UNIVERSITÉ DE NANTES

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année : 2007

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE NANTES

Spécialité : AUTOMATIQUE, ROBOTIQUE ET TRAITEMENT DU SIGNAL

Présentée et soutenue publiquement par :

Mathieu POREZ

19 Septembre 2007
à l'École des Mines de Nantes

TITRE

Modèle dynamique analytique de la nage tridimensionnelle anguilliforme pour la robotique.

JURY

Président	M. TUCSNAK	*Professeur, Université Henri Poincaré de Nancy 1*
Rapporteurs	G.-H. COTTET	*Professeur, Université Joseph Fourier de Grenoble*
	A.J. IJSPEERT	*Professeur Assistant, École Polytechnique Fédérale de Lausanne*
Examinateurs	M. ALAMIR	*Chargé de recherche CNRS, Gipsa-Lab de Grenoble*
	F. BOYER	*Maître Assistant, École des Mines de Nantes*
	M. GAUTIER	*Professeur, Université de Nantes*

Directeur de thèse : Frédéric BOYER
Laboratoire : IRCCyN
Composante de rattachement du directeur de thèse : L'École des Mines de Nantes

N° ED : 0366-317

Remerciements.

Ces travaux de thèse ont été réalisés à l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes (I.R.C.Cy.N.) dirigé par monsieur Jean-François Lafay au sein de l'équipe Robotique. Cette thèse a été financée par l'Ecole des Mines de Nantes.

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse monsieur Frédéric Boyer, maitre assistant à l'Ecole des Mines de Nantes (E.M.N.), pour son encadrement et son aide. Je lui suis tout particulièrement reconnaissant pour sa disponibilité et son investissement scientifique et pédagogique à l'élaboration de ce travail.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de juger ce travail de doctorat :

Monsieur Marius Tucsnak, professeur à l'université Henri Poincaré de Nancy, d'avoir accepté la présidence du jury de cette thèse.

Messieurs les rapporteurs : Georges-Henri Cottet, professeur à l'université Joseph Fourier de Grenoble et Auke Jan Ijspeert professeur assistant à Ecole Polytechnique de Lausanne, d'avoir évalué le contenu scientifique de ce manuscrit et d'y avoir porté un grand intérêt.

Monsieur Mazen Alamir, chargé de recherche C.N.R.S. au Laboratoire GIPSA-LAB de Grenoble, d'avoir accepté d'être membre de ce jury. Je le remercie sincèrement pour les contacts enrichissants échangés en 4 ans.

Monsieur Maxime Gautier, professeur à l'université de Nantes, de m'avoir fait l'honneur de sa présence à ce jury.

J'aimerais remercier aussi tous les membres de l'équipe Robotique de IRCCyN dirigée par madame Christine Chevallereau et tout particulièrement Monsieur Wisama Khalil, professeur à l'Ecole Centrale de Nantes (E.C.N.), pour avoir accepté la direction de ma thèse durant les deux premières années, ainsi que monsieur Philippe Lemoine, ingénieur

de recherche C.N.R.S., pour son écoute et ses conseils avisés.

Je tiens à remercier monsieur Alban Leroyer, maitre de conférence à l'E.C.N., pour sa collaboration à ces travaux et pour les longues discutions que nous avons eu et que nous aurons encore au sujet de "Elongated Body Theory" de Sir James Lighthill.

Je remercie sincèrement messieurs Matthieu Schuler et Philippe Chevrel, respectivement directeur adjoint et professeur à l'E.M.N., pour m'avoir fait confiance pendant 2 ans en me proposant un poste d'A.T.E.R..

Je me dois également de remercier les membres du Département Automatique et Productique de l'E.M.N. pour leur accueil et tout particulièrement, Messieurs Michael Canu, Fabien Claveau, Cedric Dumas et Mohamed Yagoubi ainsi que Madame Anita Niebroj pour sa disponibilité et sa gentillesse.

Je remercie très sincèrement l'ensemble des doctorants de l'IRCCyN : Dhalila et Julien pour l'ambiance chaleureuse au sein du bureau "420" ; Vincent et Guillaume pour les discutions animées "aux pauses café" ; Alexandre pour son humour raffiné ; Nicolas, David et Alexis.

Je ne saurais terminer en exprimant toute mon affection à ma famille, en particulier à ma mère et Bernard, mon beau-père pour m'avoir encouragé tout au long de mon cursus scolaire ; Estelle, ma compagne pour m'avoir soutenu pendant ces quatres années et Clément mon petit amour pour ses pleurs durant la rédaction.

Table des matières

1 Introduction générale. 1

1.1 Contexte du travail : "*vers une robotique biomimétique...*" 1
1.2 La robotique sous-marine biomimétique. 2
1.3 Le prototype : *robot anguille*. 6
1.4 La nage des poissons. 8
1.5 Les modèles numériques de la nage. 13
1.6 "Elongated Body Theory" de J. Lighthill. 14
1.7 La théorie des poutres Cosserat. 16
1.8 Organisation du document. 17

2 La mécanique des fluides parfaits. 19

2.1 Introduction. 19
2.2 La loi fondamentale de la dynamique des fluides. 20
2.2.1 La forme intégrale. 20
2.2.2 La forme locale. 21
2.3 La loi de conservation de la masse. 22
2.4 Les équations du mouvement de Navier-Stokes à Euler. 23
2.4.1 La loi de comportement des fluides Newtoniens. 23
2.4.2 Les équations des fluides de Navier-Stokes incompressibles. 24
2.4.3 Les équations des fluides parfaits incompressibles. 25
2.4.4 La réversibilité. 26
2.5 La vorticité et la circulation. 26
2.5.1 La circulation. 26
2.5.2 La vorticité. 27
2.5.3 La notion de vortex. 27
2.5.4 Les mouvements irrotationnels. 31
2.6 L'équation de Bernoulli. 33
2.7 La formulation d'un problème d'écoulement potentiel. 33
2.7.1 Les conditions aux limites sur un corps solide. 34
2.7.2 Les conditions aux limites à l'infini. 34

2.8 Résolution d'un problème d'écoulement en fluide parfait autour d'un corps solide. . . . 34
2.8.1 Les fonctions de Green. . . . 35
2.8.2 Les intégrales de frontières. . . . 36
2.8.3 Éléments pour une méthode de résolution. . . . 39
2.9 Les solutions élémentaires ou singularités. . . . 40
2.9.1 La source. . . . 41
2.9.2 Le doublet. . . . 42
2.9.3 Le point de vortex. . . . 43
2.10 Les distributions de solutions élémentaires. . . . 44
2.10.1 La distribution de sources. . . . 44
2.10.2 La distribution de doublets. . . . 45
2.10.3 La distribution de vortex. . . . 47
2.11 La portance et la condition de Kutta-Joukowski. . . . 48
2.11.1 Les forces hydrodynamiques et la portance. . . . 49
2.11.2 La condition de Kutta. . . . 49
2.11.3 Les conséquences de la condition de Kutta sur les distributions de singularités. . . . 51
2.12 Conclusion. . . . 53

3 Étude qualitative de la nage anguilliforme. 55
3.1 Introduction. . . . 55
3.2 La technique des panneaux. . . . 57
3.2.1 La discrétisation du corps et du sillage. . . . 57
3.2.2 La discrétisation des équations. . . . 58
3.2.3 La convection du sillage. . . . 60
3.3 L'élément "Lumped Vortex". . . . 61
3.3.1 L'écoulement autour d'un profil d'aile. . . . 62
3.3.2 Le champ de pression autour d'un profil fin. . . . 66
3.3.3 Le "lumped vortex element". . . . 67
3.4 Algorithme numérique bidimensionnel. . . . 68
3.4.1 La discrétisation du corps. . . . 69
3.4.2 La condition de Neumann sur le corps. . . . 70
3.4.3 L'application du principe de conservation de la circulation. . . . 71
3.4.4 Le système linéaire d'équations de l'algorithme 2-D des panneaux. . . . 71
3.4.5 Résolution du système d'équations. . . . 72
3.4.6 La convection du sillage. . . . 72
3.5 L'étude de la nage. . . . 74
3.5.1 Les paramètres de simulation. . . . 74

3.5.2 La nage ondulante en ligne droite. 75
3.5.3 Discussions. 75
3.6 L'anneau de vortex. 81
3.6.1 Le problème tridimensionnel de l'écoulement autour d'une aile. . . . 81
3.6.2 L'élément de vortex. 82
3.7 La méthode numérique des anneaux de vortex. 84
3.7.1 La discrétisation du problème. 84
3.7.2 Le calcul du sillage. 85
3.7.3 La condition de Neumann. 87
3.7.4 La convection du sillage. 87
3.8 L'étude tridimensionnelle de la nage. 88
3.8.1 Les paramètres de la simulation. 88
3.8.2 Simulation de la nage en ligne droite. 89
3.9 Conclusion. 93

4 Modélisation analytique : les travaux de J. Lighthill. 95
4.1 Introduction. 95
4.2 La dynamique des corps rigides immergés dans un fluide parfait. 96
4.3 "Slender Body Theory" (*S.B.T.*). 102
4.4 "Elongated Body Theory" (*E.B.T.*). 106
4.5 Les forces de contact exercées par le sillage sur le corps. 112
4.6 "Large Amplitude Elongated Body Theory" (*L.A.E.B.T.*). 116
4.7 Conclusion. 118

5 Modèle dynamique analytique de la nage anguilliforme tridimensionnelle 121
5.1 Introduction. 121
5.2 Principes géométriques de base. 122
5.2.1 Les espaces. 122
5.2.2 Les flots et transformations du fluide et du corps. 123
5.2.3 Les flots et transformations du volume de contrôle. 124
5.3 Rappels sur la dynamique des fluides. 126
5.4 Réduction des cinématiques. 127
5.4.1 Réduction de la cinématique du corps. 127
5.4.2 Réduction de la cinématique du fluide. 129
5.5 Les cinétiques réduites. 139
5.5.1 Réduction de la cinétique du corps. 139
5.5.2 Réduction de la cinétique du fluide. 140

5.6 Les dérivées temporelles. 143
5.6.1 Définitions des dérivées temporelles. 143
5.7 La dynamique réduite. 146
5.7.1 Les forces d'inertie réduites. 146
5.7.2 Réduction des forces de pression. 147
5.8 Les dynamiques internes réduites. 150
5.8.1 Dynamique générale d'un milieu Cosserat mono-dimensionnel. 150
5.8.2 Dynamique du corps de l'anguille ("dynamique interne"). 152
5.9 Conclusion. 154

6 Essais Numériques. 157
6.1 Introduction. 157
6.2 La cinématique du corps. 160
6.2.1 Le modèle géométrique continu. 161
6.2.2 Modèle cinématique continu des vitesses. 161
6.2.3 Modèle cinématique continu des accélérations. 161
6.3 La dynamique de la tête. 161
6.4 Dynamique interne du corps. 165
6.5 L'algorithme numérique. 167
6.5.1 Première boucle d'intégration spatiale. 167
6.5.2 Deuxième boucle d'intégration spatiale. 168
6.6 Les termes résistifs correctifs. 169
6.7 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes. 171
6.7.1 Présentation. 171
6.7.2 Résolution de la loi de Newton. 173
6.7.3 Étude numérique 175
6.8 Les simulations et comparaisons. 175
6.8.1 Définition de la géométrie de l'anguille. 175
6.8.2 Paramétrage de la tête du poisson. 177
6.8.3 Calibration des coefficients du modèle. 177
6.8.4 Exemples Numériques. 180
6.8.5 Allure 3-D : la manœuvre de spirale ou le virage 3-D. 193
6.9 Conclusion 196

7 Conclusion. 199

A Démonstration de la discontinuité à la traversée d'une distribution de sources. 203

B "Le lumped Vortex". 205

C Le potentiel complexe et les transformations conformes. 207

C.1 Le potentiel complexe. 207

C.2 L'écoulement autour d'un disque. 209

C.2.1 Les conditions aux limites. 209

C.2.2 Le calcul du potentiel complexe. 209

C.3 Les transformations conformes. 211

C.4 L'écoulement autour d'une ellipse en translation rectiligne. 213

C.4.1 Les conditions aux limites. 213

C.4.2 Le calcul du potentiel complexe. 214

C.5 L'écoulement autour d'une ellipse en rotation. 216

C.6 Le tenseur de masse ajoutée de L'ellipse. 220

C.7 L'énergie cinétique du fluide. 220

D Les e.d.o. relatives aux quaternions. 223

Table des figures

1.1 Deux exemples de robots sous-marins de type ROV et AUV. 3
1.2 Le *robot thon* du M.I.T.. 4
1.3 Le *robot anguille* et le *robot salamandre*. 5
1.4 Le *robot ACM6-R5* de l'institue de technologie de Tokyo. 5
1.5 Des photos du prototype *robot anguille*. 6
1.6 La cinématique du robot. 8
1.7 Les morphologies de deux poissons osseux : la truite en haut (de cinématique associée de type "carangiforme") et l'anguille en bas (de cinématique associée de type "anguilliforme"). 9
1.8 Représentations des différentes déformées caractéristiques de la propulsion de type *B.C.F.*. Nous avons rapporté de gauche à droite celles des : anguilliforme, sub-carangiforme, carangiforme, et thunniforme. 11
1.9 Le volume de contrôle de Lighthill. 14

2.1 Le tube de vortex. 28
2.2 Le filament de vortex. 30
2.3 (A) La cinématique rotationnelle ; (B) la cinématique irrotationnelle. . . . 31
2.4 Les différents domaines. 35
2.5 Décomposition de $\mathcal{D}_i$. 39
2.6 La singularité de type source. 41
2.7 Les lignes de courant autour d'une source unitaire. 41
2.8 La singularité de type doublet. 42
2.9 Les lignes de courant autour d'un doublet unitaire orienté selon $\boldsymbol{e}_1$. . . . 42
2.10 La singularité de type point de vortex. 43
2.11 Les lignes de courant autour d'un point de vortex unitaire. 43
2.12 La distribution de sources. 44
2.13 La distribution de doublets. 46
2.14 Chemin d'intégration pour le calcul de la circulation autour de la distribution de doublets. 47
2.15 La distribution de vortex. 47

2.16 Les forces et couples exercés sur un profil 2-D. 49
2.17 Effet de la circulation sur l'écoulement, vu par un observateur se trouvant sur le profil. 50
2.18 Condition de continuité du champ de vecteurs vitesses au bord de fuite. . . 51
2.19 Condition de Kutta. 51

3.1 La nomenclature de la méthode des panneaux. 57
3.2 Discrétisation de la condition de Kutta. 59
3.3 Convection du panneau l appartenant au sillage. 61
3.4 Le paramétrage du profil fin courbé avec un angle attaque α. 62
3.5 L'élément "Lumped Vortex". 68
3.6 La discrétisation du corps et du sillage. 69
3.7 La discrétisation 2-D de la ligne vertébrale de l'anguille. 69
3.8 Schéma intégration par différence centrée 73
3.9 Représentation de l'écoulement du fluide dans le plan de nage entre les instants $t = 2s$ et $t = 2.9s$, où, la ligne noire représente le corps du poisson, les lignes bleus représentent les lignes de courant du champ de vitesse du fluide et les ronds rouges indiquent l'endroit où la vitesse transverse du corps est égale à zéro. 76
3.10 Représentation des sillages : (A) de type "Reverse Karman Street" proposé par Lighthill ; (B) de type double rangés d'anneaux de vortex proposé par U.K. Müller puis E.D. Tytell. 79
3.11 La résolution du problème de l'aile portante par des filaments de vortex. . 81
3.12 L'élément d'anneau de vortex. 82
3.13 Le paramètrage du segment de vortex. 83
3.14 Le paramètrage de l'anneau de vortex. 83
3.15 La discrétisation et la convention de numérotation des éléments et des nœuds du corps. 84
3.16 La discrétisation et la formation de la feuille du sillage. 86
3.17 La géométrie du corps du poisson. 88
3.18 Le corps de l'anguille et le sillage d'anneaux de vortex à $t = 2.55s$. 90
3.19 Coupe de l'écoulement en $x_3 = 0$. 90
3.20 Les écoulements autour des sections transverses du corps de l'anguille. . . . 91
3.21 Lignes brisées des bords verticaux des anneaux de vortex lâchés entre les instants $t = 2.05s$ et $t = 2.125s$. 92
3.22 Représentations des lignes de courant de l'écoulement tridimensionnel autour du poisson : (A) vu par T.Y.T. Wu [126] ; (B) vu par J. Lighthill [69]. 93

4.1 Paramétrage du problème de dynamique. 97

4.2 Paramétrage du problème de la *S.B.T.*. 103
4.3 Paramétrage de l'"*E.B.T.*" de J. Lighthill. 106
4.4 Le volume de contrôle de Lighthill. 113
4.5 Paramétrage de la *L.A.E.B.T.* de J. Lighthill. 116

5.1 Le contexte géométrique. 123
5.2 Représentation de la stratification des différents domaines. 130
5.3 Singularité du changement de coordonnées dans le cas d'une poutre de courbure constante. 131
5.4 Le champ de vecteurs vitesses du fluide ramené sur la configuration de référence du corps. 133
5.5 Approximation de *E.B.T.* en amplitude finie. 138
5.6 Représentation des deux espaces mono-dimensionels des tranches de fluide et des sections de la poutre, l'un glissant relativement sur l'autre. 144

6.1 La peau du robot anguille. 158
6.2 Notations générales relatives à la cinématique du corps. 160
6.3 Résolution de la loi de Newton dans un repère flottant. 173
6.4 Représentation des interactions fluide/structure. 174
6.5 Vue du maillage de 65000 éléments. 175
6.6 Géométrie de l'anguille. 176
6.7 Les trois angles de roulis-tangage-lacet (ϕ, θ, ψ) du repère mobile de la tête $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(0)$ par rapport au repère attaché à la terre. 177
6.8 Évolution du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds locale sur une plaque fine 2-D.$(x = Re_{X_1//}\,;\, y = C_f)$ 178
6.9 Étape d'identification de C_p. 179
6.10 Norme de la résultante $\boldsymbol{p}_b$ et moment $\boldsymbol{\sigma}_b$ cinétiques. 182
6.11 Trajectoire du corps pour l'allure de nage en ligne droite $F1$ $(2.5fps)$. . . . 183
6.12 Décomposition du mouvement de la colonne vertébrale du poisson pour une allure de nage en ligne droite par rapport au repère lié à sa tête. . . . 184
6.13 Tracés des différentes fonctions d'amplitude $f_a(X_1)$ en fonction de la variable d'espace X_1, où les coefficients entre crochets sont $[a_2, a_1, a_0]$. 184
6.14 Comparaison N-S/S-M pour l'allure de nage ondulante en ligne droite $F1$. 186
6.15 Composantes axiales (selon $\boldsymbol{e}_1$) des différents efforts du modèle simplifié pour $F1$ entre $t = 10s$ et $t = 12s$, où C.f. est la force produite par le modèle reactif de la caudale, H.f. est la force produite par le modèle résistif de la tête, B.r.l.f., la force produite par le modèle résistif longitudinale du corps, B.r.t.f., la force produite par le modèle résistif transverse du corps, B.r.f est la composante produite par le modèle réactif du corps, et G.f. est la force globale appliquée sur l'anguille. 187

6.16 Les allures de virage plan $(1f/0.4s)$. 188
6.17 Décomposition du mouvement de l'allure de virage. 189
6.18 Comparaisons N-S/S-M pour l'allure de virage $T1$. 190
6.19 Représentation de l'évolution temporelle pour l'allure $T1$ des différentes contributions au couple de lacet du modèle simplifié analytique, où C.t. est le couple produit par le modèle réactif de la nageoire caudale, H.t. est celui produit par le modèle de la tête, B.r.l.f. est produit par le modèle resistif longitudinale du corps, B.r.t.t. est le couple produit par le modèle résistif transverse du corps, B.r.t. est le couple produit par le modèle réactif du corps, tandis que G.t. est le couple résultant (total) appliqué sur la tête de l'anguille autour de $\boldsymbol{e}_3$. 192
6.20 L'allure de freinage $(2fps)$. 192
6.21 Comparaison des vitesses entre S-M et N-S pour l'allure de freinage. 194
6.22 L'allure de spirale (1f/1.5s). 195
6.23 Composantes de la force $(\boldsymbol{N})$ et du couple $(\boldsymbol{M})$ internes en fonction de la variable d'espace X_1 à $t = 10s$ pour l'allure de spirale. 196
6.24 Évolutions temporelles des composantes du torseur de contact appliqué sur la caudale $\mathbb{F}(1)$ (son opposé), du torseur interne $\mathbb{F}_+$, et de leurs différences $\Delta\mathbb{F} = \mathbb{F}_+ - \mathbb{F}(1)$. 197
6.25 Évolution temporelle de "$\mathcal{V}_1(0)$" et de $\Omega_1(0)$. 198

B.1 Passage de la solution de Glauert au "Lumped Vortex". 205
B.2 Principe de la discrétisation de la solution de Glauert [43]. 206

C.1 Transformation du plan Z vers le plan z 212
C.2 Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en translation selon son grand axe à la vitesse de $V_1 = 1m.s^{-1}$ 214
C.3 Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en translation selon son petit axe à la vitesse de $V_2 = 1m.s^{-1}$ 217
C.4 Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en rotation autour de la normale au plan à la vitesse angulaire $\omega_3 = 1rad.s^{-1}$ 219

Liste des tableaux

3.1 Paramètres de la loi de déformation 3.47. 75

6.1 Définition analytique du corps. 176
6.2 Les paramètres du test de la poutre dans le vide. 182
6.3 Paramètres de l'allure de nage ondulante en ligne droite. (6.57). 184
6.4 Comparaisons N-S/S-M pour les allures de nage ondulante en ligne droite. 185
6.5 Origines des forces de poussée et de traînée pour l'allure "$F1$". 187
6.6 Les trois types de virage (Tip,Tp,Ti). 189
6.7 Paramètres des allures de virage. 190
6.8 Comparaisons N-S/S-M pour toutes les allures de virage. 191
6.9 Paramètres de l'unique allure de freinage "STI". 193
6.10 Comparaison S-M/N-S pour l'allure de freinage. 193
6.11 Les deux phases de la manœuvre de spirale. 194
6.12 Les paramètres de l'allure de spirale. 195

Chapitre 1

Introduction générale.

1.1 Contexte du travail : "*vers une robotique biomimétique...*"

Comparées à nos robots sous-marins, les aptitudes locomotrices des animaux aquatiques font rêver. Ainsi dans les années 1930, le biologiste J. Gray (cf. [45]), s'intéressant aux performances hydrodynamiques du dauphin, calcula la puissance consommée par cet animal pour contrecarrer les forces de traînée s'opposant à son avance. Supposant l'animal rigide, tracté à une vitesse de $35Km.h^{-1}$ et doté d'une puissance spécifique musculaire de l'ordre de celle de l'homme (16.6W par Kg de muscle), il parvint, après calculs, à la conclusion paradoxale que le dauphin devait avoir une masse musculaire sept fois supérieur "à la normale". Cette contradiction, observée avec la réalité, est restée connue sous le nom de "paradoxe de Gray". Bien que surestimé, ce rendement "anormalement" élevé a suscité l'intérêt croissant des ingénieurs pour la nage des poissons. Qui plus est, les chercheurs (cf. [113]) ont observé qu'outre leurs rendements impressionnants, certains poissons pouvaient nager à près de 40 nœuds nautiques et atteindre des accélérations de 5 fois la gravité terrestre. Quant à leur manœuvrabilité, cette dernière n'est pas en reste. En effet, certains poissons tels le thon peuvent inverser leur direction de nage sans perdre de vitesse et ce sur un rayon de courbure de l'ordre de 10 à 30% de la longueur de leur corps, tandis qu'en comparaison, un bateau se doit, pour sa part, de réduire sa vitesse de 50% pour virer sur un rayon de 1 à 3 fois sa longueur. De toutes ces remarques, il résulte que les chercheurs en Robotique s'intéressent aujourd'hui activement à s'inspirer de ces animaux afin d'imaginer, concevoir et fabriquer les robots sous-marins de la prochaine génération ([24]). Ce paradigme prometteur est appelé "biomimétisme" et ses origine et motivation peuvent être résumées comme suit. Le rêve de la Robotique depuis ses origines dans les années 60 est sans conteste celui de réaliser la machine autonome, c'est-à-dire une machine apte à percevoir, interpréter, décider et agir sur son environnement de manière adaptée sans interventions d'une volonté (humaine) extérieure. Pour atteindre cet horizon,

la Robotique s'est engagée très tôt dans le paradigme de l'Intelligence Artificielle. Par "autonomie", on entendait alors "intelligence", et le modèle vivant source d'inspiration était celui du "cerveau humain" conçu comme une machine cognitive. Si ce paradigme a donné des résultats, force est de constater qu'autour des années 90, son érosion a contribué à mettre la communauté en crise. Retournant sur ses origines, la Robotique a résumé le bilan de ses 20 premières années de recherche ainsi : "Nous avons réalisé de "gros cerveaux" embarqués sur des machines rudimentaires (au mieux des robots à roues dits "mobiles" ou "non-holonomes") dont les capacités d'autonomie sont très faibles comparées "aux réalisations" les plus simples du vivant". Aussi, la robotique s'est-elle réorientée vers le paradigme biomimétique et cherche aujourd'hui à comprendre la nature afin de la copier au travers de machines plus proches des animaux que de l'homme. En particulier, il est apparu que l'une des raisons essentielles de la supériorité des animaux sur nos robots, réside dans la grande richesse d'interaction des premiers avec leur environnement conjuguée aux facultés d'intégrations et d'apprentissage de leurs systèmes nerveux. Finalement l'objet de la robotique biomimétique est de concevoir et fabriquer des machines inspirées des animaux élémentaires dont les facultés cognitives sont limitées mais dont la "surface d'interaction" avec leur environnement est considérable en comparaison de nos réalisations actuelles. Par interaction, on entend ici celles impliquées par la perception (sensorielle) et l'action (musculaire) de ces "machines vivantes" dans et sur leur environnement. Ainsi l'action se déclinant en "la préhension", et plus essentiellement "la locomotion" qui elle-même se module selon son environnement en "nage", "vol", "marche", "reptation"... la robotique s'appuie-t-elle aujourd'hui fortement sur ces modèles naturels pour concevoir ses robots locomoteurs (cf. [49, 91, 55]). De même, sur le plan de la perception, des sens, tels que le "toucher" ou "l'olfaction", jusqu'alors jugés "frustes" par la Robotique (essentiellement orientée vers la vision et ses fortes implications cognitives) se doivent d'être explorés pour être compris et copiés (cf. [76, 99]). Enfin, l'une des raisons suspectées de la supériorité du vivant sur nos machines réside dans les synergies "action - perception" que les animaux exploitent extensivement pour résoudre les problèmes posés par l'autonomie. Au cœur de cette dernière problématique, on trouve les "modes de perception actifs" tels "l'écholocation" des chauves-souris, "l'électrolocation" des poissons électriques (ANR *RAAMO*)... Ainsi la Robotique s'est mise à imaginer et construire des robots copiant des animaux de toutes sortes au nombre desquels citons : les arthropodes (insectes (mouches [129, 99], libellules [96], fourmis [102], vers [82, 116]) ; crustacés (homards [2]), et autres arachnides ([29])), les poissons (thons [3]), les serpents ([49]) ....

1.2 La robotique sous-marine biomimétique.

Les robots sous-marins actuels sont soit de gros véhicules tels le "R.O.V." MINIROV de la société Seabotix (cf. figure 1.1-(a)), manœuvrant mais hydrodynamiquement peu

efficaces, soit de petits systèmes tels l'"A.U.V." GAVIA de la société Halmynd Island (cf. figure 1.1-(b)), plus efficaces mais peu manœuvrant. Afin de lever ce "verrou technologique", depuis quelques années la communauté roboticienne s'oriente vers des solutions s'inspirant du vivant au vue de concevoir de nouveaux robots sous-marins à la fois autonomes et manoeuvrants (cf. [130]).



(a) Le R.O.V. (Remotely Operated Vehicles) MINIROV de la société Seabotix.

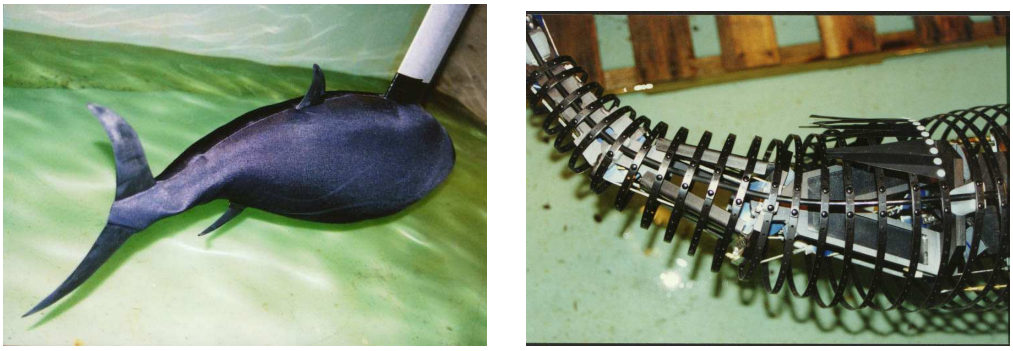


(b) L'A.U.V. (Autonomous Underwater Vehicles) GAVIA de la société Halmynd Island.

FIGURE 1.1 – Deux exemples de robots sous-marins de type ROV et AUV.

Parmi les robots sous-marins bio-inspirés les plus significatifs, nous allons maintenant présenter "*le robot Thon*" du M.I.T., "*le robot anguille*" de Caltech, "*le robot Salamandre*" de l'École Polytechnique de Lausanne ainsi que "*le robot serpent ACM6-R5*" de l'Institut de Technologie de Tokyo, tous ayant été conçus pour des raisons scientifiques différentes.

"Le robot Thon" du M.I.T. : Ce robot est dévolu à l'étude hydrodynamique de la nage du thon (cf. [114, 125, 115, 131]). Il a permis entre autre de mettre en évidence les interactions qu'entretiennent le poisson et le fluide (en particulier dans "le sillage") pour créer de "la poussée". De plus, des simulations numériques couplées à des observations expérimentales ont montré les effets des paramètres relatifs aux lois de commande de la nageoire caudale (inclinaison, période de battement, etc.) sur les performances de la nage. Ce robot est techniquement conçu sur la base d'une transmission par câble reproduisant les muscles de l'animal et mettant en place, sous l'effet d'un seul moteur électrique, les déformations d'une armature composite jouant le rôle des tissus (cf. figure 1.2-(a)). Le tout est recouvert d'une enveloppe en lycra (cf. figure 1.2-(b)) favorisant une répartition homogène des efforts de pression exercés par le fluide sur le corps du robot. Enfin, du point de vue cinématique, la colonne vertébrale de ce robot est constituée de quatre liaisons "pivots colinéaires", montées en "série".

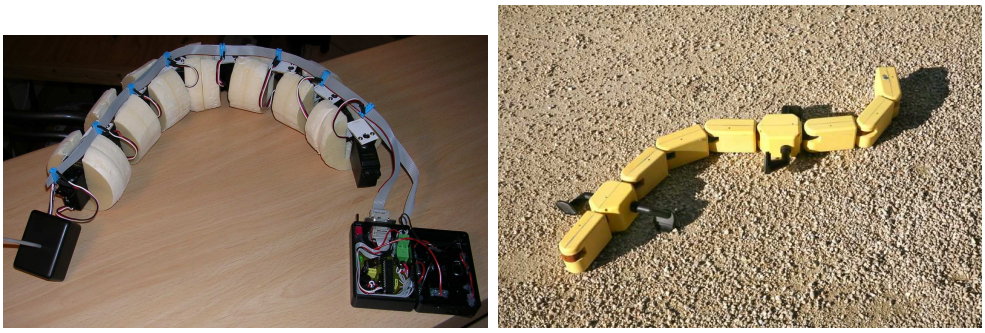


(a) La peau. (b) La mécanique interne.

FIGURE 1.2 – Le *robot thon* du M.I.T..

"Le robot anguille" de Caltech : Contrairement au robot Thon, celui-ci est dédié aux problèmes de l'automatique en robotique. L'idée est ici d'étudier les problèmes de la commande et de la génération de trajectoires d'un robot nageant en surface. Poursuivant la problématique de la locomotion ondulatoire des systèmes dynamiques non-holonomes (type "snake-board), ses concepteurs [80] ont combiné les allures planes de nage observées sur le vivant (telles l'avance ondulante en ligne droite, le virage et la translation latérale) afin d'atteindre leurs objectifs de contrôle. Ces auteurs ont ensuite testé expérimentalement leurs solutions sur le robot anguille "*REEL II*". Ce robot est constitué de cinq segments montés "en série" et liés entre eux par des liaisons "pivots" colinéaires. La motorisation de ces articulations est assurée par quatre servomoteurs (système mécanique constitué d'un moteur, d'un réducteur et d'une carte analogique ou numérique de commande). Malgré le faible nombre de degrés de liberté internes de *REEL II*, ces travaux ont permis de confirmer que le "haut niveau de redondance" de la cinématique interne des anguilles représente un atout majeur en terme de gain de manœuvrabilité. Enfin, un robot similaire a été réalisé par M. Porez et G. Gallot qui, contrairement à celui des chercheurs de Caltech, utilise huit servomoteurs, le rendant plus manœuvrable (cf. figure 1.3).

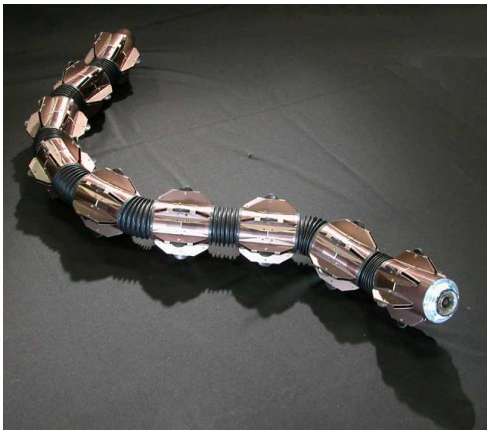
"Le robot salamandre" de l'École Polytechnique de Lausanne : L'intérêt de ce robot réside dans son informatique embarquée qui reproduit in situ le fonctionnement de la moelle épinière d'une salamandre grâce à un réseau de neurones. L'objectif visé au travers de ce prototype est de mieux comprendre le fonctionnement des *C.P.G.* ("Central Pattern Generator" ou générateur de patron) réglant la locomotion des vertébrés et de développer par ce biais de nouveaux robots et de nouvelles technologies de commande capables d'adapter l'agilité d'un robot en fonction des besoins réclamés par son environnement (cf. [52]). Ce robot est toujours de "type sériel". D'architecture modulaire, il a la particularité d'être équipé d'appendices jouant les rôles de "pattes", en faisant, ainsi un système locomoteur "bimodale" (ici amphibi).



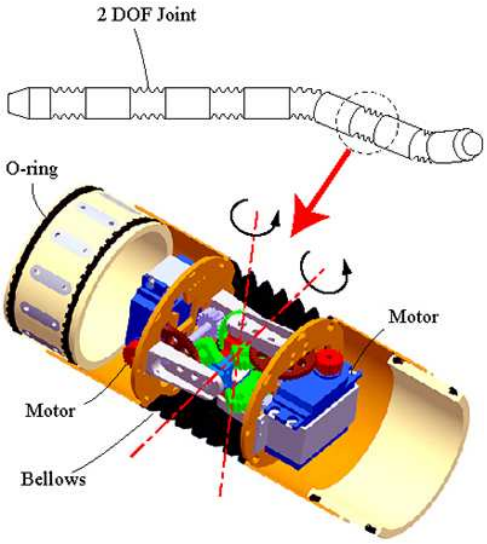
(a) Prototype de robot anguilliforme de M. Porez et G. Gallot.

(b) Le *robot salamandre* de l'école Polytechnique de Lausanne.

FIGURE 1.3 – Le *robot anguille* et le *robot salamandre*.



(a) Le *robot ACM6-R5* dans sa version neuf segments.



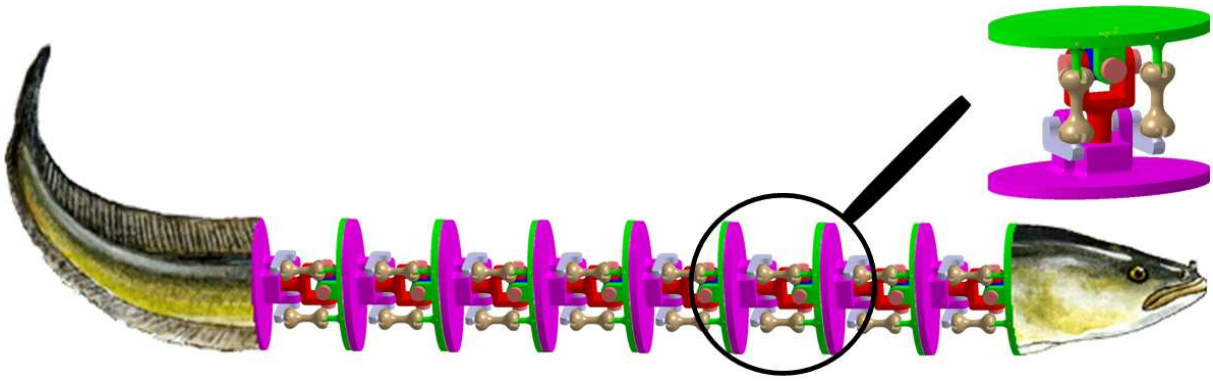
(b) La mécanique interne.

FIGURE 1.4 – Le *robot ACM6-R5* de l'institue de technologie de Tokyo.

"le robot serpent ACM6-R5" de l'Institut de Technologie de Tokyo : Les trois robots que nous venons de présenter sont tous des nageurs de surface ne pouvant effectuer que des lignes droites et des virages dans le plan. L'étude et l'amélioration des facultés de manœuvrabilités des robots poissons nécessitent d'aller plus loin dans la conception mécanique, i.e d'élaborer des cinématiques 3-D. A l'heure actuelle, il n'existe à notre connaissance que deux robots capable de nager en trois dimensions dans un bassin : "le *robot serpent ACM6-R5*" de l'équipe de S. Hirose (l'un des pères fondateurs de la philosophie du biomimétisme) de l'Institut de Technologie de Tokyo (cf. [128]) et notre prototype de robot anguille. Le *robot serpent ACM6-R5* a la capacité de se déplacer sur le sol par "reptation" et dans l'eau par la nage "anguilliforme". Du point de vu de la mécanique, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.4-(a), ce robot est constitué de seize segments cylindriques

liés en "série" par des liaisons "de type cardan", chacune étant motorisée par deux servomoteurs (i.e. actionnant les tangage et lacet, cf. figure 1.4-(b)). De plus, pour augmenter le couple disponible sur chacune des articulations, les ingénieurs concepteurs de ce système ont équipé les servomoteurs d'étages de réduction supplémentaires afin d'obtenir un couple disponible de $9N.m$. L'efficacité hydrodynamique du robot est obtenue par l'intermédiaire de nervures fixées sur les segments (cf. 1.4-(a)). Celles-ci permettent d'augmenter l'appui sur le fluide, comme le font les poissons grâce à leurs nageoires dorsale et ventrale. En dépit d'une conception technologique remarquable, notons que ce robot n'a suscité jusqu'à l'heure aucune étude théorique de la nage orientée vers le contrôle.

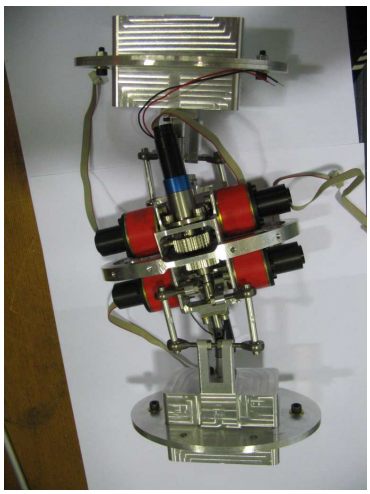
1.3 Le prototype : *robot anguille.*



(a) L'assemblage des vertèbres.



(b) Les 12 vertèbres du *robot anguille.*



(c) La mécanique interne d'une vertèbre.

FIGURE 1.5 – Des photos du prototype *robot anguille.*

Ce robot est en cours de réalisation dans le cadre du projet *"ROBEA Robot Anguille"* soutenu par le *C.N.R.S.*, qui se poursuivra sous la forme du projet *ANR RAAMO*

pour *"Robot Anguille Autonome en Milieux Opaques"*. Ce projet a pour but d'étudier, de concevoir, de réaliser et de commander un robot sous-marin capable de nager "en trois dimensions". Poursuivant une démarche biomimétique, l'animal copié est ici l'anguille. Avec ses 123 vertèbres actionnées en lacet, cet animal réalise l'"optimum" d'agilité retenu par l'évolution naturelle afin d'occuper dans la nature les niches écologiques fortement encombrées telles que les trous de récifs et autres cavités... Cette agilité est en particulier le fruit de son haut degré de redondance interne. A cette fin, notons qu'un robot manipulateur dont la chaîne poly-articulée introduit plus de degrés de liberté que n'en nécessite l'exécution d'une certaine tâche, est dit "cinématiquement redondant" ou plus simplement "redondant" par rapport à cette tâche. Dans le domaine de la conception robotique, cette propriété de "redondance" a été très tôt identifiée comme un moyen essentiel pour améliorer la dextérité de manipulation des robots dans des environnements fortement encombrés (cf. [22]). L'excès de degrés de liberté de la chaîne par rapport aux dimensions de la tâche (par exemples les six dimensions réclamées par le mouvement d'un corps rigide dans l'espace) est appelé "degré de redondance". Lorsque ce degré est élevé, voir "très élevé", on parle alors de "robots hyper-redondants ". Toujours dans le domaine de la manipulation, les "robots hyper-redondants" sont souvent des mécanismes reproduisant des "trompes d'éléphants" (cf. [46]) et autres "tentacules". Finalement, en substituant à la "manipulation", la "locomotion", la tâche est encore dans ce cas de dimension six, puisqu'il s'agit de mouvoir de manière attendue un corps arbitrairement distingué de la chaîne et jouant dans une approche bio-inspirée le rôle de "la tête" de l'animal copié. Dans ce cas, les robots hyper-redondants de géométrie simple sont en générale de type "serpentiforme". Qui plus est, ce n'est plus la "dextérité" (ou "manipulabilité") qui est visée mais les performances propres à la locomotion que sont : l'efficacité de la propulsion (au sens énergétique) et "l'agilité" (ou "manœuvrabilité"). Ainsi, s'inspirant du haut degré de redondance de la colonne vertébrale de l'anguille, le prototype conçu dans le cadre de notre projet est un ensemble sériel (cf. figure 1.5-(a)) de robots parallèles [83], chacun d'eux introduisant une liaison rotule entre deux plate-formes rigides contiguës (cf. figure 1.5-(b)). Ces liaisons jouent le rôle des "articulations inter-vertèbrales" de l'animal (cf. figure 1.5-(b)). Notons ici que contrairement à l'anguille, notre prototype peut fléchir en tangage (ainsi qu'en lacet) ainsi que se tordre autour de son axe principale. Ce choix "contre-nature" a été adopté afin d'améliorer l'agilité du robot dans les trois dimensions (cf. figure 1.6). Ce squelette actionné, aujourd'hui en phase d'assemblage, sera ensuite recouvert d'une enveloppe flexible jouant le rôle des muscles et de la peau de l'animal. Cette enveloppe devra ainsi garantir la continuité du contact avec le fluide, et ce tout en préservant les ressources énergétiques des actionneurs. Comme nous pouvons le voir sur la figure 1.5-(c), chacune des douze vertèbres est actionnée par trois moteurs (soit trente-six moteurs au total), dont deux, travaillant en parallèle, réalisent les mouvements de propulsion, de lacet et de tangage, tandis que le dernier actionne le roulis. Du point de

vue de l'informatique embarquée, ce robot est équipé d'une carte micro-contrôleur 32 bits de type Power-Pc tous les deux segments (soit au total sept micro-contrôleurs) tandis que la communication inter-segment se fait via deux réseaux multiplexés de type *C.A.N.*[1] véhiculant ainsi les informations provenant de la commande "haut niveau". Finalement, ce robot mesure plus de $2.3m$ et pèse près de $20Kg$ hors de l'eau (et environ $38Kg$ immergé). Enfin, pour améliorer sa manœuvrabilité et sa stabilité (en particulier en roulis), il est prévu de lui ajouter deux appendices jouant le rôle des nageoires pectorales du modèle animal.

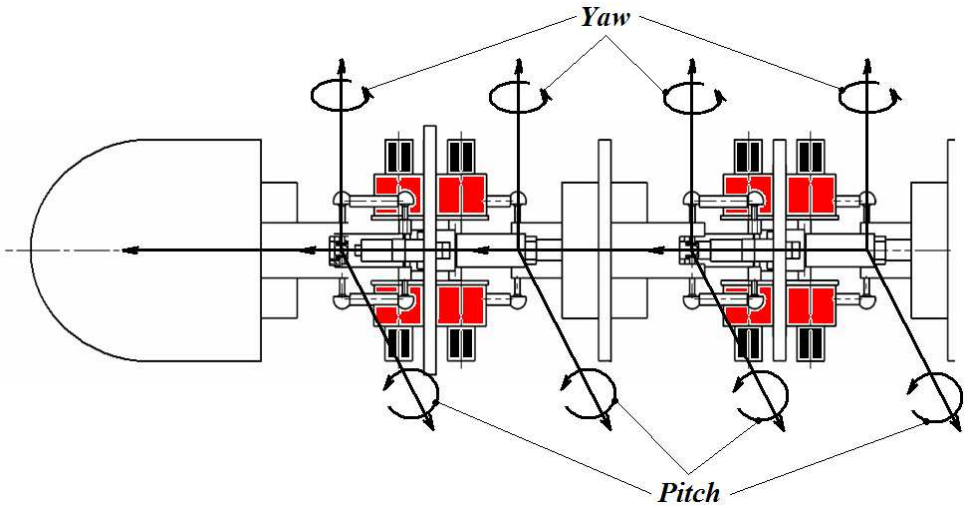


FIGURE 1.6 – La cinématique du robot.

Avant d'entrer dans le vif du sujet de ce travail, consacré à la modélisation de la nage de l'anguille pour la commande, nous allons aborder les grands principes locomoteurs ainsi que la classification qui en découle et l'anatomie associée des poissons.

1.4 La nage des poissons.

Les poissons sont des animaux vertébrés aquatiques pourvus de nageoires et dont le corps est le plus souvent couvert d'écailles permettant de réduire la traînée de l'animal lors de la nage. Jusqu'à présent, on a répertorié plus de 27 300 espèces de poissons, ce qui en fait le plus important groupe de vertébrés terrestres. Nous ne nous intéresserons ici qu'aux poissons téléostéens (ou poissons osseux) comprenant 22 000 espèces, dont l'anguille européenne (*Anguilla Anguilla*). De façon générale, les organes des poissons jouant un rôle dans la nage sont les suivants :

1. *C.A.N. :* Controller Area Network, cf. [92]

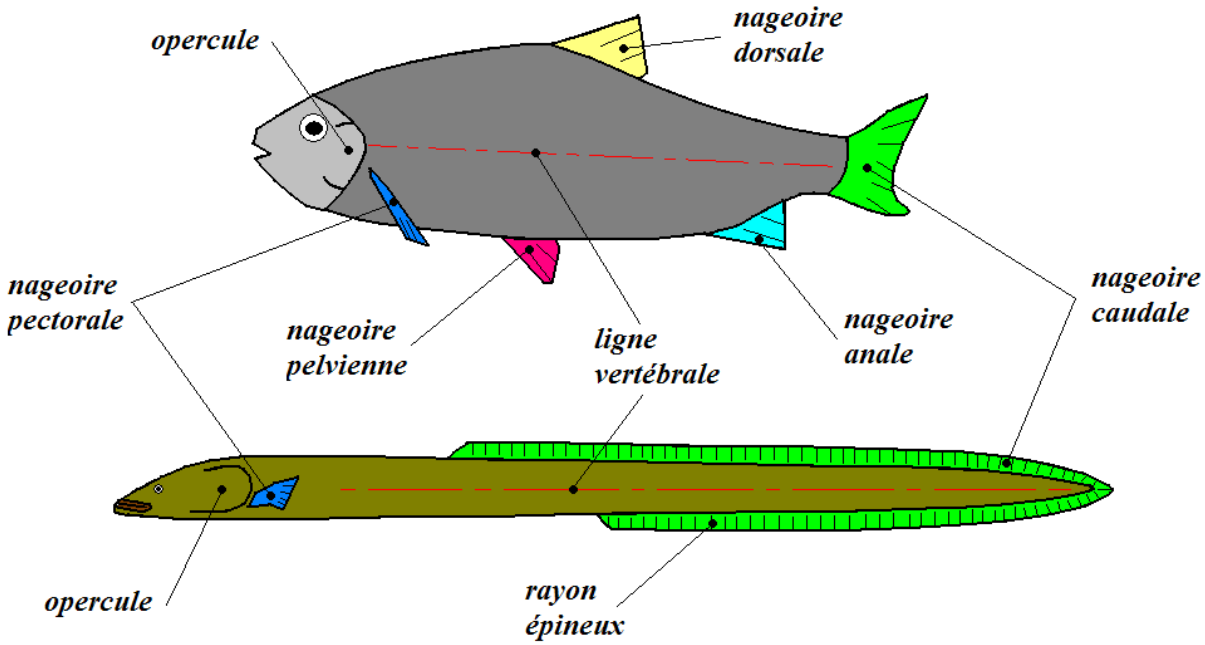


FIGURE 1.7 – Les morphologies de deux poissons osseux : la truite en haut (de cinématique associée de type "carangiforme") et l'anguille en bas (de cinématique associée de type "anguilliforme").

- deux opercules ou plaques osseuses, fermant les ouïes ;
- deux nageoires pectorales correspondant aux membres antérieurs ou supérieurs des vertébrés, et situées de part et d'autre du corps (nageoires paires) et en arrière des opercules ;
- deux nageoires pelviennes (nageoires paires) correspondant aux membres postérieurs ou inférieurs, et situées en-dessous des nageoires pectorales et en avant de l'anus (position souvent appelée abdominale, ventrale ou thoracique) ;
- une nageoire dorsale (nageoire impaire) située sur le dos et souvent seule ;
- une nageoire caudale (nageoire impaire) terminant le corps du poisson, souvent appelée "queue", de forme triangulaire et permettant au poisson de se déplacer ;
- une nageoire anale (nageoire impaire) se trouvant entre l'anus et la nageoire caudale.

Nous avons représenté, sur la figure 1.7, une anguille européenne (*Anguilla Anguilla*) et une truite de mer (*Salmo Trutta Trutta*). Nous pouvons remarquer que le corps de l'anguille est très élancé et que ses nageoires dorsale, caudale et anale n'en forment qu'une contrairement à la truite dont le corps est plus court et haut et dont les nageoires sont bien dissociées. Ces différences morphologiques influent de façon significative sur les aptitudes locomotrices. Ainsi, chez l'anguille, son corps fin lui apportera un gain de manœuvrabilité alors que chez la truite son corps plus ramassé et rigide lui permettra d'atteindre des accélérations et des vitesses plus importantes (cf. [123]). Selon sa morphologie et son

mode de vie, une espèce utilisera un mode de propulsion privilégié. Ce choix se fera selon les trois critères de spécialisation que sont la rapidité, l'endurance et la manœuvrabilité. A partir de ces observations, en 1926, le biologiste C.M. Breder a cherché à classer les poissons, selon leur type de nage (cf. [16, 123, 5, 103]). En premier lieu, il a défini les deux catégories distinctes d'allures que sont :

- périodiques, caractérisées par une répétition cyclique d'un même mouvement de propulsion et utilisées par les poissons pour parcourir de grande distance à une vitesse constante ;
- transitoires, utilisées pour chasser une proie ou pour échapper à un prédateur, et incluant les départs rapides, les virages, et les plongées.

Ces deux grands types d'allures : périodique et transitoire, peuvent en second lieu être sub-divisés selon : "la source de création de poussée" et "le type du mouvement caractéristique" employés. Le premier traduit l'utilisation du corps ou des nageoires pour se propulser tandis que le second est lié au mouvement caractéristique des différents organes (i.e. le corps ou les nageoires) mis en jeu dans la nage. Pour commencer, intéressons-nous à la nage périodique, mode locomoteur le plus utilisé par les poissons téléostéens.

La source de création de poussée : La plupart des poissons se déplacent en contractant alternativement les muscles insérés de chaque côté de leur colonne vertébrale (i.e. les myomères). En fléchissant ainsi leur corps, les poissons créent un mouvement de va-et-vient de leur nageoire caudale, générant une force propulsive les poussant vers l'avant. Ce type de nage, utilisé par l'anguille, est répertorié sous le nom de *B.C.F.* pour "Body Caudal Fin", puisque dans ce cas la poussée est produite par le corps et/ou la nageoire caudale. D'autre poissons ont développé un mécanisme alternatif utilisant les nageoires médianes (i.e. dorsale et anale), pectorales et pelviennes. Ce type de nage est connu sous le terme de *M.P.F.* pour "Médian Paired Fins".

Le mouvement caractéristique : Une fois ces deux modes de propulsion définis (*B.C.F.* et *M.P.F.*), il est d'usage de classifier les nageurs selon le mouvement caractéristique de leur cinématique interne. Ainsi, ce mouvement peut être de deux natures : ondulatoire ou oscillant. Le mouvement ondulatoire traduit la propagation d'une onde rétrograde (par rapport au sens de l'avance) d'une déformation cyclique le long : 1°) de la colonne vertébrale du poisson, dans le cas d'un mode de propulsion de type *B.C.F.* (cas de l'anguille), ou : 2°) le long d'une nageoire, dans le cas d'un mode de propulsion de type *M.P.F.* (cas de la sole commune (*Solea Solea*) dont la nage est souvent qualifiée de "rajiformes"). Enfin, concernant le "mouvement oscillant", il n'y a pas de formation d'onde et l'élément propulsif "bat" de manière stationaire.

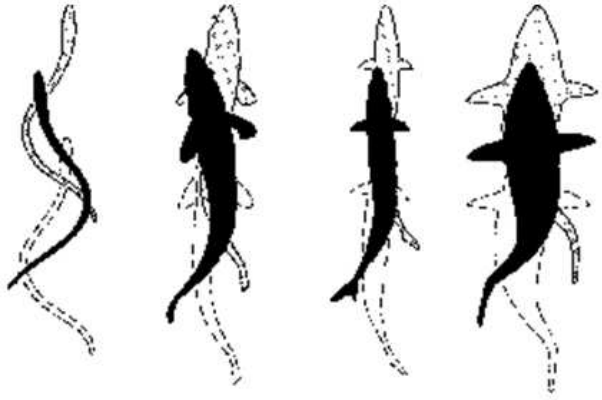


FIGURE 1.8 – Représentations des différentes déformées caractéristiques de la propulsion de type *B.C.F.*. Nous avons rapporté de gauche à droite celles des : anguilliforme, sub-carangiforme, carangiforme, et thunniforme.

Concernant l'anguille, sa nage est répertoriée sous le nom de nage anguilliforme dans le "mode *B.C.F.* ondulant" où l'on trouve également les trois autres nages que sont la nage carangiforme, la sub-carangiforme et la thunniforme. Nous avons représenté sur la figure 1.8, les principes de ces différentes nages caractérisées par des longueurs, des amplitudes et des zones d'ondulation différentes le long du corps. Plus précisément, dans le mode anguilliforme utilisé par l'anguille et la lamproie, environ 80% du corps (cf. [42]) est déformé et participe ainsi à la propulsion. La propagation de cette onde se fait à amplitude croissante, et à chaque instant, une longueur d'onde complète est visible le long de la colonne vertébrale, équilibrant ainsi les forces de pression transverses et minimisant l'effet "de recul" lors d'une période de battement. Ce mode de nage à l'avantage d'être énergétiquement très économique, comme en témoigne les mœurs de ce poisson qui migre sur de très grandes distances sans se nourrir afin de se reproduire. Par exemple l'anguille européenne (*Anguilla Anguilla*) doit parcourir les $5500Km$ séparant l'Europe de la mer des Sargasses au nord-est des Antilles, cf. [119]. Qui plus est, en modifiant la direction de propagation du train d'onde de propulsion, certains nageurs anguilliformes peuvent se déplacer en marche arrière (cf. [27]). Pour ce qui est des sub-carangiformes et carangiformes, en raison de la rigidité de leur corps (importante comparée aux anguilliformes), la zone de propagation de l'onde de propulsion est réduite à la moitié postérieure pour les premiers et au dernier tiers pour les seconds. Ainsi, dans ce cas, la poussée est produite essentiellement par "une nageoire caudale raide" jouant le rôle de "pagaie". Chez ces poissons, par exemple la truite de mer (*Salmo Trutta Trutta*) ou le saumon (*Salmo*), cette rigidité compromet la manœuvrabilité, mais augmente les capacités d'accélération. Enfin, le mode thunniforme, dans lequel l'onde se propage uniquement le long de la nageoire caudale, est le moyen de locomotion aquatique le plus efficace en terme de vitesse pure.

Ici, la poussée est générée par la portance créée par la nageoire caudale. Cette dernière est utilisée comme "une aile d'avion" permettant à ces poissons tels le thon (*Thunnus*) d'atteindre des vitesses de croisière de l'ordre de $10l.s^{-1}$ (où l est la longueur du poisson). Ce type de nage est considéré comme le point culminant dans l'évolution du règne animal.

A présent, intéressons-nous aux allures de nage transitoire que sont le démarrage rapide, le virage et la plongée.

le démarrage rapide : Les performances en terme d'accélération des poissons sont impressionnantes. Des accélérations de l'ordre de $40 - 50m.s^{-2}$ ont été enregistrées chez la truite et le thon. L'une des manœuvres associée à cette aptitude est le démarrage rapide, très utile lors de la chasse d'une proie. En accord avec [5], le modèle du démarrage rapide du saumon ou du thon se décompose en trois étapes que sont :

- une phase de préparation : Le poisson incline sa queue jusqu'à former un angle droit entre sa caudale et l'axe principal de son corps, formant ainsi un "L".
- une phase de propulsion violente : La nageoire caudale se détend très rapidement, créant une rotation de la tête et un mouvement d'avance dont l'accélération est très forte.
- l'étape final : Un mouvement de propulsion classique par ondulation de la queue entretient le mouvement d'avance du poisson créé lors de l'étape précédente.

Alternativement, certains poissons ont recours au démarrage en S. Dans cette seconde allure, le corps est fléchi en forme de S, durant la phase de préparation, nécessitant ainsi une plus grande souplesse du poisson.

le virage : Pour tourner ou changer de "cap", un poisson peut utiliser les effets couplés ou non de son corps, de ses nageoires, et voir même de son système respiratoire. En suivant [16], détaillons un peu plus les différentes actions possibles :

- Par contraction des myomères de l'un de ses flans, le poisson fléchie son corps et s'enroule par appui sur le fluide dans un virage (cf. chapitre § 6 et [124]).
- Plusieurs combinaisons de mouvements des nageoires sont possibles pour virer. Par exemple, la mise en opposition (i.e perpendiculaire au corps) de l'une des nageoires pectorales au mouvement du fluide, crée par action/réaction, un couple de lacet. Une autre possibilité est de combiner l'effet "gouvernail" de la nageoire caudale avec celui des muscles du corps.
- Enfin, en agissant sur ses opercules, le poisson peut obstruer l'une de ses branchies de manière à forcer le fluide à passer au travers de son autre ouïe et ainsi produire

un courant le déviant de sa trajectoire.

la plongé : Pour s'élever ou plonger, un poisson utilise les effets cumulés des mouvements de ses nageoires pectorales et de sa "vessie natatoire". Comme les tissus corporels sont plus denses que l'eau, les poissons doivent compenser les effets de la gravité pour éviter de couler. A cette fin, de nombreux téléostéens ont un organe interne appelé "vessie natatoire" dont le rôle est d'ajuster leur flottabilité (en compensant les effets conjugués de la poussée D'Archimède et de la gravité) en réduisant ou augmentant le volume de gaz qu'elle contient. Quand le poisson est en mouvement, l'action en phase de ses deux nageoires pectorales permet de le dévier vers le haut ou vers le bas tandis qu'à l'arrêt, ses nageoires pectorales étant inopérantes, sa vessie natatoire seule lui permet d'assurer cette fonction. Il est important de noter que les nageoires pectorales de l'anguille permettent également d'assurer la stabilisation en roulis du poisson.

1.5 Les modèles numériques de la nage.

Après avoir identifié l'architecture mécanique du robot et les différentes allures de nages des poissons, nous allons à présent nous consacrer à la modélisation pour la commande et la simulation rapides. Ce point, sujet exclusif de ce manuscrit, nous amènera à élaborer des modèles du contact fluide-structure couplés à la mécanique interne du robot suffisamment simples pour être exploités en "temps réel[2]" par son informatique embarquée.

Le calcul des interactions entre un corps déformable et un fluide dans lequel il se déplace, est un problème complexe (i.e avec de nombreux couplages) nécessitant l'intégration des équations de Navier-Stokes et des équations non-linéaires de la dynamique du corps endurant des transformations finies (cf. [18, 74, 64, 32, 65]). Plus précisément, plusieurs solveurs numériques basés sur le modèle du fluide parfait ont été proposés durant cette dernière décennie (cf. [48, 125, 20, 38]). Sous ces restrictions, la propulsion du poisson provient uniquement des échanges de quantités cinétiques entre le fluide et le poisson. En conséquence de quoi, de tels modèles sont appelés "réactifs" par [72], et justifiés par le haut nombre de Reynolds de l'écoulement (de l'ordre de 10^5), qui pour la majeure partie des poissons est atteint en nageant. De plus, un modèle résistif [111] prenant en compte l'effet de la viscosité peut être ajouté à celui purement "réactif", en invoquant la théorie de la couche limite [48] ou plus simplement en introduisant des contributions phénoménologiques de traînée et de frottement basées sur la mécanique expérimentale des fluides [53]. Revenant aux simulateurs réactifs, ils sont essentiellement basés sur la

2. Il ne faut pas confondre ici le terme *"temps réel"* avec celui de *"temps de latence"* garanti par un *O.S.* embarqué pour passer d'une tâche à une autre.

méthode des intégrales de frontières, encore appelée "Panel Method" et développée à l'origine dans le contexte de l'aérodynamique [47]. Néanmoins, malgré leurs caractères simplifiés (fluide compressible, non visqueux...), ces simulateurs demeurent trop consommateurs en temps de calculs au regard de nos objectifs. Qui plus est, à ce jour ces codes résolvent exclusivement la dynamique du fluide excité par le mouvement du corps imposé et issu d'enregistrements d'observation de la nage d'un poisson [125] sans se préoccuper du caractère auto-propulsé propre à la dynamique de la nage. Finalement, poursuivant les travaux originels de [69], ces conditions limites sont utilisées par les auteurs de ces codes pour calculer l'écoulement, le champ de pression, et finalement les forces et couples hydrodynamiques appliqués sur le poisson. Enfin, ces chargements sont utilisés pour déduire les mouvements dits de "Recoil Corrections" qui doivent être appliqués au corps afin de satisfaire les dynamiques latérale et angulaire observées in situ sur les poissons. Dans le travail ici présenté, une telle correction n'est pas nécessaire puisque nous considérons le problème dynamique du robot anguille auto-propulsé. La solution proposée est basée sur la fusion de deux théories : "la théorie du corps fin" ("Slender Body Theory" ou *S.B.T.*) issue de la mécanique des fluides [4] et la théorie des poutres Cosserat ("Cosserat Beam Theory" ou *C.B.T.*) de la mécanique du solide [25]. Puisque ces deux modèles sont utilisés intensivement tout au long de ce travail, nous allons rappeler brièvement les principes de base de chacun d'entre eux. Commençons avec l'"Elongated-Body-Theory" (*E.B.T.*) de J. Lighthill, qui peut être vue comme une application de la *S.B.T.* au problème de la locomotion du poisson.

1.6 "Elongated Body Theory" de J. Lighthill.

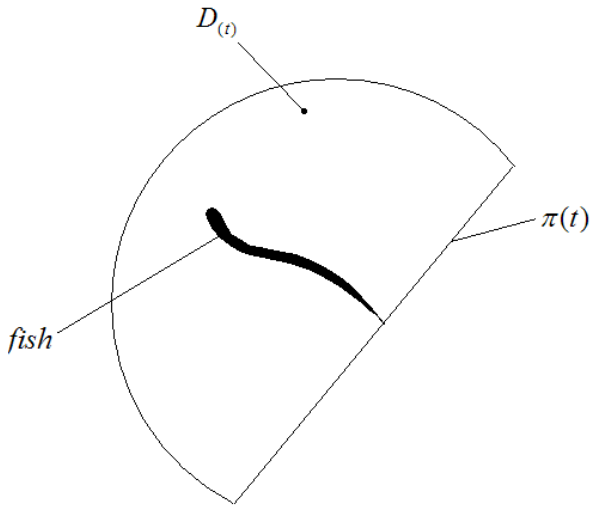


FIGURE 1.9 – Le volume de contrôle de Lighthill.

En matière de modèles analytiques de contact adaptés aux objectifs de la commande,

le modèle de Lighthill apparaît encore aujourd'hui comme une "référence" [69, 70, 71, 72]. Il est basé sur la *S.B.T.*, i.e. une théorie dévolue aux écoulements faiblement perturbés (petits angles d'incidence ou encore "d'attaque[3]", petites oscillations transverses et petites courbures) autour de corps cylindriques élancés (cf. [87]). Dans ce cas, le problème de Neumann de l'écoulement potentiel 3-D autour d'un corps peut être réduit par la superposition "tranche par tranche" d'écoulements plans, transverses à l'axe principal du corps. Ce contexte a été pour la première fois exploité par [69] pour étudier l'efficacité de la nage anguilliforme, simplifiant considérablement la modélisation du contact le long du corps, qui peut être ainsi réalisée analytiquement. Cependant, comme ce modèle convient idéalement à un corps de longueur infinie, les écoulements autour du nez et de la queue se doivent d'être considérés spécifiquement. "Sur le nez", J. Lighthill n'a pas raffiné la *S.B.T.*, tandis qu'au niveau de la nageoire caudale, modélisée par un bord de fuite dit "aigu", une structure rotationnelle prend naissance pour former un sillage. En effet, sur la base d'observations expérimentales de la nage ondulatoire en ligne droite [121], chaque battement de queue du poisson génére une paire de "Starting-Stopping" vortex qui se combine avec les vortex produits par la déformation du corps pour générer dans le sillage du poisson une "allée inverse de Karman" (ou "Reverse Karman street"). Cette structure 3-D du sillage est l'un des sujets électifs de l'intérêt des ingénieurs hydrodynamiciens [114, 115, 131] et bio-mécaniciens [70, 90, 88, 121, 89, 117, 118]... En effet, elle induit par rapport au poisson, un jet rétrograde de fluide, tendant à le propulser (par réaction). Cependant, en regard de nos objectifs de commande, la modélisation de ce sillage fortement rotationnel est aujourd'hui hors d'atteinte. Ainsi, en accord avec le travail de J. Lighthill, nous considérons uniquement la dynamique du fluide inclus dans le volume de contrôle dessiné sur la figure 1.9, où le plan $\pi(t)$ reste orthogonale à la colonne vertébrale du poisson au niveau du bord de fuite de la queue. Ainsi, l'une des idées innovante de la théorie de J. Lighthill est de remplacer la modélisation complexe non-linéaire du sillage par les échanges cinétiques entre ce dernier et le fluide contenu dans le volume contrôle $\mathcal{D}_{(t)}$, où la dynamique du fluide est linéaire (i.e. un écoulement potentiel). Aussi, sur la base d'un bilan d'énergie restreint à $\mathcal{D}_{(t)}$, J. Lighthill fut le premier à proposer une expression analytique de la résultante des forces hydrodynamiques appliquées par le fluide sur un corps élancé soumis à des ondulations planes de petites amplitudes [69] ou "finies" [72]. Néanmoins, ce modèle n'a été utilisé par cet auteur que pour étudier l'efficacité de la nage anguilliforme en ligne droite et non pour en déduire les dynamiques interne et externe du poisson auto-propulsé. Afin de compléter ces manques dans le cas de la nage 3-D, à la suite de [93] et [19], [11] ont récemment proposé de considérer l'anguille comme une poutre non-linéaire soumise à une déformation imposée. En outre, puisque la poutre subit des transformations finies dues à ses mouvements de grande amplitude, il devient

3. L'angle d'attaque est un terme utilisé en aérodynamique pour décrire l'angle entre la corde de l'aile et la direction du flux d'air dans lequel l'aéronef avance.

utile d'invoquer une théorie apte à modéliser les transformations finies rigides telle que celle des milieux Cosserat [25].

1.7 La théorie des poutres Cosserat.

Dans cette théorie, historiquement due à [97] et ensuite développée par J.C. Simo dans le contexte de l'approche géométriquement exacte de la méthode des éléments finis (cf. [104, 107, 108]), la poutre est considérée comme un assemblage continu de sections rigides pouvant être considérées comme les vertèbres d'un animal ou les plate-formes rigides d'un robot anguille. De plus, les transformations finies de $SE(3)$ [4] (et plus particulièrement leurs composantes angulaires) endurées par les sections transverses de la poutre, sont prises en compte dès le départ de la modélisation cinématique du milieu. Un tel choix s'oppose au modèle conventionnel des milieux continus (i.e. non "Cosserat"), où la cinématique des rotations apparaît comme une conséquence de celle des translations. Ainsi, l'utilisation d'une cinématique de poutre Cosserat nous permet de modéliser très simplement la forme du corps, puisque la forme interne de la poutre est entièrement "encodée" dans le champ de déformation (ici le champ de courbure défini par le taux de rotation le long de l'axe principale de la poutre). Qui plus, est un tel champ est exactement l'homologue infinitésimal du vecteur des angles actionnés de tangage et lacet de la cinématique intervertébrale telle que représentée sur la figure 1.6. Ce point de vue est à opposer à celui adopté habituellement en biofluid-dynamics ([93, 19]), où la déformation de la poutre est décrite par le champ de déplacement (plus précisément le champ de déplacement latérale dénoté "h" dans [69]). Par ailleurs, une fois la cinématique fixée (i.e de type Cosserat ou "conventionnelle"), les mouvements finis de la poutre peuvent être modélisés selon deux grandes approches selon que la configuration de référence du mouvement soit galiléenne [105, 106], ou définie par le mouvement rigide d'un corps virtuel suivant le corps réel, en accord avec le point de vue dit du "repère flottant" [17, 9]. Dans le premier cas, les mouvements rigides et les déformations ne sont pas distingués, tandis que dans le second, le champ de déplacement de la déformation est mesuré dans le repère flottant dont le mouvement définit la "référence rigide" du mouvement du corps. Dans le contexte de ce manuscrit, nous utiliserons les deux points de vue (galiléen, et repère flottant) afin d'atteindre nos objectifs. Plus précisément, le point de vue du "repère flottant" sera utilisé afin d'établir la dynamique de la tête de l'anguille sous l'effet des déformations imposées du corps. Dans ce cas, comme dans les travaux relatifs à la locomotion des robots multi-corps [58, 91], cette dynamique (nommée ici "dynamique externe" puisque réglant les mouvements de la tête relativement au référentiel terrestre) est celle d'un système sur un fibré principal. En effet, elle gouverne le mouvement de la tête sur "la fibre" $SE(3)$ tandis que le corps

4. $SE(3)$: Groupe Spéciale Euclidien.

est déformé en imposant aux degrés de libertés internes de se déplacer sur la "variété[5] de base" ou "espace des formes". Cependant, tandis que comme dans le cas des systèmes multi-corps, la fibre de la poutre continûment actionnée est toujours le groupe $SE(3)$, au contraire, son espace des formes internes n'est plus une variété de dimension finie, mais plutôt un espace de courbes dans l'algèbre de Lie $se(3)$ auquel appartient tout champ de courbure imposé le long de la poutre ([11]). En accord avec les travaux de Simo, la dynamique du corps de l'anguille, aussi appelée "dynamique interne", puisque définie par des équations différentielles partielles réglant l'évolution des couples internes responsables de la déformation, sera écrite sur l'espace des positions-orientations des sections transverses de la poutre par rapport au référentiel galiléen, i.e. sur l'espace des courbes dans le groupe de Lie $SE(3)$ [15]. Enfin, à partir de ces considérations géométriques, le travail présenté ici peut être lié à celui de [54, 81], où la nage d'un système plan à trois corps est étudiée dans un fluide parfait.

1.8 Organisation du document.

Ce document s'articule de la manière suivante. Dans le premier chapitre dédié à la dynamique des fluides, nous chercherons dans un premier temps, à établir, à partir des théorèmes généraux de la mécanique des milieux continus, les équations des fluides parfaits incompressibles et irrotationnels. Ensuite, nous présenterons la méthode des intégrales de frontières et les distributions de singularités nécessaires à la résolution de l'équation de Laplace qui règle la cinématique d'un écoulement potentiel. Enfin, nous introduirons certains aspects de la physique des écoulements réels afin de palier les insuffisances des écoulements potentiels. Dans le chapitre suivant (cf. § 3), nous présenterons trois techniques numériques relevant de la méthode des panneaux ou "Panel Method", pour résoudre la solution générale de l'équation de Laplace. La première, utilisant des éléments de type doublet figure ici à titre théorique et ne sera pas exploitée numériquement par la suite. En revanche, les deux méthodes qui suivent, basées respectivement sur les points et anneaux de vortex, seront mises en œuvre numériquement dans le chapitre § 3, pour l'étude de la nage anguilliforme. En particulier, ces simulations seront exploitées afin de mettre à jour les relations cinématiques qu'entretiennent le corps du poisson et le fluide l'environnant. A l'issu de cette étude et des discussions qu'elle motive ; nous opterons pour une modélisation analytique de la nage anguilliforme basée sur la théorie du corps élancé ou "Slender Body Theory" (*S.B.T.*). Aussi, dans le chapitre suivant (cf. § 4), partant des travaux de G. Kirchhoff sur la dynamique des écoulements potentiels et de de ceux M.M. Munk fondateur de la *S.B.T.*, nous exposerons les différentes théories de la locomotion anguilliforme dues à J. Lighthill. Cette étude bibliographique détaillée nous permettra

5. Une variété est un objet géométrique obtenu par recollement d'ouverts d'espaces vectoriels.

d'étendre dans le chapitre § 5, les travaux de J. Lighthill au cas de la nage anguilliforme tridimensionnelle. Cette extension s'appuiera en particulier sur la "cohabitation naturelle" de la *C.B.T.* et de la *S.B.T.* Qui plus est la généralisation de la théorie de Lighthill ne concerne pas seulement le caractère tridimensionnel de la dynamique mise à jour, mais aussi : 1°) son caractère auto-propulsé, 2°) la prise en compte de la dynamique interne de l'animal, 3°) son amélioration par des termes correcteurs de type résistif dont certains pallient les erreurs introduites par la *S.B.T.* aux frontières du corps élancé. Finalement, dans le chapitre § 6, nous extrairons en premier lieu des résultats du chapitre § 5 les dynamiques externe et interne de l'anguille mises en jeux dans un algorithme de simulation rapide dédié à la commande en ligne. La dynamique externe réglera le mouvement de la tête de l'animal tandis que la dynamique interne régira l'évolution des efforts internes transmis par les vertèbres et en particulier, des couples de commande produits par les moteurs. L'algorithme numérique proposé sera finalement éprouvé par comparaison avec un solveur Navier-Stokes et ce pour des allures de nage périodiques et transitoires. Enfin, ce travail s'achèvera par une conclusion générale soulignant les perspectives en matière de modélisation de la nage et de la robotique biomimétique.

Chapitre 2

La mécanique des fluides parfaits.

2.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est d'exposer les différentes théories et hypothèses de la mécanique des fluides qui nous permettront par la suite d'élaborer un modèle de contact applicable à la commande de notre robot biomimétique, i.e. suffisamment simple pour être exploitable de façon distribuée [51] par des "*M.C.U.*[1]" collaborant sur un réseau multiplexé[2], tout en jouissant d'un réalisme compatible avec la robustesse de nos futures lois de commande.

Ce chapitre s'articule de la manière suivante. Dans un premier temps, nous détaillerons les hypothèses qui permettent d'obtenir, à partir des équations de Newton-Euler appliquées à un milieu continu (cf. § 2.2), les équations de la dynamique des fluides de Navier-Stokes incompressibles (cf. § 2.4.2) et celles des fluides parfaits incompressibles (cf. § 2.4.3). Par la suite, nous introduirons les grandeurs cinématiques que sont la "circulation" (cf. § 2.5.1) et la "vorticité" (cf. § 2.5.2). Elles nous conduiront naturellement à définir la notion de "vortex" (cf. § 2.5.3), sur laquelle est fondée notre résolution numérique (cf. § 3). Puis, nous verrons comment établir l'équation de Laplace qui régit la cinématique du fluide (cf. § 2.5.4) et l'équation dite de Bernoulli qui en régit la dynamique (cf. § 2.6). Comme précédemment annoncé, à l'aide des identités de Green, nous verrons comment résoudre l'équation de Laplace par la méthode des intégrales de frontières (cf. § 2.8). La solution obtenue apparaîtra comme paramétrée par une (voir plusieurs) distribution de nouvelles entités que l'on appelle "solutions élémentaires". Ces solutions, ou singularités, seront classées comme c'est l'usage, en trois types que sont : la source, le doublet ou le vortex. Les propriétés de ces différentes singularités et de leurs distribu-

1. *M.C.U.* : MicroController Unit, cf. [57]
2. Ce réseau sera dans notre cas basé sur un protocole de communication série de type *C.A.N.*, cf. [92].

tions surfaciques seront ensuite exposées dans § 2.9 et § 2.10. Enfin, afin de conclure sur ces aspects théoriques relatifs aux fluides parfaits, nous aborderons certains phénomènes liés à la physique des écoulements des fluides réels et exposerons tout particulièrement la condition dite "de Kutta" qui permet de corriger certaines défaillances du fluide parfait dues à l'absence de viscosité (cf. § 2.11).

2.2 La loi fondamentale de la dynamique des fluides.

2.2.1 La forme intégrale.

Soit un fluide en mouvement dans l'espace géométrique ambiant auquel est attaché le repère $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ que l'on suppose galiléen. Considérons le mouvement d'un volume matériel $\mathcal{M}$ de fluide de surface $\partial\mathcal{M}$. Notons respectivement $\mathcal{M}_{(t)}$ et $\partial\mathcal{M}_{(t)}$ les positions à l'instant t de $\mathcal{M}$ et $\partial\mathcal{M}$ ainsi que par ρ_f, la masse volumique du fluide. En accord avec le point de vue eulérien de la mécanique des fluides, si $\boldsymbol{x}$ dénote la position géométrique prise par une particule matérielle de fluide dans le repère galiléen alors, tout champ de tenseurs attaché à l'état mécanique du fluide sera en premier lieu défini comme une fonction de $\boldsymbol{x}$ et du temps t. En particulier le champ de vitesse de l'écoulement est défini comme une fonction de l'espace géométrique dans $\mathbb{R}^3$, i.e. comme une application associant à tout point fixe $\boldsymbol{x}$ le vecteur vitesse $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ de la particule fluide occupant à l'instant courant t cette position. Dans le cas général, ce champ dépend du temps, l'écoulement est dit instationnaire et les lignes de courant, mathématiquement définies à chaque instant comme les lignes intégrales du champ de vitesse dans l'espace, ne coïncident pas avec les trajectoires des particules matérielles du fluide. Enfin, avant d'aborder la dynamique proprement dite, rappelons que toute fonction tensorielle $\boldsymbol{F}$ eulérienne modélisant une grandeur matériellement attachée au fluide voit sa variation par rapport au temps s'écrire comme :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\nabla F}.\boldsymbol{u} \ , \tag{2.1}$$

où $\boldsymbol{\nabla F}$ symbolise le champ de gradient du champ $\boldsymbol{F}$, et "d/dt" signifie que l'on évalue la variation temporelle de $\boldsymbol{F}$ alors que l'"observateur s'écoule" le long du champ de vitesse $\boldsymbol{u}$. Comme dans toute théorie de la mécanique, la dynamique des fluides est fondée sur un principe (lois de Newton, principe des travaux virtuels, principe de moindre action,...). Dans le cas des fluides réels, il est d'usage d'invoquer les lois de Newton se déclinant en "théorème de la résultante dynamique" (dit "de Newton") et "du moment cinétique" (dit "d'Euler"). Dans le contexte qui nous occupe, ces deux théorèmes s'appliquent en premier lieu à un domaine matériel isolé du fluide $\mathcal{M}$. Avant de les rappeler, il nous faut introduire au préalable le tenseur des contraintes (eulérien) de Cauchy que l'on notera $\boldsymbol{s}$ et qui se définit comme (cf. [23]) :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{n}) \;=\; \boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{n}\ , \tag{2.2}$$

où, $\boldsymbol{T}$ est le vecteur-contrainte appliqué par exemple sur la frontière $\partial\mathcal{M}_{(t)}$ en l'un de ses points $\boldsymbol{x}$ en lequel la normale sortante à $\partial\mathcal{M}_{(t)}$ est notée $\boldsymbol{n}$. Par ailleurs, tout élément matériel de fluide peut également être soumis à un champ de force volumique que nous noterons "$\rho_f\mathbf{f}$". Tenant compte de ces définitions dans les deux théorèmes annoncés, on en déduit la forme dite intégrale du principe fondamental de la dynamique pour un milieu continu :

– la loi de bilan de quantité de mouvement,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{M}_{(t)}}\rho_f\boldsymbol{u}d\mathcal{M}_{(t)} = \int_{\partial\mathcal{M}_{(t)}}\boldsymbol{s}.\boldsymbol{n}d\partial\mathcal{M}_{(t)} + \int_{\mathcal{M}_{(t)}}\rho_f\mathbf{f}d\mathcal{M}_{(t)}\ , \tag{2.3}$$

– et la loi de bilan de moment de quantité de mouvement,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{M}_{(t)}}\boldsymbol{x}\times\rho_f\boldsymbol{u}d\mathcal{M}_{(t)} = \int_{\partial\mathcal{M}_{(t)}}\boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{s}.\boldsymbol{n})d\partial\mathcal{M}_{(t)} + \int_{\mathcal{M}_{(t)}}\boldsymbol{x}\times\rho_f\mathbf{f}d\mathcal{M}_{(t)}\ . \tag{2.4}$$

où l'on reconnaît aux membres de gauche les taux de variations temporelles des quantités et moments cinétiques, tandis que les membres de droite correspondent (de gauche à droite) aux résultantes et moments des forces de contact et de volume appliquées à la masse fluide isolée.

2.2.2 La forme locale.

En appliquant le théorème de la divergence (transformation d'une intégrale de surface en intégrale de volume) à l'équation (2.3), on en déduit la forme locale de l'équilibre dynamique :

$$\rho_f\frac{d}{dt}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{s} + \rho_f\mathbf{f}\ , \tag{2.5}$$

fréquemment rencontrée en Mécanique des Milieux Continus sous le nom "d'équations du mouvement" ou "de Cauchy". Si on exclut de représenter les actions à distance par une densité massique de couples (milieu non Cosserat), la forme locale de l'équilibre des moments conduit à imposer la symétrie du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{s}$. Le fluide étant "non-Cosserat", nous nous placerons dans le cas où $\boldsymbol{s}$ est "de facto" symétrique.

Un simple bilan "équations-inconnues" montre que, pour étudier le mouvement d'un milieu continu, le principe fondamental de la dynamique (par exemple sa forme locale)

ne suffit pas. Il faut lui ajouter la loi de conservation de la masse, et celle de comportement définissant la physique du milieu matériel. La première règle la compressibilité de $\mathcal{M}$, par exemple en acoustique, un gaz pourra se comprimer ou se détendre dans l'espace géométrique ambiant (cf. [31]) alors qu'en hydrodynamique, l'eau, milieu naturel de l'anguille, peut être considérée comme incompressible. Cette notion d'incompressibilité a des conséquences mathématiques importantes, puisqu'en imposant à la cinématique de l'écoulement de conserver le volume, elle impose à ρ_f d'être constante en temps et en espace. En ce qui concerne la loi de comportement, elle permet de faire le lien entre les inconnues du mouvement, de déformation et leurs duales caractérisant les efforts internes. Les sections suivantes traitent de ces deux sujets.

2.3 La loi de conservation de la masse.

Le principe de la conservation de la masse traduit le fait que, pour tout domaine matériel $\mathcal{M}$, i.e. constitué des mêmes particules, la masse est une caractéristique invariante de ce domaine, si celui-ci ne contient ni sources, ni puits de production de matière. En d'autres termes, elle ne dépend pas des positions successives $t \mapsto \mathcal{M}_{(t)}$ occupées par $\mathcal{M}$ au cours du temps. Aussi peut on énoncer (cf. [23]) :

"la masse de tout domaine matériel reste constante si on suit ce domaine dans son mouvement".

On pourra donc écrire : $m(\mathcal{M}_{(t)}) = m(\mathcal{M}_{(0)})$ pour tout instant t ultérieur à l'instant initial $t = 0$.

Alternativement, pour tout domaine matériel fixé, cette loi de conservation s'écrit :

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{M}_{(t)}) = 0 \quad \text{, soit :} \quad \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{M}_{(t)}} \rho_f d\mathcal{M}_{(t)} = 0 \ . \tag{2.6}$$

L'égalité (2.6) étant vraie pour tout $\mathcal{M}$, on en déduit la forme dite locale de la conservation de la masse :

$$\frac{d\rho_f}{dt} + \rho_f \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u} \ = \ 0 \ . \tag{2.7}$$

On appelle souvent (2.7) l'équation de continuité. De plus, si le mouvement de $\mathcal{M}$ conserve le volume, il est dit "isochore" et le milieu subissant ce mouvement devient incompressible. Il s'en suit que l'on obtient également :

$$\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u} = 0 \ , \tag{2.8}$$

relation qui exprime que le taux temporel de dilatation volumique du fluide est partout égal à zéro. De manière alternative, (2.8) traduit le caractère solénoïde du champ de vitesse stipulant, que les lignes de courant (i.e. une ligne matérielle où le flux de matière le long de celle-ci reste constant) ne peuvent se terminer dans l'espace ambiant. Au lieu de quoi, ce réseau se doit d'être fermé sur lui-même ou de se terminer sur les frontières de l'écoulement, ou bien encore, s'étendre à l'infini.

On en déduit alors que pour un mouvement isochore :

$$\frac{d\rho_f}{dt} = 0 \ . \tag{2.9}$$

Relation qui ne signifie pas que ρ_f soit une constante en chaque point $\boldsymbol{x}$ et à chaque instant t, mais que ρ_f est une constante lorsque l'on suit une particule dans son mouvement, cette constante pouvant être différente d'une particule à l'autre (par exemple dans le cas d'un milieu diphasique). Pour que ρ_f soit une constante en tout point du domaine étudié et à chaque instant t, il suffit que ρ_f soit constante dans tout ce domaine à un instant t passé. On dira alors que le milieu est incompressible et homogène. Dans la suite, nous nous placerons toujours dans ces conditions. Il nous reste maintenant à définir la physique du fluide.

2.4 Les équations du mouvement de Navier-Stokes à Euler.

2.4.1 La loi de comportement des fluides Newtoniens.

Tout milieu continu a une nature physique différente : élastique, plastique, visco-élastique, etc (cf. [35])... Ces comportements physiques sont représentés par ce que l'on appelle en mécanique des matériaux : une loi de comportement. Elle lie par exemple dans un problème de thermique, le gradient du champ de température inconnu T avec son inconnue duale : le flux de chaleur $\boldsymbol{q}$. La première inconnue en mécanique des matériaux est appelée inconnue fondamentale. Elle est observable ou mesurable. La seconde est appelée inconnue dépendante. Pour un fluide incompressible en écoulement isotherme, la loi de comportement lie la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{s}$ avec le tenseur des vitesses de déformation, encore appelé le tenseur des taux de déformation eulérien $\boldsymbol{D} = 1/2(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$ par l'intermédiaire d'un coefficient appelé viscosité dynamique μ. Ceci met en évidence la dépendance des forces internes

de cisaillement avec la vitesse de déformation. Pour ce type de rhéologie [3], nous pouvons définir deux types de fluide, les fluides newtoniens (loi de comportement de Newton) et les fluides non-newtoniens. La différence entre ces deux modèles se traduit par le caractère constant ou non de la viscosité μ. Dans le cas des fluides newtoniens, μ est constant et la partie déviatorique de $\boldsymbol{s}$ (contraintes de cisaillement) est linéaire par rapport à $\boldsymbol{D}$. C'est le cas de l'eau et des liquides de faibles densités molaires. En ce qui concerne les fluides non-newtoniens, la viscosité dépend de la vitesse de cisaillement (et implicitement du temps), rendant ainsi la loi de comportement non-linéaire (cf. [31]). C'est notamment le cas des polymères. Ici, nous ne nous intéressons qu'aux fluides newtoniens incompressibles et tout particulièrement aux fluides de Navier-Stokes et aux fluides parfaits, la différence entre ces deux concepts résidant dans le modèle de l'état de cisaillement interne. En effet, imaginons deux tranches de fluide glissant l'une sur l'autre. Si le fluide est de type Navier-Stokes, la viscosité de ce dernier fera apparaître des frottements internes entre les tranches modélisées par des contraintes de cisaillement contrairement au fluide parfait où les glissements opèrent sans frotter. Intéressons-nous à présent aux lois de comportement proprement dites associées à ces deux modèles de fluides.

2.4.2 Les équations des fluides de Navier-Stokes incompressibles.

La loi de comportement des fluides de Navier-Stokes incompressibles s'écrira :

$$\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x},t) = -p(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\delta} + 2\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) \ , \tag{2.10}$$

où, p est la pression totale en un point $\boldsymbol{x}$ du domaine de l'écoulement et $\boldsymbol{\delta}$ dénote le tenseur de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

A partir de (2.5) et de (2.10), nous obtenons les équations du mouvement dites de Navier-Stokes :

$$\rho_f \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \rho_f \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p(\boldsymbol{x},t) + 2\boldsymbol{\nabla}.\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) \ . \tag{2.11}$$

Pour étudier l'écoulement d'un tel fluide, par exemple de l'eau autour de l'anguille, nous devrions, en toute rigueur, résoudre le jeu d'équations constitué de celles de Navier-Stokes, complétées de l'équation d'incompressibilité (2.8), i.e. le système :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0 \\ \rho_f \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \rho\boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p(\boldsymbol{x},t) + 2\boldsymbol{\nabla}.\mu\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},t) \end{cases} , \tag{2.12}$$

3. La rhéologie est une partie de la mécanique qui étudie la plasticité, l'élasticité, la viscosité et la fluidité caractéristiques des corps déformables.

auxquelles on ajoute les conditions initiales et "aux limites" du problème. Ici, ces secondes conditions sont dites "adhérentes", du fait que les particules de fluide en contact avec les frontières solides de l'écoulement ont une vitesse nulle, relativement à celles-ci et ce afin d'assurer la continuité de la composante tangentielle de la vitesse à la traversée de ces frontières. Physiquement, ceci se traduira par des interactions moléculaires (échanges cinétiques) entre le fluide et la matière réalisant la frontière (cf. [4]).

2.4.3 Les équations des fluides parfaits incompressibles.

Dans le cas des fluides parfaits, les forces internes produites par la matière fluide sont conservatives et le coefficient de viscosité μ est égal à zéro. Ainsi, de (2.10) on conçoit que le tenseur des contraintes de Cauchy devient sphérique et traduit l'action isotrope de la pression :

$$\boldsymbol{s} = -p\boldsymbol{\delta} \ , \tag{2.13}$$

où, la pression p est dite "totale", puisqu'égale à la somme de la "pression statique" et de la "pression dynamique".

Reconduisant les mêmes simplifications que celles effectuées sur les équations de Navier-Stokes, nous obtenons les équations du mouvement dites d'Euler :

$$\rho_f \frac{d}{dt}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \rho_f \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p \ . \tag{2.14}$$

Ainsi, pour obtenir l'évolution d'un fluide parfait incompressible, nous devons résoudre le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0 \\ \rho_f \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \rho_f \boldsymbol{f} - \boldsymbol{\nabla} p(\boldsymbol{x},t) \end{array} \right. , \tag{2.15}$$

où les conditions aux limites de l'écoulement seront abordées un peu plus tard dans l'exposé.

Il est à noter, qu'en raison des forts nombres de Reynolds mis en jeux par la nage, nous travaillerons par la suite avec ces équations plutôt que celles de Navier-Stokes dont la complexité est telle, que seules des résolutions numériques coûteuses en temps de calculs peuvent les résoudre. Néanmoins, ces équations seront exploitées numériquement comme référence de nos modèles simplifiés.

2.4.4 La réversibilité.

En mécanique des milieux continus (cf. [23]), le tenseur des contraintes de Cauchy $\boldsymbol{s}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{s} \;=\; \boldsymbol{s}^r + \boldsymbol{s}^{ir} \;, \tag{2.16}$$

où, $\boldsymbol{s}^r$ et $\boldsymbol{s}^{ir}$ sont deux tenseurs symétriques qualifiés respectivement de composantes réversible et irréversible de l'état de contrainte. Pour illustrer ceci, nous pouvons prendre comme exemple une barre d'acier en traction avant rupture, auquel cas la partie irréversible de $\boldsymbol{s}$ sera associée à une déformation plastique du matériau, tandis que sa partie réversible le sera à une déformation élastique (cf. [35]).

On dit d'un domaine matériel qu'il est en évolution "réversible" si celle-ci n'implique aucune dissipation d'énergie (au sens du second principe de la thermodynamique). Dans le cas des fluides parfaits, on montre que :

$$\boldsymbol{s} \;=\; \boldsymbol{s}^r = -p\boldsymbol{\delta} \;, \tag{2.17}$$

l'état de contrainte est entièrement réversible. Aussi, si l'on impose une sollicitation mécanique à un tel fluide initialement au repos, celui-ci s'écoulera, tandis qu'une sollicitation opposée permettrait de le ramener dans son état initial. Par la suite, cette remarque sera exploitée pour le calcul numérique de la convection du sillage créé par le poisson et le choix de l'intégrateur numérique associé (cf.[67]).

2.5 La vorticité et la circulation.

Nous allons à présent définir les notions fondamentales que sont la circulation Γ et la vorticité $\boldsymbol{\zeta}$ (cf. [26]), ces deux grandeurs traduisant, dans le contexte de la dynamique des fluides, les notions de "moment cinétique" et de "vitesse angulaire" héritées de la mécanique du solide. On parlera aussi de cinématique "rotationnelle" ou "irrotationnelle". Cette dernière cinématique étant particulièrement adaptée à nos objectifs, puisqu'elle permet de remplacer le système d'équations (2.15) par un système linéaire. Définissons à présent la circulation et la vorticité.

2.5.1 La circulation.

La circulation Γ du champ de vecteurs vitesses $\boldsymbol{u}$ le long d'une courbe matérielle $\mathcal{C}$, de position courante $\mathcal{C}_{(t)}$, s'écrit :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{C}_{(t)}} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)d\mathcal{C}_{(t)} \ , \tag{2.18}$$

si l'on désigne par $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x},t)$ la tangente unitaire à $\mathcal{C}_{(t)}$ en $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}_{(t)}$.

2.5.2 La vorticité.

Si $\mathcal{C}_{(t)}$ est la position courante d'une ligne matérielle fermée $\mathcal{C}$, et $\mathcal{S}_{(t)}$ la surface qu'elle circonscrit, alors il est possible, en vertu du théorème d'intégration de Stokes, de transformer l'intégrale de ligne en intégrale de surface selon [23] :

$$\Gamma = \int_{\mathcal{S}_{(t)}} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t).\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x},t)d\mathcal{S}_{(t)} \ . \tag{2.19}$$

Le champ de vecteurs $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$ est appelé (au coefficient 1/2 près) vorticité ou "vecteur des taux de rotation" et sera noté $\boldsymbol{\zeta}$ dans la suite. Ainsi, la vorticité est égale, au coefficient près, "à la vitesse angulaire d'une particule de fluide" par rapport au référentiel galiléen et se définie donc comme :

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \ . \tag{2.20}$$

2.5.3 La notion de vortex.

Introduisons à présent la notion de "ligne de vortex" à partir de celle du champ de vorticité. Lors de la définition du champ de vitesse du fluide $\boldsymbol{u}$, nous avons introduit la notion de lignes de courant. Pour rappel, ce réseau de lignes est défini comme engendré par les courbes intégrales du champ de vitesse des particules matérielles de fluide. Il existe une notion similaire, dans le cas du champ de vorticité, celle de "ligne de vortex". Une ligne de vortex est définie comme une courbe intégrale du champ $\boldsymbol{\zeta}$, i.e. une courbe dont la tangente en tout point est réalisée par la valeur du champ de vecteurs $\boldsymbol{\zeta}$ au point considéré. Le réseau ainsi créé stratifie à tout instant l'espace en surfaces s'apparentant à des "feuilles" ou des "tubes" dits par conséquent "de vortex". Plus précisément, si les lignes de vortex passent au travers d'une courbe ouverte de l'espace, elles formeront une surface de vortex ou "feuille" (ou "sheet") de vortex, tandis que, si elles passent au travers d'une courbe fermée, elles formeront un "tube de vortex". Il est à noter que ces géométries (feuilles et tubes de vortex) sont de nature matérielle et qu'elles seront par conséquent convectées par le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ du fluide au cours du temps.

La relation entre opérateurs différentiels $\boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}.\boldsymbol{\zeta} = 0$ traduit la conservation du flux du champ de vorticité ou encore de la circulation du champ de vitesse autour d'un

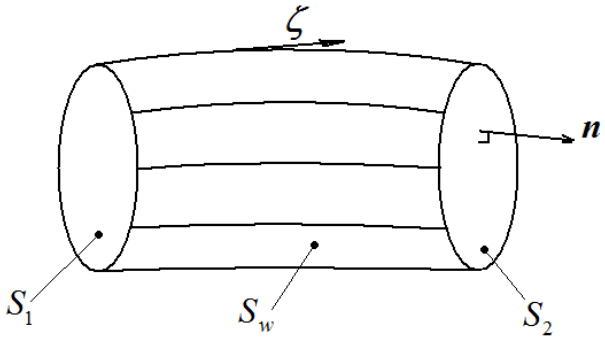


FIGURE 2.1 – Le tube de vortex.

tube de vorticité, lorsque l'on se déplace le long de ce dernier. Qui plus est, ce résultat, purement cinématique, implique que tout comme le champ $\boldsymbol{u}$, le champ $\boldsymbol{\zeta}$ est solénoïde et que par conséquent, les lignes de vortex doivent se refermer sur elles-mêmes, s'étendre à l'infini, ou bien encore, se connecter aux parois solides du problème considéré.

Intéressons nous à présent à l'un de ces tubes de vortex que nous pouvons à chaque instant dessiner dans l'écoulement tel que sur la figure 2.1. En accord avec cette dernière, les lignes de vortex étant parallèles à la surface latérale courante $S_w(t)$ du dit tube, le flux du champ de vorticité au travers de celle-ci est nul et l'on obtient, comme annoncé :

$$\int_{S_{1(t)}} \boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{n}dS_{1(t)} = \int_{S_{2(t)}} \boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{n}dS_{2(t)} = \Gamma(t) \ , \tag{2.21}$$

où $S_{1_{(t)}}$ et $S_{2_{(t)}}$ sont deux sections courantes arbitraires du tube.

Plaçons nous désormais dans le cas asymptotique d'un tube de vortex dont la section est $dS_{(t)}$ (i.e. infinitésimale). Un tel tube définit ce que l'on nomme un "filament de vortex", par exemple d'intensité Γ, auquel l'application de (2.21) donne :

$$\Gamma(t) = \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}, t).\boldsymbol{n}dS_{(t)} \ , \tag{2.22}$$

où $\boldsymbol{n}$, issue du contexte précédent, tend ici de manière asymptotique vers $\boldsymbol{t}$: la tangente au filament. Les propriétés de ces filaments sont consignées dans la "théorie des vortex d'Helmholtz" et peuvent se résumer comme suit :

– l'intensité du filament de vortex, ici définie par la circulation du champ de vitesse de l'écoulement le long de n'importe quel contour enlaçant le filament, est constante sur toute sa longueur ;

- un filament de vortex, géométriquement assimilable à une ligne de vortex, ne peut commencer et se terminer dans le fluide (i.e. $\boldsymbol{\zeta}$ est un champ solenoïde) ;
- tout comme un tube de vortex, un filament est toujours constitué par les mêmes particules matérielles de fluide et son intensité reste constante avec le temps.

La dernière propriété est à l'origine des théorèmes de Stokes et de Kelvin dont le premier s'énonce ainsi (cf. [40]) :

"si les forces massiques dérivent d'un potentiel et si le fluide est incompressible, le champ de vecteurs vorticités $\boldsymbol{\zeta}$ est convecté par l'écoulement",

tandis que le second s'écrit (cf. [40]) :

"si les forces massiques dérivent d'un potentiel, dans tout écoulement d'un fluide parfait incompressible, le flux du champ de vecteurs vorticités à travers une surface que l'on suit dans son mouvement reste constant".

En particulier, pour un écoulement instationnaire (quand $\boldsymbol{u}$ est une fonction du temps), la circulation Γ le long de tout contour matériel fluide que nous suivons dans son mouvement doit rester constante par rapport au temps, soit :

$$\frac{d}{dt}\Gamma = 0 \ . \tag{2.23}$$

Ce théorème n'est autre que le pendant du théorème du moment cinétique du solide rigide. Dans le cas de la nage, où la dépendance du champ de vitesse du fluide avec le temps est évidente, l'écoulement est instationnaire et le théorème de Kelvin doit être vérifié. Aussi, c'est l'application de ce dernier qui nous permettra dans le cas de la modélisation 2-D de la nage de l'anguille (cf. section § 3.4) de fixer les quantités de vorticité à lâcher dans le sillage à chaque instant. Ces quantités seront calculées afin "d'équilibrer" la production de circulation autour du corps de l'animal (même si, comme nous le verrons, cette condition n'est pas toujours suffisante). Pour les poissons, les zones de lâcher de vorticités se situent aux bords de fuite de leurs nageoires. En particulier, chez l'anguille, où les nageoires dorsale, caudale et ventrale n'en forment qu'une, il n'y aura qu'une seule et unique zone de création de sillage, i.e. en arrière du bord de fuite de la caudale. Qui plus est, en raison de la géométrie aiguë de ce dernier, les agglomérats de vorticités continûment lâchés par le poisson seront modélisés par une feuille de vortex.

Intéressons nous au champ de vitesse autour d'un agglomérat $\mathcal{V}$ de vorticités $\boldsymbol{\zeta} : \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{(t)}} \in \mathcal{V}_{(t)} \mapsto \boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{V}_{(t)}})$. En vertu de la loi de Biot-Savart (cf. [67]), cet agglomérat induit en tout point $\boldsymbol{x}$ en dehors de $\mathcal{V}_{(t)}$, le champ de vitesse suivant :

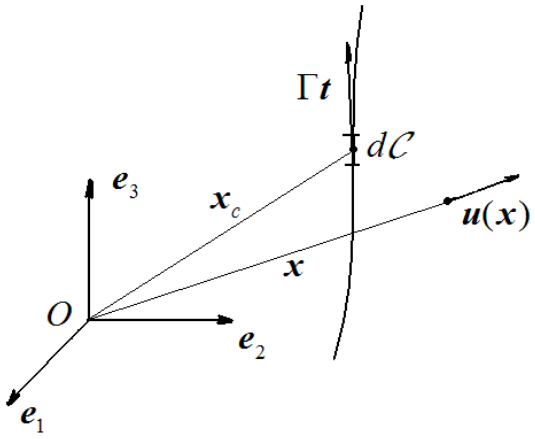


FIGURE 2.2 – Le filament de vortex.

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{V}_{(t)}} \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\boldsymbol{\zeta}}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathcal{V}(t)}||} d\mathcal{V}_{(t)} \ . \tag{2.24}$$

Supposons que nous "écrasions" cet agglomérat de vortex jusqu'à former une feuille notée $\mathcal{W}$. A partir de l'équation (2.24), nous pouvons faire apparaître une discontinuité du champ de vitesse à la traversée de la feuille. En effet, soit les deux faces de $\mathcal{W}_{(t)}$ que nous distinguerons par les indices $+$ et $-$, et $\boldsymbol{n}_+$ la normale unitaire à la feuille orientée de sa face "$-$" vers sa face "$+$", le champ de vorticité sur $\mathcal{W}_{(t)}$ vérifie alors :

$$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{n}_+ \times (\boldsymbol{u}_+ - \boldsymbol{u}_-) \ . \tag{2.25}$$

Cette relation montre que la vitesse tangentielle du fluide subit un saut à la traversée de la feuille. Qui plus est, la feuille étant convectée par le fluide, les champs $\boldsymbol{u}_+ - \boldsymbol{u}_-$ et $\boldsymbol{\zeta}$ restent tangents à celle-ci.

Afin de "préparer le terrain" du chapitre suivant dédié aux méthodes numériques appliquées au fluide parfait, nous allons donner l'expression du champ de vitesse induit autour d'un filament de vortex. Notons $\mathcal{C}_{(t)}$ la courbe géométrique coïncidant à l'instant t avec un filament de circulation Γ, et $\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}}$ un point de cette courbe. On note $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}})$ le vecteur unitaire tangent à la courbe $\mathcal{C}_{(t)}$ en $\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}}$. Ce filament induit en un point $\boldsymbol{x}$ en dehors de $\mathcal{C}_{(t)}$, la vitesse :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{C}_{(t)}} \frac{\Gamma \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}}) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}})}{||(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_{\mathcal{C}_{(t)}})||^3} d\mathcal{C}_{(t)} \ . \tag{2.26}$$

Maintenant que nous avons présenté brièvement la géométrie liée au champ de vorticité, nous allons répondre à la question suivante : quels sont les effets cinématiques de la

présence de vorticités dans un écoulement de fluide parfait incompressible ? De manière complémentaire, la réponse à cette question va nous permettre d'introduire la notion, fondamentale pour la suite, "d'écoulement irrotationnel".

2.5.4 Les mouvements irrotationnels.

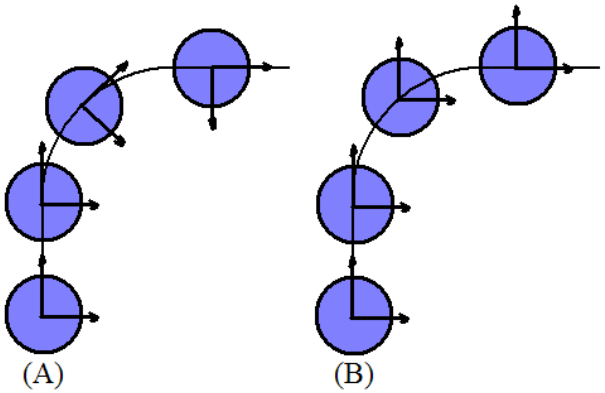


FIGURE 2.3 – (A) La cinématique rotationnelle ; (B) la cinématique irrotationnelle.

Pour illustrer le mouvement de rotation d'une particule, considérons un volume matériel de fluide se déplaçant le long d'une courbe fixe, tel que figuré sur la figure 2.3 et supposons que les forces de frottements internes ou de cisaillement soient très grandes. Dans pareil cas, le fluide se trouve animé d'une cinématique de corps rigide comprenant une certaine rotation le long de la courbe de départ (cf. figure 2.3-(A)). Ainsi $\boldsymbol{\zeta} \neq 0$ et le mouvement du fluide est rotationnel. Inversement, si les forces internes de frottement ou les contraintes de cisaillement sont suffisamment faibles pour que la particule se translate le long de la courbe sans tourner sur elle-même (cf. figure 2.3-(B)), dans ce cas $\boldsymbol{\zeta} = 0$ et l'écoulement est dit irrotationnel. Ainsi, pour les fluides parfaits incompressibles, ou non, la viscosité étant nulle, il n'y a pas de frottement interne et le mouvement du fluide peut être considéré comme irrotationnel. De plus, d'après le théorème de Lagrange (cf. [40]), cette condition cinématique se conserve au cours du temps. Ce troisième théorème (après ceux de Stokes et Kelvin) complète les propriétés des cinématiques rotationnelles et s'énonce ainsi :

"un écoulement de fluide parfait incompressible, soumis à des forces massiques dérivant d'un potentiel, demeure constamment irrotationnel dans un domaine que l'on suit dans son mouvement si, à un instant son mouvement est irrotationnel".

Si par conséquent à t donné, on a en tout point de l'écoulement : $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$, alors pour tout instant ultérieur le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ dérive d'un potentiel $\phi(\boldsymbol{x}, t)$, i.e. :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \nabla\phi(\boldsymbol{x}, t) \ , \tag{2.27}$$

et définit un écoulement dit "potentiel".

Rappelons désormais quelques propriétés des écoulements potentiels à commencer par l'unicité de (2.27), où ϕ est l'inconnue et $\boldsymbol{u}$ est donnée. Cette équation n'a de solution unique que dans le cas d'un espace simplement connexe (tel que par exemple l'espace tridimensionnel extérieur à un corps solide sans trou). Rappelons ici qu'un espace simplement connexe se distingue par le fait que toutes les courbes fermées définies dans celui-ci sont réductibles en un point de la dite région contrairement à un espace multi-connexe, où seule des régions disjointes de l'espace, dont le nombre définit le "degré de connexité", jouissent de cette propriété. Dans ce second cas, on trouve le problème d'un corps bidimensionnel immergé dans un fluide (cf. [56]). L'espace "corps + extérieur" est alors doublement connexe et l'intégrale :

$$\phi(\boldsymbol{x}_P, t) = \phi(\boldsymbol{x}_O, t) + \int_{\boldsymbol{x}_O}^{\boldsymbol{x}_P} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t).d\boldsymbol{x} \ , \tag{2.28}$$

prise entre deux points arbitraires O et P (de positions respectives $\boldsymbol{x}_O$ et $\boldsymbol{x}_P$) dépend du chemin particulier que l'on emprunte pour rejoindre $\boldsymbol{x}_P$ en partant de $\boldsymbol{x}_O$. Qui plus est, la différence entre deux valeurs prises par ϕ le long de deux chemins d'intégration différents (étant égale à l'intégrale le long de la boucle formée par les deux chemins), n'est autre qu'un multiple entier de la circulation Γ autour du solide plan (cf. [40]). Aussi, dans les écoulements bidimensionnels avec circulation (cas des corps portants), le potentiel des vitesses $\phi(\boldsymbol{x}, t)$ sera en général une fonction à valeur multiple de la variable d'espace $\boldsymbol{x}$. Nous verrons par la suite, comment cette liberté peut être mise à profit pour permettre au fluide en écoulement potentiel, la possibilité d'être rotationnel i.e. de fabriquer localement de la vorticité alors que sa viscosité et de fait négligée.

A ce niveau de l'exposé, la cinématique du fluide est imposée par l'équation de conservation du volume (2.8). Tenant compte du caractère irrotationnel du champ de vecteurs vitesses, i.e. de (2.27) dans (2.8), nous obtenons :

$$\Delta\phi = 0 \ , \tag{2.29}$$

connue sous le nom "d'équation de Laplace". Elle régit, une fois complétée des conditions aux limites du problème, la cinématique d'un écoulement de fluide parfait, incompressible et irrotationnel. Les fonctions solutions de cette équation sont dites harmoniques

et de nombreux résultats mathématiques, en particulier liés à la théorie des fonctions holomorphes, existent pour l'étudier et même la résoudre (cf. exemples dans l'annexe C).

Reste que (2.27), (2.29) complétées des conditions aux limites définissent la cinématique de l'écoulement. Pour ce qui est de sa dynamique, l'équation d'Euler dégénère dans le cas d'un fluide irrotationnel en une loi de conservation appelée équation (dans notre cas "instationnaire") de Bernoulli. Elle permet notamment de calculer le champ de pression p autour d'un corps mobile dans un tel fluide.

2.6 L'équation de Bernoulli.

Sous les hypothèses restrictives précédemment énoncées (fluide parfait incompressible et irrotationnel), et en négligeant dans (2.14) les forces de volume ($\mathbf{f} = \mathbf{0}$), nous obtenons après quelques manipulations l'équation dite de Bernoulli :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u}) + \frac{p}{\rho_f} = C(t) \ , \tag{2.30}$$

où $C(t)$ est une fonction du temps uniquement, en conséquence de quoi l'écoulement est dit "homo-énergétique". Dans le cas que nous traitons, toutes les particules appartenant à une sphère de rayon infini centrée sur le poisson ressentiront la pression hydro-statique p_∞ ainsi que la vitesse constante $\boldsymbol{u}_\infty$. Cette hypothèse appliquée à l'équation de Bernoulli, nous permet d'évaluer la fonction $C(t)$ et d'en déduire :

$$p(\boldsymbol{x}, t) = -\rho_f \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x}, t) - \rho_f \frac{\partial \phi}{\partial t}(\boldsymbol{x}, t) + \rho_f \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_\infty.\boldsymbol{u}_\infty) + p_\infty \ . \tag{2.31}$$

2.7 La formulation d'un problème d'écoulement potentiel.

Nous avons vu précédemment qu'un écoulement de fluide parfait, incompressible et irrotationnel était défini au travers de l'équation de Laplace. Comme tout système d'équations aux dérivées partielles, cette dernière pour être résolue, a besoin de conditions aux limites. Nous nous proposons ici de les étudier plus en détails. Pour cela, nous devons préciser davantage notre problème de nage. Considérons dès à présent et comme dans toute la suite de ce chapitre, un domaine géométrique $\mathcal{D}_\infty$ englobant à chaque instant t un corps solide déformable $\mathcal{B}$, ce dernier pouvant être un poisson ou un robot sous-marin de dynamique résolue ou imposée. Le domaine $\mathcal{D}_\infty$ est assimilé à une boule de rayon infinie centrée sur le corps. Dans ce cas, les frontières de l'écoulement sont celles de $\mathcal{D}_\infty$ (une sphère de rayon infinie notée $\partial\mathcal{D}_\infty$) à laquelle s'ajoute la surface du corps $\partial\mathcal{B}_{(t)}$.

Sur chacune de ces surfaces nous allons à présent spécifier les conditions aux limites de l'écoulement.

2.7.1 Les conditions aux limites sur un corps solide.

Celles-ci sont appelées "conditions de glissement" en opposition aux "conditions d'adhérence" des équations de Navier-Stokes où la viscosité du fluide n'est pas négligée. Comme les particules de fluides ne peuvent pas et ne doivent pas pénétrer le corps, elles glissent le long de ce dernier. Ainsi, dans un fluide parfait, la composante normale du champ $\boldsymbol{u}$ des particules de fluide se trouvant à la surface du corps doit être égale à la composante normale du champ de vitesse $\boldsymbol{v}$ de la frontière :

$$\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{B}_{(t)} \ , \ \boldsymbol{n}.(\boldsymbol{\nabla}\phi - \boldsymbol{v}) = 0 \ , \tag{2.32}$$

où, $\boldsymbol{n}$ est le champ de vecteurs normaux à la surface solide et $\boldsymbol{v}$ est sa vitesse locale.

En physique, (2.32) est appelée "condition de Neumann". Alternativement, on peut également imposer le potentiel des vitesses sur les frontières, c'est "la condition dite de Dirichlet" que l'on peut combiner à celle de Neumann pour fabriquer des conditions mixtes.

2.7.2 Les conditions aux limites à l'infini.

Imposons sur $\partial\mathcal{D}_\infty$ que les particules de fluide soient au repos et suffisamment loin du corps pour ne pas être perturbées par son mouvement, ainsi :

$$\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{D}_\infty \ , \ \nabla\phi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0} \ . \tag{2.33}$$

Remarquons ici que (2.33) nous permet d'annuler le terme quadratique en $\boldsymbol{u}_\infty$ dans l'équation (2.31) de Bernoulli.

2.8 Résolution d'un problème d'écoulement en fluide parfait autour d'un corps solide.

La méthode la plus utilisée pour résoudre l'équation de Laplace (2.29) est la méthode analytique des singularités (cf. [7, 26]), s'étendant dans le cas plan au travers de la méthode des potentiels complexes (cf. annexe C) et dont la mise en œuvre numérique correspond à la "méthode des intégrales de frontière". Dans cette approche, le champ de potentiel des vitesses $\phi(\boldsymbol{x})$, solution du problème d'écoulement, est fonction d'une distribution inconnue de solutions élémentaires appelées singularités, et réparties sur la surface du

corps immergé. C'est ce résultat, ici appliqué au cas de la nage, que nous allons mettre en évidence dans cette section. Nous verrons par la suite comment, à l'aide de la condition de Neumann, il est possible de déterminer la valeur prise par ces distributions inconnues. Finalement, en discrétisant (via des polynômes par exemple) ces distributions sur les frontières préalablement "maillées", nous obtiendrons la méthode numérique des intégrales de frontières mieux connue en aérodynamique sous le nom de "méthode des panneaux" dont l'aboutissement se réduit à la résolution d'un système de dimension finie d'équations algébriques linéaires. Comme nous le verrons dans le prochain chapitre (cf. § 3), une fois ce système résolu, le champ de vitesse de l'écoulement potentiel sera déterminé.

2.8.1 Les fonctions de Green.

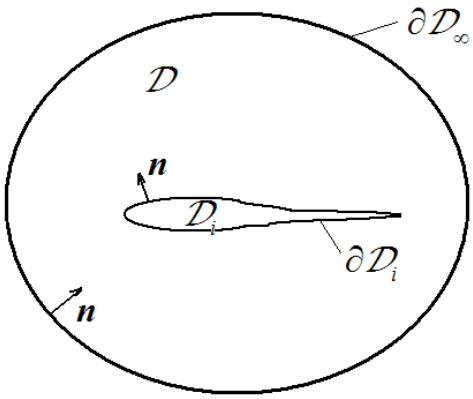


FIGURE 2.4 – Les différents domaines.

Dans ce qui suit, on se place dans le contexte général de la section précédente § 2.7 en y ajoutant la définition d'une région en arrière du corps dans laquelle le fluide n'est pas irrotationnel. Cette région n'est autre que le sillage (par exemple du poisson) et sera modélisée ici par une feuille de vortex notée $\mathcal{S}$ prolongeant $\mathcal{B}$. Sous ces conditions, on notera $\mathcal{D}_f$ le sous-domaine de $\mathcal{D}_\infty$ occupé à chaque instant par le fluide et tel que son écoulement y soit défini par l'équation de Laplace. Ainsi, en tout point de $\mathcal{D}_f$, on définit le potentiel noté ϕ dont le champ de vecteurs vitesses du fluide dérive. Le domaine $\mathcal{D}_f$ est tel que : $\mathcal{D}_f \cup \mathcal{D}_i = \mathcal{D}_\infty$ ou $\mathcal{D}_i$ est un domaine (connexe) entouré par $\mathcal{D}_f$ (figure 2.4). Ainsi, $\mathcal{D}_f$ est limité par des frontières intérieures et extérieures, les secondes étant infiniment éloignées des premières, i.e. : $\partial\mathcal{D}_f \triangleq \partial\mathcal{D}_\infty \cup \partial\mathcal{D}_i$. On définit en premier lieu les solutions fondamentales ou "fonctions de Green" de l'opérateur laplacien, notées G, et telles que l'on ait l'identité (au sens des distributions) :

$$\Delta G = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0), \forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_f \ , \tag{2.34}$$

où, $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$ figure la distribution de Dirac centrée en $\boldsymbol{x}_0$. Il est aisé de démontrer que la fonction :

$$G_{\boldsymbol{x}_0}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi r}, \text{ où : } r = ||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|| \ , \tag{2.35}$$

vérifie bien cette condition, en faisant une fonction de Green du laplacien en trois dimensions. Dans le contexte du fluide parfait, la fonction $1/(4\pi r)$ définie ce que l'on appelle une source unitaire. De même, la dérivée directionnelle $\boldsymbol{\nabla}(\phi(1/4\pi r).\boldsymbol{n}$ de cette fonction le long d'un vecteur $\boldsymbol{n}$ unitaire de direction quelconque, que nous noterons dans la suite "$\partial(1/(4\pi r))/\partial n$", réalise une autre solution élémentaire unitaire appelée "doublet" que nous détaillerons ultérieurement. Toutes deux, "source" et "doublet", sont également appelées singularités en raison de leur caractère divergeant en $\boldsymbol{x}_0$.

2.8.2 Les intégrales de frontières.

La méthode des intégrales de frontières s'applique au cas des opérateurs linéaires aux dérivées partielles. Elle est basée sur un principe dit de réciprocité (cf. [6]). Dans le cas particulier qui nous occupe, ce principe s'énonce sous la forme de la seconde identité de Green, qui s'écrit (où les intégrales sont conçues au sens des distributions) :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_f} f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_f = \int_{\mathcal{D}_f} (f\Delta g - g\Delta f) d\mathcal{D}_f \ . \tag{2.36}$$

En prenant arbitrairement $f = G_{\boldsymbol{x}_0} = 1/(4\pi r)$ tandis que $g = \phi$ est le potentiel recherché, il vient par définition de la fonction de Green et pour tout point intérieur au domaine $\mathcal{D}_f$ (i.e. $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_f^\circ$) :

$$4\pi\phi(\boldsymbol{x}_0) \ = \ \int_{\partial\mathcal{D}_f} (1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_f \ . \tag{2.37}$$

Afin de traiter le cas où $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_f$, nous allons ré-appliquer (2.36), mais cette fois-ci sur le domaine restreint $\mathcal{D}_{f0} \triangleq \mathcal{D}_f - b_{\boldsymbol{x}_0}(\varepsilon)$, où $b_{\boldsymbol{x}_0}(\varepsilon)$ est une boule de rayon ε pour le moment centrée sur $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_f^\circ$. Sous ces conditions (2.36) se réécrit :

$$\int_{\partial\mathcal{D}_{f0}} f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_{f0} \ = \ \int_{\mathcal{D}_{f0}} (f\Delta g - g\Delta f) d\mathcal{D}_{f0} \ , \tag{2.38}$$

soit encore avec $\partial\mathcal{D}_{f_0} = \partial\mathcal{D}_f \cup \partial b_{\boldsymbol{x}_0}$ et f et g, de nouveau, identifiées à la fonction de Green et au potentiel inconnu :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}_f} (1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_f \ + \ & \int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} (1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \\ = \ & \int_{\mathcal{D}_{f0}} ((1/r)\Delta\phi - \phi\Delta(1/r)) d\mathcal{D}_{f0} \ , \end{aligned} \tag{2.39}$$

où cette fois-ci, le second membre est identiquement nul puisque les deux fonctions impliquées par la relation de réciprocité sont harmoniques sur le domaine de l'intégration à présent comprise au sens de Riemann. Aussi, (2.39) se réduit-elle à la relation suivante sur les termes de frontières :

$$\int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \;=\; \int_{\partial \mathcal{D}_f} (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial \mathcal{D}_f \ . \tag{2.40}$$

Considérons à présent ce que devient cette relation à mesure que le rayon de la boule centrée sur $\boldsymbol{x}_0$ devient de plus en plus petit, i.e. $\varepsilon \to 0$. Dans ce cas ϕ étant continu, on a : $\phi(\boldsymbol{x}) \simeq \phi(\boldsymbol{x}_0)$, $\forall \boldsymbol{x} \in \partial b_{\boldsymbol{x}_0}$ et le premier membre de (2.40) se réécrit par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \;&\simeq\; \phi(\boldsymbol{x}_0) \int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \\ &-\; \int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

De plus, on a sur la sphère centrée sur $\boldsymbol{x}_0$: $\boldsymbol{r}.\boldsymbol{n} = -r$ et par conséquent : $\partial(1/r)/\partial n = (-\boldsymbol{r}/r^3).\boldsymbol{n} = 1/r^2$, tandis qu'en coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} = \varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi$. Dans ces conditions, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial b_{\boldsymbol{x}_0}} \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial b_{\boldsymbol{x}_0} \;&\simeq\; \phi(\boldsymbol{x}_0) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (1/\varepsilon^2)\varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi \\ &-\; \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (1/\varepsilon)\frac{\partial \phi}{\partial n}\varepsilon^2 \sin\theta d\theta d\varphi \ . \end{aligned} \tag{2.42}$$

Finalement, comme $\partial\phi/\partial n$ est nécessairement bornée sur $\partial b_{\boldsymbol{x}_0}$, quand $\varepsilon \to 0$, (2.40) se réduit, en vertu de (2.42), à l'expression suivante :

$$4\pi\phi(\boldsymbol{x}_0) \;\simeq\; \int_{\partial \mathcal{D}_f} (1/r)\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial \mathcal{D}_f \ , \tag{2.43}$$

à la base de la méthode des intégrales de frontières dite "directe", telle que mise en œuvre dans le cas de la nage des poissons par [20]. A ce niveau des développements, le calcul précédent permet de réaliser que lorsque $\boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_i$, si $\partial\mathcal{D}_i$ est lisse en ce point, alors 4π est remplacé par 2π dans (2.43) tandis que, si la surface est anguleuse au point considéré, c'est l'angle solide au dit point qui apparaîtra en lieu et place de 4π dans (2.43). Finalement, en se plaçant dans le cas où $\partial\mathcal{D}_i$ est lisse, on a les trois cas de figures suivants :

$$1^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_i^\circ : \phi(\boldsymbol{x}_0) = 0\,; \tag{2.44}$$

$$2^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_i : 2\pi\phi(\boldsymbol{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}_i} (1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_i\,; \tag{2.45}$$

$$3^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_f^\circ : 4\pi\phi(\boldsymbol{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}_i} (1/r)\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_i\,; \tag{2.46}$$

où l'on a pris en compte le fait, que le fluide est au repos loin du corps pour éliminer la contribution de $\partial\mathcal{D}_\infty$ dans (2.43), tandis que $\boldsymbol{n}$ pointe vers l'intérieur de $\partial\mathcal{D}_i$.

A ce niveau, remarquons comme le propose les méthodes dites "indirectes", que l'on peut étendre les résultats précédents au domaine intérieur $\mathcal{D}_i$ qui a pour unique frontière, sa frontière extérieure $\partial\mathcal{D}_i$. Pour cela, introduisons un potentiel (fictif dans notre cas) noté ϕ_i vérifiant l'équation de Laplace sur $\mathcal{D}_i$. On obtiendra, d'après ce qui précède, avec comme normales à $\partial\mathcal{D}_i$, celles, cette fois-ci, orientées de l'intérieur vers l'extérieur du domaine intérieur :

$$1^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_f^\circ : \phi_i(\boldsymbol{x}_0) = 0\,; \tag{2.47}$$

$$2^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \partial\mathcal{D}_i : 2\pi\phi_i(\boldsymbol{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}_i} \phi_i\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r)\frac{\partial\phi_i}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_i\,; \tag{2.48}$$

$$3^\circ) \quad \boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_i^\circ : 4\pi\phi_i(\boldsymbol{x}_0) = \int_{\partial\mathcal{D}_i} \phi_i\frac{\partial(1/r)}{\partial n} - (1/r)\frac{\partial\phi_i}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_i\ . \tag{2.49}$$

Grâce à cette extension, on obtient par superposition le potentiel dit "total" : ϕ_{tot}, défini sur $\mathbb{R}^3$ dans son ensemble, et tel que :

$$\forall \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3\ ,\ \phi_{tot}(\boldsymbol{x}_0) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{D}_i} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{D}_i\ . \tag{2.50}$$

En effet, si $\boldsymbol{x}_0$ est à l'intérieur de l'un des deux domaines, la contribution apportée par le potentiel défini sur le domaine complémentaire disparaît, tandis que sur la frontière, les angles solides (ici 2π) s'ajoutent pour former le "facteur 4π". Décomposons à présent le domaine $\mathcal{D}_i$ comme sur la figure 2.5. Celui-ci est composé des configurations courantes du corps de l'animal et de son sillage respectivement notées $\mathcal{B}_{(t)}$ et $\mathcal{W}_{(t)}$, la seconde prolongeant la première au bord de fuite de la caudale. Sous ces conditions, (2.50) devient :

$$\begin{aligned} \phi_{tot}(\boldsymbol{x}_0) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{B}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{B}_{(t)} \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{W}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{W}_{(t)}\ . \end{aligned} \tag{2.51}$$

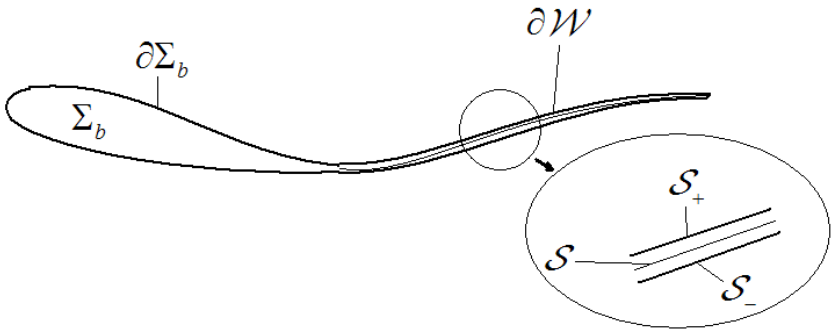


FIGURE 2.5 – Décomposition de $\mathcal{D}_i$.

Qui plus est, comme le domaine contenant la feuille $\mathcal{S}$ se définit comme $\partial\mathcal{W}_{(t)} = \mathcal{S}_{+,(t)} \cup \mathcal{S}_{-,(t)}$, i.e. l'union de deux surfaces latérales infiniment proches (indicées "+" et "−"), la seconde contribution intégrale de (2.51) se réécrit comme :

$$\int_{\partial\mathcal{W}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{W}_{(t)} =$$
$$\int_{\mathcal{S}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n_+} - \frac{\partial\phi_+}{\partial n_+} + \frac{\partial\phi_-}{\partial n_+} - \frac{\partial\phi_i}{\partial n_+}) + (\phi_+ - \phi_i + \phi_i - \phi_-)\frac{\partial(1/r)}{\partial n_+} d\mathcal{S}_{(t)} \ , \quad (2.52)$$

où $\boldsymbol{n}_+$ est la normale unitaire à $\mathcal{S}_{(t)}$ orientée de $\mathcal{S}_{-,(t)}$ vers $\mathcal{S}_{+,(t)}$, aussi a-t'on par conséquent :

$$\begin{aligned} \phi_{tot}(\boldsymbol{x}_0) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{B}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{B}_{(t)} \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}(t)} (1/r)(\frac{\partial\phi_-}{\partial n_+} - \frac{\partial\phi_+}{\partial n_+}) + (\phi_+ - \phi_-)\frac{\partial(1/r)}{\partial n_+} d\mathcal{S}_{(t)} \ . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Finalement, le sillage étant modélisé par une feuille de vortex et tenant compte des propriétés de saut (2.25) imposées (continuité de la vitesse normale) à la traversée de cette surface singulière, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \phi_{tot}(\boldsymbol{x}_0) &= -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\mathcal{B}_{(t)}} (1/r)(\frac{\partial\phi_i}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}) + (\phi - \phi_i)\frac{\partial(1/r)}{\partial n} d\partial\mathcal{B}_{(t)} \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_{\mathcal{S}(t)} (\phi_+ - \phi_-)\frac{\partial(1/r)}{\partial n_+} d\mathcal{S}_{(t)} \ . \end{aligned} \quad (2.54)$$

2.8.3 Éléments pour une méthode de résolution.

Sachant que "$1/(4\pi r)$" et "$\partial(1/(4\pi r))/\partial n$" s'identifient au champ de potentiel induit respectivement par une source et un doublet unité (de direction $\boldsymbol{n}$), il devient manifeste

que (2.50) exprime le potentiel en tout point de l'espace en fonction des distributions de sources et de doublets réparties sur la frontière interne du domaine (le solide et le sillage). Qui plus est, le champ de potentiel intérieur étant fictif et donc arbitraire, on peut toujours l'ajuster pour annuler l'une des deux contributions de (2.50). Ainsi, en posant :

$$\phi_i / \quad \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial n} \text{ sur : } \partial \mathcal{B}_{(t)} \ , \tag{2.55}$$

le problème revient à calculer la distribution de doublets sur la frontière, tandis que réciproquement, en imposant au potentiel interne de vérifier :

$$\phi_i \;=\; \phi \text{ sur : } \partial \mathcal{B}_{(t)} \ , \tag{2.56}$$

le problème consiste à calculer l'écoulement via une distribution de sources.

Lorsque l'on s'intéresse au calcul de l'écoulement autour d'un corps portant comme nous le verrons dans la section suivante, une distribution de sources ne peut engendrer de circulation autour du corps et donc de portance (cf. section § 2.11, [62]). Il s'en suit qu'en dehors des corps symétriques non portant, on préfère recourir aux distributions de doublets plutôt que de sources. Ainsi, dans ce cas, (2.54) se particularise comme suit :

$$\phi_{tot}(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \mathcal{B}_{(t)}} \mu \frac{\partial (1/r)}{\partial n} d\partial \mathcal{B}_{(t)} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_{(t)}} \mu \frac{\partial (1/r)}{\partial n_+} d\mathcal{S}_{(t)} \ , \tag{2.57}$$

où l'on a choisi de noter $\mu = \phi_i - \phi$, dont le signe est imposé par le sens de $\boldsymbol{n}$ qui pointe vers l'intérieur de $\mathcal{B}_{(t)}$. Pour le sillage, nous avons fait de même en notant $\mu = \phi_- - \phi_+$ et $\boldsymbol{n}_+$ toujours orientée de $\mathcal{S}_{-,(t)}$ vers $\mathcal{S}_{+,(t)}$.

La méthode de résolution par intégrales de frontières dite indirecte que nous mettrons en œuvre dans le chapitre suivant consiste donc en premier lieu à placer des distributions de singularités sur la frontière concernée par (2.57) puis à les déterminer en leur imposant d'engendrer des champs vérifiant les conditions limites (2.32) et (2.33). Cependant, ces conditions suffisent seulement à déterminer les distributions sur le corps. Pour déterminer celles du sillage, nous devons ajouter "du sens physique" à notre problème d'écoulement. Ceci sera chose faite par l'introduction dans les prochaines sections de la condition dite "de Kutta".

2.9 Les solutions élémentaires ou singularités.

Nous avons vu que la solution d'un problème d'écoulement potentiel pouvait se résoudre par le calcul de distributions de solutions élémentaires de type source ($\sigma/(4\pi r)$)

ou doublet ($\mu/(4\pi)\partial(1/r)/\partial n)$). Nous allons maintenant présenter succinctement ces singularités avant d'envisager quelques-unes des propriétés de leurs distributions.

2.9.1 La source.

Elle peut être appelée source ($\sigma > 0$) ou puits ($\sigma < 0$), selon qu'elle ajoute ou retire de la matière fluide du domaine la contenant.

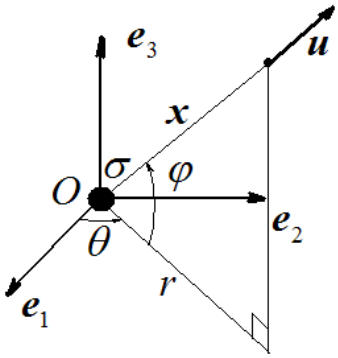


FIGURE 2.6 – La singularité de type source.

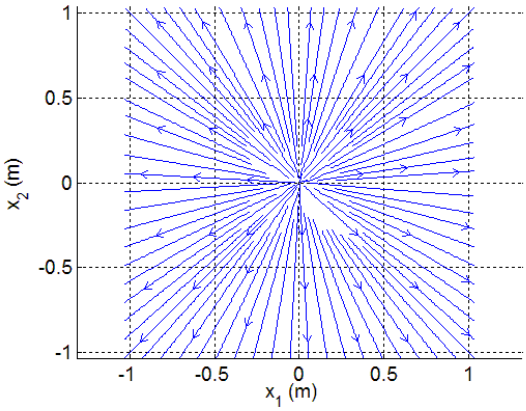


FIGURE 2.7 – Les lignes de courant autour d'une source unitaire.

Le potentiel des vitesses d'une source placée à l'origine O d'un système de coordonnées sphériques $(\boldsymbol{x}(r, \theta, \varphi))$ est :

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\sigma}{4\pi r} \ . \tag{2.58}$$

Le champ de vecteurs vitesses est obtenu en appliquant l'opérateur gradient "$\boldsymbol{\nabla}$" en coordonnées sphériques. Il possède uniquement une composante radiale et s'écrit :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \ = \ \frac{\sigma}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r \ , \tag{2.59}$$

où $\boldsymbol{e}_r = \partial\boldsymbol{x}/\partial r$, tandis que l'intensité de la source σ quantifie le débit volumique de matière produite par la source au travers de toute sphère centrée sur l'origine. Il est à noter que l'apport ($\sigma > 0$) ou le retrait ($\sigma < 0$) de fluide dans tout domaine fixe est en violation avec la loi de conservation de la masse (2.7), manifestant physiquement le caractère singulier du champ de vitesse au point de source.

2.9.2 Le doublet.

Cette singularité est obtenue en faisant tendre la distance l entre une source d'intensité σ et un puits d'intensité $-\sigma$ placés sur un axe (fixant la direction du doublet), vers zéro tout en faisant tendre vers l'infini les intensités des deux sources et ce, de sorte que $l\sigma \to \mu$, où μ est une constante à valeur finie quantifiant l'intensité du doublet.

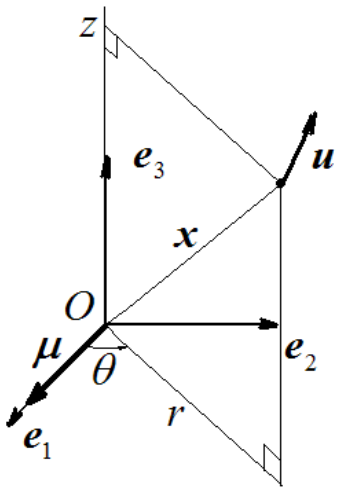


FIGURE 2.8 – La singularité de type doublet.

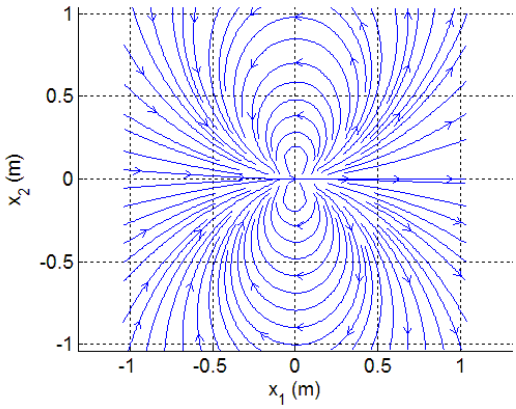


FIGURE 2.9 – Les lignes de courant autour d'un doublet unitaire orienté selon $\boldsymbol{e}_1$.

Le potentiel des vitesses d'un doublet d'intensité μ de direction $\boldsymbol{e}_1$, centré à l'origine O est en coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{x}(r, \theta, z))$:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\mu}}{4\pi r^3}\boldsymbol{e}_r \ , \tag{2.60}$$

où, le vecteur $\boldsymbol{\mu} = \mu\boldsymbol{e}_1$ est appelé "vecteur doublet" d'intensité μ de direction $\boldsymbol{e}_1$. Le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ induit, s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (\frac{\mu\cos\theta}{2\pi r^3})\boldsymbol{e}_r + (\frac{\mu\sin\theta}{4\pi r^3})\boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{2.61}$$

où, $\boldsymbol{e}_r = \partial\boldsymbol{x}/\partial r$ et $\boldsymbol{e}_\theta = \partial\boldsymbol{x}/\partial\theta$.

Les lignes de courant, dans cet exemple, sont les cercles tangents à $\boldsymbol{e}_1$ à l'origine du repère de référence (cf. figure 2.9.2).

Il est à noter qu'il existe d'autres types de singularités élémentaires qui vérifient l'équation de Laplace (2.29). Au nombre de celles-ci, celles qui vont tout particulièrement nous intéresser par la suite sont les "singularités de type vortex" qui se déclinent en "points de vortex" pour les écoulements plans et en "filaments de vortex" pour les écoulements

tridimensionnels. Ces types de distribution ont l'avantage, comme nous allons le voir (cf. chapitre § 3), de bien s'adapter aux structures minces (poutres et plaques auxquelles la géométrie de l'anguille peut être en première approximation assimilée). Comme nous avons déjà traité le filament de vortex (cf. sous-section § 2.5.3), nous allons désormais introduire, le point de vortex.

2.9.3 Le point de vortex.

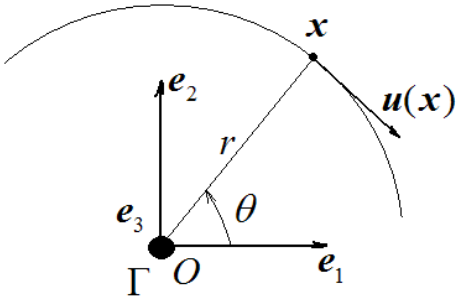


FIGURE 2.10 – La singularité de type point de vortex.

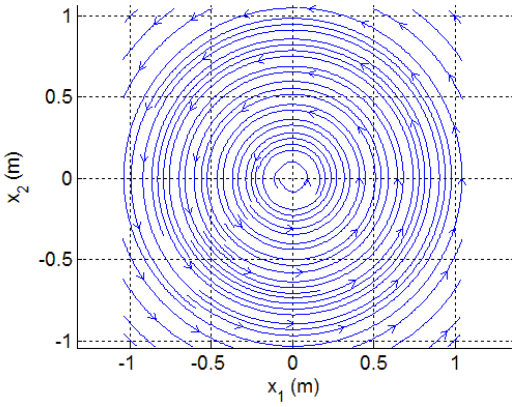


FIGURE 2.11 – Les lignes de courant autour d'un point de vortex unitaire.

Pour des écoulements bidimensionnels, il est possible de construire, à partir de la loi de Biot-Savart appliquée à une ligne de vorticité se re-bouclant à l'infini, une solution élémentaire appelée point de vortex. C'est une singularité de circulation Γ induisant un champ de vecteurs vitesses tangentiels à tout cercle centré sur la singularité, et dont l'intensité décroît en $1/r$ (où r est la distance entre le point et la singularité). Ainsi, les composantes du champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ en coordonnées polaires $(\boldsymbol{x}(r,\theta))$, sont (relativement à un point de vortex centré à l'origine O) :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Gamma}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta \ , \tag{2.62}$$

où, Γ est défini positif pour le sens horaire et $\boldsymbol{e}_\theta = \partial\boldsymbol{x}/\partial\theta$. Le potentiel des vitesses correspondant est :

$$\phi(\boldsymbol{x}) = -\frac{\Gamma\theta}{2\pi} \ . \tag{2.63}$$

Notons ici que l'angle θ dans (2.63) est défini modulo 2π, et que par conséquent le potentiel des vitesses a une infinité de valeurs pour un même $\boldsymbol{x}$. Comme évoqué précédemment, ceci est à mettre en rapport avec le caractère doublement connexe du plan une

fois privé de son origine, imposant au champ de vecteurs vitesses induit par la singularité de dépendre du nombre de tours effectués autour de celle-ci par le chemin d'intégration adopté pour calculer le potentiel.

Pour cette singularité, introduisons la fonction "dite de courant" qui, dans ce cas particulier, s'écrit comme :

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \ , \tag{2.64}$$

tandis qu'en général, la fonction de courant se définit en tout point comme le flux de fluide traversant n'importe qu'elle courbe (sans boucle) liant l'origine du plan à ce point. Cette dernière équation est intéressante pour la suite, puisqu'elle nous permettra de construire les lignes de courant de l'écoulement lors de l'étude de la nage plane de l'anguille (cf. § 3).

2.10 Les distributions de solutions élémentaires.

Avant d'utiliser de telles distributions de singularités pour résoudre notre problème d'écoulement, nous allons étudier les propriétés de continuité à la traversée d'un segment de longueur unité placé sur l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ supportant tour à tour une distribution linéique des trois types de singularités précédemment introduits. Notons que dans ce cas, les écoulements générés par ces segments sont par symétrie ceux imposés par une distribution surfacique dans une section normale à la surface support. De plus, nous ferons apparaître des relations d'équivalences entre ces distributions.

2.10.1 La distribution de sources.

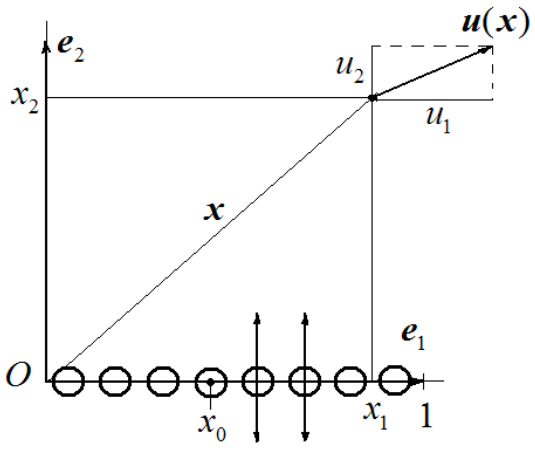


FIGURE 2.12 – La distribution de sources.

En accord avec la figure 2.12, et par superposition continue de (2.58) et de (2.59) (cf. figure 2.6), le potentiel des vitesses $\phi(\boldsymbol{x})$ et la vitesse $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ d'un point matériel de vecteur position $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$ tels qu'induit par une distribution de sources placée le long de $\boldsymbol{e}_1$ et d'intensité $\sigma : x_0 \in [0,1] \mapsto \sigma(x_0)$, s'écrivent :

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sigma(x_0)\ln\sqrt{(x_1-x_0)^2+x_2^2}dx_0\,; \tag{2.65}$$

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sigma(x_0)\frac{x_1-x_0}{(x_1-x_0)^2+x_2^2}dx_0\,; \tag{2.66}$$

$$u_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \sigma(x_0)\frac{x_2}{(x_1-x_0)^2+x_2^2}dx_0\ . \tag{2.67}$$

Notons qu'ici, chaque source émet du fluide dans toutes les directions avec la même intensité. Aussi pouvons-nous pressentir que la composante u_2 présente une discontinuité à la traversée de l'axe $x_2 = 0$. Notons que, quand $x_2 \to 0$ l'intégrande de (2.67) est égale à zéro sauf quand $x_0 = x_1$. De plus, la valeur de l'intégrale dépend essentiellement de la contribution de ce point ($x_0 = x_1$). Finalement, après calculs, la limite de (2.67) pour $x_2 \to 0$, s'écrit :

$$u_2(x_1, 0 \pm \epsilon) = \pm\frac{\sigma(x_1)}{2}\ . \tag{2.68}$$

Le lecteur trouvera dans l'annexe A, une démonstration de ce résultat.

En d'autres termes, cette distribution crée un écoulement symétrique par rapport à l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ tel que le saut de la vitesse normale à la distribution soit :

$$u_2(x_1, 0+\epsilon) - u_2(x_1, 0-\epsilon) = \sigma(x_1)\ . \tag{2.69}$$

2.10.2 La distribution de doublets.

En accord avec la figure 2.13, et par superposition continue de (2.60) et de (2.61) (cf. figure 2.8), le potentiel des vitesses $\phi(\boldsymbol{x})$ et la vitesse $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ d'un point matériel de position $\boldsymbol{x}$ induit par une distribution de doublets placée le long de $\boldsymbol{e}_1$ et d'intensité $\mu : x_0 \in [0,1] \mapsto \mu(x_0)$ s'écrivent respectivement :

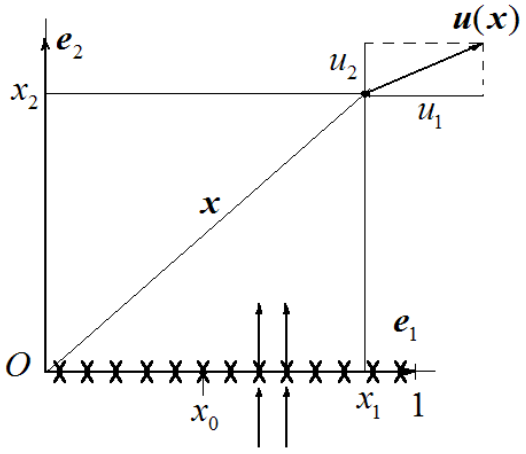


FIGURE 2.13 – La distribution de doublets.

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 \mu(x_0)\frac{x_2}{(x_1-x_0)^2+x_2^2}dx_0\,; \tag{2.70}$$

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{\pi}\int_0^1 \mu(x_0)\frac{(x_1-x_0)x_2}{((x_1-x_0)^2+x_2^2)^2}dx_0\,; \tag{2.71}$$

$$u_2(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 \mu(x_0)\frac{(x_1-x_0)-x_2^2}{((x_1-x_0)^2+x_2^2)^2}dx_0\ . \tag{2.72}$$

$$\tag{2.73}$$

Contrairement à la distribution de sources, dans le cas d'une distribution de doublets, c'est le potentiel des vitesses ϕ qui présente ici une discontinuité en $x_2 = 0$. Aussi, tous calculs faits, nous obtenons :

$$\phi(x_1, 0 \pm \epsilon) = \mp\frac{\mu(x_1)}{2}\ . \tag{2.74}$$

Comme les champs de potentiel et de vitesse sont liés par l'opérateur différentiel $\boldsymbol{\nabla}$, une discontinuité sur le potentiel des vitesses implique une discontinuité sur la vitesse elle-même. Ici, elle apparaît sur sa composante tangentielle par à rapport à l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ support des singularités, soit encore :

$$u_1(x_1, 0 \pm \epsilon) = \mp\frac{d\mu(x_1)}{2dx_1}\ . \tag{2.75}$$

L'une des propriétés intéressante de la distribution de doublets, est qu'elle engendre de la circulation autour du profil la supportant. Pour s'en convaincre, calculons la circulation du champ de vecteurs vitesses le long du contour dessiné sur la figure 2.14 du champ de vitesse induit par la distribution $\mu(x_0)$, il vient :

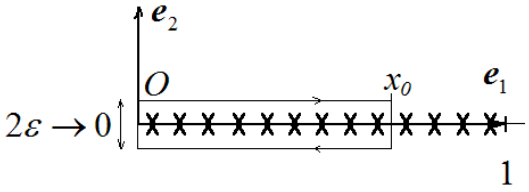


FIGURE 2.14 – Chemin d'intégration pour le calcul de la circulation autour de la distribution de doublets.

$$\Gamma(x_0) = \int_0^{x_0} u_1(x, 0+\epsilon)dx + \int_{x_0}^{0} u_1(x, 0-\epsilon)dx = -\mu(x_0) \ . \tag{2.76}$$

Cette dernière relation contribue à faire le lien entre cette distribution et celle de vortex que nous allons étudier maintenant.

2.10.3 La distribution de vortex.

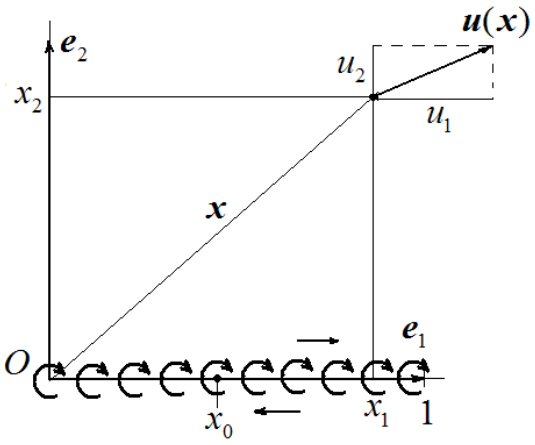


FIGURE 2.15 – La distribution de vortex.

En accord avec la figure 2.15, et par superposition continue (2.62) et de (2.63) (cf. figure 2.10), le potentiel des vitesses $\phi(\boldsymbol{x})$ et la vitesse $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ d'un point matériel de position $\boldsymbol{x}$ tel qu'induits par une distribution de vortex placée le long de $\boldsymbol{e}_1$ et d'intensité $\gamma : x_0 \in [0,1] \mapsto \gamma(x_0)$, s'écrivent respectivement :

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 \gamma(x_0) Atan\left(\frac{x_2}{x_1 - x_0}\right) dx_0\,; \tag{2.77}$$

$$u_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \gamma(x_0)\frac{x_2}{(x_1 - x_0)^2 + x_2^2} dx_0\,; \tag{2.78}$$

$$u_2(\boldsymbol{x}) = \frac{-1}{2\pi}\int_0^1 \gamma(x_0)\frac{x_1 - x_0}{(x_1 - x_0)^2 + x_2^2} dx_0\,; \tag{2.79}$$

Pour ce type de distribution, la discontinuité en $x_2 = 0$ se fait sur la composante u_1 de la vitesse (i.e. la composante tangentielle par rapport au support de la distribution) de sorte que la relation de saut s'écrive :

$$u_1(x_1, 0 \pm \epsilon) = \pm\frac{\gamma(x_1)}{2}\ . \tag{2.80}$$

De plus, par comparaison de (2.75) avec (2.80), on en déduit la relation suivante, posant l'équivalence d'une distribution de vortex avec une distribution de doublets :

$$\gamma = -\frac{d\mu(x_1)}{dx_1}\ . \tag{2.81}$$

Ainsi, dans la pratique (cf. § 3), une feuille de vortex, modèle du sillage, pourra être représentée, soit par une distribution de vortex soit par une distribution de doublets. Par exemple dans la littérature bio-mécanicienne de la nage, le sillage lâché par la nageoire caudale d'un poisson est modélisé par une feuille de vortex dans [48] tandis qu'il l'est par une feuille de doublets dans [125].

Finalement, dans la pratique, la distribution de sources sera utilisée pour des problèmes d'écoulement autour des corps symétriques (non-portant), par exemple une aile d'avion à profil symétrique se déplaçant à vitesse constante sans incidence. Tandis que les distributions de doublets et de vortex seront utilisées dans le cas des corps portants (une aile d'avion, l'anguille, etc...), sujet de la prochaine section. Enfin rappelons ici qu'en matière de modélisation des profils fins (tels qu'une plaque cambrée), la distribution de vortex est la plus adaptée.

2.11 La portance et la condition de Kutta-Joukowski.

En toute rigueur, la portance exercée sur un corps est due à la viscosité du fluide l'environnant. Aussi, le fluide parfait ne peut rendre compte d'un tel phénomène. Néanmoins en deux dimensions, on peut "artificiellement" réintroduire de la portance en jouant sur la non unicité du potentiel des vitesses ϕ. C'est l'objet du théorème dit de Kutta-Joukowski et de la condition dite "de Kutta".

2.11.1 Les forces hydrodynamiques et la portance.

Avant d'énoncer le théorème annoncé, faisons un rapide bilan des forces (hydrodynamiques ou aérodynamiques) appliquées sur un profil portant bidimensionnel (représentant la section d'une aile) créées par un courant de vitesse $\boldsymbol{u}_\infty$. En accord avec la figure 2.16 et les pratiques de l'aérodynamique (cf. [43]), nous noterons $\boldsymbol{L}$ la force de portance ("Lift" en anglais), $\boldsymbol{D}$ la force de traîné (ou "Drag" en anglais) et $\boldsymbol{C}$, le couple résultant des forces de pression. Dans un fluide réel, ces forces et couples sont dus aux pressions créées par le cisaillement du fluide dans la couche limite et par l'inertie du fluide due à l'accélération de l'aile.

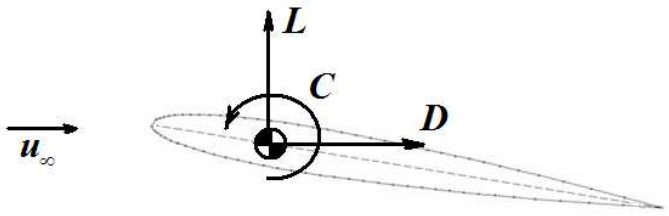


FIGURE 2.16 – Les forces et couples exercés sur un profil 2-D.

Un mathématicien allemand M.W. Kutta en 1902 et un physicien russe en N.E. Joukowski en 1906 ont observé que la portance par unité de profondeur sur un profil d'aile était proportionnelle à la circulation autour de celui-ci [62]. Plus précisément, le théorème de Kutta-Joukowski s'énonce ainsi (cf. [26, 56]) :

"*La résultante des forces aérodynamiques appliquées sur un corps immergé, dans un fluide parfait incompressible et irrotationnel, est d'intensité* $\rho \boldsymbol{u}_\infty \Gamma$ *par unité de largeur et agit dans la direction normale à l'écoulement (notez que* $\boldsymbol{u}_\infty$ *est la vitesse du courant autour de l'aile ou corps).*".

Le théorème de Kutta-Joukowski pose donc que la portance est proportionnelle à la circulation Γ autour du profil, tandis qu'un fluide parfait en écoulement stationnaire ne peut produire de la traînée (cf. le paradoxe de D'Alembert [4, 84]).

2.11.2 La condition de Kutta.

En raison de son caractère doublement connexe, le problème du calcul du champ de vecteurs vitesses autour d'une aile n'admet pas une solution unique, mais une infinité se distinguant les unes des autres par leur circulation calculée autour de l'obstacle (cf. figures 2.17-(a)(b)(c)). Ainsi, toutes les valeurs prises par la circulation conduisent à une solution

particulière du problème fixant de manière unique le couple de points dits "de stagnation" sur le profil. Un point de stagnation est un lieu à la frontière du profil où une particule fluide s'y trouvant stagne, i.e. sa vitesse relativement au corps reste nulle. Généralement, le point avant de stagnation (proche du bord d'attaque) ouvre le fluide pour contourner le solide, et le point arrière le referme (notons que sur un corps bidimensionnel, la zone de stagnation est un point, tandis que sur un corps tridimensionnel, c'est une ligne).

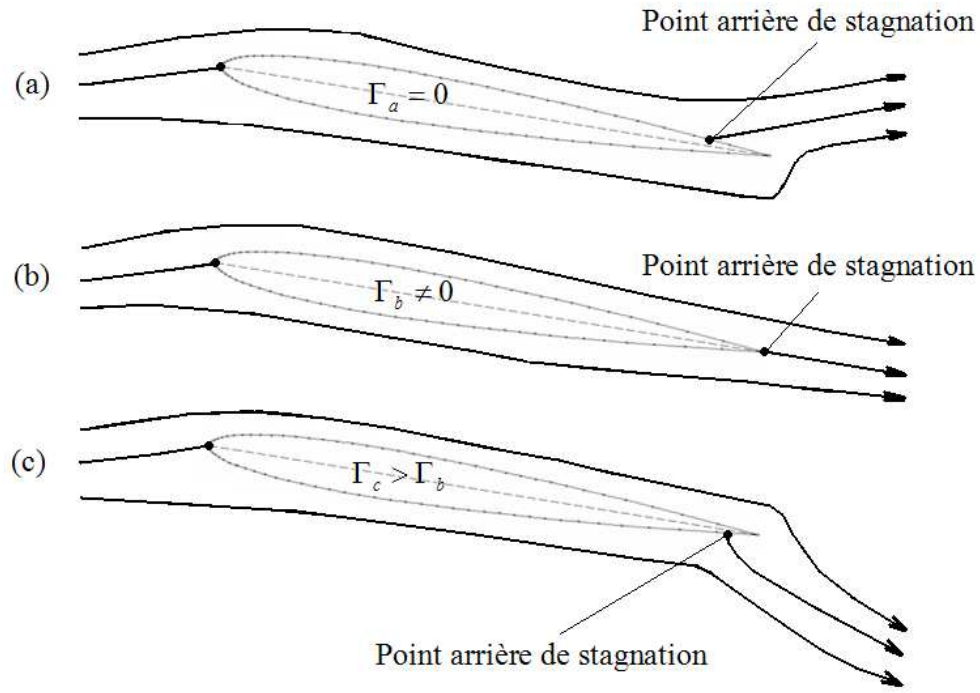


FIGURE 2.17 – Effet de la circulation sur l'écoulement, vu par un observateur se trouvant sur le profil.

Néanmoins, il existe une valeur unique de Γ positionnant le point de stagnation arrière sur le bord de fuite tel que figuré sur la figure 2.17-(b). Cet écoulement particulier est celui qui représente le mieux l'écoulement réel (i.e. celui d'un fluide visqueux réglé par les équations de Navier-Stokes et les conditions limites d'adhérence). Si nous faisons le rapprochement avec les poissons, la ligne des points de stagnation arrières se trouvera sur le bord de fuite de la nageoire caudale. Physiquement, elle se traduit sur l'écoulement, par le fait que les lignes de courant quittent le profil parallèlement à la bissectrice du bord de fuite (ceci vu par un observateur attaché au corps). Qui plus est, il est possible de démontrer que cette contrainte implique que les champs de vitesse et de pression doivent être continus au bord de fuite. Cette dernière formulation apparaît dans la littérature sous le nom de "condition de Kutta" et s'étend aux écoulements tridimensionnels. Dans le cas d'un bord de fuite aigu les tangentes aux deux faces du corps sont colinéaires, la condition

de Kutta se traduit par l'égalité vectorielle suivante illustrée sur la figure 2.18-(2) :

$$\boldsymbol{n}_+ \times (\boldsymbol{u}_+ - \boldsymbol{u}_-) = \boldsymbol{0} \ , \tag{2.82}$$

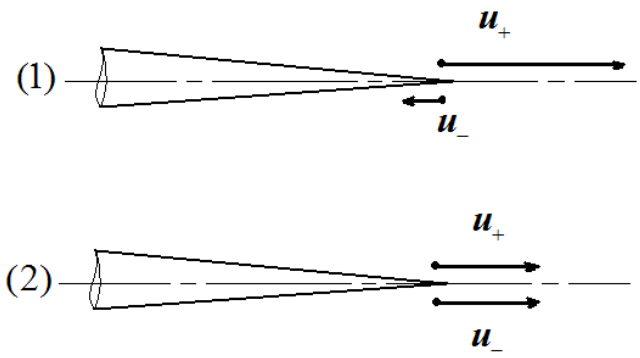


FIGURE 2.18 – Condition de continuité du champ de vecteurs vitesses au bord de fuite.

où, $\boldsymbol{u}_+$ et $\boldsymbol{u}_-$ sont les vitesses du fluide relativement au corps, se trouvant respectivement sur "l'extrados" et "l'intrados" de son bord de fuite, où la normale orientée du premier vers le second est notée $\boldsymbol{n}_+$. Finalement, en cas de discontinuité du champ de vitesse au bord de fuite, la condition de Kutta se trouve violée comme représenté sur la figure 2.18-(1).

2.11.3 Les conséquences de la condition de Kutta sur les distributions de singularités.

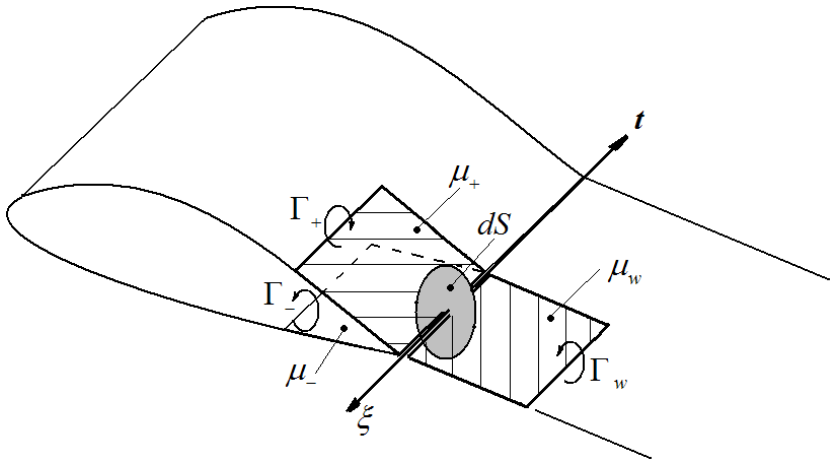


FIGURE 2.19 – Condition de Kutta.

Plaçons nous de nouveau dans le contexte de la méthode des intégrales de frontières, et voyons maintenant les conséquences de la condition de Kutta sur la méthode appliquée

à un corps portant. Nous avons vu dans la section précédente, que seules les distributions de doublets et de vortex placées sur une surface créaient un saut des vitesses tangentielles ((2.75), (2.80)) susceptible de modéliser la discontinuité induite dans l'écoulement à la traversée d'une feuille de vortex (au sens d'Helmholtz). L'idée est ici d'introduire une telle feuille dans le prolongement du bord de fuite afin d'utiliser le saut qu'elle engendre de manière à compenser la discontinuité de vitesse produite par les distributions du corps. Aussi, l'intrados et l'extrados pouvant chacun être modélisé par une feuille de même nature, en vertu de la relation de saut (2.25), la condition de Kutta (2.82) revient à imposer la nullité de la vorticité $\boldsymbol{\zeta}$ induite par les trois feuilles "pincées" au bord de fuite. Ainsi, on aura par conséquent en vertu de (2.22) :

$$\boldsymbol{\zeta}.\boldsymbol{t}dS = \Gamma_w + \Gamma_- - \Gamma_+ = 0 \ , \tag{2.83}$$

où $\boldsymbol{t}$ dénote la tangente unitaire support du bord de fuite et égale à la normale d'une boucle, de surface dS, enlaçant ce dernier. Quant à Γ_w, Γ_-, Γ_+, elles représentent les circulations autour de $\boldsymbol{t}$ des champs de vecteurs vitesses engendrés par les distributions respectives des feuilles de "l'intrados", "l'extrados" et du sillage (cf. figure 2.19). Notons ici que dans le cas d'un profil cambré fin modélisé par une distribution de vortex, la condition de Kutta s'écrira directement grâce à (2.80) comme :

$$\gamma_{bf} = 0 \ , \tag{2.84}$$

où γ_{bf} représente l'intensité de la ligne de vortex supportée par le bord de fuite.

Si alternativement, on choisit de décrire le champ de vitesses via une distribution de doublets placée sur le corps et son sillage tels que suggérés par (2.54), la condition de Kutta imposera alors la valeur prise par la distribution de doublets lâchée à chaque instant dans le sillage ($\mathcal{W}_{(t)}$). En effet, définissons par μ_+, μ_- et μ_w les intensités des distributions de doublets sur l'extrados, l'intrados, et le sillage (toutes trois évaluées au bord de fuite) respectivement. En accord avec la relation (2.76) (traduisant l'équivalence des distributions de doublets et de vortex), et les deux relations précédentes (2.84) et (2.83), on a :

$$\mu_+ - \mu_- - \mu_w = 0 \ , \tag{2.85}$$

Cette dernière équation viendra s'ajouter à la condition de Neumann afin de déterminer la distribution solution μ placée sur $\partial\mathcal{B}_{(t)} \cup \mathcal{S}_{(t)}$ et apparaissant dans (2.57).

2.12 Conclusion.

Nous avons vu dans ce chapitre que la dynamique des fluides parfaits incompressibles et irrotationnels était régit par l'équation de Laplace. A partir des fonctions de Green et des intégrales de frontières, nous avons obtenu la solution générale (2.57) de cette équation aux dérivées partielles en fonction des distributions de singularités. Elles peuvent être de types source, doublet ou vortex. Dans le prochain chapitre, nous allons exposer deux algorithmes numériques, l'un bidimensionnel et l'autre tridimensionnel, tous deux basés sur la méthode numérique des panneaux (ou "Panel Method", cf. [47, 56]).

Chapitre 3

Étude qualitative de la nage anguilliforme.

3.1 Introduction.

Pour rappel, un fluide parfait ou encore un fluide d'Euler est un fluide incompressible et non-visqueux. Nous avons vu dans le chapitre précédent que les mouvements des particules matérielles constitutives de ce fluide étaient réglés par une unique équation cinématique, celle de Laplace (2.29). La pression quant à elle, joue le rôle d'un champ de multiplicateurs de Lagrange en charge de forcer la condition cinématique d'incompressibilité (2.8) [40]. Pour résoudre numériquement l'équation de Laplace, la technique la plus pratiquée est la méthode des intégrales de frontières basée sur les identités de Green (cf. § 2.8). Sur la base de celle-ci, nous avons pu obtenir une forme explicite des solutions (2.54) d'un écoulement potentiel. Cette forme générale du potentiel s'écrit comme une superposition de fonctions de Green élémentaires (source ou doublet (cf. § 2.9) généralement distribuées sur les frontières (sillage inclus) de l'écoulement potentiel. Pour un problème particulier donné, il suffit alors de calculer les intensités de ces distributions de manière à ce que le champ de vitesse (et de potentiel) qu'elles induisent, vérifie bien les conditions limites du dit problème (de type "Neumann", "Dirichlet" ou "mixte").

Qui plus est, nous avons vu que dans le cas d'une structure portante, la condition de Kutta (2.82) devait être ajoutée à ces conditions aux limites afin de palier certaines insuffisances du fluide parfait (cf. § 2.11). Écrite comme une contrainte cinématique sur l'écoulement, cette condition nous a permis de recréer artificiellement de la portance en vertu du théorème de Kutta-Joukowski [62]. Cette approche, encore connue sous le nom de méthode des singularités, reste, lorsqu'elle est analytique, limitée à des problèmes où la géométrie du corps immergé est simple. Dans le cas général d'un écoulement tridimensionnel autour de corps de géométrie complexe, elle s'applique sous une forme numérique. L'idée est ici,

comme dans toute résolution numérique d'un problème de champ, de discrétiser l'espace en "éléments" (c'est l'opération de "maillage de la *M.E.F.*[1], cf. [28]) délimités par des "nœuds d'interpolation" de la géométrie. Comme en mécanique des structures linéaires (par exemple dans le contexte de la *M.E.F.* appliquée à l'élasto-statique), après l'opération de discrétisation, le problème différentiel linéaire de départ se ramène à la résolution d'un système d'équations algébriques linéaires dont les inconnues sont ici les intensités des distributions au départ inconnues [47, 26, 56]. Dans le cas des fluides parfaits cette technique numérique s'appelle la méthode des panneaux [56]. Elle consiste en premier lieu à mailler les frontières intervenant dans la solution générale (2.54), d'éléments ou "panneaux", où les distributions de singularités (de type source $\sigma(.)$, doublet $\mu(.)$, etc...) sont dans un second temps réduites sur une base de polynômes [56]. Homogènes aux intensités des distributions de départ, les inconnues discrètes sont ensuite calculées par résolution d'un système d'équations linéaires. Pour construire celui-ci on applique les conditions de Neumann (ou/et Dirichlet) spécifiées en des points particuliers du corps appelés "point de colocation". La condition de Kutta (2.82) doit enfin être ajoutée de manière à satisfaire la continuité de l'écoulement au bord de fuite.

Dans notre cas, poursuivant une approche basée sur le modèle du fluide parfait appliquée à la nage de l'anguille, nous exposerons dans ce chapitre trois méthodes numériques dont les deux dernières seulement ont été programmées et exploitées. La première (exposée dans la section § 3.2) a ici une valeur de généralité, puisqu'elle représente la mise en œuvre directe de l'expression générale (2.57) telle qu'elle a permis à l'équipe du *M.I.T.* d'opérer la percée la plus significative en matière d'étude hydrodynamique de la nage [125]. Quant à la seconde approche (cf. § 3.4) que nous exposerons plus en détail, elle relève de la méthode bidimensionnelle des "points de vortex" et sera relayée en fin de chapitre par la mise en œuvre d'une troisième méthode, celle des "anneaux de vortex" (cf. § 3.7). En fait, les "panneaux" employés dans ces deux dernières méthodes sont issus de la "théorie des ailes d'avion" telle que développée pendant la dernière guerre mondiale (cf. [43]). La construction de l'élément "point de vortex" sera traitée dans la section § 3.3.3, à la suite de l'exposé de la méthode générale. Grâce à cet élément, nous étudierons l'écoulement plan autour du poisson et dans son sillage (cf. § 3.5). Ces premières simulations nous permettront d'étudier les phénomènes tourbillonaires exploités par le poisson. Dans un second temps, les enseignements de ces premières simulations seront complétés par des simulations 3-D (cf. § 3.8) afin d'en extraire les principes de base pour la mise au point d'un modèle de contact dévolu à la robotique bio-inspirée et à la commande. En particulier, nous attendons de ces simulateurs la mise en évidence de liens cinématiques explicites entre la dynamique du fluide et la dynamique du corps.

1. *M.E.F.* : Méthode des Éléments Finis

3.2 La technique des panneaux.

Considérons, en accord avec la figure 2.5, une anguille nageant dans un fluide supposé parfait. Celle-ci, à l'instant $t = 0$, n'ondule pas et est animée d'une vitesse initiale parallèle à l'axe principale de son corps. A $t > 0$, l'animal se déplace en déformant son corps par ondulation rendant ainsi l'écoulement instationnaire. De plus, nous supposerons que le sillage se forme uniquement le long du bord de fuite de la nageoire caudale, toute autre forme de nageoire (dorsale, pectorale, ventrale...) étant absente de ce problème simplifié.

3.2.1 La discrétisation du corps et du sillage.

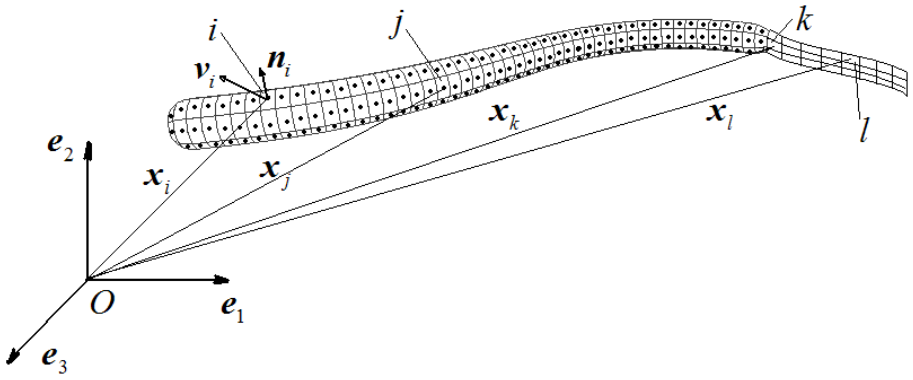


FIGURE 3.1 – La nomenclature de la méthode des panneaux.

Pour appliquer la méthode des panneaux, il nous faut discrétiser le corps par N panneaux plans "posés" sur ses frontières (cf. figure 3.1). En accord avec la méthode de résolution esquissée dans la section § 2.8 du chapitre précédent, nous pouvons dans un second temps affecter à chacun de ces panneaux une distribution de sources ou de doublets. Cependant, comme une distribution de sources ne peut engendrer la circulation non-nulle autour d'un corps portant, on adopte donc une distribution de doublets (i.e. placée sur les frontières mises en jeu dans l'équation intégrale générale (2.57)). Cette distribution est ensuite discrétisée sur chacun des panneaux via une interpolation polynomiale. Dans le cas présent, l'interpolation adoptée est simplement constante. Ce choix est notamment celui adopté par [125] pour l'étude de la nage du "robot thon" du M.I.T.. Concernant le sillage, il est discrétisé de même par M panneaux de doublets, où M est fonction du temps, puisqu'à chaque pas de temps, une rangée de L panneaux s'ajoutera dans le prolongement du bord de fuite, au M panneaux déjà présent dans le sillage.

Comme annoncé, la méthode s'appuie sur le maillage des frontières de (2.57), i.e. sur :

$$\mathcal{S}_{(t)} \cup \partial\mathcal{B}_{(t)} = \bigcup_{j=1}^{N+L+M} \mathcal{S}_{j,(t)} \ . \tag{3.1}$$

Une fois prise en compte dans (2.57), cette facétisation des surfaces singulières de l'écoulement permet d'écrire la valeur prise par le potentiel aux centres des panneaux du corps coïncidant ici avec les points dits "de colocation" notés $\boldsymbol{x_i}$, où les conditions aux frontières seront forcées. Ainsi, le potentiel calculé au point de colocation de l'élément i du corps ($i = 1, ...N$) s'écrit-il comme la superposition discrète des contributions élémentaires suivantes où $j = 1, ...N + M + L$:

$$\phi(\boldsymbol{x}_i)_j = \frac{\mu_j}{4\pi} \int_{\mathcal{S}_{j,(t)}} \frac{\partial(1/r)}{\partial n_j} d\mathcal{S}_{j,(t)} \ , \ r : \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}_{j,(t)} \mapsto r = ||\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}|| \ , \tag{3.2}$$

où μ_j est l'intensité constante de la distribution de doublets du panneau j , $\mathcal{S}_{j,(t)}$ est sa surface courante, $\boldsymbol{n}_j$ est son vecteur normal. Par dérivation, on obtient le champ de vitesse induit par l'élément j au point de colocation de l'élément i :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_i)_j = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_i)_j = \frac{\mu_j}{4\pi} \boldsymbol{\nabla} \left(\int_{\mathcal{S}_{j,(t)}} \frac{\partial(1/r)}{\partial n_j} d\mathcal{S}_{j,(t)} \right) \ . \tag{3.3}$$

Finalement, après introduction de l'interpolation de la géométrie de l'élément dans (3.2) et (3.3), on en déduit les formes pré-intégrées (cf. [56]) des potentiels et vitesses, paramètrées par les positions des nœuds positionnés aux quatre coins du panneau. Dans la suite on supposera (3.2) et (3.3) pré-intégrées de la sorte.

3.2.2 La discrétisation des équations.

Avant de poursuivre plus en avant nos investigations, faisons un bref bilan du nombre d'inconnues et du nombre d'équations à présent en notre possession. Concernant les inconnues du problème, ils sont au nombre de $N + L$, comprenant les N intensités nodales $\mu_{b,1}, \mu_{b,2}...\mu_{b,N}$ des panneaux de doublets disposés sur le corps , et les L intensités nodales $\mu_{w,1}, \mu_{w,2}...\mu_{w,L}$ de panneaux de doublets placés sur le sillage. Il est à noter que les panneaux de doublets précédemment lâchés dans le sillage sont, en vertu du théorème d'Helmholtz d'intensités connues et constantes. En ce qui concerne le nombre d'équations sur le corps, nous pouvons écrire N équations linéaires fonction des $\mu_{b,j}$ et des $\mu_{w,k}$ résultant de la condition de glissement de Neumann. Sur le bord de fuite, nous pouvons écrire L équations linéaires fonctions des intensités discrètes $\mu_{b,j}$ et $\mu_{w,k}$ produites par l'écriture de la condition de Kutta. Finalement, le bilan inconnues-équations est équilibré ($N + L = N + L$) et le problème discret bien posé. Détaillons à présent les équations relatives aux conditions aux frontières du problème. La condition de Neumann (2.32) écrite

en chaque point de colocation (cf. figure 3.1) permet d'obtenir le système suivant, où les inconnues sont isolées dans le membre de droite :

$$i = 1, ., N \ , \ \left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x_i})_j + \sum_{k=1}^{L} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x_i})_k \right) .\boldsymbol{n}_i = \left(\boldsymbol{v}_i - \sum_{l=1}^{M} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x_i})_l \right) .\boldsymbol{n}_i \ , \qquad (3.4)$$

où, l'indice i numérote les points de colocation où l'on écrit la condition de glissement, l'indice j numérote les panneaux du corps, l'indice k numérote les panneaux du sillage (uniquement ceux d'intensité inconnue), tandis que l'indice l est relatif aux panneaux du sillage précédemment lâchés. Le vecteur $\boldsymbol{n}_i$ est le vecteur normale au panneau i et $\boldsymbol{v}_i$ est la vitesse du corps au point de colocation i. Décrivons maintenant (3.4), et ce de gauche à droite, le premier terme correspond à la vitesse créée par les N panneaux de doublets du corps en $\boldsymbol{x}_i$. Le second correspond à la vitesse créée par les L panneaux de doublets du sillage en $\boldsymbol{x}_i$. Quant au second membre, son premier terme correspond à la contrainte de vitesse normale imposée par le corps sur le fluide au point $\boldsymbol{x}_i$, tandis que le second correspond à l'effet du sillage, en terme de vitesse en $\boldsymbol{x_i}$.

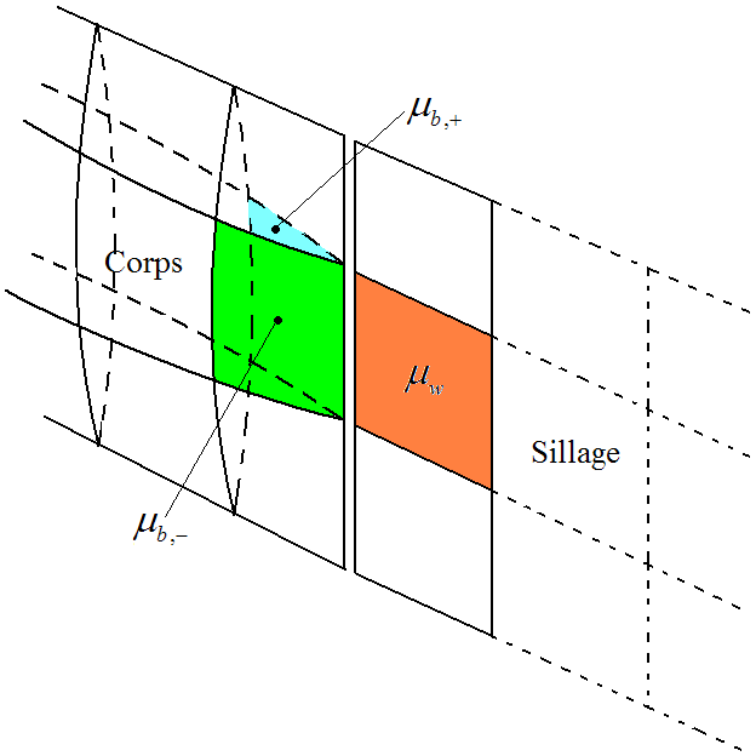


FIGURE 3.2 – Discrétisation de la condition de Kutta.

Afin de compléter le système d'équations linéaires, nous devons discrétiser la condition de Kutta. En accord avec la figure 3.2, la discrétisation de (2.85) sur le maillage de la nageoire caudale permet d'écrire les L équations suivantes :

$$l = 1, ., L \ , \ \mu_{b,p+} - \mu_{b,r-} = \mu_{w,l} \ , \tag{3.5}$$

où "$p+$" et "$r-$" sont des indices relatifs à des panneaux de l'extrados ("+") et l'intrados ("−"), tous deux limitrophes au bord de fuite et contigus au panneau du sillage indicé "l" (cf. figure 3.2).

Les N équations (3.4) et les L équations (3.5) peuvent être concaténées sous la forme du système linéaire $(L+N).(L+N)$ du type :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} & B_{1,1} & \cdots & B_{1,L} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} & B_{N,1} & \cdots & B_{N,L} \\ C_{1,1} & \cdots & C_{1,N} & 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{L,1} & \cdots & C_{L,N} & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_{b,1} \\ \vdots \\ \mu_{b,N} \\ \mu_{w,1} \\ \vdots \\ \mu_{w,L} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_N \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \ , \tag{3.6}$$

où l'on déduit de (3.4) et (3.5) :

- $A_{i,j} = \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_i)_j.\boldsymbol{n}_i$, avec $\mu_{b,j} = 1$, $i = 1, ..., N$, $j = 1, ..., N$;
- $B_{i,k} = \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_i)_k.\boldsymbol{n}_i$, avec $\mu_{w,j} = 1$, $i = 1, ..., N$, $k = 1, ..., L$;
- $C_{k,i} = \begin{cases} \text{si } i \text{ est limitrophe de } k \text{ et situé sur l'extrados : } C_{k,i} = 1 \\ \text{si } i \text{ est limitrophe de } k \text{ et situé sur l'intrados : } C_{k,i} = -1 \\ \text{si } i \text{ n'est pas limitrophe de } k : C_{k,i} = 0 \end{cases}$;
- $D_i = \left(\boldsymbol{v}_i - \sum_{l=1}^{M} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_i)_l \right) .\boldsymbol{n}_i$.

En résolvant ce système d'équations, nous obtenons les intensités des panneaux de doublet du corps et du sillage. Finalement, à partir de ces dernières, il est possible de calculer, via l'équation de Bernoulli (2.31), le champ de pression sur le corps et par intégration sur ses frontières, le torseur des forces hydrodynamiques en découlant.

3.2.3 La convection du sillage.

Avant de passer d'un pas de temps au suivant, et de recalculer pour ce dernier le système d'équations linéaires (3.6) à partir du nouveau champ de vitesse du corps connu et imposé aux frontières du solide, nous devons, en accord avec le caractère lagrangien du champ de vorticité, convecter la feuille libre de vortex modélisant le sillage. Ceci revient à translater chacun des panneaux du sillage à la vitesse locale du fluide. Par exemple,

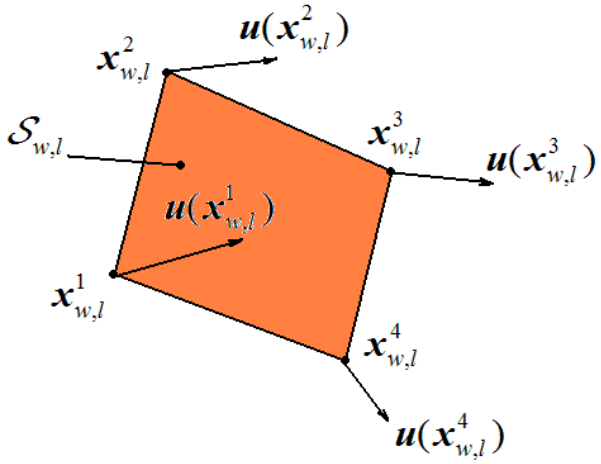


FIGURE 3.3 – Convection du panneau l appartenant au sillage.

si nous considérons les quatre sommets du panneau l du sillage, leurs positions seront à $t + \triangle t$:

$$i = 1, ...4 \ , \ \boldsymbol{x}^i_{w,l}(t + \Delta t) \ = \ \boldsymbol{x}^i_{w,l}(t) + \int_t^{t+\Delta t} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^i_{w,l}(t)) \ , \tag{3.7}$$

où, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}^i_{w,l}(t))$ est la vitesse induite par toutes les singularités du problème au point de position $\boldsymbol{x}^i_{w,l}(t)$, avec i l'indice nodal, l l'indice du panneau et w figurant l'appartenance du panneau au sillage (cf. figure 3.3).

Ce qui précède est relatif à la méthode des doublets telle que mise en œuvre dans [125]. Dans notre cas, nous avons implémenté les deux autres algorithmes que sont "la méthode des vortex" pour les écoulements bidimensionnels et "la méthode des anneaux de vortex" pour les écoulements tridimensionnels [56]. Ces techniques ont l'avantage d'être simple à mettre en œuvre numériquement. Cependant, en dépit de leurs avantages, ces techniques nécessitent la construction de deux éléments spécifiques (le premier en deux dimensions et le second en trois dimensions) : " le lumped vortex element" et "l'anneau de vortex". Nous allons donc à présent, afin de notamment illustrer les liens entre les théorèmes généraux de la mécanique des fluides parfaits et la méthode des panneaux, montrer comment l'on peut construire le premier de ces deux éléments.

3.3 L'élément "Lumped Vortex".

Le "Lumped Vortex Element" est un élément dédié aux écoulements bidimensionnels basé sur la distribution de points de vortex (cf. § 2.10.3). L'idée est ici de condenser

toute la distribution de vortex, le long d'un segment solide sans épaisseur, en un seul et unique point appelé "point de condensation (ou lumped)". La position de ce point ainsi que celle du point de colocation du même élément, sont définies de sorte que l'hypothèse de Kutta-Joukowski soit prise en compte. Dans la suite, nous allons rappeler les grandes lignes de construction de cet élément et introduire pour cela quelques-unes des techniques basées sur les distributions de vortex mises en œuvre pour la modélisation des écoulements autour des profils fins cambrés [43].

3.3.1 L'écoulement autour d'un profil d'aile.

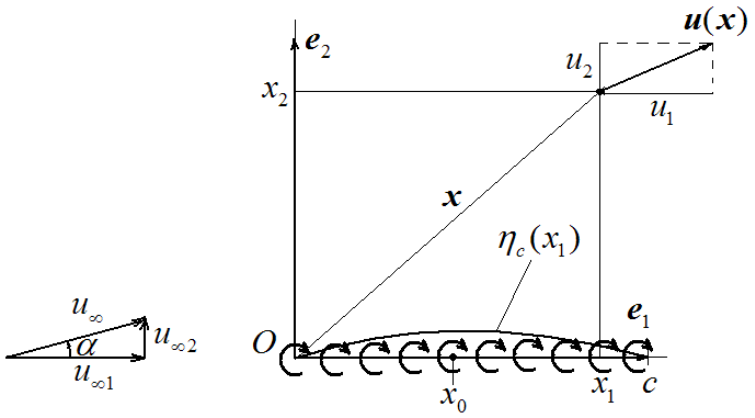


FIGURE 3.4 – Le paramétrage du profil fin courbé avec un angle attaque α.

Considérons donc un profil courbé que l'on qualifie de fin car sans épaisseur. Le profil est incliné selon un angle d'incidence α par rapport à un courant de fluide de vitesse $\boldsymbol{u}_\infty = u_\infty(\cos\alpha \boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha \boldsymbol{e}_2)$ (cf. figure 3.4). L'écoulement est supposé parfait, incompressible, irrotationnel et stationnaire et sa cinématique réglée par l'équation de Laplace (2.29). Le profil est positionné dans le plan $(o, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ de telle sorte que le bord d'attaque soit en $x_1 = 0$ et le bord de fuite en $x_1 = c$, où c est "la corde" du profil. En réalité, la courbe du profil définie par son graphe : $x_1 \in [0, c] \mapsto \eta_c(x_1)$, réalise la ligne médiane de la section d'un solide de très faible épaisseur. Comme la courbure du profil imposée par η_c est faible, nous pouvons faire l'approximation de placer la distribution de vortex le long de l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ au lieu de la mettre sur le profil [43]. Sous l'hypothèse des petites perturbations : faibles angle d'attaque et courbure du profil, et en vertu de $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_2 - \partial\boldsymbol{n}/\partial x_1 \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{o}((\partial\eta/\partial x_1)^2)$, la condition de glissement se réduit à l'unique condition scalaire :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2}(x_1, \pm 0) \quad = \quad u_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx_1}\cos\alpha - \sin\alpha\right) \simeq u_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx_1} - \alpha\right) \ , \tag{3.8}$$

où, nous pouvons observer que la condition de Neumann sur le profil est ramenée sur l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ de normale $\boldsymbol{e}_2$. Cette équation stipule que la somme des projections normales

à la surface du profil des vitesses du courant et du champ induit par la densité de singularités est égale zéro.

En vertu de (2.79), le champ de vecters vitesses normaux à $(O, \boldsymbol{e}_1)$ induit par la distribution de vortex γ disposée sur "$x_2 = 0$", est défini en $\forall x_1 \in [0, c]$, par :

$$u_2(x_1, 0) \;=\; \frac{-1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{dx_0}{x_1 - x_0} \; . \tag{3.9}$$

On peut donc par identification de (3.8) et (3.9) en déduire l'équation intégrale dite de glissement sur le profil :

$$\frac{-1}{2\pi} \int_0^c \gamma(x_0) \frac{dx_0}{x_1 - x_0} = u_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx_1} - \alpha \right) \; . \tag{3.10}$$

Cette équation va nous permettre de connaître la distribution de vortex, le champ de vitesse induit et le champ de pression dont l'intégrale le long du profil, nous fournira le torseur des forces hydrodynamiques.

Afin de résoudre (3.10) par rapport à γ, et ce sous la condition de Kutta au bord de fuite, une approche classique due à H. Glauert (cf. [43]) consiste à approcher la fonction $\gamma(.)$ par une série trigonométrique dont les coefficients sont dans un second temps, calculés terme à terme. Pour cela, appliquons préalablement la transformation trigonométrique suivante à la variable x_1 :

$$x_1 = \frac{c}{2}(1 - \cos\theta) \; , \; dx_1 = \frac{c}{2} \sin\theta d\theta \; . \tag{3.11}$$

Sous ce changement de variable, le bord d'attaque "$x_1 = 0$" devient "$\theta = 0$", tandis que le bord de fuite "$x_1 = 1$" devient "$\theta = \pi$". Substituons à présent cette transformation dans l'intégrale de frontière (3.10), il vient alors :

$$\frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi \gamma(\theta_0) \frac{\sin\theta_0 d\theta_0}{\cos\theta_0 - cos\theta} \;=\; u_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx_1} - \alpha \right) \; , \tag{3.12}$$

où, l'intégrale par rapport à θ_0 doit être calculée en chaque point $\theta \in [0, \pi]$ sur le profil. Par ailleurs, sous ce changement de variable, la condition de Kutta s'écrit ici en vertu de (2.84) :

$$\gamma(\pi) \;=\; 0 \; . \tag{3.13}$$

Reste alors à trouver une distribution de vortex vérifiant les deux dernières équations (3.10) et (3.13). Une série trigonométrique de la forme [43] :

$$\gamma(\theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta_0) \ , \tag{3.14}$$

peut, comme nous allons le voir ci-après, convenir. Notons tout d'abord qu'elle satisfait bien la condition de Kutta (la vorticité s'annule au bord de fuite) et ce tout en restant assez générale pour approcher fidèlement la solution exacte de (3.12). Cependant, l'expérience des fluides réels montre que, si l'écoulement tangentiel est continu au bord de fuite il n'en est pas de même au bord d'attaque, où il génére "un pique" de vorticité (cf. [56]). Afin de rendre compte de cette observation, tout en préservant la condition de Kutta (3.13), on ajoute le terme correctif suivant à (3.12) :

$$A_0 \cot\frac{\theta_0}{2} \ = \ A_0 \frac{1+\cos\theta_0}{\sin\theta_0} \ , \tag{3.15}$$

qui diverge bien au bord d'attaque. Finalement, l'approche de H. Glauert consiste donc à approcher la distribution de vortex γ par :

$$\gamma(\theta_0) = 2u_\infty \left(A_0 \frac{1+\cos\theta_0}{\sin\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta_0) \right) \ . \tag{3.16}$$

Il s'en suit que sous ces conditions, l'équation intégrale (3.12) devient :

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{2\pi} \int_0^\pi 2u_\infty \left(A_0 \frac{1+\cos\theta_0}{\sin\theta_0} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\theta_0) \right) \frac{\sin\theta_0 d\theta_0}{\cos\theta_0 - \cos\theta} \\ &= u_\infty \left(\frac{d\eta_c}{dx_1} - \alpha \right) \ , \end{aligned} \tag{3.17}$$

où, il est important de noter que dans cette équation, chaque point θ est influencé par l'ensemble de tous les "vortex θ_0" du profil. Une fois ceci posé, l'identification terme à terme des deux membres de (3.17) nous donne les coefficients A_n de la série (3.14), dont l'évaluation requière comme nous allons le voir ci-après le calcul des intégrales suivantes, dites "de Glauert" [43] :

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta_0)}{\cos\theta_0 - \cos\theta} d\theta_0 \ = \ \frac{\pi \sin(n\theta)}{\sin\theta}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \ . \tag{3.18}$$

En effet, le facteur de A_0 dans (3.17) s'écrit grâce à (3.18), comme :

$$\frac{-1}{\pi} A_0 \int_0^\pi \frac{\cos(0\theta_0) + \cos\theta_0}{\sin\theta_0} \frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 - \cos\theta} d\theta_0 = \frac{-1}{\pi} A_0 (0+\pi) = -A_0 \ , \tag{3.19}$$

tandis que pour ce qui est des termes d'ordre supérieure A_1, A_2, ..., la relation :

$$\sin(n\theta_0)\sin\theta_0 = \frac{1}{2}\left(\cos((n-1)\theta_0) - \cos((n-1)\theta_0)\right), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{3.20}$$

permet de réécrire le n^{ime} terme de (3.17) sous la forme :

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{\pi}\int_0^\pi \left(A_n \sin(n\theta_0)\right)\frac{\sin\theta_0}{\cos\theta_0 - \cos\theta}d\theta_0 \\ &= \frac{-A_n}{2\pi}\int_0^\pi \left(\cos((n-1)\theta_0) - \cos((n-1)\theta_0)\right)\frac{1}{\cos\theta_0 - \cos\theta}d\theta_0 , \end{aligned} \tag{3.21}$$

où l'on voit, comme annoncé, apparaître les intégrales de Glauert. Appliquons alors (3.18) à (3.21), le facteur de A_n du premier membre de (3.17) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi}\pi\left(\frac{\sin((n-1)\theta)}{\sin\theta} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}\right) &= -\frac{1}{2}\left(-2\frac{\sin\theta\cos(n\theta)}{\sin\theta}\right) \\ &= \cos(n\theta) . \end{aligned} \tag{3.22}$$

Et finalement (3.17) s'écrit plus simplement :

$$-A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\theta) = \frac{d\eta_c(\theta)}{dx_1} - \alpha , \tag{3.23}$$

où l'on reconnaît la décomposition en série de Fourier de "$d\eta_c(\theta)/dx_1 - \alpha$", et par conséquent :

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\eta_c(\theta)}{dx_1}d\theta, \qquad n = 0 , \tag{3.24}$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\eta_c(\theta)}{dx_1}\cos(n\theta)d\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.25}$$

Remarquons ici avant de poursuivre la construction de notre élément, que ce résultat, valable pour les petites perturbations du profil autour de l'axe $(o, \boldsymbol{e}_1)$, a été utilisé par T.Y.T. Wu dans son article [126] pour l'étude de la nage plane d'un poisson. Dans ce cas, le graphe $\eta_c(x_1)$ est réglé par la loi ondulatoire suivante :

$$\eta_c(x_1, t) = A(x_1)\cos(\omega t - kx_1 + \varphi) , \tag{3.26}$$

où, $A(x_1)$ est une fonction arbitraire paramètrant l'amplitude de la loi d'onde, $k = 2\pi/\lambda$ est le vecteur d'onde, $\omega = 2\pi/T$ est la pulsation, tandis que φ est un angle de déphasage. Dans ce contexte, dont H. Glauert est à l'origine (cf. [43]), T.Y.T. Wu a pu calculer les forces hydrodynamiques appliquées à une lame ondulante et fournir ainsi l'un

des tous premiers résultats sur le rendement de la nage des poissons [126]. Retournant aux objectifs de cette section, nous allons voir à présent comment calculer le champ de pression à partir des résultats précédents.

3.3.2 Le champ de pression autour d'un profil fin.

L'une des données dont nous aurons besoins pour construire notre "lumped vortex element" est le champ de pression appliqué sur l'élément. Dans le cas d'un profil fin, nous parlerons plutôt de différence de pressions entre "l'extrados" et "l'intrados" (toujours indicés "+" et "-" respectivement). Aussi, à partir de l'équation de Bernoulli (2.31), ici restreinte au cas d'un écoulement stationnaire ($\partial\phi/\partial t = 0$), on est en droit d'écrire :

$$\delta p = p_- - p_+ = -\rho\frac{u_{1-}^2}{2} + \rho\frac{u_{1+}^2}{2} \ . \tag{3.27}$$

En vertu de l'équation de saut (2.80) associée à la traversé d'une distribution de vortex, et du fait que $\alpha << 1 \Longrightarrow u_\infty \cos(\alpha) \simeq u_\infty$, nous pouvons écrire :

$$\delta p = \rho u_\infty \gamma(x_0) \ . \tag{3.28}$$

Par ailleurs, tenant compte du fait que l'élément attendu est ici de géométrie droite, on peut poser $d\eta_c(\theta)/dx_1 = 0$ dans les résultats précédemment dévolus à un profil cambré quelconque. Dans ces conditions, les coefficients (3.25) dégénèrent comme suit :

$$A_0 \ = \ \alpha, \qquad A_1 = A_2 = ... = A_n = 0 \ , \tag{3.29}$$

et la distribution de vortex le long du panneau devient donc :

$$\gamma(\theta) = 2u_\infty \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ . \tag{3.30}$$

Tenant compte de (3.30) dans (3.28), le champ de pression $\delta p(\theta)$ devient :

$$\delta p(\theta) = 2\rho u_\infty^2 \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ . \tag{3.31}$$

Aussi, grâce à (3.31), nous sommes à présent en mesure de reconstruire par intégration le torseur des efforts hydrodynamiques appliqués sur l'élément. En effet, en accord avec (2.16), nous aurons :

- la force de traînée ($D\boldsymbol{e}_1$) (qui en raison de ($\alpha << 1$)) :

$$D = 0 , \tag{3.32}$$

• la force de portance ($L\boldsymbol{e}_2$) :

$$\begin{aligned} L &= \int_0^c \delta p(x_1) dx_1 = 2\rho u_\infty^2 \alpha \int_0^\pi \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\frac{c}{2}\sin\theta d\theta \\ &= \rho u_\infty^2 \pi c \alpha , \end{aligned} \tag{3.33}$$

• le moment hydrodynamique en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ($C\boldsymbol{e}_3$) :

$$\begin{aligned} C &= \int_0^c x_1 \delta p(x_1) dx_1 \\ &= \rho u_\infty^2 \alpha \int_0^\pi \frac{c}{2}(1-\cos\theta)\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\frac{c}{2}\sin\theta d\theta \\ &= -\rho u_\infty^2 \pi \frac{c^2}{4}\alpha = -\frac{c}{4}L . \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.3.3 Le "lumped vortex element".

Rappelons ici que l'objectif de cette section est de construire un élément qui, une fois isolé est cohérent avec le comportement d'un profil droit et fin dans un écoulement de fluide parfait de faible incidence. Ainsi, l'élément recherché doit vérifier les conditions de Neumann et de Kutta (par construction). Aussi, une fois que les forces appliquées sur l'élément sont connues, il devient manifeste, à l'examen de (3.33) et (3.34), que la position du point de réduction qui annule le moment du torseur hydrodynamique est situé en $x_1 = c/4$. Ce lieu est appelé "centre de poussée" du profil. Finalement, le panneau attendu sera réalisé en remplaçant (3.30) par une unique singularité de "point de vortex" que l'on placera au centre de poussée (afin que le chargement ne soit plus défini que par sa portance) et dont, en accord avec le théorème de Kutta-Joukowski ([62]), l'intensité doit reproduire la circulation totale de la distribution γ, i.e. :

$$\Gamma = u_\infty \pi c \alpha . \tag{3.35}$$

Reste enfin que ce panneau doit vérifier la condition de Neumann. Ainsi, ne disposant que d'une seule inconnue (i.e. Γ), la condition de non glissement ne peut être imposée qu'en un seul et unique point du panneau (le point de colocation). Qui plus est, si nous faisons l'hypothèse que ce point se situe à une distance $k(c)$ (où $0 \leq k \leq 1$) de l'origine le long de l'axe $\boldsymbol{e}_1$, alors nous pouvons écrire la condition de glissement comme :

$$\frac{-u_\infty \pi c \alpha}{2\pi[k(c) - (1/4)c]} + u_\infty \alpha \quad = \quad 0 \ , \tag{3.36}$$

ce qui donne, tous calculs faits :

$$k \quad = \quad 3/4 \ . \tag{3.37}$$

L'élément ainsi défini est très utilisé dans la littérature bio-mécanicienne (cf. [48]), où on le trouve sous le nom de "Lumped Vortex Element" (cf. figure 3.5). Son usage va nous permettre d'étudier le cas de la nage plane de l'anguille assimilée à un profil fin déformable.

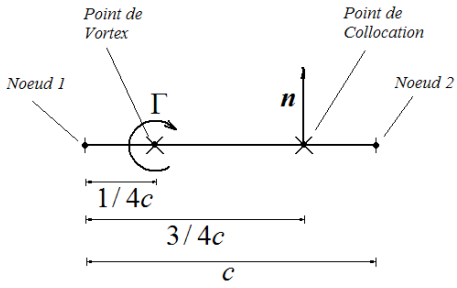


FIGURE 3.5 – L'élément "Lumped Vortex".

Un complément mathématique sur la construction de cet élément est dsponnible dans l'annexe B.

3.4 Algorithme numérique bidimensionnel.

Sur la base du "Lumped Vortex Element", dont la construction vient d'être rappelée, nous allons établir un algorithme numérique adapté à l'étude de la nage plane d'un profil fin ondulant. Contrairement à l'algorithme général tridimensionnel basé sur les panneaux de doublets présenté en début de chapitre, cette méthode, en vertu du fait que la condition de Kutta est vérifiée par construction, ne peut faire appel à celle-ci pour compléter les conditions de non-glissement. Aussi, c'est le théorème de Kelvin qui sera mis à contribution pour obtenir in fine un problème numériquement solvable. Ce théorème est ici invoqué pour déterminer la quantité de vorticité à lâcher dans le sillage à chaque instant. Qui plus est, en accord avec la discrétisation imposée par l'élément adopté, la vorticité continûment lâchée par la nageoire caudale de l'anguille sera, à chaque pas de temps de la simulation, condensée en un point de vortex. En dehors de ces différences, avec le cas tridimensionnel précédemment évoqué, la méthode se poursuit à l'identique et à chaque pas de temps, nous

re-calculons un système linéaire (issu des conditions de Neumann sur la surface du corps et du théorème de Kelvin appliqué à un système englobant le système "corps+sillage") que nous résoudrons à chaque pas de temps par rapport aux intensités des singularités à présent discrètes. Si le corps est discrétisé en N éléments, nous aurons donc à chaque instant à rechercher les $N+1$ inconnues que sont les N points de vortex des N panneaux du corps et l'unique point de vortex à lâcher, à chaque instant dans le sillage (cf. figure 3.6). Concernant les équations, la condition de Neumann apportera N équations et le théorème de Kelvin une seule. Une fois le système linéaire résolu, avant d'incrémenter le pas de temps de la simulation, nous déplacerons par intégration numérique les points de vortex lâchés successivement dans le sillage, aux instants précédents, et ce en accord avec le caractère convecté de ces singularités.

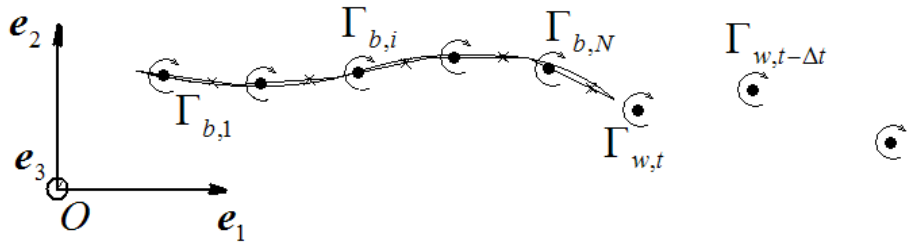


FIGURE 3.6 – La discrétisation du corps et du sillage.

3.4.1 La discrétisation du corps.

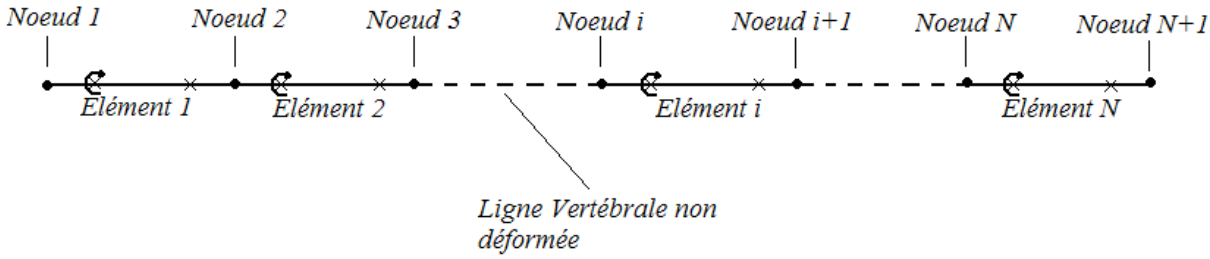


FIGURE 3.7 – La discrétisation 2-D de la ligne vertébrale de l'anguille.

Comme annoncé dès le départ, le mouvement du corps n'est pas résolu mais imposé. Aussi, les mouvements de la tête et les déformations du corps doivent être connus. Les secondes ne sont autre que les entrées du problème de dynamique et sont connus à priori, tandis que les premiers doivent être enregistrés par l'observation (films en biologie expérimentale) ou par un solveur Navier-Stokes. C'est ce second moyen que nous utiliserons ici et sur lequel nous reviendrons plus en détail dans la suite. Plus précisément, l'algorithme des panneaux ici mis en œuvre réclame de connaître à chaque instant les positions des

"points de condensation" et de "colocation" de tous les éléments du maillage du corps du poisson. Techniquement, nous avons choisi de discrétiser celui-ci par N ("Lumped Vortex") éléments de longueur identique et égale à $c = 1/N$ (cf. figure 3.7). En passant par les positions nodales du maillage, dont les mouvements sont calculés préalablement à l'aide du modèle géométrique continu de l'anguille, que nous aborderons dans le chapitre § 6 (cf. [11]), on déduit à chaque instant, et par définition de l'élément, les positions des points de condensation et de colocation respectivement dénotés $\boldsymbol{x}_{v,i}$ et $\boldsymbol{x}_{c,i}$, où $i = 1, ..., N$. De même, le modèle cinématique continu du chapitre § 6 est utilisé pour calculer l'évolution temporelle des vitesses imposées aux points de colocation du corps, vitesses que nous noterons $\boldsymbol{v}_{c,i}$, $i = 1, ..., N$. Pour ce qui est de la discrétisation du sillage, à chaque instant de la simulation, un nouveau point de vortex indicé M de circulation $\Gamma_{w,M}$ est lâché dans le sillage pour compenser la variation de circulation autour du corps. Ce "point de condensation" (sans élément) occupe à chaque instant une position $\boldsymbol{x}_{w,M}$ située en arrière du bord de fuite à 1/4 de la distance parcourue par celui-ci entre l'instant courant et le précédent. Finalement, $M = t/\Delta t$ n'est autre que le nombre courant de points de vortex présent dans le sillage, tous conservant leur intensité et subissant la convection de l'écoulement une fois détachés du bord de fuite. Enfin, une fois le corps et le sillage discrétisés, nous sommes en mesure d'établir le système de dimension $N + 1$ équations linéaires résolvant la dynamique du fluide autour de l'anguille.

3.4.2 La condition de Neumann sur le corps.

A partir de (3.4), la condition de Neumann en chaque point de colocation i pour ce problème s'écrit :

$$i = 1, ., N \ , \ \left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_j + \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_M \right) .\boldsymbol{n}_i = \left(\boldsymbol{v}_{c,i} - \sum_{l=1}^{M-1} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_l \right) .\boldsymbol{n}_i \ , \qquad (3.38)$$

où, l'on a introduit :

- $\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_j$: la vitesse induite par le point de vortex j du corps au point de colocation i ;
- $\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_M$: la vitesse induite par le point de vortex lâché dans le sillage à l'instant courant t au point de colocation i ;
- $\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_l$: la vitesse induite par les $M - 1$ points de vortex du sillage sur le corps à l'instant courant t et au point de colocation i.

D'après la définition (2.62), les différents champs de vitesse de (3.38) sont définis pour $i = 1, ., N$, par :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_j = \frac{-\Gamma_{b,j}}{2\pi||\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{v,j}||^2}\left(\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{v,j})\right) ; \tag{3.39}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_M = \frac{-\Gamma_{w,M}}{2\pi||\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{w,M}||^2}\left(\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{w,M})\right) ; \tag{3.40}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_l = \frac{-\Gamma_{w,l}}{2\pi||\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{w,l}||^2}\left(\boldsymbol{e}_3 \times (\boldsymbol{x}_{c,i} - \boldsymbol{x}_{w,l})\right) \ . \tag{3.41}$$

A ce niveau, (3.38) nous donne N équations tandis que le nombre d'inconnues est $N+1$. Aussi, comme mentionné précédemment, l'équation manquante est imposée par le théorème de Kelvin.

3.4.3 L'application du principe de conservation de la circulation.

A l'instant $t = 0$, nous faisons l'hypothèse que l'écoulement et le poisson sont tous deux au repos et que la circulation autour de l'animal est par conséquent nulle. Quand $t > 0$, la forme du corps change, perturbe le fluide le rendant ainsi instationnaire. La circulation devient alors une fonction du temps et il nous faut donc vérifier le théorème de Kelvin (2.23), à chaque instant de la simulation. Dans notre cas, ce dernier se traduit pas le fait que la circulation totale, qui n'est autre ici que la somme des circulations de tous les points de vortex (du corps et du sillage), doit conserver sa valeur initiale nulle. Ainsi, cette contrainte permet de fixer l'intensité du point de vortex lâché dans le sillage (dont l'indice courant est $M = t/\Delta t$), via la relation :

$$\Gamma_{w,M} = -\sum_{j=1}^{N}\Gamma_{b,j}(t) - \sum_{l=1}^{M-1}\Gamma_{w,l} \ , \tag{3.42}$$

où, $\Gamma_{w,l}$ est la circulation du point de vortex d'indice l lâché dans le sillage à l'instant passé $t = l\Delta t$. Ainsi, ayant à notre disposition toutes les équations nécessaires, nous pouvons à présent construire le système linéaire à résoudre.

3.4.4 Le système linéaire d'équations de l'algorithme 2-D des panneaux.

Pour obtenir le système linéaire final, il suffit de concaténer les N équations (3.38) avec l'unique équation (3.42). Comme attendu, on obtient un système linéaire fonction des $N+1$ inconnues du type $\mathbb{A}\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{SM}$, où $\mathbb{A}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ et $\boldsymbol{SM}$ sont respectivement la matrice d'influence de dimension $(N+1)\times(N+1)$, le vecteur des circulations inconnues de dimension $(N+1)$ ainsi que le vecteur "second membre" de dimension $(N+1)$. Après quelques manipulations algébriques de (3.38) et (3.42), on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,N} & B_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{N,1} & \cdots & A_{N,N} & B_N \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{b,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{b,N} \\ \Gamma_{w,M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \\ D \end{pmatrix} , \tag{3.43}$$

où, les composantes A_{ij}, B_i, C_i et D se détaillent comme suit :

- $A_{ij} = (\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_j).\boldsymbol{n}_i$ avec $\Gamma_{b,j} = 1$;
- $B_i = (\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_M).\boldsymbol{n}_i$ avec $\Gamma_{w,M} = 1$;
- $C_i = \left(\boldsymbol{v}_{c,i} - \sum_{l=1}^{M-1} \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_l \right).\boldsymbol{n}_i$;
- $D = -\sum_{l=1}^{M-1} \Gamma_{w,l}$.

Les vitesses $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_j$ et $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_M$ nécessaires aux calculs de A_{ij} et B_i sont obtenues respectivement à l'aide des équations (3.39) et (3.40), où les $\Gamma_{b,k}, k = 1, ...N$ et $\Gamma_{w,M}$ sont forcés à 1. En ce qui concerne C_i, les vitesses $\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{x}_{c,i})_l$ sont calculées à partir de (3.41), où les $\Gamma_{w,l}$ sont connues, puisque les vortex associés conservent les intensités qu'ils avaient au moment de leur lâché.

3.4.5 Résolution du système d'équations.

Finalement, la résolution du système se fait par inversion de la matrice d'influence $\mathbb{A}$:

$$\boldsymbol{\Gamma} \;=\; \mathbb{A}^{-1}\boldsymbol{SM} \; . \tag{3.44}$$

Une fois ceci fait, l'état, i.e. la cinématique du fluide, est entièrement connue. Ainsi, tenant compte de chacune des intensités des points de vortex solutions dans l'expression (2.64) de la fonction de courant d'une seule singularité, on obtient par superposition de ces fonctions le tracé des lignes de courant du champ de vitesse de l'écoulement (cf. figure 3.9).

3.4.6 La convection du sillage.

D'après le théorème de Stokes (section 2.5.3), les points de vortex doivent être convectés avec le champ de vecteurs vitesses du fluide. Ce champ le long duquel est convecté chaque point de vortex lâché dans le sillage est induit par tous les vortex (i.e. corps et sillage) excepté celui convecté. Lors de la définition de la loi de comportement du fluide

parfait, nous avions évoqué le fait que la cinématique de l'écoulement du fluide devait être réversible, i.e. que nous devions retrouver l'état initial à partir de l'état final de la simulation en remontant le temps. Nous allons revenir sur ce point afin de présenter l'intégrateur numérique que nous avons mis en œuvre pour résoudre le problème de la convection du sillage.

D'après [67], le schéma d'intégration le plus adapté pour satisfaire cette condition est un schéma d'intégration par différence centrée (cf. figure 3.8), du type :

$$\boldsymbol{x}_{w,l}(t+\Delta t) = \boldsymbol{x}_{w,l}(t) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a,t) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_b,t)\right)\Delta t \ , \ l = 1,..,M \ , \tag{3.45}$$

où le point $\boldsymbol{x}_a$ est la position courante (à t) de la singularité d'indice l tandis que $\boldsymbol{x}_b$ représente celle qu'elle occupe après avoir subit une translation de vecteur $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a,t)\Delta t$, avec :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a,t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{w,l},t) \ , \ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_b,t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_{w,l} + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a,t)\Delta t,t) \ , \tag{3.46}$$

où, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_a,t)$ et $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_b,t)$ sont respectivement les vitesses des particules de fluides se trouvant aux lieux géométriques $\boldsymbol{x}_a$ et $\boldsymbol{x}_b$.

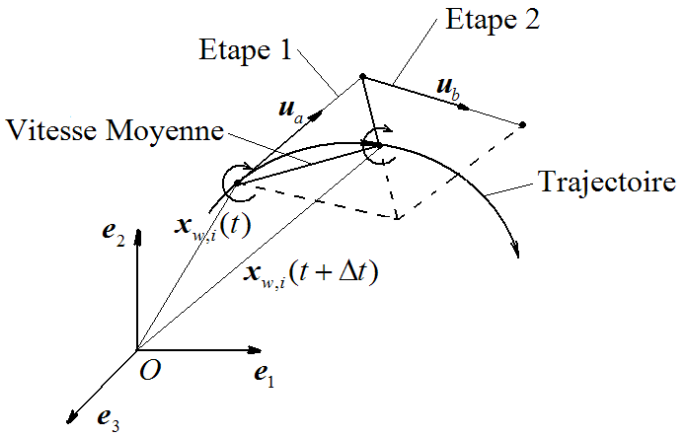


FIGURE 3.8 – Schéma intégration par différence centrée

Pour chacun des points de vortex du sillage indicés $l = 1,...M$, on applique donc l'algorithme suivant :

– calculer la vitesse courante du fluide au point $\boldsymbol{x}_a$ et en déduire la position $\boldsymbol{x}_b$, convecté de $\boldsymbol{x}_a$ par le champ de vitesse courant à t entre t et $t+\Delta t$;

– connaissant la position $\boldsymbol{x}_b$, calculer la vitesse du fluide en ce lieu et appliquer l'équation (3.45) pour obtenir la nouvelle position (à $t + \Delta t$) de la singularité considérée (indicée l).

3.5 L'étude de la nage.

L'algorithme ici présenté a été programmé sous MATLAB 6.5 et nous a permis de simuler la nage d'un poisson ondulant de type anguilliforme. Dans ce qui suit comme dans la grande majorité des travaux en hydrodynamique de la nage depuis J. Lighthill, seule la dynamique du fluide est résolue numériquement. Néanmoins, nous n'aborderons pas le problème de la "Recoil Correction", préférant dans les chapitres suivants, nous concentrer sur la résolution "de front" des dynamiques couplées du corps et du fluide, i.e. sur le problème de la modélisation dynamique et de la simulation numérique d'un corps mince auto-propulsé. Au contraire dans ce chapitre, les mouvements de la tête du poisson ainsi que les déformations internes de son corps sont à priori imposés et non calculés par l'algorithme. Aussi, pour poursuivre ces objectifs, nous avons besoin d'une référence aussi réaliste que possible des mouvements de l'anguille. Depuis quelques années le Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'École Centrale de Nantes met au point un solveur Navier-Stokes permettant de résoudre les écoulements de fluides réels autour d'obstacles solides mobiles. Lors de sa thèse, A. Leroyer [64] a étudié la nage de type anguilliforme grâce à ce solveur dans le cadre du projet C.N.R.S. ROBEA Anguille. Pour cela, la déformation du corps du poisson est imposée comme loi horaire (grâce aux modèles cinématiques continus de § 5) et les dynamiques de sa tête, ainsi que celle du fluide sont résolues de manière couplée. Aussi, dans la suite de ce chapitre nous allons utiliser les résultats issus de ce solveur (en particulier les enregistrements des mouvements de la tête pendant la nage) pour imposer les conditions limites de l'écoulement plan que nous allons résoudre par l'algorithme des panneaux précédemment exposé. Grâce à ces simulations, nous étudierons l'écoulement autour du poisson, dans le cas de la la nage plane ondulante, où les paramètres de l'ondulation sont maintenus stationnaires de manière à générer un mouvement périodique à vitesse d'avance moyenne constante.

3.5.1 Les paramètres de simulation.

La géométrie du poisson utilisée pour obtenir les trajectoires de référence de la tête données par le solveur Navier-Stokes est la même que celle utilisée dans le chapitre § 6 de ce manuscrit. En revanche, dans ce chapitre, on modélise l'écoulement en remplaçant la forme complexe du poisson par un profil mince (sans épaisseur) de $1m$ de long dont la déformation est imposée. Comme pour toute méthode numérique, le choix des paramètres

de discrétisation est important. Ce sont eux qui règlent la précision et la convergence de l'algorithme. Ici, les valeurs $N = 150$ et $\Delta t = 0.01sec$ ont donné entière satisfaction. De plus, elles s'accordent parfaitement avec les recommandations ($N > 150$, $\Delta t/T < 1/100$) de [48], où cette méthode a également été développée. Avec ces paramètres, les temps de calculs sur un ordinateur mono-processeur de 3 gigahertz avec 1 gigaoctet de mémoire vive sont d'environ 40 heures pour 5 secondes de nage. Au vu de ces chiffres, cet algorithme pourtant "simple", ne peut servir au calcul en ligne des forces de contact et en particulier ne peut être exploité pour la génération et la mise à jour des trajectoires d'un robot sous-marin. Aussi, nous verrons, dans les deux derniers chapitres de ce manuscrit, un modèle simplifié adapté à ces objectifs.

3.5.2 La nage ondulante en ligne droite.

Dans l'essai ici rapporté, l'écoulement est calculé par notre algorithme des panneaux, où le corps mince est soumis à une loi de courbure ondulatoire conférant à l'animal une vitesse de croisière constante. Cette loi, bien connue depuis C.M. Breder et J. Gray (cf. [16, 44]), se définie mathématiquement par la fonction :

$$\boldsymbol{K}(X,t) \;=\; (A_2X_1^2 + A_1X_1 + A_0)\sin\left(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{X_1}{\lambda})\right)\boldsymbol{e}_3\ , \tag{3.47}$$

où les coefficients A_2, A_1 et A_0 règlent l'amplitude de la loi d'ondulation le long du corps d'abscisse vertébrale X_1, et T et λ sont respectivement les période et longueur d'onde de l'oscillation du corps, tous fixés par le tableau 3.1.

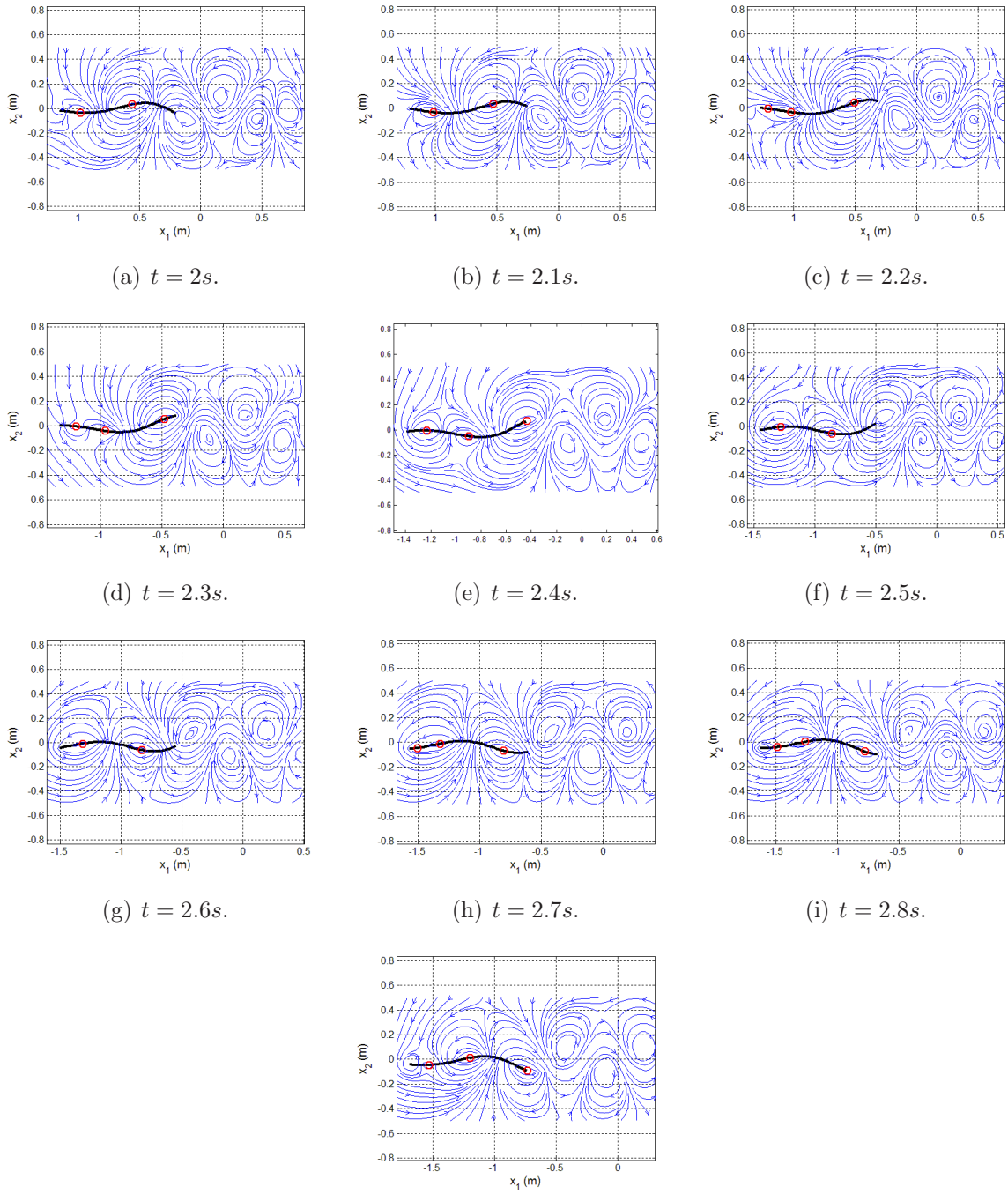
A_2 (m^{-3})	A_1 (m^{-2})	A_0 (m^{-1})	t_i (s)	t_f (s)	T (s)	λ (m)
2	0.5	1	0	1	1	1

TABLE 3.1 – Paramètres de la loi de déformation 3.47.

Comme, nous l'avons annoncé plus haut, le but de ce chapitre est de mettre en évidence la forme de l'écoulement autour de l'anguille. En particulier, nous voulons observer d'une façon qualitative les interactions entre le corps et le fluide, et leurs conséquences sur nos objectifs de modélisation pour la commande et la simulation rapide. Cette étude qualitative fait l'objet de la discussion suivante.

3.5.3 Discussions.

Les nageurs de type ondulant (anguilliforme, carangiforme, sub-carangiforme et thunniforme) gênèrent de la poussée (composante longitudinale de la résultante des forces



(a) $t = 2s$. (b) $t = 2.1s$. (c) $t = 2.2s$.

(d) $t = 2.3s$. (e) $t = 2.4s$. (f) $t = 2.5s$.

(g) $t = 2.6s$. (h) $t = 2.7s$. (i) $t = 2.8s$.

(j) $t = 2.9s$.

FIGURE 3.9 – Représentation de l'écoulement du fluide dans le plan de nage entre les instants $t = 2s$ et $t = 2.9s$, où, la ligne noire représente le corps du poisson, les lignes bleus représentent les lignes de courant du champ de vitesse du fluide et les ronds rouges indiquent l'endroit où la vitesse transverse du corps est égale à zéro.

hydrodynamiques) essentiellement selon deux moyens. Le premier est dû aux interactions du fluide avec le corps le long duquel se propage une onde transverse rétrograde. Le se-

cond est dû aux mouvements alternatifs de va-et-vient de leur nageoire caudale. Qui plus est, ces deux origines peuvent se combiner et leur participation respective à la poussée d'ensemble est, comme nous l'avons déjà évoqué, fortement dépendante de la morphologie du poisson considéré. Dans le cas de l'anguille, sa morphologie particulière (fusion des nageoires dorsale, ventrale et caudale) laisse à pressentir l'existence d'une forte interaction des deux origines de la production de poussée (corps et nageoire caudale). Aussi dans le domaine de la biomécanique expérimentale, certains auteurs tels [89, 117] ont tenté de mettre en évidence ces interactions par la méthode expérimentale de la vélocimétrie par Image de Particules (*V.I.P.*). Basée sur la diffusion d'un faisceau laser par de fines particules transportées par le fluide, leurs vitesses peuvent être mesurées par un capteur optique (généralement une caméra *C.C.D.* [2]), révélant ainsi une image du champ de vitesse de l'écoulement. Grâce à cette technique, U.K. Müller et E.D. Tytell ont pu observer certains phénomènes importants et exclusifs à l'anguille. Nous utiliserons comme référence leurs expertises. Nous chercherons en particulier à rapprocher ces résultats expérimentaux de ceux donnés par nos simulations numériques. D'une manière plus précise, chez les poissons, deux mécanismes d'interactions entre les nageoires, le corps et le fluide ont été proposés. Pour le premier, les ondulations du corps créent des zones d'écoulement circulaires qui se propagent le long de celui-ci. Au terme de leur voyage, elles interagissent avec l'écoulement produit par les mouvements propres de la nageoire caudale, et ce afin d'augmenter les performances de la nage dans son ensemble [88]. Ce mécanisme se retrouverait chez les anguilliformes et les carangiformes et selon ces auteurs permettrait au corps de créer par son ondulation fortement prononcée (ondulations de fortes amplitudes) une "pompe" [121] poussant latéralement le fluide vers la queue. Une fois en aval du corps, le fluide, ainsi propulsé, s'écoule ensuite dans le sillage sous la forme d'un "jet" orienté dans le sens opposé de la direction d'avance du poisson. Concernant le second mécanisme, attribué plutôt à la morphologie thunniforme, il serait basé sur l'activité de plusieurs zones de lâcher de vorticité (ou zones de décollement de la couche limite). Chez le thon par exemple, les zones retenues sont les bords de fuite des nageoires dorsale et ventrale supportées par le "pédoncule" (zone rétrécie entre le corps et la queue), ainsi que sa nageoire caudale. En actionnant ces différents organes, le poisson peut ainsi, au travers d'allures complexes, contrôler son efficacité hydrodynamique en combinant les différents sillages de ses nageoires (notamment en déphasant leurs oscillations) [125] [131]. A la lumière de ces remarques, nous allons à présent commenter nos résultats de simulation en nous attachant au "mécanisme de premier type" plus spécifiquement lié à l'anguille.

Nous avons représenté sur les figures 3.9(a)-(j), les lignes de courant du champ de vitesse du fluide autour de l'anguille (lignes bleus). A l'examen de ces tracés, nous observons la coexistence dans l'écoulement de deux phénomènes rotationnels. Le premier n'est

2. *C.C.D.* : Charge-Coupled Device, ou détecteurs à couplage de charge

autre que le sillage tourbillonaire en arrière de la nageoire caudale tandis que le second se traduit par la présence le long du corps de structures circulaires enlaçant ce dernier de part et d'autre. Aussi, ces simulations semblent s'accorder avec le premier mécanisme d'interaction et les observations de [88, 117]. Sur la base de cette remarque, nous allons à présent étudier les interactions de ces deux types de structures rotationnelles, en nous intéressant dans un premier temps sur la structure tourbillonaire du sillage.

J. Lighthill (cf. [73]) fut le premier à proposer un modèle de sillage (cf. figure 3.10(A)) pour les nageurs ondulants de type anguilliforme et carangiforme. Comme dans le cas des obstacles passifs, le sillage en arrière de ces nageurs est modélisé par une allée de vortex de Karman [85], i.e. par la juxtaposition de deux lignes parallèles de vortex d'intensité opposée (sens de rotation alternativement opposé) et dont l'arrangement est tel, que la rangée "supérieure" se trouve décalée en quinconce par rapport à son homologue inférieure. Sur la base de cette structure, J. Lighthill proposa de caractériser ces manifestations sur les poissons (soumis à des déformations actives) par la mesure d'un rapport adimensionnel appelé "rapport de glissement" et égale à UT/λ (où U est la vitesse d'avance, T est la période et λ est la longueur d'onde). D'après son auteur, quand le rapport de glissement est inférieur à 1, typiquement compris entre 0.6 et 0.7, le sillage du poisson est de type "Reverse Karman Vortex Street" que l'on déduit du classique Karman Vortex Street en y inversant le sens de rotation des tourbillons. Le principe de formation du sillage est le suivant. A chaque fois que la nageoire caudale rebrousse chemin, celle-ci lâche un tourbillon. Ainsi, sur un cycle de battement, deux tourbillons de signe opposé sont lâchés dans le sillage. La structure qui s'en suit est une allée de tourbillons induisant dans le sillage un jet qui éloigne le fluide de l'animal. Le poisson crée ainsi une véritable "pompe", aspirant le fluide et l'éloignant du poisson [121]. Aussi, par réaction, le sillage devient propulsif, et ce contrairement aux structures immergées passives non-oscillantes où le fluide n'induit qu'une force résistive de traînée sur la structure [103]. Comme en aérodynamique ("théorie des ailes"), en bio-mécanique les vortex lâchés par la nageoire caudale du poisson sont appelés "Starting/Stoping vortex" du fait que ces vortex sont lâchés quand le déplacement transverse de la nageoire caudale oscillante atteint son extremum en amplitude (ou encore quand sa vitesse transverse est nulle).

Plus récemment, partant du modèle de J. Lighthill, les travaux expérimentaux de E.D. Tytell et U.K. Müller [89, 117] tendent à montrer que, contrairement aux conclusions du premier auteur, le sillage de l'anguille ne s'organise pas en une simple allée de vortex, mais en une double rangée d'anneaux de vortex se déplaçant latéralement (cf. Figure 3.10-(B)). Ainsi, il semblerait qu'à chaque rebroussement de la nageoire caudale le starting-stopping vortex se dédouble en deux vortex de même signe. Aussi, dans le cas des anguilliformes, ces auteurs proposent de substituer au jet d'eau unique observé derrière la queue des carangi-

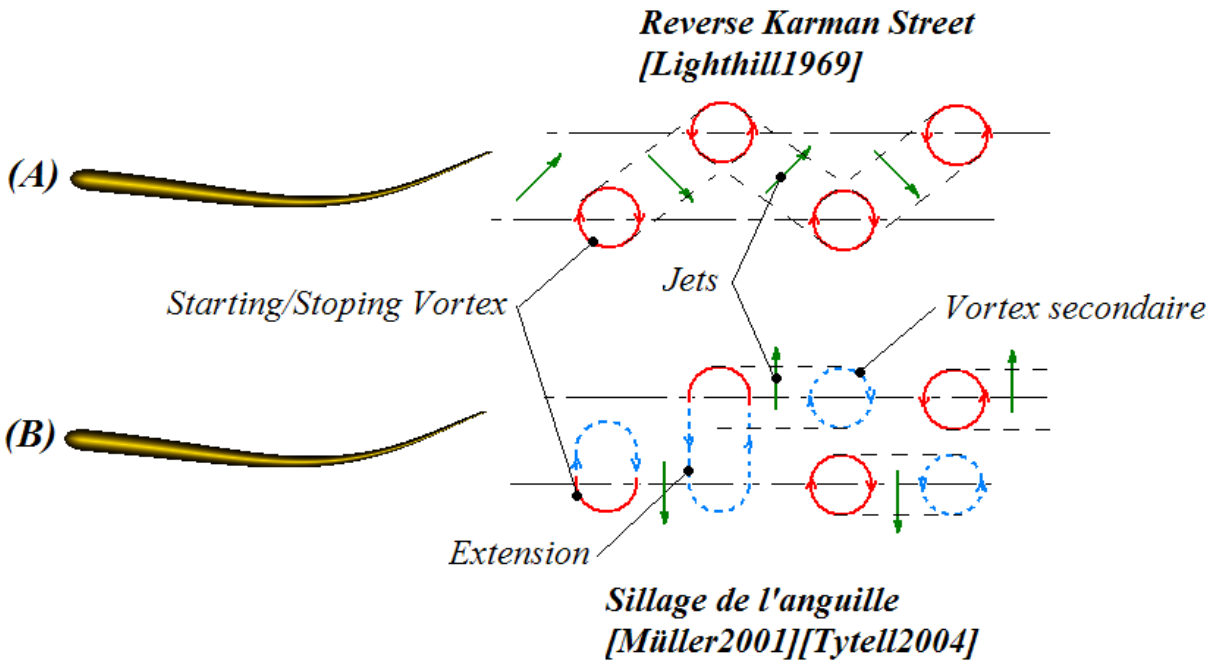


FIGURE 3.10 – Représentation des sillages : (A) de type "Reverse Karman Street" proposé par Lighthill ; (B) de type double rangés d'anneaux de vortex proposé par U.K. Müller puis E.D. Tytell.

formes (selon la proposition de Lighthill), une suite de jets latéraux de fluide de directions alternativement opposées (figure 3.10-(B)). Physiquement, à chaque rebroussement de la queue, celle-ci lâcherait donc un "starting Stoping Vortex", qui, s'étirant, se déchirerait pour former deux tourbillons de même sens de rotation. En mécanique des fluides, un tel phénomène relève d'une instabilité dynamique appelée "instabilité de Kelvin-Helmholtz" [31]. En fait, les perturbations de l'état turbulent de la couche limite au niveau de la nageoire caudale contribueraient à enrouler en spirale la feuille de vortex du sillage en plusieurs endroits, formant ainsi plusieurs tourbillons par battement au lieu d'un seul. Dans notre cas, comme nous travaillons en fluide parfait la couche limite et la création de turbulence qu'elle induit ne sont pas modélisées, et de fait ces phénomènes ne peuvent être observés sur nos simulations. Après avoir étudier le sillage, intéressons nous maintenant à la forme de l'écoulement autour du corps. Dans ce cas, l'écoulement s'organise en lignes de courant circulaires qui vont de "crêtes" en "creux" le long du corps et se translatent sous l'effet de l'onde de déformation qui le parcourt (cf. figures 3.9(a)-(j)). Au final, ces structures circulaires, appelées "proto-vortex" par Müller [89], sont lâchées dans le sillage en accord avec le modèle précédent. Ceci nous amène à nous posez les deux questions suivantes :

1– Existe-t-il une dépendance entre la cinématique du corps et la position de ces

structures rotationnelles ?

Essayant d'apporter une réponse à cette question, les auteurs de [88] ont proposé de placer les centres de ces "proto-vortex" aux points d'inflexions (i.e. tels que $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{0}$, où $\boldsymbol{K}$ est le vecteur courbure du corps, cf. chapitre § 6) de la ligne vertébrale. Néanmoins, ceci va à l'encontre de nos simulations, où l'on observe sur les figures 3.9(a)-(j) que ces "proto-vortex" sont centrés sur les points de la déformée, où la vitesse transverse s'annule (chacun de ces points est signalé par un "spot" rouge sur les figures concernées). Cette corrélation entre les mouvements du corps et du fluide, nous conduit à nous poser la seconde question :

2− Quels liens entretiennent les "proto-vortex" du corps et les "starting/stopping vortex" lâchés dans le sillage ?

Afin de répondre à cette question, rappelons que les starting/stoping vortex sont lâchés dans le sillage quand la nageoire caudale rebrousse chemin lors de ses mouvements d'aller-retour, i.e. lorsque sa vitesse de translation transverse passe par zéro. Ainsi, comme les proto-vortex sont eux-même centrés aux points où la vitesse de la colonne vertébrale est nulle, il s'en suit nécessairement qu'à l'instant du rebroussement de la caudale, les deux structures ("proto" et "starting-stopping" vortex) se retrouvent centrées toutes deux au bord de fuite de la caudale. Aussi, et en accord avec les propositions de Videler [121], ces deux structures tourbillonnaires s'apparient pour n'en former qu'une.

Nous allons dans la suite de cette section, développer un algorithme apte à simuler l'écoulement tridimensionnel autour de l'anguille afin de compléter nos observations précédentes et d'en extraire quelques-uns des principes essentiels à la mise au point d'un "modèle rapide" des forces hydrodynamiques. Pour répondre au problème de la simulation 3-D de l'écoulement, poursuivant en particulier les travaux de S.J. Hill [48, 93], nous étendrons l'algorithme numérique des anneaux de vortex tel que proposé dans [56] pour l'étude des écoulements instationnaires autour des ailes portantes au cas d'une lame ondulante soumis à des déformations internes imposées. Cet algorithme repose sur le concept de filament de vortex et d'une technique de condensation similaire à celle mise en œuvre pour la synthèse du "Lumped Vortex Element". L'élément (ou "panneau") qui en résultera est appelé "anneau de vortex", et sa présentation succincte fait l'objet de la section qui suit.

3.6 L'anneau de vortex.

3.6.1 Le problème tridimensionnel de l'écoulement autour d'une aile.

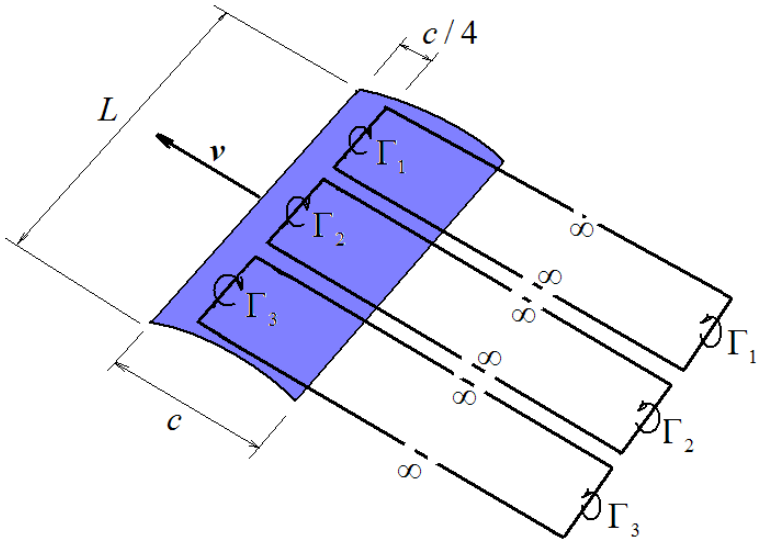


FIGURE 3.11 – La résolution du problème de l'aile portante par des filaments de vortex.

Issu de l'aérodynamique, l'"anneau de vortex" est un élément tridimensionnel dédié à la résolution du problème de l'écoulement autour d'une aile d'avion 3-D. Reconsidérant les développements de la section précédent, nous avons vu qu'il était possible dans le cas d'une aile infinie, et pour des raisons de symétrie, de construire une solution analytique de l'écoulement plan dans une section quelconque de l'aile. Une telle solution a été obtenue grâce à la mise en œuvre d'une série trigonométrique [43] approchant la distribution de vortex du profil. Cette approche nous a permis d'élaborer in fine le "lumped vortex element". Rappelons ici, que dans le cas de cet élément, la circulation produite par la distribution de vortex solution du problème de Neumann de l'écoulement est générée par une seule singularité de vortex placée en le point dit "de condensation" de l'élément. En fait, en trois dimensions, il est possible de faire de même et d'approximer la solution du problème de l'aile portante 3-D à l'aide de filaments quadrilatéraux de vortex. Ces filaments, fermés, en vertu du caractère solénoïde du champ de vorticité, sont tels que l'un de leurs vertex est posé le long de la ligne de poussée de l'aile, i.e. à la distance $c/4$ de son bord d'attaque. Dans le cas de la figure 3.11 par exemple, trois de ces filaments sont apposés sur une aile cambrée de corde c et d'envergure L se déplaçant à une vitesse stationnaire. Une fois de tels choix adoptés, les intensités des différents filaments (i.e. leur circulations) sont calculées de sorte que la condition de Kutta soit vérifiée au bord de fuite de l'aile. Finalement, poursuivant la démarche mise en œuvre pour construire le "Lumped

Vortex Element" nous pouvons substituer à l'aile cambrée précédemment évoquée, une plaque de largeur c et de longueur L, dont la géométrie définit celle de l'"élément anneau" tel que représenté sur la figure 3.12. Comme figuré, les quatre vertex du filament associé à l'élément sont placés respectivement : 1°) le long de la ligne des centres de poussée de l'élément (à $c/4$ du bord d'attaque), 2°) le long des bords latéraux de l'élément, 3°) à une distance $c/4$ en arrière du bord de fuite. Enfin, et toujours en accord avec la démarche poursuivie dans le cas 2-D, le point de colocation de l'élément est placé au 3/4 de la corde et à mi distance des deux bords latéraux ($L/2$). Finalement, ces choix assurent à l'élément isolé de vérifier la condition de Kutta.

3.6.2 L'élément de vortex.

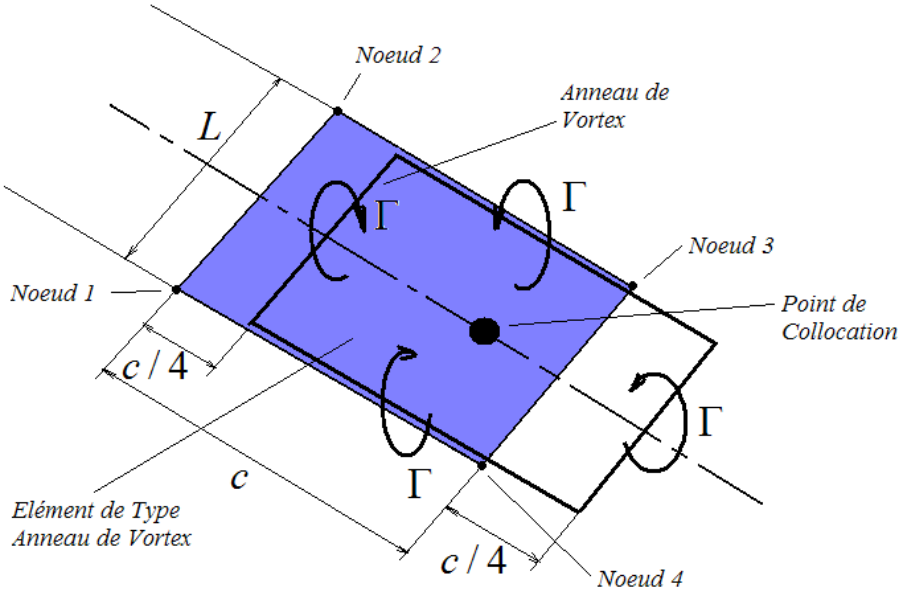


FIGURE 3.12 – L'élément d'anneau de vortex.

Pour mettre en œuvre cet élément dans un cas pratique, nous devons définir le champ de vitesse engendré par celui-ci sur son environnement. En vertu du principe de superposition celui-ci se déduit par sommation des champs générés par chacun des quatre vertex du filament (figure 3.13), chacun étant défini par la loi de Biot-Savart (2.26). En particulier, considérons un vertex d'intensité Γ et dont les deux extrémités ont pour position respective $\boldsymbol{y}_i$ et $\boldsymbol{y}_j$, alors la vitesse $\boldsymbol{u}_v$ (où v désigne ici le "vertex") induite en un point arbitraire de l'espace environnant de position $\boldsymbol{x}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{u}_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{y}_j, \Gamma) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j}{||\mathbf{d}_i \times \mathbf{d}_j||^2} \mathbf{d}_{ij} . \left(\frac{\mathbf{d}_i}{||\boldsymbol{d}_i||} - \frac{\mathbf{d}_j}{||\boldsymbol{d}_j||} \right) , \tag{3.48}$$

où :

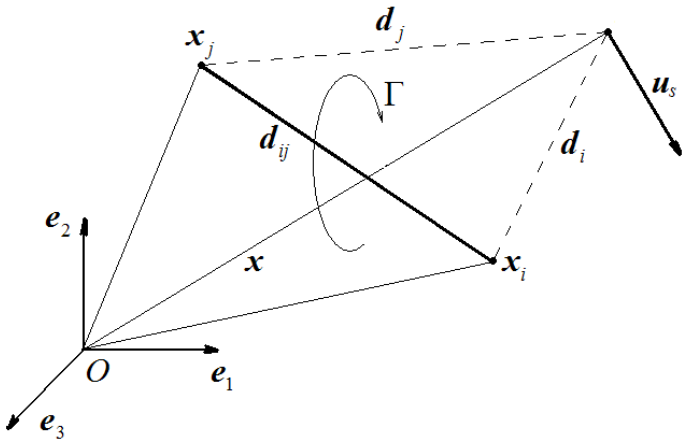


FIGURE 3.13 – Le paramètrage du segment de vortex.

$$\boldsymbol{d}_{ij} = \boldsymbol{y}_j - \boldsymbol{y}_i \ , \ \boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_i \ , \ \boldsymbol{d}_j = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_j \ . \tag{3.49}$$

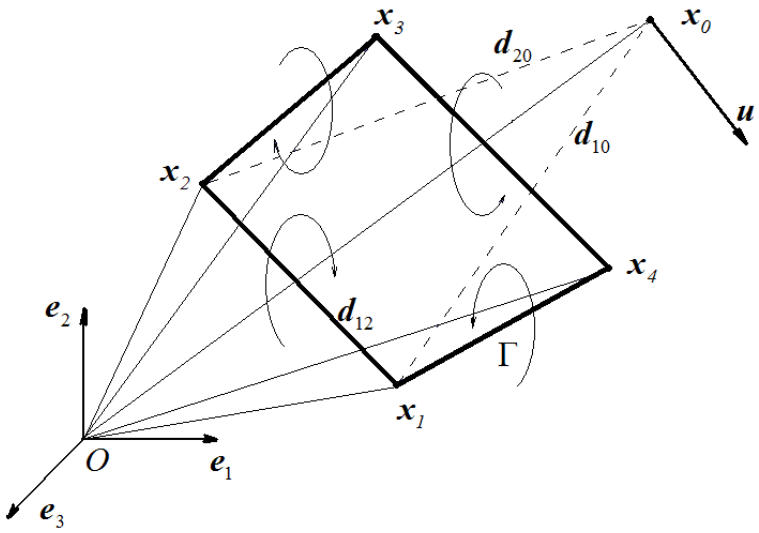


FIGURE 3.14 – Le paramètrage de l'anneau de vortex.

Finalement, à partir de (3.48) et en accord avec la figure 3.14, la vitesse $\boldsymbol{u}_a$ induite en $\boldsymbol{x}$ par l'anneau (où a désigne ici l'initiale d'"anneau") n'est autre que :

$$\boldsymbol{u}_a(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \Gamma) + \boldsymbol{u}_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3, \Gamma) + \boldsymbol{u}_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_3, \boldsymbol{y}_4, \Gamma) + \boldsymbol{u}_v(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_4, \boldsymbol{y}_1, \Gamma) \ , \tag{3.50}$$

où en accord avec la théorie d'Helmholtz, chaque vertex de l'anneau "a" doit avoir à chaque instant la même intensité Γ (cf. § 2.5.3). Sur la base de cette présentation

de l'"élément anneau", nous allons à présent présenter le simulateur 3-D de la nage de l'anguille.

3.7 La méthode numérique des anneaux de vortex.

Afin d'alléger l'exposé qui va suivre, seuls les grands principes de l'algorithme 3-D vont être présentés.

3.7.1 La discrétisation du problème.

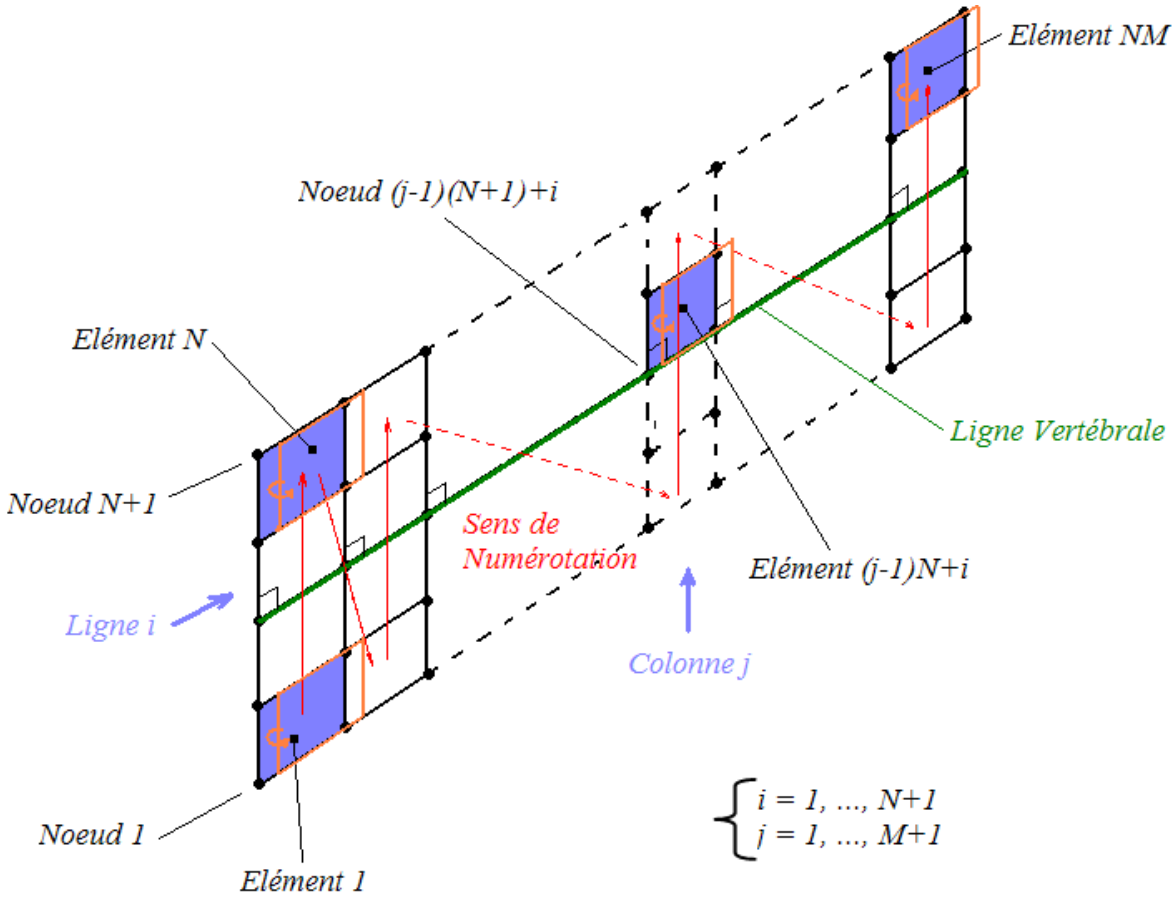


FIGURE 3.15 – La discrétisation et la convention de numérotation des éléments et des nœuds du corps.

Contrairement à l'algorithme général tridimensionnel présenté en début de chapitre, qui modélise le corps par un volume, le poisson est ici assimilé à une plaque sans épaisseur de longueur l, de hauteur h, où h est en toute généralité une fonction de l'abscisse vertébrale ($0 \leq X_1 \leq l$). L'algorithme présenté est en premier lieu basé sur un maillage du corps de l'animal par NM éléments de type anneau de vortex, où N est le nombres

de lignes (selon h) et M celui des colonnes (selon l) du pavage ainsi engendré. Ils sont numérotés en incrémentant l'indice $1 \leq k \leq NM$ de bas en haut et de gauche à droite en accord avec la figure 3.15. De même, le sillage est assimilé à une feuille de vortex maillée par NL anneaux de vortex, où N est toujours le nombre de lignes prolongeant le corps dans son sillage, tandis que L est ici le nombre de colonnes dépendant de l'histoire de ce dernier (le sillage). Finalement cette discrétisation nous conduira à résoudre un système linéaire de NM équations algébriques linéaires par rapport aux NM inconnues que sont les intensités des NM anneaux de vortex du corps.

Finalement, avant de poursuivre, remarquons que même si l'écoulement recherché est tridimensionnel, nous nous cantonnerons dans la suite de ce chapitre au cas de la nage plane. Ainsi, on appliquera le mouvement résolu du profil du chapitre précédent (écoulement plan) sur toute la hauteur de la plaque. Par ce moyen, on déduira à chaque instant :

- les positions des quatre nœuds des éléments ;
- les positions des quatre coins des filaments de vortex associés aux éléments ;
- les positions et vitesses des points de colocation des éléments du corps respectivement dénotées $\boldsymbol{x}_k$, et $\boldsymbol{v}_k$;
- les vecteurs normaux $\boldsymbol{n}_k$ aux éléments.

3.7.2 Le calcul du sillage.

Pour ce qui est du calcul du sillage, rappelons qu'en deux dimensions nous avions dû recourir au théorème de Kelvin afin d'obtenir l'équation supplémentaire nous permettant de calculer l'intensité du point de vortex à lâcher dans le sillage. Contrairement au cas plan, en trois dimensions la condition de Kelvin est trivialement satisfaite par la formulation en filaments de vortex (lignes matérielles fermées n'apportant aucune contribution au flux de vecteurs vorticités traversant le plan de nage). C'est ainsi que ce théorème ne peut être utilisé pour calculer l'intensité des anneaux de vortex à lâcher. Néanmoins, le problème 3-D n'est pas pour autant sous-déterminé. En effet, les premiers éléments du sillage (au niveau de la nageoire caudale) sont aussi les derniers du corps et en tant que tels les intensités des filaments qui leurs sont associés peuvent être simplement calculées en invoquant la condition de Neumann sur ce dernier. Finalement, contrairement au cas plan, l'algorithme 3-D ne nécessite pas d'équations supplémentaires et à chaque pas de temps, les N filaments de la nouvelle première colonne du sillage ont comme intensités celles de ceux, qui au pas de temps précédent se trouvaient sur le bord de fuite. Ce mécanisme de lâcher, illustré sur la figure 3.16, se traduit par la relation (avec "i" l'indice des lignes) :

$$\Gamma_{w,i+L(t)N} = \Gamma_{b,(M-1)N+i} \ , \ \begin{cases} i = 1, ..., N \\ L(t) = t/(\Delta t) \end{cases} \ , \tag{3.51}$$

où les indices "b" et "w" se rapportent respectivement au corps ("body") et au sillage ("wake") tandis que $L(t)$ est le nombre de colonnes du sillage dépendant de la durée écoulée entre les instants initiaux $t = 0$ et courant t. Il est à noter que chaque nouvelle colonne lâchée est contiguë avec la colonne précédente et forme ainsi par juxtaposition, une feuille libre de vortex. Une fois libérée du corps, la colonne considérée de la feuille est ensuite convectée et déformée localement par le champ de vecteurs vitesses du fluide.

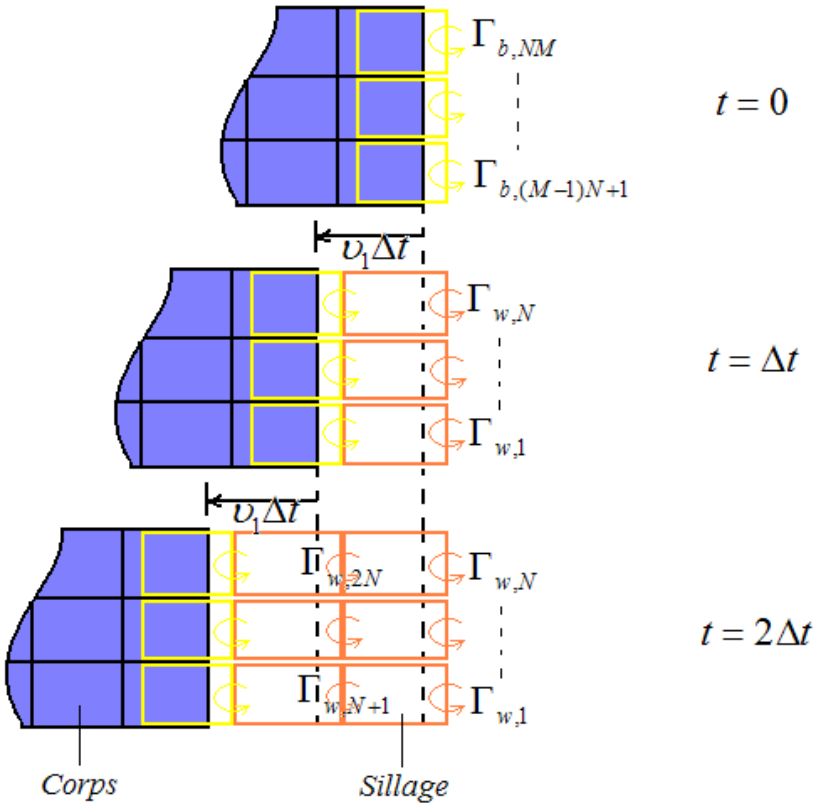


FIGURE 3.16 – La discrétisation et la formation de la feuille du sillage.

Finalement, remarquons qu'en vertu de ces considérations le sillage devient "le prolongement" du corps, puisque la feuille continue de vortex en "se déployant" remplace à chaque instant la dernière section de la nageoire caudale après son passage. Ainsi l'histoire de la nageoire caudale, i.e. le mouvement imprimé par celle-ci au fluide est au cours du temps "mémorisé" par conservation de la circulation de la feuille de vortex (cf. [73] et la section § 4.5).

3.7.3 La condition de Neumann.

Dans l'algorithme 3-D qui nous occupe ici, la condition de glissement, suffisante pour calculer l'écoulement en entier, s'écrit en chacun des NM points de colocation des panneaux du corps sous la forme suivante (a est ici l'initiale "d'anneau", et non un indice à valeur dans $\mathbb{N}$) :

$$k = 1, ..., NM \ , \ \sum_{p=1}^{NM} \boldsymbol{u}_{a,p}(\boldsymbol{x_k}).\boldsymbol{n}_k = -\sum_{l=1}^{NL} \boldsymbol{u}_{a,l}(\boldsymbol{x}_k).\boldsymbol{n}_k + \boldsymbol{v}_k.\boldsymbol{n}_k \ , \tag{3.52}$$

où, $\boldsymbol{u}_{a,p}(\boldsymbol{x_k})$ est la vitesse induite par l'anneau d'indice p évaluée en l'unique point de colocation de l'élément k de position $\boldsymbol{x_k}$. Finalement, tenant compte de la forme générale (3.50) du champ de vitesse induit par un élément dans la forme particulière (3.52), on en déduit le système d'équations linéaires à résoudre sous la forme "$\mathbb{A}\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{SM}$" :

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,NM} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{NM,1} & \cdots & A_{NM,NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{b,1} \\ \vdots \\ \Gamma_{b,NM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{NM} \end{pmatrix} \ , \tag{3.53}$$

où $\mathbb{A}$ et $\boldsymbol{SM}$ se détaillent selon :

- $A_{k,p} = \boldsymbol{u}_{a,p}(\boldsymbol{x}_k).\boldsymbol{n}_k \ ,$
- $B_k = -\sum_{l=1}^{NL} \boldsymbol{u}_{a,l}(\boldsymbol{x}_k).\boldsymbol{n}_k + \boldsymbol{v}_k.\boldsymbol{n}_k \ ,$

correspondant respectivement aux vitesses sur le corps produites par les singularités du corps et du sillage. Elles sont calculées à partir de l'expression générale (3.50) en y imposant respectivement Γ égale à l'unité et Γ égale à l'intensité de l'anneau considéré au moment de son lâché. Enfin notons que $\boldsymbol{SM}$ requiert au travers des $\boldsymbol{x_k}$ et des termes "$\boldsymbol{v}_k.\boldsymbol{n}_k$", la connaissance du mouvement résolu de la plaque ondulante aux points de colocations.

3.7.4 La convection du sillage.

Comme dans le cas plan, nous avons choisi d'utiliser le schéma d'intégration numérique de différence centrée (3.45) pour réaliser la convection des éléments du sillage. Ainsi, à chaque pas de temps de l'algorithme, les quatre sommets des filaments quadrilatéraux de la feuille libre formant le sillage sont convectés par le champ de vecteurs vitesses de l'écoulement.

3.8 L'étude tridimensionnelle de la nage.

Nous venons d'exposer rapidement, les différentes étapes de "l'algorithme tridimensionnel". Nous allons à présent l'utiliser pour étudier l'écoulement tridimensionnel mis en jeu dans la nage plane ondulante de l'anguille. Comme précédemment, l'algorithme a été programmé sous MATLAB. Comme dans ce qui précède, on note par X_1 l'abscisse curviligne le long de l'axe longitudinal de la plaque, tandis que (X_2, X_3) noteront les deux coordonnées complétant X_1 afin que $(\partial./\partial X_1, \partial./\partial X_2, \partial./\partial X_3)$ réalise un champ de bases orthonormées directes sur la lame.

3.8.1 Les paramètres de la simulation.

Comme annoncé, le corps de l'anguille est modélisé par une lame sans épaisseur. Cette lame de longueur totale $l = 1m$ est définie au départ par une plaque rectangulaire de hauteur $0.1m$ dont le côté gauche est placé en $X_1 = 0.05m$ et le droit à $X_1 = 0.99m$. Dans un second temps, on ajoute au côté gauche une première demi ellipse de petit axe $0.05m$ et au côté droit, une seconde de demi axe $0.01m$ de sorte que la longueur totale (plaque + ellipses) fasse $1m$. Ceci étant fait, on applique un facteur de contraction h tout du long de l'axe vertébrale. Défini sur $[0, 1]$, le facteur ici adopté produit le résultat final de la figure 3.17, et se détaille selon :

$$\text{Si } X_1 < 0.2l \quad , \quad h(X_1) = 1 \tag{3.54}$$

$$\text{Si } 0.2l < X_1 < 0.75l \quad , \quad \begin{cases} \tilde{X}_1 = \dfrac{X_1 - 0.2l}{0.75l - 0.2l} \\ h(\tilde{X}_1) = 1 - \dfrac{1}{5}(\sin(\pi \tilde{X}_1 - \dfrac{\pi}{2}) + 1) \end{cases} \tag{3.55}$$

$$\text{Si } X_1 > 0.75l \quad , \quad h(X_1) = \frac{3}{5} \tag{3.56}$$

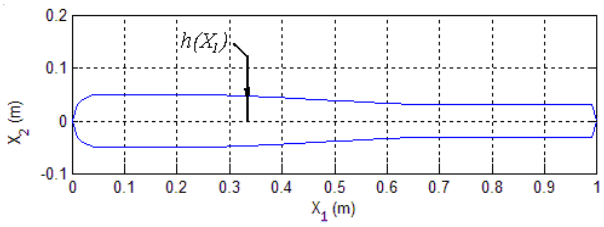


FIGURE 3.17 – La géométrie du corps du poisson.

Notons que cette géométrie plane définira dans le dernier chapitre la coupe de plus grande section de l'anguille 3-D que nous simulerons alors. Qui plus est, le mouvement de la plaque est celui, de sa section dans le plan de la nage, défini par les enregistrements

Navier-Stokes du mouvement de sa tête propulsée par la loi de déformation en courbure (3.47) dont les paramètres sont de nouveau ceux du tableau 3.1.

Dans la simulation présentée ci-après, les valeurs des paramètres de discrétisations spatiale et temporelle sont fixées à : $N = 80$, $M = 30$ et $\Delta t = 0.025sec.$. Ces valeurs ont donné de bons résultats en terme de précision et convergence. Qui plus est, ils s'accordent avec l'expérience acquise par nos prédécesseurs tels [125] et [48], en particulier concernant le nombre d'éléments du maillage. Pour des raisons de distorsion géométrique des éléments (rapport "longueur/largeur"), nous avons choisi un nombre d'éléments dans la hauteur permettant d'obtenir des anneaux de forme carrée et de dimensions comparables. In fine, le corps est discrétisé par 2400 anneaux de vortex tandis qu'à chaque pas de temps 30 nouveaux anneaux sont lâchés dans le sillage... Pour ce qui est du pas de temps, nous avons tenu compte de la règle suggérée par [56], stipulant $\Delta t \simeq l/(NU)$, où U est dans notre cas la vitesse moyenne d'avance du poisson.

3.8.2 Simulation de la nage en ligne droite.

Avant toute chose, notons que cet algorithme est très consommateur en temps de calculs, le corps et le sillage étant modélisés par près de 5500 anneaux de vortex au total. Cette complexité spatiale explique que nous nous soyons limités à un temps de simulation de $2.55s$. Il est à noter qu'à l'instant d'arrêt de la simulation ici rapportée, le poisson a de toute manière atteint sa vitesse nominale de croisière. La figure 3.18 représente une vue en perspective du mouvement de l'anguille et de sa feuille de vortex. Quant à la figure 3.19, elle représente le tracé des lignes de courant relevées dans le plan équatorial de la nage à l'instant final de la simulation.

La comparaison de l'écoulement 3-D restreint au plan équatorial de la lame (cf. figure 3.19) avec les simulations 2-D de la section précédente, montre que les deux simulateurs sont en parfait accord. En effet, l'écoulement 3-D restreint au plan de symétrie de la nage coïncide bien avec l'écoulement 2-D de son profil. En particulier, le tracé des lignes de courant confirme l'existence de "proto-vortex" répartis le long du corps et d'un sillage de type "Reverse Karman Street". Concernant les "proto-vortex", nous en observons deux centrés aux abscisses vertébrales $X_1 = 0.22m$ et $X_1 = 0.60m$. Qui plus est, comme observer précédemment (dans le cas plan), ces abscisses curvilignes sont celles des sections dont la vitesse transverse est nulle à l'instant considéré (ici $t = 2.55s$).

Hormis ces similitudes révélées par les deux simulateurs, nous pouvons à présent calculer l'écoulement 3-D autour des sections du corps tel que représenté sur les figures

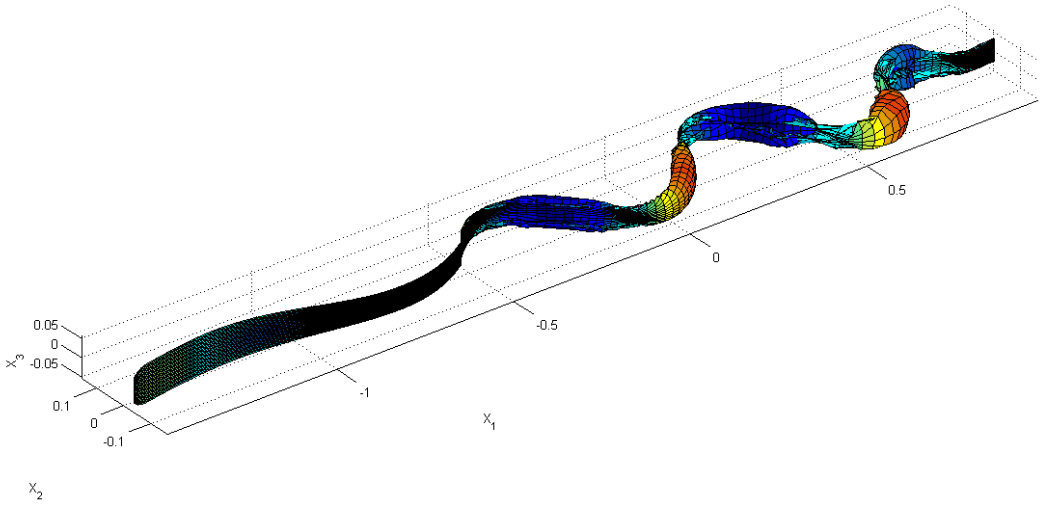


FIGURE 3.18 – Le corps de l'anguille et le sillage d'anneaux de vortex à $t = 2.55s$.

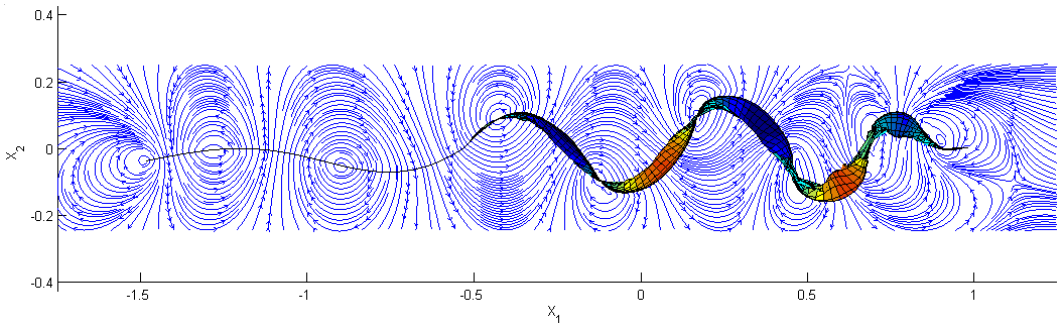
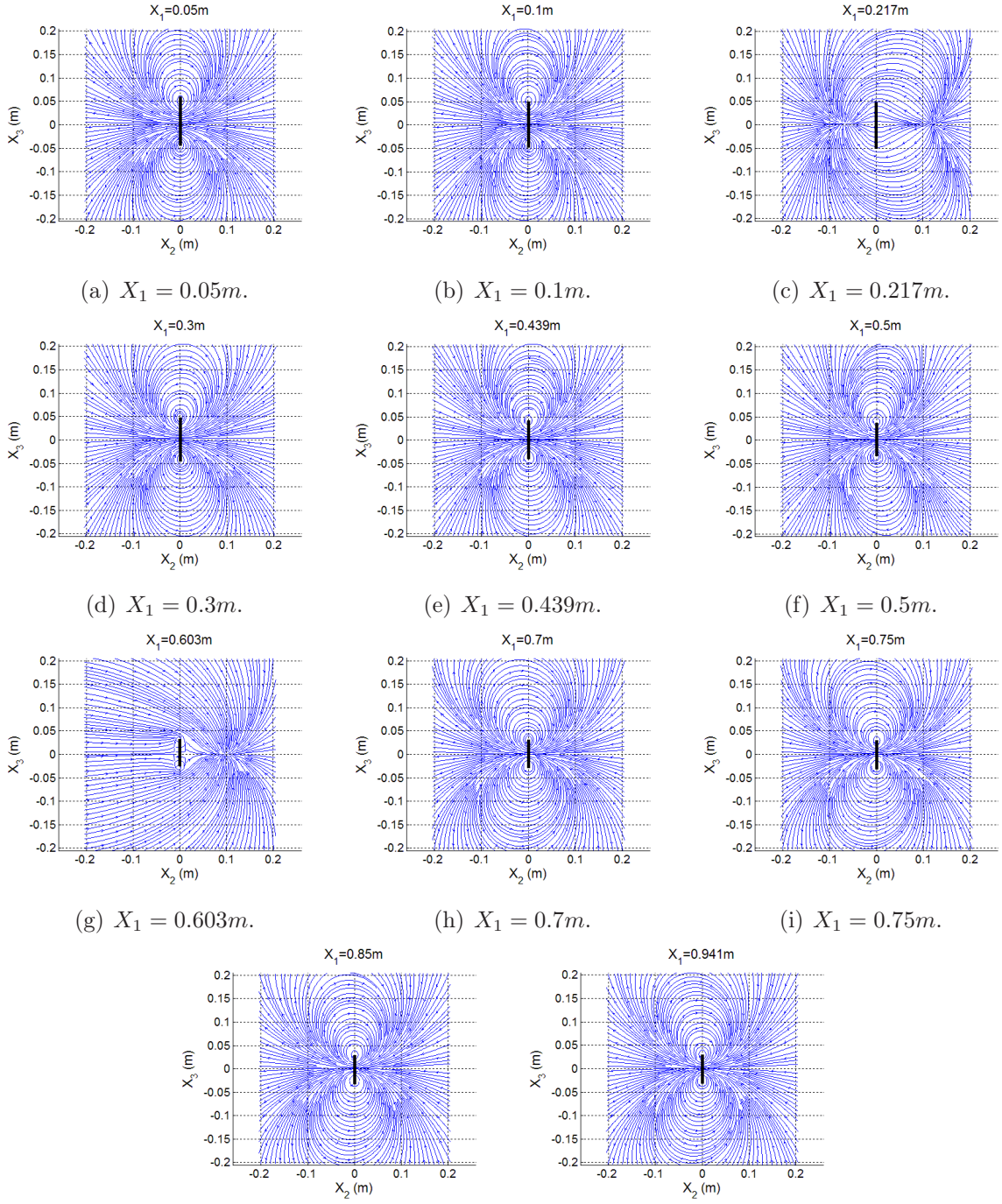


FIGURE 3.19 – Coupe de l'écoulement en $x_3 = 0$.

3.20(a-k), par le tracé des lignes de courant dans quelques uns des plans perpendiculaires à la colonne vertébrale. Par "lignes de courant", on entend ici les courbes intégrales de la projection du champ de vitesse 3-D dans les plans de projection ou "coupes". Les points de la colonne vertébrale concernés par ces coupes sont au nombre de 11 et régulièrement espacés le long de la colonne (cf. figure 3.20(a-k)). Qui plus est, cet échantillonnage a été choisi de manière à ce que les points pour lesquels l'intensité de la vitesse transverse est nulle (en : $X_1 = 0.22m$, et $X_1 = 0.60m$) ou maximale (en : $X_1 = 0.44m$, et $X_1 = 0.94m$) soient pris en compte. A l'examen de ces enregistrements, nous constatons que les deux coupes passant par les centres des "proto-vortex", présentent des points singuliers. Par exemple, la coupe (c), figure une source et un puits respectivement situés à $[X_2 = -0.07, X_3 = 0]$ et $[X_2 = 0.12, X_3 = 0]$, ces singularités produisant par symétrie des vitesses normales opposées sur la section de plaque correspondante, et ce, en accord avec la condition de Neumann. La nature singulière de ces "écoulements plans" traduit le fait que ces écoulements ne peuvent être déduit du mouvement de la section solide cor-



(a) $X_1 = 0.05m$. (b) $X_1 = 0.1m$. (c) $X_1 = 0.217m$.

(d) $X_1 = 0.3m$. (e) $X_1 = 0.439m$. (f) $X_1 = 0.5m$.

(g) $X_1 = 0.603m$. (h) $X_1 = 0.7m$. (i) $X_1 = 0.75m$.

(j) $X_1 = 0.85m$. (k) $X_1 = 0.941m$.

FIGURE 3.20 – Les écoulements autour des sections transverses du corps de l'anguille.

respondante seule. En d'autre terme l'écoulement est dans ce cas à dominante axiale par rapport à la colonne du poisson. En dehors de ces sections, les écoulements transverses ne sont pas singuliers et en fait très proches des écoulements observés (et calculés) autour d'obstacles plans en translation dans un fluide ([63, 43, 85, 4]). Fort de cette remarque, en dehors des centres des "proto-vortex", l'écoulement autour du corps semble se comporter

comme la superposition d'un ensemble d'écoulements plans autour des sections. Ce type d'écoulement "tranche par tranche" est bien connue des hydrodynamiciens et relève de la théorie dite du "corps élancé" ou "Slender Body Theory". Dans le contexte de cette théorie, que nous détaillerons dans le chapitre suivant, l'écoulement autour d'un corps élancé (longueur du corps très supérieure aux dimensions des sections) est en premier lieu décomposé en deux écoulements indépendants, l'un de nature axiale, l'autre transverse par rapport à l'axe du corps. Dans un second temps, l'écoulement transverse est assimilé à un empilement d'écoulements plans ne dépendants plus que du mouvement des sections isolées.

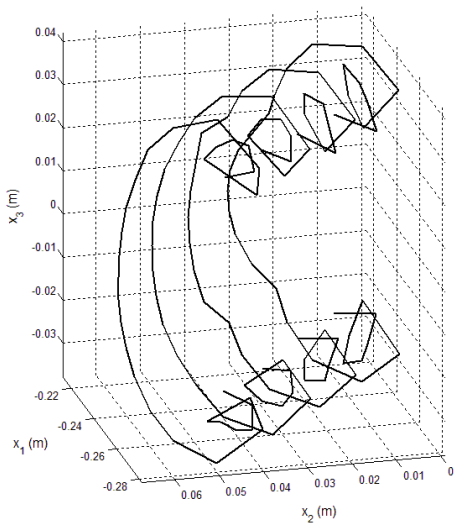


FIGURE 3.21 – Lignes brisées des bords verticaux des anneaux de vortex lâchés entre les instants $t = 2.05s$ et $t = 2.125s$.

Finalement, la simulation 3-D apporte également de nouvelles informations à propos du sillage. En effet à l'examen de la vue en perspective figure 3.18, nous observons que les bords de la feuille de vortex s'enroulent non seulement autour de la normale au plan de nage (tel que déjà observé au chapitre précédent) mais aussi autour de la tangente à la feuille dans le plan de nage. Ce phénomène est semblable à celui qui forme les tourbillons observés aux extrémités "des saumons" des ailes des avions ou des ailerons des Formules1 (cf. [31]). Qui plus est, cet enroulement de la feuille détaillé sur la figure 3.21, va dans le sens de la conjecture de [88] selon laquelle le champ de vitesse dans le sillage des anguilliformes s'organise selon des tores. Dans cet ordre d'idée, les tourbillons observés dans le sillage de l'écoulement plan du chapitre précédent ne seraient en réalité rien d'autre que les sections des structures toriques du sillage 3-D.

3.9 Conclusion.

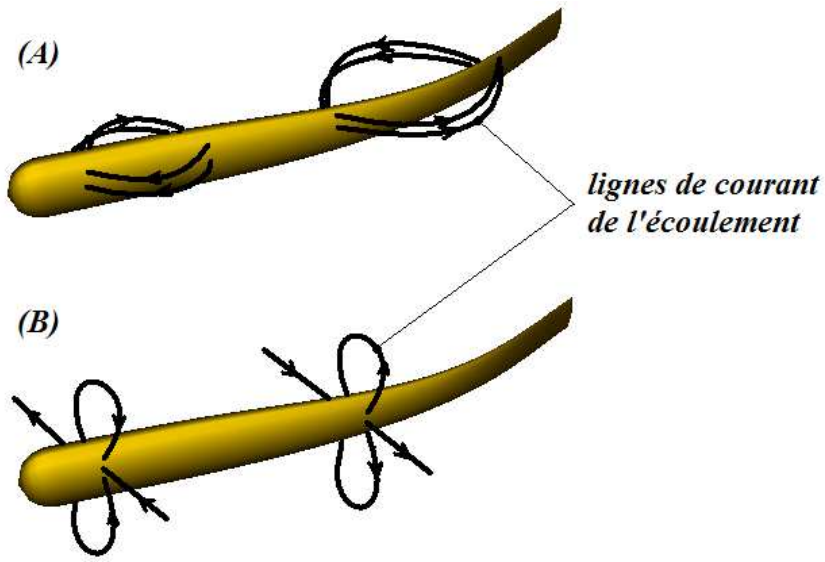


FIGURE 3.22 – Représentations des lignes de courant de l'écoulement tridimensionnel autour du poisson : (A) vu par T.Y.T. Wu [126] ; (B) vu par J. Lighthill [69].

Finalement, grâce à la méthode des vortex 2-D et 3-D, nous avons pu observer le mécanisme de "pompe" que met en place l'anguille pour déplacer le fluide de sa tête vers le sillage. Placés le long de la colonne aux points où la vitesse transverse s'annule, ces proto-vortex accélèrent dans un premier temps le fluide progressivement le long du corps. Dans un second temps, le fluide, ainsi accéléré, est lâché dans le sillage et repris par l'allée de vortex qui le canalise selon un jet, éloignant ainsi la matière fluide du corps de l'animal. En enrichissant les résultats 2-D de ceux produits par les simulations 3-D, nous avons également révélé qu'en dehors de zones localisées autour des centres des proto-vortex, l'écoulement autour du corps de l'anguille s'organise "tranche par tranche" en accord avec la théorie "du corps fin" ou "slender-body". En fait, chacune de ces deux tendances a été historiquement proposée par les deux "grands noms" de la "bio-fluid-mechanics" que sont T.Y.T. Wu (cf. [126]) et J. Lighthill (cf. [69]) et ce, de manière concomitante en 1960. Les deux approches proposées par ces deux auteurs font encore aujourd'hui figure de référence en matière de modélisation analytique ([125]). Dans le cas du modèle de T.Y.T. Wu, le poisson est assimilé à une lame ondulante de hauteur infinie, dont l'écoulement l'entourant correspond, pour des raisons de symétries évidentes, à l'écoulement plan calculé numériquement dans la section § 3.3.1. La modélisation analytique correspondante prend son départ dans le développement en série de Glauert (cf. [43]) du champ de potentiel (3.16), ici étendu au cas d'un profil de déformée instationnaire. Enfin, le second point de vu, du à Lighthill, fera l'objet de toute la suite de cet exposé. En effet,

comme nous allons le voir dès le chapitre suivant, il présente l'avantage de permettre une modélisation entièrement analytique de l'écoulement tridimensionnel autour d'un poisson anguilliforme et de ses effets sur la nage. Ce tour de force s'appuie ici sur la grande richesse de la théorie des fonctions harmoniques planes (fonctions holomorphes, transformations conformes... [85] et annexe C) qui, dans ce cas, peut être mise à profit dans chacune des tranches de l'écoulement. Finalement, au-delà de ce second modèle et des deux chapitres suivants qui lui sont consacrés, nous imaginons dans le futur de ce travail et sur la base des résultats des deux chapitres qui s'achèvent (relatifs au fluide parfait), d'élaborer un modèle analytique tenant compte des deux types d'écoulements proposés par T.Y.T. Wu [126] et J. Lighthill [69] tels que représentés figure 3.22.

Chapitre 4

Modélisation analytique : les travaux de J. Lighthill.

4.1 Introduction.

Rappelons tout d'abord que nous voulons établir un modèle "de contact" à la fois simple et fidèle à la physique d'un écoulement tridimensionnel autour du corps d'un robot anguilliforme. C'est J. Lighthill qui le premier proposa un inventaire des différents modèles analytiques de contact pour la locomotion des poissons (cf. [72]). En accord avec cette classification, les modèles s'organisent en modèles dit "résistifs" et ceux dits "réactifs". Les premiers sont basés sur la dépendance quadratique de la force hydrodynamique avec la vitesse relative du corps par rapport au fluide (cf. [111]) et traduisent essentiellement l'effet de la viscosité dans la couche limite à la surface de l'animal. Historiquement développé par G.I. Taylor (cf. [111]), ce modèle de contact s'applique aux cas des bas Reynolds tels que ceux mis en jeu par la nage des animaux aquatiques microscopiques de type larves ou vers. Concernant le modèle réactif, il fut développé par J. Lighthill (cf. [69]) lui-même. Dans ce cas, les forces hydrodynamiques sont produites par l'inertie du fluide au travers de ses accélérations relatives au corps de l'animal. En accord avec la définition du nombre de Reynolds, ce type de modèle s'impose naturellement dans le cas des poissons de taille moyenne. Finalement, ces deux types de modèle ne sont pas exclusifs et J. Lighthill proposa de les combiner sous la forme d'un modèle mixte (i.e. résistif plus réactif) particulièrement adapté aux cas des anguilliformes et carangiformes. Plus précisément, J. Lighthill proposa de modéliser de manière "réactive" la poussée du poisson, i.e. au travers de l'inertie du fluide et des mouvements de va-et-vient de ses sections transverses, cette poussée s'opposant aux frictions dans la couche limite, modélisée par un modèle résistif. Comme nous le verrons ultérieurement, le modèle de contact tridimensionnel que nous allons proposer dans les chapitres § 5 et § 6 est le résultat d'une telle superposition (et même plus, puisqu'elle intègre également un modèle résistif transverse).

Nous allons exposer dans cette section introductive, les différents outils et théories utilisés dans les travaux de J. Lighthill. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques résultats de G. Kirchhoff et H. Lamb concernant la dynamique du corps rigide en mouvement et immergé dans un fluide parfait (cf. § 4.2). Par ce biais, nous introduirons les notions de "tenseur de masses ajoutées" et d'"impulse". Poursuivant les conclusions du § 3, l'écoulement tridimensionnel autour du poisson va être "reconstruit" par superposition d'écoulements plans prolongeant les sections transverses de l'animal. Un tel principe fut développé dans les années 1920 par M.M. Munk [87] pour le compte de l'agence américaine : "*N.A.C.A.*[1]" et relève de la théorie aujourd'hui bien connue sous le nom de "Théorie du Corps Mince" ou "Slender Body Theory" (cf. § 4.3). Basée sur le rapport de finesse[2] du corps, cette théorie permet de découpler l'écoulement tridimensionnel en la superposition d'un écoulement axisymétrique et d'un ensemble d'écoulements transverses au corps. Sous cette hypothèse nous verrons comment le calcul du tenseur de masses ajoutées, nécessaire à la "modélisation réactive", se simplifie au point d'être calculable analytiquement grâce à une autre théorie appelée "Théorie des Bandes" ou "Strip Theory" bien connue en hydrodynamique navale (cf. [66]). A partir de ces théories et résultats, il nous sera plus aisé d'appréhender les différents travaux de J. Lighthill relatifs à la locomotion des poissons de types anguilliformes et carangiformes tels qu'on les trouve dans les trois articles : [69, 71, 72]. Poursuivant le cours historique de la pensée de l'auteur, nous aborderons dans un premier temps, la démarche et les hypothèses sur lesquelles est fondée la "Théorie du corps allongé" ou "Elongated Body Theory" [69] (cf. § 4.4). Dans un second temps, nous reprendrons et détaillerons les justifications de l'auteur sur les quantités cinétiques qu'échange le poisson et son sillage [71] (cf. § 4.5). Enfin, nous finirons ce tour d'horizon rapide des travaux de J. Lighthill par l'extension de l'Elongated Body Theory au cas de la nage de grande amplitude telle que pratiquée chez nombre d'anguilliformes [72] (cf. § 4.6). Ce dernier modèle, point de départ de notre modèle analytique final, fait encore aujourd'hui figure de référence dans le domaine de la "Bio-Fluid-Dynamics" sous le nom de "Large Amplitude Elongated Body Theory".

4.2 La dynamique des corps rigides immergés dans un fluide parfait.

L'étude de la dynamique d'un corps rigide plongé dans un fluide parfait, incompressible et irrotationnel est due historiquement à G. Kirchhoff (cf. [61]) et à H. Lamb (cf.

1. *N.A.C.A.* : National Advisory Committee for Aeronautics
2. Ce nombre est le rapport entre la longueur du corps et une dimension caractéristique des sections de ce dernier.

[63]). L'idée principale de l'approche poursuivie par ces auteurs fut de considérer le fluide et le solide comme un unique système mécanique, rendant par conséquent le calcul du champ de pression à la surface du solide inutile. Grâce à ce point de vue et aux propriétés des écoulements potentiels (en particulier "irrotationnel"), l'énergie et le torseur cinétiques de l'ensemble des particules matérielles (i.e. du fluide et du solide) peuvent s'exprimer comme de simples fonctions des variables de configuration du corps seul. Aussi, l'espace des configurations du fluide est réduit sur celui du corps rigide. Ainsi, selon ce point de vue le mouvement du fluide $\mathcal{F}$ (cf. figure 4.1) est entièrement le fait du mouvement instantané (position, vitesse, accélération courantes) du corps solide $\mathcal{B}$. Enfin avant de poursuivre, rappelons que sous ces hypothèses, le mouvement du fluide est défini (cf. § 2), par l'existence d'un potentiel des vitesses ϕ solution de l'équation de Laplace (2.29) sous les conditions aux limites de glissement sur le corps (2.32) et de repos à l'infini (2.33).

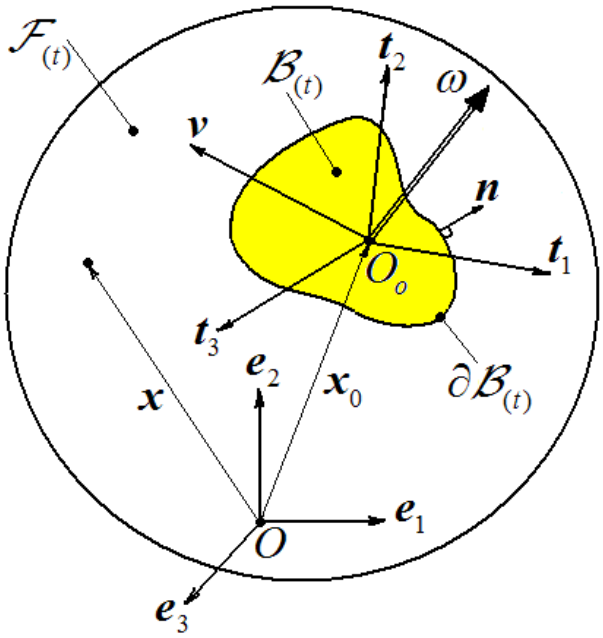


FIGURE 4.1 – Paramétrage du problème de dynamique.

En accord avec G. Kirchhoff (cf. [61]), il est possible, en raison de la linéarité du problème d'écoulement, de décomposer le potentiel des vitesses ϕ selon les mouvements élémentaires instantanés composant le torseur cinématique du corps considéré. Pour se faire, attachons au solide $\mathcal{B}$, supposé rigide, un repère mobile orthonormé direct noté $(O_o, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)$, où O_o est l'origine du repère dont la position par rapport à "la terre" est $\boldsymbol{x}_o$. Une fois ceci posé, la technique due à G. Kirchhoff consiste alors à remplacer le potentiel des vitesses produit par le corps animé d'un torseur cinématique donné, par la superposition des potentiels produits par chacune des six composantes de ce torseur, une

fois celui-ci exprimé dans le repère mobile. En accord avec les usages de la mécanique du solide rigide, nous noterons respectivement par $\boldsymbol{v} = V_i \boldsymbol{t}_i$ et $\boldsymbol{\omega} = \Omega_i \boldsymbol{t}_i$ les vitesses linéaire et angulaire galiléennes du repère mobile (i.e. le torseur cinématique spatial du corps calculé au point de réduction O_o). Ainsi, on aura :

$$\phi(t, \boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{6} \xi_i(t) \Upsilon_i(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) \text{ , avec : } \boldsymbol{\xi}^T(t) = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, V_1, V_2, V_3)(t) \text{ ,} \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est la matrice des composantes dans le repère mobile du torseur cinématique du repère mobile (cf. figure 4.1). Les six fonctions Υ_i introduites ici sont "les potentiels unitaires" solutions des écoulements produits par chaque mouvement isolé (i.e. par les trois translations (et rotations) parallèles aux (et autour des) axes mobiles). Sur la base de ce principe, il devient possible (cf. [63]) de réduire l'espace des configurations du fluide sur l'espace des configurations de n'importe quel système de corps solides se déplaçant dans un fluide parfait. Par exemple, dans le cas d'un système poly-articulé à n degrés de liberté (tel un bras manipulateur sous-marin attaché à une base fixe), le potentiel des vitesses de l'écoulement peut être décomposé en n fonctions des n coordonnées généralisées notées q_i du système mécanique considéré. Aussi, aura-t'on $\phi = \sum_{i=1}^{n} \chi_i \dot{q}_i$, où, χ_i est la fonction potentielle associée à la coordonnée q_i de vitesse $\dot{q}_i$.

Une fois ceci posé, les fonctions Υ_i inconnues seront chacune solution de l'équation de Laplace sous des conditions aux limites que nous allons à présent préciser. La frontière matérielle du corps $\partial\mathcal{B}$ d'enveloppe géométrique courante $\partial\mathcal{B}_{(t)}$ a pour normale sortante $\boldsymbol{n} = N_i \boldsymbol{t}_i$, de sorte que la condition de glissement s'écrive :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{B}_{(t)} \text{ , } \partial\phi/\partial n = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)).\boldsymbol{n} &= N_1(V_1 + \Omega_2 X_3 - \Omega_3 X_2) \\ &+ N_2(V_2 + \Omega_3 X_1 - \Omega_1 X_3) \\ &+ N_3(V_3 + \Omega_1 X_2 - \Omega_2 X_1), \end{aligned} \tag{4.2}$$

où l'on a posé $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o) = X_i \boldsymbol{t}_i$.

Enfin, le fluide étant au repos loin du corps, on a :

$$\lim_{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o|| \to +\infty} \boldsymbol{\nabla}\phi = \boldsymbol{0} \text{ .} \tag{4.3}$$

Introduisant la décomposition de Kirchhoff (4.1) dans ces conditions aux limites, nous obtenons :

$$\boldsymbol{x} \in \partial\mathcal{B}_{(t)} \ , \ \begin{cases} \partial\Upsilon_1/\partial n = N_3X_2 - N_2X_3 \\ \partial\Upsilon_2/\partial n = N_1X_3 - N_3X_1 \\ \partial\Upsilon_3/\partial n = N_2X_1 - N_1X_2 \\ \partial\Upsilon_4/\partial n = N_1 \\ \partial\Upsilon_5/\partial n = N_2 \\ \partial\Upsilon_6/\partial n = N_3 \end{cases} , \tag{4.4}$$

et :

$$j = 1, ..., 6 \qquad \lim_{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_o||\to+\infty} \boldsymbol{\nabla}\Upsilon_j = \mathbf{0} \ . \tag{4.5}$$

Ainsi à chaque problème particulier, il nous faudra, selon cette approche : 1°) calculer la forme générale des fonctions harmoniques élémentaires Υ_i (en particulier de manière analytique pour des géométries suffisamment simples), 2°) fixer leur valeur par vérification des conditions (4.4) et (4.5). Enfin, notons que le calcul des fonctions élémentaires peut être réalisé selon les techniques habituelles telles celle "des singularités" qui dans ce cas, seront fixées à la géométrie du corps.

Une fois la forme (4.1) connue, nous pouvons calculer le champ de vitesse par dérivation (cf. (2.27)) et en déduire l'énergie cinétique du fluide, que nous noterons ici T_f. Pour se faire, nous allons exprimer cette dernière comme une fonction du potentiel des vitesses ϕ. La démarche consiste à utiliser la première identité de Green, que nous allons à présent rappeler. Soit deux champs scalaires f et g définis sur le volume géométrique $\mathcal{F}_{(t)}$ occupé par $\mathcal{F}$ à t courant, on a alors :

$$\int_{\mathcal{F}_{(t)}} f\Delta g + \boldsymbol{\nabla}(f).\boldsymbol{\nabla}(g) d\mathcal{F}_{(t)} = \int_{\partial\mathcal{F}_{(t)}} f\frac{\partial g}{\partial n} d\partial\mathcal{F}_{(t)} \ , \tag{4.6}$$

où $\partial\mathcal{F}_{(t)}$ est la frontière de $\mathcal{F}_{(t)}$ et $\boldsymbol{n}$ est son champ de vecteurs normaux sortant.

En particulier, posons $f = g = \phi$, nous aurons alors :

$$\int_{\mathcal{F}_{(t)}} \rho_f \boldsymbol{\nabla}(\phi).\boldsymbol{\nabla}(\phi) d\mathcal{F}_{(t)} = \int_{\partial\mathcal{F}_{(t)}} \rho_f \phi\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial\mathcal{F}_{(t)} \ . \tag{4.7}$$

Ainsi, à partir de la définition du potentiel des vitesses (2.27), et de l'hypothèse de repos loin du corps (2.33), nous obtenons la relation essentielle suivante :

$$\int_{\mathcal{F}_{(t)}} \rho_f \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} d\mathcal{F}_{(t)} = 2T_f = \rho_f \int_{\partial\mathcal{B}_{(t)}} \phi\frac{\partial \phi}{\partial n} d\partial\mathcal{B}_{(t)} \ , \tag{4.8}$$

qui lie l'énergie cinétique du fluide aux valeurs prisent par le potentiel des vitesses sur la surface du corps uniquement. Ainsi, une fois de plus, le problème de dynamique des fluides se ramène à un "problème aux frontières".

Finalement, en tenant compte de la décomposition de Kirchhoff (4.1) dans la définition de l'énergie cinétique (4.8), nous obtenons :

$$T_f = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\xi} \ , \tag{4.9}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = \alpha_{ij}\boldsymbol{\varepsilon}_i \otimes \boldsymbol{\varepsilon}_j$ (avec $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{t}_i$ pour $i = 1,..,3$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_i = \boldsymbol{t}_{(i-3)}$ pour $i = 4,..,6$) est appelé "tenseur des masses virtuelles" ou "des masses ajoutées", et se défini comme :

$$i,j = 1,...6 \ , \ \alpha_{ij} = \int_{\partial\mathcal{B}_{(t)}} \Upsilon_i \frac{\partial \Upsilon_j}{\partial n} d\partial\mathcal{B}_{(t)} \ . \tag{4.10}$$

Ce tenseur est symétrique et ses 21 coefficients indépendants quantifient les inerties de fluide déplacées par le solide quand celui-ci accélèrent selon chacun des six degrés de liberté élémentaires du repère mobile.

Ceci étant fait, nous allons calculer le torseur cinétique du fluide. Remarquons avant tout que le calcul direct (cf. [63, 4]) de ce torseur est impossible. En effet, considérons par exemple l'intégrale $\rho_f \int \boldsymbol{u} d\mathcal{F}_{(t)}$ définissant la résultante cinétique. Un calcul direct montre que celle-ci diverge tandis que sa variation par rapport au temps existe bien, puisqu'elle est liée à la résultante des efforts extérieurs via le principe fondamentale de la dynamique. Aussi, dans le cas d'un fluide parfait, les hydrodynamiciens ne parlent plus de "quantité de mouvement" mais "d'impulse". Cette notion fut pour la première fois définie par Lord Kelvin (cf. [63]) comme la quantité de mouvement fournit par le solide au fluide pour y générer instantanément l'écoulement irrotationnel. Afin d'appréhender la valeur courante prise par le torseur cinétique du fluide sous l'effet du mouvement du corps en son sein, il nous faudrait en toute rigueur calculer le champ de pression appliqué sur le dit-corps. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour la technique de ce calcul et ne retenons pour ce qui nous concerne, que les enseignements suivants. Lorsque l'on plonge un corps rigide animé d'un mouvement à priori quelconque dans un fluide parfait, les forces hydrodynamiques exercées par le fluide sur le corps sont générées par le champ de pression réglé par l'équation de Bernoulli instationnaire (2.31). Aussi, peuvent-elles être classées :

- en forces "stationnaires", proportionnelles au carré de la vitesse du corps ;
- en forces "dynamiques ou inertiels", proportionnelles à l'accélération du corps ;

cette distinction étant due à l'éventuelle dépendance de la vitesse du solide vis-à-vis de la variable temps. Aussi, dans le cas d'un mouvement de vitesse constante, seules

les forces dites stationnaires peuvent être non-nulles, tandis que dans le cas contraire, des forces dites dynamiques peuvent s'y ajouter. Pour les écoulements sans circulation, D'Alembert (cf. [4]) a démontré que la force globale due à "la partie stationnaire" du champ de pression était nulle et que par conséquent le fluide n'offre aucune résistance au corps quand celui-ci bouge à vitesse constante. Ainsi, pour un fluide parfait en écoulement potentiel, le torseur des forces hydrodynamiques noté $\mathbb{F}_h$ appliqué sur le solide par le fluide ne peut dépendre que de l'accélération du premier et s'écrit :

$$\mathbb{F}_h = \boldsymbol{\alpha}.\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \ , \tag{4.11}$$

où, $d\boldsymbol{\xi}/dt$ est le vecteur des accélérations galiléennes angulaire et linéaire du solide, i.e. $d\boldsymbol{\xi}^T/dt = ((d\boldsymbol{\omega}/dt)^T, (d\boldsymbol{v}/dt)^T)^T$.

De plus, en vertu de la loi fondamentale de la dynamique, nous pouvons écrire que :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{p}_f\end{pmatrix} = \mathbb{F}_h = \boldsymbol{\alpha}.\frac{d\boldsymbol{\xi}}{dt} \ , \tag{4.12}$$

dont on tire par intégration partant de l'état de repos de l'ensemble (fluide et solide), la définition du torseur des impulses (résultante et couple d'impulse, ici relativement au repère mobile de départ) :

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{p}_f\end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha}.\boldsymbol{\xi} \ . \tag{4.13}$$

Enfin en accord avec (4.9), nous retrouvons comme dans le cas de n'importe quel système matériel, la relation liant l'énergie cinétique au torseur cinétique :

$$\frac{\partial T_f}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{p}_f\end{pmatrix} \ , \tag{4.14}$$

relation cruciale pour la suite, puisqu'elle permet de calculer le "torseur cinétique" au départ divergent à partir de l'énergie cinétique ne l'étant pas et ce, sans passer par les calculs difficiles du torseur des pressions.

Nous avons vu dans cette section que la détermination du tenseur de masses ajoutées $\boldsymbol{\alpha}$ permettait d'établir la dynamique d'un écoulement potentiel produit par le mouvement d'un corps rigide (via les équations (4.9) et (4.13)). Notons ici que dans le cas tridimensionnel, et pour des géométries même simples, ce calcul reste complexe (cf. cas d'une ellipsoïde dans [63]). Néanmoins, dans le cas des corps tridimensionnels dits "élancés", dont une dimension est très grande devant les deux autres, ce calcul se simplifie considérablement. Ces simplifications font appel aux deux théories que sont la " Slender Body Theory" (cf. [87]) et la "Strip Theory" (cf. [66]) telles que nous allons à présent les rappeler.

4.3 "Slender Body Theory" (*S.B.T.*).

Lors de l'émergence de l'aéronautique, au début du 20$^{\text{éme}}$ siècle, l'un des premiers problèmes scientifiques et techniques abordé dans le cadre de cette science, fut le dimensionnement des avions et tout particulièrement celui des ailes et du fuselage, i.e. l'estimation des forces de contact appliquées sur ceux-ci lors d'une phase de vol. Pour l'estimation des forces de traînée et de portance sur un fuselage, il existe une théorie qui permet de simplifier les calculs : la théorie du "Slender body". Elle fut développée dans les années 1920 par M.M. Munk (cf. [87]) de la *N.A.C.A.*. Exploitant la forme géométrique "élancée" du fuselage, cette théorie permet de décomposer le potentiel des vitesses ϕ (en vertu de la linéarité de l'écoulement) en deux composantes, la première responsable d'un écoulement parallèle au fuselage, la seconde générant un écoulement lui étant transverse. Ainsi, chaque section transverse du fuselage sera dans un premier temps prolongée selon un cylindre infini, animé du mouvement latéral de la dite section. Dans un second temps l'écoulement sera calculé autour de ce cylindre mobile et finalement restreint à la section de départ du fuselage. Il est à noter que les écoulements bidimensionnels autour des sections circulaires ou elliptiques, très répandues dans la pratique, sont analytiquement résolus (en particulier grâce aux techniques de potentiel complexe et transformations conformes [63, 43, 85], cf. annexe C). Concernant l'écoulement longitudinal autour du fuselage, il pourra être tout simplement négligé. Finalement, toute la théorie de J. Lighthill précédemment évoquée, est fondée sur la mise en œuvre et l'adaptation de cette théorie de l'Aéronautique au cas des poissons de géométrie élancée et en particulier anguilliformes. Aussi, les rudiments de cette théorie font l'objet des développements qui suivent.

Considérons comme les auteurs de [56], un corps élancé de révolution de position fixe et incliné d'un angle α par rapport à un courant de fluide de vitesse $\boldsymbol{u}_\infty = u_\infty(\cos\alpha \boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha \boldsymbol{e}_2$. Pour plus de commodité, nous nous placerons dans un système de coordonnées cylindriques $(\boldsymbol{x}(r,\theta,z))$ attaché au corps et respectant son axisymétrie (cf. figure 4.2).

La surface du corps est définie par la fonction suivante :

$$f(r,\theta,z) = r - R(z) = 0 \ . \tag{4.15}$$

L'hypothèse du "Slender Body" stipule que "la finesse", i.e. le rapport du rayon du corps $R(z)$ à sa longueur totale L, reste petit. De plus, nous supposerons que la variation de la dimension R des sections par rapport à la variable d'espace z reste elle aussi petite le long du corps. Enfin, nous nous placerons dans le contexte des petites perturbations et supposerons en particulier l'angle d'attaque α petit. Il s'en suit que nous supposerons dans la suite les conditions suivantes réalisées :

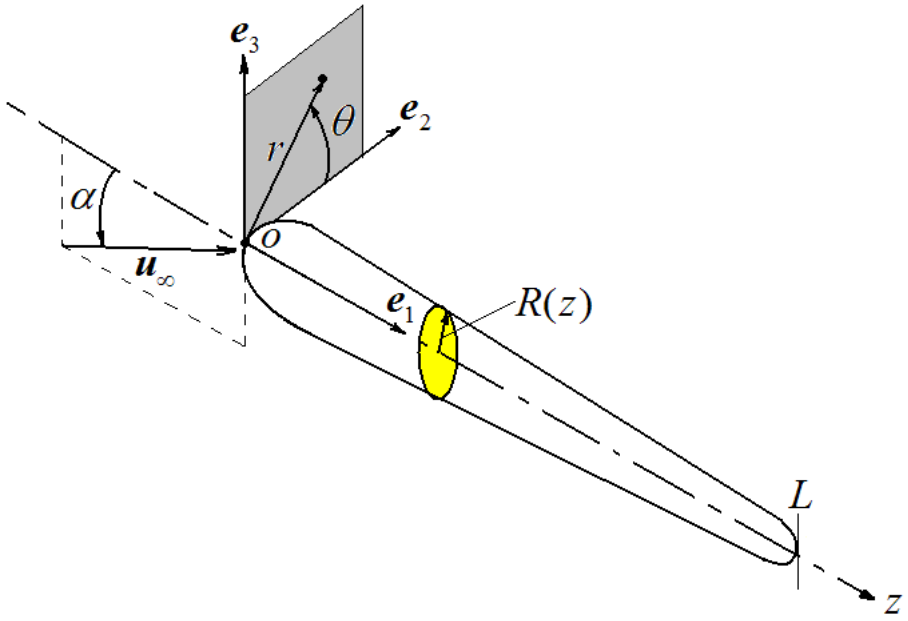


FIGURE 4.2 – Paramétrage du problème de la *S.B.T.*.

$$R(z)/L << 1 \ , \ |dR(z)/dz| << 1 \ , \ \alpha << 1 \ . \tag{4.16}$$

Par ailleurs, l'écoulement est ici régit par l'équation de Laplace (2.29) qui s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0 \ . \tag{4.17}$$

Dont la solution générale s'écrit ici comme la somme suivante :

$$\phi = \phi_0 + \phi_\epsilon \ , \tag{4.18}$$

dont le premier terme (de gauche à droite) représente le potentiel de l'écoulement alors que le corps est absent (c'est la composante nominale et dominante de l'écoulement), tandis que le second terme représente la contribution perturbative due à la présence du corps mince au sein de l'écoulement (c'est un infiniment petit du premier ordre par rapport à la première composante). Tenant compte de l'expression de la vitesse du courant $\boldsymbol{u}_\infty$ dans le système de coordonnées cylindriques de base naturelle $(\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z)$, il vient, au premier ordre par rapport aux "infiniments petits" du problème :

$$\boldsymbol{u}_\infty = u_\infty[\cos\alpha\boldsymbol{e}_z + \sin\alpha(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + cos\theta\boldsymbol{e}_\theta)] = u_\infty[\boldsymbol{e}_z + \alpha(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + cos\theta\boldsymbol{e}_\theta)] \ , \tag{4.19}$$

où $\boldsymbol{e}_r = \partial\boldsymbol{x}/\partial r$, $\boldsymbol{e}_\theta = \partial\boldsymbol{x}/\partial\theta$ et $\boldsymbol{e}_z = \partial\boldsymbol{x}/\partial z$.

Posons maintenant la condition de glissement (2.32) sur le corps élancé, il vient :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi.\boldsymbol{\nabla}f = 0 \ , \tag{4.20}$$

où $\boldsymbol{\nabla}f$ définit la normale sortante à la surface du corps. Aussi, en vertu de la superposition (4.18), nous obtenons :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_\epsilon.\boldsymbol{\nabla}f = -\boldsymbol{u}_\infty.\boldsymbol{\nabla}f \ , \tag{4.21}$$

où l'on a également tenu compte de la relation $\boldsymbol{\nabla}\phi_0 = \boldsymbol{u}_\infty$.

Finalement, un calcul sans difficulté permet de réécrire (4.21) comme :

$$\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial r} + u_\infty\alpha\sin\theta - \left[\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial z} + u_\infty\right]\frac{dR(z)}{dz} = 0 \ , \text{ avec : } r = R(z) \ . \tag{4.22}$$

En négligeant le terme de plus haut degré par rapport aux infiniments petits du problème, i.e. : $(\partial\phi_\epsilon/\partial z)(dR(z)/dz)$ dans (4.22), nous obtenons :

$$\frac{\partial\phi_\epsilon}{\partial r} = -u_\infty\alpha\sin\theta + u_\infty\frac{dR(z)}{dz} \ . \tag{4.23}$$

A ce niveau, remarquons que sous ces approximations, les conditions aux limites s'écrivent comme la somme des conditions aux limites de deux écoulements dérivant respectivement de deux potentiels que l'on notera $\phi_\parallel$ et $\phi_\perp$ en raison du fait que le premier génére un écoulement parallèle au corps, tandis que le second produit un écoulement transverse. Aussi, en vertu de la linéarité des équations de champ, le potentiel des vitesses de l'écoulement tridimensionnel autour du corps élancé peut être remplacé par la superposition $\phi_\epsilon = \phi_\parallel + \phi_\perp$, où la première contribution génére un écoulement de champ de vitesse $\boldsymbol{u}_\parallel$ parallèle au corps définie par :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_\parallel = \boldsymbol{u}_\parallel \ , \tag{4.24}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\frac{\partial\phi_\parallel}{\partial r} = u_\infty\frac{dR(z)}{dz} \ , \tag{4.25}$$

tandis que la seconde, génère un champ de vitesse transverse au corps $\boldsymbol{u}_\perp$, défini comme :

$$\boldsymbol{\nabla}\phi_\perp = \boldsymbol{u}_\perp \tag{4.26}$$

avec comme conditions aux limites :

$$\frac{\partial\phi_\perp}{\partial r} = -u_\infty\alpha\sin\theta \ . \tag{4.27}$$

En d'autres termes, l'approximation du corps mince permet de négliger les couplages des deux écoulements (parallèle et transverse) dans les conditions aux limites, découplage "se propageant" dans tout le domaine fluide en vertu de la linéarité de l'équation de Laplace. Finalement, la méthode de résolution proposée par M.M. Munk (cf. [87]) consiste à calculer dans le cas de l'écoulement axisymétrique la distribution de sources et de puits vérifiant la condition aux limites (4.25) tandis que l'ajout à cette première distribution d'une seconde constituée de doublets permet de générer l'écoulement transverse vérifiant (4.27). Enfin, si la variation de la dimension $R(z)$ des sections est très "douce" (i.e. la dérivée $dR(z)/dz$ devient négligeable dans (4.25)), alors l'écoulement axisymétrique "disparaît" devant l'écoulement transverse, et ce sur tout le corps en dehors des deux extrémités ogivales, où la pente $dR(z)/dz$ est importante. Ainsi, l'hypothèse du "Slender Body" ne peut s'appliquer en ces deux lieux sans produire une erreur d'approximation locale heureusement sans grande incidence sur la précision de la solution dans son ensemble (cf. [4]). Finalement, sous l'hypothèse des faibles variations des sections, l'écoulement tridimensionnel global s'écrit comme la superposition d'écoulements plans perpendiculaires à l'axe principal du corps. Aussi, ces écoulements dérivent de potentiels des vitesses, solution de l'équation de Laplace bidimensionnelle sous les conditions aux limites (4.27), envisagées section par section (les coordonnées cylindriques étant conçues alors comme "polaires"). En extrapolant ces remarques à la dynamique (cf. [39, 36]), le tenseur de masses ajoutées peut dans ce cas être construit par intégration le long de l'axe principal du corps des tenseurs de masses ajoutées 2-D issue des écoulements autour des sections. Cette construction relève de la "Strip Theory", bien connue en ingénierie navale [66, 112, 11].

Jusque là, notre exposé s'est limité à la dynamique des corps rigides immergés tels que fréquemment rencontrés en aéronautique (par exemple un fuselage d'avion) et en ingénierie navale (par exemple un bateau). A partir des années 1960, et sous l'impulsion de J. Lighthill (cf. [69, 70, 71, 72]), cette théorie a été appliquée au cas de l'étude du vivant et tout particulièrement à la nage des poissons (cf. [127, 90]). J. Lighthill se pencha sur l'étude des principes locomoteurs mis en œuvre chez les anguilliformes et les carangiformes dont la géométrie est assimilable à celle du "corps élancé". Cependant, contrairement au cas rigide étudié par M.M. Munk, dans le cas d'un poisson, l'onde rétrograde se propageant le long de sa colonne vertébrale déforme son corps et engendre un champ de vitesse non-uniforme le long de celui-ci. En dépit de ces différences, J. Lighthill démontra (cf. la démonstration dans l'appendice de [69]) que, sous la condition des petites déformations du corps, l'approximation du "Slender Body" pouvait être reconduite. Ceci lui permit de développer les deux modèles que sont :

– l'"Elongated Body Theory" notée *E.B.T.* (cf. [69, 71]) ;

– la "Large Amplitude Elongated Body Theory" notée *L.A.E.B.T.* (cf. [72]) ;

dont nous allons rappeler à présent les grands principes.

4.4 "Elongated Body Theory" (*E.B.T.*).

En accord avec le "point de vue réactif" évoqué en introduction, l'idée est ici de modéliser la force de poussée $\boldsymbol{P} = P\boldsymbol{e}_1$ en analysant les échanges cinétiques (i.e. les "Impulses") entre le poisson et le fluide. Cette poussée permet à l'animal de se déplacer en ligne droite et fut l'objet permanent des recherches de J. Lighthill, afin en particulier d'élucider les performances exceptionnelles des poissons telles que révélées dans les années 1930 sous la forme du "paradoxe de Gray" (cf. [45]). Le modèle présenté dans cette section est appelé "Elongated Body Theory" et correspond à la mise en œuvre directe de la *S.B.T.* au cas des poissons de forme allongée soumis à de faibles perturbations de leur géométrie. Avant de poursuivre, notons que nous avons dû par moment extrapoler certains des calculs de l'auteur dont le style reste pour le moins lapidaire !

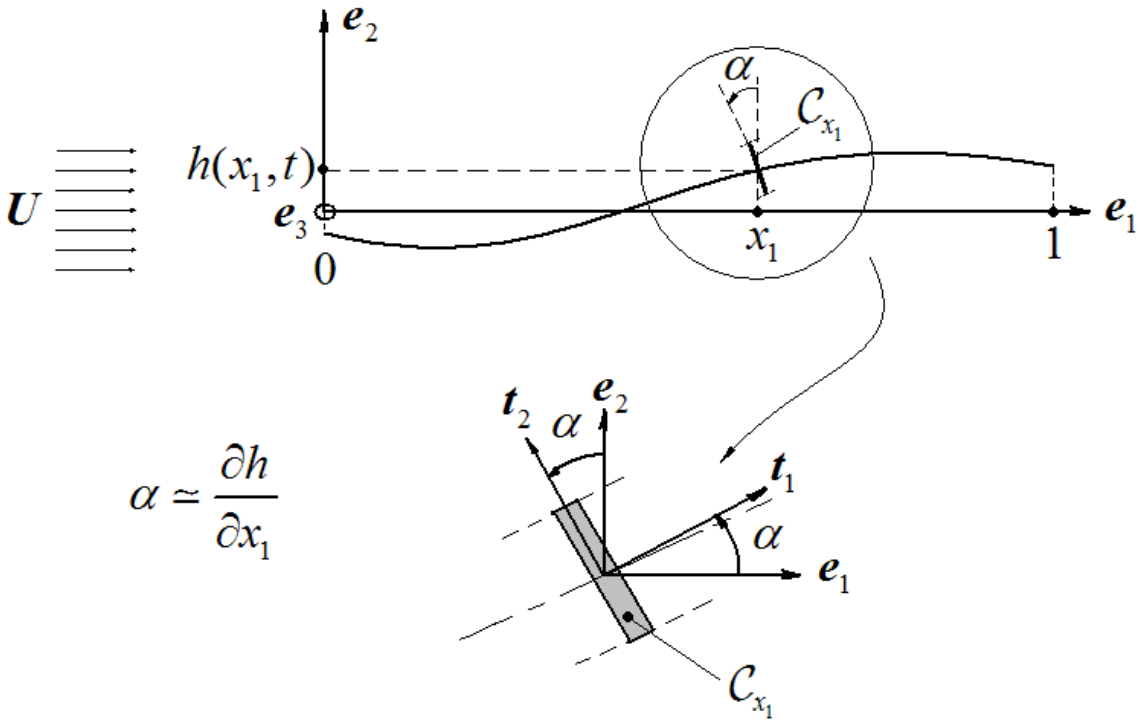


FIGURE 4.3 – Paramétrage de l'"*E.B.T.*" de J. Lighthill.

Considérons tel que représenté sur la figure 4.3, un poisson dont la tête est orientée

selon la direction $-\boldsymbol{e}_1$. Sur la base d'observations biologiques (films et photos), on constate aisément que, grâce aux mouvements de son corps, le poisson maintient sa position fixe (en moyenne) dans l'espace alors qu'il est soumis à un courant axial de vitesse $U\boldsymbol{e}_1$. Aussi, la poussée moyenne produite par son corps sur le fluide doit compenser la force de traînée subie par l'animal et générée par le courant. Dans toute la suite des développements, la configuration droite et rigide du poisson joue le rôle de référence des déformations. Le nez du poisson se trouve à la position $x_1 = 0$ tandis que la nageoire caudale est placée à $x_1 = 1$. Dans cette configuration, la section transverse du corps placée à une distance x_1 du nez sera notée par $\mathcal{C}_{x_1}$. A chacune des sections $\mathcal{C}_{x_1}$ on attache un repère orthonormé $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)(x_1)$ dont le vecteur $\boldsymbol{t}_1$ coïncide avec la tangente unitaire à la déformée du corps. Dans les conditions de nage précédemment évoquées, nous supposons la configuration de référence déformée par un champ de déplacement transverse supposé infiniment petit et défini par $h : (x_1, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \mapsto h(x_1, t) \in \mathbb{R}$ selon la direction $\boldsymbol{e}_2$. Sous ces hypothèses, les variables euleriennes et lagrangiennes de la poutre sont confondues et l'on a :

$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_2 \text{ et } \boldsymbol{t}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{\partial h}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 \ . \tag{4.28}$$

Reconduisant les usages de la *S.B.T.*, Lighthill dans l'appendice de [69] procède à un développement en perturbation selon les puissances croissantes des infiniments petits que sont les rapports suivants : "vitesse transverse/U", "dimension transverse/longueur du corps". Dans ces conditions, l'écoulement de fluide parfait incompressible et irrotationnel autour du corps déformable peut être vu comme la superposition :

- d'un écoulement stationnaire en l'absence du corps dans le fluide ;
- d'un écoulement de perturbation stationnaire autour de la configuration de référence ;
- d'un écoulement de perturbation instationnaire dû au champ de déplacement $h(., t)$.

En accord avec la *S.B.T.* seul le troisième de ces écoulements produira des forces hydrodynamiques non-nulles. Pour étudier cette composante de l'"écoulement total" J. Lighthill commence, sans le mentionner explicitement, par réécrire l'équation de Laplace du fluide dans un système de coordonnées matériellement attaché au corps déformable ((A.3) de [69]). Dans un tel système ((A.2) de [69]), la géométrie du poisson est fixe par rapport au temps. Ceci fait, seuls les termes dominants par rapports aux infiniments petits du problème sont conservés dans l'équation de Laplace qui dégénère en une équation bidimensionnelle réglant les écoulements dans les plans transverses à l'axe du corps ((A.4) de [69]). Qui plus est, appliquant ce même raisonnement aux conditions aux limites du problème ((A.7-9) de [69]), l'écoulement pertinent (le troisième précédemment cité) apparaît alors sous la forme d'un empilement selon l'axe du corps d'écoulements plans produits

par le champ de vitesse transverse des sections $\mathcal{C}_{x_1}$ défini par ((A.10) de [69]) :

$$V_2(x_1,t) = \frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial h}{\partial x_1} \ , \tag{4.29}$$

où l'on voit apparaître l'opérateur $\partial./\partial t + U\partial./\partial x_1$ qui réalise la "dérivée particulaire par rapport au fluide", notée $d./dt$ d'une fonction, ici h, de la variable x_1. Avant de poursuivre les développements de son auteur remarquons que dans ce modèle, $\boldsymbol{v} = (v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2)(x_1,t)$ définit la vitesse de la tranche solide $\mathcal{C}_{x_1}$ par rapport au fluide, si $v_1 = -U$, ou par rapport à l'espace, si $v_1 = 0$ tandis que dans les deux référentiels, on a $v_2 = \partial h/\partial t$. De plus, en vertu de (4.28) il devient alors manifeste que (4.29) n'est autre que la seconde composante de la vitesse de la section exprimée dans son repère mobile $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2)$ puisque l'on a :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \partial h/\partial x_1 \\ -\partial h/\partial x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \ , \tag{4.30}$$

toujours avec $v_1 = 0$ ou $-U$, selon que le référentiel soit celui du fluide ou de l'espace alors que $v_2 = \partial h/\partial t$ dans les deux cas.

Toujours en accord avec la *S.B.T.*, le "troisième écoulement", lorsqu'il est considéré à proximité du corps dans un plan transverse à celui-ci est peu différent de celui imprimé par un cylindre infini de base $\mathcal{C}_{x_1}$ et de vitesse $(V_2\boldsymbol{t}_2)(x_1,t)$, dont la densité d'impulse par unité de longueur, s'écrit en vertu de (4.13) :

$$\boldsymbol{p}(x_1,t) = m(x_1)V_2(x_1,t)\boldsymbol{t}_2(x_1,t) \simeq m(x_1)V_2(x_1,t)\left(\boldsymbol{e}_2 - \frac{\partial h}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1\right) \ , \tag{4.31}$$

où, $m(x_1)$ est la "masse ajoutée" par unité de longueur d'un cylindre infini de section $\mathcal{C}_{x_1}$ animé d'un mouvement de translation transverse de vitesse $V_2(x_1,t)$.

Ceci précisé, le calcul de la poussée tel que proposé par J. Lighthill, repose sur le bilan d'énergie mécanique appliqué au fluide bordant latéralement le corps élancé. Dans ce bilan, la puissance développée par les efforts extérieurs au fluide se décline en deux contributions que sont celles induites par les efforts de portance (transverse au corps), et de poussée (dans l'axe du corps) objet central des investigations de J. Lighthill. Pour ce qui est de la portance, elle se définie le long du corps par le champ de vecteurs transverses $\boldsymbol{Q} : (x_1,t) \in [0,1]\times\mathbb{R}^+ \mapsto Q(x_1,t)\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^3$. Afin d'établir l'expression de Q, appliquons avec J. Lighthill les lois de Newton stipulant ici que la contribution à cette force appliquée à la section $\mathcal{C}_{x_1}$ est égale à la dérivée particulaire de la quantité de mouvement du fluide contenu, en vertu de la *S.B.T.*, dans le plan prolongeant $\mathcal{C}_{x_1}$ selon $\boldsymbol{t}_2$, i.e. :

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}.\boldsymbol{e}_2 = -Q(x_1,t) \ , \tag{4.32}$$

qui en vertu de (4.31) et de la définition de la dérivée particulaire, se détaille selon :

$$Q(x_1,t) = -\frac{d}{dt}[m(x_1)V_2(x_1,t)] = -\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)[m(x_1)V_2(x_1,t)] \ , \tag{4.33}$$

où le signe "$-$" traduit ici le fait que la force est exercée par le corps sur le fluide et non l'inverse. Calculons à présent la puissance $\mathcal{P}_Q$ apportée au fluide isolé par l'opposé des efforts de portance appliqués par le corps. La force Q étant appliquée sur le corps, elle ne travaille que dans la vitesse $\partial h/\partial t$, et l'on a (équation (6) du chapitre 4 de [73]) :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_Q &= \int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right) mV_2 dx_1 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\left(\frac{\partial h}{\partial t} mV_2\right) dx_1 - \int_0^1 \frac{\partial V_2}{\partial t} mV_2 dx_1 \ .\end{aligned} \tag{4.34}$$

Ainsi, une fois l'intégration par partie du terme "$U\partial(mv_2\partial h/\partial t)/\partial x_1$" par rapport à x_1 opérée, et tenant compte de la forme ogivale de la tête (imposant $m(0) = 0$), $\mathcal{P}_Q$ se réécrit (équation (8) du chapitre 4 de [73]) :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^1 \frac{\partial h}{\partial t} mV_2 dx_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 V_2^2 m dx_1\right] + U\left[\frac{\partial h}{\partial t} mV_2\right]_{x_1=1} \ , \tag{4.35}$$

où le dernier terme de ce bilan s'interprète comme un "terme convectif" échangé avec le sillage. Rappelons à présent qu'en vertu de (4.29), nous pouvons écrire :

$$V_2\frac{\partial h}{\partial t} = V_2^2 - UV_2\frac{\partial h}{\partial x_1} \ . \tag{4.36}$$

Ainsi, en injectant (4.36) dans (4.37), il vient :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 \frac{1}{2} mV_2^2 - UmV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) dx_1 + U\left[mV_2^2 - mUV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right]_{x_1=1} \ , \tag{4.37}$$

que J. Lighthill écrit comme (équation (9) du chapitre 4 de [73]) :

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 \frac{1}{2} mV_2^2 - UmV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right) dx_1 + U\left[mV_2 W\right]_{x_1=1} \ , \tag{4.38}$$

où dans le système de notation de Lighthill, W représente la vitesse latérale du corps par-rapport à l'espace, i.e. $W = \partial h/\partial t$, tandis que w que nous notons quant à nous V_2 figure la même vitesse, mais évaluée par rapport au fluide en mouvement.

Nous verrons dans la suite que c'est le premier des deux termes de bord de (4.37) qui est à l'origine de la poussée. Aussi, le lecteur trouvera dans la section suivante deux alternatives au calcul de ce terme telles que proposées par J. Lighthill (l'une basée sur le calcul des efforts de pression, la seconde, sur l'équilibre dynamique du sillage).

Avant d'aborder ce sujet, il nous reste à calculer explicitement l'expression de la force de poussée exercée par le poisson sur le fluide. Pour déterminer celle-ci, J. Lighthill applique (sans le dire explicitement) le théorème de l'énergie mécanique au fluide bordant latéralement le corps. Poursuivant son travail et en nous plaçant dans le référentiel où le fluide est au repos loin du corps, il vient en premier lieu :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 mV_2^2 dx_1 = \mathcal{P}_Q + \mathcal{P}_P \ , \tag{4.39}$$

où l'on trouve au second membre, en plus de $\mathcal{P}_Q$ introduite précédemment, la puissance de la force de poussée $\mathcal{P}_P = -((P\mathbf{e}_1).(-U\mathbf{e}_1)) = UP$, où la puissance est délivrée par le corps au fluide (ce qui explique le signe négatif affectant l'ensemble), tandis que la poussée est toujours la force exercée par le fluide sur le corps mesurée algébriquement et parallèlement à $\mathbf{e}_1$ et la vitesse, $-U\mathbf{e}_1$, est celle du corps par rapport au référentiel dans lequel le fluide est au repos loin de ce dernier. Ainsi, en vertu du théorème de la divergence, on réécrit (4.39) sous la forme suivante (équation (10) du chapitre 4 de [73]) :

$$\mathcal{P}_Q = -UP + U\left[\frac{1}{2}mV_2^2\right]_{x_1=1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 mV_2^2 dx_1 \ , \tag{4.40}$$

où chacun des termes de cette égalité s'interprète comme suit : le premier terme représente le travail produit par le poisson en se déplaçant à la vitesse U dans le sens de la poussée P, le second traduit le flux d'énergie cinétique dans le sillage tandis que le troisième n'est autre que le taux de variation temporelle de l'énergie cinétique totale du fluide bordant le poisson en amont de son bord de fuite. Finalement en retranchant (4.40) à (4.38), il vient :

$$P = \left[mV_2\left(\frac{1}{2}V_2 - \frac{\partial h}{\partial t}\right)\right]_{x_1=1} + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 mV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1 \ . \tag{4.41}$$

Qui plus est, tenant compte de (4.36) dans cette dernière expression, il vient :

$$P = \left[mV_2\left(U\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{2}V_2\right)\right]_{x_1=1} + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 mV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1 \ . \tag{4.42}$$

qui n'est autre que l'expression de la force de poussée telle qu'historiquement proposée par J. Lighthill (en fait son opposé, l'auteur définissant la poussée comme la valeur absolue de notre P) (équation (13) du chapitre 4 de [73]). En passant des énergies aux résultantes

cinétiques (i.e. de (4.40) à (4.41)), nous pouvons physiquement interpréter cette dernière égalité comme suit. Le terme intégrale représente le taux de variation temporelle (vu du corps) de la quantité cinétique du fluide se trouvant en amont du bord de fuite de la caudale, le premier terme de bord (de gauche à droite) représente l'échange convectif de quantité cinétique transverse entre le fluide bordant le corps et son sillage. Enfin le second terme de bord modélise comme nous allons le voir dans la suite les "efforts de contact (dont nous noterons la résultante $\boldsymbol{f}_{p+}$)" du sillage sur le fluide appliqués au travers d'un plan transverse à la caudale (et orthogonal à l'axe vertébral). C'est ce dernier terme dont nous donnerons dans la suite deux autres démonstrations.

Reconsidérant les conditions de nage décrites en début de section, nous sommes à présent en mesure d'étudier la poussée moyenne générée par le mouvement périodique du poisson et en particulier d'identifier les termes de (4.41) effectivement responsables du maintient de sa position dans l'écoulement. Tout d'abord, si l'on ré-applique les mêmes raisonnements que précédemment mais au cas des puissances moyennes, on obtient in finé la relation suivante sur ces puissances (équation 6 de l'article de l'appendice) :

$$\overline{\mathcal{P}_Q} = -\overline{P}U + \frac{1}{2}(m\overline{V_2^2})(1)U \ , \tag{4.43}$$

relation qui s'interprète comme suit. La puissance moyenne $\overline{\mathcal{P}_Q}$ représente la contribution au bilan apportée par le travail moteur du corps du poisson (noté $\overline{W}$ par Lighthill). Cette puissance "se transmet" au second membre sous la forme d'une puissance moyenne perdue dans le sillage (c'est le terme "$(1/2)m\overline{V_2^2}U$" modélisant la traînée induite, également dite "de forme") ainsi que de la contribution "$-\overline{P}U$" traduisant ce qu'il reste de disponible pour assurer la propulsion. Finalement, tenant compte de l'expression détaillée de la puissance des efforts moteurs du corps du poisson (4.37), on en déduit la "poussée moyenne" telle que donnée par l'équation (7) de [69] :

$$\bar{P} = \frac{1}{2}m(1)\left[\quad U^2\overline{\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2} - \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2} \quad \right]_{x_1=1} . \tag{4.44}$$

où le premier terme du second membre représente la contribution propulsive s'opposant au second terme traduisant la traînée moyenne induite par le sillage. A l'examen de ce résultat nous pouvons observer que la poussée nécessaire pour compenser l'effet des forces de traînée, est fournie par les efforts de contact appliqués par le sillage sur la nageoire caudale. Qui plus est, (4.44) montre qu'en valeur absolue :

- la poussée moyenne augmente si la vitesse de battement augmente ;
- la poussée moyenne augmente si la vitesse de l'écoulement ou l'incidence de la caudale diminue.

Finalement, lorsque que le poisson avance à une vitesse constante U dans un fluide au repos, on a $\bar{P} = 0$ et donc :

$$\overline{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2} = U^2 \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2} \text{ , avec } x_1 = 1 \text{ ,} \tag{4.45}$$

dont on déduit :

$$U = \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)^2} / \overline{\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2}} \text{ .} \tag{4.46}$$

Si, de plus, on adopte comme fonction d'ondulation la loi horaire habituelle :

$$h : x_1 \in [0,1], t \mapsto h(x_1,t) = A \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda}\right)\right] \text{ ,} \tag{4.47}$$

où A est un coefficient d'amplitude constant, T est la période et λ la longueur de l'onde, on montre, tous calculs faits que l'on a :

$$U = \frac{\lambda}{T} \text{ ,} \tag{4.48}$$

Finalement, la relation (4.48) définit le coefficient "UT/λ" appelé "rapport glissement". Ce nombre sans dimension est égale à 1 dans le meilleur des cas (dans le cas non visqueux en particulier). Il établit le lien entre la célérité de l'onde rétrograde de déformation du corps et la vitesse d'avance d'ensemble du poisson. Sur la base d'observations in vivo des poissons, ce nombre est de l'ordre de 0.6 (cf. [89]).

4.5 Les forces de contact exercées par le sillage sur le corps.

En accord avec les travaux de J. Lighthill (cf. [71, 109]), il existe à ce jour deux alternatives à la démarche poursuivie précédemment pour obtenir la force propulsive $\boldsymbol{f}_{p+} = -1/2mV_2^2\boldsymbol{t}_1$ de (4.41). Ici, nous nous proposons de présenter ces deux alternatives telles que proposées dans [71]. En accord avec la figure 4.4, la première de ces démonstrations est basée sur le calcul de la résultante des pressions appliquées au travers du plan π au fluide contenu dans le volume $\mathcal{D}$. Quant à la seconde, elle s'appuie sur l'équilibre du fluide contenu dans $\overline{\mathcal{D}}$, que l'on assimile ici au sillage du poisson.

Contrairement au contexte de la section précédente, le poisson n'est plus plongé dans un fluide de vitesse nominale $\boldsymbol{U}$, mais soumis à un mouvement de translation d'avance imposé de vitesse constante $-U\boldsymbol{e}_1$. Avec cette définition, son corps entraîne le volume de

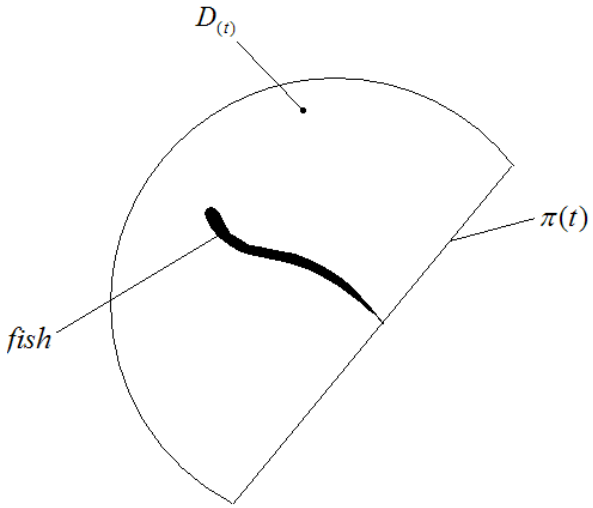


FIGURE 4.4 – Le volume de contrôle de Lighthill.

contrôle $\mathcal{D}$ dans son mouvement et le repère $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ est à présent mobile et animé de la vitesse $-U\boldsymbol{e}_1$. Une fois ceci précisé, la première des deux démonstrations annoncées utilise l'équation de Bernoulli (2.31) que l'on rappelle à présent :

$$p \;=\; -\rho_f \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u})(\boldsymbol{x},t) - \rho_f \frac{\partial}{\partial t}\phi(\boldsymbol{x},t) + \rho_f \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_\infty.\boldsymbol{u}_\infty)(t) + p_\infty \ .$$

Aussi, afin d'obtenir la force globale, nous devons donc intégrer cette expression sur toute la surface délimitant le volume de contrôle. Ce calcul s'appuie sur les simplifications suivantes : 1°) les intégrales des deux premiers termes de (2.31) seront non nuls uniquement sur le plan π et à la surface du corps du poisson (le fluide étant au repos sur la sphère de rayon infini, cf. (2.33)) ; 2°) le volume de contrôle étant fermé, les termes homogènes de (2.31) ne contribuent pas à la résultante recherchée. Sous ces conditions, la force de contact entre le fluide du volume de contrôle et celui contenu dans le sillage s'identifie à :

$$\boldsymbol{f}_{p+} = f_{p+}\boldsymbol{t}_1 = \int_\pi \rho_f \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \boldsymbol{t}_1 d\pi \ , \tag{4.49}$$

Le premier terme sous l'intégrale de (4.49) ne présentant aucune difficulté, nous allons nous attacher au second où figure la dérivée $\partial\phi/\partial t$. Cette dernière se déduit de la définition de la dérivée convective $\delta/\delta t$ d'un champ lié mécaniquement au fluide contenu dans un volume de contrôle mobile (cf. [23]), qui s'écrit :

$$\frac{\delta \phi}{\delta t} \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{w}.\boldsymbol{\nabla}\phi \ . \tag{4.50}$$

où $\boldsymbol{w}$ n'est autre que le champ de vitesse du volume de contrôle lié au corps qui s'écrit ici, au premier ordre par rapport aux infiniments petits du problème :

$$\boldsymbol{w} = \left(V_1 - V_2\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(V_2 + V_1\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{e}_2 \ , \tag{4.51}$$

où, V_1 et V_2 sont respectivement les composantes tangentielles et normales (orientés par rapport à l'axe vertébrale) du champ de vitesse le long du corps.

Ainsi, tenant compte de (4.50) dans (4.49), la composante normale à π des forces de pression agissant sur $\mathcal{D}$ est égale à :

$$f_{p+} \ = \ \int_\pi \rho_f \frac{1}{2}\boldsymbol{u}^2 d\pi + \int_\pi \rho_f \frac{\delta\phi}{\delta t} d\pi - \boldsymbol{w}.\int_\pi \rho_f \boldsymbol{u} d\pi \ , \tag{4.52}$$

où la première intégrale correspond à l'énergie cinétique de la tranche de fluide contenue dans le plan π tandis que la seconde s'annule en vertu de l'antisymétrie de l'intégrande par rapport à la variable d'espace x_2 imposée par la forme des sections. Enfin, la dernière intégrale n'est autre que la définition de "l'impulse" du fluide contenu dans π et définie par (4.31). Finalement, nous obtenons grâce à (4.51) et après intégration de (4.52) :

$$f_{p+} \ = \ \frac{1}{2}mV_2^2 - V_2 mV_2 + V_1\frac{\partial h}{\partial x_1}mV_2 - mV_2\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)^2 - V_1\frac{\partial h}{\partial x_1}mV_2 \ , \tag{4.53}$$

ce qui donne après simplification :

$$f_{p+} \ = \ \frac{1}{2}mV_2^2 - V_2 mV_2 = -\frac{1}{2}mV_2^2 \ . \tag{4.54}$$

Cette dernière expression est bien celle attendue et proposée par J. Lighthill dans [71]. Nous allons à présent en donner une seconde démonstration telle que proposée dans [71]. Cette seconde démonstration est comme annoncée, basée sur l'équilibre dynamique de la feuille de vortex du sillage.

Considérons la section de corps $\mathcal{C}_L$ située au niveau de la nageoire caudale. Cette section a la particularité d'avoir une épaisseur infinitésimale et une hauteur égale à $2b$. En accord avec la théorie des fonctions holomorphes (cf. [63, 43, 85] et annexe C), le potentiel des vitesses ϕ du fluide autour d'un tel solide plan se déplaçant à la vitesse $V_2\boldsymbol{t}_2$ est par conséquent :

$$\phi(0 \pm \varepsilon, x_3) \ = \ \mp V_2\sqrt{b^2 - x_3^2} \ , \tag{4.55}$$

où "$\pm$" distingue les deux faces, inférieure et supérieure, situées de part et d'autre de la section $\mathcal{C}_L$ à la distance latérale infiniment petite ε. Partant de (4.55), calculons la

composante u_3 selon le vecteur $\boldsymbol{t}_3 = \boldsymbol{e}_3$ de la vitesse du fluide sur les deux faces de la section $\mathcal{C}_L$. Cette composante est la vitesse tangentielle le long du "tranchant" du bord de fuite qui s'écrit :

$$u_3(0 \pm \varepsilon, x_3) = \frac{\partial}{\partial x_3}\phi(0 \pm \varepsilon, x_3) \quad = \quad \pm \frac{V_2 x_3}{\sqrt{b^2 - x_3^2}} \ . \tag{4.56}$$

Une telle discontinuité en vitesse est équivalente à celle introduite par une feuille de vortex de champ de vorticité (2.25) :

$$\boldsymbol{\zeta}(0, x_3) = \boldsymbol{t}_2 \times \left(\frac{2V_2 x_3}{\sqrt{b^2 - x_3^2}} \boldsymbol{t}_3 \right) = \frac{2V_2 x_3}{\sqrt{b^2 - x_3^2}} \boldsymbol{t}_1 \ . \tag{4.57}$$

En arrière du bord de fuite, la feuille de vortex se substituant au corps, le champ de vitesse dans la tranche de fluide lâchée dans le sillage se conserve, et l'on a encore (4.55) et (4.56) à tout instant ultérieur au moment du lâché. Remarquons avec J. Lighthill (cf. [71]) que ce modèle du sillage est bien cohérent avec celui de l'écoulement en amont du bord de fuite. En particulier, la variation douce des écoulements transverses en aval comme en amont du bord de fuite est ici garantie. Enfin, notons qu'en raison de son caractère approché, le modèle tranche par tranche ne peut rendre compte du caractère solénoïde du champ de vorticité. En effet, en toute rigueur, le champ (4.57) étant variable le long de l'axe x_1, il devrait être "refermé" à chaque instant par un champ de vorticité vertical (i.e. selon $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{t}_3$), ici absent. Cependant, une fois lâchée, la tranche de fluide $\mathcal{S}_{x_1}$ est animée d'un mouvement balistique caractérisé par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{x_1}}(x_1)$ définie par :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{x_1}} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \boldsymbol{e}_3 \ . \tag{4.58}$$

Poursuivant [71], nous allons à présent écrire l'équilibre dynamique associé au mouvement du sillage à l'instant t. Pour se faire, l'abscisse x_1 le long de $\boldsymbol{e}_1$ s'étend à présent de la tête $x_1 = 0$, jusqu'à $x_1 = +\infty$ en aval de la caudale. Qui plus est, si x_1 étiquette encore les sections de corps $\mathcal{C}_{x_1}$ comprises entre $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$, il sert également de label pour toute tranche de fluide $\mathcal{S}_{x_1}$ transverse à la feuille de vortex en x_1 qui se développe dans le sillage entre $x_1 = 1$ et $x_1 = +\infty$. Enfin, le fluide isolé est celui contenu dans $\overline{\mathcal{D}}$ une fois privé de la feuille, de sorte que l'on a en vertu des lois de Newton et des propriétés dynamiques d'une feuille de vortex libre (continuité des pressions à la traversée) :

$$\frac{d}{dt} \int_1^{+\infty} \boldsymbol{p} dx_1 \quad = \quad -\boldsymbol{f}_+ \ , \tag{4.59}$$

où $\boldsymbol{f}_+$ représente la force appliquée au fluide isolé au travers du plan π dont la projection selon $\boldsymbol{t}_1$ n'est autre que la force recherchée, i.e. : $\boldsymbol{f}_+ . \boldsymbol{t}_1 = f_{p+}$. Appliquant les résultats standards des lois de transports, il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_1^{+\infty} \boldsymbol{p}dx_1 \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_1^{+\infty} \boldsymbol{p}dx_1 - U[\boldsymbol{p}]_{x_1=1}\ . \tag{4.60}$$

Aussi, en accord avec la nature balistique du mouvement des tranches fluides du sillage, on a :

$$\frac{d}{dt}\int_1^{+\infty} \boldsymbol{p}dx_1 \;=\; \int_1^{+\infty} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}_{x_1}} \times \boldsymbol{p}dx_1 - U[\boldsymbol{p}]_{x_1=1}\ , \tag{4.61}$$

dont la projection sur $\boldsymbol{t}_1$ donne l'expression de la force propulsive recherchée :

$$f_{p+} = -\frac{d}{dt}\int_1^{+\infty} \boldsymbol{p}dx_1.\boldsymbol{t}_1 \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} m V_2 dx_1 = -\left[\frac{1}{2}mV_2^2\right]_{x_1=1}\ . \tag{4.62}$$

confirmant ainsi l'expression des termes de bords de l'équation (4.42) précédemment obtenue par mise en équilibre du fluide contenu dans le volume de contrôle complémentaire.

4.6 "Large Amplitude Elongated Body Theory" (*L.A.E.B.T.*).

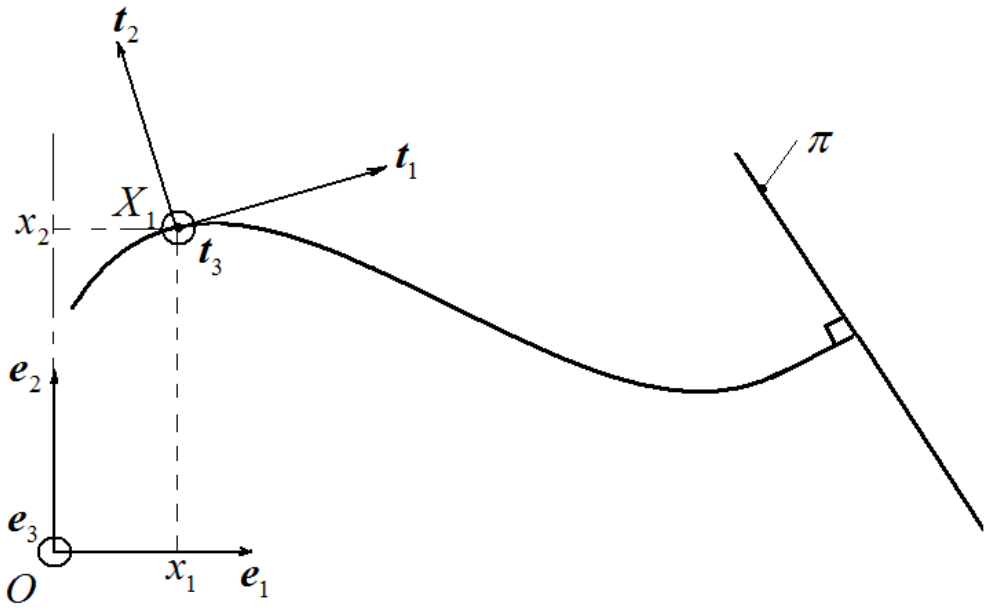


FIGURE 4.5 – Paramétrage de la *L.A.E.B.T.* de J. Lighthill.

Une extension de l'*E.B.T* a été développée par J. Lighthill dans le cas des mouvements de grandes amplitudes sous le nom de "Large Amplitude Elongated Body Theory" ou *L.A.E.B.T.* (cf. [72]). Dans le cas des "déformations" d'amplitudes finies, les configurations de référence et déformée ne sont plus confondues et la position courante ($\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2$) d'un point matériel est distinguée de sa position de référence ($\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{e}_1 + X_2\boldsymbol{e}_2$). Comme dans la sous-section précédente, le fluide considéré est contenu dans un volume de contrôle constitué d'une boule de rayon infini centrée autour du poisson et troquée par un plan, noté π, perpendiculaire à chaque instant t au bord de fuite de la nageoire caudale (cf. figure 4.5). Pour positionner les sections le long du corps, on introduit l'abscisse curviligne $X_1 \in [0,1]$ s'étendant de la tête $X_1 = 0$ jusqu'au bord de fuite de la nageoire caudale $X_1 = 1$. De plus, nous imposons à la colonne vertébrale du poisson d'être inextensible au cours du mouvement, i.e. de vérifier :

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial X_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\right)^2 = 1 \ , \tag{4.63}$$

où les coordonnées ($(x_1, x_2)^T$) des points matériels de la colonne vertébrale du poisson sont à présent des fonctions de l'abscisse curviligne X_1 et du temps t. On attache à chaque section X_1 du corps un repère mobile $(G, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(X_1, t)$ dont les vecteurs sont respectivement tangent et normale à la colonne vertébrale ainsi que perpendiculaire au plan de nage. Qui plus est, les champs de vecteurs tangentiels $\boldsymbol{t}_1 : X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{t}_1(X_1)$ et normaux $\boldsymbol{t}_2 : X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{t}_2(X_1)$ à la colonne vertébrale sont définis par :

$$\boldsymbol{t}_1(X_1) = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_2 \ , \ \boldsymbol{t}_2(X_1) = -\frac{\partial x_2}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial x_1}{\partial X_1}\boldsymbol{e}_2 \ . \tag{4.64}$$

Avec ces notations, le champ de vitesse galiléen s'écrit comme $V_1\boldsymbol{t}_1 + V_2\boldsymbol{t}_2$, avec :

$$V_1 = \frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} \ , \ V_2 = \frac{\partial x_2}{\partial t}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} - \frac{\partial x_1}{\partial t}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} \ . \tag{4.65}$$

En vertu des différentes hypothèses faites dans les sous-sections précédentes, la quantité de mouvement fournit au fluide par une section du corps d'abscisse X_1 est égale à $(mV_2\boldsymbol{t}_2)(X_1)$, où $m : X_1 \in [0,1] \mapsto m(X_1)$ est la densité linéique de masse ajoutée le long du corps. Ré-empruntant les notations précédentes dues à J. Lighthill, nous dénotons par P et Q les composantes respectives selon $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ de la résultante des forces de contact entre le fluide et le poisson. Dans ces conditions, J. Lighthill a supposé ("sans démonstration rigoureuse") que les résultats relatifs au champ de pression sur le plan π et aux échanges cinétiques avec le sillage étaient encore valables pour ce modèle. Ainsi, la composante de la résultante du champ de pression sur le plan π est encore dans ce contexte égale à $1/2mV_2^2$, de sorte qu'en appliquant la même démarche que celle mise en

œuvre pour l'*E.B.T*, J. Lighthill proposa dans le cas des grands déplacements le modèle suivant :

$$P\boldsymbol{e}_1 + Q\boldsymbol{e}_2 = \left[mV_2V_1\boldsymbol{t}_2 - \frac{1}{2}mV_2^2\boldsymbol{t}_1\right]_{X_1=1} - \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 mV_2\boldsymbol{t}_2 dX_1 \ , \tag{4.66}$$

où les termes entre crochets correspondent respectivement aux échanges cinétiques entre le sillage et le fluide contenu dans le volume de contrôle et à la force de "réaction" induit par le sillage au travers de π, tandis que le terme intégral correspond quant à lui, aux échanges cinétiques entre les sections du corps de l'animal et les tranches de fluide.

Finalement, la *L.A.E.B.T.* se résume par l'unique équation (4.66) qui permet sur la base des déformations imposées au corps et des mouvements résolus de la tête d'obtenir les forces longitudinale et transverse (i.e. la poussée P et la portance Q) appliquées sur le poisson pendant une manœuvre de nage (par exemple la nage ondulante ou virage). Cette théorie fut extensivement poursuivie par la suite (cf. [72, 124, 117]) afin d'estimer à l'aide de clichés photographiques (cf. [44]), les forces hydrodynamiques mises en jeu et la puissance consommée par la nage.

Enfin, retournant au modèle de l'*E.B.T.*, et tenant compte dans (4.66) projetée sur $\boldsymbol{e}_1$, des approximations linéaires suivantes :

$$X_1 \simeq x_1 \ , \ V_1 \simeq -U \ , \ \boldsymbol{t}_1 \simeq \boldsymbol{e}_1 + \frac{\partial h}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_2 \ , \ \boldsymbol{t}_2 \simeq \boldsymbol{e}_2 - \frac{\partial h}{\partial x_1}\boldsymbol{e}_1 \ , \tag{4.67}$$

nous obtenons :

$$P = \left[mV_2\left(U\frac{\partial h}{\partial x_1} - \frac{1}{2}V_2\right)\right]_{x_1=1} + \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 mV_2\frac{\partial h}{\partial x_1}dx_1 \ ,$$

qui n'est autre que l'équation (4.42) de l'*E.B.T.*.

4.7 Conclusion.

Nous avons, au travers de ce chapitre, présenté les différentes théories (i.e. la décomposition de Kirchhoff, la notion de masses ajoutées au travers de son tenseur et la "Slender Body Theory") qui ont permis à J. Lighthill de construire les modèles "réactifs" de la nage anguilliforme. Les deux modèles issues de cette réflexion, appelé ici "l'Elongated Body Theory" et "la Large Amplitude Elongated Body Theory" se limitent aux calculs des composantes de la résultante du torseur de contact entre le poisson et le fluide environnant sous la condition restrictive de la nage plane. Nous ne pouvons pas dans l'état actuel de ces modèles les utiliser dans le cadre de notre problématique de robotique. Aussi,

nous avons besoin de déterminer le moment des forces de contact pour pouvoir calculer la dynamique du poisson via les théorèmes de Newton et d'Euler et ceci dans le cadre de la nage tridimensionnelle (i.e la nage ondulante, le virage et la plongée ; cf. [16]). Nous nous proposons sur la base des travaux de J. Lighthill de construire un modèle mixte (i.e. un modèle réactif superposé d'un modèle résistif) tridimensionnel de la nage anguilliforme.

Les deux prochains chapitres § 5-§ 6 sont dévolus à la présentation de la modélisation analytique de la dynamique d'un corps fin auto-propulsé assimilé à une poutre Cosserat.

Chapitre 5

Modèle dynamique analytique de la nage anguilliforme tridimensionnelle

5.1 Introduction.

Le but de ce chapitre est d'obtenir un modèle dynamique dédié à la commande "temps-réel" d'un robot biomimétique de type anguilliforme. L'approche proposée est basée sur "Elongated Body Theory" de J. Lighthill (cf. § 4.3). Cette théorie est étendue ici de plusieurs façons. Premièrement, nous ne chercherons pas uniquement à extraire la dynamique externe gouvernant la nage mais aussi la dynamique interne réglant les couples de commande distribués le long du corps. Deuxièmement, ces dynamiques sont définies dans le cas de la nage auto-propulsée tridimensionnelle, contrairement au modèle de J. Lighthill et de ses successeurs où le corps est tracté en ligne droite et soumis à des ondulations planes. Basé sur l'hypothèse du corps fin, le modèle proposé apparaîtra comme le prolongement de la poutre Cosserat du domaine solide sur le fluide l'entourant. Cette prolongation naturelle guidera le procédé de réduction de la dynamique du milieu fluide contenu dans un volume de contrôle englobant le poisson. En conséquence de quoi, la dynamique du fluide sera réduite sur l'espace de configuration de la poutre, i.e. elle réglera l'évolution temporelle des quantités cinétiques du fluide paramètrées par les labels des sections transverses du corps. Ce modèle sera ensuite utilisé dans le chapitre § 6 pour obtenir un algorithme rapide qui sera comparé à un solveur Navier-Stokes.

Ce chapitre est structuré comme suit. La section § 5.2 est dévolue aux principes géométriques de base du problème de locomotion. Dans cette section nous définirons les espaces utilisés et les cinématiques tridimensionnelles qui y sont liées. Dans § 5.3, nous rappellerons les principes de bases de la dynamique des fluides autour d'un corps que nous avions introduit dans le chapitre § 2, tandis que § 5.4 est dévolue à la réduction de la cinématique de la nage. Cette réduction est basée sur la théorie du corps fin (*S.B.T.* , cf. § 4.3) et la

théorie des poutres Cosserat (*C.B.T.*) et elles nous permettront de remplacer les cinématiques 3-D du corps et du fluide par une cinématique mono-dimensionnelle paramétrée par le label des sections transverses. Puis, utilisant ces cinématiques réduites, § 5.5 est dévolue à la réduction de la cinétique de l'ensemble du domaine (corps et fluide) inclus à chaque instant dans le volume de contrôle défini par J. Lighthill [70]. En conséquence de quoi, la cinétique du fluide apparaîtra comme réduite sur l'espace de la configuration de la poutre Cosserat comme dans l'approche de Kirchhoff (cf. § 4.2) pour les solides rigides plongés dans un fluide parfait (et irrotationnel) [61]. Une fois que ces quantités cinétiques sont trouvées, nous introduirons dans § 5.6 les dérivations temporelles et le théorème de Reynolds correspondant et nécessaire pour obtenir la dynamique réduite. Comme nous le verrons, la troisième (et dernière) étape de la réduction nous mènera à remplacer les points géométriques usuels et les particules de fluide par des tranches respectivement géométriques et fluides, les premières se déplaçant par rapport aux secondes. Enfin les deux sections suivantes sont dévolues à la dynamique. Dans § 5.7, nous calculerons la dynamique globale, i.e. la dynamique du système inclus dans le volume de contrôle qui sera utilisée dans le chapitre § 6 pour extraire la dynamique externe de la tête. Dans § 5.8, la dynamique locale ou interne du corps nageant (i.e des e.d.p. qui règlent l'évolution temporelle des sections solides et fluides quand elles sont soumises à un champ interne de couple de commande) sera extraite. Ce résultat sera obtenu grâce à l'approche de Kirchhoff [63] basée sur les équations de Poincaré-Cosserat de [15, 95]. Enfin, nous terminerons ce chapitre avec des remarques § 6.9.

Remarque : Poursuivant les mêmes objectifs de modélisation pour la commande rapide, dans [12], nous avons proposé une alternative à l'approche suivie dans ce chapitre. Celle-ci est basée sur une généralisation des équations de Poincaré d'une poutre Cosserat au cas des systèmes ouverts contenant un fluide stratifié autour d'un corps mince.

5.2 Principes géométriques de base.

Dans cette section, nous utiliserons les notations usuelles de géométries différentielles de [1], et celles de mécanique des milieux continus de [77].

5.2.1 Les espaces.

Dans les développements mathématiques à venir, tous les mouvements seront référencés par rapport au référentiel galiléen orthonormé $(o, \boldsymbol{e}_i)_{i=1,2,3}$ attaché à l'espace ambiant fixe euclidien $\boldsymbol{\mathcal{E}} \cong \mathbb{R}^3$. Qui plus est, puisque tous les tenseurs dépendent du temps, nous noterons par $\partial./\partial t$ la dérivation temporelle galiléenne tandis que les autres variables restent fixes. Pour décrire le mouvement du système, nous utiliserons l'espace fixe ambiant $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

La position géométrique d'un point de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ occupé par une particule matérielle est $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$. En accord avec les usages standards de la mécanique des milieux continus, nous introduisons deux espaces matériels (ou espace de particules matérielles), i.e. celui relatif au fluide dénoté $\mathcal{F}$ et celui relatif au corps dénoté $\mathcal{B}$. A l'instant initial $t = 0$, nous supposons que la matière (fluide et corps) est au repos. De plus, l'équilibre dynamique du fluide concerne uniquement les particules contenues dans le volume de contrôle mobile défini par J. Lighthill. Ce volume est défini à chaque instant comme un sous-domaine $\mathcal{D}_{(t)}$ de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ incluant le corps (cf. figure 5.1), dont l'enveloppe est constituée d'un plan dénoté $\pi(t)$ tangent à la queue et normal à l'axe longitudinal du corps et d'une hémisphère $\mathcal{H}_{(t)}$ contiguë à $\pi(t)$. Enfin, nous devons aussi définir le volume de contrôle $\mathcal{D}_{f(t)}$ qui est la partie de $\mathcal{D}_{(t)}$ contenant uniquement le fluide (i.e. excluant le corps).

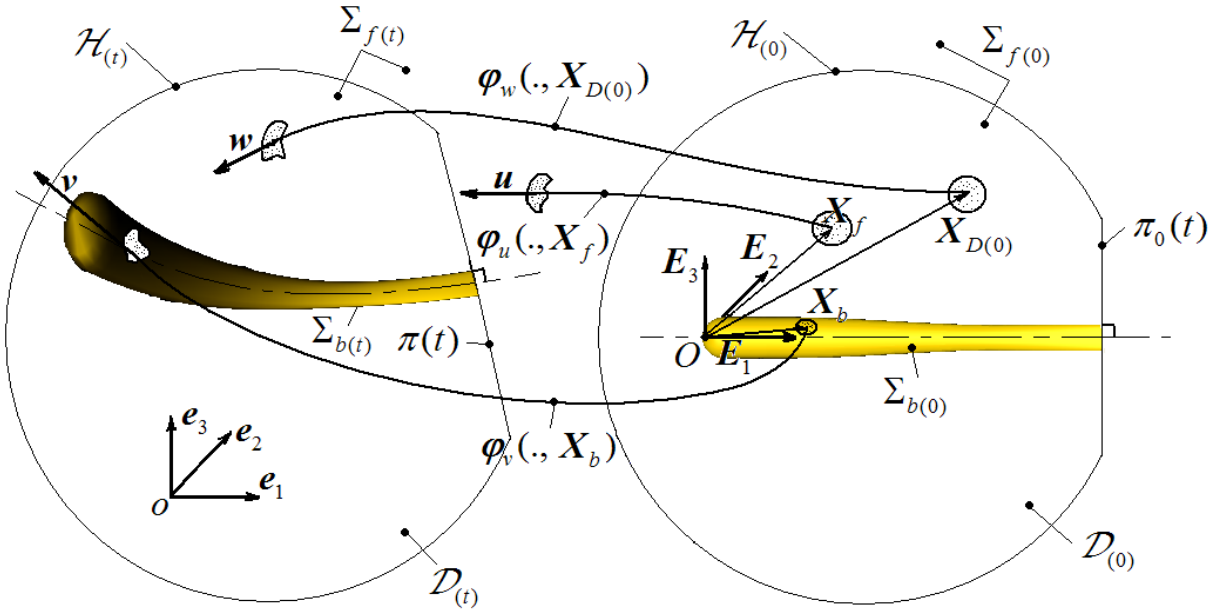


FIGURE 5.1 – Le contexte géométrique.

5.2.2 Les flots et transformations du fluide et du corps.

L'espace $\mathcal{M} \triangleq \mathcal{F} \cup \mathcal{B}$ définit le système matériel dont nous voulons extraire la dynamique restreinte au volume de contrôle. En accord avec les usages de la mécanique des milieux continus, les configurations initiales des fluide et solide notées $\Sigma_{f(0)} \subset \boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\Sigma_{b(0)} \subset \boldsymbol{\mathcal{E}}$ sont respectivement identifiées à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$.

Par conséquent, les particules matérielles de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ sont "étiquetées" par leurs vecteurs positions dans $\Sigma_{f(0)}$ et $\Sigma_{b(0)}$, dénotés respectivement $\boldsymbol{X}_f$ et $\boldsymbol{X}_b$. Les configurations courantes de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{B}$ sont dénotées respectivement $\Sigma_{f(t)}$ et $\Sigma_{b(t)}$. Elles définissent toutes deux un sous-ensemble de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, lesquelles peuvent-être définies par :

$$\Sigma_{f(t)} = \left\{ \boldsymbol{\varphi}_u(t, \boldsymbol{X}_f), \forall \boldsymbol{X}_f \in \Sigma_{f(0)} \right\} \quad , \quad \Sigma_{b(t)} = \left\{ \boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b), \forall \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \right\}, \tag{5.1}$$

où pour $t \in \mathbb{R}^+$, $\boldsymbol{\varphi}_u(t, .)$ et $\boldsymbol{\varphi}_v(t, .)$ sont les deux transformations définies par intégration entre $\tau = 0$ et $\tau = t$ de :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_u}{\partial \tau}(\tau, \boldsymbol{X}_f) = \boldsymbol{u}(\tau, \boldsymbol{\varphi}_u(\tau, \boldsymbol{X}_f)) \quad \text{, avec} \quad \boldsymbol{\varphi}_u(0, \boldsymbol{X}_f) = \boldsymbol{X}_f \quad , \quad \forall \boldsymbol{X}_f \in \Sigma_{f(0)} \ , \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_v}{\partial \tau}(\tau, \boldsymbol{X}_b) = \boldsymbol{v}(\tau, \boldsymbol{\varphi}_v(\tau, \boldsymbol{X}_b)) \quad \text{, avec} \quad \boldsymbol{\varphi}_v(0, \boldsymbol{X}_b) = \boldsymbol{X}_b \quad , \quad \forall \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \ , \tag{5.3}$$

où $\boldsymbol{u} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{E}} \longmapsto \boldsymbol{u}(\tau, \boldsymbol{x}) = u^i(\tau, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \in T_x \boldsymbol{\mathcal{E}}$, (respectivement $\boldsymbol{v} : \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{E}} \longmapsto \boldsymbol{v}(\tau, \boldsymbol{x}) = v^i(\tau, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \in T_x \boldsymbol{\mathcal{E}}$) le champ de vitesse eulérien du fluide (respectivement du corps) à chaque instant $\tau \in [0, t]$ sur $\boldsymbol{\mathcal{E}}$.

En accord avec les usages usuels de la mécanique des milieux continus, nous distinguerons les champs eulériens des champs "purement lagrangiens" (lesquels seront plus tard distingués des champs lagrangiens) en utilisant des majuscules (pour la description purement lagrangienne) et des minuscules (pour la description eulérienne).

Par exemple, nous pouvons définir les champs purement lagrangiens associés à $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ comme suit [1] :

$$\boldsymbol{U}(t, \boldsymbol{X}_f) = \boldsymbol{\varphi}_{u,\star}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{\varphi}_u(t, \boldsymbol{X}_f)) \in T_{\boldsymbol{X}_f} \Sigma_{f(0)} \cong T_{\boldsymbol{X}_f} \mathcal{F} \ , \tag{5.4a}$$

$$\boldsymbol{V}(t, \boldsymbol{X}_b) = \boldsymbol{\varphi}_{v,\star}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b)) \in T_{\boldsymbol{X}_b} \Sigma_{b(0)} \cong T_{\boldsymbol{X}_b} \mathcal{B} \ , \tag{5.4b}$$

$$\text{i.e.} \quad \boldsymbol{U} = \boldsymbol{\varphi}_{u,\star}^{-1} \cdot \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_u \quad , \quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{\varphi}_{v,\star}^{-1} \cdot \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v \ ,$$

où $\boldsymbol{\varphi}_{.,\star}$ est l'application linéaire tangente à $\boldsymbol{\varphi}_.$. En accord avec les propriétés de symétrie de la mécanique du fluide et du corps, nous préférons utiliser pour décrire le mouvement, la description eulérienne pour le fluide et la description purement lagrangienne pour le corps [1, 79]. A ce niveau, ceci signifie que les champs $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{V}$ définissent l'ensemble des inconnues cinématiques du système matériel "complet" (fluide et corps) $\mathcal{M}$.

5.2.3 Les flots et transformations du volume de contrôle.

La construction précédente relative au fluide, peut être à "l'identique" ré-appliquée au volume de contrôle en remplaçant $\Sigma_{f(0)}$ ($\cong \mathcal{F}$) par $\mathcal{D}_{(0)}$, $\boldsymbol{X}_f$ par $\boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}}$ et $\Sigma_{f(t)}$ par $\mathcal{D}_{(t)} = \left\{ \boldsymbol{\varphi}_w(t, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}}) \in \boldsymbol{\mathcal{E}}, \forall \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}} \in \mathcal{D}_{(0)} \right\}$, maintenant soumis au champ eulérien (continu) :

1. Pour la suite $T_z K$ est l'espace vectoriel tangent à l'ensemble K au point $z \in K$, dont $T_z K^\star$ est l'espace dual.

$$\boldsymbol{w} : \forall (t, \boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \boldsymbol{\mathcal{E}} \longmapsto \boldsymbol{w}(t, \boldsymbol{x}) = w^i(t, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{e}_i \in T_x \boldsymbol{\mathcal{E}} \ , \tag{5.5}$$

définissant $\boldsymbol{\varphi}_w$ par :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_w}{\partial \tau}(\tau, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}}) = \boldsymbol{w}(\tau, \boldsymbol{\varphi}_w(\tau, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}})) \ \text{ et } \ \boldsymbol{\varphi}_w(0, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}}) = \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}} \ , \ \forall \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}} \in \mathcal{D}_{(0)} \ ,$$

à chaque instant $0 \leq \tau \leq t$.

Poursuivant notre convention de notation, nous pouvons aussi introduire le champ purement lagrangien $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{\varphi}_{w,*}^{-1} \cdot \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{\varphi}_w$.

Enfin, à ce niveau de l'exposer, les seules conditions que le champ $\boldsymbol{\varphi}_w$ doit vérifier quand on l'applique à $\mathcal{D}_{(0)}$, sont imposées par les frontières du volume de contrôle $\mathcal{D}_{(t)}$, i.e. $\partial \mathcal{D}_{(t)} = \mathcal{H}_{(t)} \cup \pi(t)$:

$$\boldsymbol{\varphi}_w(t, \pi(0)) = \pi(t) \, , \, \forall t \in \mathbb{R}^+ \ , \tag{5.6a}$$

$$\text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ : \boldsymbol{\varphi}_w(t, \mathcal{H}_{(0)}) = \mathcal{H}_{(t)} \ , \ \text{où } \mathcal{H}_{(0)} = \mathcal{H}_{(t=0)} \ . \tag{5.6b}$$

Remarques

1. Concernant la terminologie adoptée dans la suite, nous utiliserons de préférence des champs tensoriels spatiaux dépendant des points matériels [2] plutôt que leur forme purement lagrangienne telle qu'on l'utilise en mécanique du solide. Par "champ tensoriel spatial dépendant des points matériels" ou plus simplement "champ lagrangien", nous signifions ici n'importe quel champ tensoriel d'ordre p mécaniquement attaché au corps (respectivement au fluide) défini par : $\boldsymbol{T}_b : \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \mapsto \boldsymbol{T}_b(t, \boldsymbol{X}_b) \in \otimes_{i=1}^p T_{\boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b)} \boldsymbol{\mathcal{E}}$, (respectivement, $\boldsymbol{T}_f : \boldsymbol{X}_f \in \Sigma_{f(0)} \mapsto \boldsymbol{T}_f(t, \boldsymbol{X}_f) \in \otimes_{i=1}^p T_{\boldsymbol{\varphi}_u(t, \boldsymbol{X}_f)} \boldsymbol{\mathcal{E}}$). Par exemple les champs vectoriels purement lagrangiens définis par (5.4) peuvent être remplacés par leur "forme lagrangienne" $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_u : \boldsymbol{X}_f \in \Sigma_{f(0)} \mapsto \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_u(t, \boldsymbol{X}_f) \in T_{\boldsymbol{\varphi}_u(t, \boldsymbol{X}_f)} \boldsymbol{\mathcal{E}}$ et $\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v : \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \mapsto \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b) \in T_{\boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b)} \boldsymbol{\mathcal{E}}$, où "$\boldsymbol{\varphi}_{,*}^{-1}$" n'opère plus (de tels champs sont souvent appelés vitesses matérielles dans les livres de mécanique [78]). Par extension, nous pouvons aussi définir $\boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{\varphi}_w : \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}} \in \mathcal{D}_{(0)} \mapsto \boldsymbol{w} \circ \boldsymbol{\varphi}_w(t, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}}) \in T_{\boldsymbol{\varphi}_w(t, \boldsymbol{X}_{\mathcal{D}_{(0)}})} \boldsymbol{\mathcal{E}}$.
2. Les trois jeux de transformations $\boldsymbol{\varphi}_u$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ et $\boldsymbol{\varphi}_w$ ont été jusqu'ici considérés comme des diffeomorphismes sur leur domaine de définition à chaque instant. Si pour les deux premières cette condition est trivialement satisfaite, la troisième réclamera une attention spécifique comme nous le verrons dans la section § 5.4.

2. i.e. des champs à la fois lagrangiens (de part leur dépendance vis à vis des points matériels) et spatiaux (ou euleriens) puisque appartenant à l'espace

5.3 Rappels sur la dynamique des fluides.

Dans cette section, nous allons rappeler en tenant compte des spécificités de notre problème, les équations gouvernant les écoulements potentiels présentées dans § 2.

Ici nous considérons uniquement le fluide contenu dans le volume $\mathcal{D}_{(t)}$ que nous supposerons non-visqueux, incompressible et irrotationnel. Sous ces conditions, le champ de vitesse $\boldsymbol{u}$ du fluide contenu dans $\mathcal{D}_{f(t)} \triangleq \mathcal{D}_{(t)} - \Sigma_{b(t)}$ dérive d'un champ de potentiel ϕ i.e. :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{f(t)} \mapsto \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \nabla\phi(\boldsymbol{x}) \in T_x\boldsymbol{\mathcal{E}}^\star \ , \tag{5.7}$$

où ϕ est le champ solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{sur } \mathcal{D}_{f(t)} \ , \tag{5.8}$$

dont la solution est fixée par :

1. la condition de Neumann sur les frontières internes :

$$\nabla\phi \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \quad \text{sur } \partial\Sigma_{b(t)} \cap \partial\mathcal{D}_{f(t)} \ ; \tag{5.9}$$

2. la condition de "repos", loin du corps :

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}\| \to +\infty} \|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\| = 0 \quad , \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{f(t)} \ . \tag{5.10}$$

Finalement, ce jeu d'équations cinématiques est complété par l'équation de Bernoulli instationnaire définie sur $\mathcal{D}_{f(t)}$ par :

$$p = -\rho_f \frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho_f \frac{\boldsymbol{u}^2}{2} + p_\infty \ , \tag{5.11}$$

où, p_∞ est la pression hydro-statique.

Dans les trois sections suivantes, le système matériel tridimensionnel constitué du fluide et du corps subira une "réduction", "étape par étape", de sa cinématique, puis de sa cinétique et finalement de sa dynamique.

5.4 Réduction des cinématiques.

En vertu de la géométrie élancée de l'anguille, nous pouvons réduire les cinématiques du corps et du fluide. La première réduction fait appel à la théorie des poutres de la mécanique du solide, tandis que la seconde relève de la "Slender Body Theory" de la mécanique des fluides.

5.4.1 Réduction de la cinématique du corps.

Tout au long de ce chapitre, la terminologie adoptée concernant le corps, est celle de la théorie de la mécanique du corps rigide de [1] et de la théorie des poutres géométriquement exactes de [104]. Qui plus est, pour n'importe quel vecteur $\boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{V}^\wedge = \hat{\boldsymbol{V}}$ dénote le tenseur antisymétrique appartenant à l'espace $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ associé à $\boldsymbol{V}$, tandis que pour n'importe quel tenseur antisymétrique $\boldsymbol{S}$ de l'espace $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{S}^\vee$ dénote le pseudo-vecteur associé appartenant à l'espace $\mathbb{R}^3$. Pour la suite, le corps est supposé droit dans sa configuration de référence $\Sigma_{b(0)}$, auquel nous attachons un repère orthonormé dit "matériel" $(O, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)$ identifié à l'instant initiale à $(o, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, où le point O est placé à l'extrémité du nez du poisson et $\boldsymbol{E}_1$ est supporté par l'axe vertébrale de l'animal (cf. figure 5.1). Nous modéliserons le corps par un milieu Cosserat mono-dimensionel [25]. Dans une telle théorie, le corps 3-D est remplacé par "un assemblage continu" de sections matérielles rigides dénotées $\mathcal{C}_{X^1}$ et étiquetées par la coordonnée (matérielle) X^1 le long de $\boldsymbol{E}_1$ (cf. figure 5.1), i.e. :

$$\Sigma_{b(0)} \cong \mathcal{B} = \bigcup_{X^1 \in [0,1]} \mathcal{C}_{X^1} \ ,$$

où la longueur de la poutre est normalisée. A partir de cette hypothèse, l'ensemble tridimensionnel des transformations du corps :

$$X^i \boldsymbol{E}_i \triangleq \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \mapsto \boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b) \ ,$$

est paramétré comme suit (où dans toute la suite $\alpha = 2, 3$) :

$$\boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b) = \boldsymbol{r}(t, X^1) + \boldsymbol{R}(t, X^1) \cdot (X^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha) \ , \tag{5.12}$$

où $\boldsymbol{r}(X^1) \triangleq r^i(t, X^1)\boldsymbol{e}_i$ et $\boldsymbol{R}(t, X^1) \triangleq \boldsymbol{t}_i(t, X^1) \otimes \boldsymbol{E}^i$, définissent respectivement le champ de position mono-dimensionnel des centres de masse $G(X^1)$ des sections transverses de la poutre, et le champ mono-dimensionnel de tenseur "bi-points" de rotation (cf. [122]) des sections transverses, tandis que $(G(X^1), \boldsymbol{t}_i(t, X^1))_{i=1,2,3}$ dénote le repère mobile attaché à $c_{X^1}(t) \triangleq \boldsymbol{\varphi}_v(t, \mathcal{C}_{X^1})$, et vérifiant $\boldsymbol{t}_i = \boldsymbol{R}(t, X^1) \cdot \boldsymbol{E}_i$. A ce niveau, remarquons que la transformation $\boldsymbol{\varphi}_v(t, .)$ dépend uniquement implicitement du temps, i.e. aux travers de la dynamique que nous recherchons. Par conséquent, nous noterons souvent $\boldsymbol{\varphi}_v$

(ainsi que n'importe quel champ vérifiant les mêmes propriétés) comme une fonction des coordonnées matérielles uniquement et remplacerons donc $\boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b)$ par $\boldsymbol{\varphi}_v(\boldsymbol{X}_b)$.

En outre, la dérivée temporelle de (5.12) nous autorise à réduire le champ de vitesse tridimensionnel purement lagrangien (5.4b) comme :

$$\forall \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \quad , \quad \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}_b) = \boldsymbol{\mathcal{V}}(X^1) + \boldsymbol{\Omega}(X^1) \times (X^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha) \quad , \tag{5.13}$$

avec $\boldsymbol{\mathcal{V}}(X^1) = \boldsymbol{R}(X^1)^T \cdot \partial \boldsymbol{r}(X^1)/\partial t = \mathcal{V}^i(X^1)\boldsymbol{E}_i$ et $\boldsymbol{\Omega}(X^1) = \left(\boldsymbol{R}(X^1)^T \cdot \partial \boldsymbol{R}(X^1)/\partial t\right)^\vee = \Omega^i(X^1)\boldsymbol{E}_i$, qui sont respectivement les vitesses matérielles ou relatives au corps (i.e. sur $T_{\boldsymbol{X}_b}\mathcal{B}$) linéaire et angulaire de la section X^1 de la poutre. Du point de vue spatiale (i.e. sur $T_{\boldsymbol{\varphi}_v(t,\boldsymbol{X}_b)}\boldsymbol{\mathcal{E}}$), nous avons :

$$\forall \boldsymbol{X}_b \in \Sigma_{b(0)} \quad , \quad (\boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(\boldsymbol{X}_b) = \partial \boldsymbol{r}/\partial t(X^1) + \boldsymbol{\omega}(X^1) \times (X^\alpha \boldsymbol{t}_\alpha) \ , \tag{5.14}$$

avec $\partial \boldsymbol{r}(X^1)/\partial t = \mathcal{V}^i \boldsymbol{t}_i$ et $\boldsymbol{\omega}(X^1) = \Omega^i \boldsymbol{t}_i$.

Dans ce qui suit, nous définissons pour $\forall X^1 \in [0,1]$: $\overline{\boldsymbol{X}} \triangleq X^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha$ (respectivement $\overline{\mathbf{x}}(X^1) \triangleq X^\alpha \boldsymbol{t}_\alpha(X^1)$), l'ensemble des vecteurs qui s'étendent sur $\mathcal{C}_{X^1} \cong c_{X^1}(0)$ (respectivement sur $\cong c_{X^1}(t)$). A partir de la théorie générale des poutres non-linéaires due à [97], nous imposons deux contraintes additionnelles compatibles avec la cinématique interne du squelette du poisson (et du prototype) :

1. la colonne vertébrale est inextensible :

$$\boldsymbol{t}_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X^1} \quad , \quad \forall X^1 \in [0,1] \ , \tag{5.15}$$

2. la colonne vertébrale ne peut se tordre ("non-twistable" en anglais) :

$$\boldsymbol{t}_3 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{t}_2}{\partial X^1} = -\boldsymbol{t}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{t}_3}{\partial X^1} = 0 \quad , \quad \forall X^1 \in [0,1] \ . \tag{5.16}$$

Remarques

1. La première contrainte (5.15) correspond à la contrainte de Kirchhoff. Elle force les sections transverses à rester normales à l'axe principale de la poutre pendant la déformation (ou transformation). Sur la base de cette hypothèse, nous adoptons pour le champ $\boldsymbol{w}$ de § 5.2.3, le champ de vitesse du corps $\boldsymbol{v}$ donné par la précédente réduction de la poutre mais maintenant étendue aux plans géométriques $\{\pi_{X^1}(t) \triangleq \boldsymbol{r}(t, X^1) + \overline{\mathbf{x}}(t, X^1) \, , \forall (X^2, X^3) \in \mathbb{R}^2\}$, avec $\pi_1(t) = \pi(t)$. En fait, ce champ vérifie la condition (5.6a), i.e. :

$$\boldsymbol{\varphi}_v(t, \pi(0)) = \pi(t) \ . \tag{5.17}$$

Néanmoins, la seconde condition (5.6b) requière des hypothèses supplémentaires qui seront introduites dans la prochaine section, tandis que nous avons simplement : $\boldsymbol{\varphi}_v(t, \mathcal{D}_{f(0)}) = \mathcal{D}_{f(t)}$.

2. Sur la base des contraintes (5.15) et (5.16), le champ de déformation interne de la poutre se réduit à sa courbure définie en tenant compte du point de vue matériel du corps par :

$$\boldsymbol{K}(X^1) = \left(\boldsymbol{R}(X^1)^T \cdot \partial \boldsymbol{R}(X^1)/\partial X^1\right)^\vee = K^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha \ ,$$

qui sous sa forme spatiale s'écrit : $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{K} = K^\alpha \boldsymbol{t}_\alpha$.

5.4.2 Réduction de la cinématique du fluide.

En ce qui concerne le fluide, la réduction de sa cinématique "tridimensionnelle" est réalisée par les étapes suivantes :

– **Étape 1 :** Pour n'importe quel instant $t \in \mathbb{R}^+$, nous pouvons définir un ouvert $\mathcal{V}_{(t)}$ tel que $\Sigma_{b(t)} \subset \mathcal{V}_{(t)} \subset \mathcal{D}_{(t)}$ et $\boldsymbol{\varphi}_v$ soit un difféomorphisme sur $\mathcal{V}_{(t)}$. Par conséquent $\boldsymbol{\varphi}_v^{-1}$ définie une carte de coordonnées sur $\mathcal{V}_{(t)}$. De plus, si $\|\boldsymbol{K}(X^1)\| \to 0$ pour tout $X^1 \in [0, 1]$, alors $\mathcal{V}_{(t)} \to \mathcal{D}_{(t)} - \mathcal{O}_{(t)}$, où $\mathcal{O}_{(t)}$ est une demie boule de rayon infini dont le plan équatorial $\pi_0(t)$ est tangent à l'extrémité du nez de l'anguille (cf. figure 5.2).

– **Étape 2 :** Supposons (i) la finesse du corps, et (ii) qu'il soit soumis à des petites déformations, l'équation de Laplace tridimensionnelle ((5.7)-(5.10)) peut être approximée par sa forme bidimensionnelle sur $\mathcal{D}_{f(t)} - \mathcal{O}_{(t)}$ une fois écrite sur le système de coordonnées $(\boldsymbol{\varphi}_v^{-1}, \mathcal{V}_{(t)})$.

Nous allons à présent détailler ces deux étapes.

Étape 1

Reconsidérons $\boldsymbol{\varphi}_v$ définie par (5.12) mais à présent prolongée de $\Sigma_{b(0)}$ (i.e. le corps) à $\mathcal{D}_{(0)}$. En appliquant le formalisme des tenseurs bi-point (cf. [77]), l'application linéaire tangente $\boldsymbol{\varphi}_{v,*}$ peut être représentée par le champ tensoriel appelé "gradient de transformation" :

$$\boldsymbol{F} : \forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{D}_{(0)} \longmapsto \boldsymbol{F} = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}) \otimes \boldsymbol{E}^i \ ,$$

où nous introduisons la base $(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}) = \partial \boldsymbol{\varphi}_v/\partial X^i)_{i=1,2,3}$ convectée par $\boldsymbol{\varphi}_v$ et liée à la base $(\boldsymbol{E}_i)_{i=1,2,3}$ par $(\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{E}_i)_{i=1,2,3}$. Par conséquent, nous obtenons à partir de (5.12) :

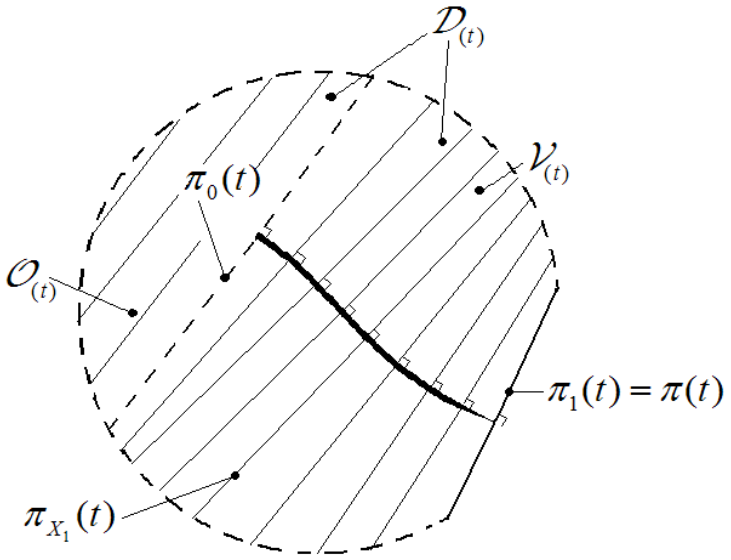


FIGURE 5.2 – Représentation de la stratification des différents domaines.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_v}{\partial X^i} \otimes \boldsymbol{E}^i = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X^1} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X^1} \cdot (X^\alpha \boldsymbol{E}_\alpha) \right) \otimes \boldsymbol{E}^1 + \boldsymbol{t}_\alpha \otimes \boldsymbol{E}^\alpha \ .$$

Cependant, la poutre étant inextensible et puisque $\boldsymbol{E}_\alpha = \boldsymbol{R}^T \cdot \boldsymbol{t}_\alpha$:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{E}^i + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X^1} \cdot \boldsymbol{R}^T (X^\alpha \boldsymbol{t}_\alpha) \otimes \boldsymbol{E}^1 \ ,$$

où nous reconnaissons : $\hat{\boldsymbol{k}} = \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X^1} \cdot \boldsymbol{R}^T \triangleq \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{K}} \cdot \boldsymbol{R}^T$, le champ spatial de tenseurs de courbure le long de la poutre. Ainsi, nous avons :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{E}^i + (X^\alpha \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{t}_\alpha) \otimes \boldsymbol{E}^1 \triangleq \boldsymbol{R} + \boldsymbol{P} \ . \tag{5.18}$$

Maintenant, remarquons que puisqu'il n'y a pas de torsion autour de la colonne, la base convectée $(\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3)(\boldsymbol{X})$ est orthogonale, mais à cause de la présence de $\boldsymbol{P}$ dans (5.18), n'est pas orthonormée. En fait, nous avons à partir de (5.18) :

$$\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{X}) = (1 + K_2 X^3 - K_3 X^2) \boldsymbol{t}_1(X^1) \quad , \quad \boldsymbol{g}_\alpha(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{t}_\alpha(X^1) \ .$$

Maintenant, introduisons la matrice de composantes $F \triangleq (F^i_j)_{i,j=1,2,3}$ telle que $\boldsymbol{F} = F^i_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}^j = F^i_j \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j$. Nous avons :

$$|F| = \sqrt{|g|} = \left| 1 + K_2(X^1) X^3 - K_3(X^1) X^2 \right| \ ,$$

où $\boldsymbol{g} = g_{ij} \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{g}^j$ est le tenseur métrique euclidien dont les composantes sont : $g_{11} = (1 + K_2 X^3 - K_3 X^2)^2$, $g_{\alpha\alpha} = 1$, et les termes extra-diagonaux sont nuls. Donc, pour n'importe quel $\boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{E}_i$ vérifiant $|g| = 0$, $\boldsymbol{\varphi}_v$ n'est pas un changement de coordonnées. Qui plus est, puisque le modèle de poutre impose $\sqrt{|g|} \neq 0$ sur $\Sigma_{b(0)}$, de telles

"singularités" produites par $\boldsymbol{\varphi}_v$ dans $\Sigma_{(0)}$ apparaîtront à mesure que l'on s'éloigne (latéralement) du corps. Par exemple, dans le cas de la nage plane dans $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, $K_2 = 0$ et les singularités apparaissent quand $X^2 = 1/K_3(X^1)$. En particulier, quand $K_3 = Cte$ le long de la colonne, tous les plans prolongeant les sections transverses de la poutre s'intersectent sur la ligne singulière normale à $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ et passant par le centre de courbure de la poutre (cf. figure 5.3).

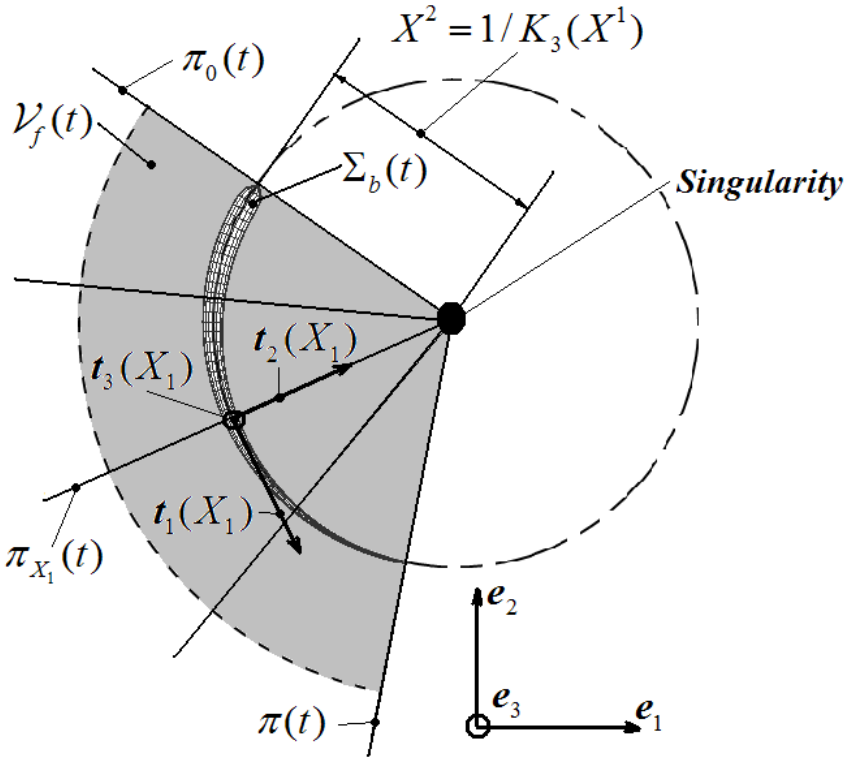


FIGURE 5.3 – Singularité du changement de coordonnées dans le cas d'une poutre de courbure constante.

Maintenant introduisons à chaque instant courant t les deux ouverts $\mathcal{V}_{o(t)}$ et $\mathcal{V}_{(t)}$ définis par $\mathcal{V}_{(t)} = \boldsymbol{\varphi}_v(t, \mathcal{V}_{o(t)})$, et :

$$\mathcal{V}_{o(t)} \triangleq \left\{ \boldsymbol{X} = X^i \boldsymbol{E}_i \in \Sigma_{(0)} / 1 + K_2(t, X^1) X^3 - K_3(t, X^1) X^2 > 0 \right\} \ .$$

Sous ces conditions, $\boldsymbol{\varphi}_v$ devient un difféomorphisme de $\mathcal{V}_{o(t)}$ sur $\mathcal{V}_{(t)}$, ou alternativement le système de coordonnées convecté par les transformations du corps i.e. $\boldsymbol{\varphi}_v^{-1}$ peut être prolongé de $\Sigma_{b(t)}$ sur $\mathcal{V}_{(t)}$ (cf. sur l'exemple de la figure 5.3 le domaine grisé $\mathcal{V}_{(t)}$).

Enfin, quand K_2 et K_3, le long de l'axe de la poutre, tendent vers zéro, les singularités du système de coordonnées du corps sont rejetées à l'infini et $\lim_{\|\boldsymbol{K}\| \to 0} \mathcal{V}_{o(t)} = \mathcal{D}_{(0)} - \mathcal{O}_{(0)}$,

tandis que $\lim_{\|\boldsymbol{K}\|\to 0} \mathcal{V}_{(t)} = \mathcal{D}_{(t)} - \mathcal{O}_{(t)}$.

Étape 2

Cette seconde étape est premièrement basée sur la réécriture de la cinématique du fluide ((5.7)-(5.10)) dans le système de coordonnées convecté du corps et prolongé sur $\mathcal{V}_{(t)}$ (**étape 2.a**), deuxièmement sur les conséquences de la finesse du corps appliquées à la mécanique des fluides (**étape 2.b**), et enfin sur l'hypothèse des petites déformations de la mécanique du solide (**étape 2.c**).

Nous commencerons par réécrire ((5.7)-(5.10)) dans le système de coordonnées du corps étendu au fluide.

Étape 2.a : La cinématique du fluide dans le système de coordonnées du corps.

Dans cette étape, nous considérons chacune des équations de la dynamique des fluides ((5.7)-(5.10)) maintenant restreinte à $\mathcal{V}_{f(t)} \triangleq \mathcal{V}_{(t)} - \Sigma_{b(t)}$, en commençant par le potentiel des vitesses, puis le champ de vitesse, ensuite les équations de champ et enfin les équations aux frontières.

Le champ de potentiel des vitesses : A n'importe quel instant t, nous pouvons définir dans une partie du domaine $\mathcal{V}_{fo(t)} \triangleq \mathcal{V}_{o(t)} - \Sigma_{b(0)}$ où la transformation "$\boldsymbol{\varphi}_v$" est régulière (i.e. sans singularité), le potentiel des vitesses Φ fonction des coordonnées du corps, comme :

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{V}_{fo(t)}, \Phi(\boldsymbol{X}) = (\phi \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(\boldsymbol{X}) \ , \tag{5.19}$$

où Φ apparaît comme l'image de ϕ (fonction des points de $\mathcal{V}_{f(t)}$) ramenée (par "pull-back") sur $\mathcal{V}_{fo(t)}$ par $\boldsymbol{\varphi}_v$, ou de façon équivalente comme la fonction ϕ vue dans le système de coordonnées convecté $\boldsymbol{\varphi}_v^{-1}$ prolongé sur $\mathcal{V}_{f(t)}$.

Le champ de vitesse :

De cette opération sur les potentiels, nous tirons la relation suivante entre les gradients :

$$\nabla\Phi = \boldsymbol{\varphi}_v^{\star} \cdot \nabla\phi \circ \boldsymbol{\varphi}_v \ , \tag{5.20}$$

où $\boldsymbol{\varphi}_v^{\star}$ est l'application linéaire cotangente de $\boldsymbol{\varphi}_v$ représentée par le champ de tenseurs bi-point $\boldsymbol{F}^T = \boldsymbol{E}^i \otimes \boldsymbol{g}_i$. De plus, comme $\boldsymbol{u} = \nabla\phi$, (5.20) peut être réécrite comme la

relation de "Pull-Back" entre les vitesses covariantes :

$$ {}^b\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}^T \cdot \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v \ , \tag{5.21} $$

où ${}^b\boldsymbol{U} = \nabla\Phi(\boldsymbol{X}) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial X^i}\boldsymbol{E}^i = {}^bU_i\boldsymbol{E}^i$ apparaît naturellement comme la vitesse "relative au corps" (i.e. ramenée sur la configuration de référence du corps) d'une particule de fluide au départ en $\boldsymbol{x}$ (cf. figure 5.4).

Alternativement nous aurons aussi par inversion de (5.21) avec $\boldsymbol{F}^{-T} = \boldsymbol{g}^i \otimes \boldsymbol{E}^i$:

$$ \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v = \frac{\partial\Phi}{\partial X^i}\boldsymbol{g}^i = {}^bU_i\boldsymbol{g}^i \ , \tag{5.22} $$

où $\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v$ apparaît ici comme le champ de vitesse du fluide sur le système de coordonnées convecté du corps.

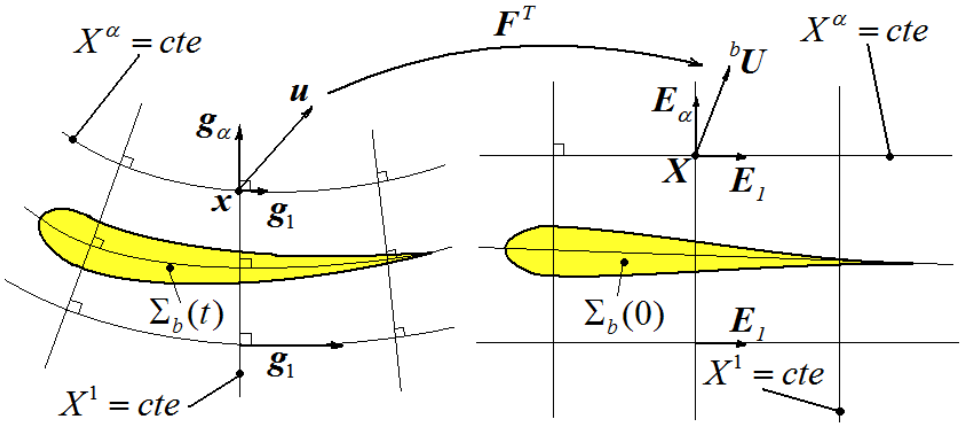


FIGURE 5.4 – Le champ de vecteurs vitesses du fluide ramené sur la configuration de référence du corps.

L'équation de champ :

Puisque généralement $\sqrt{|g|} \neq 1$, la transformation du corps $\boldsymbol{\varphi}_v$ ne préserve pas localement le volume et la condition "$\nabla.\boldsymbol{u} = 0$" n'imposera pas $\partial^b U^i/\partial X^i = 0$ mais plutôt ([68]) :

$$ \nabla.{}^b\boldsymbol{U} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left(\frac{\partial}{\partial X^i}(\sqrt{|g|}{}^b\boldsymbol{U}^i)\right) = 0 \ . \tag{5.23} $$

Qui plus est, comme ${}^b\boldsymbol{U} = \nabla\Phi(\boldsymbol{X})$ est un champ covariant, $\Delta\phi = 0$ imposera :

$$ \Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\left[\frac{\partial}{\partial X^1}\left(\frac{1}{\sqrt{|g_{11}|}}\frac{\partial\Phi}{\partial X^1}\right) + \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(\sqrt{|g|}\frac{\partial\Phi}{\partial X^\alpha}\right)\right] = 0 \ , \tag{5.24} $$

qui dans notre cas se détaille comme suit :

$$\frac{1}{|1+K_2X^3-K_3X^2|}\left[\frac{\partial}{\partial X^1}\left(\frac{1}{|1+K_2X^3-K_3X^2|}\frac{\partial\Phi}{\partial X^1}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial X^\alpha}\left(\left|1+K_2X^3-K_3X^2\right|\frac{\partial\Phi}{\partial X^\alpha}\right)\right]=0\ ,$$

et donnes pour $\forall \boldsymbol{X}\in\mathcal{V}_{fo(t)}$:

$$\frac{\partial}{\partial X^1}\left(\frac{1}{|1+K_2X^3-K_3X^2|}\frac{\partial\Phi}{\partial X^1}\right)+\left|1+K_2X^3-K_3X^2\right|\left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^2)^2}+\frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^3)^2}\right)$$
$$-K_3\frac{\partial\Phi}{\partial X^2}+K_2\frac{\partial\Phi}{\partial X^3}=0\ . \quad (5.25)$$

Les conditions aux limites :

A partir de (5.22), les conditions aux limites (5.9) peuvent se réécrire comme suit :

$$(V^j-g^{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial X^i})N_j=0 \quad \text{, sur } \partial\Sigma_{b(0)}\ ,$$

où $\boldsymbol{n}=N_j\boldsymbol{g}^j$ est le vecteur normal sortant de $\partial\Sigma_{b(t)}$ et $\boldsymbol{v}\circ\boldsymbol{\varphi}_v=V^i\boldsymbol{g}_i=\sqrt{g_{ii}}\,V^i\boldsymbol{t}_i$ est définie par (5.14), ici restreint à $\partial\Sigma_{b(0)}$. Enfin, dans notre cas nous avons plus précisément :

$$\left(V^1-\frac{1}{|1+K_2X^3-K_3X^2|}\frac{\partial\Phi}{\partial X^1}\right)N_1+\left(V^\alpha-\frac{\partial\Phi}{\partial X^\alpha}\right)N_\alpha=0\ . \quad (5.26)$$

Étape 2.b : L'hypothèse des corps fins

Une fois que les conditions aux limites sont exprimées sur le système de coordonnées du corps, nous pouvons prendre en compte sa finesse. Ceci est fait en modélisant l'anguille par un corps de sections elliptiques dont l'enveloppe extérieure est définie, dans la configuration de référence, par l'équation implicite :

$$\partial\Sigma_{b(0)}\triangleq\left\{\boldsymbol{X}\in\Sigma_{b(0)}/H(\boldsymbol{X})=\left(\frac{X^2}{b(X^1)}\right)^2+\left(\frac{X^3}{a(X^1)}\right)^2=1\right\}\ , \quad (5.27)$$

où $a(X^1)$ et $b(X^1)$ sont les longueurs des "grand" et "petit" axes de la section elliptique $\mathcal{C}_{X^1}$. La définition (5.27) de $\partial\Sigma_{b(0)}$ donne :

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{n}=(\boldsymbol{E}^i\otimes\boldsymbol{g}_i)\cdot N_j\boldsymbol{g}^j=N_j\boldsymbol{E}^j=\frac{\nabla H(\boldsymbol{X})}{\|\nabla H(\boldsymbol{X})\|}\ ,$$

$$\text{avec :}\quad \nabla H(\boldsymbol{X})=-2\left(\frac{1}{a^3}\frac{\partial a}{\partial X^1}+\frac{1}{b^3}\frac{\partial b}{\partial X^1}\right)\boldsymbol{E}^1+2\left(\frac{X^2}{b^2}\boldsymbol{E}^2+\frac{X^3}{a^2}\boldsymbol{E}^3\right)\ .$$

Cependant, si le corps est fin, nous avons :

$$\left|\frac{\partial a}{\partial X^1}\right| = o(\epsilon) \quad , \quad \left|\frac{\partial b}{\partial X^1}\right| = o(\epsilon) \ ,$$

où ϵ est un petit paramètre comparé à l'unité (ϵ est égale à zéro quand le corps est infiniment fin). Par conséquent, nous avons :

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X}) = \frac{\frac{X^2}{b^2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{X^3}{a^2}\boldsymbol{E}^3}{\sqrt{\left(\frac{X^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{X^3}{a^2}\right)^2}} + \boldsymbol{o}(\epsilon) \triangleq \overline{\boldsymbol{N}}_{X^1} + \boldsymbol{o}(\epsilon) \ ,$$

où $\overline{\boldsymbol{N}}_{X^1} = \overline{N}_{X^1,\alpha}\,\boldsymbol{E}^\alpha$ est la normale à la frontière de la section transverse plane $\partial\mathcal{C}_{X^1}$ dont l'équation est toujours donnée par "$H(\boldsymbol{X}) - 1 = 0$" mais avec X^1 considérée comme un paramètre fixe. Finalement, l'insertion de ce dernier résultat dans les conditions aux frontières (5.26) donne :

$$\left(V^1 - \frac{1}{|1 + K_2X^3 - K_3X^2|}\frac{\partial\Phi}{\partial X^1}\right) o(\epsilon) + \left(V^\alpha - \frac{\partial\Phi}{\partial X^\alpha}\right)\left(\overline{N}_{X^1,\alpha} + o(\epsilon)\right) = 0 \ , \qquad (5.28)$$

ou encore :

$$\left(V^\alpha - \frac{\partial\Phi}{\partial X^\alpha}\right)\overline{N}_{X^1,\alpha} = o(\epsilon) \simeq 0 \quad , \text{sur } \partial\mathcal{C}_{X^1} \ . \qquad (5.29)$$

Par conséquent, puisque le corps est fin, le mouvement du poisson n'impose pas de conditions aux limites à $\partial\Phi/\partial X^1$ laquelle peut être approximée par zéro, comme cela à été fait loin du corps. Appliquant ceci à (5.25), nous avons pour $\forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{V}_{fo(t)}$:

$$\Delta\Phi \simeq \left|1 + K_2X^3 - K_3X^2\right|\left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^2)^2} + \frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^3)^2}\right) - K_3\frac{\partial\Phi}{\partial X^2} + K_2\frac{\partial\Phi}{\partial X^3} = 0 \ , \qquad (5.30)$$

qui est complétée par les conditions aux limites (5.29).

Étape 2.c : "L'hypothèse des petites déformations"

L'ensemble des équations ((5.29)-(5.30)) définit sur $\mathcal{V}_{o(t)}$ la cinématique du fluide autour du corps fin. Pourtant, l'exploitation de ces résultats pour notre objectif est très limitée à cause du caractère non-linéaire de (5.30) et de sa restriction au domaine mobile $\mathcal{V}_{o(t)}$ lui même confiné par la déformation du corps. Afin d'échapper à ces difficultés, la cinématique du fluide sera calculée dans le cadre "des petites déformations" (dans notre cas "courbures"). Ainsi, dans ces conditions (5.30) peut être approximée par :

$$\Delta\Phi \simeq \left|1 + K_2X^3 - K_3X^2\right|\left(\frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^2)^2} + \frac{\partial^2\Phi}{(\partial X^3)^2}\right) = 0 \ ,$$

et enfin avec $|g| \neq 0$:

$$\forall \boldsymbol{X} \in \mathcal{V}_{fo(t)} \ , \ \Delta\Phi \simeq \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial^2 X^3} = 0 \ . \tag{5.31}$$

Par conséquent, sous l'hypothèse des petites déformations, le champ de potentiel 3-D Φ réglé par (5.29) et (5.31), peut être réduit sous la forme d'un ensemble mono-dimensionnel de potentiels plans :

$$\overline{\Phi} : X^1 \in [0,1] \mapsto \left\{ \overline{\Phi}_{X^1} / \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{s}_{X^1}(0) \mapsto \overline{\Phi}_{X^1}(\overline{\boldsymbol{X}}) \in \mathbb{R} \right\} \ ,$$

où $\overline{\Phi}_{X^1}$ est le champ de potentiel 2-D dans la tranche $\mathcal{s}_{X^1}(0) \triangleq \boldsymbol{\varphi}_v^{-1}(t, \pi_{X^1}(t) - c_{X^1}(t))$.

Par conséquent, sous les hypothèses de finesse et de petites déformations du corps, $\mathcal{V}_{f(t)}$ et $\mathcal{V}_{fo(t)}$ peuvent être remplacés par "les stratifications" suivantes :

$$\lim_{\|\boldsymbol{K}\|\to 0} \mathcal{V}_{f(t)} = \mathcal{D}_{f(t)} - \mathcal{O}_{(t)} = \bigcup_{X^1\in[0,1]} \mathcal{s}_{X^1}(t) \quad , \quad \lim_{\|\boldsymbol{K}\|\to 0} \mathcal{V}_{fo(t)} = \mathcal{D}_{f(0)} - \mathcal{O}_{(0)} = \bigcup_{X^1\in[0,1]} \mathcal{s}_{X^1}(0) \ .$$

Il est important de noter ici que les tranches $\mathcal{s}_{X^1}(.)$ sont géométriques pour le fluide puisqu'elles sont convectées par le flot du corps et non par celui du fluide. Cette distinction jouera un rôle cruciale quand nous aborderons la réduction de la cinétique du fluide. Finalement, comme X^1 n'apparaît plus comme une variable mais plutôt comme le label des tranches, nous approximerons le champ de vitesse tridimensionnel par une stratification des écoulements plans (définis sur chaque tranche géométrique) :

$$\forall \boldsymbol{X} = (X^1 \boldsymbol{E}_1 + \overline{\boldsymbol{X}}) \in \mathcal{D}_{f(0)} - \mathcal{O}_{(0)} \, ,$$
$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v(X^1 \boldsymbol{E}_1 + \overline{\boldsymbol{X}}) \simeq \frac{\partial \overline{\Phi}_{X^1}(\overline{\boldsymbol{X}})}{\partial X^\alpha} \boldsymbol{g}^\alpha(X^1) = \sum_{\alpha=2}^{3} {}^b U_\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \boldsymbol{t}_\alpha(X^1) \ . \tag{5.32}$$

Enfin, à partir (5.29) et (5.31), l'évolution temporelle de l'ensemble $\overline{\Phi}$ sera réglée par la formulation suivante. Pour n'importe quel $X^1 \in [0,1]$ libellant une tranche $\mathcal{s}_{X^1}(0)$ de $\mathcal{D}_{f(0)} - \mathcal{O}_{(0)}$, nous avons :

$$\Delta \overline{\Phi}_{X^1} = 0 \quad , \forall \overline{\boldsymbol{X}} \in \mathcal{s}_{X^1}(0) \ , \tag{5.33}$$

avec comme conditions dites "planes" :

$$\left(V^\alpha - \frac{\partial \overline{\Phi}_{X^1}}{\partial X^\alpha} \right) \overline{N}_{X^1,\alpha} = 0 \quad , \text{ sur } \partial \mathcal{s}_{X^1}(0) \cap \partial \mathcal{C}_{X^1} \ , \tag{5.34}$$

qui avec (5.13) peut être détaillée comme suit :

$$\left(\mathcal{V}^2 - \Omega_1 X^3 - \frac{\partial \overline{\Phi}_{X^1}}{\partial X^2}\right) \overline{N}_{X^1,2} + \left(\mathcal{V}^3 + \Omega_1 X^2 - \frac{\partial \overline{\Phi}_{X^1}}{\partial X^3}\right) \overline{N}_{X^1,3} = 0 \ ,$$

pour n'importe quel (X^2, X^3) tel que $(X^2/a)^2 + (X^3/b)^2 = 1$ et avec : $\Omega_1 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{t}_1$, la composante axiale de la vitesse angulaire de la section transverse $\mathcal{C}_{X^1}$.

Remarques

1. En vertu de (5.32), le fluide ne se déplace pas le long des lignes de coordonnées $\|\overline{\boldsymbol{X}}\| = Cte$. Ceci va dans le sens de l'idée de Lighthill qui peut être re-visitée comme suit :

   Si le corps est infiniment fin (et que le fluide est non-visqueux), tandis qu'il se déplace, il coupera le fluide sans le perturbé longitudinalement (relativement à l'axe vertébrale de l'anguille). Par conséquent, le fluide se déplace uniquement transversalement et reste au repos axialement.

2. En vertu de la première remarque, le fluide se trouvant devant le nez du poisson (i.e. dans le domaine hémisphérique $\mathcal{O}_{(t)}$) est au repos. Ainsi la stratification de $\mathcal{D}_{f(t)} - \mathcal{O}_{(t)}$, peut être indifféremment prolongé à $\mathcal{D}_{f(t)}$ en entier, par exemple en imaginant que le corps se prolonge virtuellement le long de $-\boldsymbol{t}_1(t, 0)$ avec des dimensions et des inerties nulles. Aussi, dans tous les développements suivants relatifs à la cinématique du fluide, nous stratifirons entièrement le volume de contrôle de Lighthill, i.e. :

$$\mathcal{D}_{f(t)} = \bigcup_{X^1 \in]-\infty,1]} \mathcal{s}_{X^1}(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{f(0)} = \bigcup_{X^1 \in]-\infty,1]} \mathcal{s}_{X^1}(0) \ .$$

3. L'hypothèse des petites déformations ne signifie pas que le corps ne peut subir de transformations finis. Plus précisément, dans tous les développements suivants la cinématique du fluide sera calculée dans la configuration droite de référence du corps mais en imposant le champ de vitesse transverse déduit de la théorie des poutres non-linéaires. En outre, toutes les quantités cinétiques du fluide et les chargements dynamiques appliqués par le fluide sur le corps seront calculés dans la configuration déformée du corps. Ces considérations sont en accord avec la "Large Amplitude Elongated Body Theory" de [72]. En effet, afin de calculer la cinématique du fluide, l'auteur considère premièrement un cylindre infini prolongeant n'importe quel section transverse, et le soumet à la vitesse transverse instantanée de la section. Ensuite, à partir de l'équation de Bernoulli instationnaire, il en déduit la densité de forces de contact appliquées sur le corps qui peut être finalement injectée dans le modèle

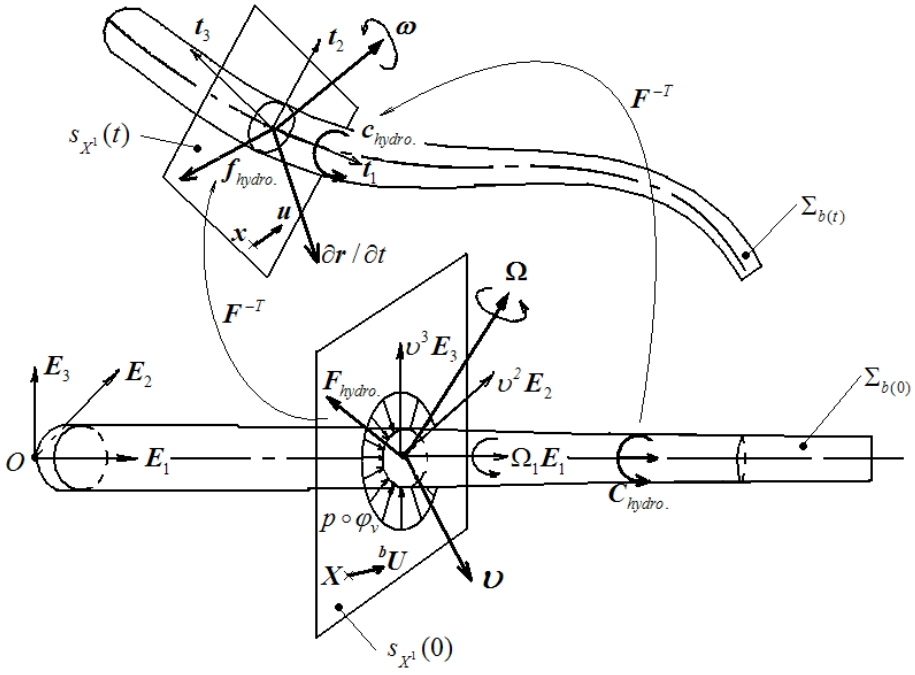


FIGURE 5.5 – Approximation de *E.B.T.* en amplitude finie.

de poutre non-linéaire. Dans le contexte de la théorie de la dynamique des poutres Cosserat, cette approximation peut être résumée par la figure 5.5 où :

- le champ de torseurs cinématiques des sections de la poutre $(\partial \boldsymbol{r}/\partial t, \boldsymbol{\omega})$ est premièrement ramené sur la configuration de référence du corps pour obtenir sa contre-partie matérielle$(\boldsymbol{\mathcal{V}}, \boldsymbol{\Omega})$,
- la contribution transverse de ce champ matériel, i.e. $(\mathcal{V}^2, \mathcal{V}^3, \Omega^1)$, est appliquée sur la configuration rigide de référence (de la poutre) afin de calculer la cinématique du fluide contenu dans chaque tranche géométrique $s_{X^1}(0)$ prolongeant les sections transverses $\mathcal{C}_{X^1}$ de $\mathcal{D}_{(0)}$,
- les quantités cinétiques et les chargements plans $X_1 \mapsto (\boldsymbol{C}_{hydro}, \boldsymbol{F}_{hydro})(X_1)$ sont aussi calculés dans la configuration de référence.
- Enfin, ils sont renvoyés ("Push-Forward") sur la configuration courante de la poutre pour obtenir leurs contreparties spatiales $X_1 \mapsto (\boldsymbol{c}_{hydro}, \boldsymbol{f}_{hydro})(X_1)$ lesquelles seront appliquées à la dynamique de la poutre.

4. Notons que l'hypothèse des petites courbures imposera aussi : $|g| \simeq 1$ et $\boldsymbol{g}_i \simeq \boldsymbol{t}_i, i = 1, 2, 3$ ou de façon équivalente $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \simeq \boldsymbol{R}(X^1)$ dans tous les développements précédents concernant la cinématique du fluide. Par conséquent, dans le cadre des calculs tensoriels, nous utiliserons les composantes covariantes et supposerons que la convention d'Einstein opère toujours.

5.5 Les cinétiques réduites.

Dans cette section, nous utilisons les cinématiques réduites comme précédemment introduites afin d'obtenir les quantités cinétiques correspondantes au corps et au fluide que nous appellerons "cinétiques réduites".

5.5.1 Réduction de la cinétique du corps.

Considérons les définitions de départ de la résultante cinétique $\boldsymbol{p}(\mathcal{B})$ et du moment associé $\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B})$ (par rapport à l'origine de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$) du corps $\mathcal{B}$ en fonction de son champ de vitesse eulérien $\boldsymbol{v}$. Nous avons, avec ρ_b la masse volumique du corps :

$$\boldsymbol{p}(\mathcal{B}) \triangleq \int_{\Sigma_{b(t)}} \rho_b \boldsymbol{v}\, d\Sigma_{b(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) \triangleq \int_{\Sigma_{b(t)}} \boldsymbol{x} \times \rho_b \boldsymbol{v}\, d\Sigma_{b(t)} \ .$$

Ainsi nous avons aussi :

$$\boldsymbol{p}(\mathcal{B}) = \int_{\Sigma_{b(0)}} (\rho_b \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(t, \boldsymbol{X}_b)\, d\Sigma_{b(0)} \ , \ \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) = \int_{\Sigma_{b(0)}} \boldsymbol{\varphi}_v(t, \boldsymbol{X}_b) \times (\rho_b \boldsymbol{v} \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(t, \boldsymbol{X}_b)\, d\Sigma_{b(0)} \ .$$

En tenant compte de (5.14) et des symétries des sections elliptiques, nous trouvons après calculs :

$$\boldsymbol{p}(\mathcal{B}) = \int_0^1 \boldsymbol{p}_b(X_1)\, dX_1 \quad , \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) = \int_0^1 \boldsymbol{r}(X_1) \times \boldsymbol{p}_b(X_1) + \boldsymbol{\sigma}_b(X_1)\ dX_1 \ , \tag{5.35}$$

où, l'on a défini les densités de résultantes et de moments cinétiques :

$$X_1 \mapsto \boldsymbol{p}_b(X_1) = \boldsymbol{m}_b(X_1) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(X_1), \text{ et } X_1 \mapsto \boldsymbol{\sigma}_b(X_1) = \boldsymbol{I}_b(X_1) \cdot \boldsymbol{\omega}(X_1) \ . \tag{5.36}$$

avec : $\boldsymbol{m}_b(X_1) \triangleq \sum_{i=1}^{3} \int_{\mathcal{C}_{X^1}} \rho_b d\mathcal{C}_{X^1} \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{t}_i \triangleq \sum_{i=1}^{3} \rho_b A \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{t}_i$, et $\boldsymbol{I}_b \triangleq \int_{\mathcal{C}_{X^1}} \rho_b \hat{\overline{\boldsymbol{X}}}^T \cdot \hat{\overline{\boldsymbol{X}}} d\mathcal{C}_{X^1} \triangleq \sum_{i=1}^{3} \rho_b \boldsymbol{J}_i \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{t}_i$ définissant respectivement les densités de masse et d'inertie par unité de longueur [3].

Avant de clore cette section, remarquons qu'avec la définition ci-dessus, l'énergie cinétique du corps peut être aussi réduite comme suit :

$$T(\mathcal{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{b(t)}} \rho_b \boldsymbol{v}^2\, d\Sigma_{b(t)} = \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{p}_b + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma}_b \right) dX_1 \triangleq \int_0^1 \mathcal{T}_b\, dX_1 \ , \tag{5.37}$$

3. A et $\boldsymbol{J}_i$ sont simplement l'aire et les moments principaux géométriques de la section transverse $\mathcal{C}_{X_1}$.

où $\mathcal{T}_b : X_1 \mapsto \mathcal{T}_b(X_1)$ dénote la densité d'énergie cinétique par unité de longueur de la poutre. Finalement, dans la suite, les énergie, résultante et moment cinétiques de $\mathcal{B}$ seront remplacés par leurs contreparties réduites, i.e. par les champs respectifs : $\mathcal{T}_b, \boldsymbol{p}_b$ et $\boldsymbol{\sigma}_b$.

5.5.2 Réduction de la cinétique du fluide.

Comme dans le cas du solide rigide plongé dans un fluide parfait (incompressible et irrotationnel), nous utiliserons l'approche de Kirchhoff (cf. § 4.2) afin de réduire la cinétique du fluide sur celle du corps, ici notre poutre Cosserat. A cette fin, Nous commençons par paramétrer l'écoulement du fluide dans les tranches géométriques par la vitesse transverse de la section du corps correspondante. Notons ici que cette première étape de réduction peut être considérée comme la dernière étape de la réduction de la cinématique du fluide.

Paramètrage de l'écoulement dans les tranches.

La solution de (5.33) et (5.34) peut être mise sous la forme de Kirchhoff [63, 85] comme suit :

$$\overline{\Phi}_{X_1}(\overline{\boldsymbol{X}}) = \xi(X_1) \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_{X_1}(\overline{\boldsymbol{X}}) \ ,$$

où $\xi(X_1) = \xi_i \boldsymbol{E}_i = \Omega_1(X_1)\boldsymbol{E}_1 + \mathcal{V}_2(X_1)\boldsymbol{E}_2 + \mathcal{V}_3(X_1)\boldsymbol{E}_3 \in se(2)$, dénote le torseur cinématique plan de la section d'abscisse X_1 et $\boldsymbol{\Upsilon}_{X_1} = \Upsilon_{i,X_1}\boldsymbol{E}_i$, où les Υ_{i,X_1} (avec $i = 1, 2, 3$) sont les potentiels standards calculés à partir des transformations conformes appliquées à l'écoulement autour d'un disque (cf. Annexe C). Par conséquent, à partir de (5.32) :

$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v = {}^bU_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha = \left(\frac{\partial \overline{\Phi}_{X_1}}{\partial X_\alpha}\right)\boldsymbol{t}_\alpha = \left(\Omega_1 \frac{\partial \Upsilon_{1,X_1}}{\partial X_\alpha} + \mathcal{V}_2 \frac{\partial \Upsilon_{2,X_1}}{\partial X_\alpha} + \mathcal{V}_3 \frac{\partial \Upsilon_{3,X_1}}{\partial X_\alpha}\right)\boldsymbol{t}_\alpha(X_1) \ .$$

En outre, les potentiels sont définis à partir des conditions aux limites suivantes :

$$\nabla \Upsilon_{\alpha,X_1} \cdot \overline{\boldsymbol{N}}_{X_1} = \overline{\boldsymbol{N}}_{X_1} \cdot \boldsymbol{E}_\alpha \quad , \quad \nabla \Upsilon_{1,X_1} \cdot \overline{\boldsymbol{N}}_{X_1} = (\overline{\boldsymbol{X}} \times \overline{\boldsymbol{N}}_{X_1}) \cdot \boldsymbol{E}_1 \ ,$$

qui dépendent uniquement de la géométrie de $\partial \mathcal{C}_{X_1}$. Grâce à cette construction, le champ de vitesse du fluide dans le volume de contrôle peut être entièrement paramétré par le champ transverse de vitesse de la poutre.

Les quantités cinétiques du fluide contenu dans le volume de contrôle.

Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}$, l'ensemble des particules de fluide contenues à chaque instant dans $\mathcal{D}_{(t)}$. Ainsi, à partir des remarques (b)-(d) de § 5.4.2, l'énergie cinétique du fluide contenu dans $\mathcal{D}_{(t)}$ est :

$$T(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) \triangleq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}_{f(t)}} \rho_f \boldsymbol{u}^2 \, d\mathcal{D}_{f(t)} = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}_{f(0)}} \rho_f (\boldsymbol{u}\circ\boldsymbol{\varphi}_v)^2 \, d\mathcal{D}_{f(0)}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \rho_f \sum_{\alpha=2}^{3} {}^bU_\alpha^2 \, d\mathcal{S}_{X_1}(0) \right) dX_1$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{\alpha=2}^{3} \left(\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \rho_f \left(\frac{\partial \Upsilon_{i,X_1}}{\partial X_\alpha} \frac{\partial \Upsilon_{j,X_1}}{\partial X_\alpha} \right) d\mathcal{S}_{X_1}(0) \right) \xi_i \xi_j \right] dX_1 \, . \quad (5.38)$$

Maintenant introduisons le tenseur de masses ajoutées :

$$\mathbb{I}_f(X_1) = \mathbb{I}_{fij}(X_1) \boldsymbol{t}_i(X_1) \otimes \boldsymbol{t}_j(X_1) \, , \, i,j = 1,2,3 \, , \quad (5.39)$$

où en vertu de la première identité de Green :

$$\mathbb{I}_{fij}(X_1) = \sum_{\alpha=2}^{3} \int_{\partial \mathcal{C}_{X_1}} \rho_f \left(\Upsilon_{i,X_1} \frac{\partial \Upsilon_{j,X_1}}{\partial X_\alpha} \overline{N}_{X_1,\alpha} \right) d\partial \mathcal{C}_{X_1} \, ,$$

nous pouvons réécrire (5.38) comme :

$$T(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) = \frac{1}{2}\int_0^1 \xi \cdot (\mathbb{I}_f \cdot \xi) \, dX_1 \triangleq \int_0^1 \mathcal{T}_f \, dX_1 \, , \quad (5.40)$$

avec $\mathcal{T}_f : X_1 \mapsto \mathcal{T}_f(X_1)$ la densité linéique d'énergie cinétique de fluide le long de la poutre.

Exemple

Dans le cas de la nage 3-D et pour une poutre de sections elliptiques de petits et de grands axes $2a$ et $2b$ respectivement le long de $\boldsymbol{t}_2$ et $\boldsymbol{t}_3$, nous trouvons à partir des calculs standards basés sur les transformations conformes de l'ellipse (cf. [85] et annexe C) :

$$\mathbb{I}_f = I_{f1} \boldsymbol{t}_1 \otimes \boldsymbol{t}_1 + m_{f2} \boldsymbol{t}_2 \otimes \boldsymbol{t}_2 + m_{f3} \boldsymbol{t}_3 \otimes \boldsymbol{t}_3 \, , \quad (5.41)$$

avec $I_{f1} = \rho_f \left(\frac{\pi}{8}\right) \left(a^2 - b^2\right)^2 \quad , \quad m_{f2} = \rho_f \pi b^2 \quad , \quad m_{f3} = \rho_f \pi a^2 \, ,$

où a, b dépendent tous deux de X_1.

Maintenant définissons formellement la densité de torseur cinétique du fluide le long de la poutre (en prenant comme points de réduction de ces torseurs les centres des sections) :

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(X_1) \\ \boldsymbol{p}_f(X_1) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \displaystyle\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} (\overline{\mathbf{x}} \times \rho_f \boldsymbol{u}) \circ \boldsymbol{\varphi}_v \, d\mathcal{S}_{X_1}(0) \\ \displaystyle\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \rho_f \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v \, d\mathcal{S}_{X_1}(0) \end{pmatrix} \, .$$

Remarquons que la résultante et le moment de ce torseur ne peuvent pas être calculés directement à partir de leurs formes intégrales qui sont impropres, mais plutôt grâce à la densité d'énergie cinétique $\mathcal{T}_f$ au travers de la définition (4.14) :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(X_1) \\ \boldsymbol{p}_f(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathcal{T}_f}{\partial \xi_1} \boldsymbol{t}_1(X_1) \\ \dfrac{\partial \mathcal{T}_f}{\partial \xi_\alpha} \boldsymbol{t}_\alpha(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{f1} \boldsymbol{t}_1(X_1) \\ p_{f\alpha} \boldsymbol{t}_\alpha(X_1) \end{pmatrix} ,$$

cette dernière correspond au torseur "des Impulses" introduit historiquement par Lord Kelvin ([63]). D'ailleurs, en dépit de la remarque précédente, ces "forces et couples" d'impulse se comportent comme les résultante et moment cinétiques usuels vis à vis des forces exercées sur le fluide ([63]). Dans notre cas, nous obtenons à partir de (5.39) et (5.40) l'expression définissant la densité linéique de résultantes cinétiques du fluide le long du corps :

$$\boldsymbol{p}_f = \left(\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \rho_f {}^b U_\alpha \, d\mathcal{S}_{X_1}(0) \right) \boldsymbol{t}_\alpha = \mathbb{I}_{f\alpha i} \xi_i \boldsymbol{t}_\alpha \ , \tag{5.42}$$

et la densité linéique de moments cinétiques relatifs aux centres des sections :

$$\boldsymbol{\sigma}_f = \int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} (X_\alpha \boldsymbol{t}_\alpha) \times \left(\rho_f {}^b U_\beta \boldsymbol{t}_\beta \right) \, d\mathcal{S}_{X_1}(0) = \mathbb{I}_{f1i} \xi_i \boldsymbol{t}_1 \ . \tag{5.43}$$

Enfin, à partir de ces deux densités (5.42) et (5.43), nous pouvons reconstruire la résultante et le moment cinétiques totales du fluide contenu dans le volume stratifié, selon :

$$\boldsymbol{p}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) \triangleq \int_{\mathcal{D}_{f(t)}} \rho_f \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \, d\mathcal{D}_{f(t)} = \int_{\mathcal{D}_{f(0)}} (\rho_f \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(t, \boldsymbol{X}) \, d\mathcal{D}_{f(0)} = \int_0^1 \boldsymbol{p}_f \, dX_1 \ , \tag{5.44}$$

et :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) \triangleq \int_{\mathcal{D}_{f(t)}} \boldsymbol{x} \times \rho_f \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}) \, d\mathcal{D}_{f(t)} &= \int_{\mathcal{D}_{f(0)}} (\boldsymbol{\varphi}_v \times \rho_f \boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(t, \boldsymbol{X}) \, d\mathcal{D}_{f(0)} \\ &= \int_0^1 \left(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{\sigma}_f \right) \, dX_1 \ . \end{aligned} \tag{5.45}$$

Finalement, comme dans le cas du corps solide, l'énergie, la résultante et le moment cinétiques de $\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}$ seront remplacés dans la suite par leurs densités réduites respectives $\mathcal{T}_f$, $\boldsymbol{p}_f$ et $\boldsymbol{\sigma}_f$.

5.6 Les dérivées temporelles.

Dans la suite, nous utiliserons ces grandeurs cinétiques réduites afin d'obtenir par dérivation la dynamique réduite du corps nageant. Avant d'entrer dans les détails de ces développements, nous allons introduire quelques outils relatifs à la dérivation temporelle dans le cadre de notre théorie réduite. Dans ce contexte, les particules matérielles du volume de fluide tridimensionnel (respectivement, les points géométriques du volume de contrôle 3-D $\mathcal{D}_{(.)}$) sont remplacées par des "tranches de fluide" (respectivement, par les configurations courantes des sections transverses de la poutre géométriquement étendues à $\mathcal{D}_{(.)}$, i.e. $\mathcal{s}_{X_1}(t)$). Finalement, la dérivation temporelle mise en œuvre dans la dynamique réduite doit prendre en compte deux milieux stratifiés animés d'un mouvement relatif mono-dimensionnel. Il est important de noter ici que les tranches de fluide que nous noterons $\mathcal{S}_{X_1}$ doivent être distinguées de leurs homologues géométriques précédemment notées $\mathcal{s}_{X_1}(t)$ et définies comme attachées au corps. En fait, pour n'importe quel label X_1, la section $\mathcal{S}_{X_1} = \boldsymbol{\varphi}_u^{-1}(\mathcal{s}_{X_1}(t))$ a une nature matérielle (i.e. est convectée par l'écoulement du fluide) tandis qu'elle occupe la configuration $\mathcal{s}_{X_1}(t)$ au temps courant t.

5.6.1 Définitions des dérivées temporelles.

Contrairement au cas usuel d'un volume de contrôle se déplaçant dans l'espace ambiant auquel les champs de tenseurs (eulériens) sont rapportés, dans notre cas, n'importe quel champ tensoriel $\boldsymbol{T}_f$ d'ordre p, mécaniquement attaché au fluide sera rapporté à l'axe de la poutre, i.e. :

$$\boldsymbol{T}_f : X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{T}_f(t, X_1) \in \otimes_{i=1}^{p} T_{\boldsymbol{r}(t,X_1)}\boldsymbol{\mathcal{E}} \ . \tag{5.46}$$

En d'autre terme $\boldsymbol{T}_f$ est paramétré par le label des sections transverses du corps $\mathcal{C}_{X_1}$ tandis qu'il est mécaniquement attaché à la tranche de fluide $\mathcal{S}_{X_1}$. Par conséquent, puisque les sections transverses glissent relativement sur celles du fluide avec le champ de vitesse $X_1 \in [0,1] \mapsto \partial \boldsymbol{r}(X_1)/\partial t \cdot \boldsymbol{t}_1(X_1, t) = \mathcal{V}_1(X_1, t)$, la dérivée particulaire, dénotée "$d./dt$", qui dans notre cas, correspond à la dérivée temporelle de n'importe quel tenseur $\boldsymbol{T}_f$ en suivant une tranche de fluide dans son mouvement est définie par :

$$\frac{d\boldsymbol{T}_f}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial X_1}\mathcal{V}_1 \ . \tag{5.47}$$

Notons que cette relation peut être aussi déduite formellement de :

$$\frac{d\boldsymbol{T}_f(t, X_1)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dt} \ ,$$

où $dX_1/dt = -\mathcal{V}_1(X_1)$ représente la variation par rapport au temps du label de la section transverse telle que enregistrée par un observateur attaché au fluide, i.e. c'est

simplement la vitesse de la tranche du corps $\mathcal{C}_{X_1}$ relativement à celle du fluide $\mathcal{S}_{X_1}$ (axialement au repos) [4].

Finalement, grâce aux réductions de la poutre et du corps mince, le théorème de transport de Reynolds [4, 26] connus dans le contexte tridimensionnel est maintenant appliqué au cas où le fluide et le volume de contrôle sont deux ensembles mono-dimensionnels animés d'un mouvement relatif (cf. figure 5.6).

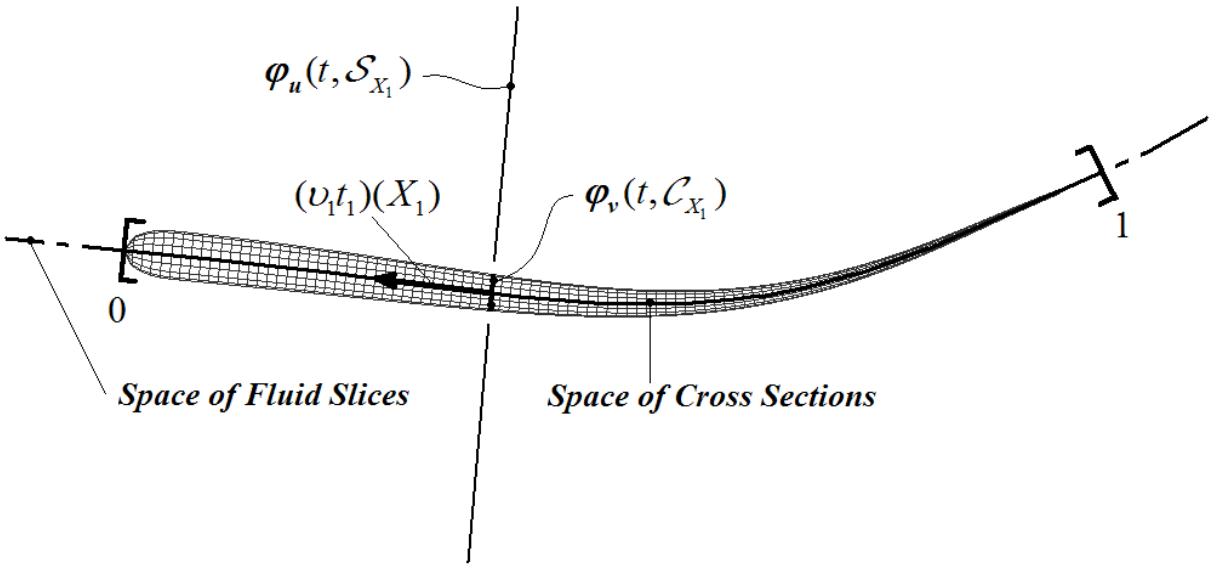


FIGURE 5.6 – Représentation des deux espaces mono-dimensionels des tranches de fluide et des sections de la poutre, l'un glissant relativement sur l'autre.

Théorème : Avec notre stratification de la cinématique du fluide, le théorème de transport de Reynolds se réduit à :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t, X_1)dX_1 = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t, X_1)dX_1 - [(\mathcal{V}_1 \boldsymbol{T}_f)(t, X_1)]_0^1 \ , \tag{5.48}$$

pour n'importe quel champ tensoriel (5.46) mécaniquement attaché au fluide.

Dans (5.48), le premier terme du membre de droite représente la variation temporelle propre du tenseur le long de l'axe de la poutre tandis que le second terme représente la convection du champ réduit $\boldsymbol{T}_f$ hors de $\mathcal{D}_{(t)}$, due au mouvement de $\mathcal{D}_{(.)}$ pendant que $\boldsymbol{T}_f$ est "gelé" à temps fixe.

4. Le signe moins est dû au fait que pour un observateur attaché au fluide, quand $\mathcal{V}_1 > 0$, cet observateur voit le label des sections passant devant lui diminuer.

Preuve : Premièrement nous avons :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t,X_1)dX_1 = \int_0^1 \frac{d}{dt}\boldsymbol{T}_f(t,X_1)dX_1 + \int_0^1 \boldsymbol{T}_f\frac{d}{dt}(dX_1) \ . \tag{5.49}$$

Ainsi, comme la dérivée particulaire est liée aux tranches de fluide tandis que dX_1 est lié aux sections solides transverses, nous pouvons échanger les opérateurs "$d./dt$" et "$d.$" et obtenir :

$$\frac{d}{dt}(dX_1) = d(\frac{dX_1}{dt}) \ .$$

Puisque dX_1/dt est tout simplement la vitesse d'une section transverse de la poutre par rapport aux tranches de fluide, on a : $dX_1/dt = -\mathcal{V}_1$, et donc :

$$d\frac{dX_1}{dt} = -d\mathcal{V}_1 = -\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial X_1}dX_1 \ ,$$

que nous ré-injectons ensuite dans (5.49), pour obtenir avec (5.47) :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t,X_1)dX_1 = \int_0^1 \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial X_1}\mathcal{V}_1 dX_1 - \int_0^1 \boldsymbol{T}_f\frac{\partial \mathcal{V}_1}{\partial X_1}dX_1 \ ,$$

et aussi,

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t,X_1)dX_1 = \int_0^1 \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial t} - \frac{\partial (\boldsymbol{T}_f\mathcal{V}_1)}{\partial X_1}dX_1 \ ,$$

qui donne enfin le résultat attendu :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_f(t,X_1)dX_1 = \int_0^1 \frac{\partial \boldsymbol{T}_f}{\partial t}dX_1 - [\boldsymbol{T}_f\mathcal{V}_1]_0^1 \ .$$

fin de la preuve

Remarques

Pour n'importe quel champ de tenseurs réduit de la forme de (5.46), mais mécaniquement attaché au corps, i.e. pour n'importe quel $\boldsymbol{T}_b$ tel que :

$$\boldsymbol{T}_b : X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{T}_b(t,X_1) \in \otimes_{i=1}^p \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{r}(t,X_1)}\boldsymbol{\mathcal{E}} \ ,$$

(5.48) se simplifie comme suit :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{T}_b(t,X_1)dX_1 = \int_0^1 \frac{\partial \boldsymbol{T}_b}{\partial t}dX_1 \ , \tag{5.50}$$

et ce parce qu'il n'y a pas de terme de convection traduisant l'écoulement en-dehors du volume de contrôle attaché au corps mono-dimensionnel.

5.7 La dynamique réduite.

Dans la suite, nous supposerons que les forces d'Archimède et de gravité se compensent (grâce à un dispositif de type "vessie natatoire"). Dans ces conditions, les forces de volume disparaissent et les théorèmes de Newton-Euler, appliqués au système matériel : $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{(t)}} \triangleq \mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}} \cup \mathcal{B}$, peuvent être exprimés comme suit.

• Équation gouvernant la dynamique linéaire de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{(t)}}$ ("lois de Newton") :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{(t)}}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(\mathcal{B}) = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}(t,\boldsymbol{x})\, d\partial\mathcal{D}_{(t)} \ ,$$

où nous trouvons dans le membre de gauche la dérivée particulaire de la résultante des impulses des particules du fluide et du corps contenues respectivement dans $\mathcal{D}_{(t)}$ et $\Sigma_{b(t)}$. Au second membre, nous trouvons les termes dits destructifs dus aux forces sur les frontières, où $\boldsymbol{s} = -p(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur des contraintes de Cauchy (eulérien).

Cette équation est complétée par sa contrepartie angulaire :

• Équation d'équilibre gouvernant la dynamique angulaire de $\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{(t)}}$ ("théorème d'Euler") :

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{M}_{\mathcal{D}_{(t)}}) = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{F}_{\mathcal{D}_{(t)}}) + \frac{d}{dt}\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}(t,\boldsymbol{x}))\, d\partial\mathcal{D}_{(t)} \ .$$

5.7.1 Les forces d'inertie réduites.

En introduisant les cinétiques réduites (5.35), (5.44) et (5.45) dans les équations ci-dessus, nous obtenons la dynamique de toute la matière (fluide et solide) incluse dans le volume de contrôle :

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{p}_f dX_1 + \frac{d}{dt}\int_0^1 \boldsymbol{p}_b dX_1 = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{D}_{(t)} \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{\sigma}_f\right) dX_1 + \frac{d}{dt}\int_0^1 \left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_b + \boldsymbol{\sigma}_b\right) dX_1 = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{x}\times(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n})\, d\partial\mathcal{D}_{(t)} \ .$$

Grâce à (5.48) et (5.50), nous trouvons finalement :

• *La dynamique linéaire réduite :*

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial(\boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_b)}{\partial t}\right] dX_1 = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{D}_{(t)} + \left[\mathcal{V}_1\boldsymbol{p}_f\right]_0^1 \ . \tag{5.51}$$

• *La dynamique angulaire réduite :*

$$\int_0^1 \frac{\partial\left(\boldsymbol{\sigma}_f+\boldsymbol{\sigma}_b\right)}{\partial t}+\boldsymbol{r}\times\frac{\partial\left(\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{p}_b\right)}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\times\boldsymbol{p}_f\,dX_1 = \int_{\partial\mathcal{D}_{(t)}}\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}d\partial\mathcal{D}_{(t)}+\left[\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{\sigma}_f\right)\mathcal{V}_1\right]_0^1 \ . \quad (5.52)$$

Finalement, il reste à calculer les termes de bords apparaissant dans les seconds membres de ((5.51)-(5.52)). La seconde contribution de ces termes traduit le flux des grandeurs cinétiques du fluide à travers le volume de contrôle attaché au corps. Ainsi, comme la première section du corps est un point matériel de masse ajoutée nulle, nous avons simplement :

$$\left[\mathcal{V}_1\boldsymbol{p}_f\right]_0^1=\mathcal{V}_1(1)\boldsymbol{p}_f(1) \quad , \quad \left[\mathcal{V}_1\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_f+\boldsymbol{\sigma}_f\right)\right]_0^1=\mathcal{V}_1(1)\left(\boldsymbol{r}(1)\times\boldsymbol{p}_f(1)+\boldsymbol{\sigma}_f(1)\right) \ .$$

5.7.2 Réduction des forces de pression.

En ce qui concerne les premières contributions des membres de droite de ((5.51)-(5.52)), elles représentent la résultante et le moment des forces de pression appliquées sur $\partial\mathcal{D}_{(.)}$. Dans le cas de la nage plane (en ligne droite) plusieurs calculs de ces termes ont été proposés par J. Lighthill et présentés dans le chapitre § 4. Néanmoins, tous ces calculs deviennent considérablement plus difficiles quand on cherche à les étendre à la nage tridimensionnelle. Aussi, afin de généraliser le terme de pression de Lighthill dans ce contexte, nous proposons ici un calcul alternatif basé sur les principes de la réduction précédente.

Rappelons avant tout (cf. remarque (c) de § 5.4), que dans l'*E.B.T.* en transformations finies, la cinématique 3-D du fluide est remplacée par celle d'une stratification unidimensionnelle d'écoulement 2-D, où les tranches de fluide (transverse à l'axe de la poutre) remplacent les particules dans le contexte tridimensionnel. Par conséquent, ce point de vue "abstrait", nous permet de comprendre que dans un tel modèle, les tranches ne peuvent transmettre que des forces de traction/compression le long de l'axe du corps. Ainsi dans le modèle réduit l'état de contrainte 3-D dans le fluide est remplacé par un état de contrainte réduit défini sous la forme mono-dimensionnelle :

$$X_1\in[0,1]\mapsto \boldsymbol{s}_r(X_1)\triangleq -P_r(X_1)\boldsymbol{t}_1\otimes\boldsymbol{t}_1 \ , \quad (5.53)$$

où "$X_1\in[0,1]\mapsto P_r(X_1)\in\mathbb{R}$" dénote le champ de pression réduit appliqué sur les tranches. Afin de réaliser "la stratification" de l'état de contrainte interne, reconsidérons premièrement la loi de Bernoulli instationnaire tridimensionnelle (5.11). Le but de ce qui

va suivre est d'appliquer à cette relation les conséquences de la cinématique réduite de § 5.4. A cet effet, réécrivons en premier lieu (5.11) dans le système de coordonnées du corps $\boldsymbol{\varphi}_v^{-1}(t,.)$ ici encore, prolongé dans $\mathcal{D}_{(t)}$. Ainsi, introduisant la relation (5.19), dans (5.11), nous obtenons :

$$P(\boldsymbol{X}) = \rho_f \left(\nabla\Phi \cdot \boldsymbol{V} - \frac{(\nabla\Phi)^2}{2} - \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right)(\boldsymbol{X}) + P_\infty \ , \tag{5.54}$$

où $\boldsymbol{V}$ représente le champ de vitesse matériel du corps (5.13), une fois prolongé au fluide, et $P(\boldsymbol{X}) = (p \circ \boldsymbol{\varphi}_v)(\boldsymbol{X})$ est le champ de pression ramené sur la configuration de référence par la transformation du corps.

Puisque ce champ de pression doit être calculé avec la cinématique "tranche par tranche" de § 5.5, imposons $\Phi(\boldsymbol{X} = X_1\boldsymbol{E}_1 + \overline{\boldsymbol{X}}) \simeq \overline{\Phi}_{X_1}(\overline{\boldsymbol{X}})$ dans (5.54) comme suit :

$$P(\boldsymbol{X}) \simeq \rho_f \left(\nabla\overline{\Phi}_{X_1}(\overline{\boldsymbol{X}}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}) - (\frac{(\nabla\overline{\Phi}_{X_1})^2}{2} + \frac{\partial\overline{\Phi}_{X_1}}{\partial t})(\overline{\boldsymbol{X}}) \right) + P_\infty \ , \tag{5.55}$$

où $\overline{\Phi}$ est l'ensemble des potentiels réduits définis par (5.33) et (5.34). Ainsi à partir de (5.13), nous obtenons :

$$\nabla\overline{\Phi}_{X_1} \cdot \boldsymbol{V} = \nabla\overline{\Phi}_{X_1} \cdot \left(\boldsymbol{\mathcal{V}}(X_1) + \boldsymbol{\Omega}(X_1) \times \overline{\boldsymbol{X}} \right) = \nabla\overline{\Phi}_{X_1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}(X_1) + \boldsymbol{\Omega}(X_1) \cdot \left(\overline{\boldsymbol{X}} \times \nabla\overline{\Phi}_{X_1} \right) \ . \tag{5.56}$$

Maintenant, si nous intégrons (5.55) (avec (5.56)) sur les tranches géométriques ramenées sur le corps, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\forall X_1 \in [0,1], \int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \left(P(X_1\boldsymbol{E}_1 + \overline{\boldsymbol{X}}) - P_\infty \right) d\mathcal{s}_{X_1}(0) \simeq \\ &\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \rho_f \left(\nabla\overline{\Phi}_{X_1} \cdot \boldsymbol{\mathcal{V}}(X_1) + \boldsymbol{\Omega}(X_1) \cdot \left(\overline{\boldsymbol{X}} \times \nabla\overline{\Phi}_{X_1} \right) - \frac{(\nabla\overline{\Phi}_{X_1})^2}{2} - \frac{\partial\overline{\Phi}_{X_1}}{\partial t} \right) d\mathcal{s}_{X_1}(0) \ . \end{aligned} \tag{5.57}$$

Pour notre fluide stratifié, i.e. le milieu mono-dimensionnel (où les tranches de fluide remplacent les particules) se déplaçant par rapport à l'espace géométrique stratifié (où les tranches géométriques remplacent les points géométriques), (5.57) joue le rôle d'équation de Bernoulli instationnaire où $X_1 \mapsto P_r(X_1) = \displaystyle\int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \left(P(X_1\boldsymbol{E}_1 + \overline{\boldsymbol{X}}) - P_\infty \right) d\mathcal{s}_{X_1}(0)$ défini le champ de pression réduit mono-dimensionnel de (5.53). En outre, nous reconnaissons dans (5.57), les définitions des quantités cinétiques des tranches (force et couple d'impulse (5.42)-(5.43), ainsi que l'énergie cinétique (5.40)).

Aussi, nous obtenons après calculs :

$$P_r(X_1) = \boldsymbol{\mathcal{V}}(X_1) \cdot \boldsymbol{P}_f(X_1) + \boldsymbol{\Omega}(X_1) \cdot \boldsymbol{\Sigma}_f(X_1) - \mathcal{T}_f(X_1) - \int_{\mathcal{S}_{X_1}(0)} \frac{\partial \overline{\Phi}_{X_1}}{\partial t} d\mathcal{S}_{X_1}(0) \ ,$$

où $\boldsymbol{P}_f(X_1) \triangleq \boldsymbol{R}^T(X_1) \cdot \boldsymbol{p}_f(X_1)$, et $\boldsymbol{\Sigma}_f(X_1) \triangleq \boldsymbol{R}^T(X_1) \cdot \boldsymbol{\sigma}_f(X_1)$ sont les forces et couples matériels d'impulse. Par conséquent, en vertu des propriétés de symétrie de $\overline{\Phi}_{X_1}$ (héritées de celle du profil de la section transverse), nous avons finalement :

$$P_r(X_1) = 2\mathcal{T}_f(X_1) - \mathcal{T}_f(X_1) - 0 = \mathcal{T}_f(X_1) \ .$$

Ainsi, avec la stratification du fluide, (5.53) peut se détailler comme suit :

$$X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{s}_r(X_1) = -\mathcal{T}_f(X_1) \boldsymbol{t}_1 \otimes \boldsymbol{t}_1 \ .$$

Finalement, introduisant ce champ tensoriel de contrainte réduit dans les termes de pression des équations d'équilibre dynamique (5.51)-(5.52), nous obtenons :

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} \, d\partial\mathcal{D}_{(t)} = [\boldsymbol{s}_r(X_1) \cdot \boldsymbol{t}_1(X_1)]_0^1 = [-\mathcal{T}_f(X_1) \boldsymbol{t}_1(X_1)]_0^1 \ ,$$

$$\int_{\partial \mathcal{D}_{(t)}} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n} d\partial\mathcal{D}_{(t)} = [\boldsymbol{r}(X_1) \times (\boldsymbol{s}_r(X_1) \cdot \boldsymbol{t}_1(X_1))]_0^1 = [-\boldsymbol{r}(X_1) \times \mathcal{T}_f(X_1) \boldsymbol{t}_1(X_1)]_0^1 \ .$$

Enfin, comme la première section ($X_1 = 0$) du corps ne produit aucune énergie cinétique transverse dans le fluide, la dynamique réduite s'écrit alors :

• **La dynamique linéaire réduite :**

$$\int_0^1 \frac{\partial (\boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_b)}{\partial t} dX_1 = -\mathcal{T}_f(1) \boldsymbol{t}_1(1) + \mathcal{V}_1(1) \boldsymbol{p}_f(1) \ . \tag{5.58}$$

• **La dynamique angulaire réduite :**

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial \left(\boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_b \right)}{\partial t} + \boldsymbol{r} \times \frac{\partial \left(\boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_b \right)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \boldsymbol{p}_f \right] dX_1 = \\ - \boldsymbol{r}(1) \times \mathcal{T}_f(1) \boldsymbol{t}_1(1) + \left(\boldsymbol{r}(1) \times \boldsymbol{p}_f(1) + \boldsymbol{\sigma}_f(1) \right) \mathcal{V}_1(1) \ . \tag{5.59}$$

Remarques

1. Comme dans le cas tridimensionnel, le champ de pression constant $P_\infty = p_\infty$ ne joue aucun rôle dans les calculs du terme de pression puisqu'il est intégré sur un volume fermé (mono-dimensionnel).
2. Il est important de noter que les termes de convection du second membre de (5.58) et (5.59) ont une explication physique simple. En fait, le moment du torseur correspondant modélise n'importe quel couple d'impulse axial généré par la dynamique de roulis de l'anguille, tandis que le terme de force représente l'impulse latérale, ces composantes étant toutes deux lâchées dans le sillage avec la vitesse "$\mathcal{V}_1(1)$" par rapport au corps.

5.8 Les dynamiques internes réduites.

Comme nous le verrons dans le prochain chapitre, les équations (5.58) et (5.59) seront exploitées pour obtenir la dynamique de la tête (de l'anguille). Afin de calculer la loi de couple interne nécessaire pour appliquer la déformation et le mouvement correspondant de l'anguille, nous avons besoin aussi de la dynamique des sections transverses de la poutre. Ces équations formeront un ensemble d'e.d.p., que nous déduirons de la construction générale proposée dans [15].

5.8.1 Dynamique générale d'un milieu Cosserat mono-dimensionnel.

Cette construction est une généralisation des équations de Poincaré [94] d'un système mécanique sur un groupe de Lie au cas d'un milieu Cosserat. Nous les rappelons maintenant dans le cas des poutres de Reissner, i.e. pour un milieu Cosserat mono-dimensionnel. Dans ce cas, l'espace des configurations de $\mathcal{B}$ est l'espace des courbes dans le groupe de Lie $SE(3)$ définit par :

$$\mathfrak{C} \triangleq \{\boldsymbol{h}(.) : X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{h}(X_1) \in SE(3)\} \ , \tag{5.60}$$

où $\boldsymbol{h}(X_1)$ est la transformation (5.12) qui applique le repère $(O, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)$ sur $(G, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(X_1)$. Dans la suite, n'importe quelle transformation $\boldsymbol{h}(X_1) \in SE(3)$ sera représentée par une transformation homogène, i.e. :

$$\boldsymbol{h}(X_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}(X_1) & \boldsymbol{r}(X_1) \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} \ .$$

L'application directe du principe d'Hamilton sur la définition (5.60) de l'espace des configurations de la poutre (cf. [15]), nous donne l'ensemble des équations suivantes :

Les équations de champ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_0}\right) - ad^{\star}_{\boldsymbol{\eta}_0}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_0}\right) - \frac{\partial}{\partial X^1}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}\right) + ad^{\star}_{\boldsymbol{\eta}_1}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}\right) = \overline{\mathbb{F}} \ , \ \forall (t, X_1) \in \mathbb{R}^+ \times]0,1[\ . \tag{5.61}$$

Les conditions aux limites

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}(t,0) = -\overline{\mathbb{F}}_-(t) \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}(t,1) = -\overline{\mathbb{F}}_+(t) \quad , \quad t \in \mathbb{R}^+ \ , \tag{5.62}$$

où :

- $\boldsymbol{\eta}_0(X_1) = (\boldsymbol{h}^{-1}\partial_t \boldsymbol{h})(X_1) \in se(3) \cong \mathbb{R}^6$ est le torseur cinématique matériel des transformations infinitésimales endurées par le repère $(G, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(X_1)$ quand le temps passe de t à $t + dt$ tandis que X_1 est fixé.
- $\boldsymbol{\eta}_1(X_1) = (\boldsymbol{h}^{-1}\partial_{X_1} \boldsymbol{h})(X_1) \in se(3)$ est le torseur cinématique matériel des transformations infinitésimales endurées par le repère $(G, \boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(X_1)$ quand X_1 varie de X_1 à $X_1 + dX_1$ tandis que t est fixé.
- $\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\eta}_0) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\eta}_1)$ est la densité linéique de Lagrangien le long de la poutre, avec $\mathcal{T}$ la densité d'énergie cinétique et $\mathcal{U}$ celle d'énergie potentielle.
- $ad^{\star}_{\cdot}(.)$ est l'application co-adjointe de $se(3)$ (l'espace des torseurs cinématiques) sur son espace duale $se(3)^{\star} \cong \mathbb{R}^6$ (l'espace des torseurs d'efforts).
- $\overline{\mathbb{F}} : X_1 \in [0,1] \mapsto \overline{\mathbb{F}}(X_1) \in se(3)^{\star}$ est la densité linéique des torseurs de forces extérieures.
- $\overline{\mathbb{F}}_-(t)$ et $\overline{\mathbb{F}}_+(t)$ tous deux éléments de $se(3)^{\star}$, sont les torseurs externes ponctuels appliqués aux extrémités de la poutre.

En outre, notons que $\boldsymbol{\eta}_0$ et $\boldsymbol{\eta}_1$ peuvent être détaillés comme :

$$\boldsymbol{\eta}_0 \triangleq \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{R}^T \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}\right)^{\vee} \\ \boldsymbol{R}^T \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \boldsymbol{\mathcal{V}} \end{pmatrix} \quad , \quad \boldsymbol{\eta}_1 \triangleq \begin{pmatrix} \left(\boldsymbol{R}^T \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X_1}\right)^{\vee} \\ \boldsymbol{R}^T \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{\Gamma} \end{pmatrix} \ , \tag{5.63}$$

où seul $\boldsymbol{\Gamma}$, n'a jamais été introduit jusqu'ici. Enfin notons que (5.61), (5.62) et les relations (5.63), qui lient les torseurs des vitesses et des déformations avec la configuration, définissent une formulation consistante des équations de la dynamique de la poutre. En effet une fois complétées des conditions initiales du problème, ces équations peuvent être résolues numériquement par exemple par la méthode des éléments finis [108]. Dans le prochain chapitre, nous proposerons une alternative numérique plus adaptée à notre

problème de locomotion et de contrôle pour résoudre ces équations. L'algorithme proposé sera basé sur les équations de la dynamique globale du système (5.58)-(5.59), qui nous permettrons de calculer les accélérations de la tête à partir des déformations internes appliquées au corps. Ensuite, grâce à (5.61)-(5.63), nous calculerons les couples internes qui doivent être générés pour imposer les déformations attendues. Il s'en suit que ((5.58)-(5.59)) définiront la dynamique dite "de la tête de l'anguille" ou "dynamique externe", tandis que ((5.61)-(5.63)) définiront la dynamique dite "du corps de l'anguille" ou "dynamique interne".

5.8.2 Dynamique du corps de l'anguille ("dynamique interne").

Afin de déduire la dynamique du corps de l'anguille des équations générales d'un milieu Cosserat, nous allons ajouter deux adaptations spécifiques à la construction précédente. En premier lieu, les deux contraintes (5.15) et (5.16) vont être imposées au travers d'un champ linéique de multiplicateurs de Lagrange (matériels)$X_1 \in [0,1] \mapsto \mathbb{F}(X_1) \in se(3)^\star \cong \mathbb{R}^6$, tandis qu'en utilisant la cinétique réduite de la section § 5.5, les énergies cinétiques des tranches de fluide et des sections de la poutre seront regroupées. Cette seconde adaptation s'accorde avec la méthode des potentiels de Kirchhoff [61] et correspond à la réduction de l'espace de configuration du fluide sur celui de la poutre. Il s'en suit que les équations de l'anguille peuvent être déduites de (5.61), (avec $\overline{\mathbb{F}} = \mathbf{0}$, le corps ayant une flotabilité neutre) et :

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1) = \mathcal{T}(\boldsymbol{\eta}_0) - \mathcal{U}(\boldsymbol{\eta}_1) = \mathcal{T}_b(\boldsymbol{\eta}_0) + \mathcal{T}_f(\boldsymbol{\eta}_0) - \mathbb{F} \cdot (\boldsymbol{\eta}_1 - \boldsymbol{\eta}_{1d}(t)) \ , \tag{5.64}$$

avec $\mathcal{T}_b$ et $\mathcal{T}_f$ définis par (5.37) et (5.40), tandis que $\mathbb{F} = (\boldsymbol{C}^T, \boldsymbol{N}^T)^T$ où $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{C}$ sont les densités de forces et de moments internes ressenties par les sections transverses afin de vérifier les deux contraintes (5.15) et (5.16) qui peuvent être réécrites comme :

$$\forall X_1 \in [0,1] \, , \, \boldsymbol{\eta}_1(X_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}(X_1) \\ \boldsymbol{\Gamma}(X_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K}_d(X_1,t) \\ \boldsymbol{E}_1 \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{\eta}_{1d}(X_1,t) \ ,$$

où $\boldsymbol{K}_d(t) = K_{d2}(t)\boldsymbol{E}_2 + K_{d3}(t)\boldsymbol{E}_3$ est le champ de courbure "désiré" dépendant du temps et imposé par la commande (avec $K_{d1} = 0$ imposé par (5.16)). Qui plus est, en tenant compte de la forme (5.64) de la densité lagrangienne, les équations de champ (5.61) deviennent :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial(\mathcal{T}_b + \mathcal{T}_f)}{\partial \boldsymbol{\eta}_0}\right) - ad^\star_{\boldsymbol{\eta}_0}\left(\frac{\partial(\mathcal{T}_b + \mathcal{T}_f)}{\partial \boldsymbol{\eta}_0}\right) = \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}\right) - ad^\star_{\boldsymbol{\eta}_1}\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \boldsymbol{\eta}_1}\right) \ .$$

Introduisons alors les champs matériels de densités cinétiques linéaires et angulaires tels que :

$$\frac{\partial \mathcal{T}_b}{\partial \boldsymbol{\eta}_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_b \\ \boldsymbol{P}_b \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{T}_f}{\partial \boldsymbol{\eta}_0} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_f \\ \boldsymbol{P}_f \end{pmatrix} \ ,$$

liés à leurs contreparties spatiales au travers des relations de "pull-back/push-forward" :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_b \\ \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{P}_b \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{p}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_f \\ \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{P}_f \end{pmatrix} \ .$$

Nous obtenons avec l'expressions standard de $ad^\star.(.)$ pour $SE(3)$ [79], les équations de champ sous leur forme matérielle :

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\Sigma}_b + \boldsymbol{\Sigma}_f)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Sigma}_b + \boldsymbol{\Sigma}_f) + \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{P}_f = \frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial X_1} + \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C} + \boldsymbol{\Gamma} \times \boldsymbol{N} \ ,$$

$$\frac{\partial(\boldsymbol{P}_b + \boldsymbol{P}_f)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{P}_b + \boldsymbol{P}_f) = \frac{\partial \boldsymbol{N}}{\partial X_1} + \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{N} \ ,$$

que l'on complète par les conditions aux limites suivantes :

$$\boldsymbol{N}(0) = \overline{\boldsymbol{N}}_- \quad , \quad \boldsymbol{N}(1) = \overline{\boldsymbol{N}}_+ \quad , \quad \boldsymbol{C}(0) = \overline{\boldsymbol{C}}_- \quad , \quad \boldsymbol{C}(1) = \overline{\boldsymbol{C}}_+ \ ,$$

où : $(\overline{\boldsymbol{C}}_-^T \, , \, \overline{\boldsymbol{N}}_-^T) \triangleq \overline{\mathbb{F}}_-^T$ et $(\overline{\boldsymbol{C}}_+^T \, , \, \overline{\boldsymbol{N}}_+^T) \triangleq \overline{\mathbb{F}}_+^T$.

Ces équations peuvent être interprétées comme des équations tensorielles dans l'espace matériel où alternativement comme des équations en composantes dans les repères mobiles des sections [15]. Finalement, en multipliant celles-ci par $\boldsymbol{R}$ et puisque $\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = \partial \boldsymbol{r} / \partial X_1 = \boldsymbol{t}_1$, nous trouvons les équations suivantes en fonction des tenseurs spatiaux :

Les équations de champ

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{\sigma}_f)}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \boldsymbol{p}_f = \frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial X_1} + \boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{n} \quad , \quad \frac{\partial(\boldsymbol{p}_b + \boldsymbol{p}_f)}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial X_1} \ . \tag{5.65}$$

Les conditions aux limites

$$\boldsymbol{n}(0) = \overline{\boldsymbol{n}}_- \quad , \quad \boldsymbol{n}(1) = \overline{\boldsymbol{n}}_+ \quad , \quad \boldsymbol{c}(0) = \overline{\boldsymbol{c}}_- \quad , \quad \boldsymbol{c}(1) = \overline{\boldsymbol{c}}_+ \ , \tag{5.66}$$

où $\boldsymbol{n}$ et $\boldsymbol{c}$ ($\overline{\boldsymbol{n}}_\pm$ et $\overline{\boldsymbol{c}}_\pm$, respectivement) sont les contreparties spatiales de $\boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{C}$ (respectivement : $\overline{\boldsymbol{N}}_\pm$ et $\overline{\boldsymbol{C}}_\pm$), i.e. : $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{N}$ et $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{C}$ (respectivement : $\overline{\boldsymbol{n}}_\pm = \boldsymbol{R} \cdot \overline{\boldsymbol{N}}_\pm$, $\overline{\boldsymbol{c}}_\pm = \boldsymbol{R} \cdot \overline{\boldsymbol{C}}_\pm$). Enfin, les torseurs externes appliqués sur les deux extrémités de la poutre peuvent être directement déduits à partir du second membre de ((5.58)-(5.59)). En fait, ces deux termes représentent la résultante et le moment des forces extérieures

(produites par la convection et la pression) appliquées sur le volume de contrôle $\mathcal{D}_{(t)}$ au travers de $\pi(t)$. Par conséquent nous avons simplement :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(0) \\ \boldsymbol{n}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{c}}_- \\ \overline{\boldsymbol{n}}_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(1) \\ \boldsymbol{n}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{c}}_+ \\ \overline{\boldsymbol{n}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \\ -\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1) + \boldsymbol{p}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \end{pmatrix} . \tag{5.67}$$

Remarques

1. Dans le cas tridimensionnel, le torseur appliqué sur $\pi(t)$ peut être déduit de (5.67) et ((5.40) ,(5.41)) où la dernière section transverse du corps est rappelons le modélisée par un bord de fuite aigu supporté par $\boldsymbol{t}_3(1)$. Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{c}}_+ \\ \overline{\boldsymbol{n}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{f1}(1)\Omega_1(1)\mathcal{V}_1(1)\boldsymbol{t}_1(1) \\ -\frac{1}{2}\left[m_{f2}(1)\mathcal{V}_2^2(1) + I_{f1}(1)\Omega_1^2(1)\right]\boldsymbol{t}_1(1) + m_{f2}(1)\mathcal{V}_1(1)\mathcal{V}_2(1)\boldsymbol{t}_2(1) \end{pmatrix} . \tag{5.68}$$

2. Dans le cas particulier de la nage plane dans $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, nous avons de plus :

$$\boldsymbol{\omega}(X_1) = \Omega_3(X_1)\boldsymbol{t}_3 = \Omega_3(X_1)\boldsymbol{e}_3 \quad , \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}(X_1) = \mathcal{V}_1\boldsymbol{t}_1 + \mathcal{V}_2\boldsymbol{t}_2 \ ,$$

et par conséquent, (5.68) se simplifie selon :

$$\begin{pmatrix} \overline{\boldsymbol{c}}_+ \\ \overline{\boldsymbol{n}}_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\frac{1}{2}m_{f2}(1)\mathcal{V}_2^2(1)\boldsymbol{t}_1(1) + m_{f2}(1)\mathcal{V}_1(1)\mathcal{V}_2(1)\boldsymbol{t}_2(1) \end{pmatrix} ,$$

qui n'est autre que l'expression des termes de bords de Lighthill donnée dans [72] et rappelée dans le chapitre § 4.

5.9 Conclusion.

Dans ce chapitre, les idées de J. Lighthill ont été intensivement suivies et étendues afin d'obtenir une forme analytique de la dynamique de la nage de l'anguille. Premièrement, nous avons obtenu une forme analytique de la dynamique tridimensionnelle de l'ensemble de la matière (corps et fluide) englobé dans le volume de contrôle de J. Lighthill. Deuxièmement, cette dynamique globale a été complétée de celle des couples internes (et forces de contrainte) de commande appliqués sur les sections transverses du corps. Cette seconde dynamique a été appelée dynamique locale, puisqu'elle définit les équations différentielles partielles de la poutre. Contrairement aux travaux originels de J. Lighthill, le premier ensemble est déduit des "équations d'équilibre de Newton-Euler" appliquées au volume

de contrôle déformable, tandis que le second, absent des travaux de Lighthill, a été déduit des équations de Poincaré-Cosserat qui remplacent ici celles d'Euler-Lagrange dans le cadre de la méthode des potentiels de Kirchhoff. Ces extensions du modèle originel de J. Lighthill ont été réalisées en profitant de l'adéquation naturelle de la théorie des poutres Cosserat et de celle du corps mince. En effet, grâce au choix de la cinématique de Kirchhoff, la *S.B.T.* du fluide prolonge naturellement la *C.B.T.* du solide. Enfin, ces résultats seront utilisés dans le prochain chapitre pour résoudre le problème de l'intégration numérique de la dynamique du poisson auto-propulsé. En particulier, les équations (5.58)-(5.59) seront exploitées afin d'établir la dynamique externe qui règle le mouvement de la tête quand le corps subit des variations temporelles imposées de sa forme. En outre, grâce à la dynamique locale ((5.65)-(5.66)), l'algorithme proposé pourra calculer la loi des couples internes à partir de la connaissance du mouvement imposé du corps. Enfin, nous avons également prêté une attention particulière à la réduction de la cinématique de l'écoulement, à la base de la réduction de la "cinétique" et de la "dynamique" du fluide. En effet, la prolongation du système de coordonnées de la poutre Cosserat au volume de contrôle nous a permis de déduire les équations "tranche par tranche" du corps mince à partir de celles de l'écoulement potentiel 3-D, et ce tout en soulignant les hypothèses nécessaires à cette réduction. Plus précisément, cette réduction requière outre que le corps soit fin, qu'il subisse aussi de petites déformations (ici les courbures). Qui plus est, nous avons démontré que dans la *L.A.E.B.T.*, la cinématique du fluide est calculée dans la configuration droite du corps, tandis que les conditions limites de Neumann, comme toutes les autres quantités liées au fluide, sont compatibles avec le caractère non-linéaire de la théorie de poutre géométriquement exacte. Cet écart entre les deux théories (*C.B.T.* et *S.B.T.*) tend à expliquer pourquoi le modèle de J. Lighthill est souvent qualifié d'"heuristique". En particulier, il est clair que quand les courbures sont finies, les tranches de fluide se mélangeront nécessairement et la théorie du corps fin, naturellement dédiée aux petites perturbations de l'écoulement autour du corps droit, échouera. Cependant, plusieurs arguments tendent à justifier ce modèle :

1. En premier lieu, le corps a de moins en moins d'influence sur le fluide quand on s'éloigne du poisson, rendant légitime de négliger les singularités du système de coordonnées du corps.
2. Un fois l'hypothèse des petites déformations admises dans la réduction de la cinématique, tous les développements suivants sont conduits de manières exactes et donnent finalement un modèle analytique simple adapté à la commande "temps réel".
3. Enfin, une fois corrigé par un modèle résistif, ce modèle donne de très bons résultats par rapport à ceux obtenus par un solveur Navier-Stokes (ici ISIS-CFD, cf. [64]),

comme nous le montrerons dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Essais Numériques.

6.1 Introduction.

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme de la nage anguilliforme dévolu à la commande en "temps réel" d'un robot anguille. Ce travail est un challenge pour la communauté biomimétique comme l'a récemment souligné [24]. Notre solution est basée sur les idées originales de J. Lighthill et sur la théorie des poutres Cosserat [25] comme celle de [97], utilisée dans les années 1980 par J.C. Simo dans l'approche géométriquement exacte de la méthode des éléments finis [108, 14]. L'anguille a été considérée dans le chapitre § 5 comme une poutre non-linéaire continûment actionnée le long de ces axes matériels. Dans le domaine de la "bio-fluid dynamics", de telles approches continues ont été intensivement utilisées par [126, 121, 21, 93], en particulier pour étudier la dynamique des muscles des poissons. Dans le cas de cet animal, les efforts produits par les muscles équilibrent les forces hydrodynamiques et inertielles du corps tout en déformant les tissus, la peau et la colonne vertébrale chacun réglés par une loi de comportement qui lui est propre. En ce qui concerne notre robot anguille, tenant compte des choix technologiques présentés dans le chapitre § 1, les inerties de la poutre modéliseront celles des plate-formes parallèles, tandis qu'une loi de comportement interne réglant les déformations en fonction des efforts (par exemple de nature visco-élastique comme dans [21]) modélisera l'organe flexible externe (cf. figure 6.1) pour l'instant négligé (i.e. idéalement modélisé de façon purement géométrique).

Plus précisément, ce chapitre traite de l'exploitation numérique des résultats analytiques du chapitre § 5 et reconsidère les points essentiels que sont : les dynamiques "globale" (ou "externe") et "locale" (ou "interne"). En particulier, ces deux jeux d'équations seront intégrés dans un algorithme récemment proposé dans [11] et permettant de calculer en "temps réel" le mouvement de l'anguille quand elle est soumise à un champ de déformation le long de sa colonne vertébrale. De plus, l'algorithme donnera aussi comme

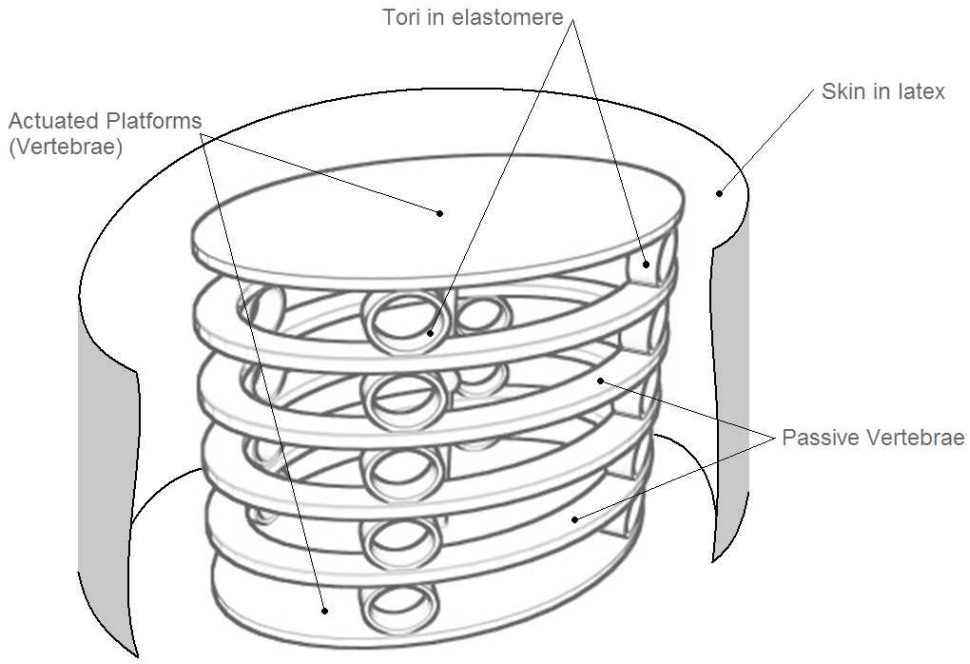


FIGURE 6.1 – La peau du robot anguille.

sorties la distribution des couples internes qui doit-être appliquée sur les sections transverses afin de fournir les mouvements désirés. Cet algorithme est basé sur la "philosophie de Newton-Euler" de la robotique [75, 33, 10, 34], où le terme "Newton-Euler", correspond ici à la loi de la résultante dynamique (dite de Newton) couplée au théorème du moment cinétique (dû à Euler), les deux étant ici appliqués aux corps rigides d'un robot sériel. D'ordinaire dévolu au système multi-corps, cette approche a l'avantage de remplacer les calculs complexes de la dynamique (inverse et directe cf. [59]) par des calculs récursifs par rapport aux index des corps, réalisés de la base du manipulateur à son outil (récurrences avants sur les vitesses et les accélérations), et inversement de l'outil à la base (récurrences arrières sur les torseurs inter-corps) [60]. Il est montré dans [11] qu'une poutre Cosserat actionnée de façon interne n'est rien d'autre qu'une version continue d'un robot multi-corps, où le label des sections transverses de la poutre remplace l'index discret des corps. Sur la base de cette remarque, les récurrences (avants et arrières) du modèle dynamique inverse des "robots discrets" sont remplacées par des équations différentielles ordinaires (e.d.o.) intégrées le long de l'axe de la poutre à chaque instant d'une boucle temporelle globale. Plus précisément, basée sur l'équilibre globale ((5.58), (5.59)) du chapitre § 5, la première boucle calcule les accélérations courantes de la tête que l'on intègre deux fois pour obtenir son état. Ensuite, et toujours dans la même boucle de temps, la seconde boucle spatiale calcule les couples internes de commande grâce à la dynamique locale ((5.65),(5.66)) du chapitre § 5. A ce niveau des nos investigations, l'algorithme est basé

sur un modèle purement réactif des forces de contact (cf. chapitre § 5). Aussi, afin d'améliorer sa précision sans compromettre sa simplicité, nous lui ajouterons dans ce chapitre un modèle résistif simple basé sur l'hypothèse du comportement "tranche par tranche" des corps minces et sur les résultats standards relatifs aux forces de traînée déduits de la mécanique expérimentale des fluides [50]. Enfin, le modèle analytique sera comparé à un solveur de référence de type Navier-Stokes. En ce qui concerne ce dernier point, la plus part des résultats relatifs au problème de la locomotion des poissons obtenus aujourd'hui sur des solveurs Navier-Stokes n'intègrent pas le mouvement auto-propulsé de l'animal, mais plutôt celui du fluide autour d'un corps subissant des mouvements superposés (cf. [74]). Cependant, les auteurs de [18] ont proposé un simulateur Navier-Stokes 2-D autour d'un corps déformable auto-propulsé. Néanmoins, leurs investigations se sont restreintes à la nage en ligne droite avec des géométries très simples. Les auteurs de [32] ont également réalisé plusieurs simulations du même type en imposant cette fois-ci des couples internes de commande le long du corps. Enfin, le problème complexe de la "simulation Navier-Stokes" d'un poison auto-propulsé de géométrie 3-D réaliste, a été récemment résolu par nos partenaires du Laboratoire de Mécanique des Fluides de Nantes [64, 65] dans le contexte du développement du logiciel ISIS-CFD. Ce solveur a été utilisé ici en collaboration avec A. Leroyer pour comparer et éprouver notre modèle analytique.

Ce chapitre est structuré comme suit. La prochaine section (§ 6.2) traite de la cinématique du corps de l'anguille. Ce modèle nous permet de récupérer les champs de transformations, de torseurs cinématiques et d'accélération le long de la poutre à partir des lois horaires en courbure, de l'état et des accélérations de la tête. Dans la section suivante (§ 6.3), l'équilibre globale ((5.58), (5.59)) est reconsidérée afin d'en extraire la dynamique 3-D de la tête nécessaire pour le calcul des accélérations de la poutre. Dans § 6.4, la dynamique locale ((5.65), (5.66)) du chapitre § 5 est aussi reconsidérée dans la perspective de l'inclure dans l'algorithme de simulation afin de calculer les couples internes. Enfin nous détaillons l'algorithme dans § 6.5, et nous l'améliorerons dans § 6.6 en ajoutant au modèle purement réactif, des termes résistifs identifiés grâce aux simulations Navier-Stokes. Finalement, ce chapitre se termine (cf. § 6.8) avec quelques tests numériques et comparaisons avec le solveur CFD-ISIS. Dans ces tests, nous investigerons des allures planes et tridimensionnelles comme la nage ondulante rectiligne, le virage plan, le freinage et la spirale 3-D. Comme nous l'avons indiqué, tous les tests ont été réalisés en "temps réel". De plus, pour tous les scénarios plans testés, le modèle analytique présenté dans ce chapitre donne une erreur inférieure à 10% par rapport à Navier-Stokes (référence qui à l'heure actuelle est restreint à la nage plane).

6.2 La cinématique du corps.

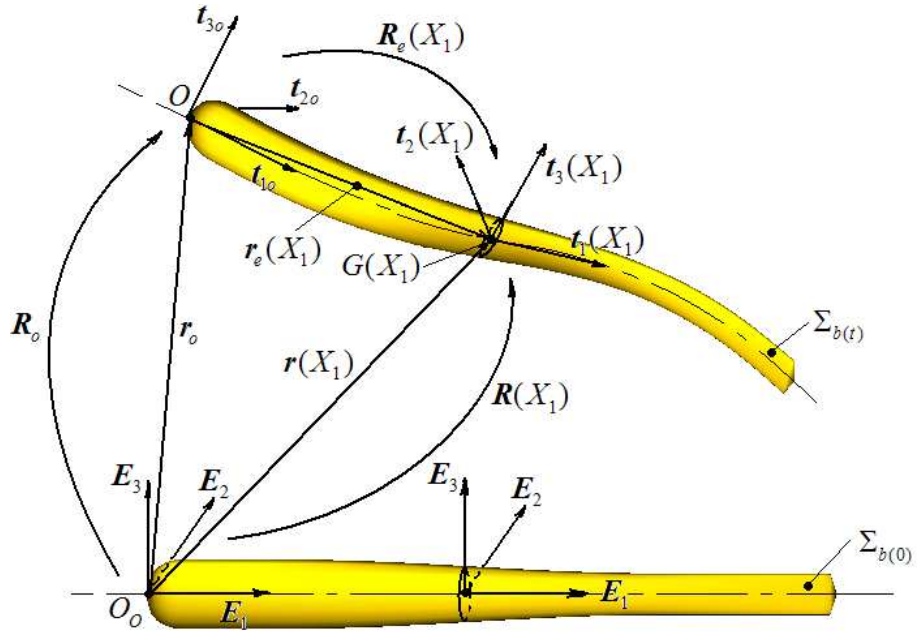


FIGURE 6.2 – Notations générales relatives à la cinématique du corps.

A présent, nous allons rappeler la cinématique continue de l'anguille telle qu'introduite dans [11] quand elle est excitée par la loi d'évolution en courbure suivante (l'indice "d" signifie "*désiré*") :

$$X_1 \in [0,1] \mapsto \boldsymbol{k}_d(t, X_1) = K_{d,2}(t, X_1)\boldsymbol{t}_2(X_1) + K_{d,3}\boldsymbol{t}_3(X_1) \ . \tag{6.1}$$

Cette loi peut-être alternativement définie dans l'espace matériel (configuration de référence de la poutre) comme $\boldsymbol{K}_d = \boldsymbol{R}^T \cdot \boldsymbol{k}_d = K_{d,2}(t, X_1)\boldsymbol{E}_2 + K_{d,3}(t, X_1)\boldsymbol{E}_3$. A partir de (6.1) et de la connaissance des position, orientation, vitesses et accélérations de la tête, nous pouvons complètement recouvrer les configurations, vitesses et accélérations des sections transverses le long de la poutre. Ceci est fait grâce aux modèles continus des trois sous-sections à suivre, qui utilisent les notations suivantes : $\boldsymbol{R}(0) \triangleq \boldsymbol{R}_o$, est l'orientation de la première section de la poutre (i.e. la tête), $\boldsymbol{r}(0) \triangleq \boldsymbol{r}_o$ est sa position, $\boldsymbol{\omega}(0) = \left((\partial \boldsymbol{R}/\partial t) \cdot \boldsymbol{R}^T\right)^\vee(0) \triangleq \boldsymbol{\omega}_o$, et $(\partial \boldsymbol{r}/\partial t)(0) \triangleq d\boldsymbol{r}_o/dt$ sont respectivement les vitesses angulaire et linéaire de la tête, et enfin $(\partial \boldsymbol{\omega}/\partial t)(0) \triangleq d\boldsymbol{\omega}_o/dt$, $(\partial^2 \boldsymbol{r}/\partial t^2)(0) \triangleq d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2$ sont respectivement ses accélérations angulaire et linéaire. Excepter ces nouvelles notations, nous utiliserons celles du chapitre précédent, dont la plupart de celles-ci sont rapportées sur la figure 6.2.

6.2.1 Le modèle géométrique continu.

Le modèle géométrique est simplement déduit de la définition du tenseur de courbure, et des contraintes de Kirchhoff et d'inextensibilité ((5.16), (5.15)) :

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X_1} = \boldsymbol{R} \cdot \hat{\boldsymbol{K}}_d \qquad , \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial X_1} = \boldsymbol{t}_1 \ . \tag{6.2}$$

6.2.2 Modèle cinématique continu des vitesses.

En dérivant temporellement (6.2), nous trouvons :

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial X_1} = \boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_d}{\partial t} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t}_1 \ . \tag{6.3}$$

6.2.3 Modèle cinématique continu des accélérations.

De nouveau, la dérivation temporelle de (6.3), donne :

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}\right) = \boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{K}_d}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_d}{\partial t} \ , \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \times \boldsymbol{t}_1 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{t}_1) \ . \tag{6.5}$$

Notons que (6.2)-(6.4) sont des équations aux dérivées partielles (ou e.d.p) du premier ordre en espace et comme tels elles requièrent les conditions aux limites suivantes : $\boldsymbol{R}(0) = \boldsymbol{R}_o$, $\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{r}_o$ pour (6.2), $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_o$, $(\partial \boldsymbol{r}/\partial t)(0) = d\boldsymbol{r}_o/dt$ pour (6.3) et $(\partial \boldsymbol{\omega}/\partial t)(0) = d\boldsymbol{\omega}_o/dt$, $(\partial^2 \boldsymbol{r}/\partial t^2)(0) = d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2$ pour (6.4)-(6.5). De plus, remarquons que (6.2)-(6.5) seront utilisées dans l'algorithme de simulation comme e.d.o. en espace et intégrées à chaque pas de la boucle de temps. Afin de réaliser ceci, il nous faut préalablement connaître l'état de la tête $(\boldsymbol{R}_o, \boldsymbol{r}_o, \boldsymbol{\omega}_o, d\boldsymbol{r}_o/dt)$, mais aussi ses accélérations : $(d\boldsymbol{\omega}_o/dt, d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2)$. Par conséquent, l'algorithme aura à calculer les "accélérations tête". Pour cela, il nous faut reconsidérer les équations d'équilibre globales régissant le mouvement de la matière contenue dans le volume de contrôle, afin d'en extraire les équations de la dynamique dite "de la tête".

6.3 La dynamique de la tête.

Dans cette section, nous commencerons par reconsidérer l'équilibre dynamique de la matière incluse à chaque pas de temps dans le volume de contrôle $\mathcal{D}_{(t)}$, i.e. ((5.58), (5.59)). Ces deux équations vont être réécrites afin d'exhiber la dynamique de la tête de l'anguille quand son corps est excité par la loi d'évolution temporelle de courbure (6.1). Cette

dynamique sera mise sous la forme suivante, manipulant des torseurs, ici relatifs (ou réduit) à l'extrémité du nez de l'animal $\boldsymbol{r}_o$:

$$\mathbb{I}_o \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\omega}_o/dt \\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2 \end{pmatrix} = \mathbb{F}_{in,o} + \mathbb{F}_{p,o} + \mathbb{F}_{c,o} \ , \tag{6.6}$$

où $\mathbb{I}_o$ est le tenseur d'inertie 6×6, $\mathbb{F}_{in,o}$ est le torseur des forces d'inertie, $\mathbb{F}_{p,o}$ (respectivement $\mathbb{F}_{c,o}$) est le torseur des forces de pression (respectivement de convection) appliquées sur les frontières du volume de contrôle mobile. Afin d'obtenir la forme (6.6), introduisons les opérateurs suivants :

$$\mathbb{T}(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} & \mathbf{0} \\ \hat{\boldsymbol{x}}^T & \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{T}^T(\boldsymbol{x}) \triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\delta} & \hat{\boldsymbol{x}} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\delta} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

où $\boldsymbol{\delta}$ est le tenseur de Kronecker, et $\mathbb{T}(\boldsymbol{x})$ (respectivement $\mathbb{T}^T(\boldsymbol{x})$) dénote l'opérateur de $se(3) \to se(3)$ (respectivement " de $se(3)^\star \to se(3)^\star$") permettant de transporter un torseur cinématique (respectivement un torseur de forces) d'un point fixe $\boldsymbol{x}$ de l'espace ambiant $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ sur l'origine de $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ (cf. [9]).

Avec ces notations, la dynamique globale ((5.58), (5.59)) peut être réécrite sous la forme d'un équilibre de torseur, comme suit :

$$\int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} dX_1 + \begin{pmatrix} \int_0^1 \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \boldsymbol{p}_f \, dX_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}(1)) \cdot \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \\ \boldsymbol{p}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \end{pmatrix} \right] \ . \tag{6.8}$$

Remplaçons en premier lieu $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{r}(X_1) \triangleq \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{r}_e$ et $\boldsymbol{x} \triangleq \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{x}_e$, ainsi grâce à la linéarité de l'opérateur (6.7), (6.8) devient :

$$\int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f + \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} dX_1 + \begin{pmatrix} \int_0^1 \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \boldsymbol{p}_f \, dX_1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e(1)) \cdot \left[\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \\ \boldsymbol{p}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \end{pmatrix} \right] \ . \tag{6.9}$$

Nous allons maintenant reconsidérer (6.9) afin d'exhiber la forme du premier membre de (6.6). Pour cela, commençons par rappeler les définitions des densités linéaire et angulaire de quantités de mouvement du fluide et du corps (5.36), (5.42) et (5.43). Pour le corps, nous avons :

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_b \\ \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_b & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m}_b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \partial \boldsymbol{r}/\partial t \end{pmatrix} \triangleq \mathbb{I}_b \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \partial \boldsymbol{r}/\partial t \end{pmatrix} \ , \tag{6.10}$$

avec $\boldsymbol{m}_b \triangleq \mu \boldsymbol{\delta}$, et $X_1 \mapsto \mu(X_1)$ est la masse linéique de la poutre. Concernant le fluide il nous faut invoquer le concept d'impulse pour écrire :

$$X_1 \mapsto \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f \\ \boldsymbol{p}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_f & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{m}_f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \partial \boldsymbol{r}/\partial t \end{pmatrix} \triangleq \mathbb{I}_f \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \partial \boldsymbol{r}/\partial t \end{pmatrix} \ , \tag{6.11}$$

avec ces définitions, l'équation d'équilibre globale (6.9) peut être mise sous la forme :

$$\int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbb{I} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \partial \boldsymbol{r}/\partial t \end{pmatrix} \right) dX_1 + \begin{pmatrix} \int_0^1 \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \boldsymbol{p}_f dX_1 \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e(1)) \cdot \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \\ \boldsymbol{p}_f(1)\mathcal{V}_1(1) \end{pmatrix} \right] \ , \tag{6.12}$$

où nous avons introduit la densité linéique totale (corps et fluide) du tenseur d'inertie $\mathbb{I} \triangleq \mathbb{I}_b + \mathbb{I}_f$. Ainsi, afin de dériver la dynamique de la tête, nous avons besoins de faire apparaître les inconnues d'accélération de cette dernière dans les quantités cinétiques. A cette fin, posons pour n'importe quel $X_1 \in [0,1]$ que $\boldsymbol{r}_e(X_1) \triangleq \boldsymbol{r}(X_1) - \boldsymbol{r}_o$ et que $\boldsymbol{R}_e(X_1) \triangleq \boldsymbol{R}_o^T \cdot \boldsymbol{R}(X_1)$. Ce re-paramètrage des champs de position et d'orientation, nous donne la décomposition suivante des champs d'accélération le long de la poutre :

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}(X_1) \ = \ \frac{d^2 \boldsymbol{r}_o}{dt^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_o}{dt} \times \boldsymbol{r}_e(X_1) + \boldsymbol{\omega}_o \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}(X_1) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}(X_1) \ , \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}(X_1) \ = \ \frac{d\boldsymbol{\omega}_o}{dt} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_e}{\partial t}(X_1) \ , \tag{6.14}$$

soit encore, en terme de torseurs :

$$\begin{pmatrix} \partial \boldsymbol{\omega}/\partial t \\ \partial^2 \boldsymbol{r}/\partial t^2 \end{pmatrix} = \mathbb{T}(\boldsymbol{r}_e) \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\omega}_o/dt \\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial \boldsymbol{\omega}_e/\partial t \\ \boldsymbol{\gamma}_e \end{pmatrix} \ , \tag{6.15}$$

où nous avons introduit les deux champs d'accélération :

$$X_1 \ \mapsto \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_e}{\partial t}(X_1) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\boldsymbol{R}_e^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{R}_e}{\partial t} \right) \right]^\vee \ , \tag{6.16}$$

$$X_1 \quad \mapsto \boldsymbol{\gamma}_e(X_1) = \boldsymbol{\omega}_o \times \frac{\partial \boldsymbol{r}_e}{\partial t}(X_1) + \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}_e}{\partial t^2}(X_1) \ . \tag{6.17}$$

Anticipant légèrement sur la suite, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que $\partial\boldsymbol{\omega}_e/\partial t$ et $\boldsymbol{\gamma}_e$ définissent les partis angulaire et linéaire des accélérations le long de la poutre qui ne dépendent pas de $d\boldsymbol{\omega}_o/dt$ et $d^2\boldsymbol{r}_o/dt$. Par conséquent, elles peuvent être simplement calculées à chaque pas de temps - à partir de la connaissance de l'état de la poutre et des entrées (6.1) - par intégration spatiale de (6.4)-(6.5) sous les conditions aux limites : $(\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t(0) = \mathbf{0}$ et $\partial^2\boldsymbol{r}/\partial t^2(0) = \mathbf{0}$. Ceci sera fait dans l'algorithme de la section § 6.5. Pour le moment, l'insertion de la décomposition (6.15) dans le premier terme du premier membre de (6.12), nous donne :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e)\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \partial\boldsymbol{r}/\partial t\end{pmatrix}\right] dX^1 &= \int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e)\cdot\left[\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t\\ \partial^2\boldsymbol{r}/\partial t^2\end{pmatrix} + \frac{\partial\mathbb{I}}{\partial t}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \partial\boldsymbol{r}/\partial t\end{pmatrix}\right] dX_1 \\ &= \mathbb{I}_o\cdot\begin{pmatrix}d\boldsymbol{\omega}_o/dt\\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2\end{pmatrix} + \int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e)\cdot\left[\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\partial\boldsymbol{\omega}_e/\partial t\\ \boldsymbol{\gamma}_e\end{pmatrix} + \frac{\partial\mathbb{I}}{\partial t}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \partial\boldsymbol{r}/\partial t\end{pmatrix}\right] dX_1 \ ,\end{aligned} \tag{6.18}$$

où l'on voit apparaître le tenseur des inerties généralisées 6×6 des tranches de fluide et corps exprimé sur le nez de l'anguille :

$$\mathbb{I}_o = \int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e)\cdot\mathbb{I}(X_1)\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{r}_e)dX_1 \ . \tag{6.19}$$

De plus, un calcul tensoriel sans difficulté montre qu'avec $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_b + \boldsymbol{I}_f$, on a :

$$\frac{\partial\mathbb{I}}{\partial t}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \partial\boldsymbol{r}/\partial t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega})\\ \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\partial\boldsymbol{r}/\partial t) - \boldsymbol{m}_f\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\partial\boldsymbol{r}/\partial t)\end{pmatrix} \ . \tag{6.20}$$

Aussi, grâce à (6.18) et (6.20), (6.9) peut être réécrite suivant la forme (6.6), où $\mathbb{I}_0$ est défini par (6.19), et :

$$\mathbb{F}_{in,o} = \int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r}_e)\cdot\left[\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}_e}{\partial t}\\ \boldsymbol{\gamma}_e\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega}) + \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})\\ \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}) - \boldsymbol{m}_f\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})\end{pmatrix}\right] dX_1 \ , \tag{6.21}$$

$$\mathbb{F}_{p,o} = \begin{pmatrix}-\boldsymbol{r}_e(1)\times\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1)\\ -\mathcal{T}_f(1)\boldsymbol{t}_1(1)\end{pmatrix} \ , \tag{6.22}$$

$$\mathbb{F}_{c,o} = \begin{pmatrix}\left(\boldsymbol{r}_e(1)\times\boldsymbol{p}_f(1) + \boldsymbol{\sigma}_f(1)\right)\mathcal{V}_1(1)\\ \mathcal{V}_1(1)\boldsymbol{p}_f(1)\end{pmatrix} \ . \tag{6.23}$$

Finalement, l'équation (6.6) et (6.21)-(6.23) règlent la dynamique de la tête.

6.4 Dynamique interne du corps.

Le but de cette section est d'établir les équations qui règlent l'évolution temporelle du champ de couple interne $X_1 \mapsto \boldsymbol{c}(X_1) = C_\alpha(X_1)\boldsymbol{t}_\alpha(X_1)$ nécessaire pour imposer la loi déformation (6.1). Afin d'obtenir ces équations, nous reconsidérerons les e.d.p. du corps de l'anguille de la section § 5.8 ((5.65), (5.67)). Suivant une procédure similaire à celle utilisée pour la dynamique externe, ces équations peuvent être réécrites à présent en fonction de torseurs spatiaux comme suit :

Équation de champ

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\boldsymbol{\sigma}_b+\boldsymbol{\sigma}_f\\ \boldsymbol{p}_b+\boldsymbol{p}_f\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(\partial\boldsymbol{r}/\partial t)\times\boldsymbol{p}_f\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial X_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\ . \tag{6.24}$$

Les conditions aux limites

$$\mathbb{F}(0)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(0)\\ \boldsymbol{n}(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{c}}_-\\ \overline{\boldsymbol{n}}_-\end{pmatrix}=\overline{\mathbb{F}}_-\quad,\quad \mathbb{F}(1)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}(1)\\ \boldsymbol{n}(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\boldsymbol{c}}_+\\ \overline{\boldsymbol{n}}_+\end{pmatrix}=\overline{\mathbb{F}}_+\ , \tag{6.25}$$

où $X_1 \mapsto \mathbb{F}(X_1)$ est le champ linéique de torseurs internes, et $\overline{\mathbb{F}}_-$ et $\overline{\mathbb{F}}_+$ sont les torseurs de forces produites par le fluide sur les deux sections transverses bordant le corps.

En premier lieu, faisons apparaître la cinématique de la poutre dans ces équations. Pour cela, introduisons dans (6.24) les relations (6.10) (6.11). On obtient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\\ \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial X_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\ . \tag{6.26}$$

Ainsi, en raisons de (6.20), ici nous obtenons :

$$\mathbb{I}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\\ \dfrac{\partial^2\boldsymbol{r}}{\partial t^2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega})+\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t}\\ \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{m}_f\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})-\boldsymbol{m}_f\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial t})\end{pmatrix}=\frac{\partial}{\partial X_1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{n}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\boldsymbol{t}_1\times\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\ . \tag{6.27}$$

Finalement, comme le champ de couple de commande est connu dans les repères mobiles des sections, nous utiliserons la relation de "push-forward" : $\boldsymbol{c}(X_1) = \boldsymbol{R}(X_1)\cdot\boldsymbol{C}(X_1)$, où $X_1 \mapsto \boldsymbol{C}(X_1)$ est le champ linéique de couple de commande que nous recherchons. Ainsi, en vertu de :

$$\frac{\partial\boldsymbol{c}}{\partial X_1}=\boldsymbol{R}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{C}}{\partial X_1}+\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{C}\right)\ , \tag{6.28}$$

avec $X_1 \mapsto \boldsymbol{K}(X_1)$ le champ de courbure, la partie translation de (6.27) fournit l'équation réglant $\boldsymbol{n}$ le long de la poutre :

$$\frac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial X_1} = \boldsymbol{m} \cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) - \boldsymbol{m}_f \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) \ , \tag{6.29}$$

où $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_f + \boldsymbol{m}_b$, tandis que la partie angulaire de (6.27) nous donne l'équation gouvernant $\boldsymbol{C}$ le long de la poutre :

$$\frac{\partial \boldsymbol{C}}{\partial X_1} = \boldsymbol{R}^T \cdot \left(\boldsymbol{I} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) - \boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{n} \right) - \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{C} \ . \tag{6.30}$$

Dans le contexte de l'algorithme de simulation, (6.29) et (6.30) seront utilisées comme des e.d.o. spatiales intégrées à chaque pas de la boucle temporelle. Afin d'initialiser ces deux e.d.o. nous utilisons l'une des deux conditions aux limites (6.25). Cette liberté dans le choix de la condition initiale est due au caractère redondant des équations de la dynamique (6.8) et (6.24)-(6.25). En fait, adoptant pour l'instant $\mathbb{F}(0) = \overline{\mathbb{F}}_-$ comme condition initiale, force l'algorithme à intégrer "en avançant" (6.29) et (6.30), i.e. à partir de $X_1 = 0$ jusqu'à $X_1 = 1$. Dans ce cas, la seconde condition limite $\mathbb{F}(1) = \overline{\mathbb{F}}_+$, joue le rôle de test de vérification de la cohérence interne de l'algorithme. Cet excès de conditions aux limites a été pointé notamment dans [93] et résolu par la satisfaction de ce que l'on appel la "recoil-condition", dans notre cas, sans objet, en vertu du caractère auto-propulsé de notre modèle.

Enfin, les deux conditions (6.25) devront être exprimées comme des fonctions de la cinématique de l'anguille. Pour la queue, ceci-ci est fait en remarquant que "le torseur de frontière" n'est autre que celui produit par les forces de pression et de convection appliquées sur le plan caudale, tel que donné par (6.23) :

$$\mathbb{F}(1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}(1) \\ \boldsymbol{n}(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{f1}(1)\Omega_1(1)\mathcal{V}_1(1)\boldsymbol{t}_1(1) \\ -\frac{1}{2}\left(m_{f2}(1)\mathcal{V}_2^2(1) + I_{f1}\Omega_1^2(1)\right)\boldsymbol{t}_1 + m_{f2}(1)\mathcal{V}_1(1)\mathcal{V}_2(1)\boldsymbol{t}_2(1) \end{pmatrix} . \tag{6.31}$$

En ce qui concerne le nez, la théorie du corps fin impose qu'aucune force de masses ajoutées ne s'applique sur la première des sections transverses de l'animal, qui se réduit à un point. Néanmoins, afin d'améliorer la précision de la dynamique, nous modéliserons l'action de l'écoulement axiale du fluide relativement au corps par une force de masse ajoutée concentrée, appliquée sur le nez et alignée avec l'axe principal du corps :

$$\mathbb{F}(0) = \mathbb{I}_{ax} \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\omega}_o/dt \\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2 \end{pmatrix} \qquad \text{avec :} \quad \mathbb{I}_{ax} \triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & m_{ax}\boldsymbol{t}_1(0) \otimes \boldsymbol{t}_1(0) \end{pmatrix} , \tag{6.32}$$

où m_{ax} est la masse ajoutée modélisant le fluide poussé devant le nez par l'accélération axiale du poisson.

6.5 L'algorithme numérique.

Basé sur les résultats précédents, nous pouvons en extraire un algorithme [11] dont les entrées sont les variables d'état de la tête de l'anguille $(\boldsymbol{r}_o, d\boldsymbol{r}_o/dt, \boldsymbol{R}_o, \boldsymbol{\omega}_o)$, ainsi que l'évolution temporelle désirée de la courbure du corps (et ses dérivées temporelles) :

$$\forall (t, X_1) \mapsto \left(\boldsymbol{K}_d(X_1,t), \frac{\partial \boldsymbol{K}_d}{\partial t}(X_1,t), \frac{\partial^2 \boldsymbol{K}_d}{\partial t^2}(X_1,t) \right) \ .$$

Quant aux sorties, elles coïncident avec les accélérations de la tête et la distribution de couples de commande requise pour imposer (6.1), i.e. :

$$t \mapsto \left(\frac{d^2 \boldsymbol{r}_o}{dt^2}(t), \frac{d\boldsymbol{\omega}_o}{dt}(t), \boldsymbol{C}_r(X_1,t) \, \forall X_1 \right) \ .$$

Enfin, l'algorithme est basé sur trois boucles numériques d'intégration. La première est relative au temps et nous permet de mettre à jour l'état de la tête ; les deux autres sont en espace et sont incluses dans la première. La première boucle d'intégration spatiale calcule l'accélération courante de la tête, tandis que la seconde calcule la distribution de couples de commande appliquée sur les vertèbres.

6.5.1 Première boucle d'intégration spatiale.

La première boucle spatiale commence avec les e.d.p. (6.2)-(6.5), considérées comme de simples e.d.o. spatiales à l'instant courant t de la boucle temporelle. Notons que si (6.2) et (6.3) sont directement initialisées par l'état courant de la tête, (6.4) et (6.5) sont ici intégrées avec : $\left(d\boldsymbol{\omega}_o/dt, d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2\right) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$. Par conséquent, cette première intégration par rapport à la variable d'espace X_1 donne les champs : $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{\omega}, \partial \boldsymbol{r}/\partial t, \partial \boldsymbol{\omega}_e/\partial t$ and $\boldsymbol{\gamma}_e$.

Aussi, à partir de (6.19) et (6.21), $\mathbb{I}_o$ et $\mathbb{F}_{in,o}$, qui apparaissent tous deux dans la dynamique de la tête (6.6), sont calculés par intégration spatiale des deux e.d.o. suivantes incluses dans la même ("première") boucle :

$$\frac{\partial \mathbb{I}_o}{\partial X_1} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) \cdot \mathbb{I}(X_1) \cdot \mathbb{T}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) \ ,$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial \mathbb{F}_{in,o}}{\partial X_1} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) \cdot \left[\mathbb{I} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}_e}{\partial t} \\ \boldsymbol{\gamma}_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) - \boldsymbol{m}_f \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) \end{pmatrix} \right] \ ,$$

où les conditions initiales sont : $\mathbb{I}_o(0) = \mathbb{I}_{ax}$, $\mathbb{F}_{in,o}(0) = \mathbf{0}$.

En second lieu, les deux autres torseurs de (6.6) sont simplement déduits de l'état de l'anguille via (6.22) et (6.23). Pour les besoins de la simulation, (6.6) est exprimée dans le repère de la tête. Finalement, une fois que la première équation de (6.2) est paramétrée par un champ de quaternions (noté $\boldsymbol{q}$, cf. annexe D), toutes les intégrations de cette boucle peuvent être regroupées dans un unique système du premier ordre de la forme suivante :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_1}{\partial X_1} = \boldsymbol{f}_1 \left(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{K}_d(X_1,t), \frac{\partial \boldsymbol{K}_d}{\partial t}(X_1,t), \frac{\partial^2 \boldsymbol{K}_d}{\partial t^2}(X_1,t) \right) \quad , \quad \boldsymbol{x}_1(X_1=0) = \boldsymbol{x}_{1o} \ ,$$

où nous avons introduit le vecteur d'état spatiale :

$$\boldsymbol{x}_1 = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\gamma}_e, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_e}{\partial t}, vect(\mathbb{I}_o), \mathbb{F}_{in,o} \right) \ ,$$

avec les conditions initiales :

$$\boldsymbol{x}_{1o} = \left(\boldsymbol{r}_o, \boldsymbol{q}_o, \frac{d\boldsymbol{r}_o}{dt}, \boldsymbol{\omega}_o, \mathbf{0}, \mathbf{0}, vect(\mathbb{I}_{ax}), \mathbf{0} \right) \ ,$$

et $vect(\mathbb{I}_o)$, le vecteur 10×1 des composantes indépendantes du tenseur $\mathbb{I}_o$. A la fin de l'intégration de cette première boucle spatiale, nous obtenons les accélérations courantes de la tête à partir de (6.6), i.e. :

$$\begin{pmatrix} d\boldsymbol{\omega}_o/dt \\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_o^{-1} \cdot (\mathbb{F}_{in,o} + \mathbb{F}_{p,o} + \mathbb{F}_{c,o}) \ , \tag{6.33}$$

qui initialisent la seconde boucle spatiale.

6.5.2 Deuxième boucle d'intégration spatiale.

Reconsidérons l'e.d.o. (6.4), maintenant initialisée par $d\boldsymbol{\omega}_o/dt$ et $d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2$ toutes deux déduites de (6.33). Nous pouvons alors calculer par intégration selon la variable d'espace X_1, les champs d'accélération galiléens $\partial\boldsymbol{\omega}/\partial t$ et $\partial^2\boldsymbol{r}/\partial t^2$ le long de la poutre à l'instant t. Puis, par intégration spatiale de (6.29) (respectivement (6.30)) nous calculons le champ de force interne $\boldsymbol{n}$ (respectivement le champ de couple interne $\boldsymbol{C}$) le long de la poutre au temps courant de la simulation. Ces deux dernières e.d.o. sont intégrées "en avançant" (de la tête vers la queue) selon la variable d'espace X_1 et initialisées grâce à (6.32). Enfin, toutes les intégrations de cette seconde boucle peuvent être regroupées dans le système du première ordre en espace suivant :

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}_2}{\partial X_1} = \boldsymbol{f}_2 \left(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{K}_d(X_1,t), \frac{\partial \boldsymbol{K}_d}{\partial t}(X_1,t), \frac{\partial^2 \boldsymbol{K}_d}{\partial t^2}(X_1,t) \right) \quad , \quad \boldsymbol{x}_2(X_1=0) = \boldsymbol{x}_{2o} \ ,$$

avec :

$$\boldsymbol{x}_2(X_1) = \left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{q}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \boldsymbol{\omega}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2}, \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{C} \right) \ ,$$

et les conditions aux limites :

$$\boldsymbol{x}_{2o} = \left(\boldsymbol{r}_o, \boldsymbol{q}_o, \frac{d\boldsymbol{r}_o}{dt}, \boldsymbol{\omega}_o, \frac{d^2\boldsymbol{r}_o}{dt^2}, \frac{d\boldsymbol{\omega}_o}{dt}, \boldsymbol{n}(0), \boldsymbol{0} \right) \ ,$$

où $\boldsymbol{n}(0)$ est fixé par la résultante de (6.32).

Finalement, une fois cette seconde boucle d'intégration achevée, les accélérations de la tête sont intégrées deux fois afin de mettre à jour son état. Puis le temps est incrémenté d'un pas et l'algorithme reprend...

6.6 Les termes résistifs correctifs.

Pour l'instant, le modèle proposé est basé sur l'hypothèse des fluides parfaits. Comme évoquer dans l'introduction du chapitre (5) un tel modèle, appelé "modèle réactif" par J. Lighthill, est généralement opposé à une version "résistive" tenant compte uniquement des forces résistives dues à la viscosité du fluide, telles que gouvernées par les équations linéaires de Stokes. Dans notre cas, afin d'améliorer le modèle purement réactif proposé jusqu'ici, deux corrections sont ajoutées à celui-ci. La première des deux (a) poursuit la théorie du corps fin en modélisant les forces de traînée de pression et visqueuse "tranche par tranche". Le but de la seconde correction (b) consiste à modéliser la résistance locale imprimée par le fluide sur le nez ogivale. Finalement ceci revient à ajouter au modèle précédent :

1. la densité linéique de torseurs résistifs (spatiaux) :

$$X_1 \in]0,1] \mapsto \overline{\mathbb{F}}_{res}(X_1) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{res}(X_1) \\ \\ \boldsymbol{n}_{res}(X_1) \end{pmatrix} \in se(3)^\star \ , \tag{6.34}$$

2. la force de traînée appliquée sur le nez par le champ de pression dû au mouvement axial du poisson, qui est directement modélisée par le torseur de forces relatif au nez :

$$\overline{\mathbb{F}}_{res,ax} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \\ \boldsymbol{n}_{res,ax} \end{pmatrix} \ . \tag{6.35}$$

Détaillons à présent ces deux sources de correction. Concernant (6.34), le modèle de Morison est invoqué [86], et adapté à une poutre de section elliptique, i.e. :

- $\boldsymbol{n}_{res}(X_1)dX_1$ est la force résistive exercée sur la section transverse d'abscisse X_1 avec :

$$\boldsymbol{n}_{res}(X_1) = -\frac{1}{2}\rho_f P C_f \left|\mathcal{V}_1\right| \mathcal{V}_1 \boldsymbol{t}_1 - \frac{1}{2}\rho_f 2bC_{d2} \left|\mathcal{V}_2\right| \mathcal{V}_2 \boldsymbol{t}_2 - \frac{1}{2}\rho_f 2aC_{d3} \left|\mathcal{V}_3\right| \mathcal{V}_3 \boldsymbol{t}_3 \ , \quad (6.36)$$

  où P, a, b sont respectivement les périmètre et longueurs des petit et grand axes de la section elliptique X_1. C_f représente le coefficient adimensionnel de frottement axiale, et (C_{d2}, C_{d3}) sont les coefficients adimensionnels de traînée de la section selon ces deux dimensions transverses.

- $\boldsymbol{c}_{res}(X_1)dX_1$ est le couple résistif appliqué autour du vecteur unitaire normale à la section transverse X_1, dont nous suggérons à présent la forme suivante :

$$\boldsymbol{c}_{res}(X_1) = -\frac{1}{2}C_{d1} f(a,b) \left|\Omega_1\right| \Omega_1 \boldsymbol{t}_1 \ , \quad (6.37)$$

  où $f(a,b)$ est une fonction de la géométrie de la section, dont la dimension est L^4, tandis que C_{d1} est un coefficient adimensionnel fonction du nombre de Reynolds "angulaire" de la section.

  Considérant à présent (6.35), nous déduisons de la mécanique expérimentale des fluides [50] la forme suivante :

$$\boldsymbol{n}_{res,ax} = -C_p \frac{1}{2}\rho_f \pi ab \mathcal{V}_1(0) \left|\mathcal{V}_1(0)\right| \boldsymbol{t}_1(0) \ , \quad (6.38)$$

  où "πab" représente ici l'aire offerte au fluide par l'anguille quand elle se déplace axialement (cette aire est la projection plane, normale à $\boldsymbol{t}_1(0)$, de la tête ogivale).

Finalement, l'ajout de (6.34) et (6.35) aux développements précédents produit deux changements dans l'algorithme générale précédemment énoncé :

- En premier lieu, la dynamique de la tête (6.6) sera remplacée par :

$$\mathbb{I}_o \cdot \begin{pmatrix} d\boldsymbol{\omega}_o/dt \\ d^2\boldsymbol{r}_o/dt^2 \end{pmatrix} = \mathbb{F}_{in,o} + \mathbb{F}_{p,o} + \mathbb{F}_{c,o} + \mathbb{F}_{res,o} \ , \quad (6.39)$$

où $\mathbb{F}_{res,o}$ dénote le torseur produit par toutes les forces et couples résistifs (6.34)-(6.35) calculable au travers de la "théorie des bandes" de l'ingénierie navale ([66]), sous la forme :

$$\mathbb{F}_{res,o} = \bar{\mathbb{F}}_{res,ax} + \int_0^1 \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{res} \\ \boldsymbol{n}_{res} \end{pmatrix} dX_1 \ . \tag{6.40}$$

Notons que dans l'algorithme, (6.40) est calculée numériquement dans la première boucle spatiale par intégration de l'équation suivante (après $\mathbb{I}_o$ et $\mathbb{F}_{in,o}$) :

$$\frac{\partial \mathbb{F}_{res,o}}{\partial X_1} = \mathbb{T}^T(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_o) \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{res} \\ \boldsymbol{n}_{res} \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbb{F}_{res,o}(0) = \bar{\mathbb{F}}_{res,ax} \ . \tag{6.41}$$

- En second lieu, les équations de champ du corps seront remplacées par :

$$\begin{aligned} \mathbb{I} \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} \\ \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{r}}{\partial t^2} \end{pmatrix} \ + \ & \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{I} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{m}_f \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) - \boldsymbol{m}_f \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}) \end{pmatrix} \\ = \ & \frac{\partial}{\partial X_1} \begin{pmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 \times \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{res} \\ \boldsymbol{n}_{res} \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{6.42}$$

Enfin, notons que les corrections résistives (6.34) et (6.35) ajoutées au modèle réactif ne prennent pas seulement en compte les termes résistifs axiaux modélisant les effets de la traînée visqueuse comme proposés par J. Lighthill, mais aussi les forces transverses de traînée.

6.7 Résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

A présent, nous allons faire une courte présentation du solveur Navier-Stokes de l'équipe de Modélisation Numérique du laboratoire de Mécanique des fluides de l'école Centrale de Nantes qui nous servira par la suite de référence pour éprouver et comparer notre modèle simplifié.

6.7.1 Présentation.

Le solveur ISIS-CFD intégre les équations de Navier-Stokes en moyenne de Reynolds, incompressibles et instationnaires (ou en abrégé "URANSE"). La résolution numérique de ces équations se fait via la méthode numérique des volumes finis. Les équations de transport sont discrétisées sur des maillages non-structurés et l'enveloppe du volume de

contrôle est constituée d'un nombre arbitraire de faces. Le champ de vecteurs vitesses des particules matérielles du fluide est obtenu à partir des lois de bilan de quantité de mouvement et le champ de pression est extrait du principe de la conservation de la masse, transformé en équation de pression. La linéarisation des équations est réalisée par une procédure itérative. Dans le cas des écoulements turbulents, des équations supplémentaires doivent être ajoutées pour modéliser les variables du problème. Plusieurs lois de parois et de proche parois peuvent être utilisées dans ISIS-CFD pour prendre en compte les phénomènes de turbulence. De plus, l'écoulement peut être calculé autour de corps arbitraires rigides ou déformables. Pour chaque corps, le mouvement peut être :

- imposé par la donné d'une loi temporelle explicite de la configuration courante du corps (i.e. position et orientation) ;

- résolu à chaque pas de temps par le couplage des équations URANSE du fluide et des équations de Newton-Euler du solide. Seul l'état initial est imposé.

Pour rappel, les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, dans le cas des écoulements incompressibles de fluide visqueux (sous les conditions isothermes), peuvent s'écrire comme suit :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{V} = 0 \ , \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{\boldsymbol{u}_d} \int_{\mathcal{V}} \rho\, \boldsymbol{u}\, d\mathcal{V} \ &+ \ \int_{\partial\mathcal{V}} \rho\boldsymbol{u}\big(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_d\big)\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{V} \\ &= \ \int_{\mathcal{V}} \big(\rho\boldsymbol{g} - \nabla p\big)\, d\mathcal{V} + \int_{\partial\mathcal{V}} \big(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}_t\big)\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{V} \ , \end{aligned} \tag{6.44}$$

où $\mathcal{V}$ est le volume de contrôle de surface $\partial\mathcal{V}$ se déplaçant à la vitesse $\boldsymbol{u}_d$ dont le vecteur normal sortant unitaire est $\boldsymbol{n}$. $\boldsymbol{u}$ et p représente respectivement la vitesse galiléenne du fluide et sa pression. $\boldsymbol{s}$ et $\boldsymbol{s}_t$ réfèrent respectivement les tenseurs des contraintes visqueuses et turbulentes (ou de Reynolds), de plus $\boldsymbol{g}$ est le vecteur de gravité. $\boldsymbol{s}_t$ est déterminé selon le modèle de turbulence choisi et $\boldsymbol{s}$ est quant à lui déterminé par la loi de comportement des fluides newtoniens incompressibles. Ensuite, $d\,/dt|_{\boldsymbol{u}_d}$ dénote la dérivée temporelle suivant un observateur lié au volume de contrôle. Enfin, quand le volume de contrôle se déplace, ce que l'on appel *la loi de conservation du volume* doit être aussi satisfaite :

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{\boldsymbol{u}_d} \int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V} - \int_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{u}_d\cdot\boldsymbol{n}\, d\partial\mathcal{V} = 0 \ . \tag{6.45}$$

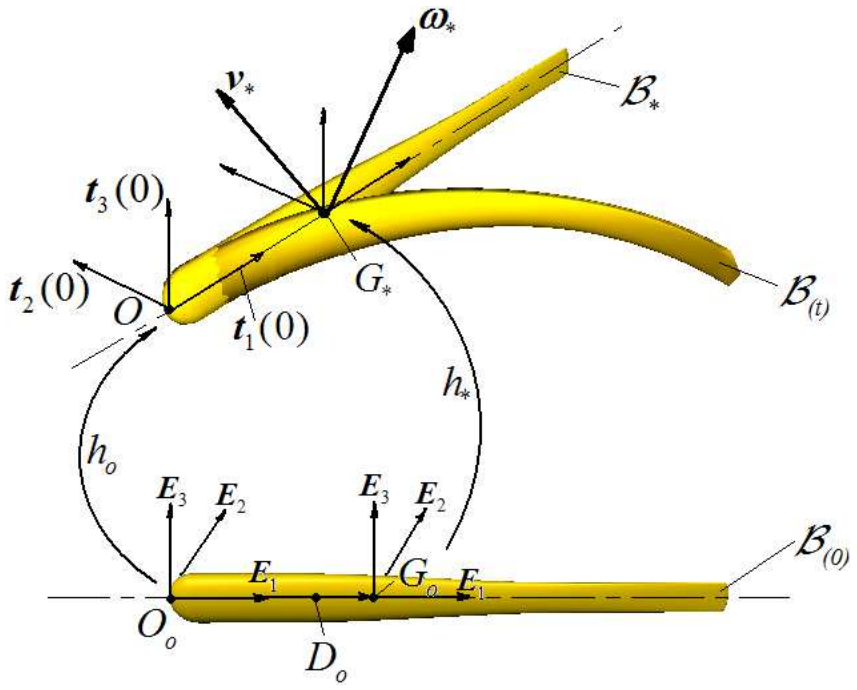


FIGURE 6.3 – Résolution de la loi de Newton dans un repère flottant.

6.7.2 Résolution de la loi de Newton.

En ce qui concerne la dynamique du corps, le solveur Navier-Stokes s'occupe uniquement de la dynamique dite "externe" qui ici est extraite de l'approche du repère flottant. Dans cette description, le mouvement du corps est décomposé en deux contributions : que sont le mouvement rigide de l'ensemble et celui de déformations. Dans la cas général, la contribution dite rigide coïncide avec le mouvement d'un corps virtuel $\mathcal{B}_*$ suivant le corps réel ($\mathcal{B}$) le long de son mouvement. A chaque instant, ce corps virtuel définit la configuration de référence à partir duquel les déformations sont mesurées (6.3). En outre, étant rigide, $\mathcal{B}_*$ peut être remplacé par un seul repère orthonormé appelé "repère flottant". Dans le cas général, la définition de ce repère n'est pas univoque [8]. Pour l'instant, dans la dynamique externe du modèle analytique simplifié, le repère flottant est simplement le repère de la tête, tandis que dans le solveur Navier-Stokes ISIS-CFD, il est défini par l'action des déplacements euclidiens $\boldsymbol{h}_*$ dans le repère $(G_o, \boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{E}_3)$, où G_o est le centre de masse du corps dans sa configuration de référence rigidifiée et $\boldsymbol{D}_o = \boldsymbol{O}_o\boldsymbol{G}_o$, cf (6.46).

$$\boldsymbol{h}_* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_o & \boldsymbol{r}_o + \boldsymbol{R}_o \cdot \boldsymbol{D}_o - \boldsymbol{D}_o \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix} . \tag{6.46}$$

Avec ce choix, $\mathcal{B}_*$ est défini par la géométrie rigide prolongeant $\mathcal{B}$ à partir de la tête, et dont le repère flottant est attaché au centre de masse G_* de $\mathcal{B}_*$. Introduisant le torseur cinématique galiléen $(\boldsymbol{\omega}_*^T, \boldsymbol{v}_*^T)^T$ de ce repère, les théorèmes de Newton-Euler une fois

appliqués au corps donnent :

$$\mathbb{I}_* \cdot \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_* \\ \boldsymbol{v}_* \end{pmatrix} = \mathbb{F}_{in,*} + \mathbb{F}_{hyd,*} \ , \tag{6.47}$$

où nous introduisons $\mathbb{I}_*$ le tenseur d'inertie du corps réel, $\mathbb{F}_{in,*}$ le torseur des forces d'inertie (dues au effets Coriolis, centrifuges et aux accélérations du corps), et $\mathbb{F}_{hyd,*}$ le torseur des forces hydrodynamiques (toutes ces grandeurs sont calculées par rapport à G_*). Pour plus de détails a propos de ces expressions, nous référons le lecteur vers [64].

Il est important de noter qu'un maillage interne du corps déformable est nécessaire pour obtenir les quantités dynamiques induites par la déformation imposée. L'équation (6.47) montre que les paramètres inconnus (qui dépendent de la déformation et des forces de contact) sont des caractéristiques cinématiques de la transformation rigide : les forces totales agissant sur le corps sont obtenues par la résolution de l'écoulement du fluide. D'une autre part, la cinématique du corps influence l'écoulement via le mouvement du maillage $\boldsymbol{u}_d$, plus précisément via le flux de cette quantité sur chaque face (cf. figure 6.4). A chaque pas de temps, la résolution est faite ainsi :

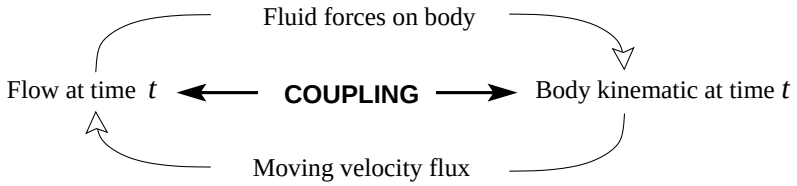


FIGURE 6.4 – Représentation des interactions fluide/structure.

- la déformation imposée est prescrite sur le corps ;
- une procédure de remaillage est effectuée afin d'adapter le maillage à la nouvelle forme du corps ;
- les calculs itératiratifs suivants sont effectués : 1°) pour le fluide, il y a la résolution de la turbulence, de la loi de bilan de quantité de mouvement et de l'équation de la conservation de la masse ; 2°) pour le corps, il y a la résolution de la dynamique dans le repère flottant du corps déformable (6.47) et l'adaptation de la position du maillage (les mouvements rigides $t \mapsto \boldsymbol{h}_*(t)$). Tous ces calculs sont exécutés jusqu'à ce que le résidus de chaque équation soit suffisamment petit (typiquement 10^{-3} fois leurs amplitudes).

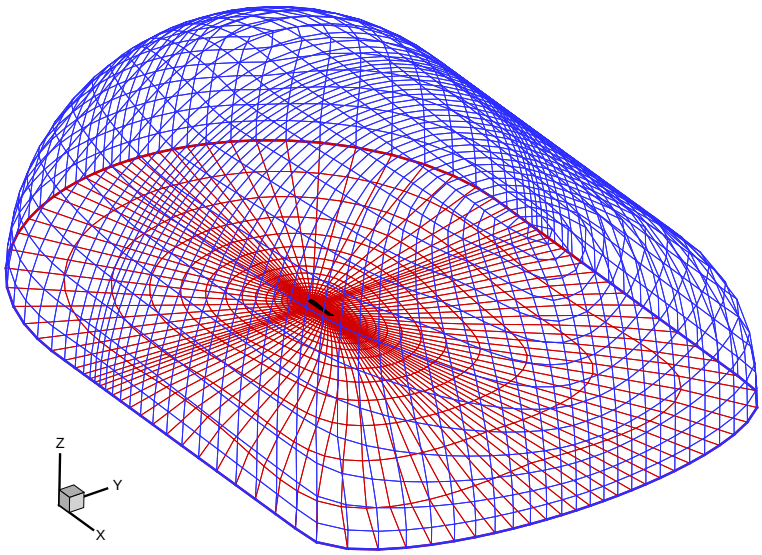


FIGURE 6.5 – Vue du maillage de 65000 éléments.

6.7.3 Étude numérique

A l'heure actuelle, seuls les mouvements de nage plane ont été étudiés pour tester et valider le modèle (i.e. RANSE) sur une géométrie dont le plan $x_3 = 0$ est un plan de symétrie. C'est pour cette raison que, le volume fluide de calcul est limité au volume se trouvant au dessus de ce dit plan (i.e. $x_3 \geq 0$). La figure 6.5 montre une vue globale du maillage correspondant, ici non-structuré. Enfin, la géométrie utilisée ici est décrite dans la sous-section § 6.8.1. Deux études de validation de ce solveur dans le cas de la nage anguilliforme ont été réalisées dans [13] pour évaluer les influences du maillage et du modèle de turbulence choisis. Ces études ont montré que pour des configurations numériques "raisonnables" (type de maillage et modèle de turbulence), les différents résultats obtenus étaient tous contenus dans une fourchette n'excédant pas les 5 %. Au vue de ces résultats, ces auteurs, ont choisi de discrétiser le problème à l'aide de 65000 éléments hexaèdriques et d'utiliser le modèle "$k - \omega$ SST de turbulence de Menter" (cf. [64]). Enfin, toutes les simulations de référence de type Navier-Stokes issues de ISIS-CFD ont été effectuées avec cette configuration étant de surcroît un bon compromis entre le temps de calcul et la précision.

6.8 Les simulations et comparaisons.

6.8.1 Définition de la géométrie de l'anguille.

Dans toutes les simulations présentées ici, nous avons utilisé le modèle analytique développé dans ce chapitre avec la géométrie dessinée sur la figure 6.6, et analytiquement

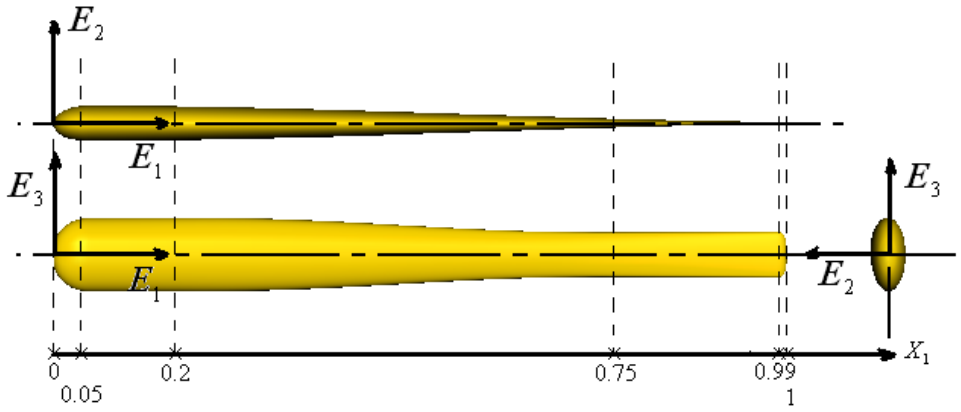


FIGURE 6.6 – Géométrie de l'anguille.

définie par le tableau 6.1. Sa longueur totale notée l est d'un mètre. Son matériau constitutif est supposé être homogène de masse volumique égale à celle du fluide et ce afin de neutraliser la poussée d'Archimède. Dans ces conditions sa masse est de 1.94 kg. La forme du poisson est obtenue par "déformation" d'un cylindre de diamètre $D = 0.1\,l$ entre $X_1 = 0.05\,l$ et $X_1 = 0.99\,l$ commençant et terminant pas deux demi-ellipsoïdes. Ensuite la "déformation virtuelle" du cylindre de départ consiste à multiplier son diamètre le long de $\boldsymbol{E}_2$ par la fonction $X_1 \mapsto A(X_1)$, et le long de $\boldsymbol{E}_3$ par $X_1 \mapsto B(X_1)$ où A et B sont définies dans le tableau 6.1. Ainsi, nous obtenons un corps avec des sections transverses elliptiques.

$$
\begin{array}{lll}
0 \le X_1 < l & A(X_1) = -\dfrac{1}{6}(\sin(\pi X_1 - \pi/2) + 1) - \dfrac{X_1^2}{8} + \dfrac{1}{2} & \\
0 \le X_1 < 0.2l & B(X_1) = 1 & \\
0.2L \le X_1 < 0.75l & B(\tilde{X_1}) = 1 - \dfrac{\sin(\pi \tilde{X_1} - \pi/2) + 1}{5} & \text{avec } \tilde{X_1} = \dfrac{X_1 - 0.2l}{0.75l - 0.2l} \\
0.75l \le X_1 < l & B(X_1) = \dfrac{3}{5} &
\end{array}
$$

TABLE 6.1 – Définition analytique du corps.

Notons ici que contrairement à l'une de nos hypothèses de départ (cf. § 5), la nageoire caudale ne se termine pas par un bord de fuite aigu. Par conséquent, dans toutes les simulations, nous placerons le plan π à $X_1 = 0.996m$, ce choix étant celui ayant donné les meilleurs résultats.

6.8.2 Paramétrage de la tête du poisson.

En accord avec les objectifs de commande de notre projet, la configuration de la tête est paramétrée par la position de son nez $\boldsymbol{r}_o$, et par les trois angles de roulis-tangage-lacet, respectivement (ϕ, θ, ψ) du repère mobile de la tête $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(0)$ relativement à celui de la "terre" (cf. figure 6.7). En ce qui concerne les vitesses de la tête, nous utiliserons les vitesses linéaire $d\boldsymbol{r}_o/dt = \mathcal{V}_i(0)\boldsymbol{t}_i(0)$, et angulaire $\boldsymbol{\omega}_o = \Omega_i(0)\boldsymbol{t}_i(0)$.

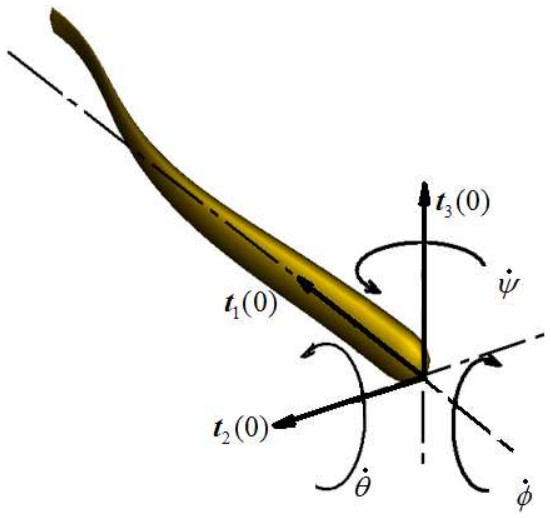


FIGURE 6.7 – Les trois angles de roulis-tangage-lacet (ϕ, θ, ψ) du repère mobile de la tête $(\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \boldsymbol{t}_3)(0)$ par rapport au repère attaché à la terre.

6.8.3 Calibration des coefficients du modèle.

En accord avec les précédents développements, il nous faut spécifier pour notre modèle les quatre groupes de paramètres suivants :

- le coefficient de traînée axiale C_f de (6.36) ;
- le coefficient de traînée de pression C_p de la tête ogivale de l'anguille utilisé par (6.38) ;
- les coefficients de traînée de pression C_{d1}, C_{d2} et C_{d3} de (6.37) et (6.36) ;
- la masse ajoutée axiale du nez m_{ax} requise par (6.32), et potentiellement, un coefficient correctif C_m multipliant la masse ajoutée des sections ([71]).

Afin de fixer tous ces paramètres, nous utilisons la procédure suivante d'identification divisée en quatre étapes.

- Étape 1 : identification de C_f

Afin d'estimer le coefficient locale de frottement C_f le long du corps, nous avons utilisé les relations classiques définissant l'effet de la couche limite sur une plaque plane (qui dépendent uniquement du nombre de Reynolds local). Même si cette approche est simple, puisqu'elle ignore complètement la forme et la déformation du corps, elle peut comme nous allons le voir dans la suite raisonnablement approcher l'intensité de la résultante des forces longitudinales de frottement. Qui plus est pour prendre en compte, comme le solveur Navier-Stokes, les phénomènes de transition (i.e. passage d'un écoulement laminaire à un écoulement turbulent), une étude du modèle de comportement de la turbulence utilisé par ISIS-CFD a été réalisée. Ainsi, l'écoulement autour d'une plaque plane 2-D plongée dans un fluide a été simulé en utilisant le modèle de turbulence choisi à la sous-section précédente. Le tracé des valeurs de C_f en fonction du nombre de Reynolds locale $Re_{X_1//}$ (cf. figure 6.8) montre que le modèle quitte la courbe du modèle laminaire de Blasius (cf. [50]) pour rejoindre celle du modèle turbulent de Karman (cf. [50]) au alentour de $Re_{X_1//} = 8.10^4$.

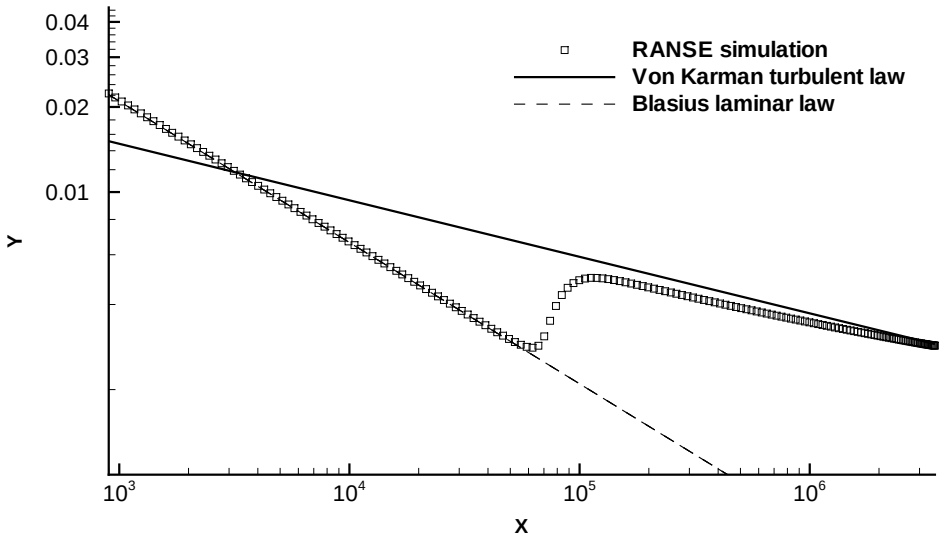


FIGURE 6.8 – Évolution du coefficient de frottement en fonction du nombre de Reynolds locale sur une plaque fine 2-D.($x = Re_{X_1//}$; $y = C_f$)

La loi d'évolution du coefficient de frottement axial selon le nombre de Reynolds a été choisie comme suit :

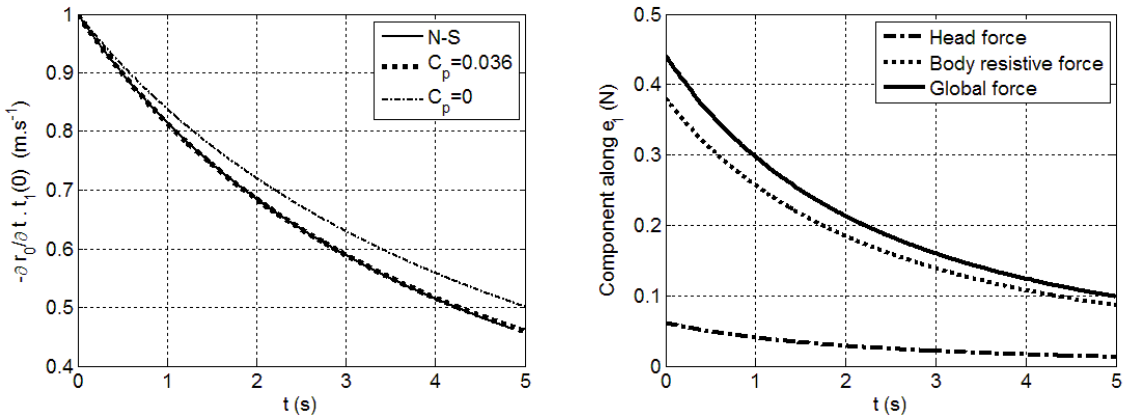
$$\text{si } Re_{X_1//} \leq 8.10^4 \,,\, C_f = \frac{0.664}{Re_{X_1//}^{0.5}} \quad ; \quad \text{si } Re_{X_1//} > 8.10^4 \,,\, C_f = \frac{0.059}{Re_{X_1//}^{1/5}} \tag{6.48}$$

où $Re_{X_1//}$ est défini par :

$$Re_{X_{1//}} = X_1 \mathcal{V}_1(X_1)/\nu \quad , \text{ où } \nu \text{ est le coefficient cinématique de l'eau.}$$

- Étape 2 : identification de C_p

Le coefficient C_p est identifié en comparant les simulations Navier-Stokes et celle du modèle simplifié pour une allure de nage où le poisson, restant rigide et droit, est "lancé" avec une vitesse d'avance initiale. Dans ce cas, le poisson ralentit sous l'effet, relatif à sa tête, de la force de traînée (6.38) dépendant du C_p, et des forces axiales de frottement appliquées le long de son corps dont le coefficient C_f a été identifié à l'étape précédente. Le tracé de la figure 6.9(a) montre l'évolution temporelle de la vitesse d'avance des simulations obtenues avec les modèles Navier-Stokes et simplifié (avec C_p égale à 0 et calibré à la valeur 0.036). Le tracé de la figure 6.9(b) montre les contributions apportées par le corps (6.34) et la tête (6.35) à la résultante des efforts axiaux. Notons que la contribution due au champ de pression appliqué sur la tête représente environ 16% de la force axiale globale.



(a) Identification de C_p.

(b) Forces de traînée axiales sur l'anguille.

FIGURE 6.9 – Étape d'identification de C_p.

- Étape 3 : identification des coefficients $C_{d,i}$

En ce qui concerne C_{d2} et C_{d3}, leurs valeurs doivent être dépendantes du temps au travers du nombre de Reynolds transverse et du nombre de Keulegan-Carpenter [101], qualifiant l'écoulement autour d'un cylindre oscillant. Néanmoins, le problème est ici tout à fait différent des expérimentations que l'on peut trouver dans la littérature sur les cylindres oscillants. En fait, à cause du mouvement d'avance du poisson, l'écoulement induit par une section transverse donnée n'agit pas uniquement par action/réaction sur cette section mais plutôt sur l'ensemble des sections transverses

de la poutre. De plus, l'amplitude des oscillations croit le long du corps, et les sections n'ont pas de profils circulaires mais elliptiques pour lesquels nous n'avons pas de résultats expérimentaux. Par conséquent, malgré toutes ces difficultés, quelques modèles simples ont été employés avec succès. Particulièrement, en accord avec les données expérimentales de [50] pour différentes formes 2-D plongées dans un fluide stationnaire (dans la gamme des ordres de grandeur du nombre de Reynolds transverse $Re_{X_1\perp} \simeq 10^4$ rencontré dans nos simulations) et [98] pour une plaque normale à l'écoulement, la valeur constante de 1.98 (cf. [50, 98]) pour $0.05 < X_1 < 1$ a été choisie pour C_{d2}, et en ce qui concerne C_{d3}, il a été fixé à une valeur plus faible, i.e. 0.5, afin de prendre en compte le caractère fin du profil de la section selon cette direction. Enfin, pour le couple résistif $\boldsymbol{c}_{res}$, puisque le solveur ISIS-CFD ne peut pas encore simuler la nage 3-D, nous ne pouvons pas donner une forme analytique précise à ce terme. Ainsi, nous prendrons $C_{d1} = 0$ comme valeur. Finalement, notons que dans la suite, C_{d1} sera uniquement concerné par le dernier test numérique, étant la seule manœuvre 3-D.

- Étape 4 : identification de m_{ax}

  Avec la géométrie de la tête adoptée, nous choisissons de prendre pour m_{ax}, la moitié de la masse ajoutée axiale d'une ellipsoïde induite par une translation le long de son axe principale, i.e. :

  $$m_{ax} = k\rho\frac{2\pi}{3}abc \ ,$$

  où $k = 0.32$ est une valeur adimensionnelle analytiquement calculée par [63, 110], et $2a$, $2b$ et $2c$ sont les longueurs des demi-axes de l'ellipsoïde.

  Même si les coefficients de masses ajoutées des sections dépendent de l'oscillation de ces dernières [100], aucun coefficient correctif n'a été ajouté.

Finalement, comme nous allons le voir maintenant, cette configuration du modèle analytique sera appuyée par les comparaisons effectuées avec le solveur Navier-Stokes.

6.8.4 Exemples Numériques.

Tous les résultats présentés, dans cette sous-section et obtenus par le modèle simplifié, ont été simulées sur un ordinateur de type P.C. dont le processeur est un Pentium IV (de fréquence 3.2 GHz) avec 1Go de mémoire vive. Les valeurs des paramètres de simulation sont ceux de § 6.8.3 et sont fixés une fois pour toute. Tous les tests présentés ici ont été réalisé avec un temps de calcul compris entre "0.2 et 0.7 fois le temps réel", ainsi rendant

compatible l'algorithme simplifié avec les exigences de commande en ligne de notre future prototype. Comme annoncé au début de ce chapitre, l'ondulation du corps est imposée au travers du champ de courbure désiré $X_1 \mapsto \boldsymbol{k}_d(X_1,t) = \boldsymbol{R}(X_1)\cdot\boldsymbol{K}_d(X_1)$ imposé le long de l'axe du corps.

Cette section d'essais numériques s'articule comme suit. Premièrement, nous allons éprouver la dynamique "externe" du corps en plongeant ce dernier dans le vide et en imposant un champ arbitraire de déformations internes. Puis nous présenterons les résultats obtenus pour les quatre allures de nage suivantes : la nage en ligne droite ondulante dénotée par F, le virage plan dénoté par T, l'allure de freinage dénotée par St, et enfin l'allure tridimensionnelle de la spirale dénotée par Sp. Par ailleurs, pour les d'allures F et T, elles ont été réalisées avec plusieurs jeux de paramètres. De plus, nous avons défini trois modes de virages. Dans le cas de la nage plane, les résultats ont donné lieu à des comparaisons avec les simulations équivalentes Navier-Stokes (i.e. le solveur RANSE).

Exemple 1 : La poutre dans le vide.

Ce premier test va nous servir à éprouver notre modèle des forces d'inertie et la précision de l'algorithme numérique (en particulier le schéma d'intégration numérique). En fait, quand l'anguille est plongée dans le vide et soumise à une loi de déformation interne (6.1), la dynamique globale (6.6) et (6.21)-(6.23) se réduit et impose les six intégrales premières du mouvement suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) = Cte \text{ et } \boldsymbol{p}(\mathcal{B}) = Cte\ . \tag{6.49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^1 \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}_b + \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_b \\ \boldsymbol{p}_b \end{pmatrix} dX_1 = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}(\mathcal{B}) \\ \boldsymbol{p}(\mathcal{B}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\ . \tag{6.50}$$

Définition de la loi interne de déformation : dans le test considéré, nous modélisons l'anguille par un simple cylindre. Son diamètre est de $0.02m$ et sa longueur est de $1m$. Ce cylindre est à l'instant initiale au repos et nous imposons sur lui la loi interne de déformation suivante qui inclue aussi un champ de déformation en torsion (afin de donner plus de "richesse" à ce test) :

$$\boldsymbol{K} = f(t)K_{c,i}\boldsymbol{E}_i\ , \tag{6.51}$$

où $K_{c,1}$, $K_{c,2}$, $K_{c,3}$ sont respectivement la constante de roulis, la constante de lacet et la constante de tangage le long du corps et $f(.)$ est une fonction du temps définie comme suit :

$$f : \begin{cases} t \in [0, t_1] \mapsto f(t) = f_r(t),\ t_i = 0,\ t_f = t_1 \\ t \in [t_1, t_2] \mapsto f(t) = 1 - f_r(t),\ t_i = t_1,\ t_f = t_2 \end{cases} , \tag{6.52}$$

où $f_r(.)$ est une rampe sinusoïdale définie par :

$$0 \leq t < t_i \quad : \qquad f_r(t) = 0 \ , \tag{6.53}$$

$$t_i \leq t < t_f \quad : \qquad f_r(t) = \frac{t - t_i}{t_f - t_i} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t - t_i}{t_f - t_i}\right) \ , \tag{6.54}$$

$$t \geq t_f \quad : \qquad f_r(t) = 1 \ . \tag{6.55}$$

Notons ici que $f_r(.)$ a des dérivées première et seconde nulles aux instants de commutation (i.e. t_i et t_f) ainsi garantissant une transition continue et douce par rapport au temps.

Les résultats numériques : pour cet exemple, nous appliquons la loi de déformation (6.51)-(6.52) avec les paramètres du tableau 6.2. Les tracés des figures 6.10 montrent que le torseur cinétique appliqué au nez reste nul, par rapport à la précision de l'intégrateur numérique (les normes de la vitesse du centre de gravité et du moment cinétique sont respectivement inférieurs à $10^{-9} m.s^{-1}$ et $10^{-9} m.kg.s^{-1}$).

Allure	$K_{c,1}$	$K_{c,2}$	$K_{c,3}$	t_1	t_2
L'anguille dans le vide	1	10	10	2.5	5

TABLE 6.2 – Les paramètres du test de la poutre dans le vide.

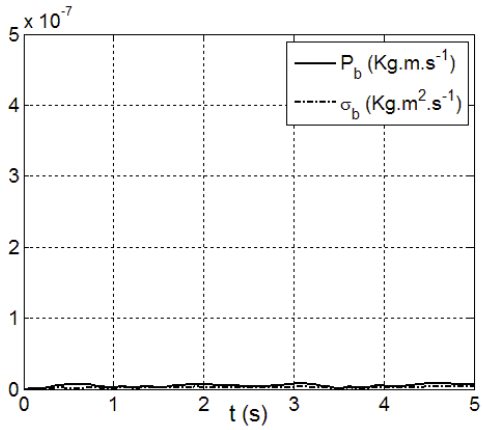


FIGURE 6.10 – Norme de la résultante $\boldsymbol{p}_b$ et moment $\boldsymbol{\sigma}_b$ cinétiques.

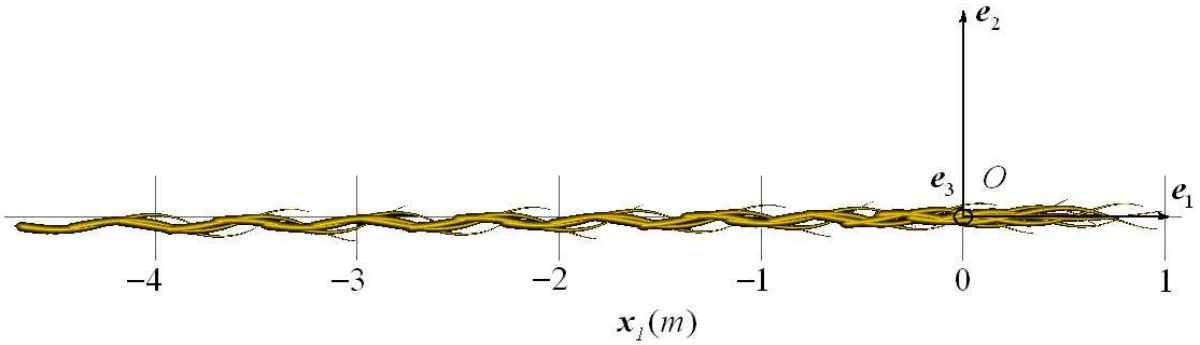


FIGURE 6.11 – Trajectoire du corps pour l'allure de nage en ligne droite $F1$ $(2.5fps)$.

Exemple 2 : Allure de nage ondulante en ligne droite.

Définition de la loi interne de déformation : cette allure est celle de la nage ondulante en ligne droite qui est communément étudiée dans la littérature traitant de la zoologie (cf. [16, 44, 73, 123, 5, 120]). Dans notre cas, la nage étant réalisée dans le plan $(o, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, elle est définie par la loi de courbure suivante (où "f " désigne "forward") :

$$k_d = f_r(t)K_{f3}(t, X_1)\boldsymbol{t}_3(X_1) = f_r(t)K_{f3}(t, X_1)\boldsymbol{e}_3(X_1) \ , \tag{6.56}$$

où f_r, est toujours définie par (6.53) avec $\Delta t = T$, garantissant un démarrage doux, tandis que la composante non-nulle de la courbure est une onde sinusoïdale rétrograde allant de la tête vers la queue se détaillant comme suit :

$$K_{f3} = f_a(X_1)\sin\left[2\pi\left(\frac{X_1}{\lambda} - \frac{t}{T} + \phi\right)\right] \quad \text{, avec} \quad f_a(X_1) = a_2X_1^2 + a_1X_1 + a_0 \ . \tag{6.57}$$

Dans (6.57), λ est la longueur d'onde, T est la période et a_0, a_1, a_2 sont les coefficients de la fonction d'amplitude polynômiale f_a modulant l'amplitude de l'onde le long du corps (cf. figure 6.13).

Puisque (6.56) mène à un mouvement périodique ("nage de croisière"), le poisson, initialement droit le long de $\boldsymbol{e}_1$, est lâché avec une vitesse initiale d'avance $(d\boldsymbol{r}_o/dt(t_i) \triangleq \mathcal{V}_{init}\boldsymbol{t}_1(0)$, où t_i est l'instant initiale de la simulation), afin d'écourter les simulations Navier-Stokes.

Les résultats numériques : pour cet exemple, nous appliquons la loi de déformation (6.56)-(6.57) avec les paramètres du tableau 6.3. Les résultats obtenus avec notre modèle simplifié ont été comparés à ceux du solveur Navier-Stokes [64] obtenus sous les mêmes conditions. Afin de quantifier la comparaison, nous utilisons l'erreur relative faite sur la vitesse moyenne d'avance de la tête quand le poisson a atteint son mouvement périodique, i.e. :

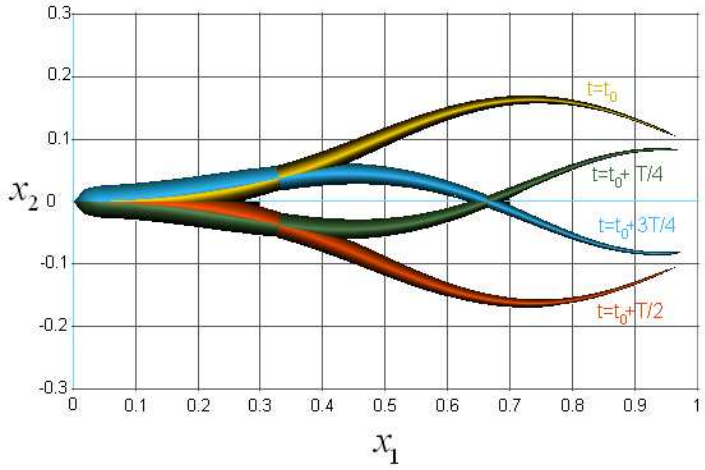


FIGURE 6.12 – Décomposition du mouvement de la colonne vertébrale du poisson pour une allure de nage en ligne droite par rapport au repère lié à sa tête.

Allures	λ	T	a_2	a_1	a_0	ϕ	$\mathcal{V}_{init}$
$F1$	1	1	2	0.5	1	0	0
$F2$	1.25	1	2	1	0	0	0
$F3$	1	0.5	2	0.5	1	0	-0.6
$F4$	1	1.5	2	0.5	1	0	-0.6
$F5$	1	1	1	0.5	2	0	-0.6
$F6$	0.75	1	1	0.5	2	0	-0.6
$F7$	1	1	3.5	-4.5	2	0	-0.6

TABLE 6.3 – Paramètres de l'allure de nage ondulante en ligne droite. (6.57).

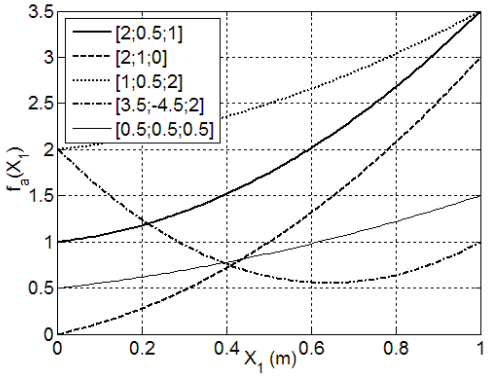


FIGURE 6.13 – Tracés des différentes fonctions d'amplitude $f_a(X_1)$ en fonction de la variable d'espace X_1, où les coefficients entre crochets sont $[a_2, a_1, a_0]$.

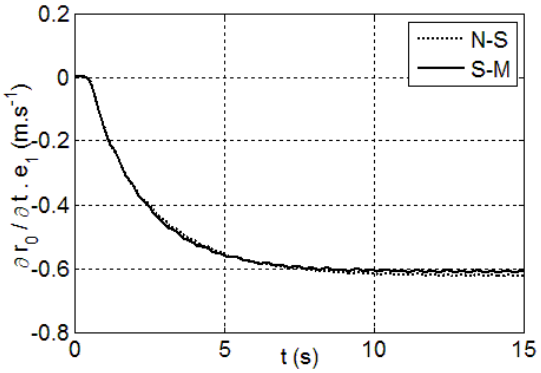
$$e_{\overline{\mathcal{V}_1}} = \frac{\left|\overline{\mathcal{V}}_{1,N-S}(0) - \overline{\mathcal{V}}_{1,S-M}(0)\right|}{\left|\overline{\mathcal{V}}_{1,N-S}(0)\right|} \ ,$$

où "$N-S$" désigne "Navier-Stokes", "$S-M$" désigne "Simplified-Model", et $\overline{\mathcal{V}_1}(0)$ est la vitesse moyenne axiale de la tête à n'importe quel instant après que le poisson est atteint son mouvement périodique "stationnaire". L'erreur pour les différentes allures du tableau 6.3 ont été rapportées dans le tableau 6.4. Ces résultats doivent-être examinés en gardant à l'esprit l'intervalle de confiance (environ 5 %) des simulations Navier-Stokes (cf. § 6.7.3).

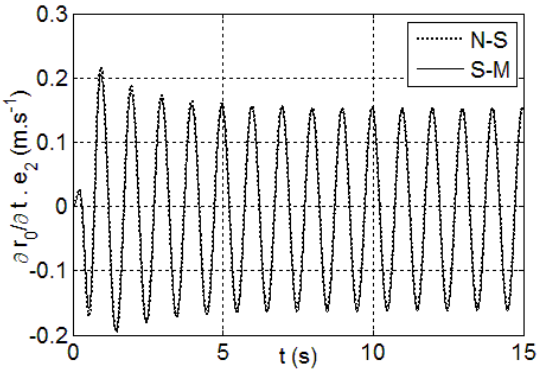
Gait	$\overline{\mathcal{V}}_{1,N-S}(0)$ ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	$\overline{\mathcal{V}}_{1,S-M}(0)$ ($\mathrm{m\,s^{-1}}$)	$e_{\overline{\mathcal{V}}_1}(\%)$
$F1$	0.642	0.619	1.9
$F2$	0.613	0.614	0.2
$F3$	1.310	1.270	3.1
$F4$	0.412	0.407	1.2
$F5$	0.753	0.721	4.2
$F6$	0.452	0.456	0.9
$F7$	0.278	0.306	9

TABLE 6.4 – Comparaisons N-S/S-M pour les allures de nage ondulante en ligne droite.

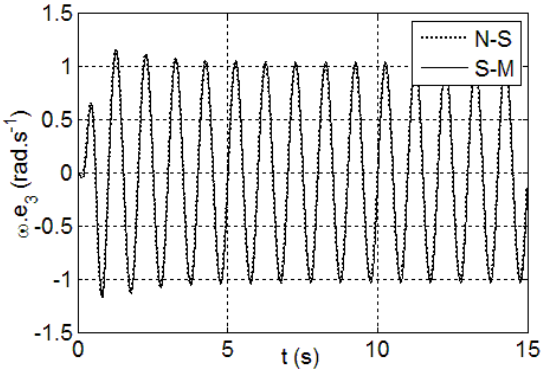
En illustration, les figures 6.14(a), 6.14(b) et 6.14(c) montrent les évolutions temporelles des vitesses galiléennes de la tête obtenues pour l'allure $F1$ avec le solveur Navier-Stokes et l'algorithme proposé. Toutes les composantes oscillent à la période de la loi de propulsion K_{f3} et les tracés montrent un bon accord (en phase et amplitude) du modèle simplifié par rapport à la référence Navier-Stokes (même pour les vitesses transverse et angulaire). Les figures 6.14(d) et 6.14(e) montrent les tracés (toujours pour l'allure $F1$) des évolutions respectives de l'angle de lacet et de la trajectoire du nez dans le plan de nage. Finalement, tous les tracés des autres tests (cf. tableau 6.3) montrent un bon accord (inférieure à 5%) entre le modèle simplifié et sa référence, excepté pour $F7$ où la différence est due à une vitesse "de croisière" du poisson trop faible. En effet, quand la vitesse diminue, les hypothèses relatives au fluide parfait sur lesquelles le modèle est basé sont de moins et moins valables. De plus, notre modèle de C_f devient inapproprié, et ce en particulier à cause de son indépendance vis-à-vis de la déformation du poisson (cf. [103]). D'un autre côté, il est à noter que le mouvement lent de $F7$ est lié à un très faible rapport de glissement "$\overline{\mathcal{V}}_1(0)T/\lambda$" égale à 0.278, tandis que pour les autres simulations ($F1-F6$) ce rapport varie entre 0.5 et 0.75, et s'accorde aux valeurs nominales observées chez les poissons [120]. La figure 6.15 met en évidence la production de poussée par le poisson quand celui-ci se déplace en ligne droite avec une vitesse de croisière constante (i.e. pendant le mouvement périodique stationnaire). Dans ce cas, la poussée moyenne est égale à la traînée moyenne induit par le fluide sur le poisson en mouvement. De plus la figure 6.15 montre les différentes origines de création de traînée et de poussée. Plus précisément,



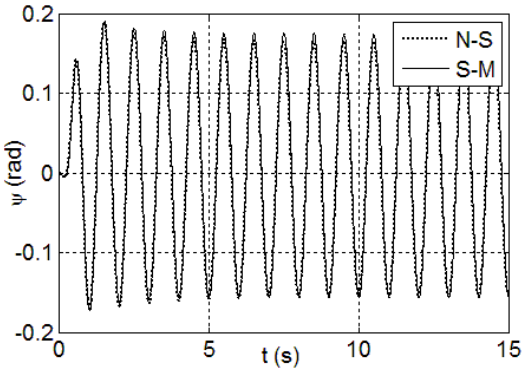
(a) Vitesse linéaire de la tête selon $\boldsymbol{e}_1$.



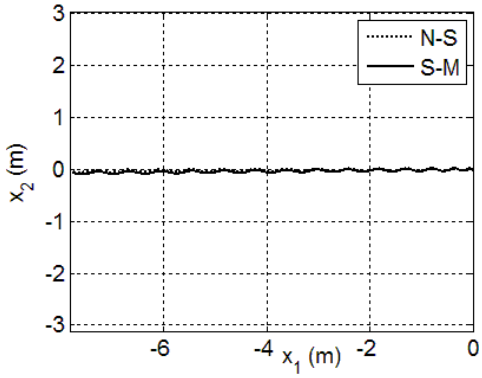
(b) Vitesse linéaire de la tête selon $\boldsymbol{e}_2$.



(c) Vitesse angulaire de la tête selon $\boldsymbol{e}_3$.



(d) Angle de lacet de la tête ψ.



(e) trajectoire de la tête.

FIGURE 6.14 – Comparaison N-S/S-M pour l'allure de nage ondulante en ligne droite $F1$.

la composante axiale des forces hydrodynamiques peut se décomposer en quatre contributions que sont : les forces réactive et résistive ((6.32), (6.35)) appliquées sur la tête, la force résistive distribuée sur le corps (6.34), la force réactive appliquée sur la nageoire caudale (6.31), et la force réactive le long du corps (6.21)). Nous avons rapporté dans le tableau 6.5, les intensités moyennes de chacune de ces contributions. Le tableau 6.5 et la figure 6.15 montrent que la moyenne de la composante axiale des forces hydrodynamiques

est proche de zéro quand le poisson est en mouvement périodique stationnaire. L'écart de la somme de toutes ces composantes à la valeur zéro correspond à l'intensité de la force d'inertie du corps selon $\boldsymbol{e}_1$. De plus, comme indiqué dans [72], la force réactive appliquée sur le corps a une valeur moyenne proche de zéro. Finalement, la poussée est produite par la nageoire caudale et les forces résistives qui s'appliquent le long du corps. Notons ici que ces deux contributions ont des intensités du même ordre. Enfin concernant le modèle résistif longitudinale, la traînée totale est produite par les frottements sur le corps et la force de pression appliquée sur la tête.

Origines	Moyenne (N)
Modèle résistif de la tête (H.f.)	0.0262
Modèle résistif axiale du corps (B.r.l.f)	0.158
Modèle résistif transverse du corps (B.r.t.f.)	-0.0993
Modèle réactif de la nageoire caudale (C.r.f.)	-0.0859
Modèle réactif du corps (B.r.f.)	4.77×10^{-4}

TABLE 6.5 – Origines des forces de poussée et de traînée pour l'allure "$F1$".

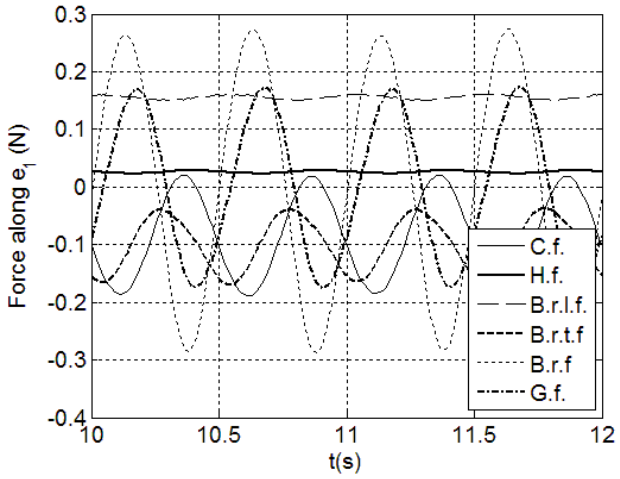


FIGURE 6.15 – Composantes axiales (selon $\boldsymbol{e}_1$) des différents efforts du modèle simplifié pour $F1$ entre $t = 10s$ et $t = 12s$, où C.f. est la force produite par le modèle reactif de la caudale, H.f. est la force produite par le modèle résistif de la tête, B.r.l.f., la force produite par le modèle résistif longitudinale du corps, B.r.t.f., la force produite par le modèle résistif transverse du corps, B.r.f est la composante produite par le modèle réactif du corps, et G.f. est la force globale appliquée sur l'anguille.

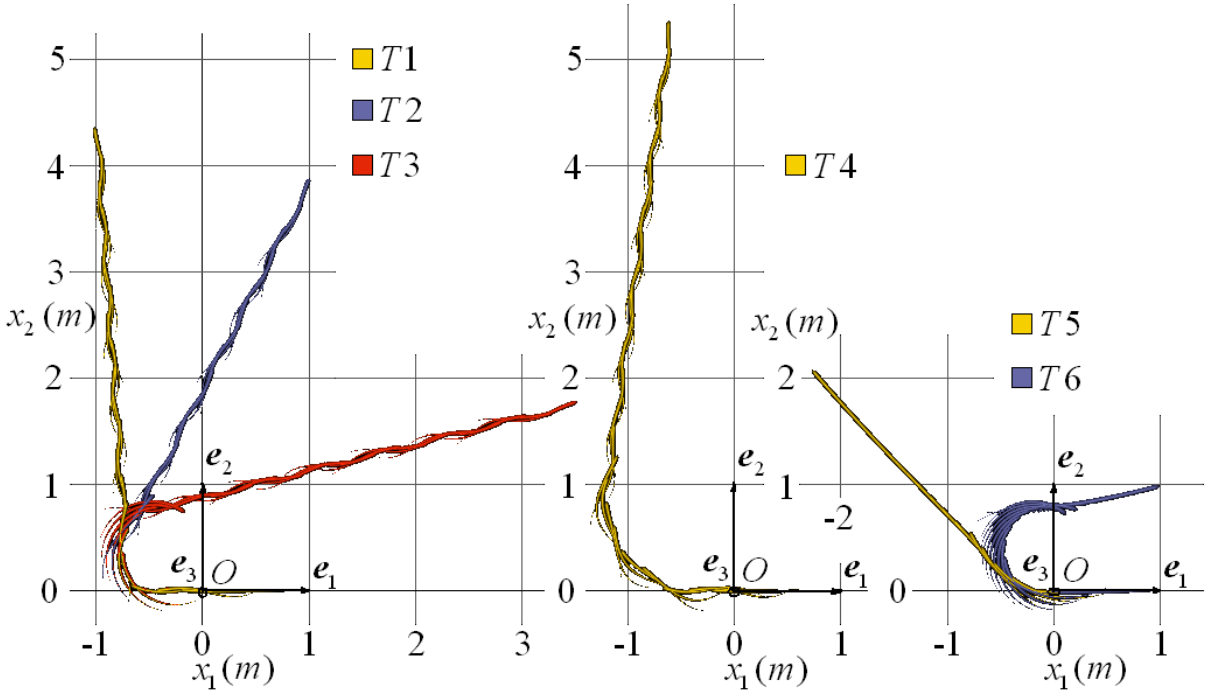


FIGURE 6.16 – Les allures de virage plan $(1f/0.4s)$.

Exemple 3 : l'allure de virage.

Définition de la loi de déformation interne : cette allure est déduite de la précédente, en ajoutant à la loi de courbure de propulsion (6.56), une courbure plane constante K_{c3} le long du corps. Plus précisément, nous prenons :

$$k_d(t) = (\alpha(t)K_{f3} + \beta(t)K_{c3})\,\boldsymbol{t}_3\ , \tag{6.58}$$

où $\alpha(.)$ et $\beta(.)$ sont deux fonctions de transitions dites "douces". $\alpha(.)$ permet un démarrage progressif ainsi que d'activer et désactiver la propulsion en début et fin de virage. $\beta(.)$ permet d'appliquer ou de défaire la courbure constante de lacet le long du corps.

Cette allure est constituée de quatre phases temporelles consécutives notées ϕ_i qui réalisent les actions suivantes. Après une phase Φ_0 où le poisson suit (6.56),(6.57), i.e. va en ligne droite selon le direction $-\boldsymbol{e}_1$, les trois phases Φ_1, Φ_2 et Φ_3 s'en suivent. Pendant Φ_1, d'une durée Δt_1, le corps est progressivement fléchi et crée par réaction sur le fluide un couple de lacet. Puis, pendant Φ_2, le corps maintient sa courbure et s'enroule en "C" faisant ainsi tourner la tête. Concernant cette étape, sa durée Δt_2, nous permet de fixer l'angle de lacet final mesuré par rapport à $\boldsymbol{e}_1$, quand le poisson sort du virage en "C". Enfin, pendant Φ_3, de durée Δt_3, le poisson retrouve progressivement sa forme droite. Cette troisième étape, ressemblant à Φ_1, crée un couple de lacet qui tend à compenser la rotation de lacet des deux dernières phases pour permettre au poisson d'aller de nouveau

en ligne droite mais dans une direction différente.

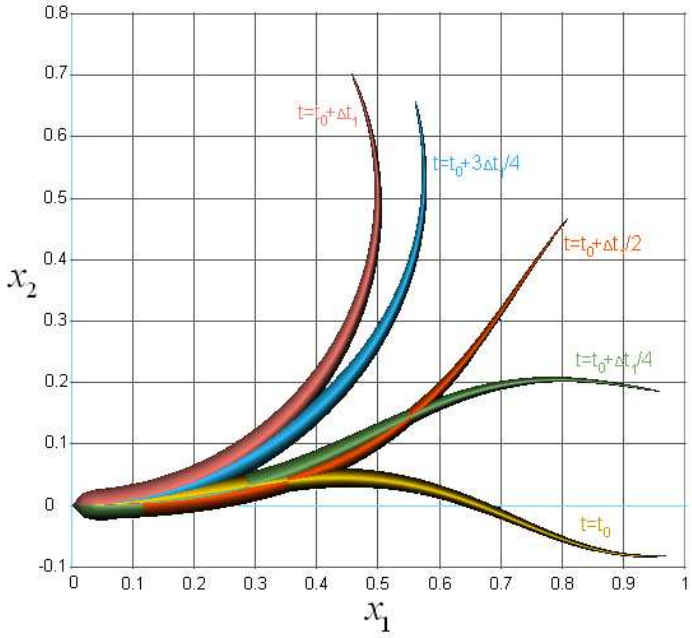


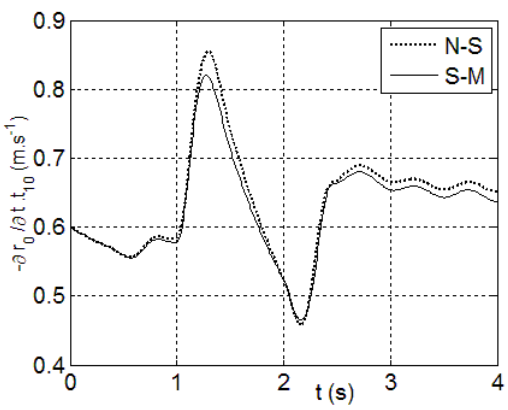
FIGURE 6.17 – Décomposition du mouvement de l'allure de virage.

Les résultats numériques : dans ce test, nous pouvons à partir de la loi interne (6.58) définir trois types de virage. Le premier dénoté "Tip", est un virage inertiel avec des phases de propulsion réduites aux instant précédent et suivant la phase de virage Φ_2 (lois $T1$, $T2$ et $T3$ dessinées sur la gauche de la figure 6.16). Le second type, dénoté "Tp", est un virage propulsif, i.e. le robot n'arrête pas d'onduler quand il tourne (loi T4 dessinée au centre de la figure 6.16). Le troisième et dernier type, dénoté "Ti", correspond à un virage inertiel pure puisque dans ce cas, le poisson ne tourne qu'en vertu de sa vitesse axiale initiale et ne s'auto-propulse pas (lois $T5$ et $T6$, dessinées sur la droite de la figure 6.16).

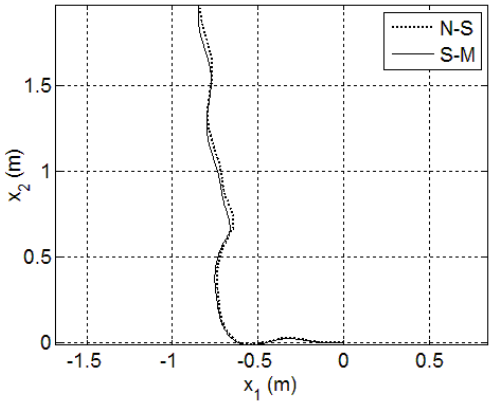
Allures	Φ_1 : début du virage	Φ_2 : le virage	Φ_3 : fin du virage
Tip	$\alpha(t) = 1 - \beta(t) = 1 - f_r(t)$	$\alpha(t) = 1 - \beta(t) = 0$	$\alpha(t) = 1 - \beta(t) = f_r(t)$
Tp	$\alpha(t) = 1, \beta(t) = f_r(t)$	$\alpha(t) = \beta(t) = 1$	$\alpha(t) = 1, \beta(t) = 1 - f_r(t)$
Ti	$\alpha(t) = 0, \beta(t) = f_r(t)$	$\alpha(t) = 0, \beta(t) = 1$	$\alpha(t) = 0, \beta(t) = 1 - f_r(t)$

TABLE 6.6 – Les trois types de virage (Tip,Tp,Ti).

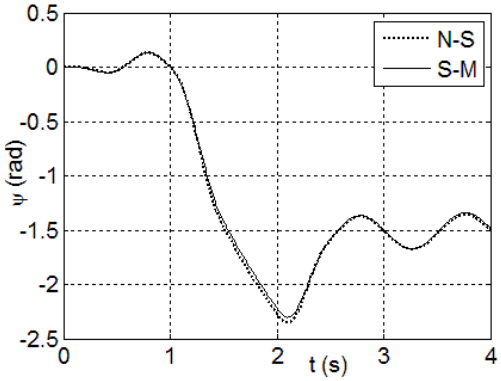
Dans le cas du virage, nous comparons avec le solveur Navier-Stokes l'"angle de lacet" de la tête quand le poisson a retrouvé son mouvement périodique stationnaire après le



(a) Vitesse d'avance de la tête.



(b) Trajectoire de la tête.



(c) Angle de lacet de la tête.

FIGURE 6.18 – Comparaisons N-S/S-M pour l'allure de virage $T1$.

Allures	λ	T	a_2	a_1	a_0	ϕ	$\mathcal{V}_{init}$	K_{c2}	K_{c3}	Δt_1	Δt_2	Δt_3
$T1(Tip)$	1	1	2	0.5	1	1/4	-0.6	-	2	0.5	0.5	0.5
$T2(Tip)$	1	1	2	0.5	1	1/4	-0.6	-	2	0.5	1	0.5
$T3(Tip)$	1	1	2	0.5	1	1/4	-0.6	-	2	0.5	2	0.5
$T4(Tp)$	1	1	2	0.5	1	1/4	-0.6	-	1	0.5	2	0.5
$T5(Ti)$	-	-	-	-	-	-	-0.6	-	1	0.5	1	0.5
$T6(Ti)$	-	-	-	-	-	-	-0.6	-	2	1	3	1

TABLE 6.7 – Paramètres des allures de virage.

virage. Par "angle de lacet" nous entendons ici, l'angle entre l'axe de la tête porté par $\boldsymbol{t}_1(0)$ et l'axe porté par $\boldsymbol{e}_1$. Ainsi, définissant sa valeur moyenne $\overline{\psi}$ calculée à n'importe quel instant après que le poisson est atteint son mouvement périodique stationnaire, nous calculons l'erreur relative de lacet suivante :

$$e_{\overline{\psi}} = \frac{\left|\overline{\psi}_{N-S} - \overline{\psi}_{S-M}\right|}{\left|\overline{\psi}_{N-S}\right|} \ .$$

Les comparaisons entre le solveur Navier-Stokes et le modèle simplifié ont été rapportées dans le tableau 6.8.

Allures (type)	$\overline{\psi}_{N-S}$ (deg)	$\overline{\psi}_{S-M}$ (deg)	$e_{\overline{\psi}}$ (%)
$T1(Tip)$	-88	-86	1.96
$T2(Tip)$	-116	-117	0.9
$T3(Tip)$	-163	-166	1.75
$T4(Tp)$	-94	-98	4.27
$T5(Ti)$	-45	-49	8.09
$T6(Ti)$	-157	-167	6.57

TABLE 6.8 – Comparaisons N-S/S-M pour toutes les allures de virage.

Pour tous les virages que nous avons expérimenté ici, l'erreur sur l'angle de lacet n'excède les 10%, ce qui est tout à fait acceptable en regard des propriétés de robustesse des lois de commande qui par ailleurs sont mises au point par nos partenaires Automaticiens du *L.A.G.* (Laboratoire d'Automatique de Grenoble) (cf. [30]). Afin d'illustrer ces comparaisons tout au long des simulations, nous avons tracé sur les figures 6.18(a)-(c), relatives au virage $T1$, l'évolution temporelle des vitesses d'avance de la tête, de sa position dans le plan de nage, ainsi que celle de son angle de lacet.

Finalement, la figure 6.19 montre les contributions des différentes sources (cf. 6.5) de création de moment de lacet (par rapport au nez de l'anguille). Nous voyons sur la figure 6.19 que le pique de couple (appliqué sur le nez autour de $\boldsymbol{e}_3$, dont la valeur est égale à -2.73 N.m), qui est nécessaire pour faire tourner le poisson pendant la première phase est essentiellement généré par la nageoire caudale et les forces résistives appliquées le long du corps. Après cette phase de mise en mouvement en lacet du poisson, la rotation est maintenue par la contribution réactive du corps, tandis que les termes résistifs font sous-virer l'animale. Après cette phase inertielle (cf. figure 6.19), la nageoire caudale n'a plus aucun effet sur la manœuvre. Enfin, un couple opposé est appliqué sur le poisson pour le remettre dans sa configuration droite. Qui plus est, dans cette dernière phase, c'est essentiellement les termes résistifs du corps qui produisent cet effet.

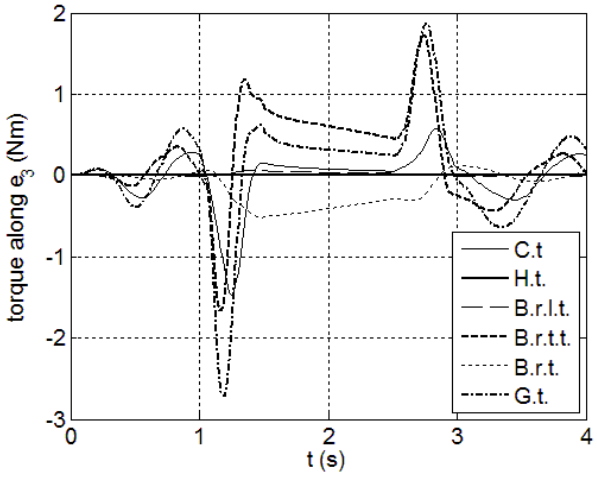


FIGURE 6.19 – Représentation de l'évolution temporelle pour l'allure $T1$ des différentes contributions au couple de lacet du modèle simplifié analytique, où C.t. est le couple produit par le modèle réactif de la nageoire caudale, H.t. est celui produit par le modèle de la tête, B.r.l.f. est produit par le modèle resistif longitudinale du corps, B.r.t.t. est le couple produit par le modèle résistif transverse du corps, B.r.t. est le couple produit par le modèle réactif du corps, tandis que G.t. est le couple résultant (total) appliqué sur la tête de l'anguille autour de $\boldsymbol{e}_3$.

Exemple 4 : l'allure de freinage ou d'arrêt

Cette allure est obtenue en imposant une ondulation progressive (de la queue vers la tête) toujours de la forme (6.56),(6.57) tandis que le poisson va en avançant (cf. la figure 6.20). Ceci est en accord avec les observations expérimentales des poissons de type anguilliforme tel que l'anguille européenne (cf. [27]). Dans la nature le rôle du corps est assisté dans cette manœuvre par les nageoires pectorales.

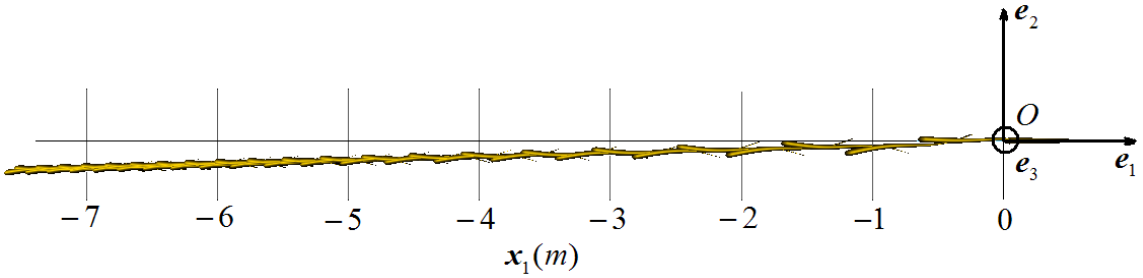


FIGURE 6.20 – L'allure de freinage ($2fps$).

Les résultats numériques : adoptant (6.56),(6.57) avec les paramètres du tableau 6.9, tandis que le poisson à une vitesse initiale $d\boldsymbol{r}_o/dt = \mathcal{V}_{init}(0)\boldsymbol{t}_1(0)$, les deux simulateurs ("rapide" et "Navier-Stokes) donnent les résultats des figures 6.21(a)-(c). Notons l'ineffi-

cacité de cette allure d'arrêt à mesure que l'anguille ralentie. Néanmoins cette observation est à pondérée par le fait que le modèle simplifié a été essentiellement calibré pour des Reynolds bien supérieurs à ceux mis en jeu en fin de freinage. Quoi qu'il en soit nous imaginons ici qu'un freinage efficace, condition de l'arrêt net du poisson, réclame le recours à la commande des pectorales ou(et) à des déformations de fortes amplitudes. Dans le cas de la simulation ici rapportée, l'erreur relative suivante a été calculée (avec '0' signifiant ici "$X_1 = 0$") :

$$e_{\overline{\mathcal{V}_1}} = \frac{\left|\overline{\mathcal{V}}_{1,N-S}(0) - \overline{\mathcal{V}}_{1,S-M}(0)\right|}{|\mathcal{V}_{init}|} \ .$$

Allure	λ	T	a_2	a_1	a_0	$\mathcal{V}_{init}$
Arrêt	-1	1	0.5	0.5	0.5	-1.5

TABLE 6.9 – Paramètres de l'unique allure de freinage "STI".

Dans ces conditions, les valeurs des vitesses et de l'erreur relative calculée à l'instant final de la simulation $t_f = 20$, sont données dans le tableau 6.10.

Manœuvre	$\overline{\mathcal{V}}_{1,N-S}$ (m.s^{-1})	$\overline{\mathcal{V}}_{1,S-M}$s (m.s^{-1})	$e_{\overline{\mathcal{V}_1}}$
le freinage	0.0321	-0.0581	6

TABLE 6.10 – Comparaison S-M/N-S pour l'allure de freinage.

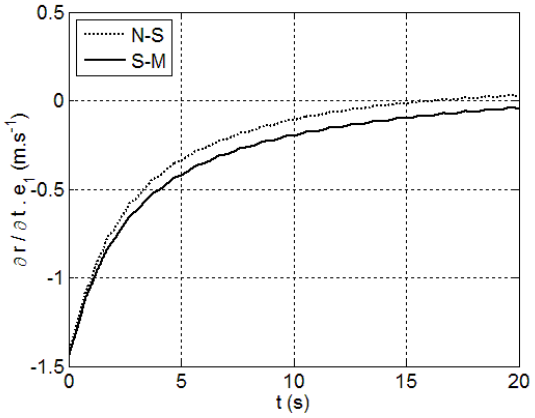
6.8.5 Allure 3-D : la manœuvre de spirale ou le virage 3-D.

Définition de la loi de déformation : cette allure consiste à ajouter à la loi de propulsion classique, deux courbures constantes le long de son corps et d'écrire :

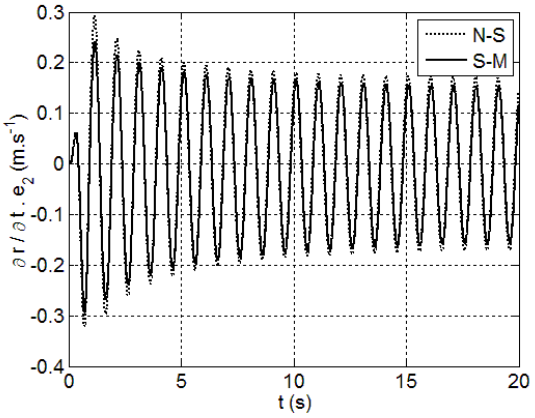
$$k_d(t) = \beta(t)(K_{f3}\boldsymbol{t}_3 + K_{c2}\boldsymbol{t}_2 + K_{c3}\boldsymbol{t}_3) \ , \tag{6.59}$$

où K_{c2} et K_{c3} sont respectivement les courbures constantes de tangage (le long du champ de vecteur $\boldsymbol{t}_2$) et de lacet (le long le champ de vecteur $\boldsymbol{t}_3$), tandis que K_{f3} est la courbure propulsive définie par (6.57). L'allure en spirale est décomposée en deux phases précisées dans le tableau 6.11.

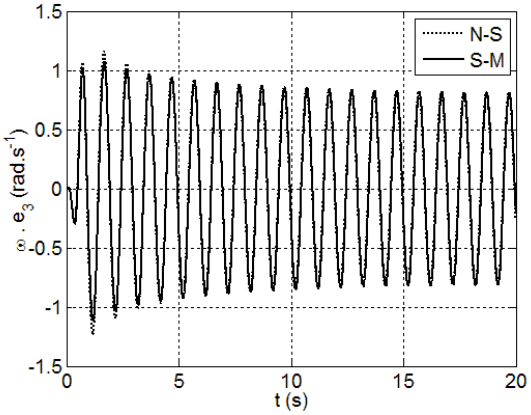
Les résultats numériques : La simulation est obtenue en appliquant (6.59), avec le jeu de paramètres du tableau 6.12. Pendant la durée $\Delta t_1 = 1$ s de Φ_1, le corps est fléchi en lacet et en tangage. Qui plus est, le poisson maintient ces courbures le long du corps tout



(a) Vitesse linéaire de la tête selon $\boldsymbol{e}_1$.



(b) Vitesse linéaire de la tête selon $\boldsymbol{e}_2$.



(c) Vitesse angulaire de la tête autour de $\boldsymbol{e}_3$.

FIGURE 6.21 – Comparaison des vitesses entre S-M et N-S pour l'allure de freinage.

Phases	Φ_1 : début du virage 3-D	Φ_2 : virage 3-D
durée	Δt_1	∞
$\beta(t)$	$f_r(t)$	1

TABLE 6.11 – Les deux phases de la manœuvre de spirale.

en se propulsant afin de s'enrouler dans un mouvement en spirale (cf. la figure 6.22).

Afin de compléter les tests de la dynamique externe rapportés jusqu'ici, nous allons à présent nous consacrer à la validation de la dynamique interne. Les figures 6.23(a)-(f) représentent les distributions le long du corps de l'anguille des couples de commandes $\boldsymbol{M}$ et de forces internes $\boldsymbol{N}$. Ces deux "profils" sont évalués à l'instant final de la simulation (i.e. $t = 10s$). Par ailleurs, et dans la continuité des essais dans le vide, les figures 6.24(a)-(f) attestent de la compatibilité de l'équilibre dynamique globale de l'anguille avec sa

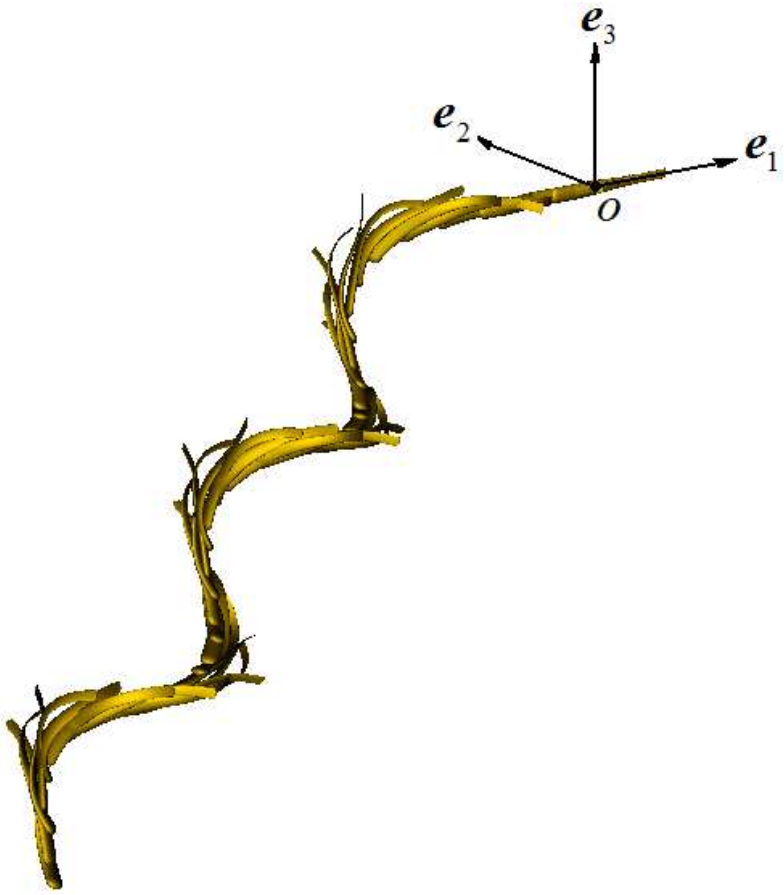


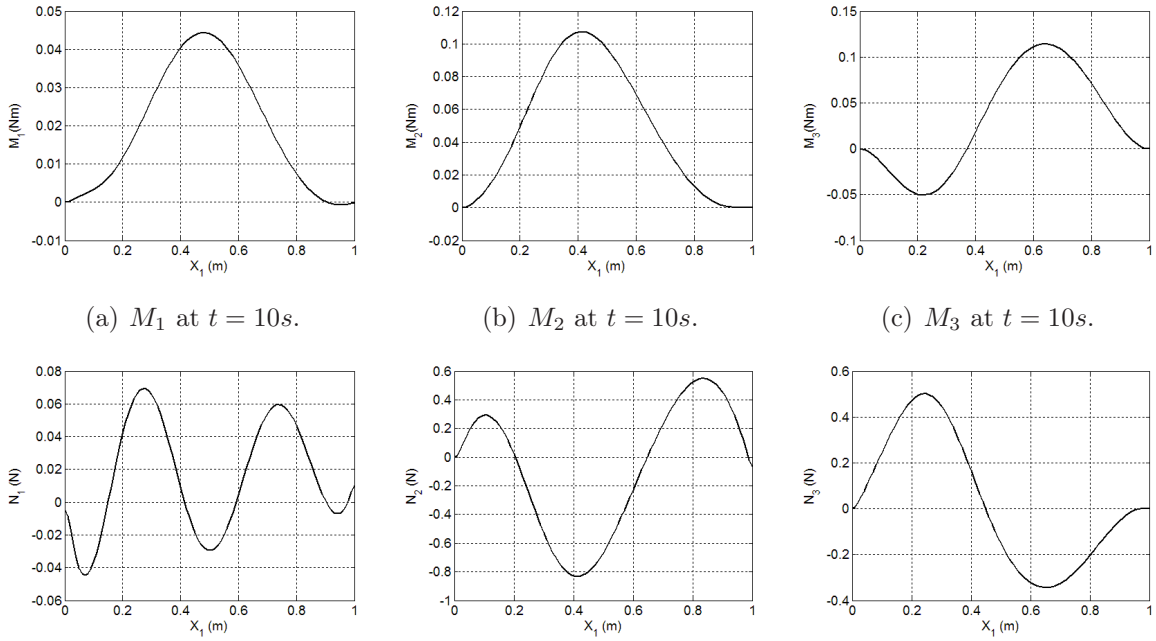
FIGURE 6.22 – L'allure de spirale (1f/1.5s).

dynamique interne. En effet, le calcul des forces $\boldsymbol{N}$ et couples $\boldsymbol{M}$ internes à l'extrémité de la queue montrent que nous avons bien comme attendu $\boldsymbol{N}(1) = \boldsymbol{N}_+$ et $\boldsymbol{M}(1) = \boldsymbol{M}_+$. Les premiers membres de ces égalités étant respectivement calculés par intégration spatiale de (6.29) et de (6.30) tandis que les seconds le sont par calcul direct des termes de bords (6.31). Finalement, ceci valide bien la cohérence des dynamiques interne et externe, telle qu'évoquée dans § 6.4.

Allure	λ	T	a_2	a_1	a_0	$\mathcal{V}_{init}$	K_{c2}	K_{c3}	Δt_1
Spirale	1	1	2	0.5	1	-0.6	1	1	1

TABLE 6.12 – Les paramètres de l'allure de spirale.

La figure 6.25 représente les tracés des vitesses axiale et de roulis de la tête. Il est important de noter que la vitesse moyenne de roulis de la tête est comme attendue non-nulle (égale à 0.31 rad/sec.). Ceci montre que l'anguille roule autour de sa colonne vertébrale tandis qu'elle plonge en spirale. Cette sensibilité de la dynamique de roulis à toute per-



(a) M_1 at $t = 10s$. (b) M_2 at $t = 10s$. (c) M_3 at $t = 10s$.

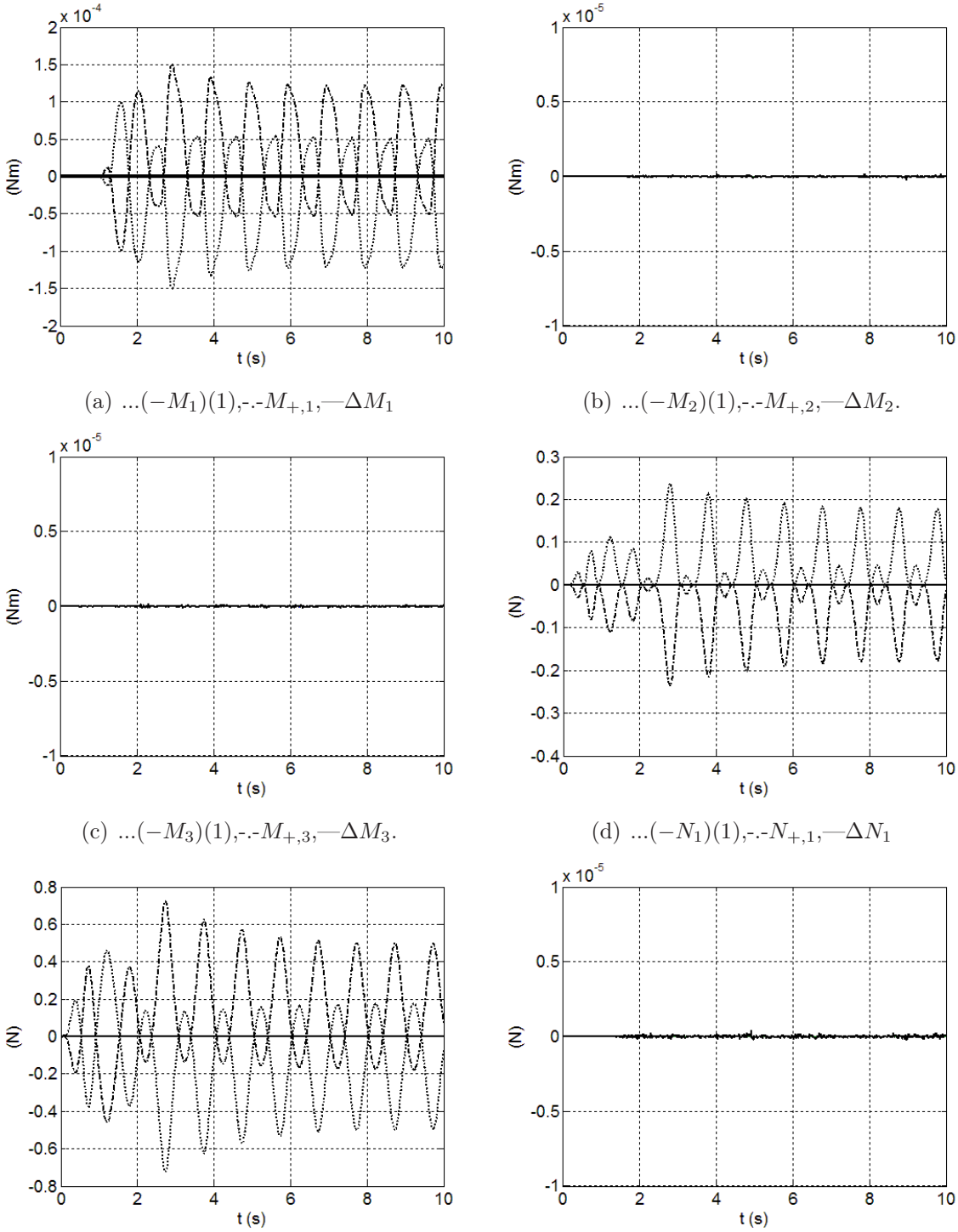
(d) N_1 at $t = 10s$. (e) N_2 at $t = 10s$. (f) N_3 at $t = 10s$.

FIGURE 6.23 – Composantes de la force ($\boldsymbol{N}$) et du couple ($\boldsymbol{M}$) internes en fonction de la variable d'espace X_1 à $t = 10s$ pour l'allure de spirale.

turbation induite par les couplages dynamiques de tangage et lacet, exige un effort de modélisation particulier des couples resistifs $\boldsymbol{c}_{res}$ (ici forcé à zéro), ainsi que la conception de contrôleurs locaux prenant en charge la stabilisation du roulis via des nageoires pectorales. Un tel stabilisateur de roulis sera inclus dans la boucle de commande du mouvement 3-D de notre future robot anguille. Ces boucles stabilisantes sont aujourd'hui conçues et étudiés (avec une approximation brute de $\boldsymbol{c}_{res}$) par nos partenaires spécialisés dans la commande [30]. Finalement, les calculs de la dynamique interne pour tous ces test (et autres) ont été utilisés afin de dimensionner notre prototype et particulièrement les actionneurs (en terme de puissances, de couples nominaux...).

6.9 Conclusion

Dans ce chapitre, les modèles analytiques des dynamiques interne et externe du chapitre § 5 ont été utilisés pour résoudre le problème de l'intégration numérique de la dynamique de la tête et le calcul du champ de couple de commande nécessaire pour les mouvements du poisson. En remarquant que les E.D.P. de notre poutre Cosserat actionnée étaient les versions continues des équations de Newton-Euler d'un manipulateur sériel à base mobile, nous avons proposé une généralisation du "modèle dynamique inverse de Newton-Euler" de [75]. Ce point de vue nous a permis d'obtenir un algorithme rapide et bien adapté à la conception de nos futurs contrôleurs "en ligne". La solution proposée



(a) ...$(-M_1)(1)$,-.-$M_{+,1}$,—ΔM_1

(b) ...$(-M_2)(1)$,-.-$M_{+,2}$,—ΔM_2.

(c) ...$(-M_3)(1)$,-.-$M_{+,3}$,—ΔM_3.

(d) ...$(-N_1)(1)$,-.-$N_{+,1}$,—ΔN_1

(e) ...$(-N_2)(1)$,-.-$N_{+,2}$,—ΔN_2.

(f) ...$(-N_3)(1)$,-.-$N_{+,3}$,—ΔN_3.

FIGURE 6.24 – Évolutions temporelles des composantes du torseur de contact appliqué sur la caudale $\mathbb{F}(1)$ (son opposé), du torseur interne $\mathbb{F}_+$, et de leurs différences $\Delta\mathbb{F} = \mathbb{F}_+ - \mathbb{F}(1)$.

est basée sur la théorie "Large Amplitude Elongated Body Theory" de J. Lighthill qui a été étendue à l'auto-propulsion 3-D. Cette extension bénéficie de la coïncidence de la

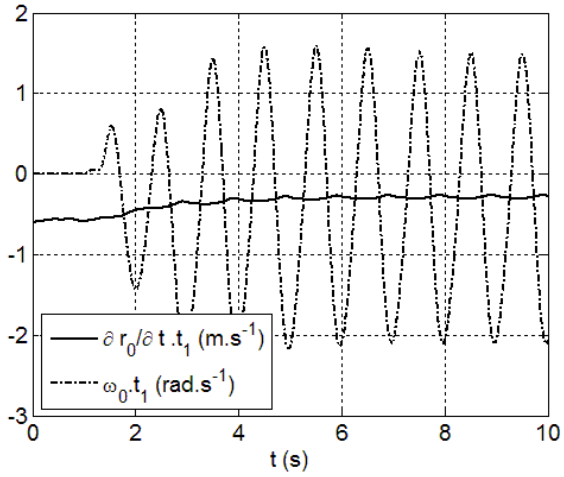


FIGURE 6.25 – Évolution temporelle de "$\mathcal{V}_1(0)$" et de $\Omega_1(0)$.

théorie du corps fin de la mécanique des fluides et de la théorie des poutres Cosserat due à Reissner qui ont été utilisées pour procéder à la réduction "tranche par tranche" de la dynamique tridimensionnelle initiale. Le modèle purement réactif obtenu à partir de ce premier a été amélioré dans ce chapitre en lui greffant un modèle résistif correctif déduit de la mécanique expérimentale des fluides et identifié à l'aide d'une stratégie de comparaison avec ISIS-CFD développé par l'École Centrale de Nantes. Il est important de noter ici, qu'une fois que la calibration du modèle effective, les coefficients restent fixes et inchangés. Les comparaisons de notre modèle calibré avec la référence Navier-Stokes donnent de très bons résultats puisque les erreurs relatives mesurées sur de nombreux cas test n'excèdent pas les dix pour cent. Cependant, le modèle simplifié n'a pu être éprouvé dans le cas de la nage 3-D car le solveur Navier-Stokes n'est pas encore opérationnel pour ce type d'allure. En outre, dans le future, le robot sera équipé d'appendices latéraux qui reproduiront les nageoires pectorales du poisson et une attention particulière sera allouée à la dynamique de roulis qui sera traitée comme un problème de commande. La queue et la peau seront eux aussi conçues et optimisées en respect de l'efficacité de la nage sous les contraintes imposées par les performances des actionneurs. Cette opération sera facilitée par les calculs de rendements basés sur les puissances obtenues par les dynamiques internes. Enfin, le contrôle à distance du prototype sera la première étape vers la navigation autonome, grâce à une boucle de commande visuel. Plusieurs tests seront réalisées dans le bassin de houle de l'École Centrale de Nantes afin de qualifier la solution biomimétique en terme d'efficacité et de manœuvrabilité par rapport aux robots sous-marins rigides "conventionnels".

Chapitre 7

Conclusion.

Le travail présenté dans ce manuscrit est consacré à l'élaboration d'un modèle dynamique de la nage pour la commande du futur "Robot Anguille" du projet ROBEA-CNRS du même nom. Sur la base des théories du corps fin et des poutres Cosserat, nous avons mis au point un modèle dynamique analytique de la nage anguilliforme auto-propulsée. Ce modèle conjugue à la fois simplicité et réalisme et ce comparé à la complexité de la physique mise en jeu dans la nage.

Sur la base de la théorie de la dynamique des fluides parfaits exposée dans le chapitre § 2, nous avons pu mettre en évidence dans le chapitre § 3 les interactions qu'entretiennent l'anguille et le fluide l'environnant lors de la nage ondulante. Pour se faire, nous avons élaboré deux algorithmes numériques basés sur la méthode des panneaux, i.e. sur la discrétisation de distributions de singularités disposées sur les frontières solides du problème. Le premier simulateur 2-D relatif aux points de vortex nous a permis d'observer le mécanisme de "pompe" mis en place par le corps de l'anguille pour améliorer son efficacité hydrodynamique. Plus précisément, les ondulations répétées de son corps créent des structures tourbillonnaires qui, en se translatant vers la nageoire caudale, chassent le fluide d'avant en arrière. Quand l'une d'elle arrive à l'extrémité de la nageoire caudale, elle est alors lâchée dans le sillage et s'agence à une allée inverse de Von-Karman. Contrairement aux sillages observés derrières les structures passives, l'allée inverse de Karman a la particularité de former un jet de fluide propulsif, i.e. de direction opposée à celle de l'avance du poisson. Ce mécanisme est à la base de la nage anguilliforme. Notre second simulateur 3-D, basé sur les filaments de vortex, nous a permis d'observer avec plus de détails l'écoulement engendré le long du corps par les mouvements de va-et-vient des sections transverses de l'animal. Ces observations 3-D nous ont permis de comparer les deux points de vue historiques dus à T.Y.-T. Wu et J. Lighthill relatifs à la modélisation simplifiée de l'écoulement autour des poissons. Au vue de nos résultats de simulation, la vision "tranche par tranche" de J. Lighthill s'est avérée la plus fidèle à "la réalité" et la

piste privilégiée pour élaborer notre modèle simplifié de contact fluide-structure. Ce point de vue issu de la théorie du corps fin (ou "Slender Body Theory") de l'Aérodynamique permet de décomposer le problème de l'écoulement tridimensionnel autour d'un corps en deux problèmes d'écoulements indépendants. Ainsi, le premier est axisymétrique au corps tandis que le second lui est transverse. Cette théorie dédiée en premier lieu aux corps rigides, fut étendue par J. Lighthill aux cas des corps déformables et en particulier à celui des poissons.

Ces travaux pionniers, rapportés dans le chapitre § 4, sont relatifs aux modèles réactifs de la nage. En accord avec son auteur, le terme "réactif" est ici employé en opposition au terme "résistif". En effet, il fait intervenir la notion de masses ajoutées pour calculer les forces de contact, tandis que le second traduit les effets de la viscosité du fluide dans la couche limite. Plus précisément, dans le modèle réactif de Lighthill, la poussée est produite au travers de l'inertie du fluide déplacé par le mouvement de va-et-vient des sections transverses du corps de l'animal. Aussi, en accord avec la *S.B.T.*, l'écoulement autour d'une section du corps est peu différent de l'écoulement bidimensionnel autour d'un cylindre infini prolongeant la section des deux côtés et se translatant à la même vitesse latérale. Dans ces conditions, il devient aisé, via les méthodes analytiques des potentiels complexes et des transformations conformes, de calculer l'"impulse" (ou résultante cinétique) du fluide contenu dans le plan de la section considérée. Ainsi, sur la base de ces hypothèses et des théorèmes généraux de la dynamique des fluides, J. Lighthill est parvenu à calculer la force de poussée exercée par un poisson sur le fluide l'environnant afin de se déplacer en ligne droite. De plus, ses modèles ont l'avantage de prendre en compte simplement, l'effet complexe du sillage sur le poisson. Cependant, les travaux de J. Lighthill se limitent jusqu'à ce jour 1°) à l'évaluation de la résultante des forces hydrodynamiques ; 2°) à la nage plane ; 3°) au modèle réactif de la nage. Il s'en suit que sous ces restrictions, la théorie originelle de Lighthill reste encore inexploitable pour générer les modèles requis par la commande en ligne d'un robot sous-marin nageant en trois dimensions. Ainsi avons-nous décider de poursuivre les travaux de J. Lighthill en les étendant à la nage anguilliforme, auto-propulsée, tridimensionnelle et tenant compte d'une contribution résistive de l'écoulement. Les constructions et évaluations de ce "modèle de Lighthill généralisé" ont fait l'objet des chapitres § 5 et § 6.

La solution proposée est basée sur la fusion des deux théories que sont "la théorie du corps fin" de la mécanique des fluides et "la théorie des poutres Cosserat" de la mécanique du solide. Grâce au choix de la cinématique des poutres dites de Kirchhoff, la *S.B.T.* du fluide s'est vue naturellement prolonger la *C.B.T.* du solide. En effet, sous l'effet de sa géométrie élancée, le corps des poissons anguilliformes stratifie le fluide le long de son axe. Mathématiquement, ce principe physique autorise de réduire l'espace des configurations

du fluide bordant latéralement le poisson sur celui de son corps. En suivant ces principes et la "réduction" qu'ils fondent, nous sommes parvenus dans le chapitre § 5 à établir les dynamiques tridimensionnelles interne et externe de l'ensemble de la matière (solide et fluide) contenu dans le volume de contrôle de J. Lighthill. La seconde étape exposée dans le chapitre § 6 réside dans l'extraction des dynamiques de la tête et des vertèbres du poisson et l'élaboration d'un algorithme numérique basé sur la "philosophie de Newton-Euler" de la robotique. Le point fort de ce simulateur est qu'il intègre d'une manière très concise (et rapide) un modèle de la nage anguilliforme auto-propulsée tridimensionnelle, sujet à notre connaissance encore inexploré jusqu'à ce jour. Qui plus est, la prise en compte de la théorie résistive dans cet algorithme nous a permis d'atteindre un bon niveau de précision (i.e. inférieur à 10%) par rapport à la référence la plus fiable basée sur l'intégration numérique des équations de Navier-Stokes.

Cependant, seules les allures 2-D ont été évaluées et jouissent actuellement de cette précision. En effet, n'ayant aujourd'hui aucunes trajectoires de référence 3-D, l'évaluation des performances de notre modèle pour la nage tridimensionnelle n'a pas pu être effectuée. Qui plus est, nous avons du fixer de façon arbitraire les coefficients hydrodynamiques relatifs à ce type d'allure. Nous espérons d'ici la fin 2007 obtenir de la part de notre partenaire de l'École Centrale de Nantes, concepteur du code de calcul Navier-Stokes ISIS-CFD, les trajectoires attendues. Ainsi, il nous sera possible, sur la base de la démarche d'identification proposée dans le chapitre § 6, d'évaluer les coefficients manquants. Toujours dans le cadre des allures 3-D, lors des tests d'allures, nous avons mis en évidence que la stabilité du robot était affectée par une dynamique dite de roulis. Plus précisément, les actions cumulées des dynamiques de tangage et de lacet font rouler autour de sa colonne vertébrale l'anguille. Pour contrecarrer ce problème, nous avons proposé dans le chapitre § 6, d'ajouter au robot une paire de nageoires pectorales jouant dans la nature le rôle de stabilisateurs. Ces deux "palettes profilées" dont les angles d'attaque (par rapport à la vitesse d'avance moyenne) seront motorisés, produiront via un différentiel de portance un couple de roulis dit stabilisant. En terme de modélisation, une approche de type Glauert (cf. section § 3.3.1) permettra de calculer ce nouveau torseur hydrodynamique qui devra être pris en compte dans la dynamique externe du robot. Finalement, après avoir apporté ces améliorations à notre modèle de la nage, nous devrons envisager son intégration dans le modèle dynamique dit "hybride" (cf. [37]) du robot qui modélise le plus fidèlement possible l'architecture de la mécanique interne de notre futur prototype. Pour rappel celui-ci est réalisé par l'assemblage sériel de robots parallèles. Pour rendre compte de l'effet du fluide sur la peau du robot dans ce simulateur discret, nous devrons discrétiser le modèle de contact fluide-structure élaboré dans ce manuscrit par une approche éléments finis. Le résultat ainsi obtenu servira à nos partenaires du Laboratoire Gipsa-Lab de Grenoble (anciennement Laboratoire d'Automatique de Grenoble) pour réaliser la commande du

robot.

Annexe A

Démonstration de la discontinuité à la traversée d'une distribution de sources.

Le but recherché ici est de démontrer mathématiquement les discontinuités apparaissant à la traversée du support d'une distribution. Dans la démonstration suivante, nous avons choisi de présenter celle relative à la distribution de sources. En ce qui concerne les autres types de distributions, nous renvoyons le lecteur vers [56]. A présent, plaçons nous dans les conditions de la sous-section § 2.10 introduisant les distributions de singularités élémentaires. Pour rappel, à la traversée du support d'une distribution de sources, une discontinuité de la vitesse normale apparaît. L'expression recherchée (2.69) revient à calculer les limites de $u_2(\boldsymbol{x})$ pour $x_2 \to 0+$ et $x_2 \to 0-$. En ce qui concerne la première limite et en tenant compte de (2.67), nous avons :

$$\lim_{x_2 \to 0+} u_2(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \lim_{x_2 \to +0} \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \sigma(x_0) \frac{x_2}{(x_1 - x_0)^2 + x_2^2} dx_0 \ . \tag{A.1}$$

Quand nous sommes extrêmement proche du support de la distribution, la vitesse de la particule considérée de position $(x_1 \boldsymbol{e}_1 + x_2 \boldsymbol{e}_2)$ est essentiellement générée par la source ponctuelle de position $x_0 = x_1$ sur le support. En conséquent de quoi, σ devient une constante et les bornes de l'intégrale n'affectent pas le calcul de la limite. Nous pouvons remplacer ces dernières par $+\infty$ et $-\infty$, il vient alors :

$$\lim_{x_2 \to 0+} u_2(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \sigma(x_1) \lim_{x_2 \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x_2}{(x_1 - x_0)^2 + x_2^2} dx_0 \ . \tag{A.2}$$

Pour effectuer le calcul de l'intégrale, on réalise le changement de variable suivant :

$$\lambda = \frac{x_1 - x_0}{x_2} \ , \ d\lambda = \frac{-dx_0}{x_2} \ , \tag{A.3}$$

où, le signe $-$ permet d'inverser les bornes d'intégration. Après quelques calculs, nous obtenons :

$$\lim_{x_2 \to 0+} u_2(\boldsymbol{x}) \;=\; \sigma(x_1) \lim_{x_2 \to 0+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} \;, \tag{A.4}$$

et après intégration, finalement nous avons :

$$\lim_{x_2 \to 0+} u_2(\boldsymbol{x}) \;=\; \frac{\sigma(x_1)}{2} \;. \tag{A.5}$$

Si maintenant, nous calculons la limite de $u_2(\boldsymbol{x})$ pour $x_2 \to 0-$, nous obtiendrons en suivant la même démarche :

$$\lim_{x_2 \to 0-} u_2(\boldsymbol{x}) \;=\; -\frac{\sigma(x_1)}{2} \;. \tag{A.6}$$

En tenant compte des deux limites calculées ici, nous retrouvons bien le saut de vitesse (2.69) attendu, i.e. :

$$u_2(x_1, 0 \pm \epsilon) \;=\; \pm \frac{\sigma(x_1)}{2} \tag{A.7}$$

Annexe B

"Le lumped Vortex".

Plaçons nous dans le contexte de la section § 3.3.3.

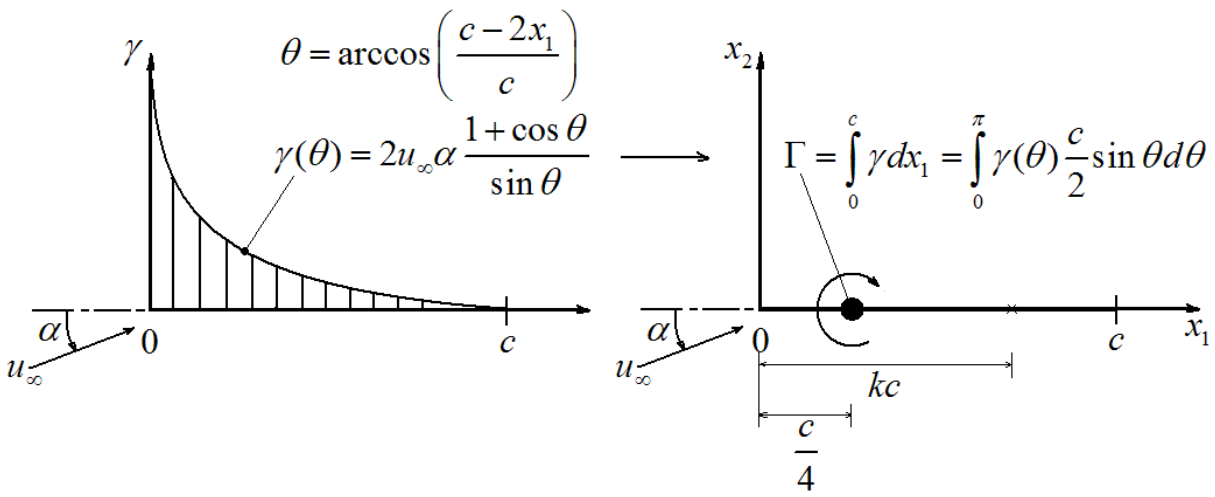


FIGURE B.1 – Passage de la solution de Glauert au "Lumped Vortex".

Pour rappel la distribution de vortex solution du problème du profil droit portant est :

$$\gamma\theta = 2u_\infty \alpha \frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} \ . \tag{B.1}$$

Il est possible d'approximer cette distribution par un unique point de vortex de même circulation, i.e. :

$$\Gamma = \int_0^c \gamma(x_1) dx_1 \ . \tag{B.2}$$

Nous savons, d'après le théorème de Kutta-Joukowski, qu'une telle circulation produit une force de portance égale à :

$$L = \rho u_\infty \Gamma \ . \tag{B.3}$$

Pour que la singularité en question ne produise uniquement une force de portance sur le profil, nous devons de fait la placer au centre de poussée. Si le profil plat est modélisé par un unique point de vortex d'intensité Γ, alors la condition aux limites de Neumann sur le profil ne peut être spécifiée uniquement en un point du dit profil. Supposons que ce point est à une distance kc du bord d'attaque le long de l'axe porté par le profil, alors l'unique condition aux limites s'écrira :

$$\frac{-\Gamma}{2\pi(kc - 1/4c)} + u_\infty \alpha = 0 \ . \tag{B.4}$$

En ce qui concerne la valeur prise par la circulation Γ, celle-ci est fixée par le théorème de Kutta-Joukowski, ainsi :

$$\Gamma = \pi c u_\infty \alpha \ . \tag{B.5}$$

En tenant compte de (B.5) dans l'équation (B.4), nous obtenons :

$$\frac{-\pi c u_{\infty\alpha}}{2\pi(kc - 1/4c)} + u_\infty \alpha = 0 \ . \tag{B.6}$$

Finalement, la solution de l'équation (B.6) permet de fixer la position du point de co-location qui permet de vérifier le théorème de Kutta-Joukowski. La valeur ainsi obtenue est $k = 3/4$.

Il est important de noter que cette approximation est basée sur la discrétisation d'un résultat analytique qui prend en compte la condition de Kutta au bord de fuite du profil.

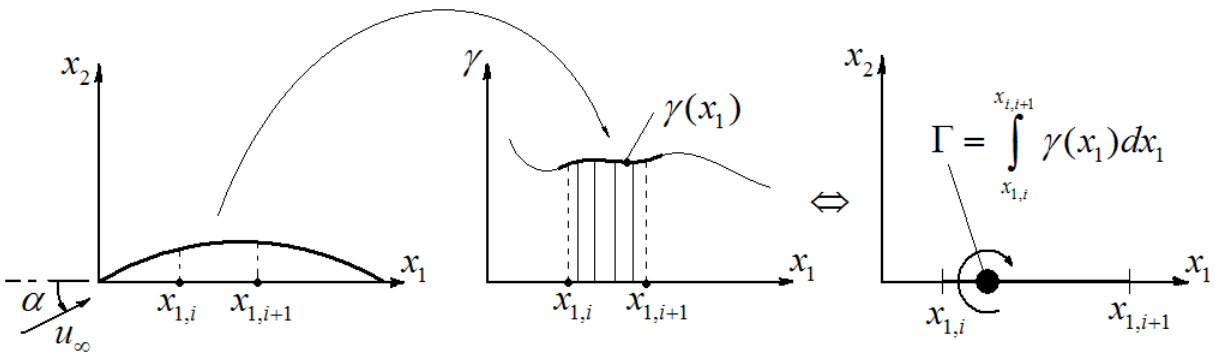


FIGURE B.2 – Principe de la discrétisation de la solution de Glauert [43].

Annexe C

Le potentiel complexe et les transformations conformes.

Nous avons vu dans la section § 4.2 que pour établir la dynamique d'un fluide parfait autour d'un corps immergé en mouvement, nous devions calculer le tenseur de masses ajoutées (cf. [61, 63]). De plus, sous l'hypothèse des corps fins, nous avons montré que la construction de ce tenseur 3-D pouvait se faire par le biais de l'intégration le long de l'axe principal du corps des tenseurs de masses ajoutées 2-D des écoulements autour des sections transverses en mouvement plan (cf. [112]). Dans le cas des écoulements 2-D, autour de forme plane quelconque, il existe une méthode analytique basée sur l'algèbre des nombres complexes et utilisant les propriétés des fonctions holomorphes pour déterminer l'écoulement résultant. Cette technique est élaborée comme suit. 1°) A partir du potentiel des vitesses et de la fonction de courant réglant l'écoulement bidimensionnel, nous pouvons calculer le potentiel dit "complexe", vérifiant les conditions de Cauchy-Riemann sur le domaine étudié. Cette fonction complexe obtenue est analytique et holomorphe. 2°) Ensuite, grâce aux propriétés de cette fonction, nous pouvons mettre le potentiel complexe "solution" du problème d'écoulement sous la forme d'une "série puissance" dite de Laurent où chaque élément de la suite est le produit d'une fonction holomorphe et d'un coefficient complexe fixé par les conditions limites du problème. 3°) Enfin, en appliquant à cette série une transformation du plan ou encore dite de Joukowski ([43]), on peut obtenir le potentiel complexe solution de l'écoulement autour de n'importe quel objet 2-D. On retrouve cette technique dans les ouvrages : [63, 85, 43]. Nous nous proposons de la détailler dans les cas nous occupant, i.e. l'ellipse en translation et rotation planes.

C.1 Le potentiel complexe.

Considérons à présent un écoulement stationnaire, incompressible et irrotationnel de fluide parfait dans le plan $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. Nous savons qu'en deux dimensions, il existe une

fonction dite de courant ψ et un potentiel des vitesses ϕ définis par :

$$\partial\psi/\partial x_1 = -u_2 \ , \ \partial\psi/\partial x_2 = u_1 \ , \tag{C.1}$$

et :

$$\partial\phi/\partial x_1 = u_1 \ , \ \partial\phi/\partial x_2 = u_2 \ . \tag{C.2}$$

A partir de ψ et ϕ, nous pouvons construire la fonction complexe $W : z \in \mathbb{C} \mapsto W(z) \in \mathbb{C}$ appelée "potentiel complexe", i.e :

$$W(z) = \phi(\boldsymbol{x}) + i\psi(\boldsymbol{x}) \ , \tag{C.3}$$

où ψ et ϕ sont respectivement les parties imaginaire et réelle de W et z est la variable complexe du plan $z = x_1 + ix_2$ (avec $i^2 = -1$). En mixant les deux équations (C.1) (C.2), nous obtenons les conditions dites de Cauchy-Riemann :

$$\partial\psi/\partial x_1 = -\partial\phi/\partial x_2 \ , \ \partial\psi/\partial x_2 = \partial\phi/\partial x_1 \ , \tag{C.4}$$

justifiant le fait que W est une fonction dite analytique et holomorphe. L'une des propriétés de ce type de fonctions est que les parties réelle et imaginaire doivent vérifier toutes deux l'équation de Laplace (ce qui est le cas dans un écoulement potentiel). De plus, un point de l'espace où W est analytique est appelé point régulier et un point où W n'est pas analytique est appelé point singulier. Enfin, si nous considérons la région du plan compris entre deux cercles concentriques C_1 et C_2 centrés à l'origine et W holomorphe sur cet anneau (i.e définissant un écoulement potentiel), alors la fonction W peut être représentée par la décomposition en série dite de Laurent comme suit (cf. [63, 56]) :

$$W(z) \ = \ \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n (z)^n \ , \tag{C.5}$$

où, les coefficients complexes A_n de cette série sont fixés par les conditions aux limites du problème d'écoulement sur les frontières C_1 et C_2 matérialisant des corps solides.

Nous allons à présent appliquer ce dernier résultat au cas simple du disque plongé dans un courant uniforme. Il est important de noter que l'écoulement autour du disque est la base de la technique des transformations conformes permettant d'obtenir les résultats recherchés et relatifs à l'ellipse.

C.2 L'écoulement autour d'un disque.

Avant d'étudier l'ellipse, traitons le cas simple de l'écoulement induit par un courant uniforme de vitesse $\boldsymbol{U} = U\boldsymbol{e}_1$ autour d'un disque de rayon R centré à l'origine. En premier lieu, nous devons établir les conditions aux limites du problème, i.e. celle à l'infini et celle sur la frontière du disque.

C.2.1 Les conditions aux limites.

– La condition aux limites à l'infini :

Le fluide se trouvant loin du corps subit uniquement le courant $\boldsymbol{U}$ du fluide. Ainsi, la condition aux limites quand le module de z tend vers l'infini est tout simplement égale à

$$\lim_{z\to+\infty} W(z) = Uz \ . \tag{C.6}$$

– La condition aux limites sur le disque :

Invoquons la condition aux limites de Neumann sur le disque. Elle impose que sur cette frontière (i.e. pour $z = Re^{i\theta}$), nous ayons :

$$\boldsymbol{\nabla}(\phi).\boldsymbol{n} \ = \ \boldsymbol{V}.\boldsymbol{n} \ , \tag{C.7}$$

où $\boldsymbol{V}$ est la vitesse du corps (ici égale à zéro) et $\boldsymbol{n}$ est le champ de vecteurs normaux à la frontière du disque. En vertu des relations qu'entretiennent ϕ et ψ, nous allons chercher à exprimer la condition (C.7) en fonction de ψ, il vient :

$$\boldsymbol{\nabla}(\phi).\boldsymbol{n} \ = \ -\frac{\partial\phi}{\partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} = \frac{\partial\psi}{\partial s} \ . \tag{C.8}$$

où s est l'abscisse curviligne sur la frontière du disque et $\boldsymbol{n} = -\partial x_2/\partial s\boldsymbol{e}_1 + \partial x_1/\partial s\boldsymbol{e}_2$. Pour que (C.7) soit vérifiée, en tenant compte de (C.8), il faut que $\psi = k$ sur le disque, où k est la constante d'intégration que nous supposerons égale à zéro.

C.2.2 Le calcul du potentiel complexe.

Pour obtenir W, nous utiliserons la série (C.5), où les frontières C_1 et C_2 sont remplacées respectivement par $|z| = R$ et $|z| = +\infty$ pour $\forall\theta$ (où θ est l'argument de z). La première condition aux limites du problème se traduit dans la série (C.5) par :

- si $n > 1$, $A_n = 0$;
- si $n = 1$, $A_1 = U$;
- si $n = 0$, $A_0 = 0$;
- si $n < 0$, A_n est indéterminé.

Par conséquent, (C.5) s'écrit sous la forme :

$$W = A_1 z + \frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + ... \ . \tag{C.9}$$

Pour déterminer les coefficients restants, nous allons nous servir de la deuxième condition aux limites (i.e celle de Neumann sur le disque). Cependant avant tout, nous devons extraire de W sa parti imaginaire ψ. Sur la base de (C.9), le potentiel complexe sur la frontière du disque (i.e. $z = Re^{i\theta}$) est égale à :

$$W(Re^{i\theta}) = URe^{i\theta} + \frac{A_{-1}}{R}e^{-i\theta} + \frac{A_{-2}}{R^2}e^{-i2\theta} + ... \ . \tag{C.10}$$

A présent, nous devons extraire de (C.10) la partie imaginaire de W équivalente à ψ, il vient :

$$\begin{aligned} \psi(Re^{i\theta}) &= UR\sin\theta + \frac{\mathfrak{Im}(A_{-1})}{R}\cos\theta - \frac{\mathfrak{Re}(A_{-1})}{R}\sin\theta \\ &+ \frac{\mathfrak{Im}(A_{-2})}{R^2}\cos(2\theta) - \frac{\mathfrak{Re}(A_{-2})}{R^2}\sin(2\theta) + ... \ . \end{aligned} \tag{C.11}$$

où, $\mathfrak{Re}(.)$ et $\mathfrak{Im}(.)$ sont deux fonctions donnant respectivement les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe. Posons maintenant la condition aux limites de Neumann, i.e. $\psi = 0$ sur le disque, il vient :

$$\begin{aligned} 0 &= UR\sin(\theta) + \frac{\mathfrak{Im}(A_{-1})}{R}\cos\theta - \frac{\mathfrak{Re}(A_{-1})}{R}\sin\theta \\ &+ \frac{\mathfrak{Im}(A_{-2})}{R^2}\cos(2\theta) - \frac{\mathfrak{Re}(A_{-2})}{R^2}\sin(2\theta) + ... \ . \end{aligned} \tag{C.12}$$

Ainsi, pour que l'égalité (C.12) soit vérifiée, il faut que :

- si $n = -1$, $A_{-1} = UR^2$; (C.13)
- si $n < -1$, $A_n = 0$. (C.14)

Finalement, le potentiel complexe autour d'un disque fixe dans un courant uniforme est :

$$W(z) \;=\; U\left(z+\frac{R^2}{z}\right)\;. \tag{C.15}$$

Maintenant, nous allons appliquer cette démarche à l'ellipse en utilisant le principe des transformations conformes.

C.3 Les transformations conformes.

Le but de cette section est de rappeler la technique analytique permettant de déterminer l'écoulement autour de l'ellipse en fonction de la série de Laurent du disque (C.5).

Considérons deux systèmes de coordonnées curvilignes plans. Nous pouvons sur chacun de ces systèmes définir un point géométrique par un nombre complexe respectivement Z et z. Le passage de l'un à l'autre est défini par une fonction holomorphe bijective appelée transformation conforme :

$$f : D \in \mathbb{C} \rightarrow D' \in \mathbb{C}\;, \tag{C.16}$$

tel que la région de D extérieure à C dans le plan Z soit transportée dans la région de D' extérieure à C' dans le plan z et que le contour C par transformation coïncide avec le contour C' (cf. figure C.1). Cette transformation conserve les angles, mais modifie les longueurs. Celle que nous allons utiliser ici est la transformation de Joukowski [43], définit comme suit :

$$z \;=\; Z+\frac{c^2}{4Z}\;, \tag{C.17}$$

où c est une constante arbitraire à fixer selon la transformation voulue. En ce qui nous concerne, pour l'ellipse, $c^2 = a^2 - b^2$ où a et b sont respectivement les grand et petit demi-axes de l'ellipse (avec la condition $a > b$) (cf. [85]). Plus précisément, si nous parcourons un cercle de rayon $r = 1/2(a+b)$ dans le plan Z et en supposant que $c^2 = a^2 - b^2$, nous décrierions dans le plan z une ellipse de demi-axes a et b.

Comme la fonction (C.17) est bijective, nous pouvons définir la fonction réciproque, comme suit :

$$Z \;=\; \frac{1}{2}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)\;. \tag{C.18}$$

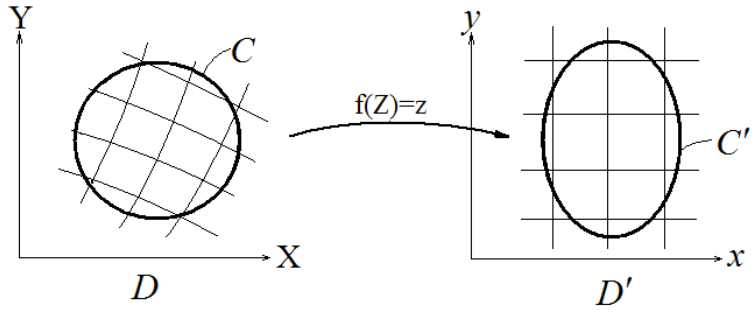


FIGURE C.1 – Transformation du plan Z vers le plan z

Considérons maintenant et pour toute la suite l'unique transformation entre le disque et l'ellipse (i.e. $c^2 = a^2 - b^2$). Pour simplifier les calculs du potentiel complexe autour de cette dernière, nous allons réaliser un changement de variable et utiliser les coordonnées dites "elliptiques" définies comme suit :

$$z = c\cosh\zeta \ , \qquad \zeta = \xi + i\eta \ , \tag{C.19}$$

où, $\xi \in [0, +\infty[$ et $\eta \in [0, 2\pi]$.

A partir de (C.19), nous avons aussi :

$$x_1 = c\cosh\xi\cos\eta \ , \ x_2 = c\sinh\xi\sin\eta \ . \tag{C.20}$$

De plus, sur la frontière de l'ellipse de coordonnées ξ_0 nous avons les deux relations suivantes :

$$a = c\cosh\xi_0 \ , \ b = c\sinh\xi_0 \ . \tag{C.21}$$

Après ces considérations géométriques, intéressons nous aux relations qu'entretiennent les écoulements sur D et sur D'. Nous avons vu précédemment que le potentiel complexe autour du disque (i.e. sur D) était régit par la série de Laurent (C.5). Pour obtenir celle autour de l'ellipse (i.e. sur D'), il nous faut appliquer la transformation conforme de Joukowski (C.17) à la série (C.5). Après quelques calculs, la série de Laurent sur le plan z s'écrit :

$$W(z) \ = \ \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n \left(z + \sqrt{z^2 - c^2} \right) \ . \tag{C.22}$$

Cette dernière relation définit l'évolution du potentiel complexe sur le plan z entre deux ellipses concentriques. Pour plus de commodité, nous appliquons le changement de variable (C.19) à (C.22), il s'en suit :

$$W(\zeta) \;=\; \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n c^n e^{n\zeta} \;, \tag{C.23}$$

où, $z = c\cosh\zeta$ et $\sqrt{z^2 - c^2} = c\sinh\zeta$.

Finalement, la relation (C.23) règle l'écoulement autour d'une ellipse en fonction des conditions aux limites (au travers des coefficients A_n). A partir de ce résultat, nous calculerons l'écoulement autour de :

– l'ellipse en translation rectiligne (selon son grand et petit axes) ;

– l'ellipse en rotation (autour de la normale au plan).

C.4 L'écoulement autour d'une ellipse en translation rectiligne.

Considérons ici une ellipse se translatant à une vitesse constante $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{e}_1$ dans un fluide parfait, incompressible et irrotationnel. Établissons en premier lieu les conditions aux limites de ce problème de mécanique des fluides.

C.4.1 Les conditions aux limites.

– La condition aux limites à l'infini :

Ici, contrairement au cas traité précédemment, le fluide est au repos loin du corps, alors :

$$\lim_{z\to+\infty} W(z) = 0 \;. \tag{C.24}$$

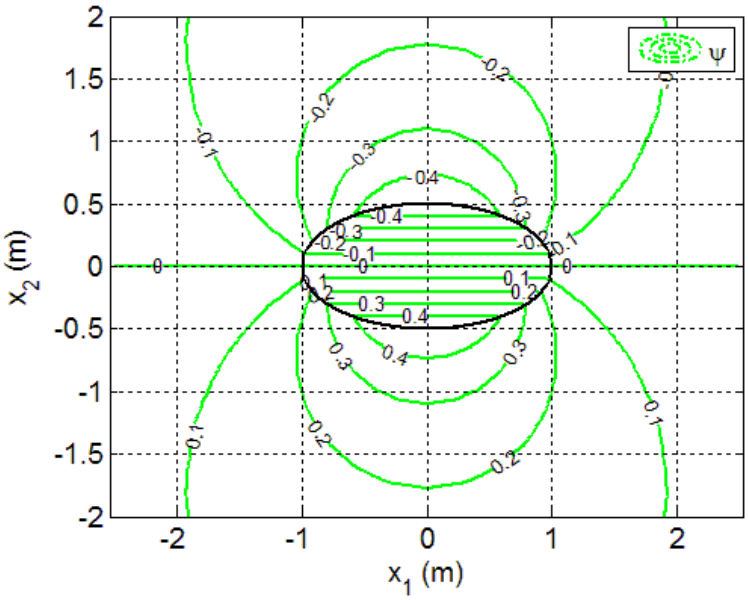
– La condition aux limites sur l'ellipse :

A partir de (C.7) et (C.8), la condition aux limites de Neumann sur l'ellipse sera :

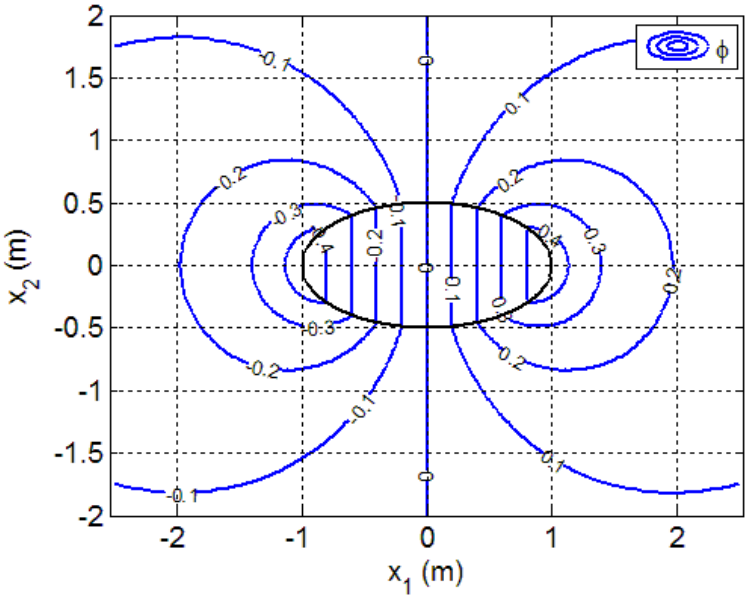
$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = -V_1\frac{\partial x_2}{\partial s} \text{ et, } \psi = -V_1 x_2 + k \;, \tag{C.25}$$

où k est la constante d'intégration que nous supposerons égale à zéro.

C.4.2 Le calcul du potentiel complexe.



(a) Les lignes de courant.



(b) Les lignes iso-potentielles.

FIGURE C.2 – Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en translation selon son grand axe à la vitesse de $V_1 = 1m.s^{-1}$

.

Contrairement au cas du disque que nous avons traité dans la section précédente, seul le coefficient complexe A_{-1} est non nul. Il permet de vérifier la condition de Neumann

(i.e. $\psi = -V_1 x_2$). Pour déterminer l'unique coefficient de (C.23), nous devons appliquer le changement de variable (C.19) à la condition aux limites sur l'ellipse, il vient :

$$\psi(\xi = \xi_0, \eta) \quad = \quad -V_1 c \sinh \xi_0 \sin \eta \ . \tag{C.26}$$

Le potentiel complexe W réglant l'écoulement autour de l'ellipse est de la forme :

$$W(\zeta) \quad = \quad A_{-1} c^{-1} e^{-\zeta} \ , \tag{C.27}$$

où la fonction de courant partie imaginaire de W est égale à :

$$\psi(\xi, \eta) \quad = \quad -\mathfrak{Re}(A_{-1}) c^{-1} e^{-\xi} \sin \eta + \mathfrak{Im}(A_{-1}) c^{-1} e^{-\xi} \cos \eta \ . \tag{C.28}$$

Appliquons à présent la condition aux limites (C.26) à la définition de ψ (C.28) pour $\xi = \xi_0$ quelque soit η, il vient :

$$-V_1 c \sinh \xi_0 \sin \eta \quad = \quad -\mathfrak{Re}(A_{-1}) c^{-1} e^{-\xi_0} \sin \eta + \mathfrak{Im}(A_{-1}) c^{-1} e^{-\xi_0} \cos \eta \ , \tag{C.29}$$

où par identification $\mathfrak{Im}(A_{-1}) = 0$ et :

$$\mathfrak{Re}(A_{-1}) c^{-1} e^{-\xi_0} \quad = \quad V_1 c \sinh \xi_0 \ . \tag{C.30}$$

A partir des relations de la trigonométrie (cf. [41]), nous pouvons écrire :

$$e^{-\xi_0} \quad = \quad \cosh \xi_0 - \sinh \xi_0 = \frac{a-b}{c} \ . \tag{C.31}$$

Finalement, la partie réelle de l'unique coefficient non nul de W est égale à :

$$\mathfrak{Re}(A_{-1}) \quad = \quad V_1 b c \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \ . \tag{C.32}$$

Enfin, à l'aide de la relation trigonométrique $e^{-\zeta} = e^{-\xi} e^{-i\eta} = e^{-\xi}(\cos \eta - i \sin \eta)$, le potentiel des vitesses ϕ et la fonction de courant ψ de l'écoulement plan autour de l'ellipse en fonction des coordonnées elliptiques (ξ, η) sont égales à :

$$\phi(\xi, \eta) = V_1 b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} \cos \eta \ , \ \psi(\xi, \eta) = -V_1 b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi} \sin \eta \ . \tag{C.33}$$

Sur la figure C.2, nous avons représenté les fonctions ϕ et ψ dans le plan complexe z.

Si maintenant, l'ellipse, au lieu de se translater selon son grand axe se translate selon son petit axe à la vitesse constante $\boldsymbol{V} = V_1\boldsymbol{e}_2$, la condition aux limites de Neumann sur l'ellipse sera :

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = V_2\frac{\partial x_1}{\partial s} \text{ et, } \psi = V_2 x_1 + k \ , \tag{C.34}$$

où, k est la constante d'intégration et est encore égale à zéro.

En appliquant le changement de variable (C.19) à cette dernière condition, il vient :

$$\psi(\xi = \xi_0, \eta) \ = \ V_2 c \cosh\xi_0 \cos\eta \ , \tag{C.35}$$

Puis en tenant compte de (C.35) dans la définition de ψ (C.28) pour $\xi = \xi_0$ quelque soit η, nous obtenons :

$$V_2 c \cosh\xi_0 \cos\eta \ = \ -\mathfrak{Re}(A_{-1})c^{-1}e^{-\xi_0}\sin\eta + \mathfrak{Im}(A_{-1})c^{-1}e^{-\xi_0}\cos\eta \ , \tag{C.36}$$

où par identification $\mathfrak{Re}(A_{-1}) = 0$ et :

$$\mathfrak{Im}(A_{-1}) \ = \ V_2 ac\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \ . \tag{C.37}$$

Finalement, ψ et ϕ réglant l'écoulement autour d'une ellipse se translatant selon son petit axe sont égales à :

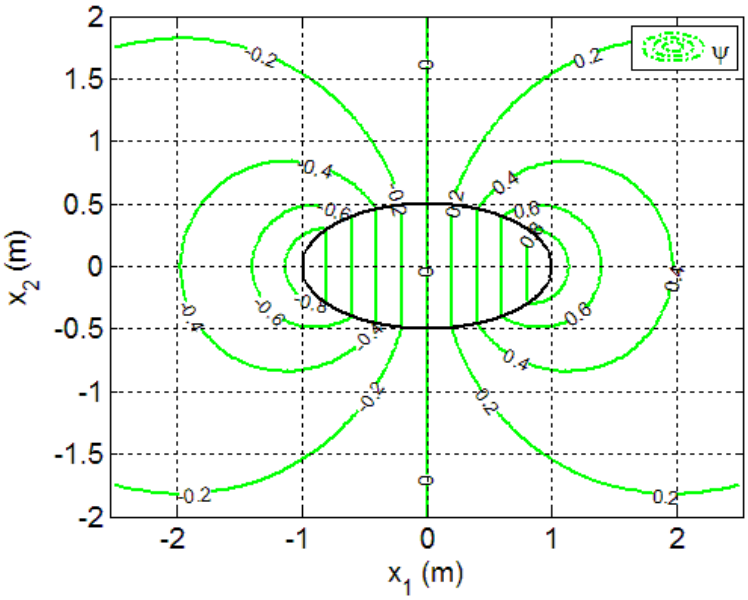
$$\phi(\xi,\eta) = V_2 a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^{-\xi}\sin\eta \ , \ \psi(\xi,\eta) = V_2 a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^{-\xi}\cos\eta \ . \tag{C.38}$$

Enfin, nous avons représenté sur la figure C.3, la fonction de courant ψ et le potentiel des vitesses ϕ autour d'une ellipse en translation selon son petit axe.

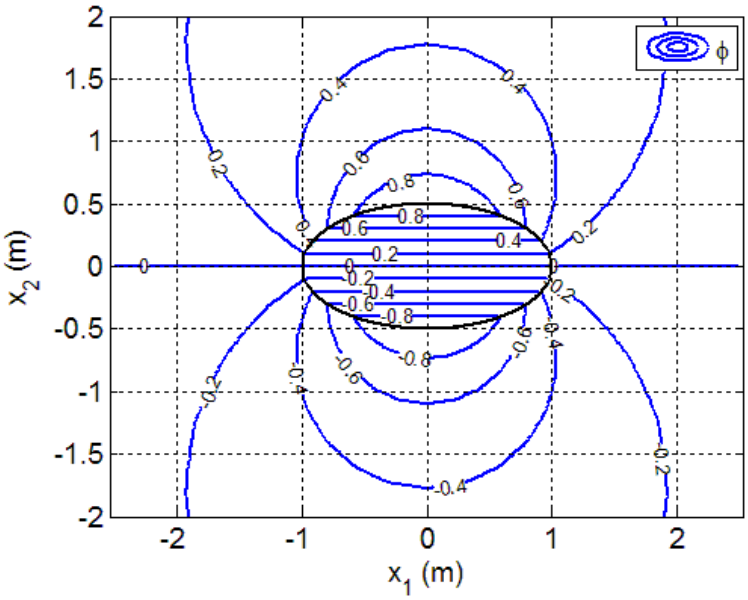
Maintenant, intéressons nous à l'écoulement autour d'une ellipse en rotation plane.

C.5 L'écoulement autour d'une ellipse en rotation.

Supposons que notre ellipse ne soit plus en translation plane mais en rotation autour de la normale au plan $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ avec une vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \omega_3\boldsymbol{e}_3$. Avec les mêmes notations que précédemment, la condition de Neumann à la frontière impose que :



(a) Les lignes de courant.



(b) Les lignes iso-potentielles.

FIGURE C.3 – Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en translation selon son petit axe à la vitesse de $V_2 = 1m.s^{-1}$

.

$$\frac{\partial \psi}{\partial s} = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}).\boldsymbol{n} = \omega_3 r \frac{\partial r}{\partial s} , \tag{C.39}$$

où, $\boldsymbol{r}$ est le vecteur entre l'origine de l'ellipse et un point de la frontière et r est sa

norme. En intégrant (C.39) le long de la frontière de l'ellipse, nous obtenons :

$$\psi = \frac{1}{2}\omega_3 r^2 + k \ , \tag{C.40}$$

où k est la constante d'intégration. Finalement, en posant $r^2 = x^2 + y^2$, (C.40) s'écrit en coordonnées elliptiques comme suit :

$$\psi(\xi_0) = \omega_3 \frac{c^2}{2}\left(\cosh^2(2\xi_0) + \cos(2\eta)\right) + k \ , \tag{C.41}$$

où nous fixerons $k = -\omega_3 c^2/2\cosh^2(2\xi_0)$, et ainsi :

$$\psi(\xi_0) = \omega_3 \frac{c^2}{2}\cos(2\eta) \ . \tag{C.42}$$

Pour vérifier la condition (C.42) sur la frontière de l'ellipse, le potentiel complexe doit être une fonction de 2η. Par conséquent, A_{-2} est le seul coefficient de (C.23) non nul. Ainsi, sous cette condition, (C.23) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= A_{-2}c^{-2}e^{-2\zeta} \\ &= A_{-2}c^{-2}e^{-2\xi}(\cos(2\eta) - i\sin(2\eta)) \ . \end{aligned} \tag{C.43}$$

La partie imaginaire de (C.43) définissant ψ est égale à :

$$\psi(\xi,\eta) = \mathfrak{Im}(A_{-2})c^{-2}e^{-2\xi}\cos(2\eta) - \mathfrak{Re}(A_{-2})c^{-2}e^{-2\xi}\sin(2\eta) \ . \tag{C.44}$$

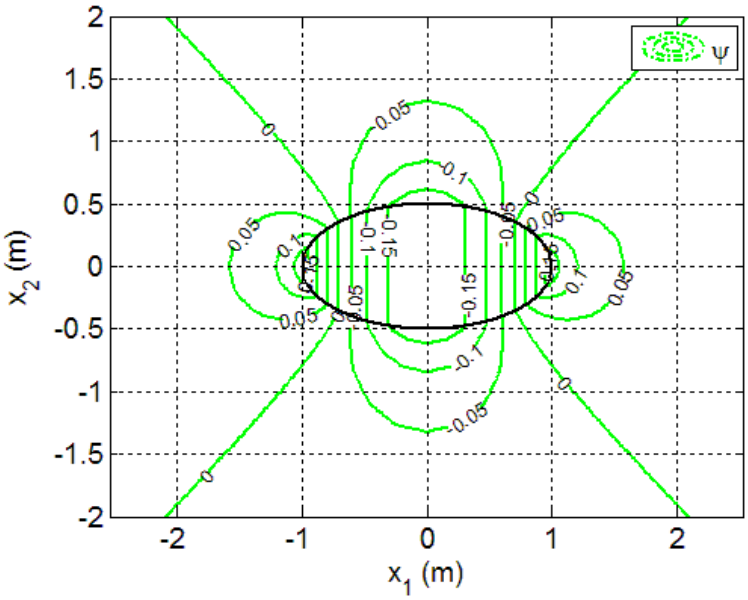
Posons à l'aide de (C.44), la condition aux limites de Neumann (C.41) pour $\forall\zeta = \xi_0 + i\eta$, il vient :

$$\omega_3\frac{c^2}{2}\cos(2\eta) = c^{-2}e^{-2\xi_0}\left(\mathfrak{Im}(A_{-2})\cos(2\eta) - \mathfrak{Re}(A_{-2})\sin(2\eta)\right) \ . \tag{C.45}$$

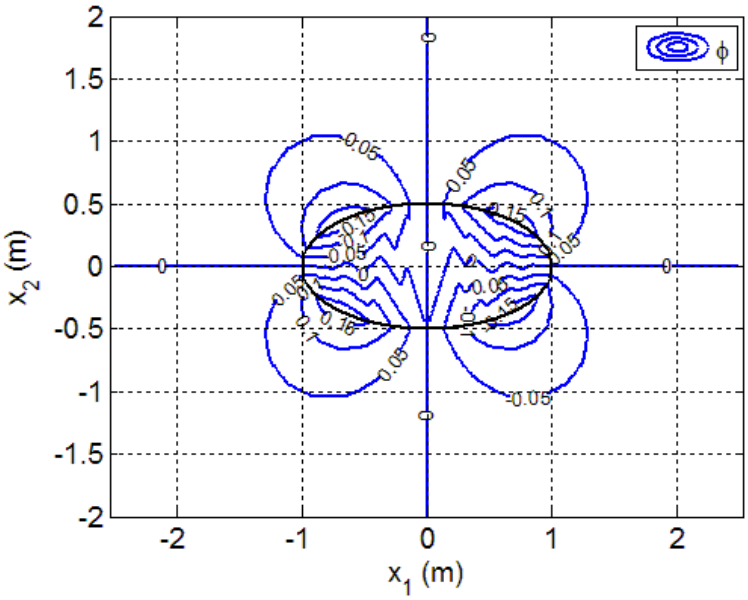
Par identification, les parties réelle et imaginaire de A_{-2} sont respectivement égales à zéro et à :

$$\mathfrak{Im}(A_{-2}) = \omega_3\frac{c^4}{4}e^{2\xi_0} \ . \tag{C.46}$$

De plus, à l'aide de (C.21), nous pouvons écrire que :



(a) Les lignes de courant.



(b) Les lignes iso-potentielles.

FIGURE C.4 – Écoulement potentiel autour d'une ellipse de demi-axes $a = 1m$ et $b = 0.5m$ en rotation autour de la normale au plan à la vitesse angulaire $\omega_3 = 1rad.s^{-1}$

.

$$e^{2\xi_0} = \left(e^{\xi_0}\right)^2 = (\sinh\xi_0 + \cosh\xi_0)^2 = \frac{(a+b)^2}{c^2} \ . \tag{C.47}$$

Finalement, le potentiel complexe du fluide entourant une ellipse en rotation en fonc-

tion de ζ est égale à :

$$W(\zeta) = \frac{i}{4}\omega_3(a+b)^2 e^{-2\zeta} \ . \tag{C.48}$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont définis par :

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\omega_3(a+b)^2 e^{-2\xi}\sin(2\eta) \ , \ \psi(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\omega_3(a+b)^2 e^{-2\xi}\cos(2\eta) \tag{C.49}$$

Nous avons représenté sur la figure C.4, le potentiel des vitesses et la fonction de courant dans le plan $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ autour de l'ellipse en rotation.

C.6 Le tenseur de masse ajoutée de L'ellipse.

Les fonctions potentiels "unitaires" planes réglant l'écoulement autour de l'ellipse sont définies en fonction des coordonnées elliptiques $\boldsymbol{x}(\xi,\eta)$:

$$\Upsilon_1 = \frac{1}{4}(a+b)^2 e^{-2\xi}\sin(2\eta) \ , \ \Upsilon_2 = b\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^{-\xi}\cos\eta \ , \ \Upsilon_3 = a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}e^{-\xi}\sin\eta \ , \tag{C.50}$$

où $a \geq b$.

C.7 L'énergie cinétique du fluide.

A l'aide des équations (C.33), (C.38), (C.49) définissant les potentiels des vitesses et fonctions de courant de l'écoulement du fluide autour d'une ellipse se déplaçant dans le plan, nous pouvons calculer l'énergie cinétique T associée au fluide. Elle est définie par la formule :

$$2T \ = \ -\rho\int_C \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}ds \ . \tag{C.51}$$

Comme nous savons que $\partial\phi/\partial n = -\partial\psi/\partial s$, l'équation de l'énergie cinétique peut s'écrire aussi :

$$2T \ = \ -\rho\int_C \phi d\psi \ . \tag{C.52}$$

Finalement, dans le cas de l'ellipse, cette relation se réduit comme suit :

$$2T = -\rho \int_0^{2\pi} \phi(\xi_0) d\psi(\xi_0) \ . \tag{C.53}$$

En tenant compte de (C.33), nous allons calculer l'énergie cinétique du fluide relative au premier mouvement de translation que nous avons traité précédemment (cf. § C.5), il s'en suit :

$$T = \frac{1}{2}\rho \int_0^{2\pi} \left(V_1 b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi_0} \cos\eta \right) \left(V_1 b \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} e^{-\xi_0} \cos\eta d\eta \right) \tag{C.54}$$

Après quelques calculs, nous obtenons :

$$T = \frac{1}{2}\rho V_1^2 b^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\eta d\eta \tag{C.55}$$

Finalement, l'énergie cinétique du fluide entourant une ellipse en translation selon son grand axe est égale à :

$$T = \frac{1}{2}\pi\rho b^2 V_1^2 \tag{C.56}$$

Si nous considérons cette fois-ci l'écoulement autour d'une ellipse en translation selon la direction de son petit axe, alors l'énergie cinétique sera :

$$T = \frac{1}{2}\pi\rho a^2 V_2^2 \tag{C.57}$$

Enfin, si l'ellipse est en rotation, l'énergie cinétique est définie par :

$$T = \frac{1}{4}\pi\rho \left(a^2 - b^2\right)^2 \omega_3^2 \tag{C.58}$$

Finalement, les quantités $\rho\pi b^2$, $\rho\pi a^2$ et $1/8\pi\rho\left(a^2 - b^2\right)^2$ dans (C.56)-(C.58) sont les coefficients de masses et d'inertie ajoutées de l'ellipse respectivement en translation selon l'axe $\boldsymbol{e}_1$ et $\boldsymbol{e}_2$ et en rotation autour de $\boldsymbol{e}_3$.

Annexe D

Les e.d.o. relatives aux quaternions.

Si la spécification des positions d'un solide dans l'espace est assez naturelle et, par conséquent, relativement simple, il en va tout autrement de celle de son orientation. Nous savons que les rotations planes peuvent être figurées par des opérations agissant sur des nombres complexes. De la même manière, nous savons représenter une rotation par un quaternion unitaire. Un tel objet a la propriété d'agir sur un vecteur de $\mathbb{R}^3$ (un quaternion purement imaginaire) et de le transformer en un nouveau vecteur tout en préservant la longueur du vecteur de départ ainsi que le produit scalaire et le signe du produit vectoriel. Afin d'introduire cet objet, reconsidérons en suivant Euler que, dans l'espace à trois dimensions, une rotation autour d'un point O se définit par (cf. [59]) :

- un axe Δ, passant par O, portant un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$;
- un angle θ, que l'on peut éventuellement limiter à $(0, 180^\circ)$ sans perte de généralité : en effet, une rotation $rot(-\theta, \boldsymbol{u})$ peut-être remplacée par $rot(\theta, -\boldsymbol{u})$ (le sens de rotation étant défini par la règle du tire bouchon).

Si on définit le vecteur $\boldsymbol{u}$ dans la base $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ par ces trois composantes $(\alpha, \beta, \gamma)^T$, et que l'on effectue une rotation d'un angle θ autour de ce vecteur, alors le quaternion $\boldsymbol{q}$ associé sera :

$$\boldsymbol{q} = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \cos(\frac{\theta}{2}) + (\alpha i + \beta j + \gamma k) \sin(\frac{\theta}{2}) \ . \tag{D.1}$$

où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

De plus, la matrice de rotation équivalente en fonction des coordonnées du quaternion $\boldsymbol{q}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2 & 2(q_1q_2-q_0q_4) & 2(q_1q_3+q_0q_2) \\ 2(q_1q_2+q_0q_3) & q_0^2+q_2^2-q_1^2-q_3^2 & 2(q_2q_3-q_0q_1) \\ 2(q_1q_3-q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & q_0^2+q_3^2-q_1^2-q_2^2 \end{bmatrix} . \tag{D.2}$$

Il est intéressant, pour des raisons d'intégration numérique, d'utiliser les quaternions en lieu et place des matrices de rotation dans les modèles continus de la poutre Cosserat. Pour se faire, nous devons exprimer les différents e.d.o relatives aux matrices de rotation en fonction de quaternions. Pour rappel, elles sont :

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}\boldsymbol{R}^T \ , \ \hat{\boldsymbol{K}} = \boldsymbol{R}^T\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial X_1} \ , \tag{D.3}$$

où, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{K}$ sont respectivement les champs le long de la poutre de matrices de rotation, de vecteurs vitesses angulaires et de vecteurs courbures. Il possible sur ces bases de construire les deux e.d.o. suivantes :

$$\boldsymbol{\omega} = 2\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}\bar{\boldsymbol{q}} \ , \ \boldsymbol{K} = 2\bar{\boldsymbol{q}}\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial X_1} \ , \tag{D.4}$$

où $\bar{\boldsymbol{q}}$ est le quaternion conjugué de $\boldsymbol{q}$ équivalant à R.

Maintenant, nous allons à présent exprimer les e.d.o. (D.4) en composante et extraire de ces relations, les expressions de $\partial \boldsymbol{q}/\partial t$ et $\partial \boldsymbol{q}/\partial X_1$ qui nous intéressent ici. Nous savons qu'en composantes, les deux champs de vecteurs $\boldsymbol{\omega}$ et $\boldsymbol{K}$ s'écrivent :

$$\boldsymbol{\omega}(X_1,t) = \omega_1(X_1,t)\boldsymbol{e}_1 + \omega_2(X_1,t)\boldsymbol{e}_2 + \omega_3(X_1,t)\boldsymbol{e}_3 \tag{D.5}$$

$$\boldsymbol{K}(X_1,t) = K_1(X_1,t)\boldsymbol{t}_1(X_1,t) + K_2(X_1,t)\boldsymbol{t}_2(X_1,t) + K_3(X_1,t)\boldsymbol{t}_3(X_1,t) \ , \tag{D.6}$$

où pour rappel $(O,\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)$ est le repère galiléen et $(G,\boldsymbol{t}_1,\boldsymbol{t}_2,\boldsymbol{t}_3)(X_1,t)$ est le repère mobile de la section X_1. A partir de ces dernières projections et de (D.4), nous pouvons exprimer les dérivées des composantes du quaternion $(q_1,q_2,q_3,q_4)^T$:

• dérivée de $\boldsymbol{q}$ par rapport au temps t en fonction de la vitesse angulaire spatiale $\boldsymbol{\omega}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial t}(X_1,t) = \begin{pmatrix} \partial q_1/\partial t \\ \partial q_2/\partial t \\ \partial q_3/\partial t \\ \partial q_4/\partial t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_3 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \ ; \tag{D.7}$$

• dérivée de $\boldsymbol{q}$ par rapport à la variable d'espace X_1 en fonction de la courbure matérielle $\boldsymbol{K}$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial X_1}(X_1,t) = \begin{pmatrix} \partial q_1/\partial X_1 \\ \partial q_2/\partial X_1 \\ \partial q_3/\partial X_1 \\ \partial q_4/\partial X_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ K_1 & 0 & K_3 & -K_2 \\ K_2 & -K_3 & 0 & K_1 \\ K_3 & K_2 & -K_1 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} . \tag{D.8}$$

Dans l'algorithme macro-continue présenté dans ce manuscrit, l'équation (D.7) nous permettra d'actualiser l'orientation de la tête en fonction de sa vitesse angulaire et l'équation (D.8) nous permettra de calculer le champ de matrices de rotation le long de la colonne vertébrale du poisson.

Bibliographie

[1] V. I. Arnold. *Mathematical methods in classical mechanics*. Springer-Verlag, 1988.

[2] J. Ayers. Underwater walking. *Arthropod Structure and Development*, 33 :347–360, 2004.

[3] D. S. Barette, M. S. Triantafyllou, D. K. P. Yue, M. A. Grosenbaugh, and M. J. Wolfgang. Drag reduction in fish-like locomotion. *J. Fluid Mech.*, 392 :183–212, 1999.

[4] G. K. Batchelor. *An Introduction To Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.

[5] R. W. Blake. *Fish locomotion*. Cambridge University Press, 1991.

[6] G. Bonnet. *Méthode des équations integrales appliquée à la mécanique*. Institu National polytechnique de Grenoble, 1988.

[7] J. Bousquet. *Méthode des singularités*. Cepadues-Editions, 1990.

[8] F. Boyer. *Contribution à la modélisation et à la commande dynamique des robots flexibles*. PhD thesis, Université Paris 6, 1994.

[9] F. Boyer and P. Coiffet. Generalisation of newton-euler model for flexible manipulators. *J. of robotic systems*, 13 :11–24, 1996.

[10] F. Boyer and W. Khalil. An efficient calculation of flexible manipulator inverse dynamics. *J.of Robotic Research*, 17 :282–293, 1998.

[11] F. Boyer, M. Porez, and W. Khalil. Macro-continuous computed torque algorithm for the three-dimensional eel-like robot. *IEEE J. of trans. on Robotics*, 22 :763–775, 2006.

[12] F. Boyer, M. Porez, and A. Leroyer. Poincaré-cosserat equations for lighthill three-dimensional dynamic model of a self propolled eel devoted to robotics. *Soumis, rapport interne de l'Ecole des Mines de Nantes no. : 07/8/Auto, disponible en ligne : http ://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/Publications/2007/3721.pdf*, 2007.

[13] F. Boyer, M. Porez, A. Leroyer, and M. Visonneau. Fast dynamics of an eel-like robot, comparisons with navier-stokes simulations. *Soumis, rapport interne de l'Ecole des Mines de Nantes no. 07/9/Auto, disponible en ligne : http ://www.irccyn.ec-nantes.fr/hebergement/Publications/2007/3722.pdf*, 2007.

[14] F. Boyer and D. Primault. Finite element of slender beams in finite transformations - a geometrically exact approach. *Int.l J. of Numerical Methods in Engineering*, 59 :669–702, 2004.

[15] F. Boyer and D. Primault. The poincaré-chetayev equations and flexible multibody systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 69(6) :925–942, 2005.

[16] C. M. Breder. The locomotion fishes. *Zoologica, New York*, 4 :159–256, 1926.

[17] J. R Canavin and P. W Likins. Floating reference frames for flexible spacecraft. In *AIAA 15th. Aerospace Sciences Meeting, Los Angeles, CA*, pages 66–77, 1977.

[18] J. Carling, T. L. Williams, and G. Bowtell. Self-propelled anguilliform swimming : simultaneous solution of the two-dimensional navier-stokes equations and newton's laws of motion. *J. Exp. Bio.*, 201 :3243–3166, 1998.

[19] J-Y. Cheng and R. Blinckhan. Bending moment distribution along swimming fish. *J. theor. Bio.*, 168 :337–348, 1994.

[20] J-Y. Cheng and G. L. Chahine. Computational hydrodynamics of animal swimming : boundary element method and three-dimensional vortex wake structure. *Comparative Biochemistry and Physiology*, 131 :51–60, 2001.

[21] J.-Y. Cheng, T. J. Pedley, and J. D. Altringham. A continuous dynamic beam model for swimming fish. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, 353 :981–997, 1998.

[22] G. S. Chirikjian and J. W. Burdick. An obstacle avoidance for hyper-redundant manipulators. In *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Cincinnati*, pages 14–17, 1990.

[23] J. Coirier. *Mécanique des Milieux continus (seconde edition)*. Dunod, 2001.

[24] J. E. Colgate and K. M. Lynch. Mechanics and control of swimming : a review. *IEEE J. of oceanic Engineering*, 29 :660–673, 2004.

[25] E. Cosserat and F. Cosserat. *Théorie des corps déformables*. Hermann, 1909.

[26] G. H. Cottet and P. D. Koumoutsakos. *Vortex Methods : Theory and Practice*. Cambridge university Press, 2000.

[27] K. D'AoUT and P. Aerts. A kinematic comparison of forward and backward swimming in the eel anguilla anguilla. *J. Exp. Biol.*, 202 :1511–1521, 1999.

[28] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois. *Méthode des Eléments Finis*. Hermes Science, 2005.

[29] T. Doi, R. Hodoshima, Y. Fukuda, S. Hirose, T. Okamoto, and J. Mori. Development of quadruped walking robot titan xi for steep slopes - slope map generation and map information application. *J. of Robotics and Mechatronics*, 18 :318–324, 2006.

[30] M. El-Rafei, M. Alamir, G. Hafidi, N. Marchand, M. Porez, and F. Boyer. Motion control of three-dimensional eel-like robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation, Rome, Italia*, 2007.

[31] T. E. Faber. *Fluid Dynamics for Scientists*. Cambridge University Press, 1995.

[32] D. J. J. Farnell, T. David, and D. C. Barton. Numerical model of self-propulsion in a fluid. *J. of Royal Society Interface*, 2 :79–88, 2005.

[33] R. Featherstone. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. *Int. J. of Robotics Research*, 2 :13–30, 1983.

[34] R. Featherstone and D. Orin. Robot dynamics : equation and algorithms. In *IEEE Int. Conf. Robotics and automation, San Francisco, CA*, pages 826–834, 2000.

[35] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux élasticité et plasticité*. Ed. Hermes, 1991.

[36] A. Friedman, G. Zilmen, and T. Miloh. Dynamics of body faling in waves. In *18th International Workshop o Water Waves & Floating Bodies, Le Croisic*, 2003.

[37] G. Gallot, O. Ibrahim, and W. Khalil. Dynamics modeling and simulation of a 3-d hybrid structure eel-like robot. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA Rome*, 2007.

[38] S. F. Galls and O. K. Rediniotis. Computational simulation of the autonomous navigation of a biomimetic underwater vehicle. *AIAA Jounal*, 41 :605–611, 2003.

[39] A. R. Galper, T. Miloh, and M. Spector. Hydrodynamic loads on a slender cylinder moving unsteadily in a 3-d no-uniform flow field. *Applied ocean Research*, 18 :29–36, 1996.

[40] P. Germain and P. Muller. *Introduction à la Mécanique des Milieux Continus (seconde édition)*. Masson, 1995.

[41] K. Gieck and R. Gieck. *Formulaire technique*. Gieck, 1997.

[42] G. B. Gillis. Environmental effects on undulatory locomotion in the american eel anguilla rostata : kinematics in water and on land. *J. Exp. Bio.*, 201 :949–961, 1998.

[43] H. Glauert. *The Element of Aerofoil and Airscrew Theory (second edition)*. Cambridge University Press, 1947.

[44] J. Gray. Studies in animal locomotion. i. the movement of fish with special reference to the eel. *J. Exp. Bio.*, 10 :88–104, 1933.

[45] J. Gray. Studies in animal locomotion. vi. the propulsive powers of the dolphin. *J. Exp. Bio.*, 13 :192–199, 1936.

[46] M. W. Hannan and I. D. Walker. Kinematics and the implementation of an elephant's trunk manipulator and other continuum style robots. *J. of Robotic System*, 20 :45–63, 2003.

[47] J. L. Hess and A. M. O. Smith. Calculation of potential flow about arbitrary bodies. *Progress in Aeronautical Sciences*, 8 :1–138, 1966.

[48] S. J. Hill. *Large amplitude fish swimming*. PhD thesis, University of Leeds, 1998.

[49] S. Hirose. *Biologically inspired robots : snake-like locomotors and manipulators*. Oxford University Press, 1993.

[50] S. F. Hoerner. *Fluid Dynamics Drag*. Hoerner Fluid Dynamics, 1965.

[51] D. Hristu-Varsakelis and W. S. Levine. *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*. Birkhäuser Boston, 2005.

[52] A.J. Ijspeert, A. Crespi, and J-M. Cabelguen. Simulation and robotics studies f salamander locomotion. applying neurobiological principles to the contro of locomotion in robots. *Neuroinformatics*, 5 :171–196, 2005.

[53] C. E. Jordan. A model of rapid-start swimming at intermediate reynolds number : undulatory locomotion in the chaetognth sagitta elegans. *J. Exp. Bio.*, 163 :119–137, 1991.

[54] E. Kanso, J. E. Marsden, C. W. Rowley, and J. Melli-Huber. Locomotion of articulated bodies in a perfect planar fluid. *Journal of Nonlinear Science*, 15(4) :255–289, 2005.

[55] I. Kassim, L. Phee, W. S. Ng, F. Gong, P. Dario, and C. A. Mosse. Locomotion techniques for robotic colonoscopy. *IEEE Engineering in medecine and biology magazine*, pages 49–56, 2006.

[56] Joseph Katz and Allen Plotkin. *Low-Speed Aerodynamics*. Cambridge University Press, 2001.

[57] S. Katzen. *The Quintessential PIC Microcontroller*. Springer, 2005.

[58] D. K. Kelly and R. M. Murray. Geometric phases and robotic locomotion. *J.l of Robotic Systems*, 12 :417–431, 1995.

[59] W. Khalil and E. Dombre. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Penton-Sciences, 2002.

[60] W. Khalil, G. Gallot, and F. Boyer. Dynamic modeling and simulation of a 3-d serial eel-like robot. *Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part C : Applications and Reviews.*, (A paraître), 2006.

[61] G. Kirchhoff. Ueber die bewegung eines rotationskörpers in einer flüssigkeit. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 71 :237–262, 1869.

[62] J. Kutta. Auftriebskräfte in strömenden flüssigkeiten. *Illustrierte Aueronautische Mitteilungen*, 6 :133–135, 1902.

[63] Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Dover Publication, 1932.

[64] A. Leroyer. *Etude du couplage écoulement/mouvement pour les corps solides ou à déformation imposée par résolution des équations de Navier-Stokes. Contributon à*

la modélisation numérique de la cavitation. PhD thesis, Ecolde Centrale de Nantes et Université de Nantes, 2004.

[65] A. Leroyer and M. Visonneau. Numerical methods for ranse simulations of a self-propelled fish-like body. *Journal of Fluids and Structures*, 20 :975–991, 2005.

[66] E. V. Lewis. *Principles of Naval Architecture. Volume III. Motions in Waves and Controllability.* The society of Naval Architects & Marine Engineers, 1989.

[67] R. I. Lewis. *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineerin Systems.* Cambridge Unversity Press, 1991.

[68] A. Lichnerowicz. *Eléments de calcul tensoriel.* Ed. Jacques Gabay, 1948.

[69] J. Lighthill. Note on the swimming of slender fish. *J. Fluid Mech.*, 9 :305–307, 1960.

[70] J. Lighthill. Hydromechanics of aquatic animal propulsion - a survey. *Annual review of fluid mechanics*, 1 :413–446, 1969.

[71] J. Lighthill. Aquatic animal propulsion of high hydro-mechanical efficiency. *J. Fluid Mech.*, 44 :265–301, 1970.

[72] J. Lighthill. Large-amplitude elongated body theory of fish locomotion. *Proc. of Roy. Soc.*, 179 :125–138, 1971.

[73] J. Lighthill. *Mathematical biofluiddynamics.* S.I.A.M., 1975.

[74] Q. Liu and K. Kawachi. A numerical study of undulatory swimming. *Journal of Computational Physics*, 155 :223–247, 1999.

[75] J. Y. S. Luh, M. W. Walker, and R. C. P. Paul. On-line computational scheme for mechanical manipulator. *Trans. of ASME, J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 102 :69–76, 1980.

[76] M.A. MacIver, E. Fontaine, and J.W. Burdick. Designing future underwater vehicles : Principles and mechanisms of the weakly electric fish. *IEEE J. Oceanic Engineering*, 29 :651–659, 2004.

[77] L. E. Malvern. *Introduction to the mechanics of a continuous medium.* Prentice Hall Ed., 1969.

[78] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes. *Mathematical Foundations of Elasticity.* Dover edition, 1994.

[79] J. E. Marsden and T. S. Ratiu. *Introduction to mechanics and symmetry, scnd. Ed.* Springer, 1999.

[80] K. A. McIsaac and J. P. Ostrowski. A geometric approach to anguilliform locomotion modelling of an underwater eel robot. In *IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, Detroit*, 1999.

[81] J. B. Melli, C. W. Rowley, and D. S. Rufat. Motion planning for an articulated body in a perfect fluid. *SIAM Journal on applied dynamical systems*, 5 :650–669, 2006.

[82] A. Menciassi, S. Gorini, G. Pernorio, and P. Dario. A sma actuated artificial earthworm. In *IEEE International Conference on Robotics and Automation Proceedings ICRA 2004*, volume 4, pages 3282 – 3287, 2004.

[83] J. P. Merlet. *Parallel Robots*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[84] R. E. Meyer. *Introduction to Mathematical Fluid Dynamics*. Dover Publications, 1971.

[85] L. M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. Dover Publications, 1968.

[86] J. R. Morison and al. The force exerted by surface waves on piles. *Trans. of the AIME*, 189 :149–154, 1950.

[87] M. M. Munk. The aerodynamic forces on airship hulls. *National Advisory Commitee for Aeronautics*, 184, 1924.

[88] U. K. Müller, B. L. E. Van Den Heuvel, E. J. Stamhuis, and J. J. Videler. Fish foot prints : morphology and energetics of the wake behind a continuously swimming mullet (chelon labrosus risso). *J. of Exp. Biol.*, 200 :2893–2906, 1997.

[89] U. K. Müller, J. Smit, E. J. Stanhuis, and J. J. Videler. How the body contibutes to the wake in undulatory fish swimming : flow fields of a swimming eel (anguilla anguilla). *J. Exp. Bio.*, 204 :2751–2762, 2001.

[90] J. N. Newman. The force on a slender fish-like body. *J. Fluid Mech.*, 58 :689–702, 1973.

[91] J. P. Ostrowski and J. W. Burdick. The geometric mechanics of undulatory robotics locomotion. *Int. J. of Robotics Research, vol.17, no.7, pp.683-701, 1998*, 17 :683–701, 1998.

[92] D. Paret. *Réseaux multiplexés pour systèmes embarqués : Can, Lin, FlexRay, Safe-by-Wire...* 2005.

[93] T. J. Pedley and S. J. Hill. Large-amplitude undulatory fish swimming : fluid mechanics coupled to internal mechnanics. *J. Exp. Bio.*, 202 :3431–3438, 1999.

[94] H. Poincaré. Sur une forme nouvelle des équations de la mécanique. *Compte rendu de l'académie des sciences de Paris*, 132 :369–371, 1901.

[95] J. F. Pommaret. *Partial differential Equations and group theory*. Kluwer Academic Publishers, 1994.

[96] W. Regan, F. van Breugel, and H. Lipson. Towards evolvable hovering flight on a physical ornithopter. In *Alife X, Bloomington, USA*, 2006.

[97] E. Reissner. On a one-dimensional large displacement finite-strain theory. *Stud. Appl. Math.*, 52 :87–95, 1973.

[98] M. J. Ringuette. *Vortex formation and drag on low aspect ratio, normal flat plates.* PhD thesis, California Institute of technology, Pasadena, California, 2004.

[99] F. Ruffier and N. Franceschini. Optic flow regulation : the key to aircraft automatic guidance. *Journal of Robotics and Autonomous Systems*, 50 :177–194, 2005.

[100] T. Sarpkaya. In-line and transverse forces on cylinders in oscillatory flow at high reynolds numbers. *Journal of Ship Research*, 21 :200–216, 1977.

[101] T. Sarpkaya. Force on a circular cylinder in viscous oscillatory flow at low keulegan-carpenter numbers. *J. of fluid mechanics*, 133 :265–285, 1986.

[102] C. Schuil, M. Valente, J. Werfel, and R. Nagpal. Collective construction using lego robots. In *Robot Exhibition, National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, 2006.

[103] M. Sfakiotakis, D. M. Lane, and J. B. C. Davies. Review of fish swimming modes for aquatic locomotion. *IEEE J. Oceanic Eng.*, 24(2) :237 – 252, 1999.

[104] J. C. Simo. A finite strain beam formulation. the three-dimensional dynamic problem. part i : Formulation and optimal parametrization. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 72 :267–304, 1985.

[105] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics of flexible beams under large overall motions - the plane case : Part 1. *transactions of ASME, J. of Applied Mechanics*, 53 :849–854, 1986.

[106] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics of flexible beams under large overall motios - the plane case : Part 2. *Transaction of ASME, J. of Applied Mechanics*, 53 :855–863, 1986.

[107] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. A three-dimensional finite-strain rod model. part ii : Computational aspects. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 58 :79–116, 1986.

[108] J. C. Simo and L. Vu-Quoc. On the dynamics in space of rods undergoing large motions. a geometrically exact approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 66 :125–161, 1988.

[109] J. A. Sparenberg. Survey of the mathematical theory of fish locomotion. *J. of Engineerign Mathematics*, 44 :395–448, 2002.

[110] G. Susbielles and Ch. Bratu. *Vagues et Ouvrages Pétroliers en Mer.* Editions Technip Paris, 1981.

[111] G. I. Taylor. Analysis swimming long narrow animals. *Proceedings of the Royal Society of London, series A : Mathematical and physical sciences*, 214 :158–183, 1952.

[112] A. H. Techet. Hydrodynamics. *M.I.T. Course of Hydrodynamics for Ocean Engineers*, 2005. http ://web.mit.edu/2.016/www/handouts/2005Reading6.pdf.

[113] M. S. Triantafyllou and G. S. Triantafyllou. An efficient swimming machine. *Scientific American*, 272 :64–70, 1995.

[114] M. S. Triantafyllou, G. S. Triantafyllou, and R. Gopalkrishnan. Optimal thrust development in oscillating foils with application to fish propulsion. *J. Fluids Structures*, 7 :205–224, 1993.

[115] M. S. Triantafyllou, G. S. Triantafyllou, and D. K. P. Yue. Hydrodynamics of fishlike swimming. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32 :33–53, 2000.

[116] D.P. Tsakiris, A. Menciassi, M. Sfakiotakis, G. La Spina, and P. Dario. Undulatory locomotion of polychaete annelids : mechanics, neural control and robotic prototypes. In *Annual Computational Neuroscience Meeting, Baltimore, USA*, 2004.

[117] E. D. Tytell. the hydodynamics of eel swimming ii. effect of swiming speed. *J. Exp. Biol.*, 207 :3265–3279, 2004.

[118] E. D. Tytell and G. V. Lauder. the hydrodynamics of eel swimming i. wake structure. *J. Exp. Biol.*, 207 :1825–1841, 2004.

[119] V. van Ginneken, E. Antonissen, U. K. Müller, R. Booms, E. Eding, J. Verreth, and G. van den Thilart. Eel migration to the sargasso : remarkably high swimming efficiency and low energy cost. *The Journal of Expérimentale Biology*, 208 :1329–1335, 2005.

[120] J. J. Videler. *Fish Swimming*. Chapman and Hall, 1993. Fish and Fisheries Series 10.

[121] J. J. Videler, U. K. Müller, and E. J. Stamhuis. Aquatic vertebrate locomotion : wakes from body waves. *J. Exp. Biol.*, 202 :3423–3430, 1999.

[122] L. Vu-Quoc. On the algebra of two point tensors and their applications. *in ZAMM. Z. angew. Math. Mech.*, 76(9) :540–541, 1996.

[123] P.W. Webb and D. Weihs. *Fish Biomechanics*. Praeger Publishers, 1983.

[124] D. Weihs. Hydrodynamical analysis fish turning manoeuvres. *National Advisory Commitee for Aeronautics*, 182 :59–72, 1972.

[125] M. J. Wolfgang. *Hydrodynamics of flexible-body swimming motions*. PhD thesis, Massachsetts Institute of technology, 1999.

[126] T. Y-T. Wu. Swimming of a waving plate. *J. Fluid Mech.*, 10 :321–355, 1961.

[127] T. Y-T. Wu. Hydromechanics of swimming propulsion. part 1. swimming of a two-dimensional flexible plate at variable forward speeds in a inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 46 :337–355, 1971.

[128] H. Yamada, S. Chigisaki, M. Mori, K. Takita nd K. Ogami, and S. Hirose. Development of amphibious snake-like robot acm-r5. *the proceding of 36th international symposium on robotics ISR2005 Japan*, 2005.

[129] J. Yan, S.A. Avadhanula, J. Birch, M.H. Dickinson, M. Sitti, T. Su, and R.S. Fearing. Wing transmission for a micromechanical flying insect. *Journal of Micromechatronics*, 1 :221–37, 2002.

[130] J. Yuh. Design and control of autonomous underwater robots : a survey. *Autonomous Robots*, 8 :7–24, 2000.

[131] Q. Zhu, M. J. Wolfgang, D. K. P. Yue, and M. S. Triantafyllou. Three-dmensional flow structures and vorticity control in fish-like swimming. *J. Fluid Mech.*, 468 :1–28, 2002.

Résumé

Le travail présenté dans ce manuscrit est consacré à l'élaboration d'un modèle dynamique de la nage pour la commande du futur "Robot Anguille" du projet ROBEA-CNRS du même nom. Dans l'absolu, le calcul des interactions entre un corps déformable et le fluide sur lequel il s'appuie pour se déplacer, est un problème complexe nécessitant l'intégration des équations de Navier-Stokes couplées aux équations non-linéaires de la dynamique du corps soumis à des transformations finies. Poursuivant des objectifs de commande pour la robotique, la solution proposée dans ce travail est basée sur la fusion de deux théories : celle du "corps mince" issue de la mécanique des fluides et celle des "poutres Cosserat" de la mécanique du solide. La première théorie permet de remplacer l'écoulement 3-D autour du poisson par la stratification "tranche par tranche" d'écoulements plans, transverses à l'axe principal du corps de l'animal. Quant à la seconde, elle assimile le poisson à l'assemblage continu de sections rigides modélisant ses vertèbres ou, dans un contexte plus technologique, les plate-formes parallèles de notre robot bio-mimétique. Sur la base de cette modélisation, le travail présenté a pour but d'établir les dynamiques de la tête et des vertèbres du poisson afin d'élaborer in fine un algorithme de simulation numérique basé sur le "formalisme de Newton-Euler" de la robotique, ici étendu aux robots locomoteurs continus. Finalement, le modèle élaboré réalise une généralisation du modèle de Lighthill au cas de la nage tridimensionnelle d'un corps élancé autopropulsé. Outre ce résultat purement analytique, le simulateur qui en résulte nous a permis de mettre au point des allures jamais étudiées jusqu'alors. Qui plus est, il tourne en "temps réel", tout en maintenant un bon niveau de précision (i.e. inférieur à 10%) comparé à la référence basée sur la résolution numérique des équations de Navier-Stokes.

Mots-clés : : robot anguille biomimétique, nage 3-D anguilliforme, fluide parfait, théorie du corps mince, théorie des poutres Cosserat, algorithme de Newton-Euler

Analytical dynamic model of three-dimensional anguilliform swimming for robotic

Abstract

The presented work in this thesis is devoted to the development of a dynamic model for the anguilliform swimming suited to the real time control of the future biomimetic "Eel-like robot" of the ROBEA-CNRS project of the same name. The computation of the interactions between a deformable body and the fluid, in which it moves, is a complex problem requiring the integration of the Navier-Stokes equations and the non-linear dynamic equations of the body enduring finished transformations. Pursuing goals of control for robotic, the suggested solution is based on the fusion of two theories : the Slender Body Theory of the fluid mechanic and Cosserat Beam Theory of the solid mechanic. The first theory models the 3-D flow around fish by the stratification "slices by slices" of the 2-D flows and transverse with the principal axis of the animal's body. Basing on the second theory, the fish is modeled by a continuous assembly of rigid sections that represents the animal's vertebrae or the eel-like robot's rigid platforms. On the basis of this model, the purpose of the presented work is to establish the dynamics of the head and the vertebrae of fish in order to work out a numerical algorithm based on the "Newton-Euler formalism". Finally, the obtained simulator works in real time with a good level of precision (i.e. lower than 10%) compared with the numerical computations of the Navier-Stokes equations.

Key-words : : biomimetic eel-like robot, three-dimensional anguilliform swimming, inviscid fluid, Slender Body Theory, Cosserat Beam Theory, Newton-Euler algorithm