



Commande prédictive distribuée. Approches appliquées à la régulation thermique des bâtiments

Petru-Daniel Morosan

► To cite this version:

Petru-Daniel Morosan. Commande prédictive distribuée. Approches appliquées à la régulation thermique des bâtiments. Automatique / Robotique. Supélec, 2011. Français. NNT: . tel-00641311v1

HAL Id: tel-00641311

<https://theses.hal.science/tel-00641311v1>

Submitted on 15 Nov 2011 (v1), last revised 14 Dec 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2011-04-TH

THÈSE DE DOCTORAT

SPECIALITE : PHYSIQUE

Ecole Doctorale « Mathématiques, Télécommunications, Informatique, Signal, Systèmes Electroniques »

Présentée par :

Petru-Daniel MOROȘAN

Sujet :

Commande prédictive distribuée. Approches appliquées à la régulation thermique des bâtiments

Soutenue le 30 Septembre 2011 devant les membres du jury :

M. Bart DE SCHUTTER

Delft University of Technology

Examineur

M. Mohammed M'SAAD

Université de Caen

Rapporteur

M. Mazen ALAMIR

Université de Grenoble

Rapporteur

M. Jean BUISSON

SUPELEC

Directeur de thèse

M. Romain BOURDAIS

SUPELEC

Co-directeur de thèse

M. Didier DUMUR

SUPELEC

Co-directeur de thèse

À ma famille

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été menés à Supélec, sur le Campus de Rennes, au sein de l'équipe Automatique des Systèmes Hybrides (ASH). Ces recherches ont bénéficié du soutien financier de la Fondation Supélec.

Je souhaite exprimer ma plus sincère reconnaissance à Monsieur Hervé Guéguen pour la confiance qu'il a eu en m'offrant la possibilité d'intégrer leur équipe de recherche dès le début de mon stage Erasmus, qu'il ait encadré minutieusement. Je remercie également Monsieur Romain Bourdais, Monsieur Jean Buisson et Monsieur Didier Dumur, mes co-directeurs de thèse, pour leur aide précieuse, leur disponibilité et leur patience au cours de ces trois années de thèse. Je tiens à faire part de toute ma gratitude à ce "trio" qui m'a accordé tant de confiance et de liberté.

Je tiens également à adresser mes plus vifs remerciements aux membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'examiner l'ensemble de ces recherches. Je remercie tout particulièrement Monsieur Mazen Alamir et Monsieur Mohammed M'Saad pour le temps consacré à la lecture minutieuse de ce document. J'ai pu, à la lueur des observations et des commentaires pertinents figurant dans leurs rapports, envisager mon travail sous des angles nouveaux et entrevoir d'intéressantes perspectives de recherche. Je remercie aussi Monsieur Bart De Schutter d'avoir accepté le rôle d'examineur.

J'ai été très honoré de présenter mes travaux de thèse devant un tel jury. Je vous remercie infiniment.

Je souhaite remercier tous les membres de l'équipe ASH de Supélec Rennes : Marie-Anne Lefebvre, Hervé Cormerais, Pierre-Yves Richard, Nabil Sadou. Un grand merci à Catherine Pilet, Ophelie Morvan, Clairette Place et Myriam Andrieux pour leur aide de tous les jours et surtout pour leur sympathie. Merci au service logistique pour s'être occupé de tous les problèmes informatiques.

Merci à tous mes collègues thésards : Adrian, Mihai, Ilham, Maxime, Antoine pour l'ambiance sympathique dans l'équipe pendant les trois années de thèse.

Je n'oublie ni mes amis roumains de Rennes : Alina, Remus, Roxana, Alexandra, Eliza, Diana, Ilona, Lidia, ... pour leur amitié.

Une mention toute spéciale à mes parents et à mon frère pour m'avoir encouragé pendant les moments difficiles de la vie de thésard et pour m'avoir donné les meilleurs conseils. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude et mon amour.

Avant-propos

Le travail présenté dans ce mémoire a donné lieu à la publication d'un certain nombre d'articles de revue et de congrès nationaux et internationaux avec actes et d'une communication nationale sans actes.

Articles de revue internationale avec comité de lecture

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Building temperature regulation using a distributed model predictive control", *Energy and Buildings*, n.9, vol.42, p.1445-1452, 2010.
- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "A distributed MPC strategy based on Benders' decomposition applied to multi-source multi-zone temperature regulation", *Journal of Process Control*, n.5, vol.21, p.729-737, 2011.

Articles de revue nationale avec comité de lecture

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, H. Guéguen, "Apports de la commande prédictive pour la régulation thermique des bâtiments", *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, n.4-5, vol.44, p.479-492, 2010.

Rapport technique du projet européen *Hierarchical and Distributed Model Predictive Control of Large-Scale Systems* (HD-MPC)

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Distributed MPC based on Benders' decomposition", *Report on new methods for complex control problems (non-linear, dynamic, constrained)*, HD-MPC ICT-223854, p.40-49 2010.

Conférences internationales avec actes

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "A dynamic horizon distributed predictive control approach for temperature regulation in multi-zone buildings", *Mediterranean Conference on Control and Automation* (MED), p.622-627, 23-25 Juin 2010.
- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Distributed model predictive control for building temperature regulation", *American Control Conference* (ACC), p.3174-3179, 30 Juin-2 Juillet 2010.

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "A distributed MPC applied to multisource temperature regulation in buildings", *IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems (NECSYS)*, p.91-96, 13-14 Septembre 2010.
- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Distributed model predictive control based on Benders' decomposition applied to multisource multizone building temperature regulation", *Conference on Decision and Control (CDC)*, p.3914-3919, 15-17 Décembre 2010.
- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Distributed MPC for multi-zone temperature regulation with coupled constraints", *IFAC World Congress*, 28 Août-2 Septembre 2011.

Conférences nationales avec actes

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, H. Guéguen, "Apports de la commande prédictive pour la régulation thermique des bâtiments", *Sixième Édition de la Conférence STIC & Environnement*, 16-18 Juin 2009.
- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Commande prédictive distribuée pour la régulation thermique des bâtiments", *Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, 2-4 Juin 2010.

Communications nationales sans actes

- P.-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, J. Buisson, "Distributed model predictive control for building temperature regulation", *GDR - MACS, Groupe de travail de commande prédictive non linéaire*, 8 Octobre 2009.

Table des matières

Liste des notations	13
Acronymes	15
1 Introduction	17
1.1 Contexte énergétique actuel et futur	17
1.1.1 Importance des bâtiments dans la consommation énergétique totale	19
1.1.2 Le chauffage dans la consommation énergétique des bâtiments	20
1.2 Solutions pour réduire la consommation du chauffage	22
1.2.1 Standards élevés pour les nouveaux bâtiments	22
1.2.2 Travaux de rénovation	23
1.2.3 Optimisation du contrôle du chauffage	24
1.3 Notions de contrôle thermique des bâtiments	25
1.3.1 Confort thermique	25
1.3.2 Profil d'occupation	26
1.3.3 Prix variables de l'énergie finale	27
1.4 Plan du document	28
2 État de l'art	31
2.1 Techniques pour la régulation thermique des bâtiments	31
2.1.1 Contrôle classique	31
2.1.2 Procédures de réglage et d'autoréglage	33
2.1.3 Contrôle avancé	34
2.1.3.1 Réseaux de neurones	34
2.1.3.2 Logique floue	35
2.1.3.3 Algorithmes génétiques	36
2.1.4 Commande prédictive	37
2.1.4.1 Principe de la commande prédictive	37
2.1.4.2 Commande prédictive pour le contrôle thermique	40
2.1.4.3 Motivation du choix de la commande prédictive	43
2.2 Contrôle prédictif pour les systèmes de grande taille	46
2.2.1 Commande centralisée	46

2.2.2	Commande décentralisée	47
2.2.3	Commande distribuée	49
2.2.3.1	Modélisation des couplages	49
2.2.3.2	Caractéristiques du critère	51
2.2.3.3	Techniques de distribution	52
2.3	Conclusion	56
3	Commande prédictive quadratique	59
3.1	Introduction	59
3.2	Contexte	60
3.3	Commande prédictive à critère dynamique	62
3.3.1	Vecteur d'occupation	63
3.3.2	Définition du critère	64
3.3.3	Élaboration de la loi de commande	64
3.3.3.1	Modèle de prédiction	64
3.3.3.2	Prédicteur optimal	65
3.3.3.3	Minimisation du critère	65
3.3.3.4	Mise en oeuvre sous forme RST dynamique	68
3.3.4	Réglage des paramètres	70
3.3.4.1	Indices de performance	70
3.3.4.2	Modèle de simulation et modèle de commande	71
3.3.4.3	Étude sur l'influence des paramètres de réglage	73
3.3.5	Fenêtre de prédiction variable	75
3.3.5.1	Motivation	76
3.3.5.2	Une stratégie de variation de l'horizon de prédiction	77
3.3.6	Résultats numériques	78
3.3.7	Du monozone au multizone	81
3.4	MPC distribué à horizon de prédiction dynamique	82
3.4.1	Modèle couplé par les sorties	82
3.4.2	Élaboration de la commande distribuée	83
3.4.3	Séquence d'échange	86
3.4.3.1	Horizon de prédiction constant dans le temps et identique pour tous les agents	86
3.4.3.2	Horizon de prédiction variable dans le temps	86
3.4.4	Algorithme prédictif distribué	90
3.4.5	Analyse de la convergence	91
3.4.6	Résultats numériques	95
3.4.6.1	Modèle découplé	97
3.4.6.2	Comparaison MPC décentralisé - MPC distribué	97
3.4.6.3	Étude expérimentale sur la vitesse de convergence	102
3.5	Conclusion	104

4	MPC linéaire multivariable pour la régulation thermique multizone	107
4.1	Introduction	107
4.2	Contexte	108
4.3	Contraintes locales	109
4.3.1	Définition du critère	109
4.3.1.1	MPC linéaire décentralisé	110
4.3.1.2	MPC linéaire centralisé	112
4.3.1.3	MPC linéaire distribué	113
4.3.2	Résultats de simulation	115
4.4	Contraintes couplées	119
4.4.1	Définition du critère	120
4.4.2	Modèle de prédiction découplé	122
4.4.2.1	Formalisation du problème global	122
4.4.2.2	Méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe	124
4.4.3	Modèle de prédiction couplé	129
4.4.3.1	Couplage par les sorties	130
4.4.3.2	Couplage par les entrées	135
4.4.4	Résultats de simulation	139
4.4.5	Conclusion	143
5	MPC linéaire multivariable pour la régulation thermique multizone et multisource	145
5.1	Introduction	145
5.2	Contexte	146
5.3	MPC avec commande centrale	147
5.3.1	Définition du critère	147
5.3.2	Modèle de prédiction découplé	148
5.3.2.1	Méthode de décomposition de Benders	149
5.3.3	Modèle de prédiction couplé	155
5.3.3.1	Couplage par les sorties	155
5.3.3.2	Couplage par les entrées	160
5.3.4	Résultats de simulation	164
5.4	Conclusion	171
6	Conclusion générale et perspectives	173
6.1	Synthèse	173
6.2	Originalité, contributions et faiblesses des approches proposées	176
6.3	Perspectives	177
A	Modèles de simulation	179
B	Dualité en programmation linéaire	189

Liste des figures	193
Liste des tableaux	197
Index	199

Liste des notations

a	Notation générale pour un scalaire
$\mathbf{a}$	Notation générale pour un vecteur
$\mathbf{A}$	Notation générale pour une matrice
$\mathbf{A}^T$	Notation générale pour la transposée d'une matrice
$\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$	Matrice diagonale de dimension n
$\text{diag}\{\mathbf{a}\}$	Matrice diagonale dont les composantes diagonales sont égales aux éléments du vecteur $\mathbf{a}$
$\text{bloc-diag}\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\}$	Matrice diagonale par blocs
T_s	Période d'échantillonnage
k	Incrément en temps discret (pour un signal x , $x(k) = x(kT_s)$)
q^{-1}	Opérateur retard (pour un signal x , $q^{-1}x(k) = x(k-1)$)
$\mathbb{H}_i$	Ensemble des voisins de l'agent i
$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	Ensemble des nombres entiers naturels non nuls
$\mathbb{N}_i^j$	Ensemble des nombres entiers naturels $\{i, i+1, \dots, j\}$
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Ensemble des matrices à coefficients réels de dimensions $m \times n$

s	Variable de Laplace
$tr(\mathbf{A})$	Trace de la matrice $\mathbf{A}$
$\hat{\mathbf{x}}$	Prédiction de la variable $\mathbf{x}$
$\tilde{\mathbf{x}}$	Variable d'échange
$\hat{\mathbf{x}}(k+l k)$	Prédiction de la variable $\mathbf{x}$ à l'instant $k+l$ à partir des valeurs connues à l'instant k
$\mathbf{x}^{(l(k))}$	Variable $\mathbf{x}$ est utilisée à l'itération l de l'instant k
$\mathbf{I}_n$	Matrice identité de dimension $n \times n$
$\mathbf{0}_{m \times n}$	Matrice nulle de dimension $m \times n$
$\mathbf{1}_{m \times n}$	Matrice de dimension $m \times n$ dont toutes les composantes sont égales à 1

Acronymes

ANN Artificial Neural Networks (réseaux de neurones artificiels)

ARX Auto Regressive model with eXternal inputs (modèle auto régressif qui inclut des entrées externes)

ARMAX Auto Regressive Moving Average with eXternal inputs

ASHRAE American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditionning Engineers

BBC Bâtiment Basse Consommation

CARIMA Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average

CSTB Centre Scientifique et Thermique du Bâtiment

CVC Chauffage, Ventilation et Climatisation

DJ Degrés Jour

DJu Degrés Jour unifié

DMC Dynamic Matrix Control

E/S Entrée / Sortie

EPDB Energy Performance of Buildings Directive

EU27 Les 27 pays membres de l'Union Européenne

GA Genetic Algorithms (algorithmes génétiques)

GPC Generalized Predictive Control (commande prédictive généralisée)

HVAC Heating, Ventilation and Air-Conditionning

IECC International Energy Conservation Code

ISO International Standards Organization

ISS Input-to-State Stability (stabilité entrée-état)

MBPC Model-Based Predictive Control

MPC Model Predictive Control (commande prédictive par modèle)

ONU L'Organisation des Nations Unies

P/PI/PID Proportionnel / Intégral / Dérivé

PL Programme Linéaire

PM Problème Maître

PMR Problème Maître Restreint

PMV Predicted Mean Vote (vote moyen prédit)

PPD Percentage of Persons Dissatisfied (pourcentage prévisible d'insatisfaits)

PWA Piece-Wise Affine (affine par morceaux)

RST Régulateur linéaire polynomial (l'acronyme vient de la nomenclature utilisée pour les trois polynômes)

RT Réglementation Thermique

SP_{*i*} Sous-Problème *i*

TOR Tout-Ou-Rien

Chapitre 1

Introduction

Tout le monde est affecté d'une manière ou d'une autre par les bâtiments - nous sommes nés en eux, y vivons, y travaillons, et le plus souvent nous mourons en eux, pourtant le profane a probablement moins de connaissances sur eux que sur presque tout autre chose qui affecte sa vie.

The Book of Buildings

RICHARD REID

1.1 Contexte énergétique actuel et futur

Un des défis du XXI^e siècle est le développement durable, c'est à dire maintenir la qualité de vie pour une population croissante, avec des attentes de confort de plus en plus élevées, tout en respectant l'environnement. La production et la gestion d'énergie nécessaires pour répondre à ces attentes seront essentielles dans les prochaines années.

La crise économique a plongé le marché énergétique mondial dans une incertitude sans précédent. Le rythme de la reprise économique conditionnera les perspectives énergétiques pendant les années à venir. La crainte de récession et la multiplication des déficits publics nationaux rendent particulièrement difficiles les prévisions pour l'économie mondiale à moyen terme. Suite à la crise, la consommation énergétique mondiale a diminué en 2009 pour la première fois dans des proportions significatives depuis 1981 [6]. Malgré cette chute, elle devrait repartir rapidement à la hausse, une fois la reprise économique amorcée. Étant la principale source d'émissions de gaz à effet de serre, l'énergie (fossile) est au coeur du problème de changement climatique et donc sa gestion fait partie intégrante de la solution.

La conférence historique de l'ONU sur le changement climatique, tenue à Copenhague en décembre 2009, fixe l'objectif de limitation de la hausse de la température moyenne mondiale à deux degrés Celsius par rapport aux niveaux de l'ère préindustrielle. Cependant, même si les engagements pris par les principaux pays émetteurs de gaz à effet de serre étaient intégralement tenus, ils ne nous mèneraient que partiellement sur la trajectoire des émissions nous permettant d'atteindre l'objectif de 2°C, trajectoire décrite par

le *scénario 450*, visant à limiter la concentration à long terme de gaz à effet de serre à 450 ppm (parties par million) d'équivalent CO₂, présenté pour la première fois dans [5].

L'édition [8] propose encore deux scénarios de prédiction relatifs à une évolution possible d'ici 2050. Ainsi, le scénario "politiques actuelles" (appelé aussi scénario "de référence") décrit l'évolution des marchés mondiaux de l'énergie si les politiques en vigueur en 2010 restent inchangées. Ce scénario prévoit, à long terme, la croissance de la concentration de gaz à effet de serre dans l'atmosphère supérieure à 1000 ppm d'équivalents CO₂, provoquant une hausse de la température moyenne mondiale pouvant atteindre 6°C. Le deuxième scénario, appelé scénario "nouvelles politiques", prend en compte les engagements politiques généraux et les plans d'action annoncés par les pays du monde entier.

La hausse rapide des émissions de CO₂ prévue dans le scénario "politiques actuelles" est due à l'accroissement de la demande mondiale d'énergie fossile, qui restera la source primaire prédominante dans le monde. Le charbon connaît de loin la croissance la plus importante, suivi du gaz et du pétrole. Le principal moteur de la demande de charbon et de gaz est l'augmentation inexorable des besoins en énergie pour produire de l'électricité. L'apport de la production nucléaire par rapport à la production mondiale d'électricité diminuerait. L'utilisation des technologies renouvelables modernes (hors hydraulique) telles que l'éolien, le solaire, la géothermie, l'énergie des marées et des vagues ainsi que la bioénergie affiche l'essor le plus rapide à l'horizon 2035. La demande de pétrole dans le scénario "de référence" devrait augmenter de 1 % par an en moyenne durant la période considérée, le secteur des transports étant à l'origine de la plupart de cette augmentation.

Dans le scénario "nouvelles politiques", le taux de croissance de la demande mondiale d'énergie primaire est de 1,2 % par an en moyenne, contre 2 % par an au cours des vingt-sept années précédentes. Les facteurs qui contribueront à freiner la croissance de la demande en combustibles fossiles sont :

- l'augmentation des prix des combustibles fossiles pour les utilisateurs finaux, sous l'effet de la pression des prix à la hausse sur les marchés internationaux et
- les pénalités de "carbone" de plus en plus onéreuses, conjuguées aux politiques encourageant les économies d'énergie et l'adoption de sources d'énergie peu émettrices de carbone.

Des nouveaux carburants émergent déjà pour se substituer aux produits pétroliers dans le domaine des transports. La demande de charbon devrait s'accroître jusqu'en 2025, puis décroître. La demande en gaz naturel dépasserait légèrement celle des autres combustibles fossiles en raison de ses caractéristiques écologiques et pratiques plus favorables. La part de l'énergie nucléaire et des énergies renouvelables modernes augmenterait considérablement.

Les réductions des émissions de CO₂ liées à la consommation énergétique qu'exige le scénario "450" par rapport au scénario de référence sont colossales. De plus, la faiblesse des engagements de réduction des émissions de gaz à effet de serre pris en vertu de l'Accord de Copenhague réduit indubitablement la probabilité de concrétisation de l'objectif de 2°C. Pour l'atteindre il faudrait une transformation technologique à un rythme sans précédent. L'amélioration de l'efficacité énergétique dans tous les secteurs semble être le principal

moteur pour réduire la demande d'énergie. Ainsi, plus de la moitié des émissions seront évitées grâce à l'efficacité énergétique dans le scénario 450 par rapport au scénario de référence [6].

1.1.1 Importance des bâtiments dans la consommation énergétique totale

Le paragraphe précédent a montré la nécessité d'améliorer l'efficacité énergétique du consommateur afin d'atteindre les objectifs de réduction de la demande énergétique dans les prochaines décennies. Afin d'agir rapidement et efficacement il est important de cibler les secteurs d'activités qui consomment le plus d'énergie et qui émettent donc le plus de gaz à effet de serre.

Les bâtiments représentés par les secteurs résidentiel et tertiaire sont les plus importants consommateurs d'énergie dans l'EU27¹ ainsi qu'en France [7], suivis par le secteur du transport et par l'industrie (voir la figure 1.1). Le parc résidentiel compte environ 70 % du parc immobilier européen [83]. Pourtant, les bâtiments non-résidentiels sont loin d'être négligeables, ainsi le secteur résidentiel est responsable de 30 % de la consommation d'énergie finale totale, tandis que le secteur tertiaire contribue à hauteur de 11 % [83]. Par conséquent, les efforts de réduction de la dépense énergétique doivent viser toutes les catégories de bâtiments.

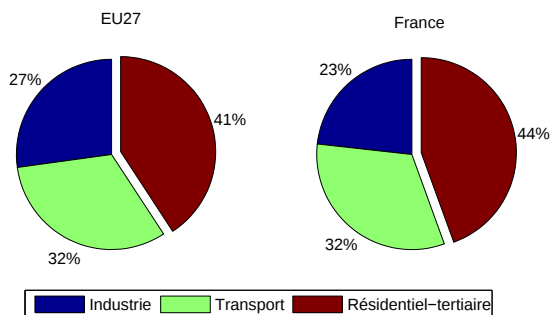


FIGURE 1.1 – Consommation d'énergie finale par secteur en 2008 dans la zone EU27 (à gauche) et en France (à droite)

Le potentiel de réduction de la consommation énergétique dans les bâtiments est un point clé dans les nombreuses démarches pour combattre l'augmentation de la concentra-

1. Les 27 pays membres de l'Union européenne (l'Allemagne, l'Autriche, la Belgique, la Bulgarie, Chypre, le Danemark, l'Espagne, l'Estonie, la Finlande, la France, la Grèce, la Hongrie, l'Irlande, l'Italie, la Lituanie, la Lettonie, le Luxembourg, Malte, Les Pays-Bas, la Pologne, le Portugal, la République tchèque, la Roumanie, le Royaume-Uni, la Slovaquie, la Slovénie et la Suède.)

tion de gaz à effet de serre dans l'atmosphère, notamment celle du Groupement Intergouvernemental pour l'Évolution du Climat dans son évaluation [3].

Pour les bâtiments résidentiels, c'est la taille et la localisation qui ont l'impact le plus fort sur la consommation d'énergie. La quantité et le type d'énergie utilisée dans les habitations sont non seulement liés aux conditions météorologiques, à la conception architecturale, aux systèmes énergétiques mis en œuvre mais aussi au comportement des occupants. En général, les logements dans les pays développés utilisent plus d'énergie que ceux dans les pays aux économies émergentes.

Le secteur tertiaire couvre tous les bâtiments publics et commerciaux (bureaux, magasins, écoles, restaurants, hôtels, hôpitaux, musées, etc) avec une grande variété d'activités et d'usages ayant un impact énorme sur la qualité et la quantité d'énergie nécessaire. Les bâtiments de bureaux et de commerce sont les plus énergivores, représentant en général plus de 50 % de l'énergie totale consommée par le secteur non-résidentiel [149]. La croissance de la population implique une demande de services plus importante et requiert évidemment plus d'énergie.

1.1.2 Le chauffage dans la consommation énergétique des bâtiments

Si l'on considère la part des bâtiments dans la consommation énergétique européenne et française (plus de 40 %), il convient d'affiner toujours plus l'analyse de ce secteur. Ainsi, la figure 1.2 montre la distribution de la consommation dans les bâtiments résidentiels et tertiaires européens. Le poste de chauffage est de loin le système le plus gourmand en énergie, étant responsable de plus de la moitié de la consommation. En France, la hiérarchie ne se modifie pas, mais les proportions sont encore un peu plus déséquilibrées [4], le chauffage dépassant même 65 %.

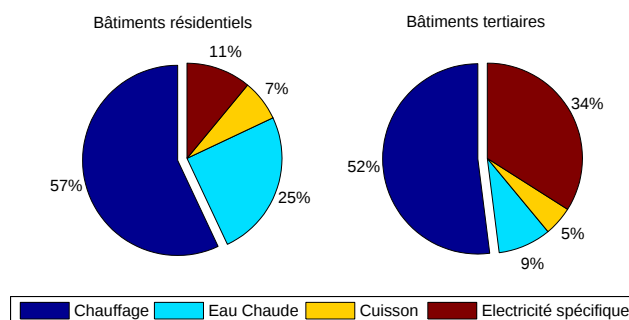


FIGURE 1.2 – Répartition de la consommation énergétique dans les bâtiments résidentiels et tertiaires en Europe [2]

Les facteurs qui influencent la quantité d'énergie dépensée par le poste de chauffage

d'un bâtiment sont décrits ci dessous.

1. Le *climat* est le facteur le plus important agissant sur la demande de chauffage dans un bâtiment. Évidemment, plus il fait froid, plus le besoin en énergie pour le chauffage augmente. Cette influence de la température extérieure sur la demande de chauffage est mesurée en météorologie en degrés jour (DJ), qui représentent l'écart entre la température moyenne extérieure pendant une journée et un seuil de température préétabli. Le nombre de degrés jours unifiés (DJu) est déterminé en utilisant comme température de référence la valeur de 18°C. Avec cette méthode très simple on peut estimer la consommation d'énergie thermique. La demande énergétique peut être réduite selon l'intensité des apports solaires.
2. La *géométrie du bâtiment* joue un rôle non négligeable. Un rapport élevé volume / surface (une forme simple, de préférence un cube) induit une consommation plus faible du poste de chauffage, réduisant les pertes de chaleur à travers l'enveloppe.
3. Un autre facteur très important est la *performance thermique de l'enveloppe* du bâtiment, autrement dit, les valeurs de coefficients U (coefficient de transmission thermique, exprimé en W/m²K) des parois et des fenêtres. Plus les valeurs U des éléments de construction extérieurs sont faibles, moins il y aura de chaleur perdue par échange avec l'extérieur.
4. La *ventilation* peut jouer un rôle clé, surtout en ce qui concerne les bâtiments à faibles besoins énergétiques ou les maisons passives. Pour réduire les pertes de chaleur, les systèmes de ventilation mécanique intégrant une récupération de la chaleur sont de plus en plus utilisés.
5. La consommation énergétique totale d'un bâtiment dépend également de l'*efficacité du système de chauffage*, c'est-à-dire du rendement de transformation de l'énergie finale en chaleur.
6. La *méthode de contrôle* du système de chauffage joue à la fois sur le confort et la consommation énergétique. Ainsi, des écarts significatifs apparaissent entre les performances d'un système de chauffage contrôlé manuellement, un système piloté par une loi de commande simple (de type tout-ou-rien ou P/PI/PID) et un système piloté par une loi commande avancée (de type prédictif par exemple).
7. Le *mode de vie des occupants* a un effet décisif sur la facture énergétique. La négligence et les mauvaises habitudes peuvent réduire sensiblement les avantages liés aux mesures de rendement énergétique présentes dans le bâtiment.
8. Les *apports de chaleur* provenant des occupants ou des différents appareils électriques (autres que les équipements de chauffage) peuvent avoir un effet appréciable dans certaines situations (salles de théâtre, cinéma, écoles, salles serveurs, etc).

1.2 Des solutions pour réduire la consommation du poste de chauffage

1.2.1 Standards élevés pour les nouveaux bâtiments

Les bâtiments sont généralement conçus pour être utilisés pendant de nombreuses décennies et, dans certains cas, plus d'une centaine d'années. Ainsi, la construction des nouveaux bâtiments présente une bonne occasion d'économiser l'énergie sur le long terme, car ils influencent la consommation énergétique du secteur pour beaucoup plus longtemps que d'autres éléments consommateurs d'énergie dont la durée de vie est limitée à quelques dizaines d'années.

L'amélioration de l'efficacité des bâtiments au stade de la conception est relativement simple, alors qu'après leur construction elle est beaucoup plus difficile et très coûteuse. Les décisions prises pendant la phase de projet du bâtiment détermineront la consommation pendant la plus grande partie, sinon la totalité, de la durée de vie d'un bâtiment. Des paramètres importants pour l'efficacité énergétique du bâtiment sont fixés une fois pour toute à la construction du bâtiment (l'orientation de l'immeuble, l'orientation des fenêtres, les matériaux de construction, etc).

Les réglementations concernant les bâtiments abordent, en général, les problématiques liées à l'enveloppe et aux systèmes de chauffage, de climatisation, de ventilation et d'eau chaude, éléments qui sont responsables d'environ trois quarts de la demande énergétique des logements [5]. Occasionnellement, ces standards portent sur d'autres équipements comme l'éclairage, ou l'utilisation des énergies renouvelables. Visant plutôt la thermique des bâtiments, les réglementations diffèrent d'une région (pays) à l'autre en fonction des particularités climatiques locales.

Les premiers standards, mentionnant des valeurs pour les coefficients de transfert thermique et des matériaux spécifiques ou multi-vitrage, remontent à la fin des années 1950 et le début des années 1960 dans les pays scandinaves. Ces exigences étaient destinées à améliorer l'efficacité énergétique et le confort dans les bâtiments. La crise pétrolière du début des années 1970 a favorisé l'émergence des réglementations concernant l'efficacité énergétique des bâtiments dans de nombreux pays et dans les années qui suivirent ces exigences ont continué d'augmenter. Des exemples de ces normes sont les standards créés par IECC et ASHRAE utilisés aux États-Unis et au Canada, alors que dans l'Union européenne la directive EPDB requiert aux états membres d'établir des standards d'efficacité énergétique dans les nouveaux bâtiments.

En France, le Grenelle Environnement a bouleversé la politique des réglementations thermiques qui devrait avoir une périodicité de 5 ans (RT 2005, RT 2010, RT 2015, etc) avec des améliorations de 15 % par rapport à la version précédente. Suite au Grenelle Environnement, la réglementation thermique 2012 (RT 2012), publiée en octobre 2010, sera appliquée à partir d'octobre 2011 aux bâtiments tertiaires et à partir du début 2013 aux bâtiments résidentiels. Ainsi, les performances requises par la RT 2012 sont identiques au

label Bâtiment Basse Consommation (BBC 2005), c'est-à-dire une consommation maximale d'énergie primaire de 50 kW/m²/an.

Malgré tout, la grande majorité des nouveaux bâtiments est construite exactement aux exigences minimales d'efficacité énergétique. Cependant, certains bâtiments ciblent des normes de rendement beaucoup plus élevées et parmi ceux-ci : les bâtiments à basse consommation (BBC), les bâtiments passifs, les bâtiments à énergie zéro, ou même à énergie positive (RT 2020).

1.2.2 Travaux de rénovation

L'importance des normes d'efficacité énergétique s'étend au-delà de leur rôle lors de la construction de nouveaux bâtiments. Ces réglementations servent souvent comme objectifs d'efficacité pour les travaux de rénovation des bâtiments existants. L'intérêt accru pour l'efficacité énergétique stimule la demande de rénovation des bâtiments existants.

Des travaux de rénovation majeurs ont lieu tous les 30 - 40 ans pour les bâtiments résidentiels, principalement à cause des dégradations des parties principales ou des installations des immeubles. Une autre raison pour les travaux de rénovation est l'évolution du mode de vie et des exigences de confort dans la société moderne. Des remplacements et des réparations de moindre envergure peuvent même se produire plus souvent. Ces travaux de rénovation ou de changement d'équipements offrent une formidable opportunité pour améliorer l'efficacité d'un bâtiment.

Parmi les états membres de l'Union européenne, on peut observer que la rénovation (durable) des centres urbains et la réhabilitation des logements sont devenues des priorités. Des politiques nationales sont en cours de développement afin d'encourager cette nouvelle priorité. Selon [83], en France, des travaux de rénovation visant à réaliser des économies d'énergie ont été entrepris : 70 % sont concentrés sur l'isolation thermique, en particulier le double vitrage, l'installation de volets et l'isolation des planchers ou des toits. Les autres activités sont destinées à renouveler principalement les systèmes de chauffage (25 %), de ventilation et de climatisation.

Bien que, dans la plupart des pays, les investissements pour travaux de rénovation soient généralement beaucoup plus faibles que les montants investis dans des immeubles nouvellement construits, le nombre de bâtiments qui sont rénovés chaque année est bien plus important que le nombre annuel de constructions nouvelles. Par conséquent, l'impact de la rénovation du parc existant est plus grand que celui des constructions nouvelles.

Même si les actions gouvernementales essaient d'encourager les travaux de rénovation (le crédit d'impôt « développement durable », l'éco-prêt à taux zéro), en général, le principal obstacle d'une telle démarche est le manque de connaissances de la relation entre les coûts et les bénéfices espérés.

1.2.3 Optimisation du contrôle du chauffage

Le parc existant recèle d'immenses gisements économiques et des travaux de rénovation efficaces sont nécessaires pour profiter de ces ressources. L'amélioration de la qualité de l'enveloppe et du rendement des systèmes de chauffage ne suffit pas. Il faut également optimiser le fonctionnement de ces derniers. Le développement technologique permet aujourd'hui d'équiper les immeubles avec des systèmes de contrôle de haut niveau afin de contribuer à la transformation du bâtiment en un système intelligent.

Le principal objectif du système de contrôle automatique du chauffage dans un bâtiment est d'assurer un certain niveau de confort thermique tout en minimisant la consommation d'énergie nécessaire pour le réaliser. La finalité du contrôle est de moduler la puissance du système de chauffage afin d'atteindre cet objectif. Si ces systèmes étaient toujours à leur capacité maximale, le besoin d'une loi de commande ne serait pas motivé. Cependant, la plupart des systèmes de chauffage sont conçus pour répondre aux demandes dans les pires conditions (température très basse). Ces conditions se manifestent uniquement pendant de courtes périodes au cours de l'utilisation. La plupart du temps, le système doit fonctionner lorsque les besoins de chauffage sont bien inférieurs à la capacité des équipements de chauffage.

Malheureusement, de nombreux systèmes de chauffage ont de mauvaises performances parce que l'importance de la commande a été sous-estimée par les producteurs. Ainsi, la majorité des installations sont contrôlées par une loi de commande simple, de type "tout ou rien", proportionnel (P) ou proportionnel à action intégrale voire dérivée (PI ou PID). Ces structures de contrôle ont des performances acceptables pour la régulation de la température dans les immeubles dès que le niveau de confort souhaité est atteint, ce qui les a amenées à être utilisées à grande échelle. Mais l'évolution du mode de vie et du marché énergétique montre les points faibles de ces stratégies de commande.

La plupart des bâtiments ont une occupation intermittente. Maintenir la température de confort pendant les périodes où certaines pièces sont vides conduit à un gaspillage d'énergie. Afin d'éviter cela, l'utilisation d'une température de consigne plus basse ou même l'arrêt du poste de chauffage pendant les périodes d'inoccupation devient une nécessité et simultanément un problème pour le système de commande. Pour remonter la température afin d'atteindre le confort thermique souhaité, le chauffage doit démarrer plus tôt que le début de la prochaine période d'occupation. Ce délai peut varier, en fonction des caractéristiques du système (équipement de chauffage + bâtiment), des facteurs internes (température intérieure, apports internes, ...) et externes (température extérieure, rayonnement solaire, ...) de quelques minutes à plusieurs heures. L'absence d'une gestion optimale de ces transitions entre les périodes d'occupation et celles d'inoccupation force le chauffagiste à réduire l'écart entre la température de confort et la température de référence pendant l'inoccupation, augmentant la consigne d'inoccupation, ce qui amène à l'accroissement non justifié de la consommation.

En France, malgré son coût d'utilisation élevé, le chauffage électrique poursuit sa

progression notamment dans les logements récents. En 2004, 7,1 millions de ménages se chauffent à l'électricité dont la consommation se stabilise à 40,6 TWh [4]. Pour diminuer les pics énergétiques, les producteurs choisissent d'utiliser des prix variables de l'électricité, afin d'inciter la population à consommer moins aux moments de forte demande. Pour l'instant, les tarifs électriques, ont une dynamique journalière simple de type heures pleines / heures creuses (ou jour / nuit). Mais avec l'introduction des réseaux électriques intelligents (smart grids) et les compteurs intelligents, l'évolution de la dynamique des tarifs électriques peut conduire à des plages de prix très variées en fonction de l'état courant et prédit du rapport demande / offre du réseau. Ainsi, la connaissance de l'évolution du prix, au bout d'un horizon relativement court (quelques heures), exploitée de manière optimale par le système de contrôle du chauffage électrique, peut diminuer significativement la facture d'électricité.

Réduire la puissance souscrite peut s'avérer très important dans la démarche d'économiser les coûts de fonctionnement. Pourtant, une telle décision établit une contrainte globale sur l'ensemble des équipements électriques du bâtiment. Même si le poste de chauffage électrique est généralement le système le plus énergivore dans un bâtiment, il est loin d'être le plus critique. Ainsi, aux moments de forte demande de chaleur, si la puissance disponible est inférieure à la puissance requise par le chauffage, certains équipements électriques déjà en fonctionnement peuvent être éteints brutalement. Une commande optimale du chauffage, pouvant prendre en compte la contrainte globale d'énergie disponible élimine ce problème.

Parmi les logements français qui utilisent le chauffage électrique, plus de 30 % déclarent l'utiliser comme chauffage d'appoint. Dans les maisons individuelles, il est fréquemment associé à un chauffage au bois ou au gaz. L'utilisation de plusieurs types de systèmes de chauffage ne conduit à une amélioration des performances que par l'utilisation d'une commande avancée afin de prendre en compte les avantages de chaque source de chaleur (le coût moins élevé du chauffage au combustible et la dynamique rapide du chauffage électrique).

Les paragraphes précédents mettent en évidence l'importance de l'utilisation d'une loi de commande optimale capable de réduire la facture énergétique liée au chauffage tout en offrant le niveau de confort désiré aux occupants.

1.3 Notions de contrôle thermique des bâtiments

1.3.1 Confort thermique

La consommation énergétique du poste de chauffage est fortement dépendante du degré de confort thermique à l'intérieur de l'immeuble. Il n'existe pas de standard absolu du confort thermique, ce qui n'est pas surprenant car les humains vivent dans une gamme de climats très large. Pourtant, une définition internationalement acceptée du confort thermique, utilisée par ASHRAE, est « l'état d'esprit qui exprime la satisfaction par rapport

à l'environnement thermique »(ISO 7730). L'ambiguïté de cette définition souligne encore une fois que l'estimation du confort est un processus cognitif influencé par des facteurs physiques, physiologiques et psychologiques.

Le standard international actuel concernant le confort thermique (ISO 7730) est basé sur des travaux de recherche menés dans les années 1960. Cette norme utilise le modèle de Fanger [56], appelé PMV (vote moyen prédit). P.O. Fanger a déterminé expérimentalement les conditions physiologiques nécessaires pour le confort thermique sous des conditions thermiques homogènes et stationnaires. La formulation de l'indice PMV a été obtenue de manière empirique, en fonction du métabolisme, de l'isolement vestimentaire et des quatre paramètres climatiques (température de l'air, rayonnement, humidité et vitesse de l'air). Ainsi, l'indice donne l'avis moyen d'un groupe important de personnes qui exprimeraient un vote de sensation de confort thermique en se référant à une échelle de -3 (froid) à +3 (chaud). Une valeur de PMV nulle exprime une sensation de confort thermique optimale.

Dans le contrôle des systèmes de chauffage, l'intérêt d'utiliser l'indice PMV est relativement réduit, dû au fait que le poste de chauffage n'agit que sur la température de l'air et sur la température de rayonnement (température moyenne des surfaces de parois). La difficulté d'estimer les paramètres concernant le métabolisme et l'habillement et la formulation relativement compliquée du PMV sont d'autres aspects qui rendent difficile l'usage de cet indice dans les structures de contrôle. Ainsi, dans les travaux présentés dans ce mémoire, le confort thermique est défini soit par une température de consigne, soit par une bande de température de confort.

1.3.2 Profil d'occupation

Il est évident que les exigences de confort ne doivent être satisfaites que lors de périodes où le bâtiment est occupé, périodes que l'on appelle périodes d'occupation. Dès lors, il s'avère inutile, sauf pour des raisons de sécurité, de préciser des spécifications thermiques au cours des périodes où le bâtiment est vide (périodes d'inoccupation). Dans ce cas, le seul objectif actif de contrôle est la minimisation énergétique et l'arrêt du poste de chauffage est sa solution optimale.

Le rôle de l'utilisateur devient très important dans le bon fonctionnement du système de contrôle. Personne ne souhaite avoir à éteindre ou à allumer son chauffage à chaque départ ou rentrée, par contre tout le monde aime bénéficier des avantages économiques liés à l'exploitation optimale du chauffage. Utilisant un système de contrôle performant, le rapport confort / coût dépendra de la qualité du planning, comme c'est le cas dans de nombreux autres domaines.

L'intérêt énergétique du chauffage intermittent dans les bâtiments à occupation discontinue est connu depuis longtemps [185]. Pour que la consommation d'énergie soit minimale, sans baisser le niveau de confort, il est nécessaire d'optimiser la commande pendant les périodes de préchauffage (voir figure 1.3). Afin de pouvoir calculer la commande pendant la période de préchauffage (relance), le système de contrôle a besoin de connaître le mo-

ment du début de la période d'occupation. De façon similaire, pour un bâtiment à grande inertie thermique, l'équipement de chauffage peut être arrêté avant que les occupants ne l'aient quitté, sans induire une dégradation du confort thermique pendant l'occupation.

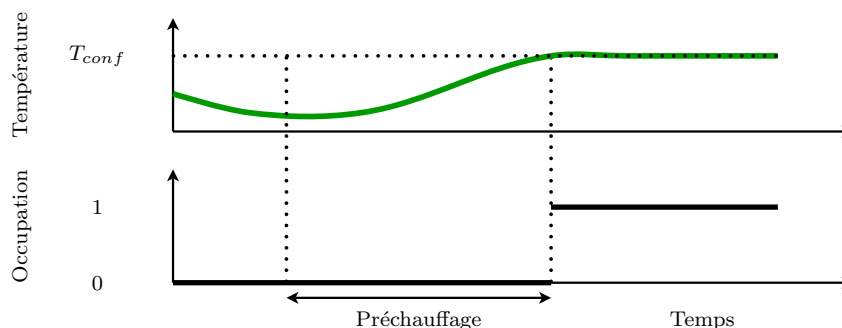


FIGURE 1.3 – Illustration du préchauffage

Une exploitation optimale du poste de chauffage dans le cadre d'un bâtiment à occupation intermittente ne peut pas se réaliser sans la connaissance a priori du profil d'occupation de ses pièces. Ce profil d'occupation doit contenir l'état, occupé (1) ou inoccupé (0), du bâtiment ou de chaque pièce sur un certain horizon futur de temps. Cette information peut être transmise par les agendas des occupants ou estimée, en utilisant les connaissances sur la dynamique des occupations précédentes mesurées par un capteur de présence. Néanmoins, si l'occupation d'une pièce n'est pas prévue dans son profil d'occupation, le confort thermique sera affecté.

1.3.3 Prix variables de l'énergie finale

Les valeurs statistiques de l'énergie consommée par le poste de chauffage présentées dans les sections précédentes sont exprimées par rapport à l'énergie finale totale. L'énergie finale représente l'énergie livrée à l'utilisateur. Certains types d'énergies passent par d'autres stades, avant d'être livrés. Ainsi, l'énergie primaire (brute) est celle qui n'a subi aucune conversion (pétrole non raffiné par exemple). Ensuite, elle est transformée en énergie secondaire (produits pétroliers raffinés) et transportée vers l'utilisateur. L'énergie finale, reçue par l'utilisateur, est convertie par le système de chauffage en chaleur qui constitue l'énergie utile. Chaque passage de l'énergie d'un stade à l'autre engendre des pertes liées au rendement de transformation ou de transport. La faiblesse de l'efficacité énergétique française, énergie primaire / énergie finale, par rapport à la moyenne de l'EU27 (9 % d'écart, selon [7]) est due au grand apport des centrales nucléaires qui ont des rendements très faibles par rapport aux centrales à carburants fossiles.

Le chauffage électrique représente 10% de la consommation française d'électricité et il équipe 30% de logements. Ceci est une valeur exceptionnelle en Europe, car le parc français de chauffage électrique représente la moitié du parc européen. Ainsi, un des problèmes les plus importants du réseau électrique, les pics de la demande, est lié aussi aux systèmes de chauffage. A cause de l'augmentation de la demande électrique, ces pics de consommation

sont de plus en plus élevés, et font peser le risque de défaillance sur le réseau français de distribution de l'électricité. Un moyen efficace de combattre ce problème est la différenciation des tarifs (heures pleines / heures creuses) qui incite les consommateurs à réduire leur demande durant les périodes les plus chargées de l'année. Les réseaux intelligents (smart grids) et les compteurs intelligents pourraient permettre d'affiner la politique des prix de l'électricité qui deviendraient dynamiques, en fonction du rapport offre / demande courant sur le réseau.

Les stratégies de contrôle pour la régulation thermique des bâtiments présentées dans ce mémoire visent à utiliser de façon optimale ces tarifs d'énergie variables, l'utilisation de plusieurs sources d'énergie ou des contraintes dynamiques sur l'énergie disponible. Le but de ces lois de commande est de réduire le coût du chauffage tout en gardant le niveau de confort requis par les occupants.

1.4 Plan du document

La suite de ce mémoire est structurée en quatre chapitres, résumés dans les paragraphes suivants.

Chapitre 2

Le deuxième chapitre peut être vu comme un état de l'art. Il se focalise sur la synthèse des principales lois de commande en boucle fermée utilisées pour la régulation thermique des bâtiments. Nous présentons les avantages et inconvénients de certains régulateurs de type TOR et PID, des méthodes d'autorégulation, des techniques basées sur l'intelligence artificielle et des correcteurs prédictifs. Pour cette dernière classe de correcteurs, nous nous concentrons sur des techniques de distribution de la loi de commande, pour le contrôle de bâtiments de grande taille. Par conséquent, une brève synthèse des différentes techniques MPC distribué conclut le chapitre.

Chapitre 3

Dans le troisième chapitre, nous proposons différentes modifications du critère classique de MPC afin de mieux répondre aux objectifs de contrôle. La minimisation de la commande (et non plus de son incrément), l'inclusion du profil d'occupation dans la fonction de coût et une stratégie de variation de la taille de l'horizon de prédiction sont nos principales propositions. L'approche est initialement exposée pour le cas d'une seule pièce, et ensuite étendue à un ensemble de zones. Dans ce dernier cas, nous présentons une loi de commande prédictive distribuée, pour laquelle les horizons de prédiction locaux sont variables, en fonction des profils d'occupation.

Chapitre 4

Pour favoriser des exigences d'ordre économique, dans le chapitre 4 nous nous orientons vers des formulations linéaires du critère. Ainsi, l'apparition des contraintes est impérative, pour que la solution optimale soit finie. Nous considérons, tout d'abord, des contraintes locales, propres à chaque pièce et nous formulons un algorithme distribué similaire au cas quadratique. La deuxième partie du chapitre propose une solution pour le cas où plusieurs variables locales sont liées par une contrainte globale. Pour la résolution du PL ainsi formulé, nous proposons des solutions basées sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, que nous étendons pour répondre au mieux au problème posé.

Chapitre 5

Le cinquième chapitre vient enrichir la méthodologie déjà proposée par l'ajout d'une commande centrale, qui agit simultanément sur l'ensemble des pièces. En formulant le problème d'optimisation de MPC sous la forme standard d'un PL, il n'est plus possible de résoudre le problème de manière décentralisée. Pourtant, la structure particulière du PL est exploitée par la méthode de décomposition de Benders. À partir de cela, nous proposons un algorithme distribué. D'une manière similaire au chapitre 4, nous présentons des modifications sur les algorithmes issus de ces méthodes de décomposition afin de prendre en compte les couplages entre les pièces adjacentes.

Conclusions et perspectives

Cette dernière partie dresse le bilan des travaux présentés dans ce manuscrit et proposent des perspectives dans la continuité des travaux effectués. Les pistes futures évoquées sont tant au niveau théorique qu'au niveau applicatif.

Annexes

Ce mémoire inclut deux annexes. La première regroupe une présentation synthétique du logiciel SIMBAD et de ses modèles utilisés dans les expériences présentées tout au long du mémoire. La deuxième partie d'annexe propose au lecteur les principaux aspects de la dualité des programmes linéaires qui sont utilisés dans le développement des algorithmes distribués basés sur les méthodes de décomposition.

Chapitre 2

État de l'art

Tout lecteur est soit un voyageur qui fait une pause ou
quelqu'un qui rentre chez lui.

La Bibliothèque

ALBERTO MANGUEL

Dans ce chapitre, nous allons présenter dans un premier temps différentes techniques de commande utilisées pour la régulation thermique des bâtiments, des lois de commande depuis les plus simples jusqu'à celles élaborées par des méthodes de contrôle avancé. Quand le système est de grande taille, il peut être intéressant de distribuer la loi de commande. La seconde partie de ce chapitre est consacrée à ces techniques de commande distribuée. Pour chacune des deux parties, nous insisterons davantage sur toutes les approches prédictives.

2.1 Techniques pour la régulation thermique des bâtiments

Du point de vue de l'automaticien, les systèmes de chauffage, ventilation et climatisation (CVC, ou l'anglais HVAC de heating, ventilation and air conditioning) ne sont pas en soi des cas difficiles de contrôle-commande. C'est pourquoi, dans la plupart des bâtiments, les lois de commande utilisées pour ce type d'équipement sont relativement simples. Pourtant, pour satisfaire des niveaux de performance de plus en plus élevés, des structures de commande plus sophistiquées ont été proposées, pour lesquelles on cherche souvent à optimiser un compromis entre la consommation et le confort.

2.1.1 Contrôle classique

Le contrôle des systèmes de chauffage du bâtiment a été révolutionné, au début du XXe siècle, avec la mise en place du thermostat. Ainsi, le régulateur de température se composait de trois éléments : un thermostat, un amplificateur et un moteur ou un mécanisme pour actionner les vannes ou les commutateurs [138]. Dans les paragraphes suivants, nous allons présenter brièvement les principales lois de commande utilisées pour le contrôle des différents systèmes CVC.

Parmi les contrôleurs les plus simples, on trouve :

- La loi de commande de type *tout-ou-rien* (TOR) contrôle l'état du système, u , (marche ou arrêt) en fonction d'un niveau d'erreur ($\epsilon(k) = T_{ref}(k) - T_{mes}(k)$) entre la consigne et la valeur mesurée. L'implantation usuelle aboutit à un fonctionnement à hystérésis afin de réduire la fréquence de commutation :

$$u(k) = f_{hyst}(\epsilon(k)). \quad (2.1)$$

Ce contrôleur est un bon choix pour les processus, qui permet un nombre réduit de valeurs pour la variable de commande (usuellement deux), comme par exemple le brûleur d'une chaudière. Le comportement du système contrôlé par un régulateur TOR est caractérisé par des oscillations de la variable contrôlée (figure 2.1).

- Pour les effecteurs à commande continue, les contrôleurs de type *proportionnel* (P), implémentés généralement sous forme de vannes thermostatiques, ou proportionnel à action *intégrale* voire *dérivée* (PI ou PID) sont également utilisés. En temps discret, la loi de commande PID est décrite par :

$$u(k) = K_P \epsilon(k) + K_I T_s \sum_{i=0}^k \epsilon(i) + K_D \frac{\epsilon(k) - \epsilon(k-1)}{T_s}, \quad (2.2)$$

avec T_s la période d'échantillonnage. Les comportements obtenus par ces différents contrôleurs sont présentés sur la figure 2.1. Bien que ces régulateurs améliorent les performances de contrôle, le réglage de ces paramètres (K_P , K_I et K_D) est loin d'être trivial et nécessite une procédure efficace. Différentes procédures de réglage ou d'autoréglage ont été proposées, quelques unes sont explicitées dans le paragraphe suivant.

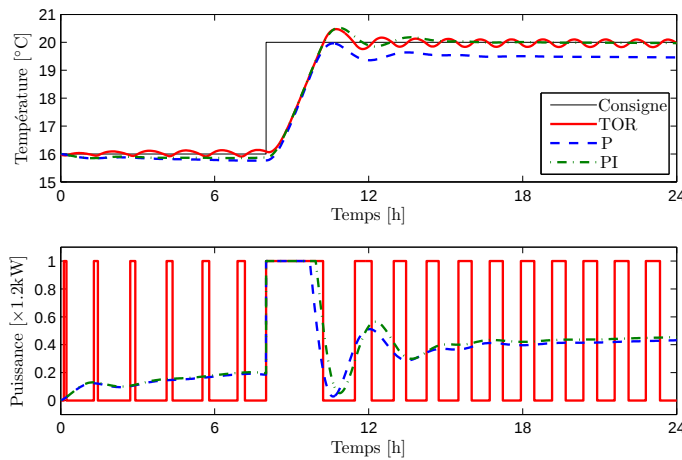


FIGURE 2.1 – Comportement des régulateurs classiques

2.1.2 Procédures de réglage et d'autoréglage

Le réglage des paramètres d'un contrôleur PID nécessite un modèle mathématique du processus et un algorithme efficace afin d'obtenir les performances exigées en boucle fermée. Trois types de méthodes existent pour déterminer les *bonnes* valeurs des paramètres : le réglage manuel, le réglage automatique et le réglage adaptatif.

La procédure de réglage manuel est une tâche chronophage, coûteuse et difficile [92]. L'autoréglage facilite énormément la mise en œuvre des contrôleurs PID, améliorant aussi leur performance [14]. Pour réaliser un bon réglage des paramètres du PID, dans [176] les auteurs utilisent la méthode Ziegler-Nichols [197], afin de contrôler la température de l'eau et l'humidificateur dans un système de climatisation. Dès que les systèmes ont des paramètres qui varient dans le temps, la procédure adaptative est la solution la plus performante [95].

Des méthodes d'identification ont été proposées pour déterminer les paramètres du modèle du processus. En fonction des valeurs identifiées, les trois paramètres du PID sont mis à jour. Dans [24] le système d'autoréglage se met en marche de temps en temps, découplant le PID et envoyant des impulsions au processus afin d'identifier les paramètres d'un modèle de second ordre avec retard. La procédure est présentée pour le cas monovariable ainsi que pour le cas d'un système multivariable. Une identification en ligne d'un processus variant dans le temps est proposée dans [17] afin de commander l'équipement de chauffage d'un système de climatisation, ce qui correspond à une procédure adaptative. La structure du modèle identifié est un premier ordre avec retard. Une loi de commande linéaire basée sur une procédure d'identification en ligne pour la régulation d'un ventilo-convecteur est présentée dans [169].

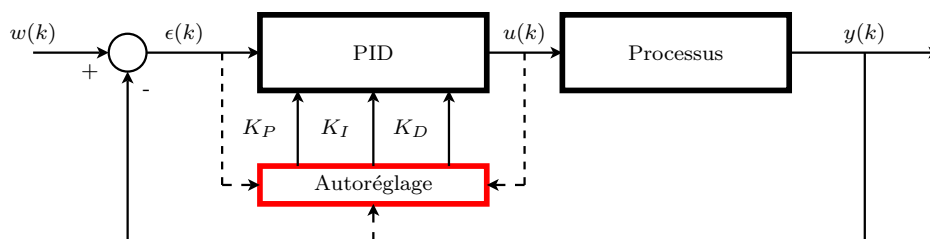


FIGURE 2.2 – Schéma générique pour les procédures d'autoréglage du PID

Le but principal des stratégies d'autoréglage (figure 2.2) hors-ligne et en ligne mentionnées ci-dessous, comme d'autres évoquées dans la littérature, est d'augmenter la portabilité du contrôleur. Ainsi, les paramètres du régulateur s'adaptent en fonction du comportement du système, ce qui peut être précieux lors de l'installation du matériel. La non-linéarité, plus ou moins importante, des différents types d'équipements CVC constitue un autre inconvénient qui est surmonté par la technique d'autoréglage, ce qui améliore les performances de la commande linéaire. Ainsi, la prise en compte des connaissances particulières des équipements thermiques utilisés dans les bâtiments requiert l'emploi d'un

niveau supérieur de contrôle [133], qui ne peut plus être synthétisé sous la forme d'un simple PID. Les principales connaissances supplémentaires qui peuvent être utilisées sont les suivantes : la définition d'une zone de confort thermique, le profil d'occupation, les prévisions météorologiques, les prix des énergies, les couplages thermiques entre les pièces, ainsi que différents types de contraintes (puissance maximale disponible). Pour les exploiter au mieux, les travaux de recherche se sont orientés vers des structures de commande plus évoluées, basées sur de l'intelligence artificielle ou des approches de type commande optimale, ce que nous développons dans les paragraphes suivants.

2.1.3 Contrôle avancé

Les structures de contrôle dit *intelligent* forment une classe de techniques de commande construites sur diverses approches d'intelligence artificielle. Parmi les plus connues, on trouve la logique floue, les réseaux de neurones, les mécanismes d'apprentissage et les algorithmes génétiques. Cette nouvelle génération de contrôle, basée sur l'*intuition* et le *judgement* a pour objectif de parvenir à un contrôle simple, adaptatif et performant, sans avoir recours à un modèle structurel du processus. Leurs performances sont en général comparées à celles des régulateurs classiques de type PID, et leur supériorité réside principalement dans le fait que des connaissances supplémentaires sur le comportement du système (exprimées dans le langage naturel - logique floue ou assimilées par des méthodes d'apprentissage - réseaux de neurones) ou un certain degré d'optimalité (algorithmes génétiques) sont pris en compte. Ces méthodes sont appliquées à la régulation thermique dans les bâtiments depuis les années 1990, dont la plupart des travaux sont référencés dans l'article [50]. Nous proposons ici de survoler rapidement ces techniques et quelques unes de leurs applications.

2.1.3.1 Réseaux de neurones

Comme leur nom l'indique, les réseaux de neurones artificiels (souvent abrégé par ANN, de l'anglais artificial neural networks) essayent de copier la structure du neurone biologique. Le neurone est un système de traitement d'information, caractérisé par un nombre très important d'entrées et une seule sortie. Ces réseaux sont souvent employés pour résoudre des problèmes de reconnaissance et de classification. Leur fonctionnement est basé sur des algorithmes d'apprentissage, qui leur fait mémoriser et classer les données. Ils ont été utilisés dans le domaine de la thermique des bâtiments pour résoudre différents problèmes.

Ils ont été introduits pour définir la notion de confort thermique [15], dans les cas où le calcul de l'indice PMV n'est pas envisageable. Une expérience dans une pièce climatisée a été effectuée afin de prouver l'efficacité de la méthode. Par extension, l'évaluation du confort thermique individuel est étudiée dans [106, 100]. De plus, dans [100], il est proposé une structure de contrôle mixte, où l'on trouve également une stratégie d'apprentissage pour établir la zone de confort thermique en fonction de commandes des utilisateurs, avec en plus une stratégie de contrôle à puissance minimale pour réaliser des économies

d'énergie.

On trouve des ANN également dans la modélisation du comportement thermique et énergétique d'une enceinte, modélisation qui peut être utilisée par exemple pour obtenir une prédiction de la température dans une serre, ou la prédiction de la consommation énergétique d'un bâtiment solaire passif mono-zone dont les méthodes sont détaillées respectivement dans [60] et [87].

Enfin, pour améliorer les performances de contrôle, les réseaux de neurones ont été utilisés pour modifier en ligne les trois paramètres du PID d'un régulateur de climatisation [194]. Pour un système similaire, l'étude de deux catégories de méthodes d'apprentissage de type feedforward est présentée dans [81]. Un autre usage des réseaux de neurones a été proposé dans [191], afin de calculer le moment optimal pour déclencher le chauffage, après une période d'inoccupation. Dans cet algorithme, les variables d'entrées du réseau sont la température intérieure, la température extérieure et ses gradients. L'inconvénient de la technique réside dans le fait qu'elle a besoin d'un nombre significatif de données pour la procédure d'apprentissage afin qu'elle offre des solutions précises.

2.1.3.2 Logique floue

Un autre type de contrôle intelligent est basé sur de la logique floue. Cet outil exploite davantage la performance qualitative du cerveau humain. Le système flou repose alors sur une connaissance préalable sur le processus. Cette connaissance s'exprime sous la forme d'un ensemble de règles, qui peuvent s'énoncer de manière générale comme : « à telle situation convient tel comportement ».

La modélisation des systèmes ou des composantes du CVC par la logique floue permet de surmonter l'absence d'un modèle mathématique du processus. Un tel exemple est présenté dans le cas d'un échangeur de chaleur avec une caractéristique non-linéaire [177]. Dans cet article, le modèle flou sert à prédire le comportement du système pour appliquer ensuite une commande de type prédictif. Les auteurs utilisent un superviseur de type flou pour ajuster les paramètres du contrôleur. Dans [171], la logique floue permet de modéliser et identifier un système de climatisation, modèle qui sera ensuite utilisé comme modèle de commande.

La commande floue a été adoptée dans différents travaux de recherche, comme par exemple, pour la régulation d'une chaudière [77], d'un ventilo-convecteur [66] ou d'une climatisation [179]. Dans [49, 91], la logique floue permet de développer un schéma de commande pour le contrôle de l'éclairage et de la température dans les bâtiments. Un exemple intéressant est celui de la commande d'un système de chauffage pour un bâtiment à énergie renouvelable [192], où les auteurs proposent une structure de contrôle hiérarchisée sur trois niveaux. Dans un premier niveau, on retrouve un arbre de décision qui définit un ensemble approprié de règles en fonction des informations disponibles sur les conditions extérieures et sur l'occupation. Le deuxième niveau de règles floues génère un profil de puissance optimale. Le troisième niveau détermine le mode de fonctionnement des équipements

et les valeurs des variables de commande. Les nombreux travaux sur la modélisation et la commande de systèmes CVC, utilisant la logique floue, sont répertoriés dans un état de l'art très complet [168].

Ces problèmes de régulation de la température et de l'éclairage sont également traités dans [93]. Dans cet article, une structure de contrôle en cascade est adoptée, avec un contrôleur de type flou dans la boucle externe et un PID pour la boucle interne, qui permet le réglage du store.

On trouve également des algorithmes d'autorégulation floue [173] ou encore des combinaisons PID-flou [29]. Le point intéressant de ce dernier exemple est l'emploi de la logique floue pour compenser la non-linéarité de l'indice PMV.

2.1.3.3 Algorithmes génétiques

L'optimisation du contrôle des équipements CVC dans les bâtiments peut être réalisée à l'aide des algorithmes génétiques (GA). Cette classe de méthode appartient à la famille des algorithmes évolutionnistes. Les algorithmes génétiques sont une abstraction de la théorie de l'évolution, s'appuyant sur les principes de sélection de Darwin et sur les méthodes de combinaison de gènes. Ces algorithmes fournissent des bonnes performances à de faibles coûts surtout quand le problème d'optimisation possède de nombreuses solutions admissibles [156].

En ce qui concerne l'application des algorithmes génétiques, [190] décrit comment cette technique peut résoudre le problème de contrôle optimal de la source de refroidissement d'un système de climatisation, qui possède des variables de commande continues mais aussi discrètes. Dans [40], c'est l'optimisation du contrôle de la concentration de CO₂ qui est décrite. L'efficacité de l'approche proposée est mesurée en terme d'économie d'énergie, en utilisant le logiciel EnergyPlus.

Un critère d'optimisation pour un système complet de climatisation est développé dans [108], construit à partir des modèles mathématiques de chacun de ses composants. Selon les caractéristiques des opérations et des interconnexions entre ces sous-systèmes, le problème d'optimisation est simplifié, afin d'être résolu par l'algorithme génétique développé dans [130].

Toujours pour les problèmes de climatisation, une structure hiérarchisée sur deux niveaux est présentée dans [133]. L'optimisation des consignes est réalisée au niveau supérieur par un algorithme génétique, quant au niveau inférieur, des contrôleurs simples s'occupent des régulations locales.

Nous venons d'aborder brièvement quelques applications de commandes avancées, développées sur des techniques dites « intelligentes ». Ce n'est évidemment qu'un survol et ce paragraphe ne se veut en aucun cas exhaustif. La partie suivante présente la technique qui sera utilisée tout au long de ce mémoire, la commande prédictive.

2.1.4 Commande prédictive

La commande prédictive fait partie de la classe des *commandes optimales*. La théorie moderne du contrôle optimal a commencé dans la deuxième moitié du XXe siècle. Les travaux de Pontryagin et de ses collaborateurs sur le principe du maximum, ainsi que l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman, constituent des résultats fondamentaux dans le domaine. Résoudre des problèmes d'optimisation est une tâche quotidienne pour chacun d'entre nous : comment arriver à destination le plus rapidement possible, comment organiser l'agenda afin de satisfaire les contraintes personnelles et professionnelles, etc.

L'objectif principal de la commande des systèmes thermiques dans le bâtiment, comme par ailleurs la majorité des objectifs de contrôle, s'exprime sous forme d'un problème d'optimisation : minimiser la consommation (ou le coût) tout en garantissant le niveau de confort (thermique) désiré. Cet objectif semble l'argument suffisant pour l'utilisation de la commande prédictive dans ce cas. Pourtant, le coût élevé de la technologie nécessaire à l'implantation et la difficulté d'obtention d'un modèle mathématique ont longtemps pénalisé l'utilisation des commandes optimales (prédictives) dans les bâtiments.

Mais l'importance de ces deux inconvénients a diminué progressivement. Ainsi, les avancées technologiques ont permis notamment à la commande prédictive d'être employée dans de nombreuses applications [152]. D'autre part, de nombreux outils de simulation de thermique et / ou énergétique des bâtiments ont été développés, parmi lesquels SIMBAD [42], EnergyPlus [55], SIBIL [54], DOE-2 [25], HAP [38], BLAST [96], TAS [71], HVACSIM [148], TRNSYS [19], SPARK [172], ESP-r [35], COMFIE [16] et bien d'autres. Due aux avantages énormes du logiciel (coût et vitesse), la majorité des résultats expérimentaux concernant le contrôle thermique des bâtiments s'appuient sur des simulations. À partir des détails de construction du bâtiment réel (orientation, structure, dimensions et composition des murs, fenêtres, équipements CVC), l'utilisateur du logiciel peut également obtenir un modèle mathématique par une procédure d'identification ou par accès direct au modèle du logiciel, quand cela est possible.

2.1.4.1 Principe de la commande prédictive

Le *principe* de la commande prédictive [30] consiste à optimiser une fonction de coût, qui décrit l'objectif de contrôle sur un horizon de temps fini. Afin de calculer la séquence de commandes qui optimise le critère défini, le contrôleur dispose d'un modèle (mathématique) du processus pour prédire son comportement. À chaque instant, une séquence de commandes optimales en boucle ouverte, minimisant la fonction de coût, sur l'horizon de prédiction est calculée, mais seul le premier élément est appliqué au système. Cette procédure est reprise à la période d'échantillonnage suivante (figure 2.3), mettant à jour les paramètres courants du système (mesures ou estimations), selon le principe d'horizon fuyant.

En fait, la technique prédictive est similaire au comportement anticipatif de l'être humain. Pour une analogie simple, prenons le cas de la conduite d'une voiture. Le conduc-

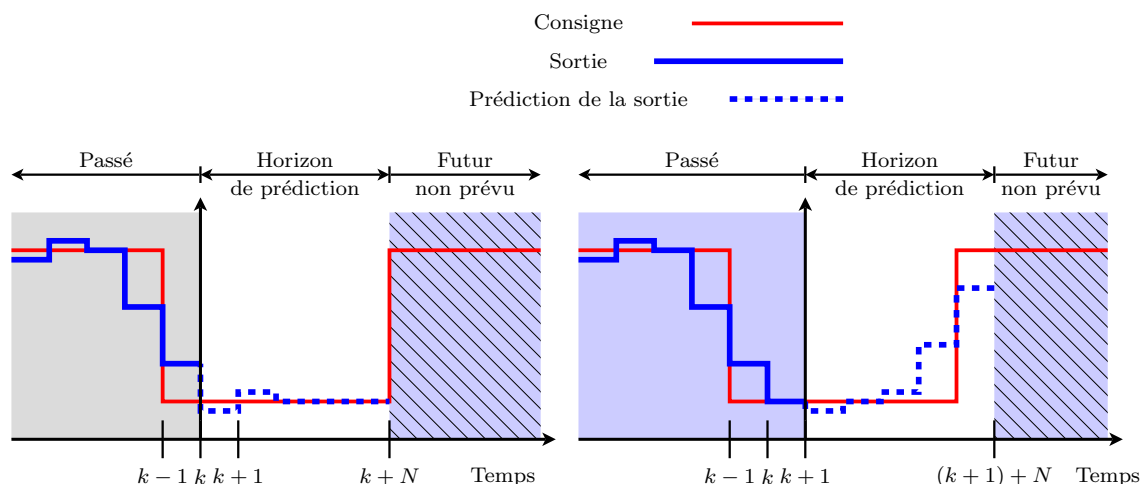


FIGURE 2.3 – Principe de fonctionnement de la commande prédictive : Prédiction de la commande et de la sortie à l'instant k sur un horizon fini (gauche) ; Réitération à l'instant suivant (droite)

teur connaît la trajectoire à suivre sur un horizon fini et, prenant en compte les caractéristiques de la voiture (modèle mental), décide d'actionner ses commandes. En utilisant un régulateur classique, comme le PID, les actions sont prises en fonction des erreurs passées entre la sortie et la consigne, ce qui est équivalent, dans cet exemple, à conduire la voiture en regardant le rétroviseur [30]. Cette comparaison est pourtant légèrement inéquitable pour le PID, sachant qu'il n'utilise pas les connaissances sur la consigne future à suivre.

Les étapes spécifiques de la mise en œuvre d'une loi de commande prédictive peuvent être divisées en deux catégories, en fonction de leur apparition par rapport au moment de mise en service du régulateur (voir la figure 2.4) :

1. Étapes hors ligne

- Le *modèle de commande* est un élément essentiel à la commande prédictive. Le concept fondamental de ce type de contrôle, celui de prédiction, s'appuie sur le modèle de commande. Ainsi, sa précision devient déterminante pour les performances de la commande. Il faut mentionner que la commande prédictive est souvent précédée d'une procédure d'identification [165], et évidemment, plus le modèle de prédiction est précis, plus la commande appliquée sera efficace.
- Le *critère d'optimisation* est ensuite défini en fonction des objectifs de contrôle :
 - (a) Stabilité. La structure de la fonction de coût est usuellement choisie telle que l'optimum forme une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée, qui garantit la stabilité. Dans la pratique, cette exigence est souvent relaxée pour le cas des systèmes stables et lents, tels que les processus thermiques présents dans les bâtiments [76]. Ainsi, dans la suite de ce mémoire on s'intéressera plutôt aux aspects technico-économiques qu'à la problématique de stabilité.

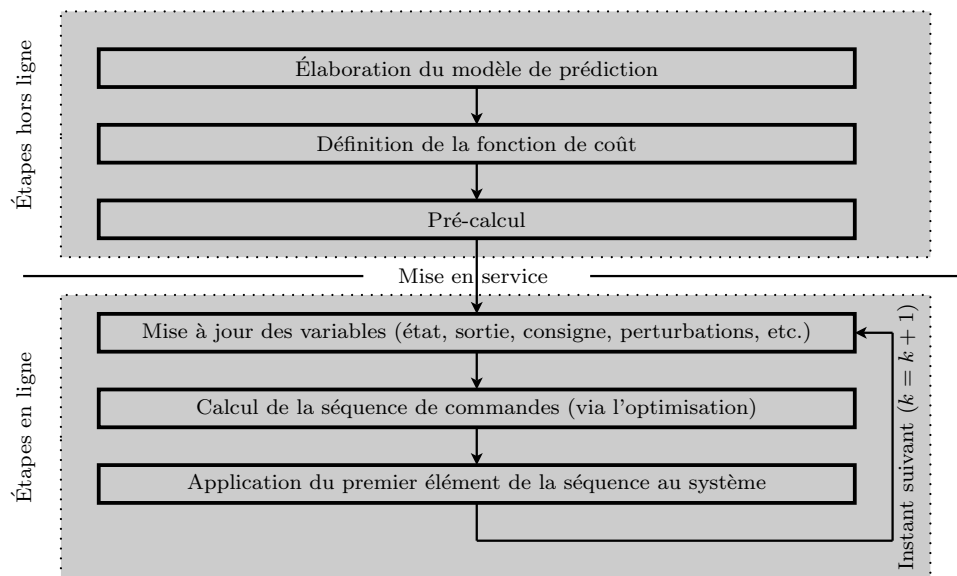


FIGURE 2.4 – Procédure de synthèse de la loi de commande prédictive

- (b) Performances de la commande. Le critère est généralement, mais pas toujours, utilisé pour spécifier les performances souhaitées en boucle fermée. Une liste non exhaustive des travaux concernant l'application de la commande prédictive (MPC) aux processus thermiques sera donnée dans le paragraphe suivant, dont différentes fonctions de coût sont proposées pour minimiser l'énergie, maximiser le confort ou optimiser un critère qui décrit un compromis entre ces deux objectifs.

Traditionnellement, la commande prédictive est formulée via une fonction de coût quadratique. D'un point de vue théorique, l'optimisation quadratique présente des *bonnes* propriétés, comme la dérivabilité et la convexité du critère. La formulation analytique de l'optimum, pour le cas sans contraintes, constitue un autre avantage, en diminuant l'effort de calcul en ligne. Pourtant, les objectifs économiques ont souvent une importance majeure dans les performances des régulateurs. Ces objectifs, exprimés sous une forme linéaire, transforme la formulation initiale en un problème d'optimisation dans le cadre de la programmation linéaire (sous conditions de linéarité du modèle et des contraintes). Bien que le calcul de la solution d'un programme linéaire exige un effort réduit par rapport à une optimisation quadratique de même complexité, le principal inconvénient reste la non-dérivabilité de la fonction de coût [159]. Ainsi, les solutions analytiques ne sont généralement pas disponibles.

- Une étape de *pré-calcul* est souvent nécessaire pour réduire la charge en ligne. Ainsi, la loi de commande MPC à critère quadratique sans contraintes peut être implantée sous la forme d'un régulateur linéaire de type RST, par exemple, comme on le verra au chapitre suivant.

2. Étapes en ligne

- La *mise à jour des variables* est une étape propre à tout contrôleur en boucle fermée. Cette étape peut viser également à actualiser les paramètres spécifiques à la loi prédictive, comme par exemple les dimensions des horizons de prédiction et les valeurs des termes de pondération ou bien les contraintes du problème d'optimisation.
- Un acteur décisif pour l'applicabilité de cette stratégie de commande est le *solveur* utilisé. Ainsi, il doit fournir une solution du problème d'optimisation dans un délai défini, inférieur à la période d'échantillonnage du processus.
- À la fin de la procédure d'optimisation, seul *le premier élément de la séquence de commande est appliqué* au système. À l'instant suivant, de nouvelles informations seront utilisées pour le calcul de la séquence optimale. Cette technique se base sur le principe de l'horizon glissant.

2.1.4.2 Commande prédictive pour le contrôle thermique

Parmi les nombreuses méthodes de commande prédictive, la commande prédictive généralisée (GPC de l'anglais Generalized Predictive Control) [37] est l'une des plus connues. Sa popularité est principalement liée à l'usage d'un modèle entrée-sortie, usuellement de type CARIMA (Controlled AutoRegressive Integrated Moving Average), qui aboutit à l'implantation de la loi de commande sous une forme RST, quand le problème posé est linéaire et sans contrainte. De nombreuses applications sont traitées par la méthode GPC, essentiellement pour des systèmes monovariabiles [26].

Rien n'impose une formulation spécifique de la fonction de coût, pourtant dans les travaux mentionnés ci-dessous, le critère préféré est celui décrit par l'équation suivante :

$$J(k) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) \Delta u^2(k+j-1|k), \quad (2.3)$$

où $\hat{y}$ et w sont, respectivement, la sortie prédite (utilisant le modèle CARIMA) et la consigne, quand Δu représente l'incrément de la commande ($\Delta u(k) = u(k) - u(k-1)$). La notation $x(k+j|k)$ traduit la prédiction de la variable x , correspondant à l'instant $k+j$, calculée au pas de temps k . Le problème d'optimisation s'exprime alors comme la minimisation du critère (2.3) :

$$\min_{\Delta u(k|k), \Delta u(k+1|k), \dots, \Delta u(k+N_u-1|k)} J(k). \quad (2.4)$$

Dans la formulation (2.3) on peut également identifier les paramètres de réglage spécifiques à la commande prédictive GPC :

- les horizons inférieur, N_1 , et supérieur, N_2 , de prédiction sur la sortie,
- l'horizon de prédiction sur la commande, N_u , au-delà duquel les valeurs futures de la commande sont considérées constantes,
- les facteurs de pondération sur l'erreur, δ , et sur l'effort de commande, λ .

Pour la régulation de la température dans une pièce chauffée par un convecteur électrique, les auteurs proposent dans [52] un régulateur RST construit à partir de la solution analytique du problème d'optimisation de GPC. Afin de simplifier l'implantation, une technique d'anticipation empirique est mise au point qui réduit la dimension de l'horizon de prédiction. L'idée utilisée est le décalage dans le temps de la consigne future. Dans [33], la commande GPC est appliquée à un système de chauffage par le plancher. L'identification des paramètres du modèle CARIMA est basée sur une méthode d'estimation des moindres carrés. Suite à cette procédure, les auteurs ont proposé deux modèles du système (pour le jour et pour la nuit). Les modèles polynomiaux, spécifiques à la commande prédictive généralisée, sont relativement difficiles à manipuler dans le cas des processus multivariables. C'est pourquoi, par exemple, on retrouve des structures de commande GPC décentralisées (monovariabiles) [189, 162], pour des systèmes de climatisation multivariables.

Pour les processus de grande taille, composés de plusieurs sous-systèmes, la formulation de la commande prédictive dans l'espace d'état est préférable [175]. Ce formalisme, communément appelé MPC (Model Predictive Control) ou MBPC (Model-based Predictive Control) [36], facilite également l'analyse de stabilité et de robustesse du correcteur.

Dans [64], le passage de la formulation polynomiale vers celle de l'espace d'état est détaillé. Le modèle du système de climatisation considéré est supposé linéaire. L'ajout de l'indice PMV au modèle conduit les auteurs à adopter une structure Hammerstein-Wiener (basée sur une fonction de transfert à laquelle vient s'ajouter une non-linéarité statique). Différentes fonctions de coût quadratiques sont proposées pour le contrôle de la température, de l'humidité et de l'indice de confort. Ainsi, on peut distinguer des formulations quadratiques minimisant soit l'erreur de suivi, soit la commande, ou bien un compromis entre les deux.

Dans le même esprit, le travail de [150] présente un schéma de commande MPC pour un système de chauffage par le plafond. Une procédure d'identification par sous-espaces a été utilisée pour obtenir un modèle linéaire du processus. La température extérieure est incluse dans le modèle sous forme de deux valeurs, T_{min} et T_{max} , qui définissent l'intervalle de confiance de la prévision météorologique. La fonction de coût est une modification de (2.3) où le second terme ne minimise pas l'effort de contrôle $\Delta u^2(k)$, mais directement la commande $u^2(k)$. Les contraintes "inégalité" sont imposées sur l'amplitude et la vitesse du signal de commande, ainsi qu'une limite inférieure de la température. Les résultats obtenus sur un bâtiment réel montrent des économies importantes, entre 17 et 24 %, par rapport à une commande en boucle ouverte (en fonction de la température extérieure).

Une formulation similaire de la fonction de coût est adoptée dans [146], où les auteurs comparent trois structures de contrôle. Le système de chauffage considéré possède deux sources d'énergie : une source fossile et une source renouvelable. Les schémas de commande inclus dans l'étude sont un PID, un PID-flou et un PID-MPC. Les résultats obtenus montrent la supériorité du contrôleur PID-MPC par rapport à un indice de performance qui intègre l'erreur de suivi et le pourcentage relatif d'énergie fossile consommée.

Dans [144], la commande prédictive est employée pour le contrôle hygrothermique

d'un incubateur pour les nouveaux nés. Un modèle affine par morceaux (PWA) est obtenu par un algorithme d'identification. Les commandes sont définies par un ensemble de valeurs discrètes. À chaque valeur du signal de contrôle correspond un modèle linéaire. Deux contrôleurs, un pour la régulation de la température et l'autre pour l'humidité, sont proposés. Le critère quadratique utilisé inclut seulement le carré de l'erreur de suivi.

Les travaux mentionnés, dédiés à l'optimisation du contrôle des systèmes CVC utilisent des fonctions de coût quadratiques. Pourtant, le coût de fonctionnement est souvent proportionnel à l'énergie délivrée, et non à son carré comme cela est proposé dans le critère. C'est pourquoi, pour satisfaire des objectifs économiques, les problèmes de minimisation ont été orientés vers une formalisation linéaire du problème.

La commande prédictive a été étudiée dans le projet de recherche OptiControl afin de contrôler le climat dans les bâtiments en utilisant les prévisions des conditions météorologiques. L'objectif principal du projet est de maintenir la température ambiante, la concentration de CO₂ et l'éclairage dans une gamme de confort prédéfinie tout en minimisant la consommation [142]. Les résultats publiés sont obtenus en simulation, en utilisant différentes configurations d'équipements [140]. Trois structures de contrôle sont comparées :

- La première, prise comme référence, est une stratégie basée sur des règles de type « si condition alors action », définie dans [74].
- La deuxième loi de commande est de type MPC. Les auteurs proposent une approche stochastique [141]. Le critère à minimiser est constitué par le coût de fonctionnement, $J(k) = \sum_{j=1}^{N_u} c^T(k+j-1)u(k+j-1|k)$. Le confort est exprimé par une contrainte linéaire stochastique, $P[\mathbf{G}(\mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{C}\mathbf{w}(k)) \leq \mathbf{g}] \geq \alpha$, où $\alpha \in [0, 1]$ désigne le niveau (ou degré) de confiance, $\mathbf{x}(k)$ est l'état du système, $\mathbf{u}(k)$ et $\mathbf{w}(k)$ sont les séquences futures des entrées et des perturbations. La fonction $\mathbf{G}$ rend la séquence future de sorties prédites, en utilisant le modèle d'état défini par les matrices $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$, quand le vecteur désigne les limites de la zone de confort. Cette formulation permet d'éviter l'infaisabilité du problème d'optimisation. Le modèle de commande utilisé est obtenu par la linéarisation d'un modèle bilinéaire, à chaque pas d'échantillonnage (1h).
- La troisième stratégie est plutôt un concept. Il s'agit d'un contrôle optimal qui utilise une prévision météorologique parfaite, fournissant ainsi les performances limites qu'un contrôleur peut atteindre.

Une méthode pour réduire le pic de la demande d'électricité dans les bâtiments a été également proposée dans [143]. Ainsi, le prix de l'électricité qui intervient dans le critère, $c^T(k)$, est calculé en fonction du prix au compteur, de la charge du réseau et d'une variable particulière à la localisation.

Dans le cadre du programme *Homes* [1] on retrouve également des approches prédictives pour la régulation globale de plusieurs systèmes, comme le CVC, l'éclairage et la qualité de l'air avec une consommation énergétique minimale. Les auteurs de [12] présentent le problème d'optimisation sous forme d'un PL. Le critère à optimiser est la consommation ou le coût énergétique, sous des contraintes définies par le modèle de prédiction, le ni-

veau de confort et les limitations des actionneurs. Dans un premier temps, une procédure itérative est proposée pour surmonter l'inconvénient lié à la bilinéarité du modèle. Ainsi, le problème initial est résolu par la résolution répétitive d'un programme linéaire paramétré. Les résultats montrent la convergence rapide de l'algorithme, pourtant la preuve théorique de la convergence est difficile à obtenir. Une deuxième contribution est représentée par le sous-échantillonnage de la séquence future des sorties conjugué à une paramétrisation de la séquence des entrées [13], ce qui permet de réduire la charge de calcul.

Une autre initiative récemment développée au Laboratoire de contrôle prédictif et distribué de l'UC-Berkeley, se concentre sur l'élaboration de stratégies MPC pour les systèmes de stockage de l'énergie [112, 111]. Le cas du système de climatisation dans le campus universitaire est considéré. Ces travaux ont mis au point des modèles simplifiés pour les refroidisseurs, les tours de refroidissement, les réservoirs et les bâtiments. L'objectif de la commande prédictive est de minimiser la consommation d'électricité, satisfaisant la charge de refroidissement requise. Pour traiter la complexité du système, un modèle de commande simplifié sous forme hybride est utilisé et le problème d'optimisation est résolu par une stratégie de type *branch and bound*.

2.1.4.3 Motivation du choix de la commande prédictive

Les stratégies de commande mentionnées dans le paragraphe précédent s'adressent aux différents systèmes thermiques. Malgré les caractéristiques particulières des équipements, les objectifs de contrôle sont toujours les mêmes : assurer un certain niveau de confort avec un coût minimal, et c'est dans ce sens que la plupart des travaux ont été menés. Pour satisfaire les exigences énergétiques imposées aux bâtiments, dans le cadre réglementaire (RT 2012), ou par les usagers eux-mêmes qui veulent diminuer leur facture, l'utilisation d'informations exogènes semble de plus en plus importante voire nécessaire. Voici une liste non exhaustive des informations qui peuvent contribuer à améliorer les performances du contrôle du poste de chauffage dans un bâtiment :

- l'intermittence, c'est-à-dire le profil d'occupation,
- la consigne / zone de confort,
- le prix de l'énergie,
- les conditions météorologiques,
- les apports des occupants et des équipements électriques.

Ceci étant, connaître ces valeurs à un instant donné ne suffit pas à améliorer significativement la qualité du contrôle. La raison est simple. Les systèmes thermiques par leur grande inertie ont des dynamiques relativement lentes. Pour exploiter au mieux ces données complémentaires, il est nécessaire de les anticiper.

L'utilisation du profil d'occupation futur permet par exemple de déclencher le chauffage en avance pour satisfaire le confort dès le début des plages d'occupation. La connaissance des horaires tarifaires (heures creuses - heures pleines) peut engendrer des économies significatives en utilisant la capacité de stockage thermique de l'immeuble. Une prévision

plus ou moins correcte des perturbations (internes ou externes) peut éviter les surchauffes.

C'est pour permettre de tels effets anticipatifs que nous avons utilisé dans nos travaux une commande prédictive, approche qui sera explorée dans la suite du mémoire. La figure 2.5 propose ainsi un schéma illustrant la structure du contrôleur prédictif pour la régulation thermique. Le prix à payer pour l'exploitation optimale des informations exogènes n'est pas négligeable. Il faut un modèle de prédiction suffisamment fiable. Il faut de plus que le problème d'optimisation résultant ne devienne pas trop complexe pour pouvoir être résolu en ligne avec une charge de calcul réduite.

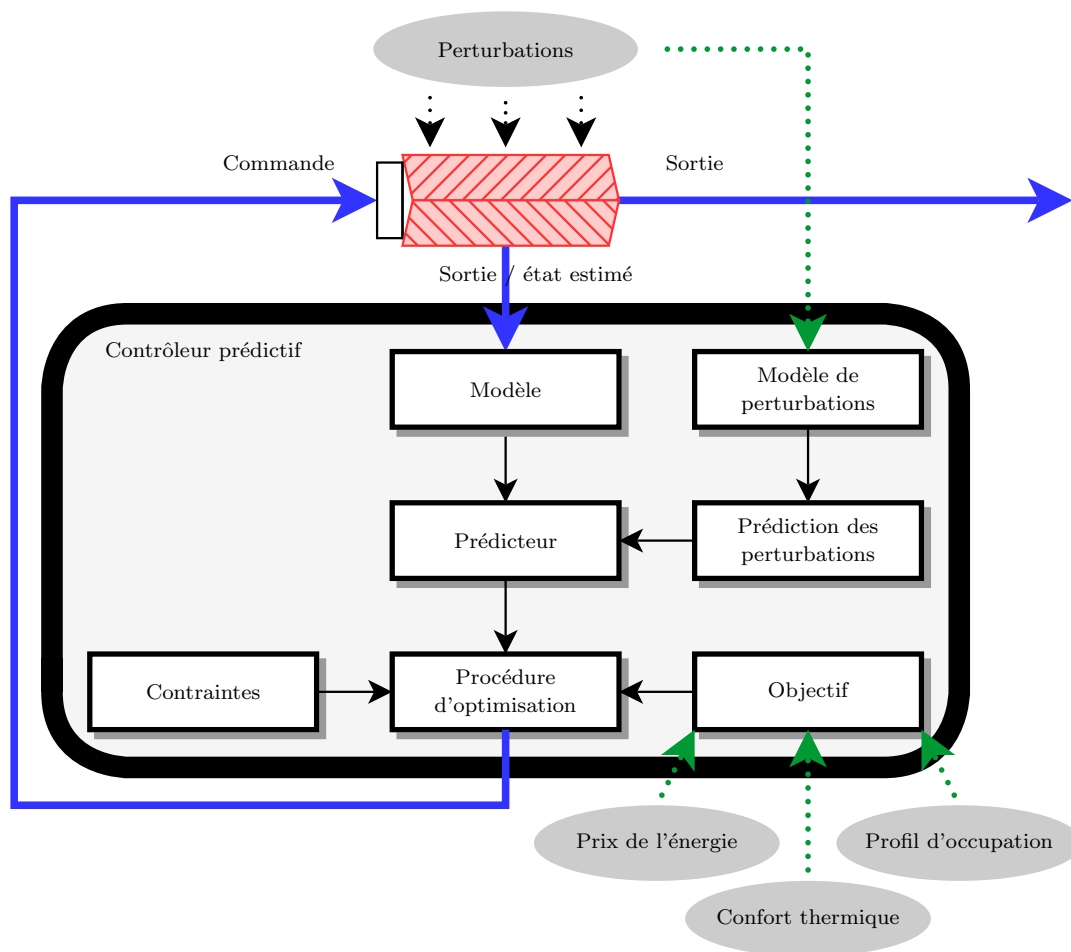


FIGURE 2.5 – Structure de contrôle prédictif pour la régulation thermique dans les bâtiments

Concernant la modélisation du système thermique (bâtiment et équipement de chauffage), des modèles de prédiction linéaires seront utilisés dans la suite du mémoire. Ils représenteront le comportement du bâtiment chauffé par des convecteurs électriques ou par un système de chauffage par le sol, moyennant des hypothèses simplificatrices supplémentaires qui seront précisées le cas échéant.

La complexité de l'implantation de la commande prédictive constitue l'autre point faible de cette approche. La difficulté liée au temps de calcul en ligne a longtemps été

un verrou pour l'utilisation de cette technique dans certains domaines. Pour réduire cet effort de calcul, de nombreuses solutions ont été proposées. Un des moyens les plus simples est l'adoption du MPC sans contraintes. La solution du problème de minimisation quadratique, avec un modèle de prédiction linéaire, s'obtient de manière analytique, ce qui conduit à une implantation sous la forme d'un contrôleur linéaire (RST) [26].

Néanmoins, un intérêt majeur de la méthode prédictive réside dans sa capacité à prendre en compte les contraintes lors de la synthèse de la commande. Ces contraintes peuvent être liées aux aspects physiques, au confort, à la sûreté, etc. D'un point de vue technique, elles sont exprimées en fonction des variables comme l'état, l'incrément ou l'amplitude de la commande, tout comme la sortie. Le problème ne peut plus être résolu de manière analytique, mais en ligne. Pour une fonction de coût donnée, la charge de calcul nécessaire à cette résolution dépend non seulement de la dimension du vecteur des variables d'optimisation (dimension notamment liée à l'horizon de prédiction) mais aussi du nombre de contraintes. Sachant que les contraintes dures qui apparaissent dans les problèmes de contrôle sont normalement justifiées par des limitations physiques du système, la réduction de l'horizon de prédiction est devenue une pratique usuelle en commande prédictive afin de diminuer le temps de calcul [30]. On trouve d'autres stratégies de réduction du nombre de degrés de liberté, par exemple le blocage de certains éléments de la séquence de commande. Elles sont analysées dans [28].

Pourtant, la solution analytique sans contrainte, comme la diminution du nombre de degré de liberté, impliquent une perte au niveau de l'optimalité par rapport à la solution du problème initialement posé. Une approche plus intéressante dans cette optique est la construction d'une loi MPC explicite [21, 72, 139] basée sur les principes de la programmation multiparamétrique. Elle permet d'alléger l'effort de calcul en ligne requis par la procédure de résolution du problème d'optimisation sous contraintes. Ainsi, la commande prédictive linéaire (avec modèle de prédiction linéaire) s'exprime comme une loi affine par morceaux. Ceci permet le calcul hors ligne des lois affines et de leurs régions d'applicabilité, de sorte que la procédure en ligne est réduite à l'identification de la région courante. Malgré tout, l'application de cette technique aux lois de commande prédictives présentées dans les chapitres suivants s'avère moins adaptée, car les paramètres du critère et / ou les contraintes changent au cours du temps en fonction des informations exogènes.

Dans ce mémoire, nous verrons que nous devons faire face à deux difficultés. La première est liée au critère : l'horizon de prédiction doit être important pour anticiper efficacement les modifications sur les variables intervenant dans la fonction de coût, mais également pour exploiter la capacité de stockage thermique du bâtiment. La seconde est liée à la taille du système. Ainsi, pour les systèmes de grande taille, une parallélisation de la procédure d'optimisation du critère prédictif engendre généralement des avantages en termes de temps de calcul mais aussi en ce qui concerne l'implantation et la maintenance de la structure de contrôle. La distribution de la commande et par conséquent la distribution de l'effort de calcul font l'objet de nombreux travaux depuis quelques années. La partie suivante a pour objectif de sensibiliser le lecteur à ces différents travaux et différents

outils mathématiques qui leur servent de support.

2.2 Contrôle prédictif pour les systèmes de grande taille

La plupart des travaux mettant en œuvre la commande prédictive pour la régulation thermique dans les bâtiments se focalisent au cas monozone.

Les perturbations externes considérées sont de nature météorologique, et dans les modèles proposés, les couplages thermiques entre deux zones adjacentes sont négligés. Cette simplification est usuellement faite dès que l'on fait l'hypothèse que la température est la même dans toutes les pièces [142].

Dans la partie précédente, nous avons souligné l'importance de la prise en compte de l'intermittence d'occupation des pièces pour réaliser des économies d'énergie, que ce soit pour des bureaux ou des habitations. Notons d'ailleurs que cette économie d'énergie est d'autant plus grande que l'écart de consigne entre la température en période d'absence et celle en période de présence est important [62]. Si l'on considère que chaque zone a son propre profil d'occupation, le transfert thermique entre deux pièces voisines n'est plus négligeable. Il est alors proportionnel à l'écart de température (voire Annexe A). Par conséquent, le modèle thermique d'un bâtiment multi-zone doit prendre en compte ces interactions. Il pourra alors être modélisé par plusieurs sous-systèmes interconnectés (figure 2.6).

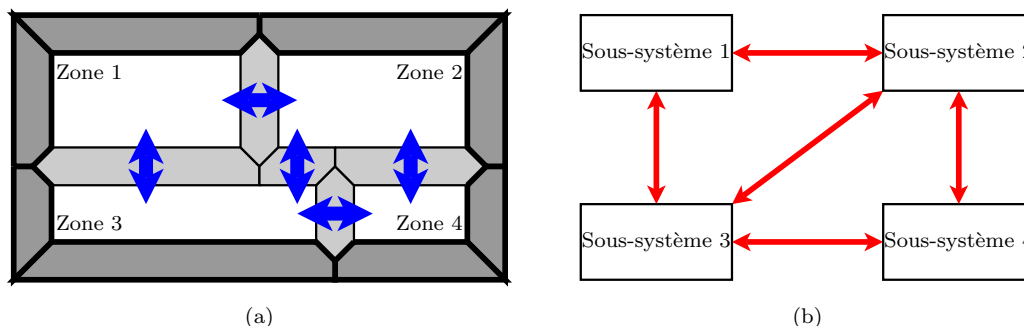


FIGURE 2.6 – Bâtiment multi-zone (a) et structure des interconnexions (b)

Ce type de décomposition et d'interactions n'est évidemment pas limité au problème de la régulation thermique. De nombreux processus issus de l'industrie moderne sont composés de plusieurs sous-systèmes influencés seulement par les sous-systèmes voisins. Pour satisfaire les exigences accrues de performance, les systèmes de contrôle doivent prendre en compte ces interactions spécifiques. Pour ces systèmes de grande taille, différentes solutions sont développées.

2.2.1 Commande centralisée

Généralement, la commande prédictive est étudiée via une approche centralisée. La prédiction utilise un modèle complet du processus, qui inclut toutes ses interconnexions.

À l'exception de l'optimalité de la commande ainsi calculée, la structure monolithique du régulateur (voir figure 2.7.a) résultant souffre de nombreux inconvénients potentiels :

- La croissance du temps de calcul avec le nombre des sous-systèmes constitue un désavantage majeur de cette structure de commande. Pourtant, l'augmentation de la puissance de calcul, les logiciels d'optimisation performants et les algorithmes conçus spécifiquement pour le contrôle des systèmes interconnectés [145] ont amélioré l'aspect pratique du correcteur centralisé.
- Pour certains systèmes, la difficulté ou l'impossibilité d'obtenir un modèle du système global (trafic aérien, réseaux, etc) rend la structure centralisée inacceptable [85]. Quand ce modèle est disponible, ses dimensions peuvent être prohibitives. De plus, il doit être reconstruit à chaque changement de la configuration du système, par exemple dans le cas d'arrêt temporel d'un sous-système en raison des actions de maintenance ou de dysfonctionnement.
- Les opérateurs des systèmes de grande taille considèrent les structures de commande centralisées comme monolithiques et très peu flexibles [184]. En outre, lorsque le contrôleur central tombe en panne, la fonctionnalité du système entier est compromise.
- Dans nombreux cas, les différentes parties du système global sont la propriété d'organisations différentes. Le partage des informations requis par l'usage du contrôleur centralisé est loin d'être évident.

Ces points faibles ont encouragé le développement des stratégies décentralisées.

2.2.2 Commande décentralisée

Dans le contrôle décentralisé, voir la figure 2.7.b, les entrées (u_i) et les variables contrôlées (y_i) sont regroupées dans des ensembles disjoints u_i, y_i . Ensuite, à chaque ensemble est associé un régulateur qui fonctionne indépendamment des autres. La solution du problème est relativement simple lorsque les interactions entre différentes paires (sous-systèmes) sont faibles.

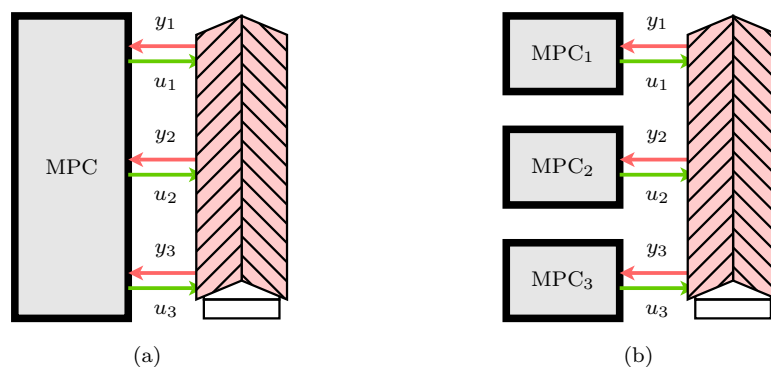


FIGURE 2.7 – Schéma de contrôle centralisé (a) et décentralisé (b) pour le cas de trois sous-systèmes

L'intérêt pour le contrôle décentralisé remonte aux années soixante-dix [188]. Depuis lors, le nombre des travaux sur ce sujet a augmenté plus qu'exponentiellement [90]. Les techniques de contrôle décentralisées sont dédiées aujourd'hui à un large éventail d'applications, allant de la robotique à l'aéronautique en passant par l'ingénierie civile. Ce grand intérêt rend très difficile l'inspection des approches proposées dans la littérature et va au-delà du cadre de ce document.

La structure décentralisée est une solution très efficace aux problèmes engendrés par une commande centralisée. Ainsi, le calcul de la loi de commande est parallélisé de manière naturelle et les modèles de commande sont décomposés par sous-système. La modularité de la structure augmente la fiabilité et la flexibilité du système. L'arrêt ou l'ajout d'un sous-système peut être effectué sans perturber le fonctionnement du système global. Pourtant, le fait de négliger les interactions provoque certaines répercussions sur le mécanisme de contrôle. Par conséquent, les interactions fortes peuvent même empêcher de parvenir à la stabilité, tandis que pour les sous-systèmes à interactions relativement faibles, les performances définies par le critère diminuent (par rapport à la solution centralisée).

Concernant le MPC décentralisé, dans [115] les auteurs présentent une loi de commande stabilisante pour une classe de modèles non-linéaires. La preuve de stabilité repose sur l'utilisation d'une contrainte, appelée contractive, proposée dans [45]. Une autre approche qui s'appuie sur le concept de stabilité entrée-état (ISS, de l'anglais Input-to-State Stability) est adoptée dans [155]. Les interactions entre les sous-systèmes sont considérées comme des perturbations bornées et l'objectif revient donc à concevoir une loi de commande robuste.

Pour les problèmes de régulation de la température dans les bâtiments, les inconvénients liés aux problèmes de stabilité dus à l'omission des couplages dans les modèles de commande sont loin d'être critiques. Ainsi, la structure décentralisée est utilisée à grande échelle pour la régulation de la température dans les bâtiments multi-zone. Cependant, l'utilisation de la commande prédictive décentralisée implique une diminution des performances [122].

Cet écart par rapport à la solution centralisée peut augmenter encore, suite à l'apparition des contraintes couplées (entre les sous-systèmes). Ces contraintes sont gérées de manière sous-optimale par les contrôleurs locaux.

Quand le bâtiment dispose de plusieurs sources de chauffage (une source centrale et des sources locales) la gestion efficace privilégie normalement la source la moins chère. Pourtant, les prix variables de l'énergie peuvent engendrer une hiérarchie dynamique. En outre, supposant que la source centrale chauffe toutes les zones de l'immeuble, son rendement dépend alors du degré d'occupation du bâtiment.

Intuitivement, on espère que des échanges d'informations entre les contrôleurs locaux amélioreraient les performances du système. Ceci conduit à des architectures de commande distribuée basées sur la coopération des régulateurs locaux dans lesquels la communication joue un rôle décisif.

2.2.3 Commande distribuée

Les structures de contrôle distribuées, comme l'exemple illustré dans la figure 2.8, supposent des échanges d'informations entre les régulateurs locaux, afin que chacun d'eux ait des connaissances sur le comportement des autres. Le développement des réseaux de communication et la technologie *field-bus* fournit les moyens nécessaires pour l'implantation de cette méthode de contrôle. La commande distribuée apporte de nouvelles spécifications dans le domaine du contrôle et permet d'envisager de nouvelles applications.

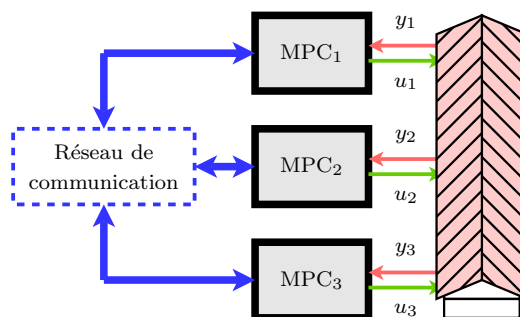


FIGURE 2.8 – Schéma de contrôle distribué

Cette stratégie de contrôle est vue comme une alternative aux deux structures mentionnées précédemment. Par conséquent, elle est une option attractive pour les situations où l'objectif global, tel que la stabilité en boucle fermée et / ou les exigences de performance, ne peuvent pas être satisfaites par les contrôleurs décentralisés, tandis que les inconvénients de la régulation centralisée sont indésirables.

Lorsque les contrôleurs sont de type prédictif, l'information transmise est composée généralement des séquences futures des variables (états, commandes, sorties, etc). Ainsi, tous les régulateurs peuvent prédire les effets des interactions sur l'horizon de prédiction considéré. Pour prendre en compte ces informations, les modèles de prédiction doivent inclure les couplages entre les sous-systèmes.

2.2.3.1 Modélisation des couplages

Le développement d'une stratégie de commande prédictive distribuée repose sur la façon de considérer les couplages. Un nombre important de stratégies de commande prédictive distribuées proposées dans les dernières années, ainsi que celles proposées dans ce mémoire, s'appuient sur des modèles de prédiction linéaires et invariants dans le temps. La majorité des études considèrent que les ensembles des variables d'entrées, d'états et de sorties locales sont *disjoints*. À partir de cette hypothèse, les vecteurs d'entrées, d'états et de sorties du modèle global :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_g(k+1) = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g(k) + \mathbf{B}_g \mathbf{u}_g(k) \\ \mathbf{y}_g(k) = \mathbf{C}_g \mathbf{x}_g(k), \end{cases} \quad (2.5)$$

sont obtenus par la concaténation des vecteurs locaux :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_g(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^T(k) & \cdots & \mathbf{u}_s^T(k) \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_g(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T(k) & \cdots & \mathbf{x}_s^T(k) \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{y}_g(k) &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T(k) & \cdots & \mathbf{y}_s^T(k) \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (2.6)$$

où s représente le nombre des sous-systèmes.

On retrouve dans la littérature cinq types de modèles locaux, en fonction de la prise en compte des couplages entre les sous-systèmes :

1. **Couplage complet** [180, 119] : la représentation la plus générale des sous-systèmes linéaires couplés est décrite par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \sum_{j=1}^s \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{u}_j(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = \sum_{j=1}^s \mathbf{C}_{i,j} \mathbf{x}_j(k). \end{cases} \quad (2.7)$$

Alors, les matrices du modèle global sont :

$$\mathbf{A}_g = [\mathbf{A}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \quad \mathbf{B}_g = [\mathbf{B}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \quad \mathbf{C}_g = [\mathbf{C}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \quad (2.8)$$

avec la notation suivante :

$$[\mathbf{R}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^t}] = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \mathbf{R}_{1,2} & \cdots & \mathbf{R}_{1,t} \\ \mathbf{R}_{2,1} & \mathbf{R}_{2,2} & \cdots & \mathbf{R}_{2,t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{s,1} & \mathbf{R}_{s,2} & \cdots & \mathbf{R}_{s,t} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2. **Couplage par les entrées et par les états** [134, 183, 47] : les sorties locales dépendent uniquement des états locaux :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \sum_{j=1}^s \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{u}_j(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (2.10)$$

ainsi les matrices du modèle global sont :

$$\mathbf{A}_g = [\mathbf{A}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \quad \mathbf{B}_g = [\mathbf{B}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \quad \mathbf{C}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{C}_{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{s,s}\}. \quad (2.11)$$

3. **Couplage par les états** [86, 31, 196] : les états locaux sont influencés par les états

des autres sous-systèmes :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^s \mathbf{A}_{i,j} \mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{u}_i(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (2.12)$$

et les matrices du modèle global sont :

$$\mathbf{A}_g = [\mathbf{A}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \mathbf{B}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{B}_{1,1}, \dots, \mathbf{B}_{s,s}\}, \mathbf{C}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{C}_{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{s,s}\}. \quad (2.13)$$

4. **Couplage par les entrées** [98, 195, 184, 114, 131, 68, 11, 174] : il s'agit d'un des modèles les plus fréquemment utilisés dans les approches prédictives distribuées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{i,i} \mathbf{x}_i(k) + \sum_{j=1}^s \mathbf{B}_{i,j} \mathbf{u}_j(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{x}_i(k), \end{cases} \quad (2.14)$$

et les matrices du modèle global sont :

$$\mathbf{A}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{A}_{1,1}, \dots, \mathbf{A}_{s,s}\}, \mathbf{B}_g = [\mathbf{B}_{i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_1^s}], \mathbf{C}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{C}_{1,1}, \dots, \mathbf{C}_{s,s}\}. \quad (2.15)$$

5. **Modèle découplé** [163, 23, 153, 88, 99, 46, 32] : il représente des sous-systèmes complètement indépendants :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{i,i} \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_{i,i} \mathbf{u}_i(k) \\ \mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_{i,i} \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce type de modèles intervient dans les structures de commande distribuées dont les paramètres des sous-systèmes sont réunis par une contrainte globale ou une fonction de coût non-séparable. Les trois matrices du modèle global ont une structure bloc-diagonale.

En enlevant l'hypothèse selon laquelle les ensembles de variables locales sont disjoints, les modèles de couplage précédemment décrits deviennent composites [182]. Ainsi, quelques entrées, états ou sorties locales peuvent être partagées par plusieurs sous-systèmes.

2.2.3.2 Caractéristiques du critère

Selon la figure 2.4, après la définition du modèle, l'étape suivante dans la conception de la loi prédictive consiste à formuler l'objectif de commande. Mathématiquement, cet objectif est exprimé par un problème d'optimisation global, qui a la forme générale suivante :

$$\min_{\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} J(\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k), \mathbf{x}_1(k), \dots, \mathbf{x}_s(k)) \quad (2.17a)$$

sous les contraintes

$$\text{dynamiques du système (couplé)} \quad (2.17b)$$

$$f_i(\mathbf{u}_i(k), \mathbf{x}_i(k)) \in \mathcal{F}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (2.17c)$$

$$g(\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k), \mathbf{x}_1(k), \dots, \mathbf{x}_s(k)) \in \mathcal{G}, \quad (2.17d)$$

où $\mathbf{u}_i(k)$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ dénotent les séquences de commande sur l'horizon de prédiction. En fonction des objectifs de commandes locales, il existe de nombreuses variantes du problème (2.17), pour lesquelles différentes hypothèses sont faites. Pourtant, la conception de l'architecture distribuée est fortement liée à certaines propriétés particulières du problème.

Une première caractéristique importante est la séparabilité (ou l'additivité) de la fonction de coût : $J = \sum_{i=1}^s J_i$. On dit alors que J_i est un critère local. Généralement les fonctions de coût utilisées dans les applications de contrôle possèdent cette propriété. Cependant, en fonction de la structure du type de modèle de couplage, le critère local, i , dépendra non seulement des variables locales, $\mathbf{u}_i(k)$ et $\mathbf{x}_i(k)$, mais également des variables d'autres sous-systèmes.

Les contraintes appelées découplées ou locales (2.17c) réunissent uniquement les variables appartenant au sous-système. Du point de vue de la distribution de l'optimisation, elles ne posent pas de problèmes supplémentaires. Toutefois, les contraintes couplées (2.17d) ont tendance à compliquer l'algorithme ou à dégrader ses performances [160].

L'objectif des paragraphes suivants sera d'exposer, sans être exhaustif, différentes méthodes de distribution de la loi de commande prédictive.

2.2.3.3 Techniques de distribution

Concernant les aspects algorithmiques, l'état de l'art de R. Scattolini, [166], suggère trois critères pour classer les structures MPC distribuées.

1. Premièrement, en fonction de la topologie du réseau de communication, les deux cas suivants peuvent être considérés :
 - algorithmes *complètement connectés*, dans lesquels l'information est envoyée (et reçue) de tous les contrôleurs locaux vers tous les autres
 - algorithmes *partiellement connectés*, dans lesquels l'information est envoyée (et reçue) de tous les contrôleurs locaux seulement vers un sous-ensemble des autres agents.

Sans doute les structures topologiques partiellement connectées sont plus séduisantes du point de vue de l'implantation, tout spécialement dans le cas des systèmes de grande taille. Néanmoins, la topologie de communication entre les agents suit, naturellement, celle des interconnexions entre les sous-systèmes.

2. Un aspect essentiel des algorithmes distribués réside dans l'échange d'informations entre les contrôleurs. C'est d'ailleurs le détail qui fait la distinction entre les approches

distribuées et celles complètement décentralisées. Le nombre d'échanges d'information par période d'échantillonnage constitue alors un autre critère de classification. Ainsi, on peut différencier :

- algorithmes *non itératifs*, dans lesquels l'information est envoyée (et reçue) une seule fois par instant d'échantillonnage
 - algorithmes *itératifs*, dans lesquels l'information est envoyée (et reçue) plusieurs fois par instant d'échantillonnage.
3. Typiquement, les algorithmes itératifs sont construits pour converger vers un consensus global ou un point d'équilibre (de Nash). À cet égard, une troisième classification peut être considérée :
- algorithmes *communicants*, dans lesquels chaque contrôleur minimise un critère local, en prenant en compte l'influence des autres sous-systèmes sur ses propres variables
 - algorithmes *coopératifs*, dans lesquels chaque contrôleur local minimise un critère qui prend également en compte l'effet des actions locales sur l'objectif global.

Cette dernière classification a, probablement, les conséquences les plus importantes sur la complexité des correcteurs locaux. En réduisant les connaissances du contrôleur local à son propre modèle de prédiction et à la fonction de coût locale, le comportement des agents sera caractérisé par des actions *égoïstes*. C'est le cas des algorithmes de communication itératifs, qui convergent généralement vers un point d'équilibre, ou un point de Nash [132], spécifique à la théorie des jeux [18].

Dans cette catégorie, rappelons les travaux de [86, 31] qui présentent des algorithmes communicants. Une contrainte sur la matrice globale d'état est utilisée pour garantir la stabilité nominale en boucle fermée. Une structure distribuée, dans laquelle les interactions entre les sous-systèmes sont traitées comme des incertitudes bornées, est décrite dans [85]. Chaque contrôleur impose des contraintes locales sur ses propres états, contraintes qui seront utilisées par les autres agents afin de formuler un problème de type min-max. La preuve de stabilité est obtenue en bornant l'ensemble des contraintes sur l'état. Dans [131], un autre algorithme indépendant est présenté dans le cadre sans contrainte. L'article propose également une méthode afin de partitionner un système global en sous-systèmes, par l'utilisation de la norme de Hankel, qui exprime l'énergie des paires entrée/sortie. Dans le même cadre de travail, des conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence et la stabilité nominale sont déterminées dans [51, 98], utilisant la solution analytique du problème d'optimisation quadratique. La stabilité de la boucle fermée est également étudiée pour l'algorithme équivalent, non itératif. Des conditions similaires sont montrées dans [68]. De plus, un retard d'un pas d'échantillonnage, correspondant à l'échange d'information, est ajouté dans [180].

Les travaux de [11] présentent une méthode de sélection de la structure de contrôle (parmi le MPC centralisé, l'algorithme distribué indépendant et la structure décentralisée). À partir de la solution explicite, les auteurs définissent un indice de performance du système

de commande, en fonction de la marge de robustesse et de la connectivité entre les sous-systèmes.

L'objectif des algorithmes coopératifs est d'assurer la convergence vers la solution optimale globale. Généralement, pour atteindre ce but, les contrôleurs locaux doivent agir de façon altruiste, ce qui suppose l'inclusion dans les fonctions de coût locales des termes liés aux objectifs des autres agents.

Ainsi, l'algorithme coopératifs proposé dans [184] implique la connaissance locale du modèle complet du système, afin que la fonction de coût globale soit minimisée localement. Dans l'approche présentée, de nombreuses propriétés intéressantes sont prouvées comme la convergence de l'algorithme vers la solution optimale globale, mais également la faisabilité et la stabilité nominale en boucle fermée si l'algorithme est interrompu à une itération intermédiaire. Un autre algorithme convergeant vers l'optimum global est décrit dans [195], mais par rapport au précédent, cette étude est développée pour une optimisation sans contraintes. L'avantage de l'approche réside dans la minimisation locale d'une fonction qui réunit seulement le critère local et les critères des sous-systèmes voisins (directement interconnectés), ce qui augmente la flexibilité du système de contrôle. Deux algorithmes coopératifs sont analysés dans [103], dont le premier est non itératif et suppose des échanges unidirectionnels entre agents, tandis que le deuxième est itératif et utilise des communications bidirectionnelles. Pour prouver la stabilité des deux architectures, les auteurs font appel à la théorie des ensembles invariants via l'utilisation d'une contrainte de stabilité. Les algorithmes sont ensuite appliqués au processus d'alkylation catalytique du benzène [104], composé par quatre réacteurs et un séparateur. Des extensions de ces travaux, prenant en compte des mesures asynchrones ou retardées ainsi que la possibilité de perte d'informations se retrouvent dans [105] et [80].

Un algorithme intéressant qui implique seulement deux échanges d'information par période d'échantillonnage est proposé dans [113, 114] pour le cas de deux sous-systèmes. Chaque agent résout son propre problème d'optimisation et ensuite partage la solution optimale locale obtenue. Après le premier échange, la procédure d'optimisation locale est répétée et la nouvelle solution partagée, puis les agents choisissent la solution qui donne la meilleure performance globale, parmi un ensemble de possibilités. L'inconvénient de l'approche vient du fait que le nombre des communications peut s'avérer énorme pour des systèmes de grande taille.

Dans les approches mentionnées précédemment, la connaissance locale des objectifs d'autres agents réduit l'aspect décentralisé de la structure de contrôle. Une alternative intéressante est l'utilisation d'un mécanisme d'agent de prix, qui permet la convergence vers l'optimum global, alors que chaque contrôleur n'a qu'une vue locale du critère. Ce type d'algorithmes repose sur différentes techniques de décomposition.

Ainsi, la loi MPC distribuée présentée dans [69] est basée sur la décomposition duale et la mise à jour des multiplicateurs de Lagrange par une méthode de sous-gradient qui repose sur les travaux de [157, 158]. La vitesse de convergence faible est le principal inconvénient de l'algorithme. Par conséquent, les auteurs proposent un critère d'arrêt de

la procédure itérative de telle sorte qu'un certain degré de sous-optimalité est garanti si la stabilité asymptotique du système en boucle fermée est assurée. L'implantation de la stratégie suppose normalement l'apparition d'un ou plusieurs agents de prix qui diffusent les valeurs des multiplicateurs vers les contrôleurs locaux en fonction des solutions locales. Une telle structure de contrôle est présentée dans [27], pour la commande d'un système de réfrigération contrôlé par des variables booléennes ou dans [97], pour la gestion d'un réseau d'eau potable. Pour une application similaire, dans [84], un agent négociateur est employé pour chaque paire de régulateurs MPC qui partage une ou plusieurs variables. Il résout un problème d'optimisation au moyen d'un algorithme d'apprentissage par renforcement. D'autres structures de coordination, dont l'idée est de remplacer chaque contrainte couplée par un terme linéaire basé sur les multiplicateurs de Lagrange, sont proposées dans [137, 135, 136], avec des applications appropriées.

Afin de gérer de manière optimale les contraintes couplées dans une approche MPC distribuée, l'article [134] s'appuie aussi sur la décomposition duale. Une solution alternative pour le même type de problème est proposée dans [47], représentée par une version de l'algorithme de Han [78] adaptée à la formulation quadratique de la fonction de coût du MPC. L'idée principale de l'algorithme de Han est de résoudre le dual du problème d'optimisation centralisée dans un environnement parallèle. Ses améliorations sur la vitesse de convergence de l'algorithme sont réalisées en utilisant des pondérations individuelles pour chaque variable duale, ainsi qu'une solution initiale non nulle [48]. L'algorithme est appliqué pour la régulation des niveaux d'eau dans un canal d'irrigation.

La manque de convergence de la décomposition duale pour le cas d'un système non linéaire composé de quatre réservoirs a motivé les auteurs de [167] pour proposer une méthode de gradient dynamique distribué, dont l'idée est d'utiliser localement une information sur le gradient du critère global. À ce stade, les conditions nécessaires ou suffisantes pour la convergence de l'algorithme représentent les pistes futures de travail.

Concernant la programmation linéaire, une stratégie prédictive de coordination basée sur la décomposition de Dantzig-Wolfe est analysée dans [34]. Afin que la méthode soit employée, les couplages entre les sous-systèmes sont négligés. La nécessité de la coordination réside dans l'existence d'une contrainte de couplage.

Plusieurs structures MPC distribuées ont été proposées pour des sous-systèmes découplés, dont l'interconnexion est réalisée par l'objectif de contrôle ou par les contraintes couplées. Une solution à ce type de problèmes est proposée dans [163], où les sorties des sous-systèmes sont couplées par une contrainte globale. Les agents résolvent les problèmes d'optimisation locaux de manière séquentielle, en échangeant les valeurs prédites des variables de couplage. Une preuve de faisabilité robuste est présentée brièvement, en supposant que les perturbations sur les sous-systèmes sont indépendantes et bornées. Une approche distribuée qui traite un problème similaire fait l'objet de l'étude dans [89], dont chaque agent calcule les séquences optimales locales ainsi que celles des voisins. Un autre algorithme développé pour la commande d'un ensemble de sous-systèmes couplés uniquement par une fonction de coût non-séparable est proposé dans [53]. La stabilité est assurée

par une contrainte, dite de compatibilité. Pourtant, cette contrainte peut conduire vers des performances différentes par rapport au cas centralisé. Les architectures distribuées utilisant des modèles découplés ont des applications intéressantes pour les problèmes de vol en formation [88, 153], l'évitement de collisions [32, 46], etc.

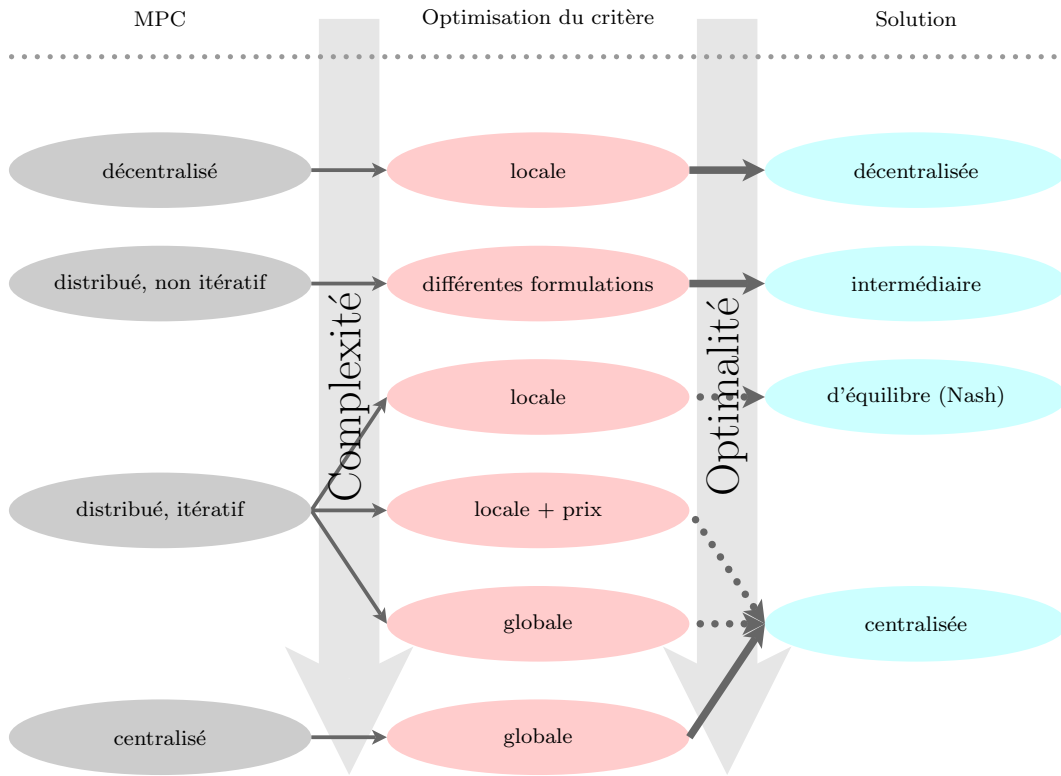


FIGURE 2.9 – Caractéristiques des différentes catégories d'algorithmes MPC

La figure 2.9 représente un schéma synthétique des structures de commande prédictive pour les systèmes de grande taille. Le choix de l'algorithme de commande est généralement la conséquence d'un compromis entre le degré d'optimalité de la solution fournie et la complexité des régulateurs.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons cité des travaux sur les méthodes de commande utilisées pour la régulation thermique dans les bâtiments. Plus spécifiquement, nous nous sommes concentrés sur les approches basées sur le contrôle classique de type TOR et PID, les méthodes d'autorégulation, les techniques de commande basées sur l'intelligence artificielle et également sur des méthodes de commande prédictives. C'est sur cette dernière classe de lois de commande que nous avons insisté, principalement en vertu de son effet anticipatif, mais également de l'optimalité de la solution par rapport à un critère d'optimisation donné.

Traditionnellement, l'architecture de commande des systèmes CVC présente une struc-

ture décentralisée. L'utilisation des régulateurs prédictifs locaux (pièce par pièce) implique le calcul, à chaque instant, d'une séquence de contrôle qui décrit le comportement futur du sous-système. Seule la première valeur est appliquée, les autres n'étant pas exploitées. Cependant, ces informations peuvent s'avérer très utiles pour les pièces voisines pour prendre en compte de manière optimale les couplages thermiques entre les pièces adjacentes. C'est une des motivations pour se diriger vers les architectures distribuées, qui connaissent un intérêt croissant dans la dernière décennie. C'est pourquoi, les principales approches de la commande prédictive distribuée ont été présentées.

L'objectif du chapitre suivant est de présenter une solution de commande de type prédictif, à critère quadratique, pour la régulation du poste de chauffage dans un bâtiment à occupation intermittente. L'approche sera tout d'abord exposée pour le cas monozone. Les idées présentées pour le cas d'une seule pièce seront généralisées pour un bâtiment multizone, pour lequel une architecture prédictive distribuée sera développée.

Chapitre 3

Commande prédictive quadratique pour la régulation thermique des bâtiments¹

Ce que l'on conçoit bien s'énonce clairement,
Et les mots pour le dire arrivent aisément.

L'art poétique

NICOLAS BOILEAU

Nous abordons dans ce chapitre le problème du contrôle thermique des bâtiments par des techniques de commande prédictive pour lesquelles l'intermittence de l'occupation des pièces est prise en compte au sein d'un critère quadratique. Notre approche repose sur une modification de la formulation du problème d'optimisation, qui devient ainsi dynamique, en fonction du profil d'occupation. La démarche est tout d'abord présentée dans le cas d'une seule pièce, puis est étendue dans un second temps à un ensemble de pièces pour lequel la commande est élaborée de manière distribuée.

3.1 Introduction

Une grande partie des locaux du secteur tertiaire n'est utilisée qu'une dizaine d'heures par jour [61]. En comptant en plus les jours fériés, les week-ends et les vacances, le taux d'occupation ne dépasse pas 30 %. Il en est de même pour le secteur résidentiel, même si le taux d'occupation est légèrement plus important. Que ce soit pour le tertiaire ou le résidentiel, assurer le confort thermique n'a d'intérêt que si les pièces sont occupées. Pour ces deux grandes classes d'immeubles, il devient donc important d'assurer les conditions de confort thermique lorsque cela s'avère nécessaire.

La pratique de l'intermittence du contrôle thermique dans les bâtiments à occupation discontinue est ainsi un des moyens les plus efficaces pour réaliser des économies d'énergie

1. Des parties de ce chapitre peuvent être retrouvées dans [128, 129, 121, 125].

importantes. Il faut, pour ce faire, gérer au mieux les transitions absence / présence. Ainsi, les lois de commande prédictives présentées dans ce chapitre ont été conçues dans cette optique.

L'organisation de ce chapitre est la suivante. Une première partie s'attache à présenter le contexte du contrôle intermittent de la température dans les bâtiments, avec une première hypothèse de travail : la connaissance a priori du profil d'occupation des pièces. Dans une deuxième partie, nous modifions la loi de commande GPC classique afin de mieux répondre aux objectifs de commande : une première modification est l'intégration du profil d'occupation dans le critère prédictif. La loi de commande résultante est alors implantée sous la forme d'un régulateur de type RST dont les coefficients des trois polynômes sont variables dans le temps. Une seconde modification est l'utilisation d'une fenêtre de prédiction, dont la taille varie en fonction du profil d'occupation.

Les idées présentées pour le cas d'une seule pièce seront dans une troisième partie adaptées à un ensemble de pièces. L'utilisation de contrôleurs prédictifs locaux indépendants implique le calcul d'une séquence de commande, dont seul le premier élément est utilisé. Nous proposons alors une commande distribuée, dans laquelle les séquences prédites de températures locales sont échangées entre les agents locaux pour améliorer les performances globales du bâtiment. L'approche repose sur l'utilisation des modèles locaux couplés par les sorties, ce qui permet de gérer également des horizons de prédiction locaux de taille différente.

En revenant à l'épigraphe de ce chapitre, nous voulons nous excuser auprès de nos lecteurs pour les notations difficiles à suivre de la troisième partie. La gestion des horizons de prédiction dynamiques, des multiples sous-systèmes, des interactions entre eux et des itérations de l'algorithme distribué nous a menés à l'utilisation de plusieurs indices qui alourdissent les équations.

L'efficacité des approches proposées sera analysée par simulation tant pour une seule pièce que pour un ensemble de trois pièces. Dans ce chapitre, les équipements de chauffage considérés sont des convecteurs électriques.

3.2 Contexte

Une première condition nécessaire pour la gestion de l'intermittence est la connaissance du profil futur d'occupation. De manière pratique, cette hypothèse de travail n'est pas en soi une condition aberrante : les horaires de travail sont connus, de même, il devient courant de régler soi-même un programmeur journalier voire hebdomadaire pour une utilisation domestique du chauffage. Certaines études ont été proposées pour définir un modèle de prédiction de l'occupation des zones, construit à partir de données fournies par différents capteurs de présence [186].

Hypothèse 3.2.1 *Tout au long de ce mémoire, nous supposons que le profil d'occupation future des zones est connu, au moins sur l'intervalle de temps défini par la fenêtre de*

prédiction du contrôleur. Il sera décrit par un vecteur booléen (voir le paragraphe 3.3.1).

L'objectif de contrôle peut être ainsi scindé en deux. Durant les périodes d'occupation, la commande doit maintenir la sortie (température mesurée) autour d'une valeur de consigne. Une des caractéristiques d'un bâtiment est son inertie thermique. *Il est alors intéressant d'utiliser cette inertie pour couper le chauffage avant la fin de la période d'occupation*, sans perturber le confort. À l'inverse, pendant les périodes d'inoccupation, le temps de relance nécessaire pour obtenir une température désirée va dépendre de l'état du système (température de l'air, des parois, etc.), de ses caractéristiques (structure, matériaux, équipements de chauffage) et des perturbations (internes et externes). Ce temps peut avoir des variations importantes, de quelques minutes à plusieurs heures. *L'effet prédictif a pour objectif d'optimiser ce temps*, en gérant le compromis entre la consommation énergétique et le confort de l'occupant. Généralement, une consigne de température basse est imposée pendant les périodes d'inoccupation pour réduire la consommation énergétique. Les économies liées à une bonne gestion de l'intermittence sont généralement d'autant plus grandes que la consigne de température durant l'inoccupation est basse [185]. Cependant, pour certains bâtiments à très grande inertie thermique, l'intermittence du chauffage peut apporter des économies peu significatives.

Cette stratégie de contrôle repose ainsi sur un problème d'optimisation de la période de préchauffage, nécessaire pour la remontée en température pour atteindre les exigences de confort. Une remontée sousestimée amène alors à un inconfort en début de période d'occupation. À l'inverse, une anticipation surestimée implique alors un gaspillage énergétique.

La plupart des régulateurs couramment utilisés possèdent des solutions simples pour surmonter ce problème d'optimisation. Mentionnons ici la stratégie de relance à heure fixe ou le calcul du début de la relance en fonction de la température extérieure et / ou intérieure. Ces techniques sont généralement élaborées empiriquement par les fabricants et conduisent à une surestimation des périodes de préchauffage, pour préserver le confort en début d'occupation [61].

Des approches de type IA, comme la logique floue [62] ou les réseaux de neurones [191] sont associées habituellement à des mécanismes d'apprentissage pour déterminer le moment optimal pour déclencher le préchauffage. Leur principal avantage, évoqué par les auteurs, repose sur le fait que le contrôleur n'a pas besoin d'un modèle mathématique du processus. Les informations qualitatives concernant le comportement du système, issues de l'expertise humaine ou de l'expérience, sont utilisées dans la phase de conception de la loi de commande. En revanche, en général, les informations quantitatives, issues des entrées-sorties du système à contrôler, sont assimilées par le correcteur dans un processus itératif d'apprentissage. Par exemple, la procédure d'apprentissage proposée dans [61] est basée sur l'écart entre la durée de relance calculée par le contrôleur et la durée réelle constatée a posteriori. Malgré tout, un grand nombre de données est nécessaire afin que le régulateur offre des solutions précises.

Disposant d'un modèle mathématique du système, la commande prédictive peut exploiter de manière optimale la connaissance du profil d'occupation. Traditionnellement, le critère de la commande prédictive a une forme quadratique, qui simplifie l'analyse, mais également l'implantation du contrôleur. Par conséquent, en formulant le problème d'optimisation sans contraintes, la solution optimale peut être déterminée de manière analytique. Tant que le modèle de prédiction est linéaire, le régulateur équivalent possède la même propriété, ce qui rend possible une mise en oeuvre sous forme polynomiale de type RST.

3.3 Commande prédictive à critère dynamique

Pour bien comprendre tout l'intérêt de cette approche, il est important dans un premier temps de souligner les inconvénients de l'utilisation classique de la commande prédictive (2.3), pour le problème de régulation intermittente du chauffage. La figure 3.1 illustre le comportement de la température, en appliquant la commande prédictive classique.

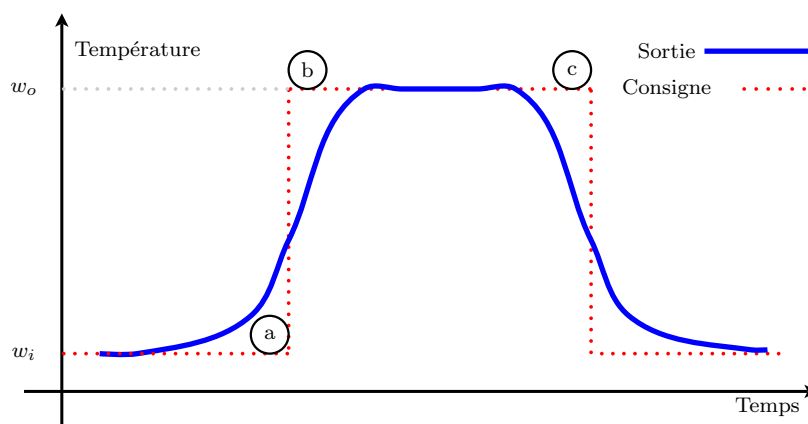


FIGURE 3.1 – Utilisation d'une commande prédictive classique

Comme on peut le constater, en supposant que la trajectoire future à suivre est connue, l'aspect anticipatif (a) est bien présent. En fonction des réglages, le suivi de consigne peut être amélioré pour réduire le temps nécessaire pour remonter la température, qui sera toutefois limité par la puissance maximale du poste de chauffage. Un second problème vient s'ajouter : le fait d'imposer une consigne en période d'inoccupation, w_i , produit un retard de la relance (b), mais également une anticipation à la fin de la période d'occupation (c). Par conséquent, pour l'utilisateur, ces phénomènes viennent perturber son confort.

On peut penser à décaler la consigne pour atteindre la consigne haute w_o dès le début de l'occupation. En se basant sur cette idée, les auteurs de [52] ont réduit l'horizon de prédiction du contrôleur GPC, nécessaire pour assurer le temps de préchauffage. Plus récemment, une stratégie de pondération de l'erreur de suivi a été présentée dans [67], cette fois pour l'évaluation de la charge thermique optimale. Selon la méthode présentée, la pondération sur l'erreur est choisie égale à zéro, avant le début de l'occupation, pour un certain intervalle appelé temps de relaxation. Par conséquent, la durée de cet intervalle

définit la durée de la relance. Une période de relaxation élevée produit une commande lisse et un pic de consommation réduit, par contre l'énergie nécessaire à la remontée de la température augmente. Ainsi, la gestion optimale de la période de préchauffage est reformulée dans un problème d'optimisation de l'intervalle de relaxation.

La démarche proposée dans les paragraphes suivants est basée sur la prise en compte du profil d'occupation dans la formulation de la fonction de coût.

3.3.1 Vecteur d'occupation

En considérant que le confort thermique est défini uniquement pendant les périodes d'occupation, on peut imaginer pénaliser le terme exprimant l'écart entre la température de confort et la température prédite uniquement pendant les instants d'occupation. Cette idée est également utilisée dans un article contemporain à nos travaux [154].

Le critère à minimiser doit donc prendre en compte les périodes d'occupation. Par conséquent, nous proposons l'introduction du vecteur dynamique suivant :

$$\delta(k) = \begin{bmatrix} \delta(k + N_1) & \delta(k + N_1 + 1) & \cdots & \delta(k + N_2) \end{bmatrix}^T, \quad (3.1)$$

qui décrit le profil d'occupation de la pièce pendant l'horizon de prédiction considéré. Chaque composante du vecteur d'occupation est définie comme suit :

$$\delta(k + j) = \begin{cases} 1, & \text{pour } k + j \in \text{Occupation} \\ 0, & \text{pour } k + j \in \text{Inoccupation} \end{cases}, \forall j \in \{N_1, \dots, N_2\}. \quad (3.2)$$

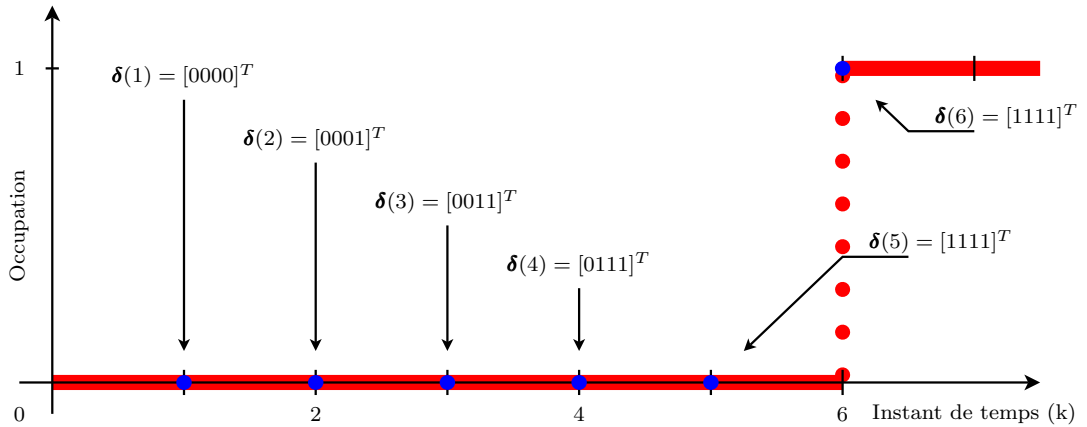


FIGURE 3.2 – Construction du vecteur d'occupation, $\delta(k)$, pour $N_1 = 1$ et $N_2 = 4$

Notation 3.3.1 Dans la suite de ce document on utilisera la notation $\mathbb{N}_i^j$ pour désigner l'ensemble des entiers consécutifs naturels $\{i, i + 1, \dots, j\}$.

La figure 3.2 illustre la construction du vecteur (3.1), pour un exemple de profil d'occupation. Plusieurs méthodes peuvent être envisagées pour connaître la dynamique des périodes d'occupation :

- les profils d'occupation sont introduits directement par les utilisateurs,
- les régulateurs ont accès aux agendas électroniques des occupants,
- des prévisions d'occupation sont réalisées en fonction des données passées, mesurées par les capteurs de présence [186].

3.3.2 Définition du critère

Dans l'approche prédictive classique, c'est la variation de l'effort, Δu , que l'on cherche à minimiser. En ce qui nous concerne, c'est la consommation que l'on désire diminuer, c'est-à-dire u directement. En pondérant les erreurs prédites par les éléments du vecteur $\delta(k)$, la fonction de coût à optimiser a la formulation suivante :

$$J(k) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(k+j)[\hat{y}(k+j|k) - w(k+j)]^2 + \lambda \sum_{j=1}^{N_2} u^2(k+j-1|k), \quad (3.3)$$

dans laquelle N_1 et N_2 définissent respectivement la limite inférieure et la limite supérieure de l'horizon de prédiction, $\hat{y}(k+j|k)$ est la sortie (température de la pièce) prédite à l'instant courant, k , pour l'instant $k+j$ et $w(k+j)$ est la consigne future à suivre (la température de confort) sur l'horizon glissant. λ est le coefficient de pondération sur la commande, $u(k)$, qui exprime la puissance de chauffage et N_u représente l'horizon de prédiction sur la commande.

En utilisant la fonction de coût (3.3), on donne de l'importance au suivi de consigne en température dès que la pièce est occupée. La minimisation de la consommation énergétique reste un objectif permanent.

Remarque 3.3.1 *Usuellement, l'horizon de prédiction sur la sortie est supérieur à l'horizon de commande et on suppose que :*

$$u(k+j|k) = u(k+N_u-1|k), \quad \forall j \in \mathbb{N}_{N_u}^{N_2-1}, \quad (3.4)$$

ce qui permet de réduire la complexité du régulateur. Malgré tout, ce blocage des commandes futures diminue l'optimalité de la solution par rapport au cas $N_u = N_2$.

3.3.3 Élaboration de la loi de commande

Maintenant que notre critère a été clairement défini, nous présentons dans cette section les étapes qui permettent d'aboutir au contrôle prédictif optimal : la définition du modèle, la construction du prédicteur puis le calcul de la commande.

3.3.3.1 Modèle de prédiction

Dans un premier temps, représentons le processus par un modèle linéaire entrée-sortie monovariable. Celui-ci peut alors se mettre sous une forme ARX, représentée par

l'équation :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1) + \xi(k), \quad (3.5)$$

dans laquelle $u(k)$ et $y(k)$ sont respectivement l'entrée et la sortie du modèle, $\xi(k)$ est un bruit blanc centré et q^{-1} l'opérateur de retard. $A(q^{-1})$ et $B(q^{-1})$ sont des polynômes définis par :

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a} \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b} \end{cases}. \quad (3.6)$$

3.3.3.2 Prédicteur optimal

À partir du modèle décrit par l'équation (3.5), en se basant sur les idées présentées dans [37], on décompose la sortie prédite pour l'instant $k+j$ en réponse libre et réponse forcée. Elle peut se mettre alors sous la forme suivante :

$$y(k+j|k) = \underbrace{F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})u(k-1)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{G_j(q^{-1})u(k+j-1|k) + J_j(q^{-1})\xi(k+j)}_{\text{réponse forcée}}, \quad (3.7)$$

dans laquelle les polynômes F_j , G_j , H_j et J_j sont obtenus de manière unique, par la résolution des deux équations diophantiennes suivantes :

$$\begin{aligned} A(q^{-1})J_j(q^{-1}) + q^{-j}F_j(q^{-1}) &= 1, \\ G_j(q^{-1}) + q^{-j}H_j(q^{-1}) &= B(q^{-1})J_j(q^{-1}), \end{aligned} \quad (3.8)$$

dont les degrés des quatre polynômes sont : degré $[J_j(q^{-1})] = j-1$, degré $[F_j(q^{-1})] = n_a - 1$, degré $[G_j(q^{-1})] = j-1$ et degré $[H_j(q^{-1})] = n_b - 1$.

Pour obtenir le prédicteur optimal, il suffit alors de considérer que la meilleure prédiction du bruit, $\xi(k)$, est sa moyenne (nulle ici), et l'on obtient son équation :

$$\hat{y}(k+j|k) = F_j(q^{-1})y(k) + H_j(q^{-1})u(k-1) + G_j(q^{-1})u(k+j-1|k). \quad (3.9)$$

3.3.3.3 Minimisation du critère

Réécrivons l'équation (3.3) sous forme matricielle :

$$J(k) = [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{w}(k)]^T \mathbf{\Delta}(k) [\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{w}(k)] + \mathbf{u}^T(k) \mathbf{\Lambda} \mathbf{u}(k), \quad (3.10)$$

avec les notations :

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \hat{y}(k+N_1|k) & \hat{y}(k+N_1+1|k) & \dots & \hat{y}(k+N_2|k) \end{bmatrix}^T, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} w(k+N_1) & w(k+N_1+1) & \dots & w(k+N_2) \end{bmatrix}^T, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} u(k|k) & u(k+1|k) & \cdots & u(k+N_u-1|k) \end{bmatrix}^T, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{\Delta}(k) = \text{diag} \{ \boldsymbol{\delta}(k) \}, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & \lambda & \lambda(N_2 - N_u + 1) \end{bmatrix}^T \right\}. \quad (3.15)$$

L'expression du dernier élément diagonal de la matrice $\mathbf{\Lambda}$ est la conséquence de la contrainte (3.4), qui inclut la pénalisation pour les commandes bloquées.

Notation 3.3.2 On rappelle que tout au long de ce mémoire nous considérons les notations suivantes : une lettre minuscule ou majuscule en caractère normal désigne un scalaire (a, α, A), une lettre minuscule en caractère gras désigne un vecteur ($\mathbf{b}, \boldsymbol{\beta}$) et une lettre majuscule en caractère gras pour matrice ($\mathbf{C}, \mathbf{\Gamma}$).

À partir de l'équation de prédiction (3.9), on peut écrire la séquence de sorties futures sous la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \mathbf{f}(q^{-1})y(k) + \mathbf{h}(q^{-1})u(k-1), \quad (3.16)$$

avec les vecteurs polynomiaux :

$$\mathbf{f}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} F_{N_1}(q^{-1}) \\ F_{N_1+1}(q^{-1}) \\ \vdots \\ F_{N_2}(q^{-1}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h}(q^{-1}) = \begin{bmatrix} H_{N_1}(q^{-1}) \\ H_{N_1+1}(q^{-1}) \\ \vdots \\ H_{N_2}(q^{-1}) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

et la matrice :

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \cdots & g_0 & 0 & \cdots & 0 \\ g_{N_1} & g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \cdots & g_0 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_2-1} & g_{N_2-2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{i=0}^{N_2-N_u} g_i \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Remarque 3.3.2 Les coefficients $g_i, \forall i \in \mathbb{N}_0^{N_2-1}$ de la matrice $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{(N_2-N_1+1) \times N_u}$ issus des polynômes $G_j(q^{-1}) = g_0 + g_1q^{-1} + \cdots + g_{j-1}q^{-j+1}$, correspondent à ceux de la réponse impulsionnelle du modèle. En revanche, pour la formulation du critère en minimisant Δu^2 à la place u^2 , les coefficients résultants décrivent la réponse indicielle. Pour $N_u = N_2 - N_1 + 1$, la matrice $\mathbf{G}$ possède une structure de type Toeplitz. En réduisant l'horizon de commande, selon (3.4), la dernière colonne de la matrice devient la somme des dernières $N_2 - N_u + 1$ colonnes de la matrice de Toeplitz.

Dans les développements à venir, on introduit la notation $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{(N_2-N_1+1) \times 1}$ pour désigner la séquence de réponse libre du système sur l'horizon de prédiction considéré :

$$\boldsymbol{\gamma}(k) = \mathbf{f}(q^{-1})y(k) + \mathbf{h}(q^{-1})u(k-1). \quad (3.19)$$

Reportons l'équation (3.16) et (3.19) dans (3.10), il vient alors :

$$J(k) = [\mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\gamma}(k) - \mathbf{w}(k)]^T \boldsymbol{\Delta}(k) [\mathbf{G}\mathbf{u}(k) + \boldsymbol{\gamma}(k) - \mathbf{w}(k)] + \mathbf{u}^T(k) \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{u}(k). \quad (3.20)$$

La solution optimale de la minimisation du critère (3.20) est obtenue de manière analytique par la résolution de l'équation :

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \mathbf{u}(k)} = 0, \quad (3.21)$$

et peut s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{u}^*(k) = (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k) \mathbf{G} + \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k) (\mathbf{w}(k) - \boldsymbol{\gamma}(k)). \quad (3.22)$$

Le vecteur de contrôle optimal est maintenant calculé, mais seule la première composante est appliquée au système. La loi de commande prédictive prend alors la forme suivante :

$$u^*(k) = \boldsymbol{\xi}(k) (\mathbf{w}(k) - \boldsymbol{\gamma}(k)), \quad (3.23)$$

avec

$$\boldsymbol{\xi}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Xi}(k), \quad (3.24)$$

$$\boldsymbol{\Xi}(k) = (\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k) \mathbf{G} + \boldsymbol{\Lambda})^{-1} \mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k). \quad (3.25)$$

Remarque 3.3.3 L'existence de la solution optimale $\mathbf{u}^*(k)$ est conditionnée par le fait que la matrice $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k) \mathbf{G} + \boldsymbol{\Lambda}$ est non singulière. Ce qui signifie que cette matrice doit être strictement définie positive, autrement dit, les matrices $\boldsymbol{\Delta}(k)$ et $\boldsymbol{\Lambda}$ ne peuvent pas être nulles simultanément. Sachant que le vecteur $\boldsymbol{\delta}(k)$, qui définit la matrice $\boldsymbol{\Delta}(k)$, peut être nul, alors la condition nécessaire pour l'existence du minimum est donnée par :

$$\lambda > 0. \quad (3.26)$$

La formulation classique minimise l'incrément de la commande et introduit ainsi une action intégrale, ce qui assure une erreur statique nulle pour des consignes et perturbations constantes.

Dès lors que u est considéré ici, aucune action intégrale n'est introduite dans le régulateur, engendrant une erreur statique à prendre en compte quand $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{1}_{(N_2-N_1+1) \times 1}$. On peut alors déterminer le coefficient de pondération λ qui assure une valeur donnée de l'erreur statique désirée.

Proposition 3.3.1 *Soit le système monovarié défini par l'équation*

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k-1), \quad (3.27)$$

contrôlé par la loi de commande (3.23). Si le vecteur d'occupation $\delta(k) = \mathbf{1}_{(N_2-N_1+1) \times 1}$, alors l'erreur stationnaire relative de suivi en boucle fermée est :

$$\epsilon_r = \frac{\lambda}{K^2 + \lambda}, \quad (3.28)$$

où K est le gain statique du système : $K = \sum_{i=0}^{n_b} b_i / (1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i)$.

Preuve À l'équilibre, toutes les variables sont constantes. De plus, le critère peut être exprimé comme la fonction de coût sur un seul pas de prédiction, multipliée par la taille de la fenêtre de prédiction, alors :

$$J = (N_2 - N_1 + 1) ((\hat{y} - w)^2 + \lambda u^2), \quad (3.29)$$

En remplaçant la sortie prédite stationnaire par $\hat{y} = Ku$ dans (3.29), on obtient la commande optimale à l'équilibre, par la résolution de l'équation $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$, sous la forme :

$$u^* = \frac{wK}{K^2 + \lambda}. \quad (3.30)$$

L'erreur stationnaire relative de suivi peut s'écrire en fonction de la commande optimale u^* par la relation :

$$\epsilon_r = \frac{w - Ku^*}{w}. \quad (3.31)$$

Le résultat de la proposition est obtenu en reportant l'équation (3.30) dans (3.31).

3.3.3.4 Mise en oeuvre sous forme RST dynamique

Comme nous l'avons déjà évoqué dans l'introduction du chapitre, un autre avantage apporté par la commande prédictive généralisée est que, pour la formulation sans contraintes, la loi de commande est linéaire. Elle peut se mettre sous la forme plus classique d'un régulateur RST, dont la structure est rappelée figure 3.3. En effet, l'équation (3.23) peut s'exprimer de manière suivante :

$$S(q^{-1})u^*(k) = -R(q^{-1})y(k) + T(q)w(k), \quad (3.32)$$

dans laquelle les trois polynômes S , R et T sont dynamiques et définis par :

$$\begin{aligned} S(q^{-1}) &= 1 + \boldsymbol{\xi}(k)\mathbf{h}(q^{-1})q^{-1}, \\ R(q^{-1}) &= \boldsymbol{\xi}(k)\mathbf{f}(q^{-1}), \\ T(q) &= \boldsymbol{\xi}(k) \begin{bmatrix} q^{N_1} & q^{N_1+1} & \dots & q^{N_2} \end{bmatrix}^T, \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec les dimensions

$$\text{degré}[S(q^{-1})] = n_b, \text{degré}[R(q^{-1})] = n_a - 1, \text{degré}[T(q)] = N_2. \quad (3.34)$$

Remarque 3.3.4 La non causalité du polynôme T produit l'effet anticipatif du correcteur à condition que la séquence future de consigne $w(k)$ soit disponible. En utilisant le résultat de la proposition 3.3.1 on peut obtenir un gain statique égal à 1, pour le système nominal, pendant l'occupation, $\delta(k) = \mathbf{1}_{(N_2-N_1+1) \times 1}$. Ceci peut se faire par la modification des coefficients du polynôme non causal, qui devient ainsi : $T'(q) = \frac{K^2 + \lambda}{K^2} T(q)$. On s'intéresse à avoir un gain statique égal à 1 que pendant les périodes d'occupation, parce que autrement on est soit dans la période d'inoccupation quand la commande est nulle, soit dans une période de transition (inocccpation-occupation ou vice-versa), quand le régulateur n'est pas stationnaire.

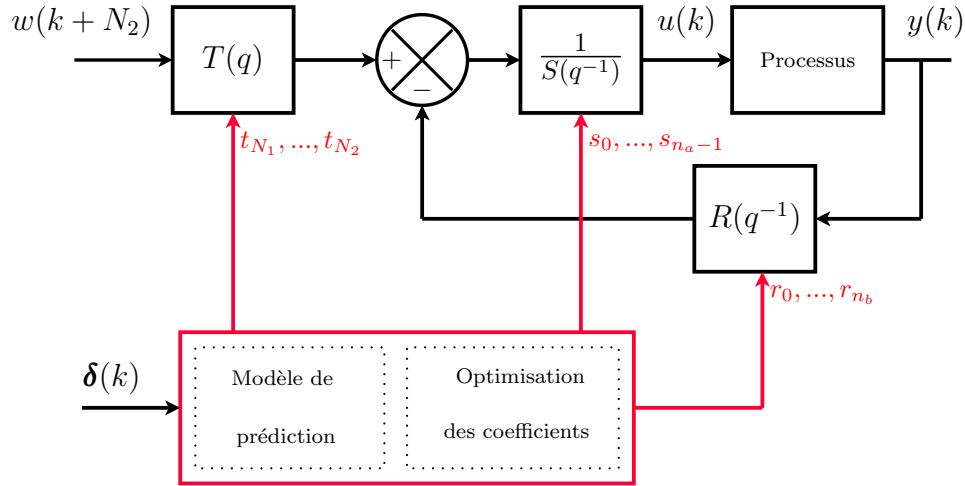


FIGURE 3.3 – Structure du schéma de contrôle

Si la démarche proposée dans cette section permet d'obtenir une solution analytique au problème d'optimisation, l'implantation de cette loi de commande est également un point crucial et ne doit pas nécessiter un effort de calcul trop important. Rappelons que notre approche aboutit à définir un régulateur RST dynamique, ce qui signifie qu'à chaque période d'échantillonnage les coefficients des polynômes doivent être mis à jour. Mais, en regardant de plus près, on peut remarquer qu'un grand nombre de calculs peuvent être effectués hors ligne, c'est-à-dire une fois pour toutes. C'est le cas notamment des vecteurs polynomiaux $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ et des matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{\Lambda}$. Finalement, seules les périodes proches des changements de mode nécessitent un calcul en ligne et une mise à jour des coefficients, et ce calcul correspond plus précisément à l'inversion de la matrice strictement définie positive $\mathbf{G}^T \mathbf{\Delta}(k) \mathbf{G} + \mathbf{\Lambda}$, qui peut être déterminée rapidement par l'algorithme de Choleski par exemple, peu coûteux en temps de calcul.

Si l'inversion de cette matrice s'avère un inconvénient pour l'implantation de la commande prédictive présentée, elle peut être remplacée par un bloc de mémoire qui stocke

les coefficients des trois polynômes calculés pour toutes les séquences possibles du vecteur d'occupation, δ . Ainsi, la capacité de mémoire nécessaire est donnée par :

$$c_t = 2^{N_2 - N_1 + 1} (N_2 - N_1 + n_a + n_b + 2) c_c, \quad (3.35)$$

où c_c représente le nombre de bits nécessaire pour stocker une seule valeur d'un coefficient.

Ce volume de mémoire augmente exponentiellement avec la dimension de l'horizon de prédiction. Pourtant, la plupart des séquences possibles du vecteur d'occupation décrivent des profils d'occupation peu probables. Ainsi, en imposant des contraintes sur la durée minimale des périodes d'occupation et / ou d'inoccupation on peut réduire significativement la capacité requise. Par exemple, cette capacité est réduite à

$$c'_t = 2 (N_2 - N_1 + 2) (N_2 - N_1 + n_a + n_b + 2) c_c, \quad (3.36)$$

en supposant qu'aucune période d'occupation et d'inoccupation n'aient une durée inférieure à la dimension de l'horizon de prédiction.

C'est là un autre point fort de la commande prédictive telle que nous l'avons présentée, à savoir un grand nombre de calculs à effectuer hors ligne, pour un effort en temps réel minime. Des points qui restent encore en suspens sont dans un premier temps le réglage des paramètres du contrôleur (choix des horizons de prédiction et de la pondération sur la commande) puis dans un second temps l'efficacité de la démarche développée. Ces aspects sont analysés dans la section suivante.

3.3.4 Réglage des paramètres

Si la démarche que nous avons présentée précédemment est générique et peut s'adapter à différents systèmes de chauffage, le réglage des paramètres reste, comme tout dispositif de contrôle, propre au système étudié. Pour analyser les effets de ces paramètres, nous avons pris l'exemple d'un bâtiment virtuel monozone. Sa configuration est décrite dans l'Annexe A. Pour nos manipulations, nous nous sommes servis de la boîte à outils SIMBAD, développée par le Centre Scientifique et Thermique du Bâtiment (CSTB). La bibliothèque de modèles SIMBAD est brièvement présentée dans l'Annexe A. Les modèles MATLAB/Simulink fournis par cette bibliothèque seront utilisés comme des modèles de simulation.

3.3.4.1 Indices de performance

Pour vérifier l'efficacité des lois de commande présentées dans ce chapitre et les comparer à d'autres méthodes, nous introduisons deux indicateurs de performance. Ces deux indices traduisent l'énergie consommée et le confort des occupants.

Le premier indicateur, E_c , décrit la consommation énergétique du poste de chauffage,

en [kWh], pendant la période de simulation considérée :

$$E_c = \sum_{k=k_0}^{k_f} \frac{T_s P_n u(k)}{3600}, \quad (3.37)$$

dont k_0 et k_f définissent l'instant initial et final de l'intervalle de simulation. La commande u représente la puissance électrique normalisée, T_s est la période d'échantillonnage du système, tandis que P_n est la puissance nominale du convecteur, exprimée en [kW].

Le deuxième indice mesure la qualité de la régulation du point de vue du suivi de consigne et représente l'indicateur du confort thermique dans le bâtiment. Mentionnons cependant que le confort thermique est généralement basé sur le ressenti des occupants. Pourtant les critères connus sous l'appellation de Vote Moyen Prévisible (PMV - Predicted Mean Vote) et Pourcentage Prévisible d'Insatisfaits (PPD - Percentage of Persons Dissatisfied) [56] nécessitent la mesure d'autres variables qui ne sont pas contrôlées par le poste de chauffage considéré. Par conséquent, l'indice de confort que nous avons choisi mesure la qualité de la régulation du point de vue du suivi de consigne, mais uniquement lors des périodes d'occupation de la zone, ce qui donne, en [$^{\circ}\text{Ch}$] :

$$I_c = \sum_{k=k_0}^{k_f} \frac{T_s \cdot \delta(k) |y(k) - w(k)|}{3600}. \quad (3.38)$$

Maintenant que ces indicateurs ont été clairement définis, l'étape suivante consiste à présenter le modèle de commande, puis le réglage des paramètres du contrôleur, pour que ces indicateurs soient les meilleurs (les plus faibles) possibles.

3.3.4.2 Modèle de simulation et modèle de commande

Pour les modèles de simulation, la précision est peut-être le principal indice de performance. Cependant, la simplicité des modèles utilisés au sein des régulateurs (modèles de commande) pour prédire le comportement du processus est un facteur important. Ceci permet à la fois une implantation peu coûteuse du contrôleur, mais également une procédure d'identification moins complexe (moins de paramètres à identifier). Le modèle fourni par la bibliothèque SIMBAD sera notre modèle de simulation. La description du bâtiment virtuel simulé est présentée dans l'Annexe A.

Comme modèle de commande, nous proposons l'utilisation d'un modèle linéaire du second ordre. Ce type de modèle met en évidence les deux constantes de temps principales présentes dans la dynamique thermique des bâtiments : une constante de temps faible qui décrit la dynamique de la température de l'air de la zone, T_a et l'autre, plus élevée, qui est associée à la dynamique de la température moyenne des parois T_w . L'utilisation de ce modèle pour la commande des systèmes de chauffage date de la fin des années 80 [41]. Des travaux plus récents se sont orientés vers des procédures spécifiques d'identification qui prennent en compte l'existence de ces deux constantes de temps. Dans [116], par exemple,

les auteurs comparent trois méthodes d'identification pour obtenir les paramètres d'un modèle de type ARX. Leurs résultats mettent en évidence l'efficacité d'une procédure d'identification à deux échelles de temps, par rapport à une méthode des moindres carrés. Les modèles de régression sont fréquemment adoptés pour l'identification de la dynamique du système thermique. Dans [63], deux modèles du premier ordre sont identifiés pour prédire la température et l'humidité. Des modèles identifiés de type ARX et ARMAX de différents ordres sont comparés dans [164], en concluant que les meilleurs modèles d'identification pour le bâtiment sont ceux d'ordre 2 et 3. Un modèle ARX qui intègre la commande du poste de chauffage, mais également celles de la ventilation et du store est proposé dans [110]. T. Y. Chen [33] utilise deux modèles ARX pour la commande prédictive d'un plancher chauffant à grande inertie (un pour le jour et l'autre pour la nuit). Bien que le fait que les modèles de régression adoptés dans les travaux mentionnés comportent plusieurs entrées (puissance de chauffe, température extérieure, rayonnement solaire, humidité, vitesse du vent, etc.), nous utiliserons dans la suite uniquement deux entrées : la puissance du convecteur électrique et la température extérieure. Ce choix est motivé par le fait que l'objectif est d'étudier les performances de la stratégie de commande prédictive à critère dynamique, présentée dans la partie 3.3 et non l'apport des prévisions météo sur les performances du système. Une telle analyse peut être retrouvée dans le rapport du projet OptiControl [76].

Après simulations et phases d'identification, le modèle de commande obtenu est :

$$\begin{aligned} y(k) = & 1,7360y(k-1) - 0,7378y(k-2) + \\ & 1,8443u(k-1) - 1,7825u(k-2) + \\ & 0,0155T_{ext}(k-1) - 0,0139T_{ext}(k-2), \end{aligned} \quad (3.39)$$

où T_{ext} est la température de l'air extérieur, en °C. Les valeurs futures de la température extérieure nécessaires dans l'équation de prédiction sont considérées constantes et égales à la température mesurée à l'instant courant, $T_{ext}(k)$. La prise en compte de l'influence de la température extérieure dans le modèle de commande implique une légère modification de la structure du régulateur polynomial, par l'apparition d'un élément de type feedforward (voir figure 3.4), décrit par le polynôme :

$$V(q^{-1}) = \boldsymbol{\xi}(k)(q^{-1}\mathbf{h}'(q^{-1}) + \mathbf{g}'), \quad (3.40)$$

avec

$$\mathbf{g}' = \left[\sum_{i=0}^{N_1-1} g'_i \quad \cdots \quad \sum_{i=0}^{N_2-1} g'_i \right]^T, \quad (3.41)$$

où le vecteur polynomial $\mathbf{h}'$ et les coefficients g'_i sont calculés de manière similaire à (3.17) et (3.18), pour le transfert $T_{ext} \rightarrow y$. Les performances du correcteur augmenteraient si une prévision des températures extérieures sur l'horizon de prédiction était disponible, et par conséquent le polynôme V était non causal.

Les périodes d'échantillonnage des régulateurs discrets de type prédictif pour le contrôle

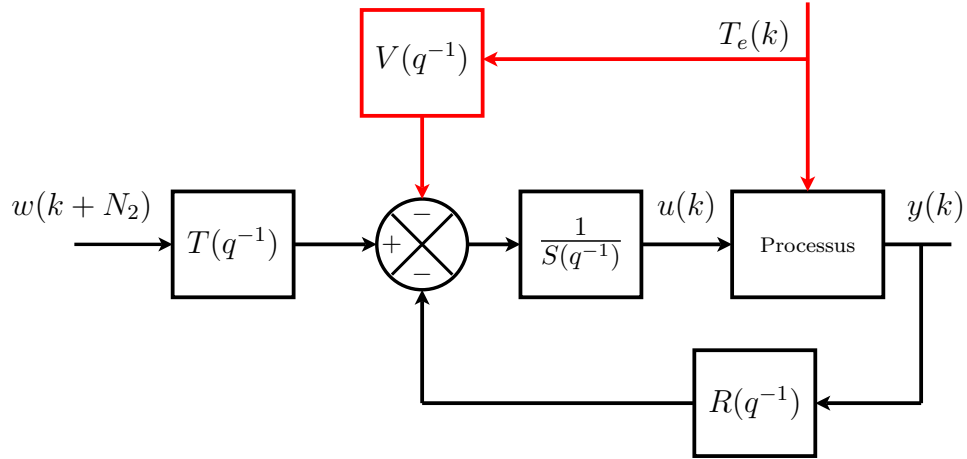


FIGURE 3.4 – Structure du régulateur polynomial avec la partie feedforward

du poste de chauffage des bâtiments, utilisées dans la littérature, varient dans une plage relativement importante. On retrouve ainsi des régulateurs discrets, avec $T_s = 5\text{min}$ [107], $T_s = 10\text{min}$ [52], $T_s = 20\text{min}$ [73] ou $T_s = 30\text{min}$ [75], tandis que les régulateurs proposés plus récemment ont un pas de temps égal à une heure [70, 112, 147, 140]. Pour le modèle (3.39) la période d'échantillonnage choisie est égale à 30min, ce qui représente pour notre cas d'étude un bon compromis entre les performances de contrôle et l'effort de calcul.

3.3.4.3 Étude sur l'influence des paramètres de réglage

Les systèmes de chauffage sont caractérisés par une forte inertie et des dynamiques très lentes. Ainsi, pour atteindre la température de confort en début d'occupation, il est nécessaire d'anticiper suffisamment à l'avance. Pour préchauffer la zone, le régulateur prédictif dispose d'une période d'action égale à la durée de l'horizon de prédiction. Par conséquent, le choix de la limite supérieure de l'horizon de prédiction, N_2 , est lié à la période de préchauffage nécessaire, dans un cas peu favorable (température intérieure et / ou extérieure basse). La valeur choisie dans nos manipulations est $N_2 = 16$, ce qui correspond à une période de prédiction de 8h. Cet intervalle de temps est suffisant pour remonter la température de 10°C jusqu'à 20°C , à une température extérieure constante $T_e = 10^\circ\text{C}$, avec une puissance de chauffe de 1,2kW.

Nous nous proposons ensuite d'étudier a posteriori l'influence des paramètres N_u et λ sur les performances du système de commande. La figure 3.5 illustre l'impact de ces paramètres sur les deux indices de performance, (3.37) et (3.38), sur une journée de simulation, avec une période d'occupation de 9h à 19h.

On observe une tendance générale : la diminution de la pondération λ engendre un niveau de confort plus élevé, mais avec une consommation plus importante. Des valeurs supérieures à $(N_2 - N_1 + 1)/2$, pour le paramètre N_u , ont un effet mineur sur les deux indices. Cependant, pour une taille plus faible de l'horizon de commande, les performances

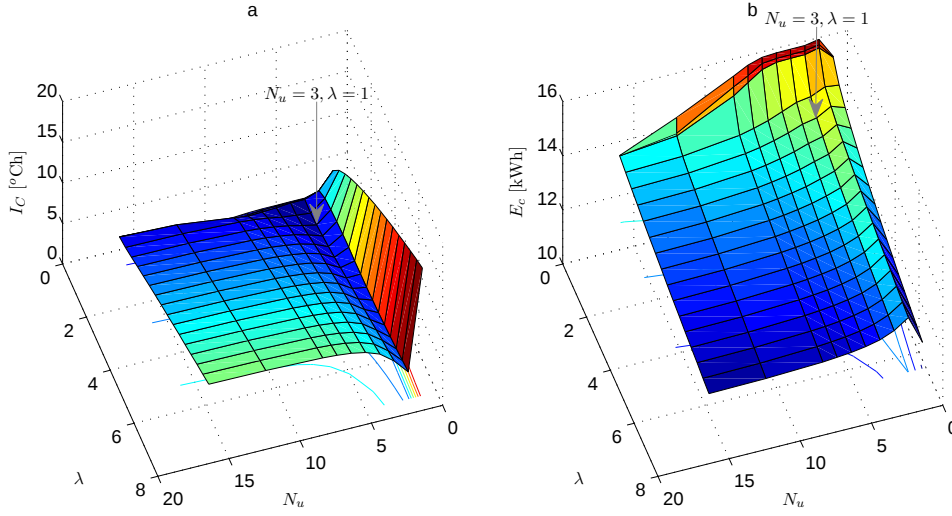


FIGURE 3.5 – Influence de la dimension de l’horizon de commande, N_u , et de la pondération, λ , sur l’indice de confort (a) et sur la consommation énergétique (b), sur une journée de simulation, avec une température initiale $y(0) = 12^{\circ}\text{C}$. La période d’occupation considéré est de 9h à 19h et la dimension de l’horizon de prédiction est définie par $N_1 = 1$ et $N_2 = 16$. La température de consigne est fixé à 20°C .

mesurées ont des variations plus importantes. Le choix $N_u = 1$ ne semble pas approprié, sachant que le principal objectif de contrôle est d’assurer un niveau de confort élevé. Notons que pour $N_u > 1$ les performances en termes de confort sont meilleures pour les horizons de prédiction plus faibles, ce qui n’est pas a priori intuitif.

Pour une meilleure compréhension de ce phénomène, deux scénarios sont considérés, en fonction de la température initiale dans la pièce : pour le premier, $y(0) = 16^{\circ}\text{C}$, ce qui correspond à une occupation journalière, tandis que le deuxième correspond à une période d’inoccupation relativement longue (un week-end), $y(0) = 12^{\circ}\text{C}$. La figure 3.6 illustre les signaux de sortie et de commande pour trois valeurs significatives de N_u , dans les deux scénarios.

Dans les sous-figures 3.6a et 3.6b, on observe que le paramètre N_u influence les allures des courbes pendant la relance et avant la fin de la période d’occupation, i.e. quand la fenêtre de prédiction comporte des instants d’occupation et d’inoccupation. Une valeur faible de N_u avance dans le temps et diminue le pic de la demande pendant le préchauffage. Malgré le fait que ce comportement soit sous-optimal (par rapport au cas $N_u = N_2$), il améliore le confort au début de la période d’occupation, notamment dans le deuxième scénario (sous-figures 3.6c et 3.6d). Rappelons que l’on se trouve dans le cas sans contraintes et que la puissance maximale du convecteur, ici 1kW , n’est pas prise en compte dans le problème d’optimisation, par conséquent, la commande est saturée. Ainsi, en utilisant un horizon de commande réduit, le phénomène de saturation apparaît plus tôt et diminue l’écart entre la consigne et la sortie en début de l’occupation.

Un cas particulier est $N_u = 1$, pour lequel la commande appliquée pendant la phase

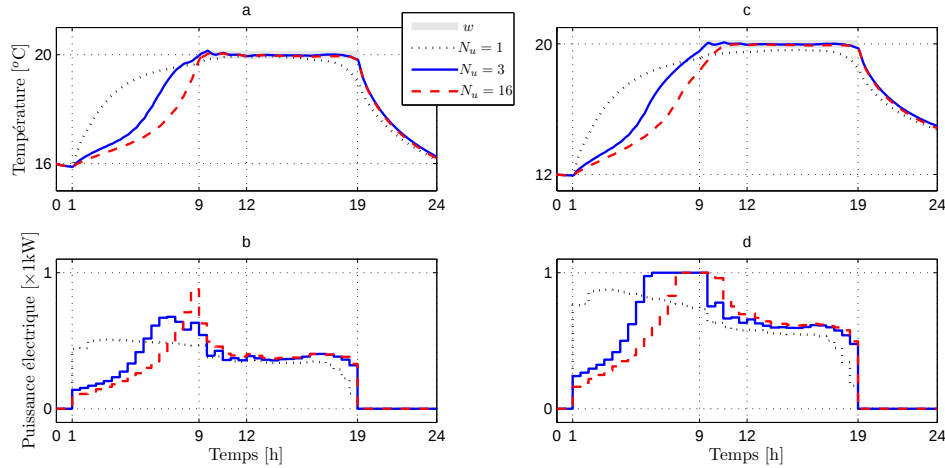


FIGURE 3.6 – Réponses temporelles du système en boucle fermée pour $N_u \in \{1, 3, 16\}$, $\lambda = 1$, $N_1 = 1$, $N_2 = 16$ et une période d'occupation de 9h à 19h, avec une température initiale $y(0) = 16^\circ\text{C}$ (a et b) et $y(0) = 12^\circ\text{C}$ (c et d)

de préchauffage est uniformément distribuée tout au long de la période de relance, due au fait qu'à chaque pas le contrôleur calcule une séquence de commande dont toutes les composantes sont égales. Ce régulateur est très intéressant du point de vue numérique car il engendre un effort de calcul réduit. Malgré cela, cette configuration n'assure pas un degré de confort acceptable.

En considérant le confort étant prioritaire à la consommation, des valeurs inférieures à 2 pour λ sont retenues. Pourtant, le choix d'une pondération très faible de la commande diminue l'importance de la minimisation énergétique dans le problème de contrôle. Pour le choix de l'horizon de commande, plusieurs paramètres doivent être pris en compte : la complexité de calcul, qui croît avec N_u et l'optimalité par rapport au critère de minimisation. De plus la saturation de la commande calculée par la résolution analytique du problème d'optimisation a également un impact important sur les indices de performance. Suite à plusieurs essais, pour le cas étudié nous proposons l'utilisation des valeurs suivantes : $N_u = 3$ et $\lambda = 1$.

3.3.5 Fenêtre de prédiction variable

Dans cette partie nous proposons une solution originale pour améliorer les performances du régulateur prédictif présenté dans les paragraphes précédents. L'idée consiste à faire varier l'horizon supérieur de prédiction sur la sortie, N_2 , en fonction du profil d'occupation. Ensuite nous motiverons notre approche par quelques aspects d'ordre qualitatif, et dans la partie 3.3.6 nous présenterons les avantages quantitatifs sur un exemple numérique.

3.3.5.1 Motivation

Comme nous l'avons déjà mentionné au début de ce chapitre, pour l'objectif de contrôle du poste de chauffage dans un cadre d'occupation intermittente, on peut distinguer deux cas, en fonction de la phase courante : occupation ou inoccupation.

Durant les périodes d'inoccupation, le fait d'avoir une fenêtre de prédiction de grande taille est particulièrement intéressant pour couvrir une longue période de préchauffage. Pendant l'occupation, cet argument disparaît, sachant que les seules connaissances futures disponibles au contrôleur sont le profil d'occupation décrit par le vecteur δ et la séquence de consigne future, w . Le problème de contrôle est alors réduit au problème de régulation de la température intérieure autour de la température de confort. On peut alors penser à diminuer l'horizon de prédiction pendant les phases d'occupation.

Si avoir une grande période de prédiction permet de donner de meilleures marges de stabilité au système [26], la commande devient moins agressive [9]. Durant les périodes d'occupation, les fluctuations de température sont fréquentes et peuvent avoir des dynamiques relativement rapides, comme par exemple celles générées par le rayonnement solaire, par l'ouverture d'une porte, etc. C'est le cas des perturbations positives (apports gratuits) qui nous intéressent en particulier, car elles nous permettent de réaliser des économies d'énergie. Ainsi, en utilisant une taille réduite de l'horizon de prédiction pendant l'occupation, le contrôleur devient plus réactif et donc on peut espérer améliorer les performances de contrôle par un rejet plus rapide des perturbations.

Les éventuelles améliorations en termes de performances réalisées avec une stratégie de variation de N_2 n'impliquent pas une augmentation de la complexité de calcul en temps réel du régulateur (sous forme RST dynamique).

La taille de l'horizon de commande N_u influence également le comportement du système de commande. Ainsi, l'accroissement du terme $r_N = \frac{N_2}{N_u}$ implique une réponse plus lisse de la part du correcteur prédictif [170] et en même temps augmente la sous-optimalité de la solution par rapport au cas où $r_N = 1$, à N_2 donné. L'augmentation de la valeur du paramètre N_u accroissent la complexité du problème d'optimisation (il agit sur le nombre des variables de décision).

Les modèles de prédiction, généralement simplifiés, négligent souvent certaines dynamiques du système, ce qui engendre des prédictions moins précises vers la fin de la période de prédiction. Ceci est notamment le cas dans notre modèle de prédiction, dans lequel la température extérieure est supposée constante sur tout l'horizon. Cette approximation est d'autant meilleure que cet horizon est court.

Un autre intérêt de diminuer la valeur du paramètre N_2 sera mis en évidence dans la partie 3.4, dans laquelle une architecture de commande distribuée sera présentée. Une valeur réduite de la taille de l'horizon de prédiction permettra une baisse de la quantité des informations échangées entre les contrôleurs locaux, ainsi qu'une augmentation de la vitesse de convergence de l'algorithme itératif.

3.3.5.2 Une stratégie de variation de l'horizon de prédiction

Dans le paragraphe précédent, on a brièvement rappelé comment la taille de la fenêtre de prédiction influe sur les caractéristiques du système asservi. Nous présentons une démarche pour faire varier le paramètre N_2 .

Notation 3.3.3 Dans la démarche suivante, on note :

- $\underline{N}_2$, la taille minimale que peut prendre l'horizon de prédiction, $\underline{N}_2 \in \mathbb{N}_+$, $\underline{N}_2 \geq N_1$
- $\overline{N}_2$, la taille maximale que peut prendre l'horizon de prédiction, $\overline{N}_2 > \underline{N}_2$.

Nous proposons alors l'utilisation de la taille minimal de la fenêtre de prédiction pendant les phases d'occupation, tandis que l'horizon de prédiction maximale sera plus approprié aux périodes d'inoccupation, afin d'anticiper la relance. Pour éviter les variations brusques de la dimension de l'horizon de prédiction d'un pas d'échantillonnage à l'autre pendant les phases d'occupation, l'idée est la suivante :

- Réduire progressivement la taille de la fenêtre de prédiction, jusqu'à $\underline{N}_2$, dès que l'on entre en phase de préchauffage (voir figure 3.7). Le début de la période de préchauffage est calculé par rapport à l'horizon de prédiction maximal. Il correspond à l'instant k telle que $\delta(k + \overline{N}_2 - 1) = 0$ et $\delta(k + \overline{N}_2) = 1$,
- Revenir à une taille de prédiction élevée, dès que l'on passe en période d'inoccupation.

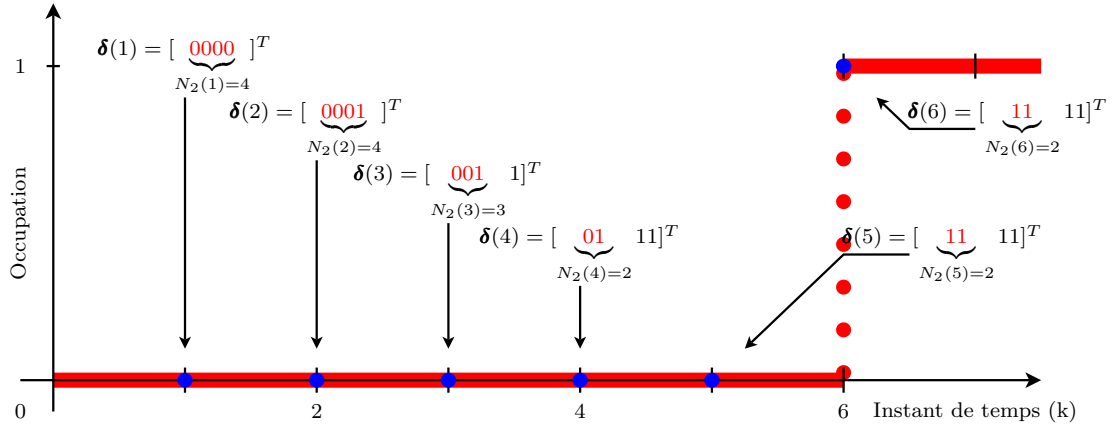


FIGURE 3.7 – Évolution de l'horizon de prédiction ($N_1 = 1$, $\underline{N}_2 = 2$, $\overline{N}_2 = 4$)

De manière formelle, on définit la valeur courante de l'horizon supérieur de prédiction, $N_2(k)$, par l'équation suivante :

$$N_2(k) = \begin{cases} \overline{N}_2 & , \text{ si } \delta(k) = \mathbf{0}_{(\overline{N}_2 - N_1 + 1) \times 1}, \\ \underline{N}_2 & , \text{ si } \delta(k + N_1) = 1, \\ \max(j, \underline{N}_2) & , \text{ autrement,} \end{cases} \quad (3.42)$$

où $j = \max \{ \mathbb{N}_{N_1+1}^{\overline{N}_2} | \delta(k+j) > \delta(k+j-1) \}$. Ainsi, l'instant $k+j$ indique le début d'une période d'occupation. Pour calculer la taille courante de la fenêtre de prédiction, il est

nécessaire de disposer du profil d'occupation correspondant à la fenêtre de prédiction maximale, i.e. du vecteur : $\boldsymbol{\delta}(k) = \begin{bmatrix} \delta(k + N_1) & \cdots & \delta(k + \bar{N}_2) \end{bmatrix}^T$.

Remarque 3.3.5 *Du point de vue formel, les modifications apportées par l'utilisation de la fenêtre de prédiction variable (3.42), par rapport à la démarche présentée dans la section 3.3.3, sont mineures. Les dimensions des vecteurs polynomiaux $\mathbf{f}$, $\mathbf{h}$ et des matrices $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ deviennent ainsi variables dans le temps. Notons que pour $\underline{N}_2 \geq N_u$, les vecteurs et les matrices mentionnés peuvent être obtenus en éliminant les dernières $\bar{N}_2 - N_2(k)$ lignes par rapport au cas où la dimension de l'horizon de prédiction est maximale. La structure du contrôleur RST dynamique reste identique à celle représentée figure 3.3, seule la dimension du polynôme T devient variable dans le temps.*

3.3.6 Résultats numériques

Reprenons le bâtiment virtuel monozone décrit dans l'Annexe A et le modèle de commande (3.39), pour tester l'efficacité du régulateur GPC à horizon de prédiction variable. Dans la figure 3.8 sont représentées les valeurs des deux indices de performance sur une année de simulation, dont la saison de chauffe est comprise entre le 1^{er} octobre et le 30 avril. Trois configurations différentes du contrôleur GPC sont comparées :

1. GPCHC : la loi de commande décrite par l'équation (3.23) (horizon de prédiction constant)
2. GPCHV1 : la loi de commande décrite par l'équation (3.23), dont la dimension de la fenêtre de prédiction varie selon (3.42) (horizon de prédiction variable)
3. GPCHV2 : la loi de commande décrite par l'équation (3.23), dont la dimension de la fenêtre de prédiction prend uniquement deux valeurs, en fonction de la valeur du premier élément du profil futur d'occupation, ainsi :

$$N_2(k) = \begin{cases} \bar{N}_2 & , \text{ si } \delta(k + N_1) = 0, \\ \underline{N}_2 & , \text{ autrement.} \end{cases} \quad (3.43)$$

Les paramètres du régulateur prédictif ont été choisis comme suit :

- $N_1 = 1$, ce qui est le choix le plus pertinent pour les modèle sans retard pur et à déphasage minimal,
- la valeur maximale de l'horizon supérieur de prédiction considérée est égale à la valeur du paramètre N_2 du GPCHC, i.e. $\bar{N}_2 = N_2 = 16$,
- la valeur minimale de l'horizon supérieur de prédiction est $\underline{N}_2 = N_u$, ce qui nous permet de maintenir constantes les dimensions de la matrice $\mathbf{G}^T \boldsymbol{\Delta}(k) \mathbf{G} + \mathbf{A}$ à inverser et de ne pas modifier la charge de calcul (surtout dans le cas avec contraintes)
- la valeur de la pondération sur la commande, $\lambda = 1$.

Les deux configurations qui utilisent une taille réduite de l'horizon de prédiction pendant les périodes d'occupation favorisent les économies d'énergie par rapport à la configuration équivalente du GPCHC. Ces gains énergétiques sont d'autant plus importants

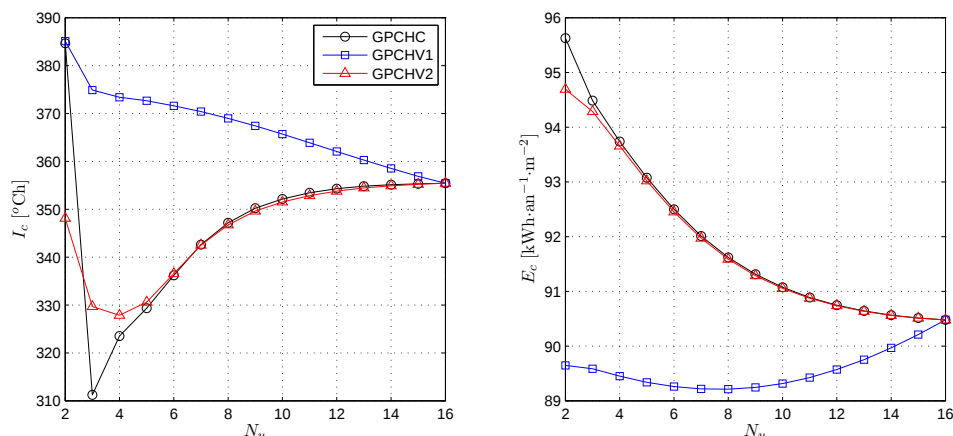


FIGURE 3.8 – Comparaison en termes d'indices de performances entre le contrôleur prédictif à horizon de prédiction constant (GPCHC) et deux configurations à horizon de prédiction variable (GPCHV1 et GPCHV2)

que l'horizon de prédiction minimal est faible. Cette économie énergétique est pourtant associée à une diminution de la qualité de confort, due principalement aux transitions inoccupation-occupation où la commande du GPCHV1 est souvent saturée à la fin de la relance.

Il apparaît clairement que pour $N_2 = 2$ on obtient l'amélioration la plus importante sur les deux indices de performance en employant une stratégie de diminution de la taille de l'horizon. Ainsi, les économies d'énergie par rapport au cas GPCHC s'élève à 6,25 % pour GPCHV1 et 0,98 % pour GPCHV2. L'économie relative de l'énergie moins importante du coté de GPCHV2 est associée à une amélioration de 9,5 % de l'indice de confort.

Pendant la période de préchauffage, les lois de commande GPCHC et GPCHV2 sont identiques. De manière similaire, les régulateurs GPCHV1 et GPCHV2 sont équivalents durant les phases d'occupation. Pour $N_u \geq 8$, les performances globales du GPCHV2 sont légèrement supérieures à celles du GPCHC, ce qui est dû uniquement à la diminution de l'horizon de prédiction pendant l'occupation. L'écart entre les résultats du GPCHV1 et ceux du GPCHV2 réside dans une gestion différente de la période de relance.

On peut également remarquer que les allures des courbes qui représentent la dépendance des deux indices par rapport au paramètre N_u , pour le GPCHC sont similaires à ceux de la figure 3.5. Autrement dit, une analyse des résultats sur une seule journée permet d'extrapoler qualitativement les performances à une période de simulation plus longue.

Le tableau 3.1 regroupe les meilleurs résultats (en termes de confort et d'énergie) obtenus en utilisant les contrôleurs GPCHC et GPCHV. Pour comparer ces résultats avec une loi de commande couramment utilisée, on a choisi le régulateur PI comme cas de référence. Pour avoir un comportement similaire au GPC, la consigne du régulateur PI est anticipée. Sachant que les périodes d'occupation journalières considérées sont du lundi au vendredi entre 9h et 19h, on a choisi de décaler la consigne de manière différente les lundi,

par rapport aux autres jours. Ainsi, les lundi, la relance du PI commence t_l heures avant le début de la période d'occupation, tandis que les autres jours la consigne est anticipée avec t_{m-v} heures. Les valeurs de ces deux paramètres ont été établies après plusieurs tests, afin d'obtenir des valeurs de l'indice de confort proches de celles obtenues par les contrôleurs prédictifs. Ces intervalles de temps qui définissent les durées des relances sont souvent surestimées par les fabricants afin de préserver le confort en début d'occupation.

Loi de commande		I_c [°Ch]	E_c [kWh · an ⁻¹ · m ²]
Type	Spécificité		
PI avec anticipation	$t_l = 6\text{h}, t_{m-v} = 3\text{h}$	399,33	91,97
	$t_l = 8\text{h}, t_{m-v} = 3\text{h}$	388,89	93,89
	$t_l = 8\text{h}, t_{m-v} = 4\text{h}$	369,05	96,64
	$t_l = 8\text{h}, t_{m-v} = 5\text{h}$	367,48	99,19
	$t_l = 8\text{h}, t_{m-v} = 8\text{h}$	362,52	105,53
GPC-	-HC, $N_u = 3$	311,37	94,48
	-HC, $N_u = 16$	355,48	90,47
	-HV1, $N_u = 8$	347,39	89,21

TABLE 3.1 – Résultats comparatifs (confort et énergie) entre les contrôleurs de type GPC à critère dynamique et PI avec anticipation de la consigne

Le fait d'avoir les mêmes horaires d'occupation journalière avantage le contrôleur PI avec une relance à heure fixe. Ainsi, en fonction de réglages pour les deux types de régulateurs, les économies d'énergie apportées par la structure GPC montent jusqu'à 15 %, sans dégrader l'indice de confort. De plus, la majorité des configurations GPC présentées ci-dessous offrent de meilleures performances en termes de confort par rapport aux contrôleurs de type PI.

Malgré les écarts relativement faibles entre les performances de GPCHC et de GPCHV1 il faut souligner que les améliorations apportées par la commande à horizon variable n'engendrent pas une augmentation de la complexité du correcteur (la capacité de mémoire nécessaire pour le stockage des coefficients polynomiaux est égale à celle nécessaire pour GPCHC).

La figure 3.9 présente l'évolution comparative de la température à l'intérieur du bâtiment monozone considéré, et la puissance électrique du convecteur pour une configuration GPCHC et GPCHV1. Pour avoir une meilleure vision sur le contexte de simulation, les principales perturbations météorologiques sont également représentées. On peut observer que, pendant la relance, la température intérieure pour la configuration GPCHV1 reste toujours inférieure à celle pour la configuration GPCHC.

Pendant les premiers $\bar{N}_2 - \underline{N}_2$ instants de la période de préchauffage, un seul moment d'occupation est pris en compte dans le problème d'optimisation. D'autre part le nombre de degrés de liberté du régulateur GPCHV1 relatif à $N_2(k)$ augmente progressivement. Ces deux phénomènes contribuent à retarder le pic de la commande. Ce comportement s'approche de l'optimalité par rapport à un critère linéaire (voir chapitre suivant), où la meilleure stratégie de contrôle pendant la relance est de chauffer au dernier moment à

puissance maximale. Pourtant, une amplitude élevée du pic de consommation avant le début de l'occupation peut causer une diminution du confort, à cause de la puissance limitée du convecteur.

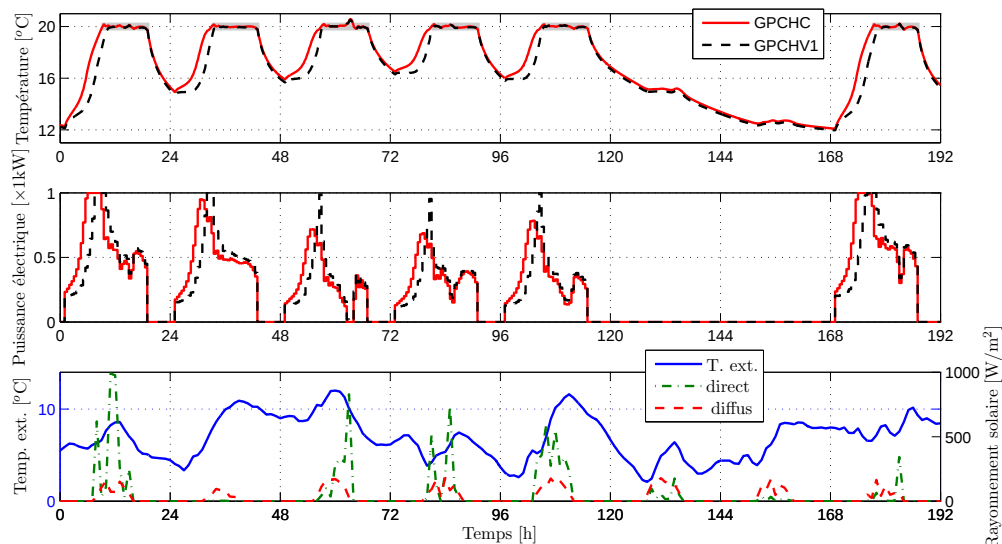


FIGURE 3.9 – Évolution des principaux signaux, en configuration GPCHC et GPCHV1

En pratique, les périodes d'occupation d'une pièce n'ont pas une périodicité et une durée constantes comme dans le profil d'occupation proposé. Par conséquent, l'utilisation d'une relance à heure fixe engendre souvent un gaspillage de l'énergie.

3.3.7 Du monozone au multizone

La loi de commande prédictive proposée dans la section 3.3 a été développée pour une seule zone, comme d'ailleurs la plupart des études sur la régulation de la température dans les bâtiments. Les modèles utilisés, généralement appelés monozones, considèrent que l'intérieur complet du bâtiment possède des caractéristiques thermiques homogènes, autrement dit, toutes les pièces de l'immeuble ont la même température. La simplicité de cette famille de modèles constitue leur principal avantage. Ils nécessitent uniquement des informations générales concernant l'enveloppe, le système de chauffage (et / ou de climatisation) et les apports de chaleur pour la construction du modèle [181]. Toutefois, ils s'avèrent insuffisants si des écarts de température existent entre les différentes pièces du bâtiment. Dans le cas d'une régulation intermittente de la température, les modèles monozones restent appropriés en supposant que toutes les pièces du bâtiment ont le même profil d'occupation. Or évidemment, cette hypothèse est trop restrictive pour la grande majorité des cas.

Les modèles multizones sont plus adéquats pour les profils d'occupation propres à chaque zone. Ils comportent la modélisation d'une zone thermique pour chaque pièce ou pour un groupe restreint de pièces. Cependant les modèles multizones ne sont pas seule-

ment des ensembles de modèles monozones, les couplages entre les pièces étant également considérés. Ces modèles permettent ainsi de prendre en compte la répartition non uniforme des températures dans les différentes pièces d'un bâtiment.

3.4 MPC distribué à horizon de prédiction dynamique

Cette partie propose une extension de la loi de commande prédictive à horizon dynamique au cas multizone. Pour les bâtiments de grande taille, l'approche prédictive centralisée engendre des problèmes de complexité de calcul, mais également d'autres inconvénients liés à la structure monolithique du régulateur, mentionnés dans le chapitre précédent. L'alternative adoptée pour surmonter ces désavantages est l'utilisation d'un contrôleur par pièce. Si ces correcteurs locaux sont indépendants, alors on parle d'une loi de commande décentralisée. Les performances de cette loi de commande se dégradent dès que les interactions entre les zones deviennent importantes et que les périodes d'occupation et / ou les valeurs de consigne sont différentes.

En utilisant des correcteurs prédictifs locaux, on dispose alors, à chaque instant, d'une information qui décrit le comportement futur local. L'échange de ces données entre les régulateurs voisins (dont les modèles locaux présentent des couplages) pourrait améliorer les performances globales, ce qui représente l'idée de base de la commande distribuée présentée dans cette partie.

Nous développons dans les paragraphes suivants une approche prédictive distribuée capable de gérer facilement les fenêtres de prédiction variables. La difficulté du problème réside dans le fait que deux agents voisins, i et j , peuvent avoir, à un certain instant k , des horizons de prédiction de taille différente, par exemple $N_{2,i}(k) < N_{2,j}(k)$. En échangeant les informations sur leur comportement futur, l'agent j aura besoin de plus d'information sur le comportement futur de son voisin que ce dont l'agent i ne dispose. Nous proposons une approche pour traiter ce problème.

Dans les approches prédictives distribuées examinées dans la suite de ce mémoire, les hypothèses suivantes seront utilisées :

Hypothèse 3.4.1 *Les états des sous-systèmes sont mesurables.*

Hypothèse 3.4.2 *Les contrôleurs (agents) locaux fonctionnent en mode synchrone.*

Hypothèse 3.4.3 *Le réseau de communication n'induit pas de retard sur les informations échangées.*

3.4.1 Modèle couplé par les sorties

En passant au cas multizone, les modèles de prédiction utilisés dans ce mémoire sont orientés vers le formalisme d'état, qui permet une manipulation des systèmes multivariés beaucoup plus aisée que la représentation sous forme de fonction de transfert [175]. Considérons alors un bâtiment composé de s zones, dont le comportement dynamique de la

zone $i \in \mathbb{N}_1^s$ est représenté par un modèle discret, linéaire et invariant dans le temps. Afin de simplifier les notations et de garder une certaine cohérence par rapport au cas monozone, on considère que les variables locales de commande et de sortie sont unidimensionnelles $u_i, y_i \in \mathbb{R}$. Alors, le sous-système (zone) i est décrit par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} y_j(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k), \end{cases} \quad (3.44)$$

où la matrice $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$ représente la matrice d'état locale, tandis que les vecteurs $\mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ sont les vecteurs locaux de commande et d'observation, respectivement. $\mathbf{e}_{j,i} \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$ désigne le vecteur de couplage, qui traduit l'influence de la zone j sur la zone i . On dit que deux zones i et j sont couplées (adjacentes) si elles sont délimitées par une paroi commune. $\mathbb{H}_i$ représente l'ensemble des zones adjacentes à la zones i .

Notation 3.4.1 Nous adoptons la notation suivante :

- x_i pour une variable propre à l'agent local i ,
- $x_{j,i}$ pour une variable mettant en avant l'influence de l'agent j sur l'agent i . Le dernier indice, i dans cet exemple, souligne l'appartenance de la variable à l'agent.

Remarque 3.4.1 Le modèle (3.44) est en fait un cas particulier du modèle couplé par les états (2.12), qui peut être obtenu en remplaçant $\mathbf{e}_{j,i}$ par le produit $\mathbf{e}_{j,i} \mathbf{c}_j^T$.

Du point de vue physique, le modèle couplé par les sorties suppose que le transfert thermique entre deux zones adjacentes soit réalisé par conduction à travers la paroi et par convection entre l'air et la paroi (voir l'Annexe A).

En utilisant le modèle zonal (3.44), le paragraphe suivant décrit la mise au point de la commande calculée par chaque agent local.

3.4.2 Élaboration de la commande distribuée

De manière similaire à l'approche monovariante, définissons le critère local à horizon variable, propre à chaque agent i , par :

$$J_i(k) = \sum_{j=1}^{N_{2,i}(k)} \delta_i(k+j) [y_i(k+j) - w_i(k+j)]^2 + \lambda_i \sum_{j=1}^{N_{2,i}(k)} u_i^2(k+j-1|k), \quad (3.45)$$

avec des notations similaires à celles du paragraphe 3.3.2.

On considère dans la suite du chapitre que la valeur courante de l'horizon supérieur de

prédiction de l'agent i est définie par :

$$N_{2,i}(k) = \begin{cases} \overline{N}_{2,i} & , \text{ si } \boldsymbol{\delta}_i(k) = \mathbf{0}_{\overline{N}_{2,i},1}, \\ \underline{N}_{2,i} & , \text{ si } \delta_i(k+1) = 1, \\ \max(\max\{j \in \mathbb{N}_2^{\overline{N}_{2,i}} | \delta_i(k+j) > \delta_i(k+j-1)\}, \underline{N}_{2,i}) & , \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.46)$$

On a choisi $N_{1,i} = 1, \forall i \in \mathbb{N}_1^s$ uniquement pour des raisons de simplicité du développement suivant.

Le régulateur local i calcule la séquence optimale de commande par la résolution du problème de minimisation :

$$\begin{aligned} & \min_{u_i(k|k), \dots, u_i(k+N_{2,i}(k)-1|k)} J_i(k), \\ & \text{sous les contraintes définies par (3.44) et} \\ & u_i(k+j|k) = u_i(k+N_{u,i}-1|k), \quad \forall j \in \mathbb{N}_{N_u}^{N_{2,i}(k)-1}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

En incluant les contraintes du problème (3.47) dans le critère (3.45) on peut exprimer la fonction de coût sous forme matricielle :

$$J_i(k) = (\hat{\mathbf{y}}_i(k) - \mathbf{w}_i(k))^T \boldsymbol{\Delta}_i(k) (\hat{\mathbf{y}}_i(k) - \mathbf{w}_i(k)) + \mathbf{u}_i^T(k) \boldsymbol{\Lambda}_i \mathbf{u}_i(k) \quad (3.48)$$

où les vecteurs $\hat{\mathbf{y}}_i(k)$, $\mathbf{w}_i(k)$ et $\mathbf{u}_i(k)$, comme les matrices $\boldsymbol{\Delta}_i(k)$ et $\boldsymbol{\Lambda}_i$ sont similaires à ceux de (3.14) et (3.15). À partir du modèle (3.44), l'équation de prédiction du sous-système i s'écrit comme suit :

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k) = \boldsymbol{\Psi}_i(k) \mathbf{x}_i(k) + \boldsymbol{\Phi}_i(k) \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \boldsymbol{\Phi}_{j,i}(k) \tilde{\mathbf{y}}_j^*(k), \quad (3.49)$$

avec les notations suivantes :

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{y}_i(k+1|k) \\ \vdots \\ \hat{y}_i(k+N_{2,i}(k)|k) \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Psi}_i(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_i \\ \vdots \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_i^{N_{2,i}(k)} \end{bmatrix}, \mathbf{u}_i(k) = \begin{bmatrix} u_i(k|k) \\ \vdots \\ u_i(k+N_{u,i}-1|k) \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^*(k) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_j^*(k) & \tilde{y}_j^*(k+1) & \cdots & \tilde{y}_j^*(k+\tilde{N}_{2,j}(k)-1) \end{bmatrix}^T, \quad (3.51)$$

$$\boldsymbol{\Phi}_i(k) = \begin{bmatrix} \phi_i(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \phi_i(1) & \phi_i(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \phi_i(N_{2,i}(k)-1) & \cdots & \cdots & \phi_i(N_{2,i}(k)-N_{u,i}+1) & \sum_{j=0}^{N_{2,i}(k)-N_{u,i}} \phi_i(j) \end{bmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\Phi_{j,i}(k) = \begin{bmatrix} \phi_{j,i}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1, \tilde{N}_{2,j}(k) - N_{2,i}(k)} \\ \phi_{j,i}(1) & \phi_{j,i}(0) & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{0}_{1, \tilde{N}_{2,j}(k) - N_{2,i}(k)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{j,i}(N_{2,i}(k) - 1) & \cdots & \cdots & \cdots & \phi_{j,i}(0) & \mathbf{0}_{1, \tilde{N}_{2,j}(k) - N_{2,i}(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\phi_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_i^k \mathbf{b}_i, \quad \phi_{j,i}(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_i^k \mathbf{e}_{j,i}, \quad \tilde{N}_{2,j}(k) = \max_{i \in \mathbb{H}_j} N_{2,i}(k). \quad (3.54)$$

Le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^*$ représente la séquence de sortie optimale du sous-système j sur une fenêtre de prédiction de dimension égale à la taille maximale des horizons courants parmi tous ses voisins $i \in \mathbb{H}_j$. Pourtant, les dernières $\tilde{N}_{2,j}(k) - N_{2,i}(k)$ composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^*$ ne sont pas utilisées par le prédicteur de l'agent i (voir la dernière colonne bloc de la matrice $\Phi_{j,i}(k)$). Cette notation a pour but de simplifier le développement qui suit. Le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^*$ représente ainsi la séquence d'informations échangées entre les contrôleurs locaux.

Par la substitution de l'équation de prédiction (3.49) dans (3.45) et la résolution de l'équation $\frac{\partial J_i(k)}{\partial \mathbf{u}_i(k)} = 0$, on obtient la séquence de commande optimale locale, dans le cas sans contraintes, à l'instant k , décrite par :

$$\mathbf{u}_i^*(k) = \Xi_i(k) \left(\mathbf{w}_i(k) - \Psi_i(k) \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \Phi_{j,i}(k) \tilde{\mathbf{y}}_j^*(k) \right), \quad (3.55)$$

avec

$$\Xi_i(k) = (\Phi_i^T(k) \Delta_i(k) \Phi_i(k) + \Lambda_i)^{-1} \Phi_i^T(k) \Delta_i(k). \quad (3.56)$$

La formulation (3.55) suppose la connaissance des vecteurs de sorties futures des voisins, calculés en fonction de la commande locale optimale $\mathbf{u}_j^*(k)$, $j \in \mathbb{H}_i$. La tâche du régulateur local j devient ainsi similaire à celle de ses voisins $i \in \mathbb{H}_j$, ce qui génère une boucle algébrique. Une solution proposée par les méthodes de contrôle distribué implique la résolution itérative du problème local, $\min_{\mathbf{u}_i(k)} J_i(k)$, en utilisant dans l'équation de prédiction locale la séquence de sortie des voisins calculée à l'itération précédente. Par conséquent, à chaque itération l de l'instant k , l'agent i calcule sa propre séquence de commande selon :

$$\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k) = \Xi_i(k) \left(\mathbf{w}_i(k) - \Psi_i(k) \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \Phi_{j,i}(k) \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k) \right), \quad (3.57)$$

où $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ est la séquence de sortie prédite, calculée par l'agent j à l'itération $l(k) - 1$ et diffusée vers tous les agents voisins.

Notation 3.4.2 Dans la suite du présent mémoire, on utilisera un exposant entre parenthèses, $x^{(l(k))}$, pour désigner le fait que la variable x est utilisée à l'itération l de l'instant k pour le calcul de la séquence courante de commande.

3.4.3 Séquence d'échange

Le point clé de notre approche distribuée réside dans la construction du vecteur d'échange, $\tilde{\mathbf{y}}_j(k)$. Sa structure dépend de l'itération de l'algorithme distribué. À l'instant k , on distingue ainsi l'itération initiale, $l_0(k)$ et les autres itérations intermédiaires, $l(k)$. Cette différenciation est liée au fait qu'à l'itération initiale, chaque contrôleur utilise la séquence de sortie envoyée par ses voisins à la dernière itération du pas précédent, $l_f(k-1)$. Considérons dans la suite, la séquence future de sortie calculée de manière distribuée, par l'agent i à l'itération $l(k)$:

$$\hat{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k) = \Psi_i(k)\mathbf{x}_i(k) + \Phi_i(k)\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \Phi_{j,i}(k)\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k). \quad (3.58)$$

Dans les paragraphes suivants nous présentons une méthode de construction du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j$ en fonction des tailles locales des fenêtres de prédiction.

3.4.3.1 Horizon de prédiction constant dans le temps et identique pour tous les agents

On commence par le cas le plus simple et le plus classique, celui dont la taille de l'horizon de prédiction est fixée une fois pour toute et ne varie pas d'un agent à l'autre, i.e. $N_{2,i}(k) = N_2, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, k \in \mathbb{N}$. On considère qu'à l'itération initiale de l'instant k , l'agent i utilise, afin d'obtenir la solution initiale $\mathbf{u}_i^{(l_0(k))}(k)$, la dernière séquence de sortie calculée au pas précédent par tous ses voisins :

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k))}(k) = \hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k-1), \forall j \in \mathbb{H}_i. \quad (3.59)$$

À partir du premier échange d'information à l'instant k , on peut remplacer la composante qui correspond à $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ par la valeur mesurée, ainsi le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ à une itération intermédiaire, $l(k)$, est décrit par :

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k) = \begin{bmatrix} y_j(k) & \hat{y}_j^{(l(k)-1)}(k+1|k) & \cdots & \hat{y}_j^{(l(k)-1)}(k+N_2-1|k) \end{bmatrix}^T. \quad (3.60)$$

Remarque 3.4.2 La valeur courante de la sortie $y_j(k)$ n'est envoyée vers tous les voisins de l'agent j qu'après l'itération initiale, car tout au long des itérations du pas k elle restera constante. À chaque itération, les $N_2 - 1$ premières composantes du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ sont diffusées vers tous les contrôleurs $i \in \mathbb{H}_j$, sauf à la dernière itération, où son dernier élément, $\hat{y}_j^{(l_f(k))}(k+N_2|k)$, sera également transmis. Il entrera dans la composition du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k+1))}(k+1)$.

3.4.3.2 Horizon de prédiction variable dans le temps

L'objectif de ce paragraphe est d'étendre la méthode de construction du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j$ pour le cas où les dimensions des horizons de prédiction de chaque agent sont variables

dans le temps. Les tailles des fenêtres locales sont calculées en fonction du profil futur d'occupation, selon l'équation (3.46).

Le principe initial est le même que dans le cas précédent, i.e. à chaque itération initiale les agents utilisent les séquences de sortie des voisins calculées à l'instant antérieur. Il devient alors intéressant d'anticiper, au moment $k - 1$, la taille de l'horizon de prédiction correspondant au pas suivant. Ceci permet à l'agent local j de construire le vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k))}(k) \in \mathbb{R}^{\tilde{N}_{2,j}(k) \times 1}$. Ainsi, à la dernière itération du pas $k - 1$, $l_f(k - 1)$, l'agent j doit connaître les dimensions des horizons de prédiction locaux de tous ses voisins qui seront employées au pas suivant, k . Chaque agent j calcule (et envoie), au pas $k - 1$, la valeur du paramètre local $N_{2,j}(k|k - 1)$. Pour ce faire, la valeur de l'élément $\delta_i(k + \bar{N}_{2,j})$ est nécessaire à l'instant $k - 1$. Le profil futur d'occupation est généralement connu sur un horizon de temps plus grand que la fenêtre de prédiction maximale, ce qui signifie que la valeur exacte de $N_{2,j}(k)$ peut être obtenue. La diffusion de ce paramètre vers tous les agents locaux permet le calcul de $\tilde{N}_{2,j}(k)$ à l'instant $k - 1$.

Alors, en fonction de la relation entre $N_{2,j}(k - 1)$ et $\tilde{N}_{2,j}(k)$, on distingue deux possibilités pour la construction du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k))}(k)$.

- Si $N_{2,j}(k - 1) \geq \tilde{N}_{2,j}(k)$, alors la séquence future de sortie, calculée de manière distribuée par l'agent j à l'itération $l_f(k - 1)$, comporte tous les éléments nécessaires à la construction du vecteur d'échange :

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k))}(k) = \left[\hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k|k-1) \quad \dots \quad \hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k + \tilde{N}_{2,j}(k|k-1)) \right]^T. \quad (3.61)$$

- Si $N_{2,j}(k - 1) < \tilde{N}_{2,j}(k)$, alors le vecteur $\hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k)$ n'a pas la dimension requise par ses voisins pour la construction du vecteur d'échange $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k))}(k)$, dans le sens où il manque des données. On peut envisager alors de compléter les éléments futurs indisponibles $\hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k + N_{2,j}(k - 1)|k - 1), \dots, \hat{\mathbf{y}}_j^{(l_f(k-1))}(k + \tilde{N}_{2,j}(k)|k - 1)$ par des valeurs calculées de manière décentralisée.

La méthode que nous proposons pour calculer ces composantes indisponibles ne suppose pas la résolution d'un problème d'optimisation. Toutefois, pour avoir une certaine précision sur cette séquence future des valeurs de sortie locale, on considère :

$$\bar{N}_{2,i} = \bar{N}_2, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (3.62)$$

ce qui nous permettra, suite à la définition de l'horizon de prédiction variable (3.46), d'affirmer que les instants $k + N_{2,j}(k - 1), \dots, k + \tilde{N}_{2,j}(k)$ correspondent soit à une période occupation ou d'inoccupation continue, soit à une période d'occupation suivie d'une période d'inoccupation. En exploitant ce détail, on peut approcher les éléments futurs en dehors de l'horizon local de la manière suivante :

1. Les sorties futures correspondant aux instants d'occupation seront égales à la consigne, i.e. on suppose que le contrôle local est parfait pendant la période d'occupation qui suit juste après le dernier instant de la fenêtre courante de

prédiction.

- Concernant les périodes d'inoccupation, on sait que l'existence d'un instant d'inoccupation $\delta_j(k-1+o_j(k-1)) = 0$ en dehors de l'horizon de prédiction $o_j(k-1) \in \mathbb{N}_{N_{2,j}(k-1)}^{\tilde{N}_{2,j}(k|k-1)-1}$, implique le fait que tous les instant suivants, de $k-1+o_j(k-1)$ à $k-1+\bar{N}_2$ sont des instants d'inoccupation. Dans ce cas, en utilisant l'horizon de prédiction $\tilde{N}_{2,j}(k|k-1)$, la séquence de commande optimale locale qui correspond à la période mentionnée est nulle :

$$u_j(k+i) = 0, \forall i \in \mathbb{N}_{o_j(k-1)-1}^{\tilde{N}_{2,j}(k|k-1)-2}, \quad (3.63)$$

et par conséquent les sorties futures seront complétées par la réponse libre du sous-système j , à partir de l'état $\hat{\mathbf{x}}_i(k-1+N_{2,i}(k-1)|k-1)$, i.e. le dernier calculé en appliquant la séquence de commande calculée de manière distribuée.

La structure générale du vecteur de sortie du sous-système j , utilisé à l'itération initiale de l'agent $i \in \mathbb{H}_j$, contient alors trois composantes :

- un vecteur de sorties futures calculé de manière distribuée $\hat{\mathbf{y}}_j$,
- un vecteur de consignes futures $\mathbf{w}_j$,
- un vecteur qui correspond à la réponse libre $\hat{\mathbf{y}}_{0,j}$.

En fonction du profil d'occupation, les deux dernières composantes du vecteur peuvent être vides. Cependant l'ordre des trois vecteurs dans la composition de la séquence d'échange ne varie pas.

Pour améliorer l'efficacité de l'algorithme, à partir de l'itération $l_0(k)+1$, il est important pour les agents de prendre en compte les nouvelles informations disponibles à l'instant courant, k . Par conséquent, on inclut également la valeur mesurée de la sortie locale à la place du premier élément du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$. Il peut alors s'écrire, de manière générale, comme suit :

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k) = \mathbf{\Gamma}_{1,j}(k)y_j(k) + \mathbf{\Gamma}_{2,j}(k)\hat{\mathbf{y}}_j^{(l(k)-1)}(k) + \mathbf{\Gamma}_{3,j}(k)\mathbf{w}_j(k) + \mathbf{\Gamma}_{4,j}(k)\hat{\mathbf{y}}_{0,j}^{(l(k)-1)}(k+o_j(k)) \quad (3.64)$$

où $\hat{\mathbf{y}}_{0,j}^{(l(k)-1)}(k+o_j(k)) = [\hat{y}_{0,j}^{(l(k)-1)}(k+o_j(k)) \ \cdots \ \hat{y}_{0,j}^{(l(k)-1)}(k+\tilde{N}_{2,j}(k)-1)]^T$ désigne la séquence de réponse libre du sous-système j . Les quatre matrices de sélection, $\mathbf{\Gamma}_{i,j}(k)$, $i \in \mathbb{N}_1^4$, sont définies ainsi :

$$\mathbf{\Gamma}_{1,j}(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0}_{(\tilde{N}_{2,j}(k)-1) \times 1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_{2,j}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{0}_{1 \times \zeta_{2,j}(k)} \\ \mathbf{I}_{\zeta_{1,j}(k) \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{0}_{\zeta_{1,j}(k) \times \zeta_{2,j}(k)} \\ \mathbf{0}_{\zeta_{3,j}(k) \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{0}_{\zeta_{3,j}(k) \times \zeta_{2,j}(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.65)$$

$$\mathbf{\Gamma}_{3,j}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1+\zeta_{1,j}(k) \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{0}_{1+\zeta_{1,j}(k) \times \zeta_{4,j}(k)} & \mathbf{0}_{1+\zeta_{1,j}(k) \times \zeta_{5,j}(k)} \\ \mathbf{0}_{\zeta_{4,j}(k) \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{I}_{\zeta_{4,j}(k) \times \zeta_{4,j}(k)} & \mathbf{0}_{\zeta_{4,j}(k) \times \zeta_{5,j}(k)} \\ \mathbf{0}_{\zeta_{6,j}(k) \times \zeta_{1,j}(k)} & \mathbf{0}_{\zeta_{6,j}(k) \times \zeta_{4,j}(k)} & \mathbf{0}_{\zeta_{6,j}(k) \times \zeta_{5,j}(k)} \end{bmatrix}, \quad (3.66)$$

$$\Gamma_{4,j}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1+\zeta_{1,j}(k)+\zeta_{4,j}(k)\times\zeta_{6,j}(k)} \\ \mathbf{I}_{\zeta_{6,j}(k)\times\zeta_{6,j}(k)} \end{bmatrix}. \quad (3.67)$$

avec les notations suivantes :

- $\zeta_{1,j}(k) = \min(N_{2,j}(k), \tilde{N}_{2,j}(k) - 1)$: nombre d'éléments du vecteur $\hat{\mathbf{y}}_j^{(l(k)-1)}(k)$ qui entrent dans la composition du vecteur d'échange $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$,
- $\zeta_{2,j}(k) = N_{2,j}(k) - \zeta_{1,j}(k)$: nombre des derniers éléments du vecteur $\hat{\mathbf{y}}_j^{(l(k)-1)}(k)$ qui ne sont pas nécessaires à la construction du vecteur d'échange $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$,
- $\zeta_{3,j}(k) = \max(0, \tilde{N}_{2,j}(k) - 1 - \zeta_{1,j}(k))$: nombre d'éléments du vecteur d'échange qui doivent être calculés de manière décentralisée,
- $\zeta_{4,j}(k) = \max(0, o_j(k) - k - 1 - \zeta_{1,j}(k))$: nombre d'éléments du vecteur d'échange qui sont égaux aux valeurs de la consigne, $o_j(k) = \min \mathbb{O}_j$, où l'ensemble $\mathbb{O}_j = \{i \in \mathbb{N}_{k+N_{2,j}(k)+1}^{k+\tilde{N}_{2,j}(k)-1} | \delta_j(i) = 0\}$ inclut tous les instants futurs en dehors de l'horizon courant de prédiction qui correspond à l'inoccupation,
- $\zeta_{5,j}(k) = \bar{N}_2 - \zeta_{1,j}(k) - \zeta_{4,j}(k)$: nombre des derniers éléments de la séquence de consigne qui n'entrent pas dans la composition du vecteur d'échange,
- $\zeta_{6,j}(k) = \zeta_{3,j}(k) - \zeta_{4,j}(k)$: nombre d'éléments correspondant à la réponse libre locale qui sont inclus dans le vecteur d'échange.

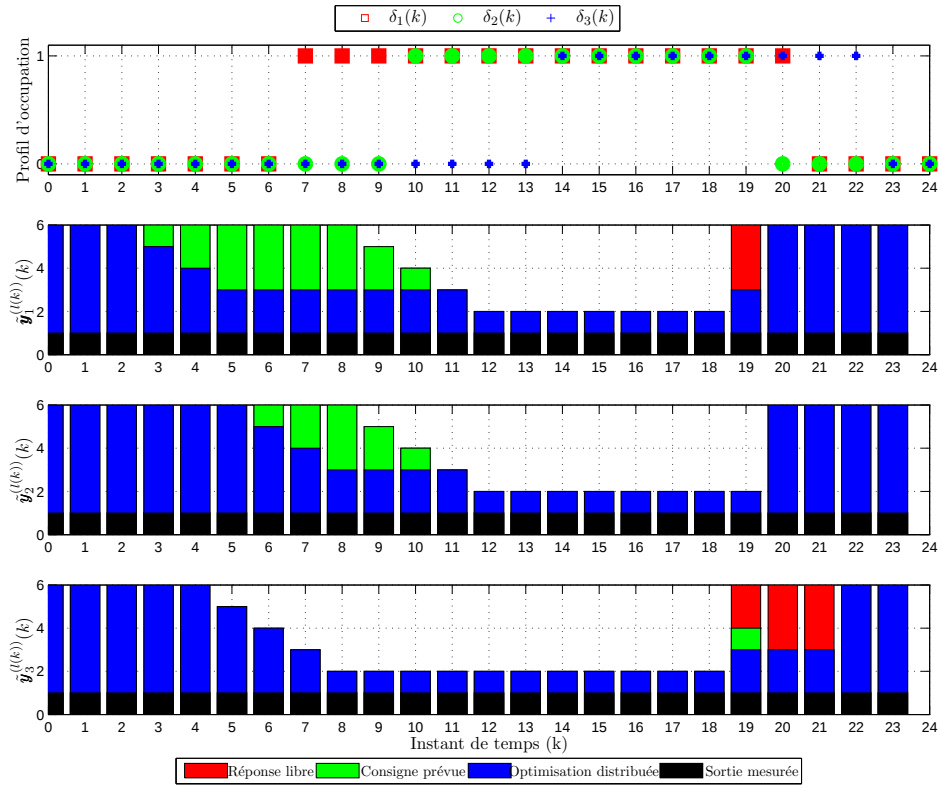


FIGURE 3.10 – Évolution temporelle de la structure du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ pour le cas de trois zones avec : $\bar{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 2$, $\mathbb{H}_j = \mathbb{N}_1^3 \setminus \{j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$

Pour illustrer la structure variable dans le temps du vecteur d'échange à une itération intermédiaire, $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$, prenons l'exemple d'un bâtiment de trois zones, dont chaque zone est adjacente avec les autres, $\mathbb{H}_j = \mathbb{N}_1^3 \setminus \{j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$. La figure 3.10 montre la composition du vecteur d'échange par rapport aux quatre composantes (voir (3.64)). Ainsi, pendant l'inoccupation, ce vecteur inclut la valeur mesurée de la sortie suivie par une séquence calculée de manière distribuée.

Dès que la fenêtre de prédiction entre progressivement dans la période d'occupation, la valeur de $N_{2,i}(k)$ diminue, ce qui nécessite l'ajout de valeurs de consigne future afin d'obtenir tous les éléments du vecteur d'échange. Vers la fin de la période d'occupation, il est possible que des valeurs de sortie correspondant à l'inoccupation soient nécessaires. Elles seront calculées comme la réponse libre du modèle décentralisé.

Remarque 3.4.3 Dans la figure 3.10 on observe également la quantité d'information échangée entre les régulateurs à chaque itération. À une itération intermédiaire, l'agent i transmet à ses voisins les éléments qui correspondent à optimisation distribuée et à la réponse libre. À la dernière itération on ajoute, éventuellement, des valeurs de consigne, qui sont utilisées à l'instant suivant.

3.4.4 Algorithme prédictif distribué

L'algorithme 1 synthétise la démarche présentée dans les paragraphes 3.4.2 et 3.4.3. Le programme est exécuté localement par chaque régulateur i , à chaque pas d'échantillonnage. Les étapes principales de la procédure itérative consistent à résoudre le problème local d'optimisation et à communiquer la séquence de sortie future aux agents voisins. Ensuite, chaque agent compare le vecteur d'échange nouvellement calculé à celui obtenu à l'itération précédente. Si la condition d'arrêt :

$$\|\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k) - \tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k)-1)}(k)\| \leq \epsilon_i \quad (3.68)$$

est satisfaite pour tous les agents, alors on applique la commande calculée à la dernière itération. Comme dans l'algorithme 1, la plupart des travaux référencés dans ce mémoire ne précise pas explicitement la norme utilisée dans le critère d'arrêt de l'algorithme itératif [51, 98, 195, 184, 131, 10, 103]. Pourtant, les choix usuelles sont la norme l_2 [32] et la norme infinie l_∞ [68, 97].

Remarque 3.4.4 Dans les travaux mentionnés ci-dessus, la condition d'arrêt de l'algorithme itératif distribué est exprimée en fonction de la séquence de commande : $\|\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k) - \mathbf{u}_i^{(l(k)-1)}(k)\| \leq \epsilon_i$. Pour le cas de la régulation de la température en utilisant des modèles couplés par la sortie, la formulation (3.68) est plus appropriée. Elle permet également d'établir un lien entre la précision des capteurs de température et la complexité de l'algorithme (le nombre d'itérations), car il n'a aucun sens de choisir ϵ_i inférieur à la précision des capteurs.

Algorithme 1 Procédure itérative de la commande prédictive distribuée à horizon dynamique (pour chaque agent i , $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$)

```

1 : Initialiser  $l(k) = l_0(k)$ 
2 : Mettre à jour les variables locales  $\mathbf{x}_i(k)$ ,  $y_i(k)$ ,  $\boldsymbol{\delta}_i(k)$ ,  $\mathbf{w}_i(k)$ 
3 : Calculer la taille de la fenêtre de prédiction locale pour l'instant suivant
    $N_{2,i}(k+1|k)$ 
4 : Calculer la séquence de commande optimale locale  $\mathbf{u}_i^{(l_0(k))}(k)$  (3.57) à l'itération
   initiale
5 : Tant que ( $l(k) < l_{max}$  ET  $\|\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k) - \tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k)-1)}(k)\| > \epsilon_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ ) faire
    5.1 : Itération suivante  $l(k) = l(k) + 1$ 
    5.2 : Si ( $l(k) = l_0(k) + 1$ ) Alors
        5.2.1 : Construire  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$  (3.64)
        5.2.2 : Envoyer  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$  et  $N_{2,i}(k+1|k)$  à tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
        5.2.3 : Recevoir  $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$  et  $N_{2,j}(k+1|k)$  de tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
        Sinon
        5.2.4 : Construire  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$  (3.64)
        5.2.5 : Envoyer  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$  à tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
        5.2.6 : Recevoir  $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$  de tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
        Fin Si
    5.3 : Calculer la séquence de commande optimale locale  $\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k)$  (3.57)
Fait
6 : Appliquer la première composante de  $\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k)$  au sous-système local  $i$ 
7 : Calculer  $\tilde{N}_{2,i}(k+1|k)$  et construit  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l_0(k+1))}(k)$ 
8 : Envoyer  $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l_0(k+1))}(k)$  à tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
9 : Recevoir  $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k+1))}(k)$  de tous les agents  $j \in \mathbb{H}_i$ 
10 : Mettre à jour  $k = k + 1$  et retour au pas 1

```

Suite à la formulation de la fonction locale de coût (3.45), la convergence de l'algorithme 1, qui sera étudiée dans la partie suivante, conduit les agents vers un consensus appelé équilibre non coopératif ou équilibre de Nash [18]. L'algorithme présenté est exécuté par tous les agents i , à chaque pas de temps.

Généralement, les contraintes temporelles, liées à la période d'échantillonnage, ne permettent pas de satisfaire la condition terminale et l'algorithme itératif est arrêté après un certain nombre d'itérations l_{max} . En choisissant $l_{max} = l_0$ on obtient la version non itérative de l'algorithme, avec une seule communication par pas de temps.

3.4.5 Analyse de la convergence

Nous nous proposons d'étudier la convergence de l'algorithme 1, à un pas de temps donné. Pour des raisons de simplicité des notations, dans la démarche suivante, on omet

la dépendance des variables en l'instant courant k . Reprenons l'équation (3.64), alors le vecteur qui décrit la séquence future de sortie utilisée par tous les voisins de l'agent i , à l'itération $l + 1$, s'écrit comme suit :

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l+1)} = \mathbf{\Gamma}_{1,i} \mathbf{y}_i + \mathbf{\Gamma}_{2,i} \hat{\mathbf{y}}_i^{(l)} + \mathbf{\Gamma}_{3,i} \mathbf{w}_i + \mathbf{\Gamma}_{4,i} \hat{\mathbf{y}}_{0,i}^{(l)}, \quad (3.69)$$

avec les notations utilisées au paragraphe 3.4.3.

L'objectif principal des lignes suivantes consiste à trouver une équation de récurrence, qui exprime $\tilde{\mathbf{y}}_i$ à l'itération $l+1$ en fonction des prédictions obtenues à l'itération précédente. Ainsi, l'équation de prédiction (3.49) pour l'agent i à l'itération l est la suivante :

$$\hat{\mathbf{y}}_i^{(l)} = \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{\Phi}_i \mathbf{u}_i^{(l)} + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l)}. \quad (3.70)$$

Explicitons maintenant la partie réponse libre. Comme nous l'avons déjà mentionné, on considère comme état initial la valeur prédite qui correspond au dernier instant de la fenêtre de prédiction locale, $\hat{\mathbf{x}}_i(k + N_{2,i}(k))$, alors :

$$\hat{\mathbf{y}}_{0,i}^{(l)} = \mathbf{\Psi}_{0,i} \left(\underbrace{\mathbf{A}_i^{N_{2,i}} \mathbf{x}_i + \mathbf{\Phi}_{0,i} \mathbf{u}_i^{(l)} + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{0,j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l)}}_{\hat{\mathbf{x}}_i(k + N_{2,i}(k))} \right), \quad (3.71)$$

avec les matrices

$$\mathbf{\Phi}_{0,i} = \begin{bmatrix} \phi_{0,i}(N_{2,i} - 1) & \cdots & \phi_{0,i}(N_{2,i} - N_{u,i} + 1) & \sum_{j=0}^{N_{2,i} - N_{u,i}} \phi_{0,i}(j) \end{bmatrix}, \quad \phi_{0,i}(k) = \mathbf{A}_i^k \mathbf{b}_i, \quad (3.72)$$

$$\mathbf{\Phi}_{0,j,i} = \begin{bmatrix} \phi_{0,j,i}(N_{2,i} - 1) & \cdots & \phi_{0,j,i}(1) & \phi_{0,j,i}(0) & \mathbf{0}_{n_i, N_{2,i} - N_{2,j}} \end{bmatrix}, \quad \phi_{0,j,i}(k) = \mathbf{A}_i^k \mathbf{e}_{j,i}, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{\Psi}_{0,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i}^{\zeta_{6,i}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{0,i} = \mathbf{A}_i + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} \mathbf{c}_j^T, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, k \in \mathbb{N}. \quad (3.74)$$

La matrice $\mathbf{A}_{0,i}$ représente la matrice d'état de la zone i , en supposant que les valeurs des sorties de toutes les zones adjacentes sont égales à la sortie de la zone i .

Afin d'obtenir la condition de convergence de l'algorithme, on utilise la solution analytique du problème de minimisation du critère local (3.45) à l'itération l qui peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{u}_i^{(l)} = -\mathbf{\Xi}_i \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l)} + \mathbf{\xi}_i, \quad (3.75)$$

avec la matrice $\mathbf{\Xi}_i$ définie par l'équation (3.56) et le vecteur $\mathbf{\xi}_i = \mathbf{\Xi}_i (\mathbf{w}_i - \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i)$ qui est

constant par rapport aux itérations intermédiaires de l'algorithme distribué.

En remplaçant (3.75) dans (3.70) et (3.71), ensuite (3.70) et (3.71) dans (3.69), on obtient :

$$\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l+1)} = \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \boldsymbol{\Theta}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l)} + \boldsymbol{\alpha}_i, \quad (3.76)$$

avec les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\Theta}_{j,i} = \boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \boldsymbol{\Phi}_{j,i} + \boldsymbol{\Gamma}_{4,i} \boldsymbol{\Psi}_{0,i} \boldsymbol{\Phi}_{0,j,i} - (\boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \boldsymbol{\Phi}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{4,i} \boldsymbol{\Psi}_{0,i} \boldsymbol{\Phi}_{0,i}) \boldsymbol{\Xi}_i \boldsymbol{\Phi}_{j,i}, \quad (3.77)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_i + (\boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \boldsymbol{\Phi}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{4,i} \boldsymbol{\Psi}_{0,i} \boldsymbol{\Phi}_{0,i}) \boldsymbol{\xi}_i, \quad (3.78)$$

$$\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\Gamma}_{1,i} \mathbf{y}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{3,i} \mathbf{w}_i + \left(\boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \boldsymbol{\Psi}_i + \boldsymbol{\Gamma}_{2,i} \boldsymbol{\Psi}_{0,i} \mathbf{A}_i^{N_{2,i}} \right) \mathbf{x}_i. \quad (3.79)$$

Alors, le vecteur global des séquences de sorties échangées s'exprime par l'équation :

$$\tilde{\mathbf{y}}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{y}}_1^{(l+1)} \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{y}}_s^{(l+1)} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Theta} \tilde{\mathbf{y}}^{(l)} + \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.80)$$

où

$$\boldsymbol{\Theta} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\tilde{N}_{2,1} \times \tilde{N}_{2,1}} & \boldsymbol{\Theta}_{2,1} & \cdots & \boldsymbol{\Theta}_{s,1} \\ \boldsymbol{\Theta}_{1,2} & \mathbf{0}_{\tilde{N}_{2,2} \times \tilde{N}_{2,2}} & \cdots & \boldsymbol{\Theta}_{s,2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\Theta}_{1,s} & \cdots & \boldsymbol{\Theta}_{s-1,s} & \mathbf{0}_{\tilde{N}_{2,s} \times \tilde{N}_{2,s}} \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Les matrices $\boldsymbol{\Theta}_{j,i}$ sont définies par (3.77) si les sous-systèmes i et j sont couplés, sinon $\boldsymbol{\Theta}_{j,i} = \mathbf{0}_{\tilde{N}_{2,i} \times \tilde{N}_{2,j}}$. La matrice $\boldsymbol{\alpha}$ est bloc diagonale : $\boldsymbol{\alpha} = \text{bloc-diag}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \dots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$.

Maintenant on peut formuler une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de l'algorithme itératif.

Proposition 3.4.1 (*Convergence de l'algorithme itératif*). *Étant donné l'instant k , l'algorithme 1 converge vers un consensus, si et seulement si la condition (3.82) est satisfaite :*

$$\rho(\boldsymbol{\Theta}) < 1, \quad (3.82)$$

où $\rho(\boldsymbol{\Theta}) = \max_i(|\lambda_i|)$ désigne le rayon spectral de la matrice $\boldsymbol{\Theta}$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\sum_{i=1}^s \tilde{N}_{2,i}}$ sont les valeurs propres de $\boldsymbol{\Theta}$.

Remarque 3.4.5 *Pendant les instants k pour lesquels $\boldsymbol{\delta}_i = \mathbf{0}_{\overline{N}_2 \times 1}$, la matrice $\boldsymbol{\Theta}$ est nilpotente d'indice $\overline{N}_2$. Ceci est dû au fait que pour ces instants, l'expression de la matrice*

devient :

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2} & \Gamma_{2,1} \Phi_{2,1} & \cdots & \Gamma_{2,1} \Phi_{s,1} \\ \Gamma_{2,2} \Phi_{1,2} & \mathbf{0}_{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2} & \cdots & \Gamma_{2,2} \Phi_{s,2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_{2,s} \Phi_{1,s} & \cdots & \Gamma_{2,s} \Phi_{s-1,s} & \mathbf{0}_{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2} \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

où les matrices $\Phi_{s,1} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2}$ ont une structure triangulaire inférieure (voir (3.53)), tandis que dans ce cas les matrices de sélection $\Gamma_{2,i} \in \mathbb{R}^{\bar{N}_2 \times \bar{N}_2}$ sont définies par :

$$\Gamma_{2,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

ce qui fait que tous les blocs de matrices qui entrent dans la composition de Θ sont soit nuls, soit triangulaires inférieurs avec toutes les composantes diagonales égales à zéro. Ainsi, tous les blocs de matrices non nuls sont nilpotents d'indice $\bar{N}_2$, propriété qui est également transmise à la matrice Θ . Par conséquent, $\Theta^{\bar{N}_2} = \mathbf{0}_{s\bar{N}_2 \times s\bar{N}_2}$ et l'algorithme 1 converge après $\bar{N}_2$ itérations.

La nilpotence de la matrice de convergence Θ pour le cas particulier présenté dans la remarque précédente, ainsi que la convergence rapide de l'algorithme (qui sera illustrée par un exemple numérique au paragraphe (3.4.6.3)) peuvent s'expliquer par les interactions stables et relativement lentes entre les sous-systèmes. Le couplage par les sorties, ainsi que le *blocage* des composantes calculées de manière décentralisée contribuent également à augmenter la vitesse de convergence de l'algorithme. Suite à cette propriété, un nombre très faible d'itérations est nécessaire pour obtenir de bonnes performances de contrôle.

De manière similaire, à partir de l'équation (3.75), l'expression de la séquence globale de commandes calculée à l'itération $l + 1$ est donnée par :

$$\mathbf{u}^{(l+1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(l+1)} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_s^{(l+1)} \end{bmatrix} = -\Xi \tilde{\mathbf{y}}^{(l)} + \boldsymbol{\xi}, \quad (3.85)$$

avec les notations

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_{u,1} \times \tilde{N}_{2,1}} & \Xi_1 \Phi_{2,1} & \cdots & \Xi_1 \Phi_{s,1} \\ \Xi_2 \Phi_{1,2} & \mathbf{0}_{N_{u,2} \times \tilde{N}_{2,2}} & \cdots & \Xi_2 \Phi_{s,2} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_s \Phi_{1,s} & \cdots & \Xi_s \Phi_{s-1,s} & \mathbf{0}_{N_{u,s} \times \tilde{N}_{2,s}} \end{bmatrix}, \quad (3.86)$$

et $\boldsymbol{\xi} = \text{bloc-diag}\{\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_s\}$.

3.4.6 Résultats numériques

Cette partie présente les performances de la structure de contrôle distribuée appliquée à la commande des convecteurs électriques dans un bâtiment virtuel qui est composé par trois zones thermiques. Le dimensionnement et les caractéristiques des matériaux du modèle simulé sont regroupés dans l'Annexe A. La figure 3.11 illustre la configuration des trois zones du bâtiment. Chaque zone est équipée d'un convecteur électrique de puissance maximale $P_{n,i} = 1,2\text{kW}$, surdimensionné par rapport aux normes en vigueur, ce qui est souvent le cas des bâtiments anciens.

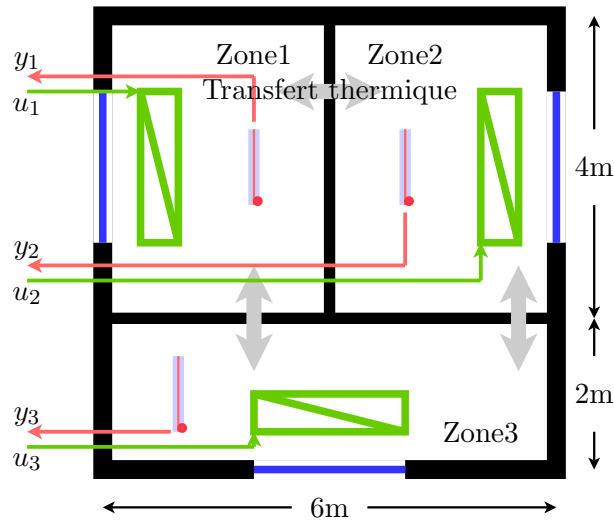


FIGURE 3.11 – Configuration du bâtiment simulé

De manière similaire au cas monozone, la température extérieure a été ajoutée comme perturbation mesurable du modèle de commande. Sachant que chaque zone est adjacente avec les deux autres, alors les modèles locaux contiennent quatre entrées et une sortie. On a choisi d'utiliser une structure très simple pour le modèle de commande, ce qui facilite en même temps la procédure d'identification ainsi que l'implantation du contrôleur. Par conséquent, chaque transfert E/S est modélisé par un premier ordre, ce qui donne pour chaque zone :

$$y_i(s) = \frac{K_i}{\tau_i s + 1} u_i(s) + \frac{K_{ext,i}}{\tau_{ext,i} s + 1} T_{ext}(s) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \frac{K_{j,i}}{\tau_{j,i} s + 1} y_j(s), \quad (3.87)$$

avec la prise en compte de l'influence de la température extérieure, T_{ext} . Les modèles locaux sont discrétisés avec une période d'échantillonnage $T_s = 30\text{min}$. Ensuite, ils sont exprimés sous la forme de représentation d'état (3.44), avec les matrices :

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,9501 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8215 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8916 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0,9491 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8193 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8848 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8885 \end{bmatrix}, \quad (3.88)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0,9585 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8409 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8938 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8902 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8606 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0480 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{3,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0361 \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{e}_{ext,1} = \begin{bmatrix} 0,0113 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8657 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{1,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0481 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{3,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0367 \end{bmatrix}, \quad (3.90)$$

$$\mathbf{e}_{ext,2} = \begin{bmatrix} 0,0113 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,7269 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0363 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{2,3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0362 \end{bmatrix}, \quad (3.91)$$

$$\mathbf{e}_{ext,3} = \begin{bmatrix} 0,0125 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i = \mathbf{1}_{4 \times 1}, \forall i \in \mathbb{N}_1^3, \quad (3.92)$$

Les caractéristiques des trois zones du bâtiment considéré sont assez similaires, ce qui fait que les valeurs numériques des paramètres des trois modèles locaux sont assez proches. Ils sont stables, commandables et observables. L'élaboration de la loi de commande aux paragraphes précédents a été menée en supposant que les états du système sont connus, ce qui n'est généralement pas le cas dans la pratique. Ici, sachant que les états des modèles ne correspondent pas aux grandeurs physiques, il apparaît nécessaire de mettre en place des observateurs d'état. L'observateur utilise le modèle de commande avec une contre-réaction qui pondère l'erreur de sortie. L'estimation de l'état peut ainsi être effectuée à l'aide d'un observateur de type Luenberger [109]. Ainsi, l'état prédit estimé a la forme suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} y_j(k) + \mathbf{e}_{ext,i} T_e(k) + \mathbf{k}_i [y_i(k) - \mathbf{c}_i^T \hat{\mathbf{x}}_i(k)]. \quad (3.93)$$

La propriété d'observabilité nous permet de choisir les gains des observateurs, $\mathbf{k}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, pour placer leurs valeurs propres à l'intérieur du cercle unité. Comme on peut l'observer, afin d'estimer l'état $\hat{\mathbf{x}}_i$, l'observateur local a également besoin des valeurs des sorties mesurées par les capteurs des pièces voisines et aussi de T_{ext} . En supposant que les observateurs locaux ont accès aux mesures des sorties des zones adjacentes et en choisissant ses pôles cinq fois plus rapides que les pôles du modèle, les gains des observateurs obtenus sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \begin{bmatrix} 32,0847 & -2,7697 & 178,9277 & -206,8616 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{k}_2 &= \begin{bmatrix} 32,9429 & -2,7582 & 432,8484 & -461,6421 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{k}_3 &= \begin{bmatrix} 24,0146 & -3,3348 & -354,5509 & 335,1681 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (3.94)$$

En plaçant les pôles de l'observateur beaucoup plus rapides que ceux du système, les valeurs des composantes du gain $\mathbf{k}_i$ deviennent importantes. Sachant que les observateurs à gain élevé (high-gain observers) peuvent amplifier les erreurs d'estimation (dus aux perturbations et aux simplifications de modélisation), les pôles de l'observateur ont été calculés afin d'obtenir de bonnes performances de contrôle [187], ainsi qu'une vitesse de convergence satisfaisante des états estimés. Pour plus d'informations sur les observateurs à gain élevé ou les observateurs pour certaines classes de systèmes MIMO, le lecteur est

invité à consulter les travaux de [58, 59].

3.4.6.1 Modèle découplé

Pour mesurer les améliorations sur les performances apportées par la prise en compte du couplage entre les zones adjacentes, on va comparer les résultats obtenus en utilisant la structure de commande distribuée par rapport à une stratégie complètement décentralisée, pour laquelle chaque agent calcule la commande locale de manière indépendante. Afin d'utiliser la même structure du modèle de commande pour le cas décentralisé, on formule l'hypothèse que les températures sont égales dans toutes les zones du bâtiment. Dans ce cas, le modèle local décentralisé devient :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{0,i}(k+1) = \left(\mathbf{A}_i + \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} \mathbf{c}_j^T}_{\mathbf{A}_{0,i}} \right) \mathbf{x}_{0,i}(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \mathbf{e}_{ext,i} T_e(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_{0,i}(k). \end{cases} \quad (3.95)$$

À partir du modèle (3.95), l'équation de l'observateur local décentralisé est la suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,i}(k+1) = \mathbf{A}_{0,i} \hat{\mathbf{x}}_{0,i}(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \mathbf{k}_{0,i} [y_i(k) - \mathbf{c}_i^T \hat{\mathbf{x}}_{0,i}(k)], \quad (3.96)$$

où le gain de l'observateur, $\mathbf{k}_{0,i}$ est calculé par une procédure de placement de pôles, afin d'obtenir une dynamique de l'observateur cinq fois plus rapide que la dynamique du modèle.

3.4.6.2 Comparaison MPC décentralisé - MPC distribué

Dans ce paragraphe nous allons comparer les performances en termes de confort et de consommation de la structure de commande prédictive distribuée (DiMPC) par rapport à la stratégie complètement décentralisée (DéMPC). Pour ce faire, nous reprenons les indices définis dans le paragraphe 3.3.4.1 pour une seule zone et nous les étendons à un bâtiment multizone. Ainsi, la consommation du bâtiment tout entier est la somme des consommations locales :

$$E_c = \sum_{i=1}^s \sum_{k=k_0}^{k_f} \frac{T_s P_{n,i} u_i(k)}{3600}. \quad (3.97)$$

De manière similaire, l'indice global qui mesure la qualité de la régulation est représenté par la somme des indices locaux :

$$I_c = \sum_{i=1}^s \frac{\sum_{k=k_0}^{k_f} T_s \delta_i(k) \cdot |y_i(k) - w_i(k)|}{3600}. \quad (3.98)$$

Dans cette étude, on se propose de comparer les performances de six stratégies de commande prédictive appliquées à la régulation thermique du bâtiment. On utilisera ainsi des abréviations similaires à celles introduites au paragraphe 3.3.6 : le suffixe HC désigne le fait que la commande prédictive utilise une taille de fenêtre de prédiction constante, tandis que les suffixes HV1 et HV2 indiquent le fait que la valeur du paramètre local $N_{2,i}$ est variable dans le temps. Pour avoir une meilleure vision sur les performances de contrôle de chaque structure développée, les résultats sont comparés sur quatre scénarios d'occupation. Les paramètres de réglage pour les contrôleurs prédictifs locaux sont les suivants : $N_{u,i} = N_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\bar{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\epsilon_i = 10^{-2}$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$.

Scénario 1. La zone 1 est occupée du lundi au vendredi de 8h à 24h, tandis que les autres pièces ne sont jamais occupées. Ceci est un cas très particulier, qui est rarement rencontré dans la réalité. Pourtant, il est intéressant d'observer comment une zone chauffée influence les zones inoccupées et ayant une température intérieure faible (voir la figure 3.12a). On peut observer une bonne qualité de la régulation pendant les phases d'occupation.

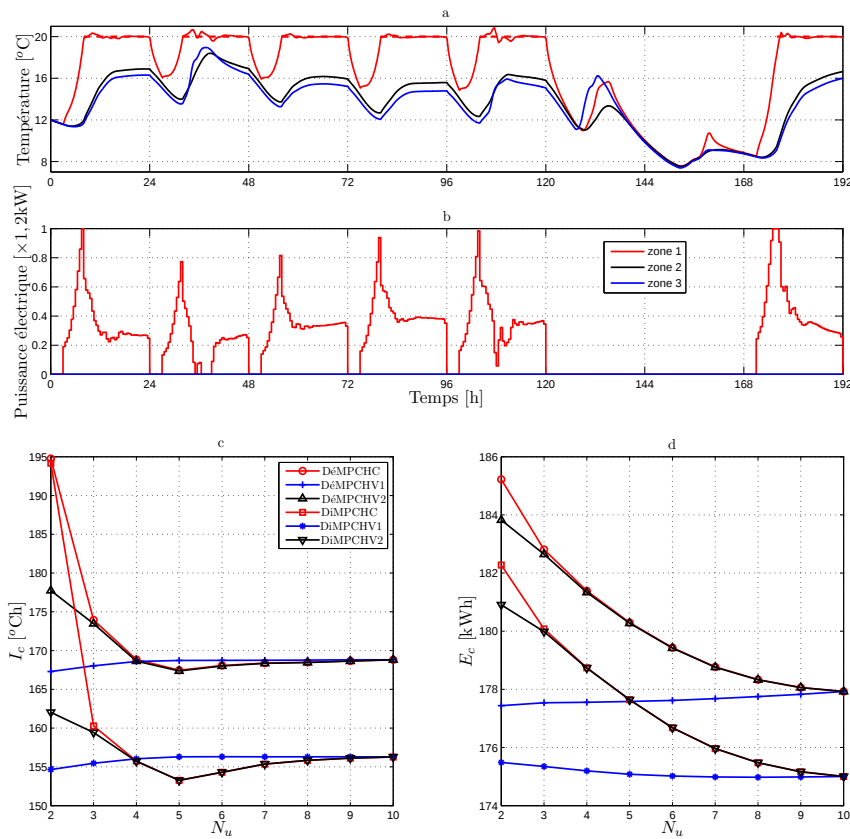


FIGURE 3.12 – Scénario 1 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d)

Des apports solaires plus importants les deuxième et quatrième jours provoquent de légers dépassements. Les valeurs temporelles des principales perturbations liées aux conditions météorologiques simulées peuvent être retrouvées figure A.4 de l'Annexe A. En termes

de performances, les stratégies de commande distribuées améliorent le confort en moyenne de 8,3 % et réduisent la consommation énergétique de 1,64 % par rapport à une commande équivalente complètement décentralisée.

Remarque 3.4.6 Dans cette partie on a omis de comparer les résultats des stratégies distribuées avec ceux obtenus par l'application d'un régulateur MPC centralisé. Ceci pour plusieurs raisons :

- la formulation du problème centralisé à horizon de prédiction variable est loin d'être évidente, dû à des valeurs différentes de $N_{2,i}$, pour chaque zone
- en favorisant le confort par rapport à la consommation, dans le cas centralisé on peut avoir des situations où les équipements de chauffage des pièces non-occupées sont mis en marche, pour aider le (pré-)chauffage d'une pièce adjacente (ce qui ne peut pas se passer en employant la stratégie distribuée, dû au fait que les régulateurs minimisent uniquement des objectifs locaux).

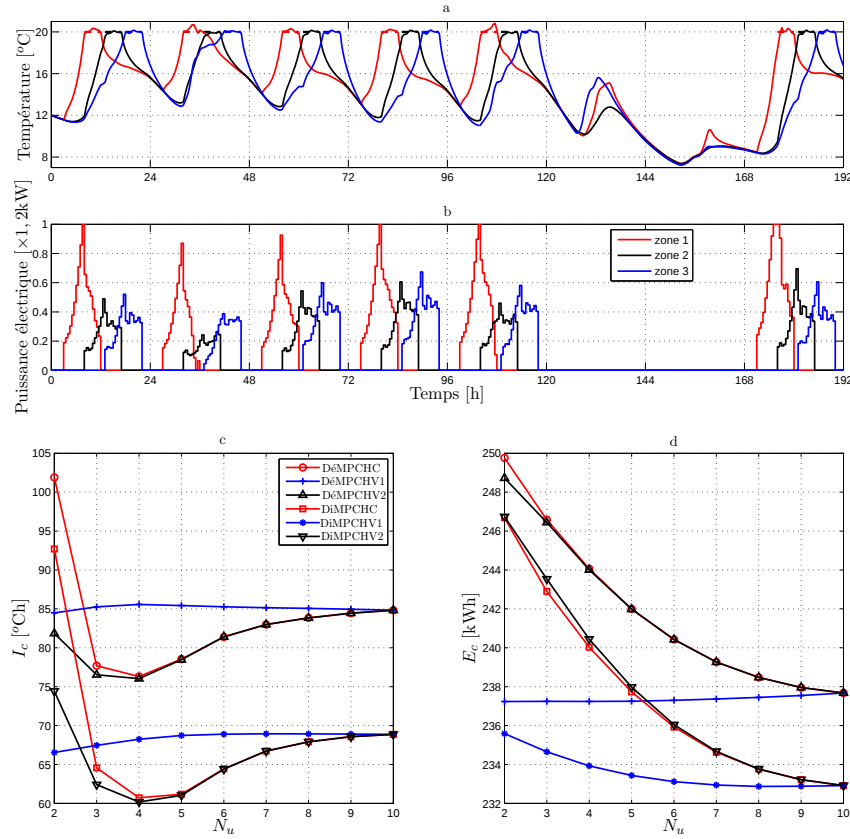


FIGURE 3.13 – Scénario 2 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\bar{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$

Scénario 2. On considère un profil d'occupation désynchronisé avec des périodes d'occupation courtes. Ainsi, la zone 1 est occupée de 8h à 12h, la zone 2 de 13h à 17h, alors que

la zone 3 est occupée de 18h à 22h. Sur ce scénario, les améliorations relatives moyennes des structures distribuées sont de 21,8 % par rapport à l'indice de confort, et dans le même temps la consommation est réduite en moyenne de 2 %.

Par rapport au Scénario 1, on observe que l'écart en termes de performances entre les D MPC et les DiMPC augmente. Ceci s'explique par le fait que pendant les périodes de relance et d'occupation, les variations des températures dans les trois pièces sont importantes. Ces évolutions temporelles sont prises en compte par les structures distribuées, grâce aux échanges d'informations.

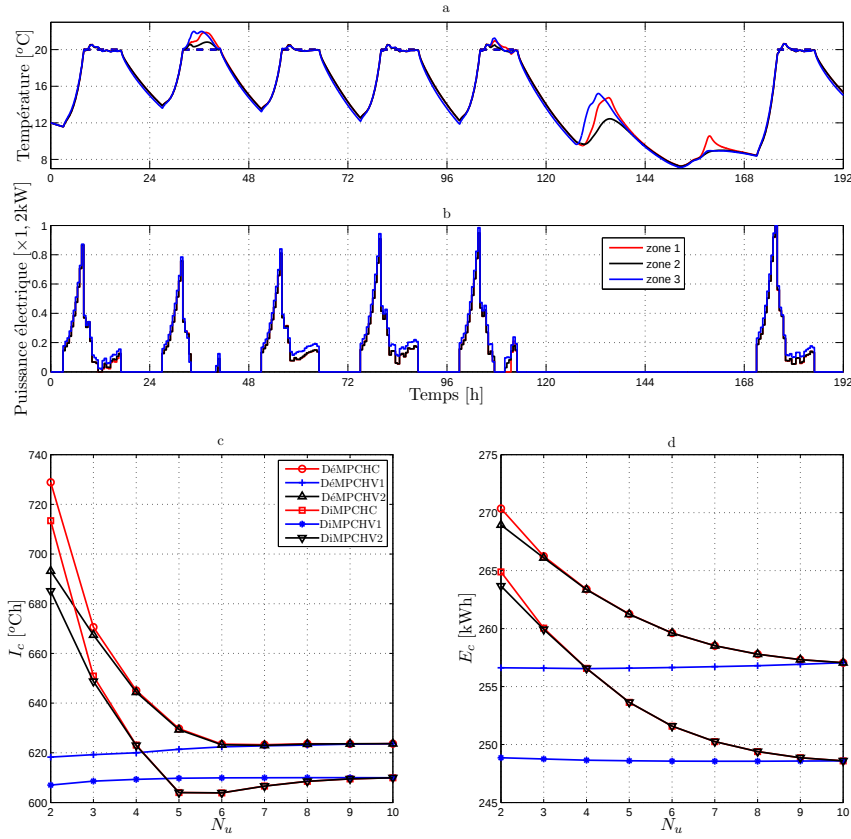


FIGURE 3.14 – Scénario 3 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\bar{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$

Scénario 3. Dans ce troisième cas, on admet que les trois zones possèdent le même profil d'occupation, de 8h   17h. Par rapport aux scénarios précédents, le rayonnement solaire engendre des dépassements de consigne plus importants, jusqu'à 2 C pour la période de simulation représentée figure 3.14a. Pour ce profil d'occupation synchronisée, l'écart moyen entre l'indice de confort des structure décentralisées par rapport à celles distribuées est réduit à 3,4 %, avec une économie moyenne de 3,3 %.

Scénario 4. Dans ce quatrième scénario, un profil d'occupation semi-synchronisé a été défini. Ainsi, la zone 1 est occupée de 8h   17h, la zone 2 de 10h   19h et la zone 3 de 14h  

18h. Admettons que les deux profils d'occupation précédents représentent deux extrêmes, celui-ci se situe quelque part entre les deux. À partir de cette remarque, les résultats obtenus sont relativement intuitifs. Les stratégies prédictives distribuées améliorent les degré de confort avec une moyenne de 10,3 % tout en réalisant des économies énergétiques de 2,4 %.

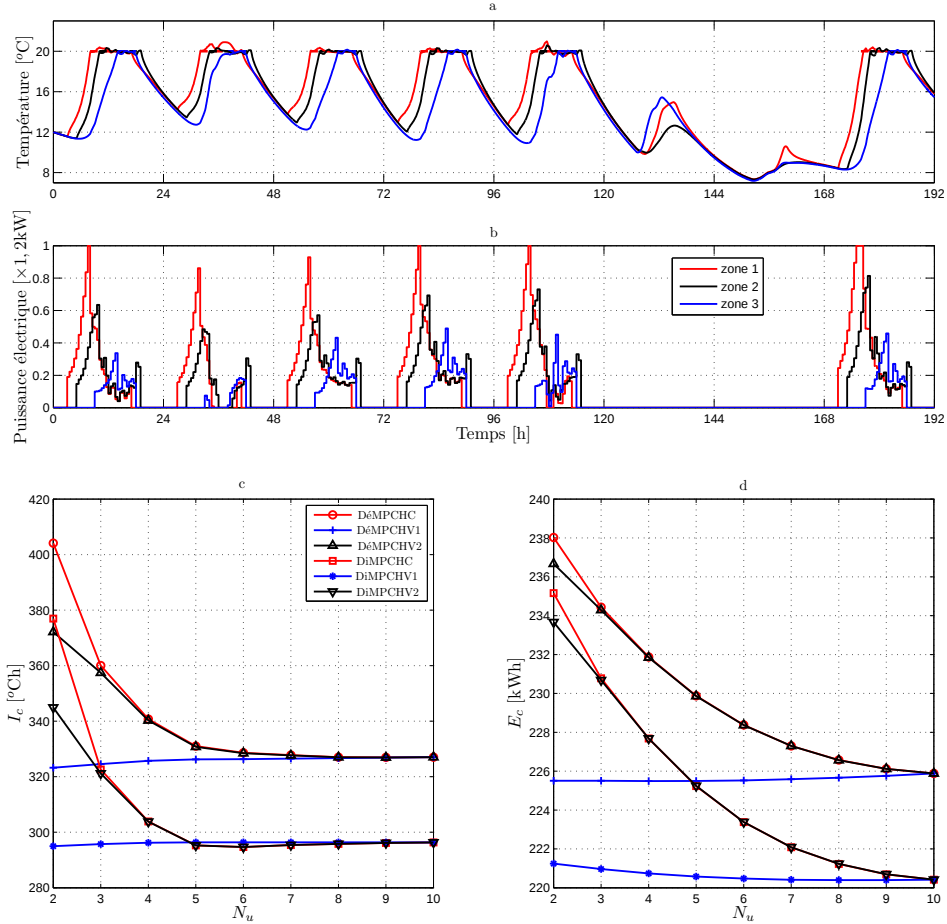


FIGURE 3.15 – Scénario 4 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\bar{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$

Cette étude comparative sur les quatre scénarios d'occupation présentés ci-dessous nous a permis de mesurer les performances de six structures de contrôle développées pour la régulation de la température dans le cadre multizone. Pour chaque scénario, on a mis en évidence les améliorations sur les performances de contrôle issues de la prise en compte des couplages thermiques entre les zones par l'intermédiaire des architectures distribuées.

Pour les deux architectures de commande, DēMPC et DiMPC, on a également comparé de manière quantitative les performances obtenues en utilisant deux stratégies de variation de la taille de l'horizon de prédiction local par rapport au cas où la dimension de l'horizon de prédiction est constante. Les résultats sur les quatre scénarios considérés

montrent, comme pour le monozone, qu'il devient intéressant de diminuer la taille de l'horizon de prédiction dans le cas où des valeurs relativement faibles de la taille de l'horizon de commande sont utilisées.

3.4.6.3 Étude expérimentale sur la vitesse de convergence

L'objectif de ce paragraphe est d'étudier, de manière expérimentale, la vitesse de convergence de l'algorithme distribué. Pour ce faire, on reprend les scénarios d'occupation 2 et 4, présentés ci-dessus. Les figures 3.16 et 3.17 illustrent l'évolution de l'écart maximal parmi les agents entre deux vecteurs d'échange consécutifs, exprimée en norme infinie, et également la valeurs du rayon spectral de la matrice Θ .

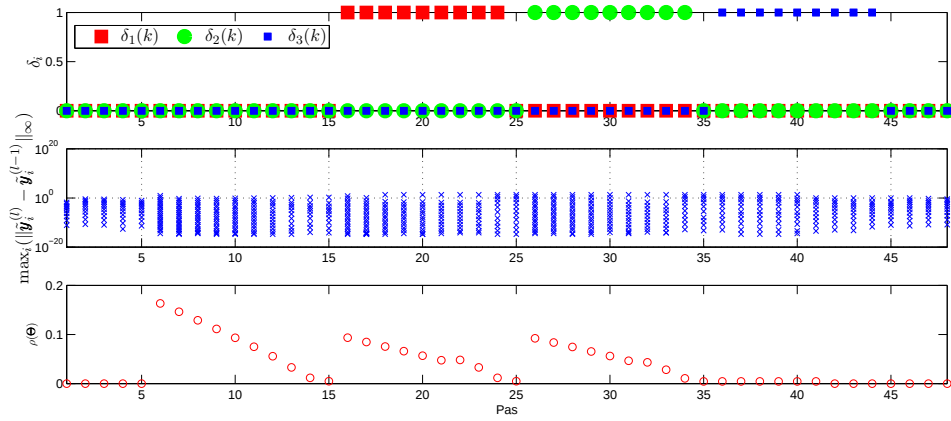


FIGURE 3.16 – Scénario 2 : Évolution de la vitesse de convergence et du rayon spectral de la matrice Θ en fonction du profil d'occupation, pour la configuration DiMPCHV1, avec : $\bar{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 3$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$

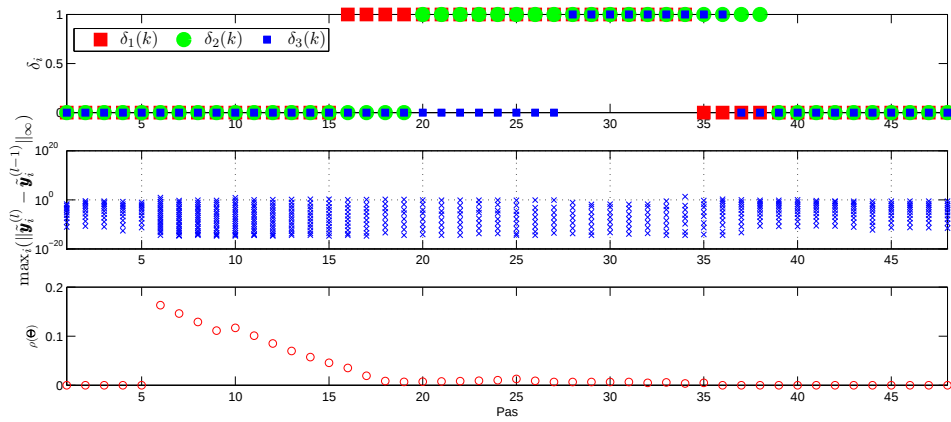


FIGURE 3.17 – Scénario 4 : Évolution de la vitesse de convergence et du rayon spectral de la matrice Θ en fonction du profil d'occupation, pour la configuration DiMPCHV1, avec : $\bar{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 3$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$

La vitesse de convergence de l'algorithme distribué est relativement rapide. Pour les quatre scénarios étudiés, un maximum de 4 itérations par pas d'échantillonnage est nécessaire pour satisfaire la condition de convergence avec $\epsilon_i = 10^{-2}$. Un nombre élevé d'itérations est atteint quand le rayon spectral $\rho(\Theta)$ est relativement important. Ces instants correspondent à la période de préchauffage pendant laquelle la vitesse de convergence augmente progressivement.

Scénario	Loi de commande		I_c [°Ch]	E_c [kWh]
	Type	Spécificité		
1	DiMPCHV1	$l_{max} = 1$	158,64	175,67
		$l_{max} = 2$	154,62	175,48
		$l_{max} = 10$	154,61	175,46
	DéMPCHV1	-	167,29	177,43
2	DiMPCHV1	$l_{max} = 1$	71,14	235,85
		$l_{max} = 2$	66,44	235,39
		$l_{max} = 10$	66,44	235,26
	DéMPCHV1	-	84,48	237,23
3	DiMPCHV1	$l_{max} = 1$	620,99	249,57
		$l_{max} = 2$	607,07	248,74
		$l_{max} = 10$	606,86	248,83
	DéMPCHV1	-	618,27	256,61
4	DiMPCHV1	$l_{max} = 1$	301,96	221,44
		$l_{max} = 2$	294,93	221,24
		$l_{max} = 10$	294,91	221,22
	DéMPCHV1	-	323,24	225,50

TABLE 3.2 – Résultats comparatifs DéMPCHV1 - DiMPCHV1 pour les quatre scénarios d'occupation, avec les paramètres : $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} = 2$, $N_{2,i} = \overline{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\epsilon_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$

Dans le tableau 3.2, on compare les performances de la structure de commande distribuée en utilisant plusieurs valeurs du nombre maximal d'itérations. On observe que la version non itérative de l'algorithme 1 offre des résultats proches de ceux obtenus par la procédure itérative, ce qui est principalement dû à une bonne initialisation (voir le paragraphe 3.4.3.2) La deuxième itération permet une amélioration au niveau du confort de 2,25 à 6,6 % avec des taux de consommation quasiment identiques. Pourtant, il semble que l'augmentation du nombre d'itérations à une valeur supérieure à 2 ne modifie pas de manière significative les performances de contrôle. Ceci peut s'expliquer par le fait qu'à partir de la deuxième itération certaines composantes des vecteurs d'échange restent constantes. De plus, la séquence de sortie calculée de façon distribuée n'a pas une évolution importante au fil des itérations (les termes de pondération λ_i étant choisis afin de favoriser le suivi de consigne).

3.5 Conclusion

Le travail développé dans ce chapitre avait comme objectif de présenter une stratégie de commande prédictive à critère quadratique pour la régulation du poste de chauffage des bâtiments, dans le cas d'une occupation intermittente. L'utilisation d'un modèle linéaire du système (bâtiment et organe de chauffe) permet, dans le cadre d'une optimisation sans contraintes, d'exprimer la commande sous la forme d'une loi linéaire. Ainsi, le régulateur prédictif peut être facilement implanté sur une carte électronique embarquée.

Dans un premier temps, nous avons modifié la fonction de coût classique de la loi de commande prédictive, pour mieux répondre aux objectifs de contrôle thermique dans le cadre d'une occupation discontinue. Ainsi, le profil futur d'occupation a été inclus dans la formulation de la fonction de coût. Ceci modifie l'objectif de contrôle en fonction de la phase (occupation / inoccupation) de la zone. La loi de commande linéaire devient ainsi variable dans le temps. Malgré le fait que la stratégie de commande ait été présentée dans le contexte de la régulation thermique, elle peut également être une solution pour la commande des systèmes qui possèdent un fonctionnement discontinu, comme par exemple les machines-outils qui doivent usiner des pièces [79]. Il apparaît des périodes de temps pendant lesquelles la machine n'usine pas, et dans ce cas seule la réduction de sa consommation énergétique est intéressante.

Pour faciliter la mise en oeuvre de la loi de commande présentée, une structure polynomiale dynamique de type RST, dont les coefficients des trois polynômes sont variables dans le temps, a été développée. Pour réduire la charge de calcul en ligne, les coefficients des polynômes peuvent être stockés dans un bloc de mémoire. Afin d'améliorer les performances de contrôle sans augmenter la complexité du correcteur, une stratégie de diminution de l'horizon de prédiction sur la sortie, en fonction du profil d'occupation, a été présentée.

La démarche développée pour une seule pièce a été adaptée à un bâtiment multizone où la commande est calculée de manière distribuée. Les interactions thermiques entre les zones adjacentes sont prises en compte dans le modèle de commande par l'utilisation d'un couplage par les sorties. Cette particularité du modèle permet de réduire la quantité d'informations échangées entre les agents voisins, en employant une stratégie de variation de l'horizon de prédiction. En fonction du profil d'occupation local et de l'itération courante, la séquence d'information échangée parmi les agents est composée d'une partie calculée de façon distribuée, mais peut également inclure une partie évaluée de manière décentralisée sans avoir recours à une procédure d'optimisation. Une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de l'algorithme proposé a été formulée.

Les résultats de simulation ont montré des augmentations sur le degré de confort ainsi que des économies d'énergie avec l'architecture distribuée à horizon dynamique. Le prix à payer pour ces améliorations de performance est l'utilisation d'un réseau de communication, qui permet l'échange d'information entre les régulateurs locaux. Pour le cas où l'algorithme non itératif n'offre pas les performances requis, une complexité supplémentaire s'ajoute, suite au calcul de la commande optimale à chaque itération de l'algorithme dis-

tribué.

Malgré les avantages de la commande prédictive à critère quadratique, elle n'offre pas une relance optimale du poste de chauffage. Celle-ci suppose le déclenchement du chauffage à puissance maximale, au dernier moment, pour que la température de la zone atteigne la valeur de confort dès le début de la période d'occupation. Comme on a pu le constater, la durée de la période de préchauffage des régulateurs étudiés dans ce chapitre est définie par la taille de l'horizon maximal de prédiction. Pourtant, l'évolution de la puissance de chauffe pendant la relance dépend des paramètres de réglage du régulateur. Sachant qu'il n'existe pas de règles permettant de calculer les paramètres spécifiques à la commande prédictive, nous avons également analysé les performances obtenues pour différentes valeurs des paramètres de réglage.

Les performances économiques étant généralement exprimées via des critères linéaire de performance, il s'avère alors intéressant d'étudier le comportement des régulateurs prédictifs à critère linéaire, cet aspect sera développé dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

MPC linéaire multivariable pour la régulation thermique multizone¹

C'est un ménage à quatre : lui, elle, l'idée qu'elle se fait de lui et l'idée qu'il a d'elle.

La vie de couple

CLAUDE ROY

4.1 Introduction

La mise en œuvre de la commande prédictive est parfois limitée par le temps de calcul nécessaire à la résolution du problème d'optimisation. Ceci est une des raisons pour laquelle la formulation classique du MPC repose sur un critère quadratique. Pour le cas sans contraintes, la solution optimale peut être, en effet, obtenue par la résolution analytique du problème d'optimisation, ce qui permet une implantation peu coûteuse du correcteur. Cet avantage a été mis en évidence dans le chapitre précédent dans lequel la loi prédictive a été implantée sous la forme d'un régulateur classique de type RST. Ainsi les premiers régulateurs MPC industriels, comme IDCOM ou DMC [152], ont été développés pour les formulations sans contraintes des critères quadratiques. Ils ont été suivis par des correcteurs MPC basés sur des algorithmes de programmation quadratique, qui optimisent un problème sous contraintes. Plus tard, les efforts de la communauté scientifique se sont concentrés sur les aspects liés à la faisabilité et à la stabilité en boucle fermée [118].

Dans le chapitre 3 nous avons proposé une méthode de réduction de la taille de l'horizon de prédiction, ce qui nous a permis de mieux gérer les périodes de relance, mais également d'augmenter légèrement la robustesse du régulateur par rapport au cas de l'horizon constant. En diminuant la taille de l'horizon de prédiction, on augmente l'agressivité de la loi de commande. Cependant, par ses propriétés intrinsèques, le MPC à critère linéaire

1. Des éléments de ce chapitre peuvent être retrouvés dans [123, 120, 126].

est beaucoup plus agressif que le MPC à formulation quadratique [159], ce qui peut engendrer un comportement de type dead-beat. Même si les actions brusques du correcteur sont généralement indésirables, dans le cas des systèmes électriques de chauffage, elles ne représentent pas un inconvénient majeur. Fréquemment, en effet, ces équipements sont commandés par des correcteurs de type TOR.

Malgré ces points, en faveur d'un MPC quadratique, les principaux aspects qui motivent l'adoption dans la suite de ce document du MPC à critère linéaire sont résumés ci dessous.

- Les critères de performance sont généralement formulés sous forme linéaire. Cela est plus intuitif et représente mieux les objectifs économiques. De manière générale, la consommation énergétique est proportionnelle à la commande appliquée au système. Ainsi, une fonction de coût linéaire permet de prendre en compte facilement les variations (journalières) du prix de l'électricité.
- La meilleure stratégie de contrôle pendant la phase de relance consiste à déclencher l'équipement à la puissance maximale au dernier moment, défini de sorte que la température atteigne le niveau de confort voulu dès le début de la période d'occupation. Dans le chapitre précédent on a vu que ce comportement ne caractérise pas la commande quadratique, pour laquelle la puissance de chauffe croît généralement de manière progressive pendant la relance.

Ce chapitre sera alors focalisé sur des stratégies de commande prédictives distribuées, à fonctions de coût linéaires. L'apparition explicite des contraintes dans la définition du problème d'optimisation devient obligatoire, car la solution sans contraintes est infinie. La section 4.3 traitera le cas des contraintes locales, propres à chaque agent. Les contraintes locales les plus importantes concernent les limites inférieures et supérieures sur les signaux de commande, traduisant de limitations physiques de l'actionneur. Dans la partie 4.4, nous introduirons une contrainte globale qui intègre des paramètres appartenant soit à un ensemble de zones, soit au bâtiment entier. La méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe sera l'outil qui permettra la distribution de l'effort de calcul sur les différents régulateurs locaux.

4.2 Contexte

La programmation linéaire est sans doute le mécanisme le plus naturel pour une formulation aisée d'une vaste gamme de problèmes pratiques. Un problème de programmation linéaire est caractérisé, comme son nom l'indique, par un objectif linéaire et par des contraintes égalités et / ou inégalités linéaires. On peut penser, au premier abord, que les formulations linéaires des problèmes d'optimisation sont populaires parce que la formulation mathématique est agréable, la théorie est riche et la charge de calcul est plus faible que pour d'autres types de problèmes d'optimisation. En fait, ce ne sont pas là les principales raisons. En termes de propriétés mathématiques et calculatoires, il existe des classes de problèmes d'optimisation (quadratiques, par exemple) qui possèdent des théories élégantes

et puissantes, et pour lesquelles des algorithmes efficaces sont disponibles. Cependant, il semble que la popularité de la programmation linéaire soit plutôt due à la phase de formulation du problème qu'à la phase de calcul de la solution optimale. Ainsi, la plupart des contraintes et des objectifs qui se posent dans la pratique sont incontestablement linéaires.

La majorité des objectifs de contrôle dans le domaine de l'énergie possèdent au moins une composante économique (minimisation de l'énergie consommée). Cette composante est généralement une fonction linéaire des variables de décision. Pour un système de chauffage électrique, les dépenses sont proportionnelles à l'énergie électrique consommée par le poste de chauffage. Dans le cadre de la commande prédictive, ces objectifs économiques sont usuellement remplacés par des critères quadratiques, comme on l'a vu au chapitre précédent, en vertu des bonnes propriétés mathématiques de la programmation quadratique [159].

Malgré cela, des performances meilleures en termes économiques peuvent être obtenues par des structures de contrôle prédictif à critère linéaire. L'utilisation de la programmation linéaire pour la résolution des problèmes de commande optimale date du début des années soixante [193, 151]. Ultérieurement, seuls peu d'auteurs ont étudié des formulations linéaires de critères MPC, exprimés comme de sommes de normes l_1 ou de normes l_∞ . Mentionnons ici les travaux relativement récents de [159, 20, 82]. Les deux derniers articles se sont concentrés sur l'aspect réduction du temps de calcul en ligne, à l'aide de techniques de programmation linéaire multiparamétriques. Dans notre cas, la formulation *dynamique* du critère (suite à l'inclusion du profil d'occupation) réduit l'intérêt de l'utilisation d'une solution explicite. Dès lors, des solveurs efficaces doivent être implantés sur les contrôleurs afin de calculer, à chaque pas, la commande à appliquer au système.

4.3 Contraintes locales

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier le comportement de trois structures de commande prédictive à critère de type norme l_1 pour la régulation de la température dans un bâtiment multizone :

- la structure décentralisée,
- la structure distribuée,
- la structure centralisée.

Les contraintes considérées dans cette partie portent uniquement sur les grandeurs de commande locales. On reprend, dans les paragraphes suivantes, les notations utilisées au chapitre précédent.

4.3.1 Définition du critère

Considérons la fonction de coût locale :

$$J_i(k) = \|\Delta_i(k) (\hat{\mathbf{y}}_i(k) - \mathbf{w}_i(k))\|_1 + \|\mathbf{\Lambda}_i(k) \mathbf{u}_i(k)\|_1, \quad (4.1)$$

où la norme l_1 d'un vecteur $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ est définie comme la somme des valeurs absolues de ses composantes : $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$. Alors, chaque agent local minimise le critère (4.1) sous la contrainte :

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_i(k), \quad (4.2)$$

qui spécifie les limitations sur la grandeur de commande locale. D'autres contraintes, sur les variables d'entrée, de sortie ou sur les incréments de la commande, peuvent être également ajoutées.

Dans la suite du manuscrit, nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.3.1 *Les horizons de prédiction sur la commande et sur la sortie sont les mêmes pour tous les agents locaux, i.e. $N_{1,i} = N_1$, $N_{u,i} = N_u$, $N_{2,i} = N_2$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$.*

Cette hypothèse est motivée par le fait que la puissance de chauffe installée dans chaque pièce est adaptée à ses caractéristiques (dimensions, déperditions, localisation, etc.). Par conséquent, les durées de relance dans le pire des cas ne varient pas beaucoup d'une pièce à l'autre. Toutefois, le choix du paramètre N_2 est dicté par le temps de réponse le plus long parmi tous les sous-systèmes (zones). Dû au comportement plus agressif de type dead-beat de la commande prédictive à critère linéaire, la réduction de la dimension de l'horizon de prédiction n'engendre pas d'amélioration significative au niveau des performances.

4.3.1.1 MPC linéaire décentralisé

L'approche décentralisée constitue la structure de commande la plus utilisée dans la régulation thermique multizone. Chaque zone dispose d'un contrôleur qui régule la température locale, en jouant sur la puissance locale de chauffe. Les couplages thermiques entre les zones adjacentes sont négligés. Ainsi, dans le modèle de commande, les températures des zones voisines sont considérées égales à la température locale.

À partir du modèle local (3.44) défini au paragraphe 3.4.1, le modèle local découplé s'écrit comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{0,i} \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k), \end{cases} \quad (4.3)$$

où la matrice $\mathbf{A}_{0,i}$ est définie par (3.74).

Par l'ajout de $N_u + 2N_2$ variables auxiliaires, le problème d'optimisation local :

$$\min_{\mathbf{u}_i(k)} J_i(k) \quad (4.4)$$

sous la contrainte (4.2) peut être posé sous la forme standard² d'un programme linéaire

2. Un problème de programmation linéaire est dit sous la forme standard lorsque toutes ses contraintes sont des égalités et toutes ses variables de décision sont non-négatives.

(PL) :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}'_i(k)} \quad & \boldsymbol{\lambda}_i'^T(k) \mathbf{u}'_i(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{G}_{0,i} \mathbf{u}'_i(k) = \mathbf{g}_{0,i}(k) \\ & \mathbf{u}'_i(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u+2N_2) \times 1}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La nouvelle variable d'optimisation $\mathbf{u}'_i(k)$ est obtenue en concaténant à la séquence de commandes futures, les variables auxiliaires, décrites ci dessous.

- N_u variables auxiliaires, $\boldsymbol{\chi}_i(k) \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$, transforment les contraintes inégalité en contraintes égalité. Seule la contrainte qui indique la limite supérieure de la commande est transformée en contrainte égalité, tandis que la limite inférieure, qui désigne la positivité de la variable de décision est implicite dans la formulation PL standard.
- $2N_2$ variables auxiliaires, $\underline{\boldsymbol{\eta}}_i(k), \bar{\boldsymbol{\eta}}_i(k) \in \mathbb{R}^{N_2 \times 1}$, sont nécessaires pour mettre sous une forme linéaire le premier terme du critère (4.1). Ces variables décrivent l'écart entre les sorties prédites et les valeurs de consigne futures. Suite à la positivité des grandeurs de commande, le deuxième terme du critère (4.1) devient : $\|\boldsymbol{\Lambda}_i(k) \mathbf{u}_i(k)\|_1 = \boldsymbol{\lambda}_i'^T(k) \mathbf{u}_i(k)$.

Suite aux remarques précédentes, le vecteur d'optimisation augmenté et son coût associé deviennent :

$$\mathbf{u}'_i(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i(k) \\ \boldsymbol{\chi}_i(k) \\ \underline{\boldsymbol{\eta}}_i(k) \\ \bar{\boldsymbol{\eta}}_i(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda}'_i(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_i(k) \\ \mathbf{0}_{N_u \times 1} \\ \boldsymbol{\Delta}_i(k) \mathbf{1}_{N_2 \times 1} \\ \boldsymbol{\Delta}_i(k) \mathbf{1}_{N_2 \times 1} \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

La matrice et le vecteur qui définissent la contrainte égalité du problème (4.5) ont les formulations suivantes :

$$\mathbf{G}_{0,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} \\ \boldsymbol{\Phi}_{0,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_{0,i}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ \mathbf{w}_i(k) - \boldsymbol{\Psi}_{0,i} \mathbf{x}_{0,i}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

avec :

$$\boldsymbol{\Phi}_{0,i} = \begin{bmatrix} \phi_{0,i}(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \phi_{0,i}(1) & \phi_{0,i}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \phi_{0,i}(N_2-1) & \dots & \dots & \phi_{0,i}(N_2-N_u+1) & \sum_{j=0}^{N_2-N_u} \phi_{0,i}(j) \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{0,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i} \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i}^{N_2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_i(k) = \text{diag}\{\boldsymbol{\delta}_i(k)\}, \quad \phi_{0,i}(j) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i}^j \mathbf{b}_i, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0^{N_2-1}. \quad (4.9)$$

4.3.1.2 MPC linéaire centralisé

Par opposition à la structure décentralisée, la loi de commande centralisée calcule la solution optimale du problème d'optimisation globale du système complet. Le régulateur centralisé dispose alors du modèle global, ainsi que de toute l'information collectée sur le système entier. Il reçoit également les profils d'occupation et les valeurs de consigne de toutes les pièces du bâtiment. Ce contrôleur central connaît également les objectifs locaux ainsi que les contraintes locales de toutes les zones.

Le modèle global de prédiction employé par le MPC centralisé :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_g(k+1) = \mathbf{A}_g \mathbf{x}_g(k) + \mathbf{B}_g \mathbf{u}_g(k) \\ \mathbf{y}_g(k) = \mathbf{C}_g \mathbf{x}_g(k), \end{cases} \quad (4.10)$$

peut être construit à partir des modèles de zones couplés (3.44). Les vecteurs d'état, de commande et de sortie, ainsi que les matrices qui décrivent le modèle global ont les formulations suivantes :

$$\mathbf{x}_g(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_g(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ \vdots \\ u_s(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_g(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_s(k) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \cdots & \mathbf{A}_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{s,1} & \cdots & \mathbf{A}_{s,s} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{i,j} = \begin{cases} \mathbf{A}_i, & \text{si } i = j, \\ \mathbf{e}_{j,i} \mathbf{c}_j^T, & \text{si } j \in \mathbb{H}_i, \\ \mathbf{0}_{n_i \times n_j}, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{B}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_s\}, \quad \mathbf{C}_g = \text{bloc-diag}\{\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_s^T\}. \quad (4.13)$$

Le problème global d'optimisation minimise la somme des critères locaux sous les contraintes locales de tous les sous-systèmes. Il peut s'écrire alors comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} \quad & \sum_{i=1}^s J_i(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_i(k), \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s. \end{aligned} \quad (4.14)$$

De manière similaire au cas décentralisé, on peut exprimer le problème (4.14) sous la forme PL standard :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}'(k)} \quad & \boldsymbol{\lambda}^T(k) \mathbf{u}'(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{G} \mathbf{u}'(k) = \mathbf{g}(k) \\ & \mathbf{u}'(k) \geq \mathbf{0}_{(2sN_u + 2sN_2) \times 1}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{u}'(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^T(k) & \boldsymbol{\chi}^T(k) & \boldsymbol{\eta}^T(k) & \bar{\boldsymbol{\eta}}^T(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.16)$$

$$\lambda'(k) = \begin{bmatrix} \lambda^T(k) & \mathbf{0}_{1 \times sN_u} & \mathbf{1}_{1 \times sN_2} \Delta(k) & \mathbf{1}_{1 \times sN_2} \Delta(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.17)$$

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_g^T(k) & \mathbf{u}_g^T(k+1) & \cdots & \mathbf{u}_g^T(k+N_u-1) \end{bmatrix}^T, \quad (4.18)$$

$$\lambda(k) = \begin{bmatrix} \lambda_1(k) & \cdots & \lambda_s(k) & \cdots & \lambda_1(k+N_u-1) & \cdots & \lambda_s(k+N_u-1) \end{bmatrix}^T, \quad (4.19)$$

$$\bar{\mathbf{u}}(k) = \begin{bmatrix} \bar{u}_1(k) & \cdots & \bar{u}_s(k) & \cdots & \bar{u}_1(k+N_u-1) & \cdots & \bar{u}_s(k+N_u-1) \end{bmatrix}^T, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{w}(k) = \begin{bmatrix} w_1(k) & \cdots & w_s(k) & \cdots & w_1(k+N_2) & \cdots & w_s(k+N_2) \end{bmatrix}^T, \quad (4.21)$$

$$\Delta(k) = \text{diag}\{\delta_1(k+1), \dots, \delta_s(k+1), \dots, \delta_1(k+N_2), \dots, \delta_s(k+N_2)\}, \quad (4.22)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{sN_u} & \mathbf{I}_{sN_u} & \mathbf{0}_{sN_u \times sN_2} & \mathbf{0}_{sN_u \times sN_2} \\ \Phi & \mathbf{0}_{sN_2 \times sN_u} & \mathbf{I}_{sN_2} & -\mathbf{I}_{sN_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(k) \\ \mathbf{w}(k) - \Psi \mathbf{x}_g(k) \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_g \mathbf{A}_g \\ \mathbf{C}_g \mathbf{A}_g^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_g \mathbf{A}_g^{N_2} \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \phi(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \phi(1) & \phi(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \phi(N_2-1) & \cdots & \cdots & \phi(N_2-N_u+1) & \sum_{j=0}^{N_2-N_u} \phi(j) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\phi(j) = \mathbf{C}_g \mathbf{A}_g^j \mathbf{B}_g, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0^{N_2-1}. \quad (4.25)$$

4.3.1.3 MPC linéaire distribué

La structure centralisée et la stratégie complètement décentralisée représentent deux extrêmes du compromis entre les performances de contrôle, d'une part, et la fiabilité, la flexibilité et l'effort de calcul, d'autre part. Une structure qui permet une meilleure gestion de ce compromis est représentée par l'approche distribuée. Ainsi, les agents locaux minimisent des critères locaux et échangent des informations concernant leur comportement futur, permettant aussi d'améliorer les performances globales du système par rapport à la stratégie décentralisée.

Comme on l'a vu au chapitre précédent, l'utilisation des modèles couplés par les sorties nécessite de communiquer les séquences locales de sorties prédites. L'approche distribuée présente de ce fait une structure décentralisée. De plus, un réseau de communication doit être ajouté, pour permettre l'échange des informations entre les agents.

La formulation standard du problème d'optimisation local (4.4) pour le cas distribué

s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}'_i(k)} \quad & \lambda_i'^T(k) \mathbf{u}'_i(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{G}_i \mathbf{u}'_i(k) = \mathbf{g}_i^{(l(k))}(k) \\ & \mathbf{u}'_i(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u+2N_2) \times 1}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} \\ \Phi_i & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{g}_i^{(l(k))}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ \mathbf{w}_i(k) - \Psi_i \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \Phi_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k) \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

avec les notations introduites au paragraphe 3.4.2. C'est dans le vecteur défini par (4.28) que se trouvent les séquences futures de sortie des zones voisines.

En se basant sur l'algorithme de coopération 1 présenté au paragraphe 3.4.4, on peut formuler la procédure itérative à exécuter par chaque agent i , à tous les instants de temps, qui est décrite dans l'algorithme 2. Suite à l'hypothèse 4.3.1, la structure de l'algorithme 2 est en fait un cas particulier de l'algorithme 1 (paragraphe 3.4.4), pour lequel les dimensions des fenêtres de prédiction de tous les agents sont égales et constantes dans le temps. Ainsi, l'estimation et la transmission des valeurs prédites du paramètre $N_{2,i}$ n'est plus nécessaire.

Algorithme 2 Procédure itérative de commande prédictive distribuée à critère linéaire

- 1 : Initialiser $l(k) = l_0(k)$
 - 2 : Mettre à jour les variables locales $\mathbf{x}_i(k)$, $y_i(k)$, $\delta_i(k)$, $\mathbf{w}_i(k)$
 - 3 : Calculer la séquence de commande optimale locale $\mathbf{u}_i^{(l_0(k))}(k)$ à l'itération initiale
 - 4 : **Tant que** $(l(k) < l_{max})$ **ET** $\|\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k) - \tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k)-1)}(k)\|_\infty > \epsilon_i, \forall i \in \mathbb{N}_1^s$ **faire**
 - 4.1 : Itération suivante $l(k) = l(k) + 1$
 - 4.2 : Construire $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$
 - 4.3 : Envoyer $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l(k))}(k)$ à tous les agents $j \in \mathbb{H}_i$
 - 4.4 : Recevoir $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ de tous les agents $j \in \mathbb{H}_i$ et met à jour $\mathbf{g}_i^{(l(k))}(k)$
 - 4.5 : Calculer la séquence de commande optimale locale $\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k)$, par la résolution du problème local (4.26)
 - Fait**
 - 5 : Appliquer la première composante de $\mathbf{u}_i^{(l(k))}(k)$ au sous-système local i
 - 6 : Construire $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l_0(k+1))}(k)$
 - 7 : Envoyer $\tilde{\mathbf{y}}_i^{(l_0(k+1))}(k)$ à tous les agents $j \in \mathbb{H}_i$
 - 8 : Recevoir $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l_0(k+1))}(k)$ de tous les agents $j \in \mathbb{H}_i$ et met à jour $\mathbf{g}_i^{(l_0(k+1))}(k)$
 - 9 : Mettre à jour $k = k + 1$ et retour au pas 1
-

4.3.2 Résultats de simulation

Pour illustrer les améliorations sur les performances apportées par l'utilisation d'un critère linéaire de type norme l_1 , nous reprenons le modèle du bâtiment présenté au paragraphe 3.4.6.

Afin de pouvoir calculer la commande par le biais de la programmation linéaire, l'état du système est estimé à l'aide d'un observateur « prédictif » de type Luenberger. Il utilise les vecteurs d'entrées et de sorties de l'instant $k - 1$ pour prédire l'état à l'instant k . Dans le cadre de la commande prédictive à critère linéaire, le choix du gain de l'observateur peut avoir un impact plus important sur le comportement du régulateur (par rapport au MPC quadratique). Les erreurs de modélisation, ainsi que l'apport des perturbations, sont amplifiés par un observateur rapide. L'agressivité des contrôleurs prédictifs présentés aux paragraphes précédents peut dégénérer en une commande très oscillante. Les gains des observateurs pour les trois structures de commande ont été choisis afin de placer les pôles des observateurs trois fois plus rapides que les pôles des modèles de prédiction.

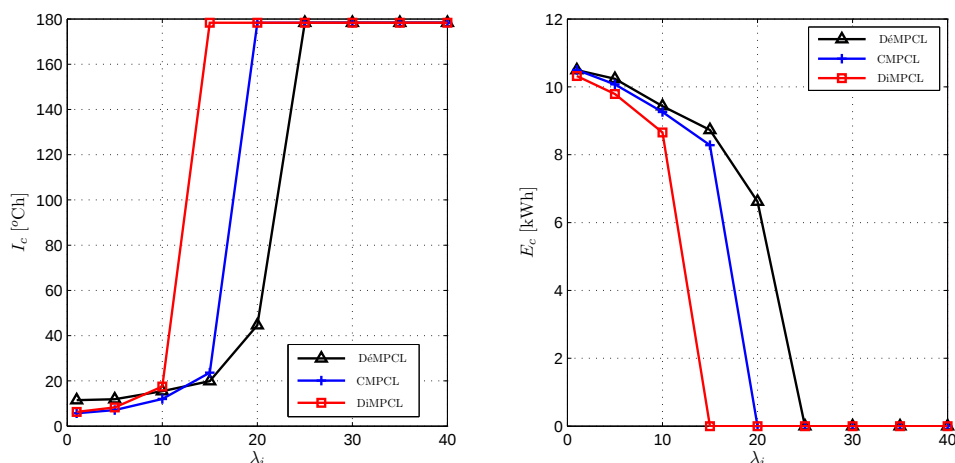


FIGURE 4.1 – Influence du paramètre de pondération λ_i sur les indices de performance

Certains auteurs [159] ont rapporté le fait que la commande prédictive à critère linéaire présente, en fonction du choix des termes de pondérations pour l'erreur et pour la commande, soit un comportement de type « idle » (commande nulle), soit un comportement de type « dead-beat ». La figure 4.1 met en évidence ce phénomène, en illustrant les performances des trois structures de commande prédictives (MPC linéaire décentralisé - D6MPCL, MPC linéaire centralisé - CMPCL et MPC linéaire distribué - DiMPCL) en fonction de la pondération sur la commande, λ_i . Les valeurs des indices de performance sont obtenues sur une journée de simulation, avec le profil d'occupation décrit par le Scénario 4 (paragraphe 3.4.6.2). Dans la figure 4.1 droite on observe qu'à partir d'une certaine valeur de λ_i , la consommation devient nulle, ce qui correspond au contrôle idle. Pour les valeurs de λ_i dont on obtient $E_c = 0 \text{ kWh}$, l'indice de confort atteint son maximum d'environ 180°Ch . Cette valeur de l'indice de confort correspond (pour le profil d'occupation considéré) à un

écart moyen de 8,18°C entre la valeur de consigne et la température mesurée pendant une journée.

Une caractéristique importante de la commande de type dead-beat est le temps de réponse minimal [82]. Ceci constitue le principal avantage de la loi MPC à critère l_1 par rapport à une commande à critère quadratique. La figure 4.2 illustre le comportement des lois de commande prédictives distribuées à critère linéaire (DiMPCL) et respectivement à critère quadratique (DiMPCHC). Dans les deux cas, les paramètres de réglage spécifiques à la commande prédictive sont identiques, $N_u = N_2 = 10$, à l'exception de λ_i qui a été choisi pour que les performances en termes de confort des deux commandes soient similaires.

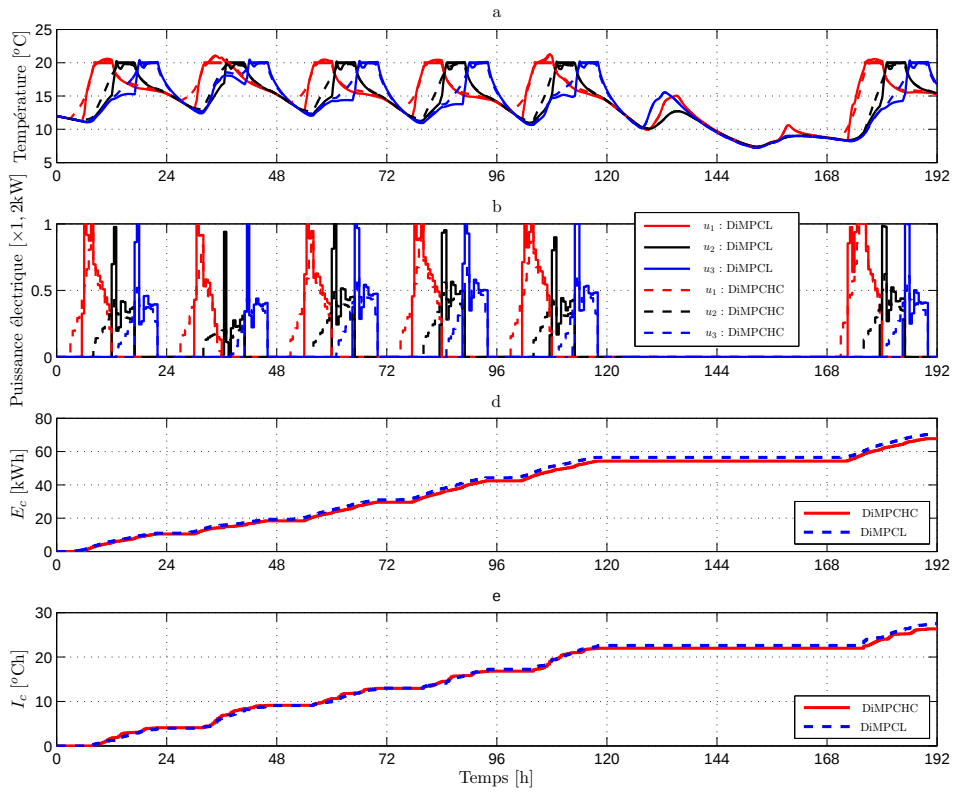


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des signaux de sortie (a) et de commande (b) et des indicateurs de performance (c et d) pour les huit premiers jours de l'année

On peut observer que par l'emploi d'un critère de type norme l_1 , la période de relance varie en fonction de l'état du système, tandis que pour une loi de commande quadratique, comme celle définie au chapitre précédent, la durée de la relance est toujours égale à la dimension de l'horizon de prédiction. Naturellement, l'utilisation des régulateurs linéaires engendrent des pics de consommation avant les débuts des périodes d'occupation. Si ce phénomène s'avère être un inconvénient, il peut être réduit par la diminution de la borne supérieure de la commande $\bar{\mathbf{u}}(k)$. Du point de vue quantitatif, les sous-figures 4.2c et 4.2d montrent l'évolution des indicateurs globaux de performance pour les deux stratégies

distribuées. On observe une légère amélioration, au niveau des deux indices, apportée par l'emploi du critère avec norme l_1 .

Scénario	Loi de commande		I_c [°Ch]	E_c [kWh]
	Type	Spécificité		
1	DiMPCHC	$\lambda_i = 5, l_{max} = 1$	207,30	174,07
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 2$	199,84	173,68
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 3$	199,67	173,66
	DiMPCL	$\lambda_i = 1, l_{max} = 1$	197,28	171,58
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 2$	190,44	171,26
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 3$	190,42	171,26
	DéMPCL	$\lambda_i = 1$	221,89	166,11
	CMPCl	$\lambda_i = 1$	191,42	175,36
2	DiMPCHC	$\lambda_i = 5, l_{max} = 1$	125,60	227,47
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 2$	120,66	227,22
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 3$	120,61	227,19
	DiMPCL	$\lambda_i = 1, l_{max} = 1$	119,70	219,04
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 2$	114,04	218,91
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 3$	113,99	218,91
	DéMPCL	$\lambda_i = 1$	229,55	207,34
	CMPCl	$\lambda_i = 1$	104,96	222,09
3	DiMPCHC	$\lambda_i = 5, l_{max} = 1$	747,64	248,40
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 2$	724,36	247,32
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 3$	724,17	247,32
	DiMPCL	$\lambda_i = 1, l_{max} = 1$	745,29	240,47
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 2$	720,45	239,64
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 3$	720,45	239,63
	DéMPCL	$\lambda_i = 1$	856,65	248,37
	CMPCl	$\lambda_i = 1$	741,16	242,62
4	DiMPCHC	$\lambda_i = 5, l_{max} = 1$	396,38	217,63
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 2$	379,94	217,20
		$\lambda_i = 5, l_{max} = 3$	379,79	217,18
	DiMPCL	$\lambda_i = 1, l_{max} = 1$	365,92	210,37
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 2$	350,95	210,20
		$\lambda_i = 1, l_{max} = 3$	350,95	210,19
	DéMPCL	$\lambda_i = 1$	472,75	212,25
	CMPCl	$\lambda_i = 1$	335,59	213,46

TABLE 4.1 – Résultats comparatifs entre les structures prédictives à critère linéaire par rapport à la structure distribuée à critère quadratique pour les quatre scénarios d'occupation, avec les paramètres : $N_{u,i} = N_{2,i} = 10$, $\epsilon_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$

Ensuite nous nous proposons de comparer les performances des trois structures prédictives à critère linéaire, dont les schémas-bloc de ces stratégies de commande sont illustrés figures 4.3, 4.4 et respectivement 4.5. De plus, nous avons également ajouté les résultats obtenus par la commande distribuée à critère quadratique, avec un horizon de prédiction constant (DiMPCHC), pour pouvoir les comparer à ce qui a été fait auparavant. Les résultats sont synthétisés dans le tableau 4.1.

Il apparaît clairement que le meilleur compromis, pour le cas distribué, entre l'effort de calcul et les performances de contrôle est donné par l'utilisation de deux itérations. Ceci est valable pour les deux types de critère. Les gains relatifs du DiMPCL par rapport au DiMPCHC s'élèvent à 7,6 % pour le confort et 3,8 % concernant l'économie de l'énergie. Sachant que par le choix de la variable λ_i , le confort est prioritaire à la consommation, la structure décentralisée offre des performances nettement inférieures, i.e. des dégradations au niveau du confort de 14 % à 50 %, par rapport au DiMPCL. Les résultats obtenus par l'utilisation du contrôleur centralisé peuvent paraître surprenants, surtout pour les scénarios 1 et 3. Même si, du point de vue du critère global d'optimisation, CMPCCL offre la solution optimale, elle n'est pas forcément la meilleure par rapport aux indicateurs de performance, mesurés a posteriori. En revanche, pour les scénarios 2 et 4, on observe des améliorations au niveau de confort engendrées par le CMPC.

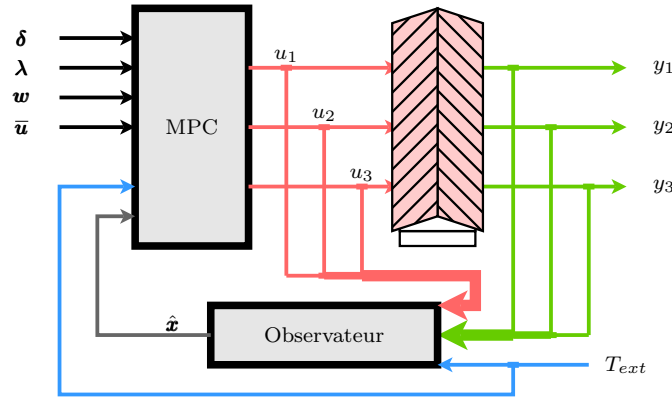


FIGURE 4.3 – Schéma-bloc de contrôle centralisé pour le bâtiment trois-zones

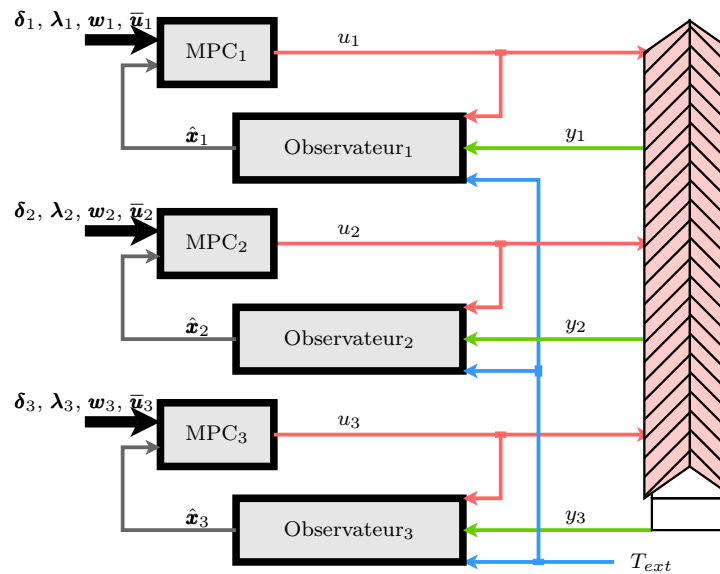


FIGURE 4.4 – Schéma-bloc de contrôle décentralisé pour le bâtiment trois-zones

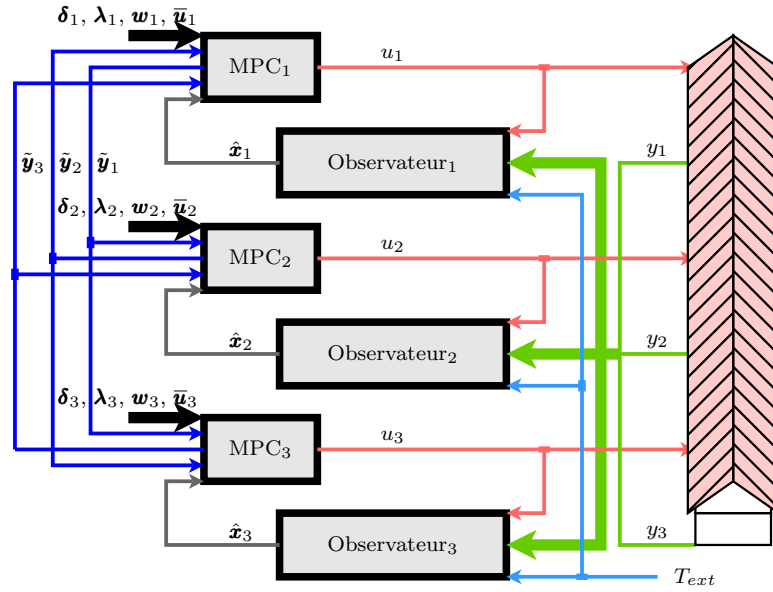


FIGURE 4.5 – Schéma-bloc de contrôle distribué pour le bâtiment trois-zones

Compte tenu de ces remarques et des résultats présentés tableau 4.1 on peut conclure que DiMPCL offre de meilleurs résultats en termes de confort et de consommation que son "équivalent" quadratique.

4.4 Contraintes couplées

Une solution pour réduire la facture énergétique, pour les bâtiments chauffés par des systèmes électriques, peut être la diminution de la puissance maximale souscrite. Elle correspond à la puissance mise à disposition par le distributeur. La puissance souscrite est établie en accord avec le client afin de répondre aux besoins réels de l'utilisateur (chauffage, éclairage, autres équipements électriques) mais également à la façon dont l'électricité est utilisée (pendant les heures de la journée, jours de la semaine, saisons, etc.), autrement dit, au profil d'occupation et aux habitudes des usagers. L'utilisateur a donc tout intérêt à diminuer les pics de sa demande d'électricité, car ce sont eux qui déterminent la puissance maximale nécessaire. En règle générale, cette puissance est calée sur la prévision de la valeur maximale de la puissance atteinte pendant l'année.

Sachant que le système de chauffage représente, en France et en Europe, le plus important poste de consommation dans un immeuble, en période de forte demande de chauffage la puissance absorbée par l'établissement peut être supérieure à la puissance souscrite. Usuellement, le dépassement de cette puissance est toléré, dans la mesure où elle n'excède pas un certain pourcentage de la puissance maximale souscrite. Cependant, une facturation d'une pénalité est appliquée sur le nombre de kWh en dépassement.

Néanmoins, il est possible de souscrire à des puissances maximales différentes selon les périodes tarifaires horo-saisonnières (Pointe, Heures Pleines d'Hiver - HPH, Heures

Creuses d'Hiver - HCH, Heures Pleines Demi-Saison - HPD, Heures Creuses Demi-Saison - HCD, Heures Pleines d'Été - HPE, Heures Creuses d'Été - HCE, Juillet-Août - JA). De plus, avec le développement des réseaux électriques intelligents (smart grid), la variation du prix du kWh pourrait être encore plus fine. Elle pourrait ainsi dépendre également de la puissance absorbée par le bâtiment.

Dans un environnement de contrôle optimal, cette puissance souscrite agit comme une contrainte de couplage sur les grandeurs de commande locales. Les contrôleurs classiques de type PI et tout-ou-rien ne peuvent pas gérer cette contrainte de couplage autrement qu'en la divisant en contraintes locales. Cette solution simple est pourtant loin d'être optimale.

Dans les paragraphes suivants, nous proposons l'utilisation d'un algorithme distribué basé sur la technique de décomposition de Dantzig-Wolfe [44]. Elle permet la prise en compte d'une contrainte de couplage, tout en gardant la structure distribuée de la loi de commande. Le prix à payer pour la prise en compte de cette contrainte d'une manière optimale est l'apparition d'un agent coordonnateur qui doit communiquer avec tous les contrôleurs locaux dont les variables sont couplées par une contrainte.

4.4.1 Définition du critère

Lors du paragraphe 4.3.2, on a observé les améliorations au niveau de la consommation, engendrées par l'utilisation d'une fonction de coût linéaire par rapport à une fonction de coût quadratique. Pour les deux critères, le confort est défini par une température de consigne. L'écart entre la température prédite et la consigne future est différemment prise en compte (pénalité linéaire et respectivement quadratique). La subjectivité de la notion de confort thermique n'implique pas une température de confort stricte. Une définition d'une bande de température de confort offre plus de degrés de liberté au système de pilotage, et en même temps se rapproche des définitions du confort thermique proposées dans les standards internationaux (ISO 7730 et 55-2004 de ASHRAE).

Dans la suite du manuscrit le confort thermique de chaque zone i sera défini par une bande de température, délimitée par une borne inférieure $\underline{w}_i$ et une borne supérieure $\bar{w}_i$. Ces deux limites peuvent être fixes, calculées en fonction des autres facteurs (humidité, PMV, PPD, etc.) ou réglées par les utilisateurs. En favorisant le confort ainsi défini, on peut l'intégrer dans les contraintes du problème d'optimisation de la loi prédictive, qui devient alors :

$$\min_{\mathbf{u}_i(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} J(k) = \sum_{i=1}^s \lambda_i^T(k) \mathbf{u}_i(k) \quad (4.29a)$$

s.c.

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_i(k), \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (4.29b)$$

$$\sum_{i=1}^s \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_t(k), \quad (4.29c)$$

$$\begin{aligned} \Delta_i(k)(\underline{\mathbf{w}}_i(k) - \hat{\mathbf{y}}_i(k)) &\leq \mathbf{0}_{N_2 \times 1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \\ \Delta_i(k)(\hat{\mathbf{y}}_i(k) - \bar{\mathbf{w}}_i(k)) &\leq \mathbf{0}_{N_2 \times 1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \end{aligned} \quad (4.29d)$$

où $\bar{\mathbf{u}}_t(k)$ représente la séquence future des puissances globales maximales.

L'inégalité (4.29c) représente la contrainte de couplage, tandis que les inégalités (4.29d) déterminent le confort thermique. En prenant en compte le profil d'occupation de chaque zone, les contraintes de confort deviennent dynamiques, dans le sens où elles disparaissent pendant les périodes d'inoccupation (voire figure 4.6).

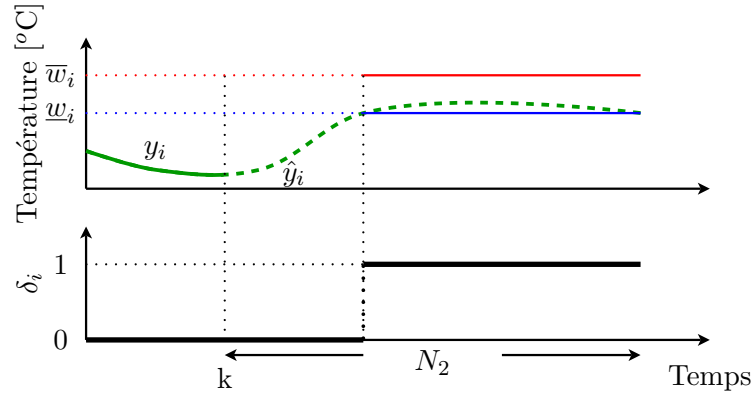


FIGURE 4.6 – Profil d'occupation et limites de confort dans le cadre de la commande prédictive

Suite à la formulation (4.29), le confort thermique est intégré dans le PL comme des contraintes dures. Si, à un instant donné, une de ces contraintes ne peut pas être satisfaite, le problème d'optimisation devient infaisable. Dans la pratique, pour éviter cet inconvénient, les contraintes sont relaxées, par l'ajout d'une pénalité dans la fonction de coût, quand elles ne sont pas satisfaites. Ainsi, on peut reformuler le problème relaxé sous la forme :

$$\min_{\mathbf{u}_i(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} J(k) = \sum_{i=1}^s \left(\boldsymbol{\lambda}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1}^{N_2} f_i(k+j) \right), \quad (4.30)$$

sous les contraintes (4.29b) et (4.29c). La fonction locale de pénalité f_i est :

$$f_i(k+j) = \begin{cases} 0, & \text{si } \bar{\mu}_i(k+j) \leq 0 \text{ et } \underline{\mu}_i(k+j) \leq 0 \\ \kappa_i \bar{\mu}_i(k+j), & \text{si } \bar{\mu}_i(k+j) > 0 \\ \kappa_i \underline{\mu}_i(k+j), & \text{si } \underline{\mu}_i(k+j) > 0, \end{cases} \quad (4.31)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_i(k+j) &= \delta_i(k+j)(\underline{w}_i(k+j) - \hat{y}_i(k+j|k)), \\ \bar{\mu}_i(k+j) &= \delta_i(k+j)(\hat{y}_i(k+j|k) - \bar{w}_i(k+j)). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Le choix de cette fonction de pénalité (illustrée figure 4.7) préserve la structure linéaire du problème d'optimisation, même si elle peut être considérée comme affine par morceaux. Lors du paragraphe suivant, on verra que par un choix judicieux des variables auxiliaires, le PL (4.30) peut être reformulé sous la forme standard linéaire. Le paramètre κ_i traduit l'importance relative du confort par rapport au coût énergétique.

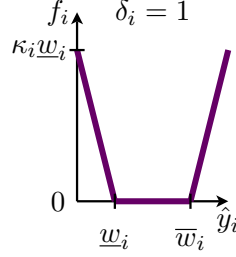


FIGURE 4.7 – Allure de la fonction de pénalité

4.4.2 Modèle de prédiction découplé

Prenons tout d'abord le cas du modèle découplé (4.3), en considérant que les températures des zones adjacentes sont égales à la température de la zone locale.

4.4.2.1 Formalisation du problème global

Après quelques manipulations, le problème d'optimisation global (4.30) peut être exprimé sous la forme PL standard :

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{z}(k), \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k)} \quad & \lambda_1''^T(k) \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \lambda_s''^T(k) \mathbf{u}_s''(k) \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbf{H}_0 \mathbf{z}(k) + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{H}_s \mathbf{u}_s''(k) = \bar{\mathbf{u}}_t(k) \\
 & \mathbf{G}'_{0,1} \mathbf{u}_1''(k) = \mathbf{g}'_{0,1}(k) \\
 & \vdots \\
 & \mathbf{G}'_{0,s} \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}'_{0,s}(k) \\
 & \mathbf{z}(k) \geq \mathbf{0}_{N_u \times 1}, \quad \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1},
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

avec les notations suivantes :

$$\mathbf{u}_i''(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^T(k) & \chi_i^T(k) & \underline{\eta}_{1,i}^T(k) & \underline{\eta}_{2,i}^T(k) & \bar{\eta}_{1,i}^T(k) & \bar{\eta}_{2,i}^T(k) \end{bmatrix}^T, \tag{4.34}$$

$$\lambda_i''(k) = \begin{bmatrix} \lambda_i^T(k) & \mathbf{0}_{1 \times N_u} & \mathbf{0}_{1 \times N_2} & \kappa_i \delta_i^T(k) & \mathbf{0}_{1 \times N_2} & \kappa_i \delta_i^T(k) \end{bmatrix}^T, \tag{4.35}$$

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{I}_{N_u}, \quad \mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_u + 4N_2} \end{bmatrix}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \tag{4.36}$$

$$\mathbf{G}'_{0,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} \\ -\Phi_{0,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} \\ \Phi_{0,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{g}'_{0,i}(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ -\underline{\mathbf{w}}_i(k) + \Psi_{0,i} \mathbf{x}_i(k) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(k) - \Psi_{0,i} \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

La mise sous la forme PL standard du problème (4.30) est réalisée par l'ajout de :

- N_u variables auxiliaires, $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$, nécessaires pour réécrire la contrainte (4.29c) sous la forme de contrainte égalité,
- sN_u variables auxiliaires, $\chi_i(k) \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$, afin de transformer la deuxième inégalité de la contrainte (4.29b) en contrainte égalité et
- $4sN_2$ variables auxiliaires comprises dans $\underline{\boldsymbol{\eta}}_{1,i}^T(k), \underline{\boldsymbol{\eta}}_{2,i}^T(k), \bar{\boldsymbol{\eta}}_{1,i}^T(k), \bar{\boldsymbol{\eta}}_{2,i}^T(k) \in \mathbb{R}^{N_2 \times 1}$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$, nécessaires pour mesurer l'écart entre les valeurs prédites de la température locale et les séquences futures qui définissent les limites de confort.

Le nombre de variables d'optimisation du PL (4.33) est proportionnel au nombre de sous-systèmes, s , tandis que le nombre de contraintes dépend des paramètres de réglage N_u et N_2 .

Remarque 4.4.1 *En fonction des profils d'occupation locaux, certaines composantes des vecteurs $\underline{\boldsymbol{\eta}}_{1,i}^T(k), \underline{\boldsymbol{\eta}}_{2,i}^T(k), \bar{\boldsymbol{\eta}}_{1,i}^T(k), \bar{\boldsymbol{\eta}}_{2,i}^T(k)$ ne sont pas nécessaires, quand la fenêtre de prédiction locale inclut des instants d'inoccupation. Ainsi, dans une implantation efficace de l'algorithme, les dimensions de la matrice de contraintes sont variables, en fonction des profils d'occupation.*

Dans la pratique de la régulation thermique des bâtiments, on rencontre des problèmes qui peuvent atteindre plusieurs milliers d'équations et / ou d'inconnues. Malgré le fait que cette complexité de calcul ne représente pas un inconvénient majeur pour les solveurs très performants existants sur le marché, les régulateurs employés pour le contrôle de la température sont généralement implantés sur des microcontrôleurs à faible puissance de calcul. Ainsi, pour résoudre ces problèmes de grande taille, l'utilisation de certaines techniques de décomposition s'avère opportune ou même nécessaire, pour des raisons techniques ou pratiques. Les méthodes de décomposition permettent, pour certains types de problèmes, la construction d'un algorithme distribué qui converge vers la solution optimale souhaitée.

L'efficacité des techniques de décomposition dépend de la structure du problème d'optimisation [39]. Pour la programmation linéaire, deux cas surviennent fréquemment dans la pratique : les *contraintes couplantes* et les *variables couplantes*. Le premier est traité lors des paragraphes suivants, tandis que le deuxième sera analysé au chapitre 5 du mémoire.

4.4.2.2 Méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe

La méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe (D-W) permet d'exprimer un PL comme un ensemble de sous-problèmes de dimensions réduites. Ces sous-problèmes sont reliés entre eux par une contrainte linéaire dite « compliquante » ou « couplante ». Résoudre le problème de départ qui contient un très grand nombre de variables, revient alors à résoudre plusieurs problèmes de tailles réduites. Le prix à payer pour cette simplification est la répétition. Ainsi, au lieu de résoudre le problème original, deux problèmes sont résolus de manière itérative :

- un problème *maître*, qui comporte toutes les variables du problème original et uniquement la contrainte compliquante, et
- un problème similaire au problème original, mais sans la contrainte compliquante, appelé le problème *relaxé*.

Cette procédure itérative permet la prise en compte de manière progressive des contraintes compliquantes. De plus, elle atteint l'optimum en un nombre fini d'itérations [43].

Malgré le fait que la méthode de décomposition D-W peut être appliquée à tous les problèmes d'optimisation linéaires, elle est particulièrement efficace pour les PL dont la matrice de contraintes a une structure particulière, appelée *bloc-angulaire primale*. Ainsi, le problème relaxé peut être résolu par blocs, étant structurellement décomposable.

Définition 4.4.1 Une matrice $\mathbf{A}$ est appelée **bloc-angulaire primale** si sa structure a la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{0,1} & \mathbf{A}_{0,2} & \cdots & \mathbf{A}_{0,n} \\ \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

La technique de décomposition de Dantzig-Wolfe est basée sur le théorème de combinaison convexe et sur des techniques de génération de colonnes. Ainsi, nous présentons ci-dessous quelques définitions nécessaires à la formulation du théorème de combinaison convexe.

Définition 4.4.2 Soient n points $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. On appelle **combinaison conique** (ou combinaison linéaire non négative) de ces points, les points $\mathbf{x}$ tels que :

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n v_j \mathbf{x}_j, \quad v_j \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}_1^n. \quad (4.40)$$

Définition 4.4.3 Soient n points $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$. On appelle **combinaison convexe** de ces points, les points $\mathbf{x}$ tels que :

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_1^n. \quad (4.41)$$

Définition 4.4.4 Un point $\mathbf{p}_i$ inclus dans un ensemble convexe $\mathbb{X}$ qui ne peut pas être décrit par une combinaison convexe des autres points de $\mathbb{X}$ est appelé **sommet** (ou un point extrême).

Définition 4.4.5 Soit un point $\mathbf{r} \in \mathbb{X}$. Le **rayon** généré par $\mathbf{r}$ est l'ensemble de points $\{\mathbf{x} | \mathbf{x} = \theta \mathbf{r}, \forall \theta \in (0, +\infty)\}$.

Dans la suite du manuscrit nous utiliserons, par abus de notation, le point $\mathbf{r}$ pour dénoter le rayon généré selon la définition 4.4.5. Ainsi, un rayon $\mathbf{r}$ peut être vu comme une direction infinie sur laquelle toutes les solutions du polyèdre non borné $\mathbb{X}$ sont réalisables.

Définition 4.4.6 Un **rayon extrême** d'un ensemble convexe $\mathbb{X}$ est le rayon qui ne peut pas s'exprimer par une combinaison convexe de rayons de $\mathbb{X}$.

Théorème 4.4.1 (de Minkowski) Tous les points appartenant au polyèdre convexe $\mathbb{X} = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ peuvent être représentés comme une combinaison convexe de l'ensemble fini de ses sommets et une combinaison conique de l'ensemble fini de ses rayons extrémaux.

Selon le théorème 4.4.1, chaque point $\mathbf{x}$ appartenant au polyèdre $\mathbb{X}$ peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \sum_{i=1}^d \alpha_i \mathbf{p}_i + \sum_{j=1}^e v_j \mathbf{r}_j, \\ \sum_{i=1}^d \alpha_i &= 1, \\ \alpha_i &\geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_1^d, \\ v_j &\geq 0, \forall j \in \mathbb{N}_1^e, \end{aligned} \tag{4.42}$$

où $\{\mathbf{p}_i\}_{i \in \mathbb{N}_1^d}$ est l'ensemble fini de tous les points extrêmes et $\{\mathbf{r}_i\}_{i \in \mathbb{N}_1^e}$ représente l'ensemble fini de tous les rayons extrémaux du polyèdre $\mathbb{X}$.

Après ce rappel des notions, nous revenons au problème de programmation linéaire issu de la formulation du critère MPC. Pour la présentation de la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, reprenons le PL (4.33) dont, pour la simplicité des notations, nous omettrons la dépendance des variables vis-à-vis de l'instant de temps k . Alors, le problème considéré par (4.33) est décrit par :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}, \mathbf{u}_1'', \dots, \mathbf{u}_s''} \quad & \lambda_1''^T \mathbf{u}_1'' + \dots + \lambda_s''^T \mathbf{u}_s'' \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{H}_0 \mathbf{z} + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1'' + \dots + \mathbf{H}_s \mathbf{u}_s'' = \bar{\mathbf{u}}_t \\ & \mathbf{G}'_{0,1} \mathbf{u}_1'' = \mathbf{g}'_{0,1} \\ & \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ & \mathbf{G}'_{0,s} \mathbf{u}_s'' = \mathbf{g}'_{0,s} \\ & \mathbf{z} \geq \mathbf{0}_{N_u \times 1} \quad , \quad \mathbf{u}_1'' \quad , \quad \dots \quad , \quad \mathbf{u}_s'' \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1}. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Puisque la première contrainte du problème (4.43) comporte toutes les variables de décision, empêchant ainsi une solution par blocs, elle constitue la contrainte compliquante

du PL. Le problème relaxé est alors défini par (4.43) dont on élimine la première contrainte égalité : $\mathbf{H}_0 \mathbf{z} + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1'' + \dots + \mathbf{H}_s \mathbf{u}_s'' = \bar{\mathbf{u}}_t$.

Suite à la structure bloc-angulaire de la matrice de contraintes, le domaine admissible de chaque variable d'optimisation locale $\mathbf{u}_i''$ est défini par le polyèdre $\mathbb{U}_{0,i} = \{\mathbf{u}_i'' | \mathbf{G}'_{0,i} \mathbf{u}_i'' = \mathbf{g}'_{0,i}, \mathbf{u}_i'' \geq \mathbf{0}_{(2N_u+4N_2) \times 1}\}$. Selon le théorème de Minkowski, $\mathbf{u}_i''$ peut s'exprimer comme suit :

$$\mathbf{u}_i'' = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} \mathbf{p}_{i,j} + \sum_{j=1}^{e_i} \beta_{i,j} \mathbf{r}_{i,j}, \quad \sum_{i=1}^{d_i} \alpha_{i,j} = 1, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}_1^{d_i}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (4.44)$$

où d_i représente le nombre de sommets et e_i le nombre de rayons extrémaux du polyèdre $\mathbb{U}_{0,i}$.

En reportant (4.44) dans (4.43), on peut formuler le problème maître (PM) :

$$\min_{\mathbf{z}, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j}} \sum_{i=1}^s \lambda_i'^T \left(\sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j} + \sum_{j=1}^{e_i} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j} \right) \quad (4.45a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{H}_0 \mathbf{z} + \sum_{i=1}^s \mathbf{H}_i \left(\sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j} + \sum_{j=1}^{e_i} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j} \right) = \bar{\mathbf{u}}_t : \boldsymbol{\gamma}, \quad (4.45b)$$

$$\sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{i,j} = 1 : \sigma_i, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (4.45c)$$

$$\mathbf{z} \geq \mathbf{0}_{N_u \times 1}, \alpha_{i,j}, \beta_{i,j} \geq 0. \quad (4.45d)$$

où $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^{N_u}$ et $\sigma_i \in \mathbb{R}$ sont les solutions duales³ (multiplicateurs du Simplexe) correspondantes aux contraintes (4.45b) et (4.45c), respectivement. Le problème maître résultant a moins de contraintes que le problème original (4.43), mais un nombre de colonnes beaucoup plus important en raison d'une augmentation du nombre de variables. Ces variables sont associées à tous les points extrêmes et à tous les rayons extrémaux de $\mathbb{U}_{0,i}$. La solution du problème relaxé peut être obtenue par la résolution par blocs de chaque sous-problèmes (SP_i) :

$$\min_{\mathbf{u}_i''} \lambda_i'^T \mathbf{u}_i'', \quad (4.46a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{G}'_{0,i} \mathbf{u}_i'' = \mathbf{g}'_{0,i}, \quad (4.46b)$$

$$\mathbf{u}_i'' \geq \mathbf{0}_{(2N_u+4N_2) \times 1}. \quad (4.46c)$$

3. Des généralités sur la dualité en programmation linéaire sont données en Annexe B.

Pour la résolution du PM, en utilisant la méthode du Simplexe par exemple, il est nécessaire de procéder par génération de colonnes afin de n'expliciter réellement qu'un sous-ensemble de sommets et de rayons extrémaux, ceux susceptibles d'intervenir dans la solution optimale. Ainsi, la solution optimale du problème (4.43) est obtenue par la résolution itérative d'un problème maître restreint (PMR) construit de manière dynamique. Un sous-ensemble initial de sommets et de rayons extrémaux peut être calculé par la résolution (en parallèle) de tous les sous-problèmes (4.46) mais en utilisant des coûts $\hat{\lambda}_i''^T$ différents (choisis arbitrairement), afin d'obtenir des sommets et / ou des rayons extrémaux distincts.

Remarque 4.4.2 *Le choix de manière arbitraire de coûts $\hat{\lambda}_i''^T$, pendant la phase de génération d'un ensemble initial de solutions locales (sommets et / ou rayons extrémaux) ne garantit pas la faisabilité du PMR, autrement dit l'existence de $\alpha_{i,j}, \beta_{i,j}$ positifs, tels que (4.45b) et (4.45c) soient satisfaites. Il n'existe pas de règle générale pour choisir les coûts locaux tels que le PMR construit avec la base ainsi obtenue soit faisable. Pourtant, afin d'éviter l'infaisabilité du PMR, des stratégies de relaxation sont proposées [39]. Cependant, la particularité du problème d'optimisation (4.43) rend possible un choix qui garantit la faisabilité du PMR.*

Proposition 4.4.1 *Les solutions des sous-problèmes (4.46), dont le vecteur de coût est défini par*

$$\hat{\lambda}_i'' = \begin{bmatrix} \lambda_i^T & \mathbf{0}_{1 \times N_u} & \mathbf{0}_{1 \times N_2} & \mathbf{0}_{1 \times N_2} & \mathbf{0}_{1 \times N_2} & \mathbf{0}_{1 \times N_2} \end{bmatrix}^T, \quad (4.47)$$

conjuguées à des solutions obtenues en utilisant des coûts choisis arbitrairement constituent une base de colonnes initiales qui rend le PMR faisable.

Preuve Étant données les spécificités du PM et des SP_i , l'utilisation des vecteurs de coût locaux définis par (4.47) implique $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}_{N_u \times 1}$. Sachant que la contrainte couplante lie uniquement les premières N_u composantes des solution locales et qu'elle est la relaxation d'une contrainte inégalité, spécifiant une limite supérieure positive de la somme de ces composantes, alors $\alpha_{i,1} = 1$, $\alpha_{i,j} = \beta_{i,j} = 0$, $\forall j \geq 2$, tel que (4.45c) et (4.45d) représentent une solution faisable du PM.

Supposant que l'on dispose d'un ensemble initial de sommets et de rayons extrémaux, et que la solution du PMR soit unique, alors par la résolution du problème (4.45) on dispose également des multiplicateurs du Simplexe (solutions duales), notés dans (4.45) par γ et σ_i . La solution optimale du PMR est également optimale pour PM si et seulement si tous les points extrêmes et tous les rayons extrémaux du domaine $\mathbb{U} = \cup_{i \in \mathbb{N}_1^*} \mathbb{U}_{0,i}$, qui n'interviennent pas dans PMR, ne participent pas à la solution optimale de PM. Pour le savoir, il suffit de calculer les coûts réduits des variables n'intervenant pas dans PMR. Ainsi, le coût réduit associé à la variable $\alpha_{i,j}$ ou $\beta_{i,j}$ est :

$$f_{i,j} = (\lambda_i''^T - \gamma \mathbf{H}_i) \mathbf{p}_{i,j} - \sigma_i. \quad (4.48)$$

Pour le calcul des coûts réduits, les sous-problèmes SP_i sont modifiés comme suit :

$$\min_{\mathbf{u}_i''} (\boldsymbol{\lambda}_i''^T - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{H}_i) \mathbf{u}_i'', \quad (4.49)$$

sous les contraintes (4.46b) et (4.46c). Notons que la modification apportée aux sous-problèmes est mineure et vise uniquement leur critère. Une fois les solutions de tous les sous-problèmes (4.49) obtenues, on peut décider si le nouveau sommet ou rayon extrémal de $\mathbb{U}$ permet d'améliorer la solution courante du PMR. Ceci se fait comme suit :

- si toutes les variables restantes ont un coût réduit positif, i.e.

$$\min_{i,j} f_{i,j} = \min_i (\boldsymbol{\lambda}_i''^T - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{H}_i) \mathbf{u}_i''^* - \sigma_i \geq 0, \quad (4.50)$$

alors la solution optimale de PMR est égale à la solution optimale de PM

- s'il existe une ou plusieurs variables avec un coût réduit strictement négatif, alors la solution optimale du PMR n'est pas optimale pour PM, ainsi une ou plusieurs de ces variables doivent être ajoutées au sous-ensemble de points du PMR.

Les deux tests permettent de vérifier si la solution courante du problème maître restreint coïncide à la solution du PM et donc à la solution du problème initial. Souvent, dans la pratique, il n'est pas forcément nécessaire de faire le calcul exact de la solution optimale. La méthode de décomposition DW nous permet d'obtenir facilement les bornes courantes (supérieure et inférieure) de l'optimum. Ainsi, à chaque itération l_{DW} de l'algorithme, les deux limites courantes de l'optimum global du problème PM sont :

$$\bar{J}^{(l_{DW})} = \sum_{i=1}^s \boldsymbol{\lambda}_i''^T \left(\sum_{j=1}^{d_i} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j}^{(l_{DW})} + \sum_{j=1}^{e_i} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j}^{(l_{DW})} \right), \quad (4.51)$$

$$\underline{J}^{(l_{DW})} = \sum_{i=1}^s \left(\boldsymbol{\lambda}_i''^T - \boldsymbol{\gamma}^{(l_{DW})} \mathbf{H}_i \right) \mathbf{u}_i''^{(l_{DW})} + \boldsymbol{\gamma}^{(l_{DW})} \bar{\mathbf{u}}_t, \quad (4.52)$$

où l'indice supérieur (l_{DW}) dénote le nombre de l'itération de D-W. Ces bornes permettent d'arrêter l'algorithme lorsque la solution courante est suffisamment proche de l'optimum.

Le développement présenté ci-dessus peut être synthétisé dans un algorithme itératif. La procédure résumée par l'algorithme 3 décrit ainsi les étapes à suivre pour tous les agents afin que la solution proposée, calculée par la résolution du PMR, converge vers la solution globale.

Le système de contrôle distribué résultant a une structure décentralisée dont tous les régulateurs locaux MPC_i sont coordonnés par le contrôleur MPC_c , qui résout le PMR. Ce contrôleur coordonnateur teste également la condition d'arrêt de l'algorithme, $\bar{J}^{(l_{DW})} - \underline{J}^{(l_{DW})} \leq \epsilon$. Bien que les sous-problèmes soient indépendants, ils peuvent être calculés en parallèle, afin de réduire la charge de calcul. Notons qu'à la fin de chaque itération, l_{DW} ,

une solution globale faisable est disponible :

$$\mathbf{u}_i^{(l_{DW})} = \sum_{j=1}^{d_i(l_{DW})} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j}^{(l_{DW})} + \sum_{j=1}^{e_i(l_{DW})} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j}^{(l_{DW})}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (4.53)$$

ce qui permet d'appliquer au système la solution fournie par l'algorithme dans un intervalle de temps borné (limité par la période d'échantillonnage) ou même d'utiliser un nombre fixe d'itérations.

Algorithme 3 Procédure itérative de la commande prédictive distribuée basée sur la décomposition de Dantzig-Wolfe

```

1 : Initialiser  $l_{DW} = 1$  et calcule un ensemble initial de solutions de base  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_1^{d_i(l_{DW})}$ ,  $\mathbf{r}_{i,j}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_1^{e_i(l_{DW})}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ 
2 : Résoudre le PMR par MPCc, en obtenant  $\alpha_{i,j}^{(l_{DW})}$  et  $\beta_{i,j}^{(l_{DW})}$  ainsi que les solution
   duales  $\gamma^{(l_{DW})}$ ,  $\sigma_i^{(l_{DW})}$ 
3 : Envoyer  $\gamma^{(l_{DW})}$ , par MPCc, vers tous les contrôleurs locaux MPCi
4 : Résoudre (en parallèle) tous les sous-problèmes modifiés (4.49), par les MPCi
5 : Envoyer les solutions locales,  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ , de tous les MPCi vers MPCc
6 : Calculer les bornes courantes, supérieure (4.51) et inférieure (4.52), par MPCc
7 : Si  $(l_{DW} \leq l_{DWmax} \text{ ET } \bar{J}^{(l_{DW})} - \underline{J}^{(l_{DW})} \leq \epsilon)$  Alors
   | 7.1 :  $\mathbf{u}_i^{**} = \sum_{j=1}^{d_i(l_{DW})} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j}^{(l_{DW})} + \sum_{j=1}^{e_i(l_{DW})} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j}^{(l_{DW})}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ , Stop
Sinon
   | 7.2 : Mettre à jour  $l_{DW} = l_{DW} + 1$  et ajouter la nouvelle solution faisable du
     problème relaxé  $\mathbf{p}_{i,d_i(l_{DW})+1} = \mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ ,  $d_i(l_{DW}) = d_i(l_{DW}) + 1$  si SPi (4.49)
     a une solution bornée, et  $\mathbf{r}_{i,e_i(l_{DW})+1} = \mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ ,  $e_i(l_{DW}) = e_i(l_{DW}) + 1$  si le
     sous-problème  $i$  modifié présente une solution infinie, alors  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$  est un rayon
     extrémal  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$  (par MPCc) et Goto pas 2
Fin Si

```

4.4.3 Modèle de prédiction couplé

Lors du paragraphe précédent, nous avons exposé les idées de base de la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, à partir desquelles on a formulé un algorithme prédictif distribué. Suite à l'utilisation des modèles locaux découplés, les sous-problèmes pris en charge par les contrôleurs locaux sont indépendants. Dans le cadre du contrôle thermique multi-zone, utiliser ces modèles revient à négliger les couplages thermiques entre les zones. Pourtant, les résultats présentés dans les parties 3.4 et 4.3 ont montrés l'importance de la prise en compte de ces interactions, ce que nous développons dans les paragraphes suivants.

4.4.3.1 Couplage par les sorties

Si les modèles locaux couplés par les sorties (3.44) sont employés pour la prédiction de la température des zones, alors les domaines admissibles des sous-problèmes i sont définis par :

$$\mathbb{U}_i = \{\mathbf{u}_i''(k) | \mathbf{G}_i' \mathbf{u}_i''(k) = \mathbf{g}_i'(k), \mathbf{u}_i''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u+4N_2) \times 1}\}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (4.54)$$

avec les notations

$$\mathbf{G}_i' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} \\ -\mathbf{\Phi}_i & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} \\ \mathbf{\Phi}_i & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{I}_{N_2} & -\mathbf{I}_{N_2} \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{g}_i'(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ -\mathbf{w}_i(k) + \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^*(k) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(k) - \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j^*(k) \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Dans la formulation du vecteur $\mathbf{g}_i'(k)$ on retrouve les séquences futures des sorties des zones $j \in \mathbb{H}_i$. On peut alors penser utiliser les séquences de sorties locales prédites à l'instant précédent, $k-1$. Dans ce cas, les vecteurs $\mathbf{g}_i'(k)$ deviennent :

$$\hat{\mathbf{g}}_i'(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ -\mathbf{w}_i(k) + \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j(k|k-1) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(k) - \mathbf{\Psi}_i \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{\Phi}_{j,i} \tilde{\mathbf{y}}_j(k|k-1) \end{bmatrix}. \quad (4.57)$$

L'algorithme MPC distribué avec la prise en compte des couplages par les sorties a la même structure que l'algorithme 3 dont pour le calcul de la solution globale du problème (pas 7.1), les régulateurs locaux envoient les séquences de sorties à tous les agents voisins.

L'algorithme ainsi conçu converge vers la solution optimale, pourtant, la formulation du problème d'optimisation n'est pas "optimale", ce qui est dû au fait que les séquences de sorties calculées à deux instants de temps consécutifs sont généralement différentes. Pourtant, dans la pratique, l'écart entre les valeurs de sortie prédites correspondant au même pas $k+j$, mais calculées à des instants différents est faible.

Suite à l'apparition des échanges entre les régulateurs locaux, l'architecture de contrôle devient un peu plus complexe. Ainsi, chaque régulateur local, MPC_i , échange les séquences de sortie locales avec ses voisins et communique les séquences de commande locales au régulateur coordonnateur, MPC_c . La figure 4.8 illustre les schémas des architectures MPC distribuées pour le cas du modèle découplé et respectivement pour le cas du modèle couplé. En développant le schéma de commande distribuée, supposant de plus que le modèle local inclut également l'influence de la température extérieure, la structure bloc qui résulte est représentée figure 4.9, pour l'exemple du bâtiment à trois zones considéré précédemment.

Étude numérique de la vitesse de convergence Pour étudier la vitesse de convergence de l'algorithme distribué 3 par rapport à une procédure centralisée, nous avons

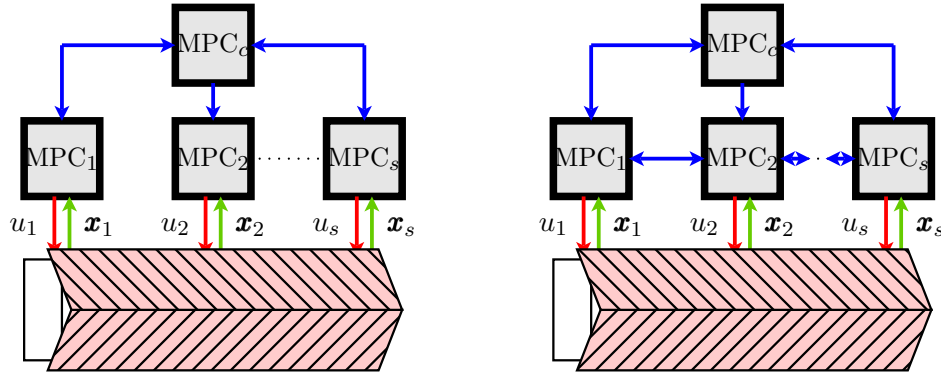


FIGURE 4.8 – Schéma de commande distribuée basé sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, utilisant le modèle découplé (à gauche) et le modèle couplé (à droite)

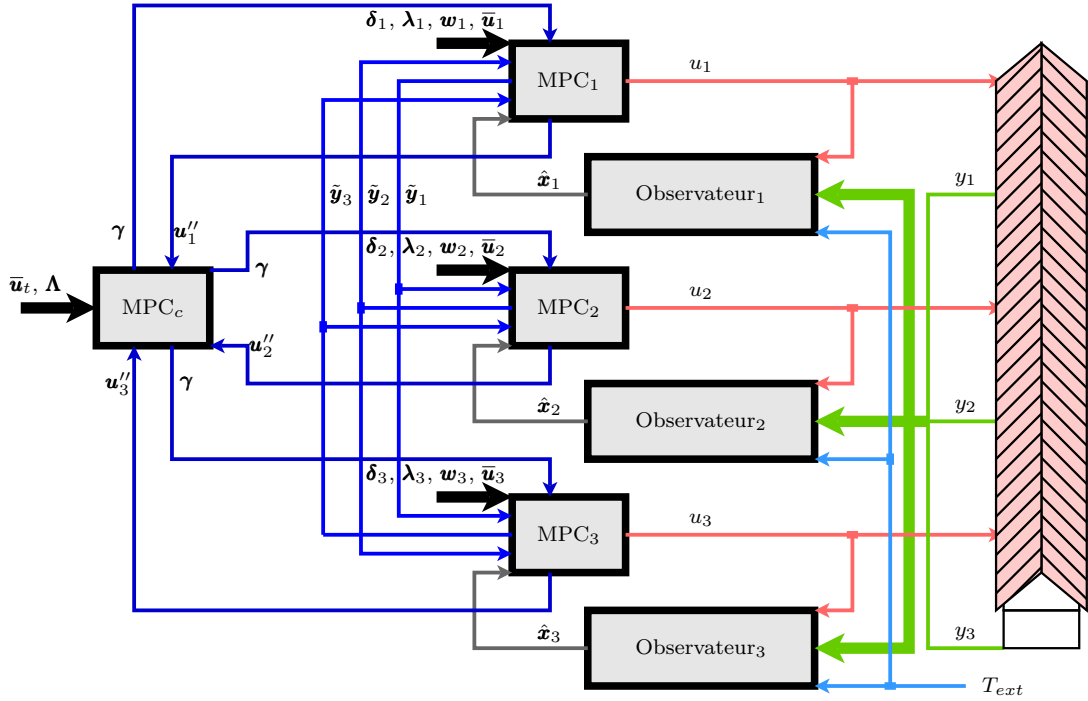


FIGURE 4.9 – Schéma-bloc de contrôle distribué basé sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe

décidé d'utiliser un modèle thermique simple d'une pièce, sachant que les dimensions des problèmes d'optimisation sont indépendants de la complexité (nombre des états) du modèle de prédiction. Pour les résultats présentés dans ce paragraphe, on considère que toutes les pièces du bâtiment ont les mêmes caractéristiques et qu'elles sont disposées en série (voir figure 4.10). Le modèle discret d'une zone s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \mathbf{e}_{ext,i} T_{ext}(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} y_j(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k), \end{cases} \quad (4.58)$$

Les zones situées aux extrémités sont décrites par les matrices :

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} 0,9501 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8215 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8833 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8606 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{e}_{2,1} = \mathbf{e}_{s-1,s} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,0480 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{e}_{ext,1} = \mathbf{e}_{ext,s} = \begin{bmatrix} 0,0113 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_s = \mathbf{1}_{3 \times 1}, \quad (4.60)$$

tandis que toutes les autres zones ont deux voisins (se qui explique la dimension du vecteur d'état), elles sont alors décrites par :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0,9501 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8215 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8833 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 2,8606 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{i-1,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,0480 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.61)$$

$$\mathbf{e}_{i+1,i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,0480 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{e}_{ext,i} = \begin{bmatrix} 0,0113 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_s = \mathbf{1}_{4 \times 1}, \quad (4.62)$$

avec une période d'échantillonnage de 30min. Mentionnons que les valeurs numériques des matrices proposées ci-dessus correspondent au modèle de prédiction de la zone 1, utilisé au paragraphe 3.4.6.

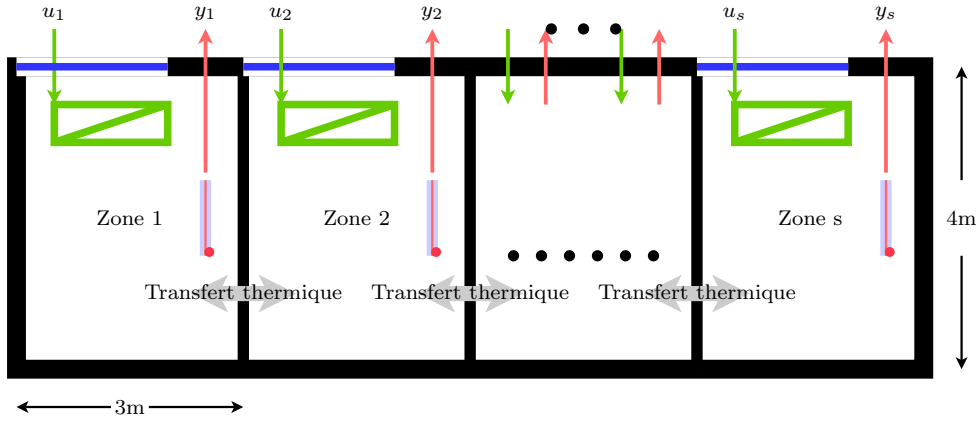


FIGURE 4.10 – Bâtiment composé de s zones disposées en série

Les deux premiers scénarios présentés ci-dessous considèrent le modèle de prédiction découplé, tandis que le troisième prend en compte les couplages.

Nous nous proposons de mesurer le facteur de sous-optimalité relatif $S_f[\%]$:

$$S_f = \frac{J_d - J_c}{J_c} \cdot 100 \quad (4.63)$$

au fil des itérations de l'algorithme, ainsi que l'influence du nombre de sous-systèmes s et de la taille de l'horizon de prédiction sur la commande N_u . Dans l'équation (4.63),

J_d représente la valeur de l'optimum calculée de manière distribuée, quand J_c représente la valeur de l'optimum calculée de manière centralisée. Les autres paramètres de réglage sont choisis comme suit : $N_1 = 1$, $N_2 = 10$. Les états initiaux des sous-systèmes ainsi que le nombre d'instants d'occupation inclus dans l'horizon de prédiction sont choisis de manière aléatoire pour avoir plus de cohérence du point de vue statistique. Les courbes représentées figures 4.11, 4.12 et 4.13 représentent les moyennes obtenues en considérant 50 essais différents.

Scénario 1 : On fixe $N_u = N_2 = 10$ tandis que le nombre des sous-systèmes change. Les valeurs qui définissent la bande de confort sont choisies telles que le confort ne peut être satisfait que par la saturation de la contrainte de couplage. Dans toutes les autres situations, l'algorithme converge en une seule itération. En regardant la figure 4.11, on observe que généralement le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre l'optimum ou pour en être très proche est autour de 10. On constate également la convergence exponentielle de l'algorithme dès que le nombre de sous-systèmes est supérieur à 4. La courbe obtenue pour $s = 2$, qui peut paraître un peu surprenante s'explique par le fait que les deux pièces sont concurrentes sur un ensemble de ressources. Dû au fait que les modèles des zones sont identiques, un nombre important de points sont situés sur l'hyperplan défini par la contrainte couplante, ce qui explique la stagnation du critère sur les premières itérations (pour un nombre faible de sous-systèmes).

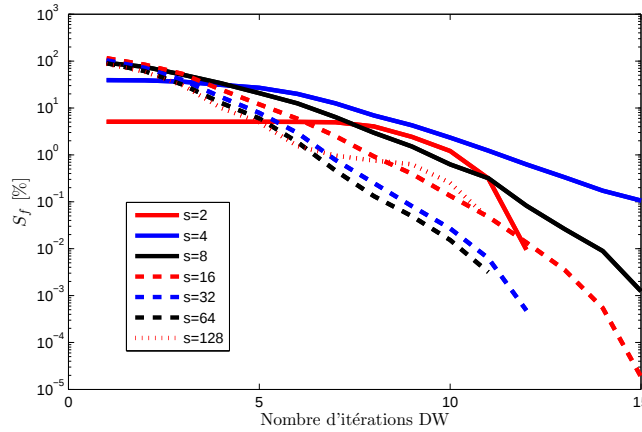


FIGURE 4.11 – Influence du nombre de sous-systèmes, s , sur la vitesse de convergence

Scénario 2 : On fixe le nombre de sous-systèmes à $s = 40$ et on joue sur la taille de l'horizon de commande. La figure 4.12 montre la vitesse de convergence (en termes de sous-optimalité) de l'algorithme 3 au fil des itérations, en fonction de N_u . La réduction du paramètre N_u détermine une augmentation de la vitesse de convergence, ainsi qu'une décroissance du nombre des itérations. Ce phénomène s'explique par le fait que N_u influence le nombre de variables du problème d'optimisation ainsi que le nombre de leurs contraintes.

Scénario 3 : Le troisième scénario de ce paragraphe se concentre sur l'étude de l'influence des erreurs de prédictions entre deux pas consécutifs sur le facteur de sous-optima-

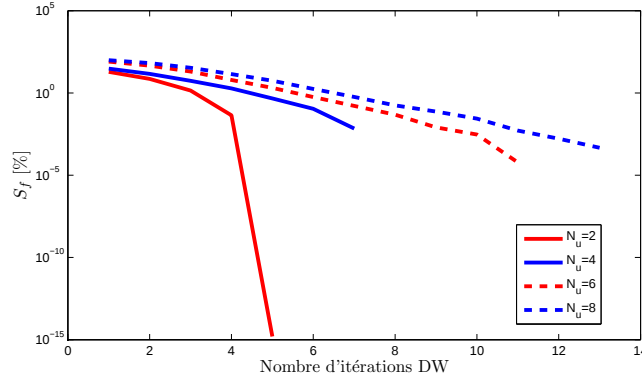


FIGURE 4.12 – Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , sur la vitesse de convergence

lité de la solution fournie par l'algorithme distribué. Pour ce faire, nous calculons tout d'abord de manière centralisée les séquences futures optimales de sortie et les multiplions par une valeur aléatoire, $\xi \in (0, 1, 5)$. Ainsi, les séquences locales de sortie utilisées par l'algorithme distribué sont :

$$\tilde{\mathbf{y}}_j(k) = \xi \cdot \tilde{\mathbf{y}}_j^*(k). \quad (4.64)$$

La figure 4.13 montre des facteurs de sous-optimalité très faibles même pour des écarts relativement importants entre la séquence de sorties optimale, $\tilde{\mathbf{y}}_j^*(k)$, et la séquence utilisée pour la prédiction, $\tilde{\mathbf{y}}_j(k)$. Nous avons choisi de manière arbitraire 100 valeurs pour le paramètre ξ . De même, les états initiaux et les profils d'occupation ont été choisis arbitrairement, ce qu'explique les valeurs sensiblement différentes de S_f pour des valeurs très approchées de ξ . Les valeurs négatives des facteurs de sous-optimalité s'explique par le fait que des séquences de sortie supérieures à celles optimales engendrent une baisse de consommation et donc du critère. On observe également que pour les valeurs de ξ autour de 1, le facteur de sous-optimalité très proche de 0, ce que illustre l'optimalité de la solution distribuée ainsi calculée.

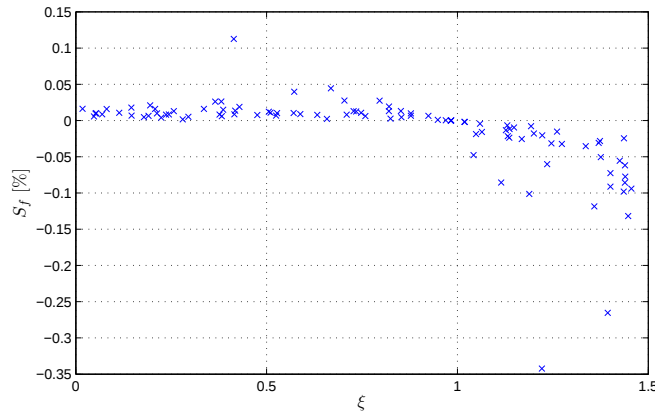


FIGURE 4.13 – Influence du paramètre ξ sur l'optimalité de la solution distribuée

Suite à l'analyse des trois scénarios précédents, on peut conseiller l'utilisation de l'algorithme distribué pour un nombre de sous-systèmes supérieur à 8. Des valeurs faibles de la taille de l'horizon de commande augmente la vitesse de convergence de l'algorithme. La perte relativement faible d'optimalité dans le troisième scénario est due au couplage pas fort entre les sous-systèmes, ainsi que à la formulation du problème d'optimisation.

4.4.3.2 Couplage par les entrées

Comme on l'a vu au chapitre 2, la majorité des modèles locaux de prédiction utilisés dans la littérature sont couplés par les entrées (voir paragraphe 2.2.3.1). Dans ce paragraphe nous proposons ainsi une modification de l'algorithme de Dantzig-Wolfe pour prendre en compte ce type de couplage. Notons également que dans l'Annexe A on présente une méthode de construction du modèle couplé par les entrées, à partir du modèle global simple d'un bâtiment deux zones. Considérons alors s modèles locaux couplés par les entrées :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} u_j(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (4.65)$$

Utilisant les mêmes notations que celles employées dans les paragraphes précédents, on peut alors écrire le problème global d'optimisation sous la forme linéaire standard comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{z}(k), \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k)} \quad & \lambda_1''^T(k) \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \lambda_s''^T(k) \mathbf{u}_s''(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{H}_0 \mathbf{z}(k) + \mathbf{H}_1 \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{H}_s \mathbf{u}_s''(k) = \bar{\mathbf{u}}_t(k) \\ & \mathbf{G}'_1 \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{G}'_{s,1} \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}_1''(k) \\ & \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\ & \mathbf{G}'_{1,s} \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{G}'_s \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}_s''(k) \\ \mathbf{z}(k) \geq \mathbf{0}_{N_u \times 1} \quad , \quad & \mathbf{u}_1''(k) \quad , \quad \dots \quad , \quad \mathbf{u}_s''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

avec

$$\mathbf{G}'_{j,i} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_u \times N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} & \mathbf{0}_{N_u \times N_2} \\ -\Phi_{j,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} \\ \Phi_{j,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_2} \end{bmatrix}, & \text{si } j \in \mathbb{H}_i \\ \mathbf{0}_{(N_u + 2N_2) \times (2N_u + 4N_2)}, & \text{autrement} \end{cases} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{g}_i''(k) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i(k) \\ -\underline{\mathbf{w}}_i(k) + \Psi_i \mathbf{x}_i(k) \\ \bar{\mathbf{w}}_i(k) - \Psi_i \mathbf{x}_i(k) \end{bmatrix}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s. \quad (4.68)$$

Par rapport aux cas traités précédemment, le problème (4.66) ne présente pas une matrice de contraintes de type bloc-angulaire. Par exemple, si les zones sont disposées en série, la matrice de contraintes du problème relaxé a une structure tridiagonale. L'apparition des

matrices non nulles $\mathbf{G}'_{j,i}$ empêche la résolution par blocs du problème relaxé.

Algorithme 4 Procédure itérative de la commande prédictive distribuée basée sur la décomposition de Dantzig-Wolfe, avec la prise en compte des couplages par les entrées

```

1 : Initialiser  $l_{DW} = 1$ ,  $l_i = 1$  et calcule un ensemble initial de solutions de base  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,
 $\forall j \in \mathbb{N}_1^{d_i(l_{DW})}$ ,  $\mathbf{r}_{i,j}$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_1^{e_i(l_{DW})}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ 
2 : Résoudre le PMR par MPCc, en obtenant  $\alpha_{i,j}^{(l_{DW})}$  et  $\beta_{i,j}^{(l_{DW})}$  ainsi que les solution
duales  $\gamma^{(l_{DW})}$ ,  $\sigma_i^{(l_{DW})}$ 
3 : Envoyer  $\gamma^{(l_{DW})}$ , par MPCc, vers tous les contrôleurs locaux MPCi
4 : Résoudre (en parallèle) tous les sous-problèmes  $i$  en obtenant  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW}, l_i)}$ , par les
MPCi
5 : Si ( $l_i \leq l_{max}$  ET  $\|\mathbf{u}_i^{(l_{DW}, l_i)} - \mathbf{u}_i^{(l_{DW}, l_i-1)}\|_\infty < \epsilon_i$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ ) Alors
    | 5.1 : Envoyer les solutions locales,  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ , de tous les MPCi vers MPCc
Sinon
    | 5.2 : Envoyer  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW}, l_i)}$  de tous les MPCi vers tous leurs voisins  $j \in \mathbb{H}_i$ 
    | 5.3 : Mettre à jour  $l_i = l_i + 1$  et Goto pas 4
Fin Si
6 : Calculer les bornes courantes, supérieure (4.51) et inférieure (4.52), par MPCc
6 : Si ( $l_{DW} \leq l_{DWmax}$  ET  $\bar{\mathcal{J}}^{(l_{DW})} - \underline{\mathcal{J}}^{(l_{DW})} \leq \epsilon$ ) Alors
    | 6.1 :  $\mathbf{u}_i^{**} = \sum_{j=1}^{d_i(l_{DW})} \mathbf{p}_{i,j} \alpha_{i,j}^{(l_{DW})} + \sum_{j=1}^{e_i(l_{DW})} \mathbf{r}_{i,j} \beta_{i,j}^{(l_{DW})}$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ , Stop
Sinon
    | 6.2 : Mettre à jour  $l_{DW} = l_{DW} + 1$  et ajouter la nouvelle solution faisable du
    problème relaxé  $\mathbf{p}_{i, d_i(l_{DW})+1} = \mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ ,  $d_i(l_{DW}) = d_i(l_{DW}) + 1$  si SPi (4.49)
    a une solution bornée, et  $\mathbf{r}_{i, e_i(l_{DW})+1} = \mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$ ,  $e_i(l_{DW}) = e_i(l_{DW}) + 1$  si le
    sous-problème  $i$  modifié présente une solution infinie, alors  $\mathbf{u}_i^{(l_{DW})}$  et un rayon
    extrémal  $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$  (par MPCc) et Goto pas 2
Fin Si

```

On peut alors penser utiliser (comme dans le paragraphe précédent) les séquences de commande calculées à l'instant $k - 1$. Alors il faut ajouter les dernières composantes de ces vecteurs car elles n'entrent pas dans l'horizon de prédiction au pas $k - 1$. Une autre solution est de mettre en place un algorithme de communication, similaire à celui présenté au paragraphe 4.3.1.3. Sachant qu'en recourant à la première idée on obtient un algorithme très similaire à celui présenté au paragraphe 4.4.3.1, alors dans la suite du paragraphe on se concentre uniquement sur la seconde option. Par conséquent, à chaque itération de Dantzig-Wolfe, la solution du problème relaxé sera calculée par la mise en place d'un algorithme itératif similaire à l'algorithme 2. Ceci implique l'apparition des itérations *imbriquées*, notées par l_i . Elles correspondent aux itérations de l'algorithme 2, dont le couplage par les sorties a été remplacé par un couplage par les entrées.

Notation 4.4.1 On utilisera un indice supérieur entre parenthèses sous la forme $x^{(l_{DW}, l_i)}$ pour désigner le fait que la variable x est utilisée à l'itération imbriquée l_i de l'itération extérieure (de Dantzig-Wolfe), l_{DW} .

Comme on va le voir au paragraphe 4.4.4, la prise en compte des couplages entre les sous-systèmes améliore les performances globales du système de commande. Malgré cela, la convergence vers la solution optimale des algorithmes distribués, prenant en compte les couplages entre les zones, n'est pas garantie.

La faiblesse de l'algorithme 4 à couplage par les entrées réside dans les itérations imbriquées. La présence de ces itérations n'implique pas la convergence vers la solution optimale. Ainsi, les solutions des problèmes relaxés, obtenues à l'aide des itérations imbriquées, ne sont pas forcément des sommets ou des rayons extrémaux des polyèdres $\mathbb{U}_i$.

Étude numérique de l'efficacité de l'algorithme distribué Pour l'étude de la complexité de la procédure distribuée à itérations imbriquées, décrite par l'algorithme 4, considérons le modèle (4.65) avec les valeurs numériques suivantes :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0,9921 & 0 \\ 0 & 0,998 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0,2595 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{j,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,02 \cdot \xi \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

dont le pas d'échantillonnage est $T_s = 10\text{min}$. Les valeurs numériques ont été obtenues après une identification expérimentale sur la pièce 1 du bâtiment trois zones. Les zones sont disposées en série. La variables ξ a été introduite afin d'étudier l'influence du gain statique de couplage sur les performances de l'algorithme distribué.

Les performances de l'algorithme distribué sont comparées à celles du solveur centralisé par rapport à deux indicateurs :

- le *facteur de sous-optimalité*, $S_f[\%]$ et
- le *temps de calcul* nécessaire à la résolution du même problème par les deux stratégies

L'algorithme itératif a été implémenté sur une machine séquentielle. Ainsi le temps de calcul équivalent, en utilisant un environnement distribué (en négligeant le temps lié à la communication des informations entre les agents) est :

$$t_{distr} = \sum_{l=1}^{l_{DW}} \left(t_{MPC_c}(l) + \sum_{i=1}^{l_i(l)} \max_{j \in \mathbb{N}_1^s} t_{MPC_j}(i) \right), \quad (4.70)$$

où l_{DW} représente le nombre d'itérations de Dantzig-Wolfe nécessaires pour satisfaire la condition d'arrêt, $t_{MPC_c}(l)$ est le temps de calcul requis par le contrôleur coordonnateur MPC_c pour résoudre le PMR à l'itération l et $t_{MPC_j}(i)$ est le temps de calcul requis par le contrôleur local MPC_j pour résoudre son sous-problème à l'itération imbriquée i de l'itération de Dantzig-Wolfe l .

Pour la stratégie distribuée, le temps de communication, qui peut être important dans les applications en temps réel, est proportionnel au *nombre d'itérations*. Par conséquent,

les résultats présentés ci-dessous vont mettre également en évidence le nombre d'itérations atteint par la procédure distribuée.

Trois scénarios sont proposés, chacun illustrant l'influence sur les indicateurs de performance d'un des paramètres suivants :

- le nombre de sous-systèmes, s ,
- la taille de l'horizon de commande, N_u et
- le terme ξ , proportionnellement lié au *gain statique de couplage* entre les sous-systèmes.

Dans les résultats de simulation présentés ci-dessous, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les paramètres de réglage : $N_1 = 1$, $N_2 = 30$ et $\epsilon = \epsilon_i = 10^{-3}$. Le nombre d'instants d'occupation inclus dans la fenêtre de prédiction de chaque pièce est égal à 15. Pour résoudre les PL, nous avons utilisé le solveur Simplexe de Matlab (fonction *linprog* avec l'option *simplex*) sur une machine Intel Pentium 4 à 3GHz. Afin d'avoir des résultats statistiques plus cohérents, cinq valeurs différentes pour les états initiaux des sous-systèmes ont été considérées. Ceci explique les multiples valeurs des paramètres qui apparaissent dans les figures de chaque scénario.

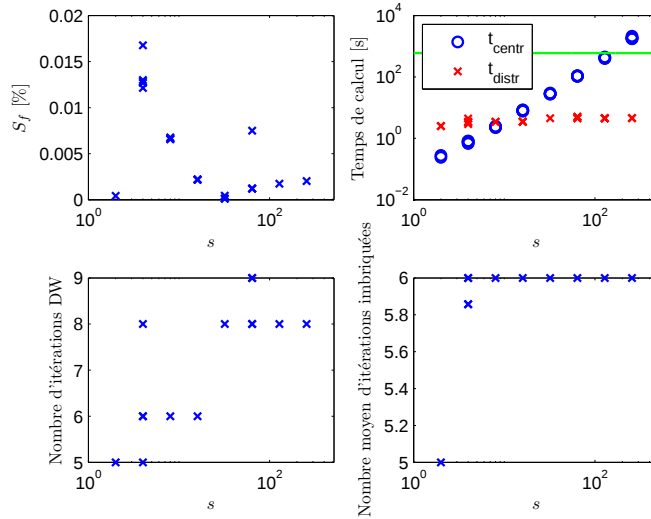


FIGURE 4.14 – Influence du nombre de sous-systèmes, s , sur les performances de l'algorithme 4

Scénario 1 : Les paramètres $N_u = 15$ et $\xi = 1$ sont fixes tandis que le nombre de sous-systèmes évolue. La figure 4.14 montre une très bonne capacité d'extensibilité de l'algorithme distribué par rapport au solveur centralisé. Cependant, l'abaissement du temps de calcul par l'utilisation de l'algorithme distribué est possible à partir d'un certain nombre de sous-systèmes (10 pour le cas Simplexe, 100 pour CPLEX). En ce qui concerne le facteur de sous-optimalité, on observe que la solution distribuée est très proche de l'optimum trouvé par la méthode centralisée. On observe également que pour plus de 100 pièces, le solveur Simplexe centralisé n'offre pas la solution optimale dans le délai d'une période

d'échantillonnage. Ceci n'est pas un problème pour les solveurs plus performants, comme CPLEX.

Scénario 2 : Nous allons faire varier maintenant la dimension de l'horizon de commande et nous fixons les paramètres $s = 40$ et $\xi = 1$. N_u influence les dimensions de la matrice de contrainte à la fois du problème maître et des sous-problèmes. On peut remarquer figure 4.15 que l'écart entre le temps de calcul centralisé et le temps de calcul distribué augmente avec N_u . Dans le même temps, les indices de performance sont peu influencés par la variation de ce paramètre.

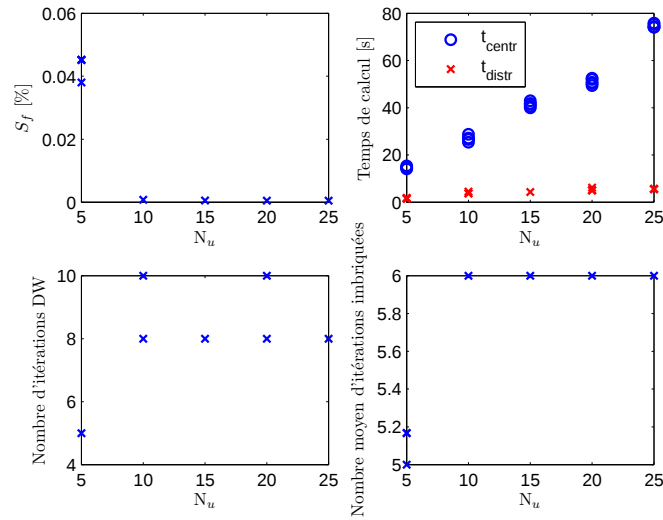


FIGURE 4.15 – Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , sur les performances de l'algorithme 4

Scénario 3 : Dans ce scénario nous montrons l'influence du gain de couplage statique sur les performances de l'algorithme distribué, pour $s = 40$ et $N_u = 15$. Intuitivement, un gain de couplage supérieur implique une augmentation du nombre d'itération imbriquées, nécessaires pour se rapprocher du point d'équilibre. Dans le même temps, ce point d'équilibre de Nash s'éloigne de l'optimum global avec l'augmentation du facteur de couplage ξ . Ainsi, le degré de sous-optimalité de la solution distribuée grandit avec la croissance de ξ .

4.4.4 Résultats de simulation

Dans les paragraphes précédents, nous avons présenté deux algorithmes prédictifs distribués basés sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe ainsi que leur performance en termes de vitesse de convergence, de degré d'optimalité de la solution et de temps de calcul.

Le but du présent paragraphe est de comparer ces algorithmes avec d'autres structures de commande. Cette fois, les critères de comparaison sont le confort et le coût énergétique. Pour ce faire, les algorithmes de contrôle sont appliqués au bâtiment virtuel 3-pièces, décrit

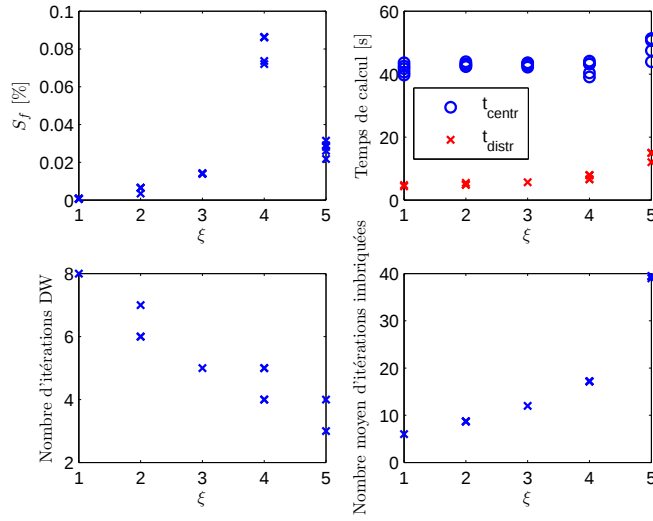


FIGURE 4.16 – Influence du gain statique de couplage sur les performances de l'algorithme 4

dans l'Annexe A.

Les résultats de simulation présentés jusqu'à présent dans ce mémoire s'intéressaient essentiellement à la consommation énergétique liée aux équipements de chauffage et au degré de confort des occupants. Comme indiqué dans l'introduction du chapitre, la formulation linéaire du critère de MPC nous permet d'inclure facilement le prix de l'énergie et de minimiser par conséquent la facture et non pas le nombre de kWh.

Supposons donc que les coûts locaux $\lambda_i(k+j)$ (en €/W) associés aux commandes des convecteurs locaux s'expriment sous la forme :

$$\lambda_i(k+j) = c_e(k+j)T_s/(36 \cdot 10^5), \forall i \in \mathbb{N}_1^s, j \in \mathbb{N}_0^{N_u-1} \quad (4.71)$$

où $c_e(k+j)$ représente le prix de l'électricité (en €/kWh). Le tarif de l'électricité considéré est constant et égal à $c_e = 0,0742\text{€/kWh}$. La puissance maximale est définie par $\bar{u}_t = \alpha \sum_{i \in S} \bar{u}_i$ avec $\alpha \in (0,1)$. Les conditions météorologique simulées sont celles mesurées à Rennes, le 1 Janvier 1998.

Le modèle de prédiction a été obtenu en écrivant les équations thermiques, d'une manière similaire à [101], méthode qui nous a amené à construire un modèle global à 119 états. Ce modèle de commande est très précis par rapport au modèle de simulation offert par SIMBAD. Notons que par rapport au modèle couplé par les entrées (4.65), le modèle de simulation utilisé présente deux entrées de plus, i.e. la température du sol (fixé à 10°C) et la température extérieure. En supposant que le régulateur ne dispose pas des prévisions météorologiques, alors les composantes de la séquence future de températures extérieures seront égales à la température courante mesurée. Pour les valeurs des paramètres MPC, les valeurs suivantes ont été utilisées : $N_u = N_2 = 30$, $\epsilon = \epsilon' = 10^{-3}$, $\lambda_i = 10^3$, $\forall i \in S$, $T_s = 600\text{s}$.

	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$\underline{w}_i$ [°C]	19,5	20,5	21,5
$\overline{w}_i$ [°C]	20,5	21,5	22,5
PO 1	08h00 - 12h00	13h00 - 17h00	17h00 - 20h00
PO 2	08h00 - 17h00	10h00 - 19h00	14h00 - 18h00
PO 3	08h00 - 17h00	-	-

TABLE 4.2 – Profils d’occupation

Pour avoir une meilleure vue sur les performances du système de contrôle distribué, nous proposons de comparer les coûts de chauffage de trois scénarios d’occupation différents, synthétisés dans le tableau 4.2. Nous avons considéré deux valeurs pour les conditions initiales (température de l’air intérieur et température des murs), ce qui correspond à une occupation quotidienne (16°C) et à une période d’inoccupation d’un week-end (10°C).

α	T_0 [°C]	Loi de commande	Coût/jour [€]		
			PO 1	PO 2	PO 3
0,5	10	CMPC	1,15	1,21	0,80
		DiMPCDW	1,17	1,23	0,80
		PI	1,28	1,33	0,84
	16	CMPC	0,81	0,86	0,49
		DiMPCDW	0,82	0,86	0,49
		PI	0,92	0,95	0,54
0,7	10	CMPC	1,15	1,21	0,80
		DiMPCDW	1,17	1,21	0,81
		PI	1,29	1,35	0,84
	16	CMPC	0,81	0,86	0,49
		DiMPCDW	0,81	0,86	0,49
		PI	0,94	0,97	0,54

TABLE 4.3 – Comparaison en termes de coûts de chauffage

Dans le tableau 4.3, nous comparons, en terme de coûts de chauffage, la structure distribué DiMPCDW, le contrôleur centralisé équivalent CMPC et une structure de commande décentralisée de type PI. Pour chaque profil d’occupation, nous avons considéré que la puissance souscrite est 50 %, respectivement 70 % de la puissance maximale installée. Les consignes des PI locaux, $w_i^{PI}(k) = \delta_i(k)(\overline{w}_i(k) + \underline{w}_i(k))/2$ ont été anticipées en fonction des conditions initiales. Ainsi, les contrôleurs PI ($K = 0,35$, $T_i = 3600s$) déclenchent le chauffage 5 heures avant le début de la période d’occupation si $T_0 = 10^\circ C$ et 3 heures quand $T_0 = 16^\circ C$. La durée de ces périodes de préchauffage a été déterminée de manière expérimentale. D’un point de vue qualitatif, cette anticipation peut être observée sur la figure 4.17 dans laquelle on illustre l’évolution des principaux signaux sur une journée de simulation pour la structure DiMPCDW et PI.

Pour que les comparaisons avec le PI soient réalistes, vis-à-vis de l’approche prédictive, on choisit, dans le cas du PI, de diviser $\overline{u}_t(k)$ entre les seules zones occupées, en saturant

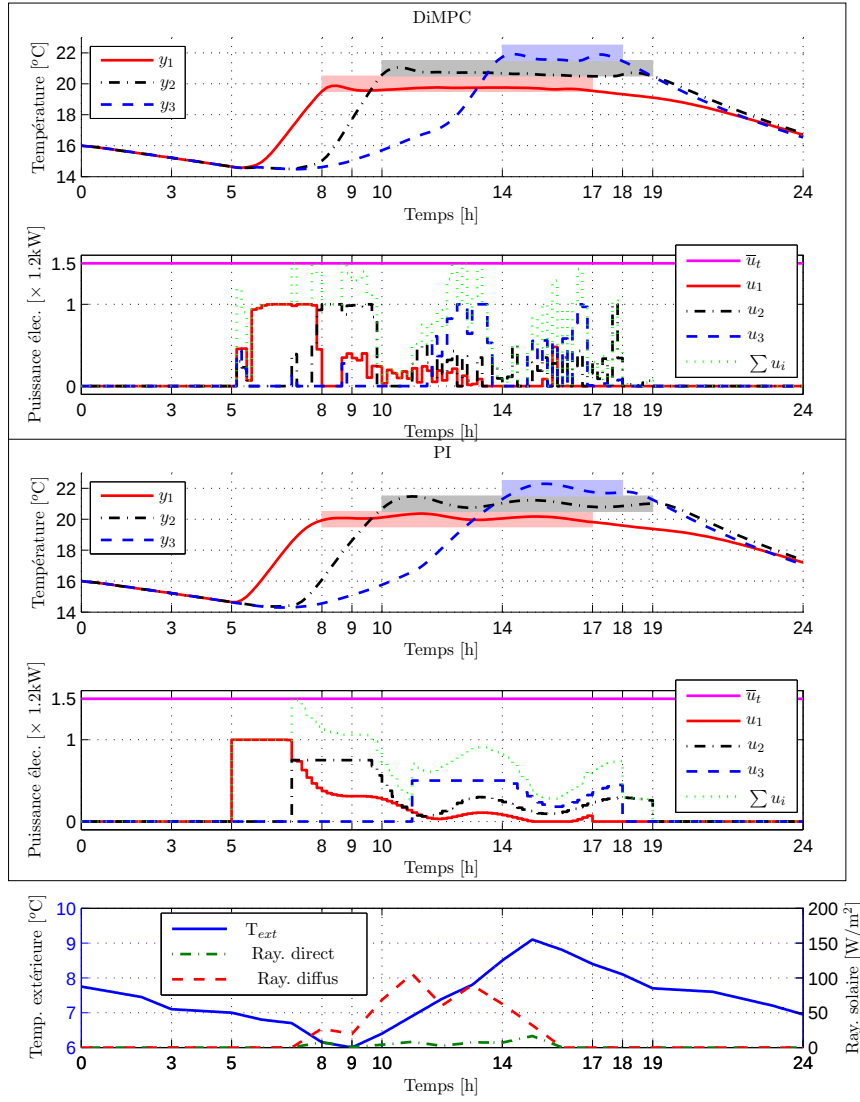


FIGURE 4.17 – Résultats de simulation sur une journée utilisant la commande DiMPCDW et respectivement PI, dans la configuration PO 2, $\alpha = 0,5$, $T_0 = 16^\circ\text{C}$

la commande locale avec :

$$\bar{u}_i^{PI}(k) = \min(\bar{u}_i, \bar{u}_t/o(k)) \quad (4.72)$$

où $o(k)$ représente le nombre de pièces occupées à l'instant k , incluant également l'anticipation de la consigne dans la période d'occupation.

Les résultats synthétisés dans le tableau 4.3 montrent que l'utilisation de la structure distribuée permet de réaliser des économies moyennes de 9 % par rapport à la commande de type PI.

Notons que l'approche proposée peut également être utilisée si la puissance totale

maximale est variable dans le temps. Un tel cas est illustré figure 4.18. Bien évidemment, ceci nécessite la connaissance à l'instant k de la séquence

$$\bar{\mathbf{u}}_t(k) = \begin{bmatrix} \bar{u}_t(k+1) & \cdots & \bar{u}_t(k+N_2) \end{bmatrix}^T. \quad (4.73)$$

De plus, dans ce cas, le choix $N_u = N_2$ devient préférable (afin d'avoir un nombre de degrés de liberté suffisant pour satisfaire la contrainte couplante), ce qui peut augmenter considérablement l'effort de calcul. Ceci peut être un intérêt de plus pour l'emploi d'une stratégie distribuée même pour les bâtiments de taille moyenne.

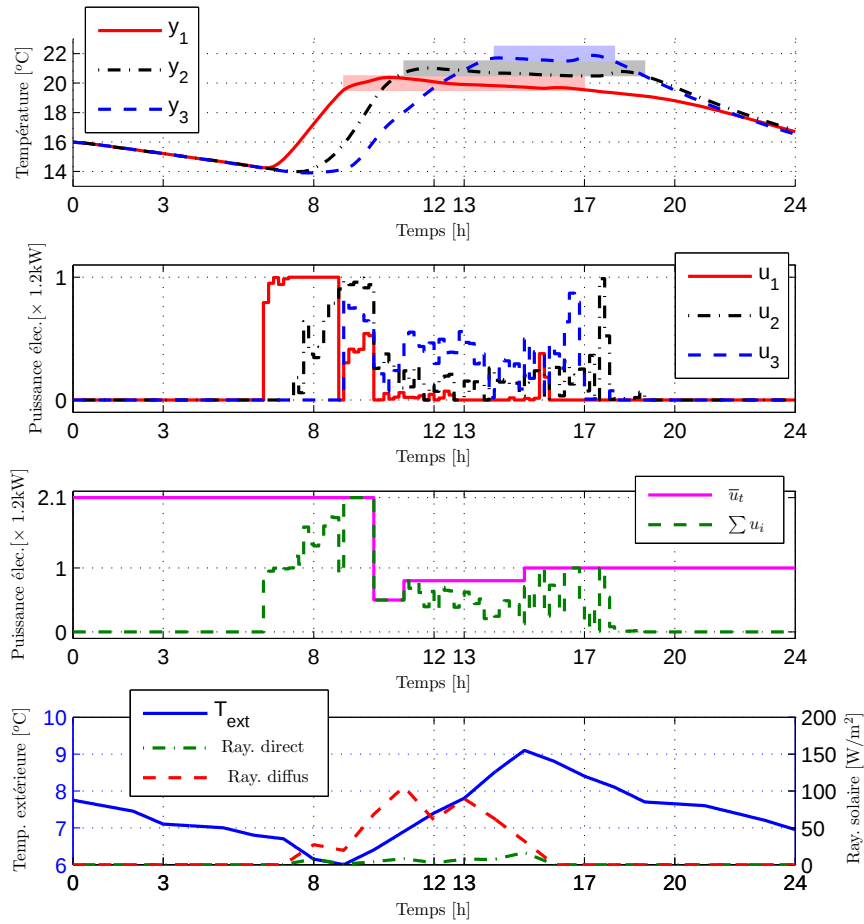


FIGURE 4.18 – Simulation DiMPCDW avec puissance maximale, $\bar{u}_t$, variable dans le temps

4.4.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre était de poursuivre avec l'approche prédictive distribuée proposée au chapitre 3 et de s'orienter vers des formulations linéaires des critères. Sachant que la plupart des contraintes qui peuvent apparaître dans des problèmes de régulation

thermique sont linéaires, on a étudié l'évolution de la fonction de coût vers une formulation linéaire. La principale motivation de ce choix est de nature économique. Le régulateur minimise alors le coût effectif de chauffage, sachant que celui-ci est généralement proportionnel à l'énergie consommée.

Les problèmes d'optimisation engendrés par la commande prédictive se posent alors sous forme de programmes linéaires. L'apparition de contraintes, nécessaires pour définir les bornes supérieures et inférieures des grandeurs de commande, devient inévitable.

Dans un premier temps nous avons considéré le cas des contraintes locales, spécifiques à chaque zone. Les structures décentralisée, centralisée et distribuée ont été mises sous la forme standard linéaire. Ensuite nous avons comparé les résultats obtenus en simulation pour les trois stratégies, utilisant différents scénarios d'occupation. Le comportement de type dead-beat du MPC à critère linéaire favorise le déclenchement du poste de chauffage au dernier moment, ce qui est la meilleure stratégie du point de vue énergétique pour un bâtiment à occupation discontinue. Ceci est la raison principale d'une économie d'énergie de plus de 7 % par rapport à la formulation quadratique du critère.

Dans la deuxième partie du chapitre, une contrainte couplante a été ajoutée, qui lie les variables de décision d'une partie ou de la totalité des sous-systèmes. Cette contrainte est généralement déterminée par la valeur de la puissance souscrite dans le cas d'un bâtiment à chauffage électrique. Pour résoudre le PL résultant dans le cadre d'une structure de contrôle distribuée, il a été fait appel à la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe. L'algorithme distribué a été initialement conçu en ignorant les couplages thermiques entre les zones. Ensuite, nous avons présenté deux manières de distribution de l'effort de calcul en considérant des modèles locaux couplés par les sorties et par les entrées, respectivement. Des études numériques sur l'efficacité des algorithmes ont montré un bon comportement en termes de vitesse de convergence et de degré d'optimalité de la solution fournie. Dans les deux cas, la structure MPC distribuée a été testée en simulation sur un bâtiment virtuel avec de bonnes performances économiques.

Toujours dans le cadre linéaire de la fonction de coût, le chapitre suivant traitera la gestion distribuée de plusieurs types d'équipements de chauffage, problématique de plus en plus importante dès lors que l'on vise à une diversification des sources d'énergie.

Chapitre 5

MPC linéaire multivariable pour la régulation thermique multizone et multisource¹

Délibérer est le fait de plusieurs. Agir est le fait d'un seul.

Mémoires de guerre
CHARLES DE GAULLE

5.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une méthodologie de distribution de la loi de commande prédictive multivariable pour la régulation de la température pour un bâtiment multizone, dans lequel les sources de chauffage sont locales. Ce type de système correspond en particulier au chauffage électrique. Deux architectures de commande ont été développées, en fonction du type de contraintes : locales et globales. Dans le premier cas, la prise en compte des couplages thermiques entre les zones est réalisée par des échanges d'informations entre les agents voisins. L'apparition d'une contrainte globale nécessite un agent coordonnateur pour converger vers la solution optimale.

Ce chapitre vient enrichir la méthodologie déjà développée par l'ajout d'une source de chauffage centrale, qui agit sur toutes ou sur une partie des pièces du bâtiment. Ainsi, chaque pièce peut être chauffée par deux types de sources : locale et centrale. La gestion de plusieurs sources de chauffage peut devenir un enjeu majeur, notamment avec l'émergence des énergies renouvelables.

1. Des parties de ce chapitre peuvent être retrouvées dans [122, 124, 127].

5.2 Contexte

Une solution de plus en plus fréquente pour réduire la facture énergétique est l'utilisation de plusieurs sources de chauffage. Un exemple usuel est la combinaison entre un système de chauffage central à biocarburant (biocarburant liquide, bois, etc.) ou à combustible fossile (pétrole, charbon, gaz, etc.) et des convecteurs électriques utilisés comme chauffage d'appoint. Les deux systèmes ont des dynamiques et des coûts de fonctionnement différents. Afin de profiter du prix relativement réduit du chauffage à base de combustibles, et en même temps de la dynamique plus rapide du système de chauffage électrique, une loi de commande optimale doit être mise en place. Tel est le contexte de ce chapitre.

Peu de travaux ont été menés sur des algorithmes de commande pour la régulation de plusieurs sources de chauffage. Mentionnons ici le brevet [161] dans lequel les auteurs proposent une stratégie basée sur des règles pour la commande d'une pompe à chaleur, d'une chaudière et d'un système électrique, utilisés pour chauffer l'air dans un système de climatisation. La source principale est la pompe à chaleur, avec des coûts de fonctionnement réduits, tandis que les autres sources sont considérées comme auxiliaires. Pourtant, le rendement de la pompe diminue considérablement quand la température extérieure est basse, c'est pourquoi plusieurs sources de chauffage sont utilisées. Ainsi, les sources auxiliaires sont mises en marche dès que la pompe à chaleur ne fonctionne pas efficacement ou quand elle n'a plus la capacité de chauffer l'espace intérieur.

Une vue un peu différente est proposée dans [146]. Les auteurs considèrent deux systèmes de chauffage. Le premier est supposé alimenté par une énergie renouvelable. Le second, considéré comme système d'appoint, est alimenté par une énergie fossile. Les stratégies de commande développées (PID, PID-MPC et PID-flou) favorisent toujours la source renouvelable, tandis que la source fossile doit rester marginale et n'intervenir que lorsque la première n'est pas suffisante pour chauffer le bâtiment.

Les deux approches multisource mentionnées ci-dessus ont le même principe : faire appel en priorité à la source d'énergie la moins coûteuse (du point de vue économique ou environnemental).

L'idée de notre démarche est un peu différente. Elle s'appuie sur le fait que les deux types de sources considérées agissent différemment sur l'ensemble des zones du bâtiment. On considère tout d'abord les sources locales qui, comme leurs nom l'indique, chauffent leur propres zones. C'est le cas multizone traité dans les chapitres précédents. La deuxième source, appelée centrale, chauffe simultanément une partie ou toutes les pièces du bâtiment.

Un exemple d'un tel type de système est donné par la combinaison entre un chauffage électrique et un chauffage central à bois ou à gaz, ce que l'on trouve dans environ 9 % des logements français [4]. Généralement, la source centrale est alimentée par une énergie moins chère. En contre-partie, sa dynamique est moins rapide que celle de la source locale. De plus, le fait qu'elle chauffe simultanément plusieurs pièces rend particulièrement difficile son contrôle, sachant que les zones peuvent avoir des profils d'occupation, ainsi que des bandes de confort, différents.

L'objectif de ce chapitre est de proposer une loi de commande prédictive distribuée pour la gestion optimale d'un système de chauffage à sources multiples. Dans ce cadre, l'algorithme devra intégrer, en plus des commandes propres à chaque source locale, une commande de la source centrale, appelée par la suite "commande centrale".

5.3 MPC avec commande centrale

Nous allons tout d'abord définir le critère global d'optimisation et puis présenter la méthode de décomposition de Benders. Elle sera l'outil de base pour la construction de l'algorithme distribué. Les idées principales de la méthode de décomposition seront présentées en ignorant les couplages thermiques entre les zones. Ensuite, nous étendrons la procédure distribuée pour prendre en compte ces couplages. Les performances technico-économiques des algorithmes seront étudiées en simulation.

5.3.1 Définition du critère

En gardant la définition du confort avec une bande de température, on peut exprimer la fonction de coût du MPC sous la forme :

$$\min_{\mathbf{u}_c(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} J(k) = \boldsymbol{\lambda}_c^T(k) \mathbf{u}_c(k) + \sum_{i=1}^s \boldsymbol{\lambda}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k) \quad (5.1a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_c(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_c(k), \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_i(k), \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.1c)$$

$$\Delta_i(k)(\underline{\mathbf{w}}_i(k) - \hat{\mathbf{y}}_i(k)) \leq \mathbf{0}_{N_2 \times 1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.1d)$$

$$\Delta_i(k)(\hat{\mathbf{y}}_i(k) - \bar{\mathbf{w}}_i(k)) \leq \mathbf{0}_{N_2 \times 1}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s,$$

où $\mathbf{u}_c(k)$ représente la séquence de commandes centrales, tandis que les autres notations sont identiques à celles utilisées au chapitre précédent. En utilisant la même technique de relaxation des contraintes que celle employée à la section 4.3, le problème d'optimisation (5.1) est transformé en :

$$\min_{\mathbf{u}_c(k), \mathbf{u}_1(k), \dots, \mathbf{u}_s(k)} \boldsymbol{\lambda}_c^T(k) \mathbf{u}_c(k) + \sum_{i=1}^s \left(\boldsymbol{\lambda}_i^T(k) \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1}^{N_2} f_i(k+j) \right), \quad (5.2a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_c(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_c(k), \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{0}_{N_u \times 1} \leq \mathbf{u}_i(k) \leq \bar{\mathbf{u}}_i(k), \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.2c)$$

où la fonction de pénalité f_i est définie par (4.31).

5.3.2 Modèle de prédiction découplé

Considérons dans un premier temps le cas de modèles locaux indépendants. Chaque zone i présente deux entrées, celle de la source locale et celle de la source centrale. Le modèle discret de la zone i peut s'exprimer alors sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{0,i}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_{c,i}u_c(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (5.3)$$

À partir du modèle (5.3), on peut écrire l'équation de prédiction locale :

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k) = \mathbf{\Psi}_{0,i}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{\Phi}_{0,c,i}\mathbf{u}_c(k) + \mathbf{\Phi}_{0,i}\mathbf{u}_i(k), \quad (5.4)$$

avec $\mathbf{\Psi}_{0,i}$ et $\mathbf{\Phi}_{0,i}$ définies par (4.8) et (4.9), tandis que la matrice $\mathbf{\Phi}_{0,c,i}$ est construite comme suit :

$$\mathbf{\Phi}_{0,c,i} = \begin{bmatrix} \phi_{0,c,i}(0) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \phi_{0,c,i}(1) & \phi_{0,c,i}(0) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \phi_{0,c,i}(N_2-1) & \cdots & \cdots & \phi_{0,c,i}(N_2-N_u+1) & \sum_{j=0}^{N_2-N_u} \phi_{0,c,i}(j) \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\phi_{0,c,i}(j) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_{0,i}^j \mathbf{b}_{c,i}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0^{N_2-1}. \quad (5.6)$$

Reportons l'équation (5.4) dans la formulation de la fonction de pénalité locale, après quelques manipulations on peut réécrire le problème (5.2) sous la forme standard PL :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_c''(k), \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k)} \quad & \lambda_c''^T(k) \mathbf{u}_c''(k) + \lambda_1''^T(k) \mathbf{u}_1''(k) + \cdots + \lambda_s''^T(k) \mathbf{u}_s''(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c''(k) = \bar{\mathbf{u}}_c(k) \\ & \mathbf{K}_{0,1} \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_{0,1} \mathbf{u}_1''(k) = \mathbf{g}'_{0,1}(k) \\ & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ & \mathbf{K}_{0,s} \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_{0,s} \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}'_{0,s}(k) \\ & \mathbf{u}_c''(k) \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, \quad \mathbf{u}_1''(k), \quad \dots, \quad \mathbf{u}_s''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u+4N_2) \times 1}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

où les matrices $\mathbf{G}'_{0,i}$ et les vecteurs $\mathbf{g}'_{0,i}(k)$ sont définis par (4.7). Les blocs de matrices qui composent la première colonne-bloc de la matrice de contraintes sont définis par :

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_{0,i} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_u \times N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_u} \\ -\mathbf{\Phi}_{0,c,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} \\ \mathbf{\Phi}_{0,c,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

De manière similaire à la construction de $\mathbf{u}_i''(k)$, le vecteur qui inclut la séquence future

des commandes centrales intègre N_u variables auxiliaires, regroupées dans le vecteur $\mathbf{x}_c(k)$. Elles sont nécessaires à la transformation de la deuxième inégalité de la contrainte (5.2b) en contrainte égalité. On a alors :

$$\mathbf{u}_c''(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_c^T(k) & \mathbf{x}_c^T(k) \end{bmatrix}^T, \quad \boldsymbol{\lambda}_c''(k) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_c^T(k) & \mathbf{0}_{1 \times N_u} \end{bmatrix}^T. \quad (5.9)$$

5.3.2.1 Méthode de décomposition de Benders

La décomposition de Benders [22], connue comme la méthode duale de la décomposition de Dantzig-Wolfe, exploite la structure bloc-angulaire duale de la matrice de contraintes, afin de paralléliser l'effort de calcul nécessaire à la résolution du PL. De manière similaire à la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, la décomposition de Benders divise un problème de programmation linéaire (de grande taille) en un ou plusieurs sous-problèmes coordonnés par un problème maître (PM). La solution optimale du problème original est identique à la solution obtenue après un nombre fini d'itérations de Benders [22]. Même si cette méthode peut être aussi utilisée dans la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires convexes [65, 39], dans le développement qui suit, nous présentons et utilisons la décomposition uniquement dans le contexte de la programmation linéaire.

Définition 5.3.1 Une matrice $\mathbf{A}$ est appelée **bloc-angulaire duale** si sa structure a la forme suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{2,0} & \mathbf{A}_{2,2} & \cdots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{n,0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{A}_{n,n} \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Le PL associé présente des variables couplantes qui empêchent la résolution par blocs. Ce sont les n_0 premières variables de décision, où n_0 est le nombre de colonnes des matrices $\mathbf{A}_{i,0}$.

En se rappelant la définition 4.4.1 d'une matrice bloc-angulaire primale, on observe que la structure bloc-angulaire duale n'est rien d'autre que la transposée de la structure primale. Par conséquent on peut formuler la proposition suivante.

Proposition 5.3.1 (Décomposabilité primale et duale [39]) *Si un problème de programmation linéaire présente une structure décomposable avec des contraintes couplantes, alors son dual a une structure décomposable avec des variables couplantes. Et réciproquement, si un PL présente une structure décomposable avec des variables couplantes, alors son dual a une structure décomposable avec des contraintes couplantes.*

Revenons à la formulation (5.7) du problème d'optimisation. Pour simplifier les équations utilisées dans la démarche suivante, nous omettrons la dépendance des variables

vis-à-vis de l'instant de temps k . Alors, le PL à résoudre s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{u}_c'', \mathbf{u}_1'', \dots, \mathbf{u}_s''} \quad & \lambda_c''^T \mathbf{u}_c'' + \lambda_1''^T \mathbf{u}_1'' + \dots + \lambda_s''^T \mathbf{u}_s'' \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c'' = \bar{\mathbf{u}}_c \\
 & \mathbf{K}_{0,1} \mathbf{u}_c'' + \mathbf{G}'_{0,1} \mathbf{u}_1'' = \mathbf{g}'_{0,1} \\
 & \vdots \quad \quad \quad \ddots \quad \quad \quad \vdots \\
 & \mathbf{K}_{0,s} \mathbf{u}_c'' + \mathbf{G}'_{0,s} \mathbf{u}_s'' = \mathbf{g}'_{0,s} \\
 & \mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, \quad \mathbf{u}_1'', \quad \dots, \quad \mathbf{u}_s'' \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1}.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

On peut identifier $\mathbf{u}_c''$ comme la variable couplante du PL (5.11). Si l'on dispose de la valeur optimale de cette variable, alors l'optimum global pourra être calculé facilement par la résolution (en parallèle) des sous-problèmes (SP_i) :

$$z_i(\mathbf{u}_c'') = \min_{\mathbf{u}_i''} \lambda_i''^T \mathbf{u}_i'' \tag{5.12a}$$

sous les contraintes

$$\mathbf{G}'_{0,i} \mathbf{u}_i'' = \mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'', \tag{5.12b}$$

$$\mathbf{u}_i'' \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1}. \tag{5.12c}$$

L'idée principale de la méthode de décomposition est de faire converger la valeur courante de la variable couplante vers la valeur optimale $\mathbf{u}_c''^*$. En reportant (5.12a) dans (5.11), le PL initial devient :

$$J = \min_{\mathbf{u}_c''} \lambda_c''^T \mathbf{u}_c'' + \sum_{i=1}^s z_i(\mathbf{u}_c''), \tag{5.13a}$$

sous les contraintes

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c'' = \bar{\mathbf{u}}_c, \tag{5.13b}$$

$$\mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}. \tag{5.13c}$$

Suite à la dualité linéaire, $z_i(\mathbf{u}_c'')$ est aussi l'optimum de la formulation duale du (5.12), i.e. :

$$z_i(\mathbf{u}_c'') = \max_{\mathbf{p}_i} \mathbf{p}_i^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c''), \tag{5.14a}$$

sous les contraintes

$$\mathbf{G}'_{0,i} \mathbf{p}_i \leq \lambda_i''. \tag{5.14b}$$

La raison de l'utilisation de la formulation duale des sous-problèmes est que le polyèdre $\mathbb{U}_{0,i} = \{\mathbf{p}_i \mid \mathbf{G}'_{0,i} \mathbf{p}_i \leq \lambda_i''\}$, qui définit le domaine faisable du problème (5.14) est indépendant de $\mathbf{u}_c''$. La solution du PL (5.14) est un sommet ou un rayon extrémal de $\mathbb{U}_{0,i}$. En résolvant (5.14), l'un des deux cas suivants peut se présenter.

1. Si l'optimum du PL (5.14) est fini, alors sa solution est un sommet $\mathbf{p}_i^* \in \{\mathbf{p}_{i,j} \mid j \in \mathbb{N}_1^{d_i}\}$

du polyèdre $\mathbb{U}_{0,i}$. L'optimum peut s'exprimer alors par :

$$\begin{aligned} z_i(\mathbf{u}_c'') &= \mathbf{p}_i^{*T}(\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i}\mathbf{u}_c'') \\ &= \max_{j \in \mathbb{N}_1^{d_i}} \mathbf{p}_{i,j}^T(\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i}\mathbf{u}_c''). \end{aligned} \quad (5.15)$$

2. Si $\mathbb{U}_{0,i}$ n'a pas de borne supérieure, alors la solution du sous-problème dual (5.14) est un des rayons extrémaux $\mathbf{r}_i^* \in \{\mathbf{r}_{i,j} | j \in \mathbb{N}_1^{e_i}\}$ avec la propriété suivante :

$$\mathbf{r}_i^{*T}(\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i}\mathbf{u}_c'') > 0. \quad (5.16)$$

Dans ce cas $z_i(\mathbf{u}_c'') = +\infty$.

En regroupant (5.15) et (5.16), on peut écrire l'optimum du sous-problème sous la forme :

$$z_i(\mathbf{u}_c'') = \min_{z_i} z_i, \quad (5.17a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{p}_{i,j}^T(\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i}\mathbf{u}_c'') \leq z_i, \quad \forall j \in \mathbb{N}_1^{d_i}, \quad (5.17b)$$

$$\mathbf{r}_{i,j}^T(\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i}\mathbf{u}_c'') \leq 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}_1^{e_i}. \quad (5.17c)$$

Remarque 5.3.1 Le problème (5.17) est simplement une réécriture du sous-problème dual (5.14), dont l'objectif est évalué au "meilleur" sommet du domaine de faisabilité. L'intérêt de la contrainte (5.17c) apparaît uniquement dans (5.18), car dans la formulation (5.17) elle n'agit pas sur la variable de décision.

Reportons (5.17) dans (5.13) pour obtenir :

$$J = \min_{\mathbf{u}_c'', z_1, \dots, z_s} \boldsymbol{\lambda}_c''^T \mathbf{u}_c'' + \sum_{i=1}^s z_i, \quad (5.18a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c'' = \bar{\mathbf{u}}_c, \quad \mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, \quad z_i \geq 0, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.18b)$$

$$\mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'' + z_i \geq \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{g}'_{0,i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_1^{d_i}, \quad (5.18c)$$

$$\mathbf{r}_{i,j}^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{g}'_{0,i}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad \forall j \in \mathbb{N}_1^{e_i}. \quad (5.18d)$$

On appelle (5.18) le problème maître complet, qui est équivalent au problème initial. Par rapport au PL (5.11), on a éliminé toutes les variables $\mathbf{u}_i''$, c'est à dire $s(2N_u + 4N_2)$ variables scalaires, en ajoutant uniquement s variables scalaires. Cependant, cette transformation a impliqué l'apparition d'un nombre considérable de contraintes.

La formulation et la résolution du problème (5.18) sont généralement plus difficiles que la minimisation du problème initial. Sachant que pour la solution optimale peu de contraintes sont actives, la méthode de décomposition s'appuie sur une stratégie de génération de contraintes. L'idée derrière cela est de résoudre le PM en utilisant uniquement un petit sous-ensemble de contraintes et de vérifier ensuite si l'une des contraintes non-incluses est violée.

Considérons le problème maître restreint (PMR), qui comporte seulement $s(l_B - 1)$ contraintes (de type sommet / rayon extrémal) du problème (5.18). Alors, à l'itération l_B , le PMR peut s'écrire comme suit :

$$\underline{J}^{(l_B)} = \min_{\mathbf{u}_c'', z_1, \dots, z_s} \lambda_c'^T \mathbf{u}_c'' + \sum_{i=1}^s z_i, \quad (5.19a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c'' = \bar{\mathbf{u}}_c, \mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, z_i \geq 0, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.19b)$$

$$\mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'' + z_i \geq \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{g}'_{0,i}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \forall j \in \mathbb{N}_1^k, \quad (5.19c)$$

$$\mathbf{r}_{i,j}^T \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'' \geq \mathbf{p}_{i,j}^T \mathbf{g}'_{0,i}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \forall j \in \mathbb{N}_1^{l_B-1-k}, \quad (5.19d)$$

où k représente le nombre courant des sommets locaux identifiés par la résolution des sous-problèmes SP_i .

À cause de l'absence de certaines contraintes dans la formulation restreinte, l'optimum du PL (5.19) représente une borne inférieure de l'optimum du problème initial, i.e. :

$$\underline{J}^{(l_B)} \leq J. \quad (5.20)$$

Afin de vérifier si les solutions du problème (5.19), $\mathbf{u}_c''^{(l_B)}$, $z_i^{(l_B)}$, sont également optimales pour le PM, il faut regarder si elles respectent toutes les contraintes non incluses, ce qui peut être vérifié par la résolution des sous-problèmes $\text{SP}_i^{(l_B)}$:

$$\max_{\mathbf{p}_i} \mathbf{p}_i^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c''^{(l_B)}), \quad (5.21a)$$

sous les contraintes

$$\mathbf{G}_{0,i}'^T \mathbf{p}_i \leq \lambda_i'', \quad (5.21b)$$

comme suit.

1. Si la solution de (5.21) est infinie, alors l'algorithme de résolution donne un rayon extrémal $\mathbf{r}_{i,l_B}$ qui satisfait la condition :

$$\mathbf{r}_{i,l_B}^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c''^{(l_B)}) > 0. \quad (5.22)$$

Alors, la contrainte $\mathbf{r}_{i,l_B}^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'') \leq 0$ n'est pas satisfaite et elle doit être ajoutée au PMR.

2. Si la solution de (5.21) est finie, elle représente un sommet $\mathbf{p}_{i,l_B}$ du polyèdre $\mathbb{U}_{0,i}$. De plus, si :

$$\mathbf{p}_{i,l_B}^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c''^{(l_B)}) > z_i^{(l_B)}, \quad (5.23)$$

alors la solution du PMR ne satisfait pas la contrainte $\mathbf{p}_{i,l_B}^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c'') \leq z_i$. Alors elle doit ainsi être ajoutée à la formulation (5.19).

3. Si

$$\mathbf{p}_{i,l_B}^T (\mathbf{g}'_{0,i} - \mathbf{K}_{0,i} \mathbf{u}_c''^{(l_B)}) \leq z_i^{(l_B)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}_1^s, \quad (5.24)$$

alors la solution $(\mathbf{u}_c''^{(l_B)}, z_1^{(l_B)}, \dots, z_s^{(l_B)})$ est faisable et optimale pour le PM. La condition (5.24) permet la vérification de l'optimalité de la solution courante du PMR par rapport au PM.

Dans la pratique, il n'est pas forcément intéressant de faire le calcul exact de la solution optimale. La majorité des algorithmes de programmation mathématique offre la possibilité d'arrêter leurs itérations dès que l'écart entre l'optimum et la solution courante est inférieure à une certaine erreur prédéfinie ϵ . C'est aussi le cas de l'algorithme issu de la méthode de décomposition de Benders.

L'optimum du problème (5.19) représente la borne inférieure courante de l'optimum du problème initial, tandis que la borne supérieure est définie par :

$$\overline{J}^{(l_B)} = \lambda_c''^T \mathbf{u}_c''^{(l_B)} + \sum_{i=1}^s \lambda_i''^T \mathbf{u}_i''^{(l_B)}, \quad (5.25)$$

où $\lambda_i''^T \mathbf{u}_i''^{(l_B)}$ est l'optimum du problème (5.21). Alors, la condition d'arrêt s'exprime par la relation : $\overline{J}^{(l_B)} - \underline{J}^{(l_B)} \leq \epsilon$.

La figure 5.1 illustre l'évolution du domaine admissible du problème maître restreint pour le cas où le problème initial se décompose en un PMR et un sous-problème.

Remarque 5.3.2 *La faisabilité du problème initial implique la faisabilité du PMR tout au long des itérations, i.e. les contraintes ajoutées (appelées coupes de Benders) ne réduisent pas le domaine admissible du PMR à l'espace vide. Au contraire, si le problème initial est infaisable, alors après un nombre fini d'itérations le PMR devient également infaisable. La faisabilité du problème initial ne garantit pas cette propriété pour les sous-problèmes. Malgré cet aspect, la formulation du problème proposée dans le mémoire (en relaxant les contraintes de confort) assure la faisabilité des sous-problèmes. Le point pour lequel toutes les composantes de la séquence de commande sont nulles reste toujours faisable et il peut être également utilisé comme point de départ de l'algorithme utilisé pour la résolution des SP_i .*

Le développement exposé ci-dessus aboutit sous la forme d'un algorithme itératif. La procédure 5 présente les étapes à suivre pour tous les contrôleurs afin qu'ils puissent

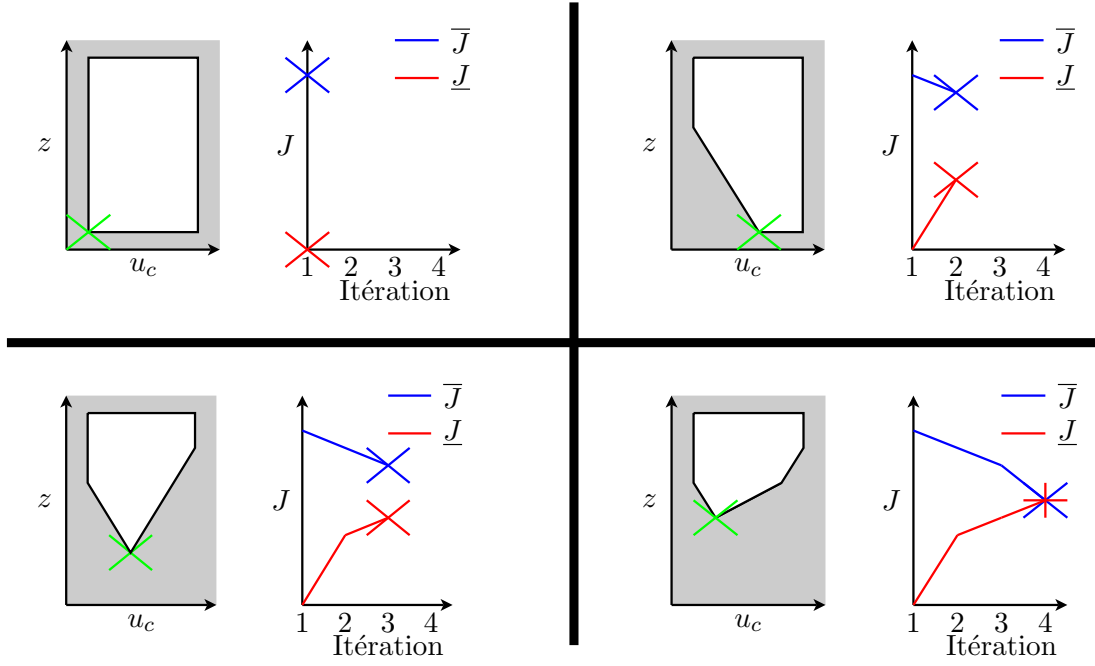


FIGURE 5.1 – Exemple de l'évolution du domaine admissible du PMR

converger vers la solution optimale de commande.

Algorithme 5 Procédure itérative de la commande prédictive distribuée basée sur la décomposition de Benders

- 1 : Initialiser $l_B = 1$
- 2 : Résoudre le PMR (5.19) par MPC_c , en obtenant $\mathbf{u}_c''^{(l_B)}$ et $z_i^{(l_B)}$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$
- 3 : Envoyer $\mathbf{u}_c''^{(l_B)}$ de MPC_c vers tous les contrôleurs locaux MPC_i
- 4 : Résoudre (en parallèle) tous les sous-problèmes par les MPC_i , en obtenant les solutions primales $\mathbf{u}_i''^{(l_B)}$ ainsi que les solutions duales ($\mathbf{p}_i^{(l_B)}$ ou $\mathbf{r}_i^{(l_B)}$)
- 5 : Envoyer les solutions duales de tous les MPC_i vers MPC_c
- 6 : Calculer les bornes courantes, supérieure (5.25) et inférieure (5.19a), par MPC_c
- 7 : **Si** ($l_B \leq l_{Bmax}$ **ET** $\bar{J}^{(l_B)} - \underline{J}^{(l_B)} \leq \epsilon$) **Alors**
 - 7.1 : $\mathbf{u}_c''^* = \mathbf{u}_c''^{(l_B)}$, $\mathbf{u}_i''^* = \mathbf{u}_i''^{(l_B)}$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$, Stop
- Sinon**
 - 7.2 : Mettre à jour le PMR en ajoutant les nouvelles contraintes (par MPC_c), $l_B = l_B + 1$ et Goto pas 2
- Fin Si**

La méthode de décomposition de Benders, synthétisée dans ce paragraphe, requiert une structure de commande distribuée avec s agents locaux, MPC_i , qui gèrent les commandes locales u_i et un agent coordonnateur, MPC_c , qui calcule la commande de la source centrale

u_c . Le schéma bloc de la structure de commande résultante est illustré figure 5.2 (gauche).

5.3.3 Modèle de prédiction couplé

Les paragraphes précédents ont montré comment la méthode de décomposition de Benders peut repartir l'effort de calcul dans une architecture de commande prédictive distribuée. Nous avons exposé les idées de base de l'approche, à partir desquelles on a formulé un algorithme itératif.

L'efficacité de la méthode présentée s'appuie principalement sur la structure particulière du problème d'optimisation. Plus précisément, c'est la structure bloc-angulaire duale de la matrice de contrainte qui permet de paralléliser une importante partie de l'effort de calcul, du fait de l'indépendance des sous-problèmes. Cela n'est plus valable si le modèle de prédiction prend en compte les couplages thermiques entre les zones adjacentes.

Cette partie traite de la prise en compte des couplages (par les sorties et par les entrées) et leurs conséquences sur les performances de la structure distribuée. Du point de vue matériel, en considérant ces interactions entre les zones, il apparaît nécessaire de faire communiquer les correcteurs locaux (voir la figure 5.2 droite).

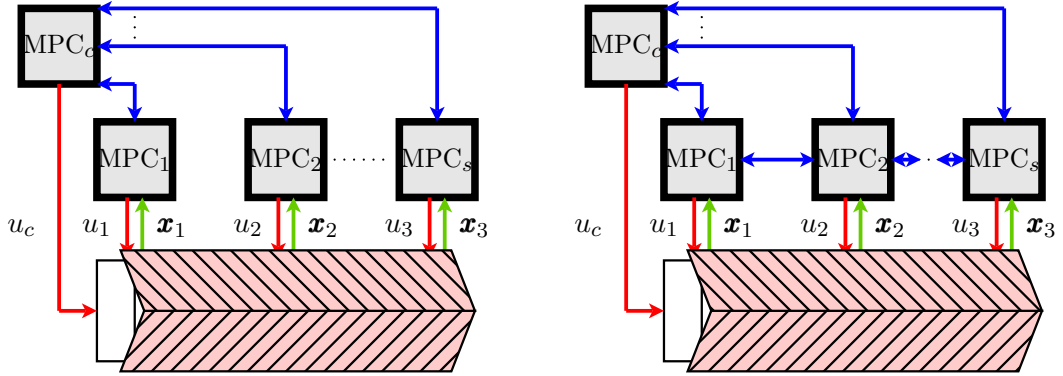


FIGURE 5.2 – Schéma de commande distribuée basé sur la méthode de décomposition de Benders, utilisant le modèle découplé (à gauche) et le modèle couplé (à droite)

5.3.3.1 Couplage par les sorties

Nous considérons dans ce paragraphe les modèles zonaux linéaires couplés par les sorties :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_c u_c(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} y_j(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k), \end{cases} \quad (5.26)$$

Les différences, dans la formulation du PL, par rapport au cas découplé sont au niveau des matrices bloc qui entre dans la composition des contraintes :

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{u}_c''(k), \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k)} \quad & \lambda_c''^T(k) \mathbf{u}_c''(k) + \lambda_1''^T(k) \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \lambda_s''^T(k) \mathbf{u}_s''(k) \\
 \text{s.c.} \quad & \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c''(k) = \bar{\mathbf{u}}_c(k) \\
 & \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_1 \mathbf{u}_1''(k) = \mathbf{g}'_1(k) \\
 & \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\
 & \mathbf{K}_s \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_s \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}'_s(k) \\
 & \mathbf{u}_c''(k) \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, \quad \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1},
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

où

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_u} & \mathbf{I}_{N_u} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N_u \times N_u} & \mathbf{0}_{N_u \times N_u} \\ -\Phi_{c,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} \\ \Phi_{c,i} & \mathbf{0}_{N_2 \times N_u} \end{bmatrix}, \tag{5.28}$$

$$\Phi_{c,i} = \begin{bmatrix} \phi_{c,i}(0) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \phi_{c,i}(1) & \phi_{c,i}(0) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \phi_{c,i}(N_2 - 1) & \dots & \dots & \phi_{c,i}(N_2 - N_u + 1) & \sum_{j=0}^{N_2 - N_u} \phi_{c,i}(j) \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

$$\phi_{c,i}(j) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{A}_i^j \mathbf{b}_{c,i}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0^{N_2 - 1}, \tag{5.30}$$

tandis que les autres notations sont identiques à celles utilisées au paragraphe 4.4.3.1. Les vecteurs $\mathbf{g}'_1(k)$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^s$ incluent dans leur formulations les séquences optimales futures de sorties qui correspondent aux zones $j \in \mathbb{H}_i$:

$$\tilde{\mathbf{y}}_j^*(k) = \begin{bmatrix} y_j(k) & y_j(k+1) & \dots & y_j(k+N_2) \end{bmatrix}^T. \tag{5.31}$$

Ces valeurs requises par le régulateur local MPC_i sont difficiles à obtenir dans un environnement distribué, car leur obtention peut alourdir significativement la charge de calcul. Une stratégie simple et efficace est de remplacer les séquences (5.31) par les sorties prédites en utilisant la séquence optimale de commande calculée à l'instant $k-1$:

$$\hat{\mathbf{y}}_j(k-1) = \begin{bmatrix} \hat{y}_j(k|k-1) & \hat{y}_j(k+1|k-1) & \dots & \hat{y}_j(k+N_2|k-1) \end{bmatrix}^T. \tag{5.32}$$

La mise en place de cette stratégie a peu de répercussions sur l'algorithme 5. Ainsi, une fois les itérations de Benders arrêtées à l'instant k , les agents locaux calculent les séquences locales de sorties et les envoient vers tous les contrôleurs voisins. Elles seront utilisées dans les prédictions de l'instant $k+1$.

Étude numérique de la vitesse de convergence Sachant que la manière de prendre en compte des couplages par les sorties ne modifie pas fondamentalement l'algorithme 5, nous allons maintenant étudier les performances de la procédure de distribution décrite

par l'algorithme découplé. Pour ce faire, nous prenons la structure du modèle de prédiction local (5.3) avec les valeurs numériques suivantes :

$$\mathbf{A}_{0,i} = \begin{bmatrix} 0,9921 & 0 \\ 0 & 0,9931 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_{c,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1376 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0,2595 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.33)$$

et la période d'échantillonnage $T_s = 10\text{min}$. Les valeurs numériques (5.33) correspondent à une pièce de 12m^2 . Notons que du point de vue de l'optimalité par rapport à la formulation du problème à un instant donné k , l'utilisation de modèles découplés et de modèles couplés par les sorties est similaire. C'est pour cela que nous considérons un modèle de prédiction découplé.

L'efficacité de l'algorithme distribué sera mesurée en fonction du temps de calcul dans un environnement distribué (t_{distr}) et du nombre d'itérations requises. Cette étude est divisée en trois scénarios, dans lesquels on fait varier le nombre de sous-systèmes, les dimensions des sous-problèmes et la valeur de l'erreur qui définit la condition d'arrêt. Les paramètres de réglage spécifiques à la commande prédictive utilisés dans les expériences sont $N_1 = 1$ et $N_2 = 30$, ce qui nous amène à un horizon de prédiction de 5h. Pour chaque valeur du paramètre étudié, nous avons réalisé cinq essais différents, avec des états initiaux aléatoires.

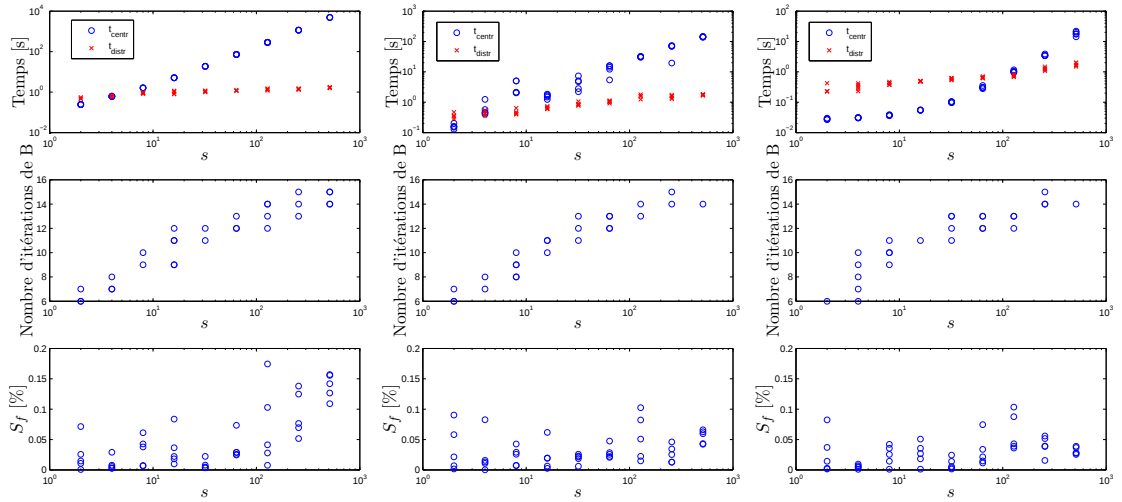


FIGURE 5.3 – Influence du nombre de zones, s , sur les performances de l'algorithme 5, en utilisant le solveur Simplexe de MATLAB (à gauche), la méthode du point intérieur (au milieu) et le solveur CPLEX de IBM (à droite)

Scénario 1 : Dans ce premier scénario, on fixe $N_u = N_o^i = 15$ et $\epsilon = 10^{-3}$ et on fait varier le nombre de zones $s \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^9\}$. La figure 5.3 montre les performances de l'algorithme distribué, en utilisant trois solveurs différents : deux solveurs fournis par la boîte d'outils *Optimization* de MATLAB (Simplexe et une méthode du point intérieur) et CPLEX, développé par IBM. Intuitivement, le nombre d'itérations ainsi que le degré

de sous-optimalité ne sont pas influencés par le type de solveur. Cependant, des écart significatifs en termes de temps de calcul peuvent être observés, illustrant les performances supérieures du CPLEX. On constate l'augmentation exponentielle du temps de calcul centralisé pour les deux solveurs de MATLAB. Pour CPLEX, cette croissance est significativement diminuée si le nombre de sous-systèmes est faible (inférieur à 16), pourtant elle reprend l'allure exponentielle dès que les dimensions des problèmes deviennent significatives. De même, le temps de calcul distribué présente une croissance très faible avec s .

Malgré la très bonne extensibilité de l'algorithme, t_{distr} devient inférieur à t_{centr} à partir d'un certain nombre de sous-systèmes (4 pour les solveurs de MATLAB et 128 pour CPLEX, respectivement). Malgré la supériorité du CPLEX, pour les résultats présentés dans les scénarios suivants nous utiliserons l'algorithme de Simplexe comme solveur principal, car les correcteurs destinés à la régulation de la température sont généralement implantés sur des puces à faible puissance de calcul, sur lesquels il serait difficile de mettre en place un algorithme très élaboré comme CPLEX. Concernant le nombre d'itérations, on observe une dépendance logarithmique en s , tandis que le degré de sous-optimalité est lié à la valeur de ϵ .

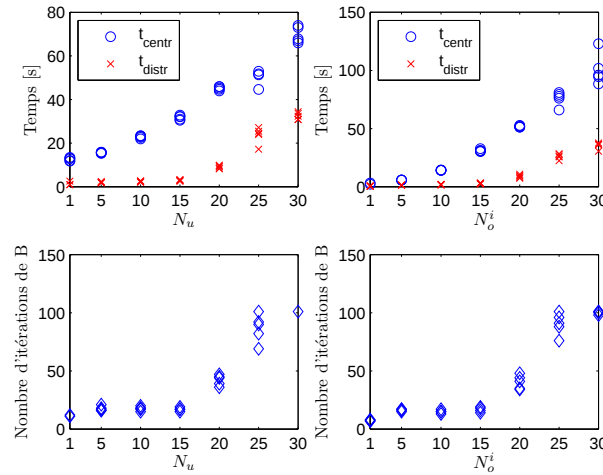


FIGURE 5.4 – Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , (à gauche) et du nombre d'instantants d'occupation par zone, N_o^i , (à droite)

Scénario 2 : Nous nous sommes intéressés ici à étudier l'influence de la dimension (nombre de lignes et de colonnes de la matrice de contraintes) des sous-problèmes :

$$d_i = (N_u + 2N_o^i) \times (2N_u + 4N_o^i), \quad (5.34)$$

sur le temps de calcul et sur le nombre d'itérations. Dans (5.34), N_o^i représente le nombre d'instantants d'occupation inclus dans l'horizon de prédiction de la zone i . Notons que par rapport à la formulation (5.7), nous n'avons pas pris en compte ici les variables auxiliaires associées aux instants d'inoccupation. La figure 5.4 montre l'influence de N_u et N_o^i sur

la vitesse de convergence. Les valeurs des autres paramètres sont $s = 50$ et $\epsilon = 10^{-3}$. Les résultats montrent un impact plus important de N_o^i sur les indices de performance considérés, ce qui s'explique par un poids plus grand sur la dimension du problème. On peut également observer le caractère exponentiel de la dépendance de t_{centr} vis-à-vis des deux paramètres (N_u et N_o^i).

Scénario 3 : Dans ce troisième scénario nous illustrons les performances de l'algorithme 5 en fonction de la valeur de ϵ . Les résultats présentés figure 5.5 ont été obtenus avec $s = 50$, $N_u = 10$ et $N_o^i = 15$. On a omis de représenter les facteurs de sous-optimalités, car ils sont strictement liés à la valeur de ϵ . On observe l'influence légère de ce paramètre sur le temps de calcul dans le cas distribué. De plus, une dépendance logarithmique du nombre d'itérations sur ϵ peut être constatée, ce qui montre la vitesse de convergence exponentielle de la méthode.

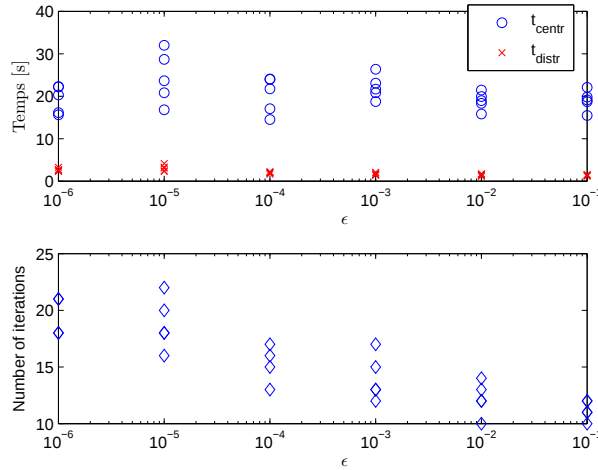


FIGURE 5.5 – Influence de l'erreur, ϵ , qui définit la condition d'arrêt

Les trois scénarios précédents ont montré les performances en termes de vitesse de convergence et de l'optimalité de l'algorithme distribué. Le temps de calcul nécessaire à la structure distribuée afin de résoudre le PL (5.11) reste inférieur au temps de calcul centralisé dès que l'on dépasse un certain nombre de sous-systèmes. La dimension des sous-problèmes influence également la vitesse de convergence (le nombre d'itérations). En considérant N_2 fixe, les paramètres qui jouent sur le nombre de contraintes et d'inconnues sont N_o^i et N_u . Sachant que N_o^i n'est pas une paramètre de réglage, la diminution de N_u peut réduire sensiblement le nombre d'itérations et nous conseillons un choix $N_u < N_2/2$. Pourtant, il ne faut pas oublier la perte d'optimalité par rapport au cas $N_u = N_2$, qui devient encore plus importante quand la tarification de l'énergie est variable dans le temps.

5.3.3.2 Couplage par les entrées

Si l'on considère maintenant les s modèles couplés par les entrées, alors la dynamique de chaque sous-système est décrite par :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{b}_c u_c(k) + \mathbf{b}_i u_i(k) + \sum_{j \in \mathbb{H}_i} \mathbf{e}_{j,i} u_j(k) \\ y_i(k) = \mathbf{c}_i^T \mathbf{x}_i(k). \end{cases} \quad (5.35)$$

En recourant à une technique similaire à celle présentée aux paragraphes précédents, le problème d'optimisation global peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{u}_c''(k), \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k)} \quad & \lambda_c''^T(k) \mathbf{u}_c''(k) + \lambda_1''^T(k) \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \lambda_s''^T(k) \mathbf{u}_s''(k) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{K}_0 \mathbf{u}_c''(k) = \bar{\mathbf{u}}_c(k) \\ & \mathbf{K}_1 \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_1 \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{G}'_{s,1} \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}_1''(k) \\ & \vdots \\ & \mathbf{K}_s \mathbf{u}_c''(k) + \mathbf{G}'_{1,s} \mathbf{u}_1''(k) + \dots + \mathbf{G}'_s \mathbf{u}_s''(k) = \mathbf{g}_s''(k) \\ & \mathbf{u}_c''(k) \geq \mathbf{0}_{2N_u \times 1}, \quad \mathbf{u}_1''(k), \dots, \mathbf{u}_s''(k) \geq \mathbf{0}_{(2N_u + 4N_2) \times 1}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

et la structure bloc-angulaire duale de la matrice de contraintes se perd (voir la figure 5.6 pour un exemple de couplage de 6 zones). Les sous-problèmes deviennent ainsi dépendants les uns des autres, ce qui ne permet plus la résolution du problème relaxé par blocs. Or, l'efficacité en termes de temps de calcul de la méthode de décomposition s'appuie exactement sur cette parallélisation (pas 4 de l'algorithme 5).

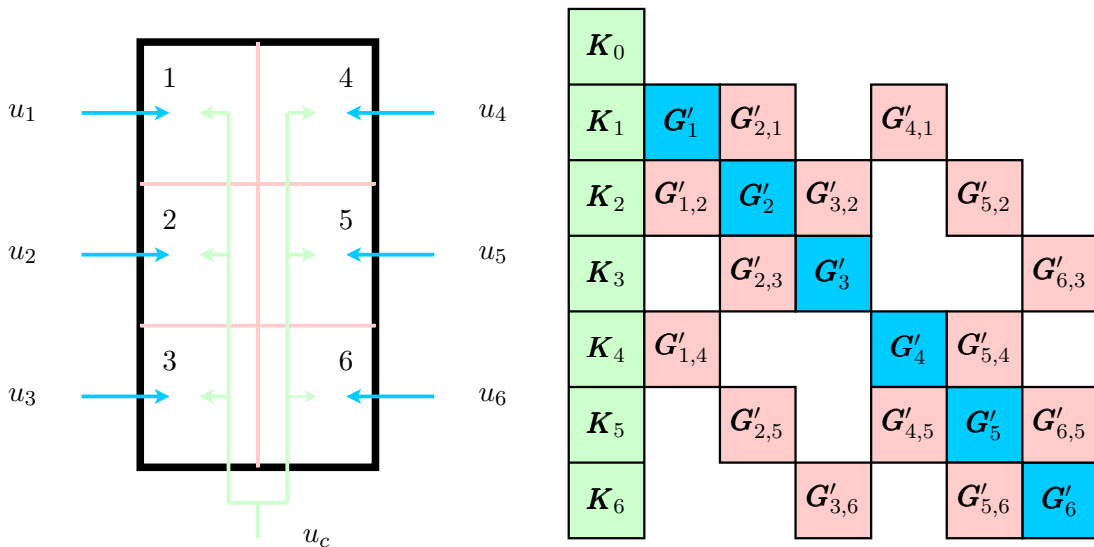


FIGURE 5.6 – Exemple de bâtiment multizone multisource (à gauche) et structure de la matrice de contraintes du PL associé (à droite)

Algorithme 6 Procédure itérative de la commande prédictive distribuée basée sur la décomposition de Benders, avec la prise en compte des couplages par les entrées

```

1 : Initialiser  $l_B = 1, l_i = 1$ 
2 : Résoudre le PMR (5.19) par  $\text{MPC}_c$ , en obtenant  $\mathbf{u}_c^{(l_B)}$  et  $z_i^{(l_B)}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s$ 
3 : Envoyer  $\mathbf{u}_c^{(l_B)}$  de  $\text{MPC}_c$  vers tous les contrôleurs locaux  $\text{MPC}_i$ 
4 : Résoudre (en parallèle) tous les sous-problèmes par les  $\text{MPC}_i$ , en obtenant les
   solutions primales  $\mathbf{u}_i^{(l_B, l_i)}$  ainsi que les solutions duales ( $\mathbf{p}_i^{(l_B)}$  ou  $\mathbf{r}_i^{(l_B)}$ )
5 : Si ( $l_i \leq l_{max}$  ET  $\|\mathbf{u}_i^{(l_B, l_i)} - \mathbf{u}_i^{(l_B, l_i-1)}\|_\infty < \epsilon_i, \forall i \in \mathbb{N}_1^s$ ) Alors
    | 5.1 : Envoyer les solutions duales ( $\mathbf{p}_i^{(l_B, l_i)}$  ou  $\mathbf{r}_i^{(l_B, l_i)}$ ) de tous les  $\text{MPC}_i$  vers  $\text{MPC}_c$ 
    Sinon
    | 5.2 : Envoyer  $\mathbf{u}_i^{(l_B, l_i)}$  de  $\text{MPC}_i$  vers tous leurs voisins  $j \in \mathbb{H}_i$ 
    | 5.3 : Mettre à jour  $l_i = l_i + 1$  et Goto pas 4
    Fin Si
6 : Calculer les bornes courantes, supérieure (5.25) et inférieure (5.19a), par  $\text{MPC}_c$ 
7 : Si ( $l_B \leq l_{Bmax}$  ET  $\bar{J}^{(l_B)} - \underline{J}^{(l_B)} \leq \epsilon$ ) Alors
    | 7.1 :  $\mathbf{u}_c^{**} = \mathbf{u}_c^{(l_B)}, \mathbf{u}_i^{**} = \mathbf{u}_i^{(l_B)}, \forall i \in \mathbb{N}_1^s$ , Stop
    Sinon
    | 7.2 : Mettre à jour le PMR en ajoutant les nouvelles contraintes (par  $\text{MPC}_c$ ),
       $l_B = l_B + 1$  et Goto pas 2
    Fin Si

```

Pour prendre en compte les couplages par les entrées, nous proposons un compromis entre le temps de calcul distribué et l'optimalité de la solution résultante. Sachant que par leur définition, les matrices bloc-diagonales $\mathbf{G}'_i$ sont dominantes, on peut envisager d'utiliser les séquences futures d'entrées calculées à une itération précédente (comme au paragraphe 4.4.3.2). Cependant, il faut être conscient de la perte d'optimalité engendrée par le fait que les solutions duales des sous-problèmes ainsi calculées ne sont pas forcément des sommets ou des rayons extrémaux du domaine admissible local. La procédure, construite initialement pour des modèles découplés, se modifie, en ajoutant un mécanisme d'itérations imbriquées, ce que présente l'algorithme 6.

La structure de contrôle résultante est schématisée figure 5.7, dans laquelle on illustre les principales composantes ainsi que les interactions et les informations échangées entre les agents, pour le cas du bâtiment trois pièces.

Étude numérique de l'efficacité de l'algorithme distribué Pour tester l'efficacité du nouvel algorithme sur un exemple, considérons le modèle (5.35) avec les valeurs

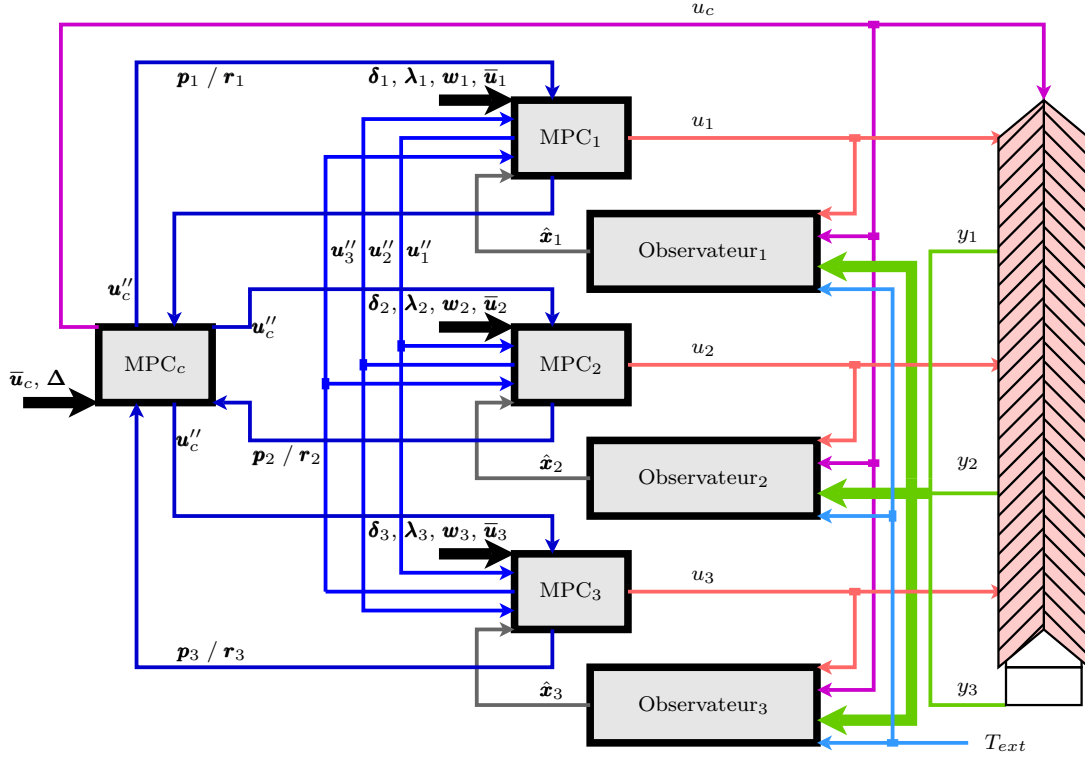


FIGURE 5.7 – Schéma de contrôle distribué basé sur la méthode de décomposition de Benders

numériques suivantes :

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0,992 & 0 & 0 \\ 0 & 0,993 & 0 \\ 0 & 0 & 0,998 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_{c,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,137 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} 0,259 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_{j,i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,02 \cdot \xi \end{bmatrix}, \forall j \in \mathbb{H}_i. \quad (5.37)$$

La configuration du bâtiment est représentée par un ensemble de s zones disposées en série, i.e. $\mathbb{H}_1 = \{2\}$, $\mathbb{H}_s = \{s-1\}$ et $\mathbb{H}_i = \{i-1, i+1\}$, $\forall i \in \mathbb{N}_2^{s-1}$. Les valeurs numériques (5.37) correspondent à celles de (5.33) dont nous avons ajouté l'influence du couplage. Nous utiliserons la variable ξ pour étudier l'influence du gain statique de couplage sur les performances de l'algorithme.

L'étude de l'efficacité de l'algorithme 6 se déroule d'une manière similaire à celle exposée au paragraphe 5.3.3.1. De plus, nous présentons également les degrés de sous-optimalités des solutions distribuées ainsi que le nombre moyen d'itérations imbriquées requises. Pour obtenir les résultats de simulation exposés ci-dessous, nous avons utilisé les valeurs suivantes pour les paramètres de réglage : $N_2 = 30$, $N_o^i = 15$ et $\epsilon = \epsilon' = 10^{-3}$, $T_s = 10\text{min}$.

Scénario 1 : On considère $N_u = 15$ et $\xi = 1$ fixés et on fait varier le nombre de sous-systèmes $s \in \{2^1, 2^2, \dots, 2^8\}$. Comme nous l'avons déjà mentionné, la procédure de résolution du problème relaxé par l'algorithme de communication ne converge pas forcément vers la solution optimale globale. Les solutions duales ainsi calculées peuvent être

différentes des sommets et / ou des rayons extrémaux des sous-problèmes. Par conséquent, l'algorithme 6 ne garantit plus la convergence vers la solution optimale. Ce phénomène est observé figure 5.8, où certains degrés de sous-optimalité obtenus sont supérieurs à l'erreur qui décrit la condition d'arrêt des itérations. Pourtant, S_f reste à des valeurs faibles.

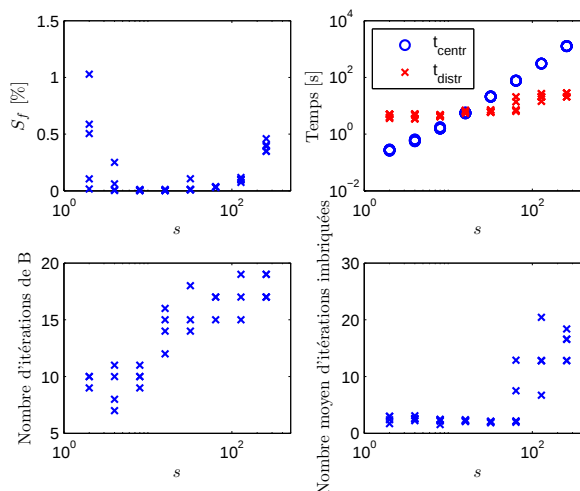


FIGURE 5.8 – Influence du nombre de sous-systèmes sur les performances de l'algorithme 6

Concernant la charge de calcul, en utilisant le solveur centralisé le temps de calcul dépasse 1200s (soit le double de la période d'échantillonnage considérée) pour un ensemble de 256 zones. Notons également que l'utilisation de solveurs plus performants comme CPLEX diminue considérablement le temps de calcul. L'extensibilité de l'algorithme 5 se conserve également pour sa version à itérations imbriquées, ainsi que la croissance logarithmique du nombre d'itérations de Benders. Pour un grand nombre de sous-systèmes, le nombre d'itérations imbriquées augmente. Ceci engendre une hausse légère du temps de calcul distribué.

Scénario 2 : Ce scénario étudie l'effet du paramètre N_u sur les performances de l'algorithme. Pour ce faire nous fixons $s = 40$ et $\xi = 1$. La figure 5.9 montre que l'écart entre le temps de calcul centralisé et le temps de calcul de l'algorithme distribué augmente avec N_u . Autrement dit, l'efficacité de la procédure distribuée s'améliore avec l'augmentation de la dimension des sous-problèmes. Ce phénomène est intuitif car les sous-problèmes sont résolus en parallèle. On observe également une croissance légère du degré de sous-optimalité.

Scénario 3 : Ce troisième scénario nous montre les limitations, du point de vue temps de calcul, de l'algorithme 6. Un couplage fort entre les sous-systèmes provoque l'augmentation du nombre des deux types d'itérations de l'algorithme. Cela a des répercussions sur la charge de calcul. On peut voir figure 5.10 l'augmentation du temps de calcul distribué avec ξ . Cependant, les performances du solveur centralisé ne sont pas influencées par ce paramètre, car les dimensions du problème global restent inchangées. Malgré cette

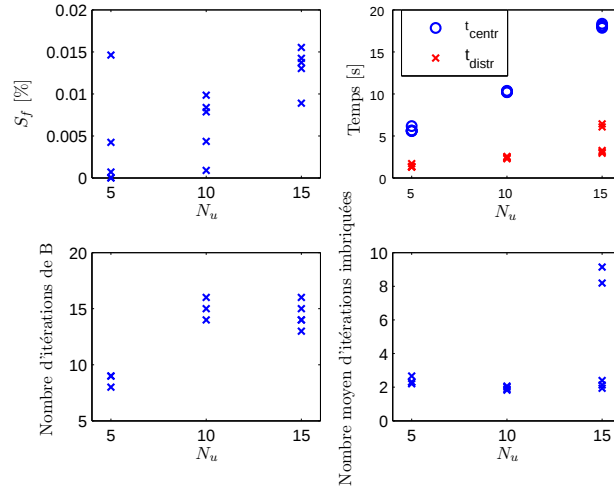
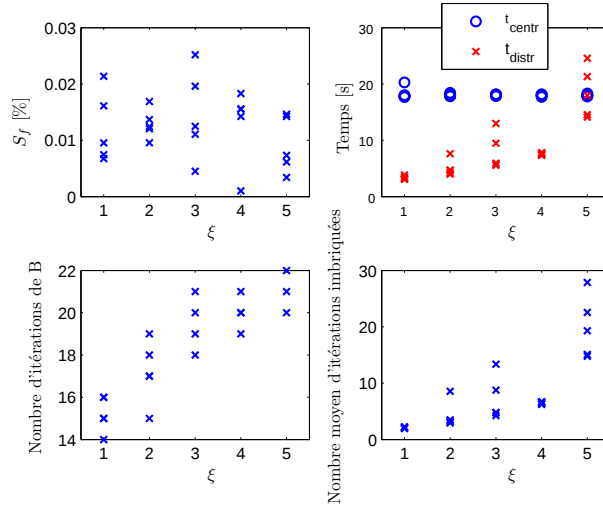


FIGURE 5.9 – Influence de l'horizon de commande sur les performances de l'algorithme 6

détérioration du temps de calcul distribué, la solution proposée par l'algorithme 6 reste toujours très proche de la solution centralisée et faible en temps de calcul.

FIGURE 5.10 – Influence du gain statique de couplage (ξ) sur les performances de l'algorithme 6

5.3.4 Résultats de simulation

Par rapport aux paragraphes précédents où nous avons montré le calcul des algorithmes distribués basés sur la méthode de décomposition de Benders, cette partie sera dédiée à l'étude des performances économiques de l'algorithme distribué. La structure de contrôle développée dans ce chapitre sera utilisée pour la régulation de la température dans un bâtiment virtuel divisé en trois zones. La configuration du bâtiment est illustrée figure 5.11. Toutes les zones (chacune d'une surface égale à 12m^2) sont chauffées par des convecteurs électriques identiques, de puissances maximales $\bar{u}_i = 1200\text{W}$. Ils constituent les sources

locales de chauffage. La source centrale est représentée par un système de chauffage par le plancher. Ce dernier est composé d'une chaudière à gaz, d'une pompe à vitesse constante et d'un réseau de tuyaux. Une importante partie des systèmes de chauffage par le sol ne présente pas de vannes locales, pour chaque zone, ainsi l'énergie calorifique est répartie simultanément dans l'ensemble des zones. C'est ce type de système que nous considérons dans la suite du paragraphe.

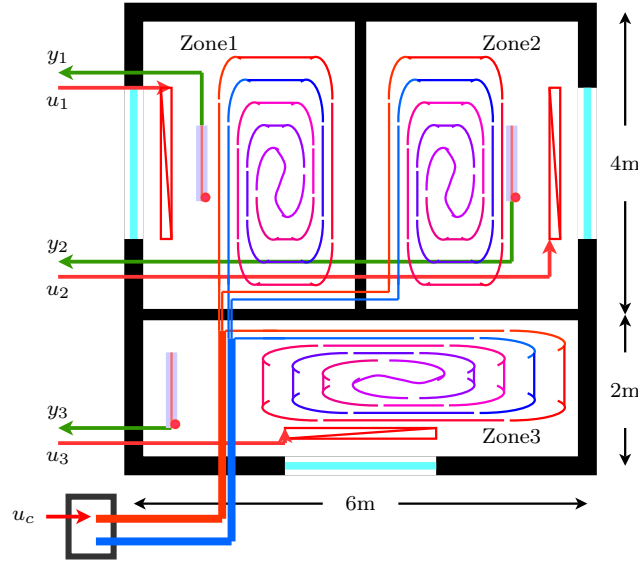


FIGURE 5.11 – Bâtiment multizone et multisource

Les grandeurs locales de commande, u_i , sont représentées par les puissances électriques et la commande centrale, u_c , exprime l'écart entre la température de l'eau qui sort T_{wout} et la température de l'eau qui entre T_{win} dans la chaudière. On suppose que la chaudière est contrôlée par un régulateur idéal qui reçoit $u_c(k) = \Delta T(k) = T_{wout} - T_{win}$ comme consigne. Les simulations ont été menées sous l'hypothèse que cette boucle interne de commande est stationnaire et transparente. De plus, nous négligeons également le retard induit par le transport de l'eau dans la tuyauterie (étant nettement inférieur à la période d'échantillonnage $T_s = 10\text{min}$), ainsi que les pertes de chaleur du système hydraulique. La limite supérieure de la commande centrale est $\bar{u}_c = 4^\circ\text{C}$. Notons qu'il est tout à fait possible d'inclure d'autres contraintes (sur la température de l'eau dans le circuit, sur l'incrément de la commande, etc.), qui ne perturbent pas le fonctionnement de l'algorithme distribué.

Les coûts locaux $\lambda_i(k+j)$ associés aux commandes locales sont calculés selon (4.71), tandis que le coût associé à la commande centrale s'exprime par :

$$\lambda_c(k+j) = c_g(k+j)T_s C_{pw} \rho_w q_w / (36 \cdot 10^5 \eta), \quad (5.38)$$

où c_g représente le tarif (en €/kWh) du gaz, C_{pw} , ρ_w et q_w sont respectivement la capacité thermique massique, la densité et le débit de l'eau dans le circuit hydraulique. Le paramètre η correspond au rendement de la chaudière. Les simulations ont été réalisées en supposant

que le tarif de l'électricité est $c_e = 0,0742 \text{ €/kWh}$ et celui du gaz $c_g = 0,063 \text{ €/kWh}$.

Le modèle considéré dans les résultats présentés dans ce paragraphe a été obtenu de manière analytique, par le biais des équations thermo-dynamiques (intégrant les phénomènes de transfert convectif et radiatif), d'une manière similaire à [102]. Nous ne détaillons pas le modèle, à cause de ses dimensions. Mentionnons que pour le bâtiment considéré, le modèle global atteint 151 états. Cette dimension relativement importante est principalement dû à la discrétisation spatiale des parois, en plusieurs couches longitudinales, pour simuler avec plus de précision le transfert thermique à travers les matériaux qui les composent. Le nombre de couches dépend des propriétés thermiques des matériaux ainsi que de leur épaisseur. Par exemple, une paroi externe est divisée en neuf couches. Après la discrétisation temporelle du modèle, nous avons réduit sa dimension par le biais de la technique de réalisation équilibrée, en arrivant à 50 états.

Le modèle de prédiction comporte deux entrées de plus que celui décrit par les équations (5.35). Elles représentent la température extérieure et la température du sol (dessus le plancher bas). Dans l'équation de prédiction, la température extérieure est considérée constante pendant toute la période de prédiction et sa valeur est égale à la température courante mesurée. La température du sol est considérée constante et égale à 10°C .

	Zone 1	Zone 2	Zone 3
$\underline{w}_i \text{ [}^\circ\text{C]}$	19,5	20,5	21,5
$\overline{w}_i \text{ [}^\circ\text{C]}$	20,5	21,5	22,5
PO 1	08h00 - 17h00	10h00 - 19h00	14h00 - 18h00
PO 2	08h00 - 12h00	13h00 - 17h00	18h00 - 22h00
PO 3	08h00 - 17h00	08h00 - 17h00	08h00 - 17h00

TABLE 5.1 – Profils d'occupation pour le cas multizone et multisource

Pour étudier les performances économiques de l'approche proposée dans ce chapitre on considère trois profils d'occupation, qui sont synthétisés dans le tableau 5.1. Ces profils correspondent à une occupation semi-synchronisée (PO 1), non synchronisée (PO 2) et synchronisée (PO 3). Les bandes de confort de chacune des pièces sont différentes.

Le tableau 5.2 résume les coûts journaliers liés au poste de chauffage du bâtiment trois pièces, pour les scénarios d'occupation proposés. De plus on ajoute un autre paramètre à cette étude, la température initiale (au début de la journée) du bâtiment, T_0 . Elle représente la température de l'air dans les pièces, mais également la température initiale des parois. Les deux valeurs choisies correspondent à une période d'inoccupation longue (10°C) et à une occupation journalière intermittente (16°C), respectivement.

Nous comparons les coûts journaliers obtenus par l'utilisation de la commande prédictive (centralisée et distribuée) à ceux obtenus par une régulation de type PI avec anticipation. Pour que la commande PI ait des performances similaires, en termes de confort, aux contrôleurs prédictifs, les consignes locales des PIs, employés pour la commande des convecteurs, sont anticipées. Pour que cette comparaison soit encore plus réaliste, cette anticipation est considérée différemment, selon la température initiale : 2h et respective-

T_0 [°C]	Loi de commande	Spécificité	Coût/jour [€]		
			PO 1	PO 2	PO 3
10	PI	$K = 0,5, T_i = 5400s$	1,5855	1,6186	1,6066
	DiMPCB	$l_{Bmax} = 1$	1,6559	1,6061	1,7157
		$l_{Bmax} = 2$	1,3038	1,3190	1,4417
		$l_{Bmax} = 3$	1,1929	1,2362	1,3366
		$l_{Bmax} = 100, \epsilon = 10^{-3}$	1,1250	1,1992	1,2340
	CMPC	-	1,1188	1,2095	1,2590
16	PI	$K = 0,5, T_i = 5400s$	1,0121	1,0558	0,9973
	DiMPCB	$l_{Bmax} = 1$	1,0756	1,0804	1,0972
		$l_{Bmax} = 2$	0,7586	0,8582	0,7343
		$l_{Bmax} = 3$	0,7460	0,8558	0,7363
		$l_{Bmax} = 100, \epsilon = 10^{-3}$	0,7450	0,8569	0,7325
	CMPC	-	0,7457	0,8640	0,7281

TABLE 5.2 – Comparaison en termes de coûts de chauffage pour le cas multizone et multisource

ment 4h. Pour le cas de la régulation PI, la chaudière est contrôlée par une commande en boucle ouverte, afin de monter la température des pièces jusqu'à 18°C au début de l'occupation de la première zone (c'est ce type de commande qui est couramment utilisée pour la régulation du poste de chauffage à SUPELEC, sur le Campus de Rennes), sans compter l'apport des convecteurs locaux.

Le tableau 5.2 montre également les coûts journaliers obtenus en utilisant peu d'itérations de Benders. La moyenne des différences relatives obtenues entre la solution distribuée issue de 3 itérations et la solution obtenue en itérant jusqu'à l'obtention d'une erreur de $\epsilon = 10^{-3}$ ne dépasse pas 3 %. Ceci montre que l'utilisation d'un nombre réduit d'itérations de Benders ne dégrade pas significativement les performances économiques de la commande distribuée.

D'après les résultats obtenus, les structures prédictives permettent des économies de 18 à 29 % par rapport à la régulation PI. Sachant que les gains en termes de consommation présentés lors des chapitres précédents ont été sensiblement inférieurs, on déduit alors que l'utilisation d'une commande optimale, comme MPC, est beaucoup plus adaptée à la gestion des sources multiples de chauffage.

De manière générale, les économies apportées par la commande prédictive sont d'autant plus importantes que la source centrale soit active. Ceci se passe quand l'horizon de prédiction inclut des périodes d'occupation de plusieurs pièces. Les résultats légèrement meilleurs, dans certains scénarios, de la solution distribuée par rapport à celle centralisée peuvent paraître surprenants. Ils s'expliquent par le fait que la solution optimale calculée par CMPC n'est pas forcément la meilleure en présence des perturbations et des erreurs de modélisation.

La figure 5.12 illustre le comportement de la commande prédictive distribuée (DiMPCB) sur une journée, en utilisant le profil d'occupation PO 1, $T_0 = 16^\circ\text{C}$ et une tarification constante dans le temps. La première sous-figure montre l'évolution temporelle des

températures mesurées dans les trois zones, ainsi que les bandes de confort associées. La deuxième sous-figure représente les commandes locales, tandis que la troisième illustre la commande centrale. On peut facilement observer l'effet anticipatif du MPC au début et à la fin des périodes d'occupation.

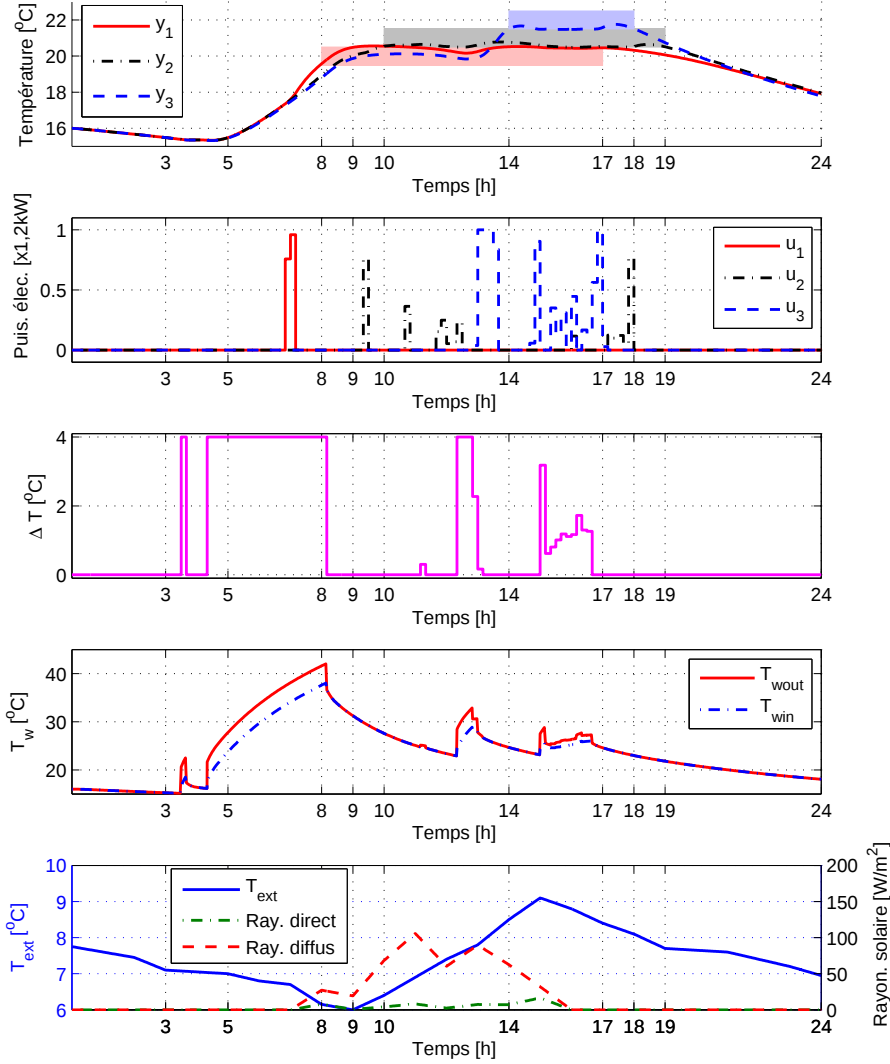


FIGURE 5.12 – DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 1, $T_0 = 16^\circ\text{C}$)

Par rapport aux résultats des chapitres précédents, ici l'arrêt du chauffage avant la fin d'occupation est beaucoup plus visible, étant donné l'inertie du chauffage par le plancher. Dans ce scénario, la source centrale est préférée pendant l'étape de préchauffage pour mieux exploiter l'inertie thermique de ce type de chauffage, mais également lorsque toutes les pièces sont occupées. Les sources locales sont utilisées comme sources complémentaires

à cause du prix élevé de l'électricité. Elles sont employées pour le rejet des perturbations négatives et pour satisfaire les niveaux de confort différents de chaque zone. On observe également que la source locale de la zone 1 (pour laquelle on a défini le plus bas niveau de confort) est utilisée uniquement pendant la relance. Ensuite, son niveau de confort n'est plus assuré que par la source centrale. La quatrième sous-figure montre l'évolution de la température de l'eau à l'entrée et à la sortie de la chaudière. Notons qu'une contrainte qui définit une borne supérieure de la température de l'eau peut également être incluse dans la formulation du PL, pour prévenir l'usure excessive des équipements. La dernière sous-figure illustre les conditions météorologiques simulées.

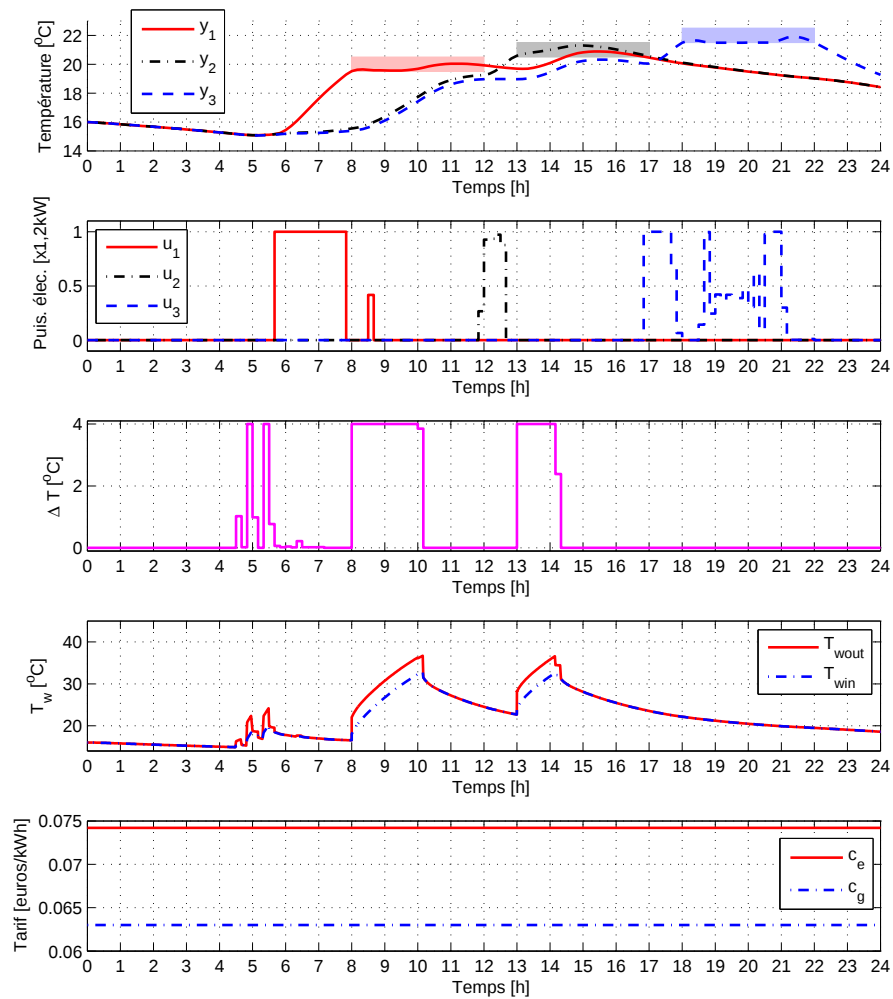


FIGURE 5.13 – DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 2, $T_0 = 16^\circ\text{C}$), tarification fixe

Encore plus intéressant est de voir comment la commande s'adapte aux tarifications variables des énergies de chauffe. Dans ce sens, nous avons utilisé deux scénarios de tarifi-

cation : une tarification fixe (figure 5.13) et une tarification variable (figure 5.14). Les deux simulations ont été menées pour le profil d'occupation PO 2, $T_0 = 16^\circ\text{C}$, tandis que les conditions météorologiques sont identiques à celles illustrées par la dernière sous-figures de la figure 5.12.

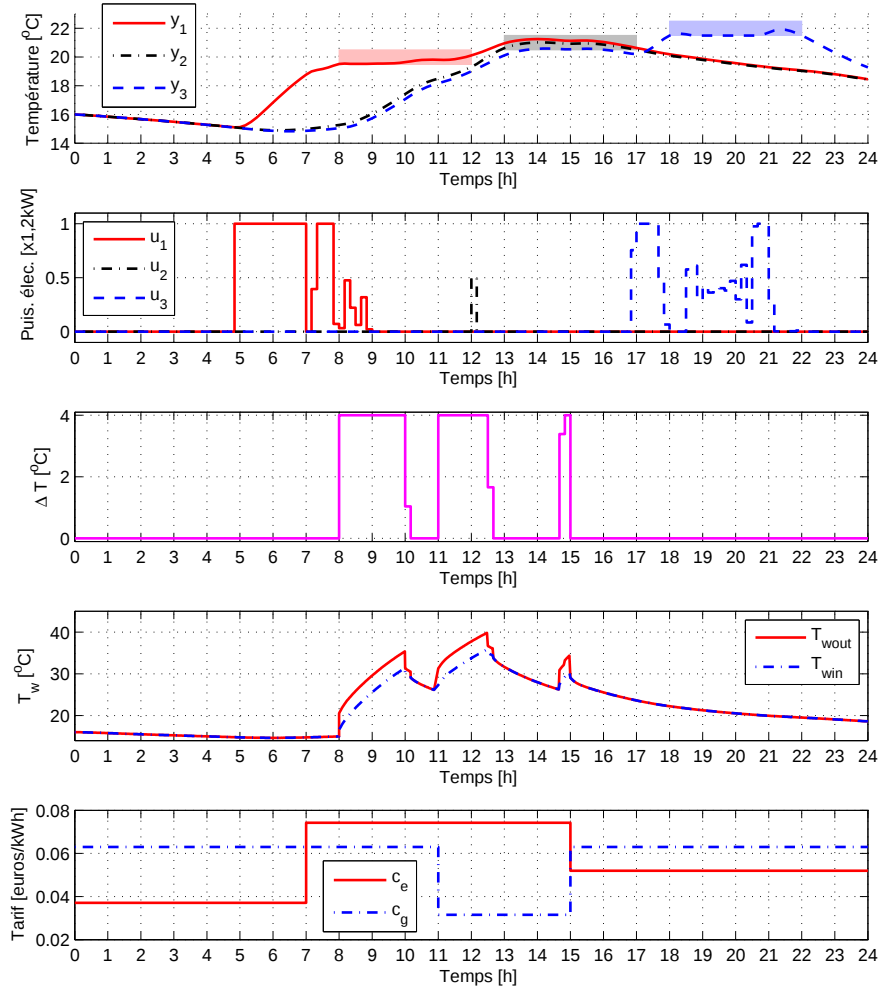


FIGURE 5.14 – DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 2, $T_0 = 16^\circ\text{C}$), tarification variable

Pour le cas d'une tarification fixe, on observe que la source centrale est utilisée uniquement pendant des périodes pour lesquelles au moins deux zones présentent des instants d'occupation inclus dans l'horizon courant de prédiction. Par exemple, à partir de 8h00, la zone 1 est occupée, mais on "voit" également le premier instant d'occupation de la zone 2 (l'horizon de prédiction est de cinq heures). Un phénomène similaire se passe à partir de 13h00. Une exception est l'utilisation de la source centrale avant la période de préchauffage de la zone 1. En chauffant l'eau qui circule par le sol, on diminue les déperditions par le

sol.

La figure 5.14 illustre les principaux signaux qui décrivent le comportement de la commande DiMPCB avec une tarification variable. Ainsi, de 00h00 à 07h00 l'électricité est moins chère que le gaz et par conséquent on ne voit plus l'utilisation de la source centrale avant le préchauffage de la zone 1. Dans le même temps, la période de relance est légèrement avancée, pour bénéficier encore plus du tarif inférieur de l'électricité. De 07h00 à 11h00, on utilise les mêmes tarifs que dans la figure 5.13 et on observe un comportement similaire à celui obtenu pour la tarification fixe. De 11h00 à 15h00, on considère le gaz environ 2,35 fois moins cher que l'électricité. Cette période inclut le préchauffage de la zone 2, ainsi au lieu d'utiliser la source locale (voir figure 5.13), on préfère la source centrale.

5.4 Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons proposé une méthodologie de distribution de la commande prédictive pour la régulation d'un système de chauffage un peu particulier, dans le cadre multizone. Le poste de chauffage considéré est composé de sources locales, indépendantes, et d'une source centrale.

Le problème d'optimisation du MPC est formulé pour minimiser les coûts liés au chauffage du bâtiment sous des contraintes qui modélisent les limites physiques du processus et le confort thermique des occupants. En employant la même technique de relaxation de contraintes que celle présentée au paragraphe 4.4.1, le problème de minimisation peut être mis sous la forme standard d'un PL.

En négligeant tout d'abord les couplages entre les sous-systèmes voisins, on obtient une structure particulière du PL. Cette spécificité du problème peut être exploitée par la méthode de décomposition de Benders afin d'obtenir une structure de commande distribuée, dont tous les correcteurs locaux sont coordonnés par l'agent qui commande également la source centrale. À partir du problème MPC initial, nous avons présenté la méthode de décomposition, pour formuler un algorithme itératif qui décrit les étapes à suivre par chaque agent. La prise en compte des interactions entre les sous-systèmes nécessite des échanges d'informations entre les régulateurs voisins. Deux types de couplage ont été considérés : le couplage par les sorties et le couplage par les entrées.

Les performances des algorithmes distribués ont été testées pour des exemples relativement simples de modèles de prédiction. Ainsi, nous avons analysé du point de vue numérique les impacts des principaux paramètres susceptibles d'avoir une influence sur la vitesse de convergence et le degré d'optimalité de la solution distribuée. Les aspects économiques ont été mis en évidence par l'application sur un bâtiment virtuel.

Ce chapitre complète l'ensemble des algorithmes de commande distribuée proposés tout au long du mémoire. Dans le chapitre suivant, nous soulignons les conclusions globales sur les travaux présentés et nous proposerons des perspectives, à la fois théoriques et applicatives.

Chapitre 6

Conclusion générale et perspectives

La vie est supportable uniquement parce que l'on ne va pas jusqu'au bout.

Magazine littéraire

EMIL M. CIORAN

L'ensemble de ce mémoire est dédié au développement de stratégies MPC distribuées, appliquées à la régulation thermique des bâtiments. Trois classes de problèmes ont été étudiées dans les chapitres précédents, à savoir, la formulation quadratique sans contraintes, la formulation linéaire avec contraintes locales et / ou contraintes globales et enfin la formulation linéaire avec contraintes locales pour la gestion de sources multiples d'énergie. Dans chaque chapitre, nous avons formalisé et analysé les problèmes posés, avant d'explicitier les solutions proposées, tout en soulignant les différentes contributions apportées. Chacune de nos stratégies a été testée en simulation.

6.1 Synthèse

La simplicité des solutions de contrôle a été toujours privilégiée, c'est pourquoi les contrôleurs adoptés par la communauté industrielle sont généralement basés sur des commandes de type « si condition alors action », combinées à des régulateurs simples, de type PID. Ces règles, établies par les constructeurs, sont usuellement heuristiques et obtenues d'une manière empirique. Les contrôleurs résultants donnent des solutions sous-optimales.

La commande optimale des équipements de CVC est une étape clé vers l'amélioration de l'efficacité énergétique des bâtiments. Dorénavant, le régulateur du poste de chauffage ne doit plus maintenir la température de la pièce autour de la valeur de consigne, mais il doit également exploiter de façon optimale, des informations concernant :

- l'occupation intermittente,
- la tarification variable de l'énergie,

- la prévision météo,
- la puissance disponible (variable).

De plus, le développement des réseaux sans fil ainsi que la disponibilité de plusieurs sources de chauffage dans un seul bâtiment nous a conduit vers des stratégies de contrôle distribuées.

La commande prédictive est une technique puissante, éprouvée industriellement, pour la régulation optimale des systèmes complexes. Les résultats présentés dans ce manuscrit, comme ceux fournis dans de nombreuses publications, ont souligné les avantages, en termes de consommation et / ou de confort, de la commande prédictive. Malgré ces améliorations en performance, l'industrie du bâtiment reste encore réticente quant à l'adoption du MPC [117]. Les principaux inconvénients de l'approche prédictive sont la nécessité d'un modèle du processus à contrôler et les coûts relativement élevés de mise en œuvre.

Des travaux de recherche importants ont été menés durant ces dernières années sur la modélisation des phénomènes thermiques présents dans le bâtiment. Les plus importants d'entre eux ont abouti à la mise en place de différents logiciels de simulation. Pourtant, les travaux présentés dans ce manuscrit ne sont pas focalisés sur la problématique de modélisation. Nous nous sommes efforcés de proposer des solutions aboutissant à un compromis entre l'optimalité de la commande, d'une part, et la simplicité et la flexibilité de l'implantation, d'autre part. Ainsi, la commande prédictive distribuée a été choisie comme principal outil de notre approche.

Le développement de la démarche exposée dans cette thèse est progressif. La figure 6.1 résume les principales problématiques abordées dans ce manuscrit et les solutions adoptées, ainsi que leur répartition par chapitre.

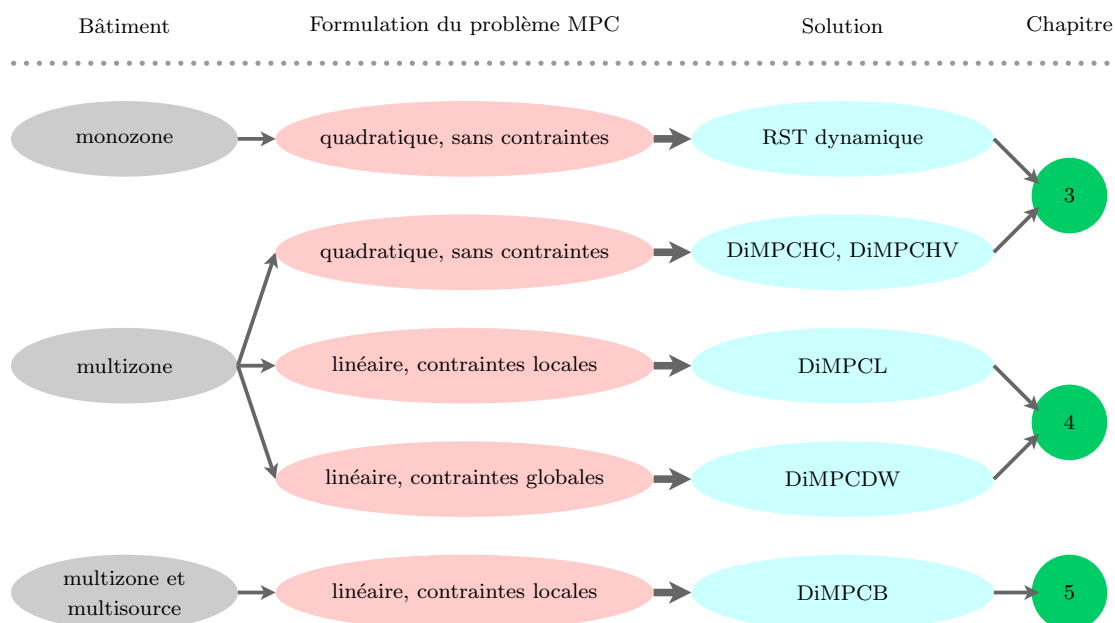


FIGURE 6.1 – Récapitulatif des problèmes et des solutions proposées dans le manuscrit

Nous avons considéré, tout d’abord, la formulation quadratique du critère MPC, pour laquelle nous synthétisons un régulateur de type RST. La prise en compte du profil d’occupation dans la fonction de coût à minimiser rend dynamiques les coefficients du contrôleur polynomial (pour le cas sans contraintes). Des améliorations de performance ont été obtenues par la mise en place d’une stratégie de variation de l’horizon de prédiction, en fonction du profil d’occupation. Malgré son impact relativement réduit pour le cas mono-zone, son importance devient significative en passant au cas multizone. La prise en compte du couplage entre les zones nous a conduit vers une structure MPC distribuée, qui préserve les avantages de la décentralisation de la commande tout en améliorant les performances par rapport à une structure complètement décentralisée. Les régulateurs locaux échangent des informations, concernant leur comportement futur, avec leurs voisins. En considérant les modèles locaux couplés par les sorties, ces informations représentent les séquences des sorties locales. Pour intégrer facilement la stratégie de variation de N_2 dans la structure distribuée, nous avons proposé une méthode simple pour compléter de manière décentralisée les composantes qui ne peuvent pas être calculées de façon distribuée.

Afin de mieux satisfaire les objectifs économiques de contrôle, nous sommes passés de la formulation quadratique à la formulation linéaire du critère MPC. Pour ce nouveau formalisme, l’apparition des contraintes est impérative. On distingue ainsi des contraintes locales, propres à chaque zone, et des contraintes globales qui lient des variables appartenant à plusieurs zones. Considérant, en premier lieu, le cas des contraintes locales, nous avons proposé un algorithme distribué ”communiquant” similaire au cas quadratique afin de comparer les performances des deux approches. Les résultats de simulation ont montré les améliorations sur les performances par rapport à la formulation quadratique. L’apparition des contraintes globales ou couplantes rend particulièrement difficile la résolution locale des sous-problèmes, qui risque de mener le problème vers une solution infaisable. Afin de contourner cet inconvénient, nous nous sommes orientés vers la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe. Cet outil mathématique fournit un algorithme itératif, pour lequel la solution calculée à chaque itération est globalement faisable. Cette procédure de distribution de la charge de calcul est particulièrement efficace pour les PL à structure bloc-angulaire, structure qui correspond à des modèles locaux indépendants. Pour prendre en compte les couplages entre les sous-systèmes, nous avons proposé deux stratégies, en fonction du type de couplage : par les sorties ou par les entrées.

La dernière partie du document est consacrée à la distribution de la commande MPC pour la régulation à partir de plusieurs sources de chauffage. Plus précisément, nous prenons le cas de sources locales par pièce, associées à une source de chauffage centrale, qui agit simultanément sur l’ensemble des pièces. En reformulant le problème d’optimisation globale sous la forme standard PL, la commande de la source centrale devient la variable couplante (empêchant la résolution locale des sous-problèmes). Pour surmonter la difficulté liée à la distribution de la charge de calcul du problème global, nous proposons l’utilisation de la méthode de décomposition de Benders. Ensuite, nous avons étendu l’algorithme issu de la méthode de décomposition pour la prise en compte des couplages.

Bien que les approches proposées dans ce mémoire aient été destinées à la régulation thermique des bâtiments, les algorithmes développés peuvent être appliqués pour d'autres processus de grande taille pour lesquels on connaît la trajectoire future de consigne. Des exemples de ce type de systèmes sont : les canaux d'irrigation, les processus industriels composés de plusieurs réacteurs, systèmes de stockage (mémoires, entrepôts), systèmes compartimentaux (utilisés fréquemment pour la modélisation des phénomènes de transport et d'accumulation). De plus, certains de ces systèmes peuvent avoir des périodes de temps pendant lesquelles ils n'ont pas à être fonctionnels. On rejoint ainsi l'idée de l'utilisation intermittente du système.

6.2 Originalité, contributions et faiblesses des approches proposées

Le développement des travaux de thèse a permis de mettre en évidence plusieurs éléments originaux, à la fois théoriques et applicatifs.

Une première contribution originale est liée à la formulation du critère dynamique sous forme quadratique du MPC. Il intègre le profil futur d'occupation. De plus, nous avons proposé une stratégie à horizon de prédiction variable. L'approche a été développée pour aboutir à un régulateur de type RST dynamique, pour lequel les coefficients polynomiaux sont variables dans le temps. Des restrictions sur la taille minimale des périodes d'occupation / inoccupation ont été proposées. Elles permettent de réduire considérablement la capacité de mémoire nécessaire pour le stockage des coefficients.

La formulation du MPC présentée initialement pour une zone a été étendue à un bâtiment multizone. Cette extension a permis de mettre en évidence d'autres aspects novateurs. Mentionnons, tout d'abord, la modélisation du couplage entre les sous-systèmes par les sorties. Ensuite, nous avons proposé une stratégie efficace pour compléter les vecteurs d'échange entre les contrôleurs voisins. En utilisant cette stratégie, nous avons également formulé une condition nécessaire et suffisante pour la convergence de l'algorithme distribué, même si l'algorithme proposé ne converge pas vers la solution optimale globale. Ceci est dû au fait que les fonctions de coût locales représentent uniquement les objectifs locaux. Cette classe d'algorithmes distribués converge généralement vers un point d'équilibre de Nash [132], qui ne coïncide pas forcément avec l'optimum global. Cependant, les résultats de simulations ont montré, que pour les systèmes considérés, ces points d'équilibre de Nash ne sont pas très loin de l'optimum. De plus, la vitesse de convergence est élevée, ce qui permet d'arrêter l'algorithme après un nombre faible d'itérations. Ceci est principalement dû aux bonnes propriétés des modèles thermiques (couplages relativement faibles et stables), mais également à la façon de prendre en compte les couplages.

Le passage vers la formulation linéaire du critère MPC augmente les performances de la commande, mais rend plus difficile les preuves théoriques de convergence. L'apparition des contraintes élimine la méthode analytique de calcul de la solution. Les autres

outils mathématiques, usuellement employés pour établir des conditions de convergence, reposent sur les méthodes de gradients. Pourtant, ces derniers sont inutiles dans l'analyse des programmes linéaires.

Nous nous sommes orientés vers des méthodes de décomposition linéaire. Les formulations des problèmes d'optimisation, conjuguées à la structure et / ou aux contraintes du système à contrôler a permis d'exploiter les avantages calculatoires des méthodes de décomposition de Dantzig-Wolfe et de Benders. L'efficacité des algorithmes issus de ces méthodes est moindre dès que l'on considère les couplages entre les sous-systèmes. Pour surmonter cet inconvénient, nous avons proposé deux stratégies différentes pour le cas du couplage par les sorties et pour le cas du couplage par les entrées. Dans le premier cas, l'algorithme distribué converge vers la solution optimale, en utilisant les séquences des sorties calculées à l'instant précédent. Malgré cette optimalité par rapport à la formulation du problème, le comportement des sous-systèmes locaux peut se modifier à l'instant $k + 1$ par rapport à celui prédit à l'instant k . En ce sens, on se retrouve en présence d'une sous-optimalité par rapport à la formulation du problème. Pour le cas des modèles locaux couplés par les entrées, nous proposons la résolution du problème relaxé par un algorithme distribué "communiquant". L'absence de garantie de l'optimalité de la solution ainsi obtenue se répercute sur l'algorithme issu de la méthode de décomposition. Cependant, de manière similaire à l'approche quadratique, les algorithmes distribués, présentés pour les critères linéaires de MPC, convergent rapidement et offrent de très bonnes performances économiques avec un nombre faible d'itérations.

6.3 Perspectives

Plusieurs directions sont envisagées pour les développements futurs, en prolongement de ces travaux de thèse.

Les principales pistes théoriques sont listées ci-dessous :

- étude théorique de la stabilité de la formulation quadratique dynamique de MPC pour le cas monozone, ainsi que l'extension au cas multizone
- étude de l'impact des observateurs d'état locaux sur le développement théorique de la démarche, ainsi que sur les performances de la commande
- étude de la fiabilité de la structure distribuée¹ (où l'on peut envisager des défauts sur les contrôleurs, sur les capteurs, sur les actionneurs ou sur le réseau de communication).
- les idées présentées dans l'approche distribuée à horizon de prédiction variable peuvent être étendues au cas des systèmes multi-échantillonnés

1. Pour le cas multizone, avec des formulations sans contraintes ou avec contraintes locales, le défaut de fonctionnement d'un contrôleur local n'affecte pas le bâtiment entier. Ainsi, plusieurs stratégies peuvent être envisagées : les séquences des sorties ou des entrées futures que l'agent en défaut doit transmettre à ses voisins peuvent être remplacées par la séquence des sorties futures ou respectivement, une séquence de commandes nulles.

- généralisation des méthodes de décomposition linéaires pour les modèles à commandes discrètes ou pour les modèles non linéaires²
- une méthode qui permet la gestion simultanée des contraintes couplantes et des variables couplantes³
- des stratégies d'identification en ligne pour la commande distribuée ou des stratégies adaptatives [94].

Toutes les pistes théoriques mentionnées ci-dessus pour le cas de la commande des systèmes CVC peuvent être conjuguées aux propriétés particulières des systèmes positifs⁴ [57].

D'un point de vue applicatif, les perspectives visent généralement l'application des approches sur un bâtiment réel, mais également :

- l'application des algorithmes distribués sur d'autres configurations de bâtiments
- l'adaptation des structures de commande pour inclure la régulation d'autres systèmes présents dans les bâtiments (climatisation, ventilation, éclairage, systèmes de cogénération, etc.)
- la prise en compte des couplages thermiques entre les zones par des échanges d'air (ventilation mécanique ou naturelle).

2. Certaines pistes peuvent être retrouvées dans [39, 178, 65]

3. Ce type de problèmes peuvent être résolus par l'imbrication des deux méthodes de décomposition [39]. Pourtant, il est intéressant d'étudier une possible résolution en parallèle de ces procédures, en utilisant la structure un peu particulière du problème d'optimisation issu de MPC.

4. Un système linéaire est appelé positif (externally positive system) si et seulement si sa réponse forcée (réponse correspondante à l'état initial nul) est positive pour toutes les commandes positives. [57]

Annexe A

Modèles de simulation

Pourquoi la simulation des bâtiments ?

Pour améliorer les performances des systèmes de chauffage et de climatisation, il est important d'étudier comparativement différentes stratégies de commande. Ces études peuvent être réalisées sur des bâtiments réels par le biais de l'expérimentation, ou de manière virtuelle, voire une combinaison des deux approches. Cependant, aujourd'hui, l'analyse des performances de nouveaux contrôleurs est plus généralement menée dans des laboratoires virtuels que par l'intermédiaire d'expérimentations réelles. Ceci est dû à plusieurs raisons, les plus importantes étant mentionnées ci-dessous.

- L'écart entre les investissements en temps et en coût est énorme entre les deux options (simulation et expérimentation).
- La non-reproductibilité des conditions météorologiques rend difficile la comparaison des différents régulateurs sur le même bâtiment. D'autre part chaque immeuble a ses propres caractéristiques qui le rendent unique.
- L'évaluation des performances énergétiques annuelles de certaines installations est très difficile, voire impossible, pour un immeuble réel.

De nombreux outils de simulation ont été créés afin de contourner les problèmes mentionnés précédemment, tout en offrant des résultats satisfaisants par rapport au cas réel. Une liste non exhaustive des logiciels de simulation est donnée section 2.1.4.

La bibliothèque de modèles SIMBAD

Les résultats de simulation présentés tout au long de ce manuscrit ont été obtenus à l'aide de la bibliothèque de composants de génie climatique *SIMBAD Building and HVAC Toolbox*. Elle fournit des modèles MATLAB/Simulink des bâtiments et des composants de systèmes thermiques (chauffage et climatisation), pour réaliser des simulations dynamiques des installations de génie climatique.

Les principaux modèles de la bibliothèque SIMBAD peuvent être groupés en :

1. Modèles de zones :

- Modèles monozone avec des paramètres prédéfinis ou modèles avec une description détaillée des parois et des fenêtres
 - Modèles multizone avec description de la configuration des zones et des parois grâce à un fichier XML qui peut être créé en utilisant une interface graphique appelée SimBDI.
2. Éléments de production : pompes à chaleur et différents modèles de chaudières
 3. Éléments de distribution hydraulique (pompe, vannes, tuyauteries, ...) et aéraulique (ventilateurs, tuyauteries, ...)
 4. Éléments terminaux : ventilo-convecteurs, planchers et plafonds chauffants, radiateurs, convecteurs électriques, ...
 5. Systèmes de régulation typiquement utilisés dans la régulation thermique, de type tout-ou-rien, PID ou PID en cascade, capteurs, ...
 6. Systèmes prédéfinis préassemblés et fonctionnels.

En plus de ces groupes de modèles, l'outil de simulation offre également des fichiers météo-rologiques, des profils d'occupation prédéfinis, un modèle d'éclairage artificiel et des blocs de conversion entre différentes grandeurs physiques.

Modèle-bloc *bâtiment multizone*

Les bâtiments virtuels utilisés dans les différentes simulations présentées dans le présent mémoire sont basés sur le modèle SIMBAD appelé *bâtiment multizone*. Ce bloc permet la simulation des :

- parois opaques multicouches, pour lesquelles les hypothèses fondamentales suivantes sont faites :
 1. modèle monodimensionnel : le transfert de chaleur à travers la paroi se fait uniquement sur l'épaisseur
 2. la résistance de contact entre différentes couches de la paroi est nulle (contact parfait)
 3. les propriétés thermiques des couches sont constantes
 4. l'échange radiatif est linéarisé
- fenêtres, caractérisées par :
 1. le coefficient de transmission thermique entre les deux faces
 2. les coefficients d'échange convectif aux deux surfaces
 3. la transmissivité pour le rayonnement solaire
 4. l'absorptivité pour le rayonnement solaire
- zones d'air : basées sur l'hypothèse d'une température d'air homogène dans chaque zone (l'air de la zone est bien mélangé).

Notons également que le modèle suppose le bâtiment simulé placé dans un site dégagé, et par conséquent on ne tient pas compte de la présence d'autres immeubles dans son voisinage. La figure A.1 illustre les configurations en 3D du bâtiment monozone et multizone, utilisées dans les simulations présentées dans ce manuscrit.

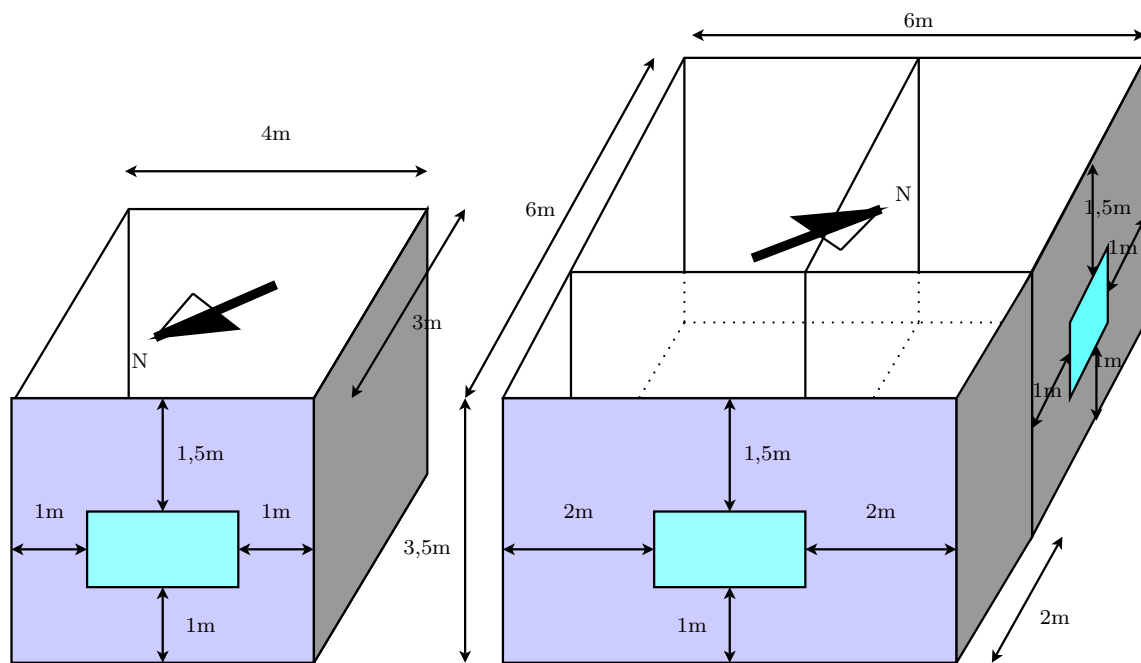


FIGURE A.1 – Configuration du bâtiment monozone (à gauche) et trois zones (à droite)

Ceci étant dit, on passe maintenant à la description des entrées et des sorties du bloc MATLAB/Simulink qui modélise le bâtiment multizone. Elles sont représentées figure A.2. Les cinq premières entrées du modèle constituent des données fournies par les fichiers météorologiques. La sixième entrée, la température limite, représente la température de contact du plancher bas avec le sol. La valeur de cette température est fixée à 10°C . Les modèles de fenêtre considérés dans nos simulations ne prennent pas en compte des protections solaires, et donc la septième entrée du modèle n'est pas utilisée. Dans nos simulations, nous avons considéré les apports de chaleur de la part des occupants et des équipements électriques (autres que les équipements de chauffage). Pendant les périodes d'occupation, l'apport des équipements est considéré égal à $10\text{W}/\text{m}^2$, il est de même considéré égal à 80W pour chaque occupant. Les débits d'air entre les zones du bâtiment sont considérés nuls. Le renouvellement de l'air de chaque pièce du bâtiment est pris en compte. Ainsi, le débit d'air frais entrant dans les zones occupées est égal à $20\text{m}^3/\text{h}/\text{pers}$. Les différentes valeurs mentionnées précédemment sont des valeurs proposées par défaut par SIMBAD et elles représentent des bonnes approximations pour les valeurs rencontrées dans la pratique. La dernière entrée du modèle constitue la puissance de chauffe fournie par le poste de chauffage, dans notre cas, les convecteurs électriques. Les modèles de planchers chauffants

considérés au chapitre 5 sont intégrés à l'intérieur du bloc multizone.

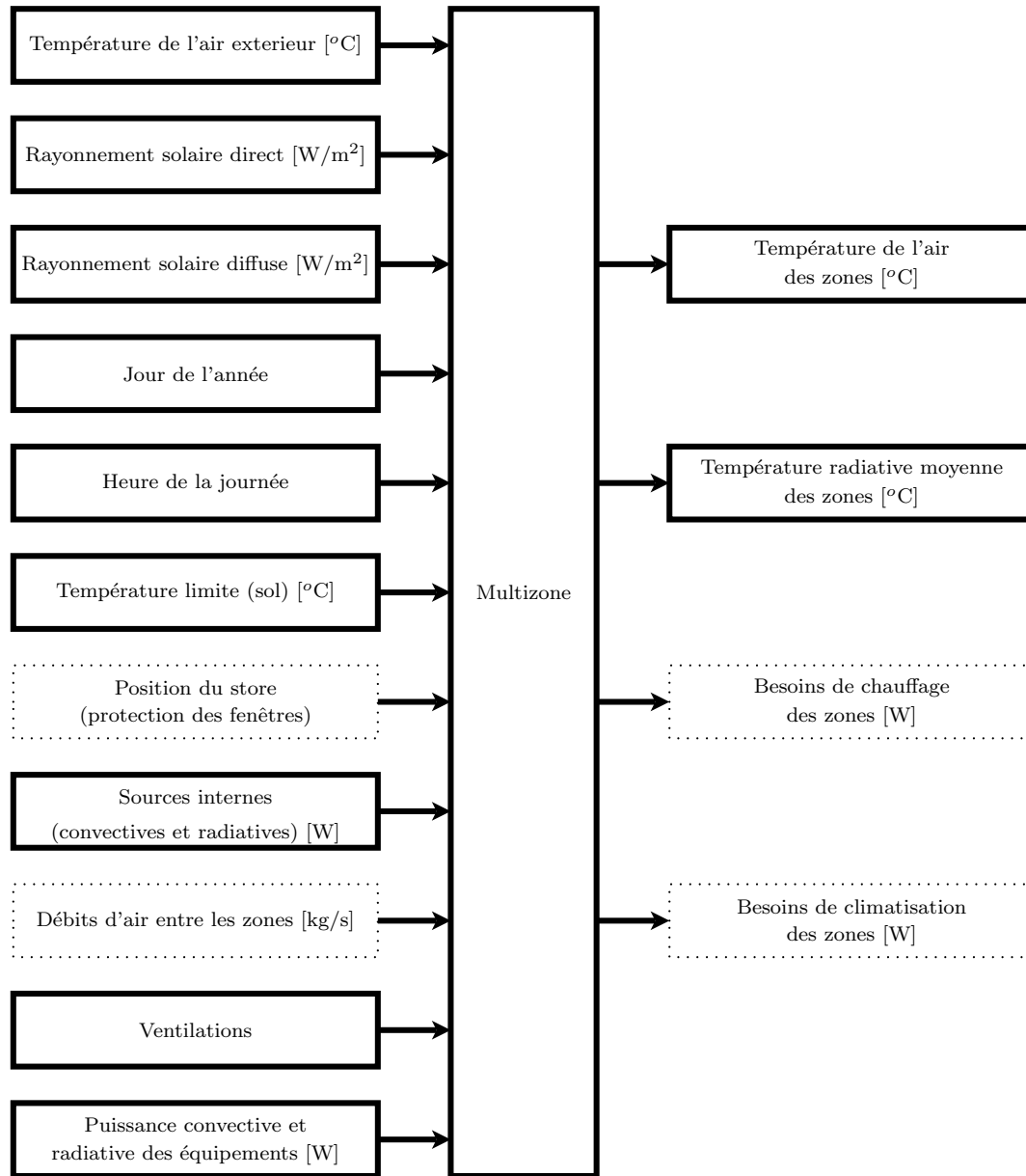


FIGURE A.2 – Entrées et sorties du modèle SIMBAD multizone

Seules les deux premières sorties du modèle multizone sont utilisées pour tester nos structures de commande. Elles représentent les températures de l'air de chacune des zones et les températures radiatives moyennes (calculées en fonction des températures des surfaces intérieures des parois).

	Type	Composition	Epaisseur [m]	Densité [kgm ⁻³]	Cap. therm. [Jkg ⁻¹ K ⁻¹]	Cond. therm. [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	Coef. d'échange [Wm ⁻² K ⁻¹](i / e)
Bâtiment monozone	Mur extérieur	Plaque de plâtre	0,010	1000	1000	0,430	5 / 20
		Polystyrène expansé	0,080	20	1450	0,047	
		Parpaings	0,200	950	920	0,46	
	Plancher bas	Plastique	0,020	270	1400	0,100	5 / ∞
		Hourdis creux	0,200	1400	920	1,330	
		Polystyrène expansé	0,100	20	1450	0,047	
		Polyuréthane	0,075	1200	1800	0,250	
		Sable	0,150	1800	910	2,000	
	Toiture	Plaque de plâtre	0,010	1000	1000	0,430	5 / 20
		Polystyrène expansé	0,080	20	1450	0,047	
		Hourdis creux	0,200	1400	920	1,330	
		Polyuréthane	0,075	1200	1800	0,250	
		Néoprène	0,010	1240	2140	0,230	
Bâtiment trois-zones	Mur extérieur	Plaque de plâtre	0,010	850	800	0,35	5 / 20
		Polystyrène extrudé	0,080	35	1200	0,033	
		Béton plein	0,200	2300	920	1,75	
	Mur intérieur	Plaques de plâtre	0,072	850	800	0,35	5 / 5
	Plafond	Tablier de toit	0,019	530	900	0,140	5 / 20
		Fibre de verre	0,112	12	840	0,040	
		Plaques de plâtre	0,010	950	840	0,160	
	Plancher chauffant (s'applique uniquement au modèle multisource)	Béton	0,035	2200	879	1,3	3,2 / ∞
		Tube de polyéthylène	0,016	920	0,582	1,000	
		Polyuréthane	0,0040	30	837	0,028	
		Béton	0,070	2200	879	1,3	

TABLE A.1 – Composition des parois du bâtiment monozone

Actionneur et capteur

Les modèles des convecteurs électriques fournis par la bibliothèque SIMBAD sont représentés par des systèmes linéaires du premier ordre de constante de temps $T_{conv} = 180s$. La commande des convecteurs, u , prend des valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Alors le gain exprime la puissance maximale du convecteur P_{max} . Les sorties des convecteurs électriques de chaque pièce sont connectées à la dernière entrée du modèle multizone (voir figure A.2). Les capteurs de température sont également modélisés de manière simple par un premier ordre, avec une constante de temps de $T_{capt} = 300s$.

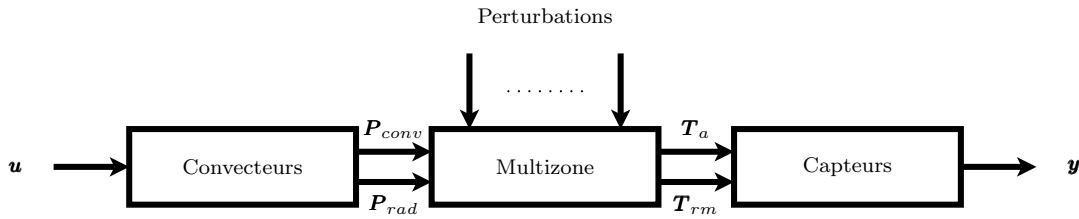


FIGURE A.3 – Schéma bloc du modèle de simulation

En incluant ces deux éléments, le schéma du modèle de simulation est représenté figure A.3. Comme on peut l'observer, la puissance de chauffe du convecteur présente une partie convective (95 %) et une partie radiative (5 %). De même, le capteur de température mesure une moyenne entre la température de l'air de la zone et la température radiative moyenne (ce que l'on appelle également la température opérationnelle).

Par rapport aux dynamiques des températures de l'air et des parois, les dynamiques relativement rapides des actionneurs et des capteurs considérés sont négligées dans les modèles de commande utilisés dans ce manuscrit.

Conditions météorologiques

Les bâtiments virtuels considérés dans les simulations présentées tout au long de ce mémoire sont situés à Rennes, en France. Les données météo utilisées pour simuler l'environnement dans lequel sont placés les immeubles retracent les conditions climatiques mesurées à Rennes, en 1998. La figure A.4 illustre l'évolution des trois perturbations extérieures prises en compte par le modèle : la température de l'air extérieur, le rayonnement solaire direct et diffus, pour le mois de janvier de l'année considérée. Les trois signaux sont échantillonnés avec un pas de temps de 1 heure.

Modélisation des couplages par les entrées et par les sorties

Dans cette partie nous nous proposons d'illustrer les deux types de couplages utilisés dans ce manuscrit. Pour ce faire, nous considérons un bâtiment multizone simple, composé de deux pièces. Pour simplifier encore plus le développement, nous prenons en compte

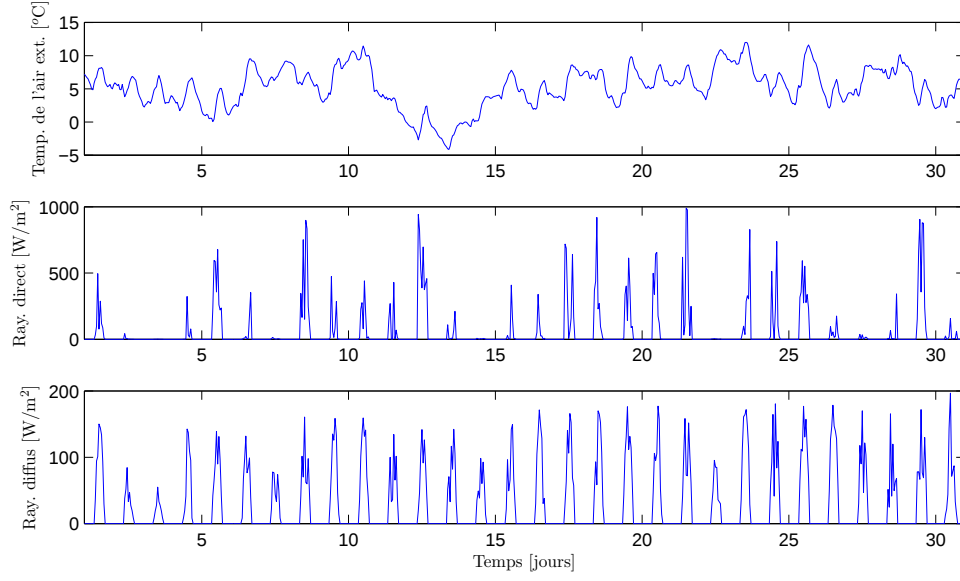


FIGURE A.4 – Conditions climatiques mesurées pour la ville de Rennes, en janvier 1998 : température de l'air extérieur, rayonnement solaire direct et rayonnement solaire diffus

uniquement les échanges convectifs. Le modèle global pour les deux zones peut alors s'écrire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{a1} \frac{dT_{a1}(t)}{dt} = Q_1(t) + Q_c(t) - K_{w1}(T_{a1}(t) - T_{w1}(t)) - K_{e1}(T_{a1}(t) - T_e(t)) \\ \quad - K_{wi1}(T_{a1}(t) - T_{wi}(t)) \\ C_{a2} \frac{dT_{a2}(t)}{dt} = Q_2(t) + Q_c(t) - K_{w2}(T_{a2}(t) - T_{w2}(t)) - K_{e2}(T_{a2}(t) - T_e(t)) \\ \quad - K_{wi2}(T_{a2}(t) - T_{wi}(t)) \\ C_{w1} \frac{dT_{w1}(t)}{dt} = -K_{w1}(T_{w1}(t) - T_{a1}(t)) - K_{w1e}(T_{w1}(t) - T_e(t)) \\ C_{w2} \frac{dT_{w2}(t)}{dt} = -K_{w2}(T_{w2}(t) - T_{a2}(t)) - K_{w2e}(T_{w2}(t) - T_e(t)) \\ C_{wi} \frac{dT_{wi}(t)}{dt} = -K_{wi1}(T_{wi}(t) - T_{a1}(t)) - K_{wi2}(T_{wi}(t) - T_{a2}(t)), \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

où les variables C représentent des capacités thermiques [$\text{J}/^\circ\text{C}$], T des températures [$^\circ\text{C}$], Q des puissances de chauffe [W] et les paramètres K sont les coefficients de transfert thermique [$\text{W}/^\circ\text{C}$]. La figure A.5 illustre la distribution des indices sur les composantes du système thermique considéré. Comme on peut l'observer, nous avons considéré une seule couche pour chaque paroi ce qui est loin d'être le meilleur choix. Pourtant, le but de l'utilisation de ce modèle est d'exprimer d'une manière simple les deux types de couplages.

À partir du système d'équations (A.1) et en choisissant les températures de l'air des deux zones et les températures des parois comme les états du système, on peut identifier

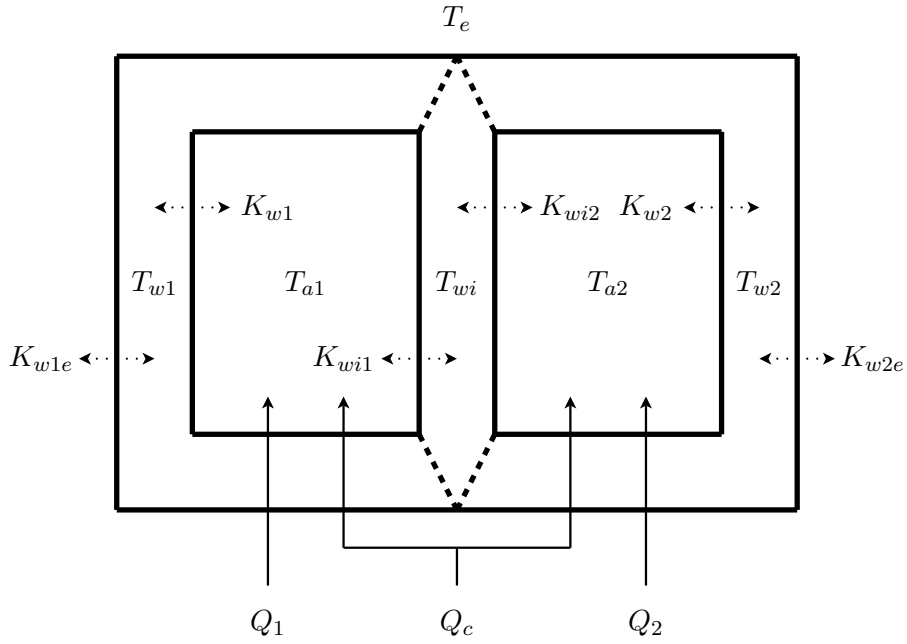


FIGURE A.5 – Schéma du bâtiment deux zones

les matrices du modèle d'état :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{T}_{a1}(t) \\ \dot{T}_{a2}(t) \\ \dot{T}_{w1}(t) \\ \dot{T}_{w2}(t) \\ \dot{T}_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{\dot{x}}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & -a_{22} & 0 & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & 0 & -a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & a_{42} & 0 & -a_{44} & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & -a_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{a1}(t) \\ T_{a2}(t) \\ T_{w1}(t) \\ T_{w2}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & 0 & 0 \\ b_{41} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_e(t) \\ Q_c(t) \\ Q_1(t) \\ Q_2(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}(t)} \\ \\ \underbrace{\begin{bmatrix} T_{a1}(t) \\ T_{a2}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{y}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \begin{bmatrix} T_{a1}(t) \\ T_{a2}(t) \\ T_{w1}(t) \\ T_{w2}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix}, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= (K_{w1} + K_{e1} + K_{wi1})/C_{a1}, \quad a_{13}K_{w1}/C_{a1}, \quad a_{15}K_{wi1}/C_{a1}, \quad a_{22} = (K_{w2} + K_{e2} + K_{wi2})/C_{a2}, \\ a_{24} &= K_{w2}/C_{a2}, \quad a_{25}K_{wi2}/C_{a2}, \quad a_{31} = K_{w1}/C_{w1}, \quad a_{33} = (K_{w1} + K_{w1e})/C_{w1}, \quad a_{42} = K_{w2}/C_{w2}, \\ a_{44} &= (K_{w2} + K_{w2e})/C_{w1}, \quad a_{51} = K_{wi1}/C_{wi}, \quad a_{52} = K_{wi2}/C_{wi}, \quad a_{55} = (K_{wi1} + K_{wi2})/C_{wi}, \\ b_{11} &= K_{e1}/C_{a1}, \quad b_{12} = 1/C_{a1}, \quad b_{13} = 1/C_{a1}, \quad b_{21} = K_{e2}/C_{a2}, \quad b_{22} = 1/C_{a2}, \quad b_{24} = 1/C_{a2}, \\ b_{31} &= K_{w1}/C_{w1}, \quad b_{41} = K_{w2}/C_{w2}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Couplage par les entrées

Modèle de la zone 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}_1} \underbrace{\mathbf{x}(t)}_{\mathbf{x}_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{c,1}} \underbrace{Q_c(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} \underbrace{Q_1(t)}_{u_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_{24} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{2,1}} \underbrace{Q_2(t)}_{u_2(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{ext,1}} T_e(t) \\ T_{a1}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_1^T} \mathbf{x}(t). \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Modèle de la zone 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\mathbf{A}}_{\mathbf{A}_2} \underbrace{\mathbf{x}(t)}_{\mathbf{x}_2(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{c,2}} \underbrace{Q_c(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b_{24} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_2} \underbrace{Q_2(t)}_{u_2(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{13} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{1,2}} \underbrace{Q_1(t)}_{u_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ b_{41} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{ext,2}} T_e(t) \\ T_{a2}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_2^T} \mathbf{x}(t). \end{array} \right. \quad (\text{A.5})$$

Couplage par les sorties

Modèle de la zone 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{T}_{a1}(t) \\ \dot{T}_{w1}(t) \\ \dot{T}_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_1(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{32} & -a_{33} & 0 \\ a_{51} & 0 & -a_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{a1}(t) \\ T_{w1}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{12} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{c,1}} \underbrace{Q_c(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{13} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_1} \underbrace{Q_1(t)}_{u_1(t)} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{52} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{2,1}} \underbrace{T_{a2}(t)}_{y_2(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{13} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{ext,1}} T_e(t) \\ T_{a1}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_1^T} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{a1}(t) \\ T_{w1}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_1(t)}. \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Modèle de la zone 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{T}_{a2}(t) \\ \dot{T}_{w2}(t) \\ \dot{T}_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}_2(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{22} & a_{24} & a_{25} \\ a_{42} & -a_{44} & 0 \\ a_{52} & 0 & -a_{55} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_2} \underbrace{\begin{bmatrix} T_{a2}(t) \\ T_{w2}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}_2(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{22} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_{c,2}} \underbrace{Q_c(t)}_{u_c(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{24} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_2} \underbrace{Q_2(t)}_{u_2(t)} + \\ \\ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{51} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{1,2}} \underbrace{T_{a1}(t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_{21} \\ b_{41} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}_{ext,2}} T_e(t) \\ \\ \underbrace{T_{a2}(t)}_{y_2(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}_2^T} \begin{bmatrix} T_{a2}(t) \\ T_{w2}(t) \\ T_{wi}(t) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

Annexe B

Dualité en programmation linéaire

L'idée de base de la dualité en programmation linéaire est d'associer au PL initial, appelé primal, un deuxième PL appelé programme dual tel que :

- le PL dual a autant de variables que le nombre de contraintes du primal,
- il a autant de contraintes que le nombre de variables du PL primal
- le dual est un problème de minimisation si le primal est formalisé comme un problème de maximisation et vice-versa.

Définition 1 *Soit le problème de programmation linéaire :*

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (\text{B.1a})$$

sous les contraintes

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \quad (\text{B.1b})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{B.1c})$$

alors sa forme duale est :

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad (\text{B.2a})$$

sous les contraintes

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad (\text{B.2b})$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{B.2c})$$

où $\mathbf{y}$ est appelée la variable duale.

On peut identifier alors le PL (B.1) comme le problème primal, le PL (B.2) étant le problème dual. La matrice de contrainte $\mathbf{A}$ et les vecteurs $\mathbf{b}$ et $\mathbf{c}$ définissent de manière unique les deux problèmes. Notons que chaque contrainte du problème primal comporte une variable duale associée. Le théorème suivant énonce la propriété de symétrie de la dualité.

Théorème 1 Si le problème (D) est le dual du problème (P), alors (P) est le dual du problème (D).

Même si le primal dans la définition du problème dual n'est pas sous la forme standard, cette formulation est préférée parce qu'elle permet d'identifier plus facilement la symétrie entre les deux formulations. En utilisant cette définition, on peut exprimer le dual du problème sous forme standard par le théorème suivant.

Théorème 2 Le problème dual du problème sous forme standard :

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (\text{B.3a})$$

sous les contraintes

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (\text{B.3b})$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (\text{B.3c})$$

est :

$$\max_{\mathbf{y}} \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \quad (\text{B.4a})$$

sous les contraintes

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}. \quad (\text{B.4b})$$

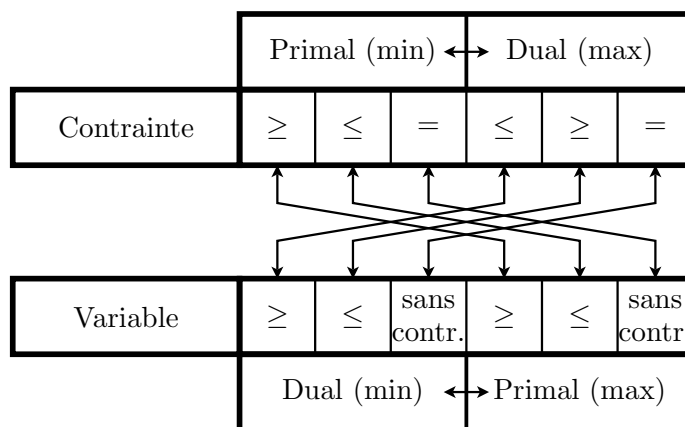


FIGURE B.1 – Représentation schématique des règles de transformation de primal en dual et vice-versa [39]

Un problème de programmation linéaire dont la formulation n'est pas sous la forme (B.1) ou sous la forme standard (B.3) a également un équivalent dual. Pour faciliter l'obtention du PL dual, à partir d'un problème linéaire défini d'une manière quelconque, on peut utiliser les ensembles de règles exposés figure B.1.

L'importance de la relation entre les formulations primal-dual est donnée par le théorème suivant et son corollaire.

Théorème 3 *(de dualité faible) Soit $\mathbf{x}$ une solution admissible du PL primal (B.1) et $\mathbf{y}$ une solution admissible de son dual (B.2), alors $\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}$.*

Corollaire 1 *Si $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$ alors les solutions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont optimales pour leur problème respectif.*

Les preuves des théorèmes présentés dans cette annexe peuvent être trouvées dans [39].

Liste des figures

1.1	Consommation d'énergie finale par secteur en 2008 dans la zone EU27 (à gauche) et en France (à droite)	19
1.2	Répartition de la consommation énergétique dans les bâtiments résidentiels et tertiaires en Europe [2]	20
1.3	Illustration du préchauffage	27
2.1	Comportement des régulateurs classiques	32
2.2	Schéma générique pour les procédures d'autoréglage du PID	33
2.3	Principe de fonctionnement de la commande prédictive : Prédiction de la commande et de la sortie à l'instant k sur un horizon fini (gauche); Réitération à l'instant suivant (droite)	38
2.4	Procédure de synthèse de la loi de commande prédictive	39
2.5	Structure de contrôle prédictif pour la régulation thermique dans les bâtiments	44
2.6	Bâtiment multi-zone (a) et structure des interconnexions (b)	46
2.7	Schéma de contrôle centralisé (a) et décentralisé (b) pour le cas de trois sous-systèmes	47
2.8	Schéma de contrôle distribué	49
2.9	Caractéristiques des différentes catégories d'algorithmes MPC	56
3.1	Utilisation d'une commande prédictive classique	62
3.2	Construction du vecteur d'occupation, $\delta(k)$, pour $N_1 = 1$ et $N_2 = 4$	63
3.3	Structure du schéma de contrôle	69
3.4	Structure du régulateur polynomial avec la partie feedforward	73
3.5	Influence de la dimension de l'horizon de commande, N_u , et de la pondération, λ , sur l'indice de confort (a) et sur la consommation énergétique (b), sur une journée de simulation, avec une température initiale $y(0) = 12^\circ\text{C}$. La période d'occupation considéré est de 9h à 19h et la dimension de l'horizon de prédiction est définie par $N_1 = 1$ et $N_2 = 16$. La température de consigne est fixé à 20°C	74
3.6	Réponses temporelles du système en boucle fermée pour $N_u \in \{1, 3, 16\}$, $\lambda = 1$, $N_1 = 1$, $N_2 = 16$ et une période d'occupation de 9h à 19h, avec une température initiale $y(0) = 16^\circ\text{C}$ (a et b) et $y(0) = 12^\circ\text{C}$ (c et d)	75

3.7	Évolution de l'horizon de prédiction ($N_1 = 1$, $\underline{N}_2 = 2$, $\overline{N}_2 = 4$)	77
3.8	Comparaison en termes d'indices de performances entre le contrôleur prédictif à horizon de prédiction constant (GPCHC) et deux configurations à horizon de prédiction variable (GPCHV1 et GPCHV2)	79
3.9	Évolution des principaux signaux, en configuration GPCHC et GPCHV1	81
3.10	Évolution temporelle de la structure du vecteur $\tilde{\mathbf{y}}_j^{(l(k))}(k)$ pour le cas de trois zones avec : $\overline{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 2$, $\mathbb{H}_j = \mathbb{N}_1^3 \setminus \{j\}$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$	89
3.11	Configuration du bâtiment simulé	95
3.12	Scénario 1 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d)	98
3.13	Scénario 2 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\overline{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$	99
3.14	Scénario 3 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\overline{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$	100
3.15	Scénario 4 : signaux de sortie (a) et de commande (b) pour les huit premiers jours de l'année et indicateurs de performance (c et d) pour $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} \in \mathbb{N}_2^{10}$, $\overline{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$	101
3.16	Scénario 2 : Évolution de la vitesse de convergence et du rayon spectral de la matrice Θ en fonction du profil d'occupation, pour la configuration DiMPCHV1, avec : $\overline{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 3$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$	102
3.17	Scénario 4 : Évolution de la vitesse de convergence et du rayon spectral de la matrice Θ en fonction du profil d'occupation, pour la configuration DiMPCHV1, avec : $\overline{N}_2 = 6$, $\underline{N}_{2,j} = 3$, $\forall j \in \mathbb{N}_1^3$	102
4.1	Influence du paramètre de pondération λ_i sur les indices de performance	115
4.2	Évolution temporelle des signaux de sortie (a) et de commande (b) et des indicateurs de performance (c et d) pour les huit premiers jours de l'année	116
4.3	Schéma-bloc de contrôle centralisé pour le bâtiment trois-zones	118
4.4	Schéma-bloc de contrôle décentralisé pour le bâtiment trois-zones	118
4.5	Schéma-bloc de contrôle distribué pour le bâtiment trois-zones	119
4.6	Profil d'occupation et limites de confort dans le cadre de la commande prédictive	121
4.7	Allure de la fonction de pénalité	122
4.8	Schéma de commande distribuée basé sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe, utilisant le modèle découplé (à gauche) et le modèle couplé (à droite)	131
4.9	Schéma-bloc de contrôle distribué basé sur la méthode de décomposition de Dantzig-Wolfe	131
4.10	Bâtiment composé de s zones disposées en série	132

4.11	Influence du nombre de sous-systèmes, s , sur la vitesse de convergence . . .	133
4.12	Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , sur la vitesse de convergence	134
4.13	Influence du paramètre ξ sur l'optimalité de la solution distribuée	134
4.14	Influence du nombre de sous-systèmes, s , sur les performances de l'algorithme 4	138
4.15	Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , sur les performances de l'algorithme 4	139
4.16	Influence du gain statique de couplage sur les performances de l'algorithme 4	140
4.17	Résultats de simulation sur une journée utilisant la commande DiMPCDW et respectivement PI, dans la configuration PO 2, $\alpha = 0,5$, $T_0 = 16^\circ\text{C}$. . .	142
4.18	Simulation DiMPCDW avec puissance maximale, $\bar{u}_t$, variable dans le temps	143
5.1	Exemple de l'évolution du domaine admissible du PMR	154
5.2	Schéma de commande distribuée basé sur la méthode de décomposition de Benders, utilisant le modèle découplé (à gauche) et le modèle couplé (à droite)	155
5.3	Influence du nombre de zones, s , sur les performances de l'algorithme 5, en utilisant le solveur Simplexe de MATLAB (à gauche), la méthode du point intérieur (au milieu) et le solveur CPLEX de IBM (à droite)	157
5.4	Influence de la taille de l'horizon de commande, N_u , (à gauche) et du nombre d'instants d'occupation par zone, N_o^i , (à droite)	158
5.5	Influence de l'erreur, ϵ , qui définit la condition d'arrêt	159
5.6	Exemple de bâtiment multizone multisource (à gauche) et structure de la matrice de contraintes du PL associé (à droite)	160
5.7	Schéma de contrôle distribué basé sur la méthode de décomposition de Benders	162
5.8	Influence du nombre de sous-systèmes sur les performances de l'algorithme 6	163
5.9	Influence de l'horizon de commande sur les performances de l'algorithme 6 .	164
5.10	Influence du gain statique de couplage (ξ) sur les performances de l'algorithme 6	164
5.11	Bâtiment multizone et multisource	165
5.12	DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 1, $T_0 = 16^\circ\text{C}$)	168
5.13	DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 2, $T_0 = 16^\circ\text{C}$), tarification fixe	169
5.14	DiMPCB - signaux principaux sur une journée (PO 2, $T_0 = 16^\circ\text{C}$), tarification variable	170
6.1	Récapitulatif des problèmes et des solutions proposées dans le manuscrit . .	174
A.1	Configuration du bâtiment monozone (à gauche) et trois zones (à droite) . .	181
A.2	Entrées et sorties du modèle SIMBAD multizone	182
A.3	Schéma bloc du modèle de simulation	184

A.4	Conditions climatiques mesurées pour la ville de Rennes, en janvier 1998 : température de l'air extérieur, rayonnement solaire direct et rayonnement solaire diffus	185
A.5	Schéma du bâtiment deux zones	186
B.1	Représentation schématique des règles de transformation de primal en dual et vice-versa [39]	190

Liste des tableaux

3.1	Résultats comparatifs (confort et énergie) entre les contrôleurs de type GPC à critère dynamique et PI avec anticipation de la consigne	80
3.2	Résultats comparatifs DéMPCHV1 - DiMPCHV1 pour les quatre scénarios d'occupation, avec les paramètres : $N_{u,i} = \underline{N}_{2,i} = 2$, $N_{2,i} = \overline{N}_{2,i} = 10$, $\lambda_i = 1$, $\epsilon_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$	103
4.1	Résultats comparatifs entre les structures prédictives à critère linéaire par rapport à la structure distribuée à critère quadratique pour les quatre scénarios d'occupation, avec les paramètres : $N_{u,i} = N_{2,i} = 10$, $\epsilon_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}_1^3$	117
4.2	Profils d'occupation	141
4.3	Comparaison en termes de coûts de chauffage	141
5.1	Profils d'occupation pour le cas multizone et multisource	166
5.2	Comparaison en termes de coûts de chauffage pour le cas multizone et multisource	167
A.1	Composition des parois du bâtiment monozone	183

Index

- Combinaison
 - conique, 124
 - convexe, 124
- Contraintes
 - couplées, 119
 - locales, 109
- Couplage
 - par les entrées, 51
 - par les sorties, 83
- Décomposition
 - de Benders, 149
 - de Dantzig-Wolfe, 124
- Dualité
 - des PL, 189
 - faible, 191
- Équation de prédiction, 66
- Fonction
 - de coût, 37
 - de pénalité, 121
- Forme standard PL, 110
- Horizon
 - de prédiction sur la commande, 40
 - inférieur de prédiction sur la sortie, 40
 - supérieur de prédiction sur la sortie, 40
- Indice
 - de confort, 71
 - de consommation, 70
- Matrice
 - bloc-angulaire duale, 149
 - bloc-angulaire primale, 124
- MPC, 39
 - à critère linéaire, 107
 - à critère quadratique, 39
 - centralisé, 46
 - décentralisé, 47
 - distribué, 49
- Problème
 - maître, 126
 - maître restreint, 127
 - relaxé, 124
- Profil d'occupation, 63
- Rayon, 125
 - extrémal, 125
 - spectral, 93
- Régulateur RST, 68
- Séquence
 - d'échange, 86
 - de commandes, 65
 - de sorties, 66
- Sommet, 125
- Variables
 - couplantes, 149
 - duales, 126

Bibliographie

- [1] www.homesprogramme.com.
- [2] Towards energy efficient buildings in Europe. Technical report, EuroACE, 2004.
- [3] Climate change 2007 : Synthesis report. Technical report, Intergovernmental Panel on Climate Change, 2007.
- [4] Les chiffres clés du bâtiment 2007. Technical report, ADEME, 2007.
- [5] World energy outlook. Technical report, International Energy Agency, 2008.
- [6] World energy outlook. Technical report, International Energy Agency, 2009.
- [7] Energy yearly statistics 2008. Technical report, EUROSTAT, 2010.
- [8] World energy outlook. Technical report, International Energy Agency, 2010.
- [9] P. A. Agachi, Z. K. Nagy, M. V. Cristea, and A. Imre-Lucaci. *Model based control : case studies in process engineering*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2006.
- [10] W. Al-Gherwi, H. Budman, and A. Elkamel. An online algorithm for robust distributed model predictive control. In *International Symposium on Advanced Control of Chemical Processes*, Jul. 2009.
- [11] W. Al-Gherwi, H. Budman, and A. Elkamel. Selection of control structure for distributed model predictive control in the presence of model errors. *Journal of Process Control*, 20(3) :270–284, 2010.
- [12] M. Alamir, M. Yacine Lamoudi, and P. Béguey. Unified NMPC control for multi-variable control in smart buildings. In *IFAC World Congress*, Aug. 2011.
- [13] M. Alamir, A. Murilo, R. Amari, P. Tona, R. Furhapter, and P. Ortner. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, chapter On the use of parameterized NMPC in real-time automotive control, pages 139 – 149. Springer-Verlag, 2009.
- [14] K. J. Åström, T. Hagglund, and A. Wallenborg. Automatic tuning of digital controllers with applications to HVAC plants. *Automatica*, 29(5) :1333–1343, 1993.
- [15] S. Atthajariyakul and T. Leephakpreeda. Neural computing thermal comfort index for HVAC systems. *Energy Conversion and Management*, 46(15-16) :2553–2565, 2005.
- [16] P. Bacot. *Analyse modale des systèmes thermiques*. PhD thesis, Université Paris VI, 1984.

- [17] J. Bai, S. Wang, and X. Zhang. Development of an adaptive Smith predictor-based self-tuning PI controller for an HVAC system in a test room. *Energy and Buildings*, 40(12) :2244–2252, 2008.
- [18] T. Başar and G. J. Olsder. *Dynamic noncooperative game theory*. Academic Press, 1999.
- [19] W. A. Beckman, L. Broman, A. Fiksel, S. A. Klein, E. Lindberg, M. Schuler, and J. Thornton. Trnsys the most complete solar energy system modelling and simulation software. In *Renewable energy climate and the environment : Work Renewable Energy Congress*, Sep. 1994.
- [20] A. Bemporad, F. Borrelli, and M. Morari. Model predictive control based on linear programming - the explicit solution. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12) :1974 – 1985, 2002.
- [21] A. Bemporad, M. Morari, V. Dua, and E. N. Pistikopoulos. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems. *Automatica*, 38(1) :3–20, 2002.
- [22] J. F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems. *Numerische Mathematik*, 4 :238–252, 1962.
- [23] D. P. Bertsekas. Separable dynamic programming and approximate decomposition methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(5) :911–916, 2007.
- [24] Q. Bi, W. Cai, Q. Wang, C. Hang, E. Lee, Y. Sun, K. Liu, Y. Zhang, and B. Zou. Advanced controller auto-tuning and its application in HVAC systems. *Control Engineering Practice*, 8(6) :633–644, 2000.
- [25] B. Birdsall, W. F. Buhl, K. L. Ellington, A. E. Erdam, and F. C. Winkelmann. Overview of the DOE-2 building analysis program. Technical report, Simulation Research Group, Lawrence Berkeley Laboratory, University of California, Berkeley, CA, 1990.
- [26] P. Boucher and D. Dumur. *La commande prédictive*. EDITIONS TECHNIP, 1996.
- [27] R. Bourdais and H. Guéguen. Distributed predictive control for complex hybrid system. the refrigeration system example. In *IFAC Large Scale Systems*, Jul. 2010.
- [28] R. Cagienard, P. Grieder, E. C. Kerrigan, and M. Morari. Move blocking strategies in receding horizon control. *Journal of Process Control*, 17(6) :563–570, 2007.
- [29] F. Calvino, M. L. Gennusa, G. Rizzo, and G. Scaccianoce. The control of indoor thermal comfort conditions : introducing a fuzzy adaptive controller. *Energy and Buildings*, 36(2) :97–102, 2004.
- [30] E. F. Camacho and C. Bordons. *Model Predictive Control in the Process Industry. Second Edition*. Springer-Verlag, London, England, 2004.
- [31] E. Camponogara, D. Jia, B. H. Krogh, and S. Talukdar. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 22(1) :44–52, 2002.

- [32] G. Chaloulos, P. Hokayem, and J. Lygeros. Distributed hierarchical mpc for conflict resolution in air traffic control. In *American Control Conference*, pages 3945–3950, Jun. 2010.
- [33] T. Y. Chen. Application of adaptive predictive control to a floor heating system with a large thermal lag. *Energy and Buildings*, 34(1) :45–51, 2002.
- [34] R. Cheng, J. F. Forbes, and W. S. Yip. Dantzig-Wolfe decomposition and plant-wide MPC coordination. *Computers and Chemical Engineering*, 32(7) :1507–1522, 2008.
- [35] J. A. Clark. The ESP system towards a new generation of building energy analysis program. In *Building Energy Simulation Conference*, 1985.
- [36] D. Clarke. *Advances in model-based predictive control*. Oxford University Press, 1994.
- [37] D. W. Clarke, C. Mohtadi, and P. S. Tuffs. Generalized predictive control - Part I. the basic algorithm and Part II. extensions and interpretations. *Automatica*, 23(2) :137–160, 1987.
- [38] Climatisation and Development Group. Overview of the hourly analysis program. Technical report, CARRIER, 12 Rue de Paris, 78230, France, 1992.
- [39] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Minguez, and R. Garcia-Bertrand. *Decomposition techniques in mathematical programming*. Engineering and Science Applications. Springer-Verlag, 2006.
- [40] V. Congradac and F. Kulic. HVAC system optimization with CO₂ concentration control using genetic algorithms. *Energy and Buildings*, 41(5) :571–577, 2009.
- [41] J. A. Crabb, N. Murdoch, and J. M. Penman. A simplified thermal response model. *Building Services Engineering Research & Technology*, 8(1) :13–19, 1987.
- [42] CSTB, <http://www.cstb.fr>. *SIMBAD Building and HVAC Toolbox*, 4.0 edition, 2005.
- [43] G. B. Dantzig and M. N. Thapa. *Linear Programming 2 : Theory and Extensions*. Springer-Verlag, 2003.
- [44] G. B. Dantzig and P. Wolfe. Decomposition principle for linear programs. *Operation Research*, (8) :101–111, 1960.
- [45] S. L. de Oliveira Kothare and M. Morari. Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(6) :1053–1071, 2000.
- [46] M. Defoort, A. Kokosy, T. Floquet, W. Perruquetti, and J. Palos. Motion planning for cooperative unicycle-type mobile robots with limited sensing ranges : A distributed receding horizon approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 57(11) :1094–1106, 2009.
- [47] M. D. Doan, T. Keviczky, I. Necoara, M. Diehl, and B. De Schutter. A distributed version of Han’s method for DMPC using local communications only. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*, 11(3) :6–15, 2009.

- [48] M. D. Doan, T. Keviczky, and B. De Schutter. An improved distributed version of Han's method for distributed MPC of canal systems. In *Symposium on Large Scale Systems : Theory and Applications*, Jul. 2010.
- [49] A. I. Dounis, M. J. Santamouris, C. C. Lefas, and A. Argiriou. Design of a fuzzy set environment comfort system. *Energy and Buildings*, 22(1) :81–87, 1995.
- [50] A.I. Dounis and C. Caraiscos. Advanced control systems engineering for energy and comfort management in a building environment - a review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 13(6-7) :1246–1261, 2009.
- [51] X. Du, Y. Xi, and S. Li. Distributed model predictive control for large-scale systems. In *American Control Conference*, pages 3142–3143, Jun. 2001.
- [52] D. Dumur, P. Boucher, K. M. Murphy, and F. Déqué. Comfort control in residential housing using predictive controllers. In *International Conference on Control Application*, pages 265–270, Oct. 1997.
- [53] W. B. Dunbar and R. M. Murray. Distributed receding horizon control for multi-vehicle formation stabilization. *Automatica*, 42(4) :549–558, 2006.
- [54] G. Eftaxias, G. Sutherland, and M. Santanouris. *A building simulation toolbox for MATLAB/SIMULINK, Instalation Guide ans User Manual*. Group Building Environmental Studies, Department of Applied Physics, University of Athens, 1999.
- [55] P. G. Ellis and P. A. Torcellini. Simulating tall buildings usig energyplus. In *International IBPSA Conference*, pages 279–286, Aug. 2005.
- [56] P. O. Fanger. *Thermal Comfort*. McGraw-Hill Inc., 1970.
- [57] L. Farina and L. Benvenuti. Positive realizations of linear systems. *Systems & Control Letters*, 26(1) :1–9, 1995.
- [58] M. Farza, M. M'Saad, and L. Rossignol. Observer design for a class of mimo nonlinear systems. *Automatica*, 40(1) :135–143, 2004.
- [59] M. Farza, M. M'Saad, M. Triki, and T. Maatoug. High gain observer for a class of non-triangular systems. *Systems & Control Letters*, 60(1) :27–35, 2011.
- [60] P. M. Ferreira and A. E. Ruano. Choice of RBF model structure for predicting greenhouse inside air temperature. In *IFAC World Congress*, pages 91–96, Aug. 2002.
- [61] G. Fraisse. *La régulation thermique des batiments tertiaires : application de la logique floue à la régulation centrale du chauffage en régime intermittent*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1997.
- [62] G. Fraisse, J. Virgone, and J. J. Roux. Thermal control of a discontinuously occupied building using a classical and a fuzzy logic approach. *Energy and Buildings*, 26(3) :303–316, 1997.
- [63] R. Z. Freire, G. H. C. Oliveira, and N. Mendes. Development of regression equations for predicting energy and hygrothermal performance of buildings. *Energy and Buildings*, 40(5) :810–820, 2008.

- [64] R. Z. Freire, G. H. C. Oliveira, and N. Mendes. Predictive controllers for thermal comfort optimization and energy savings. *Energy and Buildings*, 40(7) :1353–1365, 2008.
- [65] A. M. Geoffrion. Generalized Benders decomposition. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 10(4) :237–260, 1972.
- [66] C. Ghiaus. Fuzzy model and control of a fan-coil. *Energy and Buildings*, 33(6) :545–551, 2001.
- [67] C. Ghiaus and I. Hazyuk. Calculation of optimal thermal load of intermittently heated buildings. *Energy and Buildings*, 42(8) :1248–1258, 2010.
- [68] L. Giovanini and J. Balderud. Game approach to distributed model predictive control. In *International Control Conference*, Aug. 2006.
- [69] P. Giselsson and A. Rantzer. Distributed model predictive control with suboptimality and stability guarantees. In *Conference on Decision and Control*, pages 7272–7277, Dec. 2010.
- [70] P. A. González and J. M. Zamarreño. Prediction of hourly energy consumption in buildings based on a feedback artificial neural network. *Energy and Buildings*, 37(6) :595–601, 2005.
- [71] M. C. B. Gough. Component based building energy system simulation. *International Journal of Ambient Energy*, 7 :137–143, 1986.
- [72] A. Grancharova and T. A. Johansen. Explicit approaches to constrained model predictive control : a survey. *Modeling, identification and control*, 25(3) :131–157, 2004.
- [73] P. Gruber, M. Gwerder, and J. Todtli. Predictive control for heating applications. In *Clima World Congress*, Sep. 2001.
- [74] M. Gwerder, D. Gyalistras, F. Oldewurtel, B. Lehmann, K. Wirth, V. Stauch, and J. Tödtli. Potential assessment of rule-based control for integrated room automation. In *REHVA World Congress*, May 2010.
- [75] M. Gwerder and J. Tödtli. Predictive control for integrated room automation. In *REHVA World Congress Clima*, Oct. 2005.
- [76] D. Gyalistras and M. Gwerder. Use of weather and occupancy forecasts for optimal building climate control (opticontrol) : Two years progress report. Technical report, Terrestrial Systems Ecology ETH Zurich, 2010.
- [77] T. Halil, O. Farhi, and Y. Chervenkoy. Embedded fuzzy controller for adaptive heating system control. In *Energy saving control in plants and buildings*, pages 75–80, Oct. 2006.
- [78] S. P. Han and G. Lou. A parallel algorithm for a class of convex programs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 26(2) :345–355, 1988.

- [79] I. Hazyuk and C. Ghiaus. On the physical meaning of minimization criterion for model predictive control. In *International Conference on Automation Quality and Testing Robotics*, pages 1–6, May 2010.
- [80] M. Heidarinejad, J. Liu, D. M. de la Pena, and P. D. Christofides. Handling communication disruptions in distributed model predictive control. In *International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems*, pages 296–301, Jul. 2010.
- [81] G. P. Henze and R. E. Hindman. Control of air-cooled chiller condenser fans using clustering neural networks. *ASHRAE Transactions*, 108(4574), 2002.
- [82] D. R. Saffer II and F. J. Doyle III. Analysis of linear programming in model predictive control. *Computers & Chemical Engineering*, 28(12) :2749 – 2763, 2004.
- [83] L. Itard, F. Meijer, E. Vrinr, and H. Hoiting. Building renovation and modernisation in Europe : state of the art review. Technical report, 2008.
- [84] V. Javalera, B. Morcego, and V. Puig. Negotiation and learning in distributed MPC of large scale systems. In *American Control Conference*, pages 3168–3173, Jun. 2010.
- [85] D. Jia and B. Krogh. Min-max feedback model predictive control for distributed control with communication. In *American Control Conference*, May 2002.
- [86] D. Jia and B. H. Krogh. Distributed model predictive control. pages 2767–2772, Jun. 2001.
- [87] S. A. Kalogirou and M. Bojic. Artificial neural networks for the prediction of the energy consumption of a passive solar building. *Energy*, 25(5) :479–491, 2000.
- [88] T. Keviczky, F. Borrelli, and G. J. Balas. A study on decentralized receding horizon control for decoupled systems. Technical report, University of Minnesota, Minneapolis, 2004.
- [89] T. Keviczky, F. Borrelli, and G. J. Balas. Stability analysis of decentralized RHC for decoupled systems. In *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 1689–1694, Dec. 2005.
- [90] T. Keviczky, F. Borrelli, and G. J. Balas. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems. *Automatica*, 42(12) :2105–2115, 2006.
- [91] D. Kolokotsa, D. Tsiavos, G. S. Stavrakakis, K. Kalaitzakis, and E. Antonidakis. Advanced fuzzy logic controllers design and evaluation for buildings’ occupants thermal-visual comfort and indoor air quality satisfaction. *Energy and Buildings*, 33(6) :531–543, 2001.
- [92] K. I. Krakow and S. Lin. PI control of fan speed to maintain constant discharge pressure. *ASHRAE Transactions : Research*, 101(2) :398–407, 1995.
- [93] M. T. Lah, B. Zupancic, and A. Krainer. Fuzzy control for the illumination and temperature comfort in a test chamber. *Building and Environment*, 40(12) :1626–1637, 2005.

- [94] I. D. Landau, R. Lozano, M. M'Saad, and A. Karimi. *Adaptive Control. Second Edition*. Springer-Verlag, 2011.
- [95] Y. D. Landau. *Adaptive control*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [96] L. K. Lawrie. Day-to-day use of energy analysis software. *Energy Engineering*, 89(5) :41–51, 1992.
- [97] S. Leirens, C. Zamora, R. R. Negenborn, and B. De Schutter. Coordination in urban water supply networks using distributed model predictive control. In *American Control Conference*, pages 3957–3962, Jun. 2010.
- [98] S. Li, Y. Zhang, and Q. Zhu. Nash-optimization enhanced distributed model predictive control applied to the Shell benchmark problem. *Information Sciences*, 170(2-4) :329–349, 2005.
- [99] W. Li and C. G. Cassandras. Centralized and distributed cooperative receding horizon control of autonomous vehicle missions. *Mathematical and Computer Modelling*, 43(9-10) :1208–1228, 2006.
- [100] J. Liang and R. Du. Design of intelligent comfort control system with human learning and minimum power control strategies. *Energy Conversion and Management*, 49(4) :517–528, 2008.
- [101] Z. Liao and A. L. Dexter. The potential for energy saving in heating systems through improving boiler controls. *Energy and Buildings*, (36) :261–271, 2004.
- [102] Z. Liao and A. L. Dexter. A simplified physical model for estimating the average air temperature in multi-zone heating systems. *Building and Environment*, 39(9) :1013–1022, 2004.
- [103] J. Liu, X. Chen, D. Munoz de la Pena, and Panagiotis D. Christofides. Sequential and iterative architectures for distributed model predictive control of nonlinear process systems. Part I : Theory. In *American Control Conference*, pages 3148–3155, Jun. 2010.
- [104] J. Liu, X. Chen, D. Munoz de la Pena, and Panagiotis D. Christofides. Sequential and iterative architectures for distributed model predictive control of nonlinear process systems. Part II : Application to a catalytic alkylation of benzene process. In *American Control Conference*, pages 3156–3161, Jun. 2010.
- [105] J. Liu, D. Muñoz de la Peña, and P. D. Christofides. Distributed model predictive control of nonlinear systems subject to asynchronous and delayed measurements. *Automatica*, 46(1) :52–61, 2010.
- [106] W. Liu, Z. Lian, and B. Zhao. A neural network evaluation model for individual thermal comfort. *Energy and Buildings*, 39(10) :1115–1122, 2007.
- [107] D. L. Loveday, G. S. Virk, J. Y. M. Cheung, and D. Azzi. Intelligence in buildings : the potential of advanced modelling. *Automation in Construction*, 6(5-6) :447–461, 1997.

- [108] L. Lu, W. Cai, Y. S. Chai, and L. Xie. Global optimization for overall HVAC systems - Part I : Problem formulation and analysis. *Energy Conversion and Management*, 46(7-8) :999–1014, 2005.
- [109] D. Luenberger. An introduction to observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 16(6) :596–602, 1971.
- [110] P. Lute and D. van Paassen. Optimal indoor temperature control using a predictor. *IEEE Control Systems Magazine*, 15 :4–10, 1995.
- [111] Y. Ma, F. Borrelli, B. Hencsey, B. Hencsey, B. Coffey, S. Bengea, and P. Haves. Model predictive control for the operation of building cooling system. In *American Control Conference*, pages 5106–5111, Jun. 2010.
- [112] Y. Ma, F. Borrelli, B. Hencsey, A. Packard, and S. Bortoff. Model predictive control of thermal energy storage in building cooling systems. In *Conference on Decision and Control and Chinese Control Conference*, pages 392–397, Dec. 2009.
- [113] J. M. Maestre, D. Munoz de la Pena, and E. F. Camacho. A distributed MPC scheme with low communication requirements. In *American Control Conference*, pages 2797–2802, Jun. 2009.
- [114] J. M. Maestre, D. Munoz de la Pena, and E. F. Camacho. Distributed model predictive control based on a cooperative game. *Optimal Control Applications and Methods*, 32(2) :153–176, 2010.
- [115] L. Magni and R. Scattolini. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems. *Automatica*, 42(7) :1231–1236, 2006.
- [116] P. Malisani, F. Chaplais, N. Petit, and D. Feldmann. Thermal building model identification using time-scaled identification methods. In *Conference on Decision and Control*, pages 308–315, Dec. 2010.
- [117] K. Marik, J. Rojicek, P. Stluka, and J. Vass. Advanced HVAC control : Theory vs. reality. In *IFAC World Congress*, Aug. 2011.
- [118] D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, and P. O. M. Scokaert. Constrained model predictive control : Stability and optimality. *Automatica*, 36(6) :789–814, 2000.
- [119] K. Menighed, C. Aubrun, and J-J. Yame. Distributed state estimation and model predictive control : Application to fault tolerant control. In *International Conference on Control and Automation*, pages 936–941, Dec. 2009.
- [120] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. Building temperature regulation using a distributed model predictive control. *Energy and Buildings*, 42(9) :1445–1452, 2010.
- [121] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. Commande prédictive distribuée pour la régulation thermique des bâtiments. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Jun. 2010.

- [122] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. Distributed model predictive control based on Benders' decomposition applied to multisource multizone building temperature regulation. In *Conference on Decision and Control*, pages 3914–3919, Dec. 2010.
- [123] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. Distributed model predictive control for building temperature regulation. In *American Control Conference*, pages 3174–3179, Jun. 2010.
- [124] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. A distributed MPC applied to multisource temperature regulation in buildings. In *IFAC Workshop on Distributed Estimation and Control in Networked Systems*, pages 91–96, Sep. 2010.
- [125] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. A dynamic horizon distributed predictive control approach for temperature regulation in multi-zone buildings. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 622–627, Jun. 2010.
- [126] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. Distributed MPC for multi-zone temperature regulation with coupled constraints. In *IFAC World Congress*, Aug. 2011.
- [127] P-D. Moroşan, R. Bourdais, D. Dumur, and J. Buisson. A distributed MPC strategy based on Benders' decomposition applied to multi-source multi-zone temperature regulation. *Journal of Process Control*, 21(5) :729–737, 2011.
- [128] P-D. Moroşan, R. Bourdais, and H. Guéguen. Apports de la commande prédictive pour la régulation thermique des bâtiments. In *STIC et Environnement*, Jun. 2009.
- [129] P-D. Moroşan, R. Bourdais, and H. Guéguen. Apports de la commande prédictive pour la régulation thermique des bâtiments. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 44(4-5) :479–492, 2010.
- [130] M. Mossolly, K. Ghali, and N. Ghaddar. Optimal control strategy for a multi-zone air conditioning system using a genetic algorithm. *Energy*, 34(1) :58–66, 2009.
- [131] N. Motee and B. Sayyar-Rodsari. Optimal partitioning in distributed model predictive control. In *American Control Conference*, pages 5300–5305, Jun. 2003.
- [132] J. Nash. Non-cooperative games. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 54(2) :286–295, 1951.
- [133] N. Nassif, S. Kajl, and R. Sabourin. Optimization of HVAC control system strategy using two-objective genetic algorithm. *HVAC&R Research*, 11(3) :459–486, 2005.
- [134] I. Necoara, D. Doan, and J. A. K. Suykens. Application of the proximal center decomposition method to distributed model predictive control. In *Conference on Decision and Control*, pages 2900–2905, Dec. 2008.
- [135] R. R. Negenborn. *Multi-agent model predictive control with applications to power networks*. PhD thesis, University of Delft, 2007.

- [136] R. R. Negenborn and B. De Schutter. A distributed model predictive control approach for the control of irrigation canals. In *International Conference on Infrastructure Systems and Services : Building Networks for a Brighter Future*, pages 1–6, Nov. 2008.
- [137] R. R. Negenborn, B. De Schutter, and H. Hellendoorn. Multi-agent model predictive control of transportation networks. In *International Conference on Networking, Sensing and Control*, pages 296–301, Aug. 2006.
- [138] H. M. Newman and M. D. Morris. *Direct digital control of building systems : theory and practice*. John Wiley & Sons, 1994.
- [139] S. Olaru. *Contribution à l'étude de la commande prédictive sous contraintes par approche géométrique*. PhD thesis, SUPELEC, 2005.
- [140] F. Oldewurtel, D. Gyalistras, M. Gwerder, C. N. Jones, A. Parisio, V. Stauch, B. Lehmann, and M. Morari. Increasing energy efficiency in building climate control using weather forecasts and model predictive control. In *REHVA World Congress*, May 2010.
- [141] F. Oldewurtel, C. N. Jones, and M. Morari. A tractable approximation of chance constrained stochastic MPC based on affine disturbance feedback. In *Conference on Decision and Control*, pages 4731–4736, Dec. 2008.
- [142] F. Oldewurtel, A. Parisio, C. N. Jones, M. Morari, D. Gyalistras, M. Gwerder, V. Stauch, B. Lehmann, and K. Wirth. Energy efficient building climate control using stochastic model predictive control and weather predictions. In *American Control Conference*, Jun. 2010.
- [143] F. Oldewurtel, A. Ulbig, A. Parisio, G. Andersson, and M. Morari. Reducing peak electricity demand in building climate control using real-time pricing and model predictive control. In *Conference on Decision and Control*, Dec. 2010.
- [144] G. H. C. Oliveira and L. H. Ushijima. A hybrid predictive control scheme for hygro-thermal process. *IFAC*, pages 3641–3646, 2008.
- [145] G. Pannocchia, J. B. Rawlings, and S. J. Wright. Fast, large-scale model predictive control by partial enumeration. *Automatica*, 43(5) :852–860, 2007.
- [146] B. Paris, J. Eynard, S. Grieu, T. Talbert, and M. Polit. Heating control schemes for energy management in buildings. *Energy and Buildings*, 42(8) :1908–1917, 2010.
- [147] A. Parisio. *Handling Uncertainty with Application to Indoor Climate Control and Resource Allocation Planning*. PhD thesis, University of Sannio, 2009.
- [148] C. Park, D. Clark, and G. Kelly. *HVACSIM building systems and equipment simulation program : buildings load calculation*, 1986.
- [149] L. Pérez-Lombard, J. Ortiz, and C. Pout. A review on buildings energy consumption information. *Energy and Buildings*, 40(3) :394–398, 2008.
- [150] S. Privara, J. Siroky, L. Ferkl, and J. Cigler. Model predictive control of a building heating system : The first experience. *Energy and Buildings*, 43(2-3) :564–572, 2011.

- [151] A. I. Propoi. Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems. *Automation and Remote Control*, 24(7) :837–844, 1963.
- [152] S. J. Qin and T. A. Badgwell. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, 11(7) :733–764, 2003.
- [153] R. L. Raffard, C. J. Tomlin, and S. P. Boyd. Distributed optimization for cooperative agents : Application to formation flight. In *Conference on Decision and Control*, pages 2453–2459, Dec. 2004.
- [154] Y. Raffenel, E. Blanco, J. Virgone, P. Neveux, G. Scorletti, and G. Thomas. Reducing the energy consumption of space heating in buildings : Design of an optimal controller. In *IFAC World Congress*, pages 11098–11105, Jul. 2008.
- [155] D. M. Raimondo, L. Magni, and R. Scattolini. Decentralized MPC of nonlinear systems : An input-to-state stability approach. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 17(17) :1651–1667, 2007.
- [156] L. R. Randy and S. E. Haupt. *Practical Genetic Algorithms. Second Edition*. John Wiley & Sons, 2004.
- [157] A. Rantzer. On prize mechanisms in linear quadratic team theory. In *Conference on Decision and Control*, pages 1112–1116, Dec. 2007.
- [158] A. Rantzer. Dynamic dual decomposition for distributed control. In *American Control Conference*, pages 884–888, Jun. 2009.
- [159] C. V. Rao and J. B. Rawlings. Linear programming and model predictive control. *Journal of Process Control*, 10(2-3) :283–289, 2000.
- [160] J. B. Rawlings and B. T. Stewart. Coordinating multiple optimization-based controllers : New opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, 18(9) :839–845, 2008.
- [161] P. O. Readio, P. G. Schwendinger, and A. J. Hulse. Method and apparatus for controlling a multi-source heating system. US Patent 0118933, 2005.
- [162] R. Riadi, R. Tawegoum, A. Rachid, and G. Chassériaux. Centralized & decentralized temperature generalized predictive control of a passive-HVAC process. In *IFAC World Congress*, pages 10869–10874, Jul. 2008.
- [163] A. Richards and J. How. A decentralized algorithm for robust constrained model predictive control. In *American Control Conference*, pages 4261–4266, Jun. 2004.
- [164] G. J. Ríos-Moreno, M. Trejo-Perea, R. Castañeda-Miranda, V. M. Hernández-Guzmán, and G. Herrera-Ruiz. Modelling temperature in intelligent buildings by means of autoregressive models. *Automation in Construction*, 16(5) :713–722, 2007.
- [165] J. A. Rossiter. *Model based predictive control. A practical approach*. CRC Press LLC, 2003.
- [166] R. Scattolini. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control - a review. *Journal of Process Control*, 19(5) :723–731, 2009.

- [167] H. Scheu, J. Busch, and W. Marquardt. Nonlinear distributed dynamic optimization based on first order sensitivities. In *American Control Conference*, pages 1574–1579, Jun. 2010.
- [168] J. Singh, N. Singh, and J. K. Sharma. Fuzzy modeling and control of HVAC systems - a review. *Journal of Scientific & Industrial Research*, 65(6) :470–476, 2006.
- [169] A. T. P. So, W. L. Chan, T. T. Chow, and W. L. Tse. New HVAC control by system identification. *Building and Environment*, 30(3) :349–357, 1995.
- [170] M. Soroush and H. M. Soroush. *Nonlinear predictive control : theory and practice*, chapter Long-prediction-horizon non-linear model predictive control, pages 189–199. The Institution of Engineering and Technology, 2001.
- [171] J. M. Sousa, R. Babuika, and H. B. Verbruggen. Fuzzy predictive control applied to an air-conditioning system. *Control Engineering Practice*, 5(10) :1395–1406, 1997.
- [172] E. Sowell. *Simulation problem analysis research kernel*. Lawrence Berkeley National Laboratory Simulation Research Group and Ayres Sowell Associates, 1997.
- [173] S. Soyguder, M. Karakose, and H. Alli. Design and simulation of self-tuning PID-type fuzzy adaptive control for an expert HVAC system. *Expert Systems with Applications*, 36(3) :4566–4573, 2009.
- [174] B. T. Stewart, J. B. Rawlings, and S. J. Wright. Hierarchical cooperative distributed model predictive control. In *American Control Conference*, pages 3963–3968, Jun. 2010.
- [175] C. N. Stoica. *Robustification de lois de commande prédictives multivariables*. PhD thesis, SUPELEC, 2008.
- [176] B. Tashtoush, M. Molhim, and M. Al-Rousan. Dynamic model of an HVAC system for control analysis. *Energy*, 30(10) :1729–1745, 2005.
- [177] M. Terziyska, Y. Todorov, and M. Petrov. Adaptive supervisory tuning of nonlinear model predictive controller for a heat exchanger. In *Energy saving control in plants and buildings*, pages 93–98, Oct. 2006.
- [178] P. T. Thach and K. Hiroshi. A generalized Dantzig-Wolfe decomposition principle for a class of nonconvex programming problems. *Mathematical Programming*, 62(2) :239 – 260, 1993.
- [179] R. Thompson and A. Dexter. A fuzzy decision-making approach to temperature control in air-conditioning systems. *Control Engineering Practice*, 13(6) :689–698, 2005.
- [180] M. Vaccarini, S. Longhi, and M. R. Katebi. Unconstrained networked decentralized model predictive control. *Journal of Process Control*, 19(2) :328–339, 2009.
- [181] M. Vallon. *Modélisation hygro-thermo-aéraulique des bâtiments multizones : proposition d’une stratégie de résolution du système couple*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 1999.

- [182] A. N. Venkat. *Distributed Model Predictive Control : Theory and Applications*. PhD thesis, University of Wisconsin-Madison, 2006.
- [183] A. N. Venkat, I. A. Hiskens, J. B. Rawlings, and S. J. Wright. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 16(6) :1192–1206, 2008.
- [184] A. N. Venkat, J. B. Rawlings, and S. J. Wright. Stability and optimality of distributed model predictive control. In *Conference on Decision and Control and European Control Conference*, pages 6680–6685, Dec. 2005.
- [185] J. C. Visier and C. Bicard. Pratique de l’intermittence du chauffage dans les locaux à occupation discontinue. Technical report, CSTB, 1988.
- [186] D. Wang, C. C. Federspiel, and F. Rubinstein. Modeling occupancy in single person offices. *Energy and Buildings*, 37(2) :121–126, 2005.
- [187] L. Wang. *Model Predictive Control System Design and Implementation Using MATLAB*. Springer, 2009.
- [188] S. Wang and E. J. Davison. On the stabilisation of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18(5) :473–478, 1973.
- [189] M. Xu and S. Li. Practical generalized predictive control with decentralized identification approach to HVAC systems. *Energy Conversion and Management*, 48(1) :292–299, 2007.
- [190] Y. Yan, J. Zhou, Y. Lin, W. Yang, P. Wang, and G. Zhang. Adaptive optimal control model for building cooling and heating sources. *Energy and Buildings*, 40(8) :1394–1401, 2008.
- [191] I-H. Yang, M-S. Yeo, and K-W. Kim. Application of artificial neural network to predict the optimal start time for heating system in building. *Energy Conversion and Management*, 44(17) :2791–2809, 2003.
- [192] Z. Yu, Y. Zhou, and A. Dexter. Hierarchical fuzzy rule-based control of renewable energy building systems. In *CISBAT, Renewables in a changing climate - Innovation in the Built Environment*, Sep. 2007.
- [193] L. Zadeh and B. Whalen. On optimal control and linear programming. *IRE Transactions on Automatic Control*, 7(4) :45 – 46, 1962.
- [194] M. Zaheer-uddin and N. Tudoroiu. Neuro-PID tracking control of a discharge air temperature system. *Energy Conversion and Management*, 45(15-16) :2405–2415, 2004.
- [195] Y. Zhang and S. Li. Networked model predictive control based on neighbourhood optimization for serially connected large-scale systems. *Journal of Process Control*, 17(1) :37–50, 2007.
- [196] Y. Zheng, S. Li, and X. Wang. Distributed model predictive control for plant-wide hot-rolled strip laminar cooling process. *Journal of Process Control*, 19(9) :1427–1437, 2009.

- [197] J. B. Ziegler and N. B. Nichols. Optimum settings for automatic controllers. *ASME Transactions*, 64 :759–768, 1942.

Titre : Commande prédictive distribuée. Approches appliquées à la régulation thermique des bâtiments

Les exigences croissantes sur l'efficacité énergétique des bâtiments, l'évolution du marché énergétique, le développement technique récent ainsi que les particularités du poste de chauffage ont fait du MPC le meilleur candidat pour la régulation thermique des bâtiments à occupation intermittente. Cette thèse présente une méthodologie basée sur la commande prédictive distribuée visant un compromis entre l'optimalité, la simplicité et la flexibilité de l'implantation de la solution proposée. Le développement de l'approche est progressif : à partir du cas d'une seule zone, la démarche est ensuite étendue au cas multizone et / ou multisource, avec la prise en compte des couplages thermiques entre les zones adjacentes. Après une formulation quadratique du critère MPC pour mieux satisfaire les objectifs économiques du contrôle, la formulation linéaire est retenue. Pour répartir la charge de calcul, des méthodes de décomposition linéaire (comme Dantzig-Wolfe et Benders) sont employées. L'efficacité des algorithmes distribués proposés est illustrée par diverses simulations.

Mots clés : Commande Prédictive, Commande distribuée, Systèmes de grande taille, Méthodes de Décomposition Linéaires, Systèmes de Chauffage des Bâtiments, Économie d'énergie.

Title : Distributed model predictive control. Approaches applied to building temperature regulation

The increasing requirements on energy efficiency of buildings, the evolution of the energy market, the technical developments and the characteristics of the heating systems made of MPC the best candidate for thermal control of intermittently occupied buildings. This thesis presents a methodology based on distributed model predictive control, aiming a compromise between optimality, on the one hand, and simplicity and flexibility of the implementation of the proposed solution, on the other hand. The development of the approach is gradually. The mono-zone case is initially considered, then the basic ideas of the solution are extended to the multi-zone and / or multi-source case, including the thermal coupling between adjacent zones. Firstly we consider the quadratic formulation of the MPC cost function, then we pass towards a linear criterion, in order to better satisfy the economic control objectives. Thus, linear decomposition methods (such as Dantzig-Wolfe and Benders) represent the mathematical tools used to distribute the computational charge among the local controllers. The efficiency of the distributed algorithms is illustrated by simulations.

Keywords : Model Predictive Control, Distributed Control, Large-scale Systems, Linear Decomposition Methods, Building Heating Systems, Energy Saving.