Phénomènes de résonance et renormalisation en espace-temps courbe

Yves Décanini

UNIVERSITE DE CORSE

PASCAL PAOLI

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

présentée par

Yves DECANINI

Phénomènes de résonance et renormalisation en espace-temps courbe

Soutenue le 24 juin 2008 devant le jury composé de :

M. Pierre CHIAPPETTA
M. Antoine FOLACCI
M. Daniel MAYSTRE
M. Jihad MOURAD
M. Serge REYNAUD

Rapporteurs : M. Antoine FOLACCI, M. Daniel MAYSTRE, M. Jihad MOURAD

Remerciements

Je voudrais, en premier lieu, exprimer ma gratitude à Antoine Folacci. Il m'a permis d'aborder des domaines de la Physique que je ne connaissais pas. Ses encouragements m'ont aidé à surmonter des périodes de doute (certainement justifié...) qui furent nombreuses tout au long de ces années de travail en commun.

Je tiens à remercier MM. Pierre Chiappetta, Daniel Maystre, Jihad Mourad et Serge Reynaud qui ont accepté, malgré leurs responsabilités administrative et de recherche, de lire ce mémoire et de participer au jury.

Enfin, ma reconnaissance va Antoine Pieri qui, avec bonne humeur, a aplani bien des difficultés pratiques.

TABLE DES MATIERES

7- Surface polaritons on left-handed cylinders: A complex angular momentum analysis.
Phys. Rev. B **72** 085458 (2005)

8- Surface polaritons on left-handed spheres.
Phys. Rev. B. **76** 195413 (2007)

9- Complex angular momentum in black hole physics and quasinormal modes.
Phys. Rev. D **67** 124017 (2003)

10- Weyl formulas for annular ray-splitting billiards.
Phys. Rev. E **68** 046204 (2003)

Partie III. Renormalisation en théorie des champs en espace-temps courbe

11- Off-diagonal coefficients of the DeWitt-Schwinger and Hadamard representations of the Feynman propagator.
Phys. Rev. D **73** 044027 (2006)

12- Hadamard renormalization of the stress-energy tensor for a quantized scalar field in a general spacetime of arbitrary dimension.
Soumis à Phys. Rev. D.
arXiv:gr-qc/0512118

13- FKWC-bases and geometrical identities for classical and quantum field theories in curved spacetime.
arXiv: 0805-1595v1

14- Irreducible forms for the metric variations of the action terms of sixth-order gravity and approximated stress-energy tensor.
Class. Quantum. Grav. **24** (2007) 4777-4799.

Ce mémoire est une présentation de nos travaux de recherches s'étendant sur les dix dernières années. Ils ne sont pas consacrés à un domaine particulier de la physique, mais se répartissent suivant trois grands thèmes : aspects algébriques de la diffusion des ondes, utilisation des méthodes semi-classiques en diffusion et renormalisation en théorie des champs en espace-temps courbe. Il n'est pas question pour nous de prétendre connaître en profondeur ces domaines. Nous avons simplement essayé d'apporter, par l'application de certaines techniques, une contribution à leur étude.

Dans la suite, nous désignons nos articles par des numéros [n] (avec n=1,...,13) ; ils sont répertoriés dans la table des matières. Pour ce qui est des autres travaux que nous citons, nous en avons inclus les références directement dans le texte. Pour ne pas surcharger l'exposé nous avons réduit ces citations au minimum. Des références plus nombreuses et récentes sont mentionnées dans nos publications.

La section 1 est consacrée aux aspects algébriques de la diffusion ([1], [2], [3]), la section 2 à l'utilisation des méthodes semi-classiques en diffusion ([4], [5], [6], [7], [8], [9], [10]) et enfin la section 3 est dévolue à la renormalisation en théorie des champs en espace-temps courbe ([11], [12], [13]).

I- Aspects algébriques de la diffusion.

La diffusion multiple par des objets de formes simples a suscité de nombreux travaux justifiés par ses applications dans divers domaines de la physique : acoustique, électromagnétisme, physique du solide, systèmes mésoscopiques, et plus récemment en chaos quantique.

Nous avons étudié ([1], [2]) la diffusion d'une onde par un nombre quelconque de disques fixés dans le plan avec des conditions aux limites sur les diffuseurs de deux types :

- ils sont impénétrables : conditions de Dirichlet et de Neumann, conditions d'impédance (diffusion de microondes par des conducteurs plus ou moins parfaits) ;

- les ondes peuvent se propager à l'intérieur des diffuseurs : conditions mixtes (diffusion par un puits ou une barrière de potentiel en mécanique quantique), conditions élastiques (en acoustique, diffusion d'une onde sonore par des cylindres élastiques immergés dans de l'eau ou dans un fluide parfait).

Le formalisme de la matrice S est à la base de ce travail. On considère des ondes partielles qui vérifient l'équation d'Helmholtz et les conditions aux limites sur les diffuseurs. Le comportement à l'infini de ces ondes partielles définit la matrice S. On sait que la fonction de forme en champ lointain et la section totale de diffusion s'écrivent à partir de celle-ci. De plus, les résonances du système apparaissent comme les pôles de cette matrice.

Le calcul exact de la matrice S est réalisé par la méthode KKR [J. Korringa, Physica **13**, 392 (1947) ; W. Kohn and N. Rostoker, Phys. Rev. **94**, 1111 (1954)]. Cette méthode a été utilisée par Berry [M. V. Berry, Ann. Phys. **131**, 163 (1981)] pour quantifier le billard de Sinai. Elle a été reprise par Gaspard et Rice pour calculer la matrice S dans le cadre de la diffusion par des disques avec des conditions aux limites de Dirichlet [P. Gaspard and S. A. Rice, J. Chem. Phys. **90**, 2255 (1989)].

Après avoir construit la théorie de la diffusion d'une onde par un nombre quelconque de disques répartis dans le plan pour les diverses conditions aux limites, nous l'avons appliquée à des systèmes de deux disques, trois disques situés aux sommets d'un triangle et de quatre disques placés aux sommets d'un carré. Ils sont invariants dans les groupes de symétrie C_{2v}, C_{3v} et C_{4v} respectivement. L'utilisation des propriétés de symétrie des diffuseurs permet de simplifier considérablement le formalisme. Les ondes partielles sont décomposables sur les représentations irréductibles de ces groupes. Ceci permet une décomposition de la matrice S et donc un classement de ses pôles suivant ces mêmes représentations.

Les résonances sont distribuées dans le plan du module du vecteur d'onde le long de certaines courbes. On s'aperçoit, pour chaque type de conditions aux limites, qu'on ne retrouve pas les résonances d'un seul diffuseur. Au contraire, on peut constater dans certains cas une levée de dégénérescence de celles-ci qui se divisent suivant les représentations du groupe considéré. Nous n'en dirons pas plus sur les résonances ici, le paragraphe suivant leur est consacré.

La publication [3] traite aussi de la diffusion par deux cylindres selon la symétrie C_{2v}. Cependant, l'approche est différente de celle des autres publications. En effet, nous n'avons pas utilisé le formalisme de la matrice S, mais avons considéré [J. W. Young and J. J. Bertrand, Journal of the Acoustical Society of America **58**, 1190 (1975)] que le système est excité par une onde plane incidente. Cette dernière et les ondes diffusées par les disques sont décomposées sur les représentations irréductibles de C_{2v}. On peut en déduire les résonances du système pour diverses conditions aux limites. Cette technique pourrait sans difficultés être étendue aux cas traités précédemment, mais le formalisme de la matrice S étant plus puissant, c'est lui que nous avons adopté.

II- Utilisation des méthodes semi-classiques.

Les méthodes semi-classiques fournissent une compréhension nouvelle et précise des relations entre les trajectoires classiques et les niveaux d'énergie ou les résonances de diffusion en mécanique quantique. Elles ont été abondamment utilisées dans des domaines très variés de la physique : physique nucléaire, électromagnétisme, optique, spectroscopie, physique mésoscopique,... En acoustique, elles portent le nom de méthodes hautes fréquences ou basses longueurs d'ondes.

Parmi celles-ci, nous avons plus particulièrement utilisé celle du moment angulaire complexe (CAM). On part de l'amplitude de diffusion du système considéré. On sait que celle-ci s'exprime en fonction de la matrice S comme une somme discrète sur l'indice du moment angulaire. La transformation de Watson [G. N. Watson, Proc. R. Soc. London, Ser. A **100**, 83 (1918)] permet d'écrire cette somme discrète comme une somme continue sur un contour dans le plan du moment angulaire complexe. En déformant ce contour et en utilisant les développements asymptotiques des fonctions intervenant dans l'expression de la matrice S, on fait apparaître des trajets, des orbites tant géométriques que diffractifs [H. M. Nussenzveig, *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992); H. M. Nussenzveig, Ann. Phys. (N. Y.) **34**, 23 (1965)].

Dans les travaux exposés dans ce paragraphe, on s'est intéressé aux résonances d'un seul diffuseur. On rappelle que ce sont les pôles de la matrice S dans le plan complexe du module du vecteur d'onde (ou de la fréquence). Pour les déterminer, on résoud numériquement pour l fixé - l étant l'indice du moment angulaire complexe - l'équation :

$$D_l(k) = 0$$

où $D_l(k)$ est le dénominateur de la matrice. On obtient ainsi, pour chacune des valeurs de l, une famille de vecteurs d'ondes complexes qu'on indice par

p : k_{lp}. Ils sont de la forme :

$$k_{lp} = k_{lp}^{(0)} - i\frac{\Gamma_{lp}}{2}.$$

Dans le voisinage de la résonance k_{lp}, la matrice S présente la forme de Breit-Wigner :

$$\frac{\Gamma_{lp}/2}{k - k_{lp}^{(0)} + i\frac{\Gamma_{lp}}{2}}.$$

Ainsi quand un pôle de la matrice S est suffisamment proche de l'axe réel du plan complexe de k, l'amplitude de diffusion est modifiée et donc la section totale de diffusion.

On considère maintenant l'expression de l'amplitude de diffusion que l'on obtient en utilisant la transformation de Watson. Le moment angulaire ordinaire y est remplacé par le moment angulaire complexe noté λ. En déformant le contour d'intégration, on peut faire intervenir les singularités de la matrice S dans le plan de λ. Ces singularités sont les pôles de celle-ci, c'est-à-dire les valeurs de λ telles que :

$$D_\lambda(k) = 0 \qquad k > 0.$$

Ce sont les pôles de Regge [R. G. Newton, *Scattering Theory of Wawes and Particles*, 2nd ed. (Springer-Verlag, New York, 1982)]. Le théorème des résidus permet de constater que les trajectoires correspondantes sont des ondes de surface qui se propagent à la surface du diffuseur.

Quand k varie, les pôles de Regge décrivent dans le plan du moment angulaire complexe des trajectoires appelées trajectoires de Regge. On remarque alors que quand $Re\,\lambda(k)$ coïncide avec un entier, la valeur de k correspondante est associée à une résonance.

On peut écrire, pour définir les résonances du diffuseur, une relation de quantification du type Bohr-Sommerfeld :

$$\mathrm{Re}\,\lambda(k_{lp}^{(0)}) = l.$$

Il est également possible d'obtenir la partie imaginaire des résonances par :

$$\frac{\Gamma_{lp}}{2} = \frac{\mathrm{Im}\,\lambda(k)}{\frac{dRe\lambda(k)}{dk}}$$

pris en $k = k_{lp}^{(0)}$. Cette expression est approchée. Dans [7], on en donne une plus générale dont celle-ci n'est qu'un cas particulier. Ces deux formules semi-classiques permettent de retrouver numériquement les positions des résonances.

Quand les développements asymptotiques des fonctions spéciales entrant dans l'expression de $D_\lambda(k)$ autorisent une résolution approchée de l'équation $D_\lambda(k) = 0$ on obtient une expression analytique pour les parties réelles et imaginaires des pôles de Regge. Ce n'est pas toujours le cas, et on est alors amené (voir publication [9]) à utiliser des techniques numériques.

Le premier exemple d'application de la méthode du moment angulaire complexe sur lequel il nous a paru intéressant de travailler appartient à la physique des vortex [4]. En effet, des progrès récents dans le contrôle du courant en électronique ont été réalisés grâce à des circuits nanométriques tels que les "dots" ou les "quantum vires" [T. Ando, Y. Arakawa, K. Furuya, S. Komiyama, and H. Nakashima, *Mesoscopic Physics and Electronics* (Springer-Verlag, Berlin, 1998]. Ils présentent souvent l'originalité d'utiliser l'effet Aharonov-Bohm [Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959)].

On étudie donc la diffusion d'un électron sans spin par un vortex magnétique. Il est constitué par deux discontinuités de champ d'induction : une à l'origine des coordonnées (celle que l'on retrouve dans le dispositif Aharonov-Bohm originel) et l'autre répartie sur un cercle centré sur cette dernière. Elles sont de signes opposés. De plus une barrière de potentiel de hauteur infinie empêche l'électron d'accéder à la discontinuité centrale [J. Q. Liang, Phys. Rev. D **32**, 1014 (1985)].

Les pôles de la matrice S et la section totale de diffusion se calculent aisément. On constate sur cette dernière de très nombreuses variations rapides que l'on peut mettre en correspondance avec les résonances. Les expressions analytiques des pôles de Regge permettent de remarquer qu'elles sont engendrées par des ondes de surface de type galerie-à-écho analogues à celles de l'acoustique. Grâce aux trajectoires de Regge et aux formules présentées plus haut, on retrouve numériquement les positions des résonances avec une bonne précision. Par application de la relation $\mathrm{Re}\,\lambda(k_{lp}^{(0)}) = l$, on peut associer à chaque variation rapide de la section totale de diffusion le pôle de Regge et le nombre quantique l de moment angulaire qui lui correspondent.

Il faut noter que l'on a ainsi créé un modèle d'atome artificiel : chaque résonance peut être interprétée comme un état lié du système électron-vortex. Sa durée de vie sera d'autant plus grande que la partie imaginaire de la résonance sera plus petite.

Le domaine des cristaux photoniques et en particulier ceux contenant des composants métalliques ou semi-conducteurs nous a paru être un bon champ d'application de la méthode du moment angulaire complexe. La dépendance en fréquence (on l'utilise ici de préférence au vecteur d'onde) de la permittivité électrique et la présence d'une bande dans laquelle cette dernière est négative fait apparaître de nouveaux phénomènes qui sont liés à l'existence de polaritons de surface qui se propagent à l'interface entre le diélectrique et le métal ou le semi-conducteur [A. R. McGurn and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **48**, 17 576 (1993)]. Dans le cas d'interface plane, ces polaritons de surface sont bien compris théoriquement : ce sont des ondes de surface dont l'amplitude décroît exponentiellement dans une direction perpendiculaire à l'interface dans les deux milieux. Dans le cas d'interface courbe, cylindrique ou sphérique par exemple, les phénomènes sont un peu plus compliqués et nous paraissent justifier l'emploi de méthodes semi-classiques.

Nous avons donc considéré la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre circulaire [5] et une sphère [6] métalliques ou semi-conducteurs placés dans le vide. La dépendance en fréquence est supposée être de type Drude ou du type de celle du cristal ionique. Dans les deux cas, on constate une correspondance entre les variations rapides de la section totale de diffusion et les résonances du système qui sont proches de l'axe réel. L'analyse des pôles de Regge nous indique qu'un seul d'entre eux - se distinguant des autres par une partie imaginaire plus petite - permet de retrouver les positions de ces résonances. On obtient alors une interprétation claire des polaritons de surface : ils apparaissent comme des ondes de surface, associées à ces résonances, qui bouclent en phase. Ce sont, en quelque sorte, des polaritons de surface résonants. La différence essentielle entre le disque et la sphère provient de corrections de courbure qui interviennent, pour celle-ci, dans l'expression asymptotique du module du vecteur d'onde. La publication [6] a été soumise à la Physical Review B. Les référés nous ont demandés de tenir compte de la dissipation de l'énergie des polaritons lors de leur propagation sur la surface de la sphère en introduisant une partie imaginaire dans la permittivité électrique. Ceci induit, bien sûr, des difficultés supplémentaires numériques et théoriques (pour le calcul des expressions asymptotiques), mais il sera intéressant de voir l'effet de ce terme de dissipation sur les résonances.

Les résultats obtenus sur avec ces diffuseurs nous ont incités à nous intéresser à des structures de mêmes géométries, mais constituées de matériaux gauchers. De tels matériaux présentent dans certains intervalles de fréquences une permittivité électrique et une perméabilité magnétique simultanément négatives et donc un indice de réfraction négatif. Ils sont de ce fait le siège de phénomènes physiques inhabituels : effet Doppler inversé, lois de Descartes inversées,... Ils ont été imaginés théoriquement par Veselago [V. G. Veselago, Sov. Phys. Usp. **10**,509 (1968)]. Il y a quelques années, Smith et ses collaborateurs [D. R. Smith, W. J. Padilla, D. C. Vier, S. C. Nemat-Nasser, and S. Schultz, Phys. Rev. Lett. **84**, 4184 (2000)] ont construit un matériau gaucher artificiel. Les applications potentielles étant nombreuses et importantes (lentilles parfaites), des progrès expérimentaux significatifs ont été effectués. On a pu ainsi observer une réfraction négative dans le domaine infrarouge dans des cristaux photoniques [A. Berrier, M. Mulot, M. Swillo, M. Qiu, L. Thylen, A. Talneau, and S. Anand, Phys. Rev. Lett. **93**, 073902 (2004)] et, on l'espère, dans le visible prochainement.

On a étudié la diffusion d'une onde électromagnétique par un cylindre [7] et une sphère [8] constitués d'un matériau gaucher placés dans le vide. Ce problème a déjà été abordé [V. Kuzmiak and A. A. Maradudin, Phys. Rev. B **66**, 045116 (2002)], mais nous avons voulu le traiter - dans le prolongement du précédent article - par la méthode du moment angulaire complexe en portant notre attention sur les polaritons de surface. On s'aperçoit en construisant la section totale de diffusion et en calculant les résonances que ces systèmes sont plus riches que les précédents. Les variations rapides de la section de diffusion sont plus nombreuses, surtout dans le domaine de fréquences où l'indice de réfraction est négatif.

Pour les pôles de Regge, la différence est encore plus marquée : il en existe de deux familles. L'une est voisine de celle que l'on trouve sur les cylindres ou les sphères constitués de métaux ou de semi-conducteurs. Elle présente, elle aussi, un pôle à faible partie imaginaire qui génère des résonances associées à des polaritons de surface qui sont l'équivalent de ceux qui existent sur un interface plat. L'autre est propre à ces cylindres ou sphères “gauchers”. Elle est à l'origine des résonances -d'une durée de vie remarquablement grande- qui correspondent à des polaritons de surface de type galerie-à-écho. Ce sont des ondes de surface qui se propagent en grande partie à l'intérieur du diffuseur. Le tracé des trajectoires de Regge permet de révéler une propriété curieuse de ces matériaux : dans l'intervalle de fréquences où l'indice de réfraction est négatif, la vitesse de phase des ondes rampantes est opposée à la vitesse de groupe.

Enfin, il nous faut insister sur le fait que c'est la première fois que la méthode du moment angulaire complexe est appliquée à des milieux dispersifs. Elle semble pleine de promesses.

Nous abordons maintenant un domaine où la méthode du moment angulaire complexe a été peu employée, celui de la physique de la gravitation et des trous noirs. Chandrasekar et Ferrari [S. Chandrasekar and V. Ferrari, Proc. R. Soc. London **A437**, 133 (1992)] l'ont utilisée pour la première fois dans l'étude des oscillations non radiales des étoiles relativistes. D'autre part, Andersson et Thylwe [N. Andersson and K.-E. Thylwe, Class. Quantum Grav. **11**, 2991 (1994)] l'ont appliquée dans le cadre de la diffusion des ondes par le trou noir de Schwarzschild. Andersson a montré, en particulier, l'existence d'ondes de surface se propageant autour d'un trou noir de masse M au voisinage de l'orbite instable du photon à $r = 3M$. Ce sont, à notre connaissance, les seuls travaux faisant intervenir la méthode du moment angulaire complexe. L'approche privilégiée pour la description de la diffusion par un trou noir a été celle des modes quasi-normaux.

Nous avons pu montrer [9], à partir du formalisme de la matrice S et du moment angulaire complexe, que les modes quasi-normaux du trou noir de Schwarzschild étaient des résonances de type Breit-Wigner générées par les ondes de surface d'Andersson. De plus, grâce aux trajectoires de Regge, il a été possible de retrouver numériquement les fréquences de ces modes. Nous avons ainsi prouvé une hypothèse émise par Goebel [C. J. Goebel, Astrophys. J. **172**, L95 (1972)].

Dans tout ce qui précède, les systèmes étudiés sont ouverts : les résonances sont des valeurs complexes du vecteur d'onde ou de la fréquence. Nous envisageons ici des systèmes fermés, l'onde ne peut quitter un certain domaine limité de l'espace ; on les nomme billards. Les résonances sont, dans ce cas, des valeurs réelles du vecteur d'onde ou de la fréquence. Une notion qui présente alors un intérêt physique certain est la fonction de comptage [H. T. Baltes and E. R. Hilf, *Spectra of Finite Systems* (Bibliogrphisches Institut Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1976 ; M. Brack and K. Bhaduri, *Semiclassical Physics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1997)]. Weyl a donné les premiers termes d'un développement asymptotique de celle-ci [H. Weyl, Gottingen Nachrichten 110 (1911)]. De nombreux autres travaux ont suivi, comme ceux de Kac [M. Kac, Am. Math. Monthly **73**, 1 (1966)], qui a formulé le problème de façon imagée : "peut-on entendre la forme d'un tambour ?". En dimension deux et trois et pour des conditions aux limites sur la frontière du domaine de type Dirichlet ou Neuman, on possède des formules générales. Ce n'est pas le cas pour les billards dans lesquels l'indice de réfraction ou la densité du milieu ne sont pas identiques partout [L. Couchman, E. Ott, and T. M. Antonsen, Phys. Rev. A **46**, 6913 (1992) ; R. Blumel, Y. Dabaghian, and R. V. Jensen, Phys. Rev. E **65**, 046222 (2002)]. Il peut donc être instructif de traiter un problème canonique tel que le billard annulaire à deux dimensions. Il est défini par deux cercles concentriques. L'indice de réfraction ou la densité du milieu à l'intérieur du cercle de plus petit rayon et entre les deux cercles sont différents. Les conditions aux limites entre les deux milieux reproduisent celles de l'électromagnétisme ou de l'acoustique. On suppose que le champ scalaire étudié s'annule sur le cercle extérieur.

En appliquant les méthodes semi-classiques de Stewartson et Waechter [K. Stewartson and R. T. Waechter, Proc. Cambridge Philos. Soc. **69**, 581 (1971)] systématisées par Berry et Howls [M. Berry and C. J. Howls, Proc. R. Soc. London, Ser. A **447**, 527 (1994)] et en les étendant, nous avons pu obtenir [10] les premiers termes de la série de Weyl pour ces diverses conditions aux limites. Le calcul numérique des résonances et le tracé de la fonction de comptage nous a permis de vérifier la validité de nos résultats. De plus, nous avons pu déduire de ce travail des règles pour calculer la série de Weyl dans des billards de ce même type, mais de formes diverses.

III- Renormalisation en théorie des champs en espace-temps courbe.

Les difficultés rencontrées en gravitation quantique ont conduit les physiciens à construire une théorie dite semi-classique appelée aussi "théorie quantique des champs en espace-temps courbe". En particulier, les effets en retour d'un champ quantique sur la géométrie de l'espace-temps y sont traités en considérant ce dernier de façon classique, tandis que les champs qui s'y propagent sont supposés quantifiés. Ainsi, on remplace dans le second membre des équations d'Einstein le tenseur d'impulsion-énergie $T_{\mu\nu}$ par sa valeur moyenne dans un état $|\psi\rangle$, $\langle\psi|T_{\mu\nu}|\psi\rangle$. Il est bien connu qu'une telle quantité est divergente. Cette divergence provient du comportement à courte distance et est, en général, indépendante de l'état $|\psi\rangle$. De nombreuses méthodes de régularisation ont été développées [N. D. Birrell and P. C. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982)]. La plupart d'entre elles ne sont utilisables que dans un cadre très restreint.

Celle que nous avons suivie est une extension de la méthode dite du "point-splitting" [B. S. DeWitt, Phys. Rep. **19C**, 297 (1975) ; S. M. Christensen, Phys. Rev. D **14**, 2490 (1976) ; S. M. Christensen, Phys. Rev. D **17**, 945 (1978)] développée en relation avec la représentation Hadamard de la fonction de Green [R. M. Wald, Commun. Math. Phys. **54**, 1 (1977) ; R. M. Wald, Phys. Rev. D **17**, 1477 (1978) ; R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics* (The University of Chicago Press, Chicago, 1994) ; S. A. Fulling, *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989)]. On se place dans un espace-temps de dimension $d > 2$ et on considère deux représentations du propagateur de Feynman. Celle de DeWitt-Schwinger [B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon and Breach, New York, 1965)], qui fait intervenir une suite de coefficients $A_n(x, x')$, $n \in N$, qui sont des fonctions de deux points purement géométriques solutions d'une équation de récurrence et celle d'Hadamard qui s'écrit :

$$G^F(x, x') = \frac{i\alpha_d}{2}\Big[\frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')^{d/2-1}} + V(x, x') \ln \sigma(x, x') + W(x, x')\Big]$$

en dimension paire et

$$G^F(x, x') = \frac{i\alpha_d}{2}\Big[\frac{U(x, x')}{\sigma(x, x')^{d/2-1}} + W(x, x')\Big]$$

si d est impaire.

Dans ces expressions, σ est la moitié du carré de la distance géodésique entre les points x et x', $\alpha_d = \Gamma(d/2-1)/(2\pi)^{d/2}$, $U(x, x')$, $V(x, x')$ et $W(x, x')$ sont des fonctions symétriques de deux points, régulières quand $x \to x'$, possédant les développements :

$$U(x, x') = \sum_{n=0}^{d/2-2} U_n(x, x')\ \sigma(x, x')^n$$

$$V(x, x') = \sum_{n=0}^{+\infty} V_n(x, x')\ \sigma(x, x')^n$$

$$W(x, x') = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x, x')\ \sigma(x, x')^n$$

pour d pair et

$$U(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x,x')\ \sigma(x,x')^n$$
$$W(x,x') = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n(x,x')\ \sigma(x,x')^n$$
pour d impair.

Les séries $U_n(x,x')$, $V_n(x,x')$ et $W_n(x,x')$ vérifient certaines relations de récurrence. Les deux premières sont déterminées de façon unique et sont purement géométriques. Elles peuvent être construites à partir des coefficients $A_n(x,x')$ de DeWitt-Schwinger. Par contre, la troisième n'est déterminée de façon unique que si on fixe son premier terme W_0. Cet arbitraire est mis à profit pour y inclure la dépendance vis-à-vis de l'état quantique $|\psi\rangle$.

On ne possède pas les expressions des $A_n(x,x')$, cependant, on peut calculer leurs développements en séries de Taylor covariantes :

$$A_n(x,x') = a_n(x) - a_{n\mu_1}(x)\ \sigma^{;\mu_1} + \frac{1}{2!}\ a_{n\mu_1\mu_2}(x)\ \sigma^{;\mu_1}\sigma^{;\mu_2} + \cdots .$$

La connaissance de ces développements est nécessaire pour la renormalisation du tenseur d'impulsion-énergie. Christensen les a obtenus pour $A_0(x,x')$, $A_1(x,x')$ et $A_2(x,x')$ aux ordres σ^2, σ^1 et σ^0 respectivement pour des champs scalaires. Ceci autorise une renormalisation en dimension quatre.

Il importe d'aller plus loin dans ces calculs. Ceci est nécessaire en dimension quatre (par exemple en gravité stochastique semi-classique) et pour pouvoir renormaliser dans des espaces de dimensions supérieures.

Nous avons, à partir des travaux d'Avramidi [L. G. Avramidi, *Heat Kernel and Quantum Gravity* (Springer Verlag, Berlin, 2000)], donné [11] les développements en séries de Taylor covariantes de $A_0(x,x')$, $A_1(x,x')$, $A_2(x,x')$ et $A_3(x,x')$ aux ordres σ^3, σ^2, σ^1 et σ^0 respectivement, pour un champ scalaire massif défini sur un espace-temps arbitraire. Il nous a alors été possible de calculer [12] la partie singulière du propagateur de Feynman pour des espaces-temps de dimensions trois, quatre, cinq et six et de fournir une expression générale du tenseur d'impulsion-énergie renormalisé.

Comme nous l'avons déjà indiqué, les formes Hadamard du propagateur de Feynman ne sont valables que pour des dimensions supérieures à deux. Pour $d = 2$, grâce à la représentation de DeWitt-Schwinger du propagateur, on a montré que :

$$G^F(x, x') = \frac{i}{4\pi}\Big[V(x, x') \ln \sigma(x, x') + W(x, x')\Big]$$

où $V(x, x')$ et $W(x, x')$ sont identiques au cas pair.

Les résultats des travaux précédents et les simplifications qui interviennent dans ce cas permettent de déterminer facilement le tenseur d'impulsion-énergie renormalisé.

Les calculs exposés dans les publications de [11] à [12] sont très longs. Ils font intervenir des polynômes constitués de produits de tenseurs de Riemann, des contractions de ce tenseur, et de leurs dérivées covariantes. De plus, la comparaison des résultats des différents chercheurs est rendue difficile par les diverses formes, toutes équivalentes, qu'ils peuvent prendre : les nombreuses symétries du tenseur de Riemann -qui ne sont pas toujours exploitées- favorisent cet état de fait. Pour remédier à cela Fulling, King, Wybourne et Cummings [Fulling S A, King R C, Wybourne B G and Cummings C J 1992 Normal forms for tensor polynomials: I. The Riemann tensor *Class. Quantum Grav.* **9** 1151] ont proposé d'écrire ces polynômes sur des bases construites à partir de la théorie des groupes. En appliquant cette méthode [13] nous avons obtenu de façon relativement simple des expressions irréductibles pour des résultats connus, mais qui étaient jusque là présentés de manière moins compacte (par exemple, en dimension quatre, le tenseur d'impulsion-énergie pour un champ scalaire dans l'approximation des grandes masses). L'utilisation systématique de ces bases permettrait de développer plus sereinement ces longs calculs.