



**HAL**  
open science

# Application du modèle en couches à l'étude des états intrus de parité négative des noyaux sd moyennant la nouvelle interaction PSDPF

Mouna Bouhelal

► **To cite this version:**

Mouna Bouhelal. Application du modèle en couches à l'étude des états intrus de parité négative des noyaux sd moyennant la nouvelle interaction PSDPF. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université de Strasbourg; Université de Batna, 2010. Français. NNT: . tel-00651110

**HAL Id: tel-00651110**

**<https://theses.hal.science/tel-00651110>**

Submitted on 12 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



---

N° d'ordre UDS : 535

N° d'ordre IPHC : 2010-011

## **THESE EN CO-TUTELLE**

présentée pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université de Strasbourg  
et de l'Université de Batna–Algérie**

**Discipline : Physique**

**Spécialité : Physique Nucléaire Théorique**

par

**Mouna BOUHELAL**

---

***Application du modèle en couches à l'étude des états intrus de parité  
négative des noyaux sd moyennant la nouvelle interaction PSDPF***

---

Soutenue publiquement le 25/4/2010 à l'Université de Batna

### **Membres du jury**

*Directeur de thèse* : M. Florent HAAS, Directeur de Recherche, IPHC, Strasbourg  
*Co-Directeur de thèse* : M. Abdelhamid BOULDJEDRI, Professeur, Université de Batna  
*Rapporteur interne* : M. AbdelMjid NOURREDDINE, Professeur, Université de Strasbourg  
*Rapporteur externe* : M. Mustapha MAAMACHE, Professeur, Université de Sétif  
*Rapporteur externe* : M. Kamel BENCHEIKH, Professeur, Université de Sétif  
*Examineur* : M. Saïd TOBBECHE, Maître de Conférences, Université de Batna

*A MES PARENTS  
A TOUTE MA FAMILLE*

## *Remerciements*

En premier lieu, je voudrais remercier très sincèrement et plus encore chaleureusement mon directeur de thèse Florent HAAS de m'avoir proposé le sujet et m'encadré, pour sa confiance et sa gentillesse, sa disponibilité et dont les qualités scientifiques et humaines n'ont d'égales que son goût de les transmettre.

Mes remerciements sont également adressés à mon co-directeur de thèse Abdelhamid BOULDJEDRI pour son soutien constant et ces conseils fructueux.

Je voudrais ensuite remercier professeur Daniel HUSS, directeur du l'IPHC, de m'avoir accueilli à l'IPHC et rendu ma thèse possible.

Je suis redevable aux professeurs : AbdelMjid NOURREDDINE, Mustapha MAAMACHE, Kamel BENCHEIKH et Said TOBBECHE d'avoir accepté être membre de jury et donc de se plonger dans le manuscrit en pleine canicule.

Je suis particulièrement reconnaissante à Etienne CAURIER et Frédéric NOWACKI sans lesquels le présent travail n'aurait pas eu lieu. Merci de m'avoir initié à ce sujet et aux deux codes « Antoine et Nathan », merci pour vos conseils constants et nos discussions enthousiastes. Vous avez contribué largement à la réussite de cette thèse, Merci !

Ma plus grande gratitude va à Bernard SILVESTER-BRAC de LPSC, pour avoir rendu possible ma rencontre avec Etienne CAURIER et donc avec Florent HAAS et Frédéric NOWACKI avec qui j'avais l'honneur de travailler.

En fin, merci à toute ma famille, parfois loin des yeux mais jamais du cœur, ... à mes parents, sans le soutien de lequel rien n'aurait été possible... à mes grands parents pour leurs encouragements et prières... Je ne saurais oublier ceux qui étaient à mes côtés lorsque j'en avais besoin.

# Sommaire

|  |    |
|--|----|
| Sommaire .....   | 1  |
| Liste des figures .....  | 3  |
| Liste des tableaux .....   | 5  |
| <i>Introduction</i> .....  | 6  |
| <i>Chapitre 1</i> .....  | 8  |
| Motivation – " Noyaux de la couche sd " .....                            | 8  |
| 1. Etats de parité positive .....  | 10 |
| 1.1 Etats normaux .....  | 10 |
| 1.2 Etats déformés .....   | 11 |
| 1.3 Îlot d'inversion et $N = 20$ .....                                   | 12 |
| 2. Etats de parité négative .....  | 13 |
| 3. Structure en cluster .....  | 16 |
| 4. De nouveaux nombres magiques .....                                    | 16 |
| <i>Chapitre 2</i> .....  | 18 |
| Modèle en couches et structure des noyaux .....                          | 18 |
| Nombres magiques et structure en couches .....                           | 18 |
| 1. Notions de base du modèle en couches sphérique : le champ moyen ..... | 19 |
| 2. Au-delà du champ moyen .....  | 21 |
| 3. Les ingrédients du modèle en couches .....                            | 23 |
| <i>Chapitre 3</i> .....  | 29 |
| Interaction effective .....  | 29 |
| 1. Interactions effectives : état de l'art .....                         | 29 |
| 2. Structure de l'hamiltonien et théorème de séparation .....            | 32 |
| 2.1 L'hamiltonien monopolaire .....                                      | 32 |
| 2.2 L'hamiltonien multipolaire .....                                     | 34 |
| 3. Les approches empiriques : procédure du fit .....                     | 35 |
| 4. Problèmes du centre de masse et états spurieux .....                  | 40 |
| 5. Transitions électromagnétiques .....                                  | 41 |
| 5.1 Probabilités de transitions électromagnétiques .....                 | 42 |
| 5.2 Opérateurs de transitions électriques et magnétiques .....           | 44 |
| 5.3 Effets de l'isospin sur les transitions électromagnétiques .....     | 46 |
| <i>Chapitre 4</i> .....  | 48 |
| L'interaction PSDPF .....  | 48 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.  | Etapas de la derivación de l'interaction PSDPF .....  | 49  |
| 1.1 | <i>Procedura d'ajustement empirique</i> .....   | 51  |
| 1.2 | <i>Fit par la méthode des moindres carrés</i> .....   | 58  |
| 2.  | Evolution de l'interaction PSDPF .....  | 66  |
|     | <i>Chapitre 5</i> .....   | 69  |
|     | Résultats et prédictions.....   | 69  |
| 1.  | <i>Gap en énergie</i> .....   | 70  |
| 2.  | <i>Les états tests dans les noyaux <math>N = Z</math> et <math>N = Z + 1</math></i> .....   | 70  |
| 3.  | <i>Les états <math>2_1^+</math> et <math>3_1^-</math> dans les noyaux sd pair-pairs : énergies d'excitation et transitions électromagnétiques</i> ..... | 76  |
| 4.  | <i>L'état <math>0^-</math> à travers la couche sd</i> .....   | 81  |
| 5.  | <i>Systématique des isotones pair-pairs <math>N = 20</math></i> .....   | 84  |
| 6.  | <i>Spectroscopie du <math>^{36}\text{S}</math> entre 0 et 6 MeV</i> .....   | 86  |
|     | <i>Conclusion</i> .....   | 89  |
|     | <i>Références</i> .....   | 91  |
|     | <i>Annexe A</i> .....   | 95  |
|     | Listes des différences $\Delta$ entre les paramètres des interactions utilisées.....  | 95  |
|     | <i>Annexe B</i> .....   | 100 |
|     | Résultats de l'interaction PSDPFB.....  | 100 |
|     | <i>Annexe C</i> .....   | 110 |
|     | Spectres calculés et expérimentaux de tous les noyaux sd.....   | 110 |

# Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure 1–1: Charte des noyaux de la couche sd. Pour les noyaux marqués d'une étoile « * », l'état fondamental est non lié, c'est-à-dire instable par rapport à l'émission de particule .....  | 8  |
| Figure 1–2: Seuils d'émission de proton ( $S_p$ ) (en bleu) et de alpha ( $S_\alpha$ ) (en orange) pour les noyaux $N = Z$ à travers la couche sd .....   | 9  |
| Figure 1–3: Charte des noyaux sd avec des états intrus de parité négative connus .....  | 14 |
| Figure 1–4: Spectre des premiers états de $^{17}\text{O}$ et leur configuration .....   | 14 |
| Figure 2–1: Niveaux nucléaires schématiques du champ moyen avec un terme spin-orbite..  | 21 |
| Figure 2–2: Schématique des premiers niveaux (fondamental et excités) de $^{16}\text{O}$ .....  | 24 |
| Figure 3–1: Procédure de fit par la méthode des moindres carrés .....   | 37 |
| Figure 3–2 : Méthode des combinaisons linéaires pour les paramètres de l'interaction .....  | 39 |
| Figure 4–1 : Passage de l'espace sd (cœur inerte $^{16}\text{O}$ ) à l'espace complet p–sd–pf (cœur inerte $^4\text{He}$ ) .....  | 49 |
| Figure 4–2 : Vue schématique de la procédure d'ajustement des monopoles .....   | 51 |
| Figure 4–3 : Charte des noyaux utilisés pour l'ajustement des monopoles p–sd et sd– pf ...  | 52 |
| Figure 4–4 : Comparaison des monopoles des interactions PSDPFB et PSDPF0 .....  | 55 |
| Figure 4–5 : (A) Energies d'excitation expérimentales versus calculées pour le premier état excité $3^-$ dans les noyaux sd $N = Z$ . (B) Probabilités d'occupation de la couche p (trou) et de la couche pf (particule) des états $3^-$ dans les noyaux pair–pairs ..... | 57 |
| Figure 4–6 : Charte des noyaux sd dont des états ont été introduits dans le fit des états $0\hbar\omega$ ..   | 59 |
| Figure 4–7 : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) des interactions PSDPF et PSDPFB (voir texte pour plus de détails) .....   | 60 |
| Figure 4–8 : Charte des noyaux sd introduits dans le fit des états $1\hbar\omega$ .....   | 61 |
| Figure 4–9 : Charte de tous les noyaux introduits dans le fit des états $1\hbar\omega$ .....  | 62 |
| Figure 4–10 : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) p–sd des interactions PSDPF et PSDPFB .....   | 64 |
| Figure 4–11 : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) sd–pf des interactions PSDPF et PSDPFB .....  | 65 |
| Figure 5–1: Energies d'excitation expérimentales versus calculées avec PSDPF des deux premiers états intrus avec $J = 0, 3$ et $6$ dans les noyaux sd avec $N = Z$ .....  | 71 |

|   |    |
|---|----|
| Figure 5–2: Probabilités d'occupation de la couche p (trou) et de la couche pf (particule) des deux premiers états intrus avec $J = 0, 3$ et $6$ dans les noyaux sd avec $N = Z$ pair–pairs (à gauche) et impair–impairs (à droite).....  | 72 |
| Figure 5–3: Energies d'excitation expérimentales versus calculées avec PSDPF des deux premiers états intrus avec $J = 1/2, 5/2$ et $11/2$ dans les noyaux avec $N = Z + 1$ .....  | 75 |
| Figure 5–4 : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales (en noir) et calculées (en rouge) des $2^+_1$ et $3^-_1$ dans les noyaux sd avec $N = Z$ .....  | 76 |
| Figure 5–5 : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales (en noir) et calculées (en rouge) des $2^+_1$ et $3^-_1$ dans les noyaux sd avec $N = Z + 2$ .....  | 77 |
| Figure 5–6 : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions $2^+_1 \rightarrow 0^+$ des forces de transition $S(2^+)$ exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux $N = Z$ (à gauche) et $N = Z + 2$ (à droite) .....  | 78 |
| Figure 5–7 : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions $3^-_1 \rightarrow 0^+$ des forces de transition $S(3^-)$ exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux $N = Z$ (à gauche) et $N = Z + 2$ (à droite). Les charges effectives utilisées sont $0.5e$ pour les neutrons et $1.5e$ pour les protons ..... | 79 |
| Figure 5–8 : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions $3^-_1 \rightarrow 0^+$ des forces de transition $S(3^-)$ exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux $N = Z$ (à gauche) et $N = Z + 2$ (à droite). Les charges effectives utilisées sont $0.4e$ pour les neutrons et $1.4e$ pour les protons ..... | 80 |
| Figure 5–9 : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales (en noir) et calculées (en rouge) du premier état $0^-$ dans les noyaux sd avec $N = Z$ (à gauche) et $N = Z + 2$ (à droite) .....  | 81 |
| Figure 5–10: Energies d'excitation prédites du premier état $0^-$ dans les noyaux sd avec $N = Z + 4$ .....   | 82 |
| Figure 5–11 : Energies d'excitation expérimentales et calculées avec PSDPF des états $1\hbar\omega$ dans les isotones $N = 20$ avec $Z = 14, 16, 18$ et $20$ .....  | 85 |
| Figure 5–12 : Les états $1\hbar\omega$ avec $J^\pi = 2^-$ à $5^-$ membres du multiplet $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^{-1})$ dans les isotones $N = 20$ $^{40}\text{Ca}$ , $^{38}\text{Ar}$ , $^{36}\text{S}$ et $^{34}\text{Si}$ : comparaison entre les spectres en énergie expérimentaux (A) et calculés (B) en utilisant l'interaction PSDPF .....        | 85 |
| Figure 5–13 : Comparaison entre le spectre expérimental et calculé du $^{36}\text{S}$ . Les états + sont indiqués sur la gauche et les états – sur la droite .....  | 86 |

Figure 5–14 : Occupations de couches des états  $3^-_1$  (à gauche) et  $5^-_1$  (à droite) comparées à celles de l'état fondamental  $0^+$  du  $^{36}\text{S}$ . Les couches protons sont indiquées par  $\pi$  et celles des neutrons par  $\nu$  ..... 87

## Liste des tableaux

|   |    |
|---|----|
| Tableau 3–1: Contributions multipolaires principales dans le cas d'une interaction réaliste (KB3), d'une interaction phénoménologique fittée (PFD6) [98] et d'une interaction effective à partir de calculs du type champ moyen (GOGNY) [99]. | 34 |
| Tableau 4–1: Comparaison des énergies individuelles (en MeV) des interactions PSDPFB et PSDPF.  | 67 |
| Tableau 4–2: Comparaison des rmsd (en keV) calculés en utilisant les quatre interactions pour les états 0 et $1 \hbar\omega$ des noyau sd.  | 67 |
| Tableau 4–3: Comparaison des rmsd (en keV) calculés pour les noyaux sd qui ne rentrent pas dans le fit " $1\hbar\omega$ " des états 0 et $1 \hbar\omega$ en utilisant les quatre interactions.  | 67 |
| Tableau A–1: Les différences $\Delta$ entre les monopoles croisés de notre interaction PSDPFB et ceux de l'interaction initiale PSDPF0  | 92 |
| Tableau A–2: Les différences $\Delta$ entre les monopoles sd–sd de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB   | 93 |
| Tableau A–3: Les différences $\Delta$ entre les multipoles sd–sd de l'interaction PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB   | 94 |
| Tableau A–4: Les différences $\Delta$ entre les monopoles p–sd de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB  | 94 |
| Tableau A–5: Les différences $\Delta$ entre les multipoles p–sd de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB   | 95 |
| Tableau A–6: Les différences $\Delta$ entre les monopoles sd–pf de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB   | 95 |
| Tableau A–7: Les différences $\Delta$ entre les multipoles sd–pf de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB  | 96 |

## Introduction

En physique nucléaire comme dans beaucoup d'autres domaines scientifiques, l'expérience et la théorie sont fortement liées. La théorie prend ses inspirations de l'expérience pour développer les modèles et l'expérience prend ses inspirations de la théorie pour choisir les expériences clés devant permettre de prouver ou de réfuter les hypothèses et les prédictions d'un modèle.

Durant ces cinquante dernières années, il y a eu beaucoup de travaux expérimentaux et théoriques sur la structure des noyaux à basse énergie d'excitation et proches de la vallée de stabilité. Plus récemment, les études expérimentales ont porté sur des régions d'énergie et de masse plus exotiques. La question est donc de savoir si les modèles nucléaires proposés permettent de décrire l'ensemble des phénomènes observés.

Dans ce contexte, les calculs du modèle en couches ont prouvé leur efficacité pour décrire non seulement les spectres en énergie des noyaux dans différentes régions de masse, mais aussi d'autres propriétés nucléaires telles que les facteurs spectroscopiques, les transitions électromagnétiques et les moments électromagnétiques. Cependant, il s'est avéré que l'accroissement rapide des dimensions de l'espace de valence, avec l'augmentation du nombre de nucléons en jeu, constitue une limitation sérieuse du modèle.

Dans notre travail de thèse, nous nous sommes intéressés principalement aux noyaux de la couche sd dont la structure a fait et fait toujours l'objet de nombreuses études expérimentales et théoriques. Ces noyaux possèdent des états normaux de parité positive appelés aussi états  $0\hbar\omega$ . Il a été démontré qu'ils sont bien décrits par le modèle en couches dans l'espace de valence sd en utilisant une interaction de type USD avec un cœur de  $^{16}\text{O}$ . Différentes propriétés caractérisent cette région qui va donc de  $^{16}\text{O}$  à  $^{40}\text{Ca}$ . Ces deux noyaux doublement magiques présentent par exemple, la coexistence d'états normaux sphériques avec des états intrus déformés voire superdéformés. Ceci indique clairement la nécessité dans notre approche théorique d'étendre l'espace de valence. Le même phénomène a été observé plus récemment pour les noyaux riches en neutrons de ce qui est appelé maintenant l'îlot d'inversion ( $N = 20$ ,  $Z = 10-12$ ). Pour ces noyaux, la configuration intrusive déformée devient celle du fondamental qui ne pourra clairement pas être décrit par un modèle  $0\hbar\omega$ .

Dans la couche sd, l'expérience montre aussi l'existence, en plus des états de parité positive normaux et intrus, d'états intrus de parité négative ayant une configuration 1 particule – 1 trou. Ces états résultent de l'excitation d'un nucléon de la couche p vers sd pour les noyaux proches de  $^{16}\text{O}$ , de la couche sd vers pf pour les noyaux au voisinage du  $^{40}\text{Ca}$ . Pour les noyaux du milieu de couche, il y a une compétition entre les deux types d'excitation. La description de ces états qui est l'objet principal de ma thèse nécessite la prise en compte dans le calcul des trois couches majeures p, sd et pf. Aucune description consistante de ces états à travers toute la couche sd n'a été proposée à ce jour. Pour décrire les états intrus  $1\hbar\omega$ , il faut étendre l'espace de valence sd à l'espace complet p–sd–pf avec un cœur de  $^4\text{He}$ . Ceci requiert le développement d'une nouvelle interaction compatible avec ce nouvel espace de valence. Une telle interaction n'a jamais été déterminée jusqu'à présent.

L'objectif principal de ma thèse a donc été de construire une nouvelle interaction effective PSDPF en profitant de la puissance actuelle des outils informatiques qui nous permettent aujourd'hui de diagonaliser des matrices de très grandes dimensions en utilisant les codes de calcul Antoine et Nathan développés par Etienne Caurier dans le groupe de physique théorique de l'IPHC.

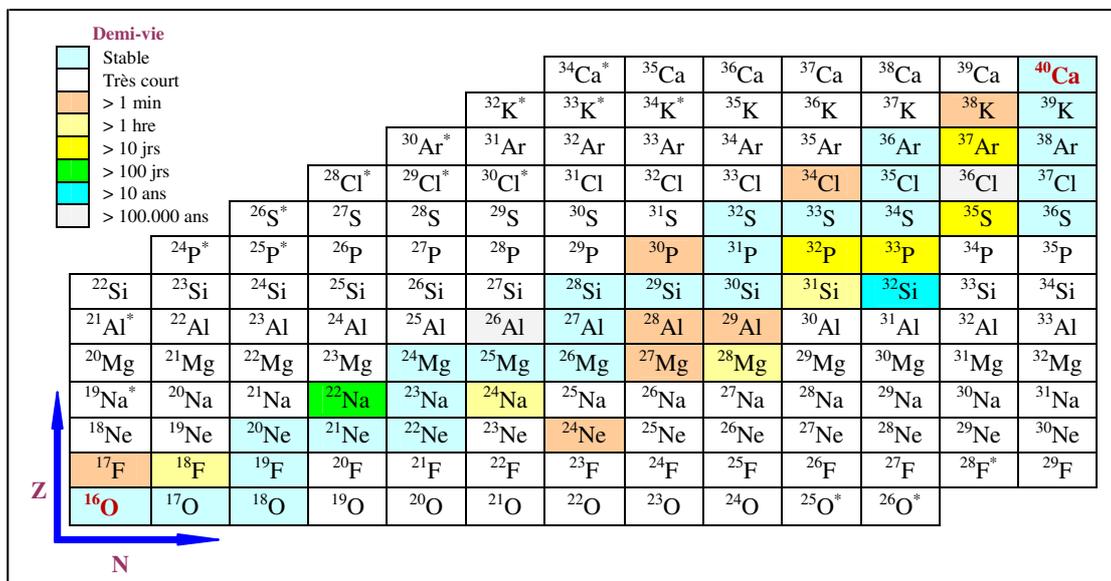
Le plan de la thèse est le suivant :

- dans le chapitre 1, une introduction sur la structure des noyaux sd est présentée, elle est suivie par un exposé des motivations de notre travail,
- dans le chapitre 2, sont résumées les notions de base du modèle en couches avec une revue rapide sur les espaces de valence et codes de calculs,
- dans le chapitre 3, sont présentées les interactions effectives ainsi que la méthode empirique utilisée pour construire notre interaction,
- dans le chapitre 4, sont exposées la mise au point de notre interaction PSDPF et les différentes étapes de la construction,
- le chapitre 5 est consacré à la discussion des résultats obtenus avec la nouvelle interaction et à leur comparaison avec les données expérimentales,
- la thèse se termine par une conclusion et aussi des perspectives sur les travaux à faire à court et moyen terme.

## Chapitre 1

### Motivation – "Noyaux de la couche sd "

La région des noyaux sd avec un nombre de protons et de neutrons compris entre 8 et 20 regroupe 146 noyaux connus expérimentalement dont 26 sont stables (Fig1–1). Cette région est limitée par les noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ .

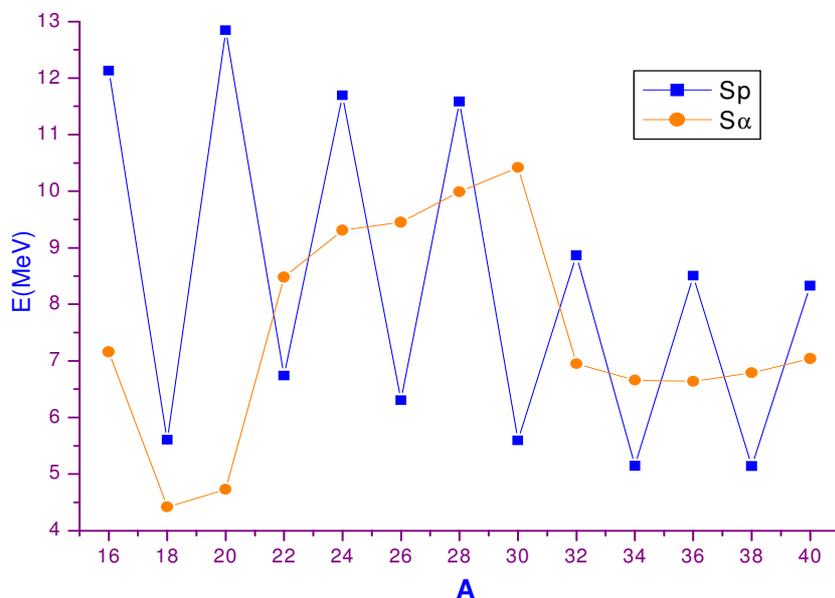


**Figure 1–1:** Charte des noyaux de la couche sd [1]. Pour les noyaux marqués d'une étoile « \* », l'état fondamental est non lié, c'est-à-dire instable par rapport à l'émission de particule.

Les spectres expérimentaux de basse énergie d'excitation [2] de ces noyaux sont caractérisés par la présence d'états sphériques « normaux » de parité positive et d'états « intrus » de parité négative. Cependant, dans quelques noyaux, des états intrus de parité positive « déformés » ou même « superdéformés » apparaissent à basse énergie et coexistent avec les états normaux. Dans le cadre du modèle en couches, pour les états dits normaux qui sont les plus importants les orbitales  $0s_{1/2}$ ,  $0p_{3/2}$ ,  $0p_{1/2}$  sont occupées et les orbitales pf sont vides c'est-à-dire qu'ils ont une configuration principale (sd) $^n$ ,  $n$  étant le nombre de nucléons

dans la couche sd. Les états intrus correspondent aux excitations de nucléons soit de la couche p vers sd soit de la couche sd vers pf. Les états de parité – résultent de sauts de nucléons avec un nombre impair, les états de parité + de sauts de nucléons avec un nombre pair qui peut aller jusqu'à 4 ou 8 pour des états déformés ou superdéformés.

Nous discuterons essentiellement de la structure des niveaux de basse énergie d'excitation qui sont principalement des états « liés » c'est-à-dire dont le mode de désexcitation est la décroissance gamma. Pour donner une idée de quelles sont les énergies d'excitation en jeu, les seuils d'émission des particules proton et alpha pour les noyaux sd avec  $N = Z$  sont montrés sur la Fig1–2. Pour les neutrons, les seuils sont plus élevés dans tous les noyaux considérés.



**Figure 1–2:** Seuils d'émission de proton (Sp) (en bleu) et de alpha (S $\alpha$ ) (en orange) pour les noyaux  $N = Z$  à travers la couche sd.

Comme cette figure le montre, les seuils d'émission Sp et S $\alpha$  varient beaucoup pour les 13 noyaux  $N = Z$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{18}\text{F}$ ,  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Al}$ ,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{30}\text{P}$ ,  $^{32}\text{S}$ ,  $^{34}\text{Cl}$ ,  $^{36}\text{Ar}$ ,  $^{38}\text{K}$  et  $^{40}\text{Ca}$  de la couche sd. Le choix de la région liée qui sera étudiée va donc dépendre de la masse du noyau considéré. En moyenne, nous nous sommes intéressés dans notre travail aux états liés compris entre 0 et 9 MeV pour les noyaux pair–pairs et entre 0 et 6 MeV pour les noyaux impair–impairs. Ceci reste dans le domaine où il y a prépondérance des excitations de nucléons au sein de la couche sd pour les états normaux de parité + ou de l'excitation d'un nucléon entre deux couches majeures pour les états intrus de parité –. Au-delà de ces

énergies, l'excitation de plus d'un nucléon va devenir de plus en plus importante. La description de ces états intrus complexes ne rentre pas dans le cadre de notre travail.

Les noyaux marqués d'une « \* » sur la Fig1-1 ne sont pas pris en considération dans nos calculs car ils ne sont pas liés, leur état fondamental est instable et se désexcite par émission de proton pour les noyaux riches en proton et par émission de neutron pour les riches en neutrons.

Pour les noyaux  $^{18}\text{F}$  et  $^{20}\text{Ne}$  du début de couche, on remarquera le seuil d'émission  $S_\alpha$  très bas et inférieur à 5 MeV. Ceci explique la structure en cluster  $^{14}\text{N} + \alpha$  pour  $^{18}\text{F}$  et  $^{16}\text{O} + \alpha$  pour  $^{20}\text{Ne}$  de certains états de basse énergie. Cette clustérisation sera évoquée brièvement un peu plus loin dans ce chapitre.

Avant de passer au thème principal de ma thèse qui est l'étude d'états 1 particule-1 trou (1p-1t) de parité négative dans les noyaux sd, nous allons passer rapidement en revue différents aspects de la structure de ces noyaux.

## **1. Etats de parité positive**

Nous examinerons séparément les états de parité positive normaux et intrus, pour la simple raison qu'ils possèdent des propriétés différentes et ne peuvent pas être décrits dans le même espace de valence. Puis nous évoquerons la coexistence d'états normaux et intrus, où dans certains cas ces derniers deviennent les états fondamentaux de noyaux riches en neutrons autour de la fermeture de couche  $N = 20$ .

### **1.1 Etats normaux**

Pour les noyaux de masses  $A = 17-39$ , de nombreux aspects de structure nucléaire sont bien reproduits par le modèle en couches en traitant les trois orbites  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$ ,  $0d_{3/2}$ , comme actives alors que les orbitales  $0s_{1/2}$ ,  $0p_{3/2}$ ,  $0p_{1/2}$  sont remplies formant un cœur inerte de  $^{16}\text{O}$ . Dans un tel espace de valence, les états normaux correspondent au mouvement de  $A-16$  nucléons à l'intérieur de la couche sd, les 16 nucléons du cœur restent inactifs, ce qui implique la configuration 0 particule-0 trou (0p-0t).

Ces états peuvent être décrits en utilisant l'interaction effective bien établie USD (Universal SD shell interaction) [3,4]. Cet hamiltonien est le résultat du "fit" par la méthode

des moindres carrés de 63 éléments de matrice à 2 corps et 3 énergies individuelles, dans le fit ont été inclus 380 niveaux expérimentaux appartenant à 66 noyaux sd. USD a permis de décrire avec grand succès la structure des noyaux de la vallée de stabilité pour lesquels de nombreuses données expérimentales étaient disponibles à cette époque. Des mises à jour récentes de cette interaction ont été réalisées grâce aux développements des moyens informatiques, et surtout aux nouvelles données sur la structure des noyaux loin de la ligne de stabilité, spécialement les riches en neutrons. Les nouvelles interactions USDA et USDB [5] ont ainsi été obtenues après ajustement par moindres carrés en incluant 608 états dans 77 noyaux à travers la couche sd.

L'ensemble de ces trois interactions reproduit remarquablement bien les états normaux des noyaux à travers la couche sd [6]. Les énergies de liaison des noyaux sd sont en très bon accord avec l'expérience, sauf pour quelques noyaux excédentaires en neutrons ou protons au voisinage de couches fermées.

En ce qui concerne les comparaisons expérience–théorie concernant les transitions électromagnétiques "TEM" elles n'ont pas été faites de façon systématique et ce n'est que récemment que certaines propriétés électromagnétiques ont été calculées pour tous les noyaux de  $A = 17-39$  [7] en utilisant USD, USDA et USDB.

### **1.2 Etats déformés**

Dans un noyau sd, nous pouvons trouver éventuellement un état intrus de parité + dont la configuration est en dehors de l'espace de valence sd. Ce type de niveau possède une configuration du type  $2p-2t$ ,  $4p-4t$ , ..., il est généralement déformé et contribue fortement au caractère collectif du noyau. Il se trouve que ces effets sont observés près des noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ . Des bandes rotationnelles ont été observées il y a très longtemps dans  $^{16}\text{O}$  [8,9] et plus récemment dans des noyaux de fin de couche  $^{36}\text{Ar}$  [10] et  $^{40}\text{Ca}$  [11]. Dans ces deux derniers cas, il y a coexistence de bandes sphériques, déformées et superdéformées. Dans  $^{16}\text{O}$ , les têtes de bandes  $0^+$  sont observées à 6.05 MeV pour l'excitation  $4p-4t$  (aussi du type  $^{12}\text{C} + \alpha$ ) et à 16.75 MeV pour l'excitation  $8p-8t$  (aussi du type  $^8\text{Be} + ^8\text{Be}$ ). Dans  $^{36}\text{Ar}$ , le fondamental est un état sphérique et la bande superdéformée est basée sur l'état  $0^+$  à 4.33 MeV de configuration  $(sd)^{16}(pf)^4$ . Les états excités de cette bande sont connectés par des transitions gamma de type E2 fortement collectives. Le spectre du noyau doublement magique  $^{40}\text{Ca}$  est particulièrement intéressant. Il présente à basse énergie 3 états  $0^+$ : le fondamental sphérique de configuration  $(sd)^{24}$ , l'état à 3.35 MeV déformé de

configuration  $(sd)^{20}(pf)^4$  et l'état à 5.21 MeV de configuration  $(sd)^{16}(pf)^8$ . Sur les deux états  $0^+$  déformés sont construites des bandes de rotation collectives.

Dans les noyaux sd, les états déformés et principalement les états  $0^+$  excités apparaissent généralement à des énergies plus basses que celles prédites par USD. Ceci résulte du choix de l'espace de valence. En effet, pour ces états il y a une excitation multiple de p vers sd ou de sd vers pf. Leur description nécessite donc un espace de phase plus grand qui permet de prendre en compte explicitement ces excitations et donc une interaction autre que USD qui serait compatible avec cet espace de phase élargi. Cependant, des descriptions de ces excitations p-t multiples en terme de modèle en couches ont été proposées. Elles ont été ajustées dans un espace de phase réduits pour décrire, par exemple, les états déformés dans  $^{16}\text{O}$  [12,13] et ceux de  $^{40}\text{Ca}$  [14,15] grâce à des sauts np-nt de p vers sd ou de sd vers pf, respectivement. Plus récemment, des calculs de modèle en couches ont été réalisés avec l'interaction SDPF.SM [16] dans l'espace de valence incluant les couches  $1s_{1/2}$ ,  $0d_{3/2}$ ,  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  pour décrire avec succès la coexistence de bandes sphériques, déformées et superdéformées dans  $^{36}\text{Ar}$  [17] et  $^{40}\text{Ca}$  [18]. Il faut cependant préciser ici que dans ce cas, l'interaction a été ajustée pour décrire un phénomène physique bien précis.

### **1.3 Îlot d'inversion et $N = 20$**

L'existence d'états intrus déformés à basse énergie d'excitation qui possèdent des configurations np-nt n'est à vrai dire pas une surprise. Cependant, leur présence en dessous des états fondamentaux sphériques prédits par le modèle en couches dans les noyaux riches en neutrons a été beaucoup discutée. Dans le noyau  $^{11}\text{Be}$  de la couche p, l'état  $1/2^+$  est un cas connu depuis très longtemps, d'état fondamental « déformé » qui se trouve à 300 keV en dessous de l'état excité  $1/2^-$  [19] en contradiction avec le modèle en couches d'après lequel le fondamental est un état  $1/2^-$ .

Des anomalies dans les énergies de liaison des états fondamentaux, les énergies d'excitation et les demi-vies relatives aux calculs  $0p-0t$  de modèle en couches ont été découvertes dans des isotopes riches en neutrons de Ne, Na et Mg [20–25]. Ces isotopes se caractérisent par des forces de transitions électromagnétiques du type E2 fortement collectives [26–30]. Ces phénomènes sont observés dans la région appelée « îlot d'inversion » qui inclut les noyaux avec  $Z = 10 - 12$  et  $N = 20 - 22$ . L'îlot d'inversion présente un exemple spectaculaire de coexistence de formes dans les noyaux. Ces anomalies sont interprétées par l'excitation de paires de neutrons de la couche sd vers pf ce qui est incompatible avec la

persistance de la fermeture de la couche  $N = 20$ . Par conséquent, les isotones  $N = 20$  appartenant à la couche sd  $^{30}\text{Ne}$ ,  $^{31}\text{Na}$  et  $^{32}\text{Mg}$  possèdent des états fondamentaux déformés du type  $2p-2t$  qui correspondent à l'excitation de 2 neutrons de l'orbite  $0d_{3/2}$  à  $0f_{7/2}$ .

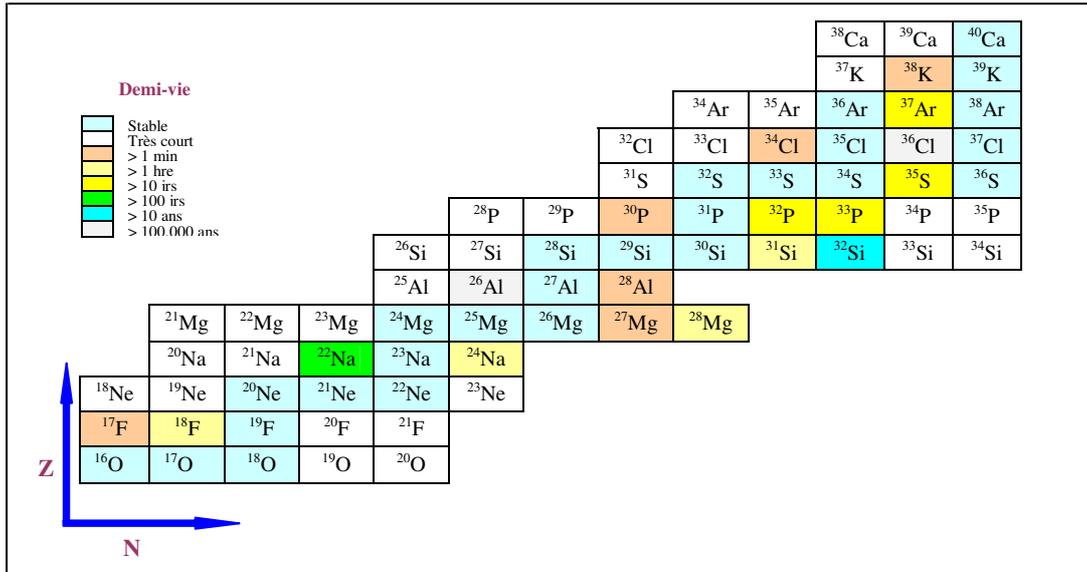
### Explications théoriques

Depuis la découverte de la grande déformation des états fondamentaux autour de  $N = 20$ , des efforts théoriques intenses ont été focalisés sur ce phénomène. Les calculs du type Hartree-Fock déformé [25] ont mis en évidence l'importance de la couche pf. Cette couche pf a été rapidement incorporée à l'espace modèle, non seulement dans les approches H-F [31] mais aussi dans le modèle en couches [32–36] et Monte-Carlo [37–40] ainsi que dans l'approche du champ moyen relativiste [41,42]. L'hypothèse que la grande déformation observée dans l'îlot d'inversion était due aux excitations de neutrons à travers le gap  $N = 20$ , était rapidement confirmée par tous ces calculs.

Concernant l'origine de ce phénomène, il est assez communément admis aujourd'hui que deux facteurs sont susceptibles de jouer un rôle. Le premier est la diminution du gap  $N = 20$  quand on s'approche de la drip-line (ligne d'instabilité) neutron due à un effet de spin-orbite, le second qui est sans doute dominant, est dû aux corrélations résultants des interactions quadrupolaire proton-neutron et de pairing qui sont la conséquence du grand nombre de degrés de liberté de l'état intrus déformé comparé à l'état fondamental. Si le gain en énergie dû à ces corrélations est plus grand que le gap sd-pf, la probabilité du saut de neutrons est plus favorisée que la fermeture de couche.

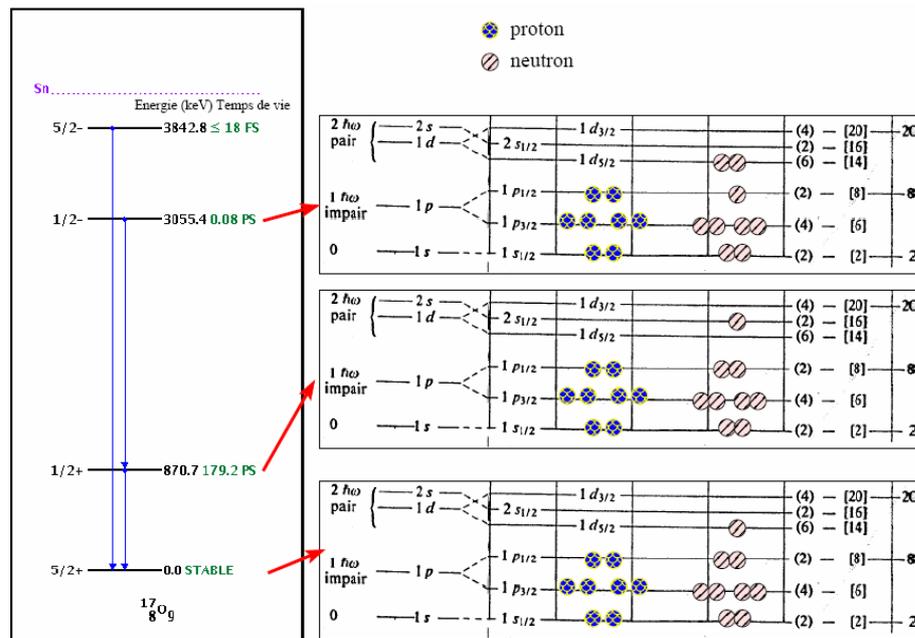
## **2. Etats de parité négative**

Nous présentons sur la Fig1–3 les noyaux sd qui ont des états intrus de parité négative connus. Ces états apparaissent à basse énergie d'excitation comparable à celles des états normaux dans les noyaux situés au voisinage des noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ , c'est-à-dire noyaux de début et de fin de couche sd, respectivement. Pour décrire les états – de configuration  $1p-1t$  en termes de fonctions d'ondes, il faut donc nécessairement introduire dans les calculs du modèle en couches la couche p (excitations p-sd) pour les noyaux de début de couche sd et la couche pf (excitations sd-pf) pour les noyaux de fin de couche.



**Figure 1-3 :** Charte des noyaux sd avec des états intrus de parité négative connus.

Comme exemple de la présence d'états + et - à basse énergie d'excitation, nous montrons sur la Fig1-4 le spectre en énergie de  $^{17}\text{O}$  ainsi que les différentes occupations de couches pour le neutron célibataire donnant lieu aux spins de l'état fondamental et des premiers états excités. Notons que les protons ne sortent pas du cœur et ne contribuent donc pas en première approximation aux excitations à basse énergie. L'état fondamental  $5/2^+$  et l'état excité  $1/2^+$  résultent d'un neutron dans les orbites  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$ , respectivement. Le saut du neutron de l'orbite  $0p_{1/2}$  à l'orbite  $0d_{5/2}$  donne un état intrus  $1/2^-$ .



**Figure 1-4:** Spectre des premiers états de  $^{17}\text{O}$  et leurs configurations.

Les états de parité + sont prédominants à basse énergie d'excitation dans les noyaux sd du milieu de la couche. Ils sont loin des couches fermées et les excitations p–sd ou sd–pf nécessitent des quantités d'énergie importantes. L'apparition des états de parité – de configuration  $p^{-1}sd^{+1}$  ou  $sd^{-1}pf^{+1}$  se fait donc à des énergies d'excitation plus élevées que celles des premiers états +. Dans la littérature, il existe des descriptions en termes de modèle en couches de ces états 1p–1t où les noyaux sd de début ou de fin de couche sont traités séparément dans des espaces de valence p–sd et sd–pf, respectivement. Plusieurs interactions ont été développées et quelques exemples peuvent être cités :

### L'espace de valence p – sd

Des progrès importants dans la compréhension d'états qui ont des nucléons actifs dans plus qu'une couche majeure ont été réalisés, dans les années 60 grâce au calcul particule– trou de Zuker et al. [13] pour  $^{16}\text{O}$  et ses voisins. L'espace de valence utilisé appelé ZBM contient les orbitales  $0p_{1/2}$ ,  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$  avec un cœur de  $^{12}\text{C}$ . Les orbitales  $0p_{3/2}$ ,  $0d_{3/2}$  n'ont pas, du moins en principe, d'influence sur la structure des états de basse énergie d'excitation. Ce calcul permettait des sauts de 1 à 4 particules soit de traiter des excitations de 1p–1t à 4p–4t (l'état  $0^+$  de  $^{16}\text{O}$  à 6.05 MeV). Toujours dans ZBM un calcul similaire [43] a été réalisé pour décrire les états normaux et intrus dans les noyaux  $A = 18 - 20$ . Une autre interaction générée du potentiel OBEP (One Body Exchange Potential) et qui permet de connecter les couches p et sd a été développée par Millener et Kurath [44]. La conjonction de cette dernière avec l'interaction CK très utilisée de Cohen et Kurath pour la couche p [45] et avec USD pour la couche sd, a permis une description correcte des états 2p–2t, 3p–3t ainsi que 1p–1t dans les noyaux  $A = 10 - 22$  [46]. Dans cette référence qui s'est avérée importante pour mon travail de thèse, plusieurs interactions ont été construites en utilisant USD pour sd et différentes interactions p et p–sd. Parmi ces interactions, on peut citer PSDT qui, comme il sera montré plus loin, a servi de point de départ pour construire notre interaction PSDPF.

### L'espace de valence sd – pf

Comme pour les noyaux sd du début de couche, des calculs de modèle en couches ont été effectués pour décrire les états intrus de parité – dans les noyaux de fin de couche.

Citons d'abord les calculs de Hsieh et al. [47] réalisés pour décrire les états 1p–1t de parité – dans les noyaux  $A = 36 - 40$ , le cœur est  $^{40}\text{Ca}$ , le trou est dans les orbitales  $0d_{3/2}$  et  $1s_{1/2}$

et la particule est dans les orbitales  $0f_{7/2}$  et  $1p_{3/2}$ . Une interaction dans un espace plus étendu est celle appelée WBMB de Warburton et al. [48]. Elle est basée sur USD pour sd, sur PFMG [49] pour pf, la partie croisée sd–pf de l’interaction a été obtenue à partir du potentiel de Millener et Kurath [44]. Mentionnons aussi une interaction plus récente appelée SDPF–M qui est construite pour l’espace sd–pf [38] en combinant les interactions USD, Kuo–Brown [50] pour pf et celle de Millener et Kurath pour les couches croisées. Cette interaction a été utilisée dans des calculs de modèle en couches en utilisant des techniques Monte–Carlo [51] pour calculer les intrus dans les isotopes de Ne riches en neutrons.

### **3. Structure en cluster**

Il y a en structure nucléaire de nombreux exemples qui montrent que le regroupement de nucléons en "cluster" au sein du noyau est un phénomène important. Dans ces cas, le premier et aussi le plus simple modèle nucléaire à envisager est celui du modèle de particule  $\alpha$  qui au fond traduit le fait que le noyau  ${}^4\text{He}$  est particulièrement stable ce qui lui permet de conserver son identité à l’intérieur du noyau. Dans les noyaux sd légers, par exemple, des structures en cluster  $\alpha$  ont été observées [52] dans  ${}^{18}\text{O}$  ( ${}^{14}\text{C} + \alpha$ ),  ${}^{20}\text{Ne}$  ( ${}^{16}\text{O} + \alpha$ ) et  ${}^{22}\text{Ne}$  ( ${}^{18}\text{O} + \alpha$ ). Des clusters plus lourds ont été mis en évidence sous forme de résonances moléculaires dans les noyaux  ${}^{24}\text{Mg}$ ,  ${}^{28}\text{Si}$  et  ${}^{32}\text{S}$  [53]. Ces noyaux ont des états excités qui ont des configurations moléculaires du type  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{12}\text{C} + {}^{16}\text{O}$  et  ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ , respectivement (voir les références citées dans [54]). Il est clair que ces états de configurations complexes ne pourront pas être décrits dans le cadre du modèle en couches classique à faible nombre  $\hbar\omega$ . Cependant à l’heure actuelle, des modèles microscopiques du type AMD (Antisymmetrical Molecular Dynamics) ont été proposés pour décrire les états moléculaires [55]. Ce modèle a aussi été utilisé pour la description des états déformés, superdéformés et à cluster– $\alpha$  dans le noyau  ${}^{40}\text{Ca}$  [56].

### **4. De nouveaux nombres magiques**

Il est évident que les nombres magiques proposés par Mayer et Jensen [57,58] restent valides pour la région de masse proche de la ligne de stabilité  $\beta$ . Les noyaux avec nombres magiques sont caractérisés par une forme quasisphérique, des énergies élevées des premiers états excités et aussi des transitions quadrupolaires électriques non accélérées. L’influence de

ces nombres est changée pour les noyaux loins de la ligne de stabilité. Pour les noyaux sd, des nouveaux nombres magiques sont apparus alors que les effets de ceux connus près de  $N = Z$  semblent atténués pour les noyaux exotiques riches en neutrons. Pour illustrer ce propos, nous citons ici le cas des isotopes  $^{20-24}\text{O}$  étudiés via leurs décroissances gamma [59] qui reflètent des gaps  $N = 14$  et  $N = 16$  importants. En fait, des expériences très récentes [60,61] ont permis de démontrer que  $^{24}\text{O}$  est un noyau doublement magique. Ce résultat est en accord avec les prédictions de USD et peut être expliqué par la forte interaction proton–neutron dans le cas de particules occupant des orbitales différentes, ceci a pour effet de diminuer le gap  $N = 20$  et d’augmenter le gap  $N = 16$  [62]. Comme dit précédemment, d’autres exemples d’érosion de gap sont les noyaux de l’îlot d’inversion pour lesquels  $N = 20$  n’est plus vraiment un nombre magique.

Nous avons montré dans ce premier chapitre que les noyaux sd de  $^{16}\text{O}$  au  $^{40}\text{Ca}$  présentent différents aspects de structure intéressants et qui évoluent le long de la couche. Nous avons mentionné un certain nombre de modèles théoriques qui ont été mis en œuvre pour décrire ces noyaux. Nous avons en particulier résumé les différentes interactions proposées pour décrire les états de parité + normaux et intrus. Ces derniers sont souvent très déformés et ont parfois une structure en cluster. Pour les états intrus de parité – qui font l’objet principal de ce travail de thèse, nous avons fait brièvement le point des interactions existantes où les espaces de valence p–sd et sd–pf sont traités séparément. Comme il a été montré, il y a eu plusieurs tentatives pour décrire les états 1p–1t du début ou de la fin de couche. Les noyaux du milieu de couche sont exclus de ces descriptions.

**En conclusion**, il n’existait pas avant ce travail, une description consistante des états intrus 1p–1t à travers toute la couche sd. Nous nous sommes attaqués à cette tâche parce qu’il y a plus de données expérimentales disponibles surtout pour les riches en neutrons, mais aussi parce que nous disposons aujourd’hui de puissants moyens informatiques. Nous avons donc décidé de développer une interaction PSDPF dans l’espace de valence complet p–sd–pf pour décrire les états de parités + et – des noyaux de la couche sd. Avant de présenter les différentes étapes de construction de cette interaction, nous allons d’abord rappeler quelques notions de base du modèle en couches, des différentes méthodes de la détermination d’une interaction effective ainsi que de la procédure du "fit" utilisé dans nos calculs.

## Chapitre 2

### Modèle en couches et structure des noyaux

Le modèle en couches nucléaire a fêté cette année (2009) son soixantième anniversaire. Il a été introduit pour expliquer les régularités des propriétés nucléaires associées aux nombres magiques. Ce modèle a eu des progrès quantitatifs et qualitatifs pour la compréhension de la structure des noyaux le long de la ligne de stabilité en utilisant de nouvelles interactions effectives disponibles qui sont les fruits de plusieurs travaux réalisés pour interpréter et décrire les différents phénomènes et résultats expérimentaux. Pour des raisons techniques seuls les noyaux légers ou proches des noyaux magiques étaient susceptibles d'être étudiés dans des espaces de valence de petite dimension, tels que les noyaux de la couche sd en utilisant l'interaction bien connue USD [4,5].

Il est aujourd'hui possible d'effectuer des calculs dans des espaces de valence de dimension allant jusqu'à  $10^9$  et de diagonaliser des matrices géantes en utilisant la puissance des moyens informatiques actuels. Ceci a permis d'étendre le domaine d'applicabilité vers des espaces plus étendus composés de plus d'une couche majeure.

Nous allons d'abord nous attacher dans ce chapitre à rappeler les éléments de base sur lesquels repose le modèle en couches et illustrer en particulier les propriétés caractéristiques qui en découlent.

### Nombres magiques et structure en couches

Des expériences pionnières sur les énergies de liaison, les abondances isotopiques, les spins et moments magnétiques des états fondamentaux des noyaux, ont révélé l'existence d'une série de noyaux au nombre de protons  $Z$  et/ ou de neutrons  $N$  égal à 2, 8, 20, 28, 50, 82 et 126 appelés « nombres magiques ». Ces noyaux possédant une grande énergie de liaison, ils sont donc très stables et de forme sphérique dans leurs états fondamentaux. Ils ont été nommés « noyaux magiques » ou « doublement magiques » dans le cas où  $Z$  et  $N$  sont tous

les deux nombres magiques. L'énergie de séparation d'un proton ou d'un neutron dans de tels noyaux est plus élevée que celles de leurs voisins, leur premier état excité est aussi plus haut en énergie d'excitation. Toutes ces caractéristiques laissent supposer l'arrangement des nucléons dans des couches. Lorsque la couche est fermée l'excitation des nucléons est plus difficile, tant qu'elle n'est pas remplie, les nucléons sont plus « libres » à l'intérieur de la couche. A partir de telles explications, les nombres magiques signent la fermeture d'une couche, l'énergie supplémentaire à fournir pour exciter ce système provient de la nécessité de franchir le gap en énergie entre deux couches. Le modèle utilisé pour décrire la structure des noyaux en expliquant les nombres magiques est donc le modèle en couches nucléaire par analogie à celui de la physique atomique.

### **1. Notions de base du modèle en couches sphérique : le champ moyen**

On se place, dans un premier temps, dans l'hypothèse d'un modèle de particules indépendantes, où chaque nucléon se meut librement dans un champ moyen créé par les autres nucléons sans aucune interaction entre eux. Afin de reproduire les nombres magiques et la structure en couches des noyaux il faut déterminer ce potentiel moyen qui ne peut être de forme quelconque. En première approximation le champ moyen peut avoir la forme d'un oscillateur harmonique  $V_{OH} = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ . Malheureusement ce potentiel reproduit seulement les premiers nombres magiques 2, 8 et 20, une amélioration a été apportée en introduisant un terme représentant l'effet de bord  $D\ell^2$  ( $D < 0$ ). Il a permis de lever la dégénérescence en  $\ell$  des solutions de l'oscillateur harmonique. Cependant, là encore on ne retrouve pas la bonne séquence de nombres magiques.

En 1949, Goeppert–Mayer [57] (suite à une remarque de Fermi) ainsi que Haxel, Jensen et Suess [58], proposaient l'ajout d'un troisième terme dit « spin-orbite » au potentiel moyen.

En effet, ce couplage spin-orbite permet de lever la dégénérescence d'un niveau étiqueté par  $n$  et  $\ell$  et d'expliquer naturellement tous les nombres magiques de 2 à 126.

L'hamiltonien d'un nucléon individuel «  $i$  » s'écrit alors :

$$h_i = T_i + \frac{1}{2} m\omega^2 r_i^2 + D\ell_i^2 + f(r)\vec{l}_i \cdot \vec{s}_i \quad (2-1)$$

En première approximation, l'hamiltonien du modèle de particules indépendantes peut être écrit comme la somme des hamiltoniens des particules individuelles :

$$H_0 = \sum_i^A h_i \quad (2-2)$$

L'équation de Schrödinger a la forme suivante :  $H_0\Phi = E_0\Phi$  (2-3)

Les fonctions d'ondes propres de l'hamiltonien du nucléon « i » qui en résultent sont de la forme :

$$\phi_{nljm}^i(r, \sigma) = R_{nl}(r) \sum_{m_l, m_s} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_l^{m_l}(\theta, \varphi) \chi_s^{m_s}(\sigma) \quad \text{avec } m = m_l + m_s \quad (2-4)$$

Les énergies correspondantes sont données par :

$$E_{nlj}^i = (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega + D l (l + 1) \hbar^2 + \frac{\hbar^2}{2} \langle f(r) \rangle_{nl} \begin{cases} -(l + 1) & j = l - \frac{1}{2} \\ l & j = l + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (2-5)$$

avec  $\hbar\omega = 41A^{-1/3}$  MeV

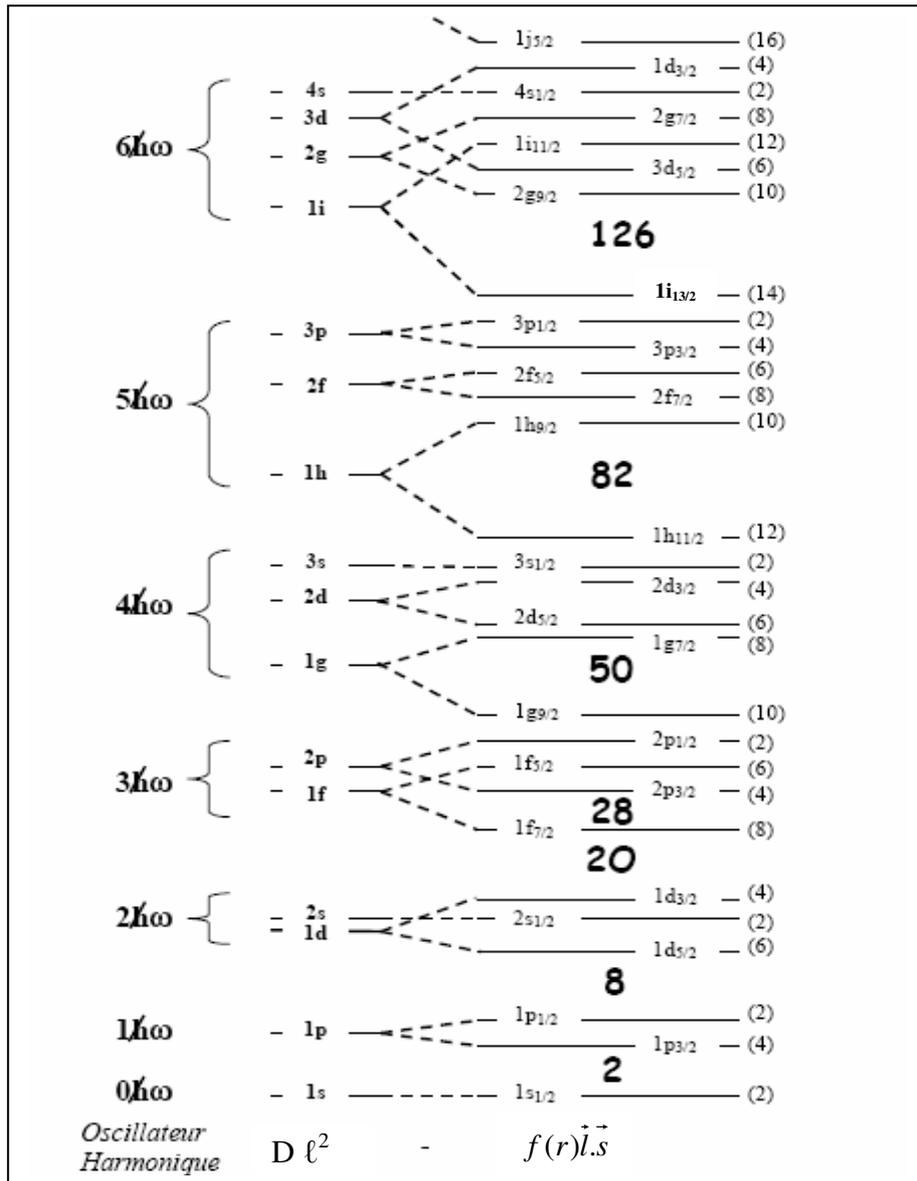
La dégénérescence en  $j = l \pm 1/2$  est levée,  $\langle f(r) \rangle_{nl}$  est négatif, ce qui signifie que les états  $j = l + 1/2$  sont toujours plus bas en énergie que les états  $j = l - 1/2$ .

Les solutions  $\Phi$  de l'éq.(2-3) sont les produits des fonctions d'ondes individuelles  $\phi_{nljm}^i$  de chaque nucléon ayant une énergie  $E_{nlj}^i$ . Puisque les nucléons sont des fermions, les solutions  $\Phi$  doivent être antisymétriques selon le principe d'exclusion de Pauli, la fonction d'onde  $\Phi$  est donc un déterminant de Slater.

La solution de plus basse énergie correspond à l'état fondamental du noyau, les états excités sont obtenus à partir des autres combinaisons possibles d'occupations des orbitales.

Le spectre de niveaux individuels du champ moyen est représenté sur la Fig2-1. A partir de la gauche, la structure de l'oscillateur harmonique est illustrée, puis l'effet dû au terme en  $\ell^2$  et, à droite, sont présentés les niveaux individuels étiquetés par  $n$ ,  $\ell$  et  $j$  en tenant compte de l'interaction spin-orbite. Les nombres magiques prévus sont également indiqués. Le remplissage de ces niveaux se fait au fur et à mesure en commençant par les orbitales les plus basses en énergie.

Les nombres quantiques indiqués sur cette figure sont définis comme suit :  $N = 2(n' - 1) + \ell$  est le nombre quantique principal des couches majeures  $N\hbar\omega$  de l'oscillateur harmonique, avec  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$ , ces couches sont appelées s, p, sd, pf, ..., respectivement,  $n'$  : est le nombre quantique radial qui représente les sous-couches  $n'\ell$  (ou éventuellement  $n'\ell_j$ ) dans une couche majeure. Par exemple, la couche  $3\hbar\omega$  contient deux sous-couches 1f et 2p. Dans le reste de ce document, nous utiliserons le nombre  $n = n' - 1$  au lieu de  $n'$  et donc la notation 0f et 1p comme sous-couches de la couche  $3\hbar\omega$ .



**Figure 2–1:** Niveaux nucléaires schématiques du champ moyen avec un terme spin–orbite.

## 2. Au-delà du champ moyen

Le modèle de particules indépendantes (champ moyen) est applicable seulement pour des noyaux sphériques (couche fermée ou proche d’une couche fermée).

Considérons le cas d’un noyau à  $A$  nucléons ( $Z$  protons et  $N$  neutrons) en interaction, nous supposons que ces nucléons interagissent deux à deux. Le champ moyen sphérique fournit une vision globale d’ordre zéro de la structure de ce noyau. La description correcte d’un tel noyau nécessite de prendre en compte l’interaction à 2 corps. L’hamiltonien de ce noyau se met alors sous la forme :

$$H = \sum_{i=1}^A (T_i + U_i) + \left( \sum_{i>j}^A v_{ij} - \sum_{i=1}^A U_i \right) = H_0 + H_r = \sum_{i=1}^A h_i + H_r \quad (2-6)$$

$H_0$  décrit le mouvement indépendant des nucléons dans un potentiel à 1 corps  $U$ .

$h_i$  désigne l'hamiltonien individuel du nucléon  $i$ .

$H_r$  représente l'interaction résiduelle à 2 corps qui est considérée comme une perturbation de l'hamiltonien  $H_0$  par un choix adéquat du champ moyen  $U$ . La détermination de ce dernier se fait généralement par deux méthodes : la première est celle du modèle des particules indépendantes mentionné précédemment et qui est utilisé dans nos calculs, la deuxième est la méthode de Hartree–Fock qui n'a pas été appliquée dans notre travail.

L'équation de Schrödinger de ce système s'écrit :

$$H\Psi_\alpha = \left\{ \sum_{i=1}^A (T_i + U_i) + \left( \sum_{i>j}^A v_{ij} - \sum_{i=1}^A U_i \right) \right\} \Psi_\alpha = E\Psi_\alpha \quad (2-7)$$

où  $\alpha$  désigne tous les nombres quantiques.

Les fonctions d'ondes propres  $\Psi_\alpha$  sont représentées par les déterminants de Slater  $\Phi$  de  $H_0$ , à partir desquels sera diagonalisée la matrice de l'interaction résiduelle  $H_r$  ( $\langle \Phi | H_r | \Phi \rangle$ ).

Cependant, la taille de la matrice augmente très rapidement avec le nombre de nucléons dans l'espace complet d'Hilbert (l'espace des orbitales générées par le champ moyen montré sur la Fig2–1) si bien qu'il devient impossible de procéder à la diagonalisation. Pour pallier à ceci, nous choisissons un sous-ensemble de configurations guidé par des considérations physiques. L'espace d'Hilbert se divise en trois parties :

- ✓ *Un cœur inerte* qui est composé de couches toujours occupées, en général un noyau magique ayant  $Z_c$  protons et  $N_c$  neutrons.
- ✓ *Un espace de valence* qui contient le reste de nucléons actifs ( $z = Z - Z_c$ ) et ( $n = N - N_c$ ) qui interagissent via l'interaction  $H_r$ .
- ✓ *Un espace externe* qui est formé des orbitales toujours inoccupées.

L'approximation de considérer les nucléons qui occupent les orbitales du cœur comme "*inactifs*" est justifiée par l'existence d'un grand écart en énergie séparant ces orbites de celles immédiatement supérieures. Par exemple, l'écart en énergie entre les sous-couches  $0p_{1/2}$  et  $0d_{5/2}$  est de 11.5 MeV.

### 3. Les ingrédients du modèle en couches

Tout calcul de modèle en couches nécessite la mise en œuvre des trois ingrédients suivants :

1. la définition d'un espace de valence (cœur inerte, couches actives),
2. la dérivation d'une interaction effective compatible avec l'espace de valence,
3. un code de calcul pour construire et diagonaliser les hamiltoniens.

#### ▪ Choix de l'espace de valence

L'espace de valence appelé aussi *espace modèle* doit contenir les degrés de liberté nécessaires à la description de certains états et de leurs propriétés dans un contexte donné. Certains espaces peuvent être adéquats pour décrire certains états et pas pour d'autres dans le même noyau. Par exemple, les états de parité + de  $^{17}\text{O}$  sont bien décrits dans l'espace sd mais les états - (états  $1p-1t$ ) ne peuvent pas être décrits dans un tel espace, leur description nécessite un espace plus large formé des couches p, sd et pf.

Examinons quelques cas typiques des espaces modèles :

- *La couche p* est l'espace formé des deux orbitales  $0p_{3/2}$  et  $0p_{1/2}$ , dans lequel peuvent être décrites les propriétés des noyaux avec  $2 < N, Z < 8$ , le cœur inerte est le  $^4\text{He}$ .
- *La couche sd* est l'espace composé des trois orbitales  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$ , seuls les états de parité positive des noyaux avec  $8 < N, Z < 20$  sont décrits dans cet espace de valence, le cœur inerte est le  $^{16}\text{O}$ .
- *La couche pf* est l'espace contenant les quatre sous-couches  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  qui est adéquat pour les noyaux avec  $20 < N, Z < 40$ , le cœur inerte est le  $^{40}\text{Ca}$ .
- $r_{3g}$  est l'espace formé de  $r_3 \equiv 1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  et  $g \equiv 0g_{9/2}$ ,  $r_p$  est l'ensemble des orbites  $n\ell j$  avec  $p = 2n + \ell$  à l'exception de l'orbite  $j_{\max} = (2p + 1)/2$ , dans cet espace sont décrits les noyaux avec  $28 < N, Z < 50$ , le cœur inerte est le  $^{56}\text{Ni}$ .
- $r_{4h}$  est l'espace formé de  $0g_{7/2}$ ,  $1d_{5/2}$ ,  $1d_{3/2}$ ,  $2s_{1/2}$  et  $0h_{11/2}$  pour étudier les noyaux avec  $50 < N, Z < 82$ , le cœur inerte est le  $^{100}\text{Sn}$ .

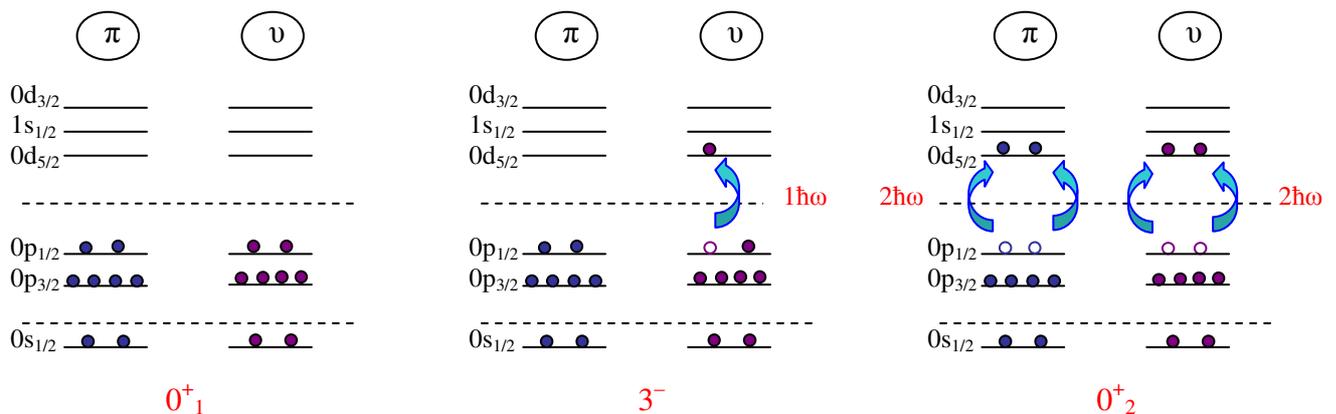
Tous ces espaces de valence sont destinés à l'étude des états normaux en parité, la description des états intrus de parité opposée qui résultent des excitations entre deux couches

majeures ou plus, requiert l'introduction de ces couches majeures. Par exemple, pour décrire les états intrus de parité négative dans la couche sd il faut étendre l'espace de sd vers l'espace p-sd-pf en permettant un saut de particule.

Il est évident que pour chaque espace de valence, seul l'état fondamental du noyau magique formant le cœur inerte est décrit. La description des états excités de ce noyau appelés "états intrus" nécessite un autre espace modèle contenant des orbites de deux couches majeures. Par exemple, les premiers états excités de  $^{16}\text{O}$  peuvent être décrits dans l'espace modèle "mixte"  $[0p_{1/2}, 0d_{5/2}, 1s_{1/2}]$  avec un cœur de  $^{12}\text{C}$  appelé "ZBM" [13].

En général, dans un espace mixte tel que p-sd et sd-pf, la partition pour laquelle le nombre de nucléons de valence dans la couche majeure la plus haute a la plus petite valeur possible permise par le principe de Pauli, est appelée "configuration  $0\hbar\omega$ " [63]. Les configurations  $N\hbar\omega$  sont les états excités dans la base de l'oscillateur dans laquelle  $N \hbar\omega$  unités d'énergie d'excitation sont ajoutées à la configuration de l'état le plus bas  $0\hbar\omega$ . Les configurations  $N, N + 2, \text{etc.}$  donnent des états de même parité.

Nous illustrons sur la Fig2-2 la schématique des premiers niveaux de  $^{16}\text{O}$  [2]. D'après Zuker et al. [13], l'état fondamental  $0^+_1$  est sphérique, il correspond au remplissage des couches d'oscillateur  $0s$  et  $0p$ , il est appelé état "  $0\hbar\omega$  ou  $0p-0t$  ". L'état  $3^-$  résultant de l'excitation d'un nucléon (*proton ou neutron*) de la couche majeure p à la couche majeure sd (excitation  $1p-1t$ ) est appelé "état  $1\hbar\omega$ ". L'état  $0^+_2$  qui découle de l'excitation de 4 nucléons de la couche p vers sd (excitation  $4p-4t$ ) est un état "déformé" appelé "état  $4\hbar\omega$ ".



**Figure 2-2:** Schématique des premiers niveaux (fondamental et excités) de  $^{16}\text{O}$ .

L'état  $1\hbar\omega$  "3-" est obtenu par l'excitation d'un nucléon de p vers sd, ce type d'excitation requiert l'introduction des deux couches majeures p et sd dans l'espace de valence appelé "espace  $1\hbar\omega$ ", par exemple l'espace ZBM.

Loin de la stabilité ou dans les noyaux lourds, les espaces modèles proton et neutron ne comprennent pas les mêmes orbitales. Comme exemple, nous citerons le cas des isotopes des noyaux avec  $Z \leq 20$  et riches en neutrons avec  $N > 20$ , l'espace de valence  $0\hbar\omega$  qui sera choisi comprendra la couche sd pour les protons et la couche pf pour les neutrons [64].

Une autre approche est le modèle en couches sans cœur inerte appelé dans la littérature "*ab-initio no-core shell model*" (NCSM) [65]. Cet espace de valence inclut tous les états dans la base de l'oscillateur harmonique jusqu'à une excitation  $N\hbar\omega$ . Un des problèmes majeurs du modèle sans cœur est la convergence des résultats avec la taille de l'espace de valence. Pour cette raison, les études ont été réalisées seulement pour des noyaux légers (noyaux de la couche p). Nous pouvons traiter des excitations jusqu'à  $14\hbar\omega$  pour le  ${}^6\text{Li}$ ,  $10\hbar\omega$  pour le  ${}^{10}\text{C}$  et au moins  $8\hbar\omega$  pour tous les noyaux de la couche p. Dans le cas du  ${}^{10}\text{C}$ , la dimension de matrice dans le schéma-m excède 800 millions.

La taille de l'espace de valence augmente rapidement avec le nombre de nucléons actifs et celui de couches. Le nombre des déterminants de Slater qui peuvent être construits dans un espace modèle donné est le produit du nombre de combinaisons obtenu à partir de la dégénérescence d'une couche majeure et du nombre de nucléons actifs, c'est-à-dire :

$$C_{D_p}^z \cdot C_{D_n}^n = \binom{D_p}{z} \cdot \binom{D_n}{n}$$

$D_p, D_n$  sont les dégénérescences des espaces de valence proton et neutron.

$z, n$  sont les nombres des protons et neutrons de valence.

Le nombre des déterminants de Slater des noyaux pour les différentes couches majeures p, sd

et pf sont:  $\binom{6}{z} \cdot \binom{6}{n}$ ,  $\binom{12}{z} \cdot \binom{12}{n}$  et  $\binom{20}{z} \cdot \binom{20}{n}$ , respectivement.

Par exemple, Le nombre des déterminants de Slater pour les noyaux  ${}^{12}\text{C}$ ,  ${}^{28}\text{Si}$  et  ${}^{56}\text{Ni}$  est de 225, 853776 et 15868440900, respectivement.

Nous remarquons que lorsque le nombre de sous-couches augmente, la dimension de l'espace de valence devient vite très grande. Ceci conduit à des matrices de tailles considérables qui demandent des temps de calcul trop importants pour les ordinateurs actuels.

Il est clair que la situation devient encore plus critique en terme de dimensions de matrices si nous considérons des excitations de nucléons entre deux couches majeures ou plus.

- Interaction effective

Pratiquement, tout calcul de modèle en couches utilise une interaction à 2 corps "résiduelle" ou "effective" entre les nucléons de valence, car l'interaction nucléon–nucléon libre ne peut pas être utilisée directement à cause de la forte répulsion à courte portée. Nous avons deux types d'interactions effectives, l'interaction effective réaliste et l'interaction effective phénoménologique. Nous allons détailler dans le chapitre suivant les différentes méthodes pour déterminer de telles interactions en donnant des exemples d'interactions obtenues pour différents espaces de valence.

- Codes de modèle en couches

Pour un espace de valence donné, le choix optimal de la base dans laquelle sera diagonalisé l'hamiltonien est conditionné par la physique d'un problème particulier à résoudre [66]. Différentes bases peuvent être favorisées, ceci dépend des états ou des propriétés que nous souhaitons décrire, ainsi que du type de noyau, sphérique ou déformé, par exemple.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour traiter le calcul à plusieurs particules [16,63,66], il y a deux possibilités principales de base : celle du schéma–M [67] et celle du schéma–J (ou JT) [68]. La dimension de la base du schéma–M est plus grande que celle de la base du schéma–J. Par exemple, dans le cas du noyau  $^{28}\text{Si}$  contenant 12 nucléons dans l'espace de valence sd, la dimension de la matrice de l'état  $4^+$  pour  $M = 0$  est de 56937 et celle pour  $J = 0$  est de 15089. Bien que les matrices soient beaucoup plus grandes dans le schéma–M, le calcul des éléments de matrice y est beaucoup plus facile que dans le schéma–J.

Des codes de calcul utilisant ces schémas ont été développés. A notre connaissance, les codes en schéma–M sont : GLASGOW [67], ANTOINE [69], VECSSSE [70], MSHELL [71] et REDSTICK [72]. Les versions des codes en schéma–J sont : RITSSCHIL [73], OXBASH [74], DUPSM [75] et NATHAN [69,76].

Après avoir choisi la base et le code de calcul, nous pouvons passer à la construction de la matrice de l'hamiltonien en calculant tous ses éléments. L'étape finale dans chaque processus est la diagonalisation de la matrice. Les méthodes de diagonalisation de matrice ont

évolué à partir de la méthode de Householder pour des dimensions allant jusqu'à  $\sim 10^3$  utilisée dans les années soixante pour l'espace modèle p [45,77] à la méthode de Lanczos [78, 79] qui est la méthode standard utilisée actuellement dans ces codes de calcul.

Le principe de l'algorithme de Lanczos [16,66] consiste à construire une base orthonormée dans laquelle l'hamiltonien H est tridiagonal. Lorsque le vecteur initial  $|1\rangle$  appelé aussi *état pivot* est choisi, nous calculons  $H|1\rangle$  comme suit :

$$H|1\rangle = |\Psi_1\rangle = E_{11}|1\rangle + E_{12}|2\rangle \text{ avec } \langle 1|2\rangle = 0,$$

$$E_{11} = \langle 1|H|1\rangle = \langle 1|\Psi_1\rangle, E_{12} \text{ et } |2\rangle \text{ sont obtenus après la normalisation de } E_{12}|2\rangle = |\Psi_1\rangle - E_{11}|1\rangle.$$

A la seconde itération, nous obtenons :

$$H|2\rangle = |\Psi_2\rangle = E_{21}|1\rangle + E_{22}|2\rangle + E_{23}|3\rangle \text{ avec } \langle 1|3\rangle = \langle 2|3\rangle = 0.$$

L'hermiticité de H implique  $E_{21} = E_{12}$ .

$$E_{22} = \langle 2|H|2\rangle = \langle 2|\Psi_2\rangle \text{ et } E_{23}|3\rangle = |\Psi_2\rangle - E_{12}|1\rangle - E_{22}|2\rangle.$$

Au rang  $N$ , nous avons la relation :

$$H|N\rangle = |\Psi_N\rangle = E_{NN-1}|N-1\rangle + E_{NN}|N\rangle + E_{NN+1}|N+1\rangle \text{ avec } \langle N-1|N+1\rangle = \langle N|N+1\rangle = 0,$$

$$E_{NN} = \langle N|H|N\rangle = \langle N|\Psi_N\rangle, E_{NN-1} = E_{N-1N} \text{ et } E_{NN+1}|N+1\rangle = |\Psi_N\rangle - E_{NN-1}|N-1\rangle - E_{NN}|N\rangle.$$

Nous remarquons donc que nous avons construit une matrice tridiagonale, c'est-à-dire que

$$\langle I|H|J\rangle = \langle J|H|I\rangle = 0 \text{ si } |I-J| > 1$$

$$\begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{32} & E_{33} & E_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{43} & E_{44} & E_{45} & 0 \\ \cdot & & & & & \end{pmatrix}$$

Le processus itératif se poursuit jusqu'à ce que les valeurs propres aient convergé.

Nous avons présenté brièvement dans ce chapitre les notions de base du modèle en couches. Nous avons également montré la dépendance importante entre le choix adéquat de l'espace de valence et les codes de calcul qui dépendent fortement de la puissance des moyens informatiques. Le développement de la technologie d'informatique au cours de ces dernières années a rendu possible le traitement d'espaces dont les dimensions dans le schéma-M excèdent un milliard [80].

En adaptant les codes à ces nouvelles facilités, il est maintenant techniquement possible de décrire la structure nucléaire impliquant des espaces de valence plus larges, tels que trois couches majeures, nécessaires pour la description des états intrus et des noyaux exotiques dans la couche sd. À ce point nous sommes donc confrontés maintenant au problème de déterminer et vérifier les interactions effectives pour chaque nouvel espace de valence.

Nous allons discuter dans le prochain chapitre les différentes méthodes de la construction d'une interaction effective, après avoir passé en revue les interactions déjà établies.

## Chapitre 3

### Interaction effective

Tout calcul du modèle en couches nécessite les trois ingrédients suivants : la définition d'un espace de valence adéquat qui permet d'étudier le contexte physique souhaité, par exemple, l'espace  $p$ - $sd$ - $pf$  pour décrire les états  $1h\omega$  dans les noyaux de la couche  $sd$ , la détermination d'une interaction effective appropriée compatible avec le choix de l'espace de valence et enfin un code pour réaliser les calculs, tel que le code Antoine ou Nathan.

Nous avons montré dans le chapitre précédent comment choisir un espace de valence pour une région de noyaux donnée et pour un certain contexte de physique. Nous avons également cité des exemples des codes de calcul de modèle en couches disponibles à ce jour. Différentes méthodes ont été proposées pour le développement d'une interaction effective appropriée à un espace de valence, telle que la procédure d'ajustement par moindres carrés.

Nous allons détailler dans le présent chapitre le théorème de séparation de l'hamiltonien nucléaire ainsi que la procédure du fit pour la détermination d'une interaction effective. Avant de discuter ces points, nous allons présenter un état de l'art des interactions effectives.

#### **1. Interactions effectives : état de l'art**

L'interaction effective peut être déterminée en utilisant une des deux méthodes suivantes :

- La première consiste à construire une interaction dite "effective réaliste" à partir de potentiels réalistes tirés des résultats d'expériences de diffusion nucléon-nucléon, nous pouvons citer comme exemples, la "matrice-G renormalisée" de Kuo-Brown basée sur le potentiel de Hamada et Johnston [81], et celle basée sur des potentiels plus récents tel le potentiel CD-Bonn [82]. Néanmoins, ce type d'interaction ne reproduit pas la fermeture de couches, comparée à l'expérience la structure des

noyaux prédite se dégrade au fur et à mesure que le nombre de particules (trous) augmente [66].

- La seconde alternative est de choisir un hamiltonien de départ comme la matrice-G renormalisée et de considérer les énergies individuelles et les éléments de matrice à 2 corps comme des paramètres et de les "fitter" directement aux données expérimentales. Cette interaction appelée aussi "effective phénoménologique" permet généralement de reproduire la structure des noyaux d'une région de masse donnée. Cependant, cette approche empirique est conditionnée par la nécessité de disposer d'un nombre de données expérimentales bien supérieur au nombre de paramètres à fitter. L'exemple le plus connu et qui donne aussi les meilleurs résultats est l'interaction USD qui décrit bien la structure des états de parité positive des noyaux de la couche sd. Nous allons détailler la méthode du "fit" dans le présent chapitre.

Cette procédure empirique a été utilisée pour déterminer notre interaction PSDPF dont le but est de décrire les états de parité négative des noyaux de la couche sd.

Plusieurs interactions de type  $0h\omega$  ont été développées dans les différentes régions de masse :

### L'espace de valence p

Le travail de fit de Cohen et Kurath [45,77] est celui qui est généralement retenu pour les noyaux p. Des interactions effectives pour cette couche p plus récentes sont discutées dans la Ref [83]. D'autres interactions ont été développées par Warburton et Brown [46] telles que WBP et WBPT pour les noyaux p de masses  $A \geq 10$ .

### L'espace de valence sd

La matrice-G renormalisée pour la couche sd a été développée au milieu des années soixante par Kuo et Brown [81,84], les résultats de cette interaction sont en accord raisonnable avec l'expérience pour les noyaux  $A = 18$  et  $38$  de début et de fin couche possédant 2 nucléons et 2 trous, respectivement. L'accord avec les spectres en énergie expérimentaux se dégrade rapidement lorsque le nombre de particules (trous) augmente. L'interaction USD est celle qui a eu le plus de réussite dans la description des noyaux de la couche sd. Des versions plus récentes de cette interaction appelées USDA et USDB ont été publiées récemment [5]. Nous rappelons que ces interactions ne sont utilisables que pour

décrire les états normaux de parité positive des noyaux sd, aucune interaction n'a été proposée pour la description des états de parité négative de ces noyaux à travers toute la couche sd.

### L'espace de valence pf

La matrice-G renormalisée de Kuo-Brown [50] est le point de départ traditionnel pour les éléments de matrice de la couche pf, mais le spectre en énergie du  $^{48}\text{Ca}$  [63] est en désaccord avec l'expérience. Cette interaction a été ensuite améliorée en ajoutant l'interaction monopolaire (MON) entre l'orbitale  $0f_{7/2}$  et les autres orbitales pf [85]. L'interaction KB3 a été développée en utilisant l'approche G+MON [86], elle a été ensuite utilisée avec succès dans des calculs systématiques [87,88]. Des améliorations ont été apportées à cette interaction et la dernière version s'appelle KB3G [89].

D'autres interactions  $0\hbar\omega$  ont été déterminées pour l'espace modèle sd-pf incluant les orbitales :  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$ ,  $0d_{3/2}$ ,  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  telles que l'interaction WBMB [48] et l'interaction SDPF-NR [90], la version la plus récente de cette interaction est SDPF-U [91]. Au-delà d'une interaction  $0\hbar\omega$ , un espace plus large p-sd-pf-sdg doit être considéré pour permettre les sauts de nucléons et donc une interaction compatible doit être déterminée. Pour des raisons évidentes de tailles de matrice une telle interaction n'a pas été développée. Par contre, d'autres travaux ont été réalisés pour faire des calculs  $0\hbar\omega$  et  $2\hbar\omega$  dans un ensemble réduit d'orbitales sd-pf [33,92-95].

Pour décrire les états + et - dans les noyaux proche de  $^{16}\text{O}$  deux interactions ont été développées par Warburton et Brown [46] avec optimisation de la partie p-sd dans l'espace de valence complet s-p-sd-pf.

Pour finir cette partie "Interaction" deux remarques s'imposent :

- La construction des interactions de type p-sd, sd-pf, s-p-sd-pf, p-sd-pf-sdg ..., nécessite l'utilisation des éléments de matrice à 2 corps pour chaque couche majeure et pour les couches croisées.
- Le nombre des éléments de matrice à 2 corps est très grand dans ces espaces modèles ce qui complique grandement leur détermination dans les procédures du fit aux données expérimentales reportées dans la littérature.

## 2. Structure de l'hamiltonien et théorème de séparation

L'hamiltonien nucléaire à A corps est séparé en deux parties (voir eq.(2-6)) : l'hamiltonien "*non-perturbé*"  $H_0$  et l'hamiltonien "*résiduel*"  $H_r$ , avec  $H = H_0 + H_r$ .

L'approche traditionnelle consiste à choisir  $H_0$  comme un champ à un corps. Puisque  $H_r$  contient des composantes à deux et trois corps, la séparation de  $H$  en  $H_0$  et  $H_r$  n'est mathématiquement pas exacte [16]. Pour mieux appréhender ce problème, il a été proposé [96] de séparer  $H$  en deux parties ; un hamiltonien monopolaire  $H_m$  et un hamiltonien multipolaire  $H_M$ ,

$$H = H_m + H_M \quad (3-1)$$

$H_m$  contient tous les termes responsables des propriétés du champ moyen sphérique, ceci peut être traduit sous la forme :

$$\langle CS \pm 1 | H | CS \pm 1 \rangle = \langle CS \pm 1 | H_m | CS \pm 1 \rangle \quad (3-2)$$

où  $|CS \pm 1\rangle$  signifie couche fermée (CS : Closed Shell) plus ou moins un nucléon.

$H_M$  est défini comme l'hamiltonien total  $H$  auquel nous retranchons tous les termes monopolaires importants  $H_m$ . Il comporte les termes de "*pairing*", quadrupolaires, octupolaires et hexadécapolaires, ...

### 2.1 L'hamiltonien monopolaire

L'hamiltonien monopolaire  $H_m$  représente la partie de l'interaction associée à des termes linéaires et quadratiques en nombre de particules  $n$  dans l'espace de valence. La forme explicite de  $H_m$  est donnée par :

$$H_m = \sum_i n_i \varepsilon_i + \sum_{i \leq j} \left[ \frac{n_i (n_j - \delta_{ij})}{1 + \delta_{ij}} a_{ij} + \frac{1}{2} b_{ij} \left( T_i \cdot T_j - \frac{3n_i}{4} \delta_{ij} \right) \right] \quad (3-3)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont définis en fonction des centroïdes (monopoles) avec :

$$V_{ij}^T = \frac{\sum_J V_{ij}^{JT} [J]}{\sum_J [J]} ; V_{ij}^{JT} = \langle ij | V | ij \rangle_{JT} \text{ et } [J] = 2J + 1 \quad (3-4)$$

Les coefficients  $a$  et  $b$  sont alors donnés par :

$a_{ij} = \frac{1}{2}(3V_{ij}^1 - V_{ij}^0)$  et  $b_{ij} = V_{ij}^1 - V_{ij}^0$ , les sommes se font sur les valeurs i et j permises par Pauli.

Nous pouvons maintenant revenir à l'exemple du noyau  $^{16}\text{O}$  (Fig2-2) avec un cœur de  $^{12}\text{C}$ , l'énergie monopolaire de l'état fondamental  $0^+_{1}$  (couche  $p_{3/2}$  fermée) est donnée par :

$$E_{0^+_{1}} = 4\epsilon_p + \frac{4 \times 3}{2} V_{pp} = 4\epsilon_p + 6V_{pp} \quad (3-5)$$

L'énergie monopolaire de l'état excité déformé  $0^+_{2}$  de type 4p-4t est donnée par :

$$E_{0^+_{2}} = 0\epsilon_p + 4\epsilon_{sd} + 0V_{pp} + 0V_{psd} + 6V_{sdsd} \quad (3-6)$$

L'énergie d'excitation de cet état correspond à la différence entre les énergies données dans les équations (3-6) et (3-5) :

$$E_{0^+_{2}}^{ex} = 4(\epsilon_{sd} - \epsilon_p) + 6(V_{sdsd} - V_{pp}) \quad (3-7)$$

L'énergie monopolaire du premier état excité de parité négative  $3^-$  de type 1p-1t s'écrit :

$$E_{3^-} = 3\epsilon_p + \epsilon_{sd} + 3V_{pp} + 3V_{psd} \quad (3-8)$$

Son énergie d'excitation correspond à la différence entre les énergies données dans les équations (3-8) et (3-5) :

$$E_{3^-}^{ex} = \epsilon_{sd} - \epsilon_p + 3(V_{psd} - V_{pp}) \quad (3-9)$$

Il est simple, à partir de la définition de  $H_m$ , de comprendre les "catastrophes" que peut engendrer une mauvaise détermination d'un élément de matrice (un centroïde) de l'interaction effective qui est multiplié par les opérateurs nombre  $n_i n_j$ . Par exemple, une erreur de 100 keV sur  $V_{psd}$  dans le cas de  $^{16}\text{O}$  peut en effet modifier radicalement la spectroscopie obtenue pour ce noyau, dans ce cas l'énergie d'excitation du  $3^-$  est augmentée de 300 keV. Imaginons maintenant un noyau avec  $A = 28$ , possédant "16" nucléons de valence, cette erreur augmente les énergies d'excitation des états 1p-1t de ce dernier de 900 keV.

En conclusion, pour construire une interaction effective appropriée pour une région de masse donnée, il faut être particulièrement attentif aux propriétés monopolaires de celle-ci.

### Remarque

Lorsque nous faisons varier les centroïdes  $V_{ij}^1$  et  $V_{ij}^0$  de la même quantité, ces derniers s'appellent "grands monopoles".

## 2.2 L'hamiltonien multipolaire

L'hamiltonien multipolaire  $H_M$  peut s'écrire en deux représentations standard de type soit particule–particule (p-p) soit particule–trou (p-t) :

$$H_M = \sum_{i \leq j, k \leq l, \Gamma} W_{ijkl}^\Gamma Z_{ij\Gamma}^+ \cdot Z_{kl\Gamma} \quad (3-10)$$

$$H_M = \sum_{ijkl\Gamma} [\gamma]^{1/2} \frac{(1 + \delta_{ij})^{1/2} (1 + \delta_{kl})^{1/2}}{4} \omega_{ijkl}^\gamma (S_{ik}^\gamma \cdot S_{jl}^\gamma)^0 \quad (3-11)$$

où  $Z_\Gamma^+$  ( $Z_\Gamma$ ) est le produit couplé des deux opérateurs création (annihilation) et  $S^\gamma$  est le produit couplé d'un opérateur création et d'un opérateur annihilation.

Les éléments de matrice  $W$  et  $\omega$  sont reliés par la transformation de Racah :

$$W_{ijkl}^\Gamma = \sum_\gamma (-1)^{j+k-\gamma-\Gamma} \left\{ \begin{matrix} i & j & \Gamma \\ l & k & \gamma \end{matrix} \right\} \omega_{ijkl}^\gamma [\gamma] \quad (3-12)$$

$$\omega_{ijkl}^\gamma = \sum_\Gamma (-1)^{j+k-\gamma-\Gamma} \left\{ \begin{matrix} i & j & \Gamma \\ l & k & \gamma \end{matrix} \right\} W_{ijkl}^\Gamma [\Gamma] \quad (3-13)$$

Les termes qui composent l'hamiltonien multipolaire sont à peu près égaux pour les différentes interactions effectives utilisées. Comme exemple, nous avons regroupé dans le Tableau (3-1), les principales contributions multipolaires dans le cas de trois types d'interactions effectives utilisées dans l'espace modèle pf [97].

| Interaction | particule–particule |       | particule–trou |       |       |
|-------------|---------------------|-------|----------------|-------|-------|
|             | 01                  | 10    | 20             | 40    | 11    |
| JT          |                     |       |                |       |       |
| KB3         | -4.75               | -4.46 | -2.79          | -1.39 | +2.46 |
| FPD6        | -5.06               | -5.08 | -3.11          | -1.67 | +3.17 |
| GOGNY       | -4.07               | -5.74 | -3.23          | -1.77 | +2.46 |

**Tableau 3-1:** Contributions multipolaires principales dans le cas d'une interaction réaliste (KB3), d'une interaction phénoménologique fittée (FPD6) [98] et d'une interaction effective à partir de calculs du type champ moyen (GOGNY) [99].

Les valeurs reportées sont à peu près les mêmes malgré les origines différentes des trois interactions utilisées ce qui démontre le caractère "universel" de l'hamiltonien multipolaire.

Nous pouvons donc conclure que la construction d'une interaction effective requiert avant tout l'ajustement des termes monopolaires, des modifications mineures peuvent ensuite être apportées aux termes multipolaires pour améliorer l'accord expérience–théorie.

### 3. Les approches empiriques : procédure du fit

Comme il a été dit précédemment, différentes approches sont possibles pour déterminer l'interaction effective, et en particulier l'ensemble des éléments de matrice du type :  $\langle ij|V|kl \rangle_{JT}$

Historiquement, la première approche a été la méthode empirique dans laquelle les éléments de matrice sont fittés à un ensemble de données expérimentales en utilisant la méthode des moindres carrés [5,63,97,100].

Ce qui est commun à la détermination des hamiltoniens empiriques est la procédure d'itération. On choisit d'abord un hamiltonien de départ obtenu, par exemple, par la matrice–G renormalisée, puis on l'utilise pour calculer les fonctions d'ondes et les énergies de tous les niveaux d'énergie considérés en résolvant l'équation de Schrödinger :

$$H\Psi_{\alpha}^i = \left( \sum_k h_k \right) \Psi_{\alpha}^i = E^i \Psi_{\alpha}^i \quad (3-14)$$

$h_k$  représente dans le cas le plus général tous les hamiltoniens individuels et les différents opérateurs de l'interaction à 2 corps,  $E^i$  est la valeur propre correspondante à la fonction d'onde propre  $\Psi_{\alpha}^i$ ,  $\alpha$  désigne tous les nombres quantiques.

Ces fonctions d'ondes peuvent être utilisées pour écrire l'énergie calculée  $E^i$  en termes de combinaisons linéaires des énergies individuelles et des éléments de matrice à 2 corps, cette énergie calculée est alors comparée à l'énergie expérimentale  $E_{\text{exp}}^i$  à travers un fit par moindres carrés. Ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$E^i = \langle \Psi_{\alpha}^i | H | \Psi_{\alpha}^i \rangle \quad (3-15) \quad \text{ou encore :} \quad E^i = \sum_{k=1}^{N_p} c_{ki} x_k \quad (3-16)$$

$x_k$  représente à la fois les énergies individuelles  $\varepsilon_i$  et les éléments de matrice à 2 corps  $V_{ijkl}^{JT}$ , leur nombre total est  $N_p$ .  $C_{ki}$  sont les coefficients qui contiennent l'information sur les fonctions d'ondes  $\Psi_\alpha^i$ .  $E^i$  est l'énergie de liaison (valeur propre) de l'état  $i$ .

Ces énergies  $E^i$  peuvent être ajustées soit aux énergies de liaison expérimentales corrigées des énergies de Coulomb [5,100] pour les états fondamentaux, soit aux énergies des niveaux excités. Dans notre cas, le fit a porté uniquement sur les énergies d'excitation expérimentales des états des différents noyaux. Dans ce cas, les énergies d'excitation sont calculées comme suit :

$$E_{cal}^i = E^i - E^{i_0} = \sum_{k=1}^{N_p} (c_{ki} - c_{ki_0}) x_k = \sum_{k=1}^{N_p} c_k^i x_k \quad (3-17)$$

où  $E^{i_0}$  est l'énergie de liaison calculée de l'état fondamental  $i_0$ .

L'énergie calculée  $E_{cal}^i$  est donc exprimée comme une combinaison linéaire des termes à 1 et 2 corps  $x_k$  via les coefficients  $c_k^i$ . Si les éléments de matrice sont exprimés en termes de potentiels ou monopoles,  $E_{cal}^i$  peut être écrite comme une combinaison linéaire de ces termes.

Les modifications des éléments de matrice à 1 et 2 corps qui améliorent l'accord des  $E_{cal}^i$  avec les énergies expérimentales peuvent ainsi être obtenues en minimisant l'écart entre l'ensemble des énergies calculées et expérimentales dont le nombre est  $N_s$ .

Nous cherchons donc les paramètres  $x_k$  de l'interaction qui minimisent au maximum l'écart en énergie expérience–théorie, ceci se fait par la méthode du  $\chi^2$  :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N_s} (E_{cal}^i - E_{exp}^i)^2 = \sum_{i=1}^{N_s} \left( \sum_{k=1}^{N_p} c_k^i x_k - E_{exp}^i \right)^2 \quad (3-18)$$

La minimisation de  $\chi^2$  implique :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} \left( \sum_{i=1}^{N_s} \left( \sum_{k=1}^{N_p} c_k^i x_k - E_{exp}^i \right)^2 \right) = 0$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial x_r} = 2 \sum_{i=1}^{N_s} \left( \sum_{k=1}^{N_p} c_k^i x_k - E_{exp}^i \right) c_r^i = 0$$

$$\sum_{k=1}^{N_p} C_{rk} x_k - \varepsilon_r = 0, \quad r=1, 2, \dots, N_p \quad (3-19)$$

avec :

$$C_{rk} = C_{kr} = \sum_{i=1}^{N_s} c_k^i \cdot c_r^i \quad \text{et} \quad \varepsilon_r = \sum_{i=1}^{N_s} E_{exp}^i \cdot c_r^i \quad (3-20)$$

Nous avons donc un ensemble de  $N_p$  équations linéaires qui correspond à  $N_p$  paramètres qui peuvent être résolues en supposant que les fonctions d'ondes restent fixes ( $c_r^i$  constantes).

L'éq.(3-19) s'écrit sous la forme matricielle :

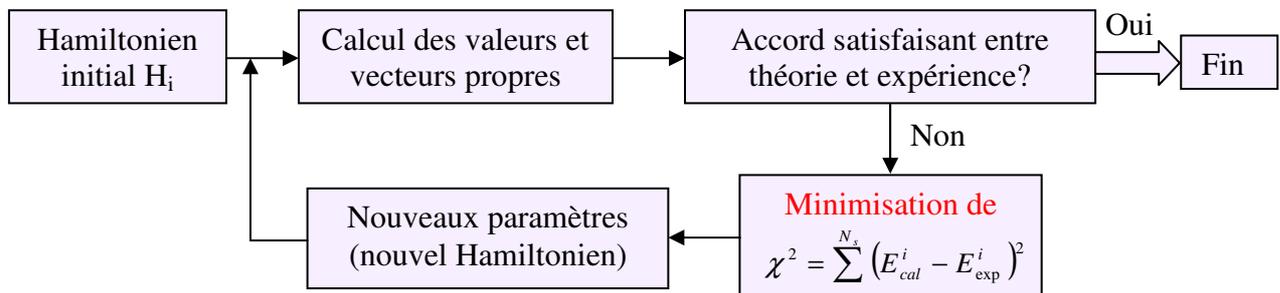
$$C\vec{x} = \vec{\epsilon} \quad (3-21)$$

$C$  est une matrice réelle symétrique et inversible de dimensions  $N_p \times N_p$ ,  $\vec{x}$  est un vecteur composé des paramètres (inconnus) et  $\vec{\epsilon}$  est un vecteur dérivé des niveaux d'énergie expérimentaux.

Les nouveaux paramètres de l'interaction minimisant le  $\chi^2$  sont donnés par :

$$\vec{x} = C^{-1}\vec{\epsilon} \quad (3-22)$$

Ces paramètres  $x_k$  obtenus à partir du fit définissent une nouvelle interaction effective (nouvel hamiltonien) et constituent les données d'entrée (*input*) pour l'itération suivante. Les itérations se poursuivent jusqu'à convergence de l'interaction et ce, lorsque les  $x_k$  "input" sont les mêmes que les  $x_k$  de sortie (*output*), en d'autre terme jusqu'à ce que  $E_{cal}^{i(q)} \approx E_{cal}^{i(q-1)}$  où  $q$  est le rang de l'itération. La procédure de fit se fait selon le diagramme montré sur la Fig3-1.



**Figure 3-1:** Procédure de fit par la méthode des moindres carrés.

Il est évident que, comme pour tout fit en  $\chi^2$ , le bien fondé de l'opération nécessite que  $N_s$ , le nombre de données expérimentales, soit très supérieur à  $N_p$ , le nombre de paramètres à déterminer, c'est-à-dire  $N_s \gg N_p$ .

$$(3-23)$$

S'il y a peu de paramètres et l'espace de valence est petit la procédure d'itération est rapide. Notons cependant que le processus d'ajustement des paramètres des interactions les plus connues USD [3] et GXPF [101] s'est étendu sur plusieurs années avant d'être finalisé.

Dans les grands espaces de valence tel que l'espace p–sd–pf, le nombre de paramètres (éléments de matrice à 2 corps, monopoles et multipoles) est grand. Ils ne peuvent donc pas être déterminés avec précision suite à l'insuffisance des données expérimentales ou l'impossibilité numérique d'incorporer dans le fit les états expérimentaux des noyaux à plusieurs nucléons de valence (eq.(3–23)). Il est donc, souvent impossible d'ajuster tous les paramètres de l'interaction. Pour remédier à cela, l'idée sous-jacente est de sélectionner, parmi tous les paramètres, ceux qui peuvent être déterminés de manière précise à l'aide des données utilisées. Ces dernières sont sensibles à des combinaisons linéaires particulières des énergies individuelles et des éléments de matrice à 2 corps, en plus de l'indépendance mutuelle de ces paramètres. Dans ces conditions, le nombre de paramètres inclus dans le fit sera réduit, ils peuvent être obtenus en diagonalisant la matrice C (eq.(3–21)) [5,100] avec la même méthode numérique utilisée pour diagonaliser l'hamiltonien symétrique dans les calculs du modèle en couches. L'ajustement par moindres carrés est donc reformulé en termes de combinaisons linéaires indépendantes des éléments de matrice à 2 corps appelées aussi "*paramètres orthogonaux*". Le principe de la transformation orthogonale est le suivant :

$$D = ACA^T \quad (3-24)$$

où  $A^T$  est la matrice de transformation formée des vecteurs propres de C, cette matrice est orthogonale soit  $A^{-1} = A^T$ . D est la matrice diagonale à  $N_p$  dimension composée des éléments positifs  $D_i$ . En faisant le changement de variable :

$$\bar{y} = A\bar{x} \quad \text{et} \quad \bar{e} = A\bar{e} \quad (3-25)$$

les équations (3–21) et (3–22) deviennent respectivement :

$$D\bar{y} = \bar{e} \quad \text{et} \quad \bar{y} = D^{-1}\bar{e} \quad (3-26)$$

$$y_i = d_i e_i \quad \text{avec} \quad d_i = 1/D_i \quad (3-27)$$

où  $d_i$  sont les valeurs propres de  $D^{-1}$ . Les nouveaux paramètres orthogonaux  $y_i$  sont des combinaisons linéaires des paramètres de l'hamiltonien  $x_i$ , i.e. en appliquant la transformation inverse sur  $\bar{y}$  nous retrouvons directement les nouveaux paramètres de l'interaction effective  $\bar{x}$  :  $\bar{x} = A^T \bar{y}$  (3–28)

De l'éq.(3–27), il est clair que pour une grande valeur de  $d_i$  les valeurs de  $y_i$  sont fortement affectées par une petite modification des données expérimentales  $e_i$ .

Cette méthode dans laquelle l'inversion de la matrice C est remplacée par une diagonalisation, ne résout pas tous les problèmes du fit par moindres carrés. Les paramètres

orthogonaux peuvent être classés suivant le degré de fiabilité de leurs déterminations à partir de l'ensemble des données expérimentales. Les paramètres orthogonaux bien déterminés sont donc séparés de ceux qui le sont moins grâce à un critère sur la grandeur des valeurs propres  $d_i$  correspondantes. La procédure du fit peut être modifiée de la manière suivante :

On commence par le meilleur hamiltonien possible  $\bar{x}^s$ , puis la transformation A est appliquée sur  $\bar{x}^s$  pour calculer les paramètres orthogonaux  $\bar{y}^s$  de départ,

$$\bar{y}^s = A\bar{x}^s \quad (3-29)$$

Du fit, les combinaisons linéaires indépendantes  $y_i$  sont déterminées suivant l'éq.(3-27). Les nouvelles combinaisons linéaires  $\bar{y}^a$  sont obtenues en ne retenant que les valeurs bien déterminées de  $y_i$  et en utilisant les valeurs de départ pour les autres :

$$y_i^a = y_i(d_i \leq \delta) + y_i^s(d_i > \delta) \quad (3-30)$$

où  $\delta$  est la valeur retenue pour passer le critère de sélection.

Le nombre de combinaisons linéaires bien déterminées est dénoté par  $N_c$ . Un nouvel hamiltonien est ainsi obtenu à partir de  $\bar{x}^a = A^{-1}\bar{y}^a$ , qui sera utilisé pour l'itération suivante pour obtenir  $\bar{x}^b = A^{-1}\bar{y}^b$  avec :

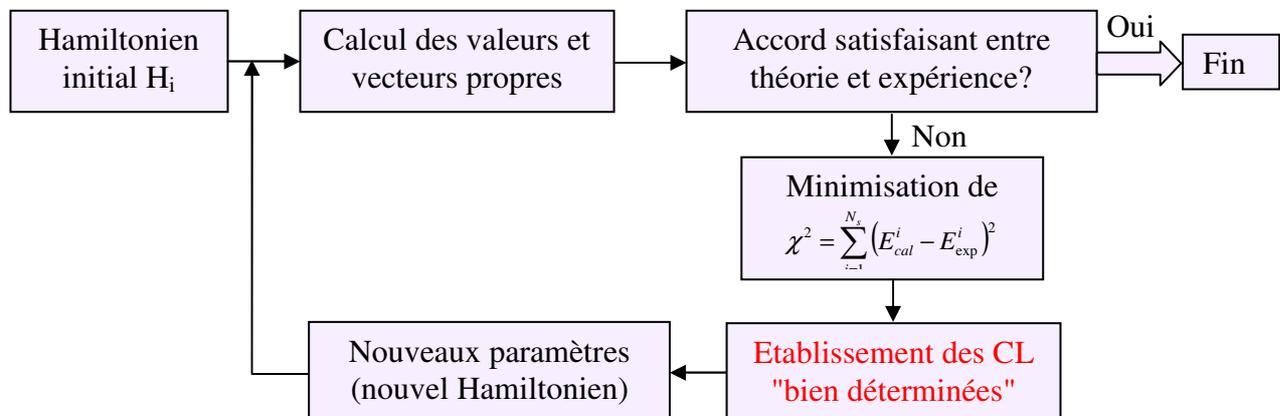
$$y_i^b = y_i(d_i \leq \delta) + y_i^s(d_i > \delta) \quad (3-31)$$

Cette procédure est itérée jusqu'à convergence.

Notons que :  $N_s \gg N_p \gg N_c$  (3-32)

avec  $N_s$  nombre de données expérimentales,  $N_p$  nombre total de paramètres et  $N_c$  nombre de combinaisons linéaires bien déterminées.

Nous montrons schématiquement sur la Fig3-2, la méthode de combinaisons linéaires (CL) utilisée pour le fit.



**Figure 3-2** : Méthode des combinaisons linéaires pour les paramètres de l'interaction.

Deux remarques pour finir ce paragraphe sur la procédure du fit :

- L'auteur du code NATHAN (E. Caurier) que nous utilisons pour faire le fit, a introduit un nouveau paramètre qui est une sorte de *pondération* pour le fit des états excités. Dans l'expression du  $\chi^2$ , pour  $E_{\text{exp}}^i > 1$  MeV, la différence en énergie  $\Delta E^i = E_{\text{cal}}^i - E_{\text{exp}}^i$  est divisée par  $E_{\text{exp}}^i$ , ce qui donne un poids plus grand dans le fit aux états de basse énergie avec  $E_{\text{exp}}^i < 1$  MeV.
- Il est intéressant de comparer l'ensemble de toutes les valeurs calculées des énergies d'excitation avec une certaine interaction effective aux valeurs expérimentales (même celles qui ne sont pas incluses dans le fit), en calculant la moyenne du carré de la déviation (différence) expérience–théorie appelée généralement dans la littérature rmsd pour **R**oot **M**ean **S**quare **D**eviation et qui est donné par :

$$\text{rmsd} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (E_{\text{cal}}^i - E_{\text{exp}}^i)^2} \quad (3-33)$$

D'une certaine façon, le rmsd rend compte de la fiabilité de l'interaction utilisée.

#### **4. Problèmes du centre de masse et états spurieux**

Comme il est mentionné dans le chapitre 2, l'espace  $0\hbar\omega$  peut décrire un nombre limité d'états de parité normale à basse énergie d'excitation. Les états intrus peuvent être décrits dans un espace plus large qui inclut plus d'une couche majeure appelé espace  $n\hbar\omega$ , avec  $n = 1, 2, \dots$ , ce qui permet l'apparition d'états non–physiques appelés "états spurieux" [102]. Ces composants décrivent les excitations du mouvement de centre–de–masse (cm) du noyau.

##### Elimination des états de centre–de–masse spurieux

Plusieurs méthodes ont été proposées pour éliminer les états spurieux [102–106]. Nous présentons la méthode de Lawson [106,107] utilisée dans nos calculs.

Cette procédure d'enlever du spectre à basse énergie les états spurieux du mouvement de cm, consiste à diagonaliser l'opérateur modifié :

$$H' = H_{SM} + \beta H_{cm} \quad (3-34)$$

où  $H_{SM}$  est l'hamiltonien de modèle en couches usuel et  $H_{cm}$  est l'hamiltonien du cm de la forme :

$$H_{cm} = \frac{P^2}{2mA} + \frac{1}{2}mA\omega^2 R^2 - \frac{3}{2}\hbar\omega \quad (3-35)$$

L'hamiltonien  $H_{cm}$  donne zéro lorsque nous l'appliquons sur des états physiques. Pour les états spurieux un multiple de  $\beta\hbar\omega$  est ajouté à l'énergie, si  $\beta$  prend une valeur suffisamment grande  $\sim 10$ , les états spurieux vont être déplacés à une très haute énergie d'excitation et ne vont pas être mélangés avec les états physiques de basse énergie.

## 5. Transitions électromagnétiques

Un noyau formé dans une réaction nucléaire se trouve en générale dans différents états excités. Si ces états sont liés, leur désexcitation vers le niveau fondamental se fait le plus souvent par émission de rayonnements gamma " $\gamma$ ".

Les propriétés des transitions électromagnétiques peuvent, en principe, être décrites par les modèles nucléaires et fournissent, par conséquent, des informations intéressantes sur la validité des fonctions d'ondes calculées des états entre lesquels se font les transitions.

Nous allons présenter dans ce paragraphe une courte introduction aux transitions électromagnétiques dans le cadre du modèle en couches qui seront discutées plus loin.

Lors de la transition électromagnétique d'un nucléon (l'opérateur est un opérateur à 1 corps) dans un noyau de masse A, entre le niveau initial (d'énergie d'excitation  $E_i$ , de moment angulaire  $J_i$  et de parité  $\pi_i$ ) et le niveau final (d'énergie d'excitation  $E_f$ , de moment angulaire  $J_f$  et de parité  $\pi_f$ ), le nucléon émet un photon  $\gamma$  d'énergie  $E_\gamma$ , de moment angulaire L et de parité  $\pi_\gamma$  :

$$E_\gamma = E_i - E_f \quad (3-36)$$

Cette relation découle du principe de conservation d'énergie. La conservation du moment angulaire et de la parité impose que le moment angulaire L et la parité  $\pi_\gamma$  d'une transition  $\gamma$  satisfait aux relations suivantes :

$$|J_f - J_i| \leq L \leq J_f + J_i \quad \text{et} \quad \pi_i \pi_\gamma \pi_f = +1 \quad (3-37)$$

Notons qu'une transition  $\gamma$  entre états  $J_i = J_f = 0$  est interdite par les règles de sélection, ceci signifie que L est différent de 0.

Le moment angulaire de la transition est appelé *multipolarité de la radiation*. Le caractère de la radiation  $2^L$ -pole est dipolaire pour  $L = 1$ , quadrupolaire pour  $L = 2$ ,

octupolaire pour  $L = 3$ , etc. Le multipole est du type électrique EL lorsque  $\pi_\gamma = (-1)^L$  et du type magnétique ML lorsque  $\pi_\gamma = (-1)^{L+1}$ . Par conséquent, les transitions  $\gamma$  qui connectent des états de même parité auront des EL pairs et ML impairs, celles qui connectent des états de parités différentes auront des EL impairs et ML pairs.

### 5.1 Probabilités de transitions électromagnétiques

Le taux de transition  $\lambda_\gamma$  de l'état initial  $J_i$  vers final  $J_f$  est déterminé par la formule :

$$\begin{aligned}\lambda_\gamma(\sigma L : J_i \rightarrow J_f) &= \frac{8\pi(L+1)}{\hbar L((2L+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1} \frac{\langle J_f \| O(\sigma L) \| J_i \rangle^2}{2J_i + 1} \\ &= \frac{8\pi(L+1)}{\hbar L((2L+1)!!)^2} \left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^{2L+1} B(\sigma L : J_i \rightarrow J_f)\end{aligned}\quad (3-38)$$

où  $\sigma L = EL$  ou  $ML$ , et les  $O(\sigma L)$  sont les opérateurs électromagnétiques multipolaires entre les états initiaux  $|J_i\rangle$  et finaux  $|J_f\rangle$  du noyau.  $B(\sigma L : J_i \rightarrow J_f)$  sont les probabilités réduites de transition entre l'état initial  $i$  et l'état final  $f$ .

Les expressions des probabilités réduites de transition peuvent être calculées à partir des hypothèses suivantes [108] :

- *Le noyau est composé d'un cœur inerte plus une particule de valence*
- *Les transitions ont lieu entre des états  $J_i = L \pm 1/2$  et  $J_f = 1/2$*
- *Les parties radiales des fonctions d'ondes de l'état initial et final sont toutes les deux constantes à l'intérieur du noyau de rayon  $R$  et nulles à l'extérieur.*

$$\begin{aligned}B(EL) &= \frac{9}{4\pi(L+3)^2} e^2 R^{2L} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_w} \quad (e^2 fm^{2L}) \\ B(ML) &= \frac{90}{\pi(L+3)^2} \mu_N^2 R^{2L-2} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_w} \quad (\mu_N^2 fm^{2L-2})\end{aligned}\quad (3-39)$$

avec  $R = 1.2A^{1/3} (fm)$ ,  $e$  est la charge électrique et  $\mu_N = \frac{e\hbar}{2mc}$  est le magnéton nucléaire.

$\Gamma_\gamma$  et  $\Gamma_w$  sont la largeur de transition et l'estimé de Weisskopf (en eV).

Nous définissons "la force d'une transition" en unité de Weisskopf (u.W.) par la formule :

$$S = \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma_w} \quad (3-40)$$

Remarques :

- La probabilité réduite de transition  $B(E2)$  permet de savoir si la transition est due à une contribution individuelle ou collective des nucléons dans le noyau. En effet, le  $B(E2)$  est plutôt faible pour des noyaux sphériques et plus élevé pour des noyaux collectifs ou déformés.
- Si l'état initial décroît vers plusieurs états finaux, la largeur totale de l'état initial  $\Gamma_T$  est la somme des largeurs partielles :  $\Gamma_T = \sum_k \Gamma_{\gamma_k}$  (3-41)

- Nous définissons le rapport d'embranchement (en %) d'une transition k par la formule :

$$BR_k = \frac{\Gamma_{\gamma_k}}{\Gamma_T} \times 100, \text{ avec } \sum_k BR_k = 100 \quad (3-42)$$

- La transition entre un état initial et un état final peut comporter plusieurs types de radiation multipolaire. Puisque la probabilité de transition dépend fortement du type du multipole, nous ne prendrons en compte que deux radiations multipolaires dont les multipolarités diffèrent d'une unité, c'est-à-dire, L et L+1. Nous introduisons ce que nous appelons *le rapport de mélange multipolaire*  $\delta$ , qui est défini par :

$$\delta^2 = \frac{\Gamma_\gamma(\sigma L + 1)_{J_i \rightarrow J_f}}{\Gamma_\gamma(\sigma L)_{J_i \rightarrow J_f}} \quad (3-43)$$

La conservation de la parité impose que les deux radiations compétitives soient du type EL+1 et ML ou du type ML+1 et EL.

Notons que :  $\lambda_\gamma(E1) > \lambda_\gamma(M1) > \lambda_\gamma(E2) > \lambda_\gamma(M2) > \lambda_\gamma(E3) > \lambda_\gamma(M3) \dots$ , le taux de transition décroît donc en fonction de la multipolarité, mais ceci n'est plus vrai pour des transitions  $\gamma$  d'énergie supérieure à quelques MeV.

- La durée de vie moyenne  $\tau_m$  qui correspond à une transition électromagnétique de probabilité  $\lambda_\gamma$  est donnée par la relation :

$$\tau_m(\sigma L; J_i \rightarrow J_f) = \frac{1}{\lambda_\gamma(\sigma L; J_i \rightarrow J_f)} \quad (3-44)$$

En utilisant la relation d'incertitude d'Heisenberg :  $\Delta E \Delta t \approx \hbar$ , nous redéfinissons la largeur d'un niveau (largeur de la transition gamma pour un état lié) par :

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau_m} (eV) \quad , \quad \hbar = 6.582 \times 10^{-16} eV.s \quad (3-45)$$

- La *demi-vie* est donnée en fonction de la durée de vie moyenne :

$$\tau_{1/2} = \tau_m \cdot \ln 2 \quad (3-46)$$

- La durée de vie d'un état excité est généralement comprise entre  $10^{-12}$  et  $10^{-15}$  s pour les états liés, certains états peuvent avoir des durées de vie beaucoup plus grandes, jusqu'à des années. Ces états excités sont appelés "*états isomères*".
- La relation entre une excitation (absorption) de probabilité  $B(\sigma L \uparrow)$ , soit  $B(\sigma L : J_1 \rightarrow J_2)$  et une désexcitation (émission) de probabilité  $B(\sigma L \downarrow)$ , soit  $B(\sigma L : J_2 \rightarrow J_1)$  est donnée par :

$$B(\sigma L \downarrow) = \frac{2J_1 + 1}{2J_2 + 1} B(\sigma L \uparrow) \quad (3-47)$$

## 5.2 Opérateurs de transitions électriques et magnétiques

Les opérateurs multipolaires décrivant les radiations électriques EL et magnétiques ML sont donnés par les formules suivantes :

Opérateur électrique : 
$$O(EL) = \sum_{k=1}^A e(k) r^L(k) Y_{LM}(r(k)) \quad (3-48)$$

où  $e(k)$  est la charge du nucléon  $k$ , i.e.  $e(k) = 0$  pour un neutron,  $e(k) = e$  pour un proton.

Opérateur magnétique :

$$O(ML) = \sum_{k=1}^A \mu_N \left[ g^s(k) \vec{s}(k) + \frac{2g^l(k)}{L+1} \vec{l}(k) \right] \cdot \nabla(k) r^L(k) Y_{LM}(r(k)) \quad (3-49)$$

où  $g^s(k)$ ,  $g^l(k)$  sont les facteurs gyromagnétiques de spin et orbital du nucléon  $k$ , leurs valeurs sont les suivantes :

$$\begin{aligned} & g^s(k) = -3.826, \quad g^l(k) = 0 \quad \text{pour un neutron,} \\ \text{et} \quad & g^s(k) = 5.586, \quad g^l(k) = 1 \quad \text{pour un proton.} \end{aligned}$$

Corrections dues au mouvement du centre-de-masse

Les opérateurs de transitions électromagnétiques donnés précédemment sont définis en termes des coordonnées des nucléons  $r(k)$ . Cependant, il est plus judicieux de séparer les degrés de liberté du cm des degrés de liberté intrinsèques [102]. La conservation des moments angulaires durant les processus d'excitation ou de désexcitation d'un noyau conduit à des effets de recul. En effet, lorsqu'un rayonnement gamma est émis, le noyau dans son ensemble recule avec un moment égal et opposé à celui du photon émis. Ce recul donne lieu à un courant additionnel que dans un premier temps, nous n'avons pas pris en compte. Pour les opérateurs EL et ML (avec  $L \geq 2$ ), cet effet est petit et il est habituellement négligé contrairement à E1 où cet effet est grand.

D'après l'eq.(3-48), l'opérateur O(E1) est donné par :

$$O(E1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{k=1}^A e(k)r(k) \quad (3-50)$$

En introduisant les coordonnées du cm,  $R = \frac{1}{A} \sum_1^A r(k)$ , les coordonnées intrinsèques par rapport au cm peuvent être définis comme suit :

$$\rho(k) = r(k) - R, \quad \text{avec} \quad \sum_{k=1}^A \rho(k) = 0$$

L'opérateur O(E1) devient en remplaçant  $e(k)$  par sa valeur pour les protons et neutrons :

$$O(E1) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left[ \sum_{k=1}^Z e \frac{N}{A} r(k) - \sum_{k=Z+1}^A e \frac{Z}{A} r(k) \right] \quad (3-51)$$

La première somme se fait sur les Z protons et la seconde somme est sur les  $N = A - Z$  neutrons. Si on compare les eq.(3-48) et (3-51), nous remarquons que l'opérateur O(E1) peut s'écrire en fonction des coordonnées  $r(k)$  si on introduit dans l'eq.(3-48) :

$$\tilde{e}(k) = \frac{N}{A} e \quad \text{pour un proton,}$$

$$\tilde{e}(k) = \frac{-Z}{A} e \quad \text{pour un neutron, où } \tilde{e}(k) \text{ est la charge "réduite" du nucléon } k.$$

Nous remarquons que pour les noyaux auto-conjugués  $N = Z$  et les transitions entre états de même isospin ( $T_i = T_f$ ), l'opérateur  $O(E1)$  est égal à 0 soit  $B(E1) = 0$ .

Pour les opérateurs de multipolarité  $L \geq 2$ , la correction due au mouvement du centre de masse est moins facile à évaluer. Nous obtenons dans ce cas non seulement des termes à 1 particule comme pour  $O(E1)$ , mais aussi des termes plus compliqués qui dépendent des coordonnées de plus d'une particule. Si nous négligeons ces derniers termes, nous trouvons pour les opérateurs  $L \geq 2$  les expressions des charges réduites suivantes :

$$\tilde{e}(k) = \frac{e}{A^L} \left[ (A-1)^L + (-1)^L (Z-1) \right] \text{ pour un proton et } \tilde{e}(k) = \left( \frac{-1}{A} \right)^L eZ \text{ pour un neutron.}$$

Pour une transition  $E1$ , nous retrouvons les mêmes charges réduites que précédemment.

On peut noter que ces valeurs ne diffèrent pas beaucoup de celles des charges standard du proton et neutron. Par exemple, pour une transition  $E2$  dans un noyau avec  $Z = 12$  et  $N = 16$  ( $^{28}\text{Mg}$ ) les charges réduites suivantes sont obtenues :  $\tilde{e}(k) = 0.916e$  pour les protons, et  $\tilde{e}(k) = 0.015e$  pour les neutrons.

Ces charges réduites découlent directement de l'opérateur  $O(EL)$ . On sait par ailleurs que pour les transitions  $E2$ , les dimensions réduites de l'espace modèle considéré peuvent être compensées par l'introduction de charges "effectives". Les valeurs typiques de ces charges effectives pour une transition  $E2$  valent :  $\tilde{e}(k) = 1.5e$ , pour les protons et  $\tilde{e}(k) = 0.5e$ , pour les neutrons. Ces valeurs sont plus grandes que celles résultantes du mouvement du cm qui pour ce type de transition avec  $L \geq 2$  peut donc être ignoré.

### **5.3 Effets de l'isospin sur les transitions électromagnétiques**

Les règles de sélection de l'isospin sur les TEM s'appliquent principalement dans le cas de noyaux auto-conjugués avec  $N = Z$ . Pour une transition gamma entre les états  $|i\rangle = |\alpha, T_i\rangle$  et  $|f\rangle = |\beta, T_f\rangle$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  désignent tous les nombres quantiques autres que l'isospin, ces règles peuvent être résumées de la façon suivante :

- ✓ Pour des transitions  $EL$  ou  $ML$  :  $\Delta T = T_i - T_f = 0, \pm 1$  (ceci est une règle générale valable pour tous les noyaux).

- ✓ Pour des transitions  $\Delta T = 0$  : E1 est interdit.
- ✓ Pour des transitions  $\Delta T = 1$  : EL ( $L \geq 2$ ) ne présente pas d'effets collectifs.
- ✓ Pour des transitions  $\Delta T = 0$  : M1 est ralenti en moyenne d'un facteur 100.
- ✓ Pour des transitions  $\Delta T = 0$  : ML ( $L \geq 2$ ) est ralenti en moyenne d'un facteur 30 à 100.

Nous avons présenté dans ce chapitre les différentes procédures utilisées dans la littérature pour le développement d'interactions réalistes ou effectives. Nous avons également détaillé la méthode de fit par moindres carrés que nous avons utilisée pour déterminer notre interaction PSDPF. Une introduction aux TEM a aussi été donnée.

Dans le prochain chapitre, nous allons décrire les différentes étapes de la construction de la nouvelle interaction PSDPF destinée à décrire les états intrus de parité + et – des noyaux de la couche sd.

## Chapitre 4

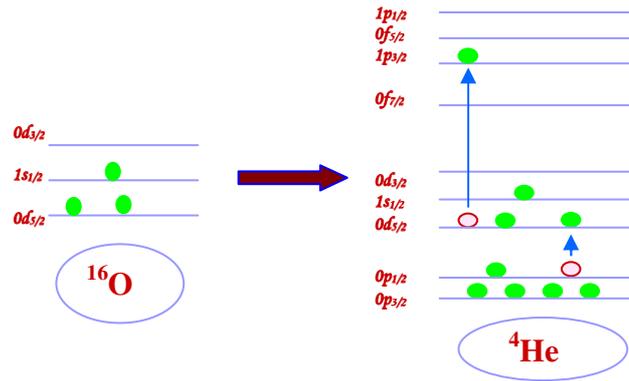
### L'interaction PSDPF

Comme il est mentionné précédemment, le modèle en couches en utilisant l'interaction USD ou ses variantes USDA et USDB a permis de décrire avec succès les états de parité positive des noyaux de la couche sd dans l'espace modèle sd (espace  $0\hbar\omega$ ) avec un cœur de  $^{16}\text{O}$ .

Notre travail est consacré à l'étude dans ces noyaux sd des états de parité négative appelés aussi états intrus à  $(1p-1t)$ . Ceux-ci résultent de l'excitation d'un nucléon (excitation  $1\hbar\omega$ ) de la couche p vers la couche sd pour les noyaux de début de couche ou de la couche sd vers pf pour les noyaux de la fin de couche. Dans les noyaux du milieu de couche il y a une compétition entre les deux excitations. La description des intrus à travers toute la couche sd requiert l'extension de l'espace modèle sd à l'espace p-sd-pf en permettant un seul saut de nucléon. Dans ce cas, l'espace considéré est un espace  $1\hbar\omega$  avec un cœur du  $^4\text{He}$  (voir Fig4-1). Cette extension rend la taille des matrices à diagonaliser grande, par exemple, dans le cas du  $^{28}\text{Si}$  la dimension de la matrice de l'état  $4^-$  est de 579120 dans le schéma-J est de 2298070 dans le schéma-M. Les diagonalisations de telles matrices sont possibles aujourd'hui en utilisant les moyens informatiques actuels.

Puisque chaque espace de valence nécessite le développement d'une nouvelle interaction effective compatible avec l'espace modèle considéré et capable de reproduire les propriétés spectroscopiques de l'ensemble des noyaux de la région étudiée, le but majeur de notre travail a été la construction d'une nouvelle interaction PSDPF qui permet de décrire à la fois les états de parité positive et ceux de parité négative. Une telle interaction n'a jamais été déterminée auparavant.

Nous allons présenter dans ce chapitre la méthode d'ajustement empirique des paramètres de l'interaction effective PSDPF ainsi que le détail du fit réalisé dans le but d'améliorer notre interaction.



**Figure 4-1** : Passage de l'espace sd (cœur inerte  $^{16}\text{O}$ ) à l'espace complet p-sd-pf (cœur inerte  $^4\text{He}$ ).

## 1. Etapes de la dérivation de l'interaction PSDPF

L'espace p-sd-pf contient les 9 orbitales  $0p_{3/2}$ ,  $0p_{1/2}$ ,  $1s_{1/2}$ ,  $0d_{5/2}$ ,  $0d_{3/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $1p_{1/2}$ ,  $0f_{7/2}$  et  $0f_{5/2}$  qui peuvent être occupées par les nucléons de valence des noyaux avec possibilité d'un saut de nucléon du type  $1\hbar\omega$ . L'interaction PSDPF de départ doit donc contenir toutes les contributions possibles des interactions entre les nucléons dans les différentes couches majeures en jeu. L'interaction PSDPF dépend donc de cinq parties principales :

- l'interaction p-p,
- l'interaction sd-sd,
- l'interaction pf-pf,
- l'interaction p-sd,
- l'interaction sd-pf.

Pour construire notre interaction de départ, nous avons dû choisir des interactions parmi celles de la littérature qui décrivent de façon adéquate les états  $0\hbar\omega$  dans les couches majeures p, sd et pf. Les parties p-sd et sd-pf sont essentielles pour reproduire les états intrus du type  $1\hbar\omega$ .

Pour la partie sd-sd, le choix USD s'impose. L'interaction  $0\hbar\omega$  SDPF-NR [90] est un bon choix pour les parties sd-pf et pf-pf. Nous avons testé plusieurs interactions pour la partie p-sd, car il est difficile de reproduire les états  $1p-1t$  dans  $^{16}\text{O}$ . L'interaction qui nous a

permis, après ajustement, de décrire d'une façon correcte les états  $1p-1t$  dans et au voisinage  $^{16}\text{O}$  est l'interaction PSDT [46]. Elle comprend les parties  $p-p$  et  $p-sd$ , la partie  $p-p$  de cette interaction n'est utilisable qu'à partir de la masse 10. Comme nous souhaitons décrire tous les états  $0\hbar\omega$  à partir de la masse 5 ( $^5\text{He}$ ), cette partie a été remplacée par l'interaction CK [45,77] qui donne une bonne description de la spectroscopie des noyaux de la couche  $p$ . La partie  $sd-sd$  de l'interaction a été remplacée par l'interaction la plus récente USDB, cette interaction est le résultat d'un fit détaillé avec 56 combinaisons linéaires et donne le meilleur rmsd, c'est elle que nous avons choisie pour la construction de notre interaction.

Les différentes parties de l'interaction étant choisies, nous les avons incorporées dans l'interaction initiale appelée "PSDPF0". Nous avons appliqué sur tous les éléments de matrice, comme dans le cas de l'interaction USD, une dépendance en densité de la forme :

$$\langle V \rangle (A) = \langle V \rangle (A=18) (A/18)^{-0.3}$$

Les états  $0\hbar\omega$  de parité positive sont décrits par l'interaction USDB incorporée dans PSDPF0. Nous avons ajusté les énergies individuelles des couches  $sd$  et  $pf$  pour reproduire les états  $0\hbar\omega$  des noyaux à un nucléon de valence  $^{17}\text{O}$  et  $^{41}\text{Ca}$ , nous avons gardé celles de la couche  $p$  (interaction CK) qui reproduisent l'ordre des niveaux d'énergie de  $^5\text{He}$ . Les énergies individuelles adoptées pour  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$  sont respectivement : 5.259, 2.577 et 8.065 MeV, celles pour les orbitales  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  sont respectivement: 15.7, 16.0, 18.6 et 16.2 MeV. Nous avons utilisé PSDPF0 pour calculer les états de parité négative dans tous les noyaux à travers la couche  $sd$ , le calcul du rmsd donne 912 keV. Cette valeur est assez élevée et l'interaction PSDPF0 doit donc être modifiée pour mieux reproduire ces états.

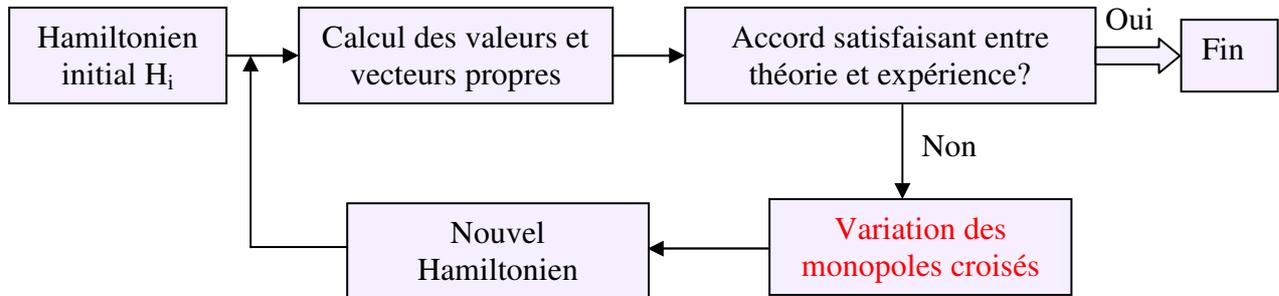
Notre travail principal consiste à ajuster les termes croisés  $p-sd$  et  $sd-pf$  responsables des excitations  $1\hbar\omega$ , qui constituent les paramètres clés rentrant en jeu pour reproduire les intrus. Naturellement le but de la modification est d'engendrer une nouvelle interaction capable de décrire de façon consistante l'ensemble des états  $1\hbar\omega$  dans les noyaux  $sd$ .

La dérivation de notre interaction PSDPF est passée par deux étapes importantes : la première est l'ajustement empirique « à la main » des monopoles croisés de l'interaction initiale, l'interaction résultante a été appelée PSDPFB ; la deuxième est le fit par la méthode des moindres carrés qui a été réalisé pour améliorer PSDPFB et obtenir ainsi la nouvelle interaction appelée PSDPF. Nous allons détailler ces deux procédures dans les paragraphes suivants.

### 1.1 Procédure d'ajustement empirique

Comme nous l'avons démontré dans le chapitre précédent, les propriétés spectroscopiques des noyaux possédant un nucléon (un trou) de valence sont décrites principalement par l'hamiltonien monopolaire  $H_m$ . En effet, cette partie de l'interaction effective PSDPF0 est très importante et doit être optimisée. Il est recommandé, en premier lieu, de corriger les parties monopolaires croisées p-sd et sd-pf par la procédure d'ajustement empirique. Nous avons utilisé le code Antoine mis au point par E. Caurier dans notre laboratoire pour effectuer nos calculs des spectres en énergie.

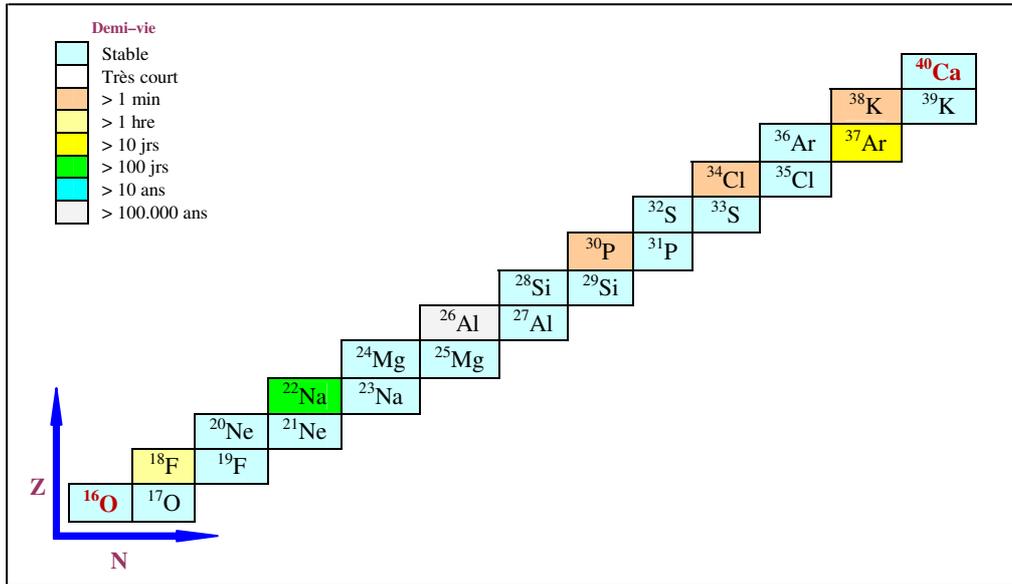
Le principe de la méthode d'ajustement empirique est simple. Dans un premier temps, l'hamiltonien multipolaire  $H_M$  de l'interaction PSDPF0 est calculé. Ce dernier reste alors fixe lors de la procédure qui s'applique uniquement à la partie monopolaire  $H_m$ . Nous faisons varier les monopoles sensibles de PSDPF0 ce qui donne des nouveaux paramètres  $H'_m$  et donc une nouvelle interaction. Nous appliquons l'interaction résultante pour calculer les énergies d'excitations des états intrus dans les noyaux à travers la couche sd. La confrontation de ces résultats avec les données expérimentales nécessite à nouveau de changer les paramètres si les écarts en énergie théorie-expérience ne sont pas réduits. La procédure d'ajustement se fait selon le diagramme montré sur la Fig4-2.



**Figure 4-2** : Vue schématique de la procédure d'ajustement des monopoles.

Puisque les noyaux du début et de la fin de couche sd possèdent des structures simples et que leurs états  $1\hbar\omega$  correspondent à des excitations quasi pures p-sd et sd-pf respectivement, nous les avons traités séparément par ajustement successif des monopoles p-sd et sd-pf. Pour optimiser l'interaction, nous l'avons appliquée pour calculer les énergies des premiers états excités avec  $J^\pi = 0^-$  à  $6^-$  pour les noyaux sd  $N = Z$  et avec  $1/2^-$  à  $13/2^-$  pour

les noyaux  $N = Z + 1$ , ces états seront appelés états "tests". Les noyaux qui nous ont servi pour les modifications monopolaires sont indiqués sur la Fig4–3.



**Figure 4–3** : Charte des noyaux utilisés pour l'ajustement des monopoles p–sd et sd–pf.

La comparaison des énergies calculées de ces états avec celles connues expérimentalement permet d'ajuster les monopoles croisés  $T = 0$  et  $T = 1$  les plus importants. Ces corrections sont effectuées au vu des fonctions d'ondes que nous calculons pour chaque état test et qui nous donnent des informations sur les monopoles à faire varier pour reproduire les états en question. Les changements des monopoles ont été faits sans modifier les états  $0\hbar\omega$  de  $^{17}\text{O}$  et  $^{41}\text{Ca}$  ce qui permet de garder fixe tous les états  $0\hbar\omega$  dans tous les noyaux sd et aussi ceux des noyaux N et/ou Z égal à 21 et ce comme suit:

L'hamiltonien monopolaire de  $^{17}\text{O}$  par rapport à  $^{16}\text{O}$  s'écrit :

$$H_m(r) = \varepsilon_r + 8V_{rp_{3/2}} + 4V_{rp_{1/2}} \quad \text{avec } r = 0d_{5/2}, 1s_{1/2}, 0d_{3/2} \text{ (ou sd),}$$

ou encore :

$$H_m(r) = \varepsilon_r + 2(3V_{rp_{3/2}}^1 + V_{rp_{3/2}}^0) + (3V_{rp_{1/2}}^1 + V_{rp_{1/2}}^0).$$

Pour  $^{41}\text{Ca}$ , l'hamiltonien par rapport à  $^{16}\text{O}$  s'écrit :

$$H_m(r) = \varepsilon_r + 12V_{rd_{5/2}} + 4V_{rs_{1/2}} + 8V_{rd_{3/2}} \quad \text{avec } r = 0f_{7/2}, 1p_{3/2}, 0f_{5/2}, 1p_{1/2} \text{ (ou pf),}$$

ou encore :

$$H_m(r) = \varepsilon_r + 3(3V_{rd_{5/2}}^1 + V_{rd_{5/2}}^0) + (3V_{rs_{1/2}}^1 + V_{rs_{1/2}}^0) + 2(3V_{rd_{3/2}}^1 + V_{rd_{3/2}}^0).$$

D'après ces relations, pour ne pas modifier les états  $0\hbar\omega$  il faut que :

$$8V_{rp_{3/2}} + 4V_{rp_{1/2}} = 0, \text{ pour les monopoles p-sd ;}$$

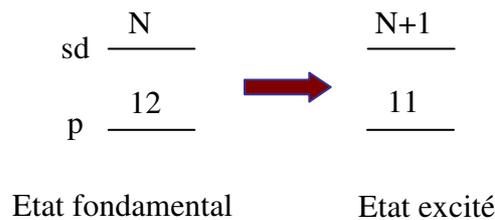
$$12V_{rd_{5/2}} + 4V_{rs_{1/2}} + 8V_{rd_{3/2}} = 0, \text{ pour les monopoles sd-pf.}$$

Pratiquement nous faisons varier ces monopoles de la façon suivante :

$$V_{sr}^0 = -3V_{sr}^1 \text{ avec sr = psd ou sdpf.}$$

Si après changement des monopoles, nous trouvons toutes les énergies d'excitation des états  $1\hbar\omega$  dans les noyaux autour de  $^{16}\text{O}$  et /ou de  $^{40}\text{Ca}$  plus élevées ou plus basses que celles expérimentales, nous pouvons les remettre à leur place en modifiant les "grands" monopoles sans changer les états  $0\hbar\omega$  comme montré dans les deux exemples ci-après :

### Cas d'une excitation p-sd



Considérons un noyau sd de masse  $A \sim 16$  possédant  $N$  ( $N = A-4$ ) nucléons de valence, l'énergie de liaison de son état fondamental ( $0\hbar\omega$ ) est  $E_L^f$ , qui peut s'écrire en fonction des grands monopoles  $V_{pp}$ ,  $V_{sdsd}$  et  $V_{psd}$  sous la forme:

$$E_L^f = 12\varepsilon_p + N\varepsilon_{sd} + \frac{12 \times 11}{2} V_{pp} + \frac{N(N-1)}{2} V_{sdsd} + 12NV_{psd}.$$

De même pour un état excité ( $1\hbar\omega$ ), son énergie de liaison  $E_L^-$  se met sous la forme :

$$E_L^- = 11\varepsilon_p + (N+1)\varepsilon_{sd} + \frac{11 \times 10}{2} V_{pp} + \frac{(N+1)N}{2} V_{sdsd} + 11(N+1)V_{psd}.$$

Son énergie d'excitation s'écrit donc :

$$E_{exc} = E_L^- - E_L^f = \varepsilon_{sd} - \varepsilon_p - 11V_{pp} + NV_{sdsd} + (11-N)V_{psd},$$

qui peut aussi se mettre sous la forme :

$$E_{exc} = E_{psd}^- = \Delta\varepsilon_{psd} - 11(V_{pp} - V_{psd}) + N(V_{sdsd} - V_{psd}).$$

### Cas d'une excitation sd -pf

|                  |                    |                     |
|------------------|--------------------|---------------------|
| pf               | ———                | 1                   |
| sd               | $\frac{N}{\quad}$  | $\frac{N-1}{\quad}$ |
|                  |                    |                     |
| p                | $\frac{12}{\quad}$ | $\frac{12}{\quad}$  |
| Etat fondamental |                    | Etat excité         |

Considérons maintenant un noyau sd de masse  $A \sim 40$  possédant  $N$  ( $N = A-4$ ) nucléons de valence, l'énergie de liaison de son état fondamental ( $0\hbar\omega$ ) est  $E_L^f$  qui peut se mettre, en fonction des grands monopoles  $V_{pp}$ ,  $V_{sdsd}$ ,  $V_{psd}$ ,  $V_{sdpf}$  et  $V_{ppf}$ , sous la forme suivante :

$$E_L^f = 12\varepsilon_p + N\varepsilon_{sd} + \frac{12 \times 11}{2}V_{pp} + \frac{N(N-1)}{2}V_{sdsd} + 12NV_{psd}.$$

De même, l'état excité ( $1\hbar\omega$ )  $E_L^-$  se met sous la forme :

$$E_L^- = 12\varepsilon_p + (N-1)\varepsilon_{sd} + \varepsilon_{pf} + \frac{12 \times 11}{2}V_{pp} + \frac{(N-1)(N-2)}{2}V_{sdsd} + 12(N-1)V_{psd} + (N-1)V_{sdpf} + 12V_{ppf}.$$

L'énergie d'excitation s'écrit donc :

$$E_{exc} = E_L^- - E_L^f = \varepsilon_{pf} - \varepsilon_{sd} - (N-1)V_{sdsd} - 12V_{psd} + (N-1)V_{sdpf} + 12V_{ppf},$$

ceci peut aussi se mettre sous le forme :

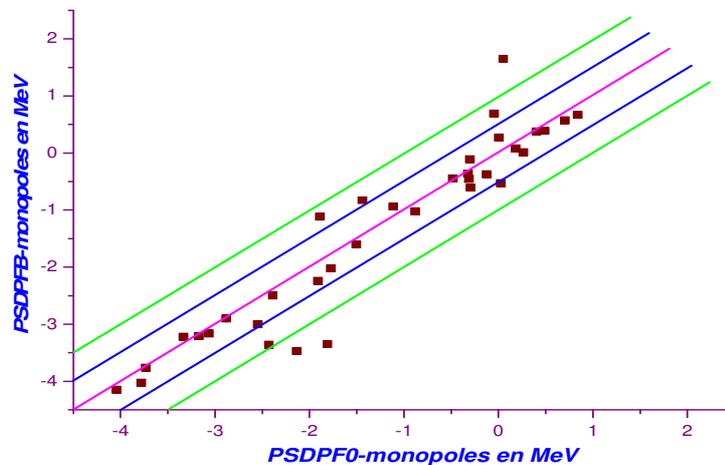
$$E_{exc} = E_{sdpf}^- = \Delta\varepsilon_{sdpf} + 12(V_{ppf} - V_{psd}) + (N-1)(V_{sdpf} - V_{sdsd}).$$

En conclusion pour les deux types d'excitation, on a :

$$\begin{cases} E_{psd}^- = \Delta\epsilon_{psd} - 11V_{pp} + (11-N)V_{psd} + NV_{sdsd} \\ E_{sdpf}^- = \Delta\epsilon_{sdpf} + 12(V_{ppf} - V_{psd}) + (N-1)(V_{sdpf} - V_{sdsd}) \end{cases} .$$

D'après ces formules, on voit que la variation des grands monopoles  $V_{psd}$  (ou  $V_{sdpf}$ ) d'une certaine quantité modifie les énergies d'excitation d'états p-sd (ou sd-pf) de tous les noyaux sd suivant leur nombre de nucléons de valence.

L'application de l'interaction après chaque ajustement des monopoles croisés pour le calcul des états tests, nous a permis de déterminer les monopoles de la nouvelle interaction appelée « PSDPFB ». Celle-ci donne de bons résultats pour les états de parité négative des noyaux du début et de la fin de couche sd. Les résultats obtenus pour les noyaux du milieu de couche sont moins bons, ceci vient du fait que dans ce cas les états ont des fonctions d'ondes "fragmentées" c'est-à-dire qu'ils peuvent être produits par plusieurs configurations avec en plus pour ces noyaux un grand nombre de nucléons de valence. Dans le tableau A-1 de l'Annexe A nous avons listé les différences  $\Delta$  entre les nouveaux monopoles p-sd et sd-pf de l'interaction PSDPFB et les anciens de l'interaction initiale PSDPF0.



**Figure 4-4** : Comparaison des monopoles des interactions PSDPFB et PSDPF0.

La Fig4-4 représente une comparaison entre les monopoles des deux interactions PSDPF0 et PSDPFB. Chaque point désigne un monopole dont l'abscisse correspond à sa valeur obtenue par l'interaction PSDPF0 et l'ordonnée à celle obtenue par l'interaction PSDPFB. Ce graphique est très pratique pour mettre en évidence les modifications apportées à l'interaction initiale. Plus un point est éloigné de la ligne centrale (en rose), plus la différence entre les deux interactions est importante. Nous remarquons qu'il y a quatre

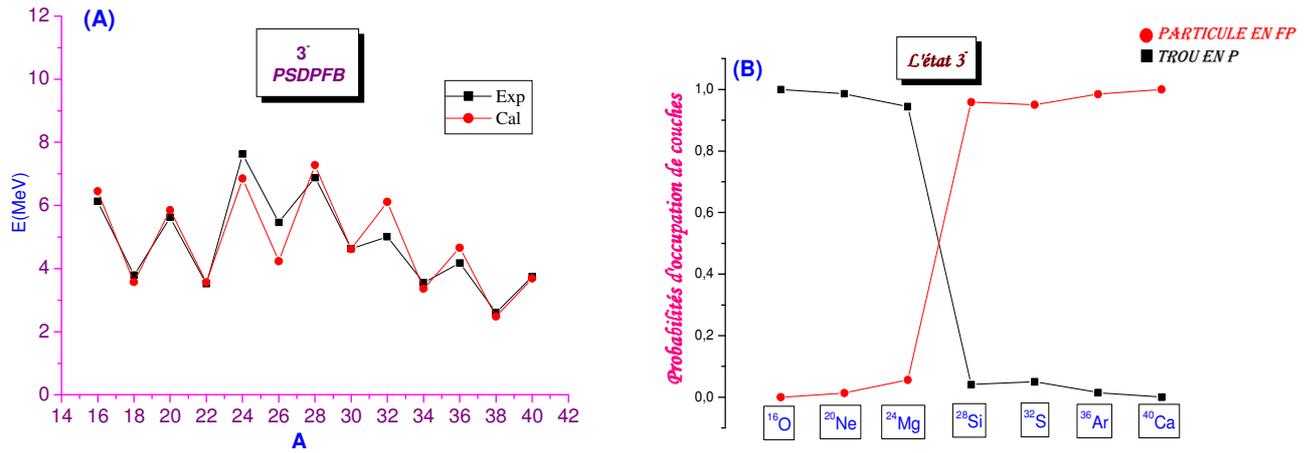
monopoles modifiés de plus de 500 keV (au delà des lignes  $\pm 500$  keV en bleu) et trois centroïdes modifiés de plus de 1 MeV (au delà des lignes  $\pm 1$  MeV en vert).

Il s'avère que ces modifications sont essentielles pour reproduire globalement l'ensemble des états  $1h\omega$  dans tous les noyaux à travers la couche sd. Il n'était pas évident de faire toutes ces modifications monopolaires dans un tel espace modèle constitué de trois couches majeures afin de décrire la spectroscopie de ces états ayant des excitations pures p–sd et sd–pf au début et à la fin de couche et des mélanges entre les deux types d'excitation au milieu de couche.

Grâce à ce travail, nous disposons maintenant d'une nouvelle interaction  $1h\omega$  qui permet pour la première fois de décrire à la fois les états de parités positive et négative dans les noyaux sd, de faire quelques prédictions pour des états de spins et/ou de parités inconnus et de confirmer certaines attributions incertaines. L'utilisation de PSDPFB pour calculer tous les états  $1p-1t$  dans tous les noyaux à travers la couche sd donne un rmsd égal à 505 keV qui est nettement inférieur à celui obtenu avec PSDPF0 ce qui donne du crédit à la nouvelle interaction PSDPFB proposée.

Le dernier chapitre de la thèse sera entièrement consacré aux applications de nos calculs de modèle en couches avec l'interaction finale PSDPF –obtenue en améliorant PSDPFB par la procédure du fit– à quelques aspects spectroscopiques des noyaux sd et de leurs états de parité négative en particulier. Dans ce paragraphe donc il ne sera donné que quelques applications ponctuelles de PSDPFB qui impliquent surtout les états tests qui ont été utilisés dans le fit "à la main" de l'interaction PSDPF0.

Comme exemple, nous montrons sur la Fig4–5 les résultats obtenus pour l'état  $3^-$  des noyaux  $N = Z$  à travers la couche. Dans la partie (A) de la figure, est présentée une comparaison entre les énergies d'excitation calculées (points en rouge) et expérimentales (points en noir) [2] pour le premier état  $3^-$  de ces noyaux. Pour les états  $3^-$  des noyaux pair–pairs  $N = Z$ , les probabilités d'occupation de couches sont données sur la partie (B) de la figure. Nous remarquons sur cette dernière, que le premier état  $3^-$  a une configuration presque pure  $p^{-1}sd^1$  (points en noir) pour les noyaux de  $^{16}\text{O}$  à  $^{24}\text{Mg}$ . Cette configuration change brusquement entre les masses 24 et 28 vers la configuration pure  $sd^{-1}pf^1$  (points en rouge) pour les noyaux  $^{28}\text{Si}$  à  $^{40}\text{Ca}$ . Nous reviendrons sur ce point par la suite mais ce qu'il faut noter ici c'est que pour  $^{28}\text{Si}$  la couche  $d_{5/2}$  est fermée et qu'il est sans doute plus "difficile" dans ce cas de former un état  $3^-$  dans ce noyau de configuration  $p_{1/2}^{-1}d_{5/2}^1$  par exemple.



**Figure 4-5 :** (A) Energies d'excitation expérimentales versus calculées pour le premier état excité  $3^-$  dans les noyaux sd  $N = Z$ . (B) Probabilités d'occupation de la couche p (trou) et de la couche pf (particule) des états  $3^-$  dans les noyaux pair-pairs.

Comme il est montré sur la Fig4-5 (A), l'état  $3^-$  est connu pour tous les noyaux  $N = Z$  de la couche sd. C'est généralement pour les noyaux pair-pairs le premier état de parité négative. Son énergie d'excitation est comprise entre 2.6 et 8.0 MeV, avec notre interaction il est prédit, en excellent accord avec l'expérience, entre 2.5 et 7.5 MeV. La variation en énergie du  $3^-$  à travers la couche, se présente sous la forme d'une variation en "dents de scie" avec des maxima pour les noyaux pair-pairs et des minima pour les impair-impairs (voir Fig4-5 (A)). Cette observation expérimentale est bien reproduite par nos calculs de modèle en couches à travers sd avec PSDPFB. Comme il sera montré tout au long de cette thèse, la région de noyaux du milieu de couche est moins bien décrite que celle du début ou de la fin de couche sd. Nous pensons que ceci provient en grande partie du fait qu'il y a une forte compétition en milieu de couche entre les deux modes d'excitation pouvant donner lieu aux états de parité négative et que, dans ces conditions, ces états sont donc particulièrement sensibles aux différentes et nombreuses composantes des fonctions d'ondes.

Par ailleurs, la version PSDPFB de notre interaction a été appliquée avec succès pour calculer les spectres en énergie des états + et - des isotones Si, S, Ar et Ca riches en neutrons avec  $N = 18$  et 20. Nos résultats sur lesquels nous reviendrons dans le dernier chapitre de notre travail, sont en bon accord avec l'expérience, spécialement pour les états  $J^\pi = 2^-$  à  $5^-$  qui sont en première approximation les membres du multiplet  $\nu d_{3/2}^{-1} \nu f_{7/2}^{-1}$ . Les résultats que nous avons obtenus ont donné lieu à deux publications [109,110] dont les textes ont été joints à l'Annexe B du présent travail.

## **1.2 Fit par la méthode des moindres carrés**

Comme il vient d'être montré, les ajustements monopolaires ont eu une grande importance dans la dérivation de l'interaction PSDPFB pour obtenir de bons accords expérience–théorie. Cependant, des corrections de la partie multipolaire de l'hamiltonien sont aussi susceptibles d'améliorer les résultats et donc de contribuer à la mise au point d'une interaction où toutes les composantes ont été optimisées.

Ces modifications ne peuvent pas être effectuées en utilisant la procédure précédente, car les termes multipolaires sont trop nombreux. Nous avons donc utilisé le programme de fit intégré dans le code Nathan par E. Caurier pour faire un ajustement des différentes composantes de l'hamiltonien par la méthode itérative des moindres carrés.

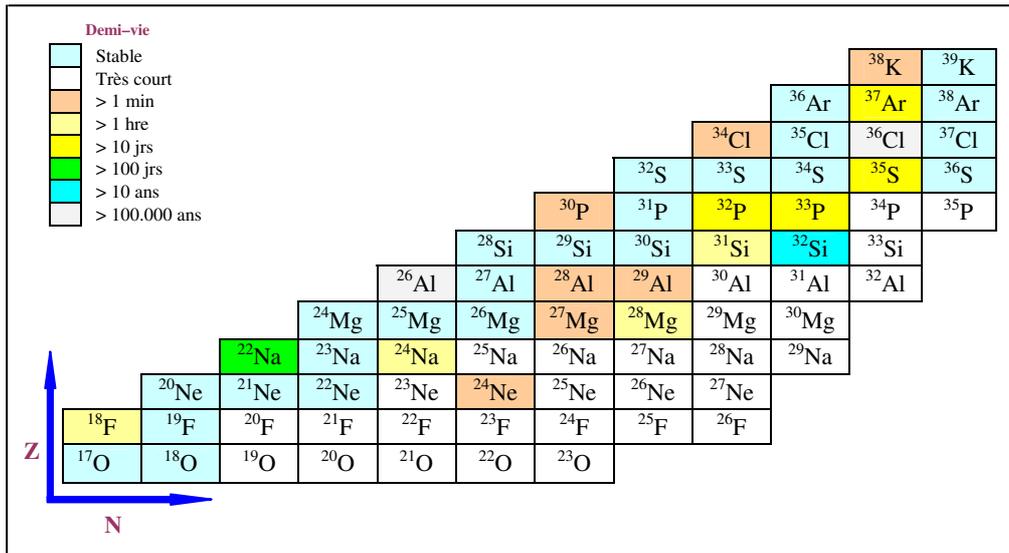
### **1.2.1 Fit des états $0\hbar\omega$**

Le calcul des énergies d'excitation des états de parité positive à travers la couche sd en utilisant PSDPFB donne quelques différences avec celles obtenues avec USDB. Ces écarts en énergie sont dus à la dépendance en densité des termes croisés p–sd, elles sont de l'ordre de 50 keV en début et fin de couche et vont jusqu'à 500 keV en milieu de couche. Nous avons donc décidé de rectifier ces différences en faisant un fit des états de parité +.

Nous disposons naturellement d'un très grand nombre d'états de parité positive connus expérimentalement dans les noyaux sd. Sur la Fig4–6, nous avons présenté l'ensemble des noyaux utilisés dans le fit, leur nombre  $N_n$  est égal à 72 et ils contiennent  $N_s = 450$  états. Nous n'avons utilisé dans le fit que les noyaux  $N \geq Z$  car dans nos calculs, la structure des noyaux miroirs (riches en protons) est la même. Malgré leur nombre, tous ces états peuvent être inclus dans le fit car les matrices correspondantes peuvent être diagonalisées en utilisant les puissants moyens de calcul actuellement disponibles. Cela implique la possibilité de varier tous les paramètres dont le nombre  $N_p$  est égal à 66. Dans ces paramètres sont compris les 3 énergies individuelles de la couche sd ( $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$ ), les 12 monopoles  $V_{sd}$  et les 51 multipoles. Remarquons aussi que le nombre d'états (450) incorporés dans le fit est très grand comparé au nombre des paramètres (66), ceci est un bon garant de la validité du fit.

Le programme de fit nous permet de choisir un certain nombre de combinaisons linéaires  $N_c$ , conditionné par  $N_s \gg N_p \gg N_c$ , pour obtenir l'interaction effective la mieux adaptée à la description de la spectroscopie des états  $0\hbar\omega$ . Ce programme nous donne aussi la

possibilité de mettre un poids sur certains états pour, d'une certaine façon, "forcer" le fit à bien les décrire.



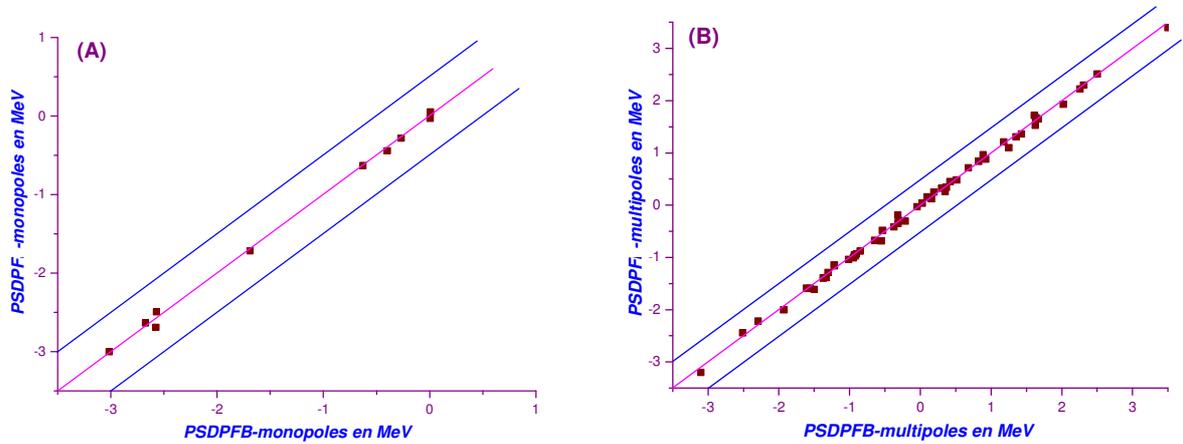
**Figure 4-6** : Charte des noyaux sd dont des états ont été introduits dans le fit des états  $0\hbar\omega$ .

Le but de la procédure étant de minimiser le  $\chi^2$ , le nombre de combinaisons linéaires choisi est celui qui donne non seulement le  $\chi^2$  le plus petit mais aussi pour lequel la différence entre les anciens et les nouveaux paramètres, surtout concernant les multipoles, ne sera pas trop grande pour ne pas s'éloigner des éléments de matrice de l'interaction initiale USDB. Il ne s'agit pas ici de reconstruire USDB mais de lisser les différences apparues en introduisant la dépendance en densité des éléments de matrice p-sd.

A chaque passage de la procédure de fit, nous examinons plus particulièrement les états importants qui ne sont pas bien reproduits et nous les affectons d'un poids supérieur à celui donné aux autres états. Ceci est le cas pour les états  $1/2^+$  ( $\nu_{s_{1/2}}$ ) et  $3/2^+$  ( $\nu_{d_{3/2}}$ ) de  $^{17}\text{O}$  puisque ce sont ces deux états qui déterminent les énergies individuelles de la couche sd, dans le cas bien sûr où l'énergie du fondamental  $5/2^+$  ( $\nu_{d_{5/2}}$ ) est fixée.

L'interaction qui donne les meilleurs résultats pour l'ensemble des états  $0\hbar\omega$  à travers la couche sd est obtenue en faisant varier 30 combinaisons linéaires de paramètres, le  $\chi^2$  résultant est de 157 keV. Les énergies individuelles des orbitales  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$  obtenues lors du fit sont respectivement de 2.648 et 8.011 MeV. Ces nouvelles valeurs sont proches de celles obtenues avec l'interaction PSDPFB. Le  $\chi^2$  calculé en prenant l'interaction USDB dans les mêmes conditions que celles utilisées dans notre fit sd-sd vaut 149 keV, soit une différence non significative de 8 keV entre la nouvelle interaction PSDPF et USDB.

Pour les états  $0\hbar\omega$ , les différences entre les paramètres (monopoles et multipoles) de PSDPFB (ou USDB) et de la nouvelle interaction PSDPF sont données dans les Tableaux A-2 et A-3 (voir Annexe A). Ces différences  $\Delta$  sont représentées sur les Fig4-7 (A et B).



**Figure 4-7** : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) sd-sd des interactions PSDPF et PSDPFB (voir texte pour plus de détails).

Nous remarquons que les corrections apportées à l'interaction PSDPFB sont petites et nettement inférieures à 500 keV (lignes en bleu) ce qui veut dire que les nouveaux paramètres sont proches de ceux de l'interaction USDB. Les états  $0\hbar\omega$  des noyaux sd sont bien décrits en utilisant l'interaction PSDPF, ceci peut se voir dans l'Annexe C où sont comparés les résultats de nos calculs avec les données expérimentales.

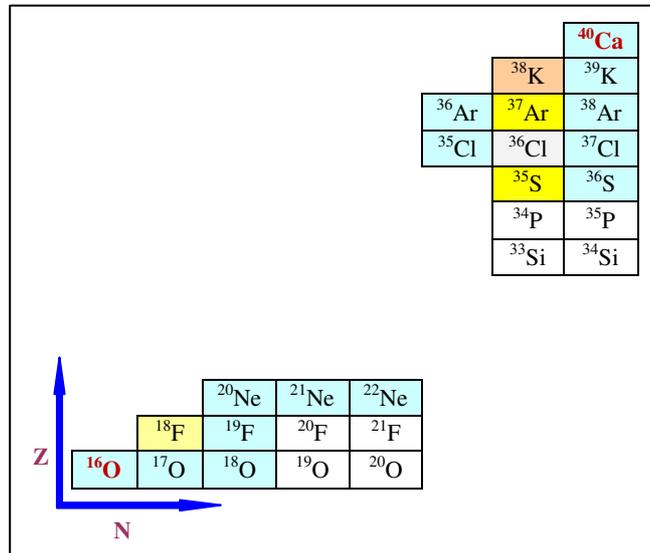
Le travail qui vient d'être décrit, peut être résumé de la façon qui suit. Nous avons déterminé une interaction de départ PSDPF0 à qui nous avons apporté des ajustements des monopoles croisés responsables des excitations  $1\hbar\omega$ , l'interaction obtenue appelée PSDPFB ne reproduit pas trop bien certains états  $0\hbar\omega$ , nous avons donc fait un ajustement léger par la méthode du moindre carrés des paramètres sd-sd dans le but d'obtenir des résultats proches de ceux de USDB, l'interaction obtenue est appelée PSDPF. Notons que cette dernière est simplement l'interaction PSDPFB pour laquelle nous avons ajusté les termes sd-sd. Il reste maintenant à réaliser un autre fit des parties essentielles p-sd et sd-pf pour améliorer les résultats des états  $1p-1t$ . Ceci constitue la dernière étape de la construction de notre interaction PSDPF. Nous allons détailler cette étape dans le paragraphe suivant.

### 1.2.2 Fit des états $1\hbar\omega$

Afin d'effectuer le fit des états  $1\hbar\omega$ , nous avons modifié tous les paramètres possibles : énergies individuelles, monopoles et multipoles croisés de l'interaction PSDPF. Les matrices à diagonaliser dans ce cas sont très grandes surtout pour les états intrus dans les noyaux sd du milieu de couche, car l'espace complet  $1\hbar\omega$  contient trois couches majeures p, sd et pf. Dans ces conditions, il a été impossible d'inclure dans le fit des états de parité – de tous les noyaux sd comme dans le cas du fit des états de parité + discuté précédemment.

#### A. Noyaux introduits dans le fit

Nous avons dans un premier temps fait des calculs 'tests' pour les isotopes des noyaux sd O à Na (début de couche), puis Si à Ca (fin de couche). Dans le fit, seuls ont été pris en considération les premiers états  $1\hbar\omega$  de chaque spin connus expérimentalement. Il se trouve que le programme de fit ne peut pas traiter le cas des noyaux sd où la taille des matrices devient trop grande. Par conséquent, aucun noyau entre  $Z = 10$  ( $A = 22$ ) et  $Z = 14$  ( $A = 33$ ) n'a pu être introduit dans le fit, tous les noyaux qui ont été inclus sont donnés sur la Fig4–8.

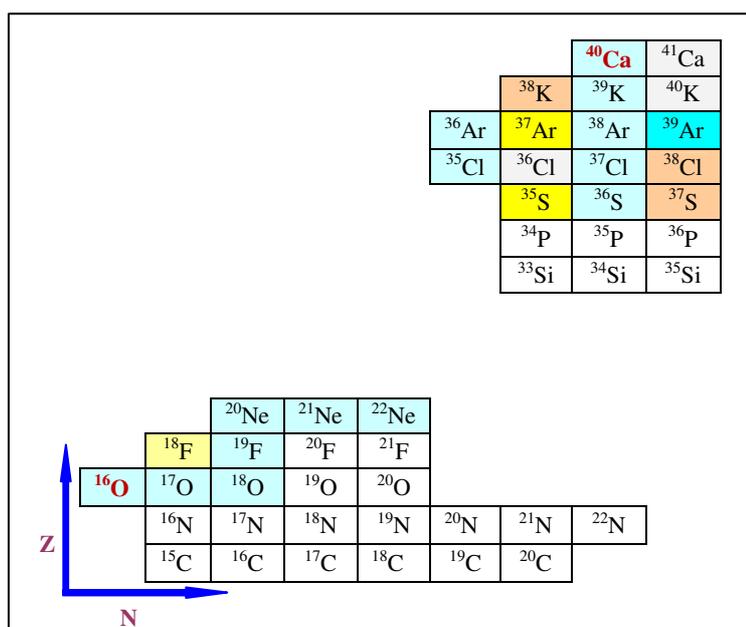


**Figure 4–8** : Charte des noyaux sd introduits dans le fit des états  $1\hbar\omega$ .

Donnons quelques chiffres concernant la taille des matrices. Pour le début de couche, la dimension de matrice la plus grande traitée par le fit est celle du  $3^-$  dans  $^{22}\text{Ne}$  qui vaut 28497, dans le cas de  $^{22}\text{Na}$  cette dimension maximum est atteinte pour le  $2^-$  et vaut 34464.

Ceci sont les cas limites, pour les autres noyaux mentionnés précédemment les dimensions sont trop grandes. Concernant la fin de couche, la dimension la plus grande traitée par le fit est celle relative au  $7/2^-$  du noyau  $^{35}\text{Cl}$  qui vaut 30798, au-delà de cette valeur le programme de fit est interrompu.

Suite à ces limitations, nous remarquons sur la Fig4–8, que nous avons deux groupes de noyaux qui rentrent dans le fit : le premier contient 12 noyaux sd du début de couche, le second comprend 15 noyaux sd de la fin de couche. Dans le fit, ces deux groupes ont été traités séparément pour les raisons données précédemment. Nous avons ajouté au groupe de fin de couche les isotones  $N = 21$  (1 neutron dans pf) du  $^{35}\text{Si}$  au  $^{41}\text{Ca}$ . En effet, les états  $0h\omega$  de ces isotones sont importants pour fixer les énergies individuelles de la couche pf et déterminer ainsi l'évolution de l'interaction sd–pf avec l'ajout de proton à partir de  $^{35}\text{Si}$ . Les états pris en compte pour les isotones  $N = 21$  de  $^{35}\text{Si}$  au  $^{41}\text{Ca}$  sont ceux discutés dans la Ref [91].



**Figure 4–9** : Charte de tous les noyaux introduits dans le fit des états  $1h\omega$ .

De même, pour les noyaux de début de couche, nous avons ajouté les états des isotopes riches en neutrons du Carbone, soit  $^{15-20}\text{C}$ , et de l'Azote, soit  $^{16-22}\text{N}$ . Les états  $0h\omega$  de ces noyaux nous fournissent des informations sur les caractéristiques de l'interaction p–sd en fonction du nombre de neutrons dans sd. La charte des noyaux introduits dans les fits de début et de fin de couche est montrée sur la Fig4–9. Les deux fits ont été réalisés séparément, puisque les analyses précédentes ont montré que pour les états de parité – les excitations sont

de type  $p^{-1}$  en début de couche et de type  $sd^{-1}$  en fin de couche. Pour les noyaux pris en compte, on peut donc considérer deux régions de fit indépendantes ce qui naturellement réduit la complexité du problème.

Comme il a été fait pour le fit des états  $0\hbar\omega$ , nous avons modifié pour les états  $1\hbar\omega$  tous les paramètres qui rentrent dans le fit, c'est-à-dire les énergies individuelles, les monopoles et les multipoles.

## **B. Procédure de fit**

Lors de l'ajustement des monopoles pour obtenir l'interaction PSDPFB, nous avons remarqué que les états  $1\hbar\omega$  des noyaux du début et de la fin de couche dépendent essentiellement des excitations  $p_{1/2}$  vers  $d_{5/2}$  ou  $s_{1/2}$  et des excitations  $s_{1/2}$  ou  $d_{3/2}$  vers  $f_{7/2}$  ou  $p_{3/2}$ , respectivement. Par conséquent, nous ne prenons en compte dans les deux fits que les paramètres qui correspondent à ces excitations ce qui permet de réduire leur nombre, comme nous allons l'expliquer maintenant.

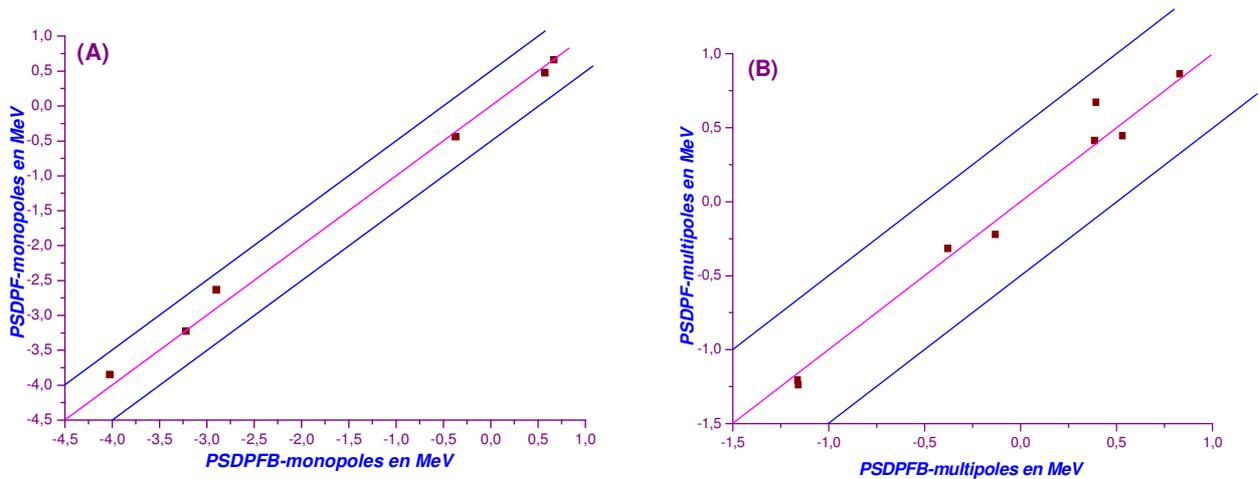
### ***Début de couche***

Les 25 noyaux qui rentrent dans le fit du début de couche comprennent au total 111 états. Le nombre total de paramètres  $p$ - $sd$  (5 couches) est de 89 dont 9 énergies individuelles, 12 monopoles  $V_{psd}$  et 68 multipoles. Ce nombre est très proche du nombre d'états, il doit donc être réduit en introduisant les conditions suivantes : les états  $0\hbar\omega$  doivent être préservés et ceci se fait en modifiant de la même quantité les énergies individuelles ainsi que les monopoles  $p$ - $sd$ , ce qui réduit en premier lieu, le nombre de paramètres d'énergies individuelles de 9 à 1. Les énergies individuelles des couches majeures  $p$  et  $pf$  restent constantes lors du fit. Puisque pour les noyaux de début de couche, seules les excitations  $p_{1/2}$  vers  $d_{5/2}$  ou  $s_{1/2}$  sont importantes, nous avons uniquement fait varier les paramètres correspondants. De cette façon, nous avons réussi à diminuer le nombre de paramètres de 89 à 8 dont 1 pour les énergies individuelles, 3 pour les monopoles et 4 pour les multipoles. Ceci nous permet de faire jusqu'à 7 combinaisons linéaires.

Pour l'ensemble des noyaux du début de couche (voir Fig4-9), les résultats sont en bon accord avec les données expérimentales. Pour les isotopes C et N, les isotones  $N = 9$   $^{15}\text{C}$  et  $^{16}\text{N}$  sont les plus importants, ils sont bien reproduits. Il est à noter que l'état  $5/2^+$  du  $^{15}\text{C}$  joue un rôle majeur pour réduire le  $\chi^2$ . Pour les autres isotopes C et N plus riches en neutrons,

l'accord est moins bon mais ces noyaux avec  $Z = 6$  et  $7$  ne rentrent pas dans l'espace de phase sd et devront être traités dans un autre cadre que celui de la thèse.

Le meilleur fit est obtenu avec 7 combinaisons linéaires et ceci avec un  $\chi^2$  de 228 keV. Nous avons ensuite utilisé l'interaction obtenue pour faire un fit en introduisant les paramètres  $p_{3/2}$  et  $d_{3/2}$ , sans modifier les paramètres  $p_{1/2}$ –( $d_{5/2}$ ,  $s_{1/2}$ ) et les énergies individuelles. Le  $\chi^2$  n'est pas meilleur et ces paramètres restent quasiment constants, ceci confirme que ces couches ont peu d'influence sur les états intrus des noyaux sd proches de  $^{16}\text{O}$  du moins à relativement basse énergie d'excitation.



**Figure 4–10** : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) p–sd des interactions PSDPF et PSDPFB.

Nous présentons sur la Fig4–10, la comparaison entre les monopoles et les multipoles p–sd des interactions PSDPF (finale) et PSDPFB. Les valeurs des différences  $\Delta$  entre ces paramètres sont listées dans les Tableaux A–4 et A–5 de l'Annexe A.

Nous remarquons que les corrections apportées à l'interaction PSDPFB suite au fit des paramètres p–sd sont inférieures à 500 keV (lignes en bleu). Ce résultat découle partiellement du fait que nous ne pouvions inclure dans le fit que 12 noyaux sd qui étaient déjà bien décrits par PSDPFB. Les nouvelles énergies individuelles des couches  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  et  $0d_{3/2}$  sont égales à 4.945, 2.334 et 7.698 MeV, respectivement.

### *Fin de couche*

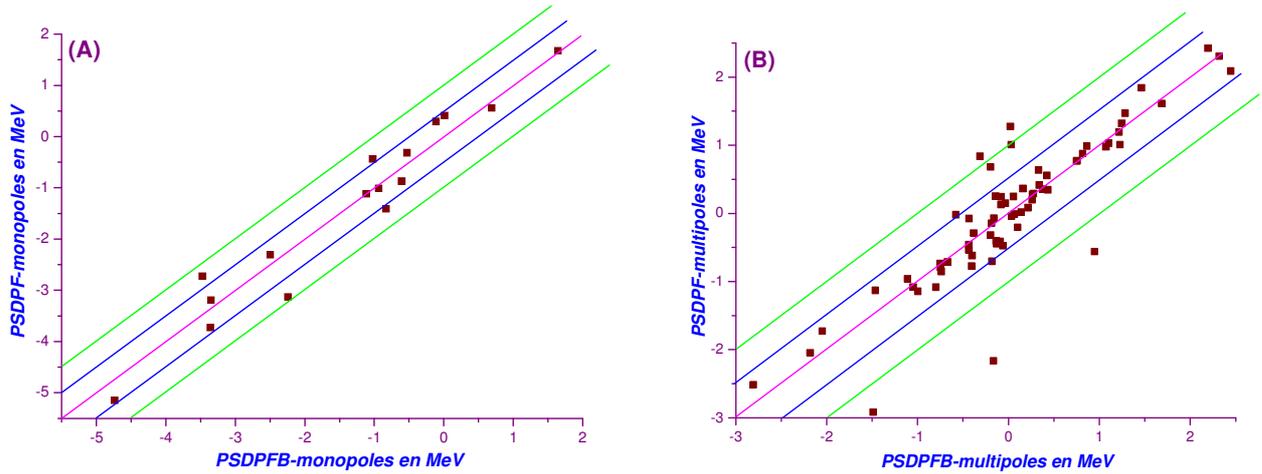
Nous avons pu introduire dans le fit des noyaux de la fin de couche sd 15 noyaux sd et 7 isotones  $N = 21$ . Le nombre total d'états correspondants à inclure est de 109.

Le nombre total de paramètres sd–pf (7 couches) est de 349 dont 9 énergies individuelles, 24 monopoles  $V_{sd-pf}$  et 316 multipoles. Ce nombre étant très grand comparé à celui des états, un fit réaliste n'est naturellement pas possible dans ce cas. Le nombre de paramètres peut être réduit en appliquant les mêmes considérations que pour le fit de début de couche. Comme, les états  $0\hbar\omega$  du  $^{41}\text{Ca}$  ne doivent pas être affectés par le fit, les énergies individuelles et les monopoles sd–pf doivent être modifiés de la même quantité en conservant, bien sûr, les énergies individuelles des couches p et sd. D'autres part, seuls les multipoles  $(s_{1/2}, d_{3/2}) - (f_{7/2}, p_{3/2})$  ont été modifiés. Dans ces conditions, le nombre de paramètres peut être réduit à 33 et le nombre de combinaisons linéaires peut aller jusqu'à 20.

Nous avons obtenu l'interaction PSDPF finale avec 10 combinaisons linéaires, le  $\chi^2$  résultant vaut 149 keV et les nouvelles valeurs des énergies individuelles des couches  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  et  $1p_{1/2}$  sont 15.310, 16.010, 18.810 et 15.910 MeV, respectivement. Comme nous l'avons fait pour le début de couche, nous avons conservé les énergies individuelles et les paramètres  $(s_{1/2}, d_{3/2}) - (f_{7/2}, p_{3/2})$ , nous avons utilisé l'interaction obtenue du fit de fin de couche pour refaire un autre fit en modifiant cette fois-ci les autres paramètres  $(s_{1/2}, d_{3/2}) - (f_{5/2}, p_{1/2})$  et  $d_{5/2} - pf$  pour améliorer les résultats, mais le  $\chi^2$  reste pratiquement inchangé et les variations des paramètres sont petites.

Les monopoles et multipoles sd–pf obtenus après fit sont comparés avec ceux de l'interaction PSDPFB sur la Fig4–11. Les valeurs des différences  $\Delta$  entre les paramètres des deux interactions sont listées dans les Tableaux A–6 et A–7 de l'Annexe A.

Sur la Fig4–11, nous remarquons que les corrections des termes monopolaires et multipolaires sd–pf sont importantes, jusqu'à  $\sim 2$  MeV d'écart ou même plus pour les multipoles. Ces modifications sont certainement plus grandes que celle obtenues pour les termes p–sd. En fait, le fit est plus sensible en fin de couche qu'en début de couche. Seuls 3 groupes d'isotopes avec  $Z = 8, 9$  et  $10$  ont pu être introduits tandis que pour le fit de fin de couche, nous avons pu inclure 7 groupes d'isotopes avec  $Z = 14$  à  $20$ . Nous avons utilisé l'interaction PSDPF pour calculer les rmsd des états  $1\hbar\omega$  dans les noyaux de début et de fin de couche pris en compte dans le fit, ces rmsd valent 374 et 277 keV, respectivement, soit un écart de 100 keV qui reflète bien la différence de flexibilité des deux fits du début et de la fin de couche.



**Figure 4–11** : Comparaison des monopoles (A) et des multipoles (B) sd–pf des interactions PSDPF et PSDPFB.

## **2. Evolution de l'interaction PSDPF**

Dans le dernier paragraphe de ce chapitre, nous souhaitons passer en revue les grandes étapes qui nous ont permis de construire l'interaction finale PSDPF qui sera donc utilisée pour les applications présentes et à venir.

La mise au point de l'interaction PSDPF est passée par trois grandes étapes :

1. La construction de l'interaction initiale PSDPF0 en utilisant différentes interactions de départ citées dans la littérature et en ajustant les énergies individuelles des couches majeures sd et pf.

2. L'ajustement des monopoles croisés p–sd et sd–pf responsables des excitations  $1\hbar\omega$  pour reproduire les états intrus de parité négative des noyaux sd. L'interaction résultante est nommée PSDPFB.

3. L'amélioration des résultats de PSDPFB grâce à une procédure du fit pour obtenir la version finale de l'interaction. Dans le fit, nous avons modifié les monopoles et les multipoles p–sd et sd–pf, en plus des énergies individuelles. Les termes sd–sd ont été légèrement ajustés en faisant un fit des états  $0\hbar\omega$  pour corriger les écarts en énergie entre les résultats de PSDPFB et USDB résultants d'une dépendance en densité de tous les éléments de matrice de l'interaction PSDPF0.

Nous présentons sur le Tableau 4–1 la comparaison entre les énergies individuelles des interactions PSDPF et PSDPFB (PSDPF0). Les modifications apportées à ces énergies sont faibles, allant de 10 keV pour la couche  $1p_{3/2}$  à 390 keV pour la couche  $0f_{7/2}$ .

|        | $0d_{5/2}$ | $1s_{1/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0f_{5/2}$ | $1p_{1/2}$ |
|--------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| PSDPFB | 5.259      | 2.577      | 8.065      | 15.7       | 16.0       | 18.6       | 16.2       |
| PSDPF  | 4.945      | 2.334      | 7.698      | 15.310     | 16.010     | 18.810     | 15.910     |

**Tableau 4–1:** Comparaison des énergies individuelles (en MeV) des interactions PSDPFB et PSDPF.

Nous avons utilisé ces différentes interactions ainsi que l'interaction USDB pour calculer les énergies d'excitation de 475 états de parité positive et 409 états de parité négative connus expérimentalement dans les noyaux sd. Pour ces interactions, les valeurs de rmsd pour ces états  $0$  et  $1 \hbar\omega$  sont comparées dans le Tableau 4–2.

|                | PSDPF0 | PSDPFB | PSDPF | USDB |
|----------------|--------|--------|-------|------|
| $0\hbar\omega$ | 240    | 240    | 145   | 151  |
| $1\hbar\omega$ | 912    | 505    | 407   |      |

**Tableau 4–2:** Comparaison des rmsd (en keV) calculés en utilisant les quatre interactions pour les états  $0$  et  $1 \hbar\omega$  des noyaux sd.

Nous avons aussi calculé les rmsd avec les mêmes interactions, mais seulement pour les noyaux qui ne rentrent pas dans le fit des états  $1\hbar\omega$ . Ces noyaux comportent 306 états  $0p-0t$  et 185 états  $1p-1t$ . Les résultats sont montrés dans le Tableau 4–3.

|                | PSDPF0 | PSDPFB | PSDPF | USDB |
|----------------|--------|--------|-------|------|
| $0\hbar\omega$ | 266    | 266    | 144   | 120  |
| $1\hbar\omega$ | 847    | 592    | 488   |      |

**Tableau 4–3:** Comparaison des rmsd (en keV) calculés pour les noyaux sd qui ne rentrent pas dans le fit " $1\hbar\omega$ " des états  $0$  et  $1 \hbar\omega$  en utilisant les quatre interactions.

Le rmsd est amélioré en allant de PSDPF0 à PSDPF pour les états  $0\hbar\omega$  ainsi que pour les états  $1\hbar\omega$ . Nous remarquons aussi que les rmsd des états  $0\hbar\omega$  obtenus avec les différentes interactions sont nettement meilleurs que ceux des  $1\hbar\omega$ . Nous pouvons partiellement expliquer ceci par le fait de pouvoir inclure dans le fit des états de parité + 450 états des noyaux sd dont 306 au milieu de couche, chose qui n'est pas possible pour le fit des états de parité - à cause de leurs dimensions matricielles. En plus, les états + se traitent dans un espace  $0\hbar\omega$  simple formé d'une seule couche majeure "sd", ce qui n'est pas le cas pour les états - où l'espace de phase  $1\hbar\omega$  est plus complexe parce qu'il est constitué de trois couches majeures différentes "p, sd et pf". Notons ici, que pour toutes les interactions construites à ce jour pour la couche sd aucune ne comprenait un espace composé de trois couches majeures.

Le rmsd calculé avec l'interaction finale PSDPF ne dépasse pas les 500 keV dans les deux cas  $1\hbar\omega$  traités, ceci démontre le bien fondé de notre nouvelle interaction effective dans l'espace composé de trois couches majeures p-sd-pf. Cette interaction peut être utilisée maintenant pour décrire la spectroscopie de l'ensemble des noyaux sd en calculant non seulement les spectres en énergies des états de parité + et - mais aussi les transitions électromagnétiques de ces états. Les résultats obtenus peuvent ainsi être confrontés à l'ensemble des données expérimentales existantes et servir aussi de prédictions théoriques pour des états dont les propriétés spectroscopiques n'ont pas encore été mesurées.

En résumé, notre PSDPF décrit de façon consistante les états de parités positive et négative dans les noyaux de la couche sd. Cette interaction n'est pas seulement utilisée pour calculer les spectres en énergie des états + et - à travers la couche sd, mais aussi pour décrire les propriétés électromagnétiques telles que les probabilités de TEM entre ces états et pour prédire des états de spin et parité inconnus en comparant les spectres calculé et expérimental du noyau choisi. Les attributions des spins et parités pour les états inconnus seront aussi basées sur les schémas de désexcitation ainsi que sur des probabilités de TEM et des durées de vie.

Nous allons présenter et discuter dans le prochain chapitre quelques cas d'états  $1\hbar\omega$  dans les noyaux sd à travers la couche. Nous essaieront de faire quelques prédictions pour les états de spin et/ ou de parité inconnus dans certains de ces noyaux. Nous discuterons également des spectres en énergie et des TEM dans quelques noyaux riches en neutrons.

## Chapitre 5

### Résultats et prédictions

Après validation de l'interaction PSDPF à partir des tests effectués sur des noyaux sd proches de la ligne de stabilité donc bien connus, PSDPF a été utilisée pour calculer les spectres en énergie des états de parités positive et négative de l'ensemble des noyaux. Pour les noyaux où les états  $1p-1t$  n'ont pas encore été observés, les états  $1h\omega$  calculés serviront de prédictions pour des études expérimentales futures. Les résultats des calculs sont listés dans l'Annexe C et comparés aux données expérimentales quand elles existent.

Nous avons aussi utilisé PSDPF pour différentes applications. L'interaction a été utilisée pour calculer les gaps en énergie  $p_{1/2}-d_{5/2}$  dans  $^{16}\text{O}$  et  $d_{3/2}-f_{7/2}$  dans  $^{40}\text{Ca}$ . Les résultats obtenus pour les états tests dans les noyaux avec  $N = Z$  et  $Z + 1$  à travers la couche sd seront également discutés. Les états  $0^-$  sont des états exotiques dont très peu sont connus expérimentalement. Pour les noyaux  $N = Z$ ,  $Z + 2$  et  $Z + 4$ , une systématique des premiers états  $0^-$  prévus à basse énergie d'excitation sera présentée. Elle a été comparée à l'expérience et a permis dans certains cas des attributions  $J^\pi = 0^-$ . Nous avons aussi utilisé PSDPF pour calculer et comparer à l'expérience les spectres des états de parité négative et de spin  $J = 2$  à  $5$  dans les isotones de fin de couche pair-pairs avec  $N = 20$  dont la configuration dominante supposée est  $vd_{3/2}-vf_{7/2}$ .

La valeur d'une interaction se juge, dans une comparaison expérience-théorie, non seulement sur les spectres en énergie obtenus mais aussi sur les TEM entre états liés. Pour tester les fonctions d'ondes, nous avons donc calculé et comparé à l'expérience les TEM de type E2 et E3 des premiers états  $2^+$  et  $3^-$  dans les noyaux sd avec  $N = Z$  et  $Z + 2$  à travers la couche.

Une autre application de l'interaction qui sera discutée dans ce chapitre est la comparaison expérience-théorie du spectre en énergie et des TEM du noyau magique riche en neutrons  $^{36}\text{S}$ .

## 1. Gap en énergie

Le calcul du gap en énergie des noyaux aux deux extrémités de sd  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$  est un bon test de la validité de PSDPF et donne de l'information supplémentaire sur les propriétés des noyaux doublement magiques [63]. Les gaps en énergie des couches proton et neutron peuvent être calculés en utilisant les formules :

$$G_p = 2BE(Z, N) - BE(Z + 1, N) - BE(Z - 1, N)$$

$$G_n = 2BE(Z, N) - BE(Z, N + 1) - BE(Z, N - 1)$$

Puisque dans nos calculs, nous ne prenons pas en compte l'énergie de Coulomb, les énergies de liaison des noyaux miroirs  ${}_Z X_{N+1}$  et  ${}_{Z+1} Y_N$  sont identiques et  $G_p = G_n = G$ . Nous avons calculé les gaps en énergie pour  $^{16}\text{O}$  ( $p_{1/2}$ - $d_{5/2}$ ) et  $^{40}\text{Ca}$  ( $d_{3/2}$ - $f_{7/2}$ ) en utilisant PSDPF :

- Cas de  $^{16}\text{O}$

$$G = 2BE(8, 8) - BE(8, 9) - BE(8, 7)$$

$$G = 2(118.7) - 121.84 - 104.3 = 11.26 \text{ MeV}$$

La valeur du gap obtenue est très proche de celle des gaps expérimentaux proton et neutron qui sont égaux et valent 11.5 MeV.

- Cas de  $^{40}\text{Ca}$

$$G = 2BE(20, 20) - BE(20, 21) - BE(20, 19)$$

$$G = 2(352.14) - 358.19 - 338.85 = 7.24 \text{ MeV}$$

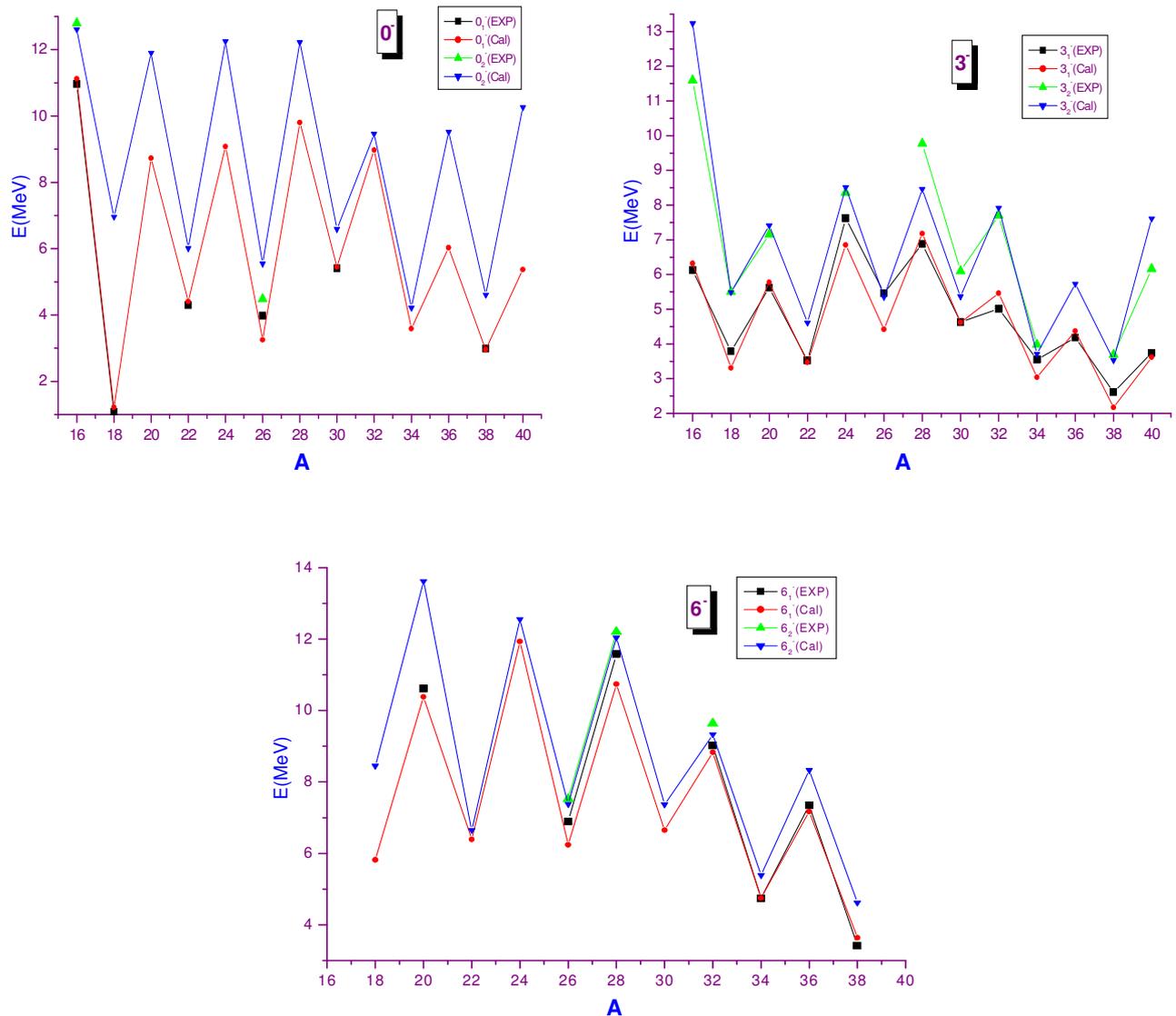
Les gaps expérimentaux des couches proton et neutron pour le  $^{40}\text{Ca}$  sont 7.2 et 7.3 MeV, respectivement.

L'interaction PSDPF reproduit donc parfaitement les gaps en énergies  $p_{1/2}$ - $d_{5/2}$  et  $d_{3/2}$ - $f_{7/2}$  des noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ .

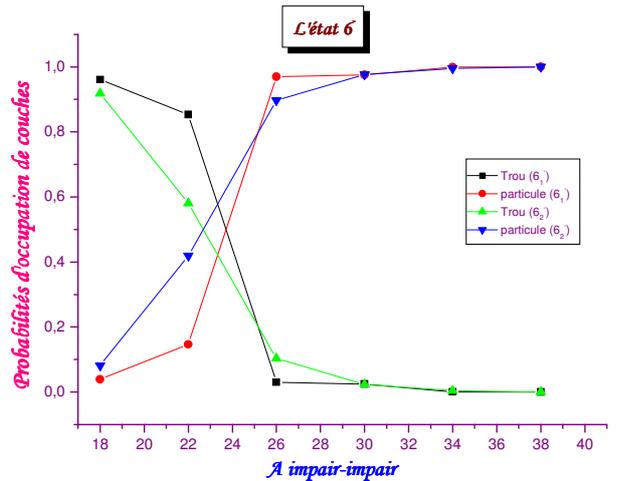
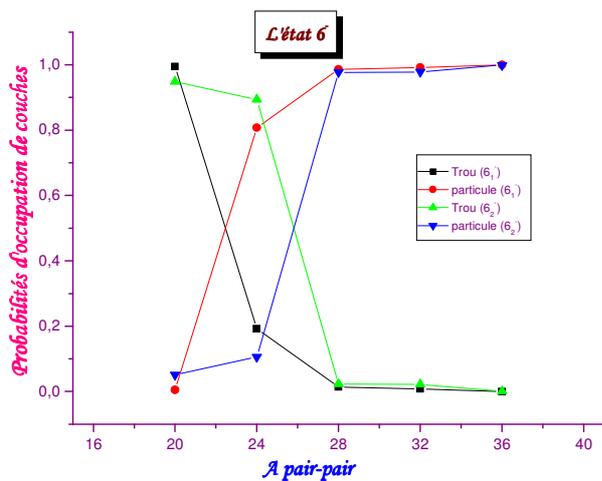
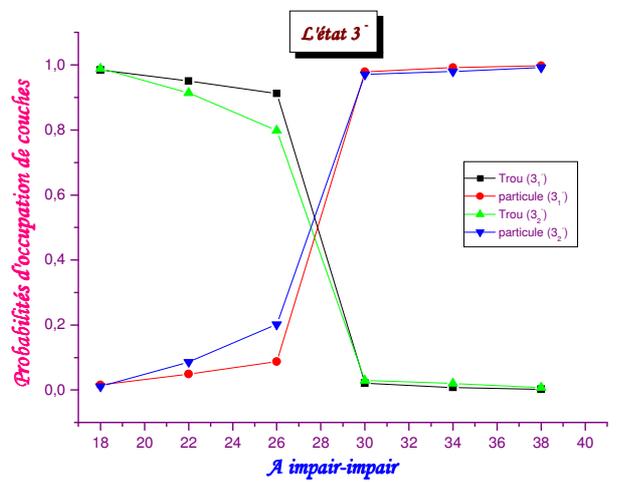
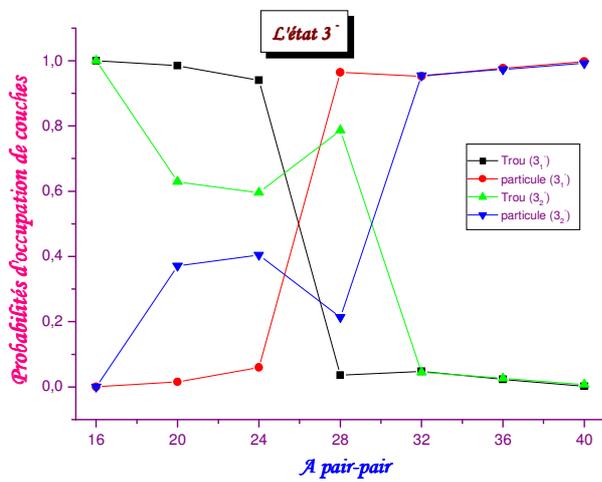
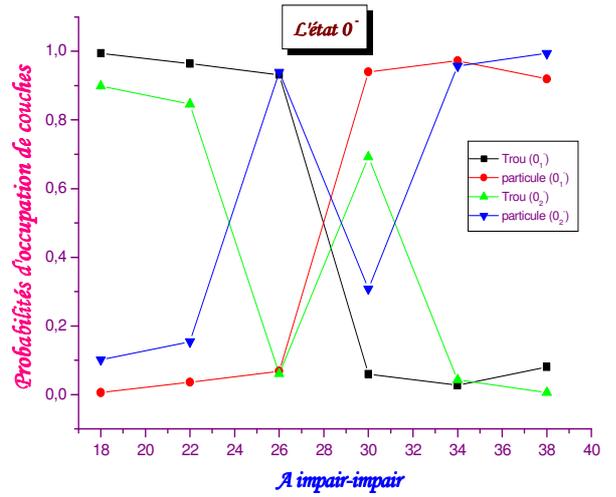
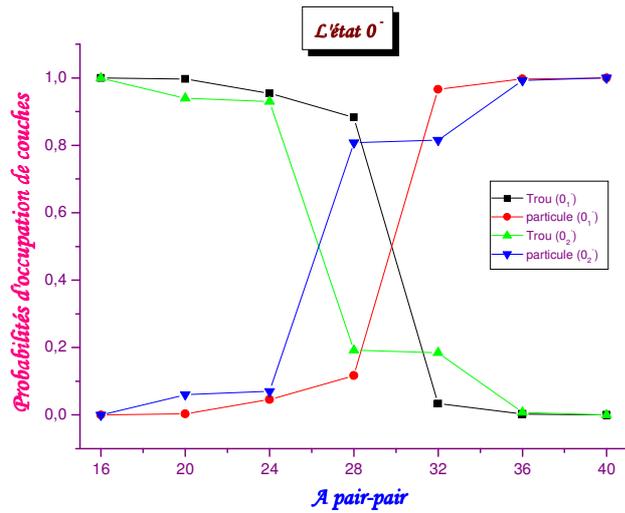
## 2. Les états tests dans les noyaux $N = Z$ et $N = Z + 1$

Les états tests, qui nous ont servis lors des ajustements monopolaires, ont été calculés et comparés à l'expérience en utilisant l'interaction PSDPF. Nous allons discuter dans ce paragraphe les deux premiers états intrus avec  $J = 0, 3$  et  $6$  dans les noyaux  $N = Z$  et les premiers états intrus avec  $J = 1/2, 5/2$  et  $11/2$  dans les noyaux  $N = Z + 1$ .

Nous présentons sur la Fig5–1, la comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales [2] et calculées avec PSDPF des états intrus de spins 0, 3 et 6 dans les noyaux  $N = Z$  à travers la couche sd. Notons que les énergies expérimentales et calculées des premiers états de chaque spin sont indiquées en noir et en rouge, et celles des deuxièmes états en vert et en bleu, respectivement. Nous montrons sur la Fig5–2, leurs probabilités d'occupation de couches dans les noyaux pair–pairs et impair–impairs. Pour ces états, les résultats obtenus seront discutés cas par cas.



**Figure 5–1:** Energies d'excitation expérimentales versus calculées avec PSDPF des deux premiers états intrus avec  $J = 0, 3$  et  $6$  dans les noyaux sd avec  $N = Z$ .



**Figure 5–2:** Probabilités d'occupation de la couche p (trou) et de la couche pf (particule) des deux premiers états intrus avec  $J = 0, 3$  et  $6$  dans les noyaux sd avec  $N = Z$  pair–pairs (à gauche) et impair–impairs (à droite).

### Les états $0^-$

Contrairement aux pair-pairs, le premier  $0^-$  est connu dans plusieurs noyaux impair-impairs avec  $N = Z$ . Il se situe à relativement basse énergie d'excitation entre 1.1 MeV dans le  $^{18}\text{F}$  et 5.4 MeV dans le  $^{30}\text{P}$ . L'interaction PSDPF décrit très bien cet état dans tous les cas. En ce qui concerne les noyaux pair-pairs, cet état est prédit à une énergie élevée au-delà de 8 MeV pour  $A < 32$ . Il est connu expérimentalement seulement dans  $^{16}\text{O}$  à  $E = 11.0$  MeV et il est bien reproduit par notre interaction. A partir du  $^{32}\text{S}$ , le calcul prédit que l'énergie de cet état décroît et que sa configuration (voir Fig5-2) change brutalement de trou p vers une configuration pure du type  $sd^{-1}pf^1$ .

Le deuxième  $0^-$  ( $0^-_2$  dans Fig5-1) est connu seulement dans  $^{16}\text{O}$  et  $^{26}\text{Al}$ , dans ce dernier cas, il y a une différence expérience-théorie de l'ordre de 1 MeV. Comme il sera dit à plusieurs reprises par la suite, ce noyau se situe au milieu de sd où les écarts expérience-théorie sont souvent plus importants qu'en début ou fin de couche. La variation de l'énergie d'excitation du  $0^-_2$  à travers sd est très semblable à celle de  $0^-_1$ . Plus loin dans ce chapitre dédié aux applications de PSDPF, nous présenterons une discussion détaillée sur les propriétés du  $0^-_1$  non seulement dans les noyaux  $N = Z$ , mais aussi dans ceux avec  $N = Z + 2$  et  $Z + 4$ .

### Les états $3^-$

Le premier  $3^-$  est connu dans tous les noyaux sd avec  $N = Z$ , son énergie d'excitation est comprise entre 2.6 MeV dans le  $^{38}\text{K}$  et 7.62 MeV dans  $^{24}\text{Mg}$ . L'état  $3^-_2$  est aussi connu dans un certain nombre de noyaux exceptés  $^{22}\text{Na}$ ,  $^{26}\text{Al}$  et  $^{36}\text{Ar}$ , il se situe entre 3.6 MeV dans  $^{38}\text{K}$  et 11.6 MeV dans  $^{16}\text{O}$ . L'énergie du  $3^-_1$  est bien reproduite dans l'ensemble des noyaux sd avec des écarts plus importants pour les noyaux  $^{24}\text{Mg}$  et  $^{26}\text{Al}$  du milieu de couche. L'énergie du  $3^-_2$  est prédite surtout pour quelques noyaux pair-pairs ( $^{16}\text{O}$ ,  $^{28}\text{Si}$  et  $^{40}\text{Ca}$ ) à en virant 1 MeV d'écart. Pour ces noyaux et en particulier pour les doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ , nous pensons que le  $3^-_2$  à ces énergies d'excitation élevées a une composante  $3p-3t$  qui n'est pas prise en compte dans l'espace  $1\hbar\omega$  considéré. On peut aussi citer le cas du  $^{30}\text{P}$  où le spectre des états – est bien reproduit (voir Annexe C), dans ces conditions, nous pensons que l'état 5.509 MeV, avec  $J = (2, 3)$  donné dans la littérature, peut être le deuxième  $3^-$  que le calcul prédit à 5.37 MeV.

### Les états $6^-$

Les états  $6^-$  sont bien décrits dans l'ensemble des noyaux sd considérés. Ces états de hauts spins apparaissent à des énergies d'excitation entre 3 MeV dans  $^{38}\text{K}$  et 12 MeV dans  $^{28}\text{Si}$ . L'accord expérience–théorie est très satisfaisant, il faut d'ailleurs noter que dans ce cas les fonctions d'ondes ne sont pas très mélangées. Ceci vient du fait qu'il n'y a pas beaucoup de configurations permettant d'obtenir ces états à spin relativement élevé, ce qui n'est pas le cas pour les états de bas spin dont les fonctions d'ondes sont généralement fortement fragmentées.

Pour tous ces états, les variations "en zigzag" observées en fonction de la masse des noyaux pair–pairs et impair–impairs sont très bien reproduites par les calculs. Ceci est vrai pour tous les trois types d'états considérés avec  $J^\pi = 0^-, 3^-$  et  $6^-$ .

D'après les probabilités d'occupation de couches (voir Fig5–2), les fonctions d'ondes du  $0^-_1$  sont pures, du type  $p^{-1}sd^1$  pour les noyaux de début de couche ( $^{16}\text{O}$  à  $^{20}\text{Ne}$ ) et du type  $sd^{-1}pf^1$  pour les noyaux de fin de couche ( $^{34}\text{Cl}$  à  $^{40}\text{Ca}$ ). Ces configurations sont très fragmentées pour les noyaux du milieu de couche. Pour l'état  $0^-_2$  et comme le montre la Fig5–2, les mélanges comme on pouvait s'y attendre sont plus forts surtout au début de la couche.

Le premier  $3^-$  possède des configurations pures  $p^{-1}sd^1$  pour les noyaux de  $^{16}\text{O}$  à  $^{24}\text{Mg}$ ,  $sd^{-1}pf^1$  pour les noyaux  $^{28}\text{Si}$  à  $^{40}\text{Ca}$ . Dans le noyau  $^{26}\text{Al}$ , la configuration des états  $3^-_1$  et  $3^-_2$  est fortement mélangée. Dans le cas des impair–impairs, les configurations des états  $3^-_1$  et  $3^-_2$  sont pratiquement les mêmes. Dans le cas des pair–pairs, l'état  $3^-_2$  résulte d'un mélange  $p^{-1}sd^1$  et  $sd^{-1}pf^1$  à partir du noyau  $^{20}\text{Ne}$  ; il a une configuration pure  $sd^{-1}pf^1$  à partir du  $^{32}\text{S}$ .

Les deux premiers états  $6^-$  ont une configuration pure  $p^{-1}sd^1$  pour les noyaux  $^{18}\text{F}$  et  $^{20}\text{Ne}$  et une configuration pure  $sd^{-1}pf^1$  pour les noyaux  $^{26}\text{Al}$  à  $^{40}\text{Ca}$ . Pour les noyaux "intermédiaires"  $^{22}\text{Na}$  et  $^{24}\text{Mg}$  les états  $6^-_1$  et  $6^-_2$  résultent des mélanges de ces deux configurations.

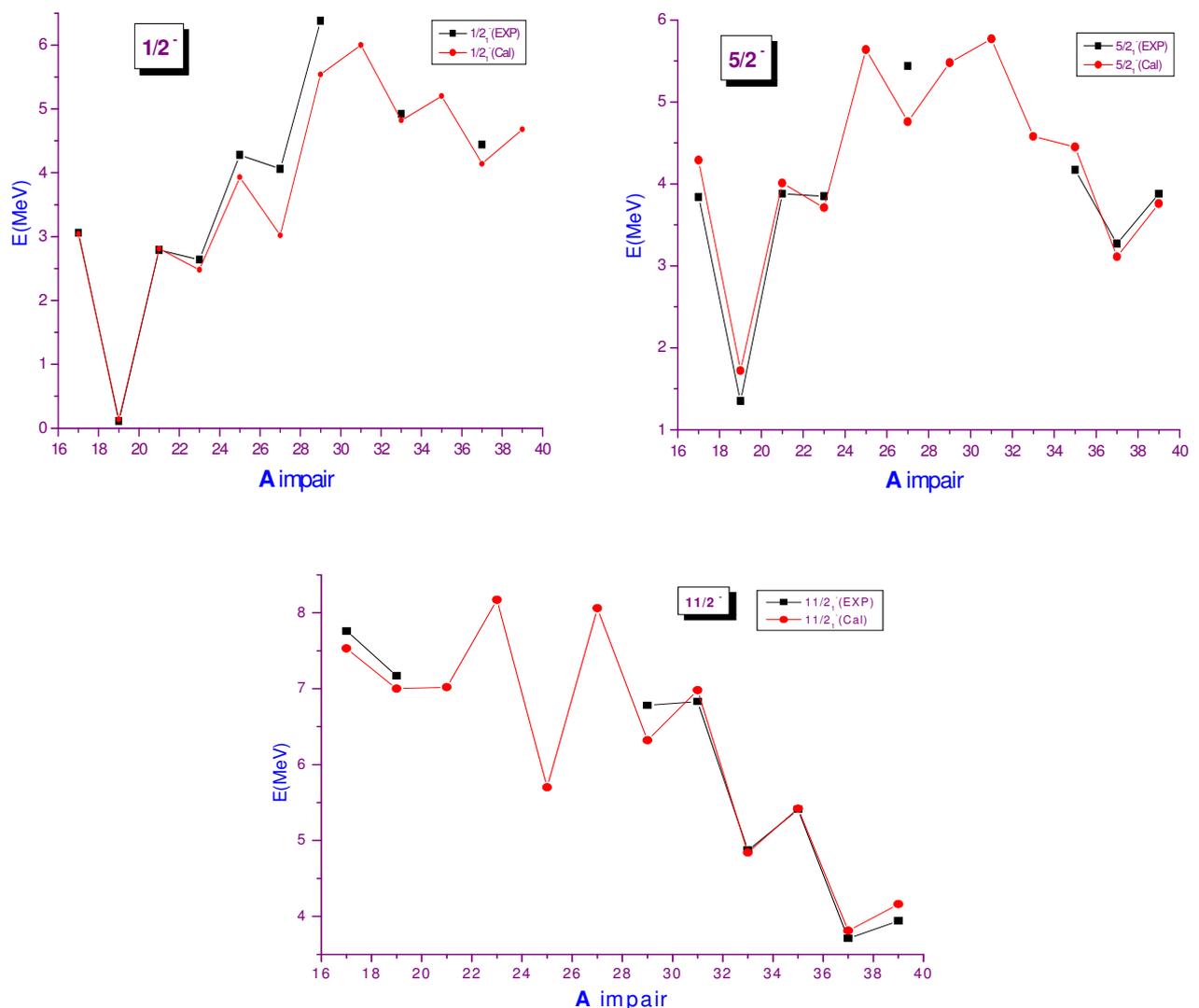
### Les états $1/2^-$ , $5/2^-$ et $11/2^-$

La comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales [2] et calculées avec PSDPF est montrée sur la Fig5–3 pour les premiers états  $1/2^-$ ,  $5/2^-$  et  $11/2^-$  dans les noyaux sd avec  $N = Z + 1$ .

Le premier état  $1/2^-$  est connu dans la plupart des noyaux sd avec  $N = Z + 1$  sauf dans les noyaux  $^{31}\text{P}$ ,  $^{35}\text{Cl}$  et  $^{39}\text{K}$ . Il se situe entre 0.11 MeV dans le cas du  $^{19}\text{F}$  et 6.38 MeV dans le cas

de  $^{29}\text{Si}$ . L'état  $5/2^-$  est connu principalement dans les noyaux du début et de fin de couche, son énergie dans ces cas est inférieure à 4 MeV, l'énergie la plus basse est de 1.35 MeV dans le cas de  $^{19}\text{F}$ . L'état  $11/2^-$  est seulement connu dans quelques noyaux sd, il se situe entre une énergie d'excitation de 3.71 MeV pour  $^{37}\text{Ar}$  et 7.76 MeV pour  $^{17}\text{O}$ .

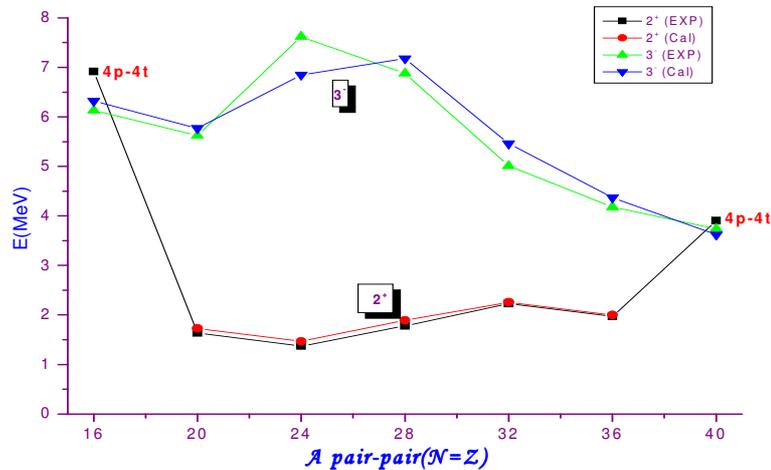
Il est clair sur la Fig5-3 que pour les noyaux de début et de fin de couche, les états  $1/2^-$ ,  $5/2^-$  et  $11/2^-$  sont remarquablement bien décrits par l'interaction PSDPF. Au milieu de couche et comme déjà mentionné l'accord expérience-théorie est moins bon, il faut dire aussi que dans ces cas les énergies d'excitation sont plus élevées. Les écarts peuvent varier dans cette région entre 0.5 et 1 MeV, voir par exemple les cas de  $^{27}\text{Al}$  et  $^{29}\text{Si}$  sur la Fig5-3.



**Figure 5-3:** Energies d'excitation expérimentales versus calculées avec PSDPF des premiers états intrus avec  $J = 1/2, 5/2$  et  $11/2$  dans les noyaux avec  $N = Z + 1$ .

### 3. Les états $2^+_1$ et $3^-_1$ dans les noyaux sd pair-pairs : énergies d'excitation et transitions électromagnétiques

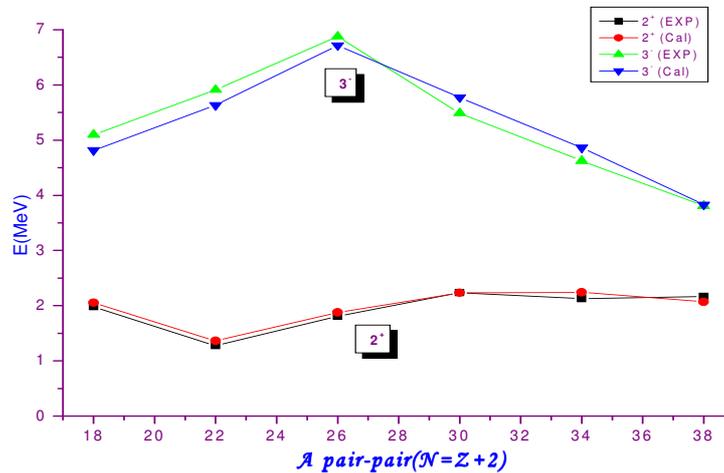
Dans les noyaux sd pair-pairs, l'expérience montre que les deux premiers états excités ont, en général, des spins/parités  $J^\pi = 2^+$  et  $3^-$ . Il est donc intéressant d'utiliser PSDPF pour calculer les énergies de ces états ainsi que leurs transitions électromagnétiques et les comparer aux mesures expérimentales. Ces états ont été calculés pour les noyaux avec  $N = Z$  et  $N = Z + 2$ . La comparaison expérience-théorie des énergies d'excitation pour  $J^\pi = 2^+$  et  $3^-$  est présentée sur la Fig5-4 pour les noyaux  $N = Z$  et sur la Fig5-5 pour les noyaux  $N = Z + 2$ . Ces figures montrent un accord remarquable entre les données expérimentales et nos calculs tant au point de vue des énergies de ces états  $J^\pi = 2^+_1$  et  $3^-_1$  que de leurs variations à travers la couche. On voit, sur la Fig5-4, que les états "expérimentaux"  $J^\pi = 2^+$  dans les noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$  se situent à des énergies élevées et sont en fait au dessus des états  $3^-_1$ . Il est bien connu que ces états  $2^+_1$  sont déformés, possédant une configuration dominante  $4p-4t$ , ils ne peuvent donc pas être reproduits dans notre espace de phase  $0\hbar\omega$  pour les états +.



**Figure 5-4** : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales et calculées des  $2^+_1$  et  $3^-_1$  dans les noyaux sd avec  $N = Z$ .

Exception faite pour les états  $2^+$  de  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$  que nous venons de mentionner, nous remarquons sur les deux figures que les énergies des  $2^+_1$  sont quasiment constantes à travers la couche sd. Dans les noyaux  $N = Z$ , ces énergies varient entre 1.63 MeV dans le  $^{20}\text{Ne}$  et 2.26 MeV dans le  $^{32}\text{S}$ , l'état  $2^+_1$  se trouve légèrement plus bas à 1.37 MeV dans le  $^{24}\text{Mg}$ . Pour les

noyaux  $N = Z + 2$ , ces énergies varient entre 1.81 MeV dans le  $^{26}\text{Mg}$  et 2.23 MeV dans le  $^{30}\text{Si}$  avec le  $2^+_{1}$  dans le  $^{22}\text{Ne}$  légèrement plus bas à 1.27 MeV. Ceci peut être expliqué par le fait que ces états  $2^+_{1}$  sont obtenus à partir des excitations de nucléons au sein de la même couche sd. Il n'y a donc pas de saut en énergie important, d'autre part la fermeture des sous-couches  $d_{5/2}$  et  $s_{1/2}$  peut donner lieu à de petites variations en énergie.



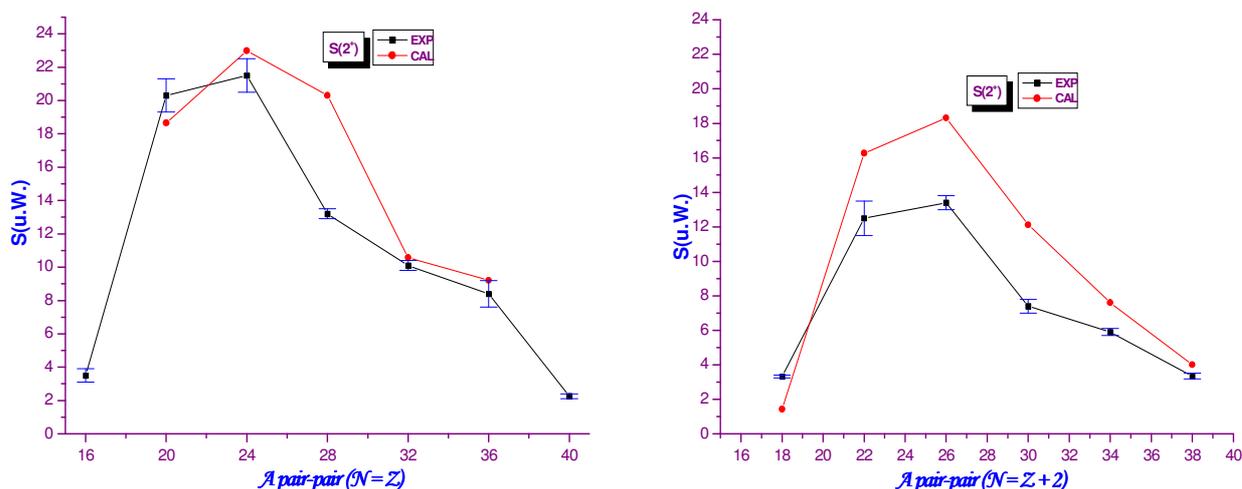
**Figure 5-5** : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales et calculées des  $2^+_{1}$  et  $3^-_{1}$  dans les noyaux sd avec  $N = Z + 2$ .

Examinons maintenant les résultats obtenus pour le premier état intrus avec  $J^\pi = 3^-$  qui sont montrés sur les Figs 5-4 et 5-5. Pour l'ensemble des noyaux sd  $N = Z, Z + 2$  et  $Z + 4$ , son énergie d'excitation est supérieure à  $\sim 4$  MeV. Elle est la plus élevée en milieu de couche pour les noyaux  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{26}\text{Mg}$  et  $^{28}\text{Si}$ . Ceci s'explique par le fait que ces noyaux sont loin des fermetures de couche et que l'excitation d'un nucléon de la couche p à sd ou sd à pf requiert une énergie plus grande que pour les noyaux de début ou de fin de couche. Ceci est confirmé en observant sur les Figs 5-4 et 5-5 que l'énergie d'excitation du  $3^-$  descend au fur et à mesure qu'on s'approche de  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ . Cette énergie est plus grande pour les noyaux de début de couche que pour ceux de la fin de couche à cause de la différence en énergie des gaps p-sd et sd-pf. Les variations en énergie du  $3^-_{1}$  à travers la couche sont bien reproduites par nos calculs pour tous les noyaux sd avec  $N = Z$  et  $Z + 2$ .

Puisque nos calculs avec l'interaction PSDPF reproduisent très bien les énergies d'excitation et leurs variations à travers la couche des états  $2^+_{1}$  et  $3^-_{1}$ , nous avons souhaité tester notre interaction plus en profondeur en utilisant les transitions électromagnétiques  $2^+_{1} \rightarrow 0^+$  (du type E2) et  $3^-_{1} \rightarrow 0^+$  (du type E3). La force de transition appelée S va dépendre

dans les calculs des fonctions d'ondes de l'état initial ( $2^+$  ou  $3^-$ ) et de celle de l'état final  $0^+$ . Dans le calcul des largeurs  $B(E2)$  et  $B(E3)$ , il faut utiliser des charges effectives pour les protons et les neutrons. Comme il est de coutume dans la littérature [63], nous avons choisi dans un premier temps une charge effective de 0.5 MeV, soit donc 0.5e pour les neutrons et 1.5e pour les protons. La force de transition en largeur réduite  $S$  (voir définition au Chap.3) est exprimée en unité Weisskopf (u.W.) [111,112], elle sera désignée par  $S(2^+)$  pour la transition  $E2$   $2_1^+ \rightarrow 0^+$  et par  $S(3^-)$  pour la transition  $E3$   $3_1^- \rightarrow 0^+$ .

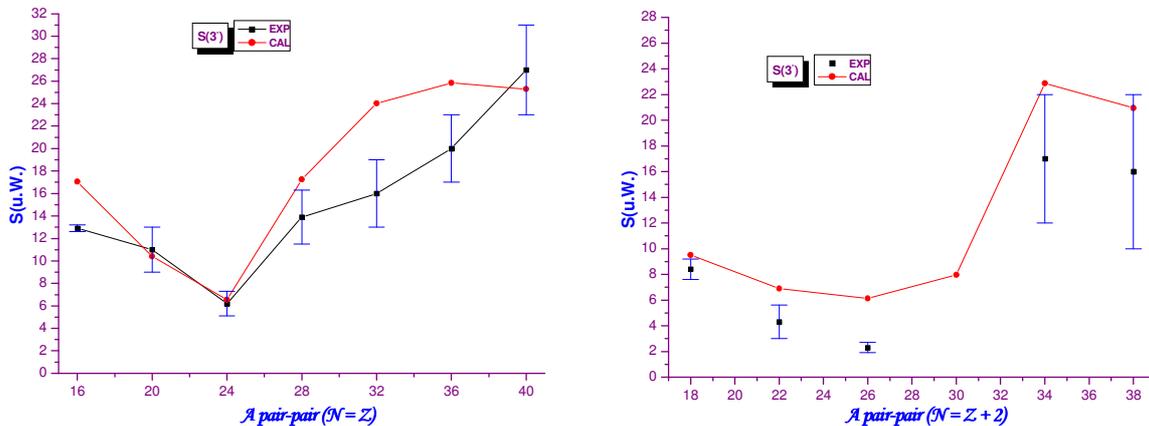
Les résultats de nos calculs sont comparés à l'expérience sur la Fig5-6 pour les transitions  $E2$  et sur la Fig5-7 pour les transitions  $E3$ . Les valeurs expérimentales de  $S$  sont tirées des compilations de NNDC [2] et des travaux de Endt [111,112]. La valeur expérimentale de  $S(3^-)$  du noyau  $^{22}\text{Ne}$  a été obtenue à partir d'une mesure directe de  $B(E3)$  reportée dans la référence [113].



**Figure 5-6** : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions  $2_1^+ \rightarrow 0^+$  des forces de transition  $S(2^+)$  exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux  $N = Z$  (à gauche) et  $N = Z + 2$  (à droite). Les charges effectives utilisées sont 0.5e pour les neutrons et 1.5e pour les protons.

On voit sur la Fig5-6 (à gauche) que pour les largeurs réduites  $S(2^+)$  calculées pour les noyaux  $N = Z$ , il y a un bon accord avec les données expérimentales sauf dans le noyau  $^{28}\text{Si}$  où le calcul indique une collectivité plus grande pour le  $2^+$  qu'observée expérimentalement. Les calculs reproduisent les formes en cloche des variations de  $S(2^+)$  à travers la couche. Les minimas de  $S(2^+)$  observés expérimentalement dans  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$  sont dus à la magie de ces noyaux. Les résultats pour les noyaux  $N = Z + 2$  sont représentés sur la Fig5-6 (à droite). Les

valeurs de  $S(2^+)$  calculées sont plus grandes que les valeurs expérimentales indiquant là aussi un surplus de collectivité dans les calculs. Pour les isotopes de Ne et Mg, les grandes valeurs de  $S(2^+)$  sont le signe de collectivité et aussi de déformation. Ceci est confirmé par les moments quadrupolaires  $Q$  calculés pour ces noyaux, ils sont de  $\sim -15 \text{ efm}^2$  pour  $^{20,22}\text{Ne}$  et atteignent un maximum de  $-19.5 \text{ efm}^2$  pour  $^{24}\text{Mg}$ . Ces valeurs se comparent aux mesures expérimentales qui sont de  $Q = -23 \pm 3$  pour  $^{20}\text{Ne}$ ,  $-19 \pm 4$  pour  $^{22}\text{Ne}$  et  $-18 \pm 2$  pour  $^{24}\text{Mg}$  [114]. Le signe négatif de  $Q$  implique que ces noyaux sont de forme aplatie "oblate". Pour le  $^{28}\text{Si}$ , le  $Q$  calculé est égal à  $21.16 \text{ efm}^2$ , soit légèrement supérieur à la valeur expérimentale qui est de  $16 \pm 3 \text{ efm}^2$ . Dans ce cas, la valeur de  $Q$  est positive ce qui implique une forme allongée "prolate" pour le  $^{28}\text{Si}$ . Il y a donc dans cette région une transition de forme rapide de oblate (isotopes de Ne et Mg) à prolate ( $^{28}\text{Si}$ ) que le modèle en couches reproduit de façon adéquate.

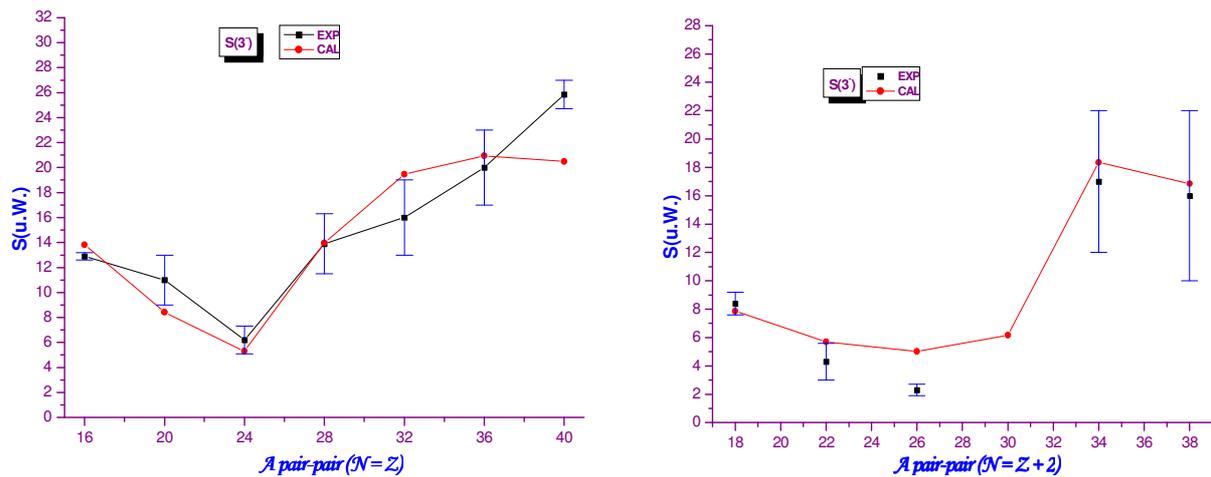


**Figure 5-7** : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions  $3_1^- \rightarrow 0^+$  des forces de transition  $S(3^-)$  exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux  $N = Z$  (à gauche) et  $N = Z + 2$  (à droite). Les charges effectives utilisées sont 0.5e pour les neutrons et 1.5e pour les protons.

Les transitions E3 se font entre deux états de parités opposées. Ce type de transition dans la couche sd n'a jamais été calculé auparavant dans le cadre du modèle en couches. Notre interaction a été en grande partie construite pour décrire les états intrus de parité  $-$ , elle est donc bien adaptée pour calculer les transitions issues de ces états, en particulier celles du type E3 entre les états  $3_1^-$  et  $0^+$ . Les résultats des calculs sont comparés à l'expérience sur la Fig5-7. Remarquons tout d'abord que les largeurs  $S(3^-)$  à travers la couche varient de façon inverse à celle des largeurs  $S(2^+)$  (voir Fig5-7). En effet dans  $S(3^-)$ , les maxima sont en début

et fin de couche et les minima sont en milieu de couche. Les calculs rendent très bien compte de cette observation expérimentale. En règle général, ce qui est observé sur la Fig5–7 (à gauche et à droite), c’est que les tendances sont bien reproduites mais que les valeurs de  $S(3^-)$  sont souvent surestimées surtout pour les noyaux pair–pairs avec  $N = Z + 2$ . Les valeurs de  $S(3^-)$  ont été calculées en utilisant les mêmes charges effectives que pour  $S(2^+)$  soit  $0.5e$  pour les neutrons et  $1.5e$  pour les protons.

Comme nous venons de le voir, les largeurs  $S(3^-)$  calculées sont en règle général supérieures aux valeurs expérimentales. Nous avons donc essayé d’améliorer l’accord en jouant sur le paramètre de charge effective. La meilleure reproduction des données expérimentales a été obtenue pour une charge effective diminuée de  $0.5$  à  $0.4$ . Nous avons donc retenue pour les calculs de  $B(E3)$  une charge effective de  $0.4e$  pour les neutrons et de  $1.4e$  pour les protons. Les résultats sont présentés sur la Fig5–8 et l’accord peut maintenant être qualifié de bon.



**Figure 5–8** : Comparaison expérience (en noir) versus calcul (en rouge) pour les transitions  $3_1^- \rightarrow 0^+$  des forces de transition  $S(3^-)$  exprimées en unité Weisskopf (u.W.) dans les noyaux  $N = Z$  (à gauche) et  $N = Z + 2$  (à droite). Les charges effectives utilisées sont  $0.4e$  pour les neutrons et  $1.4e$  pour les protons.

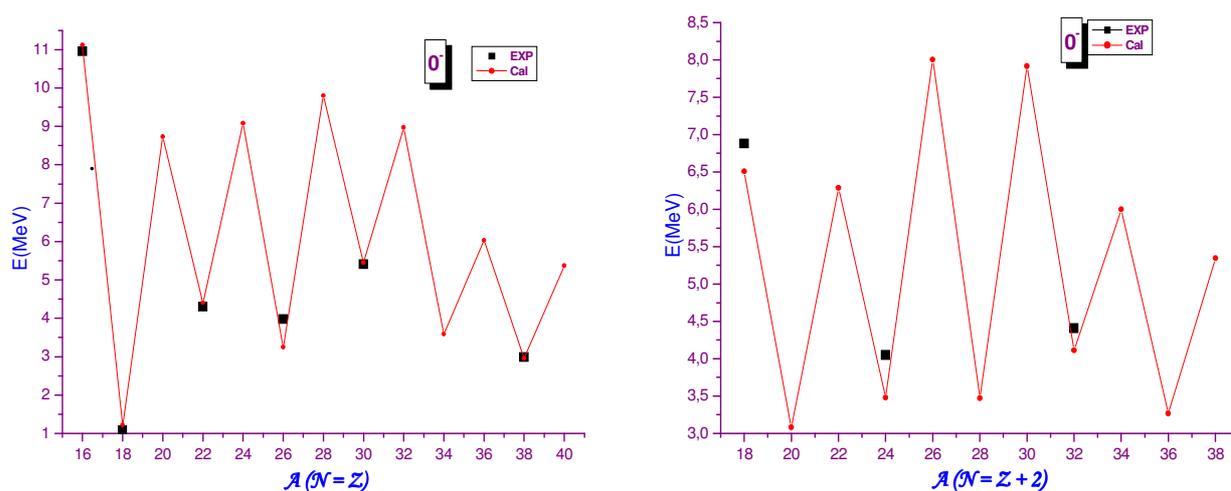
En résumé, en utilisant l’interaction PSDPF, nous avons démontré que nous arrivons à reproduire non seulement les énergies d’excitation de l’état  $3_1^-$  dans les noyaux sd avec  $N = Z$  et  $Z + 1$ , mais aussi les largeurs  $E3$  des transitions  $3_1^- \rightarrow 0^+$ . Nous avons aussi montré qu’une réduction de la charge effective de  $0.5$ , utilisée pour les  $B(E2)$ , à  $0.4$  permettait d’améliorer l’accord expérience–théorie pour les transitions  $E3$  à travers la couche sd. Nous considérons

que ces résultats originaux obtenus pour les états intrus  $3^-_1$  sont parmi les plus importants de mon travail de thèse.

#### 4. L'état $0^-$ à travers la couche $sd$

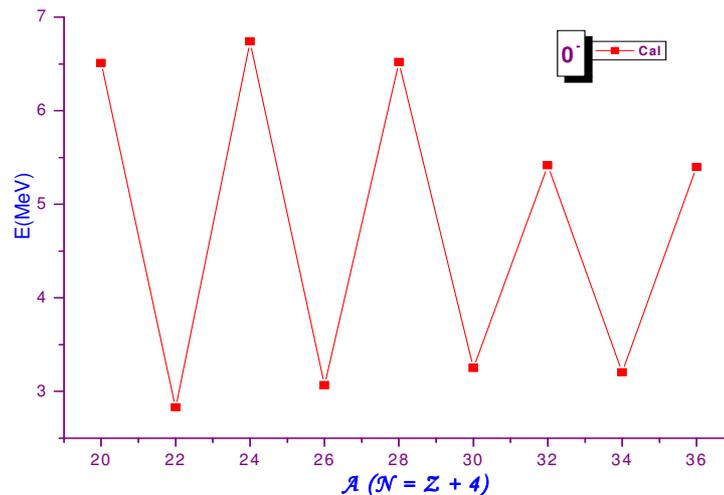
Nous avons montré précédemment sur la Fig5-1, la variation des énergies d'excitation des deux premiers états intrus avec  $J^\pi = 0^-$  dans les noyaux  $sd$  avec  $N = Z$ . Un bon accord expérience-théorie est obtenu dans les noyaux impair-impairs où l'énergie d'excitation est plutôt favorable à l'observation des états  $0^-$ . Il n'en est pas de même des noyaux pair-pairs où peu d'attributions expérimentales  $J^\pi = 0^-$  existent. Il faut dire que ces états sont prédits, pour le milieu de couche, à des énergies supérieures à 8 MeV dans une région où la densité des états est grande, ce qui rend leur détection plus difficile.

Dans le cadre d'une autre application du modèle en couches avec PSDPF, nous avons calculé le premier état  $0^-$  dans les noyaux  $sd$  avec  $N = Z, Z + 2$  et  $Z + 4$ . Nous avons ainsi pu faire quelques prédictions d'attributions  $J^\pi = 0^-$  à des états non encore connus expérimentalement. La comparaison avec les données expérimentales existantes est représentée sur la Fig5-9 dans le cas des noyaux  $sd$  avec  $N = Z$  et  $Z + 2$ . L'état  $0^-$  n'est connu dans aucun noyau  $N = Z + 4$  (voir cependant la discussion plus loin à propos du noyau  $^{36}\text{S}$ ), les résultats donnés sur la Fig5-10 sont donc des prédictions de PSDPF qui pourront être confrontées aux futures mesures expérimentales.



**Figure 5-9** : Comparaison entre les énergies d'excitation expérimentales (en noir) et calculées (en rouge) du premier état  $0^-$  dans les noyaux  $sd$  avec  $N = Z$  (à gauche) et  $N = Z + 2$  (à droite).

Si on revient à la Fig5–9, on constate que pour tous les noyaux sd impair–impairs avec  $N = Z$  et  $Z + 2$ , l'état  $0^-_1$  est observé à basse énergie d'excitation généralement inférieure à  $\sim 5$  MeV. L'accord expérience–théorie est excellent dans ce cas. Maintenant en ce qui concerne les noyaux pair–pairs, l'état  $0^-_1$  est définitivement établi seulement dans les cas des noyaux  $^{16}\text{O}$  et  $^{18}\text{O}$  où il est bien reproduit par le modèle. Comme déjà dit et contrairement aux noyaux impair–impairs l'état  $0^-_1$  dans les noyaux pair–pairs est prédit à haute énergie d'excitation rendant son identification expérimentale difficile. Dans la 2<sup>ème</sup> moitié de la couche et quand on s'approche de  $^{40}\text{Ca}$ , l'état  $0^-$  dans les pair–pairs commence à descendre en énergie d'excitation (voir Fig5–9). L'explication que nous proposons est que le gap  $d_{3/2}$ – $f_{7/2}$  ( $\sim 7$  MeV) étant nettement plus petit que le gap  $p_{1/2}$ – $d_{5/2}$  ( $\sim 11.5$  MeV), l'excitation d'un nucléon de p vers sd requiert plus d'énergie que l'excitation de sd vers pf. Ceci explique aussi la différence en énergies d'excitation des états  $0^-_1$  dans les noyaux doublement magiques  $^{16}\text{O}$  et  $^{40}\text{Ca}$ . Ces effets de gaps sont moins sensibles en milieu de couche où les  $0^-_1$  sont prédits à une excitation voisine et de 8 MeV pour tous les noyaux pair–pairs.



**Figure 5–10:** Energies d'excitation prédites du premier état  $0^-$  dans les noyaux sd avec  $N = Z + 4$ .

Nous remarquons également que l'état  $0^-_1$  est prédit dans les pair–pairs à des énergies d'excitation plus élevées que celles des impair–impairs. En effet, pour un noyau impair–impairs, exciter un nucléon célibataire de sd vers pf demande moins d'énergie que pour un pair–pairs où il faut d'abord casser une paire avant l'excitation. Au début de la couche, le processus d'excitation de p vers sd nécessite obligatoirement la cassure d'une paire de nucléons dans p suivie pour les pair–pairs d'une éventuelle autre cassure de nucléons dans sd

et d'un recouplage. Tout ceci explique les zigzags en énergie très marqués des pair-pairs et impair-impairs observés pour les  $0^-$  des noyaux de la couche sd.

Comme il a été montré sur la Fig5-2, l'état  $0^-$  a une configuration pure p-sd pour les noyaux de début de couche et sd-pf pour ceux de la fin de couche. Ces configurations comme on pouvait s'y attendre sont mélangées pour les noyaux du milieu de couche sd. Pour quantifier cela, donnons quelques chiffres de composition des fonctions d'ondes de l'état  $0^-_1$  dans  $^{18}\text{F}$ , début de couche, et  $^{38}\text{K}$ , fin de couche. Ces fonctions d'ondes sont très mélangées en ce qui concerne l'occupation des différentes orbitales d'une couche majeure. En effet pour  $^{18}\text{F}$   $J^\pi = 0^-$ , la contribution de l'excitation  $p_{1/2}-s_{1/2}$  est de 38 %, celle de l'excitation  $p_{1/2}-d_{5/2}$  de 34 % ; pour  $^{38}\text{K}$  et  $J^\pi = 0^-$  les contributions suivantes sont obtenues ; 34 % pour  $d_{3/2}-f_{7/2}$ , 18 % pour  $s_{1/2}-f_{7/2}$  et 14 % pour  $d_{3/2}-p_{3/2}$ . Notons que pour obtenir un spin 0 pour les configurations  $p_{1/2}-d_{5/2}$  ou  $d_{3/2}$ ,  $s_{1/2}-f_{7/2}$ , il faut coupler le spin des autres nucléons dans sd à 5/2 ou 7/2, respectivement.

Par comparaison avec les spectres expérimentaux et surtout ceux des états  $-$ , nous avons essayé de proposer  $J^\pi = 0^-$  pour quelques états de noyaux sd avec  $N = Z$  et  $Z + 2$ . Le cas du  $^{36}\text{S}$  avec  $N = Z + 4$  sera traité à part à la fin de ce chapitre.

#### Noyaux avec $N = Z$ :

Dans le spectre expérimental du noyau  $^{32}\text{S}$ , le seul état qui a eu une attribution définitive  $J^\pi = 0^-$  est localisé à 10.402 MeV d'énergie d'excitation. Dans nos calculs, l'état est prédit plus bas soit à 8.97 MeV pour  $0^-_1$  et à 9.46 MeV pour  $0^-_2$ . Il existe aussi dans le spectre quelques états (2 à 3) entre 7 et 10 MeV de  $J^\pi$  non connus qui pourraient être des  $0^-$  mais dont une identification non ambiguë sera difficile. Dans le spectre expérimental du noyau impair-impairs  $^{34}\text{Cl}$  il existe un état à 3.79 MeV avec  $J^\pi = (0-3^+)$  qui décroît à 100 % vers l'état  $1^+$  à 0.46 MeV. Le spectre calculé de ce noyau est en bon accord avec l'expérience (voir Annexe C). Nous pensons donc que cet état pourrait correspondre à l'état  $0^-_1$  prédit à 3.59 MeV et qui se désexcite par une transition E1 au  $1^+$  à 0.46 MeV.

Pour le noyau  $^{40}\text{Ca}$ , le spectre des états  $-$  calculés est en bon accord avec l'expérience (voir Annexe C). Une correspondance un à un des états  $-$  peut être établie, les états  $+$  ne peuvent pas être calculés dans notre espace de valence. Néanmoins, le seul état à basse énergie d'excitation qui n'a pas de  $J^\pi$  attribué est celui à 5.37 MeV qui est donc un bon candidat pour être l'état  $J^\pi = 0^-_1$  prédit à 5.35 MeV.

### Noyaux avec $N = Z + 2$

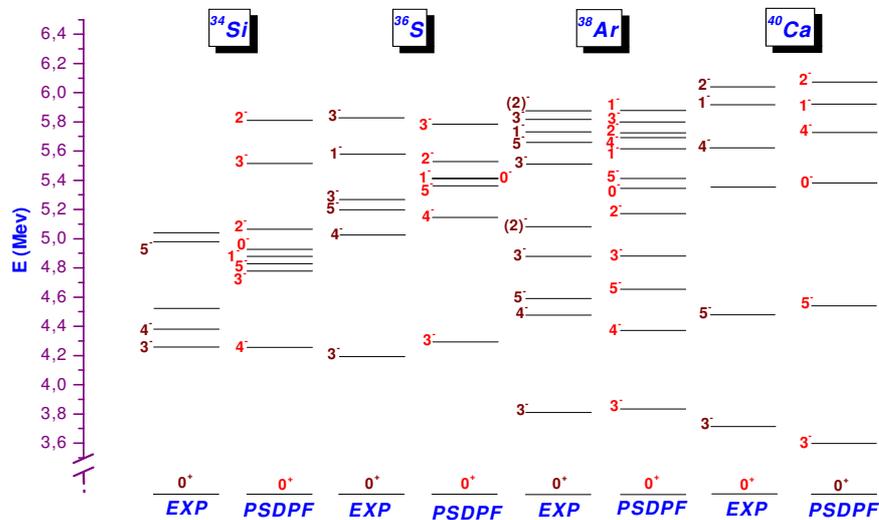
Les spectres en énergie des états de parité + et – des noyaux  $^{26}\text{Mg}$  et  $^{28}\text{Al}$  sont bien reproduits par nos calculs (voir Annexe C). Dans ces noyaux, les états  $0^-_1$  sont prédits à 8.00 et 3.47 MeV, respectivement. Dans le cas du  $^{26}\text{Mg}$ , le spectre expérimental présente deux bons candidats à 7.851 et 8.40 MeV de  $J^\pi$  inconnus. Pour ces états, les transitions électromagnétiques ne sont pas connues ce qui rend leur identification difficile voire impossible. Dans le noyau  $^{28}\text{Al}$ , le meilleur candidat  $J^\pi = 0^-$  est un état à 3.601 MeV. Dans les spectres expérimentaux des noyaux  $^{34}\text{S}$  et  $^{36}\text{Cl}$  des états de  $J^\pi = (0^- - 3^-)$  sont reportés à des énergies de 6.68 et 3.21 MeV, respectivement. Ils pourraient correspondre aux premiers états  $0^-$  prédits à 6.00 MeV dans  $^{34}\text{S}$  et 3.27 MeV dans  $^{36}\text{Cl}$ . Nous tenons à préciser ici que toutes ces suggestions d'états  $0^-$  ne sont que des prédictions qui seront à confirmer (ou à infirmer) dans de futures expériences.

### **5. Systématique des isotones pair–pairs $N = 20$**

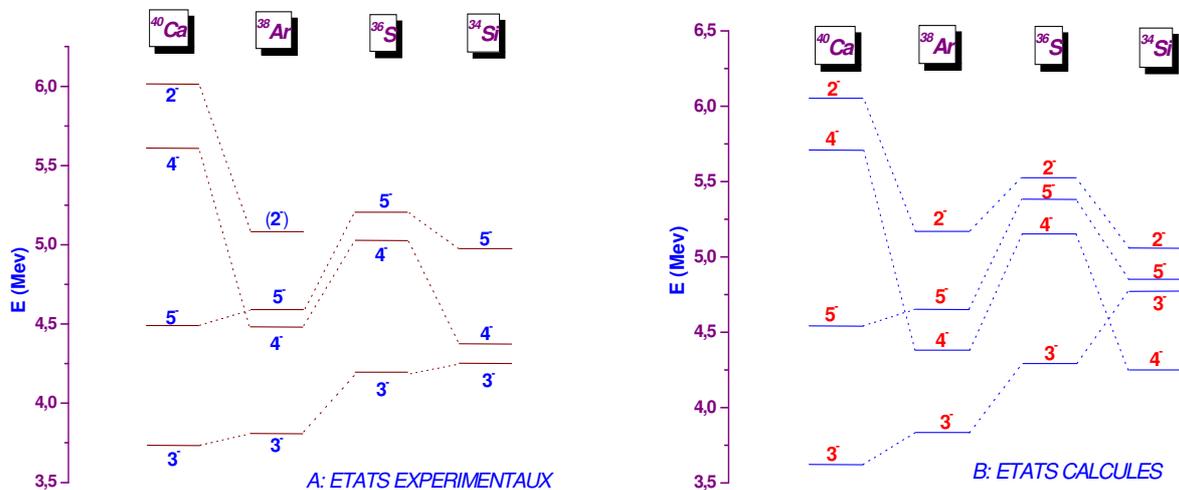
Dans une autre application de la nouvelle interaction, nous avons calculé les spectres en énergie d'excitation jusqu'à 6 MeV des états  $1\hbar\omega$  dans les isotones  $N = 20$  avec  $Z = 14, 16, 18$  et  $20$ . Les résultats et la comparaison expérience–théorie sont présentés sur la Fig5–11. On notera que pour tous ces noyaux semi–magiques, l'énergie du premier état excité est supérieure à  $\sim 3$  MeV ce qui explique l'échelle en énergie choisie pour la Fig5–11.

Remarquons le bon accord entre l'expérience et la théorie pour les quatre noyaux considérés. La correspondance un à un des états expérimentaux et théoriques est bien établie et les énergies des états, en particulier avec  $J^\pi = 3^-, 4^-$  et  $5^-$ , sont bien reproduites. Ces isotones  $N = 20$  semi–magiques avec  $Z \geq 14$  se situent en dehors de l'îlot d'inversion et leurs états fondamentaux sont quasi–sphériques. Les états de parité négative de ces isotones présentent des similarités remarquables spécialement en ce qui concerne les premiers états  $J^\pi = 2^-, 3^-, 4^-$  et  $5^-$  qui sont, dans une description au premier ordre, membres du multiplet  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^{-1})$ . Nous comparons sur la Fig5–12, les énergies expérimentales et calculées de ces états. Nous constatons qu'il y a un très bon accord entre les données expérimentales et les résultats obtenus avec l'interaction PSDPF. Ceci concerne non seulement les énergies d'excitation mais aussi l'évolution de l'énergie des états membres du multiplet en fonction de  $Z$ . Ce bon accord expérience–théorie, nous permet ainsi de proposer que dans  $^{38}\text{Ar}$  les états observés à 5.08 et

5.86 MeV correspondent aux deux premiers  $2^-$  prédits par le modèle à 5.169 et 5.704 MeV, respectivement.



**Figure 5–11** : Energies d’excitation expérimentales et calculées avec PSDPF des états  $1\hbar\omega$  dans les isotones  $N = 20$  avec  $Z = 14, 16, 18$  et  $20$ .

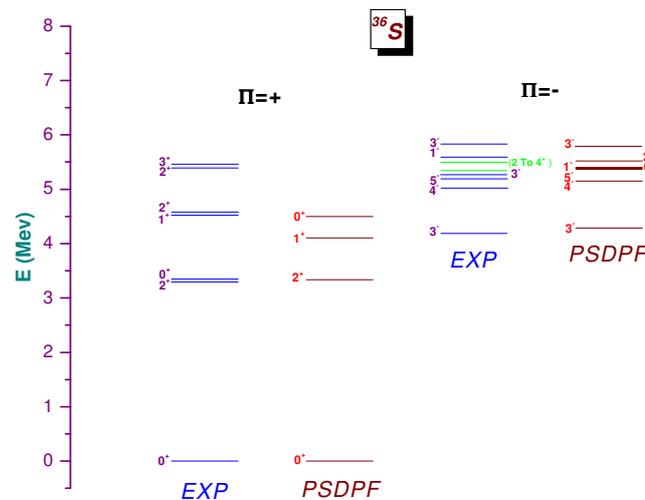


**Figure 5–12** : Les états  $1\hbar\omega$  avec  $J^\pi = 2^-$  à  $5^-$  membres du multiplet  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  dans les isotones  $N = 20$   $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{36}\text{S}$  et  $^{34}\text{Si}$ : comparaison entre les spectres en énergie expérimentaux (A) et calculés (B) en utilisant l’interaction PSDPF.

## 6. Spectroscopie du $^{36}\text{S}$ entre 0 et 6 MeV

La dernière application de notre interaction, concerne la structure du noyau semi-magique  $^{36}\text{S}$  avec  $N = 20$ . Le spectre en énergie expérimental [2] est comparé à celui calculé sur la Fig5–13 pour des énergies inférieures à 6 MeV des états de parité + et –.

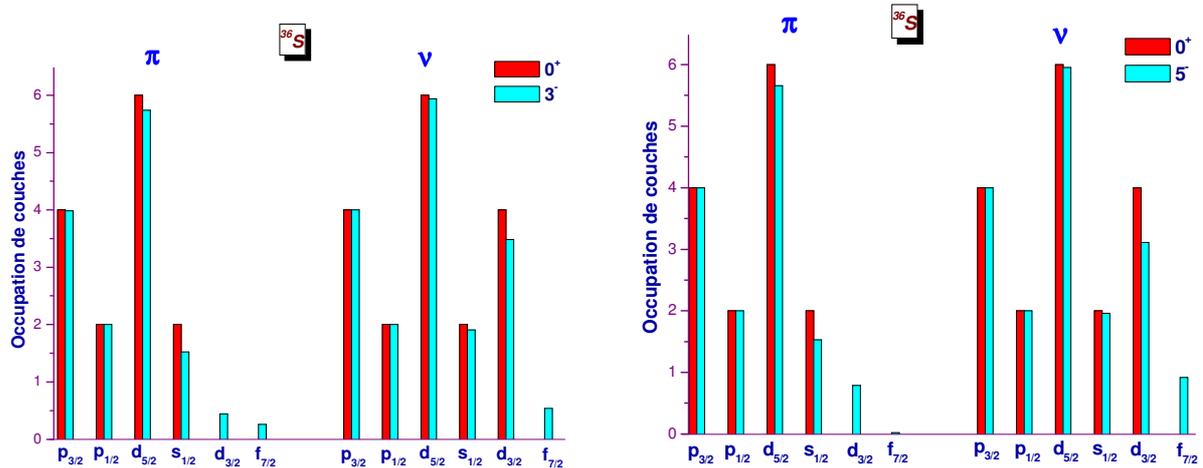
Ce spectre contient 12 états excités dont la plupart des  $J^\pi$  sont bien établis, 6 de ces états sont de parité –. En ce qui concerne les états +, le calcul rend assez bien compte des états  $2^+_1$  et  $1^+_1$  qui, comme le fondamental, sont des états sphériques bien décrits dans l'espace de valence  $0\hbar\omega$ . Il n'en est pas de même pour les autres états +. L'exemple du  $0^+_2$  est symptomatique et se retrouve dans de nombreux noyaux sd pair-pairs. Il est calculé à une énergie de  $\sim 1$  MeV supérieure à son énergie expérimentale. Ceci reflète le fait que sa configuration n'est plus seulement  $0p-0t$  mais contient des composantes  $2p-2t$  ou même  $4p-4t$ . Généralement ces états  $0^+$  excités sont déformés et sont les têtes de bandes de rotation collectives. Dans le cas de  $^{36}\text{S}$ , cette bande déformée basée sur le  $0^+_2$  reste à trouver.



**Figure 5–13** : Comparaison entre le spectre expérimental et calculé du  $^{36}\text{S}$ . Les états + sont indiqués sur la gauche et les états – sur la droite.

Examinons maintenant les états intrus  $1\hbar\omega$  du spectre représenté sur la Fig5–13 (à droite). Entre 0 et 6 MeV, 7 états de parité – sont calculés. Une correspondance une à une a pu être établie entre niveaux expérimentaux et calculés. Une exception est l'état  $3^-_3$  qui est à 5.83 MeV alors que son énergie calculée est de 6.76 MeV. Là aussi, comme pour le  $0^+_2$ , nous pensons qu'à partir du  $3^-_2$ , les états – ont une composante importante  $3p-3t$  qui les fait

descendre en énergie. En ce qui concerne les premiers états de parité – avec  $J^\pi = 3^-_1, 4^-_1, 5^-_1$  et  $1^-_1$ , leurs énergies sont très bien reproduites par le calcul en utilisant l'interaction PSDPF (voir Fig5–13 (à droite)). En première approximation, les états  $3^-_1$ ,  $4^-_1$  et  $5^-_1$  sont membres du multiplet  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$ , nous présentons sur la Fig5–14 les occupations de couches pour les états  $3^-_1$  et  $5^-_1$  qui sont comparées à celles de l'état fondamental  $0^+$  de  $^{36}\text{S}$ .



**Figure 5–14** : Occupations de couches des états  $3^-_1$  (à gauche) et  $5^-_1$  (à droite) comparées à celles de l'état fondamental  $0^+$  du  $^{36}\text{S}$ . Les couches protons sont indiquées par  $\pi$  et celles des neutrons par  $\nu$ .

Comme le montre la figure, il y a pour le fondamental remplissage complet des couches protons et neutrons  $0d_{5/2}$  et  $1s_{1/2}$ . On voit aussi sur la figure, que dans le cas du  $3^-_1$ , la principale excitation vient du côté neutron, soit  $\nu d_{3/2} \rightarrow \nu f_{7/2}$ , ce qui était attendu. Cependant, il y a aussi des excitations côté proton vers  $\pi f_{7/2}$  mais aussi à l'intérieur de sd vers  $\pi d_{3/2}$ . Dans le cas du  $5^-_1$ , la situation est plus tranchée et l'excitation vient principalement du saut  $\nu d_{3/2}$  à  $\nu f_{7/2}$ . Sur la Fig5–14, les occupations des couches  $1p_{3/2}$ ,  $1p_{1/2}$  et  $0f_{5/2}$  ne sont pas montrées puisqu'elles sont nulles.

Si on revient au spectre des états – sur la Fig5–13 (droite), on constate que les états calculés à 5.40 et 5.52 MeV avec  $J^\pi = 0^-_1$  et  $2^-_1$ , respectivement, n'ont pas de correspondance expérimentale. Nous allons essayer de leur associer des partenaires expérimentaux en comparant non seulement les énergies expérimentales et théoriques mais aussi les TEM et les durées de vie moyennes de ces états.

Comme illustré sur la Fig5–13, le spectre des états – montre l'existence d'états très proches en énergies entre 5 et 6 MeV. Après avoir examiné de façon détaillée la situation

expérimentale [115,116], nous faisons l'hypothèse basée aussi sur nos calculs, qu'il existe dans le spectre expérimental un doublet d'états à  $\sim 5.35$  MeV. L'état reporté dans NNDC à 5.338 MeV correspondrait à l'état  $0^-_1$  prédit à 5.398 MeV. D'après nos considérations, cet état décroît à 100 % vers le  $1^+_1$  à 4.523 MeV par une transition E1 d'énergie 816 keV. Nous pensons que cette transition a été attribuée par erreur dans la littérature [2,115,116] à l'état  $2^+_1$  à 5.391 MeV qui décroît principalement à l'état fondamental. D'après nos calculs de TEM pour l'état  $0^-_1$ , l'état décroît principalement par E1 vers le  $1^+_1$  (en accord avec l'expérience) et sa durée de vie moyenne calculée est de 9.9 ps (dans NNDC  $\tau > 0.3$  ps).

Dans le spectre des états  $-$ , nous proposons que l'état à 5.509 MeV avec  $J = (2-4)$  est en fait l'état  $2^-_1$  calculé à 5.52 MeV. Cette suggestion n'est pas seulement basée sur la comparaison des énergies d'excitation mais aussi sur la décroissance gamma de l'état. L'expérience montre [2] que cet état décroît vers  $3^-_1$  et  $2^+_1$ , ce que le calcul de ces TEM confirme. Les durées de vie calculée (0.21 ps) et expérimentale (0.27 ps) sont en bon accord.

En résumé, nos calculs de modèle en couches avec l'interaction PSDPF donnent une très bonne description du type 1p-1t des états de parité négative avec  $J^\pi = 0^-_1, 1^-_1, 2^-_1, 3^-_1, 4^-_1$  et  $5^-_1$  du noyau  $^{36}\text{S}$  à des énergies d'excitation inférieures à 6 MeV.

En conclusion, les résultats de nos calculs discutés dans ce chapitre, nous ont permis de démontrer que l'interaction PSDPF reproduit de manière très satisfaisante les états intrus  $1\hbar\omega$  des noyaux du début et de fin de couche ainsi que les riches en neutrons avec  $N = 20$ . D'excellents résultats ont aussi été obtenus pour les TEM et en particulier les largeurs  $B(E3)$  des transitions  $3^-_1 \rightarrow 0^+$  dans les noyaux pair-pairs à travers la couche sd.

Néanmoins, il reste des états de parité  $+$  et  $-$  dans sd qui ne sont pas bien reproduits. Nous pensons que leurs configurations ne sont pas simplement du type  $0\hbar\omega$  ou  $1\hbar\omega$  mais plus complexes et contiennent des mélanges  $n\hbar\omega$  avec  $n \geq 2$ . Dans un premier temps, une interaction  $2\hbar\omega$  pourrait être développée.

Nous avons montré que nos résultats sont moins bons pour les noyaux sd du milieu de couche. Il serait bien de pouvoir les intégrer dans le fit mais ceci nécessite un développement important du code Antoine. On peut ajouter ici que la tâche entreprise n'était pas facile puisque, dans l'espace modèle choisi, trois couches majeures différentes ont dû être incorporées pour décrire correctement les états 1p-1t à travers la couche sd. Pour mémoire, l'interaction USD a été développée pour un espace de valence ne contenant que la couche sd.

## Conclusion

Mon travail de thèse a été consacré à l'étude de la structure des noyaux de la couche sd et de leurs états de parités positive et négative dans le cadre du modèle en couches. Les états normaux de parité positive sont bien décrits en utilisant l'interaction USD ou ses versions plus récentes USDA et USDB. En ce qui concerne les états  $1h\omega$  de parité négative, des interactions utilisées dans le passé permettaient de décrire séparément les états  $1p-1t$  de début ou de fin de couche. Aucune description unifiée à travers toute la couche sd n'a été proposée précédemment.

Dans notre travail, nous nous sommes particulièrement intéressés à la description des états intrus de parité négative résultants de la promotion d'un nucléon de p vers sd pour les noyaux voisins de  $^{16}\text{O}$  ou de sd vers pf pour les noyaux proches de  $^{40}\text{Ca}$ . Pour cela, nous avons été amené à étendre l'espace modèle de l'espace sd vers l'espace complet p-sd-pf avec un cœur de  $^4\text{He}$ . Cette extension permet de traiter sans ambiguïté le saut de un nucléon entre les couches majeures. Nous avons construit et ceci pour une première fois, une interaction effective compatible avec l'extension de l'espace modèle. Cette interaction est appelée "PSDPF".

La construction de notre interaction est passée par trois étapes importantes : la première a été le choix des différentes composantes p, sd, p-sd, sd-pf et pf formant l'interaction initiale PSDPF0, la deuxième étape a été l'ajustement des monopoles croisés p-sd et sd-pf qui sont les principaux ingrédients des excitations de p vers sd et de sd vers pf, ceci a donné lieu à l'interaction PSDPFB, la dernière étape a consisté à améliorer PSDPFB en utilisant un fit par la méthode des moindres carrés des énergies individuelles ainsi que des monopoles et des multipoles croisés. Ce fit a été réalisé de façon séquentielle pour les noyaux de début et de fin de couche. Les noyaux sd du milieu de couche ne peuvent pas à l'heure actuelle (projet pour le futur) être intégrés dans le fit à cause de la taille des matrices à traiter. Après ces trois étapes, une interaction finale est obtenue qui est appelée PSDPF.

Le "Root Mean Square Deviation" pour des états  $1h\omega$  des noyaux sd a été amélioré dans les différentes étapes, il passe de 912 keV pour PSDPF0, à 505 keV pour PSDPFB et finalement à 407 keV pour PSDPF. Cette amélioration très nette prouve l'efficacité des

procédures utilisées pour décrire de façon unifiée les états de parité + et – à travers toute la couche sd.

L'interaction finale PSDPF a été validée à partir des tests effectués sur des états intrus des noyaux près de la ligne de stabilité avec  $N = Z$  et  $N = Z + 1$ . Une partie importante de la thèse a été consacrée aux applications de la nouvelle interaction : étude et comparaison expérience–théorie des noyaux riches en neutrons à couche fermée  $N = 20$  et avec  $Z = 14, 16, 18$  et, en particulier, de leurs états  $J^\pi = 2^-$  à  $5^-$  de configuration dominante  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$ . L'interaction a également été utilisée pour calculer les propriétés de l'état exotique  $J^\pi = 0^-$  dans les noyaux  $N = Z, Z + 2$  et  $Z + 4$  prévus à relativement basse énergie d'excitation dans la plupart des noyaux considérés. Peu de ces états ont été observés expérimentalement et nos prédictions seront certainement à l'origine de nouvelles expériences. Une autre application intéressante de cette interaction qui est discutée dans la thèse est le calcul des énergies d'excitation et des largeurs de transitions électromagnétiques E2 et E3 pour les premiers états excités  $2^+$  et  $3^-$  dans les noyaux sd pair–pairs avec  $N = Z$  et  $N = Z + 2$ . Dans ce cas, les résultats obtenus montrent un accord tout à fait remarquable avec les données expérimentales et ceci pour tous les noyaux sd considérés. Une dernière application a porté sur la structure du noyau  $^{36}\text{S}$  à partir du spectre en énergie et des propriétés électromagnétiques des états excités. Cette dernière étude nous a permis de suggérer des spins et parités pour certains états dont les  $J^\pi$  ne sont pas encore connus expérimentalement. Là, aussi, de nouvelles expériences pourront être entreprises pour tester nos prédictions.

Tout le travail effectué a permis de démontrer que PSDPF est solide et fiable, l'interaction permet de reproduire de façon satisfaisante les propriétés de structure nucléaire d'un grand nombre de noyaux sd à travers leurs états de parités positive et négative.

Néanmoins, il est bien connu qu'aucune interaction effective n'est parfaite. Il y a dans les noyaux sd des états de parités + et – qui ne sont pas bien reproduits. Nous pensons que leurs configurations sont plus complexes que  $0$  et  $1 \hbar\omega$  et nécessitent la prise en compte d'excitations  $n\hbar\omega$  avec  $n \geq 2$ . Un premier pas serait de traiter de façon consistante les excitations du type  $2\hbar\omega$ .

En tout cas, l'objectif principal de ma thèse était de construire une interaction permettant de décrire les états intrus de parité négative dans les noyaux de la couche sd. Cet objectif est atteint et PSDPF peut maintenant être confrontée à l'ensemble des données expérimentales existantes et peut servir aussi pour faire des prédictions théoriques qui pourront être testées dans des expériences à réaliser.

## Références

- [1] <http://atom.kaeri.re.kr/ton/nuc2.html>
- [2] <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2>
- [3] B.H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11, 5 (1984).
- [4] B. A. Brown, B.H. Wildenthal, Nucl. Phys. A 474, 290 (1987).
- [5] B. A. Brown, W. A. Richter, Phys. Rev. C 74, 034315 (2006).
- [6] <http://www.nscl.msu.edu/~brown/resources/resources.html>
- [7] W. A. Richter, S. Mkhize, B. A. Brown, Phys. Rev. C 78, 064302 (2008).
- [8] E. B. Carter, G. E. Mitchell, R. H. Davis, Phys. Rev. 133, B 1421 (1964).
- [9] P. Chevallier et al., Phys. Rev. 160, 827 (1967).
- [10] C. E. Svensson et al., Phys. Rev. Lett. 85, 2693 (2000).
- [11] E. Ideguchi et al., Phys. Rev. Lett. 87, 222501 (2001).
- [12] G. E. Brown, A. M. Green, Nucl. Phys. A 75, 401 (1966).
- [13] A. P. Zuker, B. Buck, J. B. McGrory, Phys. Rev. Lett. 21, 39 (1968).
- [14] W. J. Gerace, A. M. Green, Nucl. Phys. A 93, 110 (1967).
- [15] W. J. Gerace, A. M. Green, Nucl. Phys. A 123, 241 (1969).
- [16] E. Caurier et al., Rev. Mod. Phys. 77, 427 (2005).
- [17] E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, Phys. Rev. Lett. 95, 042502 (2005).
- [18] E. Caurier, J. Menéndez, F. Nowacki, A. Poves, Phys. Rev. C **75**, 054317 (2007).
- [19] I. Talmi, I. Unna, Phys. Rev. Lett. 4, 469 (1960).
- [20] C. Thibault et al., Phys. Rev. C 12, 644 (1975).
- [21] G. Huber et al., Phys. Rev. C 18, 2342 (1978).
- [22] C. Détraz et al., Phys. Rev. C 19, 164 (1979).
- [23] C. Détraz et al., Nucl. Phys. A 394, 378 (1983).
- [24] B. H. Wildenthal, W. Chung, Phys. Rev. C 19, 164 (1979).
- [25] X. Campi et al., Nucl. Phys. A 251, 193 (1975).
- [26] B.V. Pritychenko et al., Phys. Rev. C 63, 011305(R) (2001)
- [27] T. Motobayashi et al., Phys. Lett. B 346, 9 (1995).
- [28] B.V. Pritychenko et al., Phys. Lett. B 461, 322 (1999).
- [29] V. Chisté et al., Phys. Lett. B 514, 233 (2001).
- [30] H. Iwasaki et al., Phys. Lett. B 522, 227 (2001)
- [31] J. Terasaki et al., Nucl. Phys. A 621, 706 (1997).

- [32] W. Chung, B.H. Wildenthal, Phys. Rev. C 22, 2260, (1980).
- [33] A. Poves, J. Retamosa, Phys. Lett. B 184, 311 (1987).
- [34] E.K. Warburton, J.A. Becker, B.A. Brown, Phys. Rev. C 41, 1147 (1990).
- [35] N. Fukumishi, T. Otsuka, T. Sebe, Phys. Lett. B 296, 279 (1992).
- [36] E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, J. Retamosa, Phys. Rev. C 58, 2033 (1998).
- [37] D. J. Dean et al., Phys. Rev. C 59, 2474 (1999).
- [38] Y. Utsuno et al., Phys. Rev. C 60, 054315 (1999).
- [39] Y. Utsuno et al., Phys. Rev. C 64, 011301(R) (2001).
- [40] Y. Utsuno et al., Phys. Rev. C 70, 044307 (2004).
- [41] S.K. Patra, C.R. Praharaaj, Phys. Lett. B 273, 13 (1991).
- [42] Z. Ren, Z.Y. Zhu, Y.H. Cai, G. Xu, Phys. Lett. B 380, 241 (1996).
- [43] J. B. McGrory, B.H. Wildenthal, Phys. Rev. C 7, 974 (1973).
- [44] D. J. Millener, D. Kurath, Nucl. Phys. A 255, 315 (1975).
- [45] S. Cohen, D. Kurath, Nucl. Phys. 73, 1 (1965).
- [46] E. K. Warburton, B. A. Brown, Phys. Rev. C 46, 923 (1992).
- [47] S. T. Hsieh, M. C. Wang, D. S. Chuu, Phys. Rev. C 23, 521 (1981).
- [48] E. K. Warburton, J. A. Becker, D. J. Millener, B. A. Brown, BNL Report 40890 (1987).
- [49] J. B. McGrory, Phys. Rev. C 8, 693 (1973).
- [50] T. T. S. Kuo, G. E. Brown, Nucl. Phys. A 114, 235 (1968).
- [51] J.R. Terry et al., Phys. Lett. B 640, 86 (2006).
- [52] S. Yildiz et. al., Phys. Rev. C 73, 034601 (2006).
- [53] S. Ohkubo, K. Yamashita, Phys.Rev. C 66, 021301 (2002).
- [54] M. Ito, Y. Hirabayashi, Y. Sakuragi, Phys. Rev. C 66, 034307 (2002).
- [55] Y. Kanada-Enyo, H. Horiuchi, A. Doté, Phys. Rev. C 60, 064304 (1999).
- [56] Y. Kanada-Enyo, M. Kimura, Phys. Rev. C 72, 064322 (2005).
- [57] M. Mayer, Phys. Rev. 75, 1969 (1949).
- [58] O. Axel, J.H.D. Jensen, H.E.Suess, Phys. Rev. 75, 1766 (1949).
- [59] M. Stanoiu et al., Phys. Rev. C 69, 034312 (2004).
- [60] R. Kanungo et al., Phys. Rev. Lett. 102, 152501 (2009).
- [61] C. R. Hoffman et al., Phys. Lett. B 672, 17 (2009).
- [62] T. Otsuka et al., Phys. Rev. Lett. 87, 082502 (2001).
- [63] B. A. Brown, Prog. Part. Nucl. Phys. 47, 517 (2001).
- [64] J. Retamosa, E. Caurier, F. Nowacki, A. Poves, Phys. Rev. C 55, 1266 (1997); Phys. Rev. C 58, 2033 (1998).

- [65] P. Navratil, B. R. Barrett, *Phys. Rev. C* 57, 3119 (1998).
- [66] E. Caurier, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 59, 226 (2007).
- [67] R. R. Whitehead, A. Watt, B. J. Cole, I. Morrison, *Adv. Nucl. Phys.* 9, 123 (1977).
- [68] J. B. French, E. C. Halbert, J. B. McGrory, S. S. M. Wong. *Adv. Nucl. Phys.* 3, 193 (1969).
- [69] E. Caurier, F. Nowacki, *Acta Phys. Pol. B* 30, 705 (1999).
- [70] A. Schmidt et al., *Phys. Rev. C* 62, 044319 (2000).
- [71] T. Mizusaki, RIKEN Accelerator Progress Report Vol. 33, 15 (2000).
- [72] E. W. Ormand, C. W. Johnson, REDSTICK code, 2002.
- [73] D. Zwarts, *Comp. Phys. Comm.* 38, 365 (1985).
- [74] B. A. Brown et al., MSU–NSCL Report No. 524 (1985).
- [75] A. Novoselsky, M. Vallières, Drexel University Shell–Model Code DUPSM (1997).
- [76] E. Caurier, G. Martinez–Pinedo, F. Nowacki, A. Poves, A. P. Zuker, *Phys. Rev. C* 59, 2033 (1999).
- [77] S. Cohen, D. Kurath, *Nucl. Phys. A*101, 1 (1967).
- [78] T. Sebe, J. Nachamkin, *Ann. of Phys.* 51, 100 (1969).
- [79] R. R. Whitehead, *Nucl. Phys. A* 182, 290 (1972).
- [80] E. Caurier, Proceedings of the 7<sup>th</sup> Int. Spring Seminar on Nuclear Physics, Challenges of Nuclear Structure, 177 (2002).
- [81] T. T. S. Kuo, G. E. Brown, *Nucl. Phys.* 85, 40 (1966).
- [82] M. Hjorth–Jensen, T. T. S. Kuo, E. Osnes, *Phys. Rep.* 261,125 (1995).
- [83] R. E. Julies, W. A. Richter, B. A. Brown, *South African Jour. Phys.* 15, 35 (1992).
- [84] T.T.S. Kuo, *Nucl. Phys. A*103, 71 (1967).
- [85] J. B. McGrory, B. H. Wildenthal, E. C. Halbert, *Phys. Rev. C* 2, 186 (1970).
- [86] A. Poves, A. P. Zuker, *Phys. Rep.* 70, 235 (1981).
- [87] E. Caurier, A. P. Zuker, A. Poves, G. Martinez–Pinedo, *Phys. Rev. C* 50, 225 (1994).
- [88] G. Martinez–Pinedo, A. P. Zuker, A. Poves, E. Caurier, *Phys. Rev. C* 55, 187 (1997).
- [89] A. Poves, J. Sanchez–Solano, E. Caurier, F. Nowacki, *Nucl. Phys. A* 694, 157 (2001).
- [90] S. Nummela et al., *Phys. Rev. C* 63, 044316 (2001).
- [91] F. Nowacki, A. Poves, *Phys. Rev. C* 79, 014310 (2009).
- [92] A. Watt, R. P. Singhal, M. H. Storm, R. R. Whitehead, *J. Phys. G* 7, L145 (1981).
- [93] A. Poves, J. Retamosa, *Nucl. Phys. A*571, 221 (1994).
- [94] N. Fukunishi, T. Otsuka, T. Sebe, *Phys. Lett. B* 296, 279 (1992).
- [95] T. Otsuka, N. Fukunishi, *Phys. Rep.* 264, 297 (1996).

- [96] M. Dufour, A. P. Zuker, Phys. Rev. C 54, 1641 (1996).
- [97] A. Poves, Ecole Joliot–Curie de Physique Nucléaire, "Le Modèle en couches : vers une description unifiée de la structure nucléaire", 1997.
- [98] W. A. Richter, M. G. van der Merwe, R. E. Julies, B. A. Brown, Nucl. Phys. A 527, 325 (1990).
- [99] D. Gogny, Nucl. Phys. A 237, 399 (1975).
- [100] W. Chung, Ph.D. thesis, Michigan State University, 1976.
- [101] M. Honma, B. A. Brown, T. Mizusaki, T. Otsuka, Phys. Rev. C 65, 061301(R) (2002).
- [102] J. P. Elliott, T. H. French, Proc. Roy. Soc. A 232, 561 (1955).
- [103] H. J. Lipkin, Phys. Rev. 110, 1395 (1958).
- [104] E. Baranger, C. W. Lee, Nucl. Phys. 22, 157 (1961).
- [105] M. A. Nagarajan, Phys. Rev. 135, B34 (1964).
- [106] D. H. Gloeckner, R.D. Lawson, Phys. Lett. 53B, 313 (1974).
- [107] R.D. Lawson, "Theory of the Nuclear Shell–Model", Clarendon Press, Oxford, 1980.
- [108] P.J. Brussaard, P.W.M. Glaudemans, "Shell–Model Applications in Nuclear Spectroscopy", North–Holland, 1977.
- [109] M. Bouhelal, F. Haas, E. Caurier, F. Nowacki, A. Bouldjedri, Acta Phys. Pol. B 40, 639 (2009).
- [110] M. Bouhelal, F. Haas, E. Caurier, F. Nowacki, A. Bouldjedri, Eur. Phys. J. A 42, 529 (2009).
- [111] P. M. Endt, At. Data Nucl. Data Tables 23, 3 (1979).
- [112] P. M. Endt, At. Data Nucl. Data Tables 55, 171 (1993).
- [113] X. K. Maruyama et al., Phys. Rev. C 19, 1624 (1979).
- [114] M. Carchidi, B. H. Wildenthal, B. A. Brown, Phys. Rev. C 34, 2280 (1986).
- [115] A. Hogenbirk et al., Nucl Phys. A 516, 205 (1990).
- [116] E. A. Samworth, J. W. Olness, Phys. Rev. C 5, 1238 (1973).

## Annexe A

### Listes des différences $\Delta$ entre les paramètres des interactions utilisées

Nous présentons dans cette annexe les tableaux regroupant les différences  $\Delta$  entre les paramètres des interactions utilisées au cours de notre travail.

#### 1. PSDPFB– PSDPF0 (Etats $1h\omega$ )

Le tableau A–1 rassemble les différences entre les monopoles p–sd et sd–pf de l’interaction PSDPFB et ceux de l’interaction initiale PSDPF0

| $j_1$             | $j_2$             | T | $\Delta(\text{MeV})$ | $j_1$             | $j_2$             | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|-------------------|-------------------|---|----------------------|-------------------|-------------------|---|----------------------|
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0 | –0.2438              | 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | –0.2517              |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 1 | –0.2438              | 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0.0360               |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0 | –0.0158              | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | 0.7744               |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | –0.1281              | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | –0.3079              |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | 0.1158               | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | 0.6113               |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | –0.1719              | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0.1798               |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0 | –0.0281              | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | –2.2621              |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 1 | –0.0281              | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | 0.7394               |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0 | –0.1000              | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | –0.3306              |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | –0.1000              | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1.5956               |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | –0.1000              | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | –0.9281              |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | –0.1000              | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | –0.1377              |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | –0.4533              | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | –1.5394              |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | 0.2660               | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0.1921               |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | –0.0990              | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | –0.1079              |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | –0.1421              | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | –0.2517              |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | –0.0360              | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | –1.3360              |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | –0.0360              | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | –0.5517              |

**Tableau A–1:** Les différences  $\Delta$  entre les monopoles croisés de notre interaction PSDPFB et ceux de l’interaction initiale PSDPF0.

## 2. PSDPF– PSDPFB (Etats $0\hbar\omega$ )

Nous présentons dans les Tableaux A–2 et A–3, les différences entre les monopoles et les multipoles (sd–sd) de l’interaction finale PSDPF et ceux de l’interaction PSDPFB.

| $j_1$      | $j_2$      | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|------------|------------|---|----------------------|
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 0 | 0.0129               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 1 | –0.0012              |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 0 | 0.3265               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 1 | –0.0125              |
| $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 0 | 0.0769               |
| $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 0.0498               |
| $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 0 | –0.1144              |
| $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 1 | –0.0429              |
| $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 0 | 0.0411               |
| $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | –0.0321              |
| $0s_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 0 | –0.1529              |
| $0s_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | –0.0246              |

**Tableau A–2:** Les différences  $\Delta$  entre les monopoles sd–sd de l’interaction finale PSDPF et ceux de l’interaction PSDPFB.

| $j_1$      | $j_2$      | $j_3$      | $j_4$      | J | T | $\Delta(\text{MeV})$ | $j_1$      | $j_2$      | $j_3$      | $j_4$      | J | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|------------|------------|------------|------------|---|---|----------------------|------------|------------|------------|------------|---|---|----------------------|
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 1 | 0 | 0.0387               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 3 | 1 | 0.1320               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 3 | 0 | 0.0426               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 1 | 0 | 0.0566               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 5 | 0 | 0.0166               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 3 | 0 | 0.0646               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 0 | 1 | 0.0748               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 0 | 0.0949               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 2 | 1 | 0.0430               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 1 | 0.0137               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | 4 | 1 | 0.0322               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 1 | 0.0301               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 1 | 0 | 0.0975               | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 0 | 0.0906               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 3 | 0 | 0.0127               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 0 | 0.0282               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 2 | 1 | 0.0908               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 3 | 0 | 0.0202               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | 4 | 1 | 0.0531               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 1 | 0.0570               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 3 | 0 | 0.0598               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 3 | 1 | 0.0407               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 1 | 0.0226               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 3 | 0 | 0.0615               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 1 | 0 | 0.0146               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 2 | 1 | 0.1257               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 3 | 0 | 0.0334               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 0 | 0.0659               |
| $0d_{5/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | 0 | 1 | 0.1010               | $0d_{5/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0s_{1/2}$ | 2 | 1 | 0.1045               |

|                   |                   |                   |                   |   |   |        |                   |                   |                   |                   |   |   |        |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---|---|--------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---|---|--------|
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.0788 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | 1 | 0.1129 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0126 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.0226 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.0789 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0306 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0495 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.0868 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0 | 1 | 0.0289 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0350 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | 0 | 0.0758 | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0 | 1 | 0.0211 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 3 | 0 | 0.0108 | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0237 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 4 | 0 | 0.0308 | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 0 | 0.0142 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | 1 | 0.0460 | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 1 | 0.0261 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 0 | 0.0285 | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.0157 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 3 | 0 | 0.1548 | 0d <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0519 |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.0324 |                   |                   |                   |                   |   |   |        |

**Tableau A-3:** Les différences  $\Delta$  entre les multipoles sd–sd de l’interaction PSDPF et ceux de l’interaction PSDPFB.

### 3. PSDPF– PSDPFB (Etats $1\hbar\omega$ )

Nous présentons dans les Tableaux A-4, 5, 6 et 7, les différences entre les monopoles et les multipoles p–sd et sd–pf de l’interaction finale PSDPF et ceux de l’interaction PSDPFB.

#### p–sd

| j <sub>1</sub>    | j <sub>2</sub>    | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|-------------------|-------------------|---|----------------------|
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0 | 0.1745               |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 1 | -0.0692              |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | -0.0083              |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | -0.0083              |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0 | 0.2636               |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1 | -0.0989              |

**Tableau A-4:** Les différences  $\Delta$  entre les monopoles p–sd de l’interaction finale PSDPF et ceux de l’interaction PSDPFB.

| $j_1$      | $j_2$      | $j_3$      | $j_4$      | J | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|------------|------------|------------|------------|---|---|----------------------|
| $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | 2 | 0 | 0.0460               |
| $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | 3 | 0 | 0.0329               |
| $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | 2 | 1 | 0.0882               |
| $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0d_{5/2}$ | 3 | 1 | 0.0630               |
| $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 0 | 0 | 0.0799               |
| $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 0 | 0.0266               |
| $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 0 | 1 | 0.2771               |
| $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | $0p_{1/2}$ | $0s_{1/2}$ | 1 | 1 | 0.0924               |

**Tableau A-5:** Les différences  $\Delta$  entre les multipoles p-sd de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB.

**sd-pf**

| $j_1$      | $j_2$      | T | $\Delta(\text{MeV})$ | $j_1$      | $j_2$      | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|------------|------------|---|----------------------|------------|------------|---|----------------------|
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 0 | -0.3723              | $0s_{1/2}$ | $0f_{7/2}$ | 0 | -0.0054              |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 1 | 0.5799               | $0s_{1/2}$ | $0f_{7/2}$ | 1 | -0.2678              |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{5/2}$ | 0 | 0.1887               | $0s_{1/2}$ | $0f_{5/2}$ | 0 | -0.4151              |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{5/2}$ | 1 | 0.3930               | $0s_{1/2}$ | $0f_{5/2}$ | 1 | -0.1312              |
| $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 0 | 0.1553               | $0s_{1/2}$ | $1p_{3/2}$ | 0 | -0.5822              |
| $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 1 | 0.4041               | $0s_{1/2}$ | $1p_{3/2}$ | 1 | -0.0755              |
| $0d_{3/2}$ | $1p_{1/2}$ | 0 | 0.7447               | $0s_{1/2}$ | $1p_{1/2}$ | 0 | -0.8874              |
| $0d_{3/2}$ | $1p_{1/2}$ | 1 | 0.2076               | $0s_{1/2}$ | $1p_{1/2}$ | 1 | 0.0262               |

**Tableau A-6:** Les différences  $\Delta$  entre les monopoles sd-pf de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB.

| $j_1$      | $j_2$      | $j_3$      | $j_4$      | J | T | $\Delta(\text{MeV})$ | $j_1$      | $j_2$      | $j_3$      | $j_4$      | J | T | $\Delta(\text{MeV})$ |
|------------|------------|------------|------------|---|---|----------------------|------------|------------|------------|------------|---|---|----------------------|
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 2 | 0 | 0.1367               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 0 | 0 | 0.0424               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 3 | 0 | 0.1209               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 1 | 0 | 0.1505               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 4 | 0 | 0.0722               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 2 | 0 | 0.0196               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 5 | 0 | 0.0739               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 3 | 0 | 0.0725               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 2 | 1 | 0.0219               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 0 | 1 | 0.2845               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 3 | 1 | 0.3079               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 1 | 1 | 1.5065               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 4 | 1 | 0.0868               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 2 | 1 | 0.2672               |
| $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | $0d_{3/2}$ | $0f_{7/2}$ | 5 | 1 | 0.1150               | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | $0d_{3/2}$ | $1p_{3/2}$ | 3 | 1 | 0.8771               |

|                   |                   |                   |                   |   |   |        |                   |                   |                   |                   |   |   |        |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---|---|--------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---|---|--------|
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 0 | 0.3352 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 0 | 0.0206 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 3 | 0 | 1.1522 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 1 | 0.1286 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.3209 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0 | 0.3932 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 0 | 0.0927 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 0 | 0.4168 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 4 | 0 | 1.4273 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 1 | 0.2115 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 1 | 0.1335 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.0934 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 4 | 1 | 0.9789 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0739 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 0 | 0.3245 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 2 | 0 | 0.0443 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.2180 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1 | 0.3240 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | 0 | 0.3551 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.1944 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 0 | 0.2157 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 0 | 0.2289 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 0 | 0.0707 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 1 | 0.1203 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 4 | 0 | 0.2932 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0608 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | 1 | 0.5194 | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1 | 0.3669 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 1 | 0.3193 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 0 | 0.1896 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 1 | 0.1834 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 4 | 0 | 0.1475 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 4 | 1 | 0.2079 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 3 | 1 | 0.0999 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.0174 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 4 | 1 | 0.0777 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 2 | 0 | 0.5601 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 0 | 0.0305 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1 | 0.3585 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 0 | 0.0218 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 2 | 1 | 0.0734 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 1 | 0.0593 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 0 | 0.3801 | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 1 | 0.0424 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 0 | 0.1297 | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0 | 0.0103 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 2 | 1 | 1.2553 | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 1 | 0.0217 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 3 | 1 | 1.9982 | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 2 | 1 | 0.0130 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0 | 0.3037 | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | 0 | 0.0162 |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1 | 0.0959 |                   |                   |                   |                   |   |   |        |

**Tableau A-7:** Les différences  $\Delta$  entre les multipoles sd-pf de l'interaction finale PSDPF et ceux de l'interaction PSDPFB.

## *Annexe B*

### **Résultats de l'interaction PSDPFB**

Nous avons joint dans cet Annexe nos deux publications [109,110] où quelques résultats utilisant l'interaction intermédiaire PSDPFB sont présentés et discutés.

## NEGATIVE PARITY INTRUDER STATES IN *SD* SHELL NUCLEI: A COMPLETE $1\hbar\omega$ SHELL MODEL DESCRIPTION\*

M. Bouhelal<sup>a,b</sup>, F. Haas<sup>a</sup>, E. Caurier<sup>a</sup>  
F. Nowacki<sup>a</sup>, A. Bouldjedri<sup>b</sup>

<sup>a</sup>IPHC, CNRS/IN2P3, Université Louis Pasteur, 67037 Strasbourg, France

<sup>b</sup>Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Batna, Algérie

(Received October 28, 2008)

A new interaction called PSDPFB has been derived in the full  $p$ - $sd$ - $pf$  model space allowing one jump with a  ${}^4\text{He}$  core to describe the  $1\hbar\omega$  intruder states in  $sd$  shell nuclei. This new interaction was tested by calculating the evolution of the negative parity states throughout the shell. A low-lying  $0^-$  state in  ${}^{40}\text{Ca}$  is predicted. The interaction was applied to obtain the  $N = 18$  and 20 isotones spectra. Results for the isotones  ${}^{32}\text{Si}$ ,  ${}^{34}\text{S}$  and  ${}^{36}\text{Ar}$  and those for  ${}^{34}\text{Si}$ ,  ${}^{36}\text{S}$  and  ${}^{38}\text{Ar}$  are presented and compared to experiment.

PACS numbers: 21.60.Cs, 21.10.-k, 27.30.+t, 27.40.+z

### 1. Introduction

The structure of  $sd$  shell nuclei has been the subject of many experimental and theoretical investigations. The shell model using the USD Hamiltonian [1] has been used with considerable success to describe the energy levels and spectroscopic properties of these nuclei in the full  $sd$  model space. In this case where an inert  ${}^{16}\text{O}$  core is assumed, only the positive parity states are concerned. Recently, much more and improved data appeared in the literature on neutron-rich nuclei. Using the recent growing of computational power, the theorists have refined the derivation of the USD Hamiltonian with an updated and complete set of energy data [2]. The new Hamiltonians are called USDA and USDB. Negative parity states are known experimentally throughout the  $sd$  shell, they can of course not be described by the USD interaction with an inert  ${}^{16}\text{O}$  core. These levels named intruder states result from the excitation of one nucleon ( $1\hbar\omega$  excitation) from the  $p$  to the  $sd$  shell

---

\* Presented at the Zakopane Conference on Nuclear Physics, September 1–7, 2008, Zakopane, Poland.

for nuclei near  $^{16}\text{O}$ , or from the  $sd$  to  $fp$  shell for nuclei close to  $^{40}\text{Ca}$ . In the middle of the  $sd$  shell, there is a competition for the intruders between the two types of excitation. To describe these states, we must enlarge the model space from the  $sd$  space ( $^{16}\text{O}$  core) to the full  $p$ - $sd$ - $pf$  space ( $^4\text{He}$  core). It is the aim of our work to construct a new interaction compatible with this extended shell model space. For our calculations, the code Antoine [3] was used. In this paper, we will first present the derivation procedure of our PSDPFB interaction. We will then give various results predicted by our model and compare them with known experimental data.

## 2. Derivation of the PSDPFB interaction

Our proposed PSDPFB interaction contains four main parts: CK [4], USDB [2] and PSDT [5] for the  $p$ ,  $sd$  and  $p$ - $sd$  shells, respectively, IOKIN [6] for the  $pf$  and  $sd$ - $pf$  shells. The main aim of the present work is to get for the first time a consistent description of the negative parity states throughout the  $sd$  shell. To reach this goal we had to modify the cross  $p$ - $sd$  and  $sd$ - $pf$  contributions without changing the  $0\hbar\omega$  states in  $^{17}\text{O}$  and  $^{41}\text{Ca}$  nuclei. For the major shells, the previously determined interactions [2,4,5] have been adopted. The single particle energies of the  $p$  shell are taken from CK and those of the  $sd$  and  $pf$  shells have been adjusted in order to obtain the  $0\hbar\omega$  energy levels of  $^{17}\text{O}$  and  $^{41}\text{Ca}$  nuclei. To eliminate the spurious states, a centre of mass Hamiltonian for the full  $p$ - $sd$ - $pf$  space was added to this interaction. To test our interaction, we applied it to calculate the energy evolution of the negative parity states of different spins throughout the complete  $sd$  shell. As an example, we present in Fig. 1 the evolution of the first excited  $0^-$  state in  $N = Z$  nuclei and the first excited  $1/2^-$  state in  $N = Z + 1$  nuclei, indicated by circles, compared to the experimental results [7] given by squares. In both cases, we reproduce quite well the experimental excitation energies variation and values.

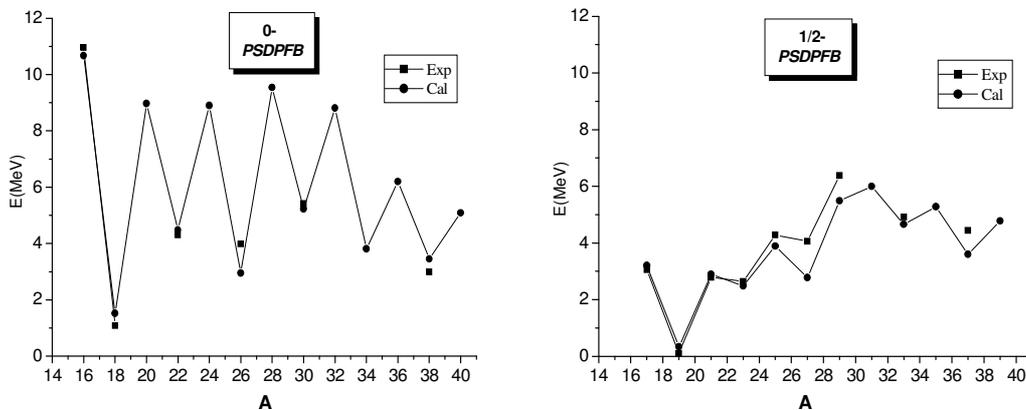


Fig. 1. Evolution of the  $0^-$  state in  $N = Z$  and  $1/2^-$  state in  $N = Z + 1$  nuclei.

### 3. Results and discussion

#### 3.1. A predicted $0^-$ state in $^{40}\text{Ca}$

The first  $0^-$  states are well known in odd–odd nuclei and are located at relatively low excitation energy. This location is well reproduced with our interaction (see Fig. 1). For the even–even sd shell nuclei, this level is only known in  $^{16}\text{O}$ . It is predicted at high excitation energy for  $^{20}\text{Ne}$ ,  $^{24}\text{Mg}$ ,  $^{28}\text{Si}$  and  $^{32}\text{S}$ . Towards the end of the shell, the energy of this  $0^-$  state is decreasing and is predicted to be at 5.09 MeV for  $^{40}\text{Ca}$ . We calculated the full spectrum up to 6 MeV of this nucleus; the comparison with experiment [7] is shown in Fig. 2. The spin and parity of  $^{40}\text{Ca}$  levels are well established and there is a one to one correspondence except for the predicted  $0^-$  state which has a pure  $d_{3/2}^{-1}p_{3/2}^1$  configuration. Experimentally, there is an unknown spin and parity level at 5.35 MeV which is a good candidate to be a  $0^-$ . If this latter has  $0^-$ , it can only  $\gamma$  decay to the  $2^+$  state at 3.90 MeV by an M2 transition. In this case, we have estimated the mean lifetime of this state to be  $\approx 8.6$  ns (an isomer!). It would be nice to confirm experimentally our prediction.

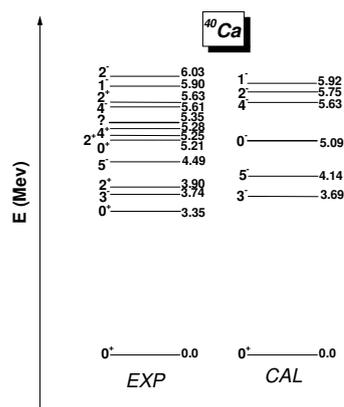


Fig. 2. Experimental level scheme of  $^{40}\text{Ca}$  positive and negative parity states compared to the calculated negative parity intruder states.

#### 3.2. Results for $N = 18$ and 20 isotones

With our new interaction, we have calculated the negative parity states of the *sd* neutron–rich nuclei  $N = 18$  and 20 isotones with  $Z = 14, 16$  and 18. The results are presented in Fig. 3, in which we can see the good agreement between our predictions and experiment. In general, all the observed levels are nicely reproduced; especially, those of spins 2 to 5 which are members of the  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  multiplet. According to our results, we can confirm some spins not well established experimentally, for example, the  $5^-$  level in  $^{32}\text{Si}$  and the  $2^-$  state in  $^{38}\text{Ar}$ . A low energy  $0^-$  state is also predicted for all the studied nuclei, which up to now has not been observed experimentally.

Most of the data are taken from the compilation work of Ref. [7]. In the case of  $^{34}\text{Si}$ , the states reported have been obtained in a recent deep inelastic ( $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ ) experiment performed at Legnaro using the fragment spectrometer Prisma in coincidence with the array Clara (see Ref. [8] for more information).

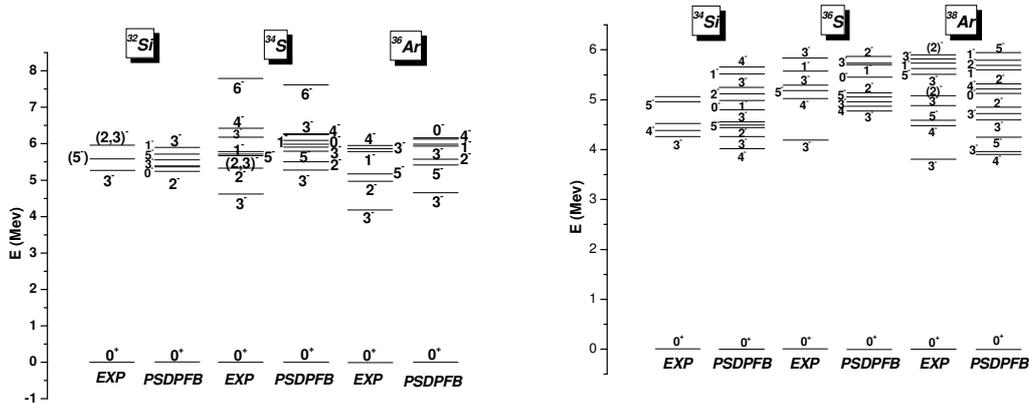


Fig. 3. Comparison of our calculations using the PSDPFB interaction and experimental data of  $N = 18$  isotones (left) and  $N = 20$  isotones (right).

### 3. Summary and conclusions

We have determined for the first time a psdpf interaction named PSDPFB, with the aim to study in a consistent way the negative parity states of sd shell nuclei. This interaction was used to calculate neutron-rich nuclei spectra, our results are generally in good agreement with the experimental data, but of course the agreement is not perfect. For this reason we will try to improve our interaction using a fitting procedure. We will also calculate the electromagnetic transitions probabilities of the intruders which are a stringent test of the wave functions of these states.

### REFERENCES

- [1] B.H. Wildenthal, Prog. Part. Nucl. Phys. 11, 5 (1984).
- [2] B.A. Brown, W.A. Richter, Phys. Rev. C74, 034315 (2006).
- [3] E. Caurier, Code ANTOINE, Strasbourg 1989.
- [4] S. Cohen, D. Kurath, Nucl. Phys. 73, 1 (1965); A101, 1 (1967).
- [5] E.K. Warburton, B.A. Brown, Phys. Rev. C46, 923 (1992).
- [6] S. Nummela et al., Phys. Rev. C63, 044316 (2001).
- [7] <http://www.nndc.bnl.gov>
- [8] X. Liang et al., Phys. Rev. C74, 014311 (2006).

## Negative-parity intruder states of the neutron-rich $N = 20$ , $Z = 14$ – $16$ isotones: a $1\hbar\omega$ shell model description

M. Bouhelal<sup>1,2,a</sup>, F. Haas<sup>1</sup>, E. Caurier<sup>1</sup>, F. Nowacki<sup>1</sup>, and A. Bouldjedri<sup>2</sup>

<sup>1</sup> IPHC, CNRS/IN2P3, Université de Strasbourg, F-67037 Strasbourg, Cedex2, France

<sup>2</sup> Département de Physique, Faculté des Sciences, Université de Batna, Algérie

Received: 22 December 2008 / Revised: 4 March 2009

© Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag 2009

Communicated by W. Nazarewicz

**Abstract.** In order to get a consistent shell model description of the negative-parity states throughout the sd shell a new interaction (PSDPFB) has been developed. It was derived in the full p–sd–pf model space and is built on existing interactions for the major shells with adjustments of the cross-shell monopoles. The calculated energy spectra for these  $1\hbar\omega$  intruder states are compared to experiment for the  $N = 20$  neutron-rich isotones  $^{34}\text{Si}$ ,  $^{35}\text{P}$  and  $^{36}\text{S}$ . A systematics for the multiplet configuration  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  in even-even isotones from  $^{34}\text{Si}$  to  $^{40}\text{Ca}$  is also presented.

PACS. 21.10.-k Properties of nuclei; nuclear energy levels – 21.60.Cs Shell model – 27.30.+t  $20 \leq A \leq 38$  – 27.40.+z  $39 \leq A \leq 58$

### 1 Introduction

Neutron-rich sd shell nuclei with  $N \sim 20$  have been the subject of numerous experimental and theoretical studies. The interest was particularly focused on the so-called island of inversion region with  $Z = 10$  to 12, discovered from anomalies in the binding energies [1–4] and characterized by well deformed  $2p$ – $2h$  ground-state configurations in  $^{30}\text{Ne}$ ,  $^{31}\text{Na}$  and  $^{32}\text{Mg}$  (see for example refs. [5–7]). The intruder  $2p$ – $2h$  configuration can be explained by the promotion of a pair of sd shell neutrons ( $2\hbar\omega$  excitations) across the  $N = 20$  shell gap into the normally empty pf shell which results in a breaking of the  $N = 20$  magicity. Beyond this  $Z$  region, the ground states of the  $N = 20$  isotones are spherical as confirmed in  $^{33}\text{Al}$  [8],  $^{34}\text{Si}$  [9–11] and heavier sd-isotones. In these nuclei, the intruder states with 1 and 2  $\hbar\omega$  configurations appear at higher excitation energies.

Intruder  $1\hbar\omega$  negative-parity states are known in a large number of nuclei throughout the sd shell. The intruders result from the excitation of one nucleon from p to sd for sd shell nuclei close to  $^{16}\text{O}$  or from sd to pf for nuclei close to  $^{40}\text{Ca}$ . To reproduce the well-known spectra of intruders for nuclei near the stability line by shell model calculations is a good test of the interaction in particular of the part describing the cross-shell excitations. Until now, there is no proposed dedicated interaction for

such purpose; we have thus derived a new psdpf interaction called PSDPFB which operates in the full p–sd–pf model space. We used this new interaction to calculate the spectra of some sd shell nuclei with  $N = 20$ .

In this paper, results will be presented for intruders in  $^{34}\text{Si}$ ,  $^{35}\text{P}$  and  $^{36}\text{S}$ , they will be compared to recent experimental data. We will also show a systematics of intruders in even-even nuclei with  $N = 20$  and  $Z = 14$  to 20 for which the main configuration is  $\nu(d_{5/2}^{-1}f_{7/2}^1)$ .

### 2 The PSDPFB interaction and the $1\hbar\omega$ states

To study the intruder negative-parity states in sd shell nuclei, the model space has to be enlarged from the sd to the full p–sd–pf space using a  $^4\text{He}$  core to ensure the complete description of an excitation from p to sd as well as from sd to pf. Such an extension of model space requires the development of a new psdpf interaction.

Our PSDPFB interaction was constructed starting from existing four separable parts: CK for the p shell [12], USDB for sd [13], PSDT for p–sd [14] and IOKIN for pf and sd–pf [15]. For the sd positive-parity states we thus used the USDB interaction.

When a valence space contains more than one major oscillator shell, spurious states can appear. To avoid them a center of mass Hamiltonian  $H_{cm}$  for the full p–sd–pf subspace was added to our interaction using the procedure

<sup>a</sup> e-mail: Mouna.Bouhelal@IReS.in2p3.fr

described in ref. [16] with a multiplicative constant equal to 10. We also used, as was done for the USD interaction, a mass  $A$ -dependence of the two-body matrix elements  $V$  which has the form

$$V(A) = V(A=18)(A/18)^{-0.3} \quad (1).$$

The single-particle energies (SPE) of the  $p$  shell are taken from CK, the SPE of the  $sd$  and  $pf$  shells have been adjusted to reproduce the  $0 \hbar\omega$  states of  $^{17}\text{O}$  and  $^{41}\text{Ca}$ , respectively. The adopted SPE for the  $0d_{5/2}$ ,  $1s_{1/2}$  and  $0d_{3/2}$  shells are 5.2588, 2.5767 and 8.0649 MeV, respectively; those for  $0f_{7/2}$ ,  $1p_{3/2}$ ,  $0f_{5/2}$  and  $1p_{1/2}$  are 15.7, 16.0, 18.6 and 16.2 MeV, respectively. Starting from the initial adopted interaction, the most important parameters to be adjusted for those  $1 \hbar\omega$  excitations are the  $p$ - $sdh$  and  $sd$ - $pf$  monopoles without changing the  $0 \hbar\omega$  states in  $^{17}\text{O}$  and  $^{41}\text{Ca}$  nuclei. To optimize the interaction, we applied it to calculate the energies of the first excited states with  $0^-$  to  $6^-$  in  $N = Z$  nuclei and with  $1/2^-$  to  $13/2^-$  in  $N = Z + 1$  nuclei. The comparison with known experimental data for these nuclei allowed us to adjust the most important cross monopoles. The results are listed in table 1 where  $\Delta$  are the values of the obtained modifications for the cross-shell  $p$ - $sd$  and  $sd$ - $pf$  monopoles in comparison with the PSDT [14] and IOKIN [15] interactions, respectively.

As an example, a comparison between calculated and experimental results is presented in fig. 1(A) for the  $3^-$  state in  $N = Z$   $sd$  nuclei. The corresponding occupation probabilities are indicated in fig. 1(B).

As can be seen in fig. 1(B), the first  $3^-$  state has an almost pure  $p^{-1}(sd)^1$  configuration for nuclei from  $^{16}\text{O}$  to  $^{24}\text{Mg}$ . This hole configuration changes rather abruptly to a pure  $(sd)^{-1}(pf)^1$  configuration from  $^{28}\text{Si}$  to  $^{40}\text{Ca}$ .

After adjustment of the cross monopoles, the agreement between experimental and calculated excitation energies is rather good (see fig. 1A). This is not only true for the  $3^-$  state but also for all the other negative-parity intruder states throughout the  $sd$  shell. In the middle of the shell, there are some discrepancies but this region is very sensitive to the mixture of the two possible configurations.

### 3 Results for the $N = 20$ isotones

#### 3.1 The $^{34}\text{Si}$ case

Several experiments have been performed recently to study the spectroscopic properties of the  $^{34}\text{Si}$  [15,17,18]. The calculated spectrum using our new PSDPFB interaction compared to the results obtained in a recent deep inelastic ( $^{36}\text{S} + ^{208}\text{Pb}$ ) experiment at Legnaro using the fragment spectrometer Prisma in coincidence with the  $\gamma$  array Clara (see ref. [18] for more details) is presented in fig. 2.

It has been established that the first excited  $2^+$  level is a deformed ( $2p$ - $2h$ ) state [10], it is thus predicted at a too high energy. What the negative-parity states are

Table 1. The cross-shell  $p$ - $sd$  and  $sd$ - $pf$  monopole modifications  $\Delta$  of our PSDPFB interaction relative to the PSDT [14] and IOKIN [15] interactions, respectively.

| $j_1$             | $j_2$             | T | $\Delta$ (MeV) |
|-------------------|-------------------|---|----------------|
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0 | -0.2438        |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 1 | -0.2438        |
| 0p <sub>1/2</sub> | 1s <sub>1/2</sub> | 0 | -0.0158        |
| 0p <sub>1/2</sub> | 1s <sub>1/2</sub> | 1 | -0.1281        |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | 0.1158         |
| 0p <sub>1/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | -0.1719        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 0 | -0.0281        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>5/2</sub> | 1 | -0.0281        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 1s <sub>1/2</sub> | 0 | -0.1000        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 1s <sub>1/2</sub> | 1 | -0.1000        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 0 | -0.1000        |
| 0p <sub>3/2</sub> | 0d <sub>3/2</sub> | 1 | -0.1000        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | -0.4533        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | 0.2660         |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | -0.0990        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | -0.1421        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | -0.0360        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | -0.0360        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | -0.2517        |
| 0d <sub>5/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 0.0360         |
| 1s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | 0.7744         |
| 1s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | -0.3079        |
| 1s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | 0.6113         |
| 1s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0.1798         |
| 1s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | -2.2621        |
| 1s <sub>1/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | 0.7394         |
| 1s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | -0.3306        |
| 1s <sub>1/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | 1.595          |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 0 | -0.9281        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>7/2</sub> | 1 | -0.1377        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 0 | -1.5394        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>3/2</sub> | 1 | 0.1921         |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 0 | -0.1079        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 0f <sub>5/2</sub> | 1 | -0.2517        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 0 | -1.3360        |
| 0d <sub>3/2</sub> | 1p <sub>1/2</sub> | 1 | -0.5517        |

concerned, the calculated yrast  $3^-$ ,  $4^-$  and  $5^-$  states having the main  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  configuration are in remarkable agreement with experiment. We also propose that the  $^{34}\text{Si}$  states observed at 4.52 and 5.04 MeV (represented by thicker lines in fig. 2) which decay to the  $2^+$  state are good candidates to be the second and third  $3^-$  states which are predicted at 4.52 and 5.22 MeV.

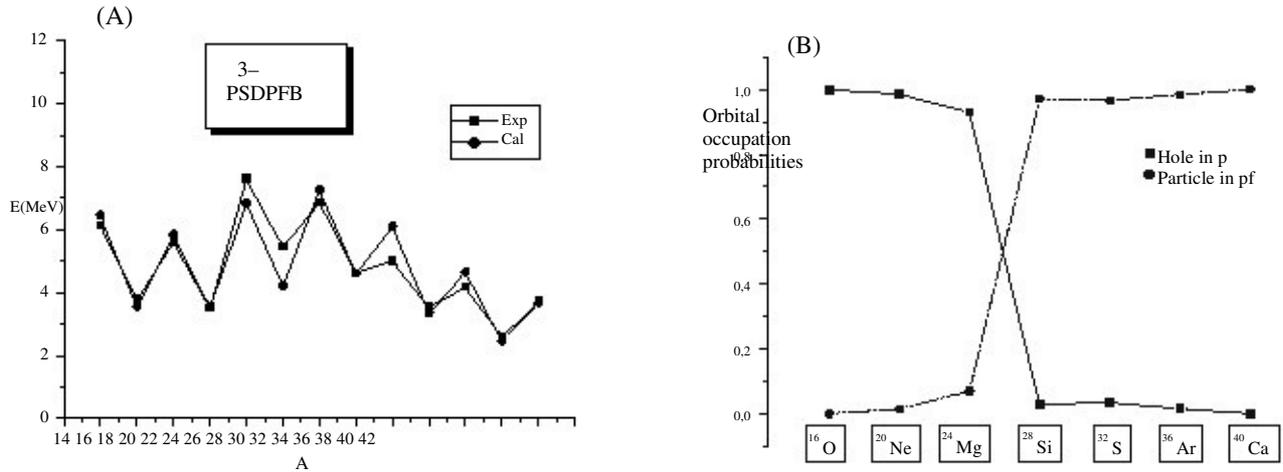


Fig. 1. (A) Experimental versus calculated excitation energies of the first 3- state in  $A = 16$  to  $40$   $N = Z$  nuclei. (B) Occupation probabilities of the p (hole) and pf (particle) shells for the 3- states in  $N = Z$  even-even nuclei.

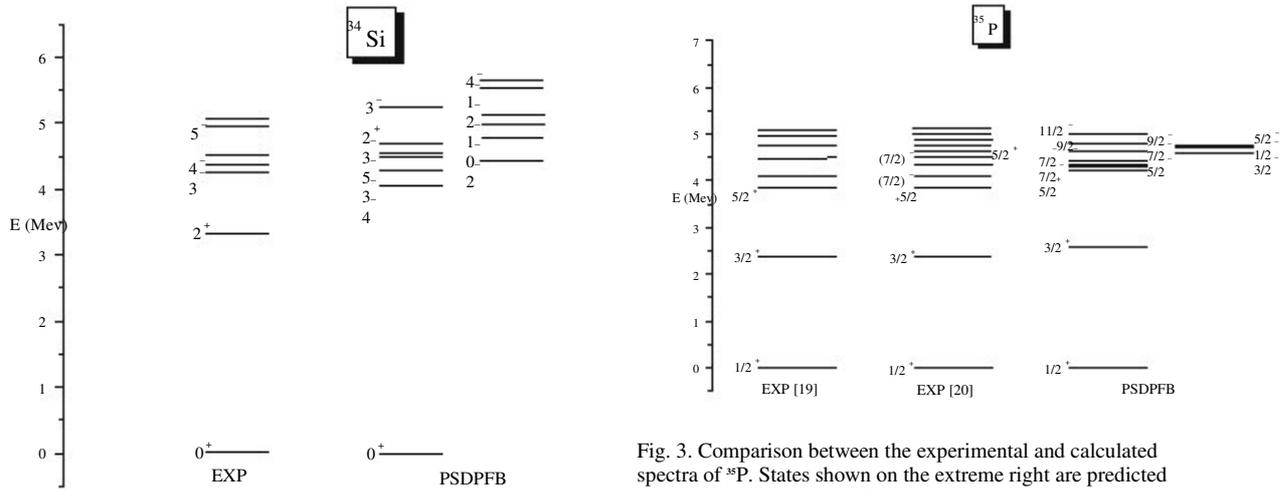


Fig. 2. Comparison between the experimental and calculated excitation energy spectra of  $^{34}\text{Si}$  up to 5.5 MeV. States shown on the extreme right are predicted but not observed up to now.

### 3.2 The $^{35}\text{P}$ case

Experimental results became recently available for the isotope  $N = 20$   $^{35}\text{P}$  [19,20]. A comparison between experimental and calculated energy spectra up to 5.10 MeV is shown in fig. 3. The low-lying positive-parity states with  $J^\pi = 1/2^+, 3/2^+$  and  $5/2^+$  are well reproduced by USDB. A set of intruder negative-parity states is predicted between 4 and 5 MeV and counterparts can be suggested in the experimental spectrum based on the  $\gamma$ -decay of the observed states.

The  $^{35}\text{P}$  level at 4.10 MeV decays to the  $1/2^+$  g.s. and to the  $5/2^+$  state; the level at 4.49 MeV decays to the state at 4.10 MeV and to the  $5/2^+$  state; the level at 4.87 MeV decays to the states at 4.10 MeV and 4.49 MeV and also to the  $5/2^+$  state. All these levels are populated by allowed  $\beta$ -decay transitions from the  $^{35}\text{Si}$  g.s. [21] which has  $7/2^-$  [15].

Fig. 3. Comparison between the experimental and calculated spectra of  $^{35}\text{P}$ . States shown on the extreme right are predicted but have not been observed up to now.

We thus suggest that these states have  $J^\pi = 7/2^-$  and correspond to the states predicted by PSDPFB at 4.32, 4.42 and 4.66 MeV. Based on similar  $\gamma$ -decay arguments, it is proposed that the state observed at 4.38 MeV is the first  $5/2^-$  predicted at 4.35 MeV. From the calculations, there should be two  $9/2^-$  states at 4.67 and 4.77 MeV, it is proposed that their experimental counterparts are at 4.77 and 4.96 MeV, both of these states decay to the 4.10 MeV and 4.49 MeV states which have  $7/2^-$ . Finally, the observed level at 5.09 MeV which decays to the proposed  $9/2^-$  states at 4.77 and 4.96 MeV is an excellent candidate to be the yrast  $11/2^-$  state predicted at 5.02 MeV.

### 3.3 The $^{36}\text{S}$ case

The positive- and negative-parity states of  $^{36}\text{S}$  up to 6 MeV excitation energy have been calculated with USDB and PSDPFB, respectively. The obtained spectra are compared to experimental results [21] in fig. 4. A one-to-one correspondence can be made for both types of states with

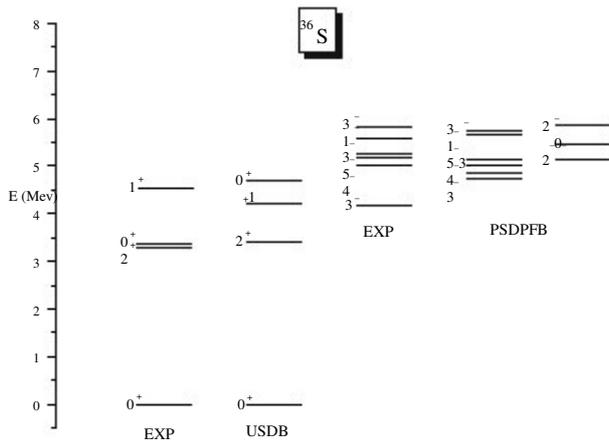


Fig. 4. Comparison between the experimental and calculated spectra of  $^{36}\text{S}$ : the positive-parity states are shown on the left, the negative-parity states on the right. The indicated 0- and 2- (on the extreme right) are predicted but have not been observed up to now.

good agreement as far as the excitation energies are concerned in particular for the negative-parity states.

### 3.4 Systematics of the $N = 20$ isotones

The  $N = 20$  isotones  $^{34}\text{Si}$ ,  $^{35}\text{P}$  and  $^{36}\text{S}$  are outside the island of inversion. For these semi-magic nuclei, their ground states are spherical and their first excited states appear at relatively high energy:  $\sim 3$  MeV, for the  $2^+$  states in  $^{34}\text{Si}$  and  $^{36}\text{S}$ ,  $\sim 2$  MeV for the  $3/2^+$  state in  $^{35}\text{P}$ . The difference in energy is of course due to the sub-shell proton closure in the  $^{34}\text{Si}$  and  $^{36}\text{S}$  cases. All the features of these low-lying positive-parity states are well reproduced by USDDB. There are however exceptions in the cases of  $^{34}\text{Si}$  and  $^{36}\text{S}$  where the first excited  $2^+$  and  $0^+$  states, respectively, lie at an excitation energy  $\sim 1.4$  MeV lower than calculated by USDDB (see figs. 2 and 4). These states have probably important  $2p-2h$  wave function components. While such configurations exist in the g.s. of nuclei in the island of inversion, they appear in the case of  $^{34}\text{Si}$  and  $^{36}\text{S}$  (with “spherical” ground states) at an excitation energy of  $\sim 3.3$  MeV.

The negative-parity states of these  $N = 20$  isotones present a remarkable similarity. In all these nuclei, the intruder  $1p-1h$  states appear at an excitation energy above  $\sim 4$  MeV. From our  $1\hbar\omega$  PSDPFB calculation, it is now possible to clearly identify in  $^{34}\text{Si}$  and  $^{36}\text{S}$  the first  $3^-$ ,  $4^-$  and  $5^-$  members of the  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  multiplet. In  $^{35}\text{P}$ , the number of negative-parity states is larger because they result from the coupling  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1) \otimes \pi s_{1/2}$ . Based on our calculations and their  $\gamma$ -decay schemes, good candidates for  $^{35}\text{P}$  states with  $J^\pi = 7/2^-$  to  $11/2^-$  are suggested.

This systematics can be extended to other  $N = 20$  isotones towards the end of the sd shell. Results for the even-even nuclei with  $N = 20$   $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{36}\text{S}$  and  $^{34}\text{Si}$  are shown in fig. 5, the full set of negative-parity states is

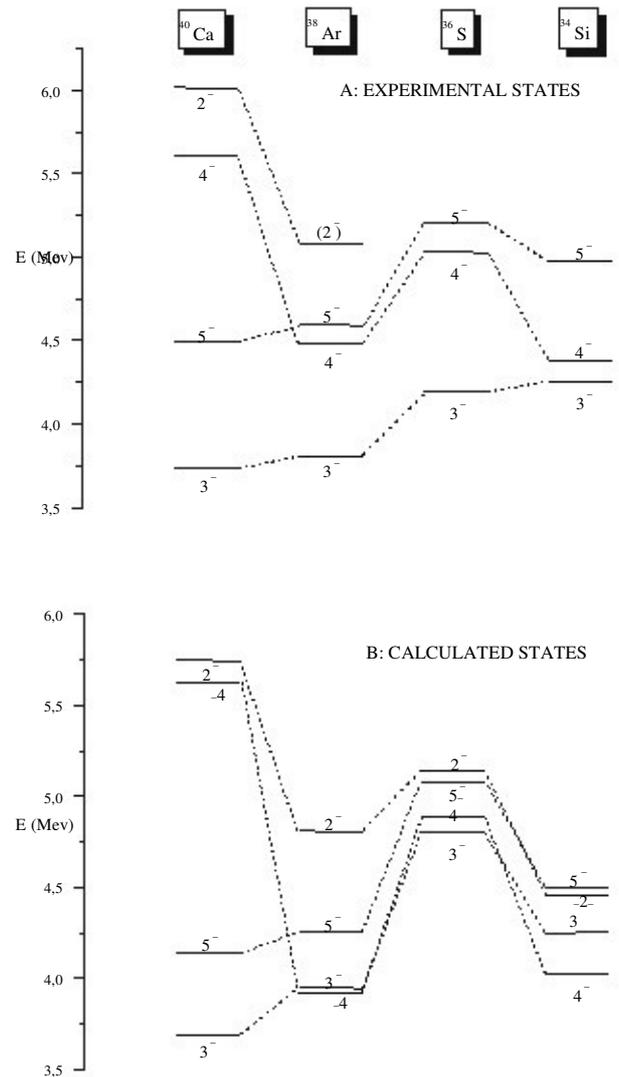


Fig. 5. The negative-parity states with  $J^\pi = 2^-$  to  $5^-$  members of the multiplet with dominant configuration  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$  in the  $N = 20$  isotones  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{38}\text{Ar}$ ,  $^{36}\text{S}$  and  $^{34}\text{Si}$ : comparison between the experimental (A) and calculated (B) with PSDPFB excitation energy spectra.

given in ref. [22]. The experimental level schemes [21] are compared to the calculated ones for  $J^\pi = 2^-$  to  $5^-$  states which are members of the multiplet  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^1)$ . As seen in fig. 5, there is a very good agreement between experiment and theory not only concerning the excitation energies but also the energy evolution of the multiplet members as a function of  $Z$ .

## 4 Conclusion

To describe the intruder negative-parity states in a consistent way throughout the sd shell, we have developed PSDPFB, a  $1\hbar\omega$  interaction.

This new interaction, which incorporates USDB, has been applied to calculate the energy spectra below  $\sim 6$  MeV of  $N = 20$  isotones with  $Z$  between 14 and 20.

The agreement with experiment is rather good especially for the intruder negative-parity states belonging to the multiplet  $\nu(d_{3/2}^{-1}f_{7/2}^{-1})$ . Of course, as can be seen in fig. 1(A) for sd nuclei in the middle of the shell, there is still room for improvement of the interaction. For that purpose, a fitting procedure is actually being implemented.

Another stringent test of PSDPFB will be the experimental versus theory comparison of electromagnetic-transition probabilities for  $M 1$ ,  $E 2$  transitions between  $1 \hbar\omega$  states and for  $E 1$ ,  $M 2$ ,  $E 3$  transitions between  $1 \hbar\omega$  and  $0 \hbar\omega$  states.

## References

1. C. Thibault et al., Phys. Rev. C 12, 644 (1975).
2. G. Huber et al., Phys. Rev. C 18, 2342 (1978).
3. C. Détraz et al., Phys. Rev. C 19, 164 (1979).
4. C. Détraz et al., Nucl. Phys. A 394, 378 (1983).
5. Y. Yanagisawa et al., Phys. Lett. B 566, 84 (2003).
6. B.V. Pritychenko et al., Phys. Rev. C 63, 011305 (2000).
7. T. Motobayashi et al., Phys. Lett. B 346, 9 (1995).
8. N.J. Stone, At. Data Nucl. Data Tables 90, 75 (2005).
9. L.K. Fifield et al., Nucl. Phys. A 440, 531 (1985).
10. P. Baumann et al., Phys. Lett. B 228, 458 (1989).
11. R.W. Ibbotson et al., Phys. Rev. Lett. 80, 2081 (1998).
12. S. Cohen, D. Kurath, Nucl. Phys. 73, 1 (1965); Nucl. Phys. A 101, 1 (1967).
13. B.A. Brown, W.A. Richter, Phys. Rev. C 74, 034315 (2006).
14. E.K. Warburton, B.A. Brown, Phys. Rev. C 46, 923 (1992).
15. S. Nummela et al., Phys. Rev. C 63, 044316 (2001).
16. D.H. Gloeckner, R.D. Lawson, Phys. Lett. B 53, 313 (1974).
17. M. Gelin, PhD Thesis, Université de Caen, France (2007).e
18. X. Liang et al., Phys. Rev. C 74, 014311 (2006).
19. A. Hodsdon, PhD Thesis, University of Paisley, UK (2008).
20. M. Wiedeking et al., Phys. Rev. C 78, 037302 (2008).
21. <http://www.nndc.bnl.gov>.
22. M. Bouhelal et al., Acta Phys. Pol. B 40, 639 (2009).

## Annexe C

### Spectres calculés et expérimentaux de tous les noyaux sd

La liste des spectres en énergie expérimentaux et calculés en utilisant l'interaction PSDPF de tous les noyaux sd avec  $N \geq Z$  est présentée dans le tableau ci-dessous, Les différences  $\Delta$  entre les valeurs expérimentales (quand elles existent) et théoriques sont indiquées. Pour tous ces noyaux, nous avons calculé tous les états de parités + connus et l'ensemble de tous les états  $1\hbar\omega$  (deux états de chaque spin) de  $J^\pi = 0^-$  à  $7^-$  pour les noyaux pairs et de  $J^\pi = 1/2^-$  à  $15/2^-$  pour les noyaux impairs.

La notation utilisée est comme suit :

- Z et N sont respectivement le nombre de protons et de neutrons,
- J et  $\pi$  sont le spin et la parité de chaque état, nous utilisons dans cette représentation 2J au lieu de J,
- n est le rang des états de même spin,
- TH et EXP sont les énergies calculées et expérimentales de chaque état,
- $\Delta = \text{EXP} - \text{TH}$ .

| Z | N | 2J | $\pi$ | n | TH     | EXP    | $\Delta(\text{MeV})$ |
|---|---|----|-------|---|--------|--------|----------------------|
| 8 | 8 | 0  | +     | 1 | 0      | 0      | 0                    |
| 8 | 8 | 6  | -     | 1 | 6,317  | 6,130  | -0,187               |
| 8 | 8 | 2  | -     | 1 | 7,381  | 7,117  | -0,264               |
| 8 | 8 | 4  | -     | 1 | 8,567  | 8,872  | 0,305                |
| 8 | 8 | 0  | -     | 1 | 11,123 | 10,957 | -0,166               |
| 8 | 8 | 4  | -     | 2 | 12,605 | 12,530 | -0,075               |
| 8 | 8 | 0  | -     | 2 | 12,611 | 12,796 | 0,185                |
| 8 | 8 | 2  | -     | 2 | 12,898 | 9,585  | -3,313               |
| 8 | 8 | 6  | -     | 2 | 13,235 | 11,600 | -1,635               |
| 8 | 9 | 5  | +     | 1 | 0      | 0      | 0                    |
| 8 | 9 | 1  | +     | 1 | 0,848  | 0,718  | -0,130               |
| 8 | 9 | 1  | -     | 1 | 3,036  | 3,055  | 0,019                |
| 8 | 9 | 5  | -     | 1 | 4,287  | 3,843  | -0,444               |
| 8 | 9 | 3  | -     | 1 | 5,278  | 4,554  | -0,724               |
| 8 | 9 | 9  | -     | 1 | 5,286  | 5,216  | -0,070               |
| 8 | 9 | 7  | -     | 1 | 5,46   | 5,697  | 0,237                |
| 8 | 9 | 3  | -     | 2 | 5,589  | 5,379  | -0,210               |
| 8 | 9 | 3  | +     | 1 | 6,04   | 6,037  | -0,003               |
| 8 | 9 | 5  | -     | 2 | 6,311  | 5,733  | -0,578               |
| 8 | 9 | 7  | -     | 2 | 6,663  | 6,972  | 0,309                |

|   |    |    |   |   |        |       |        |
|---|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 8 | 9  | 1  | - | 2 | 7,439  | 5,939 | -1,500 |
| 8 | 9  | 5  | - | 3 | 7,466  | 7,166 | -0,300 |
| 8 | 9  | 11 | - | 1 | 7,531  | 7,757 | 0,226  |
| 8 | 9  | 3  | - | 3 | 7,723  | 7,559 | -0,164 |
| 8 | 9  | 7  | - | 3 | 7,751  | 7,576 | -0,175 |
| 8 | 9  | 1  | - | 3 | 7,815  | 7,990 | 0,175  |
| 8 | 9  | 9  | - | 2 | 8,247  |       |        |
| 8 | 9  | 11 | - | 2 | 12,255 |       |        |
| 8 | 9  | 13 | - | 1 | 15,32  |       |        |
| 8 | 10 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 8 | 10 | 4  | + | 1 | 2,054  | 1,982 | -0,072 |
| 8 | 10 | 8  | + | 1 | 3,644  | 3,555 | -0,089 |
| 8 | 10 | 2  | - | 1 | 4,101  | 4,456 | 0,355  |
| 8 | 10 | 6  | - | 1 | 4,815  | 5,098 | 0,283  |
| 8 | 10 | 4  | - | 1 | 4,819  | 5,530 | 0,711  |
| 8 | 10 | 4  | - | 2 | 6,221  | 6,351 | 0,130  |
| 8 | 10 | 6  | - | 2 | 6,239  | 6,404 | 0,165  |
| 8 | 10 | 0  | - | 1 | 6,509  | 6,880 | 0,371  |
| 8 | 10 | 2  | - | 2 | 6,993  | 6,198 | -0,795 |
| 8 | 10 | 4  | - | 3 | 7,348  | 7,771 | 0,424  |
| 8 | 10 | 2  | - | 3 | 7,413  | 7,616 | 0,203  |
| 8 | 10 | 10 | - | 1 | 7,679  | 7,864 | 0,185  |
| 8 | 10 | 8  | - | 1 | 7,699  |       |        |
| 8 | 10 | 10 | - | 2 | 8,232  | 8,125 | -0,107 |
| 8 | 10 | 6  | - | 3 | 8,456  | 8,282 | -0,174 |
| 8 | 10 | 8  | - | 2 | 8,516  |       |        |
| 8 | 10 | 0  | - | 2 | 8,949  |       |        |
| 8 | 10 | 12 | - | 1 | 9,9    |       |        |
| 8 | 10 | 14 | - | 1 | 10,695 |       |        |
| 8 | 10 | 12 | - | 2 | 11,328 |       |        |
| 8 | 10 | 14 | - | 2 | 14,595 |       |        |
| 8 | 11 | 5  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 8 | 11 | 3  | + | 1 | 0,117  | 0,096 | -0,021 |
| 8 | 11 | 1  | + | 1 | 1,619  | 1,472 | -0,147 |
| 8 | 11 | 9  | + | 1 | 2,417  | 2,371 | -0,046 |
| 8 | 11 | 1  | - | 1 | 2,585  | 3,232 | 0,647  |
| 8 | 11 | 7  | + | 1 | 2,986  | 2,779 | -0,207 |
| 8 | 11 | 5  | - | 1 | 3,508  |       |        |
| 8 | 11 | 5  | - | 2 | 3,665  |       |        |
| 8 | 11 | 3  | - | 1 | 4,132  | 3,945 | -0,187 |
| 8 | 11 | 7  | - | 1 | 4,335  |       |        |
| 8 | 11 | 3  | - | 2 | 4,585  |       |        |
| 8 | 11 | 1  | - | 2 | 4,692  |       |        |
| 8 | 11 | 7  | - | 2 | 4,829  |       |        |
| 8 | 11 | 9  | - | 1 | 5,129  |       |        |
| 8 | 11 | 9  | - | 2 | 5,646  |       |        |
| 8 | 11 | 11 | - | 1 | 6,07   |       |        |
| 8 | 11 | 11 | - | 2 | 8,255  |       |        |
| 8 | 11 | 13 | - | 1 | 8,764  |       |        |
| 8 | 11 | 15 | - | 1 | 9,158  |       |        |
| 8 | 11 | 13 | - | 2 | 9,275  |       |        |

|   |    |    |   |   |        |       |        |
|---|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 8 | 11 | 15 | - | 2 | 12,053 |       |        |
| 8 | 12 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 8 | 12 | 4  | + | 1 | 1,778  | 1,674 | -0,104 |
| 8 | 12 | 8  | + | 1 | 3,757  | 3,573 | -0,184 |
| 8 | 12 | 4  | + | 2 | 4,313  | 4,072 | -0,241 |
| 8 | 12 | 2  | - | 1 | 4,899  |       |        |
| 8 | 12 | 6  | - | 1 | 5,163  | 5,614 | 0,451  |
| 8 | 12 | 4  | - | 1 | 5,193  |       |        |
| 8 | 12 | 6  | - | 2 | 6,078  |       |        |
| 8 | 12 | 4  | - | 2 | 6,484  |       |        |
| 8 | 12 | 0  | - | 1 | 6,509  |       |        |
| 8 | 12 | 2  | - | 2 | 6,761  |       |        |
| 8 | 12 | 8  | - | 1 | 6,94   |       |        |
| 8 | 12 | 10 | - | 1 | 7,379  | 7,252 | -0,127 |
| 8 | 12 | 0  | - | 2 | 8,121  |       |        |
| 8 | 12 | 8  | - | 2 | 8,486  |       |        |
| 8 | 12 | 10 | - | 2 | 9,32   |       |        |
| 8 | 12 | 12 | - | 1 | 10,26  |       |        |
| 8 | 12 | 14 | - | 1 | 10,375 |       |        |
| 8 | 12 | 12 | - | 2 | 10,765 |       |        |
| 8 | 12 | 14 | - | 2 | 12,591 |       |        |
| 8 | 13 | 5  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 8 | 13 | 1  | + | 1 | 1,415  | 1,218 | -0,197 |
| 8 | 13 | 3  | + | 1 | 2,077  | 2,133 | 0,056  |
| 8 | 13 | 1  | - | 1 | 2,906  |       |        |
| 8 | 13 | 7  | + | 1 | 3,007  | 3,073 | 0,066  |
| 8 | 13 | 5  | + | 2 | 3,124  | 3,026 | -0,098 |
| 8 | 13 | 9  | + | 1 | 4,911  | 4,920 | 0,009  |
| 8 | 13 | 3  | - | 1 | 4,938  |       |        |
| 8 | 13 | 5  | - | 1 | 5,054  |       |        |
| 8 | 13 | 3  | - | 2 | 5,477  |       |        |
| 8 | 13 | 5  | - | 2 | 5,525  |       |        |
| 8 | 13 | 7  | - | 1 | 5,68   |       |        |
| 8 | 13 | 9  | - | 1 | 5,909  |       |        |
| 8 | 13 | 1  | - | 2 | 6,04   |       |        |
| 8 | 13 | 7  | - | 2 | 6,046  |       |        |
| 8 | 13 | 11 | - | 1 | 6,951  |       |        |
| 8 | 13 | 9  | - | 2 | 7,32   |       |        |
| 8 | 13 | 11 | - | 2 | 8,6    |       |        |
| 8 | 13 | 13 | - | 1 | 9,629  |       |        |
| 8 | 13 | 13 | - | 2 | 10,782 |       |        |
| 8 | 13 | 15 | - | 1 | 11,592 |       |        |
| 8 | 13 | 15 | - | 2 | 12,104 |       |        |
| 8 | 14 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 8 | 14 | 4  | + | 1 | 3,219  | 3,199 | -0,019 |
| 8 | 14 | 6  | + | 1 | 4,947  | 4,582 | -0,365 |
| 8 | 14 | 6  | - | 1 | 6,453  |       |        |
| 8 | 14 | 4  | - | 1 | 6,697  |       |        |
| 8 | 14 | 2  | - | 1 | 6,821  |       |        |
| 8 | 14 | 0  | - | 1 | 7,381  |       |        |

|   |    |    |   |   |        |       |       |
|---|----|----|---|---|--------|-------|-------|
| 8 | 14 | 2  | - | 2 | 7,446  |       |       |
| 8 | 14 | 6  | - | 2 | 8,288  |       |       |
| 8 | 14 | 8  | - | 1 | 8,844  |       |       |
| 8 | 14 | 4  | - | 2 | 8,852  |       |       |
| 8 | 14 | 0  | - | 2 | 9,717  |       |       |
| 8 | 14 | 10 | - | 1 | 9,999  |       |       |
| 8 | 14 | 8  | - | 2 | 10,306 |       |       |
| 8 | 14 | 10 | - | 2 | 10,989 |       |       |
| 8 | 14 | 12 | - | 1 | 11,484 |       |       |
| 8 | 14 | 12 | - | 2 | 12,564 |       |       |
| 8 | 14 | 14 | - | 1 | 13,299 |       |       |
| 8 | 14 | 14 | - | 2 | 13,946 |       |       |
| 8 | 15 | 1  | + | 1 | 0      | 0     | 0     |
| 8 | 15 | 3  | + | 1 | 3,589  | 4,000 | 0,411 |
| 8 | 15 | 1  | - | 1 | 4,861  |       |       |
| 8 | 15 | 3  | - | 1 | 5,256  |       |       |
| 8 | 15 | 1  | - | 2 | 5,861  |       |       |
| 8 | 15 | 7  | - | 1 | 6,403  |       |       |
| 8 | 15 | 5  | - | 1 | 6,618  |       |       |
| 8 | 15 | 3  | - | 2 | 7,201  |       |       |
| 8 | 15 | 5  | - | 2 | 7,482  |       |       |
| 8 | 15 | 7  | - | 2 | 7,489  |       |       |
| 8 | 15 | 9  | - | 1 | 8,623  |       |       |
| 8 | 15 | 11 | - | 1 | 8,99   |       |       |
| 8 | 15 | 9  | - | 2 | 9,251  |       |       |
| 8 | 15 | 11 | - | 2 | 10,565 |       |       |
| 8 | 15 | 13 | - | 1 | 11,927 |       |       |
| 8 | 15 | 13 | - | 2 | 12,387 |       |       |
| 8 | 15 | 15 | - | 1 | 12,979 |       |       |
| 8 | 15 | 15 | - | 2 | 13,555 |       |       |
| 8 | 16 | 0  | + | 1 | 0      |       |       |
| 8 | 16 | 4  | + | 1 | 4,579  |       |       |
| 8 | 16 | 2  | + | 1 | 5,486  |       |       |
| 8 | 16 | 4  | - | 1 | 6,066  |       |       |
| 8 | 16 | 2  | - | 1 | 6,079  |       |       |
| 8 | 16 | 6  | - | 1 | 6,436  |       |       |
| 8 | 16 | 8  | + | 1 | 7,133  |       |       |
| 8 | 16 | 2  | - | 2 | 7,302  |       |       |
| 8 | 16 | 6  | + | 1 | 7,588  |       |       |
| 8 | 16 | 0  | - | 1 | 7,655  |       |       |
| 8 | 16 | 6  | - | 2 | 7,97   |       |       |
| 8 | 16 | 8  | - | 1 | 8,257  |       |       |
| 8 | 16 | 4  | - | 2 | 8,293  |       |       |
| 8 | 16 | 8  | - | 2 | 8,795  |       |       |
| 8 | 16 | 0  | - | 2 | 10,002 |       |       |
| 8 | 16 | 10 | - | 1 | 10,032 |       |       |
| 8 | 16 | 10 | - | 2 | 10,419 |       |       |
| 8 | 16 | 12 | - | 1 | 10,801 |       |       |
| 8 | 16 | 10 | + | 1 | 12,12  |       |       |
| 8 | 16 | 12 | - | 2 | 12,642 |       |       |
| 8 | 16 | 14 | - | 1 | 12,993 |       |       |

|   |    |    |   |   |        |       |        |
|---|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 8 | 16 | 12 | + | 1 | 13,887 |       |        |
| 8 | 16 | 14 | - | 2 | 14,998 |       |        |
| 9 | 9  | 2  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 9 | 9  | 6  | + | 1 | 0,858  | 0,937 | 0,079  |
| 9 | 9  | 10 | + | 1 | 0,961  | 1,121 | 0,160  |
| 9 | 9  | 0  | + | 1 | 1,053  | 1,041 | -0,012 |
| 9 | 9  | 0  | - | 1 | 1,216  | 1,081 | -0,135 |
| 9 | 9  | 4  | - | 1 | 1,903  | 2,101 | 0,198  |
| 9 | 9  | 2  | - | 1 | 3,018  | 3,134 | 0,116  |
| 9 | 9  | 4  | + | 1 | 3,107  |       |        |
| 9 | 9  | 6  | - | 1 | 3,311  | 3,792 | 0,481  |
| 9 | 9  | 4  | - | 2 | 4,465  | 4,226 | -0,239 |
| 9 | 9  | 8  | - | 1 | 4,468  | 4,398 | -0,070 |
| 9 | 9  | 8  | + | 1 | 4,697  |       |        |
| 9 | 9  | 10 | - | 1 | 4,951  | 4,848 | -0,103 |
| 9 | 9  | 2  | - | 2 | 5,154  | 4,860 | -0,294 |
| 9 | 9  | 8  | - | 2 | 5,348  | 6,096 | 0,748  |
| 9 | 9  | 2  | - | 3 | 5,41   | 5,605 | 0,195  |
| 9 | 9  | 6  | - | 2 | 5,492  | 5,502 | 0,010  |
| 9 | 9  | 12 | - | 1 | 5,815  |       |        |
| 9 | 9  | 6  | - | 3 | 5,868  | 6,240 | 0,372  |
| 9 | 9  | 4  | - | 3 | 5,872  | 5,786 | -0,086 |
| 9 | 9  | 14 | - | 1 | 6,939  |       |        |
| 9 | 9  | 0  | - | 2 | 6,956  |       |        |
| 9 | 9  | 10 | - | 2 | 7,034  |       |        |
| 9 | 9  | 12 | - | 2 | 8,452  |       |        |
| 9 | 9  | 14 | - | 2 | 11,748 |       |        |
| 9 | 10 | 1  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 9 | 10 | 5  | + | 1 | 0,058  | 0,197 | 0,139  |
| 9 | 10 | 1  | - | 1 | 0,138  | 0,110 | -0,028 |
| 9 | 10 | 5  | - | 1 | 1,717  | 1,346 | -0,371 |
| 9 | 10 | 3  | - | 1 | 1,748  | 1,459 | -0,289 |
| 9 | 10 | 3  | + | 1 | 1,879  | 1,554 | -0,325 |
| 9 | 10 | 9  | + | 1 | 2,568  | 2,780 | 0,212  |
| 9 | 10 | 9  | - | 1 | 4,279  | 4,033 | -0,246 |
| 9 | 10 | 7  | - | 1 | 4,34   | 3,999 | -0,341 |
| 9 | 10 | 5  | - | 2 | 4,523  | 4,683 | 0,160  |
| 9 | 10 | 13 | + | 1 | 4,556  | 4,648 | 0,092  |
| 9 | 10 | 7  | + | 1 | 4,852  | 4,378 | -0,474 |
| 9 | 10 | 3  | - | 2 | 4,908  | 4,556 | -0,352 |
| 9 | 10 | 7  | - | 2 | 5,173  | 5,418 | 0,245  |
| 9 | 10 | 9  | - | 2 | 5,629  | 6,100 | 0,471  |
| 9 | 10 | 3  | - | 3 | 5,832  | 6,088 | 0,256  |
| 9 | 10 | 5  | - | 3 | 5,915  | 5,621 | -0,294 |
| 9 | 10 | 7  | - | 3 | 6,027  | 6,161 | 0,134  |
| 9 | 10 | 1  | - | 2 | 6,261  | 6,429 | 0,168  |
| 9 | 10 | 1  | - | 3 | 6,622  | 6,989 | 0,367  |
| 9 | 10 | 11 | + | 1 | 6,66   | 6,500 | -0,160 |
| 9 | 10 | 9  | + | 2 | 6,968  | 6,592 | -0,376 |
| 9 | 10 | 11 | - | 1 | 6,996  | 7,166 | 0,170  |
| 9 | 10 | 11 | + | 2 | 7,933  | 7,937 | 0,004  |

|   |    |    |   |   |        |       |        |
|---|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 9 | 10 | 13 | - | 1 | 8,319  | 8,288 | -0,031 |
| 9 | 10 | 11 | - | 2 | 8,515  | 8,953 | 0,438  |
| 9 | 10 | 13 | - | 2 | 8,917  |       |        |
| 9 | 10 | 15 | - | 1 | 9,401  |       |        |
| 9 | 10 | 15 | - | 2 | 12,262 |       |        |
| 9 | 11 | 4  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 9 | 11 | 6  | + | 1 | 0,581  | 0,656 | 0,075  |
| 9 | 11 | 8  | + | 1 | 0,847  | 0,823 | -0,024 |
| 9 | 11 | 2  | + | 1 | 1,27   | 1,057 | -0,213 |
| 9 | 11 | 2  | - | 1 | 1,526  | 0,984 | -0,542 |
| 9 | 11 | 4  | - | 1 | 1,629  | 1,309 | -0,320 |
| 9 | 11 | 10 | + | 1 | 1,769  | 1,824 | 0,055  |
| 9 | 11 | 4  | - | 2 | 1,823  | 1,844 | 0,021  |
| 9 | 11 | 6  | - | 1 | 2,097  | 1,971 | -0,126 |
| 9 | 11 | 6  | - | 2 | 3,029  | 2,865 | -0,164 |
| 9 | 11 | 0  | - | 1 | 3,081  |       |        |
| 9 | 11 | 8  | - | 1 | 3,43   | 2,968 | -0,462 |
| 9 | 11 | 2  | - | 2 | 3,756  |       |        |
| 9 | 11 | 0  | - | 2 | 3,878  |       |        |
| 9 | 11 | 8  | - | 2 | 4,216  |       |        |
| 9 | 11 | 10 | - | 1 | 4,401  |       |        |
| 9 | 11 | 10 | - | 2 | 5,389  |       |        |
| 9 | 11 | 12 | - | 1 | 6,015  |       |        |
| 9 | 11 | 12 | - | 2 | 7,157  |       |        |
| 9 | 11 | 14 | - | 1 | 7,6    |       |        |
| 9 | 11 | 14 | - | 2 | 8,312  |       |        |
| 9 | 12 | 5  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 9 | 12 | 1  | + | 1 | 0,299  | 0,280 | -0,019 |
| 9 | 12 | 1  | - | 1 | 0,989  | 1,101 | 0,112  |
| 9 | 12 | 9  | + | 1 | 1,777  | 1,755 | -0,022 |
| 9 | 12 | 3  | + | 1 | 1,793  | 1,730 | -0,063 |
| 9 | 12 | 3  | - | 1 | 2,087  | 2,040 | -0,047 |
| 9 | 12 | 5  | - | 1 | 2,214  |       |        |
| 9 | 12 | 7  | - | 1 | 4,05   |       |        |
| 9 | 12 | 5  | - | 2 | 4,093  |       |        |
| 9 | 12 | 9  | - | 1 | 4,159  |       |        |
| 9 | 12 | 3  | - | 2 | 4,307  |       |        |
| 9 | 12 | 7  | - | 2 | 4,999  |       |        |
| 9 | 12 | 1  | - | 2 | 5,733  |       |        |
| 9 | 12 | 9  | - | 2 | 5,767  |       |        |
| 9 | 12 | 11 | - | 1 | 6,845  |       |        |
| 9 | 12 | 13 | - | 1 | 6,994  |       |        |
| 9 | 12 | 11 | - | 2 | 7,398  |       |        |
| 9 | 12 | 13 | - | 2 | 9,206  |       |        |
| 9 | 12 | 15 | - | 1 | 9,922  |       |        |
| 9 | 12 | 15 | - | 2 | 11,033 |       |        |
| 9 | 13 | 8  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 9 | 13 | 6  | + | 1 | 0,148  | 0,072 | -0,076 |
| 9 | 13 | 4  | + | 1 | 0,672  | 0,709 | 0,037  |
| 9 | 13 | 10 | + | 1 | 1,32   | 1,414 | 0,094  |

|   |    |    |   |   |       |       |        |
|---|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 9 | 13 | 2  | + | 1 | 1,542 | 1,628 | 0,086  |
| 9 | 13 | 6  | + | 2 | 1,62  | 1,633 | 0,013  |
| 9 | 13 | 4  | + | 2 | 2,03  | 2,007 | -0,023 |
| 9 | 13 | 4  | - | 1 | 2,25  |       |        |
| 9 | 13 | 2  | + | 2 | 2,503 | 2,571 | 0,068  |
| 9 | 13 | 8  | + | 2 | 2,735 | 2,832 | 0,097  |
| 9 | 13 | 0  | - | 1 | 2,829 |       |        |
| 9 | 13 | 6  | - | 1 | 2,898 |       |        |
| 9 | 13 | 2  | - | 1 | 2,967 |       |        |
| 9 | 13 | 4  | - | 2 | 3,222 |       |        |
| 9 | 13 | 10 | + | 2 | 3,485 | 3,582 | 0,097  |
| 9 | 13 | 2  | - | 2 | 3,612 |       |        |
| 9 | 13 | 6  | - | 2 | 3,821 |       |        |
| 9 | 13 | 8  | - | 1 | 4,127 |       |        |
| 9 | 13 | 0  | - | 2 | 4,384 |       |        |
| 9 | 13 | 10 | - | 1 | 4,781 |       |        |
| 9 | 13 | 8  | - | 2 | 4,909 |       |        |
| 9 | 13 | 10 | - | 2 | 5,728 |       |        |
| 9 | 13 | 12 | - | 1 | 5,903 |       |        |
| 9 | 13 | 12 | - | 2 | 6,601 |       |        |
| 9 | 13 | 14 | - | 1 | 7,624 |       |        |
| 9 | 13 | 14 | - | 2 | 8,495 |       |        |
| 9 | 14 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 9 | 14 | 1  | + | 1 | 1,973 | 2,243 | 0,270  |
| 9 | 14 | 1  | - | 1 | 2,767 |       |        |
| 9 | 14 | 15 | - | 1 | 2,767 |       |        |
| 9 | 14 | 7  | + | 1 | 2,878 | 2,900 | 0,022  |
| 9 | 14 | 9  | + | 1 | 3,827 | 3,810 | -0,017 |
| 9 | 14 | 3  | - | 1 | 4,18  |       |        |
| 9 | 14 | 15 | - | 2 | 4,199 |       |        |
| 9 | 14 | 5  | - | 1 | 4,234 |       |        |
| 9 | 14 | 3  | + | 1 | 4,246 | 4,066 | -0,180 |
| 9 | 14 | 11 | + | 1 | 5,473 | 5,540 | 0,067  |
| 9 | 14 | 3  | - | 2 | 5,484 |       |        |
| 9 | 14 | 5  | - | 2 | 5,495 |       |        |
| 9 | 14 | 9  | - | 1 | 5,903 |       |        |
| 9 | 14 | 7  | - | 1 | 6,221 |       |        |
| 9 | 14 | 1  | - | 2 | 6,337 |       |        |
| 9 | 14 | 7  | - | 2 | 6,627 |       |        |
| 9 | 14 | 9  | - | 2 | 7,232 |       |        |
| 9 | 14 | 11 | - | 1 | 8,376 |       |        |
| 9 | 14 | 11 | - | 2 | 8,494 |       |        |
| 9 | 14 | 13 | - | 1 | 9,185 |       |        |
| 9 | 14 | 13 | - | 2 | 9,543 |       |        |
| 9 | 15 | 6  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 9 | 15 | 4  | + | 1 | 0,504 | 0,522 | 0,018  |
| 9 | 15 | 2  | + | 1 | 1,393 | 1,832 | 0,439  |
| 9 | 15 | 0  | - | 1 | 3,312 |       |        |
| 9 | 15 | 4  | - | 1 | 3,812 |       |        |
| 9 | 15 | 2  | - | 1 | 3,904 |       |        |
| 9 | 15 | 8  | - | 1 | 4,24  |       |        |

|   |    |    |   |   |       |       |        |
|---|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 9 | 15 | 4  | - | 2 | 4,536 |       |        |
| 9 | 15 | 6  | - | 1 | 4,883 |       |        |
| 9 | 15 | 2  | - | 2 | 4,962 |       |        |
| 9 | 15 | 6  | - | 2 | 5,318 |       |        |
| 9 | 15 | 12 | - | 1 | 5,659 |       |        |
| 9 | 15 | 10 | - | 1 | 5,753 |       |        |
| 9 | 15 | 0  | - | 2 | 5,8   |       |        |
| 9 | 15 | 8  | - | 2 | 5,983 |       |        |
| 9 | 15 | 10 | - | 2 | 6,698 |       |        |
| 9 | 15 | 12 | - | 2 | 7,337 |       |        |
| 9 | 15 | 14 | - | 1 | 8,108 |       |        |
| 9 | 15 | 14 | - | 2 | 8,677 |       |        |
| 9 | 16 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 9 | 16 | 1  | + | 1 | 1,089 | 0,727 | -0,362 |
| 9 | 16 | 1  | - | 1 | 3,733 |       |        |
| 9 | 16 | 5  | - | 1 | 4,772 |       |        |
| 9 | 16 | 9  | - | 1 | 4,836 |       |        |
| 9 | 16 | 3  | - | 1 | 4,959 |       |        |
| 9 | 16 | 5  | - | 2 | 4,993 |       |        |
| 9 | 16 | 7  | - | 1 | 5,221 |       |        |
| 9 | 16 | 3  | - | 2 | 5,593 |       |        |
| 9 | 16 | 9  | - | 2 | 5,652 |       |        |
| 9 | 16 | 1  | - | 2 | 6,053 |       |        |
| 9 | 16 | 7  | - | 2 | 6,171 |       |        |
| 9 | 16 | 13 | - | 1 | 6,761 |       |        |
| 9 | 16 | 11 | - | 1 | 6,765 |       |        |
| 9 | 16 | 11 | - | 2 | 6,931 |       |        |
| 9 | 16 | 13 | - | 2 | 7,749 |       |        |
| 9 | 16 | 15 | - | 1 | 8,647 |       |        |
| 9 | 16 | 15 | - | 2 | 9,36  |       |        |
| 9 | 17 | 2  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 9 | 17 | 4  | + | 1 | 0,554 | 0,665 | 0,111  |
| 9 | 17 | 8  | - | 1 | 0,673 |       |        |
| 9 | 17 | 4  | - | 1 | 0,7   |       |        |
| 9 | 17 | 2  | - | 1 | 1,474 |       |        |
| 9 | 17 | 6  | - | 1 | 2,119 |       |        |
| 9 | 17 | 4  | - | 2 | 2,467 |       |        |
| 9 | 17 | 12 | - | 1 | 2,643 |       |        |
| 9 | 17 | 2  | - | 2 | 2,816 |       |        |
| 9 | 17 | 0  | - | 1 | 3,47  |       |        |
| 9 | 17 | 8  | - | 2 | 3,879 |       |        |
| 9 | 17 | 6  | - | 2 | 4,095 |       |        |
| 9 | 17 | 10 | - | 1 | 4,356 |       |        |
| 9 | 17 | 0  | - | 2 | 4,915 |       |        |
| 9 | 17 | 12 | - | 2 | 5,422 |       |        |
| 9 | 17 | 10 | - | 2 | 5,521 |       |        |
| 9 | 17 | 14 | - | 1 | 6,736 |       |        |
| 9 | 17 | 14 | - | 2 | 7,531 |       |        |
| 9 | 20 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 9 | 20 | 7  | - | 1 | 1,81  |       |        |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 9  | 20 | 5  | - | 1 | 2,11   |        |        |
| 9  | 20 | 3  | - | 1 | 2,19   |        |        |
| 9  | 20 | 9  | - | 1 | 2,26   |        |        |
| 9  | 20 | 5  | - | 2 | 2,29   |        |        |
| 9  | 20 | 1  | + | 1 | 2,56   |        |        |
| 9  | 20 | 1  | - | 1 | 2,68   |        |        |
| 9  | 20 | 13 | - | 1 | 2,68   |        |        |
| 9  | 20 | 11 | - | 1 | 2,77   |        |        |
| 9  | 20 | 7  | - | 2 | 2,94   |        |        |
| 9  | 20 | 15 | - | 1 | 3,48   |        |        |
| 9  | 20 | 11 | - | 2 | 3,57   |        |        |
| 9  | 20 | 3  | - | 2 | 3,58   |        |        |
| 9  | 20 | 1  | - | 2 | 3,73   |        |        |
| 9  | 20 | 9  | - | 2 | 4,04   |        |        |
| 9  | 20 | 13 | - | 2 | 5,57   |        |        |
| 9  | 20 | 3  | + | 1 | 6,25   |        |        |
| 9  | 20 | 15 | - | 2 | 9,3    |        |        |
| 10 | 10 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 10 | 10 | 4  | + | 1 | 1,725  | 1.634  | -0.091 |
| 10 | 10 | 8  | + | 1 | 4,182  | 4.248  | 0.066  |
| 10 | 10 | 4  | - | 1 | 5,303  | 4.967  | -0.336 |
| 10 | 10 | 6  | - | 1 | 5,77   | 5.621  | -0.149 |
| 10 | 10 | 2  | - | 1 | 6,086  | 5.788  | -0.298 |
| 10 | 10 | 0  | + | 2 | 6,455  | 6.725  | 0.270  |
| 10 | 10 | 8  | - | 1 | 7,263  | 7.004  | -0.259 |
| 10 | 10 | 6  | - | 2 | 7,406  | 7.156  | -0.250 |
| 10 | 10 | 4  | + | 2 | 7,42   | 7.422  | 0.002  |
| 10 | 10 | 2  | - | 2 | 8,013  | 8.708  | 0.695  |
| 10 | 10 | 4  | - | 2 | 8,37   | 9.318  | 0.948  |
| 10 | 10 | 12 | + | 1 | 8,508  | 8,777  | 0,269  |
| 10 | 10 | 10 | - | 1 | 8,544  | 8,453  | -0,091 |
| 10 | 10 | 2  | - | 3 | 8,647  | 8,854  | 0,207  |
| 10 | 10 | 0  | - | 1 | 8,733  |        |        |
| 10 | 10 | 6  | - | 3 | 9,081  | 9,116  | 0,035  |
| 10 | 10 | 4  | - | 3 | 9,309  | 11,601 | 2,292  |
| 10 | 10 | 8  | - | 2 | 10,201 |        |        |
| 10 | 10 | 10 | - | 2 | 10,322 | 8,820  | -1,502 |
| 10 | 10 | 12 | - | 1 | 10,381 | 10,609 | 0,228  |
| 10 | 10 | 6  | + | 1 | 10,474 |        |        |
| 10 | 10 | 16 | + | 1 | 11,484 | 11,951 | 0,467  |
| 10 | 10 | 10 | + | 1 | 11,629 |        |        |
| 10 | 10 | 0  | - | 2 | 11,896 |        |        |
| 10 | 10 | 10 | - | 3 | 12,193 | 10,262 | -1,931 |
| 10 | 10 | 2  | + | 1 | 12,625 |        |        |
| 10 | 10 | 14 | - | 1 | 12,852 | 13,338 | 0,486  |
| 10 | 10 | 12 | - | 2 | 13,616 |        |        |
| 10 | 10 | 14 | - | 2 | 14,911 | 13,692 | -1,219 |
| 10 | 11 | 3  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 10 | 11 | 5  | + | 1 | 0,291  | 0,351  | 0,060  |
| 10 | 11 | 7  | + | 1 | 1,793  | 1,746  | -0,047 |
| 10 | 11 | 1  | - | 1 | 2,812  | 2,788  | -0,024 |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 10 | 11 | 9  | + | 1 | 2,833  | 2,866  | 0,033  |
| 10 | 11 | 1  | + | 1 | 2,876  | 2,794  | -0,082 |
| 10 | 11 | 3  | - | 1 | 3,625  | 3,663  | 0,038  |
| 10 | 11 | 5  | + | 2 | 3,709  | 3,736  | 0,027  |
| 10 | 11 | 5  | - | 1 | 4,013  | 3,884  | -0,129 |
| 10 | 11 | 11 | + | 1 | 4,459  | 4,432  | -0,027 |
| 10 | 11 | 7  | - | 1 | 5,006  | 5,335  | 0,329  |
| 10 | 11 | 7  | - | 2 | 5,329  | 5,819  | 0,490  |
| 10 | 11 | 3  | - | 2 | 5,402  | 4,725  | -0,677 |
| 10 | 11 | 3  | - | 3 | 5,478  | 5,993  | 0,515  |
| 10 | 11 | 9  | - | 1 | 5,965  | 6,033  | 0,068  |
| 10 | 11 | 5  | - | 2 | 6,003  |        |        |
| 10 | 11 | 13 | + | 1 | 6,237  | 6,448  | 0,211  |
| 10 | 11 | 1  | - | 2 | 6,254  | 5,690  | -0,564 |
| 10 | 11 | 9  | - | 2 | 6,38   |        |        |
| 10 | 11 | 11 | - | 1 | 7,015  |        |        |
| 10 | 11 | 11 | - | 2 | 7,607  |        |        |
| 10 | 11 | 13 | - | 1 | 8,971  | 9,402  | 0,431  |
| 10 | 11 | 13 | - | 2 | 9,524  |        |        |
| 10 | 11 | 15 | - | 1 | 10,111 | 11,989 | 1,878  |
| 10 | 11 | 15 | - | 2 | 10,891 |        |        |
| 10 | 12 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 10 | 12 | 4  | + | 1 | 1,363  | 1,275  | -0,088 |
| 10 | 12 | 8  | + | 1 | 3,418  | 3,358  | -0,060 |
| 10 | 12 | 4  | + | 2 | 4,295  | 4,456  | 0,161  |
| 10 | 12 | 4  | - | 1 | 4,987  | 5,146  | 0,159  |
| 10 | 12 | 2  | + | 1 | 5,408  | 5,332  | -0,076 |
| 10 | 12 | 6  | + | 1 | 5,468  | 5,641  | 0,173  |
| 10 | 12 | 8  | + | 2 | 5,474  | 5,524  | 0,051  |
| 10 | 12 | 6  | - | 1 | 5,632  | 5,910  | 0,278  |
| 10 | 12 | 0  | - | 1 | 6,288  |        |        |
| 10 | 12 | 12 | + | 1 | 6,326  | 6,311  | -0,015 |
| 10 | 12 | 2  | - | 1 | 6,626  | 6,691  | 0,065  |
| 10 | 12 | 2  | - | 2 | 6,751  | 7,051  | 0,300  |
| 10 | 12 | 4  | - | 2 | 6,831  | 7,665  | 0,834  |
| 10 | 12 | 6  | - | 2 | 6,948  | 7,406  | 0,458  |
| 10 | 12 | 8  | - | 1 | 7,041  |        |        |
| 10 | 12 | 10 | - | 1 | 8,089  |        |        |
| 10 | 12 | 8  | - | 2 | 8,598  |        |        |
| 10 | 12 | 0  | - | 2 | 8,81   |        |        |
| 10 | 12 | 10 | - | 2 | 9,175  |        |        |
| 10 | 12 | 12 | - | 1 | 9,981  |        |        |
| 10 | 12 | 12 | - | 2 | 10,693 |        |        |
| 10 | 12 | 14 | - | 1 | 11,068 |        |        |
| 10 | 12 | 14 | - | 2 | 11,96  |        |        |
| 10 | 13 | 5  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 10 | 13 | 1  | + | 1 | 1,108  | 1,017  | -0,091 |
| 10 | 13 | 7  | + | 1 | 1,801  | 1,702  | -0,099 |
| 10 | 13 | 3  | + | 1 | 1,903  | 1,822  | -0,081 |
| 10 | 13 | 5  | + | 2 | 2,35   | 2,315  | -0,035 |
| 10 | 13 | 9  | + | 1 | 2,551  | 2,517  | -0,034 |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 10 | 13 | 3  | + | 2 | 3,261  | 3,432 | 0,171  |
| 10 | 13 | 1  | - | 1 | 3,525  | 3,836 | 0,311  |
| 10 | 13 | 3  | - | 1 | 3,903  | 3,221 | -0,682 |
| 10 | 13 | 1  | - | 2 | 4,396  |       |        |
| 10 | 13 | 7  | - | 1 | 4,466  |       |        |
| 10 | 13 | 3  | - | 2 | 4,996  |       |        |
| 10 | 13 | 5  | - | 1 | 5,172  |       |        |
| 10 | 13 | 5  | - | 2 | 5,379  |       |        |
| 10 | 13 | 9  | - | 1 | 5,701  |       |        |
| 10 | 13 | 11 | - | 1 | 5,95   |       |        |
| 10 | 13 | 7  | - | 2 | 5,969  |       |        |
| 10 | 13 | 9  | - | 2 | 7,023  |       |        |
| 10 | 13 | 11 | - | 2 | 7,082  |       |        |
| 10 | 13 | 15 | - | 1 | 8,252  |       |        |
| 10 | 13 | 13 | - | 1 | 9,046  |       |        |
| 10 | 13 | 13 | - | 2 | 9,478  |       |        |
| 10 | 13 | 15 | - | 2 | 10,541 |       |        |
| 10 | 14 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 10 | 14 | 4  | + | 1 | 2,116  | 1,982 | -0,134 |
| 10 | 14 | 4  | + | 2 | 3,783  | 3,868 | 0,085  |
| 10 | 14 | 8  | + | 1 | 4,069  | 3,972 | -0,097 |
| 10 | 14 | 0  | + | 2 | 5,065  | 4,766 | -0,299 |
| 10 | 14 | 4  | - | 1 | 6,408  |       |        |
| 10 | 14 | 6  | - | 1 | 6,489  |       |        |
| 10 | 14 | 2  | - | 1 | 6,511  |       |        |
| 10 | 14 | 0  | - | 1 | 6,738  |       |        |
| 10 | 14 | 4  | - | 2 | 7,239  |       |        |
| 10 | 14 | 2  | - | 2 | 7,363  |       |        |
| 10 | 14 | 6  | - | 2 | 7,874  |       |        |
| 10 | 14 | 8  | - | 1 | 8,11   |       |        |
| 10 | 14 | 0  | - | 2 | 8,244  |       |        |
| 10 | 14 | 10 | - | 1 | 8,602  |       |        |
| 10 | 14 | 8  | - | 2 | 8,794  |       |        |
| 10 | 14 | 10 | - | 2 | 9,115  |       |        |
| 10 | 14 | 12 | - | 1 | 9,788  |       |        |
| 10 | 14 | 12 | - | 2 | 10,571 |       |        |
| 10 | 14 | 14 | - | 1 | 10,995 |       |        |
| 10 | 14 | 14 | - | 2 | 12,014 |       |        |
| 10 | 15 | 1  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 10 | 15 | 5  | + | 1 | 1,761  | 1,700 | -0,061 |
| 10 | 15 | 3  | + | 1 | 1,881  | 2,080 | 0,199  |
| 10 | 15 | 3  | - | 1 | 3,598  |       |        |
| 10 | 15 | 1  | - | 1 | 3,939  |       |        |
| 10 | 15 | 7  | - | 1 | 4,366  |       |        |
| 10 | 15 | 5  | - | 1 | 5,618  |       |        |
| 10 | 15 | 1  | - | 2 | 5,66   |       |        |
| 10 | 15 | 3  | - | 2 | 5,92   |       |        |
| 10 | 15 | 5  | - | 2 | 5,939  |       |        |
| 10 | 15 | 7  | - | 2 | 6,064  |       |        |
| 10 | 15 | 11 | - | 1 | 6,344  |       |        |
| 10 | 15 | 9  | - | 1 | 6,558  |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 10 | 15 | 9  | - | 2 | 7,511 |       |        |
| 10 | 15 | 11 | - | 2 | 7,683 |       |        |
| 10 | 15 | 15 | - | 1 | 8,638 |       |        |
| 10 | 15 | 13 | - | 1 | 8,832 |       |        |
| 10 | 15 | 13 | - | 2 | 9,225 |       |        |
| 10 | 15 | 15 | - | 2 | 9,726 |       |        |
| 10 | 16 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 10 | 16 | 4  | + | 1 | 2,015 | 2,018 | 0,003  |
| 10 | 16 | 8  | + | 1 | 3,623 | 3,520 | -0,103 |
| 10 | 16 | 2  | - | 1 | 4,804 |       |        |
| 10 | 16 | 4  | - | 1 | 4,936 |       |        |
| 10 | 16 | 6  | - | 1 | 5,498 |       |        |
| 10 | 16 | 2  | - | 2 | 5,545 |       |        |
| 10 | 16 | 0  | - | 1 | 5,876 |       |        |
| 10 | 16 | 8  | - | 1 | 5,901 |       |        |
| 10 | 16 | 4  | - | 2 | 6,203 |       |        |
| 10 | 16 | 6  | - | 2 | 6,321 |       |        |
| 10 | 16 | 8  | - | 2 | 6,983 |       |        |
| 10 | 16 | 10 | - | 1 | 7,335 |       |        |
| 10 | 16 | 10 | - | 2 | 7,62  |       |        |
| 10 | 16 | 12 | - | 1 | 7,638 |       |        |
| 10 | 16 | 0  | - | 2 | 7,75  |       |        |
| 10 | 16 | 12 | - | 2 | 8,714 |       |        |
| 10 | 16 | 14 | - | 1 | 9,453 |       |        |
| 10 | 16 | 14 | - | 2 | 9,845 |       |        |
| 10 | 17 | 3  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 10 | 17 | 3  | - | 1 | 0,376 |       |        |
| 10 | 17 | 13 | - | 1 | 0,376 |       |        |
| 10 | 17 | 1  | + | 1 | 1,071 | 0,885 | -0,186 |
| 10 | 17 | 7  | - | 1 | 1,403 |       |        |
| 10 | 17 | 13 | - | 2 | 1,403 |       |        |
| 10 | 17 | 1  | - | 1 | 1,557 |       |        |
| 10 | 17 | 5  | - | 1 | 3,045 |       |        |
| 10 | 17 | 11 | - | 1 | 3,207 |       |        |
| 10 | 17 | 3  | - | 2 | 3,63  |       |        |
| 10 | 17 | 7  | - | 2 | 3,779 |       |        |
| 10 | 17 | 5  | - | 2 | 3,897 |       |        |
| 10 | 17 | 1  | - | 2 | 3,953 |       |        |
| 10 | 17 | 9  | - | 1 | 4,575 |       |        |
| 10 | 17 | 11 | - | 2 | 5,203 |       |        |
| 10 | 17 | 9  | - | 2 | 5,336 |       |        |
| 10 | 17 | 15 | - | 1 | 5,415 |       |        |
| 10 | 17 | 15 | - | 2 | 7,08  |       |        |
| 10 | 18 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 10 | 18 | 4  | + | 1 | 1,69  | 1,3   | -0,39  |
| 10 | 18 | 2  | - | 1 | 2,59  |       |        |
| 10 | 18 | 0  | - | 1 | 2,7   |       |        |
| 10 | 18 | 8  | + | 1 | 3,16  | 3,01  | -0,15  |
| 10 | 18 | 6  | - | 1 | 3,19  |       |        |
| 10 | 18 | 4  | - | 1 | 3,33  |       |        |

|    |    |    |   |   |      |   |   |
|----|----|----|---|---|------|---|---|
| 10 | 18 | 4  | - | 2 | 3,76 |   |   |
| 10 | 18 | 10 | - | 1 | 4,02 |   |   |
| 10 | 18 | 8  | - | 1 | 4,43 |   |   |
| 10 | 18 | 2  | - | 2 | 4,58 |   |   |
| 10 | 18 | 6  | - | 2 | 4,72 |   |   |
| 10 | 18 | 8  | + | 2 | 5,14 |   |   |
| 10 | 18 | 8  | - | 2 | 5,5  |   |   |
| 10 | 18 | 0  | - | 2 | 5,78 |   |   |
| 10 | 18 | 14 | - | 1 | 5,78 |   |   |
| 10 | 18 | 12 | - | 1 | 6,13 |   |   |
| 10 | 18 | 10 | - | 2 | 6,17 |   |   |
| 10 | 18 | 12 | - | 2 | 7,12 |   |   |
| 10 | 18 | 14 | - | 2 | 8,18 |   |   |
| 10 | 19 | 3  | - | 1 | 0    |   |   |
| 10 | 19 | 3  | + | 1 | 0,48 |   |   |
| 10 | 19 | 7  | - | 1 | 0,61 |   |   |
| 10 | 19 | 1  | - | 1 | 0,83 |   |   |
| 10 | 19 | 11 | - | 1 | 2    |   |   |
| 10 | 19 | 1  | + | 1 | 2,17 |   |   |
| 10 | 19 | 5  | - | 1 | 2,17 |   |   |
| 10 | 19 | 3  | - | 2 | 2,23 |   |   |
| 10 | 19 | 5  | + | 1 | 2,25 |   |   |
| 10 | 19 | 7  | + | 1 | 2,42 |   |   |
| 10 | 19 | 7  | - | 2 | 2,71 |   |   |
| 10 | 19 | 1  | - | 2 | 2,73 |   |   |
| 10 | 19 | 5  | - | 2 | 2,73 |   |   |
| 10 | 19 | 9  | + | 1 | 3,1  |   |   |
| 10 | 19 | 9  | - | 1 | 3,18 |   |   |
| 10 | 19 | 3  | + | 2 | 3,39 |   |   |
| 10 | 19 | 15 | - | 1 | 3,62 |   |   |
| 10 | 19 | 11 | - | 2 | 3,92 |   |   |
| 10 | 19 | 9  | - | 2 | 3,93 |   |   |
| 10 | 19 | 13 | - | 1 | 4,96 |   |   |
| 10 | 19 | 13 | - | 2 | 5,37 |   |   |
| 10 | 19 | 15 | - | 2 | 5,59 |   |   |
| 10 | 20 | 0  | + | 1 | 0    | 0 | 0 |
| 10 | 20 | 4  | + | 1 | 1,78 |   |   |
| 10 | 20 | 4  | - | 1 | 2,05 |   |   |
| 10 | 20 | 2  | - | 1 | 2,07 |   |   |
| 10 | 20 | 0  | - | 1 | 2,33 |   |   |
| 10 | 20 | 6  | - | 1 | 2,36 |   |   |
| 10 | 20 | 8  | - | 1 | 2,48 |   |   |
| 10 | 20 | 8  | + | 1 | 2,75 |   |   |
| 10 | 20 | 10 | - | 1 | 2,91 |   |   |
| 10 | 20 | 4  | - | 2 | 3,34 |   |   |
| 10 | 20 | 6  | - | 2 | 3,57 |   |   |
| 10 | 20 | 2  | - | 2 | 3,73 |   |   |
| 10 | 20 | 12 | - | 1 | 3,97 |   |   |
| 10 | 20 | 8  | - | 2 | 4,29 |   |   |
| 10 | 20 | 14 | - | 1 | 4,45 |   |   |
| 10 | 20 | 10 | - | 2 | 4,57 |   |   |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 10 | 20 | 12 | - | 2 | 5,48  |       |        |
| 10 | 20 | 0  | - | 2 | 5,93  |       |        |
| 10 | 20 | 14 | - | 2 | 6,21  |       |        |
| 11 | 11 | 6  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 11 | 11 | 2  | + | 1 | 0,364 | 0,583 | 0,219  |
| 11 | 11 | 0  | + | 1 | 0,707 | 0,657 | -0,050 |
| 11 | 11 | 8  | + | 1 | 0,94  | 0,891 | -0,049 |
| 11 | 11 | 10 | + | 1 | 1,545 | 1,528 | -0,017 |
| 11 | 11 | 6  | + | 2 | 1,893 | 1,983 | 0,090  |
| 11 | 11 | 4  | + | 1 | 2,069 | 1,952 | -0,117 |
| 11 | 11 | 2  | - | 1 | 2,143 | 2,212 | 0,069  |
| 11 | 11 | 2  | + | 2 | 2,235 | 1,936 | -0,299 |
| 11 | 11 | 4  | - | 1 | 2,32  | 2,572 | 0,252  |
| 11 | 11 | 6  | + | 3 | 3,097 | 2,969 | -0,128 |
| 11 | 11 | 4  | + | 2 | 3,34  | 3,060 | -0,280 |
| 11 | 11 | 6  | - | 1 | 3,47  | 3,520 | 0,050  |
| 11 | 11 | 12 | + | 1 | 3,792 | 3,707 | -0,085 |
| 11 | 11 | 4  | - | 2 | 3,987 | 4,583 | 0,596  |
| 11 | 11 | 8  | - | 1 | 4,103 | 4,469 | 0,366  |
| 11 | 11 | 8  | + | 2 | 4,125 | 4,072 | -0,053 |
| 11 | 11 | 0  | - | 1 | 4,409 | 4,296 | -0,113 |
| 11 | 11 | 14 | + | 1 | 4,515 | 4,524 | 0,009  |
| 11 | 11 | 6  | - | 2 | 4,613 |       |        |
| 11 | 11 | 10 | + | 2 | 4,702 | 4,710 | 0,008  |
| 11 | 11 | 2  | - | 2 | 4,808 |       |        |
| 11 | 11 | 10 | - | 1 | 5,495 | 5,833 | 0,338  |
| 11 | 11 | 8  | - | 2 | 5,51  |       |        |
| 11 | 11 | 0  | - | 2 | 6,008 |       |        |
| 11 | 11 | 12 | - | 1 | 6,39  | 6,958 | 0,568  |
| 11 | 11 | 12 | - | 2 | 6,645 | 7,413 | 0,768  |
| 11 | 11 | 10 | - | 2 | 6,725 |       |        |
| 11 | 11 | 14 | - | 1 | 7,993 |       |        |
| 11 | 11 | 16 | + | 1 | 8,554 | 8,572 | 0,018  |
| 11 | 11 | 14 | - | 2 | 8,575 |       |        |
| 11 | 11 | 18 | + | 1 | 9,569 | 9,813 | 0,244  |
| 11 | 12 | 3  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 11 | 12 | 5  | + | 1 | 0,416 | 0,440 | 0,024  |
| 11 | 12 | 7  | + | 1 | 2,145 | 2,076 | -0,069 |
| 11 | 12 | 1  | + | 1 | 2,258 | 2,391 | 0,133  |
| 11 | 12 | 1  | - | 1 | 2,475 | 2,640 | 0,165  |
| 11 | 12 | 9  | + | 1 | 2,756 | 2,704 | -0,052 |
| 11 | 12 | 3  | + | 2 | 2,914 | 2,982 | 0,068  |
| 11 | 12 | 3  | - | 1 | 3,548 | 3,678 | 0,130  |
| 11 | 12 | 5  | - | 1 | 3,711 | 3,848 | 0,137  |
| 11 | 12 | 5  | + | 2 | 3,759 | 3,914 | 0,155  |
| 11 | 12 | 1  | + | 2 | 4,534 | 4,430 | -0,104 |
| 11 | 12 | 7  | + | 2 | 4,84  | 4,775 | -0,065 |
| 11 | 12 | 3  | - | 2 | 5,094 | 5,964 | 0,870  |
| 11 | 12 | 11 | + | 1 | 5,629 | 5,534 | -0,095 |
| 11 | 12 | 7  | - | 1 | 5,651 | 6,042 | 0,391  |
| 11 | 12 | 5  | - | 2 | 5,857 | 6,195 | 0,338  |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 11 | 12 | 9  | - | 1 | 6,123  | 6,355 | 0,232  |
| 11 | 12 | 13 | + | 1 | 6,224  | 6,235 | 0,011  |
| 11 | 12 | 9  | - | 2 | 6,511  |       |        |
| 11 | 12 | 7  | - | 2 | 6,841  |       |        |
| 11 | 12 | 1  | - | 2 | 7,556  |       |        |
| 11 | 12 | 11 | - | 1 | 8,178  |       |        |
| 11 | 12 | 11 | - | 2 | 8,45   |       |        |
| 11 | 12 | 13 | - | 1 | 9,82   |       |        |
| 11 | 12 | 13 | - | 2 | 10,266 |       |        |
| 11 | 12 | 15 | - | 1 | 10,596 |       |        |
| 11 | 12 | 15 | - | 2 | 11,903 |       |        |
| 11 | 13 | 8  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 11 | 13 | 2  | + | 1 | 0,434  | 0,472 | 0,038  |
| 11 | 13 | 4  | + | 1 | 0,564  | 0,563 | -0,001 |
| 11 | 13 | 4  | + | 2 | 1,106  | 1,341 | 0,235  |
| 11 | 13 | 6  | + | 1 | 1,304  | 1,345 | 0,041  |
| 11 | 13 | 2  | + | 2 | 1,395  | 1,347 | -0,048 |
| 11 | 13 | 10 | + | 1 | 1,512  | 1,512 | 0      |
| 11 | 13 | 6  | + | 2 | 1,821  | 1,885 | 0,064  |
| 11 | 13 | 4  | - | 1 | 3,021  | 3,372 | 0,351  |
| 11 | 13 | 0  | - | 1 | 3,479  | 4,049 | 0,570  |
| 11 | 13 | 6  | - | 1 | 3,589  | 3,745 | 0,156  |
| 11 | 13 | 2  | - | 1 | 3,808  |       |        |
| 11 | 13 | 4  | - | 2 | 3,928  |       |        |
| 11 | 13 | 12 | + | 1 | 3,934  | 3,943 | 0,009  |
| 11 | 13 | 8  | - | 1 | 4,301  | 4,143 | -0,158 |
| 11 | 13 | 2  | - | 2 | 4,306  |       |        |
| 11 | 13 | 6  | - | 2 | 4,469  |       |        |
| 11 | 13 | 0  | - | 2 | 4,754  |       |        |
| 11 | 13 | 8  | - | 2 | 5,043  |       |        |
| 11 | 13 | 10 | - | 1 | 5,277  |       |        |
| 11 | 13 | 12 | - | 1 | 5,754  |       |        |
| 11 | 13 | 10 | - | 2 | 6,418  |       |        |
| 11 | 13 | 14 | - | 1 | 7,55   |       |        |
| 11 | 13 | 12 | - | 2 | 7,776  |       |        |
| 11 | 13 | 14 | - | 2 | 8,182  |       |        |
| 11 | 14 | 5  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 11 | 14 | 3  | + | 1 | 0,082  | 0,089 | 0,007  |
| 11 | 14 | 1  | + | 1 | 0,959  | 1,069 | 0,110  |
| 11 | 14 | 1  | - | 1 | 2,979  |       |        |
| 11 | 14 | 15 | - | 1 | 2,979  |       |        |
| 11 | 14 | 11 | - | 1 | 2,979  |       |        |
| 11 | 14 | 3  | - | 1 | 4,145  |       |        |
| 11 | 14 | 15 | - | 2 | 4,145  |       |        |
| 11 | 14 | 5  | - | 1 | 4,259  |       |        |
| 11 | 14 | 3  | - | 2 | 4,826  |       |        |
| 11 | 14 | 5  | - | 2 | 5,095  |       |        |
| 11 | 14 | 7  | - | 1 | 5,807  |       |        |
| 11 | 14 | 9  | - | 1 | 6,116  |       |        |
| 11 | 14 | 1  | - | 2 | 6,17   |       |        |
| 11 | 14 | 7  | - | 2 | 6,399  |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 11 | 14 | 9  | - | 2 | 6,516 |       |        |
| 11 | 14 | 11 | - | 2 | 7,138 |       |        |
| 11 | 14 | 13 | - | 1 | 8,035 |       |        |
| 11 | 14 | 13 | - | 2 | 9,151 |       |        |
| 11 | 15 | 2  | + | 1 | 0     | 0,083 | 0,083  |
| 11 | 15 | 6  | + | 1 | 0,031 | 0     | -0,031 |
| 11 | 15 | 4  | + | 1 | 0,033 | 0,233 | 0,200  |
| 11 | 15 | 4  | + | 2 | 0,335 | 0,406 | 0,071  |
| 11 | 15 | 2  | + | 2 | 1,199 | 1,513 | 0,314  |
| 11 | 15 | 10 | + | 1 | 2,29  | 2,284 | -0,006 |
| 11 | 15 | 4  | - | 1 | 2,875 |       |        |
| 11 | 15 | 0  | - | 1 | 3,098 |       |        |
| 11 | 15 | 6  | - | 1 | 3,315 |       |        |
| 11 | 15 | 2  | - | 1 | 3,547 |       |        |
| 11 | 15 | 8  | - | 1 | 3,55  |       |        |
| 11 | 15 | 2  | - | 2 | 3,581 |       |        |
| 11 | 15 | 4  | - | 2 | 3,659 |       |        |
| 11 | 15 | 10 | - | 1 | 4,477 |       |        |
| 11 | 15 | 8  | - | 2 | 4,529 |       |        |
| 11 | 15 | 6  | - | 2 | 4,539 |       |        |
| 11 | 15 | 0  | - | 2 | 4,674 |       |        |
| 11 | 15 | 12 | - | 1 | 4,885 |       |        |
| 11 | 15 | 10 | - | 2 | 5,682 |       |        |
| 11 | 15 | 12 | - | 2 | 6,35  |       |        |
| 11 | 15 | 14 | - | 1 | 7,158 |       |        |
| 11 | 15 | 14 | - | 2 | 7,311 |       |        |
| 11 | 16 | 3  | + | 1 | 0     | 0,062 | 0,062  |
| 11 | 16 | 5  | + | 1 | 0,039 | 0     | -0,039 |
| 11 | 16 | 1  | + | 1 | 1,546 | 1,731 | 0,185  |
| 11 | 16 | 9  | + | 1 | 2,254 | 2,224 | -0,030 |
| 11 | 16 | 7  | + | 1 | 2,273 | 2,191 | -0,082 |
| 11 | 16 | 1  | - | 1 | 3,129 |       |        |
| 11 | 16 | 5  | - | 1 | 4,091 |       |        |
| 11 | 16 | 3  | - | 1 | 4,312 |       |        |
| 11 | 16 | 5  | - | 2 | 4,383 |       |        |
| 11 | 16 | 3  | - | 2 | 4,537 |       |        |
| 11 | 16 | 7  | - | 1 | 4,772 |       |        |
| 11 | 16 | 1  | - | 2 | 4,822 |       |        |
| 11 | 16 | 7  | - | 2 | 4,872 |       |        |
| 11 | 16 | 9  | - | 1 | 5,029 |       |        |
| 11 | 16 | 9  | - | 2 | 5,582 |       |        |
| 11 | 16 | 11 | - | 1 | 5,982 |       |        |
| 11 | 16 | 11 | - | 2 | 6,279 |       |        |
| 11 | 16 | 13 | - | 1 | 6,528 |       |        |
| 11 | 16 | 13 | - | 2 | 7,191 |       |        |
| 11 | 16 | 15 | - | 1 | 8,01  |       |        |
| 11 | 16 | 15 | - | 2 | 8,249 |       |        |
| 11 | 17 | 4  | + | 1 | 0     | 0,059 | 0,059  |
| 11 | 17 | 2  | + | 1 | 0,02  | 0     | -0,020 |
| 11 | 17 | 4  | - | 1 | 0,753 |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 11 | 17 | 6  | - | 1 | 1,15  |       |        |
| 11 | 17 | 8  | - | 1 | 1,222 |       |        |
| 11 | 17 | 2  | - | 1 | 1,365 |       |        |
| 11 | 17 | 4  | - | 2 | 1,726 |       |        |
| 11 | 17 | 10 | - | 1 | 2,497 |       |        |
| 11 | 17 | 6  | - | 2 | 2,52  |       |        |
| 11 | 17 | 12 | - | 1 | 2,674 |       |        |
| 11 | 17 | 0  | - | 1 | 2,702 |       |        |
| 11 | 17 | 8  | - | 2 | 3,097 |       |        |
| 11 | 17 | 2  | - | 2 | 3,341 |       |        |
| 11 | 17 | 0  | - | 2 | 3,744 |       |        |
| 11 | 17 | 10 | - | 2 | 4,141 |       |        |
| 11 | 17 | 12 | - | 2 | 4,965 |       |        |
| 11 | 17 | 14 | - | 1 | 5,111 |       |        |
| 11 | 17 | 14 | - | 2 | 6,003 |       |        |
| 11 | 18 | 5  | + | 1 | 0     | 0,072 | 0,072  |
| 11 | 18 | 3  | + | 1 | 0,012 | 0     | -0,012 |
| 11 | 18 | 5  | - | 1 | 2,516 |       |        |
| 11 | 18 | 1  | - | 1 | 2,593 |       |        |
| 11 | 18 | 3  | - | 1 | 2,624 |       |        |
| 11 | 18 | 7  | - | 1 | 2,653 |       |        |
| 11 | 18 | 5  | - | 2 | 2,761 |       |        |
| 11 | 18 | 3  | - | 2 | 2,985 |       |        |
| 11 | 18 | 1  | - | 2 | 3,131 |       |        |
| 11 | 18 | 9  | - | 1 | 3,39  |       |        |
| 11 | 18 | 11 | - | 1 | 3,514 |       |        |
| 11 | 18 | 7  | - | 2 | 3,558 |       |        |
| 11 | 18 | 9  | - | 2 | 3,595 |       |        |
| 11 | 18 | 13 | - | 1 | 4,558 |       |        |
| 11 | 18 | 15 | - | 1 | 4,777 |       |        |
| 11 | 18 | 11 | - | 2 | 4,939 |       |        |
| 11 | 18 | 13 | - | 2 | 4,967 |       |        |
| 11 | 18 | 15 | - | 2 | 7,237 |       |        |
| 11 | 19 | 4  | - | 1 | 0     |       |        |
| 11 | 19 | 6  | - | 1 | 0,37  |       |        |
| 11 | 19 | 8  | - | 1 | 0,39  |       |        |
| 11 | 19 | 4  | + | 1 | 0,62  | 0     | -0,62  |
| 11 | 19 | 6  | + | 1 | 0,8   |       |        |
| 11 | 19 | 2  | + | 1 | 0,82  | 0,15  | -0,67  |
| 11 | 19 | 2  | - | 1 | 0,84  |       |        |
| 11 | 19 | 4  | - | 2 | 1,04  |       |        |
| 11 | 19 | 10 | - | 1 | 1,32  |       |        |
| 11 | 19 | 12 | - | 1 | 1,43  |       |        |
| 11 | 19 | 6  | - | 2 | 1,66  |       |        |
| 11 | 19 | 0  | - | 1 | 1,97  |       |        |
| 11 | 19 | 8  | - | 2 | 2,16  |       |        |
| 11 | 19 | 0  | - | 2 | 2,65  |       |        |
| 11 | 19 | 4  | + | 2 | 2,68  |       |        |
| 11 | 19 | 2  | - | 2 | 2,79  |       |        |
| 11 | 19 | 2  | + | 2 | 3,02  |       |        |
| 11 | 19 | 10 | - | 2 | 3,03  |       |        |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 11 | 19 | 12 | - | 2 | 3,65   |        |        |
| 11 | 19 | 14 | - | 1 | 3,65   |        |        |
| 11 | 19 | 2  | + | 3 | 3,88   |        |        |
| 11 | 19 | 14 | - | 2 | 4,48   |        |        |
| 11 | 20 | 5  | + | 1 | 0      | 0,36   | 0,36   |
| 11 | 20 | 3  | + | 1 | 0,3    | 0      | -0,3   |
| 11 | 20 | 3  | - | 1 | 1,3    |        |        |
| 11 | 20 | 1  | - | 1 | 1,44   |        |        |
| 11 | 20 | 7  | - | 1 | 1,52   |        |        |
| 11 | 20 | 5  | - | 1 | 1,65   |        |        |
| 11 | 20 | 7  | - | 2 | 1,8    |        |        |
| 11 | 20 | 9  | - | 1 | 1,87   |        |        |
| 11 | 20 | 9  | + | 1 | 1,93   |        |        |
| 11 | 20 | 5  | - | 2 | 2,11   |        |        |
| 11 | 20 | 11 | - | 1 | 2,14   |        |        |
| 11 | 20 | 1  | - | 2 | 2,24   |        |        |
| 11 | 20 | 9  | - | 2 | 2,27   |        |        |
| 11 | 20 | 11 | - | 2 | 2,38   |        |        |
| 11 | 20 | 3  | - | 2 | 2,53   |        |        |
| 11 | 20 | 13 | - | 1 | 2,63   |        |        |
| 11 | 20 | 1  | + | 1 | 3      |        |        |
| 11 | 20 | 15 | - | 1 | 3,16   |        |        |
| 11 | 20 | 13 | - | 2 | 3,37   |        |        |
| 11 | 20 | 15 | - | 2 | 5,27   |        |        |
| 12 | 12 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 12 | 12 | 4  | + | 1 | 1,467  | 1,369  | -0,098 |
| 12 | 12 | 4  | + | 2 | 4,215  | 4,238  | 0,023  |
| 12 | 12 | 8  | + | 1 | 4,299  | 4,123  | -0,176 |
| 12 | 12 | 6  | + | 1 | 5,166  | 5,235  | 0,069  |
| 12 | 12 | 8  | + | 2 | 5,968  | 6,011  | 0,043  |
| 12 | 12 | 6  | - | 1 | 6,852  | 7,616  | 0,764  |
| 12 | 12 | 0  | + | 2 | 7,192  | 6,432  | -0,760 |
| 12 | 12 | 2  | - | 1 | 7,323  | 7,555  | 0,233  |
| 12 | 12 | 2  | + | 1 | 7,806  | 7,748  | -0,058 |
| 12 | 12 | 10 | + | 1 | 7,818  | 7,812  | -0,006 |
| 12 | 12 | 2  | - | 2 | 7,917  | 8,437  | 0,520  |
| 12 | 12 | 12 | + | 1 | 8,274  | 8,114  | -0,160 |
| 12 | 12 | 4  | - | 1 | 8,432  | 8,864  | 0,432  |
| 12 | 12 | 6  | - | 2 | 8,507  | 8,358  | -0,149 |
| 12 | 12 | 8  | - | 1 | 8,585  |        |        |
| 12 | 12 | 4  | - | 2 | 8,891  |        |        |
| 12 | 12 | 2  | - | 3 | 9,058  | 9,146  | 0,088  |
| 12 | 12 | 0  | - | 1 | 9,08   |        |        |
| 12 | 12 | 12 | + | 2 | 9,46   | 9,529  | 0,069  |
| 12 | 12 | 10 | - | 1 | 9,495  | 10,028 | 0,533  |
| 12 | 12 | 8  | - | 2 | 10,328 |        |        |
| 12 | 12 | 10 | - | 2 | 10,514 |        |        |
| 12 | 12 | 14 | - | 1 | 11,685 |        |        |
| 12 | 12 | 16 | + | 1 | 11,923 | 11,862 | -0,061 |
| 12 | 12 | 12 | - | 1 | 11,929 |        |        |
| 12 | 12 | 0  | - | 2 | 12,25  |        |        |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 12 | 12 | 12 | - | 2 | 12,553 |        |        |
| 12 | 12 | 16 | + | 2 | 13,145 | 13,212 | 0,067  |
| 12 | 12 | 14 | - | 2 | 14,407 |        |        |
| 12 | 12 | 20 | + | 1 | 19,106 | 19,139 | 0,033  |
| 12 | 13 | 5  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 12 | 13 | 1  | + | 1 | 0,699  | 0,585  | -0,114 |
| 12 | 13 | 3  | + | 1 | 1,168  | 0,975  | -0,193 |
| 12 | 13 | 7  | + | 1 | 1,675  | 1,612  | -0,063 |
| 12 | 13 | 5  | + | 2 | 2,033  | 1,965  | -0,068 |
| 12 | 13 | 1  | + | 2 | 2,525  | 2,563  | 0,038  |
| 12 | 13 | 3  | + | 2 | 2,701  | 2,801  | 0,100  |
| 12 | 13 | 7  | + | 2 | 2,921  | 2,737  | -0,184 |
| 12 | 13 | 9  | + | 1 | 3,439  | 3,405  | -0,034 |
| 12 | 13 | 1  | - | 1 | 3,926  | 4,277  | 0,351  |
| 12 | 13 | 9  | + | 2 | 3,963  | 4,059  | 0,096  |
| 12 | 13 | 3  | - | 1 | 4,117  | 3,413  | -0,704 |
| 12 | 13 | 7  | - | 1 | 4,225  | 3,971  | -0,254 |
| 12 | 13 | 1  | - | 2 | 4,945  | 5,117  | 0,172  |
| 12 | 13 | 3  | - | 2 | 5,065  | 6,468  | 1,403  |
| 12 | 13 | 11 | + | 1 | 5,244  | 5,251  | 0,007  |
| 12 | 13 | 13 | + | 1 | 5,514  | 5,460  | -0,054 |
| 12 | 13 | 11 | + | 2 | 5,594  | 5,532  | -0,062 |
| 12 | 13 | 5  | - | 1 | 5,637  |        |        |
| 12 | 13 | 11 | - | 1 | 5,699  |        |        |
| 12 | 13 | 5  | - | 2 | 5,935  |        |        |
| 12 | 13 | 7  | - | 2 | 6,802  | 5,793  | -1,009 |
| 12 | 13 | 9  | - | 1 | 6,873  |        |        |
| 12 | 13 | 9  | - | 2 | 7,692  |        |        |
| 12 | 13 | 11 | - | 2 | 7,8    |        |        |
| 12 | 13 | 15 | - | 1 | 8,386  |        |        |
| 12 | 13 | 13 | - | 1 | 8,951  |        |        |
| 12 | 13 | 13 | - | 2 | 9,702  |        |        |
| 12 | 13 | 15 | - | 2 | 10,646 |        |        |
| 12 | 14 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 12 | 14 | 4  | + | 1 | 1,878  | 1,809  | -0,069 |
| 12 | 14 | 4  | + | 2 | 3,042  | 2,938  | -0,104 |
| 12 | 14 | 0  | + | 2 | 3,829  | 3,588  | -0,241 |
| 12 | 14 | 6  | + | 1 | 3,99   | 3,940  | -0,050 |
| 12 | 14 | 6  | + | 2 | 4,389  | 4,350  | -0,039 |
| 12 | 14 | 8  | + | 1 | 4,397  | 4,318  | -0,079 |
| 12 | 14 | 8  | + | 2 | 5,013  | 4,901  | -0,112 |
| 12 | 14 | 2  | + | 1 | 5,693  |        |        |
| 12 | 14 | 2  | - | 1 | 6,663  | 7,062  | 0,399  |
| 12 | 14 | 2  | + | 2 | 6,668  |        |        |
| 12 | 14 | 6  | - | 1 | 6,716  | 6,876  | 0,160  |
| 12 | 14 | 4  | - | 1 | 6,736  |        |        |
| 12 | 14 | 10 | + | 1 | 7,087  | 6,978  | -0,109 |
| 12 | 14 | 10 | + | 2 | 7,447  | 7,395  | -0,052 |
| 12 | 14 | 2  | - | 2 | 7,492  | 7,697  | 0,205  |
| 12 | 14 | 6  | - | 2 | 7,496  |        |        |
| 12 | 14 | 4  | - | 2 | 7,698  |        |        |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 12 | 14 | 8  | - | 1 | 7,898  | 7,283 | -0,615 |
| 12 | 14 | 0  | - | 1 | 8,004  |       |        |
| 12 | 14 | 12 | + | 1 | 8,252  | 8,201 | -0,051 |
| 12 | 14 | 10 | - | 1 | 8,318  | 7,953 | -0,365 |
| 12 | 14 | 8  | - | 2 | 8,396  |       |        |
| 12 | 14 | 12 | + | 2 | 8,56   | 8,472 | -0,088 |
| 12 | 14 | 0  | - | 2 | 8,826  |       |        |
| 12 | 14 | 10 | - | 2 | 9,064  | 8,625 | -0,439 |
| 12 | 14 | 12 | - | 1 | 9,426  | 9,169 | -0,257 |
| 12 | 14 | 12 | - | 2 | 10,287 |       |        |
| 12 | 14 | 14 | - | 1 | 10,648 |       |        |
| 12 | 14 | 14 | - | 2 | 11,122 |       |        |
| 12 | 15 | 1  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 12 | 15 | 3  | + | 1 | 0,917  | 0,985 | 0,068  |
| 12 | 15 | 5  | + | 1 | 1,679  | 1,699 | 0,020  |
| 12 | 15 | 5  | + | 2 | 1,934  | 1,940 | 0,006  |
| 12 | 15 | 3  | - | 1 | 3,74   | 3,562 | -0,178 |
| 12 | 15 | 7  | - | 1 | 3,996  | 3,760 | -0,236 |
| 12 | 15 | 1  | - | 1 | 4,371  |       |        |
| 12 | 15 | 5  | - | 1 | 5,423  |       |        |
| 12 | 15 | 1  | - | 2 | 5,753  |       |        |
| 12 | 15 | 5  | - | 2 | 5,84   |       |        |
| 12 | 15 | 11 | - | 1 | 5,854  |       |        |
| 12 | 15 | 3  | - | 2 | 5,899  |       |        |
| 12 | 15 | 7  | - | 2 | 5,915  |       |        |
| 12 | 15 | 9  | - | 1 | 5,94   |       |        |
| 12 | 15 | 9  | - | 2 | 6,996  |       |        |
| 12 | 15 | 11 | - | 2 | 7,092  |       |        |
| 12 | 15 | 13 | - | 1 | 7,998  |       |        |
| 12 | 15 | 13 | - | 2 | 8,494  |       |        |
| 12 | 15 | 15 | - | 1 | 8,745  |       |        |
| 12 | 15 | 15 | - | 2 | 9,53   |       |        |
| 12 | 16 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 12 | 16 | 4  | + | 1 | 1,512  | 1,473 | -0,039 |
| 12 | 16 | 0  | + | 2 | 4,034  | 3,863 | -0,171 |
| 12 | 16 | 8  | + | 1 | 4,139  | 4,020 | -0,119 |
| 12 | 16 | 4  | + | 2 | 4,498  | 4,557 | 0,059  |
| 12 | 16 | 2  | + | 1 | 4,565  | 4,561 | -0,004 |
| 12 | 16 | 2  | - | 1 | 5,703  | 5,185 | -0,584 |
| 12 | 16 | 4  | - | 1 | 5,769  |       |        |
| 12 | 16 | 6  | - | 1 | 5,861  | 5,178 | -0,683 |
| 12 | 16 | 2  | - | 2 | 6,367  |       |        |
| 12 | 16 | 8  | - | 1 | 6,49   |       |        |
| 12 | 16 | 0  | - | 1 | 6,519  |       |        |
| 12 | 16 | 6  | - | 2 | 6,954  |       |        |
| 12 | 16 | 10 | - | 1 | 7,261  |       |        |
| 12 | 16 | 4  | - | 2 | 7,308  |       |        |
| 12 | 16 | 8  | - | 2 | 7,393  |       |        |
| 12 | 16 | 10 | - | 2 | 7,798  |       |        |
| 12 | 16 | 0  | - | 2 | 7,989  |       |        |
| 12 | 16 | 12 | - | 1 | 8,418  |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 12 | 16 | 12 | - | 2 | 8,838 |       |        |
| 12 | 16 | 14 | - | 1 | 9,658 |       |        |
| 12 | 16 | 14 | - | 2 | 9,889 |       |        |
| 12 | 17 | 1  | + | 1 | 0     | 0,055 | 0,055  |
| 12 | 17 | 3  | + | 1 | 0,077 | 0     | -0,077 |
| 12 | 17 | 3  | - | 1 | 1,081 |       |        |
| 12 | 17 | 5  | + | 1 | 1,487 | 1,638 | 0,151  |
| 12 | 17 | 7  | - | 1 | 1,734 |       |        |
| 12 | 17 | 1  | - | 1 | 1,854 |       |        |
| 12 | 17 | 5  | - | 1 | 2,934 |       |        |
| 12 | 17 | 3  | - | 2 | 3,47  |       |        |
| 12 | 17 | 11 | - | 1 | 3,476 |       |        |
| 12 | 17 | 1  | - | 2 | 3,584 |       |        |
| 12 | 17 | 5  | - | 2 | 3,939 |       |        |
| 12 | 17 | 7  | - | 2 | 4,184 |       |        |
| 12 | 17 | 9  | - | 1 | 4,492 |       |        |
| 12 | 17 | 9  | - | 2 | 5,565 |       |        |
| 12 | 17 | 11 | - | 2 | 5,987 |       |        |
| 12 | 17 | 15 | - | 1 | 6,188 |       |        |
| 12 | 17 | 13 | - | 1 | 6,502 |       |        |
| 12 | 17 | 13 | - | 2 | 7,34  |       |        |
| 12 | 17 | 15 | - | 2 | 7,731 |       |        |
| 12 | 18 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 12 | 18 | 4  | + | 1 | 1,589 | 1,483 | -0,106 |
| 12 | 18 | 0  | - | 1 | 3,621 |       |        |
| 12 | 18 | 2  | - | 1 | 3,632 |       |        |
| 12 | 18 | 4  | - | 1 | 3,814 |       |        |
| 12 | 18 | 6  | - | 1 | 4,036 |       |        |
| 12 | 18 | 2  | - | 2 | 4,373 |       |        |
| 12 | 18 | 4  | - | 2 | 4,667 |       |        |
| 12 | 18 | 8  | - | 1 | 4,702 |       |        |
| 12 | 18 | 10 | - | 1 | 4,734 |       |        |
| 12 | 18 | 6  | - | 2 | 5,05  |       |        |
| 12 | 18 | 0  | - | 2 | 5,904 |       |        |
| 12 | 18 | 8  | - | 2 | 6,097 |       |        |
| 12 | 18 | 12 | - | 1 | 6,417 |       |        |
| 12 | 18 | 14 | - | 1 | 6,646 |       |        |
| 12 | 18 | 10 | - | 2 | 6,813 |       |        |
| 12 | 18 | 12 | - | 2 | 7,848 |       |        |
| 12 | 18 | 14 | - | 2 | 8,86  |       |        |
| 12 | 19 | 3  | - | 1 | 0     |       |        |
| 12 | 19 | 3  | + | 1 | 0,199 |       |        |
| 12 | 19 | 7  | - | 1 | 0,357 |       |        |
| 12 | 19 | 1  | - | 1 | 0,846 |       |        |
| 12 | 19 | 5  | - | 1 | 1,848 |       |        |
| 12 | 19 | 11 | - | 1 | 1,872 |       |        |
| 12 | 19 | 3  | - | 2 | 2,207 |       |        |
| 12 | 19 | 7  | - | 2 | 2,741 |       |        |
| 12 | 19 | 1  | - | 2 | 3,05  |       |        |
| 12 | 19 | 5  | - | 2 | 3,092 |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 12 | 19 | 9  | - | 1 | 3,127 |       |        |
| 12 | 19 | 9  | - | 2 | 3,884 |       |        |
| 12 | 19 | 11 | - | 2 | 4,216 |       |        |
| 12 | 19 | 15 | - | 1 | 4,449 |       |        |
| 12 | 19 | 13 | - | 1 | 4,916 |       |        |
| 12 | 19 | 13 | - | 2 | 5,54  |       |        |
| 12 | 19 | 15 | - | 2 | 6,075 |       |        |
| 12 | 20 | 0  | + | 1 | 0     |       |        |
| 12 | 20 | 4  | - | 1 | 2,35  |       |        |
| 12 | 20 | 8  | - | 1 | 2,444 |       |        |
| 12 | 20 | 6  | - | 1 | 2,447 |       |        |
| 12 | 20 | 2  | - | 1 | 2,456 |       |        |
| 12 | 20 | 10 | - | 1 | 2,941 |       |        |
| 12 | 20 | 0  | - | 1 | 3,034 |       |        |
| 12 | 20 | 4  | - | 2 | 3,643 |       |        |
| 12 | 20 | 6  | - | 2 | 3,855 |       |        |
| 12 | 20 | 12 | - | 1 | 3,896 |       |        |
| 12 | 20 | 2  | - | 2 | 4,159 |       |        |
| 12 | 20 | 8  | - | 2 | 4,607 |       |        |
| 12 | 20 | 14 | - | 1 | 4,768 |       |        |
| 12 | 20 | 10 | - | 2 | 5,192 |       |        |
| 12 | 20 | 0  | - | 2 | 5,855 |       |        |
| 12 | 20 | 12 | - | 2 | 5,878 |       |        |
| 12 | 20 | 14 | - | 2 | 6,582 |       |        |
| 13 | 13 | 10 | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 13 | 13 | 0  | + | 1 | 0,072 | 0,228 | 0,156  |
| 13 | 13 | 6  | + | 1 | 0,557 | 0,417 | -0,140 |
| 13 | 13 | 2  | + | 1 | 1,071 | 1,058 | -0,013 |
| 13 | 13 | 4  | + | 1 | 1,817 | 1,759 | -0,058 |
| 13 | 13 | 2  | + | 2 | 1,832 | 1,851 | 0,019  |
| 13 | 13 | 4  | + | 2 | 1,95  | 2,069 | 0,119  |
| 13 | 13 | 8  | + | 1 | 2,118 | 2,068 | -0,050 |
| 13 | 13 | 6  | + | 2 | 2,124 | 2,365 | 0,241  |
| 13 | 13 | 4  | - | 1 | 2,779 | 4,431 | 1,652  |
| 13 | 13 | 0  | - | 1 | 3,254 | 3,978 | 0,724  |
| 13 | 13 | 10 | + | 2 | 3,428 | 3,403 | -0,025 |
| 13 | 13 | 12 | + | 1 | 3,441 | 3,508 | 0,067  |
| 13 | 13 | 8  | + | 2 | 3,67  | 3,675 | 0,005  |
| 13 | 13 | 2  | - | 1 | 3,775 | 4,940 | 1,165  |
| 13 | 13 | 14 | + | 1 | 3,812 | 3,922 | 0,110  |
| 13 | 13 | 0  | + | 2 | 3,901 | 3,754 | -0,147 |
| 13 | 13 | 4  | - | 2 | 4,307 | 4,622 | 0,315  |
| 13 | 13 | 6  | - | 1 | 4,425 | 5,457 | 1,032  |
| 13 | 13 | 2  | - | 2 | 4,898 | 5,431 | 0,533  |
| 13 | 13 | 8  | - | 1 | 4,99  | 5,396 | 0,406  |
| 13 | 13 | 4  | - | 3 | 5,142 | 5,007 | -0,135 |
| 13 | 13 | 8  | - | 2 | 5,319 |       |        |
| 13 | 13 | 6  | - | 2 | 5,354 |       |        |
| 13 | 13 | 0  | - | 2 | 5,551 | 4,481 | -1,070 |
| 13 | 13 | 10 | - | 1 | 5,761 | 6,084 | 0,323  |
| 13 | 13 | 12 | - | 1 | 6,241 | 6,892 | 0,651  |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 13 | 13 | 10 | - | 2 | 6,609  | 6,551 | -0,058 |
| 13 | 13 | 12 | - | 2 | 7,38   | 7,529 | 0,149  |
| 13 | 13 | 14 | - | 1 | 7,765  |       |        |
| 13 | 13 | 14 | - | 2 | 8,32   |       |        |
| 13 | 14 | 5  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 13 | 14 | 1  | + | 1 | 0,897  | 0,844 | -0,053 |
| 13 | 14 | 3  | + | 1 | 0,987  | 1,014 | 0,027  |
| 13 | 14 | 7  | + | 1 | 2,272  | 2,212 | -0,060 |
| 13 | 14 | 5  | + | 2 | 2,617  | 2,735 | 0,118  |
| 13 | 14 | 3  | + | 2 | 2,982  | 2,982 | 0      |
| 13 | 14 | 1  | - | 1 | 3,019  | 4,055 | 1,036  |
| 13 | 14 | 13 | - | 1 | 3,019  |       |        |
| 13 | 14 | 11 | - | 1 | 3,019  |       |        |
| 13 | 14 | 9  | + | 1 | 3,022  | 3,004 | -0,018 |
| 13 | 14 | 3  | - | 1 | 3,872  | 5,156 | 1,284  |
| 13 | 14 | 1  | + | 2 | 3,95   | 3,680 | -0,270 |
| 13 | 14 | 11 | + | 1 | 4,627  | 4,510 | -0,117 |
| 13 | 14 | 5  | - | 1 | 4,76   | 5,438 | 0,678  |
| 13 | 14 | 7  | + | 2 | 4,848  | 4,580 | -0,268 |
| 13 | 14 | 9  | + | 2 | 5,309  | 5,420 | 0,111  |
| 13 | 14 | 11 | + | 2 | 5,552  | 5,500 | -0,052 |
| 13 | 14 | 3  | - | 2 | 6,144  | 5,827 | -0,317 |
| 13 | 14 | 7  | - | 1 | 6,254  | 6,477 | 0,223  |
| 13 | 14 | 7  | - | 2 | 6,442  | 7,477 | 1,035  |
| 13 | 14 | 5  | - | 2 | 6,64   | 6,651 | 0,011  |
| 13 | 14 | 1  | - | 2 | 6,771  |       |        |
| 13 | 14 | 13 | + | 1 | 6,821  |       |        |
| 13 | 14 | 9  | - | 1 | 7,259  | 7,227 | -0,032 |
| 13 | 14 | 9  | - | 2 | 7,604  |       |        |
| 13 | 14 | 11 | - | 2 | 8,064  |       |        |
| 13 | 14 | 13 | - | 2 | 8,977  |       |        |
| 13 | 14 | 15 | - | 1 | 10,029 |       |        |
| 13 | 14 | 15 | - | 2 | 10,674 |       |        |
| 13 | 15 | 6  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 13 | 15 | 4  | + | 1 | 0,089  | 0,031 | -0,058 |
| 13 | 15 | 6  | + | 2 | 1,067  | 1,014 | -0,053 |
| 13 | 15 | 0  | + | 1 | 1,067  | 0,972 | -0,095 |
| 13 | 15 | 2  | + | 1 | 1,175  | 1,373 | 0,198  |
| 13 | 15 | 4  | + | 2 | 1,404  | 1,623 | 0,219  |
| 13 | 15 | 2  | + | 2 | 1,426  | 1,620 | 0,194  |
| 13 | 15 | 8  | + | 1 | 2,114  | 2,271 | 0,157  |
| 13 | 15 | 8  | + | 2 | 2,502  | 2,658 | 0,156  |
| 13 | 15 | 10 | + | 1 | 2,609  | 2,582 | -0,027 |
| 13 | 15 | 0  | + | 2 | 2,759  | 3,011 | 0,252  |
| 13 | 15 | 0  | - | 1 | 3,472  |       |        |
| 13 | 15 | 8  | - | 1 | 3,534  | 3,465 | -0,069 |
| 13 | 15 | 4  | - | 1 | 3,64   | 3,876 | 0,236  |
| 13 | 15 | 6  | - | 1 | 3,677  | 3,592 | -0,085 |
| 13 | 15 | 2  | - | 1 | 3,748  |       |        |
| 13 | 15 | 10 | - | 1 | 4,034  | 4,033 | -0,001 |
| 13 | 15 | 4  | - | 2 | 4,39   | 4,765 | 0,375  |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 13 | 15 | 4  | - | 3 | 4,47  | 4,904 | 0,434  |
| 13 | 15 | 6  | - | 2 | 4,54  | 4,691 | 0,151  |
| 13 | 15 | 0  | - | 2 | 4,622 |       |        |
| 13 | 15 | 8  | - | 2 | 4,629 |       |        |
| 13 | 15 | 2  | - | 2 | 4,671 |       |        |
| 13 | 15 | 6  | - | 3 | 4,728 | 5,135 | 0,407  |
| 13 | 15 | 10 | - | 2 | 4,872 |       |        |
| 13 | 15 | 12 | - | 1 | 4,902 | 5,165 | 0,263  |
| 13 | 15 | 12 | - | 2 | 6,214 |       |        |
| 13 | 15 | 14 | - | 1 | 6,589 |       |        |
| 13 | 15 | 14 | - | 2 | 7,467 |       |        |
| 13 | 16 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 13 | 16 | 1  | + | 1 | 1,094 | 1,398 | 0,304  |
| 13 | 16 | 7  | + | 1 | 1,823 | 1,754 | -0,069 |
| 13 | 16 | 3  | + | 1 | 1,879 | 2,224 | 0,345  |
| 13 | 16 | 3  | + | 2 | 2,617 | 2,865 | 0,248  |
| 13 | 16 | 5  | + | 2 | 2,777 | 3,061 | 0,284  |
| 13 | 16 | 1  | + | 2 | 3,311 | 3,433 | 0,122  |
| 13 | 16 | 9  | + | 1 | 3,433 | 3,578 | 0,145  |
| 13 | 16 | 1  | - | 1 | 3,805 |       |        |
| 13 | 16 | 3  | - | 1 | 5,287 |       |        |
| 13 | 16 | 7  | - | 1 | 5,408 |       |        |
| 13 | 16 | 5  | - | 1 | 5,45  |       |        |
| 13 | 16 | 3  | - | 2 | 5,519 |       |        |
| 13 | 16 | 9  | - | 1 | 5,569 |       |        |
| 13 | 16 | 5  | - | 2 | 5,655 |       |        |
| 13 | 16 | 7  | - | 2 | 5,74  |       |        |
| 13 | 16 | 9  | - | 2 | 6,112 |       |        |
| 13 | 16 | 11 | - | 1 | 6,148 |       |        |
| 13 | 16 | 1  | - | 2 | 6,514 |       |        |
| 13 | 16 | 11 | - | 2 | 6,717 |       |        |
| 13 | 16 | 13 | - | 1 | 7,063 |       |        |
| 13 | 16 | 13 | - | 2 | 7,894 |       |        |
| 13 | 16 | 15 | - | 1 | 8,596 |       |        |
| 13 | 16 | 15 | - | 2 | 8,956 |       |        |
| 13 | 17 | 6  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 13 | 17 | 4  | + | 1 | 0,011 | 0,244 | 0,233  |
| 13 | 17 | 2  | + | 1 | 0,344 | 0,688 | 0,344  |
| 13 | 17 | 6  | + | 2 | 0,666 | 1,120 | 0,454  |
| 13 | 17 | 8  | + | 1 | 0,846 | 1,246 | 0,400  |
| 13 | 17 | 6  | - | 1 | 2,102 |       |        |
| 13 | 17 | 8  | - | 1 | 2,123 |       |        |
| 13 | 17 | 4  | - | 1 | 2,332 |       |        |
| 13 | 17 | 10 | - | 1 | 2,81  |       |        |
| 13 | 17 | 4  | - | 2 | 2,886 |       |        |
| 13 | 17 | 4  | - | 3 | 3,175 |       |        |
| 13 | 17 | 6  | - | 2 | 3,246 |       |        |
| 13 | 17 | 0  | - | 1 | 3,25  |       |        |
| 13 | 17 | 8  | - | 2 | 3,298 |       |        |
| 13 | 17 | 2  | - | 1 | 3,304 |       |        |
| 13 | 17 | 2  | - | 2 | 3,489 |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |       |
|----|----|----|---|---|-------|-------|-------|
| 13 | 17 | 6  | - | 3 | 3,536 |       |       |
| 13 | 17 | 12 | - | 1 | 3,598 |       |       |
| 13 | 17 | 0  | - | 2 | 4,007 |       |       |
| 13 | 17 | 10 | - | 2 | 4,29  |       |       |
| 13 | 17 | 12 | - | 2 | 5,052 |       |       |
| 13 | 17 | 14 | - | 1 | 5,373 |       |       |
| 13 | 17 | 14 | - | 2 | 6,244 |       |       |
| 13 | 18 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0     |
| 13 | 18 | 1  | + | 1 | 0,777 | 0,947 | 0,170 |
| 13 | 18 | 3  | + | 1 | 1,576 | 1,613 | 0,037 |
| 13 | 18 | 1  | - | 1 | 3,208 |       |       |
| 13 | 18 | 3  | - | 1 | 3,906 |       |       |
| 13 | 18 | 5  | - | 1 | 4,159 |       |       |
| 13 | 18 | 7  | - | 1 | 4,267 |       |       |
| 13 | 18 | 1  | - | 2 | 4,587 |       |       |
| 13 | 18 | 5  | - | 2 | 4,624 |       |       |
| 13 | 18 | 9  | - | 1 | 4,64  |       |       |
| 13 | 18 | 11 | - | 1 | 4,724 |       |       |
| 13 | 18 | 7  | - | 2 | 4,751 |       |       |
| 13 | 18 | 3  | - | 2 | 4,773 |       |       |
| 13 | 18 | 9  | - | 2 | 4,909 |       |       |
| 13 | 18 | 13 | - | 1 | 5,375 |       |       |
| 13 | 18 | 11 | - | 2 | 5,549 |       |       |
| 13 | 18 | 15 | - | 1 | 6,228 |       |       |
| 13 | 18 | 13 | - | 2 | 6,278 |       |       |
| 13 | 18 | 15 | - | 2 | 7,846 |       |       |
| 13 | 19 | 2  | + | 1 | 0     | 0     | 0     |
| 13 | 19 | 4  | + | 1 | 0,577 | 0,735 | 0,158 |
| 13 | 19 | 8  | - | 1 | 1,079 |       |       |
| 13 | 19 | 6  | - | 1 | 1,311 |       |       |
| 13 | 19 | 4  | - | 1 | 1,571 |       |       |
| 13 | 19 | 10 | - | 1 | 1,58  |       |       |
| 13 | 19 | 4  | - | 2 | 1,889 |       |       |
| 13 | 19 | 8  | - | 2 | 2,043 |       |       |
| 13 | 19 | 6  | - | 2 | 2,235 |       |       |
| 13 | 19 | 0  | - | 1 | 2,314 |       |       |
| 13 | 19 | 12 | - | 1 | 2,316 |       |       |
| 13 | 19 | 2  | - | 1 | 2,472 |       |       |
| 13 | 19 | 2  | - | 2 | 2,735 |       |       |
| 13 | 19 | 10 | - | 2 | 3,166 |       |       |
| 13 | 19 | 0  | - | 2 | 3,797 |       |       |
| 13 | 19 | 12 | - | 2 | 3,873 |       |       |
| 13 | 19 | 14 | - | 1 | 4,404 |       |       |
| 13 | 19 | 14 | - | 2 | 4,453 |       |       |
| 13 | 20 | 5  | + | 1 | 0     | 0     | 0     |
| 13 | 20 | 1  | + | 1 | 2,84  |       |       |
| 13 | 20 | 1  | - | 1 | 2,94  |       |       |
| 13 | 20 | 5  | - | 1 | 3,07  |       |       |
| 13 | 20 | 9  | - | 1 | 3,12  |       |       |
| 13 | 20 | 7  | - | 1 | 3,15  |       |       |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 13 | 20 | 3  | - | 1 | 3,35   |        |        |
| 13 | 20 | 11 | - | 1 | 3,35   |        |        |
| 13 | 20 | 13 | - | 1 | 3,61   |        |        |
| 13 | 20 | 3  | + | 1 | 3,62   |        |        |
| 13 | 20 | 7  | - | 2 | 3,71   |        |        |
| 13 | 20 | 9  | - | 2 | 3,74   |        |        |
| 13 | 20 | 5  | - | 2 | 3,8    |        |        |
| 13 | 20 | 11 | - | 2 | 3,81   |        |        |
| 13 | 20 | 1  | - | 2 | 3,86   |        |        |
| 13 | 20 | 3  | - | 2 | 4,12   |        |        |
| 13 | 20 | 7  | + | 1 | 4,16   |        |        |
| 13 | 20 | 15 | - | 1 | 4,37   |        |        |
| 13 | 20 | 5  | + | 2 | 4,65   |        |        |
| 13 | 20 | 13 | - | 2 | 5,11   |        |        |
| 13 | 20 | 15 | - | 2 | 7,8    |        |        |
| 14 | 14 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 14 | 14 | 4  | + | 1 | 1,892  | 1,779  | -0,113 |
| 14 | 14 | 8  | + | 1 | 4,645  | 4,618  | -0,027 |
| 14 | 14 | 0  | + | 2 | 4,801  | 4,979  | 0,178  |
| 14 | 14 | 6  | + | 1 | 6,47   | 6,276  | -0,194 |
| 14 | 14 | 8  | + | 2 | 7,159  | 6,888  | -0,271 |
| 14 | 14 | 6  | - | 1 | 7,176  | 6,879  | -0,297 |
| 14 | 14 | 2  | - | 1 | 7,227  | 8,905  | 1,678  |
| 14 | 14 | 0  | + | 3 | 7,398  | 6,691  | -0,707 |
| 14 | 14 | 4  | + | 2 | 7,558  | 7,381  | -0,177 |
| 14 | 14 | 4  | + | 3 | 8,001  | 7,417  | -0,584 |
| 14 | 14 | 6  | + | 2 | 8,113  | 7,799  | -0,314 |
| 14 | 14 | 4  | - | 1 | 8,219  |        |        |
| 14 | 14 | 2  | + | 1 | 8,257  | 8,328  | 0,071  |
| 14 | 14 | 6  | - | 2 | 8,457  | 9,765  | 1,308  |
| 14 | 14 | 12 | + | 1 | 8,489  | 8,543  | 0,054  |
| 14 | 14 | 8  | - | 1 | 8,603  | 8,413  | -0,190 |
| 14 | 14 | 10 | - | 1 | 8,766  | 9,702  | 0,936  |
| 14 | 14 | 10 | + | 1 | 9,391  | 8,945  | -0,446 |
| 14 | 14 | 2  | - | 2 | 9,688  | 9,929  | 0,241  |
| 14 | 14 | 0  | - | 1 | 9,795  |        |        |
| 14 | 14 | 10 | - | 2 | 10,086 | 10,190 | 0,104  |
| 14 | 14 | 10 | + | 2 | 10,32  | 10,418 | 0,098  |
| 14 | 14 | 4  | - | 2 | 10,381 |        |        |
| 14 | 14 | 8  | - | 2 | 10,703 | 11,435 | 0,732  |
| 14 | 14 | 12 | - | 1 | 10,738 | 11,577 | 0,839  |
| 14 | 14 | 2  | - | 3 | 10,775 | 11,295 | 0,520  |
| 14 | 14 | 10 | - | 3 | 11,072 | 12,022 | 0,950  |
| 14 | 14 | 12 | + | 2 | 11,196 | 11,100 | -0,096 |
| 14 | 14 | 6  | - | 3 | 11,28  | 10,182 | -1,098 |
| 14 | 14 | 12 | - | 2 | 12,037 | 12,204 | 0,167  |
| 14 | 14 | 0  | - | 2 | 12,223 |        |        |
| 14 | 14 | 14 | - | 1 | 12,911 |        |        |
| 14 | 14 | 14 | - | 2 | 13,815 |        |        |
| 14 | 15 | 1  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 14 | 15 | 3  | + | 1 | 1,28   | 1,273  | -0,007 |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 14 | 15 | 5  | + | 1 | 1,993  | 2,028 | 0,035  |
| 14 | 15 | 3  | + | 2 | 2,446  | 2,426 | -0,020 |
| 14 | 15 | 5  | + | 2 | 3,273  | 3,067 | -0,206 |
| 14 | 15 | 7  | - | 1 | 3,431  | 3,624 | 0,193  |
| 14 | 15 | 7  | + | 1 | 4,076  | 4,080 | 0,004  |
| 14 | 15 | 3  | - | 1 | 4,666  | 4,935 | 0,269  |
| 14 | 15 | 9  | + | 1 | 4,682  | 4,741 | 0,059  |
| 14 | 15 | 1  | + | 2 | 4,707  | 4,840 | 0,133  |
| 14 | 15 | 9  | - | 1 | 4,864  | 5,255 | 0,391  |
| 14 | 15 | 7  | + | 2 | 5,147  | 5,286 | 0,139  |
| 14 | 15 | 5  | - | 1 | 5,484  |       |        |
| 14 | 15 | 1  | - | 1 | 5,539  | 6,381 | 0,842  |
| 14 | 15 | 9  | + | 2 | 5,694  | 5,652 | -0,042 |
| 14 | 15 | 5  | - | 2 | 5,966  |       |        |
| 14 | 15 | 7  | - | 2 | 6,069  | 6,194 | 0,125  |
| 14 | 15 | 11 | - | 1 | 6,324  | 6,781 | 0,457  |
| 14 | 15 | 3  | - | 2 | 6,626  |       |        |
| 14 | 15 | 1  | - | 2 | 6,802  |       |        |
| 14 | 15 | 11 | + | 1 | 7,151  | 7,139 | -0,012 |
| 14 | 15 | 11 | + | 2 | 7,819  | 8,173 | 0,354  |
| 14 | 15 | 9  | - | 2 | 8,031  |       |        |
| 14 | 15 | 13 | - | 1 | 8,16   | 8,762 | 0,602  |
| 14 | 15 | 11 | - | 2 | 8,46   |       |        |
| 14 | 15 | 13 | + | 1 | 8,645  | 8,641 | -0,004 |
| 14 | 15 | 13 | - | 2 | 9,809  |       |        |
| 14 | 15 | 15 | - | 1 | 9,908  |       |        |
| 14 | 15 | 15 | - | 2 | 11,246 |       |        |
| 14 | 16 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 14 | 16 | 4  | + | 1 | 2,235  | 2,235 | 0      |
| 14 | 16 | 4  | + | 2 | 3,457  | 3,499 | 0,042  |
| 14 | 16 | 2  | + | 1 | 4,044  | 3,770 | -0,274 |
| 14 | 16 | 0  | + | 2 | 4,061  | 3,788 | -0,273 |
| 14 | 16 | 6  | + | 1 | 4,787  | 4,831 | 0,044  |
| 14 | 16 | 6  | + | 2 | 5,115  | 5,232 | 0,117  |
| 14 | 16 | 8  | + | 1 | 5,274  | 5,280 | 0,006  |
| 14 | 16 | 6  | - | 1 | 5,773  | 5,488 | -0,285 |
| 14 | 16 | 8  | + | 2 | 5,82   | 5,950 | 0,131  |
| 14 | 16 | 8  | - | 1 | 6,249  | 6,503 | 0,254  |
| 14 | 16 | 4  | - | 1 | 6,599  | 6,641 | 0,042  |
| 14 | 16 | 2  | - | 1 | 6,664  | 6,744 | 0,080  |
| 14 | 16 | 10 | + | 1 | 7,125  | 7,001 | -0,124 |
| 14 | 16 | 4  | - | 2 | 7,132  | 7,508 | 0,376  |
| 14 | 16 | 10 | - | 1 | 7,359  | 7,044 | -0,315 |
| 14 | 16 | 6  | - | 2 | 7,446  |       |        |
| 14 | 16 | 8  | - | 2 | 7,53   | 7,613 | 0,083  |
| 14 | 16 | 10 | - | 2 | 7,651  | 8,196 | 0,545  |
| 14 | 16 | 2  | - | 2 | 7,685  |       |        |
| 14 | 16 | 0  | - | 1 | 7,917  |       |        |
| 14 | 16 | 0  | - | 2 | 8,529  |       |        |
| 14 | 16 | 10 | - | 3 | 8,846  | 8,963 | 0,117  |
| 14 | 16 | 12 | - | 1 | 8,93   | 9,111 | 0,181  |
| 14 | 16 | 12 | + | 1 | 9,01   | 9,371 | 0,361  |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 14 | 16 | 12 | - | 2 | 9,179  | 9,777  | 0,598  |
| 14 | 16 | 14 | - | 1 | 10,476 | 10,725 | 0,249  |
| 14 | 16 | 14 | - | 2 | 10,813 |        |        |
| 14 | 17 | 3  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 14 | 17 | 1  | + | 1 | 0,649  | 0,752  | 0,103  |
| 14 | 17 | 5  | + | 1 | 1,487  | 1,695  | 0,208  |
| 14 | 17 | 3  | + | 2 | 2,238  | 2,317  | 0,079  |
| 14 | 17 | 5  | + | 2 | 2,555  | 2,788  | 0,233  |
| 14 | 17 | 7  | - | 1 | 2,799  | 3,134  | 0,335  |
| 14 | 17 | 3  | - | 1 | 2,807  | 3,533  | 0,726  |
| 14 | 17 | 1  | - | 1 | 4,406  |        |        |
| 14 | 17 | 3  | - | 2 | 4,535  | 4,382  | -0,153 |
| 14 | 17 | 5  | - | 1 | 4,551  |        |        |
| 14 | 17 | 9  | - | 1 | 4,662  |        |        |
| 14 | 17 | 5  | - | 2 | 4,8    |        |        |
| 14 | 17 | 7  | - | 2 | 5,038  |        |        |
| 14 | 17 | 11 | - | 1 | 5,25   |        |        |
| 14 | 17 | 1  | - | 2 | 5,269  |        |        |
| 14 | 17 | 9  | - | 2 | 5,516  |        |        |
| 14 | 17 | 11 | - | 2 | 6,217  |        |        |
| 14 | 17 | 13 | - | 1 | 6,881  |        |        |
| 14 | 17 | 13 | - | 2 | 8,051  |        |        |
| 14 | 17 | 15 | - | 1 | 8,341  |        |        |
| 14 | 17 | 15 | - | 2 | 9,37   |        |        |
| 14 | 18 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 14 | 18 | 4  | + | 1 | 2,043  | 1,941  | -0,102 |
| 14 | 18 | 4  | + | 2 | 4,306  | 4,231  | -0,075 |
| 14 | 18 | 0  | + | 2 | 5,185  | 4,984  | -0,201 |
| 14 | 18 | 2  | - | 1 | 5,241  |        |        |
| 14 | 18 | 0  | - | 1 | 5,416  |        |        |
| 14 | 18 | 4  | - | 1 | 5,445  |        |        |
| 14 | 18 | 6  | - | 1 | 5,495  | 5,289  | -0,206 |
| 14 | 18 | 10 | - | 1 | 5,725  | 5,581  | -0,144 |
| 14 | 18 | 4  | - | 2 | 6,227  |        |        |
| 14 | 18 | 6  | - | 2 | 6,291  |        |        |
| 14 | 18 | 8  | - | 1 | 6,501  |        |        |
| 14 | 18 | 2  | - | 2 | 6,717  |        |        |
| 14 | 18 | 8  | - | 2 | 6,966  |        |        |
| 14 | 18 | 0  | - | 2 | 7,616  |        |        |
| 14 | 18 | 10 | - | 2 | 7,663  |        |        |
| 14 | 18 | 12 | - | 1 | 7,752  |        |        |
| 14 | 18 | 10 | - | 3 | 8,108  |        |        |
| 14 | 18 | 12 | - | 2 | 9,064  |        |        |
| 14 | 18 | 14 | - | 1 | 9,77   |        |        |
| 14 | 18 | 14 | - | 2 | 10,411 |        |        |
| 14 | 19 | 3  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 14 | 19 | 1  | + | 1 | 0,798  | 1,010  | 0,212  |
| 14 | 19 | 7  | - | 1 | 1,381  | 1,435  | 0,054  |
| 14 | 19 | 3  | - | 1 | 1,703  | 1,981  | 0,278  |
| 14 | 19 | 1  | - | 1 | 3,021  |        |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 14 | 19 | 9  | - | 1 | 3,157 |       |        |
| 14 | 19 | 5  | - | 1 | 3,158 |       |        |
| 14 | 19 | 5  | - | 2 | 3,331 |       |        |
| 14 | 19 | 7  | - | 2 | 3,369 |       |        |
| 14 | 19 | 3  | - | 2 | 3,53  |       |        |
| 14 | 19 | 7  | + | 1 | 3,558 | 3,726 | 0,168  |
| 14 | 19 | 1  | - | 2 | 4,002 |       |        |
| 14 | 19 | 11 | - | 1 | 4,129 | 3,159 | -0,970 |
| 14 | 19 | 11 | - | 2 | 4,975 | 4,090 | -0,885 |
| 14 | 19 | 9  | - | 2 | 5,464 |       |        |
| 14 | 19 | 13 | - | 1 | 6,549 |       |        |
| 14 | 19 | 13 | - | 2 | 6,821 |       |        |
| 14 | 19 | 15 | - | 1 | 7,719 | 4,932 | -2,787 |
| 14 | 19 | 15 | - | 2 | 8,016 |       |        |
| 14 | 20 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 14 | 20 | 8  | - | 1 | 4,254 | 4,379 | 0,125  |
| 14 | 20 | 4  | + | 1 | 4,379 | 3,326 | -1,053 |
| 14 | 20 | 6  | - | 1 | 4,79  | 4,255 | -0,535 |
| 14 | 20 | 10 | - | 1 | 4,839 | 4,970 | 0,131  |
| 14 | 20 | 2  | - | 1 | 4,876 |       |        |
| 14 | 20 | 0  | - | 1 | 4,913 |       |        |
| 14 | 20 | 4  | - | 1 | 5,06  |       |        |
| 14 | 20 | 6  | - | 2 | 5,518 |       |        |
| 14 | 20 | 4  | - | 2 | 5,809 |       |        |
| 14 | 20 | 2  | - | 2 | 6,126 |       |        |
| 14 | 20 | 0  | - | 2 | 6,434 |       |        |
| 14 | 20 | 8  | - | 2 | 6,666 |       |        |
| 14 | 20 | 0  | + | 2 | 7,123 | 3,996 | -3,127 |
| 14 | 20 | 12 | - | 1 | 7,898 |       |        |
| 14 | 20 | 10 | - | 2 | 7,959 |       |        |
| 14 | 20 | 10 | - | 3 | 8,423 |       |        |
| 14 | 20 | 14 | - | 1 | 8,758 |       |        |
| 14 | 20 | 12 | - | 2 | 9,05  |       |        |
| 14 | 20 | 14 | - | 2 | 9,322 |       |        |
| 15 | 15 | 2  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 15 | 15 | 2  | + | 2 | 0,713 | 0,709 | -0,004 |
| 15 | 15 | 0  | + | 1 | 0,721 | 0,677 | -0,044 |
| 15 | 15 | 4  | + | 1 | 1,766 | 1,455 | -0,311 |
| 15 | 15 | 6  | + | 1 | 2,012 | 1,974 | -0,038 |
| 15 | 15 | 6  | + | 2 | 2,351 | 2,539 | 0,188  |
| 15 | 15 | 8  | - | 1 | 4,144 | 4,232 | 0,088  |
| 15 | 15 | 4  | - | 1 | 4,228 | 4,144 | -0,084 |
| 15 | 15 | 10 | + | 1 | 4,337 | 4,344 | 0,007  |
| 15 | 15 | 8  | + | 1 | 4,445 | 4,298 | -0,147 |
| 15 | 15 | 6  | - | 1 | 4,619 | 4,627 | 0,008  |
| 15 | 15 | 0  | + | 2 | 4,781 | 4,468 | -0,313 |
| 15 | 15 | 2  | - | 1 | 4,984 |       |        |
| 15 | 15 | 10 | - | 1 | 5,143 | 4,926 | -0,217 |
| 15 | 15 | 6  | - | 2 | 5,368 | 6,095 | 0,727  |
| 15 | 15 | 0  | - | 1 | 5,454 | 5,411 | -0,043 |
| 15 | 15 | 8  | - | 2 | 5,613 | 5,232 | -0,381 |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 15 | 15 | 4  | - | 2 | 5,767  | 5,908 | 0,141  |
| 15 | 15 | 10 | - | 2 | 5,881  | 5,028 | -0,853 |
| 15 | 15 | 2  | - | 2 | 5,919  |       |        |
| 15 | 15 | 12 | - | 1 | 6,449  |       |        |
| 15 | 15 | 0  | - | 2 | 6,588  |       |        |
| 15 | 15 | 12 | + | 1 | 7,142  |       |        |
| 15 | 15 | 12 | - | 2 | 7,367  |       |        |
| 15 | 15 | 14 | - | 1 | 8,255  |       |        |
| 15 | 15 | 14 | - | 2 | 9,296  |       |        |
| 15 | 16 | 1  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 15 | 16 | 3  | + | 1 | 1,199  | 1,266 | 0,067  |
| 15 | 16 | 5  | + | 1 | 2,212  | 2,233 | 0,021  |
| 15 | 16 | 1  | + | 2 | 3,26   | 3,134 | -0,126 |
| 15 | 16 | 5  | + | 2 | 3,304  | 3,295 | -0,009 |
| 15 | 16 | 3  | + | 2 | 3,43   | 3,506 | 0,076  |
| 15 | 16 | 7  | + | 1 | 3,438  | 3,415 | -0,023 |
| 15 | 16 | 7  | - | 1 | 4,786  | 4,431 | -0,355 |
| 15 | 16 | 7  | + | 2 | 4,791  | 4,634 | -0,157 |
| 15 | 16 | 9  | + | 1 | 5,345  | 5,343 | -0,002 |
| 15 | 16 | 3  | - | 1 | 5,604  | 6,496 | 0,892  |
| 15 | 16 | 5  | - | 1 | 5,771  |       |        |
| 15 | 16 | 9  | + | 2 | 5,778  | 5,892 | 0,114  |
| 15 | 16 | 1  | - | 1 | 6,002  |       |        |
| 15 | 16 | 5  | - | 2 | 6,139  |       |        |
| 15 | 16 | 9  | - | 1 | 6,333  | 6,501 | 0,168  |
| 15 | 16 | 11 | + | 1 | 6,439  | 6,454 | 0,015  |
| 15 | 16 | 1  | - | 2 | 6,575  |       |        |
| 15 | 16 | 7  | - | 2 | 6,576  |       |        |
| 15 | 16 | 3  | - | 2 | 6,792  | 6,610 | -0,182 |
| 15 | 16 | 11 | - | 1 | 6,98   | 6,825 | -0,155 |
| 15 | 16 | 3  | - | 3 | 7,06   | 6,909 | -0,151 |
| 15 | 16 | 9  | - | 2 | 7,078  | 6,793 | -0,285 |
| 15 | 16 | 11 | - | 2 | 7,601  |       |        |
| 15 | 16 | 11 | + | 2 | 7,692  | 7,441 | -0,251 |
| 15 | 16 | 13 | - | 1 | 8,709  |       |        |
| 15 | 16 | 13 | + | 1 | 8,925  |       |        |
| 15 | 16 | 13 | - | 2 | 9,196  |       |        |
| 15 | 16 | 15 | - | 1 | 10,015 |       |        |
| 15 | 16 | 15 | - | 2 | 10,571 |       |        |
| 15 | 17 | 2  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 15 | 17 | 4  | + | 1 | 0,168  | 0,078 | -0,090 |
| 15 | 17 | 0  | + | 1 | 0,663  | 0,513 | -0,150 |
| 15 | 17 | 2  | + | 2 | 1,059  | 1,149 | 0,090  |
| 15 | 17 | 4  | + | 2 | 1,258  | 1,323 | 0,065  |
| 15 | 17 | 6  | + | 1 | 1,675  | 1,755 | 0,080  |
| 15 | 17 | 6  | + | 2 | 2,153  | 2,177 | 0,024  |
| 15 | 17 | 4  | - | 1 | 2,909  | 3,264 | 0,355  |
| 15 | 17 | 8  | + | 1 | 3,146  | 3,149 | 0,003  |
| 15 | 17 | 8  | - | 1 | 3,181  | 3,443 | 0,262  |
| 15 | 17 | 6  | - | 1 | 3,283  | 3,320 | 0,037  |
| 15 | 17 | 2  | - | 1 | 3,464  | 4,036 | 0,572  |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 15 | 17 | 8  | + | 2 | 3,565 | 4,034 | 0,469  |
| 15 | 17 | 4  | - | 2 | 4,052 | 4,009 | -0,043 |
| 15 | 17 | 0  | - | 1 | 4,113 | 4,409 | 0,296  |
| 15 | 17 | 10 | - | 1 | 4,225 | 4,275 | 0,050  |
| 15 | 17 | 6  | - | 2 | 4,382 | 4,149 | -0,233 |
| 15 | 17 | 2  | - | 2 | 4,396 | 4,877 | 0,481  |
| 15 | 17 | 4  | - | 3 | 4,425 | 4,662 | 0,237  |
| 15 | 17 | 8  | - | 2 | 4,616 |       |        |
| 15 | 17 | 10 | + | 1 | 4,713 | 4,743 | 0,030  |
| 15 | 17 | 10 | - | 2 | 4,959 |       |        |
| 15 | 17 | 0  | - | 2 | 5,252 |       |        |
| 15 | 17 | 12 | - | 1 | 5,682 |       |        |
| 15 | 17 | 12 | - | 2 | 6,016 |       |        |
| 15 | 17 | 14 | - | 1 | 6,966 |       |        |
| 15 | 17 | 14 | - | 2 | 7,539 |       |        |
| 15 | 18 | 1  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 15 | 18 | 3  | + | 1 | 1,441 | 1,432 | -0,009 |
| 15 | 18 | 5  | + | 1 | 1,905 | 1,848 | -0,057 |
| 15 | 18 | 3  | + | 2 | 2,679 | 2,539 | -0,140 |
| 15 | 18 | 5  | + | 2 | 3,508 | 3,490 | -0,018 |
| 15 | 18 | 7  | + | 1 | 3,778 | 3,628 | -0,150 |
| 15 | 18 | 7  | - | 1 | 4,47  | 4,226 | -0,244 |
| 15 | 18 | 3  | - | 1 | 5,11  |       |        |
| 15 | 18 | 5  | - | 1 | 5,167 |       |        |
| 15 | 18 | 1  | - | 1 | 5,301 |       |        |
| 15 | 18 | 1  | - | 2 | 5,482 |       |        |
| 15 | 18 | 3  | - | 2 | 5,49  |       |        |
| 15 | 18 | 5  | - | 2 | 5,56  |       |        |
| 15 | 18 | 7  | - | 2 | 5,641 |       |        |
| 15 | 18 | 9  | - | 1 | 5,696 | 5,453 | -0,243 |
| 15 | 18 | 11 | - | 1 | 5,812 | 5,638 | -0,174 |
| 15 | 18 | 9  | - | 2 | 6,119 |       |        |
| 15 | 18 | 11 | - | 2 | 6,976 |       |        |
| 15 | 18 | 13 | - | 1 | 7,222 |       |        |
| 15 | 18 | 13 | - | 2 | 7,991 |       |        |
| 15 | 18 | 15 | - | 1 | 9,095 |       |        |
| 15 | 18 | 15 | - | 2 | 9,488 |       |        |
| 15 | 19 | 2  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 15 | 19 | 4  | + | 1 | 0,382 | 0,429 | 0,047  |
| 15 | 19 | 2  | + | 2 | 1,479 | 1,607 | 0,128  |
| 15 | 19 | 0  | + | 1 | 1,914 |       |        |
| 15 | 19 | 4  | - | 1 | 2,181 |       |        |
| 15 | 19 | 8  | - | 1 | 2,195 | 2,305 | 0,110  |
| 15 | 19 | 4  | + | 2 | 2,211 |       |        |
| 15 | 19 | 6  | - | 1 | 2,354 | 2,320 | -0,034 |
| 15 | 19 | 6  | + | 1 | 2,761 |       |        |
| 15 | 19 | 2  | - | 1 | 2,975 |       |        |
| 15 | 19 | 0  | - | 1 | 3,205 |       |        |
| 15 | 19 | 4  | - | 2 | 3,289 |       |        |
| 15 | 19 | 10 | - | 1 | 3,328 | 3,351 | 0,023  |
| 15 | 19 | 8  | + | 1 | 3,526 |       |        |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 15 | 19 | 2  | - | 2 | 3,554 |       |        |
| 15 | 19 | 6  | - | 2 | 3,723 |       |        |
| 15 | 19 | 8  | - | 2 | 3,837 |       |        |
| 15 | 19 | 10 | - | 2 | 3,936 |       |        |
| 15 | 19 | 0  | - | 2 | 4,355 |       |        |
| 15 | 19 | 6  | + | 2 | 4,526 |       |        |
| 15 | 19 | 12 | - | 1 | 4,774 | 5,188 | 0,414  |
| 15 | 19 | 12 | - | 2 | 5,422 |       |        |
| 15 | 19 | 8  | + | 2 | 5,787 |       |        |
| 15 | 19 | 0  | + | 2 | 6,12  |       |        |
| 15 | 19 | 10 | + | 1 | 6,146 |       |        |
| 15 | 19 | 14 | - | 1 | 6,371 |       |        |
| 15 | 19 | 14 | - | 2 | 6,951 |       |        |
| 15 | 19 | 10 | + | 2 | 7,394 |       |        |
| 15 | 19 | 12 | + | 1 | 7,519 |       |        |
| 15 | 19 | 12 | + | 2 | 9,283 |       |        |
| 15 | 20 | 1  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 15 | 20 | 3  | + | 1 | 2,553 | 2,386 | -0,167 |
| 15 | 20 | 5  | + | 1 | 3,976 | 3,860 | -0,116 |
| 15 | 20 | 7  | - | 1 | 4,185 | 4,101 | -0,084 |
| 15 | 20 | 1  | - | 1 | 4,654 |       |        |
| 15 | 20 | 3  | - | 1 | 4,725 |       |        |
| 15 | 20 | 7  | - | 2 | 4,754 | 4,493 | -0,261 |
| 15 | 20 | 5  | - | 1 | 4,786 |       |        |
| 15 | 20 | 9  | - | 1 | 4,892 | 4,766 | -0,126 |
| 15 | 20 | 5  | - | 2 | 4,994 |       |        |
| 15 | 20 | 9  | - | 2 | 5,089 | 4,962 | -0,127 |
| 15 | 20 | 11 | - | 1 | 5,241 | 5,089 | -0,152 |
| 15 | 20 | 3  | - | 2 | 5,657 |       |        |
| 15 | 20 | 1  | - | 2 | 5,672 |       |        |
| 15 | 20 | 11 | - | 2 | 6,108 |       |        |
| 15 | 20 | 13 | - | 1 | 7,013 |       |        |
| 15 | 20 | 13 | - | 2 | 7,985 |       |        |
| 15 | 20 | 15 | - | 1 | 8,595 |       |        |
| 15 | 20 | 15 | - | 2 | 9,95  |       |        |
| 16 | 16 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 16 | 16 | 4  | + | 1 | 2,256 | 2,230 | -0,026 |
| 16 | 16 | 0  | + | 2 | 3,55  | 3,778 | 0,228  |
| 16 | 16 | 4  | + | 2 | 4,15  | 4,281 | 0,131  |
| 16 | 16 | 8  | + | 1 | 4,653 | 4,459 | -0,194 |
| 16 | 16 | 2  | + | 1 | 4,88  | 4,695 | -0,185 |
| 16 | 16 | 6  | + | 1 | 5,237 | 5,413 | 0,176  |
| 16 | 16 | 6  | - | 1 | 5,465 | 5,006 | -0,459 |
| 16 | 16 | 8  | + | 2 | 6,22  | 6,411 | 0,191  |
| 16 | 16 | 8  | - | 1 | 6,768 | 6,621 | -0,147 |
| 16 | 16 | 4  | - | 1 | 6,927 | 6,224 | -0,703 |
| 16 | 16 | 2  | - | 1 | 6,955 | 5,798 | -1,157 |
| 16 | 16 | 10 | - | 1 | 7,147 | 6,762 | -0,385 |
| 16 | 16 | 2  | + | 2 | 7,307 | 7,002 | -0,305 |
| 16 | 16 | 6  | + | 2 | 7,514 | 7,350 | -0,164 |
| 16 | 16 | 10 | + | 1 | 7,53  | 7,567 | 0,037  |

|    |    |    |   |   |        |        |        |
|----|----|----|---|---|--------|--------|--------|
| 16 | 16 | 6  | - | 2 | 7,922  | 7,702  | -0,220 |
| 16 | 16 | 10 | - | 2 | 8,007  | 8,270  | 0,263  |
| 16 | 16 | 2  | - | 2 | 8,049  | 7,434  | -0,615 |
| 16 | 16 | 4  | - | 2 | 8,283  |        |        |
| 16 | 16 | 8  | - | 2 | 8,389  | 7,950  | -0,439 |
| 16 | 16 | 12 | + | 1 | 8,543  | 8,346  | -0,197 |
| 16 | 16 | 12 | - | 1 | 8,833  | 9,024  | 0,191  |
| 16 | 16 | 10 | + | 2 | 8,947  | 9,235  | 0,288  |
| 16 | 16 | 0  | - | 1 | 8,966  | 10,402 | 1,436  |
| 16 | 16 | 12 | - | 2 | 9,327  | 9,636  | 0,309  |
| 16 | 16 | 0  | - | 2 | 9,464  |        |        |
| 16 | 16 | 12 | + | 2 | 9,599  | 9,783  | 0,184  |
| 16 | 16 | 14 | - | 1 | 9,636  | 9,464  | -0,172 |
| 16 | 16 | 14 | - | 2 | 10,543 |        |        |
| 16 | 17 | 3  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 16 | 17 | 1  | + | 1 | 0,809  | 0,841  | 0,032  |
| 16 | 17 | 5  | + | 1 | 1,897  | 1,967  | 0,070  |
| 16 | 17 | 3  | + | 2 | 2,297  | 2,313  | 0,016  |
| 16 | 17 | 5  | + | 2 | 2,801  | 2,868  | 0,067  |
| 16 | 17 | 7  | - | 1 | 2,848  | 2,935  | 0,087  |
| 16 | 17 | 3  | - | 1 | 3,034  | 3,221  | 0,187  |
| 16 | 17 | 7  | + | 1 | 3,096  | 2,969  | -0,127 |
| 16 | 17 | 1  | + | 2 | 3,85   | 4,056  | 0,206  |
| 16 | 17 | 7  | + | 2 | 4,019  | 4,094  | 0,075  |
| 16 | 17 | 9  | + | 1 | 4,111  | 4,048  | -0,063 |
| 16 | 17 | 3  | - | 2 | 4,438  | 4,211  | -0,227 |
| 16 | 17 | 5  | - | 1 | 4,581  | 4,144  | -0,437 |
| 16 | 17 | 5  | - | 2 | 4,815  |        |        |
| 16 | 17 | 1  | - | 1 | 4,816  | 4,918  | 0,102  |
| 16 | 17 | 9  | - | 1 | 4,823  | 4,729  | -0,094 |
| 16 | 17 | 11 | - | 1 | 4,842  | 4,866  | 0,024  |
| 16 | 17 | 7  | - | 2 | 5,189  |        |        |
| 16 | 17 | 9  | - | 2 | 5,208  |        |        |
| 16 | 17 | 1  | - | 2 | 5,32   |        |        |
| 16 | 17 | 11 | - | 2 | 6,376  |        |        |
| 16 | 17 | 11 | + | 1 | 6,634  |        |        |
| 16 | 17 | 13 | - | 1 | 6,748  |        |        |
| 16 | 17 | 15 | - | 1 | 7,643  |        |        |
| 16 | 17 | 13 | - | 2 | 7,681  |        |        |
| 16 | 17 | 15 | - | 2 | 8,711  |        |        |
| 16 | 17 | 13 | + | 1 | 8,88   |        |        |
| 16 | 18 | 0  | + | 1 | 0      | 0      | 0      |
| 16 | 18 | 4  | + | 1 | 2,242  | 2,128  | -0,114 |
| 16 | 18 | 4  | + | 2 | 3,204  | 3,304  | 0,100  |
| 16 | 18 | 0  | + | 2 | 3,747  | 3,916  | 0,169  |
| 16 | 18 | 2  | + | 1 | 3,782  | 4,074  | 0,292  |
| 16 | 18 | 6  | + | 1 | 4,706  | 4,877  | 0,171  |
| 16 | 18 | 8  | + | 1 | 4,8    | 4,689  | -0,111 |
| 16 | 18 | 6  | - | 1 | 4,862  | 4,624  | -0,238 |
| 16 | 18 | 2  | + | 2 | 5,606  | 5,381  | -0,225 |
| 16 | 18 | 4  | - | 1 | 5,625  | 5,323  | -0,302 |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 16 | 18 | 2  | - | 1 | 5,681 | 5,756 | 0,075  |
| 16 | 18 | 10 | - | 1 | 5,83  | 5,689 | -0,141 |
| 16 | 18 | 0  | - | 1 | 6     |       |        |
| 16 | 18 | 6  | - | 2 | 6,066 |       |        |
| 16 | 18 | 8  | - | 1 | 6,225 | 6,421 | 0,196  |
| 16 | 18 | 4  | - | 2 | 6,273 |       |        |
| 16 | 18 | 8  | - | 2 | 6,418 | 6,639 | 0,221  |
| 16 | 18 | 2  | - | 2 | 6,864 |       |        |
| 16 | 18 | 10 | - | 2 | 7,124 | 6,864 | -0,260 |
| 16 | 18 | 10 | - | 3 | 7,396 | 8,083 | 0,687  |
| 16 | 18 | 12 | - | 1 | 7,874 | 7,788 | -0,086 |
| 16 | 18 | 0  | - | 2 | 8,183 |       |        |
| 16 | 18 | 14 | - | 1 | 8,411 | 8,369 | -0,042 |
| 16 | 18 | 12 | - | 2 | 8,5   |       |        |
| 16 | 18 | 14 | - | 2 | 9,434 |       |        |
| 16 | 19 | 3  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 16 | 19 | 1  | + | 1 | 1,739 | 1,572 | -0,167 |
| 16 | 19 | 7  | - | 1 | 2,003 | 1,991 | -0,012 |
| 16 | 19 | 3  | - | 1 | 2,43  | 2,348 | -0,082 |
| 16 | 19 | 5  | + | 1 | 2,679 | 2,717 | 0,038  |
| 16 | 19 | 3  | + | 2 | 2,772 | 2,939 | 0,167  |
| 16 | 19 | 5  | + | 2 | 3,261 | 3,421 | 0,160  |
| 16 | 19 | 5  | - | 1 | 3,738 |       |        |
| 16 | 19 | 3  | - | 2 | 3,827 | 3,802 | -0,025 |
| 16 | 19 | 9  | - | 1 | 3,835 |       |        |
| 16 | 19 | 1  | - | 1 | 3,996 | 4,189 | 0,193  |
| 16 | 19 | 7  | - | 2 | 4,043 | 5,058 | 1,015  |
| 16 | 19 | 11 | - | 1 | 4,091 |       |        |
| 16 | 19 | 5  | - | 2 | 4,103 |       |        |
| 16 | 19 | 1  | - | 2 | 4,686 | 4,903 | 0,217  |
| 16 | 19 | 11 | - | 2 | 4,881 |       |        |
| 16 | 19 | 9  | - | 2 | 5,086 |       |        |
| 16 | 19 | 13 | - | 1 | 6,143 |       |        |
| 16 | 19 | 15 | - | 1 | 7,15  |       |        |
| 16 | 19 | 13 | - | 2 | 7,214 |       |        |
| 16 | 19 | 15 | - | 2 | 7,99  |       |        |
| 16 | 20 | 0  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 16 | 20 | 4  | + | 1 | 3,335 | 3,291 | -0,044 |
| 16 | 20 | 2  | + | 1 | 4,1   | 4,523 | 0,423  |
| 16 | 20 | 6  | - | 1 | 4,293 | 4,193 | -0,100 |
| 16 | 20 | 0  | + | 2 | 4,498 | 3,346 | -1,152 |
| 16 | 20 | 8  | - | 1 | 5,153 | 5,022 | -0,131 |
| 16 | 20 | 10 | - | 1 | 5,379 | 5,206 | -0,173 |
| 16 | 20 | 2  | - | 1 | 5,397 | 5,573 | 0,176  |
| 16 | 20 | 0  | - | 1 | 5,398 |       |        |
| 16 | 20 | 4  | - | 1 | 5,52  |       |        |
| 16 | 20 | 6  | - | 2 | 5,788 | 5,251 | -0,537 |
| 16 | 20 | 4  | + | 2 | 6,203 | 4,575 | -1,628 |
| 16 | 20 | 4  | - | 2 | 6,443 |       |        |
| 16 | 20 | 8  | - | 2 | 6,457 |       |        |
| 16 | 20 | 6  | - | 3 | 6,756 | 5,831 | -0,925 |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 16 | 20 | 2  | - | 2 | 6,995  | 6,472 | -0,523 |
| 16 | 20 | 10 | - | 2 | 7,129  |       |        |
| 16 | 20 | 12 | - | 1 | 7,301  |       |        |
| 16 | 20 | 0  | - | 2 | 7,766  |       |        |
| 16 | 20 | 14 | - | 1 | 8,209  |       |        |
| 16 | 20 | 12 | - | 2 | 8,364  |       |        |
| 16 | 20 | 14 | - | 2 | 10,502 |       |        |
| 17 | 17 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 17 | 17 | 6  | + | 1 | 0,169  | 0,146 | -0,023 |
| 17 | 17 | 2  | + | 1 | 0,351  | 0,461 | 0,110  |
| 17 | 17 | 2  | + | 2 | 0,751  | 0,666 | -0,085 |
| 17 | 17 | 4  | + | 1 | 1,205  | 1,230 | 0,025  |
| 17 | 17 | 4  | + | 2 | 1,818  | 1,887 | 0,069  |
| 17 | 17 | 6  | + | 2 | 2,119  | 2,181 | 0,062  |
| 17 | 17 | 8  | + | 1 | 2,41   | 2,376 | -0,034 |
| 17 | 17 | 4  | - | 1 | 2,588  | 2,721 | 0,133  |
| 17 | 17 | 6  | - | 1 | 3,044  | 3,545 | 0,501  |
| 17 | 17 | 2  | - | 1 | 3,261  | 3,774 | 0,513  |
| 17 | 17 | 8  | - | 1 | 3,317  | 3,600 | 0,283  |
| 17 | 17 | 10 | - | 1 | 3,36   | 3,631 | 0,271  |
| 17 | 17 | 0  | - | 1 | 3,588  |       |        |
| 17 | 17 | 10 | + | 1 | 3,597  |       |        |
| 17 | 17 | 6  | - | 2 | 3,713  | 3,983 | 0,270  |
| 17 | 17 | 0  | + | 2 | 3,747  | 3,940 | 0,193  |
| 17 | 17 | 8  | - | 2 | 3,86   | 4,076 | 0,216  |
| 17 | 17 | 4  | - | 2 | 3,948  | 4,140 | 0,192  |
| 17 | 17 | 2  | - | 2 | 3,959  | 4,354 | 0,395  |
| 17 | 17 | 4  | - | 3 | 4,139  | 4,417 | 0,278  |
| 17 | 17 | 0  | - | 2 | 4,222  |       |        |
| 17 | 17 | 8  | - | 3 | 4,709  | 4,447 | -0,262 |
| 17 | 17 | 12 | - | 1 | 4,747  | 4,743 | -0,004 |
| 17 | 17 | 10 | - | 2 | 4,901  |       |        |
| 17 | 17 | 12 | - | 2 | 5,391  |       |        |
| 17 | 17 | 14 | - | 1 | 6,202  |       |        |
| 17 | 17 | 12 | + | 1 | 6,561  |       |        |
| 17 | 17 | 14 | - | 2 | 7,169  |       |        |
| 17 | 18 | 3  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 17 | 18 | 1  | + | 1 | 1,039  | 1,219 | 0,180  |
| 17 | 18 | 5  | + | 1 | 1,713  | 1,763 | 0,050  |
| 17 | 18 | 3  | + | 2 | 2,583  | 2,694 | 0,111  |
| 17 | 18 | 7  | + | 1 | 2,88   | 2,646 | -0,234 |
| 17 | 18 | 5  | + | 2 | 2,936  | 3,003 | 0,067  |
| 17 | 18 | 7  | - | 1 | 3,148  | 3,163 | 0,015  |
| 17 | 18 | 3  | - | 1 | 3,788  | 4,059 | 0,271  |
| 17 | 18 | 9  | + | 1 | 3,998  | 3,942 | -0,056 |
| 17 | 18 | 1  | + | 2 | 4,012  | 3,968 | -0,044 |
| 17 | 18 | 7  | + | 2 | 4,207  | 4,113 | -0,094 |
| 17 | 18 | 3  | - | 2 | 4,402  | 4,178 | -0,224 |
| 17 | 18 | 9  | - | 1 | 4,419  | 4,348 | -0,071 |
| 17 | 18 | 5  | - | 1 | 4,445  | 4,173 | -0,272 |
| 17 | 18 | 7  | - | 2 | 4,965  | 5,163 | 0,198  |

|    |    |    |   |   |       |       |        |
|----|----|----|---|---|-------|-------|--------|
| 17 | 18 | 5  | - | 2 | 5,108 |       |        |
| 17 | 18 | 1  | - | 1 | 5,197 |       |        |
| 17 | 18 | 9  | - | 2 | 5,296 |       |        |
| 17 | 18 | 11 | - | 1 | 5,422 | 5,407 | -0,015 |
| 17 | 18 | 1  | - | 2 | 5,596 |       |        |
| 17 | 18 | 11 | - | 2 | 5,874 |       |        |
| 17 | 18 | 13 | - | 1 | 6,079 | 6,087 | 0,008  |
| 17 | 18 | 13 | - | 2 | 6,837 |       |        |
| 17 | 18 | 11 | + | 1 | 7,772 |       |        |
| 17 | 18 | 15 | - | 1 | 8,012 |       |        |
| 17 | 18 | 15 | - | 2 | 8,345 |       |        |
| 17 | 18 | 13 | + | 1 | 8,892 |       |        |
| 17 | 19 | 4  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 17 | 19 | 6  | + | 1 | 0,922 | 0,788 | -0,134 |
| 17 | 19 | 2  | + | 1 | 1,118 | 1,165 | 0,047  |
| 17 | 19 | 2  | + | 2 | 1,692 | 1,601 | -0,091 |
| 17 | 19 | 4  | + | 2 | 1,911 | 1,959 | 0,048  |
| 17 | 19 | 4  | - | 1 | 2,038 | 1,951 | -0,087 |
| 17 | 19 | 10 | - | 1 | 2,378 | 2,518 | 0,140  |
| 17 | 19 | 6  | - | 1 | 2,559 | 2,468 | -0,091 |
| 17 | 19 | 6  | - | 2 | 2,775 | 2,896 | 0,121  |
| 17 | 19 | 8  | - | 1 | 2,778 | 2,811 | 0,033  |
| 17 | 19 | 8  | - | 2 | 2,856 | 3,101 | 0,245  |
| 17 | 19 | 2  | - | 1 | 2,901 |       |        |
| 17 | 19 | 6  | + | 2 | 2,931 | 2,864 | -0,067 |
| 17 | 19 | 0  | + | 1 | 3,132 | 3,120 | -0,012 |
| 17 | 19 | 4  | - | 2 | 3,184 |       |        |
| 17 | 19 | 0  | - | 1 | 3,267 |       |        |
| 17 | 19 | 2  | - | 2 | 3,451 |       |        |
| 17 | 19 | 8  | - | 3 | 3,513 | 3,724 | 0,211  |
| 17 | 19 | 0  | - | 2 | 4,091 |       |        |
| 17 | 19 | 10 | - | 2 | 4,092 |       |        |
| 17 | 19 | 12 | - | 1 | 4,172 | 4,294 | 0,122  |
| 17 | 19 | 12 | - | 2 | 5,044 |       |        |
| 17 | 19 | 14 | - | 1 | 5,49  |       |        |
| 17 | 19 | 14 | - | 2 | 6,113 |       |        |
| 17 | 20 | 3  | + | 1 | 0     | 0     | 0      |
| 17 | 20 | 1  | + | 1 | 1,644 | 1,726 | 0,082  |
| 17 | 20 | 7  | - | 1 | 3,012 | 3,103 | 0,091  |
| 17 | 20 | 5  | + | 1 | 3,1   | 3,086 | -0,014 |
| 17 | 20 | 3  | - | 1 | 3,735 | 4,177 | 0,442  |
| 17 | 20 | 5  | - | 1 | 3,927 | 3,741 | -0,186 |
| 17 | 20 | 3  | - | 2 | 3,975 |       |        |
| 17 | 20 | 9  | - | 1 | 4,039 | 4,010 | -0,029 |
| 17 | 20 | 11 | - | 1 | 4,579 | 4,546 | -0,033 |
| 17 | 20 | 7  | - | 2 | 4,627 | 4,273 | -0,354 |
| 17 | 20 | 1  | - | 1 | 4,681 |       |        |
| 17 | 20 | 5  | - | 2 | 4,783 |       |        |
| 17 | 20 | 7  | - | 3 | 4,826 | 4,460 | -0,366 |
| 17 | 20 | 9  | - | 2 | 5,278 |       |        |
| 17 | 20 | 13 | - | 1 | 5,528 | 5,271 | -0,257 |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 17 | 20 | 1  | - | 2 | 5,721  |       |        |
| 17 | 20 | 11 | - | 2 | 5,891  |       |        |
| 17 | 20 | 13 | - | 2 | 7,683  |       |        |
| 17 | 20 | 15 | - | 1 | 7,944  |       |        |
| 17 | 20 | 15 | - | 2 | 9,206  |       |        |
| 18 | 18 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 18 | 18 | 4  | + | 1 | 1,997  | 1,970 | -0,027 |
| 18 | 18 | 4  | + | 2 | 4,337  | 4,440 | 0,103  |
| 18 | 18 | 6  | - | 1 | 4,367  | 4,178 | -0,189 |
| 18 | 18 | 8  | + | 1 | 4,573  | 4,414 | -0,159 |
| 18 | 18 | 10 | - | 1 | 5,212  | 5,171 | -0,041 |
| 18 | 18 | 4  | - | 1 | 5,257  | 4,974 | -0,283 |
| 18 | 18 | 2  | - | 1 | 5,693  | 5,836 | 0,143  |
| 18 | 18 | 6  | - | 2 | 5,728  |       |        |
| 18 | 18 | 8  | - | 1 | 5,896  | 5,896 | 0      |
| 18 | 18 | 0  | - | 1 | 6,033  |       |        |
| 18 | 18 | 10 | - | 2 | 6,326  | 6,217 | -0,109 |
| 18 | 18 | 8  | - | 2 | 6,43   | 6,835 | 0,405  |
| 18 | 18 | 4  | - | 2 | 6,946  |       |        |
| 18 | 18 | 2  | + | 1 | 7,034  |       |        |
| 18 | 18 | 12 | - | 1 | 7,156  | 7,354 | 0,198  |
| 18 | 18 | 2  | - | 2 | 7,361  |       |        |
| 18 | 18 | 8  | - | 3 | 7,52   | 7,573 | 0,053  |
| 18 | 18 | 6  | + | 1 | 7,546  |       |        |
| 18 | 18 | 12 | - | 2 | 8,328  |       |        |
| 18 | 18 | 14 | - | 1 | 8,423  |       |        |
| 18 | 18 | 14 | - | 2 | 8,648  |       |        |
| 18 | 18 | 12 | + | 1 | 9,489  |       |        |
| 18 | 18 | 0  | - | 2 | 9,515  |       |        |
| 18 | 18 | 10 | + | 1 | 10,863 |       |        |
| 18 | 19 | 3  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 18 | 19 | 7  | - | 1 | 1,433  | 1,611 | 0,178  |
| 18 | 19 | 1  | + | 1 | 1,489  | 1,410 | -0,079 |
| 18 | 19 | 7  | + | 1 | 2,416  | 2,217 | -0,199 |
| 18 | 19 | 3  | - | 1 | 2,788  | 2,491 | -0,297 |
| 18 | 19 | 5  | + | 1 | 2,94   | 2,796 | -0,144 |
| 18 | 19 | 9  | - | 1 | 2,982  | 3,185 | 0,203  |
| 18 | 19 | 5  | - | 1 | 3,109  | 3,274 | 0,165  |
| 18 | 19 | 5  | + | 2 | 3,179  | 3,171 | -0,008 |
| 18 | 19 | 3  | - | 2 | 3,383  | 3,518 | 0,135  |
| 18 | 19 | 7  | - | 2 | 3,638  | 3,527 | -0,111 |
| 18 | 19 | 11 | - | 1 | 3,813  | 3,707 | -0,106 |
| 18 | 19 | 3  | + | 2 | 3,874  | 3,602 | -0,272 |
| 18 | 19 | 1  | - | 1 | 4,141  | 4,444 | 0,303  |
| 18 | 19 | 5  | - | 2 | 4,251  | 4,396 | 0,145  |
| 18 | 19 | 9  | - | 2 | 4,253  | 4,021 | -0,232 |
| 18 | 19 | 3  | - | 3 | 4,435  | 4,634 | 0,199  |
| 18 | 19 | 1  | - | 2 | 4,5    | 5,090 | 0,590  |
| 18 | 19 | 7  | - | 3 | 4,551  | 4,283 | -0,268 |
| 18 | 19 | 11 | - | 2 | 4,69   |       |        |
| 18 | 19 | 13 | - | 1 | 5,638  |       |        |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 18 | 19 | 13 | - | 2 | 6,306  |       |        |
| 18 | 19 | 15 | - | 1 | 7,029  |       |        |
| 18 | 19 | 11 | + | 1 | 7,107  |       |        |
| 18 | 19 | 9  | + | 1 | 8,033  |       |        |
| 18 | 19 | 15 | - | 2 | 8,233  |       |        |
| 18 | 19 | 13 | + | 1 | 13,235 |       |        |
| 18 | 20 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 18 | 20 | 4  | + | 1 | 2,071  | 2,167 | 0,096  |
| 18 | 20 | 6  | - | 1 | 3,83   | 3,81  | -0,02  |
| 18 | 20 | 4  | + | 2 | 4,278  |       |        |
| 18 | 20 | 8  | - | 1 | 4,375  | 4,48  | 0,105  |
| 18 | 20 | 10 | - | 1 | 4,651  | 4,586 | -0,065 |
| 18 | 20 | 6  | - | 2 | 4,881  | 4,877 | -0,004 |
| 18 | 20 | 4  | - | 1 | 5,169  | 5,084 | -0,085 |
| 18 | 20 | 2  | + | 1 | 5,23   |       |        |
| 18 | 20 | 0  | - | 1 | 5,346  |       |        |
| 18 | 20 | 10 | - | 2 | 5,41   | 5,658 | 0,248  |
| 18 | 20 | 2  | - | 1 | 5,617  | 5,734 | 0,117  |
| 18 | 20 | 4  | - | 2 | 5,704  | 5,858 | 0,154  |
| 18 | 20 | 8  | - | 2 | 5,708  |       |        |
| 18 | 20 | 6  | - | 3 | 5,795  | 5,513 | -0,282 |
| 18 | 20 | 2  | - | 2 | 5,882  |       |        |
| 18 | 20 | 0  | + | 2 | 6,094  |       |        |
| 18 | 20 | 0  | - | 2 | 6,711  |       |        |
| 18 | 20 | 12 | - | 1 | 6,979  | 7,07  | 0,091  |
| 18 | 20 | 14 | - | 1 | 7,706  | 7,508 | -0,198 |
| 18 | 20 | 8  | + | 1 | 7,848  |       |        |
| 18 | 20 | 12 | - | 2 | 8,299  |       |        |
| 18 | 20 | 14 | - | 2 | 9,273  |       |        |
| 19 | 19 | 6  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 19 | 19 | 0  | + | 1 | 0,332  | 0,130 | -0,202 |
| 19 | 19 | 2  | + | 1 | 0,486  | 0,458 | -0,028 |
| 19 | 19 | 2  | + | 2 | 1,468  | 1,698 | 0,230  |
| 19 | 19 | 6  | - | 1 | 2,171  | 2,613 | 0,442  |
| 19 | 19 | 8  | - | 1 | 2,288  | 2,646 | 0,358  |
| 19 | 19 | 4  | + | 1 | 2,403  | 2,401 | -0,002 |
| 19 | 19 | 4  | - | 1 | 2,424  | 2,869 | 0,445  |
| 19 | 19 | 2  | - | 1 | 2,804  | 2,828 | 0,024  |
| 19 | 19 | 0  | - | 1 | 2,959  | 2,993 | 0,034  |
| 19 | 19 | 4  | - | 2 | 3,124  |       |        |
| 19 | 19 | 10 | - | 1 | 3,295  |       |        |
| 19 | 19 | 2  | - | 2 | 3,339  |       |        |
| 19 | 19 | 6  | - | 2 | 3,535  |       |        |
| 19 | 19 | 12 | - | 1 | 3,638  | 3,420 | -0,218 |
| 19 | 19 | 8  | - | 2 | 3,732  |       |        |
| 19 | 19 | 10 | - | 2 | 4,136  |       |        |
| 19 | 19 | 0  | - | 2 | 4,608  |       |        |
| 19 | 19 | 12 | - | 2 | 4,619  |       |        |
| 19 | 19 | 14 | - | 1 | 5,424  |       |        |
| 19 | 19 | 8  | + | 1 | 6,036  |       |        |
| 19 | 19 | 14 | - | 2 | 8,039  |       |        |

|    |    |    |   |   |        |       |        |
|----|----|----|---|---|--------|-------|--------|
| 19 | 19 | 10 | + | 1 | 12,918 |       |        |
| 19 | 20 | 3  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 19 | 20 | 1  | + | 1 | 2,583  | 2,522 | -0,061 |
| 19 | 20 | 7  | - | 1 | 2,775  | 2,814 | 0,039  |
| 19 | 20 | 3  | - | 1 | 3,199  | 3,019 | -0,180 |
| 19 | 20 | 9  | - | 1 | 3,623  | 3,598 | -0,025 |
| 19 | 20 | 5  | - | 1 | 3,759  | 3,883 | 0,124  |
| 19 | 20 | 11 | - | 1 | 4,158  | 3,944 | -0,214 |
| 19 | 20 | 3  | - | 2 | 4,296  | 4,082 | -0,214 |
| 19 | 20 | 7  | - | 2 | 4,477  | 4,126 | -0,351 |
| 19 | 20 | 1  | - | 1 | 4,68   |       |        |
| 19 | 20 | 9  | - | 2 | 4,757  | 4,520 | -0,237 |
| 19 | 20 | 7  | - | 3 | 5,21   | 4,679 | -0,531 |
| 19 | 20 | 5  | - | 2 | 5,35   |       |        |
| 19 | 20 | 11 | - | 2 | 5,839  | 5,354 | -0,485 |
| 19 | 20 | 13 | - | 1 | 5,875  | 5,718 | -0,157 |
| 19 | 20 | 1  | - | 2 | 6,181  |       |        |
| 19 | 20 | 11 | - | 3 | 6,746  | 6,006 | -0,740 |
| 19 | 20 | 5  | + | 1 | 6,824  | 6,610 | -0,214 |
| 19 | 20 | 15 | - | 1 | 10,002 | 7,142 | -2,860 |
| 19 | 20 | 13 | - | 2 | 10,32  |       |        |
| 19 | 20 | 15 | - | 2 | 12,806 | 8,009 | -4,797 |
| 20 | 20 | 0  | + | 1 | 0      | 0     | 0      |
| 20 | 20 | 6  | - | 1 | 3,621  | 3,737 | 0,116  |
| 20 | 20 | 10 | - | 1 | 4,542  | 4,491 | -0,051 |
| 20 | 20 | 0  | - | 1 | 5,373  |       |        |
| 20 | 20 | 8  | - | 1 | 5,711  | 5,614 | -0,097 |
| 20 | 20 | 2  | - | 1 | 5,907  | 5,903 | -0,004 |
| 20 | 20 | 4  | - | 1 | 6,048  | 6,026 | -0,022 |

## **Abstract:**

The nuclear structure of the sd shell nuclei has been well studied experimentally near the stability line and more recently the interest has been focused on the neutron rich nuclei. The normal positive parity states are well described using the USD interaction in the  $0\hbar\omega$  sd shell space ( $0\hbar\omega$  space) with an  $^{16}\text{O}$  core. This interaction has recently been updated and the obtained new Hamiltonians are called USDA and USDB. The experimental spectra show the existence, in addition of the normal states, of a set of negative parity states named “intruder states”, resulting from the excitation of one nucleon from the p to the sd shell for nuclei near  $^{16}\text{O}$  or from the sd to the fp shell for nuclei close to  $^{40}\text{Ca}$ . In the middle of the sd shell there is a competition between the two types of excitations for the intruders. Before our work, no unified description of the negative parity states throughout the complete sd shell existed.

To study the intruder states we must enlarge the model space from the sd space ( $^{16}\text{O}$  core) to the full p–sd–pf space ( $^4\text{He}$  core) which is named  $1\hbar\omega$  space. This requires the construction of a new interaction compatible with this extended shell model space. Such a procedure is now possible due to the today increased computational power. We have thus developed for the first time a  $1\hbar\omega$  interaction called PSDPF, which has five distinctive parts: p, sd and pf shells and cross p–sd and sd–pf shells. The fixed three interactions for the p, sd and pf shells are respectively: CK, USDB and SDPF–NR, the latter one contains also the sd–pf two body matrix elements, the p–sd interaction is taken to be the PSDT interaction. We have modified the cross p–sd and sd–pf shells contributions to reproduce the energy evolution of the intruder states of different spins throughout the complete sd shell. This new interaction was used to calculate intruder states in the sd nuclei with  $N = Z$  and  $Z + 1$ . The energy spectra of + and – states in all sd nuclei were also calculated. The comparison experience–theory shows a very good agreement and gives thus credit to our new proposed interaction to describe the intruder states of the sd shell. States of parity – were attributed to some unknown  $J^\pi$  levels. The reduced electromagnetic transitions probabilities E2 and E3 of the first states of parity + and –, with  $J^\pi = 2^+$  and  $3^-$  in even–even nuclei, were also calculated and the effective charges for the E3 transitions were studied for the first time.

**Key words:** shell model, effective interaction, PSDPF interaction, sd shell nuclei, fit procedure, electromagnetic properties.

## Résumé

La structure nucléaire des noyaux de la couche sd a été bien étudiée expérimentalement à proximité de la ligne de stabilité et, plus récemment, l'intérêt a porté sur les noyaux riches en neutrons. Les états normaux de parité positive sont bien décrits à l'aide de l'interaction USD dans l'espace sd (espace  $0\hbar\omega$ ) avec un cœur de  $^{16}\text{O}$ . Cette interaction a été récemment réajustée et les nouveaux Hamiltoniens obtenus sont appelés USDA et USDB. Les spectres expérimentaux montrent l'existence, en plus des états normaux, d'un ensemble d'états de parité négative nommé "états intrus", résultant de l'excitation d'un nucléon de la couche p vers sd, pour les noyaux près de  $^{16}\text{O}$  ou de la couche sd vers pf pour les noyaux proches de  $^{40}\text{Ca}$ . Au milieu de la couche sd il y a compétition entre les deux types d'excitations pour les intrus. Avant notre travail, il n'existait pas de description unifiée des états de parité négative à travers toute la couche sd.

Pour étudier les états intrus, nous avons élargi l'espace modèle de l'espace sd (cœur  $^{16}\text{O}$ ) à l'espace complet p-sd-pf (cœur  $^4\text{He}$ ) appelé espace  $1\hbar\omega$ . Cela nécessite la construction d'une nouvelle interaction compatible avec cette extension de l'espace modèle. Cette procédure est maintenant possible en raison de l'augmentation de la puissance de calcul. Nous avons ainsi mis au point pour la première fois une interaction  $1\hbar\omega$  appelée PSDPF, qui comporte cinq parties distinctes: p, sd et pf en plus des termes croisés p-sd et sd-pf. Les trois interactions fixes pour p, sd et pf sont respectivement: CK, USDB et SDPF-NR, cette dernière contient également les éléments de matrice à deux corps sd-pf, l'interaction p-sd est considérée comme étant l'interaction PSDT. Nous avons modifié les contributions p-sd et sd-pf pour reproduire l'évolution en énergie des états intrus de différents spins à travers toute la couche sd. Cette nouvelle interaction a été utilisée pour calculer les états intrus dans les noyaux sd avec  $N = Z$  et  $Z + 1$ . Les spectres en énergie des états + et - dans tous les noyaux sd ont aussi été calculés. La comparaison expérience-théorie montre un très bon accord et donne ainsi du crédit à notre nouvelle interaction proposée pour décrire les états intrus de la couche sd. Des états de parité - ont été attribués certains niveaux de  $J^\pi$  inconnus. Les probabilités de transitions électromagnétiques réduites E2 et E3 des premiers états de parité + et -, avec  $J^\pi = 2^+$  et  $3^-$  dans les noyaux pair-pairs, ont été également calculées et les charges effectives pour les transitions E3 ont été étudiées pour la première fois.

**Mots clés :** modèle en couches, interaction effective, l'interaction PSDPF, procédure du fit, propriétés électromagnétiques.