite image à supports fermés ν supérieure ou égale à $\mu + (x, \mu(y))$. (d) L'image $\nu + (y, \{r\})$. (e) L'image $\mu_{y,\{b\}} = (\nu + (y, \{r\})) + (x, \{r\})$.

Démonstration.

1. Par la définition 8.3.3, x est simple pour le label $\mu(y)$ dans l'image μ. Donc, $\mu' = \mu + (x, \mu(y))$ est équivalent à μ (fortement équivalent si $X = \mathbb{F}^n$) d'après la proposition 8.2.7.
2. Soit ν la plus petite image à supports fermés supérieure ou égale à μ'. Comme μ est une image à supports fermés, ν est définie par $\nu(z) = \mu(z) \vee \mu(y)$ si $z < x$ et $\nu(z) = \mu(z)$ sinon. Nous allons montrer que ν est équivalent à μ'. Pour cela, grâce à la proposition 8.2.8, il suffit d'établir que les points $z \in x^{\downarrow\star}$ avec même hauteur k, (où k est un entier strictement inférieur à la hauteur de x), sont simples pour le label $\nu(z)$ dans l'image μ_k définie par $\mu_k(a) = \nu(a)$ si $a \in x^{\downarrow\star}$ et la hauteur de a est strictement supérieure à k, et $\mu_k(a) = \mu(a)$ sinon.
   Considérons donc un point z dans $x^{\downarrow\star}$ tel que $\nu(z) \neq \mu(z)$, c'est-à-dire $\mu(y) \not\leq \mu(z)$. Notons que $\mu_k(z) = \mu(z)$ et $\mu_k(x) = \mu(y)$ par définition de μ_k. Soit k la hauteur de z. Vérifions que z est simple pour $\nu(z)$ dans μ_k. Soit u un label tel que $z \in \langle u \rangle_\nu$ et $z \notin \langle u \rangle_{\mu_k}$ (si $z \notin \langle u \rangle_\nu$ ou $z \in \langle u \rangle_{\mu_k}$, alors le support de u dans l'image $\mu_k + (z, \nu(z))$ est égal au support de u dans l'image μ_k car $\mu \leq \nu$ par définition de ν et $\mu_k(z) = \mu(z)$). De $z \in \langle u \rangle_\nu$ et $z \notin \langle u \rangle_{\mu_k}$, nous obtenons $\perp \neq \nu(z) \wedge u = (\mu(z) \vee \mu(y)) \wedge u = (\mu_k(z) \vee \mu(y)) \wedge u = (\mu_k(z) \vee \mu_k(x)) \wedge u = (\mu_k(z) \wedge u) \vee (\mu_k(x) \wedge u) = \mu_k(x) \wedge u$ (la dernière égalité provient de $z \notin \langle u \rangle_{\mu_k}$, d'où $\mu_k(z) \wedge u = \perp$). Donc, on a $x \in \langle u \rangle_{\mu_k}$. Comme

$z \notin \langle u \rangle_\mu$ (car $z \notin \langle u \rangle_{\mu_k}$) et μ est décroisante, aucun point dans $z^\uparrow$ n'est dans le support de u dans μ. De plus, comme $\mu_k = \mu$ sur $X \setminus x^\downarrow$, aucun point dans $z^\uparrow \setminus x^\downarrow$ n'est dans le support de u dans μ_k. Ainsi, $z^{\uparrow\star} \cap \langle u \rangle_{\mu_k}$ a un élément maximal, x, et est donc contractile (propriété 4.2.10). Il vient que, z est β-simple pour $\langle u \rangle_{\mu_k} \cup \{z\}$. Cela prouve que z est simple pour le label $\nu(z)$ dans l' image μ_k. De proche en proche, on arrive de cette façon à montrer que les images ν et μ' sont équivalentes, fortement équivalentes si X est $\mathbb{F}^n$.

3. Soit $u = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z)$. Nous montrons maintenant que y est simple pour le label u dans l'image ν. Souvenons-nous que $\nu(y) = \mu(y)$ et $u \leq \mu(y)$ car μ est décroissante. Alors, $w \wedge u \leq w \wedge \nu(y)$ pour tout $w \in T$. Soit w un label tel que $w \wedge \nu(y) \neq \bot$ et $w \wedge u = \bot$. De manière évidente, pour tout $z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}$, on a $\mu(z) \leq u$ et, par suite, $w \wedge \mu(z) \leq w \wedge u = \bot$. Donc, $y^{\uparrow\star} \cap \langle w \rangle_\nu \subseteq \{x\}$. Or, x appartient à $\langle w \rangle_\nu$ puisque $\nu(x) = \mu(y) = \nu(y)$. On en déduit que, $y^{\uparrow\star} \wedge \langle w \rangle_\nu = \{x\}$ et y est β-simple pour le support de w dans l'image ν. Il vient que y est simple pour le label u dans l'image ν et que les images $\nu + (y, u)$ et ν sont équivalentes, fortement équivalentes si $X = \mathbb{F}^n$.

4. Enfin, montrons que x est simple pour le label $u = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z)$ dans l'image $\nu' = \nu + (y, u)$ dans laquelle le label de x est $\nu(x) = \mu(y)$. On a montré auparavant que $w \wedge u \leq w \wedge \mu(y)$ pour tout $w \in T$. Soit w un label tel que $w \wedge \mu(y) \neq \bot$ et $w \wedge u = \bot$. Puisque ν est décroissante et $x \in \langle w \rangle_\nu$, on a $x^{\downarrow\star} \subseteq \langle w \rangle_\nu$ et par conséquent $x^{\downarrow\star} \cap \langle w \rangle_{\nu'} = x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$. Or, par hypothèse, X a la propriété de la sphère percée. Donc, $x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ est homotopiquement trivial et x est un point γ-simple pour $\langle w \rangle_{\nu'}$. De plus, $x^{\downarrow\star} \cap \langle w \rangle^c_{\nu'} = \{y\}$ est clairement contractile de sorte que x est un point β-simple (et donc aussi un point γ-simple) pour $\langle w \rangle^c_{\nu'}$. Donc, (propriété 4.2.14) pour tous labels w, $\langle w \rangle_{\nu'}$ et $\langle w \rangle_{\nu'+(x,u)}$ sont faiblement homotopiquement équivalents et $\langle w \rangle^c_{\nu'}$ et $\langle w \rangle^c_{\nu'+(x,u)}$ sont faiblement homotopiquement équivalents (si w est tel que $w \wedge \mu(y) = \bot$ ou $w \wedge u \neq \bot$, les équivalences ci-dessus sont des égalités). Il est clair que l'image $\nu' + (x, u)$ est égale à la coupe $\mu_{y,t}$. Donc, $\mu_{y,t}$ et ν' sont équivalents (fortement équivalents si $X = \mathbb{F}^n$).

Par transitivité, $\mu_{y,t}$ et μ sont équivalents (fortement équivalents si $X = \mathbb{F}^n$). □

Contre-exemple 8.3.14 (Théorème 8.3.13)**.** *La figure 8.13 illustre le fait que le théorème 8.3.13 est généralement faux si l'EPO X n'a pas la propriété de la sphère percée.*

FIGURE 8.13 – Contre-exemple 8.3.14. (a) Une image $\mu : X \to \mathcal{P}(\{r, g\})$. Dans l'EPO X, les points z et z' sont identifiés. De ce fait, X n'a pas la propriété de la sphère percée ($x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$ est un anneau). Le support de $\{g\}$ est contractile (il a un maximum, x). (b) La coupe $\mu_{y,\{g\}}$. Le support de $\{g\}$ est un anneau (il n'est donc pas contractile).

8.4 Images de calques régulières

Nous nous intéressons maintenant aux images de calques construites à partir d'images de labels digitales. La particularité de ces images de calques est qu'elles sont entièrement déterminées par leurs valeurs sur les xels (les points maximaux de X, qui sont aussi – par identification – des points de $\mathbb{Z}^n$).

Comme X est localement fini, pour tout point $x \in X$ l'ensemble $x^{\uparrow +} = \max(x^{\uparrow})$ est non vide et fini. Donc, nous pouvons définir les labels des points de X à l'aide des labels des éléments maximaux de X.

8.4.1 Images régulières et régularisées

Définition 8.4.1 (Image de calques régulière)**.** *Une image de calques $\mu : X \to T$ est une* image (de calques) régulière *si, pour tout $x \in X$,*

$$\mu(x) = \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu(y)$$

Supposons que, comme dans l'introduction de la section 8.2, les xels de X soient identifiés aux points d'une partie Z de $\mathbb{Z}^n$ et que les atomes et le minimum du treillis T soit identifiés aux éléments d'un EPO L composé d'un élément minimal, $\perp$, et de ℓ proto-labels non comparables. Alors, nous pouvons définir une fonction $\zeta : L^Z \to T^X$ de la façon suivante : étant donnée une image de labels digitale $\lambda : Z \to L$, $\zeta(\lambda) : X \to T$ est la seule image régulière telle que, pour tout xel $x \in X$, $\zeta(\lambda)(x) = \lambda(x)$ (plus exactement, $\zeta(\lambda)(i(x)) = j(\lambda(x))$ où i et j sont respectivement les plongements de Z dans X et de L dans T).

La proposition suivante établit que la classe des images régulières est incluse dans la classe des images à supports fermés.

Proposition 8.4.2. *Soit $\mu : X \to T$ un image de calques régulière. Alors, μ est une image à supports fermés.*

Démonstration. Il est clair que, pour tous points x et y dans X, on a $y \leq x \Rightarrow x^{\uparrow +} \subseteq y^{\uparrow +} \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(y)$. Donc, un image de calques régulière est décroissante et par suite est une image à supports fermés (proposition 8.3.1). □

La *régularisée* d'une image de calques μ est l'image régulière μ' qui coincide avec μ sur tous les xels de X. Si μ est une image à supports fermés et μ' est sa régularisée, alors $\mu'(x) = \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu'(y) = \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu(y) \leq \mu(x)$ (car μ est décroissante) pour tout $x \in X$. Il est facile de voir que la régularisée d'une image à supports fermés est la plus petite image à supports fermés qui coïncide avec μ sur les xels de X.

En général, les calques μ_l d'une image régulière ne sont pas réguliers (voir le contre-exemple 8.4.4). Cependant, si nous régularisons ces calques, nous trouvons que toute image régulière est un supremum d'images binaires régulières.

Proposition 8.4.3. *Soit $\mu : X \to T$ un image de calques régulière. Soit $L^\star$ l'ensemble des atomes de T. Alors $\mu = \bigvee_{(l \in L^\star)} \mu'_l$ où, pour tout $l \in L^\star$, μ'_l dénote la régularisée du calque μ_l.*

Démonstration. Nous montrons d'abord qu'un supremum d'images régulières est régulier :

$$\left(\bigvee_{l\in L^\star} \mu'_l\right)(x) = \bigvee_{l\in L^\star} \mu'_l(x) = \bigvee_{l\in L^\star} \bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} \mu'_l(y) = \bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} \bigvee_{l\in L^\star} \mu'_l(y) = \bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} \left(\bigvee_{l\in L^\star} \mu'_l\right)(y).$$

L'image $\bigvee_{(l\in L^\star)} \mu'_l$ est donc régulière. Or, de manière évidente, $\mu'_l(y) = \mu_l(y)$ pour tout xel y et ainsi, $\bigvee_{(l\in L^\star)} \mu'_l(y) = \bigvee_{(l\in L^\star)} \mu_l(y)$ pour tout xel y. Par la proposition 8.2.2, nous avons $\mu = \bigvee_{(l\in L^\star)} \mu_l$. Donc, μ et $\bigvee_{(l\in L^\star)} \mu'_l$ sont des images régulières qui coïncident sur les xels de X. Elles sont donc égales. □

Contre-exemple 8.4.4 (Proposition 8.4.3)**.** *La figure 8.14 montre que si le treillis T n'est pas distributif, le calque $\mu_l = \mu \wedge l$, où μ est une image régulière et l est un atome de T, peut être non régulier.*

(a) (b)

FIGURE 8.14 – Contre-exemple 8.4.4. (a) Une image régulière $\mu : X \to T$ avec $T = \{\emptyset, \{r\}, \{g\}, \{b\}, \{r, g, b\}\}$ muni de l'inclusion (les labels $\emptyset, \{r\}, \{g\}, \{b\}, \{r, g, b\}$ sont représentés respectivement en blanc, rouge, vert, bleu et noir).
(b) Le calque $\mu_{\{b\}}$ n'est pas régulier.

8.4.2 Images régulières dans un treillis booléen

Dans cette section, nous supposons que le treillis T est booléen. Pour toute paire (t, u) de labels, nous posons $t \setminus u = t \wedge u^c$ où u^c est le complément de u dans T.

La proposition suivante montre que la réduction du nombre de labels, en identifiant certains labels avec le fond, conserve la régularité des images.

Proposition 8.4.5. *Soit $\mu : X \to T$ une image régulière et $t \in T$ un label. Alors, l'image $\mu \wedge t : X \to t^\downarrow$ définie, pour tout $x \in X$, par $(\mu \wedge t)(x) = \mu(x) \wedge t$ est régulière.*

Démonstration. Soit $x \in X$. Alors, $(\mu \wedge t)(x) = \mu(x) \wedge t = \left(\bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} \mu(y)\right) \wedge t = \bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} (\mu(y) \wedge t) = \bigvee_{y\in x^{\uparrow +}} (\mu \wedge t)(y)$. Donc, l'image $\mu \wedge t$ est régulière. □

Appliquée aux proto-labels, la proposition 8.4.5 affirme que les calques sont réguliers.

Avec la proposition suivante, nous montrons que la fonction ζ permute avec la réduction du treillis T à $t^\downarrow$, pour tout label $t \in T$.

Proposition 8.4.6. *Soit $\lambda : Z \subseteq \mathbb{Z}^n \to L$ une image de labels digitale. Alors*[1]*, pour tout $t \in T$, $\zeta(\lambda) \wedge t = \zeta(\lambda \wedge t)$.*

1. La notation est un peu abusive ici. En fait, puisque $t \notin L$, nous devrions définir $\lambda \wedge t$ par $(\lambda \wedge t)(z) = \lambda(z)$ si $\lambda(z)$ est un atome sous t et $(\lambda \wedge t)(z) = \perp$ sinon. Bien sûr, on a $\zeta(\lambda)(z) \wedge t = (\lambda \wedge t)(z)$, pour tout xel z, car $\zeta(\lambda)(z) = \lambda(z)$ est un atome (un proto-label).

En d'autres termes, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L^Z \arrow[r, "\zeta"'] \arrow[d, "\lambda \mapsto \lambda \wedge t"'] & T^X \arrow[d, "\mu \mapsto \mu \wedge t"] \\ L^Z \arrow[r, "\zeta"'] & T^X \end{tikzcd}$$

Démonstration. Puique les images $\zeta(\lambda) \wedge t$ et $\zeta(\lambda \wedge t)$ sont régulières (proposition 8.4.5 et définition de ζ), il suffit de montrer que ces deux images sont égales sur les xels de X. Soit x un xel. On a d'un côté $\zeta(\lambda \wedge t)(x) = (\lambda \wedge t)(x) = \lambda(x) \wedge t$ et, de l'autre côté, $(\zeta(\lambda) \wedge t)(x) = \zeta(\lambda)(x) \wedge t = \lambda(x) \wedge t$. Donc, $\zeta(\lambda \wedge t)(x) = (\zeta(\lambda) \wedge t)(x)$. □

Après avoir réduit le nombre de labels en prenant l'infimum avec un label particulier t, nous pouvons considérer les labels restants comme un unique label. Le résultat est une image binaire dont le support est $\langle t \rangle$. En partant d'une image de labels digitale, la proposition suivante montre que cette opération peut être faite avant ou après l'utilisation de la fonction ζ. En combinant cette proposition avec la proposition 8.4.6 et les resultats établis au chapitre 6, nous obtenons que les composantes connexes et le groupe fondamental de toute image digitale binaire obtenue en considérant seulement une union particulière de labels dans une image de labels digitale sont isomorphes à ceux obtenus par la même opération dans une image de calques.

Dans la proposition 8.4.7, le treillis T n'a pas besoin d'être booléen.

Proposition 8.4.7. *Soit $\lambda : Z \to L$ un image de labels digitale. Soit $B.\lambda : Z \to \{\bot, \top\}$ l'image binaire définie par $B.\lambda(z) = \bot$ si $\lambda(z) = \bot$ et $B.\lambda(z) = \top$ sinon. Soit $B.\zeta(\lambda) : X \to \{\bot, \top\}$ l'image binaire définie par $B.\zeta(\lambda)(z) = \bot$ si $\zeta(\lambda)(z) = \bot$ et $B.\zeta(\lambda)(z) = \top$ sinon. Alors, $B.\zeta(\lambda) = \zeta(B.\lambda)$.*

Démonstration. La preuve consiste à montrer que 1. $B.\zeta(\lambda)$ est régulier et 2. les fonctions $B.\zeta(\lambda)$ et $\zeta(B.\lambda)$ coïncident sur les xels de X.

1. Soit $\mu : X \to T$ une image régulière, $B.\mu : X \to \{\bot, \top\}$ l'image binaire définie par $B.\mu(z) = \bot$ si $\mu(z) = \bot$ et $B.\mu(z) = \top$ sinon et x un point de X non maximal. On a : $B.\mu(x) = \bot \Leftrightarrow \mu(x) = \bot \Leftrightarrow \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu(y) = \bot \Leftrightarrow \forall y \in x^{\uparrow +}, \mu(y) = \bot \Leftrightarrow \forall y \in x^{\uparrow +}, B.\mu(y) = \bot \Leftrightarrow \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} B.\mu(y) = \bot$. Nous pouvons directement conclure que $B.\mu$ est régulier.
2. Soit x un xel. On a : $B.\zeta(\lambda)(x) = \bot \Leftrightarrow \zeta(\lambda)(x) = \bot \Leftrightarrow \lambda(x) = \bot \Leftrightarrow B.\lambda(x) = \bot \Leftrightarrow \zeta(B.\lambda)(x) = \bot$. Donc, $B.\zeta(\lambda) = \zeta(B.\lambda)$ sont égales sur les xels de X et, comme elles sont régulières, elles sont égales.

□

Le lemme suivant donne une façon de régulariser localement une image à supports fermés. Nous utiliserons ce lemme dans la section 8.4.3, pour régulariser une image de calques après une coupe.

Lemme 8.4.8. *Soit $\mu : X \to T$ une image à supports fermés, μ' la régularisée de μ . Soit (x, y) une paire libre pour le label $t = \mu(x) \setminus \mu'(x)$ telle que $\mu(x) = \mu(y)$. Alors, la coupe $\mu_{y,t}$ est égale à μ sur $X \setminus \{x, y\}$ et à μ' sur $\{x, y\}$.*

Démonstration. Puisque $\mu(x) = \mu(y)$ et μ est décroissante, $\mu(y) \leq \mu(z)$ pour tout $z \in x^{\downarrow}$. Or, pour tout point $z \in x^{\downarrow\star} \setminus \{y\}$, par la définition 8.3.7, $\mu_{y,t}(z) = \mu(z) \vee \mu(y)$ et par suite, $\mu_{y,t}(z) = \mu(z)$. De nouveau par la définition 8.3.7, $\mu_{y,t}(z) = \mu(z)$ pour tout point z dans $X \setminus x^{\downarrow}$. Donc, $\mu_{y,t}$ est égal à μ sur $X \setminus \{x, y\}$. Comme (x, y) est une paire libre pour $\nu(x)$, nous en déduisons que $t \neq \bot$. En particulier, x n'est pas un xel (par définition, μ' coïncide avec μ sur le xels de x). Alors :

- $\mu'(x) = \bigvee_{z \in x^{\uparrow+}} \mu(z) \leq \bigvee_{z \in x^{\uparrow\star}} \mu(z) \leq \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) = \mu_{y,t}(x)$;
- $\bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) \leq \mu(y) = \mu(x)$ (car μ est décroissante) ;
- puisque (x, y) est une paire libre pour t, aucun point $z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}$, $z \neq x$, n'est dans le support du label t ; donc, $\mu_{y,t}(x) \wedge t = (\bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z)) \wedge t = \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} (\mu(z) \wedge t) = \bot$.

Le treillis T est distributif, donc il est modulaire. Alors, comme $\mu'(x) \leq \mu_{y,t}(x) \leq \mu(x)$ et $\mu_{y,t}(x) \wedge t = \bot$, on obtient : $\mu_{y,t}(x) = \mu_{y,t}(x) \wedge \mu(x) = \mu_{y,t}(x) \wedge (t \vee \mu'(x)) = (\mu_{y,t}(x) \wedge t) \vee \mu'(x) = \mu'(x)$.

En ce qui concerne le point y, on a $\mu_{y,t}(y) = \mu_{y,t}(x) = \mu'(x) \leq \mu'(y) = \bigvee_{z \in y^{\uparrow+}} \mu(z) \leq \bigvee_{z \in y^{\uparrow\star} \setminus \{x\}} \mu(z) = \mu_{y,t}(y)$. D'où, $\mu_{y,t}(y) = \mu'(y)$. □

8.4.3 Xels digitalement simples

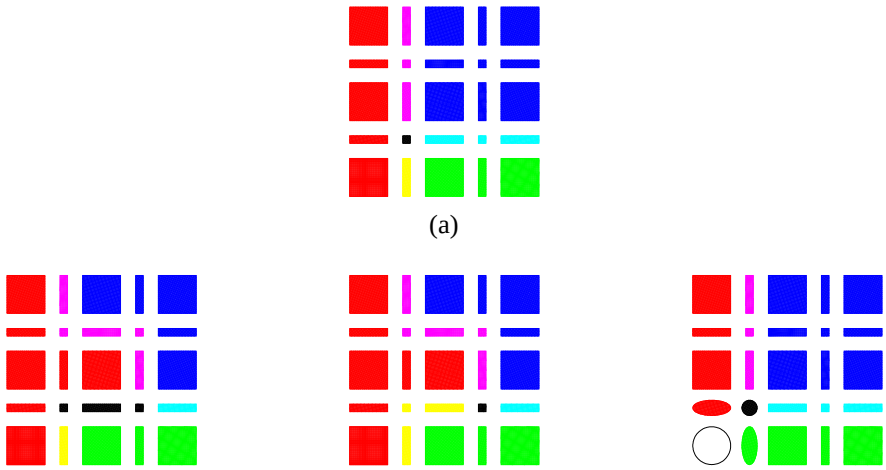
Une coupe dans un image régulière est rarement régulière. Par exemple, la coupe de la figure 8.9 (b) n'est pas régulière car la 1-face en dessous de x est en magenta au lieu de rouge. Cependant, comme la plupart du temps le domaine de l'image initiale est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$, il est souhaitable que l'image obtenue à la fin d'un traitement soit aussi définie sur ce sous-ensemble de $\mathbb{Z}^n$. Malheureusement, il n'est pas correct (d'un point de vue topologique) d'extraire une image de labels digitale d'une image de calques en ne gardant que les xels (par exemple, sur la figure 8.9 (b), le support du label $\{g, b\}$ est connexe grâce notamment à une 1-face en magenta mais le support de ce label est déconnecté dans l'image de labels digitale obtenue en ne conservant que les xels de l'image de calques). Pour réaliser proprement cette extraction, il est nécessaire d'utiliser l'inverse de la fonction ζ, la fonction utilisée pour construire une image de calque à partir d'une image de labels digitale. Comme ζ est une bijection entre les images de labels digitales et les images régulières, il est nécessaire de perfectionner les coupes afin d'obtenir un outil pour modifier localement une image de façon topologiquement neutre dans la classe des images (pures et) régulières.

Définition 8.4.9 (Xel digitalement simple)**.** *Soit $\mu : X \to T$ une image pure et régulière et t un label de T, atomique ou minimal. Un xel $x \in X$ est* digitalement simple pour t *s'il existe une séquence de coupes $(\mu_i)_{i=0}^{r}$, $r \geq 0$, où $\mu_0 = \mu$, μ_i est une coupe dans μ_{i-1} pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, μ_r est régulière, $\mu_r(x) = t$ et $\mu(y) = \mu_r(y)$ pour tout xel y distinct de x.*

La figure 8.15 illustre la définition précédente.

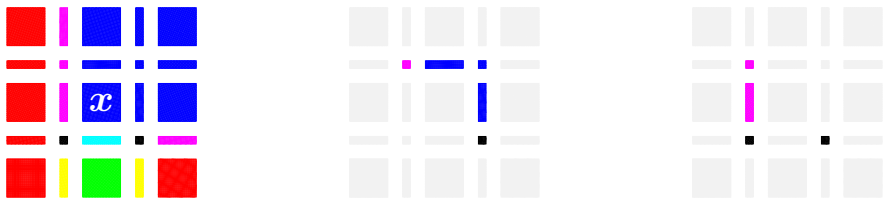
Dans la suite, nous n'imposons pas à l'espace X d'être un complexe cubique ou simplicial. Cependant, nous empruntons plusieurs notions aux complexes. Nous disons qu'une paire (x, y) de points d'un sous-espace Y de X est une *paire libre combinatoire pour* Y si x est le seul point de Y strictement supérieur à y. Si Y est un sous-espace de X et s'il existe une suite $((x_i, y_i))_{i=0}^{r}$, $r \geq 0$, de paires de points de X telle que $X = Y \cup \bigcup_{j=0}^{r} \{x_j, y_j\}$ et, pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, (x_i, y_i) est une paire libre combinatoire pour $Y \cup \bigcup_{j=0}^{i} \{x_j, y_j\}$, nous écrivons $X \searrow Y$.

Si $\mu : X \to T$ est une image régulière, x un xel dans X et t un label dans T, nous posons $\mathrm{Att}(x, t) = x^{\downarrow\star} \cap \langle t \rangle_{\mu'}$ où l'image μ' est la régularisée de $\mu + (x, \bot)$. Les points de $\mathrm{Att}(x, t)$ sont les points qui « attachent » le xel x au support de t (voir la figure 8.16).



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 8.15 – Xels digitalement simples, ou non, dans une image de labels régulière. (a) Une image pure et régulière $\mu : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}(\{r, g, b\})$. Les labels sont représentés avec les conventions de la figure 8.2. (b) Une coupe μ' pour le label $\{b\}$ dans μ. L'image μ est pure mais n'est pas régulière. (c) Une coupe ν pour le label $\{b\}$ dans μ'. L'image ν est pure et régulière. Le xel bleu x au centre de μ est digitalement simple pour le label $\{r\}$ dans l'image μ car μ et ν coïncident sur tous les xels de $\mathbb{F}^2$ sauf en x. (d) Une image pure et régulière $\mu : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}(\{r, g, b, t\})$. Le proto-label t est représenté par des boîtes arrondies. Le xel bleu x au centre de μ n'est digitalement simple pour aucun proto-label, car si on lui attribue le label rouge ou vert, on déconnecte le support de $\{b\}$ de celui de $\{t\}$ et si on lui attribue le proto-label t, cela crée un trou dans le label $\{r, g, b\}$.



(a) (b) (c)

FIGURE 8.16 – Attache d'un xel dans une image de calques régulière. (a) Une image régulière $\mu : \mathbb{F}^2 \to \mathcal{P}(\{r, g, b\})$. (b) L'ensemble $\mathrm{Att}(x, \{b\})$. (c) L'ensemble $\mathrm{Att}(x, \{r\})$.

Soit $L^\star$ l'ensemble des atomes de T et t un label. On pose $\mathrm{Card}(t) = \mathrm{Card}(\{u \in L^\star \mid u \leq t\}) = \mathrm{Card}(t^\downarrow \cap L^\star)$. L'entier $\mathrm{Card}(t)$ est le nombre de proto-labels (c'est-à-dire le nombre d'atomes) dont le label t est le supremum.

La proposition suivante fournit une condition suffisante pour qu'un xel x soit digitalement simple pour un atome $t \in T$, ou pour $t = \perp$, dans une image pure et régulière μ. Pour que le xel soit digitalement simple, il suffit qu'il existe une paire libre (x, y) pour le label $\mu(x)$ avec $y \in \langle t \rangle$ (condition *(i)*), qu'il soit possible de passer de $x^\downarrow$ à $\mathrm{Att}(x, \mu(x))$ par retraits de paires libres (combinatoires) de façon à ce que les points dont le label est inférieur ou égal au label de y soient retirés en premier (condition *(ii)*) et qu'aucun point dans $x^\downarrow \setminus \mathrm{Att}(x, \mu(x))$ n'ait plus d'un proto-label distinct de ceux de y (condition *(iii)*). La preuve consiste à régulariser pas à pas (grâce au lemme 8.4.8) les labels des points de $x^\downarrow \setminus \{x, y\}$ dans l'image $\mu_{y,\mu(x)}$, en commençant par les points dont le label est inférieur

ou égal à celui de y. La figure 8.17 illustre ces étapes. Le contre-exemple 8.4.11 montre que dans la proposition 8.4.10 la condition *(iii)* n'est pas nécessaire. Cette condition est utilisée dans la seconde partie de la preuve pour s'assurer que dans toutes les paires libres considérées les deux points partagent le même label. Notre contre-exemple est construit de telle façon que cette propriété reste vraie alors que la condition *(iii)* n'est pas satisfaite.

Proposition 8.4.10. *Soit $\mu : X \to T$ une image pure et régulière dont le codomaine T est booléen et dont le domaine X est tel que si un point est couvert par un xel, il est couvert par exactement deux points de X et ces deux points sont des xels. Soit t un label atomique ou minimal de T et x un xel de X n'appartenant pas au support de t.*
Si :

(i) *il existe un point $y \in x^{\downarrow}$ tel que $\mu(y) = \mu(x) \vee t$ et (x, y) est une paire libre pour le label $\mu(x)$;*

(ii) $x^{\downarrow} \setminus \{x, y\} \searrow (x^{\downarrow} \setminus \mu^{-1}(\mu(y)^{\downarrow})) \cup \mathrm{Att}(x, \mu(x)) \searrow \mathrm{Att}(x, \mu(x))$ *;*

(iii) *pour tout point $z \in x^{\downarrow\star} \setminus \mathrm{Att}(x, \mu(x))$, $\mathrm{Card}(\mu(z) \setminus \mu(y)) \leq 1$;*

alors le xel x est digitalement simple pour le label t.

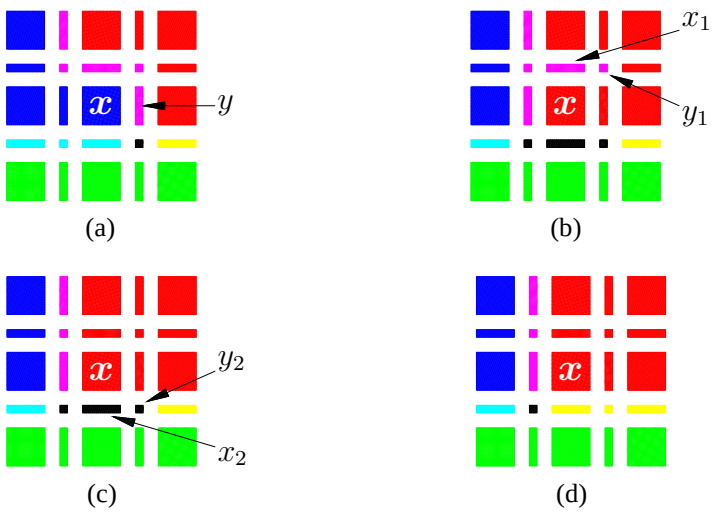


FIGURE 8.17 – Étapes de la preuve de la proposition 8.4.10. (a) L'image de calques μ et $(x, y) = (x_0, y_0)$, une paire libre pour $\mu(x)$. (b) L'image de calques μ_1 et (x_1, y_1), une paire libre (combinatoire) pour l'ensemble $x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ dont les faces ne sont pas dans $\mathrm{Att}(x, \mu(x))$ et dont les labels sont inférieurs ou égaux à $\mu(y)$. (c) L'image de calques $\mu_2 = \mu_{k+1}$ et $(x_2, y_2) = (x_{k+1}, y_{k+1})$, une paire libre (combinatoire) pour l'ensemble $x^{\downarrow} \setminus \bigcup_{j=0}^{k} \{x_j, y_j\}$ dont les faces ne sont pas dans $\mathrm{Att}(x, \mu(x))$. (d) L'image de calques $\mu' = \mu_r$.

Démonstration. on pose $t_0 = \mu(x)$ (t_0 est un atome de T). Des hypothèses sur X et μ, on déduit que $t = \mu(y) \setminus t_0$. Soit μ_1 la coupe μ_{y,t_0}. Puisque (x, y) est une paire libre pour le label t_0, c'est aussi une paire libre combinatoire pour l'ensemble $\langle t_0 \rangle$. Soit $((x_i, y_i))_{i=0}^{r}$ une sequence de paires libres combinatoires de $x^{\downarrow}$ à $A = \mathrm{Att}(x, t_0)$ tel que $x_0 = x, y_0 = y$ et $\bigcup_{i=0}^{k} \{x_i, y_i\} = (x^{\downarrow} \cap \mu^{-1}(\mu(y)^{\downarrow})) \setminus A$ avec $k \in [\![0, r]\!]$. Par la définition 8.3.7, $\mu_1(h) = t$ si $h \in \{x, y\}$, $\mu_1(h) = \mu(h) \vee t$ si $h \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ et $\mu_1(h) = \mu(h)$ sinon. En particulier, $t_0 \vee t \leq \mu_1(h)$ pour tout point $h \in x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$ (car μ est décroissante). Par définition de

k, pour tout point $h \in \bigcup_{i=0}^{k}\{x_i, y_i\}$, $\mu_1(h) = \mu(h) \vee t \leq t_0 \vee t$. Ainsi, $\mu_1(h) = t_0 \vee t$ pour tout point $h \in \bigcup_{i=1}^{k}\{x_i, y_i\}$. En particulier, $\mu_1(x_1) = \mu_1(y_1)$. Notons que, puisque μ est régulière, $\mu_1 = \mu' \vee \nu_1$ où μ' est la régularisée de μ_1 et $\nu_1(h) = t_0$ si $h \in x^{\downarrow} \setminus (\{x, y\} \cup A)$ et $\nu_1(h) = \perp$ sinon ($\nu_1 = \mu_1 \setminus \mu'$). D'autre part, $x_1 \in \langle t_0 \rangle_{\mu_1}$ et $(\langle t_0 \rangle_{\mu_1} \cap {y_1}^{\uparrow}) \setminus x^{\downarrow} = (\langle t_0 \rangle_{\mu} \cap {y_1}^{\uparrow}) \setminus x^{\downarrow}$ est vide car $y_1 \notin A$. Donc, (x_1, y_1), qui est une paire libre combinatoire dans $x^{\downarrow} \setminus \{x, y\}$, est aussi une paire libre combinatoire dans $\langle t_0 \rangle_{\mu_1}$. Donc, par la proposition 8.3.5, $\{x_1, y_1\}$ est une paire libre pour le label t_0. La coupe $\mu_2 = (\mu_1)_{y_1, t_0}$ vérifie $\mu_2(h) = \mu'(h)$ si $h \in \{x_1, y_1\}$ et $\mu_2(h) = \mu_1(h)$ sinon (lemme 8.4.8). De cette façon, de proche en proche, nous trouvons que les paires (x_i, y_i), $1 \leq i \leq k$, sont libres pour t_0 dans l'image $\mu_i = \mu' \vee \nu_i$ où $\nu_i(h) = t_0$ pour tout $h \in x^{\downarrow} \setminus (A \cup \bigcup_{j=0}^{i-1}\{x_j, y_j\})$ et $\nu_i(h) = \perp$ sinon.

La paire (x_{k+1}, y_{k+1}) est dans $x^{\downarrow} \setminus \mu^{-1}(\{t_0, t_0 \vee t\})$ donc on a $t_0 \vee t < \mu_k(x_{k+1}) = \mu(x_{k+1}) \vee t$ et $t_0 \vee t < \mu_k(y_{k+1}) = \mu(y_{k+1}) \vee t$. Or, $\mathrm{Card}(\mu(x_{k+1}) \setminus (t_0 \vee t)) = \mathrm{Card}(\mu(y_{k+1}) \setminus (t_0 \vee t)) \leq 1$ (hypothèse *(iii)*). Donc, nécessairement, on a $\mathrm{Card}(\mu(x_{k+1}) \setminus (t_0 \vee t)) = \mathrm{Card}(\mu(y_{k+1}) \setminus (t_0 \vee t)) = 1$. Puisque $\mu_k(x_{k+1}) \leq \mu_k(y_{k+1})$, car μ est une image à supports fermés et la coupe d'une image à supports fermés est une image à supports fermés (proposition 8.3.11), on a $\mu_k(x_{k+1}) = \mu_k(y_{k+1})$. Par conséquent, nous pouvons en déduire comme ci-dessus que (x_{k+1}, y_{k+1}) est une paire libre dans μ_k pour t_0 et que la coupe μ_{k+1} est égale à $\mu' \vee \nu_{k+1}$ avec $\nu_{k+1}(h) = t_0$ pour tout $h \in x^{\downarrow} \setminus (A \cup \bigcup_{j=0}^{k}\{x_j, y_j\})$ et $\nu_i(h) = \perp$ sinon. Nous faisons le même raisonnement avec chaque paire (x_i, y_i) pour $k + 2 \leq i \leq r$. La dernière coupe est μ_r avec $\mu_r = \mu' \vee \nu_r$ où $\nu_r(h) = t_0$ pour tout $h \in x^{\downarrow} \setminus (A \cup \bigcup_{j=0}^{r}\{x_j, y_j\})$ et $\nu_r(h) = \perp$ sinon. On a donc $\nu_r = \perp$ et $\mu_r = \mu'$ ce qui achève la preuve. □

Contre-exemple 8.4.11 (Proposition 8.4.10)**.** *La figure 8.18 montre que dans la proposition 8.4.10, la condition (iii) n'est pas nécessaire.*

Couprie et Bertrand (2009) ont établi une propriété de « confluence » des collapsus dans un complexe cubique en dimension 2, 3 ou 4 : si $x^{\downarrow} \searrow \mathrm{Att}(x, \langle t \rangle)$ et X est un complexe tel que $\mathrm{Att}(x, \langle t \rangle) \subset X \subset x^{\downarrow}$, alors $x^{\downarrow} \searrow X$ si et seulement si $X \searrow \mathrm{Att}(x, \langle t \rangle)$. Grâce à cette propriété, nous pouvons appliquer la proposition 8.4.10 pour tester si un xel $x \in \mathbb{F}^n$ ($n \leq 4$) est digitalement simple pour un label t en utilisant la méthode gloutonne décrite dans l'algorithme 1. Bien sûr, si cet algorithme retourne « faux », cela veut seulement dire que les hypothèses de la proposition 8.4.10 ne sont pas toutes satisfaites et, puisque cette proposition ne fournit que des conditions suffisantes, le xel testé peut néanmoins être digitalement simple. La figure 8.19 donne des exemples d'images obtenues à partir de la même image de labels digitale en appliquant l'algorithme à des fins d'amincissement ou de croissance du support d'un label.

8.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre plusieurs moyens pour modifier localement une image de labels en respectant non seulement la topologie de chaque label mais aussi la topologie de la partition dans ce sens que les topologies des unions de labels de la partition sont aussi conservées (suivant le choix effectué pour le treillis de labels). Ici la conservation de la topologie est comprise comme l'existence d'une équivalence d'homotopie faible : quand un point x est retiré d'un ensemble X, l'inclusion $i : X \setminus \{x\} \to X$ met en correspondance bi-univoque les composantes connexes de $X \setminus \{x\}$ et X, et induit des isomorphismes entre les groupes d'homotopie des deux espaces.

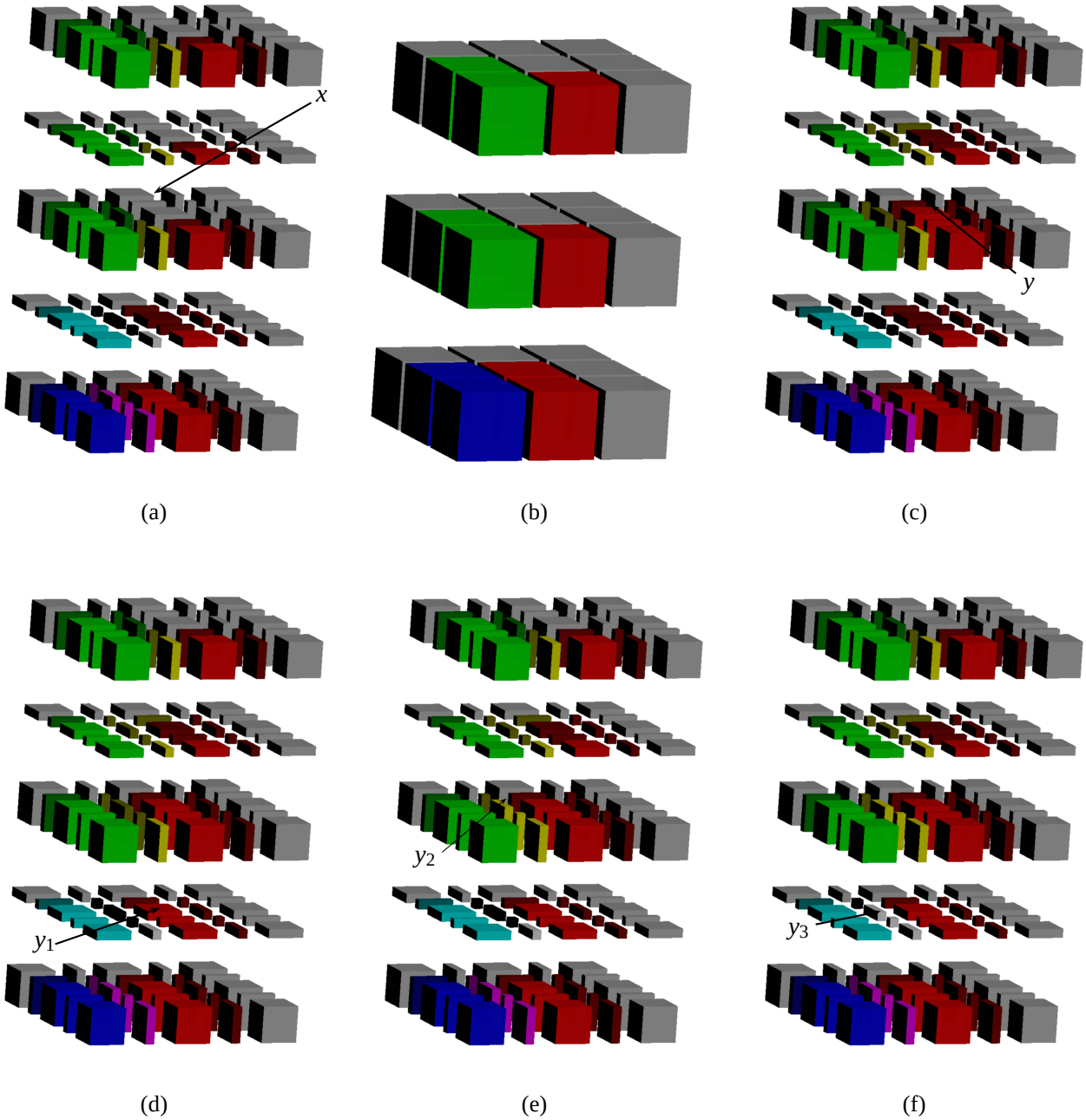


FIGURE 8.18 – La condition sur le nombre de labels dans la proposition 8.4.10 n'est pas nécessaire. (a) Une image régulière $\mu : X \to \mathcal{P}(\{r, g, b, e\})$ avec quatre proto-labels r, g, b, e représentés respectivement en rouge, vert, bleu et gris. Les notations sont celles de la preuve de la proposition 8.4.10. Le xel x est au centre de l'image. Son label est $t_0 = \{e\}$. (b) L'image de labels digitale associée à μ (dans $\mathbb{Z}^3$). (c) La coupe $\mu_1 = \mu_{y,t_0}$. (d) La coupe $\mu_2 = (\mu_1)_{y_1,t_0}$. (e) La coupe $\mu_3 = (\mu_2)_{y_2,t_0}$. (f) La coupe $\mu_4 = (\mu_3)_{y_3,t_0}$ qui est régulière. Donc, le xel x est digitalement simple. Cependant, on a $\mu(y_3) = \bigvee\{r, g, b, e\}$, donc la condition *(iii)* de la proposition 8.4.10 n'est pas satisfaite.

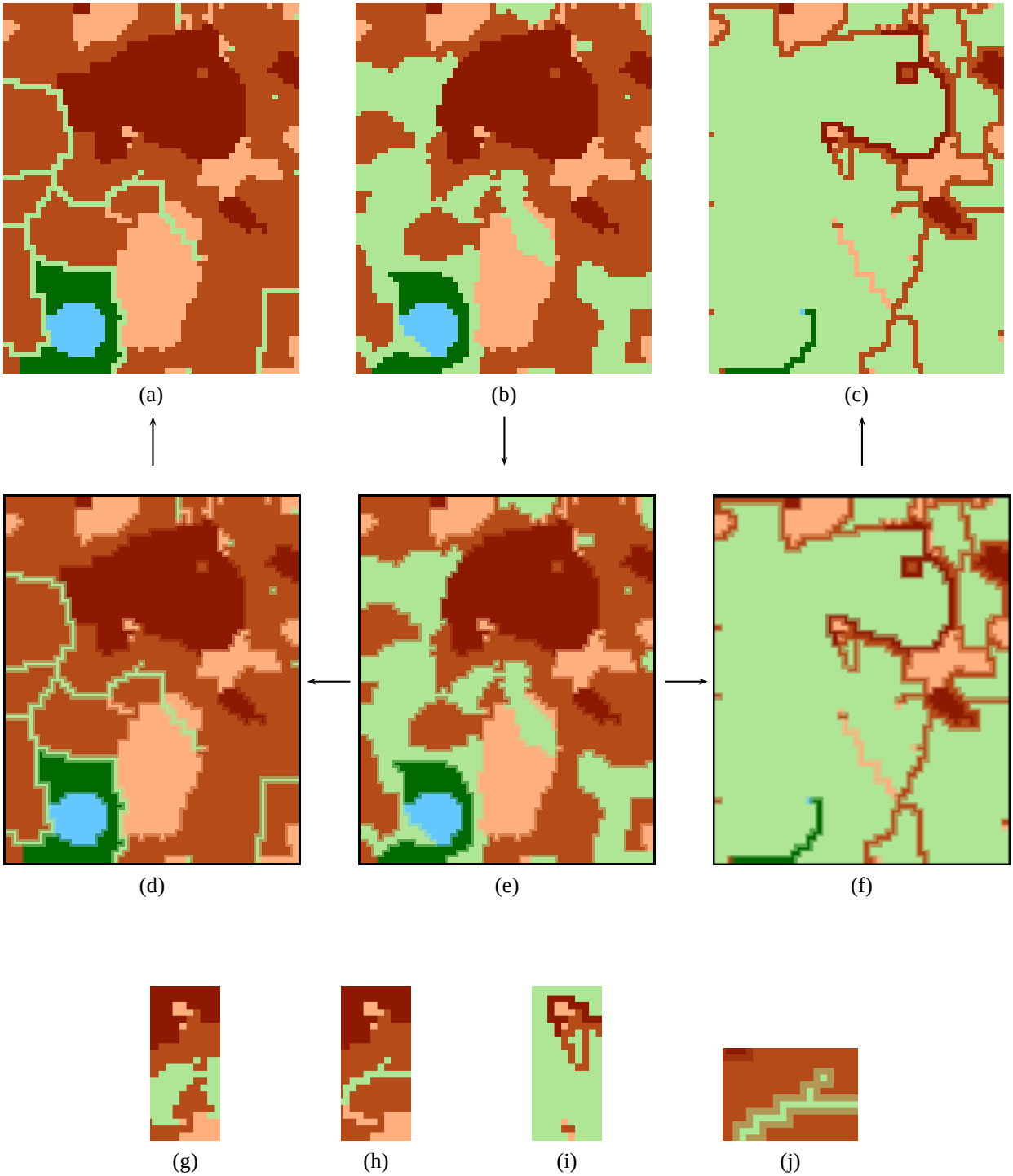


FIGURE 8.19 – Amincissement/expansion de labels dans $\mathbb{Z}^2$ à l'aide de l'algorithme 1. (b) Une image de labels digitale $\lambda_0 : \mathbb{Z}^2 \to L$ (le fond n'est pas représenté). (e) L'image régulière $\mu = \zeta(\lambda_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}(L^\star)$. (d) L'image régulière μ_1 obtenue de μ en appliquant l'algorithme 1 pour réduire le label vert. (a) La pré-image $\lambda_1 = \zeta^{-1}(\mu_1)$. (f) L'image régulière μ_2 obtenue de μ en appliquant l'algorithme 1 pour étendre le label vert. (c) La pré-image $\lambda_2 = \zeta^{-1}(\mu_2)$. (g–i) Le même detail dans les images $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$. (j) Une part du détail ci-dessous dans l'image μ_1. Notons que le carré vert isolé n'est pas digitalement simple pour le label brun : le changement de label remplirait un trou dans le label brun.

Algorithme 1 Test de la simplicité digitale d'un xel.

Entrée : x un xel et y une face de x tels que la paire (x, y) est libre pour le label t
Sortie : un booléen

1: $Y \leftarrow x^{\downarrow} \setminus \mathrm{Att}(x^{\downarrow}, \langle t \rangle)$
2: $T \leftarrow \{z \in Y \mid \mathrm{Card}(\mu(z) \setminus \mu(y)) > 1\}$
3: **si** $T \neq \emptyset$ **alors**
4: **retourner** faux
5: **fin si**
6: $Z \leftarrow \{z \in Y \mid \mu(z) \leq \mu(y)\}$
7: **tant que** $\exists (h, h') \in Z \times Z$ tel que (h, h') paire libre dans Y **faire**
8: $Z \leftarrow Z \setminus \{h, h'\}$, $Y \leftarrow Y \setminus \{h, h'\}$
9: **fin tant que**
10: **si** $Z \neq \emptyset$ **alors**
11: **retourner** faux
12: **fin si**
13: **tant que** $\exists (h, h') \in Y \times Y$ tel que (h, h') paire libre dans Y **faire**
14: $Y \leftarrow Y \setminus \{h, h'\}$
15: **fin tant que**
16: **si** $Y \neq \emptyset$ **alors**
17: **retourner** faux
18: **fin si**
19: **retourner** vrai

Considérons maintenant à nouveau les modèles les plus pertinents pour traiter les images de labels évoqués dans l'introduction. En prenant pour X l'espace des complexes cubiques $\mathbb{F}^3$, la notion de point digitalement simple, nous permet de travailler dans la classe des images 3D « well composed » en ajoutant une condition supplémentaire dans l'algorithme 1 : tout proto-label sur une 1-face du xel en cours de traitement doit être présent sur au moins une des deux 2-faces du xel testé qui le couvrent (en 2D, aucune condition supplémentaire n'est nécessaire). L'exigence trouvée dans Bazin *et al.* (2007) de préserver la topologie de toute union de deux ou trois labels est clairement satisfaite dans notre modèle puisque nous conservons la topologie de toute union de labels quand T est l'ensemble des parties des proto-labels. De plus, nous observons que l'algorithme 1 interdit d'avoir plus de trois labels dans le voisinage d'un point adjacent au xel traité (mais ce xel est un point de X, pas de $\mathbb{Z}^3$). Dans Damiand *et al.* (2011), les auteurs fournissent huit figures, cinq en 2D et trois en 3D, pour illustrer leur definition de la notion de point simple dans une image de labels. Sur deux d'entre elles, toutes les conditions requises sont satisfaites et le point est simple. Sur les six autres, au moins une des conditions requises n'est pas satisfaite et le point n'est pas simple. Nous avons testé nos propres conditions sur cet ensemble d'exemples et nous avons obtenu les mêmes conclusions (voir la figure 8.20). Ainsi, il semble que nous soyons capables avec les méthodes proposées dans ce chapitre d'embrasser plusieurs approches précédentes tout en fournissant un cadre permettant d'écrire des énoncés topologiques précis et d'en établir les preuves.

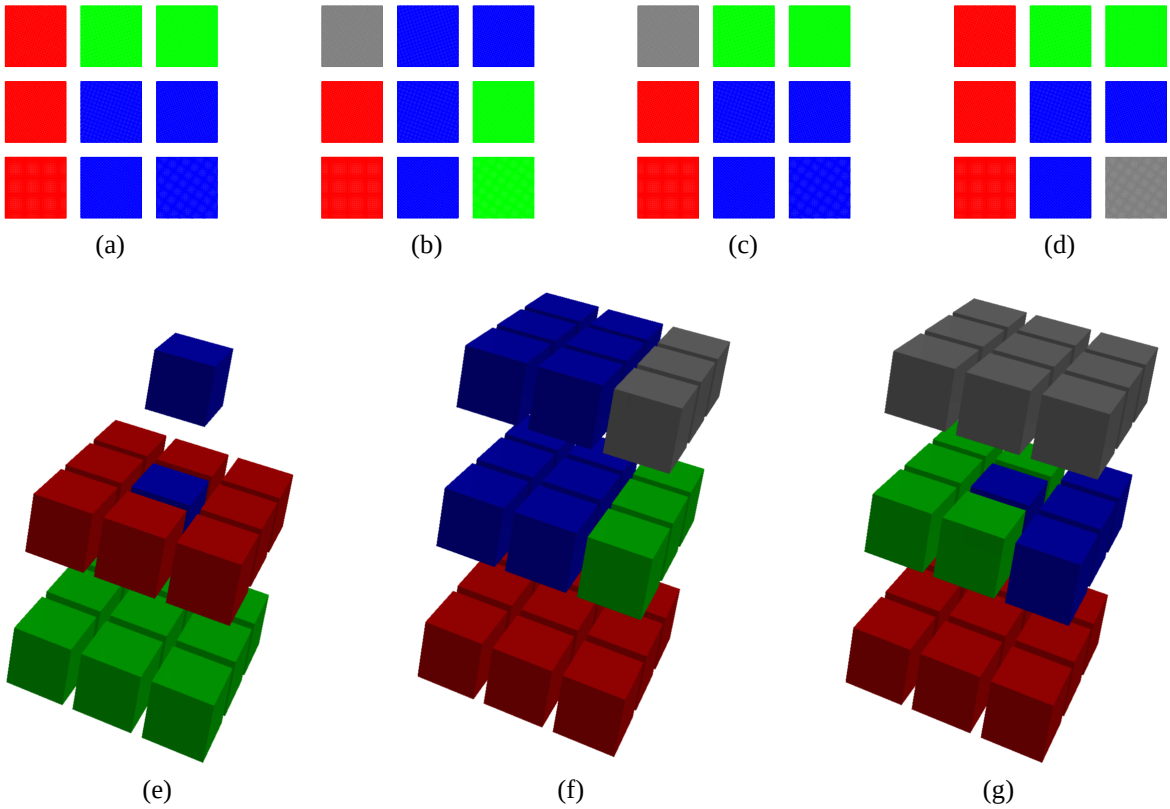


FIGURE 8.20 – Comparaison entre « ML-simple points » et xels digitalements simples. Nous reprenons les images utilisées par Damiand *et al.* (2011) pour illustrer la notion de « ML-simple point » dans une image de labels digitales afin de comparer cette notion avec notre propre notion de point digitalement simple dans une image de calques régulière (nous avons omis la première image de Damiand *et al.* (2011) qui est très similaire à la seconde). Ces sept images de calques doivent être considérées comme étant définies sur $\mathbb{Z}^n$ pour les ML-simple points ou sur $\mathbb{F}^n$ pour les points digitalement simples. Dans ce dernier cas, nous supposons que les images sont régulières, de sorte qu'il est inutile de représenter les faces de dimensions non maximales. Il y a quatre proto-labels représentés en rouge, vert, bleu et gris. Le voxel x est le voxel central (en bleu). Le test consiste à vérifier si le voxel x est (ML ou digitalement)-simple pour le label rouge. Notons que les ML-simple points doivent être utilisés avec la $(4, 8)$-, ou la $(6, 18)$-, adjacence. (a) x est ML-simple (Damiand *et al.*, 2011) et on peut vérifier facilement que x est digitalement simple. (b) à (g) x n'est pas ML-simple (Damiand *et al.*, 2011) et x n'est pas digitalement simple (ces vérifications ne posent pas de difficulté et sont laissées au lecteur). On peut observer que sur la figure (f), le label gris n'est pas pris en compte pour décider que x n'est pas un ML-simple point. Probablement, Damiand *et al.* ont choisi d'ajouter un quatrième label ici pour mettre en évidence le fait que le changement de label du voxel central (du bleu au rouge) pourrait modifier la topologie du label vert. Il n'en va pas de même avec les points digitalement simples. À cause du label gris, ni la condition *(i)* ni la condition *(iii)* de la proposition 8.4.10 ne sont satisfaites. Par contre, si l'on remplace le label gris par le label vert, x devient digitalement simple.

Chapitre 9

Les revêtements

9.1 Introduction

Au chapitre 7, nous avons défini un plongement de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{F}^n$ muni de bonnes propriétés topologiques (schématiquement, il conserve les composantes connexes et les groupes fondamentaux) avec l'intention de l'utiliser pour traiter les images de labels. L'idée est de calculer les valeurs de l'image sur les faces de dimensions non maximales de $\mathbb{F}^n$ avec les opérateurs infimum et supremum. Ainsi, le calcul peut être fait aussi bien sur une image binaire (dont le codomaine est $\{0, 1\}$) que sur une image de labels sous la condition que son codomaine soit muni d'une strucure de treillis (par exemple en ajoutant un minimum et un maximum à l'ensemble des labels). Grâce à ce plongement, nous avons pu définir des transformations locales, à topologie constante, sur les images de labels dont les objets sont interprétés à l'aide de la $(3^n - 1)$-adjacence (chapitre 8). Par topologie constante, nous entendons que les objets définis par la partition initiale du support de l'image par les labels, ou de toute partition plus grossière, gardent leur classe d'homotopie faible lors de la transformation.

Malheureusement, ce plongement ne peut pas être utilisé tel quel avec d'autres relations d'adjacence sans des inconvénients majeurs. La figure 9.1 fournit un exemple très simple qui met en évidence le fait que le modèle des calques exposé au chapitre 8 pour permettre un traitement topologique des images de labels doit être amélioré si l'on souhaite pouvoir utiliser les plongements de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{F}^n$ définis au chapitre 7 avec d'autres adjacences que la paire $(26, 6)$, tout en maintenant l'exigence de pouvoir contrôler la topologie des unions de labels.

(a) (b)

Figure 9.1 – De $\mathbb{Z}^2$ à $\mathbb{F}^2$ avec des labels et des objets ouverts. (a) Une image digitale λ définie sur $\mathbb{Z}^2$ (avec deux labels, rouge et vert, et un fond blanc).
(b) Le plongement de l'image λ dans $\mathbb{F}^2$ obtenu en appliquant la règle (voir la table 7.1) définie au chapitre 7 pour la $(4, 8)$-adjacence : le label d'une face de $\mathbb{F}^2$ est l'infimum des labels des facettes de l'étoile de cette face, l'ensemble des parties de l'ensemble des labels étant muni de sa structure de treillis booléen pour l'inclusion. On voit notamment que, sur l'image considérée ici, cette règle attribue le label du fond à toutes les faces de dimensions 0 et 1. De manière évidente, les topologies des labels rouge et vert sont identiques dans les images (a) et (b). Mais si on identifie les deux labels, la topologie du nouveau label, rouge-ou-vert, n'est plus la même sur les deux images.

La solution pour résoudre le problème illustré par la figure 9.1 n'est pas difficile à trouver : les labels doivent être identifiés dans $\mathbb{Z}^n$, avant le plongement dans $\mathbb{F}^n$. La figure 9.2 montre l'application de cette idée au cas de l'exemple de la figure 9.1. Dans ce chapitre, nous construisons un nouveau

modèle basé sur cette idée. Ce modèle a un coût plus élevé en mémoire mais il permet d'étendre sur $\mathbb{F}^n$ une image de labels initialement définie sur $\mathbb{Z}^n$ et interprétée avec une paire d'adjacences autre que $(26, 6)$.

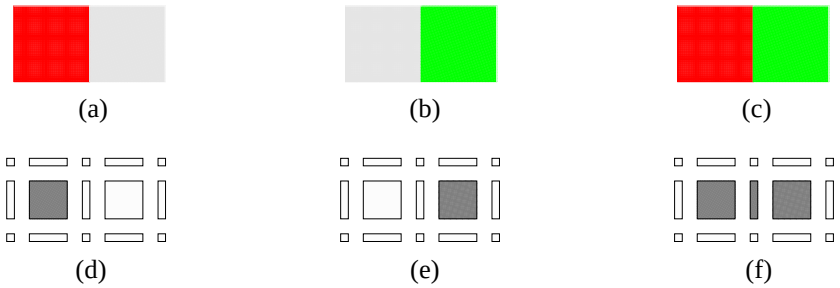


FIGURE 9.2 – L'image λ de la figure 9.1 est composée de trois objets d'intérêt représentés sur les figures (a–c) : le label rouge, le label vert et la réunion de ces deux labels. Regarder l'image λ sous l'angle topologique revient à scruter la topologie de ces trois objets. Les images des mêmes objets plongés dans $\mathbb{F}^2$ (avec la règle décrite dans la légende de la figure 9.1) sont représentées sur les figures (d-f). En procédant de cette façon, nous évitons l'artefact de la figure 9.1.

9.2 Revêtements

Comme dans le chapitre 8, nous plongeons l'espace digital $\mathbb{Z}^n$, ou une partie de celui-ci, dans un EPO X muni de sa topologie d'Alexandroff. Cependant, nous nous limiterons ici aux plongements de $\mathbb{Z}^n$ dans $\mathbb{F}^n$. L'ensemble des labels de l'image initiale, les proto-labels et le fond, sont enrichis d'un certain nombre de supremums qui définissent les partitions plus grossières dont nous souhaitons observer la topologie (pour la conserver, ou éventuellement la modifier). L'ensemble de ces supremums, appelés simplement labels, forment un treillis atomique $(T, \leq)$, dont les proto-labels sont les atomes et dont le fond initial, noté $\perp$, est le minimum (le maximum de T est noté $\top$).

Chaque label de T définit une image binaire, un *feuillet*, « couvrant » l'image de labels digitale. Ce feuillet est défini sur $\mathbb{F}^n$ et son objet est celui que l'on souhaite obtenir lorsqu'on identifie tous les atomes inférieurs à t comme sur la figure 9.2(c).

Finalement, on définit un *revêtement* (d'image de labels) comme une fonction qui envoie une face $x \in \mathbb{F}^n$ sur l'ensemble des labels dont les feuillets contiennent x dans leur partie objet. Ainsi, le codomaine d'un revêtement est le sous-ensemble $\mathcal{G}_T$ de l'ensemble des parties de T dont les éléments sont les ensembles hauts de T, c'est-à-dire les parties A de T tels que $a \in A$ et $a \leq b$ implique $b \in A$. Les éléments de $\mathcal{G}_T$ sont appelés *fibres*. La figure 9.4 illustre cette définition.

Définition 9.2.1. *Soit $n \geqslant 1$ un entier. Soit $(T, \leq)$ un treillis atomique dont le minimum est noté $\perp$. Un* revêtement *μ est une fonction de $\mathbb{F}^n$ vers $\mathcal{G}_T = \{\bigcup_{t \in A} t^{\uparrow} \mid A \subseteq T\}$ (avec $\bigcup_{t \in \emptyset} t^{\uparrow} = \emptyset$). Le* fond *de μ est l'ensemble des faces de $\mathbb{F}^n$ tel que $\mu(x) = \emptyset$ et le* support *de μ est l'ensemble des faces de $\mathbb{F}^n$ tel que $\mu(x) \neq \emptyset$. Pour tout $t \in T$, le* feuillet *μ_t est l'image binaire définie sur $\mathbb{F}^n$ par $\mu_t(x) = 1$ si $t \in \mu(x)$ et $\mu_t(x) = 0$ sinon. Soit x une face de $\mathbb{F}^n$. L'ensemble des labels de $\mu(x)$ est la* fibre *au dessus de x.*

Dans toute la suite de ce chapitre, $L^{\star}$ désignera l'ensemble des atomes de T.

Puisque nous supposons que le treillis T est atomique, et puisque clairement, pour tous labels $t_0, \ldots, t_p$, $p \in \mathbb{N}$, on a $(\bigvee_{i=0}^{p} t_i)^{\uparrow} = \bigcap_{i=0}^{p} t_i^{\uparrow}$, tout élément du codomaine $\mathcal{G}_T$ d'un revêtement peut être exprimé comme une union d'intersections :

$$\mathcal{G}_T = \left\{ \bigcup_{A \in \mathcal{B}} \bigcap_{t \in A} t^{\uparrow} \mid \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(L^{\star}) \right\}$$

où $\bigcup_{A \in \emptyset} \bigcap_{t \in A} t^{\uparrow} = \emptyset$ et $\bigcap_{t \in \emptyset} t^{\uparrow} = \bot^{\uparrow} = T$. De cette façon, les revêtements peuvent être codés avec des arbres de hauteur 2 dont les feuilles sont des instances des atomes de T et dont les nœuds correspondent aux opérateurs $\bigcup$ et $\bigcap$ (concrètement, on peut utiliser des chaînes de champs de bits). Avec cet encodage, on peut extraire le feuillet μ_t d'un revêtement μ en testant pour chaque $x \in \mathbb{F}^n$, si un sous-arbre de $\mu(x)$ (de hauteur 1) est inclus dans le label t, lui-même codé par un arbre de hauteur 1 (voir la figure 9.3).

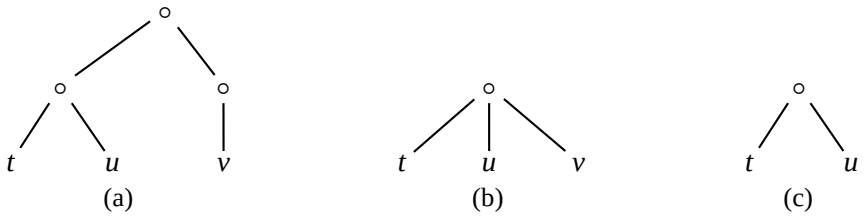


FIGURE 9.3 – Codage des fibres et des labels dans un revêtement. Le treillis des labels du revêtement μ contient les atomes t, u, v. (a) L'arbre codant la fibre $\mu(x) = (t^{\uparrow} \cap u^{\uparrow}) \cup v^{\uparrow}$. (b) L'arbre codant le label $l = t \vee u \vee v$. (c) L'arbre représenté est un sous-arbre de $\mu(x)$ et un sous-graphe du label l donc x appartient à l'objet du feuillet μ_l.

Soit $t \in T$, un label. L'ensemble $\langle t \rangle_{\mu} = \mu_t^{-1}(\{1\})$ est le *support* de t dans l'image μ. Nous observons que, par la définition 9.2.1 et la définition d'un support, les expressions $x \in \langle t \rangle_{\mu}$, $\mu_t(x) = 1$ et $t \in \mu(x)$ sont synonymes. Nous écrivons $\langle t \rangle_{\mu}^{c}$ pour l'ensemble $\mathbb{F}^n \setminus \langle t \rangle_{\mu}$. Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous écrivons aussi $\langle t \rangle$ et $\langle t \rangle^c$ au lieu de $\langle t \rangle_{\mu}$ et $\langle t \rangle_{\mu}^{c}$. La figure 9.4 montre les supports d'un revêtement avec huit labels (notons que si le fond n'est pas représenté, il n'y a pas de différence entre la représentation du feuillet μ_t et celle du support $\langle t \rangle_{\mu}$).

De la définition 9.2.1 nous déduisons immédiatement que [1], pour tout $t, u \in T$,

$$t \leq u \Rightarrow \mu_t \leqslant \mu_u. \tag{9.1}$$

Intuitivement, cette propriété exprime le fait que si, par exemple, nous identifions deux labels a et b, en créant un nouveau label $a \vee b$, toute face dans le support de l'un de ces deux labels sera aussi dans le support du nouveau label $a \vee b$. En particulier, le support de μ est égal au support du label $\top$ dans μ car $\top$ est supérieur à tous les labels de T. Autrement dit, on a $\langle \top \rangle^c = \mu^{-1}(\emptyset)$. La réciproque de l'implication (9.1) est fausse comme on peut le voir en considérant le revêtement $\mu : \mathbb{F}^1 \to \mathcal{G}_{\mathcal{P}(\{a,b\})}$ défini par $\mu(\{0\}) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$, $\mu(\{1\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ et $\mu(x) = \emptyset$ si $x \neq \{0\}$ et $x \neq \{1\}$. En effet, on a alors $\mu_{\{b\}} \leq \mu_{\{a\}}$ alors que $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables.

1. Rappelons que nous utilisons l'ordre ponctuel pour les fonctions. Ainsi, $\mu_t \leqslant \mu_u$ signifie $\mu_t(x) \leqslant \mu_u(x)$ pour tout $x \in X$.

Notons qu'il existe un lien évident entre l'ordre ponctuel $\leq$ sur les images binaires et l'ordre ponctuel $\subseteq$ sur les revêtements :

$$\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \forall t \in T, \mu_t \leqslant \nu_t. \tag{9.2}$$

Quand un revêtement est construit à partir d'une image de labels digitale, les valeurs de l'image sur les facettes de $\mathbb{F}^n$ ne sont pas des fibres quelconques de $\mathcal{G}_T$. Quand un revêtement μ est tel que toute facette de $\mathbb{F}^n$ a une image $\mu(x)$ qui appartient à l'ensemble $\{t^{\uparrow} \mid t \in L^{\star}\}$, resp. $\{t^{\uparrow} \mid t \in L^{\star}\} \cup \{\emptyset\}$, resp. $\{t^{\uparrow} \mid t \in L^{\star}\} \cup \{\emptyset, T\}$, nous disons que le revêtement est *strictement pur*, resp. *pur*, resp. *faiblement pur*. La raison pour laquelle nous définissons la pureté faible est due à l'utilisation de la dualité dans la suite du chapitre (voir section 9.2.3).

Nous définissons maintenant le type d'invariance topologique que nous allons utiliser avec les revêtements.

Définition 9.2.2. *Soit $n \geqslant 1$ un entier et T un treillis atomique. Soit $\mu, \nu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ deux revêtements.*

- *Si, pour tout label $t \in T$, $\langle t \rangle_\mu$ et $\langle t \rangle_\nu$ sont faiblement homotopiquement équivalents, nous disons que les revêtements μ et ν sont* équivalents *et nous écrivons $\mu \approx \nu$.*
- *Si, de plus, $\langle t \rangle_\mu^c$ et $\langle t \rangle_\nu^c$ sont faiblement homotopiquement équivalents pour tout label t, nous disons que les revêtements μ et ν sont* fortement équivalents.

9.2.1 Revêtements réguliers

Dans cette section, nous décrivons comment nous calculons la valeur d'un label sur une face de $\mathbb{F}^n$ de dimension strictement inférieure à n à partir des valeurs de l'image sur les facettes de $\mathbb{F}^n$.

Soit $\varepsilon : [1, n] \to \{-1, 1\}$ une fonction de connexité. Rappelons qu'une fonction $\mu : \mathbb{F}^n \to \{0, 1\}$ est une image (binaire) *ε-régulière* si pour tout $m \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{F}^n_{m-1}$, on a, de façon récursive,

$$\mu(x) = \begin{cases} \bigwedge_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(x)} \mu(a) \vee \mu(b) & \text{si } \varepsilon(m) = 1 \\ \bigvee_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(x)} \mu(a) \wedge \mu(b) & \text{si } \varepsilon(m) = -1 \end{cases}$$

Nous étendons cette définition aux revêtements de la façon suivante (la figure 9.4 illustre cette définition).

Définition 9.2.3 (revêtement régulier)**.** *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\varepsilon : [\![1, n]\!] \to \{-1, 1\}$ une fonction de connexité. Un revêtement $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ est* ε-régulier *(ou, plus simplement,* régulier*) si pour tout $t \in T$, le feuillet μ_t est une image (binaire) ε-régulière.*

Étant donné une fonction de connexité ε, le *(revêtement) régularisé* d'un revêtement μ est le revêtement ε-régulier μ' qui coïncide avec μ sur les facettes de $\mathbb{F}^n$. Soit x une facette de $\mathbb{F}^n$ et $k \in [\![0, n]\!]$ un entier. *Le revêtement régularisé d'ordre k en x* de μ est la fonction qui coïncide avec μ' sur les faces de $x^{\downarrow}$ de dimensions supérieures ou égales à $n - k$ et qui coïncide avec μ sinon.

Un revêtement régulier peut être défini directement, sans faire appel aux feuillets μ_t, $t \in T$.

Proposition 9.2.4. *Soit T un treillis atomique et $\varepsilon : [\![1, n]\!] \to \{-1, 1\}$ une fonction de connexité. Un revêtement $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ est ε-régulier si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{F}^n_{m-1}$, $m \in [\![1, n]\!]$:*

$$\mu(x) = \begin{cases} \bigcap_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(x)} \mu(a) \cup \mu(b) & \textit{si } \varepsilon(m) = 1 \\ \bigcup_{\{a,b\} \in \mathrm{opp}(x)} \mu(a) \cap \mu(b) & \textit{si } \varepsilon(m) = -1. \end{cases}$$

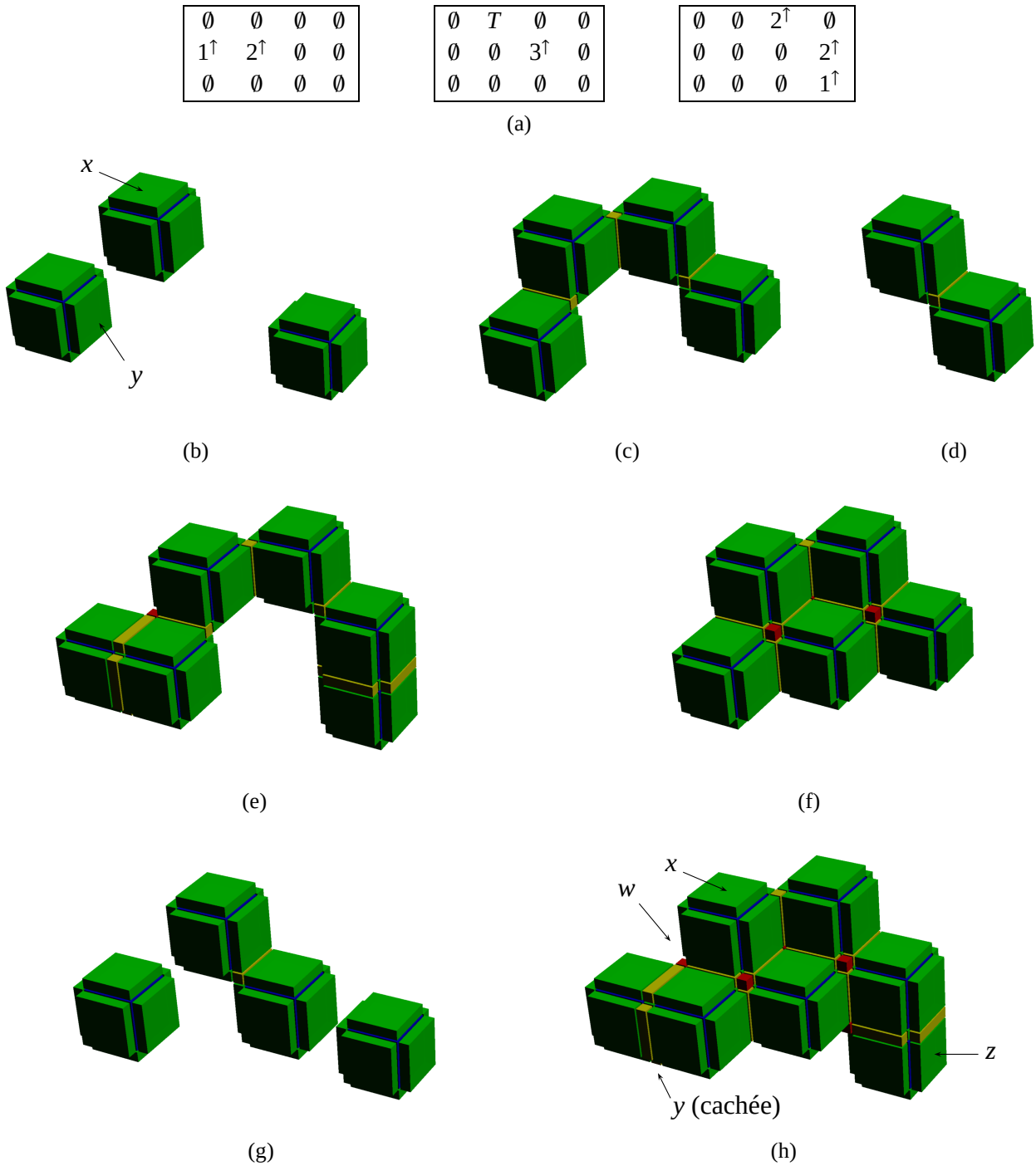


FIGURE 9.4 – Un revêtement μ défini sur $\mathbb{F}^3$ et à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{G}_T$ pour $T = \mathcal{P}(\{1,2,3\})$. Le support de μ est inclus dans un parallèlépipède P de dimensions $3 \times 2 \times 3$. Le revêtement μ est régulier pour la fonction de connexité $\varepsilon = (1,-1,1)$ (cette fonction de connexité est associée à la $(18,6)$-adjacence dans $\mathbb{Z}^3$, d'après la table 7.1, page 94). (a) Les fibres des facettes de P décrites de l'avant vers l'arrière. Toutes ces fibres sont dans $\{t^\uparrow \mid t \in L^\star\} \cup \{\emptyset, T\}$ donc μ est faiblement pur. (b–i) Les feuillets μ_t pour $t = \{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,1\},\{1,2,3\}$ (le dernier feuillet fait apparaître le support, et le fond, de l'image μ). Le feuillet $\mu_\perp$ (où $\perp$ est l'élément minimal du treillis T, c'est-à-dire la partie vide de l'ensemble $\{1,2,3\}$) n'est pas représenté. Il ne contient qu'une seule facette (celle située en dessous de la 2-face x sur la figure (b)) avec toutes ses 2-faces. Les fibres des 2-faces x, y, z sont respectivements $T, 1^\uparrow \cup 2^\uparrow, 1^\uparrow$ et la fibre de la 0-face w est $1^\uparrow \cap 2^\uparrow$ (qui est égal à $\{1,2\}^\uparrow$).

Démonstration. Supposons $\varepsilon(m) = 1$ et prenons une face x de dimension $m-1$. Alors, par la définition 9.2.3, on a $\mu_t(x) = \bigwedge_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(x)} \mu(a) \vee \mu(b)$ pour tout label $t \in T$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} t \in \mu(x) &\Leftrightarrow \mu_t(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \{a,b\} \in \mathrm{opp}(x), \mu_t(a) = 1 \text{ ou } \mu_t(b) = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \{a,b\} \in \mathrm{opp}(x), t \in \mu(a) \cup \mu(b) \\ &\Leftrightarrow t \in \bigcap_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(x)} \mu(a) \cup \mu(b). \end{aligned}$$

Le cas $\varepsilon(m) = -1$ est similaire. □

Nous utiliserons le lemme suivant quand nous aurons à régulariser les revêtements.

Lemme 9.2.5. *Soit T un treillis atomique et $\varepsilon : [\![1,n]\!] \to \{-1,1\}$ une fonction de connexité. Soit $\mu, \nu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ deux revêtements et μ', ν' leurs régularisés d'ordre k en x ($k \in [\![1,n]\!], x \in \mathbb{F}^n_n$). Si $\mu \subseteq \nu$, alors $\mu' \subseteq \nu'$.*

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{F}^n$. Vérifions que $\mu'(y) \subseteq \nu'(y)$. Si $y \notin x^{\downarrow}$, ou si $\dim(y) \leqslant n-k-1$, alors $\mu'(y) = \mu(y)$ et $\nu'(y) = \nu(y)$. On en conclut, de manière évidente, que $\mu'(y)$ est inclus dans $\nu'(y)$. On suppose maintenant que $y \in x^{\downarrow}$. La preuve est conduite par récurrence (finie et décroissante) sur la dimension de y. Si $y = x$, le resultat est immédiat. Si $n-k \leqslant \dim(y) \leqslant n-1$, de la première partie de la preuve ($y \notin x^{\downarrow}$) et de l'hypothèse de récurrence, nous déduisons que $\mu'(z) \subseteq \nu'(z)$ pour toute face z qui couvre y. Donc, $\mu'(y) = \bigcap_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(y)} \mu'(a) \cup \mu'(b) \subseteq \bigcap_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(y)} \nu'(a) \cup \nu'(b) = \nu'(y)$ si $\varepsilon(\dim(y)+1) = 1$ et $\mu'(y) = \bigcup_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(y)} \mu'(a) \cap \mu'(b) \subseteq \bigcap_{\{a,b\}\in\mathrm{opp}(y)} \nu'(a) \cup \nu'(b) = \nu'(y)$ si $\varepsilon(\dim(y)+1) = -1$. Dans les deux cas, nous trouvons que $\mu'(y) \subseteq \nu'(y)$. □

9.2.2 Simplicité

Dans cette section, nous définissons une transformation locale d'un revêtement qui n'altère pas la topologie de l'image. Schématiquement, l'idée est que, dans un revêtement μ, une face est simple pour un ensemble de labels S s'il est posible de remplacer dans l'image μ la valeur actuelle de $\mu(x)$ par S sans « changement topologique ».

Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 9.2.6 (Face simple)**.** *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement. Soit $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre. Une face $x \in \mathbb{F}^n$ est* simple pour (la fibre) S *si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

(i) pour tout label $u \in \mu(x)$ tel que $u \notin S$, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle$ ou pour l'ensemble $\langle u \rangle^c \cup \{x\}$;

(ii) pour tout label $u \notin \mu(x)$ tel que $u \in S$, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle \cup \{x\}$ ou pour l'ensemble $\langle u \rangle^c$.

La proposition suivante justifie la définition 9.2.6.

Proposition 9.2.7. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement. Soit $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre et $x \in \mathbb{F}^n$ une face simple pour S. Alors, les revêtements μ et $\mu + (x, S)$ sont fortement équivalents.*

Démonstration. On pose $\nu = \mu + (x, S)$. Soit $u \in T$ un label.

- Si $u \in \mu(x)$ et $u \in S$, ou si $u \notin \mu(x)$ et $u \notin S$, alors $\langle u \rangle_\mu = \langle u \rangle_\nu$.
- Si $u \in \mu(x)$ et $u \notin S$, alors $x \in \langle u \rangle_\mu$ et $x \notin \langle u \rangle_\nu$, c'est-à-dire $\langle u \rangle_\nu = \langle u \rangle_\mu \setminus \{x\}$. Comme, par la définition 9.2.6, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle_\mu$, ou pour l'ensemble $\langle u \rangle^c \cup \{x\}$, nous pouvons conclure que les ensembles $\langle u \rangle_\mu$ et $\langle u \rangle_\nu$ d'une part, et $\langle u \rangle_\mu^c$ et $\langle u \rangle_\nu^c$ d'autre part, sont faiblement homotopiquement équivalents (théorèmes 4.2.11, 4.2.14 et 6.3.12). Autrement dit, les revêtements μ et ν sont fortement équivalents.
- Si $u \notin \mu(x)$ et $u \in S$, alors $x \notin \langle u \rangle_\mu$ et $x \in \langle u \rangle_\nu$, c'est-à-dire $\langle u \rangle_\nu = \langle u \rangle_\mu \cup \{x\}$. Comme, par la définition 9.2.6, x est β-simple pour l'ensemble $\langle u \rangle_\mu \cup \{x\}$, ou pour l'ensemble $\langle u \rangle^c$, nous concluons à nouveau que les ensembles $\langle u \rangle_\mu$ et $\langle u \rangle_\nu$ d'une part, et $\langle u \rangle_\mu^c$ et $\langle u \rangle_\nu^c$ d'autre part, sont faiblement homotopiquement équivalents. Les revêtements μ et ν sont donc fortement équivalents. □

La proposition suivante nous permet de construire des algorithmes d'amincissement ou de croissance parallèles.

Proposition 9.2.8. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\mu_0 : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement. Soit $\{S_i\}_{i=0}^k$ ($k \geqslant 1$) un ensemble de fibres de $\mathcal{G}_T$ et $\{x_i\}_{i=0}^k$ un ensemble de faces de même dimension telles que, pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, x_i est simple pour S_i dans μ. Alors, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, x_i est une face simple pour S_i dans le revêtement μ_i défini itérativement par $\mu_i = \mu_{i-1} + (x_i, S_i)$.*

Démonstration. Une face $x \in \mathbb{F}^n$ est simple si, par la définition 9.2.6, x est β-simple pour certains ensembles. Or, la définition de la β-simplicité n'implique que des faces comparables avec x, c'est-à-dire des faces incluses dans, ou incluant, x. Ainsi, la simplicité d'une face n'est pas affectée par un changement fait sur une autre face de même dimension. □

9.2.3 Dualité

Grâce à l'ordre dual sur le treillis T et à la complémentation dans $\mathcal{P}(T)$, nous pouvons définir le dual d'un revêtement. Nous verrons que cette dualité n'est rien d'autre qu'un échange du fond et de l'objet dans chaque feuillet d'un revêtement. Cette dualité est compatible ave la régularité – le dual d'un revêtement ε-régulier est un revêtement $(-\varepsilon)$-régulier – et avec la simplicité - une face est simple pour un ensemble de labels S dans un revêtement si et seulement si elle est simple pour le complément de S (dans $\mathcal{P}(T)$) dans le revêtement dual.

Nous notons $\mathcal{F}_T$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(T)$ formé par les ensembles bas de T, c'est-à-dire les compléments des éléments de $\mathcal{G}_T$ dans $\mathcal{P}(T)$. $\mathcal{F}_T$ est le sous-ensemble de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(T)$ dont les éléments sont les parties A de T telles que $a \in A$ et $a \geq b$ implique $b \in A$, c'est-à-dire $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_{T^\star}$ où $T^\star$ est le treillis T muni de son ordre dual [2].

Définition 9.2.9. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement. Le* revêtement dual *de μ est le revêtement $\neg\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{F}_T$ défini pour tout $x \in \mathbb{F}^n$ par $\neg\mu(x) = \mu(x)^c$.*

Notons que les revêtements et leurs duaux sont des éléments d'espaces de fonctions différents, respectivement $(\mathcal{G}_T)^{\mathbb{F}^n}$ et $(\mathcal{F}_T)^{\mathbb{F}^n}$, mais ces espaces sont tous les deux inclus dans $(\mathcal{P}(T))^{\mathbb{F}^n}$.

2. $\mathcal{G}_T$ et $\mathcal{F}_T$ sont respectivement l'ensemble des ouverts et des fermés de la topologie d'Alexandroff sur T.

La proposition suivante fournit quelques propriétés élémentaires des revêtements duaux. Dans cette proposition, nous utilisons l'opérateur $\neg$ pour les images binaires défini au chapitre 7 : étant donnée une image binaire $\theta : \mathbb{F}^n \to \{0, 1\}$, l'image négative $\neg\theta$ est définie par $\neg\theta(x) = 1 - \theta(x)$ pour tout $x \in \mathbb{F}^n$. La confusion entre les deux opérateurs de dualité, notés chacun $\neg$, n'est pas possible car ils opèrent sur des types différents.

Proposition 9.2.10. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement.*

(i) L'opérateur $\neg$ est involutif : $\neg\neg\mu = \mu$.

(ii) Le fond du revêtement dual $\neg\mu$ est $\mu^{-1}(T)$.

(iii) Pour tout label $t \in T$, $\langle t\rangle_{\neg\mu} = \langle t\rangle_{\mu}^{c}$.

(iv) Pour tout label $t \in T$, $(\neg\mu)_t = \neg(\mu_t)$.

(v) Soit ε une fonction de connexité. Si le revêtement μ est ε-régulier, alors son dual $\neg\mu$ est $(-\varepsilon)$-régulier.

(vi) Si le treillis T est fini et distributif, le dual d'un revêtement faiblement pur, resp. fortement pur, est faiblement pur, resp. fortement pur.

(vii) Si ν est un revêtement fortement équivalent à μ, alors $\neg\nu$ est fortement équivalent à $\neg\mu$.

Démonstration. Soit $t \in T$ un label et x une face de $\mathbb{F}^n$.

(i) Évident.

(ii) $\neg\mu(x) = \emptyset \Leftrightarrow \mu(x) = T$.

(iii) $x \in \langle t\rangle_{\neg\mu} \Leftrightarrow t \in \neg\mu(x) \Leftrightarrow t \notin \mu(x) \Leftrightarrow x \notin \langle t\rangle_{\mu}$.

(iv) Des définitions du revêtement dual $\neg\mu$, de l'image negative $\neg(\mu_t)$ et de la propriété précédente, nous déduisons que $(\neg\mu)_t(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \langle t\rangle_{\neg\mu} \Leftrightarrow x \notin \langle t\rangle_{\mu} \Leftrightarrow \mu_t(x) = 0 \Leftrightarrow (\neg(\mu_t))(x) = 1$.

(v) Si le revêtement μ est ε-régulier, alors, de la proposition 7.1.4, nous déduisons que tous les feuillets $\neg\mu_t$, $t \in T$, sont $(-\varepsilon)$-réguliers. Donc $\neg\mu$ est $(-\varepsilon)$-régulier.

(vi) Comme ici T est fini, atomique et distributif, T est l'ensemble des parties d'un ensemble A : $T = \mathcal{P}(A)$. Soit x une facette de $\mathbb{F}^n$. Si μ est strictement pur, il existe un élément $a \in A$ tel que $\mu(x) = \{a\}^{\uparrow}$. D'où $\neg\mu(x) = \{t \in \mathcal{P}(A) \mid a \notin t\} = \{t \in T \mid t \subseteq A \setminus \{a\}\}$. Par suite, dans $T^{\star}$, on a $\neg\mu(x) = b^{\uparrow}$ où $b = A \setminus \{a\}$ est un atome de $T^{\star}$. Nous pouvons en conclure que $\neg\mu$ est strictement pur. Si μ est faiblement pur, nous pouvons aussi avoir l'égalité $\mu(x) = \emptyset$ ou l'égalité $\mu(x) = T$. Alors, $\neg\mu(x) = T$ ou $\neg\mu(x) = \emptyset$.

(vii) Si μ et ν sont fortement équivalents alors, pour tout label t, $\langle t\rangle_{\mu}$ est faiblement homotopiquement équivalent à $\langle t\rangle_{\nu}$ et $\langle t\rangle_{\mu}^{c}$ est faiblement homotopiquement équivalent à $\langle t\rangle_{\nu}^{c}$, donc, d'après *(iii)*, $\langle t\rangle_{\neg\mu}^{c}$ est faiblement homotopiquement équivalent à $\langle t\rangle_{\neg\nu}^{c}$ et $\langle t\rangle_{\neg\mu}$ est faiblement homotopiquement équivalent à $\langle t\rangle_{\neg\nu}$. On en conclut que les revêtements $\neg\mu$ et $\neg\nu$ sont fortement équivalents.

□

Dans la proposition précédente, l'assertion *(ii)* montre qu'une face est dans le fond du revêtement dual $\neg\mu$ si et seulement si cette face est dans tous les objets des feuillets du revêtement μ. De l'assertion *(v)*, on déduit que le revêtement dual du regularisé d'un revêtement μ est le regularisé (relativement à la fonction de connexité opposée) du revêtement dual de μ. Notons enfin que l'assertion

(*vi*) est fausse si on omet l'hypothèse sur la distributivité de T. Par exemple, avec $T = \{\bot, a, b, c, \top\}$ où a, b, c sont des atomes, on a $(a^{\uparrow})^c = \{a, \top\}^c = \{\bot, b, c\}$ qui n'est pas égal à $t^{\downarrow}$ avec t atome de $T^{\star}$ (ici, les atomes de $T^{\star}$ sont les atomes de T).

Proposition 9.2.11. *Soit $n \in \{2, 3\}$ un entier, T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$ un revêtement. Soit $S \in \mathcal{F}_T$ une fibre et x une face de $\mathbb{F}^n$. Alors, x est simple pour la fibre S dans le revêtement dual $\neg\mu$ si et seulement si , dans le revêtement μ, x est simple pour le complément de S dans $\mathcal{P}(T)$ (qui appartient à $\mathcal{G}_T$).*

Démonstration. La proposition 9.2.11 est une conséquence immédiate de la définition 9.2.6. □

9.3 Revêtements 1-réguliers et calques réguliers

Le but de cette section est de comparer les notions de revêtements et d'image de calques dans le but de pouvoir utiliser ces dernières, qui sont beaucoup moins complexes, lorsque les revêtements sont 1-réguliers et, par dualité, (-1)-réguliers (rappelons que ces deux types de régularité sont associés respectivement aux couples d'adjacences $(3^n - 1, 2n)$ et $(2n, 3^n - 1)$ de $\mathbb{Z}^n$). Nous verrons que, si le treillis T est distributif, les revêtements 1-réguliers sont la traduction, dans le cadre théorique des revêtements, des images de calques régulières définies au chapitre 7.

Dans toute la section, n est un entier supérieur ou égal à 1 et T est un treillis atomique.

9.3.1 Revêtement associé à une image de calques

On considère une image de calques $\mu : \mathbb{F}^n \to T$. À l'image de calques μ, on associe le revêtement $\otimes\mu$ défini, pour tout $x \in \mathbb{F}^n$, par :

$$\otimes\mu(x) = \{t \in T \mid \mu(x) \wedge t \neq \bot\}. \tag{9.3}$$

La fonction $\otimes\mu$ est bien un revêtement car on a clairement $t \in \mu(x)$ et $t \leq u \Rightarrow u \in \mu(x)$, donc $\mu(x) \in \mathcal{G}_T$ pour tout $x \in \mathbb{F}^n$. De plus, l'égalité (9.3) assure que les supports des labels sont identiques dans les deux images :

$$\langle t \rangle_{\otimes\mu} = \langle t \rangle_{\mu}, \text{ pour tout } t \in T.$$

Un exemple de revêtement associé à une image de calques à l'aide de la fonction $\otimes$ se trouve sur la figure 9.6. Notons que dans le revêtement $\otimes\mu$, les éléments minimaux des ensembles non vides $\otimes\mu(x)$ sont des atomes. En effet, si $\mu(x) \wedge t \neq \bot$, il existe un atome $a \in T$ tel que $a \leq \mu(x) \wedge t \leq t$, car T est atomique. Alors, $a \in \otimes\mu(x)$ et $t \in a^{\uparrow}$ (et, de manière évidente, $\bot$ ne peut pas être un élément de $\otimes\mu(x)$). Nous écrivons $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}}$ pour le sous-ensemble de $\mathcal{G}_T$ dont les éléments non vides sont des parties de T dont les éléments minimaux sont des atomes : $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}} = \left\{\bigcup_{a \in A} a^{\uparrow} \mid A \subseteq L^{\star}\right\}$ où, par convention, $\bigcup_{a \in \emptyset} a^{\uparrow} = \emptyset$.

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés du revêtement $\otimes\mu$ en relation avec les propriétés de l'image de calques μ.

Proposition 9.3.1. *Soit μ une image de calques et $\otimes\mu$ le revêtement associé.*

- *Si μ est à supports fermés, alors $\otimes\mu$ est à supports fermés.*
- *Si μ est strictement pure, resp. pure, alors $\otimes\mu$ est strictement pur, resp. pur.*

– *Si μ est régulière et si le treillis T est distributif, alors $\otimes\mu$ est 1-régulier.*

Démonstration.

– Si μ est à supports fermés, μ est décroisante (proposition 8.3.1). Alors, on a :

$$x \subseteq y \Rightarrow \mu(x) \geq \mu(y) \Rightarrow \forall t \in T, \mu(x) \wedge t \geq \mu(y) \wedge t \Rightarrow \otimes\mu(x) \supseteq \otimes\mu(y).$$

Puis, pour tout x inclus dans y, on a $y \in \langle t \rangle_{\otimes\mu} \Rightarrow t \in \otimes\mu(y) \Rightarrow t \in \otimes\mu(x) \Rightarrow x \in \langle t \rangle_{\otimes\mu}$. Donc, $\langle t \rangle_{\otimes\mu}$ est fermé.

– Si $\mu(x)$ est un atome, alors on a :

$$t \in \otimes\mu(x) \Leftrightarrow \mu(x) \wedge t \neq \bot \Leftrightarrow \mu(x) \wedge t = \mu(x) \Leftrightarrow \mu(x) \leq t \Leftrightarrow t \in \mu(x)^{\uparrow}.$$

D'où, $\otimes\mu(x) = \mu(x)^{\uparrow}$.

Si $\mu(x) = \bot$, alors $\otimes\mu(x) = \{t \in T \mid \bot \wedge t \neq \bot\}$. Donc $\otimes\mu(x) = \emptyset$.

– Pour tout $t \in T$ et tout $x \in \mathbb{F}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\otimes\mu_t(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(x) \wedge t \neq \bot \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu(y) \right) \wedge t \neq \bot \qquad \text{car } \mu \wedge t \text{ est régulière} \\
&\Leftrightarrow \quad \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} (\mu(y) \wedge t) \neq \bot \qquad \text{car } T \text{ est distributif} \\
&\Leftrightarrow \quad \exists y \in x^{\uparrow +}, \mu(y) \wedge t \neq \bot \\
&\Leftrightarrow \quad \exists y \in x^{\uparrow +}, \otimes\mu_t(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \otimes\mu_t(y) = 1.
\end{aligned}$$

Cela montre que les feuillets $\otimes\mu_t$ sont 1-réguliers (proposition 7.1.3). Par conséquent, le revêtement $\otimes\mu$ est 1-régulier. □

9.3.2 Image de calques associée à un revêtement

Inversement, partant d'un revêtement, il n'est pas toujours possible de définir une image de calques qui partage les mêmes supports. Cela est dû au fait que dans une image de calques, tout point qui n'est pas dans le fond est dans le support d'au moins un atome (car une image de calques est le supremum de ses calques). Mais dans un revêtement, cette propriété n'est généralement pas vérifiée comme on peut le voir sur la figure 9.2 avec la 1-face centrale, ou sur la figure 9.4 avec la 0-face w et le label $t = \{1, 2\}$.

Néanmoins, lorsqu'un revêtement μ est à valeurs dans $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}}$ (ce qui implique en particulier qu'aucune face n'a pour valeur T), nous pouvons définir une image de calques $\oplus\mu$ dont les supports sont égaux à ceux de μ de la façon suivante (avec la convention $\bigvee \emptyset = \bot$) :

$$\oplus\mu(x) = \bigvee \mu(x) \cap L^{\star}.$$

C'est-à-dire $\oplus\mu(x)$ est le supremum des atomes de $\mu(x)$, ou $\bot$ si $\mu(x)$ est vide (voir aussi la figure 9.5).

Les revêtements obtenus à partir d'une image de labels digitale muni de la $(3^n - 1, 2n)$-adjacence ou à partir d'une image de labels digitale muni de la $(2n, 3^n - 1)$-adjacence et de la dualité, à condition que le fond soit remplacé par un proto-label dans ce dernier cas, fournissent des exemples de revêtements à valeurs dans $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}}$ (voir la figure 9.5).

Nous donnons ci-dessous quelques propriétés de la fonction $\oplus\mu$ en relation avec les propriétés de la fonction μ.

Proposition 9.3.2. *Soit μ un revêtement à valeurs dans $\mathcal{G}_T^a$ et $\oplus\mu$ l'image de calques associée.*
- *Si T est distributif, alors $\langle t\rangle_{\oplus\mu} = \langle t\rangle_\mu$, pour tout $t \in T$.*
- *Si μ est pur, resp. strictement pur, alors l'image $\oplus\mu$ est pure, resp. strictement pure.*
- *Si μ est 1-régulier, alors l'image $\oplus\mu$ est régulière.*

Démonstration.
- Si $t = \perp$, alors $\langle\perp\rangle_\mu = \emptyset$ par hypothèse et $\langle\perp\rangle_{\oplus\mu} = \emptyset$ pour toute image de calques (voir page 120).
  Si $t \neq \perp$, on a :

$$\begin{aligned}
x \in \langle t\rangle_{\oplus\mu} &\Leftrightarrow \oplus\mu(x) \wedge t \neq \perp \\
&\Leftrightarrow \left(\bigvee_i a_i\right) \wedge t \neq \perp \quad \text{où } \mu(x) = \bigcup_i {a_i}^{\uparrow} \ \ (a_i \ \text{ atome}) \\
&\Leftrightarrow \bigvee_i (a_i \wedge t) \neq \perp \qquad \text{car } T \text{ est distributif} \\
&\Leftrightarrow \exists i, a_i \wedge t \neq \perp \\
&\Leftrightarrow \exists i, a_i \leq t \qquad\qquad \text{car les } a_i \text{ sont des atomes} \\
&\Leftrightarrow t \in \mu(x) \\
&\Leftrightarrow x \in \langle t\rangle_\mu.
\end{aligned}$$

- De la définition de l'image de calques $\oplus\mu$, on a immédiatement :
  - Si $\mu(x) = t^{\uparrow}$ avec t atome de T alors $\oplus\mu(x) = t$.
  - Si $\mu(x) = \emptyset$, alors $\mu(x) = \perp$.
- Soit $x \in \mathbb{F}_m^n$ avec $m \in [\![0, n-1]\!]$. On rappelle que $\bigvee \emptyset = \perp$. Par définition de l'image $\oplus\mu$, on a d'une part, $\oplus\mu(x) = \bigvee A$ où A est l'ensemble des atomes de $\mu(x)$ et d'autre part, $\bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \oplus\mu(y) = \bigvee B$ où B est l'ensemble des atomes des facettes de l'étoile de x.
  Montrons que A et B sont égaux.
  Soit a un atome de T. On a :

$$\begin{aligned}
a \in A &\Leftrightarrow a \in \mu(x) \\
&\Leftrightarrow \mu_a(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \mu_a(y) = 1 \qquad \text{car } \mu_a \text{ est 1-régulière et par la proposition 7.1.3} \\
&\Leftrightarrow \exists y \in x^{\uparrow +}, \mu_a(y) = 1 \\
&\Leftrightarrow \exists y \in x^{\uparrow +}, a \in \mu(y) \\
&\Leftrightarrow a \in B.
\end{aligned}$$

Donc, $\oplus\mu(x) = \bigvee A = \bigvee B = \bigvee_{y \in x^{\uparrow +}} \oplus\mu(y)$.
On en déduit que l'image de calques $\oplus\mu$ est régulière. □

Comme les images de calques et les revêtements sont entièrements déterminés par les supports des labels et que, sous l'hypothèse de distributivité du treillis T, les fonctions $\mu \in T^{\mathbb{F}^n} \mapsto \otimes\mu \in (\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}})^{\mathbb{F}^n}$ et $\mu \in (\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}})^{\mathbb{F}^n} \mapsto \oplus\mu \in T^{\mathbb{F}^n}$ conservent les supports, les deux fonctions $\otimes$ et $\oplus$ sont inverses l'une de l'autre :
si le treillis T est distributif,

- $\oplus(\otimes\mu) = \mu$ pour toute image de calque μ ;
- $\otimes(\oplus\mu) = \mu$ pour toute revêtement μ à valeurs dans $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}}$.

Ainsi, lorsque le treillis T est distributif, nous avons une correspondance bi-univoque entre les images de calques et les revêtements à valeurs dans $\mathcal{G}_T^{\mathrm{a}}$ et cette correspondance conserve les supports, la pureté et la régularité. De plus, nous avons la propriété suivante.

Proposition 9.3.3. *Soit T un treillis distributif. Les applications $\oplus : (\mathcal{G}_T)^{\mathbb{F}^n} \to T^{\mathbb{F}^n}$ et $\otimes : T^{\mathbb{F}^n} \to (\mathcal{G}_T)^{\mathbb{F}^n}$ forment une adjonction.*

Démonstration. Il faut montrer [3] que $\otimes\mu \subseteq \nu \Leftrightarrow \mu \leq \oplus\nu$ pour toute image de calques $\mu : \mathbb{F}^n \to T$ et tout revêtement $\nu : \mathbb{F}^n \to \mathcal{G}_T$.

- (sens $\Rightarrow$) On suppose $\otimes\mu \subseteq \nu$. Soit x un point de $\mathbb{F}^n$ et A l'ensemble des atomes de T inférieurs ou égaux à $\mu(x)$. Si $A = \emptyset$, c'est-à-dire si $\mu(x) = \bot$, alors clairement $\mu(x) \leq \oplus\nu(x)$. Si $A \neq \emptyset$, on a $\mu(x) = \bigvee A$ car T est atomique. Or, de manière évidente, $A \subseteq \otimes\mu(x)$. Il vient, en utilisant l'hypothèse, que $A \subseteq \nu(x)$ puis $A \subseteq \nu(x) \cap L^\star$. Donc, $\mu(x) = \bigvee A \leq \bigvee \nu(x) \cap L^\star = \oplus\nu(x)$.
- (sens $\Leftarrow$) On suppose $\mu \leq \oplus\nu$. Soit t un label appartenant à $\otimes\mu(x)$, c'est-à-dire tel que $\mu(x) \wedge t \neq \bot$. Alors l'hypothèse implique que $\mu(x) \wedge t \leq \oplus\nu(x)$. Il vient que tout atome inférieur ou égal à $\mu(x) \wedge t$ est inférieur ou égal à $\oplus\nu(x) = \bigvee \mu(x) \cap L^\star$. La distributivité de T entraîne alors que tout atome inférieur ou égal à $\mu(x) \wedge t$ appartient à $\mu(x) \cap L^\star$. L'atomicité de T permet de conclure que $\mu(x) \wedge t \leq \oplus\nu(x)$. □

9.4 Revêtements réguliers sur $\mathbb{F}^3$

Dans la suite de ce chapitre nous nous intéressons aux images définies sur $\mathbb{F}^3$.

Nous avons vu à la section 9.3 que les revêtements 1-réguliers peuvent être transformés en images de calques et traités avec les outils correspondants (au moins si le treillis T est distributif), c'est pourquoi nous ne nous occuperons pas ici de la fonction de connexité constante, égale à 1. Comme le dual d'un revêtement (-1)-régulier est un revêtement 1-régulier, et comme la pureté est conservée par passage au dual (à condition encore que le treillis T soit distributif) nous pouvons également ignorer les revêtements (-1)-réguliers [4] (les figures 9.5 et 9.6 donnent un exemple de modification d'une image (-1)-régulière par passage au dual puis à l'image de calques associée).

Ainsi, dans cette section, nous nous concentrerons sur les revêtements $(-1, 1, -1)$-réguliers et sur leurs revêtements duaux, $(1, -1, 1)$-réguliers. Nous donnerons des conditions suffisantes pour

3. Voir l'annexe B.2.

4. Il convient de noter toutefois que le traitement de la (-1)-régularité est tout à fait possible dans le cadre des revêtements et bien plus simple que ce qui va être présenté dans la suite de ce chapitre. En particulier, aucune définition de *types* de 1-face n'est nécessaire.

modifier localement un revêtement régulier de telle façon que le nouveau revêtement, qui ne diffère du premier revêtement que sur l'adhérence d'une 3-face, soit encore régulier et fortement équivalent au revêtement initial.

9.4.1 Revêtements $(-1, 1, -1)$-réguliers

Avec les trois lemmes suivants, nous modifions successivement les faces d'une facette d'un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier de façon à ce que le résultat soit fortement équivalent au revêtement initial. Nous commençons par modifier la facette et ses 2-faces.

Lemme 9.4.1. *Soit T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier. Soit x une facette de $\mathbb{F}^3$ et $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre strictement incluse dans $\mu(x)$ telle que x est simple pour S. Alors le régularisé d'ordre 1 en x du revêtement $\mu + (x, S)$ est fortement éqivalent à μ.*

Démonstration. Par la proposition 9.2.7, le revêtement $\mu' = \mu + (x, S)$ est fortement équivalent à μ. Soit ν le régularisé d'ordre 1 en x de μ'. Comme, de manière évidente, $\mu' \subseteq \mu$ et μ est régulier, on déduit du lemme 9.2.5 que $\nu \subseteq \mu$. Soit t un label tel que $\nu_t \neq \mu'_t$ si un tel label existe (sinon, le résultat est acquis). Alors, μ'_t n'est pas régulier. En particulier, $\mu'_t \neq \mu_t$. Par suite, $\mu'_t(x) \neq \mu_t(x)$ et, comme par l'équivalence (9.2) de la page 148, $\mu'_t(x) \leq \mu_t(x)$, on a $\mu'_t(x) = 0$ et $\mu_t(x) = 1$. Soit $z \in \mathbb{F}^3$ tel que $\nu_t(z) \neq \mu'_t(z)$. Par la définition même de ν, z est une 2-face incluse dans x et par l'équivalence (9.2), $\nu_t(z) = 0$ et $\mu_t(z) = \mu'_t(z) = 1$. Puisque $z \in \langle t \rangle_\mu$ et $\varepsilon(3) = -1$, la seule facette de $\mathbb{F}^3 \setminus \{x\}$ qui inclut z est aussi dans $\langle t \rangle_\mu$. Donc, z est haut-unipolaire aussi bien dans $\langle t \rangle_{\mu'}$ que dans $\langle t \rangle^c_\nu$. Comme des faces unipolaires de même dimension peuvent être supprimées en parallèle, donnant naissance à un rétracte par déformation forte (proposition 4.2.4), nous en déduisons que $\langle t \rangle_\nu$ et $\langle t \rangle_{\mu'}$, resp.$\langle t \rangle^c_\nu$ et $\langle t \rangle^c_{\mu'}$, sont faiblement homotopiquement équivalents. Ainsi, les revêtements μ' et ν sont fortement équivalents et, par transitivité, les revêtements μ et ν sont fortement équivalents. □

On pourrait poursuivre la régularisation en continuant de modifier les faces de x dimension par dimension. Toutefois, cela nécessite d'imposer des conditions très restrictives sur les faces de dimension 1 et nous avons constaté expérimentalement que les algorithmes d'amincissement obtenus alors sont peu efficaces. Nous sommes donc obligés d'étudier précisément les différentes configurations des 1-faces et des 0-faces après l'application du lemme 9.4.1. Le fait que les revêtements soient à valeurs dans un ensemble de fibres et non de labels complique beaucoup cet examen des configurations locales et nous a conduit à poser un certain nombre de notations et définitions qui sont exposées ci-après. La figure 9.7 détaille les notations utilisées dans la suite de cette section.

Nous définissons maintenant trois prédicats qui permettront d'identifier des conditions favorables pour la modification de la fibre d'une 1-face et éventuellement de l'une de ses 0-faces dans le lemme 9.4.3. Dans ces prédicats, x est une facette de $\mathbb{F}^3$ et a une 1-face de x et les notations a_i et a_i^j sont celles décrites sur la figure 9.7.

$$\exists\, k_0 \in \{0, 1\}, \forall\, k \in \{k_0, 2, 3\}, \qquad \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \subseteq S \cup \mu(a_1) \cup \mu(a_k^p) \tag{9.4}$$

$$\exists\, k_0, k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, k_0 \neq k_1, \forall\, k \in \{k_0, k_1\}, \qquad \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \cap \mu(a_k^q) \subseteq S \cup \mu(a_1) \tag{9.5}$$

$$\exists\,!\, k_0 \in \{2, 3\}, \forall\, k \in \{0, 1, k_0\}, \qquad \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \subseteq S \cup \mu(a_1) \cup \mu(a_k^r) \tag{9.6}$$

Les trois prédicats précédents permettent de définir trois types de 1-faces dans une cellule donnée. Une 1-face y incluse dans une facette x est de *type 1* (resp. *type 2*, *type 3*) si :

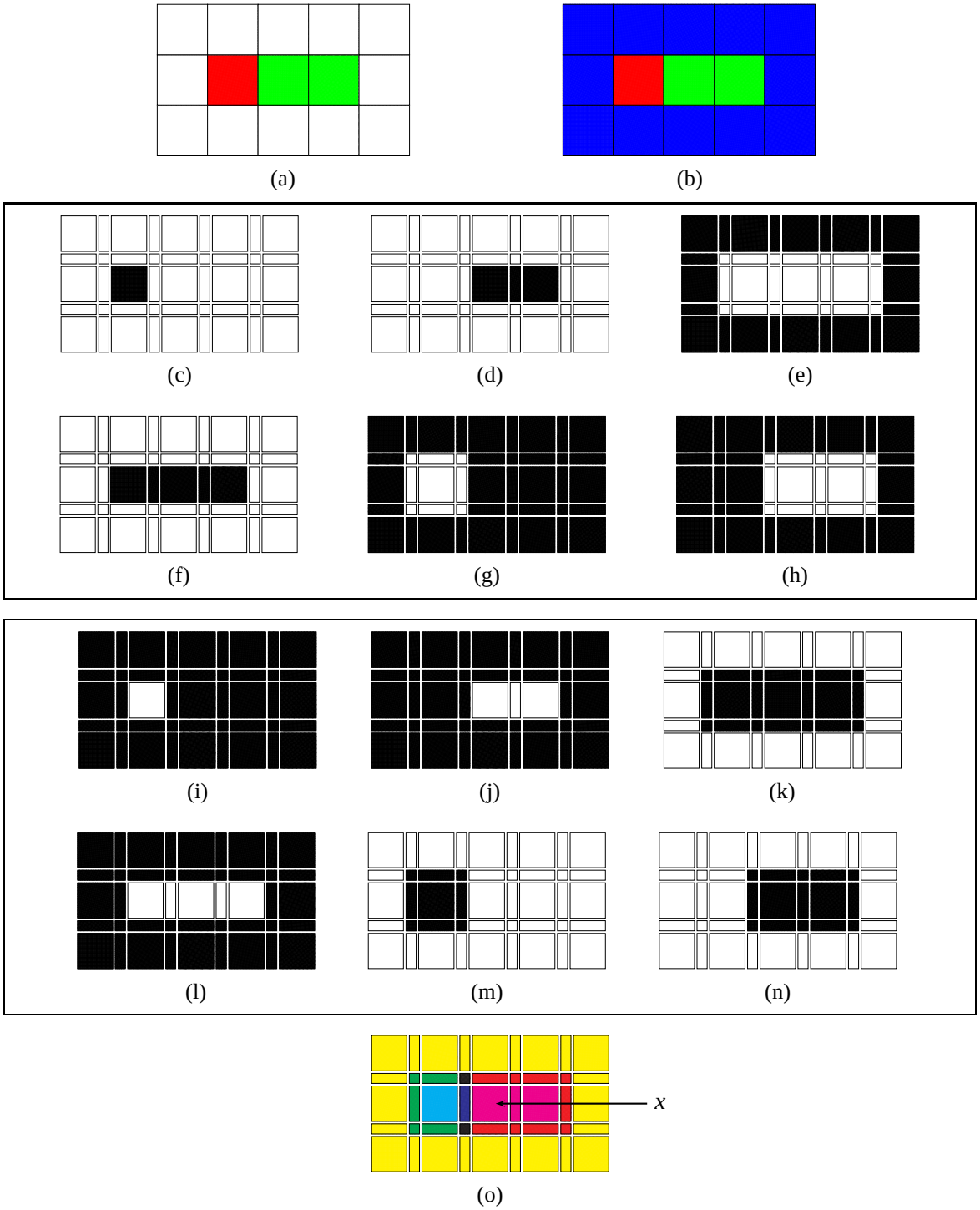


FIGURE 9.5 – (a) Une image de label digitale λ qui doit être interprétée avec la $(4,8)$-adjacence, c'est-à-dire que **tous** les objets représentés par les labels et leurs unions doivent être regardés avec la 4-adjacence tandis que le fond doit être regardé avec la 8-adjacence. Il y a deux proto-labels : r et v. (b) Le fond est remplacé par un nouveau label, b. (c–h) Les feuillets non-triviaux (non constants) du revêtement μ, (-1)-régulier, associé à λ. Le codomaine du revêtement μ est constitué des ensembles hauts du treillis $(\mathcal{P}(\{r,v,b\}),\subseteq)$. Les feuillets sont représentés dans l'ordre $\mu_r,\mu_v,\mu_b,\mu_{rv},\mu_{vb},\mu_{br}$. (i–n) Les feuillets du revêtement dual $\neg\mu$. Ce revêtement est 1-régulier. (o) L'image de calques $\oplus(\neg\mu)$. Cette image est pure et régulière (son codomaine est le treillis $(\mathcal{P}(\{r,v,b\}),\supseteq) = (\mathcal{P}(\{c,m,j\}),\subseteq)$.

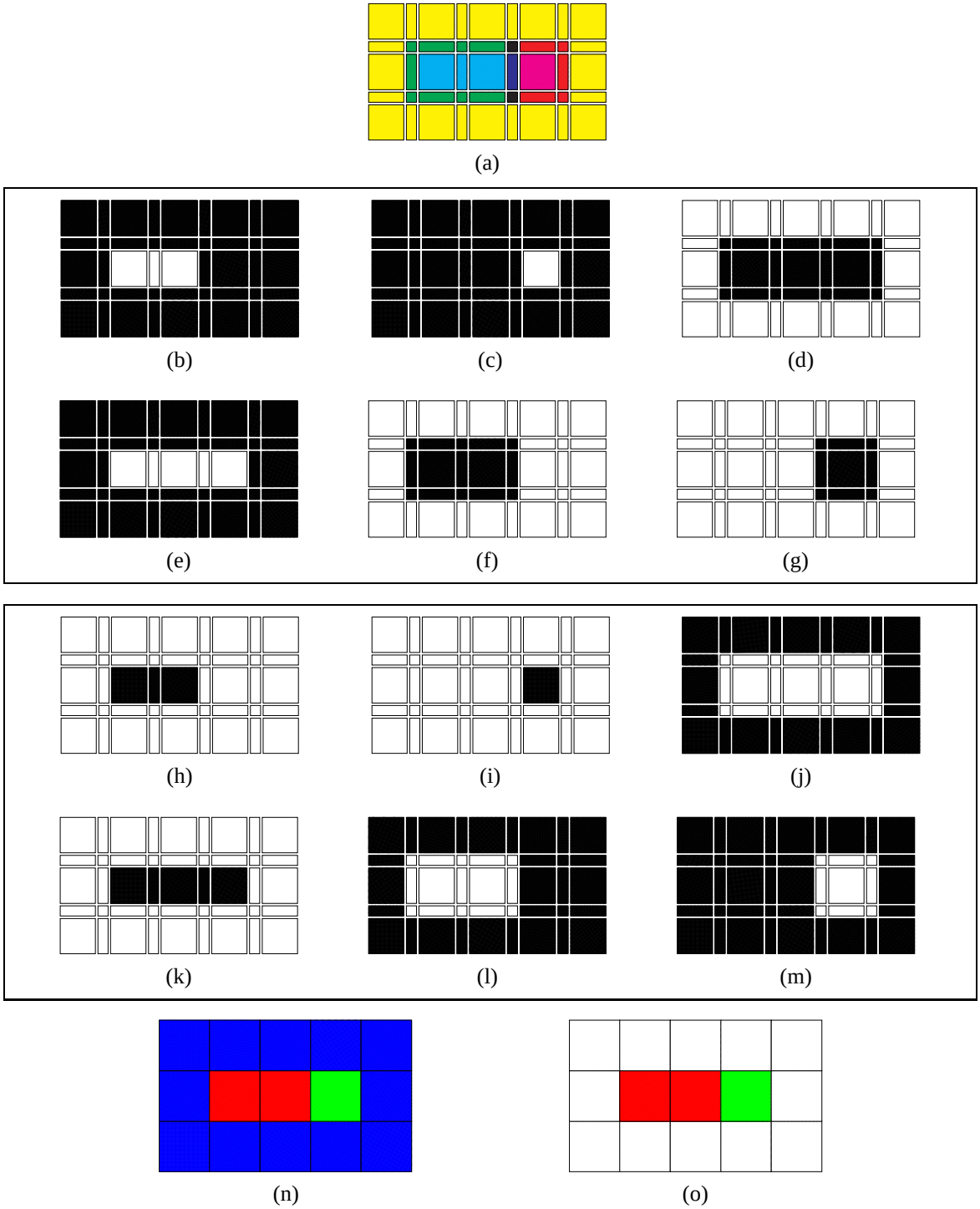


FIGURE 9.6 – (Voir aussi la légende de la figure 9.5). (a) L'image de calques $\nu = \oplus(\neg\mu) + (x, c)$ (la facette x de la figure 9.5(o) est digitalement simple (voir la section 8.4.3) pour le label c dans l'image de calques $\oplus(\neg\mu)$). (b–g) Les feuillets non triviaux du revêtement $\otimes\nu$. (h–m) Les feuillets non triviaux du revêtement $\neg(\otimes\nu)$. (n) L'image de labels digitale extraite de $\neg(\otimes\nu)$. (o) Le label factice est supprimé.

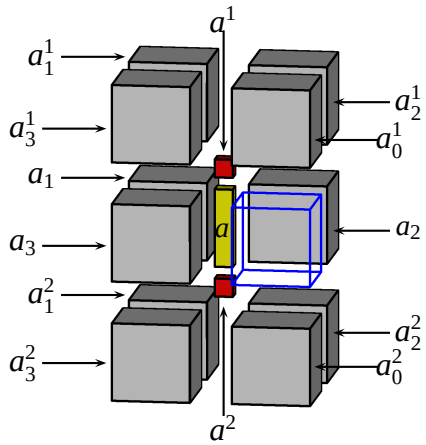


FIGURE 9.7 – Notations. On considère une facette x de $\mathbb{F}^3$ (en bleu, rendue en fil de fer) et une 1-face a de x (au centre, en jaune). Alors, a_0 est un alias de la facette x ($a_0 = x$), a_1 est la facette de l'étoile de a telle que $a_1 \cap x = a$ et a_2 et a_3 sont les deux autres facettes de l'étoile de a. On suppose que toutes les 0-faces de x se voient attribuer un numéro égal à 1 ou à 2 de façon à ce que chaque 1-face de x inclut une 0-face portant le numéro 1 et une 0-face portant le numéro 2. On note a^i ($i \in \{1,2\}$) la 0-face de a portant le numéro i (en rouge). Enfin, on note $a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i$ les quatre facettes de l'étoile de a^i qui ne sont pas dans l'étoile de a de façon à ce que a_j^i partage une 2-face avec a_j ($i \in \{1,2\}$ et $j \in \{0,1,2,3\}$).

– le prédicat (9.4) (resp. (9.5), (9.6)) est vrai pour $a = y$ et pour un certain $p \in \{1,2\}$ (resp. $q \in \{1,2\}$, $r \in \{1,2\}$), et
– le prédicat (9.5) (resp. (9.6), (9.4)) est vrai pour $a = y$ et $q = 3 - p$ (resp. $r = 3 - q$, $p = 3 - r$).

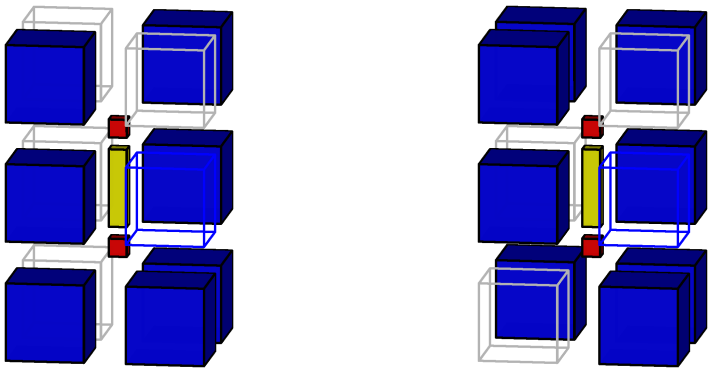
La figure 9.8 montre des 1-faces de type 1 et 3 et explique succinctement les raisons des définitions précédentes.

Trois 1-faces y, y', y'' incluses dans x, sont *associées* si elles ont une 0-face en commun, appelée le *sommet* de l'association, et le prédicat (9.6), dans lequel r est le numéro porté par le sommet (voir la légende de la figure 9.7), est vrai pour deux d'entre elles, de types 2 ou 3.

Pour terminer la régularisation du revêtement $\mu + (x, S)$ commencée avec le lemme 9.4.1, nous allons changer les valeurs des fibres au-dessus des 1-faces et des 0-faces dans le régularisé d'ordre 1 en x de μ en trois étapes : d'abord nous traitons les 1-faces « ordinaires » (de type 1 ou 2), puis les configurations impliquant les 1-faces de type 3 et leurs 0-faces et nous terminons avec les 0-faces « ordinaires ».

Lemme 9.4.2. *Soit T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ un revêtement $(-1,1,-1)$-régulier. Soit x une facette de $\mathbb{F}^3$ et $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre strictement incluse dans $\mu(x)$ telles que x est simple pour S. Soit ν le régularisé de $\mu + (x, S)$ en x. Alors, le revêtement égal à ν sur les 2-faces de x et sur ses 1-faces de type 1 ou 2 et égal à μ partout ailleurs est fortement équivalent au revêtement μ.*

Démonstration. Puisque $S \subset \mu(x)$, on a $\nu \subseteq \mu$. Soit ν_1, le régularisé d'ordre 1 de $\mu + (x, S)$ en x. Par le lemme 9.4.1, ν_1 est fortement équivalent à μ. Grâce à la proposition 9.2.8, il nous suffit de montrer que toute 1-face y de type 1 ou 2 est simple pour $\nu(y)$ dans le revêtement ν_1.
Soit y une 1-face de x de type 1 ou 2. On a $\nu_1(y) = \mu(y)$ par définition de ν_1. Si $\mu(y) = \nu(y)$, le résultat est trivial. On suppose donc que $\mu(y) \neq \nu(y)$. Soit t un label tel que $y \in \langle t \rangle_{\nu_1}$ et $y \notin \langle t \rangle_{\nu}$, c'est-à-dire $\mu_t(y) \neq \nu_t(y)$ (l'inverse, $y \in \langle t \rangle_{\nu}$ et $y \notin \langle t \rangle_{\nu_1}$, est impossible car $\nu_1(y) = \mu(y)$ et $\nu \subseteq \mu$). Alors, grâce à la



(a) (b)

FIGURE 9.8 – Prédicats sur les 1-faces (les notations sont celles de la figure 9.7). La figure représente une partie d'un feuillet μ_t d'un revêtement μ (seules les facettes et trois faces importantes pour notre propos sont représentées). Le revêtement ν est le régularisé de $\nu = \mu + (x, S)$ avec $S \subset \mu(x)$ ($S \in \mathcal{G}_T$) où x est la facette rendue en fil de fer bleu. En jaune, on voit une 1-face y de x et, en rouge, les 0-faces y^1 (en haut) et y^2 (en bas). Ces deux 0-faces peuvent être dans l'objet ou dans le fond du feuillet. Les cubes bleus (x inclus) sont des facettes du support $\langle t\rangle_\mu$ et les facettes rendues en fil de fer gris sont dans le fond du feuillet (nous ne pouvons montrer ici qu'un feuillet du revêtement mais notre but est bien de trouver des conditions portant sur la totalité des feuillets). Considérons un label t appartenant à $\mu(x) \setminus S$ (si $t \notin \mu(x)$ ou si $t \in S$, le feuillet correspondant n'est pas modifié par le changement de fibre au dessus de x : $\nu_t = \mu_t$). Nous nous intéressons au cas où y change de statut lorsqu'on passe de l'image μ à l'image ν : $y \in \langle t\rangle_\mu$ et $y \notin \langle t\rangle_\nu$ (l'inverse ne peut pas se produire car $S \subset \mu(x)$). Puisque la fonction de connexité est ici $\varepsilon = (-1, 1, -1)$, d'après la table 7.2, ce changement de statut se produit si et seulement si il y a exactement trois facettes du support $\langle t\rangle_\mu$ qui incluent y, dont la facette x (dans le revêtement ν, il n'y a que deux facettes du support de t qui incluent y car $t \notin S$). Par ailleurs, pour assurer la légitimité topologique du changement de statut, nous souhaitons que y soit β-simple, c'est-à-dire que $y^{\uparrow\star}$, ou $y^{\downarrow\star}$, soit contractile. Or, lorsque y_1 n'est pas dans $\langle t\rangle_\mu$, le sous-ensemble $y^{\uparrow\star}$ du support $\langle t\rangle_{\mu+(x,S)}$ n'est pas contractile car il a deux composantes connexes (l'une contenant la facette y_2 et l'autre la facette y_3). Il est donc nécessaire dans ce cas de s'intéresser à la frontière de y, $\{y^1, y^2\} \cap \langle t\rangle_{\mu+(x,S)}$. Clairement, celle-ci est contractible si et seulement si une seule des deux 0-faces est dans le support. Le rôle des trois prédicats est précisément de décrire toutes les configurations pouvant déboucher favorablement (c'est-à-dire permettant la modification de la fibre au-dessus de y à topologie constante). (a) Cas d'une 1-face y de type 1. En accord avec la table 7.2, le prédicat (9.4) assure que la 0-face concernée (ici y^2) est dans le support du label t dans le revêtement $\mu + (x, S)$ et le prédicat (9.5) assure que l'autre 0-face de $y^{\downarrow\star}$ (ici y^1) n'est pas dans $\langle t\rangle_{\mu+(x,S)}$. Le cas d'une 1-face de type 2 est similaire. (b) Cas d'une 1-face y de type 3 (c'est celui qui pose problème). Ici, les prédicats (9.4) et (9.6) nous disent que les deux 0-faces y^1 et y^2 sont dans $\langle t\rangle_{\mu+(x,S)}$. Donc, y n'est pas β-simple. L'idée est alors de supprimer une de ces deux 0-faces avant de supprimer y puis de supprimer la dernière 0-face de y. On peut intuiter que la suppression d'une des deux 0-faces, appelons-là y^i, puis de y puis de l'autre 0-face, y^{3-i}, implique des conditions sur les 1-faces de x qui incluent y^i pour que le processus se termine sans buter sur une 0-face, ou une 1-face, « prise en étau ». C'est ce qui nous a conduit à définir des *associations* de 1-faces.

régularité de μ, $x \in \langle t \rangle_\mu$, $x \notin \langle t \rangle_\nu$ (en d'autres termes, $t \in \mu(x) \setminus S$). Puisque μ est $(-1, 1, -1)$-régulier, nous déduisons de la table 7.2 que $\langle t \rangle_\mu$ contient exactement trois facettes incluant y dont l'une est x.

- Si $t \in \mu(y_1)$, alors il est évident que les ensembles $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_1}$ et $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_1}$ sont contractiles (voir figure 9.9(a)). Alors, y est β-simple pour les ensembles $\langle t \rangle_{\nu_1}$ et $\langle t \rangle^c_{\nu_1} \cup \{y\}$.
- Maintenant, nous supposons que $t \notin \mu(y_1)$. Alors, $t \in \mu(x) \cap \mu(y_2) \cap \mu(y_3)$. Comme $t \in \mu(x) \setminus S$, des prédicats (9.4), ou (9.6), et (9.5), nous déduisons que :
  - $t \in \mu(y^p_k)$ pour au moins trois valeurs distinctes de k ;
  - $t \in \mu(y^q_k)$ pour au plus deux valeurs distinctes de k ($q \neq p$).

  Par suite, par la table 7.2, on trouve que $y^p \in \langle t \rangle_\mu$ et $y^q \notin \langle t \rangle_\mu$. Ainsi, $y^{\downarrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_1} = \{y^p\}$ et $y^{\downarrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_1} = \{y^q\}$ sont contractiles et y est β-simple pour les ensembles $\langle t \rangle_{\nu_1}$ et $\langle t \rangle^c_{\nu_1} \cup \{y\}$.

Nous pouvons maintenant conclure que y est simple pour $\nu(y)$ dans le revêtement ν_1. □

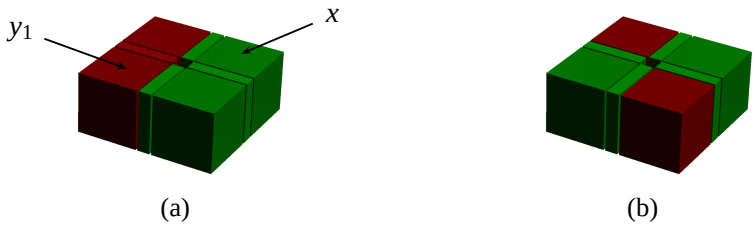


FIGURE 9.9 – Preuve du lemme 9.4.2. Le trou au centre de la figure correspond à la 1-face y. En rouge : $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_1}$. En vert : $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_1}$. (a) $t \in \mu(y_1)$, c'est-à-dire $y_1 \in \langle t \rangle_{\nu_1}$. Dans cette configuration, il est évident que $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_1}$ et $y^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_\nu$ sont contractiles. (b) $t \notin \mu(y_1)$. Ici, les deux ensembles ont deux composantes connexes. Dans cette configuration, il faut étudier l'ensemble $y^{\downarrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_1}$ pour décider si y est β-simple dans l'ensemble $\langle t \rangle_{\nu_1}$.

Après avoir régularisé les faces de dimension 2 et les faces de dimension 1 de types 1 et 2, nous nous intéressons aux faces de type 3. Comme nous l'avons dit dans la légende de la figure 9.8, le traitement de ces 1-faces est plus compliqué et nécessite la régularisation de certaines 0-faces auparavant (les sommets des associations). C'est l'objet du lemme suivant.

Lemme 9.4.3. *Soit T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier. Soit x une facette de $\mathbb{F}^3$ et $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre strictement incluse dans $\mu(x)$ telle que x est simple pour S. On suppose que les seules associations dans la face x impliquent trois faces de types distincts et que toutes les faces de type 3 sont en association. Soit ν le régularisé de $\mu + (x, S)$ en x et ν_3 le revêtement égal à ν sur les faces de dimensions supérieures ou égales à 2, sur les faces de dimension 1 de type 1, 2, 3 et sur les 0-faces sommets d'associations et égal à μ sur toutes les autres faces. Alors, le revêtement ν_3 est fortement équivalent au revêtement μ.*

Démonstration.
On note ν_2 le revêtement égal à ν sur les 2-faces de x et sur ses 1-faces de type 1 ou 2 et égal à μ partout ailleurs. Le revêtement ν_2 est fortement équivalent à μ d'après le lemme 9.4.2. Nous allons modifier en parallèle le revêtement ν_2 sur les sommets de toutes les associations de 1-faces de x puis, dans un second temps, sur toutes les 1-faces de type 3.

1. Soit u, v et w trois faces associées, respectivement de types 1, 2 et 3. Soit $\alpha \in \{1, 2\}$ l'entier tel que w^α ($= u^\alpha = v^\alpha$) est le sommet de l'association. Si $\nu(w^\alpha) \neq \nu_2(w^\alpha)$, nous considérons un label

t tel que $t \in \nu_2(w^\alpha)$ et $t \notin \nu(w^\alpha)$ (l'inverse, $t \in \nu(w^\alpha)$ et $t \notin \nu(w)$ est impossible car $\nu \subseteq \mu$ et $\nu_2(w^\alpha) = \mu(w^\alpha)$). Comme dans la preuve du lemme 9.4.2, on a $t \in \mu(x) \setminus S$ et nous déduisons de la table 7.2 que $\langle t \rangle_\mu$ contient exactement six facettes incluant w^α dont l'une est x. Notons que, pour toute face $z \in (w^\alpha)^{\uparrow\star}$, $z \neq w$, on a $\nu(z) = \nu_2(z)$ (car u et v sont de type 1 et 2). Toutes les configurations (modulo rotations et symétries) de $w^{\alpha\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_\nu$ contenant cinq facettes sont représentées sur la figure 9.10 (elles sont triées dans l'ordre lexicographique décroissant – (2,2), (2,1), (2,0), (1,1), etc. – du critère égal aux dimensions des intersections de x avec les deux autres facettes du fond). Notons que, comme les configurations sont représentées modulo rotations et symétries, il n'est pas possible de préciser les positions respectives des faces u, v et w sur la figure et nous les désignopns par les lettres b, c, d ($\{b, c, d\} = \{w, u, v\}$).

- Dans les configurations (b, c, e), la contractilité de $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_2}$, qui est égal à $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_\nu$ ou à $((w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_\nu) \cup \{w\}$, et de $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_2}$, qui est égal à $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_\nu$ ou à $((w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_\nu) \setminus \{w\}$, est facile à établir.
- Dans la configuration (d), d'après la figure, $t \in \mu(x) \cap \mu(d_2) \cap \mu(d_3)$ et $t \notin S \cup \mu(d_1) \cup \mu(d_0^\alpha)$. Donc, le prédicat (9.6) n'est pas vérifié par la 1-face d pour $r = \alpha$. De la définition des associations nous en déduisons que la face d est de type 1. Il vient que $\nu_2(d) = \nu(d)$ et la figure 9.10(d) représente donc exactement les ensembles $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_2}$ et $(w^\alpha)^{\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_2}$. On vérifie aisément sur la figure que ces ensembles sont contractiles.
- Dans la configuration (f), on trouve, grâce à la figure, que, pour $a = b$ et pour $a = c$, on a :
  - $t \in \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3)$ et $t \notin S \cup \mu(a_1) \cup \mu(a_k^\alpha)$ pour $k = 2$ ou pour $k = 3$, et
  - $t \in \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \cap \mu(a_k^\alpha)$ et $t \notin S \cup \mu(a_1)$ pour trois valeurs de k.

  Par suite, ni b ni c n'est de type 1 (les prédicats (9.4) et (9.5) ne peuvent être vérifiés ni en prenant $(p, q) = (1, 2)$ ni en prenant $(p, q) = (2, 1)$). Donc, $u = d$ et w est égal à b ou c. De plus, dans tous les cas, nous déduisons de la table 7.2 que $w \in \langle t \rangle_\mu$ donc $w \in \langle t \rangle_{\nu_2}$. Alors, nous pouvons vérifier sur la figure 9.10(f) que $w^{\alpha\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_{\nu_2} = w^{\alpha\uparrow\star} \cap \langle t \rangle_\nu \cup \{w\}$ et $w^{\alpha\uparrow\star} \cap \langle t \rangle^c_{\nu_2} \setminus \{w\}$ sont contractiles.
- Le cas de la configuration (g) est similaire à celui de la configuration (d) : $t \in \mu(x) \cap \mu(c_2) \cap \mu(c_3)$ et $t \notin S \cup \mu(c_1) \cup \mu(c_1^\alpha)$. La face c ne vérifie donc pas le prédicat (9.6) pour $r = \alpha$, ce qui prouve que c est la face de type 1 de l'association $\{b, c, d\}$. On conclut comme dans le cas de la configuration (d).

Donc, dans toutes les configurations, la 0-face w^α est β-simple pour l'ensemble $\langle t \rangle_{\nu_2}$ (et en fait également β-simple pour l'ensemble $\langle t \rangle^c_{\nu_2} \cup \{w^\alpha\}$). Nous en concluons que w^α est simple pour $\nu(w^\alpha)$ et (proposition 9.2.8) que le revêtement ν'_2 égal à ν sur les sommets des associations de 1-faces et à ν_2 partout ailleurs, est fortement équivalent à ν_2.

2. Nous nous intéressons maintenant aux 1-faces de type 3 dans le revêtement ν'_2.

   Soit y une 1-face de type 3 dans ν'_2 et α le numéro porté par le sommet de l'association à laquelle appartient y. En effet, une 1-face de type 3 ne peut pas appartenir à deux associations. Si tel était le cas, cette 1-face devrait vérifier les prédicats (9.4) et (9.6) pour $(p, r) = (1, 2)$ et $(p, r) = (2, 1)$. Or, clairement, ces deux prédicats ne peuvent pas être vérifiés par une même 1-face a avec $p = r$. Donc, α est bien déterminée et la 0-face $y^{3-\alpha}$ n'est pas un sommet d'association (ce qui implique que $\nu'_2(y^{3-\alpha}) = \mu(y^{3-\alpha})$).

   Si $\nu(y) \neq \nu'_2(y)$, nous considérons un label t tel que $t \in \nu'_2(y)$ et $t \notin \nu(y)$ (rappelons que nous avons $\nu(y) \subseteq \mu(y) = \nu'_2(y)$). Alors, $t \in \mu(x) \setminus S$ et, d'après la table 7.2, le support $\langle t \rangle_\mu$ contient exactement

trois facettes incluant y, dont l'une est x.

– Si $t \in \mu(y_1)$, comme dans la preuve du lemme 9.4.2, en examinant la figure 9.9, nous trouvons que les ensembles $y^{\uparrow\star} \cap \langle t\rangle_{\nu_2'}$ et $y^{\uparrow\star} \cap (\langle t\rangle^c_{\nu_2'})$ sont contractiles.

– Si $t \notin \mu(y_1)$, on examine $y^{\downarrow\star}$. Notons que dans ce cas, on a nécessairement $t \in \mu(y_2) \cap \mu(y_3)$.
  - La 0-face y^α est un sommet d'association. Donc, $\nu_2'(y^\alpha) = \nu(y^\alpha)$ par définition du revêtement ν_2'. En particulier, y^α appartient à $\langle t\rangle_{\nu_2'}$ si et seulement si , dans $\langle t\rangle_\mu$, l'étoile de y^α contient au moins 7 facettes dont l'une est x (cf. table 7.2). Or ici le support $\langle t\rangle_\mu$ contient exactement trois facettes incluant y (dont x). D'autre part, y vérifie le prédicat (9.6) pour $r = \alpha$ et $t \in \mu(x) \cap \mu(y_2) \cap \mu(y_3) \setminus (S \cup \mu(y_1))$. Donc, dans le support $\langle t\rangle_\mu$, l'étoile de y^α contient exactement trois facettes qui ne sont pas dans l'étoile de y. Il vient que, dans $\langle t\rangle_\mu$, il y a au plus six facettes dans l'étoile de y^α. On en déduit que y^α n'appartient pas à $\langle t\rangle_{\nu_2'}$.
  - Comme la 1-face y est de type 3, elle vérifie le prédicat (9.4) pour $p = 3 - \alpha$. Or, d'après ce qui a été dit auparavant, $t \in \mu(x) \cap \mu(y_2) \cap \mu(y_3)$ et $t \notin S \cup \mu(y_1)$. On en déduit que $t \in \mu(y_k^p)$ pour au moins trois valeurs distinctes de k. Donc, la 0-face $y^{3-\alpha}$ appartient à $\langle t\rangle_\mu$ (toujours d'après la table 7.2) et par suite $y^{3-\alpha}$ appartient à $\langle t\rangle_{\nu_2'}$.

Finalement, $y^{\downarrow\star} \cap \langle t\rangle_{\nu_2'}$ est le singleton $\{y^{3-\alpha}\}$, donc est clairement contractile. On peut en conclure que y est simple pour $\nu(y)$ dans le revêtement ν_2' et, grâce à la proposition 9.2.8, que ν_3 est fortement équivalent à ν_2', et par suite à μ. □

Pour terminer la régularisation du revêtement $\mu + (x, S)$ commencée avec le lemme 9.4.1, il reste à modifier les 0-faces qui ne sont pas des sommets. Finalement, nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 9.4.4. *Soit T un treillis atomique et $\mu : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier. Soit x une facette de $\mathbb{F}^3$ et $S \in \mathcal{G}_T$ une fibre strictement incluse dans $\mu(x)$ tel que x est simple pour S.*
Si,

(i) toutes les 1-faces de x sont de type 1, 2 ou 3,

(ii) toutes les 1-faces de x de type 3 sont en association,

(iii) les seules associations dans x impliquent trois faces de types distincts,

alors le régularisé de $\mu + (x, S)$ en x est fortement équivalent au revêtement μ.

Démonstration. On note ν le régularisé de $\mu + (x, S)$ en x et ν_3 le revêtement défini dans l'énoncé du lemme 9.4.3 (ν_3 est fortement équivalent à μ). Les seules faces z de $\mathbb{F}^3$ telles que $\nu_3(z) \neq \nu(z)$ sont des 0-faces de x qui ne sont pas sommet d'une association. Soit z une 0-face de x telle que $\nu_3(z) \neq \nu(z)$ et t un label tel que $z \in \langle t\rangle_{\nu_3}$ et $z \notin \langle t\rangle_\nu$ (on a $\nu(z) \subseteq \mu(z) = \nu_3(z)$). Comme dans les preuves des lemmes précédents, on trouve que $t \in \mu(x) \setminus S$ et que, d'après la table 7.2, il y a 6 facettes au dessus de z dans l'objet du feuillet μ_t dont l'une est x (donc 5 facettes dans l'objet du feuillet $(\nu_3)_t$). Nous pouvons alors examiner l'ensemble des configurations possibles (modulo rotations et symétries) sur la figure 9.10. Notons qu'ici $z^{\uparrow\star} \cap \langle t\rangle_{\nu_3} = z^{\uparrow\star} \cap \langle t\rangle_\nu$ (par définition de ν_3 et par l'hypothèse *(i)* du théorème). On vérifie sur la figure que tous les ensembles $z^{\uparrow\star} \cap \langle t\rangle_{\nu_3}$ sont contractiles sauf dans la configuration (f) où cet ensemble a deux composantes connexes. On a déjà montré dans la preuve du lemme 9.4.3 que, avec cette configuration, les 1-faces b et c ne sont pas de type 1. Donc, b et c sont de type 2 ou 3. Soit α le numéro porté par la 0-face z ($\alpha \in \{1, 2\}$). Comme le prédicat (9.4), resp. (9.5), n'est pas vérifié par b et c lorsqu'on donne à p, resp. à q, la valeur α (t met en défaut les inclusions),

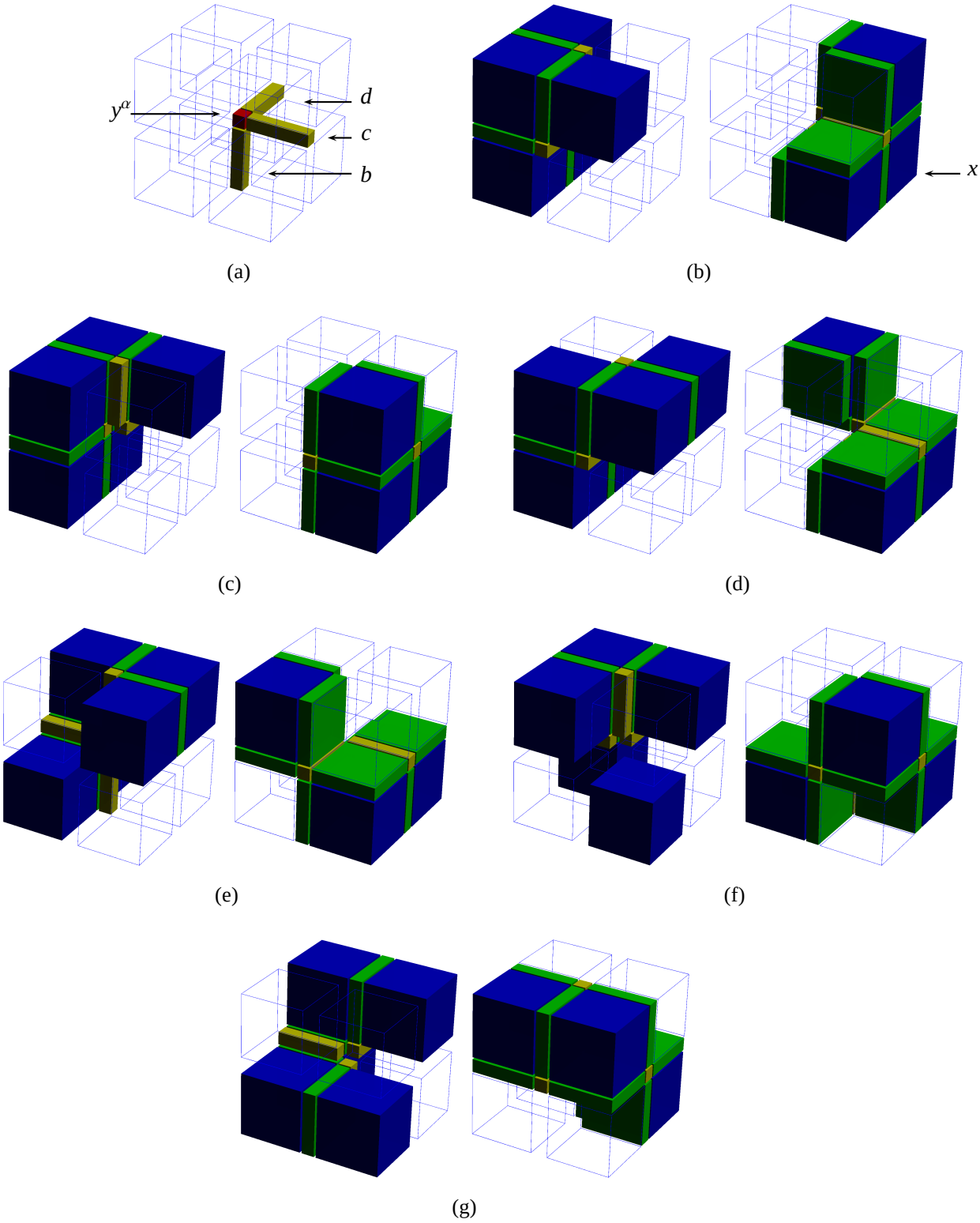


FIGURE 9.10 – Configurations du plus petit voisinage d'une 0-face dans une image binaire $(-1, 1, -1)$-régulière contenant cinq facettes (Preuve du lemme 9.4.3). (a) La face w^α et les trois 1-faces de x qui incluent w^α (dont l'une est w). (b–g) L'ensemble $(w^\alpha)^{\uparrow\star}$ dans le feuillet ν_t. La partie à gauche de chaque figure représente l'objet du feuillet et la partie à droite représente le fond du feuillet. Le feuillet $(\nu_2)_t$ coïncide avec le feuillet ν_t sauf éventuellement sur la face w (on peut avoir $w \in \langle t \rangle_{\nu_2}$ et $w \notin \langle t \rangle_\nu$, mais pas l'inverse). Sur la figure (d), l'objet a un trou si on lui ajoute la 1-face d et, sur la figure (f), l'objet a deux composantes connexes.

on en déduit que le prédicat (9.6) est vérifié par b et c avec $r = \alpha$. Donc, $\{b, c, d\}$ est une association. Par conséquent, z est un sommet d'association ce qui contredit l'hypothèse $\nu_3(z) \neq \nu(z)$. □

La figure 9.12 donne un exemple de l'utilisation du théorème 9.4.4 sur un revêtement pur avec $S = \emptyset$. Dans cet exemple, il y a trois proto-labels r, g, j, représentés en rouge, vert et jaune, et le treillis est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{r, g, j\})$. Il est donc distributif. Dans ces conditions (revêtement pur, treillis distributif, fibre $S = \emptyset$), on vérifie que le prédicat (9.4) est vrai si et seulement si

- parmi les facettes x, a_2, a_3, une (au moins) est dans le fond du revêtement ou a la même fibre que a_1, ou
- les facettes a_2^p et a_3^p et au moins une des deux facettes a_0^p et a_1^p ont la même fibre qu'une des facettes x, a_2 ou a_3.

On obtient des critères semblables pour les deux autres prédicats.

La proposition suivante permet de réduire le nombre de tests des prédicats (9.4)-(9.6) à effectuer pour déterminer le type d'une 1-face lorsqu'on utilise le théorème 9.4.4.

Proposition 9.4.5. *Soit X un ensemble. Soit A, B, C trois sous-ensembles de X. Alors, soit $A \subseteq C$ et les inclusions $A \cap B \subseteq C$ et $A \subseteq C \cup B$ sont toutes les deux vraies, soit $A \nsubseteq C$ et une inclusion est vraie si et seulement si l'autre est fausse.*

Démonstration. Si $A \subseteq C$, il est évident que $A \cap B \subseteq C$ et $A \subseteq C \cup B$ sont toutes les deux vraies. Maintenant, nous supposons que $A \nsubseteq C$. Soit $x \in A \setminus C$. Si nous supposons que $A \cap B \subseteq C$, nous trouvons que $x \notin B$. Donc, $A \nsubseteq C \cup B$. Inversement, si nous supposons que $A \subseteq C \cup B$, nous trouvons que $x \in B$ et donc que $A \cap B \nsubseteq C$. □

Dans l'implantation du théorème 9.4.4, nous utilisons la proposition 9.4.5 quand nous effectuons les tests des prédicats (9.4)-(9.6), en prenant $A = \mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3)$, $B = \mu(a_k^p)$ et $C = S \cup \mu(a_1)$. En effet, si, par exemple, pour $p \in \{1, 2\}$, on a $\mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \nsubseteq S \cup \mu(a_1) \cup \mu(a_k^p)$ pour un certain k, alors le lemme 9.4.5 nous dit que, premièrement A n'est pas inclus dans C, puis que, si en remplaçant p par $q = 3 - p$, nous obtenons l'inclusion $\mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \subseteq S \cup \mu(a_1) \cup \mu(a_k^q)$ pour trois valeurs de k (le prédicat (9.4) ou (9.6) est vérifié), nous n'aurons pas l'inclusion $\mu(x) \cap \mu(a_2) \cap \mu(a_3) \cap \mu(a_k^q) \subseteq S \cup \mu(a_1)$ pour ces trois valeurs de k (le prédicat (9.5) ne sera pas vérifié) et inversement.

On considère maintenant deux revêtements $(-1, 1, -1)$-réguliers, μ_1 et μ_2, et x une facette de $\mathbb{F}^3$ telle que $\mu_1(x) \neq \mu_2(x)$ et μ_1 et μ_2 coïncident sur les autres facttes de $\mathbb{F}^3$. L'idée pour passer d'un revêtement à l'autre est la suivante (voir la figure 9.11 pour une illustration dans $\mathbb{F}^2$ de cette idée). Si les deux revêtements réguliers sont topologiquement équivalents, il doit exister deux facettes x_1, x_2 dans le voisinage de x telles que $\dim(x \cap x_1) = \dim(x \cap x_2) = 2$ et $\mu_1(x_1) = \mu_1(x)$ et $\mu_2(x_2) = \mu_2(x)$ (sinon, $\{x\}$ serait une facette isolée dans le support de chaque label). Alors, on pose $S = \mu_1(x) \cap \mu_2(x)$, qui est une fibre au-dessus de la 2-face $x \cap x_1$ dans le revêtement μ_2 et au-dessus de la 2-face $x \cap x_2$ dans le revêtement μ_1, et, en partant de μ_1 et de μ_2, nous testons avec le théorème 9.4.4 si nous pouvons étendre la fibre S au-dessus de x. Si le test réussit, nous pouvons passer du revêtement μ_1 au revêtement μ_2 en préservant la topologie.

Le corollaire suivant applique cette idée en s'appuyant sur le théorème 9.4.4.

Corollaire 9.4.6. *Soit T un treillis atomique. Soit $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ deux revêtements $(-1, 1, -1)$-réguliers tels qu'il existe une facette x de $\mathbb{F}^3$ avec $\mu_1(x) \neq \mu_2(x)$ et μ_1 et μ_2 coïncident sur les autres facettes de $\mathbb{F}^3$.*

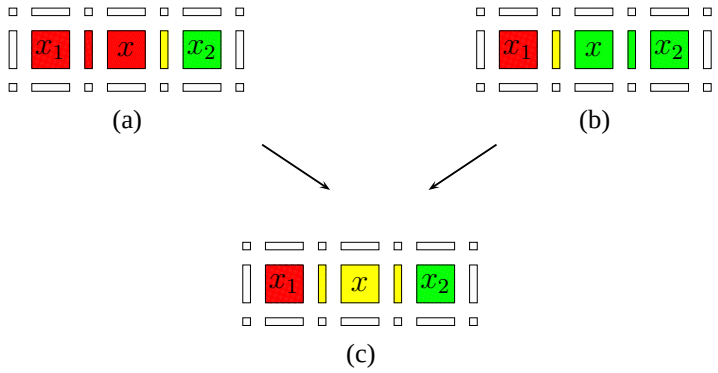


FIGURE 9.11 – Modification d'un label dans un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier. (a) Un revêtement ε-régulier μ_1 où ε est constant, égal à -1, et le treillis T est l'ensemble des parties $\mathcal{P}(\{r, g\})$. Les fibres $r^{\uparrow}$, $g^{\uparrow}$ et $(r \vee g)^{\uparrow}$ sont représentées respectivement en rouge, vert et jaune. (b) Un revêtement ε-régulier μ_2. Les deux revêtements coïncident sur les facettes de $\mathbb{F}^2$ sauf sur la facette x. L'ensemble S est la fibre au-dessus des 1-faces $x \cap x_1$ et $x \cap x_2$: $S = (r \vee g)^{\uparrow}$. (c) Le régularisé de $\mu_1 + (x, S) = \mu_2 + (x, S)$.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées,

(i) il existe une fibre S strictement incluse dans $\mu_1(x)$ et $\mu_2(x)$ telle que x est simple pour S dans les deux revêtements μ_1 et μ_2,

(ii) les revêtements μ_1 et μ_2 vérifient les hypothèses du théorème 9.4.4,

alors les revêtements μ et ν sont fortement équivalents.

9.4.2 Revêtements $(1, -1, 1)$-réguliers

Les revêtements $(1, -1, 1)$-réguliers sont les duaux des revêtements $(-1, 1, -1)$-réguliers (proposition 9.2.10-*(v)*). Ainsi, nous pouvons utiliser les résultats de la section précédente pour obtenir des résultats similaires pour les revêtements $(1, -1, 1)$-réguliers.

Nous définissons maintenant trois prédicats qui correspondent aux prédicats (9.4), (9.5) et (9.6) utilisés dans la section 9.4.1. Dans ces prédicats, x est une facette de $\mathbb{F}^3$ et a une 1-face de x.

$$\exists\, k_0 \in \{0, 1\}, \forall\, k \in \{k_0, 2, 3\}, \qquad S \cap \mu(a_1) \cap \mu(a_k^p) \subseteq \mu(x) \cup \mu(a_2) \cup \mu(a_3) \tag{9.7}$$

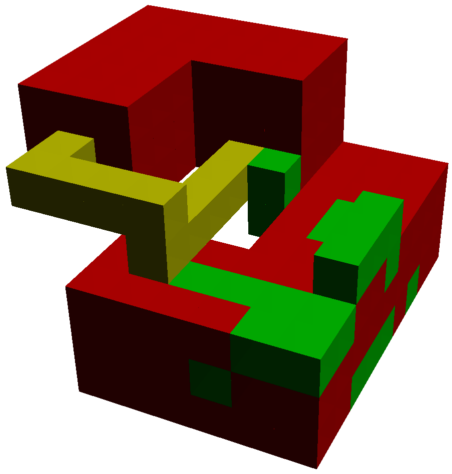
$$\exists\, k_0, k_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, k_0 \neq k_1, \forall\, k \in \{k_0, k_1\}, \qquad S \cap \mu(a_1) \subseteq \mu(x) \cup \mu(a_2) \cup \mu(a_3) \cup \mu(a_k^q) \tag{9.8}$$

$$\exists\,!\, k_0 \in \{2, 3\}, \forall\, k \in \{0, 1, k_0\}, \qquad S \cap \mu(a_1) \cap \mu(a_k^r) \subseteq \mu(x) \cup \mu(a_2) \cup \mu(a_3) \tag{9.9}$$

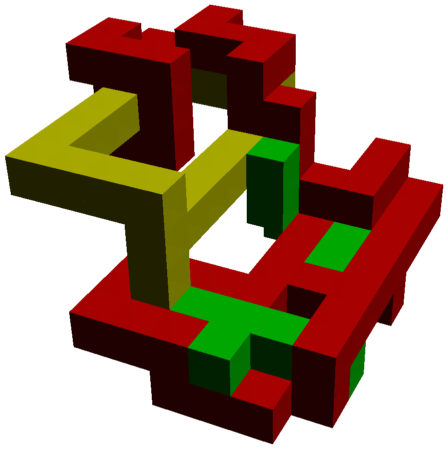
Il est clair que le prédicat (9.7), resp. (9.8), resp. (9.9), est vérifié par une 1-face y incluse dans une facette x de $\mathbb{F}^3$ si et seulement si la face y vérifie le prédicat (9.4), resp. (9.5), resp. (9.6), dans le revêtement $\neg\mu$ à condition de remplacer la fibre S de $\mathcal{G}_T$ par la fibre S^c de $\mathcal{F}_T$. Nous pouvons maintenant définir les types des 1-faces d'un revêtement $(1, -1, 1)$-régulier de la même manière que ceux d'un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier.

Une 1-face y incluse dans une facette x est de *type 1* (resp. *type 2*, *type 3*) si :

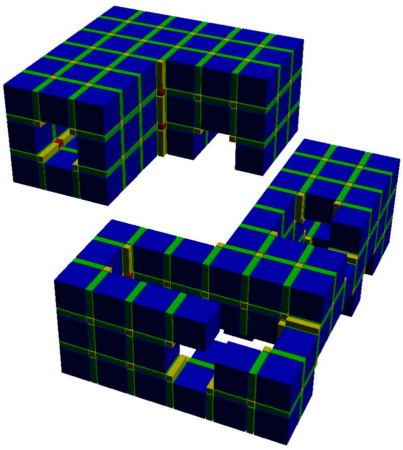
– le prédicat (9.7) (resp. (9.8), (9.9)) est vrai pour $a = y$ et pour un certain $p \in \{1, 2\}$ (resp. $q \in \{1, 2\}$, $r \in \{1, 2\}$), et



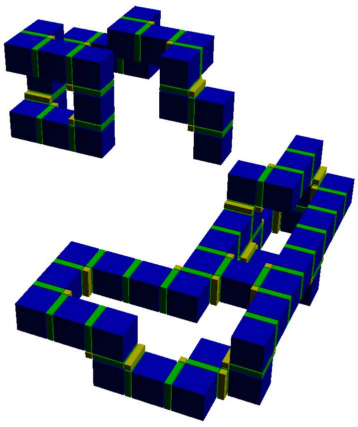
(a)



(b)

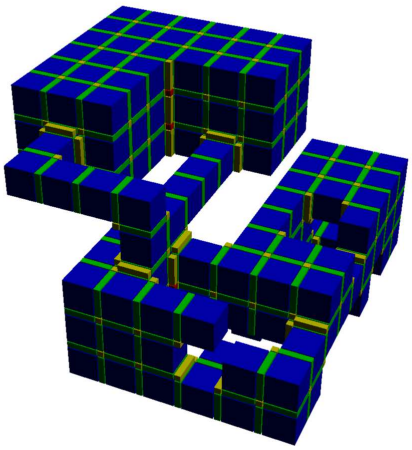


(c)

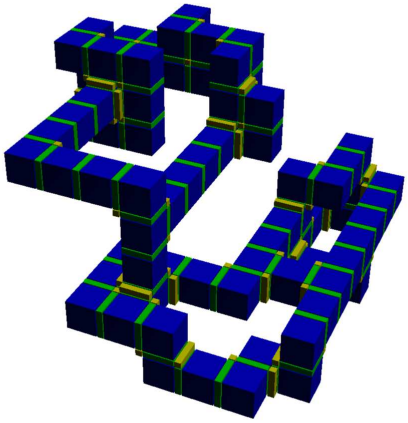


(d)

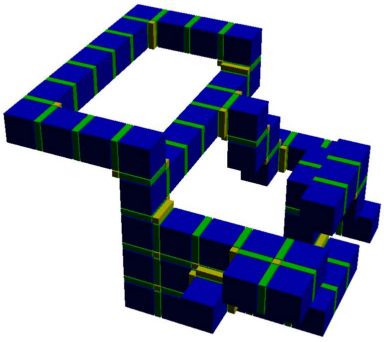
FIGURE 9.12 – Amincissement des labels d'un revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier. (a) Une image de labels digitale λ. (b) Les labels ont été amincis en utilisant le théorème 9.4.4 appliqué au revêtement $(-1, 1, -1)$-régulier μ associé à λ, avec $S = \emptyset$. Nous montrons l'image digitale associée au revêtement ν obtenu. (c,d) Les feuillets μ_{rouge} et ν_{rouge}.



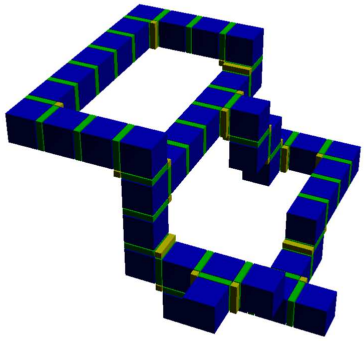
(e)



(f)



(g)



(h)

FIGURE 9.12 – (continuée) (e,f) Les feuillets $\mu_{\text{rouge+jaune}}$ et $\nu_{\text{rouge+jaune}}$. (g,h) Les feuillets $\mu_{\text{vert+jaune}}$ et $\nu_{\text{vert+jaune}}$.

– le prédicat (9.8) (resp. (9.9), (9.7)) est vrai pour $a = y$ et $q = 3 - p$ (resp. $r = 3 - q$, $p = 3 - r$).

Trois 1-faces y, y', y'' incluses dans x, sont *associées* si elles ont une 0-face en commun, appelée le *sommet* de l'association, et le prédicat (9.9), dans lequel r est le numéro porté par le sommet, est vrai pour deux d'entre elles, de type 2 ou 3.

Théorème 9.4.7. *Soit T un treillis atomique. Soit $\mu : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ un revêtement $(1, -1, 1)$-régulier. Soit x une facette de $\mathbb{F}^3$ et S une fibre incluant strictement $\mu(x)$ et telle que x est simple pour S.*
Si

(i) toutes les 1-faces de x sont de type 1, 2 ou 3,

(ii) toutes les 1-faces de x de type 3 sont en association,

(iii) les seules associations dans x impliquent trois faces de types distincts,

alors le régularisé de $\mu + (x, S)$ en x est fortement équivalent au revêtement μ.

Démonstration. Puisque μ est un revêtement $(1, -1, 1)$-régulier, le revêtement $\neg\mu$ est $(-1, 1, -1)$-régulier et x est simple pour S^c dans le revêtement $\neg\mu$ (proposition 9.2.11). Nous observons aussi que $S^c \in \mathcal{F}_T$ et que S^c est inclus dans $\neg\mu(x)$. Il est évident alors que l'image $\neg\mu$ vérifie les hypothèses du théorème 9.4.4 car si une face y vérifie le prédicat (9.7) (resp. (9.8), (9.9)) dans l'image μ, elle vérifie le prédicat (9.4) (resp. (9.5), (9.6)) dans l'image $\neg\mu$. Donc, le revêtement $\neg\mu$ est fortement équivalent au régularisé (relativement à la fonction de connexité $(-1, 1, -1)$) du revêtement $\neg\mu + (x, S^c) = \neg(\mu + (x, S))$. Par conséquent, le revêtement μ est fortement équivalent au régularisé de $\mu + (x, S)$ (proposition 9.2.10-*(v),(vii)*). □

Nous considérons maintenant deux revêtements, μ_1 et μ_2, $(1, -1, 1)$-réguliers et x une facette de $\mathbb{F}^3$ telle que $\mu_1(x) \neq \mu_2(x)$ et μ_1 et μ_2 coïncident sur les autres facettes de $\mathbb{F}^3$. Le corollaire suivant fournit des conditions suffisantes pour que les revêtements μ_1 et μ_2 soient fortement équivalents.

Corollaire 9.4.8. *Soit T un treillis atomique. Soit $\mu_1, \mu_2 : \mathbb{F}^3 \to \mathcal{G}_T$ deux revêtements $(1, -1, 1)$-réguliers tels qu'il existe une facette x de $\mathbb{F}^3$ avec $\mu_1(x) \neq \mu_2(x)$ et μ_1 et μ_2 coïncident sur les autres facettes de $\mathbb{F}^3$.*

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées,

(i) il existe une fibre S incluant strictement $\mu_1(x)$ et $\mu_2(x)$ telle que x est simple pour S dans les deux revêtements μ_1 et μ_2,

(ii) les revêtements μ_1 et μ_2 vérifient les hypothèses du théorème 9.4.7,

alors les revêtements μ et ν sont fortement équivalents.

Sur la figure 9.13 l'image de labels digitale (identique à celle de la figure 9.12) est interpretée avec la $(18, 6)$-adjacence et ainsi est associée à un revêtement pur et $(1, -1, 1)$-régulier (qui n'est pas représenté). Le même algorithme que celui utilisé pour la figure 9.12 est appliqué sur ce revêtement (avec les adaptations nécessaires pour tenir compte du changement de fonction de connexité) pour amincir tous les labels. Le résultat montre une faiblesse de la méthode suggérée dans le commentaire qui précède le corollaire 9.4.6 et illustré par la figure 9.11 (cette méthode est utilisée dans l'algorithme que nous avons implanté). Le voxel x (voir la figure) ne peut pas être supprimé car il n'a pas de 6-voisin ayant le même label. Parfois, il est possible de contourner ce manque de puissance de l'algorithme en utilisant des marqueurs (des voxels qui ne doivent pas être modifiés) pour guider le déroulement de l'algorithme comme sur la figure (e) où, grâce à un seul marqueur (x_0 sur la figure), nous avons pu mener plus loin le processus d'amincissement du revêtement.

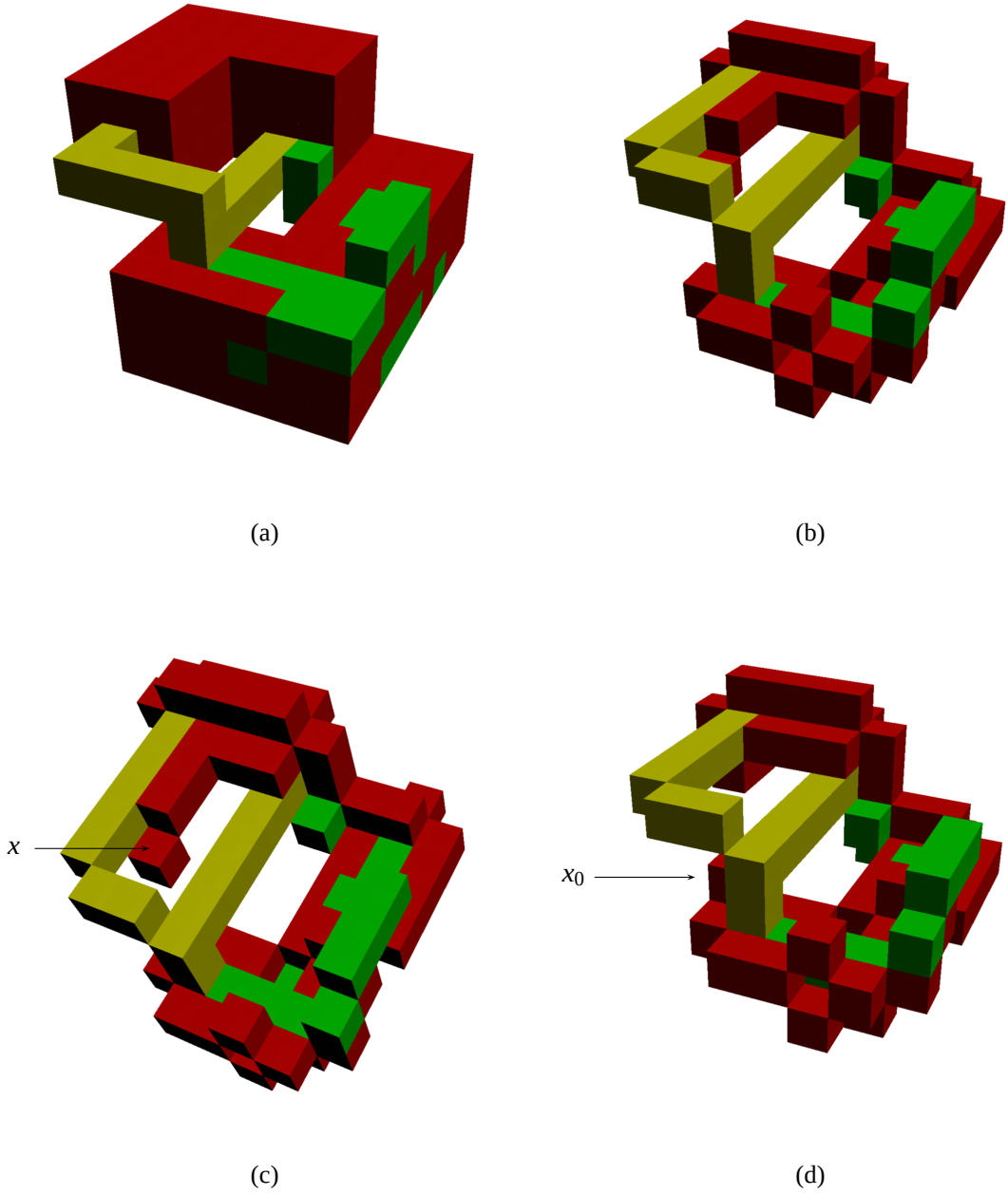


FIGURE 9.13 – Amincissement des labels d'un revêtement $(1, -1, 1)$-régulier. (a) Une image de labels digitale λ. (b) Les labels ont été amincis en utilisant le critère du théorème 9.4.7 appliqué sur ν, le revêtement $(1, -1, 1)$-régulier associé à l'image λ. Nous montrons l'image de labels digitale associée au revêtement μ obtenu. (c) Une autre vue du résultat où nous pouvons apercevoir un voxel x qui bloque le processus d'amincissement car il n'a pas de 6-voisin portant le même label. (d) Le même algorithme a été utilisé sur le revêtement ν mais le voxel x_0 a été préalablement marqué (il ne peut pas être modifié par l'algorithme) pour éviter que le voxel x ne tombe dans la configuration de la figure (c).

9.5 Conclusion

Dans une image de labels $\lambda : \mathbb{Z}^n \to L$, les supports des proto-labels (les blocs de la partition totale ou partielle de l'espace associée à la segmentation dont l'image de labels est issue) engendrent un treillis atomique $(A_\lambda, \cup, \cap)$. Ce treillis A_λ et son dual $A_{\neg\lambda}$ contiennent tous les ensembles dont les topologies définissent conjointement la topologie de λ, en tant qu'image de labels. Grâce aux notions présentées dans ce chapitre, nous pouvons associer à l'image λ munie d'un couple d'adjacence standard un revêtement μ tel que chaque ensemble $E = \langle l_1 \rangle_\lambda \cup \langle l_2 \rangle_\lambda \cup \ldots \langle l_k \rangle_\lambda$ du treillis A_λ (les l_i sont des proto-labels), ou chaque ensemble E^c du dual $A_{\neg\lambda}$, est envoyé sur un sous-ensemble $\langle l_1 \vee l_2 \vee \ldots l_k \rangle_\mu$ de $\mathbb{F}^n$, ou sur son complémentaire dans $\mathbb{F}^n$, régulier (au sens ou son intérieur et son adhérence sont des ouverts/fermés réguliers), dont les composantes connexes sont en correspondance bi-univoque avec celles de E, ou de E^c, et dont les groupes fondamentaux sont isomorphes à ceux des composantes connexes de E, ou de E^c. De cette façon, tous les ensembles dont nous voulons scruter la topologie (les éléments de A_λ et de $A_{\neg\lambda}$) sont plongés dans un espace topologique, en accord avec le choix d'une paire d'adjacences. La notion de face simple pour une fibre nous permet alors de caractériser des modifications locales du revêtement qui préservent l'ensemble des différentes composantes connexes et tous leurs groupes d'homotopie tandis que les théorèmes 9.4.4 et 9.4.7, et leurs corollaires, peuvent être implantés directement dans $\mathbb{Z}^n$ pour permettre le changement de label d'un xel dans l'image de labels.

Chapitre 10

Conclusions et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons proposé un cadre conceptuel pour la modélisation topologique des images n-aires définies sur des ensembles finis et, plus généralement, sur des ensembles discrets. Afin de permettre la prise en compte des relations topologiques intra-labels et inter-labels nous avons muni ceux-ci d'une structure de treillis atomique dont les atomes sont les labels initiaux, les proto-labels. Ainsi, à la partition initiale de l'image en labels, nous pouvons associer une collection de supports (chapitre 8), ou d'images binaires (chapitre 9), chacun étant associé à un label particulier du treillis. En procédant de cette façon, la prise en compte de la topologie inter-(proto-)labels procède de la topologie classique ensembliste (intra-label) si l'espace support est muni d'une structure topologique. Cette structure peut être obtenue en plongeant l'espace discret $\mathbb{Z}^n$ dans l'espace des complexes cubiques $\mathbb{F}^n$ et en faisant appel à la notion d'image régulière introduite au chapitre 7. À l'intérieur de ce cadre, nous avons essentiellement porté notre attention sur les déformations homotopiques en introduisant en imagerie digitale les notions de points β-simple et γ-simple empruntés à la topologie algébrique après avoir prouvé la compatiblité de l'approche algébrique classique (à temps continu) avec celle à temps discret utilisée généralement en topologie digitale (chapitre 6).

Nous achevons ce manuscript avec plusieurs interrogations à l'esprit qui peuvent constituer de futurs axes de travail.

- En premier lieu, nous avons implanté en machine les différentes notions définies dans le mémoire pour les tester sur quelques petits exemples (de l'ordre de quelques milliers de pixels ou voxels). Cela nous a permis par exemple de corriger les premières conditions suffisantes que nous avions obtenues pour la modification locale d'un revêtement dans un espace de dimension 3 (cf 9.4.1) dont la puissance était trop faible. Néanmoins, ces tests ne sont pas suffisants et nous souhaiterions étudier la complexité et l'intérêt pratique de nos propositions dans des applications « réelles ».
- Nous souhaiterions étudier les conséquences de la restriction de l'espace ambiant à une surface. Quelles propriétés nouvelles pourrions-nous obtenir ? En particulier, nous nous demandons si le théorème 6.3.12, qui est énoncé pour l'espace des complexes cubiques ne pourrait pas être étendu à des surfaces telles que celles définies par Evako *et al.* (1996).
- Evako (2011) a décrit récemment des notions de type d'homotopie et de point simple dans un graphe. Ces notions font appel à des déformations élémentaires en ce qui concerne le type d'homotopie et à des voisinages contractiles en ce qui concerne les points simples, ce qui les rend proches d'une part des déformations que nous décrivons dans la section 6.2.2 pour des graphes de comparabilité et d'autre part des différents types de points (points unipolaires, β-simples et γ-simples) utilisés dans notre travail. Il serait intéressant de mener une comparaison des deux points de vue.
- Comme nous l'avons dit dans la partie I, section 4.2, en dimension 2 un ensemble simple se réduit à une « somme » de points simples, c'est-à-dire qu'un ensemble simple peut être

supprimé d'un objet par retrait séquentiel de points simples. Cela n'est plus vrai à partir de la dimension 3 (Passat *et al.* (2007, 2008), Passat et Mazo (2009), Mazo et Passat (2010)) : il existe des ensembles simples qui ne contiennent aucun point simple. Comment transposer les travaux précédents sur les ensembles simples (tous conduits, sauf le premier, dans le cadre des complexes cubiques avec des points simples définis à l'aide de collapsus) dans le cadre des EPO en utilisant, et en comparant, les différents types de points simples utilisés dans notre mémoire ? Comment étendre ces ensembles simples aux images de labels ?

- Nous avions envisagé de consacrer un chapitre à la définition d'opérateurs morphologiques pour les images binaires ε-régulières puis pour les revêtements en s'appuyant sur les résultats de Ronse (2006). Nous n'avons pas pu mener à terme ce travail faute de temps. Cela peut être un autre axe de travail sur les images de labels.

Liste des publications

Publications des travaux de thèse

Revue internationale avec comité de lecture

- *Topology on digital label images*
  L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, C. Ronse
  Journal of Mathematical Imaging and Vision (À paraître)
- *Digital imaging : a unified topological framework*
  L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, C. Ronse
  Journal of Mathematical Imaging and Vision (À paraître)
- *Paths, homotopy and reduction in digital images*
  L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, C. Ronse
  Acta Applicandae Mathematicae, Vol. 113, Num. 2, Springer, pp 167–193 (2011)

Conférence internationale avec comité de lecture, avec actes

- *A framework for label images*
  L. Mazo
  CTIC 2012, Springer, LNCS (À paraître)
- *A unified topological framework for digital imaging*
  L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, C. Ronse
  DGCI 2011, Springer, LNCS, pp 163–174, Vol. 6607 (2011)

Publications liées au master recherche

Revue internationale avec comité de lecture

- *Topological properties of thinning in 2-D pseudomanifolds*
  N. Passat, M. Couprie, L. Mazo, G. Bertrand
  Journal of Mathematical Imaging and Vision, Vol. 37, Num. 1, Springer, pp 27–39 (2010)
- *On 2-dimensional simple sets in n-dimensional cubic grids*
  L. Mazo, N. Passat
  Discrete and Computational Geometry, Vol. 43, Num. 4, Springer, pp 893–913 (2010)
- *An introduction to simple sets*
  N. Passat, L. Mazo
  Pattern Recognition Letters, Vol. 30, Num. 15, pp 1366–1377 (2009)

Conférence internationale avec comité de lecture, avec actes

- *Topology-preserving thinning in 2-D pseudomanifolds*
  N. Passat, M. Couprie, L. Mazo, G. Bertrand
  DGCI 2009, Springer, Lecture Notes in Computer Science, pp 218–229, Vol. 5810 (2009)
- *Minimal simple sets : A new concept for topology-preserving transformations*
  N. Passat, M. Couprie, L. Mazo, G. Bertrand
  CTIC 2008, 1st Workshop on Combinatorial Topology in Image Context, Poitiers, France (juin 2008)

Annexe A

Topologie

Nous rappelons quelques définitions et propriétés de topologie utilisées dans notre travail. Le lecteur souhaitant obtenir plus de détails sur une notion particulière pourra consulter un ouvrage de topologie générale comme par exemple Munkres (1999), Viro *et al.* (2008) ou un ouvrage de topologie algébrique comme Hatcher (2002), Maunder (1996), May (1999), Spanier (1994).

A.1 Définition

Soit X un ensemble dont les éléments seront appelés des points. Une *topologie* sur X est une collection $\mathcal{U}$ de sous-ensembles de X, appelés *ouverts*, tels que :

i $\emptyset, X$ sont des ouverts ;

ii toute intersection finie d'ouverts est un ouvert ;

iii toute union d'ouverts est un ouvert.

Le complément dans X d'un ouvert est appelé un *fermé*. De la définition précédente, on déduit que toute union finie de fermés est un fermé et que toute intersection de fermés est un fermé. Un ensemble d'ouverts est une *base d'ouverts* de la topologie si tout ouvert de la topologie est une union d'ouverts de la base. Un ensemble d'ouverts est une *pré-base d'ouverts* de la topologie si l'ensemble des intersections finies des ouverts de la pré-base est une base de la topologie. Un *voisinage* d'un point $x \in X$ est un sous-ensemble de X incluant un ouvert contenant x.

L'*adhérence* $\overline{Y}$ (notée aussi $\mathrm{A}(Y)$) d'un sous-ensemble $Y \subseteq X$ est le plus petit fermé incluant Y. L'*interieur* Y° d'un sous-enesmble $Y \subseteq X$ est le plus grand ouvert inclus dans Y. C'est aussi l'union de tous les ouverts inclus dans Y. Adhérence et intérieur sont des notions duales. En effet, on a $Y^\circ = X \setminus \left(\overline{X \setminus Y}\right)$ et $\overline{Y} = X \setminus (X \setminus Y)^\circ$. Un ouvert Y est *régulier* s'il est égal à l'intérieur de son adhérence ($Y = (\overline{Y})^\circ$) et un fermé est *régulier* s'il est égal à l'adhérence de son intérieur ($Y = \overline{Y^\circ}$).

Pour tout sous-ensemble $Y \subseteq X$, l'ensemble $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y \mid U \in \mathcal{U}\}$ est une topologie sur Y appelée la *topologie induite* par $\mathcal{U}$ sur Y. L'ensemble $\{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X appelée topologie *triviale* ou *indiscrète*. L'ensemble $\mathcal{P}(X)$ de tous les sous-ensembles de X est une topologie qui est appelée topologie *discrète* en mathématiques. Ici, nous l'appellerons topologie *totalement discrète* car dans le domaine des sciences de l'image le mot discret renvoie seulement au caractère fini ou dénombrable de l'espace.

A.2 Fonctions continues et classification des espaces topologiques

Soit X, Y deux espaces topologiques (c'est-à-dire des espaces munis d'une topologie). Une fonction $f : X \to Y$ est *continue* si la préimage de tout ouvert de Y est un ouvert X. En particulier, si la topologie sur Y a une base $\mathcal{B}$ et la préimage de tout ensemble de $\mathcal{B}$ est un ouvert de X, alors f est continue. Si f est bijective et f et f^{-1} sont toutes les deux continues, alors f est un *homéomorphisme* et les espaces X et Y sont *homéomorphes*.

Si Y est un sous-ensemble de X, Y est un *rétracte* de X s'il existe une fonction continue, appelée *rétraction*, $r : X \to Y$ telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in Y$. Une fonction contine $r : X \times [0,1] \to X$ est une *rétraction par déformation (forte)* si, pour tout x dans X, y dans Y on a $r(x,0) = x$, $r(x,1) \in Y$ et $r(y,1) = y$ (et, pour tout t dans $[0,1]$, $r(y,t) = y$). Si une telle fonction existe, Y est un *rétracte par déformation (forte)* de X.

Quand Y n'est pas un sous-espace de X, il existe une notion similaire à celle de rétraction. Deux fonctions continues $f, g : X \to Y$ sont *homotopes* s'il existe une fonction continue, appelée *homotopie*, $h : X \times [0,1] \to Y$ telle que $h(x,0) = f(x)$ et $h(x,1) = g(x)$ pour tout $x \in X$. Si de plus, pour toute valeur de t, la fonction $h(.,t)$ est un homéomorphimse, on dit que f et g sont isotopes et h est une isotopie. Les espaces X et Y sont *homotopiquement équivalents* (ou ont le même *type d'homotopie*) s'il existe deux fonctions continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$, appelées *équivalences d'homotopie*, telles que $g \circ f$ est homotope à la fonction identité id_X et $f \circ g$ est homotopique à id_Y. Si X et Y sont homéomorphes, ils sont homotopiquement équivalents : étant donné un homéomorphisme φ entre X et Y, φ et φ^{-1} sont des équivalences d'homotopie entre X et Y. L'inverse est faux en général (par exemple, une boule est homotopiquement équivalente – mais pas homéomorphe – à un point). Un espace topologique est *contractile* s'il a le type d'homotopie d'un point.

A.3 Attributs topologiques

Un espace topologique X est *connexe* s'il ne peut pas être partitionné en deux ouverts non vides. L'union de deux sous-espaces connexes de X d'intersection non vide est connexe. Les *composantes connexes* de X sont les sous-espaces connexes de X maximaux (pour l'inclusion). Tout point x de X appartient à exactement une composante connexe. Les composantes connexes d'un espace X forment donc une partition de X. Notons aussi que l'image d'un connexe par une application continue est connexe.

Soit x_1, x_2 deux points de X. Un *chemin* de x_1 à x_2 dans X est une fonction continue $\pi : [0,1] \to X$ avec $\pi(0) = x_1$ et $\pi(1) = x_2$. Un espace X est *connexe par arcs* si pour toute paire (x_1, x_2) de points de X, il existe un chemin de x_1 à x_2 dans X. Un espace connexe par arcs est connexe.

Un espace X est *compact* si de toute collection d'ouverts recouvrant X, c'est-à-dire dont l'union est x (une telle collection est appelée *recouvrement*), on peut extraire un sous-recouvrement fini. L'image d'un compact par une application continue est encore un compact.

Un espace X satisfait l'*axiome de séparation* T_0 (ou, plus simplement, est un *espace* T_0) si pour toute paire (x_1, x_2) $(x_1 \neq x_2)$ dans X il existe un ouvert de X qui contient un élément de la paire et pas l'autre. Il est équivalent de dire que x_1 n'appartient pas à l'adhérence de $\{x_2\}$ ou x_2 n'appartient pas à l'adhérence de $\{x_1\}$. Si, pour toute paire (x_1, x_2) $(x_1 \neq x_2)$, il existe deux ouverts de X, l'un contenant x_1 et pas x_2, l'autre contenant x_2 et pas, ou, ce qui revient au même, x_1 n'appartient pas à l'adhérence de $\{x_2\}$ *et* x_2 n'appartient pas à l'adhérence de $\{x_1\}$, c'est-à-dire, si pour toute $x \in X$, $\{x\}$ est fermé, alors X est un *espace* T_1. Les *espaces de Hausdorff*, ou *espaces* T_2, comme $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie usuelle, ont une propriété plus forte : deux points distincts x_1 et x_2 possèdent toujours des voisinages distincts (il existe deux ouverts de X, l'un contenant x_1, l'autre contenant x_2, qui ne s'intersectent pas). Tout T_2-espace est T_1 et tout T_1-espace est T_0.

Une *n-variété topologique* est un espace de Hausdorff dans lequel tout point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

A.4 Topologie algébrique

Soit X un espace topologique. Deux chemins p, q dans X sont *équivalents* s'ils ont les mêmes extrémités (c'est-à-dire $p(0) = q(0)$ et $p(1) = q(1)$) et s'ils sont homotopes par une homotopie h telle que $h(0,u) = p(0) = q(0)$ et $h(1,u) = p(1) = q(1)$ pour tout $u \in [0,1]$. Il est facile de vérifier que cette relation entre chemins est réellement une relation d'équivalence. On écrit $[p]$ pour la classe d'équivalence du chemin p. Si p, q sont deux chemins dans X tels que $p(1) = q(0)$, on définit le produit de ces deux chemins par $p \cdot q$ par :

$$(p \cdot q)(t) = \begin{cases} p(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ q(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Ce produit est compatible avec la relation d'équivalence sur les chemins définie juste auparavant et on écrit $[p] \cdot [q] = [p \cdot q]$. Soit x un point de X. Un *lacet* enraciné en x est un chemin dans X qui part de x et fini en

x. Le produit de deux lacets en x est un lacet en x et l'ensemble $\pi_1(X, x)$ des classes d'équivalences des lacets enracinés en x est un groupe pour ce produit. Il est appelé le *groupe fondamental* de X (avec *point de base* x) ou le *premier groupe d'homotopie* de X. Si X est connexe par arcs, le groupe $\pi_1(X, x)$ ne dépend pas du point de base (c'est-à-dire pour tous points $x, y \in X$, $\pi_1(X, x)$ et $\pi_1(X, y)$ sont isomorphes). On définit les groupes d'homotopie d'ordres supérieurs en remplaçant les lacets enracinés en x par des applications continues de $[0, 1]^n$ vers X qui envoient la frontière du n-cube sur x. Le produit de deux applications de ce type est défini en identifiant deux faces des deux n-cubes :

$$(p \cdot q)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} p(2t_1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } t_1 \in [0, \frac{1}{2}], \\ q(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) & \text{si } t_1 \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Par convention, l'ensemble des composantes connexes de X est noté $\pi_0(X, x)$, mais il est dépourvu d'une structure de groupe.

Soit X et Y deux espaces topologiques avec les points de base x et y. Une application continue $f : X \to Y$ est une *équivalence d'homotopie faible* si les morphismes $f_n : \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, y)$ définis par $f_n([p]) = [f \circ p]$ sont tous bijectifs (f_0 est seulement une bijection, pas un morphisme). Deux espaces X, Y sont *faiblement homotopiquement équivalents* s'il existe une suite d'espaces $X_0 = X, X_1, \ldots, X_r = Y$ ($r \geqslant 1$) et une suite d'équivalences d'homotopie faible $X_{i-1} \to X_i$ ou $X_i \to X_{i-1}$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. Deux espaces X et Y faiblement homotopiquement équivalents ont des groupes d'homotopie isomorphes.

Deux espaces homotopiquement équivalents sont faiblement homotopiquement équivalents (l'inverse n'est pas vrai en général mais le théorème de Whitehead Whitehead (1949a,b) montre que cela est vrai dans un espace qui est la réalisation géométrique d'un complexe (voir l'annexe A.5).

Le théorème de Jordan est un aspect important de la topologie de $\mathbb{R}^2$. Il peut être obtenu en utilisant les notions d'homotopie et de groupe fondamental.

Théorème A.4.1. *Dans $\mathbb{R}^2$, une courbe fermée simple C sépare l'espace (muni de sa topologie usuelle) en deux composantes connexes dont l'une est bornée et l'autre non. La courbe C est la frontière de ces deux composantes connexes.*

Ce résultat se généralise à $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) sous le nom de théorème de Jordan-Brouwer (l'image continue et injective de la sphère S_{n-1} dans $\mathbb{R}^n$ sépare cet espace en deux composantes connexes dont l'une est bornée et l'autre non et qui ont pour frontière l'image en question).

A.5 Complexes simpliciaux

Un *complexe simplicial abstrait* est un ensemble K de sous-ensembles non vides [1] appelés *simplexes*, d'un ensemble V, tel que tout sous-ensemble non vide d'un simplexe est un simplexe et tout élément de V appartient à au moins un simplexe. Les élements de V sont appelés *sommets*. Un sous-ensemble (propre) non vide d'un simplexe est une *face* (*propre*) du simplexe considéré. La *dimension* d'un simplexe fini est le nombre de ses sommets moins un [2] et la dimension d'un complexe est le maximum des dimensions de ses simplexes si un tel maximum existe. Une *k-face* ($k \in \mathbb{N}$) d'un simplexe est une face du simplexe de dimension k.

Des points de $\mathbb{R}^n$ sont *géométriquement indépendant* si toute k-variété affine de $\mathbb{R}^n$ ($k \leqslant n$) contient au plus $k + 1$ de ces points. Le simplexe *géométrique* engendré par un ensemble de points géométriquement indépendants est l'enveloppe convexe de ces points et ceux-ci sont les *sommets* du simplexe géométrique. Une *k-face* d'un simplexe (géométrique) est un simplexe engendré par k sommets du simplexe. Un *complexe simplicial (géometrique)* K est un ensemble de simplexes dans $\mathbb{R}^n$ tel que toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K et toute intersection de deux simplexes de K est un simplexe de K. Les *faces* du complexe

1. Certains auteurs ne font pas cette restriction et acceptent l'ensemble vide comme simplexe. Nous utilisons cette possibilité dans la proposition 6.3.13.

2. L'ensemble vide a donc pour dimension -1 lorsqu'il est considéré comme un simplexe.

sont les faces de ses simplexes. Le sommets d'un complexe sont les sommets de ses simplexes. Les sommets d'un complexe ne sont généralement pas indépendants. La *réalisation geometrique* $|K|$ d'un complexe K est l'union de ses simplexes munie de la topologie dont les ensembles fermés sont les parties dont l'intersection avec chaque simplexe est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. Comme une union de fermés n'est pas toujours un fermé, cette topologie peut être différente de la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. Cependant, si le complexe est *localement fini*, c'est-à-dire si chaque sommet appartient à un nombre fini de simplexes, cette topologie correspond à la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$. Les *simplexes ouverts* de $|K|$ sont les intérieurs de ses k-faces ($k \geqslant 1$) et ses 0-faces. Chaque point x de $|K|$ appartient à un unique simplexe ouvert engendré par des sommets $v_1, \ldots, v_k$ ($k \geqslant 1$) et il existe un unique k-uplet $(b_1, \ldots, b_k)$ dans $[0,1]^k$ tel que $x = \sum_{i=0}^{k} b_i\, v_i$. Étant donnée une application f entre l'ensemble des sommets de deux complexes K and K', la fonction $|\mathcal{K}(f)|$ qui associe à chaque point $x = \sum_{i=0}^{k} b_i\, v_i$ de $|K|$ le point y de $|K'|$ défini par $y = \sum_{i=0}^{k} b_i\, f(v_i)$ est *l'application simpliciale associée* f. Cette application est continue.

La *réalisation* d'un complexe simplicial abstrait K est un complexe simplicial géométrique dont les sommets sont en correspondance bi-univoque avec les sommets de K et dont les simplexes sont engendrés par les images des sommets de K. Tout complexe simplicial abstrait de dimension n peut être réalisé dans $\mathbb{R}^{2n+1}$ Hilton et Wylie (1960).

Un chemin d'arêtes dans un complexe simplicial K est une suite de sommets du complexe K telle que deux sommets consécutifs appartiennent à une même 1-face du complexe. Un lacet d'arêtes est un chemin d'arêtes dont le premier et le dernier sommets sont identiques. Ce premier et dernier sommet est la *racine*, ou le *point de base* du lacet. Deux chemins d'arêtes sont *immédiatement équivalents* si l'un est obtenu à partir de l'autre en insérant un sommet, de sorte que le sommet inséré avec les deux sommets entre lesquels il est inséré engendrent une 2-face du complexe K. Deux chemins d'arêtes p et q sont *équivalents* s'il existe une suite $(p_i)_{i=0}^{r}$ ($r \in \mathbb{N}$) telle que $p_0 = p$, $p_r = q$ et p_k est immédiatement équivalent à p_{k-1} pour tout $k \in [\![1, r]\!]$. Cette relation est réellement une relation d'équivalence et l'ensemble des classes d'équivalences des lacets enracinés en un même sommet s, muni du produit $(p_i)_{i=0}^{r}.(p'_i)_{i=0}^{s} = (p''_i)_{i=0}^{r+s}$ où $p''_i = p_i$ si $i \leq r$ et $p''_i = p'_{i-r}$ si $i \geq r$, est un groupe, appelé groupe des lacets d'arêtes du complexe K de point de base s. Il est isomorphe au groupe fondamental, avec point de base s, de la réalisation géométrique du complexe K (Spanier (1994)).

A.6 Complexes polyédraux

La notion de complexe polyédral généralise la notion de complexe simplicial. Un exemple de complexes polyédraux particulièrement important pour les images digitales est celui des complexes cubiques dont les sommets sont des points de $\mathbb{Z}^n$.

Une *polyèdre* ouvert/fermé de dimension m est une intersection, non vide et bornée, d'un nombre fini de demi-hyperplans ouverts/fermés d'un plan R de dimension m de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ ($m \leq n$). L'intersection d'un hyperplan de R avec l'adhérence d'un polyèdre P est une $(m-1)$-*face* de P si cet hyperplan n'intersecte pas l'intérieur de P. Une $(m-1)$-face de P est elle-même un polyèdre (de dimension $m-1$). Une k-face d'une $(m-1)$-face d'un polyèdre P est une k-face de P. Les *sommets* d'un polyèdre sont les 0-faces de ce polyèdre.

Un *complexe polyédral* K est un ensemble de polyèdres dans $\mathbb{R}^n$ tel que toute face d'un polyèdre de K est un polyèdre de K et toute intersection de deux polyèdres de K est un polyèdre de K. Les *faces* du complexe sont les faces de ses polyèdres. Le sommets d'un complexe sont les sommets de ses polyèdres. La *réalisation géométrique* d'un complexe polyédral K est la réunion de ses polyèdres.

Les définitions et propriétés suivantes concernent aussi bien les complexes polyédraux que simpliciaux (qui sont des types particuliers de complexes polyédraux).

Un sous-complexe d'un complexe K est un complexe dont les sommets sont des sommets de K et dont les polyèdres sont des polyèdres de K. Une *subdivision* K_2 d'un complexe polyédral K_1 est un complexe polyédral qui a la même réalisation géométrique que K_1 et tel que chaque face de K_2 est incluse dans une face de K_1. La *subdivision barycentrique* K_2 d'un complexe polyédral K_1 est la subdivision de K_1 dont les sommets sont

les isobarycentres des faces de K_1 et telle qu'une face f de K_2 a pour sommets l'isobarycentre d'une face g de K_1 et l'ensemble des sommets d'une face de g. Les complexes sont des EPO pour l'inclusion. Une *facette* d'un complexe K est une face maximale (pour l'inclusion). Un complexe est *pur* si toutes ses facettes ont même dimension. L'*étoile* d'une face f est l'ensemble des faces du complexe qui incluent f. Nous la notons $f^{\uparrow}$. L'*adhérence* d'une face f, ou d'un ensemble E de faces, est l'ensemble des faces incluses (au sens large) dans f, ou dans une face de E. Nous les notons $f^{\downarrow}$ et $E^{\downarrow}$. L'adhérence d'une face est un complexe et tout complexe ayant un maximum est l'adhérence de son maximum. Le *lien* d'un sommet s est l'ensemble des faces du complexe qui sont incluses dans une face de l'étoile de $\{s\}$ et qui ne contiennent pas s. Le lien est un complexe.

Un complexe est une *n-sphère combinatoire* s'il existe un homéomorphisme linéaire par morceaux entre la réalisation géométrique de ce complexe et la frontière d'un polyèdre de dimension $n+1$. Un complexe est une *n-variété combinatoire* si le lien de chaque sommet est une $(n-1)$-sphère combinatoire.

Une *paire libre* du complexe K est une paire de faces (f,g) telle que f est la seule face du complexe incluant g (autrement dit, l'étoile de g ne contient que f et g). Si (f,g) est une paire libre de K, l'ensemble $K\setminus\{f,g\}$ est un *collapsus élémentaire* de K. S'il existe une suite $(K_i)_{i=0}^{r}$ de sous-complexes de K tels que $K_0 = k$ et K_i est un collapsus de K_{i-1} pour tout $i \in [\![1,r]\!]$ alors on dit que K_r est un collapsus de K (ou que K *collapse* sur K_r), ou que K est une expansion de K_r, et on note $K_1 \searrow K_2$. Si $K_1 \searrow K_2$, alors la réalisation géométrique $|K_2|$ de K_2 est un rétracte par déformation forte de la réalisation géométrique $|K_1|$ de K_1 (voir la figure A.1). S'il existe une suite $(K_i)_{i=0}^{r}$ de sous-complexes de K tels que $K_0 = k$ et K_i est un collapsus élémentaire de K_{i-1},

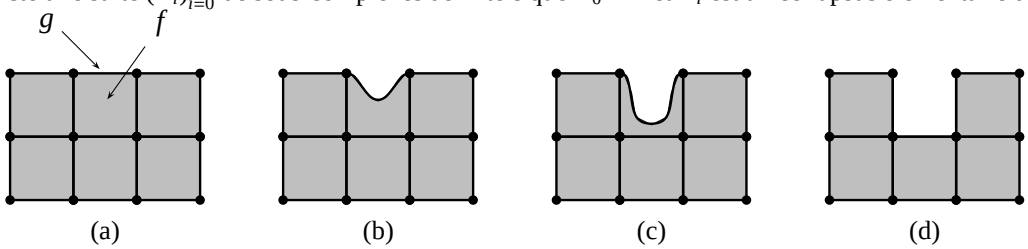


FIGURE A.1 – (a) Un complexe K et (f,g), une paire libre de K. (d) Le complexe $K' = K \setminus \{f,g\}$ qui est un collapsus élémentaire de K. (b),(c) Deux instants dans une rétraction par déformation forte de K sur K'.

ou K_{i-1} est un collapsus élémentaire de K_i, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, alors on dit que K et K_r ont le même type d'homotopie simple. Deux complexes de même type d'homotopie simple ont des réalisations géométriques qui ont le même type d'homotopie.

Le *voisinage régulier* d'un sous-complexe K (d'une subdivision) d'une n-variété combinatoire M est un sous-complexe (de cette subdivision) de M qui est aussi une n-variété et qui collapse sur K.

La *caractéristique d'Euler* (ou *caractéristique d'Euler-Poincaré*) d'un complexe K, fini, de dimension k, ayant n_i faces de dimension i ($1 \le i \le k$), est le nombre $\chi(K)$ défini par $\chi(K) = n_0 - n_1 + n_2 \ldots + (-1)^k n_k$. Cette caractéristique ne dépend que de la réalisation géométrique du complexe et on l'étend aux espaces topologiques quelconques en remplaçant le nombre de i-faces par le rang du i^{e} groupe d'homologie singulière (voir *e.g.* Maunder (1996)). De plus, si deux espaces ont le même type d'homotopie et possèdent chacun des caractéristiques d'Euler bien définies, alors celles-ci sont égales.

ANNEXE B

Ordres et treillis

B.1 Ensembles partiellement ordonnés

Soit X un ensemble. Une relation binaire sur X est un *pré-ordre* si elle est reflexive et transitive. Si de plus, elle est antisymétrique, alors c'est une *relation d'ordre (partielle)*. Un *ensemble partiellement ordonné*, ou *EPO*, est un couple $(X, \leq)$ dans lequel la relation $\leq$ est une relation d'ordre sur X. La relation $\geq$, définie sur X par $x \geq y$ si et seulement si $y \leq x$, est une relation d'ordre partielle sur X appelée *relation d'ordre duale*. On dit que deux points x et y de X sont *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$. Si, pour toute paire (x, y) d'éléments de X, x et y sont comparables, la relation $\leq$ est une *relation d'ordre totale* sur X.

Nous écrivons $x < y$ quand $x \leq y$ et $x \neq y$ et nous posons :

– $x^{\uparrow} = \{y \in X \mid x \leq y\}$ et $x^{\uparrow\star} = x^{\uparrow} \setminus \{x\} = \{y \in X \mid x < y\}$;

– $x^{\downarrow} = \{y \in X \mid y \leq x\}$ et $x^{\downarrow\star} = x^{\downarrow} \setminus \{x\} = \{y \in X \mid y < x\}$.

Si x et y sont comparables, nous écrivons $x \asymp y$; sinon, nous écrivons $x \not\asymp y$. L'ensemble des points comparables avec un point x donné est noté $x^{\updownarrow}$ ($x^{\updownarrow} = x^{\downarrow} \cup x^{\uparrow}$), et nous posons $x^{\updownarrow\star} = x^{\updownarrow} \setminus \{x\} = x^{\downarrow\star} \cup x^{\uparrow\star}$. Un point $x \in X$ est *minimal* si $x^{\downarrow} = \{x\}$ et *maximal* si $x^{\uparrow} = \{x\}$. Étant donné un point $x \in X$, l'ensemble des points maximaux de $x^{\uparrow}$ est noté $x^{\uparrow+}$. Un point $x \in X$ est le *minimum* de X si $x^{\uparrow} = X$ et est le *maximum* de X si $x^{\downarrow} = X$.

Un EPO est *localement fini* si pour chaque point x de X, il y a un nombre fini de points comparables avec x. Une *chaîne* de X est un sous-ensemble totalement ordonné de X. Une antichaîne de X est un sous-ensemble de X dont deux éléments quelconques ne sont pas comparables. La *longueur* d'une chaîne est son nombre d'éléments moins un. La *longueur* d'un EPO X est la longueur maximale d'une chaîne de X si un tel maximum existe [1]. Un sous-espace Y de X est un *ensemble bas*, resp. *haut*, de X si pour tout $y \in Y$ et tout $x \in X$, $x < y$, resp. $y < x$, entraîne $x \in Y$.

La *hauteur* d'un point $x \in X$ est la longueur de $x^{\downarrow}$. Si $x < y$ et il n'existe pas de point z dans X tel que $x < z < y$, on dit que y *couvre* x et on écrit $x \prec y$. Le *diagramme de Hasse* de la relation $\leq$ est le graphe orienté de la relation $\prec$ (voir la figure B.1).

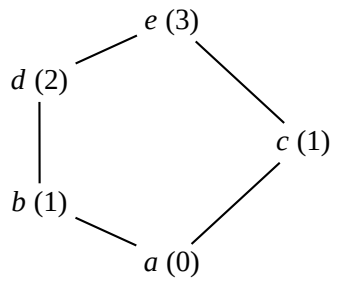


FIGURE B.1 – Le diagramme de Hasse d'un EPO defini par l'ensemble $\{a, b, c, d, e\}$ muni de la relation d'ordre $\{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (b, b), (b, d), (b, e), (c, c), (c, e), (d, d), (d, e), (e, e)\}$. Entre parenthèses, nous indiquons la hauteur des points. La longueur de cet EPO est 3.

1. Certains auteurs définissent la *longueur* d'une chaîne comme son nombre d'éléments. Par ailleurs, la longueur maximale d'une chaîne de X est aussi appelée la *hauteur* de X.

Soit X et X' deux EPO. Une application $\varphi : X \to X'$ est un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) si φ est bijective et si φ et sa réciproque sont croissantes.

B.2 Treillis

Un *treillis* est un EPO dans lequel chaque paire (a, b) d'éléments a un supremum, noté $a \vee b$, et un infimum, noté $a \wedge b$. Par exemple, l'ensemble des fermés réguliers (voir Annexe A.1) muni des opérations $F \vee G = F \cup G$ et $F \wedge G = \overline{(F \cap G)^\circ}$ est un treillis. De même, l'ensemble des ouverts réguliers peut être muni d'une structure de treillis en posant $F \vee G = \left(\overline{F \cup G}\right)^\circ$ et $F \wedge G = F \cap G$.

Un treillis est borné s'il possède un plus grand et un plus petit élément. Tout treillis fini est borné. Dans un treillis qui possède un plus petit élément, un *atome* est un élément qui couvre l'élement minimal. Un *treillis atomique* est un treillis ayant un plus petit élément et dans lequel chaque autre élément est le supremum d'un ensemble d'atomes. Un treillis est *modulaire* si $x \leq z$ implique $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Un treillis est *distributif* si $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, ou, de manière équivalente, si $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$. Tout treillis distributif est modulaire. Dans un treillis borné, un élément y est le *complément* d'un élement x si l'infimum de x et y est l'élément minimal et le supremum de x et y est l'élément maximal. Un treillis est *booléen* s'il est distributif et si chaque élément a un complément. Dans un treillis booléen, le complément est unique. Un treillis fini distributif est booléen si et seulement si il est atomique. Les treillis des fermés/ouverts réguliers de $\mathbb{R}^n$ sont des exemples de treillis booléens qui ne sont pas atomiques (pour la simple raison qu'ils n'ont pas d'atomes).

Soit T un treillis. Une fonction $\varphi : T \to T$ est une *ouverture* si φ est anti-extensive ($\varphi(x) \leq x$ pour tout $x \in T$) et $\varphi(x) \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$ pour tout $x, y \in T$. Une ouverture est croissante ($x \leq y \Rightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y)$) et idempotente ($\varphi \circ \varphi = \varphi$). Étant donné un sous-ensemble A de T, la fonction $\varphi_A : T \to T$ definie par $\varphi_A(x) = \bigvee\{a \in A \mid a \leq x\}$ est une ouverture.

Soit T et T' deux treillis. Deux applications $\varphi : T \to T'$ et $\varphi' : T' \to T$ forment une adjonction si $\varphi(x) \leq y \Leftrightarrow x \leq \varphi'(y)$ pour tous $x \in T$ et $y \in T'$. Dans ce cas, φ est un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) entre les treillis $\varphi'(T')$ et $\varphi(T)$ dont la réciproque est φ'.

Annexe C

Propriétés combinatoires des complexes cubiques utilisées au chapitre 7

Lemme C.0.1. *Soit* $0 \leq m < n$. *Soit* $f \in \mathbb{F}^n_m$. *On a :*

(i) $\mathrm{Card}(f^{\uparrow +}) = 2^{n-m}$.

(ii) Pour $\{g_1, g_2\} \in \mathrm{opp}(f)$. $f^{\uparrow +} = {g_1}^{\uparrow +} \sqcup {g_2}^{\uparrow +}$ *(où* $\sqcup$ *dénote l'union disjointe).*

Démonstration.

– (i) Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $f = \prod_{i=1}^{n} I_i$ où $I_i \in \mathbb{F}^1_1$ si $i \leq m$ et $I_i \in \mathbb{F}^1_0$ sinon. De manière évidente, pour tout I_i ($m+1 \leq i \leq n$) il existe deux 1-cubes dans $\mathbb{F}^1_1$ incluant I_i et par conséquent, il y un 2^{n-m} produits $\prod_{i=1}^{m} I_i \times \prod_{i=m+1}^{n} J_i$ où $I_i \subset J_i \in \mathbb{F}^1_1$ pour tout $i \in [\![m+1, n]\!]$.

– (ii) On applique la première partie du lemme aux trois faces f, g_1, g_2 : il y un 2^{n-m} facettes dans $f^{\uparrow}$ et 2^{n-m-1} facettes dans ${g_1}^{\uparrow}$ comme dans ${g_2}^{\uparrow}$. Comme, par définition de la fonction opp, ${g_1}^{\uparrow} \cap {g_2}^{\uparrow} = \emptyset$, nous pouvons conclure que $f^{\uparrow +} = {g_1}^{\uparrow +} \sqcup {g_2}^{\uparrow +}$. □

Les deux lemmes suivants utilisent les définitions des fonctions Card^- et Card^+ données dans la section 7.1.3.

Lemme C.0.2. *Soit* f *une* k*-face dans* $\mathbb{F}^n$ *(*$k \in [\![n-3, n-1]\!]$*) et* E *un ensemble de facettes dans* $f^{\uparrow}$. *Si* $\mathrm{Card}^-(E) \geq 2r$ *(*$r \in [\![1, 2^{n-k-1}]\!]$*), alors il existe deux faces* $g, h \in \mathbb{F}^n$, *opposées par rapport à* f, *telles que* $\mathrm{Card}(E \cap g^{\uparrow}) \geq r$ *et* $\mathrm{Card}(E \cap h^{\uparrow}) \geq r$.

Démonstration. On pose $m = n - \dim(f) = n - k$. En utilisant la dualité sur l'ordre dans $\mathbb{F}^n$, on trouve que l'assertion de ce lemme est une conséquence de l'assertion suivante que nous allons prouver : « si f est une facette de $\mathbb{F}^m$ et E est un ensemble de $2r$ 0-faces dans $f^{\downarrow}$ qui ne sont pas dans la configuration représentée sur la figure C.1(k), alors il existe une facette de la frontière de $f^{\downarrow}$ qui contient exactement r éléments de E ». Comme le résultat est évident si $m = 1$ et que nous avons restreint notre lemme à $m \leq 3$, nous pouvons passer en revue toutes les configurations, modulo rotations, symétries et dualité (*e.g.*, choisir six points parmi huit revient à en choisir deux). Ces configurations, pour $m = 2$ et $m = 3$, sont représentées sur la figure C.1 et la seule, portant la lettre (k), dans laquelle aucune facette de la frontière de $f^{\downarrow}$ ne contient la moitié des points, correspond à la configuration d'un trièdre (voir section 7.1.3). □

Lemme C.0.3. *Soit* f *une* k*-face dans* $\mathbb{F}^n$ *(*$k \in [\![n-3, n-1]\!]$*) et* E *un ensemble de facettes dans* $f^{\uparrow}$. *S'il existe* $n-k$ *faces qui couvrent* f *et dont les étoiles contiennent au moins* r *facettes de* E *(*$r \in [\![1, 2^{n-k-1}]\!]$*), alors* $\mathrm{Card}^+(E) \geq 2r - 1$.

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme C.0.2, on peut utiliser la dualité dans $\mathbb{F}^n$ pour remplacer l'assertion de ce lemme par l'assertion suivante que nous allons prouver : « si c est une facette de $\mathbb{F}^n$ ($1 \leq n \leq 3$) et E un ensemble de 0-faces dans $c^{\downarrow}$ tel qu'il existe n facettes de $c^{\downarrow\star}$ qui contiennent, chacune, au moins r faces de E ($1 \leq r \leq 2^{n-1}$), alors $\mathrm{Card}(E) \geq 2r - 1$ ou $r = 3$ et E est dans la configuration représentée sur la figure C.2(b) (dans ce cas, $\mathrm{Card}(E) \geq 2r - 2$) ». Si $r = 1$, la propriété est triviale, de même que dans le cas où deux des n facettes de $c^{\downarrow\star}$ qui contiennent r faces de E sont parallèles (en effet deux faces parallèles ne partagent pas de 0-faces donc, dans ce cas $\mathrm{Card}(E) \geq 2r$). Par conséquent, dans la suite de la

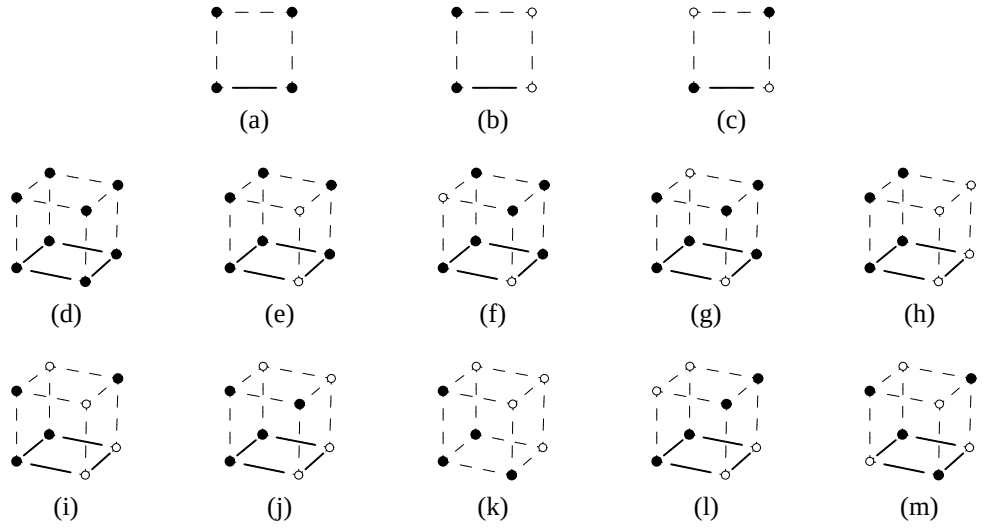


FIGURE C.1 – Configurations (modulo rotations, symétries et dualité) utilisées dans la preuve du lemme C.0.2 (voir texte). (a–c) Configurations en dimension 2 ; la ligne pleine indique la facette de dimension 1 qui satisfait la propriété. (d–m) Configurations en dimension 3 ; les lignes pleines entourent la facette de dimension 2 qui satisfait la propriété.

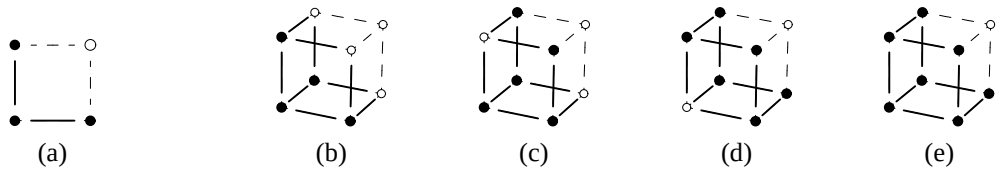


FIGURE C.2 – Configurations utilisées dans la preuve du lemme C.0.3 (voir texte). Points noirs : faces de E. Arêtes noires : arêtes des facettes du cube qui contiennent au moins r faces de E. (a) $n = 2$ et $r = 2$. (b–d) $n = 3$ et $r = 3$. (e) $n = 3$ et $r = 4$.

démonstration, nous supposons que toutes les n facettes partagent une même 0-face. De plus, il suffit d'étudier les configurations minimales, c'est-à-dire, les ensembles E qui satisfont l'hypothèse alors qu'aucun de leurs sous-ensembles propres ne le font. Si $n = 2$ et $r = 2$, il n'existe qu'une telle configuration minimale (modulo rotations et symétries), représentée sur la figure C.2(a). Quand $n = 3$, soit b, f, l les trois facettes de $c^{\downarrow\star}$ qui contiennent r faces de E, t la 0-face contenue dans ces trois facettes, et x, y, z les 0-faces contenues dans exactement deux de ces trois facettes (sur la figure C.2(b–e), b, f, l sont situées dessous, devant et à gauche, respectivement). Si $r = 2$ les deux premières 0-faces de E contenues dans b ne peuvent pas être partagées avec f et l (mais peuvent être partagées avec f ou avec l). Donc, il existe au moins une troisième face de E dans f ou l, impliquant qur $\mathrm{Card}(E) \geq 3$. Si $r = 3$, la seule configuration minimale avec $\{t, x, y, z\} \subseteq E$ est représentée sur la figure C.2(b) et la seule configuration minimale, modulo rotations, avec $t \in E$ et $\mathrm{Card}(\{x, y, z\} \cap E) = 2$ est représentée sur la figure C.2(c). Le cas $\mathrm{Card}(\{x, y, z\} \cap E) = 1$ est impossible. La seule configuration minimale avec $t \notin E$ est représentée sur la figure C.2(d). Si $r = 4$, la seule configuration minimale est représentée sur la figure C.2(e). Le lecteur peut facilement vérifier sur les figures C.2(b–e) que dans chaque cas l'assertion donnée au début de la preuve est vérifiée. □

Index

equivalence, 182

A-espace, 30
adherence
    adhérence, 179
adhérence
    d'une face (dans un complexe), 183
adjacence
    dans un EPO, 68
    dans une image digitale, 11
    locale, 19
adjonction, 186
α-chemin, 11
α-connexe, 11
α-lacet, 36
α-voisinage, 11
antichaîne, 185
application simpliciale, 182
arc, 68
arc minimal, 68
atome, 186
attache, 46
axiomes de séparation, 180

booléen, 186

calque, 119
caractéristique d'Euler-Poincaré, 183
chaîne, 185
chemin
    d'arêtes d'un complexe simplicial, 182
    fini, 71
        minimal, 72
        régulier, 72
codomaine d'une image, 5
collapsus, 183
complément, 186
complexe
    des chaînes, 31
    polyédral, 182
    simplicial abstrait, 181
    simplicial géométrique, 181
complexe pur, 183
connexe, 180
    par arcs, 180
    par points, 68
cosupport d'un label, 120
COTS, 21
coupe, 127
courbe fermée simple, 14
cube, 32
m-cube, 32

déformation, 77
diagramme de Hasse, 185
distributif, 186
domaine d'une image, 5
domaine d'une image de labels digitale, 118

ensemble n-contractile, 54
ensemble bas, 185
ensemble haut, 185
espace d'Alexandroff, 29
étirement élémentaire, 77
étoile, 183

face simple (dans un revêtement), 150
facette, 183
fermé régulier, 179
feuillet, 146
fibre, 146
fonction d'éclairage, 28
fond
    d'un revêtement, 146
    d'une image de labels digitale, 118

groupe fondamental digital, 36

hauteur d'un point dans un EPO, 185

image de calques
    pure, 120
    strictement pure, 120
immédiatement équivalent, 36
isomorphisme d'EPO, 186

label dans une image de calques, 119
lien, 183

localement fini, 185
longueur
    d'un arc dans un EPO, 68
    d'un ordre, 185
    d'une chaîne, 185

modulaire, 186

ouvert régulier, 179
ouverture, 186

paire libre, 183
point *n*-simple, 54
point simple pour un labedans un calque, 121
polyèdre, 182
pré-ordre, 185
produit de deux arcs, 79
propriété de la sphère percée, 83
proto-label, 118

réalisation
    d'un complexe abstrait, 182
    d'un complexe géométrique, 182
revêtement, 146

simplexe
    abstrait, 181
    géométrique, 181
subdivision barycentrique, 182
subdivision d'un complexe, 182
support
    d'un label dans un revêtement, 147
    d'un label dans une image de calques, 120
    d'un label dans une image digitale, 118
    d'un revêtement, 146

théorème de Jordan, 181
théorème de Jordan-Brouwer, 181
topologie
    d'Alexandroff, 29
    indiscrète, 179
    totalement discrète, 179
    triviale, 179
totalement discret (espace), 179
trace d'un chemin fini, 71
treillis, 186
treillis atomique, 186

variété
    combinatoire, 183
    topologique, 180
voisinage régulier, 183

Bibliographie

Z. Aktouf, G. Bertrand, et L. Perroton. A three-dimensional holes closing algorithm. *Pattern Recognition Letters*, 23(5) :523–531, 2002. (Cité en page 91.)

S. Alayrangues et J.-O. Lachaud. Equivalence between order and cell complex representations. In H. Wildenauer et W. Kropatsch, editors, *Proceedings of the Computer Vision Winter Workshop (CVWW)*, pages 222–233, Bad Aussee, Austria, February 2002. (Cité en page 91.)

P. Alexandroff. Diskrete Räume. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, pages 501–519, 1937. (Cité en pages 29, 31 et 67.)

L. A. Ankeney et G. X. Ritter. Cellular topology and its applications in image processing. *International Journal of Parallel Programming*, 12 :433–456, 1983, 10.1007/BF00977969. (Cité en page 24.)

F. G. Arenas. Alexandroff spaces. *Acta Math. Univ. Comenianae*, 68(1) :17–25, 1999. (Cité en pages 50, 69 et 70.)

R. Ayala, E. Domínguez, A. Francés, et A. Quintero. Digital lighting functions. In *procs. Discrete Geometry for Computer Imagery, LNCS, Springer Verlag*, volume 1347, pages 139–150, 1997. (Cité en pages 27, 29, 47, 91 et 119.)

R. Ayala, E. Domínguez, A. R. Francés, et A. Quintero. Weak lighting functions and strong 26-surfaces. *Theoretical Computer Science*, 283(1) :29–66, 2002. (Cité en pages 27, 29 et 30.)

R. Ayala, E. Domínguez, A. R. Francés, et A. Quintero. Homotopy in digital spaces. *Discrete Applied Mathematics*, 125(1) :3–24, 2003. (Cité en pages 27, 40 et 91.)

R. Ayala, E. Domínguez, A. R. Francés, et A. Quintero. Digital homotopy with obstacles. *Discrete Applied Mathematics*, 139(1-3) :5–30, 2004, The 2001 International Workshop on Combinatorial Image Analysis. (Cité en pages 27, 40 et 91.)

Y. Bai, X. Han, et J. Prince. Digital topology on adaptive octree grids. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 34(2) :165–184, 2009. (Cité en page 91.)

J. A. Barmak et E. G. Minian. Minimal finite models. *Journal of Homotopy and Related Structures*, 2(1) : 127–140, 2007. (Cité en pages 48, 49, 67, 77 et 82.)

J. A. Barmak et E. G. Minian. One-point reductions of finite spaces, h-regular CW-complexes and collapsibility. *Algebraic & Geometric Topology*, 8(3) :1763–1780, 2008a. (Cité en pages 52 et 55.)

J. A. Barmak et E. G. Minian. Simple homotopy types and finite spaces. *Advances in Mathematics*, 218(1) : 87–104, 2008b. (Cité en pages 51 et 53.)

P.-L. Bazin et D. Pham. Topology-preserving tissue classification of magnetic resonance brain images. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 26(4) :487–496, 2007. (Cité en page 59.)

P.-L. Bazin, L. Ellingsen, et D. Pham. Digital homeomorphisms in deformable registration. In N. Karssemeijer et B. Lelieveldt, editors, *IPMI*, volume 4584 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 211–222, Kerkrade, The Netherlands, July 2-6 2007. Springer. (Cité en pages 60, 61 et 142.)

G. Bertrand. A Boolean characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 17 (2) :115–124, 1996. (Cité en page 91.)

G. Bertrand. New notions for discrete topology. In *DCGI '99 : Proceedings of the 8th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 218–228, London, UK, 1999. Springer-Verlag. (Cité en pages 5, 31, 49, 51 et 54.)

G. Bertrand. On critical kernels. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Série Mathématiques.*, I(345) : 363–367, 2007. (Cité en pages 47 et 48.)

G. Bertrand et M. Couprie. A model for digital topology. In *Discrete Geometry for Computer Imagery - DGCI 1999*, volume 1568 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 229–241. Springer, 1999. (Cité en pages 31, 32, 33 et 91.)

G. Bertrand et M. Couprie. Two-dimensional thinning algorithms based on critical kernels. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 31(1) :35–56, 2008. (Cité en page 91.)

G. Bertrand et G. Malandain. A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15(2) :169–175, 1994. (Cité en pages 43, 45 et 91.)

G. Birkhoff. Rings of sets. *Duke Math. J.*, 3(3) :443–454, 1937. (Cité en pages 31 et 67.)

D. Blackmore et T. Peters. *Computational topology*, pages 493–545. Elsevier B.V., 2007. (Cité en page 102.)

I. Bloch. Fuzzy adjacency between image objects. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 5(6) :615–653, 1997. (Cité en page 17.)

I. Bloch. Fuzzy spatial relationships for image processing and interpretation : A review. *Image and Vision Computing*, 23(2) :89–110, 2005. (Cité en page 16.)

A. Bogomolny. Digital geometry may not be discrete. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 43 (2) :205–220, 1988. (Cité en page 14.)

L. Boxer. Classical construction for the digital fundamental group. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 10(1) :51–62, 1999. (Cité en pages 38 et 39.)

L. Boxer. Properties of digital homotopy. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(1) :19–26, 2005. (Cité en page 38.)

V. Brimkov et R. Klette. Curves, hypersurfaces, and good pairs of adjacency relations. In R. Klette et J. Žunic, editors, *Combinatorial Image Analysis*, volume 3322 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 276–290. Springer Berlin / Heidelberg, 2005. (Cité en page 15.)

J.-M. Chassery. Connectivity and consecutivity in digital pictures. *Computer Graphics and Image Processing*, 9(3) :294–300, 1979. (Cité en page 19.)

D. Coeurjolly, A. Montanvert, et J.-M. Chassery, editors. *Géométrie discrète et images numériques*. Hermès, Sept. 2007, Traité IC2, série signal et image. (Cité en page 6.)

J. Cohen. *Intégration des collections topologiques et des transformations dans un langage fonctionnel*. PhD thesis, Université d'Evry, 2004. (Cité en page 6.)

Y. Cointepas, I. Bloch, et L. Garnero. Cellular complexes : A tool for 3D homotopic segmentation in brain images. In *International Conference on Image Processing - ICIP 1998*, volume 3, pages 832–836, 1998. (Cité en page 77.)

Y. Cointepas, I. Bloch, et L. Garnero. A cellular model for multi-objects multi-dimensional homotopic deformations. *Pattern Recognition*, 34(9) :1785–1798, 2001. (Cité en pages 60 et 91.)

M. Couprie et G. Bertrand. Tesselations by connection. *Pattern Recognition Letters*, 23(6) :637–647, 2002. (Cité en page 32.)

M. Couprie et G. Bertrand. New characterizations of simple points in 2D, 3D and 4D discrete spaces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 31(4) :637–648, 2009. (Cité en pages 91 et 139.)

M. Couprie, G. Bertrand, et Y. Kenmochi. Discretization in 2D and 3D orders. *Graphical Models*, 65(1-3) : 77–91, 2003. (Cité en page 32.)

G. Damiand, A. Dupas, et J.-O. Lachaud. Fully deformable 3D digital partition model with topological control. *Pattern Recognition Letters*, 32(9) :1374–1383, 2011. (Cité en pages 61, 142 et 143.)

X. Daragon et M. Couprie. Segmentation du néo-cortex cérébral depuis des données IRM dans le cadre de la topologie des ordres. In *Reconnaissance de Formes et Intelligence Artificielle - RFIA 2002*, volume 3, pages 809–818, 2002. (Cité en page 91.)

X. Daragon, M. Couprie, et G. Bertrand. Discrete surfaces and frontier orders. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 23(3) :379–399, 2005. (Cité en page 32.)

E. S. Deutsch. Thinning algorithms on rectangular, hexagonal, and triangular arrays. *Commun. ACM*, 15(9) : 827–837, 1972. (Cité en page 9.)

P. Dokládal, C. Lohou, L. Perroton, et G. Bertrand. Liver blood vessels extraction by a 3-D topological approach. In *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention - MICCAI 1999*, volume 1679 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 98–105. Springer, 1999. (Cité en page 91.)

O. Duda, P. E. Hart, et J. H. Munson. Graphical data processing research study and experimental investigation. Technical Report AD650926, Stanford Research Institute, 1967. (Cité en page 14.)

U. Eckhardt et L. Latecki. Digital topology, 1994. (Cité en page 65.)

U. Eckhardt et L. J. Latecki. Topologies for the digital spaces Z^2 and Z^3. *Computer Vision and Image Understanding*, 90(3) :295–312, 2003. (Cité en page 19.)

A. V. Evako. Characterizations of simple points, simple edges and simple cliques of digital spaces : One method of topology-preserving transformations of digital spaces by deleting simple points and edges. *Graphical Models*, 73(1) :1–9, 2011. (Cité en page 175.)

A. V. Evako, R. Kopperman, et Y. V. Mukhin. Dimensional properties of graphs and digital spaces. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 6(2) :109–119, 1996. (Cité en page 175.)

S. Faisan, N. Passat, V. Noblet, R. Chabrier, et C. Meyer. Topology-preserving warping of binary images according to one-to-one mappings. *IEEE Transactions on Image Processing*, 20(8) :2135–2145, 2011. (Cité en page 91.)

C. Fiorio. Modélisation, analyse, représentation des images numériques – approche combinatoire de l'imagerie, novembre 2008, Habilitation à diriger des recherches. (Cité en page 9.)

S. Fourey et R. Malgouyres. A concise characterization of 3D simple points. *Discrete Applied Mathemathics*, 125(1) :59–80, 2003. (Cité en pages 44, 45, 87 et 91.)

M. Golay. Hexagonal parallel pattern transformations. *IEEE Transactions on Computers*, C-18(8) :733–740, 1969. (Cité en page 13.)

M. Grandis. An intrinsic homotopy theory for simplicial complexes, with applications to image analysis. *Applied Categorical Structures*, 10(2) :99–155, 2002. (Cité en pages 39 et 41.)

S.-E. Han. Comparison among digital fundamental groups and its applications. *Information Sciences*, 178(8) : 2091–2104, 2008. (Cité en page 38.)

X. Han, C. Xu, et J. L. Prince. A topology preserving level set method for geometric deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(6) :755–768, 2003. (Cité en page 91.)

K. A. Hardie et J. J. C. Vermeulen. Homotopy theory of finite and locally finite T_0-spaces. *Expositiones Mathematicae*, 11(4) :331–341, 1993. (Cité en page 48.)

A. Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. (Cité en page 179.)

G. T. Herman. On topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 52(3) :409–415, 1990. (Cité en pages 25, 26 et 31.)

G. T. Herman. Oriented surfaces in digital spaces. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 55(5) : 381–396, 1993. (Cité en pages 5, 14, 15 et 20.)

G. T. Herman. *Geometry of Digital Spaces*. Birkhäuser, 1998. (Cité en pages 9, 19 et 20.)

G. T. Herman et D. Webster. A topological proof of a surface tracking algorithm. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 23(2) :162–177, 1983. (Cité en page 24.)

C. J. Hilditch. Linear skeletons from square cupboards. In B. Meltzer et D. Michie, editors, *Machine Intelligence*, volume 4, pages 403–420, Edinburgh, 1969. Edinburgh University Press, Proceedings of the Fifth Annual Machine Intelligence Workshop. (Cité en page 45.)

P. J. Hilton et S. Wylie. *Homology Theory*. Cambridge University Press, 1960. (Cité en page 182.)

E. Khalimsky. A generalized continuous segment and its application in homotopy theory. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 185 :278–281, 1969a. (Cité en pages 21 et 23.)

E. Khalimsky. The topologies of generalized segments. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 189 :740–743, 1969b. (Cité en page 21.)

E. Khalimsky. Pattern analysis of n-dimensional digital images. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics*, pages 1559–1562, 1986. (Cité en page 21.)

E. Khalimsky. Topological structures in computer science. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 1 (1) :25–40, 1987a. (Cité en page 21.)

E. Khalimsky. Motion, deformation, and homotopy in finite spaces. In *IEEE International Conference on Systems, Man and Cyberneticsn*, pages 227–234, 1987b. (Cité en page 37.)

E. Khalimsky. Finite, primitive and Euclidean spaces. *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 1(3) : 177–196, 1988. (Cité en page 21.)

E. Khalimsky, R. Kopperman, et P. Meyer. Boundaries in digital planes. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 3(1) :27–55, 1990a. (Cité en page 24.)

E. Khalimsky, R. Kopperman, et P. Meyer. Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets. *Topology and its Applications*, 36(1) :1–17, 1990b. (Cité en pages 21, 23 et 67.)

C. O. Kiselman. Digital geometry and mathematical morphology (lecture notes), 2004, url : http ://www2.math.uu.se/~kiselman/dgmm2004.pdf. (Cité en page 5.)

R. Klette. Grundbergriffe der digitalen geometrie. In *Autbild '83, Automatische BildverarbeitungJena, DDR*, pages 94–126. Friedrich-Schiller Universität, Jena, 1983. (Cité en page 24.)

R. Klette. Cell complexes through time. Technical report, Communication and Information Technology Research Technical Report 60, 2000. (Cité en page 24.)

R. Klette. Topologies on the planar orthogonal grid. In *Proceedings of the 16th International Conference on Pattern Recognition*, volume 2, pages 354–357, 2002. (Cité en page 26.)

R. Klette et A. Rosenfeld. *Digital Geometry*. Morgan Kaufman, 2004. (Cité en pages 5 et 10.)

T. Kong, A. Roscoe, et A. Rosenfeld. Concepts of digital topology. *Topology and its Applications*, 46(3) : 219–262, 1992. (Cité en page 36.)

T. Y. Kong. A digital fundamental group. *Computers & Graphics*, 13(2) :159–166, 1989. (Cité en pages 35, 36 et 44.)

T. Y. Kong. Topology-preserving deletion of 1's from 2-, 3- and 4-dimensional binary images. In *DGCI '97 : Proceedings of the 7th International Workshop on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 3–18, London, UK, 1997. Springer-Verlag. (Cité en pages 46, 47 et 91.)

T. Y. Kong. Topological adjacency relations on Z^n. *Theoretical Computer Science*, 283(1) :3–28, 2002. (Cité en page 20.)

T. Y. Kong. The Khalimsky topologies are precisely those simply connected topologies on Z^n whose connected sets include all $2n$-connected sets but no $(3^n - 1)$-disconnected sets. *Theoretical Computer Science*, 305(1–3) :221–235, 2003. (Cité en pages 20 et 77.)

T. Y. Kong et A. W. Roscoe. A theory of binary digital images. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 32(2) :221–243, 1985. (Cité en pages 13, 15 et 91.)

T. Y. Kong et A. Rosenfeld. Digital topology : Introduction and survey. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 48(3) :357–393, 1989. (Cité en pages 5, 44, 45, 46 et 87.)

T. Y. Kong et A. Rosenfeld. Digital topology : A comparison of the graph-based and topological approaches. In G. M. Reed, A. W. Roscoe, et R. F. Wachter, editors, *Topology and category theory in computer science*, pages 273–289. Oxford University Press, Inc., New York, NY, USA, 1991. (Cité en pages 23 et 27.)

T. Y. Kong, R. Kopperman, et P. R. Meyer. A topological approach to digital topology. *Am. Math. Monthly*, 98(12) :901–917, 1991. (Cité en pages 26 et 68.)

R. Kopperman. The Khalimsky line as a foundation for digital topology. In O. Ying-lie, A. Toet, D. Foster, H. Heijmans, et P. Meer, editors, *Shape in Picture, NASO ASI Series F*, volume 126, pages 3–20. Springer-Verlag, 1994. (Cité en page 23.)

R. Kopperman, P. Meyer, et R. Wilson. A Jordan surface theorem for three-dimensional digital spaces. *Discrete & Computational Geometry*, 6(1) :155–161, 1991. (Cité en page 23.)

V. Kovalevsky. Discrete geometry and image processing. In *International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India*, pages 934–938, 1984a. (Cité en page 24.)

V. Kovalevsky. Axiomatic digital topology. *Jounal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(1) :41–58, 2006. (Cité en pages 26, 27 et 28.)

V. Kovalevsky et R. Kopperman. Some topology-based image processing algorithms. In *Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)*, volume 728 of *Ann. New York Acad. Sci.*, pages 174–182. New York Acad. Sci., New York, 1994. (Cité en page 26.)

V. A. Kovalevsky. Discrete topology and contour definition. *Pattern Recognition Letters*, 2(5) :281–288, 1984b. (Cité en pages 13 et 17.)

V. A. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 46(2) :141–161, 1989. (Cité en pages 24, 25, 26, 67, 68 et 119.)

M. Kukieła. On homotopy types of Alexandroff spaces. *Order*, 27(1) :9–21, 2010. (Cité en pages 48, 50, 69 et 70.)

J.-O. Lachaud et R. Malgouyres. Topologie, courbes et surfaces discrètes. In D. Coeurjolly, A. Montanvert, et J.-M. Chassery, editors, *"Géométrie discrète et images numériques"*, chapter 3, pages 79–105. Hermès/Lavoisier, 2007. (Cité en page 44.)

J.-O. Lachaud et A. Montanvert. Continuous analogs of digital boundaries : A topological approach to isosurfaces. *Graphical Models*, 62(3) :129–164, 2000. (Cité en pages 15 et 91.)

L. Latecki. Topological connectedness and 8-connectedness in digital pictures. *CVGIP : Image Understanding*, 57(2) :261–262, 1993. (Cité en page 19.)

L. Latecki. *Discrete Representation of Spatial Objects in Computer Vision*, volume 11 of *Computational Imaging and Vision*. Springer, 1998. (Cité en page 16.)

L. Latecki, U. Eckhardt, et A. Rosenfeld. Well-composed sets. *Computer Vision and Image Understanding*, 61(1) :70–83, 1995. (Cité en pages 15 et 16.)

L. J. Latecki. Multicolor well-composed pictures. *Pattern Recognition Letters*, 16(4) :425–431, 1995. (Cité en page 60.)

L. J. Latecki. 3D well-composed pictures. *Graph. Models Image Process.*, 59(3) :164–172, 1997. (Cité en page 15.)

J. Listing. Der census raumlicher complexe oder verallgemeinerung des Euler'schen satzes von den polyedern. *Abhandlungender Mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 10 :97–182, 1861. (Cité en page 24.)

J. Liu, S. Huang, et W. Nowinski. Registration of brain atlas to MR images using topology preserving front propagation. *Journal of Signal Processing Systems*, 55(1) :209–216, 2009. (Cité en page 59.)

C. Lohou. *Contribution à l'analyse topologique des images : Étude d'algorithmes de squelettisation pour images 2D et 3D selon une approche topologie digitale ou topologie discrète*. PhD thesis, Université de Marne-la-Vallée, France, 2001. (Cité en page 55.)

C. Lohou et G. Bertrand. Poset approach to 3D parallel thinning. In *SPIE Vision Geometry VIII*, volume 3811, pages 45–56, 1999. (Cité en pages 32 et 55.)

R. Malgouyres. Homotopy in two-dimensional digital images. *Theor. Comput. Sci.*, 230(1-2) :221–233, 2000. (Cité en pages 36 et 37.)

R. Malgouyres. Computing the fundamental group in digital spaces. *International Journal of Pattern Recognition & Artificial Intelligence*, 15(7) :1075, 2001. (Cité en page 37.)

R. Malgouyres et A. Lenoir. Topology preservation within digital surfaces. *Graphical Models*, 62(2) :71–84, 2000. (Cité en page 91.)

J.-F. Mangin, V. Frouin, I. Bloch, J. Régis, et J. López-Krahe. From 3D magnetic resonance images to structural representations of the cortex topography using topology preserving deformations. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 5(4) :297–318, 1995. (Cité en pages 59 et 91.)

C. R. F. Maunder. *Algebraic Topology*. Dover, 1996. (Cité en pages 179 et 183.)

A. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*. U. Chicago Press, 1999. (Cité en page 179.)

J. P. May. Finite topological spaces (lecture notes), 2008,
url : www.math.uchicago.edu/~may/MISC/FiniteSpaces.pdf. (Cité en pages 49 et 69.)

L. Mazo et N. Passat. On 2-dimensional simple sets in n-dimensional cubic grids. *Discrete and Computational Geometry*, 43 :893–913, 2010, 10.1007/s00454-009-9195-x. (Cité en page 176.)

L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, et C. Ronse. Paths, homotopy and reduction in digital images. *Acta Applicandae Mathematicae*, 113(2) :167–193, 2011. (Cité en page 70.)

M. McCord. Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces. *Duke Math. J.*, 33 (3) :465–474, 1966. (Cité en pages 30, 31, 48, 67 et 82.)

S. Miri, N. Passat, et J.-P. Armspach. Topology-preserving discrete deformable model : Application to multi-segmentation of brain MRI. In *International Conference on Image and Signal Processing - ICISP 2008*, volume 5099 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 67–75. Springer, 2008. (Cité en page 59.)

D. Morgenthaler. Three-dimensional simple points : Serial erosion, parallel thinning and skeletonization. Technical Report 1005, University of Maryland, 1981. (Cité en page 43.)

J. Munkres. *Topology*. Prentice Hall, 1999. (Cité en page 179.)

J. P. Mylopoulos et T. Pavlidis. On the topological properties of quantized spaces, II. connectivity and order of connectivity. *J. ACM*, 18 :247–254, 1971. (Cité en page 42.)

V. Neumann-Lara et R. G. Wilson. Compatible connectedness in graphs and topological spaces. *Order*, 12 (1) :77–90, 1995. (Cité en page 19.)

T. Osaki. Reduction of finite topological spaces. *Interdisciplinary Information Sciences*, 5(2) :149–155, 1999. (Cité en page 48.)

N. Passat et L. Mazo. An introduction to simple sets. *Pattern Recognition Letters*, 30(15) :1366–1377, 2009. (Cité en page 176.)

N. Passat, C. Ronse, J. Baruthio, J.-P. Armspach, M. Bosc, et J. Foucher. Using multimodal MR data for segmentation and topology recovery of the cerebral superficial venous tree. In *International Symposium on Visual Computing - ISVC 2005*, volume 3804 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 60–67. Springer, 2005. (Cité en page 91.)

N. Passat, M. Couprie, et G. Bertrand. Topological monsters in $\mathbb{Z}^3$: A non-exhaustive bestiary. In G. Bannon, J. Barrera, U. Braga-Neto, et N. Hirata, editors, *International Symposium on Mathematical Morphology - ISMM'07, 8th International Symposium, Proceedings*, volume 2, pages 11–12, Rio de Janeiro, RJ, Brazil, October 2007. INPE. (Cité en page 176.)

N. Passat, M. Couprie, et G. Bertrand. Minimal simple pairs in the 3-d cubic grid. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 32(3) :239–249, 2008, 10.1007/s10851-008-0099-9. (Cité en page 176.)

D. Pham, P.-L. Bazin, et J. Prince. Digital topology in brain imaging. *IEEE Signal Processing Magazine*, 27 (4) :51–59, 2010. (Cité en page 59.)

F. Poupon, J.-F. Mangin, D. Hasboun, C. Poupon, I. Magnin, et V. Frouin. Multi-object deformable templates dedicated to the segmentation of brain deep structures. In *MICCAI'98 : Proceedings of the First International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pages 1134–1143, London, UK, 1998. Springer-Verlag. (Cité en page 59.)

P. Préa. Graphs and topologies on discrete sets. *Discrete Mathematics*, 103(2) :189–197, 1992. (Cité en page 19.)

P. Ptak, H. Kofler, et W. Kropatsch. Digital topologies revisited : An approach based on the topological point-neighbourhood. In E. Ahronovitz et C. Fiorio, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 1347 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 151–159. Springer Berlin / Heidelberg, 1997. (Cité en pages 13 et 19.)

C. Ronse. An isomorphism for digital images. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 39(2) :132–159, 1985. (Cité en pages 15 et 124.)

C. Ronse. A topological characterization of thinning. *Theoretical Computer Science*, 43(0) :31–41, 1986. (Cité en pages 43 et 44.)

C. Ronse. Minimal test patterns for connectivity preservation in parallel thinning algorithms for binary digital images. *Discrete Applied Mathematics*, 21(1) :67–79, 1988. (Cité en page 42.)

C. Ronse. Regular open and closed sets (working report). url : http ://dpt-info.u-strasbg.fr/ cronse/wdrep.html, 1990. (Cité en page 15.)

C. Ronse. Flat morphology on power lattices. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 26(1) :185–216, Nov 2006. (Cité en page 176.)

C. Ronse et V. Agnus. Morphology on label images : Flat-type operators and connections. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2) :283–307, 2005. (Cité en page 119.)

C. Ronse et V. Agnus. Geodesy on label images, and applications to video sequence processing. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 19(6) :392–408, 2008. (Cité en page 119.)

A. Rosenfeld. Picture processing by computer. *ACM Computing Surveys*, 1(3) :147–176, 1969. (Cité en pages 5 et 6.)

A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *Journal of the Association for Computer Machinery*, 17(1) : 146–160, 1970. (Cité en pages 14, 24 et 42.)

A. Rosenfeld. Arcs and curves in digital pictures. *Journal of the Association for Computer Machinery*, 20(1) : 81–87, 1973. (Cité en pages 19, 21 et 42.)

A. Rosenfeld. Digital topology. *The American Mathematical Monthly*, 86(8) :621–630, 1979a. (Cité en pages 5 et 14.)

A. Rosenfeld. Fuzzy digital topology. *Information and Control*, 40(1) :76–87, 1979b. (Cité en page 17.)

A. Rosenfeld. Continuous functions on digital pictures. *Pattern Recognition Letters*, 4(3) :177–184, 1986. (Cité en page 38.)

A. Rosenfeld et J. L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *Journal of the Association for Computer Machinery*, 13(4) :471–494, 1966. (Cité en pages 9 et 11.)

R. Shortt, editor. *Polyhedral analogs of locally finite topological spaces*, 1990. Marcel Dekker, New York. (Cité en page 23.)

S. Siqueira, L. Latecki, N. Tustison, J. Gallier, et J. Gee. Topological repairing of 3D digital images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 30(3) :249–274, 2008. (Cité en pages 16 et 60.)

E. H. Spanier. *Algebraic Topology*. Springer, New York, December 1994. (Cité en pages 130, 179 et 182.)

R. E. Stong. Finite topological spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, 123(25) :325–340, 1966. (Cité en pages 48, 49, 50, 52, 67, 68 et 69.)

J. Toriwaki, S. Yokoï, T. Yonekura, et T. Fukomura. Topological properties and topology-preserving transformation of a three-dimensional binary picture. In *International Conference on Pattern Recognition : proceedings*, pages 414–419. IEEE Computer Society Press, 1982. (Cité en page 43.)

G. Tourlakis et J. Mylopoulos. Some results in computational topology. *Journal of the Association for Computer Machinery*, 20(3) :439–455, 1973. (Cité en pages 45 et 46.)

Y. Tsao et K. Fu. 3D parallel skeletonwise thinning algorithm. In *Proceedings - IEEE Computer Society Conference on Pattern Recognition and Image Processing*, pages 678–683, 1982. (Cité en page 43.)

J. Udupa et G. Grevera. Go digital, go fuzzy. *Pattern Recognition Letters*, 23(6) :743–754, 2002. (Cité en page 16.)

J. K. Udupa. Multidimensional digital boundaries. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 56(4) : 311–323, 1994. (Cité en page 15.)

J. K. Udupa et S. Samarasekera. Fuzzy connectedness and object definition : Theory, algorithms, and applications in image segmentation. *Graphical Models and Image Processing*, 58(3) :246–261, 1996. (Cité en page 17.)

O. Viro, O. Ivanov, N. Netsvetaev, et V. Kharlamov. *Elementary Topology : Problem Textbook*. AMS, 2008. (Cité en page 179.)

J. H. C. Whitehead. Simplicial Spaces, Nuclei and m-Groups. *Proc. London Math. Soc.*, s2-45(1) :243–327, 1939. (Cité en page 125.)

J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 :213–245, 1949a. (Cité en page 181.)

J. H. C. Whitehead. Combinatorial homotopy. II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 :453–496, 1949b. (Cité en page 181.)

F. Wyse et *et al.*. Marcus, D. Solution to problem 5712. *American Mathematical Monthly*, 77(10), 1970. (Cité en page 21.)

L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3) :338–353, 1965. (Cité en page 16.)