Toward a classification of the motivic decompositions of homogeneous spaces

Charles de Clercq

Université Paris VI - Pierre et Marie Curie

École Doctorale Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Charles De Clercq

Vers une classification des décompositions motiviques d'espaces homogènes

---

dirigée par Nikita Karpenko

Soutenue le 2 Novembre 2011 devant le jury composé de :

Baptiste Calmès	Université d'Artois, Lens
Antoine Ducros	Université Pierre et Marie Curie
Mathieu Florence	Université Pierre et Marie Curie
Nikita Karpenko	Université Pierre et Marie Curie
Alexander Merkurjev	University of California, Los Angeles
Andrei Suslin	Northwestern University, Chicago

Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Remerciements

Paris, le 15 Avril 2011

C'est non sans une certaine appréhension (propension à la mélancolie oblige) que je prends le temps de regarder en arrière et de considérer le travail effectué. Naturellement, ma première pensée revient à Nikita Karpenko, qui a accepté de diriger cette thèse. Si ce travail a pu être réalisé en un peu plus d'un an et demi, c'est grâce à la profondeur et l'élégance des Mathématiques de M. Karpenko, notamment la théorie des motifs supérieurs. C'est une fierté et une chance d'avoir pu témoigner de la beauté de cette théorie, ainsi que d'avoir travaillé sous sa direction.

Je remercie vivement les rapporteurs de cette thèse Baptiste Calmès et Kirill Zainoulline pour leur bienveillance et les bons moments passés à Luminy. Antoine Ducros, Mathieu Florence, Alexander Merkurjev et Andrei Suslin m'ont fait l'honneur d'accepter d'être membres de mon jury, je les en remercie sincèrement.

Le souvenir le plus inoubliable de cette thèse restera pour moi le séjour que j'ai effectué à Saint-Pétersbourg, où j'ai pu rencontrer ma généalogie mathématique : Alexander Merkurjev, Andrei Suslin et Anatoly Yakovlev. Je tiens à exprimer ma gratitude aux membres de l'Université d'état de Saint-Pétersbourg et de l'Institut Steklov pour leur accueil si chaleureux.

Je tiens à remercier les professeurs Grégory Ginot, Patrick Polo et Pierre Schapira, qui lors de mon arrivée à Paris en Master ont su me donner l'envie de faire des Mathématiques. J'ai eu la chance de recontrer depuis des personnes formidables comme Baptiste Calmès, Cyril Demarche, Mathieu Florence ou Philippe Gille qui me confortent dans ce choix. Je voudrais aussi remercier Omid Amini, Erwan Brugallé, Ethan Cotterill, Skip Garibaldi, Olivier Haution, Tsit Yuen Lam, Roland Lötscher, Omid Amini, Viktor Petrov, Anne Quéguiner-Mathieu, Nikita Semenov et Maksim Zhykhovich pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail, ainsi que Nicolas Bergeron, Gilles Godefroy et Hervé le Dret pour leur soutien face aux problèmes administratifs rencontrés au crépuscule de cette thèse.

Je voudrais aussi exprimer mon amitié aux personnes que j'ai eu le plaisir de croiser à Jussieu : Anne-Sandrine, Banafsheh, Benjamin, Clément, Clémence, Evgeniy, Fei, Florent, Frédéric, Jean, Jenny, Johan, Lara, Louis-Hadrien, Lie, Luc, Michel, Mounir, Olivier, Pierre, Raphaël, Séverine, Thomas, Tiehong, Viet Loc.

Enfin je pense à mes amis de longue date Aurélien, François, Renan et Suzy qui ont toujours été a mes côtés, ainsi qu'à mes parents, mes grands parents, mon frère et mes quatre soeurs.

... Au suivant.

Table des matières

Introduction

In this work, we present some results which are part of the program of classification of motivic decompositions of homogeneous spaces under the action of a semisimple algebraic group, in the framework of Grothendieck pure motives modulo rational equivalence. In the first two chapters, we introduce the material needed to state our results. They are provided from chapter 4 to 7.

Let G be a semisimple (affine) algebraic group over a field F, Λ a commutative ring and X a projective G-homogeneous variety (we will call such variety a *G-homogeneous space*). The motive of X in the category $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ of Grothendieck Chow motives with coefficients in Λ has a unique decomposition in a direct sum of indecomposable motives (up to isomorphism and permutation of the factors) as long as Λ is finite, and in the sequel we assume that Λ satisfies this property. The motivic decomposition of X encodes important information on the geometry of X. In Chapter 3, we state the four following problems related to the program of classification of motivic decompositions of homogeneous spaces.

Problem 1 : Is there a characterization of the indecomposable motives lying in the motivic decomposition of a G-homogeneous space ?

Problem 2 : Does the motivic decomposition of a G-homogeneous space depend on the ring of coefficients ?

Problem 3 : If G and G' are two semisimple algebraic groups, can we compare motivic decompositions of G-homogeneous spaces and G'-homogeneous spaces ?

Problem 4 : How can we compute the complete decomposition of the motive of a G-homogeneous space ?

All these problems are widely open for arbitrary G, but when G is of inner type and Λ is connected (or more generally if G is p-inner, Λ is connected and its residue field is of characteristic p) some solutions are known and some are provided in this work.

The theory of upper motives of Karpenko provides a solution to Problem 1. Among all the indecomposable direct summands lying in the complete motivic decomposition of a G-homogeneous space X, the only one whose 0-codimensional Chow group is non-zero is the *upper motive* of X. The theory of upper motives shows that any indecomposable motive lying in the motivic decomposition of a G-homogeneous space is isomorphic to a twist of the upper motive of a G-homogeneous space.

We give a solution to Problem 2 in Chapter 4. We prove that if G is semisimple and p-inner, the motivic decomposition of any G-homogeneous space with coefficients in

$\mathbb{F}_p$ lifts over $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$, where Λ is any finite field of characteristic p. In the case where G is of inner type, this implies that motivic decompositions of G-homogeneous spaces only depend on the characteristic of the field of coefficients. This reduces the study of motivic decompositions to those with coefficients in $\mathbb{F}_p$. We also show that this result is optimal, producing a counterexample when G is 3-inner and the fields of coefficients are of characteristic 2.

In chapter 5, we solve Problem 3, in the case where G and G' are absolutely simple adjoint of inner type A_n and $A_{n'}$. More precisely, we give a complete classification of indecomposable motives arising in the motivic decomposition of homogeneous spaces under the action of an absolutely simple adjoint algebraic group of inner type A_n. Using this classification, we prove that if a non-Tate indecomposable direct summand of a G-homogeneous space lies in the motivic decomposition of a G'-homogeneous space, then any indecomposable motive in the decomposition of any G-homogeneous space lies in the motivic decomposition of a G'-homogeneous space.

In Chapter 6, we provide a tool to extract some motivic summands in the motivic decomposition of smooth projective varieties. Assuming that a direct summand of an homogeneous space X lies in the motivic decomposition of a smooth projective variety Y over a field extension E/F, this tool allows (under some assumptions on E/F) to construct a new motive, which is a direct summand of both X and Y over the base field. This result is used by Garibaldi, Petrov and Semenov to completely classify motivic decompositions of G-homogeneous spaces where G is of inner type E_6.

Finally, in Chapter 7 we investigate another rigidity property of motivic decompositions of homogeneous spaces under the action of an absolutely simple adjoint algebraic group of inner type A_n. Let A be a central simple F-algebra, and E/F a field extension such that $v_p(\mathrm{ind}(A)) = v_p(\mathrm{ind}(A_E))$. We prove that the complete motivic decomposition of any generalized Severi-Brauer variety $X(p;A)$ lifts to the complete motivic decomposition of $X(p;A_E)$ in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$. We also prove the same result if $p=2$ for the generalized Severi Brauer variety $X(p^2;A)$, by completely determining the indecomposable motives lying in the motivic decomposition of $X(4;D)$, where D is a 2-primary division algebra.

Chapitre 1

Motifs de Grothendieck Chow

Dans ce chapitre nous introduisons le principal objet d'étude de cette thèse : les motifs de Grothendieck construits à partir des groupes de Chow. Dans toute la suite les schémas que nous considérerons seront séparés et de type fini sur un corps. Soit F un corps et $\mathrm{Sm}(F)$ la catégorie des schémas séparés, lisses, projectifs et de type fini sur F. Suivant Rost, nous définissons dans un premier temps les groupes de Chow d'un schéma X à coefficients dans un anneau Λ, et montrons comment munir certains de ces groupes d'une composition. La construction de la catégorie $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ des motifs de Grothendieck Chow à coefficients dans Λ est ensuite esquissée en deux étapes, en suivant [2], [19] et [46]. Nous considérons dans un premier temps la catégorie additive $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$ des correspondances à coefficients dans Λ, obtenue à partir de $\mathrm{Sm}(F)$ en enrichissant ses morphismes. La catégorie pseudo-abélienne $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ est obtenue après adjonction des noyaux des projecteurs de $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$.

1.1 Le complexe de Rost

Les groupes de Chow sont des objets classiques de la théorie de l'intersection, définis par exemple dans [21]. Suivant [19] et [53], nous présentons ici une construction de ces groupes comme cas particuliers de groupes de K-homologie.

1.1.1 Construction du complexe de Rost

Soit X un schéma séparé et de type fini sur un corps F. Si x est élément de X, on note $K_*(x)$ l'*anneau de Milnor* du corps rédisuel $F(x)$ de x (voir Appendice A). Un autre élément x' de X est une *spécialisation* de x si x' appartient à l'adhérence de $\{x\}$, notée $\overline{\{x\}}$. On note $\dim(x)$ la dimension du sous-schéma $\overline{\{x\}}$ de X.

Si x' est une spécialisation de x tel que $\dim(x')=\dim(x)-1$, l'anneau local $\mathcal{O}_{\overline{\{x\}},x'}$ est intègre, excellent et de dimension 1. En outre son corps des fractions est $F(x)$, tandis que son corps résiduel est $F(x')$. La clôture intégrale A de $\mathcal{O}_{\overline{\{x\}},x'}$ dans son corps des fractions est semi-locale et les localisations par rapport aux idéaux maximaux M_1,...,M_n de A sont des anneaux de valuation discrète (nous notons v_1,...,v_n les valuations associées). Les corps résiduels $L_1,...,L_n$ associés sont des extensions finies de $F(x')$. Pour tout couple $(x,x')\in X^2$ on considère l'application $\partial^x_{x'}: K_*(x)\longrightarrow K_*(x')$ définie par

$$\partial^x_{x'}=\begin{cases}\sum_{i=1}^n c_{L_i/F(x')}\circ\partial_{v_i} \text{ si } x' \text{ est une spécialisation de } x \text{ et } \dim(x')=\dim(x)-1\,;\\ 0 \text{ sinon.}\end{cases}$$

En notant $X_{(k)}$ l'ensemble des éléments de X de dimension k, on considère le groupe $C(X) = \bigoplus_{x \in X} K_*(x)$, qui est gradué par les groupes $C_k(X) = \bigoplus_{x \in X_{(k)}} K_*(x)$. Si x appartient à X, alors en vertu de [19, Lemma 49.1] il n'existe qu'un nombre fini d'éléments x' pour lesquels $\partial^x_{x'}$ n'est pas triviale. Les applications $\partial^x_{x'}$ induisent donc un endomorphisme de $C(X)$, noté d_X, qui respecte la graduation de $C(X)$ par la dimension et est de degré -1. En outre la différentielle d_X vérifie $d_X^2 = 0$, par [19, Proposition 49.30], et donc $(C_*(X), d_X)$ est un complexe, le *complexe de Rost* du schéma X.

1.1.2 Propriétés fonctorielles du complexe de Rost

Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas séparés et de type fini sur F, ainsi qu'un élément $y \in Y$. Pour tout $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et tel que l'extension $F(x)/F(y)$ soit finie, on dispose du morphisme $c_{F(y)/F(x)} : K_*(y) \longrightarrow K_*(x)$ sur les anneaux de Milnor associés, en vertu de la proposition A.0.2. Le push-forward $f_* : C_*(X) \longrightarrow C_*(Y)$ associé au morphisme f est défini par

$$(f_*)^x_y = \begin{cases} c_{F(x)/F(y)} \text{ si } y = f(x) \text{ et l'extension } F(x)/F(y) \text{ est finie}\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Cette application respecte la graduation par la dimension et le push-forward est covariant. En outre si f est un morphisme propre, le push-forward f_* commute aux différentielles d_X et d_Y des complexes de Rost en par [19, Proposition 49.9]. Tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ induit donc un morphisme de complexes $f_* : (C_*(X), d_X) \longrightarrow (C_*(Y), d_Y)$.

Considérons désormais un morphisme plat $f : Y \longrightarrow X$ de dimension relative d (c'est à dire que pour tout élément $x \in f(Y)$, les composantes irréductibles de $f^{-1}(\overline{\{x\}})$ sont de dimension $\dim(x) + d$). Pour tout couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que $f(y) = x$, et tel que y soit un point générique de la fibre schématique $Y_x = Y \times_X F(x)$, on a $\dim(y) = \dim(x) + d$. On peut alors considérer le morphisme de restriction $r_{F(y)/F(x)} : K_*(x) \longrightarrow K_*(y)$ sur les anneaux de Milnor respectifs (voir A.0.3). En notant $l(\mathcal{O}_{Y_x,y})$ la longueur de l'anneau $\mathcal{O}_{Y_x,y}$, on définit le pull-back $f^* : C_*(X) \longrightarrow C_{*+d}(Y)$ associé à f par

$$(f^*)^y_x = \begin{cases} l(\mathcal{O}_{Y_x,y}) \cdot r_{F(y)/F(x)} \text{ si } g(y) = x \text{ et } y \text{ est générique dans } Y_x\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le pull-back des morphismes plats et de dimension relative constante est contravariant par [19, Proposition 49.18]. En outre par [19, Proposition 49.23] le pull-back d'un morphisme plat $f : X \longrightarrow Y$ et de dimension relative d commute aux différentielles des complexes de Rost de X et Y. Le pull-back d'un tel morphisme induit donc un morphisme de complexes $(C_*(Y), d_Y) \longrightarrow (C_{*+d}(X), d_X)$.

1.1.3 Produit externe

Considérons deux schémas X et Y, toujours séparés et de type fini sur F. Nous notons π_1 (resp. π_2) la projection naturelle sur le premier (resp. le second) facteur de $X \times Y$. On associe à tout couple $(u, v) \in C_k(X) \times C_{k'}(Y)$ un produit externe $u \times v \in C_{k+k'}(X \times Y)$ défini par :

$$(u \times v)_z = \begin{cases} l(\mathcal{O}_{X\times Y,z}) \cdot r_{F(z)/F(x)}(u_x) \cdot r_{F(z)/F(y)}(v_y) \text{ si } p_1(z) = x \in X_{(k)},\, p_2(z) = y \in Y_{(k')}\,; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Le produit externe $\cdot \times \cdot : C_k(X) \times C_{k'}(Y) \longrightarrow C_{k+k'}(X \times Y)$ ainsi défini est associatif. En outre il commute aux push-forward des produits de morphismes propres et pull-back des produits de morphismes plats par [19, Proposition 50.4] et [19, Proposition 50.5].

1.2 Les groupes de K-homologie

1.2.1 Définition des groupes de K-homologie

Soit X un schéma séparé et de type fini sur F, ainsi que $(C_*(X), d_X)$ le complexe de Rost de X. Pour tout entier k, on considère la graduation de $C_k(X)$ donnée par les groupes $C_{k,l}(X) = \bigoplus_{x \in X_{(k)}} K_{k+l}(x)$. On peut donc écrire

$$C(X) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \bigoplus_{l \in \mathbb{Z}} C_{k,l}(X).$$

La différentielle d_X respecte ces deux graduations et est de degré $(-1,-1)$, c'est à dire que pour tout entier l on a un complexe

$$\cdots \longrightarrow \bigoplus_{x \in X_{(k+1)}} K_{k+l+1}(x) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(k)}} K_{k+l}(x) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(k-1)}} K_{(k+l-1)}(x) \longrightarrow \cdots$$

que nous notons $(C_{*,l}, d_X)$.

Définition 1.2.1. Les groupes de K-homologie d'un schéma X séparé et de type fini sur F, notés $A_k(X, K_l)$, sont les groupes d'homologie des complexes $(C_{*,l}(X), d_X)$.

Les groupes de K-homologie héritent des propriétés fonctorielles du complexe de Rost. Plus précisément si X et Y sont deux schémas séparés et de type fini sur F, tout morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ induit des push-forward $f_* : A_k(X, K_l) \longrightarrow A_k(Y, K_l)$ sur les groupes de K-homologie associés. De la même manière tout morphisme $f : Y \longrightarrow X$ plat et de dimension relative constante égale à d induit des pull-back $f^* : A_k(X, K_l) \longrightarrow A_{k+d}(Y, K_{l-d})$ sur les groupes de K-homologie.

Une autre propriété importante des groupes de K-homologie de X est la suivante. Soit Z un sous-schéma fermé de X, $U{=}X \setminus Z$ son complémentaire et l un entier. La suite de complexes

$$0 \longrightarrow C_*(Z) \xrightarrow{i_*} C_*(X) \xrightarrow{j^*} C_*(U) \longrightarrow 0$$

induite par les immersions de Z et U dans X est exacte. En particulier on obtient la suite exacte longue d'homologie

$$\ldots \xrightarrow{\partial} A_k(Z, K_l) \xrightarrow{i_*} A_k(X, K_l) \xrightarrow{j^*} A_k(U, K_l) \xrightarrow{\partial} A_{k-1}(Z, K_l) \xrightarrow{i_*} \cdots \tag{1.1}$$

qui est bornée à droite.

Soient X et Y deux schémas séparés, lisses, équidimensionnels et de type fini sur F, ainsi que $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas. En vertu de [19, 55.15] et en posant $d = d_Y - d_X$, on peut considérer le pull-back $f^* : A_*(Y, K_*) \longrightarrow A_{*-d}(X, K_{*+d})$ associé à f. La notation est similaire à celle du pull-back associé à un morphisme plat, car ces notions coïncident si f est supposé de plus plat (voir [19, Proposition 55.16]).

Définition 1.2.2. Soit X un schéma séparé, lisse, irréductible et de type fini sur F. Les groupes de K-cohomologie de X sont les groupes $A^k(X, K_l) = A_{\dim(X)-k}(X, K_l)$, où k et l sont des entiers.

Si X n'est plus supposé irréductible, et si $X = \bigsqcup_{i=1}^s X_i$ est la décomposition de X en composantes irréductibles, on définit les groupes de K-cohomologie de X pour tout couple d'entiers (k, l) par $A^k(X, K_l) = \bigoplus_{i=1}^s A^k(X_i, K_l)$.

1.2.2 Autres propriétés des groupes de K-homologie

Soient X et Y deux schémas séparés, lisses et de type fini sur F. Comme nous l'avons vu précédemment, on dispose d'un produit externe $C_k(X) \otimes C_{k'}(Y) \longrightarrow C_{k+k'}(X \times Y)$ qui induit un produit externe sur les groupes de K-homologie

$$A_k(X, K_l) \otimes A_{k'}(Y, K_{l'}) \longrightarrow A_{k+k'}(X \times Y, K_{l+l'})$$

par [19, Proposition 50.3]. En considérant l'immersion diagonale $\Delta : X \longrightarrow X \times X$, la suite d'applications

$$A^k(X, K_l) \otimes A^{k'}(X, K_{l'}) \xrightarrow{\times} A^{k+k'}(X \times X, K_{l+l'}) \xrightarrow{\Delta^*} A^{k+k'}(X, K_{l+l'})$$

munit le groupe $A^*(X, K_*)$ d'une structure d'anneau commutatif, dont l'unité est $[X]$, la somme des classes des composantes irréductibles de X. Enfin nous décrivons une propriété importante des groupes de K-homologie : leur invariance par homotopie.

Définition 1.2.3. Un morphisme $p : X \longrightarrow Y$ de schémas séparés et de type fini sur F est un fibré affine de rang d si p est plat et si pour tout $x \in X$, la fibre schématique Y_x est isomorphe à $\mathbb{A}^d_{F(x)}$.

Théorème ([19, Theorem 52.13])**.** Soient X et Y deux schémas séparés et de type fini sur F. Si $p : X \longrightarrow Y$ est un fibré affine de rang d, alors pour tout couple d'entiers (k, l) le pull-back

$$p^* : A_k(Y, K_l) \longrightarrow A_{k+d}(X, K_{l-d})$$

est un isomorphisme.

1.3 Groupes de Chow et correspondances

1.3.1 Définitions et premières propriétés

Soit X un schéma séparé et de type fini sur F, i un entier et $(C_*(X), d_X)$ le complexe de Rost de X.

Définition 1.3.1. Le groupe de Chow des cycles k-dimensionnels de X modulo équivalence rationnelle est défini par $\mathrm{CH}_k(X) = A_k(X, K_{-k})$. Le groupe des cycles de codimension k sur X modulo équivalence rationnelle est défini par $\mathrm{CH}^k(X) = A^k(X, K_{-k})$.

Par définition, $\mathrm{CH}_k(X)$ est donc le conoyau de l'application

$$\bigoplus_{x \in X_{(k+1)}} F(x)^\times \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(k)}} \mathbb{Z}.$$

Détaillons les propriétés immédiates dont jouissent les groupes de Chow, en tant que cas particulier de groupes de K-homologie (nous notons Y un autre schéma séparé et de type fini sur F) :

– *(push-forward propre)* Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre, il induit push-forward $f_* : \mathrm{CH}_*(X) \longrightarrow \mathrm{CH}_*(Y)$.
– *(pull-back plat)* Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme plat de dimension relative d, il induit pull-back $f^* : \mathrm{CH}_*(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}_{*+d}(X)$.

– *(suite longue de localisation)* Si Z est un sous schéma fermé de X et $U{=}X \setminus Z$ est son complémentaire, les suites exactes 1.1 permettent d'obtenir pour tout entier k la suite exacte

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{CH}_k(Z) \xrightarrow{i_*} \mathrm{CH}_k(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{CH}_k(U) \longrightarrow 0. .$$

– *(structure d'anneau)* Si X est de plus lisse, l'immersion diagonale Δ munit le groupe $\mathrm{CH}_*(X)$ d'une structure d'anneau commutatif, d'unité la classe $[X]$.
– *(invariance par homotopie)* Si $f : X \longrightarrow Y$ est un fibré affine de rang d, le pull-back $f^* : \mathrm{CH}_*(Y) \longrightarrow \mathrm{CH}_{*+d}(X)$ est un isomorphisme.

Notation 1.3.1. Soient $X \in \mathrm{Sm}(F)$ et $\alpha \in \mathrm{CH}(X)$. Pour toute extension E/F, l'image de α par le pull-back associé au morphisme $X \times E \longrightarrow X$ est noté α_E.

1.3.2 Composition et correspondances

Définition 1.3.2. Soient X un schéma séparé et de type fini sur F, ainsi que Λ un anneau commutatif. Le groupe de Chow des cycles sur X modulo équivalence rationnelle à coefficients dans Λ, défini par $\mathrm{CH}(X) \otimes \Lambda$, est noté $\mathrm{CH}(X;\Lambda)$.

Supposons de plus que X soit irréductible et soit Y, un autre schéma séparé et de type fini sur le corps F. Le groupe $\mathrm{Corr}_k(X,Y;\Lambda)$ des *correspondances* de degré k entre X et Y à coefficients dans Λ est le groupe de Chow $\mathrm{CH}_{\dim(X)+k}(X \times Y;\Lambda)$. Plus généralement si X n'est pas irréductible et si $X = \bigsqcup_{i=1}^s X_i$ est la décomposition de X en composantes irréductibles, on pose $\mathrm{Corr}_k(X,Y;\Lambda) = \bigoplus_{i=1}^s \mathrm{Corr}_k(X_i,Y;\Lambda)$. Nous noterons régulièrement $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ une correspondance de $\mathrm{Corr}_*(X,Y;\Lambda)$.

Si X et Y sont supposés de plus lisses, projectifs, et Z est un troisième tel schéma, alors pour toute correspondance $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ (resp. $\beta : Y \rightsquigarrow Z$) de degré k (resp. de degré k') on construit la composée $\beta \circ \alpha \in \mathrm{Corr}_{k+k'}(X,Z;\Lambda)$ à l'aide des projections suivantes.

$$\begin{tikzcd} & X \times Y \times Z \arrow[dl, "\pi_2"'] \arrow[d, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_3"] & \\ X \times Y & X \times Z & Y \times Z \end{tikzcd}$$

La composée des correspondances α et β définie par

$$\beta \circ \alpha = (\pi_1)_* \left((\pi_2)^*(\alpha) \cdot (\pi_3)^*(\beta)\right)$$

est une correspondance de degré $k + k'$ entre X et Z. En outre on peut associer à tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ la classe de son graphe dans $\mathrm{Corr}_0(X,Y;\Lambda)$, que l'on note $[\Gamma_f]$. En vertu de [19, Corollary 62.6] la composition des morphismes de schémas est compatible avec la composition des correspondances précédemment définie, et la correspondance qui fait office d'identité pour un schéma X n'est autre que le graphe $[\Gamma_{id_X}]$ de l'identité par [19, Corollary 62.5].

1.4 La catégorie des motifs de Grothendieck Chow

Nous présentons désormais la construction de la catégorie $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ des motifs de Grothendieck Chow à coefficients dans un anneau Λ, suivant [2], [19], [46].

1.4.1 Construction

Soit $\mathrm{C}(F;\Lambda)$ la catégorie dont les objets sont les couples $X[i]$, X étant un objet de $\mathrm{Sm}(F)$ et i étant un entier. Les morphismes de de $\mathrm{C}(F;\Lambda)$ sont définis par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(F;\Lambda)}\left(X[i],Y[j]\right)=\mathrm{Corr}_{i-j}(X,Y;\Lambda),$$

la composition étant la composition des correspondances définie précédemment. La catégorie $\mathrm{C}(F;\Lambda)$ est préadditive, et nous notons $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$ la catégorie obtenue après complétion additive de $\mathrm{C}(F;\Lambda)$. La catégorie $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$ est la *catégorie des correspondances* à coefficients dans Λ, qui est tensorielle via $X[i]\otimes Y[j]=(X\times Y)\,[i+j]$. La compatibilité de la composition des morphismes de $\mathrm{Sm}(F)$ et de la composition des correspondances permet de considérer le foncteur

$$\begin{array}{cccc} \Xi\ : & \mathrm{Sm}(F) & \longrightarrow & \mathrm{CR}(F;\Lambda) \\ & X & \longmapsto & X[0] \\ & f & \longmapsto & [\Gamma_f]\otimes 1 \end{array}.$$

La catégorie $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ des motifs de Grothendieck Chow à coefficients dans Λ est l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$. Les objets de $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ sont les sommes directes finies de triplets $(X,\pi)[i]$, où $X[i]\in\mathrm{CR}(F;\Lambda)$ et $\pi\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{CR}(F;\Lambda)}(X,X)$ est un projecteur. Les morphismes de $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ sont quant à eux donnés par

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\Lambda)}\left((X,\pi)[i],(Y,\rho)[j]\right)=\rho\circ\mathrm{Hom}_{\mathrm{CR}(F;\Lambda)}\left(X[i],Y[j]\right)\circ\pi.$$

On dispose en outre d'un foncteur covariant

$$\begin{array}{cccc} \Pi\ : & \mathrm{Sm}(F) & \longrightarrow & \mathrm{CM}(F;\Lambda) \\ & X & \longmapsto & (X,[\Gamma_{id_X}])[0] \\ & f & \longmapsto & [\Gamma_f] \end{array}$$

1.4.2 Propriétés générales

Les objets de la catégorie $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ sont les motifs. Si $X\in\mathrm{Sm}(F)$, les motifs $(X,[\Gamma_{id_X}])[i]$ sont notés $X[i]$ et et le motif $X[0]$ est le motif de X.

Définition 1.4.1. Les motifs $\mathrm{Spec}(F)[i]$, où i est un entier quelconque, sont les *motifs de Tate*. Le motif de Tate $\mathrm{Spec}(F)[i]\in\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ sera noté $\Lambda[i]$.

La notion de groupe de Chow d'un motif que nous définissons désormais coïncide par définition avec la notion de groupe de Chow d'un schéma X de $\mathrm{Sm}(F)$.

Définition 1.4.2. Soit $M\in\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ un motif et k un entier. Le *groupe de Chow* de M de dimension k à coefficients dans Λ (noté $\mathrm{CH}_k(M;\Lambda)$) est défini par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\Lambda)}(\Lambda[k],M)$. Le groupe de Chow de M de codimension k (noté $\mathrm{CH}^k(M;\Lambda)$) est quant à lui défini par $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\Lambda)}(M,\Lambda[k])$.

Pour toute extension E/F, le foncteur de *changement du corps de base*, noté $\mathrm{res}_{E/F}$, est le foncteur additif qui associe à tout facteur direct $(X,\pi)[i]\in\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ le motif $(X_E,\pi_E)[i]$.

De même pour tout morphisme d'anneaux $f:\Lambda\longrightarrow\Lambda'$, on peut définir le foncteur de *changement des coefficients*, noté $\mathrm{coeff}_{\Lambda'/\Lambda}$. Il s'agit du foncteur additif qui associe à tout facteur direct $(X,\pi)[i]\in\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ le motif $(X,(\mathrm{id}\otimes f)(\pi))\,[i]\in\mathrm{CM}(F;\Lambda')$ et à tout morphisme α la correspondance $(\mathrm{id}\otimes f)(\alpha))$.

Enfin la catégorie des motifs de Grothendieck Chow est munie d'un foncteur contravariant de dualité.

Définition 1.4.3. Soient X et Y deux schémas de $\mathrm{Sm}(F)$, ainsi qu'une correspondance $\alpha : X[i] \rightsquigarrow Y[j]$. La *correspondance transposée* de α est définie par ${}^t\alpha = \tau_*(\alpha)$, où l'on note $\tau : X \times Y \longrightarrow Y \times X$ l'isomorphisme d'échange.

Par définition de la composée des correspondances, on a ${}^t(\beta \circ \alpha) = {}^t\alpha \circ {}^t\beta$. On peut donc considérer le foncteur additif défini par

$$\begin{array}{cccc} \dagger : & \mathrm{CM}(F;\Lambda)^{op} & \longrightarrow & \mathrm{CM}(F;\Lambda) \\ & (X,\pi)[i] & \longmapsto & (X,{}^t\pi)[-\dim(X)-i] \\ & \alpha & \longmapsto & {}^t\alpha \end{array}$$

qui est un foncteur de dualité de la catégorie $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$.

1.4.3 Quelques cas particuliers

Nous présentons ici quelques cas particulier on l'on sait effectivement calculer le motif d'un schéma X. Ces exemples seront fondamentaux dans la suite.

Définition 1.4.4. Un schéma $X \in \mathrm{Sm}(F)$ est *déployé* si le motif de X est isomorphe à une somme directe finie de motifs de Tate. Le schéma X est *géométriquement déployé* s'il existe une extension E/F telle que X_E soit déployé.

Définition 1.4.5. Un schéma X de $\mathrm{Sm}(F)$ est dit cellulaire s'il possède une filtration en sous-schémas fermés

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset \cdots \subset X_n = X \tag{1.2}$$

tel que pour tout $i \in [1, n]$, il existe un fibré affine $p_i : U_i = X_i \setminus X_{i-1} \longrightarrow Y_i$ de rang d_i.

Les schémas Y_i sont les *bases* de la filtration de X. Si X est cellulaire avec pour filtration 1.2, alors pour tout schéma Z de $\mathrm{Sm}(F)$, on a un isomorphisme

$$\mathrm{CH}_*(Z \times X;\Lambda) \simeq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathrm{CH}_{*-d_i}(Z \times Y_i;\Lambda)$$

par [19, Theorem 66.2]. En particulier le résultat suivant est une application directe du lemme de Yoneda, et permet de reconstruire le motif de X à partir des motifs des bases de sa filtration.

Théorème ([19, Theorem 66.4],[48, Theorem 6.5])**.** Soit $X \in \mathrm{Sm}(F)$ un schéma cellulaire dont la filtration est 1.2. Alors on a un isomorphisme motivique

$$X \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} Y_i[d_i]$$

Nous dirons qu'un schéma $X \in \mathrm{Sm}(F)$ est géométriquement cellulaire s'il existe une extension E/F tel que X_E soit cellulaire.

Théorème ([9, Proposition 3.4])**.** Soit $X \in \mathrm{Sm}(F)$ et $\mathcal{E} \longrightarrow X$ un fibré vectoriel de rang n. Alors pour tout fibré en Grassmanniennes $\Gamma_d(\mathcal{E})$ on a un isomorphisme motivique

$$\Gamma_d(\mathcal{E}) \simeq \bigoplus_{\lambda} X[d(n-d) - |\lambda|]$$

où la somme parcoure toutes les partitions λ=$(\lambda_1, ..., \lambda_d)$ tel que $n-d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$.

Chapitre 2

Groupes algébriques et espaces homogènes

Nous présentons brièvement dans ce chapitre l'approche fonctorielle de la théorie des groupes algébriques, initiée par [17], [18] et adoptée dans [16], [28], [44] ou encore [64]. L'approche classique est présentée dans [4], [57] et toutes les notions sur un corps quelconque coïncident avec la théorie classique sur un corps algébriquement clos, pour laquelle nous renvoyons à [26]. Nous nous attardons surtout sur les groupes algébriques semisimples, dont nous évoquons la classification pour laquelle nous reportons le lecteur à [6], [44], [58] [65].

2.1 Groupes algébriques

2.1.1 Schémas en groupes

Soit F un corps, F-alg la catégorie des F-algèbres commutatives et Gpes la catégorie des groupes. Un foncteur $G : F\text{-alg} \longrightarrow \text{Gpes}$ est un schéma en groupes affine sur F (ou un schéma en groupes affine s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il est représenté par une algèbre de Hopf (voir appendice B) c'est à dire s'il existe une algèbre de Hopf $F[G]$ telle que G soit isomorphe au foncteur

$$\begin{array}{ccc} F\text{-}\,\mathrm{alg} & \longrightarrow & \mathrm{Gpes} \\ R & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{F\text{-}\,\mathrm{alg}}(F[G], R) \end{array} .$$

Dans toute la suite, nous omettrons le mot *affine* et nous dirons qu'un tel foncteur est un *schéma en groupes sur F*. Un morphisme de schémas en groupes $\phi : G \longrightarrow G'$ est une transformation naturelle de foncteurs. En vertu du lemme de Yoneda l'algèbre de Hopf $F[G]$ est déterminée de manière unique à isomorphisme près par G.

Exemples. 1. Le *groupe trivial*, défini par

$$\mathbf{1} \ : \ \begin{array}{ccc} F\text{-}\,\mathrm{alg} & \longrightarrow & \mathrm{Gpes} \\ R & \longmapsto & \{pt\} \end{array}$$

est représenté par F.

2. Le *groupe multiplicatif*, défini par

$$\mathbb{G}_m \ : \ \begin{array}{ccc} F\text{-}\,\mathrm{alg} & \longrightarrow & \mathrm{Gpes} \\ R & \longmapsto & R^\times \end{array} .$$

est représenté par $F[X,T]/(XT-1)$.

Un sous-schéma en groupes H d'un schéma en groupes G sur F est un schéma en groupes sur F représenté par le quotient de $F[G]$ par un idéal de Hopf J (définition B.0.5). Dans ces conditions et pour toute F-algèbre R, le morphisme de schémas en groupes induit par le morphisme d'algèbres de Hopf $A \longrightarrow A/J$ identifie le groupe $H(R)$ a un sous-groupe de $G(R)$. Le sous-schéma en groupes H de G est *distingué* si de plus pour toute F-algèbre R, le sous-groupe $H(R)$ de $G(R)$ est distingué.

Nous rappelons qu'un anneau A est *connexe* si les idempotents de A sont triviaux, et réduit si le nilradical de A est trivial.

Définition 2.1.1 ([44, §20,§21])**.** Soit F un corps.
- Un schéma en groupes G sur F est *algébrique* si l'algèbre $F[G]$ est de type fini.
- Un schéma en groupes G sur F est *connexe* si l'algèbre $F[G]$ est connexe.
- Un schéma en groupes algébrique G sur F est *lisse* si l'algèbre $F[G]\otimes F_{alg}$ est réduite.

Le produit fibré de deux schémas en groupes algébriques est algébrique et représenté par le produit fibré des algèbres de Hopf sous-jacentes. Le noyau d'un morphisme de schémas en groupes $f : G \longrightarrow G'$ est le schéma en groupes $G \times_{G'} \mathbf{1}$.

Définition 2.1.2. Un *groupe algébrique* G est un schéma en groupes algébrique et lisse.

Nous dirons enfin qu'un groupe algébrique est *résoluble* si le groupe $G(F_{alg})$ est résoluble.

2.1.2 Extension du corps de base et restriction de Weil

Soit G un schéma en groupes sur F et E/F est une extension de corps. Le foncteur

$$\mathrm{res}_{E/F}(G)\ :\ \begin{array}{ccc} E\text{- alg} & \longrightarrow & \text{Gpes} \\ R & \longmapsto & G(R) \end{array}$$

est représentable par l'algèbre de Hopf $F[G]\otimes E$. Le schéma en groupes sur E ainsi obtenu est noté G_E. Nous dirons que G_E est l'extension de G au corps E.

En outre si E/F est une extension finie et séparable, alors pour tout schéma en groupes G sur E le foncteur

$$\mathcal{R}_{E/F}(G)\ :\ \begin{array}{ccc} F\text{- alg} & \longrightarrow & \text{Gpes} \\ R & \longmapsto & G(R\otimes E) \end{array}$$

est représentable par [63, 3.12] (voir aussi [44, Lemma 20.6]). Le schéma en groupes $\mathcal{R}_{E/F}(G)$ est la restriction de Weil de G à F.

2.1.3 Quotients

Si G est un schéma en groupes et N un sous-groupe distingué de G, le schéma en groupes quotient G/N existe. En effet en vertu de [64, 16.3] il existe un schéma en groupes G', ainsi qu'un morphisme surjectif de schémas en groupes $\varphi : G \longrightarrow G'$ tel que N=ker(φ).

Exemple 2.1.1. Pour toute F-algèbre centrale simple A, le foncteur

$$\mathrm{GL}_1(A)\ :\ \begin{array}{ccc} F\text{- alg} & \longrightarrow & \text{Gpes} \\ R & \longmapsto & A_R^\times \end{array}$$

est représentable par [44, 20.2]. Il en va de même pour le foncteur

$$\mathrm{Aut}(A)\ :\ \begin{array}{ccc} F\text{- alg} & \longrightarrow & \text{Gpes} \\ R & \longmapsto & \{\text{Automorphismes de } R\text{-algèbres de } A_R\} \end{array}$$

en vertu de [44, 20.4]. Le morphisme de schémas en groupes défini pour toute F-algèbre R par

$$\mathrm{Int}_R \ : \ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_1(A)(R) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(A)(R) \\ a & \longmapsto & \varphi_a : x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1} \end{array}$$

a pour noyau $\mathbb{G}_m$ et est surjectif par le théorème C.1.3 puisque $\mathrm{Aut}(A)$ est lisse. Le morphisme Int identifie donc le schéma en groupes $\mathrm{Aut}(A)$ au quotient $\mathrm{GL}_1(A)/\mathbb{G}_m$, qui sera aussi parfois noté $\mathrm{PGL}_1(A)$.

2.1.4 Tores

Définition 2.1.3. Un schéma en groupes T sur F est un *tore* s'il existe une extension E/F telle que T_E soit isomorphe à un produit fini de groupes multiplicatifs $\mathbb{G}_m$.

Une extension E/F sur laquelle T est isomorphe à un produit de groupes multiplicatifs est un corps de déploiement de T. Si T est un tore sur F, toute clôture séparable F_{sep} de F déploie T par [57, Proposition 13.1.1]. Le groupe de Galois absolu $\Gamma = Gal(F_{sep}/F)$ agit naturellement sur le groupe des caractères $T^*_{F_{sep}} = \mathrm{Hom}(T_{F_{sep}}, \mathbb{G}_m)$ (voir [44, 20.16]).

Définition 2.1.4. Soit G un groupe algébrique et T un tore inclus dans G. Le tore T est *maximal* s'il n'est strictement contenu dans aucun autre tore de G.

En vertu de [17, Exposé XIV, Théorème 1.1] tout groupe algébrique connexe G contient un tore maximal. En outre par [6, Théorème 4.21] (voir aussi [4, Theorem 20.9] ou encore [57, Theorem 15.2.6]) les tores maximaux déployés d'un groupe algébrique G sont conjugués.

2.1.5 L'algèbre de Lie d'un schéma en groupes algébrique

Soit G un schéma en groupe algébrique représenté par l'algèbre de Hopf $F[G]$. Considérons l'algèbre des nombres duaux $F[\varepsilon] = F[X]/(X^2)$ ainsi que le morphisme d'algèbres $\kappa : F[\varepsilon] \longrightarrow F$ défini par $\kappa(\varepsilon) = 0$. Pour tout $\alpha \in F$, on note l_α le morphisme d'algèbres $F[\varepsilon] \longrightarrow F[\varepsilon]$ tel que $l_\alpha(\varepsilon) = \alpha\varepsilon$.

Définition 2.1.5. Pour tout schéma en groupes algébrique G sur F, l'*algèbre de Lie* de G, notée $\mathrm{Lie}(G)$, est le noyau du morphisme $G(F[\varepsilon]) \longrightarrow G(F)$ induit par κ.

L'addition dans $\mathrm{Lie}(G)$ est donnée par la multiplication dans $G(F[\varepsilon])$, tandis que l'action de F est donnée par $\alpha \cdot g = G(l_\alpha)(g)$.

Pour toute F-algèbre R, le groupe $G(R)$ agit sur $\mathrm{Lie}(G) \otimes_F R$ par conjugaison. La représentation

$$\mathrm{Ad}_G : G \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$$

associée à cette action est la représentation adjointe du groupe algébrique G.

2.2 Groupes semisimples déployés

Nous renvoyons le lecteur à [6], [44], [57], [58] pour plus de détails.

Définition 2.2.1. Un groupe algébrique G est *semisimple* si $G \neq \mathbf{1}$, G est connexe et si tout sous-groupe connexe, distingué et résoluble de $G_{F_{alg}}$ est trivial.

Un groupe algébrique semisimple G est déployé s'il contient un tore maximal déployé. Comme nous l'avons vu précédemment, tout groupe algébrique semisimple contient un tore maximal, et si G est déployé tous les tores maximaux déployés de G sont conjugués.

Définition 2.2.2. Soit G un groupe algébrique semisimple.
- Le groupe algébrique G est *simple* s'il est déployé et si $G_{F_{alg}}$ ne contient pas de sous-groupe connexe et distingué non trivial.
- Le groupe algébrique G est *absolument simple* si $G_{F_{sep}}$ est simple.

Soit G un groupe algébrique semisimple déployé et T un tore maximal déployé de G. On considère pour tout caractère $\alpha \in T^*$ le sous espace V_α de $\mathrm{Lie}(G)$ défini par

$$V_\alpha = \{v \in \mathrm{Lie}(G),\ \mathrm{Ad}_G(t)(v) = \alpha(t)v \quad \forall t \in T(F)\}.$$

Définition 2.2.3. Soit G un groupe algébrique semisimple et T un tore maximal. L'ensemble des *racines* de G, noté $\Phi(G, T^*)$, est l'ensemble des caractères $\alpha \in T^*$ non nuls pour lesquels V_α n'est pas trivial.

L'ensemble $\Phi(G, T^*)$ est un système de racines de $T^* \otimes \mathbb{R}$ par [6]. Ce système de racines ne dépend pas à isomorphisme près du choix du tore T car les tores maximaux déployés sont conjugués (voir [57, 15.5.5]). On note donc indifféremment $\Phi(G)$ le système de racines associé à un quelconque tore maximal déployé de G, et nous dirons qu'un groupe algébrique semisimple et déployé G est de type Φ si $\Phi(G)$ est isomorphe à Φ.

Nous renvoyons à l'appendice D pour les définitions de Λ_r, Λ_w, $\mathrm{Dyn}(\Phi)$, $\mathrm{W}(\Phi)$. Si G est un groupe semisimple et T un tore maximal déployé de G, alors $\Lambda_r \subset T^* \subset \Lambda_w$ par [58, 1.1]. A tout groupe semisimple G on peut donc associer $\Phi(G, T^*)$ qui caractérise la classe d'isomorphisme de G selon le résultat suivant.

Théorème ([58, Proposition 1])**.** Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques semisimples déployés et T_1, T_2 deux tores maximaux déployés respectifs. Alors G_1 est isomorphe à G_2 si et seulement si $\Phi(G_1, T_1^*)$ est isomorphe à $\Phi(G_2, T_2^*)$ (définition D.0.5).

En vertu de [58, Proposition 1] tout couple (Φ, A), où (V, Φ) est un système de racines et A est un sous-groupe de V vérifiant $\Lambda_r \subset A \subset \Lambda_w$ est isomorphe à $\Phi(G, T^*)$ pour un certain groupe algébrique semisimple déployé G.

Définition 2.2.4. Un groupe algébrique semisimple déployé G est *adjoint* si $T^* = \Lambda_r$ et *simplement connexe* si $T^* = \Lambda_w$.

Si G est un groupe algébrique semisimple déployé et Φ le système de racines associé à un tore maximal déployé de G, le diagramme de Dynkin $\mathrm{Dyn}(\Phi)$ est le diagramme de Dynkin de G, noté $\mathrm{Dyn}(G)$. Un groupe algébrique semisimple déployé G est simple si et seulement si $\Phi(G)$ est irréductible. Nous n'évoquons que les groupes algébriques adjoints et de type A_n que nous rencontrerons au chapitre 5 et renvoyons à [44], [58] pour la classification exhaustive des groupes simples déployés de type classique et exceptionnel.

Théorème 2.2.1. Tout groupe algébrique simple, adjoint, intérieur (cf Définition 2.3.2) et de type A_n est isomorphe à $\mathrm{PGL}_1(\mathrm{End}(V))$, où V est un espace vectoriel de dimension $n+1$.

2.3 Groupes semisimples sur un corps quelconque

2.3.1 Groupes algébriques semisimples de type intérieur

Soit G un groupe algébrique semisimple sur un corps F et T un tore maximal. Le tore $T_{F_{sep}}$ est déployé et maximal dans $G_{F_{sep}}$.

Définition 2.3.1. Si G est un groupe algébrique semisimple sur F et T un tore maximal, le système de racines $\Phi(G_{F_{sep}})$, noté $\Phi(G)$, est le *système de racines* de G.

Le groupe de Galois absolu de F agit d'une seconde manière sur les caractères du tore déployé $T_{F_{sep}}$ (voir [43], [47], [58]). Si $\Pi \subset \Phi(G)$ est un système de racines simples, alors pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma \cdot \Pi$ est un système de racines simple de $\Phi(G)$. Le groupe de Weil $\mathrm{W}(\Phi(G))$ agit simplement transitivement sur les systèmes de racines simples de $\Phi(G)$, il existe donc un unique automorphisme w_σ tel que $w_\sigma(\sigma \cdot \Pi) = \Pi$. Le groupe de Galois absolu agit donc sur Π par $\sigma * \alpha = w_\sigma(\sigma \cdot \alpha)$. Cette action induit une action de Γ sur l'ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de G, la $*$-action, qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix du tore maximal T, ni du système de racines simples choisi.

Définition 2.3.2. Un groupe algébrique semisimple G est *intérieur* si la $*$-action de Γ sur le diagramme de Dynkin de G est triviale. Si G n'est pas intérieur, nous dirons que G est *extérieur*.

Pour tout groupe algébrique semisimple G, il existe en vertu de [43, Lemma 3.5] une unique (à F-isomorphisme près) extension finie et Galoisienne F_{int}/F telle que $G_{F_{int}}$ soit intérieur et telle que toute extension L/F telle que G_L est intérieur contienne un sous-corps isomorphe à F_{int}.

Définition 2.3.3. Un groupe algébrique semisimple G est *p-intérieur* si le degré de l'extension F_{int} est une puissance d'un nombre premier p.

2.3.2 Espaces homogènes

Soit F un corps et G un groupe algébrique semisimple sur F. Un sous-groupe algébrique $P \subset G$ est *parabolique* si P est lisse et si le schéma G/P est projectif. Un G-schéma est un schéma sur F muni d'une action de G.

Définition 2.3.4. Soit G un groupe algébrique semisimple. Un G-schéma X est un *espace G-homogène* (ou un espace homogène s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il existe un sous groupe parabolique $P \subset G_{F_{sep}}$ et un isomorphisme $G_{F_{sep}}$-équivariant $X_{F_{sep}} \simeq G_{F_{sep}}/P$.

Un espace homogène est lisse, absolument réduit, absolument irréductible et projectif. On associe à tout espace G-homogène X la classe de conjugaison d'un sous-groupe parabolique P de $G_{F_{sep}}$, qui correspond à un sous-ensemble Θ des sommets du diagramme de Dynkin de G par [6, Lemme 4.6]. Nous dirons dans ces conditions que l'espace homogène X est de *type* Θ (voir [47]).

En vertu de [47, Lemma 1.2, Proposition 1.3], si X est un espace homogène de type Θ, Θ est stable par l'action du groupe Γ et X est isomorphe à la variété de Borel $\mathcal{B}_\Theta(G)$ (voir [5, Proposition 7.6, Corollaire 8.5]). On a donc une correspondance entre les classes de G-isomorphismes d'espaces G-homogènes et les sous-ensembles Γ-stables du diagramme de Dynkin de G.

2.3.3 Groupes adjoints, intérieurs de type A_n et variétés de drapeaux

Nous nous référons à [44], [47], [58] et [65] pour les autres résultats connus de classification des groupes algébriques semisimples et d'espaces homogènes. Comme précédemment, nous ne présentons que le cas des groupes adjoints, intérieurs et de type A_n, que nous étudierons au chapitre 5.

En vertu de [44, theorem 26.8] tout groupe algébrique semisimple et adjoint est isomorphe à unique produit fini $\mathcal{R}_{F_1/F}(G_1)\times\ldots\times\mathcal{R}_{F_n/F}(G_n)$ de restrictions de Weil de groupe algébriques absolument simples et adjoints. La classification des groupes algébriques semisimples et adjoints est ainsi réduite à celle des groupes algébriques absolument simples.

Théorème 2.3.1 ([47])**.** Tout groupe algébrique absolument simple, adjoint, intérieur et de type A_n est isomorphe à $\mathrm{PGL}_1(A)$, où A est une algèbre centrale simple de degré $n+1$. En outre tout espace G-homogène est isomorphe à une variété de drapeaux d'idéaux à droite de A.

Chapitre 3

Propriétés motiviques des espaces homogènes

Soit C une catégorie pseudo-abélienne et $\mathfrak{C}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets de C. La catégorie C vérifie la *propriété de Krull-Schmidt* si le monoïde $(\mathfrak{C}, \oplus)$ est libre. Nous présentons dans ce chapitre les résultats connus, certaines applications et les problèmes ouverts de l'étude des décompositions motiviques (comme somme directe de motifs indécomposables) d'espaces homogènes. Pour de plus amples détails, notamment pour le cas particulier des quadriques, nous recommandons les synthèses [29] et [30].

3.1 Motifs des quadriques

3.1.1 Quadriques déployées et de Pfister, suivant Rost

Nous supposerons que le corps de base F n'est pas de caractéristique 2 dans cette section. Les premières décompositions motiviques de quadriques ont été obtenues par Rost dans [52] et [54]. Rost obtient la décomposition suivante, qui permet de réduire l'étude du motif d'une quadrique à celle de sa partie anisotrope.

Théorème 3.1.1 ([54, Proposition 2])**.** Soit q une forme quadratique d'indice de Witt $n > 0$ et tel que $\dim(q) \geq 3$. Alors si Q est la quadrique associée à q, on a un isomorphisme dans $\mathrm{CM}(F; \mathbb{Z})$

$$Q \simeq \mathbb{Z} \oplus Q'[1] \oplus \mathbb{Z}[\dim(Q)]$$

où Q' est la quadrique associée à une forme quadratique q' Witt-équivalente à q et d'indice de Witt $n-1$.

L'isotropie d'une forme quadratique q implique donc l'existence de certains facteurs de Tate dans le motif de Q. En outre l'existence de tels facteurs détermine réciproquement l'isotropie de q par [59, Proposition 2.6]. On dit qu'une forme quadratique est *déployée* si elle est d'indice de Witt maximal. En appliquant récursivement le théorème 3.1.1, on obtient immédiatement la décomposition complète suivante du motif d'une quadrique déployée.

Théorème 3.1.2 ([54])**.** Soit q une forme quadratique déployée et Q la quadrique associée. Alors

$$\begin{array}{ll} Q \simeq \bigoplus_{i=0}^{\dim(Q)} \mathbb{Z}[i] & \text{si } \dim(Q) \text{ est impair;} \\ Q \simeq \mathbb{Z}[\dim(Q)/2] \oplus \bigoplus_{i=0}^{\dim(Q)} \mathbb{Z}[i] & \text{si } \dim(Q) \text{ est pair.} \end{array}$$

Les quadriques sont donc des variétés géométriquement déployées (au sens de la définition 1.4.4). La première décomposition motivique complète de quadrique anisotrope obtenue par Rost est celle des formes de Pfister.

Théorème 3.1.3 ([54, Proposition 19])**.** Soit q une forme de Pfister anisotrope de dimension 2^n et Q la quadrique associée. Alors il existe un motif indécomposable M dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})$ tel que

$$Q \simeq \bigoplus_{i=0}^{2^{n-1}-1} M[i].$$

Enfin Rost fait l'observation fondamentale suivante.

Théorème 3.1.4 ([54, Proposition 9])**.** Soit Q une quadrique définie sur un corps F, $\pi \in \mathrm{End}_{\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})}(Q)$ et E/F une extension de corps. Si $\mathrm{res}_{E/F}(\pi) = 0$, alors π est nilpotent.

Ce phénomène, le *principe de nilpotence de Rost*, est particulièrement utile pour l'étude des décompositions motiviques. En effet par [19, Corollary 92.5] tout endomorphisme de Q devenant un projecteur sur une extension du corps de base un un projecteur, modulo des éléments nilpotents. En particulier la décomposition du motif de Q peut être étudiée sur un corps de déploiement de Q. Comme nous le verrons, les espaces homogènes vérifient eux aussi cette propriété. Notons même qu'en dehors des espaces homogènes, d'autres classes de variétés satisfont le principe de nilpotence de Rost (voir [24]). La question de l'existence d'un exemple de variété ne satisfaisant pas cette propriété est d'ailleurs à notre connaissance ouverte.

3.1.2 Le cas général, d'après Vishik

La première étude systématique du motif des quadriques a été effectuée dans [59] et contient nombre de résultats fondamentaux.

Définition 3.1.1. Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_i)_{i\in\mathcal{I}}$ une famille de motifs appartenant à $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$. La *sous-catégorie épaisse* engendrée par $\mathcal{M}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ dont les objets sont les sommes directes finies de facteurs directs décalés d'éléments de $\mathcal{M}$.

Théorème 3.1.5 ([59])**.** La sous-catégorie épaisse de $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})$ engendrée par les motifs des quadriques vérifie la propriété de Krull-Schmidt.

Autrement dit, le motif d'une quadrique dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})$ se décompose en une somme directe de motifs indécomposables, et cette décomposition est unique à isomorphisme et à permutation près de ces facteurs. Comme nous verrons par la suite, ce résultat est spécifique aux quadriques et n'est pas toujours vérifié par les espaces homogènes. En vertu du principe de nilpotence de Rost, la décomposition motivique complète d'une quadrique Q peut être visualisée sur un corps de déploiement de la forme quadratique q. Vishik introduit un objet combinatoire, le diagramme de Vishik de Q, qui permet de décrire cette décomposition [59, §4].

Vishik exhibe des relations profondes entre la décomposition motivique d'une quadrique Q et la tour de Knebusch de la forme quadratique q associée. Il réussit ainsi à décrire toutes les collections d'indices de Witt supérieurs possibles pour les formes quadratiques de dimension impaire inférieure à 21 et paire inférieure à 12. Le résultat suivant est spécifique aux quadriques et est techniquement très utile.

Théorème 3.1.6 ([25, Theorem 1],[31, Théorème E.11.2])**.** Soit M un facteur indécomposable du motif d'une quadrique Q dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})$. Alors l'image de M par le foncteur de changement des coefficients est indécomposable dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Le théorème 3.1.6 montre que la décomposition motivique d'une quadrique Q est essentiellement la même, que l'anneau des coefficients soit $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puisque la propriété de Krull-schmidt est aussi vérifiée à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Cette observation permet de retrouver de manière plus aisée certains des résultats de [59] (voir [19]).

3.1.3 Applications

L'étude motivique des quadriques possède un nombre considérable d'applications. Comme nous l'avons vu précédemment, la classification motivique des quadriques permet de résoudre dans certains cas l'important problème de classification des indices de Witt supérieurs possibles (voir [59]). En outre la décomposition du motif d'une forme de Pfister est un élément essentiel dans la démonstration de la conjecture de Milnor (nous nous référons à [29] pour plus de détails).

Les résultats obtenus sur la décomposition motivique des quadriques ont permis de répondre à plusieurs conjectures classiques de la théorie algébrique des formes quadratiques. La conjecture de Hoffmann, qui impose des restrictions très importantes au premier indice de Witt supérieur d'une forme quadratique est démontrée par Karpenko dans [35]. Vishik retrouve par la suite ce résultat en exhibant de nouvelles relations entre les indices de Witt supérieurs dans [61]. Vishik apporte aussi une réponse au problème de Kaplansky sur les valeurs possibles du u-invariant d'un corps dans [60]. Nous recommandons la lecture [30] pour un panorama détaillé et très éclairant de ces avancées.

3.2 Des quadriques aux espaces homogènes

3.2.1 Propriété de Krull-Schmidt et principe de nilpotence

Comme nous l'avons vu, les quadriques jouissent de propriétés motiviques très particulières. Une quadrique Q est *géométriquement déployée* et vérifie le *principe de nilpotence de Rost*. En outre la sous-catégorie épaisse de $\mathrm{CM}(F;\mathbb{Z})$ engendrée par les motifs de quadriques satisfait la propriété de Krull-Schmidt.

Notation 3.2.1. Si G est un groupe algébrique semisimple sur un corps F et Λ est un anneau, la sous-catégorie épaisse engendrée par les motifs d'espaces G-homogènes est notée $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$. L'ensemble des classes d'isomorphismes de motifs indécomposables de $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ est noté $\mathfrak{X}_G$.

Köck montre que les espaces homogènes sous l'action d'un groupe algébrique semisimple sont géométriquement déployés ([45, Theorem 2.1]). Chernousov, Gille et Merkurjev dans [10] et [11] (voir aussi [8]) retrouvent ce résultat et montrent que les espaces homogènes vérifient le principe de nilpotence de Rost. Cependant ils exhibent un exemple de groupe algébrique semisimple G pour lequel $\mathrm{CM}_G(F;\mathbb{Z})$ ne satisfait pas la propriété de Krull-Schmidt ([11, Example 9.4]). Calmès, Petrov, Semenov et Zainoulline produisent par la suite un autre contre-exemple à la propriété de Krull-Schmidt dans $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$, où G est de plus supposé simple ([9, Corollary 2.7]).

Chernousov, Gille et Merkurjev obtiennent plusieurs conditions suffisantes sur le groupe algébrique G et sur l'anneau des coefficients Λ pour que la catégorie $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ satisfasse la propriété de Krull-Schmidt ([11, Corollary 35]). Nous nous placerons donc dans le cadre du résultat suivant qui leur est dû, et dont une autre démonstration est donnée par Karpenko ([36, Corollary 3.6]).

Théorème 3.2.1. Si G est un groupe algébrique semisimple et Λ est un anneau fini, la catégorie $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ satisfait la propriété de Krull-Schmidt.

3.2.2 Le programme de classification des décompositions motiviques d'espaces homogènes

Soit G un groupe algébrique semisimple sur un corps F, X un espace homogène sous l'action de G et Λ un anneau fini et connexe (nous rappelons qu'un anneau fini et connexe est local). Nous avons vu plus tôt que X est géométriquement déployée et satisfait le principe de nilpotence de Rost. La catégorie $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ vérifie la propriété de Krull-Schmidt, et l'étude des décompositions motiviques d'espaces homogènes peut être synthétisée de la manière suivante.

Problème 1. (Étude qualitative) Comment caractériser les facteurs indécomposables entrant dans la décomposition motivique complète d'un espace G-homogène ?

Problème 2. (Rigidité des décompositions motiviques) La décomposition motivique d'un espace G-homogène X dans $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ demeure-t-elle la même après changement des coefficients ?

Problème 3. (Classification des motifs indécomposables) Si G et G' sont deux groupes algébriques semisimples, peut-on comparer les décompositions motiviques d'espaces G-homogènes et d'espaces G'-homogènes ?

Problème 4. (Décompositions explicites) Comment calculer explicitement la décomposition motivique d'un espace homogène ?

Comme nous allons le voir, il existe désormais des réponses assez précises à certains de ces problèmes dans le cas ou le groupe algébrique G est intérieur (ou plus généralement p-intérieur). Ces questions restent en revanche ouvertes dans le cas général.

Problème 1 : Étude qualitative des décompositions motiviques

Soit p un nombre premier, G un groupe algébrique semisimple p-intérieur et Λ un corps fini de caractéristique p (nous verrons lors de l'étude du Problème 2 que Λ peut être plus généralement supposé fini, connexe et de corps résiduel de caractéristique p). Une réponse au Problème 1 est donnée par la théorie des *motifs supérieurs* développée dans [36] et [39] par Karpenko.

Pour tout espace G-homogène X, il existe un unique motif indécomposable U_X (défini à isomorphisme près) entrant dans la décomposition du motif de X dans $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ et tel que $\mathrm{CH}^0(\mathrm{U}_X;\Lambda)$ soit non nul.

Définition 3.2.1. La classe d'isomorphisme du motif U_X dans $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ est le *motif supérieur* de X. L'ensemble des motifs supérieurs décalés d'espaces G-homogènes, noté U_G, est l'ensemble des *motifs supérieurs* de G.

Théorème 3.2.2 ([39, Theorem 1.1])**.** Si Λ est un corps fini et G un groupe algébrique semisimple intérieur, alors $\mathfrak{X}_G = \mathrm{U}_G$.

Remarque 3.2.1. Plus généralement si G est p-intérieur pour un certain nombre premier p et si le corps des coefficients est de caractéristique p, tout élément de $\mathfrak{X}_G$ correspond à un motif supérieur de G_E, pour une certaine extension $F_{int}/E/F$.

Tout facteur direct indécomposable entrant dans la décomposition complète du motif d'un espace G-homogène dans $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ est donc isomorphe au motif supérieur décalé d'un (autre) espace G-homogène.

Notons enfin que la théorie des motifs supérieurs n'est valable que pour les groupes algébriques p-intérieurs et à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. En effet on peut construire (voir [39, Example 3.3]) un exemple de groupe algébrique G qui est 2-intérieur, et un espace G-homogène X dont la décomposition motivique complète à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (pour $p \neq 2$) n'est pas constituée uniquement de motifs supérieurs de G. Le Problème 1 dans cette situation est donc à notre connaissance ouvert.

Problème 2 : Rigidité des décompositions motiviques

Soit p un nombre premier, G un groupe algébrique semisimple p-intérieur et Λ un anneau fini et connexe dont le corps résiduel, noté $\mathcal{R}$, est de caractéristique p. Nous avons supposé lors de l'étude du Problème 1 que l'anneau des coefficients est un corps fini de caractéristique p. Le résultat suivant, du à Vishik et Yagita, montre que l'étude des décompositions motiviques à coefficients dans un tel anneau est réduite à l'étude à coefficients dans son corps résiduel.

Théorème 3.2.3 ([62, Corollary 2.6])**.** Soit G un groupe algébrique semisimple p-intérieur. L'image de tout motif indécomposable de $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ par le foncteur $\mathrm{coeff}_{\mathcal{R}/\Lambda}$ est indécomposable.

Nous proposerons une réponse au Problème 2 au Chapitre 4 (qui correspond à [13]) pour les groupes algébriques p-intérieurs. Plus précisément nous montrons le résultat suivant.

Théorème 3.2.4 ([13, Theorem 2.1])**.** Soit G un groupe algébrique semisimple p-intérieur. La décomposition motivique d'un espace G-homogène dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ se relève sur n'importe quel corps fini de caractéristique p.

Nous obtenons en fait plus : si G est un groupe algébrique semisimple p-intérieur, tout motif indécomposable de $\mathrm{CM}_G(F;\mathbb{F}_p)$ se relève en un motif indécomposable de $\mathrm{CM}(F;K)$, pour tout corps K de caractéristique p. L'étude des décompositions motiviques d'espaces homogènes sous l'action d'un groupe p-intérieur à coefficient dans n'importe quel corps fini de caractéristique p est ainsi réduite à l'étude à coefficients dans $\mathbb{F}_p$.

Nous montrons enfin que ce résultat est optimal, en exhibant un exemple de groupe algébrique G semisimple et 3-intérieur, ainsi qu'un espace G-homogène dont les décompositions motiviques à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_4$ diffèrent.

Problème 3 : Classification des facteurs directs indécomposables

Soit p un nombre premier, ainsi que G et G' deux groupes algébriques absolument simples, p-intérieurs et de même type.

Si X est un espace G-homogène, un facteur indécomposable du motif de X dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ peut-il entrer dans la décomposition d'un espace G'-homogène X' ?

Bien entendu, un exemple de tel motif est le motif de Tate $\mathbb{F}_p$, qui entre dans la décomposition de tout espace homogène isotrope, donc $\mathfrak{X}_G \cap \mathfrak{X}_{G'}$ n'est pas vide.

Nous répondrons de manière définitive au Problème 3 au Chapitre 5 (qui correspond à [14]) pour les groupes absolument simples, adjoints, intérieurs et de type A_n. Plus précisément nous classifions les motifs indécomposables entrant dans la décomposition motivique d'un espaces homogène sous l'action d'un tel groupe algébrique. Nous en déduisons le résultat suivant, montrant que le comportement des motifs indécomposables est dans ce cas pour le moins extrême.

Théorème 3.2.5 ([14, Theorem 5])**.** Soient G et G' deux groupes algébriques absolument simples, adjoints, intérieurs et de types respectifs A_n et $A_{n'}$. Si $\mathfrak{X}_G \cap \mathfrak{X}_{G'}$ n'est pas réduit aux motifs de Tate, alors $\mathfrak{X}_G = \mathfrak{X}_{G'}$.

Il n'existe pas à notre connaissance de telle classification pour les groupes algébriques d'autre type. Le Problème 3 reste donc ouvert si G n'est pas absolument simple, adjoint et intérieur de type A_n. Il n'existe pas non plus d'analogue à la dichotomie motivique de PGL_1 observée au théorème 3.2.5 pour les autres types.

Problème 4 : Décompositions explicites d'espaces homogènes

Nous nous intéressons au Chapitre 7 aux décompositions explicites des espaces G-homogènes, où G est absolument simple, adjoint et intérieur de type A_n. Un exemple de telle décomposition motivique est celle des variétés de Severi-Brauer classiques associées aux algèbres (centrales) à division p-primaires, dont il existe plusieurs preuves de l'indécomposabilité ([32, Theorem 2.2.1], [36, Corollary 2.22], ou [66, Corollary 2.2]). L'étude des motifs supérieurs de variétés de Severi-Brauer généralisées d'algèbres à division p-primaires est essentielle, et il se trouve que les motifs de ces variétés (voir [66, Theorem 2.4]) ne sont pas toujours indécomposables.

Nous étudions au Chapitre 7 le lien qu'entretiennent les décompositions motiviques des variétés de Severi-Brauer généralisées et l'indice de Schur de l'algèbre centrale simple sous-jacente. Pour ce faire nous décrivons explicitement les facteurs indécomposables entrant dans la décomposition motivique complète de $X(4; D)$, où D est une algèbre à division 2-primaire (Corollary 7.2.2).

Nous proposons aussi au Chapitre 6 un théorème de descente permettant de retrouver sur le corps de base des facteurs directs motiviques apparaissant sur une extension. Ce résultat est utilisé par Garibaldi, Petrov et Semenov dans [22] pour obtenir la classification motivique complète des espaces homogènes sous l'action d'un groupe intérieur et de type E_6 ([22, Section 7]) et répondre à une question posée par Rost et Springer.

3.2.3 Applications

Définition 3.2.2. Soit $X \in \mathrm{Sm}(F)$ un espace G-homogène et Λ un anneau fini. La *dimension* $\dim(M)$ d'un facteur direct $M \in \mathrm{CM}(F;\Lambda)$ de X est définie par $t(M) - b(M)$ (les entiers $t(M)$ et $b(M)$ étant définis à la section 6.2).

La *dimension canonique* est un invariant discret associé à un schéma intègre X sur F. Il s'agit d'un entier noté $\mathrm{cdim}(X)$ vérifiant $0 \leq \mathrm{cdim}(X) \leq \dim(X)$. Il existe de plus pour tout nombre premier p une version locale, la *dimension p-canonique* de X, qui vérifie $0 \leq \mathrm{cdim}_p(X) \leq \mathrm{cdim}(X) \leq \dim(X)$ (nous nous référons à [3] et [37] pour les définitions de ces notions). Si $\mathrm{cdim}(X) = \dim(X)$, le schéma X est dit *incompressible*.

Théorème 3.2.6 ([37, Theorem 5.1])**.** Si G est un groupe algébrique semisimple p-intérieur, X est un espace G-homogène et U_X le motif supérieur de X dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$, alors $\mathrm{cdim}_p(X) = \dim(\mathrm{U}_X)$.

En vertu de [36, Theorem 4.1], le facteur direct supérieur des variétés de Severi-Brauer généralisées $X = (p^k; D)$ associées à une algèbre à division p-primaire D dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ est aussi inférieur, c'est à dire $\dim(\mathrm{U}_X) = \dim(X)$. En particulier ces variétés sont incompressibles, et on en déduit la dimension p-canonique de tout espace homogène sous l'action d'un groupe algébrique absolument simple, adjoint et intérieur de type A_n ([36, Corollary 4.4]).

L'étude des décompositions motiviques d'espaces homogènes est à l'origine de nombreux autres résultats. Citons par exemple la résolution du problème d'isotropie des involutions unitaires dans [41] ainsi que la résolution de la conjecture d'hyperbolicité sur les involutions de Pfister isotropes ([37, Theorem 3.8]). Enfin l'étude des décompositions motiviques des espaces homogènes sous l'action des groupes algébriques de type exceptionnels et le J-invariant défini par Petrov, Semenov et Zainoulline est à l'origine d'importants résultats reliés à l'invariant de Rost (nous nous référons pour ces applications à [22], [50], [56]).

Chapitre 4

Décompositions motiviques et anneau des coefficients

Nous avons proposé au Chapitre 3 quatre problèmes reliés au programme de classification des décompositions motiviques d'espaces homogènes. Nous répondons dans ce chapitre (qui correpond à [13]) au Problème 2 en montrant que l'étude des décompositions motiviques des espaces homogènes sous l'action d'un groupe algébrique p-intérieur à coefficients dans un corps fini de caractéristique p est réduite à l'étude à coefficients sur $\mathbb{F}_p$. Nous montrons de plus que ce résultat est optimal, en proposant un exemple d'espace homogène sous l'action d'un groupe algébrique 3-intérieur, et dont la décomposition motivique à coefficients dans $\mathbb{F}_2$ n'est pas similaire à celle à coefficients dans $\mathbb{F}_4$.

Motivic decompositions of projective homogeneous varieties and change of coefficients

Décompositions motiviques des variétés projectives homogènes et changement des coefficients

Résumé

Nous prouvons que sous certaines hypothèses sur un groupe algébrique G, tout facteur direct indécomposable du motif associé à une variété projective G-homogène à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ demeure indécomposable si l'anneau des coefficients est un corps de caractéristique p. En particulier pour toute variété projective G-homogène X, la décomposition du motif de X comme somme directe de motifs indécomposables à coefficients dans tout corps fini de caractéristique p correspond à la décomposition du motif de X à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Nous exhibons de plus un contre-exemple à ce résultat dans le cas où le groupe G est quelconque.

Abstract

We prove that under some assumptions on an algebraic group G, indecomposable direct summands of the motive of a projective G-homogeneous variety with coefficients in $\mathbb{F}_p$ remain indecomposable if the ring of coefficients is any field of characteristic p. In particular for any projective G-homogeneous variety X, the decomposition of the motive of X in a

direct sum of indecomposable motives with coefficients in any finite field of characteristic p corresponds to the decomposition of the motive of X with coefficients in $\mathbb{F}_p$. We also construct a counterexample to this result in the case where G is arbitrary.

Introduction

Let F be a field, Λ be a commutative ring, $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ be the category of *Grothendieck Chow motives* with coefficients in Λ, G a semi-simple affine algebraic group and X a projective G-homogeneous F-variety. The purpose of this note is to study the behaviour of the complete motivic decomposition (in a direct sum of indecomposable motives) of $X \in \mathrm{CM}(F;\Lambda)$ when changing the ring of coefficients. In the first part we prove some very elementary results in non-commutative algebra and find sufficient conditions for the tensor product of two connected rings to be connected. In the second part we show that under some assumptions on G, indecomposable direct summands of X in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ remain indecomposable if the ring of coefficients is any field of characteristic p (Theorem 4.2.1), since these conditions hold for the *reduced endomorphism ring* of indecomposable direct summands of X. In particular theorem 4.2.1 implies that the complete decomposition of the motive of X with coefficients in any finite field of characteristic p corresponds to the complete decomposition of the motive of X with coefficients in $\mathbb{F}_p$. Finally we show that theorem 4.2.1 doesn't hold for arbitrary G by producing a counterexample.

Let Λ be a commutative ring. Given a field F, an F-variety will be understood as a separated scheme of finite type over F. Given such Λ and an F-variety X, we can consider $\mathrm{CH}_i(X;\Lambda)$, the Chow group of i-dimensional cycles on X modulo rational equivalence with coefficients in Λ, defined as $\mathrm{CH}_i(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\Lambda$. These groups are the first step in the construction of the category $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ of *Grothendieck Chow motives* with coefficients in Λ. This category is constructed as the *pseudo-abelian envelope* of the category $\mathrm{CR}(F;\Lambda)$ of *correspondences* with coefficients in Λ. Our main reference for the construction and the main properties of these categories is [19]. For a field extension E/F and any correspondence $\alpha \in \mathrm{CH}(X\times Y;\Lambda)$ we denote by α_E the pull-back of α along the natural morphism $(X\times Y)_E \to X\times Y$. Considering a morphism of commutative rings $\varphi : \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ we define the two following functors. The *change of base field* functor is the additive functor $\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{CM}(F;\Lambda) \longrightarrow \mathrm{CM}(E;\Lambda)$ which maps any summand $(X,\pi)[i] \in \mathrm{CM}(F;\Lambda)$ to $(X_E,\pi_E)[i]$ and any morphism $\alpha : (X,\pi)[i] \to (Y,\rho)[j]$ to α_E. The *change of coefficents* functor is the additive functor $\mathrm{coeff}_{\Lambda'/\Lambda} : \mathrm{CM}(F;\Lambda) \longrightarrow \mathrm{CM}(F;\Lambda')$ which maps any summand $(X,\pi)[i]$ to $(X,(id\otimes\varphi)(\pi))[i]$ and any morphism $\alpha : (X,\pi)[i] \to (Y,\rho)[j]$ to $(id\otimes\varphi)(\alpha)$.

Acknowledgements I am very grateful to Nikita Karpenko for his suggestions and his support during this work. I also would like to thank François Petit and Maksim Zhykhovich. Finally I am grateful to the referee for the useful remarks.

4.1 On the tensor product of connected rings

Recall that a ring A is *connected* if there are no other idempotents in A than 0 and 1.

Proposition 4.1.1. Let A be a finite and connected ring. Then any element a in A is either nilpotent or invertible. The set $\mathcal{N}$ of nilpotent elements in A is a two-sided and nilpotent ideal.

In order to prove Proposition 4.1.1 we will need the following elementary lemma.

Lemma 4.1.1. Let A be a finite ring. An appropriate power of any element a of A is idempotent.

Proof. For any $a \in A$, the set $\{a^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ is finite, hence there is a couple $(p,k) \in \mathbb{N}^2$ (with k non-zero) such that $a^p = a^{p+k}$. The sequence $(a^n)_{n \geq p}$ is k-periodic and for example if s is the lowest integer such that $p < sk$, a^{sk} is idempotent. □

Proof of Proposition 4.1.1. For any $a \in A$, an appropriate power of a is an idempotent by lemma 4.1.1. Since A is connected, this power is either 0 or 1, that is to say a is either nilpotent or invertible.

We now show that the set $\mathcal{N}$ of nilpotent elements in A is a two-sided ideal. First if a is nilpotent in A, then for any b in A, ab and ba are not invertible, hence ab and ba belong to $\mathcal{N}$.

It remains to show that the sum of two nilpotent elements in A is nilpotent. Setting ν for the number of nilpotent elements in A, we claim that for any sequence $a_1,\ldots,\ a_\nu$ in $\mathcal{N}$, $a_1...a_\nu = 0$. Indeed if $a_{\nu+1}$ is any nilpotent in A the finite sequence $\Pi_1 = a_1$, $\Pi_2 = a_1a_2,\ldots,\ \Pi_{\nu+1} = a_1a_2...a_{\nu+1}$ consists of nilpotents and by the pigeon-hole principle $\Pi_k = \Pi_s$, for some k and s satisfying $1 \leq k < s \leq \nu+1$. Therefore $\Pi_s = \Pi_k a_{k+1}...a_s = \Pi_k$ which implies that $\Pi_k(1-a_{k+1}...a_s) = 0$ and $\Pi_k = 0$ since $1-a_{k+1}...a_s$ is invertible. With this in hand it is clear that for any a and b in $\mathcal{N}$, $(a+b)^\nu = 0$. Furthermore $\mathcal{N}^\nu = 0$ and $\mathcal{N}$ is nilpotent. □

Corollary 4.1.1. Let A be a finite and connected $\mathbb{F}_p$-algebra endowed with a ring morphism $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{F}_p$. Then the set $\mathcal{N}$ of nilpotent elements in A is precisely $ker(\varphi)$. Furthermore for any connected $\mathbb{F}_p$-algebra E, $A \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ is connected.

Proof. For any $a \in \mathcal{N}$ and $n \in \mathbb{N}^*$ such that $a^n = 0$, $0 = \varphi(a^n) = \varphi(a)^n$, hence a lies in the kernel of φ. On the other hand if $\varphi(a) = 0$, a is not invertible thus a is nilpotent and $\mathcal{N} = ker(\varphi)$. Since $\mathcal{N}$ is nilpotent, $\mathcal{N} \otimes E$ is also nilpotent. The sequence

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \otimes E \longrightarrow A \otimes E \xrightarrow{\psi} E \longrightarrow 0$$

is exact and we want to show that any idempotent P in $A \otimes_{\mathbb{F}_p} E$ is either 0 or 1. Since E is connected, $\psi(P)$ is either 0 or 1. We may replace P by $1-P$ and so assume that P lies in the kernel of ψ, which implies that the idempotent P is nilpotent, hence $P = 0$. □

4.2 Application to motivic decompositions of projective homogeneous varieties

For any semi-simple affine algebraic group G, the full subcategory of $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ whose objects are finite direct sums of twists of direct summands of the motives of projective G-homogeneous F-varieties will be denoted $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$. We now use corollary 4.1.1 to study how motivic decompositions in $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ behave when extending the ring of coefficients. A pseudo-abelian category C satisfies the *Krull-Schmidt principle* if the monoid $(\mathfrak{C},\oplus)$ is free, where $\mathfrak{C}$ denotes the set of the isomorphism classes of objects of C.

In the sequel Λ will be a connected ring and X an F-variety. A field extension E/F is a *splitting field* of X if the E-motive X_E is isomorphic to a finite direct sum of twists of Tate motives. The F-variety X is *geometrically split* if X splits over an extension of F, and X satisfies the *nilpotence principle*, if for any field extension E/F the kernel of the morphism $\mathrm{res}_{E/F} : \mathrm{End}(M(X)) \longrightarrow \mathrm{End}(M(X_E))$ consists of nilpotents. Any projective homogeneous variety (under the action of a semi-simple affine algebraic group) is geometrically split and satisfies the nilpotence principle (see [11]), therefore if Λ is finite the Krull-Schmidt principle holds for $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$ by [38, Corollary 3.6], and we can serenely deal with motivic decompositions in $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$.

Let G be a semi-simple affine algebraic group over F and p a prime. The absolute Galois group $Gal(F_{sep}/F)$ acts on the Dynkin diagram of G and we say that G is of *inner type* if this action is trivial. By [11] the subfield F_G of F_{sep} corresponding to the kernel of this action is a finite Galois extension of F, and we will say that G is *p-inner* if $[F_G : F]$ is a power of p. We now state the main result.

Theorem 4.2.1. Let G be a semi-simple affine p-inner algebraic group and $M \in \mathrm{CM}_G(F;\mathbb{F}_p)$. Then for any field L of characteristic p, M is indecomposable if and only if $\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M)$ is indecomposable.

If X is geometrically split the image of any correspondence $\alpha \in \mathrm{CH}(X \times X;\Lambda)$ by the *change of base field* functor $res_{E/F}$ to a splitting field E/F of X will be denoted $\overline{\alpha}$. The *reduced endomorphism ring* of any direct summand (X,π) is defined as $res_{E/F}(\mathrm{End}_{CM(F;\Lambda)}((X,\pi)))$ and denoted by $\overline{\mathrm{End}}((X,\pi))$.

Let X be a complete and irreducible F-variety. The pull-back of the morphism $\mathrm{Spec}(F(X)) \times X \longrightarrow X \times X$ leads to $\mathrm{mult} : \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X;\Lambda) \to \mathrm{CH}_0(X_{F(X)};\Lambda) \to \Lambda$ (where the second map is the usual *degree* morphism). For any correspondence $\alpha \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X;\Lambda)$, $\mathrm{mult}(\alpha)$ is called the *multiplicity* of α and we say that a direct summand (X,π) given by a projector $\pi \in \mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times X;\Lambda)$ is *upper* if $\mathrm{mult}(\pi) = 1$. If (X,π) is an upper direct summand of a complete and irreducible F-variety, the multiplicity $\mathrm{mult} : \mathrm{End}_{\mathrm{CM}(F;\Lambda)}((X,\pi)) \longrightarrow \Lambda$ is a morphism of rings by [33, Corollary 1.7].

Proposition 4.2.1. Let G be a semi-simple affine algebraic group and $M = (X,\pi)$ the upper direct summand of the motive of an irreducible and projective G-homogeneous F-variety in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$. Then for any field L of characteristic p, M is indecomposable if and only if $\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M)$ is indecomposable.

Proof. Since the change of coefficients functor is additive and maps any non-zero projector to a non-zero projector, it is clear that if $\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M)$ is indecomposable, M is also indecomposable. Considering a splitting field E of X, the reduced endomorphism ring $\overline{\mathrm{End}}(M) := \overline{\pi} \circ \overline{\mathrm{End}}(X) \circ \overline{\pi}$ is connected since M is indecomposable and finite. Corollary 4.1.1, with $A = \overline{\mathrm{End}}(M)$, and $\varphi = \mathrm{mult}$ implies that $\overline{\mathrm{End}}(M) \otimes L = \overline{\mathrm{End}}(\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M))$ is connected, therefore by the nilpotence principle $\mathrm{End}(\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M))$ is also connected, that is to say $\mathrm{coeff}_{L/\mathbb{F}_p}(M)$ is indecomposable. □

Proof of Theorem 4.2.1. Recall that G is a semi-simple affine p-inner algebraic group and consider a projective G-homogeneous F-variety X. By [39, Theorem 1.1], any indecomposable direct summand M of X is a twist of the upper summand of the motive of an irreducible and projective G-homogeneous F-variety Y, thus we can apply proposition 4.2.1 to each indecomposable direct summand of X. □

Remark 4.2.1. If Λ is a finite, commutative and connected ring, complete motivic decompositions in $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ remain complete when the coefficients are extended to the residue field of Λ by [62, Corollary 2.6], hence the study of motivic decompositions in $\mathrm{CM}_G(F;\Lambda)$, where Λ is any finite connected ring whose residue field is of characteristic p, is reduced to the study motivic decompositions in $\mathrm{CM}_G(F;\mathbb{F}_p)$.

We now produce a counterexample to Theorem 4.2.1 in the case where the algebraic group G doesn't satisfy the needed assumptions. Let L/F be a Galois extension of degree 3. By [11, Section 7], the endomorphism ring $\mathrm{End}(M(\mathrm{Spec}(L)))$ of the motive associated with the F-variety $\mathrm{Spec}(L)$ with coefficients in $\mathbb{F}_2$ is the $\mathbb{F}_2$-algebra of $Gal(L/F)$, i.e. $\frac{\mathbb{F}_2[X]}{(X^3-1)} \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_4$, hence $M(\mathrm{Spec}(L)) = M \oplus N$, with $\mathrm{End}(N) = \mathbb{F}_4$ and both M and N are indecomposable. Now $\mathrm{End}(res_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}(N)) = \mathbb{F}_4 \otimes \mathbb{F}_4$ is not connected since $1 \otimes \alpha + \alpha \otimes 1$ is a non-trivial idempotent for any $\alpha \in \mathbb{F}_4 \setminus \mathbb{F}_2$, hence $\mathrm{res}_{\mathbb{F}_4/\mathbb{F}_2}(N)$ is decomposable.
Consider the $(\mathrm{PGL}_2)_L$-homogeneous L-variety $\mathbb{P}^1_L$. The *Weil restriction* $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_L)$ is a projective homogeneous F-variety under the action of the Weil restriction of $(\mathrm{PGL}_2)_L$, and the minimal extension such that $\mathcal{R}((\mathrm{PGL}_2)_L)$ is of inner type is L. By [34, Example 4.8], the motive with coefficients in $\mathbb{F}_2$ of $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_L)$ contains two twists of $\mathrm{Spec}(L)$ as direct summands, therefore at least two indecomposable direct summands of $\mathcal{R}(\mathbb{P}^1_L)$ split off over $\mathbb{F}_4$.

Chapter 5

Classification des motifs indécomposables : groupes adjoints de type A_n

Nous répondons dans ce chapitre (qui correpond à [14]) au Problème 3 du Chapitre 3 pour les groupes algébriques absolument simples, adjoints, intérieurs et de type A_n. En effet si G est un tel groupe, nous classifions totalement les facteurs indécomposables entrant dans la décomposition motivique d'un espace G-homogène dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$. Le corollaire 5.4.1 dans le cas où $k = k' = 0$ correspond à un ancien résultat d'Amitsur ([1, Theorem 9.3]). En vertu du Chapitre 4, cette classification est aussi valable quand l'anneau des coefficients est un corps fini de caractéristique p. De cette classification découle le théorème de dichotomie motivique de PGL_1 (Théorème 3.2.5).

Classification of upper motives of algebraic groups of inner type A_n

Classification des motifs supérieurs des groupes algébriques intérieurs de type A_n

Résumé

Soient A, A' deux algèbres centrales simples sur un corps F et $\mathbb{F}$ un corps fini de caractéristique p. Nous prouvons que les facteurs directs indécomposables supérieurs des motifs de deux variétés anisotropes de drapeaux d'idéaux à droite $X(d_1, ..., d_k; A)$ et $X(d'_1, ..., d'_{k'}; A')$ à coefficients dans $\mathbb{F}$ sont isomorphes si et seulement si les valuations p-adiques de $\mathrm{pgcd}(d_1, ..., d_k)$ et $\mathrm{pgcd}(d'_1, .., d'_{k'})$ sont égales et les classes des composantes p-primaires A_p et A'_p de A et A' engendrent le même sous-groupe dans le groupe de Brauer de F. Ce résultat mène à une surprenante dichotomie entre les motifs supérieurs des groupes algébriques absolument simples, adjoints et intérieurs de type A_n.

Abstract

Let A, A' be two central simple algebras over a field F and $\mathbb{F}$ be a finite field of characteristic p. We prove that the upper indecomposable direct summands of the motives of

two anisotropic varieties of flags of right ideals $X(d_1, ..., d_k; A)$ and $X(d'_1, ..., d'_{k'}; A')$ with coefficients in $\mathbb{F}$ are isomorphic if and only if the p-adic valuations of $\gcd(d_1, ..., d_k)$ and $\gcd(d'_1, .., d'_{k'})$ are equal and the classes of the p-primary components A_p and A'_p of A and A' generate the same group in the Brauer group of F. This result leads to a surprising dichotomy between upper motives of absolutely simple adjoint algebraic groups of inner type A_n.

5.1 Introduction

Throughout this note p will be a prime and $\mathbb{F}$ will be a finite field of characteristic p. Let F be a field and $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$ be the category of Grothendieck Chow motives with coefficients in $\mathbb{F}$. Motivic properties of projective homogeneous F-varieties and their relations with classical discrete invariants have been intensively studied recently (see for example [35], [49], [51], [59], [61], [60]). In this article we deal with the particular case of projective homogeneous F-varieties under the action of an absolutely simple affine adjoint algebraic group of inner type A_n. More precisely we prove the following result:

Theorem 5.1.1. Let A and A' be two central simple F-algebras. The upper indecomposable direct summands of the motives of two anisotropic varieties of flags of right ideals $X(d_1, ..., d_k; A)$ and $X(d'_1, ..., d'_{k'}; A')$ in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$ are isomorphic if and only if $v_p(\gcd(d_1, ..., d_k)) = v_p(\gcd(d'_1, .., d'_{k'}))$ and the p-primary components A_p and A'_p of A and A' generate the same subgroup of $\mathrm{Br}(F)$.

In §1 we recall classical discrete invariants and varieties associated to central simple F-algebras, while §2 is devoted to the theory of upper motives. Finally we prove theorem 5.1.1 in §3, using an index reduction formula due to Merkurjev, Panin and Wadsworth and the theory of upper motives. Theorem 5.1.1 gives a purely algebraic criterion to compare upper direct summands of varieties of flags of ideals, and leads to a quite unexpected dichotomy between upper motives of absolutely simple adjoint algebraic groups of inner type A_n.

Acknowledgements : I would like to express my gratitude to N. Karpenko, for introducing me to this subject, raising this question and for stimulating discussions on this subject.

5.2 Generalities on central simple algebras

Our reference for classical notions on central simple F-algebras is [44]. A finite-dimensional F-algebra A is a central simple F-algebra if its center $Z(A)$ is equal to F and if A has no non-trivial two-sided ideal. The square root of the F-dimension of A is the *degree* of A, denoted by $\deg(A)$. Two central simple F-algebras A and B are *Brauer-equivalent* if $M_n(A)$ and $M_m(B)$ are isomorphic for some integers n and m, and the *Schur index* $\mathrm{ind}(A)$ of a central simple F-algebra A is the degree of the (uniquely determined up to isomorphism) central division F-algebra Brauer-equivalent to A. The tensor product endows the set $\mathrm{Br}(F)$ of equivalence classes of central simple F-algebras under the Brauer equivalence with a structure of a torsion abelian group. The exponent of A, denoted by $\exp(A)$, is the order of the class of A in $\mathrm{Br}(F)$ and divides $\mathrm{ind}(A)$.

Let A be a central simple F-algebra and $0 \leq d_1 < ... < d_k \leq \deg(A)$ be a sequence of integers. A convenient way to define the variety of flags of right ideals of reduced dimension d_1,..., d_k in A is to use the language of functor of points. For any commutative F-algebra

R, the set of R-points $\mathrm{Mor}_F(\mathrm{Spec}(R), X(d_1, ..., d_k; A))$ consists of the sequences $(I_1, ..., I_k)$ of right ideals of the Azumaya R-algebra $A \otimes_F R$ such that $I_1 \subset ... \subset I_k$, the injection of A_R modules $I_s \to A_R$ splits and the rank of the R-module I_s is equal to $d_s \cdot \deg(A)$ for any $1 \leq s \leq k$. For any morphism $R \to S$ of F-algebras the corresponding map from R-points to S-points is given by $(I_1, ..., I_k) \mapsto (I_1 \otimes_R S, ..., I_k \otimes_R S)$. Two important particular cases of varieties of flags of right ideals are the classical Severi-Brauer variety $X(1; A)$, and the generalized Severi Brauer varieties $X(i; A)$.

If G is an algebraic group and X a projective G-homogeneous F-variety, we say that X is *isotropic* if X has a zero-cycle of degree coprime to p, and X is *anisotropic* if X is not isotropic. If $X = X(d_1, ..., d_k; A)$ is a variety of flags of right ideals, X is isotropic if and only if $v_p(\gcd(d_1, ..., d_k)) \geq v_p(\mathrm{ind}(A))$. Note that if the Schur index of A is a power of p, X is isotropic if and only if X has a rational point.

5.3 The theory of upper motives

Our basic references for the definitions and the main properties of Chow groups with coefficients and the category $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$ of Grothendieck Chow motives with coefficients in a commutative ring Λ are [2] and [19]. In the sequel G will be a semisimple affine adjoint algebraic group of inner type, X a projective G-homogeneous F-variety and Λ will be assumed to be a finite and connected ring. By [11] (see also [36]) the motive of X decomposes in a unique way (up to isomorphism) as a direct sum of indecomposable motives under these assumptions. Among all the indecomposable direct summands in the complete motivic decomposition of X, the (uniquely determined up to isomorphism) indecomposable direct summand M such that the 0-codimensional Chow group of M is non-zero is the *upper motive* of X.

Upper motives are essential : any indecomposable direct summand in the complete motivic decomposition of X is the upper motive of another projective G-homogeneous F-variety by [36, Theorem 3.5]. This structural result implies that the study of the motivic decomposition of a projective G-homogeneous F-variety X is reduced to the case $\Lambda = \mathbb{F}_p$. Indeed by [62, Corollary 2.6] the complete motivic decomposition of X with coefficients in Λ remains the same when passing to the residue field of Λ, and is also the same as if the ring of coefficients is $\mathbb{F}_p$ by [13, Theorem 2.1], where p is the characteristic of the residue field of Λ. These results motivate the study of the set $\mathfrak{X}_G$ of *upper p-motives* of the algebraic group G, which consists of the isomorphism classes of upper motives of projective G-homogeneous F-varieties in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$. Furthermore the dimension of the upper motive of X in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ is equal to the canonical p-dimension of X by [37, Theorem 5.1], hence upper motives encode important information on the underlying varieties. Upper motives also have good properties : the upper motives of two projective G-homogeneous F-varieties X and X' in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ are isomorphic if and only if both $X_{F(X')}$ and $X'_{F(X)}$ are isotropic by [36, Corollary 2.15]. The variety X is isotropic if and only if the upper motive of X is isomorphic to the *Tate motive* (that is to say the motive of $\mathrm{Spec}(F)$) and this is why we focus in this note on the case of anisotropic varieties of flags of right ideals.

If G is absolutely simple adjoint of inner type A_n, G is isomorphic to $\mathrm{PGL}_1(A)$, where A is a central simple F-algebra of degree $n+1$. Any projective G-homogeneous F-variety is then isomorphic to a variety $X(d_1, ..., d_k; A)$ of flags of right ideals in A (see [47]) thus theorem 5.1.1 classifies upper motives of absolutely simple affine adjoint algebraic groups of inner type A_n. In the particular case of classical Severi-Brauer varieties theorem 5.1.1 corresponds to [1, Theorem 9.3], since for any field extension E/F a central simple F-algebra becomes split over E if and only if the Severi-Brauer variety $X(1; A_E)$ has a rational point.

5.4 Main results

Let D be a central division F-algebra of degree p^n. For any $0 \leq k \leq n$, $M_{k,D}$ will denote the upper indecomposable direct summand of $X(p^k; D)$ in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$. If D' is another central division F-algebra of degree p^n and j satisfies $1 \leq j \leq p^n$, we denote the integer $\frac{p^k}{\gcd(j,p^k)} \cdot \mathrm{ind}(D \otimes D'^{-j})$ by $\mu_{k,j}^{D,D'}$. In the sequel the following index reduction formula (see [47, p. 565]) will be of constant use :

$$\mathrm{ind}(D_{F(X(p^k;D'))}) = \gcd_{1 \leq j \leq p^n} \mu_{k,j}^{D,D'} = \min_{1 \leq j \leq p^n} \mu_{k,j}^{D,D'}$$

Proposition 5.1. *Let D and D' be two central division F-algebras of degree p^n. Assume that $\exp(D) \geq \exp(D')$ and also assume that $X(p^k; D)_{F(X(p^k;D'))}$ is isotropic for some integer $0 \leq k < n$. If $\mathrm{ind}(D_{F(X(k;D'))}) = \mu_{k,j_0}^{D,D'}$, j_0 is coprime to p.*

Proof. Suppose that p divides j_0 and $\mathrm{ind}(D_{F(X(k;D'))}) = \mu_{k,j_0}^{D,D'}$. By assumption the variety $X(k; D)_{F(X(k;D'))}$ has a rational point, hence by [44, Proposition 1.17] the integer $\mu_{k,j_0}^{D,D'}$ divides p^k and $\mathrm{ind}(D \otimes D'^{-j_0}) \mid \gcd(j_0, p^k)$. Since p divides j_0, $\exp(D'^{-j_0}) < \exp(D')$, therefore $\exp(D'^{-j_0}) < \exp(D)$ and $\exp(D) = \exp(D \otimes D'^{-j_0})$. It follows that $\exp(D)$ divides j_0, thus $\exp(D')$ also divides j_0. The central simple F-algebra D'^{j_0} is therefore split and $D \otimes D'^{-j_0}$ is Brauer-equivalent to D so that $\mathrm{ind}(D)$ divides p^k, a contradiction. $\square$

Theorem 5.4.1. Let $\mathbb{F}$ be a finite field of characteristic p and D, D' be two central division F-algebras of degree p^n. The following assertions are equivalent :
1) for some integer $0 \leq k < n$, $M_{k,D}$ and $M_{k,D'}$ are isomorphic in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$;
2) the classes of D and D' generate the same subgroup of $\mathrm{Br}(F)$;
3) for any $0 \leq k < n$, $M_{k,D}$ is isomorphic to $M_{k,D'}$ in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$.

Proof. We first show that 1) $\Rightarrow$ 2). We may exchange D by D' and thus assume that $\exp(D)$ is greater than $\exp(D')$. Since $M_{k,D}$ is isomorphic to $M_{k,D'}$, there is an integer j_0 coprime to p such that the Schur index of $D \otimes D'^{-j_0}$ is 1 by [44, Proposition 1.17] and proposition 5.1, hence $D \otimes D'^{-j_0}$ is split and the class of D is equal to the class of D'^{j_0} in $\mathrm{Br}(F)$. Furthermore since j_0 is coprime to p the class of D in $\mathrm{Br}(F)$ is also a generator of the subgroup of $\mathrm{Br}(F)$ generated by $[D']$.

Now we show that 2) $\Rightarrow$ 3) : if $[D]$ and $[D']$ generate the same group in $\mathrm{Br}(F)$, $\mathrm{ind}(D_E) = \mathrm{ind}(D'_E)$ for any field extension E/F. Given an integer $0 \leq k < n$, since $X(p^k; D)$ has a rational point over $F(X(p^k; D))$, $\mathrm{ind}(D'_{F(X(p^k;D))}) = \mathrm{ind}(D_{F(X(p^k;D))})$ divides p^k. The variety $X(p^k; D')$ has then also by [44, Proposition 1.17] a rational point over $F(X(p^k; D))$. The same procedure replacing D by D' shows that $X(p^k; D)$ has a rational point over $F(X(p^k; D'))$, hence $M_{k,D}$ is isomorphic to $M_{k,D'}$.

Finally 3) $\Rightarrow$ 1) is obvious. $\square$

Corollary 5.4.1. Let D and D' be two central division F-algebras of degree p^n and $p^{n'}$. The upper summands $M_{k,D}$ and $M_{k',D'}$ are isomorphic for some integers $0 \leq k < n$ and $0 \leq k' < n'$ if and only if $k = k'$ and the classes of D and D' generate the same subgroup of $\mathrm{Br}(F)$.

Proof. Since by [36, Theorem 4.1] the generalized Severi-Brauer varieties $X(p^k;D)$ and $X(p^{k'};D')$ are p-incompressible, if $M_{k,D}$ and $M_{k',D'}$ are isomorphic, the dimension of $X(p^k;D)$ (which is $p^k(p^n-p^k)$) is equal to the dimension of $X(p^{k'};D')$. The equality $p^k(p^n-p^k)=p^{k'}(p^{n'}-p^{k'})$ implies that $k=k'$, $n=n'$ and it remains to apply theorem 5.4.1. The converse is clear by theorem 5.4.1. □

Proof of theorem 5.1.1. Set $X = X(d_1,...,d_k;A)$, $X' = X(d_1,...,d_{k'};A')$, and also set $v=v_p(\gcd(d_1,...,d_k))$ and $v'=v_p(\gcd(d'_1,..,d'_{k'}))$. If D and D' are two central division F-algebras Brauer-equivalent to A_p and A'_p, the upper indecomposable direct summand of X (resp. of X') is isomorphic to $M_{v,D}$ (resp. to $M_{v',D'}$) by [36, Theorem 3.8]. By corollary 5.4.1 these summands are isomorphic if and only if $v=v'$ (since X and X' are anisotropic) and the classes of A_p and A'_p generate the same subgroup of $\mathrm{Br}(F)$. □

Theorem 5.4.2. Let G and G' be two absolutely simple affine adjoint algebraic groups of inner type A_n and $A_{n'}$. Then either $\mathfrak{X}_G\cap\mathfrak{X}_{G'}$ is reduced to the class of the Tate motive or $\mathfrak{X}_G=\mathfrak{X}_{G'}$.

Proof. If $\mathfrak{X}_{\mathrm{PGL}_1(A)}\cap\mathfrak{X}_{\mathrm{PGL}_1(A')}$ is not reduced to the class of the Tate motive, there are two anisotropic varieties of flags of right ideals $X=X(d_1,...,d_k;A)$ and $X'=X(d'_1,...,d'_{k'};A')$ whose upper motives are isomorphic. By theorem 5.1.1 this implies that the upper p-motive of any anisotropic $\mathrm{PGL}_1(A)$-homogeneous F-variety $X(d_1,...,d_{\tilde{k}};A)$ is isomorphic to, say, the upper p-motive of $X(d_1,...,d_{\tilde{k}};A')$. □

Chapter 6

Un théorème de descente motivique

Nous nous proposons dans ce chapitre de développer en suivant [12] un outil de décomposition motivique permettant d'extraire certains facteurs directs motiviques d'un schéma lisse et projectif, apparaissant sur une extension. Le résultat obtenu généralise [38, Proposition 4.6] et est utilisé dans [22] pour décrire l'ensemble des décompositions motiviques d'espaces homogènes sous l'action d'un groupe algébrique intérieur et de type E_6, ainsi que pour répondre à une question de Rost et Springer.

A going down theorem for Grothendieck Chow motives

Un théorème de descente motivique

Résumé

Soit X une variété sur un corps F géométriquement déployée, géométriquement irréductible et qui satisfait au principe de nilpotence, ainsi que $\mathbb{F}$ un corps fini. Considérons un facteur direct N du motif de Chow de X à coefficients dans $\mathbb{F}$ et M un facteur direct décalé du motif d'une autre F-variété Y. Nous montrons que sous certaines hypothèses sur une extension E/F, s'il existe motif indécomposable est à la fois un facteur direct extérieur (cf Definition 6.2.1) de N_E et un facteur direct de M_E, alors il existe un facteur direct extérieur de N qui est aussi un facteur direct de M.

Abstract

Let X be a geometrically split, geometrically irreducible variety over a field F satisfying the nilpotence principle, and $\mathbb{F}$ a finite field. Consider a direct summand N of the Chow motive of X with coefficients in $\mathbb{F}$ and M a twisted motivic direct summand of another F-variety Y. We show that under some assumptions on a field extension E/F, if there is an indecomposable motive which is both an outer direct summand (cf Definition 6.2.1) of N_E and a direct summand of M_E, then there is an outer direct summand of N which is also a direct summand of M.

Introduction

Let F be a field and $\mathbb{F}$ a finite field. Throughout this note an F-variety will be understood as a smooth, projective and separated scheme of finite type over F. For any F-variety X, the Chow group of cycles on X modulo rational equivalence with coefficients in $\mathbb{F}$ is defined by $\mathrm{CH}(X)\otimes\mathbb{F}$ and denoted $\mathrm{Ch}(X)$. An F-variety X is split (resp. geometrically split) if the motive of X (resp. the motive of X_E for some field extension E/F) in the category $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ of Grothendieck Chow motives with coefficients in $\mathbb{F}$ is isomorphic to a finite direct sum of Tate motives.

Another important property is the following. An F-variety X satisfies the nilpotence principle if for any field extensions $L/E/F$ the kernel of the change of base field morphism $res_{L/E} : \mathrm{End}(M(X_E)) \longrightarrow \mathrm{End}(M(X_L))$ consists of nilpotents. The present note provides the following technical tool to study motivic decompositions of geometrically split F-varieties satisfying the nilpotence principle.

If X is an F-variety, we write $\mathrm{Ch}(\overline{X})$ for the colimit of all $\mathrm{Ch}(X_K)$, where K runs through all field extensions K/F. For any field extension L/F, we will say that an element lying in the image of the natural morphism of $\mathrm{Ch}(X_L) \longrightarrow \mathrm{Ch}(\overline{X})$ is L-rational. The image of any correspondence α in $\mathrm{Ch}(\overline{X})$ will be denoted $\overline{\alpha}$.

Theorem 6.0.3. Let N be a motivic direct summand of a geometrically split, geometrically irreducible F-variety X satisfying the nilpotence principle and M a twisted motivic direct summand of another F-variety Y. Assume that there is a field extension E/F such that

1. every $E(X)$-rational cycle in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times Y})$ is $F(X)$-rational;
2. there is indecomposable motive in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ which is both an outer direct summand of N_E and a direct summand of M_E.

Then there is an outer direct summand of N which is also a direct summand of M.

In the first section we recall briefly the definition of the category $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ while the second section is devoted to the study of direct summands of geometrically split F-varieties, introducing the notion of *upper* and *lower* direct summands. In section 3 we prove theorem 6.0.3 and the fourth section is devoted to the already existing applications of particular cases of this result.

Acknowledgements : I would like to thank N. Karpenko for raising this question and for his suggestions.

6.1 Generalities on Grothendieck Chow motives

We refer to [19] and [59] for more details on the construction of the category $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ of Grothendieck Chow motives over F with coefficients in $\mathbb{F}$.

Let X and Y be two F-varieties and $X = \coprod_{k=1}^n X_k$ be the decomposition of X as a disjoint union of irreducible components with respective dimension $d_1,\ldots,d_n$. For any integer i the group of *correspondences* between X and Y of degree i with coefficients in $\mathbb{F}$ is defined by $\mathrm{Corr}_i(X,Y) = \coprod_{k=1}^n \mathrm{Ch}_{d_k+i}(X_k \times Y)$. We now consider the category $\mathrm{C}(F;\mathbb{F})$ whose objects are pairs $X[i]$, where X is an F-variety and i is an integer. Morphisms are defined in terms of correspondences by $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}(F;\mathbb{F})}(X[i], Y[j]) = \mathrm{Corr}_{i-j}(X,Y)$. For any correspondences $f : X[i] \rightsquigarrow Y[j]$ and $g : Y[j] \rightsquigarrow Z[k]$ in $\mathrm{Mor}(\mathrm{C}(F;\mathbb{F}))$ the composite $g \circ f : X[i] \rightsquigarrow Z[k]$ is defined by

$$g \circ f = \left({}^X p_Y^Z\right)_* \left(({}^{X\times Y}p_Z)^*(f) \cdot (p_X^{Y\times Z})^*(g)\right)$$

where ${}^{U}p_{V}^{W} : U \times V \times W \to U \times W$ is the natural projection.

The category $\mathrm{C}(F;\mathbb{F})$ is preadditive and its additive completion $\mathrm{CR}(F;\mathbb{F})$ is the category of correspondences over F with coefficients in $\mathbb{F}$, which has a structure of tensor additive category given by $X[i] \otimes Y[j] = (X \times Y)[i+j]$. The category $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ of Grothendieck Chow motives with coefficients in $\mathbb{F}$ is the pseudo-abelian envelope of the category $\mathrm{CR}(F;\mathbb{F})$. Its objects are finite direct sums of triples $(X,\pi)[i]$, where X is an F-variety, i is an integer and $\pi \in \mathrm{Ch}_{\dim(X)}(X \times X)$ is a projector. Morphisms are given by $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})}((X,\pi)[i],(Y,\rho)[j]) = \rho \circ \mathrm{Corr}_{i-j}(X,Y) \circ \pi$ and the objects of $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ are called *motives*. For any F-variety X the motives $(X,\Gamma_{id_X})[i]$ (where Γ_{id_X} is the graph of the identity of X) will be denoted $X[i]$ and $X[0]$ is the motive of X. The motives $\mathbb{F}[i] = \mathrm{Spec}(F)[i]$ are the *Tate motives*.

Definition 6.1.1. Let $M \in \mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ be a motive and i an integer. The i-dimensional Chow group $\mathrm{Ch}_i(M)$ of M is defined by $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})}(\mathbb{F}[i],M)$. The i-codimensional Chow group $\mathrm{Ch}^i(M)$ of M is defined by $\mathrm{Hom}_{\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})}(M,\mathbb{F}[i])$.

For any field extension E/F and any correspondence $\alpha : X[i] \rightsquigarrow Y[j]$ the pull-back of α along the natural morphism $(X \times Y)_E \to X \times Y$ will be denoted α_E. If $N = (X,\pi)[i]$ is a twisted motivic direct summand of X, the motive $(X_E,\pi_E)[i]$ will be denoted N_E.

Finally the category $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ is endowed with the duality functor. If X and Y are two F-varieties and $\alpha \in \mathrm{Ch}(X \times Y)$ is a correspondence, the image of α under the exchange isomorphism $X \times Y \to Y \times X$ is denoted ${}^t\alpha$. The *duality functor* is the additive functor $\dagger : \mathrm{CM}(F;\mathbb{F})^{op} \to \mathrm{CM}(F;\mathbb{F})$ which maps any motive $(X,\pi)[i]$ to $(X,{}^t\pi)[-\dim(X)-i]$ and any correspondence $\alpha : (X,\pi)[i] \rightsquigarrow (Y,\rho)[j]$ to ${}^t\alpha$.

6.2 Direct summands of geometrically split F-varieties

Throughout this section we consider a geometrically split F-variety X and E/F a splitting field of X. By [40, Remark 5.6] the pairing

$$\Psi \ : \begin{array}{ccc} \mathrm{Ch}(X_E) \times \mathrm{Ch}(X_E) & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ (\alpha,\beta) & \longmapsto & deg(\alpha \cdot \beta) \end{array}$$

is non degenerate hence gives rise to an isomorphism of $\mathbb{F}$-modules between $\mathrm{Ch}(X_E)$ and its dual space $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\mathrm{Ch}(X_E),\mathbb{F})$ given by $\alpha \mapsto \Psi(\alpha,\cdot)$. The dual basis of an homogeneous basis $(x_k)_{k=1}^n$ of $\mathrm{Ch}(X_E)$ with respect of Ψ is the basis $(x_k^*)_{k=1}^n$ of $\mathrm{Ch}(X_E)$ such that for any $1 \leq i,j \leq n$, $\Psi(x_i,x_j^*) = \delta_{ij}$, where δ_{ij} is the Kronecker symbol. By definition of the composition in $\mathrm{CM}(F;\Lambda)$, for any other F-varieties Y, Y' and any cycles $(y,y') \in \mathrm{Ch}(Y) \times \mathrm{Ch}(Y')$ we have the formula

$$(x_i \times y) \circ (y' \times x_j^*) = \delta_{ij}(y' \times y). \tag{6.1}$$

Let π be a non-zero projector in $\mathrm{Ch}_{\dim(X)}(X \times X)$ and $N = (X,\pi)$ the associated motivic direct summand of X. The *base* of N is the set $\mathcal{B}(N) = \{i \in \mathbb{Z},\ \mathrm{Ch}_i(N_E) \text{ is not trivial}\}$. The *bottom* of N (denoted $b(N)$) is the least integer of $\mathcal{B}(\pi)$ and the *top* of N (denoted $t(N)$) is the greatest integer of $\mathcal{B}(N)$. We now introduce the notion of upper and lower motivic direct summands of N.

Definition 6.2.1. Let N be a direct summand of the twisted motive of a geometrically split F-variety and M a motivic direct summand of N. We say that

1. M is *upper* in N if $b(M) = b(N)$;

2. M is *lower* in N if $t(M) = t(N)$;
3. M is *outer* in N if M is both lower and upper in N.

Remark 6.2.1. Keeping the same F-variety X and any direct summand $N = (X, \pi)$, consider an homogeneous basis $(x_k)_{k=1}^n$ of $\mathrm{Ch}(X_E)$ and its dual basis $(x_k^*)_{k=1}^n$. The base, bottom and top of N can be easily determined by the decomposition

$$\pi_E = \sum_{i,j=1}^{n} \pi_{i,j}(x_i \times x_j^*)$$

noticing that $\mathcal{B}(N) = \{\dim(x_i),\ \pi_{i,j} \neq 0 \text{ for some } j\}$.

Lemma 6.2.1. Let $N = (X, \pi)$ be a motivic direct summand of a geometrically split F-variety and $M = (X, \rho)$ a direct summand of N. Then M is lower in N (resp. upper in N) if and only if the dual motive $M^\dagger$ is upper in $N^\dagger$ (resp. $M^\dagger$ is lower in $N^\dagger$).

Proof. For any motive O and for any integer i, $\mathrm{Ch}^i(O^\dagger) = \mathrm{Ch}_{-i}(O)$. It follows that $b(O^\dagger) = -t(O)$ and $t(O^\dagger) = -b(O)$. □

6.3 Proof of the main theorem

Let C be a pseudo-abelian category and $\mathfrak{C}$ be the set of the isomorphism classes of objects of C. We say that the category C satisfies the *Krull-Schmidt principle* if the monoid $(\mathfrak{C}, \oplus)$ is free. While A. Vishik has shown that the Krull-Schmidt principle holds for the motives of quadrics (even in the case of *integral coefficients*, see [59]) the Krull-Schmidt principle also holds for the motives of geometrically split F-varieties satisfying the nilpotence principle in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F})$ by [38, Corollary 3.3].

Lemma 6.3.1. Let (X, π) be a direct summand of an F-variety X. A direct summand (X, ρ) of X is a direct summand of (X, π) if and only if $\pi \circ \rho \circ \pi = \rho$.

Proof. Indeed $\mathrm{End}((X, \pi)) = \pi \circ \mathrm{Ch}_{\dim(X)}(X \times X) \circ \pi$, thus any projector ρ in $\mathrm{End}((X, \pi))$ satisfies $\pi \circ \rho \circ \pi = \rho$. □

The following lemma is the key-ingredient in the proof of theorem 6.0.3.

Lemma 6.3.2. Let N be a motivic direct summand of a geometrically split, geometrically irreducible F-variety X satisfying the nilpotence principle and M a twisted direct summand of an F-variety Y. Assume the existence of a field extension E/F such that

1. any $E(X)$-rational cycle in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times Y})$ is $F(X)$-rational;
2. there are two correspondences $h : N_E \rightsquigarrow M_E$ and $k : M_E \rightsquigarrow N_E$ such that $k \circ h$ is a projector and $(X_E, k \circ h)$ is an lower direct summand of N_E.

Then there are two correspondences $f : N \rightsquigarrow M$ and $g : M_E \rightsquigarrow N_E$ such that $(X_E, g \circ f_E)$ is a direct summand of N_E which contains any lower indecomposable direct summand of $(X_E, k \circ h)$. Furthermore if k is F-rational, then g is also F-rational.

Proof. Setting $M{=}(Y, \rho)[i]$ and $N{=}(X, \pi)$, we construct explicitly the two correspondences f and g. Since $E(X)$ is a field extension of E, $\overline{h}$ is $E(X)$-rational, hence $F(X)$-rational by assumption 1. The morphisms $\mathrm{Spec}(F(X_L)) \longrightarrow X_L$ for every field extension L/F induce the pull-back $\varepsilon^* : \mathrm{Ch}(\overline{X \times Y \times X}) \longrightarrow \mathrm{Ch}(\overline{(X \times Y)_{F(X)}})$. Furthermore ε^* induces a surjection of F-rational cycles onto $F(X)$-rational cycles by [19, Corollary 57.11] and we can consider a cycle $h_1 \in \mathrm{Ch}(X \times Y \times X)$ such that $\varepsilon^*(\overline{h_1}) = \overline{h}$. Since ε^* maps any homogeneous cycle $\sum_i \alpha_i \times \beta_i \times 1$ to $\sum_i \alpha_i \times \beta_i$ and vanishes on homogeneous cycles whose codimension on the third factor is strictly positive, we have $\overline{h_1} = \overline{h} \times 1 + \cdots$ where "$\cdots$" is a linear combination of homogeneous cycles in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times Y \times X})$ with strictly positive codimension on the third factor.

We now look at h_1 as a correspondence $X \rightsquigarrow Y \times X$ and consider the cycle $h_2 = h_1 \circ \pi$. By formula 6.1 we have

$$\overline{h_2} = \left(\overline{h} \times 1\right) \circ \overline{\pi} + \cdots ,$$

where "$\cdots$" is a linear combination of homogeneous cycles in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times Y \times X})$ with dimension at most $t(N)$ on the first factor and strictly positive codimension on the third factor. Finally considering the pull-back of the morphism $\Delta : X \times Y \to X \times Y \times X$ induced by the diagonal embedding X and setting $h_3 = \Delta^*(h_2)$, we have

$$\overline{h_3} = \overline{h} \circ \overline{\pi} + \cdots$$

where "$\cdots$" stands for a linear combination of homogeneous cycles in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times Y})$ with dimension strictly lesser than $t(N)$ on the first factor.

By formula 6.1 and since $k \circ h$ is a projector, for any positive integer n we have

$$\left(\overline{\pi} \circ \overline{k} \circ \overline{h_3} \circ \overline{\pi}\right)^n = \overline{k} \circ \overline{h} + \cdots$$

where "$\cdots$" is a linear combination of homogeneous cycles in $\mathrm{Ch}(\overline{X \times X})$ with dimension on the first factor strictly lesser than $t(N)$. The direct summand $k \circ h$ is lower, therefore all these correspondences are non-zero, and an appropriate power $\left(\overline{\pi} \circ \overline{k} \circ \overline{h_3} \circ \overline{\pi}\right)^{\circ n_0}$ is a non-trivial projector by [38, Corollary 3.2]. This implies (see [19, Exercise 92.6]) that for another integer n_1, the correspondence $(\pi_E \circ k \circ (h_3)_E \circ \pi_E)^{n_1}$ is a projector. Setting $f = \rho \circ h_3 \circ \pi$ and $g = (\pi_E \circ k \circ (h_3)_E \circ \pi_E)^{\circ n_1 - 1} \circ \pi_E \circ k$, we see that $\overline{g}$ is F-rational if $\overline{k}$ is F-rational. The correspondence $g \circ f_E$ is a projector which defines a direct summand of N_E by lemma 6.3.1. Furthermore any lower indecomposable direct summand of $(X_E, k \circ h)$ must lie in $(X, g \circ f_E)$, since $\overline{g} \circ \overline{f}$ contains all factors $x_i \times x_j^*$ where $\dim(x_i) = t\left((X_E, k \circ h)\right)$. $\square$

Proof of Theorem 6.0.3. Let $O{=}(X_E, \kappa)$ be an outer indecomposable direct summand of N_E which is also a direct summand of M_E. We prove theorem 6.0.3 by applying lemma 6.3.2 once, then the duality functor and finally lemma 6.3.2 another time to get all our correspondences defined over the base field F.

Since O is a direct summand of M_E, there are two correspondences $h : N_E \rightsquigarrow M_E$ and $k : M_E \rightsquigarrow N_E$ such that $k \circ h = \kappa$. Moreover O is lower in N_E, so lemma 6.3.2 justifies the existence of two other correspondences $h' : N \rightsquigarrow M$ and $k' : M_E \rightsquigarrow N_E$ such that $O_2 = (X_E, k' \circ h'_E)$ is a direct summand of N_E, and the motive O_2 is outer in N_E since it contains O. The dual motive $O_2^\dagger = (X_E, {}^t h'_E \circ {}^t k')[-\dim(X)]$ is therefore outer in $N_E^\dagger$ by lemma 6.2.1 and is a direct summand of the dual motive $M_E^\dagger$. Twisting these three motives by $\dim(X)$, we can apply lemma 6.3.2 again. The correspondence $\overline{{}^t h'}$ is F-rational, so lemma 6.3.2 gives two correspondences $f : N^\dagger \rightsquigarrow M^\dagger$ and $g : M^\dagger \rightsquigarrow N^\dagger$ such that the motive $(X_E, g_E \circ f_E)$ is both an outer direct summand of $N^\dagger$ (since it contains the dual motive $O^\dagger$) and a direct summand of $M^\dagger$. Transposing again, the motive $(X, {}^t f \circ {}^t g)$ is an outer direct summand of N and a direct summand of M. $\square$

6.4 Applications

As shown by Chernousov, Gille and Merkurjev (see [10] and [11]) any projective homogeneous variety under the action of a semisimple affine algebraic group is geometrically split and satisfies the nilpotence principle. The notions of *upper* and *lower* direct summands were introduced by Karpenko in the case of integral F-varieties (see [36, Section 2b]) to study motivic decompositions of such projective homogeneous varieties.

The theory of upper motives and the study of motivic decompositions of projective homogeneous varieties under a semisimple affine algebraic group G already have important applications. For example [36, Theorem 4.3] shows that if D is a p-primary central division F-algebra, any generalized Severi-Brauer variety $\mathrm{SB}(p^k, D)$ has an indecomposable outer direct summand in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_p)$. In particular those varieties are incompressible, and the computation of the canonical p-dimension of any variety of flags of right ideals in a central simple F-algebra follows ([36, Corollary 4.4]).

Theorem 6.0.3 allows one to descend some motivic direct summands which appear on some field extension E/F to the base field. Theorem 6.0.3 generalizes [38, Proposition 4.6], replacing the whole motive of the variety X by an arbitrary direct summand. Replacing X by a direct summand requires to construct explicitly the rational cycles to get an outer direct summand defined over F, and theorem 6.0.3 thus gives a new proof of [38, Proposition 4.6]. Note that the assumption 1. of theorem 6.0.3 holds if the field extension $E(X)/F(X)$ is unirational.

The particular case [38, Proposition 4.6] has important applications, and is one of the main ingredients in the proof of [38, Theorem 1.1]. Finally theorem 6.0.3 was applied by Garibaldi, Petrov and Semenov in [22] to study motivic decompositions of projective homogeneous varieties under the action of a semisimple affine algebraic group G of exceptional type, and answer a question of Rost and Springer (see [22, Proposition 9.11, Proposition 9.17]).

Chapter 7

Rigidité motivique des variétés de Severi-Brauer généralisées

Nous exhibons ici les facteurs indécomposables entrant dans la décomposition motivique de quelques variétés de Severi-Brauer généralisées afin d'étudier les liens entre ces décompositions motiviques et l'indice de l'algèbre sous-jacente, suivant [15]. Nous retrouvons au passage (Corollaire 7.2.1) l'indécomposabilité du motif des variétés de Severi-Brauer généralisées $\mathrm{SB}(2;D)$, où D est une algèbre à division 2-primaire (résultat du à Karpenko).

Motivic rigidity of generalized Severi-Brauer varieties

Rigidité motivique des variétés de Severi-Brauer généralisées

Résumé

Soit A une algèbre centrale simple sur un corps F. Nous nous intéressons dans cette note à la relation qu'entretiennent l'indice de Schur de A et la décomposition motivique des variétés de Severi-Brauer généralisées de A. Nous montrons que si E/F est une extension tel que la valuation p-adique de l'indice de Schur de A_E est égale à la valuation p-adique de l'indice de Schur de A, la décomposition motivique de la variété de Severi-Brauer généralisée $X(p;A)$ dans $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ se relève sur celle de $X(p;A_E)$. Nous montrons un résultat similaire pour les variétés de Severi-Brauer généralisées $X(4;A)$, en déterminant les facteurs indécomposables entrant dans la décomposition motivique complète de $X(4;D)$, où D est une algèbre à division 2-primaire.

Abstract

Let A be a central simple algebra over a field F. We investigate in this note the relation between the Schur index of A and the motivic decompositions of generalized Severi-Brauer varieties of A. We show that if E/F is a field extension such that the p-adic valuation of the Schur index of A_E is equal to the p-adic valuation of the Schur index of A, the motivic decomposition of the generalized Severi-Brauer variety $X(p;A)$ in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_p)$ lifts to the complete motivic decomposition of $X(p;A_E)$. We also show that the variety $X(4;A)$ satisfies the same property by determining the indecomposable summands arising in the complete motivic decomposition of $X(4;D)$, where D is a 2-primary division algebra.

Let F be a field and X a smooth projective scheme of finite type over F. The Chow group of cycles modulo rational equivalence on X with coefficients in $\mathbb{F}_p$ (denoted by $\mathrm{Ch}(X)$) and the category of Grothendieck Chow motives with coefficients in $\mathbb{F}_p$ are defined and studied in [19]. If X is geometrically split, we will write $\mathrm{Ch}(\bar{X})$ for the colimit of $\mathrm{Ch}(X_E)$, where E runs through all field extensions of F. For any field extension L/F, the image of any cycle $x \in \mathrm{Ch}(X_L)$ by the natural morphism $\varphi_L : \mathrm{Ch}(X_L) \longrightarrow \mathrm{Ch}(\bar{X})$ will be denoted by $\bar{x}$ and we will say that $y \in \mathrm{Ch}(\bar{X})$ is L-rational if it lies in the image of φ_L.

For any central simple algebra A, and any $0 \leq k \leq \deg(A)$ we consider the generalized Severi-Brauer variety of right ideals of reduced dimension k, denoted by $X(k; A)$ (defined in proposition C.2.1). If E/F is a field extension and $M = (X, \pi) \in \mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_p)$ is a direct summand of a smooth projective variety X, the motive (X_E, π_E) will be denoted M_E (cf. Notation 1.3.1).

The purpose of this note is to investigate the relation between the motivic decompositions of generalized Severi-Brauer varieties and the Schur index of the underlying central simple algebra. More precisely we prove the following.

Theorem 7.0.1. Let A be a central simple F-algebra and p be a prime. If E/F is a field extension such that the p-adic valuation of the Schur index of A_E is equal to the p-adic valuation of the Schur index of A, then the complete motivic decomposition of $X(p; A)$ lifts to the complete motivic decomposition of $X(p; A_E)$ in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_p)$. The same result holds for $X(p^2; A)$ if $p = 2$.

In section 1 we prove the first statement and in the second part we prove the second statement by determining the indecomposable motives arising in the complete motivic decomposition of $X(4; D)$, where D is a 2-primary central division algebra (we will omit the word "central" from now on).

7.1 Motivic rigidity of $X(p; A)$

In this section p is a prime, A a central simple algebra of degree p^n and $0 \leq k \leq n$. We will denote the generalized Severi-Brauer variety $X(p^k; A)$ of right ideals in A of reduced dimension p^k by $X_{k,A}$ for the reader's convenience.

Notation 7.1.1. If D is a division F-algebra of degree p^n and $0 \leq s \leq n$, the upper indecomposable direct summand of the motive $X(p^s; D) \in \mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_p)$ will be denoted by $M_{s,D}$.

Proposition 7.1.1. Let p be a prime, D a division F-algebra of degree p^n and $0 \leq s \leq n$. If E/F is a field extension such that D_E is a division algebra, then any E-rational cycle in $\mathrm{Ch}(\bar{X}_{0,D} \times \bar{X}_{s,D})$ is F-rational.

Proof. For any field extension E/F such that D_E is a division F-algebra, the tautological vector bundle $\mathcal{T}$ (defined in Appendix C.2) on X_{0,D_E} is of rank p^n, and thus the product $X_{0,D_E} \times X_{s,D_E}$ (considered over X_{0,D_E} via the first projection) is isomorphic as a X_{0,D_E}-scheme to the Grassmann bundle $\Gamma_{p^n-p^s}(\mathcal{T})$ by [27, Proposition 4.3].

It follows by [21, Proposition 14.6.5] that for any $k \geq 0$,

$$\mathrm{Ch}_k(X_{0,D_E} \times X_{s,D_E}) \simeq \bigoplus_{\lambda} \mathrm{Ch}_{k-(p^n-p^s)p^s+|\lambda|}(X_{0,D_E})$$

where λ runs through partitions $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_{p^n-p^s})$ with $p^s \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_{p^n-p^s} \geq 0$.

By [32, Proposition 2.1.1] the number of E-rational elements in $\mathrm{Ch}_k(\bar{X}_{0,D} \times \bar{X}_{s,D})$ is exactly $\alpha \cdot p$, where α the number of these partitions satisfying $|\lambda| = p^n + (p^n - p^s)p^s - k$. Since we can apply this procedure over F, we see that E-rational cycles in $\mathrm{Ch}_k(\bar{X}_{0,D} \times \bar{X}_{s,D})$ are F-rational. □

Proposition 7.1.2. Let p be a prime and D a p-primary division F-algebra. If E/F is a field extension such that D_E is a division algebra, then for any $0 < s \leq n$, the motive $(M_{s,D})_E$ does not contain a direct summand isomorphic to a twist of X_{0,D_E}.

Proof. Suppose that a twisted motive $X_{0,D_E}[i]$ is a direct summand of $(M_{s,D})_E$. There are then two morphisms $f : X_{0,D_E}[i] \rightsquigarrow (M_{s,D})_E$ and $g : (M_{s,D})_E \rightsquigarrow X_{0,D_E}[i]$ such that $g \circ f = id_{X_{0,D_E}}$. The cycles $\overline{f} \in \mathrm{Ch}(\bar{X}_{0,D} \times \bar{X}_{s,D})$ and $\overline{g} \in \mathrm{Ch}(\bar{X}_{s,D} \times \bar{X}_{0,D})$ are both F-rational by proposition 7.1.1 hence we have two morphisms $f_1 : X_{0,D}[i] \rightsquigarrow X_{s,D}$ and $g_1 : X_{s,D} \rightsquigarrow X_{0,D}[i]$ such that $\overline{g_1} \circ \overline{f_1} = id$.

Setting $M_{s,D} = (X_{s,D}, \pi)$, we see that the two morphisms $\pi \circ f_1 : X_{0,D}[i] \rightsquigarrow M_{s,D}$ and $g_1 \circ \pi : M_{s,D} \rightsquigarrow X_{0,D}[i]$ satisfy $\overline{g_1} \circ \overline{\pi} \circ \overline{\pi} \circ \overline{f_1} = id$, hence by [66, Lemma 1.2] an appropriate power $(g_1 \circ \pi \circ \pi \circ f_1)^{\nu}$ is equal to $id_{X_{0,D}}$. Taking $\tilde{g} = (g_1 \circ \pi \circ \pi \circ f_1)^{\nu-1} \circ g \circ \pi$ and $\tilde{f} = \pi \circ f$, we conclude that $X_{0,D}[i]$ is a direct summand of $M_{s,D}$, which is contradicts the indecomposability of $M_{s,D}$ since the length (cf. Definition 3.2.2) of these summands are not equal (or also since the p-adic valuation of their rank are not equal). □

Corollary 7.1.1. Let p be a prime and D a p-primary division F-algebra. If E/F is a field extension such that D_E remains a division algebra, $(M_{1,D})_E = M_{1,D_E}$.

Proof. By [36, Theorem 3.8] the complete motivic decomposition of $(M_{1,D})_E$ consists of the indecomposable direct summand M_{1,D_E} and some twists of M_{0,D_E}, but by proposition 7.1.2 these summand cannot appear over E. □

Proof of the first statement of theorem 7.0.1. Consider a field extension E/F such that $v_p(\mathrm{ind}(A)) = v_p(\mathrm{ind}(A_E))$. The complete motivic decomposition of $X(p;A)$ consists of twists of $M_{0,D}$ and $M_{1,D}$, where D is a division algebra Brauer equivalent to the p-primary component of A by [36, Theorem 3.8]. First, the summands which are twists of $M_{0,D}$ lift to twists of M_{0,D_E} since D_E remains a division algebra by [32, Theorem 2.2.1]. Corollary 7.1.1 shows that the direct summand $M_{1,D}$ also lifts M_{1,D_E}. □

7.2 Motivic rigidity of $X(4;A)$

We are now only interested in motives with coefficients in $\mathbb{F}_2$. We prove an analogue of the first statement of theorem 7.0.1 for the generalized Severi-Brauer variety $X(4;A)$. To do this we observe that we can completely describe the indecomposable direct summands in the complete motivic decomposition of $X(4;D) \in \mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_2)$, where D is a 2-primary division algebra.

Proposition 7.2.1. Let D be a division algebra of degree 2^n. For any integer $0 < s \leq n$, the complete motivic decomposition of $X(2^s;D)$ in $\mathrm{CM}(F;\mathbb{F}_2)$ consists of the upper motive $M_{s,D}$ and some twists of $M_{l,D}$, where l is strictly less than $s-1$.

Proof. Recall $X(2^s;D)$ is 2-incompressible and thus its motive contains only one direct summand isomorphic to $M_{s,D}$. We prove the result by induction on n and the result is clear if $n = 1$. Assume that the result is proved for every division algebra of degree 2^{n-1} and consider a division algebra of degree 2^n. Suppose that a twist of $M_{s-1,D}$ is a direct summand of $X(2^s;D)$.

Setting $X = X(2^{n-1}; D)$ the central simple algebra $D_{F(X)}$ is of index 2^{n-1} and we denote by C the (uniquely defined up to isomorphism and of degree 2^{n-1}) division algebra Brauer-equivalent to $D_{F(X)}$. By [42, Theorem 10.13] the motivic decomposition of $(M_{s-1,D})_{F(X)}$ contains a direct summand isomorphic to $M_{s-1,C} \oplus M_{s-1,C}[2^{n+s-2}]$ and we also have in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_2)$

$$(X(2^s; D))_{F(X)} = \bigoplus_{i+j=2^s} X(i; C) \otimes X(j; C)[i(2^{n-1} - j)].$$

By induction hypothesis, the motive of $X(2^s; C)$ does not contain a indecomposable direct summand isomorphic to $M_{s-1,C}$. Moreover by the Krull-Schmidt principle the complete motivic decomposition of $X(i; C) \otimes X(j; C)$ consists of twists of $M_{l,C}$, where l is less than 2-adic valuation of the greatest common divisor of i and j. The motive $M_{s-1,C} \oplus M_{s-1,C}[2^{n+s-2}]$ must therefore be a direct summand of $X(2^{s-1}; C) \otimes X(2^{s-1}; C)$. Since the length (cf. Definition 3.2.2) of $M_{s-1,C} \oplus M_{s-1,C}[2^{n+s-2}]$ is $2^{n+s-1} - 2^{2s-2}$, and the length of $X(2^{s-1}; C) \otimes X(2^{s-1}; C)$ is $2^{n+s-1} - 2^{2s-1}$, we get a contradiction. □

Corollary 7.2.1 ([36, Theorem 4.2])**.** The motive of the generalized Severi-Brauer variety $X(2; D)$ of a 2-primary division algebra D is indecomposable in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_2)$.

Proof. By [36, Theorem 3.8] any indecomposable direct summand of $X(2; D)$ is either isomorphic to the outer direct summand $M_{1,D}$ or to a twist of $M_{0,D}$. □

Corollary 7.2.2. The complete motivic decomposition of the generalized Severi-Brauer variety $X(4; D)$ of a 2-primary division algebra D in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_2)$ consists of the outer direct summand $M_{2,D}$ and some twists of $X(0; D)$.

Corollary 7.2.3. Let $n \geq 2$ and D be a division F-algebra of degree 2^n. If E/F is a field extension such that D_E remains a division algebra, $(M_{2,D})_E = M_{2,D_E}$.

Proof. By proposition 7.1.2 The motive $(M_{2,D})_E$ is decomposable if and only if it contains a direct summand isomorphic to a twist of the upper direct summand of X_{0,D_E} or X_{1,D_E}, but by propositions 7.1.2 and 7.2.1 neither M_{0,D_E} nor M_{1,D_E} can be there. □

Proof of the second statement of theorem 7.0.1. Any indecomposable motive in the complete motivic decomposition of $X(4; A)$ in $\mathrm{CM}(F; \mathbb{F}_2)$ is isomorphic to $M_{0,D}$, $M_{1,D}$ or $M_{2,D}$, where D is a division algebra Brauer-equivalent to the 2-primary component of A. If E/F is a field extension such that $v_2(\mathrm{ind}(A)) = v_2(\mathrm{ind}(A_E))$, D_E is a division algebra and thus the twists of $M_{0,D}$ lift over E by [32, Theorem 2.2.1]. The summands which are twists of $M_{1,D}$ and $M_{2,D}$ also lift to E by 7.1.1 and 7.2.3. □

Annexe A

K-théorie de Milnor

Pour tout groupe abélien G et pour tout entier n, nous notons $G^{\otimes n}$ la n-ième puissance tensorielle de G. Pour tout anneau commutatif A, le groupe abélien des éléments inversibles de A est noté $A^{\times}$. Nous renvoyons à [20, Chapitre IX] ou à [23, Chapitre 7] pour une présentation détaillée.

Définition A.0.1. Soit F un corps. L'*anneau tensoriel* de F, noté $T_*(F)$, est défini par $T_*(F) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}}(F^{\times})^{\otimes n}$.

La structure d'anneau de $T_*(F)$ est donnée par la concaténation des tenseurs purs.

Définition A.0.2. L'*anneau de Milnor* d'un corps F est le quotient $K_*(F) = T_*(F)/\mathcal{I}$ de l'anneau tensoriel de F par l'idéal $\mathcal{I}$ engendré par les tenseurs $\alpha \otimes \beta$ tels que $\alpha + \beta = 1$.

La classe d'un tenseur pur $\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n$ dans l'anneau de Milnor de F est un *symbole*, que l'on note $\{\alpha_1, \cdots \alpha_n\}$. Nous utilisons les propriétés suivantes de l'anneau de Milnor au chapitre 1 pour construire le complexe de Rost d'un schéma X.

Définition A.0.3. Pour toute extension de corps E/F, on dispose du morphisme de restriction $r_{E/F} : K_*(F) \longrightarrow K_*(E)$ qui associe à tout symbole $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}_F$ le symbole $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}_E$.

Soit F un corps muni d'une valuation discrète v de corps résiduel E. La valuation v induit un morphisme $\partial_v : K_{*+1}(F) \longrightarrow K_*(E)$ par [23, Proposition 7.1.4].

Proposition A.0.2 ([23, §7.3])**.** Soit E/F une extension finie. Alors pour tout entier n, il existe un morphisme $c_{E/F} : K_n(E) \longrightarrow K_n(F)$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. si L/E est une autre telle extension de corps, $c_{L/F} = c_{L/E} \circ c_{E/F}$;
2. le morphisme $K_0(E) \longrightarrow K_0(F)$ est la multiplication par $[E : F]$ dans $\mathbb{Z}$.

Annexe B

Algèbres de Hopf

Définition B.0.4. Soit F un corps et A une F-algèbre commutative. L'algèbre A est une *algèbre de Hopf* si elle est munie de morphismes de F-algèbres $c : A \longrightarrow A \otimes_F A$, $i : A \longrightarrow A$ et $e : A \longrightarrow F$ tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & A \otimes_F A \arrow[d, "c\otimes id"] \\ A \otimes_F A \otimes_F A \arrow[r, "id\otimes c"] & A \otimes_F A \otimes_F A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "id"'] & A \otimes_F A \arrow[d, "e\otimes id"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "e"'] & A \otimes_F A \arrow[r, "i\otimes id"] & A \otimes_F A \arrow[d, "m"] \\ & F \arrow[r, "\cdot 1"] & A \end{tikzcd}$$

L'application c est la comultiplication de A, l'application i l'application coinverse de A et e la counité de A. Un morphisme d'algèbres de Hopf $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme de F-algèbres compatible avec les comultiplications, les coinverses et les counités de A et A'.

Définition B.0.5. Un idéal J d'un algèbre de Hopf A est un *idéal de Hopf* s'il vérifie les conditions suivantes :

1. $c(J) \subset J \otimes_F A + A \otimes_F J$
2. $i(J) \subset J$
3. $e(J) = 0$.

Si J est un idéal de Hopf d'une algèbre de Hopf A, la F-algèbre A/J est elle aussi une algèbre de Hopf, et le morphisme naturel $A \longrightarrow A/J$ est un morphisme d'algèbres de Hopf.

Annexe C

Algèbres centrales simples, variétés de Severi-Brauer

C.1 Algèbres centrales simples

Nous nous référons à [44] et [55] pour plus de détails. Soit F un corps et A une F-algèbre de dimension finie. L'algèbre A est une *F-algèbre centrale simple* (ou une algèbre centrale simple, s'il n'y a pas d'ambiguïté) si F est le centre de A et A ne possède pas d'idéal bilatère non-trivial. Une F-algèbre D de dimension finie est une *algèbre à division* si $D \neq \{0\}$ et si tous les éléments non-nuls de D sont inversibles. Le théorème suivant est du à Wedderburn.

Théorème C.1.1. Si A est une F-algèbre, les conditions suivantes sont équivalentes

1. A est une algèbre centrale simple ;
2. il existe une extension K/F telle que A_K soit isomorphe à une algèbre de matrices sur K ;
3. A est isomorphe à une algèbre de matrices sur une algèbre à division D.

En outre, l'algèbre à division D du point 3. est définie de manière unique à isomorphisme près.

Deux F-algèbres centrales simples A et B sont *Brauer-équivalentes* s'il existe deux entiers n et m ainsi qu'un isomorphisme $M_n(A) \simeq M_m(B)$. Le théorème C.1.1 implique que la dimension d'une algèbre centrale simple est un carré et que tout algèbre centrale simple est Brauer équivalente à une algèbre à division, définie de manière unique à isomorphisme près.

Définition C.1.1. Soit A une algèbre centrale simple. Le *degré* de A est défini par $\deg(A) = \sqrt{\dim(A)}$. L'*indice de Schur* de A, noté $\mathrm{ind}(A)$, est le degré d'une algèbre à division Brauer-équivalente à A.

La Brauer-équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des F-algèbres centrales simples, et la classe d'une algèbre centrale simple A est notée $[A]$. Le produit tensoriel munit l'ensemble des classes d'équivalences de F-algèbres centrales simples d'une structure de groupe abélien, l'inverse de $[A]$ étant la classe de l'*algèbre opposée* de A. Ce groupe, le *groupe de Brauer* de F (noté $\mathrm{Br}(F)$) est en outre de torsion. L'ordre d'une classe $[A] \in \mathrm{Br}(F)$ est l'*exposant* de A, noté $\exp(A)$, qui divise toujours l'indice de Schur de A. Enfin toute algèbre centrale simple se décompose de manière unique (à isomorphisme près) en un produit tensoriel d'algèbres centrales simples p-primaires selon le résultat suivant.

Théorème C.1.2. Soit A une algèbre centrale simple de degré n et $n = p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$ la décomposition de n comme un produit de facteurs premiers. Alors il existe des algèbres centrales simples $A_1, \cdots, A_r$ déterminées de manière unique à isomorphisme près tel que

1. pour tout $1 \leq i \leq r$, $\deg(A_i) = p_i^{n_i}$;
2. A est isomorphe à $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$.

Pour tout $1 \leq i \leq r$, l'algèbre centrale simple A_i du théorème C.1.2 est la *partie p_i-primaire* de A.

Théorème C.1.3 (Théorème de Skolem-Noether)**.** Soit A une algèbre centrale simple. Alors tout automorphisme d'algèbre de A est intérieur.

Notons enfin que si A est une F-algèbre centrale simple, la dimension sur F de tout idéal à droite de A est divisible par le degré de A. Un idéal à droite de A est de *dimension réduite* égale à k s'il est de dimension $k \deg(A)$.

C.2 Foncteurs de points et variétés de drapeaux

Si F est un corps, nous dirons qu'un foncteur covariant F-*alg* $\longrightarrow$ Set est un F-foncteur. Pour tout F-schéma X, on dispose du F-foncteur $\Phi_X : R \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sch}_F}(\mathrm{Spec}(R), X)$, représenté par X.

Définition C.2.1. Un F-foncteur $\Phi : F\text{-}alg \longrightarrow \mathrm{Set}$ de la forme Φ_X ci-dessus est le *foncteur de points* de X.

La catégorie des F-schémas est équivalente à la catégorie des F-foncteurs représentables (voir [16]).

Proposition C.2.1 ([42, Lemma 9.8,Corollary 10.4])**.** Pour tout F-espace vectoriel V de dimension finie et pour tout entier $k \geq 0$, le foncteur

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{Gr}_k(V) : & F\text{-}alg & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & R & \longmapsto & \{\text{facteurs directs de } N \subset V \otimes R \text{ de dimension } k\} \\ & \varphi : R \to S & \longmapsto & \mathrm{Gr}_k(V)_\varphi : N \mapsto N \otimes S \end{array}$$

est représenté par la Grassmanienne des sous-espaces de dimension k de V.

Si A est une algèbre centrale simple, le foncteur

$$\begin{array}{cccc} X(k; A) : & F\text{-}alg & \longrightarrow & \mathrm{Set} \\ & R & \longmapsto & \{N \in \mathrm{Gr}_{k \deg(A)}(A)(R),\ N \text{ est un idéal à droite de } A \otimes R\} \\ & \varphi : R \to S & \longmapsto & X(k; A)_\varphi : N \mapsto N \otimes S \end{array}$$

est un sous-foncteur représentable de $\mathrm{Gr}_{k \deg(A)}(A)$. Il s'agit de la variété de Severi-Brauer généralisée des idéaux à droite de A de dimension réduite k.

On définit plus généralement pour toute algèbre centrale simple A et toute suite d'entiers $0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_n \leq \deg(A)$ la variété $X(k_1, ..., k_n; A)$ des drapeaux d'idéaux à droite de A de dimension réduite $k_1, ..., k_n$. Pour toute F-algèbre R, les R-points de $X(k_1, ..., k_n; A)$ sont les chaines d'idéaux $J_1 \subset ... \subset J_n$, où J_i est de dimension $k_i \deg(A)$.

Définition C.2.2 ([42, Definition 8.6])**.** Un *fibré vectoriel* est un morphisme de F-foncteurs $f : \Phi \longrightarrow \Psi$ tel que pour toute F-algèbre R et pour tout R-point x de Ψ, l'image réciproque $f_R^{-1}(x)$ soit munie d'une structure de R-module projectif et de type fini, et tel que pour tout morphisme d'algèbres $\varphi : R \longrightarrow S$ le morphisme $f_R^{-1}(x) \longrightarrow f_S^{-1}(\Phi_\varphi(x))$ soit un morphisme de R-modules qui induit de plus un isomorphisme de S-modules $S \otimes_R f(R)^{-1}(x) \longrightarrow f_S^{-1}(\Phi_\varphi(x))$.

Exemple C.2.1. Soit A une algèbre centrale simple et $X(k;A)$ une variété de Severi-Brauer généralisée. Considérons le F-foncteur $\mathcal{T}$ défini par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T} \ : & F\text{-}alg & \longrightarrow & \text{Set} \\ & R & \longmapsto & \{(N,n),\ N \in X(k;A)(R) \text{ et } n \in N\} \\ & \varphi : R \to S & \longmapsto & \mathcal{T}_\varphi : (N,n) \mapsto (N \otimes S, n \otimes 1) \end{array} .$$

Le *fibré tautologique* $\pi : \mathcal{T} \longrightarrow X(k;A)$ sur $X(k;A)$ est donné pour toute F-algèbre R par

$$\pi_R \ : \begin{array}{ccc} \mathcal{T}(R) & \longrightarrow & X(k;A)(R) \\ (N,n) & \longmapsto & N \end{array} .$$

Annexe D

Systèmes de racines

Nous renvoyons pour plus de détails à [7] et [44]. Soit V un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Si $\alpha \in V$ est non nul, une réflexion par rapport à α est un endomorphisme s de V tel que :
- $s(\alpha) = -\alpha$;
- il existe un hyperplan $W \subset V$ tel que $s_{|W} = id$.

Définition D.0.3. Une famille finie Φ de vecteurs de V non nuls est un système de racines si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Φ engendre V ;
2. $\Phi \cap \mathbb{R}\alpha = \{-\alpha, \alpha\}$;
3. pour tout $\alpha \in \Phi$, il existe une réflexion s_α qui préserve Φ ;
4. pour tout $(\alpha, \beta) \in \Phi^2$, $s_\alpha(\beta) - \beta \in \mathbb{Z}\alpha$.

Un isomorphisme de systèmes de racines $f : (V, \Phi) \longrightarrow (V, \Phi')$ est un isomorphisme $f : V \longrightarrow V'$ tel que $f(\Phi) = \Phi'$.

Définition D.0.4. Le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(V, \Phi)$ engendré par les réflexion $(s_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$ est le *groupe de Weyl* de Φ, noté $\mathrm{W}(\Phi)$.

Si $(V_i, \Phi_i)_{i=1}^n$ est une famille de systèmes de racines, on peut considérer le système de racines $\Phi_1 + \cdots + \Phi_n = (V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \Phi_1 \cup \cdots \cup \Phi_n)$. Un système de racines est irréductible s'il ne peut s'écrire comme la somme de deux systèmes de racines non triviaux.

Si (V, Φ) est un système de racines, le réseau des racines (noté Λ_r) est le réseau engendré par les éléments de Φ dans V. Pour toute racine α, la réflexion s_α qui stabilise Φ s'écrit $s_\alpha(v) = v + \alpha^*(v) \cdot \alpha$ pour une unique forme linéaire $\alpha^* \in V^*$. Le réseau des poids est défini par

$$\Lambda_w = \{v \in V,\ \alpha^*(v) \in \mathbb{Z} \text{ for } \alpha \in \Phi\}.$$

Définition D.0.5. On considère l'ensemble des couples (Φ, A), où (V, Φ) est un système de racines et où A est un sous-groupe de V tel que $\Lambda_r \subset A \subset \Lambda_w$. Un isomorphisme $f : (\Phi, A) \longrightarrow (\Phi', A')$ est un isomorphisme de systèmes de racines $f : (V, \Phi) \longrightarrow (V', \Phi')$ tel que $f(A) = A'$.

Un sous-ensemble $\Pi \subset \Phi$ est un système de racines simples de Φ si tout élément $\alpha \in \Phi$ s'écrit de manière unique

$$\alpha = \sum_{\pi\in\Pi} \alpha_\pi \cdot \pi$$

pour certains entiers α_π de même signe. Le groupe $\mathrm{W}(\Phi)$ agit simplement transitivement sur les systèmes de racines simples de (V, Φ).

Soit (V, Φ) un système de racines. A tout système de racines simples $\Pi \subset \Phi$ on associe un graphe $\mathrm{Dyn}(\Phi)$, le *diagramme de Dynkin* de Φ, qui ne dépend pas (à isomorphisme près) du choix de Π. Deux systèmes de racines Φ et Φ' sont isomorphes si et seulement si les diagrammes de Dynkin associés sont isomorphes. La classification des systèmes de racines irréductibles est la suivante : il existe quatre familles infinies de systèmes de racines irréductibles A_n, B_n, C_n et D_n de *type classique*, et cinq systèmes irréductibles de *type exceptionnel*, notés E_6, E_7, E_8, F_4 et G_2 (voir [7]).

Index des notations

Bibliographie

[1] S. A. Amitsur. Generic splitting fields of central simple algebras. *Ann. of Math. (2)*, 62 :8–43, 1955.

[2] Y. André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*, volume 17 of *Panoramas et Synthèses [Panoramas and Syntheses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[3] G. Berhuy and Z. Reichstein. On the notion of canonical dimension for algebraic groups. *Adv. Math.*, 198(1) :128–171, 2005.

[4] A. Borel. *Linear algebraic groups*, volume 126 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[5] A. Borel and T. A. Springer. Rationality properties of linear algebraic groups. II. *Tôhoku Math. J. (2)*, 20 :443–497, 1968.

[6] A. Borel and J. Tits. Groupes réductifs. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (27) :55–150, 1965.

[7] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique : groupes et algèbres de Lie.* Masson, Paris, 1981. Chapitres 4, 5, 6.

[8] P. Brosnan. On motivic decompositions arising from the method of Białynicki-Birula. *Invent. Math.*, 161(1) :91–111, 2005.

[9] B. Calmès, V. Petrov, N. Semenov, and K. Zainoulline. Chow motives of twisted flag varieties. *Compos. Math.*, 142(4) :1063–1080, 2006.

[10] V. Chernousov, S. Gille, and A. Merkurjev. Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties. *Duke Math. J.*, 126(1) :137–159, 2005.

[11] V. Chernousov and A. Merkurjev. Motivic decomposition of projective homogeneous varieties and the Krull-Schmidt theorem. *Transform. Groups*, 11(3) :371–386, 2006.

[12] C. De Clercq. A going down theorem for Grothendieck Chow motives. *http://arxiv.org/abs/1001.0645*, 2010.

[13] C. De Clercq. Motivic decompositions of projective homogeneous varieties and change of coefficients. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(17-18) :955–958, 2010.

[14] C. De Clercq. Classification of upper motives of algebraic groups of inner type A_n. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(7-8) :433–436, 2011.

[15] C. De Clercq. Motivic rigidity of generalized Severi-Brauer varieties. *http://arxiv.org/abs/1105.4981*, 2011.

[16] M. Demazure and P. Gabriel. *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs.* Masson & Cie, Éditeur, Paris, 1970. Avec un appendice *Corps de classes local* par Michiel Hazewinkel.

[17] M. Demazure and A. Grothendieck. *Schémas en groupes. II : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 152. Springer-Verlag, Berlin, 1962/1964.

[18] M. Demazure and A. Grothendieck. *Schémas en groupes. I : Propriétés générales des schémas en groupes.* Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[19] R. Elman, N. Karpenko, and A. Merkurjev. *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, volume 56 of *American Mathematical Society Colloquium Publications.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.

[20] I. B. Fesenko and S. V. Vostokov. *Local fields and their extensions*, volume 121 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2002. With a foreword by I. R. Shafarevich.

[21] W. Fulton. *Intersection theory*, volume 2 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics].* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.

[22] S. Garibaldi, V. Petrov, and N. Semenov. Shells of twisted flag varieties and non-decomposability of the rost invariant. *Available on the web page of the authors*, 2010.

[23] P. Gille and T. Szamuely. *Central simple algebras and Galois cohomology*, volume 101 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[24] S. Gille. The Rost nilpotence theorem for geometrically rational surfaces. *Invent. Math.*, 181 :1–19, 2010.

[25] O. Haution. Lifting of coefficients for Chow motives of quadrics. In *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, volume 18 of *Dev. Math.*, pages 239–247. Springer, New York, 2010.

[26] J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York, 1975. Graduate Texts in Mathematics, No. 21.

[27] O. Izhboldin and N. Karpenko. Some new examples in the theory of quadratic forms. *Math. Z.*, 234(4) :647–695, 2000.

[28] J. C. Jantzen. *Representations of algebraic groups*, volume 107 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2003.

[29] B. Kahn. La conjecture de Milnor [d'après V. Voevodsky]. *Astérisque*, Exposé Bourbaki n° 834(245) :379–418, 1997.

[30] B. Kahn. Formes quadratiques et cycles algébriques [d'après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...]. *Astérisque*, Exposé Bourbaki n° 941(307) :113–163, 2006.

[31] B. Kahn. *Formes quadratiques sur un corps*, volume 15 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses].* Société Mathématique de France, Paris, 2008.

[32] N. Karpenko. Grothendieck Chow motives of Severi-Brauer varieties. *Algebra i Analiz*, 7(4) :196–213, 1995.

[33] N. Karpenko. On anisotropy of orthogonal involutions. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 15(1) :1–22, 2000.

[34] N. Karpenko. Weil transfer of algebraic cycles. *Indag. Math. (N.S.)*, 11(1) :73–86, 2000.

[35] N. Karpenko. On the first Witt index of quadratic forms. *Invent. Math.*, 153(2) :455–462, 2003.

[36] N. Karpenko. Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi-Brauer varieties.
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/LAG/man/333.html, 2009.

[37] N. Karpenko. Canonical dimension. *Proceedings of the ICM 2010*, vol. II :146–161, 2010.

[38] N. Karpenko. Hyperbolicity of orthogonal involutions. *Doc. Math. Extra Volume : Andrei A. Suslin's Sixtieth Birthday*, pages 371–392, 2010.

[39] N. Karpenko. Upper motives of outer algebraic groups. In *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, volume 18 of *Dev. Math.*, pages 249–257. Springer, New York, 2010.

[40] N. Karpenko and A. Merkurjev. Canonical p-dimension of algebraic groups. *Adv. Math.*, 205(2) :410–433, 2006.

[41] N. Karpenko and M. Zhykhovich. Isotropy of unitary involutions.
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/LAG/man/423.html, 2011.

[42] N. A. Karpenko. Cohomology of relative cellular spaces and of isotropic flag varieties. *Algebra i Analiz*, 12(1) :3–69, 2000.

[43] I. Kersten and U. Rehmann. Generic splitting of reductive groups. *Tohoku Math. J. (2)*, 46(1) :35–70, 1994.

[44] M-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost, and J-P. Tignol. *The book of involutions*, volume 44 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. With a preface in French by J. Tits.

[45] B. Köck. Chow motif and higher Chow theory of G/P. *Manuscripta Math.*, 70(4) :363–372, 1991.

[46] Ju. I. Manin. Correspondences, motifs and monoidal transformations. *Mat. Sb. (N.S.)*, 77 (119) :475–507, 1968.

[47] A. S. Merkurjev, I. A. Panin, and A. R. Wadsworth. Index reduction formulas for twisted flag varieties. I. *K-Theory*, 10(6) :517–596, 1996.

[48] A. Nenashev and K. Zainoulline. Oriented cohomology and motivic decompositions of relative cellular spaces. *J. Pure Appl. Algebra*, 205(2) :323–340, 2006.

[49] V. Petrov and N. Semenov. Higher Tits indices of algebraic groups. *Available on the web page of the authors*, 2007.

[50] V. Petrov and N. Semenov. Generically split projective homogeneous varieties. *Duke Math. J.*, 152(1) :155–173, 2010.

[51] V. Petrov, N. Semenov, and K. Zainoulline. J-invariant of linear algebraic groups. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 41(6) :1023–1053, 2008.

[52] M. Rost. Some new results on the Chow groups of quadrics. *Available on the webpage of the author*, 1990.

[53] M. Rost. Chow groups with coefficients. *Doc. Math.*, 1 :No. 16, 319–393 (electronic), 1996.

[54] M. Rost. The motive of a Pfister form. *Available on the webpage of the author*, 1998.

[55] W. Scharlau. *Quadratic and Hermitian forms*, volume 270 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[56] N. Semenov. Motivic construction of cohomological invariants. *Available on the webpage of the author*, 1990.

[57] T. A. Springer. *Linear algebraic groups*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, second edition, 2009.

[58] J. Tits. Classification of algebraic semisimple groups. In *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965)*, pages 33–62. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, 1966.

[59] A. Vishik. Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms. In *Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms*, volume 1835 of *Lecture Notes in Math.*, pages 25–101. Springer, Berlin, 2004.

[60] A. Vishik. Fields of u-invariant 2^r+1. In *Algebra, arithmetic, and geometry : in honor of Yu. I. Manin. Vol. II*, volume 270 of *Progr. Math.*, pages 661–685. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2009.

[61] A. Vishik. *Excellent connections in the motives of quadrics*, volume 44 of *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* 2011.

[62] A. Vishik and N. Yagita. Algebraic cobordisms of a Pfister quadric. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 76(3) :586–604, 2007.

[63] V. E. Voskresenskiĭ. *Algebraic groups and their birational invariants*, volume 179 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998. Translated from the Russian manuscript by Boris Kunyavski [Boris È. Kunyavskiĭ].

[64] W. C. Waterhouse. *Introduction to affine group schemes*, volume 66 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1979.

[65] A. Weil. Algebras with involutions and the classical groups. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 24 :589–623 (1961), 1960.

[66] M. Zhykhovich. Motivic decomposability of generalized Severi-Brauer varieties. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 348(17-18) :989–992, 2010.

Abstract

In this thesis we study the Grothendieck Chow motives of projective homogeneous varieties, and their relations with classical invariants and questions of rational geometry. The motive (with finite coefficients) of a projective homogeneous variety under the action of a semisimple affine algebraic group G decomposes in an essentially unique way as a direct sum of indecomposable motives. Our work takes part in the program of classification of those motives, our main tool being the theory of upper motives.

We first show that the classification is reduced to the one with coefficients in $\mathbb{F}_p$ if G is of inner type, and find an analogue for groups of outer type. We then give a complete classification of the indecomposable motives of varieties under the action of projective linear groups and derive from it the motivic dichotomy of PGL_1. We also provide a motivic tool used by Garibaldi, Semenov and Petrov to completely determine the motives of projective homogeneous varieties under the action of groups of type E_6. Finally we show that the motivic decomposition of generalized Severi-Brauer varieties $\mathrm{SB}(p, A)$ with coefficients in $\mathbb{F}_p$ only depend on the p-adic valuation of the index of A.

Keywords. Chow groups, Grothendieck Chow motives, semisimple algebraic groups, projective homogeneous varieties, Severi-Brauer varieties, central simple algebras.

Résumé

Cette thèse porte sur les motifs de Chow des variétés projectives homogènes, et leurs liens avec des invariants classiques et certaines questions de géométrie rationnelle. Le motif (à coefficients finis) d'un espace homogène sous l'action d'un groupe algébrique semisimple et affine G se décompose de manière essentiellement unique en une somme directe de motifs indécomposables. Ce travail prend part au programme de classification de ces motifs, notre principal outil étant la théorie des motifs supérieurs.

Nous montrons que cette classification est réduite à celle à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ si G est de type intérieur, et trouvons un analogue si G est de type extérieur. Nous classifions ensuite complètement les motifs indécomposables des espaces homogènes sous l'action d'un groupe projectif linéaire et en déduisons la dichotomie motivique de PGL_1. Nous proposons ensuite un outil de décomposition motivique utilisé par Garibaldi, Semenov et Petrov pour déterminer toutes les décompositions d'espaces homogènes si G est de type E_6. Enfin nous montrons que la décomposition des variétés de Severi-Brauer généralisées $\mathrm{SB}(p, A)$ à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ ne dépend que de la valuation p-adique de l'indice de A.

Mots clés. groupes de Chow, motifs de Grothendieck Chow, groupes algébriques semimsimples, variétés projectives homogènes, variétés de Severi-Brauer, algèbres centrales simples.